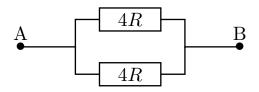
Électrocinétique : permanent et ordre 1 – corrigé

Modélisation d'un dipôle linéaire

Si D est un interrupteur ouvert, alors le circuit est composé de deux branches parallèles, avec des résistances R et 3R soit $R_{\text{serie}} = R + 3R = 4R$. Or, pour deux résistances R_1 et R_2 en parallèle, on a



/4 | 2 | Si D est un fil, le circuit est l'association en série de deux résistances $R_{\rm eq}$ identiques correspondant à l'association en parallèle de la résistance 3R et de la résistance R, soit $R_{eq} = 3R/4$.

$$\boxed{R_0 = 3R/2} \Rightarrow \underline{R_0 = 150\,\Omega}$$

$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}$ $\Leftrightarrow \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{2}{4R}$ $\Leftrightarrow R_{\infty} = 2R$ $\Rightarrow R_{\infty} = 200 \Omega$ $R_{1} = R_{2} = 4R$ $R_{1} = R_{2} = 4R$

В

Sur une source de tension

/8 | 3 |

$$u=U_{DC}$$
 $\Leftrightarrow u=U_{DB}+U_{BC}$ Additivité des tensions $\Leftrightarrow u=v'-v$ Attention au signe

On reconnait deux ponts diviseurs de tension. Or, pour une résistance R_2 en série avec une résistance R_1 dans une branche de tension U_{brch} , on a

$$U_{R_k} = \frac{R_k}{R_1 + R_2} U_{\text{brch}}$$

$$\Rightarrow v' = \frac{3E}{4} \quad \text{et} \quad v = \frac{E}{4}$$

$$\Rightarrow u = \frac{E}{2} \Rightarrow u = 3V$$

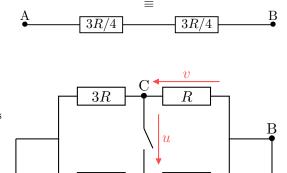
Dans ce cas, d'après la question $\boxed{2}$, la tension v correspond à la tension aux bornes de la résistance équivalente $R_{eq} = 3R/4$. On applique la formule du pont diviseur de tension sur l'association en série des deux résistances $R_{\rm eq}$:

$$v = E/2 \Rightarrow \underline{v} = 3 \text{ V}$$

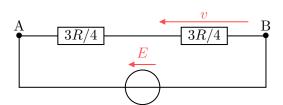
Par l'application de la loi des nœuds et de la loi d'Ohm :

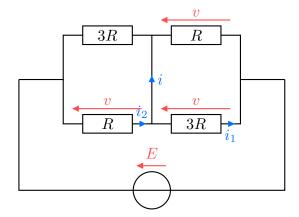
$$i = i_2 - i_1 = \frac{v}{R} - \frac{v}{3R}$$

 $\Leftrightarrow \boxed{i = \frac{E}{3R}} \Rightarrow \underline{i} = 20 \,\mathrm{mA}$



3R





B Sur une source de courant

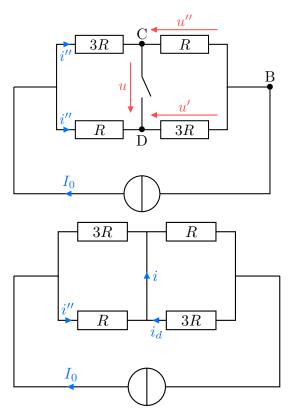
/5 6 Si D est un interrupteur ouvert, alors le courant est le même dans les deux branches qui ont la même résistance équivalente, donc $i'' = I_0/2$ avec la loi des nœuds.

Or, par l'additivité des tensions, u = u' - u''. En appliquant la loi d'Ohm, on obtient

$$u = RI_0 \Rightarrow \underline{u} = 4 \text{ V}$$

/4 $\boxed{7}$ On reconnaît les conditions d'application d'un pont diviseur de courant : pour deux résistances R_1 et R_2 en parallèle alimentées par un courant I_0 se divisant en i_1 et i_2 respectivement, on a

$$i'' = \frac{G_1}{G_1 + G_2} I_0 \Rightarrow i'' = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{1}{R} + \frac{1}{3R}} I_0 \Leftrightarrow i'' = \frac{\frac{1}{R}}{\frac{4}{3R}} I_0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{i'' = \frac{3}{4} I_0} \Rightarrow \underline{i'' = 30 \text{ mA}}$$



