

# Dynamique du point

## I Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à étudier les causes de la mise en mouvement d'un corps, représenté par un point matériel, et les mouvements qui en découlent.

### A Inertie et quantité de mouvement

Mettre en mouvement un corps revient à en modifier la vitesse. Il est cependant plus facile de mettre en mouvement (ou arrêter le mouvement) certains corps par rapport à d'autres. Ce phénomène s'appelle l'inertie, et est proportionnel à la masse d'un corps.

#### Définition

La résistance d'un corps matériel de masse  $m$  à varier de vitesse est appelée **inertie**, quantifié par la **masse** et le **vecteur quantité de mouvement** du point matériel  $M$  du corps :

$$\vec{p}_{/\mathcal{R}}(M) = m \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$$

avec  $\vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$  le vecteur vitesse du point  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

Il est en effet plus difficile de déplacer une voiture à l'arrêt qu'un caddie à l'arrêt, et inversement il est plus difficile d'arrêter une voiture qu'un caddie. Dans l'analogie électromécanique, c'est l'inductance  $L$  qui s'oppose à la variation du courant quand  $m$  s'oppose à la variation de la vitesse.

### B Forces fondamentales

Les causes du mouvement d'un corps sont appelées **forces**.

#### Définition

Les **forces** caractérisent les actions mécaniques sur un point matériel  $M$ . Ce sont des **vecteurs** et elles sont indépendantes du référentiel.

L'unité d'une force est le Newton, noté  $N$ , tel que :

$$1 \text{ N} = 1 \text{ kg m s}^{-2}$$

Il existe quatre de ces forces que l'on caractérise de « fondamentales », qui permettent de classer les interactions physiques entre les systèmes :

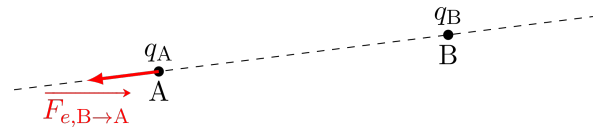
- **L'interaction faible** : elle intervient au niveau des **nucléons**, est de *faible intensité* et de très courte portée ( $\approx 10^{-18} \text{ m}$ ) ;
- **L'interaction forte** : responsable de la cohésion des **noyaux atomiques**, et permet aux protons de rester dans le noyau malgré la répulsion électromagnétique due à leurs charges électriques identiques. Elle est de *très forte intensité* mais sur une très courte portée ( $\approx 10^{-14} \text{ m}$ ).
- **L'interaction électromagnétique** : elle intervient entre les **particules chargées**, avec une *forte intensité* et à longue portée. Les particules de même signe se repoussent, tandis que celles de signes opposées s'attirent, et est responsable de la **cohésion des matériaux** et de leurs propriétés mécaniques (dureté, viscosité, propriétés chimiques...).

**Propriété**

La force d'interaction électrostatique subie par une particule de charge  $q_A$  de la part d'une charge  $q_B$  est :

$$\vec{F}_{e,B \rightarrow A} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q_A q_B}{BA^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{BA}}{BA}$$

$\vec{u}$  est un vecteur unitaire dirigé de B vers A.



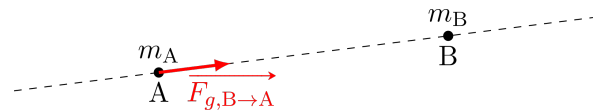
- **L'interaction gravitationnelle** : elle intervient entre les **particules massives** et est à *faible intensité* mais à très longue portée. La masse étant une grandeur positive, toutes les massives s'attirent entre elles. Elle prédomine à l'échelle astronomique et à l'origine du poids, et indirectement de la poussée d'ARCHIMÈDE.

**Propriété**

La force d'interaction gravitationnelle subie par une masse  $m_A$  de la part d'une masse  $m_B$  est :

$$\vec{F}_{g,B \rightarrow A} = -G \frac{m_A m_B}{BA^2} \vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{BA}}{BA}$$

$\vec{u}$  est un vecteur unitaire dirigé de B vers A.



## II Les trois lois de NEWTON (1687)

### A Principe d'inertie

**Première loi de NEWTON : principe d'inertie**

Il existe des référentiels appelés **référentiels galiléens** dans lesquels un point matériel M soumis à **aucune action mécanique** est

- soit **au repos** ;
- soit en **translation rectiligne uniforme**.

