/30

E1 Comparaison de deux circuits RLC

Dans toute la suite du problème, on considère les deux circuits suivants, composés d'un résistor de résistance $R = 0{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, d'un condensateur de capacité $C = 1{,}0\,\mathrm{\mu F}$ et d'une bobine d'inductance $L = 1{,}0\,\mathrm{mH}$. Ces composants sont branchés sur un générateur idéal de tension de f.e.m. E.

On considère de plus que les interrupteurs K sont ouverts lorsque $t < 0$ et sont fermés à partir de l'instant initial $t = 0$. De plus, les condensateurs sont initialement déchargés.

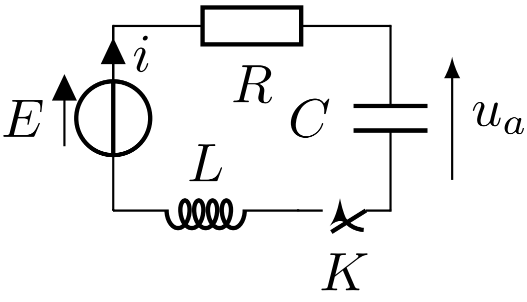

Figure 1 – Circuit A

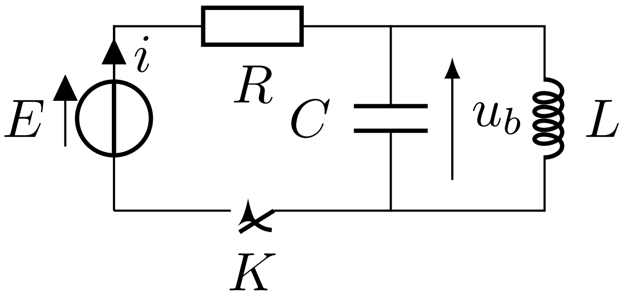

Figure 2 – Circuit B

Aide au calcul

$$\frac{1}{5} = 0{,}2 \quad ; \quad 10^{-1/2} \approx 0{,}32 \quad ; \quad \frac{1}{6.3} \approx 0{,}16$$
$$\sqrt{2} \approx 1{,}414$$

I/A Étude en régime transitoire

On considère dans un premier temps le circuit A et on cherche à obtenir l'expression de $u_a(t)$

1 Obtenir l'équation dont u_a est solution lorsque $t > 0$ et la mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_a}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_a}\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_a = \omega_0^2 E \tag{1}$$

On veillera on particulier à donner les expressions de ω_0 et Q_a, le facteur de qualité du circuit A. Réaliser ensuite l'application numérique pour Q_a.

Réponse

Le circuit ne comporte qu'une maille et ne peut donc être simplifié, on applique alors la loi des mailles

$$E = Ri + u_a + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow E = RC\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} + u_a + LC\frac{\mathrm{d}^2 u_a}{\mathrm{d}t^2} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_a}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_a}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_a = \frac{1}{LC}E}$$

On en déduit par identification que $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ puis après calcul que $\boxed{Q_a = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \approx 0{,}063}$.

◇

2 Obtenir l'équation dont u_b est solution lorsque $t > 0$ et la mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_b}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_b}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_b = 0 \tag{2}$$

On veillera on particulier à vérifier que l'expression de ω_0 est compatible avec celle otenue pour le circuit A et on vérifiera que $Q_b = 1/Q_a$. Réaliser ensuite l'application numérique pour Q_b.

Réponse

Aucune simplification ne peut être réalisée pour ce circuit, on considère alors la loi des noeuds et la loi des mailles (petite maille de gauche) :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t} + i_L \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}^2 u_b}{\mathrm{d}t^2} + u_b/L \quad \text{et} \quad E = Ri + u_b$$

En combinant ces equations, on obtient après avoir dérivé la loi des mailles

$$0 = RC\frac{\mathrm{d}^2u_b}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}u_b + \frac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_b}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}u_b}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_b = 0}$$

On obtient alors par identification $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Cette expression est bien identique à celle obtenue pour le circuit A d'où le même nom. De plus, on trouve après calcul que $Q_b = R\sqrt{C/L}$. On en déduit que $Q_b = 1/Q_a$, soit

$$\underline{Q_b \approx 16}$$

I/B Etude en régime sinusoïdal forcé

On remplace maintenant le générateur de f.e.m. E par un générateur délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$ avec ω, une pulsation pouvant être modifiée. Dans toute la suite, on notera $\underline{U}$, l'amplitude complexe associée à la tension $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé telle que $u(t) = \mathrm{Re}(\underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}) = \mathrm{Re}(\underline{u}(t))$ avec j, le nombre complexe de module unité et d'argument $+\pi/2$ puis $x = \omega/\omega_0$, la pulsation réduite identique aux deux circuits.

