Élec 5

Filtrage linéaire

1 Les signaux périodiques

1.1 Période

Définition. Un signal $s(t)$ est **périodique** si et seulement s'il existe une **période** T telle que, pour tout t :

$$s(t+T) = s(t)$$

Exemple

Le signal $s(t) = A\sin(\omega t)$ a une période $T = 2\pi/\omega$.

Démonstration :

$$s\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right) = A\sin\left(\omega\left(t+\frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = A\sin(\omega t + 2\pi) = A\sin(\omega t)$$

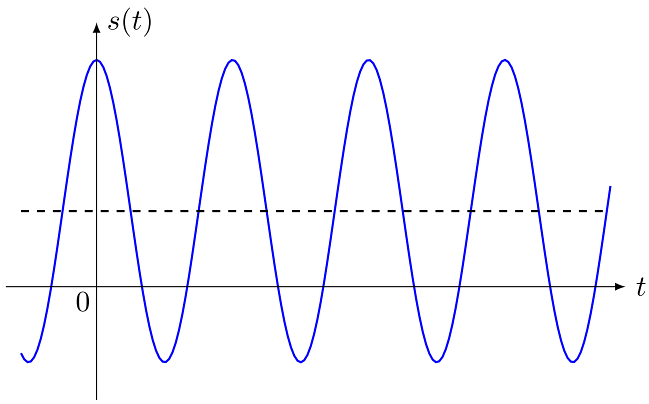
1.2 Valeur moyenne

Définition. On définit la **valeur moyenne** du signal périodique $s(t)$ par la relation

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\mathrm{d}t$$

Exemple

Considérons le signal $s(t) = C + A\cos(\omega t)$.



$$\begin{aligned}\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T (C + A\cos(\omega t))\,\mathrm{d}t \\ &= \frac{1}{T}\left(\int_0^T C\mathrm{d}t + \int_0^T A\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\right) \\ &= \frac{1}{T}\left([Ct]_0^T + \left[\frac{A}{\omega}\sin(\omega t)\,\mathrm{d}t\right]_0^T\right) \\ &= \frac{1}{T}\left(C(T-0) + \frac{A}{\omega}(\sin(\omega T) - \sin(\omega\times 0))\right) \\ &= \frac{1}{T}(CT)\end{aligned}$$

$$\boxed{\langle s(t)\rangle = C}$$

C'est la valeur autour de laquelle oscille $s(t)$.

1.3 Valeur efficace

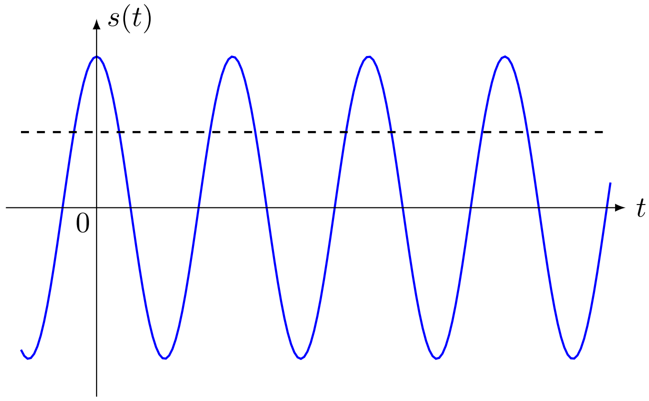
Définition. On définit la **valeur efficace** d'un signal périodique $s(t)$ par la relation

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$$

On définit cette quantité car l'énergie transportée est proportionnelle au carré des signaux (exemple : énergie stockée dans un condensateur, emmagasinée dans une bobine, énergie cinétique, etc.). Ainsi s_{eff}^2 traduit l'énergie moyenne. Par exemple, la valeur de 230 V pour le secteur est la valeur efficace de la tension.

Exemple

Considérons le signal $s(t) = A\cos(\omega t)$.



$$\begin{aligned}
\left\langle s^2(t) \right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A^2\cos^2(\omega t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\int_0^T \frac{1}{2}\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{1}{2}\cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\left[\frac{1}{2}t\right]_0^T + \left[\frac{1}{2}\frac{A}{2\omega}\sin(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right]_0^T\right) \\
&= \frac{A^2}{2}
\end{aligned}$$

$$\boxed{s_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}}$$

Attention

Il n'y a pas toujours le rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace. Par exemple, pour un signal triangle, la valeur efficace est $A/\sqrt{3}$ et pour un créneau de moyenne nulle, elle est égale à son amplitude A.

1.4 Théorème de Fourier

Tout signal périodique se décompose comme une somme de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal $s(t)$ de fréquence f s'écrit

$$s(t) = c_0 + \sum_{i=1}^{+\infty} c_i \sin(2\pi i f t + \varphi_i)$$

avec c_0 la valeur moyenne du signal (ou composante continue), c_i et φ_i des coefficients dépendant du signal. Les différents coefficients c_i représentent le **spectre** du signal.

