

Oscillateur amorti

Sommaire

| | |
|---|-----------|
| I Introduction | 3 |
| I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC | 3 |
| I/B Équation différentielle | 4 |
| I/C Équation caractéristique et régimes de solutions | 4 |
| II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre | 5 |
| II/A Présentation | 5 |
| II/B Bilan énergétique | 5 |
| II/C Équation différentielle du circuit | 6 |
| II/D Résolutions pour chaque cas | 6 |
| III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides | 12 |
| III/A Présentation | 12 |
| III/B Équation différentielle | 13 |
| III/C Bilan énergétique | 13 |
| III/D Solutions | 14 |
| III/E Résumé oscillateurs amortis | 14 |

Capacités exigibles

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. <input type="checkbox"/> Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. <input type="checkbox"/> Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. <input type="checkbox"/> Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. | <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. <input type="checkbox"/> Réaliser un bilan énergétique. <input type="checkbox"/> Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. <input type="checkbox"/> Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. |
|---|---|

✓ L'essentiel

📖 Définitions

- ☐ E5.1 : Équation caractéristique amorti . . . 4
- ☐ E5.2 : Circuit RLC libre 5
- ☐ E5.3 : Situation initiale et bilan des forces 12

⚙️ Propriétés

- ☐ E5.1 : Équation différentielle amorti . . . 4
- ☐ E5.2 : Bilan de puissance RLC libre . . . 6
- ☐ E5.3 : Équation différentielle RLC libre . . . 6
- ☐ E5.4 : Solution pseudo-périodique 7
- ☐ E5.5 : Régime transitoire $Q > 1/2$ 8
- ☐ E5.6 : Solution critique 9
- ☐ E5.7 : Régime transitoire critique 10
- ☐ E5.8 : Solution apériodique 11
- ☐ E5.9 : Régime transitoire apériodique . . . 12
- ☐ E5.10 : Équation ressort amorti 13
- ☐ E5.11 : Bilan de puissance ressort 13
- ☐ E5.12 : Solutions ressort 14

» Implications

- ☐ E5.1 : Régimes de solutions 4
- ☐ E5.2 : Résultat à grand Q 8
- ☐ E5.3 : Résultat à faible Q 12

💡 Interprétations

- ☐ E5.1 : Résultat pseudo-périodique 8
- ☐ E5.2 : Espace des phases pseudo-pér. . . . 9
- ☐ E5.3 : Espace des phases critique 10
- ☐ E5.4 : Espace des phases apériodique . . . 11

🔧 Démonstrations

- ☐ E5.1 : Bilan de puissance RLC libre 5
- ☐ E5.2 : Équation différentielle RLC libre . . . 6
- ☐ E5.3 : Solution pseudo-périodique 7
- ☐ E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér. . . . 8
- ☐ E5.5 : Solution critique 9
- ☐ E5.6 : Régime transitoire critique 10
- ☐ E5.7 : Solution apériodique 10
- ☐ E5.8 : Régime transitoire apériodique . . . 11
- ☐ E5.9 : Équation ressort amorti 13
- ☐ E5.10 : \mathcal{P} ressort 13

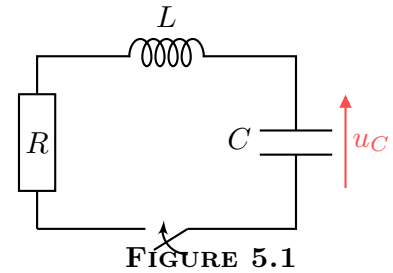
♥ Points importants

- ☐ E5.1 : Solutions oscillateur amorti 5
 - ☐ E5.2 : Évolution énergétique RLC série . . . 6
 - ☐ E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti 13
 - ☐ E5.4 : Résumé – pas de par cœur ! 14
-

