

Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

1 Rappels sur les nombres complexes

Notations du physicien : en physique, il est d'usage

- d'écrire $j^2 = -1$ car la lettre i est déjà utilisée pour désigner l'intensité du courant électrique
- de souligner toute grandeur \underline{Z} à valeurs complexes.
- de noter \underline{Z}^* le conjugué de \underline{Z}

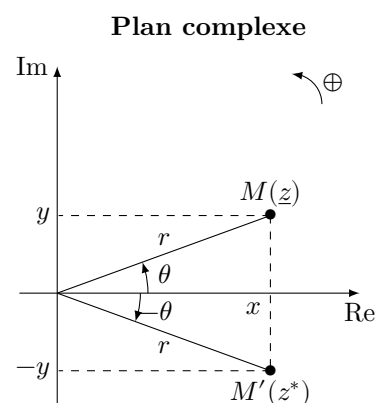
1.1 Formes d'un nombre complexe

Soit \underline{z} un nombre complexe, on peut l'écrire sous deux formes *équivalentes* :

- forme rectangulaire :** $\underline{z} = x + jy$
 - $x = \text{Re}(\underline{z})$ la partie réelle de \underline{z}
 - $y = \text{Im}(\underline{z})$ la partie imaginaire de \underline{z}
- forme trigonométrique :** $\underline{z} = re^{j\theta} = r(\cos \theta + j \sin \theta)$
 - $r = |\underline{z}|$ le module de \underline{z}
 - $\theta = \text{Arg}(\underline{z})$ l'argument de \underline{z} .

Conjugué :

$$\underline{z}^* = x - jy = re^{-j\theta}$$



Relations à connaître :

$$|\underline{z}| = \sqrt{\text{Re}(\underline{z})^2 + \text{Im}(\underline{z})^2}$$

$$\cos(\text{Arg}(\underline{z})) = \frac{\text{Re}(\underline{z})}{|\underline{z}|}$$

$$\sin(\text{Arg}(\underline{z})) = \frac{\text{Im}(\underline{z})}{|\underline{z}|}$$

$$\tan(\text{Arg}(\underline{z})) = \frac{\text{Im}(\underline{z})}{\text{Re}(\underline{z})}$$

1.2 Opérations sur les nombres complexes

Somme ou différence : $\underline{Z} = X + jY = \underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) \pm j(y_1 + y_2)$ donc

$$\text{Re}(\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2) = \text{Re}(\underline{z}_1) \pm \text{Re}(\underline{z}_2)$$

$$\text{Im}(\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2) = \text{Im}(\underline{z}_1) \pm \text{Im}(\underline{z}_2)$$

Produit : $\underline{Z} = Re^{j\theta} = \underline{z}_1 \times \underline{z}_2 = r_1 e^{j\theta_1} \times r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ donc

$$|\underline{z}_1 \underline{z}_2| = |\underline{z}_1| |\underline{z}_2|$$

$$\text{Arg}(\underline{z}_1 \underline{z}_2) = \text{Arg}(\underline{z}_1) + \text{Arg}(\underline{z}_2)$$

Rapport : $\underline{Z} = Re^{j\theta} = \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \frac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \frac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$ donc

$$\left| \frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} \right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}$$

$$\text{Arg}\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \text{Arg}(\underline{z}_1) - \text{Arg}(\underline{z}_2)$$

Exercice d'application : déterminer le module et l'argument (ou sa tangente) des nombres complexes suivants, où x est un réel strictement positif :

$$z_1 = 1 \quad z_2 = -x^2 \quad z_3 = jx \quad z_4 = 1 + j \quad z_5 = \frac{1}{1 + jx}$$

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

.....

2 Signal complexe associé à un signal réel *sinusoïdal*

2.1 Définition

Au signal *sinusoïdal réel* $x(t)$, on associe le signal *complexe* $\underline{x}(t)$ tel que :

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi) \quad \leftrightarrow \quad \underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)} = X e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \underline{X} e^{j\omega t}$$

avec \underline{X} l'amplitude *complexe* du signal complexe.

