Mécanique – chapitre 5

Correction TD application

I Mouvements simples de particules chargées

1) On étudie la particule M de masse m et de charge q assimilée à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Cette particule est soumise à la force de Lorentz

$$\overrightarrow{F} = q(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$$

La trajectoire est rectiligne et uniformément accélérée, soit

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{a} = \overrightarrow{\mathrm{cte}} \quad \Rightarrow \quad \overrightarrow{v} = \overrightarrow{a}t + \overrightarrow{v_0}$$

La norme de $\overrightarrow{v}$ varie, donc l'énergie cinétique aussi. Or, **seule la force électrique travaille**[1], le champ est un donc champ électrique. De plus, pour que la trajectoire soit rectiligne, il faut, d'après l'expression de $\overrightarrow{v}(t)$, que $\overrightarrow{a}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{v_0}$. Or,

$$\overrightarrow{a} = \frac{q}{m}\overrightarrow{E}$$

donc **$\overrightarrow{E}$ est colinéaire à $\overrightarrow{v_0}$**.

2) On note O l'origine du repère. On intègre l'expression de la vitesse pour avoir la position $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ de la particule :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \frac{q}{2m}t^2\,\overrightarrow{E} + t\overrightarrow{v_0} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}_0}$$

3) La trajectoire circulaire est celle d'une charge dans un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse initiale. On en déduit que **$\overrightarrow{B}$ est suivant Oz et que $\overrightarrow{v_0}$ est dans le plan xOy.**

4) La trajectoire étant circulaire, la vitesse en coordonnées polaires a pour expression $\overrightarrow{v} = R_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et l'accélération se réduit à

$$\overrightarrow{a} = -R_0\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + R_0\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la charge q dans le référentiel d'étude que l'on supposera galiléen, s'écrit :

$$m\overrightarrow{a} = q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}$$

Or, $\overrightarrow{B} = B\overrightarrow{u_z}$. Par conséquent,

$$\begin{aligned} q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} &= qR_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \wedge B\overrightarrow{u_z} \\ &= qBR_0\dot{\theta}(\underbrace{\overrightarrow{u_\theta} \wedge \overrightarrow{u_z}}_{=\overrightarrow{u_r}}) \\ \Leftrightarrow \boxed{q\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} &= qBR_0\dot{\theta}\overrightarrow{u_r}} \end{aligned}$$

En projetant le PFD sur la base polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, il vient :

$$\begin{cases} -mR_0\dot{\theta}^2 = qR_0\dot{\theta}B \\ R_0\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

1. La force de Lorentz magnétique $q(\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B})$ est perpendiculaire à $\overrightarrow{v}$ donc à la trajectoire

On obtient alors

$$\boxed{\dot\theta = -\frac{qB}{m} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \theta(t) = -\frac{qB}{m}t + \theta_0}$$

Si la charge est positive, elle tourne dans le sens anti-trigonométrique (horaire) par rapport à Oz. Puisque $\dot\theta$ est constante, le mouvement et circulaire uniforme et $v_0 = R_0\left|\dot\theta\right|$ (c'est une norme donc nécessairement positive !) d'où

$$\boxed{R_0 = \frac{mv_0}{qB}}$$

II Filtre de vitesse

1) Dans le référentiel du laboratoire, le système {ion} repéré par son point matériel M de masse m et de charge q dans un repère cartésien $(F_1,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_y},\overrightarrow{u_z})$ est soumis à la force de LORENTZ, telle que

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F} &= q\left(\overrightarrow{E} + \overrightarrow{v}\wedge\overrightarrow{B}\right)\\ &= qE\overrightarrow{u_y} + qBv_0\,(\underbrace{\overrightarrow{u_x}\wedge\overrightarrow{u_z}}_{=-\overrightarrow{u_y}})\\ \Leftrightarrow &\boxed{\overrightarrow{F} = q(E - Bv_0)\,\overrightarrow{u_y}}\end{aligned}$$

2) Pour avoir une trajectoire rectiligne sur $\overrightarrow{u_x}$, il faut que la somme des forces s'appliquant sur l'ion soit nulle. Ainsi, en négligeant le poids devant la force de LORENTZ, il faut **que la force de LORENTZ soit nulle**.
3) La condition précédente avec l'équation de la première question amène à

$$E - v_0B = 0 \Leftrightarrow \boxed{v_0 = \frac{E}{B}}$$

Ainsi, si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à $v_0\overrightarrow{u_x}$, alors elle sera déviée et ne passera pas par la fente F_2 : on filtre effectivement les vitesses.

III Déviation d'un électron

1) La particule arrive dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\overrightarrow{B} = \overrightarrow{\text{cte}}$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\overrightarrow{e_x}$ orthogonale à $\overrightarrow{B}$. La trajectoire est donc un cercle de rayon $R = mv_0/(qB_0)$, avec $B_0 = \left\|\overrightarrow{B}\right\|$. La force en A est dirigée vers le bas, on en déduit la position du centre C_1 de la trajectoire.

