

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Toute la mécanique, principalement moment cinétique, forces centrales et mécanique solide.

Sommaire

E1	Oscillations d'un métronome	2
E2	Satellite en orbite terrestre (D'après TSI 2010)	3
P1	Rotation d'un œuf dur (D'après TPC CCP 2018)	6
P2	Satellites de télécommunication (D'après Mines-Ponts MP 2007)	9

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite;
- ◇ N : numéro de copie manquant;
- ◇ P : prénom manquant;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée;
- ◇ C : copie grand carreaux;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante);
- ◇ H : homogénéité non respectée;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT}$$

avec

$$\begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

/20 E1 Oscillations d'un métronome

On étudie un métronome constitué :

- ◇ d'une tige rigide de longueur $L = 20$ cm de masse négligeable en rotation d'angle θ autour de l'axe Oz ;
- ◇ d'un disque homogène de centre C , tel que $OC = \ell = 2$ cm, de rayon $R = 1,5$ cm et de masse $M = 200$ g ;
- ◇ d'un curseur (dimensions négligeables) et de masse $m = 20$ g et pouvant être déplacé sur la tige selon le rythme souhaité. On appelle x la distance du curseur à O , cette distance ne pouvant dépasser 15 cm.

La tige est tenue en O par une liaison pivot supposée parfaite. On associe au bâti fixe le repère orthonormé $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Oz , orienté selon le vecteur \vec{u}_z :

$$J = mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2$$

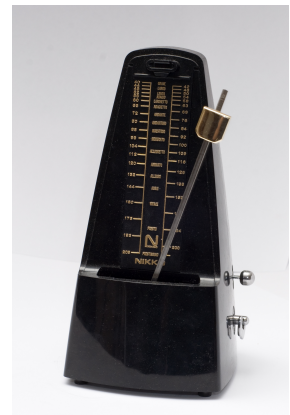
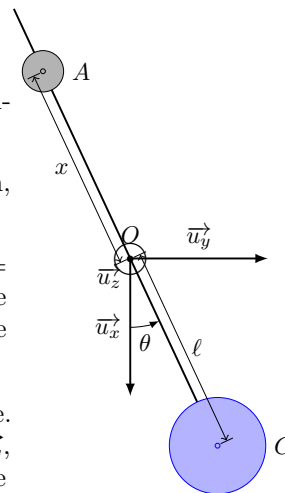


FIGURE 7.1 – Schéma du métronome à gauche et photo d'un métronome (d'après wikipedia). Sur la photo, le contrepooids (disque homogène) n'est pas visible, seuls la tige et le curseur le sont.

- /2 1 Commenter et justifier l'influence de x sur la valeur de J .

Réponse

Plus x augmente et plus J augmente ①, ce qui est normal puisque le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est répartie loin de l'axe. ①

- /8 2 Établir le système, faire un schéma puis le bilan des forces agissant sur le système et déterminer leurs moments par rapport à l'axe Oz par l'utilisation du **bras de levier**. Donnez l'expression du moment cinétique du système en fonction des données du problème.

Réponse

- ◇ **Système** : {métronome} = {disque+tige+curseur} de moment d'inertie J_z ;
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen ; ①
- ◇ **Repère** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$;
- ◇ **Repérage** : $\vec{OC} = \ell \vec{u}_r$ et $\vec{OA} = -x \vec{u}_r$. ①

Les actions qui s'exercent sur le métronome sont :

- ◇ poids du disque $\vec{P}_C = M\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_C) = -Mg\ell \sin \theta$; ①
- ◇ poids du curseur $\vec{P}_A = m\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_A) = +mgx \sin \theta$; ①
- ◇ liaison pivot parfaite dont le moment par rapport à l'axe Oz est nul. ①
- ◇ De plus, $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = J\dot{\theta}$. ①

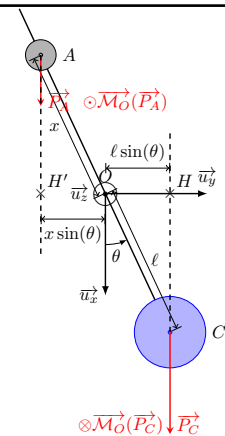


FIGURE 7.2 – Schéma ②

- /2 3 Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ .

Réponse

On applique la loi du moment cinétique dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{ext}}) \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = mgx \sin \theta - Mg\ell \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J} \sin \theta \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

- /4 4 Dans l'hypothèse des petites oscillations, donner l'équation différentielle puis l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de m, M, ℓ, R, x et g

Réponse

Si les oscillations sont petites, alors $\sin \theta \approx \theta$, donc on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \dot{\theta} = 0} \\ \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg\ell - mgx}{J}} \Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mg\ell - mgx}} \Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2}{Mg\ell - mgx}}}$$



- /2 5 Dans une partition musicale le rythme est donné en battements par minute, c'est à dire le nombre de demis aller-retour du métronome. On a ainsi le mouvement *andante* de 100 battements par minute. À quelle période du métronome correspondent ce mouvement ?

Réponse

Cela correspond à 50 périodes par minute ①, donc

$$T_0 = \frac{60 \text{ s} \cdot \text{min}^{-1}}{50 \text{ périodes} \cdot \text{min}^{-1}} = 1,2 \text{ s} \cdot \text{période}^{-1} \text{ ①}$$



- /2 6 Dans quel sens faut-il modifier x pour augmenter le nombre de battements par minute pour un mouvement *allegro* de 120 battements par minutes ?

