

**Tout moyen de communication est interdit**  
**Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.**  
**Les calculatrices sont autorisées.**

*Le devoir est composé d'un exercice et de trois problèmes indépendants.*

**EXERCICE 1 :** Étude de la combustion de l'essence dans un moteur de Clio IV :

**PROBLEME 1 :** Étude de la réponse percussionnelle d'un diapason.

**PROBLEME 2 :** Décharge d'un condensateur à travers une bobine.

**PROBLEME 3 :** Étude de l'optimisation de la synthèse de l'éthanol en phase gazeuse.

*A l'intérieur des problèmes, certaines questions sont indépendantes.*

*L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.*

*L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.*

*Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction (vocabulaire, orthographe...) et à la présentation de la copie (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques...).*

*Et il est indispensable de numéroter vos copies.*

*Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.*

*Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.*

**Programme de révision de ce devoir :**

**Les régimes transitoires du second ordre (amortis ou non) en électricité et mécanique, puis le début des chapitres sur la transformation de la matière : En particulier, les réactions chimiques et équilibres (pas de cinétique dans ce devoir).**

## EXERCICE 1 : Étude de la combustion de l'essence dans un moteur de Clio IV :

(≈ 22 pts)

La combustion de l'essence dans les moteurs à explosion des automobiles libère une quantité importante de dioxyde de carbone.

Le dioxyde de carbone ( $\text{CO}_2$ ) est le deuxième gaz à effet de serre le plus important dans l'atmosphère, après la vapeur d'eau, les deux contribuant respectivement à hauteur de 26 % et 60 % à l'effet de serre.

On se concentre beaucoup sur les émissions de dioxyde de carbone, car il peut mettre 200 ans à être évacué après son émission !

Le tableau ci-dessous présente quelques données techniques sur un véhicule Renault Clio IV.

Émission de $\text{CO}_2$	99 g·km <sup>-1</sup>
Consommation moyenne	4,3 L pour 100 km

**Tableau :** Renault Clio IV, modèle essence, version 0.9 energy zen eco2 99g.

**L'octane liquide  $\text{C}_8\text{H}_{18(l)}$  est un composant représentatif des constituants de l'essence.**

**On considérera dans la suite l'essence uniquement constituée d'octane.**

L'essence alimente un moteur à combustion interne.

Les gaz seront supposés parfaits et l'air constitué de 20% de dioxygène et de 80% de diazote.

À chaque tour de cycle, des volumes  $V_1$  d'air et  $V_{\text{oct}}$  d'octane liquide sont introduits dans un cylindre fermé par un piston mobile.

L'état initial (EI) est caractérisé par :  $P_1 = 1,0$  bar,  $V_1 = 1000$  cm<sup>3</sup>,  $T_1 = 300$  K et  $V_{\text{oct}} = 9,2 \cdot 10^{-5}$  L.

**La réaction de combustion entre l'octane liquide et le dioxygène gazeux de l'air conduit à la formation d'eau vapeur et de dioxyde de carbone gazeux :  $\text{CO}_2$ .**

1 – Écrire l'équation de la réaction de combustion de l'octane liquide. (On équilibrera l'équation de la réaction avec un coefficient stœchiométrique de 1 pour d'octane liquide et on considérera que l'eau et le dioxyde de carbone obtenus sont à l'état gazeux). Certains coefficients stœchiométriques peuvent ne pas être entiers.

2 – En considérant un tour de cycle, exprimer, les quantités de matière initiales en réactifs  $n_{\text{O}_2}$  et  $n_{\text{oct}}$  en fonction des données de l'énoncé, puis les calculer.

Identifier le réactif limitant en présentant un tableau d'avancement.

3 – En considérant la réaction de combustion totale et la consommation moyenne de la voiture CLIO IV en essence, calculer la masse moyenne  $m_1$  de  $\text{CO}_2$  émis par kilomètre. Comparer aux données fournies.

### Données :

Constante des gaz parfaits :  $R = 8,32$  J·K<sup>-1</sup>·mol<sup>-1</sup> ;

1 bar =  $10^5$  Pa.

	$\text{CO}_2$	Octane
Masse molaire moléculaire (g·mol <sup>-1</sup> )	44,0	114
Masse volumique du liquide (g·L <sup>-1</sup> )		700

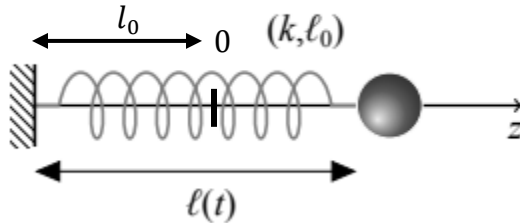
## PROBLEME 1 : Étude de la réponse percussionnelle d'un diapason :

( $\approx 42$  pts)

Ce sujet porte sur l'étude d'un oscillateur mécanique faiblement amorti très utilisé en musique : le diapason.



Les branches du diapason sont décrites comme un oscillateur masse-ressort oscillant selon un axe horizontal, amorti par frottement fluide linéaire en la vitesse, comme schématisé figure 1.



**Figure 1** - Modélisation des branches du diapason par un oscillateur masse-ressort horizontal.

La coordonnée  $z$  repère la position de la masselotte sur l'horizontale.

On note  $m$  la masse de la masselotte,  $k$  la constante de raideur du ressort linéaire équivalent,  $l_0$  sa longueur à vide et  $l(t)$  sa longueur à l'instant  $t$  (voir figure 1).

De plus, on suppose que la masselotte est soumise à une force  $\vec{f} = -\lambda \vec{v}$ .

**Q1.** Comment appelle-t-on la force  $\vec{f}$  ? Justifier le signe de la constante  $\lambda$ .

À l'instant  $t = 0$ , on percute l'une des branches du diapason, ce qui provoque la mise en mouvement de chaque branche, sans frottement sur le support. On suppose le choc instantané, c'est-à-dire que les branches pseudo-oscillent librement pour  $t > 0$ . Une note est alors émise.

**Q2.** On note  $z(t) = l(t) - l_0$  la position de la masselotte.

Établir l'équation différentielle dont  $z(t)$  est solution pour  $t > 0$ . On la mettra sous forme canonique.

**Q3.** Exprimer la fréquence propre et le facteur de qualité  $Q$  de ce système en fonction de  $k$ ,  $m$  et  $\lambda$ .

**Q4.** Sachant que l'on obtient des pseudo-oscillations, établir l'expression littérale de  $z(t)$  en fonction de  $k$ ,  $m$ , et  $\lambda$  et de constantes d'intégration que l'on ne cherchera pas à déterminer.

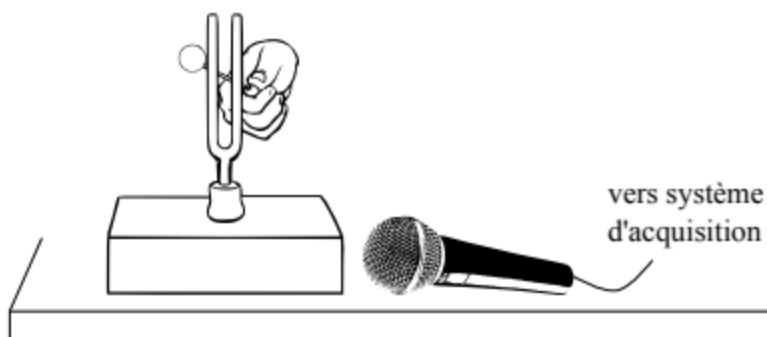
La masse de certains diapasons, utilisés par les musiciens, de fréquence propre voisine de 500 Hz vaut 30 g. Pour un diapason sans caisse de résonance, l'émission sonore est détectable à l'oreille pendant environ une trentaine de secondes.

