Contrôle de connaissances 4

Électrocinétique : premier ordre

/2.5 **1** Représenter et flécher R_1 et R_2 en parallèle et le schéma équivalent avec R_{eq}. Démontrer son expression.

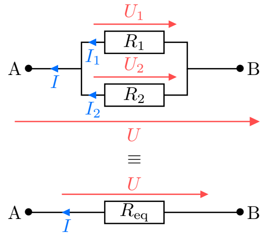

Fig. 4.1 – R parallèle +

$$I = I_1 + I_2 = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) U$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

$\blacksquare$

/2.5 **2** Représenter un pont diviseur de tension avec 2 résistances et démontrer la relation associée pour des résistances R_k.

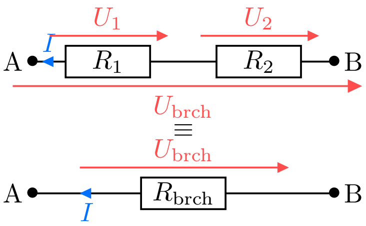

Fig. 4.2 – PdT +

On part de ce qui est partagé dans le circuit, ici l'intensité :

$$I = \frac{U_{\text{brch}}}{R_{\text{brch}}} \quad \text{et} \quad I = \frac{U_k}{R_k} \quad \text{soit} \quad \boxed{U_k = \frac{R_k}{R_{\text{brch}}} U_{\text{brch}}}$$

$\blacksquare$

/15 **3** On suppose le circuit RC série suivant, en échelon de tension montant. On suppose le condensateur initialement déchargé, et on ferme l'interupteur à $t = 0$. Déterminer l'équation différentielle sous forme canonique de u_C pour $t \geq 0$, donner la condition initiale et comment la déterminer, et résoudre l'équation différentielle.

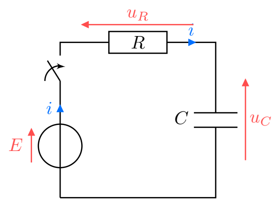

Fig. 4.3

Avec la loi des mailles,

$$u_R + u_C = E \qquad u_R = Ri \text{ et } i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \qquad \tau = RC$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}$$

L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}u_{C,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0$$

On injecte la forme générique de solutions, $u_{C,h}(t) = K\mathrm{e}^{rt}$:

$$r \times \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + \frac{\cancel{K\mathrm{e}^{rt}}}{\tau} = 0 \Leftrightarrow r = -\frac{1}{\tau}$$

La forme générale de la solution pour cette équation est donc :

$$u_{C,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Une solution particulière avec $u_{C,p}(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Donc $u_{C,p}(t) = E$ est **une** solution de l'équation différentielle. La solution générale est donc

$$u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t) = E + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La condition initiale est, par continuité de $u_C(t)$,

$$u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0 = A + E \Leftrightarrow A = -E$$

Ainsi,

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$