Spectre des signaux créneau et triangle

Un signal créneau peut s'écrire avec les harmoniques impaires du fondamental (fréquence f) :

$$s(t) = A\sin(2\pi f t) + \frac{A}{3}\sin(6\pi f t) + \frac{A}{5}\sin(10\pi f t) + \frac{A}{7}\sin(14\pi f t) + \dots$$

Le signal triangle s'écrit aussi avec les harmoniques impaires, mais les amplitudes associées sont différentes :

$$s(t) = A\sin(2\pi ft) - \frac{A}{9}\sin(6\pi ft) + \frac{A}{25}\sin(10\pi ft) - \frac{A}{49}\sin(14\pi ft) + \dots$$

Égalité de Parseval. On peut montrer que :

$$\left\langle s^2(t) \right\rangle = c_0^2 + \frac{1}{2}\sum_{i=1}^{+\infty} c_i^2$$

Autrement dit, l'énergie portée par le signal se répartit dans les différentes harmoniques de celui-ci de façon indépendante.

2 Introduction au filtrage

2.1 Traitement du signal

Le but du **traitement du signal** est d'extraire l'information utile d'un signal issu d'un capteur où de multiples signaux se superposent au signal utile : bruits électromagnétiques, autres informations, etc.

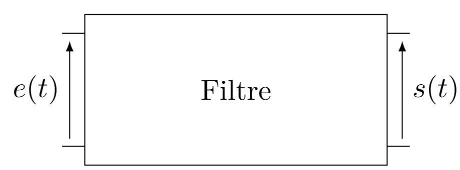
— Pour recevoir la radio, on doit sélectionner le signal autour d'une bande de fréquence précise et éliminer le reste ;

— autre exemple, le signal délivré par le conditionnement d'une jauge de contrainte (capteur dont la résistance dépend de la déformation) peut être perturbé par des signaux à 50 Hz issu de l'alimentation du pont de jauges.

2.2 Définition

Définition. Un **filtre** est un système qui traite un signal sur un critère fréquentiel.

Un filtre électronique est un **quadripôle** :

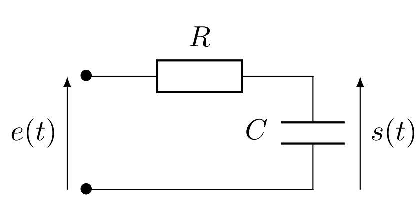


On note l'entrée $e(t)$ et la sortie $s(t)$. Il existe aussi des filtres mécaniques, des filtres de couleur, etc.

Définition.
— Un filtre **passe-bas** est un filtre qui ne laisse passer que les basses fréquences.
— Un filtre **passe-haut** est un filtre qui ne laisse passer que les hautes fréquences.
— Un filtre **passe-bande** est un filtre qui ne laisse passer qu'une bande de fréquence.

3 Un premier exemple de filtre : le filtre passe-bas RC

3.1 Schéma



On n'indique pas le reste du circuit mais attention, un filtre s'insère dans une suite d'éléments électroniques.

— $e(t)$ peut venir d'un amplificateur, d'un pont de jauge, etc.
— $s(t)$ peut aller vers un appareil de mesure, un comparateur, etc.

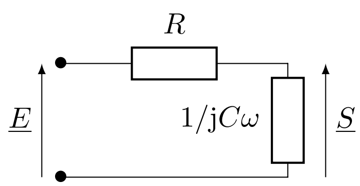
3.2 Fonction de transfert d'un filtre

Définition. La **fonction de transfert** d'un filtre est la grandeur complexe

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$$

où $\underline{S}$ est l'amplitude complexe du signal de sortie et $\underline{E}$ celle du signal d'entrée.

Cas du filtre RC : On redessine le circuit en régime sinusoïdal forcé : les tensions sont remplacées par leurs amplitudes complexes et les composants par leurs impédances :



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}\underline{S} &= \frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega}\underline{E} \\ &= \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega}\underline{E}\end{aligned}$$

La fonction de transfert est donc :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega} = \frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}}$$

Où $\omega_0 = 1/RC$.

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du premier ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

où ω_0 est la **pulsation de coupure du filtre** et H_0 une constante.

On souhaite en général étudier l'effet qu'a un filtre sur l'amplitude des différentes harmoniques du spectre : on calcule donc le **module** de la fonction de transfert.

