Sujet 1 – corrigé

I Question de cours

Définir la quantité de matière, la masse molaire et son lien avec la quantité de matière, les fractions molaire et massique, les concentrations molaire et massique et le lien entre les deux.

II Circuit RLC série

On considère le circuit RLC série représenté sur la figure ci-dessous. On définit la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité par Q par :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad ; \qquad Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}.$$

L'interrupteur K est fermé à un instant $t = 0$ choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0) = u_0$.

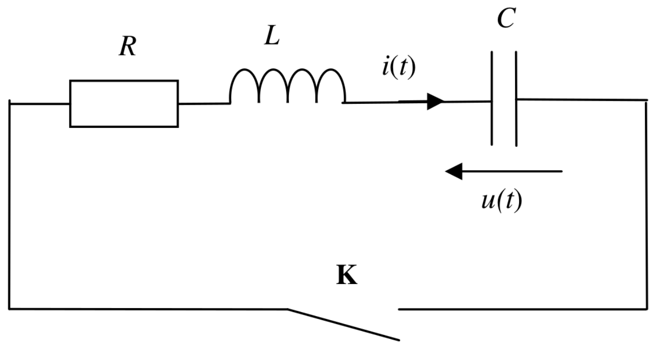


Figure 1.1 – Schéma électrique du circuit RLC série.

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t > 0$. On y fera apparaître ω_0 et Q.

   Réponse :
   On appelle u_R et u_L les tensions aux bornes de la résistance et de la bobines tout 2 en conventions récepteurs. D'après la loi des mailles :

   $$u_R + u_L + u = 0.$$

   On applique alors la loi d'Ohm, celle des bobine et celle des condensateurs :

   $$Ri(t) + L\frac{di}{dt} + u = 0 \quad \Rightarrow \quad RC\frac{du}{dt} + LC\frac{d^2u}{dt^2} + u = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du}{dt} + \frac{1}{LC}u = 0.$$

   En utilisant les notation du sujet :

   $$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0}.$$

2. Préciser en justifiant les différents régimes d'évolution possibles selon les valeurs de Q.

   Réponse :
   Les différents régimes dépendent des solutions de l'équation caractéristique :

   $$\lambda^2 + \frac{\omega_0}{Q}\lambda + \omega_0^2 = 0,$$

dont le discriminant est :

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2\left(\frac{1}{4Q^2} - 1\right).$$

Il y a donc 3 cas possibles :

$\star\Delta > 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q < \frac{1}{2}$: régime apériodique.

Les solutions de l'équation caractéristiques λ_1 et λ_2 sont réelles et négatives (on peut le montrer avec les relations coefficients-racine du polynôme caractéristique). Les solutions sont alors de la forme :

$$u(t) = Ae^{\lambda_1 t} + Be^{\lambda_2 t}.$$

$\star\Delta = 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q = \frac{1}{2}$: régime apériodique critique.

Il n'existe qu'une solution double à l'équation caractéristiques λ_3 qui est réelle et négative. Les solutions sont alors de la forme :

$$u(t) = (A + Bt)e^{\lambda_3 t}.$$

$\star\Delta < 0 \quad \Leftrightarrow \quad Q > \frac{1}{2}$: régime pseudo-périodique.

Il existe 2 solutions complexes conjuguées à l'équation caractéristiques $a + jb$ et $a - jb$ dont la partie réelle est négative. Les solutions sont alors de la forme :

$$u(t) = e^{at}\left(A\cos(bt) + B\sin(bt)\right).$$

On suppose dans la suite que $Q > \frac{1}{2}$.

3. Que valent $u(t = 0)$ et $\frac{du}{dt}(t = 0)$?

Réponse :
La tension est continue aux borne d'un condensateur, donc :

$$\boxed{u(0) = u(0^+) = u(0^-) = u_0}.$$

L'intensité est continue à travers une bobine donc :

$$i(0) = i(0^+) = i(0^-) = 0.$$

D'après la loi des condensateur :

$$i = c\frac{du}{dt} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\left.\frac{du}{dt}\right|_{t=0} = 0}.$$

4. Établir l'expression de $u(t)$ pour $t > 0$.

