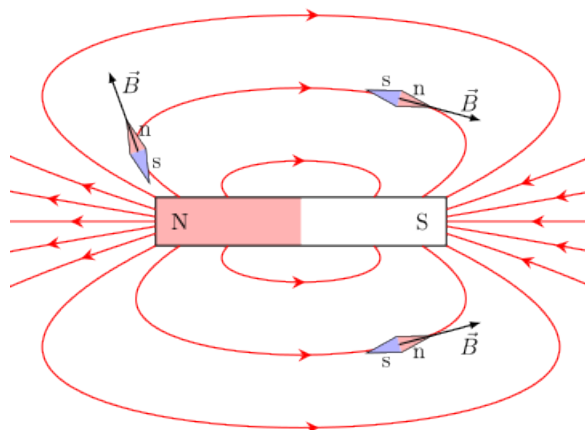


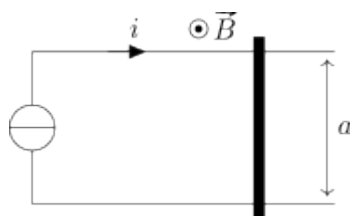
# Actions mécaniques du champ magnétique

## I Observations expérimentales

**Aimant** Pour introduire la notion d'aimant et définir la boussole, nous avons dit qu'une petite aiguille aimantée s'alignait sur la direction du champ magnétique. Il y a donc une action mécanique entre aimant et champ.



**Rails de LAPLACE** Une autre manifestation remarquable est celle des **rails de LAPLACE**. Soit l'expérience suivante : On utilise un aimant en U pour créer un champ magnétique uniforme sur une



assez grande partie d'un barreau métallique mobile, posé sur un bout de circuit électrique. Le barreau permet de fermer le circuit.

- ◇ Lorsqu'on allume le courant, le barreau se met en mouvement **vers la gauche**.
- ◇ En inversant l'aimant **ou** en inversant le sens du courant, le mouvement a lieu **dans l'autre sens**.
- ◇ En mettant  $\vec{B}$  dans le sens de la tige mobile, il n'y a pas de mouvement.

Ces observations suggèrent l'existence d'une force dépendant du courant et du champ magnétique, ainsi que de la direction du barreau.

## II La force de LAPLACE

### A Densité linéique de la force de LAPLACE

Dans un fil électrique parcouru par un courant, les électrons de conduction sont en mouvement. Placés dans un champ magnétique, ils subissent la force de LORENTZ  $\vec{F} = -e\vec{v} \wedge \vec{B}$  : c'est l'origine de la force de LAPLACE. Établissons son expression en fonction de l'intensité parcourant le circuit.

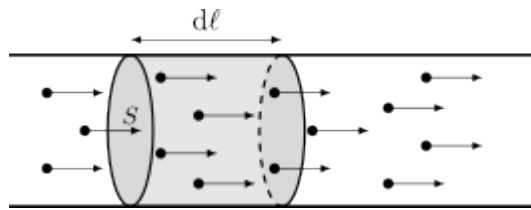
### Hypothèses de calcul

- ◇ On suppose que les électrons sont animés d'une même vitesse  $\vec{v} = v\vec{u}_x$ , où  $\vec{u}_x$  désigne la direction du fil<sup>1</sup> ;
- ◇ le nombre d'électrons par unité de volume  $n$  (en  $\text{m}^{-3}$ ) est homogène ;
- ◇ on considère un fil de section  $S$  constante.

### Expression de l'intensité du courant

Pendant un intervalle  $dt$ , les électrons situés dans un cylindre de longueur  $v dt$  en amont de  $S$  vont passer à travers la section  $S$  :  $v dt$  correspond à la distance parcourue par les électrons pendant cet intervalle. Ceux qui sont plus loin ne la traversent pas. Dans ce cylindre, il y a  $dN = n \times Sv dt$  électrons, soit une charge  $dq = -e dN = -neSv dt$ . L'intensité du courant est donc

$$i = \frac{dq}{dt} = -neSv$$



### Expression de la force subie par une section de fil

Considérons une section de longueur  $d\ell$  de fil. Dans cette section, il y a  $n \times S d\ell$  électrons. Chaque électron subit la force de LORENTZ  $-e\vec{v} \wedge \vec{B}$ . La force subie par la section de fil est donc

$$\begin{aligned} d\vec{F} &= -neS d\ell \vec{v} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow d\vec{F} &= -neSv (d\ell \vec{u}_x) \wedge \vec{B} \end{aligned}$$

