/53 P1 Microphone pour guitare

Situés sous les cordes, les microphones sont l'un des éléments les plus fondamentaux d'une guitare électrique, car c'est sur eux que repose toute production du son, même en l'absence totale de caisse de résonance. Un microphone de guitare est composé d'un ou plusieurs aimants, entourés d'une bobine de cuivre.

Le comportement électrique du microphone est donné sur la figure ci-dessous. L'excitation sinusoïdale provoquée par la vibration de la corde, est modélisée par un générateur de tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω.

Le condensateur de capacité C_0 et le dipôle ohmique de résistance R_0 sont dus à la présence d'un aimant à l'intérieur du bobinage.

Données pour les composants :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \quad ; \quad C_0 = 100\,\mathrm{pF} \quad ; \quad R_0 = 1\,\mathrm{M\Omega} \quad ; \quad R_L = 3\,\mathrm{k\Omega}$$

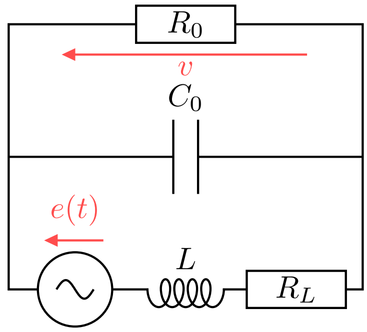


Figure 1 – Circuit étudié.

/6 **1** Déterminer qualitativement l'expression de la tension v à basse fréquence puis à haute fréquence. On utilisera pour cela les schémas équivalents pour les fréquences concernées. Quel est le type de filtre correspondant à cette situation ?

Réponse

En basse et haute fréquence, on a les schémas équivalents suivants :

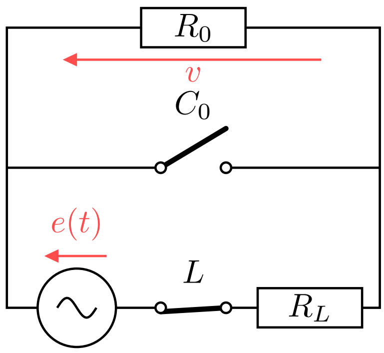


Figure 2 – Basses fréquences(1).

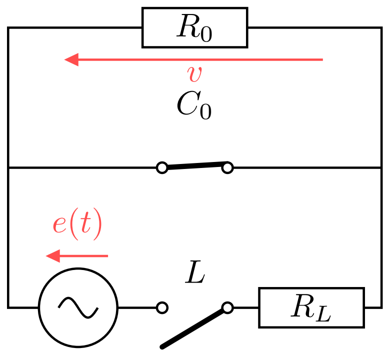


Figure 3 – Hautes fréquences(1).

Ainsi, à basse fréquence, en appliquant un pont diviseur de tension (1), on a

$$\underline{v} \overset{(1)}{=} \frac{R_0}{R_0 + R_L}\underline{e} \approx \underline{e}$$

puisque $R_0 \gg R_L$.

À haute fréquence,

$$\underline{v} \overset{(1)}{=} 0$$

car c'est la tension aux bornes d'un fil.

Le circuit se comporte donc comme un **filtre passe-bas** (1).

/4 **2** Déterminer, en fonction des données, de l'inductance de la bobine L et de la pulsation ω, la fonction de transfert complexe $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V}}{\underline{E}}$ où $\underline{V}$ et $\underline{E}$ sont les amplitudes complexes associées aux signaux $v(t)$ et $e(t)$. La mettre sous la forme $\underline{H} = \frac{1}{\dots}$.

