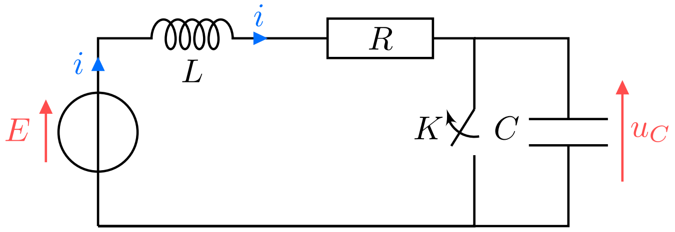
/29 E1 RLC échelon montant

Indiquer la ou les bonnes réponses en justifiant tout votre raisonnement.

On considère un circuit RLC série, alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice E constante comme schématisé ci-contre. Le condensateur peut être court-circuité lorsque l'interrupteur K est fermé. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la bobine et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur C.



Le condensateur est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue, pour que le régime permanent soit établi. À l'instant pris comme origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

/5 **1** Que valent l'intensité $i\left(0^+\right)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$, succédant immédiatement à l'ouverture de l'interrupteur K ? Justifier tout votre raisonnement.

A $i\left(0^+\right) = 0$ — B $i\left(0^+\right) = \frac{E}{R}$ — C $u_C\left(0^+\right) = 0$ — D $u_C\left(0^+\right) = E$

Réponse

Intéressons-nous d'abord au circuit à $t < 0$. L'interrupteur est alors fermé si bien que u_C est une tension aux bornes d'un fil donc

$$u_C\left(t = 0^-\right) = 0 \quad (1)$$

De plus, le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, donc

$$u_C\left(t = 0^+\right) = u_C\left(t = 0^-\right) = 0 \quad (1)$$

Par ailleurs en régime permanent constant, on sait que la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (un fil) (1). Si bien que le circuit est alors équivalent à uniquement la résistance R en série avec la source idéale de fem E. Ainsi avec une loi des mailles et loi d'Ohm :

$$i\left(t = 0^-\right) = E/R \quad (1)$$

De plus, la bobine assure la continuité de l'intensité qui la traverse, donc

$$i\left(t = 0^+\right) = i\left(t = 0^-\right) = \frac{E}{R} \quad (1)$$

Réponses $\boxed{\text{B}}$ et $\boxed{\text{C}}$.

/6 **2** Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$. On la mettra sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u_C(t) = \alpha$$

Exprimer ω_0 et Q.

A $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ — B $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ — C $Q = R\sqrt{\frac{L}{C}}$ — D $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Réponse

On se place après l'ouverture de l'interrupteur ($t > 0$). On a alors un circuit RLC série pour lequel on cherche à établir l'équation différentielle du second ordre sur la variable $u_C(t)$. Appliquons la loi des mailles en notant u_R et u_L les tensions respectivement aux bornes du résistor et de la bobine.

$$\begin{aligned}
& u_L + u_R = u_C \overset{(1)}{=} E && \left.\right\} u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_R = Ri \\
\Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C \overset{(1)}{=} E && \left.\right\} i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C \overset{(1)}{=} E && \left.\right\} \text{forme canonique} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C \overset{(1)}{=} \frac{E}{LC}
\end{aligned}$$

Par identification, on a alors : $\omega_0{}^2 = \dfrac{1}{LC}$ et $\dfrac{\omega_0}{Q} = \dfrac{R}{L}$

Ainsi $\boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \dfrac{1}{\sqrt{LC}}}$ et $Q = \dfrac{L\omega_0}{R} = \dfrac{L}{R}\dfrac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{1}{=} \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}}$

Réponses A et D.

◇

/1 3 Exprimer α.

A $\alpha = 0$ B $\alpha = E$ C $\alpha = QE$ D $\alpha = \omega_0{}^2\, E$

Réponse

En poursuivant l'identification on constate encore que :

$$\boxed{\alpha = \frac{E}{LC} \overset{1}{=} \omega_0{}^2 E}$$

Réponse D.

◇

/1 4 Que peut-on affirmer concernant le facteur de qualité ?

A La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 2$.
B La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 1/2$.
C Plus la valeur de l'inductance est élevée, plus le facteur de qualité est faible.
D Plus la valeur de la capacité est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

Réponse

La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque le système a une évolution pseudo-périodique avec un très faible dépassement, soit pour un $Q > 1/2$ (précisément, c'est pour $Q = 0{,}72$). Aucune des deux premières réponses A ou B n'est juste. Notons en revanche que pour $Q = 1/2$, on a le transitoire le plus bref sans dépassement. Par ailleurs, le facteur de qualité s'écrivant

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Une inductance élevée induira un facteur de qualité grand tandis qu'une capacité élevée conduira à un facteur de qualité petit. 1 Réponse D.

