Correction du DS

/26 E1 Étude cinétique de l'oxydation de la méthylhydrazine

/2 1

$$\boxed{v(t) = -\frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{MH}]}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{1}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{O_2}]}{\mathrm{d}t}}$$

/1 2

$$\boxed{v(t) = k[\mathrm{MH}]^p(t) \times [\mathrm{O_2}]^q(t)}$$

/6 3 La méthode de la dégénérescence de l'ordre consiste à introduire en excès tous les réactifs sauf un. Alors on peut considérer que la concentration des réactifs en excès ne varie presque pas au cours du temps, et donc que seule la concentration du réactif A introduit en faible proportion influe sur la vitesse de la réaction qui peut se mettre sous la forme

$$v(t) = k_{\mathrm{app}}[\mathrm{A}]^{\alpha}(t)$$

avec k_{app} la constante de vitesse apparente. Cette méthode permet d'avoir accès à l'ordre partiel sur le réactif A.

La concentration en MH est au moins 10 fois supérieure à celle en O_2, donc c'est en accord avec la méthode de la dégénérescence de l'ordre. On peut alors donner une expression approchée de la vitesse de réaction

$$\boxed{v(t) \approx k[\mathrm{MH}]_0^p \times [\mathrm{O_2}]^q(t) = k_{\mathrm{app}}[\mathrm{O_2}]^q(t) \quad \text{avec} \quad k_{\mathrm{app}} = k[\mathrm{MH}]_0^p}$$

/4 4 La méthode différentielle consiste à travailler directement avec la vitesse, en traçant v connaissant les concentrations en réactifs. Dans notre cas, la vitesse initiale peut s'écrire :

$$v_0 = k_{\mathrm{app}}[\mathrm{O_2}]_0^q \quad \text{soit} \quad \ln(v_0) = \ln(k_{\mathrm{app}}) + q\ln\left([\mathrm{O_2}]_0\right) \quad \text{avec} \quad v_0 = -\frac{\mathrm{d}[\mathrm{O_2}]}{\mathrm{d}t}(t=0)$$

Ainsi, on trace

$$y = ax + b$$

$$\ln(v_0) \qquad q \qquad \ln([\mathrm{O_2}]0) \qquad \ln(k_{\mathrm{app}})$$

On constate que l'ajustement affine passe bien par les points. On en déduit $\boxed{q = 1}$.

/5 5 On supposant $q = 1$ pour tout temps, et dans le cas de la méthode de la dégénérescence de l'ordre, on peut écrire

$$v(t) = k_{\mathrm{app}}[\mathrm{O_2}](t) \quad \text{avec} \quad v(t) = -\frac{\mathrm{d}[\mathrm{O_2}]}{\mathrm{d}t}$$

Par intégration, on obtient

$$[\mathrm{O_2}](t) = [\mathrm{O_2}]_0 \exp\left(-k_{\mathrm{app}}t\right)$$

Par définition du temps de demi-réaction,

$$[\mathrm{O_2}](t_{1/2}) = \frac{[\mathrm{O_2}]_0}{2} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k_{\mathrm{app}}}}$$

On en déduit que $t_{1/2}$ est indépendant de la concentration initiale $[\mathrm{O_2}]_0$, ce qui est en accord avec des données expérimentales. On en conclut que la valeur de l'ordre initial n'est pas modifiée au cours du temps.

/4 6 On prend la valeur moyenne $t_{1/2} = 62{,}5\,\mathrm{min}$, et on en déduit

$$k_{\mathrm{app}} = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \quad \text{avec} \quad k_{\mathrm{app}} = k[\mathrm{MH}]_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}[\mathrm{MH}]} = 2{,}22\,\mathrm{L{\cdot}mol^{-1}{\cdot}min^{-1}}}$$

/4 7 D'après la loi d'Arrhénius,

$$k(T) = A\exp\left(-\frac{E_A}{RT}\right)$$

En notant $k_1 = k(T_1)$ et $k_2 = k(T_2)$, on a

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{A\exp\left(-\dfrac{E_a}{RT_1}\right)}{A\exp\left(-\dfrac{E_a}{RT_2}\right)} = \exp\left(\frac{E_a}{R}\left(\frac{1}{T_2}-\frac{1}{T_1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{E_a = R\frac{T_1T_2}{T_1-T_2}\ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}} \\ T_1 = 298\,\mathrm{K} \\ T_2 = 313\,\mathrm{K} \\ k_1 = 2{,}22\,\mathrm{L{\cdot}mol^{-1}{\cdot}min^{-1}} \\ k_2 = 2{,}62\,\mathrm{L{\cdot}mol^{-1}{\cdot}min^{-1}} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{E_a = 8{,}61\,\mathrm{kJ{\cdot}mol^{-1}}}$

/40 E2 Comparaison de deux circuits RLC

II/A Étude en régime transitoire

/7 1 Le circuit ne comporte qu'une maille et ne peut donc être simplifié, on applique alors la loi des mailles

$$E = Ri + u_a + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow E = RC\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} + u_a + LC\frac{\mathrm{d}^2u_a}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_a}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_a = \frac{1}{LC}E}$$

On en déduit par identification que $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ puis après calcul que $\boxed{Q_a = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}} \approx 0{,}063}$.

