Mécanique – chapitre 6

Moment cinétique pour un point matériel

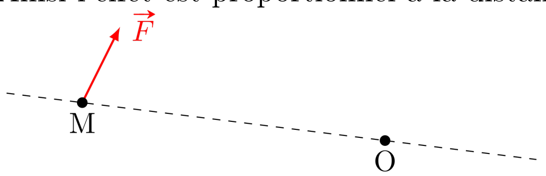
Jusqu'à présent, nous avons vu deux méthodes de résolution en mécanique :
- Le PFD au chapitre 1, pour avoir toute l'information sur un mouvement ;
- Les théorèmes énergétiques (TEC et TEM, TPC et TPM) au chapitre 4, pour les informations à un instant donné.

Il existe une autre méthode de résolution dans le cas spécifiques des **mouvements de rotation** : le théorème du moment cinétique. Dans ce chapitre, **nous ne nous intéressons qu'à des points matériels M** de masse m : le traitement des solides viendra un peu plus tard.

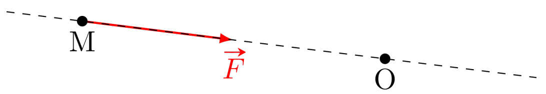
I Moment d'une force

A Par rapport à un point

Observations :
- Lorsqu'une masse m est placée à distance d'un point « pivot », cette masse génère une rotation.
- On peut compenser cette rotation en mettant une même masse à la même distance de l'autre côté.
- On peut compenser une masse plus grande en mettant une masse plus faible plus loin du pivot.
- Ainsi l'effet est proportionnel à la distance au pivot.



$\vec{F}$ tend à faire tourner M autour de O dans le sens horaire.



$\vec{F}$ ne cause aucune rotation.

Pour traduire cette capacité d'une force à créer un mouvement de rotation autour de O, on introduit une grandeur appelée **moment d'une force**.

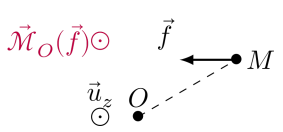
Définition : moment d'une force

Le moment d'une force $\vec{F}$ au point M par rapport à un point O est le **vecteur** :

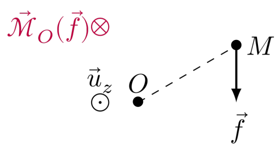
$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}} \quad \text{Unité : N} \cdot \text{m}$$

avec $\wedge$ le produit vectoriel.

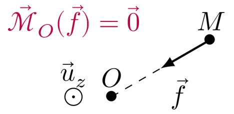
Interprétation géométrique : la **direction** de $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ indique la manière dont la force $\vec{F}$ a tendance à faire tourner M autour de O, et est donné par la **règle de la main droite**.



Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ est dirigé selon $+\vec{u_z}$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le sens **direct**.



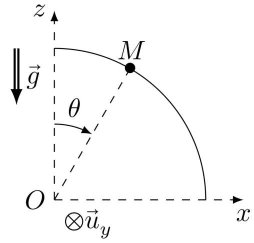
Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})$ est dirigé selon $-\vec{u_z}$, $\vec{F}$ fait tourner M dans le sens **horaire**.



Si $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{0}$, $\vec{F}$ ne fait pas tourner M autour du point O.

Exercice

Un véhicule assimilé à un point matériel M de masse m se déplace de haut en bas d'une colline ; la trajectoire est assimilée à un quart de cercle vertical de centre O et de rayon R. On note θ l'angle que fait OM avec la verticale. Calculer le moment du poids par rapport à O.



Pour calculer le moment d'une force, on décompose ladite force et le vecteur $\overrightarrow{\text{OM}}$ **dans la même base**. Ici, le poids s'exprime en coordonnées cartésiennes : on projette donc la position $\overrightarrow{\text{OM}}$ dans le repère cartésien. On obtient ainsi :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{\text{OM}} = R\overrightarrow{u_r} \\ \qquad = R(\cos\theta\overrightarrow{u_z} + \sin\theta\overrightarrow{u_x}) \end{cases}$$

