Fiche pratique

Equations différentielles courantes en sciences physiques

I Équation différentielle générale

A Pourquoi introduire un nouveau type d'équations ?

1. Soit $x \in \mathbb{R}$. Résoudre l'équation :

$$4x = 2$$

   En quelle classe avez-vous appris à résoudre cela ?

2. Soit x une fonction réelle de la variable t. Résoudre :

$$4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2$$

   En quelle classe avez-vous appris à résoudre cela ?

3. Soit x une fonction réelle de la variable t. Résoudre :

$$4\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 2x$$

   En quelle classe allez-vous apprendre à résoudre cela ?

B Définition

Une équation différentielle sur la fonction $y(t)$ est une équation liant $y(t)$ à ses dérivées. Elle est dite linéaire (on ne verra pas le cas non-linéaire cette année) si elle peut s'écrire comme :

$$f_0(t).y(t) + f_1(t).\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + ... + +f_N(t).\frac{\mathrm{d}^N y(t)}{\mathrm{d}t^N} = g(t)$$

Avec $f_0(t)$, $f_1(t)$ ... $f_N(t)$ et $g(t)$ des fonctions dépendantes de la variable t.

contre-exemple : Voici deux exemples d'équations différentielles non linéaires :

$$4\underbrace{y^2(t)}_{\text{terme NL}} + \frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{et} \qquad 4y(t) + \underbrace{y(t).\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t}}_{\text{terme NL}} = 0$$

C Ordre de l'équation différentielle

L'ordre de l'équation différentielle désigne le rang maximum de la dérivation portant sur $y(t)$. Cette année, on s'intéressera à des équations différentielles linéaires d'ordre 1 ou 2.

exemple : Voici une équation différentielle d'ordre 1 :

$$f_0(t)y(t) + f_1(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

Et d'ordre 2 :

$$f_0(t)y(t) + f_1(t)\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + f_2(t)\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} = g(t)$$

D Coefficients constants

Une équation différentielle est dite à coefficients constants si toutes les fonctions $f_0(t)$, $f_1(t)$ ... $f_N(t)$ sont indépendantes de t.

exemple : Voici une équation différentielle à coefficients constants :

$$56y(t) + 31\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

Et à coefficients non constants : $$t^2y(t) + 56t\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

E Second membre et linéarité de la solution

I.E.1 Vocabulaire

Soit l'équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants :

$$56y(t) + 31\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = g(t)$$

Pour cette équation différentielle, $g(t)$ est appelé **second membre** de l'équation tandis que l'**équation homogène** associée est

$$56y(t) + 31\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = 0$$

I.E.2 Conséquence de la linéarité

Soit (ED) une équation différentielle linéaire **homogène**. Si $y_1(t)$ et $y_2(t)$ sont solutions de (ED) alors toute combinaison linéaire de la forme

$$\alpha_1\, y_1(t) + \alpha_2\, y_2(t)$$

est également solution de (ED), avec $(\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$.

I.E.3 Solution générale d'une équation différentielle avec second membre non nul

Dans les parties II et III de cette fiche, nous allons voir comment déterminer la solution générale d'une équation différentielle linéaire, d'ordre 1 ou 2, à coefficients constants et homogène (c'est-à-dire à second membre nul). Considérons l'équation différentielle linéaire à second membre non nul :

$$56\, y(t) + 31\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} = \underbrace{g(t)}_{\text{second membre}} \qquad (\star)$$

Notons y_h la solution de l'équation homogène (qui sera déterminée dans les parties II et III) et y_sm **une** solution particulière de l'équation différentielle avec second membre. Il n'y a pas de méthode générale pour déterminer une solution particulière.
Par linéarité, la solution générale $y(t)$ de l'équation différentielle avec second membre s'écrira

$$\boxed{y(t) = y_\mathrm{h} + y_\mathrm{sm}}$$

Remarque

Attention, c'est bien la somme des deux solutions et non une combinaison linéaire des deux solutions qui est solution générale. Il serait **FAUX** d'écrire :

$$y(t) = \alpha_1 y_\mathrm{h} + \alpha_2 y_\mathrm{sm} \qquad \text{avec } (\alpha_1, \alpha_2) \in \mathbb{R}^2$$

Remarque

On recherche **une** solution de l'équation avec second membre et pas **la** solution. Cela signifie que la solution obtenue n'est pas unique. **La** solution sera déterminée avec unicité en utilisant les **conditions initiales**.

