# Synthèse chapitre 21 : Mouvements dans un champ de forces centrales

## *I. Forces centrales conservatives*

**Force centrale** : Une force $\overrightarrow{F}$ s'appliquant sur un point matériel $M$ est dite centrale de centre $O$ si la droite d'action de la force est la droite $(OM)$. Le problème est par ailleurs supposé à symétrie sphérique si bien que finalement :

$$\overrightarrow{F} = F(r)\overrightarrow{u_r}$$

On montre qu'une telle force est **conservative** et donc qu'elle dérive d'une énergie potentielle selon

$$\boxed{F(r) = -\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r}}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

**Exemples de forces centrales conservatives** :

a. Force de rappel élastique

Soit $O$ un point **fixe** et $M$ un point matériel mobile lié à $O$ par une force de rappel élastique (modélisée par sa constante de raideur $k$) de la forme

$$\overrightarrow{F} = -k(r - r_0)\overrightarrow{e_r}$$

Cette force est portée par la droite $(OM)$ à tout instant. Elle est donc centrale de centre $O$. Elle est également conservative (car elle ne dépend que de $r$) et dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p}$ selon :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = k(r - r_0) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{2}k(r - r_0)^2\right)$$

On choisit généralement la référence d'énergie potentielle nulle en $r = r_0$, ce qui conduit à :

$$\boxed{E_\mathrm{p}(r) = \frac{1}{2}k(r - r_0)^2}$$

b. Force d'interaction gravitationnelle

Soit $O$ un point matériel **fixe** de masse $m_1$ et $M$ un point matériel de masse $m_2$. On note $\mathcal{G} = 6,67.10^{-11}$ m$^3$.kg$^{-1}$.s$^{-2}$ la constante gravitationnelle. La force exercée par le point matériel $O$ sur le point matériel $M$ s'écrit

$$\overrightarrow{F} = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Elle est portée par la droite $(OM)$ . Il s'agit donc d'une force centrale de centre $O$. Elle est également conservative (car elle ne dépend que de $r$) et dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p}$ selon :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = \mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(-\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{E_\mathrm{p}(r) = -\mathcal{G}\frac{m_1 m_2}{r}}$$

en fixant la référence d'énergie potentielle nulle à l'infini.

c. Force d'interaction coulombienne

Soit $O$ un point matériel **fixe** de charge $q_1$ et $M$ un point matériel de charge $q_2$. On note $\epsilon_0 = 8,85.10^{-12}$ F.m$^{-1}$ la permittivité du vide. La force coulombienne exercée par le point matériel $O$ sur le point matériel $M$ est donnée par la relation :

$$\overrightarrow{F} = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2}\overrightarrow{e_r}$$

Elle est portée par la droite $(OM)$. Il s'agit donc d'une force centrale de centre $O$. Elle est également conservative (car ne dépend que de $r$) et dérive de l'énergie potentielle $E_\mathrm{p}$ selon :

$$\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{p}}{\mathrm{d}r} = -\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r^2} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(\frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}\right)$$

$$\Rightarrow \qquad \boxed{E_\mathrm{p}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0}\frac{q_1 q_2}{r}}$$

En fixant la référence d'énergie potentielle nulle à l'infini. Le module des forces gravitationnelle et coulombienne est proportionnel à l'inverse du carré de la distance $OM$. On parle de forces en $1/r^2$.

d. Généralisation : forces dites newtoniennes

Les forces gravitationelle et coulombienne sont un type particulier de forces centrales conservatives appelées **forces newtoniennes**. Elles s'écrivent sous la forme

$$\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{K}{r^2}\overrightarrow{u_r} \quad \text{et} \quad E_\mathrm{p}(r) = -\frac{K}{r} + \mathrm{C}^{\mathrm{ste}}}$$

Remarques :

- Si $K > 0$ la force est attractive et si $K < 0$, la force est répulsive.
- force gravitationelle : $K = \mathcal{G} m_1 m_2$
- force coulombienne : $K = \frac{-q_1 q_2}{4\pi\epsilon_0}$

