

DEVOIR SURVEILLE DE SCIENCES PHYSIQUES DE REVISIONS

(3H00)

Tout moyen de communication est interdit
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les calculatrices sont autorisées.

Le devoir est composé d'un exercice et de trois problèmes indépendants.

EXERCICE 1 : Etude d'une lunette de Galilée.

PROBLEME 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie.

PROBLEME 2 : Production de vagues dans une piscine.

PROBLEME 3 : Autour de l'aluminium.

A l'intérieur des exercices, certaines questions sont indépendantes.

L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.

L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.

Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction (vocabulaire, orthographe...) et à la présentation de la copie (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques...).

Et il est indispensable de numéroter vos copies.

Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.

Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.

Programme de révision de ce devoir :

Tout ce qui a été vu depuis le début de l'année de SUP MPSI.

EXERCICE : Etude d'une lunette de Galilée :

(\approx pts)

Une lunette de Galilée est constituée :

- d'un objectif assimilable à une lentille mince convergente (L_1) de centre O_1 de vergence V_1 telle que $|V_1| = 1,333 \delta$ et de diamètre $D_1 = 10$ cm.
- d'un oculaire assimilable à une lentille mince divergente (L_2) de centre O_2 , de vergence V_2 telle que $|V_2| = 50,0 \delta$ et de même axe optique que (L_1).

Q1. Quelle doit être la distance $\overline{O_1 O_2}$ séparant les deux lentilles (L_1) et (L_2) pour que le système soit afocal, c'est-à-dire pour que ses foyers soient rejetés à l'infini ?

On conserve cette disposition pour toute la suite de l'exercice.

Pour une lunette l'image de l'objectif à travers l'oculaire est appelée *cercle oculaire* et correspond à la densité maximale de lumière.

On note O'_1 l'image de O_1 par la lentille (L_2) et D'_1 le diamètre du cercle oculaire de la lentille (L_1) à travers (L_2).

Q2. Déterminer la position $\overline{O_2 O'_1}$ et la taille D'_1 de l'image de la lentille (L_1) à travers l'oculaire. Peut-on placer son œil au niveau du cercle oculaire ?

Q3. L'œil n'accomode pas et regarde l'image d'un objet étendu AB situé à l'infini.

- Sur votre copie, faire un schéma de la lunette et tracer la marche de deux rayons lumineux arrivant sur l'objectif sous une inclinaison α , jusqu'à leur sortie de l'oculaire.
- On note α' l'angle sous lequel émerge le faisceau du système. Déterminer le grossissement $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ de la lunette.

Q4. L'œil, placé à 15 mm derrière l'oculaire, accomode maintenant à la distance minimale de vision nette $d_m = 25$ cm. Il regarde l'image $A''B''$ par la lunette d'un objet AB situé à une distance finie devant l'objectif. Déterminer la position $\overline{O_1 A}$ de l'objet AB par rapport au centre O_1 de l'objectif.

Q5. Quelle est la latitude de mise au point de la lunette ?

Données :

???? On s'est posé cette question. Donne-t-on ?

Soit une lentille mince de distance focale image f' (de centre O , de foyer objet F , de foyer image F'). On note AB un objet et $A'B'$ son image à travers la lentille, A étant un point de l'axe optique et B appartenant à un plan de front, on rappelle :

- La relation de conjugaison de Descartes : $\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'}$.
- La relation de conjugaison de Newton : $\overline{FA} \cdot \overline{F'A'} = -f'^2$.
- Le grandissement transversal : $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

PROBLEME 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie :

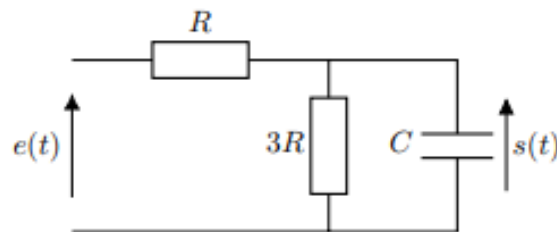
(\approx pts)

Un pH-mètre est composé d'une électrode de verre qui délivre un signal électrique fonction affine du pH : $U_0 = A + B \times pH$ où A et B sont des constantes ajustées par étalonnage du pH-mètre.

Du fait de la proximité de dispositifs d'agitation, un signal sinusoïdal de fréquence égale à 4 kHz se superpose au signal utile. Ainsi le signal s'écrit $e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi)$.

Q1. Le signal parasite n'étant pas utile, on souhaite l'éliminer tout en conservant la partie utile du signal, à savoir U_0 . Quel type de filtre faut-il utiliser ? Estimer alors sa fréquence de coupure.

On propose de réaliser le quadripôle ci-contre avec $C = 1,0 \cdot 10^{-7}$ F et $R = 5,3 \cdot 10^3 \Omega$, alimenté par un signal d'entrée $e(t)$ sinusoïdal de pulsation ω .



Q2. Sans calcul, déterminer la nature du filtre.

Q3. Montrer que la fonction de transfert complexe peut se mettre sous la forme : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite.

Déterminer les expressions et les significations des constantes H_0 et ω_0 . En déduire l'ordre du filtre.

Q4. Exprimer le gain linéaire $G(x)$ et le déphasage $\varphi(x)$ introduits par le filtre à la pulsation réduite x .

Q5. Après avoir défini la pulsation de coupure ω_c , établir son expression en fonction de R et C . Calculer la fréquence de coupure f_c et vérifier que cette valeur permet de réaliser le filtrage souhaité.

Q6. En utilisant la pulsation réduite, déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain et en phase. Représenter le diagramme asymptotique sur votre copie. Préciser si le filtre a un caractère pseudo-dérivateur ou pseudo-intégrateur dans certains domaines de fréquences. Justifier.

Q7. À partir des valeurs du gain en décibels et du déphasage à la pulsation de coupure, représenter les diagrammes de Bode réels.

Le filtre précédent est maintenant alimenté par le signal issu du pH-mètre : $e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$ tel que $f = 4$ kHz. On cherche à déterminer l'expression du signal de sortie $s(t)$.

On donne l'écriture générale de $s(t)$ en introduisant une amplitude S_m , une phase à l'origine des temps φ_s et une composante continue S_0 , sous la forme : $s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$.

Q8. En utilisant la fonction de transfert, déterminer :

- L'expression de S_0 en fonction de U_0 ;
- L'expression de S_m en fonction de E_m ;
- L'expression de φ_s en fonction de φ_e .

En déduire l'expression du signal de sortie $s(t)$. Enfin, représenter sur le même graphique les signaux $e(t)$ et $s(t)$. A-t-on réalisé ce que l'on souhaitait ?

PROBLEME 2 : Production de vagues dans une piscine :

(\approx pts)

Pour créer des vagues dans la piscine, on fait effectuer des oscillations verticales à une grosse masse M immergée, située sur un côté du bassin. La perturbation engendrée se traduit par des vagues à l'intérieur de la piscine.

On considère une masse M homogène de masse volumique ρ et de volume V , plongée dans l'eau (de masse volumique ρ_{eau}). Cette masse est suspendue à un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 , accroché en un point A (voir figure 1, ci-contre).

Soit \mathcal{R} le référentiel terrestre supposé galiléen.

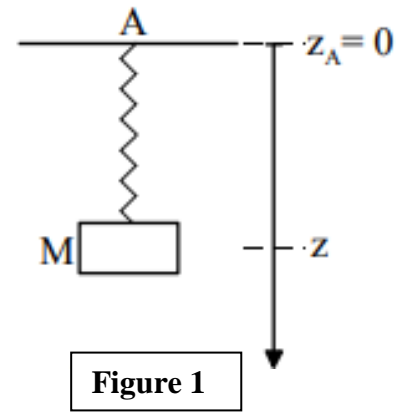
Soit (Oz) un axe vertical orienté vers le bas et de vecteur unitaire \vec{u}_z .

