Correction du TD

I Notation complexe

Écrire, sous forme complexe, les équations différentielles suivantes :

1)

$$\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=E_0\sin\omega t$$

Réponse

Pour passer aux formes complexes, il faut s'assurer que **les grandeurs soient toutes exprimées en cosinus**, puisque c'est bien le cosinus la partie réelle d'une exponentielle complexe. Or, $\sin\theta=\cos(\pi/2-\theta)=\cos(\theta-\pi/2)$, donc on a :

$$\begin{aligned}
&\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=E_0\cos(\omega t-\pi/2)\\
\Leftrightarrow\ &\tau\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t}+\underline{u}(t)=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\
\Leftrightarrow\ &(1+\mathrm{j}\omega t)\underline{u}=E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{u}=\frac{E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{1+\mathrm{j}\omega t}}
\end{aligned}$$

grâce au fait qu'en complexes, dériver revient à multiplier par $\mathrm{j}\omega$.

◇

2)

$$\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x(t)=F_0\cos\omega t$$

Réponse

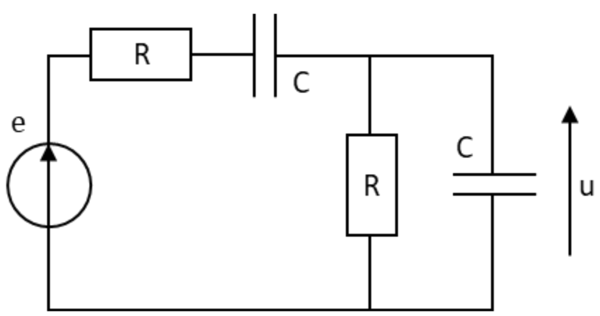
Ici, rien de particulier : on souligne x d'abord, puis on dérive en multipliant par $\mathrm{j}\omega$.

$$\begin{aligned}
&\ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x(t)=KI_m\cos\omega t\\
\Leftrightarrow\ &(\mathrm{j}\omega)^2\underline{x}+2\lambda\mathrm{j}\omega\underline{x}+{\omega_0}^2\underline{x}=KI_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{x}=\frac{KI_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{{\omega_0}^2-\omega^2+2\lambda\mathrm{j}\omega}}
\end{aligned}$$

◇

II Filtre de Wien

On considère le circuit ci-contre avec $e(t)=E_m\cos(\omega t)$. On note $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi)$ et on pose $H_m=U_m/E_m$.



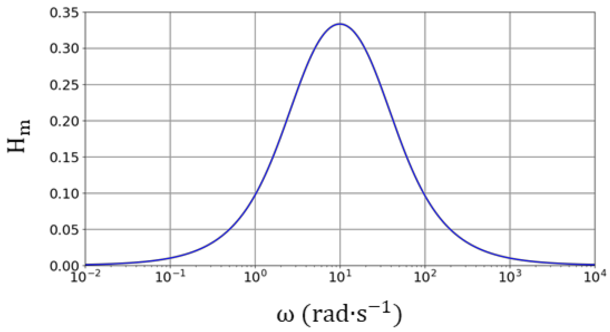
1) Déterminer les valeurs limites de $u(t)$ à basse et haute fréquences.

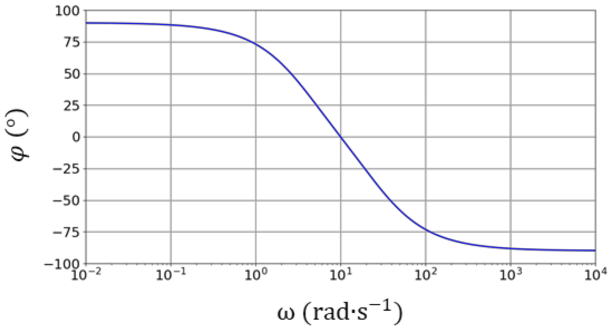
Réponse

Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{u} = 0$. Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également $\underline{u} = 0$. Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passe-bande**.

◇

Les courbes représentatives de $H_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont fournies par les figures ci-dessous.





