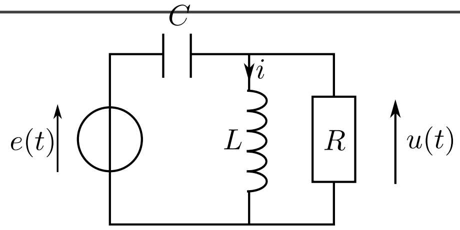
Khôlles MPSI – semaine 11

Sujet 1 – corrigé

I Étude de la résonance (⋆⋆)

Le circuit suivant est alimenté par une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\sqrt{2}\cos(\omega t)$, avec $E_0 > 0$. On note $u(t) = U_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_u)$ la tension aux bornes de la résistance et $i(t) = I_0\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi_i)$ le courant traversant la bobine.



On donne $R = 100\,\Omega$, $L = 10\,\mathrm{mH}$ et $C = 10\,\mu\mathrm{F}$.

1) La constante E_0 correspond-elle à l'amplitude ou à la valeur efficace du signal $e(t)$. On justifiera la réponse en définissant ces deux termes.

Réponse

Le signal $e(t)$ est sinusoïdal. L'amplitude est la valeur maximale, donc $E_{\max} = E_0\sqrt{2}$. La valeur efficace d'un signal sinusoïdal est $E_{eff} = E_{\max}/\sqrt{2} = E_0$. Donc ici E_0 correspond à la valeur efficace de $e(t)$.

◇

A Étude de $u(t)$

2) On note $\underline{u}(t) = \underline{U_0}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ le complexe associé au signal $u(t)$ tel que $u(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}(t))$. Montrer que $\underline{U_0}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{U_0} = \frac{E_0 \times (jx)^2}{1 + jx/Q + (jx)^2}$$

où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Exprimer les constantes ω_0 et Q en fonction de L, C et R.

Réponse

Soit $\underline{Z_{eq}}$ l'impédance équivalente à l'association en parallèle de la bobine et de la résistance. On applique un pont diviseur de tension :

$$\underline{U_0} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}} + 1/jC\omega}E_0 = \frac{E_0}{1 + \dfrac{1}{jC\omega\underline{Z_{eq}}}} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{\underline{Z_{eq}}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R} = \frac{R + jL\omega}{jLR\omega}$$

$$\underline{U_0} = \frac{E_0}{1 + \dfrac{R + jL\omega}{jC\omega \times jRL\omega}} = \frac{E_0 \times LC(j\omega)^2}{1 + jL\omega/R + LC(j\omega)^2} \quad ; \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad ; \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

◇

3) Exprimer $U_0(x)$ en fonction de E_0, x et Q.

Réponse

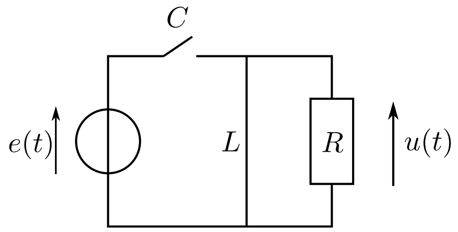
$U_0(x)$ est le module de $\underline{U_0}$: $\boxed{U_0 = \dfrac{x^2}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2/Q^2}}E_0}$

◇

4) Représenter le schéma électrique équivalent à basse fréquence et en déduire la limite de $U_0(x)$ à basse fréquence. Vérifier ce résultat à l'aide de la réponse à la question précédente. On donnera l'équivalent mathématique de $U_0(x)$ à basse fréquence.

Réponse

A basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil.



La tension $u(t)$ est celle aux bornes d'un fil, donc $\boxed{\lim_{\omega\to 0} U_0 = 0}$.

Équivalent de $U_0(x)$:

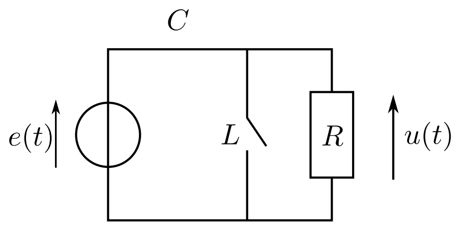
$$\boxed{U_0(x) \underset{x\ll 1}{\sim} x^2 E_0 \underset{x\to 0}{\longrightarrow} 0}$$

◇

5) Reprendre la question précédente pour les hautes fréquences.

Réponse

A haute fréquence, le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert.



La tension $u(t)$ est celle du générateur, donc $\boxed{\lim_{\omega\to +\infty} U_0 = E_0}$.

Équivalent de $U_0(x)$:

$$\boxed{U_0(x) \underset{x\gg 1}{\sim} \frac{x^2}{\sqrt{x^4}} E_0 = E_0}$$

◇

6) Définir la notion de résonance. À partir de l'étude des limites, peut-on dire qu'il existe nécessairement une résonance de la tension $u(t)$?

Réponse

La résonance d'un signal correspond à un maximum du signal pour une pulsation non nulle. Dans le cas de $u(t)$, l'étude des limites ne permet pas de conclure quant à l'existence d'un maximum pour x donné.

