Méca 2 Dynamique du point

1 Introduction

1.1 Le point matériel

Dans les premiers chapitres de mécanique, nous allons étudier le mouvement de **points matériels**. Par exemple, pour modéliser la trajectoire d'un ballon, on ne s'intéresse qu'au mouvement de son centre, ignorant son mouvement de rotation.

Pour aller plus loin, et décrire un véhicule à roues par exemple, on doit étudier la dynamique du **solide**.

1.2 Inertie et quantité de mouvement

On peut stopper quelqu'un qui court en le poussant. Pour stopper une voiture allant à la même vitesse de la même façon, c'est presque impossible : cette résistance à la **variation de vitesse** est appelée inertie.

Pour quantifier l'inertie, on définit la quantité de mouvement.

Définition. Le **vecteur quantité de mouvement** d'un point matériel M de masse m est :

$$\vec{p}\,(\mathrm{M}/\mathcal{R}) = m\vec{v}\,(\mathrm{M}/\mathcal{R})$$

On a noté $\vec{v}\,(\mathrm{M}/\mathcal{R})$ le vecteur vitesse de ce point matériel dans le référentiel $\mathcal{R}$.

1.3 Les forces

Définition. Une **force** caractérise l'action mécanique sur un point matériel M. C'est un vecteur, son unité est le newton (N). Une force est indépendante du référentiel.

Les quatre interactions fondamentales Les interactions physiques entre les systèmes sont classés en quatre grands types. Toutes les interactions physiques se rapportent à une de ces interactions fondamentales.

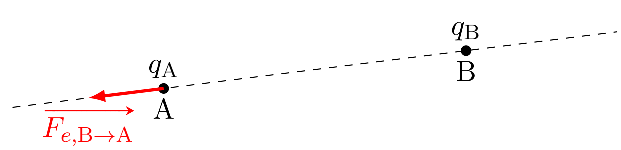
L'interaction faible : elle intervient au niveau des nucléons, elle de faible intensité et de très courte portée ($\approx 10^{-18}$ m).

L'interaction forte : elle est responsable de la cohésion des noyaux atomiques. Grâce à cette interaction, les protons restent dans le noyau malgré leurs charges électriques identiques. Elle est de très forte intensité mais sur une très courte portée ($\approx 10^{-14}$ m).

Ces deux interactions, faibles et fortes, se manifestent lors des transformations nucléaires.

L'interaction électromagnétique : elle intervient entre les particules chargées et est à longue portée. Les particules de même signe se repoussent tandis que celles de signes opposées s'attirent. La force d'interaction électrostatique subie par une charge q_A de la part d'une charge q_B est :

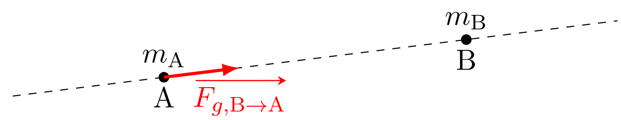
$$\overrightarrow{F_{e,\mathrm{B}\to\mathrm{A}}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_\mathrm{A}q_\mathrm{B}}{\mathrm{BA}^3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$



Cette interaction est responsable de la cohésion des matériaux et donc de leurs propriétés (dureté, élasticité, viscosité, propriétés chimiques, etc.).

L'interaction gravitationnelle : elle intervient entre les particules ayant une masse et est à longue portée. Les masses s'attirent deux à deux. La force d'interaction gravitationnelle subie par une masse m_{A} de la part d'une masse m_{B} est :

$$\overrightarrow{F_{g,\mathrm{B}\to\mathrm{A}}} = -G\frac{m_{\mathrm{A}}m_{\mathrm{B}}}{\mathrm{BA}^3}\overrightarrow{\mathrm{BA}}$$



C'est l'interaction qui prédomine à l'échelle astronomique. Elle est à l'origine du poids, et indirectement de la poussée d'Archimède.

En pratique, on utilise des **lois phénoménologiques** (c'est-à-dire des lois établies par l'expérience) qui donnent l'expression de la force en fonction de la vitesse, de la position, etc.

2 Les trois lois de Newton (1687)

2.1 La première loi de Newton : le principe d'inertie

Il existe des référentiels appelés **référentiels galiléens** dans lesquels un point matériel M **soumis à aucune action mécanique** est
- soit au repos ;
- soit animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme.