2) Observe-t-on un phénomène de résonance en tension ? Justifier.

Réponse

On observe bien une résonance en tension, étant donné qu'on trouve un **maximum de l'amplitude pour** $\omega \neq 0$ **et** $\omega \neq \infty$.

◇

3) Déterminer graphiquement la pulsation de résonance, les pulsations de coupure et la bande passante du filtre.

Réponse

On lit $\boxed{\omega_r = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$, et on trouve les pulsations de coupure en traçant une droite horizontale à $H_{m,\max}/\sqrt{2} = 0{,}23$ (avec $H_{m,\max} = 0{,}33$) et en prenant les abscisses des intersections. On trouve alors

$$\boxed{\omega_1 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta\omega = 18\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

En effet, l'axe des abscisses est en échelle logarithmique, il faut donc faire attention à la lecture.

◇

4) Après avoir associé certaines impédances entre elles, établir l'expression de $\underline{H} = \underline{u}/\underline{e}$. La mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

avec H_0, ω_0 et Q des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de R et C.

Réponse

Notons $\underline{Z}_{R/\!/C}$ l'impédance et $\underline{Y}_{R/\!/C}$ l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{R/\!/C}}{\underline{Z}_{R/\!/C} + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)\,\underline{Y}_{R/\!/C}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}_{R/\!/C}} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}}$$

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

Ce qui est remarquable avec ce montage, c'est que **le facteur de qualité est de 1/3 peu importe les valeurs de R et C**, tant que ce sont les mêmes R et C en série et en dérivation.

◇

5) Déterminer graphiquement la valeur du produit RC.

Réponse

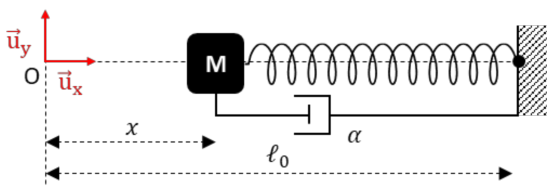
Par cette étude, on trouve que $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{RC}$; ainsi, on a simplement

$$\boxed{RC = 0{,}10\,\mathrm{Hz}}$$

◇

III Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m, se déplaçant horizontalement le long d'un axe (Ox). Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et subit une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Elle est par ailleurs soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur, qui vaut : $\vec{F}(t) = Ki(t)\vec{u}_x$ où K est une constante. On travaille dans le référentiel du laboratoire $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On suppose que le courant est de la forme $i(t) = I_m\cos(\omega t)$.



$m = 10\,\mathrm{g}$, $K = 200\,\mathrm{N{\cdot}A^{-1}}$ et $I_m = 1{,}0\,\mathrm{A}$.

1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position de la masse m.

Réponse

Système : masse ;

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;

Position de la masse : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur ressort : $\overrightarrow{MA} = \ell\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur à vide : $\overrightarrow{OA} = \ell_0\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur relative : $(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{MO} = -x\,\overrightarrow{u_x}$.

Bilan des forces :

1) Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = k\overrightarrow{MO} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$;
5) **Force excitatrice** $\overrightarrow{F} = KI_m\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_x}$.

Avec le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_{\text{ressort}} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F}$$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-kx-\alpha v+KI_m\cos(\omega t)\\-mg+R\end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}+\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+kx = KI_m\cos(\omega t)}$$

◇

2) La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

Réponse

Sous forme canonique, cela devient

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}+\frac{\omega_0}{Q}\dot{x}+{\omega_0}^2 x = \frac{KI_m}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\text{avec}\quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}\quad\text{et}\quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

◇

3) Justifier qu'en régime permanent : $x(t) = X_m\cos(\omega t+\phi)$

Réponse

On sait que pour une entrée sinusoïdale, un système aura une solution homogène donnant un régime transitoire et une solution particulière de la forme de l'entrée : en RSF, on étudie le régime permanent où seule la solution particulière est conservée, et on pourra donc écrire $x(t) = X_m\cos(\omega t+\phi)$.

◇

4) On pose $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{\mathrm{j}\omega t}$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}$.