◇

Dans la suite, on considère que la bobine possède une inductance $L = 50\,\mathrm{mH}$ et que la capacité du condensateur vaut $C = 20\,\mu\mathrm{F}$. On souhaite obtenir un facteur de qualité $Q = 10$.

/2 5 Calculer la valeur à donner à la résistance R du résistor.

A $R = 0{,}002\,\Omega$ B $R = 0{,}02\,\Omega$ C $R = 5\,\Omega$ D $R = 500\,\Omega$

Réponse

On cherche la valeur de R pour obtenir $Q = 10$ à L et C fixé. On isole alors R dans l'expression de Q :

$$\boxed{R \overset{1}{=} \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}} \Rightarrow \underline{R = 5\,\Omega} \; 1$$

Réponse C.

◇

On admet alors que la tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] + u_{C,p}$$

/6 6 Exprimer τ en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

A $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$ B $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ C $\tau = \frac{\omega_0}{Q}$ D $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$

Réponse

Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle canonique s'écrit :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 \overset{①}{=} 0$$

De discriminant $\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 \overset{①}{=} {\omega_0}^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) \overset{①}{<} 0$ car $Q = 10 > \frac{1}{2}$

D'où les racines $r_\pm \overset{①}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Que l'on peut identifier avec la forme des racines proposée par l'énoncé pour être en cohérence avec l'expression de $u_C\,(t)$:

$$r_\pm \overset{①}{=} -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tau \overset{①}{=} \frac{2Q}{\omega_0}}$$

Réponse $\boxed{\text{B}}$.

/1 $\boxed{7}$ Exprimer la pseudo-pulsation Ω en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ $\boxed{\text{C}}$ $\Omega = \omega_0\left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

Réponse

De même, par identification, $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \overset{①}{=} \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$

Réponse $\boxed{\text{A}}$.

/1 $\boxed{8}$ Exprimer $u_{C,p}$ en fonction de E. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $u_{C,p} = E$ $\boxed{\text{B}}$ $u_{C,p} = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $u_{C,p} = {\omega_0}^2 E$ $\boxed{\text{D}}$ $u_{C,p} = 2E$

Réponse

$u_{C,p}$ est la solution particulière de l'équation différentielle. On peut la chercher sous la forme d'une constante. Soit, en l'injectant dans l'équation différentielle :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,p}}{\mathrm{d}t^2}}_{=0} + \frac{\omega_0}{Q}\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_{C,p}}{\mathrm{d}t}}_{=0} + {\omega_0}^2 u_{C,p}(t) = {\omega_0}^2 E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_{C,p} \overset{①}{=} E}$$

Réponse $\boxed{\text{A}}$.

/1 $\boxed{9}$ Exprimer A. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $A = E$ $\boxed{\text{B}}$ $A = -E$ $\boxed{\text{C}}$ $A = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $A = E/2$

Réponse

Exprimons la constante d'intégration A à l'aide des conditions initiales déterminées à la question $\boxed{1}$:

$$u_C\left(t = 0^+\right) = 0 = \exp(-0/\tau)\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] + E$$

$$\Leftrightarrow \boxed{A \overset{①}{=} -E}$$

Réponse $\boxed{\text{B}}$.

/5 $\boxed{10}$ Exprimer B. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $B = \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)$ $\boxed{\text{B}}$ $B = \frac{E}{RC\omega_a}$ $\boxed{\text{C}}$ $B = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $B = \frac{E}{\tau\omega_a}$

Réponse

D'après $\boxed{1}$, on a aussi $i\left(t = 0^+\right) = E/R$. Or, la loi courant tension aux bornes du condensateur permet d'écrire que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = \frac{i\left(t=0^+\right)}{C} \overset{1}{=} \frac{E}{RC}$$

Or,

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} &\overset{1}{=} -\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] \\ &+ \Omega \times \mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}}\left[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} \overset{1}{=} -\frac{A}{\tau} + \Omega B = \frac{E}{RC}$$

$$\Leftrightarrow \Omega B = \frac{E}{RC} + \frac{A}{\tau}$$

$$A = -E$$

$$\boxed{B \overset{1}{=} \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)}$$

Réponse $\boxed{\text{A}}$.

De plus, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{R}} \times \sqrt{LC} \Leftrightarrow \boxed{\tau \overset{1}{=} \frac{2L}{R}}$

Donc τ ne s'exprime pas en fonction de R et C uniquement. Ainsi, la réponse B est fausse. De même, RC ne peut pas s'exprimer simplement en fonction de τ donc la réponse D est fausse.