

/52 P1 Formation d'un arc-en-ciel (D'après banque PT 2024)

Lorsque le beau temps revient juste après une averse, on observe parfois la formation d'un arc-en-ciel à l'horizon. Il s'agit d'un phénomène optique de dispersion de la lumière solaire, qui se réfracte et se réfléchit dans des gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. La première théorie permettant d'expliquer ce phénomène a été établie par Descartes en 1637 à l'aide des lois de la réflexion et de la réfraction. Il mit en évidence qu'un-e observateur-ice situé-e au niveau du sol reçoit un faisceau de rayons émergents correspondant au maximum de l'angle de déviation des gouttelettes d'eau. Comme celui-ci dépend de la longueur d'onde des rayons lumineux, on peut ainsi observer la dispersion de la lumière solaire. Dans cette partie, nous allons mettre en évidence les principaux résultats de cette théorie.

On considère un rayon lumineux monochromatique issu du Soleil S , qui arrive sur une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air sous un angle d'incidence i_1 , comme représenté sur la Figure 1. Après une première réfraction, une réflexion et une seconde réfraction, le rayon émerge de la gouttelette sous un angle de réfraction i_4 . Il se dirige alors vers un-e observateur-ice O situé-e au niveau du sol. On suppose que l'air est un milieu d'indice optique égal à 1, et on note n l'indice optique de l'eau.

