Khôlles MPSI3 – semaine 4

Sujet 1 – corrigé

I Question de cours

Démontrer les relations des ponts diviseurs de tension et de courant.

II Doublet de Huygens

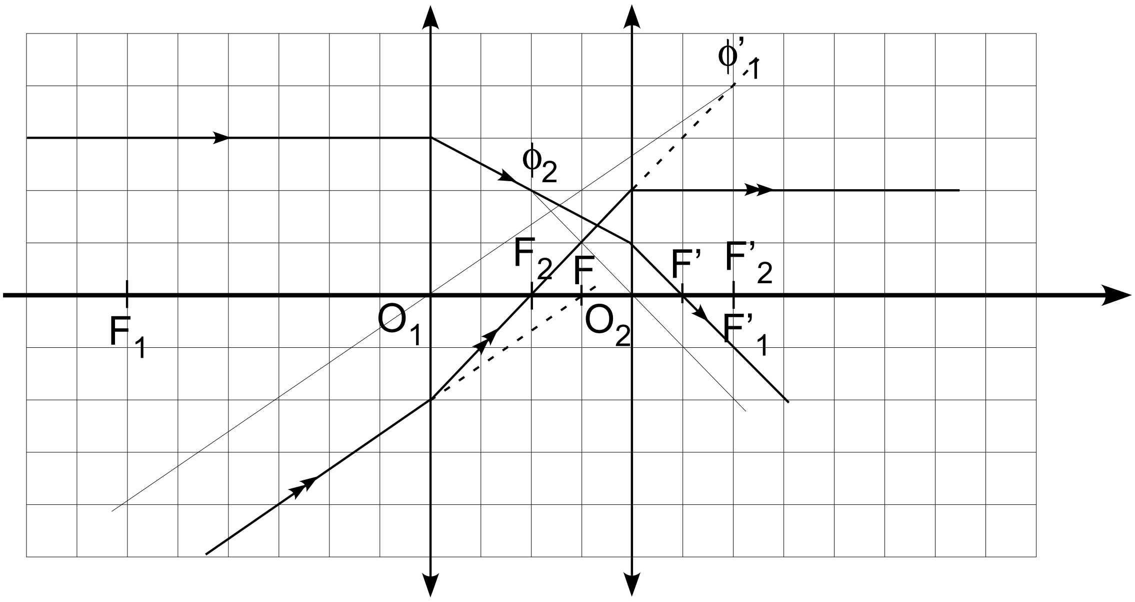
Un doublet de lentilles non accolées est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre optique O_1, de distance focale f_1' et d'une autre lentille convergente L_2 de centre optique O_2, de distance focale f_2'. On note $e = \overline{O_1O_2} > 0$. Un doublet de Huygens est de type :

$$f_1' = 3a \qquad e = 2a \qquad f_2' = a$$

Pour l'application numérique, on prendra $a = 2{,}0\,\text{cm}$. On note $\Delta = \overline{F_1'F_2}$.

1. Déterminer par construction géométrique les foyers objet et image, notés F et F', du doublet optique. Sur le schéma, on prendra un carreau pour $1{,}0\,\text{cm}$.

Réponse :
Sur le schéma, on trouve : $\overline{F_1F} = 9{,}0\,\text{cm}$ et $\overline{F_2'F'} = -1{,}0\,\text{cm}$



2. Exprimer $\overline{F_1F}$ et $\overline{F_2'F'}$ en fonction de e, f_1' et f_2'. Faire l'application numérique. Conclure.

Réponse :
Position du foyer objet F : $F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$
On applique la relation de conjugaison de Newton sur la lentille L_1 :

$$\overline{F_1'F_2} \cdot \overline{F_1F} = -f_1'^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F_1F} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F_1'F_2}} = \frac{-f_1'^2}{\Delta}$$

Or $\Delta = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e - f_1' - f_2'$, donc

$$\boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1'^2}{f_1' + f_2' - e} \quad ; \quad \overline{F_1F} = \frac{9a^2}{3a + a - 2a} = 9{,}0\,\text{cm}}$$

Position du foyer image F' : $A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$
On applique la relation de conjugaison de Newton sur la lentille L_2 :

