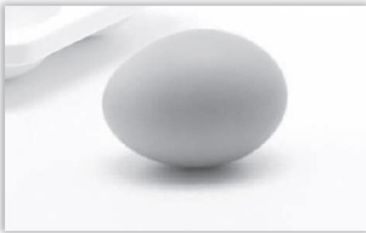
/32×1,5

P1 Rotation d'un œuf dur *(D'après TPC CCP 2018)*

Le document ci-dessous décrit un phénomène qu'on observe lorsqu'on met en rotation un oeuf dur.

Document A Lorsqu'on impulse un mouvement rotatif très rapide (plus d'une dizaine de tours par seconde) à un oeuf dur posé sur une surface bien plane et pas trop lisse, il se produit un étrange phénomène. Au bout de quelques tours, l'oeuf se dresse et se met à tourner sur sa pointe ou sur sa base ! Lorsqu'il perd peu à peu de la vitesse par frottements, il finit par se remettre en position couchée, position où son centre de gravité est le plus bas.

a



b

c

Évolution d'un oeuf dur en rotation dans l'ordre chronologique a, b et c.

Source : Le kaléidoscope de la physique, Varlamov, Villain, Rigamonti, 2014

On souhaite établir pour l'oeuf dur la condition de basculement de la position horizontale à la position verticale. On adopte le paramétrage de la figure 1 ci-dessous :

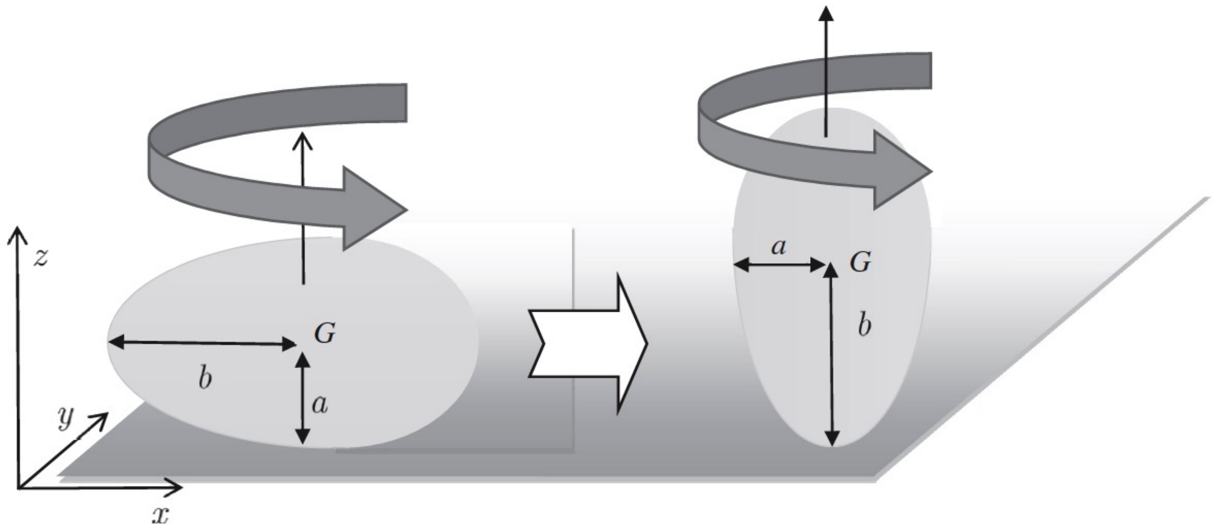


Figure 1 – Passage de la position horizontale (à gauche) à la position verticale (à droite)

On ne considère que les états initial et final, on ne s'intéresse pas au mécanisme transitoire du redressement de l'oeuf. On modélise l'oeuf dur par un ellipsoïde de révolution homogène de masse m, de demi petit axe a et de demi grand axe b (avec $a < b$). Le centre de masse G est au centre de l'ellipsoïde (on néglige la légère asymétrie de l'oeuf). Les moments d'inertie d'un ellipsoïde de masse m par rapport à son axe de rotation Oz s'écrivent :

- ◇ $J_H = \frac{1}{5}m(a^2+b^2)$ lorsque l'oeuf tourne à l'horizontal,
- ◇ $J_V = \frac{2}{5}ma^2$ lorsque l'oeuf tourne à la verticale.

