

1203

-V-A-H-U-P-S-C-Y

SUP MPSI3 Corrigé DS06 03 mars 2023

EXERCICE 1 : Structure de la matière :

(≈ 32 pts)

I - Etude de l'élément sodium :

(D'après Centrale Supélec TSI 2022)

(≈ 10 pts)

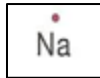
Q1. $^{23}_{11}\text{Na}$ comprend **11 protons** et donc **11 électrons**, ainsi que $23 - 11 = 12$ neutrons.

Na appartient à la **3^e période** du tableau périodique, il aura donc une configuration de valence en 3.

Et il se trouve dans la **1^{ère} colonne ou 1^{er} groupe** du tableau, donc c'est un **1^{er} élément du bloc s**.

Sa configuration externe (ou de valence) est donc Na : **$3s^1$** .

D'où son schéma de Lewis :



Le sodium fait donc partie de la famille **des alcalins**.

Ces métaux sont **extrêmement réducteurs, très réactifs avec l'eau** et forment en réagissant avec celle-ci des solutions basiques.

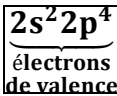
Q2. Le sodium va avoir tendance à **perdre l'électron célibataire de la 3^{ème} couche** pour atteindre la **configuration électronique du gaz rare qui le précède** (le néon) en formant **Na^+** .

II - Etude structurale de l'oxygène et l'ozone :

(D'après Centrale Supélec PSI 2022)

(≈ 22 pts)

Q3. L'oxygène est situé dans la 2^{ème} période et est le 4^{ème} élément du bloc p (ou dans la 16^e colonne). Sa configuration électronique externe dans son état fondamental s'écrit donc :



L'atome d'oxygène possède donc **6 électrons de valence**. Son schéma de Lewis est :



Q4. Les isotopes d'un élément chimique donné possèdent **le même nombre de protons** (et d'électrons, bien sûr) mais **diffèrent par leur nombre de neutrons**.

Le noyau des isotopes de l'oxygène contient :

$$\begin{cases} {}^{16}\text{O} : 8 \text{ protons et } 8 \text{ neutrons} \\ {}^{17}\text{O} : 8 \text{ protons et } 9 \text{ neutrons} \\ {}^{18}\text{O} : 8 \text{ protons et } 10 \text{ neutrons} \end{cases}$$

Ce sont les électrons de valence, seuls, qui déterminent les propriétés chimiques d'un atome.

Ces **trois isotopes ont 6 électrons de valence** : ils ont donc les **mêmes propriétés chimiques**.

Q5. On note \bar{M} la masse molaire moyenne de l'oxygène et M_{16} , M_{17} et M_{18} les masses molaires respectives des isotopes ^{16}O , ^{17}O et ^{18}O . On peut écrire, en introduisant les fractions massiques x_{16} , x_{17} et x_{18} :

$$\begin{cases} \bar{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18} \\ x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1 \end{cases}$$

$$\text{Soit : } \begin{cases} \bar{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases} \quad \text{ou encore : } \begin{cases} \bar{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + (1 - x_{16} - x_{17})M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$$

$$\text{D'où : } \begin{cases} x_{16}M_{16} - x_{16}M_{18} = \bar{M} - x_{17}M_{17} - M_{18} + x_{17}M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$$

On en déduit :

$$\begin{cases} x_{16} = \frac{M_{18} + x_{17}(M_{17} - M_{18}) - \bar{M}}{M_{18} - M_{16}} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$$

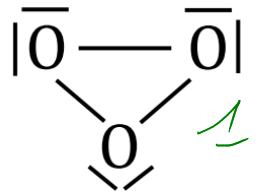
Comme on connaît $x_{17} = 0,037\%$, d'où :

$$\begin{cases} x_{16} = \frac{17,99916 + 0,00037(+16,99914 - 17,99916) - 15,9994}{17,99916 - 15,99941} \\ x_{18} = 1 - 0,99758 - 0,00037 \end{cases}$$

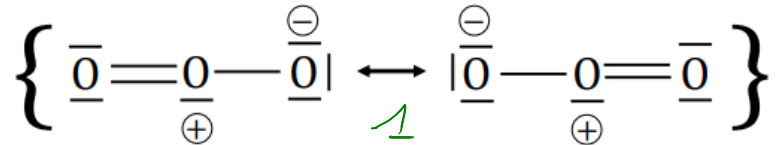
On obtient : $x_{16} = 0,99758 = 99,758\%$ et $x_{18} = 0,00205 = 0,205\%$.

