

Fibre optique – corrigé

Dans tout cet exercice, on notera $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$ la célérité de la lumière dans le vide.

I Généralités

- Énoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière en les accompagnant d'un schéma.

Réponse :

Pour la réflexion, avec les notations de la figure suivante :

- Le rayon réfléchi appartient au plan d'incidence ($I; R_i, N_I$).
- Si les angles sont orientés, alors on a $r = -i$

Pour la réfraction, toujours avec les notations de la figure suivante :

- Le rayon réfracté appartient au plan d'incidence ($I; R_i, N_I$).
- Les angles orientés de réfraction et d'incidence vérifient $n \sin i = n' \sin i'$

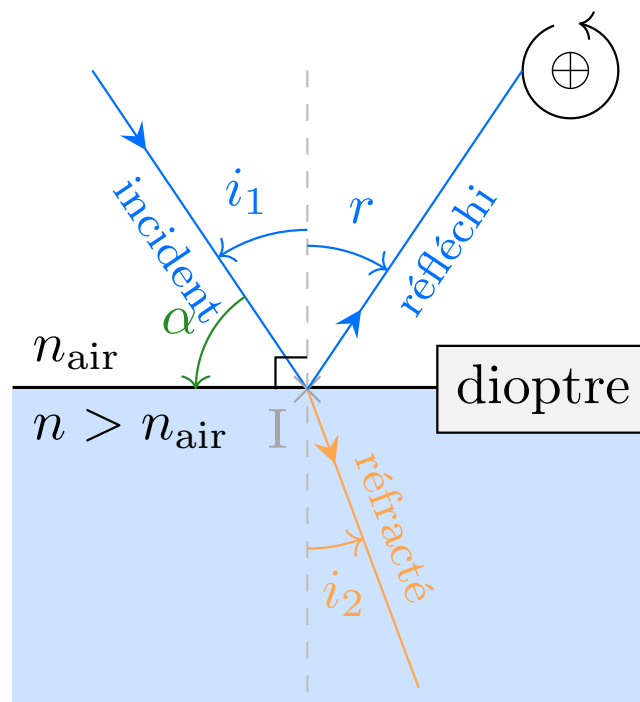


Figure 1.1 – Schéma illustratif des lois de Snell-Descartes

- Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose d'un disque métallique gradué en degrés, d'un laser et d'un demi-cylindre de plexiglas dont la face plane est confondue avec un diamètre du disque métallique. La lumière du laser arrive sur la face courbe du demi-cylindre de plexiglas suivant un de ses rayons comme indiqué sur la figure ci-dessous. Le demi-cylindre peut pivoter sur le disque métallique autour de l'axe (Oz), O étant le centre du disque.

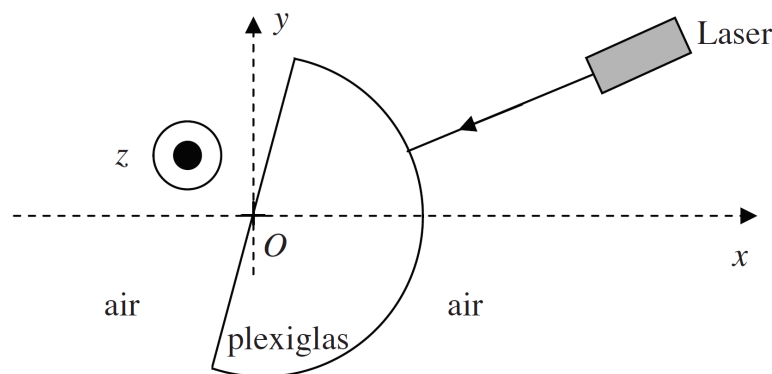
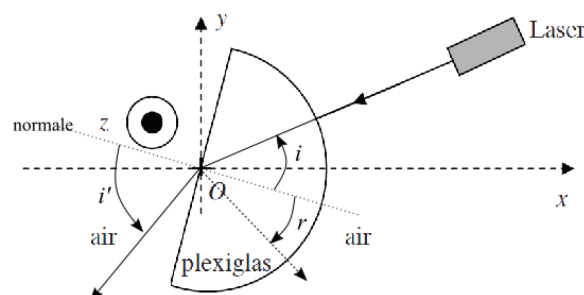


Figure 1.2 – Expérience avec un demi-cylindre en plexiglas

Reproduire la figure et tracer les rayons réfractés et réfléchis issus du laser. Quelle(s) loi(s) peut-on vérifier avec cette expérience ? Quel phénomène pourra être mis en évidence à l'occasion de cette expérience ? Pourquoi utiliser un laser comme source lumineuse ?

