Здесь были использованы разложения по формуле Тейлора:

косинуса

$$\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + O(x^4), x \to 0,$$

синуса

$$\sin x = x - \frac{x^3}{6} + O(x^5), x \to 0,$$

бинома

$$(1+u)^\alpha = 1 + \alpha u + O(u^2)$$

при $\alpha = -1$ и $u = -\frac{x^2}{6} + O(x^4), x \to 0$.

13.4. Вычисление пределов с помощью формулы Тейлора (метод выделения главной части)

Формула Тейлора даёт простое и весьма общее правило для выделения главной части функции. В результате этого метод вычисления пределов функций с помощью выделения главной части приобретает законченный алгоритмический характер.

Рассмотрим сначала случай неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Пусть требуется найти предел $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$. В этом случае рекомендуется разложить по формуле Тейлора функции f и g в окресности точки x_0 (если, конечно, это возможно), ограничившись в этом разложении лишь первыми не равными нулю членами, т.е. взять разложения в виде

$$f(x) = a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n), a \neq 0,$$
$$g(x) = b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m), b \neq 0,$$

тогда

$$\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \lim_{x\to x_0} \frac{a(x-x_0)^n + o((x-x_0)^n)}{b(x-x_0)^m + o((x-x_0)^m)} =$$

$$= \frac{a}{b} \lim_{x\to x_0} (x-x_0)^{n-m} = f = \begin{cases} 0, n > m \\ \frac{a}{b}, n = m \\ \infty, n < m \end{cases}$$

Часто бывает удобно для разложеия функций f и g по формуле Тейлора использовать готовый набор разложений элементарных функций, полученный в п. 13.3. Для этого следует в случае $x_0 \neq 0$ предварительно выполнить замену переменного $t = x - x_0$; тогда $x \to x_0$ будет соответствовать $t \to 0$. Случай $x \to \infty$ заменой переменного $x = 1/t$ сводится к случаю $t \to 0$.

Если имеется неопределенность вида $\frac{\infty}{\infty}$, т.е. требуется найти $\lim\limits_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)}$, где $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \lim\limits_{x\to x_0} g(x) = \infty$, то ее легко привести к рассмотренному случаю $\frac{0}{0}$ преобразованием $\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{1/g(x)}{1/f(x)}$.

Подобно вычислению пределов с помощью правила Лопиталя, при применении метода выделения главной части к раскрытию неопределенностей вида $0 \cdot \infty$ и $\infty - \infty$ их следует преобразовать к неопределенности вида $\frac{0}{0}$. Наконец, для раскрытия неопределенностей вида $0^0, \infty^0$ и 1^∞ указанным методом необходимо предварительно прологарифмировать рассматриваемые функции. Посмотрим на примерах, как применяется формула Тейлора к вычислению пределов функций. Пусть требуется найти

$$\lim_{x\to x_0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x}.$$

Заметив, что(см. п. 13.3)

$$e^x = 1 + x + x^2/2 + x^3/3 + o(x^3),$$

$$e^{-x} = 1 - x + x^2/2 - x^3/3 + o(x^3),$$

$$\sin x = x - x^3/3! + o(x^3),$$

получим

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^x - e^{-x} - 2x}{x - \sin x} =$$

$$= \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3 + o(x^3)}{x^3/6 + o(x^3)} = \lim_{x\to 0} \frac{x^3/3}{x^3/6} = 2.$$