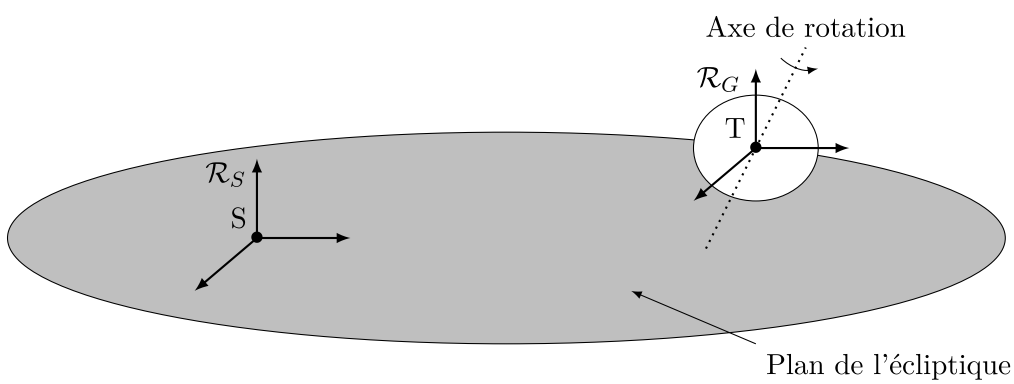
Ainsi, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

Quelques référentiels Les référentiels rigoureusement galiléens n'existent pas. Mais on peut en considérer certains comme approximativement galiléens lorsque l'on étudie le problème sur une durée assez courte.

Les référentiels les plus utiles sont définis par une horloge placée sur Terre et par un repère particulier. Ce sont

- le référentiel **héliocentrique** $\mathcal{R}_S$ qui a pour origine le centre du Soleil et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel. Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif du Soleil dans la galaxie, soit plusieurs millions d'années ;
- le référentiel **géocentrique** $\mathcal{R}_G$ qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont dirigés vers des étoiles fixes dans le ciel. Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif de la Terre autour du Soleil, soit une année ;
- le référentiel **terrestre** $\mathcal{R}_T$, ou référentiel du **laboratoire**, qui a pour origine le centre de la Terre et dont les trois axes sont fixes par rapport à la surface de la Terre. Il est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'une rotation significative de la Terre, soit une journée. C'est le référentiel que nous utiliserons la plupart du temps.

Les différents référentiels sont schématisés ci-dessous.



2.2 La seconde loi de Newton : le principe fondamental de la dynamique

Le principe fondamental de la dynamique est :

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\vec{p}\,(\mathrm{M}/\mathcal{R})\right) = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}$$

Lorsque l'on étudie un point matériel de masse constante, alors $\vec{p}\,(\mathrm{M}/\mathcal{R}) = m\vec{v}\,(\mathrm{M}/\mathcal{R})$, ainsi on retiendra :

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

$$m\vec{a} = \sum \vec{F}$$

où $\vec{a}$ est le vecteur accélération du point M et $\vec{F}$ les différentes forces agissant sur le point M.

Cette loi est l'une des lois les plus importantes de la physique. Elle permet de relier le mouvement cinématique (la dérivée de la vitesse) avec ses causes (les forces extérieures).

Remarque.

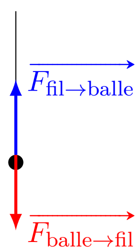
— Le mouvement d'une fusée, qui brûle son carburant puis abandonne ses réservoirs, ne peut pas être traité avec cette formulation, car la masse du système n'est pas constante : il faut revenir à la première formulation.

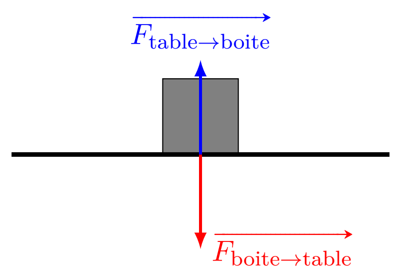
— Il y en est de même pour le mouvement d'une goutte qui s'évapore lors de sa chute.

2.3 La troisième loi de Newton : la loi des actions réciproques

Pour deux points M_1 et M_2 en interaction, la force exercée par le point 1 sur le point 2 est égale à l'opposé de la force exercée par le point 2 sur le point 1 :

$$\overrightarrow{F_{1\to 2}} = -\overrightarrow{F_{2\to 1}}$$





3 Systèmes de points

3.1 Centre d'inertie

Définition. Le **centre de gravité** (ou **centre d'inertie**) G d'un ensemble de points matériel M_i, de masses m_i est défini par :

$$\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

On a alors :

$$\sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}$$

$$\vec{0} = \sum_i m_i\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)$$

Comme $\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{GO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}_i} = \overrightarrow{\mathrm{GM}_i}$, on peut aussi retenir :

$$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{GM}_i} = \overrightarrow{0}}$$

Exemple

Le barycentre de deux masse m placées en A et en B.

On a :

$$m\overrightarrow{\mathrm{GA}} + m\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{0}$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc :

$$2\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{0}$$

$$2\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

On place une masse $3m$ en A et m en B.

On a :

$$3m\overrightarrow{\mathrm{GA}} + m\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{0}$$

Or $3\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$ donc :

$$4\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

Cette définition peut être étendue aux solides qui peuvent être vus comme un ensemble infini de points infiniment proches. Dans ce cas, la somme discrète devient une intégrale.

3.2 Quantité de mouvement d'un ensemble de points

Définition. Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble de points matériel M_i, de masses m_i est défini par :

$$\vec{p}\,(\mathcal{S}) = \sum_i m_i \vec{v}\,(\mathrm{M}_i)$$

On a :

$$\vec{v}\,(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sum_i m_i} \underbrace{\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{p}(\mathcal{S})}$$

On a montré que :

$$\boxed{\vec{p}\,(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}}\vec{v}\,(\mathrm{G})}$$

La quantité de mouvement d'un ensemble de point est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G, de masse m_{tot} : du point de vue de la quantité de mouvement, tout se passe comme si la masse était concentrée en G.

