

# Thermodynamique

Tout moyen de communication est interdit  
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Toute la thermodynamique de MPSI.

## Sommaire

<b>E1</b>	Étude de deux gaz parfaits dans un cylindre . . . . .	<b>2</b>
<b>E2</b>	Cycle de Carnot . . . . .	<b>3</b>
<b>P1</b>	Moteur de Stirling . . . . .	<b>5</b>
<b>P2</b>	Étude thermodynamique d'une chambre froide . . . . .	<b>7</b>

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

### Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇  $\varphi$  : loi physique fondamentale brisée.

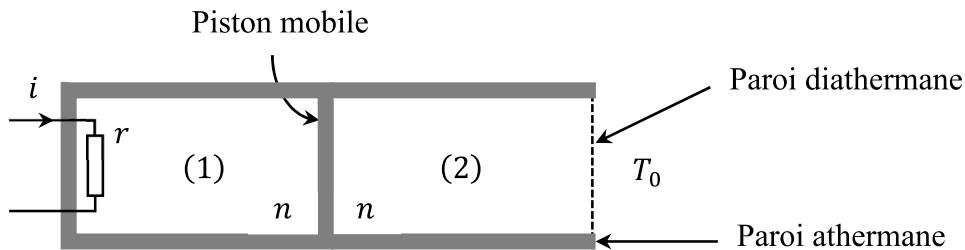
## Préliminaire

- 1) Inscrire sur votre copie une remarque **pertinente** issue du devoir précédent.

### E1 Étude de deux gaz parfaits dans un cylindre

Deux gaz, supposés parfaits, sont enfermés dans deux compartiments (1) et (2) séparés par un piston mobile athermane (on dit aussi calorifugé) qui coulisse sans frottement. Le compartiment (1) est entièrement calorifugé tandis que le compartiment (2) peut échanger de l'énergie par chaleur (transfert thermique) avec le milieu extérieur, assimilé à un thermostat de température  $T_0$ , à travers une paroi diathermane fixe (non calorifugée).

Les deux compartiments contiennent chacun  $n$  moles de gaz et sont, dans l'état initial, à la température  $T$ . Le volume total des deux compartiments est  $V_t = 2V_0$ , où  $V_0$  désigne les volumes, initialement égaux, de chacun des deux compartiments.



À un instant pris comme origine temporelle, le compartiment (1) reçoit de la chaleur par l'intermédiaire d'un résistor (résistance  $r$ ) alimentée pendant une durée  $\tau$ , par un générateur qui délivre un courant d'intensité  $i$  constante.

L'état final est l'état d'équilibre thermodynamique du système qui succède à ce chauffage. On le caractérise par les variables d'état  $P_k, V_k$  et  $T_k$  qui représentent les pressions, volumes et températures des compartiments ( $k$ ) où  $k = 1$  ou  $2$ .

On note  $R$  la constante des gaz parfaits et  $\gamma = \frac{C_{pm}}{C_{vm}}$  le rapport de la capacité thermique molaire à pression constante sur la capacité thermique molaire à volume constant, identique pour les gaz des deux compartiments.

**Indiquer la (ou les) bonne(s) réponse(s) en justifiant tout votre raisonnement.**

- 1) Exprimer  $V_1$  et  $V_2$

☐ A  $V_1 = \frac{T_1}{T_0 + T_1} V_0$     
 ☐ B  $V_1 = \frac{T_1}{T_0 + T_1} V_t$     
 ☐ C  $V_2 = \frac{T_0}{T_0 + T_1} V_0$     
 ☐ D  $V_2 = \frac{T_0}{T_0 + T_1} V_t$

- 2) Que peut-on affirmer ?