Dans le cas du circuit RC :

$$|\underline{H}| = \left|\frac{1}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}\right| = \frac{|1|}{\left|1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right|}$$

$$\boxed{|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}}$$

Bande passante La bande passante est telle que :

$$|H| \geq \frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

Dans le cas du filtre RC, $|H|_{\max} = 1$ donc la condition pour que la pulsation ω soit dans la bande passante est :

$$\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$

$$\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} \leq \sqrt{2}$$

$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \leq 2$$

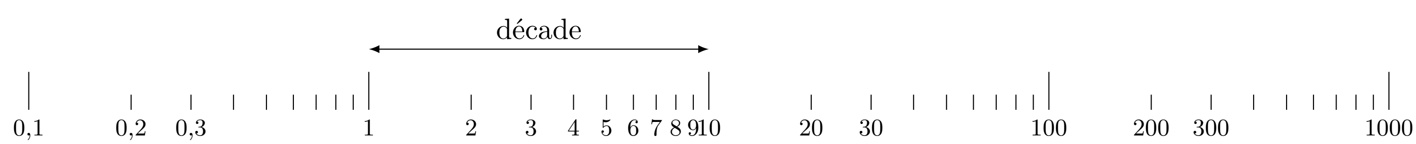
$$\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \leq 1$$

$$\boxed{\omega \leq \omega_0}$$

La bande passante du filtre RC correspond à l'ensemble des fréquences inférieures à $\omega_0 = 1/RC$.

3.3 Gain

Échelle logarithmique Pour visualiser la fonction de transfert sur de grands intervalles de fréquences, on utilise l'échelle logarithmique :



Le module de la fonction de transfert présente de grandes variations d'amplitude. Pour pouvoir les différencier, on étudie le module de la fonction de transfert en échelle logarithmique. On définit alors :

Définition. Le **gain** d'un filtre est :

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)|$$

où $\log$ est le logarithme décimal. Le gain s'exprime en **décibels** (dB).

Remarque. Le logarithme décimal est tel que $\log(10) = 1$, $\log(100) = 2$, $\log(1000) = 3$, etc. Il est définit comme :

$$\log(x) = \frac{\ln(x)}{\ln(10)}$$

Lorsque le gain diminue de 20 décibels, l'amplitude du signal de sortie est divisée par 10.

Démonstration :

$$\begin{aligned}
|\underline{H}(\omega_2)| = \frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10} \quad &\Longleftrightarrow \quad 20\log\left(|\underline{H}(\omega_2)|\right) = 20\log\left(\frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10}\right) \\
&\Longleftrightarrow \quad 20\log\left(|\underline{H}(\omega_2)|\right) = 20\log\left(|\underline{H}(\omega_1)|\right) - 20\log(10) \\
&\Longleftrightarrow \quad G_{\text{dB}}(\omega_2) = G_{\text{dB}}(\omega_1) - 20 \text{ dB}
\end{aligned}$$

La bande passante est l'ensemble des fréquences telles que $G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\max} - 3$ dB.

Démonstration : la condition de la bande passante est équivalente à :

$$20\log\left(\underline{H}\right) > 20\log\left(\frac{|H|_{\max}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$20\log\left(\underline{H}\right) > \underbrace{20\log\left(|H|_{\max}\right)}_{G_{\max}} - \underbrace{20\log\left(\sqrt{2}\right)}_{3\text{ dB}}$$

Un gain nul signifie que l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée.

Démonstration : si $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$, alors $|H|(\omega) = 1$.

Calcul du gain pour le filtre RC :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right) = -10\log\left(1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)$$

3.4 Diagramme de Bode

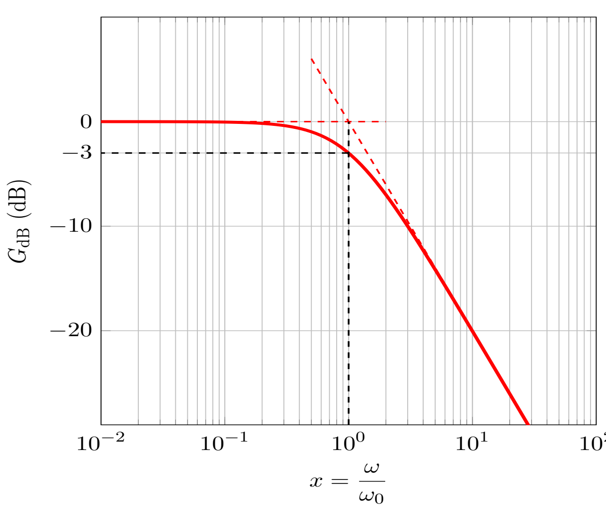
Définition. Le **diagramme de Bode** d'un filtre est le tracé

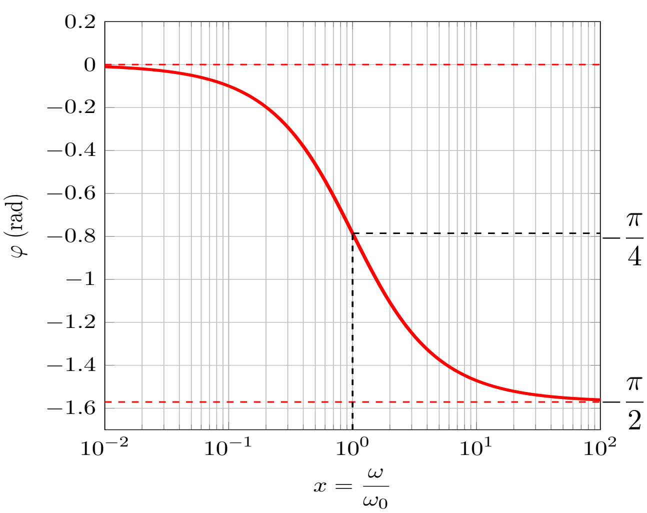
— du **gain** du filtre ;

— de la **phase** de la fonction de transfert.

