

# Correction du DM

1) La transformation est la suivante :

$$\text{État initial} \left\{ \begin{array}{l} P_1 = P_0 = 1 \text{ bar} \\ V_1 = V_0 + V_p \\ T_1 = T_0 \\ n_1 \end{array} \right. \xrightarrow[\text{G.P.}]{\text{isotherme}} \text{État final} \left\{ \begin{array}{l} P_2 = ? \\ V_2 = V_0 \\ T_2 = T_0 \\ n_2 = n_1 \end{array} \right.$$

$T$  et  $n$  étant constants, on a  $P_0 V_1 = nRT_0 = P_2 V_2$ , soit

$$P_0(V_0 + V_p) = P_2 V_0 \Leftrightarrow \boxed{P_2 = P_0(1 + \alpha)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_0 = 1 \text{ bar} \\ V_p = 2,0 \text{ L} \\ V_0 = 5,0 \text{ L} \end{cases}$$

A.N. :  $P_2 = 1,4 \text{ bar}$

2) Le volume final est évidemment le même :  $V_2 = V_0$ . La température l'est aussi, puisqu'on attend suffisamment longtemps pour que ça soit le cas :  $T_2 = T_0$ . On a également  $n_2 = n_1$ . La pression finale est donc

$$P_2 = \frac{n_2 R T_2}{V_2} = \frac{n_1 R T_0}{V_0} = \frac{P_0(V_0 + V_p)}{V_0} = P_0(1 + \alpha)$$

donc identique au cas précédent.

3) C'est une compression isotherme ( $T = T_0 = \text{cte}$ ) et mécaniquement réversible ( $P = P_{\text{ext}}$ ) d'un gaz parfait ( $P = nRT_0/V$ ) :

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} P_{\text{ext}} dV = -n_1 R T_0 \int_{V_1}^{V_2} \frac{dV}{V} = -n_1 R T_0 \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Or  $n_1 R T_0 = P_0 V_1$ ,  $V_1 = V_0 + V_p$  et  $V_2 = V_0$ , soit

$$\boxed{W_{12} = P_0 V_1 \ln(1 + \alpha)} \Rightarrow \underline{W_{12} = 236 \text{ J}}$$

4) a – L'étape  $1 \rightarrow 1'$  est réalisée rapidement, donc les transferts thermiques n'ont pas le temps de s'établir : on peut la supposer adiabatique. De plus, l'énoncé indique qu'elle est supposée réversible, c'est-à-dire qu'on néglige tout frottement.

b – On est en présence d'un gaz parfait lors d'une transformation adiabatique et mécaniquement réversible entre les états 1 et 1', on peut donc utiliser la loi de LAPLACE :

$$T_1 V_1^{\gamma-1} = T_{1'} V_{1'}^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_{1'} = T_1 \left( \frac{V_1}{V_{1'}} \right)^{\gamma-1}$$

Or  $T_1 = T_0$ ,  $V_1 = V_0 + V_p$  et  $V_{1'} = V_0$ , donc

$$\boxed{T_{1'} = T_0(1 + \alpha)^{\gamma-1}} \Rightarrow \underline{T_{1'} = 343 \text{ K}}$$

c – On décompose la transformation en deux étapes :

- ◇ De 1 à 1', on a une transformation adiabatique mécaniquement réversible d'un gaz parfait. On peut soit calculer le travail directement, soit utiliser le premier principe :

▷ **Premier principe**

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= C_V \Delta T \\
 \Leftrightarrow W + Q &= \frac{nR}{\gamma - 1} (T_{1'} - T_1) \\
 \Leftrightarrow W &= \frac{nRT_1}{\gamma - 1} \left( \frac{T_{1'}}{T_1} - 1 \right) \\
 \Leftrightarrow W &= \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{V_{1'}}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right)
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} Q = 0 \\ \text{Factorisation par } T_1 \\ \text{Adiabatique réversible G.P.} \\ T_1 V_1^{\gamma-1} = T_{1'} V_{1'}^{\gamma-1} \end{array} \right\}
 \end{array}$$

▷ **Calcul direct**

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_{V_1}^{V_{1'}} P_{\text{ext}} dV \\
 \Leftrightarrow W &= - \int_{V_1}^{V_{1'}} P dV \\
 \Leftrightarrow W &= -P_1 V_1^\gamma \int_{V_1}^{V_{1'}} \frac{dV}{V^\gamma} \\
 \Leftrightarrow W &= -P_1 V_1^\gamma \left[ \frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1} \right]_{V_1}^{V_{1'}} \\
 \Leftrightarrow W &= -\frac{P_1 V_1^\gamma}{-\gamma+1} (V_{1'}^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma}) \\
 \Leftrightarrow W &= -\frac{P_1 V_1^\gamma}{-\gamma+1} V_1^{1-\gamma} \left( \left( \frac{V_{1'}}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right) \\
 \Leftrightarrow W &= \frac{P_1 V_1}{\gamma - 1} \left( \left( \frac{V_{1'}}{V_1} \right)^{1-\gamma} - 1 \right)
 \end{aligned}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \text{Mécaniquement réversible} \\ P_{\text{ext}} = P \\ \text{Adiabatique réversible G.P.} \\ P = P_1 \frac{V_1^\gamma}{V^\gamma} \\ \int x^n dx = \frac{x^{n+1}}{n+1} \\ \text{On calcule} \\ \text{On factorise par } V_1^{1-\gamma} \\ \text{On simplifie les } - \end{array} \right\}
 \end{array}$$

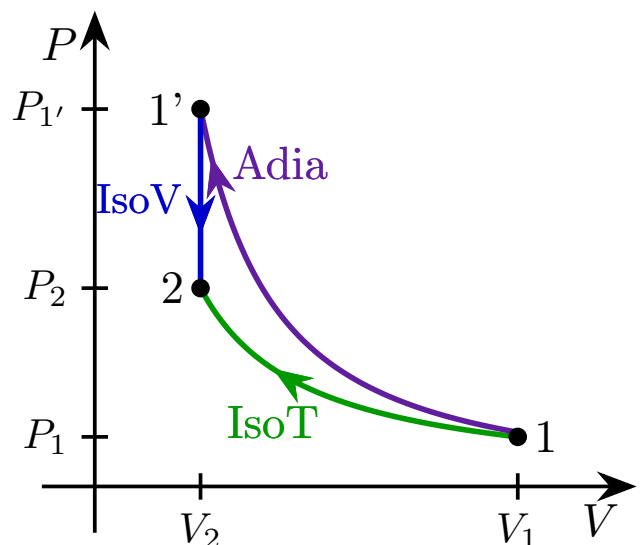
Dans tous les cas, avec  $P_1 = P_0$ ,  $V_{1'} = V_0$  et  $V_1 = V_0 + V_p$ , on obtient

$$W = 252 \text{ J}$$

◇ De 1' à 2, on a une transformation isochore, de travail nul.

- 5) Dans un diagramme  $(P, V)$ , le travail des forces de pression reçu par le gaz est égal à l'aire sous la courbe. Or, la compression **adiabatique mécaniquement réversible** dessine une **aire plus importante** : on pouvait donc **prédire** que  $W_{\text{brusque}} > W_{\text{lente}}$ .

Ce travail a servi à **chauffer le gaz**, jusqu'à 343 K. Ceci n'est cependant **pas utile** puisque le gaz refroidit ensuite. Cette énergie thermique est dissipée vers la pièce et **n'est pas récupérable**.



Ainsi, tout est une question de temps : si on n'est pas pressé, il vaut mieux **pomper lentement** !