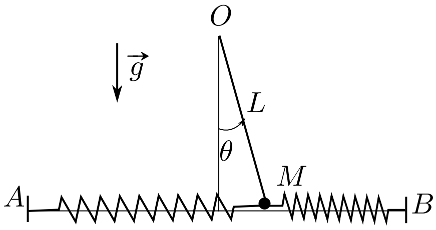
Sujet 1 – corrigé

I Oscillateur linéarisé

Soit une tige rigide de longueur L, de masse négligeable, accrochée en O. Une masse m est accrochée à l'autre extrémité, et reliée à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide. On repère la position du point M par l'angle θ entre la verticale et la tige. A l'équilibre $\theta = 0$ et les deux ressorts sont horizontaux. La distance AB entre les deux points d'attache des deux ressorts est notée D.
On écarte le point M de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 faible et on le lâche sans vitesse initiale.



1) Justifier que le système est conservatif à une dimension. Quelle coordonnée permet de décrire le mouvement ?

Réponse

Le système est le point matériel M de masse m, soumis aux deux forces de rappel des ressorts, au poids et à la réaction de la tige. Seule la dernière force est non conservative, mais elle ne travaille pas.

Donc le système est conservatif, donc $dE_m/dt = 0$.

La trajectoire est circulaire, donc le mouvement est décrit par la seule coordonnée $\theta(t)$.

◇

2) Montrer que le mouvement est harmonique. Exprimer la pulsation des petites oscillations.

On donne le développement limité de la fonction cosinus à l'ordre 2 autour de 0 :

$$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

Réponse

- énergie potentielle élastique du ressort de gauche :

$$E_{p,1} = \frac{1}{2}k(l_1(t) - l_0)^2 + cste \quad \text{avec} \quad l_1(t) \approx D/2 + L\theta$$

- énergie potentielle élastique du ressort de gauche :

$$E_{p,2} = \frac{1}{2}k(l_2(t) - l_0)^2 + cste \quad \text{avec} \quad l_2(t) \approx D/2 - L\theta$$

On somme ces deux énergies potentielles, donc

$$E_{p,el} = E_{p,1} + E_{p,2} = \frac{1}{2}k(D/2 + L\theta - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(D/2 - L\theta - l_0)^2 + cste$$

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k[2(D/2 - l_0)^2 + 2(L\theta)^2] + cste = kL^2\theta^2 + cste2$$

Le terme $2(D/2 - l_0)^2$ peut être inclus dans la constante

- énergie potentielle de pesanteur : $E_{p,pes} = mgL(1 - cos(\theta)) + cste$
  On fait un DL à l'ordre 2 (premier terme non nul) : $E_{p,pes} \approx mgL\theta^2/2 + cste$
- énergie cinétique (mouvement circulaire de centre O et de rayon L :

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta})^2$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta})^2 + mgL\theta^2/2 + kL^2\theta^2 + cste$$

On dérive par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\theta + 2kL^2\dot{\theta}\theta) = 0$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0}$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

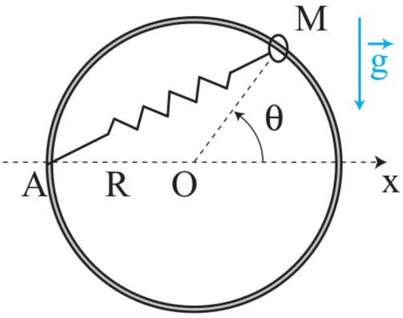
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}$$

Sujet 2 – corrigé

Énoncer et démontrer les théorèmes de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique.

I Positions d'équilibre d'un anneau sur un cercle

Un anneau assimilable à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur une glissière circulaire de rayon R et de centre O. L'anneau est attaché à un ressort de raideur k dont une extrémité est fixée à la glissière au point A. Sa position est repérée par l'angle θ entre le rayon OM et l'axe horizontal (Ox). Pour simplifier les calculs, on considérera que la longueur à vide ℓ_0 du ressort est nulle.



1) Montrer que la longueur ℓ s'exprime $\ell = R\sqrt{2(1+\cos\theta)}$.

