

Correction du DS

/43 E1 Molécules de LEWIS (D'après Mines PC 2015 et CCINP MP 2020)

I/A Chimie atmosphérique

/4 1

▷ Décompte des électrons :

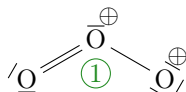
→ O : 4^e colonne du bloc p donc 6 électrons de valence ①→ Total : $3 \times 6 = 18$ électrons, 9 doublets. ①

▷ Méthode générale :

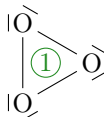
→ **Squelette** : immédiat car la molécule est linéaire.→ **Recherche de liaisons multiples** : le squelette implique au moins 2 liaisons, soit 7 doublets restants à placer. **Si tous les doublets restant étaient non liants**, pour respecter l'octet il en faudrait 3 sur les atomes du bout et 2 sur l'atome du milieu, soit $2 \times 3 + 2 = 8$: c'est un de plus que disponible. Il y a donc **une liaison double**.→ **Recherche des charges formelles** : ①

- Atome de gauche : il a 6 électrons qui l'entourent, contre 6 dans son état isolé : pas de charge.
- Atome central : il a 5 électrons qui l'entourent, donc une charge \oplus .
- Atome de droite : il a 7 électrons qui l'entourent, donc une charge \ominus .

▷ Conclusion :



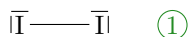
/1 2 Avec le même raisonnement, on trouve, dans le cas où la molécule serait cyclique :

/1 3 On remarque que les angles dans la molécule cyclique (60°) sont beaucoup plus petit que ceux de la molécule coudée. Ces angles impliquent une contrainte trop forte due à la répulsion des doublets ① : la molécule cyclique n'existe pas./2 4 L'oxygène possède 6 électrons de valence, un atome d'hydrogène en possède 1. La molécule de H_2O_2 possède donc 7 doublets ①. Les atomes d'oxygène doivent respecter la règle de l'octet alors que ceux d'hydrogène doivent respecter la règle du duet. À cause de cela, la seule géométrie possible est que les 2 atomes d'oxygène soient reliés entre eux. On trouve alors :

I/B La bétadine

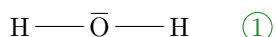
/3 5 Il appartient à la famille des **halogènes** ①. Il possède donc **7 électrons de valence** ①. On compte son nombre d'électrons : il en faut 18 pour compléter les 3 premières périodes, puis encore 18 (2 bloc s, 10 bloc p) pour la 4^e, et encore 17 pour arriver jusqu'à l'iode. On a donc $Z_I = 18 + 18 + 17 = 53$ ①.

/2 6 Chaque atome d'iode possède 7 électrons de valence, donc le molécule de LEWIS du diiode possède 7 doublets ① d'électron. De plus, chaque atome d'iode doit vérifier la règle de l'octet. On trouve :



I/C L'eau

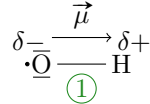
/1 7



/7 [8] L'électronégativité traduit la tendance d'un élément à attirer les électrons (1) d'une liaison chimique : plus χ est grand, plus un élément attire à lui les électrons.

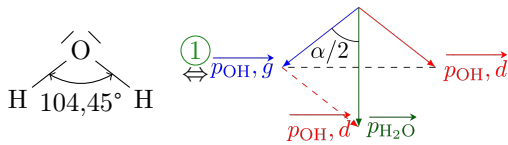
- ◇ Elle augmente de bas en haut (1) dans une colonne. En effet, les électrons des édifices les plus grands (en bas du tableau) sont moins attirés par le noyau puisque plus éloignés (1) et écrantés par les électrons de cœur.
- ◇ Elle augmente de gauche à droite (1) dans une ligne. En effet, les éléments **à gauche perdent** facilement leurs électrons pour atteindre la configuration du gaz noble le plus proche, alors que ceux **à droite gagnent** facilement des électrons. (1)

Ainsi dans O-H, comme $\chi_O > \chi_H$ (1), on a un moment dipolaire de O vers H :



[9] a - Dans le modèle VSEPR, la **répulsion engendrée par un doublet non liant est plus importante** (1) que celle liée aux électrons d'une liaison. L'atome d'oxygène est de type AX_2E_2 dans la molécule d'eau, et non AX_4E_0 . L'angle de valence est donc plus petit que celui existant dans un tétraèdre régulier. (1)