Réponse

Pour augmenter la fréquence, il faut diminuer T_0 , ① donc diminuer son numérateur et augmenter son dénominateur, ce qui revient dans les 2 cas à diminuer x . ①



/47 E2 Satellite en orbite terrestre (D'après TSI 2010)

II/A Etude dynamique

On étudie le mouvement autour de la Terre d'un satellite S de masse m placé dans le champ gravitationnel terrestre. On néglige les frottements.

- /5 1 Définissez les référentiels terrestres et géocentrique. Dans quel référentiel faut-il se placer pour cette étude ?

Réponse

Le référentiel géocentrique est lié au repère dont le centre est le centre de masse ① de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes lointaines. ①

Un référentiel terrestre est lié au repère dont le centre est un point à la surface de la Terre ① et dont les axes sont solidaires à la Terre, donc en rotation par rapport à l'axe des pôles fixe ① dans le référentiel géocentrique.

On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. ①



- /4 2 Déterminer l'expression de la force \vec{F} à laquelle le satellite S est soumis. On exprimera \vec{F} en fonction de m , \mathcal{G} , M_T , r et d'un vecteur unitaire que l'on précisera.

Déterminer de même l'expression de la force \vec{F}' à laquelle la Terre est soumise de la part du satellite. Justifier.

Réponse

La force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r}$$

où \vec{e}_r est le vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre O vers le centre du satellite M . ①

D'après le principe des actions réciproques (troisième loi de NEWTON ①), on a :

$$\boxed{\vec{F}' = -\vec{F} = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r}$$



- /7 [3] Montrer que le mouvement est nécessairement plan. Sachant qu'à l'instant $t = 0$ le satellite se trouve au point M_0 et a une vitesse v_0 , préciser le plan dans lequel se fait le mouvement.

Réponse

On se place dans le référentiel géocentrique. La seule force exercée par le satellite est la force \vec{F} . ① Elle est centrale de centre O , ainsi, son moment par rapport à O est nul : $\vec{M}_O(\vec{F}) \stackrel{①}{=} \vec{OM} \wedge \vec{F} \stackrel{①}{=} \vec{0}$.

D'après le théorème du moment cinétique par rapport au point O , on a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{L}_O(M)}{dt} &\stackrel{①}{=} \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{L}_O(M) \stackrel{①}{=} \text{cte} = \mathcal{L}_0 \vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{OM}(t) \wedge m \vec{v}_M(t) &\stackrel{①}{=} \mathcal{L}_0 \vec{u}_z = \vec{OM}(0) \wedge m \vec{v}_M(0) \end{aligned}$$

avec \vec{u}_z la direction initiale du moment cinétique. Ainsi, le vecteur \vec{OM} reste constamment perpendiculaire à un vecteur constant, donc le mouvement est plan et le plan du mouvement passe par le centre de force O . En l'occurrence, le plan est $(O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$. ①



Dans la suite de cette partie, on se placera dans le cas d'une trajectoire circulaire de rayon r et d'altitude h autour de la Terre (avec $r = R_T + h$) et on utilisera les coordonnées cylindriques.

L'espace est rapporté à la base cylindrique $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$, un point quelconque de l'espace étant repéré par ses coordonnées (r, θ, z) .

Le plan dans lequel se fait le mouvement du satellite est le plan du repère cylindrique contenant l'origine O du repère (le point O étant le centre de la Terre) et les vecteurs $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta)$.

- /4 [4] Montrer que la norme v de la vitesse du satellite S est nécessairement constant au cours du mouvement et déterminer son expression en fonction de \mathcal{G} , M_T et r .

Réponse

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \quad \vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \quad ①$$

D'après le PFD appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on a :

$$m \vec{a} \stackrel{①}{=} \vec{F} \Rightarrow -mr\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + rm\ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

Sur $\vec{e}_\theta \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte} \quad \text{donc } \|\vec{v}\| = |r\dot{\theta}| \text{ uniforme } ①$

Sur $\vec{e}_r \Rightarrow mr\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \Rightarrow r \frac{v^2}{r^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}} \quad ①$



- /2 [5] Déterminer l'expression de la période T du mouvement de rotation de S autour de la Terre en fonction de v et r puis en fonction de \mathcal{G} , M_T et r . En déduire la troisième loi de KEPLER.

Réponse

On a

$$T \stackrel{①}{=} \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}} \quad ①$$

ce qui correspond à la traduction mathématique de la troisième loi énoncée par KEPLER.



- /3 [6] Indiquer une méthode pour déterminer la masse de la Terre. Donner alors un ordre de grandeur de la masse de la Terre à partir de vos connaissances astronomiques.

Réponse

On peut, à partir de la trajectoire d'un satellite naturel ou artificiel connaître r et T , on en déduit alors M_T en utilisant la 3ème loi de KEPLER ①. Mieux, on peut relever r et T pour différents satellites, et tracer T^2 en fonction de r^3 . On obtient alors une droite de pente $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$, ce qui permet d'en déduire M_T (en supposant \mathcal{G} connu!).

