Fiches – numéro 6

Équations différentielles en sciences physiques

Sommaire

I Introduction

Définition

Une équation différentielle[1] sur la fonction $y(t)$ est une équation liant $y(t)$ à ses **dérivées**. Elle est dite *linéaire*[2] (on ne verra pas le cas non-linéaire cette année) si elle peut s'écrire comme :

$$f_0(t) \cdot y(t) + f_1(t) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \ldots + f_N(t) \cdot \frac{\mathrm{d}^N y(t)}{\mathrm{d}t^N} = g(t) \Leftrightarrow \sum_{i=0}^{N} f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} = g(t)$$

Avec $f_{i\in[1,N]}(t)$ et $g(t)$ des fonctions dépendantes de la variable t[3].

Exemples

Exemple

- $f_0(t) = t,\ f_1(t) = 1$ et $f_{i\geq 2}(t) = 0$;
- $y(t)$ à résoudre ;
- $g(t) = A$;

On a

$$t \cdot y(t) + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = A$$

Contre-exemple

$$\underbrace{4\,y^2(t)}_{\text{non-linéaire}} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

ou

$$4y(t) + \underbrace{y(t) \cdot \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}}_{\text{non-linéaire}} = 0$$

Dans la pratique, on rencontrera des équations différentielles très particulières en sciences physiques. On les caractérise par :

- **Leur ordre** : c'est le rang maximum de la dérivation portant sur $y(t)$. Cette année, on s'intéresse à des équations d'ordre 1 et 2 seulement.

1. Notée ED dans la suite.
2. Notée donc EDL dans la suite.
3. Attention, cette variable n'est pas *que* le temps. Ça peut être une dimension d'espace, par exemple x.

- **Leurs coefficients** : les $f_i(t)$ sont des fonctions, mais la plupart du temps ce seront des constantes. On dit alors que l'équation différentielle est à *coefficients constants*[4].
- **Leur second membre** : dans l'écriture d'une ED, on met tous les termes qui dépendent de y à gauche du signe « = », et tout le reste à droite, c'est le $g(t)$ de la définition. On l'appelle *second membre*.

Équation homogène

On appelle **équation homogène** une équation différentielle **sans second membre** : $g(t) = 0$

$$\sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} = \boxed{0}$$

Propriété C6.1 : Linéarité pour une EDL homogène

Soient y_1 et y_2 deux solutions d'une même EDL homogène[5]. Alors, toute combinaison de ces deux solutions est également solution de l'EDLH :

$$\boxed{\forall (y_1,y_2) \text{ solutions d'une EDLH} \Rightarrow \forall (\alpha_1,\alpha_2) \in \mathbb{R}^2, \quad \alpha_1 y_1(t) + \alpha_2 y_2(t) \text{ est solution de l'EDLH}}$$

Solution générale avec second membre

Pour une EDL avec second membre (non homogène), *une* **solution générale** s'obtient par somme de la **solution homogène** y_h et d'une **solution particulière** y_p :

$$\boxed{y(t) = y_h(t) + y_p(t)}$$

Attention

1) Ici, c'est bien la **somme** de y_h et y_p qui est solution, et pas toute autre combinaison $\alpha_1 y_h + \alpha_2 y_p$.
2) Avec ceci, on obtient **une** solution de l'EDL, pas **la** solution. Pour obtenir l'**unique** solution, on aura besoin de **condition initiales**.

Solution particulière pour une EDLC à second membre constant

Dans le cas où $f_i(t) = a_i$ et $g(t) = b$ avec a_i et b des constantes, on cherche $y_p(t) = \lambda$ également une constante. Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y_p(t)}{\mathrm{d}t^i} = b \\
\Leftrightarrow\ & a_0 \lambda + \underbrace{\sum_{i \geq 1} f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i \lambda}{\mathrm{d}t^i}}_{=0} = b \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{y_p(t) = \lambda = \frac{b}{a_0}}
\end{aligned}$$

Une autre manière de tenir compte d'un second membre constant est de réaliser un changement de variable pour se ramener à une EDLH.

4. Notée EDC dans la suite.
5. Notée EDLH dans la suite.

II Résolution d'EDLHC

II/A Premier ordre

On s'intéresse à une EDLHC[6] d'ordre 1. Elle peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}y_h(t) = 0 \tag{6.1}$$

avec $\tau \in \mathbb{R}$ une constante homogène à t.