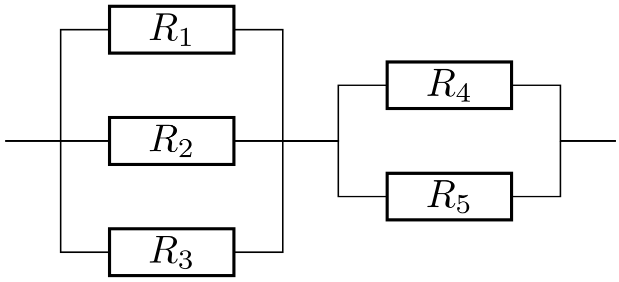
$$\overline{F_2'F'} \cdot \overline{F_2F_1'} = -f_2'^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{-\overline{F_1'F_2}} = \frac{f_2'^2}{\Delta}$$

$$\boxed{\overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{f_1' + f_2' - e} \quad ; \quad \overline{F_2'F'} = \frac{-a^2}{3a + a - 2a} = -1{,}0\,\text{cm}}$$

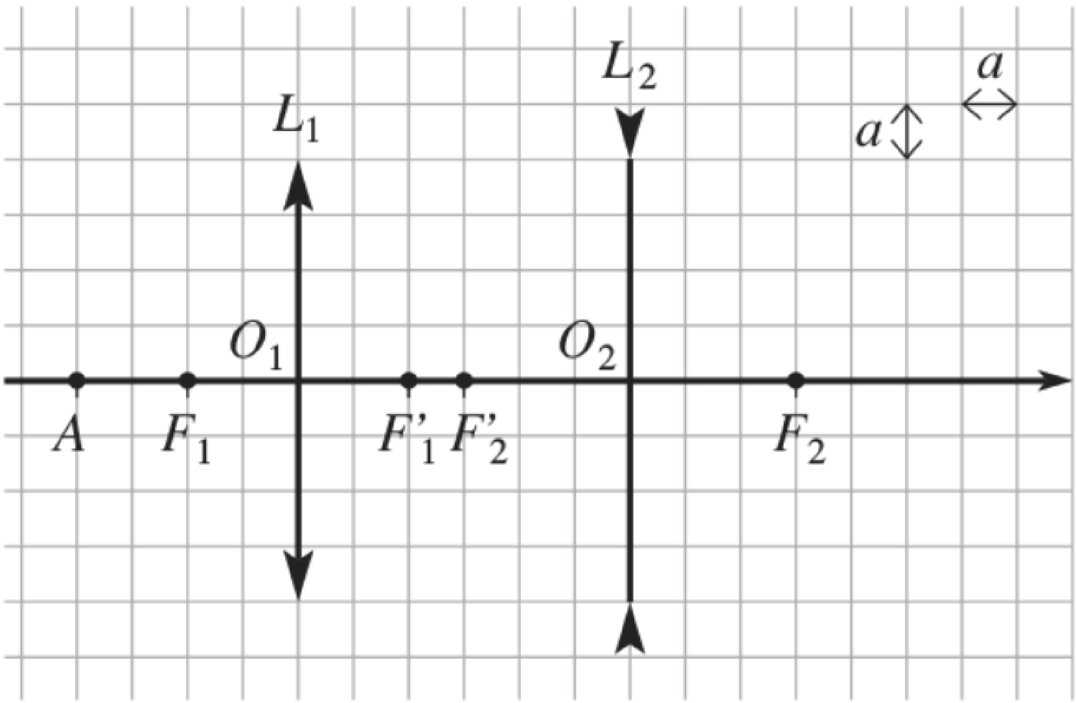
Sujet 2 – corrigé

I Question de cours

Démontrer les relations des associations séries et parallèles et exprimer la résistance équivalente du circuit ci-contre.



