

به نام خدا



پروژه پایانی درس جبر خطی

نفیسه مقنی زاده

دانشجوی کارشناسی مهندسی برق دانشگاه تهران

nmoghanizadeh@gmail.com

فردین عباسی

دانشجوی کارشناسی مهندسی برق دانشگاه تهران

fardinabbasi1381@gmail.com

دکتر محمدسعید سرافراز

عضو هیئت علمی دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
دانشگاه تهران

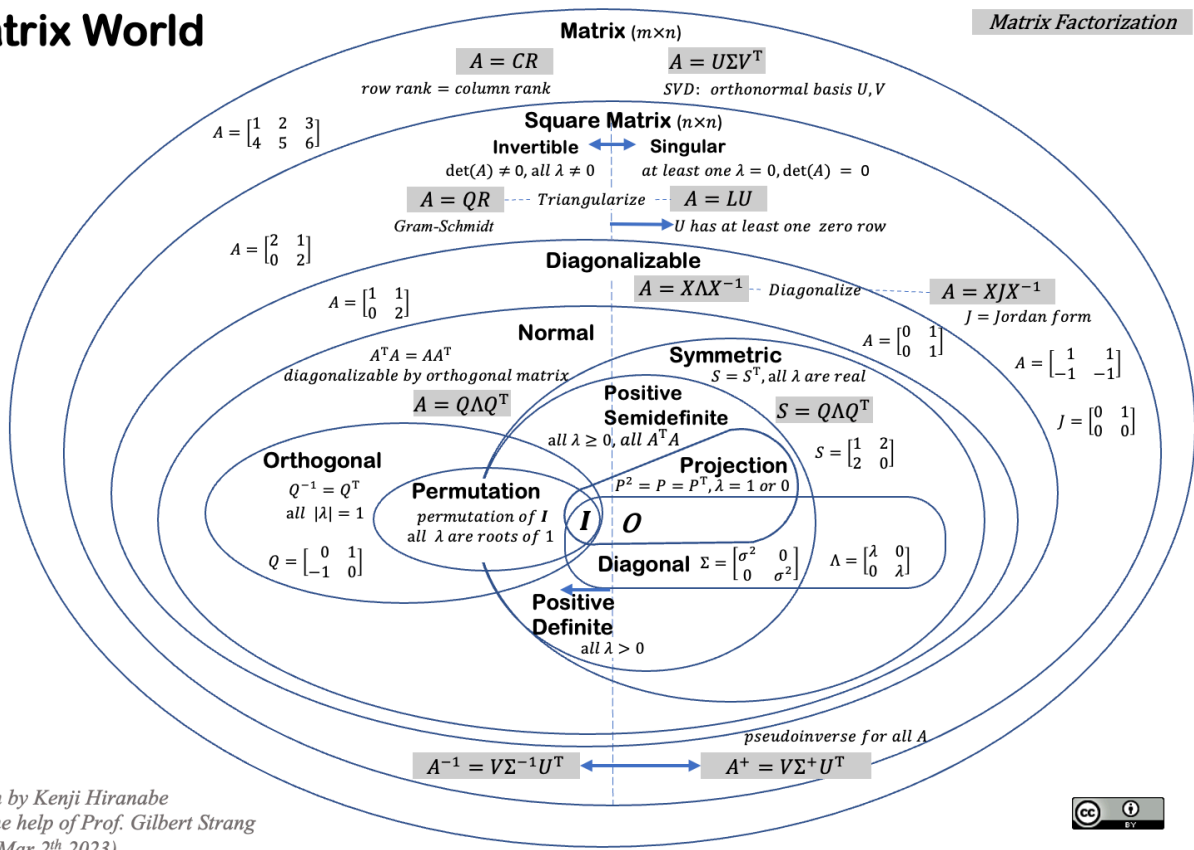
ms.sarafraz@ut.ac.ir

دانشکده مهندسی برق و کامپیوتر
دانشکدگان فنی
دانشگاه تهران

پاییز ۱۴۰۲

فهرست مطالب

۳	شرح پروژه
۴	جداسازی پس زمینه با Robust PCA
۴	مقدمه
۶	سوالات مفهومی
۷	پیاده سازی
۸	نشانه گذاری دیجیتال
۸	مقدمه
۹	سوالات مفهومی
۹	پیاده سازی
۱۱	منابع
۱۳	نکات کلی



