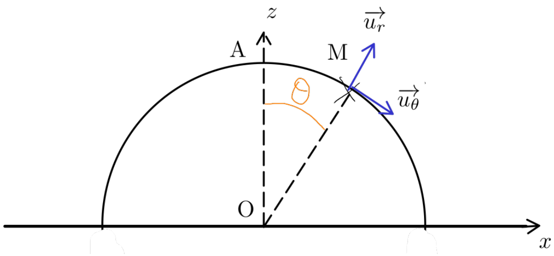
Correction TD entraînement

I Glissade d'un pingouin sur un igloo

1) ◇ **Système :** {pingouin}
◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
◇ **Repère :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ **dans le sens de** θ
◇ **Repérage :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v}(t) &= R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a}(t) &= R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$



◇ **Origine et instant initial :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} &\Rightarrow \theta(0) = 0 \\ \overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0} &\Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0 \end{aligned}$$

◇ **BDF :**

Poids $\overrightarrow{P} = mg(-\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$
Réaction $\overrightarrow{R} = R_N\overrightarrow{u_r}$

◇ **PFD :**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\cos\theta + R_N \\ mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 & (3.1) \\ \ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\sin\theta & (3.2) \end{cases}}$$

L'équation du mouvement est celle qui donne l'équation d'oscillateur harmonique aux petits angles, et qu'on a déjà utilisée en cours sur le pendule, et linéaire en θ : l'équation (3.2). L'équation (3.1) contient l'information sur le contact à l'igloo.

2) En prenant (3.2)$\times\dot{\theta}$, on a

$$\begin{aligned} \ddot{\theta}\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) &= \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos\theta) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \frac{g}{R}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\right]_{t=0}^{t} &= \frac{g}{R}\left[-\cos\theta\right]_{t=0}^{t} \\ \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)} \end{aligned}$$

■

3) En reprenant (3.1), on peut remplacer $\dot{\theta}^2$:

$$\begin{aligned} R_N &= mg\cos\theta - m\cancel{R}\frac{2g}{\cancel{R}}(1-\cos\theta) \\ \Leftrightarrow \boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)} \end{aligned}$$

4) La condition de support d'un solide est $R_N > 0$: le pingouin décolle du support si la force de réaction est nulle, soit $R_N = 0$. Or,

$$\begin{aligned} R_N &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\cos\theta - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow & \boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

Une application numérique donne $\boxed{\theta = 48{,}2°}$.

II Course de F1

1) La voiture A d'Alonso entame son virage dès qu'elle passe par l'axe Δ, et parcourt un demi-cercle de longueur

$$\boxed{D_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}}$$

En revanche, la voiture B de Button continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_1 - R_2) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

2) Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{aR_A} = 26{,}6\,\mathrm{m\,s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B = \sqrt{aR_B} = 24{,}3\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

3) Calculons le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage. On sait que

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

d'où les résultats

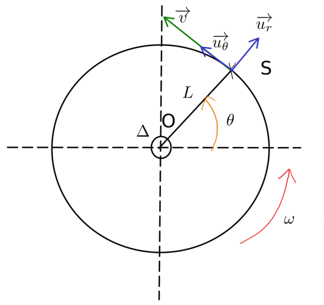
$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Alonso va plus vite que Button pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la meilleure des deux**. À ne pas tenter en vérifiant chez soi, mais de quoi briller sur Mario Kart. . . ?

III Entraînement d'une spationaute

- **Système :** {spationaute}
- **Référentiel :** référentiel du laboratoire, supposé galiléen
- **Repère :** $(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ selon le sens de rotation

◇ **Repérage :**



$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}(t) = L\overrightarrow{u_r}$$
$$\vec{v}_S(t) = L\omega\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\vec{a}_S(t) = L\dot{\omega}\overrightarrow{u_\theta} - L\omega^2\overrightarrow{u_r}$$

1) Cf. schéma.
2) Fait en introduction
3) Au bout de quelques τ, $\omega(t) = \omega_0$ et le mouvement sera circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{v}_S(t) = L\omega_0\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{a}_S(t) = -L{\omega_0}^2\overrightarrow{u_r} \end{cases}}$$

La norme de l'accélération subie est alors $\boxed{\|\vec{a}_S\| = L{\omega_0}^2}$.

