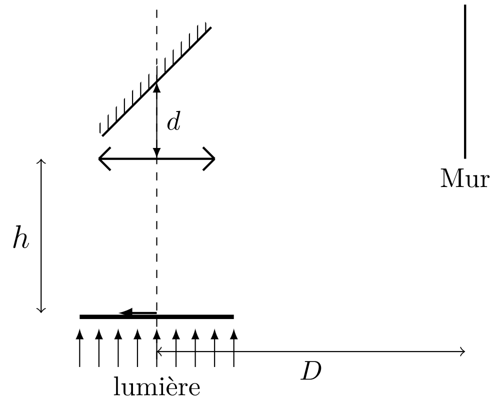
Sujet 1 – corrigé

I Étude d'un rétroprojecteur

Un rétroprojecteur est un ensemble lentille-miroir, avec un miroir plan incliné à 45° par rapport à la lentille. L'ensemble lentille-miroir est réglable en hauteur (h). On étudie un rétroprojecteur dont la lentille a une vergence de $2{,}0\,\delta$, avec une distance lentille-miroir $d = 10\,\mathrm{cm}$.
On désire projeter un objet transparent AB sur un écran placé à $D = 3{,}0\,\mathrm{m}$ de l'axe optique de la lentille.



1. Déterminer la distance h permettant d'obtenir une image nette sur l'écran.

Réponse :
On a $\overline{\mathrm{AB}} \xrightarrow[\mathrm{O}]{\mathcal{L}} \overline{\mathrm{A_1B_1}} \xrightarrow[\mathrm{H}]{M} \overline{\mathrm{A'B'}}$, avec H le point d'intersection entre le miroir plan et l'axe optique de la lentille. L'image finale A' donnée par le miroir plan est telle que

$$\boxed{\overline{\mathrm{HA'}} = \overline{\mathrm{HA_1}} = D}$$

On a donc pour la lentille

$$\boxed{\begin{aligned} & \overline{\mathrm{OA_1}} = \overline{\mathrm{OH}} + \overline{\mathrm{HA_1}} \\ \Leftrightarrow\ & \overline{\mathrm{OA_1}} = d + D \end{aligned}}$$

On utilise la relation de conjugaison des lentilles minces en nommant V la vergence de la lentille :

$$V = \frac{1}{d+D} - \frac{1}{-h} \Leftrightarrow \boxed{h = \frac{d+D}{V(d+D)-d}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} d & = & 10 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \\ D & = & 3{,}0\,\mathrm{m} \\ V & = & 2{,}0\,\mathrm{m^{-1}} \end{array} \right.$$

Et l'application numérique donne

$$\underline{h = 60\,\mathrm{cm}}$$

2. Calculer le grandissement.

Réponse :
Le miroir plan a un grandissement de 1, donc le grandissement du système est celui de la lentille : on a $\gamma = \dfrac{\overline{\mathrm{A_1B_1}}}{\overline{\mathrm{AB}}} = \dfrac{\overline{\mathrm{OA_1}}}{\overline{\mathrm{OA}}}$, soit

$$\boxed{\begin{aligned} \gamma &= \frac{d+D}{-h} \\ \gamma &= -5{,}2 \end{aligned}}$$

Khôlles MPSI3 – semaine 2

Sujet 2 – corrigé

I Grenouille intelligente

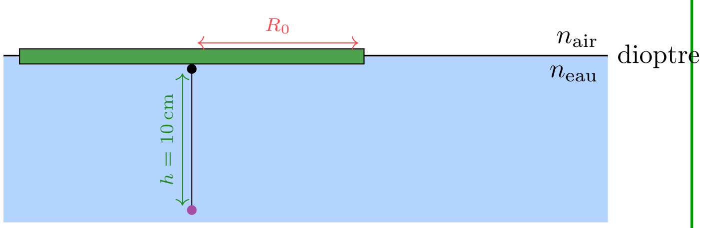
Pour se cacher des prédateurs, une grenouille s'est accrochée sous un nénuphar qui flotte sur l'étang. La grenouille a une hauteur $h = 10\,\mathrm{cm}$ et le nénuphar un rayon R et une épaisseur très faible.

