

Universidade do Minho
Licenciatura Em Engenharia Informática

Investigação Operacional Trabalho Prático 2

Luís Ferreira (A91672), Henrique Fernandes (A95323), Bernardo Lima
(A93258), Miguel Carvalho (A84518)

2022/2023

Braga
6 de Maio de 2023

Conteúdo

1.	Introdução.....	3
2.	Visão geral do Problema	
2.1.	Descrição do problema.....	3
2.2.	Remoção de clientes e tempos de deslocação dependentes de BCDE.....	4
3.	Definição e Formulação do Problema	
3.1.	Variáveis de Decisão.....	5
3.2.	Função Objetivo.....	5
3.3.	Restrições.....	6
3.4.	Rede do Problema de Fluxo Mínimo.....	6
4.	Software de Otimização em Rede	
4.1.	Ficheiro de Input.....	7
4.2.	Ficheiro de Output.....	8
5.	Interpretação de resultados e Solução Ótima.....	9
6.	Validação do Modelo.....	13
7.	Conclusão.....	16

1. Introdução

No âmbito da Unidade Curricular de Investigação Operacional, foi proposto aos alunos o desafio de resolver um problema de escalonamento de equipas para atender clientes geograficamente distribuídos. O cenário apresentado consiste em um conjunto de clientes e um conjunto de equipas responsáveis por atendê-los, com horários de serviço específicos e tempos de deslocamento e custos associados. Para resolver esse problema, serão utilizados dados como matrizes de tempos e custos de deslocamento, bem como o software de otimização de redes, Relax4.

2. Visão Geral do Problema

2.1. Descrição do Problema

Pretende-se atribuir serviços a efetuar em clientes distribuídos geograficamente a equipas, de modo a minimizar o custo total da operação. Dado um conjunto de clientes, com uma hora de início associada, uma equipa pode efetuar serviços de vários clientes reunindo as condições de deslocação. Consideraremos que cada equipa parte da sede da empresa, em Keleirós (K), no tempo determinado na tabela, havendo um custo fixo para cada equipa.

2.2. Remoção de Clientes e Tempos de Deslocação Dependentes de BCDE

Após identificar que o estudante com a maior inscrição no grupo possui o número 95323, foram aplicadas as regras estabelecidas no enunciado e realizado um pattern matching para o padrão ABCDE. Com isso, foi possível determinar quais clientes e tempos de deslocação dependem das variáveis BCDE e devem ser removidos.

j	Cliente	aj (¼ Hora)	aj (Hora de Serviço)
1	Ana	6	10:30
2	Beatriz	7	10:45
3	Carlos	4	10:00
4	Diogo	2	09:30
5	Eduardo	10	11:30
6	Francisca	6	10:30
7	Gonçalo	9	11:15
8	Helena	4	10:00
9	Inês	2	09:30
10	José	5	10:15

Figura 1: Tabela de Horas de Serviço dos Clientes, em Quartos de Hora Desde o Início do Período de Trabalho

3. Definição e Formulação do Problema

O problema em questão é de fluxo de custo mínimo, ou seja, consiste em encontrar o caminho mais econômico para enviar um determinado fluxo através de uma rede. Neste caso, trata-se de encontrar a melhor rota de entrega em uma rede com capacidade limitada e custos associados. A solução ideal consiste em identificar um subconjunto de vértices cuja soma dos custos de deslocamento seja a menor possível. Para resolver o problema, é necessário formular o mesmo como um problema de transporte em uma rede geral. Isso implica em utilizar um grafo $G = (V, A)$ com vértice de origem K , que possui arcos com custo c_j para todos os outros vértices, e vértice terminal K' , que possui arestas vindas de todos os outros vértices, mas não possui nenhuma aresta saindo dele. O objetivo é enviar uma quantidade de fluxo de K até K' . Dessa forma, a definição do problema consiste em minimizar o custo total do fluxo: $\sum_a(u, v).f(u, v)$.

