Correction du TD d'application

I Mouvements simples de particules chargées

On considère une particule ponctuelle, de charge q et de masse m, de vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ à l'entrée d'une zone où règnent un champ électrique $\overrightarrow{E}$ ou un champ magnétique $\overrightarrow{B}$. On suppose ces champs uniformes et indépendants du temps, et on néglige toute autre force que celles provoquées par ces champs.

On suppose dans un premier temps que la particule décrit une droite et possède une accélération constante a.

1) Déterminer la direction et la norme du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.

Réponse

On étudie la particule M de masse m et de charge q assimilée à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Cette particule est soumise à la force de Lorentz

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

La trajectoire est rectiligne et uniformément accélérée, soit

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{cte}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{a}t + \overrightarrow{v_0}$$

La norme de $\overrightarrow{v}$ varie, donc l'énergie cinétique aussi. Or, **seule la force électrique travaille**[1], le champ est un donc champ électrique. De plus, pour que la trajectoire soit rectiligne, il faut, d'après l'expression de $\overrightarrow{v}(t)$, que $\overrightarrow{a}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{v_0}$. Or,

$$\overrightarrow{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}$$

donc $\overrightarrow{E}$ **est colinéaire à** $\overrightarrow{v_0}$.

◇

2) Déterminer la position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ du point en fonction du temps. On notera $\overrightarrow{\mathrm{OM}_0}$ la position initiale.

Réponse

On note O l'origine du repère. On intègre l'expression de la vitesse pour avoir la position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ de la particule :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{q}{2m}t^2\,\overrightarrow{E} + t\overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\mathrm{OM}_0}}$$

◇

La particule décrit maintenant une trajectoire circulaire de rayon R_0, dans un plan $x\mathrm{O}y$.

3) Déterminer la direction du ou des champs qui provoquent cette trajectoire.

Réponse

La trajectoire circulaire est celle d'une charge dans un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse initiale. On en déduit que $\overrightarrow{B}$ **est suivant** $\mathrm{O}z$ **et que** $\overrightarrow{v_0}$ **est dans le plan** $x\mathrm{O}y$.

◇

1. La force de Lorentz magnétique $q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$ donc à la trajectoire

4) Déterminer l'équation de la trajectoire et la relation entre la norme du champ, v_0 et R_0. On suggère d'utiliser les coordonnées polaires.

Réponse

La trajectoire étant circulaire, la vitesse en coordonnées polaires a pour expression $\vec{v} = R_0\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ et l'accélération se réduit à

$$\vec{a} = -R_0\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + R_0\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la charge q dans le référentiel d'étude que l'on supposera galiléen, s'écrit :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or, $\vec{B} = B\,\vec{u_z}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} q\vec{v} \wedge \vec{B} &= qR_0\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \wedge B\,\vec{u_z} \\ &= qBR_0\dot{\theta}(\underbrace{\vec{u_\theta} \wedge \vec{u_z}}_{=\vec{u_r}}) \\ \Leftrightarrow \boxed{q\vec{v} \wedge \vec{B} = qBR_0\dot{\theta}\,\vec{u_r}} \end{aligned}$$

En projetant le PFD sur la base polaire $(\vec{u_r}, \vec{u_\theta})$, il vient :

$$\begin{cases} -mR_0\dot{\theta}^2 = qR_0\dot{\theta}B \\ R_0\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On obtient alors

$$\boxed{\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = -\frac{qB}{m}t + \theta_0}$$

Si la charge est positive, elle tourne dans le sens anti-trigonométrique (horaire) par rapport à Oz. Puisque $\dot{\theta}$ est constante, le mouvement et circulaire uniforme et $v_0 = R_0\left|\dot{\theta}\right|$ (c'est une norme donc nécessairement positive !) d'où

$$\boxed{R_0 = \frac{mv_0}{qB}}$$

◇

II Filtre de vitesse

Un ion de masse m et de charge q pénètre dans un filtre par la fente F_1 avec un vecteur vitesse $\vec{v} = v_0\,\vec{u_x}$. Il y règne un champ électrique $\vec{E} = E\,\vec{u_y}$ et un champ magnétique $\vec{B} = B\,\vec{u_z}$, uniformes et stationnaires.

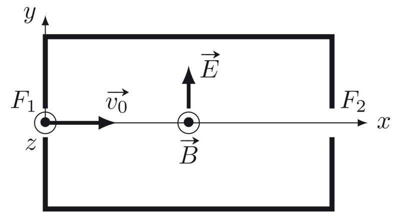

Figure 5.1 – Schéma du filtre de vitesse.

1) Écrire la force de Lorentz alors ressentie par l'ion.

Réponse

Dans le référentiel du laboratoire, le système {ion} repéré par son point matériel M de masse m et de charge q dans un repère cartésien $(F_1, \vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ est soumis à la force de Lorentz, telle que

$$\vec{F} = q\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right)$$

$$= qE\,\overrightarrow{u_y} + qBv_0\,\underbrace{(\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z})}_{=-\overrightarrow{u_y}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{F} = q(E - Bv_0)\ \overrightarrow{u_y}}$$

◇

2) À quelle condition l'ion peut-il avoir une trajectoire rectiligne l'amenant à passer à travers la fente F_2 ?