Pour le cas de la lune : $T = 28$ jours et $r = 384 \times 10^6$ m ①. On en déduit la masse de la Terre : $M_T = 6,10 \times 10^{24}$ kg. ①



- /3 [7] Un autre satellite S' de masse m' en orbite circulaire autour de la Terre a une trajectoire de rayon r égal au rayon de la trajectoire de S . Les deux satellites tournent dans le même plan. S et S' risquent-ils de se heurter au cours du mouvement ? On justifiera la réponse apportée.

Réponse

Si les deux satellites sont à la même distance de la terre, ils ont la même vitesse. ① Si de plus ils sont dans un même plan, alors ils ont des trajectoires identiques, ① parcourues à la même vitesse : ils ne peuvent pas se heurter (sauf si leurs vitesses sont opposées). ①

II/B Étude énergétique

La force à laquelle le satellite S est soumis dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p telle que \mathcal{E}_p peut s'écrire sous la forme $\mathcal{E}_p = -\frac{k}{r}$ avec k une constante positive. On prendra par convention une énergie potentielle nulle à l'infini.

On ne se limitera pas, dans cette partie, à un mouvement circulaire, mais on se placera dans le cas d'un mouvement quelconque du satellite S autour de la Terre.

On note C la constante des aires définie par $C = r^2\dot{\theta}$.

- /5 [8] Déterminer l'expression de k en fonction des données du problème en établissant l'expression de \mathcal{E}_p .

Réponse

$$\delta W \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} dr = -d \left(\frac{\mathcal{G}M_T m}{r} + C \right)$$

Ainsi, le travail élémentaire de la force \vec{F} peut se mettre sous la forme $-d\mathcal{E}_p$, donc elle est conservative et dérive de l'énergie $\mathcal{E}_p(r) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r} + C$. En choisissant $\mathcal{E}_p(+\infty) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$, on a $C = 0$, et on en déduit

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad \boxed{k \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{G}M_T m}$$

- /10 [9] Déterminer l'expression de l'énergie mécanique \mathcal{E}_m du satellite S en fonction de m , r , \dot{r} , $\dot{\theta}$ et k . En déduire l'expression de l'énergie potentielle effective du satellite en fonction de m , C , r et k .

Donner l'allure de la représentation graphique de l'énergie potentielle effective en fonction de r en justifiant les limites. Quelles sont les régions accessibles sur un diagramme en énergie potentielle ?

En exploitant cette courbe, indiquer en fonction de la valeur de l'énergie mécanique le type de trajectoire suivie par le satellite et préciser dans chaque cas s'il s'agit d'un état de diffusion ou d'un état lié.

Réponse

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} &\stackrel{\text{TEM}}{=} 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad \textcircled{1} \\ \text{Or} \quad \vec{OM} &= r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \Rightarrow v^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}} - \frac{k}{r} \end{aligned}$$

$$\text{or} \quad \boxed{\dot{\theta} = C/r^2} \quad \text{d'où}$$

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}}$$

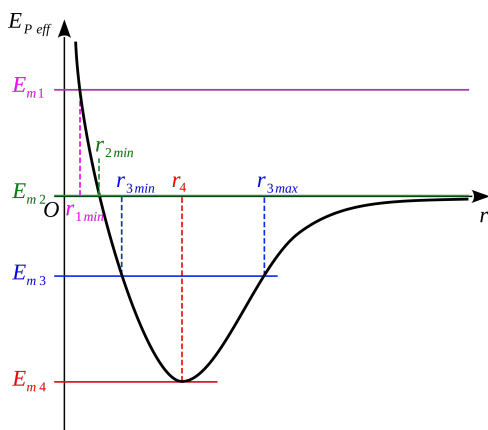


FIGURE 7.3 – Graphique de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ ②

$$\diamond \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}, \text{ et tend donc vers } \infty. \quad \textcircled{1}$$

$$\diamond \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{k}{r}, \text{ et tend donc vers } 0^- \text{ (donc par valeurs négatives)}. \quad \textcircled{1}$$

$$\diamond \text{ De plus, } \mathcal{E}_m = \text{cte} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) > \mathcal{E}_{p,\text{eff}}, \text{ donc les régions accessibles sont celles pour lesquelles } \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) < \mathcal{E}_m}. \quad \textcircled{1}$$

On en déduit donc : ②

- ◇ Si $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,4}$, aucun mouvement n'est possible
- ◇ Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,4}$, alors $r = r_4$ est constant : la trajectoire est circulaire (état lié)
- ◇ Si $\mathcal{E}_{m,4} < \mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,2} = 0$, r est compris entre 2 valeurs $r_{3,min}$ et $r_{3,max}$: mouvement elliptique (état lié)
- ◇ Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} = 0$, le satellite peut partir à l'infini mais sa vitesse à l'infini est nulle : le mouvement est parabolique (état de diffusion)
- ◇ Si $\mathcal{E}_m > 0$: le mouvement est hyperbolique (état de diffusion)



- /5 10 Déterminer l'énergie mécanique \mathcal{E}_m associée à une trajectoire circulaire de rayon r_c en fonction de r_c , m , \mathcal{G} et M_T . Définir puis déterminer la première vitesse cosmique v_1 par une rapide étude énergétique, fonction de R_T , \mathcal{G} et M_T .