Réponse

L'association parallèle du condensateur et de la résistance R_0 est équivalente à une admittance $\underline{Y}_{\mathrm{eq}} \overset{(1)}{=} \mathrm{j}C_0\omega + \frac{1}{R_0}$. On applique ensuite un pont diviseur de tension :

$$\underline{V} \overset{(1)}{=} \frac{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}} + \underline{Z}_{R_L} + \underline{Z}_L}\underline{E}$$

$\times \frac{\underline{Y}_{\mathrm{eq}}}{\underline{Y}_{\mathrm{eq}}}$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{\underline{V}}{\underline{E}} \overset{(1)}{=} \frac{1}{1 + (R_L + \mathrm{j}L\omega)\underline{Y}_{\mathrm{eq}}}$$

On remplace

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + (R_L + \mathrm{j}L\omega)(\mathrm{j}C_0\omega + \frac{1}{R_0})}$$

On développe

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} \overset{(1)}{=} \frac{1}{1 + \frac{R_L}{R_0} - LC_0\omega^2 + \mathrm{j}\omega\left(R_LC_0 + \frac{L}{R_0}\right)}}$$

On rappelle les formes canoniques pour deux types de filtre d'ordre 2 :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{\mathrm{j}x}{Q}} \quad \text{(passe-bas)}$$

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q(x - \frac{1}{x})} \quad \text{(passe-bande)}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et Q le facteur de qualité.

/7 $\boxed{3}$ Écrire la fonction de transfert précédente sous la forme canonique appropriée. En déduire le facteur de qualité et la pulsation propre ω_0 en fonction de C_0, R_0, R_L, et L.

Réponse

On a $1 + \frac{R_L}{R_0} = \frac{R_0+R_L}{R_0}$. On multiplie en haut et en bas 1 l'expression de $\underline{H}$ par $\frac{R_0}{R_0+R_L}$:

$$\underline{H} \overset{1}{=} \frac{\frac{R_0}{R_0+R_L}}{1 - \frac{LC_0R_0}{R_0+R_L}\omega^2 + \mathrm{j}\omega\frac{R_0}{R_0+R_L}\left(R_LC_0 + \frac{L}{R_0}\right)}$$

On a donc la forme canonique souhaitée (celle du passe-bas du second ordre) : $\underline{H} = \dfrac{H_0}{1 - x^2 + \frac{\mathrm{j}x}{Q}}$ avec

$$\boxed{H_0 \overset{1}{=} \frac{R_0}{R_0 + R_L}} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{R_0 + R_L}{LCR_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{LC_0R_0}}}$$

On en déduit le facteur de qualité par identification :

$$\begin{aligned}
\frac{1}{Q\omega_0} &\overset{1}{=} \frac{R_0}{R_0 + R_L}\left(R_LC_0 + \frac{L}{R_0}\right) && \text{On développe} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{Q\omega_0} &= \frac{R_LR_0C_0 + L}{R_L + R_0} && (\cdot)^{-1} \\
\Leftrightarrow \omega_0 Q &= \frac{R_L + R_0}{R_LC_0R_0 + L} && \div\omega_0 \\
\Leftrightarrow Q &\overset{1}{=} \frac{R_L + R_0}{R_LC_0R_0 + L}\frac{1}{\omega_0} && \text{On remplace} \\
\Leftrightarrow Q &= \frac{R_L + R_0}{R_LC_0R_0 + L}\sqrt{\frac{LC_0R_0}{R_0 + R_L}} && \text{On simplifie la racine} \\
\Leftrightarrow & \boxed{Q \overset{1}{=} \frac{\sqrt{(R_L + R_0)LC_0R_0}}{R_LC_0R_0 + L}}
\end{aligned}$$

Dans toute la suite, on utilisera la forme canonique.

/7 $\boxed{4}$ Qu'est-ce que la résonance ? Établir la condition d'existence d'une résonance et déterminer la pulsation réduite de résonance x_r en fonction du facteur de qualité.

Réponse

Par définition, il y a résonance quand un système excité par l'extérieur atteint un maximum d'amplitude 1 pour une fréquence d'excitation non nulle et non infinie 1, appelée fréquence d'excitation. On cherche donc le maximum de

$$|\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Comme le numérateur est constant, cette fonction est maximale si le dénominateur est minimal 1. Par ailleurs, la fonction racine étant monotone croissante, on peut alors chercher le minimum de la fonction

$$f : x \to (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

sur $\mathbb{R}^{+\star}$. Pour cela, on dérive et on cherche la valeur d'annulation :

$$f'(x) \overset{1}{=} 2(-2x)(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

