Sujet 1 – corrigé

I Question de cours

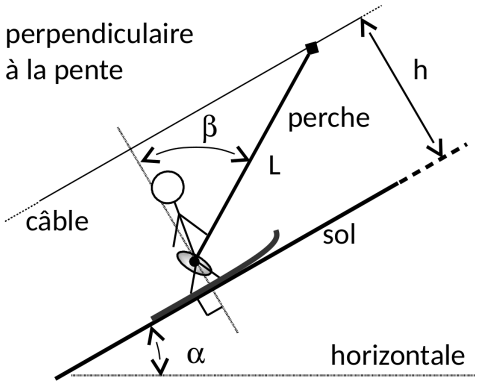
Retrouver l'équation différentielle sur θ du pendule simple non amorti à l'aide du TPM.

II Quelques notions de ski ($\star$)

A Leçon n° 1 : le remonte-pente

On considère une skieuse de masse m remontant une pente d'angle α à l'aide d'un téléski. Celui-ci est constitué de perches de longueur L accrochées à un câble parallèle au sol situé à une hauteur h.

On néglige les frottements de la neige sur les skis.



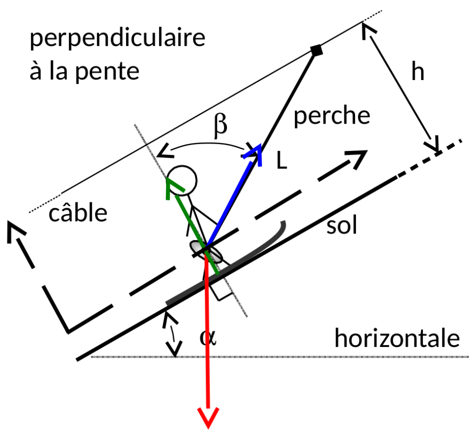
1. Quelles sont les trois forces que subit la skieuse ?

   Réponse :
   Les 3 forces sont :

   - tension de la perche $\vec{F}$,
   - réaction normale du sol $\vec{R}_N$ (il n'y a pas de frottement donc la réaction est uniquement normale),
   - poids de la skieuse $\vec{P}$.

2. Que sait-on sur chacune d'elles a priori ?

   Réponse :
   On connaît leurs direction et leur sens. On ne connaît que la norme du poids ($P = mg$).



On considère une skieuse de 50kg sur une pente de 15% (c'est-à-dire que la skieuse s'élève de 15 m lorsqu'elle parcourt horizontalement 100 m). La force exercée par la perche sur la skieuse sera supposée fixée et égale à $F = 100$N.

3. Existe-t-il un angle limite β_l pour lequel le contact entre les skis et le sol serait rompu ?

Réponse :
Le contact entre la skieuse et le sol sera rompu lorsque $R_N = 0$. On cherche donc à calculer R_N et voir s'il existe une valeur de β telle que $R_N = 0$.

On applique alors la loi de la quantité de mouvement au skieur dans le référentiel de la montagne (galiléen) et on la projette selon l'axe orthogonal à la pente. La projection de l'accélération est alors nulle car la skieuse se déplace perpendiculairement à cet axe.

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R_N = mg\cos\alpha - F\cos\beta.$$

$$R_N > 0 \quad \Rightarrow \quad mg\cos\alpha > F\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta < \frac{mg\cos\alpha}{F}.$$

On peut calculer l'angle α puisque la pente est de 15% :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{15}{100}\right) = 8{,}5°.$$

On en déduit que :

$$\frac{mg\cos\alpha}{F} = \frac{50 \times 9{,}8 \times \cos(8{,}5°)}{100} \approx 5.$$

Finalement, quelque soit β,

$$\cos\beta < 5 \quad \Rightarrow \quad R_N > 0,$$

donc il n'existe pas d'angle limite : la skieuse touche toujours le sol.

On suppose maintenant que sa trajectoire est rectiligne et sa vitesse constante.

4. Quelle relation les 3 forces que subit la skieuse doivent-elles vérifier ?

Réponse :
Si la trajectoire de la skieuse est rectiligne uniforme, alors d'après la loi de l'inertie :

$$\boxed{\vec{F} + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}}.$$

On note β l'angle que forme la perche du téléski avec la perpendiculaire à la pente.

5. Représenter les trois forces sur une même figure en repérant bien les angles α et β.

Réponse :
cf question 2

6. En déduire une relation entre m, g, α, β et F (la norme de la force exercée par la perche).

Réponse :
On a déjà projeté cette relation sur l'axe orthogonal à la pente :

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha.$$

On peut également la projeter sur l'axe de la pente :

$$0 = 0 + F\sin\beta - mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sin\beta}}.$$

7. En négligeant la distance entre la rondelle et le sol, exprimer F en fonction m, g, α, h et L. Comment varie F avec α et h ? Commenter.