On pose Ω la vitesse de rotation de l'oeuf, qu'il soit dans sa position verticale ou horizontale.

/2 $\boxed{1}$ Comparer les deux moments d'inertie J_H et J_V et commenter physiquement.

Réponse

Comme $b > a$, on a $J_H > J_V$. (1) En effet, la masse est globalement répartie plus loin de l'axe de rotation, (1) donc le moment d'inertie est plus grand.

◇

/2 [2] Exprimer l'énergie mécanique totale de l'oeuf dans les deux positions $\mathcal{E}_{m_H}$ et $\mathcal{E}_{m_V}$ en fonction des données. On choisira comme origine de l'énergie potentielle de pesanteur celle d'altitude nulle.

Réponse

Dans les deux cas, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}J\Omega^2 + mgz_G$, (1) on a donc

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga} \quad \overset{(1)}{\text{et}} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} = \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb}$$

◇

/3 [3] Montrer qu'il existe une pulsation limite Ω_c telle que pour $\Omega > \Omega_c$, la position verticale est d'énergie inférieure à la position horizontale et assure le basculement d'une position à l'autre. On donnera l'expression de Ω_c en fonction de a, b, et g.

Réponse

On cherche la condition sur Ω pour avoir $\mathcal{E}_{m_V} \overset{(1)}{<} \mathcal{E}_{m_H}$, ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb < \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \Leftrightarrow 2mg(b-a) < (J_H - J_V)\Omega^2$$

$$\Leftrightarrow 2mg(b-a) \overset{(1)}{<} \frac{m}{5}\underbrace{\left(b^2 - a^2\right)}_{(a-b)(a+b)}\Omega^2 \Leftrightarrow \Omega > \boxed{\Omega_c \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{10g}{a+b}}}$$

◇

/2 [4] Calculer Ω_c pour $a = 2{,}0\,\mathrm{cm}$ $b = 3{,}0\,\mathrm{cm}$ et $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Commenter le résultat obtenu en utilisant les descriptions de l'expérience du document.

Réponse

L'application numérique donne $\Omega_c = 45\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$ (1), soit environ 7 tour/s. Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'on nous parle dans le document d'une vitesse de rotation d'une dizaine de tours par seconde. (1)

◇

On suppose que le contact entre l'oeuf et la table se fait sans frottement. Dans ce cas, lors du redressement de l'oeuf, l'énergie doit être conservée. On fait tourner l'oeuf en position horizontale, avec une vitesse angulaire initiale légèrement supérieure à la vitesse limite : $\Omega_0 = \Omega_c + \varepsilon$ (avec $\varepsilon \ll \Omega_c$). L'oeuf se redresse et tourne alors avec une vitesse angulaire finale Ω_f que l'on peut écrire sous la forme $\Omega_f = \Omega_c + r\varepsilon$ (avec r un nombre sans dimension).

/3 [5] Exprimer les énergies mécaniques initiale $\mathcal{E}_{m_H}$ et finale $\mathcal{E}_{m_V}$ au premier ordre en ε.

Réponse

À l'état initial, on a

$$\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega_0^2 + mga \overset{(1)}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)^2 + mga$$

soit au premier ordre en ε (DL1) :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} \overset{(1)}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon) + mga} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} \overset{(1)}{=} \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon r) + mgb}$$

◇

/7 [6] En déduire, d'après les hypothèses, la valeur de r en fonction de a et de b. L'oeuf a-t-il accéléré ou ralenti lors de son redressement ? Que vaudrait r pour $a \approx b$? Commenter.