1. Quel doit être le rayon minimal R_0 du nénuphar pour que les pieds de la grenouille ne soient pas visibles par un prédateur situé en-dehors de l'eau?

Réponse :

Données

Pour une hauteur de grenouille fixée, il y a une taille de nénuphar permettant à tous les rayons partant de la grenouille de ne pas traverser le dioptre.



But à atteindre

Origine physique de ce phénomène et traduction mathématique.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

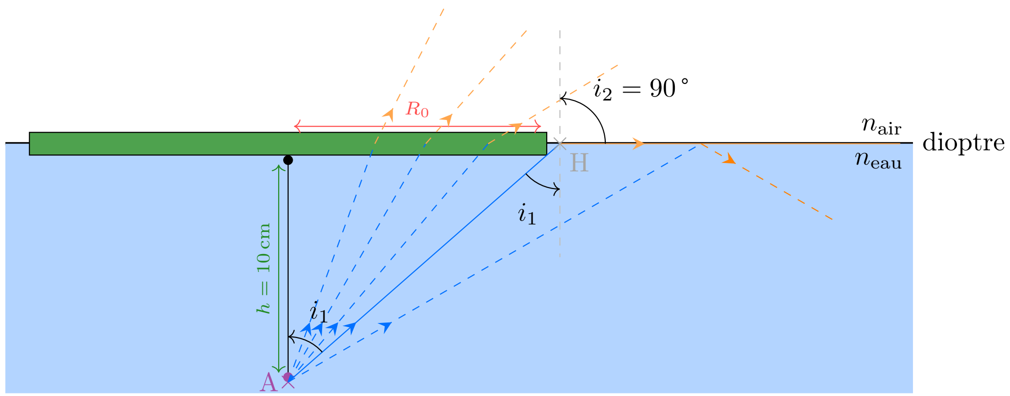
et angle limite de réfraction, tel que

$$n_1 \sin i_\ell = n_2 \sin 90° = n_2$$

qui indique que pour $n_1 > n_2$, il y a un angle d'incidence à partir duquel il n'y a pas de rayon réfracté (les rayons réfractés font un angle de 90° avec la normale et sont donc parallèles au dioptre).

Application

Pour que les pieds de la grenouille ne soient pas visibles par un prédateur situé en-dehors de l'eau, c'est-à-dire au-dessus du dioptre, il faut simplement qu'il n'y ait pas de rayon partant de ses pieds et qui puissent sortir de l'eau : il faut que tous les rayons avec un angle d'incidence plus faible que cet angle limite soient bloqués par le nénuphar. C'est possible puisqu'on est dans une situation où le rayon passe dans un milieu **moins réfringent**, i.e. $n_2 < n_1$. En effet, dans cette situation il y a une inclinaison du rayon incident qui implique que le rayon émergent est parallèle à la surface, et tous les rayons au-delà de cet angle limite sont tous réfléchis. Un beau, grand schéma avec toutes les données reportées dessus mène naturellement à l'utilisation de formules trigonométriques de 4$^{\mathrm{e}}$.



On voit ici qu'une simple fonction tan permet d'exprimer R_0 :

$$\boxed{\tan i_1 = \frac{R_0}{h}} \tag{2.1}$$

Seulement on n'a pas encore la valeur de i_1. Or, on a déterminé que pour fonctionner l'astuce de la grenouille est d'avoir $i_1 = i_\ell$, et d'après le cours :

$$n_{eau} \sin i_\ell = n_{air} \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow i_\ell = \arcsin \frac{n_{air}}{n_{eau}} \tag{2.3}$$

