

# Évolution avec le redshift

*« We are not to tell nature what she's gotta be. . . .  
She's always got better imagination than we have. »*

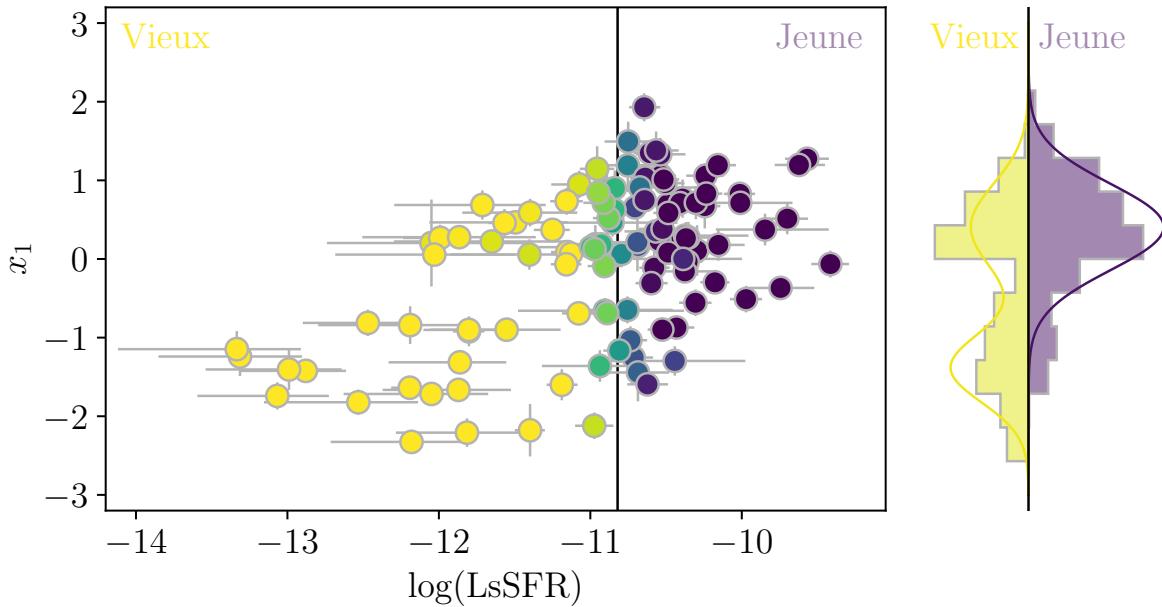
Richard FEYNMAN

Comme présenté Chapitre ??, la nature détaillée des SNe Ia reste incertaine, et à mesure que les statistiques des relevés augmentent, la question des incertitudes systématiques astrophysiques se pose, notamment celle de l'évolution des populations de SNe Ia. Dans cette perspective, nous avons discuté Chapitre ?? des tentatives d'amélioration de notre connaissance de la physique des SNe Ia par le biais de l'étude de corrélations entre leurs propriétés et leur environnement. Nous avons montré l'existence d'un biais en lien avec la masse globale de la galaxie hôte d'une SN, et mis en évidence l'exitence de sous-populations basées sur l'âge qui pourraient être plus pertinentes en tant que traceur de la différence des propriétés observées dans les SNe.

Notre thèse s'appuie sur cette hypothèse et le lien établi par RIGAULT et al. (2020) entre l'étirement des SNe et leur âge. Dans ce chapitre, nous étudions la dépendance au redshift de l'étirement de courbe de lumière issu d'un ajustement par SALT2.4 de SNe Ia, qui est une propriété purement intrinsèque des SNe, afin de sonder sa dérive potentielle avec le redshift. Nous modélisons différentes dépendances Section I.1 et donnons les résultats de notre analyse Section I.2 : nous y verrons que la dérive astrophysique des propriétés des SNe Ia est fortement favorisée et que les modèles de distribution sous-jacente d'étirements constants avec le redshift sont exclus comme étant de bonnes représentations des données par rapport à notre modèle de référence.

## Sommaire

<b>I.1 Modélisation de l'étirement</b> . . . . .	<b>2</b>
I.1.1 Paramétrisations . . . . .	3
I.1.2 Implémentation . . . . .	4
<b>I.2 Résultats</b> . . . . .	<b>6</b>
I.2.1 Comparaison aux données . . . . .	6
I.2.2 Tests supplémentaires . . . . .	9
I.2.3 Discussion . . . . .	12
<b>I.3 Conclusion</b> . . . . .	<b>14</b>



**FIGURE I.1 – Principal :** étirement de courbe de lumière ( $x_1$ ) issu d'un ajustement par SALT2.4 en fonction du LsSFR pour les SNe de SNfactory. La couleur correspond à la probabilité  $p_y$  que la SN Ia soit jeune, c'est-à-dire qu'elle ait  $\log \text{LsSFR} \geq -10.82$  (voir RIGAULT et al. 2020). À droite : histogramme pondéré par  $p_y$  des étirements des SNe, ainsi que le modèle de base ajusté ; les contributions de la population jeune et âgée sont indiquées en violet et en jaune, respectivement.

## I.1 Modélisation de l'étirement

Pour modéliser l'évolution de la distribution complète de l'étirement des SNe en fonction du redshift, nous devons modéliser la distribution de l'étirement des SNe pour chaque sous-échantillon d'âge, étant donné notre modèle susmentionné de l'évolution de la fraction des SNe Ia jeunes et vieilles avec le temps cosmique. RIGAULT et al. (2020) ont présenté la relation entre l'étirement des SN et la mesure du LsSFR, un traceur de l'âge des progéniteurs, en utilisant l'échantillon SNfactory (voir Section ??). Cette relation est illustrée dans la Fig. I.1 pour les SNe de SNfactory utilisées dans l'analyse actuelle. Étant donné la structure du nuage de points étirement-LsSFR, notre modèle de la distribution sous-jacente de l'étirement des SN Ia est défini comme suit :

- la distribution de l'étirement de la population la plus jeune ( $\log(\text{LsSFR}) \geq -10.82$ ) est modélisée comme une distribution normale unique  $\mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2)$ ;
- et la distribution de l'étirement de la population la plus âgée ( $\log(\text{LsSFR}) < -10.82$ ) est modélisée comme un mélange gaussien bimodal  $a \times \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + (1-a) \times \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)$ , où un mode est le même que pour la population jeune,  $a$  représentant l'effet relatif des deux modes.

La fonction de distribution de probabilité (pdf) de l'étirement d'une SN donnée sera alors la combinaison linéaire des distributions d'étirement de ces deux populations, pondérées par sa probabilité  $y^i$  d'être jeune. Pour en décrire l'évolution avec le redshift, nous utilisons une association statistique donnée par la probabilité qu'une SN soit jeune en

**Tableau I.1** – Valeurs des paramètres issus des meilleurs ajustements du modèle de distribution de l'étirement de base lorsqu'il est appliqué à l'ensemble de données de SNfactory seulement (114 SNe Ia), à l'échantillon fiduciel (569 SNe Ia) ou à l'échantillon conservatif (422).

Échantillon	$\mu_1$	$\sigma_1$	$\mu_2$	$\sigma_2$	$a$
SNfactory	$0.41 \pm 0.05$	$0.55 \pm 0.04$	$-1.38 \pm 0.07$	$0.44 \pm 0.06$	$0.48 \pm 0.06$
Fiduciel	$0.37 \pm 0.04$	$0.61 \pm 0.03$	$-1.22 \pm 0.11$	$0.56 \pm 0.07$	$0.51 \pm 0.07$
Conservatif	$0.38 \pm 0.04$	$0.60 \pm 0.03$	$-1.26 \pm 0.09$	$0.53 \pm 0.06$	$0.47 \pm 0.06$

fonction de son redshift, décrite par la fraction de jeunes SNe Ia et donnée par  $\delta(z)$  (voir Équation ??). Notre modèle de dérive avec le redshift de la moyenne de la distribution sous-jacente d'étirement  $X_1(z)$  est alors donnée par :

$$X_1(z) = \delta(z) \times \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + (1 - \delta(z)) \times [a \times \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + (1 - a) \times \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)] \quad (\text{I.1})$$

Ceci constitue notre modèle de dérive de base.

