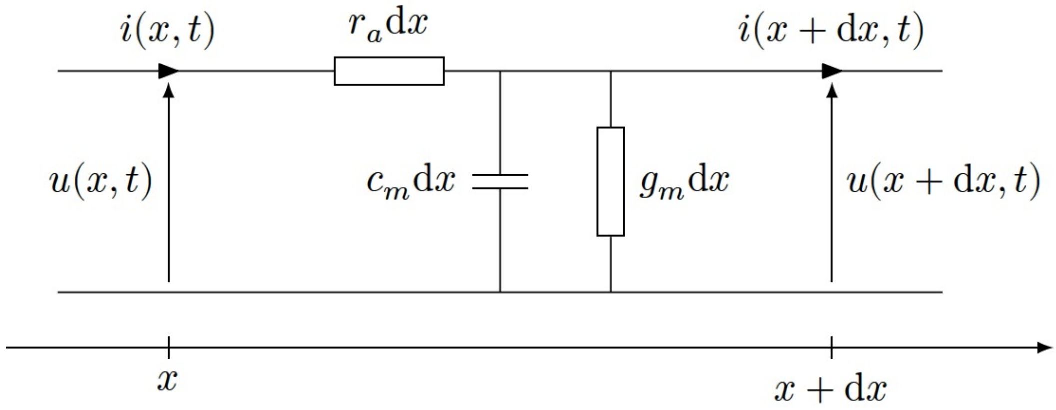
Sujet 1 – corrigé

I Fibre nerveuse

On considère une chaîne électrique dont on représente une longueur élémentaire dx, modélisant une fibre nerveuse.



Attention, $g_m\,\mathrm{d}x$ représente une conductance (l'inverse d'une résistance).

1) Déterminer les équations différentielles couplées vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$

Réponse

Pour cet exercice, on ne peut à priori utiliser la méthode des complexes ; il faut donc utiliser les lois de Kirchoff :

$$u(x) = r_a\mathrm{d}x\ i(x) + u(x+\mathrm{d}x) \tag{16.1}$$

$$u(x+\mathrm{d}x) = \frac{i_g}{g_m\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad i_c = c_m\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x) \tag{16.2}$$

$$i(x) = i(x+\mathrm{d}x) + i_g + i_c \tag{16.3}$$

On obtient bien un système de 4 inconnues (u, i, i_g et i_g) et 4 équations donc on peut commencer la résolution pour faire disparaitre i_c et i_g :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -r_a i(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + r_a i(x) = 0 \tag{16.4}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{i_g+i_c}{\mathrm{d}x} = -\frac{g_m\mathrm{d}xu(x+\mathrm{d}x) + c_m\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} + c_m\frac{\partial u}{\partial t} + g_m u = 0 \tag{16.5}$$

D'où le résultat. (on à remplacé $u(x+\mathrm{d}x)$ par $u(x)$ qui est vrai à l'ordre 0 en dx)

◇

2) En déduire l'équation vérifiée par $u(x,t)$ seulement.

Réponse

On a un système de deux équations couplées à deux inconnues. On peut procéder par substitution en dérivant la première équation par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_a[-c_m\frac{\partial u}{\partial t} - g_m u] = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_a c_m\frac{\partial u}{\partial t} - r_a g_m u = 0$$

◇

On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane progressive monochromatique $\underline{u}(x,t) = u_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$.

3) À quelle condition sur ω, c_m et g_m l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie-t-elle en

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t}$$

Réponse

On injecte la solution proposée :

$$-k^2 - r_a c_m j\omega - r_a g_m = 0 \Rightarrow k^2 + r_a(jc_m\omega + g_m)$$

On peut s'affranchir de la conductivité lorsque $g_m \ll c_m\omega$ (ce terme disparait de l'équation de dispersion)

◇

On supposera cette condition vérifiée par la suite.

4) Déterminer la relation de dispersion entre ω et k. Montrer que le milieu est dispersif et absorbant. Que valent les vitesses de phase et de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

Réponse

On obtient ainsi $k^2 + jr_a c_m \omega = 0$ On cherche premièrement v_ϕ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = j\frac{k}{r_a c_m}$$

Cette vitesse de phase dépend de k donc de ω. Le milieu est donc dispersif. La résolution de cette question montre de plus que k sera complexe donc le milieu est aussi absorbant. On trouve pour la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{2jk}{r_a c_m} = 2v_\phi$$

◇

5) Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Commenter.

