

# Filtrage linéaire

## Sommaire

<b>I Décomposition en série de FOURIER</b>	<b>3</b>
I/A Théorème de FOURIER	3
I/B Analyse spectrale	3
I/C Relation de PARSEVAL	5
<b>II Filtrage</b>	<b>5</b>
II/A Traitement du signal et filtre	5
II/B Fonction de transfert d'un filtre	5
II/C Effet d'un filtre sur un signal périodique	6
<b>III Description d'un filtre</b>	<b>7</b>
III/A Gain et gain en décibels	7
III/B Diagramme de BODE	9
III/C Filtres moyennneurs, dérivateurs et intégrateurs	10
<b>IV Exemples de filtres</b>	<b>11</b>
IV/A RC sur C : passe-bas	11
IV/B RC sur R : passe-haut	14
IV/C RLC sur C : passe-bas ordre 2	16
IV/D RLC sur R : passe-bande	17
IV/E Filtres en cascade	20
<b>V Résumé</b>	<b>21</b>

## ✂ Capacités exigibles

- ☐ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- ☐ Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- ☐ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de BODE en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- ☐ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ☐ Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

- ☐ Tracer le diagramme de BODE (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- ☐ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
- ☐ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.
- ☐ Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- ☐ Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).

## ✓ L'essentiel

## Définitions

<input type="checkbox"/> E8.1 : Spectre d'un signal . . . . .	3
<input type="checkbox"/> E8.2 : Filtre . . . . .	5
<input type="checkbox"/> E8.3 : Fonction de transfert . . . . .	5
<input type="checkbox"/> E8.4 : Gains . . . . .	7
<input type="checkbox"/> E8.5 : Échelle logarithmique . . . . .	7
<input type="checkbox"/> E8.6 : Diagramme de BODE . . . . .	9
<input type="checkbox"/> E8.7 : Effets des filtres . . . . .	10

## Propriétés

<input type="checkbox"/> E8.1 : Relation de PARSEVAL . . . . .	5
<input type="checkbox"/> E8.2 : Amplitude vs. gain . . . . .	8
<input type="checkbox"/> E8.3 : Passe-bas intégrateur . . . . .	13
<input type="checkbox"/> E8.4 : Passe-haut dérivateur . . . . .	15

## Théorèmes

<input type="checkbox"/> E8.1 : FOURIER . . . . .	3
---	---

## Démonstrations

<input type="checkbox"/> E8.1 : $\underline{H}$ RC sur C . . . . .	6
<input type="checkbox"/> E8.2 : Amplitude vs. gain . . . . .	8
<input type="checkbox"/> E8.3 : $\underline{H}$ RC sur R . . . . .	14
<input type="checkbox"/> E8.4 : $\underline{H}$ RLC sur C . . . . .	17
<input type="checkbox"/> E8.5 : $\underline{H}$ RLC sur R . . . . .	18

## Applications

<input type="checkbox"/> E8.1 : Gain du filtre RC sur C . . . . .	8
<input type="checkbox"/> E8.2 : Diagramme asymptotique RC sur C . . . . .	10

## Outils

<input type="checkbox"/> E8.1 : Appliquer un filtre linéaire . . . . .	6
<input type="checkbox"/> E8.2 : Lire un diagramme de BODE . . . . .	9
<input type="checkbox"/> E8.3 : Obtention des asymptotes . . . . .	10
<input type="checkbox"/> E8.4 : Étude d'un filtre . . . . .	21

## Exemples

<input type="checkbox"/> E8.1 : Décomposi° en séries de FOURIER . . . . .	3
<input type="checkbox"/> E8.2 : Filtre RC . . . . .	6
<input type="checkbox"/> E8.3 : Filtrage par RC sur C . . . . .	12
<input type="checkbox"/> E8.4 : Effet d'un intégrateur . . . . .	13
<input type="checkbox"/> E8.5 : Effet d'un dérivateur . . . . .	15
<input type="checkbox"/> E8.6 : Effet d'un passe-bande . . . . .	20

## Points importants

<input type="checkbox"/> E8.1 : Généralisation passe-bas ordre 1 . . . . .	12
<input type="checkbox"/> E8.2 : Généralisation passe-haut ordre 1 . . . . .	15
<input type="checkbox"/> E8.3 : Généralisation passe-bas ordre 2 . . . . .	17
<input type="checkbox"/> E8.4 : Généralisation passe-bande ordre 2 . . . . .	19
<input type="checkbox"/> E8.5 : Filtres en cascades . . . . .	20

## Erreurs communes

<input type="checkbox"/> E8.1 : Représentation ouverte . . . . .	6
<input type="checkbox"/> E8.2 : Filtres en cascades . . . . .	20

À travers les précédents chapitres, nous avons mis en place des moyens d'étudier l'amplitude d'un signal de sortie (tension  $u_C$ , elongation  $x$ ) en fonction de la pulsation d'un signal d'entrée sinusoïdal. Dans la pratique, les signaux purement sinusoïdaux sont rares et sont en réalité des **signaux composés**, comportant de nombreuses fréquences. La lumière blanche, par exemple, est un signal lumineux composé d'une continuité de longueur d'ondes (allant du violet au rouge dans le visible), qui se **décompose en ses longueurs d'ondes** constitutives sous certaines conditions : chacune de ses couleurs est déviée différemment lors du passage dans un prisme par exemple.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier des signaux composés, qu'on décomposera en **somme de signaux sinusoïdaux**, et leur traitement par des systèmes traitant différemment ces longueurs d'ondes – qu'on appelle des filtres. Ils sont au cœur de toutes les innovations technologiques du XX<sup>e</sup> et XXI<sup>e</sup> siècles, qui reposent entièrement sur le traitement du signal. Cela s'applique aux transferts de données, à la création et diffusion de musique, et même à la couleur bleue du ciel.

Pour une introduction visuelle et des analyses de qualité, je vous recommande les vidéos de 3BLUE1BROWN portant sur le sujet<sup>1,2</sup>. Pour une approche un peu plus historique et concernant l'importance de l'algorithme informatique basé sur ce théorème, je vous recommande la vidéo de VERITASIAM<sup>3</sup>.

1. Mais qu'est-ce que la Transformée de Fourier ? Une introduction visuelle.

2. Mais qu'est-ce qu'une série de Fourier ? Du transfert thermique à des dessins avec des cercles.

3. The Remarkable Story Behind The Most Important Algorithm Of All Time

# I Décomposition en série de FOURIER

Le traitement de signal composé a pu émerger grâce à un des théorèmes les plus importants de la physique dans sa totalité, le théorème de FOURIER.

## I/A Théorème de FOURIER

### ♥ Théorème E8.1 : FOURIER

Tout signal périodique se décompose comme une somme, éventuellement infinie, de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal périodique composé  $s(t)$  de pulsation  $\omega$  s'écrit

Avec  $S_0$  la valeur moyenne (composante continue), et les  $S_n$  et  $\varphi_n$  des caractéristiques du signal. Les amplitudes  $S_n$  constituent le **spectre** du signal.

## I/B Analyse spectrale

### Définition E8.1 : Spectre d'un signal

Le **spectre** d'un signal représente l'amplitude des différentes composantes sinusoïdales le constituant en fonction de leurs **fréquences**. Il donne les fréquences et les importances relatives des sinus.