◇

7) Montrer qu'il existe une pulsation réduite de résonance x_r si et seulement si $Q > 1/\sqrt{2}$. Pour cela, on écrira $U_0(x)$ sous la forme $U_0(x) = \dfrac{E_0}{\sqrt{f(x)}}$, où $f(x)$ est une fonction que l'on définira. En déduire l'expression de la pulsation de résonance ω_r en fonction de ω_0 et Q. Comparer ω_r à ω_0.

Réponse

On réécrit $U_0(x)$ de manière à ce que seul le dénominateur dépende de x :

$$U_0(x) = \frac{E_0}{\sqrt{(1/x^2 - 1)^2 + 1/(x^2 Q^2)}}$$

On pourrait faire un changement de variable en posant $u = 1/x^2$.

La fonction $U_0(x)$ est maximale quand la fonction $f(x) = (x^{-2} - 1)^2 + x^{-2}/Q^2$ est minimale. On dérive par rapport à x :

$$\frac{df}{dx} = 2(x^{-2} - 1) \times (-2x^{-3}) + (-2x^{-3})/Q^2 = -2x^{-3}\left(2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{1}{Q^2}\right)$$

On cherche la pulsation réduite x_r telle que $f'(x_r) = 0$:

$$f'(x_r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad 2\left(\frac{1}{x_r^2} - 1\right) + \frac{1}{Q^2} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{Q^2}$$

Cette équation admet une solution réelle si $1 - \dfrac{1}{Q^2} > 0$*, soit* $Q > 1/\sqrt{2}$*, alors :*

$$\boxed{x_r = \frac{1}{\sqrt{1 - 1/(2Q^2)}} \quad si \quad Q > 1/\sqrt{2}}$$

On constate que $x_r > 1$*, donc* $\boxed{\omega_r = x_r \omega_0 > \omega_0}$.

◇

8) Donner l'expression de U_0 pour $x = 1$. Calculer le facteur de qualité.

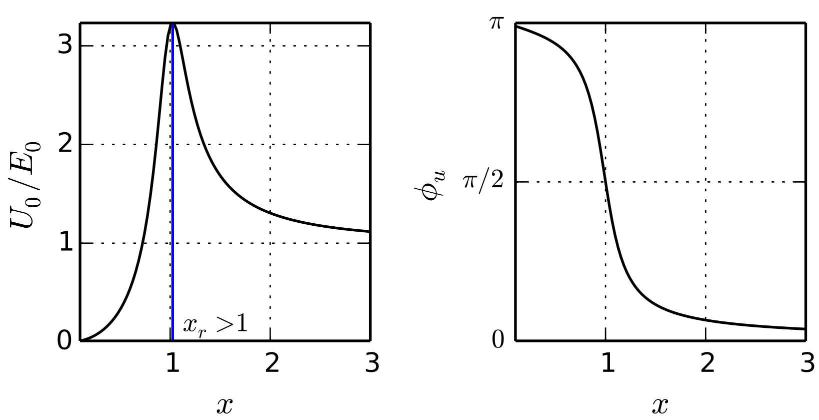
Réponse

$U_0(x = 1) = QE_0$ et $Q = 3{,}2$

◇

9) Tracer l'allure de U_0 en fonction de x.

Réponse



◇

10) Exprimer la phase ϕ_u en fonction de x et Q. Faire l'étude des limites et tracer l'allure de ϕ_u en fonction de x.

Réponse

$\phi_u = \arg(\underline{U_0})$, or la partie réelle du dénominateur de $\underline{U_0}$ change de signe en fonction de x, on ne peut pas appliquer la fonction arctangente. On réécrit $\underline{U_0}$ en multipliant au numérateur et au dénominateur par $-j$:

$$\underline{U_0} = \frac{jE_0x^2}{x/Q - j(1 - x^2)} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\phi_u(x) = \pi/2 + \arctan\left(\frac{Q(1 - x^2)}{x}\right)}$$

Étude des limites :

- $\lim_{x \to 0} \phi_u(x) = \pi$
- $\lim_{x \to +\infty} \phi_u(x) = 0$
- $\phi_u(x = 1) = \pi/2$

◇

B Étude de $i(t)$

11) On note $\underline{i}(t) = \underline{I_0}\sqrt{2}\exp(j\omega t)$ le complexe associé au signal $i(t)$ tel que $i(t) = \mathrm{Re}(\underline{i}(t))$. Montrer que $\underline{I_0}$ peut se mettre sous la forme :

$$\underline{I_0} = \frac{I_{\max}}{1 + jQ(x - 1/x)}$$

où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite, ω_0 la pulsation propre et Q le facteur de qualité. Exprimer $I_{\max}$ en fonction de E_0, L, C et R.