Ainsi, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Ils n'existent rigoureusement aucun référentiel galiléen, mais on peut en considérer certains comme *approximativement* galiléens lorsqu'on étudie le problème sur une durée assez courte. En reprenant les exemples du chapitre précédent :

- Le référentiel **héliocentrique** est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif du Soleil dans la galaxie, soit plusieurs **millions d'années** ;
- Le référentiel **géocentrique** est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif de la Terre autour du Soleil, soit **une année** ;
- Les référentiels **terrestres** sont supposés galiléens si le mouvement étudié est plus court qu'une rotation significative de la Terre, soit **une journée**.

### B Principe fondamental de la dynamique

C'est une des lois les plus importantes de la physique, permettant de relier le mouvement cinématique (dérivée de la vitesse) d'un corps en fonction de ses causes (les forces extérieures).

**Deuxième loi de NEWTON : principe fondamental de la dynamique**

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement  $\vec{p}_{/\mathcal{R}}(M)$  d'un point matériel  $M$  de masse  $m$  est égale à la somme des forces extérieures agissant sur le système  $\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$  :

$$\frac{d\vec{p}_{/\mathcal{R}}(M)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$$

Lorsque la masse est constante, on a  $\forall t \vec{p}_{/\mathcal{R}}(M) = m \vec{v}_{/\mathcal{R}}(M)$ , ainsi

$$m \vec{a}_{/\mathcal{R}}(M) = \sum \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M}$$

avec  $\vec{a}_{/\mathcal{R}}(M)$  le vecteur accélération du point  $M$ .

Remarque

Certains mouvements ne peuvent donc pas être traités avec cette dernière formulation s'ils s'accompagnent d'une variation de masse :

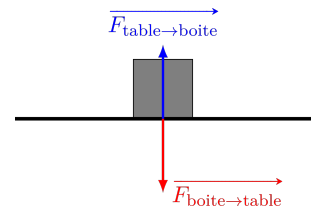
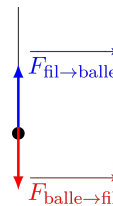
- Le mouvement d'une fusée qui brûle son carburant puis abandonne ses réservoirs ;
- Le mouvement d'une goutte d'eau qui s'évapore lors de sa chute.

Dans ces cas-là, on utilise la première formulation.

**C Loi des actions réciproques****Troisième loi de NEWTON : loi des actions réciproques**

Pour deux points  $M_1$  et  $M_2$  en interaction, la force exercée par le point 1 sur le point 2 est égale à l'opposé de la force exercée par le point 2 sur le point 1 :

$$\vec{F}_{1 \rightarrow 2} = -\vec{F}_{2 \rightarrow 1}$$

**III Ensembles de points**

Aucun système n'est rigoureusement ponctuel, mais sous certaines conditions il est possible d'étudier le mouvement d'un corps en tant que point matériel de manière rigoureuse. Établissons ce comportement.

**A Centre d'inertie****Définition**

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité**  $G$  d'un ensemble de points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$  est défini par :

$$\vec{OG} = \frac{1}{\sum_i m_i} \sum_i m_i \vec{OM}_i$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

Le centre d'inertie correspond au centre d'équilibre gravitationnel d'un ensemble de point. Ainsi, pour mettre une règle en équilibre horizontalement il faut la reposer en son milieu. Un marteau, en revanche, a son centre d'inertie bien plus proche de la masse que du milieu.

Il existe une autre formulation à cette définition. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_i m_i \overrightarrow{OG} &= \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \\ \Leftrightarrow \vec{0} &= \sum_i m_i (\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG})\end{aligned}$$

Or, comme  $\overrightarrow{OM_i} - \overrightarrow{OG} = \overrightarrow{GO} + \overrightarrow{OM_i} = \overrightarrow{GM_i}$ , on pourra également retenir :

$$\boxed{\sum_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}}$$

Soient 2 masses  $m$  placées en A et en B.



On a :  $m\overrightarrow{GA} + m\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$  car  $m \neq 0$

Or,  $\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ , donc

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{2}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Avec  $3m$  en A et  $m$  en B :



Cette fois,  $3m\overrightarrow{GA} + m\overrightarrow{GB} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = \vec{0}$  car  $m \neq 0$

Or,  $3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GB} = 3\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB}$ , donc

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{GA} + \overrightarrow{AB} &= \vec{0} \\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{AG} &= \overrightarrow{AB} \\ \Leftrightarrow \overrightarrow{AG} &= \frac{1}{4}\overrightarrow{AB}\end{aligned}$$

Cette définition peut être étendue aux solides qui peuvent être vus comme un ensemble infini de points infiniment proches. Dans ce cas, la somme discrète devient une intégrale.

