Fiches – numéro 10

# Opérateurs en physique

## I Notation « nabla » en coordonnées cartésiennes

Il faut savoir calculer une divergence, un gradient ou un rotationnel, sans aide, en coordonnées cartésiennes. Pour cela, il suffit de voir que chacun de ces opérateurs ne sont qu'un seul et même « vecteur » qui agit différemment selon la nature du champ auquel il est appliqué.

Une notation de ce fameux vecteur et le vecteur nabla :

$$\boxed{\vec{\nabla} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

**en coordonnées cartésiennes**. On peut le faire interagir avec un champ vectoriel, par exemple

$$\boxed{\vec{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix}}$$

## II Opérateur divergence

Lorsqu'on effectue un produit scalaire entre ces deux vecteurs, on obtient un scalaire (d'où le nom...). Cela s'écrit

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \vec{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \frac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial x} + \frac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial y} + \frac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial z}}$$

C'est ainsi que s'exprime l'opérateur divergence :

$$\boxed{\operatorname{div} \vec{E} = \vec{\nabla} \cdot \vec{E}}$$

On note que l'absence de flèche sur div indique qu'il donne un scalaire à partir d'un vecteur ; il est donc aisé de se souvenir que c'est le résultat du produit scalaire entre le vecteur nabla et un autre vecteur.

## III Opérateur rotationnel

Lorsque l'on fait un produit vectoriel entre ces deux vecteurs, on obtient un vecteur (quelle surprise). Cela s'écrit

$$\boxed{\vec{\nabla} \wedge \vec{E}(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} E_x(x,y,z) \\ E_y(x,y,z) \\ E_z(x,y,z) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial y} - \dfrac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial z} \\ \dfrac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial z} - \dfrac{\partial E_z(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial E_y(x,y,z)}{\partial x} - \dfrac{\partial E_x(x,y,z)}{\partial y} \end{pmatrix}}$$

C'est ainsi que s'exprime l'opérateur rotationnel :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{E} = \vec{\nabla} \wedge \vec{E}}$$

On note que la flèche sur l'opérateur $\overrightarrow{\mathrm{rot}}$ indique qu'il donne un vecteur à partir d'un vecteur ; il est donc aisé de se souvenir que c'est le résultat du produit vectoriel entre les deux vecteurs.

## IV Opérateur gradient

Lorsque le vecteur nabla est appliqué à un scalaire, on obtient un vecteur. Cela s'écrit

$$\boxed{\vec{\nabla} U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial U(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}}$$

C'est ainsi que s'écrit l'opérateur gradient :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, U = \vec{\nabla} U}$$

On note que la flèche sur l'opérateur $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ indique qu'il donne un vecteur à partir d'un scalaire ; il est donc aisé de se souvenir que c'est le résultat d'un vecteur multiplié avec un scalaire. On ne met donc pas de point médian (« · ») qui est plutôt réservé au produit scalaire.

## V Opérateur Laplacien *scalaire*

L'opérateur div peut s'appliquer à un vecteur particulier : celui d'un gradient. Cela s'écrit

$$\boxed{\vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} U(x,y,z)\right) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \cdot \left( \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} U(x,y,z) \right) = \left( \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2} + \frac{\partial^2}{\partial z^2} \right) U(x,y,z)}$$

C'est ainsi que s'écrit l'opérateur laplacien **scalaire** :

$$\boxed{\Delta U = \vec{\nabla} \cdot \left(\vec{\nabla} U\right) = \vec{\nabla}^2 U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial z^2} = \mathrm{div}\,\left(\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathrm{U}\right)}$$

# VI Opérateur Laplacien *vectoriel*

## A En cartésiennes

Si l'on applique cet opérateur scalaire à un vecteur, il en résulte simplement un vecteur (c'est comme multiplier un vecteur par 2) :

$$\boxed{\Delta\vec{E}(x,y,z) = \vec{\nabla}^2\vec{E}(x,y,z) = \left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)\begin{pmatrix}E_x(x,y,z)\\E_y(x,y,z)\\E_z(x,y,z)\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_x\\\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_y\\\left(\frac{\partial^2}{\partial x^2}+\frac{\partial^2}{\partial y^2}+\frac{\partial^2}{\partial z^2}\right)E_z\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\Delta E_x\\\Delta E_y\\\Delta E_z\end{pmatrix}}$$

## B Autres systèmes

Cette écriture des opérateurs usuels en physique permet aussi, grâce à une identité vectorielle à connaître, de retrouver le lien entre $\overrightarrow{\text{rot}}\left(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}\right)$, div , $\overrightarrow{\text{grad}}$ et $\Delta E f$. En effet, un double produit vectoriel se développe en produit scalaires de la manière suivante :

$$\boxed{\vec{a}\wedge\left(\vec{b}\wedge\vec{c}\right) = (\vec{a}\cdot\vec{c})\,\vec{b} - \left(\vec{a}\cdot\vec{b}\right)\vec{c}}$$

Un moyen mnémotechnique pour retenir ce développement est le suivant :

$$\boxed{\underbrace{\text{ABC}}_{\vec{a}\wedge(\vec{b}\wedge\vec{c})}\text{, c'est }\underbrace{\text{assez bien}}_{(\vec{a}\cdot\vec{c})\vec{b}}\text{, }\underbrace{\text{mais}}_{-}\ \underbrace{\text{abaissé}}_{(\vec{a}\cdot\vec{b})\vec{c}}}$$

Et ainsi, on trouve

$$\boxed{\begin{aligned}\vec{\nabla}\wedge\left(\vec{\nabla}\wedge\vec{E}\right) &= \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\vec{\nabla} - \left(\vec{\nabla}\cdot\vec{\nabla}\right)\vec{E}\\ \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{rot}}\wedge\left(\overrightarrow{\text{rot}}\wedge\vec{E}\right) &= \overrightarrow{\text{grad}}\left(\text{div}\,\vec{E}\right) - \Delta\vec{E}\end{aligned}}$$

car $\vec{\nabla}\cdot\vec{E}$ est un scalaire qui est multiplié par le vecteur nabla : $\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)\vec{\nabla}$ peut très bien s'écrire $\vec{\nabla}\left(\vec{\nabla}\cdot\vec{E}\right)$, l'ordre d'un produit scalaire n'étant pas important.

**Conclusion**

Ainsi, il suffit de connaissances très basiques sur les scalaires et les vecteurs pour savoir calculer une divergence, un gradient, un rotationnel ou un laplacien. Il est donc **impératif** de savoir le faire.

**Attention**

Les correcteurices aux concours n'apprécient pas l'utilisation du vecteur $\vec{\nabla}$. Ces remarques ont pour simple but de vous permettre d'*effectuer* les calculs, mais vous devrez toujours écrire div , $\overrightarrow{\text{grad}}$ et $\overrightarrow{\text{rot}}$ sur vos feuilles.

**Autres coordonnées**

On remarquera que les mêmes raisonnements s'appliquent en coordonnées cylindriques et sphériques, à condition de changer la définition du vecteur $\vec{\nabla}$.

# VII Autres coordonnées

## $\vec{\nabla}$ dans les différents systèmes

| Cartésiennes | Cylindriques | Sphériques |
|---|---|---|
| $\vec{\nabla}_{\text{crt}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\vec{\nabla}_{\text{cyl}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ | $\vec{\nabla}_{\text{sph}} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{1}{r\sin(\theta)}\dfrac{\partial}{\partial \varphi} \end{pmatrix}$ |