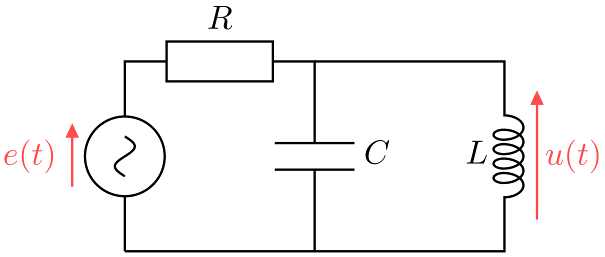
Électrocinétique – chapitre 7

Correction du TD d'entraînement

I Résonance d'un circuit bouchon

On considère le circuit RLC représenté ci-contre, composé d'un résistor, de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L, d'un condensateur idéal, de capacité C, alimenté par une source idéale de tension, de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé.



1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ en fonction de E_0, R, L, C et ω.

Réponse

On effectue un pont diviseur de tension aux bornes de l'impédance équivalente de L et C, avec $\underline{Y}_{\text{eq}} = \text{j}C\omega + 1/\text{j}L\omega$:

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} E_0 = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} E_0 = \frac{E_0}{1 + \text{j}\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)}$$

en utilisant que $1/\text{j} = -\text{j}$.

◇

2) Établir qu'il existe un phénomène de résonance pour la tension $u(t)$. Préciser la pulsation ω_0 à laquelle ce phénomène se produit et la valeur de l'amplitude réelle de $u(t)$ à cette pulsation.

Réponse

L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$$

◇

3) Mettre l'amplitude réelle U de $u(t)$ sous la forme :

$$U = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

avec Q un facteur sans dimension à exprimer en fonction de R,L et C.

Réponse

On cherche $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$ et $\dfrac{Q}{\omega_0} = RC$; on trouve donc

$$\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

◇

4) Exprimer la bande passante $\Delta\omega$ de cette résonance en fonction de Q et ω_0.

Réponse

On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) &= -1 \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1\\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\times\omega\omega_0 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega}\right)\times\omega\omega_0 = \frac{\omega\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow \omega^2-{\omega_0}^2 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega^2-{\omega_0}^2 = \frac{\omega\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow \boxed{\omega^2+\frac{\omega_0}{Q}\omega-{\omega_0}^2 = 0} & \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2-\frac{\omega_0}{Q}\omega-{\omega_0}^2 = 0}\\
\Rightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q}+4{\omega_0}^2\\
\Leftrightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1+4Q^2\right)\\
\Rightarrow \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} & \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\pm\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2}\\
\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1\pm\sqrt{1+4Q^2}\right) & \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1\pm\sqrt{1+4Q^2}\right)
\end{aligned}$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1-\sqrt{1+4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1-\sqrt{1+4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

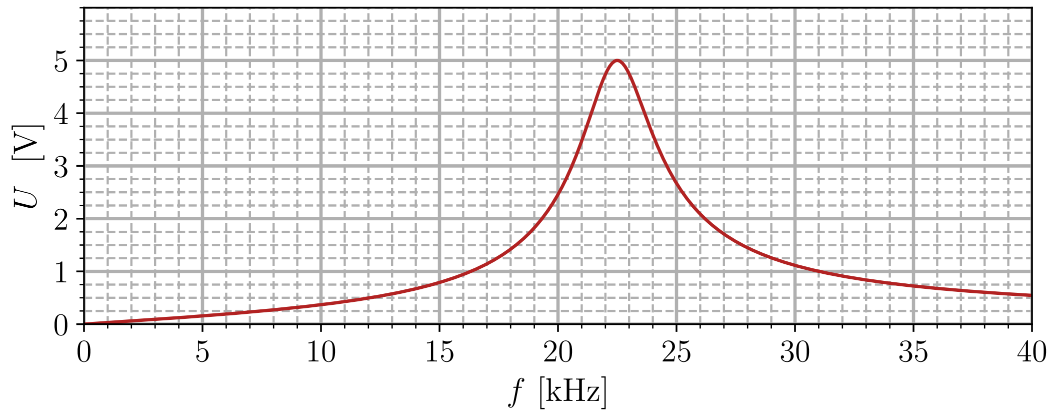
$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}-1\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}+1\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2-\omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

◇

5) En déduire les valeurs numériques de C et E_0 à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'amplitude réelle de $u(t)$ en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$, sachant que $L = 1\,\mathrm{mH}$ et $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$.



