Mouvements courbes

■ Sor	mmaire
I Mouvement courbe dans un plan	
${\rm I/A}$ Position en coordonnées polaires	
I/B Variation temporelle des vecteurs de base $\ \ldots \ \ldots \ \ldots \ \ldots \ 3$	
${\rm I/C}$ Déplacement élémentaire en polaires $$.	
I/D Vitesse en coordonnées polaires	
I/E Accélération	
II Exemples de mouvements plans	
II/A Mouvement circulaire	
II/B Mouvement circulaire uniforme	
$\mathrm{II/C}$ Repère de Frenet	
III Application: pendule simple	
III/A Tension d'un fil	
III/B Pendule simple	
IV Mouvement courbe dans l'espace	
${\rm IV/A}$ Coordonnées cylindriques	
IV/B Coordonnées sphériques	
Capacités exigibles	
Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au	
problème.	Mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur
○ Vitesse et accélération dans le repère de Frenet	position, du vecteur vitesse et du vecteur accé-
pour une trajectoire plane.	lération en coordonnées polaires planes.
Coordonnées cylindriques : exprimer à par-	C Exploiter les liens entre les composantes du vec-
tir d'un schéma le déplacement élémentaire,	teur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation
construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur	temporelle.
vitesse.	Établir l'équation du mouvement du pendule
☐ Établir les expressions des composantes des	simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur
vecteurs position, déplacement élémentaire,	harmonique dans le cadre de l'approximation
vitesse et accélération en coordonnées cylin-	linéaire.
driques.	1

✓ L'essentiel		
Définitions		
 M3.1 : Coordonnées polaires		
M3.4 : Repère de Frenet 6		
\bigcirc M3.5 : Tension d'un fil	\bigcirc M3.1 : Mesure de g par un pendule 9	
M3.7 : Repère sphérique		
A Propriétés	\bigcirc M3.1 : Cas limites repère de Frenet . 7 \bigcirc M3.2 : Pendule simple grands angles 9	
M3.1 : Lien polaires/cartésiennes 3	M3.3 : Volume élémentaire cylindriques 10	
\bigcirc M3.2 : Dérivées de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_{\theta}}$ 4 \bigcirc M3.3 : Déplacement élémentaire polaire 4	\bigcirc M3.4 : Lien sphériques/cartésiennes 11 \bigcirc M3.5 : Volume élémentaire sphériques . 12	
\bigcirc M3.4 : Vitesse en polaires 5 \bigcirc M3.5 : Accélération en polaires 5		
☐ M3.6 : Vitesse et accélération Frenet 6	M3.1 : Mouvement circulaire uniforme . 6	
 M3.7 : Mouvement d'un pendule simple M3.8 : Bilan : coordonnées cylindriques 	M3.2 : Repérage sphérique sur Terre 11	
\bigcirc M3.9 : Déplacement élémentaire sphérique 11	Outils M3.1 : Dérivée composée en physique . 3	
\bigcirc M3.1 : Lien polaires/cartésiennes 3 \bigcirc M3.2 : Dérivées de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_{\theta}}$ 4	M3.1 : Variables vs. coordonnées 3	
\bigcirc M3.3 : Déplacement élémentaire polaire 5	\bigcirc M3.2 : Choix des coordonnées 10	
\bigcirc M3.4 : Vitesse en polaires 5 \bigcirc M3.5 : Accélération en polaires 5	 	
\bigcirc M3.6 : Vitesse et accélération Frenet 7 \bigcirc M3.7 : Mouvement pendule simple 8		

I | Mouvement courbe dans un plan

I/A Position en coordonnées polaires



♥ Définition M3.1 : Coordonnées polaires

Le repère polaire est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis deux vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ tels que :

 \Diamond

 \Diamond

 \Diamond

 $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_{\theta}}$ dépendent de $\theta(t)$ donc du temps

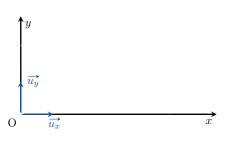


FIGURE M3.1 - Polaires



Attention M3.1 : Variables vs. coordonnées

Il faut opérer la distinction entre les variables servant à repérer le point et les coordonnées dans la base de projection. Ici, les variables sont r(t) et $\theta(t)$, mais dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_{\theta}})$, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \end{pmatrix} = r(t)\overrightarrow{u_r} \quad \mathbf{ET\ PAS} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix}}_{\text{pas homogène}} \mathbf{r}(t)\overrightarrow{u_r} + \underbrace{\theta(t)\overrightarrow{u_\theta}}_{\text{pas homogène}}$$



