Devoir maison bonus

La couleur du ciel

Ce sujet comporte 2 pages et doit être traité en intégralité. Comme pour tous DMs, vous pouvez vous entraider pour les questions les plus difficiles. Cependant, **la rédaction doit rester personnelle**.

I La couleur du ciel

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) : il est soumis à une force de rappel $\vec{F}_R$ passant par le centre de l'atome. Dans tout l'exercice, on admettra que l'on peut se ramener à un problème selon une unique direction $(0, \vec{e}_x)$, c'est-à-dire que $\vec{F}_R = -kx\vec{e}_x$, où x est la distance entre l'électron et l'atome. Nous supposerons que cet électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnel à sa vitesse $\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\frac{dx}{dt}\vec{e}_x$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. On admet qu'une onde lumineuse provenant du Soleil impose sur un électron de l'atmosphère, une force $\vec{F}_E = -eE_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$.

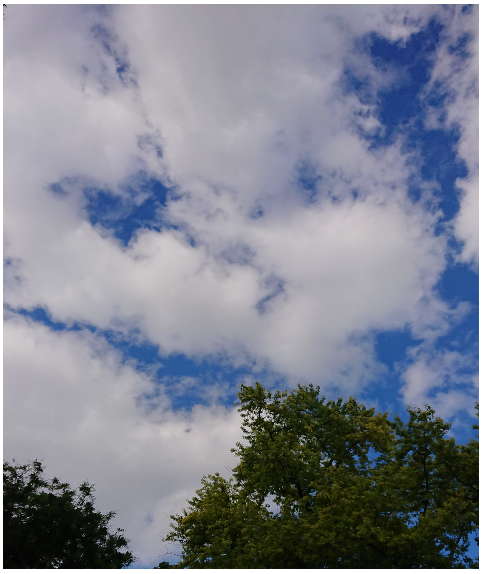

Figure 1.1 – Ciel bleu avec des nuages.

Données. masse d'une électron : $m = 9{,}1.10^{-31}$ kg, charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}$ C, célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00.10^{8}$ m/s, $k = 500$ SI, $h = 10^{-20}$ SI.

1. Quelles sont les dimensions des grandeurs k et h ? En quelles unités du système international les exprime-t-on ?

2. En utilisant la loi de la quantité de mouvement, donner l'équation différentielle vérifiée par la position de l'électron $x(t)$.

3. Montrer qu'on peut l'exprimer sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{e}{m}E_0\cos(\omega t).$$

   On donnera les expressions de ω_0 et Q en fonction des données.

On peut chercher les solutions de cette équation différentielle sous la forme :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

où $x_h(t)$ est une solution de l'équation homogène et $x_p(t)$ une solution particulière.

4. Exprimer et calculer Q. Que peut-on en déduire sur le régime transitoire ?

5. Montrer que le temps caractéristique du régime transitoire est $\tau = 2Q/\omega_0$.

6. Calculer τ.

On suppose donc que l'électron est en régime permanent.

7. Pourquoi peut-on alors dire que $x(t) \approx X_m \cos(\omega t + \varphi)$?

8. Exprimer X_m en fonction de ω_0, de Q et des données. On pourra utiliser la notation complexe.

9. Exprimer φ en fonction de ω_0 et de Q. On pourra également utiliser la notation complexe.

Les longueurs d'ondes λ du Soleil sont principalement incluses dans le domaine du visible, ainsi on considère que $\lambda \in [\lambda_b, \lambda_r]$, où λ_b (resp. λ_r) est la longueur d'onde du rayonnement bleu (resp. rouge).

10. Que valent λ_b et λ_r ?

11. En déduire que $\omega \in [\omega_r, \omega_b]$. On donnera les valeurs littérales de ω_r et ω_b et on effectuera les applications numériques.

12. Calculer ω_0.

13. En déduire que :
$$X_m \approx \frac{eE_0}{m\omega_0^2}.$$

Un électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne P est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération.

14. Montrer que :
$$P = K\left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}\right)^2$$
où K est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

15. Expliquer alors pourquoi le ciel est bleu.