3.1. Variáveis de Decisão

O nosso objetivo é determinar a melhor atribuição de clientes para cada equipa, levando em conta as restrições existentes e buscando minimizar o custo total da operação. Para alcançar esse objetivo, estamos interessados em identificar o conjunto ótimo de escalonamentos, representados por variáveis binárias que indicam se um determinado escalonamento deve ser realizado ou não. Quando a variável binária tem valor zero, o escalonamento correspondente não será realizado, enquanto um valor de um indica que o escalonamento deve ser realizado.

$x_{i,j} = 1$ se a rota do cliente i para o cliente j é utilizada caso contrário é 0.

3.2. Função Objetivo

O nosso objetivo é encontrar o caminho mais econômico para enviar um determinado fluxo através de uma rede. Portanto, a função objetivo será de

minimização. Nesse caso, o coeficiente binário na função objetivo representa a existência ou não de uma determinada rota. Para calcular o custo mínimo, basta somar todas as variáveis de decisão multiplicando cada uma pelo seu custo (é a soma de os custos de todas as rotas que são utilizadas).

$$z = \min \sum x_{i,j} \times c_{i,j}$$

3.3. Restrições

Todas as equipas começam e terminam na sede da empresa, todos os clientes têm de ser servidos e uma equipa pode efectuar o serviço do cliente j se, após terminar o serviço de um cliente i , puder chegar ao cliente j num instante igual ou anterior a a_j , i.e., $a_i + t_{ij} \leq a_j$, em que t_{ij} é o tempo de deslocação entre os clientes i e j , $\forall j \in V$.

3.4. Rede do Problema de Fluxo Mínimo

Para conseguirmos chegar à solução ótima do problema, tivemos de resolver um problema de fluxo mínimo numa rede.

