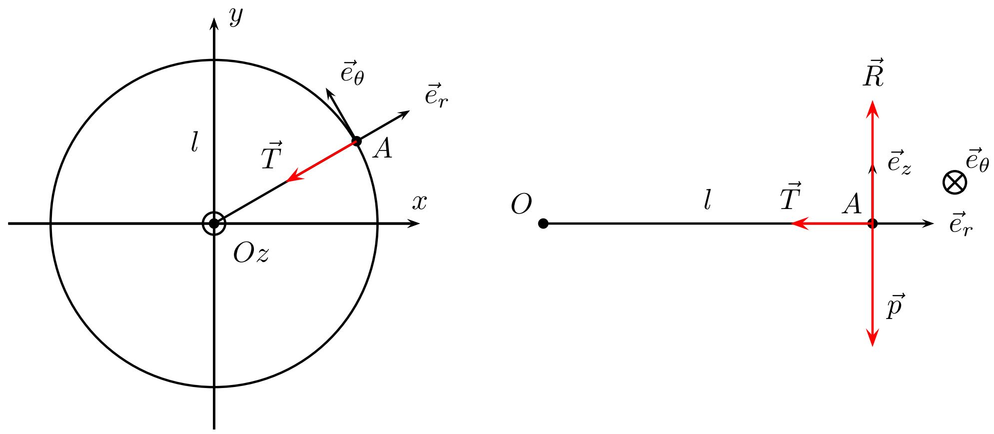
Sujet 1 – corrigé

I Sol glissant

Au cours d'une de ses aventures, Indiana Jones se retrouve glissant sans frottement sur un plan horizontal verglacé, relié par une cordelette inextensible et de masse négligeable à un poteau d'axe vertical placé en O. La cordelette peut tourner librement autour du poteau (sans frottements)
Pour simplifier, on assimile notre héros à un point matériel A de masse m.

1. Indiana Jones tourne autour du poteau à la distance $l = OA$ avec la vitesse $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_\theta$ dans le référentiel lié au plan, supposé galiléen. Quelle est la nature de son mouvement ? Exprimez alors le module T de la tension du filin.
Réponse :
Comme la distance OA est constante, le mouvement est circulaire et $v = r\dot{\theta} = l\dot{\theta}$.



On cherche maintenant à montrer qu'il est également uniforme.

Les forces appliquées au point matériel $\{ A \}$ sont $\vec{T} = -T.\vec{e}_r$ la tension du fil, $\vec{p} = -mg\vec{e}_z$ le poids de A et $\vec{R}$ la réaction du sol avec $\vec{R} = \vec{N}$ verticale car il n'y a pas de frottement.

Toutes ces forces sont normales au déplacement ($d\vec{r} = vdt.\vec{e}_\theta$) donc elles ne travaillent pas et par application du théorème de l'énergie cinétique, $\Delta E_c = W(\vec{T}) + W(\vec{p}) + W(\vec{R}) = 0 + 0 + 0 = 0 \Rightarrow E_c = Cte \Rightarrow v = Cte$ la vitesse de A est constante, mouvement circulaire et uniforme.

Après calcul, notre héros décide, pour sortir de sa situation, de "remonter" lentement de long du filin.

2. Montrez qu'au cours de l'opération son moment cinétique par rapport à O reste constant.
Réponse :
Comme il n'y a pas de frottement, $\vec{R} = \vec{N}$ et comme le déplacement est horizontal ($z = Cte$), par projection du principe fondamental de la dynamique sur l'axe Oz vertical, $m\ddot{z} = -p + R = 0 \Rightarrow \vec{p} + \vec{R} = \vec{0}$

La résultante des forces est donc $\vec{T} + \vec{p} + \vec{R} = \vec{T}$ centrale. Par application du théorème du moment cinétique sur le point A et par rapport au point O fixe dans le référentiel lié au sol considéré comme galiléen,
$$\frac{d\vec{L}_0(A)}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_0(\vec{F}) = \overrightarrow{OA} \wedge \vec{T} = \vec{0} \Rightarrow \vec{L}_0(A) = \overrightarrow{Cte}$$

3. En déduire la vitesse finale v' d'Indiana Jones en A' tel que $OA' = \frac{l}{2}$.
Réponse :

Au cours du mouvement de A le long du filin, comme on reste dans le cas d'une force centrale $\vec{T}$, on a toujours conservation du moment cinétique $\vec{L}_0(A)$.

