Sujet 1 – corrigé

I Décollage d'une fusée

On étudie une fusée qui décolle. Elle a donc un mouvement selon Oz et on suppose que le champ de pesanteur est uniforme (début de la phase de décolement, au voisinage du sol). Pour se propulser, la fusée éjecte de ses réservoirs du fluide avec un débit massique D_m constant et une vitesse relative (par rapport à la fusée donc) $-u\vec{e}_z$ aussi constante. On note donc $m(t)$ la masse de la fusée.
La poussée d'archimède sera négligée dans toute la suite de l'exercice.

1) Justifier la nécéssité de se ramener à l'étude d'un système fermé pendant la durée dt.

Réponse

La fusée perd de l masse au cours du temps et ne contitue donc pas un système fermé. On doit alors etudier un système fermé incluant les gaz ejectés pendant la durée dt

◇

2) Donner l'expression de la masse $m(t)$ de la fusée au cours du temps

Réponse

On a simplement $m(t) = m_0 - D_m t$ en notant m_0, la masse initiale de la fusée. Dans toute la suite, on oberve qu'il faut $m(t) \geq 0$ soit $t \leq m_0/D_m$. En pratique, la masse ne deviendra jamais nulle, même lorsque le carburant sera entièrement consommé.

◇

3) Montrer que la vitesse de la cette dernière vérifie l'équation différentielle

$$m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = -m(t)g + D_m u$$

Réponse

On considère le système fermé formé par la fusée (et son carburant non ejecté) à l'instant t puis par la fusée, le carburant restant dans les reservoirs et le crburant qui vient d'être ejecté à l'instant $t + dt$. On obtient alors

$$P(t) = m(t)v(t) \quad \text{et} \quad P(t+dt) = m(t+dt)v(t+dt) + D_m dt(v(t+dt) - u) \tag{19.1}$$

$$\Rightarrow P(t+dt) = m(t)v(t+dt) - D_m dt v(t+dt) + D_m dt(v(t+dt) - u) = m(t)v(t+dt) - D_m dt u \tag{19.2}$$

On en déduit par application du PFD au système fermé dans le référentiel terrestre lié au sol et supposé galiléen que

$$\lim_{dt\to 0} \frac{P(t+dt) - P(t)}{dt} = m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) - D_m u = -mg \Rightarrow m(t)\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(t) = D_m u - mg$$

d'où le résultat.

◇

4) En déduire l'expression de $v(t)$ lors du début de la phase de décollage (g supposé constant).

Réponse

On a alors à résoudre l'équation suivante :

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{D_m u - mg}{m} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = u\frac{D_m}{m_0}\frac{1}{1 - D_m t/m_0} - g \Rightarrow v(t) = -u\ln\left(1 - \frac{D_m}{m_0}t\right) - gt + C$$

or à $t = 0$, on a $v(0) = 0$ d'où $C = 0$.

Sujet 2 – corrigé

I Échangeur thermique a contre courant

Soit une machine thermique ouverte dans laquelle circule lentement et horizontalement un fluide en régime stationnaire avec le débit massique D. Il y reçoit les puissances thermique P_{th} et mécanique P_m.

1) A l'aide du premier principe, établir un lien entre ces deux puissances, D et les enthalpies massiques du fluide en entrée et en sortie.

Réponse

Il convient de réaliser un schéma puis d'appliquer le premier principe à un syst. fermé et d'ensuite effectuer un bilan :

$$dH = (p_m + p_{th})dt = (H_{syst}(t+dt) - H_{syst}(t)) + (dm_s h_s - dm_e h_e) \tag{19.1}$$
$$\Rightarrow D(h_s - h_e) = P_{th} + P_m \tag{19.2}$$

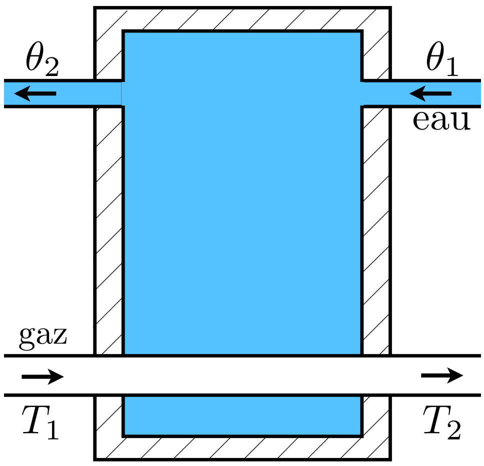
car en régime régime stationnaire, toutes les grandeurs locales sont constantes et que par conservation de la masse, on a $dm_e = dm_s$

