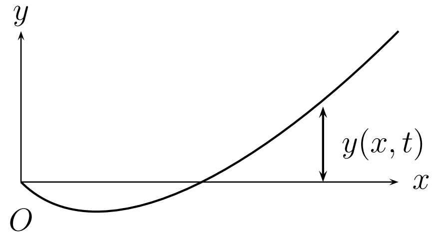
Sujet 1 – corrigé

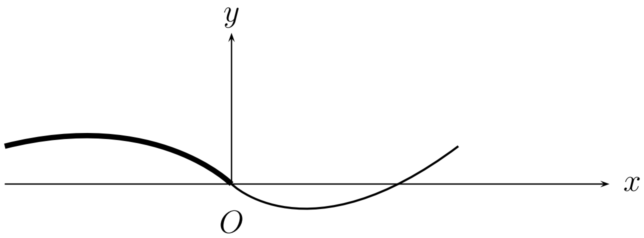
I Progation d'une onde sur une corde

On considère une corde homogène de masse linéique μ soumise à une tension T. Au repos, la corde est horizontale. On se limite aux mouvements dans le plan vertical (Oxy), avec x horizontal et y vertical ascendant.
Soit $y(x,t)$ le déplacement vertical de l'élément de corde à l'abscisse x et à l'instant t.



1. Rappeler les dimensions T et μ.
   Réponse :
   Une tension est une force, et une masse linéique est une masse par unité de longueur :
   $$\boxed{[T] = M \cdot L \cdot T^{-2} \quad ; \quad [\mu] = M \cdot L^{-1}}$$

2. On suppose que la célérité c des ondes est de la forme $c = \mu^{\alpha} T^{\beta}$. Exprimer α et β.
   Réponse :
   Par analyse dimensionnelle :
   $$[c] = [\mu]^{\alpha}[T]^{\beta} \quad \Rightarrow \quad L \cdot T^{-1} = M^{\alpha+\beta} \cdot L^{-\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta}$$
   On en déduit $\boxed{\alpha = -1/2}$ et $\boxed{\beta = 1/2}$. Donc $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.



On considère désormais une corde infinie formée de deux brins de masses linéiques μ_1 pour $-\infty < x < 0$ et μ_2 pour $0 < x < \infty$. Au point $x = 0$, il existe une discontinuité de milieu (changement de milieu).
On pose
$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$
Les deux cordes sont raccordées en $x = 0$. Elles sont soumises à la même tension T. Une onde incidente provenant de $x \to -\infty$
$$y_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx), \text{ pour } x < 0 \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}$$
donne naissance à une onde réfléchie
$$y_r(x,t) = A_r\cos(\omega t - k_r x), \text{ pour } x < 0 \quad \text{avec} \quad k_r \in \mathbb{R}$$
et une onde transmise
$$y_t(x,t) = A_t\cos(\omega t - k_t x), \text{ pour } x > 0 \quad \text{avec} \quad k_t \in \mathbb{R}$$

3. Exprimer la célérité des ondes dans la corde 1 ($x < 0$) puis dans la corde 2 ($x > 0$).
Réponse :
Dans la corde 1, $\boxed{c_1 = \sqrt{T/\mu_1}}$, et dans la corde 2, $\boxed{c_2 = \sqrt{T/\mu_2}}$.

4. Préciser le sens de propagation de l'onde réfléchie. Donner la relation entre k_r et k.
Réponse :
L'onde réfléchie se propage vers les x décroissants, donc $k_r < 0$.

Le milieu de propagation est le même que celui de l'onde incidente, donc la vitesse de propagation est la même (c_1). De plus, comme l'onde incidente et l'onde réfléchie ont la même fréquence, on en déduit $|k_r| = |k|$. (On rappelle que $|k_r| = 2\pi/\lambda_1 = \omega/c_1$).

Or $k_r < 0$ et $k > 0$, $\boxed{k_r = -k}$.

5. Exprimer l'onde pour les $x < 0$.
Réponse :
C'est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A_r\cos(\omega t + kx) \quad \text{pour} \quad x < 0}$$

6. Préciser le sens de propagation de l'onde transmise. Quelle est la relation entre k_t, ω, T et les masses linéiques ? Quelle est la relation entre k, ω, T et les masses linéiques ? Donner la relation entre k_t, k et η.
Réponse :
L'onde transmise se propage vers les x croissants donc $k_t > 0$.

