Devoir maison 2

Charge optimale d'un condensateur – corrigé

I Usage des supercondensateurs pour le stockage de l'énergie

Le condensateur est une brique de base des circuits électroniques de commande ou de puissance. Après avoir rappelé le principe de fonctionnement de ce composant (partie I), nous nous focaliserons sur les condensateurs utilisés comme dispositifs de stockage de l'énergie, à l'instar des batteries (partie II). Se pose alors la question de leur recharge (partie III).

II Modèle électrocinétique

On considère un condensateur comme un composant électronique. On utilise la convention récepteur. On notera C la capacité du condensateur, u la tension à ses bornes et q la charge portée par l'une des armatures.

1. En partant de la relation $q(t) = Cu(t)$, démontrer la relation usuelle entre tension et intensité pour un condensateur en convention récepteur.

Réponse :

Sachant que $$i(t) = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \quad \text{et que} \quad q(t) = Cu(t)$$

il vient $$i(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(Cu(t))$$

Soit $$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$ car $C = c^{\text{ste}}$

2. En exploitant l'expression de la puissance reçue par un dipôle et la question précédente, démontrer l'expression $E_{\text{stockée}} = (1/2)\,Cu^2$ de l'énergie stockée par le condensateur.

Réponse :
Expression de la puissance reçue par un dipôle :

$$P(t) = u(t)\,i(t) = u(t)\,C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}E_{\text{stockée}}}{\mathrm{d}t}$$

De plus d'après la relation entre puissance et énergie, on a :

$$P(t) = \frac{\mathrm{d}E_{\text{stockée}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Cu^2\right)$$

Ainsi, il vient, par identification, $$\boxed{E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2}Cu^2}$$

III Exemple d'utilisation de condensateurs : les supercondensateurs

Un "supercondensateur" est un condensateur de technique particulière, qui permet d'obtenir une capacité élevée pour un encombrement réduit, et donc une densité de puissance et une densité d'énergie intermédiaires entre les batteries et les condensateurs électrolytiques classiques. Ils sont utilisés dans des domaines variés, dont la propulsion de bateaux, de bus ou de tramway. Leur faible résistance interne permet des courants élevés et donc des charges rapides et des puissances de sortie importantes.

Nous étudions ici un exemple d'application des supercondensateurs, et en particulier nous voyons ce qui contraint leur dimensionnement (quelle capacité, quelle résistance interne ?).

Supercondensateurs.

Tramway de la ligne T3, ici sur une section avec ligne aérienne de contact.

> En 2009, la RATP et Alstom ont expérimenté en service commercial un tramway Citadis équipé de supercondensateurs sur la ligne T3 du réseau francilien. La rame a été équipée de 48 modules de supercondensateurs (15 kg pièce) pour le stockage de l'énergie à bord. L'ensemble est équivalent à 48 supercondensateurs montés en dérivation sous une tension de 750 V. Ceci permet aux trams de circuler en autonomie sur les sections dépourvues de ligne aérienne de contact. En autonomie la rame peut franchir 400 m, soit la distance entre deux stations sur la ligne T3, avec une vitesse moyenne d'environ 15 km/h.
> Les moteurs développent une puissance moyenne continue de 500 kW, et sont alimentés sous 750 V. Présentant une résistance interne très faible, les supercondensateurs autorisent le passage d'intensités très importantes pendant les 20 secondes que dure un rechargement en station, et sont donc en cela plus adaptés que les batteries conventionnelles.

À l'aide des données du document ci-dessus et des approximations nécessaires, en déduire les valeurs :

3. De l'énergie $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ nécessaire au trajet entre deux stations.

Réponse :
D'après le document, entre deux stations, il y a une distance de $D = 400\,\mathrm{m}$ parcourue à la vitesse moyenne

$$v = 15\,\mathrm{km/h} = 15\,000\,\mathrm{m/h} = 4{,}2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Ainsi, le tram met, pour parcourir le segment, une durée :

$$\Delta t = D\,v = 96\,\mathrm{s}$$

D'autre part, les moteurs développent une puissance moyenne de 500 kW, soit

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{tot}} = P\,\Delta t = 4{,}8 \times 10^7\,\mathrm{J}}$$