Ainsi, $f'(x_r) = 0 \Rightarrow \qquad 2(2x_r)(1-x_r^2) = \dfrac{2x_r}{Q^2}$

On cherche une solution non nulle, on en déduit

$$2(1-x_r^2) = \frac{1}{Q^2} \quad \Leftrightarrow \quad 1 - x_r^2 = \frac{1}{2Q^2} \quad \Leftrightarrow \quad x_r^2 \overset{(1)}{=} 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette équation n'admet de solution que si $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0$, soit si

$$\boxed{Q \overset{(1)}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

qui est la condition de résonance. On a alors

$$\boxed{x_r \overset{(1)}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1}$$

◇

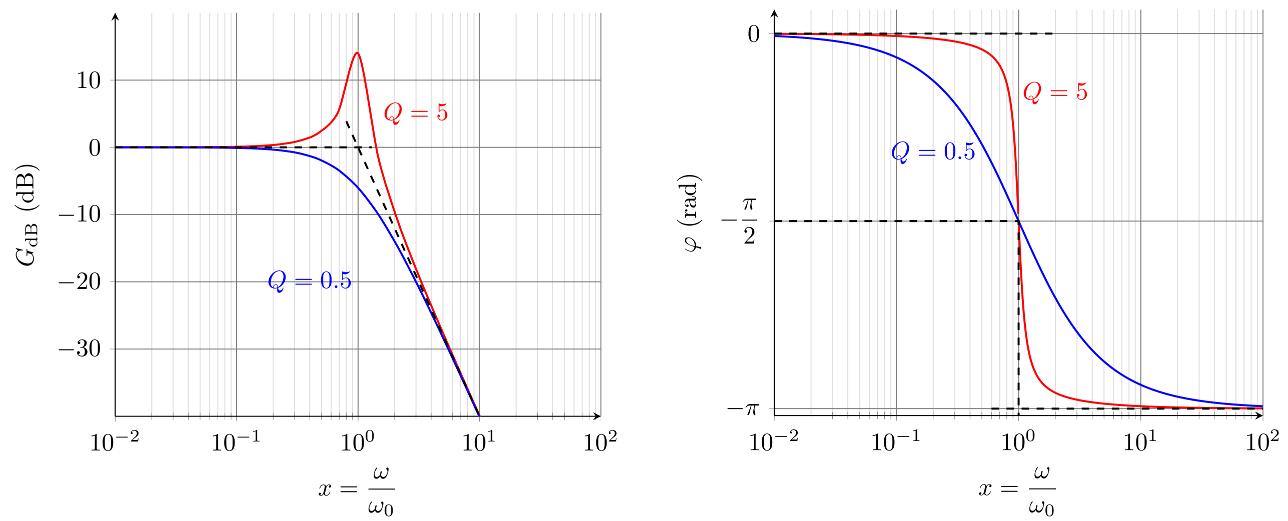
/10 $\boxed{5}$ Établir l'expression des asymptotes des diagrammes de Bode en gain **et** en phase. Tracer les allures de G_{dB} et $\Delta\varphi_{s/e}$ en fonction de la pulsation réduite x pour $Q \approx 0{,}5$ et $Q \approx 5$.

Réponse

On trace les diagrammes de Bode, avec :

Tableau 1 – Étude RLC sur C.

	$\forall x$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\dfrac{1}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	1 (1)	$-\dfrac{1}{x^2}$ (1)
$G_{\mathrm{dB}} = 20\log\lvert\underline{H}\rvert$	$-10\log\left(\left(1-x^2\right)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2\right)$	0 (1)	$-40\log x$ (1)
$\tan(\arg(\underline{H}))$	$-\dfrac{x/Q}{1-x^2}$	0	0
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$	$---$	0 (1)	$-\pi$ (1)



(a) Gain (2) **(b)** Phase (2)

Figure 4 – Diagramme de Bode du filtre

◇

Dans les questions suivantes, on suppose que le facteur de qualité est grand. La réponse expérimentale du microphone (amplitude de la tension v en fonction de la fréquence f pour une amplitude de tension d'entrée constante) est donnée par la Figure 5. On propose d'étudier trois méthodes pour estimer le facteur de qualité à l'aide de cette courbe. **On exprimera Q avec un seul chiffre significatif**.