On considère de plus que l'interrupteur K est remplacé par un fil.

I/B) 1 Etude du circuit A

3 En partant de l'équation (1), dont on adaptera le second membre en remplaçant E par $E\cos(\omega t)$, montrer que

$$\underline{U}_a = \frac{E}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q_a}}$$

Réponse

On a donc

$$\frac{\mathrm{d}^2u_a}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_a}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2u_a = \omega_0^2E\cos(\omega t) \Rightarrow \underline{u}(t)\left(-\omega^2 + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q_a} + \omega_0^2\right) = \omega_0^2Ee^{\mathrm{j}\omega t}$$

On simplifie alors par les exponentielles complexes et on isole $\underline{U}_a$:

$$\underline{U}_a = \frac{\omega_0^2E}{\omega_0^2 - \omega^2 + \mathrm{j}\frac{\omega\omega_0}{Q_a}} = \frac{E}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q_a}}$$

d'où le résultat.

4 Exprimer alors l'amplitude des oscillations $U_a = |\underline{U}_a|$. Qu'est-ce que la résonance ? Donner une condition sur Q_a pour que cette amplitude atteigne la résonance. On ne cherchera **pas** à déterminer la pulsation de résonance. Cette condition est-elle remplie au regard de la valeur de Q_a obtenue dans la première partie du problème ?

Réponse

On a

$$U_a = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + x^2/Q_a^2}}$$

Il y a résonance si l'amplitude réelle passe par un maximum à une pulsation non nulle et non infinie. Soit $X = x^2$, et $f(X) = (1-X)^2 + \frac{X}{Q^2}$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} & f'(X_r) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & -2(1 - X_r) + \frac{1}{{Q_a}^2} = 0 && \text{On dérive} \\ \Leftrightarrow\ & X_r - 1 = -\frac{1}{2{Q_a}^2} \Leftrightarrow X_r = 1 - \frac{1}{2{Q_a}^2} && \text{On isole} \end{aligned}$$

Et on observe qu'il existe une racine réelle uniquement si $\boxed{Q_a \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}}$ (sinon, racines complexes).

En pratique, on a obtenu $Q_a \approx 0{,}063 < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0{,}707$. La courbe ne va donc **pas passer** par un maximum local.

I/B) 2 Etude du circuit B

Pour le circuit B, on ne peut appliquer la méthode précédente à partir de l'équation (2) car on y a dérivé des constantes qu'il aurait fallu remplacer par des fonctions harmoniques. On se propose alors de débuter une nouvelle étude à partir du circuit electronique.

5 Dessiner la représentation équivalente du circuit B en régime sinusoïdal forcé.

Réponse

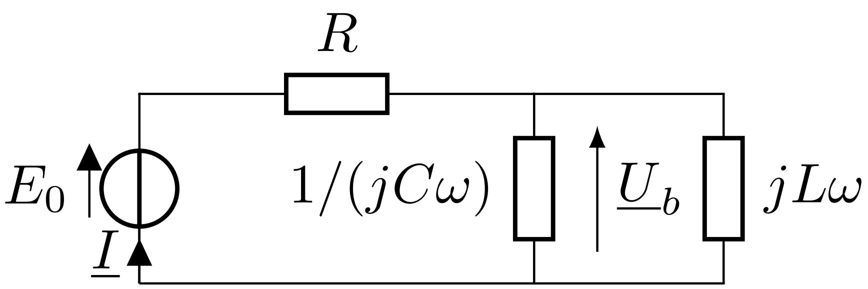

Figure 3 – Circuit B en RSF.

◇

6 Obtenir alors l'expression de $\underline{U}_b$ en fonction de x, Q_b et E.

Réponse

On peut regrouper la bobine et le condensateur en parallèles (impédance Z_{eq}) puis appliquer un pont diviseur de tension

$$
\begin{aligned}
& \underline{U}_b = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R+\underline{Z}_{\text{eq}}} E \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U}_b = \frac{1}{1+R\underline{Y}_{\text{eq}}} E \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U}_b = \frac{1}{1+\frac{R}{\mathrm{j}L\omega}+\mathrm{j}RC\omega} E = \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U}_b = \frac{E}{1+jR\sqrt{C/L}\left(\omega\sqrt{LC}-\frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\underline{U}_b = \frac{E}{1+jQ_b\left(x-\frac{1}{x}\right)}}
\end{aligned}
$$

$$\times \underline{Y}_{\text{eq}}$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}+\mathrm{j}C\omega$$

$$Q_b = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

◇

7 Montrer alors que l'amplitude des oscillations $U_b = |\underline{U}_b|$ s'exprime selon

$$U_b = \frac{E}{\sqrt{1+Q_b^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$$

puis montrer que cette dernière atteint toujours la résonance, quel que soit la valeur de $Q_b \in \mathbb{R}^+$. Donner la pulsation de résonance.