Réponse

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}$$

$$\text{Or, } v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_c}} \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}} \quad \text{①}$$

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** autour de la Terre, à un rayon R_T : ①

$$\mathcal{E}_{m,sol} = \frac{1}{2}mv_c^2 - \mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,cercle} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2R_T} \quad \text{①}$$

$$\text{Or système conservatif après le lancer} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_c^2 - \mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2R_T}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T}}} \quad \text{①}$$



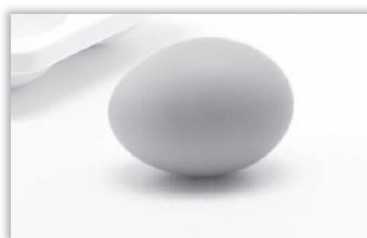
/32×1,5 P1 Rotation d'un œuf dur (D'après TPC CCP 2018)

Le document ci-dessous décrit un phénomène qu'on observe lorsqu'on met en rotation un œuf dur.

Document A Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un œuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'œuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.



a



b



c

Évolution d'un œuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c.

Source : Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014

On souhaite établir pour l'œuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la figure 7.4 ci-dessous :

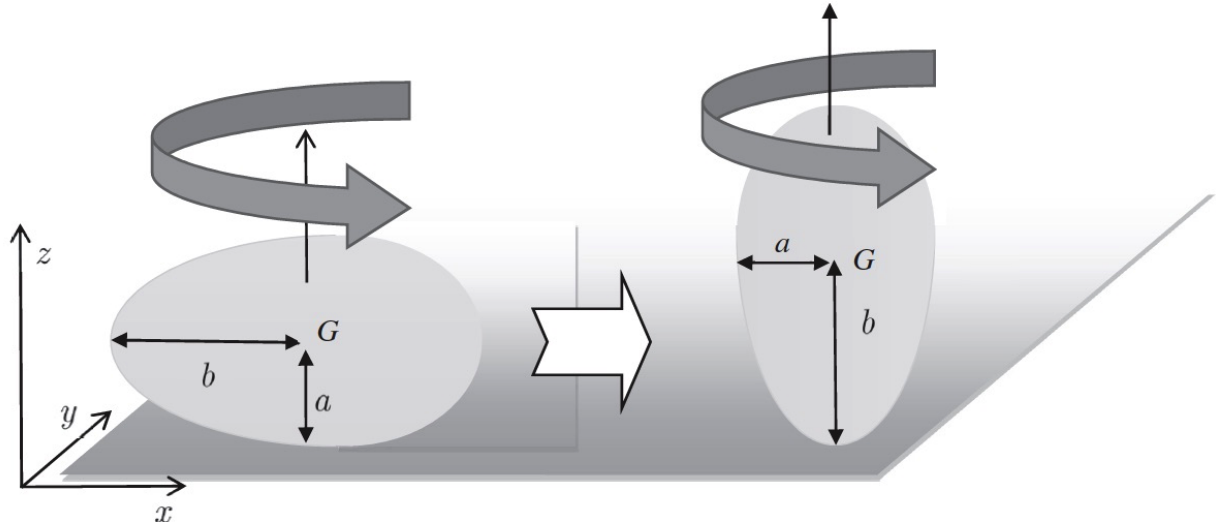


FIGURE 7.4 – Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'œuf. On modélise l'œuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m , de demi petit axe a et de demi grand axe b (avec $a < b$). Le centre de masse G est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'œuf). Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m par rapport à son axe de rotation Oz s'écrivent :

◇ $J_H = \frac{1}{5}m(a^2 + b^2)$ lorsque l'œuf tourne à l'horizontal,

◇ $J_V = \frac{2}{5}ma^2$ lorsque l'œuf tourne à la verticale.

On pose Ω la vitesse de rotation de l'œuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

- /2 [1] Comparer les deux moments d'inertie J_H et J_V et commenter physiquement.

Réponse

Comme $b > a$, on a $J_H > J_V$. ① En effet, la masse est globalement répartie plus loin de l'axe de rotation, ① donc le moment d'inertie est plus grand.



- /2 [2] Exprimer l'énergie mécanique totale de l'œuf dans les deux positions \mathcal{E}_{m_H} et \mathcal{E}_{m_V} en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.

Réponse

Dans les deux cas, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}J\Omega^2 + mgz_G$, ① on a donc

$$\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \quad \text{①} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m_V} = \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb$$



- /3 [3] Montrer qu'il existe une pulsation limite Ω_c telle que pour $\Omega > \Omega_c$, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale et assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de Ω_c en fonction de a , b , et g .

Réponse

On cherche la condition sur Ω pour avoir $\mathcal{E}_{m_V} < \mathcal{E}_{m_H}$, ce qui équivaut à :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb &< \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \Leftrightarrow 2mg(b-a) < (J_H - J_V)\Omega^2 \\ \Leftrightarrow 2mg(b-a) &< \frac{m}{5} \underbrace{(b^2 - a^2)}_{(a-b)(a+b)} \Omega^2 \Leftrightarrow \Omega > \Omega_c = \sqrt{\frac{10g}{a+b}} \end{aligned}$$



- /2 [4] Calculer Ω_c pour $a = 2,0$ cm $b = 3,0$ cm et $g = 10$ m.s⁻². Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du document.