/4 8 D'après la formule du pont diviseur de courant, $i_d = -I_0/4$. Ainsi,

$$i = i'' + i_d \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{I_0}{2}} \Rightarrow \underline{i = 20 \,\mathrm{mA}}$$

C Application

- |4|9| Dans le cas où D' est un générateur de tension de f.e.m. u'=E:
 - \diamond Si D est un interrupteur ouvert, i=0 et u=E/2 : E=bE/2, donc b=2
 - \diamond Si D est un fil, u=0 et i=E/(3R) : E=aE/(3R), donc $\boxed{a=3R}$

Dans le cas où D' est un générateur de courant de c.e.m. $i'=I_0$:

- \diamond Si D est un fil, u=0 et $i=I_0/2:I_0=cI_0/2,$ donc c=2
- \diamond Si D est un interrupteur ouvert, i=0 et $u=RI_0:I_0=dRI_0,$ donc $\boxed{d=1/R}$
- /3 10 Par application de la loi d'Ohm sur le dipôle AB, et sur la résistance ρ :

$$R_{AB} = u'/i'$$
 et $u = \rho i$

On remplace u dans les expressions de u' et de i' :

$$u' = (3R + 2\rho)i$$
 et $i' = \left(2 + \frac{\rho}{R}\right)i$

En faisant le rapport des deux, on obtient la résistance équivalente :

$$R_{AB} = R \times \frac{3R + 2\rho}{2R + \rho}$$

- /2 11 $\lim_{\rho\to\infty} R_{AB} = 2R = R_{\infty}$, il y a cohérence avec la réponse à la question 1.
- /2 12 $\lim_{\rho \to 0} R_{AB} = 3R/2 = R_0$, il y a cohérence avec la réponse à la question 2.

/39 E2 Point de fonctionnement d'une diode

- /2 $\boxed{1}$ Une diode bloquée est modélisable par un interrupteur ouvert (i=0).
- $\sqrt{5}$ 2 Le coefficient directeur est donné par le taux d'accroissement

$$a = \frac{i_C}{u_C - u_s} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i_C = 0,500 \,\text{A} \\ u_C = 0,70 \,\text{V} \\ u_s = 0,60 \,\text{V} \end{cases} \Rightarrow a = 5,0 \,\text{S}$$

Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, on utilise le point d'abscisse u_s et d'ordonnée nulle :

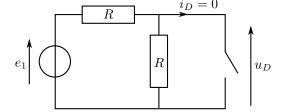
$$0 = au_s + b$$
 soit $b = -au_s = \frac{-i_C u_s}{u_C - u_s}$ $\Rightarrow b = -3.0 \,\text{A}$

- /2 3 D'après l'additivité des tensions et la loi d'Ohm, u=ri-e, soit $\boxed{i=\frac{e}{r}+\frac{u}{r}}$
- /6 4 Deux dipôles sont équivalents s'ils ont la même caractéristique. On en déduit $i=i_D$ si $u=u_D$, soit e/r=b et 1/r=a:

$$r = 1/a = 0.20 \,\Omega$$
 et $e = b/a = -u_s = -0.60 \,\mathrm{V}$

/5 [5] En remplaçant la diode par un interrupteur, on reconnait un pont diviseur de tension : $u_D=\frac{e_1}{2}$. La diode est bloquée si $u_D < u_s$, donc il faut que

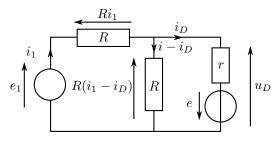
$$e_1 < 2u_s$$



$$u_D = e_1 - Ri_1 (2.1)$$

$$\Leftrightarrow u_D = R(i_1 - i_D) \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow u_D = ri_D - e \tag{2.3}$$



$$(2.1) + (2.2) \Rightarrow 2u_D = e_1 - Ri_D \quad \text{soit} \quad i_D = \frac{e_1 - 2u_D}{R}$$

$$(2.3) \Rightarrow u_D = \frac{r}{R}(e_1 - 2u_D) - e \quad \text{soit} \quad \boxed{u_D = \frac{re_1 - Re}{2r + R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = 0.20 \,\Omega \\ e_1 = 10 \,\text{V} \\ R = 4.0 \,\Omega \\ e = -0.60 \,\text{V} \end{cases}$$

A.N. :
$$u_D = 1.0 \,\text{V}$$

On remarque que $u_D > u_s$, donc la diode est bien passante. Pour trouver i_D on utilise la caractéristique de la diode :