Quand $OA = l$, $v = v_0$ d'où $\vec{L}_0(A) = m\overrightarrow{OA} \wedge \vec{v}_0 = mlv_0 \vec{e}_r \wedge \vec{e}_\theta = mlv_0 \vec{e}_z$.

De même, quand A est en A', $OA' = \frac{l}{2}$, $v = v'$ d'où $\vec{L}_0(A) = m\overrightarrow{OA'} \wedge \vec{v'} = m\frac{l}{2}v' \vec{e}_z$.

Par identification, on a alors $mlv_0 = m\frac{l}{2}v' \Rightarrow v' = 2v_0$.

4. Exprimez la variation d'énergie mécanique au cours de la remontée.
   Réponse :
   La seule force conservative appliquée à A est son poids mais il ne travaille pas donc son énergie potentielle ne varie pas et $\Delta E_m = \Delta E_c + \Delta E_p = \Delta E_c = \frac{1}{2}mv'^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}m(4v_0^2 - v_0^2) = \frac{3}{2}mv_0^2 > 0$: gain d'énergie mécanique.

   Le rôle d'Indiana Jones était d'augmenter l'énergie mécanique du système par apport d'énergie d'origine musculaire.

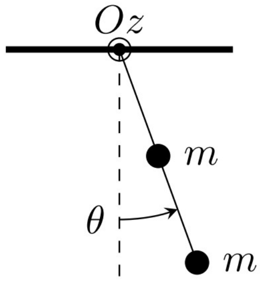
On note que la cordelette peut se rompre lorsque $T > T_0$

5. Du point de vue énergétique, quel a été le rôle de notre héros ? Discutez de ce qui va arriver s'il continue sa remontée.
   Réponse :
   Par conservation du moment cinétique, $mrv = mlv_0 \Rightarrow v = \frac{v_0 l}{r}$ la vitesse de A pour $OA = r$. La vitesse de A va tendre vers l'infini quand r va tendre vers 0 (il faudrait un apport d'énergie infini). On peut, par application du principe fondamental de la dynamique montrer que $T = \frac{mv_0^2}{r}$ va également tendre vers l'infini, le filin va rompre.

Sujet 2 – corrigé

I Pendule à deux masses

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige et on suppose l'absence de frottement au niveau de la liaison pivot.



1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0$$

Réponse :
Utilisons le théorème du moment cinétique autour de l'axe (Oz) au système composé de la barre rigide et des deux masses qui y sont attachées. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Seul le poids associé à chacune des deux masses est associé à un moment non nul, considérant comme l'indique l'énoncé que la liaison pivot est parfaite.

Considérons tout d'abord le poids $\overrightarrow{P_1}$ de la masse m à la distance $L/2$ du point O. Le bras de levier est égal à $(L/2)\sin(\theta)$, si bien que

$$\left|\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1})\right| = mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De plus, le poids a tendance à faire tourner le pendule dans le sens horaire si θ est positif dans le sens trigonométrique. Ainsi,

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De manière tout à fait analogue, le moment du poids $\overrightarrow{P_2}$ associée à la masse située à la distance L s'écrit

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2}) = -mgL\sin(\theta)$$

Evaluons par ailleurs le moment cinétique associé au systèmes de points par sommation des moments cinétiques de chacun des points

$$\overrightarrow{L}_O = \frac{L}{2}\overrightarrow{u_r} \wedge m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + L\overrightarrow{u_r} \wedge mL\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mL^2\left(\frac{1}{4}+1\right)\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Soit
$$L_{Oz} = \overrightarrow{L}_O \cdot \overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) + \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2})$$

Il vient
$$\frac{5}{4}mL^2\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta) - mgL\sin(\theta)$$

Soit $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin(\theta) = 0}$$

Remarque : Au besoin, il serait possible de linéariser cette équation pour retomber sur l'équation classique d'un oscillateur harmonique.