/5 2 Aucune simplification ne peut être réalisée pour ce circuit, on considère alors la loi des noeuds et la loi des mailles (petite maille de gauche) :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t} + i_L \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2u_b}{\mathrm{d}t^2} + u_b/L \quad \text{et} \quad E = Ri + u_b$$

En combinant ces equations, on obtient après avoir dérivé la loi des mailles

$$0 = RC\frac{\mathrm{d}^2u_b}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}u_b + \frac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_b}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_b = 0}$$

On obtient alors par identification $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Cette expression est bien identique à celle obtenue pour le circuit A d'où le même nom. De plus, on trouve après calcul que $Q_b = R\sqrt{C/L}$. On en déduit que $Q_b = 1/Q_a$, soit

$$\underline{Q_b \approx 16}$$

II/B Etude en régime sinusoïdal forcé

II/B) 1 Etude du circuit A

/2 3 On a donc

$$\frac{\mathrm{d}^2u_a}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_a}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_a = \omega_0^2E\cos(\omega t) \Rightarrow \underline{u}(t)\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q_a} + \omega_0^2\right) = \omega_0^2Ee^{\mathrm{j}\omega t}$$

On simplifie alors par les exponentielles complexes et on isole $\underline{U}_a$:

$$\underline{U}_a = \frac{\omega_0^2E}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\frac{\omega\omega_0}{Q_a}} = \frac{E}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q_a}}$$

d'où le résultat.

/8 $\boxed{4}$ On a

$$U_a = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q_a^2}}$$

Il y a résonance si l'amplitude réelle passe par un maximum à une pulsation non nulle et non infinie. Ici, cela revient à avoir le dénominateur minimal. Soit $X = x^2$, et $f(X) = (1-X)^2 + \dfrac{X}{Q^2}$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& f'(X_r) = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad \text{On dérive} \\
\Leftrightarrow\ & -2\,(1-X_r) + \frac{1}{{Q_a}^2} = 0 \\
& \qquad\qquad\qquad \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & X_r - 1 = -\frac{1}{2{Q_a}^2} \Leftrightarrow X_r = 1 - \frac{1}{2{Q_a}^2}
\end{aligned}$$

Et on observe qu'il existe une racine réelle uniquement si $\boxed{Q_a > \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ (sinon, racines complexes ou pulsation nulle, donc pas résonance).

En pratique, on a obtenu $Q_a \approx 0{,}063 < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. La courbe ne va donc **pas passer** par un maximum local.

II/B) 2 Etude du circuit B

/2 $\boxed{5}$

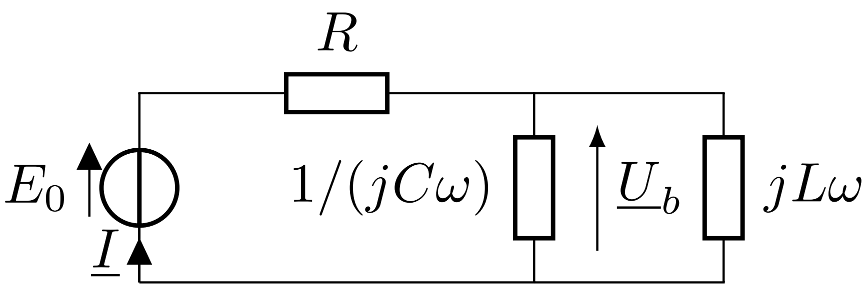

Figure 4.1 – Circuit B en RSF.

/3 $\boxed{6}$ On peut regrouper la bobine et le condensateur en parallèles (impédance Z_{eq}) puis appliquer un pont diviseur de tension

$$\begin{aligned}
& \underline{U}_b = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R + \underline{Z}_{\text{eq}}} E \\
& \qquad\qquad\qquad \times \frac{\underline{Y}_{\text{eq}}}{\underline{Y}_{\text{eq}}} \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U}_b = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} E \\
& \qquad\qquad\qquad \underline{Y}_{\text{eq}} = \tfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U}_b = \frac{1}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega} E = \\
& \qquad\qquad\qquad Q_b = R\sqrt{\tfrac{C}{L}} \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U}_b = \frac{E}{1 + jR\sqrt{C/L}\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\underline{U}_b = \frac{E}{1 + jQ_b\left(x - \frac{1}{x}\right)}}
\end{aligned}$$

/2 $\boxed{7}$ On obtient bien l'expression attendue en prenant le module de l'expression précédente

$$\boxed{U_b = \frac{E}{\sqrt{1 + Q_b^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

L'amplitude passe par un maximum local si le carré de son dénominateur passe par un minimum local soit quand $\boxed{x = 1}$ et ce, quelque soit Q_b. En effet, on a $1 + Q_b^2(x - 1/x)^2 \geq 1 + Q_b^2(1-1)^2\ \forall x > 0$.