◇

Soit un échangeur thermique isobare et adiabatique. Dans le tuyau circule un gaz, supposé parfait, de coefficient $\gamma = 7/5$ et de masse molaire $M = 29\,\mathrm{g\cdot mol^{-1}}$.

Il entre à $T_1 = 520\,\mathrm{K}$ et ressort à $T_2 = 300\,\mathrm{K}$. Le fluide réfrigérant est de l'eau, de capacité thermique $c = 4{,}18\,\mathrm{kJ\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}}$, entrant à θ_1 et sortant à θ_2.

Le régime est stationnaire de débit $D_g = 0{,}10\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ pour le gaz et $D_e = 4{,}0\,\mathrm{kg\cdot s^{-1}}$ pour l'eau.



2) Exprimez θ_2 en fonction des autres grandeurs puis réalisez l'A.N. sachant que $\theta_1 = 12°\mathrm{C}$

Réponse

On peut appliquer le premier principe industriel aux deux fluides en remarquant qu'il n'y a pas de puissance mécanique et que $P_{th,e\to g} + P_{th,g\to e} = 0$:

$$D_g(h_{g,s} - h_{g,e}) = P_{th,e\to g} \tag{19.3}$$
$$D_e(h_{e,s} - h_{e,e}) = P_{th,g\to e} \tag{19.4}$$
$$\tag{19.5}$$

En ajoutant ces deux relations, on trouve : $D_e(h_{e,s} - h_{e,e}) = D_g(h_{g,e} - h_{g,s})$. On sait de plus que pour un GP, on a $h_{GP} = \frac{\gamma R}{M(\gamma-1)}T$ et pour l'eau (phase condensée) : $\Delta h_{eau} = c(\theta_2 - \theta_1)$. On obtient au final :

$$D_e c(\theta_2 - \theta_1) = \frac{\gamma D_g R}{M(\gamma-1)}(T_1 - T_2) \Rightarrow \theta_2 = \theta_1 + \frac{\gamma D_g R}{D_e c M(\gamma-1)}(T_1 - T_2)$$

A.N. : $\theta_2 = 25{,}3°\mathrm{C}$

◇

3) Exprimez le taux de création d'entropie $\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}t}$ en fonction des entropies massiques du gaz et de l'eau à l'entrée et à la sortie du système.

Réponse

On effectue un bilan du second principe sur le système complet :

$$S(t) = s_{syst} + dm_g s_{g,1} + dm_e s_{e,1} \tag{19.6}$$
$$S(t+dt) = s_{syst} + dm_g s_{g,2} + dm_e s_{e,2} \tag{19.7}$$
$$\tag{19.8}$$

Et par application du second principe $dS = \delta S_C + \delta S_e$ (avec $\delta s_e = 0$ car le système complet est calorifugé) :

$$\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}t} = D_e(s_{e,2} - s_{e,1}) + D_g(s_{g,2} - s_{g,1})$$

◇

4) Calculez la différence d'entropie massique $s_{2,eau} - s_{1,eau}$ pour l'eau ; calculer de même $s_{2,gaz} - s_{1,gaz}$ pour le gaz. Quel est le signe de $\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}t}$, le discuter.

