Correction TD C7 - Oscillateurs linéaires en régime sinusoïdal forcé

1 Notation complexe

2 Filtre de Wien

3 Modélisation d'un haut-parleur

4 Résonance d'un circuit bouchon

Correction :

1. Diviseur de tension aux bornes de l'impédance équivalente de L et C (dérivation) $1/\underline{Z}_{\text{éq}} = jC\omega + 1/L\omega$:

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{éq}}}{R+\underline{Z}_{\text{éq}}}E_0 = \frac{E_0}{1+R\dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{éq}}}} = \frac{E_0}{1+jR\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right)}$$

2. l'amplitude réelle de $u(t)$ s'exprime :

$$U = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{1+R^2\left(C\omega-\dfrac{1}{L\omega}\right)^2}}$$

U est maximale si le dénominateur est minimal donc si $\left(C\omega - \dfrac{1}{L\omega}\right) = 0$, ce qui donne alors $\omega = 1/\sqrt{LC}$.

- Il y a résonance pour $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.
- $U(\omega_0) = U_{\text{max}} = \frac{E_0}{\sqrt{1+0}} = E_0$

3. on factorise pour faire apparaître $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

$$R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right) = R\sqrt{\frac{C}{L}}\left(\sqrt{LC}\omega - \frac{1}{\sqrt{LC}\omega}\right)$$

le facteur de qualité est donc $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$.

4. $\Delta\omega = |\omega_1 - \omega_2|$ avec $\omega_{1,2}$ tels que $U(\omega_{1,2}) = \dfrac{U_{\text{max}}}{\sqrt{2}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{2}}$. Ainsi

$$\frac{E_0}{\sqrt{1+Q^2\left(\dfrac{\omega_{1,2}}{\omega_0}-\dfrac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \quad \Rightarrow \quad Q^2\left(\frac{\omega_{1,2}}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_{1,2}}\right)^2 = 1 \quad \Rightarrow \quad \frac{\omega_{1,2}}{\omega_0}-\frac{\omega_0}{\omega_{1,2}} \pm \frac{1}{Q}$$

on obtient 2 trinômes du second degré qui donnent 4 racines réelles mais seulement 2 sont positives :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}-1\right) \qquad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2}+1\right)$$

On en déduit la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}$$

5. On lit sur le graphe $U_{\text{max}} = 5$ V donc $E_0 = 5$ V.
On lit aussi $\Delta f \simeq 3k$ et $f_0 = 22,5$ kHz donc $Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} \simeq 7,5$

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \Rightarrow \quad C = \frac{Q^2 L}{R} \simeq 5,6\times 10^{-8}\ \text{F}$$

5 Système à deux ressorts

Correction :

1. Le solide est soumis à son poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$, à la réaction normale $\vec{N} = N\vec{u}_z$, aux forces de rappel des ressorts $-k_1(l_1 - l_{10})\vec{u}_x$ et $k_2(l_2 - l_{20})\vec{u}_x$ et à la force de frottement $\vec{f} = -h\vec{v}$.

2. La loi de la quantité de mouvement appliquée à M dans le référentiel galiléen $\mathscr{R}$ conduit à :
$m\vec{a}(M) = \vec{N} + m\vec{g} - k_1(l_1 - l_{10})\vec{u}_x + k_2(l_2 - l_{20})\vec{u}_x - h\dot{x}\vec{u}_x$.
À l'équilibre, lorsque la paroi de gauche est immobile en $x = 0$: $l_1 = x_{eq}$ et $l_2 = L - x_{eq} = l_{10} + l_{20} - x_{eq}$.
En projection sur $\vec{u}_x$, on obtient alors : $-(k_1 + k_2)(x_{eq} - l_{10}) = 0$. D'où : $x_{eq} = l_{10}$.

3. L'équation ci-dessus fournit, en projection sur $\vec{u}_x$: $m\ddot{x} + h\dot{x} + k_1(l_1 - l_{10}) - k_2(l_2 - l_{20}) = 0$. Lorsque l'abscisse de la paroi est $x_0(t)$, il vient $l_1(t) = x(t) - x_0(t)$ et $l_2(t) = L - x(t) = l_{10} + l_{20} - x(t)$. En introduisant $x(t) = X(t) + x_{eq} = X(t) + l_{10}$, on obtient finalement : $m\ddot{X} + h\dot{X} + (k_1 + k_2)X = k_1 x_0(t)$.