3.3 Théorème de la résultante cinétique

Considérons pour l'exemple un système de deux points M_1 et M_2, de masses m_1 et m_2, en mouvement dans un référentiel galiléen. On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,(\mathrm{M}_1)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_{\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_1}}$$

On décompose les forces agissant sur M_1 en deux catégories : celles exercées par M_2 et les autres, qualifiées d'extérieures. De même pour M_2 :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,(\mathrm{M}_2)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_2}}$$

Ainsi :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}\,(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\overrightarrow{F_{\mathrm{M}_1\to\mathrm{M}_2}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{M}_2\to\mathrm{M}_1}}}_{=\vec{0}\text{ d'après la troisième loi}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_1}} + \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}_2}}$$

On peut généraliser ce résultat à un système de n particules :

Théorème de la résultante cinétique.

$$m\frac{\mathrm{d}\vec{v}\,(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F_{\mathrm{ext}}}$$

Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans la suite, on étudiera le mouvement du centre de gravité, de masse m_{tot}, soumis aux forces extérieures au système.

4 Méthode générale pour étudier un problème de mécanique

Cette méthode doit être connue sans hésitations.

❶ **De quoi parle-t-on ?** Quel est l'objet en mouvement, dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement ?

❷ **Schéma.** Faire un schéma du problème dans une situation quelconque.

❸ **Modélisation.** Donner le repère, l'origine, les représenter sur le schéma et définir l'instant initial. Définir également les différentes notations nécessaires à la résolution.

❹ **Bilan des forces.** Faire le bilan des forces, les exprimer dans le repère choisi et les représenter les forces sur le schéma.

❺ **Deuxième loi de Newton.** Appliquer la deuxième loi de Newton.

❻ **Équations scalaires.** Donner les trois équations sur $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$.

❼ **Répondre aux questions.** Obtenir les équations horaires $x(t)$, $y(t)$, $z(t)$ par exemple (si possible).

5 Le poids

5.1 Observation expérimentale

On observe qu'une balle lancée possède un vecteur accélération constant, vertical et dirigé vers le bas. Le PFD nous suggère alors qu'elle subit une force constante, verticale et dirigée vers le bas.

5.2 Définition

Définition. La force d'attraction gravitationnelle exercée par la Terre sur un objet ponctuel M de masse m s'appelle le poids. Il vaut

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$$

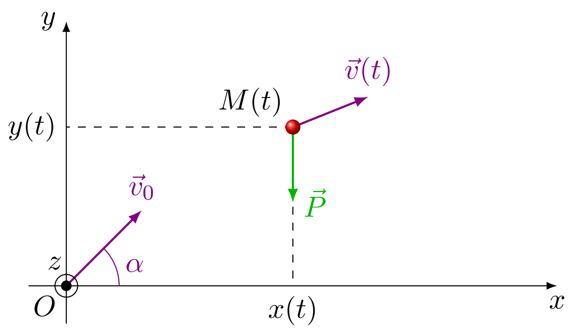
avec $\vec{g}$ le vecteur de **l'accélération de la pesanteur** de norme $g = 9{,}81\ \mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et dirigé verticalement vers le sol.

5.3 La chute libre

Définition. En **chute libre**, seul le poids s'applique.

❶ **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une balle, lancée avec un vecteur vitesse initiale $\vec{v_0}$, dans le référentiel de la salle de classe.

❷ **Schéma.**



❸ **Modélisation.**

— On suit la trajectoire du centre d'inertie de la balle par le point matériel M, de masse m.

— Repère : y est la verticale ascendante, x est la direction de lancer, et z est tel que xyz soit une base orthonormale directe (BOND).

— Instant initial : le moment où la balle est lancée.

— Origine : la position de la balle à l'instant initial : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$.

— On note α l'angle du vecteur $\vec{v_0}$ avec l'axe horizontal et v_0 sa norme si bien que :

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos\alpha\, \vec{u_x} + v_0 \sin\alpha\, \vec{u_y}$$

❹ **Bilan des forces.** Nous étudions la chute libre, le point M n'est soumis qu'à son poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_y}$$

❺ **Deuxième loi de Newton.**

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

❻ **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les coordonnées :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -mg \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On ne s'intéresse pas à la coordonnée z.

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases}$$

On remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse.

Lors d'une chute libre sans frottements, la masse du corps en chute n'intervient pas. Cela signifie en particulier que, dans le vide, tous les corps chutent à la même vitesse.