♥ Propriété M3.1 : Lien polaires/cartésiennes

Les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ variables se décomposent sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ fixes tels que

et

d'où en cartésiennes pour un point M :

et

soit



Démonstration M3.1 : Lien polaires/cartésiennes

On projette les vecteurs de la base polaire sur la base cartésienne en appliquer la méthode de vraisemblance ou par définition du produit scalaire, d'où la propriété. On a alors :



I/B Variation temporelle des vecteurs de base



Outils M3.1 : Dérivée composée en physique

En physique, on pense les dérivées comme des fractions. Ainsi, on peut traiter la dérivée d'une composition en faisant intervenir d'autres dérivées par une écriture fractionnaire. Par exemple :



$igoplus Propriété M3.2 : Dérivées de <math>\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_{\theta}}$

La variation temporelle des vecteurs de la base polaire est :

et



Démonstration M3.2 : Dérivées de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_{\theta}}$

Géométriquement

On représente les deux vecteurs après un petit temps dt, c'està-dire augmentés d'un angle d θ :

et

Soit et

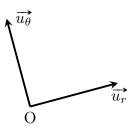


FIGURE M3.2 $d\overrightarrow{u_r}$ et $d\overrightarrow{u_\theta}$

Mathématiquement

On part des décompositions dans la base cartésienne et on dérive :

 $\overrightarrow{u_r}$





Déplacement élémentaire en polaires



Propriété M3.3 : Déplacement élémentaire polaire

En coordonnées polaires, le déplacement élémentaire s'exprime



Démonstration M3.3 : Déplacement élémentaire polaire

On trouve la composante de $\overrightarrow{\text{OM}}$ sur $\overrightarrow{u_r}$ en $\underline{\text{fixant }\theta}$ et on incrémente la variable r de dr.

La distance ainsi obtenue est

On trouve la composante de $\overrightarrow{\text{dOM}}$ sur $\overrightarrow{u_{\theta}}$ en fixant r et on incrémente la variable θ de $d\theta$.

La distance ainsi obtenue est

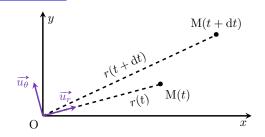


FIGURE M3.3 – $\overrightarrow{\text{dOM}}$ polaire

I/D

Vitesse en coordonnées polaires



♥ Propriété M3.4 : Vitesse en polaires

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit



Démonstration M3.4 : Vitesse en polaires

Ici aussi, il y a deux manières d'obtenir l'expression de la vitesse.

Dérivée

Rapport



Accélération



Démonstration M3.5 : Accélération en polaires

Par définition,



Propriété M3.5 : Accélération en polaires

Finalement, la vitesse en coordonnées polaires s'écrit

II | Exemples de mouvements plans

II/A Mouvement circulaire

月

Définition M3.2 : Mouvement circulaire

Un mouvement est dit **circulaire** s'il se fait dans un plan, à une distance de l'axe de rotation r constante, soit



Implication M3.1: Mouvement circulaire

Dans ce cas-là, on a

et

En notant $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ la vitesse angulaire, la vitesse et l'accélération donnent

et

II/B

Mouvement circulaire uniforme



🛡 Définition M3.3 : Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est dit **circulaire** uniforme si c'est un mouvement circulaire (r(t) = cte) à vitesse angulaire constante, soit

Exemple M3.1:



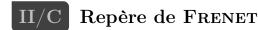


Implication M3.2: Mouvement circulaire uniforme

Dans ce cas, $\dot{r}=0=\ddot{r}$ mais également $\ddot{\theta}=0$, donc la vitesse et l'accélération donnent

et

FIGURE M3.4 – Myt. circ. unif.





Définition M3.4 : Repère de FRENET

Soit un point M sur une trajectoire courbe d'origine O. On approxime sa trajectoire à un instant t par son **cercle osculateur**, de **rayon de courbure** R(t). D'où le repère mobile de FRENET attaché à M :

 \Diamond

 \Diamond

 $\gamma(t) = 1/R(t)$ s'appelle la **courbure** de la trajectoire.

