Mécanique – chapitre 3

Mouvements courbes

Au programme

Savoirs

- ◇ Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
- ◇ Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
- ◇ Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.

Savoir-faire

- ◇ Coordonnées cylindriques : exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse.
- ◇ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.
- ◇ Mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
- ◇ Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.
- ◇ Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

◇

Sommaire

I Mouvement courbe dans un plan . . . **3**
- I/A Position en coordonnées polaires . . . 3
- I/B Vitesse en coordonnées polaires . . . 3
- I/C Déplacement élémentaire en polaires . . . 4
- I/D Accélération . . . 4

II Exemples de mouvements plans . . . **5**
- II/A Mouvement circulaire . . . 5
- II/B Mouvement circulaire uniforme . . . 5
- II/C Repère de Frenet . . . 6

III Application : pendule simple . . . **7**
- III/A Tension d'un fil . . . 7
- III/B Pendule simple . . . 7

IV Mouvement courbe dans l'espace . . . **9**
- IV/A Coordonnées cylindriques . . . 9
- IV/B Coordonnées sphériques . . . 10

Résultats phares

Liste des définitions

Définition 3.1 : Repère polaire et vecteur position . . . 3
Définition 3.2 : Mouvement circulaire . . . 5
Définition 3.3 : Mouvement circulaire uniforme . . . 5
Définition 3.4 : Repère de Frenet . . . 6
Définition 3.5 : Tension d'un fil . . . 7
Définition 3.6 : Repère cylindrique et vecteur position . . . 9
Définition 3.7 : Repère sphérique . . . 10

Liste des propriétés

Propriété 3.1 : Position en polaires et projection cartésienne . . . 3
Propriété 3.2 : Vitesse en coordonnées polaires . . . 4
Propriété 3.3 : Déplacement élémentaire polaire . . . 4
Propriété 3.4 : Accélération en coordonnées polaires . . . 5
Propriété 3.5 : Déplacement élémentaire sphérique . . . 11

Liste des démonstrations

Démonstration 3.1 : Vitesse en polaires . . . 4
Démonstration 3.2 : Dérivée de $\overrightarrow{u_\theta}$ . . . 5

Liste des applications

Application 3.1 : Mesure de g par un pendule . . . 9

Liste des points importants

Important 3.1 : Observations mouvement circulaire . . . 6
Important 3.2 : Bilan : coordonnées cylindriques . . . 9

Liste des erreurs communes

Attention 3.1 : Choix des coordonnées . . . 10

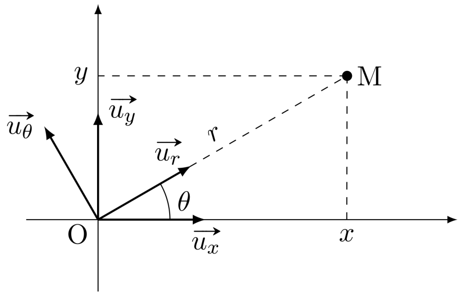
I Mouvement courbe dans un plan

I/A Position en coordonnées polaires

Définition 3.1 : Repère polaire et vecteur position

Le repère polaire est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis deux vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ de **direction variable dans le temps**, avec $\overrightarrow{u_r}$ dans la direction $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{u_\theta} \perp \overrightarrow{u_r}$ dans le sens direct tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = r}$$



Soit un point matériel M dans l'espace : il se repère en coordonnées cartésiennes et polaires par

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|$$

On peut projeter les vecteurs de la base polaire sur la base cartésienne. Il suffit pour cela de prendre des valeurs particulières de θ, comme 0 et $\pi/2$, pour trouver les dépendances en cos et sin suivantes :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_r} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y}$$

Ainsi, r, θ mais également $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ **dépendent du temps**.