4. De la capacité d'un des 48 supercondensateurs ; Commenter la valeur trouvée.

Réponse :
L'énergie totale est équitablement répartie entre les 48 condensateurs. Ainsi :

$$\mathcal{E}_{\text{1Condo}} = \frac{\mathcal{E}_{\text{tot}}}{48}$$

De plus, les condensateurs étant connectés en dérivation, chaque condensateur est soumis à une tension $U = 750\,\mathrm{V}$. Par conséquent,

$$\mathcal{E}_{\text{1Condo}} = \frac{1}{2}CU^2 = \frac{\mathcal{E}_{\text{tot}}}{48}$$

D'où, $$\boxed{C = \frac{2\mathcal{E}_{\text{tot}}}{48 \times U^2} = 3{,}6\,\text{F}}.$$

Cette valeur très supérieure aux valeurs usuelles, raison pour laquelle on parle ici de super-condensateurs.

5. De la résistance du circuit de charge. On supposera pour ce faire que le circuit charge simultanément l'ensemble des condensateus soit une capacité totale de $48C$.

Réponse :
Dans le document, on nous indique que la charge dure $\Delta t' = 20\,\text{s}$. Or, pour un circuit RC série classique, $\tau = RC$. De plus, on sait qu'il faut 5τ pour charger entièrement le condensateur. Ainsi $5RC = \Delta t'$. Soit,

$$\boxed{R = \frac{\Delta t'}{5 \times 48C} = 2{,}3 \times 10^{-2}\,\Omega}$$

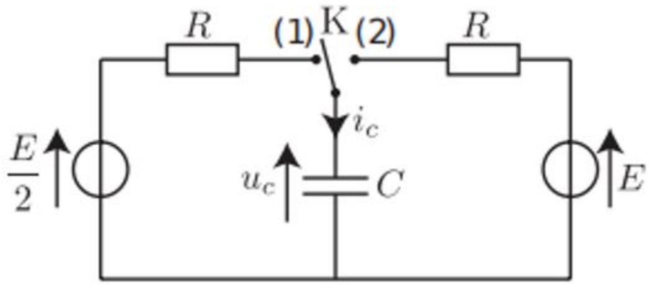
C'est une valeur très faible, permettant ainsi d'avoir un temps de charge raisonnable.

IV Stratégie de charge d'un condensateur

Lorsqu'un condensateur est utilisé comme une batterie, la question de sa recharge se pose. L'énergie est prélevée sur le réseau électrique, et on souhaiterait que 100% de cette énergie soit transférée au condensateur. Nous allons montrer que ceci dépend de la stratégie de charge retenue.
On appelle "rendement de la charge du condensateur" le rapport entre l'énergie stockée par le condensateur à l'issue de la charge et l'énergie fournie par le générateur au cours de cette charge :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}}$$

Dans les sous-parties III.1 et III.2, on raisonne sur le circuit ci-dessous pour envisager deux méthodes de recharge, qui vont mener à deux valeurs de rendement différentes.



A Premier procédé de charge

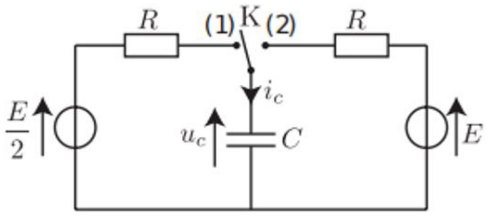
L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Le condensateur étant initialement déchargé, on bascule l'interrupteur K dans la position (2) à $t = 0$.

6. Établir l'équation différentielle portant sur $u_C(t)$. On la mettra sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

avec τ un paramètre dont on précisera l'expression en fonction de R et C.

Réponse :
Initialement le circuit est ouvert et le condensateur déchargé.



