Sujet 1 – corrigé

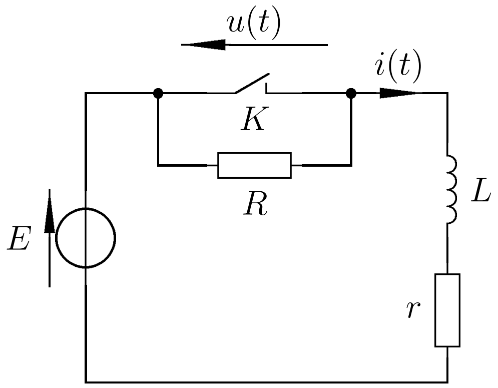
I Question de cours

Présenter le circuit RC en décharge depuis une tension E aux bornes du condensateur (schéma et condition initiale), donner et démontrer l'équation différentielle sur u_C, **démontrer** la solution et la tracer. Indiquer sans le démontrer comment trouver la constante de temps et le régime permanent.

II Étincelle de rupture

Soit le circuit représenté ci-contre.

L'interrupteur K est initialement fermé depuis longtemps. On bascule cet interrupteur en position ouverte à $t = 0$.



1. Quelle est la valeur de l'intensité $i(0^+)$ dans le circuit ?

   Réponse :
   En régime permanent (à $t = 0^-$), la bobine se comporte comme un fil et la résistance R est court-circuitée par l'interrupteur fermé. Ainsi, par loi des mailles :

   $$i(0^-) = \frac{E}{r}$$

   Il y a par ailleurs continuité du courant dans la bobine donc

   $$i(0^+) = i(0^-) = \frac{E}{r}$$

2. Déterminez $i(t)$ et tracez son allure. Que se passe-t-il si R devient très grande par rapport à r ?

   Réponse :
   Pour $t > 0$, l'interrupteur est ouvert et la loi des mailles sur le circuit donne :

   $$E = ri + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

   Soit, en introduisant $\tau = L/(r + R)$,

   $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{i}{\tau} = \frac{E}{L}$$

   Les solutions de l'équation différentielle s'écrivent alors (solution générale + solution particulière recherchée sous la forme d'une constante) :

$$i(t) = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau E}{L} = A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R+r}$$

Avec A une constante d'intégration. En utilisant par ailleurs la valeur du courant en $t = 0$ déterminée à la question précédente,

$$A.e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{\tau E}{L} = A.e^{-\frac{0}{\tau}} + \frac{E}{R+r} = \frac{E}{r} \quad \Rightarrow \quad A = \frac{E}{r} - \frac{E}{R+r} = \frac{RE}{r(R+r)}$$

On obtient finalement l'expression de $i(t)$:

$$i(t) = \frac{RE}{r(R+r)} e^{-\frac{t}{\tau}} + \frac{E}{R+r}$$

3. Déterminez $u(t)$ et tracez son allure. Que se passe-t-il si R devient très grande par rapport à r ?

   Réponse :
   On a simplement $u(t) = Ri(t)$ et si $R \to \infty$, $u(0^+) = \frac{RE}{r} \to \infty$. Une très grande tension apparaît aux bornes de l'interrupteur, cela peut conduire à l'apparition d'une étincelle (dite "étincelle de rupture") lors de l'ouverture d'un circuit inductif. Cela est à mettre en lien avec le fait qu'une bobine s'oppose à la modification du courant qui la traverse. En ouvrant le circuit, on impose une variation rapide du courant, ce qui se traduit, par loi de Faraday par une force électromotrice d'induction très élevée.

4. Finalement, que risque-t-on en enlevant la résistance R de ce montage ?

   Réponse :
   On peut obtenir une étincelle : une très force tension sera observée entre les deux branches de l'interrupteur ; au delà de $4\,\mathrm{MV/m}$, l'air peut en effet se ioniser et devenir conducteur.

