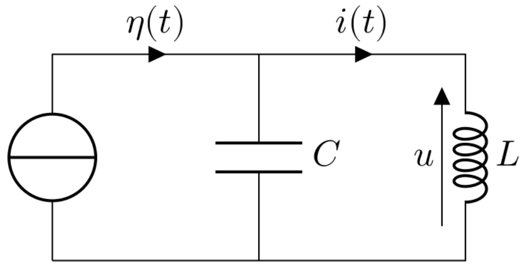
Correction du TD

I Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

Dans le circuit ci-contre, la source idéale de courant est brusquement éteinte. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.



1. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

   Réponse :
   Une fois le générateur de courant stoppé, l'énergie totale est la somme de l'énergie stockée dans le condensateur et de celle stockée dans la bobine, soit

   $$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \frac{1}{2}Cu^2 + \frac{1}{2}Li^2$$

   En dérivant on a donc

   $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C \times 2u\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{2} \times 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

   Comme on demande de ne faire apparaître que i dans le résultat, on remplace u avec la relation courant-tension de la bobine et on développe :

   $$\begin{aligned}
   &\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{2}C \times 2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{2}L \times 2i\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
   \Leftrightarrow &\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L^2C\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
   \Leftrightarrow &\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i\right)}
   \end{aligned}$$

2. Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i.

   Réponse :
   Le circuit ne compte qu'une bobine et un condensateur qui stockent de l'énergie sans la dissiper, et donc aucune résistance. L'énergie électrique dans le circuit est donc constante, et on en déduit qu'$\forall t \in \mathbb{R}^+$:

   $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{donc} \quad L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\left(LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i\right) = 0$$

   On a donc un produit qui est nul. Or, la tension de la bobine $L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ ne peut être constamment nulle, c'est donc le terme entre parenthèses qui est nul, c'est-à-dire :

   $$LC\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0 \Longleftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2i}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 i = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$$

3. Retrouver cette équation par application des lois des nœuds et des mailles.

Réponse :
C et L sont en parallèle, donc partagent la même tension u. Soit i_C le courant traversant C. Comme $\eta(t \geq 0) = 0$, la loi des nœuds donne

$$0 = i_C + i \quad \text{donc} \quad C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + i = 0$$

avec la RCT du condensateur. Comme u est aussi la tension de L, avec la RCT de la bobine on retrouve bien

$$\boxed{LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + i = 0}$$

4. Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.

Réponse :
À $t = 0^-$, le circuit est alimenté par $\eta = I_0$ et on suppose le régime permanent atteint : la bobine est donc équivalente à un fil, et le condensateur à un interrupteur ouvert. On en déduit donc

$$i(0^-) = I_0 \quad \text{et} \quad u(0^-) = 0$$

Par continuité de i traversant la bobine et de u aux bornes du condensateur, on a

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = I_0} \quad \text{et} \quad u(0^-) = u(0^+) = 0$$

Or, $u(0^+) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ d'après la RCT de la bobine. La seconde condition initiale est donc

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0}$$

5. En déduire l'expression de $i(t)$.

Réponse :
L'équation étant homogène, la solution générale s'écrit

$$i(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Avec la première CI, on a

$$i(0) = I_0 = A$$

et avec la seconde on a

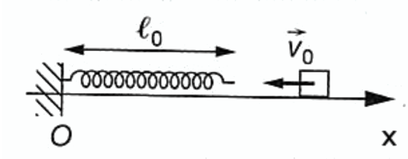
$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_0 B = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0$$

Finalement, on trouve sans surprise

$$\boxed{i(t) = I_0\cos(\omega_0 t)}$$

II Masse percutant un ressort

Un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) fixé en O est initialement au repos. Une masse m glisse sans frottement à vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$ et s'accroche *définitivement* au ressort à l'instant $t = 0$.



1. Déterminer l'équation du mouvement de la masse une fois qu'elle est accrochée (pour $t \geq 0$).

Réponse :
Une fois la masse accrochée, on retrouve la situation du cours. On fait le bilan des forces :

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \vec{P} = -mg\vec{u_y} \\ \textbf{Support} & \vec{R} = R\vec{u_y} \\ \textbf{Ressort} & \vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u_x} \end{array}$$

On effectue le changement de variable $x = \ell - \ell_0$, et avec le PFD on a donc

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$
$$\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

Sur l'axe $\vec{u_x}$ on trouve bien

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2x = 0}$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. La projection sur $\vec{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids.

2. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

Réponse :
À $t = 0$, la masse est accrochée au ressort de longueur ℓ_0 et elle arrive avec $\vec{v}(0) = -v_0\vec{u_x}$. On a donc

$$\boxed{x(0) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -v_0}$$

La forme générale de la solution est

$$\boxed{x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)}$$

Avec conditions initiales,

$$x(0) = A\underbrace{\cos(0)}_{=1} + B\underbrace{\sin(0)}_{=0} \Leftrightarrow A = 0$$
$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\underbrace{\sin(0)}_{=0} + B\omega_0\underbrace{\cos(0)}_{=1} \Leftrightarrow B = -\frac{v_0}{\omega_0}$$

On a donc

$$\boxed{x(t) = -\frac{v_0}{\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

3. À quelle condition la masse vient-elle percuter la paroi en O ?

Réponse :
En supposant que le ressort puisse se comprimer à l'infini, la masse vient percuter la paroi située en O si l'amplitude de x est égale à $-\ell_0$, c'est-à-dire

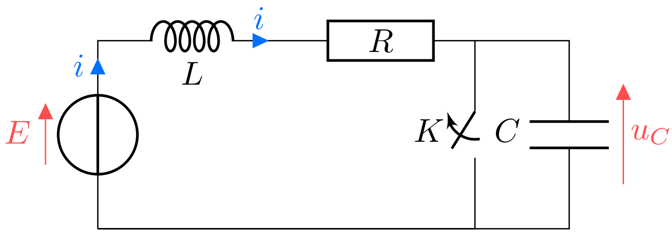
$$\boxed{\frac{v_0}{\omega_0} = \ell_0} \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \omega_0 \ell_0}$$

On remarque donc que plus v_0 est grande, plus cela est facile, mais également que plus ω_0 est faible est plus cela est facile. En effet, plus la pulsation est élevée et moins la masse a d'amplitude à v_0 fixée. Ceci correspond bien à l'intuition qu'on pourrait en avoir énergétiquement : une énergie mécanique totale se répartit dans l'énergie potentielle élastique d'une part, c'est-à-dire la distance d'élongation du ressort, et dans l'énergie cinétique d'autre part, donc dans sa vitesse.

