

TD : moment cinétique et forces centrales

I Gravimètre de HOLWECK-LEJAY

- ◇ **Système** : masse, repérée par $M(m)$.
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen.
- ◇ **Repère** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (voir schéma).

1) ◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= L \vec{u}_r \\ \vec{v} &= L \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= L \ddot{\theta} \vec{u}_r - L \dot{\theta}^2 \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

◇ **BDF** :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg \vec{u}_x = mg(-\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \\ \vec{F} \text{ inconnue} \end{cases}$$

◇ **BDM** :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = mgL \vec{u}_r \wedge (-\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) = mgL \sin(\theta) \vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = -C\theta \vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = mL^2 \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = mL^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}) = mgL \sin(\theta)} \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}) = -C\theta} \quad \boxed{\mathcal{L}_z(M) = mL^2 \dot{\theta}}$$

TMC \Rightarrow

$$\begin{aligned}\frac{d\mathcal{L}_z(M)}{dt} &= \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}) \\ \Leftrightarrow mL^2 \ddot{\theta} &= mgL \sin(\theta) - C\theta\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{mL^2} \theta - \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

2) Autour de $\theta_{eq} = 0$, $\sin(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$. Ainsi,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L} \right) \theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$$

Équation caractéristique :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -\omega_0^2$$

Stable $\Leftrightarrow r \in \mathbb{C} \Rightarrow$

$$\omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{C > mgL}$$

Cette équation du second ordre a des solutions stable si et seulement si les racines de l'équation caractéristique sont complexes. En effet, avec $\theta = Ae^{rt}$, des racines réelles donnent des solutions divergentes ; seules les racines complexes donnent des solutions oscillantes en cosinus et sinus.

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= \vec{OM} \wedge \vec{F} = -C\theta \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \vec{u}_r \wedge \vec{F} &= -\frac{C}{L} \theta \vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{F} &= -\frac{C}{L} \theta \vec{u}_z\end{aligned}$$

On déduit

$$\Rightarrow \vec{F} = -\frac{C}{L} \theta \vec{u}_z$$

Définition de $\mathcal{E}_{p,el}$

$$\begin{aligned}\delta W(\vec{F}) &= -d\mathcal{E}_{p,el} \\ \Leftrightarrow \vec{F} \cdot d\vec{OM} &= -d\mathcal{E}_{p,el} \\ \Leftrightarrow \left(-\frac{C}{L} \theta \vec{u}_z \right) \cdot (L d\theta \vec{u}_\theta) &= -d\mathcal{E}_{p,el}\end{aligned}$$

On a $d\vec{OM} = \frac{dr}{r=L} \vec{u}_r + L d\theta \vec{u}_\theta$

$$\Leftrightarrow d\mathcal{E}_{p,el} = C\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2} C \theta^2 + K$$

On remarque alors que l'énergie potentielle de ce ressort spiral a une expression similaire à celle du ressort linéaire $\mathcal{E}_{p,el} = 1/2 kx^2$

On trouve l'énergie potentielle de pesanteur, en prenant la référence pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{\mathcal{E}_{p,p} = mgL \cos(\theta)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p,tot} &= mgL \cos(\theta) + \frac{1}{2} C \theta^2 + K \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{p,tot}}{d\theta} &= -mgL \sin(\theta) + C\theta \\ \Rightarrow \frac{d^2 \mathcal{E}_{p,tot}}{d\theta^2} &= -mgL \cos(\theta) + C \underset{\text{si stable}}{\geq 0} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \mathcal{E}_{p,tot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta_{eq}=0} &= -mgL + C \\ \Leftrightarrow \boxed{C > mgl} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

4) On reprend les résultats précédents :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{C - mgL}}$$

5) Il est logique de poser $g_0 = C/mL$, par analyse dimensionnelle de ω_0^2 . En remplaçant dans T_0 :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mL(g_0 - g)}}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 - g}}$$

On retrouve une expression proche de celle du pendule simple ($T_0 = \sqrt{\ell/g}$).

Ainsi, en réglant $g_0 = C/mL$ à une valeur connue, si $g_0 > g$ on obtient des oscillations dont la période est directement reliée à $g_0 - g$. On pourrait penser à mesurer g en réglant g_0 pour n'avoir aucune oscillation, mais la mesure de période est plus simple.