## **B** Quantité de mouvement d'un ensemble de points

On souhaiterait pouvoir étudier un ensemble de points comme le mouvement d'un point unique, comme le centre d'inertie. Pour cela, il faut étudier la quantité de mouvement d'un ensemble de points.


**Définition**

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble  $\mathcal{S}$  de points matériels  $M_i$  de masses  $m_i$  est défini par :

$$\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)$$

Pour que les choses soient simples, il faudrait donc que  $\vec{p}(\mathcal{S})$  soit relié au centre d'inertie. Or,

$$\vec{v}(G) = \frac{dOG}{dt} = \frac{1}{\sum_i m_i} \underbrace{\sum_i m_i \frac{dOM_i}{dt}}_{\vec{p}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(G)}$$

 La quantité de mouvement d'un ensemble de points est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en  $G$  et de masse  $m_{\text{tot}}$  : tout se passe comme si la masse était concentrée en  $G$ .

**C Théorème de la résultante cinétique**

Si on peut étudier la cinématique d'un corps par l'étude de son centre de gravité, comment les forces interviennent-elles sur cet ensemble de points ? Considérons pour simplifier un système de deux points  $M_1$  et  $M_2$  de masses  $m_1$  et  $m_2$  en mouvement dans un référentiel galiléen. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacun d'entre eux :

$$\frac{d\vec{p}(M_1)}{dt} = \vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_1}$$

avec deux types de forces : les forces intérieures du système, ici celles exercées par  $M_2$  sur  $M_1$ , et les forces extérieures, c'est-à-dire toutes les autres. En faisant de même pour  $M_2$  :

$$\frac{d\vec{p}(M_2)}{dt} = \vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_2}$$


Ainsi, avec la définition de la quantité de mouvement d'un ensemble de points,

$$\frac{d\vec{p}(\mathcal{S})}{dt} = \underbrace{\vec{F}_{M_1 \rightarrow M_2} + \vec{F}_{M_2 \rightarrow M_1}}_{=\vec{0} \text{ d'après la 3ème loi}} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_1} + \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow M_2}$$

**Théorème de la résultante cinétique**

Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel s'applique à un ensemble de point en prenant pour point matériel le centre d'inertie  $G$  affecté de la masse totale  $m_{\text{tot}}$  du système, en ne considérant que les forces extérieures s'appliquant à l'ensemble :

$$m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}$$

 Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans la suite, on étudiera le mouvement du centre de gravité, de masse  $m_{\text{tot}}$ , soumis aux forces extérieures au système.

## IV Méthode générale de résolution en mécanique

- 1 **De quoi parle-t-on ?** Quel est l'objet en mouvement, dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement ?
- 2 **Schéma.** Faire un schéma du problème dans une situation quelconque.
- 3 **Modélisation.** Donner le repère, les origines spatiale et temporelle, les représenter sur le schéma et *définir les notations* nécessaires.
- 4 **Bilan des forces.** Faire le bilan des forces, les exprimer dans le repère choisi et les représenter sur le schéma.
- 5 **Deuxième loi de NEWTON.** Appliquer le PFD au système.
- 6 **Équations scalaires.** Donner les trois équations  $\ddot{x}$ ,  $\ddot{y}$  et  $\ddot{z}$ .
- 7 **Répondre aux questions.** Le plus souvent, obtenir les équations horaires  $x(t)$ ,  $y(t)$  et  $z(t)$ .

### Transition

Avec ces outils, voyons maintenant quelques forces et situations usuelles que l'on rencontrera en dynamique.

## V Le poids

### A Définition

#### Définition

Dû à l'attraction gravitationnelle de la Terre, un corps de masse  $m$  à sa surface subit une force que l'on appelle le **poids**, telle que :

$$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$$

avec  $\vec{g}$  le vecteur **accélération de la pesanteur**, de norme  $g = \|\vec{g}\| = 9,81 \text{ m s}^{-2}$  et dirigé verticalement vers le sol. Par définition de l'interaction gravitationnelle, on a

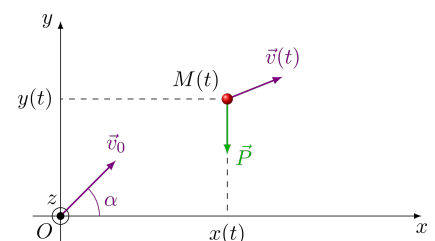
$$\vec{g} = -\mathcal{G} \frac{m_T}{R_T^2} \vec{u}_z$$

avec  $m_T$  et  $R_T$  la masse et le rayon de la Terre,  $\mathcal{G}$  la constante gravitationnelle, et  $\vec{u}_z$  vertical ascendant.