En notant  $\vec{d\ell} = d\ell \vec{u}_x$  l'élément de déplacement. Alors,

#### Définition

La force de LAPLACE subie par un élément de fil de longueur  $d\ell$  est

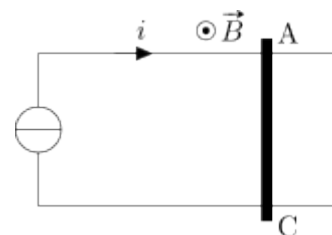
$$\boxed{d\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = i \vec{d\ell} \wedge \vec{B}}$$

avec  $\vec{d\ell}$  orienté dans le sens du courant.

## B Expression intégrale de la force de LAPLACE

Si le champ magnétique est homogène sur un fil rectiligne AC (schéma), alors on **intègre** sur la longueur :

$$\begin{aligned} \vec{F}_{\text{LAPLACE}} &= \int_A^B i \vec{d\ell} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{LAPLACE}} &= i \left( \int_A^C \vec{d\ell} \right) \wedge \vec{B} \end{aligned}$$



Avec  $\int_A^C \vec{d\ell} = \vec{AC}$ , on a ainsi

1. Cette hypothèse a pour but de simplifier le calcul : dans la situation réelle,  $v$  représente la vitesse **moyenne** des électrons.

**Définition**

La force de LAPLACE qui s'exerce sur une barre conductrice AC traversée par un courant  $i$  et placée dans un champ magnétique **uniforme** et **stationnaire**  $\vec{B}$  s'applique en son milieu et vaut :

$$\vec{F}_{\text{LAPLACE}} = i\vec{AC} \wedge \vec{B}$$

où  $i$  est orienté **selon le sens du vecteur**  $\vec{AC}$ .

- 1) On peut orienter la force selon la règle de la main droite, version « trois doigts » :

- ◇ la force sur le pouce (« le pouce pousse »);
- ◇ l'intensité sur l'index;
- ◇ le champ magnétique sur le majeur.

- 2) Cette expression permet d'obtenir la dimension de  $B$  en fonction des dimensions fondamentales :

$$B = \frac{F}{\ell i} \Leftrightarrow [B] = \frac{\text{M} \cdot \text{L} \cdot \text{T}^{-2}}{\text{L} \cdot \text{I}} = \text{M} \cdot \text{T}^{-2} \cdot \text{I}^{-1}$$

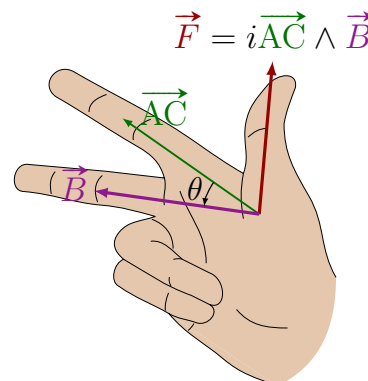
- 3) L'ordre de grandeur de cette force pour un fil de 5 cm dans un champ de 0,1 T parcouru par une intensité de 1 A est :

$$\|\vec{F}_{\text{LAPLACE}}\| = i\ell B = 5 \text{ mN}$$

- 4) La puissance de la force de LAPLACE correspondante est :

$$\mathcal{P}_{\text{LAPLACE}} = (i\vec{AC} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}$$

Ainsi, alors que la force de magnétique de LORENTZ était de puissance nulle sur **1 électron**, ça n'est pas le cas de la force de LAPLACE qui s'applique sur un solide conducteur : dans ce cas, **un champ magnétique peut accélérer le système**.