**Q5.** Réaliser une estimation de la constante de raideur du ressort équivalent.

**Q6.** Proposer une estimation du facteur de qualité du diapason. Comparer cette valeur à celle d'un oscillateur masse-ressort de travaux pratiques.

**Q7.** Est-il correct d'affirmer que les branches d'un diapason de fréquence propre  $f_0$  oscillent à la fréquence  $f_0$  après percussion ?

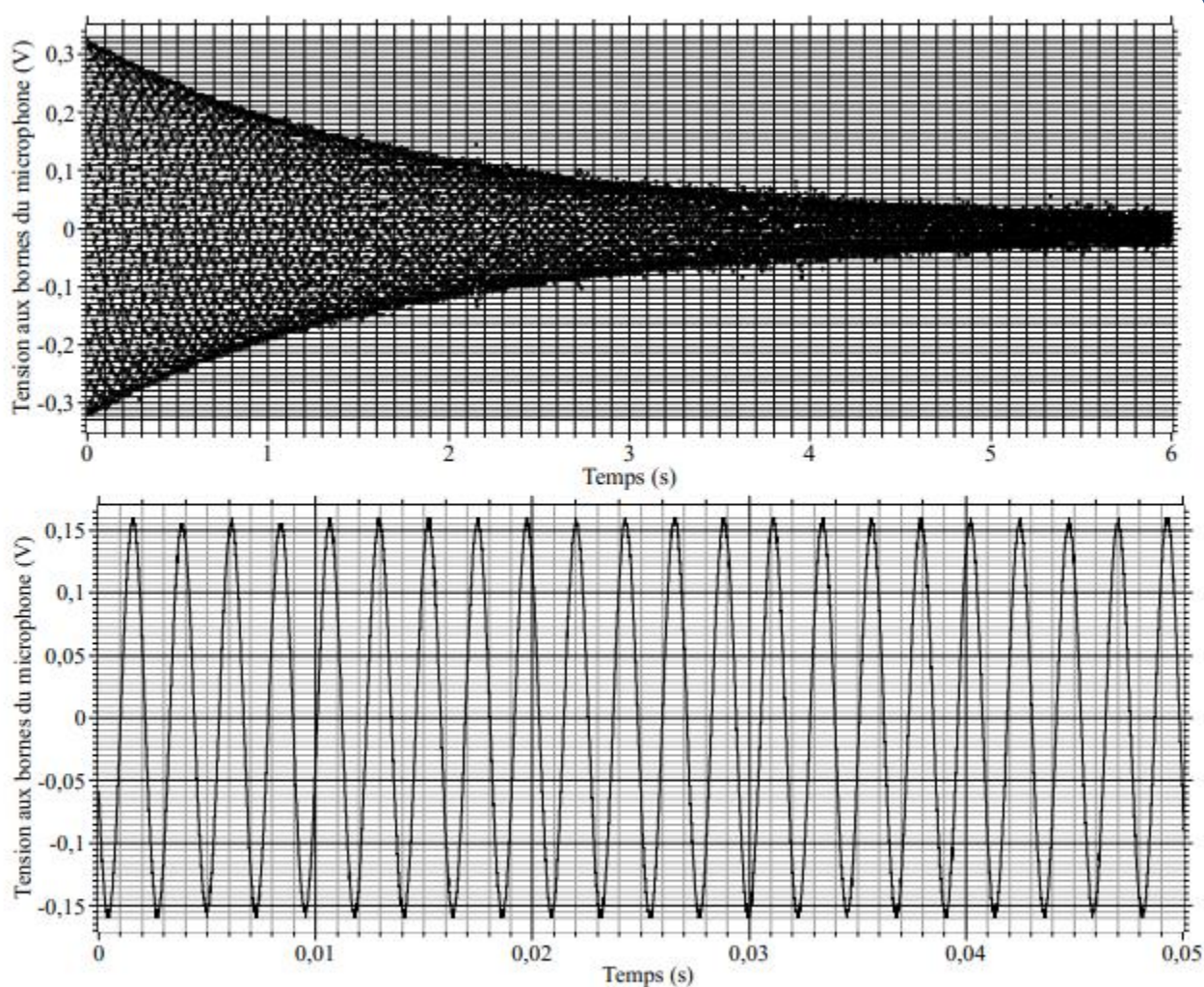
Pour préciser l'estimation précédente du facteur de qualité du diapason, on réalise un enregistrement à l'aide d'un microphone en utilisant un diapason équipé d'une caisse de résonance en bois permettant d'augmenter l'intensité de l'émission sonore (voir schéma du montage, figure 2). On obtient les deux enregistrements présentés sur le document 1 ci-dessous.



**Figure 2** - Schéma du dispositif expérimental étudié dans la question 8.

**Q8.** Exploiter le document 1 ci-dessous pour estimer au mieux la fréquence propre et le facteur de qualité du diapason A (on reproduira sommairement la (ou les) figure(s) utilisées pour faire apparaître la méthode graphique employée pour ces déterminations). Commenter.

**Document 1** - Étude de la réponse percussionnelle



Tension aux bornes d'un microphone enregistrant le son émis par la caisse de résonance du diapason A en réponse à une percussion avec le marteau (lors de deux mesures).



## PROBLEME 2 : Décharge d'un condensateur à travers une bobine :

(  $\approx 58$  pts)

### I. Décharge du condensateur à travers une bobine idéale :

On considère le circuit sur la figure 1 ci-dessous :

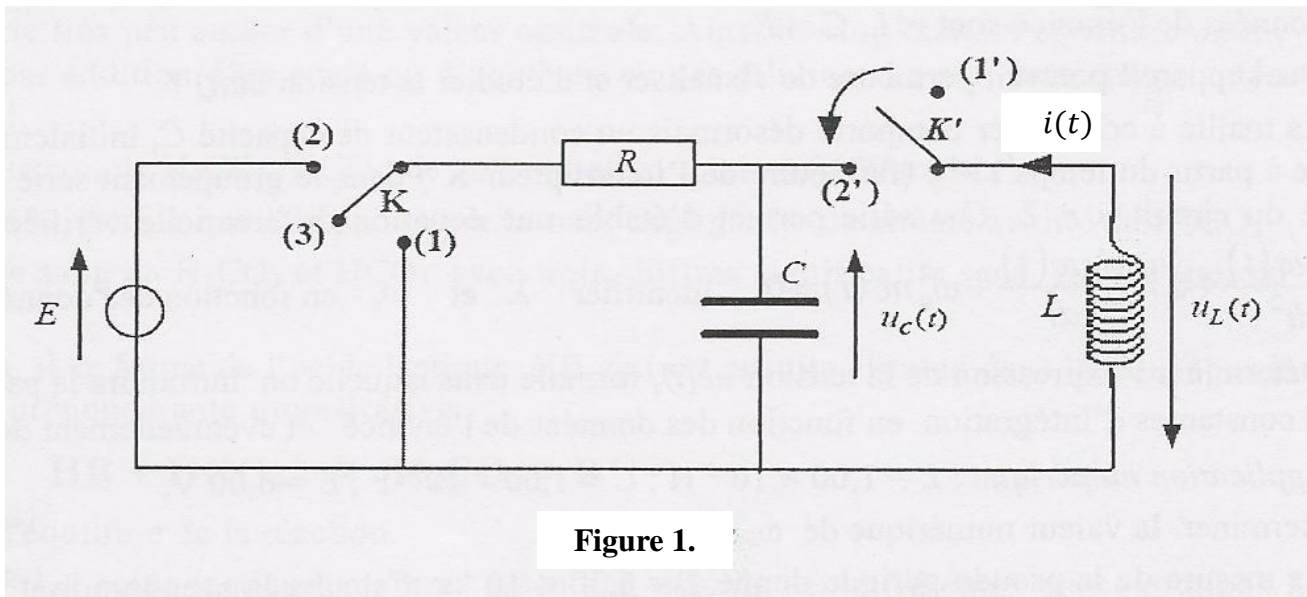


Figure 1.