- ◇ La première composante sinusoïdale,  $S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ , s'appelle le **fondamental**. Il donne sa **fréquence au signal entier**.
- ◇ Le signal  $S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$  est appelé **harmonique de rang n**. Sa pulsation est un **multiple** du fondamental.

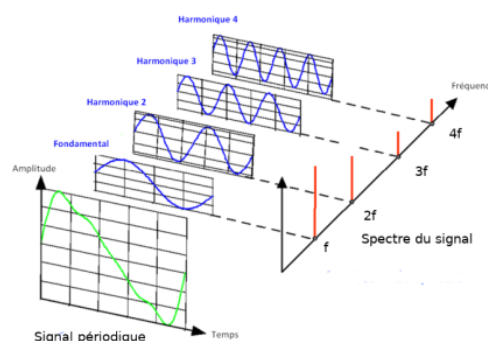


FIGURE E8.1 – Décomposition de FOURIER d'un signal composé<sup>4</sup>.

### Exemple E8.1 : Décomposi° en séries de FOURIER

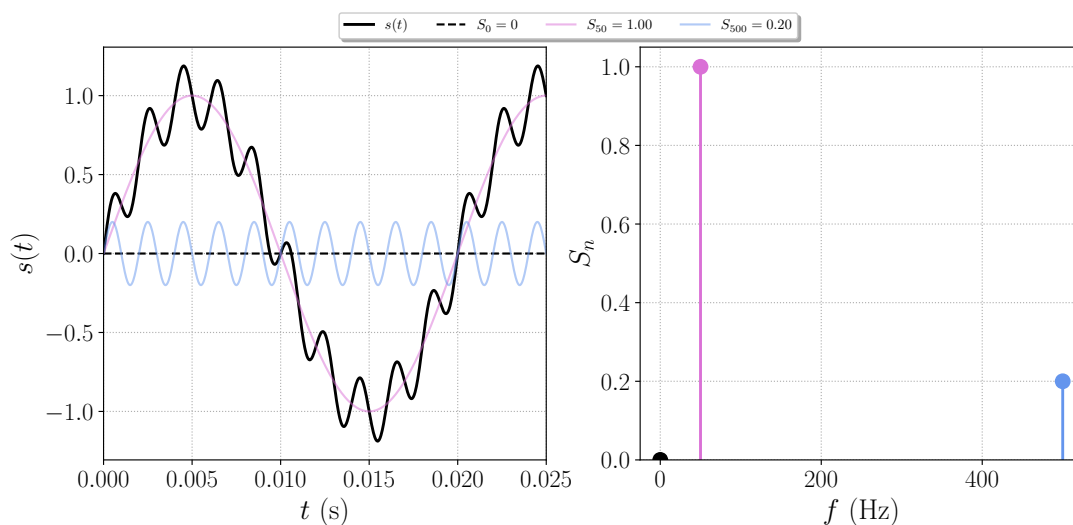
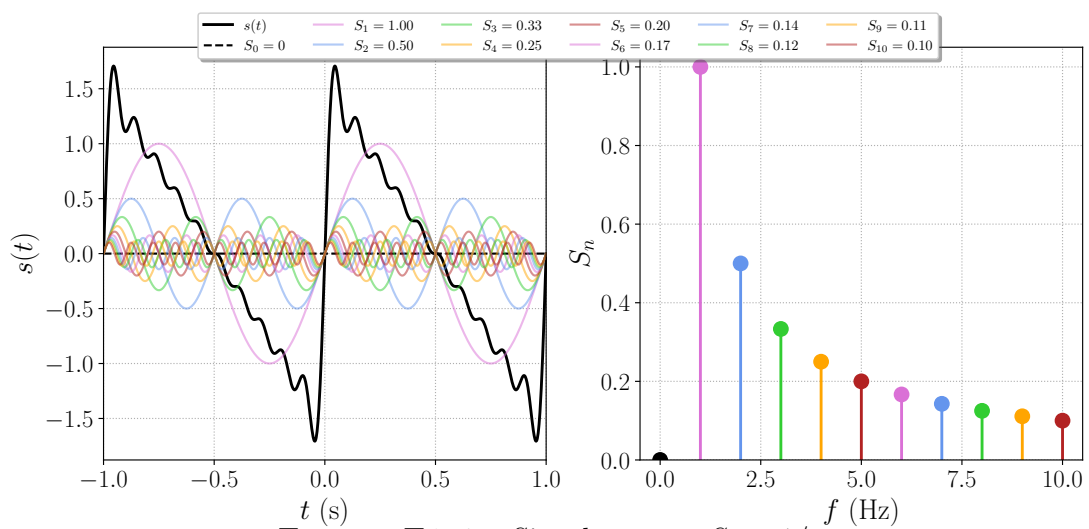
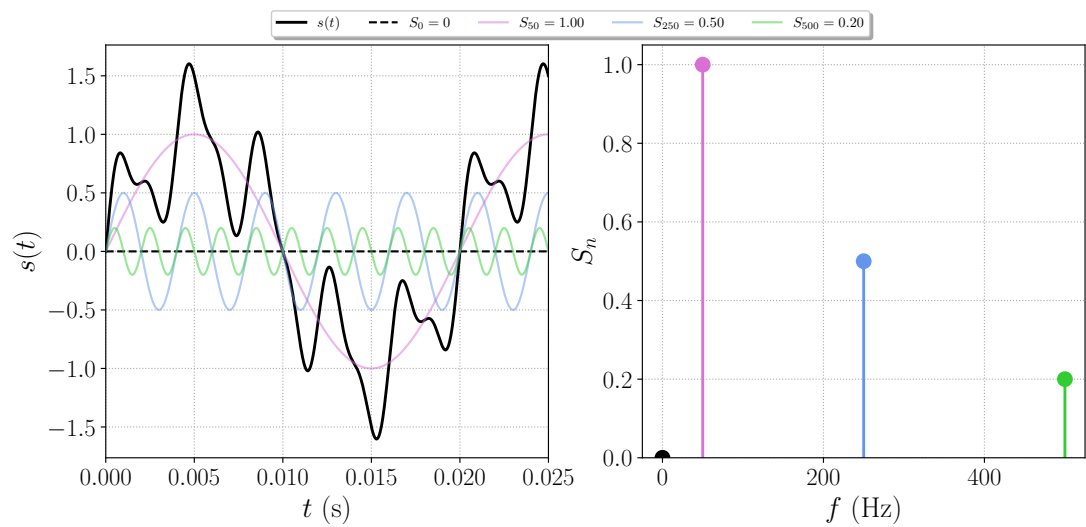
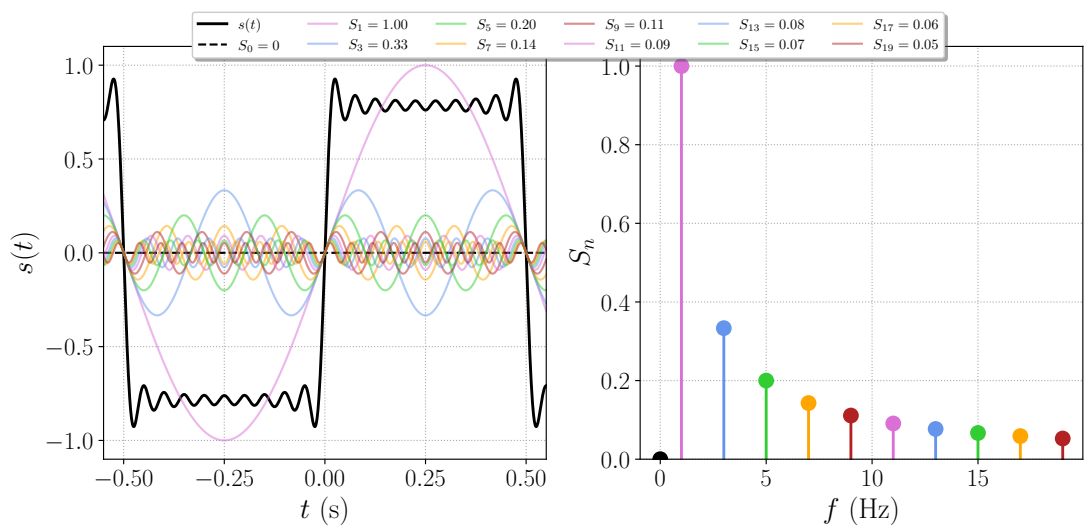


