

# Mouvement de particules chargées

## I Champs électrique et magnétique

### A Champ électrique

#### Définition

Un champ électrique  $\vec{E}(M,t)$  est un champ de vecteurs créé par des charges électriques et par des variations temporelles du champ magnétique.

#### Unités

$$\|\vec{E}(M,t)\| \quad \text{en} \quad \text{V m}^{-1}$$

La manière la plus simple pour créer un champ électrique est de constituer un condensateur avec deux armatures métalliques de surface  $S$ . On a alors

$$\vec{E} = \frac{1}{\varepsilon_0} \frac{q}{S} \vec{u}_z$$

avec la  $\varepsilon_0$  permittivité diélectrique du vide.

$\vec{E}$  va des charges positives aux négatives. On le verra, il indique le **sens de la force subie par une charge positive**.

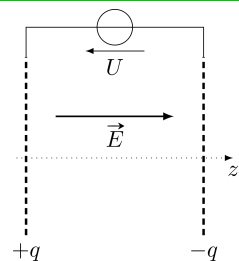


FIGURE 5.1 – Condensateur et champ électrique

- ◇ À l'intérieur d'un condensateur en TP, on a environ  $10 \text{ V mm}^{-1}$ , soit  $10 \text{ kV m}^{-1}$
- ◇ À la surface de la Terre, le champ électrique est d'environ  $10^2 \text{ V m}^{-1}$
- ◇ Le champ électrique créé lors d'un orage est d'environ  $10^4 \text{ V m}^{-1}$
- ◇ Le champ électrique pour la téléphonie mobile est d'environ  $50 \text{ V m}^{-1}$

### B Champ magnétique

#### Définition

Un champ magnétique  $\vec{B}(M,t)$  est un champ de vecteurs créé par des courants électriques et par des variations temporelles du champ électrique.

#### Unités

$$\|\vec{B}(M,t)\| \quad \text{en} \quad \text{Tesla (T)}$$

La manière la plus simple pour créer un champ magnétique est de constituer une bobine, par enroulement de  $N$  spires d'un fil métallique sur une longueur  $L$ . On a alors

$$\vec{B} = \mu_0 i \frac{N}{L} \vec{u}_z$$

avec la  $\mu_0$  perméabilité magnétique du vide.

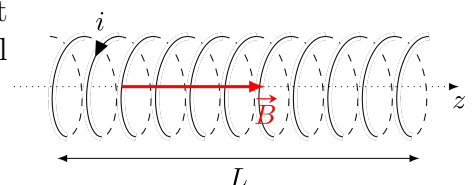


FIGURE 5.2 – Bobine et champ magnétique

On le verra en électromagnétisme, le champ magnétique est **orienté par le courant**.

Le Tesla est une « grande unité » : il est très difficile de dépasser les 10 T.

- ◇ À l'intérieur d'une bobine en TP, on a environ  $10^{-4} \text{ T}$
- ◇ Une bobine avec  $N = 1000$ ,  $L = 10 \text{ cm}$  et  $i = 1 \text{ A}$  donne  $10^{-2} \text{ T}$

- ◇ À la surface de la Terre, le champ magnétique est d'environ  $5 \times 10^{-5} \text{ T}$
- ◇ Le champ magnétique au centre d'un IRM est d'environ  $1 \text{ T}$
- ◇ Le champ magnétique d'un aimant permanent est d'environ  $[10^{-2} ; 10^{-1}] \text{ T}$

## II La force de LORENTZ

On considèrera dans toute la suite des champs **uniformes**<sup>1</sup> et **stationnaires**<sup>2</sup>

### A Définition

#### Définition : Force de LORENTZ

La force subie par une charge  $q$  plongée dans un champ électrique  $\vec{E}$  et un champ magnétique  $\vec{B}$  est appelée **force de LORENTZ**, telle que

$$\vec{F} = q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right)$$

On appelle  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  la **force électrique** et  $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$  la **force magnétique**

### B Comparaison au poids

Les particules chargées sont généralement très légères et rapides : pour un électron, on a  $m \approx 9.1 \times 10^{-31} \text{ kg}$  et  $\|\vec{v}\| \approx 10^6 \text{ m s}^{-1}$ . Seulement, leur charge est également faible, avec  $|e| \approx 1.6 \times 10^{-19} \text{ C}$  pour un électron ou un proton. Il est donc intéressant de connaître la différence de force entre le poids qu'elle subit et la force de LORENTZ, ce qui nous permettrait de négliger le poids dans le PFD. Avec  $g \approx 10 \text{ m s}^{-2}$ , on trouve

$$\|\vec{P}\| \approx 10^{-29} \text{ N}$$

Regardons ce qu'il en est pour les parties électrique et magnétique de la force de LORENTZ.