- Pour  $t < 0$ , l'interrupteur **K** est en position (2) afin de charger totalement le condensateur (régime permanent atteint) et l'interrupteur **K'** en position (1').
- Pour  $t \geq 0$ , l'interrupteur **K** est en position (3) et l'interrupteur **K'** en position (2') : Le condensateur initialement chargé est donc relié à une bobine supposée idéale d'inductance pure  $L$ .

Les données de l'énoncé sont  $L$ ,  $C$  et  $E$ .

**Q1.** Exprimer, en fonction de certaines données de l'énoncé, la charge initiale  $q_0$  du condensateur au moment de la fermeture de l'interrupteur **K'**. Justifier. On fera le schéma équivalent.

**Q2.** Etablir l'équation différentielle vérifiée par la tension  $u_c(t)$  aux bornes du condensateur pour  $t \geq 0$ .

La mettre sous la forme :  $\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$  ; Nommer et identifier  $\omega_0$  en fonction des données de l'énoncé.

**Q3.** Déterminer l'expression de la tension  $u_c(t)$ , formule dans laquelle les constantes d'intégration qui apparaissent seront toutes exprimées en fonction des données de l'énoncé.

**Q4.** Déterminer les énergies  $W_c(t)$  et  $W_L(t)$  respectivement aux bornes du condensateur et aux bornes de la bobine en fonction du temps, de  $\omega_0$ , de  $C$  et de  $E$ . En déduire l'énergie totale  $W_T$  du circuit en fonction des mêmes variables. Commenter et tracer les 3 fonctions en fonction du temps.

## II. Cas d'une bobine réelle :

L'étude précédente correspond à une modélisation idéale de la bobine. En réalité, la courbe représentative de la tension  $u_c(t)$  est pseudopériodique (figure 2 ci-dessous).

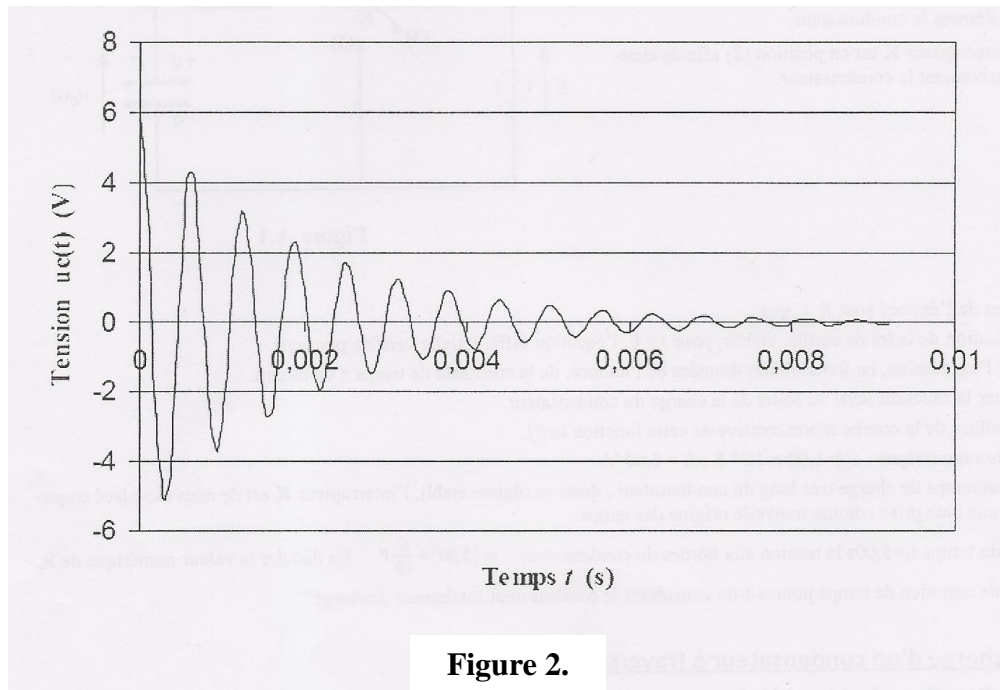


Figure 2.

L'amortissement constaté est dû à la présence d'une résistance dans la maille «  $L, C$  » : la bobine qui était supposée idéale dans le I est en fait résistive, de résistance  $r$ .

Les données de l'énoncé sont maintenant  $r, L, C$  et  $E$ .

**Q5.** Quel appareil pourrait permettre de visualiser et d'étudier la tension  $u_c(t)$  ?

**Q6.** La maille à considérer comporte désormais un condensateur de capacité  $C$ , initialement chargé ( $q(t=0) = q_0$ ) qui se décharge à partir du temps  $t=0$  (fermeture de l'interrupteur  $K'$ ) dans le groupement série «  $r, L$  ». Montrer que l'équation de maille du circuit «  $r, L, C$  » série permet d'établir une équation différentielle vérifiée par la tension  $u_c(t)$ . La mettre sous la forme :  $\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$  ; Identifier  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction des données de l'énoncé.

**Q7.** Quelle est la nature du régime visualisé ? Justifier. En déduire, en le justifiant totalement, le domaine de variation de  $Q$ .

**Q8. Application numérique :**  $L = 1,00 \times 10^{-2} \text{ H}$  ;  $C = 1,00 \times 10^{-6} \text{ F}$  ;  $E = 6,00 \text{ V}$ .

**Q8.a)** Quelle aurait été la valeur numérique de la pulsation propre  $\omega_0$  du circuit dans l'hypothèse d'une bobine non résistive ( $r=0$ ), donc en l'absence d'amortissement ?

**Q8.b)** Une mesure de la pseudo-période donne  $T = 6,30 \times 10^{-4} \text{ s}$ . Calculer la pseudo-pulsation  $\Omega$ . En déduire l'expression de la résistance  $r$  de la bobine en fonction des données de l'énoncé et de la pseudo-pulsation  $\Omega$ . La calculer.

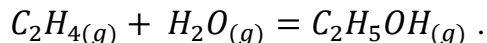
**Q9.** Quelle aurait été l'allure de la courbe représentative de la fonction  $u_c(t)$  avec une résistance  $r$  très élevée ? Justifier. Faire un schéma de l'allure obtenue.