### I.1.1 Paramétrisations

Compte tenu de la probabilité  $y^i$  qu'une SN donnée soit jeune et supposant notre modèle de base (voir Section I.1), la probabilité de mesurer un étirement SALT2.4  $x_1^i$  avec une erreur  $\mathrm{d}x_1^i$  est donné par :

$$\begin{aligned} \mathcal{P}(x_1^i | \vec{\theta}; \mathrm{d}x_1^i, y^i) &= y^i \times \mathcal{N}(x_1^i | \mu_1, \sigma_1^2 + \mathrm{d}x_1^{i2}) + \\ &(1 - y^i) \times \left[ a \times \mathcal{N}(x_1^i | \mu_1, \sigma_1^2 + \mathrm{d}x_1^{i2}) + \right. \\ &\quad \left. (1 - a) \times \mathcal{N}(x_1^i | \mu_2, \sigma_2^2 + \mathrm{d}x_1^{i2}) \right] \end{aligned} \quad (\text{I.2})$$

L'estimation du maximum de vraisemblance des cinq paramètres libres  $\vec{\theta} \equiv (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, a)$  du modèle s'obtient en minimisant l'équation suivante :

$$-2 \ln(L) = -2 \sum_i \ln \mathcal{P}(x_1^i | \vec{\theta}; \mathrm{d}x_1^i, y^i) \quad (\text{I.3})$$

Selon que nous pouvons estimer  $y^i$  directement à partir des mesures de LsSFR ou non, il y a deux façons de procéder. Nous les décrivons ci-dessous.

#### Avec LsSFR

Pour l'échantillon SNfactory, nous pouvons facilement fixer  $y^i = p_y^i$ , la probabilité d'avoir  $\log(\mathrm{LsSFR}) \geq -10,82$  (voir Figure I.1) afin de minimiser l'Équation I.3 par rapport à  $\vec{\theta}$ . Les résultats de l'ajustement de ce modèle avec les SNe Ia de SNf sont présentés dans le Tableau I.1 et illustrés Figure I.2.

## Sans LsSFR

Lorsque les mesures directes de LsSFR font défaut (c'est-à-dire en absence de  $p_y^i$ ), nous pouvons étendre cette analyse aux échantillons autres que SNfactory en utilisant l'évolution avec le redshift de la fraction  $\delta(z)$  des jeunes SNe Ia (Équation ??) comme un indicateur alternatif de la probabilité qu'une SN soit jeune correspondant à son prior<sup>1</sup>. Cela implique toujours la minimisation de l'Équation I.3 par rapport aux paramètres  $\vec{\theta} \equiv (\mu_1, \mu_2, \sigma_1, \sigma_2, a)$  de la distribution d'étirement  $X_1$  (Équation I.2) mais en supposant cette fois que  $y^i = \delta(z^i)$  pour une SN  $i$  donnée.

Pour le reste de cette analyse, nous avons ainsi ajusté l'Équation I.3 en utilisant  $p_y^i$  la probabilité que la SN  $i$  soit jeune lorsqu'elle est disponible (c'est-à-dire pour les données de SNfactory) et  $\delta(z^i)$ , la fraction attendue de jeunes SNe Ia au redshift  $z^i$  de la SN sinon.

Les résultats de l'ajustement de ce modèle à l'ensemble des 569 (respectivement 422) SNe Ia de l'échantillon fiduciel (conservatif) sont présentés dans le Tableau I.1, et l'évolution prédictive de l'étirement avec le redshift ( $x_1$  attendu compte tenu de la distribution de l'équation I.1) est illustrée sous la forme d'une bande bleue dans la Figure I.2, qui tient compte des erreurs des paramètres et de leurs covariances. Cette figure montre que l'étirement moyen mesuré des SNe Ia par intervalle de redshift (contenant tous le même nombre de données) suit de près notre modélisation de la dérive avec le redshift. C'est en effet ce que nous attendons si les environnements vieux favorisent les faibles étirements de SN (voir par exemple HOWELL et al. 2007) et si la fraction de vieilles SNe Ia diminue en fonction du redshift. Nous discutons quantitativement de ces résultats Section I.2.

### I.1.2 Implémentation

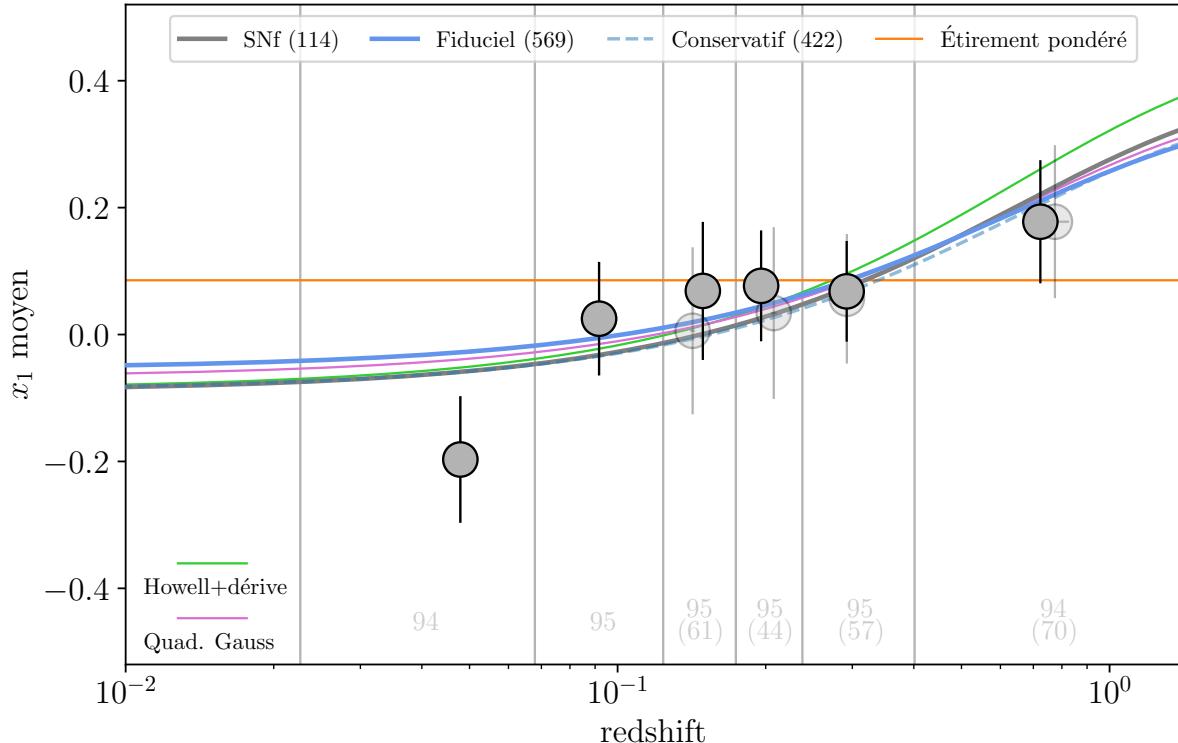
Dans la Section I.1.1, nous avons modélisé la distribution sous-jacente de l'étirement des SNe Ia en suivant RIGAULT et al. (2020), c'est-à-dire avec une unique Gaussienne pour les jeunes SNe et un mélange de deux Gaussiennes pour la population des vieilles SNe Ia, la première étant la même que pour la jeune population et la seconde étant spécifique aux SNe à déclin rapide, qui semblent n'exister que dans les environnements localement vieux. C'est ce que nous appelons notre modèle de base. Cependant, pour tester différents choix de modélisation, nous avons mis en œuvre une suite de paramétrisations alternatives que nous avons également ajustées aux données en suivant la procédure décrite dans la Section I.1.1.

HOWELL et al. (2007) ont utilisé un modèle unimodal plus simple par catégorie d'âge, en supposant une distribution normale unique pour chacune des populations jeune et âgée. Nous avons donc considéré un modèle « Howell+dérive », comportant une seule Gaussienne par groupe d'âge et intégrant la dérive avec  $\delta(z)$  de l'équation ?.?. L'évolution moyenne de l'étirement avec le redshift de ce modèle est tracée en vert Figure I.2.

Alternativement, comme nous cherchons à vérifier l'existence d'une évolution avec le redshift, nous avons également testé des modèles constants en limitant les modèles de base et de HOWELL à utiliser une fraction de jeunes SNe Ia  $\delta(z) \equiv f$  indépendante du redshift ; ces modèles sont appelés ci-après « base+constant » et « Howell+constant ».

