TD : Bilan premier principe

I Compressions successives

On envisage de comprimer une mole d'air d'un état initial caractérisé par une pression $P_1 = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, un volume V_1 et une température $T_1 = 290\,\mathrm{K}$, à un état final caractérisé par une pression $P_2 = 5{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa}$, un volume V_2 et une température $T_1 = 290\,\mathrm{K}$. L'air à comprimer est considéré comme un gaz parfait de rapport $\gamma = 1{,}4$. Les transformations étudiées sont supposées mécaniquement réversibles. On donne la constante des gaz parfaits $R = 8{,}3\,\mathrm{J \cdot K^{-1} \cdot mol^{-1}}$.
Les échanges thermiques éventuels se font uniquement avec l'air ambiant considéré comme un thermostat de température T_1.

1. On envisage d'abord la compression suivant un processus isotherme réversible. Exprimer le travail molaire W_m à fournir en fonction de T_1, R, γ, P_1 et P_2. Calculer W_{m0}.

La compression isotherme est difficilement réalisable. On propose les transformations suivantes :

- compression adiabatique réversible de l'état initial jusqu'à la pression P_2
- refroidissement isobare mécaniquement réversible jusqu'à l'état final

La première transformation amène le système à l'état d'équilibre caractérisé par la pression P_2, un volume V_3 et une température T_3. On note W_{m1} le travail molaire reçu par le système au cours de la compression adiabatique réversible et W_{m2} le travail molaire reçu au cours du refroidissement isobare.

2. Exprimer W_{m1} en fonction de R, γ, T_1 et T_3.
3. Exprimer W_{m2} en fonction de R, T_1 et T_3.
4. En déduire l'expression du travail molaire W_m reçu au cours de ces deux transformations en fonction de R, T_1, P_1, P_2 et γ. Calculer W_m et comparer à la valeur de W_{m0}.

On considère maintenant une compression en deux étapes :

- compression adiabatique réversible de l'état initial (P_1, T_1) jusqu'à une pression P telle que $P_1 < P < P_2$, puis un refroidissement isobare mécaniquement réversible jusqu'à la température T_1
- compression adiabatique réversible de (P, T_1) jusqu'à la pression P_2, puis refroidissement isobare mécaniquement réversible jusqu'à la température T_1

5. Représenter ces transformations sur un diagramme de Clapeyron
6. Exprimer le travail molaire W'_m à fournir en fonction de P, P_1, P_2, T_1, R et γ.
7. Montrer que le travail W'_m est minimal pour $P = \sqrt{P_1 P_2}$.
8. Exprimer la valeur minimale notée $W'_{\min}$ de W'_m en fonction de P_1, P_2, T_1, R et γ. Calculer numériquement $W'_{\min}$.

On considère maintenant une transformation constituée de N étapes du type compression adiabatique puis refroidissement isobare. Les pressions intermédiaires seront notées p_i, avec $p_0 = P_1$ et $p_N = P_2$.

9. Exprimer le travail molaire W''_m total à fournir au gaz en fonction de p_i, N, T_1, R et γ.

10. En admettant que les conditions $\dfrac{\partial W''_m}{\partial p_i} = 0$ soient suffisantes pour rendre W''_m minimal, donner la relation entre p_i, p_{i+1} et p_{i-1} pour que W''_m soit minimal. Montrer qu'alors les pressions intermédiaires telles que $\dfrac{p_{i+1}}{p_i} = \left(\dfrac{p_N}{p_0}\right)^{1/N}$ rendent W''_m minimal et donner cette valeur minimale notée W''_{mN} en fonction de P_1, P_2, N, T_1, R et γ

.

11. Calculer la limite de W''_{mN} pour $N \to \infty$. Pour cela, il sera utile d'utiliser le fait que $x^\alpha = \exp(\alpha \ln(x))$, puis d'effectuer un développement limité. Comparer cette limite à W_{m0}. Interpréter.