Propriété 3.1 : Position en polaires et projection cartésienne

En coordonnées polaires et dans le plan d'une trajectoire, le vecteur position s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}}$$

et les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ variables se décomposent sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ fixes tels que

$$\boxed{\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{u_r} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y}}$$

I/B Vitesse en coordonnées polaires

Par définition,

$$\begin{aligned} \vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} &\Leftrightarrow \vec{v} = \frac{\mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \\ &\Leftrightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Pour déterminer la vitesse il faut donc déterminer la variation dans le temps du vecteur $\overrightarrow{u_r}$.

Démonstration 3.1 : Vitesse en polaires

Pour cela, on décompose $\overrightarrow{u_r}$ dans la base cartésienne qui, elle, a des vecteurs de base fixes dans le temps :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\underbrace{\left(-\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y}\right)}_{=\overrightarrow{u_\theta}} \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}
\end{aligned}$$

Propriété 3.2 : Vitesse en coordonnées polaires

Ainsi, la vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

I/C Déplacement élémentaire en polaires

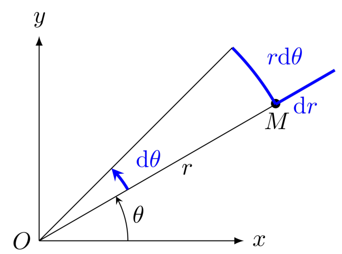
On a toujours $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$, autrement dit $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{v}\mathrm{d}t$. Ainsi, il suffit de prendre l'expression de la vitesse et de simplifier les $\mathrm{d}t$ des dérivées temporelles ; on a donc

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \left(\frac{\mathrm{d}r}{\cancel{\mathrm{d}t}}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\theta}{\cancel{\mathrm{d}t}}\,\overrightarrow{u_\theta}\right) \times \cancel{\mathrm{d}t}$$

Propriété 3.3 : Déplacement élémentaire polaire

En coordonnées polaires, le déplacement élémentaire s'exprime

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}$$



I/D Accélération

On procède de la même façon que pour la vitesse :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}\left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\right)}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}$$

Pour déterminer l'accélération, il faut donc déterminer la variation dans le temps du vecteur $\overrightarrow{u_\theta}$.

Démonstration 3.2 : Dérivée de $\overrightarrow{u_\theta}$

Pour cela, on décompose $\overrightarrow{u_\theta}$ dans la base cartésienne qui a des vecteurs de base fixes dans le temps :

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d} - \sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} - \dot\theta\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\underbrace{\left(\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y}\right)}_{=\overrightarrow{u_r}} \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot\theta\,\overrightarrow{u_r}}
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\vec{a} = \ddot r\,\overrightarrow{u_r} + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} - r\dot\theta^2\,\overrightarrow{u_r}$$

Propriété 3.4 : Accélération en coordonnées polaires

Finalement, la vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot r - r\dot\theta^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot r\dot\theta + r\ddot\theta\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

II Exemples de mouvements plans

II/A Mouvement circulaire

Définition 3.2 : Mouvement circulaire

Un mouvement est dit **circulaire** s'il se fait dans un plan, à une distance de l'axe de rotation r constante, soit
$$r(t) = R$$

Dans ce cas-là, on a
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r(t)\,\overrightarrow{u_r} = R\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{avec} \quad \dot r = 0 = \ddot r$$

En notant $\omega = \dot\theta$ la vitesse angulaire, la vitesse et l'accélération donnent
$$\vec{v} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r} + R\dot\omega\,\overrightarrow{u_\theta}$$

II/B Mouvement circulaire uniforme

Définition 3.3 : Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est dit **circulaire *uniforme*** si c'est un mouvement circulaire ($r(t) = \mathrm{cte}$) à *vitesse angulaire constante*, soit
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \dot\theta(t) = \omega \end{cases}$$

Dans ce cas, $\dot r = 0 = \ddot r$ mais également $\ddot\theta = 0$, donc la vitesse et l'accélération donnent
$$\vec{v} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r}$$

Important 3.1 : Observations mouvement circulaire

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme,

- Le vecteur vitesse est selon $\overrightarrow{u_\theta}$ et est de norme constante, égale à $R\omega$;
- Le vecteur accélération pointe vers le centre et est de norme constance, égale à $R\omega^2 = \dfrac{v^2}{R}$.

