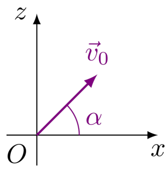
Correction du TD d'application

I Projection de vecteurs

1) Exprimer $\vec{v_0}$ dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_z})$ en fonction de v_0 et α.



Réponse

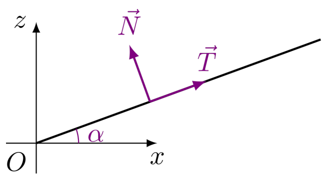
Si α vaut 0, $\vec{v_0}$ est selon $\vec{u_x}$. On sait donc que la projection de $\vec{v_0}$ sur $\vec{u_x}$ donne $v_0 \cos\alpha \vec{u_x}$. On le remarque également avec le triangle rectangle OMH, avec M le bout de $\vec{v_0}$ et H son projeté orthogonal sur $\vec{u_x}$: la longueur OH est en effet $v_0 \cos\alpha$.

Si α vaut $\pi/2$, $\vec{v_0}$ est selon $\vec{u_z}$. On sait donc que la projection de $\vec{v_0}$ sur $\vec{u_z}$ donne $v_0 \sin\alpha \vec{u_z}$. On le remarque également en prenant le triangle rectangle OMJ, avec cette fois J le projeté orthogonal de M sur $\vec{u_z}$: la longueur OJ est en effet $v_0 \sin\alpha$. Finalement,

$$\boxed{\vec{v_0} = v_0 \cos(\alpha)\,\vec{u_x} + v_0 \sin(\alpha)\,\vec{u_z}}$$

◇

2) Exprimer $\vec{N}$ et $\vec{T}$ dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_z})$ en fonction de N, T et α.



Réponse

Avec la même réflexion, on trouve

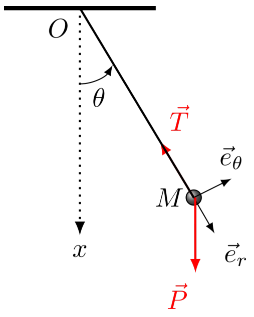
$$\boxed{\vec{T} = T\cos(\alpha)\,\vec{u_x} + T\sin(\alpha)\,\vec{u_z}}$$

La méthode est la même pour $\vec{N}$, mais le résultat est différent. En effet, si $\alpha = 0$, $\vec{N}$ est selon $\vec{u_z}$: la projection de $\vec{N}$ sur $\vec{u_z}$ donne $N\cos\alpha\vec{u_z}$. Si $\alpha = \pi/2$, $\vec{N}$ est selon $-\vec{u_x}$: la projection de $\vec{N}$ sur $\vec{u_x}$ donne $-N\sin\alpha\vec{u_x}$. Ainsi,

$$\boxed{\vec{N} = -N\sin(\alpha)\,\vec{u_x} + N\cos(\alpha)\,\vec{u_z}}$$

◇

3) Exprimer $\vec{P}$ et $\vec{T}$ dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta})$ en fonction de m, g, T et θ.



Réponse

Toujours même réflexion : si $\theta = 0$, $\vec{P}$ est selon $\vec{e_r}$, et si $\theta = \pi/2$, $\vec{P}$ est selon $-\vec{e_\theta}$. $\vec{T}$ est, par définition, selon $-\vec{e_r}$. Ainsi,

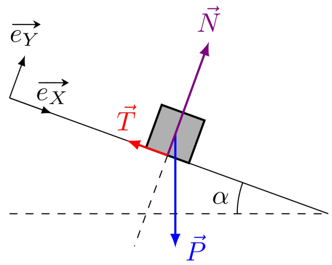
$$\boxed{\vec{P} = mg\cos(\theta)\,\vec{e_r} - mg\sin(\theta)\,\vec{e_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{T} = -T\,\vec{e_r}}$$

◇

4) **Équilibre plan incliné** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$

Projeter le poids dans la base inclinée et exprimer les normes de $\vec{T}$ et $\vec{N}$ en fonction de m, g et α.



