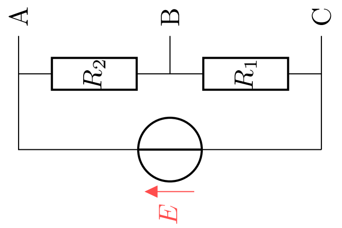
Correction du TD d'entraînement

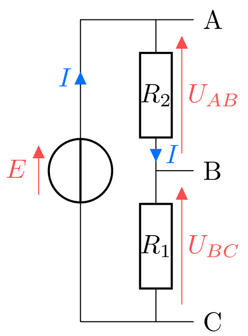
I Diviseur de tension



1) Écrire la loi des mailles pour le montage ci-contre et en déduire l'expression de l'intensité du courant $I(R_2)$ qui parcourt cette maille. En déduire l'expression de la tension U_{BC}, aux bornes de la résistance R_1.

Réponse

Schéma



Résultat attendu

On cherche I puis U_{BC}.

Outils

- ◇ Loi des mailles pour I ;
- ◇ Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Application

Il suffit d'une loi des mailles pour trouver

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Puis trivialement

$$U_{BC} = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

Remarque

On remarque donc que deux dipôles de résistances R_1 et R_2 se partageant une tension totale E vont se la répartir en respectant la fraction de résistance à laquelle chaque diôle participe. C'est également une simple moyenne pondérée.

Important

Ce résultat est bien plus général que pour deux dipôles et fonctionne avec n dipôles ***en série*** sur une branche. Il faut pouvoir se ramener à ce schéma précis pour appliquer la formule du pont diviseur de tension – que vous pouvez maintenant utiliser sans loi des mailles : $U_x = E \times \dfrac{R_x}{R_{\text{tot}}}$

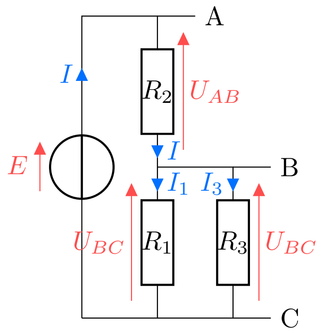
◇

On ajoute une résistance R_3 qui sera connectée en parallèle avec la résistance R_1.

2) Est-ce que la valeur de la tension U_{BC} calculée à la question précédente va changer ? Si oui, calculer les nouvelles valeurs de U_{BC} et $I(R_2)$.

Réponse

Schéma



Réponse

Oui, elle va changer puisqu'on a branché un nouveau dipôle.

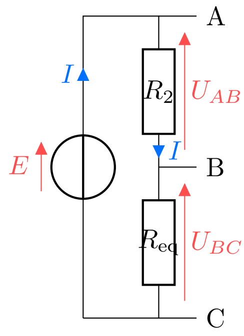
Résultat attendu

On cherche I et U_{BC}.

Outils

- ◇ Loi des mailles pour I ;
- ◇ Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Schéma simplifié



Application

On peut envisager ce calcul de deux manières :

- ◇ D'une part, $U_{BC} = R_1 I_1$ et on pourrait déterminer I_1 en fonction de I avec une LdN, et pour ça avoir I avec une LdM en calculant R_{eq} comme précédemment, et donc :
- ◇ On voit immédiatement que $U_{BC} = R_{eq} I$. Autant partir là-dessus.

On obtient ainsi

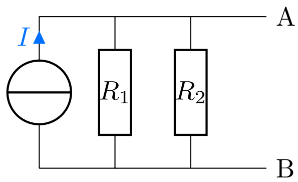
$$R_{eq} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad \text{et} \quad I = \frac{E}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}$$

d'où après calcul

$$\boxed{U_{BC} = \frac{E R_1 R_3}{R_2(R_1 + R_3) + R_1 R_3}}$$

◇

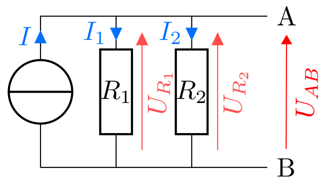
II Diviseur de courant



1) Exprimer les tensions aux bornes de R_1 et R_2 dans le montage ci-contre.

Réponse

Schéma



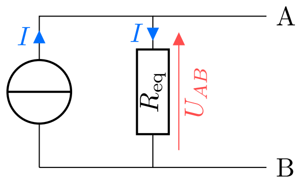
Résultat attendu

On cherche U_{R_1} et U_{R_2}.

Outils

- ◇ Unicité de la tension en parallèle ;
- ◇ Expression résistance ∥.