I.E.4 Détermination de la solution particulière pour un second membre constant

Très souvent, le second membre de l'équation différentielle sera une constante réelle : $g(t) = a$ avec $a \in \mathbb{R}$. Dans ce cas, une méthode permet de trouver une solution particulière très facilement. C'est le seul cas à connaître en physique, mais il faut le maîtriser !

Cherchons alors une solution particulière de l'équation différentielle ($\star$) avec $g(t) = a$. Une solution particulière peut être **recherchée sous la forme d'une constante** : $y_\mathrm{sm}(t) = y_\mathrm{sm}$. Injectons cette solution constante dans ($\star$) :

$$56\, y_\mathrm{sm} + 31 \underbrace{\frac{\mathrm{d}y_\mathrm{sm}}{\mathrm{d}t}}_{=0} = a$$

Ainsi,

$$y_\mathrm{sm} = \frac{a}{56}$$

Remarque

Comme nous le verrons, une manière alternative de tenir compte d'un second membre constant est de réaliser un changement de variable afin de se ramener à une équation différentielle homogène. Nous verrons cela un peu plus tard dans l'année.

II Équation différentielle du premier ordre

On s'intéresse ici uniquement aux équations différentielles linéaires du premier ordre homogènes et à coefficients constants. Une telle équation peut toujours se mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}\, y(t) = 0 \qquad (\spadesuit)$$

avec $\tau \in \mathbb{R}$ une constante.

Remarque

On montre aisément par analyse dimensionnelle que τ a la dimension de la variable t. Dans la plupart des systèmes considérés en physique, t désignera le temps si bien que τ sera en seconde. Dans ce cas, la constante τ sera appelée **constante de temps**.

La solution générale de ($\spadesuit$) s'écrit, avec $A \in \mathbb{R}$ une constante

$$\boxed{y(t) = A\,\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

La constante A se détermine à partir des conditions initiales du problème considéré.

Remarque

En physique-chimie, il est souvent attendu que τ soit positif. Si tel n'est pas le cas, le système est divergent (exponentielle croissante), ce qui a rarement de réalité physique.

III Équation différentielle du second ordre

On s'intéresse ici uniquement aux équations différentielles linéaires du second ordre homogènes et à coefficients constants. Une telle équation peut toujours se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}y(t)}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\, y(t) = 0 \qquad (\clubsuit)$$

avec $(\omega_0, Q) \in \mathbb{R}^2$ une constante.

Remarque

Si la variable t se réfère au temps, la constante ω_0 est homogène à l'inverse d'un temps. Elle est appelée **pulsation propre** et a pour unité $\mathrm{rad.s^{-1}}$. Q est le **facteur de qualité** et est adimensionné.

Afin de résoudre ($\clubsuit$), il convient d'introduire le polynôme caractéristique associé :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}\, r + {\omega_0}^2 = 0 \qquad (\clubsuit\clubsuit)$$

Le discriminant de ce polynôme s'écrit

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right)$$

La forme des solutions va alors dépendre du signe de Δ.

A Si $\Delta > 0$

Si $\Delta > 0$ (ce qui correspond à $Q < 1/2$), ($\clubsuit\clubsuit$) a deux racines réelles

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \qquad \text{et} \qquad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$$

La solution de ($\clubsuit$) s'écrit alors, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$,

$$\boxed{y(t) = A\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{2Q} + \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right] + B\exp\left[\left(-\frac{\omega_0}{2Q} - \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}\right)t\right]}$$

B Si $\Delta = 0$

Si $\Delta = 0$ (ce qui correspond à $Q = 1/2$), ($\clubsuit\clubsuit$) a une racine double

$$r_{12} = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0 \qquad (\text{car } Q = 1/2)$$

La solution de ($\clubsuit$) s'écrit alors, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{y(t) = (At + B)\mathrm{e}^{-\omega_0 t}}$$

C Si $\Delta < 0$

Si $\Delta < 0$ (ce qui correspond à $Q > 1/2$), (♣♣) a deux racines complexes conjuguées :

$$r_1 = -\frac{\omega_0}{2Q} + \mathrm{j}\,\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \quad \text{et} \quad r_2 = -\frac{\omega_0}{2Q} - \mathrm{j}\,\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}} \qquad (\text{avec } \mathrm{j}^2 = -1)$$

La solution de (♣) s'écrit alors, avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

$$\boxed{y(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right)\right]}$$

Remarque

En physique-chimie, il est souvent attendu que Q et ω_0 soient positifs. Si tel n'est pas le cas, le système est divergent (exponentielle croissante), ce qui a rarement de réalité physique.