I Introduction

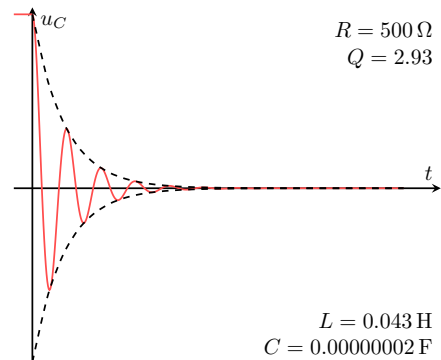
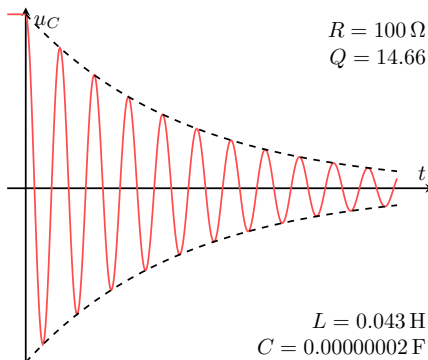
I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC

En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC suivant¹, avec $L = 43 \text{ mH}$ et $C = 20 \text{ nF}$:



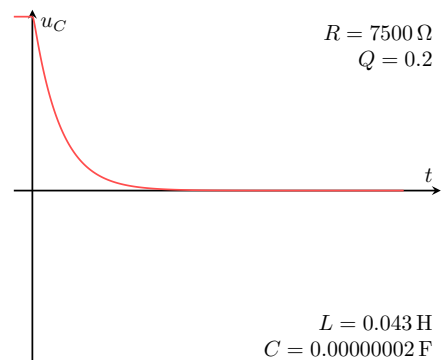
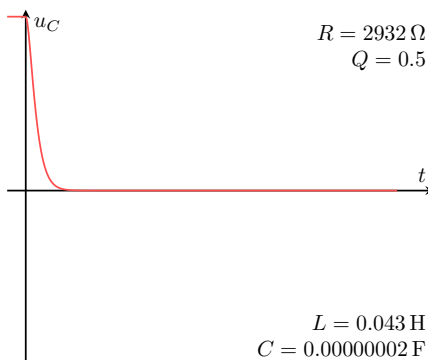
◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**.

On observe une série d'oscillations à la période $T \approx 184 \mu\text{s}$. On observe environ 15 oscillations lorsque $R \approx 100 \Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180 \Omega$, 3 oscillations lorsque $R \approx 500 \Omega$.



◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

Lorsque $R \approx 2,9 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250 \mu\text{s}$ (à 95%). Lorsque $R \approx 7,5 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $420 \mu\text{s}$.



Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

- 1) **Système oscillant** pour $R < R_c$, de pseudo-période² **supérieure** à T_0 ;
- 2) **Système non-oscillant** pour $R > R_c$: le transitoire **augmente** avec R .

1. <https://tinyurl.com/ypbwcwfs>

2. On parle de *pseudo*-période car le signal est diminué.

I/B Équation différentielle

Propriété E5.1 : Équation différentielle amorti

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

1) x_{eq} la position d'équilibre 2) ω_0 la pulsation **propre** 3) Q le **facteur de qualité**

Remarque E5.1 : Analyse de l'équation

Par lecture de cette équation, Q est **sans dimension** pour qu'on retrouve que ω_0 s'exprime en s^{-1} car $\frac{dx}{dt}$ est de dimension $[x] \cdot s^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus Q est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

I/C Équation caractéristique et régimes de solutions

♥ Définition E5.1 : Équation caractéristique amorti

Pour résoudre une équation différentielle **homogène**, on suppose une solution de la forme $x(t) = A \exp(rt)$ avec $r \in \mathbb{C}$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'**équation caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant Δ est

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

♥ Implication E5.1 : Régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) > 0 \Leftrightarrow 4Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$Q > 1/2$: régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

$Q = 1/2$: régime **critique**, racine double réelle ;

$Q < 1/2$: régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

Notation E5.1 : \pm et \mp

Il est courant de noter les racines r_{\pm} pour dénoter à la fois r_+ et r_- . Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe \pm , ce qui signifie que r_+ correspond à l'expression avec le $+$, et r_- correspond à l'expression avec le $-$.