### PROBLEME 3 : Étude de l'optimisation de la synthèse de l'éthanol en phase gazeuse :

( ≈ 53 pts)

*L'éthanol fut d'abord un produit fabriqué par fermentation de divers composés d'origine agricole tels que les jus sucrés (mélasses résiduelles des sucreries) ou les résidus bisulfiteux de pâtes à papier. C'est seulement après la seconde guerre mondiale que l'éthanol de synthèse supplanta l'alcool de fermentation.*

Le procédé actuel, démarré par Shell en 1948, consiste à hydrater l'éthène en phase gazeuse selon la réaction :



La constante d'équilibre thermodynamique de la réaction varie avec la température  $T$  selon la relation :

$$\ln(K^\circ(T)) = \frac{5655}{T} - 15,5 \text{ avec } T \text{ en K.}$$

**I -** Dans un réacteur indéformable, on introduit 1,00 mol d'éthène gazeux et 1,00 mole d'eau gazeuse à  $T = 400$  K. La pression de travail  $P_{tot}$  est supposée constante et égale à la pression standard de référence :  $P^\circ = 1,00$  bar dans cette partie.

**Q1.** En tenant compte de la valeur de la constante d'équilibre, dresser un tableau d'avancement permettant d'introduire l'avancement de la réaction à l'équilibre noté  $\xi_{eq}$ .

**Q2.** Exprimer la constante d'équilibre en fonction des quantités de matière à l'équilibre des différents constituants du système, de la quantité de matière totale à l'équilibre notée  $n_{tot}$ , de la pression totale  $P_{tot}$  et de la pression standard  $P^\circ$ .

**Q3.** En déduire la valeur numérique de l'avancement de la réaction à l'équilibre  $\xi_{eq}$ , ainsi que la composition du système à l'équilibre (en mol).

**Q4.** En déduire le taux de conversion final  $\tau_{eq}$  de la réaction.

**Q5.** En déduire la fraction molaire de chacun des constituants dans le mélange gazeux, dans cet état final d'équilibre.

**II –** Dans la question suivante uniquement, la pression de travail est supposée constante et égale à  $P_{tot} = 10$  bar.

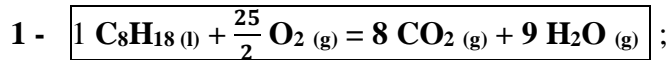
**Q6.** Calculer la nouvelle valeur du taux de conversion final noté  $\tau'_{eq}$  lorsque la pression de travail est fixée à  $P_{tot} = 10$  bar, en partant du même mélange initial et toujours à la température  $T = 400$  K. Conclure quant à l'influence de la pression.

**III –** On revient à une pression de travail  $P_{tot} = P^\circ = 1$  bar. On introduit maintenant 1,00 mol d'eau, 1,00 mol d'éthène et 1,00 mol d'éthanol dans le réacteur, toujours à une température  $T = 400$  K.

**Q7.** Dans quel sens évolue le système ? Justifier votre raisonnement.

**Q8.** Déterminer la nouvelle composition du système à l'équilibre (en mol).

**EXERCICE 1 : Étude de la combustion de l'essence dans un moteur de Clio IV :**  
(D'après Centrale Supélec MP 2014) (≈ 22 pts)



2 - Pour un tour de cycle, on admet  $V_1 = 10^{-3} \text{ m}^3$  d'air ;  $P_1 = 10^5 \text{ Pa}$  ;  $T_1 = 300 \text{ K}$ .

✚ Pour  $\text{O}_2$  gazeux : Loi de Dalton :  $\boxed{P_i = X_i P_{\text{tot}} = \frac{n_i}{n_{\text{tot}}} P_1 = 0,2 P_1 ;}$

D'autre part :  $P_i V = n_i R T$  ; Soit :  $n_i = \frac{P_i V_1}{R T_1}$  ; Soit :  $\boxed{n_{\text{O}_2} = \frac{0,2 P_1 V_1}{R T_1} ;}$

Attention aux unités !!  $P_1$  en Pa ;  $V_1$  en  $\text{m}^3$ .

AN :  $n_{\text{O}_2} = \frac{0,2 \times 10^5 \times 1.10^{-3}}{8,32 \times 300}$  ; On trouve :  $\underline{n_{\text{O}_2} = 8.10^{-3} \text{ mol.}}$

✚ Pour l'octane liquide :  $\boxed{n_{\text{oct}} = \frac{m_{\text{oct}}}{M_{\text{oct}}} = \frac{\rho_{\text{oct}} V_{\text{oct}}}{M_{\text{oct}}} ;}$

AN :  $n_{\text{oct}} = \frac{700 \times 9,2.10^{-5}}{114}$  ; On trouve :  $\underline{n_{\text{oct}} = 5,6.10^{-4} \text{ mol.}}$

Pour identifier le réactif limitant, on fait un tableau d'avancement :

	$\text{C}_8\text{H}_{18} (\text{l})$	$25/2 \text{O}_{2(\text{g})}$	=	$8 \text{CO}_{2(\text{g})}$	$9 \text{H}_2\text{O}_{(\text{g})}$		
A l'EI :	$n_{\text{oct}}$	$n_{\text{O}_2}$					
A t :	$n_{\text{oct}} - x$	$n_{\text{O}_2} - 12,5 x$		$8 x$	$9 x$		

✚ Si l'octane est limitant :  $x = n_{\text{oct}} = 5,6.10^{-4} \text{ mol}$ .

✚ Si  $\text{O}_2$  est limitant : Alors  $n_{\text{O}_2} - 12,5 x' = 0$  ; D'où :  $x' = \frac{2}{25} n_{\text{O}_2} = 6,4.10^{-4} \text{ mol}$ .

Conclusion :  $\boxed{x < x'}$  : donc **l'octane est le réactif limitant**, ce qui paraît logique.

3 -

✚ Consommation moyenne annoncée : 4,3 L d'octane pour 100 km ;

✚ Donc **consommation moyenne d'octane par km : 0,043 L**.

Soit :  $\boxed{n_{\text{oct conso}} = \frac{m_{\text{oct}}}{M_{\text{oct}}} = \frac{\rho_{\text{oct}} V_{\text{oct}}}{M_{\text{oct}}} ;}$

AN :  $n_{\text{oct conso}} = \frac{700 \times 0,043}{114}$  ; Soit :  $\underline{n_{\text{oct conso}} = 0,26 \text{ mol cons / km.}}$

✚ D'après l'équation de la réaction :  $\boxed{n_{\text{CO}_2 \text{ formé}} = 8 n_{\text{oct conso}} ;}$

✚ Enfin :  $\boxed{m_1 = n_{\text{CO}_2 \text{ formé}} \times M_{\text{CO}_2}} ;$  D'où :  $\boxed{m_1 = 8 \times \frac{\rho_{\text{oct}} V_{\text{oct}}}{M_{\text{oct}}} \times M_{\text{CO}_2} ;}$

✚ AN :  $m_1 = 8 \times \frac{700 \times 0,043}{114} \times 44$  ; Soit :  $\underline{m_1 = 92,9 \text{ g / km parcouru.}}$

✚ **Valeur assez proche** de celle annoncée dans le tableau de la voiture : **99 g / km**.



# PROBLEME 1 : Étude de la réponse percutive d'un diapason :

(D'après e3a MP 2022)

(≈ 42 pts)

**Q1.**  $\vec{f}$  est appelée **force de frottement fluide**. C'est la force exercée par le fluide au contact des branches du diapason. **Elle s'oppose au déplacement**, donc à la vitesse. Ainsi  $\lambda > 0$ .

**Q2. Référentiel d'étude :** Référentiel terrestre  $\mathcal{R}(O, x, z)$  supposé galiléen.

**Base de projection :** Base cartésienne  $(O, x, z)$  de vecteurs unitaires  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_z$ . (L'origine est prise à la longueur à vide comme précisé dans l'énoncé).

