

# SUP MPSI3 24 mars 2023

## DEVOIR SURVEILLÉ DE SCIENCES PHYSIQUES N°7 (3H00)

**Tout moyen de communication est interdit**  
**Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.**  
**Les calculatrices sont autorisées.**

*Le devoir est composé de quatre exercices et d'un problème indépendants.*

**EXERCICE 1 :** Etude mécanique d'un pédalo.

**EXERCICE 2 :** Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques.

**EXERCICE 3 :** Particule soumise à un champ électrostatique radial.

**EXERCICE 4 :** Le pH sanguin.

**PROBLEME :** Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre.

*A l'intérieur des problèmes, certaines questions sont indépendantes.*

*L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.*

*L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.*

*Une attention particulière sera portée à la **qualité de la rédaction** (vocabulaire, orthographe...) et à la **présentation de la copie** (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques...).*

*Et il est indispensable de **numéroter vos copies**.*

*Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.*

*Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.*

### **Programme de révision de ce devoir :**

**Toute la mécanique du second semestre et le chapitre sur les réactions acido-basiques de la partie chimie des solutions de sup MPSI.**

## EXERCICE 1 : Etude mécanique d'un pédalo :

(≈ 16 pts)

*Nous sommes en été et un adulte traverse un lac en pédalo.*

Donnée : Masse volumique de l'eau :  $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$ .

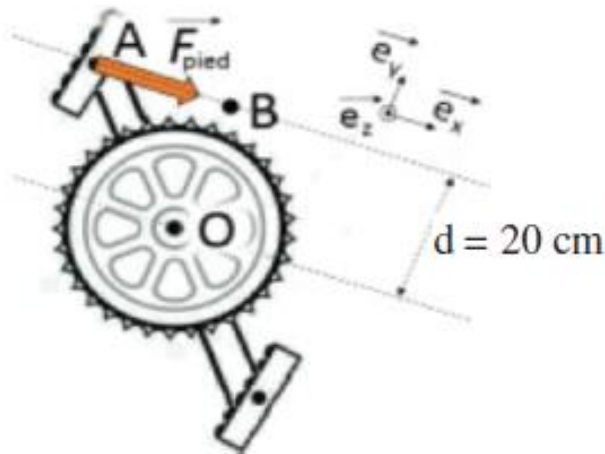
Le pédalo avec son passager possède une masse totale  $M = 200 \text{ kg}$  et il dispose de deux flotteurs, chacun de volume  $V = 0,5 \text{ m}^3$ .  
L'ensemble se déplace à vitesse constante sur le lac.



**Q1.** On note  $V_{im}$  le volume immergé d'un flotteur, lorsque l'équilibre vertical est réalisé, et  $\alpha$  la fraction de volume immergé des flotteurs, ainsi  $\alpha = \frac{V_{im}}{V}$ .

Lorsque l'équilibre vertical est réalisé, exprimer la fraction de volume immergé des flotteurs  $\alpha$  en fonction de  $\rho$ ,  $V$  et  $M$ , puis la calculer.

**Q2.** La force  $\vec{F}_{pied}$  de norme  $F_{pied} = 50 \text{ N}$  exercée par le vacancier sur le pédalier est modélisée sur la figure suivante :



Situation (a)



Situation (b)

Dans chacune des situations (a) et (b), exprimer le moment de la force exercée par le vacancier par rapport à l'axe de rotation du pédalier.

**Q3.** On considère que le moment du couple moyen exercé sur le pédalier correspond à la moyenne des 2 valeurs précédentes. Sachant que le pédalier tourne à la vitesse constante  $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$ , exprimer la puissance moyenne développée par le vacancier en fonction de  $d$ ,  $\|\vec{F}_{pied}\|$  et  $\omega$ , puis la calculer.

## EXERCICE 2 : Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques :

(≈ 42 pts)

Mesurer la vitesse d'un fluide est nécessaire dans nombre de contextes : météorologie (relevé de la vitesse du vent), énergie (détermination d'un potentiel d'exploitation éolien), aéronautique (test de nouveaux avions en soufflerie), confort thermique (réglage d'un système de ventilation) ...

Dans ce sujet, on se propose d'étudier deux anémomètres mécaniques permettant la mesure de la vitesse du vent. Ils utilisent la mise en mouvement d'un objet sous l'effet du vent pour en déduire sa vitesse.

Dans la partie I, on étudiera le fonctionnement d'un anémomètre à plaque, puis celui d'un anémomètre à coupelles, dans la partie II.