Réponse :
Dans cette hypothèse :

$$\cos\beta = \frac{h}{L} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \sqrt{1-\left(\frac{h}{L}\right)^2}.$$

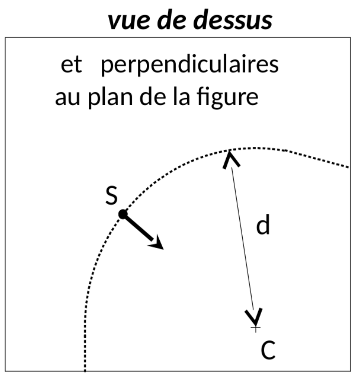
Finalement :

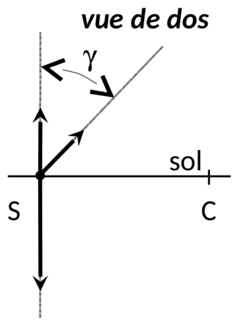
$$\boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{h}{L}\right)^2}}}.$$

La norme de la force F augmente alors lorsque α augmente ou lorsque h augmente. On a donc tout intérêt à positionner le câble de traction horizontal le plus bas possible (en évitant bien entendu qu'il touche la tête des usagers et usagères).

B Leçon n° 2 : le virage

La skieuse est toujours sur le remonte pente et aborde une zone horizontale où sa trajectoire est un cercle de centre C et de rayon d. Sa célérité est toujours constante. On suppose pour les questions suivantes que la perche est contenue dans le plan formé par la droite SC et la verticale.





8. Que peut-on dire de son accélération ?

Réponse :
Le mouvement de la skieuse est circulaire uniforme donc son accélération est radiale et orientée vers l'intérieur du cercle (centripète) :

$$\vec{a} = \frac{-v^2}{d}\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CS}}{||CS||}.$$

On a représenté ci-dessus différentes vues de la situation où la skieuse est modélisée par un point matériel S posé sur le sol. On néglige les frottements, on note $\vec{F}$ la force exercée par la perche du téléski et γ l'angle qu'elle forme avec la verticale.

9. Déterminer $F = ||\vec{F}||$ en fonction de m, $v = ||\vec{v}||$ la célérité, d et γ.

Réponse :
On applique la loi de la quantité de mouvement à la skieuse dans le référentiel galiléen de la montagne. On projette cette équation sur le vecteur $\vec{e}_r$:

$$ma = -F\sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{mv^2}{d\sin\gamma}}.$$

10. En déduire $R = ||\vec{R}||$ en fonction de toutes les autres données.

Réponse :

On projette alors l'équation de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe vertical ascendant perpendiculaire à $\vec{e}_r$. La projection de l'accélération y est nulle :

$$0 = -mg + R + F\cos\gamma$$

On combine cette équation avec celle de la question précédente :

$$\boxed{R = mg - \frac{mv^2}{d\tan\gamma}}.$$

11. Comment évolue R lorsque la célérité augmente ?

    Réponse :
    On voit que R augmente lorsque v diminue.

12. En pratique la perche n'est pas rigoureusement orthogonale à la trajectoire mais est également dirigée vers l'avant. Expliquer pourquoi.

    Réponse :
    En réalité il existe des frottements colinéaires à la vitesse, mais de sens opposé. Si le mouvement est uniforme, une composante de la force exercée par la perche doit compenser ces frottements

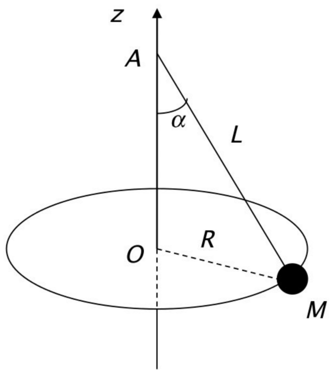
Sujet 2 – corrigé

I Question de cours

Énoncer et démontrer les théorèmes de la puissance mécanique et de l'énergie mécanique.

II Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.