**Système :** le point matériel M de masse  $m$ .

**Bilan des forces :**

- Poids :  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ .
- Réaction du support :  $\vec{R} = R\vec{u}_z$ ;  $\vec{R}$  est orthogonale au déplacement car mvt sans frottements sur le support.
- Force de rappel du ressort ou force de Hooke :

$$\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -kz\vec{u}_z, \text{ car } z(t) = l(t) - l_0$$

- Force de frottement fluide :  $\vec{f} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{z}\vec{u}_z$ , car mvt selon l'axe horizontal Oz.

**2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):**

- $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$ , d'où  $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T} + \vec{f} = m\vec{a}$  avec  $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z$  car le mvt se fait sur Oz.
- Projetons sur les 2 axes :

$$\text{Sur } \vec{u}_x : R - mg = 0. \quad (2) \quad (\text{pas de mvt sur } Ox).$$

$$\text{Sur } \vec{u}_z : m\ddot{z} = -kz - \lambda \dot{z} \quad (1)$$

D'où l'équation différentielle en  $z(t)$  :  $\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0$  ;

**Q3.** En identifiant l'équation précédente à celle sous forme canonique :  $\ddot{z} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{z} + \omega_0^2 z(t) = 0$ , il vient :

- $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  : **pulsation propre** de l'oscillateur : pulsation des oscillations sans frottement.

Ainsi, la **fréquence propre** sera :  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

- $Q$  le **facteur de qualité** est tel que :  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$  ; D'où  $Q = \frac{m\omega_0}{\lambda} = \frac{m}{\lambda} \sqrt{\frac{k}{m}}$  ; Soit :  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$ .

**Q4.** Il faut résoudre l'équation précédente dans le cas d'oscillations pseudopériodiques.

Equation caractéristique associée :  $r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$ .

Discriminant :  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2(\frac{1}{Q^2} - 4)$ .

Cas d'un **régime pseudopériodique** ; Alors  $\Delta < 0$  ;

Les solutions de l'équation caractéristique sont alors :  $r_{1,2} = -\frac{\frac{\omega_0}{Q} \mp i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} \mp i\sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} \right)$

On pose  $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\frac{\lambda}{2m}$

et  $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} = \sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4km}}$  : appelée **pseudo-pulsation**.

Alors  $z(t) = [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] \exp(\alpha t)$

$$= \exp\left(-\frac{\lambda}{2m} t\right) \left[ A \cos\left(\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4km}}\right) t\right) + B \sin\left(\left(\sqrt{\frac{k}{m}} \sqrt{1 - \frac{\lambda^2}{4km}}\right) t\right) \right].$$

**Q5.** On a vu en Q3 que  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{k}{m}}$  ; donc on a :  $f_0^2 = \frac{1}{4\pi^2} \frac{k}{m}$  ; soit :  $k = 4\pi^2 m f_0^2$ .

AN :  $k = 4\pi^2 \times 30.10^{-3} \times 500^2$  . On obtient :  **$k \approx 3.10^5 \text{ N.m}^{-1}$** .

**Q6.** On peut estimer le fait que le retour à zéro se fait en une trentaine de secondes, comme précisé dans l'énoncé.

Le retour à zéro se fait au bout de  $5\tau \approx 30 \text{ s}$  , soit  $\tau \approx 6 \text{ s}$ .

avec  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  ; Soit  $5\tau = \frac{10Q}{\omega_0}$  ; Alors :  **$Q = \frac{5\tau\omega_0}{10} = \frac{\tau\omega_0}{2}$** .

AN :  $Q = \frac{5\tau\omega_0}{10} = \frac{30 \times 500 \times 2 \times \pi}{10} = 3 \times 500 \times 2 \times \pi$  ; On obtient  **$Q \approx 9500$** .

Remarque : **Ces deux valeurs sont énormes** par rapport aux valeurs usuelles de mécanique.

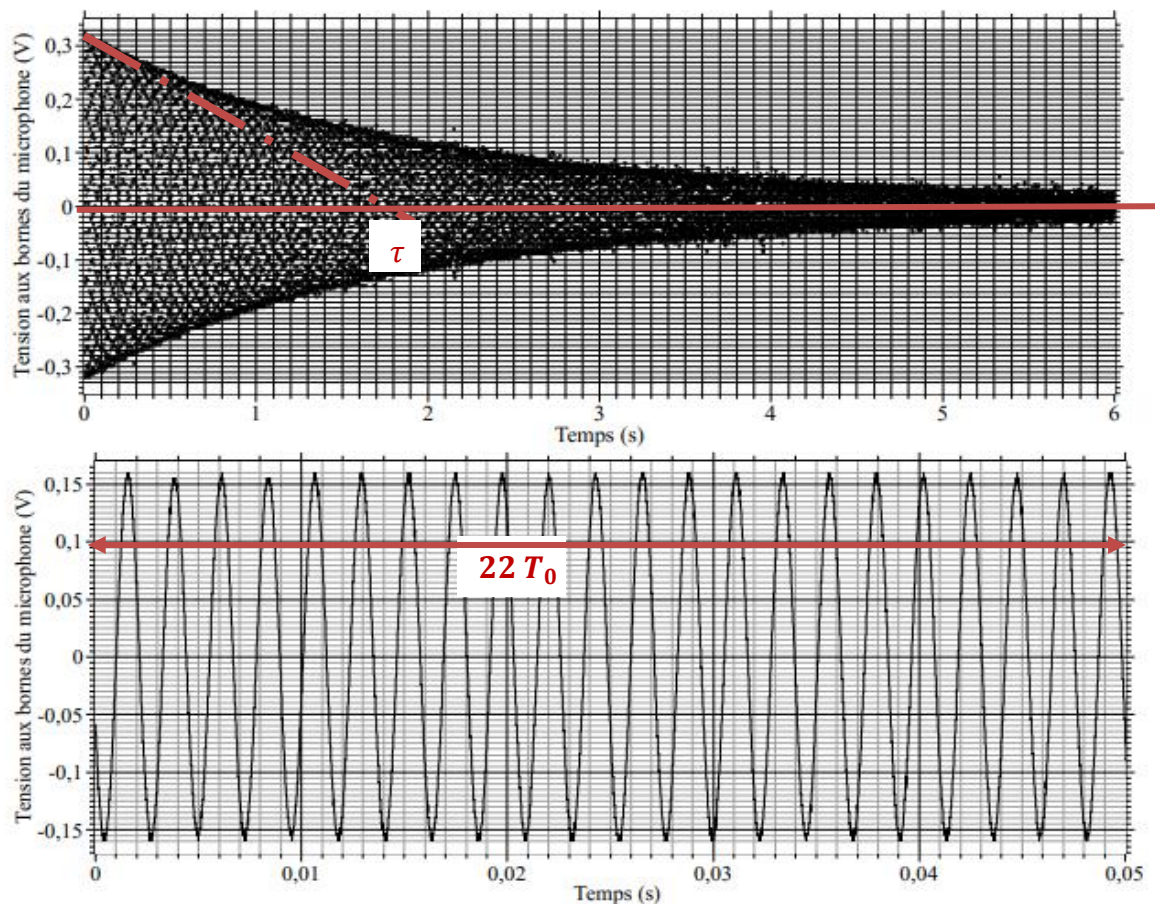
**Q7.** Cela revient à se demander si on peut assimiler la pulsation propre  $\omega_0$  à la pseudo pulsation  $\Omega$ , ou la période propre  $T_0$  à la pseudo période  $T$ , la fréquence propre  $f_0$  à la pseudo fréquence  $f$ .