### Données numériques :

Accélération de la pesanteur :  $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Masse volumique de l'air à température et pression ambiantes :  $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$

Masse molaire de l'air :  $M_{\text{air}} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$

Viscosité dynamique de l'air à 300 K :  $\eta_{\text{air}} = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ PI}$

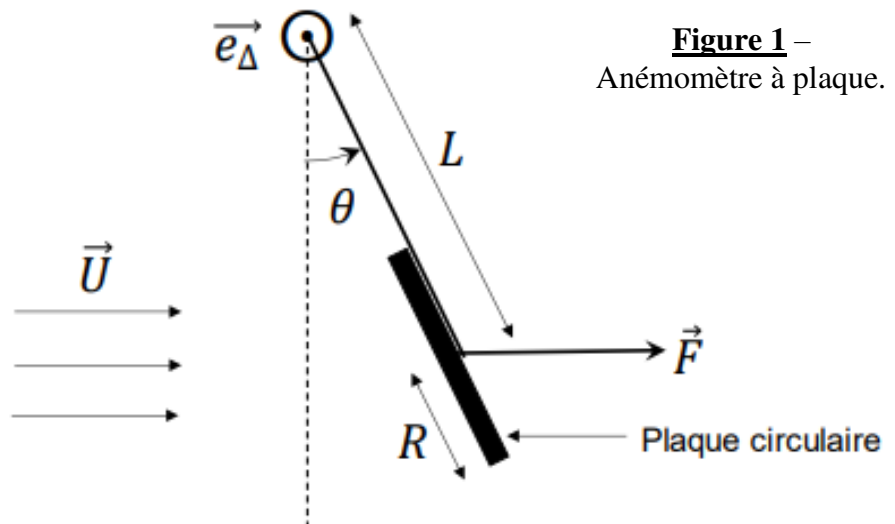
Célérité de la lumière dans le vide :  $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$ .

### I - Anémomètre à plaque :

Le premier anémomètre dont l'histoire des sciences a gardé une trace a été conçu dans les années 1450 par l'architecte italien Leon Battista Alberti.

Il repose sur la déviation d'une plaque attachée au bout d'une tige pouvant pivoter autour d'un axe horizontal.

Le vent arrivant sur la plaque soulève cette dernière. L'inclinaison de la plaque permet de déduire la vitesse du vent.



Le schéma d'un anémomètre à plaque est représenté sur la figure 1 :

La plaque circulaire homogène, de masse  $m = 30 \text{ g}$  et de rayon  $R = 5 \text{ cm}$  est attachée en son centre à une tige de longueur  $L = 15 \text{ cm}$  et de masse négligeable. Le système {plaque + tige} peut tourner sans frottements autour d'un axe horizontal ( $\Delta$ ) orienté par le vecteur unitaire  $\vec{e}_\Delta$  : Liaison pivot parfaite. Le vent arrive horizontalement, perpendiculairement à l'axe ( $\Delta$ ), avec une vitesse  $U$  supposée constante, de l'ordre de quelques  $\text{m.s}^{-1}$ . On note  $J_\Delta$  le moment d'inertie du système {plaque + tige} par rapport à l'axe ( $\Delta$ ), et  $\theta$  l'angle de la tige par rapport à la verticale.

On considère que pour des angles d'inclinaison faibles, la résultante des forces aérodynamiques s'exerçant sur la plaque en raison du vent est de la forme  $\vec{F} = \mu U \vec{U}$  avec  $\mu = 1 \cdot 10^{-2}$  dans les unités du Système International (SI), ainsi la norme de la force  $\vec{F}$  est proportionnelle à  $U^2$ .

**Q1.** Déterminer l'unité SI de  $\mu$  en utilisant les unités des grandeurs de base.

**Q2.** On suppose que le point d'application de la résultante des forces aérodynamiques se situe au centre de la plaque circulaire comme indiqué figure 1. Exprimer les moments scalaires par rapport à l'axe ( $\Delta$ ) des forces s'exerçant sur le système {plaque + tige}. On présentera les notations grâce à un schéma.

**Q3.** Lorsque le système est à l'équilibre mécanique, on mesure l'angle  $\theta_{eq} = 8^\circ$  à l'aide d'un rapporteur. Déterminer l'expression de la vitesse  $U$  du vent, en fonction de  $\mu$ ,  $m$ ,  $g$  et  $\theta_{eq}$ . Faire l'application numérique.

