

Correction du DS

/32 E1 Étude de quelques lentilles minces (D'après IESEA 2022)

I/A Lentille convergente de focale donnée

- /8 1 On obtient donc une image réelle, renversée et de même taille ① que l'objet. Avec la relation de DESCARTES :

$$\frac{1}{f'} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} = \frac{\overline{OA} + f'}{\overline{OA}f'}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA} + f'}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{OA} = -40 \text{ cm} \\ f' = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \overline{OA'} = 40 \text{ cm}$$

De plus,

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{OA'} = 40 \text{ cm} \\ \overline{OA} = -20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \gamma = -1$$

- /5 2 On obtient donc une image virtuelle, droite et agrandie.
① Avec la relation de DESCARTES :

$$\boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA} + f'}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{OA} = -10 \text{ cm} \\ f' = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \overline{OA'} = -20 \text{ cm}$$

De plus,

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{OA'} = -20 \text{ cm} \\ \overline{OA} = -10 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \gamma = +2$$

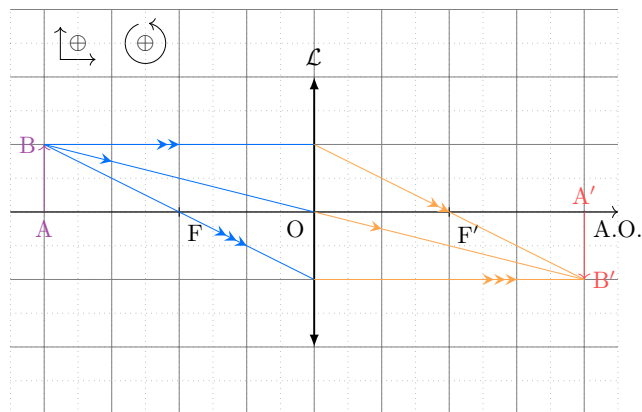


FIGURE 1.1 – ①+①

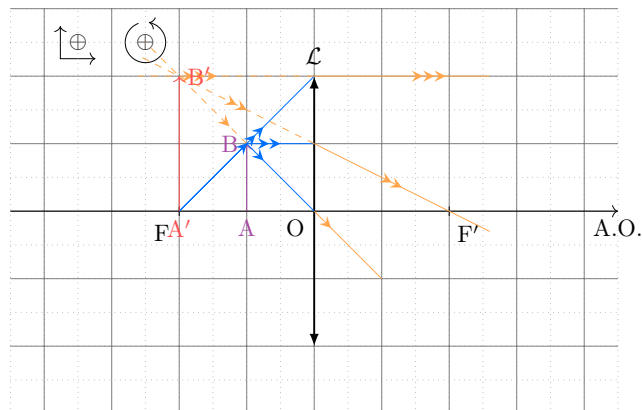


FIGURE 1.2 – ①+①

- /5 [3] On obtient donc une image réelle, droite et rétrécie. ①
Avec la relation de DESCARTES :

$$\boxed{\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA} + f'}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{OA} = 20 \text{ cm} \\ f' = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

A.N. : $\overline{OA'} = 10 \text{ cm}$ ①

De plus,

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{OA'} = 10 \text{ cm} \\ \overline{OA} = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

A.N. : $\gamma = +0.5$ ①

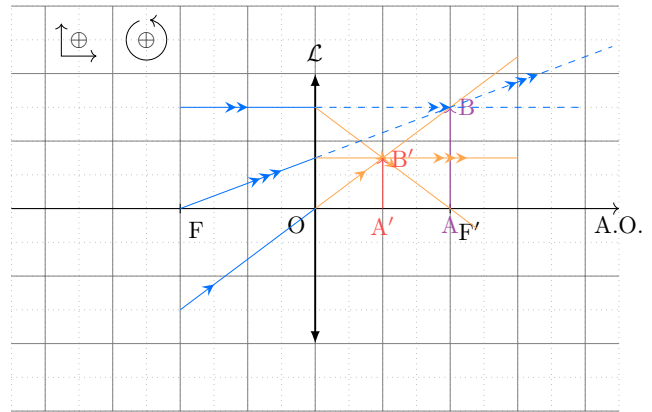


FIGURE 1.3 – ①+①

I/B Lentille convergente quelconque

- /3 [4] Les questions 1 et 2 montrent que pour un objet réel, une lentille convergente peut donner aussi bien une image réelle ① (question 1) que virtuelle (question 2). ① Donc pour l'image d'un objet réel à travers une lentille convergente, les deux cas peuvent se présenter. ①
- /5 [5] Nous avons vu qu'avec la relation de DESCARTES, en isolant $\overline{OA'}$ on obtenait

$$\overline{OA'} = \frac{\overline{OA}f'}{\overline{OA} + f'}$$

Si l'objet est virtuel, alors $\overline{OA} > 0$. ① Or, la lentille est convergente, donc $f' > 0$. ① Ainsi, $\overline{OA'} > 0$. ① En conclusion, l'image d'un objet virtuel au travers d'une lentille convergente est toujours réelle. ①