◇ **Partie électrique** :  $\|\vec{F}_e\| = eE$ , avec  $E \approx 10^4 \text{ V m}^{-1}$  :

$$\|\vec{F}_e\| \approx 10^{-15} \text{ N}$$

◇ **Partie magnétique** :  $\|\vec{F}_m\| = evB$ , avec  $B \approx 10^{-2} \text{ T}$  :

$$\|\vec{F}_m\| \approx 10^{-15} \text{ N}$$

Ainsi, dans les deux cas, on trouve

$$\frac{\|\vec{F}_e\|}{\|\vec{P}\|} = \frac{\|\vec{F}_m\|}{\|\vec{P}\|} \approx 10^{14}$$

#### Impact du poids vs. LORENTZ

Pour des particules chargées dans des conditions générales, le poids est négligeable devant la force de LORENTZ

1. Est uniforme une grandeur constante dans l'espace.

2. Est stationnaire une grandeur constante dans le temps.

## C Produit vectoriel

Pour calculer la force magnétique, il va falloir manipuler les produits vectoriels. Quelques rappels :

### Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs  $\vec{u}$  et  $\vec{v}$  s'écrit  $\vec{u} \wedge \vec{v}$ , et se lit « u vectoriel v ». C'est un **vecteur** :

◇ de direction **perpendiculaire** à  $\vec{u}$  et à  $\vec{v}$  :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{u} \quad \text{et} \quad \vec{u} \wedge \vec{v} \perp \vec{v}$$

◇ de sens donné par la règle de la **main droite** ;

◇ de norme

$$\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\| \|\vec{v}\| \sin(\theta)$$

avec  $\theta$  l'angle entre les deux vecteurs.

L'ordre des vecteurs est **primordial** dans un produit vectoriel : c'est en effet un opérateur **antisymétrique**, c'est-à-dire qu'il respecte

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = -\vec{v} \wedge \vec{u}$$

Pour une base orthonormée **directe** (BOND), qu'elle soit cartésienne, cylindrique ou sphérique, le produit vectoriel de deux vecteurs de base donne le troisième avec un signe + s'ils se suivent dans une permutation circulaire ( $x \rightarrow y \rightarrow z \rightarrow x$  ou  $r \rightarrow \theta \rightarrow z \rightarrow r$ ), et un signe - sinon. Par exemple :

$$\begin{aligned} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_y &= \vec{u}_z & \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z &= \vec{u}_x & \vec{u}_z \wedge \vec{u}_x &= \vec{u}_y \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_x &= -\vec{u}_z & \vec{u}_z \wedge \vec{u}_y &= -\vec{u}_x & \vec{u}_x \wedge \vec{u}_z &= -\vec{u}_y \end{aligned}$$

Ces données permettent de calculer n'importe quel produit vectoriel exprimé dans une BOND. En termes de composantes des vecteurs, on pourra déterminer le produit vectoriel avec la « règle du gamma » ; par exemple :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - v_y u_z \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

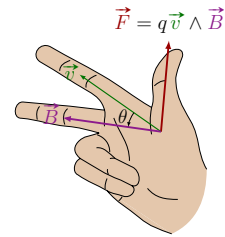


FIGURE 5.3 – Règle de la main droite

## D Puissance de la force de LORENTZ

### Propriété : puissance force magnétique

La puissance de la force de LORENTZ est

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = q \vec{E} \cdot \vec{v}$$

La puissance de la force magnétique est nulle, et un champ magnétique ne peut pas accélérer ou ralentir une particule chargée mais ne peut que la dévier.