/3 b



On trouve $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mu_{H_2O}/2}{\mu_{OH}}$

$$\Leftrightarrow \mu_{H_2O} \stackrel{(1)}{=} 2\mu_{OH} \cos(\alpha/2) \stackrel{(1)}{=} 1,85 \text{ D}$$

/4 c -

On a $\|\vec{\mu}_{O-H}\| \stackrel{(1)}{=} q\ell_{O-H} \Leftrightarrow q = \frac{\mu_{O-H}}{\ell_{O-H}}$ avec $\begin{cases} \mu_{O-H} = 1,51 \text{ D} = 5,03 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m} \\ \ell_{O-H} = 95,84 \times 10^{-12} \text{ m} \end{cases}$

A.N. : $q \stackrel{(1)}{=} 5,24 \times 10^{-20} \text{ C} \stackrel{(1)}{=} 0,33e$

Par définition,

$$\delta \stackrel{(1)}{=} \frac{q}{e} \Leftrightarrow \delta = 0,33$$

/6 d - Une **liaison hydrogène** s'établit entre un atome d'**hydrogène porté par un atome très électronégatif** (1) (N, O ou F) et un autre atome B également très électronégatif, porteur d'au moins un **doublet non-liant** (1) et neutre.

L'eau est un solvant **polaire et protique** (1). De plus il est **très dispersant** (1) car ε_r est élevée.

L'eau est donc miscible (1) avec des solvants polaires et protiques, et solubilise (1) fortement tous les solides ioniques.

/2 [10] a - Les interactions de VAN DER WAALS sont des interactions attractives (1) dues à la force électrostatique intermoléculaires.

On peut distinguer les contributions des effets KEESOM, DEBYE et LONDON selon si ces interactions ont lieu entre deux molécules polaires, 1 polaire 1 polarisable, ou deux molécules polarisables respectivement. (1)

/3 b -

$$\stackrel{(1)}{E_{\text{covalente}}} \gg \stackrel{(1)}{E_{\text{LH}}} \gg \stackrel{(1)}{E_{\text{VdW}}} \\ \approx 500 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} \quad \approx 20 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} \quad \approx 1 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$$

/2 c - Le diiode est une molécule **apolaire et aprotique** (1). Il est donc peu soluble dans l'eau (1).

Le cyclohexane étant une molécule **apolaire et aprotique**, le diiode ayant les mêmes caractéristiques, il sera soluble dans le cyclohexane (1).

/21 E2 Toboggans (D'après CCS TSI 2018)

/2 [1]

$$h = z_{\max} \Leftrightarrow h = \alpha \times n \times 2\pi \Leftrightarrow \alpha \stackrel{(1)}{=} \frac{h}{2\pi n} \Leftrightarrow \alpha \stackrel{(1)}{=} 0,28 \text{ m}\cdot\text{rad}^{-1}$$

/2 [2] L'énergie doit diminuer quand z augmente (1) (de haut en bas), donc

$$\mathcal{E}_{p,p} \stackrel{(1)}{=} -mgz + \text{cte} \stackrel{(1)}{}$$

/4 [3] Les frottements sont négligés, donc l'énergie mécanique \mathcal{E}_m se conserve ① :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m,\text{init}} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{E}_{m,\text{fin}} \\ \text{Or} \quad \mathcal{E}_{m,\text{init}} &= \frac{1}{2}mv_{\text{init}}^2 - mgz_{\text{init}} = 0 + 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{fin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 - mgh \\ &\Leftrightarrow v_{\text{fin}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{2gh} \end{aligned}$$

/2 [4] Le vecteur position est (avec les notations habituelles) :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\text{OM}} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} R\vec{e}_r + z\vec{e}_z \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OM}} = R\vec{e}_r + \alpha\theta\vec{e}_z \\ &\Leftrightarrow \vec{v} \stackrel{\textcircled{1}}{=} R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \alpha\dot{\theta}\vec{e}_z \end{aligned}$$

/2 [5]

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}mv^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2}m[(R\dot{\theta})^2 + (\alpha\dot{\theta})^2] \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = -mgz + K \stackrel{\textcircled{1}}{=} -mg\alpha\theta + K. \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m[(R\dot{\theta})^2 + (\alpha\dot{\theta})^2] - mg\alpha\theta + K \end{aligned}$$