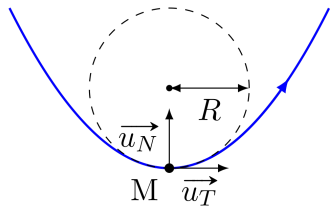
Transition

Si la trajectoire d'un objet change de courbure, il peut être fastidieux de travailler avec les coordonnées polaires : on utilisera alors un repère attaché à l'objet.

II/C Repère de Frenet

Définition 3.4 : Repère de Frenet

Pour un point M sur une trajectoire courbe, on peut approximer la trajectoire à un instant t comme étant celle d'un cercle, appelé **cercle osculateur**, localement tangent à la trajectoire et de rayon R. On définit alors le repère de Frenet avec :



- $\overrightarrow{u_T}$ tangent à la trajectoire en M ;
- $\overrightarrow{u_N} \perp \overrightarrow{u_T}$ et dirigé vers l'intérieur de la courbe, vers le centre du cercle osculateur.

Le rayon R est appelé **rayon de courbure**, et son inverse $\gamma = 1/R$ est appelé **courbure** de la trajectoire.

On peut alors exprimer la vitesse et l'accélération dans ce repère ; pour la vitesse, on repart de la définition :

$$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) + \mathrm{M}(\vec{t})\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{dM}(t)\mathrm{M}(\vec{t}+\mathrm{d}t)}{\mathrm{d}t}$$

Or, par définition, la trajectoire est l'ensemble des positions du point M dans le temps, donc le vecteur $\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(\vec{t}+\mathrm{d}t)$ défini la trajectoire et la direction du vecteur $\overrightarrow{u_T}$; ainsi, **la vitesse est tangente à la trajectoire** et on a

$$\boxed{\vec{v} = v\overrightarrow{u_T}}$$

Concernant l'accélération, avec la définition du rayon de courbure on admet

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_T}}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\overrightarrow{u_N}$$

et ainsi

$$\boxed{\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}}$$

- On retrouve le mouvement rectiligne uniforme avec $R = +\infty \Leftrightarrow \gamma = 0$, puisqu'on a alors
$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T}$$
avec $\overrightarrow{u_T}$ dans le sens de la trajectoire.
- On retrouve également le mouvement circulaire puisque dans ce cas la trajectoire **est** le cercle osculateur, donc $\overrightarrow{u_T} = \overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_N} = -\overrightarrow{u_r}$.

III Application : pendule simple

III/A Tension d'un fil

Définition 3.5 : Tension d'un fil

Un point matériel M accroché à un fil tendu subit de la part de ce fil une force appelée **tension du fil** et notée $\overrightarrow{T}$ telle que

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \|\overrightarrow{T}\|\,\overrightarrow{u_{\varphi\mathrm{M}\to\mathrm{fil}}}}$$

avec $\overrightarrow{u_{\varphi\mathrm{M}\to\mathrm{fil}}}$ un vecteur unitaire dirigé du point M vers le fil et $\|\overrightarrow{T}\|$ la norme de la tension du fil. La **condition de tension** du fil est $\|\overrightarrow{T}\| > 0$.

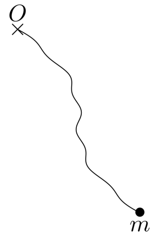


Figure 3.1 – Fil détendu : pas de force.