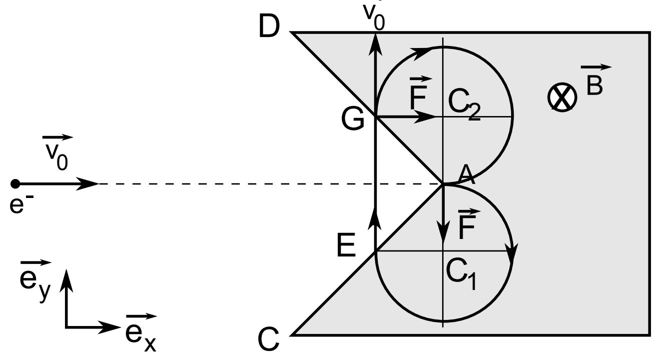

FIGURE 5.1 – Trajectoire dans la zone.

2) La particule ressort par la face AC en E, avec une vitesse selon $\overrightarrow{e_y}$ car le triangle AC_1E est isocèle et rectangle en C_1.
3) En dehors de la zone grisée, la particule est isolée, donc elle est animée d'un mouvement rectiligne uniforme ($\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{\text{cte}}$) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

   La particule entre à nouveau dans le zone où règne le champ magnétique par la face AD, avec une vitesse $\vec{v} = v_0\overrightarrow{e_y}$. La trajectoire est alors circulaire de même rayon R (car la vitesse est la même en norme). On représente la force magnétique en G, et on en déduit le position C_2 du centre de la trajectoire. La particule arrive en A avec la vitesse $\vec{v} = -v_0\overrightarrow{e_x}$ et sort de la zone grisée.

   Au final, la particule a subi une déviation de π, comme si elle avait été réfléchie par un miroir. On pourrait donc appeler ce dispositif un **miroir magnétique**.

   Remarque

   Vérifiez que l'effet miroir est maintenu si la particule incidente n'arrive plus en A. On constate en revanche que la particule n'emprunte plus le même chemin qu'à l'aller.

IV Imprimante jet d'encre

1) La gouttelette est chargée positivement, et subit la force électrique $\overrightarrow{F}_e = q\overrightarrow{E}$. Pour aller dans le sens des y croissants, il faut que $\overrightarrow{E}$ soit selon $\overrightarrow{u_y}$, comme indiqué dans l'énoncé. Or, $\overrightarrow{E} = -\overrightarrow{\text{grad}}\,V$, donc $\overrightarrow{E}$ va des **hauts potentiels** vers les **bas potentiels** ; il faut donc $V_1 > V_2$, soit

$$\boxed{V_1 - V_2 > 0}$$

2) La gouttelette a un volume V et une masse volumique ρ. On en déduit

$$\boxed{m = \rho V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 1{,}0 \times 10^3\,\text{kg}\,\text{m}^{-3} \\ V = 10\,\text{pL} = 10 \times 10^{-12}\,(\text{dm})^3 \\ \quad = 1{,}0 \times 10^{-11}\,(10^{-1}\text{m})^3 \\ \quad = 1{,}0 \times 10^{-14}\,\text{m}^3 \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{m = 1{,}0 \times 10^{-11}\,\text{kg}}$$

   Ainsi, on trouve

$$\left\|\overrightarrow{F}_e\right\| = qE \approx 1{,}7 \times 10^{-8}\,\text{N} \quad \text{et} \quad \left\|\overrightarrow{P}\right\| = mg \approx 1{,}0 \times 10^{-10}\,\text{N} \quad \text{soit} \quad \boxed{\left\|\overrightarrow{F}_e\right\| \approx 200 \times \left\|\overrightarrow{P}\right\|}$$

   On peut donc négliger le poids devant la force de Lorentz.
3) On applique le PFD à la gouttelette dans le référentiel de la salle d'impression, supposé galiléen, avec un repère cartésien tel qu'indiqué sur le schéma :

$$m\vec{a} = q\overrightarrow{E} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = \dfrac{qE}{m}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \dfrac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$$

   en intégrant une première fois avec $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{y}(0) = 0$, en ignorant le mouvement en z, puis en intégrant une seconde fois, avec $x(0) = 0 = y(0)$. On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y(x) = \frac{qE}{2m{v_0}^2}x^2}$$

   qui est l'équation d'une parabole. Ainsi, on trouve $Y_1 = y(L_1)$:

$$\boxed{Y_1 = 5{,}3 \times 10^{-3}\,\text{m} = 5{,}3\,\text{mm}}$$

4) Après être sortie du déflecteur, la gouttelette n'est soumise à aucune action sauf son poids, que l'on ignore sur la durée du trajet restant ($v_0 = 20\,\mathrm{m\,s^{-1}}$) : sa trajectoire est donc rectiligne et uniforme.
5) On trouve l'angle de sortie en prenant

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x} = \frac{\dot{y}(L_1)}{\dot{x}(L_1)} = \frac{qEL_1}{m{v_0}^2} = 2\frac{Y_1}{L_1}$$

L'angle trouvé étant petit ($\theta \approx 0{,}21\,\mathrm{rad}$), $\tan\theta \approx \theta \approx \sin\theta$. Or, on a

$$Y_2 = Y_1 + L_2 \sin\theta$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_2 = Y_1\left(1 + 2\frac{L_2}{L_1}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_1 = 5{,}3\times10^{-1}\,\mathrm{cm} \\ L_1 = 5{,}0\,\mathrm{cm} \\ L_2 = 20\,\mathrm{cm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{Y_2 = 4{,}8\,\mathrm{cm}}$$