Sujet 1 – corrigé

I Etude d'une roue de vélo

On considère une roue de bicyclette de rayon R et de masse m dont on étudie l'arrêt de la rotation par un frein à étrier. Le frein exerce sur la jante une force de direction orthoradiale et d'intensité F, que l'on considérera constante tant que la roue tourne. Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu, fixe, noté (Δ). On suppose que la liaison pivot est parfaite.

1. Quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue : celui du cylindre plein ou celui du cylindre vide ?

   Réponse :
   La masse étant disposé principalement sur un cercle, le modèle le plus adapté est celui du cylindre vide.

2. On donne les moments d'inertie associés aux deux modèles : $J_\Delta = mR^2/2$ et $J_\Delta = mR^2$. Attribuer à chaque modèle le moment d'inertie correspondant.

   Réponse :
   Plus la masse est loin de l'axe de rotation et plus le moment d'inertie sera grand. On en déduit que $J_\Delta = mR^2/2$ correspond au cylindre plein et $J_\Delta = mR^2$ au cylindre creux.

3. Quel est le moment résultant sur l'axe (Δ) ? On justifiera avec soin en précisant les moments éventuellement nuls avec la raison de cette nullité.

   Réponse :
   Il y a 2 actions s'exercent sur la roue. Le moment de la liaison pivot par rapport à l'axe Δ est nul car la liaison est parfaite. Celui de la force de freinage est $-FR$ d'après la formule du bras de levier.

4. En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ (tel que $\omega = d\theta/dt$) autour de l'axe.

   Réponse :
   On applique la loi du moment cinétique projeté sur l'axe Δ à la roue dans le référentiel galiléen du laboratoire :
   $$J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt} = -FR$$

5. Déterminer alors les expressions de $d\theta(t)/dt$ et $\theta(t)$ si à $t = 0$, on a $\theta(0) = 0$ et $d\theta/dt(0) = \omega_0$.

   Réponse :
   On trouve :
   $$\dot\theta = \omega_0 - \frac{FR}{J}t \quad ; \quad \theta(t) = \omega_0 t - \frac{FRt^2}{2J}.$$

6. Déterminer l'intensité F de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour. On cherchera dans un premier temps à quelle condition la roue s'arrête, et quel angle la roue aura parcouru. On donne, pour l'application numérique, $R = 33\,\mathrm{cm}$, $m = 1{,}6\,\mathrm{kg}$ et $\omega_0 = 17\,\mathrm{rad\,s^{-1}}$.

   Réponse :
   La roue s'arrête quand $\dot\theta = 0$, soit pour $t_{\text{stop}} = \omega_0 J/(FR)$. Elle aura alors parcouru un angle : $\theta(t_{\text{stop}}) = J\omega_0^2/(FR) - \frac{J\omega_0^2}{2FR} = \frac{J\omega_0^2}{2FR}$.

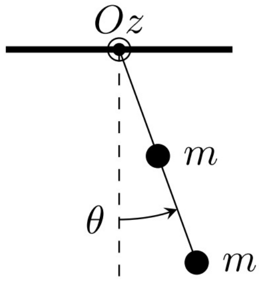
Si la roue s'arrête au bout d'un tour, on trouve :

$$2\pi = \frac{J\omega_0^2}{2FR} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{J\omega_0^2}{4\pi R} = 1{,}2\,\mathrm{N}}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Pendule à deux masses

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige et on suppose l'absence de frottement au niveau de la liaison pivot.



1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0$$

Réponse :
Utilisons le théorème du moment cinétique autour de l'axe (Oz) au système composé de la barre rigide et des deux masses qui y sont attachées. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Seul le poids associé à chacune des deux masses est associé à un moment non nul, considérant comme l'indique l'énoncé que la liaison pivot est parfaite.

