/23

E1 Balançoire *(D'après CCP 2013)*

Un enfant faisant de la balançoire (figure 1) est modélisé par une masse ponctuelle m située en M et suspendue en O par une corde de masse négligeable et de longueur ℓ. Le champ de pensanteur $\vec{g}$, de norme g, est supposé uniforme. L'angle que fait la corde de suspension avec la verticale est noté θ. Les vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$ tels que définis sur la figure 2 définissent un trièdre orthonomé direct lié à la balançoire.

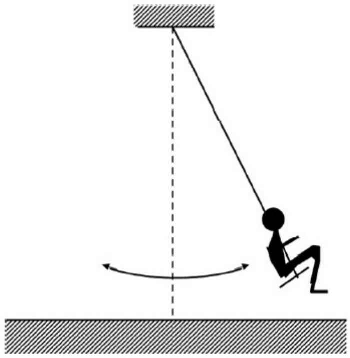

Figure 1 – Enfant assis sur sa balançoire.

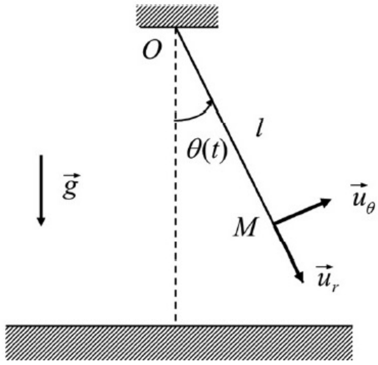

Figure 2 – Schématisation de la balançoire.

Dans toute la suite du problème, les mouvements de la balançoire et de l'enfant seront étudiés dans le plan de la figure 2.

Aide au calcul

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3 \quad ; \quad \cos^3 x = \frac{3\cos x + \cos(3x)}{4}$$

I/A Mise en équation

Sauf mention contraire dans la suite de l'énoncé, tout frottement dû à la résistance de l'air est négligé.

1 Etablir l'équation différentielle nommée (E) du mouvement vérifiée par $\theta(t)$ en utilisant 3 méthodes :

- en appliquant le principe fondamental de la dynamique
- en appliquant un théorème énergétique
- en appliquant le théorème du moment cinétique

Réponse

On étudie l'enfant (assimilé à un point matériel) dans le référentiel lié au sol et supposé galiléen dans la base polaire $(O, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$. On effectue le bilan des actions extérieures suivant :

- Le poids $\vec{P} = mg\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}$ avec de plus $\mathcal{E}_{pp} = -mgl\cos(\theta)$ puis $\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = l\,\overrightarrow{u_r} \wedge \vec{P} = -lmg\sin(\theta)\,\overrightarrow{e_z}$.
- La tension du fil $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r}$ avec $T > 0$ tant que le fil est tendu. Cette force ne travaille pas (puissance nulle car $\vec{T} \cdot \vec{v} = 0$) et son moment par rapport à O est aussi nul (support de force passant par O).

De plus, une étude cinématique du problème indique $\vec{v} = l\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ puis $\vec{a} = l\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - l(\dot{\theta})^2\,\overrightarrow{u_r}$ et finalement $\overrightarrow{\mathcal{L}_O}(M) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v} = ml^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}$.

On peut donc appliquer les trois méthodes proposées par l'énoncé :

- On applique le principe fondamental de la dynamique à l'enfant dans le référentiel galiléen en projection selon $\overrightarrow{u_\theta}$

$$ml\ddot{\theta} = mg\sin(\theta) \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0}$$

- On applique le théorème de la puissance mécanique à l'enfant dans le référentiel galiléen

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = P_{nc} = 0 \Rightarrow ml^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgl\dot{\theta}\sin(\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0}$$

- Enfin, on applique le théorème du moment cinétique (TMC) à l'enfant par rapport au point O dans le référentiel galiléen et en projection selon $\overrightarrow{e_z}$

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}_0}(M)}{\mathrm{d}t} \cdot \overrightarrow{e_z} = \mathcal{M}_0(\vec{P}) \cdot \overrightarrow{e_z} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \frac{g}{l}\sin(\theta) = 0} \qquad \text{(E)}$$

On obtient bien dans les trois cas le même résultat.