Initialement, Le point A est fixe à la cote $z_A = 0$.

On s'intéresse au mouvement suivant (Oz) de la masse M et on note z la cote du centre de gravité G de la masse.

A l'équilibre la masse est située en $z_{eq} = h$.

On négligera la hauteur de la masse M devant h .



I – Etude de l'équilibre :

Q1. Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède $\vec{\pi}$ exercée sur la masse M immergée dans l'eau, sachant que c'est une force verticale orientée vers le haut, de module égal au poids du liquide qui serait occupé par le volume de cet objet.

Q2. Faire un bilan des forces et exprimer le longueur h du ressort à l'équilibre en fonction de l_0 , V , g , k , ρ et ρ_{eau} .

II – Mouvement sans frottement :

Q3. En déduire l'équation différentielle en z du mouvement de l'oscillation de M sous forme canonique. On introduira la pulsation propre ω_0 en fonction de k et M et on gardera h .

Commenter le fait que ω_0 ne dépende pas de l'intensité de la poussée d'Archimède. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui en dépend ?

III – Mouvement avec frottements visqueux exercés par l'eau :

Dans cette question, on tient compte, en plus, d'une force de frottement visqueux exercée par l'eau sur la masse M , colinéaire à la vitesse et de norme $\|\vec{F}_v\| = \alpha \left| \frac{dl}{dt} \right|$ où l est la longueur du ressort.

Q4. Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par z .

On la mettra sous la forme : $\ddot{z} + \lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$. On exprimera λ en fonction de α et M .

Q5. En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner la forme de la solution de cette équation différentielle. On ne cherchera pas à exprimer les constantes d'intégration.

Puis tracer l'allure de $z(t)$ en tenant compte des conditions initiales suivantes :

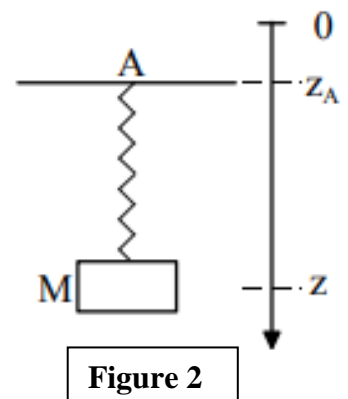
A $t = 0$, $z(0) = h_1 > h$ et la vitesse initiale est nulle.

IV – Cas du régime sinusoïdal forcé :

A l'aide d'un piston, on impose, à l'extrémité A du ressort, un mouvement vertical sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude z_{Am} (voir figure 2 ci-contre). Ainsi $z_A(t) = z_{Am} \cos(\omega t)$; Ces oscillations modifient donc la longueur du ressort.

On pose alors $Z(t) = z(t) - h$.

Q6. Montrer que Z vérifie une équation nouvelle différentielle de la forme : $\ddot{Z} + \lambda \dot{Z} + \omega_0^2 Z = F(t)$ où $F(t)$ est une fonction (pas une force) qui dépend de z_A , \dot{z}_A , α , M et k . Exprimer $F(t)$.



On admet maintenant que $F(t)$ peut se mettre sous la forme simplifiée d'une fonction sinusoïdale d'amplitude $\omega^2 z_{Am}$ et de pulsation ω . On posera donc pour la suite : $F(t) = \omega^2 z_{Am} \cos(\omega t)$.

Q7. En utilisant les notations complexes et en introduisant ω_0 , $\tau = \frac{M}{\alpha}$ et la variable réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, exprimer l'amplitude Z des oscillations de la masse M dans le référentiel \mathcal{R} .

Q8. Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations de la masse d'amplitude supérieure à celle de l'excitation z_{Am} . Chercher un intervalle de pulsations pour lequel cette condition est vérifiée. Vous montrerez que cet intervalle existe si la masse M est supérieure à une certaine valeur que vous préciserez, en fonction de α et k .

Q9. Si la condition précédente est vérifiée, pour quelle pulsation ω_r l'amplitude d'oscillation de la masse M est-elle maximale ? On exprimera ω_r en fonction de ω_0 et de τ .

PROBLEME 3 : Autour de l'aluminium :

(\approx pts)

La croûte terrestre contient 7,5 % d'aluminium. C'est le métal le plus utilisé sur la planète après le fer. La production mondiale progresse chaque année, atteignant 100 tonnes par jour. Ce sujet a pour but d'illustrer quelques aspects de la chimie de ce métal familier.

Données :

- ✚ Constante de Faraday : $F = 96\,500 \text{ C.mol}^{-1}$;
- ✚ Masses molaires en g.mol^{-1} :
 $\text{H} = 1,0$; $\text{O} = 16,0$; $\text{Al} : 27,0$; $\text{Cl} : 35,5$.
- ✚ Potentiels standards à $\text{pH} = 0$: $\text{Al}^{3+}_{(\text{aq})}/\text{Al}_{(\text{s})}$ $E^\circ_1 = -1,66 \text{ V}$;
- ✚ Produit ionique de l'eau : $K_e = 10^{-14}$;
- ✚ Constante d'acidité : $\text{H}_2\text{CO}_{3(\text{aq})}/\text{HCO}^{-}_{3(\text{aq})}$ $K_a = 10^{-6,2}$;

Les trois parties sont totalement indépendantes.

I - Propriétés de l'atome d'aluminium :

L'aluminium est un élément chimique de symbole Al et de numéro atomique 13.

Q1. Que représente le numéro atomique d'un élément ? Quel est le schéma de Lewis de l'atome d'aluminium ? Justifier. Quel est l'ion le plus probable de l'élément aluminium ? Justifier.

II – L'aluminium comme source d'énergie :

Depuis quelques années, les piles aluminium/air sont des sources d'énergie à l'étude pour la propulsion des véhicules électriques. Cette technologie repose sur l'association en série de plusieurs dizaines de cellules.

Chaque cellule peut être décrite de façon simplifiée :

- ✚ L'anode est en aluminium métallique $\text{Al}_{(\text{s})}$;
- ✚ A la cathode, il y a consommation de dioxygène $\text{O}_{2(\text{g})}$ en excès.
- ✚ Un électrolyte basique assure la jonction entre les deux compartiments.
- ✚ La température de fonctionnement est de 25°C .
- ✚ Les couples redox et demi-équations redox sont les suivants :
 - ✓ Couple $\text{Al}(\text{OH})_3_{(\text{s})}/\text{Al}_{(\text{s})}$: $\text{Al}(\text{OH})_3_{(\text{s})} + 3 e^- = \text{Al}_{(\text{s})} + 3 \text{HO}^{-}_{(\text{aq})}$ $E^\circ_a = -2,30 \text{ V}$
 - ✓ Couple $\text{O}_{2(\text{g})}/\text{H}_2\text{O}_{(\text{l})}$: $\text{O}_{2(\text{g})} + 2 \text{H}_2\text{O}_{(\text{l})} + 4 e^- = 4 \text{HO}^{-}_{(\text{aq})}$ $E^\circ_c = 0,39 \text{ V}$

E°_a et E°_c sont les potentiels standards des couples mis en jeu dans les conditions de l'expérience (en milieu basique).

Q2. Ecrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique qui se produit lorsque la pile débite avec des coefficients stœchiométriques entiers les plus faibles possibles. Justifier votre façon de faire.

Q3. Donner l'expression littérale de la constante d'équilibre K° associée à l'équation de la réaction précédente et la calculer. Conclure.

Q4. Le compartiment anodique contient initialement $m = 25 \text{ g}$ d'aluminium. Calculer l'avancement maximal ξ_{max} de la réaction.

Q5. En réalité l'avancement maximal n'est pas atteint. En moyenne cette cellule délivre une quantité d'électricité $Q = 2,1 \cdot 10^5 \text{ C}$, ainsi qu'une intensité de $6,5 \text{ A}$. En déduire :

- ✚ La durée de fonctionnement du dispositif en heures.
- ✚ Le pourcentage d'aluminium non consommé.