Drawn by Kenji Hiranabe
with the help of Prof. Gilbert Strang
(v1.5, Mar. 2th, 2023)



فصل ۱

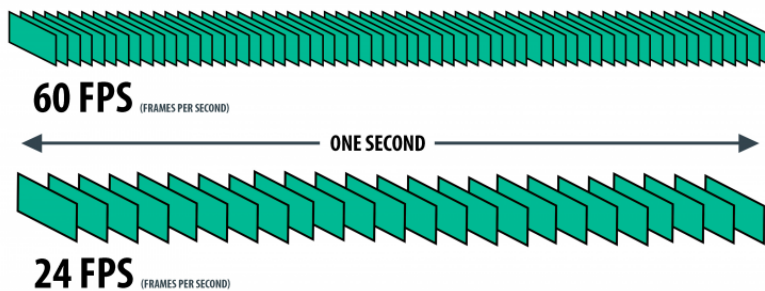
شرح پروژه

در این پروژه سعی شده است، به جنبه های مختلف کاربرد جبر خطی پرداخته شود. امید است با انجام این پروژه دانش قبلی شما تثبیت شود و با مفاهیم جدید در جبر خطی آشنا شوید.

عکس از: The Art of Linear Algebra

جداسازی پس زمینه با Robust PCA

پردازش ویدیو حوزه بخصوصی از پردازش تصویر می باشد که در آن داده موجود از فرمت ویدیو می باشد. هر ویدیو متشکل از دنباله ای از تصاویر می باشد که با توجه حجم داده و ابعاد فضای داده، پردازش آن را با چالش های کمبود منابع کامپیوتری مواجه می سازد.



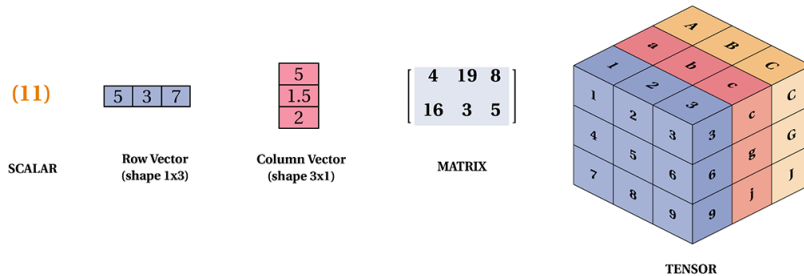
از این رو همواره سعی می شود با استفاده از روش های مختلف از جمله حذف اطلاعات کم اهمیت و یا تغییر فضای نمایش، پیچیدگی داده را کاهش داد.

در این بخش می خواهیم با استفاده از روش های مبتنی بر بردار های ویژه، پس زمینه یک ویدیو رنگی را حذف کنیم.

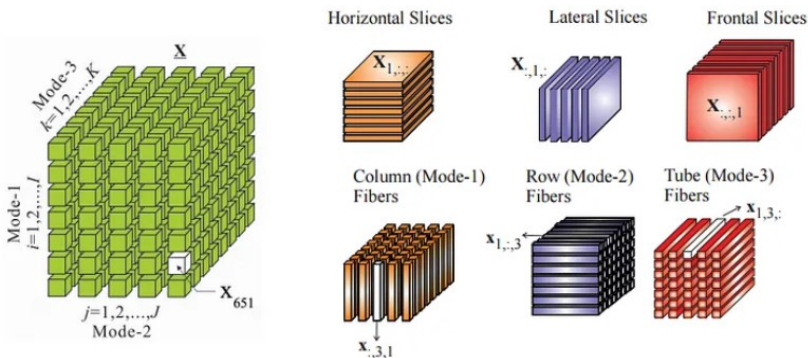
مقدمه

تنسور ها یک ساختار ریاضی هستند که رابطه های multilinear و یا به عبارتی چند خطی بین مجموعه ای از اعداد، بردار ها و دیگر تنسور ها را نمایش می دهند. تنسور ها می توانند هر تعداد بعدی داشته باشند و در نمایش دسته وسیعی از مقادیر و پدیده های فیزیکی از آن ها استفاده می شود. از برخی از این کاربرد ها می توان به نمایش خمیدگی فضا-زمان در نسبیت عام، نمایش **تنش و کرنش** مواد در مکانیک مواد و توصیف حالات کوآنتومی ذرات در مکانیک کوآنتوم اشاره کرد.

