V Changement d'orbite

1) Sur une orbite circulaire, la vitesse est uniforme et on a $v_1 = r_1\dot{\theta}_1$. Avec le PFD usuel, on trouve

$$\dot{\theta}_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{{r_1}^3}} \Rightarrow \boxed{v_1 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_1}}} \Rightarrow \underline{v_1 = 7300\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

2) Ici aussi calcul classique :

$$\mathcal{E}_{m,i} = \frac{1}{2}m{v_i}^2 - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_i} = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}Mm}{r_i} - \frac{\mathcal{G}Mm}{r_i}$$

D'où $$\boxed{\mathcal{E}_{m,1} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2r_1}} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m,2} = -\frac{\mathcal{G}Mm}{2r_2}}$$

Pour l'orbite elliptique, on remplace r par a. Or, on relie a au rayon r_P et r_A par la définition du grand axe, et on identifie r_P à r_1 et r_A à r_2 :

$$\begin{aligned} 2a &= r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A} = r_1 + r_2 \\ \Rightarrow &\boxed{\mathcal{E}_{m,e} = -\mathcal{G}\frac{Mm}{r_1+r_2}} \end{aligned}$$

3) Le changement de vitesse instantané suppose que la position est fixe et que l'énergie potentielle reste donc constante pour passer de v_1 à v_{e1}. Ainsi, l'allumage du réacteur ne fait changer que la vitesse, et on a

$$\begin{aligned} \Delta_{1,e}\mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_{m,e} - \mathcal{E}_{m,1} \\ \Leftrightarrow -\mathcal{G}Mm\left(\frac{1}{r_1+r_2} - \frac{1}{2r_1}\right) &= \frac{1}{2}mv_{e1}^2 - \frac{1}{2}mv_1^2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv_{e1}^2 &= -\mathcal{G}Mm\left(\frac{\cancel{2}r_1 - \cancel{r_1} - r_2}{2r_1(r_1+r_2)}\right) + \mathcal{G}\frac{Mm}{2r_1}\times\frac{r_1+r_2}{r_1+r_2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\cancel{2}}\cancel{m}v_{e1}^2 &= \frac{\mathcal{G}M\cancel{m}}{\cancel{2}r_1(r_1+r_2)}\underbrace{(\cancel{r_1}+r_2-(\cancel{r_1}-r_2))}_{=\cancel{2}r_2} \\ \Leftrightarrow &\boxed{v_{e1} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}Mr_2}{r_1(r_1+r_2)}}} \Leftrightarrow \underline{v_{e1} = 9520\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \\ \Rightarrow \Delta v_\mathrm{P} &= 2220\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \end{aligned}$$

TEM : $$\begin{aligned} \Delta_{1,e}\mathcal{E}_m &= \Delta_{1,e}W(\overrightarrow{F}_\mathrm{mot}) = W_\mathrm{P} \\ \Leftrightarrow &\boxed{W_\mathrm{P} = \frac{\mathcal{G}Mm(r_2-r_1)}{2r_1(r_1+r_2)}} \Leftrightarrow \underline{W_\mathrm{P} = 19\,\mathrm{GJ}} \end{aligned}$$

4) Relier des vitesses et des rayons ensemble sur deux parties de la trajectoire laisse penser qu'on cherche à trouver une constante du mouvement permettant de relier ces grandeurs entre elles à deux instants. On a déjà utilisé le théorème de l'énergie mécanique, on doit chercher une autre grandeur conservée.

La plus évidente est le moment cinétique, et en effet aux points P et A l'expression du moment cinétique est simple, puisqu'on y a $\dot{r}_{P|A} = 0$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathcal{L}}_\mathrm{O}(\mathrm{P}) &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge m\overrightarrow{v}_\mathrm{P} = r_1\,\overrightarrow{u_r} \wedge mv_{e1}\,\overrightarrow{u_\theta} = mr_1v_{e1}\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{\mathcal{L}}_\mathrm{O}(\mathrm{A}) &= \overrightarrow{\mathrm{OA}} \wedge m\overrightarrow{v}_\mathrm{A} = mr_2v_{e2}\,\overrightarrow{u_z} \end{aligned}$$

Or $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathcal{L}}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{0} \Rightarrow$ $$\begin{aligned} \cancel{m}r_1v_{e1}\,\cancel{\overrightarrow{u_z}} &= \cancel{m}r_2v_{e2}\,\cancel{\overrightarrow{u_z}} \\ \Leftrightarrow &\boxed{r_1v_{e1} = r_2v_{e2}} \end{aligned}$$