Réponse

L'application numérique donne $\Omega_c = 45$ rad.s⁻¹ ①, soit environ 7 tour/s. Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'on nous parle dans le document d'une vitesse de rotation d'une dizaine de tours par seconde. ①



On suppose que le contact entre l'oeuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'oeuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'oeuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll \Omega_c$). L'oeuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale Ω_f que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\varepsilon$ (avec r un nombre sans dimension).

- /3 [5] Exprimer les énergies mécaniques initiale \mathcal{E}_{m_H} et finale \mathcal{E}_{m_V} au premier ordre en ε .

Réponse

À l'état initial, on a

$$\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2} J_H \Omega_0^2 + mga \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{10} (a^2 + b^2) (\Omega_c + \varepsilon)^2 + mga$$

soit au premier ordre en ε (DL1) :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{10} (a^2 + b^2) (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon) + mga} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} a^2 (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon r) + mgb}$$



- /7 [6] En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de r en fonction de a et de b . L'oeuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait r pour $a \approx b$? Commenter.

Réponse

$$\mathcal{E}_{m_H} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{E}_{m_V} \Rightarrow \frac{m}{5} a^2 (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon r) + mgb = \frac{m}{10} (a^2 + b^2) (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon) + mga \quad (1)$$

$$\text{Or, [3] } \Rightarrow \frac{m}{5} a^2 \Omega_c^2 + mgb \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{10} (a^2 + b^2) \Omega_c^2 + mga \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{10} (a^2 + b^2) 2\Omega_c \varepsilon \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} a^2 2\Omega_c r \varepsilon \quad (3) = (1) - (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = \frac{\textcircled{1} a^2 + b^2}{2a^2}}$$

$b > a$ donc $r > 1$ donc $\Omega_f > \Omega_0$. $\textcircled{1}$ Lors de son redressement, la vitesse de rotation de l'oeuf augmente.

Dans le cas où $a = b$, c'est-à-dire dans le cas d'un oeuf sphérique, on retrouve $r = 1$ $\textcircled{1}$ puisque le système reste inchangé (dans ce cas, on ne peut même plus parler de redressement), donc sa vitesse de rotation ne varie pas. $\textcircled{1}$



- /4 [7] Exprimer les moments cinétiques \mathcal{L}_H et \mathcal{L}_V de l'oeuf par rapport à l'axe Oz avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_H$ en fonction de Ω_c , m , a et b . L'oeuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?

Réponse

$$\boxed{\mathcal{L}_H = J_H \Omega_0 = \frac{m}{5} (a^2 + b^2) (\Omega_c + \varepsilon)} \quad \stackrel{\textcircled{1}}{\text{et}} \quad \boxed{\mathcal{L}_V = J_V \Omega_f = \frac{2m}{5} a^2 (\Omega_c + r\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{L} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} (a^2 - b^2) \Omega_c + \frac{m}{5} (2a^2 r - a^2 - b^2) \varepsilon$$

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2a^2} \Rightarrow \boxed{\Delta\mathcal{L} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} (a^2 - b^2) \Omega_c < 0}$$

Le moment cinétique de l'oeuf a diminué lors de son redressement. $\textcircled{1}$



- /5 [8] Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'oeuf a subi un couple $\vec{\Gamma}$. Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe Oz peut s'écrire :

$$\Gamma_z \approx \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}$$

Commenter son signe.

Réponse

D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \Gamma_z$. $\textcircled{1}$ En supposant que le redressement est de courte durée, on peut approcher $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$ par $\frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta t}$, on a donc

$$\Gamma_z = \frac{m}{5} (a^2 - b^2 - 2) \frac{\Omega_c}{\Delta t} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} (a^2 - b^2 - 2) \frac{\Omega_c^2}{\Omega_c \Delta t}$$

On injecte l'expression de Ω_c obtenue à la question [3] :

$$\Gamma_z = \frac{m}{5}(a^2 - b^2) \frac{10g}{(a+b)\Omega_c \Delta t} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}$$

Ce couple est négatif, $\textcircled{1}$ ce qui est cohérent avec le fait que le moment cinétique de l'oeuf ait diminué pendant le redressement. $\textcircled{1}$



- /4 [9] Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple ? Si non, d'où peut provenir ce couple ? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?

Réponse

Le poids et la réaction normale ne peuvent $\textcircled{1}$ pas être responsable d'un tel couple car ces deux forces sont parallèles à l'axe de rotation, donc leur moment par rapport à cet axe est nul $\textcircled{1}$. Ce couple peut éventuellement provenir des frottements, $\textcircled{1}$ car on nous dit dans le document qu'il faut que la surface ne soit « pas trop lisse ». Cependant, cela contredit l'hypothèse de l'énergie mécanique constante. $\textcircled{1}$



/64 P2 Satellites de télécommunication (D'après Mines-Ponts MP 2007)

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de masse M_T , de rayon R_T et de centre O , immobile dans l'espace, sans rotation propre.

On donne les valeurs numériques suivantes :

\mathcal{G}	R_T	M_T
$6,67 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ kg}^{-1} \text{ s}^{-2}$	6370 km	$5,97 \times 10^{24} \text{ kg}$

Sur la Figure 7.5, N est le pôle Nord et S le pôle Sud. Satellite P , point Q et ligne des horizons AB . Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est $N'S'$).

