Électrocinétique – chapitre 3

Circuits du 1^er^ ordre

Sommaire

I Circuit RC **3**

I/A Circuit RC série : charge 3

I/B Circuit RC série : décharge 8

I/C Méthode pour les circuits à plusieurs mailles 10

II Bobine et circuit RL **11**

II/A Circuit RL série : échelon montant 11

II/B Circuit RL série : décharge 14

Capacités exigibles

- ▢ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.
- ▢ Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.
- ▢ Réaliser un bilan énergétique.
- ▢ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- ▢ Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension
- ▢ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.

L'essentiel

Définitions

- ▢ E3.1 : Échelon de tension 3
- ▢ E3.2 : Circuit RC en charge 3
- ▢ E3.3 : Temps de réponse 5
- ▢ E3.4 : Circuit RC en décharge 8
- ▢ E3.5 : Circuit RC en charge 11
- ▢ E3.6 : Circuit RL descendant 14

Propriétés

- ▢ E3.1 : Équa. diff. RC montant 3
- ▢ E3.2 : Tension RC montant 5
- ▢ E3.3 : Temps de réponse RC montant . 6
- ▢ E3.4 : Intensité RC montant 6
- ▢ E3.5 : Bilan de puissances RC montant 7
- ▢ E3.6 : Bilan d'énergie RC montant . . . 8
- ▢ E3.7 : Équa. diff. RC descendant 8
- ▢ E3.8 : Tension RC descendant 9
- ▢ E3.9 : Temps de réponse RC descendant 10
- ▢ E3.10 : Intensité RC décharge 10
- ▢ E3.11 : Équa. diff. RL montant 11
- ▢ E3.12 : Intensité RL montant 12
- ▢ E3.13 : Temps de réponse RL montant 13
- ▢ E3.14 : Tension RL montant 13
- ▢ E3.15 : Bilan de puissances RL montant 14
- ▢ E3.16 : Équa. diff. RL descendant . . . 14
- ▢ E3.17 : Intensité RL descendant 15
- ▢ E3.18 : Temps de réponse RL descendant 16
- ▢ E3.19 : Tension RL descendant 16

Implications

- ▢ E3.1 : Détermination τ RC montant . . 5
- ▢ E3.2 : Détermination τ RC descendant 9
- ▢ E3.3 : Détermination τ RL montant . . 12
- ▢ E3.4 : Détermination τ RL descendant 15

Démonstrations

- ▢ E3.1 : Équa. diff. RC montant 3
- ▢ E3.2 : Tension RC série montant 4
- ▢ E3.3 : Temps de réponse RC montant . 6
- ▢ E3.4 : Intensité RC montant 6
- ▢ E3.5 : Bilan de puissances RC montant 7
- ▢ E3.6 : Bilan d'énergie RC montant . . . 7
- ▢ E3.7 : Équa. diff. RC descendant 8
- ▢ E3.8 : Tension RC descendant 9
- ▢ E3.9 : Temps de réponse RC descendant 9
- ▢ E3.10 : Intensité RC décharge 10
- ▢ E3.11 : Équa. diff. RL montant 11
- ▢ E3.12 : Intensité RL série montant . . . 11
- ▢ E3.13 : Tension RL montant 13
- ▢ E3.14 : Bilan de puissances RL montant 13
- ▢ E3.15 : Équa. diff. RL descendant . . . 15
- ▢ E3.16 : Intensité RL descendant 15
- ▢ E3.17 : Tension RL descendant 16

Points importants

- ▢ E3.1 : Résolution equa. diff. ordre 1 . . 4
- ▢ E3.2 : Bilan de puissance en élec. . . . 7
- ▢ E3.3 : Méthode avec plusieurs mailles . 10

Erreurs communes

- ▢ E3.1 : Conditions initiales 10
- ▢ E3.2 : Bilan d'énergie RL charge 14

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

I Circuit RC

I/A Circuit RC série : charge

Définition E3.1 : Échelon de tension

Un échelon de tension est montant s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t<0) = 0 \\ u(t \geq 0) = E \end{cases}$$

et descendant si E avant et 0 après.