FIGURE E8.2 – Signal somme de 50 et 500 Hz

4. Pour un approche ludique, essayer ce site : [Composeur de séries de FOURIER](#)

FIGURE E8.4 – Signal rampe :  $S_n = 1/n$ FIGURE E8.5 – Signal créneau :  $S_{2n+1} = 1/(2n+1)$ 

### Interprétation E8.1 : Hautes et basses fréquences

- ◇ Les **basses fréquences** « codent » les **variations lentes** d'un signal ;
- ◇ les **hautes fréquences** « codent » les **variations brusques** d'un signal.

## I/C Relation de PARSEVAL

Si l'on peut décomposer tout signal en somme de sinus, et que l'énergie moyenne d'une fonction sinusoïdale est  $\langle s^2(t) \rangle$ , alors on peut espérer que l'énergie de tout le signal est la somme des fréquences individuelles le composant. C'est en effet le cas :

### Propriété E8.1 : Relation de PARSEVAL

Ainsi, l'énergie portée par un signal se répartit dans ses harmoniques, et ce de façon indépendante.

## II Filtrage linéaire

### II/A Traitement du signal et filtre

Le but du **traitement du signal** est d'**extraire l'information utile** d'un signal issu d'un capteur où de multiples signaux se superposent au signal utile : bruits électromagnétiques, autres informations, etc.

- ◇ Pour recevoir la radio, on doit sélectionner le signal autour d'une bande de fréquence précise et éliminer le reste ;
- ◇ Pour isoler une voix dans un morceau de musique, c'est le même principe.

### ♥ Définition E8.2 : Filtre

Système qui **traite un signal** sur un **critère fréquentiel**. On le représente par un **quadripôle** dans les schémas électrique, avec  $e(t)$  l'entrée et  $s(t)$  la sortie. On en distingue 3 types principaux :

- ◇
- ◇
- ◇

Il est dit **linéaire** si la sortie est de même(s) fréquence(s) que l'entrée (i.e., l'équation différentielle derrière son action est une EDL).

FIGURE E8.6 – Filtre.

### II/B Fonction de transfert d'un filtre

La grandeur caractérisant l'action d'un filtre est sa **fonction de transfert** :

### ♥ Définition E8.3 : Fonction de transfert

Soit  $\underline{E}$  l'amplitude complexe d'un signal d'entrée et  $\underline{S}$  celle d'un signal de sortie associé. Alors,

### Exemple E8.2 : Filtre RC

### Attention E8.1 : Représentation ouverte

On n'indique pas le reste du circuit, mais **un filtre s'insère dans un circuit** :

- ◇  $e(t)$  peut venir d'un générateur, d'un amplificateur, etc.
- ◇  $s(t)$  peut aller vers un appareil de mesure, un haut-parleur, etc.

FIGURE E8.7 – Filtre RC.

### ♥ Démonstration E8.1 : $H$ RC sur $C$

Pour trouver la fonction de transfert, on transforme le circuit en complexes et on applique un pont diviseur de tension :

FIGURE E8.8 – RC en complexes.

### ♥ Notation E8.1 : Pulsation(s) réduite

Pour alléger les notations, et se ramener à des grandeurs centrées autour de l'unité, il est commode d'introduire les **pulsations réduite** :

avec                      ou                      selon le contexte

## II/C Effet d'un filtre sur un signal périodique

Pour un signal périodique, décomposable en signaux sinusoïdaux, on procède par superposition :

### ♥ Outils E8.1 : Appliquer un filtre linéaire

1) On **décompose le signal d'entrée** en sinusoïdes, avec  $\omega_e$  la pulsation d'entrée du fondamental et  $\omega_n = n\omega_e$  les pulsations des harmoniques :

2) On applique la **fonction de transfert à chaque entrée** pour obtenir la sortie correspondante :

$$\text{avec } \left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right. \Leftrightarrow \left\{ \begin{array}{l} \dots \end{array} \right.$$

3) On recompose le signal de sortie en **sommant les sorties obtenues** :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) = \left\{ \begin{array}{c} \rightarrow \boxed{\phantom{00}} \rightarrow \\ + \\ \rightarrow \boxed{\phantom{00}} \rightarrow \\ + \\ \rightarrow \boxed{\phantom{00}} \rightarrow \\ + \\ \vdots \\ \rightarrow \boxed{\phantom{00}} \rightarrow \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = s(t)$$

### III Description d'un filtre

#### III/A Gain et gain en décibels

##### ♥ Définition E8.4 : Gains

1) Le **gain** traduit l'effet du filtre sur l'amplitude d'un signal ; on a

unité

◇  $G(x) = 1 \Rightarrow S_n(x) = E_n$  : composante de sortie **conservée** à cette fréquence.

◇  $G(x) > 1 \Rightarrow S_n(x) > E_n$  : composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.

◇  $G(x) < 1 \Rightarrow S_n(x) < E_n$  : composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

2) Le **gain en décibel** traduit le même effet, mais terme d'**énergie** et en échelle logarithmique :

Unité

◇  $G_{\text{dB}}(x) = 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |H(x)| = 1$  : composante de sortie **conservée** à cette fréquence.

◇  $G_{\text{dB}}(x) > 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |H(x)| > 1$  : composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.

◇  $G_{\text{dB}}(x) < 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |H(x)| < 1$  : composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

##### Définition E8.5 : Échelle logarithmique

Les échelles logarithmiques sont utiles pour visualiser des données sur de grands intervalles.

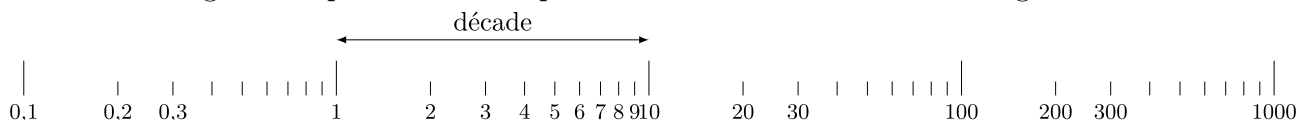


FIGURE E8.9 – Exemple d'échelle logarithmique

À l'inverse d'une échelle linéaire, ici les incréments sont des **puissances de 10**. Le passage d'une puissance de 10 à la suivante s'appelle une **décade**.