On remarque cependant que quand $g > g_0$, d'après la question 1) on n'aura pas de solution stable mais des solutions en exponentielles divergentes, ce qui est une limite de cet outil.

II Pendule conique

1) \diamond **Système** : masse, repérée par $M(m)$.

\diamond **Référentiel** : terrestre supposé galiléen.

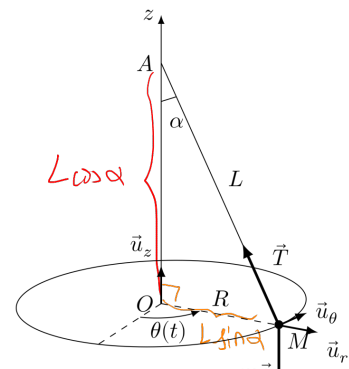
\diamond **Repère** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (voir schéma).

\diamond **Repérage** : $\vec{OM} = R\vec{u}_r = L\sin(\alpha)\vec{u}_r$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = L\omega\sin(\alpha)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_r = -L\omega^2\sin(\alpha)\vec{u}_r$$

\diamond **Moment cinétique** : Attention, on veut calculer le moment **par rapport à A**. Ainsi,



$$\vec{\mathcal{L}}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M) = (\vec{AO} + \vec{OM}) \wedge m\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A = (-L\cos(\alpha)\vec{u}_z + L\sin(\alpha)\vec{u}_r) \wedge (mL\omega\sin(\alpha)\vec{u}_\theta)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A(M) = -mL^2\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha)(-\vec{u}_r) + mL^2\omega\sin^2(\alpha)\vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A(M) = mL^2\omega(\sin^2(\alpha)\vec{u}_z + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{u}_r)$$

2) \diamond **BDF** :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{T} = -T\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} \quad \text{ou} \quad \vec{T} = T(\cos(\alpha)\vec{u}_z - \sin(\alpha)\vec{u}_r) \quad \text{mais inutile} \end{cases}$$

\diamond **BDM** : $\begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = L(\sin(\alpha)\vec{u}_r - \cos(\alpha)\vec{u}_z) \wedge (-mg\vec{u}_z) \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = +mgL\sin(\alpha)\vec{u}_\theta \\ \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{AM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \end{cases}$

\diamond **TMC** :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(M)}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P})$$

$$\Leftrightarrow mL^2\omega \left(\sin^2(\alpha) \underbrace{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}_{=0} + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{=\omega\vec{u}_\theta} \right) = mgL\sin(\alpha)\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow mL^2\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = mgL\sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}$$

3)

PFD :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow -mL\omega^2 \sin(\alpha) \vec{u}_r = -mg \vec{u}_z + T(\cos(\alpha) \vec{u}_z - \sin(\alpha) \vec{u}_r)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2 \sin(\alpha) & -T \sin(\alpha) \\ 0 & = -mg + T \cos(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T & mL\omega^2 \\ T & = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}} \quad \blacksquare$$

III Frottements d'un satellite

1)

- 1) **Système** : {satellite} point matériel M de masse m
- 2) **Référentiel** : géocentrique, supposé galiléen.
- 3) **Repère** : polaire $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ avec O centre du Soleil, R le rayon supposé constant ($\dot{R} = 0$).
- 4) **Repérage** :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (R_T + h_0) \vec{u}_r = R \vec{u}_r \\ \vec{v} &= R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow v = |R\dot{\theta}| \\ \vec{a} &= -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

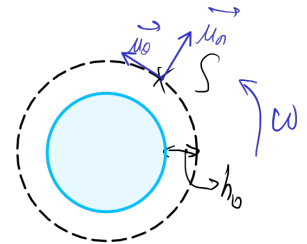


FIGURE 1 –
Orbite circulaire.

- 5) **Bilan des forces** : $\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R^2} \vec{u}_r \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R}$.

