Correction du TD d'application

I Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

1) Une fois le générateur de courant stoppé, l'énergie totale est la somme de l'énergie stockée dans le condensateur et de celle stockée dans la bobine, soit

$$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

En dérivant on a donc

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C \times 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \times 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Comme on demande de ne faire apparaître que i dans le résultat, on remplace u avec la relation courant-tension de la bobine et on développe :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C \times 2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{2}L \times 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L^2C\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i\right)}
\end{aligned}$$

2) Le circuit ne compte qu'une bobine et un condensateur qui stockent de l'énergie sans la dissiper, et donc aucune résistance. L'énergie électrique dans le circuit est donc constante, et on en déduit qu'$\forall t \in \mathbb{R}^+$:

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{donc} \quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i\right) = 0$$

On a donc un produit qui est nul. Or, la tension de la bobine $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ne peut être constamment nulle, c'est donc le terme entre parenthèses qui est nul, c'est-à-dire :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 i = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

3) C et L sont en parallèle, donc partagent la même tension u. Soit i_C le courant traversant C. Comme $\eta(t \geq 0) = 0$, la loi des nœuds donne

$$0 = i_C + i \quad \text{donc} \quad C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i = 0$$

avec la RCT du condensateur. Comme u est aussi la tension de L, avec la RCT de la bobine on retrouve bien

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0}$$

4) À $t = 0^-$, le circuit est alimenté par $\eta = I_0$ et on suppose le régime permanent atteint : la bobine est donc équivalente à un fil, et le condensateur à un interrupteur ouvert. On en déduit donc

$$i(0^-) = I_0 \quad \text{et} \quad u(0^-) = 0$$

Par continuité de i traversant la bobine et de u aux bornes du condensateur, on a

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = I_0} \quad \text{et} \quad u(0^-) = u(0^+) = 0$$

Or, $u(0^+) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ d'après la RCT de la bobine. La seconde condition initiale est donc

$$\boxed{\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_{0^+} = 0}$$

5) L'équation étant homogène, la solution générale s'écrit

$$i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Avec la première CI, on a

$$i(0) = I_0 = A$$

et avec la seconde on a

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right)_0 &= \omega_0 B = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0 \end{aligned}$$

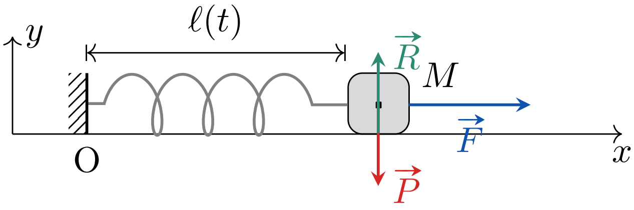
Finalement, on trouve sans surprise

$$\boxed{i(t) = I_0\cos(\omega_0 t)}$$

II Masse percutant un ressort

1) Une fois la masse accrochée, on retrouve la situation du cours. On fait le bilan des forces :

Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$
Ressort $\overrightarrow{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$



On effectue le changement de variable $x(t) = \ell(t) - \ell_0$, et avec le PFD on a donc

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F} \\ \Leftrightarrow m\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -kx \\ -mg + R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve bien

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 x = 0}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids.

2) À $t = 0$, la masse est accrochée au ressort de longueur ℓ_0 et elle arrive avec $\overrightarrow{v}(0) = -v_0\,\overrightarrow{u_x}$. On a donc

$$\boxed{x(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -v_0}$$

La forme générale de la solution est

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

Avec conditions initiales,

$$x(0) = A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0} \Leftrightarrow A = 0$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -A\omega_0\underbrace{\sin(0)}_{=0} + B\omega_0\underbrace{\cos(0)}_{=1} \Leftrightarrow B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

On a donc

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

3) En supposant que le ressort puisse se comprimer à l'infini, la masse vient percuter la paroi située en O si l'amplitude de $x(t)$ est égale à $-\ell_0$, c'est-à-dire

$$\boxed{\frac{v_0}{\omega_0} = \ell_0} \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \omega_0\ell_0}$$

On remarque donc que plus v_0 est grande, plus cela est facile, mais également que plus ω_0 est faible est plus cela est facile. En effet, plus la pulsation est élevée et moins la masse a d'amplitude à v_0 fixée. Ceci correspond bien à l'intuition qu'on pourrait en avoir énergétiquement : une énergie mécanique totale se répartit dans l'énergie potentielle élastique d'une part, c'est-à-dire la distance d'élongation du ressort, et dans l'énergie cinétique d'autre part, donc dans sa vitesse.