La puissance de la force de LORENTZ est :

$$\mathcal{P}(\vec{F}) = \left( q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \right) \cdot \vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) = q\vec{E} \cdot \vec{v} + q \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}}_{\substack{\perp \vec{v} \\ =0}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = q\vec{E} \cdot \vec{v}} \quad \blacksquare$$

En effet,  $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$ , et le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul. Ainsi, la partie magnétique de la force de LORENTZ ne travaille pas ; le TPC donne alors

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = q\vec{E} \cdot \vec{v}$$

c'est-à-dire que seule la partie électrique peut faire varier l'énergie cinétique, et donc la vitesse, d'une particule chargée.

## E Potentiel électrostatique

### Propriété : force conservative et énergie potentielle

La force de LORENTZ est **conservative**, et dérive d'une d'une énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p,e}$  telle que

$$\mathcal{E}_{p,e} = -qEz$$

avec  $E$  la norme du champ électrique subit et  $z$  la position dans ce champ.

Le champ magnétique ne travaillant pas, on s'intéresse au travail élémentaire de la force électrique. Supposons un champ électrique  $\vec{E} = E\vec{u}_z$  :

$$\begin{aligned} \delta W_{AB}(\vec{F}) &= \vec{F}_e \cdot d\vec{OM} \\ \Leftrightarrow \delta W_{AB}(\vec{F}) &= qE\vec{u}_z \cdot (dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow \boxed{\delta W_{AB}(\vec{F})} &= qE dz \end{aligned}$$

On a donc bien  $\delta W_{AB}(\vec{F})$  qui ne **dépend pas du chemin suivi** ; elle est donc **conservative**, et on identifie  $\mathcal{E}_{p,e}$  à partir de  $\delta W_{AB}(\vec{F}) = -d\mathcal{E}_{p,e}$ , soit  $\mathcal{E}_{p,e} = -qEz$ .  $\blacksquare$

La situation avec un champ  $\vec{E}$  est en essence tout à fait similaire à celle du poids, provenant d'un champ gravitationnel : on obtient la même énergie potentielle à un signe près. En effet, la masse ne peut qu'être positive, alors qu'une charge peut être négative ; mais l'effet d'un champ  $\vec{E}$  sur une particule chargée est en tous points similaire à celle de l'action de la gravité sur une masse  $m$ .

Ainsi, puisque  $\vec{F}_e$  est conservative, on a

$$\vec{F}_e = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,e}$$

Il est souvent utile de déterminer  $\vec{E}$  plutôt que  $\vec{F}$  ; on introduit donc une autre grandeur :

### Définition : potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique** est la grandeur scalaire qui permet de calculer le champ  $\vec{E}$

Démonstration

Remarque

associé, tel que

$$V = \frac{\mathcal{E}_{p,e}}{q} \Rightarrow \vec{E} = -\overrightarrow{\text{grad}} V$$

On retrouve alors les notions du début d'année en électrocinétique :

### Définition : tension

La **tension** entre deux points A et B est la **différence de potentiel** entre ces deux points :

$$U_{AB} = V(A) - V(B)$$

On trouve finalement le lien entre champ électrique et tension entre deux plaques chargées : en utilisant

$$\mathcal{E}_{p,e} = -qEz \quad , \quad V = \mathcal{E}_{p,e}/q \quad \text{et} \quad U_{AB} = V(A) - V(B)$$

on a

$$U_{AB} = -Ez_A + Ez_B = E(z_B - z_A) = Ed$$

En appliquant une tension  $U$  entre deux grilles planes parallèles et distantes de  $d$ , on obtient un champ électrique **perpendiculaire** aux grilles, dirigé vers les potentiels **décroissants** (borne  $\ominus$ ) de norme

$$\|\vec{E}\| = \frac{U}{d}$$

Voilà donc comment faire un condensateur ! Mais alors, à quoi ça sert ?

## III Mouvement dans un champ électrique

### A Situation générale

1 **Système** : {particule} de masse  $m$  de charge  $q$  dans un champ  $\vec{E}$ .

2 **Schéma** : ci-contre.