- 6) **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{F}_g \Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R^2} \vec{u}_r \Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R^3}} & (7.1) \\ mR\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \text{cte} & (7.2) \end{cases}$$

(7.1) donne alors

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_T + h_0}}} \quad \blacksquare \quad (7.3)$$

Enfin, avec (7.3) et l'énergie mécanique, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G}M_S}{R} - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \quad \left. \vphantom{\mathcal{E}_m} \right\} R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= -\frac{1}{2} \mathcal{G} \frac{mM_S}{R_T + h_0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- 2) Le satellite étant sur une orbite basse, il subit de la part des hautes couches de l'atmosphère une force de frottements qui modifie son altitude h . Cependant, **on considère que la trajectoire sur un tour reste quasi-circulaire**; ainsi les expressions précédentes restent valables en remplaçant h_0 par $h(t)$.

a – Les forces de frottements sont toujours résistantes. En effet,

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v} \quad \text{donc} \quad \mathcal{P}(\vec{F}_f) = -\alpha v^2 < 0$$

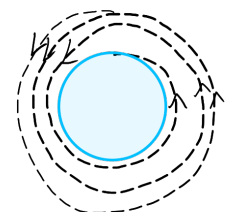
D'où par TPM

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_f) < 0}$$

$r(t)$ diminue forcément, puisque

- b – $\mathcal{E}_m = -\frac{k}{R_T + h(t)} \searrow \quad \text{quand} \quad h \searrow$

Attention, $\mathcal{E}_m < 0$ donc $|\mathcal{E}_m| \nearrow$ quand $h \searrow$ mais on a bien $\mathcal{E}_m \searrow$.



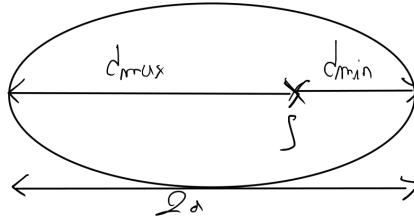
c –

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T + h(t)}} \quad \text{donc} \quad \boxed{v \nearrow \text{ quand } h \searrow}$$

Peu intuitif *a priori* car les frottements sont censés réduire la vitesse, mais en réalité les frottements réduisent surtout l'énergie totale d'un corps. À la surface de la Terre sur un sol plat, les frottements ne font que perdre de l'énergie cinétique, mais ici réduire l'énergie mécanique réduit le rayon, et la vitesse doit augmenter en vertu de la 3^e loi de KEPLER.

IV Comète de HALLEY

1)



2) On trouve vite

$$d_{\max} + d_{\min} = 2a \Leftrightarrow d_{\max} = 2a - d_{\min}$$

Deux méthodes pour les unités :

Tout en SI

$$\text{Or, } \frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S} \Leftrightarrow a_H = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{4\pi^2} T_H^2}$$

avec $\begin{cases} \mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI} \\ M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} \\ T_H = 76 \text{ ans} = 2,40 \times 10^{10} \text{ s} \end{cases}$

A.N. : $\underline{a_H = 2,69 \times 10^{12} \text{ m} = 17,9 \text{ UA}}$

En unités astronomiques

$$\frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \Leftrightarrow a_H = a_T \left(\frac{T_H}{T_T} \right)^{\frac{3}{2}}$$

A.N. : $\underline{a_H = 17,9 \text{ UA}}$ avec $\begin{cases} T_H = 76 \text{ ans} \\ a_T = 1 \text{ UA} \\ T_T = 1 \text{ an} \end{cases}$

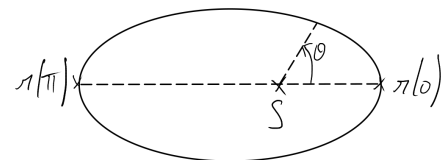
Dans tous les cas,

$$d_{\max} = 2a - d_{\min} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 17,9 \text{ UA} \\ d_{\min} = 0,59 \text{ UA} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{d_{\max} = 35,3 \text{ UA}}$$

On décrit d_{\min} et d_{\max} avec $r(\theta)$ grâce à un schéma :

$$3) \quad \begin{cases} d_{\min} = r(0) = \frac{p}{1-e} \\ d_{\max} = r(\pi) = \frac{p}{1+e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-e = r(0) = \frac{p}{d_{\min}} \\ 1+e = r(\pi) = \frac{p}{d_{\max}} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

(1) + (2) \Rightarrow

$$\begin{aligned} 1 - e + 1 + e &= p \left(\frac{1}{d_{\min}} + \frac{1}{d_{\max}} \right) \\ \Leftrightarrow 2 &= p \left(\frac{d_{\max} + d_{\min}}{d_{\min} d_{\max}} \right) \\ \Leftrightarrow p &= 2 \frac{d_{\min} d_{\max}}{d_{\min} + d_{\max}} \end{aligned}$$