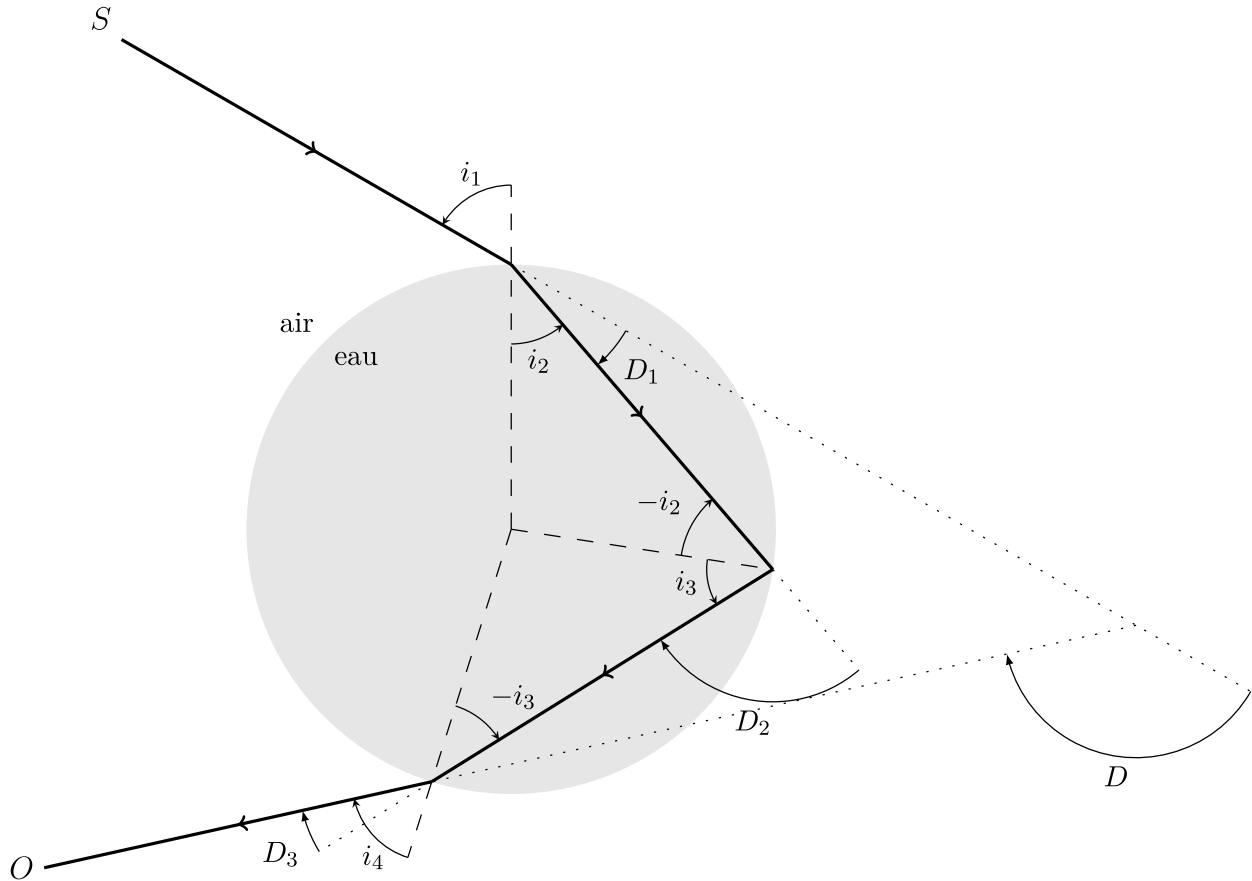


FIGURE 1 – Trajet d'un rayon lumineux dans une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air.

L'orientation des différents angles à chaque interface est définie sur la Figure 1, et on définit positivement les angles orientés dans le sens trigonométrique.

- /3 1 Exprimer les angles de déviation D_1 , D_2 et D_3 à chaque interface et en fonction de i_1 , i_2 , i_3 et i_4 , en tenant compte de l'orientation de ces angles.

Réponse

On lit sur la figure :

$$\begin{aligned} i_2 - D_1 &= i_1 & -(-i_2) + i_3 - D_2 &= \pi & D_3 + (-i_3) &= i_4 \\ \Leftrightarrow D_1 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} i_2 - i_1 & D_2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} i_2 + i_3 - \pi & D_3 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} i_3 + i_4 \end{aligned}$$

- /4 2 À l'aide des lois de SNELL-DESCARTES, exprimer les angles i_2 , i_3 et i_4 en fonction de i_1 et n .

Réponse

D'après la loi de la réfraction,

$$1 \times \sin(i_1) \stackrel{\textcircled{1}}{=} n \sin(i_2) \Leftrightarrow i_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)$$

D'après la loi de la réflexion,

$$i_3 \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_2 = \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right)$$

Enfin, d'après la loi de la réfraction encore,

$$\sin(i_4) = n \sin(-i_3) = -n \sin(i_2) = -\sin(i_1)$$

$$\Leftrightarrow i_4 \stackrel{\textcircled{1}}{=} -i_1$$



/2 3 En déduire que l'angle de déviation totale D peut s'exprimer :

$$D = 4 \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right) - 2i_1 - \pi$$

Réponse

La déviation totale s'écrit

$$\begin{aligned} D &\stackrel{\textcircled{1}}{=} D_1 + D_2 + D_3 \\ \Leftrightarrow D &= (i_2 - i_1) + (i_2 + i_3 - \pi) + (i_4 + i_3) \\ \Leftrightarrow D &= -i_1 + 2i_2 + 2i_3 + i_4 - \pi \\ \Leftrightarrow D &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 4 \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right) - 2i_1 - \pi \end{aligned}$$



On représente l'évolution de D en fonction de i_1 sur la Figure 2, en prenant $n = 1,33$ pour l'indice optique de l'eau. L'angle de déviation présente un maximum D_{\max} pour un certain angle d'indidence $i_{1,\max}$ qui correspond au faisceau de rayons émergents reçu par l'observateur-ice.

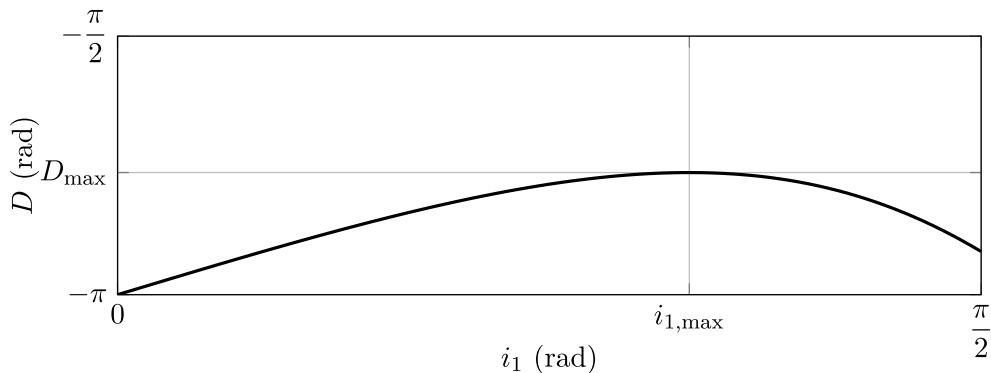


FIGURE 2 – Évolution de l'angle de déviation D en fonction de l'angle d'indidence i_1 .

