Sujet 1 – corrigé

I Ligne haute-tension

Une ligne haute tension assimilable à un fil droit infini selon (Oz) transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$ et de valeur efficace $I = 1000\,\text{A}$.
On approche de cette ligne HT une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30\,\text{cm}$ à une distance $d = 2\,\text{cm}$.
Cette bobine d'inductance propre et de résistances négligeables est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace E à ses bornes est supérieure à 1,5 V.
On utilisera les coordonnées cylindriques (r,θ,z) et de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On se trouve ici dans l'ARQS.

1) Donner la définition et la validité de l'ARQS. Justifier ici le choix de l'ARQS. Donner, en la justifiant, l'expression des équations de Maxwell dans l'ARQS.

Réponse

L'ARQS consiste à négliger les phénomènes de propagation dans le circuit, c'est-à-dire que l'on néglige le temps de propagation $\frac{OM}{c}$ devant le temps caractéristique T des variations temporelles des sources. Le critère est donc en fonction de la longueur caractéristique L du circuit:

$$\frac{L}{c} \ll T$$

On a donc:

$$L \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda$$

avec λ la longueur d'onde.
AN: $L \ll 3 \times 10^8 \times \frac{1}{50} = 6 \times 10^6\,\text{m}$
Ici, on justifie le fait que le fil est de longueur finie et que l'on néglige les effets de bords pour le calcul du champ magnétique. On garde les propriétés du fil infini pour la géométrie.

Les équations de Maxwell sont les suivantes:

$$div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

◇

2) Déterminer, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique $\vec{B}(r)$ créé dans tout l'espace par cette ligne HT.

Réponse

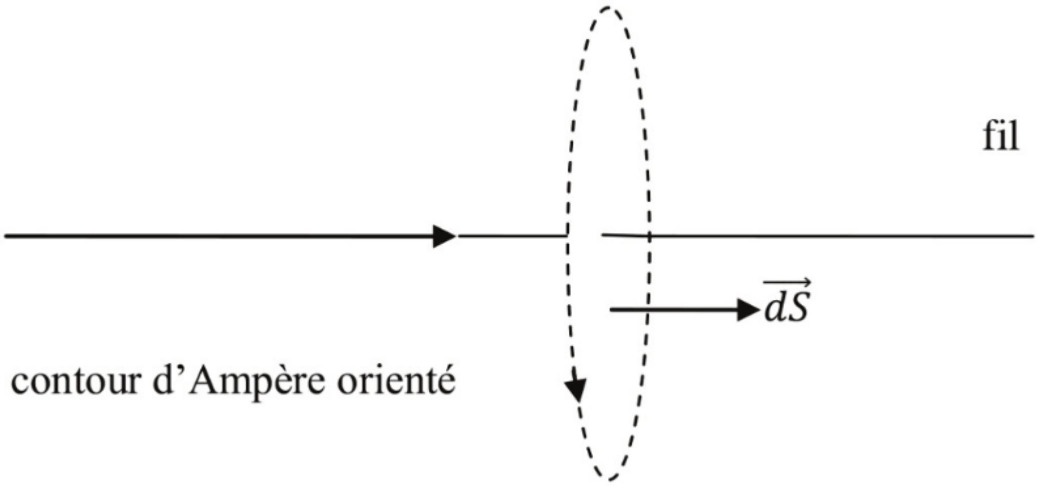
En coordonnées cylindriques, le champ magnétique est de la forme $\vec{B}(r,\theta,z)$. Le problème est invariant par translation le long du fil donc le champ magnétique ne dépend pas de z. Le problème est aussi invariant par rotation autour de l'axe (Oz) donc le champ magnétique ne dépend pas de l'angle θ.

Le plan contenant le fil et le point où l'on calcule le champ magnétique est un plan de symétrie (plan $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_z)$) donc le champ est perpendiculaire à ce plan.

On a donc:

$$\vec{B}(r,\theta,z) = B(r)\vec{e}_\theta$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.
On a ainsi le schéma suivant:



Remarque: l'orientation du contour d'Ampère et l'orientation du vecteur $\overrightarrow{dS}$ sont liés par la règle de la main droite.

Le théorème d'Ampère donne:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

Comme le champ magnétique est selon $\vec{e}_\theta$, il est donc colinéaire à $\vec{d\ell}$. On a donc:

$$\oint \vec{B}\cdot\vec{d\ell} = \oint B.d\ell = B\oint d\ell = B2\pi r$$

Comme le courant $i(t)$ est dans le même sens que $\overrightarrow{dS}$, le courant enlacé est égal à $I_{\text{enl}} = i(t)$. On trouve donc:

$$B2\pi r = \mu_0 i(t)$$

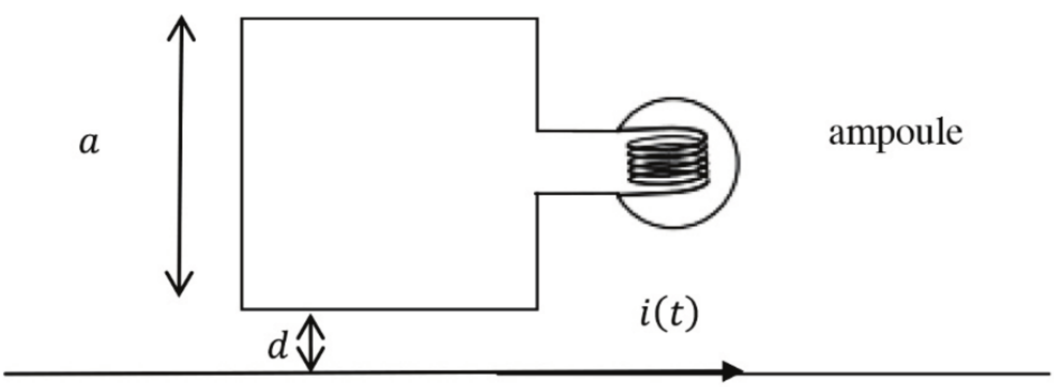
$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}$$

Le champ magnétique vaut:

$$\vec{B}(r,\theta,z) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

Remarque: on retrouve bien le champ créé par un fil infini. Penser à vérifier l'homogénéité.

3) Déterminer le flux magnétique total créé par cette ligne HT à travers la bobine plate.

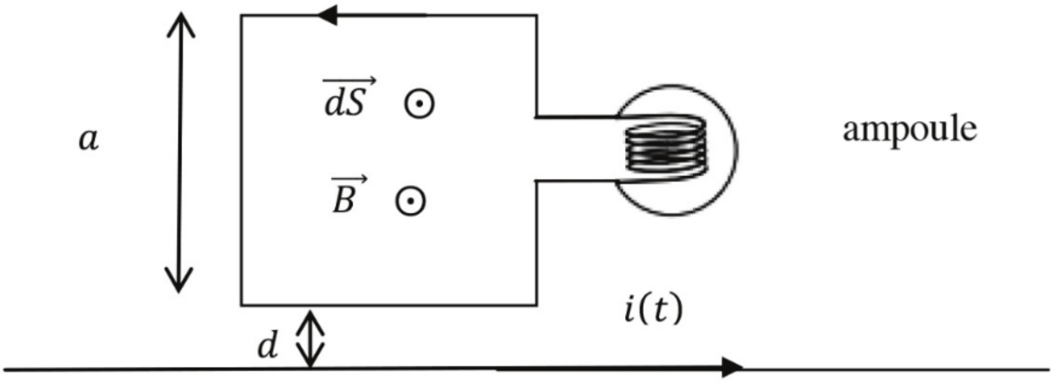


Réponse

Pour calculer le flux à travers le circuit, on utilise l'expression du flux qui est:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS}$$

Il faut donc orienter le circuit. Pour cela, il est nécessaire et obligatoire de faire un schéma:



Remarque: l'orientation du circuit est arbitraire. Celle de la surface est liée à l'orientation du contour par la règle du tire-bouchon ou main droite.

On a donc:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \vec{dS} = \iint B.dS$$

On prend pour élément de surface élémentaire un rectangle de hauteur a et d'épaisseur dr. On a donc pour une spire:

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} a \, dr = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} [\ln(r)]_d^{d+a}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Pour N spires, on obtient donc le flux magnétique suivant:

$$\Phi = N \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Remarque: Penser à multiplier le flux par le nombre de spires.

◇

4) En déduire le nombre de spires N nécessaires pour que l'ampoule puisse s'éclairer. Faire l'application numérique avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI.

Réponse

On a donc un circuit placé dans un champ magnétique variable créé par le fil. Le circuit fermé est donc le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique et la fém induite est donnée par la loi de Faraday:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

On obtient en dérivant l'intensité par rapport au temps:

$$e = -N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

L'expression du courant est donc:

$$i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$$

La dérivée est donc égale à:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -2\pi f I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

La fém induite est donc égale à:

$$e = N\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)2\pi f I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

$$e = N\mu_0 a\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)f I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

Pour que la lampe s'allume, il faut comme l'indique l'énoncé que l'amplitude efficace de la fém soit supérieure à la tension efficace soit:

$$N\mu_0 a\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)f I_{\text{eff}} > E$$

Soit un nombre de spires:

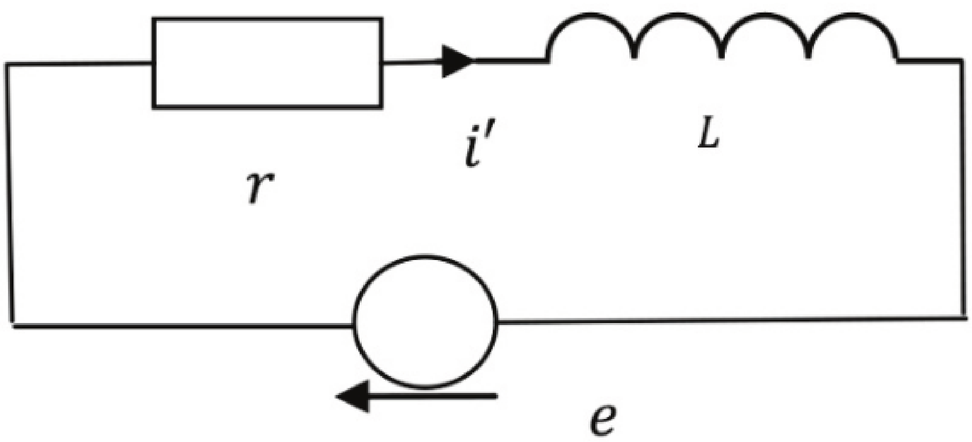
$$N > \frac{E}{\mu_0 a\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)f I_{\text{eff}}}$$

AN: $N > 28{,}7$
Il faut donc au minimum 29 spires afin que la lampe puisse s'allumer.

5) On assimile maintenant l'ampoule à une résistance $r = 10\,\Omega$ en série avec une inductance propre $L = 10\,\text{mH}$. Calculer alors la valeur efficace I' de $i'(t)$ dans la bobine plate lorsque $E = 1{,}5\,\text{V}$ et le déphasage φ' entre $i'(t)$ et $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé. Faire les applications numériques.

Réponse

Le circuit est donc maintenant équivalent à un circuit RL. On a donc le schéma suivant:



On a donc l'équation de maille qui est:

$$e = ri' + L\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{soit } L\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t} + ri' = E\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

On passe en notations complexes en prenant la partie imaginaire. On a donc en posant $\omega = 2\pi f$:

$$(jL\omega + r)\underline{i'} = E\sqrt{2}e^{j\omega t}$$

$$\underline{i'} = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r + jL\omega}$$

Le courant efficace est donc égal à:

$$I' = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}}$$

Le déphasage vaut:

$$\tan \Phi' = -\frac{L\omega}{r}$$

AN: $I' = 0{,}14\,\mathrm{A}$ et $\Phi' = -0{,}3\,\mathrm{rad}$

Sujet 2 – corrigé

I Champ magnétique variable dans un solénoïde

On considère un solénoïde long, de rayon a, d'axe Oz et comportant n spires par unité de longueur, à l'intérieur duquel règne un champ magnétique $\vec{B} = B_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \vec{u_z}$ et on s'intéresse à une section de celui-ci de longueur l. On supposera dans tout l'exercice que l'on se place dans le cadre de l'ARQS.

1) Déterminer le courant $i(t)$ parcourant le solénoïde pour créer un tel champ.

Réponse

On a d'après le cours $B = \mu_0 n i$ (valable dans le cadre de l'ARQS). On en déduit : $i = \frac{B}{\mu_0 n}$

◇

2) Montrer que le champ $\vec{E}$ associé peut se mettre sous la forme $\vec{E}(r,t)\vec{e}_\theta$

Réponse

En utilisant les symétries du problème, on remarque que $\vec{E}(r,\theta z) = \vec{E}(r)$. De plus, pour un point M quelconque de coordonnées $r,\theta z$, le plan $O,\vec{e}_r, \vec{e}_z$ est un plan d'anti-symétrie donc $\vec{E} = E\vec{e}_\theta$ soit au final $\vec{E} = E(r)\vec{e}_\theta$.

◇

3) A l'aide de la formulation intégrale de l'équation de Maxwell-Faraday, retrouver l'expression de ce champ électrique.

Réponse

On $\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t}$. On peut intégrer cette relation sur une surface de rayon r appuyée sur une des spires pour obtenir :

$$\oiint_S \overrightarrow{rot}\vec{E} = \oint_C \vec{E}(r)\cdot r\vec{e}_\theta d\theta = -\oiint_S \frac{B(t)}{\tau}\cdot dS \tag{10.1}$$

$$\Rightarrow \quad E(r)2\pi r = -\frac{B(t)}{\tau}\pi r^2 \quad \text{pour } r < a \tag{10.2}$$

$$\Rightarrow \quad E(r)2\pi r = -\frac{B(t)}{\tau}\pi a^2 \quad \text{pour } r \geq a \tag{10.3}$$

On en déduit pour $E(r<a) = -\frac{rB(t)}{2\tau}$ et $E(r \geq a) = -\frac{a^2 B(t)}{2r\tau}$.

◇

4) Quelle est la chute de tension associée à ce champ électrique pour une spire.

Réponse

On a par définition du potentiel électrique $E(a)\vec{e}_\theta = -\frac{1}{a}\dfrac{\partial V}{\partial \theta}$ d'où l'on déduit $V(\theta) = -\theta a E(a)$. La chute de potentielle associée pour une spire vaut donc :

$$\Delta V = -2\pi a E(a) = \frac{\pi}{\tau}a^2 B(t)$$

◇

5) En déduire l'inductance propre d'une couche d'épaisseur l de ce solénoïde.