---

2 À quelle condition l'enfant assis sur la balançoire sera-t-il assimilé à un oscillateur harmonique ? Donner l'expression de la pulsation propre ω_0 correspondante.

Réponse

Lorsque $|\theta| \ll 1$ (en radian), on a $\sin(\theta) \approx \theta$ et on obtient l'équation de l'oscillateur harmonique. On en déduit par identification que $\boxed{\omega_0 = \sqrt{g/l}}$.

---

3 Application numérique : L'enfant part d'un angle $\theta_0 = 30°$ sans vitesse initiale. On donne les valeurs numériques suivantes : $l = 2{,}5\,\mathrm{m}$, $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ et $m = 20\,\mathrm{kg}$. Calculer la période T_0 de l'oscillateur harmonique, ainsi que la vitesse maximale $v_{\max}$ de l'enfant.

Réponse

On a $T_0 = 2\pi/\omega_0 \approx 3{,}1\,\mathrm{s}$. De plus, on obtient $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t + \phi)$ or à $t = 0$, la vitesse initiale est nulle et on en déduit que $-A\sin(\phi) = 0$ soit $\phi = 0$ qui convient. La deuxième CI sur l'angle initial donne donc au final $\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t)$.

On obtient alors l'expression de la vitesse en dérivant soit $v(t) = l\dot{\theta} = -\theta_0 l\omega_0 \sin(\omega_0 t)$ et donc la vitesse maximale à pour expression $v_{\max} = l\omega_0\theta_0$.

Pour aller plus loin :

On peut retrouver ce résultat plus rapidement à l'aide de l'étude energétique. On a $\mathcal{E}_c$ max lorsque $\mathcal{E}_p$ passe par son miminum pour un système conservatif. Cela arrive pour $\theta = 0$ et on en déduit $\mathcal{E}_{c,\max} = \mathcal{E}_m - \mathcal{E}_p(0)$ soit au final

$$\mathcal{E}_{c,\max} = \frac{1}{2}mv_{\max}^2 = mgl(1-\cos(\theta_0)) \approx mgl\frac{\theta_0^2}{2} \Rightarrow \sqrt{gl}\theta_0$$

à l'aide d'un développement limité à l'ordre 2. Ce résultat est bien identique à celui obtenu précédemment.

I/B Etude d'une solution non harmonique

On souhaite obtenir une modélisation plus précise des oscillations en prenant en compte une partie des effets non linéaires. On considère toujours dans cette partie que l'enfant part d'un angle $0 < \theta_0 \ll 1$ et sans vitesse initiale.

4 En posant $\sin\theta = \theta - \theta^3/6$, que devient l'équation différentielle (E) du mouvement vérifiée par $\theta(t)$? Cette équation, appelée (E') est-elle encore linéaire ?

Réponse

L'équation (E) devient simplement

$$\frac{\mathrm{d}^2\theta}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2\theta - \omega_0^2\theta^3/6 = 0 \tag{E'}$$

On observe alors que cette équation n'est plus linéaire (présence de l'inconnue à la puissance trois).

---

5 On cherche, pour cette équation différentielle approchée une solution elle-même approchée de la forme

$$\theta(t) = \theta_0\cos(\omega t) + \varepsilon\theta_0\cos(3\omega t) \quad \text{où} \quad \varepsilon \ll 1 \quad \text{et} \quad \theta_0 \ll 1$$

a – En utilisant les approximation proposée par l'énoncé, montrer que le terme $\theta^3/6$ peut se simplifier en

$$\frac{\theta^3}{6} = \frac{\theta_0^3}{24}\left(3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)\right)$$

Réponse

On a ici

$$\frac{\theta^3}{6} = \frac{\theta_0^3}{6}\left(\cos^3(\omega t) + \underbrace{3\varepsilon\cos^2(\omega t)\cos(3\omega t) + 3\varepsilon^2\cos(\omega t)\cos^2(3\omega t) + \varepsilon^3\cos^3(3\omega t)}_{\text{négligeable}}\right)$$

Parmis ces quatre termes, on ne conserve que le premier car les autres sont négligeables ($\varepsilon \ll 1$). On utilise alors les résultats trigonométriques fournis par l'énoncé pour obtenir l'expression demandée

$$\frac{\theta^3}{6} \approx \frac{\theta_0^3}{6}\cos^3(\omega t) = \frac{\theta_0^3}{6}\left(\frac{3}{4}\cos(\omega t) + \frac{1}{4}\cos(3\omega t)\right) = \frac{\theta_0^3}{24}\left(3\cos(\omega t) + \cos(3\omega t)\right)$$

d'où le résultat.