Réponse

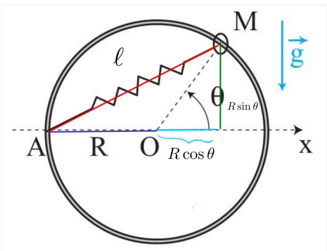


Figure 17.1: Détermination de ℓ

On peut réutiliser la relation de Chasles pour écrire $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et déterminer la distance en prenant la norme, mais ici une simple utilisation du théorème de Pythagore suffit. On projette M sur l'axe x pour avoir

$$\begin{aligned} &\ell^2 = (R+R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 \\ \Leftrightarrow\ &\ell^2 = R^2 + 2R^2\cos\theta + R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ \Leftrightarrow\ &\ell^2 = 2R^2(1+\cos\theta) \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\ell = R\sqrt{2(1+\cos\theta)}} \end{aligned}$$

■

◇

2) Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système constitué de l'anneau et du ressort en fonction de l'angle θ.

Réponse

L'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$ est constituée de l'énergie potentielle de pesanteur de l'anneau et de l'énergie potentielle élastique du ressort. Pour $\mathcal{E}_{p,p}$ avec origine en O, on a une altitude $R\sin\theta$; pour $\mathcal{E}_{p,el}$ on a la différence de longueur à a vide $\ell - \ell_0$ avec $\ell_0 = 0$, d'où

$$\begin{aligned} &\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,p} + \mathcal{E}_{p,el} \\ \Leftrightarrow\ &\mathcal{E}_p = mgR\sin\theta + \frac{k}{2}\ell^2 \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\mathcal{E}_p = mgR\sin\theta + kR^2(1+\cos\theta)} \end{aligned}$$

■

◇

3) Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau.

Réponse

On trouve les positions d'équilibre de l'anneau en trouvant les angles θ_{eq} tels que la dérivée de $\mathcal{E}_p$ s'annule, soit

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta_{\mathrm{eq}}} &= -kR^2 \sin\theta_{\mathrm{eq}} + mgR\cos\theta_{\mathrm{eq}} = 0 \\
\Leftrightarrow \sin\theta_{\mathrm{eq}} &= \frac{mg\cancel{R}}{kR^{\cancel{2}}}\cos\theta_{\mathrm{eq}} \\
\Leftrightarrow \tan\theta_{\mathrm{eq}} &= \frac{mg}{kR} \\
\Leftrightarrow \boxed{\theta_{\mathrm{eq},1} = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)} &\quad \text{et} \quad \boxed{\theta_{\mathrm{eq},2} = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)}
\end{aligned}
$$

■

avec $\theta_{\mathrm{eq},1}$ compris entre 0 et 90°, et $\theta_{\mathrm{eq},2}$ compris entre 180 et 270°.

◇

4) Préciser si les positions d'équilibre obtenues sont stables.

Réponse

On étudie la stabilité des positions en évaluant la dérivée seconde de $\mathcal{E}_p$ en ce point et en vérifiant son signe. On obtient

$$
\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq}}} &= -kR^2\cos\theta_{\mathrm{eq}} - mgR\sin\theta_{\mathrm{eq}} \\
\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq}}} &= -\left(kR^2 + \frac{m^2g^2}{k}\right)\cos\theta_{\mathrm{eq}}
\end{aligned}
$$

en utilisant les résultats précédents sur la dérivée première de $\mathcal{E}_p$. L'intérieur de la parenthèse étant positif, le signe de cette dérivée seconde est opposé à celui du cosinus de la position d'équilibre. Or, $\cos\theta_{\mathrm{eq},1} > 0$ et $\cos\theta_{\mathrm{eq},2} < 0$, donc

$$
\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq},1}} < 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq},2}} > 0}
$$

■

La première position est donc instable, et la seconde stable.

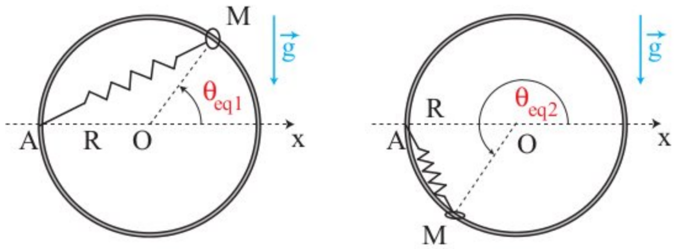


Figure 17.2: Positions d'équilibre du système

◇

Sujet 3 – corrigé

I Cycliste au Tour de France

Une cycliste assimilée à un point matériel se déplace en ligne droite. Elle fournit une puissance mécanique constante $\mathcal{P}$, les forces de frottement de l'air sont proportionnelles au carré de la vitesse v de la cycliste selon

$$\overrightarrow{F_f} = -kv\overrightarrow{v}$$

où k est une constante positive. On néglige les forces de frottement du sol sur la roue et on choisit un axe horizontal (Ox) orienté dans la direction du mouvement de la cycliste.