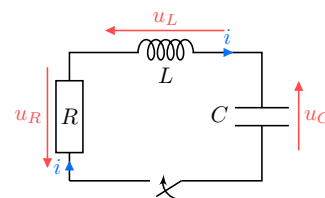
Si l'expression contient le signe \mp , c'est l'opposé : r_+ correspond à l'expression avec $-$.

Important E5.1 : Solutions oscillateur amorti

| | Racines | Solution |
|-------------|---|--|
| Pseudo-pér. | $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ | $x(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \times \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$ |
| Critique | $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ | $x(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$ |
| Apériodique | $r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$ | $x(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$ |

II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre**II/A Présentation****♥ Définition E5.2 : Circuit RLC libre**

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ On suppose le condensateur initialement chargé.
- ◇ À $t = 0$, on coupe le générateur.

**FIGURE 5.2****II/B Bilan énergétique****♥ Démonstration E5.1 : Bilan de puissance RLC libre**

On fait un bilan de puissances :

$$\begin{aligned}
 & u_C i + u_L i + u_R i = 0 \\
 \Leftrightarrow & u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i + Ri^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \left(\underbrace{\frac{1}{2} C u_C^2}_{\varepsilon_C} + \underbrace{\frac{1}{2} L i^2}_{\varepsilon_L} \right) = -\mathcal{P}_J
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} i = C \frac{du_C}{dt}, u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } u_R = Ri \\ \mathcal{P}_J = Ri^2 \text{ et } f \times f' = \left(\frac{1}{2} f^2\right)' \end{array} \right\}$$

♥ Propriété E5.2 : Bilan de puissance RLC libre

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\mathcal{P}_J$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$.

Important E5.2 : Évolution énergétique RLC série

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C , d'où l'amortissement.

II/C Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E5.2 : Équation différentielle RLC libre

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } u_R = Ri \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{forme} \\ \text{canonique} \end{array}$$

On détermine l'expression de Q par identification :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{Q\sqrt{LC}} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{L}{R\sqrt{LC}} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \text{On isole } Q \\ L = \sqrt{L}^2 \end{array} \right\}$$

♥ Propriété E5.3 : Équation différentielle RLC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC en régime libre est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

◇ $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre ;

◇ $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

II/D Résolutions pour chaque cas

II/D) 1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

II/D) 1.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.3 : Solution pseudo-périodique

On part de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} (4Q^2 - 1)} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On injecte } \Delta \\ \text{On extrait } \frac{\omega_0}{Q} \\ \text{On définit } \Omega \end{array} \right\}$$

d'où la définition de Ω :

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = 1 [A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = E}$$

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)] \\ \Rightarrow \left(\frac{du_C}{dt}\right)_0 &= -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}E = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \end{aligned}$$

♥ Propriété E5.4 : Solution pseudo-périodique

Pour un facteur de qualité $Q > 1/2$, u_C s'exprime par

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\Omega t)\right]$$

avec $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}}$

La période des oscillations est alors

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Leftrightarrow \boxed{T = T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} > T_0}$$

Les enveloppes sont

$$y(t) = \pm E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

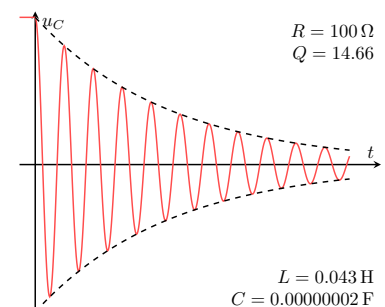


FIGURE 5.3



♥ Interprétation E5.1 : Résultat pseudo-périodique

La solution du polynôme caractéristique s'écrit donc comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution d'ordre 2 harmonique** :

$$r_{\pm} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\equiv -\frac{1}{\tau}} \pm \underbrace{j\Omega}_{\equiv j\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{r_{\pm} = r_{\text{ordre 1}} + r_{\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1.

