Correction du TD

I Collision entre deux voitures

Pendant le GP explorer organisé par Squeezie en octobre 2022, Pierre suit Xari de près en vue de le dépasser. On considère ici que les deux voitures se suivent sur une ligne droite à la vitesse de $v_0 = 30\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}$ à une distance $d = 20\,\mathrm{m}$ l'une de l'autre. À la date $t = 0$, la première freine avec une décélération constante $a_1 = -20{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$. Celle qui suit commence son freinage $\tau = 1\,\mathrm{s}$ plus tard (à cause du temps de réaction du conducteur), avec une décélération de $a_2 = -10{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

1) En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à la date $t = 0$, établir les équations horaires du mouvement des deux véhicules.

Réponse

Notons M_1 et M_2 les points matériels représentant chacun une des deux voitures. On se limite au mouvement unidimensionnel selon l'axe x et on notera $x_1(t)$ et $x_2(t)$ les positions respectives de M_1 et M_2 selon cet axe. Initialement, $x_1(t=0) = d = 20\,\mathrm{m}$ et $x_2(t=0) = 0$.

La voiture M_1 de Xari subit l'accélération (qui est négative donc c'est une décélération) constante a_1. Ainsi, par intégration successive,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 + \alpha t + \beta$$

Avec α et β deux constantes d'intégration. En considérant par ailleurs une vitesse initiale v_0 et une position initiale d, on obtient :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1 t^2 + v_0 t + d$$

Pour le second véhicule, il faut décomposer le mouvement en deux étapes successives :

- pour $t \in (0\ ;\ 1)\,\mathrm{s}$, $a = 0$. La position initiale étant par ailleurs nulle et la vitesse initiale étant égale à v_0, il vient, pour $t \in (0\ ;\ 1)\,\mathrm{s}$:
$$x_2(t) = v_0 t$$
- pour $t > 1$, l'accélération vaut a_2 constante. Notons par ailleurs $t_2 = 1\,\mathrm{s}$. On a par intégration :
$$v_2(t) = a_2 t + \gamma$$
Avec γ une constante à déterminer. Or, par continuité de la vitesse, $v_2(t = t_2) = v_0$. Ainsi,
$$v_2(t) = a_2(t - t_2) + v_0$$
Intégrons une nouvelle fois, avec δ une nouvelle constante d'intégration :
$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0 t + \delta$$
En utilisant le fait que $x(t_2) = v_0 t_2$, il vient finalement
$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0 t$$

◇

2) Déterminer la position x_c et la date t_c du contact. Pierre avait-il le temps d'esquiver Xari ?

Réponse

Il y a contact à l'instant t_c tel que

$$x_1(t_c) = x_2(t_c)$$

Supposons d'abord le contact sur l'intervalle $t \in (0\ ;\ 1)$ s. Il faut alors résoudre :

$$\frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + \cancel{v_0t_c} + d = \cancel{v_0t_c}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_c = \sqrt{\frac{-2d}{a_1}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20\,\mathrm{m} \\ a_1 = -30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{t_c = 1{,}41\,\mathrm{s} > 1\,\mathrm{s}}$$

Cette solution est donc exclue puisqu'elle n'est pas en accord avec notre hypothèse initiale $t \in (0\ ;\ 1)$ s.

Supposons maintenant $t_c > 1$ s. Il faut résoudre :

$$\frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + \cancel{v_0t_c} + d = \frac{1}{2}a_2(t_c - t_2)^2 + \cancel{v_0t_c}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}a_1{t_c}^2 + d = \frac{1}{2}a_2\left({t_c}^2 - 2t_2t_c + {t_2}^2\right)$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2){t_c}^2 + a_2t_2t_c + d - \frac{1}{2}a_2{t_2}^2 = 0$$

C'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant Δ est tel que

$$\boxed{\Delta = (a_2t_2)^2 - 2(a_1 - a_2)\left(d - \frac{1}{2}a_2{t_2}^2\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20\,\mathrm{m} \\ a_1 = -30{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ a_2 = -20{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ t_2 = 1\,\mathrm{s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\Delta = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$$

$$\text{D'où} \quad t_{c,\pm} = \frac{-a_2t_2 \pm \sqrt{\Delta}}{(a_1 - a_2)}$$

$$\Leftrightarrow t_{c,+} = -3{,}45\,\mathrm{s} \quad \text{ou} \quad t_{c,-} = 1{,}45\,\mathrm{s}$$

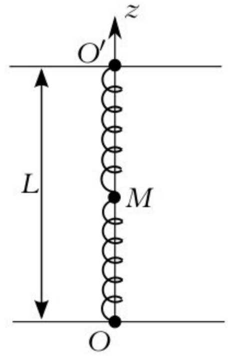
La solution négative étant exclue, on trouve finalement

$$\boxed{t_c = 1{,}45\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{x_1(t_c) = 42{,}5\,\mathrm{m}}$$

Il était donc pratiquement impossible que Pierre esquive Xari, étant donné qu'en freinant au plus tôt il n'a eu que 0,45 s avant de rentrer en collision avec lui, laissant peu de marge à un autre temps de réaction et à une autre manœuvre évasive.