L'interrupteur est alors mis en position (2). On a alors un circuit $(E; R; C)$ série et la loi des mailles s'écrit :

$$E - Ri_C - u_C = 0$$

En convention récepteur, on a de plus

$$i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Soit
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

Finalement,
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC}$$

7. Déterminer, sans utiliser l'équation différentielle, la valeur de $u_C(0^+)$ (juste après le basculement de l'interrupteur). Justifier.

Réponse :
A $t = 0^-$, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. Alors

$$u_C(0^-) = \frac{q(0^-)}{C} = 0$$

La tension aux bornes d'un condensateur étant nécessairement continue, on a

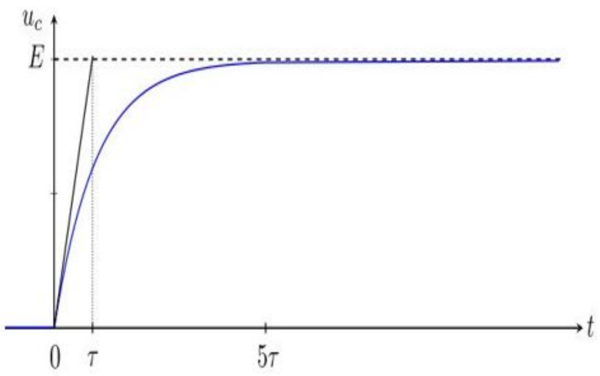
$$\boxed{u_C(0^+) = u_C(0^-) = 0}$$

8. Résoudre l'équation différentielle obtenue ci-dessus, puis tracer l'allure de la solution $u_C(t)$.

Réponse :
.Résolution de l'équation différentielle :

(a) Solution homogène : $u_{\mathrm{hC}}(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ avec $\tau = RC$;
(b) Solution particulière : $u_{\mathrm{CP}} = c^{\mathrm{ste}} = E$;
(c) Solution générale : $u_C(t) = u_{\mathrm{hC}}(t) + u_{\mathrm{CP}} = A$
(d) CI : A $t = 0^+$, $u_C(0^+) = 0$ (cf Q7)
(e) D'où : $A\mathrm{e}^0 + E = 0$; Ainsi $A = -E$.

Finalement,
$$\boxed{u_C(t) = E(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC}$$



9. Donner en fonction de C et de E, l'expression de l'énergie stockée par le condensateur entre l'instant initial et la fin de sa charge.

Réponse :

A la fin de la charge, $$E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2}C{u_C}^2(\infty) - \frac{1}{2}C{u_C}^2(0)$$

Soit $$E_{\text{stockée}} = \frac{1}{2}CE^2$$

car $u_C\left(0^+\right) = 0$ et $u_C\left(\infty\right) = E$.

10. Démontrer que le courant $i_C(t)$ s'écrit, pour tout $t \geq 0$:

$$i_C(t) = \frac{E}{R}\,\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Réponse :

On sait que $$i_C\left(t\right) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Or $$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -E\left(-\frac{1}{\tau}\right)\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

D'où $$i_C\left(t\right) = \frac{CE}{RC}\mathrm{e}^{-t/\tau}$$

Ou encore $$\boxed{i_C(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

11. Exprimer alors l'énergie électrique $\mathcal{E}_{\text{fournie}}$ fournie par le générateur au cours de la charge complète en fonction de C et de E.

Réponse :

La puissance fournie par le générateur est, en convention générateur,

$$P_{\text{fournie}} = E\,i_C\left(t\right)$$

Alors $$\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \int_{t=0}^{t_\infty} P_{\text{fournie}}\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t_\infty} Ei_C\left(t/\right)\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t_\infty} E\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\int_{t=0}^{t_\infty}\mathrm{e}^{-t\tau}\mathrm{d}t$$

Soit : $$\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \frac{E^2}{R}\frac{\left[\mathrm{e}^{-t/\tau}\right]_{t=0}^{t_\infty}}{-1/\tau} = -\frac{E^2}{R}RC(0-1)$$

Enfin : $$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = CE^2}$$

12. Quelle est la valeur du rendement de la charge (défini par l'expression proposée par l'énoncé) avec la méthode envisagée ? Peut-il être optimisé en changeant la résistance R ?

