

Correction du DS

/23 E1 Ondes gravitationnelles

/6 1 Pour interférer, il faut que deux ondes soient **de même nature** ① et **de même fréquence** ①.

Les sources lumineuses ont une phase à l'origine qui varie ① aléatoirement sur un temps très court, appelé **temps de cohérence** ①, bien plus petit que le temps d'acquisition des capteurs classiques : on dit qu'elles émettent des **trains d'onde** ①.

Pour pouvoir interférer de manière continue dans l'espace, il faut que les ondes aient la **même phase à l'origine** ($\Delta\varphi_0 = 0$ ①), sinon l'intensité moyenne du signal serait nulle. On utilise pour cela une unique source.

/2 2

$$(SD)_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} (SI) + (IM_1) + (M_1I) + (ID) \stackrel{\textcircled{1}}{=} a + 2\ell_1 + b$$

/5 3 Le signal met une durée $\Delta t_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} (a + 2\ell_1 + b)/c$ pour aller de la source au détecteur. De plus, la moitié du signal est perdu à chaque fois que le faisceau traverse la lame semi-réfléchissante. Finalement ①

$$s_1(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} \cos(\omega(t - \Delta t_1)) = \frac{A}{4} \cos\left(\omega\left(t - \frac{a + 2\ell_1 + b}{c}\right)\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} \cos(\omega t - k(a + 2\ell_1 + b))$$

avec $k \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega}{c}$ le vecteur d'onde.

/1 4

$$(SD)_2 = (SI) + (IM_2) + (M_2I) + (ID) \stackrel{\textcircled{1}}{=} a + 2\ell_2 + b$$

/1 5 De la même manière,

$$s_1(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} \cos(\omega t - k(a + 2\ell_2 + b))$$

/3 6

$$\begin{aligned} s(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} (\cos(\omega t - k(a + 2\ell_1 + b)) + \cos(\omega t - k(a + 2\ell_2 + b))) \\ \Leftrightarrow s(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{2} \left(\cos\left(\omega t - \frac{k}{2}(a + 2\ell_1 + b) - \frac{k}{2}(a + 2\ell_2 + b)\right) \times \cos\left(-\frac{k}{2}(a + 2\ell_1 + b) + \frac{k}{2}(a + 2\ell_2 + b)\right) \right) \\ \Leftrightarrow s(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{2} (\cos(\omega t - k(a + \ell_1 + \ell_2 + b)) \times \cos(k(\ell_2 - \ell_1))) \end{aligned}$$

/3 7 On veut $k(\ell_2 - \ell_1) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \pi/2$. Avec $k \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2\pi/\lambda$:

$$\frac{2\pi(\ell_2 - \ell_1)}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \quad \Rightarrow \quad \ell_2 - \ell_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\lambda}{4}$$

/2 8 Quand il y a une onde gravitationnelle, les longueurs ℓ_2 et ℓ_1 ne varient pas de la même façon et $(\ell_2 - \ell_1)$ varie. On voit donc une variation du signal en D qui est maximum quand les 2 ondes sont en phase (interférence constructives) et minimale quand les 2 ondes sont en opposition de phase (interférences destructives).

/33 E2 Chute d'une bille

/2 1 L'expression de la poussée d'Archimède est :

$$\vec{\Pi} \stackrel{①}{=} -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergée}} \vec{g} \Rightarrow \vec{\Pi} \stackrel{①}{=} -\frac{4\rho_g \pi R^3}{3} \vec{g}$$

/4 2 On propose :

- ① ◇ Remplir l'éprouvette graduée de glycérine à un volume connu ;
- ① ◇ Mesurer le poids des masses dans l'air à l'aide du dynamomètre ;
- ① ◇ Immerger les masses dans l'éprouvette, et relever le volume déplacé ainsi que la force indiquée par le dynamomètre ;
- ① ◇ Vérifier avec les données que la différence des forces est égale à $\|\vec{\Pi}\|$.