II Masse attachée à 2 ressorts

On considère un point M de masse m attaché à deux ressorts identiques verticaux, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Les deux autres extrémités O et O' des ressorts sont fixes et espacées d'une distance L. On définit l'axe (Oz) vertical ascendant.



1) Déterminer la position d'équilibre z_{eq} de M.

Réponse

On étudie ici le point matériel M de masse m, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen avec le repère $(\text{O}, \overrightarrow{u_z})$, $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant. On repère le point M par son altitude $\text{OM} = z(t)$. On effectue le **bilan des forces** :

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z} \\
\textbf{Ressort 1} & \overrightarrow{F}_{\text{ressort 1}} = -k(\text{OM} - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z} = -k(z-\ell_0)\,\overrightarrow{u_z} \\
\textbf{Ressort 2} & \overrightarrow{F}_{\text{ressort 2}} = +k(\text{O'M} - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z} = +k(L-z-\ell_0)\,\overrightarrow{u_z}
\end{array}$$

avec le ressort 1 celui d'en-dessous, le ressort 2 celui d'au-dessus. On notera simplement $\overrightarrow{F}_1$ et $\overrightarrow{F}_2$ dans la suite. Avec le PFD, on a

$$\begin{aligned}
m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 \\
\Leftrightarrow m\ddot{z} &= -mg - k(z - \cancel{\ell_0}) + k(L - z - \cancel{\ell_0}) \\
\Leftrightarrow & \boxed{\ddot{z} + \frac{2k}{m}z = \frac{k}{m}L - g}
\end{aligned}$$

À l'équilibre, le ressort ne bouge plus ; on a donc $\dot{z} = \ddot{z} = 0$, et on trouve ainsi z_{eq} :

$$\boxed{z_{\text{eq}} = \frac{L}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

Sans la pesanteur, la masse sera à l'équilibre entre les deux ressorts, en toute logique. La gravité diminue cette altitude. On remarque que cette association de ressort est équivalente à avoir un seul ressort de raideur $2k$.

2) Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait $z(t)$. On écrira cette équation en fonction de ω_0 à définir et de z_{eq}.

Réponse

On a commencé la détermination de l'équation différentielle dans la question 2. On peut simplifier son expression en remarquant qu'à droite du signe égal, on doit trouver quelque chose homogène à ${\omega_0}^2 z$. On commence par identifier ω_0 avec la forme canonique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \quad \text{donc} \quad \frac{k}{m}L - g = {\omega_0}^2 z_{\text{eq}}$$

et finalement,

$$\boxed{\ddot{z} + {\omega_0}^2 z = {\omega_0}^2 z_{\text{eq}}}$$

3) On écarte M d'une hauteur a par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse. Déterminer $z(t)$.

Réponse

ion complète $z(t)$ et la somme de la solution particulière constante z_p et de la solution homogène z_h. La solution particulière est, par définition, z_{eq} (on l'a montré question 1). La solution homogène est celle d'un oscillateur harmonique, à savoir

$$z_h = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Ainsi,

$$z(t) = z_{\text{eq}} + A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On trouve A et B avec les conditions initiales :

◇ $z(0) = z_{\text{eq}}+a$ (masse lâchée d'une hauteur a par rapport à la position d'équilibre), or $z(0) = A+z_{\text{eq}}$, donc

$$A = a$$

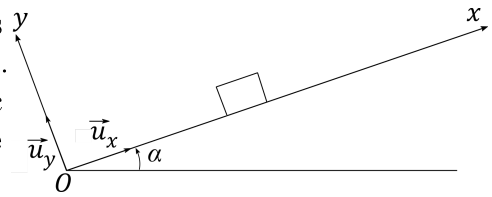
◇ $\dot{z}(0) = 0$ (masse lâchée sans vitesse initiale), or $\dot{z}(0) = B\omega_0$ donc

$$B = 0$$

Ainsi, $$\boxed{z(t) = z_{\text{eq}} + a\cos(\omega_0 t)}$$

III Plan incliné et frottements solides

On considère un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Une brique de masse $m = 600\,\text{g}$ est lancée depuis le bas du plan vers le haut, avec une vitesse $v_0 = 2{,}4\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$. Pour étudier le mouvement, on utilise le repère (O,x,y) avec O coïncidant avec la position de départ de la brique. On note g l'accélération de la pesanteur, avec $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.



1) On suppose en premier lieu que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements

a – Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de sa montée.

