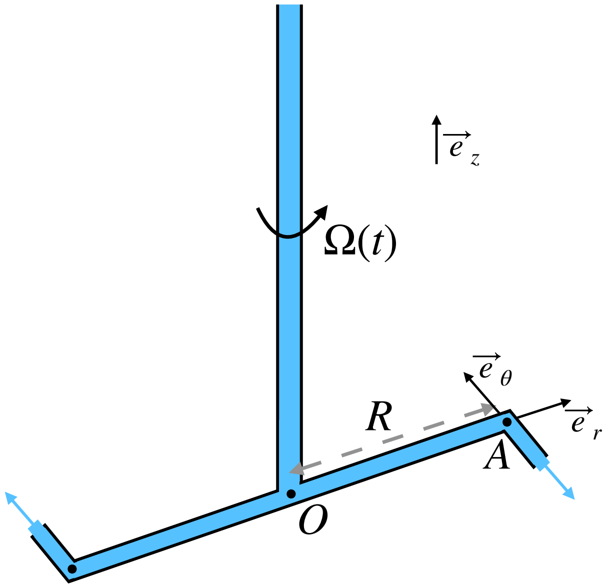
Sujet 1

I Tourniquet hydraulique

Un tourniquet hydraulique possède deux bras identiques OA et OB de longueur R et de section S. Chaque bras est terminé par un tube de même section S faisant avec le bras un angle $\alpha = \pi/2$, de longueur négligeable devant R . L'eau, supposée incompressible de masse volumique μ, est injectée dans le tourniquet hydraulique par le tube centrale de section $2S$ avec un débit volumique D_v constant.



On note J le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz du tourniquet (ce dernier inclut l'eau présente dans le tourniquet) et $\vec{\Omega} = \Omega(t)\vec{e}_z$ son vecteur rotation.

1. Exprimer la vitesse d'éjection du fluide $\vec{u}$ en A dans le référentiel du laboratoire en fonction de Ω, R, D_v, S et $\vec{e}_\theta$.

2. A l'aide d'un bilan de moment cinétique, obtenir l'équation suivante

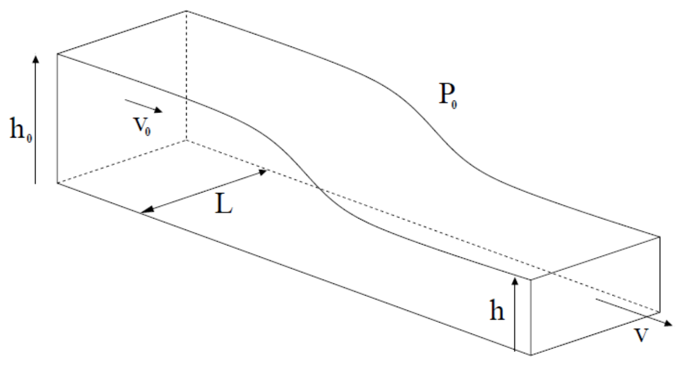
$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \mu D_v R\left(R\Omega - \frac{D_v}{2S}\right)$$

3. Obtenir finalement l'expression de $\Omega(t)$ sachant qu'à l'instant initial, le tourniquet est à l'arret. On utilisera pour cela le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au système fermé précédent.

Sujet 2

I Régimes d'écoulement fluvial et torrentiel

Dans cet exercice nous allons étudier l'écoulement d'un fluide parfait incompressible dans le lit d'un cours d'eau de largeur constante L. La vitesse est supposée uniforme dans une section du cours d'eau et l'écoulement est supposé stationnaire. En amont (respectivement en aval), l'épaisseur de liquide est h_0 et sa vitesse v_0 (respectivement h et v). L'écoulement est supposé laminaire.



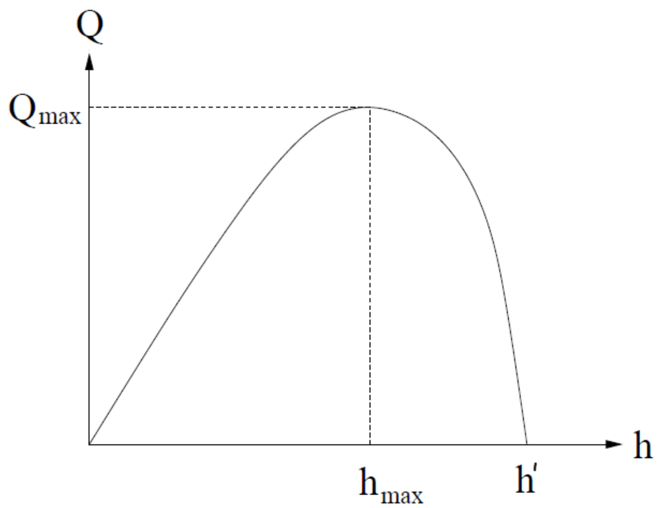
1. Rappeler la relation de Bernoulli et ses conditions d'application.

2. En utilisant la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant qui longe la surface libre, exprimer la vitesse v en fonction de h, h_0 et v_0.