### B La chute libre

**Déf.** Un système en chute libre pure ne subit que l'action de son poids.

- 1 **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une balle lancée avec un vecteur vitesse initiale  $\vec{v}_0$  dans le référentiel du laboratoire.
- 2 **Schéma.**
- 3 **Modélisation.**



- On suit la trajectoire du centre d'inertie de la balle par le point matériel  $M$  de masse  $m$ .
- Repère :  $y$  verticale ascendante,  $x$  direction du lancer,  $z$  tel que  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  soit une base orthonormée directe (BOND).

- Instant initial : moment où la balle est lancée.
- Origine spatiale : position de la balle à l'instant initial ( $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$ ).
- On note  $\alpha$  l'angle du vecteur  $\vec{v}_0$  avec l'axe horizontal et  $v_0$  sa norme, tel que

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_y$$

4 **Bilan des forces.** Ici, seul le poids s'applique :

$$\text{Poids } \vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$$

5 **PFD.**  $m \vec{a} = \vec{P}$

6 **Équations scalaires.** On projette sur les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -mg \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse au mouvement plan donc pas à la coordonnée  $z$ . Aussi, la masse n'étant pas nulle, elle se simplifie dans les équations et on a

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases}$$

On remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse.

Lors d'une chute libre sans frottements, la masse du corps en chute n'intervient pas. Cela signifie en particulier que, dans le vide, tous les corps chutent à la même vitesse. <sup>a</sup>

a. <https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs>

7 **Répondre aux questions.** On intègre l'accélération pour obtenir la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + K_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos \alpha = K_1 \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin \alpha = K_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases}$$

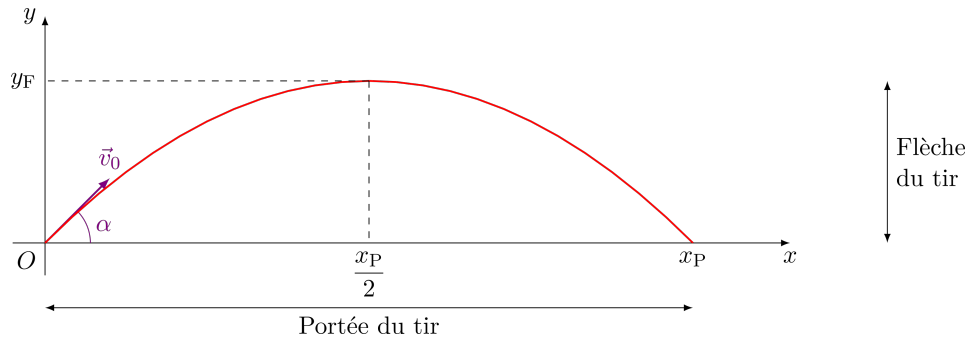
De même pour les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha + C_1 \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha + C_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x(0) = 0 = C_1 \\ y(0) = 0 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}$$

Si on cherche la trajectoire, il s'agit alors d'obtenir la courbe  $y(x)$  décrite dans le plan  $xy$ , c'est-à-dire éliminer le temps  $t$ . À partir de l'équation horaire sur  $\vec{u}_x$ , on a

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ \Rightarrow y(x) &= -\frac{1}{2}g \frac{x^2}{v_0^2 \cos^2 \alpha} + v_0 \sin \alpha \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ \Leftrightarrow y(x) &= -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \end{aligned}$$

C'est une parabole :



On peut en définir deux caractéristiques principales, la **portée** et la **flèche**.

### Définition : portée d'un tir

La **portée** d'un tir est la distance **horizontale** entre l'origine du tir et l'endroit où retombe le tir.