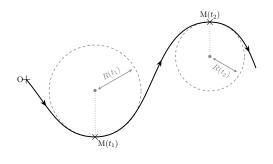


FIGURE M3.5 - FRENET



Propriété M3.6 : Vitesse et accélération Frenet

La vitesse et l'accélération dans le repère mobile de Frenet s'expriment :

et



Démonstration M3.6 : Vitesse et accélération Frenet

Soit s(t) la distance parcourue sur la courbe de la trajectoire C depuis l'origine O. On l'appelle abscisse curviligne, telle que

$$s(t) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$$

Vitesse

Accélération

On a

Or,

D'où

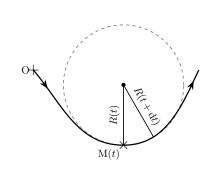


FIGURE M3.6 – $d\vec{u}_T$



Remarque M3.1 : Cas limites repère de Frenet

- \diamond On retrouve le mouvement rectiligne uniforme avec $R = +\infty \Leftrightarrow \gamma = 0$, puisqu'on a alors $\vec{a} = \frac{dv}{dt} \vec{u_T}$ avec $\vec{u_T}$ dans le sens de la trajectoire.
- \diamond On retrouve également le mouvement circulaire puisque dans ce cas la trajectoire **est** le cercle osculateur, donc $\overrightarrow{u_T} = \overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_N} = -\overrightarrow{u_r}$.

III

Application: pendule simple

III/A

Tension d'un fil



Définition M3.5 : Tension d'un fil

Un point matériel M accroché à un fil tendu subit de la part de ce fil une force appelée **tension du fil** et notée \overrightarrow{T} telle que

avec $\overrightarrow{u_r}$ un vecteur unitaire dirigé du point d'accroche vers M.

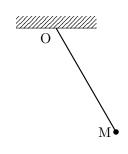


FIGURE M3.7



▼ Implication M3.3 : Condition de tension

III/B Pendule simple



Propriété M3.7 : Mouvement d'un pendule simple

Soit un point matériel M de masse m accrochée au bout d'un fil de longueur ℓ = cte dans le champ de pesanteur \vec{g} . On l'écarte de la verticale d'un angle $\theta_0 \neq 0$ avec une vitesse initiale nulle. Pour θ_0 suffisamment faible, on obtient

 $\acute{\bf E} {\bf quation} {\bf \ diff\'erentielle}$

Solution



♥ Démonstration M3.7 : Mouvement pendule simple

- 1 Système : {masse} repérée par M
- 2 Schéma.
- 3 Modélisation.
 - ♦ Référentiel :
 - ♦ Repère :
 - ♦ Repérage :

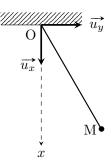


FIGURE M3.8 – Schéma.

- ♦ Conditions initiales :
- 4 Bilan des forces.
- |5| **PFD.**
- 6 Équations scalaires. On projette le PFD sur les axes :

qui constitue l'équation du mouvement du pendule. Sous cette forme, elle est **non-linéaire** donc non résoluble analytiquement; elle peut l'être numériquement, voir Capytale ^a. En revanche, dans l'approximation des petits angles, on a $\sin(\theta) \approx \theta$, et ainsi on obtient :

C'est !

or

7 **Résolution.** On a la solution générale homogène :

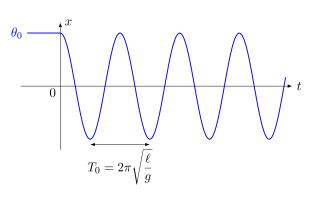
et

Finalement



Remarque M3.2: Pendule simple grands angles

Dans cette approximation, la période ne dépend ni de la masse, ni de l'angle initial. En réalité, si on s'écarte beaucoup de la verticale ($|\theta| > \pi/4$), la période change et n'est plus celle que l'on a aux petits angles. Voir le changement sur le graphique ci-dessous et en ligne.



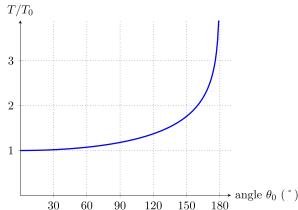


FIGURE M3.9 – $\theta(t)$ pour petits angles.

FIGURE M3.10 – Évolution de T selon θ_0 .



lacktriangle Application M3.1 : Mesure de g par un pendule

Déterminer l'accélération de la pesanteur g par l'expérience du pendule simple.