On peut donc calculer le moment du poids :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O}}(\overrightarrow{P}) &= \overrightarrow{\text{OM}} \wedge \overrightarrow{P} \\ &= -mgR(\cos\theta\overrightarrow{u_z} + \sin\theta\overrightarrow{u_x}) \wedge \overrightarrow{u_z} \\ &= -mgR\cos\theta\,\underbrace{\overrightarrow{u_z} \wedge \overrightarrow{u_z}}_{=\vec{0}} - mgR\sin\theta\,\underbrace{\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_z}}_{=-\overrightarrow{u_y}} \\ \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O}}(\overrightarrow{P}) = +mgR\sin\theta\overrightarrow{u_y}} \end{aligned}$$

On vérifie **systématiquement** que la direction du moment donne bien le sens de rotation attendu, ici dans le horaire sur la figure.

B Par rapport à un axe orienté

Plutôt que de travailler avec des vecteurs, on peut simplement s'intéresser à la norme d'un moment. On définit pour ça :

Définition : moment d'une force par rapport à un axe orienté

Le moment d'une force par rapport à un axe orienté $(\text{O},\overrightarrow{u_z})$ est le **scalaire** défini par :

$$\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}) = \left(\overrightarrow{\text{OM}} \wedge \overrightarrow{F}\right) \cdot \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O}}(\overrightarrow{F}) \cdot \overrightarrow{u_z}$$

avec O un point de l'axe z. $\mathcal{M}_z$ est donc le projeté du moment $\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O}}(\overrightarrow{F})$ sur l'axe (Oz).

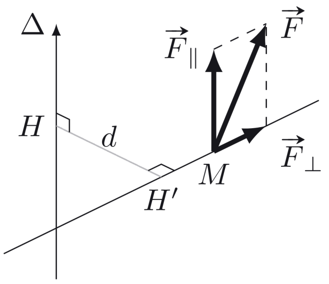
Important

1) $\mathcal{M}_z$ est un **scalaire** puisqu'il est issu d'un **produit scalaire**.
2) $\mathcal{M}_z$ ne dépend pas du point O considéré.

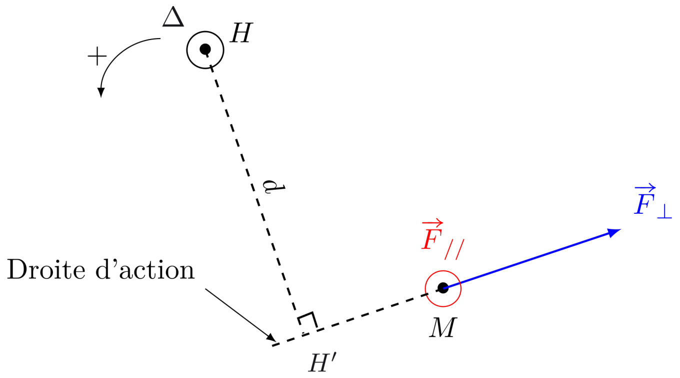
Interprétation géométrique : cette fois-ci c'est le **signe** de $\mathcal{M}_z$ qui indique le sens de rotation par rapport à l'axe orienté : il est positif si la rotation se fait dans le sens **direct**.

C Bras de levier d'une force

Pour calculer le moment d'une force $\overrightarrow{F}$ exercée en un point M par rapport à un axe orienté Δ (souvent $(\text{O},\overrightarrow{u_z})$), on décompose $\overrightarrow{F}$ en deux composantes : l'une parallèle et l'une perpendiculaire à l'axe Δ, notées $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{F}_\perp + \overrightarrow{F}_{/\!/}$.



Vue dans l'espace



Vue du dessus

Propriété : bras de levier d'une force

Le **bras de levier** d'une force $\vec{F}$ appliquée en un point M est la **distance** d entre l'**axe** de rotation et la **droite d'action** donnée par sa composante $\vec{F}_{\perp}$. Le moment $\mathcal{M}_z(\vec{F})$ est alors

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}) = \pm d \left\| \vec{F}_{\perp} \right\|}$$

On détermine le signe en regardant dans quelle direction la force $\vec{F}_{\perp}$ tend à faire tourner M.