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.
Réponse :
Appliquons la définition du barycentre G à partir d'un point quelconque, ici nous choisirons le point O :

$$2m\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OM_1} + m\overrightarrow{OM_2} = m\left(\frac{L}{2}\overrightarrow{u_r} + L\overrightarrow{u_r}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3L}{4}\overrightarrow{u_r}}$$

La distance OG est donc bien de $3L/4$.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?
Réponse :
Pour s'en convaincre, le plus simple est encore d'essayer. Si toute la masse $2m$ est concentrée au point G, nous aurions :

- $$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_{\text{tot}}}) = -2mg(3L/4)\sin(\theta) = -mg(3L/2)\sin(\theta)$$
- $$L_{Oz} = 2m(3L/4)^2\dot{\theta} = m(9L^2/8)\dot{\theta}$$

Soit, d'après le théorème du moment cinétique,

$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{3L}\sin(\theta) = 0$$

L'équation du mouvement n'est pas identique, preuve que les deux systèmes ne sont pas mécaniquement équivalents. Pour les solides en rotation, il n'est pas possible de traiter le problème "comme si"toute la masse était concentrée au barycentre du système. Cela est du au fait que l'expression dépend de la répartition de masse par rapport à l'axe de rotation et non uniquement de la position du barycentre.

Sujet 3 – corrigé

I Lancement d'un satellite

On souhaite lancer un satellite assimilable à un point matériel M de masse $m = 6\,\mathrm{t}$ depuis un point O à la surface de la Terre, sur une orbite basse d'altitude h. On note $E_m(h)$ l'énergie du satellite sur cette orbite. Pour cela, il faut lui communiquer une énergie $\Delta E_m = E_m(h) - E_m(O)$, où $E_m(O)$ est l'énergie du satellite au point O dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$.
On note $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ la masse de la Terre, $R_T = 6400\,\mathrm{km}$ son rayon et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$ la constante gravitationnelle.

1. Définir les référentiels géocentrique et terrestre. Dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement du satellite ?
   Réponse :
   Le référentiel géocentrique est lié au repère dont le centre est le centre de masse de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes lointaines.

   Le référentiel terrestre est lié au repère dont le centre est un point à la surface de la Terre et dont les axes sont en rotation par rapport à l'axe des pôles fixe dans le référentiel géocentrique.

   On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

2. Exprimer l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite en fonction de G, m, M_T, R_T et h. Calculer E_m pour $h = 1000\,\mathrm{km}$.
   Réponse :
   $E_m(h) = -\dfrac{GmM_T}{2(R_T + h)} = -1{,}6 \times 10^{11}\,\mathrm{J}$

3. On note Ω la vitesse angulaire correspondant à la rotation de la Terre sur elle-même. Calculer Ω.
   Réponse :
   Rotation uniforme $\Omega = \dfrac{2\pi}{T} = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\mathrm{rad \cdot s^{-1}}$ autour de l'axe des pôles, avec $T = 24\,\mathrm{h}$

4. On note λ la latitude du point de lancement O du satellite. Préciser le mouvement de O dans le référentiel géocentrique. En déduire l'expression de la norme de la vitesse $v(O)$ de ce point.
   Réponse :
   O est animé d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe des pôles de rayon $r(O) = R_T \cos(\lambda)$:
   $v(O) = R_T \cos(\lambda)\Omega$

5. Exprimer l'énergie mécanique dans le référentiel géocentrique $E_m(O)$ du satellite de masse m situé en O.
   Réponse :
   $E_m(O) = \dfrac{1}{2} m R_T^2 \Omega^2 \cos^2(\lambda) - \dfrac{GmM_T}{R_T}$

6. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite.
   Réponse :
   On veut que l'énergie à fournir $\Delta E_m = E_m(h) - E_m(O)$ soit minimale, donc que $E_m(O)$ soit maximale. Pour cela il faut que $\cos^2(\lambda)$ soit maximale, donc $\lambda = 0$ (la latitude $\lambda \in [-\pi/2; +\pi/2]$). Il faut lancer le satellite depuis l'équateur.

7. Parmi les bases de lancement suivantes, laquelle choisir de préférence ?

   - Kourou en Guyane française : $\lambda = 5{,}23°$
   - Cap Canaveral aux USA : $\lambda = 28{,}5°$

- Baïkonour au Kazakhstan : $\lambda = 46°$

Réponse :
Kourou

8. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse d'altitude h depuis Kourou.
Réponse :
$E_m(O) = -3{,}75 \times 10^{11}$ J, donc $\Delta E_{m,K} = 0{,}45 \times 10^{11}$ J

9. Calculer l'énergie supplémentaire à apporter si on lance le satellite depuis Baïkonour. Commenter.

Réponse :
$\Delta E = \dfrac{1}{2} m R_T^2 \Omega^2 (\cos^2(\lambda_K) - \cos^2(\lambda_B)) = 3 \times 10^8$ J