Réponse

L'eau est une phase condensée donc $s_{e,2} - s_{e,1} = c\ln\left(\frac{\theta_2}{\theta_1}\right) = 19\ J.K^{-1}.kg^{-1}$

Pour le GP, on a le même type de relation pour une transformation isobare : $s_{g,2} - s_{g,1} = \frac{\gamma R}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_2}{T_1}\right) = -0{,}55\ J.K^{-1}.kg^{-1}$.
On en déduit $\frac{\delta S_c}{\mathrm{d}t} = 22\ J.K^{-1}.s^{-1}$ dont le signe est positif (conforme au second principe)

◇

Rappel pour une phase condensée :

$$\Delta s = c\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)$$

Rappel pour une transformation monobare d'un GP :

$$\Delta s = \frac{\gamma R}{\gamma-1}\ln\left(\frac{T_f}{T_0}\right)$$

Sujet 3 – corrigé

I Caractéristiques d'un écoulement ($\star$)

On considère un écoulement dont le champ de vitesse eulérien est:

$$\vec{v}(M,t) = -\Omega y \overrightarrow{u_x} + \Omega x \overrightarrow{u_y} + v_0 \overrightarrow{u_z}$$

1) Cet écoulement est-il: Stationnaire ? Incompressible ? Irrotationnel ?

Réponse

$\vec{v}(M,t) = \vec{v}(M)$ donc l'écoulement est stationnaire.

$$div(\vec{v}) = \frac{\partial v_x}{\partial x} + \frac{\partial v_y}{\partial y} + \frac{\partial v_z}{\partial z} = 0$$

donc l'écoulement est incompressible.

$$\overrightarrow{rot}(\vec{v}) = \left(\frac{\partial vz}{\partial y} - \frac{\partial vy}{\partial z}\right)\vec{e}_x + \left(\frac{\partial vx}{\partial z} - \frac{\partial vz}{\partial x}\right)\vec{e}_y + \left(\frac{\partial vy}{\partial x} - \frac{\partial vx}{\partial y}\right)\vec{e}_z = 2\Omega\vec{e}_z \neq \vec{0}$$

donc l'écoulement est rotationnel.

◇

2) Déterminer l'accélération d'une particule de fluide.

Réponse

$$\frac{D\vec{v}}{Dt} = \frac{\partial \vec{v}}{\partial t} + \left(\vec{v}.\overrightarrow{grad}\right)\vec{v} = \left(-\Omega y\frac{\partial}{\partial x} + \Omega x\frac{\partial}{\partial y} + v_0\frac{\partial}{\partial z}\right)\vec{v}$$

$$\boxed{\frac{D\vec{v}}{Dt} = -\Omega^2 x\vec{e}_x - \Omega^2 y\vec{e}_y}$$

◇

Sujet 4 – corrigé

I Plasma ionosphérique ($\star$)

L'ionosphère est considérée comme un plasma dilué neutre contenant une densité d'électrons non relativistes avec $n = 1{,}0 \times 10^{12}\,\mathrm{m^{-3}}$. Soit une onde électromagnétique incidente $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0 e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x$ qui se réfléchit à l'interface entre l'atmosphère et l'ionosphère en $z = 0$: $\vec{E}_\mathrm{r} = E_{0\mathrm{r}} e^{j(\omega t + kz)}\vec{e}_x$ et qui se transmet aussi: $\vec{E}_\mathrm{t} = E_{0\mathrm{t}} e^{j(\omega t - k'z)}\vec{e}_x$.

Données: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

1) Rappeler pourquoi on peut négliger la composante magnétique de la force de Lorentz agissant sur les électrons. Déterminer la vitesse des électrons et le vecteur densité de courant.

Réponse

La force de Lorentz sur un électron est

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \qquad \text{donc} \qquad \frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} \approx \frac{v}{c}$$

Donc on pourra négliger la composante magnétique de la force de Lorentz devant la composante électrique si $\frac{v}{c} \ll 1$ donc pour des électrons non relativistes, ce qui est le cas ici.

Appliquons le PFD au système électron(m,-e) dans le référentiel terrestre supposé galiléen:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = -eE\vec{e}_x$$

On a une équation différentielle donc la solution en régime permanent est obtenue en se plaçant en complexe:

$$\boxed{\underline{v} = -\frac{e}{jm\omega}\underline{E}}$$

On en déduit le vecteur densité de courant:

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2}{jm\omega}\underline{\vec{E}}}$$

En notant la pulsation plasma $\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$, on a finalement en notant $\underline{\gamma}$ la conductivité complexe du milieu:

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\gamma} = \frac{\epsilon_0 \omega_\mathrm{p}^2}{j\omega}}$$

◇

2) Déterminer l'équation de propagation du champ électrique dans l'ionosphère. En déduire la relation de dispersion. On introduira la pulsation de plasma ω_p.