On rappelle que la dérivée de la fonction trigonométrique $f(x) = \arcsin(x)$ s'exprime :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$

/9 4 Montrer que l'angle d'indidence $i_{1,\max}$ vérifie l'équation suivante :

$$\sin(i_{1,\max}) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

Réponse

Posons $x = \sin(i_1)$. Alors,

$$\begin{aligned} D(x) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 4 \arcsin \frac{x}{n} - 2 \arcsin x - \pi \\ \Rightarrow \frac{dD}{dx} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 4 \times \frac{1}{n} \frac{1}{\sqrt{1-\frac{x^2}{n^2}}} - \frac{2}{\sqrt{1-x^2}} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{dD}{dx}} \right\} \text{On dérive}$$

Cette dérivée s'annule au niveau du maximum, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
 \frac{4}{n} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{x_{\max}^2}{n^2}}} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2}{\sqrt{1 - x_{\max}^2}} \\
 \Leftrightarrow \frac{n^2}{16} \left(1 - \frac{x_{\max}^2}{n^2}\right) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1 - x_{\max}^2}{4} \\
 \Leftrightarrow n^2 - x_{\max}^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 4 - 4x_{\max}^2 \\
 \Leftrightarrow 3x_{\max}^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 4 - n^2 \\
 \Leftrightarrow \sin(i_{1,\max}) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}
 \end{aligned}$$



/2 [5] En déduire l'expression du maximum D_{\max} en fonction de n .

Réponse

On injecte cette valeur dans l'expression de D :

$$D_{\max} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 4 \arcsin\left(\frac{1}{n} \sqrt{\frac{4 - n^2}{3}}\right) - 2 \arcsin \sqrt{4 - n^2} - \pi$$



On représente l'évolution de D_{\max} en fonction de n sur la Figure 3, pour $1 \leq n \leq 2$.

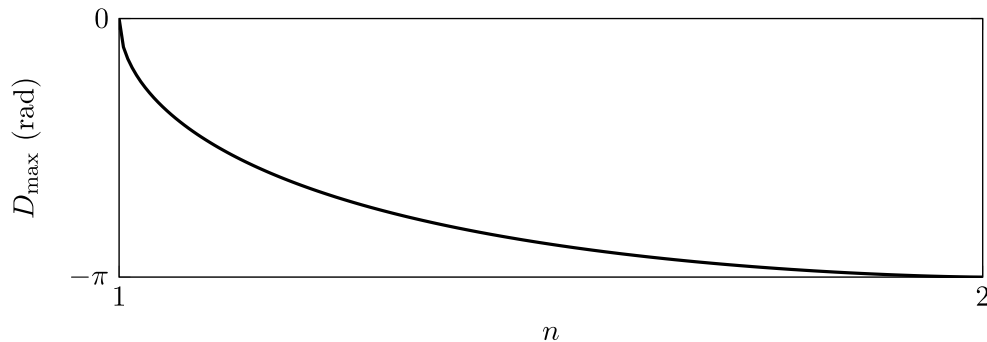


FIGURE 3 – Évolution du maximum D_{\max} en fonction de l'indice optique n .

L'eau étant un milieu dispersif, son indice optique n dépend de la longueur d'onde λ du rayon lumineux considéré. En 1836, CAUCHY établit que l'indice optique d'un tel milieu peut s'exprimer sous la forme :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

avec A et B des constantes positives, caractéristiques du milieu.

/2 [6] Comment évolue le maximum D_{\max} lorsque la longueur d'onde λ augmente ? Justifier votre raisonnement.