Réponse

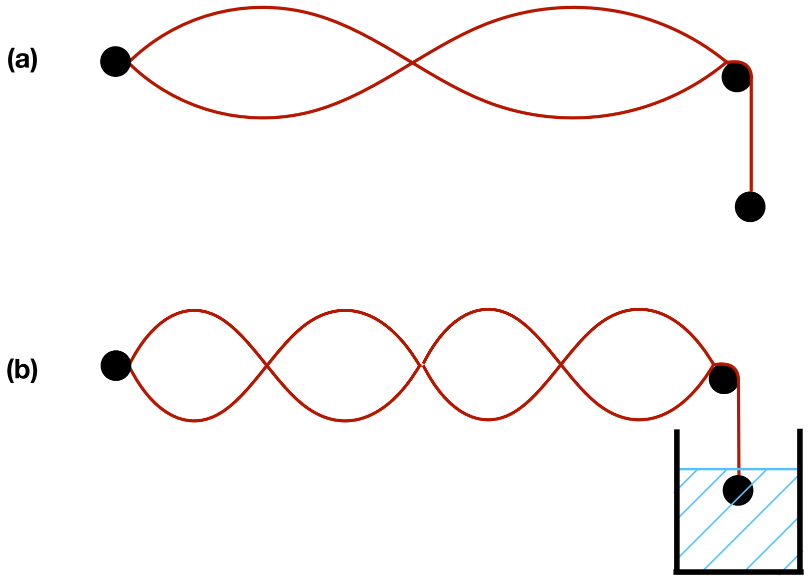
On a $l \propto \frac{1}{|k|} = \frac{1}{\sqrt{rc\omega}}$. Ainsi, la longueur caractéristique d'atténuation dépend de la fréquence. Plus cette dernière est élevée et mois le signal se propagera dans la fibre nerveuse. A l'inverse, un signal basse fréquence pourra se propager beaucoup plus loin.

◇

Sujet 2 – corrigé

I Mesure d'une masse volumique (résolution de problème)

On fait apparaître des vibrations sur une corde à l'aide d'un vibreur externe (non représenté ici) et dans un premier temps on observe le résultat (a).
Dans un second temps, on immerge la sphère de masse m dans un récipient contenant de l'eau et on observe le résultat (b).



1) Estimez la masse volumique de la sphère.

Réponse

On sait que $c = \sqrt{T/\mu}$ où T désigne la tension de la corde. Pour une même fréquence d'excitation, on passe de λ à $\lambda' = \lambda/2$ donc $k' = 2k$ soit d'après la relation de dispersion $k'c' = \omega = kc$ d'où $c' = c/2$.
On en déduit que $\frac{c'}{c} = \sqrt{\frac{T'}{T}} \Rightarrow T' = T/4$.

De plus, on peut appliquer le PFS en projection selon l'axe vertical à la boule dans les situations a et b :

$$(a) : T - mg = 0 \Rightarrow T = mg = \frac{4}{3}\pi r^3 \rho_m g \tag{16.1}$$

$$(b) : T' + \rho_e V g - \rho_m V g = 0 \Rightarrow T' = (\rho_m - \rho_e)\frac{4}{3}\pi r^3 g \tag{16.2}$$

On obtient donc $T'/T = 1/4 = \frac{\rho_m - \rho_e}{\rho_m} = 1 - \frac{\rho_e}{\rho_m}$ soit au final $\rho_m = \frac{4}{3}\rho_e$

Sujet 3 – corrigé

I Corde de Meldes avec frottement (Résolution de problème)

On se propose d'étudier la corde de Melde (supposée de longueur infinie) et sujette aux frottements fluides.

1) Montrez qu'une onde se propageant sur un tel dispositif sera sujette aux phénomènes d'absorption et de dispersion. *remarque :*
On supposera la corde horizontale et le poids pourra être négligé.