Réponse :

Le laser n'est pas dévié lorsqu'il traverse le dioptre sphérique car s'il suit le rayon du cercle, il arrive localement sous incidence normale sur ce dioptre. Sur le dioptre plan, une faible partie du faisceau (quelques %) est réfléchi, ce qui permet de vérifier la **loi sur l'angle de réflexion**. La majorité du faisceau traverse le dioptre plan en étant dévié, ce qui permet de vérifier la **loi sur l'angle de réfraction et/ou de déterminer l'indice optique du plexiglas**.



La **coplanéarité des rayons** peut éventuellement être vérifiée également en choisissant un faisceau laser rasant le support, on constatera alors que les faisceaux réfléchi et réfracté sont aussi rasants.

L'air étant moins réfringent que le plexiglas, le faisceau sortira en s'éloignant de la normale. Si on augmente progressivement l'angle d'incidence, on pourra également mettre en évidence le **phénomène de réflexion totale** car l'air est moins réfringent que le plexiglas.

De plus, on utilise un **laser** pour avoir un faisceau parallèle, donc **un seul angle d'incidence** (si l'on néglige, à cette échelle petite devant la longueur de RAYLEIGH, la divergence du faisceau). Enfin, le laser est **monochromatique**, ce qui évite les problèmes de dispersion (avec de la lumière blanche, on observerait un faisceau de sortie en "arc en ciel" car l'indice du plexiglas dépend de la longueur d'onde, donc l'angle de réfraction également).

II La fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice, représentée figure 1.3, est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice $n_c = 1,500$ et de rayon r_c , entouré d'une gaine transparente d'indice $n_g = 1,485$. L'axe Ox de la fibre est normal au dioptre air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe Ox , on se restreint à une étude dans le plan (Oxy) .

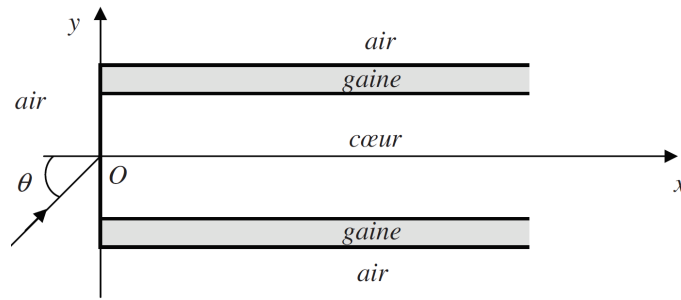


Figure 1.3 – Fibre optique à saut d'indice

On rappelle les résultats de trigonométrie suivants :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in [-1; 1], \quad \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

3. Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air, situé dans le plan (Oxy) , pénètre dans le cœur de la fibre en O avec un angle d'incidence θ . Justifier que le rayon reste dans le cœur si l'angle θ est inférieur à un angle limite θ_L , appelé angle d'acceptance de la fibre optique. Montrer que θ_L peut se mettre sous la forme :

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}\right)$$

Calculer la valeur de θ_L . On considérera que l'indice de l'air vaut $n_a = 1,000$.

Réponse :

Pour que le faisceau reste dans la fibre, il faut qu'il y ait une réflexion totale au niveau du dioptré cœur/gaine. Il faut donc que l'angle α dépasse l'angle limite $\alpha_L = \arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)$.