Réponse

◇ **Système :** {brique}
◇ **Référentiel :** galiléen (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$) (voir schéma)
◇ **O et t initial :** tels que $\overrightarrow{\text{OM}}(0) = \vec{0}$
◇ **Vitesse initiale :** $\vec{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_x}$
◇ **Bilan des forces :**

Poids $\vec{P} = -mg\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - mg\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}$
Réaction $\vec{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} \cancel{m}\ddot{x} = -\cancel{m}g\sin\alpha \\ \underbrace{m\ddot{y}}_{=0} = -mg\cos\alpha + R \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ étant donné que le mouvement se fait selon $\overrightarrow{u_x}$; ainsi $\boxed{y = \dot{y} = \ddot{y} = 0}$, et la seconde équation donne

$$R = mg\cos\alpha$$

On intègre la première pour avoir l'équation horaire sur $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -gt\sin\alpha + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}gt^2\sin\alpha + v_0 t}$$

avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$.

---

b – Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête, ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

Réponse

On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit t_s ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = g t_s \sin\alpha \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g\sin\alpha}}$$

On remarque alors que si $\alpha = 0$, $t_s \to +\infty$, ce qui est logique puisque sans frottement la brique ne s'arrêterait jamais. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans $x(t)$:

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}\cancel{g}\frac{{v_0}^2}{g^{\cancel{2}}\sin^{\cancel{2}}\alpha}\cancel{\sin\alpha} + v_0\frac{v_0}{g\sin\alpha} \Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g\sin\alpha}}$$

◇

2) On suppose ensuite qu'il existe des frottements solides, avec f le coefficient de frottements solides tel que $f = 0{,}20$.

a – Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de sa montée.

Réponse

On reprend le même système, mais le bilan des forces change :

◇ **Bilan des forces :**

Poids $\overrightarrow{P} = -mg\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - mg\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}$

Réaction $\overrightarrow{R} = R_N\,\overrightarrow{u_y} - R_T\,\overrightarrow{u_x}$

En effet, sur la montée de la brique, sa vitesse est dirigée vers $+\overrightarrow{u_x}$, donc la force de frottement (qui est une force de freinage et donc opposée à la vitesse) est dirigée vers $-\overrightarrow{u_x}$. De plus, avec les lois du frottement de COULOMB, sur la montée la brique glisse sur le support, on a donc

$$\boxed{R_T = fR_N}$$

◇ **PFD :**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -mg\sin\alpha - fR_N \\ \underbrace{\cancel{m\ddot{y}}}_{=0} = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ étant donné que le mouvement se fait selon $\overrightarrow{u_x}$; ainsi $\boxed{y = \dot{y} = \ddot{y} = 0}$, et la seconde équation donne

$$R_N = mg\cos\alpha$$

Que l'on réinjecte dans la première :

$$\ddot{x} = -g\sin\alpha - fg\cos\alpha$$

On intègre cette dernière pour avoir l'équation horaire sur $x(t)$:

$$\dot{x}(t) = -g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin\alpha + f\cos\alpha)t^2 + v_0 t}$$

avec les conditions initiales $\dot{x}(0) = v_0$ et $x(0) = 0$. On retrouve le résultat précédent en posant $f = 0$.

◇

b – Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête, ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

Réponse

On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit t_s ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = gt_s(\sin\alpha + f\cos\alpha) \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$$

Ce temps est plus **court** que sans frottements. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans $x(t)$:

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}\cancel{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}\frac{{v_0}^2}{(g(\sin\alpha + f\cos\alpha))^{\cancel{2}}} + v_0\frac{v_0}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2}\frac{{v_0}^2}{g(\sin\alpha + f\cos\alpha)}}$$

◇

3) On suppose finalement que la brique est **posée** sur le plan avec α variable.

a – Quel doit être l'angle α pour que l'objet se mette en mouvement ?

Réponse

Cette fois, la brique est initialement à l'arrêt, soit $\vec{a}(0) = \vec{0}$, et la brique ne glisse pas donc $R_T < fR_N$. On aura mouvement quand il y aura glissement, c'est-à-dire quand $R_T = fR_N$. On reprend donc le système précédent avec $\vec{a} = \vec{0}$:

$$\underbrace{\cancel{m\vec{a}}}_{=\vec{0}} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg\sin\alpha - fR_N \\ 0 = -mg\cos\alpha + R_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin\alpha = f\cos\alpha \\ R_N = mg\cos\alpha \end{cases}$$
$$\Leftrightarrow f = \tan\alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \operatorname{atan}(f)}$$

◇

b – Si le plan est en bois et la brique en métal, donner la valeur de cet angle. Même question si la brique est en bois. On donne

$$f_{\text{fer/chêne}} = 0{,}26 \quad \text{et} \quad f_{\text{chêne/chêne}} = 0{,}34$$

Réponse

On trouve $\boxed{\alpha_{\text{fer/chêne}} = 14°}$ et $\boxed{\alpha_{\text{chêne/chêne}} = 19°}$

◇

4) Avec $\alpha = 0°$, on souhaite déplacer une armoire de 100 kg en tirant dessus avec la force $\vec{F}$. On donne $f_{\text{armoire/sol}} = 0{,}25$.

a – Déterminer la valeur de $\vec{F}$ pour mettre en mouvement l'armoire.

