Sujet 1

I Mesurer la masse d'un astronaute sur l'ISS

Les astronautes passant plusieurs mois dans la station spatiale internationale (ISS) doivent se soumettre à des bilans de santé très réguliers, et en particulier vérifier qu'ils ne perdent ni ne prennent de poids. Néanmoins, l'absence de gravité rend les balances terrestres inopérantes dans l'espace. Pour permettre des pesées malgré cela, un dispositif original a été développé par l'agence spatiale russe, dont une photographie est présentée ci-contre.
Il s'agit d'une chaise de masse $m_0 = 25{,}0\,\mathrm{kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe de la station. On note L_0 la longueur à vide du ressort et k sa constante de raideur. La position de la chaise est repérée par son point d'attache au ressort, le long d'un axe (Ox) dont l'origine est définie telle que le point d'attache de la chaise se trouve en $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.
On cherche dans un premier temps à mesurer la constante de raideur k du ressort. Pour cela, la chaise **vide** est mise en mouvement et on mesure la période $T_0 = 1{,}28\,\mathrm{s}$ de ses oscillations.

1. Faire un schéma de la balance inertielle incluant l'axe (Ox) et la position $x = 0$.
2. Effectuer un bilan des forces qui s'exercent sur la balance et les placer sur le schéma précédent.
3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la chaise.
4. Comment appelle-t-on cette équation différentielle ?
5. Donner la forme générale des solutions de cette équation différentielle (on ne cherchera pas à déterminer les constantes).
6. En déduire que la constante de raideur k s'exprime en fonction de la période T_0 et de la masse m_0 par
$$k = 4\pi^2 \frac{m_0}{T_0^2}.$$
7. Calculer sa valeur numérique. On donne $\left(\frac{\pi}{1{,}28}\right)^2 \approx 6{,}023573$, laissant à l'étudiant le soin de choisir le bon nombre de chiffres significatifs.

On s'intéresse maintenant à la pesée proprement dite d'un astronaute dont on veut déterminer la masse m_{ast}. Celui-ci s'assoit sur la chaise et la met en mouvement. Les oscillations ont alors pour période $T_{\mathrm{ast}} = 2{,}56\mathrm{s}$.

8. Donner, sans calcul, l'équation différentielle vérifiée par la position du point d'attache de la chaise lorsqu'un astronaute est assis.
9. En déduire que la masse de l'astronaute vaut :
$$m_{\mathrm{ast}} = m_0 \left[\left(\frac{T_{\mathrm{ast}}}{T_0} \right)^2 - 1 \right].$$
10. Calculer sa valeur numérique.

Sujet 2

I Énergie de l'oscillateur harmonique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2} m \omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

On suppose qu'il n'y a aucun phénomène dissipatif : l'énergie mécanique est donc constante.

Formules trigonométriques. $\cos^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 + \cos(2\alpha))$ et $\sin^2 \alpha = \frac{1}{2}(1 - \cos(2\alpha))$

1. En utilisant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

2. On suppose que $x(t) = A \cos(\omega_0 t + \varphi)$. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de m, ω_0, A et $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$. Vérifier que l'énergie mécanique est bien constante.

3. Tracer sur un même graphe les courbes donnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction du temps. Quelle est la fréquence de variation de ces énergies ?

Sujet 3

I Vibration d'une molécule

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8{,}5 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. On donne les masse atomiques molaires : $M_{\mathrm{H}} = 1{,}0\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ et $M_{\mathrm{Cl}} = 35{,}5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$, ainsi que le nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.
On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un "ressort" de raideur k.

Données numériques. $(1{,}7\pi)^2/6{,}02 \approx 4{,}738065$, $\sqrt{\frac{6{,}63\times6{,}02\times10}{34\pi^2}} \approx 1{,}09060$ et $2\pi \times 8{,}5 \times 1{,}09 \approx 58{,}2136997$.

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.

2. Exprimer puis calculer k.

On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$ est la constante de Planck.

3. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.

4. Calculer sa vitesse maximale.

Sujet 4

I Longueurs à l'équilibre ($\star$)

On considère un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 auquel est attaché une masse m.

1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver une longueur caractéristique (autre que l_0).

2. En utilisant un argument physique, donner la valeur de la longueur à l'équilibre l_{eq} du ressort dans les 3 cas suivants :

   (a) le ressort est horizontal,

   (b) le ressort est vertical avec la masse accrochée en dessous du ressort,

   (c) le ressort est vertical avec la masse accrochée sur le ressort.

II Approche énergétique ($\star\star\star$)

On écarte un oscillateur mécanique de sa position d'équilibre ($m = 100\,\mathrm{g}$; $k = 10\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}$) en lui communiquant une énergie initiale $E_m = 2{,}0\,\mathrm{J}$. On suppose qu'aucune force dissipative ne s'exerce sur le système.

1. En déduire l'amplitude de l'élongation (longueur du ressort à l'instant t).

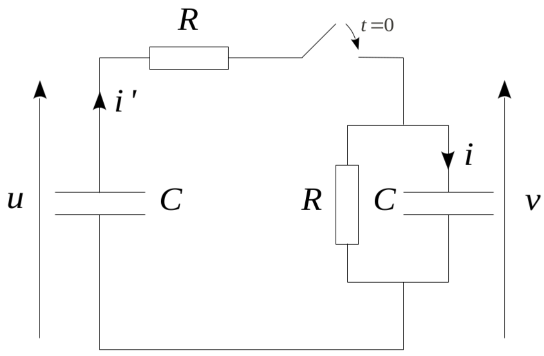
2. Écrivez les équations horaires possibles de l'élongation si la vitesse initiale est nulle.

Sujet 5

I Circuit de Wien

On réalise le montage suivant. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, C traversé par i' étant initialement chargé et C traversé par i étant initialement déchargé.

On pose $\tau = RC$. Données : $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}$.



1. À partir de considérations physiques, préciser les valeurs de la tension v lorsque $t = 0$ et $t = \infty$.
2. Établir l'équation différentielle du second ordre dont la tension v est solution.
3. En déduire l'expression de $v(t)$ sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.
4. Donner l'allure du graphe correspondant à $v(t)$.