Correction du TD

I Collision entre deux voitures

1) Notons M_1 et M_2 les points matériels représentant chacun une des deux voitures. On se limite au mouvement unidimensionnel selon l'axe x et on notera $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions respectives de M_1 et M_2 selon cet axe. Initialement, $x_1(t=0) = d = 20\,\mathrm{m}$ et $x_2(t=0) = 0$.

   La voiture M_1 de Xari subit l'accélération (qui est négative donc c'est une décélération) constante a_1. Ainsi, par intégration successive,

   $$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + \alpha t + \beta$$

   Avec α et β deux constantes d'intégration. En considérant par ailleurs une vitesse initiale v_0 et une position initiale d, on obtient :

   $$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_0t + d$$

   Pour le second véhicule, il faut décomposer le mouvement en deux étapes successives :
   - pour $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$, $a = 0$. La position initiale étant par ailleurs nulle et la vitesse initiale étant égale à v_0, il vient, pour $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$:

     $$x_2(t) = v_0t$$

   - pour $t > 1$, l'accélération vaut a_2 constante. Notons par ailleurs $t_2 = 1\,\mathrm{s}$. On a par intégration :

     $$v_2(t) = a_2t + \gamma$$

     Avec γ une constante à déterminer. Or, par continuité de la vitesse, $v_2(t = t_2) = v_0$. Ainsi,

     $$v_2(t) = a_2(t - t_2) + v_0$$

     Intégrons une nouvelle fois, avec δ une nouvelle constante d'intégration :

     $$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0t + \delta$$

     En utilisant le fait que $x(t_2) = v_0t_2$, il vient finalement

     $$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0t$$

2) Il y a contact à l'instant t_c tel que

   $$x_1(t_c) = x_2(t_c)$$

   Supposons d'abord le contact sur l'intervalle $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$. Il faut alors résoudre :

   $$\frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + \cancel{v_0t_c} + d = \cancel{v_0t_c}$$

   $$\Leftrightarrow \boxed{t_c = \sqrt{\frac{-2d}{a_1}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20\,\mathrm{m} \\ a_1 = -30{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{cases}$$

   $$\text{A.N. :} \quad \boxed{t_c = 1{,}41\,\mathrm{s} > 1\,\mathrm{s}}$$

   Cette solution est donc exclue puisqu'elle n'est pas en accord avec notre hypothèse initiale $t \in [0\ ;\ 1]\,\mathrm{s}$.

Supposons maintenant $t_c > 1\,\mathrm{s}$. Il faut résoudre :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + \cancel{v_0t_c} + d &= \frac{1}{2}a_2(t_c - t_2)^2 + \cancel{v_0t_c}\\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + d &= \frac{1}{2}a_2\left({t_c}^2 - 2t_2t_c + {t_2}^2\right)\\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2)\,{t_c}^2 + a_2t_2t_c + d - \frac{1}{2}a_2{t_2}^2 &= 0\end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant Δ est tel que

$$\boxed{\Delta = (a_2t_2)^2 - 2(a_1 - a_2)\left(d - \frac{1}{2}a_2{t_2}^2\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20\,\mathrm{m}\\ a_1 = -30{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}\\ a_2 = -20{,}0\,\mathrm{m\,s^{-2}}\\ t_2 = 1\,\mathrm{s}\end{cases}$$

$$\text{A.N. :}\quad \boxed{\Delta = 600\,\mathrm{m\,s^{-2}}}$$

$$\text{D'où}\quad t_{c,\pm} = \frac{-a_2t_2 \pm \sqrt{\Delta}}{(a_1 - a_2)}$$

$$\Leftrightarrow t_{c,+} = -3{,}45\,\mathrm{s} \quad \text{ou} \quad t_{c,-} = 1{,}45\,\mathrm{s}$$

La solution négative étant exclue, on trouve finalement

$$\boxed{t_c = 1{,}45\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1(t_c) = 42{,}5\,\mathrm{m}}$$

Il était donc pratiquement impossible que Pierre esquive Xari, étant donné qu'en freinant au plus tôt il n'a eu que 0,45 s avant de rentrer en collision avec lui, laissant peu de marge à un autre temps de réaction et à une autre manœuvre évasive.

