Introduction – chapitre 1

Unités et analyse dimensionnelle

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Conduire une analyse dimensionnelle.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Exemples

Erreurs communes

En sciences physiques, il faut opérer la distinction entre :

1) **Le phénomène** :

2) **La grandeur physico-chimique** :

3) **La valeur** de la grandeur :

Ces notions sont la fondation de tout raisonnement scientifique qui repose sur la précision et l'objectivité.

I Systèmes d'unités

I/A Grandeurs de base

Les grandeurs physiques sont **reliées** entre elles, soit par des **définitions** (surface d'un carré = carré d'un côté) soit par des **lois** physiques ($U = RI$ en électronique). Par souci de concision, il est pratique de choisir des grandeurs de base à partir desquelles nous exprimerons toutes les autres : en mécanique par exemple, nous utilisons la longueur, la masse et le temps. Ce choix n'est pas unique mais pratique.

À partir de grandeurs de base choisies, nous leur associons donc des unités « de base ». Le bureau international des poids et mesures (BIPM [1]) a défini le **système international (SI)**, et se réunit tous les 4 ans pour discuter de leurs définitions et de leurs choix.

I/B Définitions du SI

Définition N1.1 : Grandeurs, dimensions, unités du SI

Grandeur	Dimension	Unité	Symbole de l'unité
Longueur			
Masse			
Temps			
Intensité électrique			
Température			
Quantité de matière			
Intensité lumineuse			

Notation N1.1 : Notation

On utilisera $\dim X$ pour dénoter la dimension de X, et $[X]$ son unité.

I/C Opérations sur les grandeurs

D'une manière générale, vous étudierez les dimensions de vos équations directement *via* les opérateurs qui la composent. Il faut donc savoir déduire les dimensions dans les cas suivants :

Propriété N1.1 : Opérations

1) **Dérivation** :

2) **Intégration** :

3) **Fonction transcendantes** [2] :

Exemple N1.1 : Opérations

1) **Dérivation** :

2) **Intégration** :

3) **Fonctions transcendantes** :

1. https://www.bipm.org/fr/measurement-units/
2. Fonctions type exponentielle, logarithme, cosinus.

I/D Grandeurs dérivées

Définition N1.2 : Grandeurs dérivées

Les grandeurs exprimées à partir des grandeurs de bases *via* des équations physiques sont appelées « grandeurs dérivées ». Leurs dimensions sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions de base : d'une manière générique, une grandeur G a pour dimension

où les lettres grecques sont les **exposants dimensionnels**, qui peuvent être nuls. S'ils sont tous nuls, la grandeur et dite **adimensionnée**.

Exemple N1.2 : Grandeurs dérivées

Grandeurs dérivées	Symbole	Équation aux dimensions	Unités SI dérivées
Surface	S	$\dim S =$	$[S] =$
Volume	V	$\dim V =$	$[V] =$
Angle	α	$\dim \alpha =$	$[\alpha] =$
Vitesse	$\vec{v}$	$\dim v =$	$[v] =$
Accélération	$\vec{a}$	$\dim a =$	$[a] =$
Masse volumique	ρ	$\dim \rho =$	$[\rho] =$
Force	$\vec{F}$	$\dim F =$	$[F] =$
Charge électrique	q	$\dim q =$	$[q] =$
Énergie	$\mathcal{E}$	$\dim \mathcal{E} =$	$[\mathcal{E}] =$

Remarque N1.1 : Unités nommées

Certaines de ces unités dérivées portent des noms usuels : le newton N ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$) pour la force, le coulomb C ($1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A{\cdot}s}$) pour la charge électrique, ou l'énergie en joules J ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$)

II Analyse dimensionnelle

À l'aide de ces outils, nous pouvons effectuer des actions sur les équations-mêmes pour en extraire les dimensions. Pour qu'une équation mathématique ait un sens physique, elle doit suivre un principe fondamental et naturel : le **principe d'homogénéité**.