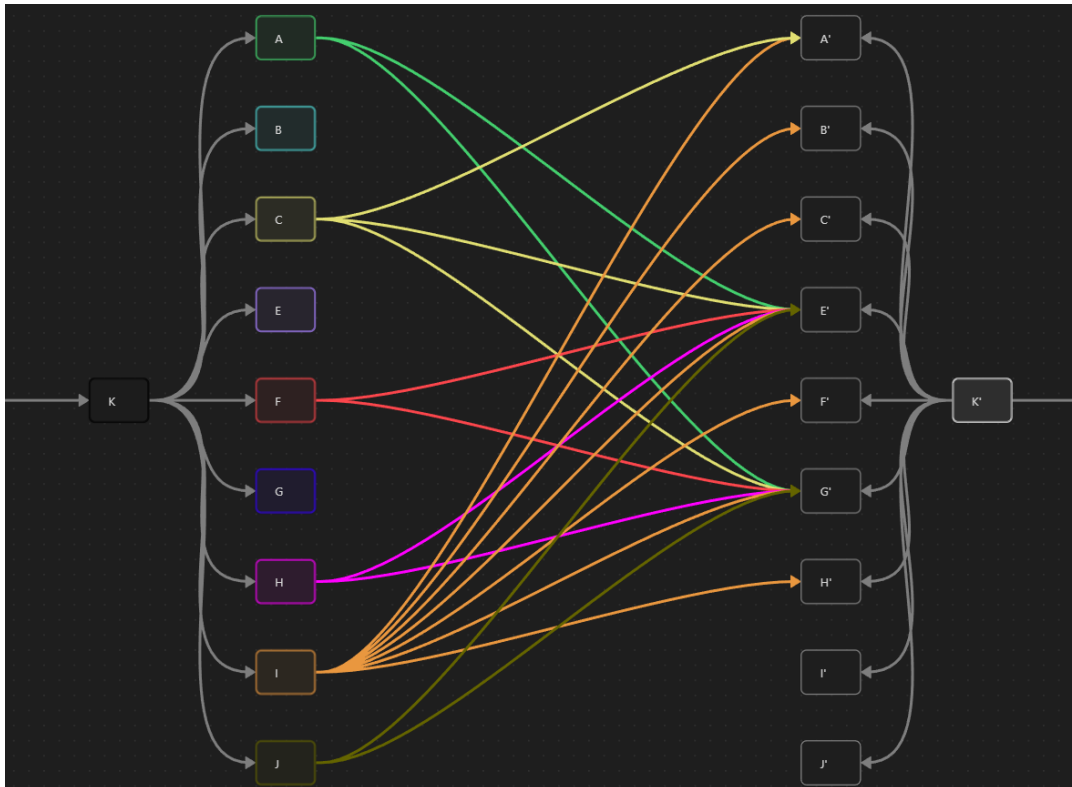


Figura 2: Grafo da Rede do Problema de Fluxo Mínimo

Para começar, ligou-se **K** (o nosso ponto de partida) a todos os vértices dos clientes. De seguida ligou-se todos os vértices a **K'** (ponto de chegada). Todas as equipas devem partir da mesma posição e terminar na mesma também.

Os vértices entre os clientes apresentam ligações entre si representativas das deslocações possíveis calculadas tendo em conta que uma equipa pode efetuar o serviço do cliente j , se após terminar o serviço de um cliente i , puder chegar ao cliente j num instante igual ou anterior a a_j .

4. Software de Otimização em Rede

4.1. Ficheiro de Input

20,37	4 20 3 1000
1 20 0 1000	5 20 7 1000
1 11 1 1000	6 20 12 1000
1 12 15 1000	7 20 10 1000
1 13 2 1000	8 20 10 1000
1 14 6 1000	9 20 10 1000
1 15 11 1000	10 20 11 1000
1 16 9 1000	9
1 17 9 1000	1
1 18 9 1000	1
1 19 10 1000	1
2 14 5 1000	1
2 16 7 1000	1
4 14 6 1000	1
4 16 6 1000	1
4 11 5 1000	1
6 14 6 1000	1
6 16 5 1000	1
8 14 6 1000	1
8 16 4 1000	-1
9 11 0 1000	-1
9 12 13 1000	-1
9 13 5 1000	-1
9 14 5 1000	-1
9 15 10 1000	-1
9 16 7 1000	-1
9 17 5 1000	-1
10 14 7 1000	-1
10 16 5 1000	-1
2 20 2 1000	-1
3 20 16 1000	-9

Figura 3: Ficheiro de Input

4.2. Ficheiro de Output


```

***** s 112.
NEOS Server Version 6.0 f 1 20 3
Job# : 13019135 f 1 11 1
Password : iqofpBTh f 1 12 1
User : f 1 13 1
Solver : lno:RELAX4:RELAX4 f 1 14 0
Start : 2023-05-05 14:56:56 f 1 15 1
End : 2023-05-05 14:56:58 f 1 16 0
Host : prod-sub-1.neos-server.org f 1 17 0
f 1 18 1
Disclaimer: f 1 19 1
f 2 14 0
This information is provided without any express or f 2 16 0
implied warranty. In particular, there is no warranty f 4 14 0
of any kind concerning the fitness of this f 4 16 0
information for any particular purpose. f 4 11 0
f 6 14 1
Announcements: f 6 16 0
***** f 8 14 0
NUMBER OF NODES = 20, NUMBER OF ARCS = 37 f 8 16 1
DEFAULT INITIALIZATION USED f 9 11 0
***** f 9 12 0
Total algorithm solution time = 0.0192160606 sec. f 9 13 0
OPTIMAL COST = 112. f 9 14 0
NUMBER OF ITERATIONS = 19 f 9 15 0
NUMBER OF MULTINODE ITERATIONS = 3 f 9 16 0
NUMBER OF MULTINODE ASCENT STEPS = 2 f 9 17 1
NUMBER OF REGULAR AUGMENTATIONS = 4 f 10 14 0
***** f 10 16 0
f 2 20 1
f 3 20 1
f 4 20 1
f 5 20 1
f 6 20 0
f 7 20 1
f 8 20 0
f 9 20 0
f 10 20 1

```

Figura 4: Movimentações da Solução do *RelaX4*

5. Interpretação de Resultados e Solução Ótima

Equipa 1:

1 - 11; 2 - 20.