Ces deux tracés sont réalisés en fonction de la pulsation ou de la fréquence représentés en **échelle logarithmique**.

Le diagramme de Bode du filtre passe-bas d'ordre RC est présenté ci-dessous :





Gain : on peut obtenir deux droites asymptotiques :

— $\omega \ll \omega_0$:

$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1$$

Donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$. Cela signifie que l'amplitude de sortie est égale à l'amplitude d'entrée.

— $\omega \gg \omega_0$:

$$1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Donc $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -20\log\left(\omega/\omega_0\right)$. Le gain diminue de 20 dB par décade : cela veut dire que si ω est multiplié par 10, le gain baisse de 20 dB.

Phase : on repart de la fonction de transfert :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Ainsi :

$$\varphi = \arg\left(\underline{H}\right) = -\arg\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\varphi = -\arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

Si $\omega \to 0$, la phase tend vers 0, si ω tend vers $+\infty$, la phase tend vers $-\pi/2$.

3.5 Lecture d'un diagramme de Bode

Il suffit de repérer le gain et la phase pour la fréquence du signal. Si $e(t) = A\cos(\omega t)$, la sortie sera :

$$s(t) = |\underline{H}(\omega)|\, A\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

On trouve $|\underline{H}(\omega)|$ en inversant la formule du gain :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(\omega)| \qquad \Longleftrightarrow \qquad |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega)/20}$$

Application *Filtrage d'un signal triangle*

Écrire le signal temporel résultant du filtrage d'un signal triangle à $\omega = \omega_0/3$ (on se limitera aux trois premières harmoniques).

On filtre le signal :

$$A\sin\left(\frac{\omega_0}{3}t\right) - \frac{A}{9}\sin(\omega_0 t) + \frac{A}{25}\sin\left(\frac{5\omega_0}{3}t\right)$$

Il faut lire graphiquement les valeurs du gain et de la phase pour chacune des fréquences :

- La pulsation du fondamental est $\omega_0/3$. À cette pulsation, on lit $G_{\mathrm{dB}} = -0{,}5$ dB, ce qui correspond à un atténuation du signal d'un facteur 0,95. On lit ensuite la phase $\varphi(\omega_0/3) = -0{,}35$ rad.
- La pulsation de la première harmonique est ω_0. À cette pulsation, on lit $G_{\mathrm{dB}} = -3$ dB, ce qui correspond à un atténuation du signal d'un facteur 0,7. On lit ensuite la phase $\varphi(\omega_0) = -\pi/4$ rad.
- La pulsation de la seconde harmonique est $5\omega_0/3$. À cette pulsation, on lit $G_{\mathrm{dB}} = -5$ dB, ce qui correspond à un atténuation du signal d'un facteur 0,56. On lit ensuite la phase $\varphi(5\omega_0/3) = -1$ rad.

Le signal après filtrage est donc :

$$0{,}95 \times A\sin\left(\frac{\omega_0}{3}t - 0{,}35\right) - 0{,}7 \times \frac{A}{9}\sin\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{4}\right) + 0{,}56 \times \frac{A}{25}\sin\left(\frac{5\omega_0}{3}t - 1\right)$$

3.6 Effet du filtre à haute fréquence

Les hautes fréquences sont atténuées.

Définition. Un signal périodique de pulsation fondamentale ω_1, filtré par un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_0 est **moyenné**. La sortie du filtre est un signal égale à la valeur moyenne du signal d'entrée.

Plus précisément, on peut écrire :

$$\underline{H} \approx \frac{1}{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}} = \frac{\omega_0}{\mathrm{j}\omega}$$

Ainsi :

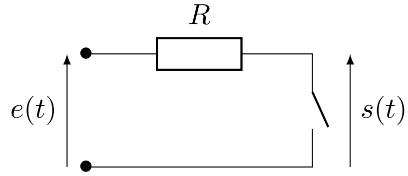
$$\underline{S} = \frac{\omega_0}{\mathrm{j}\omega}\underline{E}$$

Une division par $\mathrm{j}\omega$ équivaut à une intégration dans les réels.

Définition. Un signal périodique de pulsation fondamentale ω_1, filtré par un filtre passe-bas de pulsation de coupure ω_0 est **intégré**. La sortie du filtre est l'intégrale du signal d'entrée multiplié par ω_0.