❼ **Répondre aux questions.** Intégrons l'accélération pour obtenir la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + K_2 \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales :

$$\begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases}$$

Or $\dot{x}(0) = K_1$ et $\dot{y}(0) = K_2$. Donc $K_1 = v_0 \cos\alpha$ et $K_2 = v_0 \sin\alpha$. Ainsi, les coordonnées du vecteur vitesse sont :

$$\boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}}$$

D'où les lois horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t + C_1 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t + C_2 \end{cases}$$

L'origine étant la position de l'objet à l'instant initial, $x(0) = y(0) = 0$ ainsi les constantes C_1 et C_2 sont nulles :

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 \cos\alpha\, t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 \sin\alpha\, t \end{cases}}$$

Trajectoire Il d'agit d'obtenir la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy. Il faut éliminer le temps t. Commençons donc par exprimer t en fonction de x :

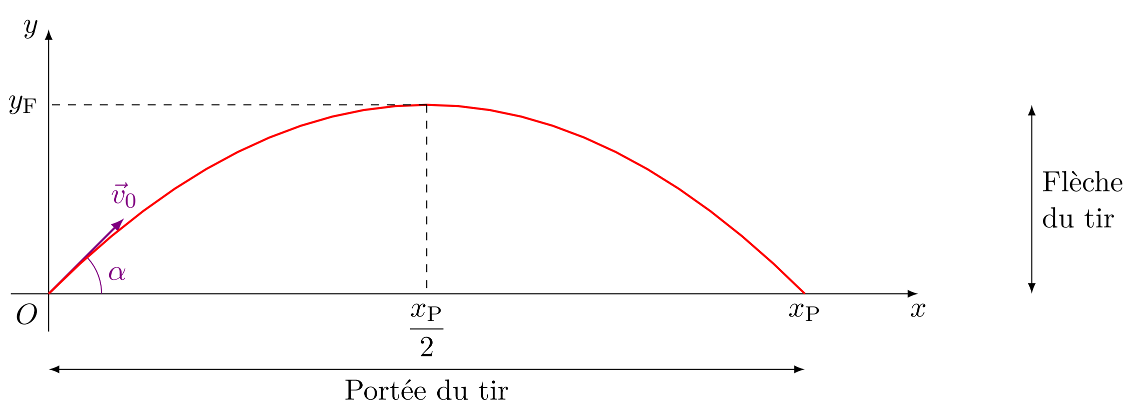
$$t = \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

pour insérer l'équation obtenue dans l'expression de $y(t)$:

$$y(x) = -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{v_0^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha}$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2\alpha}x^2 + \tan\alpha\; x}$$

La trajectoire est parabolique et tracée ci-dessous :



Portée du tir

Définition. La **portée** du tir est la distance entre l'origine du tir et l'endroit ou retombe le tir.

Par définition, la portée est la distance x_{P} telle que :

$$y\left(x_{\mathrm{P}}\right)=0$$

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_{\mathrm{P}}^2+\tan\alpha\;x_{\mathrm{P}}=0$$

Soit $x_{\mathrm{P}}=0$ (c'est l'origine du tir), soit :

$$-\frac{g}{2v_0^2\cos^2\alpha}x_{\mathrm{P}}+\tan\alpha=0$$

$$x_{\mathrm{P}}=\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\tan\alpha=\frac{2v_0^2\cos^2\alpha}{g}\frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$$

$$\boxed{x_{\mathrm{P}}=\frac{v_0^2}{g}\times 2\sin\alpha\;\cos\alpha=\frac{v_0^2}{g}\sin\left(2\alpha\right)}$$

La portée est maximale si $\sin\left(2\alpha\right)=1$, soit $2\alpha=\pi/2$ donc $\alpha=\pi/4$.

Flèche

Définition. La **flèche** du tir est la hauteur maximale atteinte par le projectile.

Cela correspond à une vitesse verticale $\dot{y}=0$. Donc

$$-gt_{\mathrm{F}}+v_0\sin\alpha=0$$

soit :

$$t_{\mathrm{F}}=\frac{v_0\sin\alpha}{g}$$

Ainsi :

$$\begin{aligned}y_{\mathrm{F}}=y\left(t_{\mathrm{F}}\right)&=-\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2+v_0\sin\alpha\times\frac{v_0\sin\alpha}{g}\\&=-\frac{1}{2}\frac{v_0^2}{g}\sin^2\alpha+\frac{v_0^2\sin^2\alpha}{g}\end{aligned}$$

La flèche du tir est donc :

$$\boxed{y_{\mathrm{F}}=\frac{v_0^2}{2g}\sin^2\alpha}$$

Cette valeur est maximale si $\alpha=\pi/2$.

