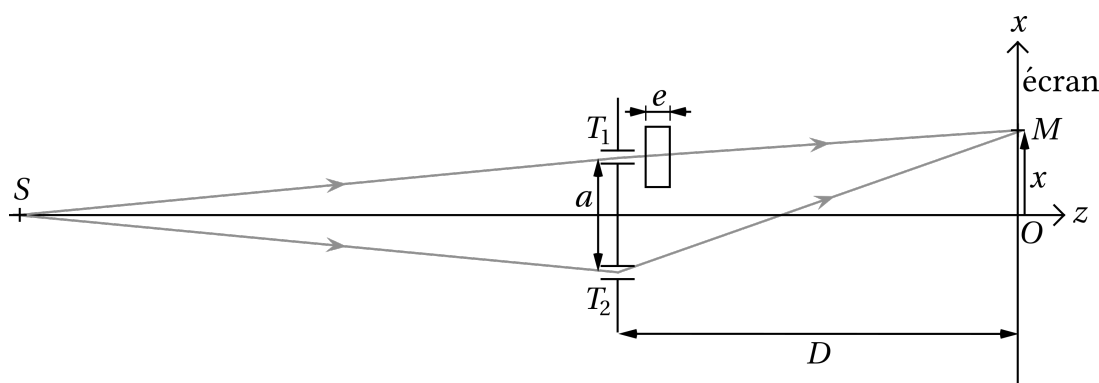


Correction du TD d'entraînement



I Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre

On considère un dispositif de trous d'YOUNG composé de deux trous T_1 et T_2 séparés d'une distance $a = 100\mu\text{m}$. Ce dispositif est éclairé par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde dans l'air $\lambda = 532\text{ nm}$ située sur l'axe optique. La figure d'interférences est observée sur un écran situé à une distance $D = 1,00\text{ m}$ du plan des trous. Une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e inconnue et d'indice $n_v = 1,57$ est positionnée en sortie du trou T_1 . L'indice optique de l'air est supposé égal à 1.



- 1) Montrer que la différence de chemin optique $\delta(M)$ en un point M de l'écran s'écrit

$$\delta(M) = \frac{ax}{D} - (n_v - 1)e$$

Réponse

En notant (SM) le chemin optique de S à M , la différence de chemin optique en M est donnée par

$$\delta_{2/1}(M) = (ST_2M) - (ST_1M) = \cancel{(ST_2)} + (T_2M) - \cancel{(ST_1)} - (T_1M)$$

La source étant sur l'axe optique et l'indice étant le même sur cette portion, on a $(ST_1) = (ST_2)$. On se retrouve donc à calculer le chemin optique à partir des trous. Or, le chemin de T_2 à M se fait dans l'air, donc $(T_2M) = T_2M$. En notant F_1 et F_2 les points d'entrée et de sortie du rayon lumineux dans la lame de verre tels que $F_1F_2 = e$, on a

$$\begin{aligned} (T_1M) &= (T_1F_1) + (F_1F_2) + (F_2M) \\ &= T_1F_1 + n_v e + F_2M \\ &= T_1F_1 + n_v e + F_1F_2 - F_1F_2 + F_2M \\ &= T_1F_1 + F_1F_2 + F_2M + (n_v - 1)e \\ &= T_1M + (n_v - 1)e \end{aligned}$$

Avec $T_1M = T_1F_1 + F_1F_2 + F_2M$. Autrement dit,

$$\delta_{2/1}(M) = T_2M - T_1M - (n_v - 1)e$$

et avec le résultat usuel de différence de marche des trous d'YOUNG, c'est-à-dire $\Delta L_{2/1}(M) = ax/D$ (attention à la notation de la distance entre les fentes!), on trouve bien

$$\delta_{2/1}(M) = \frac{ax}{D} - (n_v - 1)e$$

Autrement dit, la différence de chemin optique est celle sans la lame à laquelle s'ajoute le retard pris par l'onde issue de T_1 qui va moins vite/parcourt une plus grande distance (à la célérité c) à cause du verre. On retrouve bien que si $n_v = 1$, la différence de chemin optique est celle attendue sans lame de verre.



- 2) Déterminer la position x_c sur l'écran de la frange centrale correspondant à $\delta(M) = 0$. De quelle distance s'est déplacée cette frange par rapport au cas où la lame est absente ?