/6 [6] Puisqu'il n'y a pas de frottement, l'énergie mécanique se conserve dans le temps, donc $d\mathcal{E}_m/dt = 0$ ① :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 &\Leftrightarrow m[(R^2\ddot{\theta}) + (\alpha^2\ddot{\theta})] - mg\alpha\dot{\theta} = 0 \\ &\Leftrightarrow (R^2 + \alpha^2)\ddot{\theta} - g\alpha \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0} \right\} \dot{\theta} \neq 0 \text{ constamment}$$

$$\text{On trouve :} \quad \ddot{\theta} = \frac{g\alpha}{R^2 + \alpha^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{g\alpha}{R^2 + \alpha^2}t + K_1 \Rightarrow \theta(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{g\alpha}{2(R^2 + \alpha^2)}t^2 + K_1t + K_2.$$

On peut trouver les valeurs des constantes d'intégrations en utilisant les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \dot{\theta}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 &\Rightarrow K_1 = K_2 = 0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \\ &\Rightarrow \theta(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{g\alpha}{2(R^2 + \alpha^2)}t^2. \end{aligned}$$

/3 [7]

En inversant la relation précédente :

$$t \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{2\theta(R^2 + \alpha^2)}{g\alpha}}$$

La valeur de θ lorsque la baigneuse sort du toboggan est $\theta_{\text{max}} = 2\pi \times n$. On a alors :

$$t_f \stackrel{\textcircled{1}}{=} t_m + \sqrt{\frac{4n\pi(R^2 + \alpha^2)}{g\alpha}} \Leftrightarrow t_f \stackrel{\textcircled{1}}{=} 11,5 \text{ s} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = 2,3 \\ R = 2,0 \text{ m} \\ \alpha = 0,28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$$

/45 P1 Le haut-parleur électrostatique (D'après Centrale 2013 TSI)

I/A Force exercée sur la membrane

/2 [1]

$$Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} CU \quad \text{donc} \quad Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{US\epsilon_0}{e+z}$$

/3 [2]

$$\vec{F}_e \stackrel{\textcircled{1}}{=} -Q\vec{E} = -\frac{Q^2}{2S\epsilon_0}\vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{F} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{S\epsilon_0 U^2}{2(e+z)^2}\vec{u}_z$$

La force est attractive ① car orientée selon $-\vec{u}_z$.

I/B Étude énergétique

- /2 [3] Une force est dite conservative si **son travail ne dépend pas du chemin suivi** ①, c'est-à-dire qu'elle dérive d'une énergie potentielle :

$$\delta W(\vec{F}_e) \stackrel{\text{①}}{=} d\mathcal{E}_p$$

- /6 [4] On calcule le travail élémentaire $\delta W(\vec{F}_e) \stackrel{\text{①}}{=} \vec{F}_e \cdot d\vec{OM}$, avec $d\vec{OM} \stackrel{\text{①}}{=} dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$:

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F}_e) &= -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)^2} dz \stackrel{\text{①}}{=} -d\left(-\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)}\right) = -d\mathcal{E}_{p,e} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,e}(z) \stackrel{\text{①}}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)} + \underset{=cte}{A} \quad \text{or} \quad \mathcal{E}_{p,e}(0) = 0 \Rightarrow A \stackrel{\text{①}}{=} \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2e} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,e}(z) \stackrel{\text{①}}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2} \left(\frac{1}{e+z} - \frac{1}{e} \right) \end{aligned}$$

- /3 [5] La membrane, étudiée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, est soumise :

- ① \diamond à la force de rappel élastique qui est une force conservative,
- ① \diamond à la force électrique qui est une force conservative.

Donc le système est conservatif ①.

- /2 [6]

C'est la somme ① de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,el}$ et de l'énergie potentielle électrique. Comme l'énergie potentielle est nulle en $z = 0$, on en déduit que la constante de $\mathcal{E}_{p,el}$ est nulle, et ainsi :

$$\mathcal{E}_p(z) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{1}{2}kz^2 - \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2} \left(\frac{1}{e+z} - \frac{1}{e} \right)$$

- /3 [7]

Le système est un système conservatif à un degré de liberté, donc $\mathcal{E}_m \stackrel{\text{①}}{=} \mathcal{E}_c(z) + \mathcal{E}_p(z) \stackrel{\text{①}}{=} cte$. Or $\mathcal{E}_c \geq 0$, d'où les valeurs possibles de z vérifient

$$\mathcal{E}_p(z) \stackrel{\text{①}}{\leq} \mathcal{E}_m$$

- /3 [8] Valeurs extrêmes. Les positions d'équilibre z_0 vérifient

$$\begin{aligned} \diamond f(-e) &= 0 \\ \diamond f(0) &= 0 \quad \frac{d\mathcal{E}_p}{dz}(z_0) \stackrel{\text{①}}{=} 0 \Leftrightarrow kz_0 + \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z_0)^2} = 0 \Leftrightarrow z_0(e+z_0)^2 \end{aligned}$$