تنسور ها چون دارای خواص جبر ماتریسی مانند ضرب، جمع و ترانزاده شدن می باشند، سبب می شود بسیاری از مفاهیم جبری از جمله مقادیر و بردار های ویژه، دترمینان و تجزیه ها مانند تجزیه مقادیر تکین برای آنها تعمیم پذیر باشد.



تینسور ها را می توان تبدیل های خطی بین فضاهای برداری مختلف تعریف کرد که مفهومی اساسی در جبر خطی است. این موضوع سبب می شود عملیات های مختلفی از قبیل چرخش، تغییر مقیاس و ... را به وسیله تینسور ها انجام داد که نقشی اساسی در بسیاری از کاربرد ها دارد.



به تعداد بعد های یک تینسور اصطلاحاً رتبه و یا Rank آن گفته می شود. به دسترسی به یک المان مشخص از تینسور اصطلاحاً tensor slicing گویند و به اولین بعد هر تینسور sample axis می گویند.



Principal Component Analysis

PCA یکی از روش های کاهش ابعاد فضا، ضمن حفظ حداکثر اطلاعات ممکن است. در این روش فضا به محور هایی نگاشت می شود که تصویر داده ها روی آن ها بیشترین پراکندگی را دارد. ثابت می شود که بهترین محور ها برای این نگاشت، بردار های ویژه ماتریس پراکندگی با بیشترین مقدار ویژه متناظر است. برای درک بهتر این مفهوم توصیه می شود، این [کتابچه تعاملی](#) را مطالعه نمایید! این روش کاربرد های فراوانی در داده های پزشکی، مالی، متنی و... دارد.



Eigenvalues & Eigenvectors

تقریباً تمام بردار ها، هنگامی که در ماتریس دلخواه A ضرب می شوند، جهت شان تغییر می کند؛ به غیر از بردار های مشخصی که بردار ویژه نامیده می شوند. به ضریب تغییر اندازه این بردار ها متناظراً مقدار ویژه گویند. برای درک بهتر این مفهوم، توصیه می شود این [کتابچه تعاملی](#) را مطالعه نمایید.

سوالات مفهومی

۱. در رابطه با ساختار داده Tensor تحقیق کنید و درباره کاربرد آن در پردازش تصویر بنویسید.
۲. درباره Robust PCA توضیح دهید و در خصوص تفاوت آن با PCA بحث کنید. همچنین شبه کد این الگوریتم را ارائه دهید.
۳. درباره Higher-order SVD, Truncated SVD, Randomized SVD جست و جو کنید و به تفاوت های آنها با SVD اشاره کنید.
۴. رابطه Nuclear Norm را بنویسید.

پیاده سازی

یک ویدیو با نام Indiantraffic.avi با نرخ 20 fps در فایل پروژه پیوست شده است. ضمن خواندن این ویدیو در ساختار **Tensor**، یک فریم از آن را به دلخواه نمایش و رزولوشن تصویر را ذکر نمایید. Tensor موجود چند بعدی است و هر بعد آن نمایانگر چه مشخصه ای از ویدیو است؟

برای کاهش میزان محاسبات، ویدیو را سیاه و سفید کنید و سپس به آن Salt-and-pepper noise اضافه کنید.

با استفاده از **Robust PCA**، تنسور موجود را به دو تنسور، **Sparse** و **Low Rank** تجزیه کنید. در نهایت Reconstruction Error را نیز گزارش کنید. درباره این خطا توضیح دهید.

مجاز به *flat* کردن فریم های ویدیو نمی باشید!

مجاز به استفاده از توابع آماده برای پیاده سازی *Robust PCA* نمی باشید!

یک فریم به دلخواه را از دو تنسور **Sparse** و **Low Rank** نمایش دهید و درباره آنها توضیح دهید. آیا در این روش با داشتن تنها یک فریم (تصویر) نیز می شود پس زمینه را حذف کرد؟ بحث کنید.

در انتها ویدیو جدیدی با پس زمینه حذف شده به نام foreground.avi و پس زمینه را در ویدیو دیگری به نام background.avi ذخیره نمایید.