D Cas particulier où $Q \to +\infty$

Un cas particulier mais fréquent est celui pour lequel $Q \to +\infty$. Dans ce cas, l'équation différentielle (♣) se réduit à

$$\frac{\mathrm{d}^2 y(t)}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2\, y(t) = 0$$

Et la solution est $\boxed{y(t) = A\cos(\omega_0\, t) + B\sin(\omega_0\, t)}$ avec $(A, B) \in \mathbb{R}^2$

IV Détermination de LA solution

Dans cette partie, on s'intéressera à la résolution de l'équation différentielle

$$\ddot{y} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{y} + {\omega_0}^2 y = {\omega_0}^2\Psi$$

Avec ω_0, Q et Ψ des constantes. Par ailleurs, on suppose que $Q < 1/2$ et on introduit les conditions initiales :

$$y(0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{y}(0) = v_0$$

A Détermination des constantes d'intégration

IV.A.1 Constantes d'intégration

La solution générale de cette équation différentielle s'écrit

$$y(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right) + B\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right)\right] + \Psi$$

Cette solution fait apparaître les constantes d'intégration A et B qu'il convient maintenant de déterminer.

Remarque : Pour une équation différentielle du premier ordre, il y aurait une unique constante d'intégration.

IV.A.2 Conditions initiales

Les conditions initiales sont fournies directement par l'énoncé (cas des problèmes de mécanique) ou sont à déterminer par une analyse physique (cas de l'électrocinétique, non abordé ici). On parle de conditions initiales car elles donnent la valeur prise par y (et sa dérivée pour une équation d'ordre 2) à l'instant initial. Ici, les conditions initiales sont fournies par l'énoncé :

$$y(0) = y_0 \qquad \text{et} \qquad \dot{y}(0) = v_0$$

IV.A.3 Détermination de la solution

Avec d'évaluer les valeurs prises par A et B, il convient d'évaluer y et sa dérivée à l'instant initial. On obtient :

$$y(0) = A + \Psi \qquad \text{et} \qquad \dot{y}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}\,A + \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,B$$

On en déduit alors que $\quad A = y_0 - \Psi \quad$ et $\quad B = \dfrac{v_0 + \dfrac{\omega_0}{2Q}(y_0-\Psi)}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}$

La solution de l'équation différentielle s'écrit finalement

$$\boxed{y(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[(y_0-\Psi)\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right) + \frac{v_0 + \dfrac{\omega_0}{2Q}(y_0-\Psi)}{\omega_0\sqrt{1-\dfrac{1}{4Q^2}}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\,t\right)\right] + \Psi}$$

Remarque : La solution paraît ici particulièrement compliquée parce que l'on se place dans un cas général. En pratique, elle sera très souvent bien plus simple à écrire. Mais c'est un bon exercice pour vous entraîner !

B A retenir : marche à suivre

Lorsque vous êtes face à une équation différentielle dont on vous demande de déterminer **LA** solution, vous devez absolument suivre ces étapes **dans cet ordre** :

1. Déterminer la forme de la solution homogène y_{h} (elle fait apparaître une constante d'intégration pour une équation du premier ordre et deux constantes d'intégration pour une équation du second ordre) ;
2. Déterminer une solution particulière y_{sm} si l'éqation différentielle est à second membre non nul ;
3. La solution générale s'écrit alors par sommation

$$y = y_{\mathrm{h}} + y_{\mathrm{sm}}$$

4. Déterminer **enfin** la (premier ordre) ou les (second ordre) constantes d'intégration en utilisant les conditions initiales sur la solution générale y.

Attention, à chaque fois que vous rechercherez les constantes d'intégration directement sur y_{h} et non sur y, un chaton mignon et innocent mourra écrasé par une caravane.