Induction – chapitre 4

Conversion électromécanique

On a vu précédemment quelques exemples où un mouvement mécanique créé un champ électrique, mais également l'inverse. Un peu de vocabulaire :

- ◇ On parle de circuit **moteur** lorsqu'il convertit une puissance de **électrique à mécanique** ;
- ◇ On parle de circuit **générateur** lorsqu'il convertit une puissance de **mécanique à électrique**.

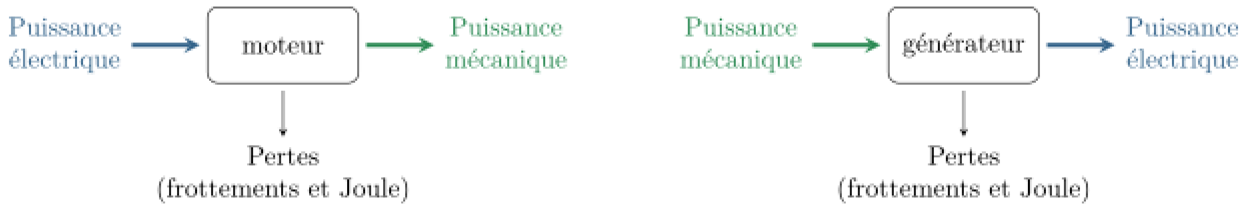


FIGURE 4.1 – Schématisation des fonctionnements moteur et générateur.

I Conversion de puissance électrique en puissance mécanique

A Exemple des rails de LAPLACE moteurs

Définition

Les rails de LAPLACE **moteurs** sont deux conducteurs rectilignes parallèles reliés par une tige mobile conductrice rendant le circuit **déformable**, plongé dans un champ magnétique constant perpendiculaire au circuit et **alimenté par une f.é.m. constante** U_0.

Le générateur étant dans un circuit fermé, il impose un courant $i > 0$. **On néglige l'auto-induction**, et on appelle R la résistance totale du circuit. Nous avons déjà constaté expérimentalement la mise en mouvement de la barre à l'aide de la force de LAPLACE. Quelle vitesse atteint-elle ?

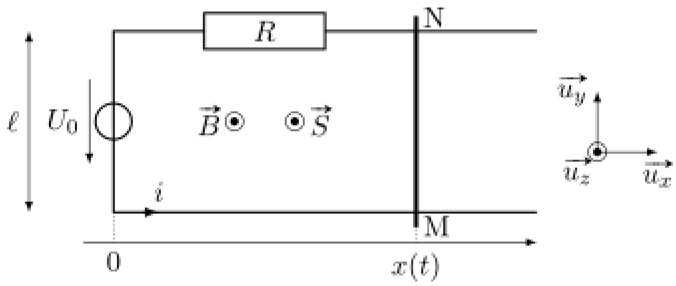


FIGURE 4.2 – Rails de LAPLACE moteurs.

I.A.1 Analyse qualitative

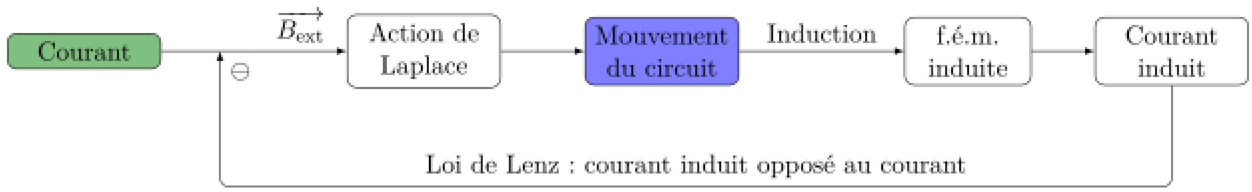


FIGURE 4.3 – Schéma de causalité des conséquences de l'induction.

Avant de se lancer dans les calculs, on peut déterminer le comportement du système avec la loi de LENZ. À l'origine de l'induction est la présence d'un champ extérieur $\overrightarrow{B_{\text{ext}}}$ et d'un courant dans le circuit. Combinés ensemble, ils appliquent une action de LAPLACE sur le barreau, le mettant en mouvement et **déformant** le circuit. Il y a donc **variation du flux**, et d'après la loi de FARADAY une f.é.m. induite y apparaît. Le circuit étant toujours fermé, il y a également un courant induit.

L'induction modérant, par ses conséquences, les causes qui lui ont donné naissance, on en conclut que ce **courant induit s'oppose au courant initial**, ce qui générera une force de LAPLACE opposée tendant à freiner l'accélération du barreau. On veut étudier ce comportement et notamment connaître la vitesse finale : est-elle infinie ? nulle ? constante ?

Attention

⚠ Une étude de causalité doit comparer une conséquence et une cause de mêmes natures ! ⚠

I.A.2 Analyse mécanique

On étudie le mouvement de la barre de masse m dans le référentiel de la salle de classe. Avec un bilan des forces :

- **Poids** $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$;
- **Réaction normale** $\overrightarrow{N} = N\overrightarrow{u_z}$;
- **Force de LAPLACE** $\overrightarrow{F_{\text{Lap}}} = i\overrightarrow{\text{MN}} \wedge \overrightarrow{B} = i\ell B\overrightarrow{u_x}$;
- **Frottements** $\overrightarrow{F_f} = -F_f\overrightarrow{u_x}$ avec $F_f > 0$.

Ainsi,

$$m\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F_{\text{Lap}}} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{F_f}$$

D'où, en projetant sur $\overrightarrow{u_x}$:

Équation mécanique

$$m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = i\ell B - F_f \tag{4.1}$$

I.A.3 Analyse électrique

La déformation du circuit entraîne une variation de sa surface. Ainsi, même avec un champ magnétique constant, le flux magnétique varie, impliquant l'apparition d'une f.é.m. induite.