I/C Lentille divergente quelconque

- /4 [6] De même que précédemment, le calcul de $\overline{OA'}$ avec un objet réel ($\overline{OA} < 0$ ①) pour une lentille divergente ($f' < 0$ ①) implique que $\overline{OA'} < 0$. ① Ainsi, l'image d'un objet réel à travers une lentille divergente est donc toujours virtuelle. ①
- /2 [7] Cette fois, si $\overline{OA} > 0$ et $f' < 0$, alors $\overline{OA'}$ peut changer de signe selon les valeurs de \overline{OA} et f' : le produit est toujours négatif, mais $\overline{OA} + f' > 0$ si $\overline{OA} > -f'$ et inversement. ①

Ainsi, pour un objet virtuel au travers d'une lentille divergente, les deux cas peuvent se présenter. ①

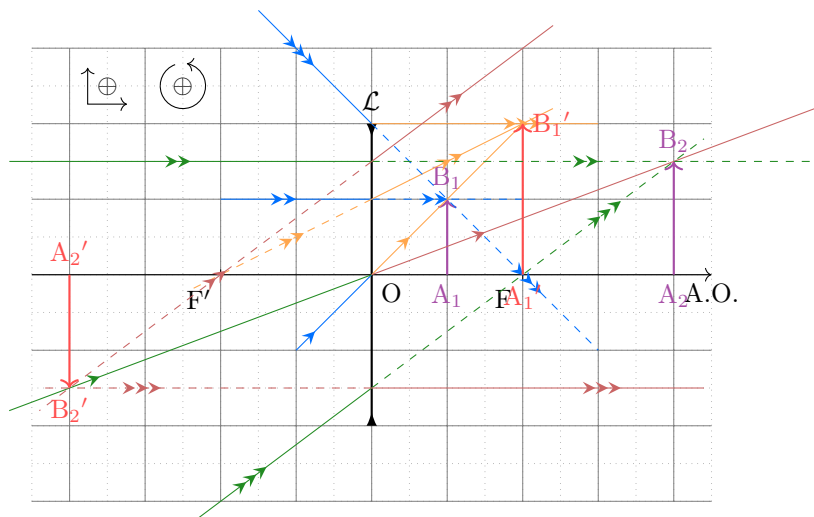


FIGURE 1.4 – Image réelle ou virtuelle pour une lentille divergente.

/35 E2 Optique d'un périscope (D'après ENAC 2024)

- /3 1 Dans cet exercice, les deux miroirs ne font que renvoyer l'objet AB à une distance $AO_1 = a + b + d$ ① de la lentille 1. En effet, un miroir ne **modifie pas les distances** ① objet-image mais juste l'angle. En faisant continuer le rayon de S_1 à S_2 par le miroir \mathcal{M}_1 (dans le « monde miroir »), on garde le même fonctionnement géométrique, et de même pour \mathcal{M}_2 . On se retrouve alors avec le simple problème de lunette terrestre suivant :

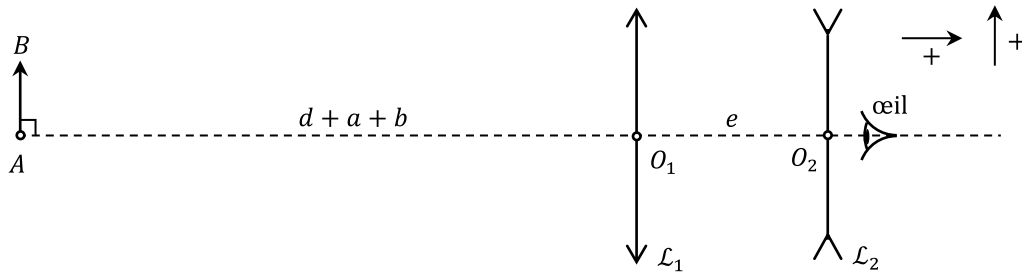


FIGURE 1.5 – Schéma simplifié ①

- /9 2 Réponse D. On représente la situation avec un schéma de principe ① :

$$\overline{AB} \xrightarrow[\text{O}_1]{\mathcal{L}_1} \overline{A_1B_1} \xrightarrow[\text{O}_2]{\mathcal{L}_2} \overline{A'B'}$$

$-\infty \xrightarrow{\text{A}_1 = \text{F}'_1} \text{A}' = +\infty$
 $\text{A}_1 = \text{F}_2$