3 **Modélisation** :

◇ Repère : cartésien,  $\vec{u}_z \perp$  grilles, soit  $\vec{E} = E\vec{u}_z$  avec  $E = U/d$

◇ Instant initial : la particule part de  $z = 0$ ,  $\vec{OM}(0) = \vec{0}$

4 **BDF** :

Poids négligeable devant  $\vec{F}$   
 Force électrique  $\vec{F} = q\vec{E} = qE\vec{u}_z$

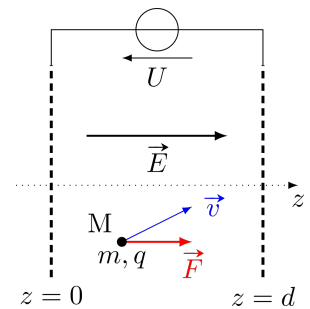


FIGURE 5.4 – Situation générale

5 **PF** :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

6 **Équations scalaires** :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases}$$

7 **Réponse aux questions.** Il est possible d'intégrer ces équations pour obtenir les équations horaires,  $E$  étant uniforme et stationnaire ; on va distinguer deux cas selon la vitesse initiale de la particule.

## B Accélération d'une particule chargée

On suppose ici une particule chargée positivement ( $q > 0$ ), arrivant en  $z = 0$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_z$ , c'est-à-dire **dans le sens du champ**. On s'intéresse à sa vitesse en sortie, en  $z = d$ . Comme le système est **conservatif** et qu'on s'intéresse à un instant précis du mouvement, il est plus astucieux d'utiliser le **TEM** plutôt que le PFD :

- ◇ **En**  $z = 0$  : la norme de la vitesse est  $v_0$ , et l'énergie potentielle est  $qV(0)$ , d'où l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m(0) = \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0)$$

- ◇ **En**  $z = d$  : la norme de la vitesse est  $v_f$ , et l'énergie potentielle est  $qV(d)$ , d'où l'énergie mécanique

$$\mathcal{E}_m(d) = \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_0^2 + qV(0) &= \frac{1}{2}mv_f^2 + qV(d) \\ \Leftrightarrow v_f^2 &= v_0^2 + \frac{2q}{m}(V(0) - V(d)) \\ \Leftrightarrow v_f &= \sqrt{v_0^2 + \frac{2qU}{m}} \end{aligned}$$

### Conclusion

Une particule chargée positivement et lancée dans le sens d'un champ magnétique est accélérée, sa vitesse finale augmentant en  $\sqrt{U}$ .

En faisant l'application numérique pour un proton de charge  $e = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C}$ , de masse  $m = 1,673 \times 10^{-27} \text{ kg}$  partant de  $v_0 = 0 \text{ m s}^{-1}$  et accéléré par  $U = 1 \text{ kV}$ , on trouve

$$v_f = 4,4 \times 10^5 \text{ m s}^{-1} = 440 \text{ km s}^{-1}$$

Remarque

- L'électro-volt est une unité d'énergie, telle que

$$1,602 \times 10^{-19} \text{ J} = 1,602 \times 10^{-19} \text{ C} \times 1 \text{ V} = e \times 1 \text{ V}$$

C'est l'énergie cinétique que gagne un électron (ou un proton) lorsqu'il est accéléré par une tension de 1 V. Dans les accélérateurs de particules modernes, on touche au TeV (tera-électron-volt)

- Si  $U < 0$  ou  $q < 0$ , on peut ralentir la particule chargée. Elle peut même faire demi-tour si l'énergie potentielle acquise est supérieure à son énergie cinétique initiale ; elle ressortira alors avec la même énergie cinétique qu'au départ (puisque  $\mathcal{E}_{p,e}(z = 0)$  ne change pas), donc la même vitesse en norme, mais bien sûr de sens opposé.

## C Déviation d'une particule chargée

On considère cette fois une particule chargée arrivant **perpendiculairement** à un champ  $\vec{E}$ . Prenons  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{u}_x$  et  $\vec{E} = E \vec{u}_z$ , avec  $E = U/d$ .

On reprend le résultat obtenu dans la situation générale (A) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases}$$

On intègre, avec  $\dot{x}(0) = v_0$  et  $\dot{z}(0) = 0$  ; on ignore le mouvement en  $y$  :

$$\begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{z} = \frac{qE}{m}t \end{cases}$$

On intègre une seconde fois, avec  $x(0) = 0 = z(0)$  :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ z(t) = \frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$$

On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$z(x) = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2$$

C'est une trajectoire parabolique, en tout point **similaire à la chute libre**.