IV | Mouvement courbe dans l'espace

Coordonnées cylindriques



Définition M3.6 : Coordonnées cylindriques

Le repère cylindrique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, avec

- \Diamond

- \Diamond

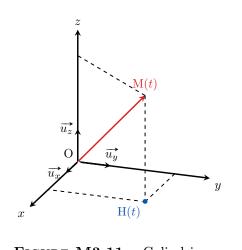


Figure M3.11 – Cylindriques.

a. https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/a7c5-1241282

La détermination de la vitesse et de l'accélération est la même qu'en polaires, il suffit d'ajouter les dérivées de z puisque $\overrightarrow{u_z}$ est fixe dans le temps. Ainsi,



♥ Propriété M3.8 : Bilan : coordonnées cylindriques

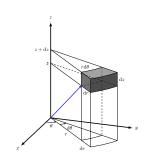
- ♦ Variables :
- ♦ Vecteurs de base :
- ♦ Position :
- \diamond Vitesse :
- ♦ Déplacement élém. :
- ♦ Accélération :



Remarque M3.3 : Volume élémentaire cylindriques

Une conséquence fondamentale du déplacement élémentaire est de pouvoir définir une surface et un volume infinitésimaux suivant une variation infinitésimale des trois coordonnées.

En effet, pour une petite variation $(dr, d\theta, dz)$, on se déplace de dr dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, de dz dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ et l'arc de cercle formé par la variation d'angle $d\theta$ est de longueur $r d\theta$.



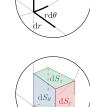


FIGURE M3.12 – dV cylindriques.

FIGURE M3.13 – Zoom volume.

Le volume élémentaire est alors le **produit des trois composantes de** dOM :

On trouve le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h en intégrant sur les trois coordonnées :

C'est l'aire d'un disque multiplié par la hauteur!



Attention M3.2 : Choix des coordonnées

Dans un problème de mécanique, on choisit les coordonnées judicieusement en fonction des symétries du système. Sauf proposition de l'énoncé, on utilisera les coordonnées cylindriques pour les mouvements de rotation. On utilisera les coordonnées cartésiennes sinon.

IV/B Coordonnées sphériques

La manière la plus complète de décrire un mouvement général dans l'espace repose sur un dernier système de coordonnées, les coordonnées **sphériques**.



V Définition M3.7 : Repère sphérique

Le repère sphérique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, tels que

avec et

où $\widehat{(\cdot,\cdot)}$ est l'**angle orienté**, et H(t) le projeté orthogonal de M(t) sur le plan polaire.

 $\mathbf{\Lambda} \varphi(t)$ correspond à $\theta(t)$ des coordonnées polaires.

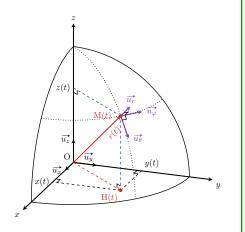


FIGURE M3.14 – Sphériques.



Remarque M3.4 : Lien sphériques/cartésiennes

On peut inverser les définitions. En effet,

et

et

 et



Notation M3.1 : Coordonnées sphériques

 $\diamond \theta \in [0; \pi]$ est nommé **colatitude** $(\lambda = |\pi/2 - \theta| \text{ la latitude})$, et respecte

- $\diamond \varphi \in [0 \; ; \; 2\pi]$ est nommé **longitude**, et respecte
- \diamond Une courbe $\theta(t) = \text{cte est appelée parallèle}$; le rayon d'un parallèle est
- \diamond Une courbe $\varphi(t)=$ cte est appelée **méridien** ; le **rayon** d'un méridien est ____



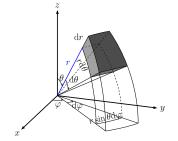
Exemple M3.2: Repérage sphérique sur Terre

Le repérage sur la Terre utilise la latitude et la longitude. Par exemple, le lycée POTHIER se situe à 47,90°N, 1,90°E; on a donc



♥ Propriété M3.9 : Déplacement élémentaire sphérique

- \diamond Variation $dr \Rightarrow d\acute{e}place^{\underline{t}} dr \overrightarrow{u_r};$
- \diamond Variation $d\theta \Rightarrow d\acute{e}place^{\underline{t}} r d\theta \overrightarrow{u_{\theta}};$
- \diamond Variation $d\varphi \Rightarrow d\acute{e}place^{\underline{t}} r \sin\theta d\varphi \overrightarrow{u_{\varphi}}$.



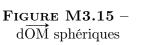




FIGURE M3.16

– Zoom volume.



Remarque M3.5 : Volume élémentaire sphériques

On trouve de la même manière le volume élémentaire :

Il permet de déterminer le volume d'une boule :