Réponse :

On nous donne $$\eta = \frac{E_{\text{stockée}}}{E_{\text{fournie}}}$$

Soit $$\eta = \frac{(1/2)CE^2}{CE^2} = \frac{1}{2}$$

Le résultat est indépendant de R, il n'est donc pas possible d'optimiser le rendement en modifiant la valeur de R. Il convient donc de trouver une autre solution, objet de la partie suivante.

B Second procédé de charge

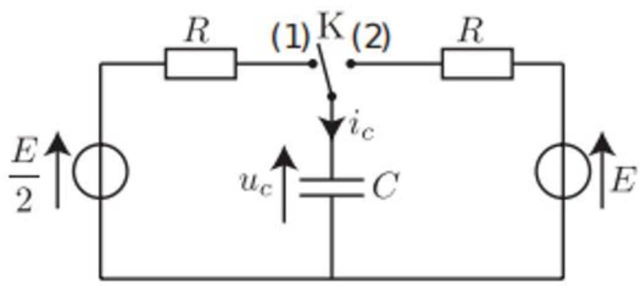
On souhaite utiliser une méthode qui permet d'améliorer le rendement de la charge. On réalise une charge en deux temps. Le condensateur est initialement déchargé. L'interrupteur K est d'abord dans la position intermédiaire où il n'établit aucun contact. Puis il est fermé en position (1) à $t = 0$. Lorsque le régime transitoire qui s'ensuit est achevé, l'interrupteur est basculé en position (2).

13. Par analogie avec la partie III.1, déterminer l'expression de $u_C(t)$ pendant la première phase de la charge.

Réponse :

Pendant la première phase de la charge (interrupteur en position (2)), il suffit de faire une analogie avec le III.1, en remplaçant E par $E/2$. Les conditions initiales étant exactement les mêmes, on obtient alors :

$$\boxed{u_C\,(t) = \frac{E}{2}(1 - \mathrm{e}^{-\,t/\tau}) \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC}$$



14. Déterminer en fonction de R et de C, l'expression de l'instant t_1 pour lequel la tension u_C aux bornes du condensateur atteint la valeur finale au cours de cette première étape.

Réponse :

D'après le cours, la valeur finale est obtenue au bout de $t_1 = 5\tau = 5RC$ (on obtient alors environ 99% de la valeur finale).

Dans la suite, on considérera que la charge est totalement achevée à cet instant t_1 (donc $u_C(t_1) \approx E/2$), et qu'on passe en phase 2 (basculement de l'interrupteur en position (2)).

15. Exprimer la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur au cours de la deuxième phase de charge, qui commence à l'instant t_1. On donnera l'expression en fonction de E, t, t_1 et τ.

Réponse :

On peut reprendre l'équation différentielle de Q6, mais les conditions initiales ont changé. L'équation différentielle est toujours :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau} \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC$$

Et les solutions prennent toujours la forme :

$$u_C\left(t\right) = u_{\mathrm{hC}}\left(t\right) + u_{\mathrm{CP}} = B\mathrm{e}^{-t/\tau} + E$$

Nouvelles CI : A $t = t_1$, $$u_C\left({t_1}^-\right) = u_C\left({t_1}^+\right) = \frac{E}{2}$$

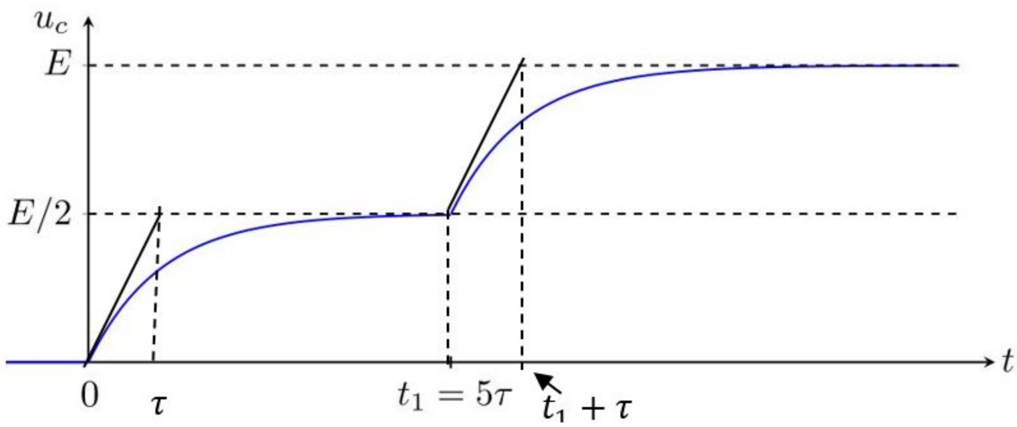
car le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes. Ainsi,