/7 3 On établit le système d'étude :

- ① ◇ **Système** : {bille} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
- ② ◇ **Schéma** : cf. Figure 5.1.
- ① ◇ **Modélisation** : repère (O, \vec{u}_z) , repérage : $\overrightarrow{OM} = z \vec{u}_z$, $\vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z$, $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$.
- ◇ **Bilan des forces** :

$$\begin{aligned} \text{① Poids} & \quad \vec{P} = mg \vec{u}_z \\ \text{① Poussée d'Archimède} & \quad \vec{\Pi} = -\frac{4\rho_g \pi R^3}{3} g \vec{u}_z \\ \text{① Frottement fluide} & \quad \vec{f} = -6\pi\eta R v \vec{u}_z \end{aligned}$$

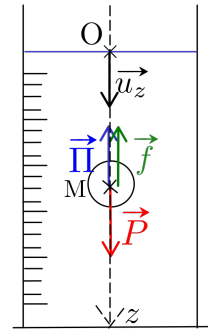


FIGURE 5.1 – Schéma

/3 4 On a :

$$\begin{aligned} \vec{P} + \vec{\Pi} \stackrel{①}{=} \left(m - \frac{4\rho_g \pi R^3}{3}\right) \vec{g} \stackrel{①}{=} m' \vec{g} = \vec{P}' \\ \Leftrightarrow m' = m - \frac{4\rho_g \pi R^3}{3} \Leftrightarrow m' \stackrel{①}{=} \frac{4}{3} \pi R^3 (\rho_a - \rho_g) \end{aligned}$$

d'où le résultat.

/6 5 On applique le PFD à la bille :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} \stackrel{①}{=} \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} \\ \Rightarrow \rho_a \frac{4}{3} \pi R^3 \frac{dv}{dt} \stackrel{①}{=} \rho_a \frac{4}{3} \pi R^3 g - 6\pi\eta R v \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_a R^2} v = \frac{\rho_g}{\rho_a} \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} \stackrel{①}{=} \frac{v_l}{\tau} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \cdot \vec{u}_z \\ \text{Forme canonique} \\ \text{Constantes} \end{array}$$

Ainsi,

$$\tau \stackrel{①}{=} \frac{2\rho_a R^2}{9\eta} \quad \text{et} \quad v_l = \frac{\tau \rho_g}{\rho_a} \stackrel{①}{=} \frac{2\rho_g R^2}{9\eta}$$

/5 6 On suppose que le régime permanent est atteint (on vérifiera *a posteriori* cette hypothèse) :

$$v_l \stackrel{①}{=} \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta z = 40 \times 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta t = 1,6 \text{ s} \end{cases}$$

A.N. : $v_l \stackrel{①}{=} 0,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$

$$\Rightarrow \eta \stackrel{①}{=} \frac{2\rho_g R^2}{9v_l} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 6,640 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ R = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ v_l = 0,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $\eta \stackrel{①}{=} 1,45 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} = 1,45 \text{ Pa}\cdot\text{s}$

/1 [7] Il faut attendre d'être sûr-e que la bille ait atteint le régime permanent①.

/3 [8]

$$\tau = \frac{2\rho_a R^2}{9\eta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_a = 7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ R = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \eta = 1,45 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \tau = 30 \times 10^{-3} \text{ s}$$

L'hypothèse de régime permanent est donc bien validée ① car $\tau \ll \Delta t$.

/2 [9] La glycérine est plus visqueuse ① donc le régime permanent est atteint plus rapidement. Avec de l'eau ($\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$), il n'est pas sûr que la bille puisse atteindre sa vitesse limite avant la fin de la chute ①.

/53 P1 Microphone pour guitare

/6 [1] En basse et haute fréquence, on a les schémas équivalents suivants :

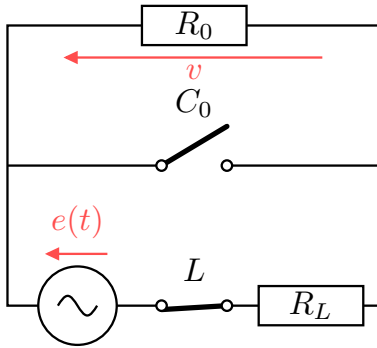


FIGURE 5.2 – Basses fréquences①.

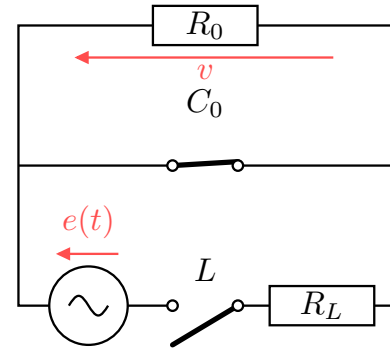


FIGURE 5.3 – Hautes fréquences①.