Or $\alpha + \theta' + \frac{\pi}{2} = \pi$ donc $\alpha = \frac{\pi}{2} - \theta'$. On en déduit :

$$\alpha > \alpha_L \quad \Rightarrow \quad \theta' < \frac{\pi}{2} - \alpha_L$$

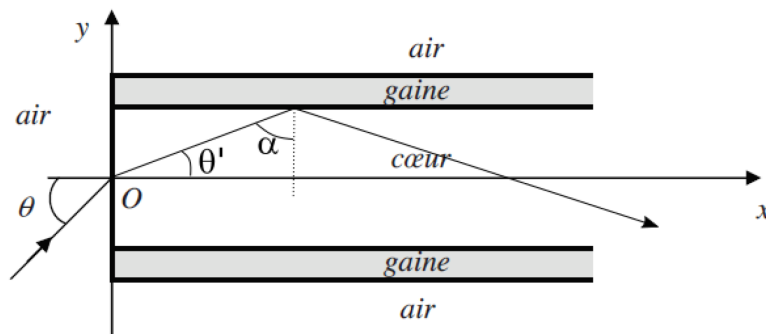


Figure 1.4 – Trajet du rayon lumineux dans la fibre optique

On passe au sinus et on applique la loi de SNELL-DESCARTES à l'entrée de la fibre, ce qui donne :

$$n_a \sin \theta < n_c \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L\right)$$

Soit

$$\theta < \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a} \sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha_L\right)\right) = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a} \cos\left(\arcsin\left(\frac{n_g}{n_c}\right)\right)\right) = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}\right)$$

On a donc $\theta < \theta_L = \arcsin \left(\frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2} \right)$ avec $\theta_L = 12,2^\circ$.

On considère maintenant une fibre optique de longueur L . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_L .

4. Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer, en fonction de L , c et n_c , la durée du parcours T_1 de ce rayon.

Réponse :

Le chemin le plus court est le chemin direct, en ligne droite, pour $\theta = 0$, donc $T_1 = \frac{n_c L}{c}$

5. Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer, en fonction de L , c , n_g et n_c , la durée du parcours T_2 de ce rayon.

Réponse :

Le chemin le plus long est celui pour $\theta = \theta_L$. Dans ce cas, la distance parcourue, avec toutes les réflexions, est

$$D = \frac{L}{\sin \alpha_\ell} = \frac{n_c}{n_g} L \quad \text{donc} \quad T_2 = \frac{n_c^2 L}{n_g c}$$

Notons qu'on a bien $T_2 > T_1$ car $n_c > n_g$.

6. En déduire l'expression de l'intervalle de temps $\delta T = T_2 - T_1$ en fonction de L , c , n_g et n_c .

Réponse :

On a $\delta T = T_2 - T_1$, soit $\delta T = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{n_c}{n_g} - 1 \right)$.

À l'aide de développements limités, on peut démontrer que :

$$\text{si } \alpha \ll 1, \text{ alors } \begin{cases} \sqrt{1 - 2\alpha} \simeq 1 - \alpha \\ \frac{1}{1 - \alpha} \simeq 1 + \alpha \end{cases}$$

On admettra ces deux relations sans chercher à les démontrer. On pose également $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2$ et on admet que $\Delta \ll 1$.

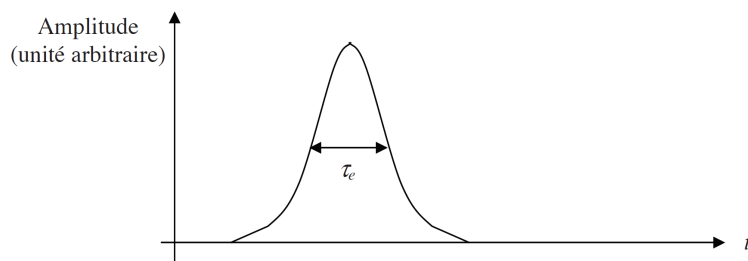
7. À l'aide des relations précédentes, exprimer δT en fonction de L , c , n_c et Δ uniquement. Calculer la valeur de δT pour $L = 10$ km.

Réponse :

D'après l'énoncé, on a : $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_g}{n_c} \right)^2 \Rightarrow \frac{n_g}{n_c} = \sqrt{1 - 2\Delta} \approx 1 - \Delta$ donc :

$$\delta T \approx \frac{n_c L}{c} \left(\frac{1}{1 - \Delta} - 1 \right) \approx \frac{n_c L}{c} \Delta \quad \text{soit} \quad \delta T = 5 \times 10^{-7} \text{ s}$$

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée τ_e , appelée *un bit* et représentée ci-dessous, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_L .