Réponse

On applique la loi d'Ohm généralisée sur la bobine :

$$\underline{I_0} = \frac{U_0}{jL\omega} = \frac{E_0 RC/L}{1 + jR(C\omega - 1/(L\omega))}$$

Par identification, on retrouve les expressions de Q et ω_0 et on a $\boxed{I_{\max} = E_0 RC/L}$.

◇

12) Justifier que l'expression de $I_{\max}$ obtenue est homogène.

Réponse

On sait que $[RC] = [L/R] = T$:

$$[E_0 RC/L] = [E_0/R] \times [R^2 C/L] = I \times \frac{[RC]}{[L/R]} = I$$

C'est bien une intensité électrique.

◇

13) Exprimer I_0 en fonction de $I_{\max}$, x et Q. Faire l'étude des limites de la fonction $I_0(x)$. On précisera l'équivalent mathématique de $I_0(x)$ à haute et basse fréquences.

Réponse

I_0 est le module de $\underline{I_0}$:

$$\boxed{I_0(x) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{1 + Q^2(x - 1/x)^2}}}$$

Étude des limites :

- $\lim_{x\to 0} I_0(x) = \lim_{x\to 0} I_{\max} x / = 0$
- $\lim_{x\to +\infty} I_0(x) = \lim_{x\to +\infty} I_{\max}/(Qx) = 0$

◇

14) A partir de l'étude des limites, peut-on dire qu'il existe nécessairement une résonance de l'intensité $i(t)$?

Réponse

Comme $I_0(x) > 0$ et que les limites à haute et basse fréquences sont nulles, il existe nécessairement une résonance en intensité.

◇

15) Déterminer la pulsation réduite à la résonance.

Réponse

$I_0(x)$ est maximale pour $x_r = 1$, alors $I_0(x = 1) = I_{\max}$.

◇

16) Définir la bande passante $\Delta x = [x_1,x_2]$. Exprimer x_1 et x_2 en fonction de Q.

Réponse

Les valeurs de $x \in \Delta x$ vérifient $\boxed{I_0(x) \geq I_{\max}/\sqrt{2}}$. On cherche les solutions de l'équation $I_0(x) = I_{\max}/\sqrt{2}$:

$$\frac{I_{\max}}{\sqrt{1+Q^2(x-1/x)^2}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \quad \Leftrightarrow \quad (Q(x-1/x))^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad Q(x-1/x) = \pm 1$$

On obtient deux trinômes de même discriminent :

$$Qx^2 \pm x - Q = 0 \quad ; \quad \Delta = 1 + 4Q^2$$

Parmi les quatre solutions, seules deux sont positives :

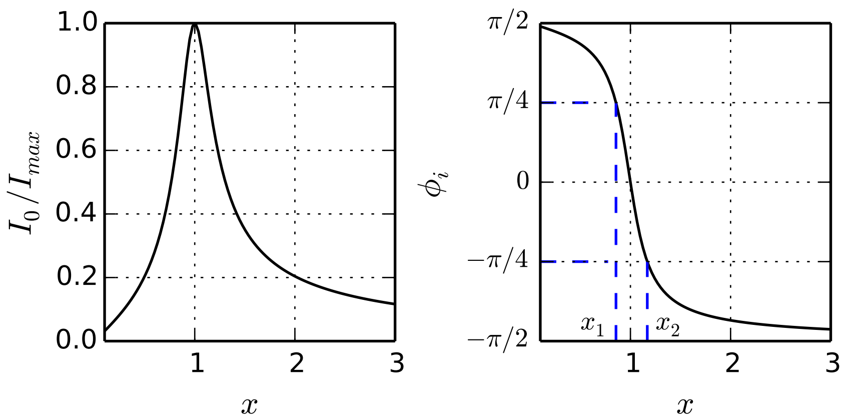
$$\boxed{x_1 = \frac{-1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q} \qquad x_2 = \frac{1+\sqrt{1+4Q^2}}{2Q}}$$

On retrouve $\Delta x = 1/Q$, soit $\dfrac{\Delta\omega}{\omega_0} = 1/Q$.

◇

17) Tracer l'allure de I_0 en fonction de x. On placera la bande passante sur le graphique.

Réponse



◇

18) Exprimer la phase ϕ_i en fonction de x et Q. Faire l'étude des limites et tracer l'allure de ϕ_i en fonction de x. On placera la bande passante sur le graphique.

Réponse

$\phi_i = \arg(\underline{I_0})$. La partie réelle du dénominateur de $\underline{I_0}$ est toujours positive, donc on peut utiliser la fonction arctangente :

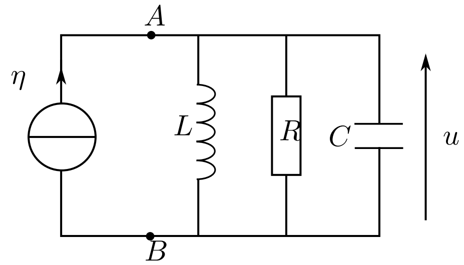
$$\boxed{\phi_i = -\arctan[Q(x-1/x)]}$$

- $\lim_{x\to 0} \phi_i(x) = \pi/2$
- $\lim_{x\to +\infty} \phi_i(x) = -\pi/2$
- $\phi_i(x=1) = 0$
- $\phi_i(x_1) = \pi/4$ et $\phi_i(x_2) = -\pi/4$

Sujet 2 – corrigé

I Résonance

Le circuit ci-contre est constitué d'une source idéale de courant de c.e.m. $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$. Cette source alimente une association parallèle constituée d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance. La tension aux bornes de cette association est $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$. On note $\underline{U_0} = U_0 e^{j\phi}$ l'amplitude complexe de $u(t)$.