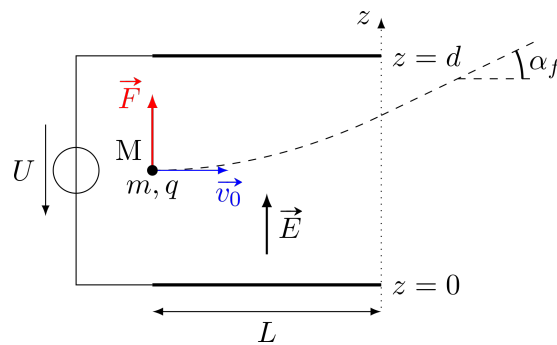


FIGURE 5.5 – Situation de déviation

Remarque

On peut déterminer l'angle de déviation  $\alpha_f$  entre la trajectoire de la particule au départ de son mouvement, et une fois qu'elle a quitté le champ  $\vec{E}$ . On trouve le temps de sortie  $t_f$  tel que  $x(t_f) = L$ , soit  $t_f = L/v_0$ .

On trouve l'angle de sortie en prenant

$$\tan \alpha_f = \frac{dz}{dx} = \frac{\dot{z}(t_f)}{\dot{x}(t_f)}$$

Or,

$$\begin{cases} \dot{x}(t_f) = v_0 \\ \dot{z}(t_f) = \frac{qEL}{mv_0} \end{cases}$$

Avec  $E = U/d$ , et si l'angle est petit, on a donc

$$\tan \alpha_f \approx \alpha_f = \frac{qUL}{mdv_0^2}$$

Ainsi, l'angle de déviation **est proportionnel à  $U$** .

## D Applications

On utilise rarement le champ  $\vec{E}$  seul, il est souvent utilisé avec  $\vec{B}$ . On peut néanmoins citer quelques applications :

- ◇ **Accélérateur linéaire.** On peut accélérer une particule chargée grâce à un champ électrique.
- ◇ **Oscilloscope analogique.** Un faisceau d'électrons de vitesse initiale fixée (grâce à un accélérateur linéaire) est dévié par la tension de mesure. Cette déviation est proportionnelle à la tension mesurée. En utilisant un écran fluorescent, on visualise l'impact des électrons et ainsi la tension mesurée en balayant l'écran à une vitesse déterminée par le calibre temporel.

## IV Mouvement dans un champ magnétique

### A Mise en équation

- 1 **Système :** {particule} de masse  $m$  de charge  $q$  dans un champ  $\vec{B}$ .
- 2 **Schéma :**

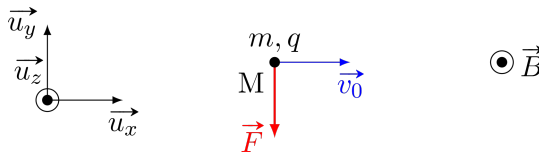


FIGURE 5.6 – Situation initiale

- 3 **Modélisation :**
  - ◇ Repère : cartésien,  $\vec{u}_z$  direction de  $\vec{B}$  soit  $\vec{B} = B\vec{u}_z$
  - ◇ Instant initial : la particule part de l'origine,  $\vec{OM}(0) = \vec{0}$
- 4 **BDF :**

$$\begin{aligned}
 &\text{Poids} && \text{négligeable devant } \vec{F} \\
 &\text{Force magnétique } \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \\
 &\Leftrightarrow && \vec{F} = -q\dot{x}B\vec{u}_y + q\dot{y}B\vec{u}_x
 \end{aligned}$$

- 5 **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

- 6 **Équations scalaires :**

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}(t)B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}(t)B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases}$$

- 7 **Réponse aux questions.** Ici aussi, on va distinguer deux cas selon la colinéarité de la vitesse initiale avec le champ.