4)
$$a_S = 10g \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ L = 10{,}0\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{3.3}$$

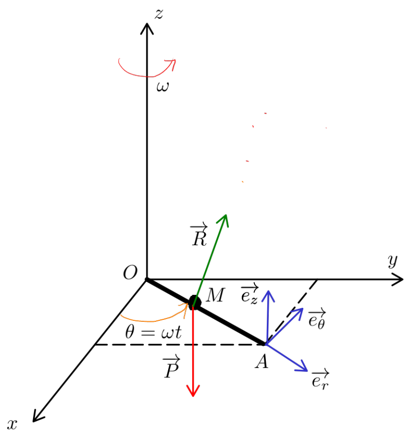
$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\omega_0 = 3{,}13\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \approx 0{,}50\,\mathrm{tour\,s^{-1}}} \tag{3.4}$$

Ordres de grandeurs

◇ Accélération latérale en F1 : [4 ; 5] g ;
◇ Accélération latérale en avion de chasse : [9 ; 10] g pendant quelques secondes max ;
◇ Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse : ≈ 20 g (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;
◇ Accélération négative frontale en accident de voiture : [40 ; 60] g ! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.

IV Anneau sur une tige en rotation

1) ◇ **Système :** {anneau} point matériel M de masse m
◇ **Référentiel :** terrestre supposé galiléen
◇ **Repère :** cylindrique $(\mathrm{O},\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$
◇ **Repérage :**



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\vec{e_r}$$
$$\vec{v} = \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}$$
$$= \dot{r}\vec{e_r} + r\omega\vec{e_\theta}$$
$$\vec{a} = \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\omega\vec{e_\theta} - r\omega^2\vec{e_r} + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0}$$
$$= (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e_r} + 2\dot{r}\omega\vec{e_\theta}$$

◇ **Conditions initiales :**

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0$$

◇ **BDF :** pas de frottements donc pas de composante sur $\vec{e_r}$:

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}$
Réaction support $\vec{R} = R_\theta\vec{e_\theta} + R_z\vec{e_z}$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0 \\ 2m\dot{r}\omega = R_\theta \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{r} - \omega r = 0} & (3.5) \\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega & (3.6) \\ R_z = mg & (3.7) \end{cases}}$$

2) On résout (3.5) avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \omega^2 r &= 0 \\ \Rightarrow s^2 - \omega^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 &= \omega^2 \\ \Leftrightarrow &\boxed{s = \pm\omega} \end{aligned}$$

On a donc des solutions de la forme

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Or, avec les CI :

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ \Leftrightarrow &\boxed{r_0 = A + B} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{r}(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= A\omega - B\omega \\ \Leftrightarrow &\boxed{A = B} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}} \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = r_0 \cosh(\omega t)}$$

3) On reprend (3.6) et (3.7) avec $\dot{r} = \omega r_0 \sinh(\omega t)$:

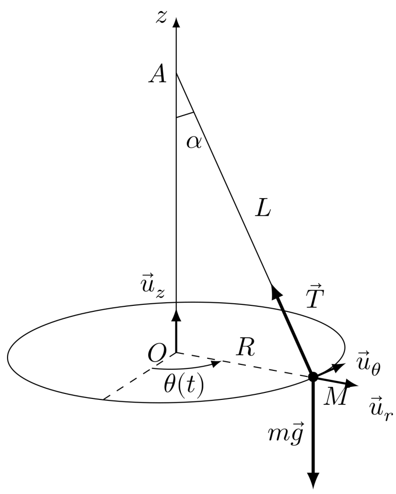
$$\boxed{\vec{R} = 2mr_0\omega^2 \sinh(\omega t)\vec{e_\theta} + mg\vec{e_z}}$$

4) L'anneau quitte la tige en τ quand $r(\tau) = \ell$, soit

$$\begin{aligned} \ell &= r_0 \cosh(\omega t) \\ \Leftrightarrow &\boxed{\tau = \frac{1}{\omega}\operatorname{argch}(\omega t)} \end{aligned}$$

V Pendule conique

1) On utilisera un repère cylindrique pour étudier la rotation.
2) ◇ **Système :** {M} masse m
   ◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
   ◇ **Repère :** $(\mathrm{O}, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_z})$ (voir schéma)



◇ **Repérage :** $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= R\overrightarrow{u_r} = L\sin\alpha\overrightarrow{u_r}\\
\overrightarrow{v}_{\mathrm{M}} &= L\dot{\theta}\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta}\\
&= L\omega\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta}\\
\overrightarrow{a}_{\mathrm{M}} &= -L\omega^2\sin\alpha\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

◇ **BDF :**

Poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
Tension $\overrightarrow{T} = T(-\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$

3) On applique le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2\cancel{\sin\alpha} = -T\cancel{\sin\alpha} \\ 0 = T\cos\alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos\alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\mathrm{lim}}}$$

4) Si $\omega \gg \omega_{\mathrm{lim}}$, alors $\cos\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\mathrm{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\mathrm{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

5) On trouve $\boxed{\cos\alpha = 0{,}138 \Leftrightarrow \alpha = 82°}$