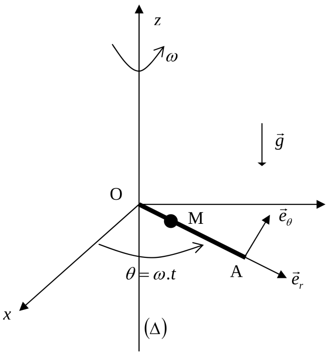
Sujet 1 – corrigé

I Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan (xOy), de longueur ℓ, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical Δ passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère :



- le repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel du laboratoire et associé aux axes x, y et z ;
- la base cylindrique locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associée au point M.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance r_0 du point O (avec $r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance $r = \mathrm{OM}$ entre le point O et l'anneau M.

1) Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

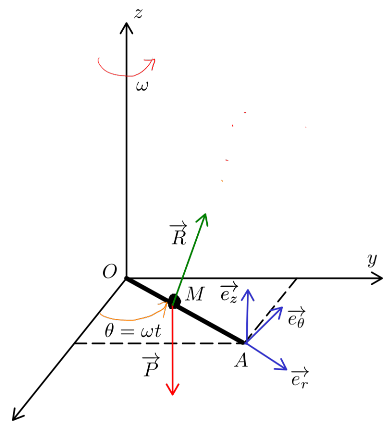
Réponse

◇ **Système :** {anneau} point matériel M de masse m

◇ **Référentiel :** terrestre supposé galiléen

◇ **Repère :** cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$

◇ **Repérage :**



$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= r\vec{e}_r \\
\vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\
&= \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\theta \\
\vec{a} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\omega\vec{e}_\theta - r\omega^2\vec{e}_r + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0} \\
&= (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + 2r\omega\vec{e}_\theta
\end{aligned}
$$

◇ **Conditions initiales :**

$$
r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0
$$

◇ **BDF :** pas de frottements donc pas de composante sur $\vec{e}_r$:

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e}_z$
Réaction support	$\vec{R} = R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z$

◇ **PFD :**

$$
m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0 \\ 2m\dot{r}\omega = R_\theta \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}
$$

$$
\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{r} - \omega r = 0} & (16.1) \\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega & (16.2) \\ R_z = mg & (16.3) \end{cases}}
$$

◇

2) Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.

Réponse

On résout (16.1) avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \omega^2 r &= 0 \\ \Rightarrow s^2 - \omega^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 &= \omega^2 \\ \Leftrightarrow &\boxed{s = \pm\omega} \end{aligned}$$

On a donc des solutions de la forme

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Or, avec les CI :

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ \Leftrightarrow &\boxed{r_0 = A + B} \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{r}(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= A\omega - B\omega \\ \Leftrightarrow &\boxed{A = B} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}} \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = r_0 \operatorname{ch}(\omega t)}$$

◇

3) Exprimer les composantes de la réaction $\overrightarrow{R}$ de la tige sur M dans la base $(\overrightarrow{e}_r, \overrightarrow{e}_\theta, \overrightarrow{e}_z)$ en fonction de m, g, $\dot{r}$ et ω.

Réponse

On reprend (16.2) et (16.3) avec $\dot{r} = \omega r_0 \operatorname{sh}(\omega t)$:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = 2mr_0\omega^2 \operatorname{sh}(\omega t)\,\overrightarrow{e}_\theta + mg\,\overrightarrow{e}_z}$$

◇

4) Déduire de la question 2 le temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, ℓ et ω.

Réponse

L'anneau quitte la tige en τ quand $r(\tau) = \ell$, soit

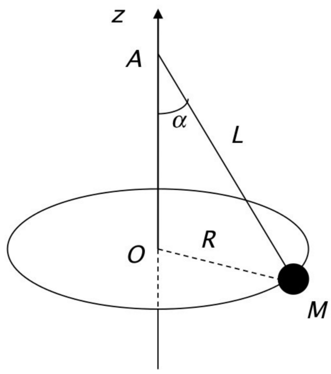
$$\begin{aligned} \ell &= r_0 \operatorname{ch}(\omega t) \\ \Leftrightarrow &\boxed{\tau = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}(\omega t)} \end{aligned}$$

◇

Sujet 2 – corrigé

I Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\overrightarrow{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.



1) Quel système de coordonnées utiliser ?

Réponse

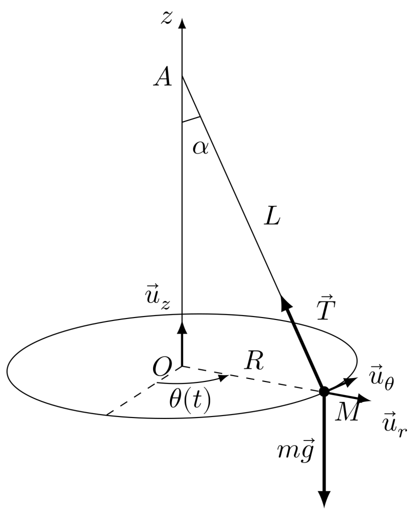
On utilisera un repère cylindrique pour étudier la rotation.