## II - Anémomètre à coupelles :

### Document 1 - Description de l'anémomètre à coupelles :

L'anémomètre à coupelles, inventé en 1846 par John Thomas Romney Robinson, est composé de trois ou quatre coupelles creuses de forme hémisphérique ou conique, reliées à un axe de rotation vertical. En régime permanent, l'anémomètre tourne à une fréquence  $f$  (nombre de tours par seconde) dépendant de la vitesse horizontale  $U$  du vent loin de l'anémomètre selon la relation :  $U = \ell_0 f + U_0$  avec  $\ell_0$  la distance d'étalonnage et  $U_0$  la vitesse de démarrage. Ces deux constantes dépendent des caractéristiques de chaque anémomètre et sont déterminées par le constructeur préalablement à la mise en place de l'anémomètre sur site.

L'anémomètre à coupelles est aujourd'hui l'instrument de référence pour mesurer la vitesse du vent dans le domaine de la météorologie.



### Document 2 - Force aérodynamique sur une coupelle conique immobile :

Pour étudier l'effet du vent sur une coupelle conique, on effectue des tests en soufflerie. La coupelle étant maintenue immobile, on relève la force aérodynamique s'exerçant sur la coupelle. On fait pivoter la coupelle dans un plan vertical pour tester différents angles d'incidence  $\beta$  par rapport au vent de vitesse  $U = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ .

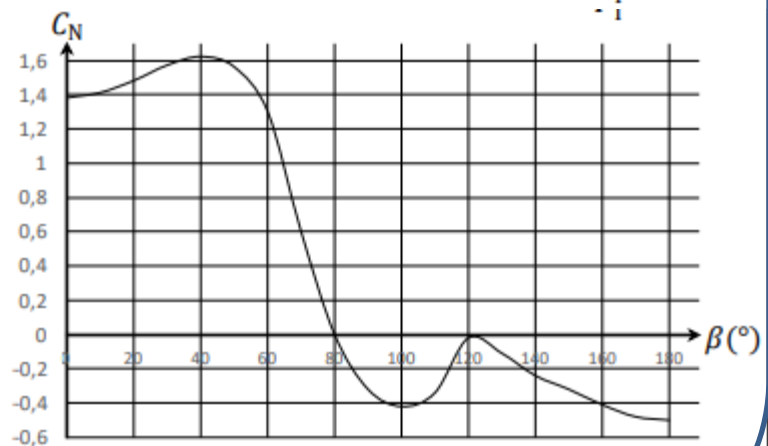
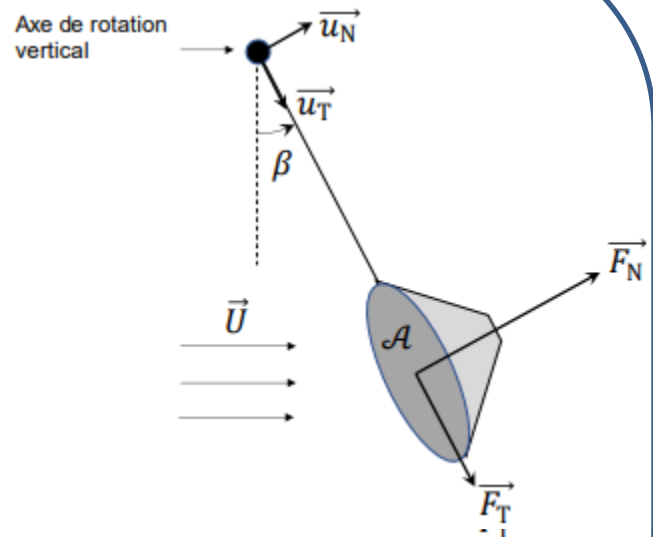
La force aérodynamique s'exerçant au centre de la coupelle se décompose en une force  $\vec{F}_N$  normale à la surface  $\mathcal{A} = 1 \text{ dm}^2$  de la base du cône, et une force  $\vec{F}_T$  tangentielle à cette même surface (cf schéma ci-contre).

Ces forces ont pour expression :

Et 
$$\begin{cases} \vec{F}_N = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \mathcal{A} C_N U^2 \vec{u}_N \\ \vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \mathcal{A} C_T U^2 \vec{u}_T \end{cases}$$
 avec  $C_N$  et  $C_T$  des coefficients sans dimension, dont on lit les valeurs en fonction de l'angle d'inclinaison  $\beta$  sur le graphe ci-contre.

Par symétrie et en supposant que le bras de l'anémomètre a une influence négligeable sur l'écoulement :

$$\|\vec{F}_N(-\beta)\| = \|\vec{F}_N(\beta)\|.$$



Source : MJ Brevoort, U.T. Joyner, « aerodynamic characteristics of anemometer cup », note technique (1934).