On remarque cependant, avant toute évolution due aux conditions initiales, que le TPC nous donne une information sur le futur du système. En effet, la force magnétique ne travaillant pas ( $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$ ), on a

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = 0$$

donc la vitesse est constante en norme, notamment

$$v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2 = \text{cte}$$

Or, avec la projection du PFD on a  $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = \text{cte}$ , donc on sait déjà que



### Analyse du mouvement en champ $\vec{B}$

Le mouvement dans un champ  $\vec{B}$  dirigé selon  $\vec{u}_z$  se fait tel que

$$v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = \text{cte}$$

Étudions les deux cas intéressants.

#### **B** Vitesse initiale colinéaire au champ

Prenons  $\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_z$ . Comme  $v_x(t)^2 + v_y(t)^2$  et qu'on part avec une vitesse nulle sur  $\vec{u}_x$  et  $\vec{u}_y$ , alors  $v_x(t)$  et  $v_y(t)$  sont nulles à tout instant. La composante de  $v_z(t)$  est quant à elle également constante, et égale à  $v_0$ . Ainsi,

Une particule chargée de vitesse initiale colinéaire au champ magnétique a un mouvement rectiligne uniforme.

Regardons l'autre situation.

#### **C** Vitesse initiale perpendiculaire au champ

Prenons

$$\vec{v}(0) = v_0 \vec{u}_x$$

$v_z(t)$  étant constant et  $v_z(0)$  étant nulle, il n'y a pas de mouvement en  $z$ .

#### IV.C.1 Trajectoire

Avec le PFD précédent :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m} \dot{x}(t) \end{cases}$$

d'où en intégrant

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB}{m} y(t) + K \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m} x(t) + K' \end{cases}$$

et avec les conditions initiales :

$$\dot{x}(0) = v_0 \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = \frac{qB}{m} \underbrace{y(0)}_{=0} + K = K \quad \text{donc} \quad K = v_0$$

$$\dot{y}(0) = 0 \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = -\frac{qB}{m} \underbrace{x(0)}_{=0} + K' = K' \quad \text{donc} \quad K' = 0$$

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB}{m} y(t) + v_0 \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m} x(t) \end{cases}$$

Étant donné que  $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = \text{cte} = v_0^2$ , on a

$$\left(\frac{qB}{m}y(t) + v_0\right)^2 + \left(-\frac{qB}{m}x(t)\right)^2 = v_0^2$$

soit, en notant  $\omega_c = |q|B/m$  :

$$\left(y + \frac{mv_0}{qB}\right)^2 + (x)^2 = \left(\frac{v_0}{\omega_c}\right)^2$$

On reconnaît l'équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes :

### Rappel

L'équation cartésienne d'un cercle de centre  $(x_0, y_0)$  et de rayon  $R$  est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Dans notre cas, le centre est  $\left(0, -\frac{mv_0}{qB}\right)$  et le rayon est  $R_c = \frac{v_0}{\omega_c} = \frac{v_0 m}{|q|B}$

◇ Si  $q > 0$ , alors  $q = |q|$  et le centre est en  $\left(0, -\frac{v_0}{\omega_c}\right) = (0, -R_c)$  ;

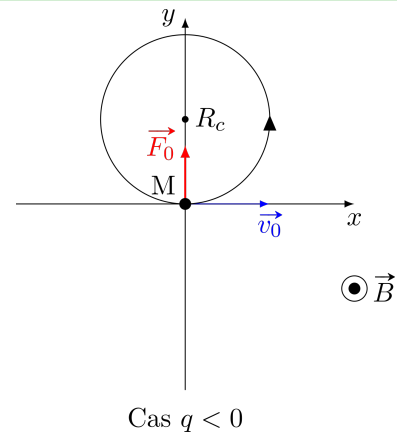
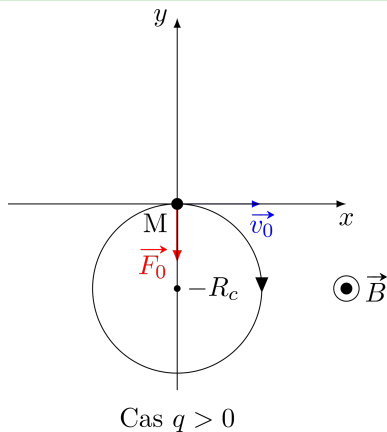
◇ Si  $q < 0$ , alors  $q = -|q|$  et le centre est en  $\left(0, \frac{v_0}{\omega_c}\right) = (0, R_c)$  ;