Réponse :
Dans le cas du régime pseudo périodique, les solutions de l'équation caractéristiques sont :

$$\frac{-\omega_0}{2Q} + j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}} \qquad \text{et} \qquad \frac{-\omega_0}{2Q} - j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}.$$

Les solutions de l'équation différentielle sont donc de la forme :

$$u(t) = \exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right)\left(A\cos(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t) + B\sin(\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}t)\right)$$

On utilise les conditions initiales pour trouver :

$$u(0) = U_0 \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{A = U_0}.$$

Et $\frac{du}{dt}(0) = 0$:

$$\left(\frac{-\omega_0}{2Q}\right)(U_0\cos(0) + B\sin(0)) + \left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right)(-U_0\sin(0) + B\cos(0)) = 0.$$

On trouve alors :

$$\left(\frac{-\omega_0}{2Q}\right)U_0 + \left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}\right)B = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = \frac{U_0}{\sqrt{4Q^2-1}}}.$$

Finalement :

$$\boxed{u(t) = U_0\exp\left(\frac{-\omega_0 t}{2Q}\right) \times \left(\cos\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin\left(\omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}t\right)\right)}.$$

5. Définir la pseudo-pulsation ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q.

Réponse :
La pseudo pulsation est alors :

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}.$$

6. Établir le temps caractéristique d'amortissement des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q.

Réponse :
Le temps caractéristique des oscillations est :

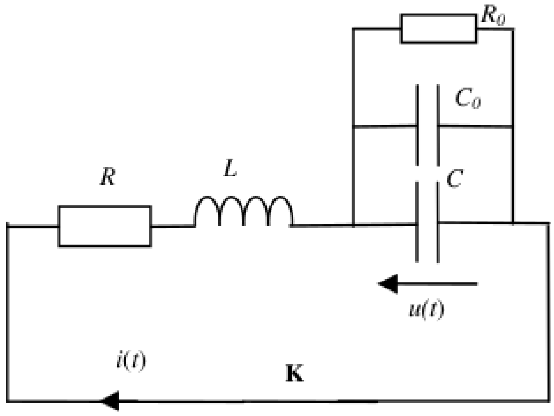
$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}.$$

On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $R_0 = 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$ et d'une capacité $C_0 = 11\,\mathrm{pF}$.

7. Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :

$$L(C+C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u(t) = 0.$$

Réponse :
Si l'on rajoute un oscilloscope, le circuit électrique devient :



On applique la loi des nœuds (ainsi que celle des condensateurs et celle d'Ohm) :

$$i(t) = C\frac{du}{dt} + C_0\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0}.$$

On applique ensuite la loi des mailles (ainsi que celle des bobines et celle d'Ohm) :

$$Ri + L\frac{di}{dt} + u(t) = 0.$$

En mettant ces 2 équations ensemble :

$$R\left(C\frac{du}{dt} + C_0\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0}\right) + L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du}{dt} + C_0\frac{du}{dt} + \frac{u}{R_0}\right) + u(t) = 0.$$

En réorganisant les termes, on trouve l'équation désirée :

$$\boxed{L(C+C_0)\frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u(t) = 0}.$$

8. Quelles relations qualitatives doivent vérifier R, L, C, R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ?

Réponse :
L'oscilloscope aura une influence négligeable si cette équation différentielle est la même que celle sans oscilloscope, c'est-à-dire si :

$$\boxed{C \gg C_0} \quad ; \quad \boxed{RC \gg \frac{L}{R_0}} \quad ; \quad \boxed{R_0 \gg R}.$$

9. Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R, L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

Réponse :
Les valeurs typiques en TP sont :

$$C \approx 100\,\text{nF} \quad ; \quad R \approx 100\,\Omega \quad ; \quad L \approx 1\,\text{mH}.$$

On vérifie alors bien les 3 inégalités :

$$\boxed{C = 100\,\text{nF} \gg C_0 = 11\,\text{pF}} \quad ; \quad \boxed{RC = 10^{-5}\,\text{s} \gg \frac{L}{R_0} = 10^{-9}\,\text{s}} \quad ; \quad \boxed{R_0 = 1\,\text{M}\Omega \gg R = 100\,\Omega}.$$

On définit le décrément logarithmique d_m comme étant la quantité

$$d_m = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+mT)}\right),$$

où et m est un entier strictement positif.