Étude de la dérivée :

- /6 [9]

- $\diamond f'(z) = (e+z)^2 + 2z(e+z) \stackrel{\text{①}}{=} (e+z)(3z+e)$
- $\diamond f'(z) = 0$ si $z = -e$ ou $z = -e/3$ ①
- \diamond en $z = -e$: maximum local de $f(z)$
- \diamond en $z = -e/3$: minimum de $f(z)$ ①

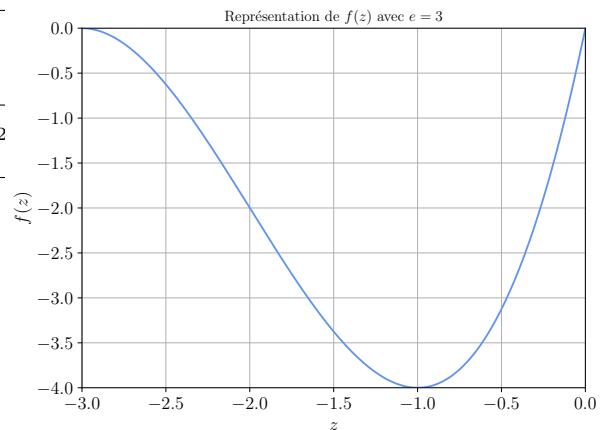


FIGURE 6.1 – Représentation de $f(z)$.

La fonction f admet un minimum en $z_m = -e/3$, alors $f(z_m) \stackrel{\text{①}}{=} -4e^3/27$.

On en déduit que pour $z \in [-e, 0]$, $f(z) \in [-4e^3/27, 0]$. Il faut donc que $A \in [-4e^3/27, 0]$:

$$-4e^3/27 \stackrel{\text{①}}{\leq} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2k} \leq 0 \quad \text{donc} \quad U \stackrel{\text{①}}{\leq} \sqrt{\frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}} = U_m$$

/1 [10] D'après la réponse à la question précédente, $z_1 \underline{=} z_2 = -e/3$.

/4 [11] On étudie le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en z_0 :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2} \underline{=} k - \frac{S \varepsilon_0 U^2}{(e+z)^3} = k \left(1 - \frac{S \varepsilon_0 U^2}{k(e+z)^3} \right)$$

Or la position d'équilibre vérifie $\frac{S \varepsilon_0 U^2}{k} = -2z_0(e+z_0)^2$, donc

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}(z_0) \underline{=} k \left(1 + \frac{2z_0}{e+z_0} \right)$$

Si la position d'équilibre z_0 est stable, alors $\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}(z_0) \underline{>} 0$, soit

$$1 + \frac{2z_0}{e+z_0} > 0 \Leftrightarrow z_0 \underline{>} -e/3$$

/3 [12]

$$U \underline{=} \sqrt{-z_0(e+z_0)^2 \cdot \frac{2k}{S \varepsilon_0}} \Leftrightarrow U \underline{=} 1,1 \text{ kV} \quad \text{et} \quad U_m = \sqrt{\frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}} \Leftrightarrow U_m \underline{=} 4,3 \text{ kV}$$

I/C Dynamique

/4 [13] On applique la loi de la quantité de mouvement à la membrane, projetée selon $\vec{u}_z : m \frac{d^2 z}{dt^2} = F(z) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}$, (ou la conservation de l'énergie mécanique).