3.7 Prévoir le comportement d'un filtre

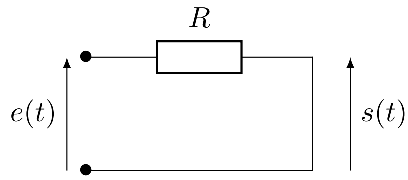
À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



Le courant est nul, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle. Ainsi, d'après la loi des mailles :

$$e(t) = s(t)$$

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



La tension aux bornes d'un fil est nulle ainsi :

$$s(t) = 0$$

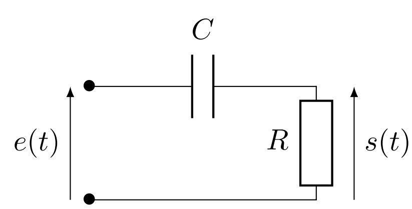
On retrouve donc le phénomène que l'on a mis en évidence :
- à basse fréquence, la tension de sortie est égale à la tension d'entrée (gain et phase nulle) ;
- à haute fréquence, la tension de sortie est nulle (module de la fonction de transfert nul).

3.8 Bilan

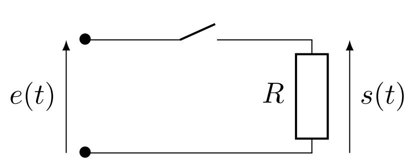
Pour l'étude d'un filtre :
- On fait l'étude à basses fréquences (le condensateur se compte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil) et à hautes fréquences (le condensateur se compte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert) ;
- on écrit le circuit avec les amplitudes complexes et les impédances des composants ;
- on fait un pont diviseur ;
- on calcule l'amplitude complexe puis le gain en dB.

4 Le filtre passe-haut du premier ordre

Les façons de réaliser un filtre passe-haut sont nombreuses. Par exemple :



► **Comportement asymptotique.** À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



Le courant est nul, donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

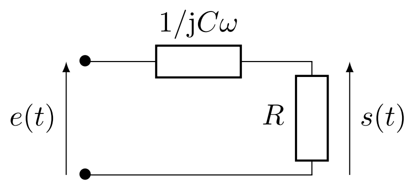
$$s(t) = 0$$

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :

On a immédiatement :

$$s(t) = e(t)$$

▶ **Fonction de transfert.**



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\underline{E} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E}$$

En notant $\omega_0 = 1/RC$:

$$\underline{S} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}\underline{E}$$

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-haut du premier ordre est

$$\underline{H}(\omega) = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

où ω_0 est la **pulsation de coupure du filtre**.

▶ **Gain.**

$$|\underline{H}(\omega)| = \frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}$$

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(\frac{\frac{\omega}{\omega_0}}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}}\right)}$$

▶ **Phase.**

$$\varphi = \arg\left(\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right) - \arg\left(1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\right)$$

$$\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)}$$

▶ **Diagramme de Bode et droite asymptotiques.**

— $\omega \ll \omega_0$:

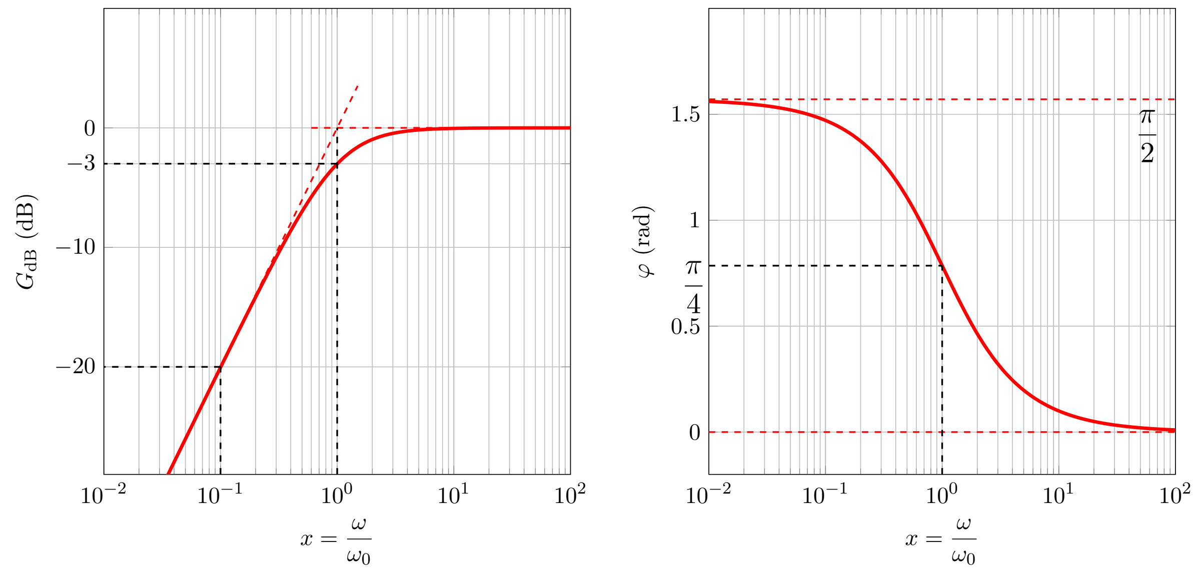
$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx 1$$

Donc $|\underline{H}(\omega)| \approx \dfrac{\omega}{\omega_0}$ et $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log(\omega/\omega_0)$. Le gain augmente de 20 dB par décade.