En effet, avec AB à l'infini, son image se situe dans le plan focal image π'_1 de \mathcal{L}_1 , soit $\boxed{\text{A}_1 = \text{F}'_1}$ ①. De plus, un œil emmétrope voit net sans accommoder un objet provenant de l'infini ①, donc l'image finale $\overline{A'B'}$ par \mathcal{S}_p doit être à l'infini. Pour cela, l'image intermédiaire doit se situer dans le plan focal objet π_2 de \mathcal{L}_2 , soit $\boxed{\text{A}_1 = \text{F}_2}$ ① : c'est un **système afocal** ① avec $\text{F}'_1 = \text{F}_2$. Ainsi,

$$\begin{aligned} e_0 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{\text{O}_1\text{O}_2} \\ \Leftrightarrow e_0 &= \overline{\text{O}_1\text{F}'_1} + \overline{\text{F}'_1\text{O}_2} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On décompose} \\ \overline{\text{F}_2\text{O}_2} = \overline{\text{O}_2\text{F}'_2} \end{array} \right\} \textcircled{1} \\ &= f'_1 \textcircled{1} = \text{F}_2\text{O}_2 \\ \Leftrightarrow \boxed{e_0 = f'_1 + f'_2} \end{aligned}$$

- /9 3 Réponses B et C. AB étant encore à l'infini, on a toujours A_1B_1 située en F'_1 . La relation de conjugaison de la seconde lentille donne :

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'_2} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{A}'}} - \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{F}'_1}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On développe } \overline{\text{O}_2\text{F}'_1} \\ \overline{\text{O}_2\text{O}_1} = \varepsilon - e_0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2} &= \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{A}'}} - \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{O}_1} + f'_1} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{A}'}} - \frac{1}{\varepsilon - (f'_1 + f'_2) + f'_1} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On change le - en +} \\ \text{On fait apparaître } \varepsilon/f'_2 \text{ pour le développement} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2} &= \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{A}'}} + \frac{1}{f'_2 - \varepsilon} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{A}'}} + \frac{1}{f'_2 \left(1 - \frac{\varepsilon}{f'_2}\right)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On isole } \overline{\text{O}_2\text{A}'} \text{ et on développe} \\ \text{On simplifie} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{A}'}} &\stackrel{\textcircled{1}}{\approx} \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{f'_2} \left(1 + \frac{\varepsilon}{f'_2}\right) \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\overline{\text{O}_2\text{A}'}}} &\stackrel{\textcircled{1}}{\approx} -\frac{\varepsilon}{f'^2_2} \end{aligned}$$

Ainsi, $\boxed{\overline{\text{O}_2\text{A}'} < 0}$ ①, donc l'image se forme **avant** \mathcal{L}_2 : elle est **virtuelle**. ①

De plus, la distance O_2A sera suffisamment grande pour être vue par l'œil **en accommodant**. ①

/3 4 **Réponse A.** Grâce au schéma de la Question ??, la relation de conjugaison pour \mathcal{L}_1 donne

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f'_1} &= \frac{1}{p'_1} - \frac{1}{-(d+a+b)} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{p'_1} &= \frac{1}{f'_1} - \frac{1}{d+a+b} && \left. \begin{array}{l} \text{On isole } p'_1 \\ \text{On met sur même dénominateur} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{p'_1} &= \frac{d+a+b-f'_1}{f'_1(d+a+b)} \\
 \Leftrightarrow p'_1 &= \frac{f'_1(d+a+b)}{d+a+b-f'_1} && \left. \begin{array}{l} \text{On inverse} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

/3 5 **Réponse D.** Avec le grandissement, on a

$$\begin{aligned}
 \gamma &= \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} \\
 \Leftrightarrow \overline{A_1B_1} &= \frac{p'_1}{-(a+b+d)} \overline{AB} && \left. \begin{array}{l} \text{On remplace par les distances} \\ p'_1 = \frac{f'_1(d+a+b)}{d+a+b-f'_1} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \overline{A_1B_1} &= \frac{-f'_1}{a+b+d-f'_1} \overline{AB} \\
 \Leftrightarrow \overline{A_1B_1} &= \frac{f'_1}{f'_1-a-b-d} \overline{AB} && \left. \begin{array}{l} \text{On réarrange} \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

/4 6 **Réponses B et D.** L'angle θ sous lequel est vu $A'B'$ est tel que, en utilisant l'approximation des petits angles (le système est dans les conditions de GAUSS ①) :

$$\tan(\theta) \approx \theta = \frac{\overline{A'B'}}{d_m} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{A'B'} = 1 \text{ mm} \\ d_m = 250 \text{ mm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \theta \approx 4 \times 10^{-3} \text{ rad}$$

Ceci est plus de dix fois plus grand que le pouvoir de résolution de l'œil $\theta_{\min} = 3 \times 10^{-4} \text{ rad}$ ①. Ainsi l'image est étendue.