Or, on sait que la pseudo pulsation  $\Omega$  est telle que :  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ .

Dans notre cas, comme  $Q \gg 1$  , alors  $\frac{1}{4Q^2} \ll 1$  , ainsi  **$\Omega \approx \omega_0$  et  $T \approx T_0$  et  $f \approx f_0$** .

Conclusion : **L'affirmation est donc bien correcte.**

**Q8.**



Sur la seconde figure 2 :  $22 T_0 \approx 0,05 \text{ s}$  ; D'où  $T_0 \approx \frac{0,05}{22} \approx 2,3.10^{-3} \text{ s}$  et  **$f_0 = \frac{1}{T_0}$**  ; AN :  **$f_0 \approx 440 \text{ Hz}$** .

Sur la 1<sup>ère</sup> figure, on estime  $\tau$  grâce à la tangente à l'origine de l'enveloppe exponentielle :  **$\tau \approx 1,8 \text{ s}$** .

Or  $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$  ; Donc :  $Q = \frac{\omega_0 \tau}{2} = \frac{2\pi f_0 \tau}{2}$  ; Soit :  **$Q = \pi f_0 \tau$**  ; AN :  $Q \approx \pi \times 440 \times 1,8$  ; On obtient  **$Q \approx 2500$** .

Conclusion : On obtient un écart relatif égal à  $\frac{500-440}{500} \approx 12 \%$  **sur la fréquence**, ce qui est à peu près correct, par contre on a un écart relatif de  $\left| \frac{1500-2500}{2500} \right| = 40 \%$  **sur le facteur de qualité** ! Ce dernier est plus grand que celui estimé à la question Q6.

## PROBLEME 2 : Décharge d'un condensateur à travers une bobine : (D'après Concours national d'admission dans les écoles d'ingénieur) (≈ 58 pts)

### I - Décharge du condensateur à travers une bobine idéale :

**Q1** – Pour  $t < 0$ , K est en 2 et K' en 1' : Le circuit devient donc :

Quand le condensateur est entièrement chargé, on est en régime permanent, donc il **se comporte comme un interrupteur ouvert**. Ainsi  $I_{\text{per}} = 0$  et  $u_R(0^-) = 0$

Alors  $u_C(0^-) = E$  et  $q_0 = q(0^-) = CE$ ;

**Q2** – Pour  $t \geq 0$  K ouvert et K' fermé, on a alors le nouveau circuit ci-contre.

Loi des mailles :  $u_C(t) + u_L(t) = 0$

Or en convention récepteur,  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$  et  $i = C \frac{du_C(t)}{dt}$

On en déduit :  $u_C(t) + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = 0$

ou encore :  $\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C(t) = 0$ .

Par identification avec  $\frac{d^2 u_C(t)}{dt^2} + \omega_0^2 u_C(t) = 0$ , il vient :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  : **pulsation propre** de l'oscillateur.

**Q3** – Solution de l'équation différentielle :

$u_C(t) = u_{ch}(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$  ;

1<sup>ère</sup> CI : A  $t = 0$ ,  $u_C(0^-) = u_C(0^+) = E$ , car C assure la continuité de la tension à ses bornes.

Ainsi :  **$A = E$**  ;

Dérivons  $u_C(t)$  :  $\frac{du_C(t)}{dt} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$  ;

De plus, on a vu :  $i = C \frac{du_C(t)}{dt}$  ; donc :  $\frac{du_C(t)}{dt} = \frac{i(t)}{C}$ .

2<sup>ème</sup> CI : A  $t = 0$ ,  $\frac{du_C(0^-)}{dt} = \frac{i(0^-)}{C} = \frac{i(0^+)}{C} = 0$ , car L assure la continuité de l'intensité dans sa branche.

Ainsi :  $B\omega_0 = 0$  ; D'où :  **$B = 0$** .

Ccl :  $u_C(t) = E \cos(\omega_0 t) = E \cos\left(\sqrt{\frac{1}{LC}} t\right)$ .

**Q4** - Etude énergétique :

$$\boxed{W_C(t) = \frac{1}{2} C u_C^2(t) = \frac{1}{2} C E^2 \cos^2(\omega_0 t)} ;$$

De même : et  $W_L(t) = \frac{1}{2} L i^2(t)$  ; Or  $i = C \frac{du_C(t)}{dt}$  ; Donc :  $i(t) = -EC\omega_0 \sin(\omega_0 t)$  ;

D'où :  $W_L(t) = \frac{1}{2} L E^2 C^2 \omega_0^2 \sin^2(\omega_0 t)$  ; Soit :  $W_L(t) = \frac{1}{2} L E^2 C^2 \frac{1}{LC} \sin^2(\omega_0 t)$  ;

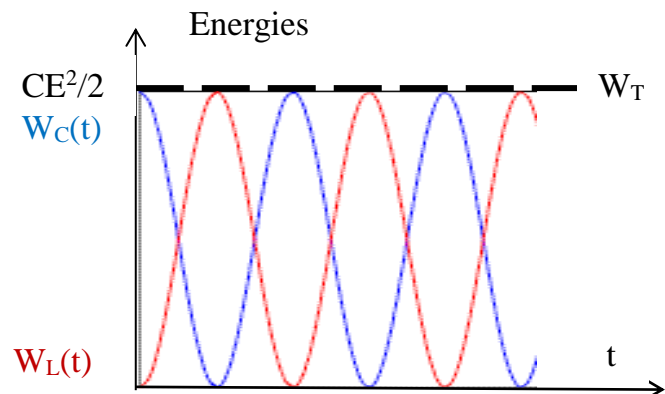
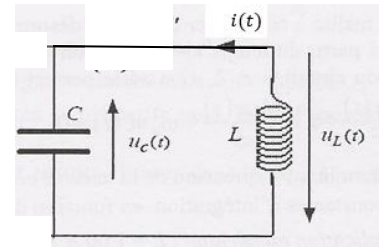
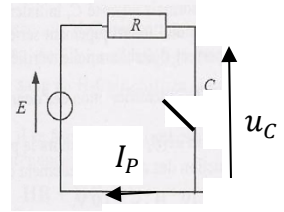
Enfin :  $W_L(t) = \frac{1}{2} C E^2 \sin^2(\omega_0 t)$  ;

Enfin,  $W_T = W_C(t) + W_L(t)$  ;

D'où :  $W_T = \frac{1}{2} C E^2 = \text{cste}$ .

Pas de dissipation d'énergie car pas de résistance dans le circuit.

L'énergie passe périodiquement du condensateur à la bobine et inversement.



## II - Cas d'une bobine réelle :

**Q5** – On peut visualiser  $u_c(t)$  grâce à un oscilloscope.

**Q6** - Loi des mailles :  $u_c(t) + u_L(t) + u_r(t) = 0$ .

Or  $u_r(t) = r i(t)$ ,  $u_L(t) = L \frac{di}{dt}$  et  $i = C \frac{du_c(t)}{dt}$  ;

On en déduit :  $u_c(t) + L \frac{di}{dt} + r i(t) = 0$  ;

Ou encore :  $u_c(t) + LC \frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + rC \frac{du_c(t)}{dt} = 0$ .

Enfin :  $\boxed{\frac{d^2 u_c}{dt^2} + \frac{r}{L} \frac{du_c(t)}{dt} + \frac{1}{LC} u_c(t) = 0}$ .