On effectue un développement limité $\underline{=}$ autour de $z_0 : m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}(z_0) - (z-z_0) \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}(z_0)$

/3 [14]

$$\begin{aligned} \omega_0 \underline{=} \frac{2\pi}{T_0} \\ \Leftrightarrow T_0 &= 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \left(\frac{e+z_0}{e+3z_0} \right)} \\ \Leftrightarrow T_0 \underline{=} 2\pi \sqrt{\frac{\rho a S}{k} \left(\frac{e+z_0}{e+3z_0} \right)} \end{aligned} \quad \Leftrightarrow T_0 \underline{=} 10,4 \text{ ms} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ a = 20 \times 10^{-6} \text{ m} \\ S = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\ k = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \\ e = 3 \times 10^{-3} \text{ m} \\ z_0 = -\frac{e}{100} = -3 \times 10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$

/91 P2 Lentillage magnétique (D'après Banque PT 2017 et capes 2008)

/3 [1] La diffraction est un phénomène ondulatoire se produisant lors de l'interaction d'une onde de longueur d'onde λ avec un objet de dimension $\underline{=}$ comparable à λ . La diffraction d'une onde engendre un étirement spatial $\underline{=}$ de l'onde. La résolution d'un microscope optique est donc de l'ordre de la longueur d'onde du visible, soit $\underline{=}$ [400 ; 800] nm.

Les trois parties sont indépendantes.

II/A Aspect énergétique

/5 [?]

Le champ électrique est orienté selon les potentiels

décroissants $\underline{=}$, donc $\vec{E} \underline{=} -E_0 \vec{u}_z$.

La force électrique s'exerçant sur l'électron s'écrit $\vec{F}_e \underline{=} -e\vec{E} = eE_0 \vec{u}_z$. Cette force est orientée selon $+\vec{u}_z$, donc les électrons doivent être émis depuis l'armature 2. $\underline{=}$

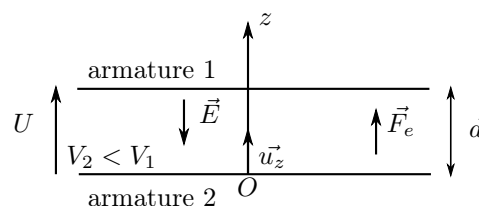


FIGURE 6.2 – Schéma complété $\underline{=}$

/3 [3]

$$\begin{aligned}\delta W(\vec{F}_e) &\stackrel{(1)}{=} \vec{F}_e \cdot d\vec{OM} \stackrel{(1)}{=} -d\mathcal{E}_p \\ &\Leftrightarrow eE_0 dz = -d\mathcal{E}_p \\ &\Leftrightarrow -d(-eE_0 z) = -d\mathcal{E}_p\end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{E}_p \stackrel{(1)}{=} -eE_0 z + \text{cte}$$

$$\begin{aligned}\text{Or,} \quad \mathcal{E}_p(z) &\stackrel{(1)}{=} -eV(z) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_p(d) - \mathcal{E}_p(0) &= -e(V(d) - V(0)) = -eU\end{aligned}$$

$$\text{Or} \quad \mathcal{E}_p(d) - \mathcal{E}_p(0) = -eE_0 d \quad (1)$$

$$\text{Donc} \quad E_0 = U/d \Rightarrow \vec{E} \stackrel{(1)}{=} -\frac{U}{d} \vec{u}_z$$

/7 [4] L'électron, assimilable à un point matériel M de masse m , est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen (1). Il n'est soumis qu'à la force électrique (on néglige le poids (1)) qui est une force conservative (1). Donc $\mathcal{E}_m = \text{cte}$ (1). Ainsi entre $z = 0$ et $z = d$:

$$\mathcal{E}_m(0) = -eV(0) \stackrel{(1)}{\text{et}} \mathcal{E}_m(d) = -eV(d) + \frac{1}{2}mv^2$$

$$\Rightarrow v \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \text{car} \quad U = V(d) - V(0)$$

$$\text{A.N. : } v \stackrel{(1)}{=} 2 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

Donc la particule est relativiste.

/2 [5] Pour une particule non-relativiste, $p = mv$ (1), donc $\lambda = 3,5 \times 10^{-12} \text{ m}$ (1).

II/B Déflecteur magnétique

/4 [6] ♦ **Système** : électron, assimilé à un point matériel de masse m et de charge q , référentiel du laboratoire supposé galiléen. (1)

♦ **BDF** :Poids négligeable (1) devant \vec{F} Force de LORENTZ $\vec{F} \stackrel{(1)}{=} -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

À l'intérieur du déflecteur, seule la force magnétique $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ existe. Ainsi, d'après le TPC,

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \stackrel{(1)}{=} -e \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}}_{=0} \stackrel{(1)}{=} 0 \quad \text{soit} \quad mv \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} \stackrel{(1)}{=} 0}$$

Ainsi la trajectoire est uniforme.