Réponse

Pour avoir une trajectoire rectiligne sur $\overrightarrow{u_x}$, il faut que la somme des forces s'appliquant sur l'ion soit nulle. Ainsi, en négligeant le poids devant la force de LORENTZ, il faut **que la force de LORENTZ soit nulle**.

◇

3) Exprimer en fonction de E et B la vitesse v_0 lui permettant d'atteindre la fente F_2. Justifier le nom du dispositif.

Réponse

La condition précédente avec l'équation de la première question amène à

$$E - v_0 B = 0 \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \frac{E}{B}}$$

Ainsi, si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à $v_0\,\overrightarrow{u_x}$, alors elle sera déviée et ne passera pas par la fente F_2 : on filtre effectivement les vitesses.

◇

III Déviation d'un électron

Un électron pénètre en A avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ dans la zone grisée où règne un champ magnétique $\overrightarrow{B}$ uniforme et stationnaire. On suppose que la zone où règne le champ magnétique est très grand de telle sorte que la particule ne peut que ressortir par les côtés AC ou AD.

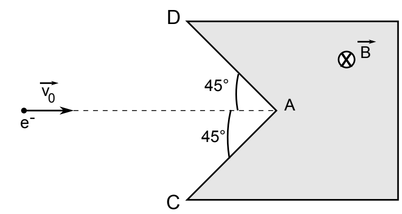

FIGURE 5.2 – Schéma de la situation.

1) Quelle est la trajectoire de la particule dans la zone grisée ? On précisera les caractéristiques de cette trajectoire.

Réponse

La particule arrive dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{cte}}$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$ orthogonale à $\overrightarrow{B}$. La trajectoire est donc un cercle de rayon $R = mv_0/(qB_0)$, avec $B_0 = \|\overrightarrow{B}\|$. La force en A est dirigée vers le bas, on en déduit la position du centre C_1 de la trajectoire.

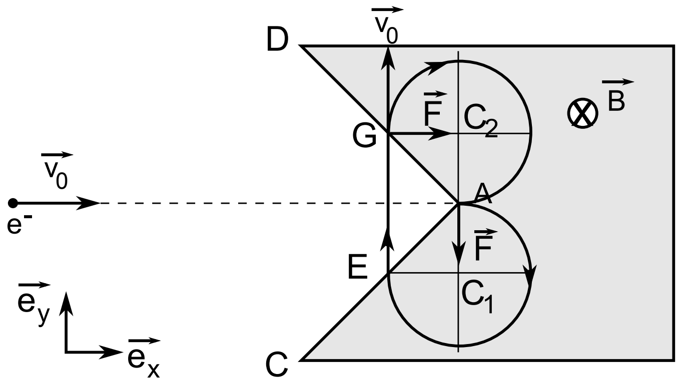

Figure 5.3 – Trajectoire dans la zone.

◇

2) Par quelle face ressort la particule ? Quelle est la direction de la vitesse ?

Réponse

La particule ressort par la face AC en E, avec une vitesse selon $\overrightarrow{e_y}$ car le triangle AC_1E est isocèle et rectangle en C_1.

◇

3) Que se passe-t-il ensuite ? Quel nom donneriez-vous à ce dispositif ?

Réponse

En dehors de la zone grisée, la particule est isolée, donc elle est animée d'un mouvement rectiligne uniforme ($\overrightarrow{v} = v_0\,\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{\text{cte}}$) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

La particule entre à nouveau dans le zone où règne le champ magnétique par la face AD, avec une vitesse $\overrightarrow{v} = v_0\,\overrightarrow{e_y}$. La trajectoire est alors circulaire de même rayon R (car la vitesse est la même en norme). On représente la force magnétique en G, et on en déduit le position C_2 du centre de la trajectoire. La particule arrive en A avec la vitesse $\overrightarrow{v} = -v_0\,\overrightarrow{e_x}$ et sort de la zone grisée.

Au final, la particule a subi une déviation de π, comme si elle avait été réfléchie par un miroir. On pourrait donc appeler ce dispositif un **miroir magnétique**.

Remarque

Vérifiez que l'effet miroir est maintenu si la particule incidente n'arrive plus en A. On constate en revanche que la particule n'emprunte plus le même chemin qu'à l'aller.

◇

IV Imprimante jet d'encre

Dans un dispositif d'impression industriel, les gouttelettes d'encre sont chargées puis déviées de manière contrôlée par un déflecteur électrostatique avant d'atteindre le support d'impression.

Un gouttelette de volume $V = 10\,\text{pL}$, de charge $q = 3{,}4 \times 10^{-14}\,\text{C}$ et de vitesse $v_0 = 20\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-1}$ entre en O dans le déflecteur, constitué de deux électrodes planes portées aux potentiels électriques V_1 et V_2 et générant un champ électrostatique uniforme $\vec{E} = E\,\vec{u_y}$ avec $E = 5{,}0 \times 10^5\,\text{V}{\cdot}\text{m}^{-1}$.