III RLC échelon montant

Indiquer la ou les bonnes réponses en justifiant tout votre raisonnement.

On considère un circuit RLC série, alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice E constante comme schématisé ci-contre. Le condensateur peut être court-circuité lorsque l'interrupteur K est fermé. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la bobine et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur C.



Le condensateur est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue, pour que le régime permanent soit établi. À l'instant pris comme origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

1. Que valent l'intensité $i\left(0^+\right)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$, succédant immédiatement à l'ouverture de l'interrupteur K ? Justifier tout votre raisonnement.

A $i\left(0^+\right) = 0$ B $i\left(0^+\right) = \dfrac{E}{R}$ C $u_C\left(0^+\right) = 0$ D $u_C\left(0^+\right) = E$

Réponse :
Intéressons-nous d'abord au circuit à $t < 0$. L'interrupteur est alors fermé si bien que u_C est une tension aux bornes d'un fil donc

$$u_C\left(t = 0^-\right) = 0$$

De plus, le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, donc

$$u_C\left(t = 0^+\right) = u_C\left(t = 0^-\right) = 0$$

Par ailleurs en régime permanent constant, on sait que la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (un fil). Si bien que le circuit est alors équivalent à uniquement la résistance R en série avec la source idéale de fem E. Ainsi d'après la loi de Pouillet,

$$i\left(t=0^{-}\right)=E/R$$

De plus, la bobine assure la continuité de l'intensité qui la traverse, donc

$$i\left(t=0^{+}\right)=i\left(t=0^{-}\right)=\frac{E}{R}$$

Réponses B et C.

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t>0$. On la mettra sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{\mathrm{d}^2u_C(t)}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2u_C(t)=\alpha$$

Exprimer ω_0 et Q.

A $\omega_0=\dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ B $\omega_0=\dfrac{1}{LC}$ C $Q=R\sqrt{\dfrac{L}{C}}$ D $Q=\dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

Réponse :
On se place après l'ouverture de l'interrupteur ($t>0$). On a alors un circuit RLC série pour lequel on cherche à établir l'équation différentielle du second ordre sur la variable $u_C\left(t\right)$. Appliquons la loi des mailles en notant u_R et u_L les tensions respectivement aux bornes du résistor et de la bobine.

$$E=u_R(t)+u_L(t)+u_C(t)$$

Appliquons les relations courant-tension en convention récepteur pour le résistor

$$u_R\left(t\right)=Ri(t)$$

et la bobine $$u_L\left(t\right)=L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

Il vient : $$E=Ri+L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}+u_C$$

Appliquons la relation courant-tension pour le condensateur :

$$i\left(t\right)=C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

On obtient donc : $$E=RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}+LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2}+u_C$$

Enfin, divisons cette expression par LC pour mettre l'expression sous forme canonique.

$$\frac{d^2u_C}{dt^2}+\frac{R}{L}\frac{du_C}{dt}+\frac{u_C}{LC}=\frac{E}{LC}$$

Par identification, on a alors : $${\omega_0}^2=\frac{1}{LC}$$

Ainsi $$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

Soit $$Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Réponses A et D.

3. Exprimer α.

   A $\alpha = 0$ B $\alpha = E$ C $\alpha = QE$ D $\alpha = {\omega_0}^2\, E$

Réponse :
En poursuivant l'identification on constate encore que :

$$\alpha = \frac{E}{LC} = {\omega_0}^2 E$$

Réponse D.

4. Que peut-on affirmer concernant le facteur de qualité ?

   A La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 2$.
   B La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 1/2$.
   C Plus la valeur de l'inductance est élevée, plus le facteur de qualité est faible.
   D Plus la valeur de la capacité est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

Réponse :

La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque le système a une évolution pseudo-périodique avec un très faible dépassement, soit pour un $Q > 1/2$ (précisément, c'est pour $Q = 0{,}72$). Aucune des deux premières réponses A ou B n'est juste. Notez en revanche que pour $Q = 1/2$, on a le transitoire le plus bref sans dépassement. Par ailleurs, le facteur de qualité s'écrivant

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

une inductance élevée induira un facteur de qualité grand tandis qu'une capacité élevée conduira à un facteur de qualité petit.

Réponse D.

Dans la suite, on considère que la bobine possède une inductance L=50 mH et que la capacité du condensateur vaut $C = 20\,\mu\text{F}$. On souhaite obtenir un facteur de qualité $Q = 10$.

5. Calculer la valeur à donner à la résistance R du résistor.

   A $R = 0{,}002\,\Omega$ B $R = 0{,}02\,\Omega$ C $R = 5\,\Omega$ D $R = 500\,\Omega$

Réponse :
On cherche la valeur de R pour obtenir $Q = 10$ à L et C fixé. On isole alors R dans l'expression de Q :

$$R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{10}\sqrt{\frac{50 \times 10^{-3}}{20 \times 10^{-6}}} = 5\,\omega$$

Réponse C.

On admet alors que la tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] + u_{C,p}$$

6. Exprimer τ en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

A $\tau = \dfrac{\omega_0}{2Q}$ B $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$ C $\tau = \dfrac{\omega_0}{Q}$ D $\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}$

Réponse :
Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle canonique s'écrit :

$$s^2 + \frac{\omega_0}{Q}s + {\omega_0}^2 = 0$$

De discriminant $\Delta = \left(\dfrac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = {\omega_0}^2\left(\dfrac{1}{Q^2} - 4\right) < 0 \quad \text{car} \quad Q = 10 > \dfrac{1}{2}$

Les racines s'écrivent donc, avec $j^2 = -1$,

$$r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Que l'on peut identifier avec la forme des racines proposée par l'énoncé pour être en cohérence avec l'expression de $u_C(t)$:

$$r_\pm = -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$$

Ainsi, par identification, $$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

Réponse B.