Ainsi $$\boxed{v_{e2} = v_{e1}\frac{r_1}{r_2} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}Mr_1}{r_2(r_1+r_2)}}}$$

$$v_{e2} = 1690\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

5) On reprend v_2 avec la première question, et on calcule la différence de vitesse avec la dernière :

$$v_2 = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M}{r_2}} = 3080\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

De plus, $\Rightarrow \boxed{\Delta v_{\mathrm{A}} = 1390\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \Delta_{e,2}\mathcal{E}_m = W_{\mathrm{A}} \Leftrightarrow W_{\mathrm{A}} = -\dfrac{\mathcal{G}Mm}{2r_2} + \dfrac{\mathcal{G}Mm}{r_1+r_2}$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_{\mathrm{A}} = \frac{\mathcal{G}Mm(r_2-r_1)}{2r_2(r_1+r_2)}} \Leftrightarrow \underline{W_{\mathrm{A}} = 3{,}3\,\mathrm{GJ}}$$

On sait que la vitesse diminue quand r augmente (3e loi), donc $W \searrow$ de P à A : c'est bien logique.

VI Alerte à l'astéroïde !

1) ⋄ **Énergie mécanique** :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r} = \text{cte}$$

- ▷ Lorsqu'il est très éloigné (M_∞), $v = v_0$ et $r \to \infty$ donc l'énergie potentielle est nulle et $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m{v_0}^2$.
- ▷ Au périgée P, $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r_{\min}}$.

Ainsi,
$$\boxed{\frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}m{v_{\mathrm{P}}}^2 - \mathcal{G}\frac{Mm}{r_{\min}}} \tag{7.4}$$

⋄ **Moment cinétique** : $\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}_\infty) = \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{P})$ d'où

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}_\infty} \wedge \cancel{m}\vec{v_0}^2 &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \cancel{m}\vec{v}_{\mathrm{P}}\\
\Leftrightarrow \left(\overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}_\infty}\right) \wedge \vec{v_0} &= \overrightarrow{\mathrm{OP}} \wedge \vec{v}_{\mathrm{P}}\\
\Leftrightarrow -bv_0\,\vec{e_z} + \vec{0} &= r_{\min}v_{\mathrm{P}}\,\vec{e_z}\\
\Leftrightarrow &\boxed{bv_0 = r_{\min}v_{\mathrm{P}}}
\end{aligned} \tag{7.5}$$

2) On remplace v_{P} par son expression (7.5) dans l'équation (7.4) :

(7.4) → (7.5) ⇒
$$\mathcal{G}\frac{Mm}{r_{\min}} = \frac{1}{2}m{v_0}^2\left(\frac{b^2}{{r_{\min}}^2} - 1\right)$$
$$\Leftrightarrow {v_0}^2{r_{\min}}^2 + 2\mathcal{G}Mr_{\min} - {v_0}^2b^2 = 0$$

Or
$$\Delta = 4G^2M^2 + 4{v_0}^4b^2 > 0$$

D'où avec $r_{\min} > 0$:
$$\boxed{r_{\min} = \frac{-\mathcal{G}M + \sqrt{\mathcal{G}^2M^2 + {v_0}^4b^2}}{{v_0}^2}}$$

3)

A.N. : $\underline{r_{\min} = 72\,000\,\mathrm{km}} > R \Rightarrow$ pas de collision !

VII Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

1) Avant toute chose, on étudie le mouvement de l'électron dans le référentiel lié au noyau, supposé galiléen. L'électron est animé d'un mouvement circulaire et uniforme de centre O. On l'étudie en coordonnées polaires d'origine O. Dans ce système de coordonnées, et avec $\dot{r} = 0$, on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{u_r} \quad \text{et} \quad \vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -\frac{v^2}{r}\,\vec{u_r}$$

La seule force dont il faut tenir compte est la force d'interaction coulombienne qu'exerce le noyau de charge $+e$ sur l'électron de charge $-e$:

$$\vec{F}_c = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\,\vec{u_r} \Rightarrow \mathcal{E}_{p,c} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r}$$

On peut négliger l'interaction gravitationnelle face à cette force.

