

Correction du TD d'entraînement

I Séparation isotopique

Le spectromètre de DEMPSTER permet, entre autres, de séparer les différents isotopes chargés d'un élément dans un échantillon.

Considérons un faisceau de particules chargées, constitué des ions de deux isotopes de mercure : $^{200}_{80}\text{Hg}^{2+}$ et $^{202}_{80}\text{Hg}^{2+}$, notés respectivement (1) et (2). Ce faisceau sort de la chambre d'ionisation avec une vitesse négligeable, puis accéléré par une tension $U_{PP'}$ appliquée entre les deux plaques P et P' . Les ions traversent ensuite une zone de déviation où règne un champ magnétique transversal uniforme, tel que $\vec{B} = B\vec{u}_z$.

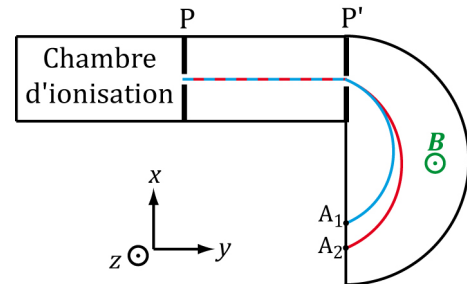


FIGURE 5.1 – Schéma du dispositif

On donne : $m_{\text{nucléon}} = 1,67 \times 10^{-27} \text{ kg}$, $m_{\text{électron}}$ négligeable devant $m_{\text{nucléon}}$, $|U_{PP'}| = 10 \text{ kV}$, $B = 0,10 \text{ T}$ et $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.

- 1) Quel doit être le signe de $U_{PP'}$ pour que les ions soient effectivement accélérés entre P et P' ?

Réponse

Les ions étant positifs, ils subissent la force $\vec{F}_e = q\vec{E}$ dans le même sens que \vec{E} . Il faut donc que \vec{E} soit selon \vec{u}_y . Or, $\vec{E} = -\text{grad} V$ indique que \vec{E} va des hauts potentiels aux bas potentiels (grad indique le sens des grandes variations, $-\text{grad}$ indique l'inverse) : on veut donc que V_P soit plus grand que $V_{P'}$, soit

$$U_{PP'} = V_P - V_{P'} > 0$$



- 2) Exprimer les vitesses v_1 et v_2 des isotopes suite à l'accélération.

Réponse

L'ion, assimilable à un point matériel M_i , de masse m_i , est soumis dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen à la force électrique qui est conservative. Donc le système est conservatif : $\mathcal{E}_m(P) = \mathcal{E}_m(P')$. L'énergie potentielle électrique s'écrit $\mathcal{E}_p = qV$ (on prend la constante nulle), on part à vitesse nulle et on accélère jusqu'à P' , d'où

$$qV(P) = \frac{1}{2}m_i v_i^2 + qV(P') \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{\frac{2qU_{PP'}}{m_i}}$$



- 3) Déterminer les trajectoires des ions dans la zone de déviation. Exprimer les rayons R_1 et R_2 des trajectoires.

Réponse

Cf. cours : $R_i = \frac{mv_i}{|q|B}$, donc $R_i = \frac{\sqrt{2Um_i}}{B\sqrt{q}}$

◇ BDF :

$$\begin{aligned} \text{Poids} & \quad \text{négligeable devant } \vec{F} \\ \text{Force magnétique } \vec{F} &= q \vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow \quad \vec{F} &= q\dot{y}B \vec{u}_x - q\dot{x}B \vec{u}_y \end{aligned}$$

◇ PFD :

$$m_i \vec{a} = \vec{F}$$

◇ Équations scalaires :

$$\begin{cases} m_i \ddot{x} = q\dot{y}(t)B \\ m_i \ddot{y} = -q\dot{x}(t)B \\ m_i \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m_i} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m_i} \dot{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB}{m_i} y(t) + K \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m_i} x(t) + K' \end{cases}$$

ainsi avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = 0 \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) &= \frac{qB}{m_i} \underbrace{y(0)}_{=0} + K = K \quad \text{donc} \quad K = 0 \\ \dot{y}(0) = v_i \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) &= -\frac{qB}{m_i} \underbrace{x(0)}_{=0} + K' = K' \quad \text{donc} \quad K' = v_i \end{aligned}$$