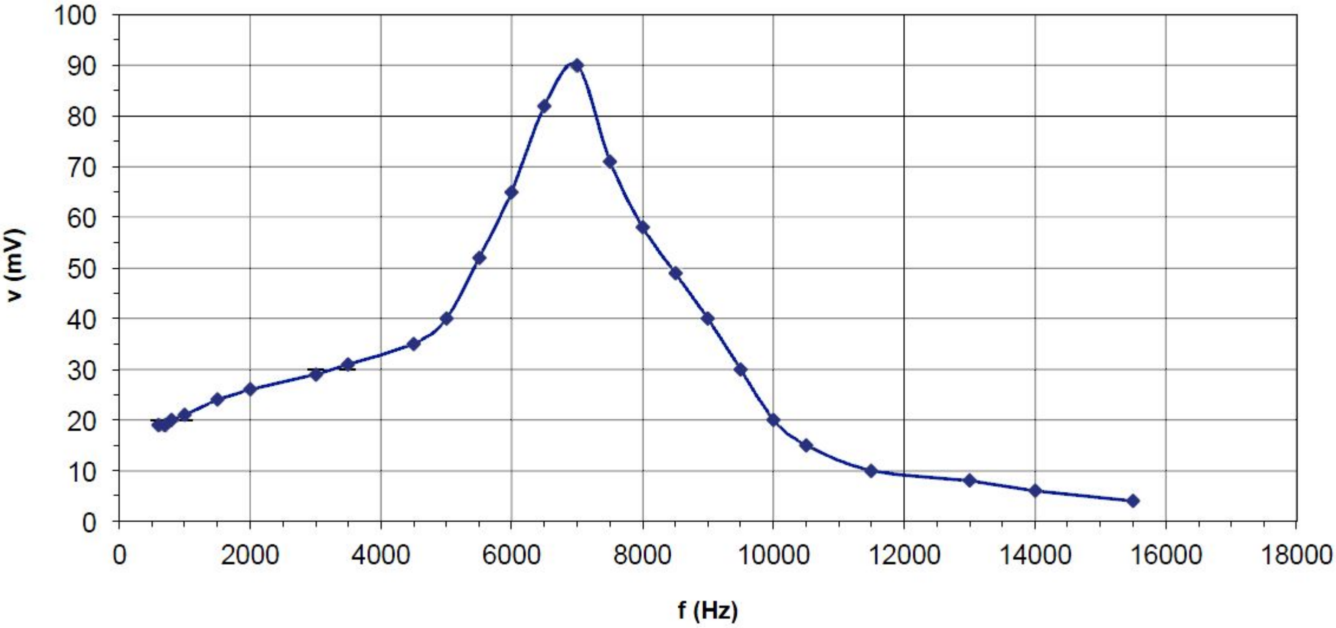


Figure 5 – Gain expérimental.

/2 [6] Comment se simplifie l'expression de la pulsation de résonance lorsque $Q \gg 1$? Exprimer la valeur maximale du gain $G_{\max}$ en fonction du facteur de qualité et de H_0.

Réponse

Si $Q \gg 1$, $\frac{1}{Q^2} \ll 1$ donc $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx 1$. Ainsi, $\boxed{\omega_r = \omega_0}$. ①

On a alors

$$G_{\max} = G(x=1) = \left| \frac{H_0}{1 - 1 + \mathrm{j}\frac{1}{Q}} \right| \Rightarrow \boxed{G_{max} \overset{①}{=} H_0 Q}$$

◇

/2 [7] Où peut-on lire H_0 ? En déduire après lecture graphique une valeur numérique pour Q.