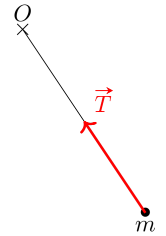
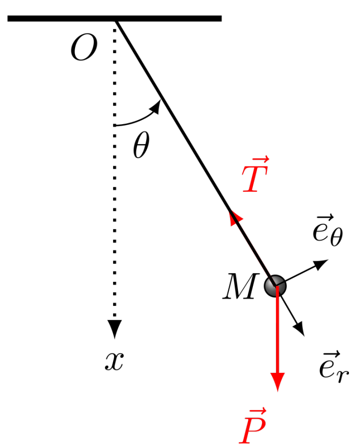


Figure 3.2 – Fil tendu : force vers O.

III/B Pendule simple

Et si je vous disais qu'on peut mesurer l'attraction de la pesanteur… avec un bout de ficelle et une masse ?



1. **De quoi parle-t-on ?** On étudie le mouvement d'une masse de 20 g suspendue à un fil, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La masse est écartée de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

2. **Schéma.**

3. **Modélisation.** On choisit d'utiliser des coordonnées polaires.

   - La masse est assimilée à un point matériel M.
   - Origine : point d'accroche du fil (centre de rotation pendule).
   - Repère : $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec base polaire (voir schéma).
   - t initial : moment du lâché, $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta(0) = 0$.

4. **Bilan des forces.**

$$\begin{aligned} &\textbf{Poids} \quad \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta}) \\ &\textbf{Tension}\ \overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

5. **PFD.**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$$

   Le mouvement étant circulaire (mais pas uniforme), on a

$$\overrightarrow{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + \ell\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

6. **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les axes :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

7 **Résolution.** La première équation n'est pas utilisable telle qu'elle, puisque T n'est pas connue ; cependant la seconde donne une équation différentielle homogène :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

qui constitue l'équation du mouvement du pendule. Sous cette forme, elle est **non-linéaire** donc non résoluble analytiquement ; elle peut l'être numériquement, voir `Capytale`[1].

En revanche, dans l'approximation des petits angles, on a $\sin\theta \approx \theta$, et ainsi on obtient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ! On met donc en évidence la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

et on a la solution générale homogène :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On obtient A et B avec les CI,

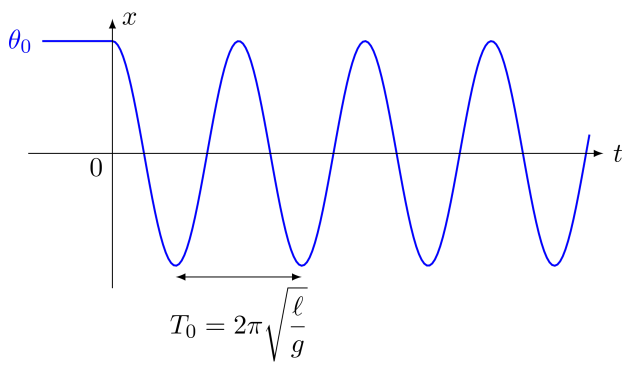
$$\theta(0) = \theta_0 \Leftrightarrow A \times 1 + B \times 0 = \theta_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \theta_0}$$
$$\dot{\theta}(0) = 0 \Leftrightarrow -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{B = 0}$$

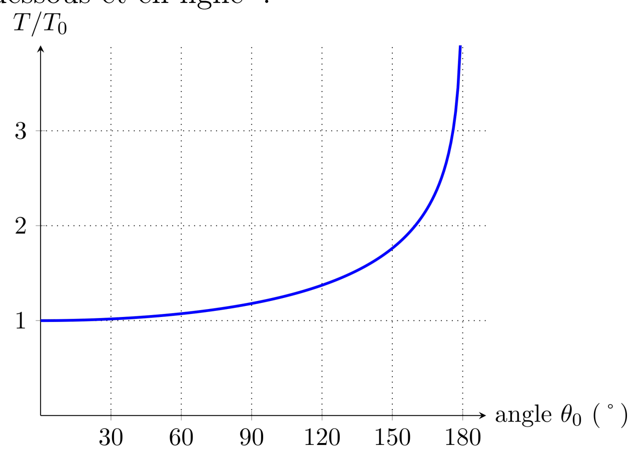
et finalement $$\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$$

Le pendule oscille à la pulsation ω_0 et à la période T_0 telles que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{et} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{donc} \quad \boxed{g = \frac{4\pi^2\ell}{{T_0}^2}}$$

Dans cette approximation, la période ne dépend ni de la masse, ni de l'angle initial. En réalité, si on s'écarte beaucoup de la verticale ($|\theta| > \pi/4$), la période change et n'est plus celle que l'on a aux petits angles. Voir le changement sur le graphique ci-dessous et en ligne[2].





