MPSI3 – 22 mars 2024 – Devoir surveillé 7

Mécanique du solide et des forces centrales

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

<u>Les calculatrices sont *autorisées*</u>

Au programme

Toute la mécanique, principalement moment cinétique, forces centrales et mécanique solide.

Sommaire

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

Exemple application numérique

$$\boxed{n = \frac{PV}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ T = 300\,\mathrm{K} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n = 5{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}}$

$$\cancel{n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8.32 \cdot 300} = 0.56}$$

/20 E1 Oscillations d'un métronome

On étudie un métronome constitué :

- ◇ d'une tige rigide de longueur $L = 20\,\text{cm}$ de masse négligeable en rotation d'angle θ autour de l'axe Oz ;
- ◇ d'un disque homogène de centre C, tel que OC $= \ell = 2\,\text{cm}$, de rayon $R = 1{,}5\,\text{cm}$ et de masse $M = 200\,\text{g}$;
- ◇ d'un curseur (dimensions négligeables) et de masse $m = 20\,\text{g}$ et pouvant être déplacé sur la tige selon le rythme souhaité. On appelle x la distance du curseur à O, cette distance ne pouvant dépasser 15 cm.

La tige est tenue en O par une liaison pivot supposée parfaite. On associe au bâti fixe le repère orthonormé (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{u_z}$). On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Oz, orienté selon le vecteur $\overrightarrow{u_z}$:

$$J = mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2$$

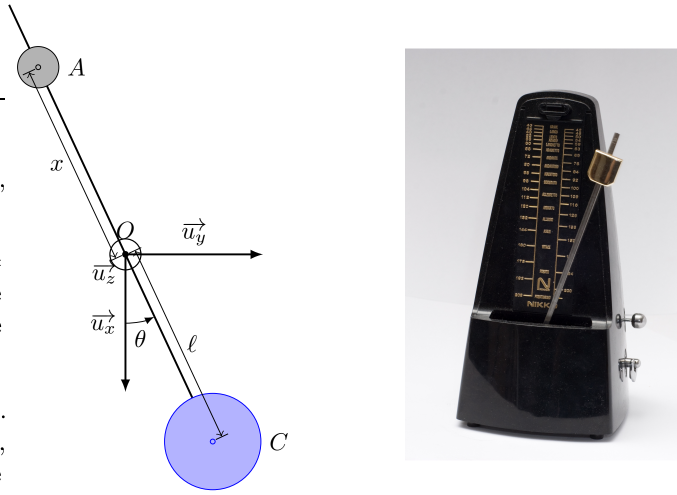


Figure 7.1 – Schéma du métronome à gauche et photo d'un métronome (d'après wikipedia). Sur la photo, le contrepoids (disque homogène) n'est pas visible, seuls la tige et le curseur le sont.

$\boxed{1}$ Commenter et justifier l'influence de x sur la valeur de J.

$\boxed{2}$ Établir le système, faire un schéma puis le bilan des forces agissant sur le système et déterminer leurs moments par rapport à l'axe Oz par l'utilisation du **bras de levier**. Donnez l'expression du moment cinétique du système en fonction des données du problème.

$\boxed{3}$ Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

$\boxed{4}$ Dans l'hypothèse des petites oscillations, donner l'équation différentielle puis l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de m, M, ℓ, R, x et g

$\boxed{5}$ Dans une partition musicale le rythme est donné en battements par minute, c'est à dire le nombre de demis aller-retour du métronome. On a ainsi le mouvement *andante* de 100 battements par minute. À quelle période du métronome correspondent ce mouvement ?

$\boxed{6}$ Dans quel sens faut-il modifier x pour augmenter le nombre de battements par minute pour un mouvement *allegro* de 120 battements par minutes ?

/47 E2 Satellite en orbite terrestre

II/A Etude dynamique

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite S de masse m placé dans le champ gravitationnel terrestre. On néglige les frottements.