Réponse

En passant en complexes,

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X}+\mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X}+{\omega_0}^2\underline{X} = \frac{KI_m}{m}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{KI_m}{m}\times\frac{1}{{\omega_0}^2-\omega^2+\dfrac{\mathrm{j}}{Q}\omega\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{\underline{X} = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{1}{1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

◇

5) Exprimer $X_m(\omega)$. Existe-t-il toujours une résonance ?

Réponse

En réels, on trouve

$$\boxed{X(\omega) = |\underline{X}| = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Elle est maximale quand le dénominateur est minimal. Après calcul, on trouve

$\mathbf{Q \leq 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

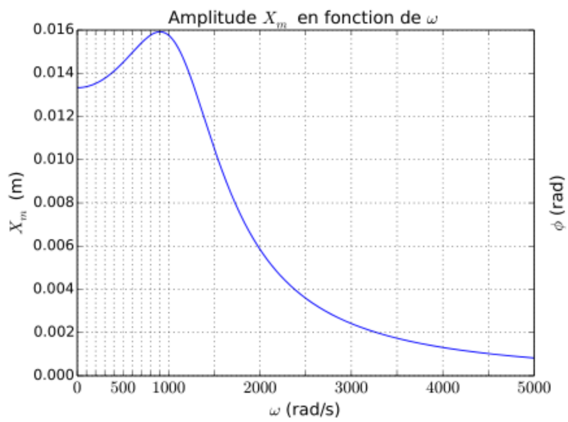
$$\boxed{\omega = 0 \quad \text{et} \quad X(0) = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}}$$

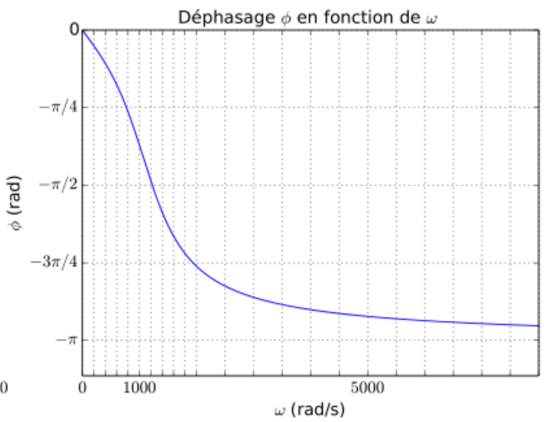
$\mathbf{Q > 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0} \quad \text{et} \quad \boxed{X(\omega_r) = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en élongation**, et que **la résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\phi(\omega)$. L'axe des abscisses est en échelle logarithmique.





6) Pour quelle pulsation le déplacement est-il en quadrature de phase avec la force excitatrice ? Déterminer alors graphiquement la pulsation propre ω_0.

Réponse

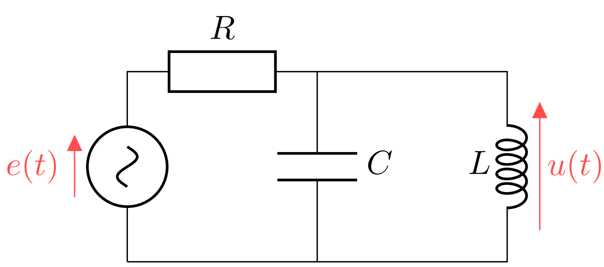
Le déplacement est en quadrature de phase si la différence de phase est de $\pm\pi/2$. Sur le graphique de droite, on le trouve à $\omega = 1100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Or, c'est à $\omega = \omega_0$ qu'on trouve une quadrature de phase, puisqu'alors $\underline{X}$ est un imaginaire pur. Ainsi,

$$\omega_0 = 1100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

On pourrait déterminer le facteur de qualité en trouvant que le maximum d'amplitude se trouve à $\omega_r = 900\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

IV Résonance d'un circuit bouchon

On considère le circuit RLC représenté ci-contre, composé d'un résistor, de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L, d'un condensateur idéal, de capacité C, alimenté par une source idéale de tension, de f.e.m. $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé.



1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ en fonction de E_0, R, L, C et ω.

