MPSI3 – 24 novembre 2023 – Devoir surveillé 3

Correction du DS

/23 E1 Pentachlorure de phosphore

/3 [1] On applique la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{p_0 = \frac{n_0 RT}{V}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J\cdot K^{-1}\cdot mol^{-1}} \\ T = 453{,}15\,\mathrm{K} \\ V = 2\times10^{-3}\,\mathrm{m^3} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{p_0 = 9{,}41\times10^5\,\mathrm{Pa}}$

/5 [2]

Équation		$PCl_{5(g)}$	$= PCl_{3(g)}$	$+ Cl_{2(g)}$	$n_{\text{tot,gaz}}$
Initial	$\xi = 0$	n_0	0	0	n_0
Interm.	ξ	$n_0 - \xi$	ξ	ξ	$n_0 + \xi$
Final	$\xi_f = \xi_{\text{eq}}$	$n_0 - \xi_{\text{eq}}$	ξ_{eq}	ξ_{eq}	$n_0 + \xi_{\text{eq}}$

/3 [3] On utilise à nouveau l'équation des gaz parfaits, avec $\frac{RT}{V} = \frac{p_0}{n_0}$:

$$\boxed{P_{PCl_5} = \frac{(n_0-\xi)RT}{V} = \frac{(n_0-\xi)p_0}{n_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{PCl_3} = \frac{\xi p_0}{n_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{Cl_2} = \frac{\xi p_0}{n_0}}$$

/9 [4] Loi d'action de masses :

$$K^\circ = \left.\frac{a(PCl_3)a(Cl_2)}{a(PCl_5)}\right|_{\text{eq}}$$

Activité d'un gaz

$$\Leftrightarrow K^\circ = \left.\frac{\frac{P_{PCl_3}}{p^\circ}\frac{P_{Cl_2}}{p^\circ}}{\frac{P_{PCl_5}}{p^\circ}}\right|_{\text{eq}}$$

Question 2

$$\Leftrightarrow K^\circ = \frac{\xi_{\text{eq}}^2}{n_0(n_0-\xi_{\text{eq}})}\frac{p_0}{p^\circ}$$

On factorise

$$\Leftrightarrow K^\circ = \underbrace{\frac{\cancel{n_0^2}}{\cancel{n_0^2}}}_{=1}\frac{\left(\frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}\right)^2}{1\left(1-\frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}\right)}\frac{p_0}{p^\circ}$$

$\alpha = \xi_{\text{eq}}/n_0$

$$\Leftrightarrow K^\circ = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}\frac{p_0}{p^\circ}$$

Ainsi, en isolant :

$$\alpha^2 + \alpha\left(\frac{K^\circ p^\circ}{p_0}\right) - \frac{K^\circ p^\circ}{p_0} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{K^\circ p^\circ}{p_0}\right)^2 + 4\left(\frac{K^\circ p^\circ}{p_0}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\left(\frac{K^\circ p^\circ}{2p_0}\right) + \sqrt{\left(\frac{K^\circ p^\circ}{2p_0}\right)^2 + \left(\frac{K^\circ p^\circ}{p_0}\right)}}$$

$\Rightarrow$ A.N. : $\underline{\alpha = 0{,}59}$

α représente la proportion de réactif ayant effectivement réagit.

/3 [5] À l'aide du tableau d'avancement, on a $n_{\text{tot, gaz}}$, d'où

$$P_{\text{eq}} = \frac{n_0+\xi_{\text{eq}}}{n_0}p_0 \Leftrightarrow \boxed{P_{\text{eq}} = (1+\alpha)p_0}$$

A.N. : $\underline{P_{\text{eq}} = 15{,}0\,\mathrm{bar}}$

/41 E2 États finaux variés

/3 [1] On constate que l'équilibre (1) = (2) − (3) donc

$$\boxed{K_1^\circ = \frac{K_2^\circ}{K_3^\circ} = 10^{-1{,}6}}$$

/10 $\boxed{2}$ On dresse le tableau d'avancement en concentration :

