Travaux pratiques – TP 7

Circuits du premier ordre en régime transitoire

Au programme

Savoirs

- Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.

Savoir-faire

- Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.
- Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

I Objectifs

- Réaliser des montages simples d'électricité.
- Déterminer expérimentalement un temps de relaxation.
- Observer les différents paramètres qui influent sur un régime transitoire.
- Observer les différents régimes du second ordre.
- Découvrir quelques fonctions nouvelles de l'oscilloscope et du GBF.
- Mettre en œuvre la méthode d'Euler à l'aide de Python pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation quelconque.

II S'approprier

Règles de bonne pratique

- En pratique, on commence toujours par effectuer les branchements du circuit sans insérer les appareils de mesure.
- Puis, on **relie toutes les masses entre elles** afin d'éviter de fixer par erreur une autre masse dans le circuit. Ainsi, un bon circuit aura une « ligne de masse » à laquelle seront reliés obligatoirement tous les câbles noirs provenant des câbles coaxiaux-filaires reliés à l'oscilloscope ou au GBF.
- Enfin, on place alors les fils colorés des câbles de mesure aux endroits où on désire relever la tension. Vous serez d'ailleurs également vigilant au choix de couleurs des fils, sinon on se perd rapidement…

Ces règles sont fondamentales et ne doivent pas être négligées si on veut que le circuit fonctionne.

A Circuit intégrateur

Un montage est considéré comme **intégrateur** (on le verra en cours dans quelques semaines) si la tension de sortie (dans notre cas $u_c(t)$) est une primitive, à une constante multiplicative K près, de la tension d'entrée (dans notre cas $e(t)$), soit encore

$$u_c(t) = K \int e(t)\mathrm{d}t$$

B Détermination numérique de la solution

II.B.1 Position du problème

Soit $u_C(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

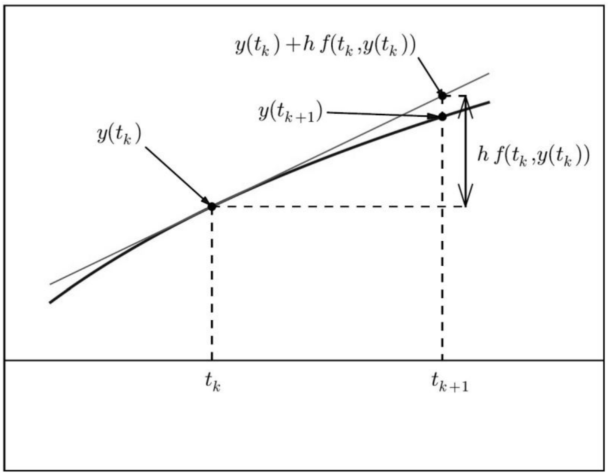
L'objectif de cette partie est de déterminer **numériquement** la solution $u_C(t)$ de cette équation pour une entrée quelconque $e(t)$ pour laquelle il n'existe pas toujours de solutions analytiques. Nous allons utiliser un schéma numérique classique appelé Méthode d'Euler.
En pratique, cette méthode est relativement peu efficace (et des méthodes plus sophistiquées sont souvent mises en place). Néanmoins la méthode d'Euler, très simple à comprendre et à mettre en place, permet une première approche simple du problème.

II.B.2 Méthode d'Euler : mathématiquement

Des théorèmes assurent que, sous des conditions raisonnables, il existe une unique application y de classe C^1 sur $[a,b]$ dont la valeur est imposée en a et qui vérifie une équation différentielle de la forme $y'(t) = f(t,y(t))$ pour tout $t \in [a,b]$. L'objet des *schémas numériques* est d'obtenir des approximations de cette solution.

En pratique, on tente d'approcher y en un certain nombre de points répartis sur l'intervalle $[a,b]$. Plus précisément, on veut calculer une approximation y_k des $y(t_k)$ avec $t_k = a + kh$ où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est un pas qu'il conviendra d'ajuster (on peut supposer que plus le pas est petit, meilleure sera l'approximation). De façon simple, on peut écrire :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(u)\mathrm{d}u = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u,y(u))\mathrm{d}u$$
$$\Leftrightarrow y(t_{k+1}) - y(t_k) \approx hf(t_k,y(t_k))$$



On obtient alors la méthode d'Euler explicite : les approximations sont calculées de proche en proche via la formule suivante :

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(t_k,y_k)}$$

On initialise bien entendu avec $y_0 = y(a)$, qui sera la seule valeur « exacte » calculée.