☐ A  $P_1 = P_2$     
 ☐ B  $P_1 = \frac{nR(T_0 + T_1)}{V_t}$     
 ☐ C  $P_1 = \frac{nR(T_0 + T_1)}{V_0}$     
 ☐ D  $P_1 \neq P_2$

- 3) Déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U$  entre l'état initial et l'état final du système constitué par les deux gaz (on indique que  $\Delta U$  est la somme des variations des énergies internes des deux gaz, entre l'état initial et final) :

☐ A  $\Delta U = 0$     
 ☐ B  $\Delta U = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)$     
 ☐ C  $\Delta U = \frac{nR\gamma}{\gamma - 1} (T_1 - T_0)$     
 ☐ D  $\Delta U = nR(T_1 - T_0)$

*On supposera dans toute la suite que la transformation du compartiment (2) est réversible.*

- 4) On note  $W$  et  $Q$  le travail et la chaleur (transfert thermique) algébriquement reçus par le gaz du compartiment (2) entre l'état initial et l'état final. Que peut-on affirmer ?

$$\boxed{\text{A}} \quad W_2 = nRT_0 \ln\left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0}\right) \quad \boxed{\text{B}} \quad W_2 = 0$$

$$\boxed{\text{C}} \quad Q_2 = 0$$

$$\boxed{\text{D}} \quad Q_2 = -W_2$$

- 5) On note  $Q$  la chaleur (transfert thermique) algébriquement reçue par le gaz du compartiment (1) entre l'état initial et l'état final. Que peut-on affirmer ?

$$\boxed{\text{A}} \quad Q_1 = \Delta U$$

$$\boxed{\text{B}} \quad Q_1 = \Delta U + W_1$$

$$\boxed{\text{C}} \quad Q_1 = W_2$$

$$\boxed{\text{D}} \quad Q_1 = ri^2\tau$$

On note  $S_2^{(r)}$  l'entropie algébriquement reçue et  $S_2^{(c)}$  l'entropie algébriquement créée, entre l'état initial et l'état final, pour le gaz situé dans le compartiment (2). On indique que sa variation d'entropie  $\Delta S_2$  entre l'état initial et l'état final s'écrit  $\Delta S_2 = nR \ln\left(\frac{V_2}{V_0}\right)$ .

- 6) Exprimer  $S_2^{(r)}$  et  $S_2^{(c)}$

$$\boxed{\text{A}} \quad S_2^{(r)} = nR \ln\left(\frac{2T_0}{T_0 + T_1}\right) \quad \boxed{\text{B}} \quad S_2^{(r)} = 0$$

$$\boxed{\text{C}} \quad S_2^{(c)} = nR \ln\left(\frac{2T_0}{T_0 + T_1}\right) \quad \boxed{\text{D}} \quad S_2^{(c)} = 0$$

## E2 Cycle de Carnot

### II/A Chaleur perdue et machine thermique

Les enjeux de la transition énergétique amènent des réflexions sur l'efficacité des systèmes de production et de conversion de l'énergie, ainsi que sur la récupération d'énergie. Optimiser les systèmes de production d'énergie et récupérer le plus d'énergie possible lors d'une conversion d'énergie deviennent des sujets majeurs dans le cadre d'une politique d'économie d'énergie.

Lors du fonctionnement d'un procédé industriel, l'énergie thermique produite grâce à l'énergie apportée n'est pas utilisée en totalité. Une partie de la chaleur est inévitablement rejetée et non récupérée. En raison de ce caractère inéluctable, on parle de *chaleur fatale*. Cette quantité d'énergie perdue constitue un gisement potentiel à récupérer.

Cependant, cette appellation est en partie erronée car la chaleur fatale peut être en partie récupérée. L'ADEME (Agence De l'Environnement et de la Maîtrise de l'Energie) classe le gisement de chaleur fatale disponible par écart de température par rapport à la température ambiante (source froide).

Le tableau ci-dessous donne les gisements de chaleur fatale (Énergie thermique) disponible par an et classés par écart de température avec la température ambiante, ici prise à 27 °C.

