Correction MPSI 1 - DS2 - Circuits électriques

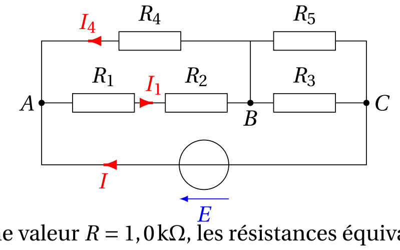
Durée 3h / Calculettes autorisées

Exercice : circuit de résistances

Correction :

1 Dans le circuit, ci-contre :

R_1 et R_2 sont en série
R_3 et R_5 sont en parallèle



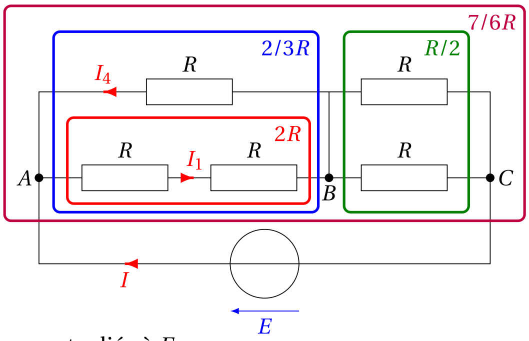
2 En considérant que toutes les résistances ont même valeur $R = 1,0\,\text{k}\Omega$, les résistances équivalentes valent :

3

$$R_{AB} = \frac{2}{3}\,\text{k}\Omega$$

$$R_{BC} = \frac{1}{2}\,\text{k}\Omega$$

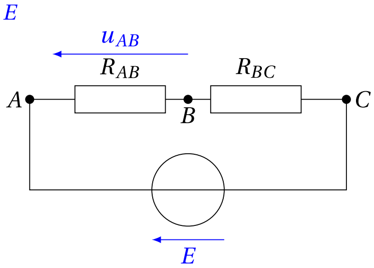
$$R_{AC} = \frac{7}{6}\,\text{k}\Omega$$



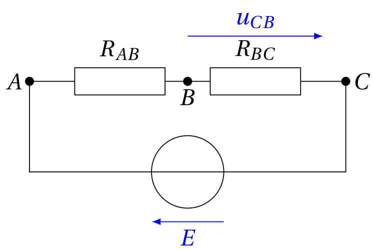
4 La tension u_{AB} est reliée à E par :

D'après la loi du diviseur de tension

$$u_{AB} = \frac{R_{AB}}{R_{AB}+R_{BC}}E = \frac{4}{7}E$$



La tension u_{CB} est reliée à E par :



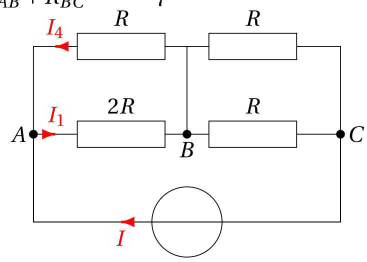
D'après la loi du diviseur de tension (attention aux sens des flèches !)

$$u_{CB} = -\frac{R_{BC}}{R_{AB}+R_{BC}}E = -\frac{3}{7}E$$

5 diviseur de courant

$$I_1 = \frac{1}{3}I$$

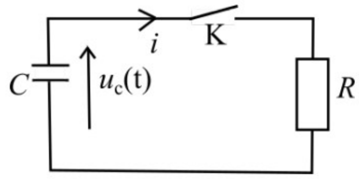
$$I_4 = \frac{-2}{3}I$$



Problème 1 : Etude d'une lampe de secours rechargeable

Correction :

(D'après CCINP TSI 2022)



Q1. Loi des mailles : $\boldsymbol{u_c(t) - Ri(t) = 0}$.
Relation courant tension aux bornes du condensateur **en convention générateur** : $\boldsymbol{i(t) = -C\,\frac{u_c(t)}{dt}}$;
D'où : $u_c(t) + RC\,\frac{du_c(t)}{dt} = 0$;
Sous forme canonique, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{RC} = \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau} = 0 \text{ ; En posant } \tau = RC}}$.