12 Q6. Schéma de Lewis du dioxygène : $\text{O}=\text{O}$

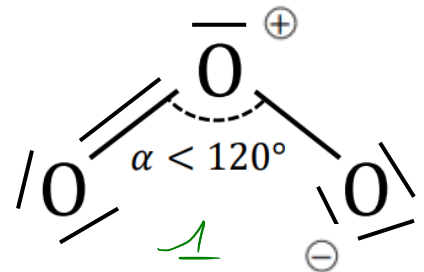
13 Q7. Si la molécule d'ozone était cyclique, elle présenterait un centre de symétrie et ne serait donc pas polaire. De plus, aucun excès et aucun défaut de charge n'apparaît, ce qui confirmerait son caractère apolaire.



15 Q8. Les deux formes mésomères de la molécule d'ozone sont les suivantes :



La molécule est donc du type AX₂E₁ (deux liaisons assimilées à des liaisons simples et un doublet non-liant sur l'atome central). La méthode VSEPR donne donc une molécule coudée, avec un angle d'environ 120°.



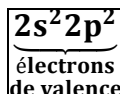
EXERCICE 2 : Généralités sur une molécule de monoxyde de carbone :

(≈ 60 pts)

I – Etude structurale :

(D'après Banque PT 2013)

- Q1 – Le carbone est situé dans la 2^{ème} période et est le 2^{ème} élément du bloc p (ou dans la 14^e colonne).
Sa configuration électronique externe dans son état fondamental s'écrit donc :



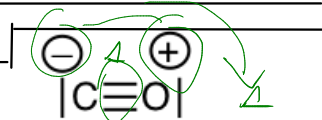
L'atome d'oxygène possède donc **4 électrons de valence**. Son schéma de Lewis est



Pour obtenir un carbone tétravalent, il faut imaginer un **réarrangement en $2s^1 2p^3$** .

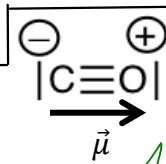
- Q2 – On trouve le carbone 12 ; 13 et 14 : $^{12}_6\text{C}$; $^{13}_6\text{C}$ et $^{14}_6\text{C}$.

- Q3 – Représentation possible de Lewis pour la molécule de monoxyde de carbone :



- Q4 – **L'électronégativité augmente de la gauche vers la droite** sur une ligne. Donc $\chi(\text{C}) < \chi(\text{O})$.

La charge partielle devrait donc **être négative sur l'oxygène et positive** sur le carbone, ce qui **n'est pas en accord** avec les électronégativités des éléments.



- Q5 – Le moment dipolaire, orienté du pôle négatif vers le pôle positif, est représenté de la façon ci-contre en tenant compte de la structure de Lewis de Q3.

L'expression littérale du module du moment dipolaire $\vec{\mu}$ est donnée par : $||\vec{\mu}|| = e d$;

Son unité est le **Debye (D)**.

- Q6 – Les molécules de monoxyde de carbone et d'eau H_2O sont **polaires**.
Les **trois types d'interactions de van der Waals (Keesom, Debye et London)** sont donc présentes.

Cependant, les interactions intermoléculaires les plus importantes sont des **liaisons hydrogènes** entre les hydrogènes de H_2O et le doublet non liant des oxygènes de CO .

II - Etude mécanique :

- Q7 – βx doit être sans dimension ; Donc β est homogène à l'inverse d'une longueur ; Soit : **β en m^{-1}** .