Écart de température	Gisement
30 °C	20 TWh
75 °C	20 TWh

- 1) Rappeler l'expression du premier principe et du deuxième principe de la thermodynamique. Que deviennent ces expressions sur un cycle thermodynamique ?

On considère un système thermodynamique quelconque, noté  $\mathcal{S}$ , en contact avec deux thermostats aux températures  $T_{\text{ch}}$  et  $T_{\text{fr}}$  avec  $T_{\text{ch}} > T_{\text{fr}}$ . On note  $Q_C$  la chaleur échangée entre le système  $\mathcal{S}$  et la source  $T_{\text{ch}}$ , et  $Q_F$  la chaleur échangée entre le système  $\mathcal{S}$  et la source  $T_{\text{fr}}$ .

- 2) Rappeler le nom et la définition des transformations associées à un cycle de Carnot subi par le système  $\mathcal{S}$ , en contact avec les deux thermostats précédents. On représentera les étapes du cycle dans le plan  $(T, S)$  en faisant apparaître clairement les températures des thermostats.

- 3) Dans le cas d'un système subissant un cycle de Carnot, réaliser un bilan d'énergie et un bilan d'entropie, et en déduire l'expression du rendement  $\eta$  en fonctionnement moteur en fonction de  $T_{\text{ch}}$  et  $T_{\text{fr}}$ .
- 4) À partir des données du tableau précédent, justifier pourquoi l'ADEME classe les gisements par écart de température par rapport à la température de la source froide et en déduire en Wh l'énergie que l'on pourrait récupérer par an et par gisement.

## II/B Machine de Carnot opérée avec un gaz parfait

Considérons le système  $\mathcal{S}$  précédent comme étant un gaz parfait et subissant un cycle de Carnot entre  $T_{\text{ch}}$  et  $T_{\text{fr}}$ , respectivement à  $57^\circ\text{C}$  et  $27^\circ\text{C}$ . À chaque état du cycle, le volume, la pression et la température du système  $\mathcal{S}$  sont indicés successivement par 1, 2, 3 et 4.

L'état 1 du cycle correspond au moment juste avant la phase de compression adiabatique. Dans cet état, le système est dans un volume de  $1\text{ cm} \times 1\text{ cm} \times 1\text{ mm}$  (noté  $V_1$ ), la pression est de 1 bar (notée  $P_1$ ) et sa température est  $T_1 = T_{\text{fr}}$ . On notera que sur la phase d'échange de chaleur avec la source chaude, la variation de pression est de 0,4 bar.

On note  $c_p$  et  $c_v$  les capacités thermiques massiques du système à pression constante et à volume constant, respectivement, en  $\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ . On rappelle que ces capacités thermiques obéissent à la relation de Mayer :  $c_p - c_v = \frac{R}{M}$ , où  $R$  est la constante universelle des gaz parfaits, et  $M$  la masse molaire. On considère dans la suite que le système  $\mathcal{S}$  est constitué d'air, assimilé à un gaz parfait diatomique, tel que l'indice adiabatique  $\gamma = \frac{c_p}{c_v}$  vaut  $7/5$ .

- 5) Caractériser qualitativement la variation de pression du système  $\mathcal{S}$  le long du cycle, en détaillant les transformations entre chaque état thermodynamique :  $1 \rightarrow 2$ ,  $2 \rightarrow 3$ ,  $3 \rightarrow 4$  et  $4 \rightarrow 1$ .
- 6) Donner l'expression de la dérivée  $\frac{dP}{dV}$  pour chaque transformation en fonction de  $\gamma$ ,  $P$  et  $V$  et représenter les étapes du cycle dans le plan  $(P, V)$ .

Pour un gaz parfait, la variation infinitésimale d'entropie  $dS$  s'exprime en fonctions des variations infinitésimales de température  $dT$  et de pression  $dP$  :

$$dS = \frac{mc_p}{T}dT - \frac{nR}{P}dP$$

avec  $n$  la quantité de matière et  $m$  la masse du gaz.