Vocabulaire

Si t désigne bien le temps, comme souvent en physique, alors par rapide analyse d'homogénéité, τ s'exprime en secondes et s'appelle la **constante de temps**.

Le fonctionnement complet derrière la résolution sera extensivement développé en mathématiques. Cependant, on peut retenir l'idée suivante : les fonction exponentielles sont des fonctions clés pour les ED, et on peut logiquement chercher $y_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ avec $r \in \mathbb{C}$ à déterminer. C'est ce qu'on injecte dans (6.1) :

Méthode de résolution pour EDLHC d'ordre 1

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}y_h(t) = 0 && \quad y_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}\\
\Rightarrow\ & r \times \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + \frac{\cancel{K\mathrm{e}^{rt}}}{\tau} = 0 && \quad \text{On simplifie}\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{r = -\frac{1}{\tau}}
\end{aligned}$$

Vocabulaire

L'équation portant sur la variable r s'appelle le **polynôme caractéristique**. Dans le cas précédent, c'est un polynôme de degré 1, donc la solution est évidente. Dans la suite, on aura un polynôme de degré 2.

Solution d'EDLHC d'ordre 1

La solution **générale** de (6.1) s'écrit, avec $K \in \mathbb{R}$ la constante d'intégration :

$$\boxed{y_h(t) = K\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

On obtient **la** solution spécifique à l'aide des **conditions initiales**[7] du système étudié, qui fixera K.

II/B Second ordre harmonique

Soit une EDLHC d'ordre 2. On l'appelle **harmonique** si elle ne contient **pas de terme d'ordre 1**, seulement 0 et 2. Elle peut se mettre sous la forme suivante, avec $\omega_0, Q \in \mathbb{R}$ une constante :

$$\frac{\mathrm{d}^2y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 y_h(t) = 0 \tag{6.2}$$

Vocabulaire

Si t désigne bien le temps, alors ω_0 est l'**inverse** d'un temps et s'appelle la **pulsation propre**, exprimée en $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$;

6. Équation Différentielle Linéaire Homogène à coefficients Constants.
7. Notées CI dans la suite.

Méthode pour EDLHC d'ordre 2 harmonique

Pour résoudre (6.2), on injecte également $y_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ pour retrouver le **polynôme caractéristique** et le résoudre pour r :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 y_h(t) &= 0 \quad \Big) \; y_h(t) = K\mathrm{e}^{rt} \\
\Rightarrow r^2 \times \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + {\omega_0}^2 \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} &= 0 \quad \Big) \; \text{On simplifie} \\
\Leftrightarrow r^2 &= -{\omega_0}^2 \quad \Big) \; (\cdot)^{\frac{1}{2}} \\
\Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\mathrm{j}\omega_0}
\end{aligned}$$

EDLHC d'ordre 2 harmonique

La solution **générale** de (6.2) est la **somme** des deux fonctions générales correspondant chacune à **solution** de $r_\pm$, avec une constante K différente pour **chaque choix** (par linéarité, propriété 6.1). Avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ les constantes d'intégrations :

$$y_h(t) = A\mathrm{e}^{r_+ t} + B\mathrm{e}^{r_- t} \Leftrightarrow y_h(t) = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega_0 t} + B\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\omega_0 t}$$

Or, les exponentielles complexes peuvent être exprimées en fonctions cosinus et sinus. Par une astuce mathématique[8] pour trouver un **résultat réel**, on obtient enfin la forme de solution générale :

$$\boxed{y_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

II/C Second ordre amorti

Soit une EDLHC d'ordre 2. Elle peut se mettre sous la forme suivante, avec $(\omega_0, Q) \in \mathbb{R}^2$ des constantes :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 y_h(t) = 0 \tag{6.3}$$

Vocabulaire

Si t désigne bien le temps, alors :

- ◇ ω_0 est toujours l'inverse d'un temps et s'appelle la **pulsation propre**, exprimée en $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$;
- ◇ Q est **adimensionné** et s'appelle le **facteur de qualité**.

Méthode pour EDLHC d'ordre 2

Pour résoudre (6.3), on injecte la forme générique de solution $y_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ pour obtenir le **polynôme caractéristique** et le résoudre :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q} y_h(t) + {\omega_0}^2 y_h(t) &= 0 \quad \Big) \; y_h(t) = K\mathrm{e}^{rt} \\
\Rightarrow r^2 \times \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + \frac{\omega_0}{Q} r \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + {\omega_0}^2 \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} &= 0 \quad \Big) \; \text{On simplifie} \\
\Leftrightarrow r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 &= 0
\end{aligned} \tag{6.4}$$

dont le discriminant Δ s'écrit

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

La forme des solutions dépend donc des valeurs possibles de Δ, et on distinguera trois cas, tous à connaître.