(2) - (1) \Rightarrow

$$\begin{aligned} 1 + e - (1 - e) &= p \left(\frac{1}{d_{\max}} - \frac{1}{d_{\min}} \right) \\ \Leftrightarrow 2e &= \cancel{2} \frac{\cancel{d_{\min} d_{\max}}}{d_{\min} + d_{\max}} \left(\frac{d_{\min} - d_{\max}}{\cancel{d_{\min} d_{\max}}} \right) \\ \Leftrightarrow e &= \frac{d_{\min} - d_{\max}}{d_{\min} + d_{\max}} \end{aligned}$$

V Changement d'orbite

- 1) Sur une orbite circulaire, la vitesse est uniforme et on a $v_1 = r_1 \dot{\theta}_1$. Avec le PFD usuel, on trouve

$$\dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_1^3}} \Rightarrow v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_1}} \Rightarrow v_1 = 7300 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

- 2) Ici aussi calcul classique :

$$\mathcal{E}_{m,i} = \frac{1}{2}mv_i^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_i} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm}{r_i} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_i}$$

D'où

$$\mathcal{E}_{m,1} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2r_1} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,2} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2r_2}$$

Pour l'orbite elliptique, on remplace r par a . Or, on relie a au rayon r_P et r_A par la définition du grand axe, et on identifie r_P à r_1 et r_A à r_2 :

$$2a = r_P + r_A = r_1 + r_2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{m,e} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r_1 + r_2}$$

- 3) Le changement de vitesse instantané suppose que la position est fixe et que l'énergie potentielle reste donc constante pour passer de v_1 à v_{e1} . Ainsi, l'allumage du réacteur ne fait changer que la vitesse, et on a

$$\begin{aligned} \Delta_{1,e}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_{m,e} - \mathcal{E}_{m,1} \\ \Leftrightarrow -\mathcal{G}Mm \left(\frac{1}{r_1 + r_2} - \frac{1}{2r_1} \right) &= \frac{1}{2}mv_{e1}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{e1}^2 &= -\mathcal{G}Mm \left(\frac{2r_1 - r_1 - r_2}{2r_1(r_1 + r_2)} \right) + \mathcal{G}\frac{Mm}{2r_1} \times \frac{r_1 + r_2}{r_1 + r_2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{e1}^2 &= \frac{\mathcal{G}Mm}{2r_1(r_1 + r_2)} (r_1 + r_2 - (r_1 - r_2)) \\ &= \frac{\mathcal{G}Mm}{2r_1(r_1 + r_2)} \times 2r_2 \\ \Leftrightarrow v_{e1} &= \sqrt{\frac{2\mathcal{G}Mr_2}{r_1(r_1 + r_2)}} \Leftrightarrow v_{e1} = 9520 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta v_P = 2220 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

TEM :

$$\Delta_{1,e}\mathcal{E}_m = \Delta_{1,e}W(\vec{F}_{\text{mot}}) = W_P$$

$$\Leftrightarrow W_P = \frac{\mathcal{G}Mm(r_2 - r_1)}{2r_1(r_1 + r_2)} \Leftrightarrow W_P = 19 \text{ GJ}$$

- 4) Relier des vitesses et des rayons ensemble sur deux parties de la trajectoire laisse penser qu'on cherche à trouver une constante du mouvement permettant de relier ces grandeurs entre elles à deux instants. On a déjà utilisé le théorème de l'énergie mécanique, on doit chercher une autre grandeur conservée.

La plus évidente est le moment cinétique, et en effet aux points P et A l'expression du moment cinétique est simple, puisqu'on y a $\dot{r}_{P|A} = 0$:

$$\vec{\mathcal{L}}_O(P) = \vec{OP} \wedge m\vec{v}_P = r_1 \vec{u}_r \wedge mv_{e1} \vec{u}_\theta = mr_1 v_{e1} \vec{u}_z$$

$$\vec{\mathcal{L}}_O(A) = \vec{OA} \wedge m\vec{v}_A = mr_2 v_{e2} \vec{u}_z$$

$$\text{Or } \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{0} \Rightarrow$$

$$mr_1 v_{e1} \vec{u}_z = mr_2 v_{e2} \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow r_1 v_{e1} = r_2 v_{e2}$$