/4 7 **Réponse D.** L'image intermédiaire revient en F'_1 . Depuis la situation précédente où $\overline{O_2A'} = -d_m$, on a $e = e_0 + \Delta e$ avec Δe à trouver. Ainsi, avec 3 chiffres significatifs pour répondre à la question,

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{f'_2} &= \frac{1}{-d_m} - \frac{1}{\overline{O_2F'_1}} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2} &= -\frac{1}{d_m} - \frac{1}{-(e_0 + \Delta e) + f'_1} && \left. \begin{array}{l} \overline{O_2F'_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1F'_1} \\ e_0 = f'_1 + f'_2 \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2} &= -\frac{1}{d_m} - \frac{1}{-(f'_1 + f'_2 + \Delta e) + f'_1} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2 + \Delta e} &= \frac{1}{f'_2} + \frac{1}{d_m} && \left. \begin{array}{l} \text{On isole } \Delta e \\ \text{Même dénominateur} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{f'_2 + \Delta e} &= \frac{d_m + f'_2}{f'_2 d_m} \\
 \Leftrightarrow \Delta e &= \frac{f'_2 d_m}{d_m + f'_2} - f'_2 \times \frac{d_m + f'_2}{d_m + f'_2} && \left. \begin{array}{l} \text{On inverse, isole, puis même dénominateur} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \Delta e &= \frac{-f'^2_2}{d_m + f'_2} && \text{avec} \quad \begin{cases} f'_2 = -0,125 \text{ m} \\ d_m = 25 \times 10^{-2} \text{ m} \end{cases} \\
 \text{A.N. : } \Delta e &= 1,25 \times 10^{-1} \text{ m}
 \end{aligned}$$

/51 P1 Formation d'un arc-en-ciel (D'après banque PT 2024)

/3 1 On lit sur la figure :

$$\begin{aligned}
 i_2 - D_1 = i_1 \quad & -(-i_2) + i_3 - D_2 = \pi \quad & D_3 + (-i_3) = i_4 \\
 \Leftrightarrow \boxed{D_1 \stackrel{①}{=} i_2 - i_1} \quad & \boxed{D_2 \stackrel{①}{=} i_2 + i_3 - \pi} \quad & \boxed{D_3 \stackrel{①}{=} i_3 + i_4}
 \end{aligned}$$

/4 2 D'après la loi de la réfraction,

$$1 \times \sin(i_1) \stackrel{①}{=} n \sin(i_2) \Leftrightarrow \boxed{i_2 \stackrel{①}{=} \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)}$$

D'après la loi de la réflexion,

$$i_3 \stackrel{①}{=} i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)$$

Enfin, d'après la loi de la réfraction encore,

$$\begin{aligned}
 \sin(i_4) &= n \sin(-i_3) = -n \sin(i_2) = -\sin(i_1) \\
 \Leftrightarrow \boxed{i_4 \stackrel{①}{=} -i_1}
 \end{aligned}$$

/2 3 La déviation totale s'écrit

$$\begin{aligned}
 D &\stackrel{①}{=} D_1 + D_2 + D_3 \\
 \Leftrightarrow D &= (i_2 - i_1) + (i_2 + i_3 - \pi) + (i_4 + i_3) \\
 \Leftrightarrow D &= -i_1 + 2i_2 + 2i_3 + i_4 - \pi \\
 \Leftrightarrow \boxed{D \stackrel{①}{=} 4 \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right) - 2i_1 - \pi}
 \end{aligned}$$

/8 4 Posons $x = \sin(i_1)$. Alors,

$$\begin{aligned}
 D(x) &\stackrel{①}{=} 4 \arcsin \frac{x}{n} - 2 \arcsin x - \pi \\
 \Rightarrow \frac{dD}{dx} &\stackrel{①}{=} 4 \times \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x^2}{n^2}}} - \frac{2}{\sqrt{1 - x^2}} \quad \left. \vphantom{\frac{dD}{dx}} \right\} \text{On dérive}
 \end{aligned}$$

Cette dérivée s'annule au niveau du maximum, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{n^2}}} &\stackrel{①}{=} \frac{2}{\sqrt{1 - x_{\max}^2}} \\
 \Leftrightarrow \frac{n^2}{16} \left(1 - \frac{x_{\max}^2}{n^2}\right) &\stackrel{①}{=} \frac{1 - x_{\max}^2}{4} \\
 \Leftrightarrow n^2 - x_{\max}^2 &\stackrel{①}{=} 4 - 4x_{\max}^2 \\
 \Leftrightarrow 3x_{\max}^2 &\stackrel{①}{=} 4 - n^2 \\
 \Leftrightarrow \boxed{\sin(i_{1,\max}) \stackrel{①}{=} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}}
 \end{aligned}$$

/2 5 On injecte cette valeur dans l'expression de D :

$$\boxed{D_{\max} \stackrel{①}{=} 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right) - 2 \arcsin \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}} - \pi}$$