Par définition $|k_t| = \dfrac{\omega}{c_2}$, donc $\boxed{k_t = \omega\sqrt{\mu_2/T}}$.

De même $\boxed{k = \omega\sqrt{\mu_1/T}}$. On en déduit $\boxed{k_t = \eta k}$.

7. Exprimer l'onde pour les $x > 0$.
Réponse :
Cela correspond uniquement à l'onde transmise :

$$\boxed{y(x,t) = A_t\cos(\omega t - k\eta x) \quad \text{pour} \quad x > 0}$$

8. La corde ne subit pas de discontinuité en $x = 0$. En déduire une équation reliant A_r, A_t et A.
Réponse :
La fonction $y(x,t)$ est continue en $x = 0$:

$$y(x = 0^-,t) = y(x = 0^+,t) \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A + A_r = A_t}$$

9. Remarquer que la corde n'est pas coudée en $x = 0$. Montrer que

$$A - A_r = \eta A_t$$

Réponse :
La tangente à la courbe $y(x)$ est continue pour tout t en $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx}(0^-,t) = \frac{dy}{dx}(0^+,t) \quad \Leftrightarrow \quad Ak\sin(\omega t) - A_r k\sin(\omega t) = A_t\eta k\sin(\omega t)$$

Cette relation doit être vraie pour tout t, donc $\boxed{A - A_r = \eta A_t}$

10. Exprimer A_r en fonction de A et η. Discuter les limites $\mu_2 \to \mu_1$ et $\mu_2 \to \infty$.
Réponse :

En utilisant les réponses aux deux questions précédentes : $\boxed{A_r = A\dfrac{1-\eta}{1+\eta}}$

Si les deux cordes sont identiques, il n'y a pas d'onde réfléchie (l'onde se propage dans un même milieu).

$$\lim_{\mu_2 \to \mu_1} A_r = \lim_{\eta \to 1} A_r = 0$$

Si $\mu_2 \to \infty$, l'inertie de la corde 2 est énorme, donc il n'y aura pas d'onde transmise.

$$\lim_{\mu_2 \to +\infty} A_r = \lim_{\eta \to +\infty} A_r = -A$$

On en déduit $A_t = 0$ et $y(0,t) = 0$ pour tout t comme si l'extrémité était fixe. L'onde incidente "se heurte" à un mur.

11. Les deux cordes sont en fer de masse volumique $\rho_{\mathrm{Fe}} = 7 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$. Les deux cordes sont cylindriques. Le rayon de la corde 2 est le triple de celui de la corde 1. Exprimer η.
Réponse :
La masse linéique d'une corde cylindrique de rayon r vaut : $\mu_1 = \rho_{\mathrm{Fe}} \pi r^2$ (πr^2 représente la surface d'un disque de rayon r).

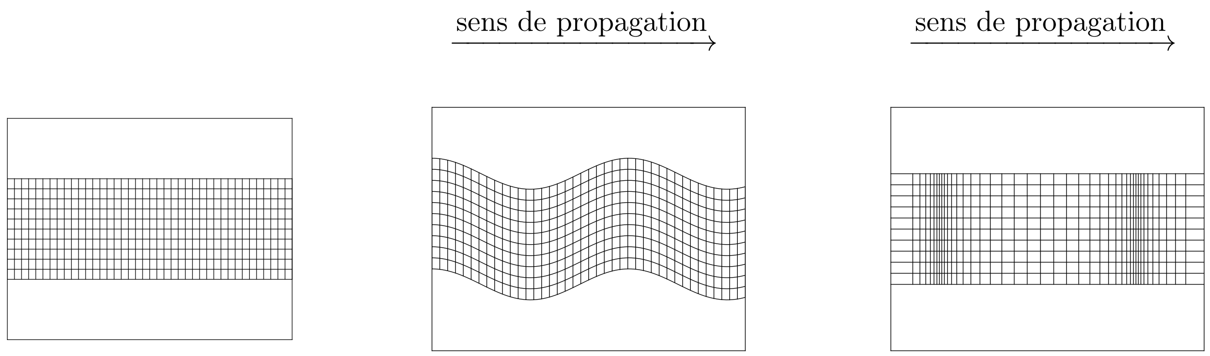
La corde 2 a un rayon $r_2 = 3r$, donc $\mu_2 = 9\mu_1$.