- 7) Exprimer  $dS$  en fonction de  $P_1, V_1, T_1$ , et des capacités thermiques massiques. On ne fera pas intervenir dans le résultat  $n$  et  $m$ .
- 8) Calculer les valeurs numériques des pressions  $P_1, P_2, P_3$  et  $P_4$ .
- 9) Exprimer les chaleurs échangées  $Q_{\text{ch}}$  en fonction de  $P_1, V_1, T_1, T_{\text{ch}}, P_2/P_3$  et  $Q_{\text{fr}}$  en fonction de  $P_1, V_1, T_1, T_{\text{fr}}, P_4/P_1$ . Évaluer numériquement  $Q_{\text{ch}}$  et  $Q_{\text{fr}}$ .
- 10) En déduire l'expression et la valeur numérique du travail mécanique récupéré pour un cycle moteur. Le résultat paraît-il cohérent avec la valeur obtenue si on utilise l'expression du rendement de Carnot ?
- 11) Les machines thermiques de récupération de chaleur fatale fonctionnent en réalité avec deux transformations isobares pour des raisons techniques. Expliquer pourquoi un fluide subissant une transition de phase (un changement d'état ici) permet d'améliorer l'efficacité de la machine thermique.

## P1 Moteur de Stirling

### I/A Description du moteur

Une enceinte étanche est séparée en deux chambres, une chambre chaude (chauffée par l'extérieur), de volume maximal  $V_1$ , et une chambre froide équipée d'un dissipateur thermique (ailettes), de volume maximal  $V_2$ . Chaque chambre est dotée d'un piston permettant de faire varier son volume et le fluide peut circuler librement d'une chambre à l'autre. Le piston de la chambre froide est le piston de travail, il entraîne le piston de la chambre chaude appelé « déplaceur » car son rôle est de faire circuler le fluide entre les deux chambres. Lors du transvasement, le fluide passe de la chambre chaude à la température  $T_3$  à la chambre froide à la température  $T_1 < T_3$  et réciproquement.

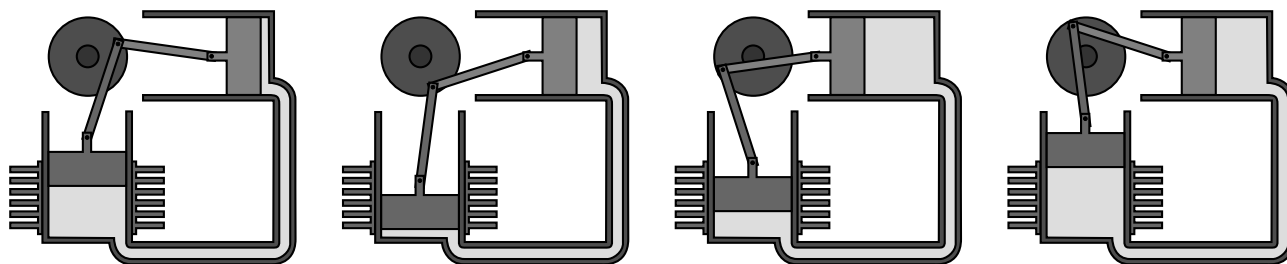


Figure 8 Phases de fonctionnement d'un moteur Stirling de type alpha (d'après Wikipedia)

Le mouvement du gaz peut être décrit par 4 phases plus ou moins distinctes (figure 8) :

- ◇ une phase de compression, pendant laquelle le volume de la chambre chaude est minimal, le fluide, entièrement situé dans la zone froide, est comprimé par le piston de travail dans sa course vers le bas ;
- ◇ une fois le piston de travail au point mort bas, le déplaceur est ramené à gauche, ce qui a pour effet de transvaser le fluide comprimé, qui passe de la zone froide vers la zone chaude et reçoit un transfert thermique de la source externe ;
- ◇ une phase de détente, pendant laquelle le fluide se détend dans le volume d'expansion où il continue d'être chauffé. Cette détente a pour effet de repousser le déplaceur et le piston de travail ;
- ◇ une fois que le piston de travail a atteint le point mort haut, le déplaceur est ramené à droite, ce qui a pour effet de transvaser le fluide de la zone chaude (volume d'expansion) vers la zone froide (volume de compression). Au cours de ce transfert, le fluide cède de la chaleur au refroidisseur.