De la forme :  $\frac{d^2 u_c(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_c(t)}{dt} + \omega_0^2 u_c(t) = 0$  avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  et  $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{r}{L}$  ; Soit :  $\boxed{Q = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{r} \sqrt{\frac{L}{C}}}$  ;

**Q7** – Equation caractéristique associée :  $s^2 + \frac{\omega_0}{Q} s + \omega_0^2 = 0$ .

Discriminant :  $\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$ .

D'après le graphe, on visualise un régime pseudopériodique, car retour à zéro avec de nombreuses oscillations, donc  $\Delta < 0$  ; ainsi  $\boxed{Q > 1/2}$ .

**Q8.a** – On a vu  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}$  ; AN :  $\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{1.10^{-2} \times 1.10^{-6}}} = \sqrt{10^8}$  ; Ainsi :  $\omega_0 = 10^4 \text{ rad.s}^{-1}$ .

**Q8.b** – On sait que  $T = \frac{2\pi}{\Omega}$  ; Donc :  $\boxed{\Omega = \frac{2\pi}{T}}$  ; AN :  $\Omega = \frac{2\pi}{6.3.10^{-4}}$  ; On trouve :  $\Omega = 9,97.10^3 \text{ ras.s}^{-1}$ .

De plus,  $\Delta < 0$ ,  $s_{1,2} = -\frac{\frac{\omega_0}{Q} \mp i\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2} \left( \frac{1}{Q} \mp i \sqrt{4 - \frac{1}{Q^2}} \right)$

On pose  $\alpha = \frac{-b}{2a} = -\frac{\omega_0}{2Q}$  et la pseudo-pulsation :  $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2a} = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$  :

Or  $Q^2 = \frac{L}{Cr^2}$  ; donc :  $\frac{1}{4Q^2} = \frac{Cr^2}{4L}$  Ainsi  $\Omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{Cr^2}{4L}}$  ; D'où :  $\frac{\Omega^2}{\omega_0^2} = 1 - \frac{Cr^2}{4L}$  ;

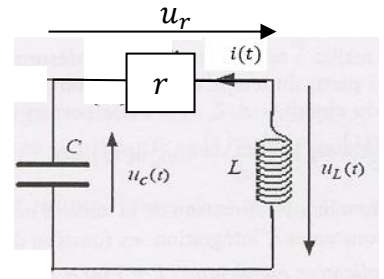
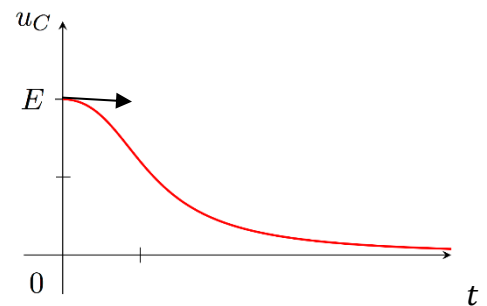
Ou encore :  $\frac{Cr^2}{4L} = 1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0^2}$  ; Et  $r^2 = \frac{4L}{C} - 4L^2 \Omega^2$  ; Enfin :  $\boxed{r = \sqrt{\frac{4L}{C} - 4L^2 \Omega^2}}$  ;

AN :  $r = \sqrt{\frac{4 \times 0,01}{1.10^{-6}} - 4(0,01)^2 (9,97.10^3)^2}$  ; On trouve :  $\boxed{r = 15,5 \Omega}$ .

**Q9** – Si la résistance  $r$  avait été très élevée, alors l'amortissement aurait été très grand et on aurait obtenu un régime apériodique, avec un retour à zéro sans oscillation.

Attention aux conditions initiales pour la courbe.

$u_c(0^+) = E$  et  $\frac{du_c(0^+)}{dt} = \frac{i(0^+)}{C} = 0$  pour la tangente à l'origine.



### PROBLEME 3 : Étude de l'optimisation de la synthèse de l'éthanol en phase gazeuse : ( ≈ 53 pts)

**I - Q1.** A  $T = 400 \text{ K}$ ,  $\ln(K^\circ(400)) = \frac{5655}{400} - 15,5 = -1,3625$  et  $K^\circ(400) = e^{-1,3625}$ .

On obtient :  **$K^\circ(400) \approx 0,256$  . Réaction ni totale, ni négligeable.**

On est en phase gazeuse : Tableau d'avancement en moles et colonne supplémentaire  $n_{tot}(gaz)$  :

Comme il n'y a pas de produit introduit, la réaction ne peut se faire que dans le **sens direct**.

A l'équilibre :  $Q_{r,eq} = K^\circ = 0,256$  (ni totale ; ni négligeable).

(en mol)	$C_2H_{4(g)}$	$H_2O_{(g)}$	= $C_2H_5OH_{(g)}$	$n_{tot}(gaz)$
EI	1,00	1,00	0	2,00
E équilibre	$1,00 - \xi_{eq}$	$1,00 - \xi_{eq}$	$\xi_{eq}$	$2,00 - \xi_{eq}$

**Q2.** Il faut exprimer  $Q_{r,eq} = K^\circ$  , en utilisant les activités des espèces en phase gazeuse :

$$K^\circ = \frac{\frac{P(C_2H_5OH)_{eq}}{P^\circ}}{\frac{P(C_2H_4)_{eq}}{P^\circ} \frac{P(H_2O)_{eq}}{P^\circ}} = \frac{P(C_2H_5OH)_{eq}}{P(C_2H_4)_{eq} P(H_2O)_{eq}} P^\circ = \frac{X(C_2H_5OH)_{eq} P_{tot}}{X(C_2H_4)_{eq} X(H_2O)_{eq} P_{tot}^2} P^\circ$$

Ou encore :  $K^\circ = \frac{\left(\frac{n(C_2H_5OH)_{eq}}{n_{tot}}\right) \frac{P^\circ}{P_{tot}}}{\frac{n(C_2H_4)_{eq}}{n_{tot}} \left(\frac{n(H_2O)_{eq}}{n_{tot}}\right) \frac{P^\circ}{P_{tot}}}$  ; Soit :  $K^\circ = \frac{(n(C_2H_5OH)_{eq}) \frac{P^\circ}{P_{tot}}}{n(C_2H_4)_{eq} (n(H_2O)_{eq}) \frac{P^\circ}{P_{tot}}} n_{tot}$

**Q3.** On cherche à calculer  $\xi_{eq}$ , sachant que  $\xi_{eq} > 0$  (sens direct) mais  $\xi_{eq}$  doit être inférieur à 1 compte-tenu des quantités initiales introduites. Soit  $0 < \xi_{eq} < 1$  .

AN :  $K^\circ = \frac{\xi_{eq}}{(1,00 - \xi_{eq})^2} (2,00 - \xi_{eq}) = 0,256$  .

Soit :  $\xi_{eq}(2,00 - \xi_{eq}) = 0,256 (1,00 - \xi_{eq})^2$  .

Ou encore :  $2 \xi_{eq} - \xi_{eq}^2 = 0,256(1 - 2\xi_{eq} + \xi_{eq}^2)$ .

Ainsi il faut résoudre le polynôme du second degré :  **$1,256 \xi_{eq}^2 - 2,512 \xi_{eq} + 0,256 = 0$** .

$\Delta \approx 5,024$  et  $\sqrt{\Delta} \approx 2,24$  ; Alors  **$\xi_{eq1} \approx 1,90 \text{ mol}$  et  $\xi_{eq2} \approx 0,11 \text{ mol}$** .

La valeur de  $\xi_{eq1} > 1,00$  est impossible ; Alors  **$\xi_{eq} = \xi_{eq2} \approx 0,11 \text{ mol}$** .