نشانه گذاری دیجیتال

در ادامه پروژه ابتدا به ما به تبیین مفهوم Digital Watermarking یا نشان‌های دیجیتال می‌پردازیم. این مفهوم، در علم و فناوری اطلاعات، به منظور حفظ حقوق مالکیت و امانت اطلاعات بسیار حائز اهمیت می‌باشد. و پس از آشنایی با این مفهوم سعی می‌کنیم تا این مفهوم را بر روی ویدیو های استخراج شده از بخش قبل اعمال کنیم.

مقدمه

در دنیایی که هر روزه حجم عظیمی از اطلاعات دیجیتال تولید و منتقل می‌شود، امانت اطلاعات و حفظ حقوق مالکیت چالش‌هایی پیش رو دارد. به عنوان مثال، شرکت‌های پیشرو در حوزه فناوری مانند Google و Microsoft برای حفظ اصالت محتوا و جلوگیری از کپی برداری غیرمجاز از Digital Watermarking بهره می‌گیرند. این نشان‌ها به صورت نامرئی به اطلاعات افزوده می‌شوند و تضمین می‌کنند که هرگونه تلاش برای تغییر یا کپی اطلاعات، قابل تشخیص باشد.

برای روشن تر شدن این مفهوم، فرض کنید یک فیلم ساخته‌اید که برخی از صحنه‌های آن از ارزش ویژه برخوردارند. اکنون فرض کنید یک شرکت تولید کننده محتوا تصمیم به خرید این فیلم می‌گیرد. با استفاده از Digital Watermarking، اطلاعات تایید اصالت به صورت نهان درون فیلم افزوده می‌شود. اگر کسی سعی کند این فیلم را تغییر دهد یا از آن کپی برداری کند، نشان‌های دیجیتال تغییر می‌کنند و تلاش برای ارتکاب تقلب قابل تشخیص می‌شود.

یک مثال واقعی از استفاده از Digital Watermarking در صنعت فیلم‌سازی، توسط شرکت Warner Bros مطرح می‌شود. این شرکت از نشان‌های دیجیتال برای حفظ حقوق مالکیت خود در فیلم‌ها و محتواهای دیجیتال استفاده می‌کند. به عبارت دیگر، هر فیلمی که توسط این شرکت منتشر شود، دارای امضای دیجیتال خاصی است که هرگونه تلاش برای تغییر یا کپی برداری غیرمجاز را شناسایی می‌کند.

یکی از اجزای حیاتی در مفهوم Digital Watermarking، استحکام یا robustness می‌باشد. استحکام به توانایی سیستم در مقابل تغییرات، انتقال‌ها، یا حملات مختلف اشاره دارد. در Digital Watermarking، اگر یک نشان دیجیتال قابل حذف یا تغییر باشد، هدف اصلی امانت اطلاعات و حفظ حقوق مالکیت می‌تواند به خطر بیافتد. برای مثال، اگر یک تصویر با نشان دیجیتال مخفی درون ویدیو در محیطی با تداخل‌های مختلف مثل فشرده‌سازی یا افزودن فیلترها قرار گیرد، استحکام سیستم می‌بایست به گونه‌ای باشد که تغییرات جزئی در محتوا را تشخیص دهد و همچنان اصالت را حفظ کند.

به عنوان مثال بسیاری از شرکت‌های فناوری در تولید ویدیو و تصاویر با استفاده از الگوریتم‌های پیشرفته مقاوم به تغییرات و تداخل‌های محیطی، مانند Google Video Watermarking، تلاش می‌کنند تا استحکام سیستم را در برابر چالش‌های احتمالی به حداکثر برسانند. این تلاش‌ها بر اساس اصول ریاضیاتی و تکنیک‌های پیشرفته پردازش تصویر صورت می‌گیرد تا در مقابل هرگونه تغییرات ناخواسته یا حملات ممکن، نشان دیجیتال به کاربردهای خود پایدار بماند.

سوالات مفهومی

۵. در رابطه با ساختار کلی Watermarking و همچنین چگونگی استخراج تصویر نهان شده تحقیق کرده و توضیح مختصری از آن ارائه دهید.

۶. در ارتباط با SVD-based Watermarking تحقیق کرده و الگوریتم نهان سازی و آشکار سازی آن را با ارائه روابط مورد نیاز توضیح دهید.

۷. در ارتباط با نحوه ی Blur کردن یک تصویر و تاثیر سایز Kernel بر روی خروجی تحقیق کرده و نحوه ای ایجاد این فیلتر بر روی تصویر را توضیح دهید.