1 Définissez les référentiels terrestres et géocentrique. Dans quel référentiel faut-il se placer pour cette étude ?

2 Déterminer l'expression de la force $\overrightarrow{F}$ à laquelle le satellite S est soumis. On exprimera $\overrightarrow{F}$ en fonction de m, $\mathcal{G}$, M_T, r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Déterminer de même l'expression de la force $\overrightarrow{F'}$ à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite. Justifier.

3 Montrer que le mouvement est nécessairement plan. Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le satellite se trouve au point M_0 et a une vitesse v_0, préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire <u>circulaire</u> de rayon r et d'altitude h autour de la Terre (avec $r = R_T + h$) et on utilisera les coordonnées cylindriques.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$, un point quelconque de l'espace étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z).

Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine O du repère (le point O étant le centre de la Terre) et les vecteurs $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$.

4 Montrer que la norme v de la vitesse du satellite S est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r.

5 Déterminer l'expression de la période T du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de v et r puis en fonction de $\mathcal{G}$, M_T et r. En déduire la troisième loi de Kepler.

6 Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre. Donner alors un ordre de grandeur de la masse de la Terre à partir de vos connaissances astronomiques.

7 Un autre satellite S' de masse m' en orbite circulaire autour de la Terre a une trajectoire de rayon r égal au rayon de la trajectoire de S. Les deux satellites tournent dans le même plan. S et S' risquent-ils de se heurter au cours du mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

II/B Étude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ telle que $\mathcal{E}_p$ peut s'écrire sous la forme $\mathcal{E}_p = -\frac{k}{r}$ avec k une constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

On ne se limitera pas, dans cette partie, à un mouvement circulaire, mais on se placera dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite S autour de la Terre.

On note C la constante des aires définie par $C = r^2\dot{\theta}$.

8 Déterminer l'expression de k en fonction des données du problème en établissant l'expression de $\mathcal{E}_p$.

9 Déterminer l'expression de l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ du satellite S en fonction de m, r, $\dot{r}$, $\dot{\theta}$ et k. En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de m, C, r et k.

Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de r en justifiant les limites. Quelles sont les régions accessibles sur un diagramme en énergie potentielle ?

En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

10 Déterminer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c en fonction de r_c, m, $\mathcal{G}$ et M_T. Définir puis déterminer la première vitesse cosmique v_1 par une rapide étude énergétique, fonction de R_T, $\mathcal{G}$ et M_T.

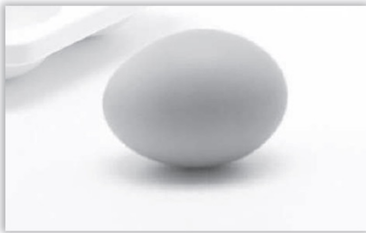
/32×1,5

P1 Rotation d'un œuf dur

Le document ci-dessous décrit un phénomène qu'on observe lorsqu'on met en rotation un oeuf dur.

Document A Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un oeuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'oeuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.

a



b

c

Évolution d'un oeuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c.

Source : Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014

On souhaite établir pour l'oeuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la figure 7.2 ci-dessous :

