Travaux pratiques – TP 7

Circuits du premier ordre en régime transitoire

Au programme

Savoirs

- ◇ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.

Savoir-faire

- ◇ Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un circuit linéaire du premier ordre et analyser ses caractéristiques. Confronter les résultats expérimentaux aux expressions théoriques.
- ◇ Capacité numérique : mettre en œuvre la méthode d'EULER à l'aide d'un langage de programmation pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation de forme quelconque.

I Objectifs

- ◇ Réaliser des montages simples d'électricité.
- ◇ Déterminer expérimentalement un temps de relaxation.
- ◇ Observer les différents paramètres qui influent sur un régime transitoire.
- ◇ Observer les différents régimes du second ordre.
- ◇ Découvrir quelques fonctions nouvelles de l'oscilloscope et du GBF.
- ◇ Mettre en œuvre la méthode d'EULER à l'aide de Python pour simuler la réponse d'un système linéaire du premier ordre à une excitation quelconque.

II S'approprier

Règles de bonne pratique

- ◇ En pratique, on commence toujours par effectuer les branchements du circuit sans insérer les appareils de mesure.
- ◇ Puis, on **relie toutes les masses entre elles** afin d'éviter de fixer par erreur une autre masse dans le circuit. Ainsi, un bon circuit aura une « ligne de masse » à laquelle seront reliés obligatoirement tous les câbles noirs provenant des câbles coaxiaux-filaires reliés à l'oscilloscope ou au GBF.
- ◇ Enfin, on place alors les fils colorés des câbles de mesure aux endroits où on désire relever la tension. Vous serez d'ailleurs également vigilant au choix de couleurs des fils, sinon on se perd rapidement…

Ces règles sont fondamentales et ne doivent pas être négligées si on veut que le circuit fonctionne.

A Circuit intégrateur

Un montage est considéré comme **intégrateur** (on le verra en cours dans quelques semaines) si la tension de sortie (dans notre cas $u_c(t)$) est une primitive, à une constante multiplicative K près, de la tension d'entrée (dans notre cas $e(t)$), soit encore

$$u_c(t) = K \int e(t)\mathrm{d}t$$

B Détermination numérique de la solution

II.B.1 Position du problème

Soit $u_C(t)$ est solution de l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

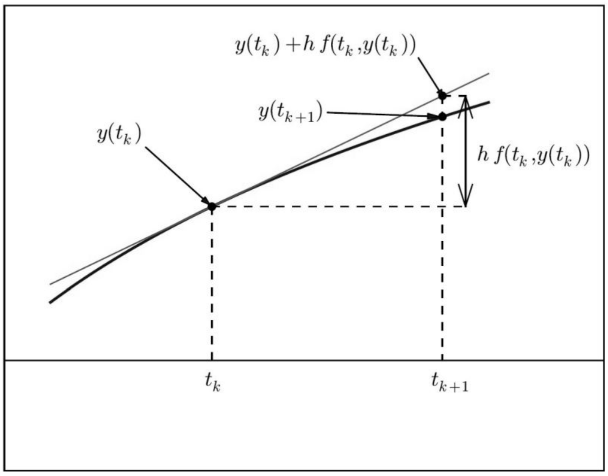
L'objectif de cette partie est de déterminer **numériquement** la solution $u_C(t)$ de cette équation pour une entrée quelconque $e(t)$ pour laquelle il n'existe pas toujours de solutions analytiques. Nous allons utiliser un schéma numérique classique appelé Méthode d'Euler.
En pratique, cette méthode est relativement peu efficace (et des méthodes plus sophistiquées sont souvent mises en place). Néanmoins la méthode d'Euler, très simple à comprendre et à mettre en place, permet une première approche simple du problème.

II.B.2 Méthode d'Euler : mathématiquement

Des théorèmes assurent que, sous des conditions raisonnables, il existe une unique application y de classe C^1 sur $[a,b]$ dont la valeur est imposée en a et qui vérifie une équation différentielle de la forme $y'(t) = f(t,y(t))$ pour tout $t \in [a,b]$. L'objet des *schémas numériques* est d'obtenir des approximations de cette solution.