On en déduit $\boxed{\eta = 3}$.

Sujet 2 – corrigé

I Ondes sismiques

On distingue deux types d'ondes sismiques : les ondes P qui se propagent à la vitesse c_P et les ondes S qui se propagent à la vitesse $c_S < c_P$. Après un séisme, les ondes P atteignent une station sismographique à l'instant t_P et les ondes S, à l'instant t_S.
On cherche à en déduire la distance D de la station à l'épicentre (le foyer du séisme) et la date t_0 du séisme. Les figures ci-dessous représentent l'allure d'une portion de la croûte terrestre pour ces deux types d'ondes.



En l'absence d'onde — Onde S — Onde P

1. Quelle est la différence entre les ondes P et les ondes S ? Quel adjectif décrit les ondes P ? les ondes S ?
   Réponse :
   Les ondes P sont longitudinales, les ondes S sont transversales

2. Préciser quelles sont les ondes détectées les premières.
   Réponse :
   Celles qui courent le plus vite : les ondes P

3. Avant de déterminer les expressions générales de D et t_0, on cherche un (ou plusieurs) cas particulier(s) pour lequel (lesquels) ces expressions sont intuitives et simples. Imaginer une (des) valeur(s) particulière(s) des paramètres t_S et t_P pour laquelle (lesquelles) il est très facile de donner l'expression de t_0 ou de D.
   Réponse :
   Si $t_S = t_P$ alors $D = 0$ et $t_0 = t_S = t_P$

4. Exprimer t_0 et D dans le cas général. Vérifier que les expressions trouvées sont en accord avec la réponse à la question précédente.
   Réponse :

$$t_P = t_0 + D/c_P \quad \text{et} \quad t_S = t_0 + D/c_S$$
$$\Rightarrow t_0 = \frac{c_P t_P - c_S t_S}{c_P - c_s} \Leftrightarrow \boxed{D = c_P c_S \frac{t_S - t_P}{c_P - c_S}}$$

5. Quelle hypothèse a-t-on faite implicitement sur la propagation des ondes ? Cette hypothèse est-elle réaliste sachant que la terre est formée de différentes « couches » ?
   Réponse :
   On suppose que les ondes se propagent en ligne droite : on néglige tout phénomène de réflexion ou de réfraction.

Pour localiser l'épicentre, on utilise les mesures de plusieurs stations.

6. Dans cette question, on considère deux stations respectivement à une distance D_1 et D_2 de l'épicentre. On suppose que la distance séparant les deux stations est petite devant le rayon terrestre. On peut alors considérer que la Terre est plane localement. En supposant que les deux stations et l'épicentre sont dans un même plan vertical, montrer que la connaissance de D_1 et D_2 permet de trouver la position de l'épicentre. Vous vous justifierez votre réponse à l'aide d'une construction graphique.
   Réponse :
   Chaque station permet de décrire un cercle. Il y deux intersections mais une seule dans la Terre !

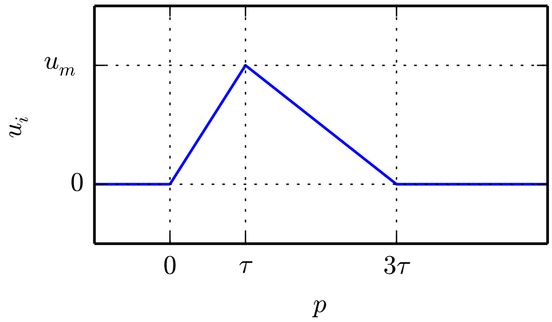
7. Combien faut-il de stations au minimum si on enlève l'hypothèse simplificatrice que les stations et l'épicentre sont coplanaires ?
   Réponse :
   3 : c'est le principe de la triangulation. Il y a deux intersections, on élimine celle qui a une altitude positive.