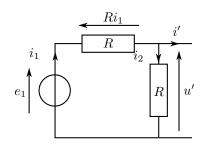
$$i_D = au_D + b \Rightarrow \underline{i_D} = 2.0 \,\mathrm{A}$$

 $\sqrt{5}$ T Loi des mailles et loi d'Ohm :

$$u' = e_1 - Ri_1$$
 et $u' = Ri_2$

$$\Leftrightarrow i_1 = \frac{e_1 - u'}{R}$$
 et $i_2 = u'/R$

$$\Rightarrow i' = \frac{e_1}{R} - \frac{2}{R}u'$$
On isole
$$i' = i_1 - i_2$$

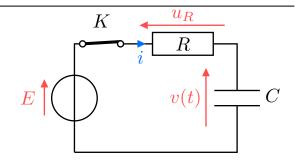


/4 $\lfloor 8 \rfloor$ Voir Figure 2.6. On lit les coordonnées du point d'intersection I(1,0 V; 2,0 A). Cela correspond aux valeurs déterminées précédemment.

$\left| \begin{array}{c|c} \mathbf{745} & \mathbf{P1} & \mathbf{Balise\ lumineuse} \end{array} \right|$

/16 1 La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps donc $v(t=0^+)=v(t=0^-)=0 < U_a$. Le tube est par conséquent éteint et la lampe est donc assimilable à un interrupteur ouvert. Avec une loi des mailles :

$$\begin{aligned} u_R(t) + v(t) &= E \\ \Leftrightarrow Ri(t) + v(t) &= E \end{aligned} \qquad \underbrace{\begin{array}{c} u_R(t) = Ri(t) \\ \downarrow u_R(t) = Ri(t) \\ \downarrow i(t) = C \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow RC \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t) &= E \end{aligned}}_{\tau = RC}$$



L'équation homogène est

$$\frac{\mathrm{d}v_h}{\mathrm{d}t} + \frac{v_h}{\tau} = 0$$

de solution

$$v_h(t) = A e^{-t/\tau}$$

Une solution particulière $v_p(t) = \lambda$ donne

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d} \chi}{\mathrm{d} t}}_{=0} + \frac{\lambda}{\tau} = E \Leftrightarrow \boxed{\lambda = E}$$

$$v(t) = v_h(t) + v_p$$

$$\Leftrightarrow v(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$
or,
$$v(0) = A + E = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A = -E}$$

$$\Rightarrow \boxed{v(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$
On remplace
$$On isole A$$
On combine

/3 2 La décharge s'amorce à l'instant t_a tel que $v(t_a) = U_a$. Soit

$$E\left(1 - e^{-t_a/\tau}\right) = U_a$$

$$\Leftrightarrow 1 - e^{-t_a/\tau} = \frac{U_a}{E}$$

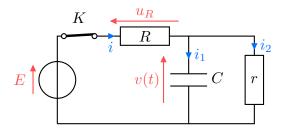
$$\Leftrightarrow e^{-t_a/\tau} = \frac{E - U_a}{E}$$

$$\Leftrightarrow \frac{-t_a}{\tau} = \ln\left(\frac{E - U_a}{E}\right)$$

$$\Leftrightarrow t_a = \tau \ln\left(\frac{E}{E} - U_a\right)$$

$$\Rightarrow t_a = \tau \ln\left(\frac{E}{E} - U_a\right)$$

/11 $\boxed{3}$ La lampe est maintenant assimilable à une résistance r. On obtient alors le nouveau schéma équivalent :



Avec une loi des mailles et la loi d'Ohm:

$$u_R + v = E$$

$$\Leftrightarrow Ri + v = E$$

$$\Leftrightarrow R(i_1 + i_2) + v = E$$

$$\Leftrightarrow R\left(C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{r}\right) + v = E$$

$$\Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R}{r} + 1\right)v = E$$

$$\Leftrightarrow rC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)v = \frac{r}{R}E$$

$$\Rightarrow rC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v = 0$$

P1. Balise lumineuse 5

Ainsi,

$$v(t) = A' e^{-t/\tau'}$$
 or, $v(t_a) = A' e^{-t_a/\tau'} = U_a$ Condition initiale or, $v(t_a) = A' e^{-t_a/\tau'} = U_a$ On isole A'
$$\Rightarrow v(t) = U_a e^{-(t-t_a)/\tau'}$$
 On combine