##### Rappel E8.1 : Logarithme décimal

Le logarithme décimal est la fonction inverse de la fonction  $f : x \mapsto 10^x$ . Ainsi,

$$\log(10^1) = 1 \quad ; \quad \log(10^0) = 0 \quad ; \quad \log(10^{-1}) = -1$$



### ♥ Propriété E8.2 : Amplitude vs. gain

- 1) Lorsque l'amplitude est divisée par 10, le gain en décibels diminue de 20 dB ;
- 2) La bande passante est l'ensemble des pulsations telles que  $G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$  :

$$\text{bande passante} \triangleq \{\omega \mid G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}\}$$



### ♥ Démonstration E8.2 : Amplitude vs. gain

1)

2)



### ♥ Application E8.1 : Gain du filtre RC sur C

On rappelle la fonction de transfert du filtre RC sur C :  $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+jx}$ .

- 1) Déterminer son gain. Quel est son maximum ?
- 2) En déduire son gain en décibels. Quel est son maximum ?
- 3) Déterminer sa bande passante à l'aide du gain.
- 4) Déterminer sa phase. Donner ses limites pour  $x \rightarrow 0$  et  $x \rightarrow \infty$ .

1)

2)

3)

4)





### ♥ Interprétation E8.2 : Pulsation de coupure

Ainsi, on appelle  $\omega_c$  la pulsation de **coupure** puisque  $\forall \omega > \omega_c$ , le signal est atténué, c'est-à-dire « coupé » du spectre d'entrée. Cela diffère donc bien de la pulsation propre  $\omega_0$  d'un système oscillant qui correspond à sa pulsation naturelle d'oscillation.

## III/B Diagramme de BODE

### III/B) 1 Définition

### ♥ Définition E8.6 : Diagramme de BODE

Le(s) diagramme(s) de BODE est un outil permettant de visualiser *et quantifier* l'effet d'un filtre sur une fréquence d'entrée. On représente pour cela :

- ◇ **gain en décibels**  $G_{dB}(x) = 20 \log |\underline{H}(x)|$  ;
- ◇ et sa **phase**  $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(x))$ .

On les trace en fonction de la pulsation (réduite ou non) ou de la fréquence, et **en échelle logarithmique**.

Par exemple, pour le RC sur C :

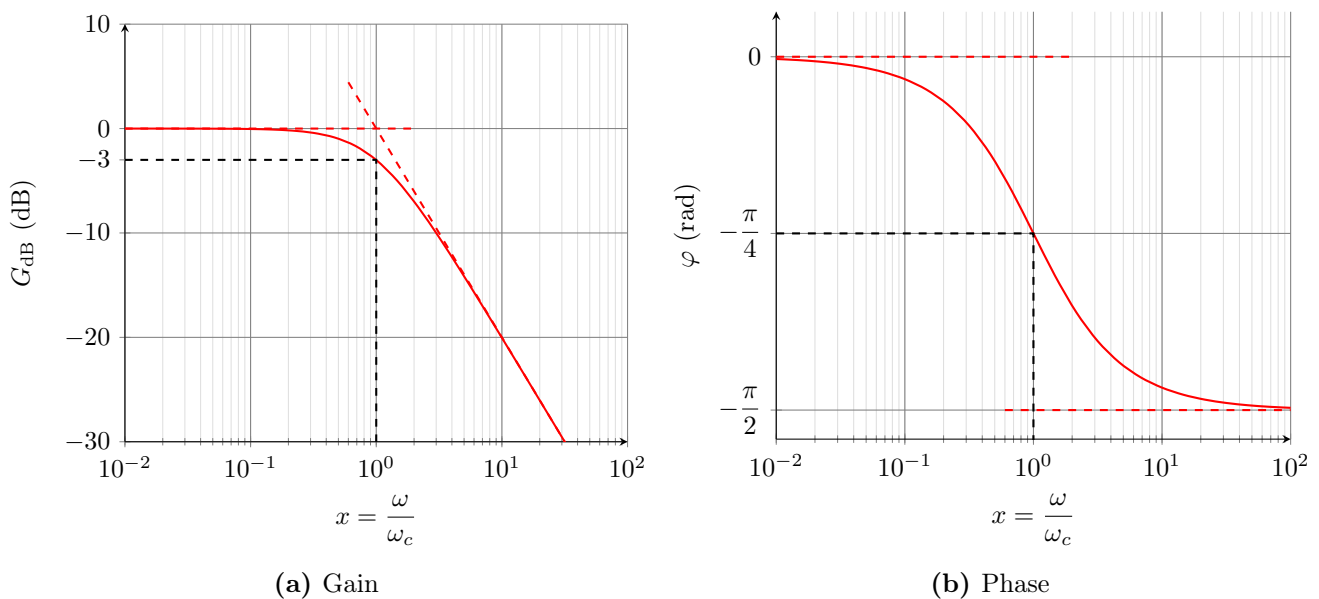


FIGURE E8.10 – Diagramme de BODE du filtre RC sur C.

C'est donc un \_\_\_\_\_ !

### III/B) 2 Lecture

### ♥ Outils E8.2 : Lire un diagramme de BODE

Pour lire le signal de sortie d'un filtre, il suffit de repérer le **gain** et la **phase** de la fonction de transfert **pour chaque fréquence** de la décomposition : pour  $e_n(t) = E_n \cos(n\omega_c t + \varphi_n)$ , la sortie sera

On trouve le déphasage par lecture directe, et on trouve le gain à partir du gain en décibel en

inversant la formule :

### III/B) 3 Asymptotes

#### ♥ Outils E8.3 : Obtention des asymptotes

Pour trouver les asymptotes :

- 1) On simplifie  $\underline{H}(x)$  pour  $x \rightarrow 0$  et  $x \rightarrow \infty$ , en ne gardant **que le terme prépondérant** au numérateur et au dénominateur ;
- 2) On calcule  $G_{dB}$  et  $\varphi$  avec ces limites asymptotiques ;
- 3) On trace les droites obtenues en les faisant se rejoindre.

#### ♥ Application E8.2 : Diagramme asymptotique RC sur C

Déterminer les droites asymptotiques du diagramme de BODE de RC sur C. Vérifier la cohérence avec les asymptotes de la Figure E8.10. Indiquer le point d'intersection des asymptotes en gain.

- 1)
- 2) ◇ Pour le gain :
  - ▷ **Asymptotes :**

Ainsi, à hautes fréquences, **le gain diminue de 20 dB par décade** : si  $\omega$  est multiplié par 10, le gain en décibel baisse de 20 dB (i.e. l'amplitude est divisée par 10).

▷ **Intersection :**

◇ Pour la phase :

### III/C Filtres moyennateurs, dérivateurs et intégrateurs

#### ♥ Définition E8.7 : Effets des filtres

Un filtre peut, **selon la plage de fréquences du signal d'entrée**, se comporter avec les effets suivants :

- ◇ **Moyenneur** : Sortie proportionnelle à la moyenne de l'entrée,

En pratique, c'est un **passe-bas** pour lequel  $\omega_c \ll \omega_e$  : toutes les harmoniques sauf la composante continue sont atténuées.

◇ **Intégrateur** : Sortie proportionnelle à la primitive de l'entrée,

Correspond à une pente de  $-20$  dB/decade gain. Par exemple, le passe-bas d'ordre 1 pour  $\omega \gtrsim 3\omega_c$  est un intégrateur.