Avec les propriétés de l'exponentielle ($e^{a+b} = e^a e^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$y_h(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\equiv e^{-t/\tau}} \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\equiv A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)} \quad \text{soit} \quad \boxed{y_h(t) = y_{h,\text{ordre 1}} \times y_{h,\text{ordre 2 harmonique}}}$$

II/D) 1.2 Régime transitoire

♥ Démonstration E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér.

L'amplitude varie selon $E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$; on définit donc t_{95} tel que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t_{95}\right) &= 0.05 \\ \Leftrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(0.05) \\ \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(20) \\ \Leftrightarrow t_{95} &= 2 \ln(20) \frac{Q}{\omega_0} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} Q \end{aligned}$$

$\begin{aligned} &\xrightarrow{\ln(\cdot)} \\ &0.05 = 1/20 \text{ et } \ln(a^b) = b \ln a \\ &\text{On isole et } 2 \ln 20 \approx 2\pi \end{aligned}$

♥ Propriété E5.5 : Régime transitoire $Q > 1/2$

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$\boxed{t_{95} \approx QT_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Implication E5.2 : Résultat à grand Q

Avec ces résultats on remarque en effet que quand $Q \rightarrow \infty$, on a à la fois

$$\boxed{\Omega \approx \omega_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{T \approx T_0}$$

Mais aussi

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0} \quad \text{donc} \quad \boxed{u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)}$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.



Interprétation E5.2 : Espace des phases pseudo-pér.

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C, i) n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**.

On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue.

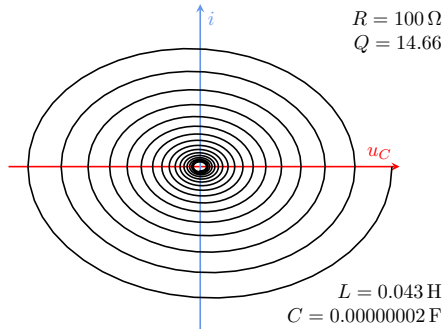


FIGURE 5.4 – Faible amortissement

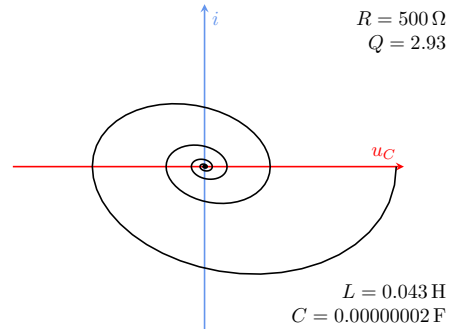


FIGURE 5.5 – Moyen amortissement

II/D) 2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

II/D) 2.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.5 : Solution critique

La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut

$$r = -\omega_0 \quad \text{soit} \quad u_C(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

◇ On trouve B avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = (A \cdot 0 + B) \cdot 1 = B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = E}$$

◇ On trouve A avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= (A) \exp(-\omega_0 t) + (At + E)(-\omega_0) \exp(-\omega_0 t) \\ \Rightarrow \left(\frac{du_C}{dt} \right)_0 &= A - \omega_0 E = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = \omega_0 E} \end{aligned}$$

♥ Propriété E5.6 : Solution critique

Pour un facteur de qualité $Q = 1/2$, u_C s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)}$$

et on n'observe **pas une oscillation**.

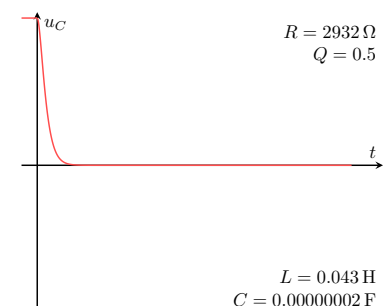


FIGURE 5.6



Interprétation E5.3 : Espace des phases critique

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.