III RLC sur q et bilan d'énergie

1) À $t = 0^-$, le circuit est depuis longtemps sous la tension $e = 0$; il a donc atteint son régime permanent, et le condensateur s'est déchargé et est équivalent à un interrupteur ouvert : forcément,

$$\boxed{i(0^-) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{q(0^-) = Cu(0^-) = 0}$$

2) Avec une loi des mailles, les RCT de la résistance, de la bobine et du condensateur et la relation $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, on a

$$u_L + u_R + u_C = E \Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} = E$$

$$\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = \frac{E}{L}$$

Concernant les conditions initiales, la tension aux bornes d'un condensateur est continue donc sa charge aussi, c'est-à-dire

$$\boxed{q(0^-) = q(0^+) = 0}$$

et comme le courant traversant une bobine est également continu, on a

$$i(0^-) = i(0^+) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)_{0^+} = 0}$$

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

3) L'équation caractéristique de discriminant Δ de l'équation homogène est

$$r^2 + 2\gamma r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\gamma^2 - {\omega_0}^2)$$

Comme $\omega_0 > \gamma$, on a $\Delta < 0$ et on est donc dans un régime pseudo-périodique. On aura donc

$$r_\pm = -\frac{\cancel{2}\gamma}{\cancel{2}} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2 - \gamma^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\gamma \pm \mathrm{i}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}$$

La solution particulière est $\frac{E}{L{\omega_0}^2} = CE$, donc on aura la forme générale

$$\boxed{q(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + CE}$$

Avec la première CI,

$$q(0) = A + CE = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = -CE}$$

et avec la seconde,

$$\left(\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -\gamma A + B\omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = -CE\frac{\gamma}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}}$$

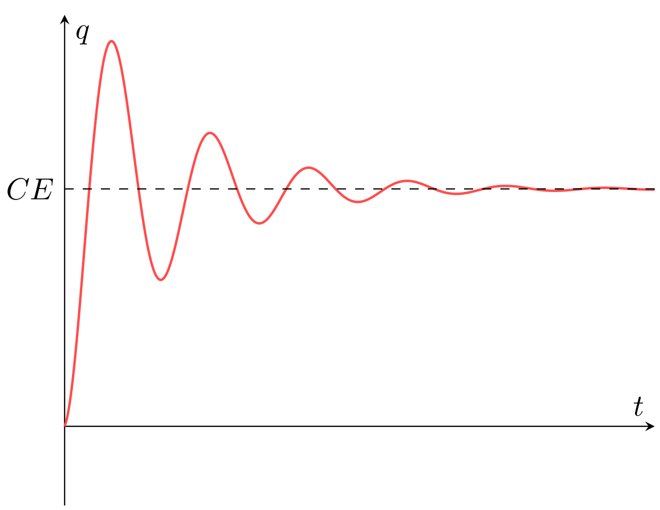
soit finalement

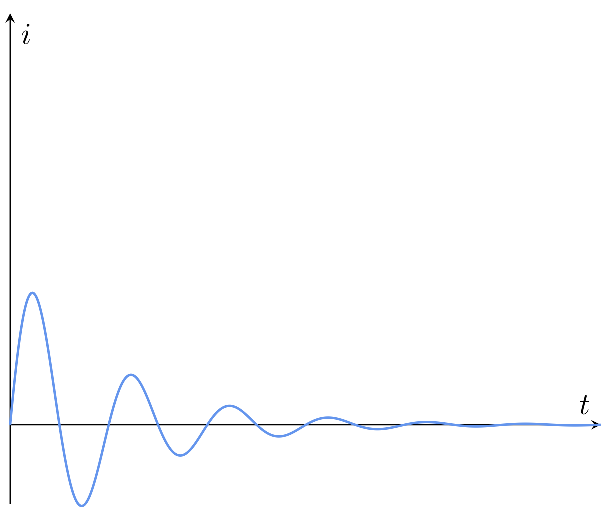
$$\boxed{q(t) = CE - CE\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}\sin\omega t\right)}$$