III – Présence d'aluminium (III) dans un vaccin :

L'aluminium (III) est utilisé comme adjuvant dans la plupart des vaccins (tétanos, coqueluche, hépatite B...). Son rôle est d'activer la production d'anticorps. Cependant, une surdose de ce métal peut s'avérer nocive pour des personnes fragiles. Il est donc important de savoir sous quelle forme se trouve l'aluminium dans les vaccins afin de pouvoir le doser.

Diagramme potentiel-pH de l'élément aluminium :

Le diagramme $E - pH$ de l'élément aluminium est tracé en **annexe 1 du document-réponse** à rendre avec la copie. Il a été établi en tenant compte des espèces : $Al_{(s)}$, $Al^{3+}_{(aq)}$, $Al(OH)_3_{(s)}$ et $Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$. La concentration totale en aluminium dissous $C_T = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Q6. Déterminer les degrés d'oxydation de l'élément aluminium dans les espèces suivantes : $Al_{(s)}$, $Al^{3+}_{(aq)}$, $Al(OH)_3_{(s)}$ et $Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$. Distribuer ensuite l'espèce chimique correspondant à chaque domaine du diagramme $E - pH$ en utilisant l'annexe 1 du document réponse. Justifier la réponse.

Q7. En exploitant le diagramme retrouver la valeur numérique du potentiel standard E°_1 du couple $Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}$.

Un vaccin est une solution aqueuse de pH proche du pH sanguin.

Le sang est un mélange contenant notamment de l'acide carbonique $H_2CO_{3(aq)}$ et des ions hydrogénocarbonate $HCO_3^{-}_{(aq)}$ en concentrations moyennes respectives $0,0014 \text{ mol.L}^{-1}$ et $0,027 \text{ mol.L}^{-1}$.

Q8. En considérant le couple $H_2CO_{3(aq)} / HCO_3^{-}_{(aq)}$, donner une valeur du pH du sang.

En déduire la forme prédominante de l'aluminium (III) dans le vaccin.

Titrage de l'aluminium (III) :

Une méthode possible de titrage de l'aluminium (III) en solution aqueuse consiste à acidifier la solution à titrer par de l'acide chlorhydrique afin de convertir l'aluminium (III) en ions $Al^{3+}_{(aq)}$. Puis on titre cette solution acidifiée d'ions $Al^{3+}_{(aq)}$ par de la soude. Les mesures sont réalisées à une température de 298 K.

Titrage 1 : Titrage d'une solution d'acide chlorhydrique $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$.

Protocole :

Un volume $V_0 = 20,0 \text{ mL}$ d'une solution d'acide chlorhydrique $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$ de concentration molaire C_1 est titré par une solution de soude $\{Na^{+}_{(aq)} ; HO^{-}_{(aq)}\}$ de concentration $C = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. Le titrage est suivi par pHmétrie.

La courbe est donnée en **annexe 2 du document-réponse**, à rendre avec la copie.

Q9. Ecrire l'équation de la réaction mise en jeu lors de ce titrage et calculer la constante d'équilibre associée.

Q10. A l'aide d'une construction graphique, à faire apparaître sur l'annexe 2 du document-réponse, déterminer le volume équivalent V_e . En déduire la valeur de la concentration C_1 de la solution d'acide chlorhydrique.

Q11. L'équivalence aurait pu être relevée à l'aide d'un indicateur coloré acido-basique. En vous aidant du tableau ci-dessous, proposer, en justifiant, un indicateur coloré adapté à ce titrage et préciser le changement de couleur observé.

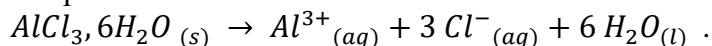
Indicateur coloré acido-basique	Couleur de la forme acide	Zone de virage	Couleur de la forme basique
Bleu de Bromophénol	jaune	3,0 – 4,6	Violet
Hélianthine	Rouge	3,1 – 4,4	Jaune
Vert de Bromocrésol	Jaune	4,0 – 5,6	Bleu
Bleu de Bromothymol	Jaune	6,2 – 7,6	Bleu
Phénolphtaléine	Incolore	8,0 – 10,0	Rouge

Titrage 2 : Titrage d'une solution acidifiée d'ions $Al^{3+}_{(aq)}$.

Protocole :

Une masse m de chlorure d'aluminium hexahydraté $AlCl_3 \cdot 6H_2O$ solide est placée dans une fiole jaugée de $V_0 = 20,0 \text{ mL}$. On ajoute un peu de solution d'acide chlorhydrique $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$ de concentration molaire C_1 . On agite jusqu'à dissolution totale du solide, puis on complète avec la même solution d'acide chlorhydrique jusqu'au trait de jauge.

L'équation de réaction de la dissolution du solide en milieu acide est la suivante :



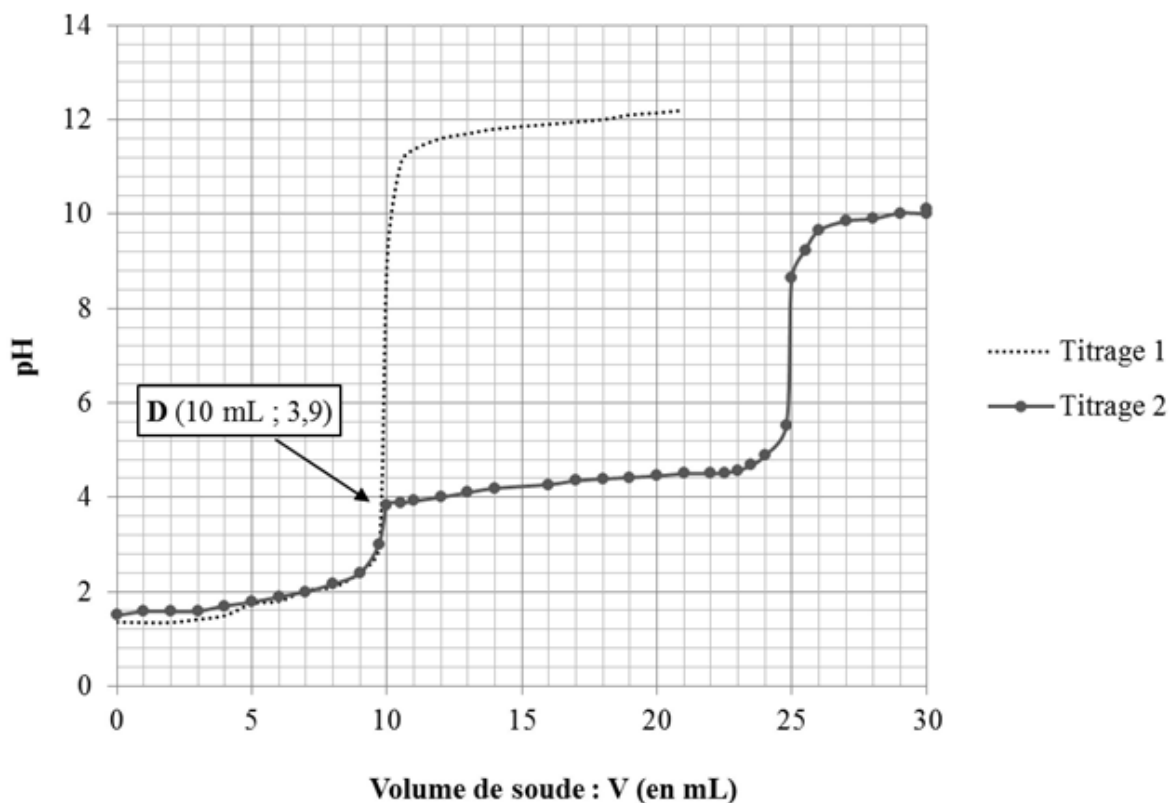
On appellera (S) la solution obtenue.