Cliente	Aj (1/4h)	Aj (Hora do Serviço)	Tempo de Deslocação	Tempo de Trabalho	Custo de Deslocação
Keleirós	0	09:00	[KA]: 1	0	1
Ana	6	10:30	[AK]: 1	1/4h	1
Keleirós	8	11:00			1

Custo Operação (Equipa 1): $1 + 1 + 1 = 3UM$

f 1 11 1; f 2 20 1: A equipa sai da base K (Keleirós) identificada por 1, às 09:00h e desloca-se para servir o cliente A (11), o que demora 1/4h e quando chegar espera pelo instante 6 (10:30). Depois de visitar o cliente A (2), além do tempo de trabalho (1/4h) demora mais 1/4h para voltar à base da empresa (K') e chega no instante 8 (11:00h).

Equipa 2:

1 - 12; 3 - 20;

Cliente	Aj (1/4h)	Aj (Hora do Serviço)	Tempo de Deslocação	Tempo de Trabalho	Custo de Deslocação
Keleirós	0	09:00	[KB]: 5	0	15
Beatriz	7	10:45	[BK]: 5	1/4h	15
Keleirós	11	12:15			1

f 1 12 1; f 3 20 1: A equipa sai da base K (Keleirós) identificada por 1, às 09:00h e desloca-se para servir o cliente B (12), o que demora 5/4h e quando chegar espera

pelo instante 7 (10:45). Depois de visitar o cliente B (3), além do tempo de trabalho (1/4h) demora mais 5/4h para voltar à base da empresa (K') e chega no instante 11 (12:15h).

Custo Operação Equipa 2: $15 + 15 + 1 = 31\text{UM}$

Equipa 3:

1 - 13; 4 - 20;

Cliente	Aj (1/4h)	Aj (Hora do Serviço)	Tempo de Deslocação	Tempo de Trabalho	Custo de Deslocação
Keleirós	0	09:00	[KC]: 2	0	2
Carlos	4	10:00	[CK]: 2	1/4h	2
Keleirós	7	10:45			1

f 1 13 1; f 4 20 1: A equipa sai da base K (Keleirós) identificada por 1, às 09:00h e desloca-se para servir o cliente C (13), o que demora 2/4h e quando chegar espera pelo instante 4 (10:00). Depois de visitar o cliente C (4), além do tempo de trabalho (1/4h) demora mais 2/4h para voltar à base da empresa (K') e chega no instante 7 (10:45h).

Custo Operação Equipa 3: $2 + 2 + 1 = 5\text{UM}$

Equipa 4:

1 - 15; 6 - 14; 5 - 20;

Cliente	Aj (1/4h)	Aj (Hora do Serviço)	Tempo de Deslocação	Tempo de Trabalho	Custo de Deslocação
Keleirós	0	09:00	[KF]: 4	0	11
Francisca	4	10:00	[FE]: 2	1/4h	6
Eduardo	7	10:45	[EK]: 2	1/4h	6
Keleirós	10	11:30			1

f 1 15 1; f 6 14 1; f 5 20 1: A equipa sai da base K (Keleirós) identificada por 1, às 09:00h e desloca-se para servir o cliente F (15), o que demora 4/4h e quando chegar espera pelo instante 4 (10:00). Depois de visitar o cliente F (6), além do tempo de trabalho (1/4h) demora mais 2/4h para chegar ao cliente E (14) e chega no instante 7 (10:45h). Depois de visitar o cliente E (5), além do tempo de trabalho (1/4h) demora mais 2/4h para voltar à base da empresa (K') e chega no instante 10 (11:30h). O custo associado a essa deslocação é de 24 UM.

Custo Operação Equipa 4: $10 + 5 + 9 + 1$

Equipa 5:

1 - 18; 9 - 17; 8 - 20;

Cliente	Aj (1/4h)	Aj (Hora do Serviço)	Tempo de Deslocação	Tempo de Trabalho	Custo de Deslocação
Keleirós	0	09:00	2	0	9
Inês	2	09:30	1	1/4h	5
Helena	4	10:00	1	1/4h	9
Keleirós	6	10:30			1

f 1 18 1; f 9 17 1; f 8 20 1 A equipa sai da base K (Keleirós) identificada por 1, às 09:00h e desloca-se para servir o cliente I (9:30), o que demora 1/2h, com um custo de 9UM, não tendo de esperar. Depois de visitar o cliente I , além do tempo de trabalho (1/4h) demora mais 1/4h, com um custo de 5 UM, para se deslocar para o cliente H, tendo este o início previsto às 10:00, não tendo a equipa de esperar. Por fim a equipa sai às 01:15 e desloca-se novamente para Keleirós, com um custo de 10UM.