II Masse attachée à 2 ressorts

1) On étudie ici le point matériel M de masse m, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen avec le repère $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_z})$, $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant. On repère le point M par son altitude $\mathrm{OM} = z(t)$. On effectue le **bilan des forces** :

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
Ressort 1	$\overrightarrow{F}_{\text{ressort 1}} = -k(\mathrm{OM} - \ell_0)\overrightarrow{u_z} = -k(z - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$
Ressort 2	$\overrightarrow{F}_{\text{ressort 2}} = +k(\mathrm{O'M} - \ell_0)\overrightarrow{u_z} = +k(L - z - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$

avec le ressort 1 celui d'en-dessous, le ressort 2 celui d'au-dessus. On notera simplement $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ dans la suite. Avec le PFD, on a

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2\\ \Leftrightarrow m\ddot{z} &= -mg - k(z - \cancel{\ell_0}) + k(L - z - \cancel{\ell_0})\\ \Leftrightarrow &\boxed{\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = \frac{k}{m}L - g}\end{aligned}$$

À l'équilibre, le ressort ne bouge plus ; on a donc $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, et on trouve ainsi z_{eq} :

$$\boxed{z_{\text{eq}} = \frac{L}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

Sans la pesanteur, la masse sera à l'équilibre entre les deux ressorts, en toute logique. La gravité diminue cette altitude. On remarque que cette association de ressort est équivalente à avoir un seul ressort de raideur $2k$.

2) On a commencé la détermination de l'équation différentielle dans la question 2. On peut simplifier son expression en remarquant qu'à droite du signe égal, on doit trouver quelque chose homogène à ${\omega_0}^2 z$. On commence par identifier ω_0 avec la forme canonique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{donc} \quad \frac{k}{m}L - g = {\omega_0}^2 z_{\text{eq}}$$

et finalement,

$$\boxed{\ddot{z} + {\omega_0}^2 z = {\omega_0}^2 z_{\text{eq}}}$$

3) La solution complète $z(t)$ et la somme de la solution particulière constante z_p et de la solution homogène z_h. La solution particulière est, par définition, z_{eq} (on l'a montré question 1). La solution homogène est celle d'un oscillateur harmonique, à savoir

$$z_h = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Ainsi,

$$z(t) = z_{\text{eq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On trouve A et B avec les conditions initiales :
- $z(0) = z_{\text{eq}} + a$ (masse lâchée d'une hauteur a par rapport à la position d'équilibre), or $z(0) = A + z_{\text{eq}}$, donc
$$A = a$$
- $\dot{z}(0) = 0$ (masse lâchée sans vitesse initiale), or $\dot{z}(0) = B\omega_0$ donc
$$B = 0$$

Ainsi,
$$\boxed{z(t) = z_{\text{eq}} + a\cos(\omega_0 t)}$$

III Plan incliné et frottements solides

1) a – ◇ **Système :** {brique}
◇ **Référentiel :** galiléen $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ (voir schéma)
◇ **O et t initial :** tels que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{0}$
◇ **Vitesse initiale :** $\overrightarrow{v}(0) = v_0\overrightarrow{u_x}$
◇ **Bilan des forces :**

Poids $\overrightarrow{P} = -mg\cos\alpha\overrightarrow{u_y} - mg\sin\alpha\overrightarrow{u_x}$
Réaction $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{u_y}$

◇ **PFD :**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}g\sin\alpha \\ \underbrace{\cancel{m\ddot{y}}}_{=0} = -mg\cos\alpha + R \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ étant donné que le mouvement se fait selon $\overrightarrow{u_x}$; ainsi $\boxed{y = \dot{y} = \ddot{y} = 0}$, et la seconde équation donne

$$R = mg\cos\alpha$$

On intègre la première pour avoir l'équation horaire sur $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0 t}$$

avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$.

