Introduction – chapitre 2

Mesures et incertitudes

Sommaire

I Variabilité et incertitude-type **2**
- I/A Variabilités de mesures 2
- I/B Incertitude-type 2
- I/C Comparaison de deux mesures 3

II Méthodes d'estimation d'incertitudes **4**
- II/A Estimation pour une mesure variable : type A 4
- II/B Estimation pour une mesure invariable : type B 5
- II/C Incertitudes composées 7

Capacités exigibles

- ▢ Identifier les incertitudes liées, par exemple, à l'opérateur·ice, à l'environnement, aux instruments ou à la méthode de mesure.
- ▢ Associer un intervalle de confiance à l'écart-type dans l'hypothèse d'une distribution suivant la loi normale.
- ▢ Écrire, avec un nombre adapté de chiffres significatifs, le résultat d'une mesure.
- ▢ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche statistique (type A).
- ▢ Procéder à l'évaluation d'une incertitude-type par une approche autre que statistique (type B).
- ▢ Évaluer l'incertitude-type d'une grandeur s'exprimant en fonction d'autres grandeurs, dont les incertitudes-types sont connues, à l'aide d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient.
- ▢ Comparer deux valeurs dont les incertitudes-types sont connues à l'aide de leur écart normalisé.
- ▢ Analyser les causes d'une éventuelle incompatibilité entre le résultat d'une mesure et le résultat attendu par une modélisation

L'essentiel

Définitions

- ▢ Incertitude-type et relative 2
- ▢ Écart normalisé 3
- ▢ Écarts absolu et relatif 4

Applications

- ▢ Présenter un résultat numérique . 3
- ▢ Incertitude de type A 5
- ▢ Incertitudes de type B 6
- ▢ Incertitude composée à une variable 7
- ▢ Incertitude composée à 2 variables 8

Points importants

- ▢ Présentation d'un résultat de TP 3
- ▢ Incertitude de type A 5
- ▢ Incertitude de type B 6
- ▢ Incertitudes composées à 1 variable 7
- ▢ Incertitudes composées à 2 variables 8

Erreurs communes

- ▢ Valeurs possibles d'une mesure . . 2

I Variabilité et incertitude-type

I/A Variabilités de mesures

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- la méthode de mesure : règle graduée ou pied à coulisse pour une longueur ;
- les variations de l'environnement : célérité du son différente s'il fait chaud ou froid ;
- les instruments de mesure : deux voltmètres *a priori* identiques peuvent donner des résultats différents ;
- le processus physique même : expériences de mécanique quantique, par essence probabiliste ;
- l'expérimentataire.

I/B Incertitude-type

Définition N2.1 : Incertitude-type et relative

La variabilité d'une mesure x_{exp} sur une grandeur x est appelée **incertitude-type**, et se note $u(x_{\text{exp}})$. Elle correspond mathématiquement à l'écart-type de la distribution qui surviendrait de mesures répétées.

Elle rend compte de toutes les grandeurs d'influence possibles.

Il est utile de définir l'incertitude-type **relative**, en pourcentages :

$$\boxed{u_r(x_{\text{exp}}) = \frac{u(x_{\text{exp}})}{x_{\text{exp}}}}$$

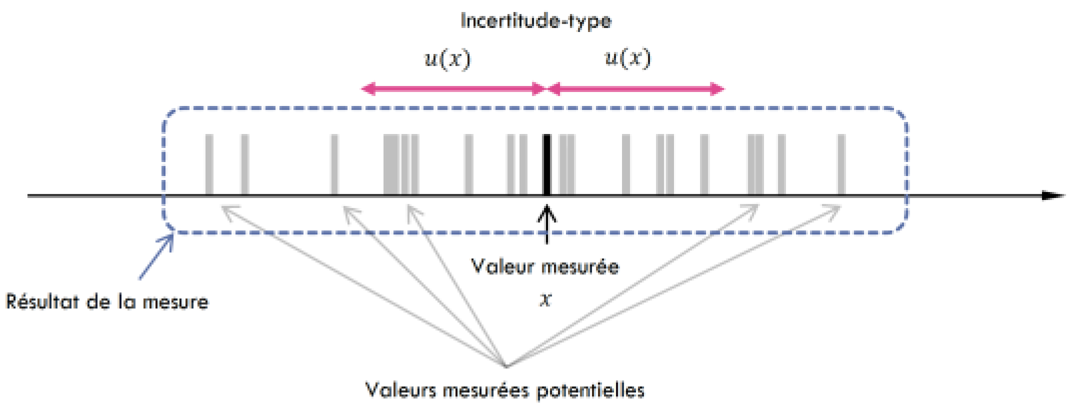


Figure 2.1 – Représentation d'un résultat de mesure expérimentale et du rôle de l'incertitude-type.

