

Correction du TD d'entraînement

★ I Étude d'un volant de badminton

1)

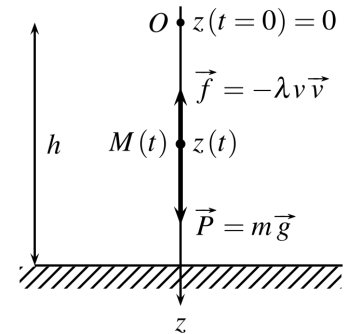
- ◇ **Système** : {volant} assimilé à un point matériel M de masse m
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
- ◇ **Repère** : (O, \vec{u}_z) avec O départ de chute, \vec{u}_z vertical *descendant* (voir schéma)
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{OM}(t) = z(t) \vec{u}_z$, $\vec{v}(t) = \dot{z}(t) \vec{u}_z$, $\vec{a}(t) = \ddot{z}(t) \vec{u}_z$
- ◇ **Origine et instant initial** : $\overrightarrow{OM}(0) = z(0) \vec{u}_z = \vec{0}$

◇ **BFD** :

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \vec{P} = m \vec{g} = mg \vec{u}_z \\ \text{Frottements} & \vec{F} = -\lambda v \vec{v} = -\lambda \dot{z}^2 \vec{u}_z \end{array}$$

◇ **PFD** :

$$m \vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{F} \Leftrightarrow m \ddot{z} = mg - \lambda \dot{z}^2 \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z}^2 = g$$



Ainsi,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v^2 = g$$

- 2) Lorsqu'on lâche M sans vitesse initiale d'une hauteur h , la vitesse est faible au départ et la force principale est le poids, accélérant le mobile vers le bas. Quand la vitesse augmente, les frottements s'intensifient jusqu'à ce qu'ils compensent le poids, donnant $\vec{a} = \vec{0}$: la vitesse n'évolue plus et reste à sa valeur avant compensation, la vitesse limite v_l . v_l étant constante, $\dot{v}_l = 0$, donc l'équation différentielle donne

$$\frac{\lambda}{m} v_l^2 = g \Leftrightarrow v_l = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$

- 3) v^* est le rapport de deux vitesses, donc est forcément sans dimension. Ensuite,

$$\begin{aligned} [\tau] &= \left[\frac{v_l}{g} \right] = \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{s} \\ [L] &= [v_l][\tau] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m} \end{aligned}$$

donc τ est bien un temps et L une longueur ; ce faisant, t^* et z^* sont évidemment adimensionnées.

- 4) On réécrit l'équation avec $v = v_l v^*$ et $t = \tau t^*$:

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g \Leftrightarrow \frac{d(v_l v^*)}{d(\tau t^*)} + \frac{\lambda}{m} (v_l v^*)^2 = g \Leftrightarrow \frac{v_l}{\tau} \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\lambda v_l^2}{m} (v^*)^2 = g$$

Or,

$$\frac{v_l}{\tau} = g \quad \text{et} \quad \frac{\lambda v_l^2}{m} = g \Rightarrow \frac{dv^*}{dt^*} + (v^*)^2 = 1$$

- 5) Ces courbes montrent que la vitesse augmente pendant 2 à 3τ , avant de se stabiliser à v_l . Le mouvement est ensuite rectiligne uniforme, et z est une fonction affine du temps.
- 6) Le courbe représentant $v^*(t^*)$ montre que $v^* = 0,95$ pour $t^* = 1,8$. La durée de l'expérience pour arriver à cette valeur est donc $1,8\tau$, et la hauteur z^* à ce temps est $z^* = 1,2$, ce qui correspond à $z = 1,2L$; ainsi

$$\boxed{\Delta t = 1,8\tau} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 1,2L}$$

- 7) En supposant v_l connue, on a

$$\tau = \frac{v_l}{g} \quad \text{et} \quad L = v_l \tau \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 7,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\tau = 7,1 \times 10^{-1} \text{ s}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 4,9 \text{ m}}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta t &= 1,8\tau \quad \text{et} \quad h = 1,2L \\ \Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,3 \text{ s}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 5,9 \text{ m}} \end{aligned}$$

★☆☆ II Coup franc et frottements fluides

- 1) Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

^{a -} ♦ **Système** : {ballon}

♦ **Référentiel** : terrestre galiléen

♦ **Repère** : cartésien (O, \vec{u}_x, \vec{u}_y), \vec{u}_y vertical ascendant, \vec{u}_x vers le but