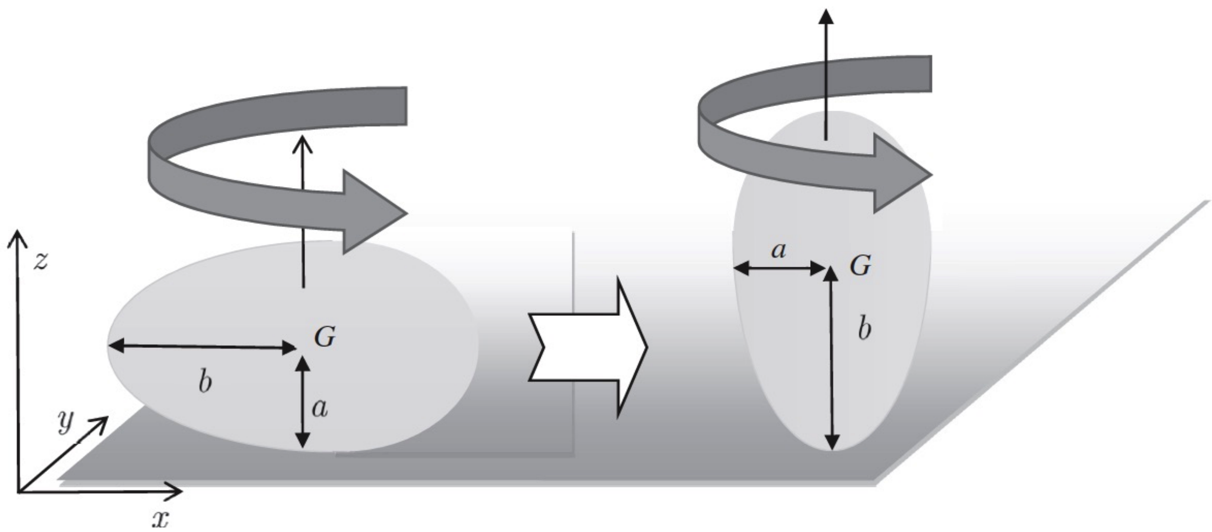


Figure 7.2 – Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'oeuf. On modélise l'oeuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m, de demi petit axe a et de demi grand axe b (avec $a < b$). Le centre de masse G est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'oeuf). Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m par rapport à son axe de rotation Oz s'écrivent :

- ◇ $J_H = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ lorsque l'oeuf tourne à l'horizontal,
- ◇ $J_V = \frac{2}{5}ma^2$ lorsque l'oeuf tourne à la verticale.

On pose Ω la vitesse de rotation de l'oeuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

1 Comparer les deux moments d'inertie J_H et J_V et commenter physiquement.

2 Exprimer l'énergie mécanique totale de l'oeuf dans les deux positions $\mathcal{E}_{m_H}$ et $\mathcal{E}_{m_V}$ en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.

$\boxed{3}$ Montrer qu'il existe une pulsation limite Ω_c telle que pour $\Omega > \Omega_c$, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale et assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de Ω_c en fonction de a, b, et g.

$\boxed{4}$ Calculer Ω_c pour $a = 2{,}0\,\text{cm}$ $b = 3{,}0\,\text{cm}$ et $g = 10\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$. Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du document.

On suppose que le contact entre l'oeuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'oeuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'oeuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll \Omega_c$). L'oeuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale Ω_f que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\varepsilon$ (avec r un nombre sans dimension).

$\boxed{5}$ Exprimer les énergies mécaniques initiale $\mathcal{E}_{m_H}$ et finale $\mathcal{E}_{m_V}$ au premier ordre en ε.

$\boxed{6}$ En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de r en fonction de a et de b. L'oeuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait r pour $a \approx b$? Commenter.

$\boxed{7}$ Exprimer les moments cinétiques $\mathcal{L}_H$ et $\mathcal{L}_V$ de l'oeuf par rapport à l'axe Oz avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_H$ en fonction de Ω_c, m, a et b. L'oeuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?

$\boxed{8}$ Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'oeuf a subi un couple $\vec{\Gamma}$. Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe Oz peut s'écrire :

$$\Gamma_z \approx \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}$$

Commenter son signe.

$\boxed{9}$ Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple ? Si non, d'où peut provenir ce couple ? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?

/64 P2 Satellites de télécommunication

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de masse M_T, de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

On donne les valeurs numériques suivantes :

$\mathcal{G}$	R_T	M_T
$6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$	$6370\,\mathrm{km}$	$5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$

Sur la Figure 7.3, N est le pôle Nord et S le pôle Sud. Satellite P, point Q et ligne des horizons AB. Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est N'S').

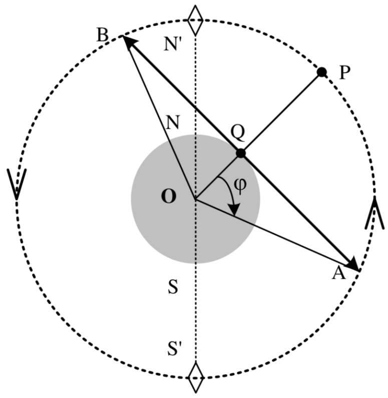


Figure 7.3 – Schema question 3

II/A Couverture d'un réseau de satellite

1 Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude $h = 800\,\mathrm{km}$. Établir la relation entre la période de révolution T et h. Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ et h puis effectuer les applications numériques pour T et v.