- Solution générale = solution homogène (puisque le second membre est nul) de la forme : $u_c(t) = A\,e^{-t/\tau}$.

Condition initiale : A $t = 0$, $u_c(0^-) = u_c(0^+) = U_0$, car C assure la continuité de la tension à ses bornes.
Alors $A\,e^0 = \boldsymbol{U_0} = \boldsymbol{A}$; Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{u_c(t) = U_0\,e^{-t/\tau} \text{ , avec } \tau = RC}}$.

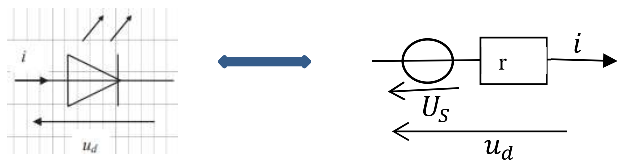
Q2. D'après l'énoncé, $5\tau = 20$ min ; donc $\boldsymbol{\tau = RC = 4 \text{ min} = 240 \text{ s}}$; Alors : $\boxed{\boldsymbol{R = \frac{\tau}{C}}}$.
AN : $R = \frac{240}{10}$; On obtient : $\boldsymbol{R = 24\,\Omega}$.

3. Avec $R_f \to \infty$ (interrupteur ouvert) et $R_s = 0$ (fil), le modèle devient équivalent à C seul.

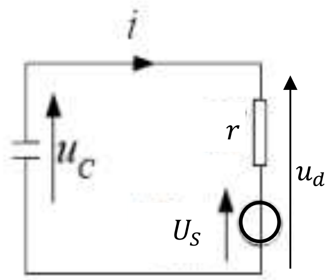
Q4. Lorsque la DEL est bloquée, l'intensité reste nulle, donc elle se comporte comme un **interrupteur ouvert.**

- Lorsqu'elle est passante, la caractéristique de la diode est une droite oblique d'équation : $\boldsymbol{i = \alpha\, u_d + \beta}$.

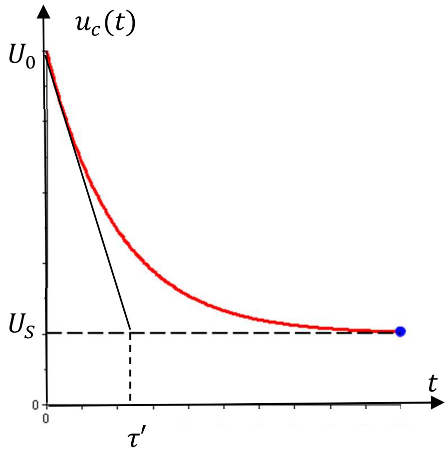
Il faut déterminer α et β :
α est le coefficient directeur de la droite : $\alpha = \frac{250.10^{-3}}{0{,}5} = \frac{0{,}25}{0{,}5} = \frac{25}{50}$; Soit $\boldsymbol{\alpha = 0{,}5}$ **S (ou Ω^{-1})** .
β l'ordonnée à l'origine telle que : $0 = 0{,}5 \times\ 2{,}3 + \beta$; Soit $\beta = -1{,}15$;
D'où l'**équation de la caractéristique :** $\boldsymbol{i = 0{,}5\,u_d - 1{,}15}$ (*)
On souhaite modéliser la DEL sous forme d'un générateur de Thévenin, donc on veut une équation de la forme : $u_d = \alpha' i + \beta'$.
Il faut donc sortir u_d de l'équation précédente (*) : $0{,}5\,u_d = i + 1{,}15$; Ou encore : $u_d = \frac{i}{0{,}5} + \frac{1{,}15}{0{,}5}$
Qui se simplifie en $u_d = 2i + 2{,}3$; De la forme $\boxed{\boldsymbol{u_d = U_S + ri \text{ avec } r = 2\,\Omega \text{ et } U_S = 2{,}3\text{ V}}}$.
On peut donc modéliser la diode passante par une **association série d'une f.e.m. U_S et une résistance r en convention récepteur.**
D'où le schéma électrique équivalent.