Considérons tout d'abord le poids $\overrightarrow{P_1}$ de la masse m à la distance $L/2$ du point O. Le bras de levier est égal à $(L/2)\sin(\theta)$, si bien que

$$\left|\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1})\right| = mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De plus, le poids a tendance à faire tourner le pendule dans le sens horaire si θ est positif dans le sens trigonométrique. Ainsi,

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De manière tout à fait analogue, le moment du poids $\overrightarrow{P_2}$ associée à la masse située à la distance L s'écrit

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2}) = -mgL\sin(\theta)$$

Evaluons par ailleurs le moment cinétique associé au systèmes de points par sommation des moments cinétiques de chacun des points

$$\overrightarrow{L}_O = \frac{L}{2}\overrightarrow{u_r} \wedge m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + L\overrightarrow{u_r} \wedge mL\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mL^2\left(\frac{1}{4}+1\right)\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Soit
$$L_{Oz} = \overrightarrow{L}_O \cdot \overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) + \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2})$$

Il vient $$\frac{5}{4}mL^2\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta) - mgL\sin(\theta)$$

Soit $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin(\theta) = 0}$$

Remarque : Au besoin, il serait possible de linéariser cette équation pour retomber sur l'équation classique d'un oscillateur harmonique.

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

Réponse :
Appliquons la définition du barycentre G à partir d'un point quelconque, ici nous choisirons le point O :

$$2m\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OM_1} + m\overrightarrow{OM_2} = m\left(\frac{L}{2}\overrightarrow{u_r} + L\overrightarrow{u_r}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3L}{4}\overrightarrow{u_r}}$$

La distance OG est donc bien de $3L/4$.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Réponse :
Pour s'en convaincre, le plus simple est encore d'essayer. Si toute la masse $2m$ est concentrée au point G, nous aurions :

- $$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_{\text{tot}}}) = -2mg(3L/4)\sin(\theta) = -mg(3L/2)\sin(\theta)$$
- $$L_{Oz} = 2m(3L/4)^2\dot{\theta} = m(9L^2/8)\dot{\theta}$$

Soit, d'après le théorème du moment cinétique,

$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{3L}\sin(\theta) = 0$$

L'équation du mouvement n'est pas identique, preuve que les deux systèmes ne sont pas mécaniquement équivalents. Pour les solides en rotation, il n'est pas possible de traiter le problème "comme si"toute la masse était concentrée au barycentre du système. Cela est du au fait que l'expression dépend de la répartition de masse par rapport à l'axe de rotation et non uniquement de la position du barycentre.

Sujet 3 – corrigé

I Véhicule sur une colline

Un véhicule M de masse m se déplace de haut en bas d'une colline ; la trajectoire est assimilée à un quart de cercle vertical de centre O et de rayon R. On note θ, l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec la verticale. Le véhicule démarre du point le plus haut ($\theta = 0$) avec une vitesse v_0. On suppose que le conducteur laisse la voiture rouler sans accélérer ni freiner. Il n'y a pas de frottements. On appelle J le moment d'inertie du véhicule par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au cercle formé par la colline orienté dos à nous (dans le sens des θ croissants).

1. En appliquant la loi du moment cinétique, déterminer une équation différentielle vérifiée par θ et ses dérivées.

   Réponse :
   Le système considéré est le véhicule qui se déplace dans un référentiel galiléen (celui de la Terre). Les forces qui s'exercent sur la voiture sont la résistance du sol $\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{e}_r$ et le poids du véhicule $\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{e}_z$ en appelant $\overrightarrow{e}_z$ le vecteur unitaire de l'axe vertical orienté vers le haut. Puisque le vecteur $\overrightarrow{R}$ est colinéaire au vecteur position, son moment par rapport à l'axe Δ est nul. Le moment du poids par rapport à l'axe Δ est :
   $$\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{P}) = Rmg\sin\theta.$$
   La loi du moment cinétique projetée sur l'axe (O,Δ) est :
   $$\boxed{J\ddot{\theta} = Rmg\sin\theta}$$

2. Intégrer cette équation, après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}$ et déterminer l'expression de $\dot{\theta}(t)$ en fonction de θ et des données du problème.

   Réponse :
   On multiplie par $\dot{\theta}$ pour reconnaître l'équation de la conservation de l'énergie mécanique :
   $$J\ddot{\theta}\dot{\theta} = Rmg\dot{\theta}\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad \frac{J}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -Rmg\frac{d\cos\theta(t)}{dt}.$$
   On intègre alors cette relation entre l'instant initial $t = 0$ et un instant t quelconque :
   $$\frac{J}{2}\int_0^t \frac{d\dot{\theta}^2}{dt}dt = -Rmg\int_0^t \frac{d\cos\theta(t)}{dt}dt \quad\Leftrightarrow\quad \frac{J}{2}\left[\dot{\theta}(t)^2 - \dot{\theta}(0)^2\right] = -Rmg\left[\cos\theta(t) - 1\right].$$
   De plus, d'après les conditions initiales :
   $$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R},$$
   donc :
   $$\boxed{\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}\left[1 - \cos\theta(t)\right]}}.$$