Un cycle réel d'un moteur de Stirling est représenté dans le diagramme  $(p,V)$ , **sur le document réponse à rendre avec la copie.**

- 1) Justifier que ce cycle est celui d'un moteur. Estimer la valeur du travail fourni par le moteur pendant un cycle.

### I/B Modélisation du cycle

On étudie le cycle de Stirling idéal. Au cours de celui-ci,  $n$  moles de gaz parfait de coefficient adiabatique  $\gamma$  subissent les transformations suivantes :

- ◇ une compression  $(1 \rightarrow 2)$  isotherme réversible à la température  $T_1$ ,
- ◇ un échauffement  $(2 \rightarrow 3)$  isochore jusqu'à l'état 3 de température  $T_3$ ,
- ◇ une détente  $(3 \rightarrow 4)$  isotherme réversible à la température  $T_3$ ,
- ◇ un refroidissement  $(4 \rightarrow 1)$  isochore jusqu'à l'état 1.

Il n'y a pas d'autre travail que celui des forces de pression.

- 2) Représenter sur la figure du document réponse, à rendre avec la copie, l'allure du diagramme correspondant au cycle idéal.

On note  $r = \frac{V_1}{V_2}$  le rapport de compression entre les volumes fixés par construction. On rappelle que la capacité thermique à volume constant d'un gaz de  $n$  moles de gaz parfait vaut  $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$  où  $R$  est la constante des gaz parfaits.

- 3) Exprimer  $W_{12}$ , le travail reçu par le fluide au cours de la compression, en fonction de  $n, R, T_1$  et  $r$ . En déduire le transfert thermique  $Q_{12}$  reçu par le fluide au cours de cette compression en fonction de  $n, R, T_1$  et  $r$ . Préciser les signes de  $W_{12}$  et de  $Q_{12}$ .
- 4) Exprimer  $Q_{23}$ , le transfert thermique reçu par le fluide au cours de l'échauffement isochore, en fonction de  $n, R, T_1, T_3$  et  $\gamma$ . Préciser son signe.
- 5) Exprimer  $W_{34}$ , le travail reçu par le fluide au cours de la détente, en fonction de  $n, R, T_3$  et  $r$ . En déduire le transfert thermique  $Q_{34}$  reçu par le fluide au cours de cette détente en fonction de  $n, R, T_3$  et  $r$ . Préciser les signes de  $W_{34}$  et  $Q_{34}$ .
- 6) Exprimer le transfert thermique  $Q_{41}$  reçu par le fluide au cours du refroidissement en fonction de  $n, R, T_1, T_3$  et  $\gamma$ . Préciser son signe.

### **I/C Rendement du moteur**

- 7) Définir puis exprimer le rendement idéal du moteur en fonction de  $T_1, T_3, r$  et  $\gamma$ .
- 8) Définir et exprimer le rendement de Carnot en fonction de  $T_1$  et  $T_3$ .

Dans beaucoup de situations, le moteur de Stirling contient un régénérateur. Dans ce cas, la chaleur perdue par le gaz lors du refroidissement isochore ( $4 \rightarrow 1$ ) est récupérée par le gaz lors du chauffage isochore ( $2 \rightarrow 3$ ). Si le régénérateur est idéal, cette récupération est totale.

- 9) Que devient le rendement du cycle idéal dans ce cas ?

On considère 2 moteurs de Stirling combinés dont l'efficacité est environ 50 % de l'efficacité de Carnot, alimenté par une puissance électrique d'environ 180 W.