Nous avons également considéré un autre modèle intrinsèquement non-dérivant, la forme fonctionnelle développée pour la méthode *BEAMS with Bias Correction* (BBC, SCOLNICK

1. C'est-à-dire la probabilité qu'une SN soit jeune étant donné son redshift.



**FIGURE I.2** – Évolution de l’étirement moyen ( $x_1$ ) des SNe Ia issus d’un ajustement SALT2.4 en fonction du redshift pour notre modèle de base. Les marqueurs montrent la moyenne pondérée de l’étirement mesurée dans des intervalles de redshift de tailles d’échantillon égales, indiquées en gris clair en bas de chaque intervalle. Les marqueurs opaques et transparents sont utilisés lorsque les échantillons fiduciel ou conservatif sont considérés, respectivement. La ligne horizontale orange représente l’étirement pondéré des données. Les meilleurs ajustements de notre modèle de dérive de base sont présentés en bleu, bleu pointillé et gris lorsqu’ils sont ajustés sur l’échantillon fiduciel, conservatif ou l’ensemble de données SNfactory uniquement, respectivement ; ils sont tous compatibles entre eux et avec les données. La bande bleu clair illustre l’amplitude de l’erreur (covariance comprise) du modèle le mieux ajusté lorsque nous considérons l’ensemble de données fiduciel. Les lignes verte et violette représentent les meilleurs ajustements d’autres modèles dérivants, voir Sections I.1.2, I.2.2.

et KESSLER 2016 ; KESSLER et SCOLNIC 2017), utilisée dans les analyses cosmologiques utilisant les SNe Ia les plus récentes (par exemple SCOLNIC et al. 2018 ; ABBOTT et al. 2019 ; RIESS et al. 2016, 2019) pour tenir compte des biais de MALMQUIST. Le formalisme de BBC suppose des distributions d'étirement Gaussiennes asymétriques basées sur la forme de chaque échantillon (et donc intrinsèquement sans dérive) :  $\mathcal{N}(\mu, \sigma_-^2 \text{ si } x_1 < \mu, \text{ sinon } \sigma_+^2)$ . L'idée derrière cette approche par échantillon est double (SCOLNIC et KESSLER 2016 ; SCOLNIC et al. 2018) :

- 1) Les biais de MALMQUIST sont déterminés par les propriétés des relevés ;
- 2) Comme les relevés actuels couvrent des plages de redshift limitées, une approche par échantillon couvre certaines informations potentielles sur l'évolution avec le redshift.

Une discussion plus détaillée sur BBC se trouve Section I.2.3. Enfin, par souci d'exhaustivité, nous avons également considéré des modèles Gaussiens purs et asymétriques indépendants du redshift.

## I.2 Résultats

Nous exposons maintenant les résultats quantitatifs de cette étude Section I.2.1, et proposons une discussion de ceux-ci Section I.2.3.

### I.2.1 Comparaison aux données

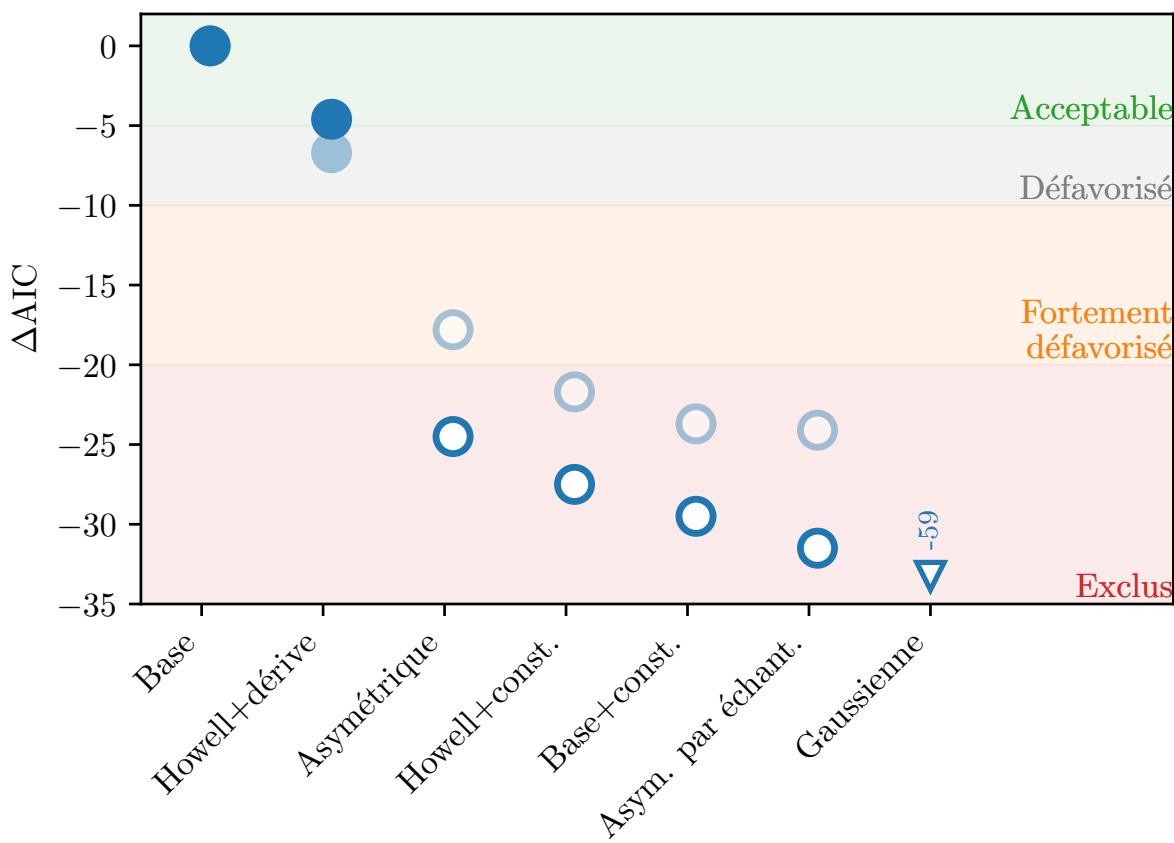
Nous avons ajusté chacun des modèles décrits ci-dessus sur les échantillons fiduciel et conservatif (voir Chapitre ??). Les résultats sont rassemblés dans le Tableau I.2 et sont illustrés Figure I.3.

**Tableau I.2** – Comparaison de la capacité relative de chaque modèle à décrire les données.

Nom	dérive	$k$	Échantillon fiduciel (569 SNe)			Échantillon conservatif (422 SNe)		
			$-2 \ln(L)$	AIC	$\Delta \text{AIC}$	$-2 \ln(L)$	AIC	$\Delta \text{AIC}$
Base	$\delta(z)$	5	1456,7	1466,7	–	1079,5	1089,5	–
Howell+dérive	$\delta(z)$	4	1463,3	1471,3	–4,6	1088,2	1096,2	–6,7
Asymétrique	–	3	1485,2	1491,2	–24,5	1101,3	1107,3	–17,8
Howell+constant	$f$	5	1484,2	1494,2	–27,5	1101,2	1111,2	–21,7
Base+constant	$f$	6	1484,2	1496,2	–29,5	1101,2	1113,2	–23,7
Asym. par échant.	Par échant.	3×5	1468,2	1498,2	–31,5	1083,6	1113,6	–24,1
Gaussienne	–	2	1521,8	1525,8	–59,1	1142,6	1146,6	–57,1

**Notes.** Pour chaque modèle considéré, nous indiquons si le modèle dérive ou non, son nombre de paramètres libres  $k$ , et pour les échantillons fiduciel et conservatif,  $-2 \ln(L)$  (voir Équation I.3), l'AIC et la différence d'AIC ( $\Delta \text{AIC}$ ) entre ce modèle et le modèle de base, choisi comme référence car présentant l'AIC le plus faible.