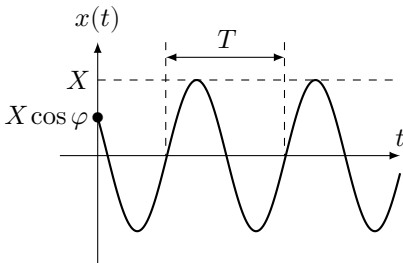
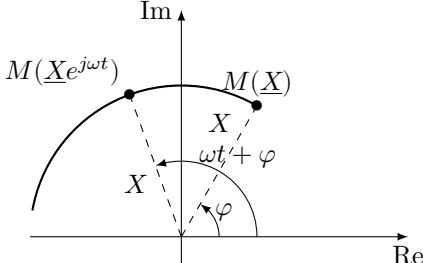
Signal Réel \rightarrow signal complexe : on transforme le cosinus en exponentielle complexe

$$\cos(\) \rightarrow e^{j(\)}$$

Signal complexe \rightarrow signal réel : on prend la partie réelle du signal complexe

$$x(t) = \text{Re}[\underline{x}(t)]$$

2.2 Caractéristiques des signaux

	Signal réel $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$	Signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$
Caractéristiques	<ul style="list-style-type: none"> pulsation $\omega = \frac{2\pi}{T}$ Amplitude réelle X phase à l'origine φ 	<ul style="list-style-type: none"> pulsation identique ω amplitude complexe $\underline{X} = X e^{j\varphi}$
Représentation		

l'amplitude complexe \underline{X} est liée à l'amplitude réelle X et à la phase initiale φ du signal réel

$$\underline{X} = X e^{j\varphi}$$

3 Utilisation du signal complexe associé

3.1 Dérivation de signaux

Soit un signal réel $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ et son signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$.

- la dérivée du signal réel s'exprime :

$$\frac{dx(t)}{dt} = -\omega X \sin(\omega t + \varphi) = \omega X \cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

- la dérivée du signal complexe s'exprime :

$$\frac{d\underline{x}(t)}{dt} = j\omega \underline{X}e^{j\omega t} = \omega X e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\varphi} e^{j\omega t} = \omega X e^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)}$$

en prenant sa partie réelle, on retrouve la dérivée du signal réel :

$$\operatorname{Re} \left[\frac{d\underline{x}(t)}{dt} \right] = \operatorname{Re} [\omega X e^{j(\omega t + \varphi + \pi/2)}] = \omega X \cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = -\omega X \sin(\omega t + \varphi)$$

Dériver un signal complexe $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$ revient à le multiplier par $j\omega$

$$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \times \underline{x}(t)$$

3.2 Intégration de signaux

Soit un signal réel $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ et son signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$.

- une primitive du signal réel s'exprime :

$$\int x(t)dt = \frac{X}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + \text{cte} = \frac{X}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) + \text{cte}$$

- une primitive du signal complexe s'exprime :

$$\int \underline{x}(t)dt = \underline{X} \int e^{j\omega t}dt = \frac{1}{j\omega} \underline{X}e^{j\omega t} + \text{cte} = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega} X e^{j\varphi} e^{j\omega t} + \text{cte} = \frac{X}{\omega} e^{j(\omega t + \varphi - \pi/2)} + \text{cte}$$

en prenant sa partie réelle, on retrouve une primitive du signal réel :

$$\operatorname{Re} \left[\int \underline{x}(t)dt \right] = \operatorname{Re} \left[\frac{X}{\omega} e^{j(\omega t + \varphi - \pi/2)} \right] + \operatorname{Re}[\text{cte}] = \frac{X}{\omega} \cos(\omega t + \varphi - \pi/2) + \text{cte} = \frac{X}{\omega} \sin(\omega t + \varphi) + \text{cte}$$

Intégrer un signal complexe $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$ revient à le diviser par $j\omega$

$$\int \underline{x}dt = \left[\frac{1}{j\omega} \times \underline{x}(t) \right]$$

3.3 Bilan

	Signal réel $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$	Signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$
Dérivation	$\frac{dx}{dt}$ (pas d'expression simple)	$\frac{d\underline{x}}{dt} = j\omega \times \underline{x}(t)$
Intégration	$\int xdt$ (pas d'expression simple)	$\int \underline{x}dt = \left[\frac{1}{j\omega} \times \underline{x}(t) \right]$

Exercice d'application : on considère le signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \pi/2)$

1. Donner l'expression de son signal complexe associé $\underline{s}(t)$ ainsi que son amplitude complexe \underline{S} .

.....

.....

.....

.....

.....

2. Calculer $\underline{\tilde{s}}(t)$.

.....

.....

.....

.....

.....