پیاده سازی

در فایل‌های همراه پروژه یک سری تصویر عددی به شما داده شده است که شما بر اساس رقم آخر شماره دانشجویی خود تصویر متناظر را انتخاب کرده و به عنوان تصویری که قرار هست پنهان کنید استفاده کنید. در ادامه قصد داریم تا با استفاده از SVD-based Watermarking تصویر داده شده را در ویدیو foreground.avi که از بخش قبلی استخراج کرده اید نهان کنیم.

الگوریتم نهان سازی و آشکار سازی ای که در بخش سوالات مفهومی ارائه دادید را پیاده سازی کرده و این الگوریتم را بر روی ویدئو اجرا کنید. تصمیم اینکه این نهان سازی بر روی چند فریم از ویدئو پیاده سازی شود به عهده شماست اما توجه داشته باشید که این پیاده سازی را به گونه ای انجام دهید که در بخش‌های بعدی به مشکل نخوردید!

ممکن است لازم باشد که با توجه به سایز فریم‌های ویدیو برای پنهان سازی تصویر مجبور به تغییر سایز یا فشرده سازی تصویر باشید.

حتماً نمودار عناصر ماتریس مقادیر منفرد را رسم کرده و تحلیل کنید که این پنهان سازی چه تاثیری بر روی این نمودار داشته است. (رسم این نمودار برای تنها یک فریم کفایت میکند.)

حتما حداقل تصویر یک فریم را در گزارش خود پیش و پس از اجرای الگوریتم نهان سازی بیاورید!

یک فیلتر Blur با سایز Kernel حداقل ۵ طراحی کرده و این فیلتر را بر روی ویدیو پس از نهان سازی تصویر، اعمال کنید؛ سپس مجدد آشکار سازی را انجام داده تصویر خروجی را ارائه دهید. چه نتیجه ای میگیرید؟

حتما نحوه و منطق فیلتر طراحی شده خود را توضیح دهید

توجه کنید که باید ویدیو با نام *blured-forground-watermarked.avi* را در انتهای این بخش تحویل دهید که این ویدیو همان ویدیویی است که هم فیلتر بر روی آن اعمال شده و هم رمزنگاری شده است.



فصل ۲

منابع

منابع این پروژه به شرح زیر می باشد.

عکس از: [shutterstock](#)

- Ⓐ Strang G. Introduction to Linear Algebra. Wellesley-Cambridge Press; 2016.
- Ⓐ Jodoin PM, Maddalena L, Petrosino A, Wang Y. Extensive benchmark and survey of modeling methods for scene background initialization. IEEE Transactions on Image Processing. 2017. [Dataset](#).
- Ⓐ Maćkiewicz, A., & Ratajczak, W. (1993). Principal components analysis (PCA). Computers & Geosciences, 19(3), 303–342.
- Ⓐ OpenBookshelf. PersianTextbookTemplate. [GitHub](#).



فصل ۳

نکات کلی

لطفا در ارسال به موارد زیر توجه نمایید، در صورت عدم رعایت هر یک از موارد زیر پروژه شما تصحیح نخواهد شد.

عکس از: [istockphoto](#)

هیچگونه شباهتی در انجام پروژه بین افراد مختلف پذیرفته نمی شود. در صورت کشف هر گونه تقلب مطابق قوانین درس با افراد خاطی برخورد خواهد شد.

گزارش شما مهم ترین معیار ارزیابی خواهد بود؛ در نتیجه لطفا زمان کافی را برای تکمیل آن اختصاص دهید.

کد پروژه باید به زبان های *Python* و یا *MATLAB* نوشته شود. کد *Python* حتما به فرمت *ipynb* و کد *MATLAB* حتما در محیط *Editor Live MATLAB* تحویل داده شود.

کد پروژه به همراه گزارش آن به صورت یک فایل *zip*. تجميع و با نام *LA_CA_<StdID>.zip* ارسال گردد.

استفاده از مراجع با ارجاع به آنها بلامانع می باشد.

مهلت تحویل پروژه تا ۱۴۰۲/۱۰/۲۸ می باشد و امکان ارسال با تاخیر وجود ندارد!

پس از مطالعه کامل پروژه، در صورت ابهام پیشنهاد می شود از طریق فروم ایلرن درس و یا گروه مجازی درس سوال خود را مطرح کنید، در غیر اینصورت با **نفیسه مقنی زاده** یا **فریدین عباسی** در ارتباط باشید.