

# Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

## Au programme



### Savoirs

- ◇ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
- ◇ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.



### Savoir-faire

- ◇ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.
- ◇ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.



## Sommaire

<b>I Introduction</b>	<b>2</b>
A Rappels oscillateurs	2
B Méthode des complexes	2
C Notion de résonance et bande passante	3
<b>II Exemple d'oscillateur : circuit RLC série en RSF</b>	<b>3</b>
A Présentation	3
B Étude de l'intensité	4
C Étude de la tension	7
<b>III Exemple d'un oscillateur mécanique en RSF</b>	<b>10</b>
A Présentation	10
B Étude de l'élongation	10
C Résonance en vitesse	11
<b>IV Synthèse</b>	<b>12</b>

# I Introduction

## A Rappels oscillateurs

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, les oscillateurs amortis caractérisés par une grandeur physique  $x$  sont régis par une équation du type :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Dans le cadre d'un signal d'entrée sinusoïdal  $f(t) = A_0 \cos(\omega t)$  avec une pulsation  $\omega$  (i.e. une fréquence  $\omega/2\pi$ ), cette équation devient

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 A_0 \cos(\omega t)$$

avec  $A_0$  l'amplitude du forçage.

De la même manière qu'avec une excitation constante ( $f(t) = E$  en échelon montant), la solution de cette équation différentielle sera la somme d'une solution homogène, caractéristique d'un régime transitoire, et d'une solution particulière. On a vu que celle-ci prendrait la même forme que le signal d'entrée, et sera donc également sinusoïdale. On a donc

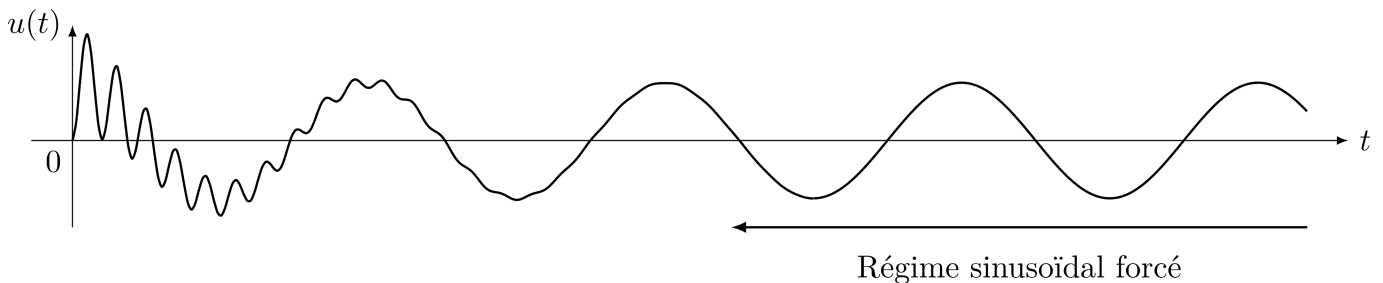
$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

$x_H(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

et

$x_P(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$

On rappelle que le régime sinusoïdal forcé correspond au régime où la solution homogène est négligeable devant la solution particulière. On aura donc des solutions de la forme suivante



et le but de l'étude de ces systèmes en RSF est de trouver l'amplitude  $X$  et la phase  $\varphi$ .

## B Méthode des complexes

Comme dans le chapitre précédent, le passage aux complexes permet d'exprimer simplement les valeurs de  $X$  et de  $\varphi$ . Pour passer en complexes, on note

Ainsi, dériver en complexes revient à **multiplier par  $j\omega$**  : à partir de l'équation différentielle d'un oscillateur, on aura alors, selon les exemples, une amplitude de la forme

### Attention

Cette forme de résonance n'est qu'un **exemple**. Elle dépend du système.

On trouve donc l'amplitude du signal en en prenant le module :

### C Notion de résonance et bande passante

Par l'étude de l'amplitude, on retrouve bien que  $X$  ne dépend pas des conditions initiales, mais bien de l'amplitude d'entrée mais surtout **dépend de la pulsation**. Notamment, on trouve que

et

Ainsi, il y a une valeur particulière de pulsation telle que l'amplitude est maximale : c'est ce qu'on appelle la résonance.

#### Résonance

La représentation de l'amplitude en fonction de la pulsation est donc piquée autour de son maximum  $X_{\max}$  à la pulsation de résonance  $\omega_r$ . Ce pic peut être plus ou moins fin, ce que l'on caractérise par la **bande passante**

#### Bande passante

C'est le domaine de pulsations du forçage pour lequel

- ◇
- ◇
- ◇

**FIGURE 6.1** – Bande passante et pic de résonance.

## II Exemple d'oscillateur : circuit RLC série en RSF

### A Présentation

On étudie l'oscillateur amorti RLC série, dont le circuit en réel et en complexes est le suivant :

**FIGURE 6.2** – RLC série en RSF.

**Rappel**

Pour un signal d'entrée  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$  les différentes tensions et intensités dans le circuit oscilleront **à la même pulsation**  $\omega$ , et seront de la forme  $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$  et  $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$  où  $U, I$  et  $\varphi_{u,i}$  sont quatre constantes dépendant du système et de l'excitation  $\omega$ .