/5 [8] C'est l'ensemble des pulsations telles que $U_b(\omega) \geq U_{b,\max}/\sqrt{2}$. On commence par déterminer les pulsations réduites x_1 et x_2 telles que $U_b(x_i) = E/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
&1 + Q_b^2(x_i - 1/x_i)^2 = 2 \\
\xrightarrow{\sqrt{\cdot}}\ &\Leftrightarrow Q_b\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) = \pm 1 \\
\xrightarrow{\times x_i}\ &\Leftrightarrow Q_b{x_i}^2 \mp x_i - Q_b = 0 \\
\xrightarrow{\text{Discriminant}}\ &\Rightarrow \Delta = 1 + 4{Q_b}^2 \\
\xrightarrow{\text{Solutions}}\ &\Rightarrow x_{i,\pm,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4{Q_b}^2}}{2Q_b}
\end{aligned}$$

On obtient alors deux polynômes du second degré (un avec le signe +, l'autre avec le signe −). On ne garde que les racines positives, sachant que $\sqrt{1+4{Q_b}^2} > 1$:

$$x_1 = x_{i,-,+} = \frac{1}{2Q_b}\left(-1 + \sqrt{1+4{Q_b}^2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{i,+,+} = \frac{1}{2Q_b}\left(1 + \sqrt{1+4{Q_b}^2}\right)$$

puis on obtient $x_2 - x_1 = 1/Q_b$ soit au final $\boxed{\Delta\omega = \omega_0/Q_b}$.

II/B) 3 Synthèse

/6 [9] Pour le circuit A, on observe que $U_a(x=1) = Q_aE \approx 0{,}32\,\mathrm{V}$ et il n'y a pas résonance. Pour le circuit B, on observe une résonance telle que $U_b(x=1) = E = 5\,\mathrm{V}$, avec une faible largeur ($\Delta x = 1/Q_b \approx 0{,}063$). On obtient alors les courbes suivantes Figure 4.2.

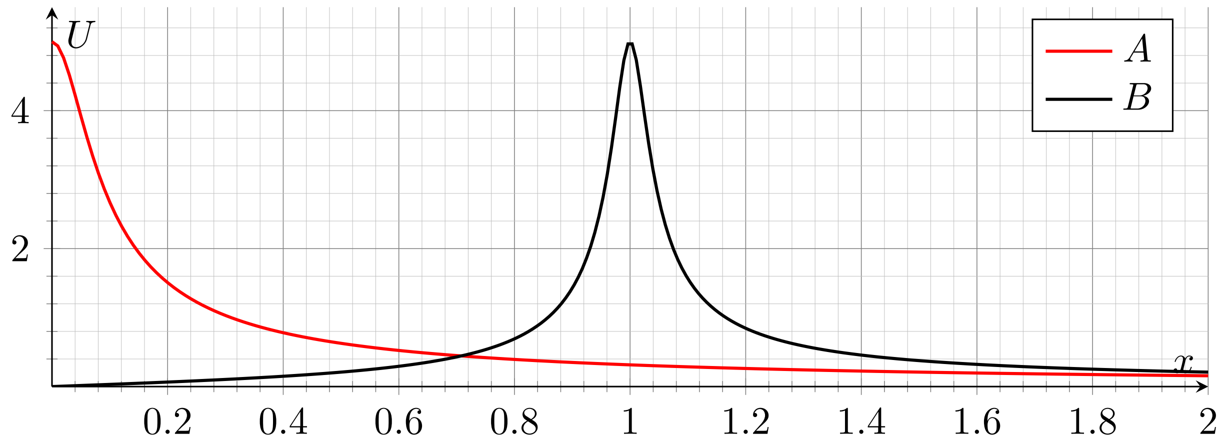

Figure 4.2 – Gains

/85 P1 Suspension automobile

I/A Comportement sur un sol non plat

/3 [1] Si on appelle T la période de l'excitation liée au sol, il faut une durée $T = \frac{L}{V_a}$ pour parcourir la distance L qui sépare deux maxima, et

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V_a}{L}} \Rightarrow \underline{\omega \approx 42\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

Une autre manière de voir les choses :

$$z_s = z_{s0}\cos\left(2\pi\frac{x}{L}\right) = z_{s0}\cos\left(2\pi\frac{V_a}{L}t\right) = z_{s0}\cos(2\pi f t)$$

d'où la fréquence d'excitation est V_a/L.

/7 [2]

Système : {châssis} repéré par G de masse M ;

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,z,t)$ supposé galiléen.

Repère : $(O,\, \overrightarrow{e_x},\, \overrightarrow{e_z})$ avec $\overrightarrow{e_z}$ vertical ascendant, $\overrightarrow{e_x}$ dans le sens de $\overrightarrow{V_a}$.