6 Poussée d'Archimède

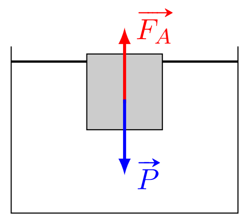
Définition. Lorsqu'un objet est dans un fluide, il subit une force nommée **poussée d'Archimède**, égale à l'opposé du poids du fluide déplacé :

$$\overrightarrow{F_A}=-\rho_{\mathsf{fluide}}V_{\mathsf{immergé}}\vec{g}$$

Application

Quel est la proportion immergée d'un glaçon ? On donne $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^3\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\rho_{\text{eau}} = 9{,}17 \times 10^2\ \text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

Schéma



Dans le cas d'un glaçon, les deux seules forces, la poussée d'Archimède et le poids, se compensent :

$$\overrightarrow{F_A} + \vec{P} = \vec{0}$$

Avec :

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}} \vec{g}$$
$$\overrightarrow{F_A} = -\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} \vec{g}$$

Ainsi :

$$-\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} + \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}} = 0$$
$$\frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{glaçon}}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = 91{,}7\ \%$$

Si on place un objet plus dense que le fluide, on obtient une proportion immergé supérieure à 1 : l'objet n'est jamais à l'équilibre mécanique, autrement dit il coule.

7 Frottement fluide

7.1 La force de frottement fluide

La force de frottement fluide $\vec{F}_{\text{f}}$ est une force de freinage, opposée à la direction du vecteur vitesse $\vec{v}$.

- Pour les faibles vitesses, la force est proportionnelle à la vitesse $\vec{F}_{\text{f}} = -\alpha\vec{v}$;
- pour les vitesse plus importantes, la force est quadratique avec la vitesse $\vec{F}_{\text{f}} = -\beta v\vec{v}$.

α s'exprime en $\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$ et β en $\text{kg}\cdot\text{m}^{-1}$.

Remarque. En pratique, on peut écrire :

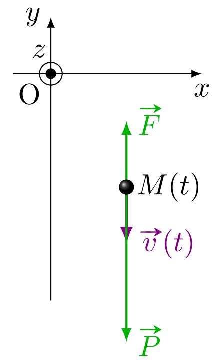
$$\beta = \frac{1}{2}\rho S c_x$$

où ρ est la masse volumique du fluide, S la surface frontale et c_x un coefficient sans dimension dépendant surtout de la forme de l'objet. Cette formule n'est pas à connaître.

7.1.1 Étude de la chute libre sans vitesse initiale avec frottements

❶ **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une bille, lâchée dans une éprouvette d'huile, dans le référentiel de la salle de TP.

❷ **Schéma.**



❸ **Modélisation.**

— On repère la bille par la position de son centre d'inertie M.

— Repère : y est la verticale ascendante, x et z sont deux vecteurs horizontaux tels que xyz soit une base orthonormale directe (BOND).

— Instant initial : le moment où la bille entre dans le glycérol.

— Origine : la position de la bille à son entrée dans le glycérol.

— On néglige pour simplifier la poussée d'Archimède.

— On note m sa masse, α le coefficient de frottement et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

❹ **Bilan des forces.** Nous prenons en compte deux forces (négligeant la poussée d'Archimède) :

— Le poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_y}$$

— La force de frottement fluide :

$$\vec{F_f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{y}\,\vec{u_y}$$

❺ **Deuxième loi de Newton.**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F_f}$$

❻ **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les coordonnées :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y}(t) = -\alpha\dot{y} - mg \\ m\ddot{z}(t) = -\alpha\dot{z} \end{cases}$$

❼ **Répondre aux questions.** On obtient trois équations différentielles sur la vitesse ($v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ et $v_z = \dot{z}$) :

$$\begin{cases} \dfrac{\mathrm{d}v_x}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\alpha}{m}v_x = 0 \\ \dfrac{\mathrm{d}v_y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\alpha}{m}v_y = -g \\ \dfrac{\mathrm{d}v_z}{\mathrm{d}t} + \dfrac{\alpha}{m}v_z = 0 \end{cases}$$

En l'absence de vitesse initiale sur v_x et v_z, nous n'aurons pas de mouvement sur ces coordonnées. Intéressons-nous à l'équation différentielle régissant l'évolution de $v = v_y$.

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = -g}$$

Nous pouvons résoudre cette équation, mais nous n'allons le faire : nous allons introduire un outil d'analyse permettant de généraliser l'équation obtenue.

Adimensionnement de l'équation. On définit $v^* = v/V$ et $t^* = t/T$. On réécrit l'équation différentielle :

$$\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\alpha}{m}Vv^* = -g$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\alpha T}{m}v^* = -\frac{gT}{V}$$

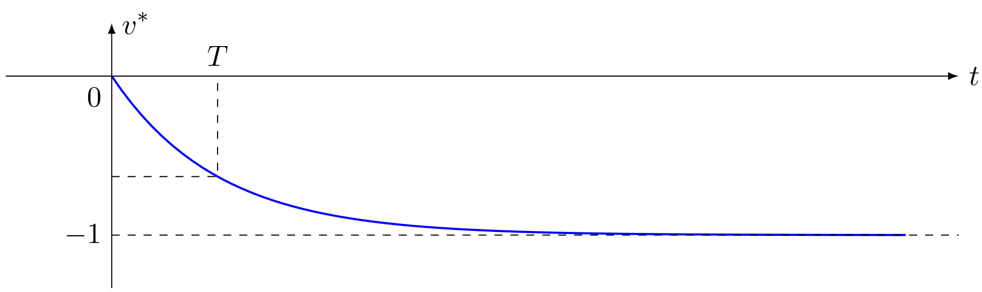
On choisit T et V de telle façon a écrire :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + v^* = -1$$

soit

$$\boxed{T = \frac{m}{\alpha}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V = gT = \frac{gm}{\alpha}}$$

T donne un ordre de grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse. En régime permanent (accélération nulle), on a $v^* = -1$, ainsi V est la vitesse atteinte en régime permanent.



