a,b を $a^2+b^2<1$ をみたす正の実数とする。また、座標平面上で原点を中心とする半径 1 の円を C とし、C の内部にある 2 点 A(a, 0) , B(0, b) を考える。$0<\theta<\frac{\pi}{2}$ に対して C 上の点 P(cos θ,sin θ) を考え、P における C の接線に関して B と対称な点を D とおく。

(1) $f(\theta)=abcos2\theta+asin\theta-bcos\theta$ とおく。方程式 f(θ) = 0 の解が $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲に少なくとも 1 つ存在することを示せ。

(2) D の座標を b、θを用いて表せ。

(3) θが $0<\theta<\frac{\pi}{2}$ の範囲を動くとき、3 点 A, P, D が同一直線上にあるようなθは少なくとも 1 つ存在することを示せ。また、このようなθはただ 1 つであることを示せ。

p を 3 以上の素数とする。また、θを実数とする。

(1) cos3θと cos4θを cosθの式として表せ。

(2) $cos\theta=\frac{1}{p}$ のとき,$\theta=\frac{m}{n}*\pi$ となるような正の整数 m, n が存在するか否かを理由を付けて判定せよ。