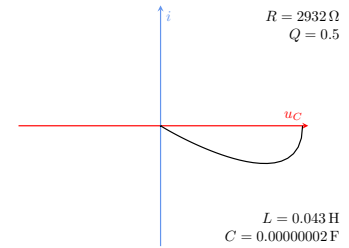


FIGURE 5.7

II/D) 2.2 Régime transitoire

♥ Démonstration E5.6 : Régime transitoire critique

En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance exponentielle, on a

$$\exp(-\omega_0 t_{95}) = 0,05 \Leftrightarrow t_{95} = \frac{\ln(20)}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{\omega_0}$$

♥ Propriété E5.7 : Régime transitoire critique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

II/D) 3 Cas $\Delta > 0$: régime apériodique

II/D) 3.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.7 : Solution apériodique

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \end{aligned}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

◇ Avec la première CI :

$$u_C(0) = E = A + B$$

◇ Avec la seconde CI :

$$\left(\frac{du_C}{dt} \right)_0 = Ar_+ + Br_- = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{Ar_+}{r_-}$$

En combinant, on trouve

$$A = -\frac{Er_-}{r_+ - r_-} \quad \text{et} \quad B = \frac{Er_+}{r_+ - r_-}$$

Or,

$$\begin{aligned} r_+ - r_- &= \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 + 1 + 2\sqrt{1 - 4Q^2} \right) \\ \Leftrightarrow r_+ - r_- &= \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \end{aligned}$$

♥ Propriété E5.8 : Solution apériodique

Pour un facteur de qualité $Q < 1/2$, u_C s'exprime par

$$u_C(t) = \frac{QE}{\omega_0 \sqrt{1 - 4Q^2}} (r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$$

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour $Q = 1/2$.

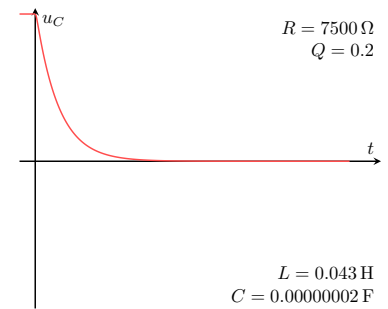


FIGURE 5.8

Interprétation E5.4 : Espace des phases apériodique

Pendant le régime apériodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher u_C d'osciller, mais également pour **ralentir sa diminution** vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire $\frac{du_C}{dt}$ plus petit donc i plus petit.

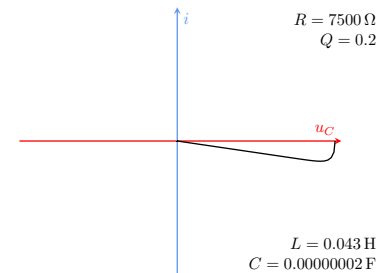


FIGURE 5.9

II/D) 3.2 Régime transitoire

♥ Démonstration E5.8 : Régime transitoire apériodique

La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « **moins décroissante** ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc r_- et r_+ .

On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle) :

$$\begin{aligned} r_+ < 0 &\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\omega_0 \text{ et } Q > 0} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \underset{>}{\leq} 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - 4Q^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - 4Q^2} < 1^2 \\ &\Leftrightarrow 4Q^2 > 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} r_- < r_+ &\Leftrightarrow |r_-| > |r_+| \quad \begin{array}{c} \textcircled{|\cdot|} \\ \textcircled{(\cdot)^{-1}} \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{r_-}\right| < \left|\frac{1}{r_+}\right| \quad \begin{array}{c} \textcircled{(\cdot)^{-1}} \\ \tau = |1/r| \end{array} \\ &\Leftrightarrow \tau_- < \tau_+ \end{aligned}$$

On estime alors la durée du régime transitoire à $\boxed{\ln(20)/|r_+|}$.

ce qui est vrai.

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{x \ll 1}{\sim} 1 + x/2}$ pour simplifier r_+ :

$$\begin{aligned} r_+ &= -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \\ &\Rightarrow r_+ \underset{Q \ll 1}{\sim} -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \left(1 - \frac{4Q^2}{2}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow r_+ \underset{Q \ll 1}{\sim} -Q\omega_0 \end{aligned}$$

Avec $\ln(20) \approx \pi$:

$$\boxed{t_{95} \approx \frac{\pi}{Q\omega_0}} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}}$$

♥ Propriété E5.9 : Régime transitoire apériodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Implication E5.3 : Résultat à faible Q

Quand $Q \rightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\sqrt{LC}} u_C \\ &= \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} u_C = \left[\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C \right] \end{aligned}$$

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de r_{\pm} tendent vers la même valeur $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$: en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance :

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R \sqrt{\frac{C}{L^3}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$.

