Correction du TD

I Projection de vecteurs

1) Si α vaut 0, $\overrightarrow{v_0}$ est selon $\overrightarrow{u_x}$. On sait donc que la projection de $\overrightarrow{v_0}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ donne $v_0 \cos\alpha\,\overrightarrow{u_x}$. On le remarque également avec le triangle rectangle OMH, avec M le bout de $\overrightarrow{v_0}$ et H son projeté orthogonal sur $\overrightarrow{u_x}$: la longueur OH est en effet $v_0\cos\alpha$.

   Si α vaut $\pi/2$, $\overrightarrow{v_0}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$. On sait donc que la projection de $\overrightarrow{v_0}$ sur $\overrightarrow{u_z}$ donne $v_0 \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$. On le remarque également en prenant le triangle rectangle OMJ, avec cette fois J le projeté orthogonal de M sur $\overrightarrow{u_z}$: la longueur OJ est en effet $v_0 \sin\alpha$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{v_0} = v_0\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + v_0\sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}}$$

2) Avec la même réflexion, on trouve

$$\boxed{\overrightarrow{T} = T\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + T\sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}}$$

   La méthode est la même pour $\overrightarrow{N}$, mais le résultat est différent. En effet, si $\alpha = 0$, $\overrightarrow{N}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$: la projection de $\overrightarrow{N}$ sur $\overrightarrow{u_z}$ donne $N\cos\alpha\,\overrightarrow{u_z}$. Si $\alpha = \pi/2$, $\overrightarrow{N}$ est selon $-\overrightarrow{u_x}$: la projection de $\overrightarrow{N}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ donne $-N\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{N} = -N\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x} + N\cos\alpha\,\overrightarrow{u_z}}$$

3) Toujours même réflexion : si $\theta = 0$, $\overrightarrow{P}$ est selon $\overrightarrow{e_r}$, et si $\theta = \pi/2$, $\overrightarrow{P}$ est selon $-\overrightarrow{e_\theta}$. $\overrightarrow{T}$ est, par définition, selon $-\overrightarrow{e_r}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{P} = mg\cos\theta\,\overrightarrow{e_r} - mg\sin\theta\,\overrightarrow{e_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{e_r}}$$

4) Ici aussi :

   - $\alpha = 0 \Rightarrow \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{e_Y} = -1 \quad (\overrightarrow{P} \text{ selon } -\overrightarrow{e_Y})$
   - $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \overrightarrow{P}\cdot\overrightarrow{e_X} = 1 \quad (\overrightarrow{P} \text{ selon } \overrightarrow{e_X})$

   Ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{P} = mg(\sin\alpha\overrightarrow{e_X} - \cos\alpha\overrightarrow{e_Y})} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{e_Y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{e_X}}$$

   D'où

$$\overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{P} = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} mg\sin\alpha - T \\ -mg\cos\alpha + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}}$$

5) On projette :

$$\overrightarrow{F}_g = F_g(\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}_d = F_d(\cos\beta\,\overrightarrow{u_y} + \sin\beta\,\overrightarrow{u_x})$$

   et avec l'égalité de vecteurs on obtient

$$\begin{cases} 0 = F_d\sin\beta - F_g\sin\alpha \\ 0 = -mg + F_g\cos\alpha + F_d\cos\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg = F_g\cos\alpha + F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g \dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg\sin\beta = F_g(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} F_d = \dfrac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \\ F_g = \dfrac{mg\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \end{cases}}$$

Les applications numériques, **non demandées**, donnent

$$\boxed{\begin{cases} F_d = 4{,}4 \times 10^2\,\mathrm{N} \\ F_g = 5{,}4 \times 10^2\,\mathrm{N} \end{cases}}$$

II Masse du Soleil

1) On étudie le système {Terre} dans le référentiel héliocentrique. La Terre étant sur une orbite circulaire, on utilise un repère polaire $(\mathrm{S}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ en appelant S le centre de gravité du Soleil et T le centre de gravité de la Terre. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}} = R\,\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v} = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\overrightarrow{a} = \underbrace{\cancel{R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}}_{\ddot{\theta}=0} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$$

étant donné que la distance Terre-Soleil est fixe, et que la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil est constante. On a d'ailleurs, en appelant $\omega = \dot{\theta}$ cette vitesse angulaire,

