Circuits du premier ordre en régime transitoire

III Analyser : régime transitoire du circuit RC

A Charge et décharge du condensateur

On considère le montage ci-contre de constante de temps $\tau = RC$.

/2 (1) La tension créneau de fréquence f a pour période $T = 1/f$. Pour visualiser correctement le signal, il faut que le condensateur puisse se charger sur **une demi-période** $T/2$. Or, un condensateur met $\approx 5\tau$ à se charger ; il nous faut donc

$$5\tau \leq \frac{T}{2} \Leftrightarrow 5\tau \leq \frac{1}{2f} \Leftrightarrow \boxed{\tau \leq \frac{1}{10f}} \quad \text{avec} \quad \left\{ f = 1 \times 10^3\,\text{Hz} \right.$$

$$\text{A.N. : } \underline{\tau \leq 1 \times 10^{-4}\,\text{s} = 0{,}1\,\text{ms}}$$

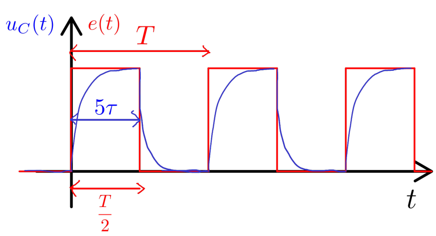

FIGURE 7.1

/1 (2)

- Si τ est **trop grand**, le condensateur n'aura **pas le temps de se charger**. On ne verra qu'une portion de l'exponentielle croissante.
- À l'inverse, si τ est **trop petit**, le condensateur se **charge trop vite** : on confondra la courbe de sa charge avec celle du créneau.

/1 (3) Prenons $\tau = 1 \times 10^{-4}\,\text{s}$. On a :

$$\tau = RC \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{\tau}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \tau = 1 \times 10^{-4}\,\text{s} \\ R = 1\,\text{k}\Omega \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{C = 1 \times 10^{-7}\,\text{F} = 0{,}1\,\mu\text{F}}$$

/1 (4)

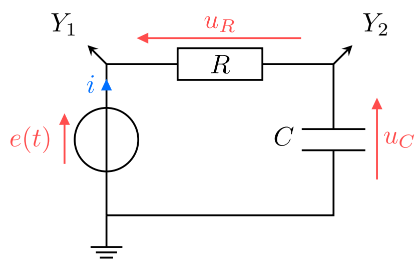

FIGURE 7.2

B Étude théorique du circuit intégrateur

/2 (5) L'équation homogène est :

$$
\begin{aligned}
&\frac{\mathrm{d}u_{C,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0 && \text{Forme générale homogène} \\
&\Rightarrow u_{C,h}(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) && u_{C,p}(t) = \lambda \\
&\Rightarrow 0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau} && \lambda = E \\
&\Leftrightarrow u_{C,p}(t) = E && u_C(t) = u_{C,h}(t) + u_{C,p}(t) \\
&\Rightarrow u_C(t) = E + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) && \text{Par continuité} \\
&\Rightarrow u_C(0) = 0 = E + A \\
&\Leftrightarrow A = -E && \text{On combine} \\
&\Rightarrow \boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}
\end{aligned}
$$

Quand $\frac{t}{\tau} \to 0$, on utilise le développement limité :

$$
\begin{aligned}
&u_C(t) \underset{t/\tau \to 0}{\sim} E\left(1 - \left(1 - \frac{t}{\tau}\right)\right) \\
&\Rightarrow \boxed{u_C(t) \underset{t/\tau \to 0}{\sim} \frac{Et}{\tau}}
\end{aligned}
$$

Or, une primitive de $\int E\,\mathrm{d}t$ est Et : on obtient bien que dans ce cas, le montage est intégrateur (à τ près).