III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

III/A Présentation

♥ Définition E5.3 : Situation initiale et bilan des forces

- ◇ **Système** : {point M} de masse m
- ◇ **Référentiel** : \mathcal{R}_{sol} supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir schéma)
- ◇ **Repérage** :

$$\overrightarrow{OM} = (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x ; \vec{v} = \dot{\ell}(t) \vec{u}_x ; \vec{a} = \ddot{\ell}(t) \vec{u}_x$$

- ◇ **Position initiale** : $OM(0) = L_0 > 0$
- ◇ **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = \vec{0}$

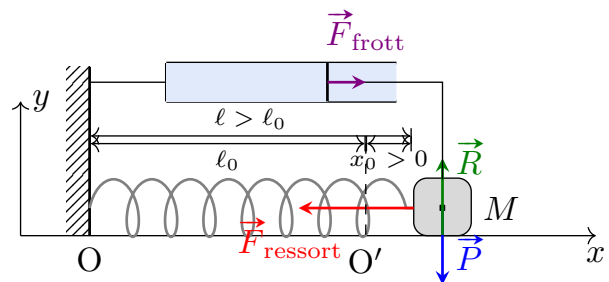


FIGURE 5.10

- ◇ **Bilan des forces** :

| | |
|-------------------------|--|
| Poids | $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$ |
| Réaction support | $\vec{R} = R \vec{u}_y$ |
| Force rappel | $\vec{F} = -kx(t) \vec{u}_x$ |
| Force frottement | $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha \vec{v}$ |

III/B Équation différentielle

♥ Démonstration E5.9 : Équation ressort amorti

Avec le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha v \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

Sur l'axe \vec{u}_x on trouve donc

$$m \frac{d^2\ell}{dt^2} + \alpha \frac{d\ell}{dt} + k\ell(t) = k\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\ell}{dt} + \frac{k}{m} \ell(t) = \frac{k}{m} \ell_0$$

On identifie ω_0 et Q :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{et } \frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

♥ Propriété E5.10 : Équation ressort amorti

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\ell}{dt} + \omega_0^2 \ell(t) = \omega_0^2 \ell_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\diamond \omega_0 = \frac{k}{m} \text{ la pulsation propre ;}$$

$$\diamond Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \text{ le facteur de qualité.}$$

ℓ_0 **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

Important E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \ell_{\text{eq}} = \ell_0$.

Ici, c'est le coefficient de frottements α qui dissipe : on l'associe à R .

Méca \longleftrightarrow Élec

$$x \longleftrightarrow q$$

$$v \longleftrightarrow i$$

$$m \longleftrightarrow L$$

$$k \longleftrightarrow C^{-1}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha \longleftrightarrow R$$

III/C Bilan énergétique

Propriété E5.11 : \mathcal{P} ressort

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionnellement au coefficient de friction α :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\alpha v^2$$

Démonstration E5.10 : \mathcal{P} ressort

À partir du PFD $\times v$:

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \alpha \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = -\alpha v^2$$

On a bien $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{p,\text{el}}$ qui diminue.