8. Quel autre système de localisation s'appuie sur un principe similaire ?
   Réponse :
   Le GPS.

Sujet 3 – corrigé

I Onde progressive

Un signal dont la forme est indiquée sur le graphe ci-contre se propage sur une corde vibrante. La courbe représente l'élongation $u_i(p)$ de la corde avec $p = t - z/c$. On suppose que $u_i(p) = 0$ pour les valeurs de p non représentées sur le graphique.



1. Décrire la nature de cette onde.
   Réponse :
   C'est une onde transversale progressive selon les z croissants se propageant à la vitesse c.

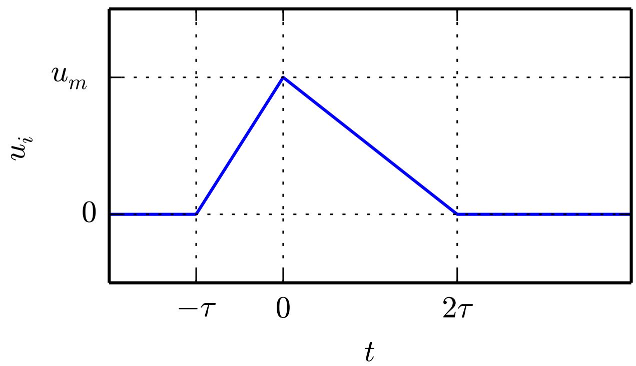
2. Représenter l'élongation u_i en fonction du temps pour $z = -\tau c$.
   Réponse :

   On pose trois points de l'onde :

   - point A : $u_i = 0$ et $p_A = 0$
   - point B : $u_i = u_m$ et $p_B = \tau$
   - point C : $u_i = 0$ et $p_C = 3\tau$

   Pour $z = -\tau c$, $p = t + \tau$, soit $\boxed{t = p - \tau}$. Cela revient à effectuer un changement de l'origine de l'axe du temps de τ vers la droite.

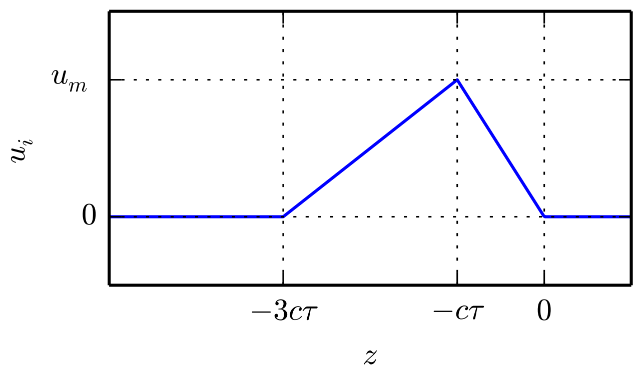
   - point A : $p_A = 0$, $t_A = -\tau$
   - point B : $p_B = \tau$, $t_B = 0$
   - point C : $p_C = 3\tau$, $t_C = 2\tau$



3. Représenter l'élongation u_i en fonction de z pour $t = 0$.
   Réponse :

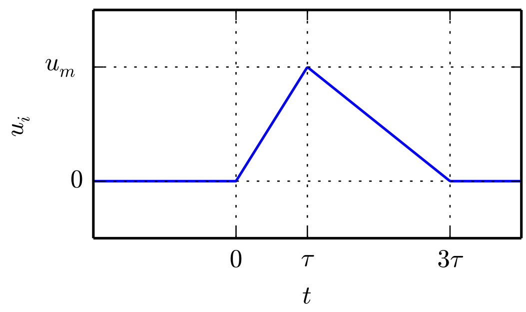
   Pour $t = 0$, $p = -z/c$, donc $z = -pc$

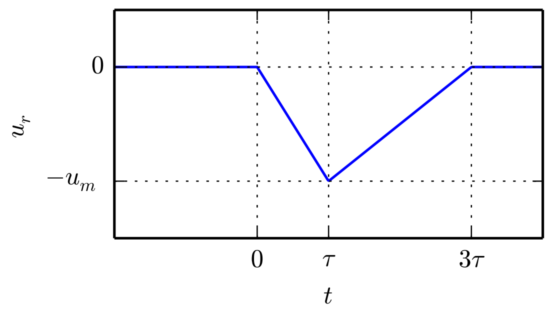
   - point A : $p_A = 0$, $z_A = 0$
   - point B : $p_B = \tau$, $z_B = -c\tau$
   - point C : $p_C = 3\tau$, $z_C = -3c\tau$