7. Exprimer la pseudo-pulsation Ω en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

A $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ B $\Omega = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$ C $\Omega = \omega_0\left(1 + \dfrac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$ D $\Omega = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$

Réponse :
De même, par identification, $$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Réponse A.

8. Exprimer $u_{C,p}$ en fonction de E. Justifier tout votre raisonnement.

   A $u_{C,p} = E$ B $u_{C,p} = 0$ C $u_{C,p} = {\omega_0}^2 E$ D $u_{C,p} = 2E$

   Réponse :
   $u_{C,p}$ est la solution particulière de l'équation différentielle. On peut la chercher sous la forme d'une constante. Soit, en l'injectant dans l'équation différentielle :
   $$\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,p}}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_{C,p}}{\mathrm{d}t} + \frac{u_{C,p}}{LC} = \frac{E}{LC}$$
   D'où : $$0 + 0 + \frac{u_{C,p}}{LC} = \frac{E}{LC} \quad \text{d'où} \quad u_{C,p} = E$$

   Réponse A.

9. Exprimer A. Justifier tout votre raisonnement.

   A $A = E$ B $A = -E$ C $A = 0$ D $A = E/2$

   Réponse :
   Exprimons les constantes d'intégration A et B à l'aide des conditions initiales déterminées à la question 1 :
   $$u_C\left(t = 0^+\right) = 0 = \exp(-0/\tau)\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] + E$$
   Ainsi : $$A = -E$$

   Réponse B.

10. Exprimer B. Justifier tout votre raisonnement.

    A $B = \dfrac{E}{\Omega}\left(\dfrac{1}{RC} - \dfrac{1}{\tau}\right)$ B $B = \dfrac{E}{RC\omega_a}$ C $B = 0$ D $B = \dfrac{E}{\tau\omega_a}$

    Réponse :
    D'après Q1, on a aussi $i\left(t = 0^+\right) = E/R$. Or, la loi courant tension aux bornes du condensateur permet d'écrire que :
    $$\dot{u}_C\left(t = 0^+\right) = \frac{i\left(t = 0^+\right)}{C} = \frac{E}{RC}$$
    Dérivons $u_C(t)$. Il vient
    $$\dot{u}_C(t) = -\frac{1}{\tau} exp\left(-t/\tau\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \Omega \times \exp\left(-t/\tau\right)\left[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right]$$
    Soit, en $t = 0$, $$\dot{u}_C\left(t = 0^+\right) = -\frac{A}{\tau} + \Omega B = \frac{E}{RC}$$
    Ainsi $$\Omega B = \frac{E}{RC} + \frac{A}{\tau}$$
    D'où, avec $A = -E$, $$B = \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)$$

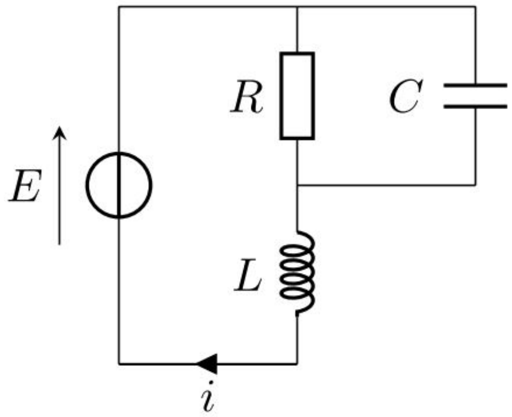
Réponse A.

De plus
$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2}{R}\sqrt{\frac{L}{R}} \times \sqrt{LC} = \frac{2L}{R}$$

Donc τ ne s'exprime pas en fonction de R et C uniquement. Ainsi, la réponse B est fausse. De même, RC ne peut pas s'exprimer simplement en fonction de τ donc la réponse D est fausse.

IV Oscillateur amorti RLC

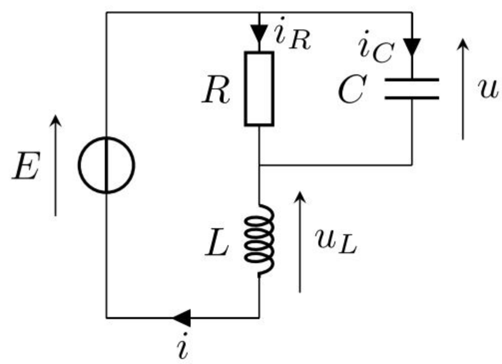
Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

Réponse :
On est en présence d'un circuit à deux mailles. Il faut donc appliquer la loi des nœuds afin d'écrire

$$i = i_R + i_C$$



Utilisons ensuite les lois de comportement pour faire apparaître la tension u commune à R et C :

$$i = \frac{u}{R} + C\dot{u}$$

Exprimons ensuite u en fonction de u_L (c'est une bonne idée car u_L pourra s'exprimer aisément en fonction de i !). Par loi des mailles :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\dot{u}_L$$

Or $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$$

2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

Réponse :
On cherche à l'écrire sous la forme canonique classique

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = {\omega_0}^2 i_\infty$$

L'identification à la forme précédente permet alors d'obtenir :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad i\infty = \frac{E}{R}$$

Avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, Q le facteur de qualité et $i\infty$ la valeur prise par i pour $t \to \infty$.

3. Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

Réponse :
Contrairement au RLC série, Q est proportionnel à R (et non inversement proportionnel). C'est normal car ici, l'énergie est plus rapidement dissipée si R est faible. Au contraire, si R est élevée ($R \to \infty$), la branche contenant R devient un interrupteur ouvert et le circuit devient équivalent à un oscillateur harmonique type LC série. Q tend alors logiquement vers l'infini.

4. Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

Réponse :
Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

En effet, $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent.