II/A Homogénéité

Propriété N1.2 : Homogénéité

Dans une équation ou dans l'expression d'une loi physique, les deux membres de chaque côté du signe égal doivent être de **même nature**[3] et avoir la **même dimension**, quel que soit le système d'unités. Une telle formule est alors dite **homogène**.

3. Scalaire, vecteur, matrice, tenseur…

Corollaire N1.1 : Natures des équations

Il serait ainsi *barbare* d'égaliser un vecteur d'un côté avec un scalaire de l'autre, ou d'additionner ou soustraire des mètres à des secondes, etc.

II/B Écrire un résultat

Un objectif récurrent des sujets de physique-chimie est d'obtenir la **valeur numérique** d'une grandeur physico-chimique. Elle découle alors d'une équation, forcément homogène, mais doit également être calculée avec les bonnes unités au sein des dimensions. Ainsi, **tout résultat numérique** devra être rédigé sous la forme suivante :

Attention N1.1 : Règles d'application numérique

$$\boxed{n = \frac{PV}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1{,}0 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ T = 300\,\mathrm{K} \end{cases} \qquad \cancel{n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8.32 \cdot 300} = 0.56}$$

A.N. : $\underline{n = 5{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}}$

Avec ces règles de mise en page doivent venir des réflexes :

$\boxed{\text{Encadrer}}$

Encadrer implique d'avoir vérifié :

1) La cohérence mathématique ;
2) L'homogénéité de la formule proposée.

$\boxed{\text{Souligner}}$

Souligner implique d'avoir vérifié :

1) La cohérence physique de la grandeur ;
2) Les chiffres significatifs à utiliser.

Corollaire N1.2 : Astuce : effectuer un changement d'unités

Il est très commun de se tromper d'unité lors d'une conversion, et ce pour deux raisons : à cause d'une unité mise à une puissance, ou à cause d'un rapport de deux grandeurs. Il suffit d'appliquer le processus suivant :

1) Écrire la valeur numérique actuelle de la grandeur avec son unité sous forme de **fraction explicite** ;
2) Convertir les unités concernées **en y mettant des parenthèses** ;
3) Recondenser le calcul.

Exemple N1.3 : Changement d'unité

II/C Application

Le principe d'homogénéité permet alors une analyse des dimensions des grandeurs mises en jeu dans une loi ou une équation. C'est un outil particulièrement puissant à bien des égards, que nous voyons ci-après.

II/C) 1 Rechercher des unités

En connaissant une expression que l'on sait vraie, nous pouvons déduire les unités d'autres grandeurs (cf. les unités usuelles comme le Newton).

Exemple N1.4 : Recherche d'unités

La force de rappel élastique exercée par un ressort s'écrit

$$\overrightarrow{F}_{\text{el}} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$$

avec k la constante de raideur du ressort, et $\overrightarrow{u_x}$ un vecteur adimensionné. Quelle est la dimension de k ? Quelle serait une manière simple d'exprimer son unité ?

II/C) 2 Détecter des erreurs

Par simple analyse dimensionnelle, il est aisé d'affirmer qu'un résultat est nécessairement faux : si les deux parties mises en jeu n'ont pas la même dimension, elle ne peuvent être égales entre elles !

Exemple N1.5 : Détecter des erreurs

En résolvant un exercice, vous trouvez l'expression suivante pour l'énergie potentielle d'une masse m accrochée à un ressort vertical de raideur k et sous pesanteur g :

$$\mathcal{E}_p(z) = \frac{1}{2}kz^2 + mgz^2$$

avec z la hauteur de la masse. Cette expression est-elle homogène ?

II/C) 3 Rechercher des lois physiques

D'autre part, à partir de phénomènes que nous voudrions relier entre eux, il est possible d'établir des lois les reliant entre eux grâce au principe d'homogénéité.

Exemple N1.6 : Recherche de loi

Donnez, par analyse dimensionnelle, la période T des oscillations d'un pendule simple.

Attention N1.2 : Limites implicites

Une loi trouvée par analyse dimensionnelle ne saurait permettre de donner les bons termes multiplicatifs !