3. Exprimer la vitesse du véhicule considéré comme ponctuel en bas de la colline.

   Réponse :
   En bas de la colline, $\theta = \pi/2$, donc :
   $$\boxed{\dot{\theta}(t_f) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}}} \quad\Rightarrow\quad \boxed{v(t_f) = R\dot{\theta}(t_f) = R\sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}}}$$

4. Retrouver par une autre méthode l'expression de $\dot{\theta}(t)$ obtenue à la seconde question.

Réponse :
On peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique de la voiture : en effet, la réaction du sol ne travaille pas car elle est orthogonal au déplacement élémentaire et le poids est une force conservative. On peut alors affirmer que l'énergie mécanique se conserve :

$$\frac{dEm}{dt} = 0 \quad ; \quad E_m = \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgz + \text{cst},$$

De plus, l'altitude est :

$$z = R\cos\theta.$$

On peut alors dire que l'énergie mécanique à un instant t est égale à l'énergie mécanique à l'instant initial :

$$E_m(t) = E_m(t=0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2}J\left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + mgR.$$

On retrouve alors le résultat de la question 2 :

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}\left[1 - \cos\theta(t)\right]}}.$$

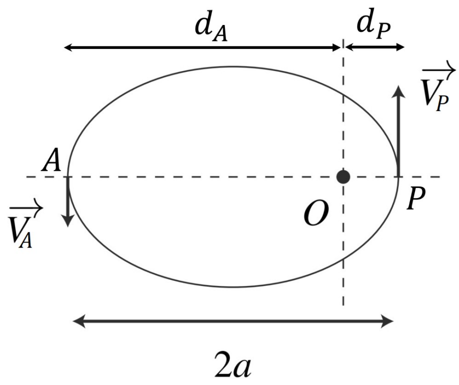
Sujet 4 – corrigé

I Satellite en orbite elliptique

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1 \times 10^3$ kg. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200$ km au périgée et $d_A = 35{,}9 \times 10^3$ km à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche du centre attracteur (ici la Terre) et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée $v_A = 3{,}5 \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

Réponse :
La Terre est située à l'un des foyers de l'ellipse. A et P sont situés sur le grand-axe de l'ellipse de part et d'autre du point O.



2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.

Réponse :
On a
$$a = \frac{d_P + d_A}{2} = \frac{18{,}1e3}{km}$$

3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.

Réponse :
D'après le cours, on suppose que l'énergie mécanique vaut, pour une trajectoire ellpitique et par analogie avec une trajectoire circulaire

$$E_m = \frac{-\mathcal{G}mM_T}{2a} = -1{,}2 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$$

Afin de déterminer la période, utilisons la troisième loi de Kepler et évaluons la valeur de la constante T^2/a^3 pour la Terre comme centre attracteur en se souvenant que pour un satellite géostationnaire (donc tel que $T_{\text{geo}} = 24\,\mathrm{h}$), son altitude est $h_{\text{geo}} = 36 \times 10^3$ km soit $a_{\text{geo}} = 42{,}4 \times 10^3$ km en additionnant le rayon de la Terre. Sachant que T^2/a^3 est une constante, il vient

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\text{geo}}^2}{a_{\text{geo}}^3} \quad \Rightarrow \quad T = T_{\text{geo}} \left(\frac{a}{a_{\text{geo}}}\right)^{3/2} = 6{,}7\,\mathrm{h}$$

4. On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée en fonction, entre autre, des vitesses.

   Réponse :
   Notons S le point matériel décrivant le satellite. A l'apogée et au périgée, la distance OS est extrémale (respectivement maximale et minimale). Par conséquent, la vitesse est purement orthoradiale en ces points, si bien que $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_P}$ sont orthogonales à respectivement OA et OP. Ainsi le module du moment cinétique en ces points s'écrit

$$L_{/O}S = A = md_A v_A \quad \text{et} \quad L_{/O}S = P = md_P v_P$$

5. En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

   Réponse :
   Le mouvement est à force centrale de centre O. Le moment cinétique en O est donc une grandeur conservée au cours du mouvement si bien que

$$d_A v_A = d_P v_P \quad \Rightarrow \quad v_P = v_A \frac{d_A}{d_P} = 6{,}3 \times 10^4\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$