III Analyser : régime transitoire du circuit RC

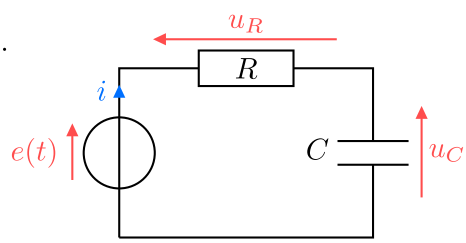
Vous prendrez soin de refaire tous les schémas des circuits mis en place ou étudiés.

Attention

Pour ce TP, il vous est demandé de rédiger les réponses préalables sur vos comptes-rendus, **en amont** du TP.

A Charge et décharge du condensateur

On considère le montage ci-contre de constante de temps $\tau = RC$.



1. Si $e(t)$ est une tension créneau de fréquence $f = 1\,\text{kHz}$, quelle valeur faut-il donner à τ pour visualiser de façon satisfaisante la totalité du régime transitoire ? Expliquer les raisons de votre choix.

2. Si τ est trop grand ou si τ est trop petit, que se passe-t-il ?

3. Si $R = 1\,\text{k}\Omega$, quelle valeur faut-il alors donner à C ?

4. On veut visualiser à l'oscilloscope simultanément $e(t)$ sur la voie 1 et $u_C(t)$ sur la voie 2 ; indiquer sur un schéma les connexions à réaliser.

B Étude théorique du circuit intégrateur

L'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

Supposons que à $t = 0$, $e(t)$ passe de 0 à E.

5. Déterminer la solution de l'équation différentielle précédente dans le cas où $u_C(t = 0) = 0$. En utilisant un développement limité du terme exponentiel autour de $t = 0$, montrer que le montage est intégrateur (la sortie est une primitive de l'entrée).

Aide

Le développement limité de l'exponentiel s'écrit

$$e^x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$$

C Circuit RC avec visualisation de $e(t)$ et $u_R(t)$

On souhaite maintenant visualiser $e(t)$ sur la voie 1 et $u_R(t)$ sur la voie 2.

6. Comment faut-il modifier le montage ? Sur votre feuille, faire le schéma du montage correspondant en indiquant les branchements de l'oscilloscope.

7. Écrire l'équation différentielle vérifiée par la variable $u_R(t)$ et en donner la solution pour $e(t) = E$ et $u_R(t = 0^-) = 0$. Attention, la tension n'est *a priori* pas continue aux bornes de R...

IV Réaliser et valider

A Étude expérimentale du régime transitoire du circuit RC

IV.A.1 Cas général : charge et décharge du condensateur

1) Réaliser le montage RC proposé dans la partie III.A.
2) $e(t)$ est une tension créneau (alternance de tension nulle et de tension constante E) d'un générateur basses fréquences, réglé sur une fréquence de 1 kHz.
3) R est une boîte de résistances variables ; prendre $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.
4) C est une boîte de capacités réglables ; prendre la valeur calculée dans la partir analyse.
5) Observer $e(t)$ et $u_C(t)$.
6) Imprimer vos courbes en suivant le protocole imprimé et plastifié sur vos paillasses. **Pensez à inverser la couleur de l'écran pour le pas imprimer sur un fond noir**.

1 Déterminer la constante de temps τ_{exp} ainsi que son incertitude. Expliquer votre démarche.

2 Calculer **et commenter** l'écart normalisé E_N avec la valeur théorique.

3 Étudier l'influence de R et de C. Faire varier également la fréquence du signal périodique. Commenter vos observations. Il n'est pas demandé de refaire de nouvelles mesures. Une analyse qualitative est suffisante.

IV.A.2 Cas particulier du circuit intégrateur

Attention

Pour toute mesure, vérifier que la source du menu mesure correspond bien à la courbe sur laquelle vous faites des mesures.