Équation		$CH_3COOH\,(aq)$ +	$F^-\,(aq)$	→ $CH_3COO^-\,(aq)$ +	$HF\,(aq)$
Initial	$x = 0$	c_1	c_2	0	0
Interm.	x	$c_1 - x$	$c_2 - x$	x	x
Final (mol·L^{-1})	$x_f = x_{eq}$	$9{,}0 \times 10^{-2}$	$4{,}0 \times 10^{-2}$	$9{,}6 \times 10^{-3}$	$9{,}6 \times 10^{-3}$

D'après la loi d'action de masse,

$$\begin{aligned} K_1^\circ &= \frac{x_{eq}^2}{(c_1 - x_{eq}) \times (c_2 - x_{eq})} && \text{On isole} \\ \Leftrightarrow (c_1 - x_{eq})(c_2 - x_{eq})K_1^\circ &= x_{eq}^2 && \text{On rassemble} \\ \Leftrightarrow x_{eq}^2 + (x_{eq} - c_1)(x_{eq} - c_2)K_1^\circ &= 0 && \text{On développe et factorise} \\ \Leftrightarrow & \boxed{x_{eq}^2(1 + K_1^\circ) - x_{eq}(c_1 + c_2)K_1^\circ + c_1c_2K_1^\circ = 0} \end{aligned}$$

Ainsi, avec Δ le discriminant de ce trinôme :

$$\Delta = (c_1 + c_2)^2 \left(K_1^\circ\right)^2 - 4(1 + K_1^\circ)c_1c_2K_1^\circ \qquad \text{Solutions}$$

$$\Rightarrow \boxed{x_{eq,\pm} = \frac{(c_1 + c_2)K_1^\circ \pm \sqrt{(c_1 + c_2)^2 \left(K_1^\circ\right)^2 - 4(1 + K_1^\circ)c_1c_2K_1^\circ}}{2(1 + K_1^\circ)}} \qquad \text{Calcul}$$

$$\text{A.N. : } \underline{x_{eq} = 9{,}6 \times 10^{-3}\,\text{mol·L}^{-1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_1 = 0{,}1\,\text{mol·L}^{-1} \\ c_2 = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1} \\ K_1^\circ = 10^{-1{,}6} \end{cases}$$

On en déduit les concentrations à l'équilibre indiquées dans le tableau.

/6 $\boxed{3}$ On dresse un tableau d'avancement en concentration :

Équation		$Ca(OH)_2(s)$ =	$Ca^{2+}(aq)$ +	$2HO^-(aq)$
Initial	$x = 0$	excès	0	0
Interm.	x	excès	x	$2x$
Final (mol·L^{-1})	$x_f = x_{eq}$	excès	$1{,}2 \times 10^{-2}$	$2{,}4 \times 10^{-2}$

Par la loi d'action de masse, $K_4^\circ = x_{eq} \times (2x_{eq})^2$ donc $\boxed{x_{eq} = \left(\frac{K_4^\circ}{4}\right)^{1/3}}$

$$\text{A.N. : } \underline{x_{eq} = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}}$$

On en déduit les concentrations indiquées dans le tableau.

/3 $\boxed{4}$

$$\boxed{\text{pH} = 14 + \log[HO^-]} \Rightarrow \underline{\text{pH} = 12{,}4}$$

ce qui corrspond bien à un milieu basique.

/3 $\boxed{5}$ On écrit la réaction (5) : $Ca(OH)_2(s) + H_2CO_3(aq) = CaCO_3(s) + 2\,H_2O$ (5)

On constate que la réaction (5) = (4) − (6) + (8) + (7) − 2 × (9) donc

$$\boxed{K_5^\circ = \frac{K_4^\circ K_7^\circ K_8^\circ}{K_6^\circ (K_9^\circ)^2} = 10^{14{,}5}}$$

/5 6 À l'équilibre, d'après la loi d'action de masse,

$$\begin{aligned} K^\circ &= \frac{P(CO_2)_{eq}}{P^\circ} \\ \Leftrightarrow K^\circ &= \frac{n(CO_2)_{eq}RT}{VP^\circ} \\ \Leftrightarrow \boxed{n(CO_2)_{eq} = \frac{K^\circ P^\circ V}{RT}} \end{aligned}$$