/4 [7]

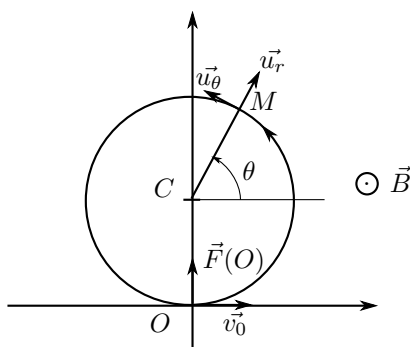


FIGURE 6.3 - Schéma (2)

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= R \vec{u}_r \\ \Rightarrow \vec{v} &= R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \Rightarrow \vec{a} &\stackrel{(1)}{=} R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r \\ &= 0 \text{ car uniforme} \\ \Leftrightarrow \vec{a} &\stackrel{(1)}{=} -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r\end{aligned}$$

/3 [8] PFD :

$$\begin{aligned}m \vec{a} &\stackrel{(1)}{=} \vec{F}_m \\ \Leftrightarrow -\frac{mv_0^2}{R} \vec{u}_r &= -qv_0 \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_z \stackrel{(1)}{=} -ev_0 B \vec{u}_r \\ \Leftrightarrow R &\stackrel{(1)}{=} \frac{mv_0}{eB}\end{aligned}$$

II/C

Lentille magnétique

- /3 [9] La dernière hypothèse fait penser aux conditions de GAUSS ① consistant à ne considérer que des rayons paraxiaux (proches de l'axe optique et faiblement inclinés par rapport à celui-ci). ①

Dans ces conditions, il y a stigmatisme et aplanétisme approchés. ①

- /5 [10] L'ordre de grandeur de la force magnétique est $F_m = evB$ ①. Le poids s'exprime $P = mg$ ①. On veut que $P/F_m \ll 1$:

$$\frac{mg}{evB} \ll 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{mg}{B} \gg \frac{ev}{B}}$$

$$\text{A.N. : } B \gg 5 \times 10^{-19} \text{ T}$$

Il faut donc que B soit supérieur à $5 \times 10^{-19} \text{ T}$, ce qui est une valeur extrêmement faible. Donc il est raisonnable de négliger le poids. ①

- /4 [11] On donne le repérage en coordonnées cylindriques :

$$\overrightarrow{OM} \stackrel{①}{=} r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{v} \stackrel{①}{=} \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{a} \stackrel{①}{=} (\ddot{r} - r(\dot{\theta})^2) \vec{e}_r + (r\ddot{\theta} + 2\dot{r}\dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$$

On remarque que l'accélération orthoradiale peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] \stackrel{①}{=} \frac{1}{r} (2r\dot{r}\dot{\theta} + r^2\ddot{\theta}) = 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}$$

- /6 [12] On exprime la force de Lorentz dans la base cylindrique :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B} = -e \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r\dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \\ 0 \\ B_z(0,z) \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} r\dot{\theta}B_z(0,z) \stackrel{①}{=} \\ -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \dot{z} - \dot{r}B_z(0,z) \stackrel{①}{=} \\ -r\dot{\theta} \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \right) \stackrel{①}{=} \end{pmatrix}$$

En projetant le PFD dans la base cylindrique, on obtient les équations :

$$\frac{d^2r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 \stackrel{①}{=} -\frac{e}{m} r \frac{d\theta}{dt} B_z(0,z) \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] \stackrel{①}{=} \frac{e}{m} r \left[\frac{dr}{dt} B_z(0,z) + \frac{r}{2} \frac{dz}{dt} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \right] \quad (6.2)$$

$$\frac{d^2z}{dt^2} \stackrel{①}{=} -\frac{e}{2m} r^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \quad (6.3)$$

- /3 [13] Le second membre de l'équation (6.2) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{e}{2m} \frac{d}{dt} [r^2 B_z(0,z)] &= \frac{e}{2m} \left[2r\dot{r}B_z(0,z) + r^2 \dot{z} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \right] \\ &\stackrel{①}{=} \frac{e}{m} r \left[\frac{dr}{dt} B_z(0,z) + \frac{r}{2} \frac{dz}{dt} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \right] \end{aligned}$$

Par intégration de l'équation (6.2), $r^2 \frac{d\theta}{dt} \stackrel{①}{=} \frac{e}{2m} r^2 B_z(0,z) + \text{cte}$

