Sujet 1

I Bombe nucléaire

Lorsqu'il est percuté par un neutron, l'uranium ^{235}U peut se décomposer en atomes radioactifs et ré-émettre plusieurs neutrons. Ce mécanisme permet d'envisager l'existence de réactions en chaines (contrôlées dans un réacteur **ou** non contrôlées dans une bombe). Soit $n(M,t)$ le nombre de neutron par unité de volume et j_{th} le vecteur flux de neutrons. n est solution de l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\nu - 1}{\tau} n$$

ν est un coefficient adimensionné caractérisant le nombre de neutrons efficaces produit par chaque fission, d'où le facteur $\nu - 1$ puisque par ailleurs chaque fission consomme un neutron pour être initiée. On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive. On étudie une sphère d'^{235}U de rayon R et suppose que la diffusion des neutrons dans la sphère s'effectue avec un coefficient de diffusion D.

On cherche dans le cas général une solution de la forme $n(r,t) = f(r)g(t)$.

1. Montrer que l'équation proposée peut se réécrire :

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = D\frac{\Delta f}{f} - \frac{1-\nu}{\tau}$$

2. En déduire que g est de la forme : $g(t) = g_0 e^{at}$ où g_0 et a sont des constantes qu'on ne demande pas de calculer pour le moment. À quelle condition sur a obtiendra-t-on une réaction en chaine ?

3. Montrez que la fonction $r \to rf(r)$ est solution d'une équation différentielle classique.

4. Dans la sphère, $n(r,t)$ s'annule à tout instant en $r = R$ mais ne s'annule pas à l'intérieur de la sphère. On pose

$$k = \sqrt{\frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right)} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right) > 0$$

   Calculer $f(r)$ à une constante multiplicative près notée f_0.

5. Exprimez le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir une réaction en chaine, en fonction de ν, D et τ.

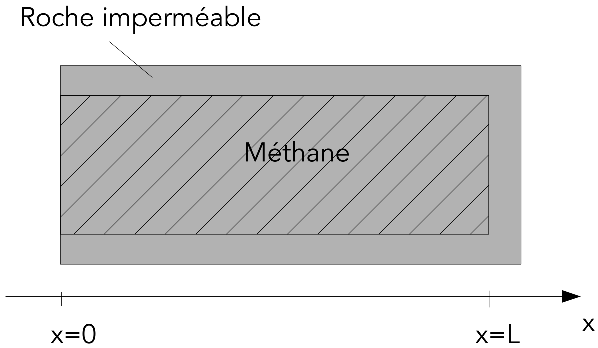
6. On donne pour l'uranium 235 $\rho = 19 \times 10^3\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$, $\pi^2 D\tau = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$ et $\nu = 2{,}5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c ainsi que de la masse critique correspondante.

Pour cette géométrie sphérique, on a $\Delta n = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rn)$

Sujet 2

I Diffusion de méthane dans un gisement

On considère un gisement de méthane de volume V cylindrique de section S et de longueur L fermé sur sa surface latérale et à l'une de ses extrémités par de la roche imperméable. Le méthane occupe le volume qV où q est la porosité du milieu. On note $P(x,t)$ la pression du méthane et $\mu(x,t)$ sa masse volumique. La température est constante et uniforme et $P(x=0,t) = P_0$ est constante.



La masse de gaz traversant la surface S d'abscisse x pendant la durée dt est proportionnelle au gradient de pression $\delta m = -kS\dfrac{\partial P}{\partial x}dt$ où k est un coefficient dépendant de la viscosité, de la masse volumique du gaz et de la nature du gisement.

1. Donner la relation entre μ et P.

2. Déterminer, en fonction de q, S, μ et dx, la masse de méthane contenue à la date t dans le volume élémentaire contenu entre x et $x + \mathrm{d}x$. Montrer que la pression vérifie $D\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial P}{\partial t}$. Exprimer D en fonction des données.

3. Dans quelle situation trouve-t-on une équation analogue ?

4. Au regard de l'énoncé, que peut-on dire de $\dfrac{\partial P}{\partial x}(L)$

5. On cherche une solution de la forme $P(x,t) = P_0 + P_1 \sin(ax)e^{-\frac{t}{\tau}}$. Déterminer τ. Déterminer les valeurs possibles de a en fonction de L. On prend a égal à sa valeur minimale. Faire l'application numérique pour τ.

6. Déterminer la masse $m(t)$ de méthane contenu dans le gisement à la date t.

Données : $D = 3{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{U \cdot S \cdot I \cdot}$; $q = 0{,}15$; $L = 5{,}0\,\mathrm{km}$; masse molaire du méthane $16{,}0\,\mathrm{g/mol}$.

Sujet 3

I Diffusion dans une sphère radioactive

Dans un réacteur nucléaire fonctionnant en régime stationnaire, on considère un boulet sphérique de rayon R jouant le rôle de source de neutrons. Un processus de production fait apparaître σ neutrons par unité de volume et de temps. On admet que σ est constant à l'intérieur de la sphère et nul à l'extérieur. On notera D la constante de diffusion des neutrons dans le réacteur.

1. Établir l'équation stationnaire vérifiée par $n(r)$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

2. La résoudre complètement (*il faudra prendre en compte plusieurs conditions limites à déterminer*)

3. Donner une représentation graphique de $n(r)$ et de la norme du vecteur densité de courant de particule $j_n(r)$ lorsque r varie de 0 à $+\infty$.

On donne le laplacien de $n(r,t)$ en coordonnées sphériques : $\Delta n = \frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right)$

Sujet 4

I Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5\,\mathrm{mm}$, et de longueur L jouant le rôle d'une ailette de refroidissement.
En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330\,\mathrm{K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300\,\mathrm{K}$. On appelle $\lambda = 400\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12\,\mathrm{W} \cdot \mathrm{m}^{-2} \cdot \mathrm{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$
On considère dans un premier temps la barre quasi-infinie.

1. Dessinez un schéma correspondant à la situation et dans lequel une tranche d'épaisseur dx sera mise en valeur. Quelle est la section de cette tranche ? Et sa surface latérale ?

2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ dans la barre en régime permanent.

3. La résoudre en tenant compte de deux conditions aux limites qu'on précisera.

4. Calculez δ. Que représente cette grandeur ?

5. On considère maintenant la tige de longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$. Peut-on toujours la considérer infinie ? Pourquoi ?

6. En déduire le nouveau jeu de conditions limites permettant de résoudre le problème.