Parce que les divers modèles présentent différents degrés de liberté, nous avons utilisé le critère d'information d'AKAIKE (AIC, voir par exemple BURNHAM 2004) pour comparer leur capacité à décrire correctement les observations. Cet estimateur pénalise l'ajout de



**FIGURE I.3** –  $\Delta\text{AIC}$  entre le modèle de référence et les autres modèles (voir Tableau I.2). Les marqueurs bleus pleins et ouverts correspondent aux modèles avec et sans dérive du redshift, respectivement. Les marqueurs transparents montrent les résultats lorsque l’analyse est effectuée sur l’échantillon conservatif plutôt que sur l’échantillon fiduciel. Les bandes de couleur illustrent la validité des modèles, d’acceptable ( $\Delta\text{AIC} > -5$ ) à exclu ( $\Delta\text{AIC} < -20$ ), voir le corps de texte. En suivant ces valeurs d’AIC, tous les modèles sans dérive (marqueurs ouverts) sont exclus car il représentent moins bien les données que le modèle de référence, avec dérive.

degrés de liberté supplémentaire afin d’éviter un ajustement excessif des données. Il est défini comme suit :

$$\text{AIC} = -2 \ln(L) + 2k, \quad (\text{I.4})$$

où  $-2 \ln(L)$  est obtenu en minimisant l’Équation I.3, et  $k$  est le nombre de paramètres libres à ajuster. Le modèle de référence est celui de plus petit AIC ; par rapport à ce modèle, les modèles avec  $\Delta\text{AIC} > -5$  sont qualifiés d’acceptables, ceux avec  $-5 > \Delta\text{AIC} > -20$  ne sont pas favorisés et ceux avec  $\Delta\text{AIC} < -20$  sont jugés exclus. Cela correspond approximativement aux limites de 2, 3 et  $5\sigma$  pour une distribution de probabilité Gaussienne.

Le meilleur modèle (avec le plus petit AIC) est le modèle dit de base et constitue donc notre modèle de référence ; ceci est vrai pour les échantillons fiduciel et conservatif. Le modèle de base a également le plus petit  $-2 \ln(L)$ , ce qui en fait le modèle le plus probable même si nous ne tenons pas compte de la question de l’ajustement excessif qui est pris en compte par le formalisme de l’AIC.

En outre, nous constatons que les distributions d’étirement indépendantes du redshift

sont toutes exclues comme descriptions appropriées des données relativement au modèle de base. Le meilleur modèle non-dérivant (le modèle asymétrique) a une chance très marginale ( $p \equiv \exp(\Delta\text{AIC}/2) = 5 \times 10^{-6}$ ) de décrire les données aussi bien que le modèle de base. Ce résultat n'est qu'une évaluation quantitative de faits qualitatifs qui sont clairement visibles sur la Figure I.2 : l'étirement moyen des SNe par intervalle de redshift suggère fortement une évolution significative du redshift plutôt qu'une valeur constante, et cette évolution est bien décrite par l'Équation ??.

De manière surprenante, la modélisation asymétrique Gaussienne par échantillon utilisée par les implémentations actuelles de la technique BBC (SCOLNIC et KESSLER 2016 ; KESSLER et SCOLNIC 2017) présente l'une des valeurs d'AIC les plus élevées de notre analyse. Bien que son  $-2 \ln(L)$  soit le plus petit de tous les modèles indépendants du redshift (mais toujours inférieur de 11,5 au modèle de référence), il est fortement pénalisé car il nécessite 15 paramètres libres ( $\mu_0, \sigma_{\pm}$  pour chacun des cinq échantillons de l'analyse). Par conséquent, il en résulte un  $\Delta\text{AIC} < -20$ , ce qui pourrait être interprété comme une probabilité  $p = 2 \times 10^{-7}$  d'être une aussi bonne représentation des données que le modèle de référence.

Nous notons que lorsque nous comparons des modèles qui ont été ajustés sur des sous-échantillons individuels plutôt que globalement, le critère d'information bayésien ( $\text{BIC} = -2 \ln(L) + k \ln(n)$ , avec  $n$  le nombre de points de données) pourrait être plus adapté que l'AIC car il tient explicitement compte du fait que chaque sous-échantillon est ajusté séparément : le BIC du modèle par échantillon est alors la somme des BIC de chaque échantillon. Nous trouvons  $\Delta\text{BIC} = -48$ , ce qui réfute également le modèle Gaussien asymétrique par échantillon comme étant aussi pertinent que notre modèle de référence.

Afin de s'assurer que nos résultats ne sont pas influencés par le sous-échantillon HST incomplètement modélisé, nous avons recalculé le  $\Delta\text{AIC}$  pour chaque modèle en excluant cet ensemble de données ; cela n'a pas modifié le  $\Delta\text{AIC}$  de plus de quelques dixièmes. La cohérence de ces valeurs avec celles du Tableau I.2 montre que le sous-échantillon HST n'influence pas nos conclusions.

Nous rapportons dans le Tableau I.3 notre détermination de  $\mu_0$  et  $\sigma_{\pm}$  pour chaque échantillon lorsqu'un modèle Gaussien asymétrique a été appliqué, et ajusté sur les échantillons normalement sans effets de sélection en utilisant nos coupes fiducielles (voir Chapitre ??). Nos résultats sont en accord étroit avec ceux de SCOLNIC et KESSLER (2016) pour SNLS et SDSS et avec les résultats rapportés par SCOLNIC et al. (2018) pour PS1, qui ont dérivé ces paramètres de modèle en utilisant le formalisme complet BBC. Ce dernier utilise de nombreuses simulations pour modéliser les effets de sélection observationnels (voir les détails par exemple Section 3 de KESSLER et SCOLNIC 2017, et le Chapitre ??). L'accord entre notre ajustement des Gaussiennes asymétriques sur la partie supposée sans effets de sélection des échantillons et les résultats dérivés en utilisant le formalisme BBC soutient notre approche pour construire un échantillon avec des effets de sélection observationnels négligeables. Si nous devions utiliser les valeurs les mieux ajustées de SCOLNIC et KESSLER (2016) et de SCOLNIC et al. (2018) pour les paramètres asymétriques  $\mu_0, \sigma_{\pm}$  pour les échantillons SNLS, SDSS et PS1 respectivement, le  $\Delta\text{AIC}$  entre notre modèle de dérive de référence et la modélisation BBC irait encore plus loin, passant de -32 à -47. Nous discutons plus en détail de la conséquence de ce résultat pour la cosmologie dans la Section I.2.3.

**Tableau I.3** – Paramètres de meilleur ajustement pour notre modélisation asymétrique par échantillon de la distribution d'étirement sous-jacente.

Asymétrique	$\sigma_-$	$\sigma_+$	$\mu_0$
SNfactory	$1,34 \pm 0,13$	$0,41 \pm 0,10$	$0,68 \pm 0,15$
SDSS <sup>1</sup>	$1,31 \pm 0,11$	$0,42 \pm 0,09$	$0,72 \pm 0,13$
PS1 <sup>2</sup>	$1,01 \pm 0,11$	$0,52 \pm 0,12$	$0,38 \pm 0,16$
SNLS <sup>3</sup>	$1,41 \pm 0,13$	$0,15 \pm 0,13$	$1,22 \pm 0,15$
HST	$0,76 \pm 0,36$	$0,79 \pm 0,35$	$0,11 \pm 0,44$

**Notes.** Nous comparons ces valeurs à celles des études intégrant les mêmes distributions asymétriques.

<sup>1</sup>  $\sigma_- = 1,65 \pm 0,08$ ,  $\sigma_+ = 0,10 \pm 0,10$ ,  $\mu_0 = 1,14 \pm 0,03$  (Tableau 1, SCOLNIC et KESSLER 2016)

<sup>2</sup>  $\sigma_- = 0,96 \pm 0,16$ ,  $\sigma_+ = 0,51 \pm 0,14$ ,  $\mu_0 = 0,37 \pm 0,21$  (Tableau 3, SCOLNIC et al. 2018)

