Contrôle de connaissances 6

Électrocinétique : ressort amorti

/10 [1] On suppose le système mécanique suivant, constitué du point M de masse m accroché à un ressort idéal mais subissant des frottements fluides. On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O',x,y,t)$ supposé galiléen, avec le repère $(O', \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. On repère la masse par rapport à sa position d'équilibre : $x(t) = \ell(t) - \ell_0$. On suppose le ressort initialement détendu tel que $x(0) = x_0 > 0$, lâché sans vitesse initiale.

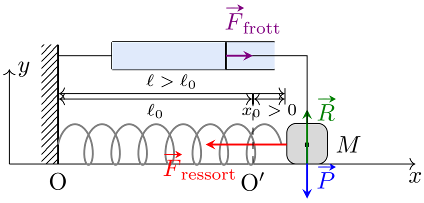

Figure 6.1

Effectuer un bilan des forces puis déterminer l'équation différentielle sous forme canonique de $x(t)$ pour $t \geq 0$. Déterminer les expressions de ω_0 et Q, résoudre l'équation différentielle pour un régime pseudo-périodique.

Exprimer la période T des oscillations amorties en fonction de la période T_0 des oscillations harmoniques, donner *sans démonstration* l'approximation de t_{95} et **tracer la solution**, avec $Q \approx 3$.

◇ **Bilan des forces :**

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction normale	$\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$
Force de rappel	$\overrightarrow{F}_r = -kx(t)\,\overrightarrow{u_x}$
Force de frottement	$\overrightarrow{F}_f = -\alpha\overrightarrow{v}$

Avec le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_r + \overrightarrow{F}_f$$

Dvlp$^{\text{t}}$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-kx-\alpha v\\ -mg+R\end{pmatrix}$$

$\cdot\,\overrightarrow{u_x}$

$$\Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = 0$$

Forme canonique

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0$$

On détermine l'expression de Q par identification :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\alpha}{m}$$
$$\Leftrightarrow Q = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m}} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

On part de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1-4Q^2\right) < 0}$$

$$\Rightarrow r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On injecte Δ et extrait $\frac{\omega_0}{Q}$

$$\Leftrightarrow r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$$

$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$

$$\Leftrightarrow r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$x(0) = x_0 = 1\left[A\cdot 1 + B\cdot 0\right] = A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A = x_0}$$

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\times\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$
$$+\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\times\left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right]$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}x_0 = \frac{x_0}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

Ainsi, on trouve bien

$$\boxed{x(t) = x_0\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\times\left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\Omega t)\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = T_0\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}}} \quad\text{et}\quad \boxed{t_{95} \approx QT_0}$$

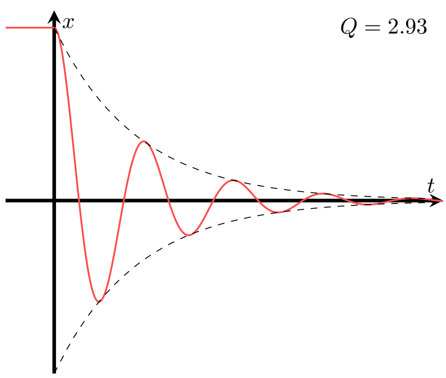

Figure 6.2 – Tracé solution $Q \approx 3$.