En pratique, on tente d'approcher y en un certain nombre de points répartis sur l'intervalle $[a,b]$. Plus précisément, on veut calculer une approximation y_k des $y(t_k)$ avec $t_k = a + kh$ où $h = \dfrac{b-a}{n}$ est un pas qu'il conviendra d'ajuster (on peut supposer que plus le pas est petit, meilleure sera l'approximation). De façon simple, on peut écrire :

$$y(t_{k+1}) - y(t_k) = \int_{t_k}^{t_{k+1}} y'(u)\mathrm{d}u = \int_{t_k}^{t_{k+1}} f(u,y(u))\mathrm{d}u$$
$$\Leftrightarrow y(t_{k+1}) - y(t_k) \approx hf(t_k,y(t_k))$$



On obtient alors la méthode d'Euler explicite : les approximations sont calculées de proche en proche via la formule suivante :

$$\boxed{y_{k+1} = y_k + hf(t_k,y_k)}$$

On initialise bien entendu avec $y_0 = y(a)$, qui sera la seule valeur « exacte » calculée.

III Analyser : régime transitoire du circuit RC

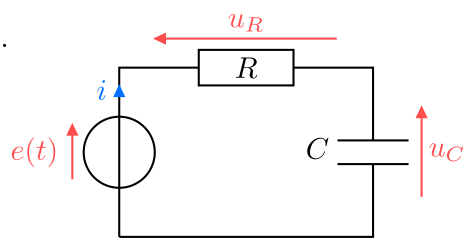
Vous prendrez soin de refaire tous les schémas des circuits mis en place ou étudiés.

Attention

Pour ce TP, il vous est demandé de rédiger les réponses préalables sur vos comptes-rendus, **en amont** du TP.

A Charge et décharge du condensateur

On considère le montage ci-contre de constante de temps $\tau = RC$.



/2 (1) Si $e(t)$ est une tension créneau de fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$, quelle valeur faut-il donner à τ pour visualiser de façon satisfaisante la totalité du régime transitoire ? Expliquer les raisons de votre choix.

Réponse

La tension créneau de fréquence f a pour période $T = 1/f$. Pour visualiser correctement le signal, il faut que le condensateur puisse se charger sur **une demi-période** $T/2$. Or, un condensateur met $\approx 5\tau$ à se charger ; il nous faut donc

$$5\tau \leq \frac{T}{2} \Leftrightarrow 5\tau \leq \frac{1}{2f} \Leftrightarrow \boxed{\tau \leq \frac{1}{10f}} \quad \text{avec} \quad \left\{ f = 1 \times 10^3\,\mathrm{Hz} \right.$$

$$\text{A.N. : } \underline{\tau \leq 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} = 0{,}1\,\mathrm{ms}}$$

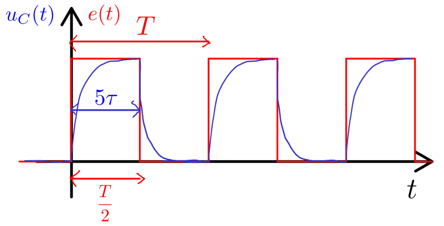


FIGURE 7.1

/1 (2) Si τ est trop grand ou si τ est trop petit, que se passe-t-il ?

Réponse

- Si τ est **trop grand**, le condensateur n'aura **pas le temps de se charger**. On ne verra qu'une portion de l'exponentielle croissante.
- À l'inverse, si τ est **trop petit**, le condensateur se **charge trop vite** : on confondra la courbe de sa charge avec celle du créneau.

/1 (3) Si $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, quelle valeur faut-il alors donner à C ?

Réponse

Prenons $\tau = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$. On a :

$$\tau = RC \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{\tau}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \\ R = 1\,\mathrm{k\Omega} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{C = 1 \times 10^{-7}\,\mathrm{F} = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}}$$

/1 (4) On veut visualiser à l'oscilloscope simultanément $e(t)$ sur la voie 1 et $u_C(t)$ sur la voie 2 ; indiquer sur un schéma les connexions à réaliser.

Réponse

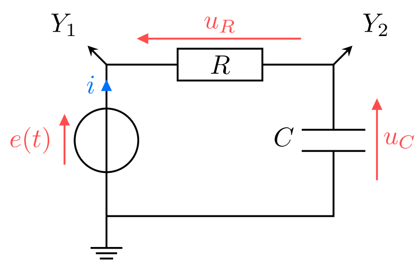


Figure 7.2

B Étude théorique du circuit intégrateur

L'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ est

$$\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{\tau} = \frac{e(t)}{\tau}$$

Supposons que à $t = 0$, $e(t)$ passe de 0 à E.