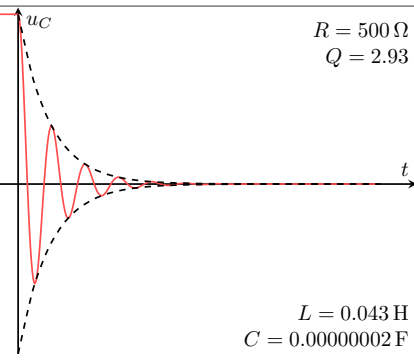
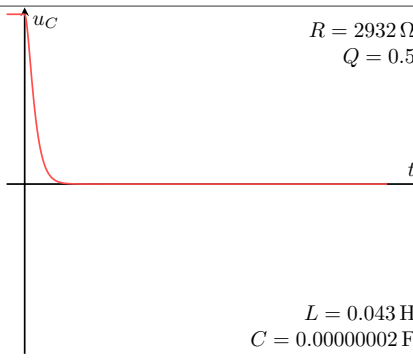
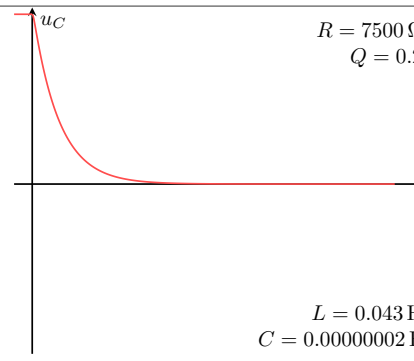
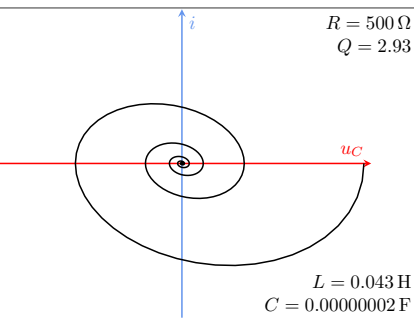
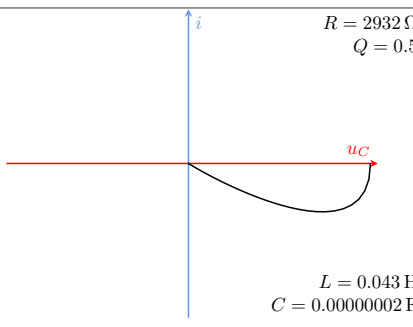
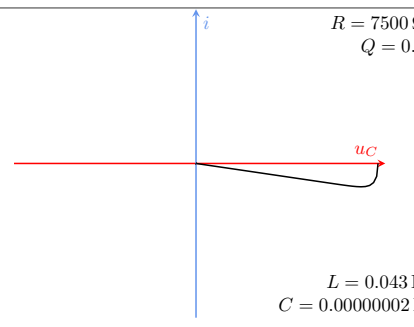
III/D Solutions

Propriété E5.12 : Solutions ressort

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par x_0

III/E Résumé oscillateurs amortis

Important E5.4 : Résumé – pas de par cœur !

| Pseudo-périodique | Critique | Apériodique |
|--|--|--|
| $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$ | $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$ | $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$ |
| $r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$ $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ | $r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$ | $r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$ |
| $u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times$ $\left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\Omega t) \right]$ | $u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)$ | $u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} \times$ $(r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$ |
| $t_{95} \approx QT_0$ | $t_{95} \approx \frac{T_0}{2}$ | $t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}$ |
|  <p>$R = 500 \Omega$ $Q = 2.93$</p> <p>$L = 0.043 \text{ H}$ $C = 0.00000002 \text{ F}$</p> |  <p>$R = 2932 \Omega$ $Q = 0.5$</p> <p>$L = 0.043 \text{ H}$ $C = 0.00000002 \text{ F}$</p> |  <p>$R = 7500 \Omega$ $Q = 0.2$</p> <p>$L = 0.043 \text{ H}$ $C = 0.00000002 \text{ F}$</p> |
|  <p>$R = 500 \Omega$ $Q = 2.93$</p> <p>$L = 0.043 \text{ H}$ $C = 0.00000002 \text{ F}$</p> |  <p>$R = 2932 \Omega$ $Q = 0.5$</p> <p>$L = 0.043 \text{ H}$ $C = 0.00000002 \text{ F}$</p> |  <p>$R = 7500 \Omega$ $Q = 0.2$</p> <p>$L = 0.043 \text{ H}$ $C = 0.00000002 \text{ F}$</p> |