Ainsi, à basse fréquence, en appliquant un pont diviseur de tension ①, on a

$$v = \frac{R_0}{R_0 + R_L} e \approx e$$

puisque $R_0 \gg R_L$.

À haute fréquence,

$$v = 0$$

car c'est la tension aux bornes d'un fil.

Le circuit se comporte donc comme un **filtre passe-bas** ①.

/4 [2] L'association parallèle du condensateur et de la résistance R_0 est équivalente à une admittance $\underline{Y}_{\text{eq}} = jC_0\omega + \frac{1}{R_0}$. On applique ensuite un pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned} \underline{V} &= \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + \underline{Z}_{R_L} + \underline{Z}_L} \underline{E} \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{\underline{V}}{\underline{E}} = \frac{1}{1 + (R_L + jL\omega)\underline{Y}_{\text{eq}}} \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{1}{1 + (R_L + jL\omega)(jC_0\omega + \frac{1}{R_0})} \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{1}{1 + \frac{R_L}{R_0} - LC_0\omega^2 + j\omega\left(R_L C_0 + \frac{L}{R_0}\right)} \end{aligned}$$

/7 [3] On a $1 + \frac{R_L}{R_0} = \frac{R_0 + R_L}{R_0}$. On multiplie en haut et en bas ① l'expression de \underline{H} par $\frac{R_0}{R_0 + R_L}$:

$$\underline{H} = \frac{\frac{R_0}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{LC_0 R_0}{R_0 + R_L} \omega^2 + j\omega \frac{R_0}{R_0 + R_L} \left(R_L C_0 + \frac{L}{R_0}\right)}$$

On a donc la forme canonique souhaitée (celle du passe-bas du second ordre) : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$ avec

$$\boxed{H_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_0}{R_0 + R_L}} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{R_0 + R_L}{LCR_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{LC_0 R_0}}}$$

On en déduit le facteur de qualité par identification :

$$\begin{aligned} \frac{1}{Q\omega_0} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_0}{R_0 + R_L} \left(R_L C_0 + \frac{L}{R_0} \right) && \left. \begin{array}{l} \text{On développe} \\ (\cdot)^{-1} \\ \div \omega_0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{Q\omega_0} &= \frac{R_L R_0 C_0 + L}{R_L + R_0} \\ \Leftrightarrow \omega_0 Q &= \frac{R_L + R_0}{R_L C_0 R_0 + L} \\ \Leftrightarrow Q &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_L + R_0}{R_L C_0 R_0 + L} \frac{1}{\omega_0} && \left. \begin{array}{l} \text{On remplace} \\ \text{On simplifie la racine} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{R_L + R_0}{R_L C_0 R_0 + L} \sqrt{\frac{LC_0 R_0}{R_0 + R_L}} \\ \Leftrightarrow Q &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\sqrt{(R_L + R_0)LC_0 R_0}}{R_L C_0 R_0 + L} \end{aligned}$$

/7 4 Par définition, il y a résonance quand un système excité par l'extérieur atteint un maximum d'amplitude ① pour une fréquence d'excitation non nulle et non infinie ①, appelée fréquence d'excitation. On cherche donc le maximum de

$$|\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Comme le numérateur est constant, cette fonction est maximale si le dénominateur est minimal ①. Par ailleurs, la fonction racine étant monotone croissante, on peut alors chercher le minimum de la fonction

$$f : x \rightarrow (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

sur \mathbb{R}^{++} . Pour cela, on dérive et on cherche la valeur d'annulation :

$$f'(x) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2(-2x)(1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

$$\text{Ainsi, } f'(x_r) = 0 \Rightarrow 2(2x_r)(1 - x_r^2) = \frac{2x_r}{Q^2}$$

On cherche une solution non nulle, on en déduit

$$2(1 - x_r^2) = \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow 1 - x_r^2 = \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow x_r^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette équation n'admet de solution que si $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0$, soit si

$$\boxed{Q \stackrel{\textcircled{1}}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

qui est la condition de résonance. On a alors

$$\boxed{x_r \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1}$$

/10 5 On trace les diagrammes de BODE, avec :

TABLEAU 5.1 – Étude RLC sur C.