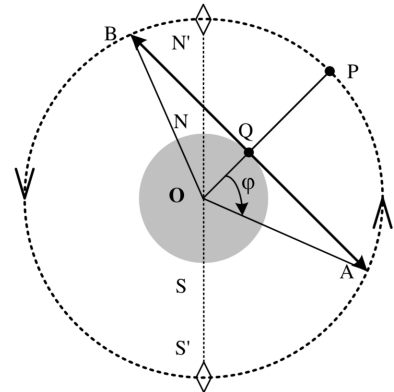


FIGURE 7.5 – Schema question [3]

II/A Couverture d'un réseau de satellite

- /9 [1] Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O , à une altitude $h = 800 \text{ km}$. Établir la relation entre la période de révolution T et h . Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ et h puis effectuer les applications numériques pour T et v .

Réponse

Dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen $\textcircled{1}$ on ne prend en compte que la force de gravitation exercée par la Terre $\vec{F} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{k}{r^2} \vec{e}_r$ avec $k = \mathcal{G}M_T M_S$. On a de plus $r = R_T + h$. On peut ainsi appliquer le PFD $m\vec{a} = \vec{F}$ au satellite dans le repère cylindrique $O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z$: $\textcircled{1}$

$$\begin{aligned} -M_S r \dot{\theta}^2 &= -\frac{k}{r^2} \textcircled{1} \\ M_S r \ddot{\theta} &= 0 \textcircled{1} \end{aligned}$$

De la deuxième équation, on obtient $\dot{\theta} = \text{cte} \Rightarrow v = r\dot{\theta} = \text{cte}$. $\textcircled{1}$ On peut ainsi ré-exprimer l'accélération radiale $a_r = -v^2/r$ d'où :

$$M_S \frac{v^2}{r} = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow v \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}$$

De plus, on sait que $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \frac{T^2}{(R_T + h)^3} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{4\pi^2}{GM_T}$. On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler. Les A.N.s donnent $T = 6,05 \times 10^3 \text{ s}$ et $v = 7,45 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$. $\textcircled{1}$



- /2 [2] Soient \mathcal{E}_c et \mathcal{E}_p l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre. Donner sans démonstration l'expression de \mathcal{E}_p puis établir le « théorème du viriel » : $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = 0$.

Réponse

L'énergie potentielle a pour expression $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r}$. On a $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = M_S v^2 - \frac{GM_T M_S}{r} = M_S \left(\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T}{r} \right) = 0$ d'où le résultat.



- /5 [3] À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire.

Pour une observatrice située en Q , la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Figure 7.5) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de φ et T puis montrer que

$$\tau = 2 \arccos \frac{R_T}{R_T + h} f(h)$$

et donner l'expression de $f(h)$.

Réaliser l'application numérique toujours pour $h = 800$ km.

Réponse

Il convient pour cela d'établir l'expression de l'angle φ tel que $\cos(\varphi) = R_T/(R_T + h)$. La vitesse du satellite étant uniforme, on en déduit $\tau = \frac{2\varphi}{2\pi} T$ soit au final :

$$\tau = 2 \arccos \frac{R_T}{R_T + h} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}} = f(h)$$

L'application numérique donne $\tau = 9,2 \times 10^2$ s.



- /3 [4] Calculer T/τ . Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre comme sur la figure 7.5) un ensemble de satellites identiques, appelé « train de satellites ».

Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

Réponse

On a simplement $\frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{2\varphi} = \frac{\pi}{\arccos \frac{R_T}{R_T + h}} \approx 6,6$. Le satellite est ainsi visible pendant 1/6,6 ième de son trajet. Il faudra donc 7 satellites pour garantir la couverture permanente au sol (arrondi au supérieur).



- /3 [5] Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est à dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

Réponse

D'après la question précédente, il faudrait aussi 7 « trains de satellites » pour couvrir toutes les longitudes. Cependant, un train de satellite couvre « deux côtés » et donc $\lceil 7/2 \rceil = 4$ trains suffisent. On aboutit ainsi à un total de $7 \times 4 = 28$ satellites.



- /7 [6] La prise en compte de la rotation de la Terre modifie le résultat de la question précédente. Dans cette question, on s'interroge sur la pertinence d'utiliser plutôt un satellite géostationnaire. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question [4] ?

Réponse

Sur l'orbite géostationnaire, la période de révolution du satellite est celle de la terre $T_T \approx 86 \times 10^3$ s. On peut utiliser la 3ième loi de KEPLER :

$$\frac{T_T^2}{(R_T + h_g)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{soit} \quad h_g = \left(\frac{GM_T T_T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T \approx 35\,700 \text{ km}$$

La notion de « visibilité » est à prendre avec prudence : pour un point du globe, le satellite est alors soit visible et la durée de visibilité est infinie, soit invisible. ① Il ne faut pas utiliser la formule de la question ④ pour la durée de visibilité car on y faisait l'hypothèse d'une Terre immobile (le schéma permettant le calcul de φ est incorrect dans ce cas!!).

