SUP MPSI3 Corrigé DS04 06 janvier 2023

EXERCICE 1 : Étude de la cinétique de l'hydrolyse d'un complexe du fer :

(D'après e3a PC 2022) **(27 pts)**

Q1. Il est préférable de travailler à la longueur d'onde correspondant **au maximum d'absorption** : On choisira donc $\boldsymbol{\lambda \approx 520}$ **nm.**

Q2. L'acide fort HCl **accélère la réaction sans intervenir dans l'équation bilan,** c'est donc un **catalyseur.**

Q3. On nous donne $v = k.[H_2O]^{\alpha}.[H^+]^{\beta}.[[Fe(Phen)_3]^{2+}]^{\gamma}$ (1)
Or, il est précisé que $[H^+]_0 = 2$ mol·L^{-1} et que l'eau est le solvant.
De plus, on nous donne : $[[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0 = 2{,}6 \cdot 10^{-4}$ mol·L^{-1}.
Ainsi, $[H_2O]_0 \gg [[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0$ et $[H^+]_0 \gg [[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0$: Il y a **dégénérescence de l'ordre** et la vitesse de la réaction peut s'écrire sous la forme :

$$\boxed{\boldsymbol{v = k_{app}\,[[Fe(Phen)_3]^{2+}]^{\gamma}} \text{ avec } \boldsymbol{k_{app} = k[H_2O]^{\alpha}{}_0[H^+]^{\beta}{}_0}}$$

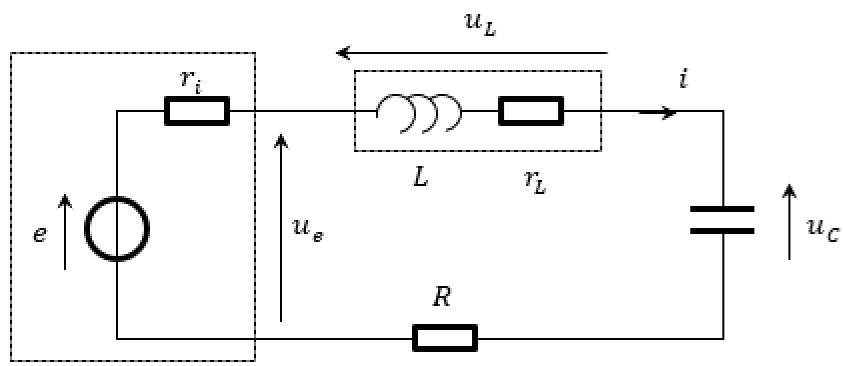
Q4. D'après la définition de la vitesse, on sait que $v = -\frac{d[[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]}{dt} = k_{app}\,[[Fe(Phen)_3]^{2+}]^{\gamma}$
Supposons que $\gamma = 1$, comme le propose l'énoncé :
Alors on obtient l'équation différentielle d'ordre 1 : $\boldsymbol{\frac{d[[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]}{dt} + k_{app}\,[Fe(Phen)_3]^{2+}] = 0}$.
Alors on sait que la solution est de la forme : $[Fe(Phen)_3]^{2+}] = Cste\ e^{-\,k_{app}\,t}$.
CI : A $t = 0$, $[[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0 = [[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0 = cste = 2{,}6 \cdot 10^{-4}$ mol·L^{-1}.
Soit : $\boxed{\boldsymbol{[Fe(Phen)_3]^{2+}] = [[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0\ e^{-\,k_{app}\,t}}}$

Q5. Ou encore : $\boxed{\boldsymbol{\ln([Fe(Phen)_3]^{2+}]) = \ln([[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0) - k_{app}t}}$.
Il faut encore relier $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$ et absorbance.
Seule l'espèce $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$ absorbe, donc :
Loi de Beer-Lambert : $A = \varepsilon(\lambda)\ l\ [[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]$ et $A_0 = \varepsilon(\lambda)\ l\ [[Fe\ (Phen)_3]^{2+}]_0$
Ainsi l'équation précédente devient : $\ln \frac{A}{\varepsilon(\lambda)\ l} = \ln \frac{A_0}{\varepsilon(\lambda)\ l} - kapp\ t$
En simplifiant à gauche et à droite par $-\ln(\varepsilon(\lambda)\ l)$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\ln(A) = \ln(A_0) - k_{app} \times t}}$;
Où A_0 est l'absorbance de la solution à $t = 0$.
On fait donc la **régression linéaire de $\ln(A)$ en fonction du temps t** sous la forme : $y = ax + b$.
On obtient : $a = -0{,}038$ (en laissant le temps t en min)
$b = 0{,}024$
Et $r = -0{,}99924$
La valeur du coefficient de corrélation $|r| > 0{,}999$ permet de conclure que les points sont bien alignés ce qui valide que **la cinétique est d'ordre 1 par rapport à $[Fe\ (Phen)_3]^{2+}$**, donc que $\boldsymbol{\gamma = 1}$.
Et par indentification, on obtient $\boldsymbol{k_{app} = -a = 0{,}038}$ **min^{-1}** $\boldsymbol{= \frac{0{,}038}{60} = 6{,}3 \cdot 10^{-4}}$ **s^{-1}**.