Soit un apport relatif supplémentaire : $\Delta E / \Delta E_{m,K} = 0{,}8\%$

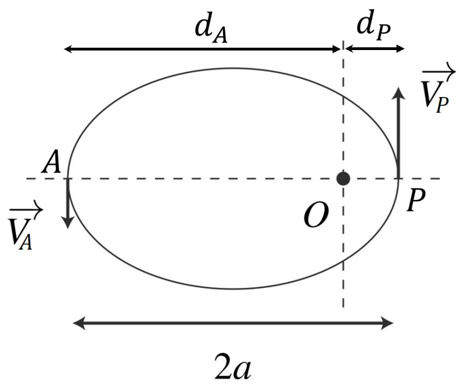
L'écart relatif est faible mais l'écart énergétique élevée. Donc le lancement est plus couteux en terme de carburant, mais cela représente qu'une faible portion du budget...

Sujet 4 – corrigé

I Satellite en orbite elliptique

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1 \times 10^3$ kg. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200$ km au périgée et $d_A = 35{,}9 \times 10^3$ km à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche du centre attracteur (ici la Terre) et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée $v_A = 3{,}5 \times 10^2\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.
   Réponse :
   La Terre est située à l'un des foyers de l'ellipse. A et P sont situés sur le grand-axe de l'ellipse de part et d'autre du point O.



2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.
   Réponse :
   On a $$a = \frac{d_P + d_A}{2} = \text{unit}18{,}1e3km$$

3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.
   Réponse :
   D'après le cours, on suppose que l'énergie mécanique vaut, pour une trajectoire ellpitique et par analogie avec une trajectoire circulaire
   $$E_m = \frac{-\mathcal{G} m M_T}{2a} = -1{,}2 \times 10^{10}\ \mathrm{J}$$
   Afin de déterminer la période, utilisons la troisième loi de Kepler et évaluons la valeur de la constante T^2/a^3 pour la Terre comme centre attracteur en se souvenant que pour un satellite géostationnaire (donc tel que $T_{\text{geo}} = 24$ h), son altitude est $h_{\text{geo}} = 36 \times 10^3$ km soit $a_{\text{geo}} = 42{,}4 \times 10^3$ km en additionnant le rayon de la Terre. Sachant que T^2/a^3 est une constante, il vient
   $$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\text{geo}}^2}{{a_{\text{geo}}}^3} \quad \Rightarrow \quad T = T_{\text{geo}} \left(\frac{a}{a_{\text{geo}}}\right)^{3/2} = 6{,}7\ \mathrm{h}$$

4. On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée en fonction, entre autre, des vitesses.
   Réponse :
   Notons S le point matériel décrivant le satellite. A l'apogée et au périgée, la distance OS est extrémale (respectivement maximale et minimale). Par conséquent, la vitesse est purement orthoradiale en ces

points, si bien que $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_P}$ sont orthogonales à respectivement OA et OP. Ainsi le module du moment cinétique en ces points s'écrit

$$L_{/O}(S = A) = m d_A v_A \quad \text{et} \quad L_{/O}(S = P) = m d_P v_P$$

5. En déduire la vitesse du satellite à son périgée.
Réponse :
Le mouvement est à force centrale de centre O. Le moment cinétique en O est donc une grandeur conservée au cours du mouvement si bien que

$$d_A v_A = d_P v_P \quad \Rightarrow \quad v_P = v_A \tfrac{d_A}{d_P} = 6{,}3 \times 10^4 \,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

Sujet 5 – corrigé

I Calcul du moment d'une force ($\star$)