- /2 [6] Si la longueur d'onde augmente, alors d'après la loi de CAUCHY l'indice diminue ①, et d'après la courbe représentée l'angle de déviation maximale **augmente**. ①
- /1 [7] Le spectre visible contient les longueurs d'ondes comprises entre $[400 ; 800]$ nm. ①
- /8 [8] La lumière atteint les gouttes avec toutes les incidences possibles, mais la courbe de déviation étant plus plate au voisinage du maximum, il y a le plus d'**intensité lumineuse** en sortie de la goutte dans la direction donnée par le **maximum de déviation**. On peut dire qu'il y a accumulation de lumière dans cette direction. ① + ①

Compte tenu de ce qui précède, l'angle de déviation maximale est plus grand pour le rouge que pour le violet, **mais** comme l'angle de déviation est négatif, alors en valeur absolue

$$|D_{\text{violet}}| \stackrel{\textcircled{1}}{>} |D_{\text{rouge}}|$$

Autrement dit, l'angle entre les rayons entrant et sortant de la goutte, égal à $2\pi - |D|$, est plus grand pour le rouge que pour le violet. ①

Les rayons du Soleil arrivent tous parallèles les uns aux autres, pour une goutte donnée le rayon rouge part donc davantage vers le bas que le rayon violet. Cependant, les rayons « qui comptent » sont ceux qui aboutissent à l'œil de l'observateur-ice... qui ne sont pas déviés par la même goutte ! Comme le montre la Figure 1.6, les rayons rouges atteignant l'œil de l'observateur sont déviés par une goutte située plus haut ① que celle qui dévie les rayons violets. Ainsi, l'**anneau rouge paraît au dessus de l'anneau violet** dans le ciel. ①

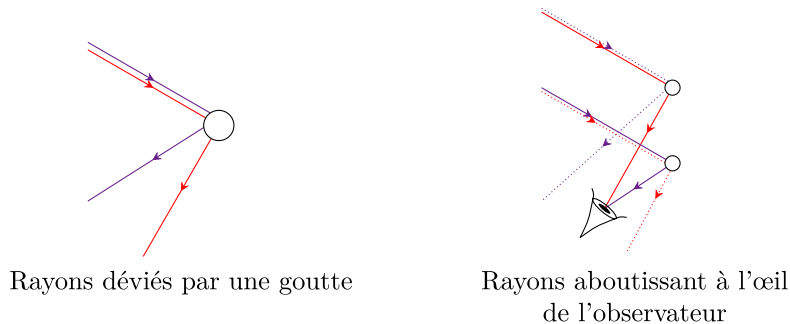


FIGURE 1.6 – Déviation des rayons et formation d'un arc-en-ciel. ① + ①

- /4 [9] Ces arcs-en-ciel dits surnuméraires sont dus à des rayons dont les trajets dans les gouttes sont différents ①, et qui subissent deux voire trois réflexions au lieu d'une seule. ① La Figure 1.7 montre un schéma de principe à deux réflexions.

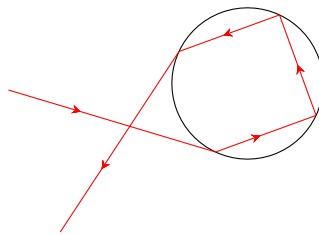


FIGURE 1.7 – Schéma de principe de réflexions conduisant à un arc surnuméraire. ① + ①

/75 P2 Module photographique d'un smartphone (D'après CCS MPI 2023)

II/A Étude du capteur de l'appareil photographique

- /5 [1] Soit $L = 4000a$ la longueur du capteur et $l = 3000a$ sa largeur, avec a la taille d'un pixel supposé carré. On a donc $l = 3L/4$. ①

La diagonale du capteur d vaut 1/3 de pouce soit $d = 1/3 \times 25,4 = 8,47$ mm. ①

On en déduit

$$d^2 = L^2 + l^2 = L^2 \left(1 + \frac{3^2}{4^2}\right) = \left(\frac{5}{4}L\right)^2 \quad \text{donc} \quad \boxed{L = \frac{4}{5}d = 6,77 \text{ mm}} \quad \textcircled{1}$$