---

b – Démontrer le résultat suivant

$$\forall t \; : A\cos(\omega t) = B\cos(3\omega t) \quad \Rightarrow \quad A = B = 0$$

Réponse

On se place dans un premier temps à $t = 0$, on en déduit $A = B$. On considère maintenant l'instant t_i tel que $\omega t_i = \pi/3$. On obtient alors $A\cos(\pi/3) = B\cos(\pi) \Rightarrow A/2 = -B = -A \Rightarrow A = B = 0$ d'où le résultat.

Pour aller plus loin :

On peut aussi obtenir ce résultat (une fois l'égalité entre A et B établie) en dérivant la relation

$$-A\omega\sin(\omega t) = -3A\omega(\sin(3\omega t))$$

et en se plaçant à l'instant t_j tel que $\omega t_j = \pi/2$ ce qui donne après simplification $A = -3A \Rightarrow A = B = 0$.

◇

c – Exprimer en fonction de ω_0 et θ_0 la pulsation fondamentale ω ainsi que le terme ε en injectant l'expression proposée pour $\theta(t)$ dans l'équation (E') et en utilisant l'approximation établie à la question a –.

On montera en particulier que $\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{8}\theta_0^2}$ et $\varepsilon = \dfrac{\theta_0^2}{-192 + 27\theta_0^2}$.

Réponse

On injecte la solution proposée dans l'équation (E') et on regroupe les termes en $\cos(\omega t)$ et $\cos(3\omega t)$.

$$\left(-\theta_0\omega^2 + \theta_0\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{8}\theta_0^3\right)\cos(\omega t) = \left(\varepsilon\theta_0 9\omega^2 - \varepsilon\theta_0\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^3\right)\cos(3\omega t)$$

On utilise alors le résultat établi à la question b – pour obtenir un système de deux équations à deux inconnues (ω et ε) que l'on simplifie sachant que $\theta_0 \neq 0$

$$-\omega^2 + \omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{8}\theta_0^2 = 0 \qquad \text{(a)}$$

$$\varepsilon 9\omega^2 - \varepsilon\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^2 = 0 \qquad \text{(b)}$$

De l'équation (a), on obtient $\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}}$ soit le résultat attendu. On peut alors reconsidérer l'équation (b) en substituant ω^2 par son expression

$$\varepsilon 9\omega_0^2\left(1 - \frac{\theta_0^2}{8}\right) - \varepsilon\omega_0^2 + \frac{\omega_0^2}{24}\theta_0^2 = 0 \Rightarrow \varepsilon\left(8 - \frac{9}{8}\theta_0^2\right) = -\frac{\theta_0^2}{24} \Rightarrow \boxed{\varepsilon = \frac{\theta_0^2}{27\theta_0^2 - 192}}$$

d'où le résultat.

◇

6 Par rapport au mouvement harmonique, le signal $\theta(t)$ a-t-il une plus grande ou une plus petite période ?

Réponse

On observe dans un premier temps que la période de $\theta(t)$ a pour expression $T = 2\pi/\omega$. En effet, ce terme est aussi une période (mais non la plus petite) pour l'expression $\cos(3\omega t)$.

On a donc

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \underbrace{\frac{2\pi}{\omega_0}}_{=T_0}\frac{1}{\sqrt{1 - \frac{\theta_0^2}{8}}}$$

et on en déduit alors que $\boxed{T > T_0}$. La période des oscillations augmente alors légèrement avec l'angle θ_0.

On retrouve bien au passage que $T \to T_0$ lorsque $\theta_0 \to 0$ ce qui est bien le résultat attendu.

◇

7 Quelle est la pulsation du premier harmonique après le fondamental ?

Réponse

L'expression de $\theta(t)$ correspond déjà au développement en série de Fourier d'un signal. On observe alors directement que le premier harmonique à pour pulsation $\boxed{\omega_3 = 3\omega}$.

◇