◇ **Dérivateur** : Sortie proportionnelle à la dérivée de l'entrée,

Correspond à une pente de  $+20$  dB/decade en gain. Ça sera le cas d'un passe-haut d'ordre 1, pour  $\omega \lesssim 0,3\omega_c$

## IV Exemples de filtres

### IV/A RC sur C : passe-bas

FIGURE E8.11 – RC sur C.

IV/A) 1 Prévion comportement

Basses fréquences

Hautes fréquences

FIGURE E8.12 – RC sur C en BF

FIGURE E8.13 – RC sur C en HF

### IV/A) 2 Fonction de transfert, généralisation

On a trouvé la fonction de transfert plus tôt. On généralise :

#### Important E8.1 : Généralisation passe-bas ordre 1

La forme canonique d'un filtre passe-bas du premier ordre est

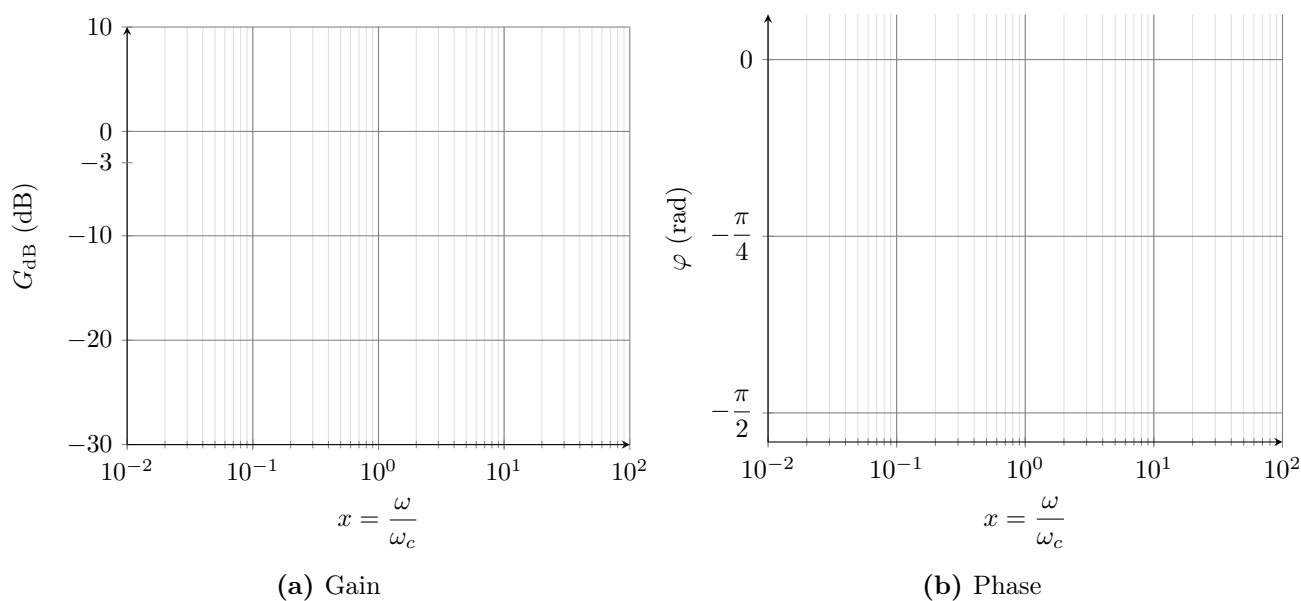
$$\text{avec } H_0 = \text{cte} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

### IV/A) 3 Diagramme de BODE

On rappelle les diagrammes de BODE, avec :

**TABLEAU 8.1** – Étude RC sur C.

	$\forall x$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$			
$G_{\text{dB}} = 20 \log  \underline{H} $			
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$			



**FIGURE E8.14** – Diagramme de BODE du filtre RC sur C.

#### ♥ Exemple E8.3 : Filtrage par RC sur C

En reprenant la Figure E8.3, on ajoute le filtre RC en passe-bas. Pour garder les basses fréquences, on choisit une fréquence de coupure  $f_c$  à 10 Hz. Avec  $R = 1000 \Omega$  cela impose  $C = 1,6 \times 10^{-5} \text{ F}$  ( $\omega_c = \frac{1}{RC}$ ). On obtient la figure suivante :

