CHAPITRE

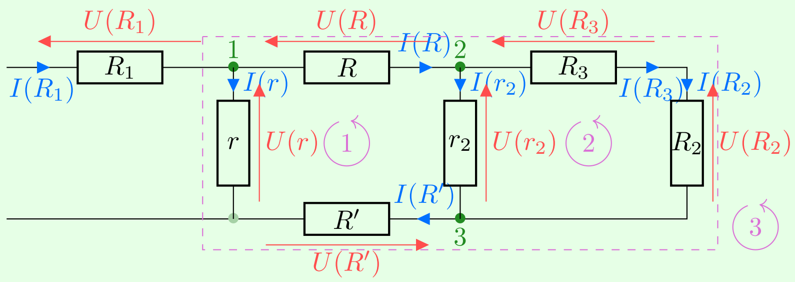
1

LOIS DE KIRCHHOFF

Exercices d'application

Exercice 1) Tensions et courants

Schéma



Rappel

- *Nœud* : jonction entre au moins 3 câbles ;
- *Branche* : section entre 2 nœuds ;
- *Maille* : ensemble de branches fermées.

Liens entre courants

On établit les liens entre les différents courants avec la loi des nœuds ou avec l'unicité de l'intensité dans une branche. Ici, on a :

- $I(R_2) = I(R_3)$ par unicité à droite ;
- $I(R_1) = I(R) + I(r)$ par LdN 1 ;
- $I(R) = I(R_3) + I(r_2)$ par LdN 2 ;
- $I(R_2) + I(r_2) = I(R')$ par LdN 3.

Le dernier nœud, non numéroté, donne une relation redondante avec les autres.

Liens entre tensions

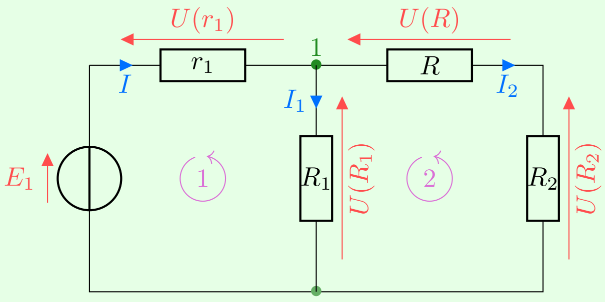
Avec les lois des mailles, on a :

- $U(R') + U(r_2) + U(R) = U(r)$ par LdM 1 ;
- $U(R_2) + U(R_3) = U(r_2)$ par LdM 2 ;

La LdM 3 donne une relation redondante avec les deux premières : $U(R') + U(R_2) + U(R_3) + U(R) = U(r)$ est la somme des deux.

Exercice 2) Calcul d'intensité

Schéma



Résultat attendu

On cherche à exprimer I_2.

LdN, LdM

- $I = I_1 + I_2$ (1) (LdN) ;
- $I_1R_1 + Ir_1 = E_1$ (2) (LdM 1) ;
- $I_2(R + R_2) = I_1R_1$ (3) (LdM 2).

Conseil

À partir de cet exercice, la résolution des devient assez mathématique et devient de la résolution de systèmes d'équations. Il y a de bonnes pratiques à cet égard : numéroter les équations qu'on veut réutiliser en premier lieu, à l'aide des (1) par exemple, savoir qu'un système de 3 équations (indépendantes) à 3 inconnues est résolvable ensuite, et comprendre comment s'y prendre enfin. Cette dernière partie est bien sûr la vraie étape difficile et passe par la pratique, mais elle s'apprend. Je donne quelques outils dans l'encadré suivant.

Exemple

En ayant simplement utilisé les lois de Kirchhoff dont on dispose, I_2 apparaît dans l'équation (3), mais s'exprime en fonction de I_1 que l'on ne connaît pas non plus. On doit donc commencer par trouver une expression de I_1 qui puisse nous faire avancer. I_1 fait partie de l'équation (2) qui, elle, dépend de I mais en utilisant (1) on peut facilement changer (2) en une nouvelle équation reliant I_1 à I_2 et qui n'est pas (3) et qu'on appellera brillamment (4). Ainsi, en réinjectant (4) dans (3), on aura une expression de I_2 en fonction uniquement des paramètres du circuit (E, R).