Autrement dit, on trouve  $x_P$  tel que :

$$\begin{aligned} y(x_P) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_P \left( -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P + \tan \alpha \right) &= 0 \end{aligned}$$

On cherche  $x_P \neq 0$  (origine du tir), d'où

$$\begin{aligned} -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x_P + \tan \alpha &= 0 \\ \Leftrightarrow x_P &= \frac{2v_0^2 \cos^2 \alpha}{g} \tan \alpha = \frac{2v_0^2 \cancel{\cos^2 \alpha} \sin \alpha}{g \cancel{\cos \alpha}} \\ \Leftrightarrow x_P &= \frac{v_0^2}{g} \times 2 \sin \alpha \cos \alpha = \frac{v_0^2}{g} \sin(2\alpha) \end{aligned}$$

Ainsi, pour un tir à altitude nulle, la portée est maximale si  $\sin(2\alpha) = 1$ , soit  $\alpha = \pi/4$ .

### Définition : flèche d'un tir

La **flèche** d'un tir est la **hauteur maximale** atteinte par le projectile.

On trouve  $y_F$  quand la vitesse **verticale** s'annule,  $\dot{y} = 0$  ; ainsi

$$\begin{aligned} -gt_F + v_0 \sin \alpha &= 0 \Leftrightarrow t_F = \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \\ \Rightarrow y_F = y(t_F) &= -\frac{1}{2}g \left( \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \right)^2 + v_0 \sin \alpha \times \frac{v_0 \sin \alpha}{g} \\ \Leftrightarrow y_F &= \frac{v_0^2}{2g} \sin^2 \alpha \end{aligned}$$

Le maximum se trouve en  $\alpha = \pi/2$ .

Pour quel angle le temps de vol est-il le plus grand ?

Le temps de vol correspond au temps pour lequel le projectile retombe au sol, c'est-à-dire  $t(x_P)$ .

Ainsi,

$$t_{\max} = t(x_P) \Leftrightarrow t_{\max} = \frac{\frac{v_0^2}{g} \times 2 \sin \alpha \cos \alpha}{\cancel{v_0 \cos \alpha}} \Leftrightarrow t_{\max} = 2 \frac{v_0}{g} \sin \alpha$$



Le temps de vol est donc maximal pour  $\alpha = \pi/2$ .

## VI Poussée d'ARCHIMÈDE

### Définition

Lorsqu'un objet est dans un fluide, il subit une force nommée **poussée d'ARCHIMÈDE** et égale à l'opposé du poids du fluide déplacé. Elle est parfois notée  $\vec{\Pi}$  ou  $\vec{F}_A$ , et on a :

$$\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g}$$

avec  $\rho_{\text{fluide}}$  la masse volumique du fluide et  $V_{\text{immergé}}$  le volume de l'objet qui est dans le fluide.

Quelle est la proportion immergée d'un glaçon ? On donne  $\rho_{\text{eau}} = 1,00 \times 10^3 \text{ kg m}^{-3}$  et  $\rho_{\text{glace}} = 9,17 \times 10^2 \text{ kg m}^{-3}$ .

On suppose un glaçon immobile partiellement plongé dans de l'eau à la surface de la Terre.

Ce glaçon subit son poids et la poussée d'ARCHIMÈDE, et a une accélération nulle car immobile, donc avec le PFD :

$$\vec{0} = \vec{F}_A + \vec{P}$$

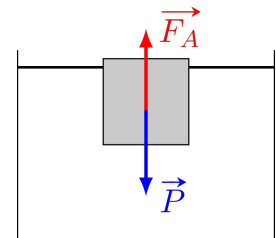
Or,

$$\vec{P} = m \vec{g} = \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}} \vec{g} \quad \text{et} \quad \vec{F}_A = -\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} \vec{g}$$

D'où

$$\begin{aligned} & -\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} \vec{g} + \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}} \vec{g} \\ \Leftrightarrow & \frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{glaçon}}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = 91,7\% \end{aligned}$$

On observe également qu'un objet **plus dense** que le fluide aura une proportion immergée  $> 1$  : il ne sera donc pas à l'équilibre mécanique et coulera.



Exercice

## VII Frottements fluides

### A Force de frottement fluide

#### Définition

Un objet en mouvement dans un fluide subit une force de frottements dite fluide  $\vec{F}_f$  qui est une force de freinage, donc opposée à la direction de la vitesse  $\vec{v}$ . Selon la norme de la vitesse, on a :

- Pour les **faibles vitesses**, elle est **proportionnelle** à  $v$  :
- Pour les **vitesses élevées**, elle est **quadratique** avec  $v$  :

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}$$

$$\vec{F}_f = -\beta v \vec{v}$$

En pratique, on verra souvent

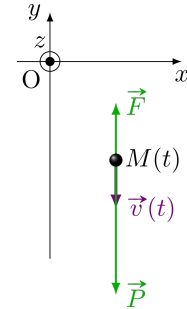
$$\beta = \frac{1}{2} \rho_{\text{fluide}} S c_x$$

avec  $\rho_{\text{fluide}}$  la masse volumique du fluide,  $S$  la surface frontale (« l'ombre » que fait l'objet sur un flux), et  $c_x$  un coefficient sans dimension dépendant surtout de la forme de l'objet.