/2 (5) Déterminer la solution de l'équation différentielle précédente dans le cas où $u_C(t = 0) = 0$. En utilisant un développement limité du terme exponentiel autour de $t = 0$, montrer que le montage est intégrateur (la sortie est une primitive de l'entrée).

Aide

Le développement limité de l'exponentiel s'écrit

$$e^x \underset{x \to 0}{\sim} 1 + x$$

Réponse

L'équation homogène est :

$$\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u_{C,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0 && \text{Forme générale homogène}\\
\Rightarrow\ & u_{C,h}(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) && u_{C,p}(t) = \lambda\\
\Rightarrow\ & 0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau} && \lambda = E\\
\Leftrightarrow\ & u_{C,p}(t) = E && u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t)\\
\Rightarrow\ & u_C(t) = E + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) && \text{Par continuité}\\
\Rightarrow\ & u_C(0) = 0 = E + A\\
\Leftrightarrow\ & A = -E && \text{On combine}\\
\Rightarrow\ & \boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}
\end{aligned}$$

Quand $\frac{t}{\tau} \to 0$, on utilise le développement limité :

$$u_C(t) \underset{t/\tau \to 0}{\sim} E\left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{u_C(t) \underset{t/\tau \to 0}{\sim} \frac{Et}{\tau}}$$

Or, une primitive de $\int E\,\mathrm{d}t$ est Et : on obtient bien que dans ce cas, le montage est intégrateur (à τ près).

C Circuit RC avec visualisation de $e(t)$ et $u_R(t)$

On souhaite maintenant visualiser $e(t)$ sur la voie 1 et $u_R(t)$ sur la voie 2.

/1 (6) Comment faut-il modifier le montage ? Sur votre feuille, faire le schéma du montage correspondant en indiquant les branchements de l'oscilloscope.

Réponse

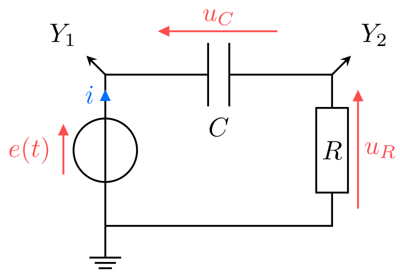


Figure 7.3

/2 (7) Écrire l'équation différentielle vérifiée par la variable $u_R(t)$ et en donner la solution pour $e(t) = E$ et $u_R(t = 0^-) = 0$. Attention, la tension n'est *a priori* pas continue aux bornes de R...

Réponse

Pour obtenir l'équation sur u_R ou $i(t)$, il suffit de **dériver la loi des mailles** :

$$\begin{aligned}
& u_R + u_C = E && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,) \\
\Rightarrow\ & \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0 && \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C} \text{ et } i = \frac{u_R}{R} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{u_R}{RC} = 0 && \tau = RC \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{u_R}{\tau} = 0}
\end{aligned}$$

On résout mais en faisant attention à la condition initiale. Pour cela, on étudie la loi des mailles en $t = 0^+$:

$$\begin{aligned}
& u_R(0^+) + u_C(0^+) = E && u_C(0^+) = 0 \text{ par continuité} \\
\Rightarrow\ & \boxed{u_R(0^+) = E}
\end{aligned}$$

L'ED étant déjà homogène, on aura $u_R(t) = A'\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$, et avec la condition initiale précédemment trouvée on a directement

$$\boxed{u_R(t) = E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

On peut vérifier la cohérence de cette solution en la réinjectant dans la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
& u_R + u_C = \cancel{E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}} + E\left(1 - \cancel{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u_R + u_C = E}
\end{aligned}$$

ce qui est bien la réponse attendue.

IV Réaliser et valider

A Étude expérimentale du régime transitoire du circuit RC

IV.A.1 Cas général : charge et décharge du condensateur

1) Réaliser le montage RC proposé dans la partie III.A.
2) $e(t)$ est une tension créneau (alternance de tension nulle et de tension constante E) d'un générateur basses fréquences, réglé sur une fréquence de 1 kHz.
3) R est une boîte de résistances variables ; prendre $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.
4) C est une boîte de capacités réglables ; prendre la valeur calculée dans la partir analyse.
5) Observer $e(t)$ et $u_C(t)$.
6) Imprimer vos courbes en suivant le protocole imprimé et plastifié sur vos paillasses. **Pensez à inverser la couleur de l'écran pour le pas imprimer sur un fond noir**.