1. https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/a7c5-1241282
2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.php

Application 3.1 : Mesure de g par un pendule

Ainsi, avec un fil de longueur $\ell = (0{,}84 \pm 0{,}06)\,\mathrm{cm}$, on mesure une période de $T_0 = (1{,}84 \pm 0{,}10)\,\mathrm{s}$.

D'où $$\boxed{g = 9{,}75\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$$

Transition

S'il existe de nombreux mouvements plans, il est nécessaire de pouvoir décrire des mouvements de rotation qui ne restent pas dans un plan mais évoluent dans l'espace 3D.

IV Mouvement courbe dans l'espace

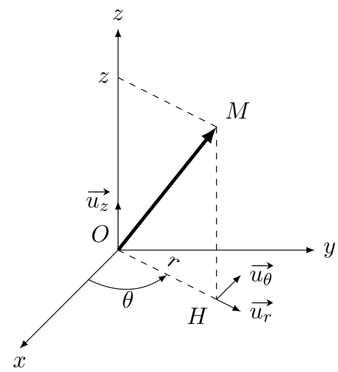
IV/A Coordonnées cylindriques

La manière la plus simple de passer du plan à l'espace est de prendre les coordonnées polaires et d'y ajouter la coordonnée cartésienne z : on définit ainsi les coordonnées **cylindriques**.

Définition 3.6 : Repère cylindrique et vecteur position

Le repère cylindrique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, avec $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ la base polaire et $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur de base cartésienne tel que $\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z}$. En appelant H le projeté orthogonal de M sur le plan polaire, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = \sqrt{r^2 + z^2}}$$

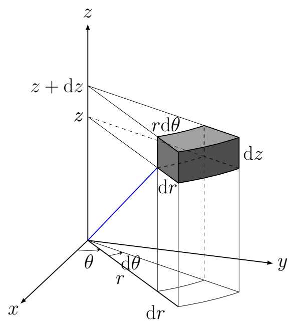


La détermination de la vitesse et de l'accélération est la même qu'en polaires, il suffit d'ajouter les dérivées de z puisque $\overrightarrow{u_z}$ est fixe dans le temps. Ainsi,

Important 3.2 : Bilan : coordonnées cylindriques

- **Coordonnées :** (r,θ,z)
- **Vecteurs de base :** $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
- **Position :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$
- **Vitesse :** $\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$
- **Déplacement élém. :** $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$
- **Accélération :** $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

Le principe du déplacement élémentaire est de pouvoir définir un volume infinitésimal suivant une variation infinitésimale des trois coordonnées. En effet, pour une petite variation $(\mathrm{d}r\,,\mathrm{d}\theta\,,\mathrm{d}z)$, on se déplace de $\mathrm{d}r$ dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, de $\mathrm{d}z$ dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ et l'arc de cercle formé par la variation d'angle $\mathrm{d}\theta$ est de longueur $r\,\mathrm{d}\theta$.



On trouve le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h en intégrant sur les trois coordonnées :

$$V_{\text{cyl}} = \int_{r'=0}^{R} r'\,\mathrm{d}r' \int_{\theta'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta' \int_{z'=0}^{h} \mathrm{d}z' = \frac{1}{2}R^2 \times 2\pi \times h = \boxed{h\pi R^2}$$

C'est l'aire d'un disque multiplié par la hauteur !