Réponse

Si la longueur d'onde augmente, alors d'après la loi de CAUCHY l'indice diminue $\textcircled{1}$, et d'après la courbe représentée l'angle de déviation maximale **augmente**. $\textcircled{1}$



/1 [7] Rappeler l'intervalle de longueur d'onde constituant le spectre visible.

Réponse

Le spectre visible contient les longueurs d'ondes comprises entre $[400 ; 800]$ nm. $\textcircled{1}$



/8 [8] Lorsque l'observateur-ice O situé-e au niveau du sol regarde l'arc-en-ciel, aperçoit-il l'anneau rouge situé au-dessus ou en-dessous de l'anneau violet ? Justifier votre raisonnement. Un schéma est attendu.

Réponse

La lumière atteint les gouttes avec toutes les incidences possibles, mais la courbe de déviation étant plus plate au

voisinage du maximum, il y a le plus d'**intensité lumineuse** en sortie de la goutte dans la direction donnée par le **maximum de déviation**. On peut dire qu'il y a accumulation de lumière dans cette direction. ① + ①

Compte tenu de ce qui précède, l'angle de déviation maximale est plus grand pour le rouge que pour le violet, **mais** comme l'angle de déviation est négatif, alors en valeur absolue

$$|D_{\text{violet}}| > |D_{\text{rouge}}|$$

Autrement dit, l'angle entre les rayons entrant et sortant de la goutte, égal à $2\pi - |D|$, est plus grand pour le rouge que pour le violet. ①

Les rayons du Soleil arrivent tous parallèles les uns aux autres, pour une goutte donnée le rayon rouge part donc davantage vers le bas que le rayon violet. Cependant, les rayons « qui comptent » sont ceux qui aboutissent à l'œil de l'observateur-ice... qui ne sont pas déviés par la même goutte ! Comme le montre la Figure 4, les rayons rouges atteignant l'œil de l'observateur sont déviés par une goutte située plus haut ① que celle qui dévie les rayons violets. Ainsi, l'**anneau rouge paraît au dessus de l'anneau violet** dans le ciel. ①

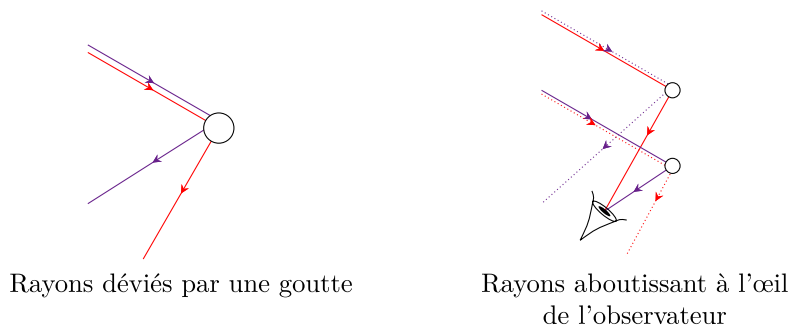


FIGURE 4 – Déviation des rayons et formation d'un arc-en-ciel. ① + ①



Lorsque les conditions d'observation sont excellentes, il est possible d'apercevoir un second arc-en-ciel dans le ciel, situé au-dessus de l'arc-en-ciel précédemment étudié. Il est même possible d'observer, dans de très rares occasions, un troisième arc-en-ciel qui s'ajoute aux deux précédents.

- /4 9 En considérant toujours des gouttelettes d'eau sphériques en suspension dans l'air, expliquer l'origine de ces différents arc-en-ciel. Un schéma simple est attendu pour au moins une de ces situation.

Réponse

Ces arcs-en-ciel dits surnuméraires sont dus à des rayons dont les trajets dans les gouttes sont différents ①, et qui subissent deux voire trois réflexions au lieu d'une seule. ① La Figure 5 montre un schéma de principe à deux réflexions.

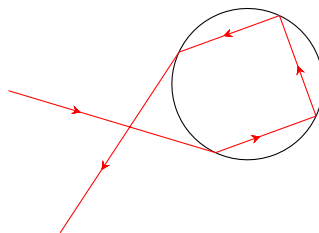


FIGURE 5 – Schéma de principe de réflexions conduisant à un arc surnuméraire. ① + ①