Schéma simplifié



Application

On a certes $U_{R_1} = I_1 R_1$ et $U_{R_2} = I_2 R_2$, mais comme on a $U_{R_1} = U_{R_2} = U_{AB}$, le plus simple est de déterminer U_{AB}. Une résistance équivalente $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1+R_2}$ avec l'intensité I qui est connue (car imposée par le générateur de courant) donne facilement

$$U_{R_1} = U_{R_2} = R_{\text{eq}} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

Important

Ce résultat est la base de la réflexion menant à l'expression du diviseur de courant qui donne l'expression de I_x : on voit directement apparaître que $I_x = I \times \frac{R_{\text{eq}}}{R_x}$ de par l'unicité de la tension. Souvenez-vous de cette simplicité.

2) À partir de la loi des mailles, exprimer $I(R_2)$ en fonction de I, R_1 et R_2.

Réponse

Résultat attendu

On cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2 **à partir de la loi des mailles**.

Outils

– LdM : $I_1 R_1 = I_2 R_2 \quad (1)$;
– LdN : $I = I_1 + I_2 \quad (2)$.

Application

En utilisant (2) dans (1), on a $I_2 R_2 = (I - I_2) R_1$, donc en isolant I_2 on obtient facilement

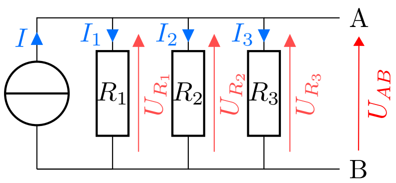
$$\boxed{I_2 = I \frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

On ajoute une résistance R_3 qui sera connectée en parallèle avec la résistance R_1.

3) Faire un schéma. Est-ce que la valeur de l'intensité $I(R_2)$ va changer ? Si oui, donner sa nouvelle expression.

Réponse

Schéma



Résultat attendu

Évidemment, I_2 va changer puisqu'on branche un nouveau dipôle en parallèle. Une rivière qui se divise en 3 plutôt qu'en 2 va avoir des débits différents dans les deux situations. Donc on cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2, R_3 **sans méthode imposée**.

Application

Avec la réflexion de la question 1 ou la relation du pont diviseur de courant qui est maintenant utilisable à volonté, on a facilement $I_2 = I \times \frac{R_{\text{eq}}}{R_2}$. Avec $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}$, on a finalement

$$\boxed{I_2 = I \times \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 + R_1 R_3 + R_2 R_3}}$$

4) Est-ce que la valeur de l'intensité délivrée par le générateur va changer ? Si oui, donner sa nouvelle expression.

Réponse

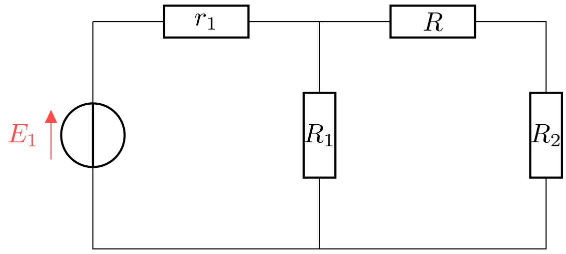
Remarque

L'intensité I ne va pas changer, puisque c'est celle que l'on fixe avec le générateur.

Important

Bien que la loi des mailles soit l'origine de nombreuses relations, ici c'est la simple unicité de la tension qui amène au diviseur de courant.

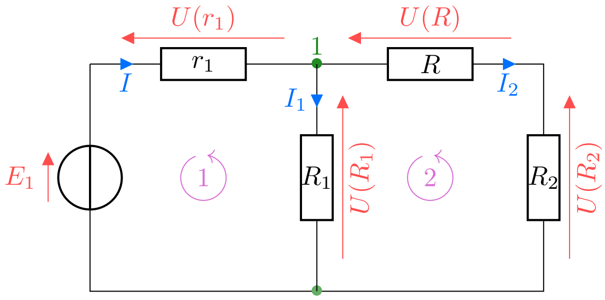
III Calcul d'intensité



1) En utilisant les lois fondamentales dans l'ARQS (dites *lois de Kirchhoff*), exprimer l'intensité traversant R dans le circuit ci-contre.

Réponse

Schéma



Résultat attendu

On cherche à exprimer I_2.

LdN, LdM

- ◇ $I = I_1 + I_2 (1)$ (LdN) ;
- ◇ $I_1R_1 + Ir_1 = E_1 (2)$ (LdM 1) ;
- ◇ $I_2(R + R_2) = I_1R_1 (3)$ (LdM 2).