On peut donc écrire, avec 2.1 et 2.3 :

$$\boxed{R_0 = h \times \tan\left(\arcsin \frac{n_{air}}{n_{eau}}\right) \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{rcl} h & = & 10{,}0\,\mathrm{cm} \\ n_{air} & = & 1{,}00 \\ n_{eau} & = & 1{,}33 \end{array} \right.} \tag{2.4}$$

et finalement,

$$\boxed{R_0 = 11{,}4\,\mathrm{cm}} \tag{2.5}$$

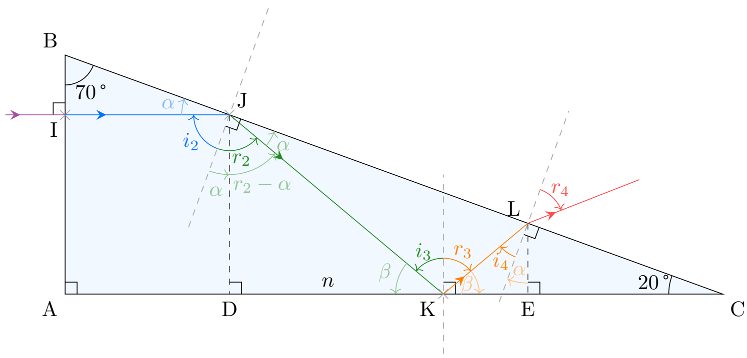
Sujet 3 – corrigé

I Prisme rectangle

1. On utilise un prisme de verre d'indice $n = 1{,}5$. Sa section principale est un triangle ABC rectangle en A tel que l'angle en B soit égal à 70°. Un rayon lumineux dans le plan ABC rencontre le prisme en I sur le côté AB perpendiculairement à AB. Sachant que le rayon incident est dans l'air, étudier la marche de la lumière jusqu'à la sortie du prisme.

Réponse :

Schéma



$$\mathrm{A} \xrightarrow[I]{\mathrm{DP}} \mathrm{B} \xrightarrow[J]{\mathrm{DP}} \mathrm{C} \xrightarrow[K]{\mathrm{DP}} \mathrm{D} \xrightarrow[L]{\mathrm{DP}} \mathrm{E}$$

Résultat attendu

On cherche à suivre le chemin du rayon indiqué dans l'énoncé. Il faut pour cela savoir ce qui peut arriver au rayon. Dans le cas du passage par un dioptre plan, il peut y avoir traversée du dioptre avec Snell-Descartes, ou réflexion dans le cas $n_2 < n_1$.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

et pour $n_2 < n_1$, i_ℓ :

$$n_1 \sin i_\ell = n_2 \sin 90° = n_2$$

tel que $i_1 > i_\ell$ est réfléchi.

Application

Ici, l'angle limite de réflexion à l'intérieur du prisme est :

$$i_\ell = \arcsin \frac{1}{n} = \boxed{41{,}8°}$$

I : $\boxed{i_1 = 0°}$ donc $\boxed{r_1 = 0°}$;

J : Ici, on doit voir que $\alpha = 20°$ puisque dans le triangle BIJ, la somme des angles doit valoir 180° et qu'on a un angle droit + un angle de 70°. On en déduit que $\boxed{i_2 = 70°}$ également, car $i_2 + \alpha = 90°$.

Comme $i_2 > i_\ell$, le rayon ne traverse pas mais est réfléchi, soit $\boxed{r_2 = 70°}$.

K : Pour trouver l'angle en K, on peut par exemple chercher l'angle β : en construisant le triangle rectangle JDK, on trouve que l'angle au sommet est $r_2 - \alpha = 50°$; avec l'angle droit en D, $\beta = 40°$, et $\boxed{i_3 = 50° > i_\ell}$ donc rayon réfléchi $\boxed{r_3 = 50°}$.

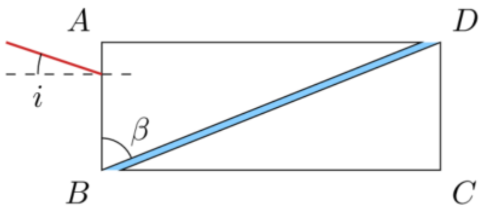
L : De même qu'en J, tracer LEC indique que $i_4 + \alpha + \beta = 90°$, soit $\boxed{i_4 = 30° < i_\ell}$: on applique donc Snell-Descartes ici, et on obtient

$$\boxed{r_4} = \arcsin(n \times \sin i_4) = \boxed{48{,}6°}$$

Sujet 4 – corrigé

I Réfractomètre d'Abbe

Un réfractomètre d'Abbe est un appareil servant à mesurer des indices optiques, très utilisé notamment à des fins de caractérisation rapide déchantillons. Ce réfractomètre est composé de deux prismes identiques, d'indice $n_0 = 1{,}732$, à base en forme de triangle rectangle. L'angle au sommet β vaut 60°. Entre ces prismes est intercalé un film de liquide d'indice n que l'on cherche à déterminer. Pour ce faire, le réfractomètre est éclairé par la face AB par un rayon d'angle d'incidence i réglable.