- Q8 – On nous donne : $E_P(x) = E_0 [1 - e^{-\beta(x-x_0)}]^2$;

Les positions d'équilibre sont telles que : $\frac{dE_P}{dx} = 0$.

$$\frac{dE_P}{dx} = 2E_0 (1 - e^{-\beta(x-x_0)}) (\beta e^{-\beta(x-x_0)}), \text{ car de la forme : } (u^2)' = 2u u'$$

avec $u = 1 - e^{-\beta(x-x_0)}$ et $u' = \beta e^{-\beta(x-x_0)}$

Ainsi : $\frac{dE_P}{dx} = 0$ pour $x - x_0 = 0$; la seconde parenthèse ne s'annulant jamais.

Ainsi **$x = x_0$ est position d'équilibre**.

Pour étudier les stabilités, on étudie le signe de $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0}$.

$$\text{Or } \frac{d^2E_P}{dx^2} = 2E_0 \beta e^{-\beta(x-x_0)} \beta e^{-\beta(x-x_0)} + 2E_0 (1 - e^{-\beta(x-x_0)}) (-\beta^2 e^{-\beta(x-x_0)}), \text{ car de la forme : } (uv)'$$

$$\text{Ou encore : } \frac{d^2E_P}{dx^2} = 2E_0 \beta^2 e^{-2\beta(x-x_0)} - 2E_0 \beta^2 (1 - e^{-\beta(x-x_0)}) e^{-\beta(x-x_0)} ;$$

Ainsi en évaluant cette expression en $x = x_0$:

$$\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} = 2E_0 \beta^2 > 0. \text{ Donc } x = x_0 \text{ est position d'équilibre stable.}$$

14

Q9 - $E_P(x) = E_0 [1 - e^{-\beta(x-x_0)}]^2$; $\lim_{x \rightarrow 0} E_P(x) \sim E_0 e^{2\beta x_0} \rightarrow +\infty$, car $\beta x_0 \gg 1$.

Donc **asymptote verticale d'équation $x = 0$** .

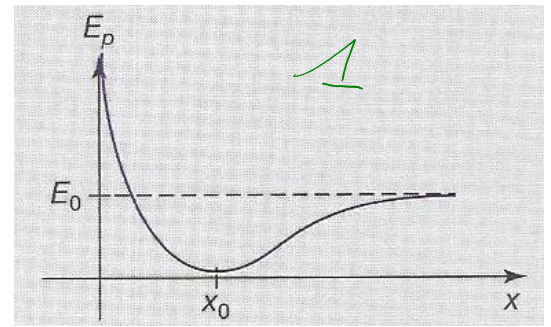
$\lim_{x \rightarrow \infty} E_P(x) = E_0$.

Donc asymptote horizontale d'équation $y = E_0$.

Coordonnées de l'extrémum (minimum) :

On a vu que : $\frac{dE_P}{dx} = 0$ pour $x = x_0$ alors $E_P(x_0) = 0$;

D'où l'allure de la courbe ci-contre.



Q10 - $E_m = E_C + E_P$ avec $E_C \geq 0$; Donc : **$E_m \geq E_P$ à chaque instant.**

Si $E_m \geq E_0$: Domaine de variation de x non borné : L'atome d'oxygène arrive de l'infini se rapproche et repart. On parle **d'état de diffusion** ; Mais ce cas correspondrait à une rupture de la liaison C-O.

Si $0 < E_m < E_0$: Domaine de variation de x borné : L'atome d'oxygène oscille entre deux positions extrêmes. On parle **d'état lié**.

E_0 représente donc l'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour que les atomes puissent s'éloigner à l'infini, c'est donc **l'énergie de dissociation de la molécule**.

Q11 - Pour étudier le mouvement autour de la position d'équilibre, il faut faire un **développement de Taylor**

de l'énergie potentielle autour de x_0 : $E_P(x) \approx E_P(x_0) + (x - x_0) \left(\frac{dE_P}{dx} \right)_{x_0} + \frac{1}{2} (x - x_0)^2 \left(\frac{d^2 E_P}{dx^2} \right)_{x_0}$; $\left(\frac{dE_P}{dx} \right)_{x_0} = 0$ (équilibre).