Ainsi

$$v_{e2} = v_{e1} \frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}Mr_1}{r_2(r_1 + r_2)}} \\ v_{e2} = 1690 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

- 5) On reprend v_2 avec la première question, et on calcule la différence de vitesse avec la dernière :

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_2}} = 3080 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

De plus,

$$\Rightarrow \boxed{\Delta v_A = 1390 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}} \Delta_{e,2} \mathcal{E}_m = W_A \Leftrightarrow W_A = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2r_2} + \frac{\mathcal{G}Mm}{r_1 + r_2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_A = \frac{\mathcal{G}Mm(r_2 - r_1)}{2r_2(r_1 + r_2)}} \Leftrightarrow \boxed{W_A = 3,3 \text{ GJ}}$$

On sait que la vitesse diminue quand r augmente (3^e loi), donc $W \searrow$ de P à A : c'est bien logique.

VI Alerte à l'astéroïde !

1) \diamond **Énergie mécanique :**

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r} = \text{cte}$$

▷ Lorsqu'il est très éloigné (M_∞), $v = v_0$ et $r \rightarrow \infty$ donc l'énergie potentielle est nulle et $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_0^2$.

▷ Au périhélie P, $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv_P^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r_{\min}}$.

Ainsi,

$$\boxed{\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_P^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r_{\min}}} \quad (7.4)$$

\diamond **Moment cinétique :** $\vec{L}_O(M_\infty) = \vec{L}_O(P)$ d'où

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM_\infty} \wedge m\vec{v}_0 &= \overrightarrow{OP} \wedge m\vec{v}_P \\ \Leftrightarrow (\overrightarrow{OH} + \overrightarrow{HM_\infty}) \wedge \vec{v}_0 &= \overrightarrow{OP} \wedge \vec{v}_P \\ \Leftrightarrow -bv_0 \vec{e}_z + \vec{0} &= r_{\min} v_P \vec{e}_z \\ \Leftrightarrow \boxed{bv_0 = r_{\min} v_P} \end{aligned} \quad (7.5)$$

2) On remplace v_P par son expression (7.5) dans l'équation (7.4) :

$$\begin{aligned} (7.4) \rightarrow (7.5) \Rightarrow \mathcal{G}\frac{Mm}{r_{\min}} &= \frac{1}{2}mv_0^2 \left(\frac{b^2}{r_{\min}^2} - 1 \right) \\ \Leftrightarrow v_0^2 r_{\min}^2 + 2\mathcal{G}Mr_{\min} - v_0^2 b^2 &= 0 \end{aligned}$$

Or

$$\Delta = 4G^2 M^2 + 4v_0^4 b^2 > 0$$

D'où avec $r_{\min} > 0$:

$$\boxed{r_{\min} = \frac{-\mathcal{G}M + \sqrt{\mathcal{G}^2 M^2 + v_0^4 b^2}}{v_0^2}}$$

3)

$$\text{A.N. : } \underline{r_{\min} = 72\,000 \text{ km}} > R \Rightarrow \text{pas de collision !}$$

VII Modèle de BOHR de l'atome d'hydrogène

1) Avant toute chose, on étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel lié au noyau, supposé galiléen. L'électron est animé d'un mouvement circulaire et uniforme de centre O. On l'étudie en coordonnées polaires d'origine O. Dans ce système de coordonnées, et avec $\dot{r} = 0$, on a :

$$\overrightarrow{OM} = r \vec{u}_r \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta \quad \text{et} \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r$$

La seule force dont il faut tenir compte est la force d'interaction coulombienne qu'exerce le noyau de charge $+e$ sur l'électron de charge $-e$:

$$\vec{F}_c = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r^2} \vec{u}_r \Rightarrow \mathcal{E}_{p,c} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r}$$

On peut négliger l'interaction gravitationnelle face à cette force.