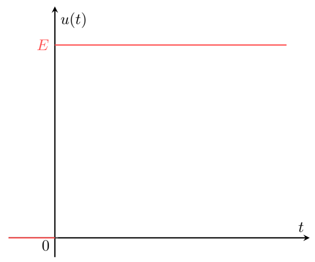

Figure 3.1

I/A) 1 Présentation

Définition E3.2 : Circuit RC en charge

- Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- **On suppose le condensateur initialement déchargé.**
- À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

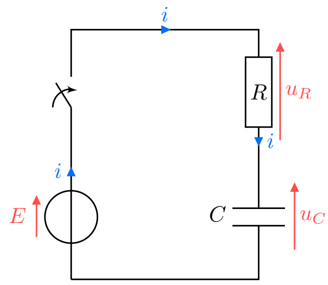

Figure 3.2

I/A) 2 Équation différentielle du circuit

Démonstration E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} & u_R + u_C = E \qquad u_R = Ri \text{ et } i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = \frac{E}{RC} \end{aligned}$$

Propriété E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = RC}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0}$$

Application E3.1 : Dimension de RC

Montrer, par analyse dimensionnelle, que RC est homogène à un temps.

Méthode 1

On a $[RC] = \Omega{\cdot}\mathrm{F}$. Or,

$$\begin{aligned}[q] = [Cu] &\Leftrightarrow \mathrm{C} = \mathrm{F}{\cdot}\mathrm{V}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{C}{\cdot}\mathrm{V}^{-1}\\ &\Leftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{A}{\cdot}\mathrm{s}{\cdot}\mathrm{V}^{-1}\end{aligned}$$

de plus, $[u] = [Ri] \Leftrightarrow \mathrm{V} = \Omega{\cdot}\mathrm{A}$ $\Leftrightarrow \Omega = \mathrm{V}{\cdot}\mathrm{A}^{-1}$ ■

Ainsi,

$$\begin{aligned}&[RC] = \Omega{\cdot}\mathrm{F}\\ \Leftrightarrow\ &[RC] = \mathrm{V}{\cdot}\mathrm{A}^{-1}{\cdot}\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{s}{\cdot}\mathrm{V}^{-1}\\ \Leftrightarrow\ &\boxed{[RC] = \mathrm{s}}\end{aligned}$$

■

Méthode 2

Une équation physique étant homogène, comme

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

alors

$$\begin{aligned}&\left[\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right] = \left[\frac{u_C}{RC}\right]\\ \Leftrightarrow\ &\frac{[u_C]}{[t]} = \frac{[u_C]}{[RC]}\\ \Leftrightarrow\ &\boxed{[RC] = [t]}\end{aligned}$$

■

I/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

Important E3.1 : Résolution équation différentielle coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant, de la forme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau}y = k$:

1. On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
2. On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.
3. On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y_p(t) = \lambda$.
4. On écrit la **solution générale**, somme de la solution particulière et de la forme générale.
5. On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

Démonstration E3.2 : Tension RC série montant

1. L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}u_{C,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0$$

2. La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$u_{C,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

3. Une solution particulière avec $u_{C,p}(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Donc $u_{C,p}(t) = E$ est **une** solution de l'équation différentielle.

4 La solution générale est donc

$$u_C(t) = E + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

5 Les conditions initiales donnent ici

$$u_C(t=0) = 0 \qquad \text{et} \qquad u_C(0) = K + E \Rightarrow K = -E$$

Propriété E3.2 : Tension RC montant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumis à un échelon de tension E avec $u_C(0) = 0$ est

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

et $u_C(t)$ est continue.

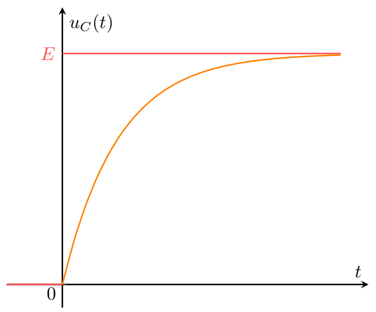

Figure 3.3

I/A) 4 Constante de temps, régime transitoire

Quand $t \to +\infty$, $u_C(t) = E$. On est alors en **régime permanent** : $u_C(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps.