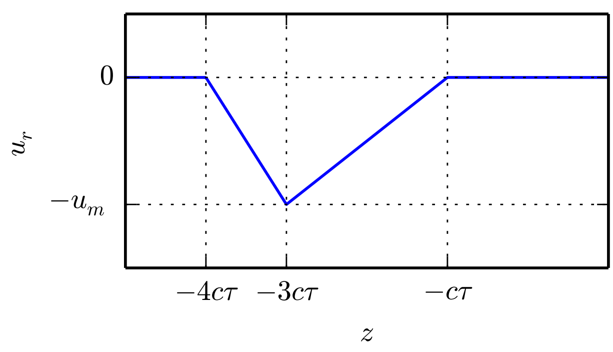
4. La corde se trouve dans le demi-espace $z \leq 0$ et est attachée en $z = 0$. Montrer que cette condition aux limites conduit à une onde réfléchie u_r en opposition de phase de l'onde incidente u_i en $z = 0$.
   Réponse :
   En $z = 0$, il y a un nœud de vibration :
   $\forall t\, u(z = 0,t) = u_i(z = 0,t) + u_r(z = 0,t) = 0$, d'où $\boxed{u_r(z = 0,t) = -u_i(z = 0,t)}$.
   Le signe - traduit l'opposition de phase.

5. Représenter le signal incident u_i et celui réfléchi u_r en $z = 0$ en fonction du temps t.
   Réponse :





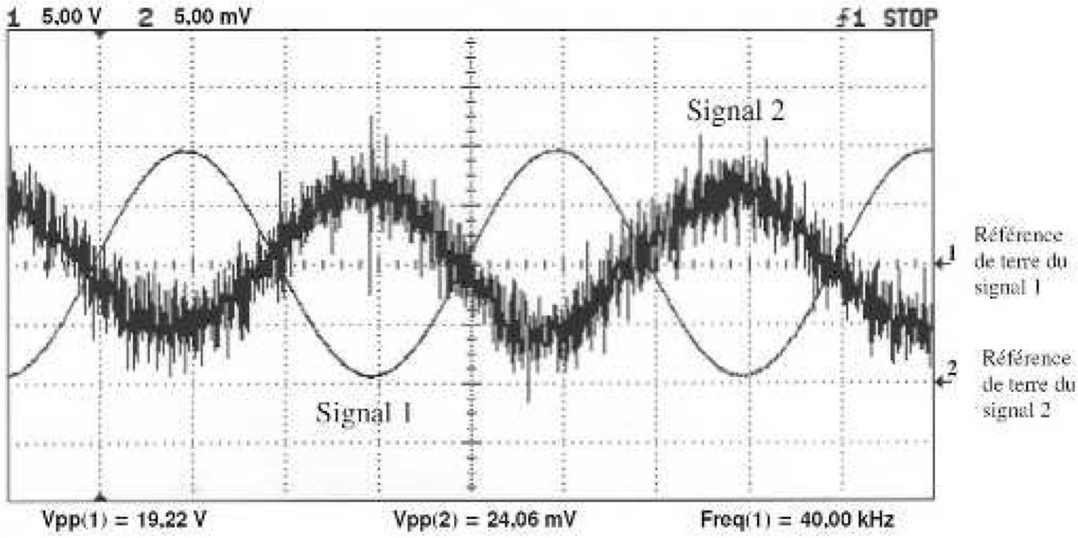
6. Représenter $u_r(z,t_0)$ en fonction de z à l'instant $t_0 = 4\tau$.
   Réponse :
   L'onde se propage selon les z décroissants, donc s'écrit $u_r(t + z/c) = u_r(q)$ avec $q = t + z/c$. Le graphique précédent représente alors $u_r(q)$. On fait le même raisonnement qu'à la question **3** : $t = 4\tau$, donc $z = c(q - 4\tau)$. Pour $q = 0$, $z = -4c\tau$, pour $q = \tau$, $z = -3c\tau$ et pour $q = 3\tau$, $z = -c\tau$.