Réponse

On suppose la corde au repos suivant $\vec{e}_x$ et une perturbation orthogonale suivant $\vec{e}_y$. On cherche premièrement à obtenir l'équation aux dérivées partielles dont $y(x,t)$ est solution. On isole ainsi une petite tranche de corde de longueur dx. On applique le PFD :

$$\mu \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = -\alpha \mathrm{d}x \frac{\partial y}{\partial t} + T(x+\mathrm{d}x)\sin(\theta(x+\mathrm{d}x)) - T(x)\sin(\theta(x)) \tag{16.1}$$

$$0 = T(x+\mathrm{d}x)\cos(\theta(x+\mathrm{d}x)) - T(x)\cos(\theta(x)) \tag{16.2}$$

$$\tag{16.3}$$

Avec l'approximation des petits angles, on obtient $T(x+\mathrm{d}x) \approx T(x)$ car $(\cos(\theta) \approx 1)$ et on en déduit que la tension de la corde T est constante. La première équation donne alors :

$$\mu \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - T\frac{\partial \theta}{\partial x} + \alpha \frac{\partial y}{\partial t} = 0 \quad \text{avec} \quad \theta \approx \tan(\theta) \approx \frac{\partial y}{\partial x} \tag{16.4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} - \frac{T}{\mu}\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} + \frac{\alpha}{\mu}\frac{\partial y}{\partial t} = 0 \tag{16.5}$$

On obtient finalement une équation d'onde et on peut établir sa relation de dispersion :

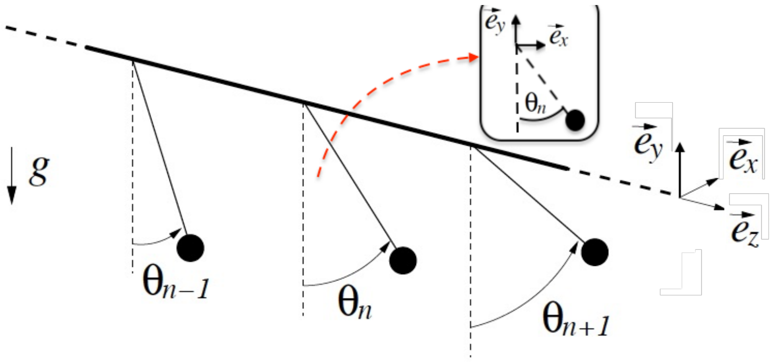
$$-\omega^2 + c^2 k^2 + j\frac{\alpha}{\mu}\omega = 0$$

Il apparait ainsi clairement que v_ϕ dépend de la pulsation (dispersion) et que k sera complexe (absorption).

Sujet 4 – corrigé

I Chaine de pendule

On considère une chaîne de pendules de masse m et de longueur l, séparés d'une distance a et reliés par un câble de torsion. Le n-ième pendule est contenu dans un plan $x_n = na$. On note C la constante de torsion telle que le moment (par rapport à l'axe Ox) exercé par la partie gauche sur la partie droite de la chaîne s'écrit $\mathcal{M} = -C(\theta_n - \theta_{n-1})$



On se place dans l'approximation des petits angles et le poids ne sera pas négligé dans cette étude.

1) Écrivez l'équation régissant le mouvement du n-ième pendule.

Réponse

Le couple exercé par un pendule sur un autre étant connu, il reste à déterminer le couple créé par le poids Γ_p au niveau du point d'attache :

$$\vec{\Gamma}_p = l\vec{e}_r \wedge (-mg\vec{e}_y) = -lmg\sin(\theta_n)\vec{e}_z$$

avec $\sin(\theta) \approx \theta$ dans l'approximation des petits angles. On peut alors appliquer le TMC au pendule n de moment d'inertie ml^2 en projection selon $\vec{e}_x$

$$ml^2\frac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}t} = -C(\theta_n - \theta_{n-1}) + C(\theta_{n+1} - \theta_n) - mgl\sin(\theta_n) \quad (16.1)$$

$$\Rightarrow \quad ml^2\frac{\mathrm{d}\theta_n}{\mathrm{d}t} - C(\theta_{n-1} - 2\theta_n + \theta_{n+1}) + mgl\theta_n = 0 \quad (16.2)$$

Il s'agit bien d'une équation différentielle linéaire couplée (l'état du pendule n dépend des pendules $n-1$ et $n+1$.