Réponse

On obtient bien l'expression attendue en prenant le module de l'expression précédente

$$\boxed{U_b = \frac{E}{\sqrt{1+Q_b^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}}$$

L'amplitude passe par un maximum local si le carré de son dénominateur passe par un minimum local soit quand $\boxed{x=1}$ et ce, quelque soit Q_b. En effet, on a $1+Q_b^2(x-1/x)^2 \geq 1+Q_b^2(1-1)^2\ \forall x>0$.

◇

8 Comment se définit la bande passante ? Déterminer l'expression de la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q_b. On pourra travailler avec la pulsation réduite ou conserver les pulsations.

Réponse

On commence par déterminer les pulsations réduites x_1 et x_2 telles que $U_b(x_i) = E/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
1 + Q_b^2(x_i - 1/x_i)^2 &= 2 \\
\Leftrightarrow Q_b\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) &= \pm 1 & \sqrt{\cdot} \\
\Leftrightarrow Q_b{x_i}^2 \mp x_i - Q_b &= 0 & \times x_i \\
\Rightarrow \Delta &= 1 + 4{Q_b}^2 & \text{Discriminant} \\
\Rightarrow x_{i,\pm,\pm} &= \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4{Q_b}^2}}{2Q_b} & \text{Solutions}
\end{aligned}$$

On obtient alors deux polynômes du second degré (un avec le signe $+$, l'autre avec le signe $-$). On ne garde que les racines positives, sachant que $\sqrt{1+4{Q_b}^2} > 1$:

$$x_1 = x_{i,-,+} = \frac{1}{2Q_b}\left(-1 + \sqrt{1+4{Q_b}^2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{i,+,+} = \frac{1}{2Q_b}\left(1 + \sqrt{1+4{Q_b}^2}\right)$$

puis on obtient $x_2 - x_1 = 1/Q_b$ soit au final $\boxed{\Delta\omega = \omega_0/Q_b}$.

I/B) 3 Synthèse

9 Quelle est la valeur de $U_a(x=1)$? La valeur de $U_b(x=1)$? La valeur de Δx ?

Tracer alors, approximativement mais proprement et sur le même graphique, les courbes de U_a et U_b en fonction de $x \in [0{,}2]$ pour les valeurs des facteurs de qualité obtenues dans la première partie. On prendra $E = 5\,\mathrm{V}$. On donne $U_a(x=0{,}74) = U_b(x=0{,}74) \approx 0{,}4\,\mathrm{V}$.

Réponse

Pour le circuit A, on observe que $U_a(x=1) = Q_aE \approx 0{,}32\,\mathrm{V}$ et il n'y a pas résonance. Pour le circuit B, on observe une résonance autour de $x=1$ avec une faible largeur ($\Delta x_c = 1/Q_b \approx 0{,}063$). On obtient alors les courbes suivantes Figure 4.

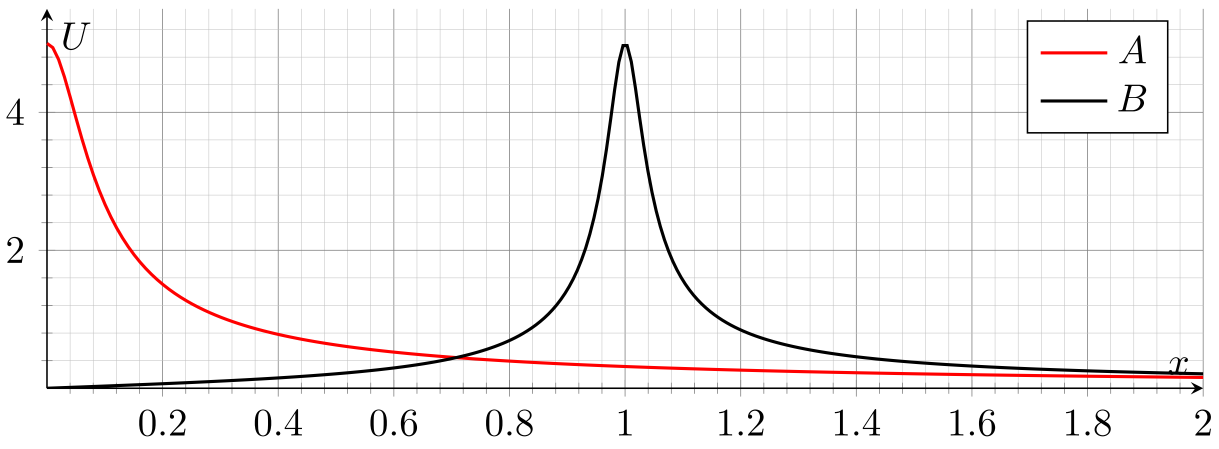

Figure 4 – Gains