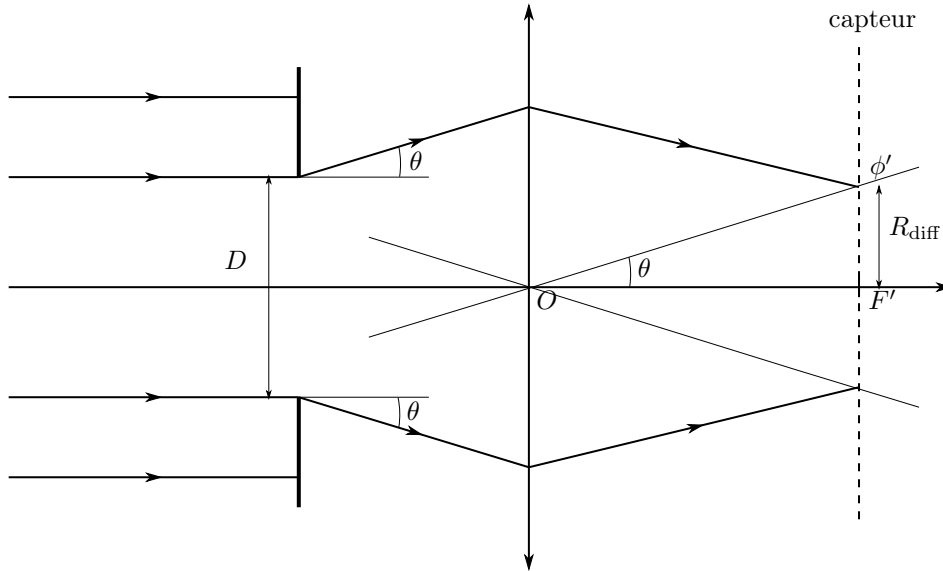
On trouve alors

$$l = \frac{3}{4}L \stackrel{\textcircled{1}}{=} 5,08 \text{ mm} \quad \text{et} \quad a = \frac{L}{4000} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,69 \mu\text{m}$$

- /4 [2] L'objet étant à l'infini sur l'axe optique, son image (en l'absence de diffraction) est F' . $\textcircled{1}$ Donc on place le capteur dans le plan focal image. $\textcircled{1}$

Pour déterminer le rayon émergent, on trace le rayon incident incliné de θ par rapport à l'axe optique et passant par O . Ce rayon n'est pas dévié et passe par ϕ' . $\textcircled{1}$

On fait de même pour l'autre rayon. On pose alors R_{diff} , $\textcircled{1}$ distance entre F' et ϕ' .



- /6 [3] On choisit $\lambda = 500 \text{ nm}$, $\textcircled{1}$ longueur dans le visible, proche du maximum de sensibilité de l'œil.

La demi-ouverture angulaire de la tâche centrale de diffraction vaut $\theta \approx \frac{\lambda}{D}$. $\textcircled{1}$

D'après la figure précédente, $\tan \theta = R_{\text{diff}}/f'$. La lentille étant utilisée dans les conditions de Gauss, on a

$$\tan \theta \approx \theta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_{\text{diff}}}{f'} \quad \text{donc} \quad R_{\text{diff}} = \frac{\lambda f'}{D} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \lambda N$$

L'application numérique donne $R_{\text{diff}} \approx 1,1 \mu\text{m}$. $\textcircled{1}$

On obtient une valeur du même ordre de grandeur que a , la taille d'un pixel, donc on est à la limite de résolution $\textcircled{1}$ de l'appareil liée au phénomène de diffraction.

- /3 [4] Déterminons la taille des pixels dans les deux cas

$$a_{\text{HD}} = \frac{L}{1920} = 3,5 \mu\text{m} > R_{\text{diff}} \stackrel{\textcircled{1}}{\text{et}} \quad a_{4\text{K}} = \frac{L}{3840} = 1,7 \mu\text{m} \approx R_{\text{diff}}$$

Ainsi en full HD, on ne sera pas sensible à la diffraction $\textcircled{1}$. De plus, l'enregistrement de l'image nécessitera moins de capacité de mémoire $\textcircled{1}$ qu'en résolution 4K sans que cela soit visible sur la qualité de l'image pour un photographe amateur.

II/B Étude des aberrations géométriques dues à la lentille de l'appareil photographique

II/B) 1 Condition de traversée de la lentille

- /10 [5] Le rayon arrive normalement au dioptre air-verre, donc il n'est pas dévié. Il arrive avec un angle d'incidence i sur le dioptre verre-air et est réfracté dans une direction caractérisée par l'angle de réfraction $t > i$ car $n_{\text{air}} < n$.