Attention N2.1 : Valeurs possibles d'une mesure

Une incompréhension classique serait de considérer que l'incertitude-type regroupe toutes les valeurs d'une mesure, mais *ça n'est pas le cas* : elle traduit une **erreur moyenne attendue**.

Les valeurs possibles d'une mesure sont plus larges que l'incertitude-type !

Important N2.1 : Présentation d'un résultat de TP

Le résultat numérique d'une grandeur x s'écrit :

$$\boxed{x = (x_{\text{exp}} \pm u(x_{\text{exp}}))\, 10^n \text{ unité}}$$

x_{exp} est la valeur **mesurée**, la meilleure estimation possible de la grandeur mesurée.

Par convention,

- Une incertitude-type comporte 2 chiffres significatifs ;
- Le dernier chiffre significatif de la mesure correspond à celui de l'incertitude :

$$d = (12{,}35 \pm 0{,}27)\,\text{m} \quad \text{et pas} \quad d = (12{,}35\cancel{2} \pm 0{,}27)\,\text{m}$$

Application N2.1 : Présenter un résultat numérique

Corriger la présentation des valeurs suivantes, indiquer leur nombre de chiffres significatifs et calculer leurs incertitudes relatives u_r :

$$\lambda = (589{,}0 \pm 11{,}0)\,\text{nm} \qquad t = (0{,}473 \pm 0{,}122)\,\text{s} \qquad V = (14 \pm 0{,}0015)\,\text{mL}$$

On trouve

$$\lambda = (589 \pm 11)\,\text{nm} \qquad t = (0{,}47 \pm 0{,}12)\,\text{s} \qquad V = (14{,}0000 \pm 0{,}0015)\,\text{mL}$$

avec respectivement 3, 2 et 6 chiffres significatifs. Pour les u_r, on trouve

$$u_r(\lambda) = 1.9\% \qquad u_r(t) = 26\% \qquad u_r(V) = 0{,}011\%$$

I/C Comparaison de deux mesures

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Définition N2.2 : Écart normalisé

L'**écart normalisé** E_N [1] entre deux mesures de valeurs m_1 et m_2 et d'incertitudes $u(m_1)$ et $u(m_2)$ est défini par :

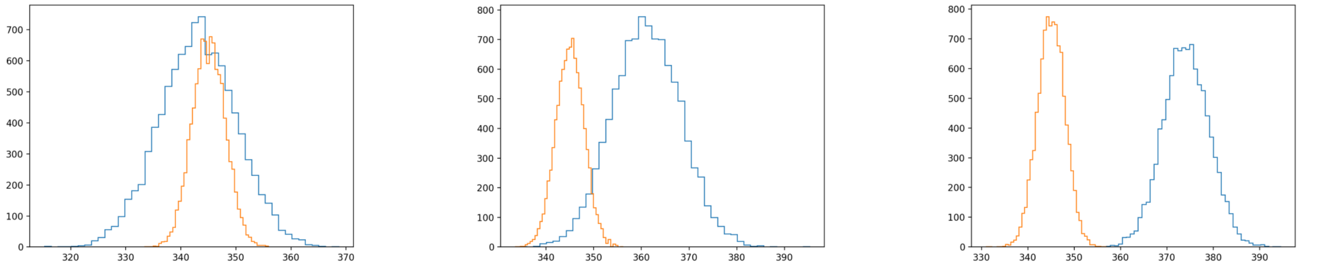
$$\boxed{E_N = \frac{|m_1 - m_2|}{\sqrt{u(m_1)^2 + u(m_2)^2}}}$$

Par *convention*, on considère que **deux résultats sont compatibles si** $E_N \lesssim 2$.