Réponse

Sur le graphique, on trouve $U_{\max} = 5\,\mathrm{V} = E_0$. On a de plus $f_0 = 22{,}5\,\mathrm{kHz}$ et $\Delta f \approx 3\,\mathrm{kHz}$, d'où $\boxed{Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} \approx 7{,}5}$. Avec l'expression de Q, on isole C :

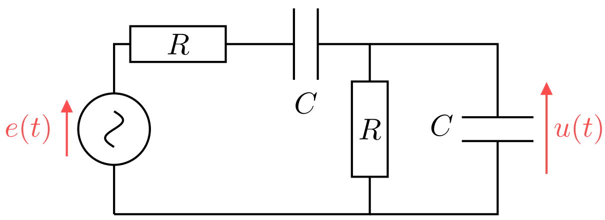
$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{Q^2 L}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 7{,}5 \\ L = 1\,\mathrm{mH} \\ R = 1\,\mathrm{k\Omega} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{C = 5{,}6 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}}$$

◇

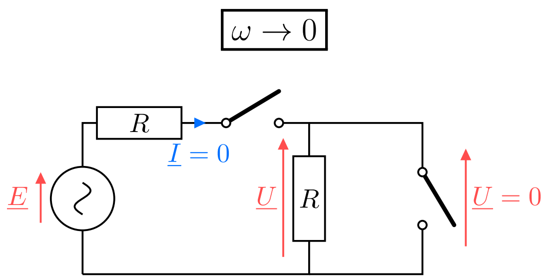
II Filtre de WIEN

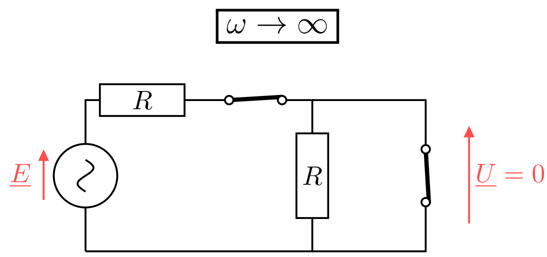
On considère le circuit ci-contre avec $e(t) = E_m \cos(\omega t)$. On note $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ et on pose $H_m = U_m/E_m$.



1) Déterminer les valeurs limites de $u(t)$ à basse et haute fréquences.

Réponse

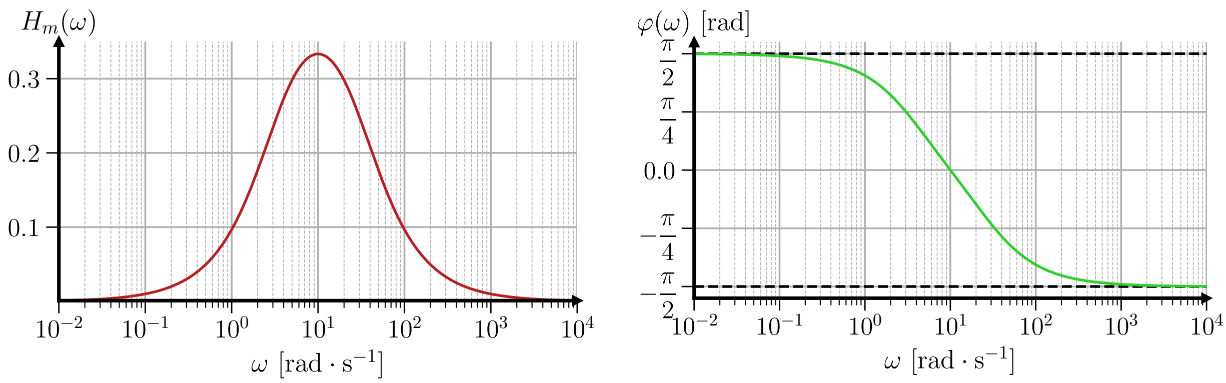




Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{u} = 0$. Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également $\underline{u} = 0$. Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passe-bande**.

◇

Les courbes représentatives de $H_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont fournies par les figures ci-dessous.