On admet ici, en négligeant tout phénomène d'absorption de la lumière par la fibre, que l'allure de l'impulsion en sortie de fibre est identique à l'impulsion d'entrée, mais avec une amplitude plus faible (par conservation de l'énergie lumineuse du *bit*) et une durée $\tau_s = \tau_e + \delta T$.

8. Recopier la figure et tracer l'allure de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre optique.

Réponse :

L'allure de l'impulsion lumineuse en sortie est donnée sur la figure ci dessous.

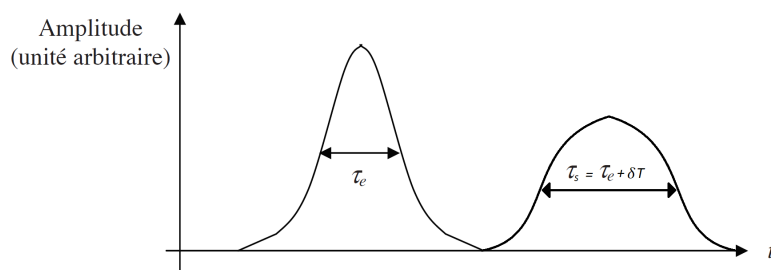


Figure 1.5 – Impulsion lumineuse en entrée et en sortie de fibre optique

9. Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (les *bits*) périodiquement avec une fréquence f . En supposant τ_e négligeable devant δT , quelle est la fréquence maximale de transmission f_{max} qui empêche le recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre ?

Réponse :

Pour que les impulsions ne se mélangent pas, il faut une période supérieure à τ_s , donc $f < \frac{1}{\tau_s}$. Comme

$\delta T \gg \tau_e$, on a $\tau_s \simeq \delta T$ donc $f < f_{max} = \frac{1}{\delta T}$.

10. En considérant L_{max} la longueur maximale de fibre optique qui permet d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions, on définit le produit $B_0 = L_{max} \times f$ comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer B_0 en fonction de c , n_c et Δ . Expliquer l'intérêt d'introduire cette grandeur.

Réponse :

Si $f < f_{max} = \frac{1}{\delta T} = \frac{c}{\Delta n_c L_{max}}$, on a $B_0 = f \cdot L_{max} = \frac{c}{\Delta n_c}$.

Cette grandeur ne dépend que des caractéristiques physiques propres à la fibre (indices optiques) mais pas de ses conditions d'utilisation (longueur utilisée, fréquence, etc).

11. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l'on peut utiliser pour transmettre le signal.

Réponse :

$L_{max} = 201$ m. C'est bien trop court pour des communications longue distance (liaison téléphonique, Internet...). Ce genre est uniquement utilisé pour des usages internes. En communication, on préfère des fibres à gradient d'indice (cf suite).

12. Si la fibre peut être courbée sans grand inconvénient mécanique, cette courbure peut néanmoins conduire à une perte de l'énergie guidée. Expliquer la raison de cette perte dans une fibre optique à saut d'indice en raisonnant avec des rayons entrant perpendiculairement à la section d'entrée de la fibre.

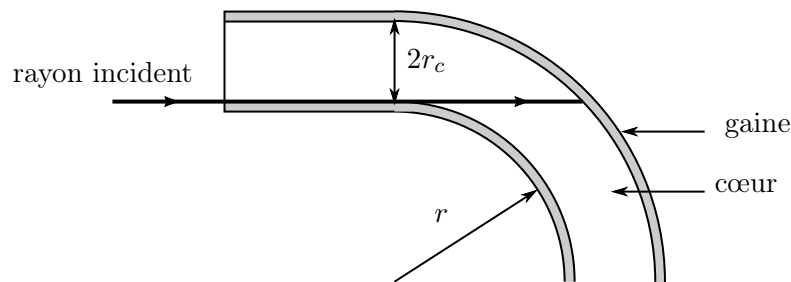
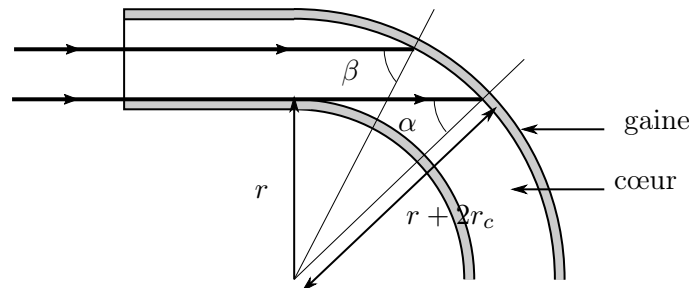