Réponse

Ici aussi :

- ◇ $\alpha = 0 \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{e_Y} = -1 \quad (\vec{P}$ selon $-\vec{e_Y})$
- ◇ $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{e_X} = 1 \quad (\vec{P}$ selon $\vec{e_X})$

Ainsi

$$\boxed{\vec{P} = mg(\sin(\alpha)\,\vec{e_X} - \cos(\alpha)\,\vec{e_Y})} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{N} = N\,\vec{e_Y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{T} = -T\vec{e_X}}$$

D'où

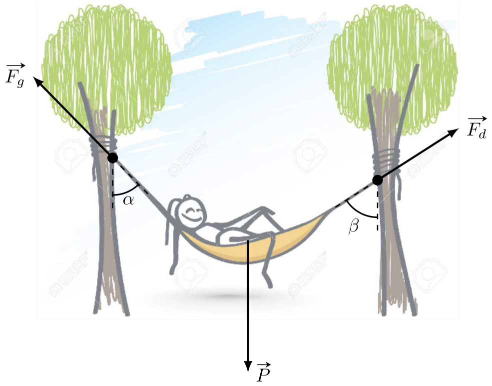
$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} mg\sin\alpha - T \\ -mg\cos\alpha + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}}$$

◇

5) **Équilibre hamac** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{P} = \vec{0}$$

Projeter les vecteurs $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ dans la base $(\vec{u_x},\vec{u_y})$ avec $\vec{u_x}$ parallèle au sol vers la droite et $\vec{u_y}$ vertical ascendant. En déduire la norme littérale de ces deux vecteurs. On prend $m = 60\,\mathrm{kg}$, $\alpha = 45°$ et $\beta = 60°$.



Réponse

On projette :

$$\vec{F}_g = F_g(\cos\alpha\vec{u_y} - \sin\alpha\vec{u_x}) \quad \text{et} \quad \vec{F}_d = F_d(\cos\beta\vec{u_y} + \sin\beta\vec{u_x})$$

et avec l'égalité de vecteurs on obtient

$$\begin{cases} 0 = F_d\sin\beta - F_g\sin\alpha \\ 0 = -mg + F_g\cos\alpha + F_d\cos\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg = F_g\cos\alpha + F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg\sin\beta = F_g(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} F_d = \dfrac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \\ F_g = \dfrac{mg\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \end{cases}}$$

Les applications numériques, **non demandées**, donnent

$$\boxed{\begin{cases} F_d = 4{,}4\times10^2\,\mathrm{N} \\ F_g = 5{,}4\times10^2\,\mathrm{N} \end{cases}}$$

II Mouvement hélicoïdal

Un point matériel M a pour équations horaires en coordonnées cylindriques :

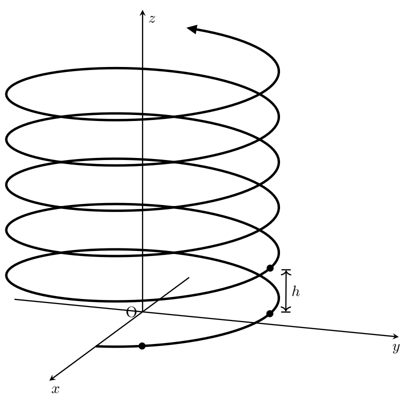
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = \alpha t \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\alpha,\omega) \quad \text{des constantes}$$

1) Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cylindrique.

Réponse

On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\vec{u_r} + \alpha t\vec{u_z} \\ \vec{v}(t) &= \underbrace{\cancel{\dot{R}\vec{u_r}}}_{=0} + R\underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega}\vec{u_\theta} + \alpha\vec{u_z} + \alpha t\underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{d}\vec{u_z}}{\mathrm{d}t}}}_{=0} \\ &= R\omega\vec{u_\theta} + \alpha\vec{u_z} \\ \vec{a}(t) &= R\underbrace{\cancel{\dot{\omega}}}_{=0}\vec{u_\theta} - R\omega^2\vec{u_r} + \vec{0} \\ &= -R\omega^2\vec{u_r} \end{aligned}$$



2) Dessiner l'allure de la trajectoire.

Réponse

Cf. ci-dessus.

3) Déterminer h le pas de l'hélice, c'est-à-dire la distance selon l'axe (Oz) dont sont séparés deux points successifs de la trajectoire correspondant à un même angle θ (modulo 2π).