Réponse

- **Système :** {armoire}
- **Référentiel :** (O, $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$) avec $\vec{u_y}$ vertical asendant
- **Repère :** On suppose la force de traction dirigée vers $+\vec{u_x}$, et donc la vitesse de l'armoire selon $+\vec{u_x}$
- **Repérage :** $\overrightarrow{\text{OM}} = x(t)\,\vec{u_x}$, $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\vec{u_x}$, $\vec{a} = \ddot{x}(t)\,\vec{u_x}$

◇ **Bilan des forces** :

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction normale	$\overrightarrow{R_N} = R_N\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction tangentielle	$\overrightarrow{R_T} = -R_T\,\overrightarrow{u_x}$
Traction	$\overrightarrow{F} = F\,\overrightarrow{u_x}$

À la limite du glissement, on a $R_T = fR_N$.

◇ **PDF :** quand le mouvement est lancé, l'accélération est nulle.

$$\underbrace{\cancel{m\overrightarrow{a}}}_{=0} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R_N} + \overrightarrow{R_T} + \overrightarrow{F} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg + R_N \\ 0 = F - fR_N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg \\ \boxed{F = fmg} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 100\,\mathrm{kg} \\ g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ f = 0{,}25 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{F = 250\,\mathrm{N}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{F}{g} = 25\,\mathrm{kg}}$$

Ainsi, il suffit de fournir une force égale à un quart du poids.

◇

b – En déduire à quoi sert de mettre des patins en téflon sur les pieds de l'armoire.

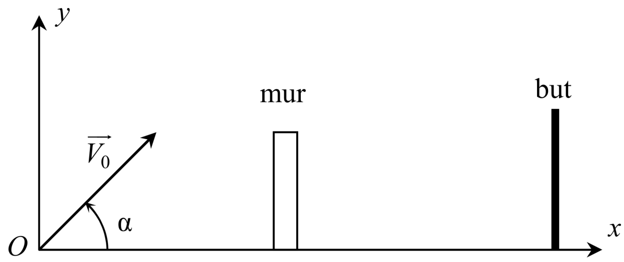
Réponse

Mettre des patins permet de diminuer le coefficient de frottement, et donc de diminuer la force de traction nécessaire pour déplacer le meuble.

◇

IV Coup franc et frottements fluides

On étudie dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe (O,x,y), un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical $(x\mathrm{O}y)$. L'axe $(\mathrm{O}y)$ est choisi suivant la verticale ascendante.



Le ballon, de masse $m = 430\,\mathrm{g}$, est assimilé à un point matériel M initialement au sol en O. Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 de norme $20\,\mathrm{m s^{-1}}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

a – Établir les équations horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

Réponse

◇ **Système :** {ballon}

◇ **Référentiel :** terrestre galiléen

◇ **Repère :** cartésien $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, $\overrightarrow{u_y}$ vertical ascendant, $\overrightarrow{u_x}$ vers le but

◇ **Repérage :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{v} = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{a} = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y}$

◇ **Origine et instant initial :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{0}$

◇ **Vitesse initiale :** $\overrightarrow{v}(0) = v_0 \cos\alpha\, \overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\alpha\, \overrightarrow{u_y}$

◇ **BDF :**

$$\textbf{Poids } \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$$

◇ **PFD :**

$$\cancel{m}\overrightarrow{a} = -\cancel{m}g\,\overrightarrow{u_y} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \tag{2.1}$$

Ainsi,

$$(2.1) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \left\{ \boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\alpha \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{aligned}} \right. \tag{2.2}$$

étant donné les conditions initiales. On trouve la trajectoire en isolant $t(x)$ pour avoir $y(x)$:

$$(2.2) \Rightarrow \begin{cases} t(x) = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ \boxed{y(x) = -\dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha} \end{cases}$$

---

b – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

Réponse

Le ballon passe au-dessus du mur si $y(x_{\text{mur}}) \geq h_{\text{mur}}$ avec h_{mur} la hauteur du mur et x_{mur} sa position horizontale. Avec une application numérique, on obtient

$$y(x_{\text{mur}}) = 2{,}17\,\text{m} > h_{\text{mur}} = 1{,}90\,\text{m}$$

donc le ballon passe bien au-dessus du mur.

---

c – Le tir est-il cadré ?

Réponse

Le tir est cadré si $y(x_{\text{but}}) \leq h_{\text{but}}$. Or,

$$y(x_{\text{but}}) = 1{,}73\,\text{m}$$

donc le tir est bien cadré.

---

2) Il y a en réalité des frottements, modélisés par une force $\overrightarrow{F}_f = -h\overrightarrow{v}$ avec h une constante positive de valeur $5{,}00 \times 10^{-3}\,\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

a – Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{h}$.