Pour une zone donnée de la Terre, il suffit de disposer d'un seul ① satellite au lieu d'une bonne quarantaine. Mais il est beaucoup plus éloigné, ce qui pose des problèmes de perte de transmission. ①

Il faut aussi remarquer que les Pôles et les régions qui les entourent ne voient pas les satellites géostationnaires. ①



II/B Influence des frottements aérodynamiques

- /5 ⑦ La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement \vec{F}_a créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{F}_a = -\alpha M_S v \vec{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α puis appliquer ensuite le théorème de la puissance mécanique en supposant que le théorème du Viriel établi à la question ② reste valable en présence de \vec{F}_a . En déduire finalement que :

$$\frac{dh}{dt} = -2\alpha \sqrt{GM_T} \sqrt{R_T + h} \quad (7.1)$$

Réponse

On a $\dim F = \text{M.L.T}^{-2} \Leftrightarrow \dim(\alpha) \cdot \text{M.L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$. On en déduit par identification que $\dim \alpha = \text{L}^{-1}$. ①

Le TPM appliqué au satellite donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{P}(\vec{F}_a) \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\alpha M_S v^3 = \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$$

De plus, $v^2 = 2\mathcal{E}_c/M_S \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\mathcal{E}_p/M_S = GM_T/(R_T + h)$. On en déduit en combinant ces résultats que :

$$-\alpha M_S \frac{GM_T}{R_T + h} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \dot{h} \frac{GM_S M_T}{2(R_T + h)^2} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2\alpha \sqrt{GM_T} \sqrt{R_T + h}$$



- /8 ⑧ Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte de l'équation (7.1) (obtenue par intégration de cette équation). Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

Réponse

Entre le début et la fin de la révolution, $R_T + h$ n'a quasiment pas varié et on peut supposer ce terme constant (on note alors h_0 l'altitude initiale du satellite) :

$$\begin{aligned} \Delta h \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2\alpha \underbrace{\Delta t}_{=T} \sqrt{GM_T} \sqrt{R_T + h_0} &\Rightarrow \alpha = -\frac{\Delta h}{2T \sqrt{GM_T} \sqrt{R_T + h_0}} \\ \Leftrightarrow \alpha \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\Delta h}{4\pi(R_T + h_0)^2} &\approx 1,53 \times 10^{-15} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

En dix années, on a effectué $n = \frac{\Delta T}{T} = 10 \frac{T_T}{T} \approx 52000$ orbites donc au premier ordre (en supposant Δh identique à chaque période), on a $\Delta h \approx -52 \text{ km}$. ①

Une résolution exacte de l'équation (à l'aide de la méthode de séparation des variables ①) :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{\sqrt{R_T + h}} &= -2\alpha \sqrt{GM_T} dt \Leftrightarrow 2(\sqrt{R_T + h_1} - \sqrt{R_T + h_0}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2\alpha \sqrt{GM_T} \Delta T \\ \Rightarrow \Delta h = h_1 - h_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=}} &\left(\sqrt{R_T + h_0} - \alpha \sqrt{GM_T} \Delta T \right)^2 - R_T - h_0 \approx -51,3 \text{ km} \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Ce résultat est très proche de celui obtenu à l'aide de l'approximation. Il peut sembler surprenant qu'une force qui s'oppose au mouvement se concrétise par une augmentation de vitesse : le freinage d'une voiture (force aérodynamique par exemple) réduit sa vitesse. Mais c'est sans compter sur l'énergie potentielle : à une orbite plus basse correspond une vitesse plus élevée. ①



- /7 9 En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \frac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question 8 (perdant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800$ km) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β .

Réponse

L'énoncé nous donne que $\Delta h_{\text{haut}} = \frac{1}{2} \Delta h_{\text{bas}}$. ① De plus, on observe que $\frac{dh}{dt} \propto \alpha(h)$, ① car les autres facteurs varient peu (question 7). On en déduit ainsi que :

$$\frac{\frac{dh}{dt}(h = h_{\text{haut}})}{\frac{dh}{dt}(h = h_{\text{bas}})} \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} \frac{\frac{\Delta h_{\text{haut}}}{T_T}}{\frac{\Delta h_{\text{bas}}}{T_T}} \Leftrightarrow \left(\frac{h_{\text{bas}}}{h_{\text{haut}}} \right)^\beta = \frac{1/T_T}{2/T_T} \Leftrightarrow \boxed{\beta = \frac{\log(T_T'/(2T_T))}{\log(h_{\text{bas}}/h_{\text{haut}})}} \quad \textcircled{1}$$

avec T_T' la période de révolution à 400 km d'altitude telle que, d'après 6, $T_T'/T = \frac{R_T + h_{\text{bas}}}{R_T + h_{\text{haut}}}^{3/2} \approx 0,917$. ① On en déduit au final $\beta \approx 1,13$ ① puis $\gamma = h_{\text{haut}}^\beta \times \alpha(h_{\text{haut}}) \approx 7,2 \times 10^{-9}$ SI. ① En pratique, la valeur de γ est très sensible aux différents arrondis réalisés pour obtenir β , et seul son ordre de grandeur à du sens.



II/C

Stabilisation de l'orientation d'un satellite par gradient de gravité

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVIIème, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \frac{1}{2} M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur 2ℓ .

Le centre de masse S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire uniforme de rayon $r_0 = R_T + h$ avec $\ell \ll r_0$. Le référentiel géocentrique (R) lié au repère $(Oxyz)$ est supposé galiléen.

On appelle θ l'angle de $\overrightarrow{M_1 M_2}$ avec l'axe Ox' de (R') . On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements dans toute cette partie.