Réponse

$\mathcal{E}_{m_H} \overset{(1)}{=} \mathcal{E}_{m_V} \Rightarrow$
$$\frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon r) + mgb = \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2 + 2\Omega_c\varepsilon) + mga \tag{1}$$

Or, [3] $\Rightarrow$
$$\frac{m}{5}a^2\Omega_c^2 + mgb \overset{(1)}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)\Omega_c^2 + mga \tag{2}$$

$$\Rightarrow \frac{m}{10}(a^2+b^2)2\Omega_c\varepsilon \overset{(1)}{=} \frac{m}{5}a^2 2\Omega_c r\varepsilon \qquad (3) = (1) - (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \overset{(1)}{=} \frac{a^2+b^2}{2a^2}}$$

$b > a$ donc $r > 1$ donc $\Omega_f > \Omega_0$. (1) Lors de son redressement, la vitesse de rotation de l'oeuf augmente.

Dans le cas où $a = b$, c'est-à-dire dans le cas d'un oeuf sphérique, on retrouve $r = 1$ ① puisque le système reste inchangé (dans ce cas, on ne peut même plus parler de redressement), donc sa vitesse de rotation ne varie pas. ①

/4 $\boxed{7}$ Exprimer les moments cinétiques $\mathcal{L}_H$ et $\mathcal{L}_V$ de l'oeuf par rapport à l'axe Oz avant et après son redressement. Exprimer la variation de moment cinétique $\Delta\mathcal{L} = \mathcal{L}_V - \mathcal{L}_H$ en fonction de Ω_c, m, a et b. L'oeuf a-t-il gagné ou perdu du moment cinétique lors de son redressement ?

Réponse

$$\boxed{\mathcal{L}_H = J_H\Omega_0 = \frac{m}{5}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)} \quad \text{① et} \quad \boxed{\mathcal{L}_V = J_V\Omega_f = \frac{2m}{5}a^2(\Omega_c + r\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{L} \overset{①}{=} \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c + \frac{m}{5}(2a^2r - a^2 - b^2)\varepsilon$$

$r = \frac{a^2+b^2}{2a^2} \Rightarrow$

$$\boxed{\Delta\mathcal{L} \overset{①}{=} \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c < 0}$$

Le moment cinétique de l'oeuf a diminué lors de son redressement. ①

/5 $\boxed{8}$ Cette variation de moment cinétique signifie que, pendant le temps Δt du redressement, l'oeuf a subi un couple $\vec{\Gamma}$. Montrer que la composante verticale de ce couple par rapport à l'axe Oz peut s'écrire :

$$\Gamma_z \approx \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c\Delta t}$$

Commenter son signe.

Réponse

D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_z$. ① En supposant que le redressement est de courte durée, on peut approcher $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}$ par $\frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta t}$, on a donc

$$\Gamma_z = \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c}{\Delta t} \overset{①}{=} \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c^2}{\Omega_c\Delta t}$$

On injecte l'expression de Ω_c obtenue à la question $\boxed{3}$:

$$\boxed{\Gamma_z = \frac{m}{5}(a^2-b^2)\frac{10g}{(a+b)\Omega_c\Delta t} \overset{①}{=} \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c\Delta t}}$$

Ce couple est négatif, ① ce qui est cohérent avec le fait que le moment cinétique de l'oeuf ait diminué pendant le redressement. ①

/4 $\boxed{9}$ Le poids ou la réaction normale du support peuvent-ils être responsables d'un tel couple ? Si non, d'où peut provenir ce couple ? Y a-t-il une contradiction avec les hypothèses de l'énoncé ?

Réponse

Le poids et la réaction normale ne peuvent ① pas être responsable d'un tel couple car ces deux forces sont parallèles à l'axe de rotation, donc leur moment par rapport à cet axe est nul ①. Ce couple peut éventuellement provenir des frottements, ① car on nous dit dans le document qu'il faut que la surface ne soit « pas trop lisse ». Cependant, cela contredit l'hypothèse de l'énergie mécanique constante. ①