/3 4 La décharge se termine à l'instant t_{ex} tel que $v(t_{ex}) = U_{ex}$. Soit

$$U_{a}e^{-(t_{ex}-t_{a})/\tau'} = U_{ex}$$

$$\Leftrightarrow e^{-(t_{ex}-t_{a})/\tau'} = \frac{U_{ex}}{U_{a}}$$

$$\Leftrightarrow -\frac{t_{ex}-t_{a}}{\tau'} = \ln\left(\frac{U_{ex}}{U_{a}}\right)$$

$$\Leftrightarrow t_{ex} = t_{a} + \tau' \ln\left(\frac{U_{a}}{U_{ex}}\right)$$

$$T_{1} = t_{ex} - t_{a} = \tau' \ln\left(\frac{U_{a}}{U_{ex}}\right)$$

/2 $\boxed{5}$

/6 6 Par analogie directe avec la première question, dans cette phase,

$$v(t) = A'' e^{-t/\tau} + E$$
 et $\tau = RC$

La nouvelle condition initiale s'écrit désormais $v(t=t_{ex})=U_{ex}$. Soit

$$A''e^{-t_{ex}/\tau} + E = U_{ex} \Leftrightarrow A'' = (U_{ex} - E)e^{t_{ex}/\tau}$$

Dont on déduit, après calcul,

$$v(t) = (U_{ex} - E)e^{-(t - t_{ex})/\tau} + E$$

Le nouvel allumage de la lampe est réalisée à la condition $v(t = t_{ex} + T_2) = U_a$, soit

$$(U_{ex} - E)e^{-T_2/\tau} + E = U_a$$

$$D'où \qquad T_2 = \tau \ln \left(\frac{U_{ex} - E}{U_a - E}\right)$$

$$T = T_1 + T_2 \Leftrightarrow T = \tau \ln \left(\frac{U_{ex} - E}{U_a - E}\right) + \tau' \ln \left(\frac{U_a}{U_{ex}}\right)$$

/2 7

/84 P2

Régimes transitoires successifs d'un circuit RL

A Étude pour $t \in]0,t_1[$

/6 1 À l'instant $t=0^-$, le circuit est en régime permanent, et les interrupteurs sont ouverts. Comme le circuit est ouvert, il n'y a pas de courant circulant dans le circuit. Par continuité de l'intensité traversant la bobine, on en déduit $i(0^+)=i(0^-)=0$. Comme il n'y a pas de courant à $t=0^+$, les tensions aux bornes des résistances sont nulles. En appliquant la loi des mailles : $u(0^+)=E$

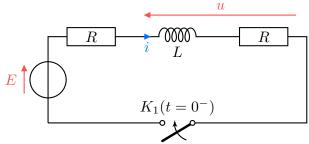


FIGURE 2.1 – Schéma à $t = 0^-$.

/4 2 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à un générateur alimentant deux résistances :

$$i(t_1^-) = \frac{E}{2R} \quad \text{ et } \quad u(t_1^-) = \frac{E}{2}$$

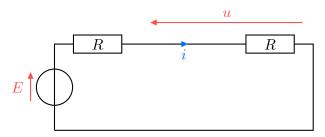


FIGURE 2.2 – Schéma à $t = t_1^-$.

/5 3 On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]0,t_1[$. On applique la loi des mailles :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2R}{L}i = \frac{E}{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_1 = \frac{L}{2R} \quad \text{et} \quad A_1 = \frac{E}{L}}$$

/8 |4 | On a :

Équation homogène:

$$\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} + \frac{i_h}{\tau_1} = 0$$

de solution

$$i_h = B_1 e^{-t/\tau_1}$$

Une solution particulière $i_p(t) = \lambda$ donne

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}\lambda}{\mathrm{d}t}}_{=0} + \frac{\lambda}{\tau_1} = \frac{E}{L} \Leftrightarrow \boxed{\lambda = \frac{E}{2R}}$$

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t)$$

$$\Leftrightarrow i(t) = B_1 \exp(-t/\tau_1) + \frac{E}{2R}$$
On remplace
$$or, \quad i(0) = 0 = B_1 + \frac{E}{2R}$$

$$\Leftrightarrow B_1 = -\frac{E}{2R}$$
On isole B_1

$$\Rightarrow i(t) = \frac{E}{2R} \left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) \quad \text{pour} \quad t \in]0; t_1[$$

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{t\gg\tau_1}i(t)=E/(2R)$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 2.