1. Si le rayon sort par la face CD, quelle sera sa direction ? Répondre par un argument physique sans calcul, éventuellement à confirmer par un schéma propre.

   Réponse :

   Compte tenu des symétries du dispositif, le principe du retour inverse de la lumière garantit que si le rayon sort du réfractomètre par la face CD alors l'angle d'émergence vaut i. En effet,

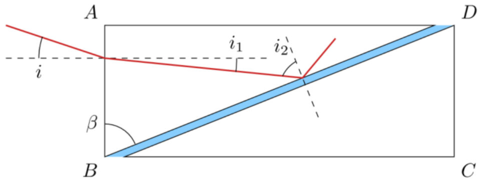
   - à l'interface AB, la seconde loi de Snell–Descartes donne l'angle d'émergence dans le prisme, noté i_1 ;
   - la géométrie du prisme donne l'angle d'incidence sur la première interface BD, noté i_2 ;
   - sur cette interface, la seconde loi de Snell–Descartes donne l'angle d'émergence dans le liquide, noté i_3 ;
   - comme les deux interfaces BD sont parallèles, alors l'angle d'incidence sur la deuxième interface BD vaut nécessairement i_3 ;
   - la même loi de Descartes que précédemment permet d'en déduire que l'angle d'émergence dans le prisme vaut alors forcément i_2 ;
   - les deux prismes étant identiques, l'angle d'incidence sur l'interface CD est alors nécessairement i_1 ;
   - et par conséquent, la même loi de Descartes qu'à l'interface AB indique que l'angle d'émergence dans l'air par la face CD vaut i.

2. Expliquer comment la mesure de l'angle d'incidence pour laquelle le rayon transmis ne sort plus par la face CD mais par la face AD permet d'en déduire la valeur de l'indice du liquide.

   Réponse :
   Si le rayon transmis sort par la face AD , c'est qu'il a subi une réflexion totale. Cette réflexion totale ne peut avoir eu lieu qu'à l'interface BD dans le sens prisme → liquide, à condition que $n < n_0$. En effet, si elle avait lieu dans le sens liquide → prisme le faisceau serait guidé dans le liquide le long de l'interstice entre les deux prismes. Comme l'angle critique de rélexion totale dépend du rapport des indices des deux milieux, ici n_0 et n, il est possible d'en déduire la valeur de n.

3. Que vaut cet indice si l'angle d'incidence critique vaut 18,0° ?

Réponse :
Commençons par introduire les notations sur le schéma ci-dessous.



À la limite de la réflexion totale,

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{n}{n_0}\right)$$

Une relation de somme des angles permet d'en déduire i_1, puisque

$$\beta + \left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi \qquad \text{d'où} \qquad i_1 = \beta - i_2$$

Enfin, la seconde loi xprde Descartes eimée à l'interface AB donne

$$1 \times \sin i = n_0 \sin i_1 \qquad \text{soit} \qquad \sin i = n_0 \left(\beta - \arcsin\left[\frac{n}{n_0}\right]\right)$$

Remonter à n demande d'inverser cette relation, soit

$$n = n_0 \sin\left(\beta - \arcsin\left\{\frac{\sin i}{n_0}\right\}\right) = 1{,}32$$

4. Quelles sont les limites d'utilisation du dispositif?

Réponse :
Une première limitation évidente est qu'un réfractomètre d'Abbe ne permet de mesurer que des indices de liquides, voire de gaz en prenant des précautions pour empêcher les fuites, mais en aucun cas de solides. Par ailleurs, comme il repose sur une réflexion totale, **il faut que l'indice du liquide soit inférieur à celui du verre composant les prismes**.