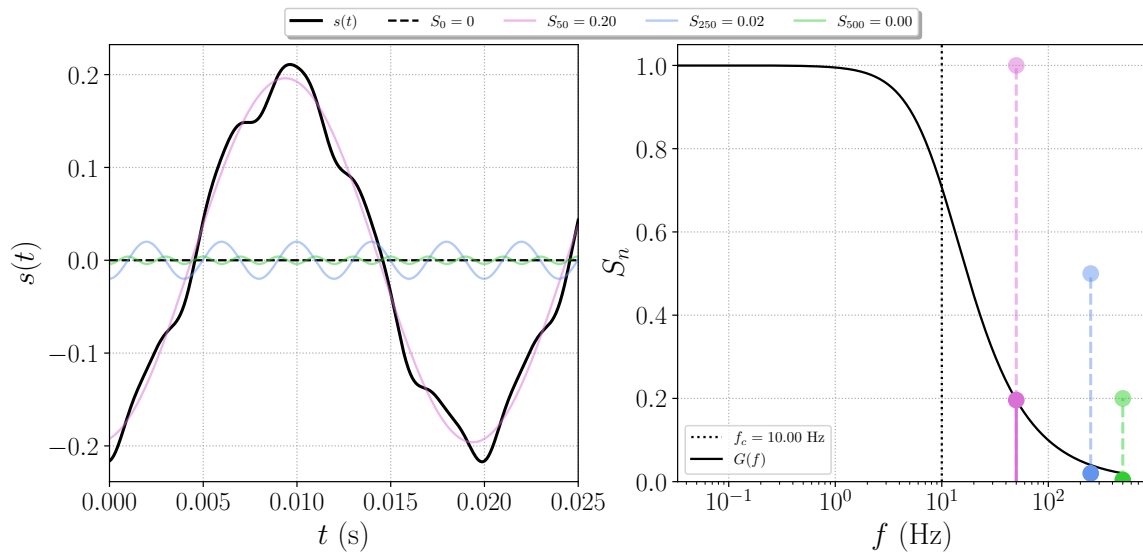


FIGURE E8.15 – Signal somme de 50, 250 et 500 Hz

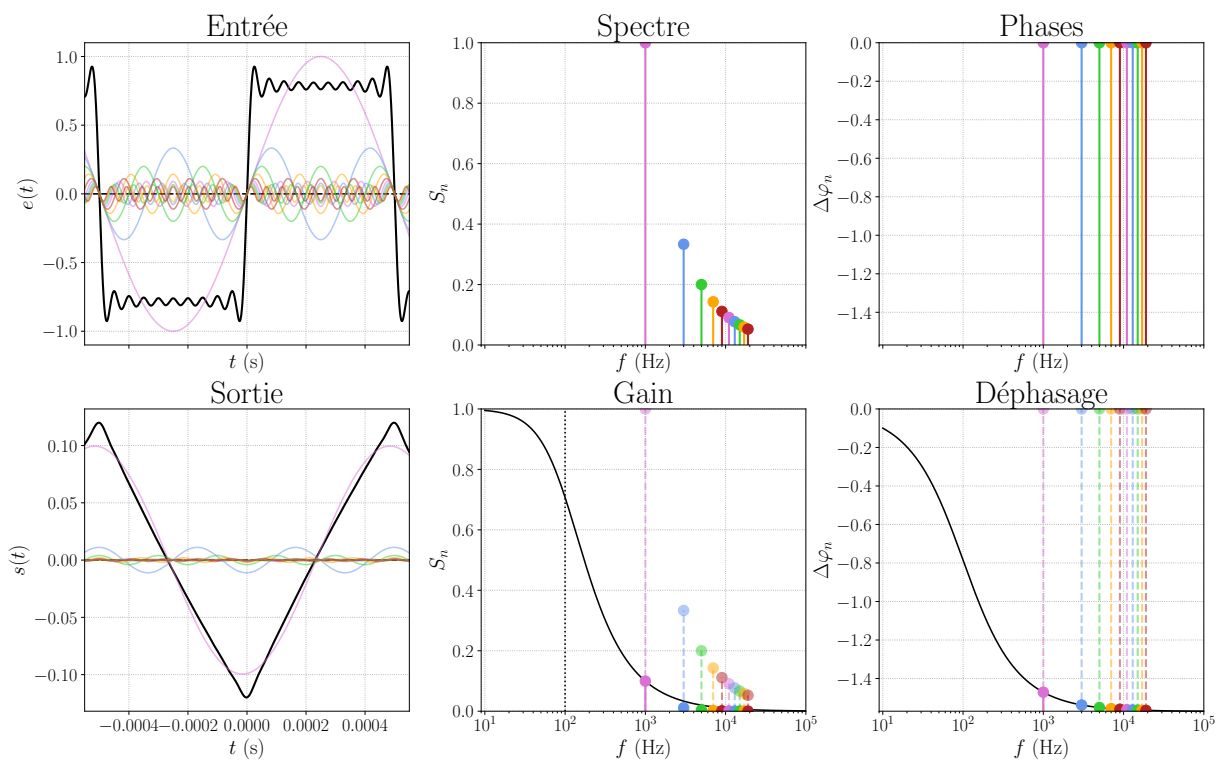
## IV/A) 4 Comportement intégrateur à HF

## ♥ Propriété E8.3 : Passe-bas intégrateur

En hautes fréquences, la fonction de transfert d'un passe-bas est celle d'un intégrateur :

## ♥ Exemple E8.4 : Effet d'un intégrateur

Par exemple, sur un signal créneau, on obtient la figure suivante :

FIGURE E8.16 – Filtrage d'un signal créneau de  $f_e = 1$  kHz par un passe-bas de  $f_c = 100$  Hz.

## IV/B RC sur R : passe-haut

**FIGURE E8.17** – RC sur R.

IV/B) 1 Prévision comportement

Basses fréquences

Hautes fréquences

**FIGURE E8.18** – RC sur R en BF

**FIGURE E8.19** – RC sur R en HF

IV/B) 2 Fonction de transfert, généralisation

♥ Démonstration E8.3 : H RC sur R

**FIGURE E8.20** – RC en complexes.

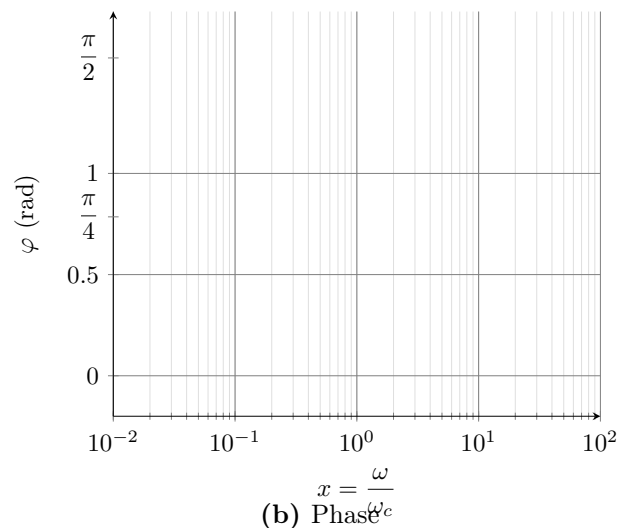
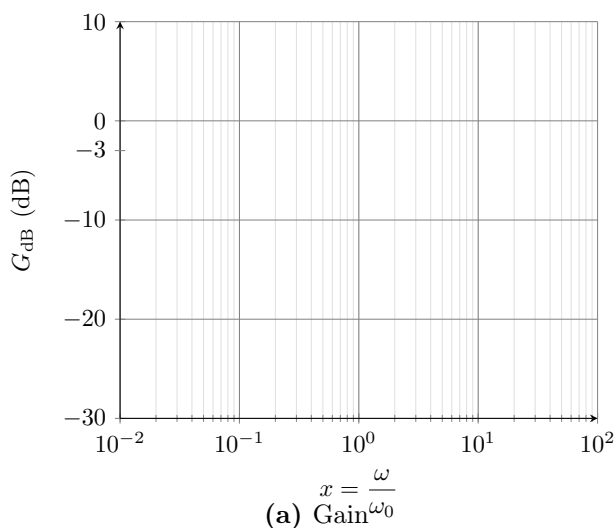
**Important E8.2 : Généralisation passe-haut ordre 1**

La forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre est

$$\text{avec } H_0 = \text{cte} \quad \text{et} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{1}{RC}$$

**IV/B) 3** Diagramme de BODE**TABLEAU 8.2** – Étude RC sur R.

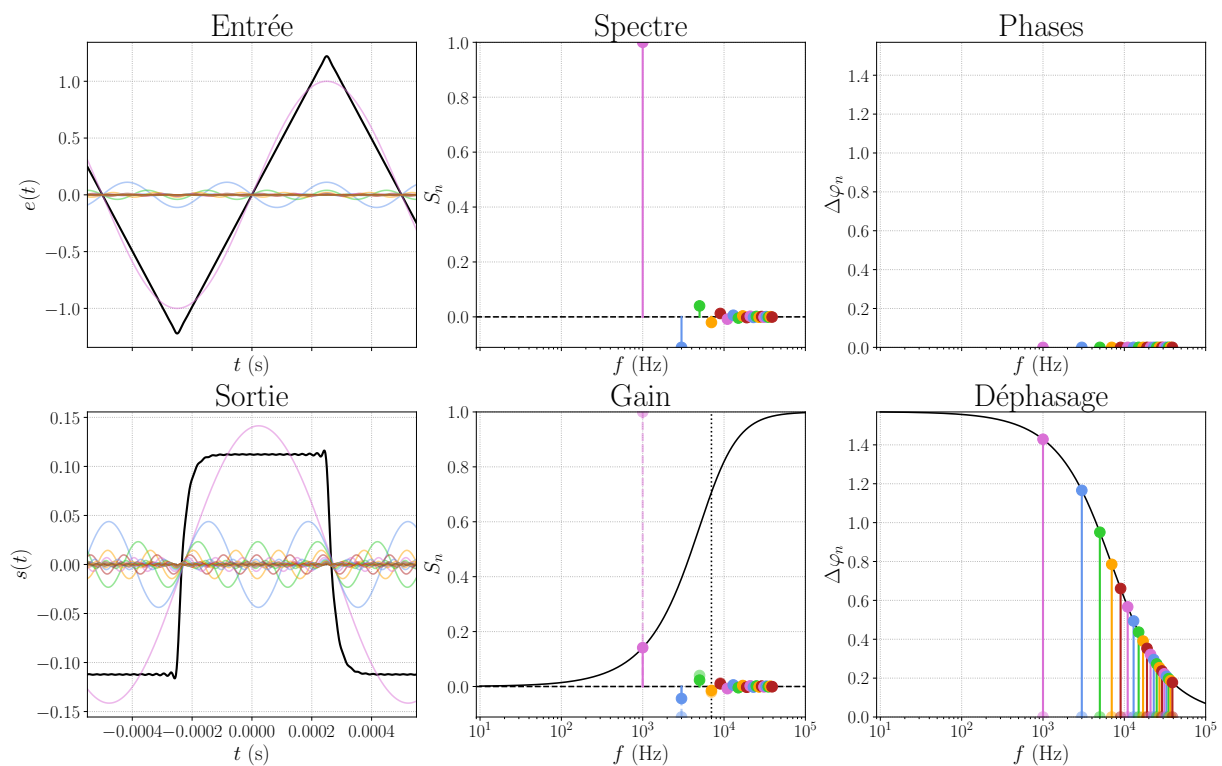
	$\forall x$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$			
$G_{\text{dB}} = 20 \log  \underline{H} $			
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$			