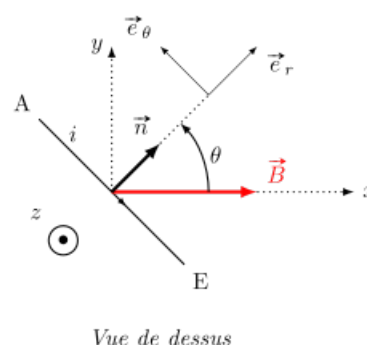
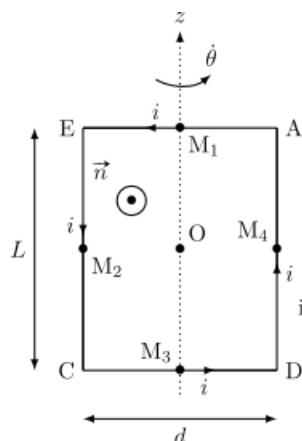


Remarques

### III Le couple des actions de LAPLACE

#### A Spire rectangulaire plongée dans un champ constant

On commence par un cas particulier : une spire rectangulaire dans un champ constant.



Vue de dessus

- ◇ On considère un cadre rectangulaire AECD parcouru par un courant  $i$ . Ce cadre peut tourner autour de l'axe (Oz).
- ◇ On impose un champ magnétique uniforme  $\vec{B} = B\vec{u}_x$ . On note  $\theta$  l'angle entre  $\vec{B}$  et la normale au cadre, orientée **dans le sens de  $i$** . On note cette normale  $\vec{n}$ .

**Résultante des forces** Il s'agit d'additionner les différentes forces de LAPLACE subies par chacun des côtés de la spire rectangulaire. Sur le côté AE par exemple :

$$\overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}} = i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B}$$

La résultante est donc

$$\begin{aligned} \sum \overrightarrow{F_{\text{Lap}}} &= i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{EC}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{CD}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{DA}} \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \sum \overrightarrow{F_{\text{Lap}}} &= i \left( \overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{EC}} + \overrightarrow{\text{CD}} + \overrightarrow{\text{DA}} \right) \wedge \vec{B} \\ \Leftrightarrow \boxed{\sum \overrightarrow{F_{\text{Lap}}} = \vec{0}} \end{aligned}$$

Remarque

Tant que le champ magnétique est homogène, alors peu importe le circuit fermé, on aura

$$\oint_{\mathcal{C}} i d\vec{\ell} \wedge \vec{B} = i \left( \oint_{\mathcal{C}} d\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

**Couple des forces** On a la force agissant sur le côté  $\overrightarrow{\text{AE}}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}} &= i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B} \\ &= i(-d \cos \theta \vec{u}_y + d \sin \theta \vec{u}_x) \wedge B\vec{u}_x \\ &= idB \cos \theta \vec{u}_z \end{aligned}$$

La force s'exerce de façon constante tout le long de la spire, donc son point d'application est  $M_1$ , qui est un point de l'axe de rotation. Ainsi, **son moment est nul** :

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}}) = (\overrightarrow{\text{OM}_1} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z = 0}$$

Sur le côté  $\overrightarrow{\text{EC}}$  :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}} &= i\overrightarrow{\text{EC}} \wedge \vec{B} \\ &= i(-L\vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_x \\ &= -iLB\vec{u}_y \end{aligned}$$

Le point d'application est  $M_2$ , donc :

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_z(\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}) &= (\overrightarrow{\text{OM}_2} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}) \cdot \vec{u}_z \\ &= \left( \left( -\frac{d}{2} \cos \theta \vec{u}_y + \frac{d}{2} \sin \theta \vec{u}_x \right) \wedge -iLB\vec{u}_y \right) \cdot \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}) = -iLB \frac{d}{2} \sin \theta} \end{aligned}$$

La force agissant sur le côté  $\overrightarrow{\text{CD}}$  s'applique en  $M_3$ , qui est sur l'axe de rotation, donc immédiatement :

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F_{\text{Lap,CD}}}) = 0}$$

Et enfin sur le côté  $\overrightarrow{DA}$  :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}} &= i\overrightarrow{DA} \wedge \vec{B} \\ &= i(L\vec{u}_z) \wedge B\vec{u}_x \\ &= iLB\vec{u}_y\end{aligned}$$

Le point d'application est  $M_4$ , donc :

$$\begin{aligned}\mathcal{M}_z(\overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}}) &= (\overrightarrow{OM_4} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}}) \cdot \vec{u}_z \\ &= \left( \left( \frac{d}{2} \cos \theta \vec{u}_y - \frac{d}{2} \sin \theta \vec{u}_x \right) \wedge iLB\vec{u}_y \right) \cdot \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \mathcal{M}_z(\overrightarrow{F_{\text{Lap,DA}}}) &= -iLB \frac{d}{2} \sin \theta\end{aligned}$$