A Étude de l'amplitude et de la phase

1) Exprimer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ du dipôle AB.

Réponse

Dans le cas d'une association de dipôle en parallèle, on additionne les admittances :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}}$$

2) Montrer que l'amplitude complexe de la tension u se met sous la forme :

$$\underline{U_0} = \frac{R\eta_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec } x = \omega/\omega_0$$

Exprimer Q et ω_0 en fonction de R, L et C. Comment s'appellent ces deux constantes ?

Réponse

On applique la loi d'Ohm généralisée sur le dipôle équivalent $\underline{Z}$, en utilisant les amplitudes complexes du courant et de la tension :

$$\underline{U_0} = \underline{Z}\eta_0 = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}\eta_0$$

On divise par $jL\omega$ et on trouve : $\boxed{\underline{U_0} = \dfrac{R\eta_0}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}}$

Par identification on a $RC = \dfrac{Q}{\omega_0} \qquad \dfrac{R}{L} = Q\omega_0$.

On en déduit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$.

ω_0 est la pulsation propre du circuit et Q le facteur de qualité.

3) Exprimer l'amplitude réelle U_0 de la tension u en fonction de R, η_0, Q et x.

Réponse

$$\boxed{U_0 = |\underline{U_0}| = \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

◇

4) Y-a-t-il résonance en tension ? Si oui, préciser la valeur de x à la résonance. En déduire la valeur de ω à la résonance.

Réponse

La résonance correspond à un maximum de la fonction U_0 à $x \neq 0$. U_0 est maximale si son dénominateur est minimal, soit quand $x - 1/x = 0$.

Il y a toujours résonance en tension pour $x = 1$, soit $\omega = \omega_0$.

◇

5) Comment définit-on la bande passante $\Delta\omega$? Montrer que $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

Réponse

La bande passante $\Delta\omega$ est l'ensemble des pulsations ω vérifiant $U_{max}/\sqrt{2} \leq U_0(\omega) \leq U_{max}$.

Soit $\Delta\omega = [\omega_1;\omega_2]$, avec ω_1 et ω_2 solutions de l'équation $U_0(\omega) = U_{max}/\sqrt{2}$, soit :

$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Parmi les 4 solutions de ces 2 équations polynomiales de degré 2, seules 2 solutions sont acceptables car donnant $x > 0$:

$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \qquad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1+4Q^2}$$

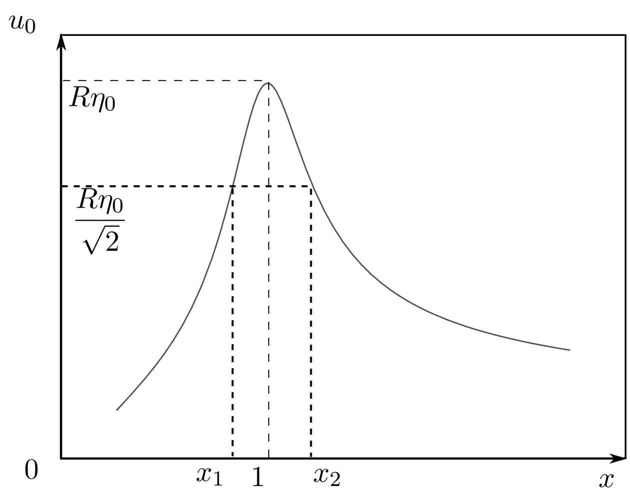
On obtient $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/Q$, soit $\Delta\omega = \omega_0\Delta x = \omega_0/Q$

◇

6) Faire l'étude asymptotique de la fonction $U_0(x)$. Tracer l'allure de U_0 en fonction de x.

Réponse

- si $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0} U_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R\eta_0}{Q} x = 0$
- si $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} U_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R\eta_0}{Q}\dfrac{1}{x} = 0$
- si $x = 1$, $U_0(1) = R\eta_0$



7) Exprimer la phase ϕ en fonction de Q et x. Préciser le domaine de variation de ϕ.