b – On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit t_s ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = g t_s \sin\alpha \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g\sin\alpha}}$$

On remarque alors que si $\alpha = 0$, $t_s \to +\infty$, ce qui est logique puisque sans frottement la brique ne s'arrêterait jamais. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans $x(t)$:

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}\cancel{g}\frac{{v_0}^2}{g^{\cancel{2}}\sin^{\cancel{2}}\alpha}\cancel{\sin\alpha} + v_0\frac{v_0}{g\sin\alpha} \Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g\sin\alpha}}$$

2) a – On reprend le même système, mais le bilan des forces change :

◇ **Bilan des forces :**

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = -mg\cos\alpha\overrightarrow{u_y} - mg\sin\alpha\overrightarrow{u_x} \\ \textbf{Réaction} & \overrightarrow{R} = R_N\overrightarrow{u_y} - R_T\overrightarrow{u_x} \end{array}$$

En effet, sur la montée de la brique, sa vitesse est dirigée vers $+\overrightarrow{u_x}$, donc la force de frottement (qui est une force de freinage et donc opposée à la vitesse) est dirigée vers $-\overrightarrow{u_x}$. De plus, avec les lois du frottement de Coulomb, sur la montée la brique glisse sur le support, on a donc

$$\boxed{R_T = fR_N}$$

◇ **PFD :**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - fR_N \\ \underbrace{\cancel{m\ddot{y}}}_{=0} = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ étant donné que le mouvement se fait selon $\overrightarrow{u_x}$; ainsi $\boxed{y = \dot{y} = \ddot{y} = 0}$, et la seconde équation donne

$$R_N = mg\cos\alpha$$

Que l'on réinjecte dans la première :

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha - fg\cos\alpha$$

On intègre cette dernière pour avoir l'équation horaire sur $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2 + v_0 t}$$

avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$. On retrouve le résultat précédent en posant $f = 0$.

b – On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit t_s ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = g t_s(\sin\alpha + f\cos\alpha) \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$$

Ce temps est plus **court** que sans frottements. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans $x(t)$:

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}\cancel{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\frac{{v_0}^2}{(g(\sin\alpha + f\cos\alpha))^{\cancel{2}}} + v_0\frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$$

3) a – Cette fois, la brique est initialement à l'arrêt, soit $\overrightarrow{a}(0) = \overrightarrow{0}$, et la brique ne glisse pas donc $R_T < fR_N$. On aura mouvement quand il y aura glissement, c'est-à-dire quand $R_T = fR_N$. On reprend donc le système précédent avec $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$:

$$\underbrace{\cancel{m\overrightarrow{a}}}_{=\overrightarrow{0}} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg\sin\alpha - fR_N \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = f\cos\alpha \\ R_N = mg\cos\alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f = \tan\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \mathrm{atan}(f)}$$

b – On trouve $\boxed{\alpha_{\text{fer/chêne}} = 14°}$ et $\boxed{\alpha_{\text{chêne/chêne}} = 19°}$

4) a – ◇ **Système :** {armoire}
◇ **Référentiel :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ avec $\overrightarrow{u_y}$ vertical asendant
◇ **Repère :** On suppose la force de traction dirigée vers $+\overrightarrow{u_x}$, et donc la vitesse de l'armoire selon $+\overrightarrow{u_x}$
◇ **Bilan des forces** :

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_y}$
Réaction normale	$\overrightarrow{R_N} = R_N\overrightarrow{u_y}$
Réaction tangentielle	$\overrightarrow{R_T} = -R_T\overrightarrow{u_x}$
Traction	$\overrightarrow{F} = F\overrightarrow{u_x}$

À la limite du glissement, on a $R_T = fR_N$.
◇ **PDF :** quand le mouvement est lancé, l'accélération est nulle.

$$\underbrace{\cancel{m\overrightarrow{a}}}_{=0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{F} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg + R_N \\ 0 = F - fR_N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg \\ \boxed{F = fmg} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 100\,\mathrm{kg} \\ g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ f = 0{,}25 \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{F = 250\,\mathrm{N}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{F}{g} = 25\,\mathrm{kg}}$$

Ainsi, il suffit de fournir une force égale à un quart du poids.

b – Mettre des patins permet de diminuer le coefficient de frottement, et donc de diminuer la force de traction nécessaire pour déplacer le meuble.