10. Exprimer d_m en fonction de m et de Q.

Réponse :
On utilise la propriété de 2π périodicité du cosinus et du sinus :

$$u(t+mT) = \exp\left(\frac{-\omega_0 mT}{2Q}\right)u(t),$$

et alors :

$$d_m = \ln\left(\frac{\exp\left(\frac{-\omega_0(t)}{2Q}\right)}{\exp\left(\frac{-\omega_0(t+mT)}{2Q}\right)}\right) = \frac{\omega_0 mT}{2Q}.$$

En remplaçant $T = \frac{2\pi}{\omega}$ par sa valeur, on trouve :

$$\boxed{d_m = \frac{m\pi}{Q\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} = \frac{2m\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}}.$$

On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur de basses fréquences (GBF).

11. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ?

Réponse :
Il faut choisir un signal créneau dont la période $T_{\text{GBF}} = 1/f_{\text{GBF}}$ est grande devant le temps d'amortissement du circuit τ, c'est-à-dire :

$$T_{\text{GFR}} \gg \tau \quad \Rightarrow \quad T_{\text{GBF}} \gg \frac{2Q}{\omega_0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{f_{\text{GBF}} \ll \frac{\omega_0}{2Q}}.$$

La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure ce-dessous.

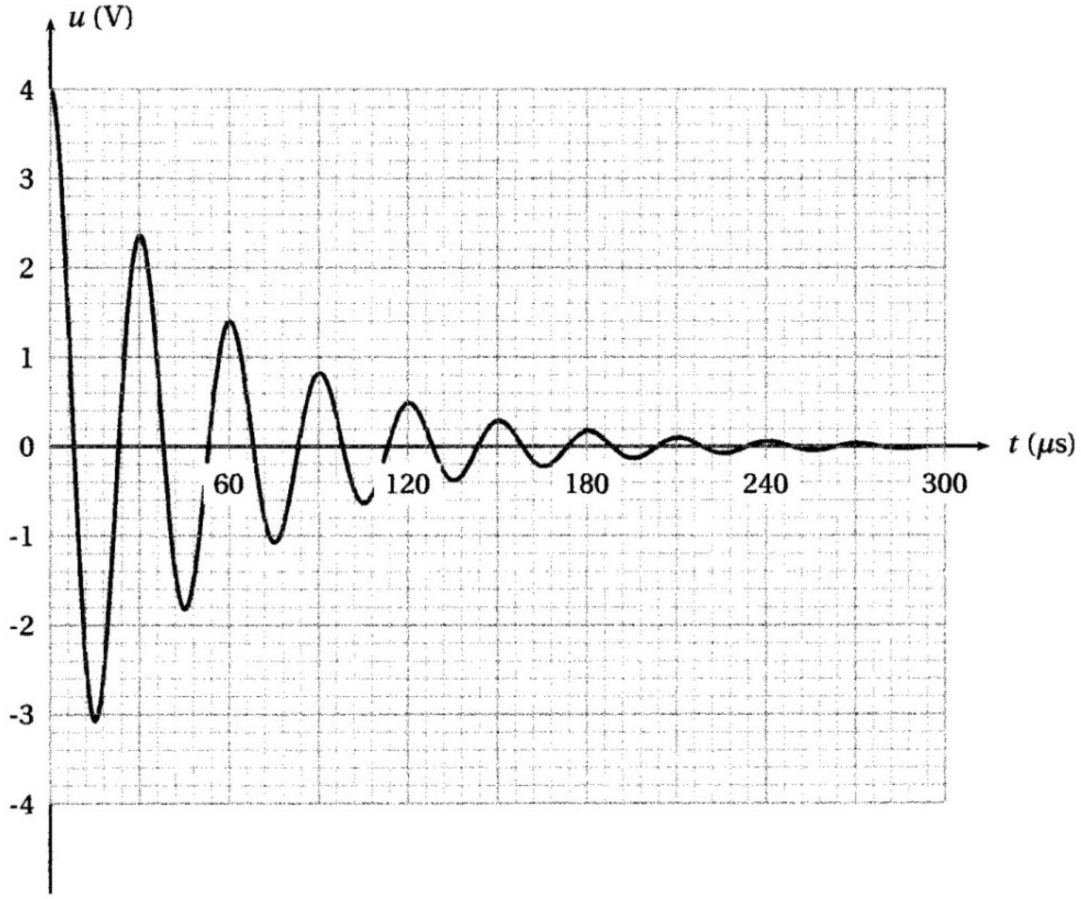


Figure 1.2 – Oscillations libres du circuit RLC.

