/50 E1 Satellite en orbite terrestre *(D'après TSI 2010)*

I/A Etude dynamique

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite S de masse m placé dans le champ gravitationnel terrestre. On néglige les frottements.

/5 1 Définissez les référentiels terrestres et géocentrique. Dans quel référentiel faut-il se placer pour cette étude ?

Réponse

Le référentiel géocentrique est lié au repère dont le centre est le centre de masse (1) de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes lointaines. (1)

Un référentiel terrestre est lié au repère dont le centre est un point à la surface de la Terre (1) et dont les axes sont solidaires à la Terre, donc en rotation par rapport à l'axe des pôles fixe (1) dans le référentiel géocentrique.

On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. (1)

◇

/4 2 Déterminer l'expression de la force $\vec{F}$ à laquelle le satellite S est soumis. On exprimera $\vec{F}$ en fonction de m, $\mathcal{G}$, M_T, r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Déterminer de même l'expression de la force $\vec{F'}$ à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite. Justifier.

Réponse

La force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est

$$\boxed{\vec{F} \overset{(1)}{=} -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre O vers le centre du satellite M. (1)

D'après le principe des actions réciproques (troisième loi de Newton (1)), on a :

$$\boxed{\vec{F'} \overset{(1)}{=} -\vec{F} = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

◇

/7 3 Montrer que le mouvement est nécessairement plan. Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le satellite se trouve au point M_0 et a une vitesse v_0, préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

Réponse

On se place dans le référentiel géocentrique. La seule force exercée par le satellite est la force $\vec{F}$. (1) Elle est centrale de centre O, ainsi, son moment par rapport à O est nul : $\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \overset{(1)}{=} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} \overset{(1)}{=} \vec{0}$.

D'après le théorème du moment cinétique par rapport au point O, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}) \overset{(1)}{=} \overrightarrow{\mathrm{cte}} = \mathcal{L}_0\,\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge m\vec{v}_{\mathrm{M}}(t) \overset{(1)}{=} \mathcal{L}_0\,\vec{u_z} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) \wedge m\vec{v}_{\mathrm{M}}(0)$$

avec $\vec{u_z}$ la direction initiale du moment cinétique. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ reste constamment perpendiculaire à un vecteur constant, donc le mouvement est plan et le plan du mouvement passe par le centre de force O. En l'occurrence, le plan est $(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OM}_0},\vec{v_0})$. (1)

◇

Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r et d'altitude h autour de la Terre (avec $r = R_T + h$) et on utilisera les coordonnées cylindriques.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$, un point quelconque de l'espace étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z).

Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine O du repère (le point O étant le centre de la Terre) et les vecteurs $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$.

/4 4 Montrer que la norme v de la vitesse du satellite S est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r.

Réponse

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{e_r} \qquad \vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad (1)$$

D'après le PFD appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on a :

$$m\vec{a} \overset{①}{=} \vec{F} \Rightarrow -mr\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + rm\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}$$

Sur $\vec{e_\theta} \Rightarrow$ $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$ donc $\|\vec{v}\| = \left|r\dot{\theta}\right|$ uniforme ①

Sur $\vec{e_r} \Rightarrow$ $mr\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \Rightarrow r\frac{v^2}{r^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \Rightarrow \boxed{v \overset{①}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}}$

◇

/2 [5] Déterminer l'expression de la période T du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de v et r puis en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r. En déduire la troisième loi de Kepler.

Réponse

On a

$$T \overset{①}{=} \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} \overset{①}{=} \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$$

ce qui correspond à la traduction mathématique de la troisième loi énoncée par Kepler.

◇

/3 [6] Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre. Donner alors un ordre de grandeur de la masse de la Terre à partir de vos connaissances astronomiques.

Réponse

On peut, à partir de la trajectoire d'un satellite naturel ou artificiel connaître r et T, on en déduit alors M_T en utilisant la 3ème loi de Kepler ①. Mieux, on peut relever r et T pour différent satellites, et tracer T^2 en fonction de r^3. On obtient alors une droite de pente $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$, ce qui permet d'en déduire M_T (en supposant $\mathcal{G}$ connu !).