- 10) En prenant une température chaude de  $640^\circ\text{C}$  et une température froide de  $60^\circ\text{C}$  et en supposant la conversion du travail mécanique en travail électrique parfaite, estimer numériquement la puissance thermique fournie par la source chaude aux deux moteurs de Stirling combinés.

## P2 Étude thermodynamique d'une chambre froide

Le stockage des récoltes s'effectue dans une chambre froide. On se propose dans cette partie d'étudier cette machine thermique. Le fluide réfrigérant étudié est du R134a. Pour les futures constructions, le fluide sera du R1234ze pour sa moindre contribution à l'effet de serre.

### II/A Généralités

Le fluide réfrigérant décrit le cycle thermodynamique présenté figure 8. On modélise la machine frigorifique par une machine ditherme schématisée en figure 9.

On utilise les notations suivantes :

- ◇  $Q_c$  : transfert thermique algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de la source chaude à la température  $T_c$  ;
- ◇  $Q_f$  : transfert thermique algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de la source froide à la température  $T_f$  ;
- ◇  $W$  : travail algébriquement reçu par le fluide au cours d'un cycle de la part de l'extérieur.

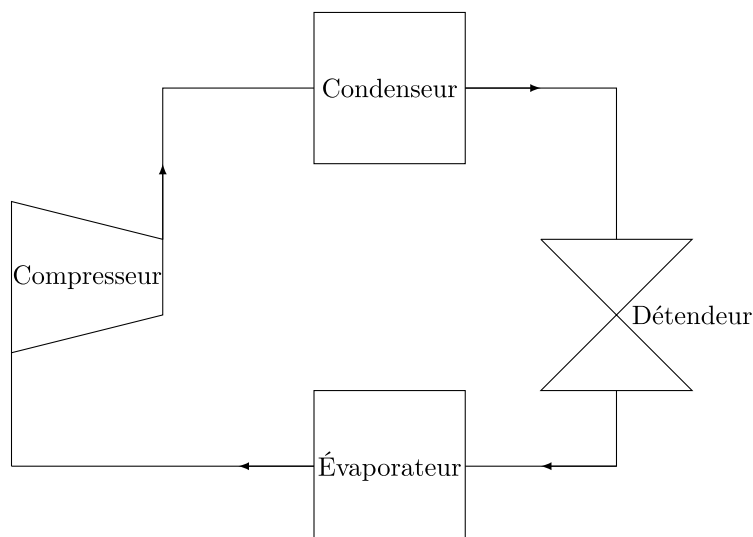


Figure 8

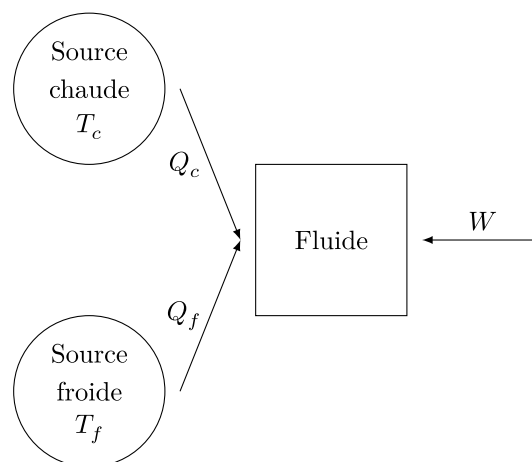


Figure 9

- 1) Au niveau de quel organe de la machine thermique se trouve la chambre froide ? Justifier votre réponse.
- 2) Préciser en justifiant les signes de  $Q_c, Q_f$  et  $W$ .
- 3) Définir l'efficacité  $e$  (également appelé COefficient de Performance COP) de la machine frigorifique.
- 4) Établir l'expression de l'efficacité de Carnot  $e_c$ , en fonction de  $T_c$  et  $T_f$ . Que peut-on dire l'efficacité réelle  $e$  par rapport à l'efficacité de Carnot  $e_c$  ?
- 5) Calculer numériquement  $e_c$  avec  $T_c = 45\text{ °C}$  et  $T_f = 3\text{ °C}$ . Interpréter le résultat obtenu.