Figure 1.6 – Perte de courbure dans la fibre optique à saut d'indice

Réponse :

L'angle d'incidence au niveau du dioptré cœur/gaine diminue si on considère un rayon entrant en étant plus proche du bord inférieur ($\alpha < \beta$). Ainsi la condition de réflexion totale peut n'être vérifiée que pour une partie des rayons entrant. Comme seuls les rayons subissant des réflexions totales ressortent de la fibre, on en déduit que l'intensité en sortie diminue.



13. En considérant un rayon pénétrant dans la fibre, perpendiculairement à sa section, à la limite du bord inférieur, donner en fonction de n_c , n_g et r_c , l'expression du rayon de courbure r à partir duquel la perte énergétique apparaîtra. On négligera l'épaisseur de la gaine devant le rayon r_c du cœur de la fibre. Calculer ce rayon r en considérant que $r_c = 5,0 \times 10^{-1}$ mm, $n_c = 1,500$ et $n_g = 1,485$. Conclure.

Réponse :

Il faut donc que l'angle α dépasse l'angle limite de réflexion totale. Or sur le schéma, on remarque que $\sin \alpha = \frac{r}{r + 2r_c}$ où r est le rayon de courbure et $r_c = 5,0 \times 10^{-1}$ mm est le rayon de la fibre.

Le rayon de courbure doit donc vérifier :

$$\frac{r}{r + 2r_c} > \frac{n_g}{n_c} \quad \text{soit} \quad r > \frac{2r_c n_g}{n_c - n_g}$$

AN : $r_{\min} = 10 \text{ cm}$.

Ceci laisse une relative marge de manœuvre, mais peut-être gênant pour une installation domestique (raccordement à une Box sans espace suffisant, passage dans un angle...)

III La fibre optique à gradient d'indice

Pour remédier à l'élargissement des impulsions, on a fabriqué des fibres dites à gradient d'indice dans lesquelles on a remplacé le cœur par un milieu inhomogène d'indice $n(y)$ vérifiant la relation

$$n^2(y) = n_c^2 \times \left[1 - 2\Delta \left(\frac{y}{r_c} \right)^2 \right] \quad \text{pour} \quad |y| \leq r_c,$$

où y désigne la distance algébrique du point considéré à l'axe Ox et r_c le rayon du coeur de la fibre. La gaine reste homogène d'indice n_g et on a encore $n(y=0) = n_c = 1,500$. Le rayon entre dans la fibre en O avec un angle d'incidence θ compris entre 0 et θ_L . Dans ces conditions, la trajectoire du rayon lumineux est celle indiquée en figure 1.7.

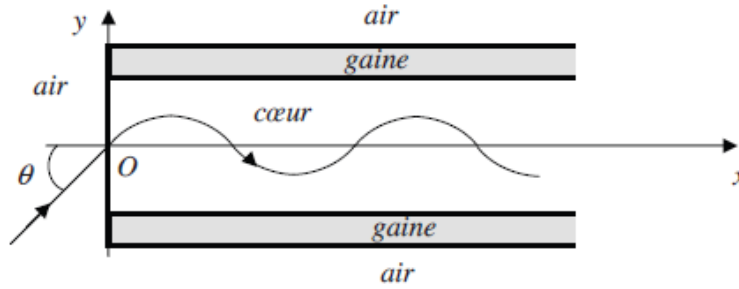
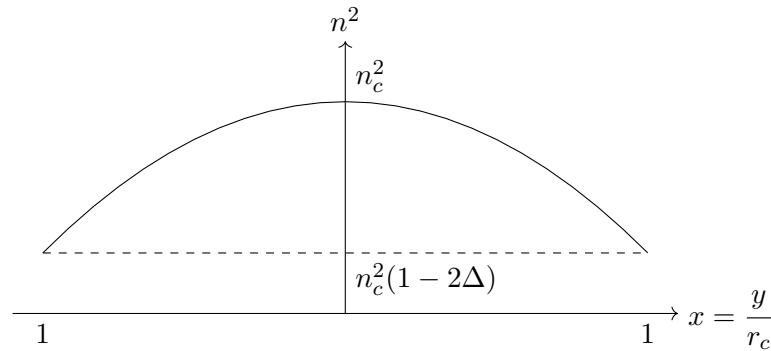