4) On dérive q :

$$\boxed{i(t) = CE\frac{{\omega_0}^2}{\omega}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t}$$

5) La charge finale atteinte est CE et le courant final est nul. Ces valeurs se retrouvent facilement en remarquant qu'en régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil ; le courant est alors nul, et ainsi les tensions aux bornes de L et R le sont également : la tension E du circuit est entièrement dans u_C, et sa charge est donc CE.





6) Un bilan de puissance sur le circuit, (i.e. **loi des mailles**$\times i$) donne

$$\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_G \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{LC} + \mathcal{E}_J = \mathcal{E}_G}$$

On trouve donc naturellement que l'énergie du générateur se répartit entre la bobine, l'inductance et la résistance. On va donc déterminer $\mathcal{E}_G$ et $\mathcal{E}_{LC}$ pour trouver $\mathcal{E}_J$ par différence.

L'énergie fournie par le générateur s'obtient en intégrant la puissance fournie Ei par le générateur entre $t = 0$ et $t \to \infty$. En se rappelant que $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, cette intégrale se ramène à une simple intégration sur q de valeur initiale 0 et de valeur finale CE :

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty Ei\mathrm{d}t = \int_0^{CE} E\mathrm{d}q = E\,[q]_{q=CE}^{q=0} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

L'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée par l'inductance et la capacité se calcule par différence des énergies stockées dans ces dipôles entre l'instant final et l'instant initial. Or, les deux dipôles sont initialement déchargés, et comme $i = 0$ à la fin l'énergie de la bobine est nulle. Ainsi,

$$\mathcal{E}_{LC} = \left[\frac{1}{2}Li(t)^2 + \frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C}\right]_{t=0}^{t=\infty} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{LC} = \frac{1}{2}CE^2}$$

Ainsi,

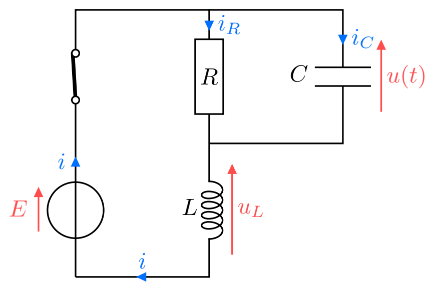
$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_G - \mathcal{E}_{LC} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2}$$

Ces calculs sont indépendants du régime dans lequel se trouve le circuit. L'énergie fournie par le générateur est deux fois plus grande que celle stockée par la bobine et le condensateur, **indépendamment de la valeur de la résistance du circuit**.

Extrapolé à $R \longrightarrow 0$, ce résultat semble contredire le principe de conservation de l'énergie, puisque la seconde moitié d'énergie ne peut plus être dissipée par effet Joule. En fait, pour $R \longrightarrow 0$, le circuit oscille de façon sinusoïdale : on n'atteint jamais de régime permanent continu, et la bobine et le condensateur stockent et restituent alternativement de l'énergie.

IV Oscillateur amorti RLC à 2 mailles

On est en présence d'un circuit à deux mailles. On applique la loi des nœuds :



1)

$$\begin{aligned} i &= i_R + i_C \\ \Leftrightarrow i &= \frac{u}{R} + C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} i_C &= C\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ i_R &= \tfrac{u}{R} \end{aligned}$$

Il faut changer u en i. Or, $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$; il nous suffit donc de relier u à u_L par la loi des mailles :

$$\begin{aligned} E &= u + u_L \\ \Leftrightarrow u_L &= E - u \end{aligned}$$

Ainsi, en réinjectant :

$$\begin{aligned} i &= \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\frac{\mathrm{d}u_L}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow & \boxed{i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}} \end{aligned} \quad u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

2) On cherche à l'écrire sous la forme canonique classique

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = {\omega_0}^2 i_\infty$$

L'identification à la forme précédente permet alors d'obtenir :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad i_\infty = \frac{E}{R}$$

Avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, Q le facteur de qualité et i_∞ la valeur prise par i pour $t \to \infty$.

