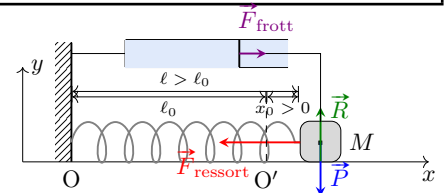


Électrocinétique : ressort amorti

/24 1 On suppose le système mécanique suivant, constitué du point M de masse m accroché à un ressort idéal (k, ℓ_0) mais subissant des frottements fluides. On travaille dans le référentiel \mathcal{R}_{sol} supposé galiléen, avec le repère $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On suppose le ressort initialement étiré tel que $\ell(0) = L_0 > \ell_0$, lâché sans vitesse initiale.



Effectuer un **bilan des forces** puis déterminer l'**équation différentielle sous forme canonique** de $\ell(t)$ pour $t \geq 0$, et la réécrire en effectuant un **changement de variable**. Déterminer les **expressions de ω_0 et Q** , puis **résoudre** l'équation différentielle sur le **changement de variable** pour un régime **pseudo-périodique**. On appelle $x_0 = L_0 - \ell_0$. Exprimer la **période T des oscillations amorties** en fonction de Q et de la **période T_0** des oscillations harmoniques, donner *sans démonstration* l'**approximation de t_{95}** et **tracer la solution**, avec $Q \approx 3$.

◇ **Bilan des forces :** ① + ①

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
Réaction normale	$\vec{R} = R\vec{u}_y$
Force de rappel	$\vec{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x$
Force de frottement	$\vec{F}_f = -\alpha\vec{v} = -\alpha\frac{d\ell}{dt}\vec{u}_x$

Avec le PFD :

$$m\vec{a} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_r + \vec{F}_f$$

$$\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2\ell}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha\frac{d\ell}{dt} \\ -mg + R \end{pmatrix} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Dvlp}^t$$

Donc sur l'axe \vec{u}_x

$$m\frac{d^2\ell}{dt^2} + \alpha\frac{d\ell}{dt} + k\ell \stackrel{\textcircled{1}}{=} k\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{d\ell}{dt} + \omega_0^2\ell(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \omega_0^2\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{dx}{dt} + \omega_0^2x(t) = 0$$

\downarrow
 $x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ell(t) - \ell_0$

On identifie ω_0 et Q :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et $\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

Avec $x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} Ke^{rt}$, on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \Rightarrow \Delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0$$

$$\Rightarrow r_{\pm} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

$\Leftrightarrow r_{\pm} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$

$\left. \begin{array}{l} \text{On injecte } \Delta \\ \text{et extrait } \frac{\omega_0}{Q} \end{array} \right\} \Omega \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$x(0) = L_0 - \ell_0 = 1 [A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \Rightarrow \boxed{A \stackrel{\textcircled{1}}{=} x_0}$$

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\frac{dx}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

$$+ \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times [-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow B \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_0}{2Q\Omega}x_0 = \frac{x_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Ainsi, on trouve bien

$$x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} x_0 \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin(\Omega t)\right]$$

$$\Rightarrow T \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2\pi}{\Omega} \stackrel{\textcircled{1}}{=} T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \quad \text{et} \quad t_{95} \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} QT_0$$

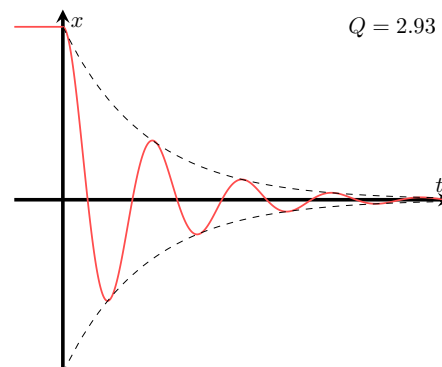


FIG. 6.1 – Tracé solution $Q \approx 3$. ①+①