

Sujet 1 – corrigé

I Vibration d'une molécule

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8,5 \times 10^{13}$ Hz. On donne les masses atomiques molaires : $M_H = 1,0 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$ et $M_{Cl} = 35,5 \text{ g} \cdot \text{mol}^{-1}$, ainsi que le nombre d'Avogadro : $N_A = 6,02 \times 10^{23} \cdot \text{mol}^{-1}$.

On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un "ressort" de raideur k .

Données numériques. $(1,7\pi)^2/6,02 \approx 4,738065$, $\sqrt{\frac{6,63 \times 6,02 \times 10}{34\pi^2}} \approx 1,09060$ et $2\pi \times 8,5 \times 1,09 \approx 58,2136997$.

- Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.

Réponse :

La masse de l'atome de chlore est beaucoup plus grande que celle d'un atome d'hydrogène.

- Exprimer puis calculer k .

Réponse :

La fréquence d'oscillation d'un oscillateur harmonique est :

$$f = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m_H}} \quad ; \quad m_H = \frac{M_H}{N_A},$$

donc

$$k = (2\pi f)^2 \times \frac{M_H}{N_A} = \frac{(1,7\pi)^2}{6,02} \times 10^{28-3-23} = 4,7 \times 10^2 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$$

On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6,63 \times 10^{-34} \text{ J} \cdot \text{s}$ est la constante de Planck.

- Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.

Réponse :

On sait que :

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \Rightarrow \frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 \times \frac{M_H}{N_A} A^2,$$

et alors :

$$A = \sqrt{\frac{hN_A}{4\pi^2 M_H f}} = \sqrt{\frac{6,63 \times 6,02}{4\pi^2 8,5}} \times 10^{(23-34+3-13)/2} = 1,09 \times 10^{-11} \text{ m},$$

ce qui est plus petit que la taille typique d'un atome (tout va bien).

- Calculer sa vitesse maximale.

Réponse :

La vitesse d'un oscillateur harmonique est :

$$v(t) = 2\pi A f \cos(2\pi f t + \varphi).$$

La vitesse maximale est donc :

$$v_{\max} = 2\pi A f = 2\pi \times 1,09 \times 10^{-11} \text{ m} \times 8,5 \times 10^{13} \text{ Hz} = 5,8 \times 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Énergie de l'oscillateur harmonique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2.$$

On suppose qu'il n'y a aucun phénomène dissipatif : l'énergie mécanique est donc constante.

Formules trigonométriques. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ et $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$

1. En utilisant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

Réponse :

Puisque l'énergie mécanique est constante, il suffit de la dériver par rapport au temps :

$$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\omega_0^2 x \dot{x} + m \dot{x} \ddot{x} \Rightarrow \omega_0^2 x + \ddot{x} = 0.$$

2. On suppose que $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de m , ω_0 , A et $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$. Vérifier que l'énergie mécanique est bien constante.

Réponse :

On trouve :

$$E_c(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} (1 - \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)) \quad ; \quad E_p(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4} (1 + \cos(2\omega_0 t + 2\varphi)).$$

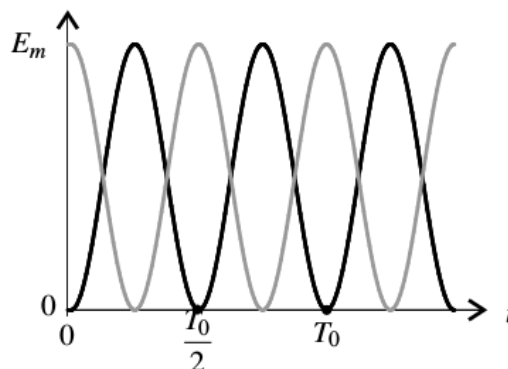
L'énergie mécanique est bien constante :

$$E_m = E_p + E_c = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}.$$

3. Tracer sur un même graphe les courbes donnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction du temps. Quelle est la fréquence de variation de ces énergies ?

Réponse :

Les énergies oscillent avec une pulsation de $2\omega_0$, donc une fréquence de ω_0/π .



Sujet 3 – corrigé

I Mesurer la masse d'un astronaute sur l'ISS

Les astronautes passant plusieurs mois dans la station spatiale internationale (ISS) doivent se soumettre à des bilans de santé très réguliers, et en particulier vérifier qu'ils ne perdent ni ne prennent de poids. Néanmoins, l'absence de gravité rend les balances terrestres inopérantes dans l'espace. Pour permettre des pesées malgré cela, un dispositif original a été développé par l'agence spatiale russe, dont une photographie est présentée ci-contre.