Réponse

Avec le même système, seul le bilan des forces est modifié (et donc le PFD) :

◇ **BDF :**

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y} \\ \textbf{Frottements} & \overrightarrow{F} = -h\overrightarrow{v} = -h\dot{x}\,\overrightarrow{u_x} - h\dot{y}\,\overrightarrow{u_y} \end{array}$$

◇ **PFD :** $$m\overrightarrow{a} = -mg\,\overrightarrow{u_y} - h\dot{x}\,\overrightarrow{u_x} - h\dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -h\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - h\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{h}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{h}{m}\dot{y} = -g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v_x} + \dfrac{v_x}{\tau} = 0 \\ \dot{v_y} + \dfrac{v_y}{\tau} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ v_y(t) = -g\tau + B\mathrm{e}^{-t/\tau} \end{cases}$$

$$\text{Or,} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos\alpha \\ v_y(0) = v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = v_0 \cos\alpha \\ B = v_0 \sin\alpha + g\tau \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos\alpha \mathrm{e}^{-t/\tau} \\ v_y(t) = (v_0 \sin\alpha + g\tau)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -v_0\tau \cos\alpha \mathrm{e}^{-t/\tau} + C \\ y(t) = -\left(v_0\tau \sin\alpha + g\tau^2\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau t + D \end{cases}$$

$$\text{or} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = v_0\tau \cos\alpha \\ D = -\left(v_0\tau \sin\alpha + g\tau^2\right) \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0\tau \cos\alpha \left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) & (2.3) \\ y(t) = \left(v_0\tau \sin\alpha + g\tau^2\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) - g\tau t & (2.4) \end{cases}}$$

◇

b – Donner l'équation de la trajectoire.

Réponse

On isole $t(x)$ de (2.3) pour l'injecter dans (2.4) :

$$\boxed{\begin{cases} t(x) = -\tau \ln\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau \cos\alpha}\right) \\ y(x) = \left(\tan\alpha + \dfrac{g\tau}{v_0 \cos\alpha}\right)x + g\tau^2 \ln\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau\cos\alpha}\right) \end{cases}}$$

◇

c – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

Réponse

On calcule :

$$y(x_{\text{mur}}) = 2{,}17\,\mathrm{m}$$

donc le ballon passe au-dessus du mur.

◇

d – Le tir est-il cadré ?

Réponse

On calcule :

$$y(x_{\text{but}}) \approx 1{,}73\,\mathrm{m}$$

donc le tir est bien cadré. On constate que les frottements n'ont eu que peu d'influence sur ce mouvement ; il n'est en effet pas très rapide, donc la force de frottements est restée assez faible.

◇

V Charge soulevée par une grue

Une grue de chantier de hauteur h doit déplacer d'un point à un autre du chantier une charge M de masse m supposée ponctuelle. On appelle A le point d'attache du câble sur le chariot de la grue.

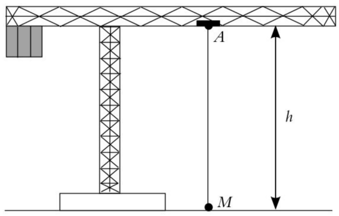


Figure 2.1 – Mouvement vertical

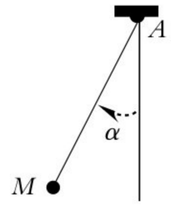


Figure 2.2 – Mouvement horizontal

1) Le point A est à la verticale de M posée sur le sol. Déterminer la tension du câble lorsque M décolle (figure 2.1).

Réponse

- **Système :** {masse m} repérée par son centre d'inertie M.
- **Référentiel :** relié au sol, galiléen.
- **Coordonnées :** cartésiennes, $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant, O au pieds de la grue.
- **BDF :** avant qu'elle ne décolle, il y a la réaction du sol ; on s'intéresse au décollage, donc au moment où elle s'annule. On aura donc

$$\begin{aligned}&\textbf{Poids} \quad \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z}\\&\textbf{Tension}\ \overrightarrow{T} = T\,\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$

- **PFD :** au moment où la masse décolle, son accélération est positive et selon $\overrightarrow{u_z}$, soit $\overrightarrow{a} = \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$; en supposant un décollage en douceur, $\ddot{z} \approx 0$, soit

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow 0 = -mg + T \Leftrightarrow \boxed{T = mg}$$

On a donc la tension égale au poids.

◇

2) L'enrouleur de câble de la grue remonte le câble avec une accélération a_v constante. Déterminer la tension du câble et conclure.

Réponse

Dans ce cas, on a explicitement $\boxed{T = m(a_v + g)}$

La tension est supérieure au poids, et fonction affine de a_v : si l'accélération est trop forte, le câble peut rompre.

◇

3) La montée de M est stoppée à mi-hauteur mais le chariot A se met en mouvement vers la droite (figure 2.2) avec une accélération a_h constante.

a – Quelle est l'accélération de M sachant que M est alors immobile par rapport à A ?

Réponse

L'accélération de M est $\overrightarrow{a}_M = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2}$. Or, $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OA}} + \overrightarrow{\mathrm{AM}}$ avec $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ constant : ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{a}_M = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t^2} = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OA}}}{\mathrm{d}t^2} = \overrightarrow{a}_h}$$

◇

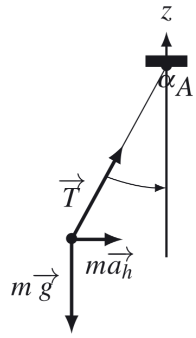
b – Déterminer l'angle α (figure 2.2) que fait le câble avec la verticale en fonction de m, g, a_h ainsi que la tension du câble.