Réponse

Pour une épaisseur l, on obtient :

$$\Delta V_l = nl\Delta V = -nl\pi a^2 \frac{\partial B}{\partial t} = -n^2 l\pi a^2 \mu_0 \frac{\partial i}{\partial t}$$

soit par identification $L = \mu_0 n^2 lS$. On retrouve bien le résultat du cours.

◇

6) Calculer ensuite le rapport μ des densités volumiques d'énergies électrique et magnétique en $r = a$.

Réponse

La densité d'énergie électrique en $r = a$ vaut $\frac{\epsilon_0 E^2}{2} = \frac{\epsilon_0 a^2 B^2}{8\tau^2}$. De plus, le la densité d'énergie du champ magnétique vaut $\frac{B^2}{2\mu_0} = \frac{\epsilon_0 c^2 B^2}{2}$. Leur rapport vaut donc :

$$\frac{e_E}{e_B} = \frac{\epsilon_0 a^2 B^2}{8\tau^2} \times \frac{2}{\epsilon_0 c^2 B^2} = \left(\frac{a}{2c\tau}\right)^2$$

◇

7) Faire l'application numérique avec $a = 10\,\mathrm{cm}$ et $\tau = 1{,}0\,\mathrm{ms}$. Conclure.

Réponse

L'AN donne un rapport d'environ 10^{-14}. Toute l'énergie est donc bien stockée sous forme magnétique.

◇

Sujet 3 – corrigé

I Courant de Foucault dans un cylindre

On place un cylindre conducteur d'axe Oz, de section $S_0 = \pi R^2$, de longueur $L \gg R$ et de conductivité γ dans un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B_0 \cos(\omega t)\vec{u}_z$.
On suppose dans un premier temps que le champ magnétique induit est négligeable devant le champ magnétique extérieur appliqué. On se place dans le cadre de l'ARQS magnétique et on néglige les effets de bords.

1) Montrer que le champ électrique peut se mettre sous la forme $\vec{E} = E(r,t)\vec{u}_\theta$. Montrer que $\vec{E}(M) = \frac{r\omega B_0 \sin(\omega t)}{2}\vec{u}_\theta$.

Réponse

Tout plan $M,\vec{e}_r,\vec{e}_z$ es un plan de symétrie pour la distribution du champ magnétique donc le champ E induit y est perpendiculaire donc suivant $\vec{e}_\theta$. De plus, ce champ ne dépendra pas de θ invariance du problème par rotation ni de z (effet de bords négligés).

On peut calculer ensuite $E(r,t)$ on considérant une intégrale sur la section du cylindre :

$$\oint_C E(r,t) r d\theta = \oiint_S -\frac{\partial B}{\partial t} dS \Rightarrow E = \frac{r\omega}{2} B_0 \sin(\omega t)$$

◇

2) Déterminer la puissance moyenne dissipée par effet Joule dans le cylindre.

Réponse

La loi d'ohm locale donne dans le cas de l'ARQS $\vec{j} = \gamma \vec{E}$. On en déduit :

$$\frac{1}{\gamma} j^2 = \gamma E^2 \Rightarrow P_J = \iiint_V \gamma E^2 dV = \frac{\gamma}{4}(\omega B_0)^2 \iiint_V r^3 dz dr d\theta = \frac{\gamma}{4}(\omega B_0)^2 \frac{1}{2}\pi L R^4 \sin^2(\omega t)$$

On en déduit la puissance moyenne $< P_J >= \frac{\gamma}{8}(\omega B_0)^2 \pi L R^4 = \alpha R^4$

◇

3) Que devient la puissance moyenne dissipée par effet Joule si au lieu d'un seule conducteur cylindrique on utilise N conducteurs cylindriques identiques de même longueur L, de section $S_0' = \frac{S_0}{N}$ sachant que le volume total occupé par les N cylindres est le même que précédemment ? Commenter.

Réponse

Le rayon associé à ces nouveaux conducteurs est tel que $R^2 = N R'^2$ (même surface totale) soit $R' = \frac{R}{\sqrt{N}}$.
On en déduit :

$$< P_J' >= N\alpha R'^4 = N\alpha \left(\frac{R}{\sqrt{N}}\right)^4 = \frac{< P_J >}{N}$$

Les pertes par effet joule associées sont donc plus faibles pour cette nouvelle configuration.

◇

4) Calculer le champ magnétique induit. On admet qu'il est nul pour $r = R$.