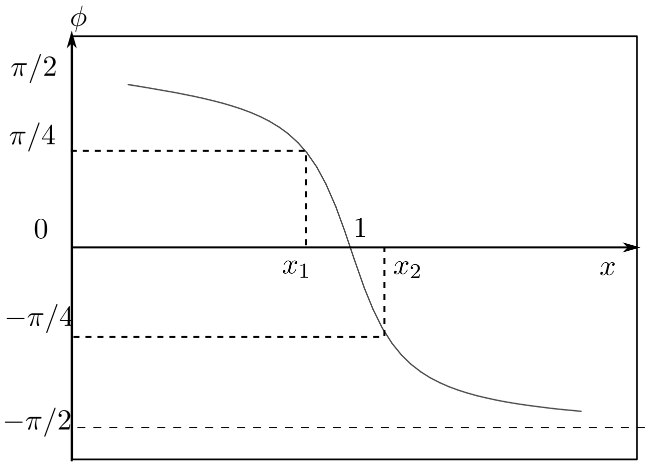
Réponse

$\phi = -\arctan\left(Q(x - 1/x)\right) \in]-\pi/2; \pi/2[$

8) Faire l'étude asymptotique de la fonction $\phi(x)$. Tracer l'allure de ϕ en fonction de x.

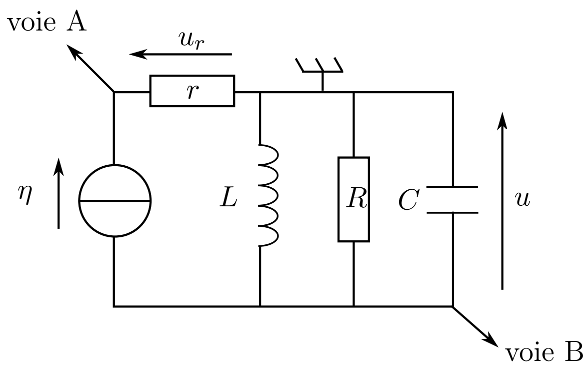
Réponse

- si $x \to 0$: $\lim_{x\to 0} \phi(x) = \pi/2$
- si $x \to +\infty$: $\lim_{x\to +\infty} \phi(x) = -\pi/2$
- si $x = 1$: $\phi(1) = 0$



B Expérience

Pour tracer les graphiques U_0 et ϕ en fonction de ω, il faut pouvoir observer simultanément le courant $\eta(t)$ et la tension $u(t)$. On ajoute une résistance r en série avec le générateur de courant afin de visualiser le courant $\eta(t)$ par l'intermédiaire de la tension $u_r(t)$. On propose le montage ci-contre.



9) Le montage proposé est-il valable ? Si oui, à quelle condition ?

Réponse

Le montage est valable si le générateur de courant n'impose pas de masse, c'est-à-dire avec un générateur à masse flottante.

10) Quelle tension visualise-t-on sur la voie A ? sur la voie B ? Que faut-il faire pour visualiser $\eta(t)$ et $u(t)$?

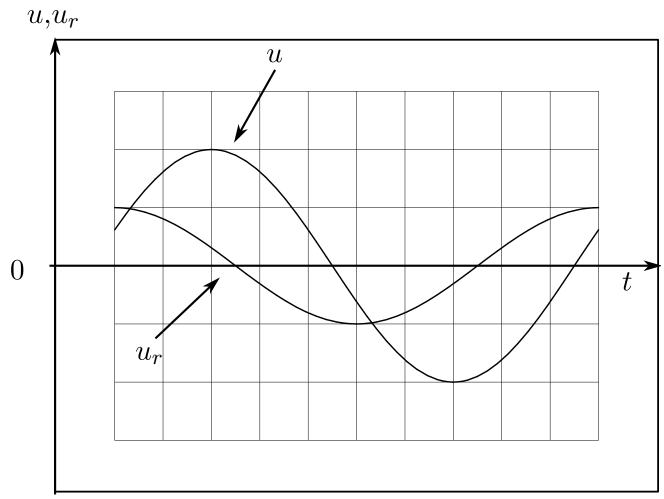
Réponse

Sur la voie A, on visualise la tension $u_r(t) = r\eta(t)$. Donc il faut diviser par r la voie A pour visualiser $\eta(t)$.

Sur la voie B, on visualise $-u(t)$. Donc il faut inverser la voie B pour visualiser $u(t)$.

◇

La figure suivante montre une acquisition des tensions u_r et u faite pour une pulsation ω donnée. Le calibre est de 1 V sur les deux voies.



11) La tension u est-elle en avance ou en retard par rapport au courant η ?

Réponse

La tension u est en retard par rapport au courant η car son maximum arrive après celui de la tension u_r.

◇

12) Déterminer la valeur de la phase ϕ de la tension u par rapport au courant η. On donnera sa valeur en degré.

Réponse

Une période du signal u_r (ou u) correspond à 10 carreaux. Donc un retard de 1 carreau correspond à un déphasage de $-36°$.

Ici, on a 2 carreaux de déphasage entre u et u_r, donc $\boxed{\phi = -72°}$

◇

13) Que vaut l'amplitude U_0 de la tension u ?

Réponse

L'amplitude de $u(t)$ correspond à 2 carreaux, donc $\boxed{U_0 = 2\,\mathrm{V}}$.