Application

Injecter (1) dans (2) donne :

$$\begin{aligned} I_1R_1 + (I_1 - I_2)r_1 &= E_1 \\ I_1(R_1 + r_1) &= E_1 - I_2r_1 \\ I_1 &= \frac{E_1 - I_2r_1}{R_1 + r_1} \qquad (4) \end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de réinjecter (4) dans (3) pour avoir :

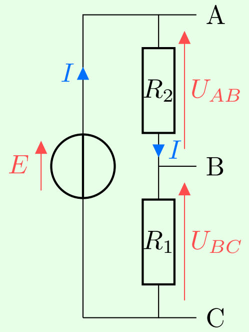
$$\begin{aligned} I_2(R_2 + R) &= \frac{E_1 - I_2r_1}{R_1 + r_1} \times R_1 \\ I_2(R_2 + R) \times (R_1 + r) &= (E_1 - I_2r) \times R_1 \\ I_2\left[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1R_1\right] &= E_1R_1 \end{aligned}$$

et finalement

$$\boxed{I_2 = \frac{E_1R_1}{[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1R_1]}}$$

Exercice 3) Diviseur de tension

Schéma



Résultat attendu

On cherche I puis U_{BC}.

Outils

- Loi des mailles pour I ;
- Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Application

Il suffit d'une loi des mailles pour trouver

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Puis trivialement

$$U_{BC} = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

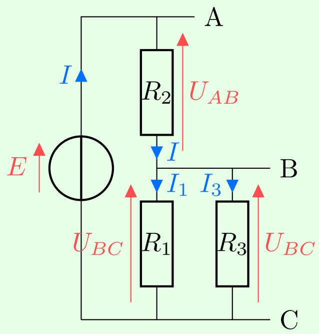
Remarque

On remarque donc que deux dipôles de résistances R_1 et R_2 se partageant une tension totale E vont se la répartir en respectant la fraction de résistance à laquelle chaque diôle participe. C'est également une simple moyenne pondérée.

Important

Ce résultat est bien plus général que pour deux dipôles et fonctionne avec n dipôles ***en série*** sur une branche. Il faut pouvoir se ramener à ce schéma précis pour appliquer la formule du pont diviseur de tension – que vous pouvez maintenant utiliser sans loi des mailles : $U_x = E \times \dfrac{R_x}{R_{\text{tot}}}$

Schéma



Réponse

Oui, elle va changer puisqu'on a branché un nouveau dipôle.

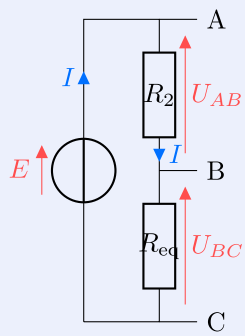
Résultat attendu

On cherche I et U_{BC}.

Outils

- Loi des mailles pour I ;
- Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Schéma simplifié



Application

On peut envisager ce calcul de deux manières :

- D'une part, $U_{BC} = R_1 I_1$ par exemple. Il nous faudrait déterminer I_1 en fonction de I avec la loi des nœuds pour ça. Or, la meilleure manière de déterminer I c'est de se ramener à une seule maille en calculant la résistance équivalente comme on vient de faire, et dans ce cas :
- On voit immédiatement que $U_{BC} = R_{\text{eq}} I$. Autant ne pas se compliquer la tâche et partir là-dessus.

On obtient ainsi

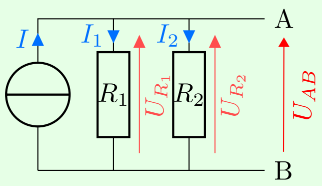
$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad \text{et} \quad I = \frac{E}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}$$

d'où après calcul

$$\boxed{U_{BC} = \frac{E R_1 R_3}{R_2(R_1 + R_3 t) + R_1 R_3}} \quad \text{ou} \quad \boxed{U_{BC} = \frac{E}{\frac{R_2}{R_3} + \frac{R_2}{R_1} + 1}}$$

Exercice 4) Diviseur de courant

Schéma



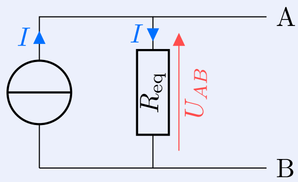
Résultat attendu

On cherche U_{R_1} et U_{R_2}.

Outils

- Unicité de la tension en parallèle ;
- Expression résistance $/\!\!/$.

Schéma simplifié



Application

On a certes $U_{R_1} = I_1 R_1$ et $U_{R_2} = I_2 R_2$, mais comme on a $U_{R_1} = U_{R_2} = U_{AB}$, le plus simple est de déterminer U_{AB}. Une résistance équivalente $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ avec l'intensité I qui est connue (car imposée par le générateur de courant) donne facilement

$$U_{R_1} = U_{R_2} = R_{\text{eq}} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

Important

Ce résultat est la base de la réflexion menant à l'expression du diviseur de courant qui donne l'expression de I_x : on voit directement apparaître que $I_x = I \times \dfrac{R_{\text{eq}}}{R_x}$ de par l'unicité de la tension. Souvenez-vous de cette simplicité.

