Contrôle de connaissances 20

Forces centrales et solides

/10 **1** Compléter le schéma du pendule pesant avec les forces et leurs moments, calculés **par le bras de levier**. On suppose la liaison pivot parfaite. Trouver alors l'équation du mouvement par application du **TMC scalaire d'abord** puis **TPC ensuite**.

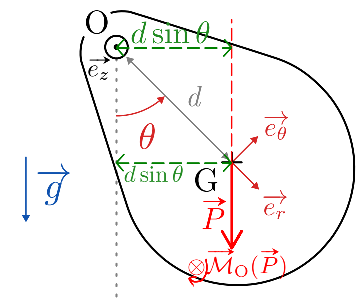


Figure 20.1 – Pendule pesant

1. **Système** : {pendule} solide indéformable de masse m
2. **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
3. **Repère** : cylindrique $(O, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ avec O centre de la liaison pivot.
4. **Repérage** : $\overrightarrow{OG} = d\,\vec{e_r}$
5. **Bilan des actions** :

Origine	Force	Moment
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$	$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd\sin(\theta)$
Pivot parfaite	$\vec{0}$	$\vec{\Gamma} = \vec{0}$

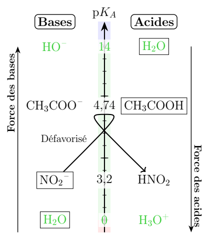
6. **TMC** :
$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = J_z\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_z}\sin(\theta) = 0}$$

7. **TPC** : on calcule $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{P}$:
$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{P}) = \mathcal{M}_z(\vec{P})\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = \mathcal{P}(\vec{P}) \Leftrightarrow J_z\dot{\omega}\cancel{\omega} = -mgd\sin(\theta)\cancel{\omega} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_z}\sin(\theta) = 0}$$

/2 **2** Démontrer la relation de Henderson.
$$K_A \triangleq \frac{[H_3O^+]_{eq} \times [A^-]_{eq}}{[AH]_{eq}c^\circ} \Leftrightarrow \frac{[H_3O^+]_{eq}}{c^\circ} = K_A\frac{[AH]_{eq}}{[A^-]_{eq}}$$
$$\xrightarrow{-\log\cdot} \quad -\log[H_3O^+]_{eq} = -\log K_A - \log\frac{[AH]_{eq}}{[A^-]_{eq}} \Leftrightarrow \boxed{pH = pK_A + \log\frac{[A^-]}{[AH]}}$$
■

/6 **3** On mélange $V_0 = 50\,\text{mL}$ d'une solution d'acide éthanoïque de $pK_{A,1} = 4{,}74$ à $c_0 = 0{,}10\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$, et le même volume d'une solution de nitrite de sodium $(Na^+;NO_2^-)$ de $pK_{A,2} = 3{,}2$ à la même concentration. Déterminer l'avancement puis le pH.

Équation		$CH_3COOH_{(aq)}$ +	$NO_2^-{}_{(aq)}$	$= CH_3COO^-{}_{(aq)}$ +	$HNO_{2(aq)}$
Initial	$x = 0$	$c_0/2$	$c_0/2$	0	0
Final	$x_f = x_{eq}$	$c_0/2 - x_{eq}$	$c_0/2 - x_{eq}$	x_{eq}	x_{eq}



$$K^\circ = \frac{x_{eq}^2}{(c_0/2 - x_{eq})^2} \underset{x_{eq}>0}{\Rightarrow} x_{eq} = \left(\frac{c_0}{2} - x_{eq}\right)\sqrt{K^\circ} \Leftrightarrow \boxed{x_{eq} = \frac{\sqrt{K^\circ}}{1+\sqrt{K^\circ}}\frac{c_0}{2}} \Rightarrow \underline{x_{eq} = 7{,}3 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}}$$

$$\Rightarrow pH = pK_{A,1} + \log\left(\frac{x_{eq}}{c_0/2 - x_{eq}}\right) = pK_{A,1} + \frac{1}{2}\log K^\circ = pK_{A,1} + \frac{pK_{A,2} - pK_{A,1}}{2} \Leftrightarrow \boxed{pH = \frac{pK_{A,2} + pK_{A,1}}{2} = 3{,}97}$$

/4 **4** On ajoute $n = 10^{-5}\,\text{mol}$ d'ions Cl^- dans $V_0 = 10\,\text{mL}$ de nitrate d'argent (Ag^+,NO_3^-) à $c_0 = 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. On donne $pK_s(AgCl) = 9{,}8$. Obtient-on un précipité de chlorure d'argent AgCl ?

Formation de AgCl : $\quad Ag^+{}_{(aq)} + Cl^-{}_{(aq)} = AgCl_{(s)} \qquad K^\circ = \frac{1}{K_s}$

Sens direct $\Rightarrow \quad Q_{r,i} < \frac{1}{K_s} \Leftrightarrow \frac{c^{\circ 2}}{[Ag^+]_i[Cl^-]_i} < \frac{1}{K_s} \Leftrightarrow \boxed{\frac{[Ag^+]_i[Cl^-]_i}{c^{\circ 2}} > K_s}$

A.N. : $[Ag^+]_i = 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ et $[Cl^-]_i = n/V_0 = 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \Rightarrow \underline{\frac{[Ag^+]_i[Cl^-]_i}{c^{\circ 2}} = 10^{-6} > K_s}$