◇

14) Définir mathématiquement la valeur efficace s_{eff} d'un signal $s(t)$ périodique de période T.

Réponse

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)dt}$$

◇

15) Soit un signal $s(t)$ sinusoïdal de période T, d'amplitude S_0 et de phase à l'origine nulle. Exprimer sa valeur efficace s_{eff} en fonction de S_0. On étblira cette relation.

Réponse

On écrit la fonction $s(t)$: $s(t) = S_0 \cos(2\pi t/T)$

$$s_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T S_0^2 \cos^2(2\pi t/T)dt$$

On linéarise le cosinus carré : $\cos^2(2\pi t/T) = \dfrac{1+\cos(4\pi t/T)}{2}$

Puis on intègre, et on obtient :

$$s_{eff}^2 = \frac{S_0^2}{2T}\left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos(4\pi t/T)dt\right] = \frac{S_0^2}{2}$$

Car $\int_0^T \cos(4\pi t/T)dt = 0$. On en déduit $\boxed{s_{eff} = S_0/\sqrt{2}}$

◇

16) En déduire la valeur efficace de la tension $u(t)$. On donne $\sqrt{2} = 1{,}4$.

Réponse

$u_{eff} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1{,}4\,\mathrm{V}$

◇

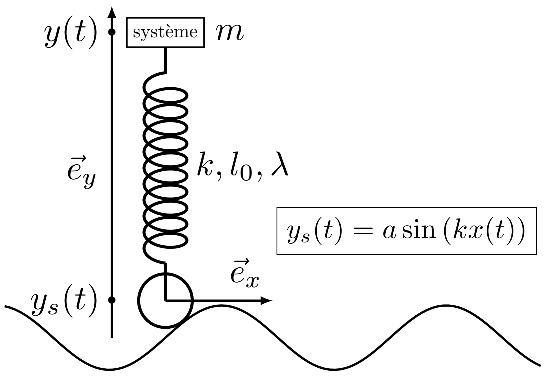
Sujet 3 – corrigé

I Entrée en résonance d'une suspension ($\star$)

On considère le cas d'un véhicule de masse m roulant à la vitesse (horizontale) v_0 sur une route de profil harmonique $y(x) = a\sin(kx)$ avec $x = v_0 t$. On posera par la suite $\omega = kv_0$.

Le véhicule est relié aux roues par une suspension, modélisée par un ressort de longueur à vide l_0, et de raideur k. De plus, on prendre en compte une force de frottement fluide exercée par l'air ambiant sur le véhicule d'expression $\vec{f} = -\lambda v_y \vec{e}_y$.

Dans toute la suite, on notera $y(t)$ l'abscisse du véhicule et $y_s(t)$, l'abscisse du sol.



1) Effectuer un bilan des force verticales exercées sur le véhicule

Réponse

On se place en base cartesienne et on obtient pour le bilan des forces

- Le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$
- La force de frottement $\vec{f} = -\lambda v_y \vec{e}_y$
- La force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_y$ avec $l = y(t) - y_s(t)$

◇

2) En déduire l'équation du mouvement pour l'inconnue y sous sa forme canonique.

Réponse

On applique le principe fondamental de la dynamique au véhicule dans le référentiel galiléen lié au sol selon l'axe vertical $\vec{e}_y$.

$$m\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ky + ky_s + kl_0$$

soit sous la forme canonique

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}(y_s + l_0) - g}$$

◇

On cherche à obtenir une solution particulière $y_p(t)$ de cette équation sous la forme $y_p(t) = y_h(t) + y_c$ avec $y_h = Y\cos(\omega t + \phi)$, une fonction harmonique, associée à la partie harmonique du second membre et y_c, une fonction constante, associée à la partie constante du second membre.

3) De quelle équation y_c est-elle solution ? Exprimer alors y_c en fonction des données du problème.

Réponse

On ne garde que la partie constante du second membre d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2 y_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y_c = \frac{k}{m}(l_0) - g$$

d'où l'on déduit $\boxed{y_c = l_0 - mg/k}$.

4) De quelle équation y_h est-elle solution ? On pose alors $\underline{y}_h(t) = \underline{Y}_c e^{j\omega t}$ tel que $y_h(t) = \mathrm{Re}(\underline{y}_h(t))$. Déduire de ce qui précède l'expression de $\underline{Y}_c$ en fonction de λ,k,m,ω et a.