Réponse

On connait l'expression du courant ($\vec{j} = \gamma \vec{E}$). On en déduit le champ magnétique induit dans le cadre de l'ARQS à l'aide du théorème d'Ampère. En effet, les symétries du problèmes montrent que $\vec{B}(r,\theta,z) = B(r)\vec{e}_z$ (le plan $(M,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta)$ est un plan de symétrie pour la distribution de courant. Pour le contour appuyé sur l'arête de longueur l du cylindre (donc en $r = R$) et passant à l'intérieur de ce dernier (en $r = r$) :

$$\oint_C \vec{B} \cdot \vec{d}l = \mu_0 \iint_S \vec{j}\,\vec{d}S \Rightarrow B(r)l + 0 - B(R)l + 0 = \iint_S \mu_0 \gamma \rho \frac{\omega}{2} B_0 \sin(\omega t) dz d\rho \qquad (10.1)$$

$$\Rightarrow \quad B(r) = \gamma \mu_0 \left(R^2 - r^2\right) \frac{\omega}{4} B_0 \sin(\omega t) \qquad (10.2)$$

5) Donner une condition pour que le champ magnétique induit soit négligeable devant B_0.

Réponse

Ce champ magnétique sera négligeable lorsque $\gamma \mu_0 R^2 \omega \ll 1$

Sujet 4 – corrigé

I Étude d'une comète

Dans le référentiel Héliocentrique, on considère le mouvement d'une comète et celui de la Terre. La masse du Soleil sera notée M_0. La trajectoire de la Terre est supposée circulaire de rayon r_0.

1) Calculez, en fonction de M_0, r_0 et $\mathcal{G}$ (la constante de gravitation), la vitesse v_0 de la Terre sur son orbite ainsi que sa période de rotation T_0.

Réponse

Par un calcul classique (PFD sur la Terre soumis à la force de gravitation due au Soleil ou par une méthode énergétique), on obtient $v_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r_0}}$ et comme le mouvement est circulaire uniforme, $T_0 = \frac{2\pi r_0}{v_0}$.

◇

2) La trajectoire de la comète est coplanaire à celle de la Terre, sa distance au périgée est $\frac{r_0}{2}$ et sa vitesse maximale est alors $2v_0$. Préciser la forme de la trajectoire de la comète (elliptique, parabolique ou hyperbolique). On rappelle que l'expression de la forme générale d'une conique est :

$$r(\theta) = \frac{p}{1 + e\cos(\theta)}$$

Exprimez la vitesse de la comète en fonction de la distance r qui la sépare du soleil.

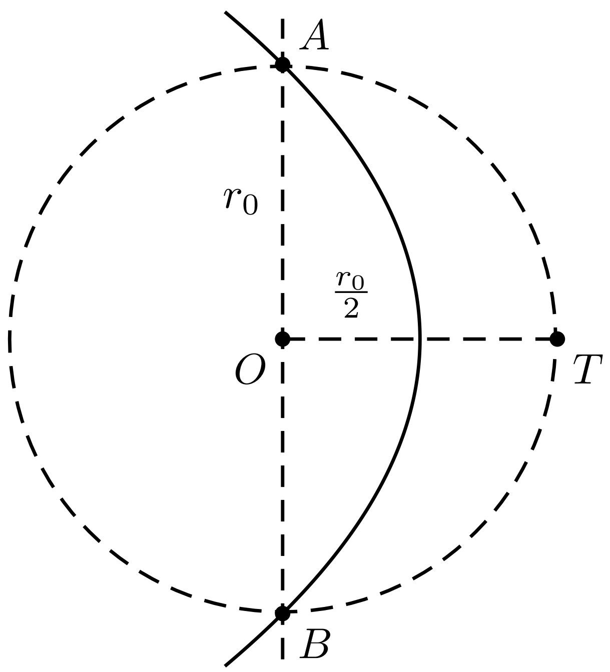
Réponse

Pour préciser la nature de la trajectoire de la comète, on calcule son énergie mécanique.

Comme elle est constante, on peut la déterminer en se plaçant à n'importe quel point et comme l'énoncé précise r et v au périastre ($r = \frac{r_0}{2}$; $v = 2v_0 = 2\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_0}{r_0}}$), on obtient en utilisant le résultat précédent :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m(2v_0)^2 - \frac{\mathcal{G}mM_0}{r_0/2} = \frac{2\mathcal{G}mM_0}{r_0} - \frac{2\mathcal{G}mM_0}{r_0} = 0$$

ce qui signifie qu'on a affaire à une trajectoire parabolique (d'où le titre de l'exercice).



Comme à tout instant $E_m = 0 = E_c + E_p = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}mM_0}{r}$, on a $v = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}M_0}{r}}$.

3) L'orbite de la comète croise celle de la Terre en deux points A et B. Montrez que AB est un diamètre de l'orbite terrestre.

Réponse

La trajectoire est parabolique, son excentricité est donc égale à 1 et $r = \frac{p}{1+1\times\cos\theta}$.

De plus, on sait que r minimum (valeur de r quand $\theta = 0$) est égal à $\frac{r_0}{2}$ d'où $\frac{r_0}{2} = \frac{p}{1+1}$ et $p = r_0$.

Finalement, l'équation polaire de la trajectoire de la comète est $r = \frac{r_0}{1+\cos\theta}$.