On introduit alors le vocabulaire suivant :

### Définition

Les constantes  $R_c$  et  $\omega_c$  sont appelées **rayon cyclotron** et **pulsation cyclotron**, et sont telles que

$$R_c = \frac{v_0}{\omega_c} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{|q|B}{m}$$



### IV.C.2 Équations horaires

◇ **Sur  $x$**  : On part de  $\dot{y} = -qBx/m$  que l'on injecte dans la projection sur  $\vec{u}_x$  du PFD :

$$\begin{aligned} \ddot{x}(t) &= \frac{qB}{m}\dot{y}(t) = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 x(t) \\ \Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + \omega_c^2 x(t) &= 0} \end{aligned}$$

On a donc la solution générale

$$x(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t)$$

Et avec les conditions initiales

$$x(0) = A \quad \text{or} \quad x(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = 0$$

$$\dot{x}(0) = \omega_c B \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad \text{donc} \quad B = \frac{v_0}{\omega_c}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega_c} \sin(\omega_c t)}$$

◇ **Sur  $y$**  : On part de  $\dot{x} = qBy/m + v_0$  que l'on injecte dans la projection sur  $\vec{u}_y$  du PFD :

$$\ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m} \dot{x}(t) = -\left(\frac{qB}{m}\right)^2 y(t) - \frac{qB}{mv_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x}(t) + \omega_c^2 x(t) = -\omega_c^2 \frac{mv_0}{qB}}$$

On a donc la solution générale

$$y(t) = A \cos(\omega_c t) + B \sin(\omega_c t) - \frac{mv_0}{qB}$$

Et avec les conditions initiales

$$y(0) = A - \frac{mv_0}{qB} \quad \text{or} \quad y(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = \frac{mv_0}{qB}$$

$$\dot{y}(0) = \omega_c B \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0$$

$$\Rightarrow \boxed{y(t) = \frac{mv_0}{qB} (\cos(\omega_c t) - 1)}$$

Ainsi,

### Conclusion

Lors du mouvement d'une particule chargée dans un champ  $\vec{B}$  perpendiculaire à sa vitesse initiale  $v_0$ , la particule décrit un cercle de rayon  $R_c$ , de centre  $(0, \pm R_c)$  à la vitesse angulaire  $\omega_c$ .

## D Cas général

Supposons  $\vec{v}_0 = v_{0,x} \vec{u}_x + v_{0,z} \vec{u}_z$ . Les équations du mouvement découlent le mouvement dans le plan  $xy$  et selon  $z$  :

- Sur  $z$  on garde une vitesse constante :  $v_z(t) = v_{0,z}$  ;
- Pour les composantes sur  $x$  et  $y$ , on a  $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = v_{0,x}^2$  et les mêmes équations différentielles : le mouvement est un cercle de rayon  $R = \frac{v_{0,x}}{\omega_c}$ .

Ainsi, la trajectoire est la superposition d'une rotation circulaire uniforme autour de  $(Oz)$  et d'une translation le long de cet axe : c'est un **mouvement hélicoïdal**. Une animation est disponible en ligne<sup>3</sup>.

## E Applications

◇ **Spectromètre de masse**. Un spectromètre de masse permet de **mesurer la masse d'atomes**, et éventuellement de déterminer les abondances isotopiques (utilisable par exemple pour la datation). Le principe est le suivant :

- Des atomes sont ionisés dans une chambre d'ionisation ;
- Une ouverture fait sortir un flux de particules qui sont accélérées par un champ électrique, pour les amener à une vitesse  $v_f = \sqrt{\frac{2qU}{m}}$  ;

3. <https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Charges/general.php>

- Un champ magnétique courbe ensuite leur trajectoire, avec un rayon

$$R_c = \frac{mv_f}{qB} = \sqrt{\frac{2qU}{m}} \frac{m}{qB} = \frac{1}{B} \sqrt{\frac{2U}{q}} \sqrt{m}$$

Ainsi, la donnée de la distance d'impact permet de retrouver la masse des particules !