Or $E_P(x_0) = 0$ et $\left(\frac{d^2 E_P}{dx^2} \right)_{x_0} = 2E_0\beta^2$; Donc : $E_P(x) \approx \frac{1}{2} 2E_0\beta^2 (x - x_0)^2$; Soit : **$E_P(x) \approx E_0\beta^2 (x - x_0)^2$** ;

De plus : $E_C(\dot{x}) = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2$;

D'où : **$E_m = \frac{1}{2} m_2 \dot{x}^2 + E_0\beta^2 (x - x_0)^2$** ;

Le système est **conservatif** car aucune force dissipative n'est mentionnée par l'énoncé, donc d'après le **théorème de la puissance mécanique**.

$E_m = \text{cste}$ ou encore $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

Or $\frac{dE_m}{dt} = m_2 \dot{x} \ddot{x} + 2E_0\beta^2 (x - x_0) \dot{x} = 0$; Posons $X = x - x_0$ alors $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$.

L'équation précédente devient donc : **$m_2 \ddot{X} + 2E_0\beta^2 X = 0$** , car $\dot{X} \neq 0$, puisqu'il y a mvt (non tjs nul).

De la forme : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{2E_0\beta^2}{m_2}}$: **pulsation propre du mouvement** de l'atome d'oxygène ;

Et $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi} \sqrt{\frac{2E_0\beta^2}{m_2}}$: **fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre x_0** .

Q12 - On sait que $\vec{F} = -\text{grad}(E_P) = -\frac{dE_P}{dx} \vec{u}_x$ car comme le système est unidirectionnel, $\frac{\partial E_P}{\partial x} = \frac{dE_P}{dx}$.

Donc : $F_x = -\frac{dE_P}{dx}$; On trouve ainsi le signe de F_x à partir du signe de la dérivée de E_P . D'après le graphe :

Si $x < x_0$, alors $\frac{dE_P}{dx} < 0$ et **$F_x > 0$** : Force dans le même sens que l'axe Ox qui a tendance à ramener l'atome d'oxygène dans sa position d'équilibre.

Si $x > x_0$, alors $\frac{dE_P}{dx} > 0$ et **$F_x < 0$** : Force dans le sens contraire à l'axe Ox qui a tendance à ramener l'atome d'oxygène dans sa position d'équilibre.

$\int W(\vec{F}) = -d\epsilon$
 $\Leftrightarrow \vec{F}_{\text{ext}} \cdot d\alpha \vec{m} = -d\epsilon$

EXERCICE 3 : Etude d'une descente de toboggan aquatique :

(D'après banque PT 2022)

(≈ 35 pts)

Q1. On nous donne : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma \theta$ et h correspond à la variation d'altitude lors d'un tour, donc pour $\theta = 2\pi$; Ainsi, $h = 2\pi \gamma$.

Q2. $\vec{OM} = \vec{Om} + \vec{mM} = R \vec{u}_r + z \vec{u}_z$; Soit : $\vec{OM} = R \vec{u}_r + \gamma \theta \vec{u}_z$.

Alors $\vec{v} = \frac{d\vec{OM}}{dt} = R \frac{d\vec{u}_r}{dt} + \gamma \dot{\theta} \vec{u}_z$; Soit : $\vec{v} = R \dot{\theta} \vec{u}_\theta + \gamma \dot{\theta} \vec{u}_z$.

Q3. Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Base de projection cylindrique : fournie.

Système : L'enfant de masse m .

Forces et énergies potentielles : **Poids** : $\vec{P} = m\vec{g} = mg \vec{u}_z$ et $E_{pp} = -mgz + \text{cste}$, car Oz est un axe descendant.

Réaction du support : $\vec{R} \perp \text{support}$, donc elle ne travaille pas et $E_{pR} = \text{cste}$.

Alors, $E_m = E_c + E_{p \text{ tot}} = \frac{1}{2} m v^2 + E_{pp} + \text{cste} = \frac{1}{2} m v^2 - mgz + \text{cste}$.

Or, d'après Q2, $v^2 = \dot{\theta}^2 (R^2 + \gamma^2)$ et on garde z dans E_{pp} .

D'où : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{\theta}^2 (R^2 + \gamma^2) - mgz + \text{cste}$.