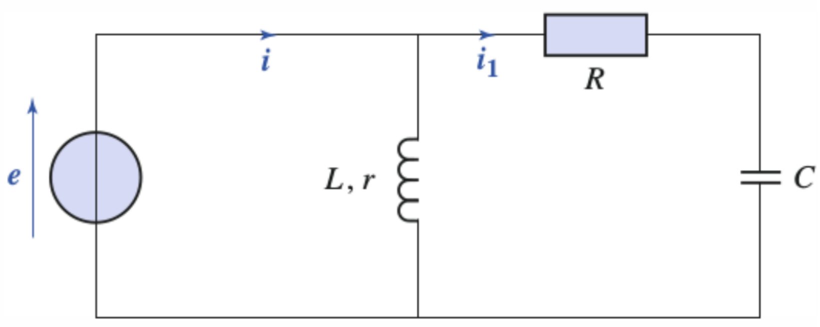
Sujet 2 – corrigé

I Question de cours

Présenter le circuit RC en charge sous un échelon de tension E (schéma et condition initiale), donner et démontrer l'équation différentielle sur u_C, donner la solution et la tracer. Indiquer sans le démontrer comment trouver la constante de temps et le régime permanent.

II Intensité débitée par un générateur de tension

On suppose qu'à $t = 0$ le condensateur est déchargé et qu'aucun courant ne traverse la bobine.



1. À quelle conditions sur R, r, L et C, l'intensité i traversant le générateur de tension du circuit suivant est-elle constante dans le temps ?

   Réponse :
   On appelle i_2 le courant tel que $i = i_1 + i_2$. En appliquant la loi des mailles à la maille de droite et celle de gauche, on trouve :
   $$e = L\frac{di_2}{dt} + ri_2 \quad ; \quad e = Ri_1 + u_c \quad \Rightarrow \quad 0 = R\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{C}.$$
   En utilisant la continuité de i_2 à cause de la bobine, on en déduit que :
   $$i_2 = \frac{e}{r}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right) \quad ; \quad \tau' = \frac{L}{r}.$$
   En utilisant la continité de la tension aux bornes du condensateur, on en déduit que :
   $$e = Ri_1(0^+) + 0 \quad \Rightarrow \quad i_1(0^+) = \frac{e}{R} \quad \Rightarrow \quad i_1 = \frac{e}{R}e^{-t/\tau} \quad ; \quad \tau = RC.$$
   Finalement
   $$i = i_1 + i_2 = \frac{e}{r}\left(1 - e^{-t/\tau'}\right) + \frac{e}{R}e^{-t/\tau}.$$
   Pour que i soit constante, il faut donc que :
   $$\tau = \tau' \quad ; \quad \frac{e}{r} = \frac{e}{R}.$$
   Finalement
   $$\boxed{r = R} \quad ; \quad \boxed{R^2LC = 1}.$$

2. Déterminer sa valeur.

   Réponse :
   On trouve :
   $$\boxed{i = \frac{e}{R}}.$$

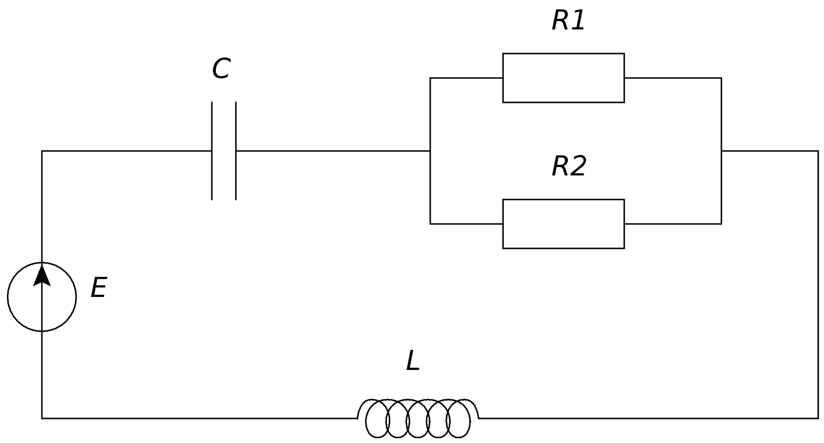
Sujet 3 – corrigé

I Question de cours

Présenter le circuit LC soumis à un échelon de tension descendant (schéma et condition initiale), donner et démontrer l'équation différentielle sur u_C, donner **sans démontrer** la solution et la tracer.