3. On pose $h' = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$. Donner une interprétation énergétique de la grandeur $\rho g h'$ et des deux termes qui la composent.

4. Exprimer le débit volumique Q en fonction de h, h', g, et L.

La figure ci-desous donne l'allure de la courbe $Q(h)$ pour L et h' donnés.



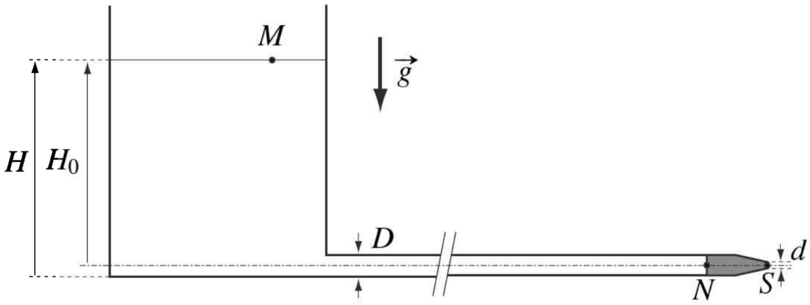
5. Montrer graphiquement que pour un débit donné, il existe deux régimes d'écoulements. Ces régimes sont appelés fluvial et torrentiel. Les identifier sur le graphique.

6. Le cours d'eau passe entre les piles d'un pont, ce qui a pour effet de diminuer sa largeur L. Comment l'épaisseur de l'écoulement varie-t'elle entre les piles du pont ?

Sujet 3

I Force sur l'embout d'un tuyau

Un réservoir cylindrique de rayon R contient de l'eau sur une hauteur H, l'eau étant considérée comme un fluide parfait, incompressible, de masse volumique ρ constante. Ce récipient est situé dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ supposé uniforme. Ce réservoir sert à alimenter une lance d'arrosage de section circulaire de diamètre D dont l'axe de l'ajutage formant l'embout du tuyau se trouve à une distance constante $H_0 = H - \frac{D}{2}$ de la surface libre du réservoir. L'ajutage de sortie est de section circulaire de diamètre $d \ll R$ qu'il est possible de faire varier en vissant ou en devissant l'embout. La hauteur H d'eau dans le réservoir est maintenue constante par une alimentation non représentée sur la figure.



On appelle:

- $v(N) = V$ la vitesse de l'eau dans le tuyau,
- $v(S) = u$ la vitesse de l'eau dans la section de sortie,
- λ le rapport $\frac{d}{D}$,

et on admet que la répartition des vitesses est uniforme dans une section droite.

1. Par application, soigneusement justifiée, du théorème de Bernouilli entre les points M et S, exprimer la vitesse V en fonction de g, H_0 et λ.

2. En appliquant le théorème de Bernouilli entre les points N et S, établir l'expression de la pression $P(N)$ au point N en fonction de ρ, H_0, g, λ et de la pression atmosphérique p_0.

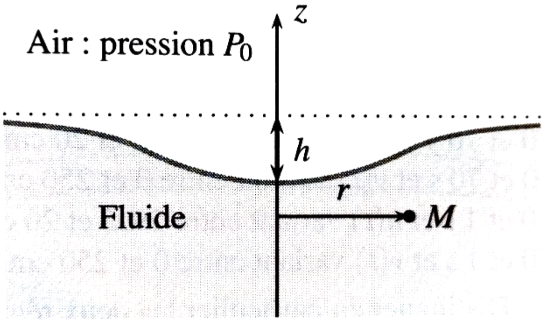
3. Par un bilan de quantité de mouvement sur un système soigneusement défini, déterminer la résultante $\overrightarrow{F}$ des efforts exercés par le fluide sur le pas de vis de fixation de l'embout sur le tuyau. On négligera les efforts dus à la pesanteur.

4. Exprimer le module F de $\overrightarrow{F}$ en fonction de μ, g, H, D, λ et p_0. Préciser la direction et le sens de $\overrightarrow{F}$. Application numérique: calculer F pour $H_0 = 5{,}0\,\mathrm{m}$, $d = 5{,}0\,\mathrm{mm}$, $D = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m \cdot s^{-2}}$ et $p_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$.

Sujet 4

I Tourbillon de Rankine ($\star\star\star$)

On considère un fluide en écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible pour lequel le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$ et caractérisé par la donnée du vecteur tourbillon: $\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \omega_0\overrightarrow{e_z}$, pour $r \leq a$ et $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$ pour $r > a$, en coordonnées cylindriques.



1. En utilisant théorème de Green-Stokes déterminer l'expression du champ de vitesse dans tout le fluide à partir du calcul de sa circulation.

2. À l'aide de l'équation d'Euler, déterminer le champ de pression au sein du fluide. Que peut-il se produire sur l'axe si la rotation est trop importante ?

3. En déduire l'équation de la surface libre ainsi que la profondeur h du tourbillon.

4. En prenant ce modèle pour une trombe de rayon $a = 30m$, évaluer la force maximale d'arrachement sur un toit circulaire de rayon égal à $10m$. On supposera un vent de vitesse maximale égale à $100km.h^{-1}$.