Réponse

$$\delta_{1/2}(M) = 0 \Leftrightarrow \frac{ax_c}{D} - (n_v - 1)e = 0 \Leftrightarrow \boxed{x_c = \frac{(n_v - 1)eD}{a}}$$

En l'absence de la lame de verre, la frange centrale serait sur l'axe optique, en $x = 0$: dans cette situation, elle s'est donc décalée de x_c .



- 3) Exprimer l'épaisseur e de la lame en fonction de x_c , a , n_v et D , puis calculer e pour $x_c = 28,5$ cm.

Réponse

On isole :

$$\boxed{e = \frac{ax_c}{D(n_v - 1)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 100 \mu\text{m} \\ D = 1,00 \times 10^9 \mu\text{m} \\ n_v = 1,57 \\ x_c = 28,5 \times 10^7 \mu\text{m} \end{cases}$$

A.N. : $e = 50,0 \mu\text{m}$



- 4) Expliquer pourquoi en réalité la position de la frange centrale ne peut être connue que modulo l'interfrange i . Qu'est-ce que cela implique sur e ? L'expérience vous paraît-elle réalisable ?

Réponse

La frange centrale, en première approximation, n'est pas distinguable des autres franges brillantes correspondant également à des interférences constructives : on a donc sa position modulo l'interfrange, soit

$$x_c \equiv x_c \quad \left[\frac{\lambda D}{a} \right]$$

et ainsi

$$e \equiv e \quad \left[\frac{\lambda}{n_v - 1} \right]$$

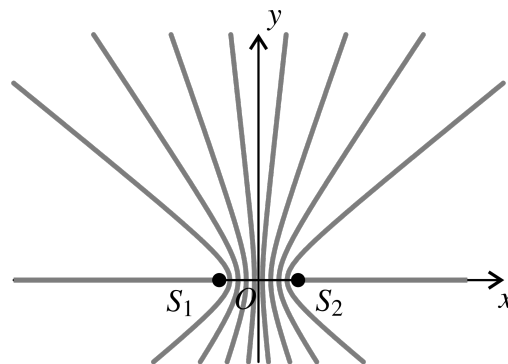
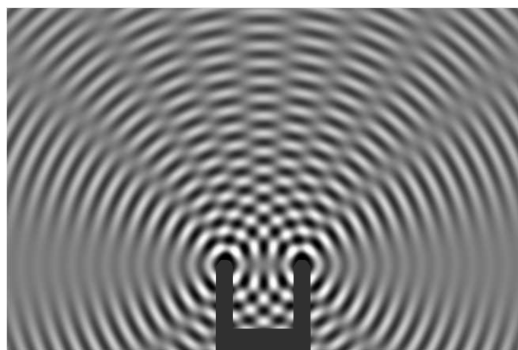
Autrement dit, la mesure de e n'est possible que modulo $\lambda/(n_v - 1) = 0,9 \mu\text{m}$: la mesure de la lame de verre ne serait donc pas réalisable avec cette expérience, puisqu'elle est plus grande que $0,9 \mu\text{m}$.

Dans la pratique, la frange brillante principale est distinguable des autres par atténuation de la luminosité sur les bords, donc l'expérience fonctionne.



★ ★ II Interférences sur la cuve à ondes

La figure ci-dessous représente une cuve à ondes éclairée en éclairage stroboscopique. Deux pointes distantes de a frappent la surface de l'eau de manière synchrone (même fréquence et phase à l'origine), générant deux ondes qui interfèrent. La figure est claire là où la surface de l'eau est convexe et foncée là où elle est concave. L'amplitude d'oscillation est plus faible là où la figure est moins contrastée.



- 1) On suppose pour simplifier que des ondes sinusoïdales partent des deux points S_1 et S_2 où les points frappent la surface. En notant λ la longueur d'onde, donner la condition pour que l'interférence en un point M situé aux distances d_1 et d_2 respectivement de S_1 et S_2 , soit destructrice. Cette condition fait intervenir un entier m .

Réponse

Par définition,

$$\Delta\varphi_{1/2}(M) = -k\Delta L_{1/2}(M) = -k(d_1 - d_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1)$$

Et pour avoir des interférences destructives,

$$\Delta\varphi_{1/2}(M) = (2m + 1)\pi \Leftrightarrow \frac{2\pi}{\lambda}(d_2 - d_1) = (2m + 1)\pi \Leftrightarrow d_2 - d_1 = \left(m + \frac{1}{2}\right)\lambda$$



- 2) Pour chaque entier m le lieu des points vérifiant cette condition est une courbe que l'on appelle dans la suite ligne de vibration minimale. Les lignes de vibration minimale sont représentées sur la figure de droite : ce sont des hyperboles. Les parties $x < -a/2$ et $x > a/2$ de l'axe (Ox) sont des lignes de vibration minimale. En déduire un renseignement sur a/λ .