Q5. Schéma ci-contre.
i et u_d dont de sens opposés.
u_d et U_S sont de même sens.



Loi des mailles : $u_c(t) - ri(t) - U_S = 0$.
Relation courant tension aux bornes du condensateur **en convention générateur** : $\boldsymbol{i(t) = -C\,\frac{u_c(t)}{dt}}$;
D'où : $u_c(t) + rC\,\frac{u_c(t)}{dt} - U_S = 0$.
Sous forme canonique, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{rC} = \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau'} = \frac{U_S}{rC}}}$;
$\boxed{\textbf{En posant } \boldsymbol{\tau' = rC}}$.



Q6. Solution homogène de la forme : $\boldsymbol{u_{ch}(t) = B\, e^{-t/\tau'}}$.
Solution particulière constante ; Elle satisfait à l'équation différentielle ; Soit : $\boldsymbol{u_{cP} = U_S}$.
Solution générale : $u_c(t) = u_{ch}(t) + u_{cP} = B\, e^{-t/\tau'} + U_S$.
Condition initiale : A $t = 0$, $u_c(0^-) = u_c(0^+) = U_0$, car C assure la continuité de la tension à ses bornes.
Alors $B\, e^0 + U_S = U_0$; D'où : $\boldsymbol{B = U_0 - U_S}$;
Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{u_c(t) = U_S + (U_0 - U_S)\, e^{-t/\tau'}} \textbf{, avec } \boldsymbol{\tau' = rC.}}$

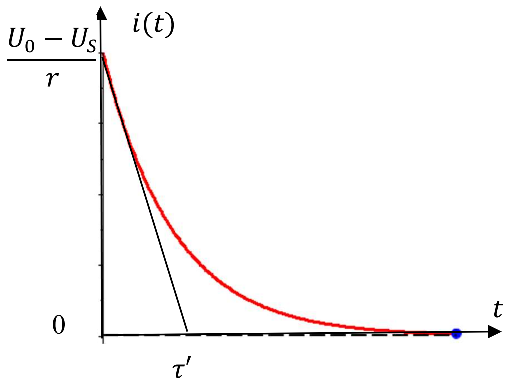
- Allure de $u_c(t)$: ci-contre.

$\boldsymbol{u_c(0^+) = U_0}$ et $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} u_c(t) = U_S}$.
L'intersection de la tangente à l'origine avec l'asymptote horizontale donne accès à τ'.

Q7. On a vu que $\boldsymbol{i(t) = -C\, \frac{u_c(t)}{dt}}$ **;**
Soit : $i(t) = -C\left(-\frac{1}{\tau'}\right)(U_0 - U_S)e^{-\frac{t}{\tau'}}$; Qui se simplifie en $\boxed{\boldsymbol{i(t) = (\frac{U_0-U_S}{r})e^{-t/\tau'}}}$.

- Allure de $i(t)$: ci-contre.

$\boldsymbol{i(0^+) = \frac{U_0-U_S}{r}}$ et $\boldsymbol{\lim_{t\to\infty} i(t) = 0}$.
L'intersection de la tangente à l'origine avec l'axe des temps donne accès à τ'.



Q8. On remarque que $\boxed{\boldsymbol{u_{c\,max} = U_0 = 3{,}3\ V}}$ et $\boxed{\boldsymbol{i_{max} = \frac{U_0-U_S}{r}}}$
D'où : et $i_{max} = \frac{3{,}3-2{,}3}{2}$; on obtient $\underline{\boldsymbol{i_{max} = 0{,}5}\ \textbf{A}}$.
D'après le tableau 1, $\underline{\boldsymbol{i_{max} = 250}\ \textbf{mA et}\ \boldsymbol{u_{c\,max} = 2{,}8}\ \textbf{V}}$.
Conclusion : Il faut restreindre la charge initiale du condensateur (pour limiter $u_{c\,max}$) en **secouant moins longtemps** (≈20 s) et ajouter **une résistance R' en série avec la LED** pour diviser par deux, la valeur initiale de l'intensité.