Custo Operação Equipa 5: $10 + 5 + 9 + 1$

Equipa 6:

1 - 19; 10 - 16; 7 - 20;

Cliente	Aj (1/4h)	Aj (Hora do Serviço)	Tempo de Deslocação	Tempo de Trabalho	Custo de Deslocação
Keleirós	0	09:00	4	0	10
Jose	7	10:45	2	1/4h	5
Gonçalo	9	11:15	3	1/4h	9
Keleirós	13	12:15			1

f 1 19 1; f 10 16 1; f 7 20 1 A equipa sai da base K (Keleirós) identificada por 1, às 09:00h e desloca-se para servir o cliente J (10:45), o que demora 1h, com um custo de 10UM e quando chega, espera pelo instante 7 (10:45). Depois de visitar o cliente J, além do tempo de trabalho (1/4h) demora mais 1/2h, com um custo de 9UM, para se deslocar para o cliente G, tendo este o início previsto às 11:15, não tendo a equipa de esperar. Por fim a equipa sai às 11:30 e desloca-se novamente para Keleirós, com um custo de 1UM.

Custo Operação Equipa 6: $10 + 5 + 9 + 1$

Custo Total (Equipa 1 + Equipa 2 + Equipa 3 + Equipa 4 + Equipa 5 + Equipa 6) = $3 + 31 + 5 + 24 + 24 + 25 = 112$, que coincide com o resultado apresentado como ótimo pelo software relax4.