$P(CO_2)_{eq} = \dfrac{n(CO_2)_{eq}RT}{V}$

On isole

A.N. : $\underline{n(CO_2)_{eq} = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol}}$ avec $\begin{cases} K^\circ = 0{,}20 \\ P^\circ = 1 \times 10^5\,\text{Pa} \\ V = 10 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 \\ R = 8{,}314\,\text{J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \\ T = 1093\,\text{K} \end{cases}$

/4 7 Comme $n < n(CO_2)_{eq}$, le quotient réactionnel évoluera de sa valeur initiale 0 jusqu'à sa valeur maximale Q_{max}, qui sera inférieure à K°. Ainsi la réaction évoluera dans le sens direct jusqu'à **disparition complète** du carbonate de calcium : c'est une **rupture d'équilibre**.

Les quantités de matière sont :

$$\underline{n(CO_2)_f = n(CaO)_f = n = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}} \quad \text{et} \quad \underline{n(CaCO_3)_f = 0}$$

/4 8 Comme $n > n(CO_2)_{eq}$, le quotient réactionnel peut augmenter jusqu'à atteindre la constante d'équilibre. L'état final est donc **bien un état d'équilibre** avec

$$\boxed{n(CO_2)_f = n(CaO)_f = n(CO_2)_{eq} = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol}}$$

$$\boxed{n(CaCO_3)_f = n - n(CO_2)_{eq} = 2{,}8 \times 10^{-2}\,\text{mol}}$$

/3 9 On utilise les résultats précédents en appliquant l'équation d'état des gaz parfaits :

- $n < n(CO_2)_{eq} \Rightarrow p = \dfrac{nRT}{V} \propto n$;
- $n \geq n(CO_2)_{eq} \Rightarrow p = \dfrac{n(CO_2)_{eq}RT}{V} = \text{cte}$.

/60 P1 Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC

/8 1

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow L\frac{di}{dt} + Ri + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2u_C}{dt^2} + \frac{R}{L}\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC}u_C &= 0 \end{aligned} \tag{3.1}$$

$u_L = L\frac{di}{dt}$ et $u_R = Ri$

$i = C\frac{du_C}{dt}$

forme canonique

On détermine l'expression de Q par identification :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{Q\sqrt{LC}} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{L}{R\sqrt{LC}} \\ \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}} \end{aligned}$$

$\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$

On isole Q

$L = \sqrt{L}^2$

/5 2

Avec l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r, doubles réelles, simple réelle ou doubles complexes. On a en effet, avec $Q > 0$,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \cancel{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2}}\left(1 - 4Q^2\right) > 0 \Leftrightarrow 4Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

Q > 1/2 : régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

Q = 1/2 : régime **critique**, racine double réelle ;

Q < 1/2 : régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

/4 $\boxed{3}$

$$
\begin{aligned}
r_\pm &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2} && \text{On injecte } \Delta \\
\Leftrightarrow r_\pm &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(4Q^2-1\right)} && \text{On extrait } \tfrac{\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow r_\pm &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} && \text{On définit } \Omega \\
\Leftrightarrow r_\pm &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega
\end{aligned}
$$

d'où la définition de Ω :

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

On remarque donc qu'on peut assimiler le terme à l'intérieur de l'exponentielle comme l'inverse d'un temps, c'est-à-dire qu'on définit τ comme la partie réelle des racines :

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

/9 $\boxed{4}$ On a donc

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

- On trouve A avec la première condition initiale (condensateur initialement chargé et tension condensateur continue) :

$$u(0) = u_0 = 1\left[A\cdot 1 + B\cdot 0\right] = A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A = u_0}$$

- On trouve B avec la seconde CI (il n'y a pas de courant avant la fermeture de K et courant continu dans la bobine) :

$$
\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] &+ \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right] \\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) &= -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0 \\
\Leftrightarrow &\ \boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}u_0}
\end{aligned}
$$

Ainsi,
$$\boxed{u(t) = u_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\sin(\Omega t)\right]}$$

/5 $\boxed{5}$ On commence par représenter le circuit en ajoutant en parallèle de C la résistance R_0 et la capacité C_0.