2) On projette le PFD sur \vec{u}_r :

$$-m_e \frac{v_n^2}{r_n} = -\frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n^2} \Leftrightarrow \boxed{v_n^2 = \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n}}$$

3) On a le module du moment cinétique :

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_{O_n} &= m_e r_n v_n = \frac{nh}{2\pi} \Leftrightarrow v_n = \frac{nh}{2\pi m_e r_n} \\ &\Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 m_e r_n} = \frac{n^2 h^2}{4\pi^2 m_e^2 r^2} \\ &\Leftrightarrow \boxed{r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2}}\end{aligned}$$

4)

On trouve

5)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m(n) &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad \underline{r_1 = 52 \text{ pm}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m(n) &= \frac{1}{2} m_e v_n^2 - \frac{e^2}{4\pi\epsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\epsilon_0 r_n} \quad \left. \vphantom{\mathcal{E}_m(n)} \right\} r_n = \frac{n^2 h^2 \epsilon_0}{\pi m_e e^2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m(n) &= -\frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2} \frac{1}{n^2} = -\frac{A}{n^2} \\ \text{avec } \boxed{A = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 h^2}} &\Leftrightarrow \underline{A = 2,17 \times 10^{-18} \text{ J} = 13,6 \text{ eV}}\end{aligned}$$

6)

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E} &= A \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) = h\nu = h \frac{c}{\lambda} \\ &\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{A}{hc} \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right) \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{n_2^2} - \frac{1}{n_1^2} \right)} &\quad \text{avec} \quad \boxed{R_H = \frac{A}{hc} = \frac{e^4 m_e}{8\epsilon_0^2 ch^3}} \Leftrightarrow \underline{R_H = 1,09 \times 10^7 \text{ m}^{-1}}\end{aligned}$$

VIII Expérience de RUTHERFORD

1)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r^2} \vec{e}_r} \Rightarrow K = \frac{Ze^2}{2\pi\epsilon_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}}$$

2) Particule soumise uniquement à \vec{F} conservative, donc $\mathcal{E}_m = \text{cte}$, ainsi

$$\mathcal{E}_m = \text{cte} \Leftrightarrow \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(r) = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v^2 + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} = \text{cte}$$

Or initialement

$$v(0) \rightarrow v_0 \quad \text{et} \quad r(0) \rightarrow \infty \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v_0^2}$$

3)

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \overrightarrow{OM} \wedge \underbrace{\vec{F}}_{\parallel \overrightarrow{OM}} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_O = \text{cte}}$$

Or

$$\vec{\mathcal{L}}_O(0) = (x_0 \vec{e}_x + b \vec{e}_y) \wedge (-m v_0 \vec{e}_x) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_O = m b v_0 \vec{e}_z}$$

De plus,

$$\vec{\mathcal{L}}_O = r \vec{e}_r \wedge (\dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{e}_z} \quad (\text{et } r^2 \dot{\theta} = b v_0)$$

4)

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r) \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m \left(\dot{r}^2 + \frac{b^2 v_0^2}{r^2} \right) + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r} \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)} &\quad \text{avec} \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{b^2 v_0^2}{r^2} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{Ze^2}{r}}\end{aligned}$$

On l'appelle l'énergie potentielle effective (ou efficace).

5) Lorsque r est minimal, sa dérivée est nulle donc $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{\min})$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} \frac{mb^2 v_0^2}{r_{\min}^2} + \frac{1}{2\pi\epsilon_0} \frac{2e^2}{r_{\min}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 &= \frac{1}{2} \frac{mb^2 v_0^2}{r_{\min}^2} + \frac{K}{r_{\min}} \\ \Leftrightarrow m v_0^2 r_{\min}^2 - 2K r_{\min} - m b^2 v_0^2 &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} \Rightarrow \Delta &= K^2 + (m b v_0^2)^2 > 0 \\ \Rightarrow r_{\min} &= \frac{K + \sqrt{K^2 + (m b v_0^2)^2}}{m v_0^2} \end{aligned} \right\} r_{\min} > 0$$

$$\Leftrightarrow r_{\min} = \frac{K}{m v_0^2} \left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{m b v_0^2}{K} \right)^2} \right]$$

6)

$$b = \frac{K}{m v_0^2 \tan(D/2)} = \frac{2e^2}{2\pi\epsilon_0 m v_0^2 \tan(D/2)}$$

A.N. : $\underline{b_1 = 2,4 \times 10^{-14} \text{ m}}$ et $\underline{b_2 = 0}$ donc $\underline{r_{\min,1} = 2,4 \times 10^{-14} \text{ m}}$ et $\underline{r_{\min,2} = 2,7 \times 10^{-14} \text{ m}}$

La taille caractéristique du noyau d'or (assez gros) est donc de l'ordre de $\boxed{10^{-14} \text{ m}}$, soit environ 10 000 fois plus petit que l'atome.