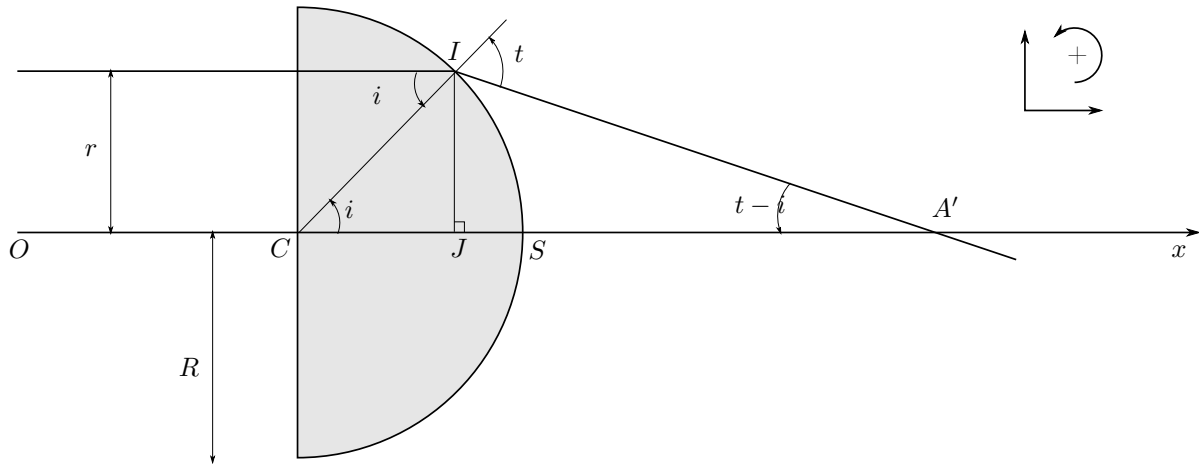


FIGURE 1.8 – ① pour incidence normale, ① pour angle qui s'écarte de la normale, ① pour les sens de comptage, ① pour les flèches sur les rayons.

Le rayon réfracté existe tant que $t < \pi/2$, ① i.e. par application de la relation de Snell-Descartes

$$n \sin i < 1 \text{ ① } \quad \text{avec} \quad \sin i = \frac{r}{R} \text{ ①}$$

On en déduit

$$r < \frac{R \text{ ①}}{n} = r_0 \quad ; \quad r_0 = 2,6 \text{ mm} \text{ ①}$$

Le constructeur choisit un rayon $\Phi/2 = 2,5 \text{ mm} < r_0 < R$ afin de n'avoir que des rayons pouvant émerger. ① Néanmoins il risque d'y avoir des aberrations géométriques car il y a des rayons très éloignés de l'axe optique (cf la suite).

II/B) 2 Étude des rayons proches de l'axe optique

/5 ⑥ ① Pour le schéma et l'angle $t - i$.

On a $\overline{CA'} = \overline{CJ} + \overline{JA'}$ ①. Dans les triangles ICJ et IJA' :

$$\overline{CJ} = R \cos i \text{ ①} \quad \text{et} \quad \overline{JA'} = \frac{\overline{JI}}{\tan(t - i)} \text{ ①} \quad \text{avec} \quad \overline{JI} = R \sin i$$

On obtient alors

$$\overline{CA'} \text{ ①} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t - i)}$$

/5 ⑦ Si $r \rightarrow 0$, alors les angles i et t sont faibles, donc

$$\cos i \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin i \approx i \quad \text{et} \quad \tan(t - i) \approx t - i \quad \text{①}$$

De plus, la relation de Snell-Descartes devient

$$ni \approx t \text{ ①} \quad \text{donc} \quad \overline{CA'} \approx R + R \times \frac{i}{ni - i} \quad \text{soit} \quad \overline{CA'} \approx R \left(1 + \frac{1}{n - 1} \right) \text{ ①}$$

On a alors

$$\overline{CF'} = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{CA'} \text{ ①} = \frac{nR}{n - 1}$$

L'AN donne $\overline{CF'} = 12 \text{ mm}$. ①

/2 ⑧ Le point F' est approximativement stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe optique dans le cas des rayons paraxiaux, i.e. dans les conditions de GAUSS. ① F' est alors le foyer principal image ① de la lentille demi-boule utilisée dans les conditions de GAUSS.

II/B) 3

Étude de l'aberration sphérique de la lentille

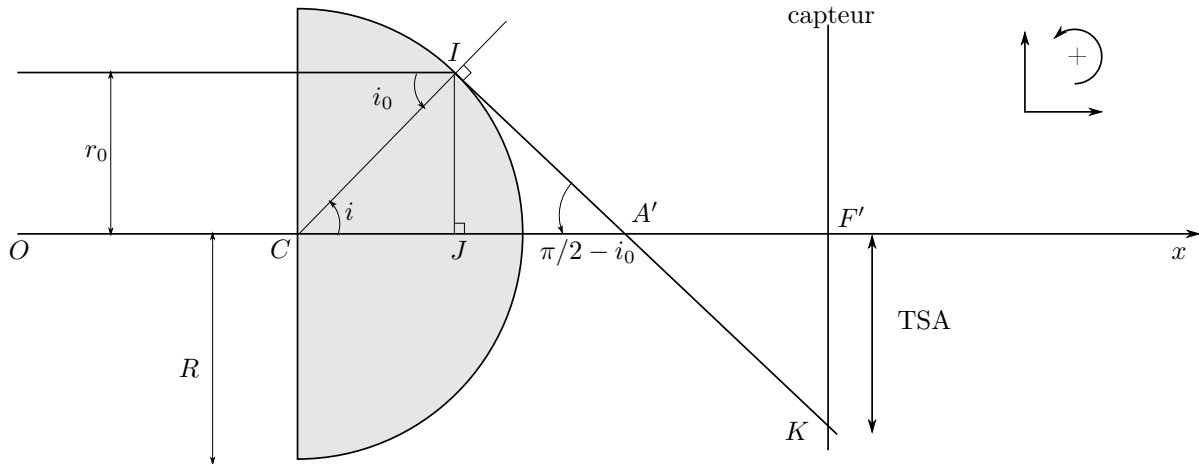
/6 9 Pour $r = r_0$, $t = \pi/2$.