◇

1) Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.

Réponse

- **Système :** $\{\mathrm{M}\}$ masse m
- **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
- **Repère :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ (voir schéma)



- **Repérage :** $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= R\overrightarrow{u_r} = L\sin\alpha\overrightarrow{u_r} \\
\overrightarrow{v}_{\mathrm{M}} &= L\dot{\theta}\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta} \\
&= L\omega\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta} \\
\overrightarrow{a}_{\mathrm{M}} &= -L\omega^2\sin\alpha\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

- **BDF :**

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
Tension	$\overrightarrow{T} = T(-\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$

◇

2) Appliquer le PFD puis exprimer $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.

Réponse

On applique le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2\cancel{\sin\alpha} = -T\cancel{\sin\alpha} \\ 0 = T\cos\alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos\alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{lim}}}$$

◇

3) Que dire du cas où ω devient très grande ?

Réponse

Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$, alors $\cos\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

◇

4) Application numérique : calculer α pour $L = 20\,\text{cm}$ et $\omega = 3\,\text{tours}\cdot\text{s}^{-1}$.

Réponse

On trouve $\boxed{\cos\alpha = 0{,}138 \Leftrightarrow \alpha = 82°}$

◇

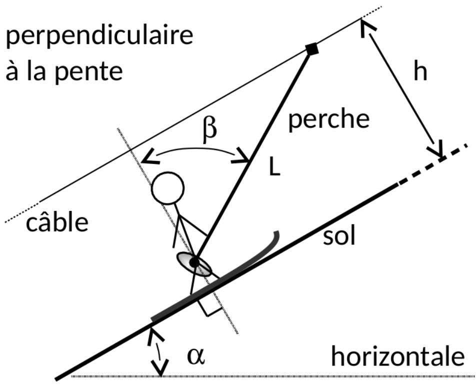
Sujet 3 – corrigé

I Quelques notions de ski (⋆)

A Leçon n° 1 : le remonte-pente

On considère une skieuse de masse m remontant une pente d'angle α à l'aide d'un téléski. Celui-ci est constitué de perches de longueur L accrochées à un câble parallèle au sol situé à une hauteur h.

On néglige les frottements de la neige sur les skis.

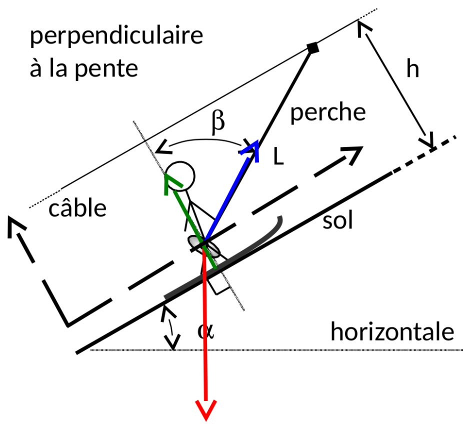


1) Quelles sont les trois forces que subit la skieuse ?

Réponse

Les 3 forces sont :

- tension de la perche $\vec{F}$,
- réaction normale du sol $\vec{R}_N$ (il n'y a pas de frottement donc la réaction est uniquement normale),
- poids de la skieuse $\vec{P}$.



◇

On considère une skieuse de 50kg sur une pente de 15% (c'est-à-dire que la skieuse s'élève de 15 m lorsqu'elle parcourt horizontalement 100 m). La force exercée par la perche sur la skieuse sera supposée fixée et égale à $F = 100$N.

2) Existe-t-il un angle limite β_l pour lequel le contact entre les skis et le sol serait rompu ?

Réponse

Le contact entre la skieuse et le sol sera rompu lorsque $R_N = 0$. On cherche donc à calculer R_N et voir s'il existe une valeur de β telle que $R_N = 0$.

On applique alors la loi de la quantité de mouvement au skieur dans le référentiel de la montagne (galiléen) et on la projette selon l'axe orthogonal à la pente. La projection de l'accélération est alors nulle car la skieuse se déplace perpendiculairement à cet axe.

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R_N = mg\cos\alpha - F\cos\beta.$$

$$R_N > 0 \quad \Rightarrow \quad mg\cos\alpha > F\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta < \frac{mg\cos\alpha}{F}.$$

On peut calculer l'angle α puisque la pente est de 15% :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{15}{100}\right) = 8{,}5°.$$

On en déduit que :

$$\frac{mg\cos\alpha}{F} = \frac{50 \times 9{,}8 \times \cos(8{,}5°)}{100} \approx 5.$$

Finalement, quelque soit β,

$$\cos\beta < 5 \quad \Rightarrow \quad R_N > 0,$$

donc il n'existe pas d'angle limite : la skieuse touche toujours le sol.