	$\forall x$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$\underline{H} = \frac{S}{E}$	$\frac{1}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$	1 ①	$-\frac{1}{x^2}$ ①
$G_{dB} = 20 \log \underline{H} $	$-10 \log \left((1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right)$	0 ①	$-40 \log x$ ①
$\tan(\arg(\underline{H}))$	$-\frac{x/Q}{1 - x^2}$	0	0
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$	---	0 ①	$-\pi$ ①

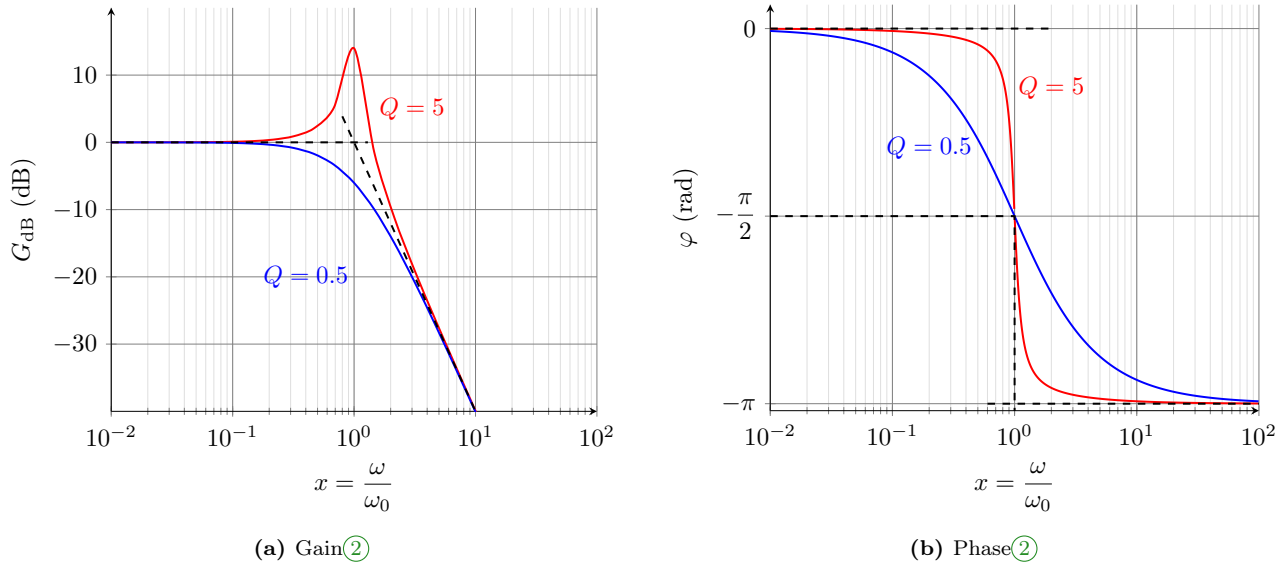


FIGURE 5.4 – Diagramme de BODE du filtre

/2 [6] Si $Q \gg 1$, $\frac{1}{Q^2} \ll 1$ donc $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx 1$. Ainsi, $\boxed{\omega_r = \omega_0}$. ①

On a alors

$$G_{\max} = G(x=1) = \left| \frac{H_0}{1 - 1 + j\frac{1}{Q}} \right| \Rightarrow \boxed{G_{\max} \stackrel{①}{=} H_0 Q}$$

/2 [7] $H_0 \stackrel{①}{=} G_{BF}$. On a donc

$$\boxed{Q \stackrel{①}{=} \frac{G_{\max}}{G_{BF}}}$$

Sur le graphique, on lit $G_{\max}/G_{BF} = v_{\max}/v_0 = 90/19$. Il vient donc

$$Q \approx 4,5 \Leftrightarrow \boxed{Q \stackrel{①}{\approx} 5}$$

/1 [8] Une fréquence de coupure f_c est telle que $\boxed{G(f_c) \stackrel{①}{=} \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}}}$, ou avec la tension $\boxed{v(f_c) = \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}}}$

/5 [9] Sur le graphique, on relève $f_r \stackrel{①}{=} 7000 \text{ Hz}$. On détermine les fréquences de coupure en cherchant les points où $v = \frac{v_{\max}}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \stackrel{①}{=} 64 \text{ mV}$.