♦ **Repérage** : $\vec{OM}(t) = x(t)\vec{u}_x + y(t)\vec{u}_y$, $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\vec{u}_x + \dot{y}(t)\vec{u}_y$, $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u}_x + \ddot{y}(t)\vec{u}_y$

♦ **Origine et instant initial** : $\vec{OM}(0) = \vec{0}$

♦ **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_y$

♦ **BDF** :

$$\text{Poids } \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$$

♦ **PFD** :

$$\mathcal{M}\vec{a} = -\mathcal{M}g\vec{u}_y \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad (2.1)$$

Ainsi,

$$(2.1) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases}} \quad (2.2)$$

étant donné les conditions initiales. On trouve la trajectoire en isolant $t(x)$ pour avoir $y(x)$:

$$(2.2) \Rightarrow \begin{cases} t(x) = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \end{cases}$$

- b – Le ballon passe au-dessus du mur si $y(x_{\text{mur}}) \geq h_{\text{mur}}$ avec h_{mur} la hauteur du mur et x_{mur} sa position horizontale. Avec une application numérique, on obtient

$$y(x_{\text{mur}}) = 2,17 \text{ m} > h_{\text{mur}} = 1,90 \text{ m}$$

donc le ballon passe bien au-dessus du mur.

c – Le tir est cadré si $y(x_{\text{but}}) \leq h_{\text{but}}$. Or,

$$y(x_{\text{but}}) = 1,73 \text{ m}$$

donc le tir est bien cadré.

2) Il y a en réalité des frottements, modélisés par une force $\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}(t)$ avec $\alpha = 5,00 \times 10^{-3} \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$.

a – Avec le même système, seul le bilan des forces est modifié (et donc le PFD) :

◇ **BDF** :

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \vec{P} = -mg \vec{u}_y \\ \text{Frottements} & \vec{F} = -\alpha \vec{v}(t) = -\alpha \dot{x} \vec{u}_x - \alpha \dot{y} \vec{u}_y \end{array}$$

◇ **PFD**

$$:m \vec{a} = -mg \vec{u}_y - \alpha \dot{x} \vec{u}_x - \alpha \dot{y} \vec{u}_y$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - \alpha\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{\alpha}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{\alpha}{m}\dot{y} = -g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_x + \frac{v_x}{\tau} = 0 \\ \dot{v}_y + \frac{v_y}{\tau} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) = Ae^{-t/\tau} \\ v_y(t) = -g\tau + Be^{-t/\tau} \end{cases}$$

$$\text{Or, } \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = v_0 \cos \alpha \\ B = v_0 \sin \alpha + g\tau \end{cases}$$

$$\text{donc } \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} \\ v_y(t) = (v_0 \sin \alpha + g\tau) e^{-t/\tau} - g\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -v_0 \tau \cos \alpha e^{-t/\tau} + C \\ y(t) = -(v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2) e^{-t/\tau} - g\tau t + D \end{cases}$$

$$\text{or } \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = v_0 \tau \cos \alpha \\ D = +(v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2) \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 \tau \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \\ y(t) = (v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2) (1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t \end{cases}} \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

b – On isole $t(x)$ de (2.3) pour l'injecter dans (2.4) :

$$\boxed{\begin{cases} t(x) = -\tau \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \\ y(x) = \left(\tan \alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} \right) x + g\tau^2 \ln \left(1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \end{cases}}$$

c – On calcule :

$$y(x_{\text{mur}}) = 2,16 \text{ m}$$

donc le ballon passe au-dessus du mur.

d – On calcule :

$$y(x_{\text{but}}) \approx 1,68 \text{ m}$$

donc le tir est bien cadré. On constate que les frottements n'ont eu que peu d'influence sur ce mouvement ; il n'est en effet pas très rapide, donc la force de frottements est restée assez faible.



III Étude d'une skieuse

1) ◇ **Système** : {skieuse} assimilée à son centre de gravité

◇ **Référentiel** : \mathcal{R}_{sol} supposé galiléen

◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ (voir schéma)

◇ **Repérage** : $\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{u}_x$; $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x$.