Réponse

L'ionosphère est neutre donc la densité volumique de charge $\rho = 0$. Les équations de Maxwell s'écrivent donc:

$$\begin{cases} div\vec{E} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

D'après la relation $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\overrightarrow{E}\right) - \overrightarrow{\Delta}\overrightarrow{E}$, on en déduit l'équation de propagation:

$$\boxed{\overrightarrow{\Delta}\underline{\overrightarrow{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\overrightarrow{E}}}{\partial t}}$$

On en déduit l'équation de dispersion en remplaçant l'onde plane $\overrightarrow{E}_\mathrm{t} = E_{0\mathrm{t}}e^{j(\omega t - k'z)}\overrightarrow{e}_x$ solution de l'équation de propagation:

$$-k'^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0\underline{\gamma}j\omega = \frac{\omega_\mathrm{p}^2}{c^2} \tag{19.1}$$
$$soit \tag{19.2}$$
$$\boxed{k'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_\mathrm{p}^2}{c^2}} \tag{19.3}$$

---

3) Soit une onde incidente de fréquence 168 kHz. Peut-elle se propager ? Même question pour une onde de 100 MHz.

Réponse

L'onde ne pourra se propager dans l'ionosphère que si k' a une partie réelle non nulle. Or k'^2 est un réel:

- positif si $\omega > \omega_\mathrm{p}$ donc k' réel positif;
- négatif si $\omega < \omega_\mathrm{p}$ donc k' imaginaire pur.

Or $\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1{,}0\times10^{12}\times1{,}6\times10^{-19\,2}}{9{,}1\times10^{-31}\times8{,}85\times10^{-12}}} = 5{,}6\times10^{7}\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ soit une fréquence plasma $f_\mathrm{p} = 9{,}0\,\mathrm{MHz}$

- si $f = 168\,\mathrm{kHz} < 9{,}0\,\mathrm{MHz}$, k' est imaginaire pur donc on n'aura pas de propagation;
- si $f = 100\,\mathrm{MHz} > 9{,}0\,\mathrm{MHz}$, k' est réel donc on aura propagation du signal dans l'ionosphère;

---

4) Dans le cas d'une propagation dans le milieu plasma, donner les relations entre E_0, $E_{0\mathrm{r}}$ et $E_{0\mathrm{t}}$. En déduire $\underline{r} = \frac{E_{0\mathrm{r}}}{E_0}$ et le cœfficient de réflexion en puissance R.

Réponse

Le champ électrique dans le milieu incident est la superposition du champ incident et du champ réfléchi:

$$\overrightarrow{E}_\mathrm{inc} = \overrightarrow{E} + \overrightarrow{E}_\mathrm{r} \tag{19.4}$$
$$\overrightarrow{E}_\mathrm{inc} = \left(E_0e^{j(\omega t - kz)} + E_{0\mathrm{r}}e^{j(\omega t + kz)}\right)\overrightarrow{e}_x \tag{19.5}$$

Le champ électrique dans le milieu plasma s'écrit:

$$\overrightarrow{E}_\mathrm{t} = E_{0\mathrm{t}}e^{j(\omega t - k'z)}\overrightarrow{e}_x$$

Par continuité du champ à l'interface $z = 0$, on a:

$$E_0 + E_{0\mathrm{r}} = E_{0\mathrm{t}}$$

On fait de même pour le champ magnétique $\overrightarrow{B} = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{E}}{\omega}$ lorsque le champ $\overrightarrow{E}$ est une onde plane.
Le champ magnétique dans le milieu incident est la superposition du champ incident et du champ réfléchi:

$$\overrightarrow{B}_\mathrm{inc} = \overrightarrow{B} + \overrightarrow{B}_\mathrm{r} \tag{19.6}$$
$$\overrightarrow{B}_\mathrm{inc} = \left(\frac{k}{\omega}E_0e^{j(\omega t - kz)} - \frac{k}{\omega}E_{0\mathrm{r}}e^{j(\omega t + kz)}\right)\overrightarrow{e}_y \tag{19.7}$$