Q9. D'après l'énoncé, la lampe éclaire tant que $u_d > U_S + 0{,}1$ V.
D'après le schéma de la question Q5, $\boldsymbol{u_c = u_d}$.
Ainsi, la lampe éclaire tant que $U_S + (U_0 - U_S)\, e^{-t/\tau'} > U_S + 0{,}1$ V
A la limite, en $t = T$, on aura : $(U_0 - U_S)\, e^{-T/\tau'} = 0{,}1$ V
Or $U_0 - U_S = 1$V ; Ainsi, on obtient : $e^{-T/\tau'} = 0{,}1$; Soit : $-\frac{T}{\tau'} = \ln(0{,}1) = -\ln(10)$.
Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{T = \tau' \ln(10) = rC \ln(10)}}$; AN : $T = 2 \times 10 \times 2{,}3$; On obtient **: $T \approx 46$ s**.
Conclusion : On est **loin des 20 min annoncées** !

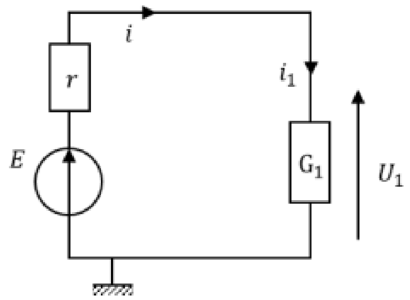
Q10. On sait que l'énergie emmagasinée dans le condensateur se met sous la forme : $\boldsymbol{W = \frac{1}{2}\, C\, U^2}$.
Ainsi, l'énergie initiale sera : $W_i = \frac{1}{2}\, C\, {U_0}^2$; Et l'énergie finale : $W_{Fin} = \frac{1}{2}\, C\, {U_{Fin}}^2$.
Alors le pourcentage d'énergie restante dans le condensateur lorsque la DEL cesse d'émettre de la lumière est :
$\boxed{\boldsymbol{P = 100 \times \frac{W_{Fin}}{W_i} = 100 \times \frac{{U_{Fin}}^2}{{U_0}^2}}}$.

Problème 2 : Guirlandes électriques

Correction :

1) L'intensité $i_{2,o}$ à travers D_2 est nulle. On en déduit : $\boxed{\mathcal{P}_{2,o} = 0}$.

2) Le circuit est équivalent à :



La loi des mailles donne :

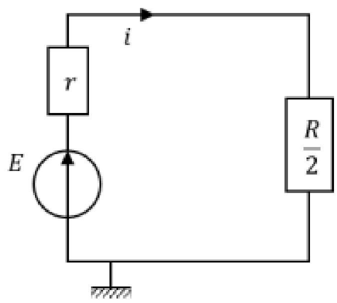
$$E = i_0(r + R) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_0 = \frac{E}{r + R}}$$

D'après la loi d'Ohm : $U_1 = R\,i_0$.

On en déduit la puissance reçue par G_1.

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} = i_0 U_1 = R\left(\frac{E}{r + R}\right)^2}$$

3) Les deux guirlandes sont en dérivation. On peut les remplacer par une résistance équivalente $R_{eq} = \frac{R}{2}$.