**Q4.** On représente sur la figure 2 un anémomètre composé de 4 coupelles coniques décalées de  $90^\circ$  les unes par rapport aux autres et soumises à un vent de vitesse  $\vec{U}$ .

**Sur le schéma de la figure 2 reproduit sur le document réponse p11, à rendre avec la copie, ajouter les vecteurs  $\vec{u}_N$  et  $\vec{u}_T$  au niveau de chaque coupelle.**

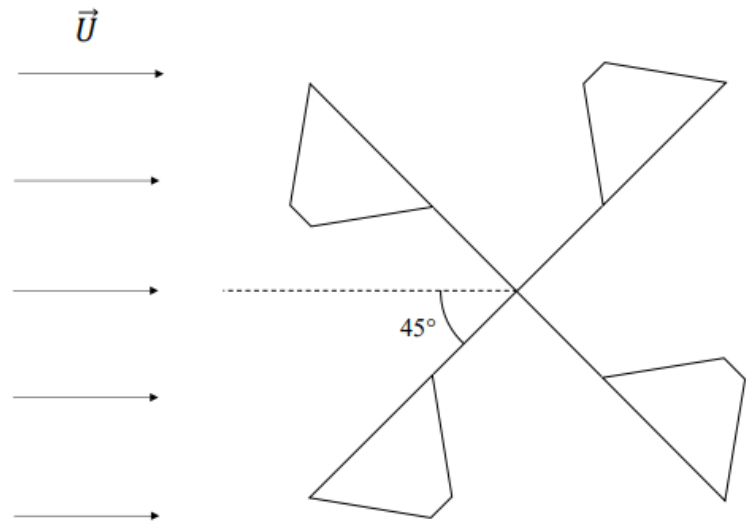
En supposant que l'anémomètre est initialement immobile, représenter **sur le même schéma du document réponse p11**, les forces  $\vec{F}_N$  s'exerçant sur chaque coupelle, en vous aidant du document 2 : On comparera (entre autres) les normes de ces forces les unes par rapport aux autres et on expliquera les sens obtenus.

**Q5.** Expliquer à partir de votre schéma pourquoi l'anémomètre va se mettre en mouvement, et représenter le sens de rotation sur le schéma.

**Q6.** Justifier que la force tangentielle  $\vec{F}_T$  est sans importance pour l'étude du mouvement de rotation de l'anémomètre.

**Q7.** Rappeler la définition d'un couple de forces. Le terme de « couple » aérodynamique vous paraît-il approprié, pour les forces s'exerçant sur un anémomètre ?

**Q8.** Lorsque la vitesse  $U$  du vent est inférieure à la vitesse de démarrage  $U_0$  (document 1), l'anémomètre est immobile. Quel phénomène peut expliquer l'existence de cette vitesse de démarrage ?



**Figure 2 –**  
Position initiale de l'anémomètre soumis au vent.

### EXERCICE 3 : Particule soumise à un champ électrostatique radial :

( $\approx 40$  pts)

Dans le référentiel galiléen auquel est associé le repère d'espace  $\mathcal{R} (O ; \vec{u}_x ; \vec{u}_y ; \vec{u}_z)$  une particule  $M$  de masse  $m$  de charge  $q > 0$  est soumise à un champ électrostatique radial dirigé vers le point  $O$  et de norme :  $E = E_0 \left( \frac{r_0}{r} \right)^n$ .

Dans cette expression :

- $E_0$  et  $n$  sont des constantes positives ;
- $r = \|\vec{OM}\|$  ;
- $r_0 = \|\vec{OM}_0\| = \|\vec{OM}(t=0)\|$  ;
- On pose  $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$  ;

Dans tout l'exercice, on suppose qu'à  $t = 0$  la particule est dans le plan  $\pi (O ; \vec{u}_x ; \vec{u}_y)$  avec une vitesse initiale  $\vec{v}_0$  parallèle à  $\pi$ .

**Q1.** On ne travaille pas en coordonnées cartésiennes dans la suite. Exprimer vectoriellement et représenter la force électrique  $\vec{F}$  à laquelle est soumise la particule. Cette force est-elle attractive ou répulsive ?

**Q2.** Montrer que le mouvement est plan et préciser le plan du mouvement.

Dans le plan du mouvement, on repère dans toute la suite du problème, la particule grâce à ses coordonnées polaires.

**Q3.** Faire un schéma définissant les coordonnées polaires de la particule, ainsi que la base polaire associée dans le plan du mouvement.