Démonstration

On commence par déterminer le moment de la force par rapport au point H de l'axe, puis on projettera par produit scalaire avec $\vec{u_z}$. On a donc :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{HM}} &= \overrightarrow{\mathrm{HH'}} + \overrightarrow{\mathrm{H'M}} \\ \vec{F} &= \vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{/\!/} \end{aligned}$$

Ainsi,

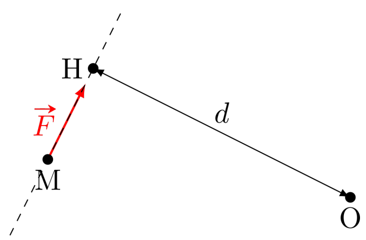
$$\begin{aligned} \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{H}}(\vec{F}) &= \overrightarrow{\mathrm{HM}} \wedge \vec{F} \\ &= (\overrightarrow{\mathrm{HH'}} + \overrightarrow{\mathrm{H'M}}) \wedge (\vec{F}_{\perp} + \vec{F}_{/\!/}) \\ &= \underbrace{\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{HH'}}}_{\perp \vec{u_z}} \wedge \underbrace{\vec{F}_{\perp}}_{\perp \vec{u_z}}}_{= \pm dF\vec{u_z}} + \underbrace{\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{HH'}}}_{\perp \vec{u_z}} \wedge \underbrace{\vec{F}_{/\!/}}_{/\!/ \vec{u_z}}}_{\perp \vec{u_z}} + \underbrace{\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{H'M}}}_{/\!/ \vec{F}_{\perp}} \wedge \vec{F}_{\perp}}_{= \vec{0}} + \underbrace{\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{H'M}}}_{\perp \vec{u_z}} \wedge \underbrace{\vec{F}_{/\!/}}_{/\!/ \vec{u_z}}}_{\perp \vec{u_z}} \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z(\vec{F}) &= \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{H}}(\vec{F}) \cdot \vec{u_z} \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_z(\vec{F}) &= \pm dF_{\perp} + 0 + 0 + 0 \end{aligned}$$

■

En général, on s'intéressera directement à une force perpendiculaire à l'axe orienté, auquel cas la situation se résume ainsi :



et on a alors

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{OH}} \wedge \vec{F}}_{= \pm dF\vec{u_z}} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{HM}} \wedge \vec{F}}_{= \vec{0}}$$

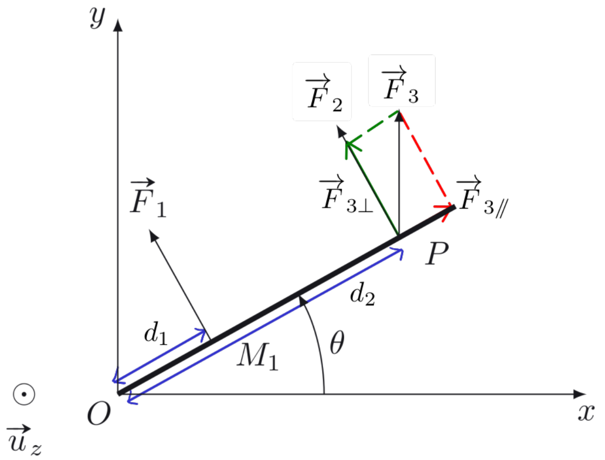
On peut résumer ceci à la méthode suivante :

Méthode du bras de levier

1) Trouver le point O de l'axe de rotation dans le plan perpendiculaire à $\overrightarrow{u_z}$ passant par M ;
2) Tracer la droite d'action, passant par M et dirigée par $\overrightarrow{F}$;
3) Calculer géométriquement $\overrightarrow{F}_{\perp}$ si nécessaire ;
4) Calculer géométriquement d ;
5) Identifier le sens de rotation avec la règle de la main droite.

Exercice

On considère trois forces, de normes égales, exercées sur une porte pour l'ouvrir. Laquelle est la plus efficace ? Justifier à l'aide du bras de levier.



1) La première force créé un moment

$$\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}_1) = d_1 F$$

2) La deuxième force créé un moment

$$\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}_2) = d_2 F > d_1 F$$

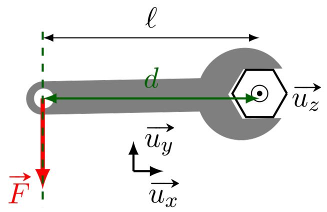
3) La troisième force créé un moment

$$\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}_3) = d_2 F_{3\perp} < d_2 F$$

C'est donc $\overrightarrow{F}_2$ qui est la plus efficace.