La loi des mailles donne :

$$E = i_f\left(r + \frac{R}{2}\right) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_f = \frac{E}{r + \frac{R}{2}}}$$

4) On en déduit (avec $R_1 = R_2 = R$) :

$$\boxed{i_1 = \frac{R_2}{R_1 + R_2} i_f = \frac{E}{2r + R}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{i_2 = \frac{R_1}{R_1 + R_2} i_f = \frac{E}{2r + R}}$$

5) Puissance électrique reçue par chaque guirlande :

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,f} = \mathcal{P}_{2,f} = R\left(\frac{E}{2r + R}\right)^2}$$

6) On a :

$$\mathcal{P}_{1,o} = R\left(\frac{E}{r + R}\right)^2 \quad \neq \quad \mathcal{P}_{1,f} = R\left(\frac{E}{2r + R}\right)^2$$

La guirlande 1 va donc se mettre à clignoter, puissance la puissance lumineuse qu'elle émet varie périodiquement. Ce montage ne satisfait donc pas de cahier des charges.

7) Pour limiter cet effet, il faut que : $\boxed{r \ll R}$. Dans ce cas, où peut négliger r et il vient :

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} \simeq \mathcal{P}_{1,f} \simeq R\left(\frac{E}{R}\right)^2}$$

Ce n'est pas le cas avec les valeurs données dans l'énoncé.

8) En régime stationnaire, la bobine est équivalente à un fil électrique. Le montage est donc équivalent à celui de la partie I.1.

9) Puisque le montage est équivalent à celui de la partie précédente, on sait que :

$$\boxed{i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = \frac{E}{r+R}}$$

Le courant à travers une bobine étant toujours continu, on en déduit :

$$\boxed{i_1\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right) = \frac{E}{r+R}}$$

10) L'interrupteur étant ouvert, on a :

$$\boxed{i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^-\right) = 0}$$

Chercherons $i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right)$. La loi des mailles donne :

$$E = ri + Ri_2$$

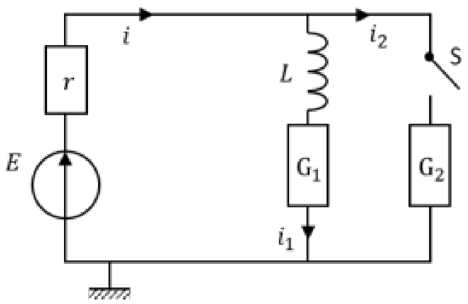
Avec la loi des nœuds :

$$E = r(i_1 + i_2) + Ri_2 \quad \Rightarrow \quad i_2 = \frac{E - ri_1}{r+R}$$

On en déduit :

$$\boxed{i_2\left(\left(\frac{T}{2}\right)^+\right) = \frac{E - r\left(\frac{E}{r+R}\right)}{r+R} = E\frac{R}{(r+R)^2}}$$

11)



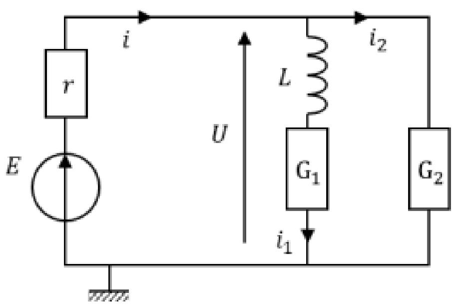
Loi des mailles :

$$E = ri_1 + L\frac{di_1}{dt} + Ri_1 = i_1(r+R) + L\frac{di_1}{dt}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_o} = \frac{E}{L} \qquad avec \qquad \tau_o = \frac{L}{r+R}}$$

12)



Loi des mailles + loi des nœuds :

$$E = ri + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} = r(i_1 + i_2) + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt}$$

De plus,

$$U = Ri_2 = Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \quad \Rightarrow \quad i_2 = i_1 + \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt}$$

En combinant les deux équations, il vient :

$$\begin{aligned} E &= r\left(i_1 + i_1 + \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt}\right) + Ri_1 + L\frac{di_1}{dt} \\ &= i_1(2r+R) + L\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{di_1}{dt} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1+\frac{r}{R}\right)} \qquad \text{avec :} \qquad \tau_f = \frac{L\left(1+\frac{r}{R}\right)}{2r+R}}$$