Or $r(t=0) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0$ ①

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} B_z(0,z)}$$

- /6 [14] Par intégration de l'équation (6.3), $\frac{dz}{dt} = \text{cte} = v_0 \cos(\alpha) \stackrel{①}{\approx} v_0$. Par l'équation (6.1), en remplaçant $\dot{\theta}$ par son expression :

$$\ddot{r} - r \frac{e^2}{4m^2} B_z^2(0,z) \stackrel{①}{=} -\frac{e}{m} r \times \frac{e}{2m} B_z(0,z) \times B_z(0,z) \Leftrightarrow \ddot{r} + r \frac{e^2}{4m^2} B_z^2(0,z) \stackrel{①}{=} 0$$

Or

$$\frac{dr}{dt} \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} \approx v_0 \frac{dr}{dz}$$

$$\Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} \approx v_0 \frac{d^2 r}{dz^2} \frac{dz}{dt} \approx v_0^2 \frac{d^2 r}{dz^2}$$

Ainsi

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{e^2}{4m^2 v_0^2} r B_z^2(0, z) = 0$$

/4 [15] D'après l'équation (??), $\frac{d^2 r}{dz^2} < 0$ ①, donc la courbe $r(z)$ est forcément concave ①. Cette constatation est en accord avec la figure de gauche. ①

On constate que les courbes $r(z)$ s'annulent en un point de l'axe Oz , avec $z > 0$. Ce point P' est le conjugué du point P ①. Donc le système joue bien le rôle d'une lentille.

/2 [16] En dehors de la zone de champ magnétique, l'électron n'est soumis qu'au poids qui est négligeable devant tout éventuel résidu de champ magnétique, donc à aucune force ①. Donc d'après le principe d'inertie, il est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme. ①

/6 [17]

$$\tan(\alpha) \stackrel{①}{=} -\frac{r_0}{OP} \approx \alpha \stackrel{①}{=} \frac{dr}{dz}(-z_0) \quad \text{et} \quad \alpha' > 0 \Rightarrow \tan(\alpha') \stackrel{①}{=} -\frac{r_0}{OP'} \stackrel{①}{=} \frac{dr}{dz}(z_0)$$

/7 [18]

$$\frac{1}{OP'} - \frac{1}{OP} \stackrel{①}{=} \frac{-1}{r_0} (\alpha' - \alpha)$$

Or

$$\alpha' - \alpha = \frac{dr}{dz}(z_0) - \frac{dr}{dz}(-z_0) \stackrel{①}{=} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{d^2 r}{dz^2} dz$$

De plus

$$\int_{-z_0}^{z_0} \frac{d^2 r}{dz^2} dz \stackrel{①}{=} -\frac{e^2 r_0}{4m^2 v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0, z) dz$$

Ainsi

$$-r_0 \left(\frac{1}{OP'} - \frac{1}{OP} \right) = -\frac{e^2 r_0}{4m^2 v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0, z) dz$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{OP'} - \frac{1}{OP} \stackrel{①}{=} \frac{e^2}{4m^2 v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0, z) dz$$

On pose alors la distance focale

$$\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4m^2 v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0, z) dz$$

/4 [19]

$$\frac{d\theta}{dt} \stackrel{①}{=} \frac{d\theta}{dz} \frac{dz}{dt} \approx \frac{d\theta}{dz} v_0 \quad \text{donc} \quad \frac{d\theta}{dz} \stackrel{①}{=} \frac{1}{v_0} \frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2mv_0} B_z(0, z)$$

On intègre par rapport à z :

$$\Delta\theta \stackrel{①}{=} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{d\theta}{dz} dz \stackrel{①}{=} \frac{e}{2mv_0} \int_{-z_0}^{z_0} B_z(0, z) dz$$

/2 [20] $f' > 0$ ①, donc la lentille est convergente ①.

/2 [21] Pour diminuer f' , il faut augmenter $aB_0^2 = \frac{N^2 I^2}{a}$. On peut augmenter l'intensité I ①, ou diminuer le rayon a ① des spires.

/2 [22]

$$f' \stackrel{①}{=} 3,4 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \Delta\theta \stackrel{①}{=} 1 \text{ rad} = 57^\circ$$

/4 [23] Les électrons sont des particules chargées ① pouvant interagir entre eux par l'interaction électromagnétique. Ce n'est pas le cas des photons ① qui sont des particules non chargées.

La répulsion ① entre les électrons rend la focalisation du faisceau électronique plus difficile. Cet effet est d'autant plus important ① que le faisceau électronique est dense.