## B Chute libre sans vitesse initiale avec frottements linéaires

1 **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une bille lâchée dans une éprouvette d'huile dans le référentiel de la salle de TP.

2 **Schéma.**



3 **Modélisation.**

- On repère la bille par la position de son centre d'inertie M.
- Repère :  $y$  est la verticale ascendante,  $x$  et  $z$  sont deux vecteurs horizontaux tels que  $\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z$  soit une base orthonormale directe (BOND).
- Instant initial : le moment où la bille entre dans le glycérol.
- Origine : la position de la bille à son entrée dans le glycérol.
- On néglige pour simplifier la poussée d'**Archimède**.
- On note  $m$  sa masse,  $\alpha$  le coefficient de frottement et  $\vec{g}$  l'accélération de la pesanteur.

4 **Bilan des forces.**

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y \\ \text{Frottements fluide} & \vec{F}_f = -\alpha \vec{v} = -\alpha \dot{y} \vec{u}_y \end{array}$$

5 **PFD.**

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

6 **Équations scalaires.**

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y}(t) = -\alpha\dot{y} - mg \\ m\ddot{z}(t) = -\alpha\dot{z} \end{cases}$$

7 **Répondre aux questions.** On obtient ici trois équations différentielles sur la vitesse ( $v_x = \dot{x}$ ,  $v_y = \dot{y}$  et  $v_z = \dot{z}$ ), mais en absence de vitesse initiale sur  $v_x$  et  $v_z$ , il n'y aura pas de mouvement sur ces coordonnées : on s'intéresse donc à l'équation différentielle sur  $v_y$  que l'on appelle simplement  $v$  :

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = -g}$$

Une résolution complète demande de discerner solution homogène et particulière puis d'utiliser les conditions initiales, pour trouver

$$v(t) = \frac{gm}{\alpha} (1 - e^{-\alpha t/mg})$$

où on nommerait  $\tau = m/\alpha$ . On peut développer une autre approche générique pour obtenir des grandeurs typiques d'un système à partir de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement : l'**adimensionnement**.

On définit  $v^* = v/V$ ,  $t^* = t/T$  avec  $V$  et  $T$  des constantes à définir. On peut donc réécrire

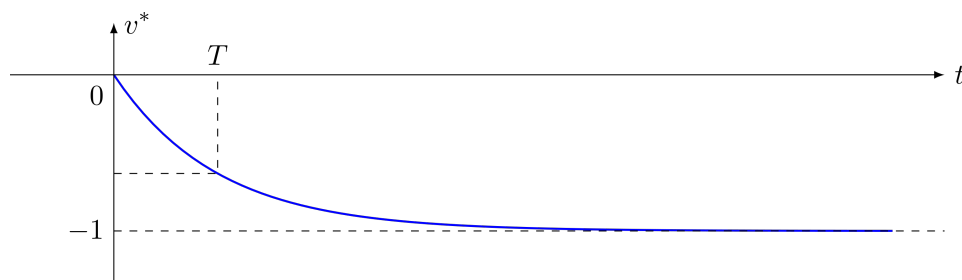
$$\begin{aligned} \frac{V}{T} \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\alpha}{m} V v^* &= -g \\ \Leftrightarrow \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\alpha T}{m} v^* &= -\frac{gT}{V} \end{aligned}$$

On choisit alors  $T$  et  $V$  de façon à écrire

$$\boxed{\frac{dv^*}{dt^*} + v^* = -1}$$

avec  $\boxed{T = \frac{m}{\alpha}}$  et  $\boxed{V = gT = \frac{gm}{\alpha}}$

Dans ces conditions, l'équation différentielle adimensionnée donne  $T$  grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse, et  $V$  est la vitesse atteinte en régime permanent.



L'écriture sous forme adimensionnée permet de ramener la résolution de l'équation à un problème uniquement mathématique, débarrassé des constantes physiques et permettant de voir rapidement le fonctionnement d'un système même quand on ne sait pas résoudre l'équation.