Et à l'équilibre, on a :  **$n(C_2H_5OH)_{eq} \approx 0,11 \text{ mol}$**

**et  $n(C_2H_4)_{eq} = n(H_2O)_{eq} \approx 1 - 0,11 \approx 0,89 \text{ mol}$** .

**Q4.** On sait que le taux de conversion  $\tau_{eq}$  est défini par :  $\tau_{eq} = \frac{\alpha_i \xi_{eq}}{n_i(0)}$  ;

AN :  $\tau_{eq} = \frac{1 \times 0,11}{1}$  ; Soit :  **$\tau_{eq} \approx 11 \%$**  . (faible valeur).

**Q5.** On sait que la fraction molaire  $X_i$  est définie par :  $X_i = \frac{n_i}{n_{tot}}$  .

Ainsi :  $X(C_2H_5OH) = \frac{0,11}{2 - 0,11} = \frac{0,11}{1,89}$  ; Soit :  **$X(C_2H_5OH) \approx 6\%$** .

Et  $X(C_2H_4) = X(H_2O) = \frac{0,89}{1,89}$  ; Soit :  **$X(C_2H_4) = X(H_2O) \approx 47 \%$** .



**II – Q6.** On a toujours à l'équilibre :  $Q_{r,eq} = K^\circ = 0,256$  (car même température qu'en I).

On reprend l'expression trouvée en Q2 :  $K^\circ = \frac{(n(C_2H_5OH)_{eq})}{n(C_2H_4)_{eq} (n(H_2O)_{eq})} \frac{P^\circ}{P_{tot}} n_{tot}$  avec  $P_{tot} = 10$  bars.

AN :  $K^\circ = \frac{\xi'_{eq}}{(1,00 - \xi'_{eq})^2} \times \frac{1}{10} (2,00 - \xi'_{eq}) = 0,256$ .

Soit :  $\xi'_{eq} (2,00 - \xi'_{eq}) = 0,256 \times 10 (1,00 - \xi'_{eq})^2$ .

Ou encore :  $2 \xi'_{eq} - \xi'^2_{eq} = 2,56(1 - 2\xi'_{eq} + \xi'^2_{eq})$ . Ainsi :  **$3,56 \xi'^2_{eq} - 7,12 \xi'_{eq} + 2,56 = 0$** .

$\Delta \approx 14,24$  et  $\sqrt{\Delta} \approx 3,77$  ; Alors  **$\xi'_{eq1} \approx 1,53$  mol et  $\xi'_{eq2} \approx 0,47$  mol**.

La valeur de  $\xi'_{eq1} > 1,00$  est impossible ; Alors  **$\xi'_{eq} = \xi'_{eq2} \approx 0,47$  mol**.

Et à l'équilibre, on a :  **$n(C_2H_5OH)_{eq} \approx 0,47$  mol**

**et  $n(C_2H_4)_{eq} = n(H_2O)_{eq} \approx 1 - 0,47 \approx 0,53$  mol.** Alors  $\tau'_{eq} \approx \frac{1 \times 0,47}{1}$  ; Soit :  **$\tau'_{eq} \approx 47 \%$** .

Conclusion : Une **augmentation de la pression augmente le taux de conversion**, donc le rendement de la réaction.

**III –** On a toujours à l'équilibre :  $Q_{r,eq} = K^\circ = 0,256$  (car même température qu'en I).

**Q7.** Pour déterminer le sens d'évolution du système, il faut **calculer le  $Q_{r,EI}$  et le comparer à  $K^\circ$** .

	$C_2H_{4(g)}$	$H_2O_{(g)}$	$=$	$C_2H_5OH_{(g)}$	$n_{tot}(gaz)$
EI	1,00	1,00		1,00	3

Il faut exprimer, puis calculer le  $Q_{r,EI}$  (même expression que  $Q_{r,eq} = K^\circ$  mais en prenant les quantités initiales)

$$Q_{r,EI} = \frac{\frac{P(C_2H_5OH)_0}{P^\circ}}{\frac{P(C_2H_4)_0}{P^\circ} \frac{P(H_2O)_0}{P^\circ}} = \frac{P(C_2H_5OH)_0}{P(C_2H_4)_0 P(H_2O)_0} P^\circ = \frac{X(C_2H_5OH)_0 P_{tot}}{X(C_2H_4)_0 X(H_2O)_0 P_{tot}^2} P^\circ$$

Ou encore :  $Q_{r,EI} = \frac{\left(\frac{n(C_2H_5OH)_0}{n_{tot}}\right) \frac{P^\circ}{P_{tot}}}{\frac{n(C_2H_4)_0}{n_{tot}} \frac{n(H_2O)_0}{n_{tot}} \frac{P^\circ}{P_{tot}}} = \frac{(n(C_2H_5OH)_0)}{n(C_2H_4)_0 (n(H_2O)_0)} \frac{P^\circ}{P_{tot}} n_{tot}$  ;

AN :  $Q_{r,EI} = \frac{1}{1} \times 3$  ; Ainsi,  **$Q_{r,EI} = 3 > K^\circ$**  : Réaction dans le **sens indirect** ;

**L'avancement final  $\xi''_{eq}$  sera négatif.**

**Q8.** On a toujours à l'équilibre :  $Q_{r,eq} = K^\circ = 0,256$  (car même température qu'en I).

	$C_2H_{4(g)}$	$H_2O_{(g)}$	$=$	$C_2H_5OH_{(g)}$	$n_{tot}(gaz)$
Etat Initial	1,00	1,00		1,00	3,00
Etat d'équilibre	$1,00 - \xi''_{eq}$	$1,00 - \xi''_{eq}$		$1 + \xi''_{eq}$	$3,00 - \xi''_{eq}$

Il faut exprimer  $Q_{r,eq} = K^\circ$  pour calculer  **$\xi''_{eq} < 0$  !!**

On reprend, de nouveau, l'expression trouvée en Q2 :  $K^\circ = \frac{(n(C_2H_5OH)_{eq})}{n(C_2H_4)_{eq} (n(H_2O)_{eq})} \frac{P^\circ}{P_{tot}} n_{tot}$ .

AN :  $K^\circ = \frac{(1 + \xi''_{eq})}{(1,00 - \xi''_{eq})^2} (3,00 - \xi''_{eq}) = 0,256$ .

Soit :  $(1 + \xi''_{eq})(3,00 - \xi''_{eq}) = 0,256 (1,00 - \xi''_{eq})^2$ .

Ou encore :  $3 + 2 \xi''_{eq} - \xi''^2_{eq} = 0,256(1 - 2\xi''_{eq} + \xi''^2_{eq})$ . Ainsi :  **$1,256 \xi''^2_{eq} - 2,512 \xi''_{eq} - 2,74 = 0$** .

$\Delta = 20,07$  et  $\sqrt{\Delta} = 4,48$  ; Alors  **$\xi''_{eq1} = -0,78$  mol et  $\xi''_{eq2} = 2,78$  mol**.

La valeur de  $\xi''_{eq2} > 0$  est impossible ; Alors  **$\xi''_{eq} = \xi''_{eq1} = -0,78$  mol**.

Et à l'équilibre, on a :  $n(C_2H_5OH)_{eq} = 1 + \xi''_{eq}$  ; Soit :  $n(C_2H_5OH)_{eq} = 0,22 \text{ mol}$   
et  $n(C_2H_4)_{eq} = n(H_2O)_{eq} = 1 + 0,78 = 1,78 \text{ mol}$ .