2) Observe-t-on un phénomène de résonance en tension ? Justifier.

Réponse

On observe bien une résonance en tension, étant donné qu'on trouve un **maximum de l'amplitude pour** $\omega \neq 0$ **et** $\omega \neq \infty$.

◇

3) Déterminer graphiquement la pulsation de résonance, les pulsations de coupure et la bande passante du filtre.

Réponse

On lit $\boxed{\omega_r = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$, et on trouve les pulsations de coupure en traçant une droite horizontale à $H_{m,\max}/\sqrt{2} = 0{,}23$ (avec $H_{m,\max} = 0{,}33$) et en prenant les abscisses des intersections. On trouve alors

$$\boxed{\omega_1 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta\omega = 18\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

En effet, l'axe des abscisses est en échelle logarithmique, il faut donc faire attention à la lecture.

◇

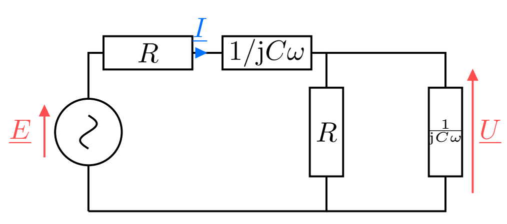
4) Après avoir associé certaines impédances entre elles, établir l'expression de $\underline{H} = \underline{u}/\underline{e}$. La mettre sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

avec H_0, ω_0 et Q des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de R et C.

Réponse

Notons $\underline{Z}_{R\parallel C}$ l'impédance et $\underline{Y}_{R\parallel C}$ l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :



$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{R\parallel C}}{\underline{Z}_{R\parallel C} + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)\,\underline{Y}_{R\parallel C}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}_{R\parallel C}} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}}$$

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \frac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

Ce qui est remarquable avec ce montage, c'est que **le facteur de qualité est de 1/3 peu importe les valeurs de R et C**, tant que ce sont les mêmes R et C en série et en dérivation.

◇

5) Déterminer graphiquement la valeur du produit RC.

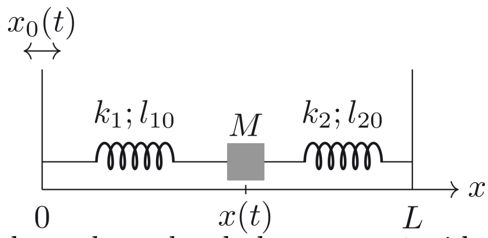
Réponse

Par cette étude, on trouve que $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{RC}$; ainsi, on a simplement

$$\boxed{RC = 0{,}10\,\mathrm{Hz}}$$

◇

☆☆ III Système à deux ressorts



Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sur une tige *horizontale* parallèle à l'axe Ox au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$ avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse de M dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ du laboratoire. Les frottements entre M et l'axe horizontal sont négligeables. On repère M par son abscisse $x(t)$.

M est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueurs à vide ℓ_{10} et ℓ_{20}. Celle de droite est immobile en $x = L$, celle de gauche, d'abscisse $x_0(t)$, est animée d'un mouvement d'équation horaire $x_0(t) = X_{0m}\cos(\omega t)$. On supposera que $L = \ell_{10} + \ell_{20}$.

1) Identifier les différentes forces s'exerçant sur M.

Réponse

- **Système** : masse ;
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;
- **Position de la masse** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$;
- **Longueur ressort 1** : $\ell_1(t) = x(t) - x_0(t)$;
- **Longueur ressort 2** : $\ell_2(t) = L - x(t)$.

Bilan des forces :

1) Poids $\vec{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\vec{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Rappel du ressort 1 $\vec{F}_1 = -k_1(\ell_1(t) - \ell_{10})\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Rappel du ressort 2 $\vec{F}_2 = k_2(\ell_2(t) - \ell_{20})\,\overrightarrow{u_x}$;
5) Force de frottement fluide $\vec{f} = -h\vec{v} = -h\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$.

◇

2) Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de M lorsque la paroi de gauche est immobile en $x_0 = 0$.