Sujet 5 – corrigé

I Doublet de Huygens

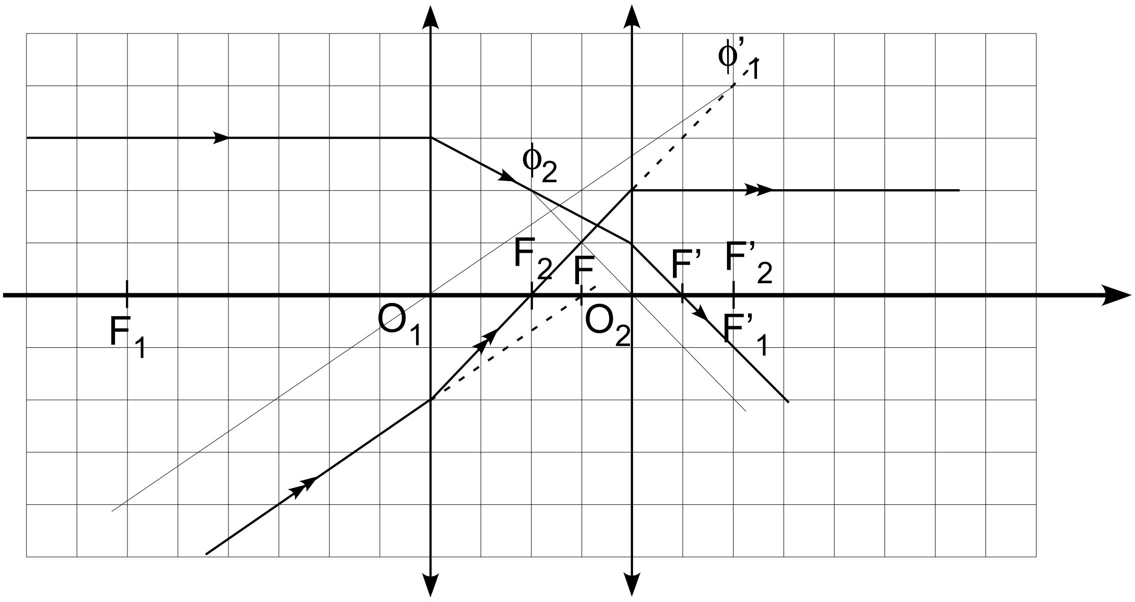
Un doublet de lentilles non accolées est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre optique O_1, de distance focale f_1' et d'une autre lentille convergente L_2 de centre optique O_2, de distance focale f_2'. On note $e = \overline{O_1O_2} > 0$. Un doublet de Huygens est de type :

$$f_1' = 3a \qquad e = 2a \qquad f_2' = a$$

Pour l'application numérique, on prendra $a = 2{,}0\,\text{cm}$. On note $\Delta = \overline{F_1'F_2}$.

1. Déterminer par construction géométrique les foyers objet et image, notés F et F', du doublet optique. Sur le schéma, on prendra un carreau pour $1{,}0\,\text{cm}$.

Réponse :
Sur le schéma, on trouve : $\overline{F_1F} = 9{,}0\,\text{cm}$ et $\overline{F_2'F'} = -1{,}0\,\text{cm}$



2. Exprimer $\overline{F_1F}$ et $\overline{F_2'F'}$ en fonction de e, f_1' et f_2'. Faire l'application numérique. Conclure.

Réponse :
Position du foyer objet F : $F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$
On applique la relation de conjugaison de Newton sur la lentille L_1 :

$$\overline{F_1'F_2} \cdot \overline{F_1F} = -f_1'^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F_1F} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F_1'F_2}} = \frac{-f_1'^2}{\Delta}$$

Or $\Delta = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e - f_1' - f_2'$, donc

$$\boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1'^2}{f_1' + f_2' - e} \quad ; \quad \overline{F_1F} = \frac{9a^2}{3a + a - 2a} = 9{,}0\,\text{cm}}$$

Position du foyer image F' : $A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$
On applique la relation de conjugaison de Newton sur la lentille L_2 :

$$\overline{F_2'F'} \cdot \overline{F_2F_1'} = -f_2'^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{-\overline{F_1'F_2}} = \frac{f_2'^2}{\Delta}$$