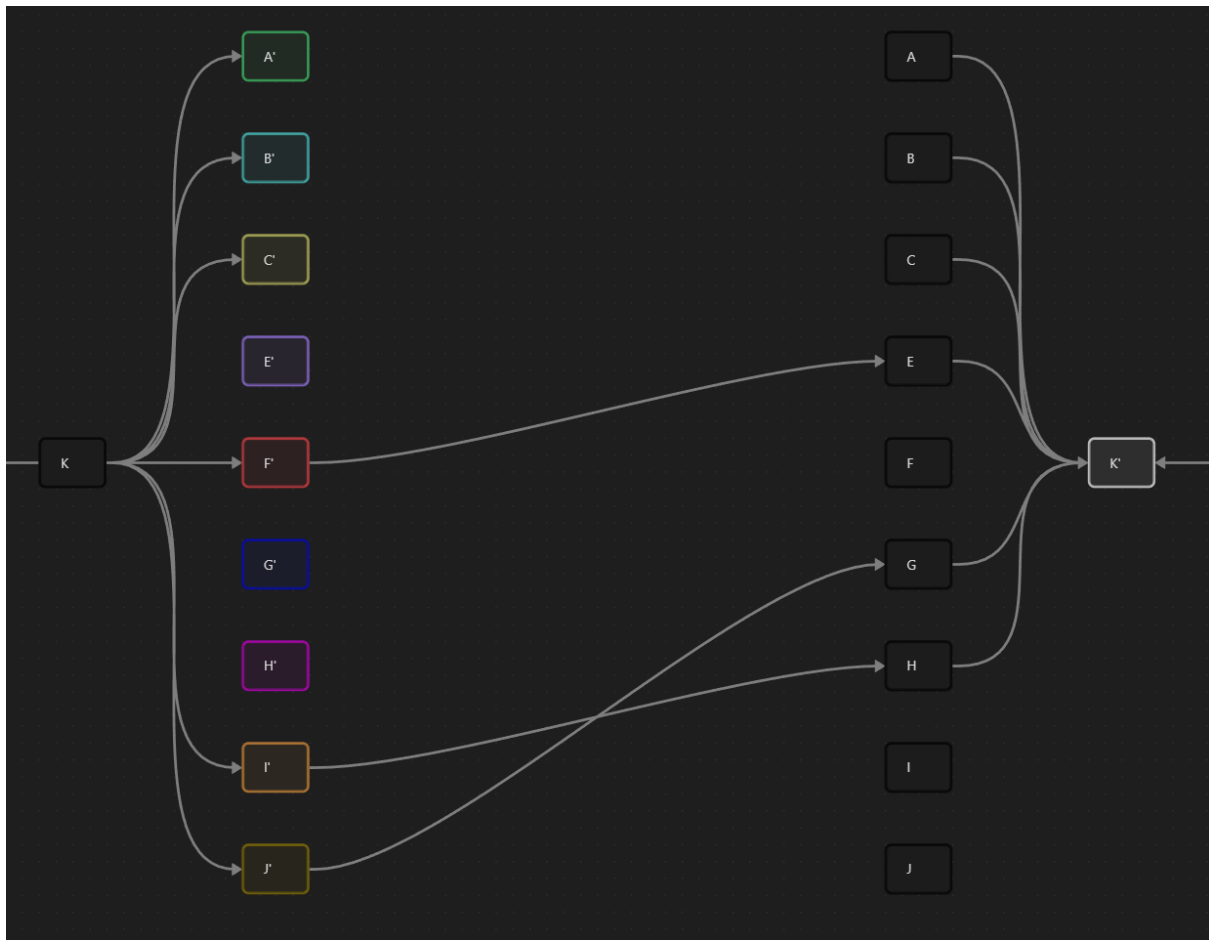


Figura 5: Visualização dos Percursos

6. Validação do Modelo

Como método de validação utilizamos a ferramenta do LPSolve, de maneira a identificar se a nossa solução seria a ótima.

Para começar, usamos como sistema de numeração o seguinte:

K	1	A	11
A'	2	B	12
B'	3	C	13
C'	4	E	14
E'	5	F	15
F'	6	G	16
G'	7	H	17
H'	8	I	18
I'	9	J	19
J'	10	K'	20

Para ser possível essa verificação, comecemos pela definição das variáveis no LPSolve. Estas foram definidas com binárias, à exceção do arco que representava a não deslocação de equipas fora de K (K para K').

```
/* Definição das variáveis */
bin x1_11 , x1_12 , x1_13 , x1_14 , x1_15 , x1_16 , x1_17 , x1_18 , x1_19 ;
bin x2_14 , x2_16 , x2_20 ;
bin x3_20 ;
bin x4_11 , x4_14 , x4_16 , x4_20 ;
bin x5_20 ;
bin x6_14 , x6_16 , x6_20 ;
bin x7_20 ;
bin x8_14 , x8_16 , x8_20 ;
bin x9_11 , x9_12 , x9_13 , x9_14 , x9_15 , x9_16 , x9_17 , x9_20 ;
bin x10_14 , x10_16 , x10_20 ;
int x1_20 ;
```

Figura 6: Definição das Variáveis no *LPSolve*

Tendo os arcos necessários para a realização da validação, falta a associação dos custos associados à deslocação (arcos), sendo esta a função objetivo, uma vez que se pretende minimizar estes custos.

```
/* Função objetivo*/
min: 1 x1_11 + 15 x1_12 + 2 x1_13 + 6 x1_14 + 11 x1_15 + 9 x1_16 + 9 x1_17 + 9 x1_18 + 10 x1_19 + 0 x1_20
+ 5 x2_14 + 7 x2_16 + 2 x2_20
+ 16 x3_20 //nao sai de B
+ 5 x4_11 + 6 x4_14 + 6 x4_16 + 3 x4_20
+ 7 x5_20 //nao sai de E
+ 6 x6_14 + 5 x6_16 + 12 x6_20
+ 10 x7_20 //nao sai de G
+ 6 x8_14 + 10 x8_16 + 10 x8_20
+ 0 x9_11 + 13 x9_12 + 5 x9_13 + 5 x9_14 + 10 x9_15 + 7 x9_16 + 5 x9_17 + 10 x9_20
+ 7 x10_14 + 5 x10_16 + 11 x10_20; //37 arcos
```