D Exemples de calcul de moments

I.D.1 Clé sur un boulon

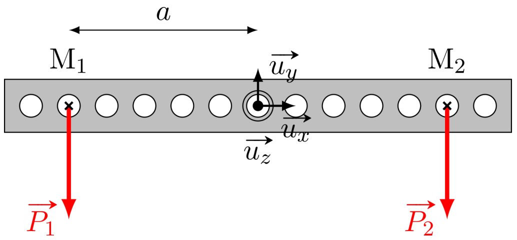


$$\overrightarrow{F} = -F\overrightarrow{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\ell\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{F} = \ell F \overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = \ell F \overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F}) = \ell F}$$

I.D.2 Règle à l'horizontale



$$\overrightarrow{P}_1 = -mg\overrightarrow{u_y} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}}_1 = -a\overrightarrow{u_x}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \overrightarrow{P}_1 = (-a) \times (-mg)\overrightarrow{u_x} \wedge \overrightarrow{u_y} = mga\overrightarrow{u_z}$$

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{P}_1) = mga} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{P}_2) = -mga}$$

La règle ne tourne pas.

II Moment cinétique

Comme pour le chapitre de mécanique énergétique, on a commencé par introduire le concept de travail d'une force avant de l'appliquer sous une certaine forme à l'énergie cinétique du corps. Ici, on a défini le moment d'une force, caractérisant sa capacité à faire tourner un point : il paraît donc naturel de définir une grandeur vectorielle caractérisant la rotation d'un point matériel : c'est le **moment cinétique**.

A Moment cinétique par rapport à un point

Définition : moment cinétique par rapport à un point

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un point O dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le **vecteur** :

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}} \qquad \text{Unité : N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

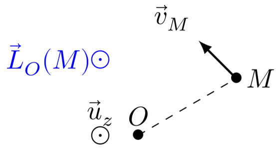
qui traduit la « quantité de rotation » d'un point matériel en rotation autour d'un autre.

Interprétation : considérons un repère cylindrique autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$. On a alors

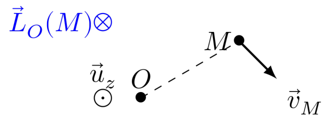
$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\overrightarrow{u_r} \\ \vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\omega\overrightarrow{u_\theta} \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}} = (r\overrightarrow{u_r}) \wedge m(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\omega\overrightarrow{u_\theta}) = mr^2\omega\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi, **le moment cinétique ne conserve une information que sur la rotation du système**. Si celui-ci est nul tout le temps, soit il n'y a pas de mouvement, soit le vecteur vitesse et le vecteur position sont colinéaires et le mouvement est rectiligne.

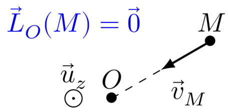
Interprétation géométrique : la **direction** de $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$ indique la manière dont M tourne autour de O.



Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M})$ est dirigé selon $+\overrightarrow{u_z}$, M tourne autour de O dans le sens **direct**.



Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M})$ est dirigé selon $-\overrightarrow{u_z}$, M tourne autour de O dans le sens **horaire**.



Si $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}) = \vec{0}$, M ne tourne pas autour du point O.

Important

1) Le vecteur $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$ est orthogonal à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et à $\vec{v}$.
2) Le moment cinétique $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$ dépend du point O :

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O'}}(\mathrm{M}) = \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}) + \overrightarrow{\mathrm{O'O}} \wedge m\vec{v}}$$

B Moment cinétique par rapport à un axe orienté

Définition : moment cinétique par rapport à un axe orienté

Le moment cinétique d'un point M par rapport à un axe orienté $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_z})$ dans le référentiel $\mathcal{R}$ est le **scalaire** :

$$\boxed{\mathcal{L}_z(\mathrm{M}) = (\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}) \cdot \overrightarrow{u_z} = \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) \cdot \overrightarrow{u_z}} \qquad \text{Unité : N} \cdot \text{m} \cdot \text{s}$$

avec O un point de l'axe. $\mathcal{L}_z$ est donc le projeté du moment $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}$ sur $(\mathrm{O}z)$.