### II/B Description du cycle

Le cycle comprend les successions de transformations suivantes :

- ◇  $1 \rightarrow 2$  : compression adiabatique réversible en phase gazeuse dans le compresseur ;
- ◇  $2 \rightarrow 3$  : refroidissement isobare de la vapeur ;

- ◇  $3 \rightarrow 4$  : compression totale et isobare ;
- ◇  $4 \rightarrow 5$  : sous-refroidissement isobare ;
- ◇  $5 \rightarrow 6$  : détente isenthalpique ;
- ◇  $6 \rightarrow 7$  : chauffage isobare ;
- ◇  $7 \rightarrow 1$  : surchauffe de la vapeur.

On introduit pour cet exercice le **diagramme des frigoristes**  $(p, h)$ . Il permet une représentation de l'état d'un système en variables  $p, h$  plutôt que  $p, v$  et donc la lecture des enthalpies massiques.

- ◇ L'enveloppe de la courbe en cloche (trait plein épais) est la **courbe de saturation**, et on trouve la courbe de rosée et la courbe d'ébullition du même côté que sur un diagramme  $(p, v)$ , le point critique étant à la rencontre de ces courbes.
- ◇ Sont également représentées les courbes **isotitres** à l'intérieur de la courbe de saturation, sur lesquelles le titre massique en vapeur est constant : les valeurs principales sont renseignées en bas des isotitres à 0, 0,10 et 0,50.
- ◇ On y voit également des **courbes isothermes** en traits pointillés, sur lesquelles la température est constante.

Le tableau 2 donne le relevé thermodynamique du fluide aux différents points de ce cycle.

Point du cycle	Pression $P$ (bar)	Température $T$ (°C)	Enthalpie massique $h$ (kJ·kg <sup>-1</sup> )	Débit massique $D_m$ (kg·s <sup>-1</sup> )
1	2,7	3,0	402	0,16
2	11,6	63,1	442	0,16
3	11,6	45,0	421	0,16
4	11,6	45,0	264	0,16
5	11,6	40,0	256	0,16
6	2,7	-2,0	256	0,16
7	2,7	-2,0	397	0,16

Tableau 2

- 6) Représenter le cycle thermodynamique sur le diagramme des frigoristes  $(p, h)$  du document réponse.
- 7) Qualifier l'état du fluide aux points 3 et 4.
- 8) Lire graphiquement le titre en vapeur  $x_v$  du point 6.

- 9) Rappeler l'expression du premier principe de la thermodynamique **complet**, avec les énergies cinétiques et potentielles macroscopiques, puis donner son expression avec l'enthalpie.

Le réécrire pour un fluide en écoulement stationnaire, qui utilise les **grandeurs massiques**. La simplifier en négligeant les variations d'énergies massiques macroscopiques devant  $\Delta h$ .

- 10) Exprimer puis calculer numériquement le transfert thermique massique  $q_f$  reçu par le fluide dans l'évaporateur.
- 11) Exprimer puis calculer numériquement le transfert thermique massique  $q_c$  reçu par le fluide dans le condenseur.
- 12) Exprimer puis calculer numériquement le travail indiqué  $w_i$  reçu par le fluide de la part du compresseur.
- 13) En déduire l'efficacité réelle  $e$  de la machine frigorifique.
- 14) Exprimer puis calculer numériquement la puissance thermique extraite de la chambre froide  $P_{th,f}$ .