— $\omega \gg \omega_0$:

$$1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$$

Donc $|\underline{H}(\omega)| \approx 1$ et $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$.



Remarque. Aux basses fréquences, on peut approximer $\underline{H}$ à simplement :

$$\underline{H} = \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}$$

Ainsi :

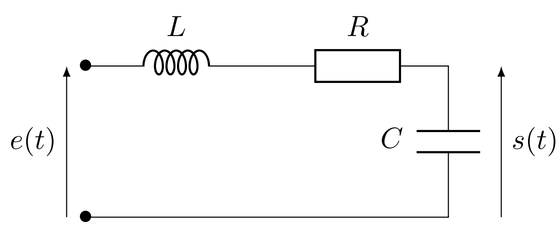
$$\underline{S} = \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0}\underline{E}$$

La sortie est la **dérivée** de la fonction d'entrée, divisée par ω_0 : le comportement du filtre est **dérivateur**.

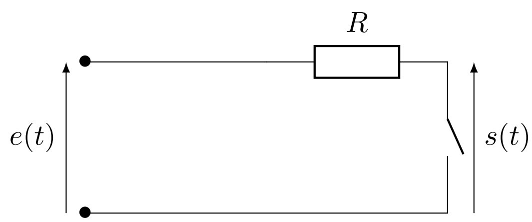
5 Deux filtres du second ordre

5.1 Le filtre passe-bas du second ordre

Les façon de réaliser un filtre passe-bas du second ordre sont nombreuses. Le plus simple est de faire ce montage :



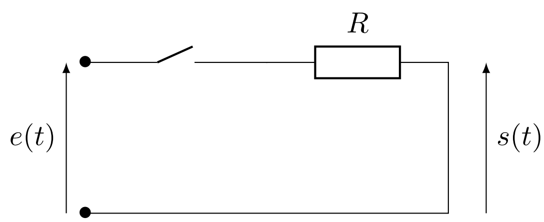
- **Comportement asymptotique.** À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



Le courant est nul (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert), donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

$$s(t) = e(t)$$

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :

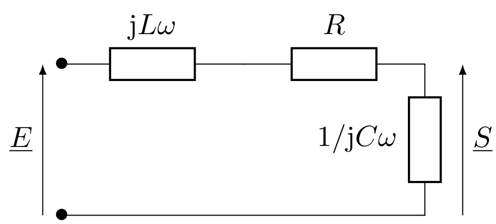


La tension aux bornes d'un fil est nulle

$$s(t) = 0$$

Les basses fréquences passent mais pas les hautes : on peut prévoir un comportement passe-bas.

- ▶ **Fonction de transfert.**



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}} \underline{E}$$

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega + (\mathrm{j}\omega)^2 \, LC} \underline{E}$$

On souhaite faire intervenir le facteur de qualité du circuit RLC série et la pulsation propre. Ainsi, on obtiendra la forme générique de la fonction de transfert du filtre passe-bande.

$$Q\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC}$$

Ainsi :

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2} \underline{E}$$

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bas du second ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q} + \left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2}$$

avec ω_0 la **pulsation de coupure du filtre** et Q le **facteur de qualité** du filtre.

- ▶ **Gain.**

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}$$

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -10 \log \left(\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2 \right)}$$

- ▶ **Diagramme de Bode**
  - — $\omega \ll \omega_0$:

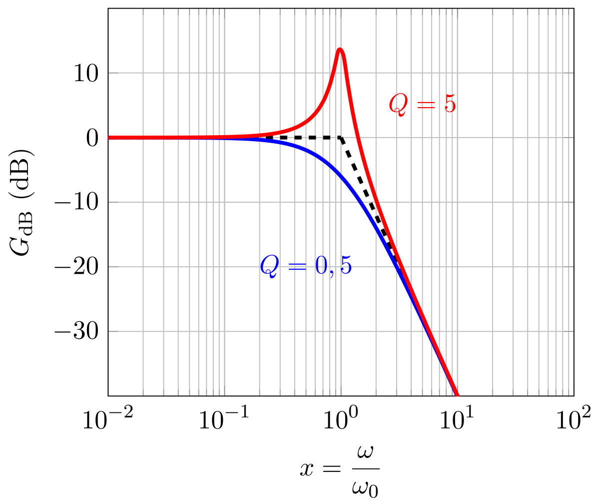
$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2 \approx 1$$