Implication E3.1 : Détermination τ RC montant

1) $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}632 \times E$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $u_C(\tau) = 0{,}632 \times E$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) + \underbrace{\frac{u_C(0)}{\tau}}_{=0} = \frac{E}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow y_0'(t) = \frac{E}{\tau} \Rightarrow \boxed{y_0(t) = E\frac{t}{\tau}}$$

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $\boxed{t = \tau}$.

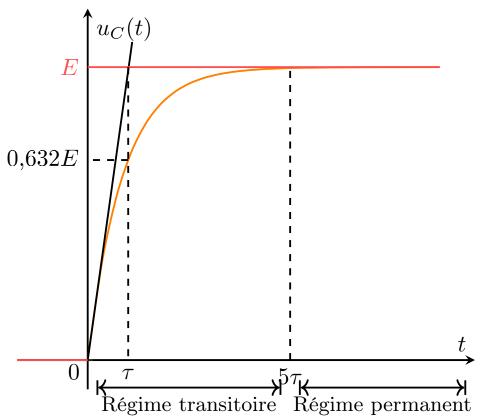

Figure 3.4

Définition E3.3 : Temps de réponse

Le **temps de réponse** d'un circuit d'ordre 1 est le temps à partir duquel on peut considérer la consigne de tension ou de courant atteinte, c'est-à-dire qu'on est en **régime permanent**.

Pour cela, on se fixe un **seuil arbitraire** à partir duquel on considère le régime permanent atteint.

Démonstration E3.3 : Temps de réponse RC montant

Dans ce cours, on prendra 99%. On cherche donc t_{99} tel que $u(t_{99}) = 0{,}99E$:

$$
\begin{aligned}
u_C(t_{99}) &= 0{,}99E && \text{solution de } u_C \\
\Leftrightarrow E\left(1 - \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right)\right) &= 0{,}99E && \div E \\
\Leftrightarrow 1 - \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0{,}99 && \text{on isole l'exp} \\
\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0{,}01 && \ln(\,) \\
\Leftrightarrow -\frac{t_{99}}{\tau} &= \ln(0{,}01) = -\ln(100) && \text{on isole } t_{99} \\
\Leftrightarrow &\boxed{t_{99} = \tau\ln(100)}
\end{aligned}
$$

Propriété E3.3 : Temps de réponse RC montant

Ainsi, $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$

I/A) 5 Évolution de l'intensité

Qu'advient-il de l'intensité dans un circuit RC ? On peut le déterminer de deux manières :

Démonstration E3.4 : Intensité RC montant

Caractéristique de C

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad u_C(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow i(t) = CE\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \qquad \tau = RC$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Loi des mailles

$$Ri = E - u_C \quad \text{avec} \quad u_C(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Leftrightarrow Ri(t) = \cancel{E} - \cancel{E} + E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \qquad \div R$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Propriété E3.4 : Intensité RC montant

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

et est discontinue.

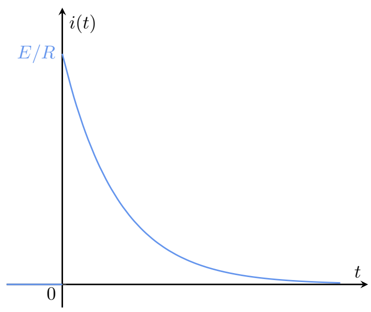

Figure 3.5

I/A) 6 Bilan de puissance

En électrocinétique, les puissances sont le produit d'une tension et d'une intensité. Or, par construction la loi des mailles est une relation entre les tensions du circuit ; ainsi

Important E3.2 : Bilan de puissance en élec.

On effectue un bilan de puissance en écrivant la loi des mailles multipliée par i.