L'écriture sous forme adimensionnée permet de ramener la résolution de l'équation à un problème uniquement mathématique, débarassé des constantes physiques.

7.2 Frottement quadratiques

Lorsqu'un projectile est en chute libre dans l'air, la vitesse est élevée et on doit utiliser plutôt la forme quadratique pour les frottements. On choisit un vecteur $\overrightarrow{u_y}$ vers le bas, de sorte à avoir $v = \dot{y} > 0$.

Dans le cas où la chute est totalement verticale :

$$\overrightarrow{F_f} = -\beta\dot{y}^2\overrightarrow{u_y}$$

L'équation différentielle est alors, avec $v = \dot{y}$, en négligeant la poussée d'Archimède :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{m}v^2 = g$$

La résolution analytique exacte de cette équation sort du cadre du programme. Nous allons utiliser l'adimensionnement de l'équation.

Adimensionnement de l'équation. On définit $v^* = v/V$ et $t^* = t/T$. On réécrit l'équation différentielle :

$$\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m}V^2\left(v^*\right)^2 = g$$

soit :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m}VT\left(v^*\right)^2 = \frac{gT}{V}$$

On choisit T et V de telle façon a écrire :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \left(v^*\right)^2 = 1$$

soit :

$$\frac{\beta}{m}VT = 1 \qquad \text{et} \qquad \frac{gT}{V} = 1$$

Ainsi $V = gT$ et :

$$\frac{\beta}{m} g T^2 = 1$$

soit

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{V = gT = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$$

T donne un ordre de grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse. En régime permanent (accélération nulle), on a $(v^*)^2 = 1$, ainsi V est la vitesse atteinte en régime permanent.

Application numérique : on peut écrire le coefficient β sous la forme

$$\kappa = \frac{1}{2} \rho S c_x$$

Où ρ désigne la masse volumique de l'air, S la surface et c_x un coefficient proche de 1. Ainsi, pour un homme en chute libre sans parachute :

$$\kappa \approx 0{,}25$$

$$v_{\text{lim}} = 60 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \approx 200 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

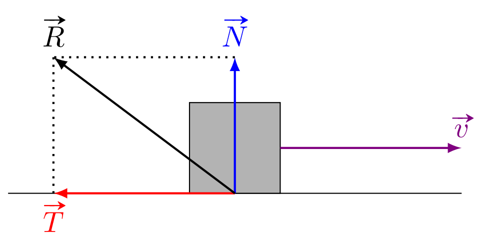
8 La force de frottement entre des solides

8.1 Les lois de Coulomb

La force exercée par le support sur un objet est appelée **réaction** du support et on la note $\vec{R}$. Elle se décompose en deux forces

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T}$$

- $\vec{N}$ est la force de réaction **normale** (c.à.d. perpendiculaire) au support ;
- $\vec{T}$ est la force de réaction **tangentielle** (c.à.d. parallèle) au support, de direction opposée à la vitesse.



Les relations entre les **normes** des forces $\vec{N}$ et $\vec{T}$ sont appelées les **lois du frottement de Coulomb** :

- si le solide est en glissement sur la surface, alors :

$$\left\|\vec{T}\right\| = f \left\|\vec{N}\right\|$$

- si le solide ne glisse pas sur la surface, alors :

$$\left\|\vec{T}\right\| < f \left\|\vec{N}\right\|$$

Le coefficient f est le **coefficient de frottement**. C'est un nombre sans dimension, souvent inférieur à 1 et qui dépend fortement de l'état de surface (humide, graissée...) mais pas de l'aire de la surface.

Attention

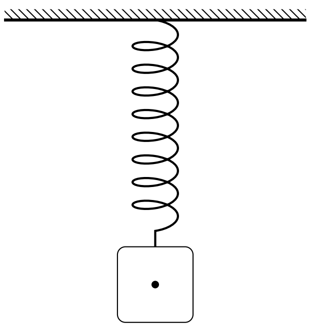
Il s'agit d'une inégalité entre les **normes** des vecteurs.

Remarque.

— Si on suppose l'absence de frottements solides, on a $f = 0$ soit $T = 0$. La force normale n'est jamais nulle, ne serait-ce que pour compenser en partie le poids.

9 Force de rappel d'un ressort

9.1 Observation expérimentale



— Lorsque l'on ajoute la masse, le ressort s'étire et la masse atteint une position d'équilibre différente.

— Lorsque $m = 0$ g, la longueur du ressort est $\ell = 12{,}4$ cm.

— Lorsque $m = 100$ g, $\ell = 18{,}5$ cm.