$$B\mathrm{e}^{-t_1/\tau} + E = \frac{E}{2} \quad \text{Ainsi} \quad B\mathrm{e}^{-t_1/\tau} = -\frac{E}{2} \quad \text{D'où} \quad B = -\frac{E}{2}\mathrm{e}^{t_1/\tau}$$

Conclusion : $$\boxed{u_C\left(t\right) = E - \frac{E}{2}\mathrm{e}^{\frac{t_1}{\tau}}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} = E - \frac{E}{2}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}}$$

16. Tracer l'allure de $u_C(t)$ en fonction du temps au cours de l'ensemble des deux phases de charge.

Réponse :
La constante de temps τ est identique pour les deux phases. L'asymptote à l'origine est donc identique pour les deux phases. On obtient alors le graphe ci-contre.



17. Exprimer l'intensité $i_C(t)$ qui traverse le condensateur pendant les deux phases de charge. On distinguera les cas en fonction de $t < t_1$, puis $t > t_1$.

Réponse :
Par analogie avec la question Q10, on a encore, pour les deux phases :

$$i_C\left(t\right) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Par conséquent, durant la première phase $t < t_1$, on a :

$$u_C\left(t\right) = \frac{E}{2}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC$$

Alors $$\boxed{i_C\left(t\right) = \frac{CE}{2RC}\mathrm{e}^{-t/\tau} = \frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{pour} \quad t < t_1}$$

.Et pour la seconde phase $t > t_1$, on a :

$$u_C(t) = E - \frac{E}{2}\mathrm{e}^{\frac{t_1}{\tau}}e^{-\frac{t}{\tau}} = E - \frac{E}{2}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}$$

Alors : $\boxed{i_C(t) = \frac{CE}{2RC}e^{t_1/\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} = i_C(t) = \frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau} \quad \text{pour} \quad t > t_1}$

18. Déterminer l'énergie électrique fournie par les deux générateurs pendant la charge. On utilisera l'approximation : $\mathrm{e}^{-5} \approx 0$.

Réponse :
Par analogie directe avec la question 11, Durant la première phase (on rappelle que $t_1 = 5\tau$),

$$\mathcal{E}_{\text{fournie},1} = \int_{t=0}^{t_1} P_{\text{fournie}}\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t_1} \frac{E}{2} i_C(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=0}^{t_1} \frac{E}{2}\frac{E}{2R}e^{-t/\tau}\mathrm{d}t = \frac{E^2}{4R}\int_{t=0}^{t_1} e^{-t/\tau}\mathrm{d}t$$

Soit$\mathcal{E}_{\text{fournie},1} = \frac{E^2}{4R}\frac{\left[e^{-t/\tau}\right]_{t=0}^{t_1}}{-1/\tau} = -\frac{E^2}{4R}RC\left(e^{-t_1/\tau} - 1\right) = -\frac{E^2}{4R}RC\left(e^{-5\tau/\tau} - 1\right) = -\frac{E^2}{4R}RC\,(0-1)$

Enfin $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},1} = \frac{CE^2}{4}}$

De même, durant la seconde phase :

$$\mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \int_{t=t_1}^{t_\infty} P_{\text{fournie}}\mathrm{d}t = \int_{t=t_1}^{t_\infty} E i_C(t)\,\mathrm{d}t = \int_{t=t_1}^{t_\infty} E\frac{E}{2R}\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\mathrm{d}t = \frac{E^2}{2R}\int_{t=t_1}^{t_\infty} \mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\mathrm{d}t$$

