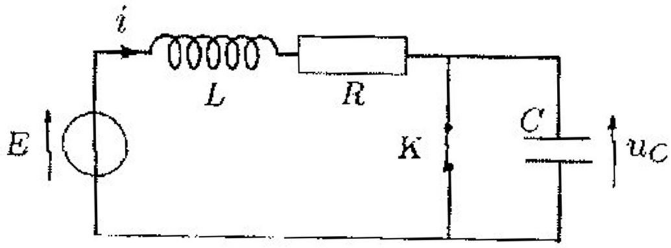
Correction du TD

I Etude d'un RLC série en régime transitoire

Indiquer la ou les bonnes réponses en justifiant tout votre raisonnement.
On considère un circuit RLC série, alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice E constante comme schématisé ci-contre. Le condensateur peut être court-circuité lorsque l'interrupteur K est fermé. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la bobine et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur C.



Le condensateur est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue, pour que le régime permanent soit établi. A l'instant pris comme origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

1. Que valent l'intensité $i\left(0^{+}\right)$ et la tension $u_C(0^{+})$ à l'instant $t=0^{+}$, succédant immédiatement à l'ouverture de l'interrupteur K. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $i\left(0^{+}\right)=0$
   - B - $i\left(0^{+}\right)=\dfrac{E}{R}$
   - C - $u_C\left(0^{+}\right)=0$
   - D - $u_C\left(0^{+}\right)=E$

   Réponse :
   Intéressons-nous d'abord au circuit à $t<0$. L'interrupteur est alors fermé si bien que u_C est une tension aux bornes d'un fil donc

   $$u_C\left(t=0^{-}\right)=0$$

   De plus, le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, donc

   $$u_C\left(t=0^{+}\right)=u_C\left(t=0^{-}\right)=0$$

   Par ailleurs en régime permanent constant, on sait que la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (un fil). Si bien que le circuit est alors équivalent à uniquement la résistance R en série avec la source idéale de fem E. Ainsi d'après la loi de Pouillet,

   $$i\left(t=0^{-}\right)=E/R$$

   De plus, la bobine assure la continuité de l'intensité qui la traverse, donc

   $$i\left(t=0^{+}\right)=i\left(t=0^{-}\right)=\frac{E}{R}$$

   Réponses B et C.

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$. On la mettra sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

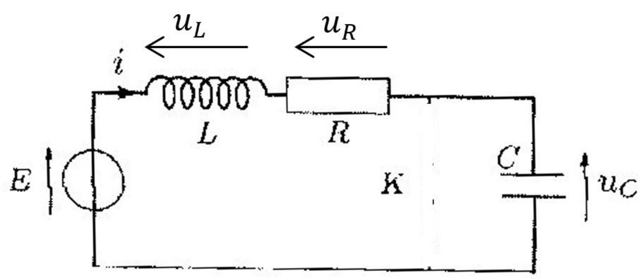
$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C(t) = \alpha$$

Exprimer ω_0 et Q.

- A - $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
- B - $\omega_0 = \dfrac{1}{LC}$
- C - $Q = R\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
- D - $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Réponse :
On se place après l'ouverture de l'interrupteur ($t > 0$). On a alors un circuit RLC série pour lequel on cherche à établir l'équation différentielle du second ordre sur la variable $u_C(t)$. Appliquons la loi des mailles en notant u_R et u_L les tensions respectivement aux bornes du résistor et de la bobine.

$$E = u_R(t) + u_L(t) + u_C(t)$$



Appliquons les relations courant-tension en convention récepteur pour le résistor

$$u_R(t) = Ri(t)$$

et la bobine

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Il vient :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + u_C$$

Appliquons la relation courant-tension pour le condensateur :

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

On obtient donc :

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C$$

Enfin, divisons cette expression par LC pour mettre l'expression sous forme canonique.

$$\frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{LC} = \frac{E}{LC}$$

Par identification, on a alors : $${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC}$$

Ainsi $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

Soit $$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Réponses A et D.

3. Exprimer α.
   - A - $\alpha = 0$
   - B - $\alpha = E$
   - C - $\alpha = QE$
   - D - $\alpha = {\omega_0}^2\,E$

   Réponse :
   En poursuivant l'identification on constate encore que :

   $$\alpha = \frac{E}{LC} = {\omega_0}^2 E$$

   Réponse D.

4. Que peut-on affirmer concernant le facteur de qualité ?
   - A - La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 2$.
   - B - La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 1/2$.
   - C - Plus la valeur de l'inductance est élevée, plus le facteur de qualité est faible.
   - D - Plus la valeur de la capacité est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

   Réponse :
   La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque le système a une évolution pseudo-périodique avec un très faible dépassement, soit pour un $Q < 1/2$ (d'après le cours, c'est pour $Q = 0{,}72$). Aucune des deux premières réponses A ou B n'est juste. Notez en revanche que pour $Q = 1/2$, on a le transitoire le plus bref sans dépassement. Par ailleurs, le facteur de qualité s'écrivant

   $$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

   une inductance élevée induira un facteur de qualité grand tandis qu'une capacité élevée conduira à un facteur de qualité petit.