1) En appliquant le théorème de la puissance cinétique, établir une équation différentielle en v et montrer qu'on peut la mettre sous la forme :

$$mv^2 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = k\left({v_\ell}^3 - v^3\right)$$

où v_ℓ est une constante homogène à une vitesse dont on cherchera la signification physique.

Réponse

Le sol est lié au référentiel galiléen terrestre. Le système constitué de la cycliste et de son vélo est assimilé à son centre de gravité et soumis à son poids (vertical), à la réaction du sol $\overrightarrow{R}$ (verticale), à la force de frottement de l'air (horizontale) et à une force motrice de puissance P (horizontale). On applique le théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\overrightarrow{P}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{R}) + \mathcal{P}(\overrightarrow{F_f}) + \mathcal{P}$$

or le déplacement est horizontal donc le poids et la réaction ont une puissance nulle. La puissance de la force de frottement est :

$$\mathcal{P}(\overrightarrow{F_f}) = -kv\overrightarrow{v}\cdot\overrightarrow{v} = -kv^3$$

En dérivant l'énergie cinétique on trouve :

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P} - kv^3$$

D'autre part, on peut écrire : $$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}\times\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}v$$

Soit, en remplaçant dans l'équation précédente :

$$mv^2\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x} = \mathcal{P} - kv^3 = k\left({v_\ell}^3 - v^3\right)$$

Avec $k{v_\ell}^3 = \mathcal{P}$. On obtient alors $$v_\ell = \left(\frac{\mathcal{P}}{k}\right)^{1/3}$$

v_ℓ est la vitesse limite pour laquelle la puissance motrice $\mathcal{P}$ est compensée par la puissance de freinage des frottements fluides. On peut remarquer que, pour $v = v_\ell$, $\mathrm{d}v/\mathrm{d}t = 0$ et le mouvement est uniforme.

◇

On pose $f(x) = k({v_\ell}^3 - v^3)$.

2) Déduire des résultats précédent, l'équation différentielle vérifiée par f.

Réponse

La dérivée de $f(x)$ par rapport à x devient

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x} = -3kv^2\,\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}x}$$

L'équation différentielle obtenue à la question précédente devient alors :

$$-\frac{m}{3k}\frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} = f(x) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f(x)}{\mathrm{d}x} + \frac{3k}{m}f(x) = 0$$

C'est une équation différentielle linéaire, du premier ordre, sans second membre et à coefficient constant.

◇

3) Déterminer l'expression de la vitesse en fonction de x, si elle aborde la ligne droite avec une vitesse v_0.

Réponse

On introduit la longueur caractéristique L (par homogénéité et par analogie avec ce qu'on fait classiquement avec la constante de temps τ) comme :

$$L = \frac{m}{3k}$$

La solution de l'équation différentielle précédente s'écrit alors

$$f(x) = A\mathrm{e}^{-x/L}$$

Avec A la constante d'intégration qui se détermine à l'aide des conditions initiales. Sachant que à $t = 0$, $v = v_0$, on a

$$f(0) = A = k\left({v_\ell}^3 - {v_0}^3\right)$$

Finalement,

$$\boxed{v(x) = v_\ell\left[1 - \left(1 - \left(\frac{v_0}{v_\ell}\right)^3\right)\mathrm{e}^{-x/L}\right]^{1/3}}$$

Si $v_\ell > v_0$, la cycliste accélère jusqu'à atteindre la vitesse v_ℓ. Si $v_\ell < v_0$, la cycliste ralenti jusqu'à atteindre la vitesse v_ℓ. Cela confirme bien que v_ℓ est la vitesse limite du cycliste. L est la distance caractéristique nécessaire pour que la cycliste atteigne sa vitesse limite.

◇

4) Lors d'un sprint, la puissance développée vaut $P = 2\,\mathrm{kW}$ et la vitesse limite v_ℓ vaut $20\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$. Déterminer la valeur de k et en déduire la distance caractéristique pour qu'un-e coureur-euse de masse $m = 85\,\mathrm{kg}$ avec son vélo atteigne cette vitesse. Conclure quant à la faisabilité d'atteindre une telle vitesse.