Réponse

Avec le PFD, on trouve

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 + \vec{f}$$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1(\ell_1(t) - \ell_{10}) + k_2(\ell_2(t) - \ell_{20}) - hv \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1(\ell_1(t) - \ell_{10}) + k_2(\ell_2(t) - \ell_{20})}$$

En développant les longueurs comme indiqué question 1, on a

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1(x(t) - x_0(t) - \ell_{10}) + k_2(L - x(t) - \ell_{20})}$$

À l'équilibre les dérivées de $x(t)$ sont nulles, d'où

$$0 = -k_1(x(t) - x_0(t) - \ell_{10}) + k_2(L - x(t) - \ell_{20})$$

Ainsi, avec $x_{0,\mathrm{eq}}(t) = 0$ et $L = \ell_{10} + \ell_{20}$ (d'après l'énoncé) puis $x(t) = x_{\mathrm{eq}}$ (par définition), on a

$$\begin{aligned} 0 &= -k_1(x_{\mathrm{eq}} - 0 - \ell_{10}) + k_2(\ell_{10} + \cancel{\ell_{20}} - x_{\mathrm{eq}} - \cancel{\ell_{20}}) \\ &\Leftrightarrow (k_1 + k_2)(\ell_{10} - x_{\mathrm{eq}}) = 0 \end{aligned}$$

Comme $k_1 + k_2 > 0$, on trouve

$$\boxed{x_{\mathrm{eq}} = \ell_{10}}$$

◇

3) On introduit $X(t) = x(t) - x_{\mathrm{eq}}$. Établir l'équation différentielle sur $X(t)$ lorsque la paroi bouge.

Réponse

Cette fois-ci, on garde $x_0(t)$ dans l'équation. Il vient alors

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + (k_1 + k_2)(x(t) - x_{\mathrm{eq}}) = k_1 x_0(t)$$

et en effectuant le changement de variable $X(t) = x(t) - x_{\mathrm{eq}}$, on trouve l'équation habituelle

$$\boxed{m\ddot{X} + h\dot{X} + kX(t) = KX_{0m}\cos(\omega t)}$$

avec $k = k_1 + k_2$.

◇

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes $\underline{x}_0(t) = X_{0m}\exp(\mathrm{j}\omega t)$, $\underline{X}(t) = X_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \varphi))$ et $\underline{v}(t) = V_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \phi))$ associées à $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t) = \dot{X}(t)$.

4) Définir les amplitudes complexes $\underline{X}_0$, $\underline{X}$ et $\underline{V}$ de $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t)$.

Réponse

On a simplement $\underline{X}_0 = X_{0m}$, $\underline{X} = X_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$ et $\underline{V} = V_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$.

◇

5) En exprimant ω_0, Q et α en fonction des données du problème, établir la relation :

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{X}_0$$

Réponse

En utilisant l'équation différentielle mais en complexes et sous forme canonique, on trouve

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X} + \mathrm{j}\omega\frac{h}{m}\underline{X} + \frac{k}{m}\underline{X} = \frac{k_1}{m}X_{0m} \Leftrightarrow \underline{X} = \frac{k_1X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}}$$

Étant donné que $V = \frac{\mathrm{d}X}{\mathrm{d}t}$, $\underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{X}$, soit

$$\begin{aligned}
\underline{V} &= \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{\mathrm{j}\omega}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + \mathrm{j}\omega\dfrac{h}{m}} \\
\Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{h}{m} - \mathrm{j}\dfrac{k}{m\omega} + \mathrm{j}\omega} \\
\Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1}{h - \mathrm{j}\dfrac{k}{\omega} + \mathrm{j}m\omega} X_{0m} \\
\Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1/h}{1 + \mathrm{j}\left(\dfrac{m\omega}{h} - \dfrac{k}{h\omega}\right)} \underline{X}_0
\end{aligned}$$

Avec $Q\omega_0 = \frac{k}{h}$ et $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{h}$, on trouve bien

$$\boxed{\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{X}_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha = \dfrac{k_1}{h} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ Q = \dfrac{\sqrt{km}}{h} \end{cases}}$$

---

6) Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

Réponse

L'amplitude réelle de la vitesse donne

$$V_m(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} X_{0m}$$

qui est maximale pour $\omega = \omega_0$. On observe donc bien une résonance en vitesse pour cette pulsation, avec $V_{\max} = \alpha X_{0m}$.