En $t = 0^+$, la continuité de i au travers de la bobine impose :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

Afin de trouver la condition sur $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, il faut déterminer la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)$$

Or, u étant la tension au borne d'un condensateur, elle est nécessairement continue et égale à sa valeur en 0^- donc

$$\boxed{u_L(0^+) = E \quad \text{Ainsi} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(t=0^+) = \frac{E}{L}}$$

5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Réponse :
Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC} i_p = \frac{E}{RLC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{R}$$

Remarque : La solution i_p déterminée sous forme d'une constante est toujours égale à $i\infty$ identifiée dans la forme canonique.

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique,

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0$$

De discriminant, avec $Q = 2$ $\quad \Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{4} - 4 \right) = -\frac{15}{4} {\omega_0}^2 < 0$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm j \frac{\omega_0}{4} \sqrt{15} \quad \text{noté} \quad r_{1,2} = -\mu \pm j\omega_p$$

où μ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_h(t) = \mathrm{e}^{-\mu t} \left(A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t) \right)$$

Avec A et B deux constantes d'intégration réelles. En sommant solution homogène et particulière, on obtient la solution générale :

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\mu t} \left(A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t) \right) + \frac{E}{R}$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B en $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{E}{R} + A = 0 \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{E}{R}$$

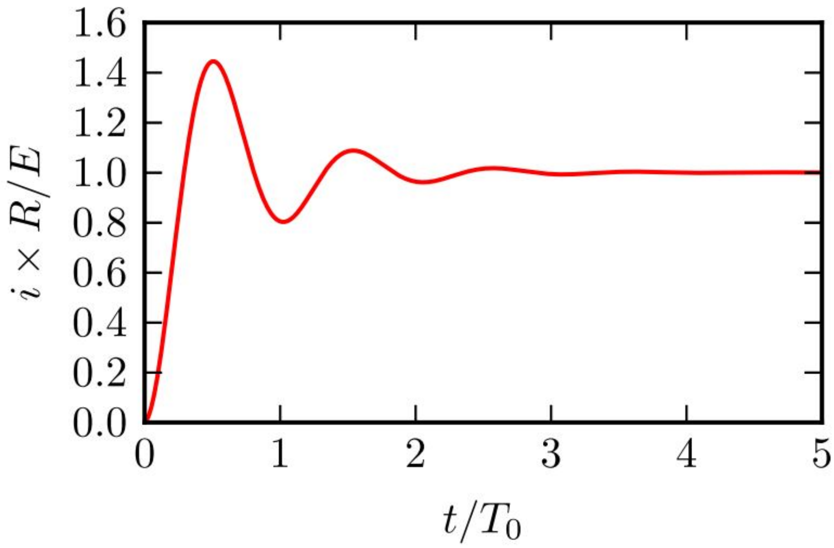
Calculons l'expression de la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_p \left[-A \sin(\omega_p t) + B \cos(\omega_p t) \right] \mathrm{e}^{-\mu t} - \mu \left[A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t) \right] \mathrm{e}^{-\mu t}$$

Ainsi $\qquad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = B\omega_p - \mu A = \frac{E}{L} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{E}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right)$

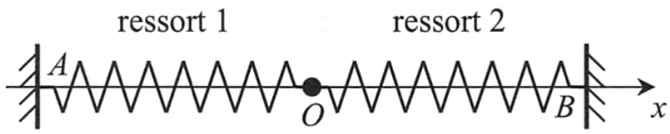
Finalement $\qquad i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R} \mathrm{e}^{-\mu t} \left[\cos(\omega_p t) - \frac{R}{\omega_p} \left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R} \right) \sin(\omega_p t) \right]$

Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure ci(-dessous).



V Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressort linéaires à deux points fixes A et B. On le repère par sa position $= x$.



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq} et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre (lié au sol), considérée comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$

1. Dans un premier temps, on néglige tout frottement.
   (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
   (b) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 propres en fonction de k et m.
   (c) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

Réponse :

(a) Cette fois-ci, on a deux ressorts : le premier tire dans le sens $-\overrightarrow{u_x}$ et le second dans le sens $+\overrightarrow{u_x}$; ainsi le bilan des forces s'exprime :

Poids	$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_y}$
Support	$\overrightarrow{R} = R\overrightarrow{u_y}$
Ressort 1	$\overrightarrow{F_1} = -k(\ell_1 - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = -k(\ell_{\text{eq}} + x - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$
Ressort 2	$\overrightarrow{F_2} = +k(\ell_2 - \ell_0)\overrightarrow{u_x} = +k(\ell_{\text{eq}} - x - \ell_0)\overrightarrow{u_x}$

On a en effet ℓ_1 la longueur du ressort 1 qui s'exprime $\ell_1 = \overline{AM}$. Or, d'après l'énoncé $\ell_{\text{eq}} = AO = OB$: en décomposant, on a donc $\overline{AM} = \overline{AO} + \overline{OM} = \ell_{\text{eq}} + x$. Le ressort 2 a comme longueur $\ell_2 = \overline{MB} = \overline{MO} + \overline{OB}$ soit $\ell_2 = \ell_{\text{eq}} - x$.

Ainsi, le PFD donne

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_2}$$
$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix} \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(\cancel{\ell_{\text{eq}}} + x - \cancel{\ell_0}) + k(\cancel{\ell_{\text{eq}}} - x - \cancel{\ell_0}) \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + 2kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids.

(b) Sous forme canonique, cette équation se réécrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2x = 0}$$

C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}}$ et donc de période $\boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}}$. Doubler la constante de raideur divise par $\sqrt{2}$ la période : le ressort oscille plus vite qu'avec un seul ressort.

(c) L'expression générale de $x(t)$ est donc $x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$. Or, en $t = 0$, on a $x(0) = x_0 = A$, et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = \omega_0 B$; ainsi

$$\boxed{x(t) = x_0\cos(\omega_0 t)}$$

2. En fait il existe entre le mobile et la tige un frottement de type visqueux linéaire, la force de frottement s'exprime $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$ (avec $\alpha > 0$ et $\overrightarrow{v}$ la vitesse de la masse m dans le référentiel terrestre).