— Lorsque $m = 200$ g, $\ell = 24{,}2$ cm.

Un ressort est un fil de métal torsadé. Lorsqu'il est faiblement déformé, l'élasticité naturelle du matériau tend à le faire revenir à sa configuration de départ.

9.2 Force de rappel élastique

Définition. Un ressort est caractérisé par

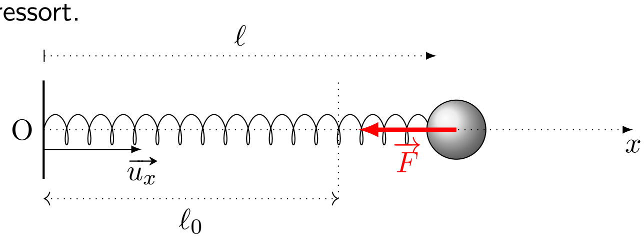
— sa **longueur à vide** ℓ_0 ;

— sa **raideur** k qui s'exprime en N/m.

Lorsque le ressort est déformé, il exerce une force de rappel :

$$\overrightarrow{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$$

où ℓ est la longueur du ressort.

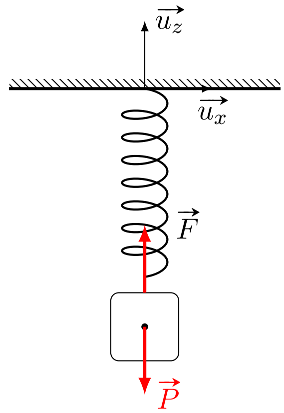


Attention

Le signe de la force donnée dépend du schéma : de façon générale, il faut regarder le sens dans lequel s'exerce la force si on étire le ressort $(\ell - \ell_0)$ et placer le signe en conséquence.

9.3 Position d'équilibre

On recherche la longueur d'équilibre du ressort :



Bilan des forces : Le point M est soumis à son poids :

$$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$$

Et à la force de rappel élastique :

$$\overrightarrow{F} = k\left(\ell - \ell_0\right)\overrightarrow{u_z}$$

La force de rappel élastique s'exerce vers le haut si le ressort est étiré, d'où le signe.

À l'équilibre :

$$-mg + k\left(\ell_{\text{eq}} - \ell_0\right) = 0$$

$$k\left(\ell_{\text{eq}} - \ell_0\right) = mg$$

La longueur du ressort est donc :

$$\boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

Ceci est conforme avec l'expérience.

— Plus la force exercée sur le ressort est élevée, plus le ressort est étiré.

— Plus le ressort est raide, moins il est étiré.

Application numérique : La raideur du ressort utilisé dans l'expérience est :

$$k = \frac{mg}{\ell - \ell_0} = 16\ \mathrm{N \cdot m^{-1}}$$

9.4 L'oscillateur harmonique mécanique

❶ **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une masse, assimilée à un point matériel M, dans le référentiel de la salle de classe.

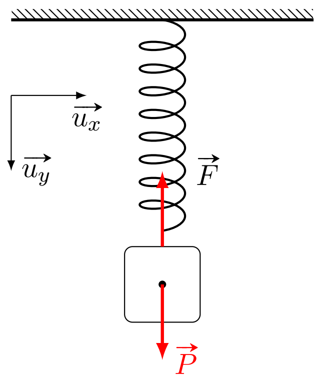
❷ **Modélisation.**

— Origine : au point d'attache du ressort.

— Instant initial : le moment où l'on relâche le ressort.

— Repère : y est la verticale descendante, x et z deux vecteurs horizontaux tel que xyz soit une base orthonormale directe (BOND). Ainsi la longueur du ressort est $\boxed{\ell(t) = y(t)}$

❸ **Schéma.**



❹ **Bilan des forces.** Nous négligeons tout frottement. Nous prenons en compte deux forces :

— le poids :
$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\overrightarrow{u_y}$$

— la force de rappel élastique :
$$\vec{F} = -k\left(\ell(t) - \ell_0\right)\overrightarrow{u_y} = -k\left(y(t) - \ell_0\right)\overrightarrow{u_y}$$

On voit que si on étire le ressort (donc $y(t) - \ell_0 > 0$), la force de rappel va être vers le haut, donc selon $-\overrightarrow{u_y}$.

❺ **Deuxième loi de Newton.**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

❻ **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les coordonnées :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -k\left(y(t) - \ell_0\right) + mg \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

❼ On obtient une équation différentielle sur l'allongement du ressort $y(t)$:

$$m\ddot{y}(t) = -ky(t) + k\ell_0 + mg$$

Soit :
$$m\ddot{y}(t) + ky(t) = k\left(\ell_0 + \frac{mg}{k}\right)$$

On reconnait la longueur d'équilibre du ressort $\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k}$.

$$\boxed{\ddot{y}(t) + \frac{k}{m}y(t) = \frac{k}{m}\ell_{\text{eq}}}$$

C'est l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique. On identifie dans ce cas :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

La période et la fréquence sont :

$$\boxed{f = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{T = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}}$$

Pour résoudre cette équation :

❶ On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.

$$\ddot{y}(t) + \omega_0^2 y(t) = 0$$

❷ On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

❸ On recherche une **solution particulière constante**. Posons $y(t) = \lambda$:

$$0 + \omega_0^2 \lambda = \omega_0^2 \ell_{\text{eq}} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda = \ell_{\text{eq}}$$

$y(t) = \ell_{\text{eq}}$ est une solution particulière de l'équation différentielle.