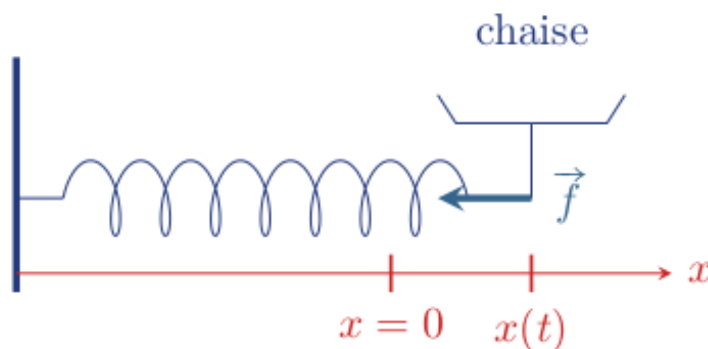
Il s'agit d'une chaise de masse $m_0 = 25,0 \text{ kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe de la station. On note L_0 la longueur à vide du ressort et k sa constante de raideur. La position de la chaise est repérée par son point d'attache au ressort, le long d'un axe (Ox) dont l'origine est définie telle que le point d'attache de la chaise se trouve en $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.

On cherche dans un premier temps à mesurer la constante de raideur k du ressort. Pour cela, la chaise **vide** est mise en mouvement et on mesure la période $T_0 = 1,28 \text{ s}$ de ses oscillations.



1. Faire un schéma de la balance inertielle incluant l'axe (Ox) et la position $x = 0$.

Réponse :



2. Effectuer un bilan des forces qui s'exercent sur la balance et les placer sur le schéma précédent.

Réponse :

La chaise n'est soumise qu'à une seule force : celle de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -kx(t)\vec{e}_x$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la chaise.

Réponse :

On peut donc appliquer la loi de la quantité de mouvement projetée sur l'axe (Ox) sur la chaise de masse m_0 dans le référentiel de l'ISS considéré comme galiléen :

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_0}x(t) = 0.}$$

4. Comment appelle-t-on cette équation différentielle ?

Réponse :

Il s'agit de l'équation de l'oscillateur harmonique.

5. Donner la forme générale des solutions de cette équation différentielle (on ne cherchera pas à déterminer les constantes).

Réponse :

Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)} \quad ; \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}},$$

et où x_0 et φ dépendent des conditions initiales.

6. En déduire que la constante de raideur k s'exprime en fonction de la période T_0 et de la masse m_0 par

$$k = 4\pi^2 \frac{m_0}{T_0^2}.$$

Réponse :

La chaise oscille donc à une pulsation ω_0 , c'est-à-dire à une période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{k = 4\pi^2 \frac{m_0}{T_0^2}}.$$

7. Calculer sa valeur numérique. On donne $\left(\frac{\pi}{1,28}\right)^2 \approx 6,023573$, laissant à l'étudiant le soin de choisir le bon nombre de chiffres significatifs.

Réponse :

Numériquement, en ne gardant que 3 chiffres significatifs, on trouve :

$$k = 4\pi^2 \frac{25,0 \text{ kg}}{(1,28 \text{ s})^2} = 10^2 \frac{\pi^2}{1,28^2} \cdot \text{N/m} = \boxed{602 \cdot \text{N/m}}.$$

On s'intéresse maintenant à la pesée proprement dite d'un astronaute dont on veut déterminer la masse m_{ast} . Celui-ci s'assoit sur la chaise et la met en mouvement. Les oscillations ont alors pour période $T_{\text{ast}} = 2,56 \text{ s}$.

8. Donner, sans calcul, l'équation différentielle vérifiée par la position du point d'attache de la chaise lorsqu'un astronaute est assis.

Réponse :

L'équation différentielle est la même que celle de la question 1) en remplaçant m_0 par $m_{\text{ast}} + m_0$:

$$\boxed{\frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{k}{m_0 + m_{\text{ast}}} x(t) = 0}.$$

9. En déduire que la masse de l'astronaute vaut :

$$m_{\text{ast}} = m_0 \left[\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0} \right)^2 - 1 \right].$$

Réponse :

La période d'oscillation est alors :

$$T_{\text{ast}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0 + m_{\text{ast}}}{k}} \quad \Rightarrow \quad T_{\text{ast}}^2 = T_0^2 + \frac{(2\pi)^2 m_{\text{ast}}}{\left(\frac{4\pi^2 m_0}{T_0^2}\right)} = T_0^2 \left(1 + \frac{m_{\text{ast}}}{m_0} \right).$$

On trouve alors le résultat désiré :

$$m_{\text{ast}} = m_0 \left[\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0} \right)^2 - 1 \right].$$

10. Calculer sa valeur numérique.

Réponse :

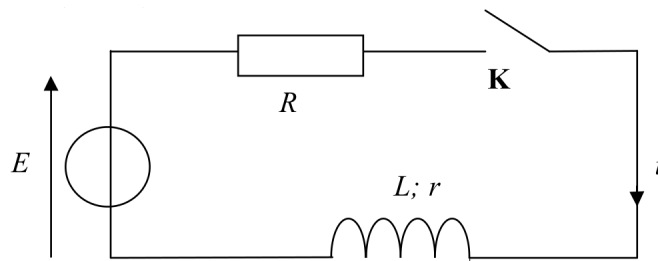
Numériquement :

$$m_{\text{ast}} = 25,0 \text{ kg} \times \left[\left(\frac{2,56 \text{ s}}{1,28 \text{ s}} \right)^2 - 1 \right] = 25,0 \text{ kg} \times 3 = \boxed{75,0 \text{ kg}}.$$