Figure 1.7 – Fibre à gradient d'indice

14. Tracer l'évolution de n^2 en fonction de $X = \frac{y}{r_c}$ pour $X \in [-1,1]$.

Réponse :

On trace une parabole. On constate que lorsque le rayon s'écarte de l'axe Ox , l'indice optique diminue, donc l'angle de réfraction augmente. Ainsi il existe une valeur de y telle que le rayon soit totalement réfléchi.



15. Soit un point M du rayon lumineux repéré par ses coordonnées (x, y) . On introduit φ , l'angle formé en M entre la tangente au rayon lumineux et l'axe Ox comme indiqué en figure 1.8. En considérant le cœur comme un milieu stratifié formé de milieux d'indices $n_0, n_1, \dots, n_j, \dots$ limités par des dioptries plans parallèles, d'équation $y = \text{cste}$, quelles relations lient les indices n_{j-1} , n_j , et n_{j+1} aux angles d'incidence i_{j-1} , i_j , i_{j+1} ?

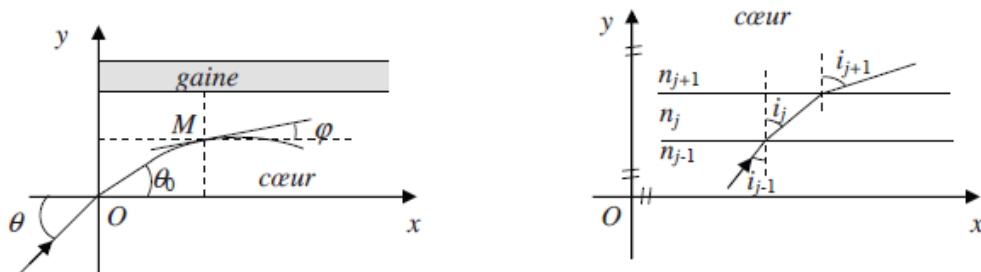


Figure 1.8 – Trajectoire du rayon lumineux dans une fibre à gradient d'indice

Réponse :

On applique la loi de Snell-Descartes à chaque dioptrie :

$$n_{j-1} \sin i_{j-1} = n_j \sin i_j = n_{j+1} \sin i_{j+1}.$$

On en déduit que la grandeur $n \sin i$ reste constante.

16. En considérant que cette propriété est valable pour une fibre à gradient d'indice, que peut-on dire de la quantité $n(y) \cos \varphi$? Exprimez-la en fonction de n_c et $\theta_0 = \arcsin \left(\frac{n_a \sin \theta}{n_c} \right)$.

Réponse :

Si on passe au modèle continu, on obtient (en remarquant que φ est l'angle par rapport au dioptré et non à la normale, donc $\sin i = \cos \varphi$) :

$$n(y) \cos \varphi = \text{cste} = n_c \cos \theta_0$$

17. Relier, $\frac{dy}{dx}$, la pente de la tangente du rayon lumineux en M , à l'angle φ . Montrer alors que :

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cos \theta_0} \right)^2 - 1.$$

Réponse :

Graphiquement, $\tan \varphi = \frac{dy}{dx}$ donc

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = (\tan \varphi)^2 = \left(\frac{\sin \varphi}{\cos \varphi} \right)^2 = \frac{1 - \cos^2 \varphi}{\cos^2 \varphi}$$

En utilisant la relation démontrée précédemment, on trouve bien

$$\left(\frac{dy}{dx} \right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cos \theta_0} \right)^2 - 1.$$

18. En dérivant l'équation précédente et en utilisant l'expression de $n^2(y)$, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2\Delta}{(r_c \cos \theta_0)^2}.$$

L'ensemble des solutions à cette équation s'écrit

$$y(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) \quad \text{avec} \quad (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminer les constantes A_1 et A_2 en exploitant les conditions aux limites $y(x=0)$ et $y'(x=0)$.