Q6. D'après la loi d'Arrhenius : $\boxed{\boldsymbol{k_{app} = B\ e^{-\frac{E_a}{RT}} \text{ ou } \ln(k_{app}) = \ln(B) - \frac{E_a}{RT}}}$.
On fait donc la **régression linéaire de $\ln(k_{app})$ en fonction de $(\frac{1}{T})$** sous la forme : $y = a'x + b'$.
On obtient : $a' = -14974 \approx -1{,}5.10^4$
$b' = 40{,}5$
Et $r' = -0{,}9995$.
La valeur du coefficient de corrélation $|r| > 0{,}999$ permet de conclure que les points sont bien alignés, donc que **la loi d'Arrhenius est bien vérifiée**.
Et par indentification, on obtient $\boldsymbol{a' = -\frac{E_a}{R}}$; soit : $\boxed{\boldsymbol{E_a = -R\ a'}\ \textbf{:}}$
AN : $E_a = -8{,}31 \times (-1{,}5.10^4)$; On obtient donc : $\boldsymbol{E_a \approx 124{,}6}$ **kJ.mol^{-1}.**

EXERCICE 2 : Étude d'un réseau en régime sinusoïdal forcé : *(≈ 32 pts)*

(D'après ENAC 2022)



Q1. Les impédances $\underline{Z_C}$, $\underline{Z_L}$ et $\underline{Z_R}$ sont en série.

Un pont diviseur de tension permet d'écrire :

$\frac{\underline{u_{C,m}}}{\underline{u_{e,m}}} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_C}+\underline{Z_L}+\underline{Z_R}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega}+jL\omega+R+r_L}$

Soit $\frac{\underline{u_{C,m}}}{\underline{u_{e,m}}} = \frac{1}{1-LC\omega^2+jC(R+r_L)\omega} =$

$= \frac{1}{1-LC\,\omega_0{}^2\,\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}+jC(R+r_L)\frac{\omega}{\omega_0}\,\omega_0}$.

En posant $\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \textbf{ ou } \boldsymbol{LC\omega_0{}^2 = 1}}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$,

on peut écrire cette expression sous la forme :

$\frac{\underline{u_{C,m}}}{\underline{u_{e,m}}} = \frac{1}{1-1\times x^2+jC\omega_0(R+r_L)\,x}$; Ou encore : $\frac{\underline{u_{C,m}}}{\underline{u_{e,m}}} = \frac{1}{1-x^2+jC\omega_0(R+r_L)\,x}$.

Par identification avec $\frac{\underline{u_{C,m}}}{\underline{u_{e,m}}} = \frac{H_0}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$. On en déduit que $\boxed{\boldsymbol{H_0 = 1}}$. **<u>Réponses A et D</u>**.

Q2. Enfin, par identification, on a aussi $C\omega_0(R+r_L) = \frac{1}{Q}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{Q = \frac{1}{C\omega_0(R+r_L)} = \frac{L\omega_0}{(R+r_L)} = \frac{1}{(R+r_L)}\sqrt{\frac{L}{C}}}}$.

<u>Réponse B</u>.

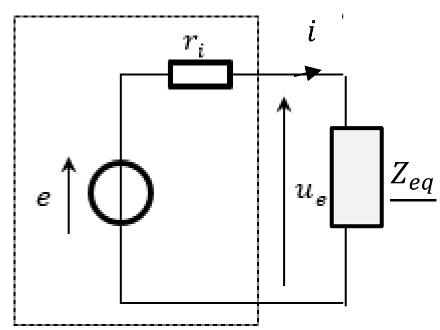
Q3. On se place en $\omega = \omega_0$.

Exprimons $\underline{Z_{eq}}$ équivalent à l'association série de la bobine, du condensateur et de la résistance R.

Alors $\underline{Z_{eq}} = R + r_L + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + r_L + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}$

Or en $\omega = \omega_0$, comme $LC\omega_0{}^2 = 1$, il vient que : $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$; Ainsi $jL\omega_0 - j\frac{1}{C\omega_0} = 0$.

Et $\boxed{\boldsymbol{\underline{Z_{eq}} = r_L + R}}$.



On a alors le circuit équivalent ci-contre :

On remarque que $\underline{Z_{eq}}$ et r_i son en série.

Pont diviseur de tension : $\frac{\underline{u_{e,m}}}{\underline{e_m}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+r_i}$.

Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{\frac{\underline{u_{e,m}}}{\underline{e_m}} = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i}} \textbf{ ou } \boldsymbol{\underline{u_{e,m}} = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i}\underline{e_m}}}$. **<u>Réponse C</u>**.

Q4. D'après le schéma équivalent ci-dessus : $\underline{e_m} = (\underline{Z_{eq}} + r_i)\underline{i_m}$.

Avec $\underline{Z_{eq}} = r_L + R$; Or $\underline{e_m} = e_m$, ainsi : $\boxed{\boldsymbol{\underline{i_m} = \frac{e_m}{R+r_L+r_i}}}$.

D'autre part, en reprenant : $\frac{\underline{u_{C,m}}}{\underline{u_{e,m}}} = \frac{H_0}{1+j\frac{x}{Q}-x^2}$ et comme $\omega = \omega_0$ alors $x = 1$.

Ainsi : $\frac{\underline{u_{C,m}}}{\underline{u_{e,m}}} = \frac{H_0}{1+j\frac{1}{Q}-1} = -jQH_0$; D'où $\boxed{\boldsymbol{\underline{u_{C,m}} = -jQH_0\underline{u_{e,m}}}}$; enfin $\underline{u_{e,m}} \neq e_m$ **<u>Réponses B et C</u>**.