Interprétation N2.1 : Écart normalisé

Pour justifier cette convention, on peut revenir à la définition de l'incertitude-type. Celle-ci quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque deux mesures sont cohérentes, on ne s'attend pas à ce qu'elles coïncident exactement, mais qu'elles ne s'écartent pas l'une de l'autre de plus que de quelques incertitudes-type.

1. Il est parfois appelé *z-score*, et noté z.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$. (b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$. (c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

Figure 2.2 – Tracé de deux distributions de résultats de mesures.

Comparaison avec une valeur de référence Dans le cas d'une valeur donnée sans incertitude, ou avec une incertitude très faible comparée à la nôtre, $u(x_{\text{exp}}) \gg u(x_{\text{ref}})$ implique donc

$$E_N = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}|}{u(x_{\text{exp}})}$$

En dépit d'incertitudes Si aucune des incertitudes n'est connue ou déterminée, on peut utiliser :

Définition N2.3 : Écarts absolu et relatif

Écart absolu	Écart relatif
$\varepsilon = \lvert x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}} \rvert$	$\varepsilon_r = \left\lvert \dfrac{x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right\rvert$

Cette notion n'est officiellement plus au programme mais reste utilisée dans certains sujets.

II Méthodes d'estimation d'incertitudes

II/A Estimation pour une mesure variable : type A

Lorsque l'on réalise plusieurs fois et de manière indépendante une mesure, il est possible d'évaluer statistiquement la mesure. Ainsi, pour n mesures notées x_i :

1) on définit $\bar{x} = x_{\text{exp}}$ la **moyenne** de l'ensemble avec :

$$\bar{x} = x_{\text{exp}} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i$$

2) et l'**écart-type** *de la distribution*, qui est l'incertitude-type chaque **mesure individuelle** x_i

$$u(x_i) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \bar{x})^2}$$

Attention N2.2 : Écarts-types automatiques

Attention, selon les logiciels ou calculatrices, c'est n au lieu $n-1$! Notamment pour les Casio, σx est la version non désirée, et `sx` est la version avec $n-1$ comme attendu. On notera quoiqu'il en soit que cette incertitude-type est la même pour toutes les mesures x_i, par construction.

Le fait de répéter un grand nombre de fois une mesure *réduit* l'incertitude associée à la moyenne, puisque les fluctuations supposées aléatoires se compensent. Ainsi,

3) l'incertitude-type sur **LA MOYENNE** x_{exp} **réduit** avec le nombre de mesures, tel que

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

On remarquera que le procédé n'est pas linéaire : pour avoir une incertitude 10 fois plus faible, il faut 100 fois plus de mesures !

Important N2.2 : Incertitude de type A

Pour n mesures x_i,

Valeur mesurée

C'est la moyenne des mesures.

$$\boxed{x_{\text{exp}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Incertitude

C'est l'écart-type divisé par $\sqrt{n}$.

$$\boxed{u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Application N2.2 : Incertitude de type A

On a obtenu par dosage rédox le degré d'alcool d'un vin à 8 reprises. Les mesures ont donné :

Degré (°)	11,9	12,5	13,1	12,4	12,9	12,6	12,8	12,6

À l'aide de votre calculatrice, d'un tableur ou d'un script `Python`, exprimer le résultat de ces mesures ainsi que son incertitude.

```python
import numpy as np

vals = np.array([11.9, 12.5, 13.1, 12.4, 12.9, 12.6, 12.8, 12.6])
mean = np.mean(vals)
ecarttype = np.std(vals, ddof=1)
incertype = ecarttype/np.sqrt(len(vals))
print(f'D = {mean:.2f} +- {incertype:.2f}')
```

On trouve

$$\underline{D = (12{,}60 \pm 0{,}13)^\circ}$$

II/B Estimation pour une mesure invariable : type B

Lorsque qu'il est impossible (*pas de variabilité observée de la mesure*), ou trop long, de faire une évaluation de type A, l'incertitude est alors évaluée à l'aide de connaissances préalables sur le dispositif expérimental : mesures antérieures, spécifications du fabricant, expérience ou connaissances du comportement ou des propriétés des instruments utilisés.