IV Coup franc et frottements fluides

1) a – ◇ **Système :** {ballon}
◇ **Référentiel :** terrestre galiléen
◇ **Repère :** cartésien $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y})$, $\overrightarrow{u_y}$ vertical ascendant, $\overrightarrow{u_x}$ vers le but
◇ **Origine et instant initial :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{0}$
◇ **Vitesse initiale :** $\overrightarrow{v}(0) = v_0\cos\alpha\overrightarrow{u_x} + v_0\sin\alpha\overrightarrow{u_y}$
◇ **BDF :**

$$\textbf{Poids } \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_y}$$

◇ **PFD :**

$$\cancel{m}\overrightarrow{a} = -\cancel{m}g\overrightarrow{u_y} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \tag{2.1}$$

Ainsi,

$$(2.1) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\alpha \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{aligned}} \end{cases} \tag{2.2}$$

étant donné les conditions initiales. On trouve la trajectoire en isolant $t(x)$ pour avoir $y(x)$:

$$(2.2) \Rightarrow \begin{cases} t(x) = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ \boxed{y(x) = -\dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha} x^2 + x \tan\alpha} \end{cases}$$

b – Le ballon passe au-dessus du mur si $y(x_{\text{mur}}) \geq h_{\text{mur}}$ avec h_{mur} la hauteur du mur et x_{mur} sa position horizontale. Avec une application numérique, on obtient

$$y(x_{\text{mur}}) = 2{,}17\,\text{m} > h_{\text{mur}} = 1{,}90\,\text{m}$$

donc le ballon <u>passe bien au-dessus du mur</u>.

c – Le tir est cadré si $y(x_{\text{but}}) \leq h_{\text{but}}$. Or,

$$y(x_{\text{but}}) = 1{,}73\,\text{m}$$

donc <u>le tir est bien cadré</u>.

2) a – Avec le même système, seul le bilan des forces est modifié (et donc le PFD) :

◇ **BDF :**

Poids	$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$
Frottements	$\overrightarrow{F} = -h\overrightarrow{v} = -h\dot{x}\overrightarrow{u_x} - h\dot{y}\overrightarrow{u_y}$

◇ **PFD :** $$m\overrightarrow{a} = -mg\overrightarrow{u_y} - h\dot{x}\overrightarrow{u_x} - h\dot{y}\overrightarrow{u_y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -h\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - h\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{h}{m}\dot{y} = -g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v_x} + \dfrac{v_x}{\tau} = 0 \\ \dot{v_y} + \dfrac{v_y}{\tau} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ v_y(t) = -g\tau + B\mathrm{e}^{-t/\tau} \end{cases}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = v_0 \cos\alpha \\ B = v_0 \sin\alpha + g\tau \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-t/\tau} \\ v_y(t) = (v_0 \sin\alpha + g\tau)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -v_0\tau \cos\alpha \mathrm{e}^{-t/\tau} + C \\ y(t) = -\left(v_0\tau \sin\alpha + g\tau^2\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau t + D \end{cases}$$

$$\text{or } \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = v_0\tau \cos\alpha \\ D = -\left(v_0\tau \sin\alpha + g\tau^2\right) \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0\tau \cos\alpha \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) & (2.3) \\ y(t) = \left(v_0\tau \sin\alpha + g\tau^2\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) - g\tau t & (2.4) \end{cases}}$$

b – On isole $t(x)$ de (2.3) pour l'injecter dans (2.4) :

$$\boxed{\begin{cases} t(x) = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau\cos\alpha}\right) \\ y(x) = \left(\tan\alpha + \dfrac{g\tau}{v_0\cos\alpha}\right)x + g\tau^2 \ln\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau\cos\alpha}\right) \end{cases}}$$

c – On calcule :

$$y(x_{\text{mur}}) = 2{,}17\,\text{m}$$

donc le ballon passe au-dessus du mur.

d – On calcule :

$$y(x_{\text{but}}) \approx 1{,}73\,\text{m}$$

donc le tir est bien cadré. On constate que les frottements n'ont eu que peu d'influence sur ce mouvement ; il n'est en effet pas très rapide, donc la force de frottements est restée assez faible.

