Sujet 1

I Etude d'une roue de vélo

On considère une roue de bicyclette de rayon R et de masse m dont on étudie l'arrêt de la rotation par un frein à étrier. Le frein exerce sur la jante une force de direction orthoradiale et d'intensité F, que l'on considérera constante tant que la roue tourne. Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu, fixe, noté (Δ). On suppose que la liaison pivot est parfaite.

1. Quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue : celui du cylindre plein ou celui du cylindre vide ?

2. On donne les moments d'inertie associés aux deux modèles : $J_\Delta = mR^2/2$ et $J_\Delta = mR^2$. Attribuer à chaque modèle le moment d'inertie correspondant.

3. Quel est le moment résultant sur l'axe (Δ) ? On justifiera avec soin en précisant les moments éventuellement nuls avec la raison de cette nullité.

4. En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ (tel que $\omega = d\theta/dt$) autour de l'axe.

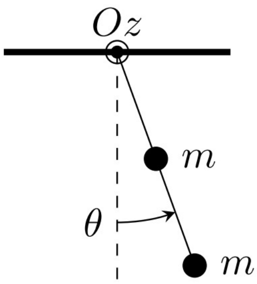
5. Déterminer alors les expressions de $d\theta(t)/dt$ et $\theta(t)$ si à $t = 0$, on a $\theta(0) = 0$ et $d\theta/dt(0) = \omega_0$.

6. Déterminer l'intensité F de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour. On cherchera dans un premier temps à quelle condition la roue s'arrête, et quel angle la roue aura parcouru. On donne, pour l'application numérique, $R = 33\,\mathrm{cm}$, $m = 1{,}6\,\mathrm{kg}$ et $\omega_0 = 17\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$.

Sujet 2

I Pendule à deux masses

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige et on suppose l'absence de frottement au niveau de la liaison pivot.



1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0$$

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Sujet 3

I Véhicule sur une colline

Un véhicule M de masse m se déplace de haut en bas d'une colline ; la trajectoire est assimilée à un quart de cercle vertical de centre O et de rayon R. On note θ, l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec la verticale. Le véhicule démarre du point le plus haut ($\theta = 0$) avec une vitesse v_0. On suppose que le conducteur laisse la voiture rouler sans accélérer ni freiner. Il n'y a pas de frottements. On appelle J le moment d'inertie du véhicule par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au cercle formé par la colline orienté dos à nous (dans le sens des θ croissants).

1. En appliquant la loi du moment cinétique, déterminer une équation différentielle vérifiée par θ et ses dérivées.

2. Intégrer cette équation, après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}$ et déterminer l'expression de $\dot{\theta}(t)$ en fonction de θ et des données du problème.

3. Exprimer la vitesse du véhicule considéré comme ponctuel en bas de la colline.

4. Retrouver par une autre méthode l'expression de $\dot{\theta}(t)$ obtenue à la seconde question.

Sujet 4

I Lancement d'un satellite

On souhaite lancer un satellite assimilable à un point matériel M de masse $m = 6\,\mathrm{t}$ depuis un point O à la surface de la Terre, sur une orbite basse d'altitude h. On note $E_m(h)$ l'énergie du satellite sur cette orbite. Pour cela, il faut lui communiquer une énergie $\Delta E_m = E_m(h) - E_m(O)$, où $E_m(O)$ est l'énergie du satellite au point O dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$.
On note $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$ la masse de la Terre, $R_T = 6400\,\mathrm{km}$ son rayon et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$ la constante gravitationnelle.

1. Définir les référentiels géocentrique et terrestre. Dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement du satellite ?

2. Exprimer l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite en fonction de G, m, M_T, R_T et h. Calculer E_m pour $h = 1000\,\mathrm{km}$.

3. On note Ω la vitesse angulaire correspondant à la rotation de la Terre sur elle-même. Calculer Ω.

4. On note λ la latitude du point de lancement O du satellite. Préciser le mouvement de O dans le référentiel géocentrique. En déduire l'expression de la norme de la vitesse $v(O)$ de ce point.

5. Exprimer l'énergie mécanique dans le référentiel géocentrique $E_m(O)$ du satellite de masse m situé en O.

6. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite.

7. Parmi les bases de lancement suivantes, laquelle choisir de préférence ?
   - Kourou en Guyane française : $\lambda = 5{,}23°$
   - Cap Canaveral aux USA : $\lambda = 28{,}5°$
   - Baïkonour au Kazakhstan : $\lambda = 46°$

8. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse d'altitude h depuis Kourou.

9. Calculer l'énergie supplémentaire à apporter si on lance le satellite depuis Baïkonour. Commenter.