Réponse :

D'après les conditions aux limites, $y(x=0) = 0$ et $y'(x=0) = \tan \theta_0$, donc

$$A_1 = 0 \quad \text{et} \quad A_2 k = \tan \theta_0$$

Donc $y(x) = \frac{\tan \theta_0}{k} \sin(kx)$.

19. Montrer que le rayon lumineux coupe l'axe Ox en des points régulièrement espacés d'une distance d que l'on exprimera en fonction de r_c , Δ et θ_0 .

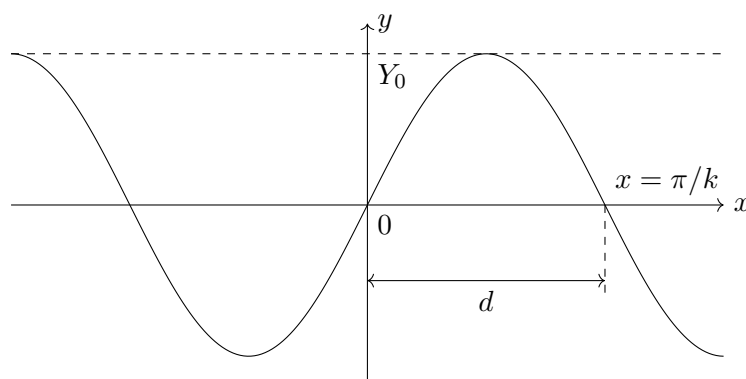
Réponse :

$y(x)$ est une fonction sinusoïdale de période spatiale λ telle que $k = \frac{2\pi}{\lambda}$. La distance d entre deux points successifs d'annulation de y est

$$d = \frac{\lambda}{2} = \frac{\pi}{k} \quad \text{soit} \quad d = \frac{\pi r_c \cos \theta_0}{\sqrt{2\Delta}}$$

20. Tracer l'allure du rayon dans la fibre optique en plaçant la distance d ainsi que l'amplitude Y_0 des oscillations. À quelle condition le rayon peut-il ressortir de la fibre ? On suppose toujours que $\theta \leq \theta_L$.

Réponse :



Le rayon peut ressortir si l'amplitude $Y_0 = \frac{\tan \theta_0}{k}$ est inférieure à r_c .

21. On appelle ouverture numérique, O.N., la quantité $\sin \theta_L$ où θ_L est l'angle limite défini à la question 3. Existe-t-il une différence d'O.N. entre une fibre optique à saut d'indice et une fibre optique à gradient d'indice ?

Réponse :

L'ouverture numérique ne dépend que de l'indice optique au point d'entrée, donc elle est la même pour les 2 fibres.

22. On considère une impulsion lumineuse identique à celle de la question 8. Cette impulsion, en sortie d'une fibre optique à gradient d'indice de longueur L , possède un élargissement temporel,

$$\delta T' = \frac{n_c L}{c} \left(\frac{1}{2 \cos \theta_0} - 1 + \frac{\cos \theta_0}{2} \right).$$

Évaluer cette durée pour $L = 10$ km et l'angle θ_0 maximum. Commenter. Interpréter physiquement pourquoi l'élargissement temporel est plus petit dans une fibre à gradient d'indice.

Réponse :

Pour l'AN, il faut la valeur de θ_0 , que l'on trouve à partir de θ_L et de la loi de Snell-Descartes : $\theta_0 = 8^\circ$.

On trouve alors $\delta T' = 2$ ns. On a donc $\delta T' \ll \delta T$, ce qui est un avantage technologique (on pourra employer une fréquence plus élevée, donc un débit d'information supérieur). Ceci peut s'expliquer car les rayons qui entrent en biais, et qui prenaient beaucoup de retard dans la fibre classique, sont cette fois "redressés" par le gradient d'indice.