13) La forme générale de la solution de cette ED :

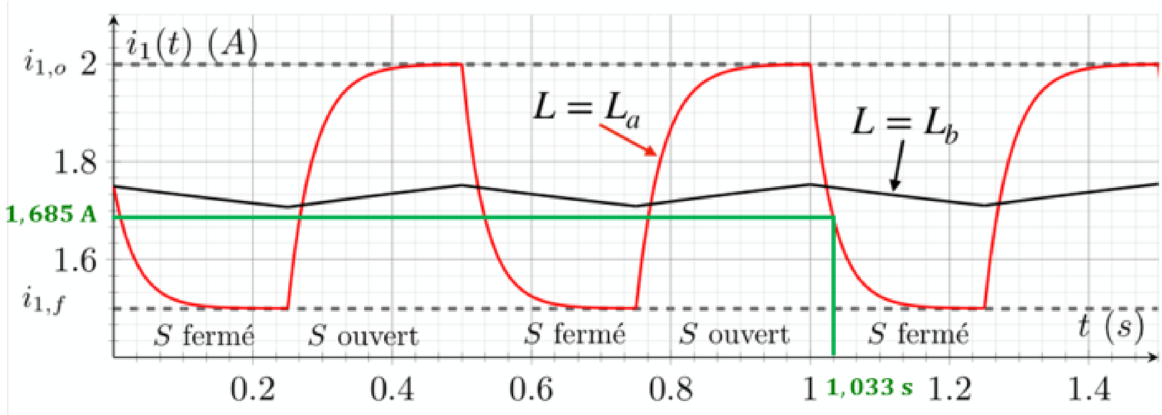
$$\boxed{i_1(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + \frac{\mathrm{E}}{2r+R}}$$

Avec A une constante.

14) Il s'agit de la bobine L_a (la charge de la bobine a le temps de se faire entièrement).

15) Le temps τ_f correspond au temps nécessaire pour réaliser 63 % de la décharge de la bobine.

Prenons le point de bascule en $t = 1$ s. L'intensité va passer d'une valeur initiale de 2 A à une valeur finale de 1,5 A. Il s'agit d'une chute de 0,5 A. Or, $0{,}5 \times 0{,}63 = 0{,}315$. On cherche donc le moment au l'intensité à chuter de 0,315 A, c'est-à-dire le moment où $i = 1{,}685$ A.



Ainsi,

$$\boxed{\tau_f = 0{,}033 \text{ s} = 33 \text{ ms}}$$

On en déduit :

$$\boxed{\mathrm{L_a} = \tau_f \frac{2r+R}{1+\frac{r}{R}} = 88 \text{ mH}}$$

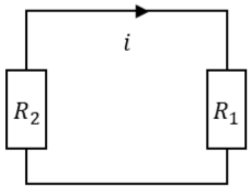
16) Le temps caractéristique du régime transitoire avec L_b est très supérieur devant celui avec L_a. Donc $\boxed{L_b \gg L_a}$.

17) Il s'agit de L_b, car l'intensité $i_1(t)$ ne varie presque pas (et il en va de même pour la tension U).

Problème 3 : Étude d'une inductance

Correction :

1) En $t = 0^-$, la bobine est équivalente à un fil. Le circuit équivalent est :

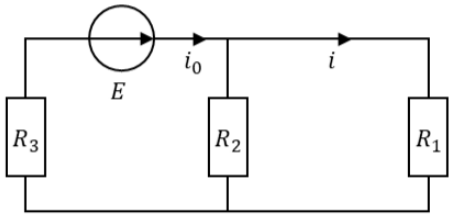


Une loi des mailles donne :

$$0 = (R_1 + R_2) \cdot i(0^-) \quad \Rightarrow \quad \boxed{i(0^-) = 0}$$

2) L'intensité à travers une bobine est toujours continue. Donc $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$.