3) **Contrairement au RLC série**, Q est proportionnel à R (et non inversement proportionnel). C'est normal car ici, l'énergie est plus rapidement dissipée si R est faible. Au contraire, si R est élevée ($R \to \infty$), la branche contenant R devient un interrupteur ouvert et le circuit devient équivalent à un oscillateur harmonique type LC série. Q tend alors logiquement vers l'infini.

4) On étudie les conditions initiales grâce à deux schémas :

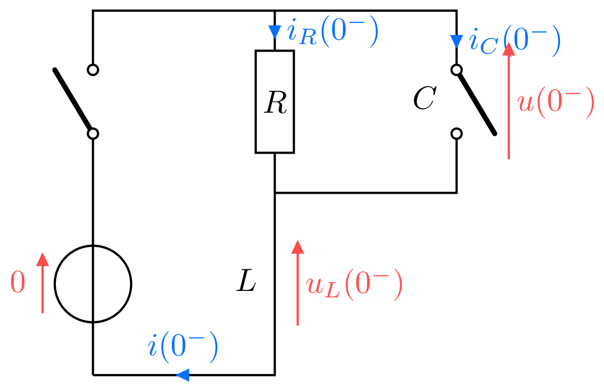


Figure 5.1 – Circuit à $\boxed{t = 0^-}$

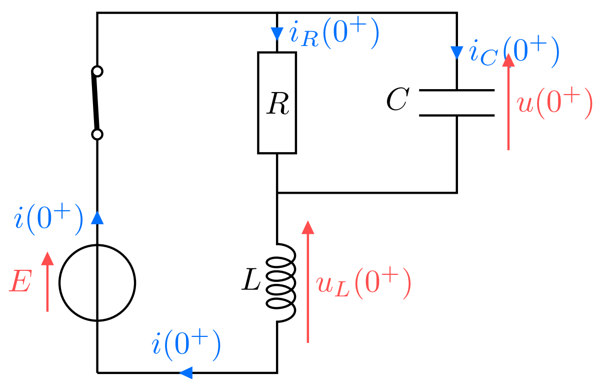


Figure 5.2 – Circuit à $\boxed{t = 0^+}$

◇ Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

En effet, $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent.

◇ En $t = 0^+$, la continuité de i au travers de la bobine impose :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

Afin de trouver la condition sur $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, il faut déterminer la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)$$

Or, u étant la tension au borne d'un condensateur, elle est nécessairement continue et égale à sa valeur en 0^- donc

$$\boxed{u_L(0^+) = E \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L}}$$

5) Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC} i_p = \frac{E}{RLC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{R}$$

Remarque : La solution i_p déterminée sous forme d'une constante est toujours égale à i_∞ identifiée dans la forme canonique.

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0$$

$Q = 2$ donc
$$\Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4}{\omega_0}^2 < 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{4}\sqrt{15} \quad \text{soit} \quad r_{1,2} = -\mu \pm \mathrm{j}\omega_p$$

où μ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_h(t) = \mathrm{e}^{-\mu t} \left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t) \right)$$

Avec A et B deux constantes d'intégration réelles. En sommant solution homogène et particulière, on obtient la solution générale :

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\mu t} \left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t) \right) + \frac{E}{R}$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B en $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{E}{R} + A = 0 \quad \text{donc} \quad A = -\frac{E}{R}$$

Calculons l'expression de la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_p \left[-A\sin(\omega_p t) + B\cos(\omega_p t) \right] \mathrm{e}^{-\mu t} - \mu \left[A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t) \right] \mathrm{e}^{-\mu t}$$

Ainsi
$$\left(\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \right)_{0^+} = B\omega_p - \mu A = \frac{E}{L} \quad \text{donc} \quad B = \frac{E}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right)$$

Finalement
$$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\mu t} \left[\cos(\omega_p t) - \frac{R}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right) \sin(\omega_p t) \right]$$

Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure ci-contre).