V Charge soulevée par une grue

1) ◇ **Système :** {masse m} repérée par son centre d'inertie M.
◇ **Référentiel :** relié au sol, galiléen.
◇ **Coordonnées :** cartésiennes, $(\text{O},\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant, O au pieds de la grue.
◇ **BDF :** avant qu'elle ne décolle, il y a la réaction du sol ; on s'intéresse au décollage, donc au moment où elle s'annule. On aura donc

$$\begin{array}{ll}\textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z} \\ \textbf{Tension} & \overrightarrow{T} = T\overrightarrow{u_z}\end{array}$$

◇ **PFD :** au moment où la masse décolle, son accélération est positive et selon $\overrightarrow{u_z}$, soit $\overrightarrow{a} = \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$; en supposant un décollage en douceur, $\ddot{z} \approx 0$, soit

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow 0 = -mg + T \Leftrightarrow \boxed{T = mg}$$

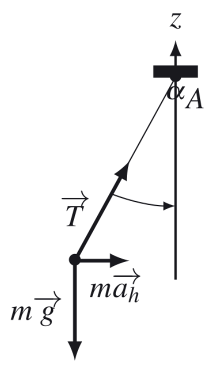
On a donc la tension égale au poids.

2) Dans ce cas, on a explicitement $\boxed{T = m(a_v + g)}$

La tension est supérieure au poids, et fonction affine de a_v : si l'accélération est trop forte, le câble peut rompre.

1) a – L'accélération de M est $\overrightarrow{a}_M = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\text{OM}}}{\mathrm{d}t^2}$. Or, $\overrightarrow{\text{OM}} = \overrightarrow{\text{OA}} + \overrightarrow{\text{AM}}$ avec $\overrightarrow{\text{AM}}$ constant : ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{a}_M = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\text{OM}}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\text{OA}}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{a}_h}$$



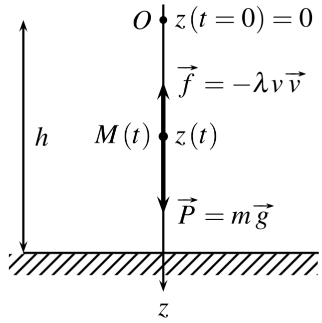
b – On a alors le PFD :

$$m\overrightarrow{a}_h = m\overrightarrow{g} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow ma_h\overrightarrow{u_x} = -mg\overrightarrow{u_z} + T\cos\alpha\overrightarrow{u_z} + T\sin\alpha\overrightarrow{u_x}$$

Ainsi, $$\begin{cases} ma_h = T\sin\alpha \\ mg = T\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{a_h}{g} \\ T = m\sqrt{{a_h}^2 + g^2} \end{cases}}$$

VI Étude d'un volant de badminton

1) ◇ **Système :** {volant} assimilé à un point matériel M de masse m
◇ **Référentiel :** terrestre supposé galiléen
◇ **Repère :** $(\text{O},\overrightarrow{u_z})$ avec O départ de chute, $\overrightarrow{u_z}$ vertical *descendant* (voir schéma)
◇ **Repérage :** $\overrightarrow{\text{OM}} = z(t)\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{v} = \dot{z}(t)\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{a} = \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}$
◇ **Origine et instant initial :** $\overrightarrow{\text{OM}}(0) = z(0)\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{0}$



◇ **BFD :**

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u_z}$

Frottements $\vec{F} = -\lambda v\vec{v} = -\lambda \dot{z}^2\vec{u_z}$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Leftrightarrow m\ddot{z} = mg - \lambda\dot{z}^2 \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z}^2 = g$$