Q5. Par définition de l'impédance, $\underline{u_{L,m}} = (jL\omega_0 + r_L)\underline{i_m} = (jL\omega_0 + r_L)\frac{e_m}{R+r_L+r_i} = \left(\frac{r_L}{R+r_L+r_i} + j\frac{L\omega_0}{R+r_L+r_i}\right)e_m$:

Par identification avec $\underline{u_{L,m}} = (a + jb)e_m$: On obtient : $\boxed{\boldsymbol{a = \frac{r_L}{R+r_L+r_i}}}$: **<u>Réponse A</u>**.

Q6. On identifie également $b = \frac{L\omega_0}{R+r_L+r_i}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; il vient : $L\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{b = \frac{1}{R+r_L+r_i}\sqrt{\frac{L}{C}}}}$: **<u>Réponse C</u>**.

PROBLEME 1 : Modélisation d'un double vitrage : *(≈ 63 pts)*

(D'après EPITA – IPSA MP, PSI, PC 2022).

I – Présentation de l'isolation acoustique :

Q1. Les fréquences audibles sont situées entre **20 Hz et 20 kHz**.

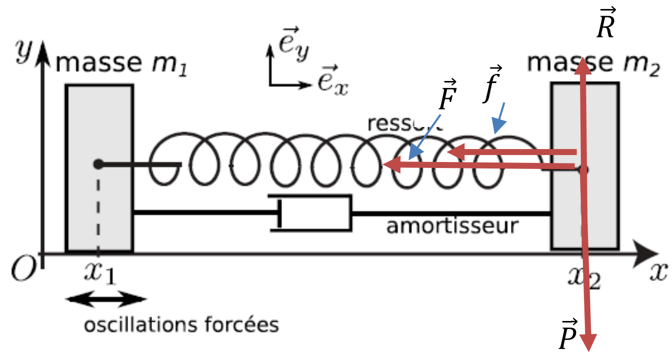
II – Étude du régime forcé d'un double vitrage :

Q2. Il s'agit de la **même baisse que pour le vitrage simple** ; Il y a toujours la **fréquence critique.**

Q3. Force de rappel du ressort sur la masse 2 ou force de Hooke :
$\boxed{\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\vec{e_x} = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e_x}}$, car $l(t) = x_2 - x_1$ et si $l(t) > l_0$, $\vec{F}$est orienté vers la gauche.

Q4. *Référentiel d'étude :* Référentiel terrestre $\Re(O, x, z)$ supposé galiléen.
Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires $\vec{e_x}$ et $\vec{e_y}$.
Système : la vitre de masse m_2.
Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = m_2\,\vec{g}$ = - $m_2\,g\,\vec{e_y}$.
- Réaction du support : $\vec{R} = R\,\vec{e_y}$; $\vec{R}$ est orthogonale au déplacement car mvt sans frottements sur le support.
- Force de rappel du ressort ou force de Hooke : $\vec{F} = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e_x}$.
- Force de frottement fluide (donnée par l'énoncé) : $\vec{f} = -\alpha(\dot{x_2} - \dot{x_1})\vec{e_x}$



2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$, d'où $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m_2\,\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x_2}\,\vec{e_x}$ car le mvt se fait sur Ox.
- Projetons sur les 2 axes :

Sur $\vec{e_y}$: $R - m_2\,g = 0$. (2) (pas de mvt sur Oy).
Sur $\vec{e_x}$: $m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) - \alpha(\dot{x_2} - \dot{x_1})$ (1)

D'où l'équation différentielle en $x_2(t)$: $m_2\ddot{x_2} + \alpha\dot{x_2} + k\,x_2 = \alpha\dot{x_1} + k(x_1 + l_0)$;
Sous forme canonique : $\boxed{\ddot{x_2} + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x_2} + \frac{k}{m_2}x_2(t) = \frac{\alpha}{m_2}\dot{x_1} + \frac{k\,l_0}{m_2} + \frac{k\,x_1}{m_2}}$.

Q5. On pose $u_2(t) = x_2(t) - l_0$ alors $\ddot{u_2} = \ddot{x_2}$ et $\dot{u_2} = \dot{x_2}$.
L'équation précédente s'écrit alors : $\ddot{x_2} + \frac{\alpha}{m_2}\dot{x_2} + \frac{k}{m_2}(x_2(t) - l_0) = \frac{\alpha}{m_2}\dot{x_1} + \frac{k\,x_1}{m_2}$.
D'où l'équation différentielle en $u_2(t)$: $\boxed{\ddot{u_2} + \frac{\alpha}{m_2}\dot{u_2} + \frac{k}{m_2}u_2(t) = \frac{\alpha}{m_2}\dot{x_1} + \frac{k\,x_1}{m_2}.}$
De la forme : $\ddot{u_2} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u_2} + {\omega_0}^2\,u_2(t) = \frac{\omega_0}{Q}\dot{x_1} + {\omega_0}^2\,x_1(t)$

avec $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}}$: **pulsation propre** de l'oscillateur : pulsation des oscillations sans frottement.

Et Q le **facteur de qualité** est tel que : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m_2}$, ; D'où $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha}\sqrt{\frac{k}{m_2}}$; Soit : $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km_2}}{\alpha}}$.