Sujet 4 – corrigé

I Télémètre ultrasonore

On place un émetteur et un récepteur à ultrasons côte à côte. Ce bloc est appelé le télémètre. À la distance D, on place un obstacle réfléchissant les ondes sonores, que nous appellerons la cible. Une onde sinusoïdale, de période T, est émise par l'émetteur du télémètre, elle se réfléchit sur la cible et est détectée par le récepteur du télémètre. Sur l'écran d'un oscilloscope, on visualise simultanément deux signaux ; celui capté (par un dispositif non décrit) en sortie de l'émetteur et celui du récepteur.



1. On appelle temps de vol, noté t_v, la durée du trajet aller-retour de l'onde entre le télémètre et la cible. Exprimer t_v en fonction de la distance D séparant le télémètre de la cible et de la célérité c de l'onde.

   Réponse :
   Le temps de vol est la durée de la propagation de l'onde sur une distance $2D$ correspondant à l'**aller-retour** jusqu'à la cible. Ainsi :
   $$t_v = \frac{2D}{c}$$

2. Pour illustrer le principe de la mesure, on colle la cible au télémètre, puis on l'éloigne lentement, en comptant le nombre de coïncidences, c'est-à-dire le nombre de fois où les signaux sont en phase. Pour simplifier, on suppose que lorsque $D = 0$, les signaux sont en phase. On se place dans le cas où l'on a compté exactement un nombre n de coïncidences. Exprimer D en fonction de n et de la longueur d'onde des ondes ultrasonores.
   Réponse :
   Au fur et à mesure que l'on éloigne la cible, le décalage temporel entre les deux signaux augmente. Chaque fois que ce décalage est un multiple entier de la période T, les signaux sont en phases. Si on éloigne d'une distance D, on augmente de décalage temporel de $2D/c$. La première fois que les signaux sont en phase à nouveau, on a
   $$\frac{2D}{c} = T \quad \text{soit} \quad D = \frac{cT}{2} = \frac{\lambda}{2}$$
   où λ est la longueur d'onde des ondes ultrasonores. La deuxième fois,
   $$\frac{2D}{c} = 2T \quad \text{soit} \quad D = 2 \times \frac{\lambda}{2}$$
   À la n^{ime} coïncidence (par récurrence immédiate),
   $$D = n \times \frac{\lambda}{2}$$

3. Lors du recul de la cible, 50 coïncidences ont été comptées avant d'observer les signaux suivants sur l'écran de l'oscilloscope (voir figure). Dans les conditions de l'expérience, la longueur d'onde des ondes sonores valait 8,5 mm. En exploitant les données de l'enregistrement, calculer la distance séparant le télémètre de la cible.
Réponse :
Dans l'expérience on a reculé la cible d'une distance comprise entre $50\lambda/2$ et $51\lambda/2$. Les deux signaux sont en opposition de phase, ce qui veut dire qu'après la 50e coïncidence on a reculé la cible d'une distance ΔD telle que
$$\frac{2\Delta D}{c} = \frac{T}{2} \quad \text{soit} \quad \Delta D = \frac{\lambda}{4}$$
La distance de la cible est donc :
$$D = 50 \times \frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = 10{,}8\,\mathrm{cm}$$

4. Pourquoi les deux signaux de la figure sont-ils si différents ? Identifier quel est, selon toute vraisemblance, le signal capté en sortie de l'émetteur et celui reçu par le récepteur.
Réponse :
Le niveau du signal reçu par le récepteur en provenant de la cible est faible en raison de l'éloignement de celle-ci. Pour l'observer sur l'oscilloscope il faut augmenter la sensibilité, ce qui a pour conséquence d'amplifier le bruit électronique. C'est pourquoi ce signal a une allure irrégulière que l'on qualifie de « bruitée ».

5. Le comptage des coïncidences a été réalisé en plaçant l'oscilloscope en mode XY (c'est-à-dire une représentation telle que le signal 2 soit tracé comme une fonction du signal 1). Dans le cas des signaux de la figure, représenter la figure que l'on obtiendrait en se plaçant dans ce mode.
Réponse :
Les deux signaux étant en opposition de phase on observerait en mode XY un segment de droite de pente négative (de contour assez flou à cause du bruit).