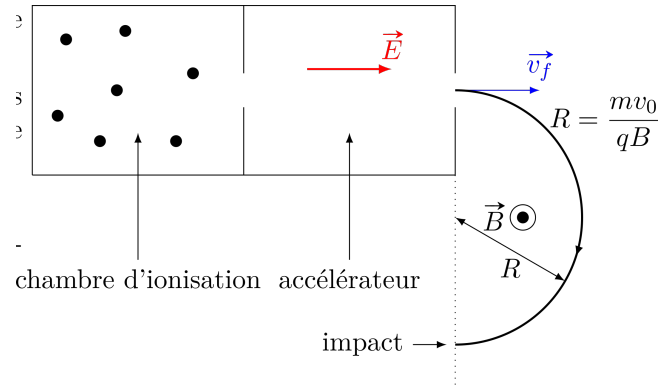


FIGURE 5.7 – Fonctionnement d'un spectromètre

- ◇ **Le cyclotron.** Il est constitué de deux demi-cylindres dans lequel règne un champ magnétique. Entre les deux demi-cylindres, deux électrodes imposent un champ électrique.

- La particule chargée est accélérée dans l'espace entre les cylindres ;
- Elle fait demi-tour grâce à un champ magnétique qui la fait revenir dans la zone entre-deux ;
- Avec un courant alternatif bien réglé, la tension accélère de nouveau la particule ;
- Le champ magnétique la fait revenir, et ainsi de suite.

À chaque demi-tour, l'énergie cinétique croît de  $eU$ . La vitesse croît donc comme la racine carré du nombre de passages dans l'espace entre les cylindres.

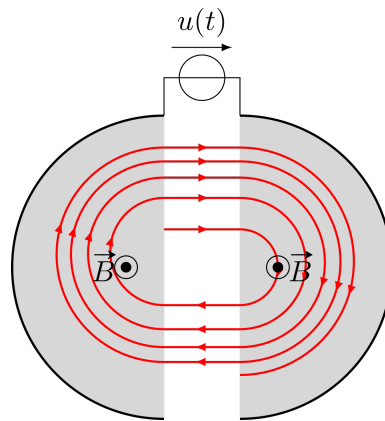
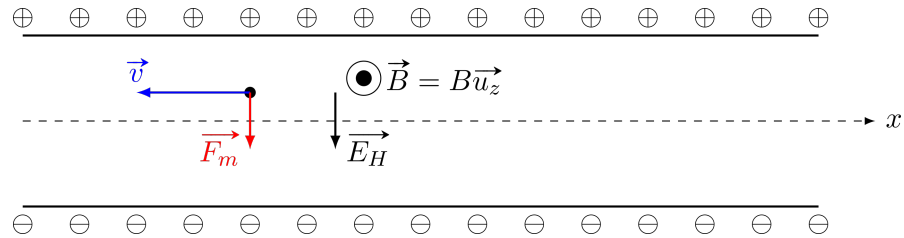


FIGURE 5.8 – Fonctionnement d'un cyclotron

Le rayon de courbure est proportionnel à la vitesse de la particule : la sélection de ce rayon permet la sélection de l'énergie cinétique voulue. Voir l'animation en ligne <sup>4</sup>.

- ◇ **L'effet HALL.** On considère un fil parcouru par une intensité  $i$  vers la droite. Les électrons se déplacent en sens inverse, soit  $\vec{v} = -v\vec{u}_x$ . Si un champ magnétique est imposé selon  $\vec{u}_z$ , ils sont déviés selon  $-\vec{u}_y$  ( $q < 0$ ), et s'accumulent sur une paroi du fil. Un déséquilibre de charge s'installe, créant alors un champ appelé champ de HALL.

4. [http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve\\_tulloue/Meca/Charges/cyclotron.php](http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/cyclotron.php)

**FIGURE 5.9** – Effet HALL dans un fil

En régime permanent, la force résultant de ce champ de HALL compense la force magnétique :

$$-e\vec{E}_H - evB\vec{u}_y = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{E}_H = -vB\vec{u}_z$$

On mesure la tension entre la partie supérieure du conducteur et sa partie inférieure :

$$U = V(x = D) - V(x = 0) = vBd$$

Ainsi, la mesure de  $U$  permet la mesure du champ  $B$  ! C'est le principe des teslamètres à effet HALL.