   Réponse D.

Dans la suite, on considère que la bobine possède une inductance L=50 mH et que la capacité du condensateur vaut $C = 20\,\mu\text{F}$. On souhaite obtenir un facteur de qualité $Q = 10$.

5. Calculer la valeur à donner à la résistance R du résistor.
   - A - $R = 0{,}002\,\Omega$
   - B - $R = 0{,}2\,\Omega$
   - C - $R = 5\,\Omega$
   - D - $R = 500\,\Omega$

   Réponse :
   On cherche la valeur de R pour obtenir $Q = 10$ à L et C fixé. On isole alors R dans l'expression de Q :

   $$R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{50 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}}} = 5\,\Omega$$

   Réponse C.

On admet alors que la tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C\left(t\right) = \exp\left\{\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right\}\left[A\cos\left(\omega_a t\right) + B\sin\left(\omega_a t\right)\right] + u_{CP}$$

6. Exprimer τ en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $\tau = \dfrac{\omega_0}{2Q}$
   - B - $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$
   - C - $\tau = \dfrac{\omega_0}{Q}$
   - D - $\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}$

   Réponse :
   Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle canonique s'écrit :

   $$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2 = 0$$

   De discriminant $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = {\omega_0}^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right) < 0 \quad \text{car} \quad Q = 10 > \dfrac{1}{2}$

   Les racines s'écrivent donc, avec $j^2 = -1$,

   $$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

   Que l'on peut identifier avec la forme des racines proposée par l'énoncé pour être en cohérence avec l'expression de $u_C\left(t\right)$:

   $$r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_a$$

   Ainsi, par identification, $$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

   Réponse B.

7. Exprimer la pseudo-pulsation ω_a en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $\omega_a = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$
   - B - $\omega_a = \omega_0 \sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$
   - C - $\omega_a = \omega_0 \left(1 + \dfrac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$
   - D - $\omega_a = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$

   Réponse :

   De même, par identification, $\quad \omega_a = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0 \sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$

   Réponse A.

8. Exprimer u_{CP} en fonction de E. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $u_{CP} = E$
   - B - $u_{CP} = 0$
   - C - $u_{CP} = {\omega_0}^2\, E$
   - D - $u_{CP} = 2E$

   Réponse :
   u_{CP} est la solution particulière de l'équation différentielle. On peut la chercher sous la forme d'une constante. Soit, en l'injectant dans l'équation différentielle :
   $\dfrac{\mathrm{d}^2 u_{CP}}{\mathrm{d}t^2} + \dfrac{R}{L}\dfrac{\mathrm{d}u_{CP}}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_{CP}}{LC} = \dfrac{E}{LC}$

   D'où : $\quad 0 + 0 + \dfrac{u_{\mathrm{CP}}}{LC} = \dfrac{E}{LC} \quad$ d'où $\quad u_{\mathrm{CP}} = E$

   Réponse A.

9. Exprimer A. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $A = E$
   - B - $A = -E$
   - C - $A = 0$
   - D - $A = E/2$

   Réponse :
   Exprimons les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales déterminées à la question 1 :

   $$u_C\left(t = 0^+\right) = 0 = exp\left(-0/\tau\right)\left[A\cos\left(0\right) + B\sin\left(0\right)\right] + E$$

   Ainsi : $\quad A = -E$

   Réponse B.

10. Exprimer B. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $B = \dfrac{E}{\omega_a}\left(\dfrac{1}{RC} - \dfrac{1}{\tau}\right)$
   - B - $B = \dfrac{E}{RC\omega_a}$
   - C - $B = 0$
   - D - $B = \dfrac{E}{\tau\omega_a}$

   Réponse :
   D'après Q1, on a aussi $i\left(t=0^+\right) = E/R$. Or, la loi courant tension aux bornes du condensateur permet d'écrire que :

   $$\dot{u}_C\left(t=0^+\right) = \frac{i\left(t=0^+\right)}{C} = \frac{E}{RC}$$

   Dérivons $u_C\left(t\right)$. Il vient

   $$\dot{u}_C\left(t\right) = -\frac{1}{\tau}exp\left(-t/\tau\right)\left[A\cos\left(\omega_a t\right) + B\sin\left(\omega_a t\right)\right] + \omega_a \times \exp\left(-t/\tau\right)\left[-A\sin\left(\omega_a t\right) + B\cos\left(\omega_a t\right)\right]$$

   Soit, en $t = 0$, $$\dot{u}_C\left(t=0^+\right) = -\frac{A}{\tau} + \omega_a B = \frac{E}{RC}$$