/0.5 1 Déterminer la constante de temps τ_{exp} ainsi que son incertitude. Expliquer votre démarche.

Réponse

Sur les courbes imprimées, on trouve τ_{exp} avec soit la méthode de la tangente, soit à l'intersection avec $0{,}632E$ pour le RC en charge ou $0{,}368E$ pour le RC en décharge.

◇

/0.5 2 Calculer **et commenter** l'écart normalisé E_N avec la valeur théorique.

Réponse

On estime l'incertitude sur τ_{exp} *via* l'incertitude de lecture avec la règle, par exemple. La valeur théorique comprend les incertitudes sur R et C (à vérifier sur les composants en TP). On calcule

$$E_N = \frac{|\tau_{\text{exp}} - \tau_{\text{theo}}|}{\sqrt{u(\tau_{\text{exp}})^2 + u(\tau_{\text{theo}})^2}}$$

et la mesure est cohérente et validée si $E_N \lesssim 2$.

◇

/0.5 3 Étudier l'influence de R et de C. Faire varier également la fréquence du signal périodique. Commenter vos observations. Il n'est pas demandé de refaire de nouvelles mesures. Une analyse qualitative est suffisante.

Réponse

R et C on la même influence sur le temps de charge, puisque $\tau = RC$: augmenter l'une des deux caractéristiques augmente le temps de charge, coupant la courbe observée ; à l'inverse, baisser l'une des deux réduit le temps de charge et fait se confondre u_C avec $e(t)$.

La fréquence va également influencer le signal. En effet, pour que le circuit ait le temps de charger, il faut que la (demi)-période soit suffisamment grande ($T/2 > 5\tau$). Évidemment, augmenter la fréquence diminue la période et on observe plus de créneaux si on ne change pas le calibre horizontal, mais ce qu'il faut observer (après recalibrage) c'est qu'**augmenter la fréquence empêche la charge totale du RC**. Ça revient à augmenter le temps de charge. Diminuer la fréquence a l'effet inverse.

◇

IV.A.2 Cas particulier du circuit intégrateur

Attention

Pour toute mesure, vérifier que la source du menu mesure correspond bien à la courbe sur laquelle vous faites des mesures.

1) Ne pas modifier le montage précédent, $e(t)$ est toujours une tension créneau. Choisir τ de l'ordre de $5T$ en ajustant la valeur de R et observer $e(t)$ et $u_C(t)$.

/0.5 4 Quelle est l'allure de $u_C(t)$? $u_C(t)$ est-elle bien la primitive de $e(t)$ à une constante multiplicative près ?

Réponse

Avec τ « trop grand », le signal de sortie est très faible. En effet, on se trouve alors dans la situation du développement limité de la question 5, soit

$$u_C(t) \underset{\frac{t}{\tau}\to 0}{\sim} \frac{Et}{\tau}$$

En diminuant le calibre vertical, on observe cependant le signal : il s'assimile à des portions de droites, croissantes quand $e(t) = E$ et décroissantes quand $e(t) = 0$: c'est bien une primitive de la fonction, mais divisée par τ.

◇

/0.5 5 Déterminer expérimentalement la pente de la courbe $u_C(t)$ en vous aidant des curseurs. Comparer à la valeur théorique.

Réponse

On doit trouver une pente de $\frac{E}{\tau}$.

◇

2) Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par une dent de scie.

/0.5 6 Quelle est l'allure de $u_C(t)$? Le circuit est-il à priori toujours intégrateur ?

Réponse

L'intégrale d'une fonction affine est un polynôme du second degré. Si $u_C(t)$ est une primitive de $e(t)$, on doit donc observer des portions de paraboles de forme

$$u_C(t) \propto t^2$$

mais toujours continue (puisque $u_C(t)$ est continue).

Bien qu'elle ressemble à une courbe sinusoïdale, on observe une différence lors du changement de régime qui nous indique qu'on obtient bien des paraboles : $\boxed{\text{le circuit est toujours intérateur}}$.

◇

/0.5 7 Quelle est l'expression mathématique (aucun calcul à effectuer) de la courbe $u_C(t)$?

Réponse

On s'attend à avoir

$$\boxed{u_C(t) = at^2}$$

pour vérifier $u_C(0) = 0$. On pourait penser avoir un terme linéaire en temps, mais le signal d'entrée semble linéaire et pas affine.

◇

3) Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par une tension sinusoïdale.