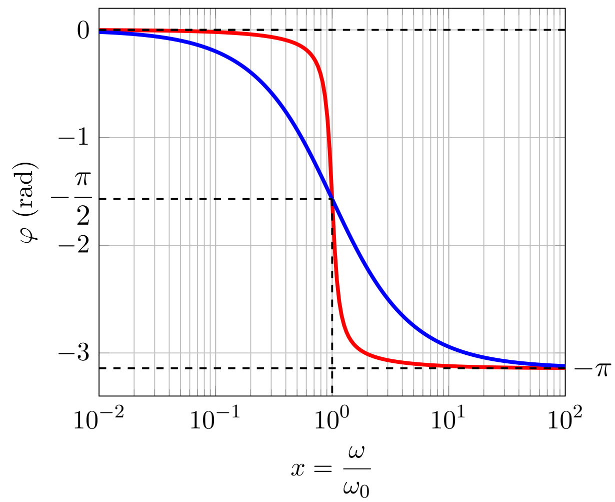
Donc $|\underline{H}(\omega)| \approx 1$ et $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 0$. Le gain est nul. La phase l'est aussi.

  - — $\omega \gg \omega_0$:

$$\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2 \approx \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4$$

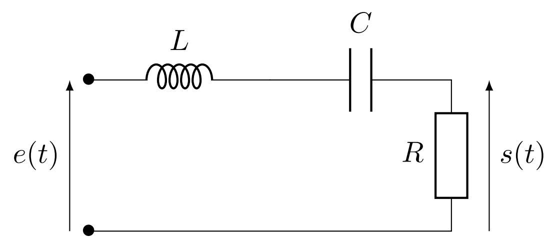
Donc $|\underline{H}(\omega)| \approx -40 \log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)$: le gain diminue de 40 dB par décade. La fonction de transfert tend à être un réel négatif : la phase tend vers $-\pi$.



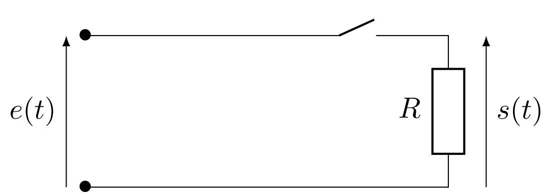


5.2 Le filtre passe-bande du second ordre

Les façon de réaliser un filtre passe-bande sont nombreuses. Le plus simple est de faire ce montage :



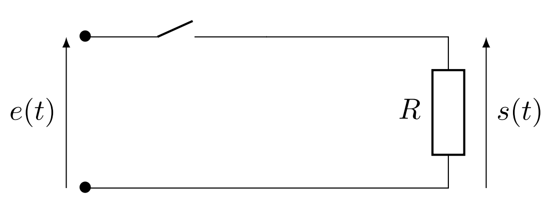
- **Comportement asymptotique.** À basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :



Le courant est nul (le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert), donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

$$s(t) = 0$$

À haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert, ainsi, on peut reproduire le circuit ainsi :

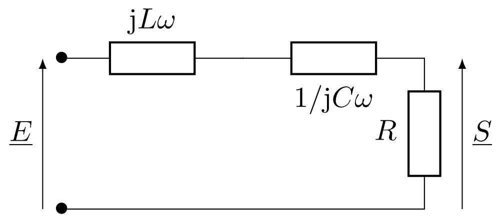


Le courant est nul (la bobine se comporte comme un interrupteur ouvert), donc la tension aux bornes de la résistance est nulle :

$$s(t) = 0$$

On voit que ni les hautes fréquences, ni les basses fréquences ne passent : on peut prévoir un comportement passe-bande.

- **Fonction de transfert.**



On applique la formule du pont diviseur de tension :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}\underline{E}$$

On divise par R :

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega + \frac{1}{\mathrm{j}RC\omega}}\underline{E}$$

On souhaite faire intervenir le facteur de qualité du circuit RLC série et la pulsation propre. Ainsi, on obtiendra la forme générique de la fonction de transfert du filtre passe-bande.

$$Q\omega_0 = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{RC} \qquad \text{et} \qquad \frac{Q}{\omega_0} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}\sqrt{LC} = \frac{L}{R}$$

Ainsi :

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{Q}{\omega_0}\omega + \frac{Q\omega_0}{\mathrm{j}\omega}}\underline{E}$$

Donc, comme $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$:

$$\underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{E}$$

La **forme canonique** de la fonction de transfert d'un filtre passe-bande du second ordre est

$$\underline{H}(\omega) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

avec ω_0 la **pulsation de coupure du filtre** et Q le **facteur de qualité** du filtre.