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB}{m_i} y(t) \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m_i} x(t) + v_i \end{cases}$$

Étant donné que $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = \text{cte} = v_0^2$, on a

$$\left(\frac{qB}{m_i} y(t) \right)^2 + \left(-\frac{qB}{m_i} x(t) + v_i \right)^2 = v_i^2$$

soit, en notant $\omega_c = |q|B/m_i$:

$$(y)^2 + \left(x + \frac{m_i v_i}{qB} \right)^2 = \left(\frac{v_i}{\omega_c} \right)^2$$

On reconnaît l'équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes. Dans notre cas, les centres sont $\left(-\frac{m_i v_i}{qB}, 0 \right)$ et les rayons sont $R_i = \frac{v_i}{\omega_c} = \frac{m_i v_i}{|q|B}$, soit

$$R_i = \frac{\sqrt{2U m_i}}{B \sqrt{q}}$$



- 4) On recueille les particules sur une plaque photographique sous P' après leur demi-tour. Exprimer puis calculer la distance d entre les deux traces observées.

Réponse

Graphiquement, on a $d = 2(R_2 - R_1)$. Donc

$$d = \frac{2\sqrt{2}}{B} \sqrt{\frac{U}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$



II Cyclotron

Inspiré CCP PC 2014, oral banque PT

Un cyclotron est formé de deux enceintes demi-cylindriques D_1 et D_2 , appelées *dees* en anglais, séparées d'une zone étroite d'épaisseur a . Les *dees* sont situés dans l'entrefer d'un électroaimant qui fournit un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B \vec{e}_z$, de norme $B = 1,5 \text{ T}$. Une tension sinusoïdale d'amplitude $U_m = 200 \text{ kV}$ est appliquée entre les deux extrémités de la bande intermédiaire, si bien qu'il y règne en champ électrique orienté selon \vec{e}_x .

On injecte des protons de masse $m = 1,7 \times 10^{-27} \text{ kg}$ au sein de la zone intermédiaire avec une vitesse initiale négligeable.

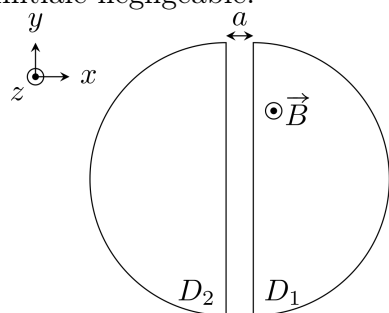


FIGURE 5.2 – Schéma de principe.

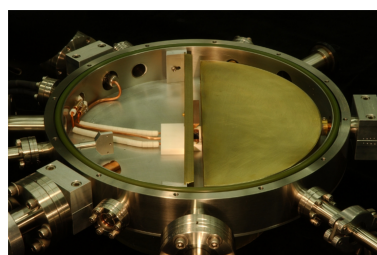


FIGURE 5.3 – Photon du cyclotron de l'université de RUTGERS, mesurant $\approx 30 \text{ cm}$ en diamètre.

- 1) Montrer qu'à l'intérieur d'un *dee*, la norme de la vitesse des protons est constante.

Réponse

- ◇ **Système** : proton, assimilé à un point matériel de masse m et de charge q .
- ◇ **Référentiel** : lié au cyclotron, donc référentiel du laboratoire supposé galiléen.
- ◇ **BDF** :

Poids négligeable devant \vec{F}
 Force de LORENTZ $\vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

À l'intérieur des *dees*, seule la force magnétique $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ existe. Ainsi, d'après le TEM,

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = e \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}}_{\substack{\perp \vec{v} \\ =0}} = 0 \quad \text{soit} \quad mv \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} = 0}$$



- 2) En déduire le rayon de courbure R de la trajectoire des protons ayant une vitesse v ainsi que le temps que passe un proton dans un *dee*.