/0.5 [8] Quelle est l'allure de $u_C(t)$? Le circuit est-il toujours intégrateur ?

Réponse

$u_C(t)$ ressemble à une fonction sinusoïdale. Le circuit reste intégrateur, puisqu'on observe une différence de phase d'environ $\pi/2$ par rapport à l'entrée $e(t)$.

◇

/0.5 [9] Quelle est l'expression mathématique (aucun calcul à effectuer) de la courbe $u_C(t)$?

Réponse

$$\boxed{u_C(t) = K\sin(2\pi f t) = K\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)}$$

puisque $u_C(0) = 0$.

◇

4) Augmenter τ.

/0.5 [10] Quel inconvénient apparaît ? Commenter vos observations.

Réponse

Si on augmente **encore** τ, le signal $u_C(t)$ devient trop faible. Le bruit du circuit domine sur la tension, et il devient difficile de bien distinguer sa forme.

◇

IV.A.3 Tension aux bornes de la résistance u_R

Se placer dans les mêmes conditions que dans la partie III.C, en revenant à une tension créneau pour $e(t)$. Observer à l'oscilloscope $e(t)$ et $u_R(t)$.

/1 [11] Imprimer les résultats. Commenter l'allure de la courbe. Est-elle conforme à l'expression analytique attendue ?

Réponse

On observe une **discontinuité de la tension** $u_R(t) = Ri(t)$ à chaque changement de la tension d'entrée, avec une croissance ou décroissance exponentiele. Cela correspond bien à l'expression analytique attendue, et au fait que l'intensité dans un circuit RC n'est **pas continue**.

◇

B Étude numérique

Effectuez cette étude sur `Capytale` : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/bc8f-2174341.

IV.B.1 Écriture du script

On créé la fonction `euler(f, a, b, y0, n)` effectuant les calculs détaillés dans la partie II.B.2. Ses paramètres d'entrée sont une fonction f, des valeurs de a et b, un entier n et une condition initiale $y0$. Elle calcule les valeurs approchées sur $[a,b]$ de la solution de l'équation différentielle $y'(t) = f(t,y(t))$ avec la condition initiale $y(a) = y0$. Cette fonction renvoie la liste des $n+1$ valeurs approchées y_k de y aux temps $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k \in [\![0,n]\!]$.

```python
def euler(f, a, b, y0, n):
  h = (b-a) / n
  list_y = [y0]
  yk = y0
  tk = a
  for k in range(n):
    yk = # à compléter
    tk = # à compléter
```

```
    list_y.append(yk)
  return list_y
```

Il faut ensuite créer la fonction `f` ainsi que la fonction entrée `e` pour plus de clarté. Vous compléterez la fonction `f` pour qu'elle renvoie l'expression correspondant à l'équation différentielle que vous cherchez à résoudre.
On récupére les valeurs y de la solution par :

```
a = 0   # s
b = 10  # s
n = 100 # points de calculs
y0 = 0  # condition initiale
list_y = euler(f, a , b, y0, n) # list_y est un vecteur des valeurs de y
```

IV.B.2 Test dans un cas analytique

L'activité corrigée est disponible à https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/64ab-2283618

Tester votre fonction précédente avec une entrée constante $e(t) = E$ afin de résoudre l'équation différentielle sur $u_C(t)$. Afficher sur un même graphique la solution numérique et la solution analytique obtenue question 5 (avant développement limité). On pourra, par choix et pour fixer les idées, sans que cela porte à conséquence prendre :

$$E = 1\,\mathrm{V} \qquad \tau = 1\,\mathrm{s} \qquad u_C(t=0) = 0$$

Vous afficherez également la fonction erreur au cours du temps, qui est la différence entre votre solution numérique et la solution analytique.

/5 12 Quelle est la sensibilité au pas de calcul ? Vous ferez plusieurs essais.

Réponse

Plus le pas est petit (n grand), plus la détermination est fidèle. Avec trop peu de points, l'approximation par une tangente est mauvaise, et on s'écarte du résultat.

◇

IV.B.3 Test dans un cas non analytique

Lorsque la solution $u_C(t)$ peut être obtenue analytiquement, la solution numérique n'a que peu d'intérêt. Elle prend en revanche tout son sens dans des cas non-analytiques.

Testez votre programme pour plusieurs entrées (en changeant le contenu de la fonction `e(t)`) : sinusoïdale, rampe linéaire, exponentielle…