Dans cette solution, on notera :

- C_1 la concentration molaire en ions $H_3O^+_{(aq)}$;
- C_2 la concentration molaire en ions $Al^{3+}_{(aq)}$.

Le volume $V_0 = 20$ mL de solution (S) est titré par une solution de soude $\{Na^+_{(aq)} ; HO^-_{(aq)}\}$ de concentration $C = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$. Le titrage est suivi par pH-métrie et est fourni ci-dessous (titrage 2).

Au cours du dosage, on remarque l'apparition d'un précipité blanc.



Evolution du pH lors du titrage d'une solution composée d'un mélange d'acide chlorhydrique (C_1) et d'ions $Al^{3+}_{(aq)}$ (C_2) par de la soude (C) (titrage 2).
La courbe du titrage 1 a été superposée.

Q12. Ecrire les équations des deux réactions successives mises en jeu lors de ce titrage et relever les deux valeurs de volumes équivalents V_{e1} et V_{e2} . Justifier que les ions $H_3O^+_{(aq)}$ soient dosés en premier.

Q13. Donner, en mL, le volume de soude V_{A1} ayant réagi avec les cations $Al^{3+}_{(aq)}$.

En déduire la concentration molaire C_2 en ions $Al^{3+}_{(aq)}$ dans la solution (S).

Quelle masse de chlorure d'aluminium hexahydraté a servi à la préparation de la solution (S) ?

Exploitation du point anguleux :

Par exploitation du point anguleux D, on souhaite trouver la valeur du produit de solubilité K_s de l'hydroxyde d'aluminium $Al(OH)_3(s)$.

Q14. Donner l'équation de la réaction dont la constante thermodynamique est le produit de solubilité de l'hydroxyde d'aluminium K_s .

Q15. Déterminer la concentration molaire en ions $HO^-_{(aq)}$ dans le bécher au point D.

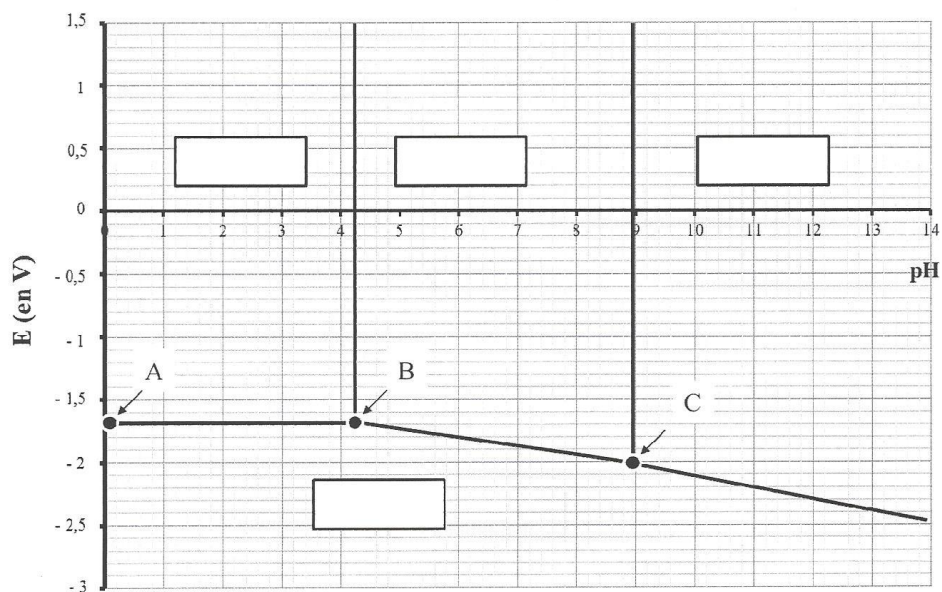
Q16. En tenant compte de la dilution, évaluer la concentration molaire en ions $Al^{3+}_{(aq)}$ dans le bécher au point D. En déduire une valeur du produit de solubilité K_s de l'hydroxyde d'aluminium à 298 K.

Document réponse du problème de chimie :

Nom prénom :

Annexe 1 :

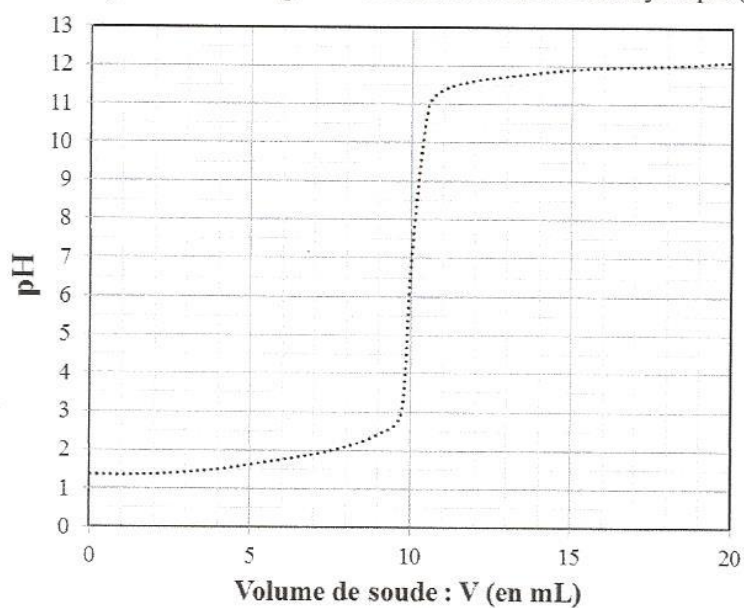
Diagramme E-pH de l'aluminium à 298 K
Concentration de trace : $C_T = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$



Coordonnées des points : **A(0,0 ; -1,72)** **B(4,3 ; -1,72)** **C(9,0 ; -2,05)**.

Annexe 2 :

Evolution du pH lors du titrage d'une solution d'acide chlorhydrique (C_1) par de la soude (C)



..... pH = f(V)

PROBLEME 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie :**(\approx pts)**

Q1. Il faut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c faible devant 4 kHz afin de conserver la composante continue et supprimer le signal sinusoïdal de fréquence 4 kHz.

Q2. Schéma électrique équivalent en BF :

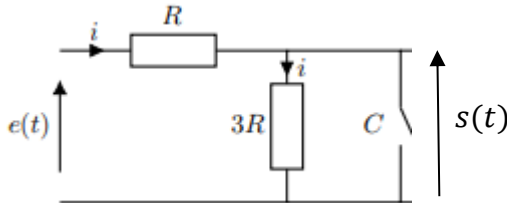
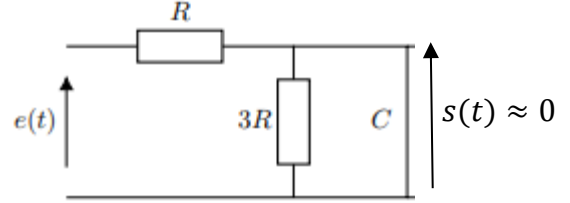


Schéma électrique équivalent en HF :



En BF : Les résistances R et $3R$ sont en série :

Pont diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{3R}{3R+R} = \frac{3}{4} = cste$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB} = cste$.

En HF : $\underline{H} = \frac{s}{e} \approx 0$ et $G_{dB} \rightarrow -\infty$.

Conclusion : C'est un filtre passe-bas.

Q3. On calcule \underline{Z}_{eq} équivalent à $3R$ et C en parallèle à la sortie :

On a alors : $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{3R \times \frac{1}{jC\omega}}{3R + \frac{1}{jC\omega}}$; Soit $\underline{Z}_{eq} = \frac{3R}{1+j3RC\omega}$.