Q6. Passage aux complexes : $\underline{\ddot{u_2}} + \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{u_2}} + {\omega_0}^2\underline{u_2} = \frac{\omega_0}{Q}\underline{\dot{x_1}} + {\omega_0}^2\,\underline{x_1}$.
De plus, une dérivation par rapport au temps correspond à une multiplication par $(j\omega)$ et une dérivée seconde à une multiplication par $(-\omega^2)$.
L'équation précédente devient donc : $\left(-\omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q} + {\omega_0}^2\right)\underline{u_2} = \left(j\omega\,\frac{\omega_0}{Q} + {\omega_0}^2\right)\underline{x_1}$.
On nous donne : $\underline{u_2}(t) = \underline{U_0}\,e^{j\omega t}$ et on pose : $\underline{x_1} = \underline{X_1}\,e^{j\omega t}$.
Il vient donc : $\left({\omega_0}^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}\right)\underline{U_0} = \left(j\omega\,\frac{\omega_0}{Q} + {\omega_0}^2\right)\underline{X_1}$

Q6 (suite). Alors $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u_2}}{\underline{x_1}} = \frac{\underline{U_0}}{\underline{X_1}}$; D'où : $\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{j\omega}) = \frac{j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0{}^2}{\omega_0{}^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}}}$.

- On pose : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$; Alors : $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega\frac{\omega_0}{Q} + \omega_0{}^2}{\omega_0{}^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}{\frac{\omega_0{}^2}{\omega_0{}^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0{}^2} + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}$ en divisant numérateur et dénominateur par $\omega_0{}^2$. Ainsi : $\boxed{\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{jx}) = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}}$. Par identification, $\boxed{\boldsymbol{\sigma = 1}}$.

Q7. Alors $\boxed{\boldsymbol{G}(\boldsymbol{x}) = |\underline{\boldsymbol{H}}(\boldsymbol{jx})| = \frac{\sqrt{1 + \frac{x^2}{Q^2}}}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}}$.

Q8. Au maximum de la courbe, on parle de **<u>phénomène de résonance.</u>**

Q9. D'après l'énoncé, on peut considérer que le numérateur est constant, ainsi on ne s'intéresse qu'au dénominateur.

Ainsi, on pose $\boldsymbol{D}(\boldsymbol{x}) = (\boldsymbol{1} - \boldsymbol{x^2})^{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{x^2}}{\boldsymbol{Q^2}}$.

$G(x)$ passe par un max, quand le dénominateur est minimum, donc quand $\frac{\boldsymbol{dD}}{\boldsymbol{dx}} = \boldsymbol{0}$.

Or $\frac{dD}{dx} = 2(1 - x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x\left[\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2\right]$.

Alors $\frac{dD}{dx} = 0$ pour $\frac{1}{Q^2} - 2 + 2{x_r}^2 = 0$; La valeur $x = 0$ correspond à la tangente horizontale en $x = 0$.

Alors $2{x_r}^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}$; Soit $\boxed{\boldsymbol{x_r} = \sqrt{\boldsymbol{1} - \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{2\,Q^2}}} > \boldsymbol{0}}$;

(L'autre valeur de x_r serait négative ce qui est impossible pour un rapport de pulsations).

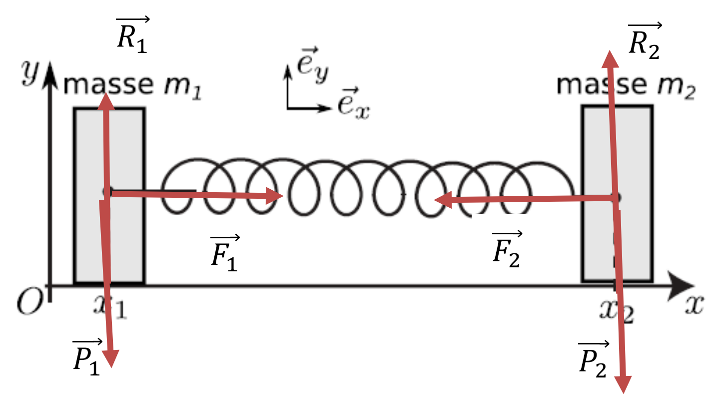
On remarque ainsi que x_r n'existe que si la quantité sous la racine est positive, donc si $1 - \frac{1}{2\,Q^2} > 0$

Alors $\frac{1}{2\,Q^2} < 1$; Ou encore : $2\,Q^2 > 1$; Ainsi $\boxed{\boldsymbol{Q} > \frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{\boldsymbol{2}}} \approx \boldsymbol{0,7}}$.

<u>Conclusion</u> : Cela correspond bien au graphe de la figure 3 qui présente un **<u>maximum pour $\boldsymbol{Q = 1,5}$ et pour $\boldsymbol{Q = 5}$, mais pas de maximum pour $\boldsymbol{Q = 0,5}$.</u>**

Q10. Si $Q \gg 1$, $\boxed{\boldsymbol{x_r \approx 1}}$ (Cohérent avec le graphe).

III – <u>Détermination plus fine de la fréquence de résonance :</u>



Q11. Pour chaque masse, on a poids et réaction du support qui sont des forces verticales.
A l'horizontal, il reste la force de Hooke pour m_1 :
$\overrightarrow{F_1} = +k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}$, car qd $l > l_0$, la force est bien vers la droite.
Soit **:** $\overrightarrow{\boldsymbol{F_1}} = +\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{l_0})\overrightarrow{\boldsymbol{e_x}}$**.**

La 2ème loi de Newton (pour m_1) projetée sur $\overrightarrow{e_x}$, conduit à : $m_1\ddot{x_1} = +k(x_2 - x_1 - l_0)$;
Soit sous forme canonique : $\boxed{\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{1}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m_1}}\boldsymbol{x_1} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m_1}}\boldsymbol{x_2} - \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m_1}}\boldsymbol{l_0}}$ (équation (3))

- De même sur m_2 : $\overrightarrow{F_2} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_x}$, car qd $l > l_0$, la force est bien vers la gauche.