Repérage :

- ◇ **Position** : $z_G\,\overrightarrow{e_z}$
- ◇ **Vitesse** : $\dot{z}_G\,\overrightarrow{e_z}$
- ◇ **Accélération** : $\ddot{z}_G\,\overrightarrow{e_z}$

Longueur du ressort : $\ell = z_G - z_S$

Les forces appliquées sont (cf. Figure 4.3) :

1) le poids $\overrightarrow{P} = M\overrightarrow{g} = -Mg\,\overrightarrow{e_z}$;
2) la force élastique du ressort : $\overrightarrow{F} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_z} = -k(z_G - z_S - \ell_0)\,\overrightarrow{e_z}$,
3) la force de frottement fluide : $\overrightarrow{f} = -k'(\dot{z}_G - \dot{z}_S)\,\overrightarrow{e_z}$.

Attention aux points d'application des forces et aux forces à prendre en compte ici : le système étant « le châssis », il n'y a pas de réaction du support s'appliquant sur le châssis (elle s'applique à la roue, qui ne fait pas partie du système).

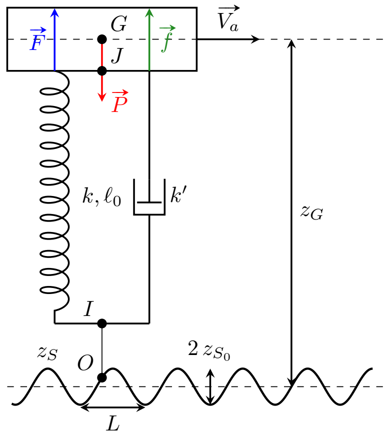

Figure 4.3

/3 [3] Le PFD s'écrit :

$$\begin{aligned}
M\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{F} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{P} && \cdot\overrightarrow{e_z}\\
\Leftrightarrow M\frac{\mathrm{d}^2 z_G}{\mathrm{d}t^2} &= -k(z_G - z_S - \ell_0) - Mg - k'\left(\frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}z_S}{\mathrm{d}t}\right) && \text{Équilibre}\\
\Rightarrow 0 &= -k(z_{G,eq} - \ell_0) - Mg && \text{On isole}\\
\Rightarrow & \boxed{z_{G,eq} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}}
\end{aligned}$$

/2 [4] Cette condition permet de simplifier l'équation précédente : on pose $z = z_G - z_{G,eq}$. $z_{G,eq}$ étant constant, on en déduit $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}z_G}{\mathrm{d}t}$ et idem pour la dérivée seconde. On obtient finalement

$$\boxed{M\ddot{z} + k'\dot{z} + kz = k'\dot{z}_S + kz_S}$$

/8 [5] Puisque z_s varie de façon sinusoïdale, on passe en notation complexe en posant $\underline{z}_S(t) = \underline{Z}_S\exp(\mathrm{j}\omega t)$ et $\underline{z}(t) = \underline{Z}\exp(\mathrm{j}\omega t)$ en RSF.

L'équation différentielle devient, après simplification par $\exp(\mathrm{j}\omega t)$,

$$-M\omega^2\underline{Z} + \mathrm{j}\omega k'\underline{Z} + k\underline{Z} = \mathrm{j}\omega k'\underline{Z}_S + k\underline{Z}_S$$

d'où

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{\mathrm{j}\omega k' + k}{k - M\omega^2 + \mathrm{j}\omega k'} = \frac{1 + \mathrm{j}\omega\frac{k'}{k}}{1 - \frac{M\omega^2}{k} + \mathrm{j}\omega\frac{k'}{k}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{et} \quad \left|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S}\right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{x^2}{Q^2}}{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}}$$

On en déduit $\frac{k'}{k} = \frac{1}{\omega_0 Q}$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{k}$ d'où au final :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{Mk}}{k'} = 2{,}5}.$$

/5 [6] On a affaire à un filtre mécanique passe bas du second ordre. Un tracé sous python/calculatrice donne le graphique suivant en échelle linéaire (à gauche) ou logarithmique (à droite).

Physiquement $H = |\underline{H}|$ représente à quel point les perturbations de la route vont être amplifiées (si $H > 1$) ou atténuées (si $H < 1$) en fonction de la fréquence d'excitation (donc en partie en fonction de la vitesse du véhicule).