Réponse

On a alors le PFD :

$$m\vec{a}_h = m\vec{g} + \vec{T} \Leftrightarrow ma_h\,\vec{u_x} = -mg\,\vec{u_z} + T\cos\alpha\,\vec{u_z} + T\sin\alpha\,\vec{u_x}$$

Ainsi, $\begin{cases} ma_h = T\sin\alpha \\ mg = T\cos\alpha \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} \tan\alpha = \dfrac{a_h}{g} \\ T = m\sqrt{{a_h}^2 + g^2} \end{cases}}$



◇

VI Étude d'un volant de badminton

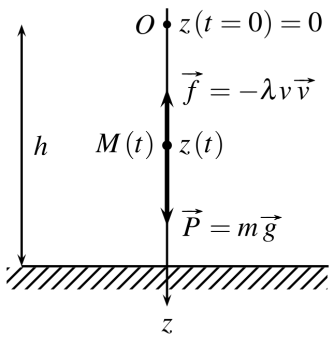
Un volant de badminton a une masse $m = 5{,}0\,\text{g}$. On veut vérifier expérimentalement l'information trouvée sur internet qui précise qu'un volant lâché de très haut atteint une vitesse limite $v_l = 25\,\text{km}\cdot\text{h}^{-1}$. Pour tester cette affirmation, on veut déterminer l'altitude h à laquelle il faut le lâcher (sans vitesse initiale) pour qu'il atteigne cette vitesse limite.

On lâche le volant d'une fenêtre en hauteur et on filme sa chute verticale. On note O le point de départ de la chute, et (Oz) l'axe vertical dirigé vers le bas. Au cours de la chute, on prend en compte une force de frottement due à l'air de la forme $\vec{F} = -\lambda v\vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point M, v sa norme et λ un coefficient positif. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2}$.

1) Établir l'équation différentielle portant sur la norme du vecteur vitesse $v(t)$.

Réponse

- ◇ **Système :** {volant} assimilé à un point matériel M de masse m
- ◇ **Référentiel :** terrestre supposé galiléen
- ◇ **Repère :** (O, $\vec{u_z}$) avec O départ de chute, $\vec{u_z}$ vertical *descendant* (voir schéma)
- ◇ **Repérage :** $\overrightarrow{\text{OM}} = z(t)\,\vec{u_z}$, $\vec{v} = \dot{z}(t)\,\vec{u_z}$, $\vec{a} = \ddot{z}(t)\,\vec{u_z}$
- ◇ **Origine et instant initial :** $\overrightarrow{\text{OM}}(0) = z(0)\,\vec{u_z} = \vec{0}$



- ◇ **BFD :**

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$
Frottements $\vec{F} = -\lambda v\vec{v} = -\lambda\dot{z}^2\,\vec{u_z}$

- ◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Leftrightarrow m\ddot{z} = mg - \lambda\dot{z}^2 \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z}^2 = g$$

Ainsi, $\boxed{\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t} + \dfrac{\lambda}{m}v^2 = g}$

◇

2) Montrer l'existence d'une vitesse limite v_l et l'exprimer en fonction de λ, m et g.

Réponse

Lorsqu'on lâche M sans vitesse initiale d'une hauteur h, la vitesse est faible au départ et la force principale est le poids, accélérant le mobile vers le bas. Quand la vitesse augmente, les frottements s'intensifient jusqu'à ce qu'ils compensent le poids, donnant $\vec{a} = \vec{0}$: la vitesse n'évolue plus et reste à sa valeur avant compensation, la vitesse limite v_l. v_l étant constante, $\dot{v}_l = 0$, donc l'équation différentielle donne

$$\frac{\lambda}{m}{v_l}^2 = g \Leftrightarrow \boxed{v_l = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}$$

◇

On note $t^* = t/\tau$, $z^* = z/L$ et $v^* = v/v_l$, avec $\tau = v_l/g$ et $L = v_l\tau$.

3) Montrer que t^*, z^* et v^* sont trois grandeurs sans dimension.

Réponse

v^* est le rapport de deux vitesses, donc est forcément sans dimension. Ensuite,

$$[\tau] = \left[\frac{v_l}{g}\right] = \frac{\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} = \mathrm{s}$$
$$[L] = [v_l][\tau] = \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \times \mathrm{s} = \mathrm{m}$$

donc τ est bien un temps et L une longueur ; ce faisant, t^* et z^* sont évidemment adimensionnées.