4. Par définition des amplitudes complexes : $\underline{X}_0 = X_{0m}$, $\underline{X} = X_m \exp(j\varphi)$ et $\underline{V} = V_m \exp(j\phi)$.

5. En remplaçant $X(t)$ et $x_0(t)$ par leurs amplitudes complexes dans l'équation du 3), on obtient :
$$(j\omega)^2 m\underline{X} + j\omega h\underline{X} + (k_1 + k_2)\underline{X} = k_1 X_{0m} \quad \Longrightarrow \quad \underline{X} = \frac{k_1 X_{0m}}{(j\omega)^2 m + j\omega h + (k_1 + k_2)}.$$
Puis : $\underline{V} = j\omega\underline{X} \quad \Longrightarrow \quad \underline{V} = \dfrac{k_1 X_{0m}}{j\omega m + h + \dfrac{(k_1 + k_2)}{j\omega}} \quad \Longrightarrow \quad \underline{V} = \dfrac{k_1/h}{1 + j\left(\dfrac{m\omega}{h} - \dfrac{(k_1 + k_2)}{h\omega}\right)} X_{0m}$.

D'où : $\underline{V} = \dfrac{\alpha}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)} \underline{X}_0$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1 + k_2}{m}}$, $Q = \dfrac{\sqrt{(k_1 + k_2)m}}{h}$ et $\alpha = \dfrac{k_1}{h}$.

6. $V_m(\omega) = \dfrac{\alpha}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} X_{0m}$ est maximale pour $\omega = \omega_0$. On observe donc une résonance de vitesse pour cette pulsation.

6 Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

Correction :

1 - On regroupe la résistance, la bobine et le condensateur, qui sont tous les trois en parallèles, en une impédance équivalente $\underline{Z}$ donnée par :
$$\frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{\mathrm{j}L\omega + R + (\mathrm{j}C\omega)R(\mathrm{j}L\omega)}{\mathrm{j}RL\omega}.$$
D'où
$$\boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}.}$$

2 - On a $\dfrac{\underline{U}_0}{\underline{I}_0} = \underline{Z}$, donc $\underline{U}_0 = \underline{Z} \times \underline{I}_0 = \underline{Z} \times I_0$ (car $\underline{I}_0 = I_0$, il n'y a pas de phase à l'origine), donc :
$$\underline{U}_0 = \frac{I_0\,\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}.$$
Pour la suite, il est plus futé de tout diviser par $\mathrm{j}L\omega$ afin de retrouver une fonction du type de celle pour le RLC série :
$$\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega}$$
$$\boxed{\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}R\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}.}$$

3 - On a $U = |\underline{U}_0| = \dfrac{RI_0}{\sqrt{1 + R^2\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2}}$.

Il faut chercher le maximum. Il est atteint lorsque le dénominateur est minimum (car pas de ω au numérateur). C'est ici assez simple : c'est lorsque $\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)^2 = 0$, donc pour $\boxed{\omega = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}.}$

C'est donc cette pulsation là qu'il faut utiliser.

4 - On définit $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $x = \omega : \omega_0$. On a alors

