Devoir maison 4 – À rendre le 13 mai 2024

Correction du DM

1) La transformation est la suivante :

$$\text{État initial}\left|\begin{array}{l} P_1 = P_0 = 1\,\text{bar} \\ V_1 = V_0 + V_p \\ T_1 = T_0 \\ n_1 \end{array}\right. \quad \xrightarrow[\text{G.P.}]{\text{isotherme}} \quad \text{État final}\left|\begin{array}{l} P_2 = \,? \\ V_2 = V_0 \\ T_2 = T_0 \\ n_2 = n_1 \end{array}\right.$$

T et n étant constants, on a $P_0V_1 = nRT_0 = P_2V_2$, soit

$$P_0(V_0 + V_p) = P_2V_0 \Leftrightarrow \boxed{P_2 = P_0(1+\alpha)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_0 = 1\,\text{bar} \\ V_p = 2{,}0\,\text{L} \\ V_0 = 5{,}0\,\text{L} \end{cases}$$

$$\text{A.N.} \ : \ \underline{P_2 = 1{,}4\,\text{bar}}$$

2) Le volume final est évidemment le même : $V_2 = V_0$. La température l'est aussi, puisqu'on attend suffisamment longtemps pour que ça soit le cas : $T_2 = T_0$. On a également $n_2 = n_1$. La pression finale est donc

$$P_2 = \frac{n_2RT_2}{V_2} = \frac{n_1RT_0}{V_0} = \frac{P_0(V_0+V_p)}{V_0} = P_0(1+\alpha)$$

donc identique au cas précédent.

3) C'est une compression isotherme ($T = T_0 = \text{cte}$) et mécaniquement réversible ($P = P_{\text{ext}}$) d'un gaz parfait :

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V = -n_1RT_0\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -n_1RT_0\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Or $n_1RT_0 = P_0V_1$, $V_1 = V_0 + V_p$ et $V_2 = V_0$, soit

$$\boxed{W_{12} = P_0V_1\ln(1+\alpha)} \Rightarrow \underline{W_{12} = 236\,\text{J}}$$

4) a – L'étape $1 \rightarrow 1'$ est réalisée rapidement, donc les transferts thermiques n'ont pas le temps de s'établir : on peut la supposer adiabatique. De plus, l'énoncé indique qu'elle est supposée réversible, c'est-à-dire qu'on néglige tout frottement.

b – On est en présence d'un gaz parfait lors d'une transformation adiabatique et mécaniquement réversible entre les états 1 et 1', on peut donc utiliser la loi de Laplace :

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_{1'}V_{1'}^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_{1'} = T_1\left(\frac{V_1}{V_{1'}}\right)^{\gamma-1}$$

Or $T_1 = T_0$, $V_1 = V_0 + V_p$ et $V_{1'} = V_0$, donc

$$\boxed{T_{1'} = T_0(1+\alpha)^{\gamma-1}} \Rightarrow \underline{T_{1'} = 343\,\text{K}}$$

c – On décompose la transformation en deux étapes :

◇ De 1 à 1', on a une transformation adiabatique mécaniquement réversible d'un gaz parfait. On peut soit calculer le travail directement, soit utiliser le premier principe :

▷ **Premier principe**

$$\begin{aligned}
&\Delta U = C_V \Delta T \\
\Leftrightarrow\ & W + Q = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_{1'} - T_1) && Q = 0 \text{ Factorisation par } T_1 \\
\Leftrightarrow\ & W = \frac{nRT_1}{\gamma - 1}\left(\frac{T_{1'}}{T_1} - 1\right) && \text{Adiabatique réversible G.P. } T_1 V_1^{\gamma-1} = T_{1'} V_{1'}^{\gamma-1} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{W = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{V_{1'}}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right)}
\end{aligned}$$

▷ **Calcul direct**

$$\begin{aligned}
& W = -\int_{V_1}^{V_{1'}} P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V && \text{Mécaniquement réversible } P_{\text{ext}} = P \\
\Leftrightarrow\ & W = -\int_{V_1}^{V_{1'}} P\,\mathrm{d}V && \text{Adiabatique réversible G.P. } P = P_1 \frac{V_1^\gamma}{V^\gamma} \\
\Leftrightarrow\ & W = -P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_{1'}} \frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma} && \int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\
\Leftrightarrow\ & W = -P_1 V_1^\gamma \left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_{1'}} && \text{On calcule} \\
\Leftrightarrow\ & W = -\frac{P_1 V_1^\gamma}{-\gamma+1}(V_{1'}^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) && \text{On factorise par } V_1^{1-\gamma} \\
\Leftrightarrow\ & W = -\frac{P_1 V_1^{\cancel{\gamma}}}{-\gamma+1} V^{1-\cancel{\gamma}}\left(\left(\frac{V_{1'}}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right) && \text{On simplifie les } - \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{W = \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1}\left(\left(\frac{V_{1'}}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right)}
\end{aligned}$$

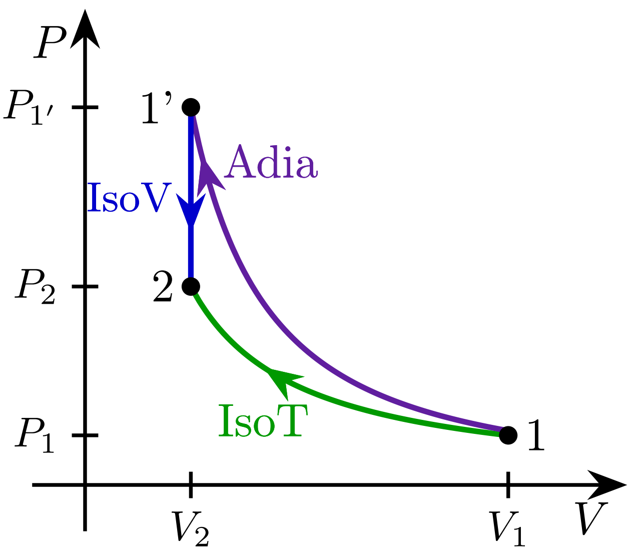
Dans tous les cas, avec $P_1 = P_0$, $V_{1'} = V_0$ et $V_1 = V_0 + V_p$, on obtient

$$\underline{W = 252\,\mathrm{J}}$$

◇ De 1' à 2, on a une transformation isochore, de travail nul.

5) Dans un diagramme (P,V), le travail des forces de pression reçu par le gaz est égal à l'aire sous la courbe. Or, la compression **adiabatique mécaniquement réversible** dessine une **aire plus importante** : on pouvait donc **prédire que** $W_{\textbf{brusque}} > W_{\textbf{lente}}$.

Ce travail a servi a **chauffer le gaz**, jusqu'à 343 K. Ceci n'est cependant **pas utile** puisque le gaz refroidit ensuite. Cette énergie thermique est dissipée vers la pièce et **n'est pas récupérable**.



Ainsi, tout est une question de temps : si on n'est pas pressé, il vaut mieux **pomper lentement** !