◇

L'état de torsion du câble est décrit continûment par une fonction de $\theta(x,t)$ telle que $\theta(x_n,t) = \theta_n(t)$. Nous nous plaçons dans une situation de déformation telle que le développement limité de cette fonction, dans le passage de l'abscisse na à l'abscisse $na \pm a$ peut être limité au second ordre relativement au pas a.

2) Montrez alors que la fonction θ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial\theta}{\partial t} - c_0^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \omega_0^2\theta = 0$$

où c_0 et ω_0 sont des constantes que l'on exprimera et pour lesquelles on proposera une interprétation physique.

Pensez à exprimer θ_{n+1} et θ_{n-1} en fonction de θ_n et de ses dérivées.

Réponse

On a $\theta_{n\pm1} \approx \theta_n \pm a\dfrac{\partial\theta}{\partial x}(x,t) + \dfrac{a^2}{2}\dfrac{\partial^2\theta}{\partial x^2}(x,t)$ (DL2). En injectant ces expression dans la relation suivante, on obtient :

$$ml^2\frac{\partial\theta}{\partial t} - C(\theta_n - 2\theta_n + \theta_n + a\frac{\partial\theta}{\partial x} - a\frac{\partial\theta}{\partial x} + a^2\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2}) + mgl\theta_n = 0 \tag{16.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\partial\theta}{\partial t} - \frac{Ca^2}{ml^2}\frac{\partial^2\theta}{\partial x^2} + \frac{g}{l}\theta = 0 \tag{16.4}$$

Cette expression est bien de la forme demandée avec $c_0 = \frac{a}{l}\sqrt{\frac{C}{m}}$ et $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{l}}$. A l'aide des nouvelles variables, on obtient :

$$c_0^2 = \frac{\kappa}{\mu l^2} \Rightarrow c_0 = \frac{1}{l}\sqrt{\frac{\kappa}{\mu}}$$

◇

On pose $\mu = \frac{m}{a}$ et $\kappa = Ca$. Exprimez alors c_0 en fonction de μ, l et κ. On étudie dans la suite la propagation d'une onde harmonique de pulsation ω et de nombre d'onde $\underline{k}$ complexe : $\underline{\theta}(x,t) = \theta \exp[j(\omega t - \underline{k}x)]$

3) Établissez la relation de dispersion du milieu pour cette onde.

Réponse

Il suffit d'injecter cette solution dans l'équation de propagation :

$$(-\omega^2 + c_0^2k^2 + \omega_0^2)\bar{\theta} = 0 \quad \text{soit} \quad \omega^2 - \omega_0^2 = k^2c_0^2$$

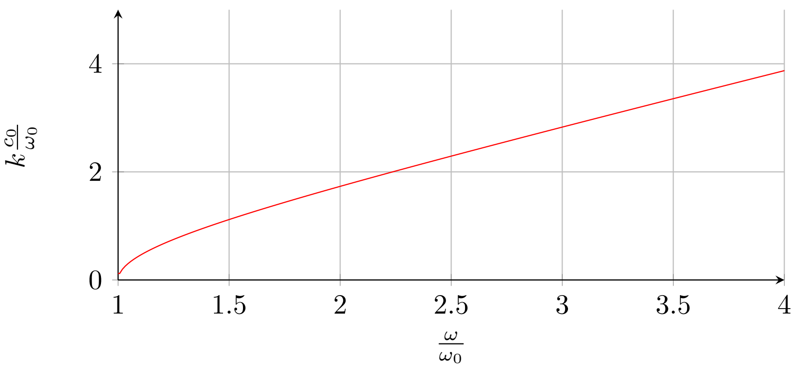
Il s'agit de la relation de dispersion de Klein-Gordon.

◇

4) Représentez l'allure de l'évolution des parties réelles et imaginaires de $\underline{k}$ avec ω.

Réponse

On a $k \in \mathbb{R}$ donc partie imaginaire nulle.



◇

5) Exprimez les vitesses de phase V_φ et de groupe V_G en fonction de c_0 et ω_0.

Réponse

On a $v_\phi = \frac{\omega}{k} = c_0\frac{\omega}{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}$ et $v_g = \dfrac{\partial\omega}{\partial k} = c_0^2\dfrac{2k}{2\sqrt{c_0^2k^2+\omega_0^2}} = c_0\dfrac{\sqrt{\omega^2-\omega_0^2}}{\omega} = \dfrac{1}{v_\phi}$

◇