Réponse

Soit t_0 un instant quelconque. Un point à ce temps-là est tel que

$$\begin{cases} r(t_0) = R \\ \theta(t_0) = \omega t_0 \\ z(t_0) = \alpha t_0 \end{cases}$$

Le premier point qui est au même angle θ mais avec 2π de plus se trouve donc à t_1 tel que

$$\begin{aligned} \theta(t_1) &= \theta(t_0) + 2\pi \\ \Leftrightarrow \omega t_1 &= \omega t_0 + 2\pi \\ \Leftrightarrow & \boxed{t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}} \end{aligned}$$

On a alors

$$\begin{aligned} z(t_1) - z(t_0) = h &= \alpha t_1 - \alpha t_0 \\ \Leftrightarrow & \boxed{h = 2\pi\frac{\alpha}{\omega}} \end{aligned}$$

4) Ce mouvement est-il uniforme ? À quelle condition est-il circulaire ?

Réponse

$\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2} =$ cte, donc il est uniforme. Il est circulaire ssi $\boxed{\alpha = 0}$.

5) Déterminer les coordonnées cartésiennes de ce mouvement.

Réponse

En regardant dans le plan polaire, on trouve $x(t)$ et $y(t)$:

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = R\cos(\omega t) \\ y(t) = R\sin(\omega t) \\ z(t) = \alpha t \end{cases}}$$

★☆☆ III Masse du Soleil

La Terre subit de la part du Soleil la force d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{M_T M_S}{R^2}\vec{u_r} \quad \text{où} \quad \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{SI}$$

avec $\vec{u_r}$ le vecteur unitaire allant du Soleil vers la Terre. La Terre tourne autour du Soleil en décrivant un cercle de rayon $R = 149{,}6 \times 10^6\,\text{km}$.

1) Déterminer la masse du Soleil.

Réponse

On étudie le système {Terre} dans le référentiel héliocentrique. La Terre étant sur une orbite circulaire, on utilise un repère polaire $(\mathrm{S},\vec{u_r},\vec{u_\theta})$ en appelant S le centre de gravité du Soleil et T le centre de gravité de la Terre. On a :

$$\overrightarrow{\mathrm{ST}} = R\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = \underbrace{\cancel{R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}}}_{\ddot{\theta}=0} - R\dot{\theta}^2\vec{u_r}$$

étant donné que la distance Terre-Soleil est fixe, et que la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil est constante. On a d'ailleurs, en appelant $\omega = \dot{\theta}$ cette vitesse angulaire,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

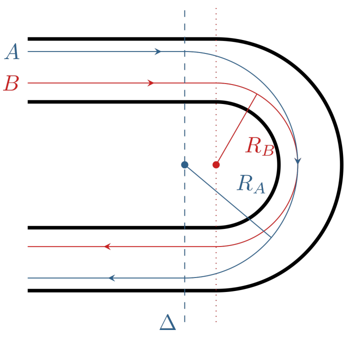
avec T_0 la période de révolution de la Terre autour du Soleil, telle que $T_0 = 365{,}26 \times 24 \times 3600\mathrm{s} = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s}$. Ainsi, la seule force s'exerçant sur la Terre étant l'attraction gravitationnelle du Soleil, on a avec le PFD :

$$M_T\vec{a} = \vec{F}_g \Leftrightarrow -\cancel{M_T}R\omega^2 = -\mathcal{G}\frac{\cancel{M_T}M_S}{R^2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{M_S = \frac{R^3\omega^2}{\mathcal{G}} = \frac{4\pi^2R^3}{\mathcal{G}{T_0}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \\ \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI} \\ T_0 = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}$$

◇

★☆☆ IV Course de F1

Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando ALONSO (point A) et Jenson BUTTON (point B) arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent cependant le virage de deux façons différentes :



- ◇ ALONSO suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\mathrm{m}$;
- ◇ BUTTON choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75{,}0\,\mathrm{m}$.

On cherche à déterminer quelle est la meilleure trajectoire, c'est-à-dire lequel des deux pilote gagne du temps par rapport à l'autre à la sortie du virage.

1) Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Que peut-on conclure ?