Mais, on ne veut garder que z et \dot{z} dans l'expression de E_m . Il faut donc supprimer $\dot{\theta}$: $\dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{\gamma}$.

Alors $E_m = \frac{1}{2} m \frac{\dot{z}^2}{\gamma^2} (R^2 + \gamma^2) - mgz + \text{cste}$; Ainsi, $E_m = \frac{1}{2} m \dot{z}^2 \left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1 \right) - mgz + \text{cste}$.

De la forme : $E_m = \frac{1}{2} A \dot{z}^2 - B z + \text{cste}$ avec $A = m \left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1 \right)$ et $B = mg$.

Q4. L'enfant partant de l'altitude $z = 0$ avec une vitesse nulle, son énergie mécanique est nulle.

Les frottements étant négligés, celle-ci se conserve : Le système est conservatif : $E_m = \text{cste}$.

En sortie de toboggan ($z = 3h$), on a donc $E_m = 0 = \frac{1}{2} m v_s^2 - mg3h$.

On en déduit $v_s^2 = 6gh$ et $v_s = \sqrt{6gh}$.

Q5. On cherche l'équation différentielle du mouvement, à partir de l'énergie mécanique :

Le système est conservatif, d'après le théorème de la puissance mécanique, $\frac{dE_m}{dt} = 0$.

Avec $E_m = \frac{1}{2} A \dot{z}^2 - B z$; Il vient : $\frac{dE_m}{dt} = A \dot{z} \ddot{z} - B \dot{z} = 0$; Soit : $\dot{z} (A \ddot{z} - B) = 0$.

Or $\dot{z} \neq 0$ à chaque instant car il y a mouvement, ainsi : $\ddot{z} = \frac{B}{A} = \text{cste}$.

En prenant une primitive, il vient : $\dot{z} = \frac{B}{A} t + \text{cste1}$.

CI, A $t = 0$, l'anneau est lâché sans vitesse initiale, donc $\dot{z}(0) = 0 = \text{cste1}$; Soit : $\dot{z} = \frac{B}{A} t$.

Nouvelle primitive : $z(t) = \frac{1}{2} \frac{B}{A} t^2 + \text{cste2}$. CI, A $t = 0$, $z(0) = 0 = \text{cste2}$. Soit : $z(t) = \frac{1}{2} \frac{B}{A} t^2$.

Enfin, le temps de chute τ est tel que $z(\tau) = 3h$ (arrivée au sol).

Ainsi, il vient : $\frac{1}{2} \frac{B}{A} \tau^2 = 3h$; Soit : $\tau^2 = \frac{6hA}{B}$; D'où $\tau = \sqrt{\frac{6hA}{B}}$.

Q6. S'il y a une force de frottement, le système n'est plus conservatif et la force de frottement est tangente au toboggan. Le théorème de la puissance cinétique conduit à : $\frac{dE_m}{dt} = P_{nc} = \vec{F} \cdot \vec{v} = -\|\vec{F}\| \|\vec{v}\| = -F \dot{z} \sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}$.

L'énergie perdue par l'enfant correspond à la valeur absolue du travail de la force de frottement.

Or $|W_F| = \int_{t=0}^{t=\tau} |P_{nc}| dt = F \sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1} \int_{t=0}^{t=\tau} \dot{z} dt = F \sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1} \int_{z=0}^{z=3h} dz$.

D'où : $|W_F| = 3h F \sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}$, Il faut supprimer h ; D'après Q1, $h = 2\pi \gamma$. Soit : $|W_F| = 6\pi \gamma F \sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}$.

PROBLEME : Particule dans des champs \vec{E} et \vec{B} : (D'après ENAC) (≈ 77 pts)

Q1. Cas où $B = 0$, et $E = 10 \text{ V.m}^{-1}$ et $\vec{E} = E \vec{e}_x$.

Référentiel : Terre supposé galiléen.

Base de projection cartésienne : fournie.

Système : Particule de masse m .

Force : Poids négligeable.

Force de Lorentz électrique : $\vec{F} = q\vec{E} = qE \vec{e}_x$.