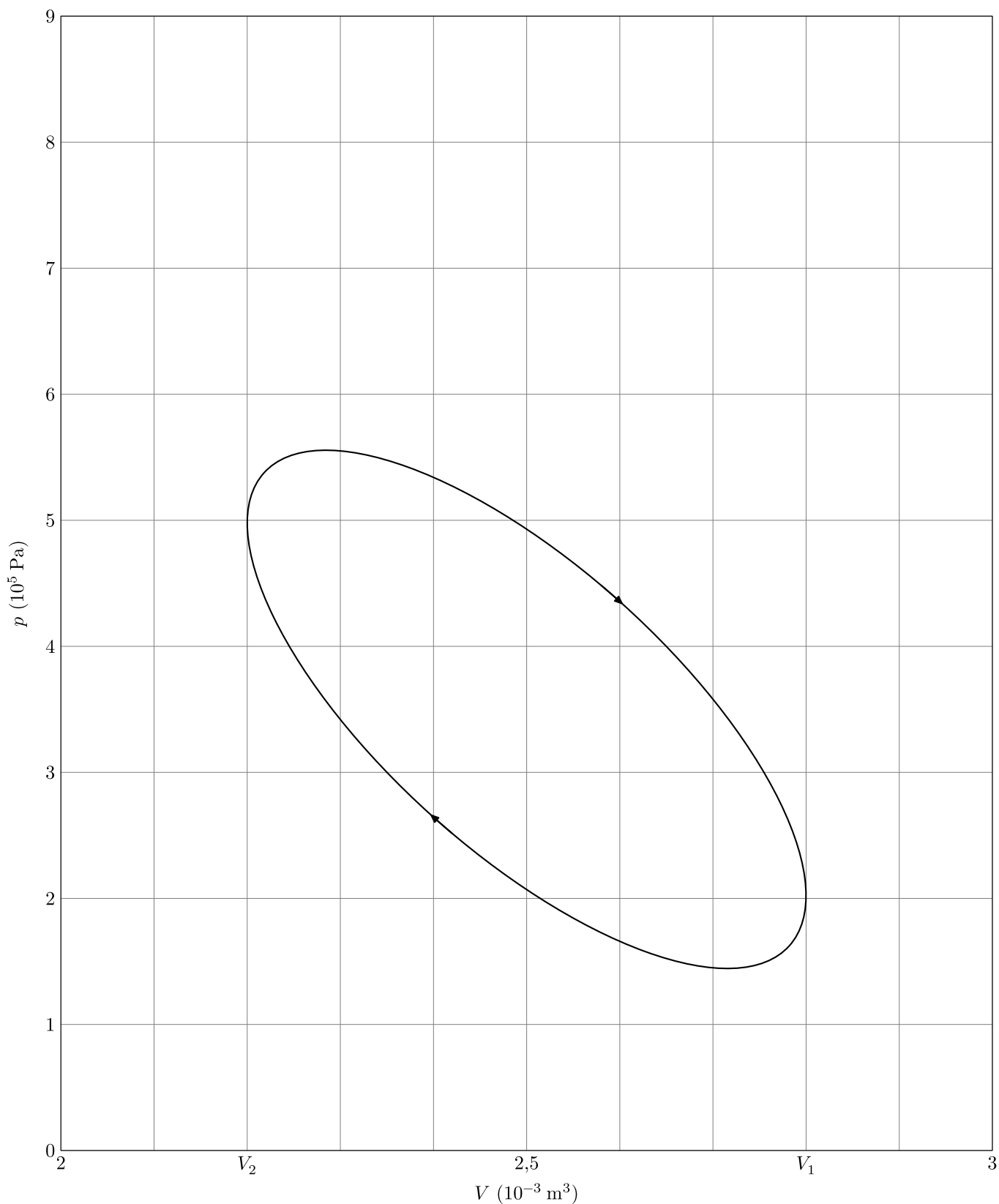


# Document réponse

## *A rendre avec la copie*

Nom :

Prénom :

Allure du cycle réel d'un moteur Stirling dans le diagramme  $(p, V)$