II Doublet



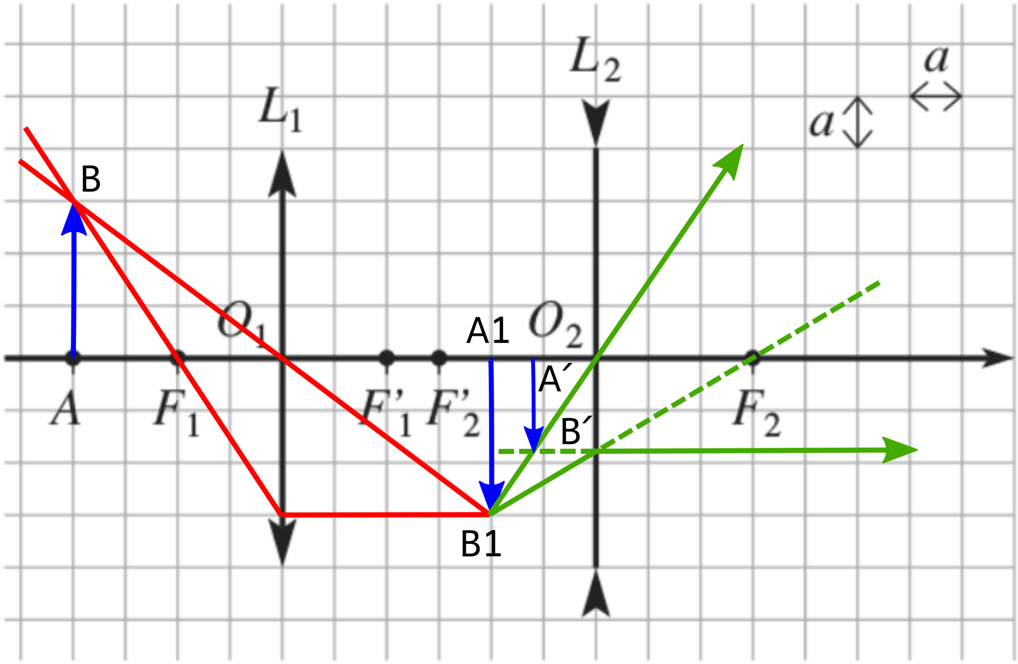
Données. Relations de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad ; \qquad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

La distance focale image est notée f' alors que la distance focale objet est notée $f = -f'$.

1. Déterminer, par construction géométrique, la position de l'image A' de l'objet A à travers le système de deux lentilles L_1 et L_2. On précisera la position de l'image intermédiaire A_1 (image de A par L_1 ainsi que sa nature (réelle ou virtuelle)).

   Réponse :
   La position de A' se trouve à une distance un peu supérieure à a, en amont de O_2.



2. Vérifier le résultat en utilisant la relation de conjugaison.

Réponse :
Position de la première image A_1 :
On note $\overline{O_1A} = -4a$ la distance algébrique entre le centre optique de la première lentille et l'objet. La relation de conjugaison pour L_1 s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f_1'}$$

D'où :

$$\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A}f_1'}{\overline{O_1A} + f_1'} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{(-4a)(2a)}{-4a+2a} = 4a$$

Position de la seconde image A' :
La relation de conjugaison pour L_2 s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f_2'}$$

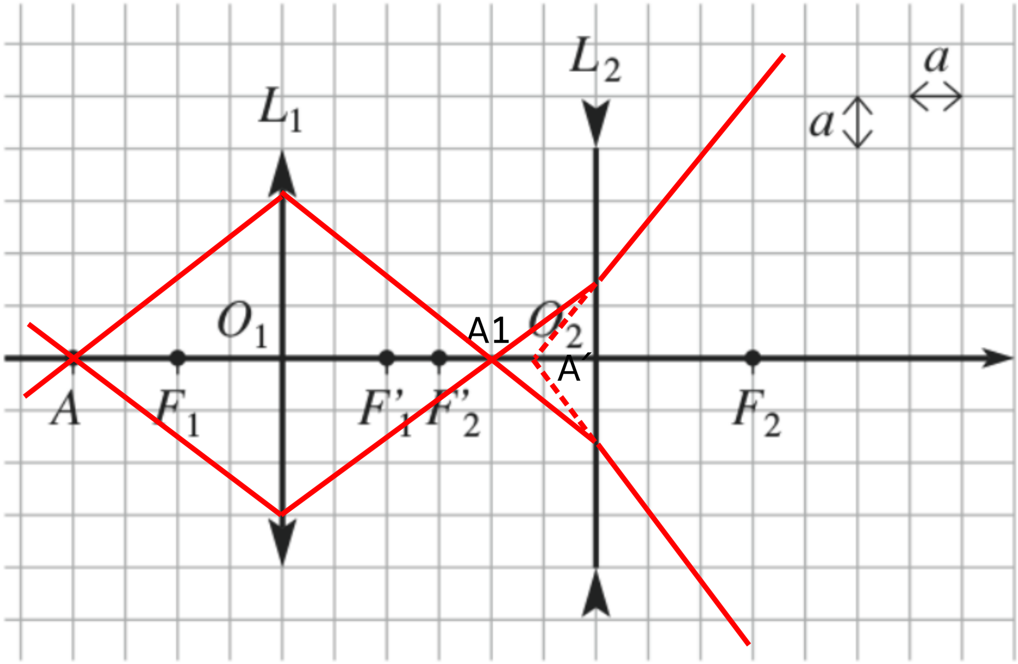
D'où :