Avec $\overrightarrow{S} = S\overrightarrow{u_z}$ pris dans le sens de i, on trouve pour ϕ :

$$\phi = B\overrightarrow{u_z} \cdot S\overrightarrow{u_z} = BS = B\ell x$$

D'où, avec la loi de FARADAY :

$$e = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} = -B\ell\dot{x}$$

Placée en **convention générateur**. Donc, avec la loi des mailles :

$$e + U_0 = Ri \quad \Rightarrow \quad U_0 = Ri + B\ell\dot{x}$$

Ainsi,

Équation électrique

$$U_0 = Ri + B\ell v \tag{4.2}$$

I.A.4 Résolution

On cherche à éliminer i pour obtenir une équation différentielle sur v. On l'isole dans (4.2) :

$$i = \frac{U_0}{R} - \frac{B\ell}{R}v$$

Et on substitue i dans l'équation mécanique (4.1) **en l'absence de frottements** :

$$\begin{aligned} m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \left(\frac{U_0}{R} - \frac{B\ell}{R}\right)\ell B \\ \Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &= \frac{U_0\ell B}{R} - \frac{B^2\ell^2}{R}v \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{B^2\ell^2}{Rm}v = \frac{U_0\ell B}{Rm}} \end{aligned}$$

On obtient donc une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\mathrm{lim}}}{\tau}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau = \frac{Rm}{B^2\ell^2}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_{\mathrm{lim}} = \frac{U_0}{B\ell}}$$

Qui se résout en

$$\boxed{v(t) = v_{\mathrm{lim}}\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)} \Leftrightarrow \boxed{i(t) = \frac{U_0}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}}$$

Ainsi, l'**intensité finit par être nulle** et **la vitesse du rail finit par atteindre une valeur limite**.

I.A.5 Résumé méthode

Méthode

1) Obtenir l'équation mécanique :
   - ◇ PFD si translation
   - ◇ TMC si rotation
2) Obtenir l'équation électrique :
   - a – Définir un sens pour le courant, avoir $\overrightarrow{S}$, calculer ϕ ;
   - b – Utiliser la loi de FARADAY pour avoir la f.é.m. induite ;
   - c – L'ajouter dans le circuit en **convention générateur** ;
   - d – Appliquer la loi des mailles
3) Résoudre les équations couplées

I.A.6 Bilan énergétique

◇ **Bilan électrique** : On multiplie la LdM par i :

$$U_0 i = Ri^2 + B\ell v i$$

On identifie :

▷ puissance du générateur : $\mathcal{P}_g = U_0 i$

- ▷ puissance dissipée par effet Joule : $\mathcal{P}_J = Ri^2$
- ▷ puissance reçue par la f.é.m. : $\mathcal{P}_e = -ei = B\ell vi$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_e}$$

◇ **Bilan mécanique** : On multiplie le PFD par v :

$$mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = i\ell Bv - F_f v$$

On identifie :

- ▷ dérivée de l'énergie cinétique : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = mv\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$
- ▷ puissance des forces de Laplace : $\mathcal{P}_{\text{Lap}} = i\ell Bv$
- ▷ puissance perdue par frottements : $\mathcal{P}_f = -(-F_f v) = F_f v$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} + \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\text{Lap}}}$$

On remarque notamment que

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_{\text{Lap}}$$

C'est-à-dire que le **couplage électromécanique est parfait** : la puissance électrique reçue par la force électromotrice induite est égale à la puissance mécanique (motrice) des forces de Laplace. Ainsi, en définissant le rendement par

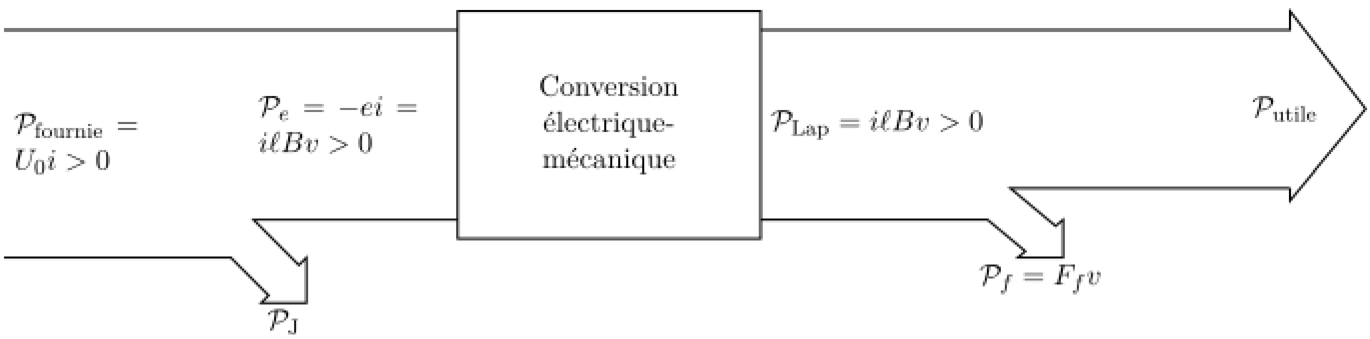
$$\boxed{\eta = \left|\frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance fournie}}\right|}$$

on voit que **contrairement à la thermodynamique**, le **rendement théorique** de conversion électromécanique est de 1 ! En effet, seules les **pertes limitent le transfert**.

I.A.7 Bilan global

En combinant les résultats de puissance, on a mathématiquement puis schématiquement :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_f + \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t}}$$



B Le moteur à entrefer plan