Démonstration E3.5 : Bilan de puissances RC montant

$$\begin{aligned} & u_C + Ri = E \\ \Leftrightarrow\ & u_C\, i + Ri^2 = Ei \quad (\times i) \\ \Leftrightarrow\ & u_C\, C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = Ei \quad \text{RCT pour C : } i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C{u_C}^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} = \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G} \quad f\times f' = \left(\tfrac{1}{2}f^2\right)' \end{aligned}$$

Propriété E3.5 : Bilan de puissances RC montant

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J}$$

- $\mathcal{P}_G = Ei$: la puissance fournie par le générateur ;
- $\mathcal{P}_C = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}$: la puissance reçue par le condensateur ;
- $\mathcal{P}_J = Ri^2$: la puissance dissipée par effet JOULE dans la résistance.

I/A) 7 Bilan d'énergie

On peut étudier énergétiquement cette évolution en intégrant la puissance délivrée sur le temps d'utilisation.

Démonstration E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

L'énergie fournie par le générateur sur toute la charge est

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_G &= \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_G \mathrm{d}t \quad \mathcal{P}_G = Ei \\ &= \int_0^{+\infty} Ei(t)\mathrm{d}t \quad i(t) = E/R\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ &= \frac{E^2}{R}\left[-\tau\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{+\infty} \\ &= \frac{E^2}{R}\left(\underbrace{-\tau\exp\left(-\frac{\infty}{\tau}\right)}_{=0} - \left(-\tau\underbrace{\exp(0)}_{=1}\right)\right) \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_G = \tau\frac{E^2}{R} \quad \tau = RC$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

Or, l'énergie stockée dans le condensateur (Pt.E2.13) est

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 \quad \text{donc} \quad \mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2$$

Propriété E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

Pendant la totalité de la charge, l'énergie du générateur est

$$\boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

Elle se répartit équitablement entre le condensateur et la résistance :

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 = \mathcal{E}_J}$$

I/B Circuit RC série : décharge

I/B) 1 Présentation

Définition E3.4 : Circuit RC en décharge

- Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- **On suppose le condensateur initialement chargé** : $u_C(0^-) = E$.
- À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

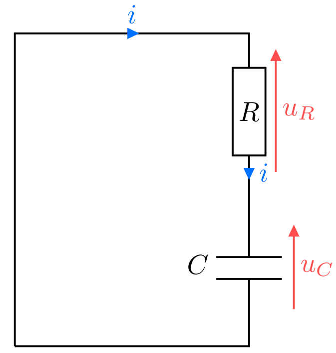

FIGURE 3.6

I/B) 2 Équation différentielle du circuit

Propriété E3.7 : Équation différentielle RC échelon descendant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC en décharge

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = RC}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = E}$$

Démonstration E3.7 : Équation différentielle RC échelon decendant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} & u_R + u_C = 0 \qquad \left.\begin{array}{l} u_R = Ri \\ \text{et } i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{array}\right) \\ \Leftrightarrow\ & RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = 0 \end{aligned}$$

I/B) 3 Résolution de l'équation différentielle

Propriété E3.8 : Tension RC descendant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC en décharge avec $u_C(0) = E$ est **continue**, et :

$$\boxed{u_C(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Démonstration E3.8 : Tension RC descendant

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale :

$$u_C(0) = E \qquad \text{et} \qquad u_C(0) = K \Rightarrow K = E$$

I/B) 4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

Implication E3.2 : Détermination τ RC descendant

1) $u_C(\tau) = Ee^{-1} \approx 0{,}368 \times E$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $u_C(\tau) = 0{,}368 \times E$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\overbrace{u_C(0)}^{=E}}{RC} = 0$$
$$\Leftrightarrow y_0'(t) = -\frac{E}{\tau} \Rightarrow \boxed{y_0(t) = -E\frac{t}{\tau}}$$

