Рассмотрим опреацию поворота, то есть геометрическое произведение бивектора $\vec{a}\vec{b}$, вектора $\vec{v}$ и бивектора $\vec{b}\vec{a}$:

$\vec{u} = \vec{b}\vec{a}\,\vec{v}\,\vec{a}\vec{b}$, где $\vec{u}$ – вектор, повёрнутый с помощью ротора (бивектора) $\vec{a}\vec{b}$

Сначала распишем правую часть:

$$
\begin{aligned}
&q = \vec{v}\,\vec{a}\vec{b} = \\
&(v_x\vec{x} + v_y\vec{y} + v_z\vec{z})(\alpha + \beta_{01}\vec{x}\vec{y} + \beta_{02}\vec{x}\vec{z} + \beta_{12}\vec{y}\vec{z}) = \\
&\\
&\alpha v_x\vec{x} + \alpha v_y\vec{y} + \alpha v_z\vec{z} + \\
&\beta_{01}v_x\vec{x}\vec{x}\vec{y} + \beta_{01}v_y\vec{y}\vec{x}\vec{y} + \beta_{01}v_z\vec{z}\vec{x}\vec{y} + \\
&\beta_{02}v_x\vec{x}\vec{x}\vec{z} + \beta_{02}v_y\vec{y}\vec{x}\vec{z} + \beta_{02}v_z\vec{z}\vec{x}\vec{z} + \\
&\beta_{12}v_x\vec{x}\vec{y}\vec{z} + \beta_{12}v_y\vec{y}\vec{y}\vec{z} + \beta_{12}v_z\vec{z}\vec{y}\vec{z} = \\
&\\
&\alpha v_x\vec{x} + \alpha v_y\vec{y} + \alpha v_z\vec{z} + \\
&\beta_{01}v_x\vec{y} - \beta_{01}v_y\vec{x} + \beta_{01}v_z\vec{x}\vec{y}\vec{z} + \\
&\beta_{02}v_x\vec{z} - \beta_{02}v_y\vec{x}\vec{y}\vec{z} - \beta_{02}v_z\vec{x} + \\
&\beta_{12}v_x\vec{x}\vec{y}\vec{z} + \beta_{12}v_y\vec{z} - \beta_{12}v_z\vec{y} = \\
&\\
&(\alpha v_x - \beta_{01}v_y - \beta_{02}v_z)\vec{x} + \\
&(\alpha v_y + \beta_{01}v_x - \beta_{12}v_z)\vec{y} + \\
&(\alpha v_z + \beta_{02}v_x + \beta_{12}v_y)\vec{z} + \\
&(\beta_{01}v_z - \beta_{02}v_y + \beta_{12}v_x)\vec{x}\vec{y}\vec{z} = \\
&\\
&q_x\vec{x} + q_y\vec{y} + q_z\vec{z} + q_{xyz}\vec{x}\vec{y}\vec{z} = q_x\vec{x} + q_y\vec{y} + q_z\vec{z} + q_{012}\vec{x}\vec{y}\vec{z}
\end{aligned}
$$

Теперь рассмотрим левую часть. По определению внешнего произведения бивекторная составляющая $\vec{b}\vec{a}$ равна бивекторной составляющей $\vec{a}\vec{b}$, взятой с обратным знаком, а по определению внутреннего произведения их скалярные составляющие равны, тогда:

$$\vec{u} = \vec{b}\vec{a}\,q =$$
$$(\alpha - \beta_{01}\vec{x}\vec{y} - \beta_{02}\vec{x}\vec{z} - \beta_{12}\vec{y}\vec{z})(q_x\vec{x} + q_y\vec{y} + q_z\vec{z} + q_{012}\vec{x}\vec{y}\vec{z}) =$$

$$\alpha q_x\vec{x} + \alpha q_y\vec{y} + \alpha q_z\vec{z} + \alpha q_{012}\vec{x}\vec{y}\vec{z}$$
$$-\beta_{01}q_x\vec{x}\vec{y}\vec{x} - \beta_{01}q_y\vec{x}\vec{y}\vec{y} - \beta_{01}q_z\vec{x}\vec{y}\vec{z} - \beta_{01}q_{012}\vec{x}\vec{y}\vec{x}\vec{y}\vec{z}$$
$$-\beta_{02}q_x\vec{x}\vec{z}\vec{x} - \beta_{02}q_y\vec{x}\vec{z}\vec{y} - \beta_{02}q_z\vec{x}\vec{z}\vec{z} - \beta_{02}q_{012}\vec{x}\vec{z}\vec{x}\vec{y}\vec{z}$$
$$-\beta_{12}q_x\vec{y}\vec{z}\vec{x} - \beta_{12}q_y\vec{y}\vec{z}\vec{y} - \beta_{12}q_z\vec{y}\vec{z}\vec{z} - \beta_{12}q_{012}\vec{y}\vec{z}\vec{x}\vec{y}\vec{z} =$$