Interprétation géométrique : cette fois-ci aussi, c'est le **signe** de $\mathcal{L}_z$ qui indique le sens de rotation de M autour de l'axe : s'il est **positif** il se fait dans le sens **direct**.

Important

1) $\mathcal{L}_z$ est un scalaire, alors que $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}$ est un vecteur !
2) $\mathcal{L}_z$ est indépendant du point O de l'axe (Oz). En effet :

$$\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O'}/\mathcal{R}} \cdot \vec{u_z} = \left[(\overrightarrow{\mathrm{O'O}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}) \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}\right] \cdot \vec{u_z} = \underbrace{(\underbrace{\overrightarrow{\mathrm{O'O}}}_{/\!/ \vec{u_z}} \wedge \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}) \cdot \vec{u_z}}_{=0} + \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}} \cdot \vec{u_z} = \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}} \cdot \vec{u_z}$$

III Théorème du moment cinétique

Rien que par les unités des différentes grandeurs, on peut imaginer le lien entre moment cinétique et moment d'une force, ou avec un peu de recule sur ce qu'il est en train de se passer. . .

A Par rapport à un point *fixe*

Théorème du moment cinétique par rapport à un point *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et O un point **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_i)}$$

Démonstration

Comme pour un bilan de puissance où l'on applique $\cdot\vec{v}$ sur le PFD, il suffit ici d'appliquer $\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge$:

On part du PFD

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{F}_i$$
$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \sum_i \vec{F}_i$$

Or,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p}\right)$$
$$= \underbrace{\underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}}_{/\!/ \vec{v}} \wedge \underbrace{\vec{p}}_{/\!/ \vec{v}}}_{=\vec{0}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}_i \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_i)}$$ ∎

B Par rapport à un axe <u>orienté</u> *fixe*

Théorème du moment cinétique par rapport à un axe <u>orienté</u> *fixe*

Pour un point matériel M de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen et (O,z) un axe orienté **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i)}$$

Démonstration

On projette simplement le TMC version vectorielle sur $\overrightarrow{u_z}$:

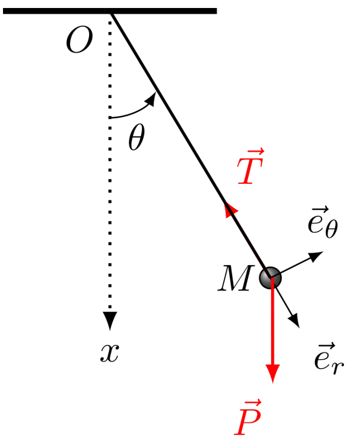
$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{u_z} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}_i) \cdot \overrightarrow{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) \cdot \overrightarrow{u_z}}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i)}$$

■

IV Exemple du pendule simple



1 **De quoi parle-t-on ?** On étudie le mouvement d'une masse suspendue à un fil, dans $\mathcal{R}_{\text{laboratoire}}$ supposé galiléen.

2 **Schéma**.

3 **Modélisation.** On choisit d'utiliser des coordonnées polaires.
- La masse est assimilée à un point matériel M.
- Origine : point d'accroche du fil (centre de rotation pendule).
- Repère : $(O,\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ avec base polaire (voir schéma).
- t initial : moment du lâché, $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta(0) = 0$.
- Repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \ell\overrightarrow{u_r}$, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$.

4 **Bilan des forces.**

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$
Tension $\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$

5 **Calcul des moments.**

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{P}) = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta}) = -mg\ell\sin\theta\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{T}) = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge (-T\overrightarrow{u_r}) = \vec{0} \\ \overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}) = (\ell\overrightarrow{u_r}) \wedge (m\ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = m\ell^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

Ainsi

$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mg\ell\sin\theta}$ et $\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{T}) = 0}$ et $\boxed{\mathcal{L}_z(\mathrm{M}) = m\ell^2\dot{\theta}}$

6 **TMC** :

$$m\ell^2\ddot{\theta} = -mg\ell\sin\theta + 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

■

On a donc bien retrouvé l'équation du mouvement du pendule simple !