**FIGURE E8.21** – Diagramme de BODE du filtre RC sur R.**IV/B) 4** Comportement dérivateur à BF**♥ Propriété E8.4 : Passe-haut dérivateur**

En basses fréquences, la fonction de transfert est celle d'un dérivateur :

**♥ Exemple E8.5 : Effet d'un dérivateur**

Par exemple, sur un signal triangle, on obtient la figure suivante :



**FIGURE E8.22** – Filtrage d'un signal triangle de  $f_e = 1$  kHz par un passe-haut de  $f_c = 7000$  Hz.

## IV/C RLC sur C : passe-bas ordre 2

**FIGURE E8.23** – RLC sur C.

### IV/C) 1 Prévision comportement

Basses fréquences

Hautes fréquences

**FIGURE E8.24** – RLC sur C en BF

**FIGURE E8.25** – RLC sur C en HF



## IV/C) 2 Fonction de transfert, généralisation

♥ Démonstration E8.4 :  $\underline{H}$  RLC sur C

FIGURE E8.26 – RLC en complexes.

## Important E8.3 : Généralisation passe-bas ordre 2

La forme canonique d'un filtre passe-bas du second ordre est

$$\text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad H_0 = \text{cte} \quad \text{et} \quad Q \text{ facteur de qualité}$$

## IV/C) 3 Diagramme de BODE

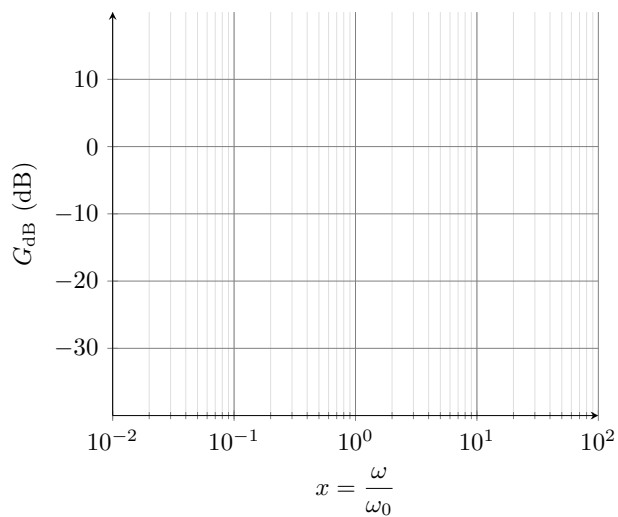
TABLEAU 8.3 – Étude RLC sur C.

	$\forall x$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$			
$G_{\text{dB}} = 20 \log  \underline{H} $			
$\tan(\arg(\underline{H}))$			
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$			

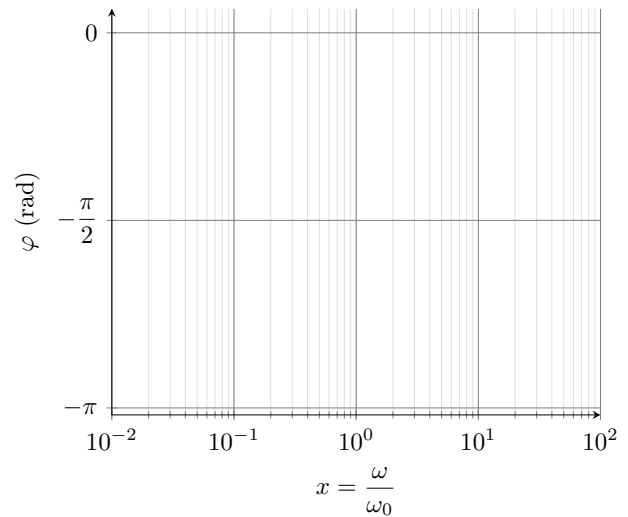
On observe donc une pente de **−40 dB/décade** en atténuation à grandes fréquences : ce filtre sera meilleur en moyenneur.

## IV/D RLC sur R : passe-bande

FIGURE E8.28 – RLC sur R.



(a) Gain



(b) Phase

**FIGURE E8.27** – Diagramme de BODE du filtre RLC sur C.

IV/D) 1 Prévision comportement

Basses fréquences

Hautes fréquences

**FIGURE E8.29** – RLC sur R en BF**FIGURE E8.30** – RLC sur R en HF

IV/D) 2 Fonction de transfert, généralisation

♥ Démonstration E8.5 : H RLC sur R

**FIGURE E8.31** – RLC en complexes.

Important E8.4 : Généralisation passe-bande ordre 2

La forme canonique d'un filtre passe-bande du second ordre est

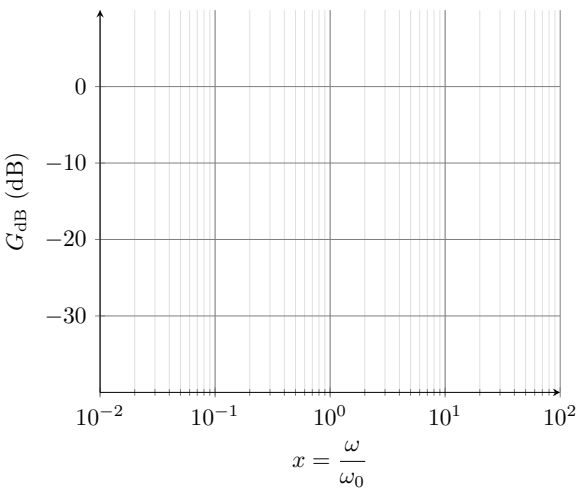
avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  et  $H_0 = \text{cte}$  et  $Q$  facteur de qualité

IV/D) 3

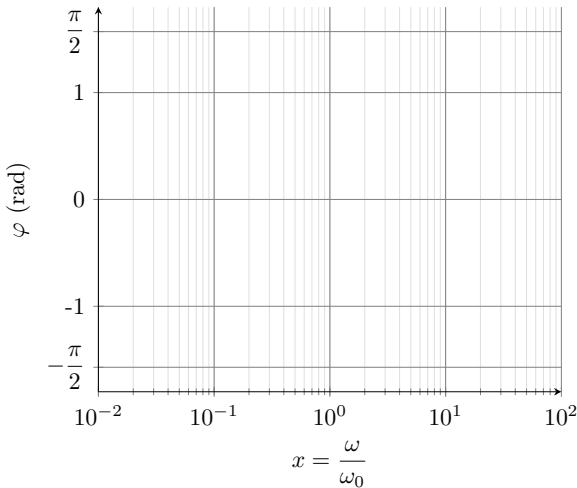
 Diagramme de BODE

TABLEAU 8.4 – Étude RLC sur R.