Réponse

On effectue un pont diviseur de tension aux bornes de l'impédance équivalente de L et C, avec $\underline{Y}_{\text{eq}} = \text{j}C\omega + 1/\text{j}L\omega$:

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} E_0 = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} E_0 = \frac{E_0}{1 + \text{j}\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)}$$

en utilisant que $1/\text{j} = -\text{j}$.

◇

2) Établir qu'il existe un phénomène de résonance pour la tension $u(t)$. Préciser la pulsation ω_0 à laquelle ce phénomène se produit et la valeur de l'amplitude réelle de $u(t)$ à cette pulsation.

Réponse

L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$$

◇

3) Mettre l'amplitude réelle U de $u(t)$ sous la forme :

$$U = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

avec Q un facteur sans dimension à exprimer en fonction de R,L et C.

Réponse

On cherche $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$ et $\dfrac{Q}{\omega_0} = RC$; on trouve donc

$$\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

◇

4) Exprimer la bande passante $\Delta\omega$ de cette résonance en fonction de Q et ω_0.

Réponse

On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$
\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) &= -1 \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1\\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\times\omega\omega_0 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\times\omega\omega_0 = \frac{\omega\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow \omega^2-{\omega_0}^2 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega^2-{\omega_0}^2 = \frac{\omega\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow \boxed{\omega^2+\frac{\omega_0}{Q}\omega-{\omega_0}^2=0} &\quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2-\frac{\omega_0}{Q}\omega-{\omega_0}^2=0}\\
\Rightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q}+4{\omega_0}^2\\
\Leftrightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1+4Q^2\right)\\
\Rightarrow \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} &\quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2}\\
\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1\pm\sqrt{1+4Q^2}\right) &\quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1\pm\sqrt{1+4Q^2}\right)
\end{aligned}
$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1-\sqrt{1+4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1-\sqrt{1+4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

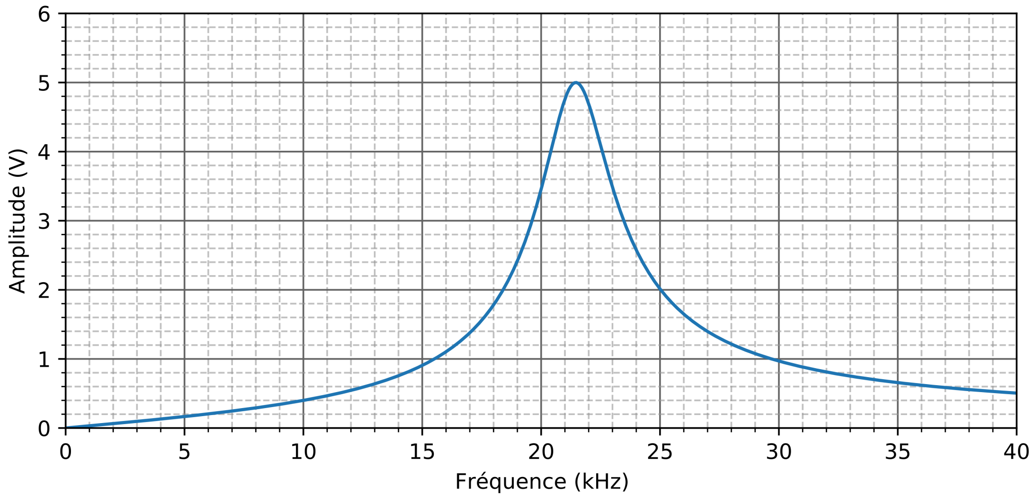
$$
\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}-1\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}+1\right)
$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$
\boxed{\Delta\omega = \omega_2-\omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}
$$

---

5) En déduire les valeurs numériques de C et E_0 à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'amplitude réelle de $u(t)$ en fonction de la fréquence $f=\omega/2\pi$, sachant que $L = 1\,\mathrm{mH}$ et $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.