**Q4.** Démontrer l'expression de la constante des aires  $C$ .

**On se place dans le cas où  $n=2$  et  $v_0$  quelconque :**

**Q5.** Déterminer l'énergie potentielle  $E_p(r)$  dont dérive la force électrique en supposant qu'il n'y a pas d'interaction à l'infini. En déduire l'énergie mécanique  $E_m$  de la particule, puis montrer que l'énergie potentielle effective peut se mettre sous la forme :  $E_{p\text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - qE_0 \frac{r_0^2}{r}$ , en faisant intervenir la constante des aires.

**Q6.** Tracer l'allure de  $E_{p\text{ eff}}(r)$ , puis discuter graphiquement la nature de la trajectoire. Quatre cas sont à envisager. Préciser dans chaque cas, s'il s'agit d'un état lié ou un état de diffusion.

## EXERCICE 4 : Le pH sanguin :

( $\approx 33$  pts)

Dans cet exercice tous les calculs sont effectués à 37°C, température du corps humain.

L'activité métabolique et l'ingestion d'aliments peuvent introduire des espèces acido-basiques dans le sang. Or la survie des cellules nécessite que le pH varie très peu autour d'une valeur optimale. Ainsi le sang humain constitue un milieu tamponné, puisque le pH reste compris entre 7,36 et 7,44 en temps normal.

**Q1.** Tracer le diagramme de prédominance entre les espèces  $\text{H}_2\text{CO}_3$  ;  $\text{HCO}_3^-$  ;  $\text{CO}_3^{2-}$  ;  $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$  et  $\text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-$  sur un même axe de pH.

**Q2.** Le sang est en partie tamponné par le couple  $\text{H}_2\text{CO}_3 / \text{HCO}_3^-$  de concentration totale en ces deux espèces égale à  $C_0 = 0,0280 \text{ mol.L}^{-1}$ . Sachant que le pH du sang vaut 7,40, calculer les concentrations en  $\text{H}_2\text{CO}_3$  et  $\text{HCO}_3^-$  avec trois chiffres significatifs.

**Q3.** Dans certains cas, après des efforts physiques intenses, des crampes apparaissent. Il se forme alors dans les muscles de l'acide lactique  $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$  qui est transférée dans le sang.

**Q3.a.** Justifier et écrire l'équation de la réaction ayant lieu dans le sang et déterminer la valeur de sa constante d'équilibre. Conclure.

**Q3.b.** Dans le sang, avant l'effort musculaire et donc avant que l'équilibre décrit dans la question 3.a ne s'établisse, les concentrations des différentes espèces sont les suivantes :

$[\text{HCO}_3^-]_0 = C_1 = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$  et  $[\text{H}_2\text{CO}_3]_0 = C_2 = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ .

Après l'effort musculaire, dans un volume de 100 mL, apparaît initialement  $3,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$  d'acide lactique.

Faire un bilan des concentrations des différentes espèces présentes dans le sang à l'équilibre, et en déduire alors la valeur du pH local du sang. Conclure.

**Q3.c.** Afin d'éviter cette variation de pH sanguin, l'hémoglobine notée Hb, ainsi que le phénomène de respiration, interviennent pour éliminer l'excès de dioxyde de carbone dissous ( $\text{H}_2\text{CO}_3$  correspond à du dioxyde de carbone dissous dans l'eau). Les échanges entre les gaz dissous dans le sang peuvent être mobilisés par la réaction d'équation :  $\text{HbO}_2 + \text{CO}_2 \rightarrow \text{HbCO}_2 + \text{O}_2$ . Expliquer qualitativement comment la respiration permet de maintenir constante la valeur du pH sanguin.

### Données (à 37°C) :

- Produit ionique de l'eau tel que :  $\text{p}K_e = 13,7$
- $\text{p}K_{A1} (\text{H}_2\text{CO}_3 / \text{HCO}_3^-) = 6,1$  ;  $\text{p}K_{A2} (\text{HCO}_3^- / \text{CO}_3^{2-}) = 10,2$  ;
- $\text{p}K_{A3} (\text{CH}_3\text{CHOHCOOH} / \text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-) = 3,9$
- L'espèce  $\text{H}_2\text{CO}_3$  s'identifie à  $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$ .



## PROBLEME : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre : ( $\approx 80$ pts)

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet le mouvement d'un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

On étudie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon  $R_T = 6,4 \cdot 10^3$  km et de centre O.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique  $\mathcal{R}_g(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$  supposé galiléen au cours du temps noté  $t$ .

L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire  $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{k})$ .