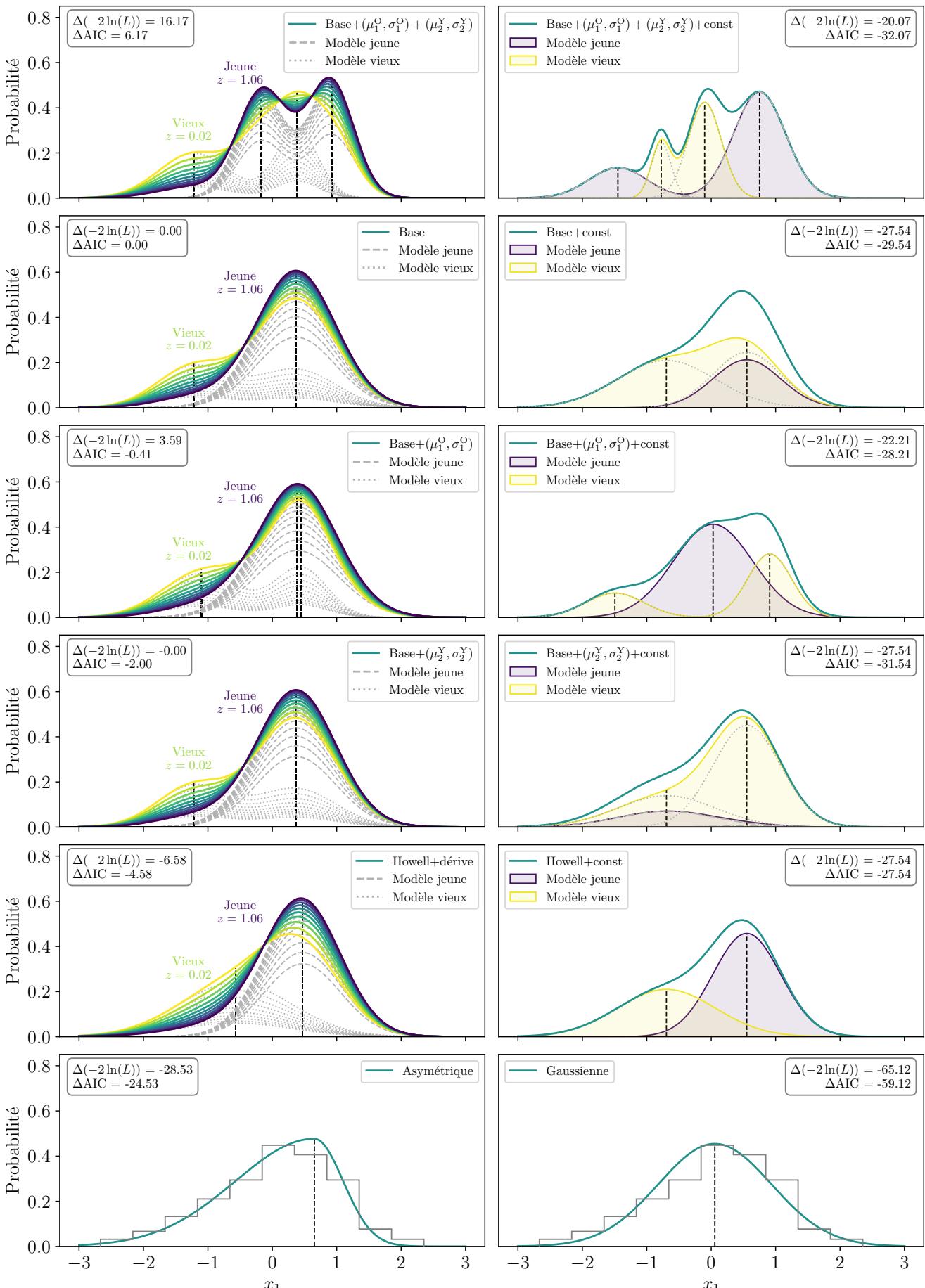
<sup>3</sup>  $\sigma_- = 1,23 \pm 0,10$ ,  $\sigma_+ = 0,28 \pm 0,10$ ,  $\mu_0 = 0,96 \pm 0,14$  (Tableau 1, SCOLNIC et KESSLER 2016)

## I.2.2 Tests supplémentaires

Nous avons également effectué des tests permettant au mode d'étirement élevé de la population âgée de différer de celui de la population jeune, ajoutant ainsi deux degrés de liberté ( $\mu_1^O, \sigma_1^O$ , voir ligne 3 Figure I.4). L'ajustement correspondant n'est pas significativement meilleur, avec un  $\Delta\text{AIC}$  de  $-0,4$  du fait de la pénalisation de cet estimateur. Cela renforce notre hypothèse selon laquelle les populations jeune et âgée semblent effectivement partager le même mode sous-jacent d'étirement élevé. De plus, nous pouvons nous demander si un mode de faible étirement pourrait également exister dans la population jeune (voir la Figure I.1). Nous avons testé cette hypothèse en permettant à cette population d'être aussi bimodale, en rajoutant deux paramètres ( $\mu_2^Y, \sigma_2^Y$ , ligne 4 Figure I.4). Nous avons constaté que l'amplitude d'un tel mode de faible étirement est fondamentalement 0 dans cette jeune population, n'apportant aucune amélioration dans la qualité de l'ajustement (même  $-2\ln(L)$  que le modèle de base), et donc discriminé négativement par la réduction de son AIC ( $\Delta\text{AIC} = -2,0$ ).

Finalement, nous avons également implémenté un modèle combinant ces deux hypothèses, c'est-à-dire avec deux Gaussiennes par catégorie d'âge, chacune de ces quatre Gaussiennes pouvant différer les unes des autres. Celui-ci présente alors quatre valeurs moyennes sensiblement différentes, d'amplitudes non-compatibles avec 0 (voir ligne 1 Figure I.4). Une telle liberté dans la paramétrisation permet alors à ce modèle d'être considéré comme une bien meilleure représentation des données que notre modèle de référence, avec un  $\Delta\text{AIC} = 6,17$ . Sa version constante avec le redshift reste cependant complètement défavorisée avec un  $\Delta\text{AIC} = -32,07$ . L'évolution moyenne de l'étirement avec le redshift de ce modèle est représenté en violet Figure I.2 sous la légende « Quad. Gauss ». Bien que sa qualité d'ajustement soit nettement supérieure à notre modèle de base, il n'a pas été conservé dans cette analyse étant donné la complexité de sa composition, peu motivée physiquement, et la grande similitude dans l'évolution moyenne en résultant. Cette implémentation semblerait principalement représenter une limite à la définition de l'AIC et à sa capacité à permettre de discriminer deux modèles censés représenter une réalité physique. L'ensemble des modèles testés sont présentés Figure I.4.

Enfin, le fait d'ignorer les mesures du LsSFR, qui ne sont disponibles que pour l'ensemble



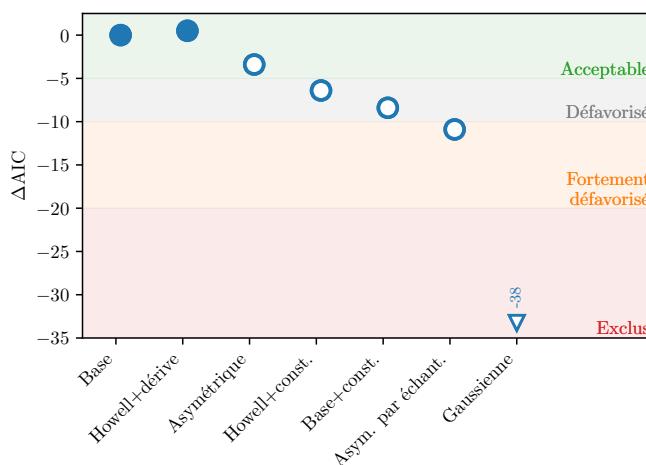
**FIGURE I.4** — Modèles implémentés et testés dans l'étude de l'évolution de l'étirement avec le redshift. Les modèles dérivants sont tracés dans la colonne de gauche et leur version constante dans la colonne de droite. Les deux modèles ne se basant pas sur des catégories d'âge (la simple Gaussienne et la Gaussienne asymétrique) sont représentées dans la dernière ligne côte à côte, conjointement à l'histogramme des étirements de notre échantillon. Les quantités  $\Delta(-2 \ln(L))$  et  $\Delta AIC$  par rapport au modèle de référence (ligne 2) sont indiqués dans les coins extérieurs de chaque figure. Pour les modèles dérivants, nous en avons tracé dix réalisations selon la valeur du redshift moyen considéré, de la valeur la plus basse de notre échantillon ( $z = 0.02$ ) à la valeur maximale des données totales (sans coupe en redshift) de SNLS ( $z = 1.06$ ) représentés en couleur allant du jaune (bas redshift, plus vieil environnement) au violet (haut redshift, environnement jeune) et les distributions des populations jeune et vieille constituant le modèle total sont en gris pointillé et fin pointillé, respectivement. Les modèles non-dérvants sont tracés en vert avec les sous-populations vieille et jeune en jaune et violet, respectivement. Nous y retrouvons l'information que tous les modèles non-dérvants sont exclus en tant que bonnes représentations des données par rapport au modèle de base.

de données SNfactory (voir la Section I.1.1), réduit la pertinence des résultats présentés dans cette section, comme prévu. Malgré cela, les modèles non-dérivants restent fortement défavorisés. Voir le Tableau I.4 et la Figure I.5. Par exemple, le modèle asymétrique Gaussien par échantillon le mieux ajusté est toujours  $\Delta\text{AIC} < -10$ , ce qui est moins représentatif des données que notre modèle de dérive de référence. Nous notons que les seuls modèles impactés par l'absence de LsSFR dans leur ajustement sont les modèles dérivants : fixer la fraction de jeunes SNe Ia rend les modèles insensibles à ce paramètre. Ces résultats permettent de marquer la forte information apportée par ce traceur, expliquant pourquoi les études de distributions sous-jacentes n'utilisant pas le LsSFR sont moins clivantes que celle-ci. Plus généralement, cela soulève la question de savoir dans quelle mesure un traceur environnemental (ici le LsSFR) trace l'âge. Cette question a reçu une analyse dédiée dans BRIDAY et al. (2022).