12. Estimer le facteur de qualité Q du circuit.

Réponse :
Pour évaluer Q, on peut utiliser le décrément logarithmique :

$$d_4 = \ln\left(\frac{u(t)}{u(t+4T)}\right) = \ln\left(\frac{4}{0{,}5}\right) = \ln(8).$$

Or, d'après les questions précédentes :

$$4Q^2 - 1 = \frac{4m^2\pi^2}{d_m^2} \quad \Rightarrow \quad Q = \sqrt{\frac{m^2\pi^2}{d_m^2} + \frac{1}{4}}$$

Ici :

$$Q = \sqrt{\frac{16\pi^2}{\ln(16)} + \frac{1}{4}} = \boxed{7{,}56}.$$

On retrouve bien la propriété selon laquelle Q donne un ordre de grandeur du nombre d'oscillations que l'on peut observer.

Sujet 2 – corrigé

I Question de cours

Refaire l'exercice sur les fractions molaire et massique de dioxygène et diazote, l'exemple sur la concentration molaire de Na^+ :

Exercice

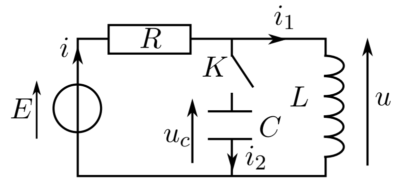
L'air est constitué, en quantité de matière, à 80% de diazote N_2 et à 20% de dioxygène O_2. On a $M(N_2) = 28{,}0\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ et $M(O_2) = 32{,}0\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$. En déduire les fractions molaires puis les fractions massiques.

Exercice

On dissout une masse $m = 2{,}00\,\mathrm{g}$ de sel $NaCl_{(s)}$ dans $V = 100\,\mathrm{mL}$ d'eau. **Déterminer la concentration en Na^+ dans la solution**. ($M(NaCl) = 58{,}44\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$)

II Régime transitoire

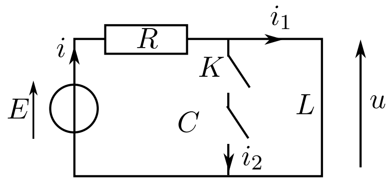
On considère le circuit ci-contre constitué d'une source idéale de tension continue de force électromotrice E, d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L, d'une résistance R et d'un interrupteur K. On suppose que l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps quand on le ferme à l'instant $t = 0$. On suppose que le condensateur est initialement chargé à la tension $u_c = E$.



1. Faire le circuit équivalent à l'instant $t = 0^-$. Exprimer $i_1(0^-)$ en fonction de E et R.

Réponse :
En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. On a alors $i_2(0^-) = 0$, donc $i(0^-) = i_1(0^-)$.

On applique la loi d'Ohm : $\boxed{i_1(0^-) = E/R}$



2. Exprimer $i_1(0^+)$ et $u(0^+)$ en fonction de E et R.

Réponse :
Le courant circulant à travers une bobine est continu, donc $\boxed{i_1(0^+) = i_1(0^-) = E/R}$.
La tension aux bornes du condensateur est continue. Or la tension $u(0^+)$ correspond à la tension aux bornes du condensateur.

D'après les conditions initiales, le condensateur est initialement chargé à la tension E, donc $\boxed{u(0^+) = u_c(0^-) = E}$

3. Faire le circuit équivalent quand le régime permanent est atteint pour $t \to +\infty$. En déduire les expressions de $i(+\infty)$ et $i_1(+\infty)$.

Réponse :
Le circuit équivalent est le même qu'à la première question, donc $i(+\infty) = i_1(+\infty) = E/R$

4. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$ pour $t \geq 0$ peut se mettre sous la forme :
$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_1(t)}{dt} + \omega_0^2 i_1(t) = \omega_0^2 A$$
Exprimer ω_0, Q et A en fonction de E, R, L et C.

Réponse :
D'après les relations courant/tension des dipôles :
$$i_2 = C\frac{du}{dt} \quad ; \quad u = L\frac{di_1}{dt} \quad ; \quad E - u = Ri$$
D'après la loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$
$$\frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt} = i_1 + LC\frac{d^2 i_1}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2 i_1}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{LC}i_1 = \frac{1}{LC}\cdot\frac{E}{R}$$
$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad A = \frac{E}{R}}$$

5. On suppose que le régime transitoire est de type pseudo-périodique. Donner alors l'inégalité vérifiée par R. On fera intervenir une résistance critique R_c que l'on exprimera en fonction de L et C.