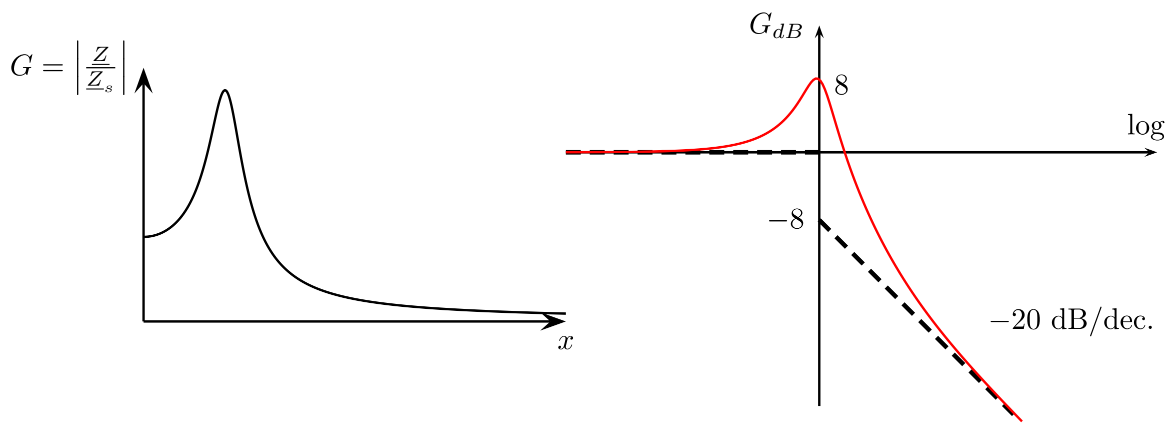

Figure 4.4

/2 $\boxed{7}$ Si le véhicule roule à $V_a = 50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 13{,}9\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$, $\omega \approx 42\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ (pulsation des oscillations ressenties par læ passagærx) comme déterminé question $\boxed{1}$. Ainsi, $x = 4{,}2$, et

$$\underline{Z = H(4{,}2)\cdot Z_S \approx 1{,}0\,\mathrm{cm}}$$

(assez faible).

/4 $\boxed{8}$ Il ne faut pas rouler à $V_a = V_0$ correspondant à la résonance qui a lieu pour $\omega \approx \omega_0$, soit

$$V_0 \approx \frac{L\omega_0}{2\pi} \approx 3{,}2\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} = \underline{12\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$$

Le système entrerait alors en résonance, læ passagærx ressentirait des oscillations d'amplitude $Z(10) \approx QZ_S = 25\,\mathrm{cm}$ et cela détériorerait les amortisseurs.

Attention, ici la résonance n'a pas lieu pour $\omega = \omega_0$, c'est plus compliqué. Annoncer « on sait que H est maximum pour $x = 1$ » présente donc assez mal ! En pratique, $\omega_r \approx \omega_0$ lorsque $2Q^2 \gg 1$ ce qui est le cas ici ($Q = 2{,}5$).

/3 $\boxed{9}$ En plaçant des bandes rugueuses à une distance L_0 bien choisie, on peut, en admettant que la fréquence de résonance est la même pour tous les véhicules, s'arranger pour que V_0 soit légèrement supérieure à la vitesse limite de $50\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ en zones urbaines, soit par exemple $60\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$:

$$\omega_0 = \frac{2\pi V_0}{L_0} \Leftrightarrow \boxed{L_0 = \frac{2\pi V_0}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 2\pi \approx 6 \\ V_0 = 60\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = \frac{60}{3.6}\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \\ \omega_0 = 10\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{L_0 = 10\,\mathrm{m}}$$

I/B Comportement lors du franchissement d'une bordure

/5 $\boxed{10}$ Vue du générateur, l'impédance est un condensateur en série avec (une résistance et une bobine en parallèle). D'où

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{\mathrm{j}RL\omega}{R+\mathrm{j}L\omega} && \text{Même dénominateur} \\ \Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{R+\mathrm{j}L\omega - RLC\omega^2}{\mathrm{j}C\omega(R+\mathrm{j}L\omega)} && \text{On factorise par } R \\ \Leftrightarrow & \boxed{\underline{Z} = \frac{1+\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}{\mathrm{j}C\omega(1+\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega)}} \end{aligned}$$

/7 $\boxed{11}$ Deux choix sont possibles et dans les deux cas, on va vérifier les comportements asymptotiques :

- pour $u_s = u_1$, on a $\underline{U}_1 \to 0$ quand $\omega \to 0$ (car la bobine est équivalente à un fil en BF) et ce résultat n'est pas compatible avec la fonction de transfert attendue (réponse non nulle en basse fréquence).
- pour $u_s = u_2$, on a $\underline{U}_2 \to 0$ quand $\omega \to +\infty$ (condensateur équivalent à un fil en HF) puis $\underline{U}_2 \to \underline{U}_e$ quand $\omega \to 0$ (tension nulle aux bornes de la bobine + loi des mailles). Ce comportement asymptotique est compatible avec celui du filtre proposé dans la partie précédente.

On retient ainsi pour la suite $u_s = u_2$ et on obtient la fonction de transfert en utilisant la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{1}{\frac{1+\mathrm{j}\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}{1+j\frac{L}{R}\omega}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1+j\frac{L}{R}\omega}{1-LC\omega^2+j\frac{L}{R}\omega}}$$

En identifiant à la forme proposée par l'énoncé on obtient

$$\omega^2/\omega_0^2 = LC\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \qquad \text{et} \qquad \frac{\omega}{Q\omega_0} = \omega\frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

L'expression du facteur de qualité n'est pas la même que celle obtenue pour le circuit RLC série. Cependant, elle est bien sans dimension.