Réponse

Comme pour la question précédente, on ne garde cette fois ci que la partie harmonique du second membre d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}a\cos(\omega t - \pi/2)$$

en remarquant que $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$. On passe ensuite l'équation aux complexe d'où

$$(j\omega)^2\underline{Y}_c + \frac{\lambda}{m}j\omega\underline{Y}_c + \frac{k}{m}\underline{Y}_c = \frac{k}{m}ae^{-j\pi/2}e^{j\omega t}$$

d'où l'on déduit après simplification

$$\underline{Y}_c = \frac{ae^{-j\pi/2}}{1 + \frac{\lambda}{k}j\omega + \frac{m}{k}(j\omega)^2}$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre du système et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$, son facteur de qualité

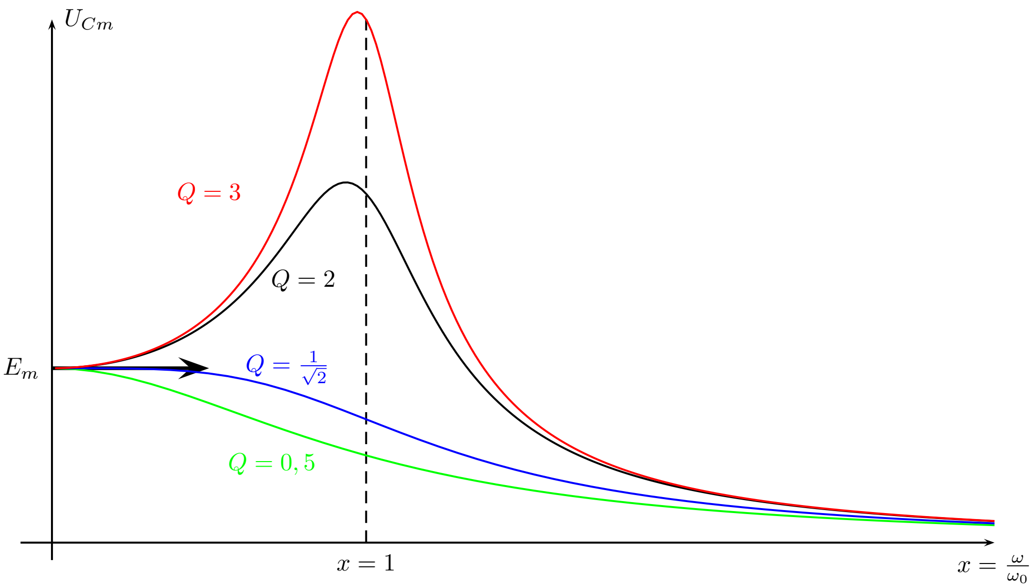
5) Vers quelle limite tend l'amplitude Y de $y_h(t)$ en basse fréquence ? De même, donner un équivalent de cette amplitude en haute fréquence. Exprimer ensuite cette amplitude pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ en fonction de a et de Q. En déduire la courbe de Y en fonction de ω pour différentes valeurs du facteur de qualité (par exemple 0,5 ; 1 ; 2)

Réponse

On a $Y = |\underline{Y}_c| \to a$ lorsque $\omega \to 0$. De même, en haute fréquences, on obtient $Y \sim \frac{k}{m}\frac{a}{\omega^2}$ donc l'amplitude tend vers 0 lorsque $\omega \to +\infty$.

De plus, on a pour $\omega = \omega_0$, $Y = a\frac{k}{\lambda\omega_0} = a\frac{mk}{\lambda} = aQ$

Ces expressions permettent de tracer les courbes demandées.



6) La résonance est-elle obtenue pour toute les valeurs possible du facteur de qualité ? S'agit-il du même type de résonance que celle obtenue pour l'intensité d'un circuit RLC ?

Réponse

On observe graphiquement que la résonance n'apparait que lorsque Q est élevé. Ce résultat est contraire à celui obtenu en cours. C'est donc bien un autre type de résonance que celui en intensité. C'est logique puisque l'élongation du système ressort est analogue à la charge du condensateur, soit à C près analogue à la tension ; en étudiant la vitesse du système on trouverait la même résonance.

◇

7) ($\star\star$) Déterminer précisément, et par le calcul, à partir de quelle valeur notée Q_c la résonance apparaît. Cette dernière se caractérise par l'apparition d'un maximum local dans la courbe $Y(\omega)$.

Réponse

On obtient après de longs calculs que $Q_c = 1/\sqrt{2}$

◇

Sujet 4 – corrigé

I Circuit RLC en RSF

On dispose de deux circuits A et B ci-dessous, qui sont alimentés par un GBF de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ (avec E_0 une constante positive) et de résistance interne R_g.