# *II. Mouvement à forces centrales conservatives*

**Conservation du moment cinétique** : la force centrale $\overrightarrow{F}$ est colinéaire à $\overrightarrow{OM}$ donc $\overrightarrow{\mathscr{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$. Par TMC, il y a donc conservation du moment cinétique :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathscr{L}_O}(M) = \overrightarrow{\mathrm{C}}^{\mathrm{ste}}}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

**Conséquence 1 : mouvement plan** : $\overrightarrow{\mathscr{L}_O}(M)$ est constant, il est donc de **direction fixe**. Par construction du produit vectoriel, $\overrightarrow{OM}$ est toujours orthogonal à ce vecteur donc

$\boxed{M \text{ est contenu dans le plan passant par } O \text{ et orthogonal au moment cinétique, c'est-à-dire dans le plan } (O, \overrightarrow{OM_0}, \overrightarrow{v_0})}$

.

* * * * * * * * * * * * * * * *

**Conséquence 2 : loi des aires** : En coordonnées cylindriques (en choisissant $\overrightarrow{u_z}$ orthogonal au plan du mouvement),

$$\overrightarrow{\mathscr{L}_O}(M) = mr^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{\mathrm{C}}^{\mathrm{ste}}$$

On introduit la **constante** des aires $\mathscr{C}$ selon

$$\boxed{\mathscr{C} = r^2\dot{\theta}}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

**Conservation de l'énergie mécanique** : La force centrale est une force conservative donc par TPM, l'énergie mécanique se conserve :

$$\boxed{E_{\mathrm{m}} = \mathrm{c}^{\mathrm{ste}}}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

**Expression de l'énergie mécanique** :

$$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2\right\}$$

Or $$(r\dot{\theta})^2 = \frac{\mathscr{C}^2}{r^2}$$

Ainsi $$E_{\mathrm{c}} = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + \frac{\mathscr{C}^2}{r^2}\right\}$$

$$\boxed{E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{c}} + E_{\mathrm{p}} = \frac{1}{2}m\left\{\dot{r}^2 + \frac{\mathscr{C}^2}{r^2}\right\} + E_{\mathrm{p}}(r)}$$

On obtient alors une énergie qui ne dépend que d'un unique degré de liberté $r$ (bien que le mouvement soit bidimensionnel). On introduit alors une énergie potentielle effective

$$\boxed{E_{\mathrm{peff}} = m\frac{\mathscr{C}^2}{2r^2} + E_{\mathrm{p}}(r)}$$

$m\mathscr{C}^2/2r^2$ n'est pas une « vraie » énergie potentielle. C'est un terme qui traduit la barrière centrifuge due à la rotation de $M$. Tout se passe comme si le fait que $M$ tourne introduit une « force répulsive ».

# *III. Champ newtonien, étude de $E_{peff}$*

**Cas d'une interaction répulsive $K < 0$** : Dans ce cas, $E_{\mathrm{peff}}$ est strictement décroissante de $+\infty$ à 0. On a donc un état de diffusion avec $r \in [r_{\min}, +\infty]$ → trajectoire hyperbolique.

* * * * * * * * * * * * * * * *

**Cas d'une interaction attractive $K > 0$** : Il existe dans ce cas un minimum de $E_{\mathrm{peff}}$ en $r_{\mathrm{m}} = m\mathscr{C}^2/K$ et pour lequel $E_{\mathrm{peff}}(r = r_{\mathrm{m}}) = -K^2/2m\mathscr{C}^2$. Trois cas possibles :

- $E_{\mathrm{m}} > 0$ : état de diffusion → trajectoire hyperbolique.
- $E_{\mathrm{peff}}(r = r_{\mathrm{m}}) < E_{\mathrm{m}} < 0$ : état lié avec $r$ variable entre $r_{\min}$ et $r_{\max}$ → trajectoire elliptique de demi-grand axe $a$ tel que $2a = r_{\min} + r_{\max}$
- $E_{\mathrm{m}} = E_{\mathrm{peff}}(r = r_{\mathrm{m}})$ : état lié avec $r = r_{\mathrm{m}}$ constant → trajectoire circulaire

# *IV. Les trois lois de Kepler*

Les lois de Kepler décrivent le mouvement des planètes du système solaire autour de notre étoile de masse $m_A$.
**Loi des orbites** : Les planètes du système solaire décrivent des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe l'un des foyers.