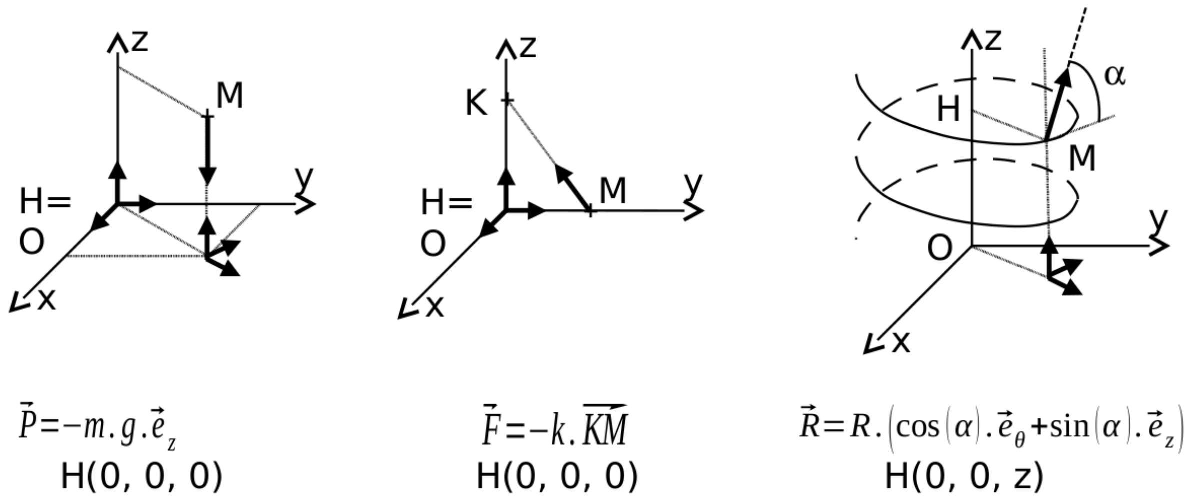


Figure 20.1: Forces dont il faut calculer le moment.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le moment de la force en H par calcul vectoriel direct.

1. (a) Poids $\vec{P}$ appliqué en $M(x,y,z)$.
   Réponse :
   On peut mener le calcul de différentes façons. Utilisez celle qui vous semble la plus logique.

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P}) = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{-mgy\vec{e}_x + mgx\vec{e}_y}.$$

   (b) Force de rappel $\vec{F}$ appliquée en $M(0,y,0)$.
   Réponse :

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{F}) = -ky\vec{e}_y \wedge \overrightarrow{KM} = -ky\vec{e}_y \wedge \left(\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HM}\right) = kyKH\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \boxed{kyKH\vec{e}_x}.$$

   (c) Réaction $\vec{R}$ appliquée en $M(r,\theta,z)$.
   Réponse :
   On se place dans les coordonnées cylindro-polaires :

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{R}) = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos\alpha \\ R\sin\alpha \end{pmatrix} = rR \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \boxed{-rR\sin\alpha\vec{e}_\theta + rR\cos\alpha\vec{e}_z}.$$

2. Dans chacun des cas précédents, déterminer le moment de la force par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_x)$ pour $\vec{P}$ et $\vec{F}$ et par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_z)$ pour $\vec{R}$ par détermination de la distance à l'axe de rotation (bras de levier) et par un raisonnement sur la direction puis par projection du moment calculé à la question 1.

   Réponse :

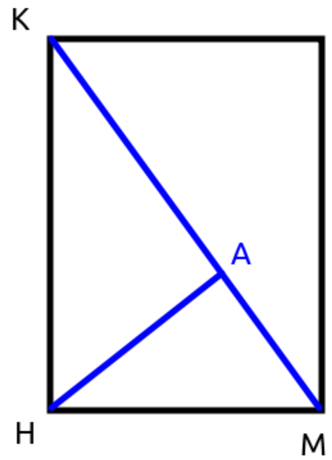
$$\vec{\mathcal{M}}_x(\vec{P}) = \vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P}).\vec{e}_x = \boxed{-mgy}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_x)$ est y. L'intensité de la force est mg. Cette force tend à faire tourner le point M autour de l'axe $(H\vec{e}_x)$ dans le sens indirect. Finalement on retrouve :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_x(\vec{P}) = \boxed{-mgy}.$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_x(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_H(\vec{F}).\vec{e}_x = \boxed{kyKH}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_x)$ est la distance entre H et le projeté orthogonal de H sur le segment $[KM]$ (appelons le A). L'intensité de la force est $k \times KM$. Cette force tend à faire tourner le point M autour de l'axe $(H\vec{e}_x)$ dans le sens direct. On remarque que $HA \times KM$ est le double de l'aire du triangle HKM.



On en déduit que :

$$HA \times KM = HM \times HK = yHK$$

Finalement on retrouve :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_x(\vec{P}) = +HA \times kKM = \boxed{kyHK}.$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_z(\vec{R}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_H(\vec{R}).\vec{e}_z = \boxed{rR\cos\alpha}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_z)$ est r. L'intensité de la force dans le plan orthogonal à l'axe $(H\vec{e}_z)$ est $R\cos\alpha$. Cette force tend à faire tourner le point M sans le sens direct autour de l'axe $(H\vec{e}_z)$. Finalement :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_z(\vec{R}) = +R \times R\cos\alpha = \boxed{rR\cos\alpha}.$$