Résultat attendu

On cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2 **à partir de la loi des mailles**.

Outils

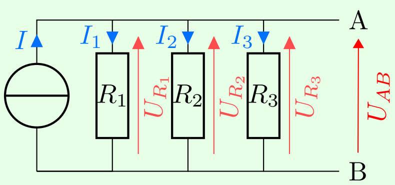
- LdM : $I_1 R_1 = I_2 R_2$ (1) ;
- LdN : $I = I_1 + I_2$ (2).

Application

En utilisant (2) dans (1), on a $I_2 R_2 = (I - I_2) R_1$, donc en isolant I_2 on obtient facilement

$$\boxed{I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Schéma



Résultat attendu

Évidemment, I_2 va changer puisqu'on branche un nouveau dipôle en parallèle. Une rivière qui se divise en 3 plutôt qu'en 2 va avoir des débits différents dans les deux situations. Donc on cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2, R_3 **sans méthode imposée**.

Application

Avec la réflexion de la question 1 ou la relation du pont diviseur de courant qui est maintenant utilisable à volonté, on a facilement $I_2 = I \times \frac{R_{\text{eq}}}{R_2}$. Avec $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$, on a finalement

$$\boxed{I_2 = I \times \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

Remarque

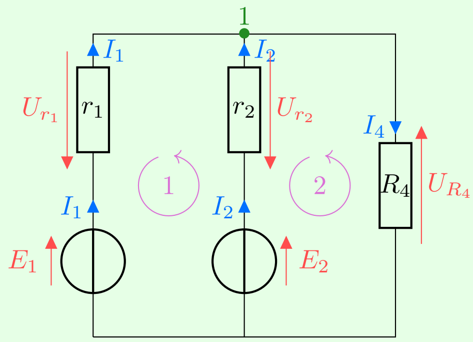
L'intensité I ne va pas changer, puisque c'est celle que l'on fixe avec le générateur.

Important

Bien que la loi des mailles soit l'origine de nombreuses relations, ici c'est la simple unicité de la tension qui amène au diviseur de courant.

Exercice 5) Association de générateurs

Schéma



Résultat attendu

On cherche I_4 puis $U_4 = R_4 I_4$.

Outils

- LdM 1 : $I_4R_4 + I_1r_1 = E_1$ (1) ;
- LdM 2 : $I_4R_4 + I_2r_2 = E_2$ (2) ;
- LdN 1 : $I_1 + I_2 = I_4$ (3).

Approche méthodique

Notre but est de trouver une équation contenant I_4 et des valeurs connues, c'est-à-dire tout sauf I_1, I_2.

L'équation (1) peut nous aider ; on peut la transformer en remplaçant I_1 par $I_4 - I_2$ grâce à (3) pour avoir une équation (4) avec I_4 et I_2.

Mais comme (2) nous permet d'isoler I_2 et de l'exprimer en fonction de I_4, en injectant cette expression dans (4) on obtient une équation entre I_4 et les éléments du circuit. Question résolue !

Application

Avec (3) dans (1) :

$$I_4R_4 + (I_4 - I_2)r_1 = E_1 \quad (4)$$

En réexprimant (2) :

$$I_2 = (E_2 - I_4R_4)/r_2$$

En injectant (2) dans (4) :

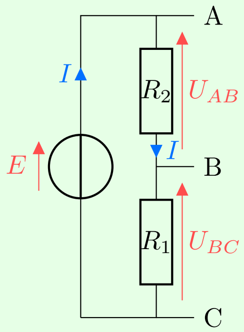
$$I_4(R_4 + r_1) - (E_2 - I_4R_4)\frac{r_1}{r_2} = E_1$$
$$\Leftrightarrow I_4(R_4 + r_1)r_2 - (E_2 - I_4R_4)r_1 = E_1r_2$$
$$\Leftrightarrow I_4(r_1r_2 + r_1R_4 + r_2R_4) = E_1r_2 + E_2r_1$$