◇

4) Montrer que l'équation différentielle portant sur la vitesse peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1$$

Réponse

On réécrit l'équation avec $v = v_l v^*$ et $t = \tau t^*$:

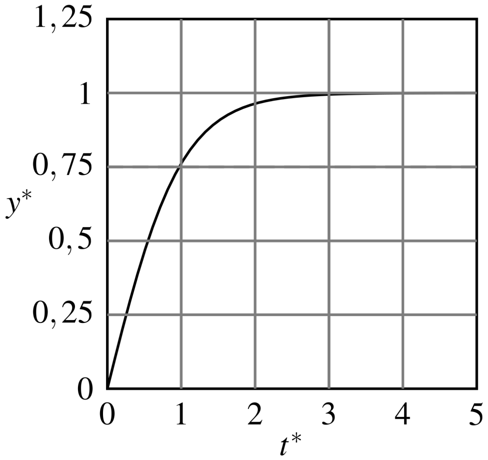
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v = g \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(v_l v^*)}{\mathrm{d}(\tau t^*)} + \frac{\lambda}{m}(v_l v^*)^2 = g \Leftrightarrow \frac{v_l}{\tau}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\lambda {v_l}^2}{m}(v^*)^2 = g$$

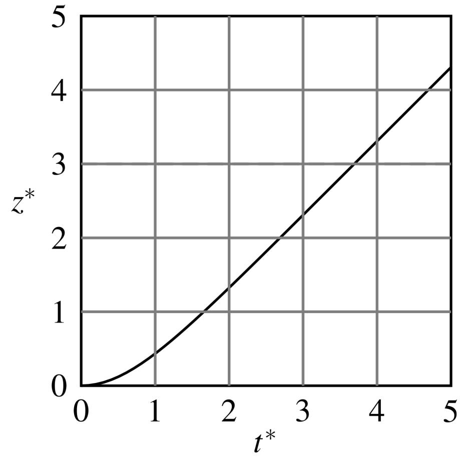
Or,

$$\frac{v_l}{\tau} = g \quad \text{et} \quad \frac{\lambda {v_l}^2}{m} = g \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1}$$

◇

La résolution de l'équation précédente conduit à des solutions dont on donne les représentations graphiques ci-dessous.





5) À l'aide des courbes, décrire les deux phases du mouvement.

Réponse

Ces courbes montrent que la vitesse augmente pendant 2 à 3τ, avant de se stabiliser à v_l. Le mouvement est ensuite rectiligne uniforme, et z est une fonction affine du temps.

◇

6) Déterminer l'altitude minimale h à laquelle il faut lâcher le volant pour que sa vitesse au sol soit supérieure ou égale à 95% de v_l. On exprimera cette altitude en fonction de L. Déterminer également la durée Δt de l'expérience en fonction de τ.

Réponse

Le courbe représentant $v^*(t^*)$ montre que $v^* = 0{,}95$ pour $t^* = 1{,}8$. La durée de l'expérience pour arriver à cette valeur est donc $1{,}8\,\tau$, et la hauteur z^* à ce temps est $z^* = 1{,}2$, ce qui correspond à $z = 1{,}2\,\mathrm{L}$; ainsi

$$\boxed{\Delta t = 1{,}8\,\tau} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 1{,}2\,\mathrm{L}}$$

◇

7) En admettant que la vitesse limite est proche de la valeur trouvée sur internet, calculer numériquement L et τ puis h et Δt.

Réponse

En supposant v_l connue, on a

$$\tau = \frac{v_l}{g} \quad \text{et} \quad L = v_l\tau \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 25\,\mathrm{km\cdot h^{-1}} = 7{,}0\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \\ g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\tau = 7{,}1\times 10^{-1}\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 4{,}9\,\mathrm{m}}$$

Ainsi,

$$\Delta t = 1{,}8\,\tau \quad \text{et} \quad h = 1{,}2\,\mathrm{L}$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 1{,}3\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 5{,}9\,\mathrm{m}}$$

◇

VII Étude d'une skieuse

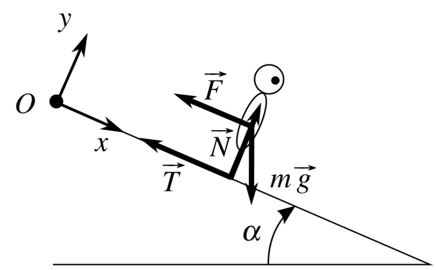
On étudie le mouvement d'une skieuse descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottements supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ avec λ un coefficient positif et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du skieur.

On note $\vec{T}$ et $\vec{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottements exercée par la neige, et f le coefficient de frottements solides tel que $\|\vec{T}\| = f\|\vec{N}\|$.

On choisit comme origine de l'axe (Ox) de la ligne le plus grande pente la position initiale de la skieuse, supposée partir à l'instant initiale avec une vitesse négligeable. On note (Oy) l'axe normal à la piste en O et dirigée vers le haut.

1) Calculer $\vec{T}$ et $\vec{N}$.