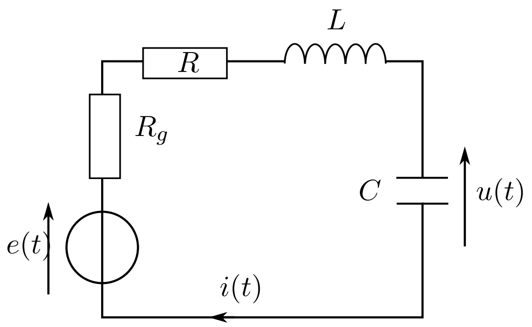


Figure 11.1: Montage A

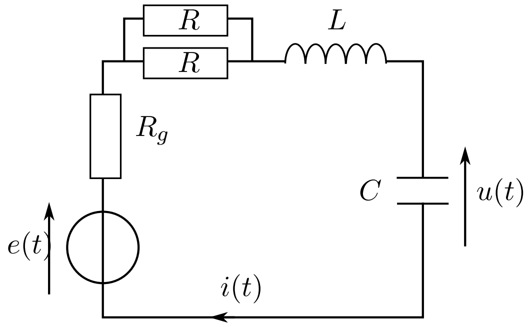
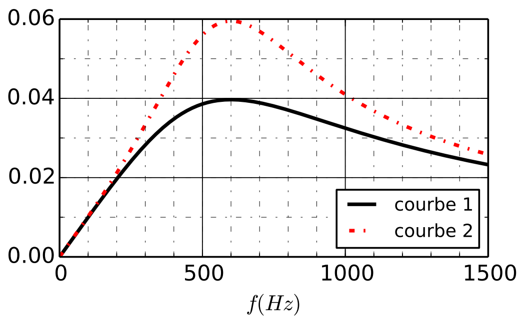
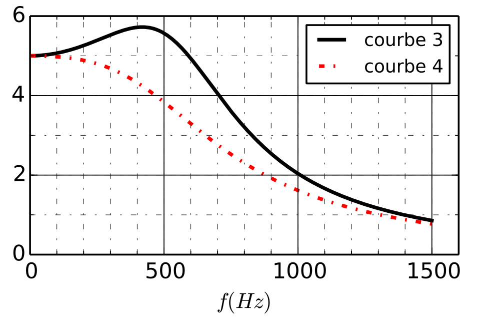


Figure 11.2: Montage B

On donne les graphiques de l'évolution de l'amplitude I_0 en ampère de l'intensité $i(t)$, ainsi que celle de l'amplitude U_0 en volt de la tension $u(t)$ en fonction de la fréquence f.





1) Pour chaque graphique, déterminer quelle est la courbe correspondant au montage A et celle au montage B. Déterminer les valeurs de E_0, R, R_g, L et C.

Réponse

Courbes 1 $I_0(B)$; courbe 2 $I_0(A)$

Courbe 3 $U_0(B)$; courbe 4 $U_0(A)$

Utilisation de $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 600\,\text{Hz}$

$I_{0,max}(A) = \dfrac{E_0}{R+R_g} = 40\,\text{mA}$ et $I_{0,max}(B) = \dfrac{E_0}{R/2+R_g} = 60\,\text{mA}$, donc $\boxed{R = 2R_g}$.

$\boxed{E_0 = 5\,\mathrm{V}}$

$U(f_0) = QE_0 \,:\, Q_B = 1 = \dfrac{1}{2R_g}\sqrt{L/C}$

Pente à l'origine de $I_0 \,:\, a = 2\pi C E_0 = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$

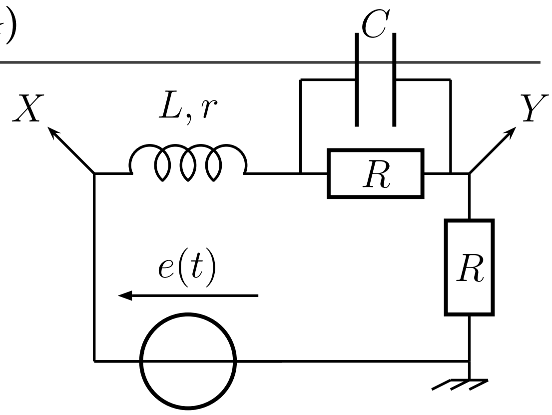
$\boxed{C = 3{,}2\,\mathrm{\mu F}}$, $\boxed{L = 22\,\mathrm{mH}}$, $\boxed{R_g = 42\,\Omega}$, $\boxed{R = 84\,\Omega}$

Sujet 5 – corrigé

I Détermination d'une inductance ($\star\star\star$)

On réalise le montage représenté ci-contre, et on constate sur l'oscilloscope que pour une fréquence $f_0 = 180\,\mathrm{Hz}$, les signaux recueillis sur les voies X et Y sont en phase.

Données : $R = 100\,\Omega$ et $C = 10\,\mu\mathrm{F}$.



1) En déduire l'expression puis la valeur de l'inductance L de la bobine.

Réponse

Sur la voie X, on visualise $e(t)$, et sur la voie Y, on visualise la tension $Ri(t)$. S'il n'y a pas de déphasage entre ces deux voies, c'est que le courant $i(t)$ délivré par le générateur est en phase avec la tension $e(t)$ délivrée par le générateur. Donc l'impédance totale du circuit est un réel (partie imaginaire nulle).

Exprimons l'impédance totale : $\underline{Z} = r + jL\omega + \underline{Z'} + R$ où $\underline{Z'}$ est l'impédance de l'association en parallèle de la résistance R et de la capacité C.

$$\underline{Z'} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = r + R + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{Z} = r + R + \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}\right)$$

On veut $\mathrm{Im}[\underline{Z}] = 0$, soit $\boxed{L = \dfrac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2} = 44\,\mathrm{mH}}$.