Soit : $\overrightarrow{\boldsymbol{F_2}} = -\boldsymbol{k}(\boldsymbol{x_2} - \boldsymbol{x_1} - \boldsymbol{l_0})\overrightarrow{\boldsymbol{e_x}}$; Et l'équation du mouvement de m_2 s'écrit :
$m_2\ddot{x_2} = -k(x_2 - x_1 - l_0)$; Soit sous forme canonique : $\boxed{\ddot{\boldsymbol{x}}_{\boldsymbol{2}} + \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m_2}}\boldsymbol{x_2} = \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m_2}}\boldsymbol{x_1} + \frac{\boldsymbol{k}}{\boldsymbol{m_2}}\boldsymbol{l_0}}$ (équation (4))

Q12. On nous donne : $l(t) = x_2(t) - x_1(t)$.

Alors $\ddot{l} = \ddot{x_2} - \ddot{x_1}$. En faisant (4) - (3), on obtient : $\ddot{x_2} - \ddot{x_1} + \frac{k}{m_2}x_2 - \frac{k}{m_1}x_1 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 + \frac{k}{m_2}l_0 + \frac{k}{m_1}l_0$

Ainsi : $\ddot{x_2} - \ddot{x_1} + x_2\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) - x_1\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) = l_0\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)$

Ou encore : $\ddot{x_2} - \ddot{x_1} + (x_2 - x_1)\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right) = l_0\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)$.

Ainsi, on obtient : $\boxed{\boldsymbol{\ddot{l} + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)l(t) = kl_0\left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2}\right)}}$.

Par identification avec $\ddot{l} + \omega_0'^2\, l(t) = cste$, on obtient : $\boxed{\boldsymbol{\omega_0' = \sqrt{\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2}\right)}}}$.

Q13. Il faut donc résoudre cette équation différentielle :

La solution est la somme de :

- La solution homogène : $\boldsymbol{l_h(t) = A\cos(\omega_0' t) + B\, sin\,(\omega_0' t)}$.
- La solution particulière constante : $\boldsymbol{l_P = l_0}$.

D'où $\boldsymbol{l(t) = A\cos(\omega_0' t) + B\, sin\,(\omega_0' t) + l_0}$.

1ère CI : A $t = 0$, $l(0) = l_0 - \delta = A + l_0$; Soit : $\boldsymbol{A = -\delta}$.

De plus, $\dot{l}(t) = -A\omega_0' \sin(\omega_0' t) + B\omega_0' \cos(\omega_0' t)$.

2me CI : A $t = 0$, $\dot{l}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale.

D'où $B\omega_0' = 0$; Soit : $\boldsymbol{B = 0}$.

<u>Conclusion</u> : $\boxed{\boldsymbol{l(t) = l_0 - \delta\cos(\omega_0' t)}}$.

Q14. On nous donne $f_r = 84 \times \sqrt{\frac{1}{d}\left(\frac{1}{m_1{}'} + \frac{1}{m_2{}'}\right)}$

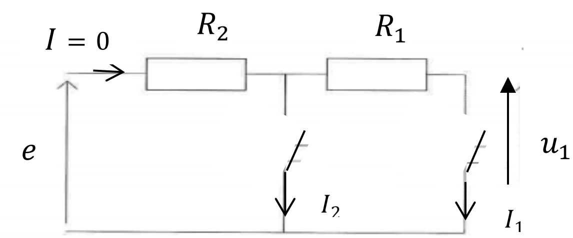
Pour envoyer le pic de résonance vers les basses fréquences, il faut <u>**f_r faible**</u> ;

Donc il faut <u>**augmenter les masses des vitres**</u> (qui se trouvent au dénominateur dans l'expression de f_r).

PROBLEME 2 : Modélisation du comportement thermique d'une habitation :

(D'après EPITA -IPSA MP, PSI, PC 2022) ***(≈ 57 pts)***

Q1. On nous donne $T = 24$ h ; Alors $\boxed{\boldsymbol{\omega} = \frac{2\pi}{T}}$; AN : $\omega = \frac{2\pi}{24\times3600}$; on obtient : $\boldsymbol{\omega \approx 7{,}3.10^{-5}}$ **rad.s^{-1}.**

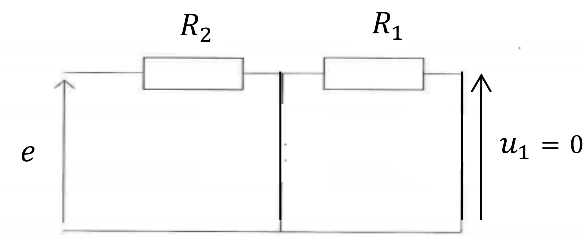


Q2. Il faut utiliser les équivalents basse fréquence et haute fréquence des condensateurs :

- En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

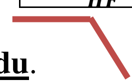
Le circuit devient ci-contre.
Toutes les intensités sont nulles.
Ainsi $\underline{u_1} = \underline{e}$; Et $\underline{H} = 1$; D'où $\boxed{\boldsymbol{G_{dB} \underbrace{\rightarrow}_{BF} 0}}$ **;**

- En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

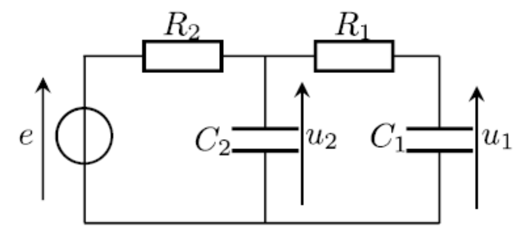


Le circuit devient ci-contre.
u_1 est la tension aux bornes d'un fil ;
Ainsi $\underline{u_1} = 0$; Et $\underline{H} = 0$. D'où $\boxed{\boldsymbol{G_{dB} \underbrace{\rightarrow}_{HF} -\infty}}$;

- L'allure globale sera donc



D'où un **filtre passe bas attendu**.