Réponse :
La nature du régime transitoire est donnée par le signe du discriminent de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle précédente :
$$r^2 + \frac{1}{RC}r + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} < 0$$
Il faut que $\Delta < 0$ pour avoir un régime transitoire pseudo-périodique. On en déduit l'inégalité vérifiée par R : $\boxed{R > R_c \quad R_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

6. Exprimer la pseudo-pulsation ω en fonction de ω_0 et Q.

Réponse :
Par définition $\Delta = -4\omega^2$.
$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

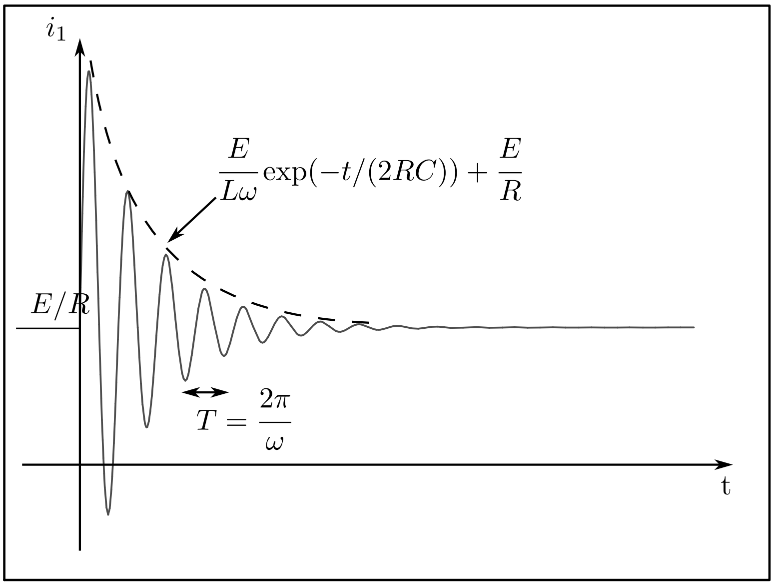
7. Donner l'expression de $i_1(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction de E, R, L, C, ω et t.

Réponse :
En régime pseudo-periodique, la solution de l'équation différentielle est de la forme $i_1(t) = e^{-t/(2RC)}\left(B\cos(\omega t) + D\sin(\omega t)\right) + \frac{E}{R}$, avec E/R la solution particulière.

On utilise les conditions initiales pour déterminer les constantes B et D :
$$i_1(0) = \frac{E}{R} = B + \frac{E}{R} \quad \Leftrightarrow \quad B = 0$$
$$\frac{di_1}{dt}(0) = \frac{u(0)}{L} = \frac{E}{L} = D\omega \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{E}{L\omega}$$
$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{L\omega}e^{-t/(2RC)}\sin(\omega t) + \frac{E}{R}}$$

8. Tracer l'évolution de i_1 en fonction du temps.

Réponse :



9. Exprimer la variation d'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_L$ par la bobine entre l'instant initial $t = 0$ et le régime permanent correspondant à $t \to +\infty$. Commenter ce résultat.

Réponse :
$\Delta\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_L(+\infty) - \mathcal{E}_L(0) = \frac{1}{2}L(i_1^2(+\infty) - i_1^2(0)) = 0$
Au cours du temps, la bobine passe d'un caractère récepteur à un caractère générateur. L'énergie totale emmagasinée est alors nulle.

10. Exprimer la variation d'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_C$ par le condensateur entre l'instant initial $t = 0$ et le régime permanent correspondant à $t \to +\infty$. Commenter ce résultat.

Réponse :

$$\Delta\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_C(+\infty) - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2}C(u^2(+\infty) - u^2(0)) = -\frac{1}{2}CE^2$$

Au global, le condensateur fournit de l'énergie. Il restitue son énergie initiale au cours du temps.