1) Ne pas modifier le montage précédent, $e(t)$ est toujours une tension créneau. Choisir τ de l'ordre de $5T$ en ajustant la valeur de R et observer $e(t)$ et $u_C(t)$.

   4 Quelle est l'allure de $u_C(t)$? $u_C(t)$ est-elle bien la primitive de $e(t)$ à une constante multiplicative près ?

   5 Déterminer expérimentalement la pente de la courbe $u_C(t)$ en vous aidant des curseurs. Comparer à la valeur théorique.

2) Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par une dent de scie.

   6 Quelle est l'allure de $u_C(t)$? Le circuit est-il à priori toujours intégrateur ?

   7 Quelle est l'expression mathématique (aucun calcul à effectuer) de la courbe $u_C(t)$?

3) Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par une tension sinusoïdale.

   8 Quelle est l'allure de $u_C(t)$? Le circuit est-il toujours intégrateur ?

   9 Quelle est l'expression mathématique (aucun calcul à effectuer) de la courbe $u_C(t)$?

4) Augmenter τ.

10 Quel inconvénient apparaît ? Commenter vos observations.

IV.A.3 Tension aux bornes de la résistance u_R

Se placer dans les mêmes conditions que dans la partie III.C, en revenant à une tension créneau pour $e(t)$. Observer à l'oscilloscope $e(t)$ et $u_R(t)$.

11 Imprimer les résultats. Commenter l'allure de la courbe. Est-elle conforme à l'expression analytique attendue ?

B Étude numérique

Effectuez cette étude sur `Capytale` : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/bc8f-2174341.

IV.B.1 Écriture du script

On créé la fonction `euler(f, a, b, y0, n)` effectuant les calculs détaillés dans la partie II.B.2. Ses paramètres d'entrée sont une fonction f, des valeurs de a et b, un entier n et une condition initiale $y0$. Elle calcule les valeurs approchées sur $[a,b]$ de la solution de l'équation différentielle $y'(t) = f(t,y(t))$ avec la condition initiale $y(a) = y0$. Cette fonction renvoie la liste des $n+1$ valeurs approchées y_k de y aux temps $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k \in [\![0,n]\!]$.

```
def euler(f, a, b, y0, n):
  h = (b-a) / n
  list_y = [y0]
  yk = y0
  tk = a
  for k in range(n):
    yk = # à compléter
    tk = # à compléter
    list_y.append(yk)
  return list_y
```

Il faut ensuite créer la fonction `f` ainsi que la fonction entrée `e` pour plus de clarté. Vous compléterez la fonction `f` pour qu'elle renvoie l'expression correspondant à l'équation différentielle que vous cherchez à résoudre.
On récupére les valeurs y de la solution par :

```
a = 0   # s
b = 10  # s
n = 100 # points de calculs
y0 = 0  # condition initiale
list_y = euler(f, a , b, y0, n) # list_y est un vecteur des valeurs de y
```

IV.B.2 Test dans un cas analytique

Tester votre fonction précédente avec une entrée constante $e(t) = E$ afin de résoudre l'équation différentielle sur $u_C(t)$. Afficher sur un même graphique la solution numérique et la solution analytique obtenue question 5 (avant développement limité). On pourra, par choix et pour fixer les idées, sans que cela porte à conséquence prendre :

$$E = 1\,\mathrm{V} \qquad \tau = 1\,\mathrm{s} \qquad u_C(t=0) = 0$$

Vous afficherez également la fonction erreur au cours du temps, qui est la différence entre votre solution numérique et la solution analytique.

12 Quelle est la sensibilité au pas de calcul ? Vous ferez plusieurs essais.

IV.B.3 Test dans un cas non analytique

Lorsque la solution $u_C(t)$ peut être obtenue analytiquement, la solution numérique n'a que peu d'intérêt. Elle prend en revanche tout son sens dans des cas non-analytiques.

Testez votre programme pour plusieurs entrées (en changeant le contenu de la fonction `e(t)`) : sinusoïdale, rampe linéaire, exponentielle…