## **C** Chute libre sans vitesse initiale avec frottements quadratiques

Pour une chute libre dans l'air, la vitesse d'un corps va pouvoir être suffisamment élevée pour que les frottements soient quadratiques en la vitesse. On choisit ici  $\vec{u}_y$  vers le bas, tel que  $v = \dot{y} = 0$ . Ainsi, une chute totalement verticale donne

$$\vec{F}_f = -\beta \dot{y}^2 \vec{u}_y$$

Toujours en négligeant la poussée d'ARCHIMÈDE, on a

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m} v^2 = g$$

La résolutions analytique exacte de cette équation sort du cadre du programme ; on peut en revanche l'adimensionner pour trouver ses grandeurs typiques.

On définit  $v^* = v/V$ ,  $t^* = t/T$  avec  $V$  et  $T$  des constantes à définir. On peut donc réécrire

$$\begin{aligned} \frac{V}{T} \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\beta}{m} V^2 (v^*)^2 &= g \\ \Leftrightarrow \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\beta}{m} VT (v^*)^2 &= \frac{gT}{V} \end{aligned}$$

On choisit alors  $T$  et  $V$  de façon à écrire

$$\boxed{\frac{dv^*}{dt^*} + (v^*)^2 = 1}$$

$$\text{avec } T = \sqrt{\frac{m}{\beta g}} \quad \text{et} \quad V = gT = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle adimensionnée donne  $T$  grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse, et  $V$  est la vitesse atteinte en régime permanent.

Avec pour un-e humain-e en chute libre sans parachute, on a  $\beta \approx 0,25 \text{ kg m}^{-1}$ , soit

$$v_{\text{lim}} = 60 \text{ m s}^{-1} \approx 200 \text{ km h}^{-1} \quad \text{et} \quad T \approx 6 \text{ s}$$

## VIII Force de frottements solides

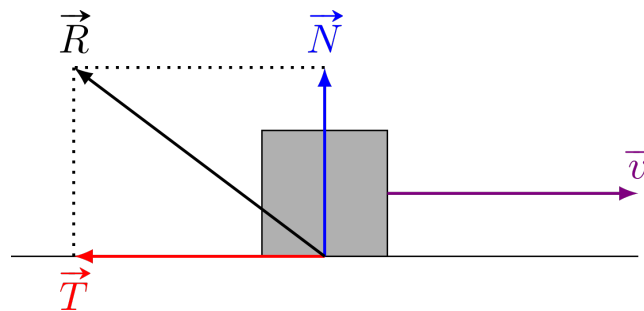
### A Réaction d'un support

#### Définition : réaction d'un support

La force exercée par un support sur un objet posé à sa surface est appelée **réaction** et est notée  $\vec{R}$ . Elle se décompose en deux forces :

$$\vec{R} = \vec{N} + \vec{T} \quad \text{ou} \quad \vec{R} = \vec{R}_N + \vec{R}_T$$

- $\vec{N}$  (ou  $\vec{R}_N$ ) est la force de réaction **normale** ( $\perp$ ) au support ;
- $\vec{T}$  (ou  $\vec{R}_T$ ) est la force de réaction **tangentielle** ( $\parallel$ ) au support, **opposée** à la vitesse.



### B Lois de COULOMB

Les relations entre les **normes** des forces  $\vec{N}$  et  $\vec{T}$  sont appelées **lois du frottement de COULOMB**.

#### Lois du frottement de COULOMB

- Un solide **glissant** sur une surface donne

$$\|\vec{T}\| = f_d \|\vec{N}\|$$

- Un solide **ne glissant pas** sur une surface donne

$$\|\vec{T}\| < f_s \|\vec{N}\|$$

avec  $f_e$  le coefficient de frottement solides **dynamique** et  $f_s$  le **statique**. Ce sont des nombres sans dimension, souvent inférieur à 1 et qui dépend de l'**état** de la surface (humide, graissée) mais **pas de son aire**, et on a

$$f_d < f_s$$

On définit généralement **un seul** coefficient de frottements solides,  $f_d = f$ .

L'absence de frottements solides implique  $f = 0$ , donc  $T = 0$ , mais **la force normale n'est jamais nulle.**

## IX Tension d'un fil

### Définition

Un point matériel M accroché à un fil tendu subit de la part de ce fil une force appelée **tension du fil** et notée  $\vec{T}$  telle que

$$\vec{T} = \|\vec{T}\| \vec{u}_{M \rightarrow \text{fil}}$$

avec  $\vec{u}_{M \rightarrow \text{fil}}$  un vecteur unitaire dirigé du point M vers le fil et  $\|\vec{T}\|$  la norme de la tension du fil. La **condition de tension** du fil est  $\|\vec{T}\| > 0$ .