Figura 7: Definição da Função Objetivo no *LPSolve*

Uma vez que estão representados, todas as rotas com os seus custos associados, basta garantir a deslocação das equipas a cada cliente (vértice), com a exceção dos vértices 1 e 20, pois referem-se a K (keleirós), onde as 9 equipas devem sair e regressar no final do dia.

```

/* Restrições */                                     //nr equipes
Vertice1: x1_11 + x1_12 + x1_13 + x1_14 + x1_15 + x1_16 + x1_17 + x1_18 + x1_19 + x1_20 = 9 ;
vertice2: x2_14 + x2_16 + x2_20 = 1 ;
vertice3: x3_20 = 1 ;
vertice4: x4_11 + x4_14 + x4_16 + x4_20 = 1 ;
vertice5: x5_20 = 1 ;
vertice6: x6_14 + x6_16 + x6_20 = 1 ;
vertice7: x7_20 = 1 ;
vertice8: x8_14 + x8_16 + x8_20 = 1 ;
vertice9: x9_11 + x9_12 + x9_13 + x9_14 + x9_15 + x9_16 + x9_17 + x9_20 = 1 ;
vertice10: x10_14 + x10_16 = 1 ;
vertice11: x1_11 + x4_11 + x9_11 = 1 ;
vertice12: x1_12 + x9_12 = 1 ;
vertice13: x1_13 + x9_13 = 1 ;
vertice14: x1_14 + x2_14 + x6_14 + x8_14 + x9_14 + x10_14 = 1 ;
vertice15: x1_15 + x9_15 = 1 ;
vertice16: x1_16 + x2_16 + x4_16 + x6_16 + x8_16 + x9_16 + x10_16 = 1 ;
vertice17: x1_17 + x9_17 = 1 ;
vertice18: x1_18 = 1 ;
vertice19: x1_19 = 1 ;
vertice20: x1_20 + x2_20 + x3_20 + x4_20 + x5_20 + x6_20 + x7_20 + x8_20 + x9_20 + x10_20 = 9 ;

```

Figura 8: Restrições no *LPSolve*

Com a tradução do problema para o *LPSolver*, obteve-se um resultado semelhante ao do *RelaX4*, tendo ambas as ferramentas chegado a um custo total de 112 unidades, com 6 das 9 equipes iniciais a se deslocarem aos clientes, levando-nos a pensar que será a solução ótima do problema.

Variables	MILP ...	result
	112	112
x1_11	1	1
x1_12	1	1
x1_13	1	1
x1_14	0	0
x1_15	1	1
x1_16	0	0
x1_17	0	0
x1_18	1	1
x1_19	1	1
x1_20	3	3
x2_14	0	0
x2_16	0	0
x2_20	1	1
x3_20	1	1
x4_11	0	0
x4_14	0	0
x4_16	0	0
x4_20	1	1
x5_20	1	1
x6_14	1	1
x6_16	0	0
x6_20	0	0
x7_20	1	1
x8_14	0	0
x8_16	0	0
x8_20	1	1
x9_11	0	0
x9_12	0	0
x9_13	0	0
x9_14	0	0
x9_15	0	0
x9_16	0	0
x9_17	1	1
x9_20	0	0
x10_14	0	0
x10_16	1	1
x10_20	0	0

Figura 9: Solução do *LPSolve*

7. Conclusão

Ao longo da realização deste trabalho achamos importante referir alguns aspetos positivos e negativos que fomos encontrando.

Pela positiva, a reutilização da ferramenta *LPsolve*, uma vez que já estávamos habituados a esta e tornou-se uma valiosa ferramenta para validar os resultados que fomos obtendo no *RelaX4*. Também o facto de o trabalho ter uma estrutura semelhante ao trabalho anterior, assim como um desafio com bases práticas deu-nos mais facilidade de visualizar e idealizar estratégias de como chegar à solução.

Pelo contrário, a ferramenta do *RelaX4* revelou-se bastante confusa de utilizar, desde a falta de documentação e a fraca exposição de erros por falta da ferramenta.

Mesmo assim, foi possível com algumas dificuldades a sua resolução, revelando-se uma maneira interessante de consolidar os conceitos da UC de Investigação Operacional.