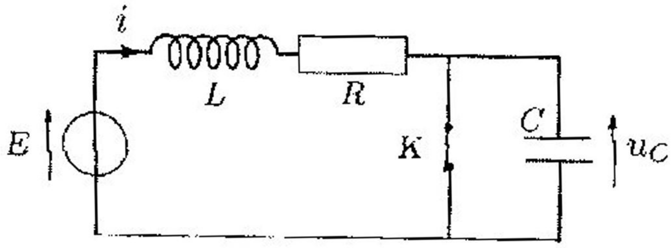
TD : oscillateurs harmonique et amorti

I Etude d'un RLC série en régime transitoire

Indiquer la ou les bonnes réponses en justifiant tout votre raisonnement.
On considère un circuit RLC série, alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice E constante comme schématisé ci-contre. Le condensateur peut être court-circuité lorsque l'interrupteur K est fermé. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la bobine et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur C.



Le condensateur est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue, pour que le régime permanent soit établi. A l'instant pris comme origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

1. Que valent l'intensité $i\left(0^+\right)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$, succédant immédiatement à l'ouverture de l'interrupteur K. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $i\left(0^+\right) = 0$
   - B - $i\left(0^+\right) = \dfrac{E}{R}$
   - C - $u_C\left(0^+\right) = 0$
   - D - $u_C\left(0^+\right) = E$

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$. On la mettra sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C(t) = \alpha$$

   Exprimer ω_0 et Q.
   - A - $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
   - B - $\omega_0 = \dfrac{1}{LC}$
   - C - $Q = R\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
   - D - $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

3. Exprimer α.
   - A - $\alpha = 0$
   - B - $\alpha = E$
   - C - $\alpha = QE$
   - D - $\alpha = {\omega_0}^2\, E$

4. Que peut-on affirmer concernant le facteur de qualité ?
   - A - La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 2$.
   - B - La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 1/2$.
   - C - Plus la valeur de l'inductance est élevée, plus le facteur de qualité est faible.
   - D - Plus la valeur de la capacité est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

Dans la suite, on considère que la bobine possède une inductance L=50 mH et que la capacité du condensateur vaut $C = 20\,\mu\text{F}$. On souhaite obtenir un facteur de qualité $Q = 10$.

5. Calculer la valeur à donner à la résistance R du résistor.
   - A - $R = 0{,}002\,\Omega$
   - B - $R = 0{,}2\,\Omega$
   - C - $R = 5\,\Omega$
   - D - $R = 500\,\Omega$

On admet alors que la tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C\,(t) = \exp\left\{\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right\}\left[A\cos\left(\omega_a t\right) + B\sin\left(\omega_a t\right)\right] + u_{CP}$$

6. Exprimer τ en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $\tau = \dfrac{\omega_0}{2Q}$
   - B - $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$
   - C - $\tau = \dfrac{\omega_0}{Q}$
   - D - $\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}$

7. Exprimer la pseudo-pulsation ω_a en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$
   - B - $\omega_a = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$
   - C - $\omega_a = \omega_0\left(1 + \dfrac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$
   - D - $\omega_a = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$

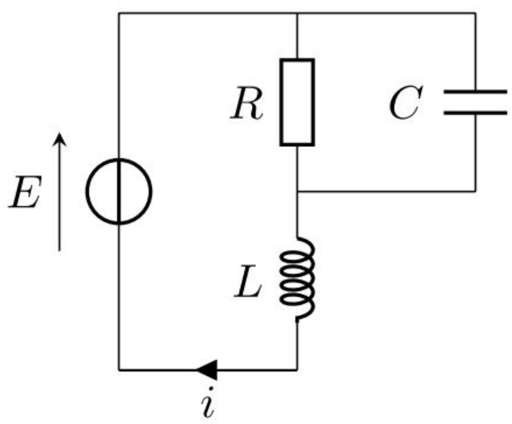
8. Exprimer u_{CP} en fonction de E. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $u_{CP} = E$
   - B - $u_{CP} = 0$
   - C - $u_{CP} = {\omega_0}^2\, E$
   - D - $u_{CP} = 2E$

9. Exprimer A. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $A = E$
   - B - $A = -E$
   - C - $A = 0$
   - D - $A = E/2$

10. Exprimer B. Justifier tout votre raisonnement.
    - A - $B = \dfrac{E}{\omega_a}\left(\dfrac{1}{RC} - \dfrac{1}{\tau}\right)$
    - B - $B = \dfrac{E}{RC\omega_a}$
    - C - $B = 0$
    - D - $B = \dfrac{E}{\tau\omega_a}$

II Oscillateur amorti RLC

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

3. Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

4. Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.