On suppose que la trajectoire du satellite de masse  $m = 4,0 \cdot 10^3$  kg est plane et se fait dans le plan  $(O; \vec{i}; \vec{j})$  représenté sur la figure 2 ci-dessous.

**Les différentes parties sont largement indépendantes.**

### I – Préliminaires :

**Q1.** La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées  $(r(t), \theta(t), z = 0)$ . Déterminer l'expression du vecteur position  $\vec{OM}$  et du vecteur vitesse  $\vec{v}_M$  dans la base  $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{k})$  en fonction de  $r$ ,  $\theta$  et de leurs dérivées éventuelles.

**Q2.** On note  $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$  la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle  $E_p(r)$  associée à l'interaction gravitationnelle  $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$  s'exprime sous la forme  $E_p(r) = -m g_0 \frac{R_T^2}{r}$ ;



En déduire l'expression de l'interaction  $\vec{F}$  exercée par la Terre sur le satellite en fonction de  $g_0$ ,  $m$ ,  $R_T$  et  $r$ . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ?

**Dans toute la suite (sauf dans la partie V), on supposera que le satellite est soumis uniquement à  $\vec{F}$ .**

**Q3.** Soit  $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M$ . Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ? Déterminer son expression dans la base  $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{k})$ , puis sa norme  $L_0$  en fonction de  $r$ ,  $\dot{\theta}$  et  $m$ . Montrer que le vecteur  $\vec{L}_0$  est constant au cours du mouvement.

### II - Mise en orbite circulaire du satellite :

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

-  Phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
-  Phase de satellisation : le satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

**On considère dans cette partie II que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon  $r$  constant autour de la Terre.**

**Q4.** Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse  $\vec{v}_M$  et le vecteur accélération  $\vec{a}_M$  du satellite uniquement en fonction de la quantité  $v = r \dot{\theta}$ , de sa dérivée temporelle  $\dot{v}$ , de  $r$  et des vecteurs de base nécessaires.

**Q5.** Montrer que, dans ce cas, le mouvement est uniforme et exprimer  $v^2$  en fonction de  $g_0$ ,  $R_T$  et  $r$ .

**Q6.** En déduire l'expression des énergies cinétique  $E_c$  et mécanique  $E_m$  du satellite en fonction de  $m$ ,  $g_0$ ,  $R_T$  et  $r$ . Justifier le signe de  $E_m$ .

**Application numérique :** Calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon  $r_b = 8,0 \cdot 10^3$  km, puis pour un rayon  $r_h = 40 \cdot 10^3$  km.



Figure 1- Satellite de télédétection ;  
(Source : opticsvalley)

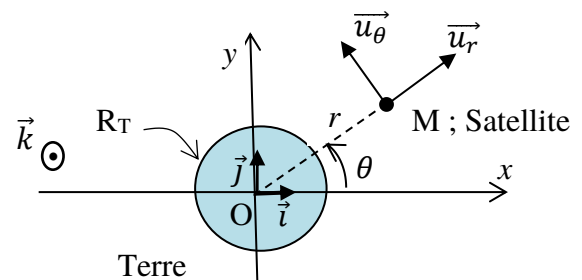


Figure 2



### III - Étude énergétique du satellite :

On suppose dans cette partie III que la trajectoire du satellite n'est plus nécessairement circulaire.

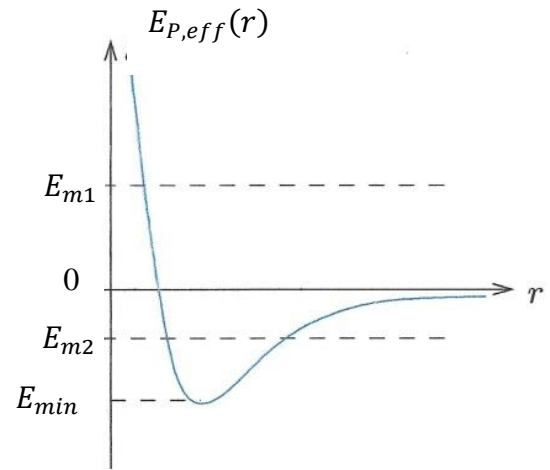
**Q7.** Justifier que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement, puis introduire l'énergie potentielle effective  $E_{P,eff}(r)$  et l'exprimer en fonction de  $L_0$ ,  $m$ ,  $r$ ,  $g_0$  et  $R_T$ .