**Loi des aires** : Les aires balayées par le rayon vecteur $\overrightarrow{SP}$ (où $S$ représente le Soleil et $P$ une planète) pendant des intervalles de temps égaux sont égales (nous l'avons démontré au début du cours).

**Loi des périodes** : Le carré de la période $T$ de révolution d'une planète autour du Soleil est proportionnel au cube du demi-grand axe $a$ de sa trajectoire elliptique :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_A} = \mathrm{C^{ste}}}$$

Avec $m_A$ la masse de l'astre attracteur (le Soleil dans le cas des planiètes du système Solaire).

Par généralisation, les lois de Kepler restent valables pour tous les systèmes à deux corps en interaction gravitationnelle pour lesquels l'un des corps est beaucoup plus massif que l'autre (et est donc fixe dans le référentiel galiléen d'étude $\mathcal{R}_g$) :

- planètes autour de leur étoile
- Lune autour de la Terre
- satellites artificiels autour de la Terre
- ...

# *V. Mouvement circulaire, mouvement elliptique*

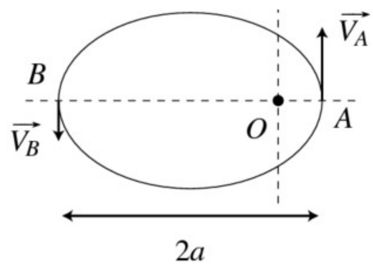
Dans le cas du **mouvement circulaire** de rayon $r_\mathrm{m}$, il faut savoir **redémontrer** les résultats suivants :

1. le mouvement est uniforme à la vitesse $\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_A}{r_\mathrm{m}}}}$
2. $\boxed{E_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{G}mm_A}{r_\mathrm{m}}}$
3. $\boxed{E_\mathrm{c} = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{\mathcal{G}mm_A}{2r_\mathrm{m}}}$
4. $\boxed{E_\mathrm{m} = E_\mathrm{c} + E_\mathrm{p} = -\frac{\mathcal{G}mm_A}{2r_\mathrm{m}}}$

* * * * * * * * * * * * * * * *

Dans le cas d'un mouvement elliptique, des résultats analogues sont à connaître (mais la démonstration n'est pas exigible) :

1. Les lois de Kepler s'appliquent, en particulier la loi des périodes en considérant $a$ le demi-grand axe de l'ellipse :
$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}m_A}}$$
2. L'énergie mécanique prend, sur une trajectoire elliptique l'expression suivante (le rayon $r$ est remplacé par le demi grand-axe $a$) :
$$\boxed{E_\mathrm{m} = -\mathcal{G}\frac{mm_A}{2a}}$$
3. L'énergie potentielle est facilement identifiable. Lorsque le point matériel en orbite est à une distance $r$ du centre attracteur, l'énergie potentielle s'écrit
$$\boxed{E_\mathrm{p} = -\mathcal{G}\frac{mm_A}{r}}$$
4. Il devient alors facile de déterminer finalement l'énergie cinétique par différence
$$\boxed{E_\mathrm{c} = E_\mathrm{m} - E_\mathrm{p}}$$




$a$ est le demi grand axe de l'ellipse. L'astre attracteur est localisé en $O$ (en l'un des foyers de l'ellipse). $A$ est appelé périgée, $B$ l'apogée. En $A$ et $B$, la vitesse est purement orthoradiale donc en ces points $\dot{r} = 0$