❹ On écrit la **solution générale**.

$$y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + \ell_{\text{eq}}$$

❺ On détermine les constantes à l'aide des **conditions initiales**. On a :

$$y(0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{y}(0) = 0$$

Or :

$$y(0) = A \times 1 + B \times 0 + \ell_{\text{eq}} \quad \text{donc} \quad y(0) = A + \ell_{\text{eq}}$$

Donc :

$$\boxed{A = y_0 - \ell_{\text{eq}}}$$

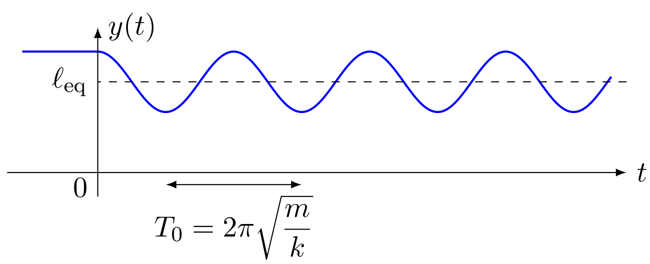
Et :

$$\dot{y}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) + 0$$

$$\dot{y}(0) = -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 = B\omega_0 \quad \text{donc}$$

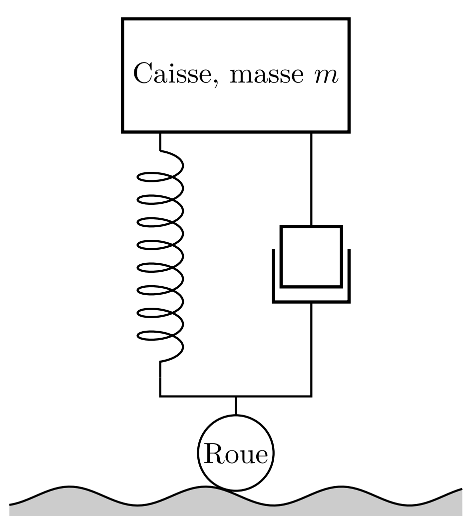
Ainsi $B = 0$. Finalement :

$$\boxed{y(t) = (y_0 - \ell_{\text{eq}})\cos(\omega_0 t) + \ell_{\text{eq}}}$$



9.5 Étude d'un amortisseur

On considère une route au profil irrégulier, comme sur le schéma ci-dessous.



Du fait de la vitesse de la voiture, l'irrégularité spatiale devient une excitation temporelle de l'oscillateur, à la période λ/v, où v est la vitesse du véhicule. On considère donc le profil de la route :

$$z_r(t) = Z_r \cos(\omega t)$$

d'après le théorème de Fourier, cela permet de modéliser tout profil de route.

Modélisation. On étudie le mouvement de la caisse dans le référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à la route (il est donc galiléen). z est la verticale ascendante. z l'altitude de la caisse et z_r l'altitude de la route.

Bilan des forces. L'amortisseur exerce une force :

$$\overrightarrow{F_f} = -\alpha\left(\dot{z} - \dot{z}_r\right)\overrightarrow{u_z}$$

Le ressort exerce une force :

$$\overrightarrow{F_r} = -k\left(z - z_r - \ell_0\right)\overrightarrow{u_z}$$

D'après le PFD, projeté sur l'axe z :

$$m\ddot{z} = -\alpha\left(\dot{z} - \dot{z}_r\right) - k\left(z - z_r - \ell_0\right)$$

On note $y = z - \ell_0$ ainsi :

$$m\ddot{y} = -\alpha\left(\dot{y} - \dot{z}_r\right) - k\left(y - z_r\right)$$

$$m\ddot{y} + \alpha\dot{y} + ky = \alpha\dot{z}_r + kz_r$$

On définit $\underline{Z}_r$ l'amplitude complexe de $z_r(t)$ et $\underline{Y}$ l'amplitude complexe de $y(t)$:

$$m\left(\mathrm{j}\omega\right)^2\underline{Y} + \mathrm{j}\omega\alpha\underline{Y} + k\underline{Y} = \mathrm{j}\omega\alpha\underline{Z}_r + k\underline{Z}_r$$

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{k + \mathrm{j}\omega\alpha}{k + \mathrm{j}\omega\alpha + m\left(\mathrm{j}\omega\right)^2}\underline{Z}_r}$$

L'effet de l'amortisseur est celui d'un filtre passe-bas mécanique, il atténue les variations rapides de $\underline{Z}_r$. C'est l'inertie du système qui joue ce rôle.

Un effet analogue est observé près d'un concert où l'on entend que les basses au sein d'un bâtiment.