C Circuit RC avec visualisation de $e(t)$ et $u_R(t)$

/1 (6)

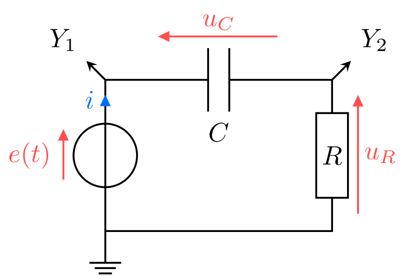

FIGURE 7.3

/2 (7) Pour obtenir l'équation sur u_R ou $i(t)$, il suffit de **dériver la loi des mailles** :

$$
\begin{aligned}
&u_R + u_C = E && \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,) \\
&\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0 && \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = \frac{i}{C} \text{ et } i = \frac{u_R}{R} \\
&\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{u_R}{RC} = 0 && \tau = RC \\
&\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_R}{\mathrm{d}t} + \frac{u_R}{\tau} = 0}
\end{aligned}
$$

On résout mais en faisant attention à la condition initiale. Pour cela, on étudie la loi des mailles en $t = 0^+$:

$$\left.\begin{aligned} u_R(0^+) + u_C(0^+) &= E \\ \Rightarrow \boxed{u_R(0^+) = E} \end{aligned}\right) u_C(0^+) = 0 \text{ par continuité}$$

L'ED étant déjà homogène, on aura $u_R(t) = A'\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}$, et avec la condition initiale précédemment trouvée on a directement

$$\boxed{u_R(t) = E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}$$

On peut vérifier la cohérence de cette solution en la réinjectant dans la loi des mailles :

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= \cancel{E\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}} + E\left(1 - \cancel{\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}\right) \\ \Leftrightarrow &\boxed{u_R + u_C = E} \end{aligned}$$

ce qui est bien la réponse attendue.

IV Réaliser et valider

A Étude expérimentale du régime transitoire du circuit RC

IV.A.1 Cas général : charge et décharge du condensateur

/0.5 1 Sur les courbes imprimées, on trouve τ_{exp} avec soit la méthode de la tangente, soit à l'intersection avec $0{,}632E$ pour le RC en charge ou $0{,}368E$ pour le RC en décharge.

/0.5 2 On estime l'incertitude sur τ_{exp} *via* l'incertitude de lecture avec la règle, par exemple. La valeur théorique comprend les incertitudes sur R et C (à vérifier sur les composants en TP). On calcule

$$E_N = \frac{|\tau_{\text{exp}} - \tau_{\text{theo}}|}{\sqrt{u(\tau_{\text{exp}})^2 + u(\tau_{\text{theo}})^2}}$$

et la mesure est cohérente et validée si $E_N \lesssim 2$.

/0.5 3 R et C on la même influence sur le temps de charge, puisque $\tau = RC$: augmenter l'une des deux caractéristiques augmente le temps de charge, coupant la courbe observée ; à l'inverse, baisser l'une des deux réduit le temps de charge et fait se confondre u_C avec $e(t)$.

La fréquence va également influencer le signal. En effet, pour que le circuit ait le temps de charger, il faut que la (demi)-période soit suffisamment grande ($T/2 > 5\tau$). Évidemment, augmenter la fréquence diminue la période et on observe plus de créneaux si on ne change pas le calibre horizontal, mais ce qu'il faut observer (après recalibrage) c'est qu'**augmenter la fréquence empêche la charge totale du RC**. Ça revient à augmenter le temps de charge. Diminuer la fréquence a l'effet inverse.

IV.A.2 Cas particulier du circuit intégrateur

1) Ne pas modifier le montage précédent, $e(t)$ est toujours une tension créneau. Choisir τ de l'ordre de $5T$ en ajustant la valeur de R et observer $e(t)$ et $u_C(t)$.

/0.5 $\boxed{4}$ Avec τ « trop grand », le signal de sortie est très faible. En effet, on se trouve alors dans la situation du développement limité de la question **??**, soit

$$u_C(t) \underset{\frac{t}{\tau}\to 0}{\sim} \frac{Et}{\tau}$$

En diminuant le calibre vertical, on observe cependant le signal : il s'assimile à des portions de droites, croissantes quand $e(t) = E$ et décroissantes quand $e(t) = 0$: c'est bien une primitive de la fonction, mais divisée par τ.