On lit également $f_{c1} \stackrel{.5}{=} 6,00 \text{ kHz}$ et $f_{c2} \stackrel{.5}{=} 7,50 \text{ kHz}$. On a donc

$$A = Q \approx 4,67 \Leftrightarrow \boxed{Q \stackrel{①}{\approx} 5}$$

On retrouve bien le même résultat ① qu'avec l'autre méthode.

/6 [10] La lecture de f_0 nous donne ω_0 . Or, $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{LC_0 R_0}}$ d'où

$$\omega_0^2 = \frac{R_0 + R_L}{LC_0 R_0}$$

$$\Leftrightarrow L = \frac{R_0 + R_L}{C_0 R_0 \omega_0^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_0 + R_L}{4\pi^2 f_0^2 C_0 R_0}$$

Or, comme $R_L = 3 \times 10^3 \Omega$ et $R_0 = 1 \times 10^6 \Omega$, on peut considérer que $R_L \ll R_0$, on a alors $R_L + R_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} R_0$ d'où

$$L \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_0 = 7000 \text{ Hz} \\ C_0 = 100 \times 10^{-12} \text{ F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } L \stackrel{\textcircled{1}}{=} 5,17 \text{ H}$$

On peut alors retrouver Q en appliquant la formule théorique provenant de la détermination de la fonction de transfert :

$$Q = \frac{\sqrt{(R_L + R_0)LCR_0}}{R_L CR_0 + L} \approx \frac{\sqrt{LCR_0^2}}{R_L CR_0 + L} \Leftrightarrow Q \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 4$$

On obtient bien des résultats cohérents $\textcircled{1}$ avec les 3 méthodes. Le facteur de qualité est relativement grand devant 1, ce qui est cohérent avec l'hypothèse faite au début de l'étude.

/3 [11] Le microphone est un passe-bas mais du fait de son facteur de qualité élevé, il possède une résonance marquée $\textcircled{1}$. Pour une même note jouée par l'instrument, l'usage de deux microphones différents induira la restitution de la même **note** $\textcircled{1}$ (caractérisée par la fréquence du fondamental et sachant qu'un filtre linéaire ne modifie jamais la fréquence fondamentale du signal), mais le spectre sera différent car toutes les harmoniques ne seront pas amplifiées de la même façon suivant la valeur de la fréquence de résonance. Le type de microphone modifie donc le **timbre** $\textcircled{1}$ du son. Le choix du microphone peut donc donner un son plus "jazz" ou plus "rock"...

/42 [P2] Le bleu du ciel

/4 [1] Par analyse dimensionnelle :

$$\dim(k) = \frac{\text{force}}{\text{longueur}} = \frac{MLT^{-2}}{L} \stackrel{\textcircled{1}}{=} MT^{-2} \quad ; \quad \dim(h) = \frac{\text{force}}{\text{vitesse}} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} MT^{-1}$$

Leurs unités en système international sont donc :

$$k \text{ en } \boxed{\text{kg}\cdot\text{s}^{-2}} \stackrel{\textcircled{1}}{\text{ou}} \boxed{\text{N}\cdot\text{m}^{-1}} \quad ; \quad h \text{ en } \boxed{\text{kg}\cdot\text{s}^{-1}} \stackrel{\textcircled{1}}{\text{ou}} \boxed{\text{J}\cdot\text{s}^{-1}}$$

/2 [2] D'après le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel de l'atome considéré comme galiléen :

$$m\vec{a} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{F}_R + \vec{F}_f + \vec{F}_E$$

En projetant cette relation sur l'axe (O, \vec{e}_x) , on obtient :

$$m\ddot{x} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -kx - h\dot{x} - eE_0 \cos(\omega t)$$

/4 [3] Sous forme canonique, cette équation est :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t)$$

On en déduit que :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \stackrel{\textcircled{1}}{\text{et}} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

On trouve alors :

$$\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{h} \Leftrightarrow Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\sqrt{mk}}{h}$$

/2 [4] On trouve :

$$Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2,1 \times 10^6 > \frac{1}{2}$$

On en déduit que le régime transitoire est **pseudo-périodique**. $\textcircled{1}$

/9 [5] Le régime transitoire correspond à la solution homogène $x_h(t)$ telle que

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

d'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \quad \text{avec} \quad \Delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

