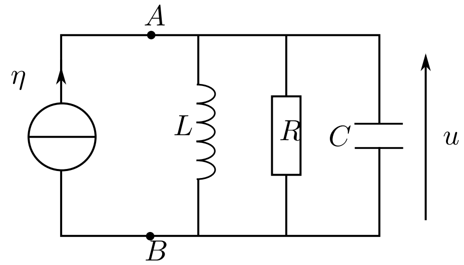
Devoir maison 3 – à rendre pour le 03 janvier

Résonance RLC parallèle – corrigé

Le circuit ci-contre est constitué d'une source idéale de courant de c.e.m. $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$. Cette source alimente une association parallèle constituée d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance. La tension aux bornes de cette association est $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$. On note $\underline{U_0} = U_0 e^{j\phi}$ l'amplitude complexe de $u(t)$.



I Étude de l'amplitude et de la phase

1. Exprimer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ du dipôle AB.

Réponse :
Dans le cas d'une association de dipôle en parallèle, on additionne les admittances :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega}$$

$$\boxed{\underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}}$$

2. Montrer que l'amplitude complexe de la tension u se met sous la forme :

$$\underline{U_0} = \frac{R\eta_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \quad \text{avec } x = \omega/\omega_0$$

Exprimer Q et ω_0 en fonction de R, L et C. Comment s'appellent ces deux constantes ?

Réponse :
On applique la loi d'Ohm généralisée sur le dipôle équivalent $\underline{Z}$, en utilisant les amplitudes complexes du courant et de la tension :

$$\underline{U_0} = \underline{Z}\eta_0 = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}\eta_0$$

On divise par $jL\omega$ et on trouve : $\boxed{\underline{U_0} = \dfrac{R\eta_0}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}}$

Par identification on a $RC = \dfrac{Q}{\omega_0}$ $\quad \dfrac{R}{L} = Q\omega_0$.

On en déduit $\boxed{\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}}$.

ω_0 est la pulsation propre du circuit et Q le facteur de qualité.

3. Exprimer l'amplitude réelle U_0 de la tension u en fonction de R, η_0, Q et x.

Réponse :

$$\boxed{U_0 = |\underline{U_0}| = \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

4. Y-a-t-il résonance en tension ? Si oui, préciser la valeur de x à la résonance. En déduire la valeur de ω à la résonance.

Réponse :
La résonance correspond à un maximum de la fonction U_0 à $x \neq 0$. U_0 est maximale si son dénominateur est minimal, soit quand $x - 1/x = 0$.

Il y a toujours résonance en tension pour $x = 1$, soit $\omega = \omega_0$.

5. Comment définit-on la bande passante $\Delta\omega$? Montrer que $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

Réponse :
La bande passante $\Delta\omega$ est l'ensemble des pulsations ω vérifiant $U_{max}/\sqrt{2} \leq U_0(\omega) \leq U_{max}$.

Soit $\Delta\omega = [\omega_1; \omega_2]$, avec ω_1 et ω_2 solutions de l'équation $U_0(\omega) = U_{max}/\sqrt{2}$, soit :

$$Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Parmi les 4 solutions de ces 2 équations polynomiales de degré 2, seules 2 solutions sont acceptables car donnant $x > 0$:

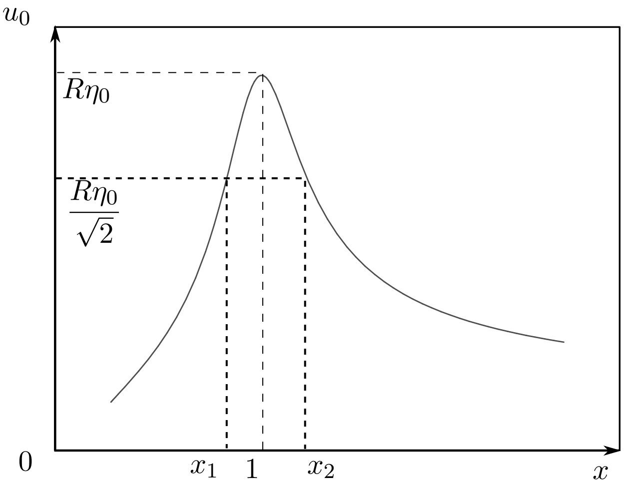
$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \qquad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q}\sqrt{1+4Q^2}$$