$$\alpha q_x\vec{x} + \alpha q_y\vec{y} + \alpha q_z\vec{z} + \alpha q_{012}\vec{x}\vec{y}\vec{z}+$$
$$\beta_{01}q_x\vec{y} - \beta_{01}q_y\vec{x} - \beta_{01}q_z\vec{x}\vec{y}\vec{z} + \beta_{01}q_{012}\vec{z}+$$
$$\beta_{02}q_x\vec{z} + \beta_{02}q_y\vec{x}\vec{y}\vec{z} - \beta_{02}q_z\vec{x} - \beta_{02}q_{012}\vec{y}$$
$$-\beta_{12}q_x\vec{x}\vec{y}\vec{z} + \beta_{12}q_y\vec{z} - \beta_{12}q_z\vec{y} + \beta_{12}q_{012}\vec{x} =$$

$$(\alpha q_x - \beta_{01}q_y - \beta_{02}q_z + \beta_{12}q_{012})\vec{x}+$$
$$(\alpha q_y + \beta_{01}q_x - \beta_{02}q_{012} - \beta_{12}q_z)\vec{y}+$$
$$(\alpha q_z + \beta_{01}q_{012} + \beta_{02}q_x + \beta_{12}q_y)\vec{z}+$$
$$(\alpha q_{012} - \beta_{01}q_z + \beta_{02}q_y - \beta_{12}q_x)\vec{x}\vec{y}\vec{z}$$

Заметим, что бивекторная часть отсутствует.

Подставим значения из $\mathbf{q}$ в последий полученный тривектор:

$$(\alpha q_{012} - \beta_{01}q_z + \beta_{02}q_y - \beta_{12}q_x)\vec{x}\vec{y}\vec{z} =$$

$$(\alpha(\beta_{01}v_z - \beta_{02}v_y + \beta_{12}v_x)$$
$$-\beta_{01}(\alpha v_z + \beta_{02}v_x + \beta_{12}v_y)+$$
$$\beta_{02}(\alpha v_y + \beta_{01}v_x - \beta_{12}v_z)$$
$$-\beta_{12}(\alpha v_x - \beta_{01}v_y - \beta_{02}v_z))\vec{x}\vec{y}\vec{z} =$$

$$\alpha\beta_{01}v_z - \alpha\beta_{02}v_y + \alpha\beta_{12}v_x$$
$$-\beta_{01}\alpha v_z - \beta_{01}\beta_{02}v_x - \beta_{01}\beta_{12}v_y+$$
$$\beta_{02}\alpha v_y + \beta_{02}\beta_{01}v_x - \beta_{02}\beta_{12}v_z$$
$$-\beta_{12}\alpha v_x + \beta_{12}\beta_{01}v_y + \beta_{12}\beta_{02}v_z))\vec{x}\vec{y}\vec{z} =$$

$$(\alpha\beta_{01}v_z - \beta_{01}\alpha v_z) + (-\alpha\beta_{02}v_y + \beta_{02}\alpha v_y)+$$

$$(\alpha\beta_{12}v_x - \beta_{12}\alpha v_x) + (-\beta_{01}\beta_{02}v_x + \beta_{02}\beta_{01}v_x)$$
$$(-\beta_{01}\beta_{12}v_y + \beta_{12}\beta_{01}v_y) + (-\beta_{02}\beta_{12}v_z + \beta_{12}\beta_{02}v_z))\vec{x}\vec{y}\vec{z} = 0$$

Следовательно тривекторная часть опреации $\vec{b}\vec{a}\,\vec{v}\,\vec{a}\vec{b}$ равно нулю.

Таким образом, получим окончательное значение вектора, к которому была применена операция поворота:

$$\vec{u} = \vec{b}\vec{a}\,\vec{v}\,\vec{a}\vec{b} =$$
$$(\alpha q_x - \beta_{01}q_y - \beta_{02}q_z + \beta_{12}q_{012})\vec{x}+$$
$$(\alpha q_y + \beta_{01}q_x - \beta_{02}q_{012} - \beta_{12}q_z)\vec{y}+$$
$$(\alpha q_z + \beta_{01}q_{012} + \beta_{02}q_x + \beta_{12}q_y)\vec{z}$$