$\forall x$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$H$		
$G_{\text{dB}}$		
$\Delta\varphi_{s/e}$		



(a) Gain



(b) Phase

FIGURE E8.32 – Diagramme de BODE du filtre RLC sur R.

On observe, sur la Figure E8.32a, une pente de **20 dB/décade** en atténuation à basses fréquences, et **−20 dB/décade** à hautes fréquences : ce filtre permettra d’isoler des fréquences dans un signal. Par exemple, sur un signal créneau, on obtient la Figure E8.33.

### ♥ Exemple E8.6 : Effet d'un passe-bande

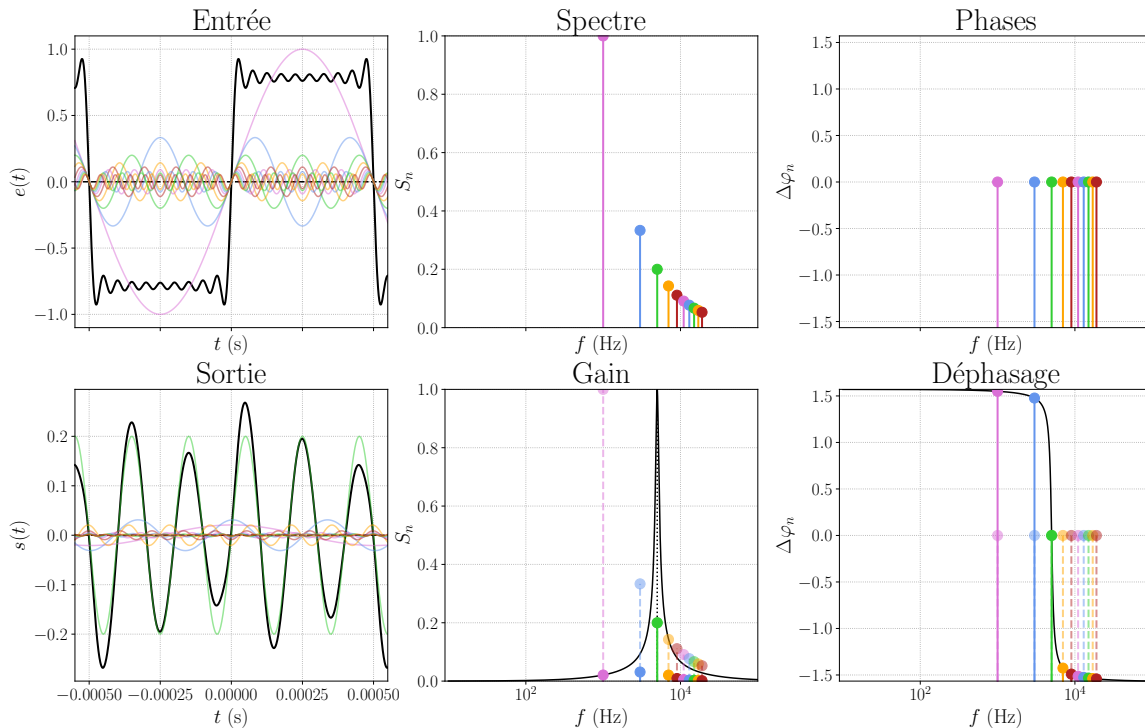


FIGURE E8.33 – Filtrage d'un signal créneau de  $f_e = 1$  kHz par un passe-bande de  $f_c = 5000$  Hz.

## IV/E Filtres en cascade

On appelle « mettre en cascade » le fait d'utiliser la sortie d'un filtre comme l'entrée d'un nouveau. Par exemple, avec deux RC comme ci-contre, On pourrait s'attendre à ce que la fonction de transfert soit

$$\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2 = \frac{1}{1 + jR_1 C_1 \omega} \frac{1}{1 + jR_2 C_2 \omega}$$

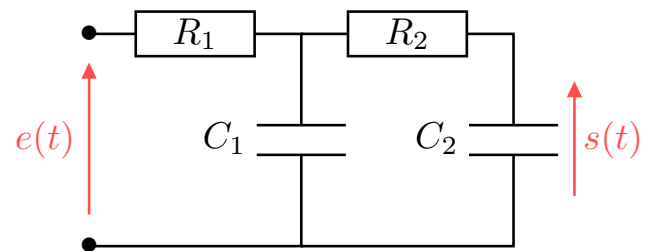


FIGURE E8.34 – RC en cascade

Cependant, le calcul de la fonction de transfert donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jR_1 C_1 \omega + jR_2 C_2 \omega + \boxed{jR_1 C_2 \omega} + (j\omega)^2 R_1 C_1 R_2 C_2}$$

### ♥ Attention E8.2 : Filtres en cascades

Lorsque l'on place des filtres en cascade, la fonction de transfert totale n'est pas le produit des fonctions de transfert de chaque étage.

Pour appliquer le pont diviseur de tension sur le premier RC, il faut que le condensateur  $C_1$  et la résistance  $R_1$  soient parcourus par le même courant ; ça n'est possible que si le courant partant dans la deuxième branche soit très faible devant le courant de la première. Cela revient à ce que l'impédance du condensateur soit très faible devant celle de l'ensemble  $R_2 C_2$ .

### Important E8.5 : Filtres en cascades

Pour que l'on puisse faire le produit des fonctions de transfert, il faut que l'impédance de sortie du premier filtre soit faible devant l'impédance d'entrée du second, de sorte à négliger le courant dévié par le second étage.

En pratique, on emploie souvent des montages utilisant des amplificateurs opérationnels qui ont une très grande impédance d'entrée. On peut par exemple intercaler un montage suiveur entre les deux filtres RC.

## V Résumé

### ♥ Outils E8.4 : Étude d'un filtre

- 1) On fait l'étude à basses et hautes fréquences ;
- 2) On écrit le circuit avec les amplitudes complexes et les impédances des composants ;
- 3) On fait un pont diviseur ;
- 4) On calcule l'amplitude complexe puis on en déduit la fonction de transfert ;
- 5) On calcule le gain en décibels et la phase ;
- 6) On fait l'étude asymptotique ;
- 7) On trace le diagramme de BODE.

Ensuite, pour connaître le signal de sortie d'un signal d'entrée, on le décompose en série de FOURIER et on applique la fonction de transfert complexe à chacune des composantes pour reconstituer le signal de sortie :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) = \left\{ \begin{array}{l} E_0 \quad \rightarrow \quad \underline{H}(0 \cdot \omega_e) \rightarrow S_0 \\ + \\ E_1 \sin(\omega_e t + \varphi_1) \rightarrow \underline{H}(1 \cdot \omega_e) \rightarrow S_1 \sin(\omega_e t + \psi_1) \\ + \\ E_2 \sin(2\omega_e t + \varphi_2) \rightarrow \underline{H}(2 \cdot \omega_e) \rightarrow S_2 \sin(2\omega_e t + \psi_2) \\ \vdots \\ E_n \sin(n\omega_e t + \varphi_n) \rightarrow \underline{H}(n \cdot \omega_e) \rightarrow S_n \sin(n\omega_e t + \psi_n) \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = s(t)$$