◇

On suppose maintenant que sa trajectoire est rectiligne et sa vitesse constante.

3) Quelle relation les 3 forces que subit la skieuse doivent-elles vérifier ?

Réponse

Si la trajectoire de la skieuse est rectiligne uniforme, alors d'après la loi de l'inertie :

$$\boxed{\vec{F} + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}}.$$

◇

On note β l'angle que forme la perche du téléski avec la perpendiculaire à la pente.

4) Représenter les trois forces sur une même figure en repérant bien les angles α et β.

Réponse

cf question 2

◇

5) En déduire une relation entre m, g, α, β et F (la norme de la force exercée par la perche).

Réponse

On a déjà projeté cette relation sur l'axe orthogonal à la pente :

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha.$$

On peut également la projeter sur l'axe de la pente :

$$0 = 0 + F\sin\beta - mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sin\beta}}.$$

◇

6) En négligeant la distance entre la rondelle et le sol, exprimer F en fonction m, g, α, h et L. Comment varie F avec α et h ? Commenter.

Réponse

Dans cette hypothèse :

$$\cos\beta = \frac{h}{L} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \sqrt{1 - \left(\frac{h}{L}\right)^2}.$$

Finalement :

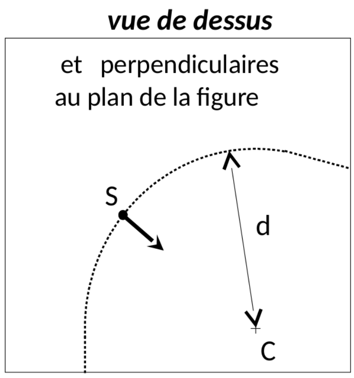
$$\boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sqrt{1 - \left(\frac{h}{L}\right)^2}}}.$$

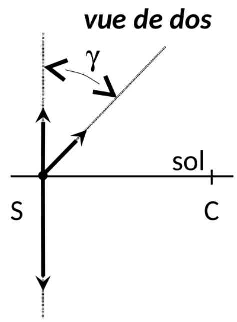
La norme de la force F augmente alors lorsque α augmente ou lorsque h augmente. On a donc tout intérêt à positionner le câble de traction horizontal le plus bas possible (en évitant bien entendu qu'il touche la tête des usagers et usagères).

◇

B Leçon n° 2 : le virage

La skieuse est toujours sur le remonte pente et aborde une zone horizontale où sa trajectoire est un cercle de centre C et de rayon d. Sa célérité est toujours constante. On suppose pour les questions suivantes que la perche est contenue dans le plan formé par la droite SC et la verticale.





7) Que peut-on dire de son accélération ?

Réponse

Le mouvement de la skieuse est circulaire uniforme donc son accélération est radiale et orientée vers l'intérieur du cercle (centripète) :

$$\vec{a} = \frac{-v^2}{d}\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CS}}{||CS||}.$$

◇

On a représenté ci-dessus différentes vues de la situation où la skieuse est modélisée par un point matériel S posé sur le sol. On néglige les frottements, on note $\vec{F}$ la force exercée par la perche du téléski et γ l'angle qu'elle forme avec la verticale.

8) Déterminer $F = ||\vec{F}||$ en fonction de m, $v = ||\vec{v}||$ la célérité, d et γ.

Réponse

On applique la loi de la quantité de mouvement à la skieuse dans le référentiel galiléen de la montagne. On projette cette équation sur le vecteur $\vec{e}_r$:

$$ma = -F\sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{mv^2}{d\sin\gamma}}.$$

◇

9) En déduire $R = ||\vec{R}||$ en fonction de toutes les autres données.

Réponse

On projette alors l'équation de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe vertical ascendant perpendiculaire à $\vec{e}_r$. La projection de l'accélération y est nulle :

$$0 = -mg + R + F\cos\gamma$$

On combine cette équation avec celle de la question précédente :

$$\boxed{R = mg - \frac{mv^2}{d\tan\gamma}}.$$

◇

10) Comment évolue R lorsque la célérité augmente ?

Réponse

On voit que R augmente lorsque v diminue.

◇

11) En pratique la perche n'est pas rigoureusement orthogonale à la trajectoire mais est également dirigée vers l'avant. Expliquer pourquoi.

Réponse

En réalité il existe des frottements colinéaires à la vitesse, mais de sens opposé. Si le mouvement est uniforme, une composante de la force exercée par la perche doit compenser ces frottements

◇