(a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $h = \dfrac{\alpha}{m}$.

(b) Montrer que lorsque $\alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement comporte des oscillations amorties. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales et exprimer la pseudo-période T en fonction de ω_0 et h.

Réponse :

(a) On ajoute $\overrightarrow{F}_{\text{frott}} = -\alpha v \overrightarrow{u_x}$ au PFD, ce qui donne

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0}$$

(b) On sait qu'on a des oscillations amorties quand le discriminant Δ de l'équation caractéristique est négatif : $\Delta < 0$. Or ici, l'équation caractéristique est

$$r^2 + hr + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = h^2 - 4{\omega_0}^2$$

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{m}\right)^{\cancel{2}} < \underset{2}{\cancel{4}}{\omega_0}^{\cancel{2}} \Leftrightarrow \alpha < 2m\sqrt{\frac{2k}{m}}$$
$$\Leftrightarrow \alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$$

Dans ce régime, on aura donc les racines

$$r_\pm = -\frac{h}{2} \pm \mathrm{i}\sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\frac{h}{2} \pm \mathrm{i}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}}}$$

La solution générale est alors

$$\boxed{x(t) = \mathrm{e}^{-ht/2}\left[D\cos(\omega t) + E\sin(\omega t)\right]}$$

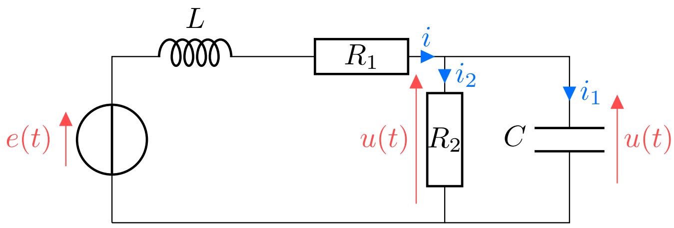
On a les mêmes conditions initiales, soit $x(0) = x_0 = D$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0 = -\frac{h}{2}x_0 + \omega E$, d'où $E = \frac{h}{2\omega}x_0$. Ainsi,

$$\boxed{x(t) = x_0\mathrm{e}^{-ht/2}\left[\cos(\omega t) + \frac{h}{2\omega}\sin(\omega t)\right]}$$

On a donc une pseudo-période $\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \frac{h^2}{4}}}}$

VI Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\left\{\begin{array}{lcl} e(t<0) & = & 0 \\ e(t \geq 0) & = & E \end{array}\right.$ dans le circuit ci-dessous.



1. Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Réponse :
R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2. De plus, à $t \longrightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension $e(t)$, et on a donc

$$\boxed{u(\infty) = u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2}E}$$

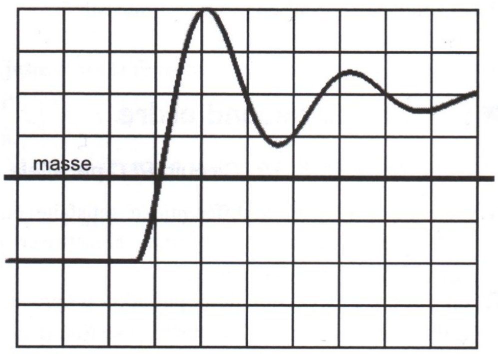
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

   Réponse :
   Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :
$$u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i = E$$
   Avec la loi des nœuds :
$$i = i_1 + i_2 = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}$$
   En combinant :
$$\begin{aligned}
& u + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}\right) + R_1C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1\frac{u}{R_2} = E \\
\Leftrightarrow\ & u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{R_2}u = E \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \underset{\frac{R_2}{R_2}}{\cancel{1}}\right)u = E \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \frac{E}{LC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u_\infty}{LC} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u = {\omega_0}^2u_\infty}
\end{aligned}$$
$$\text{avec}\quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}\left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)}} \quad \text{et} \quad \boxed{\lambda = \frac{1}{2}\left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)}$$

3. On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.

   (a) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période T.

   (b) Déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique
$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty}\right)}$$



1 div = 200 µs

   Réponse :

   (a) On a un régime pseudo-périodique, où on lit que $\boxed{T = 600\,\mu\text{s}}$.

   (b) On ne peut calculer δ qu'avec une pseudo-période ici. On lit au premier pic à t_1 la valeur de la tension **par rapport à la masse** : $u(t_1) = 4\,\text{V}$. Au second pic à $t_2 = t_1 + T$ on a : $u(t_1 + T) = 2{,}5\,\text{V}$. De plus, $u_\infty = 2\,\text{V}$. Ainsi,
$$\boxed{\delta = \ln\left(\frac{4-2}{2.5-2}\right) = \ln(4) = 1{,}39}$$

4. Exprimer $u(t)$ en fonction de u_∞, ω_0, λ et t (sans chercher à déterminer les constantes d'intégration).

Réponse :
Pour la solution de l'équation homogène, on cherche les racines du polynôme caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - {\omega_0}^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_\pm = -\frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\lambda \pm \mathrm{i}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

La solution particulière étant visiblement u_∞, on aura la forme générale

$$\boxed{u(t) = \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + u_\infty}$$

5. Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

Réponse :
Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t+nT) - u_\infty = \mathrm{e}^{-\lambda nT} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\underbrace{\cos(\omega t + n\omega t)}_{=\cos\omega t} + B\underbrace{\sin(\omega t + n\omega t)}_{=\sin\omega t}\right)}_{u(t)-u_\infty}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty} = \mathrm{e}^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda nT}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda = \frac{\delta}{T}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} \delta & = & 1{,}39 \\ T & = & 600\,\mu\mathrm{s} \end{array}\right.$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\lambda = 2{,}32 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1}}$$

6. Sachant que $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 5\,\mathrm{k}\Omega$ et $L = 500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