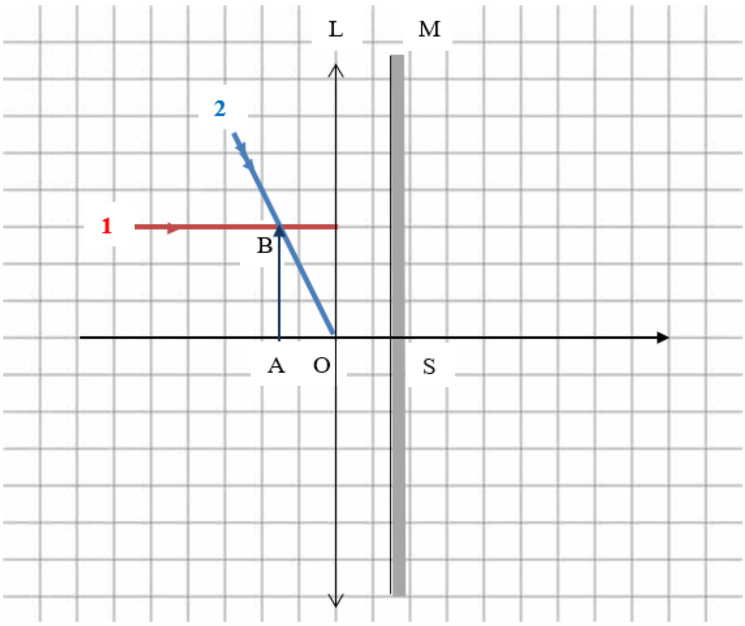
$$\boxed{\overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{f_1' + f_2' - e} \quad ; \quad \overline{F_2'F'} = \frac{-a^2}{3a + a - 2a} = -1{,}0\,\text{cm}}$$

Sujet 6 – corrigé

I Système catadioptrique

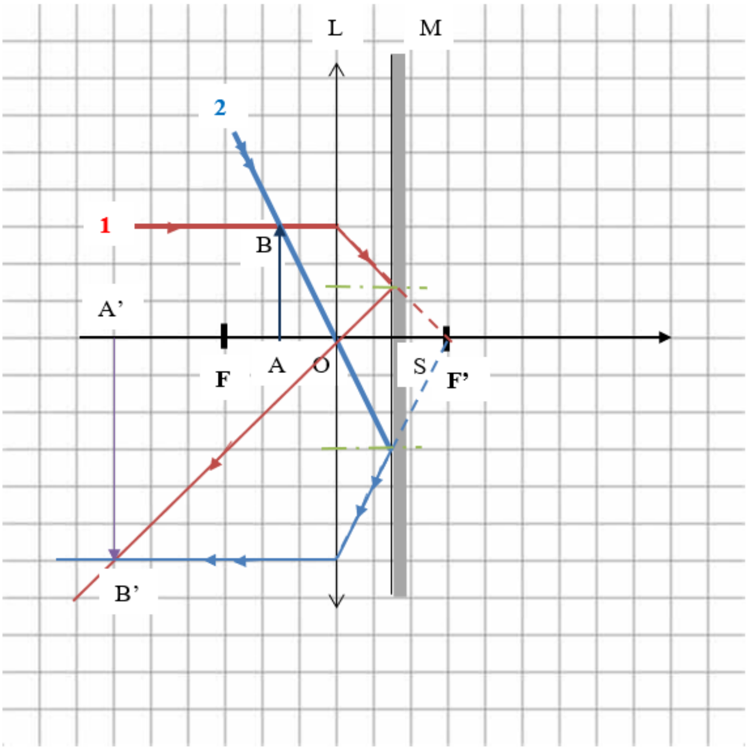
Un système optique est formé d'une lentille mince L convergente de distance focale image $f' = 30\,\text{cm}$ et d'un miroir plan disposé à15 cm derrière la lentille, dont la normale est parallèle à l'axe optique de L. On dispose d'un objet AB situé à $15cm$ en avant de la lentille.
On notera B_1 l'image donnée par la lentille L du point B, puis B_2 l'image donnée par le miroir M du point B_1 et enfin B' l'image finale que donne L de B_2.

1. Compléter les tracés des deux rayons passant par B jusqu'à obtenir l'image définitive $A'B'$ sur la figure ci-dessous. Préciser les propriétés utilisées au fur et à mesure. Il n'est pas indispensable de positionner les images intermédiaires.