3) En $t = +\infty$, la bobine est équivalente à un fil. Le circuit équivalent est :



La résistance équivalente de l'ensemble du circuit vaut :

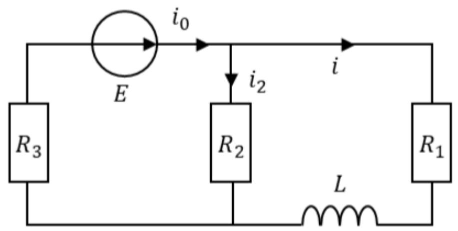
$$R_{eq} = R_3 + R_1 \parallel R_2 = R_3 + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

Le générateur est alors parcouru par un courant d'intensité : $\quad i_0(+\infty) = \frac{E}{R_{eq}}$

On applique finalement la formule du pont diviseur de courant :

$$i(+\infty) = \frac{R_2}{R_1+R_2}\, i_0(+\infty) = E\cdot\frac{R_2}{R_1+R_2}\cdot\frac{1}{R_3+\frac{R_1R_2}{R_1+R_2}} = \boxed{\frac{R_2}{R_1R_3+R_2R_3+R_1R_2}\cdot E = i_\infty}$$

4)



On a :

$$\begin{aligned}
& E = u_{R_1} + u_L + u_{R_3} && \leftarrow \text{ loi des mailles}\\
\Rightarrow\ & E = R_1 i + L\frac{di}{dt} + R_3 i_0 && \leftarrow \text{ relations i/u}\\
\Rightarrow\ & E = R_1 i + L\frac{di}{dt} + R_3(i+i_2) && \leftarrow \text{ loi des nœuds : } i_0 = i + i_2\\
\Rightarrow\ & E = (R_1+R_3)\, i + L\frac{di}{dt} + \frac{R_3}{R_2}\, u_{R_2} &&\\
\Rightarrow\ & E = (R_1+R_3)\, i + L\frac{di}{dt} + \frac{R_3}{R_2}\left(R_1 i + L\frac{di}{dt}\right) && \leftarrow \text{ loi des mailles : } u_{R_2} = u_{R_1} + u_L\\
\Rightarrow\ & L\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)\frac{di}{dt} + \left(R_1+R_3+\frac{R_1R_3}{R_2}\right) i(t) = E && \leftarrow \text{ ré-arrangement des termes}\\
\Rightarrow\ & \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{i(t)}{\tau} = \frac{E}{L\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)} = \frac{i_\infty}{\tau}} && \leftarrow \text{ mise sous forme canonique}
\end{aligned}$$

Avec :

$$\tau = \frac{L\left(1+\frac{R_3}{R_2}\right)}{R_1+R_3+\frac{R_1R_3}{R_2}} = \boxed{\frac{L(\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_3)}{R_1\mathrm{R}_2+\mathrm{R}_2R_3+R_1R_3}}$$

5) La solution de l'ED est : $i(t) = A\, e^{-t/\tau} + i_\infty$

Or, en $t = 0^+$, on a : $i(0^+) = A + i_\infty = 0 \Rightarrow A = -\, i_\infty$

Ainsi :

$$\boxed{i(t) = i_\infty\cdot\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

6) Le nouveau circuit ne contient qu'une seule maille. La loi des mailles donne :

$$0 = u_{R_1} + u_L + u_{R_2} \quad\Rightarrow\quad 0 = (R_1+R_3)i + L\frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow\quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R_1+R_3}{L}\, i(t) = 0}$$

7) L'intensité (qui est continue lorsque l'on ouvre l'interrupteur) évolue de i_∞ (à $t = 0^+$) à 0 (en $t = +\infty$). On en déduit l'énergie initialement stockée dans la bobine : $\boxed{\mathcal{E}_{L,ini} = \frac{1}{2}Li_\infty^2}$. Cette énergie est entièrement cédée aux résistances (car $i = 0$ en $t = +\infty$) : $\boxed{\mathcal{E}_{Joule} = \frac{1}{2}Li_\infty^2}$.