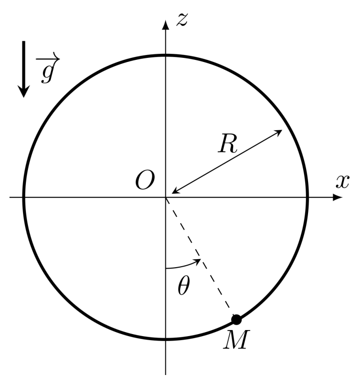
$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec T_0 la période de révolution de la Terre autour du Soleil, telle que $T_0 = 365{,}26 \times 24 \times 3600\mathrm{s} = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s}$. Ainsi, la seule force s'exerçant sur la Terre étant l'attraction gravitationnelle du Soleil, on a avec le PFD :

$$M_T\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_g \Leftrightarrow -\cancel{M_T}R\omega^2 = -\mathcal{G}\frac{\cancel{M_T}M_S}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_S = \frac{R^3\omega^2}{\mathcal{G}} = \frac{4\pi^2R^3}{\mathcal{G}{T_0}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \\ \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI} \\ T_0 = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}$$

III Oscillations d'un anneau sur un cerceau



1) L'hypothèse « sans frottements » signifie que la réaction du cerceau est uniquement normale : il n'y a pas de composante tangentielle.

2) ◇ **Système :** {anneau}
   ◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

- **Repère :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le sens de θ
- **Repérage :**

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\,\overrightarrow{u_r} \\
\overrightarrow{v}(t) &= R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \\
\overrightarrow{a}(t) &= R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

- **BDF :**

Poids $\overrightarrow{P} = mg(\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta})$
Réaction $\overrightarrow{R} = -R_N\,\overrightarrow{u_r}$

- **PFD :**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta - R_N \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = R_N \\ mR\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \end{cases}} \tag{3.1}$$

3) Avec (3.1), en la mettant sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\sin\theta = 0} \tag{3.2}$$

avec

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

4) On a donc

$$\boxed{\theta(0) = 0} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_\theta} = R\dot{\theta}(0)\,\overrightarrow{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}}$$

L'équation (3.2) se simplifie avec $\sin\theta \approx \theta$, pour donner

$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Et avec les CI,

$$\begin{aligned}
\theta(0) = 0 &\Leftrightarrow \boxed{A = 0} \\
\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R} &\Leftrightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{R\omega_0}} \\
&\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t)}
\end{aligned}$$

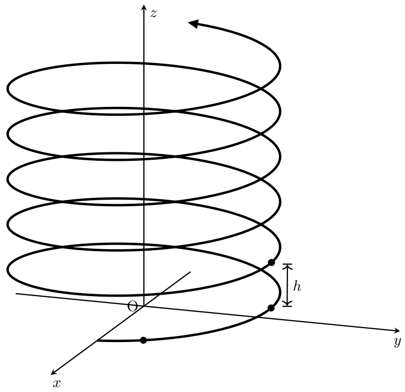
5) La valeur maximale de $|\theta(t)|$ est $v_0/(R\omega_0)$, quand le sinus vaut ±1. Pour avoir des petits angles, il faut que l'angle maximal ne dépasse pas θ_0, soit

$$\frac{v_0}{R\omega_0} < \theta_0 \Leftrightarrow v_0 < \theta_0 R\sqrt{\frac{g}{R}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 < \theta_0\sqrt{Rg}}$$

IV Mouvement hélicoïdal

1) On a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\,\overrightarrow{u_r} + \alpha t\,\overrightarrow{u_z}\\
\overrightarrow{v}(t) &= \underbrace{\cancel{\dot{R}\,\overrightarrow{u_r}}}_{=0} + R\underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega}\,\overrightarrow{u_\theta} + \alpha\,\overrightarrow{u_z} + \alpha t\underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t}}}_{=0}\\
&= R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} + \alpha\,\overrightarrow{u_z}\\
\overrightarrow{a}(t) &= R\underbrace{\cancel{\dot{\omega}}}_{=0}\,\overrightarrow{u_\theta} - R\omega^2\,\overrightarrow{u_r} + \overrightarrow{0}\\
&= -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}
$$



2) Cf. ci-dessus.

3) Soit t_0 un instant quelconque. Un point à ce temps-là est tel que

$$
\begin{cases}
r(t_0) = R\\
\theta(t_0) = \omega t_0\\
z(t_0) = \alpha t_0
\end{cases}
$$

Le premier point qui est au même angle θ mais avec 2π de plus se trouve donc à t_1 tel que

$$
\begin{aligned}
&\theta(t_1) = \theta(t_0) + 2\pi\\
\Leftrightarrow\ &\omega t_1 = \omega t_0 + 2\pi\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}}
\end{aligned}
$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
&z(t_1) - z(t_0) = h = \alpha t_1 - \alpha t_0\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{h = 2\pi\frac{\alpha}{\omega}}
\end{aligned}
$$

4) $\|\overrightarrow{v}\| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2} =$ cte, donc il est uniforme. Il est circulaire ssi $\boxed{\alpha = 0}$.

5) En regardant dans le plan polaire, on trouve $x(t)$ et $y(t)$:

$$
\boxed{\begin{cases}
x(t) = R\cos(\omega t)\\
y(t) = R\sin(\omega t)\\
z(t) = \alpha t
\end{cases}}
$$