**B Étude de l'intensité**

Situation initiale

Pour étudier le comportement de l'intensité, on va comme d'habitude se ramener à une seule maille avec une impédance équivalente

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

**FIGURE 6.3****II.B.1 Équation**

Développement

Avec l'impédance équivalente  $\underline{Z}_{\text{eq}}$ , on a

Méthode de calcul

Ici on a factorisé par  $R$  pour avoir un numérateur homogène à une intensité, et un dénominateur adimensionné. On aimerait aller plus loin, et transformer les  $\frac{L}{R}$  et  $RC$  en expressions semblables à  $\omega$ , en les reliant à  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ . Pour cela, on se rappelle la forme canonique de l'équation différentielle sur  $i(t)$  du RLC :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

avec  $\omega_0$  la **pulsation propre** et  $Q$  le **facteur de qualité**, tels que

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Ainsi,

Résultat

On peut donc réécrire la fraction initiale :

### II.B.2 Amplitude

Résultat

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module, et comme en introduction cette amplitude dépend de la pulsation du système :

Méthode

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire

### Conclusion

On trouve alors

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas de condition pour avoir résonance en intensité**, et que **la pulsation de résonance est la pulsation propre du système**.

### II.B.3 Phase

Résultat

Pour finir l'étude du système, il nous faut déterminer la phase en prenant l'argument de  $\underline{I}$ , en se souvenant que l'argument d'un rapport est la différence des arguments :

puisque  $\cos \varphi_i > 0$  (la partie réelle est positive).

## Conclusion

### II.B.4 Facteur de qualité et bande passante

Définition

Nous avons déterminé l'amplitude et la phase du signal, ainsi que la pulsation de résonance. Pour finir de caractériser la résonance, il ne reste qu'à déterminer la bande passante. On cherche donc les pulsations de coupure telles que  $I(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$ .

Implication

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

Calculs

$$\begin{array}{lcl}
 & & \text{et} \\
 \Leftrightarrow & & \text{et} \\
 & \Leftrightarrow & \text{et} \\
 \Leftrightarrow & & \text{et} \\
 & \Rightarrow & \\
 \Rightarrow & & \text{et} \\
 \Leftrightarrow & & \text{et}
 \end{array}
 \quad
 \begin{array}{l}
 \text{On développe} \\
 \text{Trinôme} \\
 \text{Discriminant} \\
 \text{Solutions} \\
 \text{Factorisation}
 \end{array}$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec  $-1 - \sqrt{1 + 4Q^2}$  est évidemment négative, et celle avec  $1 - \sqrt{1 + 4Q^2}$  également. Ainsi, il ne nous reste que

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

ce qui est également une **nouvelle définition de  $Q$**  ! En effet, cette égalité traduit le fait qu'à haut facteur de qualité, la bande passante est très faible, ou que **l'acuité de la résonance est élevée**.

FIGURE 6.4 – Amplitude et phase en fonction de  $Q$  pour  $\underline{I}$  en RLC série.

## C Étude de la tension

On repart du circuit en complexes, avec  $\underline{u}_C(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$  et  $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$ , et on applique le pont diviseur de tension.

### II.C.1 Amplitude complexe

FIGURE 6.5 – RLC série : étude de  $\underline{u}_C$ .

Ici encore, on a factorisé par  $1/jC\omega$  pour avoir un numérateur homogène à une tension et un dénominateur adimensionné d'abord. Ensuite puis pour aller plus loin, on transforme les  $LC$  et  $RC$  en expressions semblables à  $\omega$ , en les reliant à  $\omega_0$ . On a comme précédemment

## II.C.2 Amplitude réelle et condition de résonance

Résultat

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module, et comme en introduction cette amplitude dépend de la pulsation du système :

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est **non nul** et minimal, c'est-à-dire

Soit  $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$ , et  $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$ , la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

Méthode

ce qui n'est défini **que si**  $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$ . On calcule alors  $f(X_r)$  en injectant la solution :

### Conclusion

On trouve alors :

$$Q \leq 1/\sqrt{2} :$$





$$Q > 1/\sqrt{2} :$$

$$Q > 5 :$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en tension**, et que **la résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

II.C.3 Phase

Ici aussi, on détermine la phase en prenant l'argument de l'amplitude complexe :

Résultat

Conclusion

FIGURE 6.6 – Amplitude et phase en fonction de  $Q$  pour  $\underline{U}_C$  en RLC série.

### III Exemple d'un oscillateur mécanique en RSF

#### A Présentation

**Système** : point matériel  $M$  de masse  $m$  relié à un ressort horizontal **idéal**.

**Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O, x, y, t)$  ;

Soit  $x = \ell - \ell_0$  la position de la masse

**Bilan des forces** :

- 1)
- 2)
- 3)
- 4)
- 5)

FIGURE 6.7 – Schéma du ressort en RSF.

#### B Étude de l'élongation

##### III.B.1 Équation

Avec le PFD :

En passant en complexes,

Situation initiale

Calculs

Résultat

### III.B.2 Amplitude réelle et condition de résonance

Résultat

On trouve

Elle est maximale quand le dénominateur est minimal. Après calcul, on retrouve les résultats de l'excitation en tension :

#### Conclusion

On trouve alors :

$$Q \leq 1/\sqrt{2} :$$

$$Q > 1/\sqrt{2} :$$

$$Q > 5 :$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en élongation**, et que **la résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

Vous trouverez ici <sup>1</sup> une animation interactive d'un système similaire avec un ressort vertical.

### C Résonance en vitesse

#### III.C.1 Équation



Calculs

On définit

1. [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort\\_rsf.php?typanim=Javascript](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Javascript)

Résultat

Ainsi,

Conclusion

On trouve alors

et

De ce résultat, nous observons qu'il n'y a pas de condition pour avoir résonance en intensité, et que la pulsation de résonance est la pulsation propre du système.

IV Synthèse

Synthèse résonances

Grandeur	Intensité/vitesse	Tension/élongation
Existence		
Pulsation de résonance		
Largeur de résonance		
Aspects à $\omega_r$		
Aspects à $\omega_0$		
Courbes d'amplitude		
Courbes de phase		