**Q8.** Au cours du mouvement, les valeurs du rayon  $r$  sont liées à  $E_m$  et  $E_{P,eff}$ . Expliquer comment.

De plus, le graphe de  $E_{P,eff}(r)$  pour une valeur donnée de  $L_0$  est représenté figure 3 ci-contre. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

À quelle énergie  $E_{m1}$  ou  $E_{m2}$  peut correspondre une trajectoire elliptique ? Une trajectoire hyperbolique ? Justifier.

Pour quelle valeur particulière de  $E_m$  la trajectoire est-elle circulaire ? Justifier.



**Figure 3** – Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de  $r$

### IV - Mise en orbite haute du satellite :

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ( $r_b = 8,0 \cdot 10^3$  km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ( $r_h = 40 \cdot 10^3$  km) comme illustré sur la figure 4 ci-dessous.

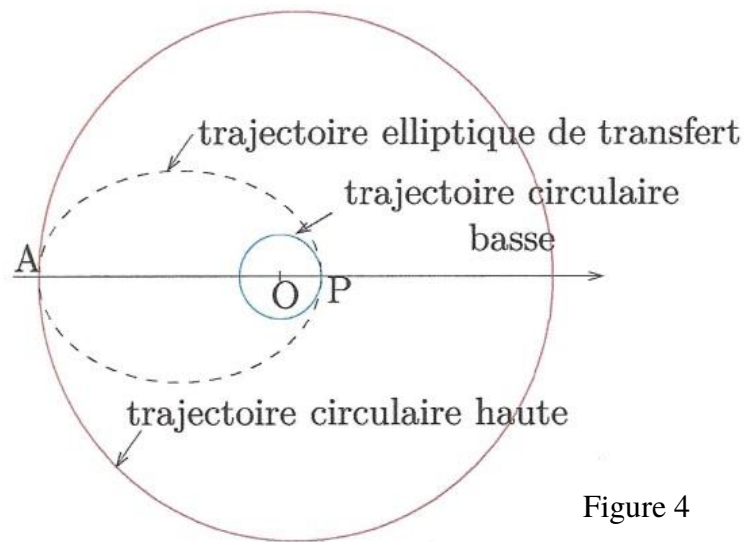


Figure 4

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périégée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

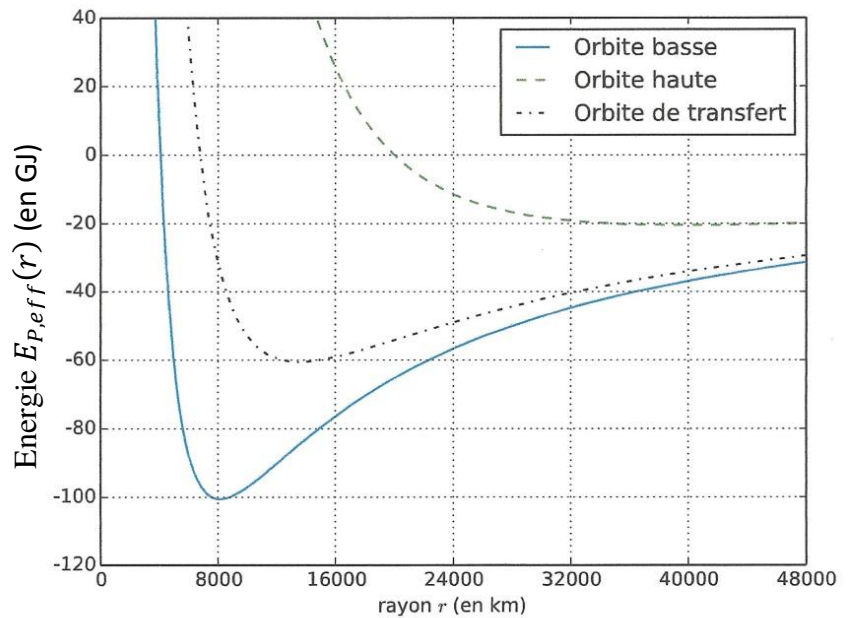
Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert et on note  $E_{m,t}$  l'énergie mécanique du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique.

**Q9.** Que peut-on dire des valeurs de  $\dot{r}$  lorsque le satellite est en A ( $r_A = r_h$ ) ou en P ( $r_P = r_b$ ) ? Justifier. Exprimer le demi-grand axe  $a$  de l'ellipse de transfert en fonction de  $r_b$  et  $r_h$  ? Illustrer les propriétés sur un dessin.