II Lois de Kirchhoff : circuit électrique dépendant du temps

On suppose que le générateur de tension fournit une tension qui dépend du temps : $E = E(t)$. Les intensités et les tensions dans le circuit dépendent donc également du temps. Dans le cas contraire, nous verrons dans un chapitre suivant que le courant ne pourrait pas circuler à cause du condensateur.



1. Flécher les tensions aux bornes des dipôles et les intensités dans les différentes branches du circuit de façon à ce que le générateur de tension soit en convention générateur et que les résistances, condensateur et bobine soient en convention récepteur. On appellera i_k et U_k l'intensité qui traverse la résistance R_k et la tension aux bornes de R_k. Pour le condensateur et la bobine, on appellera ces quantités respectivement U_C et i_C ou U_L et i_L.

   Réponse :

2. Que peut-on dire de i_C et i_L ?

   Réponse :
   $i_C = i_L$

3. En appliquant la loi des nœuds, trouver 2 équations. Sont-elles indépendantes ?

   Réponse :
   $i_C = i_1 + i_2$ et $i_L = i_1 + i_2$. Elles ne sont pas indépendantes puisque $i_C = i_L$.

4. En appliquant la loi des mailles, trouver 2 équations indépendantes.

   Réponse :
   $U_1 = U_2$ et $E = U_C + U_1 + U_L$.

5. En appliquant la loi d'Ohm, trouver 2 équations indépendantes.

   Réponse :
   $U_1 = R_1 i_1$ et $U_2 = R_2 i_2$.

6. En appliquant les loi des condensateurs et des bobines, trouver 2 équations indépendantes reliant i_C,U_C,i_L,U_L et certaines de leurs dérivées par rapport au temps.

   Réponse :
   $i_C = C\frac{dU_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di_C}{dt}$.

7. Dans ce circuit, quelles grandeurs sont inconnues ? A-t-on suffisamment d'équations pour les déterminer ?

   Réponse :
   Grandeurs inconnues : U_C, U_1, U_2, U_L, i_1, i_C, i_2.

   On a 7 équations.

8. Trouver l'équation différentielle vérifiée par i_C.

   Réponse :
   En utilisant une résistance équivalente, la loi des mailles devient :

   $$E = U_C + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_C + u_L.$$

   On dérive cette équation par rapport au temps :

   $$0 = \frac{i_C}{C} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\frac{di_C}{dt} + L\frac{d^2 i_C}{dt^2}.$$

9. Que se serait-il passé si le condensateur avait été fléché en convention générateur ?

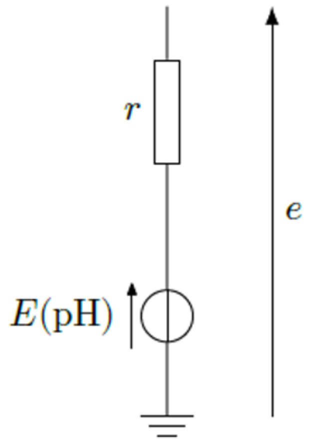
   Réponse :
   Il y aurait eu un signe moins dans la loi des condensateur et un signe moins dans la loi des mailles : l'équation finale aurait été la même.

Sujet 4 – corrigé

I Modélisation d'un pH-mètre : difficultés expérimentales de mesure

Remarque préalable : Aucune connaissance de chimie n'est nécessaire ici.

On se propose de modéliser un pH-mètre comme une association en série d'un générateur de tension idéale de force électromotrice E (qui est fonction du pH) avec une résistance électrique r, comme schématisé sur la figure ci-contre.