L'orbite de la comète croise celle de la Terre (rayon r_0) quand $r = r_0$, c'est à dire pour $\theta = \pm\frac{\pi}{2}$ ce qui veut dire que les points A et B d'intersection de l'orbite de la comète avec celle de la Terre sont diamétralement opposés : AB est bien un diamètre de l'orbite terrestre.

4) Quel est le temps τ passé par la comète à l'intérieur de l'orbite terrestre en fonction de T_0 ? Ce temps donne un ordre de grandeur de la durée de visibilité à l'œil nu de la comète depuis la Terre. On donne $\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{d\theta}{(1+\cos\theta)^2} = \frac{4}{3}$

Réponse

La force de gravitation étant centrale, on a conservation du moment cinétique de la comète par rapport au centre du Soleil et la loi des aires est respectée : $L_0 = Cte \Rightarrow r^2\dot{\theta} = \frac{r_0}{2}.2v_0$ (valeur en $\theta = 0$) soit $\dot{\theta} = \frac{d\theta}{dt} = \frac{r_0 v_0}{r^2}$ d'où $dt = \frac{r^2}{r_0 v_0}d\theta$ avec $r = \frac{r_0}{1+\cos\theta}$.

Or, τ, la durée pendant laquelle la comète est située à $r < r_0$ correspond à $-\frac{\pi}{2} \leq \theta \leq \frac{\pi}{2}$ d'où

$$\tau = \int_{\theta=-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \frac{r_0 d\theta}{v_0(1+\cos\theta)^2} = \frac{2T_0}{3\pi} \simeq 77{,}5 \text{ jours.}$$

Sujet 5 – corrigé

I Charge dans B et avec frottements fluides.

Une particule de masse m et de charge $q = -e < 0$ se trouve initialement en un point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$.
Elle se déplace dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et subit également une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ avec λ une constante positive.

1) Quelle est le mouvement (trajectoire et vitesse) de la particule si $\lambda = 0$? Représentez la trajectoire associée.

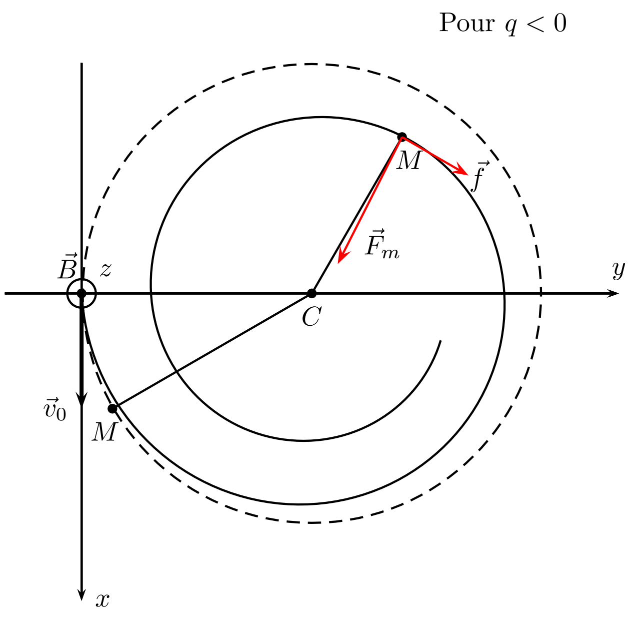
Réponse

Si $\lambda = 0$, on retrouve le cas d'une particule dans $\vec{B}$ seul. Sa vitesse initiale étant normale à $\vec{B}$, on a affaire à un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{eB}$ et de centre $(0,R,0)$ (trajectoire tracée en pointillés sur la figure ci-contre).

◇

2) On considère maintenant $\lambda \neq 0$ mais faible. Représentez, sans calcul supplémentaire, l'allure de la nouvelle trajectoire.

Réponse



Si $\lambda \neq 0$ mais reste faible, la trajectoire reste quasi circulaire mais par application du théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_m) + \mathcal{P}(\vec{f}) = 0 + \mathcal{P}(\vec{f}) < 0$$

on voit que la présence de frottement diminue v.

Comme $R = \frac{mv}{eB}$, le rayon de courbure de la trajectoire diminue d'où l'apparition d'une spirale.

◇

3) Déterminez les équations différentielles du mouvement dans le cas général.

Réponse

On détermine les équations différentielles du mouvement par application du principe fondamental de la dynamique à la particule M qui n'est soumise qu'à $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{f}$ (on néglige son poids).

$$m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} - \lambda.\overrightarrow{v} \Rightarrow \quad m \left| \begin{array}{l} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{array} \right. = q \left| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \right. \wedge \left| \begin{array}{l} 0 \\ 0 - \lambda \\ B \end{array} \right| \begin{array}{l} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{array} \Rightarrow \left| \begin{array}{l} m\dot{v}_x = qBv_y - \lambda v_x \\ m\dot{v}_y = -qBv_x - \lambda v_y \\ m\dot{v}_z = -\lambda v_z \end{array} \right.$$

◇

On pose $\underline{u} = x + jy$, $\omega = \frac{eB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{\lambda}$.