11. Exprimer la puissance reçue $\mathcal{P}_R$ par la résistance R en régime permanent.

Réponse :
$\mathcal{P}_R = Ri^2(+\infty) = \frac{E^2}{R}$

Sujet 3 – corrigé

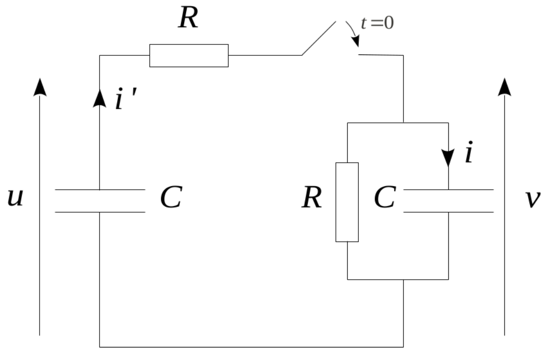
I Question de cours

Réaction totale et avancement maximal : refaire l'exemple du cours sur la combustion du méthane $CH_{4(g)} + 2\,O_{2(g)} \rightarrow CO_{2(g)} + 2\,H_2O_{(g)}$ avec $n^0_{CH_4} = 2\,\text{mol}$ et $n^0_{O_2} = 3\,\text{mol}$.

II Circuit de Wien

On réalise le montage suivant. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, C traversé par i' étant initialement chargé et C traversé par i étant initialement déchargé.

On pose $\tau = RC$. Données : $R = 10\,\text{k}\Omega$ et $C = 0{,}1\,\mu\text{F}$.



1. À partir de considérations physiques, préciser les valeurs de la tension v lorsque $t = 0$ et $t = \infty$.

   Réponse :
   Le condensateur de tension v est indiqué être initialement déchargé, on a donc $v(0^-) = 0$. Comme un condensateur est de tension continue, on a donc $\boxed{v(0^+) = 0}$. De plus, à $t \longrightarrow \infty$, les deux condensateurs seront forcément déchargés à cause des résistances dissipant l'énergie, il ne peut y avoir conservation : il seront donc équivalent à des interrupteurs ouverts, et on aura donc notamment $\boxed{v(\infty) = 0}$.

2. Établir l'équation différentielle du second ordre dont la tension v est solution.

   Réponse :
   Avec une loi des mailles, on a
   $$u = v + Ri'$$
   Or, la RCT du condensateur de gauche **en convention générateur** est
   $$i' = -C\frac{\text{d}u}{\text{d}t} \Rightarrow i' = -C\frac{\text{d}v}{\text{d}t} - RC\frac{\text{d}i'}{\text{d}t}$$
   On a donc une équation avec $\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t}$. On cherche donc à exprimer i' en fonction de v, ce que l'on fait avec la loi des nœuds et les RCT du condensateur de droite $i = C\dfrac{\text{d}v}{\text{d}t}$ et de la résistance $R(i' - i) = v$:
   $$i' = i + \frac{v}{R} \Leftrightarrow i' = C\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{v}{R} \tag{3.1}$$
   En combinant les deux, on a
   $$C\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\text{d}v}{\text{d}t} - RC\frac{\text{d}}{\text{d}t}\left(C\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{v}{R}\right) \Leftrightarrow C\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\text{d}v}{\text{d}t} - RC^2\frac{\text{d}^2v}{\text{d}t^2} - C\frac{\text{d}v}{\text{d}t}$$
   $$\Leftrightarrow \frac{\text{d}^2v}{\text{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{v}{(RC)^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\text{d}^2v}{\text{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\text{d}v}{\text{d}t} + \frac{v}{\tau^2} = 0}$$

3. En déduire l'expression de $v(t)$ en déterminant les constantes d'intégration.

Réponse :
On écrit l'équation caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$$
$$\Longrightarrow r_\pm = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau} < 0$$

On a donc un régime apériodique, dont les solutions générales sont

$$\boxed{v(t) = A\mathrm{e}^{r_+t} + B\mathrm{e}^{r_-t}}$$

En finissant la détermination des constantes d'intégration, on trouve

$$\boxed{v(t) = \frac{E}{\tau(r_+ - r_-)}\left[\mathrm{e}^{r_+t} - \mathrm{e}^{r_-t}\right]}$$

4. Donner l'allure du graphe correspondant à $v(t)$.

Réponse :

Le condensateur est initialement chargé. Soit E sa tension initiale. On utilise l'équation 3.1 pour trouver que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{i'(0)}{C}$, sachant qu'à $t = 0$ le circuit est équivalent à un circuit RC en décharge et qu'on a donc $i'(0) = E/R$. On trouve ainsi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}(0) = \frac{E}{\tau}}$$