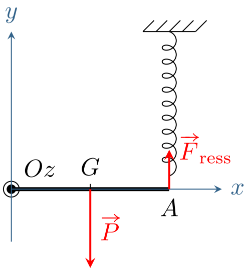

$\boxed{1}$ On étudie la barre, en mouvement par rapport au référentiel terrestre, considéré galiléen. Par hypothèse, dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical, ce qui permet d'orienter les forces. Comme les forces sont perpendiculaires à la barre, utiliser le bras de levier donne immédiatement les résultats. Elle est soumise à son poids, exercé en G au centre de la barre, de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times a$$

et à la force de rappel exercée par le ressort, exercée en A, de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \times 2a\,.$$

Dans la position d'équilibre, on a alors

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{ressort}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad -mga + 2ak(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}\,.}$$

théorème du moment cinétique. Utilisons toujours le bras de levier pour déterminer les moments. Le moment du poids vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times OB_{\overrightarrow{P}} = -mga\cos\theta \simeq -mga$$

car $\theta \ll 1$. Le moment de la force exercée par le ressort vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell - \ell_0) \times OB_{\overrightarrow{F}} = +k(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0) \times 2a\cos\theta \simeq +2ka(\ell_{\text{éq}} - 2a\theta - \ell_0)$$

En remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression,

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +2ka\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} - 2a\theta - \ell_0\right) = mga - 4ka^2\theta$$

Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$I_z\ddot{\theta} = -mga + mga - 4ka^2\theta \qquad \text{donc} \qquad \ddot{\theta} + \frac{4ka^2}{I_z}\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$