Réponse :
On sait que λ s'exprime en fonction de C, on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2 C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1 R_2}{L}}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} R_1 & = & 200\,\Omega \\ R_2 & = & 5\,\mathrm{k}\Omega \\ L & = & 500\,\mathrm{mH} \\ \lambda & = & 2{,}32 \times 10^3\,\mathrm{s}^{-1} \end{array}\right.$$

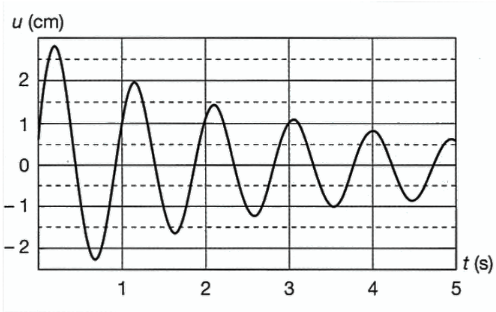
$$\text{A.N. : } \boxed{C = 76\,\mu\mathrm{F}}$$

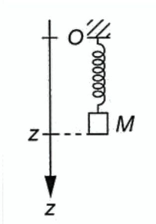
Important 4.1 : À retenir

En régime pseudo-périodique, l'amortissement du signal est dû à l'exponentielle de la solution générale. En calculant le logarithme du rapport de la solution à un instant t et de la solution à un instant $t + nT$ avec T la période on calcule donc le facteur de l'exponentielle décroissante, ce qui permet de trouver les caractéristiques du circuit.

VII Décrément logarithmique mécanique

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$, fixé au point O. En plus de son poids et de la force de rappel du ressort, la masse est soumise à une force de frottement fluide $\overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}$. Un capteur fournit l'évolution de $u(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$ au court du temps.





1. Établir l'équation d'évolution de $z(t)$. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} de la masse ? En déduire une équation satisfaite par $u(t)$.

Réponse :
On repère par z l'altitude du ressort. Étant donné le système, le mouvement ne s'effectue que selon $\overrightarrow{u_z}$, et on a $v = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}$ et $a = \frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2}$. De plus, la longueur ℓ du ressort s'identifie à l'altitude z de la masse. On effectue donc le **bilan des forces** en faisant attention au sens de $\overrightarrow{u_z}$:

Poids	$\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_z}$
Ressort	$\overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = -k(z-\ell_0)\overrightarrow{u_z}$
Frottement	$\overrightarrow{F} = -\alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$

Ainsi, le **PFD** donne

$$m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = mg - k(z-\ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{m\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} + kz = mg + k\ell_0}$$

À l'équilibre, $\frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} = 0$ et $\frac{\mathrm{d}^2z}{\mathrm{d}t^2} = 0$, on trouve donc

$$z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

À cause du poids qui n'est cette fois pas compensé par la réaction du support, la longueur d'équilibre est plus grande que la longueur à vide du ressort. On réexprime l'équation différentielle avec le changement de variable de l'énoncé pour avoir

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + ku = 0}$$

2. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.

Réponse :
On met l'équation sous forme canonique et on identifie :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

3. Résoudre l'équation différentielle. Exprimer la pseudo-période T en fonction de $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ et de Q.

Réponse :
On exprime l'équation caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$$

On observe des oscillations, donc $\Delta < 0$. Les racines sont donc

$$\boxed{r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{i}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \omega_O \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}$$

et les solutions sont de la forme

$$\boxed{z(t) = \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q} t} \left[A \cos \omega t + B \sin \omega t\right]}$$

Sans conditions initiales, on ne peut déterminer A et B. On peut cependant exprimer T :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

4. Montrer que le décrément logarithmique δ, défini par

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t) - u_{\mathrm{eq}}}{u(t + nT) - u_{\mathrm{eq}}}\right)}$$

est indépendant du temps.

Réponse :
Par construction, $u_{\mathrm{eq}} = 0$, et on a

$$u(t + nT) = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[A\underbrace{\cos(\omega(t + nT))}_{=\cos \omega t} + B\underbrace{\sin(\omega(t + nT))}_{=\sin \omega t}\right]}_{=u(t)} \Leftrightarrow u(t + nT) = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} u(t)$$

Ainsi,

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t)}{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}T}}\right) = \frac{1}{n} \ln \left(\mathrm{e}^{n\frac{\omega_0}{2Q}T}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{\omega_0}{2Q} T}$$

En développant T on trouve

$$\delta = \frac{1}{2Q} \frac{\overbrace{\omega_0 T_0}^{=2\pi}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

ce qui est bien indépendant du temps t.

5. Comparer les données expérimentales à l'affirmation précédente. Commenter.

Réponse :
Soit $t_{\max}$ le temps du premier maximum. On relève les ordonnées des maximums successifs de $u(t)$, c'est-à-dire $u(t_{\max} + nT)$, et on calcule le logarithme népérien de deux longueurs successives :

n	$u(t_{\max}+nT)$	δ
0	2,9	0,37
1	2,0	0,29
2	1,5	0,31
3	1,1	0,31
4	0,8	0,29
5	0,6	

Mise à part la première valeur, les résultats sont assez peu dispersés. Cela valide bien le modèle d'oscillateur amorti pour cette expérience ; l'écart de la première valeur est sûrement lié à des non-linéarités du ressort aux longueurs importantes.