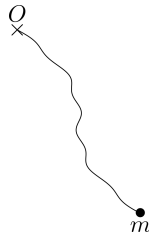


FIGURE 2.1 – Fil détendu : pas de force.

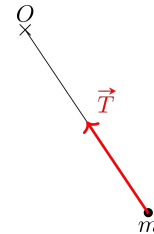


FIGURE 2.2 – Fil tendu : force vers O.

## X Force de rappel d'un ressort

### A Force de rappel élastique

#### Définition : force de rappel d'un ressort

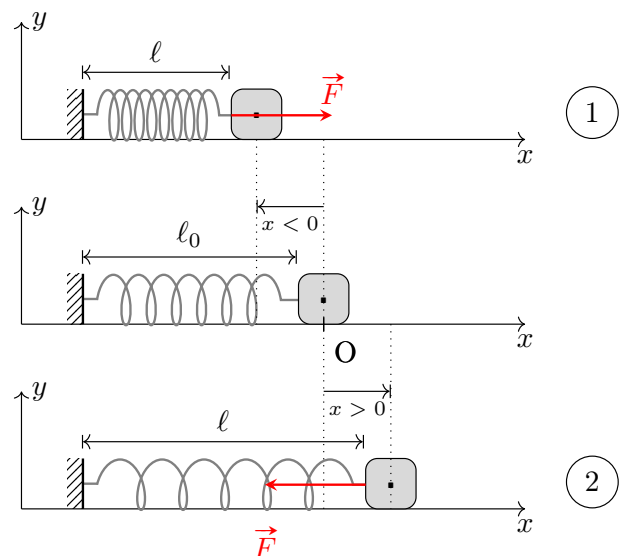
Soit le système masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le ressort se déforme sous l'effet d'une contrainte en stockant l'énergie donnée, qu'il libère en reprenant sa forme quand la contrainte s'arrête. On définit la force de rappel du ressort par :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$$

avec

- $k > 0$  la **constante de raideur** en  $\text{N m}^{-1}$  ( $[\vec{F}] = [k][\ell]$ );
- $\ell_0$  sa **longueur à vide**;
- $\vec{u}_x$  un vecteur unitaire ( $\|\vec{u}_x\| = 1$ ) dirigé selon l'axe  $x$

Elle est aussi appelée **force de HOOKE**.



Si  $\ell > \ell_0$ , on a bien une force dirigée selon  $-\vec{u}_x$ , (situation (2)), sinon dirigée selon  $+\vec{u}_x$ .

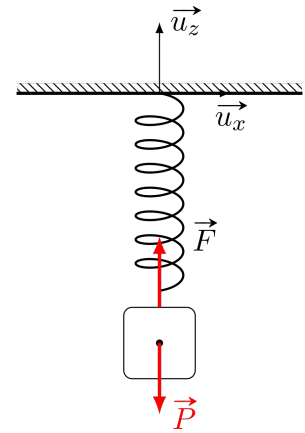
**Attention**

Le signe de la force donnée dépend du schéma : de façon générale, il faut regarder le sens dans lequel s'exerce la force si on étire le ressort ( $(\ell - \ell_0) > 0$ ) et placer le signe en conséquence.

**B** Position d'équilibre verticale

Un ressort horizontal sans action mécanique aura une longueur d'équilibre égale à sa longueur à vide. En revanche, un ressort vertical se voit étiré dû au poids : comment s'exprime cette longueur d'équilibre ?

On étudie le système {masse} accrochée à un ressort et représentée par le point M de masse  $m$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}(O, \vec{u}_x, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_z$  vertical ascendant et O à la jonction ressort-support.



Bilan des forces :

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z \\ \text{Force HOOKE} & k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z \end{array}$$

À l'équilibre,  $\vec{a} = \vec{0}$  donc

$$\begin{aligned} 0 &= -mg + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \Leftrightarrow k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mg \\ &\Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}} \end{aligned}$$

Ainsi, on retrouve bien

- Plus la force exercée sur le ressort est élevée, plus le ressort est étiré ;
- Plus le ressort est raide ( $k \nearrow$ ), moins il est étiré.

**C** Oscillateur harmonique mécanique