Soit : $\mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \frac{E^2}{2R}\frac{\left[\mathrm{e}^{-(t-t_1)/\tau}\right]_{t=t_1}^{t_\infty}}{-1/\tau} = \frac{E^2}{2R}(-\tau)(0-1) = \frac{E^2}{2R}(RC)$

Donc $\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \frac{CE^2}{2}}$

Finalement, l'énergie totale fournie par les deux générateurs s'écrit :

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \mathcal{E}_{\text{fournie},1} + \mathcal{E}_{\text{fournie},2} = \frac{CE^2}{4} + \frac{CE^2}{2} = \frac{3}{4}CE^2}$$

19. En déduire le rendement pour cette nouvelle façon de procéder. Conclure quant aux avantages et désavantages par rapport à la première méthode.

Réponse :
A la fin du cycle de charge, le condensateur est chargé à la même tension E. Par conséquent, l'énergie stockée par le condensateur est identique au cas précédent : $E_{\text{stockée}} = (1/2)CE^2$. On peut alors en déduire le nouveau rendement :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{(1/2)CE^2}{(3/4)CE^2} = \frac{1}{2} \times \frac{4}{3}$$

Ainsi : $\boxed{\eta = \frac{\mathcal{E}_{\text{stockée}}}{\mathcal{E}_{\text{fournie}}} = \frac{2}{3}}$

Le rendement du processus est maintenant de 66% contre 50% auparavant, soit un gain de 16%. En contrepartie, le cycle de charge complet est maintenant deux fois plus long (10τ au lieu de 5τ auparavant).

C Généralisation à une charge en N étapes

La partie III.2 montre que la charge fractionnée en deux étapes permet un meilleur rendement. Nous établissons ici l'expression du rendement pour un fractionnement en N étapes. Notons $t_0 = 0$, l'instant initial où le condensateur est déchargé. La première étape a lieu de t_0 à $t_1 = 5\tau$, par un générateur de tension E/N, à travers une résistance R.
De manière générale, l'étape numéro k de la charge ($k = 1$ à N) a lieu de t_{k-1} à t_k, par un générateur de tension $k\,E/N$, à travers une résistance R. On a $t_k = k \times 5\tau$. Au début de l'étape k, $u_C\left(t_{k-1}\right) = (k-1)E/N$, et à la fin de l'étape k, $u_C\left(t_k\right) = kE/N$. Lors de l'étape k de la charge, déterminer (notamment en fonction de k et de N) :

20. L'équation différentielle vérifiée par la tension $u_C(t)$ aux bornes du condensateur, puis l'expression de sa solution $u_C(t)$.

Réponse :
L'équation différentielle peut s'obtenir par analogie directe avec la question 6. L'unique différence étant que la tension du générateur vaut, à l'étape k, kE/N. Ainsi,

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{kE}{N\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

La solution de cette équation s'écrit, avec A la constante d'intégration :

$$u_C\left(t\right) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + \frac{kE}{N}$$

Par ailleurs, la tension initiale à l'étape k est la tension finale de l'étape $k-1$ (par continuité de la tension aux bornes d'un condensateur). Ainsi, à l'instant $t = t_{k-1}$,

$$u_C\left({t_{k-1}}^-\right) = u_C\left({t_{k-1}}^+\right) = \frac{(k-1)\,E}{N} = A\mathrm{e}^{-t_{k-1}/\tau} + \frac{kE}{N}$$

On peut alors en déduire la valeur de A. Il vient :

$$A\mathrm{e}^{-t_{k-1}/\tau} = \frac{kE}{N} - \frac{E}{N} - \frac{kE}{N} = -\frac{E}{N}$$

D'où :

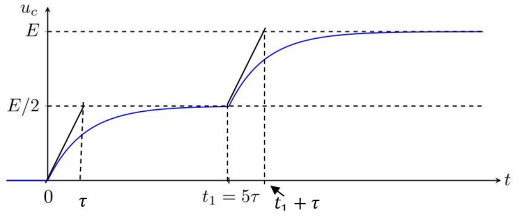
$$A = -\frac{E}{N}\mathrm{e}^{t_{k-1}/\tau}$$