6. Estimer à l'aide des données expérimentales le facteur de qualité Q et la pseudo-pulsation ω.

Réponse :
On peut donc estimer qu'on a $\delta = 0{,}30 \pm 0{,}01$. On isole Q de son expression :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}} \Leftrightarrow \sqrt{4Q^2-1}^2 = \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2 \Leftrightarrow 4Q^2 = 1 + \left(\frac{2\pi}{\delta}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2}+\frac{1}{4}}}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{Q \approx 10{,}5}$$

On trouve bien $Q \gg 0.5$ comme le montre l'oscillogramme. Quant à ω, on peut estimer T en comptant plusieurs périodes : on a $t_{\max} = 0{,}2\,\mathrm{s}$ et $t_{\max} + 5T = 4{,}9\,\mathrm{s}$, donc on a $5T = 4{,}2\,\mathrm{s}$, c'est-à-dire $\boxed{T \approx 0{,}95\,\mathrm{s}}$. Enfin, $\omega = 2\pi/T$, donc

$$\boxed{\omega = 6{,}6\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}$$

7. En déduire les valeurs de m et α.

Réponse :
Comme $Q \gg 0.5$, on a $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. On a donc

$$\boxed{m \approx \frac{k}{\omega^2}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{rcl} k &=& 10\,\mathrm{N\,m^{-1}} \\ \omega &=& 6{,}6\,\mathrm{rad\,s^{-1}} \end{array}\right.$$

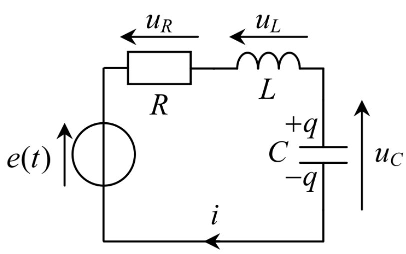
$$\text{A.N. : } \boxed{m \approx 230\,\mathrm{g}}$$

Finalement, on a

$$\boxed{\alpha = \frac{\sqrt{km}}{Q}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{rcl} k &=& 10\,\mathrm{N\,m^{-1}} \\ m &=& 230\,\mathrm{g} \\ Q &=& 10{,}5 \end{array}\right.$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\alpha \approx 0{,}15\,\mathrm{kg\,s^{-1}}}$$

VIII Étude énergétique d'un oscillateur amorti électrique



Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que : $\begin{cases} e(t<0) &= 0 \\ e(t \geq 0) &= E \end{cases}$. On pose $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

1. Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls.

   Réponse :
   À $t = 0^-$, le circuit est depuis longtemps sous la tension $e = 0$; il a donc atteint son régime permanent, et le condensateur s'est déchargé et est équivalent à un interrupteur ouvert : forcément,
   $$\boxed{i(0^-) = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{q(0^-) = Cu(0^-) = 0}$$

2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$ est :
   $$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 q = \frac{E}{L}$$
   Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.

   Réponse :
   Avec une loi des mailles, les RCT de la résistance, de la bobine et du condensateur et la relation $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, on a
   $$u_L + u_R + u_C = E \Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + \frac{q}{C} = E$$
   $$\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + R\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = E \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + \frac{q}{C} = \frac{E}{L}$$
   Concernant les conditions initiales, la tension aux bornes d'un condensateur est continue donc sa charge aussi, c'est-à-dire
   $$\boxed{q(0^-) = q(0^+) = 0}$$
   et comme le courant traversant une bobine est également continu, on a
   $$i(0^-) = i(0^+) = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = 0}$$

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

3. Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme
   $$q(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\mathrm{e}^{-\gamma t} + D$$
   avec A, B et D des constantes à exprimer en fonction de C, E, ω_0 et γ.

   Réponse :

L'équation caractéristique de discriminant Δ de l'équation homogène est

$$r^2 + 2\gamma r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\gamma^2 - {\omega_0}^2)$$

Comme $\omega_0 > \gamma$, on a $\Delta < 0$ et on est donc dans un régime pseudo-périodique. On aura donc

$$r_\pm = -\frac{\cancel{2}\gamma}{\cancel{2}} \pm \mathrm{i}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2 - \gamma^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm = -\gamma \pm \mathrm{i}\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}$$

La solution particulière est $\frac{E}{L{\omega_0}^2} = CE$, donc on aura la forme générale

$$\boxed{q(t) = \mathrm{e}^{-\gamma t}\left(A\cos\omega t + B\sin\omega t\right) + CE}$$

Avec la première CI,

$$q(0) = A + CE = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = -CE}$$

et avec la seconde,

$$\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -\gamma A + B\omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = -CE\frac{\gamma}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}}$$

soit finalement

$$\boxed{q(t) = CE - CE\mathrm{e}^{-\gamma t}\left(\cos\omega t + \frac{\gamma}{\sqrt{{\omega_0}^2 - \gamma^2}}\sin\omega t\right)}$$

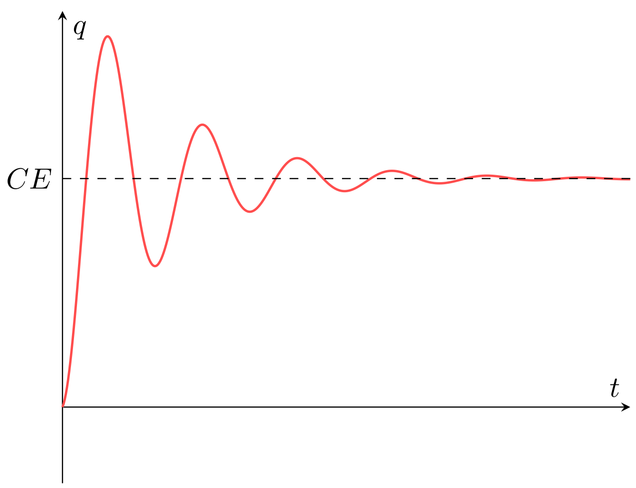
4. Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.

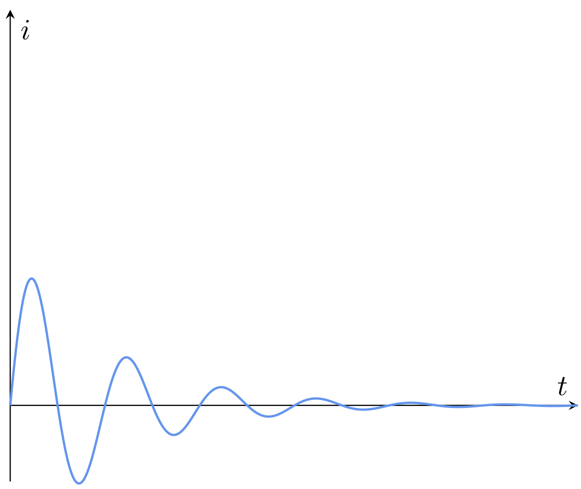
Réponse :
On dérive q :

$$\boxed{i(t) = CE\frac{{\omega_0}^2}{\omega}\mathrm{e}^{-\gamma t}\sin\omega t}$$

5. Donner l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.

Réponse :
La charge finale atteinte est CE et le courant final est nul. Ces valeurs se retrouvent facilement en remarquant qu'en régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil ; le courant est alors nul, et ainsi les tensions aux bornes de L et R le sont également : la tension E du circuit est entièrement dans u_C, et sa charge est donc CE.





6. Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_G$ fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet JOULE dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \longrightarrow 0$.

Réponse :
Un bilan de puissance sur le circuit, (i.e. **loi des mailles**$\times i$) donne

$$\mathcal{P}_L + \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J = \mathcal{P}_G \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{LC} + \mathcal{E}_J = \mathcal{E}_G}$$

On trouve donc naturellement que l'énergie du générateur se répartit entre la bobine, l'inductance et la résistance. On va donc déterminer $\mathcal{E}_G$ et $\mathcal{E}_{LC}$ pour trouver $\mathcal{E}_J$ par différence.

L'énergie fournie par le générateur s'obtient en intégrant la puissance fournie Ei par le générateur entre $t = 0$ et $t \to \infty$. En se rappelant que $i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$, cette intégrale se ramène à une simple intégration sur q de valeur initiale 0 et de valeur finale CE :

$$\mathcal{E}_G = \int_0^\infty Ei\mathrm{d}t = \int_0^{CE} E\mathrm{d}q = E\,[q]_{q=CE}^{q=0} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

L'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée par l'inductance et la capacité se calcule par différence des énergies stockées dans ces dipôles entre l'instant final et l'instant initial. Or, les deux dipôles sont initialement déchargés, et comme $i = 0$ à la fin l'énergie de la bobine est nulle. Ainsi,

$$\mathcal{E}_{LC} = \left[\frac{1}{2}Li(t)^2 + \frac{1}{2}\frac{q(t)^2}{C}\right]_{t=0}^{t=\infty} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{LC} = \frac{1}{2}CE^2}$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_J = \mathcal{E}_G - \mathcal{E}_{LC} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2}$$

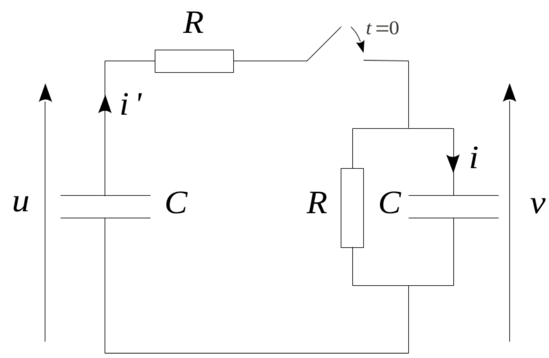
Ces calculs sont indépendants du régime dans lequel se trouve le circuit. L'énergie fournie par le générateur est deux fois plus grande que celle stockée par la bobine et le condensateur, **indépendamment de la valeur de la résistance du circuit**.

Extrapolé à $R \longrightarrow 0$, ce résultat semble contredire le principe de conservation de l'énergie, puisque la seconde moitié d'énergie ne peut plus être dissipée par effet JOULE. En fait, pour $R \longrightarrow 0$, le circuit oscille de façon sinusoïdale : on n'atteint jamais de régime permanent continu, et la bobine et le condensateur stockent et restituent alternativement de l'énergie.

IX Circuit de WIEN

On réalise le montage suivant. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, C traversé par i' étant initialement chargé et C traversé par i étant initialement déchargé.

On pose $\tau = RC$. Données : $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}$.



1. À partir de considérations physiques, préciser les valeurs de la tension v lorsque $t = 0$ et $t = \infty$.

   Réponse :
   Le condensateur de tension v est indiqué être initialement déchargé, on a donc $v(0^-) = 0$. Comme un condensateur est de tension continue, on a donc $\boxed{v(0^+) = 0}$. De plus, à $t \longrightarrow \infty$, les deux condensateurs seront forcément déchargés à cause des résistances dissipant l'énergie, il ne peut y avoir conservation : il seront donc équivalent à des interrupteurs ouverts, et on aura donc notamment $\boxed{v(\infty) = 0}$.

2. Établir l'équation différentielle du second ordre dont la tension v est solution.

   Réponse :
   Avec une loi des mailles, on a

$$u = v + Ri'$$

   Or, la RCT du condensateur de gauche **en convention générateur** est

$$i' = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Rightarrow i' = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}$$

   On a donc une équation avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. On cherche donc à exprimer i' en fonction de v, ce que l'on fait avec la loi des nœuds et les RCT du condensateur de droite $i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et de la résistance $R(i' - i) = v$:

$$i' = i + \frac{v}{R} \Leftrightarrow i' = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} \tag{4.1}$$

   En combinant les deux, on a

$$C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R}\right) \Leftrightarrow C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} - C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{(RC)^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau^2} = 0}$$

3. En déduire l'expression de $v(t)$ sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.

   Réponse :
   On écrit l'équation caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$$

$$\Longrightarrow r_\pm = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau} < 0$$

   On a donc un régime apériodique, dont les solutions générales sont

$$\boxed{v(t) = A\mathrm{e}^{r_+t} + B\mathrm{e}^{r_-t}}$$

4. Donner l'allure du graphe correspondant à $v(t)$.

Réponse :
Le condensateur est initialement chargé. Soit E sa tension initiale. On utilise l'équation 4.1 pour trouver que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{i'(0)}{C}$, sachant qu'à $t = 0$ le circuit est équivalent à un circuit RC en décharge et qu'on a donc $i'(0) = E/R$. On trouve ainsi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{\tau}}$$

En finissant la détermination des constantes d'intégration, on trouve

$$\boxed{v(t) = \frac{E}{\tau(r_+ - r_-)}\left[\mathrm{e}^{r_+ t} - \mathrm{e}^{r_- t}\right]}$$