Réponse



- ◇ **Système :** {skieuse} assimilée à son centre de gravité
- ◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- ◇ **Repère :** (O, $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$) (voir schéma)
- ◇ **Repérage :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\vec{u_x}$; $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\vec{u_x}$; $\vec{a} = \ddot{x}(t)\,\vec{u_x}$.
- ◇ **Origine et instant initial :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$
- ◇ **Vitesse initiale :** $\vec{v}(0) = \vec{0}$

◇ **BDF :**

Poids	$m\vec{g} = mg(\sin\alpha\,\vec{u_x} - \cos\alpha\,\vec{u_y})$
Réaction normale	$\vec{N} = N\,\vec{u_y}$
Réaction tangentielle	$\vec{T} = -T\,\vec{u_x} = -fN\,\vec{u_x}$
Frottements	$\vec{F} = -\lambda\vec{v} = -\lambda\dot{x}\,\vec{u_x}$

Comme la skieuse glisse sur la piste, avec les lois du frottement de Coulomb, on a

$$T = fN$$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fN - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

Ainsi, comme il n'y a pas de mouvement sur $\vec{u_y}$, $\ddot{y} = 0$ et

$$\boxed{N = mg\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{T = fN = fmg\cos\alpha}$$

---

2) Calculer la vitesse $\vec{v}(t)$ et la position $x(t)$ de la skieuse à chaque instant t.

Réponse

On réutilise la première équation en y injectant l'expression de T pour avoir :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Avec $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\vec{u_x}$, on obtient une équation différentielle sur $v(t)$ que l'on résout en posant $\tau = m/\lambda$ avec la solution homogène $A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et la solution particulière v_p :

$$\dot{v}(t) + \frac{v}{\tau} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \Rightarrow v = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + v_p$$

et on trouve v_p directement en remarquant que, par construction, $\dot{v}_p = 0$ donc $v_p = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. En combinant on peut utiliser la condition initiale sur la vitesse :

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Or,

$$\left.\begin{aligned} & v(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = A + g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & A = -g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{v(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

On trouve la position $x(t)$ en intégrant $v(t)$:

$$x(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(t + \tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + B$$

Or,

$$\left.\begin{aligned} & x(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)(0 + \tau) + B \\ \Leftrightarrow\ & B = -g\tau^2(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(t + \tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\right)}$$

---

3) Montrer que la skieuse atteint une vitesse limite $\vec{v}_l$ et exprimer $\vec{v}(t)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ en fonction de $\vec{v}_l$.

Réponse

La vitesse limite est la solution particulière v_p :

$$\boxed{\vec{v}_l = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\overrightarrow{u_x}}$$

En effet, la présence de la force de frottements fluides dont la norme augmente avec la vitesse fait que la vitesse ne peut pas augmenter indéfiniment. La skieuse atteint une vitesse limite lorsque les frottement compensent la force motrice du mouvement. Ainsi,

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_l\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\overrightarrow{u_x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = v_l\left(t + \tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\right)\overrightarrow{u_x}}$$

◇

4) Calculer $v_l = \|\vec{v}_l\|$ pour $\lambda = 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, $f = 0{,}9$, $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $m = 65\,\mathrm{kg}$ et $\alpha = 45°$.

Réponse

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 65\,\mathrm{kg} \\ g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ \lambda = 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}} \\ \alpha = 45° \\ f = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{v_l = 46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

On remarque que la vitesse limite est une fonction affine du poids. Ainsi, le manque de représentation des femmes dans les sports d'hiver, souvent justifié par une moins bonne performance pure, est biaisé par la répartition moyenne de leurs tailles (et donc de leurs poids) plus faible que la répartition moyenne des tailles (et donc poids) des hommes, rendant <u>pour certains</u> leurs records moins impressionnants.

◇

5) Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où la skieuse a une vitesse égale à $v_l/2$.

Réponse

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \frac{v_l}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{\cancel{v_l}}{2} &= \cancel{v_l}(1 - \mathrm{e}^{-t_l/\tau}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 1 - \mathrm{e}^{-t_1/\tau} \\ \Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t_1/\tau} &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau\ln 2} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m = 65\,\mathrm{kg} \\ \lambda = 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{t_1 = 45\,\mathrm{s}}$$

◇

6) À la date t_1, la skieuse chute. On néglige alors la résistance de l'air et on considère que le coefficient de frottements sur le sol est multiplié par 10. Calculer la distance parcourue par la skieuse avant qu'elle ne s'arrête.

Réponse

En tombant à $t = t_1$, la skieuse a pour vitesse $v_l/2$. L'équation du mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ ne change pas de forme, mais on multiplie f par 10, donc $T = 10fmg$. Ainsi, en posant $t' = t - t_1$, en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ et en négligeant λ,

$$\ddot{x}(t') = g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) \Rightarrow \dot{x}(t') = gt'(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) + v_l/2$$

On trouve le temps d'arrêt t'_a quand $\dot{x}(t'_a) = 0$, soit

$$t'_a = \frac{-v_l}{2g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha)}$$

et la distance d'arrêt depuis le point de chute en intégrant $\dot{x}(t')$ puis en prenant $x(t'_a)$:

$$x(t') = \frac{1}{2}gt'^2(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) + \frac{v_l t'}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t'_a) = -\frac{{v_l}^2}{8g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ \alpha = 45° \\ f = 0{,}9 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{x(t'_a) = 4{,}7\,\mathrm{m}}$$