2 Soient $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}_p$ l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre. Donner sans démonstration l'expression de $\mathcal{E}_p$ puis établir le « théorème du viriel » : $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = 0$.

3 À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire.

Pour une observatrice située en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Figure 7.3) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de φ et T puis montrer que

$$\tau = 2\arccos\frac{R_T}{R_T+h}\,f(h)$$

et donner l'expression de $f(h)$.

Réaliser l'application numérique toujours pour $h = 800\,\mathrm{km}$.

4 Calculer T/τ. Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre comme sur la figure 7.3) un ensemble de satellites identiques, appelé « train de satellites ».

Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

5 Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est à dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

6 La prise en compte de la rotation de la Terre modifie le résultat de la question précédente. Dans cette question, on s'interroge sur la pertinence d'utiliser plutôt un satellite géostationnaire. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question 4 ?

II/B Influence des frottements aérodynamiques

7 La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\vec{F}_a$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{F}_a = -\alpha M_S v\vec{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α puis appliquer ensuite le théorème de la puissance mécanique en supposant que le théorème du Viriel établi à la question 2 reste valable en présence de $\vec{F}_a$. En déduire finalement que :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2\alpha\sqrt{\mathcal{G}M_T}\sqrt{R_T+h} \tag{7.1}$$

8 Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte de l'équation (7.1) (obtenue par intégration de cette équation). Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

9 En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \dfrac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question 8 (perdant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β.

II/C Stabilisation de l'orientation d'un satellite par gradient de gravité

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVIIème, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \frac{1}{2}M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur 2ℓ.

Le centre de masse S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire uniforme de rayon $r_0 = R_T + h$ avec $\ell \ll r_0$. Le référentiel géocentrique (R) lié au repère $(Oxyz)$ est supposé galiléen.

On appelle θ l'angle de $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ avec l'axe Ox' de (R'). On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements dans toute cette partie.

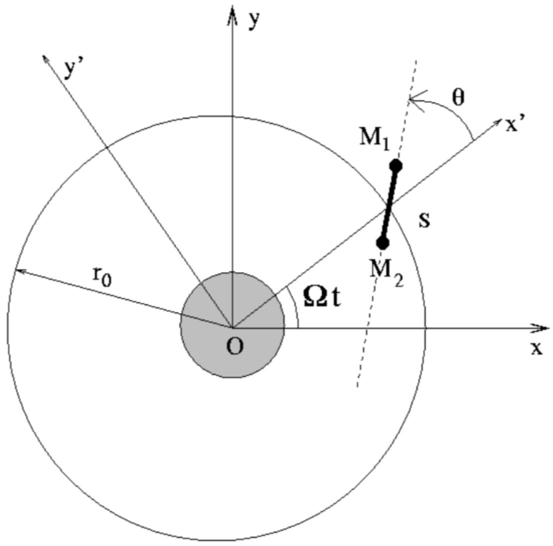


Figure 7.4 – Le satellite composé des points M_1 et M_2 reliés par une tige de longueur 2ℓ.

10 Exprimer les distances $r_1 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}\|$ et $r_2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}\|$ en fonction de r_0, ℓ et θ

On rappelle le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x)$$

De plus, on admet que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du satellite s'exprime selon $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}M_s\ell^2\dot{\theta}^2$

11 Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit, en procédant aux approximations qui s'imposent ($\ell \ll r_0$) :

$$\mathcal{E}_m \approx -\frac{GM_TM_S}{r_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ell}{r_0}^2(3\cos^2(\theta) - 1)\right) + \frac{1}{2}M_S\ell^2\dot{\theta}^2$$

12 En déduire l'équation du mouvement. Indiquer, par un raisonnement sur cette équation différentielle, les positions d'équilibre et préciser, pour celle(s) qui sont stable(s), la pulsation des petites oscillations autour de ces dernières. Conclure.