Lors d'une mesure sans variabilité observée, on estime la **plus petite plage** dans laquelle on est certain-e de trouver **la valeur recherchée**. On note $\bar{x}$ la valeur centrale de cette plage et Δ sa demi-largeur.

Autrement dit, on est certain-e de trouver la valeur recherchée dans l'intervalle

$$\boxed{[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]}$$

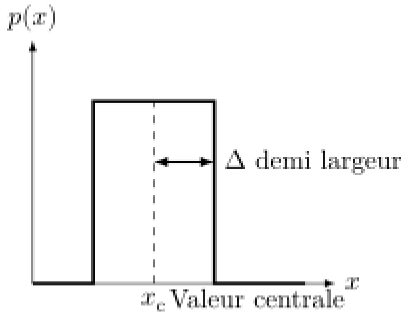


Figure 2.3 – Valeurs possibles d'une distribution.

Important N2.3 : Incertitude de type B

Pour une mesure sans variabilité observée, on trouve l'intervalle d'existence $[\bar{x} - \Delta, \bar{x} + \Delta]$. Alors on a :

Valeur mesurée

C'est la valeur centrale de l'intervalle.

$$\boxed{x_{\text{exp}} = \bar{x}}$$

Incertitude

C'est la demi-largeur divisée par $\sqrt{3}$.

$$\boxed{u(x_{\text{exp}}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$$

Outils N2.1 : Détermination de Δ

On a trois cas de figures courant pour la mesure de Δ :

1) Δ est estimée directement avec honnêteté ;
2) Δ est *reliée* à **une graduation** de l'appareil ;
3) Δ est fournie sur la notice.

Application N2.3 : Incertitudes de type B

Évaluer les incertitudes et donnez les résultats des expériences suivantes :

1) Mesure de la position d d'un écran sur un banc optique. L'image semble nette pour des positions allant de 29,7 à 30,5 cm.

   On a
   $$\bar{x} = 30{,}1\,\text{cm} \quad \text{et} \quad \Delta = 0{,}40\,\text{cm} \quad \text{donc} \quad \underline{d = (30{,}10 \pm 0{,}23)\,\text{cm}}$$

2) Mesure d'une longueur $\ell = 13\,\text{cm}$ avec une règle graduée au mm.

   Largeur $= 1\,\text{mm} = 0{,}1\,\text{cm}$, donc
   $$\underline{\ell = (13{,}000 \pm 0{,}058)\,\text{cm}}$$

3) Utilisation d'un multimètre pour mesurer une tension U. Il affiche 2,5462 V et la notice indique *Accuracy=0.3% rdg + 2 digits*, autrement dit de 0,3% de la valeur lue (*rdg* = *reading*) auquel on ajoute 2 fois la valeur du dernier chiffre.

   On trouve $u(U) = 0{,}0080\,\text{V}$, d'où
   $$\underline{U = (2{,}5462 \pm 0{,}0080)\,\text{V}}$$

