

Correction du TD

I Compressions successives

On envisage de comprimer une mole d'air d'un état initial caractérisé par une pression $P_1 = 1,0 \times 10^5$ Pa, un volume V_1 et une température $T_1 = 290$ K, à un état final caractérisé par une pression $P_2 = 5,0 \times 10^5$ Pa, un volume V_2 et une température $T_1 = 290$ K. L'air à comprimer est considéré comme un gaz parfait de rapport $\gamma = 1,4$. Les transformations étudiées sont supposées mécaniquement réversibles. On donne la constante des gaz parfaits $R = 8,3 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Les échanges thermiques éventuels se font uniquement avec l'air ambiant considéré comme un thermostat de température T_1 .

1. On envisage d'abord la compression suivant un processus isotherme réversible. Exprimer le travail molaire W_m à fournir en fonction de T_1 , R , γ , P_1 et P_2 . Calculer W_{m0} .

Réponse :

On calcule le travail pour une transformation isotherme réversible d'un gaz parfait ($P_e = P$) :

$$W_0 = - \int_{V_1}^{V_2} P_e dV = - \int_{V_1}^{V_2} P dV = -nRT_1 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \left(\frac{V_1}{V_2} \right)$$

D'après l'équation d'état des gaz parfaits $P_1 V_1 = nRT_1$ et $P_2 V_2 = nRT_2$, donc $V_1/V_2 = P_2/P_1$:

$$W_{m0} = RT_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = 3,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

La compression isotherme est difficilement réalisable. On propose les transformations suivantes :

- compression adiabatique réversible de l'état initial jusqu'à la pression P_2
- refroidissement isobare mécaniquement réversible jusqu'à l'état final

La première transformation amène le système à l'état d'équilibre caractérisé par la pression P_2 , un volume V_3 et une température T_3 . On note W_{m1} le travail molaire reçu par le système au cours de la compression adiabatique réversible et W_{m2} le travail molaire reçu au cours du refroidissement isobare.

2. Exprimer W_{m1} en fonction de R , γ , T_1 et T_3 .

Réponse :

La transformation est adiabatique, donc $Q_1 = 0$. On applique le premier principe sur un gaz parfait :

$$\Delta U = Q_1 + W_1 \Rightarrow W_{m1} = \frac{R}{\gamma - 1} (T_3 - T_1)$$

3. Exprimer W_{m2} en fonction de R , T_1 et T_3 .

Réponse :

La transformation est isobare, donc mécaniquement réversible, donc $P_e = P_2 = \text{cste}$:

$$W_2 = -P_2 \int_{V_3}^{V_2} dV = -P_2 (V_2 - V_3)$$

On utilise les relations des gaz parfaits $P_2 V_2 = nRT_1$ et $P_2 V_3 = nRT_3$:

$$W_{m2} = R(T_3 - T_1)$$

4. En déduire l'expression du travail molaire W_m reçu au cours de ces deux transformations en fonction de R , T_1 , P_1 , P_2 et γ . Calculer W_m et comparer à la valeur de W_{m0} .

Réponse :

On exprime le travail molaire total :

$$W_m = W_{m1} + W_{m2} = \frac{RT_1}{\gamma} \left[\frac{T_3}{T_1} - 1 + (\gamma - 1) \frac{T_3}{T_1} - (\gamma - 1) \right] = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\frac{T_3}{T_1} - 1 \right]$$

Pour exprimer T_3/T_1 en fonction de P_1 et P_2 , on utilise le fait que la première transformation est une adiabatique réversible, donc on peut appliquer la loi de Laplace :

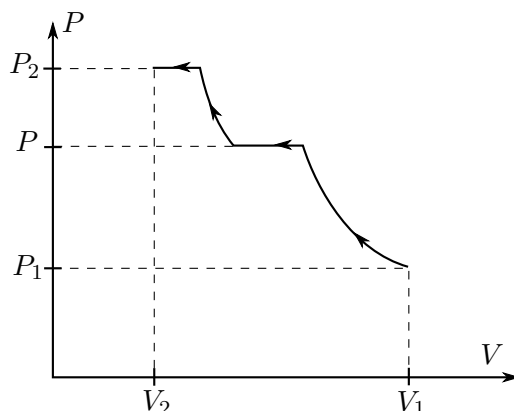
$$P_1^{1-\gamma} T_1^\gamma = P_2^{1-\gamma} T_3^\gamma \quad \Leftrightarrow \quad \frac{T_3}{T_1} = \left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}$$

$$W_m = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] = 4,9 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On considère maintenant une compression en deux étapes :

- compression adiabatique réversible de l'état initial (P_1, T_1) jusqu'à une pression P telle que $P_1 < P < P_2$, puis un refroidissement isobare mécaniquement réversible jusqu'à la température T_1
 - compression adiabatique réversible de (P, T_1) jusqu'à la pression P_2 , puis refroidissement isobare mécaniquement réversible jusqu'à la température T_1
5. Représenter ces transformations sur un diagramme de Clapeyron

Réponse :



6. Exprimer le travail molaire W'_m à fournir en fonction de P , P_1 , P_2 , T_1 , R et γ .

Réponse :