FIGURE 1.9 – ① Pour l'axe optique, ① pour les flèches sur les rayons, ① pour $t = \pi/2$, ① pour les sens de comptage, ① pour l'écran, ① pour la TSA

/10 10 D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{F'K}}{\overline{JI}} = \frac{\overline{A'F'}}{\overline{AJ}} \quad \text{avec} \quad \overline{JI} = r_0 = R/n \quad ; \quad \overline{A'F'} = \overline{CF'} - \overline{CA'} = \overline{CF'} - \left(R \cos i_0 + \frac{R \sin i_0}{\tan(\pi/2 - i_0)} \right)$$

$$\text{Or } \frac{1}{\tan(\pi/2 - i_0)} = \tan i_0, \text{ d'où}$$

$$\overline{A'F'} = \overline{CF'} - \left(R \cos i_0 + R \sin i_0 \tan i_0 \right) = \overline{CF'} - \underbrace{\left(R \cos i_0 + R \frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0} \right)}_{= \frac{R}{\cos i_0}} > 0$$

De plus $\overline{JA'} = R \frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0} > 0$, on en déduit

$$TSA = |\overline{F'K}| = r_0 \times \frac{\overline{CF'}/R - \frac{1}{\cos i_0}}{\frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0}} \quad \text{soit} \quad TSA = r_0 \left(\frac{\overline{CF'}}{R} \frac{\cos i_0}{\sin^2 i_0} - \frac{1}{\sin^2 i_0} \right)$$

On obtient alors la forme donnée dans l'énoncé

$$TSA = \frac{r_0}{\sin^2 i_0} \left(\frac{\overline{CF'}}{R} \cos i_0 - 1 \right)$$

/5 11 On a montré que $\sin i_0 = 1/n$, on en déduit

$$\cos i_0 = \sqrt{1 - \sin^2 i_0} = \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}$$

De plus $r_0 = R/n$ et $\overline{CF'} = \frac{nR}{n-1}$. En remplaçant dans l'expression de la distance TSA obtenue à la question précédente, on obtient

$$TSA = \frac{n^2 R}{n} \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad TSA = nR \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n-1} - 1 \right)$$

L'AN donne $TSA = 7,3 \text{ mm}$.

On a $TSA \gg R_{\text{diff}}$ et $TSA \gg a$. La lentille demi-boule est extrêmement sensible aux aberrations géométriques.

II/C

Estimation de la taille d'un pixel de l'écran d'un smartphone

- /6 12 L'œil pourra discerner deux pixels voisins s'ils sont vus sous un angle β supérieur au pouvoir de résolution de l'œil $\alpha = 3,0 \times 10^{-4} \text{ rad}$. ①

Un pixel de taille a , vu à une distance D est observé sous un angle β tel que

$$\tan \beta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{a}{D}$$

On se place dans le cas où β est faible (proche de α qui est faible), donc $\tan \beta \approx \beta$. ① On prend $D = 30 \text{ cm}$, on a alors

$$\frac{a}{D} > \alpha \quad \text{soit} \quad \boxed{a > D\alpha = 9,0 \times 10^{-5} \text{ m} = 90 \mu\text{m}} \quad \textcircled{1}$$

Cette limite est très grande devant la taille d'un pixel qui est de l'ordre du micromètre. Donc on ne peut en effet pas distinguer deux pixels à l'œil nu. ①

- /8 13 Je mesure la hauteur du chiffre 4 : $h = 1,7 \text{ cm}$ pour $N = 18$ pixels. ①

J'évalue les incertitudes maximales :

◇ $\Delta h = 0,05 \text{ cm}$ soit une demi-graduation ①

◇ $\Delta N = 1$ ①

On choisit une loi uniforme pour calculer les incertitudes types correspondantes

$$u(h) = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}} \quad \text{et} \quad u(N) = \frac{\Delta N}{\sqrt{3}}$$

La taille d'un pixel est donnée par la relation (en n'oubliant pas le facteur 10 du grossissement) :

$$a \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{h}{10N} = 94,4 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad u(a) \stackrel{\textcircled{1}}{=} a \sqrt{\left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{u(N)}{N}\right)^2} = 3,4 \mu\text{m}$$

Le résultat de la mesure est donc

$$\boxed{a = (94,4 \pm 3,4) \mu\text{m}} \quad \textcircled{1}$$

On rappelle que l'on donne 2 chiffres significatifs sur l'incertitude-type et autant que nécessaire sur la valeur moyenne pour avoir la même précision que celle de l'incertitude-type.

On constate que la valeur de a est assez élevée. Elle n'est pas cohérente avec les caractéristiques de l'appareil photo données en début d'énoncé. ①