Réponse

La voiture A d'ALONSO entame son virage dès qu'elle passe par l'axe Δ, et parcourt un demi-cercle de longueur

$$\boxed{D_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}}$$

En revanche, la voiture B de BUTTON continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_1 - R_2) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

◇

2) Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesse v_A et v_B constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Déterminer ces vitesses, sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieur à 0,8 g sous risque de dérapage. Les calculer numériquement.

Réponse

Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{aR_A} = 26{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B = \sqrt{aR_B} = 24{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

3) Conclure quant à la meilleure trajectoire des deux.

Réponse

Calculons le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage. On sait que

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

d'où les résultats

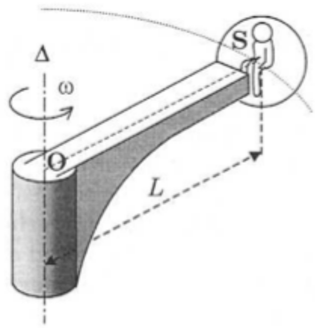
$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Alonso va plus vite que Button pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la plus courte des deux**, soit ici **celle la plus large**. À ne pas tenter en vérifiant chez soi, mais de quoi briller sur Mario Kart. . . ?

◇

★☆☆ V Entraînement d'une spationaute

Une spationaute doit subir différents tests d'aptitude aux vols spatiaux, notamment le test des accélérations. Pour cela, on l'installe dans une capsule de centre O, fixée au bout d'un bras métallique horizontal dont l'autre extrémité est rigidement liée à un arbre de rotation vertical Δ. La longueur du bras est notée L. On assimilera la spationaute au point matériel S.



L'ensemble {capsule + bras + arbre} est mis en rotation avec un vitesse angulaire croissant progressivement selon la loi

$$\omega(t) = \omega_0(1 - \exp^{-t/\tau})$$

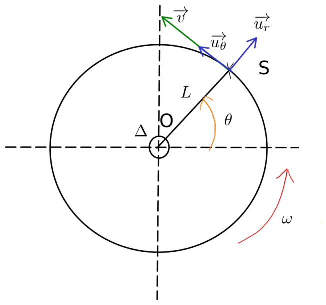
avec ω_0 la vitesse angulaire nominale du simulateur, et τ un temps caractéristique. On donne $L = 10{,}0\,\mathrm{m}$ et $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Établir proprement le système d'étude.

Réponse

- **Système** : {spationaute}
- **Référentiel** : référentiel du laboratoire, supposé galiléen
- **Repère** : $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ selon le sens de rotation
- **Repérage** :

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OS}}(t) &= L\overrightarrow{u_r}\\
\overrightarrow{v}_S(t) &= L\omega(t)\overrightarrow{u_\theta}\\
\overrightarrow{a}_S(t) &= L\dot{\omega}(t)\overrightarrow{u_\theta} - L\omega^2(t)\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$



---

2) À partir de quelle durée peut-on supposer que le mouvement est circulaire et uniforme ? Que deviennent les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans ce cas ? Calculer alors la norme de l'accélération subie par la spationaute.

Réponse

Au bout de quelques τ, $\omega(t) = \omega_0$ et le mouvement sera circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\boxed{\begin{cases}\overrightarrow{v}_S(t) = L\omega_0\overrightarrow{u_\theta}\\ \overrightarrow{a}_S(t) = -L{\omega_0}^2\overrightarrow{u_r}\end{cases}}$$

La norme de l'accélération subie est alors $\boxed{\|\overrightarrow{a}_S\| = L{\omega_0}^2}$.

---

3) Quelle doit être la valeur de ω_0 pour que l'accélération atteigne 10 g lors du régime de rotation uniforme ? On donnera le résultat en tours par second.

Réponse

$$a_S = 10g \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}\\ L = 10{,}0\,\mathrm{m}\end{cases} \tag{3.1}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\omega_0 = 3{,}13\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \approx 0{,}50\,\mathrm{tour{\cdot}s^{-1}}} \tag{3.2}$$

Ordre de grandeur M3.1 :

- Accélération latérale en F1 : [4 ; 5] g ;
- Accélération latérale en avion de chasse : [9 ; 10] g pendant quelques secondes max ;
- Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse : ≈ 20 g (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;
- Accélération négative frontale en accident de voiture : [40 ; 60] g ! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.