Conseil

Pour les systèmes, il faut : numéroter les équations qu'on veut réutiliser en premier lieu, à l'aide des (1) par exemple, savoir qu'un système de 3 équations (indépendantes) à 3 inconnues est résolvable ensuite, et comprendre comment s'y prendre enfin. Cette dernière partie est bien sûr la vraie étape difficile et passe par la pratique, mais elle s'apprend.

Exemple

I_2 apparaît dans l'équation (3), mais s'exprime en fonction de I_1 inconnu. On doit donc commencer par trouver une expression de I_1 utile. I_1 fait partie de l'équation (2) qui, elle, dépend de I mais en utilisant (1) on peut facilement changer (2) en une nouvelle équation reliant I_1 à I_2 et qui n'est pas (3) et qu'on appellera brillamment (4). Ainsi, en réinjectant (4) dans (3), on aura une expression de I_2 en fonction uniquement des paramètres du circuit (E, R).

Application

Injecter (1) dans (2) donne :

$$I_1 R_1 + (I_1 + I_2) r_1 = E_1$$
$$I_1 (R_1 + r_1) = E_1 - I_2 r_1$$
$$I_1 = \frac{E_1 - I_2 r_1}{R_1 + r_1} \qquad (4)$$

Ainsi, il suffit de réinjecter (4) dans (3) pour avoir :

$$I_2 (R_2 + R) = \frac{E_1 - I_2 r_1}{R_1 + r_1} \times R_1$$
$$I_2 (R_2 + R) \times (R_1 + r) = (E_1 - I_2 r) \times R_1$$
$$I_2 \left[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1 R_1 \right] = E_1 R_1$$

et finalement

$$\boxed{I_2 = \frac{E_1 R_1}{[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1 R_1]}}$$

◇

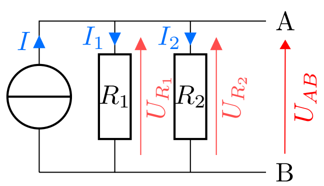
2) Faire de même avec un pont diviseur de courant d'une part.

Réponse

Résultat attendu

On cherche à trouver I_2 *avec un diviseur de courant.*

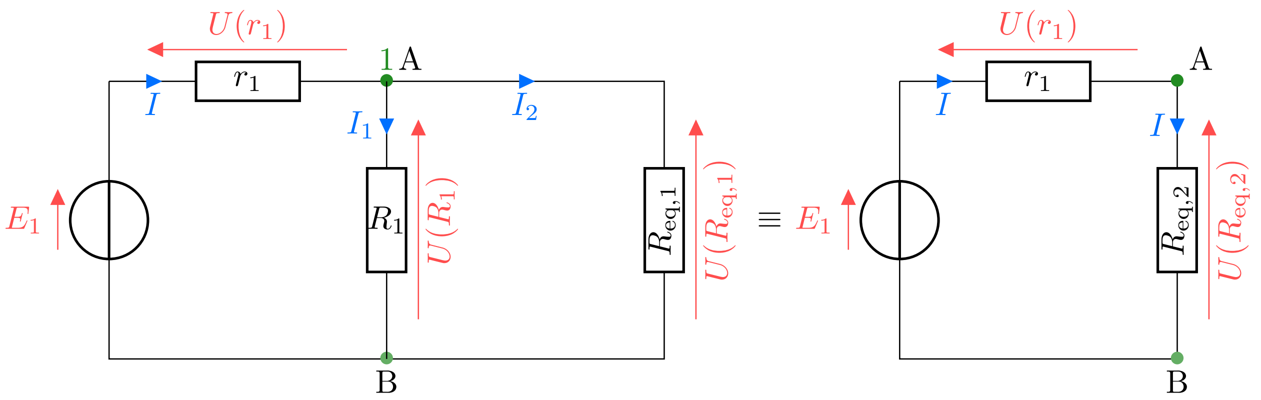
Outil



Dans le circuit ci-contre,

$$I_2 = \frac{R_{\text{eq}}}{R_2} I$$

Schéma



Application

Sur le schéma ci-dessus, on définit

$$\boxed{R_{\text{eq},1} = R + R_2} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{eq},2} = \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

pour appliquer la relation du pont diviseur de courant :

$$I_2 = \frac{R_{\text{eq},2}}{R_{\text{eq},1}} I \Leftrightarrow I_2 = \frac{R_1}{R+R_1+R_2} I$$

Avec une loi des mailles on trouve

$$I = \frac{E_1}{r_1 + R_{\text{eq},2}} \Leftrightarrow I = \frac{E_1}{r_1 + \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

Ainsi

$$I_2 = \frac{R_1}{\cancel{R+R_1+R_2}} \frac{E_1}{r_1(R+R_1+R_2) + \frac{R_1(R+R_2)}{\cancel{R+R_1+R_2}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{R_1 E_1}{(R+R_1+R_2)r_1 + R_1(R+R_2)}}$$

On trouve bien le même résultat (en développant un peu).