**Tableau I.4** – Comparaison de la capacité relative de chaque modèle à décrire les données par rapport au modèle de référence sans utiliser le LsSFR.

Nom	dérive	$k$	Échantillon fiduciel (569 SNe)		
			$-2 \ln(L)$	AIC	$\Delta\text{AIC}$
Référence	$\delta(z)$	5	1477,8	1487,8	–
Howell+dérive	$\delta(z)$	4	1479,3	1487,3	+0,5
Asymétrique	–	3	1485,2	1491,2	-3,4
Howell+constant	$f$	5	1484,2	1494,2	-6,4
Référence+const	$f$	6	1484,2	1496,2	-8,4
Asym. par échant.	Par échant.	3×5	1468,2	1498,2	-10,9
Gaussienne	–	2	1521,8	1525,8	-38,0

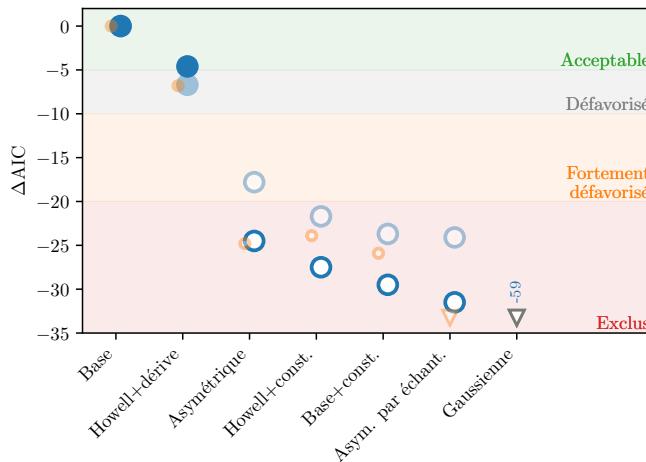
**Notes.** Dans cette étude sans LsSFR, nous remarquons que seuls les deux modèles dérivants changent de valeur par rapport au Tableau I.2 : fixer la fraction de jeunes étoiles rend les modèles insensibles à l'utilisation du LsSFR. Dans cette disposition, le modèle de référence arrive second au niveau de l'AIC, mais toujours premier au classement par  $-2 \ln(L)$ .



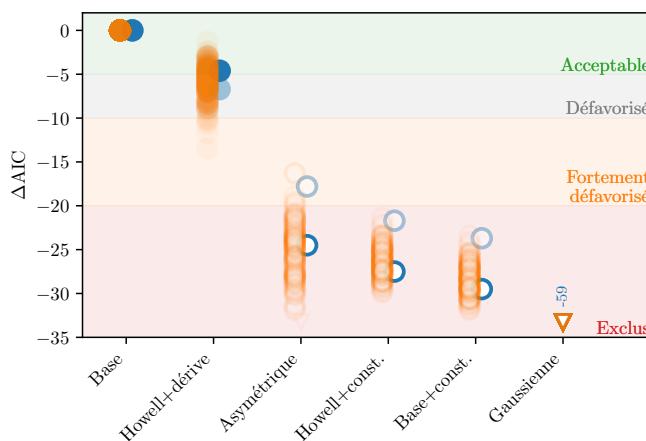
**FIGURE I.5** –  $\Delta\text{AIC}$  entre le modèle de référence et les autres modèles sans utiliser le LsSFR (voir Tableau I.4). La légende est la même qu'en Figure I.3. En revanche, la robustesse des résultats concernant l'inaptitude des modèles non-dérivants à représenter correctement les données diminue, même si les meilleurs modèles sont toujours ceux incluant une dérive (marqueurs pleins).

Nous rapportons également qu'une implémentation de ces travaux avec des coupes dites « superconservatives », avec  $z_{\text{lim,SDSS}} = 0,10$ ,  $z_{\text{lim,PS1}} = 0,20$ ,  $z_{\text{lim,SNLS}} = 0,30$  pour

un total de 244 SNe Ia a également été effectuée. Ces coupes discriminent alors d'autant plus les modèles non-dérivants, tous leurs AIC chutant plus que le modèle Howell+dérive ; notamment le modèle asymétrique passe sous la barre des  $\Delta\text{AIC} < -20$ . La Figure I.6 représente ces résultats. Un ultime test a été de considérer 200 échantillons de la taille de notre échantillon conservatif, mais tirés aléatoirement de l'échantillon fiduciel. Pour les modèles non-dérivants, nous trouvons alors une répartition des  $\Delta\text{AIC}$  autour de la valeur fiduciale, mais rarement meilleure que l'échantillon conservatif initial. Pour le modèle Howell+dérive nous trouvons la même répartition, mais jamais meilleure que le modèle de base, qui reste donc encore dans cette étude le modèle de référence, voir Figure I.7.



**FIGURE I.6** –  $\Delta\text{AIC}$  entre le modèle de base et les autres modèles, avec cette-fois ci en petits marqueurs oranges les résultats de l'étude pour un échantillon « superconservatif » constitué de 244 SNe Ia. Le modèle Howell+dérive n'est pas fortement défavorisé par cette coupe, alors que les modèles non-dérivants y sont plus sensibles, tous voyant leur valeur d'AIC baisser significativement.



**FIGURE I.7** –  $\Delta\text{AIC}$  entre le modèle de base et les autres modèles, avec ici en marqueurs orange les résultats pour 200 modèles ajustés avec des données de la taille de l'échantillon conservatif, mais tirées aléatoirement de l'échantillon fiduciel. Bien qu'une augmentation du  $\Delta\text{AIC}$  par rapport au cas fiduciel survienne par moment, aucun modèle n'obtient de meilleur AIC que le modèle de base, celui-ci s'imposant encore comme le modèle de référence.

### I.2.3 Discussion

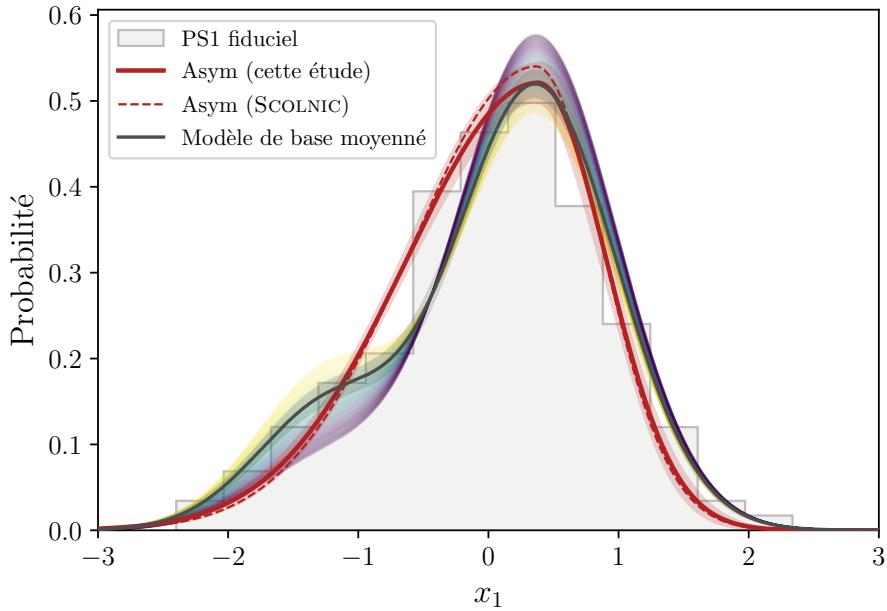
À notre connaissance, la modélisation de la dérive des redshifts des SNe Ia n'a jamais été explicitement utilisée dans les analyses cosmologiques, bien qu'un formalisme de hiérarchie bayésienne tel que UNITY (RUBIN et al. 2015), BAHAMAS (SHARIFF et al. 2016) ou Steve (HINTON et al. 2019) puisse facilement le permettre (voir, par exemple, les sections 1.3 et 2.5 de RUBIN et al. 2015). Ne pas le faire constitue un problème de second ordre pour la cosmologie avec les SNe Ia car cela n'affecte que la manière dont le biais de MALMQUIST

est pris en compte. Tant que le paramètre de normalisation  $\alpha$  de la relation de PHILLIPS (PHILLIPS 1993) ne dépend pas du redshift (une étude qui dépasse le cadre de cette thèse, mais voir, par exemple SCOLNICK et al. 2018), les magnitudes corrigées de l'étirement utilisées pour la cosmologie sont effectivement insensibles à la distribution d'étirement sous-jacente pour les échantillons complets. Cependant, les enquêtes présentent généralement un biais de MALMQUIST significatif pour la moitié supérieure de leur distribution de redshift de SNe. Par conséquent, une mauvaise modélisation de la distribution d'étirement sous-jacente biaisera les magnitudes dérivées des SNe de ces études.