Réponse

La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage **polaire**, centré sur le centre de l'arc de cercle. D'après la deuxième loi de NEWTON,

$$m\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit en utilisant les résultats connus sur la cinématique du mouvement circulaire,

$$m \left(-\frac{v^2}{R} \vec{u}_r \right) = evB \underbrace{(-\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z)}_{=\vec{u}_r} = -evB \vec{e}_r$$

avec $\vec{v} = -v \vec{u}_\theta$: la trajectoire est parcourue en sens horaire pour un proton (à connaître ou à retrouver par la cohérence des signes). Finalement,

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \frac{mv}{eB}}$$

La trajectoire dans un des *dee* est ainsi un demi-cercle, de longueur πR et, **puisque la vitesse est constante**, parcourue en un temps

$$\boxed{\Delta t_d = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22 \text{ ns}}$$

On remarque ainsi que Δt_d ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué dans le *dee* (en plus des variables intrinsèques au proton, e et m).



- 3) Quelle doit être la fréquence f de la tension pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les *dee* ? Pour simplifier on pourra supposer $a \ll R$. Justifier le choix d'une tension harmonique au lieu, par exemple, d'une tension créneau.

Réponse

Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les *dees*, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon $+\vec{u}_x$ lorsqu'il passe de D_2 à D_1 , et selon $-\vec{u}_x$ en passant de D_1 à D_2 . En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les *dees* ($a \ll \pi R$), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à Δt_d , soit pour une période entière :

$$T = 2\Delta t_d = \frac{2\pi m}{eB} \quad \text{et} \quad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 23 \text{ MHz}}$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension créneau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les *dees* soit en phase avec la tension. Regrouper les protons permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, un tension créneau requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences.



- 4) Exprimer en fonction de n la vitesse v_n puis le rayon R_n de la trajectoire d'un proton après n passages dans la zone d'accélération. Le demi-cercle $n = 1$ est celui qui suit la première phase d'accélération.

Réponse

Jusqu'à présent, nous avons relié le rayon à la vitesse du proton. Il faut donc maintenant relier la vitesse du proton au nombre de passage dans les *dees*, ou plutôt au nombre de passage dans la zone accélératrice. Comme on ne s'intéresse qu'à la norme, le théorème de l'énergie cinétique est le plus adapté. Appliquons ce théorème sur une trajectoire entre la sortie d'un *dee* et l'entrée de l'autre, en supposant que le passage du proton se fait au moment où la tension atteint son maximum (justifié

par la question précédente), et en supposant aussi que la durée de passage dans la zone accélératrice est négligeable devant la période de la tension, ce qui permet de supposer que la tension est presque constante égale à U_m . Sous ces hypothèses, on trouve :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_n^2 = W(\vec{F}_e) = e \frac{U_m}{a}$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \approx \frac{1}{2}mv_n^2 = neU_m \quad \text{soit} \quad v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}}$$

et en utilisant le résultat d'une question précédente,

$$R_n = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2neU_m}{m}} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_m}{B^2e}}}$$



- 5) Calculer numériquement le rayon de la trajectoire après un tour (donc un passage dans chaque *dee*), puis après dix tours.

Réponse

Remarquons bien que n compte le nombre de passages dans la zone accélératrice, faire un tour complet revient donc à passer de n à $n + 2$. Après un seul tour, $n = 2$, et

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU_m}{m}} \quad \text{et} \quad R_2 = 2\sqrt{\frac{mU_m}{eB^2}} = 6,1 \text{ cm}$$

Après dix tours, $n = 20$ et

$$\boxed{R_{20} = \sqrt{10}R_2 = 19 \text{ cm}}$$



Le rayon de la dernière trajectoire décrite par les protons accélérés avant de bombarder une cible est $R_N = 35 \text{ cm}$.

- 6) Déterminer l'énergie cinétique du proton avant le choc contre la cible proche du cyclotron, puis le nombre de tours parcourus par le proton.

Réponse

Avec $R_N = 35 \text{ cm}$, la vitesse finale vaut

$$v_{\text{fin}} = \frac{eBR_N}{m} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{E}_{c,\text{fin}} = \frac{e^2 B^2 R_N^2}{2m} = 2,1 \times 10^{-12} \text{ J} = 14 \text{ MeV}}$$

puis

$$\mathcal{E}_{c,\text{fin}} = NeU_m \quad \text{d'où} \quad \boxed{N = \frac{\mathcal{E}_{c,\text{fin}}}{eU_m} = 33}$$

ce qui correspond à 16 tours et demi au sein du cyclotron.