Q3. R_1 et C_1 sont en série. Cette association est en parallèle sur C_2.

D'où : $\underline{\boldsymbol{Z_{eq}}} = \frac{\underline{Z_{C2}}\,(\underline{Z_{C1}}+\underline{Z_{R1}})}{\underline{Z_{C1}}+\underline{Z_{C2}}+\underline{Z_{R1}}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}\left(\frac{1}{jC_1\omega}+R_1\right)}{\frac{1}{jC_1\omega}+\frac{1}{jC_2\omega}+R_1} = \frac{\frac{1}{jC_1\omega}+R_1}{1+\frac{C_2}{C_1}+jR_1C_2\omega}$;

Ou encore : $\boxed{\underline{\boldsymbol{Z_{eq}}} = \frac{\boldsymbol{1+jR_1C_1\omega}}{\boldsymbol{jC_1\omega+jC_2\omega-R_1C_1C_2\omega^2}} = \frac{\boldsymbol{1+jR_1C_1\omega}}{\boldsymbol{j\omega(C_1+C_2)-R_1C_1C_2\omega^2}}}$.

Q4. Pour deux impédances $\underline{Z_1}$ et $\underline{Z_2}$ en dérivation.

Alors $\underline{Z_{eq}} = \frac{\underline{Z_1}\times\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}+\underline{Z_2}}$; Et si $|\underline{Z_1}| \gg |\underline{Z_2}|$, alors $\underline{Z_1} + \underline{Z_2} \approx \underline{Z_1}$.

D'où $\underline{Z_{eq}} \approx \frac{\underline{Z_1}\times\underline{Z_2}}{\underline{Z_1}}$; Ainsi $\boxed{\underline{\boldsymbol{Z_{eq}}} \approx \underline{\boldsymbol{Z_2}}}$.

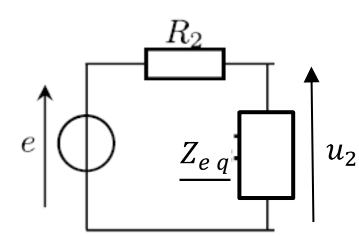
Autre méthode : Pour une association parallèle, on a : $\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z_1}} + \frac{1}{\underline{Z_2}}$.

Or si $|\underline{Z_1}| \gg |\underline{Z_2}|$, alors $\frac{1}{\underline{Z_1}} \ll \frac{1}{\underline{Z_2}}$; Ainsi $\frac{1}{\underline{Z_{eq}}} \approx \frac{1}{\underline{Z_2}}$; Et $\boxed{\underline{\boldsymbol{Z_{eq}}} \approx \underline{\boldsymbol{Z_2}}}$

Q5. On nous donne $\underline{Z_{eq}} \approx \frac{1}{jC_2\,\omega}$. On cherche $\underline{H} = \frac{\underline{u_1}}{\underline{e}}$;

- A la sortie, R_1 et C_1 sont en série. On peut utiliser un pont diviseur de tensions :

$\frac{\underline{u_1}}{\underline{u_2}} = \frac{\underline{Z_{C1}}}{\underline{Z_{C1}}+\underline{Z_{R1}}} = \frac{\frac{1}{jC_1\omega}}{R_1+\frac{1}{jC_1\omega}}$; Soit $\frac{\underline{\boldsymbol{u_1}}}{\underline{\boldsymbol{u_2}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+jR_1C_1\omega}}$.



- Puis, on utilise $\underline{Z_{eq}}$: $\underline{Z_{eq}}$ est en série avec R_2 . On peut utiliser un pont diviseur de tensions : $\frac{\underline{u_2}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+\underline{Z_{R2}}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{R_2+\frac{1}{jC_2\omega}}$; Soit $\frac{\underline{\boldsymbol{u_2}}}{\underline{\boldsymbol{e}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+jR_2C_2\omega}}$.

- Enfin, $\underline{H} = \frac{\underline{u_1}}{\underline{e}} = \frac{\underline{u_1}}{\underline{u_2}} \times \frac{\underline{u_2}}{\underline{e}} = \frac{1}{1+jR_1C_1\omega} \times \frac{1}{1+jR_2C_2\omega}$.

Soit : $\boxed{\underline{\boldsymbol{H}} = \frac{\underline{\boldsymbol{u_1}}}{\underline{\boldsymbol{e}}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{(1+jR_1C_1\omega)(1+jR_2C_2\omega)}} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{1+j(R_1C_1+R_2C_2)\omega-R_1C_1R_2C_2\omega^2}}}$

De la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{\left(1+j\frac{\omega}{\omega_1}\right)\left(1+j\frac{\omega}{\omega_2}\right)}$ avec $\boxed{\boldsymbol{\omega_1} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_1C_1}} \textbf{ et } \boldsymbol{\omega_2} = \frac{\boldsymbol{1}}{\boldsymbol{R_2C_2}}}$

Q6. Étude asymptotique : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1-\frac{\omega^2}{\omega_1\,\omega_2}+j\,(\frac{\omega}{\omega_1}+\frac{\omega}{\omega_2})}$.

✓ En BF : Si $\omega \ll \omega_i$: $\underline{H} \sim 1$

Donc $G_{dB} \to$ **20 log(1) = 0**

Asymptote horizontale en 0 en BF.