Le champ magnétique dans le milieu plasma s'écrit:

$$\overrightarrow{B}_{\mathrm{t}} = \frac{k'}{\omega} E_{0\mathrm{t}} e^{j(\omega t - k'z)} \overrightarrow{e}_y$$

Par continuité du champ à l'interface $z = 0$, on a:

$$E_0 - E_{0\mathrm{r}} = \frac{k'}{k} E_{0\mathrm{t}}$$

En notant $\underline{r} = \frac{E_{0\mathrm{r}}}{E_0}$ le cœfficient de réflexion en amplitude de champ électrique, on a à résoudre le système:

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \frac{k'}{k} \underline{t} \end{cases}$$

On obtient:

$$\boxed{\underline{r} = \frac{k - k'}{k + k'} = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega^2}}}$$

Pour le cœfficient de réflexion en puissance, on a $R = \frac{|\left\langle \overrightarrow{\Pi}_{\mathrm{r}}(0,t).\overrightarrow{e}_z \right\rangle|}{|\left\langle \overrightarrow{\Pi}_{\mathrm{i}}(0,t).\overrightarrow{e}_z \right\rangle|}$ avec $\left\langle \overrightarrow{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2} Re \left(\overrightarrow{\underline{E}} \wedge \frac{\overrightarrow{\underline{B}}^*}{\mu_0} \right)$ donc on trouve:

$$\boxed{R = r^2}$$

Khôlles PSI – semaine 19

Sujet 5 – corrigé

I Talkie-walkie

Sur une notice de talkie-walkie, on peut lire les informations suivantes :

- Puissance maximale ERP (effective radiated power) : 0,5 W
- Portée maximale sans obstacle : 5 km

On donne par ailleurs les constantes fondamentales :

- Perméabilité magnétique du vide $\mu_0 = 4\pi\, 10^7\,\mathrm{H\cdot m^{-1}}$
- Vitesse de la lumière dans le vide $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$

1) Estimer l'amplitude minimale du champ électrique d'un signal détectable par ce talkie-walkie.

Réponse

L'antenne du talkie émet une onde électromagnétique dans toutes les directions. On peut la modéliser par une onde sphérique. Raisonnons sur la sphère de rayon $R = 5\,\mathrm{km}$: la puissance ERP, notée $\mathcal{P}$, est étalée sur une surface $4\pi R^2$. Par ailleurs la puissance surfacique est donnée par le vecteur de Poynting moyen. Le rayon étant très grand, la structure de l'onde électromagnétique est celle d'une onde plane, on se place donc dans le cas d'une OPPH en cartésiennes $\vec{E} = E_0 \cos(\omega t - kz)\vec{e}_x$.

$$\vec{\Pi} = \frac{\vec{E}\wedge\vec{B}}{\mu_0} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega} = \frac{E_0}{c}\cos(\omega t - kz)\vec{e}_y$$

$$\vec{\Pi} = \frac{E_0^2}{mu_0 c}\cos^2(\omega t - kz)\vec{e}_z \Rightarrow <\vec{\Pi}> = \frac{E_0^2}{2\mu_0 c}\vec{e}_z$$

En égalant les deux expressions de la puissance surfacique, on obtient

$$\frac{E_0^2}{2\mu_0 c} = \frac{\mathcal{P}}{4\pi R^2} \Rightarrow E_0 = \sqrt{\frac{\mathcal{P}\mu_0 c}{2\pi R^2}}$$

Application numérique

$$E_0 = \sqrt{\frac{0{,}5\,\mathrm{W} \times 4\pi\,.10^7\,\mathrm{H\cdot m^{-1}} \times 3{,}00\times 10^8\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}{2\pi(5\times 10^3\,\mathrm{m})^2}} = 1{,}1\,\mathrm{mV\cdot m^{-1}}$$

Pour une antenne de 10 cm, cela est associé à un signal électrique de 0,1 mV, ce qui semble cohérent avec un minimum détectable. Le bruit dans les signaux électriques est de l'ordre du mV en TP, peut être arrive-t-on à le réduire au dixième de mV dans les appareils radio. Le signal est ensuite amplifié avant d'être envoyé sur les haut-parleur du takie récepteur.