Réponse

Avec les données de l'énoncé, on obtient

$$k = \frac{\mathcal{P}}{{v_\ell}^3} = 0{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$$

On en déduit par suite la valeur de L :

$$L = \frac{m}{3k} = 113\,\mathrm{m}$$

Il faut quelques L pour atteindre cette vitesse limite de $20\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1} \approx 70\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ (de l'ordre de 3 à 5). C'est une distance importante sur laquelle la cycliste ne pourra pas maintenir une telle puissance (pour un humain, une puissance de $500\,\mathrm{W}$ demande déjà un effort considérable). C'est pour cela que des équipièr-es lui « lancent » le sprint en la protégeant de l'air ce qui diminue significativement le coefficient k.

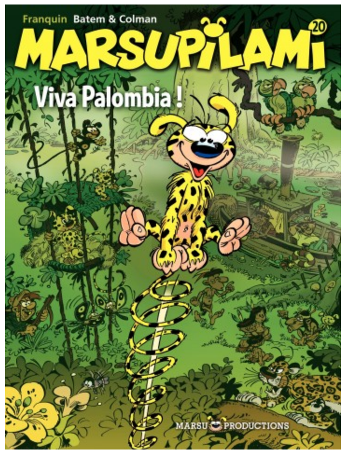
Khôlles MPSI – semaine 17

Sujet 4 – corrigé

I Le Marsupilami ($\star$)

Le Marsupilami est un animal de bande dessinée créé par Franquin aux capacités physiques remarquables, en particulier grâce à sa queue qui possède une force importante. Pour se déplacer, le Marsupilami enroule sa queue comme un ressort entre lui et le sol et s'en sert pour se propulser vers le haut.

On note $l_0 = 2{\cdot}\mathrm{m}$ la longueur à vide du ressort équivalent. Lorsqu'il est complètement comprimé, la longueur du ressort est $l_m = 50{\cdot}\mathrm{cm}$. La masse m de l'animal est $50{\cdot}\mathrm{kg}$ et la queue quitte le sol lorsque le ressort mesure l_0. On prendra $g = 10{\cdot}\mathrm{m/s^2}$.



1) Quelle est la constante de raideur du ressort équivalent si la hauteur maximale d'un saut est $h = 10{\cdot}\mathrm{m}$?

Réponse

On s'interresse au Marsupilami, de masse m, dans le référentiel lié au sol, et supposé galiléen. On utilise un repère cartésien $(O, \vec{e}_z)$, avec $\vec{e}_z$ vers le haut.

Bilan des actions :

- Le poids : $E_{p,p} = mgz$
- La force de rappel élastique (tant que $l \geq l_0$) : $E_{p,el} = (k/2)(l-h)^2$ avec $l = z$.

On considère ensuite trois états :

- A : la totalité de l'énergie du Marsupilami ($z = l_m$) se trouve sous forme d'énergie potentielle élastique et d'énergie potnentielle de pesanteur (vitesse nulle)
- B : la majorité de son énergie se trouve sous forme d'énergie cinétique (au moment où il décolle, $z = l_0$) (+ une petite partie sous forme d'énergie potentielle de pesanteur car il est maintenant à une hauteur l_0).
- C : la totalité de son énergie se trouve sous forme d'énergie potentielle de pesanteur (lorsqu'il est à la hauteur $z = h$). En effet, la vitesse est nulle au plus haut de la trajectoire, et le ressort n'intervient plus car son extrémité basse est laissée libre.

On peut alors appliquer le théorème de l'énergie mécanique (TEM) au Marsupilami entre les états A et B :

$$\Delta E_m = W_{nc} = 0 \Rightarrow \frac{1}{2}k(l_m - l_0)^2 + mgl_m = mgh$$

On en déduit que :

$$\boxed{k = \frac{2mg(h - l_m)}{(l_m - l_0)^2} = 4{,}1.10^3{\cdot}\mathrm{N/m}}.$$

◇

2) Quelle est sa vitesse v lorsque la queue quitte le sol ?

Réponse

De même, on applique le TEM entre les états B et C :

$$\Delta E_m = W_{nc} = 0 \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2g(h - l_0)} = 12{,}5 \cdot \mathrm{m/s}}.$$