Attention 3.1 : Choix des coordonnées

Dans un problème de mécanique, on choisit les coordonnées judicieusement en fonction des symétries du système. **Sauf proposition de l'énoncé**, on utilisera les coordonnées **cylindriques** pour les mouvements de **rotation**. On utilisera les coordonnées cartésiennes sinon.

IV/B Coordonnées sphériques

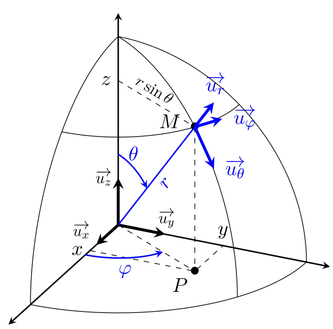
La manière la plus complète de décrire un mouvement général dans l'espace repose sur un dernier système de coordonnées, les coordonnées **sphériques**.

Définition 3.7 : Repère sphérique

Le repère sphérique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, tels que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_z},\overrightarrow{\mathrm{OM}}})} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = (\widehat{\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{\mathrm{OP}}})}$$

où $\widehat{(\cdot,\cdot)}$ est l'**angle orienté**, et P le projeté orthogonal de M sur le plan polaire. φ **correspond à** θ **des coordonnées polaires.**



- $\theta \in [0\ ;\ \pi]$ est nommé **colatitude** ($\lambda = |\pi/2 - \theta|$ la latitude) , et respecte

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OH}}{z} \Leftrightarrow \theta = \operatorname{atan}\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

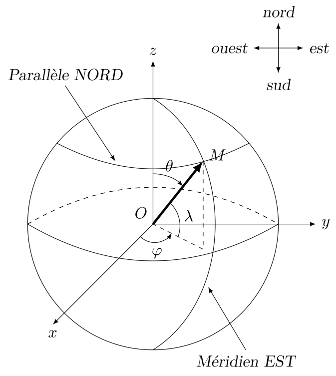
- $\varphi \in [0\ ;\ 2\pi]$ est nommé **longitude**, et respecte $\varphi = \operatorname{atan}\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

- Une courbe $\theta =$ cte est appelée **parallèle** ; le **rayon** d'un parallèle est $\boxed{r\sin\theta}$.
- Une courbe $\varphi =$ cte est appelée **méridien** ; le **rayon** d'un méridien est $\boxed{r}$.

On peut inverser les définitions en prenant $x = \mathrm{OP}\cos\varphi$ et $y = \mathrm{OP}\sin\varphi$, pour avoir

$$\boxed{x = r\sin\theta\cos\varphi} \quad , \quad \boxed{y = r\sin\theta\sin\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{z = r\cos\theta}$$

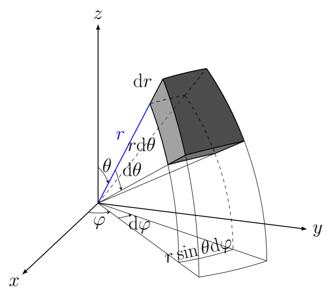
Exemple 3.1 : Repérage sphérique sur Terre



Le repérage sur la Terre utilise la latitude et la longitude. Par exemple, le lycée Pothier se situe à 47,90°N, 1,90°E ; on a donc

$$\theta_{\text{Pothier}} = 42{,}1° \qquad \text{et} \qquad \varphi_{\text{Pothier}} = 1{,}90°$$

Propriété 3.5 : Déplacement élémentaire sphérique



- Une variation de $\mathrm{d}r$ implique un déplacement de $\mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r}$;
- Une variation de $\mathrm{d}\theta$ implique un déplacement de $r\,\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta}$;
- Une variation de $\mathrm{d}\varphi$ implique un déplacement de $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}$.

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

$$V_{\text{boule}} = \int_{r'=0}^{R} r'^2\,\mathrm{d}r' \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \int_{r'=0}^{R} 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$