Pour le cas de la lune : $T = 28\,\text{jours}$ et $r = 384 \times 10^6\,\text{m}$ ①. On en déduit la masse de la Terre : $\underline{M_T = 6{,}10 \times 10^{24}\,\text{kg}}$. ①

◇

/3 [7] Un autre satellite S' de masse m' en orbite circulaire autour de la Terre a une trajectoire de rayon r égal au rayon de la trajectoire de S. Les deux satellites tournent dans le même plan. S et S' risquent-ils de se heurter au cours du mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

Réponse

Si les deux satellites sont à la même distance de la terre, ils ont la même vitesse. ① Si de plus ils sont dans un même plan, alors ils ont des trajectoires identiques, ① parcourues à la même vitesse : ils ne peuvent pas se heurter (sauf si leurs vitesses sont opposées). ①

◇

I/B Étude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ telle que $\mathcal{E}_p$ peut s'écrire sous la forme $\mathcal{E}_p = -\frac{k}{r}$ avec k une constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

On ne se limitera pas, dans cette partie, à un mouvement circulaire, mais on se placera dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite S autour de la Terre.

On note C la constante des aires définie par $C = r^2\dot{\theta}$.

/4 [8] Déterminer l'expression de k en fonction des données du problème en établissant l'expression de $\mathcal{E}_p$.

Réponse

$$\delta W \overset{①}{=} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}\,\vec{e_r}\cdot(\mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\,\vec{e_z}) \overset{①}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(\frac{\mathcal{G}M_T m}{r} + C\right)$$

Ainsi, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ peut se mettre sous la forme $-\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, donc elle est conservative et dérive de l'énergie $\mathcal{E}_p(r) \overset{①}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r} + C$. En choisissant $Ep(+\infty) \overset{①}{=} 0$, on a $C = 0$, et on en déduit

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad \boxed{k \overset{①}{=} \mathcal{G}M_T m}$$

◇

/10 9 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite S en fonction de m, r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et k. En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de m, C, r et k.

Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de r en justifiant les limites. Quelles sont les régions accessibles sur un diagramme en énergie potentielle ?

En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

Réponse

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{\text{TEM}}{=} 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad 1$$

Or $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$

$$\Rightarrow v^2 \overset{1}{=} \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + -\frac{k}{r}}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}$$

or $\boxed{\dot{\theta} = C/r^2}$ d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}}$$

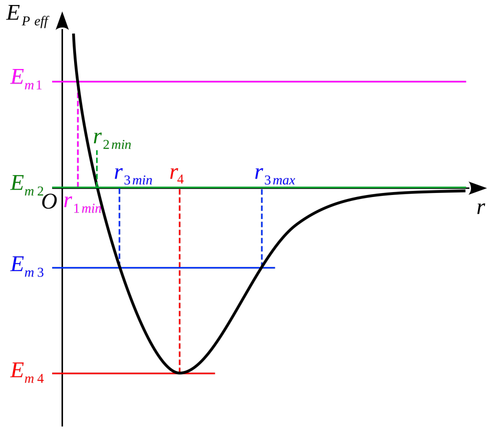

Figure 1 – Graphique de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ 2

- $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r\to 0}{\sim} \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$, et tend donc vers ∞. 1
- $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r\to+\infty}{\sim} -\frac{k}{r}$, et tend donc vers 0^- (donc par valeurs négatives). 1
- De plus, $\mathcal{E}_m = \text{cte} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) > \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, donc les régions accessibles sont celles pour lesquelles $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) < \mathcal{E}_m}$. 1

On en déduit donc : 2

- Si $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,4}$, aucun mouvement n'est possible
- Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,4}$, alors $r = r_4$ est constant : la trajectoire est circulaire (état lié)
- Si $\mathcal{E}_{m_4} < \mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,2} = 0$, r est compris entre 2 valeurs $r_{3,min}$ et $r_{3,max}$: mouvement elliptique (état lié)
- Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} = 0$, le satellite peut partir à l'infini mais sa vitesse à l'infini est nulle : le mouvement est parabolique (état de diffusion)
- Si $\mathcal{E}_m > 0$: le mouvement est hyperbolique (état de diffusion)

◇

/5 10 Déterminer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c en fonction de r_c, m, $\mathcal{G}$ et M_T. Définir puis déterminer la première vitesse cosmique v_1 par une rapide étude énergétique, fonction de R_T, $\mathcal{G}$ et M_T.

Réponse

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}$$

Or, $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_c}} \Rightarrow$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m \overset{1}{=} -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}}$$

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** autour de la Terre, à un rayon R_T : 1

$$\mathcal{E}_{m,\text{sol}} \overset{1}{=} \frac{1}{2}m{v_c}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_\text{T}}{R_\text{T}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{cercle}} \overset{1}{=} -\mathcal{G}\frac{mM_\text{T}}{2R_\text{T}}$$

Or système conservatif après le lancer $\Rightarrow$ $\frac{1}{2}m{v_c}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_\text{T}}{R_\text{T}} = -\mathcal{G}\frac{mM_\text{T}}{2R_\text{T}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_c \overset{1}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_\text{T}}{R_\text{T}}}}$$

◇