Ainsi, $$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v^2 = g}$$

2) Lorsqu'on lâche M sans vitesse initiale d'une hauteur h, la vitesse est faible au départ et la force principale est le poids, accélérant le mobile vers le bas. Quand la vitesse augmente, les frottements s'intensifient jusqu'à ce qu'ils compensent le poids, donnant $\vec{a} = \vec{0}$: la vitesse n'évolue plus et reste à sa valeur avant compensation, la vitesse limite v_l. v_l étant constante, $\dot{v}_l = 0$, donc l'équation différentielle donne

$$\frac{\lambda}{m}{v_l}^2 = g \Leftrightarrow \boxed{v_l = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}$$

3) v^* est le rapport de deux vitesses, donc est forcément sans dimension. Ensuite,

$$[\tau] = \left[\frac{v_l}{g}\right] = \frac{\mathrm{m\,s^{-1}}}{\mathrm{m\,s^{-2}}} = \mathrm{s}$$
$$[L] = [v_l][\tau] = \mathrm{m\,s^{-1}} \times \mathrm{s} = \mathrm{m}$$

donc τ est bien un temps et L une longueur ; ce faisant, t^* et z^* sont évidemment adimensionnées.

4) On réécrit l'équation avec $v = v_l v^*$ et $t = \tau t^*$:

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v = g \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(v_l v^*)}{\mathrm{d}(\tau t^*)} + \frac{\lambda}{m}(v_l v^*)^2 = g \Leftrightarrow \frac{v_l}{\tau}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\lambda {v_l}^2}{m}(v^*)^2 = g$$

Or,

$$\frac{v_l}{\tau} = g \quad \text{et} \quad \frac{\lambda {v_l}^2}{m} = g \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1}$$

5) Ces courbes montrent que la vitesse augmente pendant 2 à 3τ, avant de se stabiliser à v_l. Le mouvement est ensuite rectiligne uniforme, et z est une fonction affine du temps.

6) Le courbe représentant $v^*(t^*)$ montre que $v^* = 0{,}95$ pour $t^* = 1{,}8$. La durée de l'expérience pour arriver à cette valeur est donc $1{,}8\,\tau$, et la hauteur z^* à ce temps est $z^* = 1{,}2$, ce qui correspond à $z = 1{,}2\,\mathrm{L}$; ainsi

$$\boxed{\Delta t = 1{,}8\,\tau} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 1{,}2\,\mathrm{L}}$$

7) En supposant v_l connue, on a

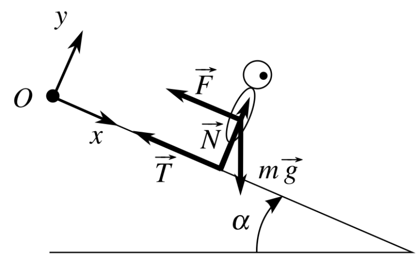
$$\tau = \frac{v_l}{g} \quad \text{et} \quad L = v_l\tau \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 25\,\mathrm{km\,h^{-1}} = 7{,}0\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\tau = 7{,}1 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 4{,}9\,\mathrm{m}}$$

Ainsi,

$$\Delta t = 1{,}8\,\tau \quad \text{et} \quad h = 1{,}2\,\mathrm{L}$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 1{,}3\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 5{,}9\,\mathrm{m}}$$

VII Étude d'une skieuse



1) ◇ **Système :** {skieuse} assimilée à son centre de gravité
   ◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
   ◇ **Repère :** $(\text{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ (voir schéma)
   ◇ **Repérage :** $\overrightarrow{\text{OM}} = x(t)\overrightarrow{u_x}$; $\vec{v} = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x}$; $\vec{a} = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x}$.
   ◇ **Origine et instant initial :** $\overrightarrow{\text{OM}}(0) = \vec{0}$
   ◇ **Vitesse initiale :** $\vec{v}(0) = \vec{0}$
   ◇ **BDF :**