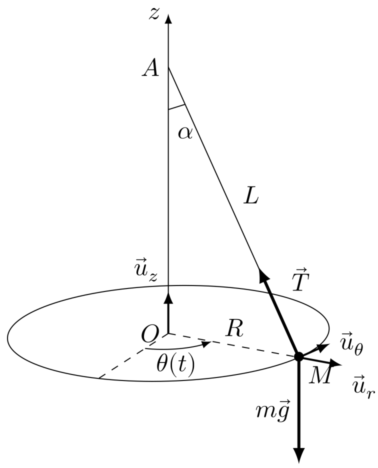


1.
   (a) Quel système de coordonnées utiliser ?
   (b) Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.
   (c) Appliquer le PFD puis exprimer $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.
   (d) Que dire du cas où ω devient très grande ?
   (e) Application numérique : calculer α pour $L = 20\,\text{cm}$ et $\omega = 3\,\text{tours}\,\text{s}^{-1}$.

Réponse :

(a) On utilisera un repère cylindrique pour étudier la rotation.

(b) ◇ **Système :** {M} masse m
◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
◇ **Repère :** $(\text{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ (voir schéma)



◇ **Repérage :** $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\text{OM}} &= R\overrightarrow{u_r} = L\sin\alpha\overrightarrow{u_r}\\
\vec{v}_{\text{M}} &= L\dot{\theta}\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta}\\
&= L\omega\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta}\\
\vec{a}_{\text{M}} &= -L\omega^2\sin\alpha\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

◇ **BDF :**

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
Tension	$\vec{T} = T(-\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$

(c) On applique le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2\cancel{\sin\alpha} = -T\cancel{\sin\alpha} \\ 0 = T\cos\alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos\alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{lim}}}$$

(d) Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$, alors $\cos\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

(e) On trouve $\boxed{\cos\alpha = 0{,}138 \Leftrightarrow \alpha = 82°}$

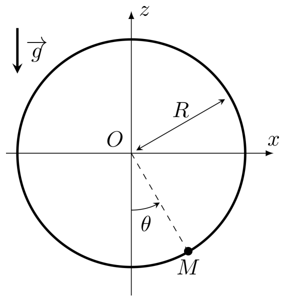
Sujet 3 – corrigé

I Question de cours

Retrouver les énergies potentielles de forces classiques (poids, rappel élastique, force newtonienne en K/r^2).

II Oscillations d'un anneau sur un cerceau

Un cerceau de centre O et de rayon R est maintenu dans un plan vertical, et un anneau de masse m assimilé à un point matériel M peut glisser sans frottements le long de ce cerceau.



1. Qu'est-ce que l'hypothèse « sans frottements » implique pour la réaction du cerceau sur l'anneau ?

   Réponse :
   L'hypothèse « sans frottements » signifie que la réaction du cerceau est uniquement normale : il n'y a pas de composante tangentielle.

2. Écrire le PFD appliqué à l'anneau et le projeter dans une base adaptée.

   Réponse :

   - **Système :** {anneau}
   - **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
   - **Repère :** $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le sens de θ
   - **Repérage :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\overrightarrow{u_r}\\ \vec{v}(t) &= R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\\ \vec{a}(t) &= R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

   - **BDF :**

$$\begin{array}{ll}\textbf{Poids} & \vec{P} = mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})\\ \textbf{Réaction} & \vec{R} = -R_N\overrightarrow{u_r}\end{array}$$

   - **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-mR\dot{\theta}^2\\ mR\ddot{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}mg\cos\theta - R_N\\ -mg\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases}mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = R_N\\ mR\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0\end{cases}} \tag{3.1}$$

3. En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.

   Réponse :
   Avec (3.1), en la mettant sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\sin\theta = 0} \tag{3.2}$$

avec
$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

On se place dans l'approximation des petits angles ($|\theta| < \theta_0 = 20°$). Initialement, l'anneau est situé à la verticale en-dessous de O et il est lancé vers la droite, avec une vitesse initiale de norme v_0.

4. En déduire l'équation horaire du mouvement.

Réponse :
On a donc
$$\boxed{\theta(0) = 0} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(0) = v_0\vec{u_\theta} = R\dot{\theta}(0)\vec{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}}$$
L'équation (3.2) se simplifie avec $\sin\theta \approx \theta$, pour donner
$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
Et avec les CI,
$$\theta(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 0}$$
$$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{R\omega_0}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

5. À quelle condition sur v_0 l'approximation des petits angles est-elle vérifiée ?

Réponse :
La valeur maximale de $|\theta(t)|$ est $v_0/(R\omega_0)$, quand le sinus vaut ± 1. Pour avoir des petits angles, il faut que l'angle maximal ne dépasse pas θ_0, soit
$$\frac{v_0}{R\omega_0} < \theta_0 \Leftrightarrow v_0 < \theta_0 R\sqrt{\frac{g}{R}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 < \theta_0\sqrt{Rg}}$$