Ainsi, \underline{Z}_{eq} est en série avec R : Pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R} = \frac{\frac{3R}{1+j3RC\omega}}{R + \frac{3R}{1+j3RC\omega}} = \frac{3R}{R + \frac{3R}{1+j3RC\omega}} = \frac{3}{4+j3RC\omega}$$

$$\text{Soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{3}{4+j3RC\omega} = \frac{3}{4(1+j\frac{3RC\omega}{4})} = \frac{3/4}{1+j\frac{3RC\omega}{4}}$$

De la forme : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ si $H_0 = \frac{3}{4}$ et $\omega_0 = \frac{4}{3RC}$.

H_0 est la fonction de transfert statique et ω_0 la pulsation propre.

C'est un filtre passe bas du 1^{er} ordre.

Q4. Par définition, $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$.

Et $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg(num) - \arg(den) = 0 - \arctan(x)$; Ainsi : $\varphi(x) = -\arctan(x)$.

Q5. La pulsation de coupure ω_c est définie par $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$.

Or $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$; Ainsi G est max pour $x = 0$ et $G_{max} = H_0 = \frac{3}{4}$.

Ainsi, $G(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+x_c^2}}$; Il vient donc : $x_c = 1 = \frac{\omega_c}{\omega_0}$; Soit : $\omega_c = \omega_0 = \frac{4}{3RC}$ et $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{2}{3\pi RC}$.

AN : $f_c = \frac{2}{3\pi \times 5,3 \cdot 10^3 \times 1,0 \cdot 10^{-7}}$. On obtient : $f_c \approx 400 \text{ Hz}$.

On a bien f_c dix fois plus faible que la fréquence du signal parasite que l'on veut éliminer, ce qui paraît tout à fait satisfaisant.

Q6. Etude asymptotique de $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$.

- En BF : Si $\omega \ll \omega_0$ ou si $x \ll 1$: $\underline{H} \sim H_0 = \frac{3}{4}$

Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) = 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB}$; Asymptote horizontale en BF.

Et $\varphi \rightarrow 0$.

- En HF : Si $\omega \gg \omega_0$ ou $x \gg 1$: $\underline{H} \sim \frac{H_0}{jx} \sim -j \frac{H_0}{x}$
 Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$:
Asymptote oblique de pente - 20 dB par décade en HF.
 Et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Intersection des asymptotes en A tel que :

$$20 \log(H_0) - 20 \log(x_A) = 20 \log(H_0) \quad ;$$

Soit $\log(x_A) = 0$ et pour $G_{dB}(A) = 20 \log(H_0) \approx -2,5$ dB.

Ainsi les coordonnées du point d'intersection des asymptotes :

$$\boxed{A(0; -2,5)}.$$

D'où le diagramme de Bode asymptotique ci-contre.

Ce filtre présente **un caractère pseudo-intégrateur en haute fréquences**, car il présente une asymptote oblique de pente -20 dB/décade.

Q7. Diagramme réel : En $x = 1$ ou $\log(x) = 0$:

$$\underline{H}(jx = 1) = \frac{H_0}{1+j} \text{ et } G(1) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

$$\text{Donc } G_{dB}(1) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{2}) = -2,5 - 3.$$

$$\text{Ainsi : } \boxed{G_{dB}(\log(x) = 0) = -5,5 \text{ et } \varphi(\log(x) = 0) = -\frac{\pi}{4}}.$$

D'où le diagramme de Bode réel ajouté sur le diagramme asymptotique.

Q8. - En ce qui concerne la composante continue :

On se place en basses fréquences : $\underline{H} \sim H_0 = \frac{S_0}{U_0} = \frac{3}{4}$; Ainsi : $\boxed{S_0 = \frac{3}{4} U_0}$.

- A la fréquence de 4 kHz : $f = 10 f_c$, Soit : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_c} = 10$ et $\log(x) = 1$.

A cette fréquence, $G_{dB}(1) = -22,5 \text{ dB} = 20 \log(G)$; D'où $\log(G) = -\frac{22,5}{20}$ et $G = \frac{S_m}{E_m} = 10^{-1,03}$

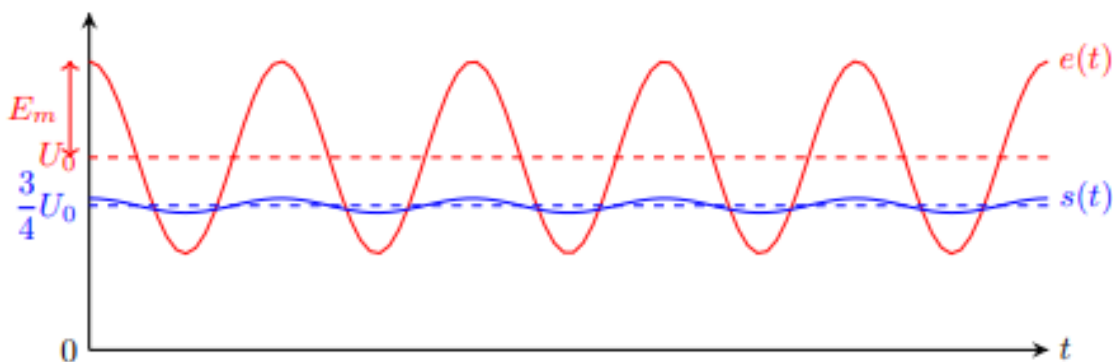
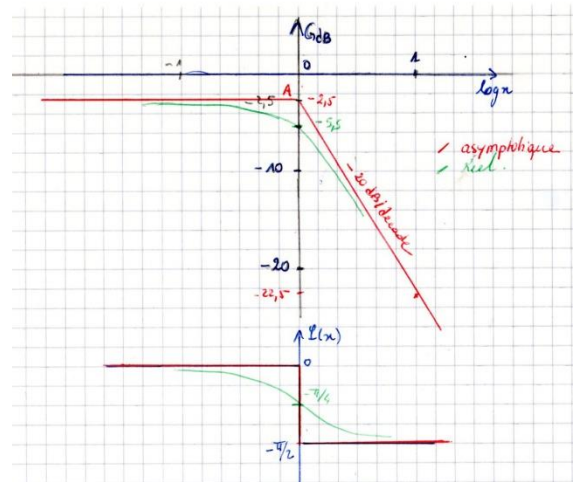
D'où $\boxed{S_m \approx 0,09 E_m \approx \frac{E_m}{10}}$: L'amplitude du signal parasite est atténuée d'un facteur 10.

Et $\varphi_s = \Phi(x) + \varphi_e$ où $\Phi(x)$ est le déphasage lié au filtre. Or en $\log(x) = 1$, $\boxed{\Phi \approx -1,5 \text{ rad}}$

Alors $\boxed{\varphi_s \approx \varphi_e - 1,5 \text{ rad.}}$

Conclusion : $\boxed{s(t) = \frac{3}{4} U_0 + \frac{E_m}{10} \cos(\omega t + \varphi_e - 1,5)}$.

D'où l'allure ci-dessous :



PROBLEME 2 : Production de vagues dans une piscine : (D'après ENSTIM)

(≈ pts)

I – Etude de l'équilibre :

Q1. Expression de la poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_{eau} V \vec{g} = -\rho_{eau} V g \vec{u}_z$.

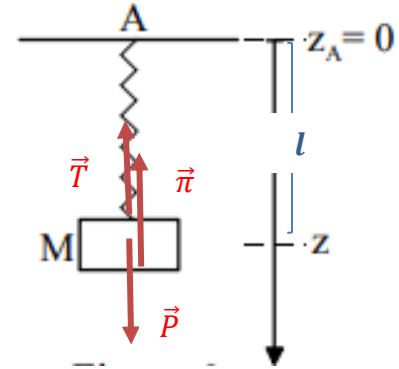
Q2. Référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen.

Base de projection cartésienne. L'axe Oz est orienté vers le bas.

Système : La masse M .