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

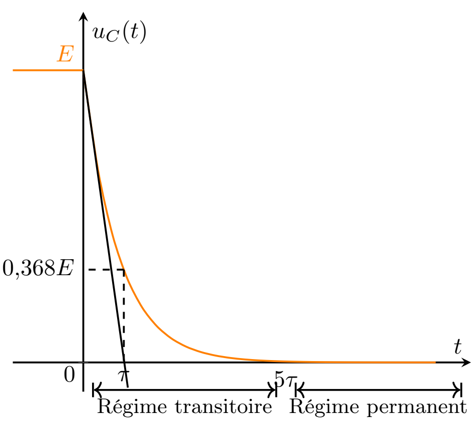

Figure 3.7

Démonstration E3.9 : Temps de réponse RC descendant

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0{,}01E$:

$$\begin{aligned}
u_C(t_{99}) &= 0{,}01E && \text{solution de } u_C\\
\Leftrightarrow E\exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0{,}01E && \div E\\
\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0{,}01 && \ln(\,)\\
\Leftrightarrow -\frac{t_{99}}{\tau} &= \ln(0{,}01) = -\ln(100) && \text{on isole } t_{99}\\
\Leftrightarrow \boxed{t_{99} = \tau\ln(100)}
\end{aligned}$$

Propriété E3.9 : Temps de réponse RC descendant

Ainsi, le temps de réponse à 99% est à $4{,}6\tau$

I/B) 5 Évolution de l'intensité

Démonstration E3.10 : Intensité RC décharge

Caractéristique de C

$$
\begin{aligned}
& i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad u_C(t) = Ee^{-t/\tau} \\
\Rightarrow\ & i(t) = -\frac{CE}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}
$$

$\tau = RC$

Loi des mailles

$$
\begin{aligned}
& Ri = -u_C \\
\Leftrightarrow\ & Ri(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}
$$

$u_C(t) = Ee^{-t/\tau}$

$\div R$

Propriété E3.10 : Intensité RC décharge

L'intensité dans un circuit RC en décharge s'exprime par

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

et est discontinue.

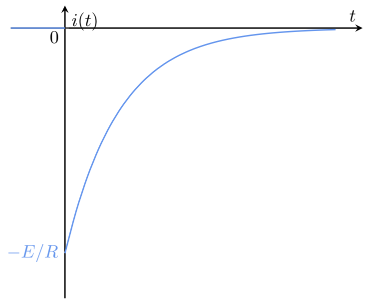

FIGURE 3.8

Attention E3.1 : Conditions initiales

Attention, lorsqu'on étudie un circuit charge-décharge, il faut **étudier les conditions initiales en** $\boxed{t \neq 0}$.

I/C Méthode pour les circuits à plusieurs mailles

Important E3.3 : Méthode avec plusieurs mailles

1. Écrire les différentes lois du circuit (LdN, LdM, LdΩ, RCT…) ;
2. Écrire les lois des mailles ;
3. Isoler la grandeur dont on veut l'équation différentielle en éliminant les autres ;
4. Mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = \frac{F}{\tau}$$

et identifier F et τ ;

5 Établir les conditions initiales avec l'énoncé et la continuité de la tension pour C ;

6 Résoudre l'équation différentielle.

II Bobine et circuit RL

II/A Circuit RL série : échelon montant

II/A) 1 Présentation

Définition E3.5 : Circuit RC en charge

- Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéals.
- **On suppose l'interrupteur initialement ouvert**.
- À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

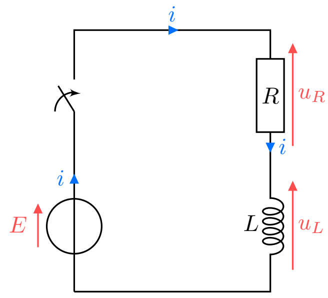

FIGURE 3.9

II/A) 2 Équation différentielle du circuit

Démonstration E3.11 : Équation différentielle RL échelon montant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} & u_L + u_R = E \\ \Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \end{aligned}$$

$u_R = Ri$ et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Propriété E3.11 : Équation différentielle RL échelon montant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'une bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = 0}$$

II/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

Démonstration E3.12 : Intensité RL série montant

1 L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}i_h}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i_h = 0$$

$\boxed{2}$ La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$i_h(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$\boxed{3}$ Une solution particulière avec $i_p(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}$$

Donc $i_p(t) = \frac{E}{R}$ est **une** solution de l'équation différentielle.