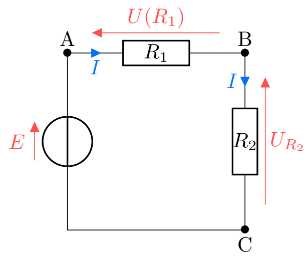
3) Faire de même avec un diviseur de tension d'autre part.

Réponse

Résultat attendu

On cherche à trouver I_2 *avec un diviseur de tension.*

Outil



Dans le circuit ci-contre,

$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} E$$

Application

Sur le schéma ci-dessus, on définit

$$\boxed{R_{\text{eq},1} = R + R_2} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{eq},2} = \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

pour appliquer la relation du pont diviseur de tension :

$$I_2(R_{\text{eq},1}) = U_{AB} = \boxed{U_{R_{\text{eq},2}} = \frac{R_{\text{eq},2}}{r_1 + R_{\text{eq},2}} E}$$

En développant on trouve

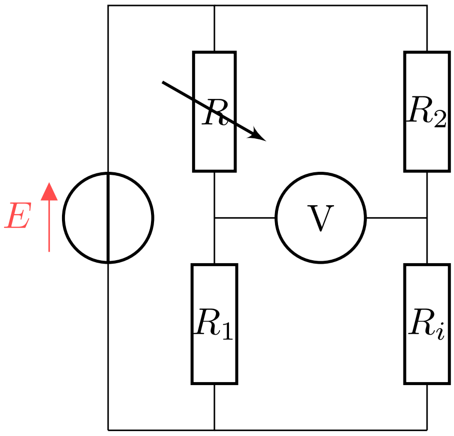
$$I_2\cancel{(R+R_2)} = \frac{R_1\cancel{(R+R_2)}}{\cancel{R+R_1+R_2}} \frac{E}{r_1(R+R_1+R_2) + \frac{R_1(R+R_2)}{\cancel{R+R_1+R_2}}}$$

Ce qui donne bien

$$\boxed{I_2 = \frac{R_1 E}{(R+R_1+R_2)r_1 + R_1(R+R_2)}}$$

☆ IV Pont de Wheatstone

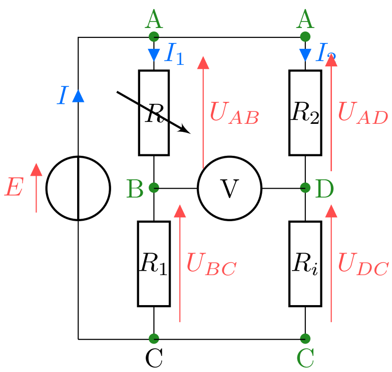
1) En électronique, on réalise régulièrement des ponts de mesure pour mesurer indirectement une résistance. On dispose d'un circuit comprenant un générateur de tension qui alimente un pont de Wheatstone composé des résistances R_1 et R_2. La résistance R_i est inconnue, et la résistance R est variable (il s'agit d'un potentiomètre). On fait évoluer R jusqu'à ce que le voltmètre indique une tension nulle. Le pont est alors équilibré.



À l'aide des lois de Kirchhoff, déterminer l'expression de la valeur de R_i en fonction des valeurs des autres résistances lorsque le pont est équilibré.

Réponse

Schéma



Résultat

On cherche R_i, ou U_{DC} quand « le pont est équilibré ».

Outil

D'après l'énoncé, le pont est équilibré quand $V = 0$, soit quand $V_B = V_D$.

Application

Si le pont est équilibré, alors $U_{AB} = U_{AD}$ et $U_{BC} = U_{DC}$. Or, avec le pont diviseur de tension, on a à la fois

$$U_{BC} = E\frac{R_1}{R_1 + R}$$
$$U_{DC} = E\frac{R_i}{R_i + R_2}$$

Donc

$$\begin{aligned}
U_{BC} &= U_{DC} \\
\Leftrightarrow \cancel{E}\frac{R_1}{R_1 + R} &= \cancel{E}\frac{R_i}{R_i + R_2} \\
\Leftrightarrow R_1(\cancel{R_i} + R_2) &= R_i(\cancel{R_1} + R) \\
\Leftrightarrow \boxed{R_i = \frac{R_1 R_2}{R}}
\end{aligned}$$