III Chambre à bulles

La chambre à bulles est un dispositif mis au point en 1952 par Donald Arthur GLASER (prix NOBEL 1960), et destiné à visualiser des trajectoires de particules subatomiques. Il s'agit d'une enceinte remplie d'un liquide (généralement du dihydrogène) à une température légèrement supérieure à celle de vaporisation : le passage d'une particule chargée déclenche la vaporisation et les petites bulles formées ainsi matérialisent la trajectoire de la particule.

L'ensemble est plongé dans un champ magnétique uniforme et stationnaire, qui courbe les trajectoires et permet ainsi d'identifier les particules (à partir de leur masse et de leur charge).

On étudie ici une particule P de masse m , de charge q (positive ou négative), introduite à $t = 0$ dans la chambre à bulles où règne le champ $\vec{B} = B \vec{e}_z$ (avec $B > 0$). Sa position initiale est l'origine O du repère, et sa vitesse initiale est $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_y$ (avec $v_0 > 0$). Le poids de la particule est négligé dans tout le problème. Le référentiel du laboratoire est supposé galiléen.

Dans un premier temps, on suppose que les frottements du liquide sur la particule P sont négligeables.

- 1) Établir les équations différentielles du mouvement de P. On posera $\omega = qB/m$.

Réponse

Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule P n'est soumise qu'à la force magnétique $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$, en négligeant le poids devant cette force. Avec le principe fondamental de la dynamique, on trouve

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}(t)B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}(t)B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m}\dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m}\dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = +\omega\dot{y}(t) & (5.1) \\ \ddot{y}(t) = -\omega\dot{x}(t) & (5.2) \\ \ddot{z}(t) = 0 & (5.3) \end{cases}$$



- 2) En déduire les équations horaires de P et indiquer précisément la nature de sa trajectoire. Représenter sur un même schéma les trajectoires d'un proton (charge $q = +e$ et masse m_p) et d'un électron ($q = -e$ et $m_e \ll m_p$).

Réponse

L'équation 5.3 donne successivement $\dot{z} = \text{cte} = 0$ puis $z = \text{cte} = 0$: le mouvement a donc lieu dans le plan (Oxy).

Pour les équations horaires, on intègre une fois les deux premières équations 5.1 et 5.2 :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \omega\dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega\dot{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \omega y(t) + K \\ \dot{y}(t) = -\omega x(t) + K' \end{cases}$$

ainsi avec les conditions initiales :

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = \underbrace{\omega y(0)}_{=0} + K = K \quad \text{donc} \quad K = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_0 \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = -\omega \underbrace{x(0)}_{=0} + K' = K' \quad \text{donc} \quad K' = v_0$$

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \omega y(t) \\ \dot{y}(t) = -\omega x(t) + v_0 \end{cases}$$

et on injecte l'expression de \dot{y} dans 5.1 et inversement :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \omega v_0 \\ \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \end{cases}$$

en résolvant, on trouve finalement

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t))} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$

donnant l'équation cartésienne

$$\left(x - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

correspondant à l'équation d'un cercle de centre $\Omega \left(\frac{v_0}{\omega}, 0, 0\right)$ et de rayon $R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B}$.

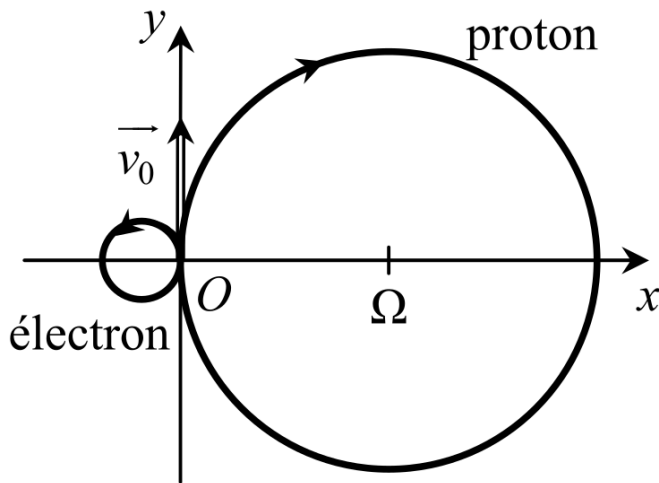


FIGURE 5.4 – Trajectoires pour un proton et un électron.