Réponse

Avec $S_1S_2 = a$, on observe que tout l'axe $x > a/2$ correspond à une ligne de vibration minimale, c'est-à-dire un endroit de l'espace où les interactions sont destructives, i.e. $d_2 - d_1 = (m + 1/2)\lambda$. Or, pour $x > a/2$, on a

$$d_2 - d_1 = S_2M - S_1M = \cancel{S_2M} - S_1S_2 + \cancel{S_2M} \Leftrightarrow d_2 - d_1 = -a$$

On en déduit donc

$$\left| \frac{a}{\lambda} \right| = m + \frac{1}{2}$$

c'est-à-dire que a/λ est un demi-entier $(1/2, 3/2, 5/2, \dots)$. Le résultat est le même en raisonnant sur $x < -a/2$.



- 3) Sur le segment S_1S_2 , quel est l'intervalle de variation de $d_2 - d_1$? Déduire de la figure la valeur de a/λ .

Réponse

Entre S_1 et S_2 , on prend 3 cas extrêmes pour déterminer l'amplitude de $d_2 - d_1$:

◇ En S_1 , $d_2 = -a$ et $d_1 = 0$, donc

$$d_2 - d_1 = -a$$

◇ En O, $d_2 = -a/2$ et $d_1 = a/2$, donc

$$d_2 - d_1 = 0$$

◇ En S_2 , $d_2 = 0$ et $d_1 = a$, donc

$$d_2 - d_1 = -a$$

Ainsi,

$$\boxed{-a \leq d_2 - d_1 \leq a}$$

Or, entre S_1S_2 on observe plusieurs vibrations minimales, donnant chacune $d_2 - d_1 = (m + \frac{1}{2})\lambda$. On en compte 8 entre S_1S_2 , correspondant chacune à un ordre d'interférence m . À partir de O et vers les x croissants, on a la première vibration minimale pour $m = 0$, la deuxième pour $m = 1$, la troisième pour $m = 2$ et la dernière pour $m = 3$; on a de même par symétrie vers les x décroissants. Ainsi, **l'ordre d'interférence obtenu le plus grand est $m = 3$, et on n'a pas l'ordre d'interférence $m = 4$ sinon on aurait une parabole en plus de chaque côté.** Ainsi,

$$\left(3 + \frac{1}{2}\right)\lambda < a \leq \left(4 + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

puisque l'on observe qu'il reste une distance sur S_1S_2 après l'ordre 3 avant d'atteindre S_2 et que si a dépasse $(4 + 1/2)\lambda$ on verrait la parabole correspondant à l'ordre 4. Comme on a déterminé à la question précédente que $\frac{a}{\lambda} = m + \frac{1}{2}$, avec cette étude on a $3 < m \leq 4$ avec $m \in \mathbb{N}$, autrement dit $\boxed{m = 4}$, soit

$$\boxed{\frac{a}{\lambda} = \frac{9}{2}}$$



4) Expliquer pourquoi l'image est bien contrastée au voisinage de l'axe (Oy).

Réponse

Le contraste correspond à une grande différence entre les valeurs maximales et minimales. Or, sur (Oy) on a $d_2 = d_1$ donc $d_2 - d_1 = 0$, c'est-à-dire que les ondes sont en phase et les interférences constructives, donc l'amplitude est maximale et le contraste est élevé.



III Mesure de la vitesse du son avec des trous d'YOUNG

On considère un dispositif composé de deux trous d'YOUNG percés dans un écran opaque et séparés d'une distance $a = 10,0$ cm. Une onde ultrasonore de fréquence $f = 40$ kHz est envoyée en direction des trous. L'amplitude de l'onde en sortie des trous est mesurée en utilisant un récepteur qui peut être translaté suivant un axe (Ox) parallèle à la direction des trous et situé à une distance $D = 50,0$ cm du plan des trous. Le dispositif expérimental est représenté sur la figure 1. Par la suite, les valeurs de D et a sont supposées connues avec une précision de 1 mm et l'incertitude-type sur la valeur de f est supposée négligeable.