Réponse

$H_0 \overset{①}{=} G_{\mathrm{BF}}$. On a donc

$$\boxed{Q \overset{①}{=} \frac{G_{\max}}{G_{BF}}}$$

Sur le graphique, on lit $G_{\max}/G_{BF} = v_{\max}/v_0 = 90/19$. Il vient donc

$$Q \approx 4{,}5 \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{①}{\approx} 5}$$

◇

On définit l'acuité A de la résonance par la relation suivante :

$$A = \frac{f_r}{\Delta f} \approx Q$$

avec Δf la largeur de la bande passante. On admet que A est égal à Q dans le cas étudié ici.

/1 [8] Rappeler la définition d'une fréquence de coupure.

Réponse

Une fréquence de coupure f_c est telle que $\boxed{G(f_c) \overset{①}{=} \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}}$, ou avec la tension $\boxed{v(f_c) = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}}}$

◇

/5 [9] Faire une seconde estimation du facteur de résonance à l'aide d'une mesure de l'acuité. Comparer avec la première méthode.

Réponse

Sur le graphique, on relève $f_r \overset{\textcircled{1}}{=} 7000\,\mathrm{Hz}$. On détermine les fréquences de coupure en cherchant les points où $v = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \overset{\textcircled{1}}{=} 64\,\mathrm{mV}$.

On lit également $f_{c1} \overset{\textcircled{.5}}{=} 6{,}00\,\mathrm{kHz}$ et $f_{c2} \overset{\textcircled{.5}}{=} 7{,}50\,\mathrm{kHz}$. On a donc

$$A = Q \approx 4{,}67 \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{\textcircled{1}}{\approx} 5}$$

On retrouve bien le même résultat $\textcircled{1}$ qu'avec l'autre méthode.

◇

/6 10 À l'aide des expressions de ω_0 et Q déterminées dans la question 3, donner une estimation de la valeur de l'inductance L à partir d'une lecture graphique de la fréquence de résonance f_r. En déduire le facteur de qualité puis commenter le résultat obtenu.

Réponse

La lecture de f_0 nous donne ω_0. Or, $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_0+R_L}{LC_0R_0}}$ d'où

$$\omega_0^2 = \frac{R_0 + R_L}{LC_0R_0}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{L = \frac{R_0 + R_L}{C_0R_0\omega_0^2} \overset{\textcircled{1}}{=} \frac{R_0 + R_L}{4\pi^2 f_0^2 C_0 R_0}}$$

Or, comme $R_L = 3 \times 10^3\,\Omega$ et $R_0 = 1 \times 10^6\,\Omega$, on peut considérer que $R_L \ll R_0$, on a alors $R_L + R_0 \overset{\textcircled{1}}{=} R_0$ d'où

$$\boxed{L \overset{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_0 = 7000\,\mathrm{Hz} \\ C_0 = 100 \times 10^{-12}\,\mathrm{F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \ \underline{L \overset{\textcircled{1}}{=} 5{,}17\,\mathrm{H}}$$

On peut alors retrouver Q en appliquant la formule théorique provenant de la détermination de la fonction de transfert :

$$Q = \frac{\sqrt{(R_L + R_0)LCR_0}}{R_LCR_0 + L} \approx \frac{\sqrt{LCR_0^2}}{R_LCR_0 + L} \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{\textcircled{1}}{\approx} 4}$$

On obtient bien des résultats cohérents $\textcircled{1}$ avec les 3 méthodes. Le facteur de qualité est relativement grand devant 1, ce qui est cohérent avec l'hypothèse faite au début de l'étude.

◇

/3 11 La fréquence de résonance varie selon le type de microphone utilisé. Quel est l'effet sur le son restitué ?

Réponse

Le microphone est un passe-bas mais du fait de son facteur de qualité élevé, il possède une résonance marquée $\textcircled{1}$. Pour une même note jouée par l'instrument, l'usage de deux microphones différents induira la restitution de la même **note** $\textcircled{1}$ (caractérisée par la fréquence du fondamental et sachant qu'un filtre linéaire ne modifie jamais la fréquence fondamentale du signal), mais le spectre sera différent car toutes les harmoniques ne seront pas amplifiées de la même façon suivant la valeur de la fréquence de résonance. Le type de microphone modifie donc le **timbre** $\textcircled{1}$ du son. Le choix du microphone peut donc donner un son plus "jazz" ou plus "rock"...

◇