En sommant tous ces moments, on trouve donc :

$$\mathcal{M}_{\text{Lap},z} = -idLB \sin \theta$$

Avec le moment magnétique de la spire  $\vec{\mu} = iS\vec{n}$ , on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{\mu} \wedge \vec{B} &= iS(\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y \wedge B\vec{u}_x) \\ &= -iSB \sin \theta \vec{u}_z \\ &= -iLdB \sin \theta \vec{u}_z\end{aligned}$$

Ainsi,

### Moment des forces de LAPLACE

Un circuit ou un aimant de moment magnétique  $\vec{\mu}$  plongé dans un champ **uniforme** et **stationnaire**  $\vec{B}$  subit un **couple magnétique**, issu du moment des forces de LAPLACE par rapport à un axe  $\vec{u}_z$  tel que :

$$\mathcal{M}_{\text{Lap},z} = (\vec{\mu} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$$

D'où la **puissance** pour le système en rotation :

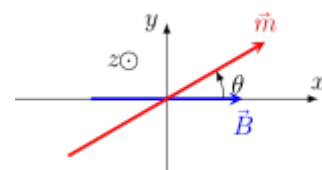
$$\mathcal{P}_{\text{Lap}} = \mathcal{M}_{\text{Lap},z} \cdot \omega = (\vec{\mathcal{M}}_{\text{Lap}} \cdot \vec{u}_z) \omega$$

avec  $\omega$  la vitesse angulaire de rotation autour de l'axe  $z$ .

## B Effet sur un aimant

Par analogie avec la spire, on peut dire qu'un moment magnétique soumis à un champ magnétique génère un couple de forces, de moment résultant :

$$\mathcal{M}_z = (\vec{m} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{u}_z$$



Application

- 1) Exprimer le couple de LAPLACE subit par  $\vec{m}$  en fonction de  $\theta$ .
- 2) En déduire les positions d'équilibre de  $\vec{m}$ .
- 3) En étudiant dans quel sens le couple de LAPLACE tend à faire tourner  $\vec{m}$  en cas de petites perturbations, déterminer laquelle des deux positions d'équilibre est stable, et laquelle est

instable.

1) On a

$$\begin{aligned}\vec{m} &= m(\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y) \\ \vec{B} &= B_0 \vec{u}_x\end{aligned}$$

D'où

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_z = -mB_0 \sin \theta \vec{u}_z}$$

Ce qui fait tourner le système autour de l'axe  $z$ .

2) On est à l'équilibre si la somme des forces et la somme des moments sont nulles. Avec uniquement le couple magnétique, on a bien une résultante nulle : on a donc équilibre si  $\vec{\mathcal{M}}_z = \vec{0}$ , soit

$$\begin{aligned}\sin \theta_{\text{eq}} &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta_{\text{eq}} &= 0 \\ \text{ou} \quad \theta_{\text{eq}} &= \pi\end{aligned}$$

- 3) – En  $\theta_{\text{eq}} = \pi$ , une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens horaire, qui écarte donc l'aimant de sa position d'équilibre : il est **instable**.  
– À l'inverse, en  $\theta_{\text{eq}} = 0$ , une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens direct, le ramenant à sa position d'équilibre : il est **stable**.

La dynamique de la rotation de l'aimant est alors équivalente à celle du pendule pesant ! En effet, en appliquant le théorème du moment cinétique à l'aimant :

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_z$$

avec  $J$  le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. Or, d'après ce qui précède,

$$\begin{aligned}\sum \mathcal{M}_z &= -mB \sin \theta \\ \Leftrightarrow J\ddot{\theta} &= -mB \sin \theta \\ \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{mB}{J} \sin \theta &= 0\end{aligned}$$

qui est bien l'équation du pendule.

### Conclusion

Du fait des petites vibrations (qui rendent la position  $\theta = \pi$  non durable) et des frottements qui arrêtent sa course, **un aimant tend à s'aligner sur le champ magnétique**, et ce d'autant plus vite que le champ  $\vec{B}$  est intense.