$\boxed{4}$ La solution générale est donc

$$i(t) = \frac{E}{R} + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$\boxed{5}$ Les conditions initiales donnent ici

$$i(t=0) = 0 \qquad \text{et} \qquad i(0) = K + \frac{E}{R} \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$$

Propriété E3.12 : Intensité RL montant

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(0) = 0$ est

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

et $i(t)$ est continue.

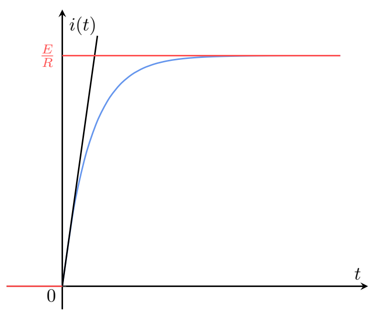

Figure 3.10

II/A) 4 Constante de temps, régime transitoire

Implication E3.3 : Détermination τ RL montant

1) $i(\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) \approx 0{,}632 \times E/R$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $u_C(\tau) = 0{,}632 \times E$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) + \underbrace{\frac{i(0)}{\tau}}_{=0} = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}$$

$$\Leftrightarrow y_0'(t) = \frac{E}{R\tau} \Rightarrow y_0(t) = \frac{E}{R}\frac{t}{\tau}$$

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $\boxed{t = \tau}$.

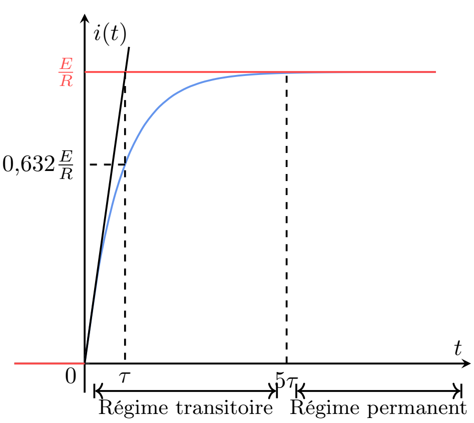

Figure 3.11

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0{,}99\frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4{,}6\tau$.

Propriété E3.13 : Temps de réponse RL montant

Ainsi, $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$

II/A) 5 Évolution de la tension

Démonstration E3.13 : Tension RL montant

Caractéristique de L

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow u_L(t) = \frac{LE}{R}\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \qquad \tau = \frac{L}{R}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Loi des mailles

$$u_L = E - Ri \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = E - R\frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Propriété E3.14 : Tension RL montant

La tension dans un circuit RL en charge s'exprime par

$$\boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

et est discontinue.

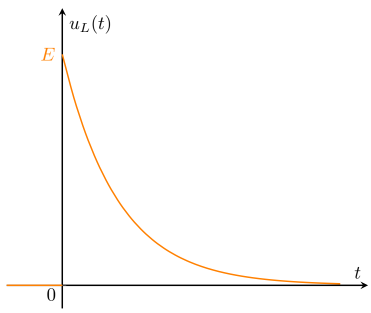

Figure 3.12

II/A) 6 Bilan de puissance

Démonstration E3.14 : Bilan de puissances RL montant

$$u_L + Ri = E$$

$$\Leftrightarrow u_L i + Ri^2 = Ei \qquad \times i$$

$$\Leftrightarrow i\,L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = Ei \qquad \text{RCT pour L : } u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} = \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G} \qquad f \times f' = \left(\tfrac{1}{2}f^2\right)'$$

Propriété E3.15 : Bilan de puissances RL montant

Dans un circuit RL en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_J}$$

$\mathcal{P}_G = Ei$: la puissance fournie par le générateur ;

$\mathcal{P}_L = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}$: la puissance reçue par la bobine ;

$\mathcal{P}_J = Ri^2$: la puissance dissipée par effet JOULE dans la résistance.

Attention E3.2 : Bilan d'énergie RL charge

Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe RI^2. On ne peut intégrer à l'infini.