/4 $\boxed{5}$ On applique la loi des mailles :

$$u(t) = E - Ri(t)$$
 donc $u(t) = \frac{E}{2} \left(1 + e^{-t/\tau_1}\right)$ pour $t \in]0; t_1[$

On vérifie que u(0) = E.

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{t\gg\tau_1}u(t)=E/2$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 2.

/8 6 Voir Figure 3.1 : on lit $\tau_1 = 0.5 \,\text{ms} \ll t_1$, donc on peut considérer que le circuit est en régime permanent à l'instant $t = t_1^-$.

On lit u(t=0)=6 V et $i(t\gg\tau_1)=30$ mA. Or d'après l'étude théorique, u(t=0)=E=6 V, $i(t\gg\tau_1)=E/2R$, donc $R=100\,\Omega$. Enfin $\tau_1=L/2R$, donc $L=0.1\,\mathrm{H}$.

B Étude pour $t \in]t_1; t_2[$

/5 7 Par continuité du courant circulant à travers une bobine :

$$i(t_1^+) = i(t_1^-) = \frac{E}{2R}$$

D'après la loi des mailles :

$$E = R(i_g(t_1^+)) + u(t_1^+)$$

$$\Leftrightarrow E = R\left(i(t_1^+) + i_d(t_1^+)\right) + u(t_1^+) \quad \text{if } i_g = i + i_d \qquad \textbf{E}$$

$$\Leftrightarrow E = Ri(t_1^+) + 2u(t_1^+)$$

$$\Leftrightarrow u(t_1^+) = \frac{E - Ri(t_1^+)}{2}$$

$$\Leftrightarrow u(t_1^+) = \frac{E}{4}$$

$$\Leftrightarrow u(t_1^+) = \frac{E}{4}$$
On isole u

$$i(t_1^+) = \frac{E}{2R}$$

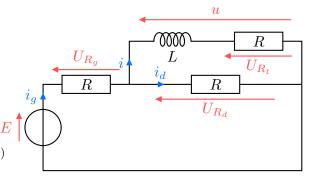


FIGURE 2.3 – Schéma à $t=t_1^+$.

/8 8 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à un générateur alimentant trois résistances. On associe les deux résistances en parallèle et on applique la formule du pont diviseur de tension :

$$u(t_2^-) = \frac{R/2}{R + R/2}E \Rightarrow \boxed{u(t_2^-) = \frac{E}{3}} \Rightarrow \boxed{i(t_2^-) = \frac{E}{3R}}$$

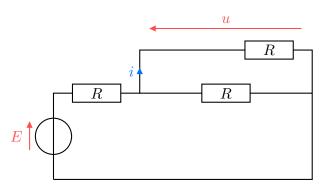


FIGURE 2.4 – Schéma à $t = t_2^-$.

/3 9 On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]t_1,t_2[$.

$$E = R(i_g) + u$$

$$\Leftrightarrow E = Ri + Ri_d + u$$

$$\Leftrightarrow E = Ri + 2u$$

$$\Leftrightarrow E = Ri + 2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2Ri$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{3R}{2L}i = \frac{E}{2L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_2 = \frac{2L}{3R}} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{E}{2L}$$

$$\downarrow i_g = i + i_d$$

$$\downarrow Ri_d = u$$

$$\downarrow u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri$$
Forme canonique

/6 10 La solution est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = B_2 \exp(-t/\tau_2) + \frac{E}{3R}$$

On utilise la condition initiale pour déterminer la constante B_2 :

$$i(t_1) = \frac{E}{2R} = B_2 e^{-t_1/\tau_2} + \frac{E}{3R} \quad \text{soit} \quad B_2 = \frac{E}{6R} e^{t_1/\tau_2}$$
$$i(t) = \frac{E}{6R} \left(2 + e^{-(t-t_1)/\tau_2} \right) \quad \text{pour } t \in]t_1; t_2[]$$

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{(t-t_1)\gg\tau_2}i(t)=E/(3R)$, ce qui cohérent avec la réponse à la question $\boxed{8}$

$$u(t) = L\frac{di}{dt} + Ri = \frac{E}{6} \left[2 - \frac{1}{2} e^{-(t-t_1)/\tau_2} \right]$$

On vérifie que $u(t_1) = E/4$.