Finalement,

$$\boxed{u_C\left(t\right) = -\frac{E}{N}\mathrm{e}^{-(t-t_{k-1})/\tau} + \frac{kE}{N} = \frac{E}{N}\left[k - e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{t_{k-1}/\tau}\right]}$$

Ou encore, comme on nous donne $t_k = k \times 5\tau$, il vient $t_{k-1} = (k-1)\,5\tau$ et $t_{k-1}/\tau = 5(k-1)$. Ainsi,

$$\boxed{u_C\left(t\right) = \frac{E}{N}\left[k - e^{-\frac{t}{\tau}}\mathrm{e}^{5(k-1)}\right]}$$



21. L'expression de l'intensité $i_C(t)$ traversant le condensateur.

Réponse :
Comme précédemment, on a encore :

$$\boxed{i_C(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{NR}\mathrm{e}^{-(t-t_{k-1})/\tau} = \frac{E}{NR}\mathrm{e}^{5(k-1)}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

22. L'expression de l'énergie fournie par le générateur (on utilisera $\mathrm{e}^{-5} \approx 0$).

Réponse :
L'énergie totale fournie lors de l'étape k s'obtient par intégration :

$$\mathcal{E}_{\text{fournie,k}} = \int_{t=t_{k-1}}^{t_k} P_{\text{fournie}}\mathrm{d}t = \int_{t=t_{k-1}}^{t_k} \frac{kE}{N} i_C(t)\,\mathrm{d}t$$

Soit $$\mathcal{E}_{\text{fournie,k}} = \int_{t=t_{k-1}}^{t_k} \frac{kE}{N}\frac{E}{NR}\mathrm{e}^{-(t-t_{k-1})/\tau}\mathrm{d}t = \frac{\mathrm{kE}^2}{N^2R}\int_{t=t_{k-1}}^{t_k} \mathrm{e}^{-(t-t_{k-1})/\tau}\mathrm{d}t$$

Ainsi, $$\mathcal{E}_{\text{fournie,k}} = \frac{\mathrm{kE}^2}{N^2R}\frac{\left[\mathrm{e}^{-(t-t_{k-1})/\tau}\right]_{t=t_{k-1}}^{t_k}}{-1/\tau} = -\frac{kE^2}{N^2R}RC\left(\mathrm{e}^{-5\tau/\tau} - 1\right) = -\frac{kE^2}{N^2R}RC(0-1)$$

Enfin $$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie,k}} = \frac{kCE^2}{N^2}}$$

23. En déduire enfin l'expression de l'énergie fournie par le générateur lors de l'ensemble de la charge.
Puis montrer enfin que le rendement de la charge en N étapes s'écrit

$$\eta = \frac{N}{N+1}$$

Réponse :
L'énergie totale fournie s'obtient donc par sommation sur les N charges successives.

$$\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \sum_{k=1}^{N}\mathcal{E}_{\text{fournie,k}} = \frac{CE^2}{N^2} \times \sum_{k=1}^{N} k = \frac{CE^2}{N^2} \times \frac{N(N+1)}{2}$$

Le calcul est réalisé en remarquant que c'est la somme des N premiers entiers. Ainsi

$$\boxed{\mathcal{E}_{\text{fournie}} = \frac{(N+1)\,CE^2}{2N}}$$

La charge finale du condensateur étant toujours identique, l'énergie stockée est là encore $E_{\text{stockée}} = CE^2/2$. On peut finalement en déduire le rendement :

$$\eta = \frac{\text{stockée}}{\text{fournie}} = \frac{CE^2/2}{((N+1)CE^2)/(2N)} = \frac{N}{N+1}$$

Le rendement de la charge tend donc vers l'unité lorsque N tend vers l'infini. Mais la durée totale de charge, qui vaut $5N\tau$ tend aussi vers l'infini. Il y a donc un compromis à trouver entre vitesse de charge et rendement.