II/B Circuit RL série : décharge

II/B) 1 Présentation

Définition E3.6 : Circuit RL descendant

- Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale.
- **On suppose le courant initialement établi** : $i(0^-) = \frac{E}{R}$.
- À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

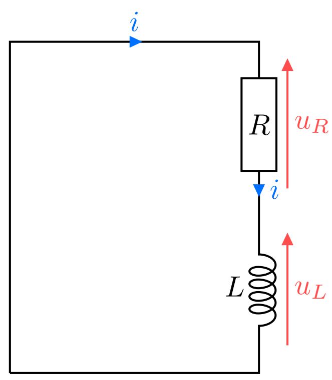

FIGURE 3.13

II/B) 2 Équation différentielle du circuit

Propriété E3.16 : Équation différentielle RL échelon descendant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RL en décharge

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{L}{R}}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{R}}$$

Démonstration E3.15 : Équation différentielle RL échelon decendant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_R + u_L &= 0 \quad \left.\right) u_R = Ri \text{ et } u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i &= 0 \end{aligned}$$

II/B) 3 Résolution de l'équation différentielle

Propriété E3.17 : Intensité RL descendant

L'intensité $i(t)$ d'un circuit RL en décharge avec $i(0) = \frac{E}{R}$ est **continue**, et :

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Démonstration E3.16 : Intensité RL descendant

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$i(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale :

$$i(0) = \frac{E}{R} \qquad \text{et} \qquad i(0) = K \Rightarrow K = \frac{E}{R}$$

II/B) 4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

Implication E3.4 : Détermination τ RL descendant

1) $i(\tau) = \frac{E}{R}e^{-1} \approx 0{,}368 \times \frac{E}{R}$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $i(\tau) = 0{,}368 \times \frac{E}{R}$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\overbrace{i(0)}^{=E/R}}{\tau} = 0$$

$$\Leftrightarrow y_0'(t) = -\frac{E}{R} \Rightarrow \boxed{y_0(t) = -\frac{E}{R}\frac{t}{\tau}}$$

La tangente à la courbe en 0, coupe donc l'asymptote en $\boxed{t = \tau}$.

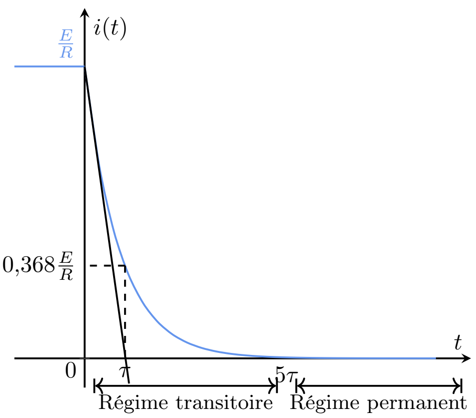

FIGURE 3.14

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0{,}01\frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4{,}6\tau$.

Propriété E3.18 : Temps de réponse RL descendant

Ainsi, $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$

II/B) 5 Évolution de la tension

Démonstration E3.17 : Tension RL descendant

Caractéristique de L

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = -\frac{LE}{R\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\tau = L/R$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Loi des mailles

$$u_L = -Ri$$

$$i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = -R\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{u_L(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Propriété E3.19 : Tension RL descendant

La tension dans un circuit RL en décharge s'exprime par

$$\boxed{u_L(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

et est discontinue.

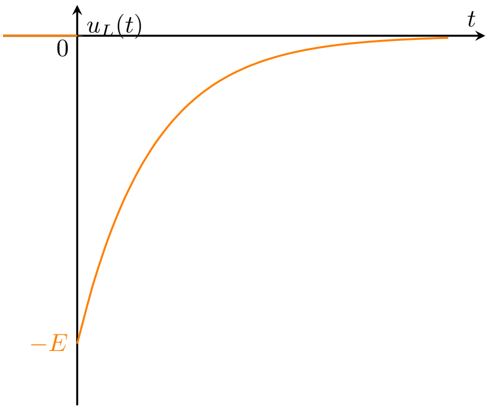

FIGURE 3.15