$$\overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1}f_2'}{\overline{O_2A_1} + f_2'} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{(4a-6a)(-3a)}{-2a-3a} = \frac{6}{5}a$$

Où la relation $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}$ a été utilisée lors de l'application numérique. Le résutlat confirme la position approximativement obtenue lors du tracé.

3. Tracer un faisceau de rayons issu de A.

Réponse :
Les rayons sont obtenus en connaissant la position de l'image intermédiaire A_1 et en assurant que les rayons sortant de L_2 proviennent de l'image virtuelle A'.



L_2
a
a
L_1
O_1
A1
O_2
A´
A
F_1
F'_1
F'_2
F_2

Sujet 3 – corrigé

I Question de cours

Présenter et démontrer les caractéristiques d'un condensateur et d'une bobine : relation courant-tension (sans démonstration pour la bobine), continuité, régime permanent, énergie stockée.

II Lunette astronomique

On considère une lunette astronomique formée d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_1' = \overline{O_1F_1'}$ et d'un oculaire constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_2' = \overline{O_2F_2'}$. Ces deux lentilles ont même axe optique Δ. On rappelle qu'un œil normal voit un objet sans accommoder quand celui-ci est placé à l'infini. On souhaite observer la planète Mars, qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent 2α, symétriquement par rapport à l'axe optique de la lunette.
Pour voir la planète nette à travers la lunette, on forme un système afocal.

1. Définir un système afocal. Que cela implique-t-il pour les positions des lentilles ?

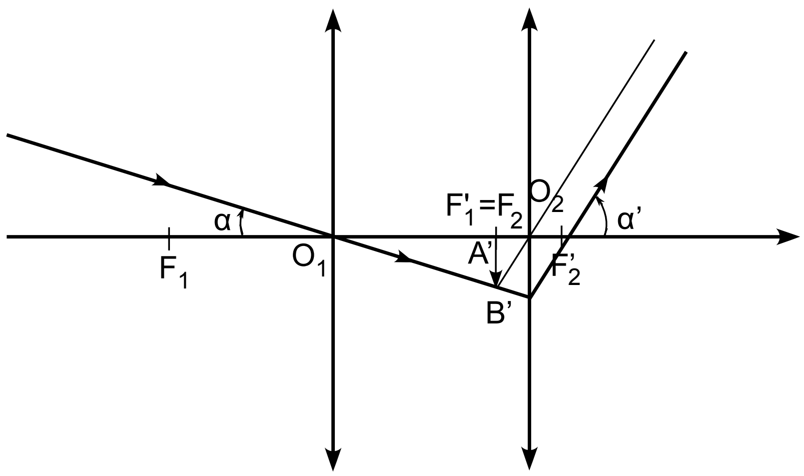
   Réponse :
   Un système est dit afocal si ses foyers sont rejetés à l'infini. Un objet à l'infini donne alors une image à l'infini.
   $$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$
   L'image d'un objet à l'infini par la lentille L_1 est le foyer image F_1'. Si on veut que l'image de F_1' par la lentille L_2 soit à l'infini, il faut que l'objet soit au foyer objet de cette lentille.

2. On note α l'angle sous lequel est vu le bord extrême de la planète Mars. Cet objet est supposé être à l'infini. Dans le cas où $f_1' = 5f_2'$, faire une construction graphique. On placera $\overline{A'B'}$ l'image intermédiaire sur ce schéma.