2) On projette le PFD sur $\vec{u_r}$:

$$-m_e\frac{{v_n}^2}{r_n} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \Leftrightarrow \boxed{{v_n}^2 = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r_n}}$$

3) On a le module du moment cinétique :

$$\mathcal{L}_{O_n} = m_e r_n v_n = \frac{nh}{2\pi} \Leftrightarrow v_n = \frac{nh}{2\pi m_e r_n}$$
$$\Rightarrow \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e r_n} = \frac{n^2h^2}{4\pi^2 {m_e}^2 r^2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}}$$

4) On trouve
$$\underline{r_1 = 52\,\mathrm{pm}}$$

5)
$$\mathcal{E}_m(n) = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_m(n) = \frac{1}{2}m_e {v_n}^2 - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_n} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_n}$$
$$r_n = \frac{n^2h^2\varepsilon_0}{\pi m_e e^2}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m(n) = -\frac{e^4 m_e}{8{\varepsilon_0}^2 h^2}\frac{1}{n^2} = -\frac{A}{n^2}}$$

avec $\boxed{A = \frac{e^4 m_e}{8{\varepsilon_0}^2h^2}} \Leftrightarrow \underline{A = 2{,}17 \times 10^{-18}\,\mathrm{J} = 13{,}6\,\mathrm{eV}}$

6)

$$\Delta\mathcal{E} = A\left(\frac{1}{{n_2}^2} - \frac{1}{{n_1}^2}\right) = h\nu = h\frac{c}{\lambda}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{\lambda} = \frac{A}{hc}\left(\frac{1}{{n_2}^2} - \frac{1}{{n_1}^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{\lambda} = R_H\left(\frac{1}{{n_2}^2} - \frac{1}{{n_1}^2}\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{R_H = \frac{A}{hc} = \frac{e^4 m_e}{8{\varepsilon_0}^2 ch^3}} \Leftrightarrow \underline{R_H = 1{,}09 \times 10^7\,\mathrm{m}^{-1}}$$

VIII Expérience de RUTHERFORD

1)

$$\boxed{\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r^2}\vec{e_r}} \Rightarrow K = \frac{Ze^2}{2\pi\varepsilon_0} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_p = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{2Ze^2}{r}}$$

2) Particule soumise uniquement à $\vec{F}$ conservative, donc $\mathcal{E}_m = \text{cte}$, ainsi

$$\mathcal{E}_m = \text{cte} \Leftrightarrow \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p(r) = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r} = \text{cte}$$

Or initialement $v(0) \to v_0 \quad \text{et} \quad r(0) \to \infty \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m{v_0}^2}$

3)

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \underbrace{\vec{F}}_{/\!/\overrightarrow{\mathrm{OM}}} = \vec{0} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}}$$

Or $\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}(0) = (x_0\,\vec{e_x} + b\,\vec{e_y}) \wedge (-mv_0\,\vec{e_x}) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O} = mbv_0\,\vec{e_z}}$

De plus, $\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O} = r\,\vec{e_r} \wedge (\dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O} = mr^2\dot{\theta}\,\vec{e_z}}$ (et $r^2\dot{\theta} = bv_0$)

4)

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\dot{\theta}^2) + \mathcal{E}_p(r)$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\left(\dot{r}^2 + \frac{b^2{v_0}^2}{r^2}\right) + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\mathrm{eff}}(r)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,\mathrm{eff}}(r) = \frac{1}{2}m\frac{b^2{v_0}^2}{r^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{Ze^2}{r}}$$

On l'appelle l'**énergie potentielle effective** (ou efficace).

5) Lorsque r est minimal, sa dérivée est nulle donc $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_\text{min})$. Ainsi,

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\frac{mb^2{v_0}^2}{{r_\text{min}}^2} + \frac{1}{2\pi\varepsilon_0}\frac{2e^2}{r_\text{min}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m{v_0}^2 = \frac{1}{2}\frac{mb^2{v_0}^2}{r_\text{min}^2} + \frac{K}{r_\text{min}}$$

$$\Leftrightarrow m{v_0}^2{r_\text{min}}^2 - 2Kr_\text{min} - mb^2{v_0}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = K^2 + (mb{v_0}^2) > 0$$

$$\Rightarrow r_\text{min} = \frac{K + \sqrt{K^2 + (mb{v_0}^2)^2}}{m{v_0}^2} \quad r_\text{min} > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r_\text{min} = \frac{K}{m{v_0}^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mb{v_0}^2}{K}\right)^2}\right]}$$

6)

$$\boxed{b = \frac{K}{m{v_0}^2\tan(D/2)} = \frac{2e^2}{2\pi\varepsilon_0 m{v_0}^2\tan(D/2)}}$$

A.N. : $\underline{b_1 = 2{,}4 \times 10^{-14}\,\text{m}}$ et $\underline{b_2 = 0}$ donc $\underline{r_{\text{min},1} = 2{,}4 \times 10^{-14}\,\text{m}}$ et $\underline{r_{\text{min},2} = 2{,}7 \times 10^{-14}\,\text{m}}$

La taille caractéristique du noyau d'or (assez gros) est donc de l'ordre de $\boxed{10^{-14}\,\text{m}}$, soit environ 10 000 fois plus petit que l'atome.