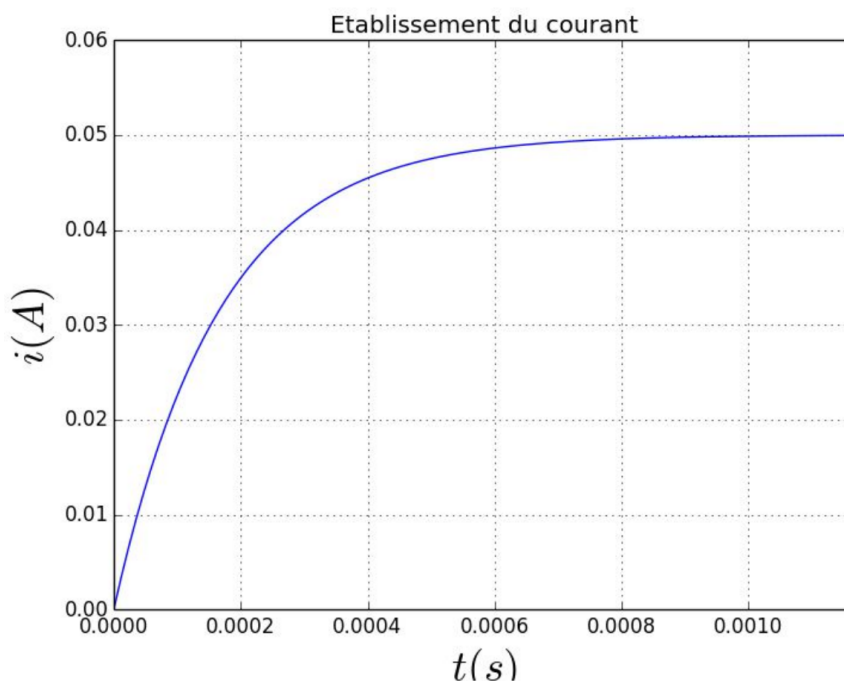
Sujet 4 – corrigé

I Charge d'une bobine

On considère une bobine d'inductance L et de résistance r selon le schéma ci-après.



L'ordinateur nous permet de suivre l'évolution de l'intensité i du courant en fonction du temps. On donne $R = 50\Omega$ et $E = 3,0V$.



1. Reproduire le schéma du montage et indiquer où doivent être branchées la masse M et les voies d'entrées de la carte d'acquisition pour étudier les variations de l'intensité dans le circuit.

Réponse :

Pour mesurer l'intensité dans le circuit, on va mesurer la tension aux bornes de la résistance qui est, d'après la loi d'Ohm, une image de l'intensité (à un facteur R près).

Si la carte d'acquisition fonctionne avec une masse flottante, il suffit de prendre la tension aux bornes de la résistance.

Si la masse n'est pas flottante, alors la masse de la carte est la même que celle du générateur. Il faut alors soit inverser la résistance et la bobine dans le circuit et mesurer alors une image de $-i(t)$, soit mesurer l'opposé de la tension aux bornes de la bobine et celle aux bornes du générateur et faire calculer la somme des 2.

2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

Réponse :

En fléchant la résistance et la bobine en convention récepteurs, la loi des mailles donne :

$$E = u_R + u_L = Ri + ri + L \frac{di}{dt}.$$

L'équation différentielle vérifiée par l'intensité est alors :

$$(R + r)i + L \frac{di}{dt} = E.$$

3. Exprimer l'intensité $i(t)$ en fonction des données.

Réponse :

L'intensité est de la forme :

$$i(t) = \frac{E}{R + r} + Ae^{-t/\tau}$$

où $\tau = \frac{L}{R+r}$. À l'instant initial et par continuité de l'intensité à travers la bobine : $i(t = 0) = 0$, donc $A = \frac{-E}{R+r}$. L'intensité est alors :

$$i(t) = \frac{E}{R + r} (1 - Ae^{-t/\tau})$$

4. Soit I l'intensité du courant électrique qui traverse le circuit en régime permanent. Donner sa valeur numérique et en déduire la résistance r de la bobine.

Réponse :

En régime permanent, $\frac{di}{dt} = 0$, donc d'après la loi des mailles : $E = (R + r)I$, c'est-à-dire

$$I = \frac{E}{R + r}$$

D'après la courbe, $I = 0,05\text{A}$, d'où :

$$r = \frac{E}{I} - R = 10\Omega.$$

5. Déterminer, à partir de la courbe expérimentale, la valeur de l'inductance L de la bobine.

Réponse :

D'après la courbe, le temps caractéristique est $\tau = 1,7 \cdot 10^{-4}\text{s}$. Or $L = \tau(R + r)$. On trouve alors $L = 0,96\text{H}$.

6. Faire les schémas équivalents du circuit à $t = 0^+$ et lorsque t tend vers l'infini.

Réponse :