Réponse

Sur le graphique, on trouve $U_{\max} = 5\,\mathrm{V} = E_0$. On a de plus $f_0 = 22{,}5\,\mathrm{kHz}$ et $\Delta f \approx 3\,\mathrm{kHz}$, d'où

$\boxed{Q = \frac{f_0}{\Delta f} \approx 7{,}5}$. Avec l'expression de Q, on isole C :

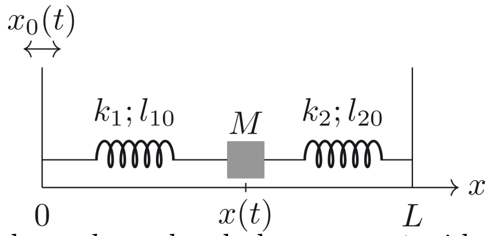
$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{Q^2 L}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 7{,}5 \\ L = 1\,\mathrm{mH} \\ R = 1\,\mathrm{k\Omega} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{C = 5{,}6 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}}$$

◇

V Système à deux ressorts

Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sur une tige *horizontale* parallèle à l'axe Ox au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ du laboratoire. Les frottements entre M et l'axe horizontal sont négligeables. On repère M par son abscisse $x(t)$.



M est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueurs à vide ℓ_{10} et ℓ_{20}. Celle de droite est immobile en $x = L$, celle de gauche, d'abscisse $x_0(t)$, est animée d'un mouvement d'équation horaire $x_0(t) = X_{0m}\cos(\omega t)$. On supposera que $L = \ell_{10} + \ell_{20}$.

1) Identifier les différentes forces s'exerçant sur M.

Réponse

Système : masse ;

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;

Position de la masse : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur ressort 1 : $x(t) - x_0(t)$;

Longueur ressort 2 : $L - x(t)$.

Bilan des forces :

1) Poids $\vec{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\vec{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Rappel du ressort 1 $\vec{F}_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_{10})\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Rappel du ressort 2 $\vec{F}_2 = k_2(\ell_2 - \ell_{20})\,\overrightarrow{u_x}$;
5) Force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$.

◇

2) Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de M lorsque la paroi de gauche est immobile en $x = 0$.

Réponse

Avec le PFD, on trouve

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{f}$$
$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1(\ell_1 - \ell_{10}) + k_2(\ell_2 - \ell_{20}) - hv \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1(\ell_1 - \ell_{10}) + k_2(\ell_2 - \ell_{20})}$$

En développant les longueurs comme indiqué question 1, on a

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1(x(t) - x_0(t) - \ell_{10}) + k_2(L - x(t) - \ell_{20})}$$

À l'équilibre les dérivées de x sont nulles, d'où

$$0 = -k_1(x(t) - x_0(t) - \ell_{10}) + k_2(L - x(t) - \ell_{20})$$

Ainsi, avec $x_{0,\mathrm{eq}}(t) = 0$ et $L = \ell_{10} + \ell_{20}$ (d'après l'énoncé) puis $x(t) = x_{\mathrm{eq}}$ (par définition), on a

$$\begin{aligned} 0 &= -k_1(x_{\mathrm{eq}} - 0 - \ell_{10}) + k_2(\ell_{10} + \cancel{\ell_{20}} - x_{\mathrm{eq}} - \cancel{\ell_{20}}) \\ \Leftrightarrow &\ (k_1 + k_2)(\ell_{10} - x_{\mathrm{eq}}) = 0 \end{aligned}$$

Comme $k_1 + k_2 > 0$, on trouve

$$\boxed{x_{\mathrm{eq}} = \ell_{10}}$$

---

3) On introduit $X = x - x_{\mathrm{eq}}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par X lorsque la paroi bouge.

Réponse

Cette fois-ci, on garde $x_0(t)$ dans l'équation. Il vient alors

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + (k_1 + k_2)(x - x_{\mathrm{eq}}) = k_1 x_0(t)$$

et en effectuant le changement de variable $X = x - x_{\mathrm{eq}}$, on trouve l'équation habituelle

$$\boxed{m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = KX_{0m}\cos(\omega t)}$$

avec $k = k_1 + k_2$.

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes $\underline{x}_0(t) = X_{0m}\exp(\mathrm{j}\omega t)$, $\underline{X}(t) = X_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \varphi))$ et $\underline{v}(t) = V_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \phi))$ associées à $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t) = \dot{X}(t)$.