On obtient $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/Q$, soit $\Delta\omega = \omega_0 \Delta x = \omega_0/Q$

6. Faire l'étude asymptotique de la fonction $U_0(x)$. Tracer l'allure de U_0 en fonction de x.

Réponse :

- si $x \to 0$: $\lim\limits_{x\to 0} U_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R\eta_0}{Q} x = 0$
- si $x \to +\infty$: $\lim\limits_{x\to +\infty} U_0(x) = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{R\eta_0}{Q}\dfrac{1}{x} = 0$
- si $x = 1$, $U_0(1) = R\eta_0$



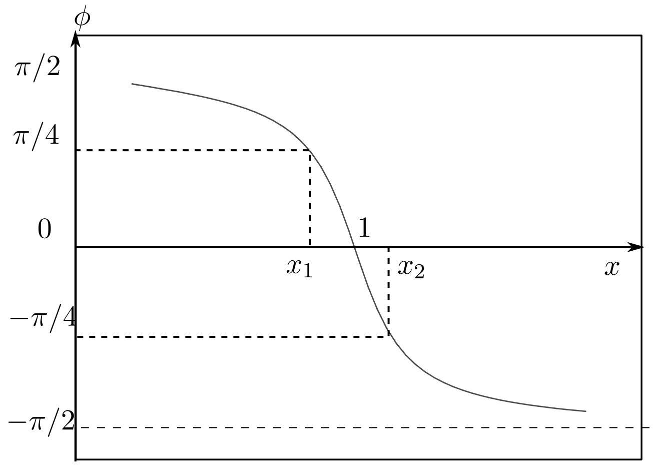
7. Exprimer la phase ϕ en fonction de Q et x. Préciser le domaine de variation de ϕ.

Réponse :
$\phi = -\arctan\left(Q(x - 1/x)\right)) \in]-\pi/2; \pi/2[$

8. Faire l'étude asymptotique de la fonction $\phi(x)$. Tracer l'allure de ϕ en fonction de x.

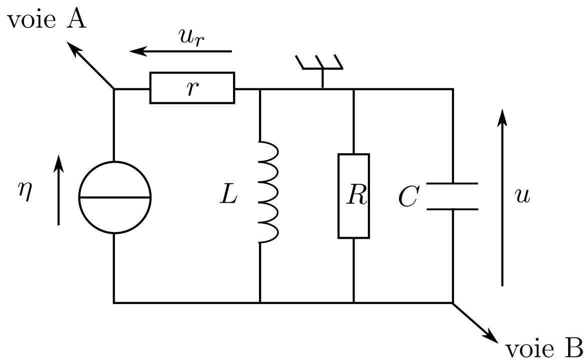
   Réponse :

   - si $x \to 0$: $\lim_{x\to 0} \phi(x) = \pi/2$
   - si $x \to +\infty$: $\lim_{x\to +\infty} \phi(x) = -\pi/2$
   - si $x = 1$: $\phi(1) = 0$



II Expérience

Pour tracer les graphiques U_0 et ϕ en fonction de ω, il faut pouvoir observer simultanément le courant $\eta(t)$ et la tension $u(t)$. On ajoute une résistance r en série avec le générateur de courant afin de visualiser le courant $\eta(t)$ par l'intermédiaire de la tension $u_r(t)$. On propose le montage ci-contre.