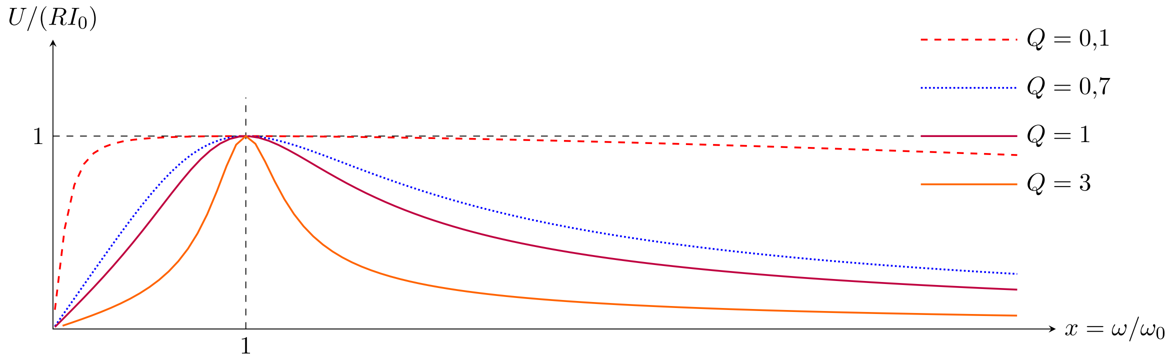
$$\begin{aligned} C\omega - \frac{1}{L\omega} &= \frac{C\sqrt{L}\omega}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}L\omega} \\ &= \frac{\sqrt{C}\sqrt{C}\sqrt{L}\omega}{\sqrt{L}} - \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}\sqrt{L}\sqrt{L}\omega} \\ &= \frac{\sqrt{C}\omega}{\sqrt{L}\omega_0} - \frac{\sqrt{C}\omega_0}{\sqrt{L}\omega} \\ &= \frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right) \end{aligned}$$

D'où

$$\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}R\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)}.$$

On pose $Q = R\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}}$. On a

$$U = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$



5 - Il faut trouver l'expression des pulsations de coupures ω_{c1} et ω_{c2}.

On note $x_1 = \omega_{c1}/\omega_0$ et $x_2 = \omega_{c2}/\omega_0$ les pulsations réduites correspondantes.

Elles sont solutions de $U(x) = \dfrac{U_{\max}}{\sqrt{2}} = \dfrac{RI_0}{\sqrt{2}}$.

Ceci est équivalent à $Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2 = 1$, soit tous calculs faits et en éliminant les solutions négatives, pour

$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}, \quad \text{et} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2}\sqrt{4 + \frac{1}{Q^2}}.$$

La largeur de la bande passante est $\Delta x = x_2 - x_1 = \dfrac{1}{Q}$, soit encore $\boxed{\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}.}$

6 - On a $\boxed{A_c = Q = R\dfrac{\sqrt{C}}{\sqrt{L}} = 5{,}2.}$

L'acuité augmente avec la résistance. C'est normal car la résistance est en parallèle avec le reste du circuit, donc une absence de résistance signifie ici une résistance R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

7 Condition de résonance

Correction :

1) Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalente à R et C : $\underline{Z} = \dfrac{R\frac{1}{jC\omega}}{R+\frac{1}{jC\omega}} = \dfrac{R}{1+jRC\omega}$. L'impédance $jL\omega$ et $\underline{Z}$ forment un diviseur de tension donc :

$$\underline{u} = \underline{e}\frac{\underline{Z}}{jL\omega+\underline{Z}} = \underline{e}\frac{R}{jL\omega(1+jRC\omega)+R} = \frac{\underline{e}}{1+\frac{jL\omega}{R}-LC\omega^2} = \frac{\underline{e}}{1+2j\xi x - x^2}.$$

2) L'amplitude de $u(t)$ est : $U_0 = |\underline{u}| = \dfrac{E_0}{\sqrt{(1-x)^2+(2\xi x)^2}} = \dfrac{E_0}{\sqrt{1+2(2\xi^2-1)x^2+x^4}}$. Il y a résonance si U_0 passe par un maximum, c'est-à-dire si $f(x) = 1+2(2\xi^2-1)x^2+x^4$ passe par un minimum. Or : $f'(x) = 4x\left(2\xi^2-1+x^2\right)$ s'annule, pour $x=0$ et pour $x=\sqrt{1-2\xi^2}$ si $\xi < \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Dans ce dernier cas $f'(\sqrt{1-2\xi^2}) = 8(1-2\xi^2) > 0$.

Ainsi :
- si $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ il n'y a pas de résonance ;
- si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ il a résonance pour la pulsation :

$$\omega_r = \omega_0\sqrt{1-2\xi^2}.$$

On voit ci-contre l'allure de U_0 en fonction de ω pour $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (en trait plein) et $\xi > \frac{1}{\sqrt{2}}$ (en pointillés).