   Ainsi $$\omega_a B = \frac{E}{RC} + \frac{A}{\tau}$$

   D'où, avec $A = -E$, $$B = \frac{E}{\omega_a}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)$$

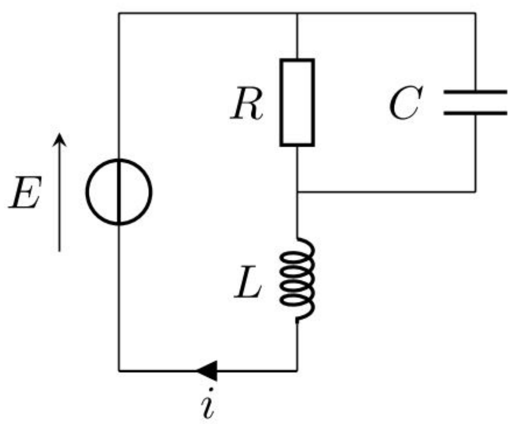
   Réponse A.

   De plus $$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{R}} \times \sqrt{LC} = \frac{2L}{R}$$

   Donc τ ne s'exprime pas en fonction de R et C uniquement. Ainsi, la réponse B est fausse. De même, RC ne peut pas s'exprimer simplement en fonction de τ donc la réponse D est fausse.

II Oscillateur amorti RLC

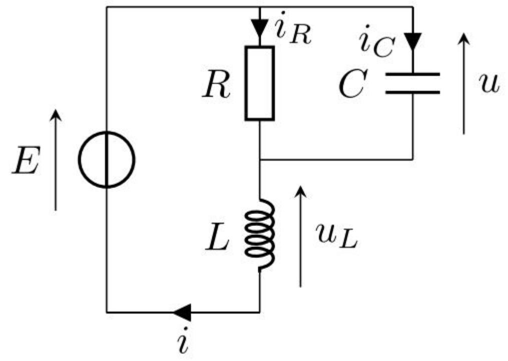
Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

Réponse :
On est en présence d'un circuit à deux mailles. Il faut donc appliquer la loi des nœuds afin d'écrire

$$i = i_R + i_C$$



Utilisons ensuite les lois de comportement pour faire apparaître la tension u commune à R et C :

$$i = \frac{u}{R} + C\dot{u}$$

Exprimons ensuite u en fonction de u_L (c'est une bonne idée car u_L pourra s'exprimer aisément en fonction de i !). Par loi des mailles :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\dot{u}_L$$

Or $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$$

2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

Réponse :
On cherche à l'écrire sous la forme canonique classique

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = {\omega_0}^2 i_\infty$$

L'identification à la forme précédente permet alors d'obtenir :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad i\infty = \frac{E}{R}$$

Avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, Q le facteur de qualité et $i\infty$ la valeur prise par i pour $t \to \infty$.

3. Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

Réponse :
Contrairement au RLC série, Q est proportionnel à R (et non inversement proportionnel). C'est normal car ici, l'énergie est plus rapidement dissipée si R est faible. Au contraire, si R est élevée ($R \to \infty$), la branche contenant R devient un interrupteur ouvert et le circuit devient équivalent à un oscillateur harmonique type LC série. Q tend alors logiquement vers l'infini.

4. Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

Réponse :
Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

En effet, $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent.

En $t = 0^+$, la continuité de i au travers de la bobine impose :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

Afin de trouver la condition sur $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, il faut déterminer la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)$$

Or, u étant la tension au borne d'un condensateur, elle est nécessairement continue et égale à sa valeur en 0^- donc

$$\boxed{u_L(0^+) = E \quad \text{Ainsi} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t = 0^+) = \frac{E}{L}}$$

5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Réponse :
Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC} i_p = \frac{E}{RLC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{R}$$

Remarque : La solution i_p déterminée sous forme d'une constante est toujours égale à $i\infty$ identifiée dans la forme canonique.

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0$$

De discriminant, avec $Q = 2$ $\Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4} {\omega_0}^2 < 0$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm j \frac{\omega_0}{4} \sqrt{15} \quad \text{noté} \quad r_{1,2} == -\mu \pm j\omega_p$$

où μ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_h(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right)$$

Avec A et B deux constantes d'intégration réelles. En sommant solution homogène et particulière, on obtient la solution générale :

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right) + \frac{E}{R}$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B en $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{E}{R} + A = 0 \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{E}{R}$$

Calculons l'expression de la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_p\left[-A\sin(\omega_p t) + B\cos(\omega_p t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t} - \mu\left[A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}$$

Ainsi $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = B\omega_p - \mu A = \frac{E}{L} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{E}{\omega_p}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)$$

Finalement $$\frac{E}{R} - \frac{E}{R}\left[\cos(\omega_p t) + \frac{R}{\omega_p}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)\sin(\omega_p t)\right]$$

Le tracé"direct"n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure ci(-dessous).