Travail molaire lors de la première adiabatique + isobare :

$$W'_{m1} = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

Travail molaire lors de la seconde adiabatique + isobare :

$$W'_{m2} = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right]$$

Travail molaire total :

$$W' = W'_1 + W'_2 = W'_1 = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} + \left(\frac{P_2}{P} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 2 \right]$$

7. Montrer que le travail W'_m est minimal pour $P = \sqrt{P_1 P_2}$.

Réponse :

On dérive W'_m par rapport à P :

$$\begin{aligned} \frac{dW'_m}{dP} &= \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\frac{\gamma - 1}{\gamma} \frac{P^{-1/\gamma}}{P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} - \frac{\gamma - 1}{\gamma} P_2^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} P^{-\frac{2\gamma-1}{\gamma}} \right] \\ &= \frac{RT_1 P^{-1/\gamma}}{P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} \left[1 - (P_1 P_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} P^{-2\frac{\gamma-1}{\gamma}} \right] \end{aligned}$$

$$\frac{dW'}{dP} = 0 \Leftrightarrow (P_1 P_2)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} P^{-2\frac{\gamma-1}{\gamma}} = 1 \Leftrightarrow P = \sqrt{P_1 P_2}$$

Comme $\frac{RT_1 P^{-1/\gamma}}{P_1^{\frac{\gamma-1}{\gamma}}} > 0$, si $P < \sqrt{P_1 P_2}$ alors $dW'/dP < 0$ (on rappelle que $\gamma > 1$), et si $P > \sqrt{P_1 P_2}$ alors $dW'/dP > 0$. Il s'agit donc bien d'un minimum.

8. Exprimer la valeur minimale notée W'_{\min} de W'_m en fonction de P_1 , P_2 , T_1 , R et γ . Calculer numériquement W'_{\min} .

Réponse :

En remplaçant, on trouve :

$$W'_{\min} = \frac{2\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1} \right)^{\frac{\gamma-1}{2\gamma}} - 1 \right] = 4,4 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$$

On considère maintenant une transformation constituée de N étapes du type compression adiabatique puis refroidissement isobare. Les pressions intermédiaires seront notées p_i , avec $p_0 = P_1$ et $p_N = P_2$.

9. Exprimer le travail molaire W''_m total à fournir au gaz en fonction de p_i , N , T_1 , R et γ .

Réponse :

On reprend les résultats précédents :

$$\begin{aligned} W''_m &= \sum_{i=1}^N \left[\frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{p_i}{p_{i-1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - 1 \right] \right] \\ W''_m &= \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\sum_{i=1}^N \left(\frac{p_i}{p_{i-1}} \right)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} - N \right] \end{aligned}$$

10. En admettant que les conditions $\frac{\partial W''_m}{\partial p_i} = 0$ soient suffisantes pour rendre W''_m minimal, donner la relation entre p_i , p_{i+1} et p_{i-1} pour que W''_m soit minimal. Montrer qu'alors les pressions intermédiaires telles que $\frac{p_{i+1}}{p_i} = \left(\frac{p_N}{p_0} \right)^{1/N}$ rendent W''_m minimal et donner cette valeur minimale notée W''_{mN} en fonction de P_1 , P_2 , N , T_1 , R et γ

Réponse :

On résout $\frac{\partial W_m''}{\partial p_i} = 0$. Attention, dans la somme, il y a deux termes qui dépendent de p_i , un terme en p_i/p_{i-1} et un autre en p_{i+1}/p_i .

$$\boxed{p_i = \sqrt{p_{i+1}p_{i-1}}}$$

On reprend cette condition valable pour tous les indices i :

$$p_i^2 = p_{i+1}p_{i-1} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{p_{i+1}}{p_i} = \frac{p_i}{p_{i-1}} = \dots = \frac{p_1}{p_0} = \dots = \frac{p_N}{p_{N-1}} = k$$

$$k^N = \prod_{i=1}^N \frac{p_i}{p_{i-1}} = \frac{p_N}{p_0} \quad \Rightarrow \quad k = \left(\frac{p_N}{p_0}\right)^{1/N}$$

On retrouve l'expression de l'énoncé :

$$\frac{p_{i+1}}{p_i} = \left(\frac{p_N}{p_0}\right)^{1/N}$$

On remplace dans W_m'' , avec $p_0 = P_1$ et $p_N = P_2$, on trouve :

$$\boxed{W_{mN}'' = \frac{N\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[\left(\frac{P_2}{P_1}\right)^{\frac{\gamma-1}{N\gamma}} - 1 \right]}$$

11. Calculer la limite de W_{mN}'' pour $N \rightarrow \infty$. Pour cela, il sera utile d'utiliser le fait que $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$, puis d'effectuer un développement limité. Comparer cette limite à W_{m0} . Interpréter.

Réponse :

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_{mN}'' = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \lim_{N \rightarrow \infty} N \left[\exp \left(\frac{\gamma - 1}{N\gamma} \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) \right) - 1 \right]$$

$$\lim_{N \rightarrow \infty} W_{mN}'' = \frac{\gamma RT_1}{\gamma - 1} \left[1 + \frac{\gamma - 1}{N\gamma} \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) - 1 \right]$$

$$\boxed{\lim_{N \rightarrow \infty} W_{mN}'' = RT_1 \ln \left(\frac{P_2}{P_1} \right) = W_{m0}}$$