Les techniques de correction du biais de MALMQUIST couramment utilisées, telles que le formalisme BBC, supposent des fonctions Gaussiennes asymétriques par échantillon pour modéliser les distributions d'étirement et de couleur sous-jacentes. Comme le montre la Section I.2 cependant, une telle distribution par échantillon est exclue par rapport à notre modèle de dérive. Contrairement à ce que (SCOLNICK et KESSLER 2016, Section 2) et (SCOLNICK et al. 2018, Section 5.4) ont suggéré, à savoir que les études traditionnelles couvrent des plages de redshift suffisamment limitées pour que l'approche par échantillon tienne compte des dérives implicites du redshift, une modélisation directe de la dérive avec le redshift est donc plus appropriée qu'une approche par échantillon. Nous ajoutons ici qu'au fur et à mesure que les relevés cosmologiques modernes tentent de couvrir des plages de redshift de plus en plus larges afin de réduire les incertitudes systématiques de calibration, cette approche par échantillon devient moins valide, notamment pour PS1, le *Dark Energy Survey* (DES, ABBOTT et al. 2019), et, bientôt, le LSST (IVEZIĆ et al. 2019).

Nous illustrons Figure I.8 la différence de prédiction de la distribution de l'étirement sous-jacent entre la modélisation asymétrique par échantillon et notre modèle de dérive de référence pour l'échantillon PS1. Notre modèle est bimodal, et l'amplitude relative de chaque mode dépend de la fraction de jeunes et vieilles SNe Ia dans l'échantillon en fonction du redshift : plus la fraction de vieilles SNe Ia est élevée (à un faible redshift), plus l'amplitude du mode d'étirement faible spécifique aux vieilles SNe Ia est élevé. Cette dépendance avec le redshift des distributions d'étirement sous-jacentes est représentée par des couleurs allant du bleu au rouge sur la Figure I.8 pour la gamme de redshift couvert par l'ensemble de PS1. L'histogramme des  $x_1$  observés suit le modèle que nous avons défini en utilisant la somme des distributions sous-jacentes individuelles au redshift de chaque SN du sondage (en noir). Comme prévu, les deux approches de modélisation diffèrent surtout dans la partie négative de la distribution des étirements de SNe. La distribution Gaussienne asymétrique passe par le milieu de la distribution bimodale, surestimant le nombre de SNe Ia à  $x_1 \approx 0,7$  et le sous-estimant à  $x_1 \approx 1,7$  par rapport à notre modèle de dérive de référence pour les redshifts typiques des SNe de PS1. Cela signifie que la magnitude standardisée corrigée du biais d'une SN estimée à un redshift affecté par la sélection observationnelle serait biaisée par une mauvaise modélisation de la véritable distribution d'étirement sous-jacente.

L'évaluation de l'amplitude de ce biais de magnitude pour la cosmologie fait l'objet du Chapitre ??, en utilisant notre modèle de référence (Équation I.1) à la place du modèle par échantillon. Cependant, nous avons déjà mis en évidence que même si un modèle par échantillon sans dérive pouvait donner des résultats comparables dans la partie limitée en volume des différents échantillons, ces modèles seraient différents lorsqu'ils seraient extrapolés à des redshifts plus élevés, précisément là où la distribution sous-jacente sera importante pour corriger les biais de MALMQUIST.



**FIGURE I.8** – Distribution de l’étirement des SNe Ia de PS1 issus d’un ajustement SALT2.4 ( $x_1$ ) pour toutes les données du sondage, au-delà de notre limite fiduciale de redshift (histogramme gris). Cette distribution est supposée être un tirage aléatoire de la distribution d’étirement sous-jacente. Les lignes rouges montrent le modèle BBC de cette distribution sous-jacente (Gaussienne asymétrique). La ligne pleine (et sa bande) est notre meilleur ajustement (et son erreur) ; la ligne pointillée montre le résultat de SCOLNIC et al. (2018). La ligne noire (et sa bande) montre notre modélisation de référence la mieux ajustée (et son erreur, voir Tableau I.1) qui inclut la dérive du redshift. À titre d’illustration, nous montrons (coloré du jaune au violet avec des redshifts croissants) l’évolution de la distribution d’étirement sous-jacente en fonction du redshift pour la plage de redshift couverte par toutes les données de PS1.

À l’ère de la cosmologie moderne, où nous visons à mesurer  $w_0$  à un niveau inférieur au pourcentage et  $w_a$  avec une précision de 10% (par exemple, IVEZIĆ et al. 2019), nous soulignons que la modélisation correcte de la dérive potentielle avec le redshift des SNe Ia doit être étudiée plus profondément et qu’il faut faire attention lorsque nous utilisons des échantillons qui sont affectés par des effets de sélection observationnels.

### I.3 Conclusion

Nous avons présenté une première étude de la dérive de la distribution d’étirement sous-jacente des SNe Ia en fonction du redshift. Nous avons construit Chapitre ?? des sous-échantillons de SNe effectivement limités en volume à partir de l’ensemble de données Pantheon (SCOLNIC et al. 2018, SDSS, PS1, SNLS) auxquels nous avons ajouté les données HST et SNfactory (RIGAULT et al. 2020) pour les intervalles à haut et bas redshifts, respectivement. Nous n’avons considéré que les SNe qui ont été découvertes dans la plage de redshifts de chaque enquête dans laquelle les effets de sélection observationnels sont négligeables, de sorte que les étendues de SNe Ia observées constituent un échantillon aléatoire de la véritable distribution sous-jacente. Nous avons ainsi obtenu un échantillon fiduciel de base de 569 SNe Ia (422 SNe lorsque des coupes plus conservatives sont

appliquées).

Suivant les prédictions de RIGAULT et al. (2020), nous avons introduit un modèle de dérive avec le redshift qui dépend de la fraction attendue de SNe Ia jeunes et vieilles en fonction du redshift, chaque population d'âge ayant sa propre distribution d'étirement sous-jacente.

En plus de ce modèle de base, nous avons étudié diverses distributions, y compris des modèles indépendants du redshift. Nous avons également étudié la prédiction à partir d'une distribution d'étirement gaussienne asymétrique par échantillon, utilisée par exemple par l'algorithme de correction de biais de MALMQUIST BBC (SCOLNIC et KESSLER 2016 ; KESSLER et SCOLNIC 2017). Nos conclusions sont énumérées ci-dessous.

- 1) La distribution sous-jacente de l'étirement des SNe Ia est significativement dépendante du redshift, comme l'ont suggéré précédemment HOWELL et al. (2007) par exemple, d'une manière que les effets de sélection observationnels seuls ne peuvent expliquer. Ce résultat est largement indépendant des détails de chaque modèle âge-population ;
- 2) Les modèles indépendants du redshift sont quantitativement exclus comme descriptions appropriées des données par rapport à notre modèle de base, d'autant plus que la statistique de l'échantillon augmente. Ce modèle suppose que (1) la population plus jeune a une distribution d'étirement gaussienne unimodale tandis que la distribution d'étirement de la population plus âgée est bimodale, l'un des modes étant le même que celui de la population jeune, et (2) que l'évolution de la fraction relative des SNe Ia jeunes et vieilles suit la prédiction de RIGAULT et al. (2020). Ce second résultat soutient l'existence de populations de SNe Ia jeunes et vieilles, en accord avec les études de taux de production de SNe (MANNUCCI et al. 2005 ; SCANNAPIECO et BILDSTEN 2005 ; SULLIVAN et al. 2006 ; AUBOURG et al. 2008).
- 3) Les modèles utilisant des distributions Gaussiennes asymétriques basées par échantillon, comme par exemple ceux utilisés dans l'implémentation actuelle de BBC, sont exclus comme étant de bonnes descriptions des données par rapport à notre modèle de dérive. Cela signifie que l'approche basée par échantillon ne tient pas compte avec précision de la dérive du redshift, un problème qui sera exacerbé par des sondages couvrant des plages de redshifts de plus en plus grandes. Par conséquent, même si les degrés de liberté supplémentaires nécessaires peuvent être acceptables étant donné le grand nombre de SNe Ia dans les études cosmologiques, l'extrapolation des distributions des propriétés des SNe Ia de la partie limitée en volume d'une étude à sa partie limitée en magnitude et affectée par le biais de MALMQUIST serait toujours inexacte en raison de l'évolution avec le redshift.
- 4) Compte tenu de l'ensemble de données actuel, nous suggérons l'utilisation du modèle de population d'étirements évoluant avec le redshift suivant :