4) Définir les amplitudes complexes $\underline{X}_0$, $\underline{X}$ et $\underline{V}$ de $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t)$.

Réponse

On a simplement $\underline{X}_0 = X_{0m}$, $\underline{X} = X_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$ et $\underline{V} = V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$.

---

5) En exprimant ω_0, Q et α en fonction des données du problème, établir la relation :

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{X}_0$$

Réponse

En utilisant l'équation différentielle mais en complexes et sous forme canonique, on trouve

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X} + \mathrm{j}\omega\frac{h}{m}\underline{X} + \frac{k}{m}\underline{X} = \frac{k_1}{m}X_{0m} \Leftrightarrow \underline{X} = \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}}$$

Étant donné que $V = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$, $\underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{X}$, soit

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{\mathrm{j}\omega}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}} \\ \Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{h}{m} - \mathrm{j}\dfrac{k}{m\omega} + \mathrm{j}\omega} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{k_1}{h - \mathrm{j}\dfrac{k}{\omega} + \mathrm{j}m\omega} X_{0m}$$

$$\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{k_1/h}{1 + \mathrm{j}\left(\dfrac{m\omega}{h} - \dfrac{k}{h\omega}\right)} \underline{X}_0$$

Avec $Q\omega_0 = \frac{k}{h}$ et $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{h}$, on trouve bien

$$\boxed{\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{X}_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha = \dfrac{k_1}{h} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ Q = \dfrac{\sqrt{km}}{h} \end{cases}}$$

◇

6) Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

Réponse

L'amplitude réelle de la vitesse donne

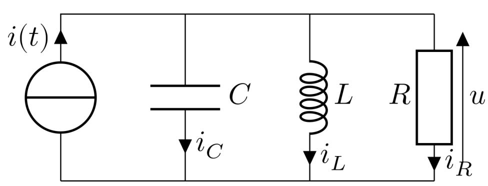
$$V_m(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} X_{0m}$$

qui est maximale pour $\omega = \omega_0$. On observe donc bien une résonance en vitesse pour cette pulsation, avec $V_{\max} = \alpha X_{0m}$.

◇

VI Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.



L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.

1) Déterminer l'impédance complexe de l'association des dipôles R,L et C.

Réponse

Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalente à cette association, et $\underline{Y}$ son admittance. On a

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{\mathrm{j}L\omega + R + (\mathrm{j}C\omega)R(\mathrm{j}L\omega)}{\mathrm{j}RL\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}}$$

◇

2) En déduire l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension u en fonction de ω, I_0, R, L et C.

Réponse

On a $\dfrac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}$ par définition de l'impédance, soit $\underline{U}_0 = \underline{Z}\underline{I}_0 = \underline{Z}I_0$ (étant donné que l'intensité n'a pas de phase à l'origine). Ainsi

$$\underline{U}_0 = \frac{I_0 \mathrm{j} RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}$$

On rend cette équation plus lisible en mettant le dénominateur sous une forme adimensionnée en divisant par $\mathrm{j}L\omega$, ce qui donne

$$\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}}$$

◇

3) Pour quelle pulsation l'amplitude réelle U de u prend-elle sa valeur maximale notée $U_{\max}$? Conclure sur la fréquence à utiliser.

Réponse

L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U}_0| = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$$

◇

4) Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Réponse

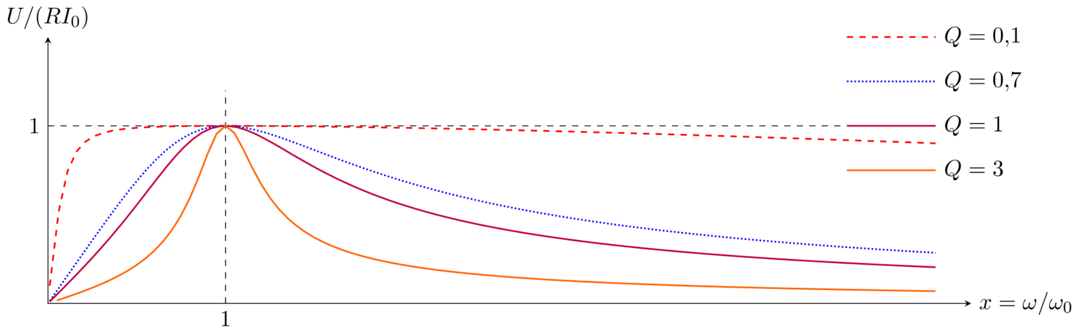
On cherche à faire apparaître ω_0 dans l'écriture de U :