**Q10.** Montrer que  $r_h$  et  $r_b$  sont solutions d'une équation du second degré de la forme :  $r^2 + \alpha r + \beta = 0$ . Exprimer  $\alpha$  et  $\beta$  en fonction de  $m$ ,  $L_0$ ,  $E_{m,t}$ ,  $g_0$  et  $R_T$ .  
En déduire que  $E_{m,t} = -\frac{m g_0 R_T^2}{2a}$ .

**Q11.** Relever sur la figure 5 ci-contre, la valeur de l'énergie mécanique  $E_{m,t}$  du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique, au début du transfert. Justifier.



**Figure 5** -  $E_{P,eff}(r)$  pour les 3 orbites

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

**Q12.** Relever sur la figure 5 précédente, la valeur de l'énergie mécanique  $E_{m,b}$  du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon  $r_b$ . De même relever la valeur de l'énergie mécanique  $E_{m,h}$  du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon  $r_h$ .

**Q13.** En déduire la variation d'énergie mécanique  $\Delta E_{mP}$  à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ  $50 \text{ MJ.kg}^{-1}$ , déterminer la masse  $m_c$  de carburant nécessaire.

**Q14.** Connaissez-vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle-t-on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

## **V- Chute du satellite :**

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement  $\vec{f}$  du type  $\vec{f} = -k \vec{v}$ . On supposera que  $k$  est une constante positive.

Supposons que le satellite est en orbite circulaire. Au cours de sa chute, à chaque tour effectué, la variation d'altitude est suffisamment faible pour supposer que les expressions de l'énergie mécanique

$E_m(t) = -\frac{m g_0 R_T^2}{2r(t)}$  et de la vitesse  $v^2(t) = g_0 \frac{R_T^2}{r(t)}$  restent valables.

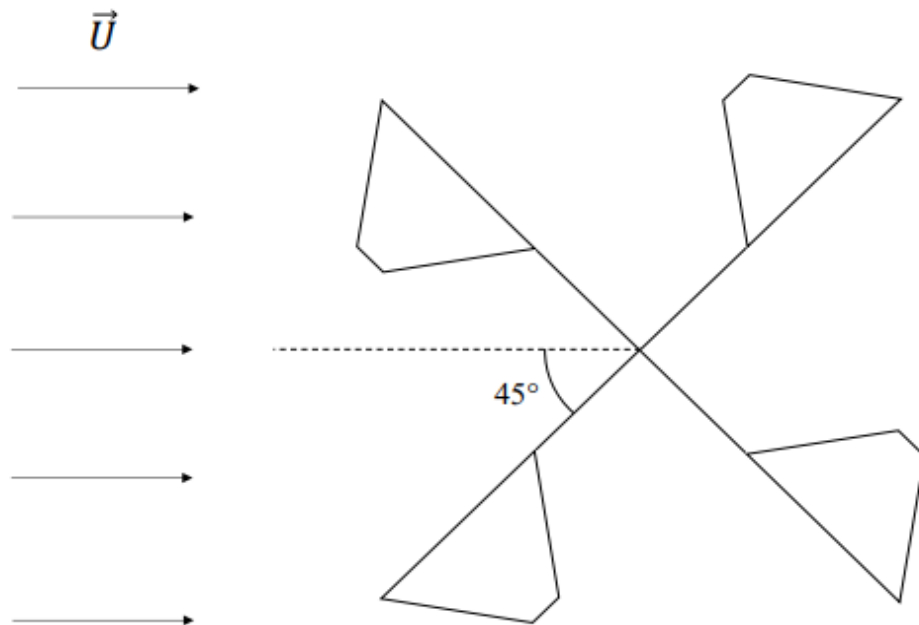
**Q15.** À l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer la durée  $T$  nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon  $r$ . Quelle est le nom de la relation obtenue ?

**Q16.** À l'aide du théorème de la puissance mécanique, montrer que le rayon  $r(t)$  est solution de l'équation différentielle  $\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau} r(t) = 0$  où  $\tau$  est une constante que l'on exprimera en fonction de  $k$  et  $m$ . Montrer que  $\tau$  est bien homogène à un temps.

**Q17.** En déduire l'expression de  $r(t)$ . On supposera que le satellite est à l'instant  $t = 0$  sur une orbite circulaire de rayon  $r_0$ . Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de  $r(t)$ . On fera apparaître notamment les grandeurs  $r_0$  et  $\tau$  et on négligera  $R_T$  devant  $r_0$ .

Document réponse pour l'exercice 2, question Q4 :

Nom prénom : .....



**Figure 2** –  
Position initiale de l'anémomètre soumis au vent.

*Pensez à rendre ce document réponse avec votre copie.*