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \ddot{x} = \frac{qE}{m} \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

Prenons une primitive, il vient : $\begin{cases} \dot{x} = \frac{qE}{m}t + \text{cste 1} \\ \dot{y} = \text{cste 2} \\ \dot{z} = \text{cste 3} \end{cases}$

CI, A $t = 0$, $\vec{v}_0 = V_0 \vec{e}_z$; D'où $\text{cste 1} = \text{cste 2} = 0$ et $\text{cste 3} = V_0$

$$\text{D'où} \quad \begin{cases} \dot{x} = \frac{qE}{m}t \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = V_0 \end{cases} \quad \text{Et nouvelle primitive :} \quad \begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 + \text{cste 4} \\ y = \text{cste 5} \\ z = V_0t + \text{cste 6} \end{cases}$$

D'après le CI, la particule est en O, donc les 3 nouvelles constantes sont nulles. Donc

$$\begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 & (1) \\ y = 0 & (2) \\ z = V_0t & (3) \end{cases}$$

Il nous faut l'équation de la trajectoire et non les équations horaires.

D'après l'équation (3), $t = \frac{z}{V_0}$; On remplace dans (1), il vient : $x = \frac{qE}{2m} \left(\frac{z}{V_0}\right)^2$

L'écran est en $z_0 = 10 \text{ cm}$, Soit $x_e = \frac{qE z_0^2}{2m V_0^2}$. AN : $x_e = \frac{-1,6 \cdot 10^{-19} \times 10 \times 0,1^2}{2 \times 9,1 \cdot 10^{-31} \times (500 \cdot 10^3)^2}$; On obtient : $x_e \approx -3,5 \text{ cm}$.

Q2. Cas où $E = 0$, et $B = 10^{-5} \text{ T}$ et $\vec{B} = B \vec{e}_y$.

2.a - Pour montrer que le mouvement est uniforme on calcule la puissance de la force magnétique :

$$\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

$$P = \vec{F}_m \cdot \vec{v} = q(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v} = q \underbrace{(\vec{v} \wedge \vec{B}) \cdot \vec{v}}_{=0} ; \quad \text{Donc } \boxed{P = 0}$$

Or $P = \frac{dE_c}{dt}$; Donc : $E_c = \text{cste} = \frac{1}{2} m v^2$; Conclusion : $\|\vec{v}\| = \text{cste} = V_0$.

Le champ magnétique dévie les particules mais ne modifie pas la norme de leur vitesse.

2.b - Référentiel : Terre supposé galiléen.

Base de projection cartésienne : fournie

Système : Particule de masse m .

Force : Poids négligeable.

Force de Lorentz magnétique : $\vec{F}_m = q \vec{v} \wedge \vec{B}$

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{F} = q \vec{v} \wedge \vec{B} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} -\dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{pmatrix}.$$

Avec $\omega = \frac{qB}{m}$, il vient : Il vient : $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{pmatrix}$; Ou encore : $\begin{cases} \ddot{x} = -\omega \dot{z} & (1') \\ \ddot{y} = 0 & (2') \\ \ddot{z} = \omega \dot{x} & (3') \end{cases}$

Il faut montrer que le mouvement est plan :

En exploitant (2'), il vient : $\ddot{y} = 0$ Soit $\dot{y} = v_y = \text{cste} = v_y(0) = 0$.

Soit $y = \text{cste} = y(0) = 0$.

Conclusion : La **trajectoire de la particule est plane, dans le plan (O, x, z) , plan $\perp \vec{B}$.**

2.c – Résolution des équations couplées, parla méthode intégration/substitution. On a $\vec{v}_0 = V_0 \vec{e}_z$.

On reprend les deux équations différentielles couplées (1') et (3'):

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega \dot{z} & (1') \\ \ddot{z} = \omega \dot{x} & (3') \end{cases}$$

On prend une primitive de (1') : $\dot{x} = -\omega z + \text{cste}$

CI : A $t = 0$, $z(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0 = \text{cste}$.