   On note α' l'angle orienté que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette par rapport à l'axe optique.

   Placer l'angle α' sur la figure précédente. L'image est-elle droite ou renversée ?

   Réponse :
   L'image est renversée car l'angle α' n'est pas orienté dans le même sens que α.



3. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \alpha'/\alpha$. Exprimer G en fonction de f_1' et de f_2'. Commenter son signe. On rappelle que les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss.

Réponse :
Les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss, donc les angles α et α' sont petits.

On exprime la tangente de l'angle α dans le triangle $O_1A'B'$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} \sim \alpha < 0$$

On exprime la tangente de l'angle α' dans le triangle $O_2A'B'$:

$$\tan(\alpha') = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}} \sim \alpha' > 0$$

On en déduit le grossissement : $\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'} < 0}$.

Le signe est cohérent avec le fait que α' et α sont de signe contraire.

On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3 de distance focale $f_3' = \overline{O_3F_3'}$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

4. Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?

Réponse :
La lentille L_3 doit conjuguer F_1' et F_2.

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_3} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

5. On appelle γ_3, le grandissement de la lentille L_3. En déduire $\overline{O_3F_1'}$ en fonction de f_3' et γ_3.

Réponse :
<u>Méthode 1 :</u>
On utilise la relation de Newton pour le grandissement sur L_3 :

$$\gamma_3 = \frac{f_3'}{\overline{F_3F_1'}} = \frac{f_3'}{f_3' + \overline{O_3F_1'}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_3 \cdot (f_3' + \overline{O_3F_1'}) = f_3'$$

$$\boxed{\overline{O_3F_1'} = f_3'\left(\frac{1-\gamma_3}{\gamma_3}\right)}$$

<u>Méthode 2 :</u>
Le grandissement est défini par

$$\gamma_3 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}}$$

De plus, on peut appliquer la relation de conjugaison de Descartes à la lentille L_3 :

$$\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'}$$

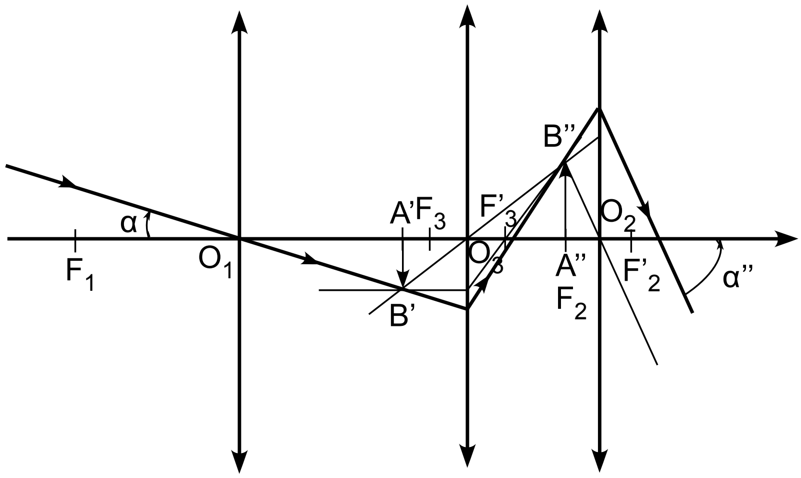
On peux alors combiner ces résultats pour obtenir :

$$\frac{1}{\gamma_3\overline{O_3F_1'}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_3F_1'}}\left(\frac{1}{\gamma_3} - 1\right) = \frac{1}{f_3'} \Rightarrow \overline{O_3F_1'} = f_3'\left(\frac{1-\gamma_3}{\gamma_3}\right)$$

et le résultat est bien identique.

6. Faire un tracé de rayons de cette situation. On appellera $\overline{A'B'}$ la première image intermédiaire et $\overline{A''B''}$ la seconde image intermédiaire. Déterminer graphiquement ces images intermédiaires, ainsi que les positions des foyers objet F_3 et image F_3' de la lentille L_3.

Réponse :



7. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de γ_3, f_1' et f_2'. On notera α'' l'angle sous lequel est vue l'image finale que l'on placera sur la figure précédente.