/4 12 $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ en électrique et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ d'un coté, et de l'autre coté $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $Q = \frac{1}{k'}\sqrt{Mk}$.

Vu la forme de ω_0, on est amené à proposer naturellement ($k = \frac{1}{L}$; $M = C$) ou ($k = \frac{1}{C}$; $M = L$) toutefois, du côté de Q, les grandeurs qui « passent du dénominateur dans ω_0 au numérateur dans Q » sont M et C.

Il parait donc raisonnable de proposer

$$\boxed{M \leftrightarrow C \quad ; \quad k \leftrightarrow \frac{1}{L} \quad ; \quad k' \leftrightarrow \frac{1}{R}}$$

(et bien sûr $U_s = z_v$ et $U_e = z_s$)

D'autres relations d'équivalences pourront être obtenues lors de l'étude d'autres circuits électriques. Ces résultats ne sont donc pas à apprendre par cœur.

/4 13 Avec la loi des mailles :

$$u_e = u_1 + u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_e - u_2$$

On cherche à simplifiser u_1. On a pour ça :

$$\begin{aligned}
& i = i_1 + i_2 && i_1 = \tfrac{u_1}{R} \\
\Leftrightarrow\ & i = \frac{u_1}{R} + i_2 && \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} && u_1 = L\tfrac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{L}u_1 && \text{On isole } u_1 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u_1 = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t}} && i = C\tfrac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & u_1 = LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_1}{\mathrm{d}t} && u_1 = u_e - u_2 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u_1 = LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} - \frac{L}{R}\left(\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} - \frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t}\right)}
\end{aligned}$$

Ainsi, dans la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
& u_1 = u_e - u_2 && \text{On injecte } u_1 \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} = u_e - u_2 && \text{On regroupe} \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2 = \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} + ue && \times\tfrac{1}{LC} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_2 = \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_e}
\end{aligned}$$

On aurait aussi pu partir de la fonction de transfert obtenue précédemment :

$$\begin{aligned}
& \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_e} = \frac{1+\mathrm{j}\frac{x}{Q}}{1+(\mathrm{j}x)^2+\mathrm{j}\frac{x}{Q}} && \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U}_2\left(1+\left(\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0}\right)^2 + \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q}\right) = \underline{U}_e\left(1+\frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_0 Q}\right) && \text{En réels} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{{\omega_0}^2}\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{\omega_0 Q}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + u_2 = u_e + \frac{1}{\omega_0 Q}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} && \times{\omega_0}^2 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_2}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u_2 = \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_e}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u_e}
\end{aligned}$$

Ce qui est bien la même chose en devéloppant et ω_0 et Q.

/2 14 Dans le cadre de l'analogie électromécanique, la tension u_e aux bornes du GBF est analogue à la hauteur du sol z_s. Lors du franchissement d'un trottoir, la hauteur (constante avant) va ainsi soudainement augmenter d'une dizaine de centimètres puis redevenir constante. C'est bien le comportement qui est décrit ici.

/8 $\boxed{15}$ La charge initiale du condensateur n'est pas mentionnée dans l'énoncé. À $t = 0^-$, on a $i(0^-) = 0$ (condensateur en RP) puis $u_1(0^-) = 0$ (bobine $\leftrightarrow$ fil en RP) donc $i_1(0^-) = 0$ (résistance) et finalement $i_2(0^-) = 0$ (loi des nœuds).

On en déduit à l'aide de la loi des mailles appliquées à $t = 0^-$ que $0 = 0 + u_2(0^-) \Rightarrow u_2(0^-) = 0$ or la tension aux bornes du condensateur est continue donc $\boxed{u_2(0^+) = 0}$.

La dérivée de cette tension n'est pas nécessairement continue (aucun résultat de cours ne permet de le prouver rapidement). On va donc étudier le circuit à $t = 0^+$ en y appliquant la loi des mailles : $E = u_1(0^+) + u_2(0^+) \Rightarrow u_1(0^+) = E$. De plus, on a par continuité du courant à travers la bobine, $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$ mais aussi $i_1(0^+) = u_1(0^+)/R = E/R$.