En effet, au voisinage de la position d'équilibre, on a  $\sin \theta \sim \theta$ , d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{J} \theta = 0$$

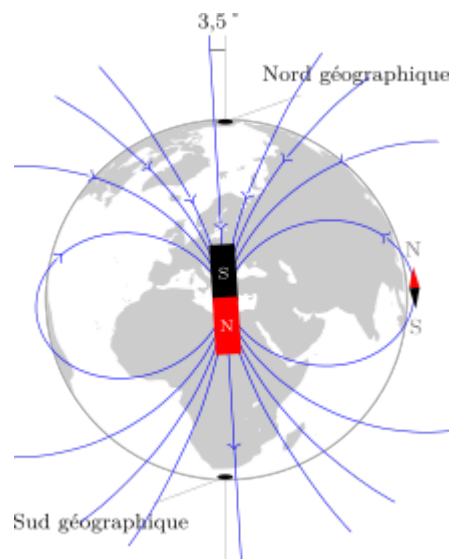
qui est l'équation d'un **oscillateur harmonique**, de période propre :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{mB}}$$

## C Boussole sur Terre

On peut donc pleinement expliquer l'alignement d'une boussole à la surface de la Terre, toujours en modélisant son champ magnétique par un aimant : l'aiguille aimantée de moment magnétique  $\vec{\mu}$  s'oriente spontanément sur le champ magnétique terrestre.

On notera bien que dans ce cas, la boussole pointe bien vers le Nord géographique, mais qu'il correspond au Sud magnétique de la Terre.



## IV Effet moteur d'un champ magnétique tournant

Si un aimant a tendance à s'orienter sur un champ magnétique, on peut utiliser ce couple pour forcer la rotation continue d'un aimant grâce à un **champ tournant** : c'est le principe du **moteur synchrone**.

### Définition

Un champ tournant est un champ de norme constante, mais dont la direction tourne à vitesse angulaire constante. Par le couple de LAPLACE, un aimant soumis à ce champ tournera en régime stationnaire à la même vitesse angulaire  $\omega$ .

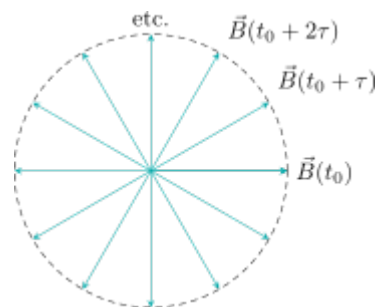


FIGURE 2.1 – Champ magnétique tournant.

Pour réaliser un champ tournant, on peut utiliser deux bobines identiques, de courants déphasés de  $\pi/2$  :

$$i_1(t) = I_0 \cos \omega t$$

et

$$i_2(t) = I_0 \cos \omega t - \pi/2 = I_0 \sin \omega t$$

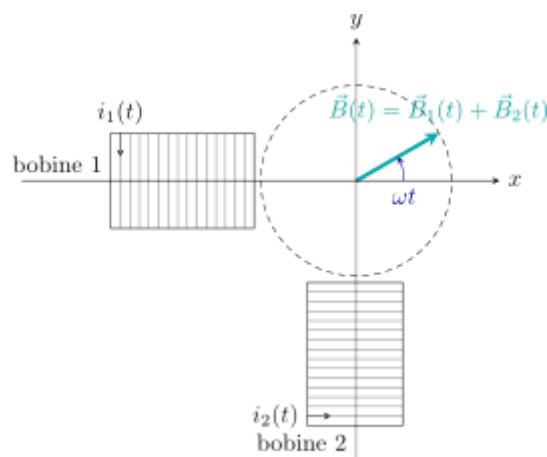
Ainsi, proche de l'axe des bobines on aura des champs

$$\vec{B}_1(t) = kI_0 \cos \omega t \vec{u}_x \quad \text{et} \quad \vec{B}_2(t) = kI_0 \sin \omega t \vec{u}_y$$

Soit, par somme :

$$\boxed{\vec{B} = kI_0(\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y) = kI_0 \vec{u}_r}$$

qui est bien un champ tournant.



Il est également possible de faire un champ tournant à l'aide de trois bobines, décalées de  $2\pi/3$  : c'est ce qu'on appelle un courant **triphasé**, et c'est ce qui est utilisé dans le transport d'électricité de manière industrielle.