$$RC\omega - \frac{R}{L\omega} = R\omega\frac{C\sqrt{L}}{\sqrt{L}} - \frac{R}{\omega}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}L} \qquad = R\omega\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\omega_0} - \frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{C}{L}}\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

En nommant $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, on obtient finalement

$$\boxed{\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{soit} \quad \boxed{U = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}}$$

On trace pour différentes valeurs de Q, et on obtient :



5) Exprimer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$.

Réponse

On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) &= -1 \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \omega^2 - {\omega_0}^2 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega^2 - {\omega_0}^2 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \boxed{\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0} & \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0} \\
\Rightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q} + 4{\omega_0}^2 \\
\Leftrightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 + 4Q^2\right) \\
\Rightarrow \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} & \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \\
\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right) & \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right)
\end{aligned}$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1 - \sqrt{1+4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1 - \sqrt{1+4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} - 1\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} + 1\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

6) On se place dans le cas $R = 7\,\Omega$, $L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{H}$ et $C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,\mathrm{F}$. Calculer la valeur de l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.

Réponse

$\omega_0/\Delta\omega$ est directement Q, donc on a

$$A_c = Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 7\,\Omega \\ L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{H} \\ C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,\mathrm{F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{A_c = 5{,}2}$$

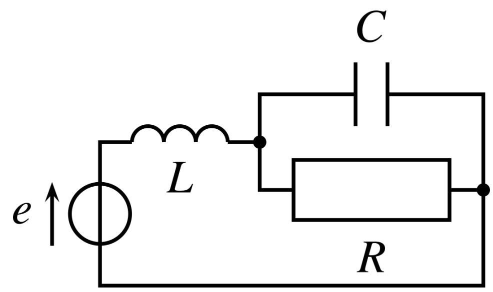
L'acuité augmente avec la résistance : c'est normal puisque la résistance est en parallèle du circuit, donc une absence de résistance signifie ici R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

◇

VII Condition de résonance

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m. $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du résistor et de la capacité montés en parallèle.

On pose : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.



1) Établir l'expression du signal complexe $\underline{u}$ associé à $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé, en fonction de E_0, x et ξ.

Réponse

Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalent à l'association en parallèle de R et C. On a

$$\underline{Z} = \frac{R/\mathrm{j}C\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

En utilisant un pont diviseur de tension, on trouve

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \mathrm{j}L\omega}\underline{e} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}L\omega/\underline{Z}}\underline{e}$$
$$\Leftrightarrow \underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \mathrm{j}\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}}{1 + 2\mathrm{j}\xi x - x^2}$$

◇

2) Étudier l'existence éventuelle d'une résonance pour la tension $u(t)$.

Réponse

L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{u}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x)^2 + (2\xi x)^2}}$$

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est **non nul** et minimal, c'est-à-dire

$$U(\omega_r) = U_{\max} \Leftrightarrow \left(1 - x^2\right)^2 + (2\xi x)^2 \text{ minimal}$$

Soit $X = x^2$, et $f(X) = (1-X)^2 + 4\xi^2 X$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

$$f'(X_r) = 0 \Leftrightarrow -2\,(1 - X_r) + 4\xi^2 = 0 \Leftrightarrow X_r - 1 = -2\xi^2 \Leftrightarrow X_r = 1 - 2\xi^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}}$$

ce qui n'est défini **que si** $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi,

$\xi \geq \mathbf{1/\sqrt{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = E_0}$$

$\xi < \mathbf{1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2} < \omega_0}$$