1. On souhaite mesurer la force électromotrice E du pH-mètre à l'aide d'un voltmètre de résistance interne $R_V = 1\,\mathrm{M\Omega}$. Il n'est, en pratique, pas possible d'accéder directement à la force électromotrice E. Le voltmètre mesure en fait e, la tension aux bornes du pH-mètre. Faire le schéma du montage, puis exprimer la tension mesurée e en fonction de E, R et R_V. Calculer numériquement la valeur de e en prenant $r = 10\,\mathrm{M\Omega}$ et $E = 0{,}20\,\mathrm{mV}$. Exprimer l'erreur relative $\epsilon = (E - e)/E$ en fonction de r et R_V uniquement. La calculer. Que pensez-vous de ce résultat ? Ce montage est-il concluant ?

   Réponse :
   On modélise le montage comme dans l'énoncé. Les résistances R_V et r sont en série. On cherche e connaissant E global. Un pont diviseur de tension est adapté :

   $$e = \frac{R_V}{r + R_V} E = \frac{1{,}0.10^6}{10.10^6 + 1{,}0.10^6} \times 0{,}20.10^{-3} \approx 0{,}018\,\mathrm{mV}$$

   Evaluons alors l'erreur relative :

   $$\varepsilon = \frac{E - e}{E} = \frac{E(1 - \frac{R_V}{r+R_V})}{E} = 1 - \frac{R_V}{r + R_V}$$

   Soit $\varepsilon = \frac{r}{r+R_V} = \frac{10}{11} \approx 0{,}91$

   On commet ici une erreur relative de 91%, ce qui est énorme ! L'écart entre la tension e mesusée et la valeur de la tension à vide E est énorme ! Le montage n'est pas concluant du tout !

2. Quelle valeur minimale de résistance interne du voltmètre R_V' aurait-il fallu avoir pour commettre une erreur relative inférieure à 10% ? Vous donnerez une expression littérale que vous calculerez ensuite.

   Réponse :
   L'erreur relative sur la mesure de E doit être inférieure à 10%. On veut donc que :

   $$\frac{E - e}{E} < 10 \Longleftrightarrow 1 - \frac{R_V'}{r + R_V'} < 0{,}10$$

Soit :

$$\frac{r + R'_V - R'_V}{r + R'_V} < 0{,}10$$

Ainsi : $\frac{r}{r+R_V{}'} < 0{,}10$

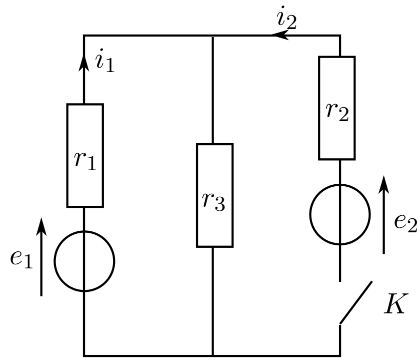
Ou encore : $r < 0{,}10\,(r + R_V{}') \Leftrightarrow r\,(1 - 0{,}10) < 0{,}10\;R'_V$

$\Leftrightarrow R'_V > 9\;r = 90\,\mathrm{M\Omega}$

Il aurait donc fallu prendre un voltmètre d'au moins 90 MΩ de résistance interne.

II Batterie tampon

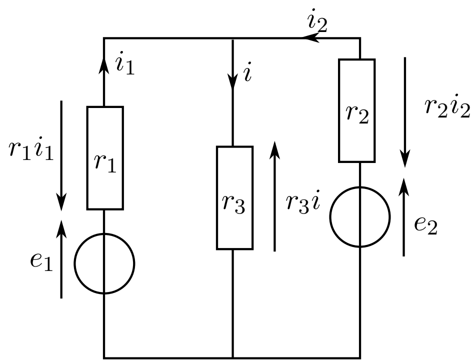
On donne $e_2 = 2\,\mathrm{V} = cte$, $r_2 = 0{,}2\,\Omega$, $r_3 = 50\,\Omega$. La tension e_1 décroît linéairement de $6\,\mathrm{V}$ à $5\,\mathrm{V}$ en $24\,\mathrm{h}$. La résistance r_1 est choisie de telle sorte que la fermeture de l'interrupteur K à $t = 0$ ne provoque aucun courant dans r_2.