Et $\boldsymbol{\varphi \to 0}$.

✓ En HF : Si $\gg \omega_i$: $\underline{H} \sim -\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1\omega_2}} \sim -\frac{\omega_1\,\omega_2}{\omega^2}$ et $G \sim \frac{\omega_1\,\omega_2}{\omega^2}$

Donc $G_{dB} \to$ **20 log**$(\frac{\boldsymbol{\omega_1\,\omega_2}}{\boldsymbol{\omega^2}}) = \boldsymbol{20\,log(\omega_1\omega_2) - 40\log\omega}$

Asymptote oblique de pente – 40 dB par décade en HF.

Et $\varphi \to \pi$ ou $-\pi$; Or $\sin\varphi = -\frac{(R_1C_1+R_2C_2)\omega}{|Den|} < 0$ donc $\boldsymbol{\varphi \to -\pi}$.

Autre méthode : $\underline{H}(j\omega) = \underline{H_1} \times \underline{H_2}$ avec $\underline{H_1} = \frac{1}{(1+j\omega/\omega_1)}$ et $\underline{H_2} = \frac{1}{(1+j\omega/\omega_2)}$.

Pour $\underline{H_1}$ et $\underline{H_2}$, on reconnait des fonctions de transfert de filtres passe-bas d'ordre 1.

Ainsi : $G(\omega) = G_1\,G_2$; Donc $G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB}$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Étude asymptotique de $\underline{H_1}(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$: On reconnait la fonction de transfert d'un filtre passe bas du 1er ordre.

✓ En BF : Si $\omega \ll \omega_1$: $\underline{H_1} \sim 1$

Donc $G_{1dB} \to 20\log(1) = 0$.

Asymptote horizontale en BF.

Et $\varphi_1 \to 0$.

✓ En HF : Si $\omega \gg \omega_1$: $\underline{H_1} \sim \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1}} \sim -j\,\frac{\omega_1}{\omega}$

Donc $G_{1dB} \to 20\log(\frac{\omega_1}{\omega}) = 20\log(\omega_1) - 20\log(\omega)$:

Asymptote oblique de pente – 20 dB par décade en HF.

Et $\varphi_1 \to -\frac{\pi}{2}$.

De même pour $\underline{H_2}$; En comme $G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB}$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

On retrouve bien les mêmes conclusions que par l'autre méthode.

Q7. $\boxed{\boldsymbol{G_{dB} = 20\log(|\underline{H}|) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2}\sqrt{1+\left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}}\right)}}$.

Q8. On nous précise que :

- Dans le cas d'une isolation par l'intérieur : $\omega_1 = 2{,}5.10^{-6}$ rad.s^{-1} et $\omega_2 \to \infty$.

Alors $\underline{H}(j\omega) \approx \underline{H_1}$ et $G_{dB} \approx G_{1dB}$: Pulsation de coupure en $\omega_1 = 2{,}5.10^{-6}$ rad.s^{-1}. ($G_{dB\,max}$ – 3 dB = -3 dB).

Cela correspond donc au tracé en **trait plein.**

- Dans le cas d'une isolation par l'extérieur : $\omega_1 \to \infty$ et $\omega_2 = 2{,}5.10^{-7}$ rad.s^{-1} . Même raisonnement.

Alors $\underline{H}(j\omega) \approx \underline{H_2}$ et $G_{dB} \approx G_{2dB}$: Pulsation de coupure en $\omega_1 = 2{,}5.10^{-7}$ rad.s^{-1}. ($G_{dB\,max}$ – 3 dB= -3 dB).

Cela correspond donc au tracé en **traits pointillés**.

Q9. On considère le diagramme de Bode en trait plein.

On nous donne $E_0 = 10$ V. On cherche U_1 à la pulsation $\boldsymbol{\omega \approx 7{,}3.10^{-5}}$ **rad.s^{-1}** (comme vu en Q1).

Graphiquement, on lit que pour $\omega \approx 7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}, alors $G_{dB}(trait\ plein) = -30$ dB = $20\log(G(x)$

Soit $\log(\,G(x)\,) = -\frac{30}{20} = -\frac{3}{2}$ et $G(x) = 10^{-\frac{3}{2}} \approx 0{,}032 = \frac{U_1}{E_0}$; Ainsi $U_1 \approx 0{,}032\,E_0$.

AN : $\boldsymbol{U_1 \approx 0{,}32}$ **V**.

Q10. De même avec le diagramme de Bode en traits pointillés.
Graphiquement, on lit que pour $\omega \approx 7{,}3.10^{-5}$ rad.s^{-1}, alors $G_{dB}(traits\ pointillés) = -50$ dB = $20\log(G(x)$
Soit $\log(\,G(x)\,) = -\frac{50}{20} = -\frac{5}{2}$ et $G(x) = 10^{-\frac{5}{2}} \approx 0{,}0032 = \frac{U_1}{E_0}$; Ainsi $U_1 \approx 0{,}0032\,E_0$.
AN : $\boldsymbol{U_1 \approx 0{,}032}$ **V**.
Conclusion : Comme la tension $u_1(t)$ représente l'évolution de la température intérieure, on cherche à ce qu'elle varie le moins possible. Ainsi, **mieux vaut une isolation par l'extérieur.**

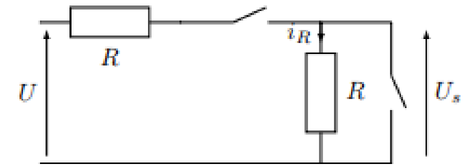
Q11. Puisque $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ à cette fréquence, **$\boldsymbol{u_1(t)}$ est en retard par rapport à $\boldsymbol{e(t)}$,** d'un quart de période,
En effet : $T \leftrightarrow 2\pi$
Et $t_0 \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$; D'où $t_0 = \frac{T\times\frac{\pi}{2}}{2\,\pi}$. on obtient $\boxed{\boldsymbol{t_0 = \frac{T}{4}}}$.
Or $T = 24$ h donc $\boldsymbol{t_0 = 6}$ **h**.