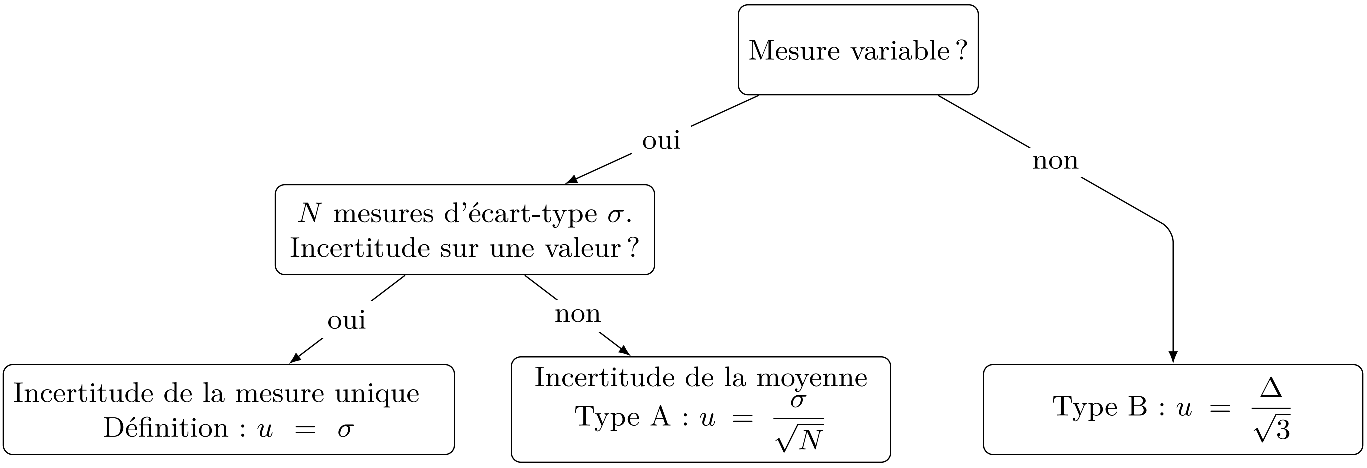


Figure 2.4 – Schématisation du choix de la méthode d'estimation de l'incertitude.

II/C Incertitudes composées

Dans de très nombreuses situations, on est amené-e à **calculer** la valeur d'une grandeur à partir de valeurs mesurées, et donc possédant des incertitudes. Comment exprimer alors l'**incertitude sur ce calcul** en fonction de celles sur les données utilisées ?

II/C) 1 Calcul à partir d'une seule valeur mesurée

L'incertitude sur le calcul dépend de la manière dont la fonction varie selon la grandeur mesurée : si on souhaite calculer $y_{\text{calc}} = 3 * x_{\text{exp}}$, alors l'incertitude sur y_{calc} est 3 fois plus importante que celle sur x_{exp} ! D'une manière générale, le lien se fait grâce à la **tangente à la fonction**, c'est-à-dire sa dérivée au point de calcul :

Important N2.4 : Incertitudes composées à 1 variable

$$\boxed{y_{\text{calc}} = f(x_{\text{mes}}) \Rightarrow u(y_{\text{calc}}) = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| u(x_{\text{mes}})}$$

Application N2.4 : Incertitude composée à une variable

On envoie une impulsion laser de la Terre sur la Lune. On mesure son aller-retour en $t = (2{,}57 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}$. Sachant que la célérité de la lumière dans le vide est exactement $c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, déterminer la distance Terre-Lune (qu'on nommera d) ainsi que son incertitude.

L'impulsion parcourt $2d$ en t à la vitesse c. Ainsi,

$$\boxed{d = \frac{c}{2}t} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{2}t\right)}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{c}{2}$$

Ainsi, par A.N.,

$$d = (385\,344\,308{,}50 \pm 2\,997\,924{,}58)\,\mathrm{m}$$
$$\Rightarrow \underline{d = (3{,}853 \pm 0{,}030) \times 10^8\,\mathrm{m}}$$
$$\Rightarrow \underline{d = (385{,}3 \pm 3{,}0) \times 10^3\,\mathrm{km}}$$

II/C) 2 Calcul avec deux valeurs mesurées

Important N2.5 : Incertitudes composées à 2 variables

Somme ou différence

$$y = \alpha x_1 \pm \beta x_2 \qquad \Rightarrow \qquad u(y) = \sqrt{(\alpha u(x_1))^2 + (\beta u(x_2))^2}$$

Produit de puissances

$$y = a\, x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\alpha_1 \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\alpha_2 \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Application N2.5 : Incertitude composée à 2 variables

On mesure la distance $d = x_2 - x_1$ entre deux points repérés avec la même incertitude $u(x_1) = u(x_2) = 1\,\mathrm{mm}$. Quelle est l'incertitude sur d ?

On trouve élémentairement :

$$u(d) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{mm}$$

On détermine la célérité c du son dans l'air grâce à la relation $\lambda = \frac{c}{f}$, avec $f = (500 \pm 10)\,\mathrm{Hz}$ et $\lambda = (68{,}0 \pm 2{,}5)\,\mathrm{cm}$. Donner sa valeur.

On trouve

$$\underline{c = (340 \pm 14)\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

II/C) 3 Incertitudes-types composées quelconques

Seuls les cas simples et multiples sont à connaître. Pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, calculer l'incertitude-type.

Définition N2.4 : Simulations Monte-Carlo

Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait parti des algorithmes de type Monte-Carlo.

Une fiche y sera consacrée.