Finalement, l'application de la loi des nœuds donne $i(0^+) = i_1(0^+) = E/R = C\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{RC} = \frac{E\omega_0}{Q}}$

/8 $\boxed{16}$ Pour $t > 0$, on a $u_e(t) = E$ et donc :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}t^2}u_2 + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}u_2 + \omega_0^2 u_2 = \omega_0^2 E$$

Pour $Q = 2{,}5 > 1/2$, on se place dans le cas du régime pseudo-périodique et donc

$$u_2(t) = e^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right) + E$$

avec $\Omega = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$ et $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$. La première CI donne $A + E = 0$. On dérive ensuite la tension :

$$\frac{\mathrm{d}u_2}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}(B\sin(\Omega t) - E\cos(\Omega t)) + e^{-t\tau}(B\Omega\cos(\Omega t) + E\sin(\Omega t))$$

La deuxième CI donne $\frac{E\omega_0}{Q} = \frac{2E}{\tau} = \frac{E}{\tau} + B\Omega \Rightarrow B = \frac{E}{\tau\Omega}$. On trouve au final :

$$\boxed{u_2(t) = Ee^{-t/\tau}\left(\frac{E}{\tau\Omega}\sin(\Omega t) - \cos(\Omega t)\right) + E}$$

/5 $\boxed{17}$ Littéralement, on prend $t_{95} = Q \cdot T_0$ pour $Q = 2{,}5$ et $Q = 10$ et $t_{95} = \frac{T_0}{2Q}$ pour $Q = 0{,}51$, et on a $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ soit

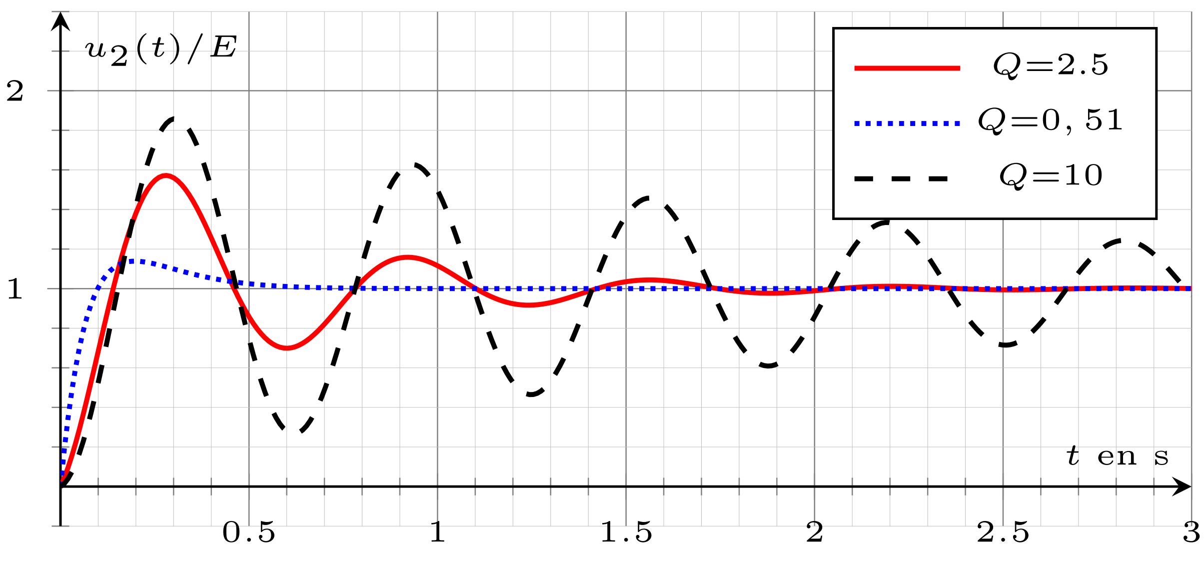

Figure 4.5

$T_0 \approx 0{,}6\,\mathrm{s}$. Ainsi,

$$t_{95,Q=10} = 6\,\mathrm{s} \quad ; \quad t_{95,Q=2,5} = 1{,}5\,\mathrm{s} \quad ; \quad t_{95,Q=0,51} \approx 0{,}6\,\mathrm{s}$$

Graphiquement, on obtient $u_{2,\max}(Q = 10) = 1{,}95E$, $u_{2,\max}(Q = 2.5) = 1{,}6E$ puis finalement $u_{2,\max}(Q = 0{,}51) \approx 1{,}15E$ (peu de dépassement dans le dernier cas).

I/C Conclusion

/5 $\boxed{18}$ Dans le premier cas (sol ondulé), on constate que pour un facteur de qualité élevé, on peut rencontrer un phénomène de résonance qui peut être gênant. Dans le deuxième cas (franchissement d'une bordure), on observe aussi que le dépassement dépend du facteur de qualité.

Il convient donc de réaliser un système avec un **faible facteur de qualité**, dans la limite du raisonnable : il ne faut pas non plus que les amortisseurs soient rigides. Une valeur autour de 0,5 paraît appropriée.