Réponse :

Par définition $G' = \dfrac{\alpha''}{\alpha}$. On exprime ces angles dans l'approximation des petits angles (conditions de Gauss) :

$$\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \quad ; \quad \alpha'' = \frac{\overline{A''B''}}{-f_2'}$$

Par définition $\gamma_3 = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$

On en déduit le grossissement : $\boxed{G' = -\dfrac{f_1'}{f_2'} \cdot \gamma_3 = \gamma_3 \cdot G}$

L_3 conjugue un objet réel et une image réelle donc $\gamma_3 < 0$, donc $G' > 0$. On ne peut pas conclure sur le fait que $G' > |G|$ car on ne sait pas si $|\gamma_3| > 1$ (cela dépend de la valeur de f_3').

Sujet 4 – corrigé

I Téléobjectif d'appareil photographique

Modélisons un téléobjectif d'appareil photo par une association de lentilles suivie d'un capteur CCD de taille $15{,}8 \times 23{,}6\,\text{mm}^2$. La lentille d'entrée est convergente, de vergence $5{,}0\,\delta$. Une seconde lentille est présente entre la lentille d'entrée et le capteur, à 15,5 cm de la lentille d'entrée. Elle est divergente, de vergence $-20\,\delta$. La distance entre la lentille d'entrée de l'objectif et le capteur, notée habituellement Δ, est appelée encombrement du téléobjectif. Cet appareil est utilisé pour photographier un chamois de hauteur 80 cm au garot situé à 150 m du photographe.

1. En l'absence de la lentille divergente, quelle serait la taille de l'image du chamois sur le capteur? Commenter.

   Réponse :
   Notons, dans toute la suite, D la distance entre le photographe et le chamois, et d la distance entre les deux lentilles du téléobjectif.

   Le chamois est à une distance du photographe bien supérieure à la focale de la lentille d'entrée (L_1), qui vaut $f'_1 = 1/V_1 = 20\,\text{cm}$: il est donc à l'infini optique de cette lentille. On peut donc légitimement faire l'approximation que la distance entre le centre optique de la lentille d'entrée et le capteur est égale à f'_1. Par conséquent, le grandissement de la lentille d'entrée vaut

   $$\gamma_1 = \frac{f'_1}{D} = 1{,}3 \times 10^{-3}$$

   La hauteur du chamois sur le capteur CCD est donc de l'ordre de 1,1 mm , ce qui signifie que moins de 10% de la hauteur de la photo est occupée par le chamois...

2. Quelle est en fait la taille de l'image formée par le système composé ?

   Réponse :
   Le téléobjectif complet est un système optique composé, où l'image formée par la lentille convergente (L_1) sert d'objet à la lentille divergente L_2. Comme $f'_1 > d$, il s'agit d'un objet virtuel situé à une distance $\overline{O_2A} = f'_1 - d = 4{,}5\,\text{cm}$ avant le centre optique de la lentille divergente. Utilisons la formule de grandissement avec origine au foyer objet. On a alors besoin de

   $$\overline{F_2A} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2A} = -f_2 + \overline{O_2A}$$

   On en déduit alors le grandissement dû à la deuxième lentille selon

   $$\gamma_2 = \frac{f_2}{-f_2 + \overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2\overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2(f'_1 - d)} = 10$$

   Remarque : Attention aux signes : la vergence est égale à l'opposée de l'inverse de la distance focale objet, soit ici $V_2 \times f_2 = -1$!

   Le grandissement du système optique complet est égal au produit des grandissements des deux lentilles le composant. Par conséquent,

   $$\gamma = \gamma_1\gamma_2 = -\frac{f'_1}{D\,[1 + V_2(f'_1 - d)]} = -1{,}3 \times 10^{-2}$$

   et on déduit que l'image du chamois formée par le téléobjectif mesure 10,6 mm , ce qui peut tout à fait correspondre à une photo bien cadrée compte tenu de la taille du capteur.