▶ **Gain.**

$$|\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}}(\omega) = -10\log\left(1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2\right)}$$

▶ **Diagramme de Bode.**

— $\omega \ll \omega_0$:

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{-\mathrm{j}Q\frac{\omega_0}{\omega}} = \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q}$$

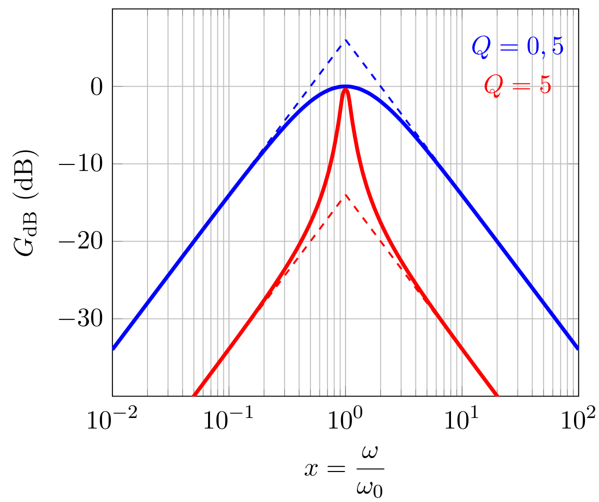
Donc $|\underline{H}(\omega)| \approx \dfrac{\omega}{\omega_0 Q}$ et $G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log\left(\dfrac{\omega}{\omega_0 Q}\right)$. Le gain croît de 20 dB par décade. La phase tend vers $\pi/2$ quand ω tend vers 0.

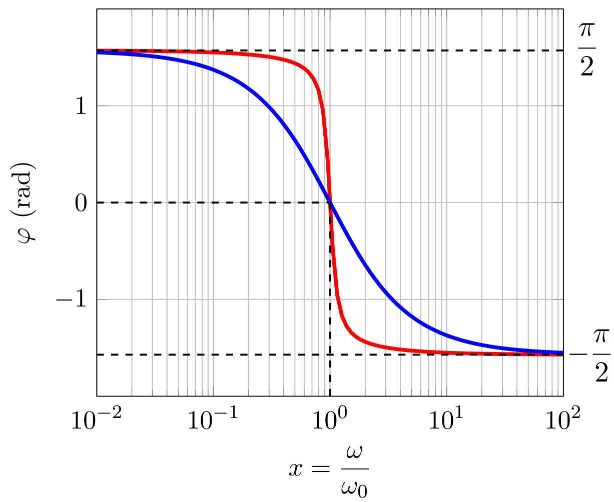
— $\omega \gg \omega_0$:

$$\underline{H}(\omega) \approx \frac{1}{\mathrm{j}Q\frac{\omega}{\omega_0}} = -\frac{\mathrm{j}\omega_0}{\omega Q}$$

Donc $|\underline{H}(\omega)| \approx -20\log\left(\dfrac{Q\omega}{\omega_0}\right)$: le gain diminue de 20 dB par décade. La phase tend vers $-\pi/2$ quand ω tend vers $+\infty$.

— $\omega = \omega_0$: $\underline{H} = 1$: le gain est nul et la phase aussi.

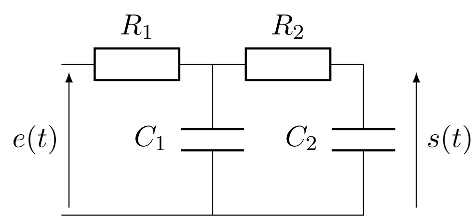




Remarque. On obtient un comportement passe-haut du second ordre en prenant la tension aux bornes de la bobine.

6 Filtres en cascade

On met en cascade deux filtres RC passe-bas du premier ordre :



On pourrait attendre que la fonction de transfert soit :

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2 = \frac{1}{1 + \mathrm{j}R_1C_1\omega} \frac{1}{1 + \mathrm{j}R_2C_2\omega}$$

Mais, le calcul exact de la fonction de transfert donne :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}R_2C_2\omega + \mathrm{j}R_1C_2\omega + \mathrm{j}R_1C_1\omega + (\mathrm{j}\omega)^2 R_1C_1R_2C_2}$$

Lorsque l'on place des filtres en cascade, la fonction de transfert totale **n'est pas** le produit des fonctions de transfert de chaque étage.

Pour appliquer le pont diviseur de tension sur le premier RC, il faut que le condensateur C_1 et la résistance R_1 soient parcourus par le même courant, que le courant partant dans la deuxième branche soit très faible devant le courant de la première. Cela revient à ce que l'impédance du condensateur soit très faible devant celle de l'ensemble R_2C_2.

Pour que l'on puisse faire le produit des fonctions de transfert, il faut que l'impédance de sortie du premier filtre soit faible devant l'impédance d'entrée du second, de sorte à négliger le courant dévié par le second étage.

En pratique, on emploie souvent des montages utilisant des **amplificateurs opérationnels** qui ont une très grande impédance d'entrée. On peut par exemple intercaler un montage suiveur entre les deux filtres RC.