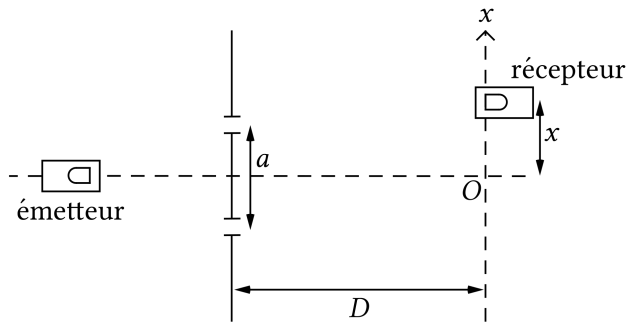


Fig. 1 – Expérience des trous de Young avec des ondes sonores.

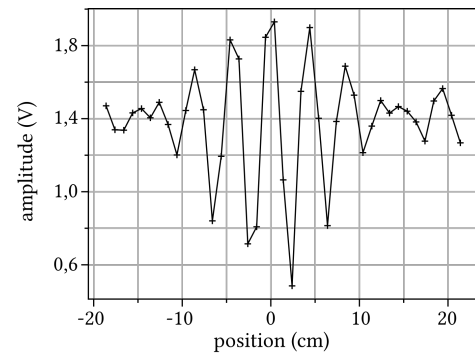


Fig. 2 – Tension délivrée par le détecteur en fonction de sa position sur l'axe Ox .

- 1) En supposant que la condition $D \gg a$, x est vérifiée, donner l'expression de l'interfrange i correspondant à la distance sur l'axe (Ox) entre deux interférences constructives.

Réponse

L'interfrange dans une expérience de trous d'YOUNG dont les fentes sont séparées de a est

$$i = \frac{\lambda D}{a}$$



Le résultat de la mesure de l'amplitude du signal électrique délivré par le récepteur en différentes positions sur l'axe (Ox) est représenté sur la figure 2.

- 2) À partir de la figure 2, estimer la valeur de l'interfrange ainsi que son incertitude-type.

Réponse

On mesure avec une règle graduée au millimètre pour mesurer (conversion d'échelle comprise) $4i = 17,1$ cm. La précision est ici limitée par l'écart entre deux positions de mesure du détecteur. Avec l'échelle de la figure et le facteur $1/\sqrt{3}$, on trouve l'incertitude-type de mesure $u_{4i} = 0,8$ cm. Ainsi,

$$i = (4,3 \pm 0,2) \text{ cm}$$



- 3) En déduire une estimation de la célérité c du son dans l'air ainsi que de son incertitude-type. On néglige toute incertitude sur la fréquence f . On rappelle la formule de propagation des incertitudes :

$$y = ax_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \Rightarrow \sqrt{\left(\alpha_1 \frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\alpha_2 \frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}$$

Réponse

En utilisant l'expression de l'interfrange et de $\lambda = c/f$, on a

$$c = \lambda f = \frac{fa}{D} \Leftrightarrow c = 3,4 \times 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

On détermine d'abord l'incertitude sur $\lambda = \frac{\lambda D}{a}$ avec la formule de propagation, puis $u(c) = f \cdot u(\lambda)$:

$$\frac{u(\lambda)}{\lambda} = \sqrt{\left(\frac{u(i)}{i}\right)^2 + \left(\frac{u(a)}{a}\right)^2 + \left(\frac{u(D)}{D}\right)^2} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \lambda = 8,4 \text{ mm} \\ i = 4,3 \text{ cm} \\ u(i) = 0,2 \text{ cm} \\ a = 10,0 \text{ cm} \\ u(a) = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,6 \text{ mm} \\ D = 50,0 \text{ cm} \\ u(D) = \frac{1 \text{ mm}}{\sqrt{3}} = 0,6 \text{ mm} \end{array} \right.$$

A.N. : $c = (3,4 \pm 0,1) \times 10^2 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$



Un phénomène de diffraction est observé lorsqu'une onde traverse un trou de rayon $r \approx \lambda$. Le faisceau en sortie du trou présente alors un demi-angle d'ouverture θ tel que $\sin(\theta) \approx \lambda/2r$.

- 4) À partir de la figure 2, estimer l'ordre de grandeur du rayon des trous utilisés dans l'expérience.