◇ **Origine et instant initial** : $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$

◇ **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = \vec{0}$

◇ **BDF** :

Poids	$m \vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$
Réaction normale	$\vec{N} = N \vec{u}_y$
Réaction tangentielle	$\vec{T} = -T \vec{u}_x = -f N \vec{u}_x$
Frottements	$\vec{F} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$

Comme la skieuse glisse sur la piste, avec les lois du frottement de COULOMB, on a

$$T = fN$$

◇ **PFD** :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - fN - \lambda \dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + N \end{cases}$$

Ainsi, comme il n'y a pas de mouvement sur \vec{u}_y , $\ddot{y} = 0$ et

$$\boxed{N = mg \cos \alpha} \Rightarrow \boxed{T = fN = fmg \cos \alpha}$$

2) On réutilise la première équation en y injectant l'expression de T pour avoir :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m} \dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Avec $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$, on obtient une équation différentielle sur $v(t)$ que l'on résout en posant $\tau = m/\lambda$ avec la solution homogène $Ae^{-t/\tau}$ et la solution particulière v_p :

$$\dot{v}(t) + \frac{v}{\tau} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Rightarrow v = Ae^{-t/\tau} + v_p$$

et on trouve v_p directement en remarquant que, par construction, $\dot{v}_p = 0$ donc $v_p = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha)$. En combinant on peut utiliser la condition initiale sur la vitesse :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Or,

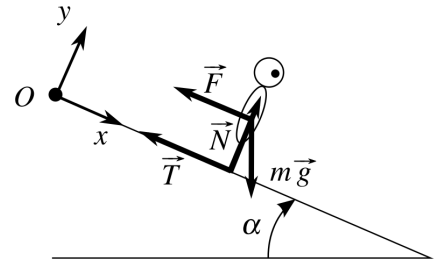
$$\left. \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= A + g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) \\ \Leftrightarrow A &= -g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{v(t) = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (1 - e^{-t/\tau})}$$

On trouve la position $x(t)$ en intégrant $v(t)$:

$$x(t) = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (t + \tau e^{-t/\tau}) + B$$

Or,

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (0 + \tau) + B \\ \Leftrightarrow B &= -g\tau^2(\sin \alpha - f \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (t + \tau (e^{-t/\tau} - 1))}$$



3) La vitesse limite est la solution particulière v_p :

$$\boxed{\vec{v}_l = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) \vec{u}_x}$$

En effet, la présence de la force de frottements fluides dont la norme augmente avec la vitesse fait que la vitesse ne peut pas augmenter indéfiniment. La skieuse atteint une vitesse limite lorsque les frottement compensent la force motrice du mouvement. Ainsi,

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_l (1 - e^{-t/\tau}) \vec{u}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{OM}(t) = v_l (t + \tau (e^{-t/\tau} - 1)) \vec{u}_x}$$

4)

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\lambda}(\sin \alpha - f \cos \alpha)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 65 \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ \lambda = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1} \\ \alpha = 45^\circ \\ f = 0,9 \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{v_l = 46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$

On remarque que la vitesse limite est une fonction affine du poids. Ainsi, le manque de représentation des femmes dans les sports d'hiver, souvent justifié par une moins bonne performance pure, est biaisé par la répartition moyenne de leurs tailles (et donc de leurs poids) plus faible que la répartition moyenne des tailles (et donc poids) des hommes, rendant pour certains leurs records moins impressionnants.

5)

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \frac{v_l}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{v_l}{2} &= v_l(1 - e^{-t_1/\tau}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 1 - e^{-t_1/\tau} \\ \Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln 2} &\quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m = 65 \text{ kg} \\ \lambda = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases} \\ \text{A.N. : } &\boxed{t_1 = 45 \text{ s}} \end{aligned}$$

6) En tombant à $t = t_1$, la skieuse a pour vitesse $v_l/2$. L'équation du mouvement sur \vec{u}_y ne change pas de forme, mais on multiplie f par 10, donc $T = 10fmg$. Ainsi, en posant $t' = t - t_1$, en projection sur \vec{u}_x et en négligeant λ ,

$$\ddot{x}(t') = g(\sin \alpha - 10f \cos \alpha) \Rightarrow \dot{x}(t') = gt'(\sin \alpha - 10f \cos \alpha) + v_l/2$$

On trouve le temps d'arrêt t'_a quand $\dot{x}(t'_a) = 0$, soit

$$t'_a = \frac{-v_l}{2g(\sin \alpha - 10f \cos \alpha)}$$

et la distance d'arrêt depuis le point de chute en intégrant $\dot{x}(t')$ puis en prenant $x(t'_a)$:

$$x(t') = \frac{1}{2}gt'^2(\sin \alpha - 10f \cos \alpha) + \frac{v_l t'}{2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x(t'_a) = -\frac{v_l^2}{8g(\sin \alpha - 10f \cos \alpha)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ \alpha = 45^\circ \\ f = 0,9 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{x(t'_a) = 4,7 \text{ m}}$$