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Le poids : $\vec{P} = M\vec{g} = +Mg\vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_{eau} V g \vec{u}_z$.
- La force de Hooke dirigée vers le haut : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - l_0)\vec{u}_z$
Car $z = l$



Condition d'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$; Soit : $\vec{T} + \vec{\pi} + \vec{P} = \vec{0}$.

Projetons sur l'axe (Oz) : $Mg - \rho_{eau} V g - k(z_{eq} - l_0) = 0$

Ou encore, avec $z_{eq} = h$, il vient : $k(h - l_0) = Mg - \rho_{eau} V g$

Il faut supprimer $M = \rho V$: D'où : $h - l_0 = \frac{\rho - \rho_{eau}}{k} V g$; Ou encore : $\boxed{h = l_0 + \frac{Vg}{k} (\rho - \rho_{eau})}$.

II – Mouvement sans frottement :

Q3. Equation différentielle du mouvement : 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$

En projetant sur l'axe (Oz), il vient : $Mg - \rho_{eau} V g - k(z - l_0) = M\ddot{z}$

Ou encore : $M\ddot{z} + kz = \underline{Mg - \rho_{eau} V g + kl_0 - kh} + kh$
= 0 (d'après Q2)

En simplifiant, il vient : $M\ddot{z} + kz = kh$ et sous forme canonique, on obtient : $\ddot{z} + \frac{k}{M} z = \frac{k}{M} h$.

On pose alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ la pulsation propre, il vient : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$.

La **pulsation propre** de cet oscillateur ne dépend **que de ses caractéristiques intrinsèques k et M** .

Par contre, c'est la **position d'équilibre h** (autour de laquelle la masse oscille) qui **dépend la poussée d'Archimède**.

III – Mouvement avec frottements visqueux exercés par l'eau :

Q4. On refait une 2^{ème} loi de Newton, en ajoutant la force de frottement visqueux : $\vec{F}_v = -\alpha \frac{d\vec{l}}{dt} = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$

Il vient : $Mg - \rho_{eau} V g - k(z - l_0) - \alpha \dot{z} = M\ddot{z}$

Soit : $M\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = \underline{Mg - \rho_{eau} V g + kl_0 - kh} + kh$
= 0 (d'après Q2)

En simplifiant et en mettant sous forme canonique, il vient : $\ddot{z} + \frac{\alpha}{M} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$

Par identification avec $\ddot{z} + \lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$, il vient : $\lambda = \frac{\alpha}{M}$.

Q5. Il faut résoudre l'équation précédente, dans le cas d'un amortissement faible, donc lorsque α reste petit.

Solution homogène :

- Equation caractéristique : $s^2 + \lambda s + \omega_0^2 = 0$
- Discriminant : $\Delta = \lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$ si amortissement faible ; Donc régime pseudo-périodique.
- Solutions de l'équation caractéristique : $s_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \Omega$
avec Ω la pseudo pulsation .

- Les solutions de l'équations homogènes s'écrivent alors : $\mathbf{z}_h(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} [\mathbf{A} \cos(\Omega t) + \mathbf{B} \sin(\Omega t)]$

Solution particulière constante : $\mathbf{z}_p = \mathbf{h}$.

Solution générale :

$$z(t) = h + e^{-\frac{\lambda}{2}t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

On ne cherche pas A et B d'après l'énoncé.

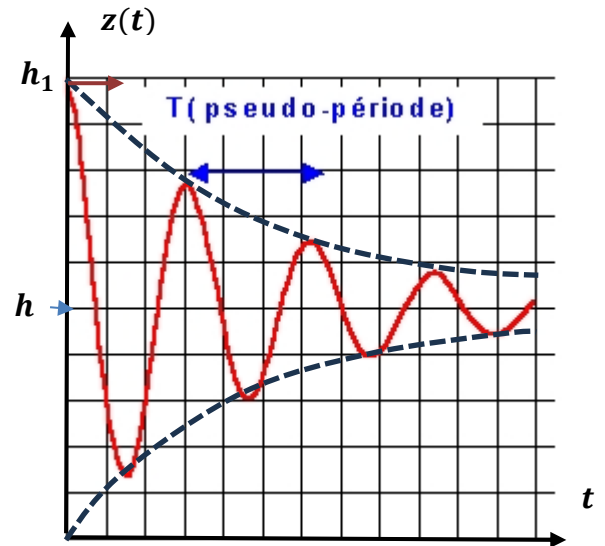
Allure de la courbe :

$$\text{A } t = 0, z(0) = h_1 > h$$

$$\text{et } \dot{z}(0) = 0, \text{ donc tangente horizontale en } 0.$$

$$\text{De plus, } \lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = h < h_1.$$

Et entre temps, oscillations amorties avec décroissance exponentielle de l'amplitude.



IV – Cas du régime sinusoïdal forcé :

Q6. On a maintenant : $z_A(t) = z_{Am} \cos(\omega t)$, donc $l = z - z_A$ et $\frac{dl}{dt} = \dot{z} - \dot{z}_A$

Ce qui modifie la force de Hooke : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - z_A - l_0)\vec{u}_z$.

$$\text{Et la force de frottement fluide : } \vec{F}_v = -\alpha \frac{dl}{dt} \vec{u}_z = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) \vec{u}_z$$

La 2^{ème} loi de Newton devient donc : $Mg - \rho_{eau} Vg - k(z - z_A - l_0) - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) = M\ddot{z}$

$$\text{Qui se simplifie en : } M\ddot{z} + \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - z_A) = \underline{Mg - \rho_{eau} Vg + kl_0 - kh + kh} = 0 \text{ (d'après Q2)}$$

$$\text{Ou encore : } M\ddot{z} + \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - h - z_A) = 0.$$

$$\text{On pose : } Z(t) = z(t) - h ; \text{ Soit } \dot{Z} = \dot{z} \text{ et } \ddot{Z} = \ddot{z}$$

$$\text{L'équation différentielle devient : } M\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ(t) = \alpha\dot{z}_A + k z_A(t).$$

$$\text{Sous forme canonique, il vient : } \ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = \frac{\alpha}{M}\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t).$$

$$\text{Par identification avec } \ddot{Z} + \lambda\dot{Z} + \omega_0^2 Z = F(t), \text{ il vient : } \underline{F(t) = \frac{\alpha}{M}\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t)}.$$

Q7. Passage aux notations complexes :

$$\text{On nous donne } F(t) = \omega^2 z_{Am} \cos(\omega t). \text{ Alors } \underline{F} = \omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}.$$

$$\text{On introduit } \underline{Z}_{com}(i\omega) = \underline{Z}(i\omega) e^{i\omega t} \text{ la grandeur complexe associée à } Z(t)$$

$$\text{et } \underline{Z}(i\omega) \text{ l'amplitude complexe telle que } \underline{Z}(i\omega) = Z(\omega) e^{i\omega t}$$