8. Pour le détail, voir la Section V/B.

II/C) 1 $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$: régime apériodique

EDLHC d'ordre 2 avec $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$

Si $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$, alors (6.4) a deux racines **réelles** :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$$

et la solution **générale** de (6.3) s'écrit, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ les constantes d'intégrations :

$$\boxed{y_h(t) = A\mathrm{e}^{r_+ t} + B\mathrm{e}^{r_- t}}$$

par linéarité (propriété 6.1).

II/C) 2 $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

EDLHC d'ordre 2 avec $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$

Si $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$, alors (6.4) a une racine réelle double :

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

et la solution **générale** de (6.3) s'écrit, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ les constantes d'intégrations :

$$\boxed{y_h(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}}$$

II/C) 3 $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

EDLHC d'ordre 2 avec $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$

Si $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$, alors (6.4) a deux racines complexes conjuguées :

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega$$

et la solution **générale** de (6.3) s'écrit, avec $(A,B) \in \mathbb{R}^2$ les constantes d'intégrations :

$$\boxed{y_h(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]}$$

par linéarité (propriété 6.1).

Interprétation et intuition du résultat

La solution du polynôme caractéristique s'écrit alors comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution harmonique** :

$$r_{\pm} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\equiv -\frac{1}{\tau}} \pm \underbrace{\mathrm{j}\Omega}_{\equiv \mathrm{j}\omega}$$

soit
$$\boxed{r_{\pm} = r_{\text{ordre 1}} + r_{\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1.

Avec les propriétés de l'exponentielle ($\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$y_h(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\equiv \mathrm{e}^{-t/\tau}} \underbrace{[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]}_{\equiv A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)}$$

soit $$\boxed{y_h(t) = y_{h,\text{ordre 1}} \times y_{h,\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Attention !

Pour une EDLHC amortie, dans le cas pseudo-périodique **la pulsation n'est plus égale à la pulsation propre** :

$$\boxed{\omega_0 \neq \Omega}$$

II/C) 4 Cas particulier : $Q \to +\infty$

Si $Q \to +\infty$, alors l'Équation (6.3) se simplifie en :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 y_h(t) = 0$$

Et on retrouve la solution harmonique. Elle correspond alors avec la solution amortie pour $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$ avec $Q \to +\infty$, soit

$$\boxed{y_h(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

III Résolution d'EDLC (avec second membre)

Comme introduit dans la première section, une EDL se résout en prenant la somme de $y_h(t)$ et de $y_p(t)$. Ça n'en donne cependant pas **la** solution, mais une famille de solutions. Pour que la solution représente le système étudiée, il faut trouver les valeurs des constantes d'intégrations. On s'intéresse ici aux EDLC avec second membre constant.

Important

Rien de cette section n'est à retenir par cœur ! Seule la **méthode** est à comprendre.

Attention

La détermination des constantes d'intégrations se fait bien sur la **solution générale**, pas uniquement sur l'équation homogène !

III/A EDLC d'ordre 1

Soit une EDLC dont le second membre vaut K, une constante connue.

$$\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}y_h(t) = \frac{1}{\tau}K \tag{6.5}$$

On obtient $y_p = K$ une solution particulière constante, et donc la solution générale de (6.5) :

$$y(t) = y_h(t) + y_p \Leftrightarrow y(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + K$$

La solution s'obtient en étudiant cette forme de solution à un temps donné, où l'on connaît la valeur que doit prendre la solution : c'est une **condition initiale**. Typiquement, on suppose que $y(0) = y_0$ une valeur connue. Alors, **la** solution est telle que

$$y(0) = y_0 = A\mathrm{e}^0 + K \Leftrightarrow A = y_0 - K$$

ainsi,

$$\boxed{y(t) = (y_0 - K)\mathrm{e}^{-t/\tau} + K = K\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + y_0\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

III/B EDLC d'ordre 2

Soit une EDLC dont le second membre vaut K, une constante connue.