4) Déterminez $\underline{u}(t)$. Comment calculerait-on $x(t)$ et $y(t)$? Précisez la position finale de la particule.

Réponse

En posant $\omega = \frac{eB}{m} = -\frac{qB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{\lambda}$, les équations précédentes s'écrivent $\dot{v}_x = -\omega v_y - \frac{v_x}{\tau}$ (équation 1), $\dot{v}_y = \omega v_x - \frac{v_y}{\tau}$ (équation 2) et $\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau}$ (équation 3).

L'équation 3 s'intègre facilement : $\dot{z} = -\frac{z}{\tau} + 0$ et $z = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $z(0) = 0$ d'où $A = 0$ et $z(t) = 0$ pour tout t : le mouvement reste plan.

Pour déterminer $x(t)$ et $y(t)$, c'est à dire pour résoudre les équations 1 et 2, on pose $\underline{u} = x + j.y$ et en dérivant par rapport au temps,

$$\underline{\dot{u}} = v_x + j.v_y \Rightarrow \underline{\ddot{u}} = \dot{v}_x + j\dot{v}_y = -\omega v_y - \frac{v_x}{\tau} + j\omega v_x - j\frac{v_y}{\tau} = j\omega\underline{\dot{u}} - \frac{1}{\tau}\underline{\dot{u}} \Rightarrow \underline{\ddot{u}} = [j\omega - \frac{1}{\tau}]\underline{\dot{u}}$$

d'où $\underline{\dot{u}} = \underline{U}_0 \exp\left[(j\omega - \frac{1}{\tau})t\right]$ et à $t = 0$, $\underline{\dot{u}}(t) = v_x(0) + jv_y(0) = v_0 \Rightarrow \underline{\dot{u}}(t) = v_0 \exp(j\omega t)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.
Par intégration, $\underline{u}(t) = \frac{v_0\tau}{1-j\tau\omega}[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp(j\omega t)]$.

Le terme $e^{j\omega t}$ correspond au mouvement de rotation et celui en $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ à un amortissement exponentiel d'où une trajectoire en forme de spirale.

Pour déterminer complètement $x(t)$ et $y(t)$, il faudrait calculer $x(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}(t))$ et $y(t) = \mathrm{Im}(\underline{u}(t))$ (calcul fastidieux). Pour $t \gg \tau$, $e^{-\frac{t}{\tau}}$ tend vers 0 et

$$\underline{u}(\infty) \simeq \frac{v_0\tau}{1 - j\tau\omega} = \frac{v_0\tau(1 + j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} = x(\infty) + jy(\infty) \tag{10.1}$$

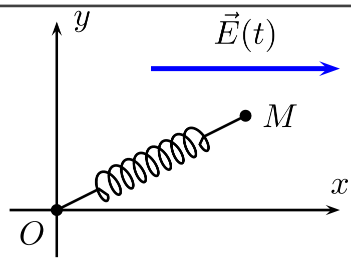
$$\Rightarrow x(\infty) \simeq \frac{v_0\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad \text{et} \quad y(\infty) \simeq \frac{\omega v_0\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{10.2}$$

par identification.

◇

Sujet 6 – corrigé

I La couleur du ciel

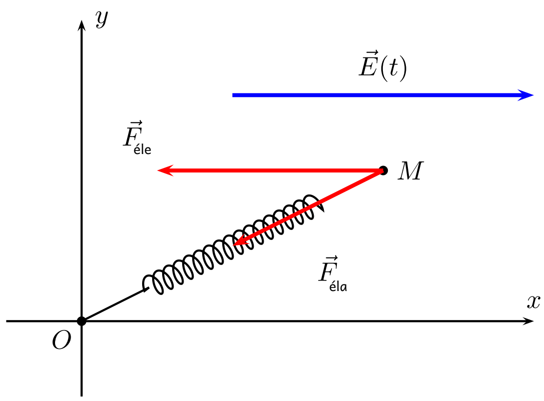


Pour décrire les interactions entre une onde lumineuse (électromagnétique) caractérisée par le vecteur champ électrique $\vec{E}(t) = \vec{E}_0 \cos \omega t = E_0 \cos(\omega t).\vec{e}_x$ et les électrons de la couche externe d'un atome, on utilise l'hypothèse de l'électron élastiquement lié de J.J THOMSON. Dans cette hypothèse, la force d'interaction entre le noyau et un électron de la couche externe est modélisée par une force de rappel élastique (qui tend à maintenir l'électron à une certaine distance de son noyau).

1) Établissez l'équation différentielle et vectorielle du mouvement d'un tel électron quand il est excité par $\vec{E}$ en admettant qu'il est rappelé vers le centre O de l'atome par une force de rappel $\vec{F} = -k\overrightarrow{OM}$ et qu'il est freiné par une force proportionnelle à sa vitesse $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$. On ne cherchera pas à projeter cette équation pour le moment.