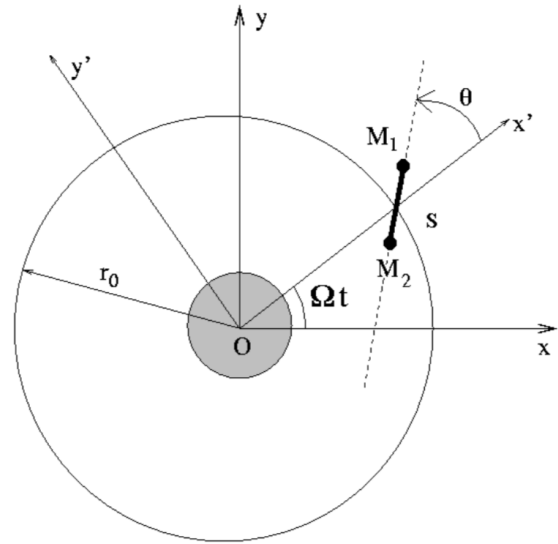


FIGURE 7.6 – Le satellite composé des points M_1 et M_2 reliés par une tige de longueur 2ℓ .

- /2 10 Exprimer les distances $r_1 = \|\overrightarrow{OM_1}\|$ et $r_2 = \|\overrightarrow{OM_2}\|$ en fonction de r_0 , ℓ et θ

Réponse

On a $\overrightarrow{OM_1} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \overrightarrow{OS} + \overrightarrow{SM_1} \Leftrightarrow r_1 = \sqrt{r_0^2 + \ell^2 + 2r_0\ell \cos(\theta)}$. De même, on trouve $r_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{r_0^2 + \ell^2 - 2r_0\ell \cos(\theta)}$



On rappelle le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x)$$

De plus, on admet que l'énergie cinétique \mathcal{E}_c du satellite s'exprime selon $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} M_S \ell^2 \dot{\theta}^2$

- /5 11 Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit, en procédant aux approximations qui s'imposent ($\ell \ll r_0$) :

$$\mathcal{E}_m \approx -\frac{GM_T M_S}{r_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{r_0^2} (3 \cos^2(\theta) - 1) \right) + \frac{1}{2} M_S \ell^2 \dot{\theta}^2$$

Réponse

On commence par s'intéresser aux termes d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,i} = -k/r_i$ avec $k = GM_T m$. On obtient ainsi en posant $\varepsilon = \ell/r_0$:

$$\mathcal{E}_{p,12} = -\frac{k}{r_{12}} = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2 + \ell^2 \pm 2r_0\ell \cos(\theta)}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{k}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \pm 2\varepsilon \cos(\theta)}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,12} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{k}{r_0} \left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon \cos(\theta)) + \frac{3}{8}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon \cos(\theta))^2 \right) + o(\varepsilon^2)$$

On peut maintenant ajouter les deux termes d'énergies potentielles (avec encore un terme quadratique à développer puis simplifier à droite du terme d'énergie potentielle) :

$$\mathcal{E}_{p,1} + \mathcal{E}_{p,2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{k}{r_0} (2 - \varepsilon^2 + 3\varepsilon^2 \cos^2(\theta)) + o(\varepsilon^2)$$

On combine ensuite ce terme avec l'expression de l'énergie cinétique donnée dans l'énoncé :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Leftrightarrow \mathcal{E}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{GM_T M_S}{r_0} \left(1 + \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{r_0^2} (3 \cos^2(\theta) - 1) \right) + \frac{1}{2} M_S (\ell \dot{\theta})^2$$

car $m = M_S/2$, d'où le résultat !



/8 12 En déduire l'équation du mouvement. Indiquer, par un raisonnement sur cette équation différentielle, les positions d'équilibre et préciser, pour celle(s) qui sont stable(s), la pulsation des petites oscillations autour de ces dernières. Conclure.

Réponse

On applique le TPM dans le référentiel géocentrique au satellite qui n'est soumis à aucune force non conservative :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 &\Leftrightarrow -\frac{GM_T}{r_0} \frac{\ell^2}{r_0} 3 \cos(\theta) (-\sin(\theta)) \dot{\theta} + \ell^2 \ddot{\theta} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3GM_T}{2r_0^3} \sin(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + 3\Omega^2 \frac{\sin(2\theta)}{2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \end{aligned}$$

On est à l'équilibre lorsque $\ddot{\theta} = 0$ soit ici pour $\theta = p\frac{\pi}{2}$, $p \in \mathbb{N}$. ①

- ①◆ Pour $\theta = 0 + x$ avec $x \ll 1$, on a comme équation du mouvement $\ddot{x} + 3\Omega^2 x = 0$ qui est l'équation de l'oscillateur harmonique donc la position d'équilibre est stable et la pulsation des petites oscillations vaut $\omega_0 = \Omega\sqrt{3}$
- ①◆ Pour $\theta = \pi/2 + x$, on a maintenant $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$. Cette position d'équilibre n'est pas stable.
- ①◆ Pour $\theta = \pi + x$, on a $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on retrouve la même équation que pour la première position d'équilibre. Cette position d'équilibre est donc aussi stable et de pulsation ω_0
- ①◆ Pour $\theta = 3\pi/2 + x$, on obtient au final $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$: équilibre instable.

Ainsi, seules les positions verticale (à l'endroit ou à l'envers) sont stables. ① En cas de léger décalage, le satellite va donc osciller autour de la position d'équilibre verticale et donc toujours présenter le même côté vers la Terre. ①