D'où : $\dot{x} = -\omega z$ (4) ;

En remplaçant (4) dans (3'), il vient :

$$\ddot{z} = \omega (-\omega z) \quad \text{Soit : } \ddot{z} + \omega^2 z = 0 \text{ : Equation différentielle du second ordre sans terme en } \dot{z} \text{ et avec second membre nul.}$$

Les solutions sont de la forme : $z(t) = A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)$.

CI : A $t = 0$, $z(0) = 0 = A$ Donc : $A = 0$;

On dérive : $\dot{z}(t) = B\omega \cos(\omega t)$

CI : A $t = 0$, $\dot{z}(0) = V_0 = B\omega$ Donc : $B = \frac{V_0}{\omega}$.

Ainsi : $z(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t)$.

Même méthode pour trouver $x(t)$: On prend une primitive de (3'), puis on remplace (1').

Ou bien on reprend (4) : $\dot{x} = -\omega z$ et on remplace $z(t)$ par son expression :

$$\dot{x} = -\omega \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) = -V_0 \sin(\omega t)$$

Ainsi : $\dot{x} = -V_0 \sin(\omega t)$.

On prend une primitive : $x(t) = \frac{V_0}{\omega} \cos(\omega t) + \text{cste}$;

CI : A $t = 0$, $x(0) = 0 = \text{cste} + \frac{V_0}{\omega}$; Soit : $\text{cste} = -\frac{V_0}{\omega}$; D'où : $x(t) = \frac{V_0}{\omega} (\cos(\omega t) - 1)$;

$$\text{Ainsi : } \begin{cases} x(t) = \frac{V_0}{\omega} (\cos(\omega t) - 1) \\ z(t) = \frac{V_0}{\omega} \sin(\omega t) . \end{cases}$$

2.d – D'après les équations précédentes, $\cos(\omega t) = \frac{\omega}{V_0} x + 1$ et $\sin(\omega t) = \frac{\omega}{V_0} z$

Comme $\cos^2(\omega t) + \sin^2(\omega t) = 1$, il vient : $\left(\frac{\omega}{V_0} x + 1\right)^2 + \left(\frac{\omega}{V_0} z\right)^2 = 1$

Ou encore en multipliant de chaque côté par $\frac{V_0}{\omega}$, il vient : $\left(x + \frac{V_0}{\omega}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2$.

La trajectoire est donc un **cercle de centre C $\left(-\frac{V_0}{\omega} > 0; 0; 0\right)$ et de rayon $R_0 = \left|\frac{V_0}{\omega}\right| = -\frac{V_0}{\omega}$** ;

Mais $\omega < 0$, car $q < 0$.

On a donc : $R_0 = \frac{V_0 m}{|q| B}$; AN : $R_0 = \frac{500.10^3 \times 9.1.10^{-31}}{1.6.10^{-19} \times 10^{-5}}$; On obtient : **$R_0 \approx 28 \text{ cm}$** .

2.e - Le dessin n'est pas à l'échelle.

Sur l'écran, $x = x_m$ et $z = z_0$ et $R_0 = \left| \frac{V_0}{\omega} \right| = -\frac{V_0}{\omega}$

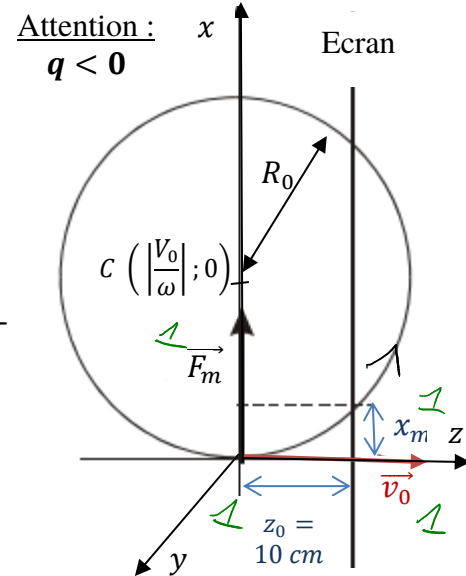
Il vient : $(x_m - R_0)^2 + z_0^2 = R_0^2$ 1

Soit : $(x_m - R_0)^2 = R_0^2 - z_0^2$ 1

D'où : $x_m - R_0 = \pm \sqrt{R_0^2 - z_0^2}$; Et $x_m = R_0 \pm \sqrt{R_0^2 - z_0^2}$ 1

AN : $(x_{m1} \approx 54 \text{ cm et } x_{m2} \approx 1,8 \text{ cm.})$ 1

Mais il faut que $x_m < R_0$; Donc $x_m \approx 1,8 \text{ cm.}$ 1



Q3. On nous donne $E = 1 \text{ kV.m}^{-1}$.