   On notera q et m la charge et la masse de l'électron et on posera $2\alpha = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

Réponse



En considérant que le référentiel lié au noyau O est galiléen (ce qui est loin d'être le cas), on peut appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) à l'électron dont on néglige le poids :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{F}_{\text{éla}} + \vec{F}_{\text{éle}} + \vec{f} \tag{10.1}$$

$$\Rightarrow m\vec{a} = -e.\vec{E}(t) - k.\vec{r} - \alpha.\vec{v} \Rightarrow \frac{d^2\vec{r}}{dt^2} + 2\alpha\frac{d\vec{r}}{dt} + \omega_0^2\vec{r} = \frac{q}{m}\vec{E}(t) \tag{10.2}$$

en posant $2\alpha = \frac{\lambda}{m}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$.

◇

2) Démontrez, par projection de l'équation précédente sur une base cartésienne, qu'en régime permanent l'électron oscille parallèlement à $\vec{E}_0$. On notera $x(t)$ son élongation.

Réponse

Par projection du PFD selon les trois axes, on obtient :

$$\begin{cases} \ddot{x} + 2\alpha\dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{q}{m}E(t) = \frac{qE_0}{m}\cos\omega t \\ \ddot{y} + 2\alpha\dot{y} + \omega_0^2 y = 0 \\ \ddot{z} + 2\alpha\dot{z} + \omega_0^2 z = 0 \end{cases}$$

Les équations en $y(t)$ et $z(t)$, sans second membre, traduisent un régime libre et $y(t)$ et $z(t)$ vont tendre vers 0 après un régime transitoire plus ou moins long (puisque ce sont des équations différentielles du second ordre type oscillateur amorti).

Par contre, à la fin de ce régime transitoire, $x(t) = X_m \cos(\omega t + \varphi)$: régime sinusoïdal forcé.

3) Calculez $\underline{X}(\omega)$ l'amplitude complexe de l'élongation $x(t)$ puis en déduire $A_x(\omega)$, l'amplitude de son accélération sachant que $\ddot{x}(t) = a_x(t)$.

Réponse

En notation complexe, on pose $\underline{x}(t) = \underline{X}.e^{j\omega t}$ où $\underline{X}$ est l'amplitude complexe de $x(t)$. On en déduit $\underline{\dot{x}}(t) = j\omega\underline{X}.e^{j\omega t}$ et $\underline{\ddot{x}}(t) = -\omega^2\underline{X}.e^{j\omega t}$ et en remplaçant dans la projection du PFD selon x, on trouve

$$-\omega^2\underline{X}.e^{j\omega t} + 2j\omega\alpha\underline{X}.e^{j\omega t} + \omega_0^2\underline{X}.e^{j\omega t} = \frac{qE_0}{m}e^{j\omega t} \Rightarrow \underline{X}(\omega) = \frac{qE_0}{m(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\alpha j\omega)}$$

puis $A_x = |-\omega^2\underline{X}| = \frac{q\omega^2 E_0}{m\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2+4\alpha^2\omega^2}}$ l'amplitude de son accélération.

4) Cet atome est éclairé par de la lumière blanche composée d'ondes dont les pulsations sont comprises entre ω_1 (rouge) et ω_2 (violet). Sachant que ω_1 et ω_2 sont tous deux très inférieurs à ω_0, montrez que, dans ces conditions, l'amplitude $A(\omega)$ est proportionnelle à ω^2.

Réponse

Pour $\omega \ll \omega_0$, $A \simeq \frac{q\omega^2 E_0}{m\sqrt{\omega_0^4}} \simeq \frac{q\omega^2}{m\omega_0^2}E_0$ proportionnel à ω^2.

5) Sachant qu'un électron accéléré rayonne, en moyenne, une puissance lumineuse P proportionnelle au carré de son accélération ($< P > \propto A^2$), expliquer pourquoi le ciel est bleu.

Réponse

Les électrons rayonnent une puissance P proportionnelle à A^2 c'est à dire à ω^4 où $\omega = 2\pi f = 2\pi\frac{c}{\lambda}$.

On peut calculer $\frac{P_1}{P_2} = \frac{\omega_1^4}{\omega_2^4} = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4}$ et en prenant $\lambda_1 \simeq 470$ nm (bleu) et $\lambda_2 \simeq 650$ nm (rouge), on obtient

$$P_1(\text{bleu}) = \frac{\lambda_2^4}{\lambda_1^4}P_2(\text{rouge}) \simeq 4P_2(\text{rouge})$$

Conclusion : après absorption de la lumière blanche du soleil, les électrons de l'atmosphère diffusent l'énergie lumineuse préférentiellement dans le domaine du bleu ce qui explique que le ciel nous apparaisse de cette couleur (les jours de beau temps). Le rouge est quant à lui beaucoup moins rayonné par les électrons des molécules constituant l'atmosphère terrestre. Il n'est donc visible que lorsque l'on observe directement le Soleil.