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{(t-t_1)\gg\tau_2}u(t)=E/3$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 8.

lacktriangle Étude pour $t \in]t_2; +\infty[$

/3 12 La branche contenant le générateur est ouverte donc n'a aucune influence sur le circuit et n'est pas représentée. Par continuité du courant circulant à travers une bobine :

$$i(t_2^+) = i(t_2^-) = \frac{E}{3R}$$
 \Rightarrow $u(t_2^+) = -\frac{E}{3}$

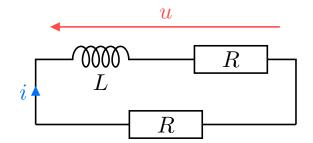


FIGURE 2.5 – Schéma à $t = t_2^+$.

/2 13 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à deux résistances sans alimentation :

$$i(+\infty) = 0$$
 et $u(+\infty) = 0$

/2 14 On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]t_2, +\infty[$. On applique la loi des mailles

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2Ri = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2R}{L}i = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau_3 = \frac{L}{2R} \quad \text{et} \quad A_3 = 0}$$

/2 15

/2 16 Par la loi d'Ohm :

$$u(t) = -Ri = -\frac{E}{3}e^{-(t-t_2)/\tau_3}$$
 pour $t \in]t_2; +\infty[$

D Combinaison des régimes

/7 17 On calcule les temps :

$$\tau_3 = \tau_1 = 0.5 \,\text{ms}$$
 et $\tau_2 = 4\tau_1/3 = 0.66 \,\text{ms}$

Voir Figure 3.2

/5 18 Voir Figure 3.3

Annexe: exercice 2

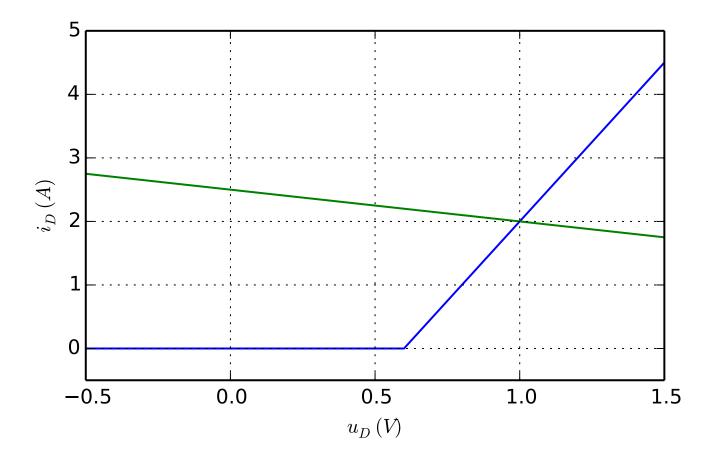


FIGURE 2.6 – Annexe question 8.

Annexe: problème 2

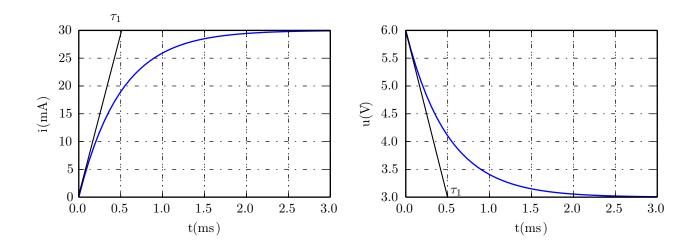


FIGURE 3.1 – Annexe question 6.

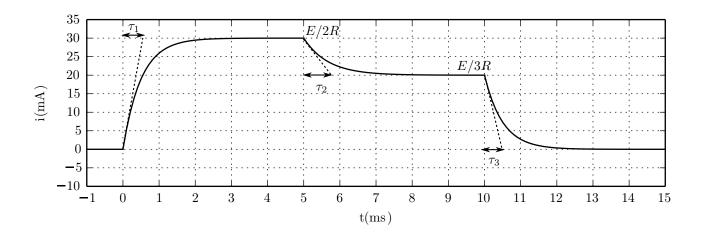


FIGURE 3.2 – Annexe question 16.

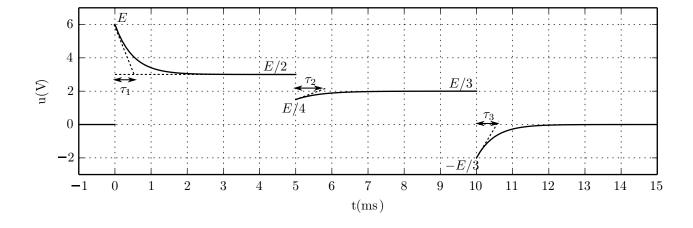


FIGURE 3.3 – Annexe question 17.