On reprend l'équation différentielle précédente, en la passant en complexes :

$$\underline{Z}_{com}'' + \lambda \underline{Z}_{com}' + \omega_0^2 \underline{Z}_{com} = \underline{F}; \text{ Soit : } -\omega^2 \underline{Z}_{com} + i\omega \lambda \underline{Z}_{com} + \omega_0^2 \underline{Z}_{com} = \underline{F}$$

$$\text{Avec } \tau = \frac{M}{\alpha} = \frac{1}{\lambda}, \text{ il vient : } \underline{Z}_{com} \left(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} \right) = \underline{F} = \omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}.$$

$$\text{D'où : } \underline{Z}_{com} = \frac{\omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} \text{ et } \underline{Z}(i\omega) = \frac{\omega^2 z_{Am}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} = \frac{z_{Am}}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + i\frac{1}{\omega\tau}};$$

$$\text{Ainsi, avec la pulsation réduite } x = \frac{\omega}{\omega_0} : \underline{Z}(ix) = \frac{z_{Am}}{\frac{1}{x^2} - 1 + i\frac{1}{x\omega_0\tau}}$$

$$\text{Enfin } \underline{Z}(x) = |\underline{Z}(ix)| = \frac{z_{Am}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + (\frac{1}{x\omega_0\tau})^2}}.$$

$$\text{Q8. On veut } Z(x) > z_{Am}, \text{ soit } \frac{Z(x)}{z_{Am}} > 1 ; \text{ ou encore : } \frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + (\frac{1}{x\omega_0\tau})^2}} > 1 ; \text{ Soit : } \sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + (\frac{1}{x\omega_0\tau})^2} < 1$$

$$\text{On a donc : } (\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2} < 1 ; \text{ On développe : } \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2\omega_0^2\tau^2} - 1 < 0.$$

$$\text{Ou encore : } \frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2\omega_0^2\tau^2} < 0.$$

$$\text{Multiplions par } x^4, \text{ il vient : } 1 - 2x^2 + \frac{x^2}{\omega_0^2\tau^2} < 0 ; \text{ Soit } x^2 \left(-\frac{1}{\omega_0^2\tau^2} + 2 \right) > 1.$$

$$\text{Ou encore } \underline{x} > \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}}};$$

Or $\omega = x \omega_0$;

Il faut donc que $\boxed{\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{2 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}}} = \frac{\omega_0 \omega_0 \tau}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{\omega_0^2 \tau}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \omega_{lim}}$

On remarque que ω_{lim} n'existe que si $2 \omega_0^2 \tau^2 - 1 > 0$; Donc que si $\omega_0^2 \tau^2 > \frac{1}{2}$.

Or $\tau = \frac{M}{\alpha}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$; Ainsi ω_{lim} n'existe que si $\frac{k}{M} \frac{M^2}{\alpha^2} > \frac{1}{2}$; Donc pour $\boxed{M > \frac{\alpha^2}{2k}}$.

Q9. On a vu que $Z(x) = |\underline{Z}(ix)| = \frac{Z_{Am}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}}}$.

Le numérateur est constant, ainsi Z est maximum si $(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}$ est **minimum**.

Posons $f(x) = (\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}$.

Alors $\frac{df(x)}{dx} = 0$ ssi $2(\frac{1}{x^2} - 1) \left(\frac{-2}{x^3}\right) - \frac{2}{\omega_0^2 \tau^2 x^3} = 0$; Soit $\left(\frac{-2}{x^3}\right) \left[2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\right] = 0$

Il vient : $2\left(\frac{1}{x_r^2} - 1\right) + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2} = 0$; D'où : $\frac{1}{x_r^2} - 1 = -\frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}$; ou $\frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2} = \frac{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}{2 \omega_0^2 \tau^2}$

Enfin : $\boxed{x_r = \sqrt{\frac{2 \omega_0^2 \tau^2}{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}}} = \frac{\omega_0 \tau \sqrt{2}}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}}}$.

Et $\boxed{\omega_r = \omega_0 x_r = \frac{\omega_0^2 \tau \sqrt{2}}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}}}$: Pulsation de résonance.

PROBLEME 3 : Autour de l'aluminium : (D'après CCP TSI) (≈ pts)

I - Propriétés de l'atome d'aluminium :

Q1. Le numéro atomique d'un élément est le nombre de protons du noyau atomique (et nombre d'électrons de l'atome neutre).

✚ $Z = 13$: Soit $2+8+3$: Dans la classification périodique, il sera donc situé sur la 3^{ème} période et 1^{er} élément du groupe p, soit dans le groupe 13. Il a donc 3 électrons de valence ($3s^2 3p^1$).

Son schéma de Lewis est : $| Al \cdot$

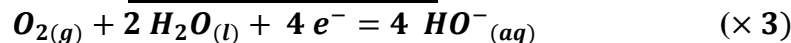
L'ion le plus probable a la configuration du gaz rare le plus proche, celle où toutes les couches sont occupées. Il aura donc tendance à perdre ses 3 électrons de valence et donner l'ion Al^{3+} .

II – L'aluminium comme source d'énergie :

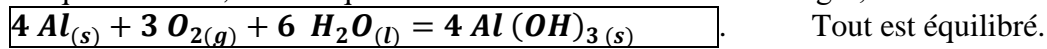
Q2. A l'anode, il se produit une oxydation du réducteur, d'où le sens de la réaction :



✚ A la cathode, il se produit une réduction de l'oxydant :



✚ Pour obtenir l'équation bilan, il faut équilibrer le nombre d'électrons échangés, on obtient donc :



Q3. $K^\circ = \frac{(P^\circ)^3}{(P(O_2))_{eq}^3} = \frac{1}{(P(O_2))_{eq}^3};$

✚ ½ équation redox : $Al(OH)_{3(s)} + 3 e^- = Al_{(s)} + 3 HO^-_{(aq)}$

$$\text{Relation de Nernst : } E_a = E^\circ_a + \frac{0,06}{3} \log \frac{1}{[HO^-]^3};$$

✚ ½ équation redox : $O_{2(g)} + 2 H_2O_{(l)} + 4 e^- = 4 HO^-_{(aq)}$

$$\text{Relation de Nernst : } E_c = E^\circ_c + \frac{0,06}{4} \log \frac{P(O_2)}{[HO^-]^4};$$

✚ A l'équilibre, les potentiels redox sont égaux, soit : $E_{a\,eq} = E_{c\,eq}$;

✚ D'où : $E^\circ_a + \frac{0,06}{3} \log \frac{1}{[HO^-]^3_{eq}} = E^\circ_c + \frac{0,06}{4} \log \frac{P(O_2)_{eq}}{[HO^-]^4_{eq}};$

✚ **Multiplions par 12** : $12 E^\circ_a + 0,06 \log \frac{1}{[HO^-]^{12}_{eq}} = 12 E^\circ_c + 0,06 \log \frac{(P(O_2))_{eq}^3}{[HO^-]^{12}_{eq}};$

Soit : $0,06 \log K^\circ = 12(E^\circ_c - E^\circ_a)$; Soit : $\boxed{K^\circ = 10^{\frac{12(E^\circ_c - E^\circ_a)}{0,06}}}$; AN : $K^\circ = 10^{538} > 10^3$: **Réaction totale.**

Q4. Calcul du nbre de moles initiales d'Al : $\boxed{n(Al)_{init} = \frac{m}{M(Al)}}$; AN : $n(Al)_{init} = \frac{25}{27}$; **$n(Al)_{init} = 0,93 \text{ mol.}$**

Tableau d'avancement :

	$4 Al_{(s)} +$	$3 O_{2(g)} +$	$6 H_2O_{(l)} =$	$4 Al(OH)_{3(s)}$
EI	$n(Al)_{init} = 0,93$	excès	excès	
EF	$0,93 - 4 \xi_{max}$	excès	excès	$4 \xi_{max}$

La réaction étant totale, on a disparition du réactif limitant :

Soit : $0,93 - 4 \xi_{max} = 0$; Soit : $\xi_{max} = \frac{0,93}{4}$; **$\xi_{max} = 0,23 \text{ mol.}$**

Q5. On sait que : $Q = I \Delta t$; Donc : Durée de fonctionnement : $\boxed{\Delta t = \frac{Q}{I}}$;

AN : $\Delta t = \frac{2,1 \cdot 10^5}{6,5}$; On obtient **$\Delta t \approx 3,2 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 9 \text{ h.}$**

✚ Pourcentage d'aluminium consommé :

✓ Quantité d'électricité ayant circulé : $Q = n_{e^-} F = 3 \times n_{Al\,consommé} \times F$; Soit $\boxed{n_{Al,consommé} = \frac{Q}{3F}}$;

AN : $n_{Al\,consommé} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{3 \times 96500}$; Soit **$n_{Al,consommé} = 0,73 \text{ mol.}$**

✓ $n_{Al\,restant} = 0,93 - 0,73 = 0,20 \text{ mol.}$ Soit en pourcentage : $p = \frac{0,20}{0,93} \times 100$;

D'où le pourcentage d'aluminium non consommé : **$p = 21,5\%$** ;

III – Présence d'aluminium (III) dans un vaccin :

Q6. Diagramme potentiel-pH de l'élément aluminium :

espèce	degré d'oxydation de Al	espèce	degré d'oxydation de Al
$Al_{(s)}$	0	$Al(OH)_3_{(s)}$	+ III
$Al^{3+}_{(aq)}$	+ III	$Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$	+ III

De bas en haut du diagramme, les espèces sont placées par ordre croissant de nombre d'oxydation.