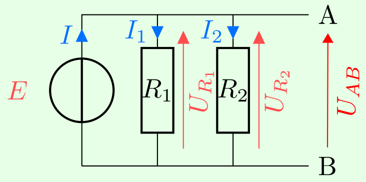
Soit

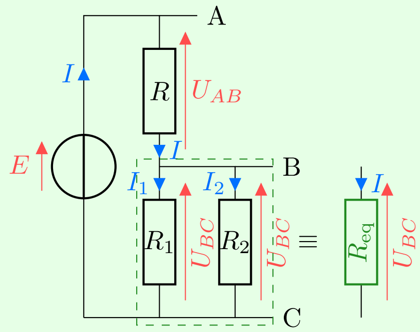
$$\boxed{I_4 = \frac{E_1r_2 + E_2r_1}{r_1r_2 + r_1R_4 + r_2R_4}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_{R_4} = R_4 \times I_4}$$

Exercice 6) Diviseurs de tension vus en TP

Schémas







Application

1) Avec le diviseur de tension :

$$\boxed{\begin{aligned} U_{AB} &= E \times \frac{R_1}{R_1 + R_2} \\ U_{BC} &= E \times \frac{R_2}{R_1 + R_2} \end{aligned}}$$

2) Avec une loi des mailles simple :

$$\boxed{I = \frac{E}{R_1 + R_2}}$$

1) On a directement $\boxed{U_{AB} = E}$.

2) Avec le diviseur de courant :

$$I_1 = I \times \frac{R_{\text{eq}}}{R_1} = \boxed{I \times \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

1) Diviseur de tension :

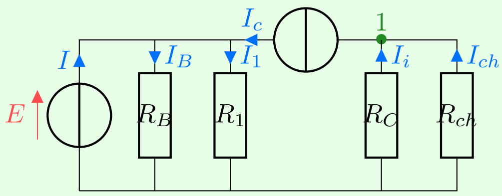
$$\begin{aligned} U_{AB} &= E \frac{R}{R + R_{\text{eq}}} \\ &= \boxed{E \frac{R}{R + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}} \\ U_{BC} &= E \frac{R_{\text{eq}}}{R + R_{\text{eq}}} \\ &= \boxed{E \frac{R_1 R_2}{R(R_1 + R_2) + R_1 R_2}} \end{aligned}$$

2) Diviseur de courant :

$$I_1 = I \frac{R_{\text{eq}}}{R_1} = \boxed{I \frac{R_2}{R_1 + R_2}}$$

Exercice 8) Transistor base commune

Schéma



Ici, on note les intensités comme bon nous semble ; mais pour être cohérent-e avec les lois des nœuds et les intensités générées, on posera I_B et I_1 dans le même sens vers le bas, alors que I_i et I_{ch} se rejoignent en 1 pour donner I_c.

Application

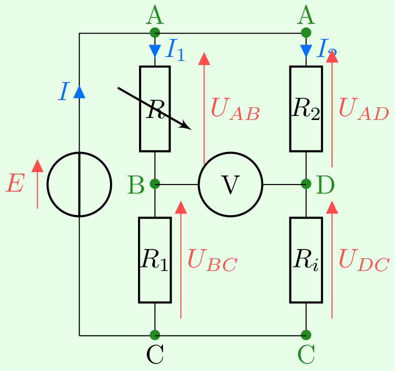
Avec une loi des nœuds en 1, $I_i + I_{ch} = I$, d'où avec la relation du diviseur de courant :

$$\begin{aligned} R_{\text{eq}} &= \frac{R_C R_{ch}}{R_C + R_{ch}} \\ I_{ch} &= I \frac{R_{\text{eq}}}{R_C + R_{ch}} \\ \Leftrightarrow \; & \boxed{I_{ch} = I \frac{R_C}{R_C + R_{ch}}} \end{aligned}$$

Et évidemment, $\boxed{U(R_{ch}) = I_C \times \frac{R_{ch} R_C}{R_C + R_{ch}}}$

Exercice 9) Pont de Wheatstone

Schéma



Résultat attendu

On cherche R_i, ou U_{DC} quand « le pont est équilibré ».

Outil

D'après l'énoncé, le pont est équilibré quand $V = 0$, soit quand $V_B = V_D$.

Application

Si le pont est équilibré, alors $U_{AB} = U_{AD}$ et $U_{BC} = U_{DC}$. Or, avec le pont diviseur de tension, on a à la fois

$$U_{BC} = E\frac{R_1}{R_1 + R}$$
$$U_{DC} = E\frac{R_i}{R_i + R_2}$$

Donc

$$U_{BC} = U_{DC}$$
$$\Leftrightarrow \cancel{E}\frac{R_1}{R_1 + R} = \cancel{E}\frac{R_i}{R_i + R_2}$$
$$\Leftrightarrow R_1(\cancel{R_i} + R_2) = R_i(\cancel{R_1} + R)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{R_i = \frac{R_1 R_2}{R}}$$