Comme le régime est pseudo-périodique, on sait que les racines sont complexes, et on aura

$$r_{\pm} \stackrel{\textcircled{2}}{=} - \underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{1/\tau} \pm j \underbrace{\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}}_{\Omega}$$

On a donc

$$\tau \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Omega \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Au bout de quelques τ , on peut considérer que le régime transitoire est nul. $\textcircled{1}$

Par A.N., on trouve

$$\tau \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,8 \times 10^{-10} \text{ s}.$$

On suppose donc que l'électron est en régime permanent. $\textcircled{1}$

/2 [6] On a

$$x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} x_h(t) + x_p(t)$$

avec x_h une solution homogène et x_p la solution particulière, de même fréquence $\textcircled{1}$ de l'excitation. Ainsi, pour des durées supérieures à quelques τ , donc supérieures à 10^{-9} s, on peut considérer que $x_h(t) = 0$, soit $x(t) \approx x_p(t)$.

/4 [7] En notations complexes, on définit la représentation complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ et l'amplitude complexe $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$. On peut alors écrire :

$$\begin{aligned} (j\omega)^2 \underline{X}_m + \frac{(j\omega)\omega_0}{Q} \underline{X}_m + \omega_0^2 \underline{X}_m &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{-eE_0}{m} \Leftrightarrow \underline{X}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\frac{-eE_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{(j\omega)\omega_0}{Q}} \\ &\Leftrightarrow \underline{X}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\frac{-eE_0}{m\omega_0^2}}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \end{aligned}$$

On a alors :

$$X_m = |\underline{X}_m| \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

/3 [8] On a :

$$\begin{aligned} \underline{X}_m &= \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 - j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \\ \Rightarrow \varphi &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \arg(\underline{X}_m) = \arg\left(\frac{eE_0}{m\omega_0^2}\right) - \arg\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 - j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right) \\ &\quad \underbrace{\hspace{1.5cm}}_{=0} \\ &\Leftrightarrow \tan(\varphi) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{-\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \Leftrightarrow \tan(\varphi) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega\omega_0}{Q(\omega_0^2 - \omega^2)} \end{aligned}$$

/1 [9]

$$\boxed{\lambda_b = 400 \text{ nm}} \quad \textcircled{1} \text{ et } \quad \boxed{\lambda_r = 800 \text{ nm}}$$

/2 [10] Le lien entre pulsation et longueur d'onde est :

$$\omega = \frac{\textcircled{1} 2\pi c}{\lambda}$$

Ainsi :

$$\omega \in [\omega_r, \omega_b] \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_r = \frac{2\pi c}{\lambda_r} = 2,36 \times 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}} \quad \textcircled{1} \text{ et } \quad \boxed{\omega_b = \frac{2\pi c}{\lambda_b} = 4,71 \times 10^{15} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

/1 [11] On trouve

$$\boxed{\omega_0 \textcircled{1} = 2,34 \times 10^{16} \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

/2 [12] En comparant ω et ω_0 , on peut considérer que $\omega_0 \gg \omega$ (il y a au moins un facteur 5 entre les 2, c'est un peu juste). De plus, $Q \gg 1$. Ainsi on peut simplifier le dénominateur du X_m car

$$\frac{\omega\omega_0}{Q} \ll \omega^2 \ll \omega_0^2 \quad \textcircled{1}$$

Dans ce cas,

$$\boxed{X_m \approx \frac{eE_0}{m\omega_0^2}}$$

/2 [13] En amplitude complexe, l'accélération est :

$$\underline{A_m} \textcircled{1} = (j\omega)^2 \underline{X_m} \Rightarrow \underline{A_m} \textcircled{1} = \frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}$$

D'après le sujet, la puissance est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération, donc

$$\boxed{P = K A_m^2 = K \left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2} \right)^2}$$

/2 [14] On peut comparer la puissance diffusée pour un rayonnement bleu avec un rayonnement rouge :

$$\boxed{\frac{P_b}{P_r} \textcircled{1} \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2} \textcircled{1} 4}$$

La puissance diffusée pour les rayonnements bleus est 4 fois plus importante que celle pour un rayonnement rouge, d'où la couleur du ciel!

/2 [15] Le Soleil rasant parcourt une plus grande couche d'atmosphère $\textcircled{1}$ par rapport au zénith : tout le rayonnement bleu a déjà été diffusé, et il ne reste que le rouge. $\textcircled{1}$