/42 P2 Cinétique de $CaCO_3$: dissolution du calcaire et coraux

II/A Introduction

/4 1 À tout instant, $n_{HCl}(t) = n_{HCl,0} - \xi$, et $n_{H^+} = \xi$. Or la réaction est toale, soit $\xi_f = \xi_{max}$. On en déduit que $[H^+] = c_a = 0{,}10\,mol{\cdot}L^{-1}$. Ainsi :

$$\boxed{pH = -\log[H^+] = 1{,}0}$$

II/B Première méthode

/1 2 D'après la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{n_{CO_2} = \frac{p_{CO_2}V}{RT}}$$

/6 3 Le tableau d'avancement de la réaction est :

Équation		$CaCO_3$ (s)	+ $2H^+$ (aq)	→ CO_2 (g)	+ Ca^{2+} (aq)	+ H_2O (l)	$n_{tot,gaz}$
Initial	$x = 0$	n_0	c_aV_0	0	0	excès	0
Interm.	x	$n_0 - x$	$c_aV_0 - 2x$	x	x	excès	x

Ainsi :

$$\boxed{x = n_{CO_2}}$$

$$\Leftrightarrow x(100\,s) = \frac{p_{CO_2}(100\,s)V}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{CO_2}(100\,s) = 7170\,Pa \\ V = 1{,}00\,L = 1{,}00 \times 10^{-3}\,m^3 \\ \frac{1}{RT} \approx 4 \times 10^{-4}\,mol{\cdot}J^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N.} : \underline{x(100\,s) = 2{,}9\,mmol}$$

II/C Deuxième méthode

/4 4

$$\boxed{n_{H^+} = [H^+]V_0}$$

D'après le tableau d'avancement :

$$\boxed{n_{H^+} = c_aV_0 - 2x} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{c_aV_0 - n_{H^+}}{2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_a = 0{,}10\,mol{\cdot}L^{-1} \\ V_0 = 0{,}100\,L^{-1} \\ n_{H^+}(10\,s) = 9{,}00 \times 10^{-3}\,mol \end{cases}$$

$$\text{A.N.} : \underline{x(10\,s) = 0{,}5\,mmol}$$

/1 5 Les 2 méthodes sont cohérentes car on retrouve les même valeurs pour les 2 tableaux de $x(t)$ à quelques pourcents près.

/1 6 La vitesse de réaction est :

$$\boxed{v = \frac{1}{-2}\frac{d[H^+(aq)]}{dt}}$$

/5 7 On suppose que la réaction est d'ordre 0 :

$$v = k$$

On trouve alors :

$$\frac{d[H^+(aq)]}{dt} = -2k \quad \Rightarrow \quad [H^+(aq)] = [H^+(aq)]_0 - 2kt = c_a - 2kt.$$

En utilisant le tableau d'avancement :

$$c_a - \frac{2x}{V_0} = c_a - 2kt \quad \Rightarrow \quad \boxed{x = V_0kt}.$$

/4 $\boxed{8}$ On suppose que la réaction est d'ordre 1 :

$$v = k[\mathrm{H}^+] \quad \Rightarrow \quad k[\mathrm{H}^+] = \frac{-1}{2}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{H}^+]}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad [\mathrm{H}^+](t) = c_a \mathrm{e}^{-2kt}$$

En passant au logarithme et en utilisant le tableau d'avancement :

$$\boxed{\ln\left(\frac{c_aV_0 - 2x}{c_aV_0}\right) = -2kt}$$

/6 $\boxed{9}$ On suppose que la réaction est d'ordre 2 :

$$v = k[\mathrm{H}^+]^2 \quad \Rightarrow \quad k[\mathrm{H}^+]^2 = \frac{-1}{2}\frac{\mathrm{d}[\mathrm{H}^+]}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad -2k\,\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{d}[\mathrm{H}^+]}{[\mathrm{H}^+]^2}$$

On intègre cette relation entre l'état initial et un état quelconque :

$$-2k\int_0^t \mathrm{d}t' = \int_{c_a}^{c_aV_0-2x} \frac{\mathrm{d}[\mathrm{H}^+]}{[\mathrm{H}^+]^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{c_a} - \frac{1}{c_a - \frac{2x}{V_0}} = -2kt \quad \Rightarrow \quad \boxed{\frac{1}{V_0c_a - 2x} - \frac{1}{V_0c_a} = \frac{2kt}{V_0}}$$

/5 $\boxed{10}$ La courbe qui ressemble le plus à une droite est la courbe 3 : les données sont réparties plus aléatoirement que la courbe 2 qui ressemble plus à une parabole. La première ne convient clairement pas.

On en déduit que la réaction est le mieux modélisée par une réaction d'ordre 2. La pente de la droite ajustée est $1{,}47\,\mathrm{mol}^{-1}\mathrm{s}^{-1} = 2k/V_0$. Puisque $V_0 = 100 \times 10^{-3}\,\mathrm{L}$, on en déduit que

$$\boxed{k = 7{,}35 \times 10^{-2}\,\mathrm{L{\cdot}mol^{-1}s^{-1}}}$$

/5 $\boxed{11}$ La vitesse de dissolution des coraux est assez lente car elle est d'autant plus grande que la concentration en ions H^+ est grande, c'est-à-dire que le pH est petit. Or, actuellement, le pH de l'océan est de l'ordre de 8,0. Cependant, à cause des activités humaines, les océans s'acidifient en raison de la hausse de $\mathrm{CO_2}$ dissout dedans. Les coraux vont donc se dissoudre de plus en plus vite.