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_h(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y_h(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 y_h(t) = {\omega_0}^2 K \tag{6.6}$$

On obtient $y_p = K$ une solution particulière constante. Supposons $Q > 1/2 \Leftrightarrow \Delta < 0$: la solution générale de (6.6) s'écrit

$$y(t) = y_h(t) + y_p \Leftrightarrow y(t) = K + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

Les deux valeurs à déterminer pour connaître **la** solution sont A et B, les constantes d'intégrations. Il faut **2 conditions** initiales pour connaître les deux constantes ; soit $y(0) = y_0$ et $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = v_0$. On obtient

$$\begin{aligned} y(0) = y_0 = K + A \quad &\text{et} \quad \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(0) = v_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}A + B\Omega \\ \Leftrightarrow A = y_0 - K \quad &\text{et} \quad B = \frac{v_0}{\Omega} + \frac{\omega_0}{2Q}\frac{y_0 - K}{\Omega} \end{aligned}$$

D'où la solution

$$\boxed{y(t) = K + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}\right)\left[(y_0 - K)\cos(\Omega t) + \left(\frac{v_0}{\Omega} + \frac{\omega_0}{2Q}\frac{y_0 - K}{\Omega}\right)\sin(\Omega t)\right]}$$

Pas d'inquiétude face à cette solution, encore une fois seule la **méthode** est à comprendre. Dans la pratique, les systèmes ont des propriétés élégantes et simples $y_0 = 0, v_0 = 0$ par exemple.

IV Conclusion : méthode de résolution

Résolution EDLC second membre constant

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant :

1. On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
2. On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène** $y_h(t)$.
3. On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y_p(t) = \lambda$.
4. On écrit la **solution générale**, somme de la solution particulière et de la forme générale : $y(t) = y_h(t) + y_p$
5. On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

Toute tentative de détermination de CI d'une EDLC sur y_h et non sur y causera la mort instantanée d'un innocent et mignon petit chaton.

V Complément : démonstrations

V/A Linéarité pour EDLH

Soit une EDLH

$$\sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y(t)}{\mathrm{d}t^i} = 0$$

Alors, si

$$\sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y_1(t)}{\mathrm{d}t^i} = 0 \qquad \text{et} \qquad \sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y_2(t)}{\mathrm{d}t^i} = 0$$

on a par linéarité de l'EDHL et de la dérivée

$$\sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i (y_1(t) + y_2(t))}{\mathrm{d}t^i} = \sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y_1(t)}{\mathrm{d}t^i} + \sum_i f_i(t) \frac{\mathrm{d}^i y_2(t)}{\mathrm{d}t^i} = 0 \qquad \blacksquare$$

V/B $y_h(t)$ pour $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$

En effet, avec ces deux solutions on trouve

$$y_+(t) = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{j}\Omega\right)t} \qquad \text{et} \qquad y_-(t) = \mathrm{e}^{\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \mathrm{j}\Omega\right)t}$$

Pour avoir des solutions réelles, on utilise la formule d'Euler :

$$\mathrm{e}^{\pm \mathrm{i}} = \cos(\theta) \pm \mathrm{i}\sin(\theta)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} y_+(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\Omega t} = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(\cos(\Omega t) + \mathrm{j}\sin(\Omega t)) \\ \text{et} \quad y_-(t) &= \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\Omega t} = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}(\cos(\Omega t) - \mathrm{j}\sin(\Omega t)) \end{aligned}$$

Ce qui ne rend pas encore les solutions réelles, mais on peut les combiner par linéarité. Par exemple,

$$\begin{aligned} y_c &= \frac{y_+ + y_-}{2} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}{2}(\cos(\Omega t) + \cancel{\mathrm{j}\sin(\Omega t)} + \cos(\Omega t) - \cancel{\mathrm{j}\sin(\Omega t)}) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\Omega t) \\ \text{et} \quad y_s &= \frac{y_+ - y_-}{2\mathrm{j}} = \frac{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}}{2\mathrm{j}}(\cancel{\cos(\Omega t)} + \mathrm{j}\sin(\Omega t) - \cancel{\cos(\Omega t)} + \mathrm{j}\sin(\Omega t)) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\Omega t) \end{aligned}$$

D'où une forme réelle et pratique pour $y_h(t) = Ay_c + By_s$, c'est-à-dire

$$y_h(t) = A\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\cos(\Omega t) + B\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\sin(\Omega t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{y_h(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]} \qquad \blacksquare$$