9. Le montage proposé est-il valable ? Si oui, à quelle condition ?

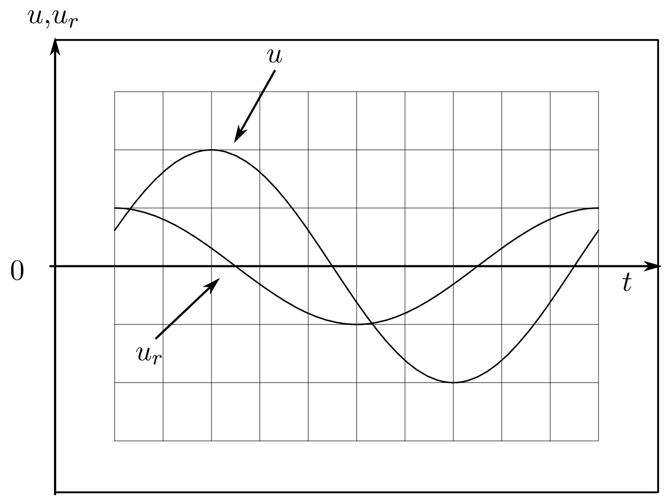
   Réponse :
   Le montage est valable si le générateur de courant n'impose pas de masse, c'est-à-dire avec un générateur à masse flottante.

10. Quelle tension visualise-t-on sur la voie A ? sur la voie B ? Que faut-il faire pour visualiser $\eta(t)$ et $u(t)$?

    Réponse :
    Sur la voie A, on visualise la tension $u_r(t) = r\eta(t)$. Donc il faut diviser par r la voie A pour visualiser $\eta(t)$.

    Sur la voie B, on visualise $-u(t)$. Donc il faut inverser la voie B pour visualiser $u(t)$.

La figure suivante montre une acquisition des tensions u_r et u faite pour une pulsation ω donnée. Le calibre est de $1\,\mathrm{V}$ sur les deux voies.



11. La tension u est-elle en avance ou en retard par rapport au courant η ?

    Réponse :
    La tension u est en retard par rapport au courant η car son maximum arrive après celui de la tension u_r.

12. Déterminer la valeur de la phase ϕ de la tension u par rapport au courant η. On donnera sa valeur en degré.

    Réponse :
    Une période du signal u_r (ou u) correspond à 10 carreaux. Donc un retard de 1 carreau correspond à un déphasage de $-36°$.

    Ici, on a 2 carreaux de déphasage entre u et u_r, donc $\boxed{\phi = -72°}$

13. Que vaut l'amplitude U_0 de la tension u ?

    Réponse :
    L'amplitude de $u(t)$ correspond à 2 carreaux, donc $\boxed{U_0 = 2\,\mathrm{V}}$.

14. Définir mathématiquement la valeur efficace s_{eff} d'un signal $s(t)$ périodique de période T.

    Réponse :
    $s_{eff} = \sqrt{\dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T s^2(t)dt}$

15. Soit un signal $s(t)$ sinusoïdal de période T, d'amplitude S_0 et de phase à l'origine nulle. Exprimer sa valeur efficace s_{eff} en fonction de S_0. On étblira cette relation.

    Réponse :

    On écrit la fonction $s(t)$: $s(t) = S_0 \cos(2\pi t/T)$

    $$s_{eff}^2 = \frac{1}{T}\int_0^T S_0^2 \cos^2(2\pi t/T)dt$$

    On linéarise le cosinus carré : $\cos^2(2\pi t/T) = \dfrac{1+\cos(4\pi t/T)}{2}$

    Puis on intègre, et on obtient :

    $$s_{eff}^2 = \frac{S_0^2}{2T}\left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos(4\pi t/T)dt\right] = \frac{S_0^2}{2}$$

    Car $\int_0^T \cos(4\pi t/T)dt = 0$. On en déduit $\boxed{s_{eff} = S_0/\sqrt{2}}$

16. En déduire la valeur efficace de la tension $u(t)$. On donne $\sqrt{2} = 1{,}4$.

Réponse :
$u_{eff} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1{,}4\,\mathrm{V}$