La longueur du déflecteur est $L_1 = 5{,}0\,\text{cm}$. Le support d'impression se trouve à la distance $L_2 = 20\,\text{cm}$ de la sortie du déflecteur. L'encre est essentiellement constituée d'eau, de masse volumique $\rho = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3}$.

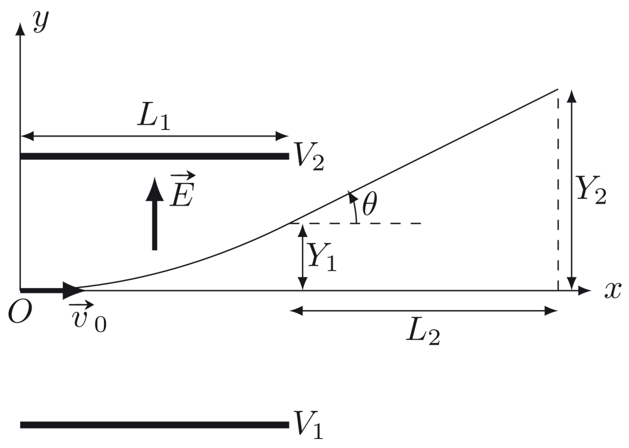

Figure 5.4 – Schéma du déflecteur.

1) Quel est le signe de la tension $V_1 - V_2$ pour que la gouttelette d'encre soit effectivement déviée dans le sens des y croissants ?

Réponse

La gouttelette est chargée positivement, et subit la force électrique $\vec{F}_e = q\vec{E}$. Pour aller dans le sens des y croissants, il faut que $\vec{E}$ soit selon $\vec{u_y}$, comme indiqué dans l'énoncé. Or, $\vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, donc $\vec{E}$ va des **hauts potentiels** vers les **bas potentiels** ; il faut donc $V_1 > V_2$, soit

$$\boxed{V_1 - V_2 > 0}$$

◇

2) Calculer la masse m de la gouttelette et montrer que l'on peut négliger son poids devant la force électrique de Lorentz.

Réponse

La gouttelette a un volume V et une masse volumique ρ. On en déduit

$$\boxed{m = \rho V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}{\cdot}\text{m}^{-3} \\ V = 10\,\text{pL} = 10 \times 10^{-12}\,(\text{dm})^3 \\ \quad = 1{,}0 \times 10^{-11}\,(10^{-1}\text{m})^3 \\ \quad = 1{,}0 \times 10^{-14}\,\text{m}^3 \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{m = 1{,}0 \times 10^{-11}\,\text{kg}}$$

Ainsi, on trouve

$$\|\vec{F}_e\| = qE \approx 1{,}7 \times 10^{-8}\,\text{N} \quad \text{et} \quad \|\vec{P}\| = mg \approx 1{,}0 \times 10^{-10}\,\text{N} \quad \text{soit} \quad \boxed{\|\vec{F}_e\| \approx 200 \times \|\vec{P}\|}$$

On peut donc négliger le poids devant la force de Lorentz.

◇

3) Appliquer la deuxième loi de Newton à la gouttelette entre les électrodes et déterminer l'équation de sa trajectoire. En déduire le déplacement Y_1 en sortie du déflecteur.

Réponse

On applique le PFD à la gouttelette dans le référentiel de la salle d'impression, supposé galiléen, avec un repère cartésien tel qu'indiqué sur le schéma :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = \dfrac{qE}{m}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$$

en intégrant une première fois avec $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$, en ignorant le mouvement en z, puis en intégrant une seconde fois, avec $x(0) = 0 = y(0)$. On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y(x) = \frac{qE}{2m{v_0}^2}x^2}$$

qui est l'équation d'une parabole. Ainsi, on trouve $Y_1 = y(L_1)$:

$$\boxed{Y_1 = 5{,}3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} = 5{,}3\,\mathrm{mm}}$$

---

4) Caractériser la trajectoire de la gouttelette après sa sortie du déflecteur, en négligeant son poids.

Réponse

Après être sortie du déflecteur, la gouttelette n'est soumise à aucune action sauf son poids, que l'on ignore sur la durée du trajet restant ($v_0 = 20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$) : sa trajectoire est donc rectiligne et uniforme.

---

5) Exprimer puis calculer la déflexion angulaire θ. En déduire le déplacement Y_2.

Réponse

On trouve l'angle de sortie en prenant

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(L_1)}{\dot{x}(L_1)} = \frac{qEL_1}{m{v_0}^2} = 2\frac{Y_1}{L_1}$$

L'angle trouvé étant petit ($\theta \approx 0{,}21\,\mathrm{rad}$), $\tan\theta \approx \theta \approx \sin\theta$. Or, on a

$$Y_2 = Y_1 + L_2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_2 = Y_1\left(1 + 2\frac{L_2}{L_1}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_1 = 5{,}3 \times 10^{-1}\,\mathrm{cm} \\ L_1 = 5{,}0\,\mathrm{cm} \\ L_2 = 20\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{Y_2 = 4{,}8\,\mathrm{cm}}$$