3. Quel est alors l'encombrement du téléobjectif?

Réponse :
Pour que l'image soit nette, le capteur doit être placée là où l'image finale du chamois est formée. Puisque l'on connaît tant le grandissement γ_2 que la distance $\overline{O_2A}$, on déduit de la formule de grandissement avec origine au centre que le capteur doit être placé à une distance

$$d' = \gamma_2 \overline{O_2A} = 45\,\mathrm{cm}$$

en aval de la lentille divergente L_2. L'encombrement du téléobjectif vaut donc

$$\Delta = d + d' = 60\,\mathrm{cm}$$

4. Quelle serait la distance focale d'une lentille convergente qui donnerait à elle seule une image de la même dimension que la précédente? En déduire ce que vaudrait l'encombrement du téléobjectif dans ce cas.

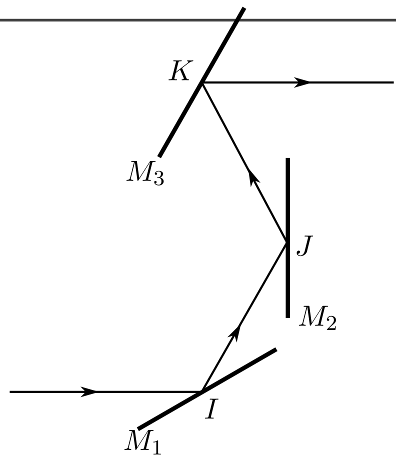
Réponse :
La lentille divergente permet de multiplier le grandissement par un facteur 10. En utilisant directement le résultat de la question 1, il faudrait que la lentille L_1 ait une focale dix fois supérieure, soit 2,0 m.

Compte tenu des distances mises en jeu, l'objectif du capteur doit être placé pratiquement dans le plan focal image de la lentille L_1. L'encombrement d'un tel objectif vaudrait donc 2,0 m , ce qui serait très peu pratique à manipuler.

II Déviation par trois miroirs ($\star$)

Un rayon lumineux se propageant dans l'air est réfléchi par trois miroirs M_1, M_2 et M_3. Ces miroirs sont perpendiculaires à un plan choisi comme plan de la figure.
On note I, J, K les points d'incidence du rayon lumineux sur les miroirs M_1, M_2 et M_3. On sait que les angles d'incidence sur les miroirs M_1 et M_2 valent tout deux 60°.

On souhaite déterminer l'orientation du miroir M_3 pour que, après les trois réflexions, le rayon réfléchi définitif ait la même direction et le même sens que le rayon incident.

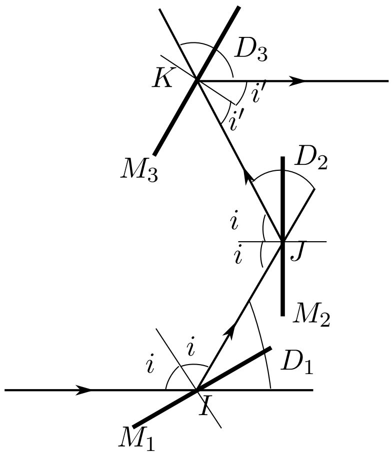


On rappelle que la déviation d'un rayon est l'angle partant rayon incident, s'il avait continué sans rencontrer d'obstacle et le rayon transmi ou réfléchi.

5. Refaire le schéma et placer les différents angles d'incidence, ainsi que les déviations successives D_1, D_2 et D_3 subies par le rayon lumineux sur chaque miroir.

On notera i l'angle d'incidence au niveau des miroirs M_1 et M_2 et i' l'angle d'incidence au niveau du miroir M_3. Les angles i et i' sont des angles géométriques, donc positifs. Les déviations D_1, D_2 et D_3 sont définies dans l'intervalle $]0,\pi[$.

Réponse :



6. Exprimer la déviation totale D en fonction de i et i'.

Réponse :
On exprime chaque déviation :

$$D_1 = D_2 = \pi - 2i \quad \text{et} \quad D_3 = \pi - 2i'$$

On en déduit la déviation D en faisant attention que la troisième réflexion entraine une rotation dans le sens horaire, donc

$$\begin{aligned} D &= D_1 + D_2 - D_3 \\ &= \pi - 4i + 2i' \end{aligned}$$

7. En déduire l'expression de i' pour que le rayon émergent ait même direction et même sens que le rayon incident. Donner sa valeur.

Réponse :

On veut que $D = 0$, on en déduit $\boxed{i' = 2i - \frac{\pi}{2} = \frac{\pi}{6}}$