PROBLEME 3 : Traitement d'un signal : *(≈ 30 pts)*

(D'après Centrale- Supélec MP 2022)

Q1. D'après l'énoncé, on souhaite un filtre qui coupe les fréquences supérieures à 1 HZ, **il faut donc un filtre passe bas.**

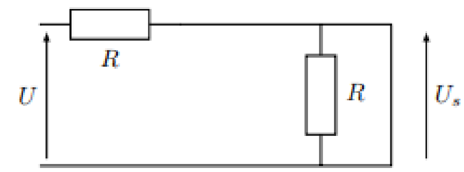
Filtre A :



- En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Le circuit devient ci-contre. $i_R = 0$; Alors $\underline{U_S} \approx 0$;

Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{\boldsymbol{G_{dB}} \underbrace{\rightarrow}_{BF} -\infty}$.

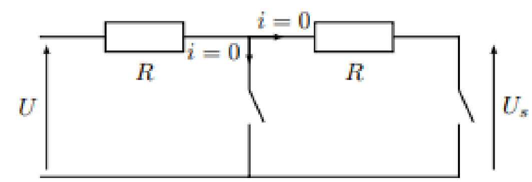


- En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre. Alors $\underline{U_S} \approx 0$; Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{\boldsymbol{G_{dB}} \underbrace{\rightarrow}_{HF} -\infty}$.

Conclusion : Le filtre A est un **filtre passe-bande.**

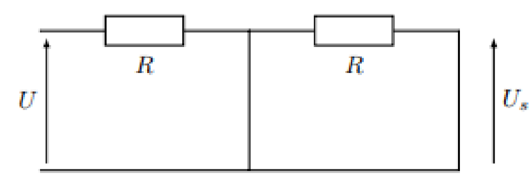
Filtre B :



- En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Le circuit devient ci-contre. $i = 0$; Alors $\underline{U_S} \approx \underline{U}$;

Ainsi $\underline{H} \approx 1$ et $\boxed{\boldsymbol{G_{dB}} \underbrace{\rightarrow}_{BF} \mathbf{0}}$.



- En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre. Alors $\underline{U_S} \approx 0$; Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{\boldsymbol{G_{dB}} \underbrace{\rightarrow}_{HF} -\infty}$.

Conclusion : Le filtre B est un **filtre passe-bas.**

On choisit **donc le filtre B.**

Q2. On nous donne $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega - R^2C^2\omega^2}$;

On veut couper des fréquences supérieures à 1 Hz.

Il faudrait donc un point d'intersection des asymptotes à une fréquence $\boldsymbol{f_0 \approx 0,1}$ **Hz (1 décade avant).**

En posant $x = RC\,\omega$; Alors on obtient : $\boxed{\boldsymbol{\underline{H}(jx) = \frac{1}{1-x^2+3jx}}}$

- Etude asymptotique :
- ✓ BF : Si $x \ll 1$: $\underline{H} \sim 1$ Donc $\mathbf{G_{dB} \rightarrow 20\log(1) = 0}$

Asymptote horizontale en 0 en BF.

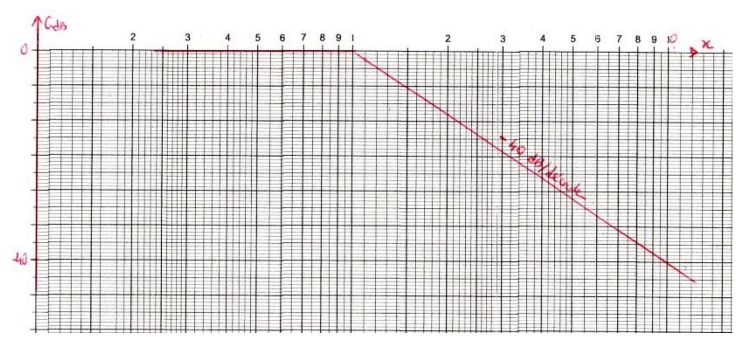
- ✓ HF : Si $x \gg 1$: $\underline{H} \sim -\frac{1}{x^2}$ et $G \sim \frac{1}{x^2}$ Donc $\mathbf{G_{dB} \rightarrow 20\log(\frac{1}{x^2}) = -40\log x}$

Asymptote oblique de pente – 40 dB par décade en HF.

- ✓ Intersection des asymptotes :

Pour $0 = -40\log x$; Soit $\boldsymbol{\log(x) = 0}$ et $\boldsymbol{x = 1}$.

- ✓ D'où l'allure du diagramme de Bode asymptotique ci-contre.



Conclusion : Il faudrait donc $x_0 = RC\,\omega_0 = 1$;

Soit : $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi f_0$; D'où : $\boxed{\boldsymbol{RC = \frac{1}{2\pi f_0}}}$.

AN : $RC = \frac{1}{2\pi \times 0,1}$; on obtient : $\boldsymbol{RC \approx 1,6}$ **s** .

Avec les ordres de grandeurs usuels, on pourrait choisir $\boldsymbol{C = 1\,\mu F}$ **et** $\boldsymbol{R = 1,6}$ **MΩ** .