1. Exprimer les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$. Le temps t sera exprimé en jour. En déduire la valeur de r_1.

Réponse :

On a deux mailles indépendantes, on peut donc écrire 2 équations indépendantes par la loi des mailles (on introduit les tensions $r_1 i_1$, $r_2 i_2$ et $r_3 i$).
On a deux nœuds, on peut donc écrire 1 équation indépendante par la loi de nœuds.
En tout, on aura 3 équations indépendantes pour 3 inconnues (i_1, i_2 et i).



Loi des mailles : $\begin{cases} e_1 - r_1 i_1 = r_3 i \\ e_2 - r_2 i_2 = r_3 i \end{cases}$

Loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

En remplaçant $i = i_1 + i_2$ dans les 2 premières équations, on trouve :

$$r_3(i_1 + i_2) = e_1 - r_1 i_1$$
$$r_3(i_1 + i_2) = e_2 - r_2 i_2$$

On a 2 équations avec 2 inconnues, on peut résoudre et on trouve :

$$\boxed{i_1 = \frac{e_1(r_2 + r_3) - r_3 e_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}}$$

$$\boxed{i_2 = \frac{e_2(r_1 + r_3) - r_3 e_1}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}}$$

Le problème est symétrique par inversion de e_1*,* r_1 *et* e_2*,* r_2*. On vérifie que l'expression de* i_1 *est obtenue à partir de celle de* i_2 *en changeant* e_1 *en* e_2 *et* r_1 *en* r_2*.*

La tension $e_1(t)$ décroit de 1 V en une journée. Avec t en jour et e_1 en volt, $e_1(t) = 6 - t$.

La résistance r_1 est telle que $i_2(t=0) = 0$. Dans l'expression de $i_2(t)$, le dénominateur ne pas être nul (une résistance est forcément positive). Le numérateur doit alors être nul :

$$e_2(r_1 + r_3) - r_3 e_1(t=0) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{r_1 = r_3\left(\frac{e_1(t=0)}{e_2} - 1\right) = 100\,\Omega}$$

2. Déterminer la diminution relative de l'intensité $i(t)$ qui traverse la résistance r_3 en un jour :
   - si K est ouvert
   - si K est fermé

   En déduire le rôle du générateur de tension e_2.

Réponse :

- si K est ouvert, on exprime $i = i_1$ (la branche contenant r_2 peut être enlevée). On applique la loi des mailles :
$$i(t) = \frac{e_1}{r_1 + r_3} = \frac{6-t}{150}$$
On peut retrouver ce résultat à partir de l'expression de $i_1(t)$. Pour cela, il faut éteindre la source 2, donc prendre $e_2 = 0$. De plus, il faut que la branche se comporte comme un interrupteur ouvert. Pour cela, on fait tendre r_2 vers l'infini. L'expression devient :
$$i = \lim_{r_2\to\infty} i_1(t) = \lim_{r_2\to\infty} \frac{r_2 e_1}{r_2 r_1 + r_2 r_3} = \frac{e_1}{r_1 + r_3}$$
On exprime la diminution relative au bout d'un jour :
$$\boxed{\Delta i/i = \frac{i(0) - i(1)}{i(0)} = 1/6 = 16{,}7\%}$$
- si K est fermé
$$i(t) = i_1 + i_2 = \frac{e_1 r_2 + r_1 e_2}{r_1 r_2 + r_1 r_3 + r_2 r_3}$$
$$\boxed{\Delta i/i = \frac{r_2}{6r_2 + 2r_1} \sim 1\%}$$

Le générateur de tension e_2 permet de stabiliser le courant i malgré la variation importante de e_1.

Le générateur 2 s'appelle la **"batterie tampon"**.