$$X_1(z) = \delta(z) \times \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + (1 - \delta(z)) \times [a \times \mathcal{N}(\mu_1, \sigma_1^2) + (1 - a) \times \mathcal{N}(\mu_2, \sigma_2^2)], \quad (\text{I.1})$$

avec  $a = 0.51$ ,  $\mu_1 = 0.37$ ,  $\mu_2 = -1.22$ ,  $\sigma_1 = 0.61$ , et  $\sigma_2 = 0.56$  (voir Tableau I.1), et d'utiliser le modèle de dérive de la population d'âge avec le redshift suivant :

$$\delta(z) = (K^{-1} \times (1 + z)^{-2.8} + 1)^{-1} \quad (??)$$

avec  $K = 0.87$ .

La prochaine étape de cette ligne d'analyse consiste à incorporer notre modèle dans le cadre de **SNANA** (KESSLER et al. 2009), un ensemble de logiciels de production de données simulées basées sur les données réelles d'observation. Cela va permettre à la fois de tenir compte plus précisément des fonctions de sélection observationnelles et de tester l'effet de notre modèle sur la détermination des paramètres cosmologiques. Cette étude fait l'objet du chapitre suivant.

## Figures

---

I.1 Étirement en fonction du LsSFR des SNe Ia de SNfactory et modèles d'étirement de base ajustés . . . . .	2
I.2 Évolution de l'étirement moyen des SNe Ia en fonction du redshift issu de la prédiction de notre modèle de base selon l'échantillon utilisé . . . . .	5
I.3 $\Delta\text{AIC}$ entre le modèle de base et les autres modèles . . . . .	7
I.4 Modèles implémentés et testés dans l'étude de l'évolution de l'étirement avec le redshift . . . . .	10
I.5 $\Delta\text{AIC}$ entre le modèle de base et les autres modèles sans utiliser le LsSFR	11
I.6 $\Delta\text{AIC}$ pour un échantillon superconservatif de 244 SNe Ia . . . . .	12
I.7 $\Delta\text{AIC}$ pour des échantillons de taille conservative tirés aléatoirement de l'échantillon fiduciel . . . . .	12
I.8 Comparaison des modélisations de BBC et de notre modèle de référence sur l'histogramme des étirements de PS1 . . . . .	14

---

## Tableaux

---

I.1 Valeurs des paramètres du modèle d'étirement de base selon l'échantillon	3
I.2 Comparaison de la capacité relative de chaque modèle à décrire les données par rapport au modèle de base . . . . .	6
I.3 Paramètres de meilleur ajustement pour notre modélisation asymétrique par échantillon de la distribution d'étirement sous-jacente . . . . .	9
I.4 Comparaison de la capacité relative de chaque modèle à décrire les données par rapport au modèle de référence sans utiliser le LsSFR . . .	11

---



## Bibliographie

- ABBOTT T. M. C., ALLAM S., ANDERSEN P. et al. 2019, « First Cosmology Results using Type Ia Supernovae from the Dark Energy Survey: Constraints on Cosmological Parameters », *ApJ*, 872, L30 ↑ Page 6, ↑ Page 13
- AUBOURG É., TOJEIRO R., JIMENEZ R. et al. 2008, « Evidence of short-lived SN Ia progenitors », *A&A*, 492, 631 ↑ Page 15
- BRIDAY M., RIGAULT M., GRAZIANI R. et al. 2022, « Accuracy of environmental tracers and consequences for determining the Type Ia supernova magnitude step », *A&A*, 657, A22 ↑ Page 11
- BURNHAM, KENNETH & ANDERSON D. R. 2004, « Multimodel Inference: Understanding AIC and BIC in Model Selection », *Sociological Methods & Research*, 33, 261 ↑ Page 6
- HINTON S. R., DAVIS T. M., KIM A. G. et al. 2019, « Steve: A Hierarchical Bayesian Model for Supernova Cosmology », *ApJ*, 876, 15 ↑ Page 12
- HOWELL D. A., SULLIVAN M., CONLEY A. et CARLBERG R. 2007, « Predicted and Observed Evolution in the Mean Properties of Type Ia Supernovae with Redshift », *ApJ*, 667, L37 ↑ Page 4, ↑ Page 15
- IVEZIĆ Ž., KAHN S. M., TYSON J. A. et al. 2019, « LSST: From Science Drivers to Reference Design and Anticipated Data Products », *ApJ*, 873, 111 ↑ Page 13, ↑ Page 14
- KESSLER R., BERNSTEIN J. P., CINABRO D. et al. 2009, « SNANA: A Public Software Package for Supernova Analysis », *PASP*, 121, 1028 ↑ Page 16
- KESSLER R. et SCOLNIC D. 2017, « Correcting Type Ia Supernova Distances for Selection Biases and Contamination in Photometrically Identified Samples », *ApJ*, 836, 56 ↑ Page 6, ↑ Page 8, ↑ Page 15
- MANNUCCI F., DELLA VALLE M., PANAGIA N. et al. 2005, « The supernova rate per unit mass », *A&A*, 433, 807 ↑ Page 15
- PHILLIPS M. M. 1993, « The Absolute Magnitudes of Type IA Supernovae », *ApJ*, 413, L105 ↑ Page 13
- RIESS A. G., CASERTANO S., YUAN W., MACRI L. M. et SCOLNIC D. 2019, « Large Magellanic Cloud Cepheid Standards Provide a 1% Foundation for the Determination of the Hubble Constant and Stronger Evidence for Physics beyond  $\Lambda$ CDM », *ApJ*, 876, 85 ↑ Page 6
- RIESS A. G., MACRI L. M., HOFFMANN S. L. et al. 2016, « A 2.4% Determination of the Local Value of the Hubble Constant », *ApJ*, 826, 56 ↑ Page 6

RIGAULT M., BRINNEL V., ALDERING G. et al. 2020, « Strong dependence of Type Ia supernova standardization on the local specific star formation rate », *A&A*, **644**, A176  
↑ Page 1, ↑ Page 2, ↑ Page 4, ↑ Page 14, ↑ Page 15

RUBIN D., ALDERING G., BARBARY K. et al. 2015, « UNITY: Confronting Supernova Cosmology's Statistical and Systematic Uncertainties in a Unified Bayesian Framework », *ApJ*, **813**, 137 ↑ Page 12

SCANNAPIECO E. et BILDSTEN L. 2005, « The Type Ia Supernova Rate », *ApJ*, **629**, L85  
↑ Page 15

SCOLNIC D. et KESSLER R. 2016, « Measuring Type Ia Supernova Populations of Stretch and Color and Predicting Distance Biases », *ApJ*, **822**, L35 ↑ Page 4, ↑ Page 6, ↑ Page 8, ↑ Page 9, ↑ Page 13, ↑ Page 15

SCOLNIC D. M., JONES D. O., REST A. et al. 2018, « The Complete Light-curve Sample of Spectroscopically Confirmed SNe Ia from Pan-STARRS1 and Cosmological Constraints from the Combined Pantheon Sample », *ApJ*, **859**, 101 ↑ Page 6, ↑ Page 8, ↑ Page 9, ↑ Page 13, ↑ Page 14

SHARIFF H., JIAO X., TROTTA R. et VAN DYK D. A. 2016, « BAHAMAS: New Analysis of Type Ia Supernovae Reveals Inconsistencies with Standard Cosmology », *ApJ*, **827**, 1  
↑ Page 12

SULLIVAN M., LE BORGNE D., PRITCHET C. J. et al. 2006, « Rates and Properties of Type Ia Supernovae as a Function of Mass and Star Formation in Their Host Galaxies », *ApJ*, **648**, 868 ↑ Page 15