D'autre part, l'espèce la plus acide ($Al^{3+}_{(aq)}$) est majoritaire à bas pH et l'espèce la plus basique ($Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$) est majoritaire à haut pH. D'où les identifications ci-contre.

Q7. Couple $Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}$:

1/2 équation redox : $Al^{3+}_{(aq)} + 3e^{-} = Al_{(s)}$

Relation de Nernst :

$$E(Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}) = E^{\circ}_1 + 0,02 \log([Al^{3+}]) ;$$

Sur la frontière entre Al^{3+} et $Al_{(s)}$, le solide est présent à l'état de trace et $[Al^{3+}] = C_T$. Soit $E_{1\text{ Front}} = E^{\circ}_1 + 0,02 \log(C_T)$

On donne $E_{1\text{ Front}} = -1,72\text{ V}$. Donc $E^{\circ}_1 = E_{1\text{ Front}} - 0,02 \log(C_T)$.

AN : $E^{\circ}_1 = -1,72 + 0,02 \times 3$; $E^{\circ}_1 = -1,66\text{ V}$; (valeur donnée dans le sujet).

Q8. On sait que pour un couple acido-basique : $H_2CO_{3(aq)}/HCO_3^{-}_{(aq)}$:

On a la relation : $pH = pKa + \log\left(\frac{[HCO_3^{-}]}{[H_2CO_3]}\right)$; AN : $pH = 6,2 + \log\left(\frac{0,027}{0,0014}\right)$; On obtient : $pH \approx 7,5$.

A un tel pH, d'après le diagramme $E - pH$, $Al(OH)_3_{(s)}$ est l'espèce majoritaire de Al (III).

Titrage de l'aluminium (III) :

Titration 1 : Titration d'une solution d'acide chlorhydrique $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$.

Q9. Réaction du dosage acide fort / base forte : $H_3O^{+}_{(aq)} + HO^{-}_{(aq)} = 2H_2O_{(l)}$; $K = \frac{1}{K_e}$;

AN : $K = 10^{14}$; Réaction totale.

Q10. On utilise la méthode des tangentes parallèles, on obtient $V_e = 10,0\text{ mL}$.

A l'équivalence : les réactifs sont versés dans les proportions stœchiométriques.

Donc : $n(H_3O^{+})_0 = n(HO^{-})_{eq}$; Soit : $C_1V_0 = C V_e$; Ainsi : $C_1 = \frac{C V_e}{V_0}$;

AN : $C_1 = \frac{0,1 \times 10}{20}$; On obtient : $C_1 = 5,0 \cdot 10^{-2}\text{ mol.L}^{-1}$.

Q11. L'indicateur coloré doit avoir une zone de virage comprenant le pH à l'équivalence (7 ici). Le BBT convient donc ; on observera le passage du jaune (milieu acide avant l'équivalence) au bleu (milieu basique lorsque l'ion hydroxyde est en excès).

Titration 2 : Titration d'une solution acidifiée d'ions $Al^{3+}_{(aq)}$.

Q12. 1^{ère} réaction : $H_3O^{+}_{(aq)} + HO^{-}_{(aq)} = 2H_2O_{(l)}$; $V_{e1} = 10\text{ mL}$;

2^{ème} réaction : $Al^{3+}_{(aq)} + 3HO^{-}_{(aq)} = Al(OH)_3_{(s)}$; $V_{e2} = 25\text{ mL}$.

Le premier saut de pH correspond au volume déterminé à la question 10, lors du titrage des 20 mL d'acide chlorhydrique $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$;

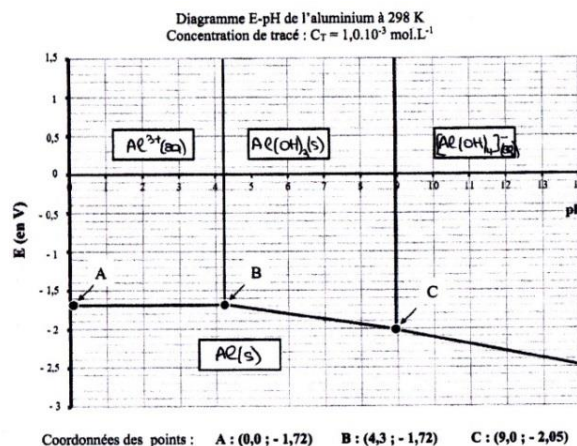
Ou bien 1^{ère} réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte, soit HCl.

Q13. Volume ayant réagi avec $Al^{3+}_{(aq)}$: $V_{A1} = V_{e2} - V_{e1}$; AN : $V_{A1} = 15\text{ mL}$.

Attention aux coefficients stœchiométriques de la 2^{ème} réaction :

Pour ce volume, on a $n(Al^{3+})_0 = \frac{n(HO^{-})_{eq}}{3}$; Soit : $C_2V_0 = \frac{C V_{A1}}{3}$; Ainsi : $C_2 = \frac{C V_{A1}}{3 V_0}$;

AN : $C_2 = \frac{0,1 \times 15}{3 \times 20}$; On obtient : $C_2 = 2,5 \cdot 10^{-2}\text{ mol.L}^{-1}$.



Et la masse ayant servi : $m = n(\text{Al}^{3+}) \times M(\text{AlCl}_3, 6\text{H}_2\text{O})$.

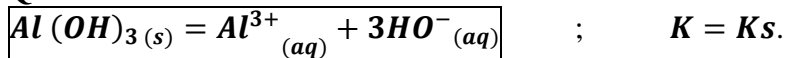
Soit : $m = C_2 V_0 \times M(\text{AlCl}_3, 6\text{H}_2\text{O})$

avec $M(\text{AlCl}_3, 6\text{H}_2\text{O}) = 27 + 3 \times 35,5 + 6 \times 18$; Soit $M(\text{AlCl}_3, 6\text{H}_2\text{O}) = 241,5 \text{ g.mol}^{-1}$.

AN : $m = 2,5 \cdot 10^{-2} \times 20 \cdot 10^{-3} \times 241,5$; On obtient : $m \approx 121 \text{ mg}$.

Exploitation du point anguleux :

Q14. Attention au sens de la réaction : Sens de la dissolution du précipité :



Q15. En D, $\text{pH} = 3,9$; Soit $\boxed{[\text{HO}^{-}] = \frac{K_e}{10^{-\text{pH}(D)}}}$; AN : $[\text{HO}^{-}] = \frac{10^{-14}}{10^{-3,9}}$

On obtient : $[\text{HO}^{-}] = 7,9 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$.

Q16. Au point D, les ions Al^{3+} n'ont pas encore réagi.

Donc en solution, on a : $\boxed{[\text{Al}^{3+}] = \frac{C_2 V_0}{V_0 + V_D}}$.

AN : $[\text{Al}^{3+}] = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \times 20}{20 + 10}$; On obtient : $[\text{Al}^{3+}] \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Et par définition, $\boxed{K_s = [\text{Al}^{3+}] [\text{HO}^{-}]^3}$.

AN : $K_s = 1,7 \cdot 10^{-2} \times (7,9 \cdot 10^{-11})^3$; On obtient : $K_s \approx 8,4 \cdot 10^{-33}$ ($\text{p}K_s \approx 32,1$)