Réponse :
Il faut positionner les foyers objet et image. Pour ce faire :

- Le rayon 1 est parallèle à l'axe optique, il émerge de la lentille en passant par le foyer image F'. Il est réfléchi au niveau du miroir selon la loi de la réflexion de Snell-Descartes. Ainsi il revient vers la lentille en passant par O (le rayon réfléchi passe par O car O est l'image de F' par le miroir, le rayon incident passant par F'); Il n'est donc pas dévié lors de son passage retour par la lentille.
- Le rayon 2 passe par le centre O de la lentille. Il n'est donc pas dévié. Il arrive sur le miroir et est réfléchi selon la loi de la réflexion de Snell-Descartes (le prolongement du rayon réfléchi passe par F' car F' est l'image de O par le miroir, le rayon incident passant par O). Le prolongement du rayon réfléchi passe par F', qui joue le rôle de F car propagation de la lumière de droite à gauche. Il ressort de la lentille parallèlement à l'axe optique.
- L'intersection des deux rayons émergents donne la position de B'. Enfin, par aplanétisme, il est possible de placer A'
- Comme la projection orthogonale de B' sur l'axe optique. Ainsi, on obtient finalement l'image $A'B'$. Il semble que $\overline{OA'} = 60\,\text{cm}$.



2. Retrouver les positions des images successives grâce aux formules de conjugaison Descartes de la lentille et aux propriétés du miroir plan. Pour cela on exprimera :

- $\overline{OA_1}$ en fonction de f' et $\overline{OA}$. La calculer.
- Puis $\overline{OA_2}$ en fonction de $\overline{OA_1}$ et $\overline{OS}$. La calculer.
- et enfin $\overline{OA'}$ en fonction de f' et $\overline{OA_2}$. La calculer.

Réponse :

Appliquons la loi de Descartes à la lentille L (en propagation gauche-droite) :

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$$

$$\frac{1}{\overline{OA_1}} = \frac{1}{\overline{OA}} + \frac{1}{f'} = \frac{f' + \overline{OA}}{f'\overline{OA}}$$

D'où : $\overline{OA_1} = \frac{f' \times \overline{OA}}{f' + \overline{OA}}$

Soit, numériquement : $\overline{OA_1} = \frac{30 \times (-15)}{30 - 15} = 30\,\text{cm}$

Propriété du miroir plan :

$$\overline{SA_2} = -\overline{SA_1} \quad \text{avec} \quad \overline{SA_1} = \overline{SO} + \overline{OA_1} \quad \text{et} \quad \overline{OA_2} = \overline{OS} + \overline{SA_2}$$

Ainsi :

$$\overline{OA_2} = \overline{OS} - \overline{SA_1} = \overline{OS} - \overline{SO} - \overline{OA_1} = \overline{OS} + \overline{OS} - \overline{OA_1}$$

Enfin : $\overline{OA_2} = 2\overline{OS} - \overline{OA_1}$

Numériquement : $\overline{OA_2} = 2 \times (+15) + 30 = +60\,\text{cm}$

Puis de nouveau la loi de Descartes pour la lentille (mais en propagation droite-gauche). Cela revient à permuter F et F'. Etant donné que la propagation se fait dorénavant à l'opposé de l'orientation définie comme positive, la nouvelle distance focale image f'_{retour} s'écrit $f'_{\text{retour}} = \overline{OF'} = -f'$.

Ainsi, la relation de conjugaison de Descartes devient :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA_2}} = -\frac{1}{f'}$$

Soit $\frac{1}{\overline{OA'}} = \frac{1}{\overline{OA_2}} - \frac{1}{f'} = \frac{f'-\overline{OA_2}}{f'\overline{OA_2}}$

D'où $\overline{OA'} = \frac{f'\times\overline{OA_\mathbf{2}}}{f'-\overline{OA_\mathbf{2}}}$

Ainsi, numériquement : $\overline{OA'} = \frac{30\times(60)}{30-60} = -60\,\text{cm}$.

C'est cohérent avec le résultat obtenu graphiquement !