Réponse

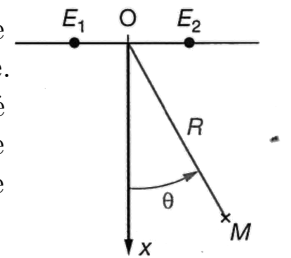
La diminution de l'amplitude des interférences lorsque x augmente est due au phénomène de diffraction par un trou d'YOUNG. Sur la figure 2, on peut voir que l'amplitude des interférences s'annule pour $x_a \approx 15 \text{ cm}$. Or, d'après la figure 1, $\tan(\theta) = x_a/D$; ainsi, en combinant avec $\sin(\theta) \approx \lambda/2r$ et avec l'approximation des petits angles ($\tan(\theta) \approx \theta$ et $\sin(\theta) \approx \theta$), on a

$$\frac{x_a}{D} \approx \frac{\lambda}{2r} \Leftrightarrow r \approx \frac{\lambda D}{2x_a} \approx 1,4 \text{ cm}$$



★★ IV Interférences ultrasonores sur un cercle

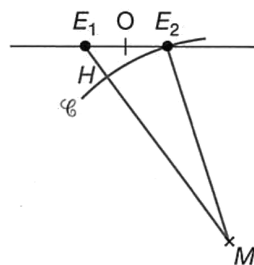
Deux émetteurs E_1 et E_2 émettent des ondes ultrasonores de même fréquence $f = 40 \text{ kHz}$ (ce qui correspond à une longueur d'onde $\lambda = 8,5 \text{ nm}$) et en phase. On note O le milieu du segment $[E_1 E_2]$ de longueur $a = 4 \text{ cm}$, et (Ox) l'axe situé sur la médiatrice de ce segment. On déplace le microphone sur un grand cercle de rayon $R = 0,5 \text{ m}$ et on relève l'évolution de l'amplitude mesurée en fonction de l'angle θ que fait la direction \vec{OM} avec l'axe (Ox) .



- 1) a – Faire une figure faisant apparaître les points O , E_1 , E_2 et M , pour un petit angle θ non nul.

Réponse

On a



- b – Tracer l'arc de cercle de centre M passant par E_2 . On note H son intersection avec la droite (E_1M) . Que représente E_1H ?

Réponse

E_1H est la différence $E_1M - E_2M = r_1 - r_2 = \Delta L_{1/2}(M)$ avec les notations du cours; autrement dit, c'est la différence de marche entre les deux ondes.



- c – Puisque $R \gg a$, on peut assimiler H et le projeté orthogonal de E_2 sur (E_1M) . En déduire une expression du déphasage entre les ondes reçues en M en fonction de θ , a et λ .

Réponse

En raisonnant dans le triangle E_1E_2H , considéré rectangle, on a $E_1H = a \sin \theta$. D'où le déphasage :

$$\Delta\varphi_{2/1}(M) = \frac{2\pi a \sin \theta}{\lambda}$$



- d – Quelles sont, dans l'intervalle $[-30 ; 30]^\circ$, les valeurs de θ où on observe un maximum d'amplitude ?

Réponse

L'amplitude est maximale pour des interférences constructives, soit pour $\Delta\varphi_{2/1}(M) = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$; sur θ ça donne donc

$$\sin \theta = p \frac{\lambda}{a} \Leftrightarrow \theta = \text{asin} \left(p \frac{\lambda}{a} \right)$$

On regarde donc quels sont les ordres d'interférences p tels que $\theta \in [-30 ; 30]^\circ$:

- ◇ $p = 0 \Rightarrow \theta = 0^\circ$, soit un maximum pour tout l'axe x : c'était attendu étant donné les symétries du problème ;
 - ◇ $p = \pm 1 \Rightarrow \theta = \pm 12^\circ$, donnant deux points symétriques par rapport à (Ox) ;
 - ◇ $p = \pm 2 \Rightarrow \theta = \pm 25^\circ$, pratiquement le double des valeurs précédentes.
- $p > 2$ donne des valeurs en-dehors de l'intervalle.



- 2) a – Sur l'intervalle précédent, quelles sont les positions où un minimum d'amplitude est attendu ?

Réponse

On a interférences destructives si $\Delta\varphi_{2/1}(M) = (2p + 1)\pi$, soit

$$\sin \theta = \left(p + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{a} \Leftrightarrow \theta = \text{asin} \left(\left(p + \frac{1}{2} \right) \frac{\lambda}{a} \right)$$

- ◇ $p = 0 \Rightarrow \theta = \pm 6^\circ$;
- ◇ $p = 1 \Rightarrow \theta = \pm 19^\circ$.



- b – Si les ondes émises ont même amplitude, quelle est la valeur minimale d'amplitude pour le signal somme ?

Réponse

Pour des ondes reçues avec la même amplitude, l'opposition de phase conduit à une annulation totale de l'amplitude somme.