/0.5 $\boxed{5}$ On doit trouver une pente de $\frac{E}{\tau}$.

2) Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par une dent de scie.

/0.5 $\boxed{6}$ L'intégrale d'une fonction affine est un polynôme du second degré. Si $u_C(t)$ est une primitive de $e(t)$, on doit donc observer des portions de paraboles de forme

$$u_C(t) \propto t^2$$

mais toujours continue (puisque $u_C(t)$ est continue).

Bien qu'elle ressemble à une courbe sinusoïdale, on observe une différence lors du changement de régime qui nous indique qu'on obtient bien des paraboles : $\boxed{\text{le circuit est toujours intérateur}}$.

/0.5 $\boxed{7}$ On s'attend à avoir

$$\boxed{u_C(t) = at^2}$$

pour vérifier $u_C(0) = 0$. On pourait penser avoir un terme linéaire en temps, mais le signal d'entrée semble linéaire et pas affine.

3) Conserver les valeurs de τ et T. Changer la tension créneau par une tension sinusoïdale.

/0.5 $\boxed{8}$ $u_C(t)$ ressemble à une fonction sinusoïdale. Le circuit reste intégrateur, puisqu'on observe une différence de phase d'environ $\pi/2$ par rapport à l'entrée $e(t)$.

/0.5 $\boxed{9}$

$$\boxed{u_C(t) = K\sin(2\pi f t) = K\sin\left(2\pi\frac{t}{T}\right)}$$

puisque $u_C(0) = 0$.

4) Augmenter τ.

/0.5 $\boxed{10}$ Si on augmente **encore** τ, le signal $u_C(t)$ devient trop faible. Le bruit du circuit domine sur la tension, et il devient difficile de bien distinguer sa forme.

IV.A.3 Tension aux bornes de la résistance u_R

Se placer dans les mêmes conditions que dans la partie III.C, en revenant à une tension créneau pour $e(t)$. Observer à l'oscilloscope $e(t)$ et $u_R(t)$.

/1 $\boxed{11}$ On observe une **discontinuité de la tension** $u_R(t) = Ri(t)$ à chaque changement de la tension d'entrée, avec une croissance ou décroissance exponentiele. Cela correspond bien à l'expression analytique attendue, et au fait que l'intensité dans un circuit RC n'est **pas continue**.

B Étude numérique

Effectuez cette étude sur `Capytale` : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/bc8f-2174341.

IV.B.1 Écriture du script

On créé la fonction `euler(f, a, b, y0, n)` effectuant les calculs détaillés dans la partie **??**. Ses paramètres d'entrée sont une fonction f, des valeurs de a et b, un entier n et une condition initiale $y0$. Elle calcule les valeurs approchées sur $[a,b]$ de la solution de l'équation différentielle $y'(t) = f(t,y(t))$ avec la condition initiale $y(a) = y0$. Cette fonction renvoie la liste des $n+1$ valeurs approchées y_k de y aux temps $t_k = a + k\frac{b-a}{n}$, $k \in [\![0,n]\!]$.

```python
def euler(f, a, b, y0, n):
  h = (b-a) / n
  list_y = [y0]
  yk = y0
  tk = a
  for k in range(n):
    yk = # à compléter
    tk = # à compléter
    list_y.append(yk)
  return list_y
```

Il faut ensuite créer la fonction `f` ainsi que la fonction entrée `e` pour plus de clarté. Vous compléterez la fonction `f` pour qu'elle renvoie l'expression correspondant à l'équation différentielle que vous cherchez à résoudre.
On récupére les valeurs y de la solution par :

```python
a = 0   # s
b = 10  # s
n = 100 # points de calculs
y0 = 0  # condition initiale
list_y = euler(f, a , b, y0, n) # list_y est un vecteur des valeurs de y
```

IV.B.2 Test dans un cas analytique

L'activité corrigée est disponible à https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/64ab-2283618

/5 12 Plus le pas est petit (n grand), plus la détermination est fidèle. Avec trop peu de points, l'approximation par une tangente est mauvaise, et on s'écarte du résultat.