Poids	$m\vec{g} = mg(\sin\alpha\overrightarrow{u_x} - \cos\alpha\overrightarrow{u_y})$
Réaction normale	$\vec{N} = N\overrightarrow{u_y}$
Réaction tangentielle	$\vec{T} = -T\overrightarrow{u_x} = -fN\overrightarrow{u_x}$
Frottements	$\vec{F} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\overrightarrow{u_x}$

Comme la skieuse glisse sur la piste, avec les lois du frottement de Coulomb, on a

$$T = fN$$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fN - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

Ainsi, comme il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$, $\ddot{y} = 0$ et

$$\boxed{N = mg\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{T = fN = fmg\cos\alpha}$$

2) On réutilise la première équation en y injectant l'expression de T pour avoir :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Avec $\vec{v} = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x}$, on obtient une équation différentielle sur $v(t)$ que l'on résout en posant $\tau = m/\lambda$ avec la solution homogène $A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et la solution particulière v_p :

$$\dot{v}(t) + \frac{v}{\tau} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \Rightarrow v = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + v_p$$

et on trouve v_p directement en remarquant que, par construction, $\dot{v}_p = 0$ donc $v_p = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. En combinant on peut utiliser la condition initiale sur la vitesse :

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Or,

$$\left.\begin{aligned} & v(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = A + g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & A = -g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

On trouve la position $x(t)$ en intégrant $v(t)$:

$$x(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(t + \tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + B$$

Or,

$$\left.\begin{aligned} & x(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)(0 + \tau) + B \\ \Leftrightarrow\ & B = -g\tau^2(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(t + \tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\right)}$$

3) La vitesse limite est la solution particulière v_p :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_l = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\overrightarrow{u_x}}$$

En effet, la présence de la force de frottements fluides dont la norme augmente avec la vitesse fait que la vitesse ne peut pas augmenter indéfiniment. La skieuse atteint une vitesse limite lorsque les frottement compensent la force motrice du mouvement. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = v_l\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\overrightarrow{u_x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = v_l\left(t + \tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\right)\overrightarrow{u_x}}$$

4)

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 65\,\mathrm{kg} \\ g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ \lambda = 1\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \\ \alpha = 45° \\ f = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{v_l = 46\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

On remarque que la vitesse limite est une fonction affine du poids. Ainsi, le manque de représentation des femmes dans les sports d'hiver, souvent justifié par une moins bonne performance pure, est biaisé par la répartition moyenne de leurs tailles (et donc de leurs poids) plus faible que la répartition moyenne des tailles (et donc poids) des hommes, rendant pour certains leurs records moins impressionnants.

5)

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \frac{v_l}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\cancel{v_l}}{2} &= \cancel{v_l}(1 - \mathrm{e}^{-t_l/\tau}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 1 - \mathrm{e}^{-t_1/\tau} \\ \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t_1/\tau} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau\ln 2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m = 65\,\mathrm{kg} \\ \lambda = 1\,\mathrm{kg\,s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{t_1 = 45\,\mathrm{s}}$$

6) En tombant à $t = t_1$, la skieuse a pour vitesse $v_l/2$. L'équation du mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ ne change pas de forme, mais on multiplie f par 10, donc $T = 10fmg$. Ainsi, en posant $t' = t - t_1$, en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ et en négligeant λ,

$$\ddot{x}(t') = g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) \Rightarrow \dot{x}(t') = gt'(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) + v_l/2$$

On trouve le temps d'arrêt t'_a quand $\dot{x}(t'_a) = 0$, soit

$$t'_a = \frac{-v_l}{2g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha)}$$

et la distance d'arrêt depuis le point de chute en intégrant $\dot{x}(t')$ puis en prenant $x(t'_a)$:

$$x(t') = \frac{1}{2}gt'^2(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) + \frac{v_l t'}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t'_a) = -\frac{{v_l}^2}{8g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 46\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ g = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ \alpha = 45° \\ f = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{x(t'_a) = 4{,}7\,\mathrm{m}}$$