Le mouvement est rectiligne et uniforme si la **particule est pseudo-isolée**, donc si les **forces de Lorentz électrique et magnétique se compensent**

(alors $\vec{a} = \vec{0}$). Soit $qE = qV_0 B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$ 1 1 ($F = 0$)

Ou encore : $B = \frac{E}{V_0}$ AN : $B = \frac{10^3}{500 \cdot 10^3}$. On obtient $B = 2 \cdot 10^{-3} \text{ T} = 2 \text{ mT.}$ 1 (1,25)

Q4. Cas où E et B sont non nuls.

4.a - Il faut reprendre les équations vues en Q2b, en ajoutant la force électrique de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{e}_x$.

Forces : Poids négligeable.

Force de Lorentz magnétique : $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$

Force de Lorentz électrique : $\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{e}_x$

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $q\vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$m \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = q \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ B \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = qB \begin{pmatrix} -\dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{pmatrix} + q \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Avec $\omega = \frac{qB}{m}$, il vient : Il vient : $\begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix} = \omega \begin{pmatrix} -\dot{z} \\ 0 \\ \dot{x} \end{pmatrix} + \frac{q}{m} \begin{pmatrix} E \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$; Ou encore :

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\omega \dot{z} + \frac{q}{m} E & (5) \\ \ddot{y} = 0 & (6) \\ \ddot{z} = \omega \dot{x} & (7) \end{cases}$$
 1

Il faut découpler les équations (5) et (7) pour obtenir la forme proposée : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$.

On prend une primitive de (7) : $\dot{z} = \omega x + cste$ 1

CI : A $t = 0$, $x(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = V_0 = cste$.

D'où : $\dot{z} = \omega x + V_0$ (8) ;

En remplaçant (8) dans (5), il vient : $\ddot{x} = -\omega(\omega x + V_0) + \frac{q}{m} E$ 1 Soit : $\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{q}{m} E - \omega V_0$: 1

Par identification avec $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$, on obtient $a = \frac{q}{m} E - \omega V_0$. Or $\omega = \frac{qB}{m}$, ainsi $a = \frac{q}{m} (E - BV_0)$. 1

4.b - Dans le cas où $B = \frac{2E}{V_0}$, alors $a = -\frac{qE}{m}$. L'équation précédente devient donc : $\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{qE}{m}$.

Solution homogène : $x_h(t) = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)$ 1

Solution particulière constante : $x_p = -\frac{qE}{m\omega^2} = -\frac{qE}{m} \times \frac{m^2}{q^2 B^2}$; Soit : $x_p = -\frac{mE}{qB^2}$ 1

Solution générale : $x(t) = x_h(t) + x_p = \alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t) - \frac{mE}{qB^2}$ 1

1^{ère} CI, à $t = 0$, $x(0) = 0$; Soit : $\alpha - \frac{mE}{qB^2} = 0$; D'où $\alpha = \frac{mE}{qB^2}$ 1

De plus, on dérive, $\dot{x}(t) = -\alpha \omega \sin(\omega t) + \beta \omega \cos(\omega t) + 0$.

2^{ème} CI : à $t = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, donc $\beta \omega = 0$; Soit $\beta = 0$. 1

Conclusion : $x(t) = \frac{mE}{qB^2} \cos(\omega t) - \frac{mE}{qB^2}$; Ainsi : $x(t) = \frac{mE}{qB^2} (\cos(\omega t) - 1) = \frac{E}{B\omega} (\cos(\omega t) - 1)$ 1