Pour un proton, $\frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB} > 0$, donc la trajectoire est à droite, et le mouvement se fait dans le sens horaire. À l'inverse, pour l'électron la trajectoire est à gauche et se fait dans le sens direct, mais avec un rayon beaucoup plus petit puisque proportionnel à m .



Les frottements du liquide sont maintenant modélisés par la force $\vec{F} = -\lambda \vec{v}_P$ avec λ une constante positive. On pose $\alpha = \lambda/m$.

- 3) Établir les nouvelles équations différentielles du mouvement (avec les paramètres ω et α). Montrer que le mouvement reste plan.

Réponse

On réemploie le PFD :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = +qB\dot{y} - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} - \lambda\dot{y} \\ m\ddot{z} = -\lambda\dot{z} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \ddot{x} = +\omega\dot{y} - \alpha\dot{x} & (5.4) \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} - \alpha\dot{y} & (5.5) \\ \ddot{z} = -\alpha\dot{z} & (5.6) \end{cases}$$

Le mouvement reste plan, puisque la solution de l'équation 5.6 est $\dot{z}(t) = D \exp(-\alpha t)$, mais que $\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow D = 0$, soit $\boxed{z = \text{cte} = 0}$.



- 4) Déterminer complètement les équations horaires de P. On pourra poser la variable complexe $\underline{u} = x + jy$, et déterminer tout d'abord $\underline{\dot{u}}$.

Réponse

En posant, comme suggéré, $\underline{u} = x + jy$, on combine (5.4) + j (5.5) pour avoir

$$\underline{\ddot{u}} + (\alpha + j\omega)\underline{\dot{u}} = 0$$

qui est une **équation différentielle d'ordre 2 sans ordre 0**, donc d'ordre 1 en $\underline{\dot{u}}$: on trouve donc les solutions avec une simple exponentielle :

$$\begin{aligned} \underline{\dot{u}}(t) &= A \exp(-(\alpha + j\omega)t) \\ \text{avec } \underline{\dot{u}}(0) = 0 + jv_0 &= A \quad \text{soit} \quad \underline{\dot{u}}(t) = jv_0 \exp(-(\alpha + j\omega)t) \\ \text{ainsi } \underline{u}(t) &= \frac{jv_0}{-(\alpha + j\omega)} \exp(-(\alpha + j\omega)t) + B \quad \text{or} \quad \underline{u}(0) = 0 \Leftrightarrow B = \frac{jv_0}{\alpha + j\omega} \\ \text{finalement } \underline{u}(t) &= \frac{jv_0}{\alpha + j\omega} (1 - \exp(-(\alpha + j\omega)t)) \end{aligned}$$

En mettant la fraction avec un dénominateur réel et en séparant les exponentielles :

$$\underline{u}(t) = \frac{jv_0\alpha + v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \exp(-j\omega t))$$

puis en prenant la partie réelle pour obtenir $x(t)$ et la partie imaginaire pour obtenir $y(t)$ (**attention à bien distribuer la fraction**),

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \cos(\omega t)) - \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t) \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t) \sin(\omega t) + \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \cos(\omega t)) \end{cases}$$



- 5) Déterminer les coordonnées du point asymptotique $P_{+\infty} = P(t \rightarrow \infty)$. Représenter sur un schéma la trajectoire d'un proton.

Réponse

Pour $t \rightarrow \infty$, le point d'asymptote est

$$P_{\infty} = \begin{pmatrix} \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La particule tourne toujours à cause des facteurs sinusoidaux, mais le rayon de courbure diminue exponentiellement : la trajectoire est une spirale, tournant toujours vers la droite pour un proton, et s'enroulant autour du point P_{∞} .