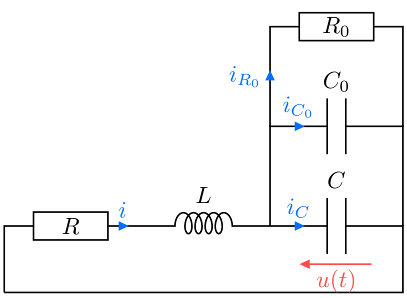


Figure 3.1 – Circuit avec oscilloscope.

Loi des nœuds :

$$
\begin{aligned}
i &= i_{R_0} + i_{C_0} + i_C && i_C = C\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\ i_{C_0} = C_0\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\ i_{R_0} = \tfrac{u}{R_0} \\
\Leftrightarrow i &= \frac{u}{R_0} + (C+C_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}
\end{aligned}
$$

Dans la loi des mailles,

$$
\begin{aligned}
u_L + u_R + u &= 0 && u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\ u_R = Ri \\
\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u &= 0 && i = \tfrac{u}{R_0} + (C+C_0)\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow \frac{L}{R_0}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + L(C+C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{R_0}u + R(C+C_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u &= 0 && \text{On factorise} \\
\Leftrightarrow \boxed{L(C+C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0}
\end{aligned}
$$

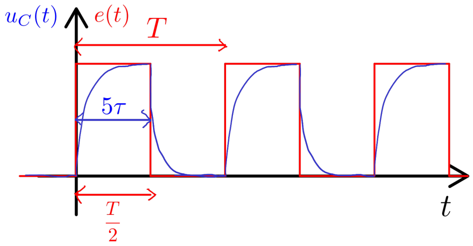
/7 $\boxed{6}$ Pour que l'oscilloscope ait le moins d'influence possible sur les oscillations, il faut que les coefficients de l'équation différentielle précédente diffèrent le moins possible de ceux de l'équation différentielle (3.1) :

- $C \gg C_0$; les capacités utilisées en T.P. sont de l'ordre du nF ou du µF. Comme $C_0 = 11\,\mathrm{pF}$, cette condition est bien vérifiée ;
- $R \ll R_0$; les résistances utilisées en T.P. sont de l'ordre du kΩ. Comme $R_0 = 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$, cette condition est bien vérifiée ;
- $\frac{L}{R_0} \ll RC$ soit $R_0 \gg \frac{L}{RC} \approx 10^4\,\Omega$; cette condition est bien vérifiée.

/4 [7] En remarquant que $\cos\left(\Omega(t+T)\right) = \cos\left(\Omega t + 2\pi\right) = \cos\left(\Omega t\right)$, on montre facilement que $d_m = \ln\left(\exp\left\{\frac{\Omega_0 m T}{2Q}\right\}\right)$. On obtient donc : $d_m = \dfrac{\omega_0 m T}{2Q}$. En remplaçant T par $\frac{2\pi}{\Omega}$ où $\Omega = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}$, il vient :

$$\boxed{d_m = \frac{2\pi m}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

/2 [8] Pour observer les oscillations il faut que la demi-période du signal délivré par le G.B.F. soit égale à quelques τ. En effet, le régime permanent est atteint au bout d'approximativement 5τ. Une représentation avec le circuit RC est proposée ci-contre.



/3 [9] On lit graphiquement $u(0) = 4{,}0\text{V}$ et $u(2T) = 1{,}4\text{V}$. On peut alors calculer $d_2 = \ln\dfrac{u(0)}{u(2T)}$.

Comme $d_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$, on en déduit : $\boxed{Q = \sqrt{\frac{1}{4} + 4\left(\frac{\pi}{d_2}\right)^2}}$. Application numérique : $\underline{Q = 6{,}0}$

/4 [10] Dans le cas où $R = 0$, le circuit est non dissipatif donc l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine reste constante. On l'évalue facilement en $t = 0$:

$$\mathcal{E}(t=0) = \frac{Cu_0^2}{2} \Rightarrow \boxed{\langle\mathcal{E}\rangle = \frac{Cu_0^2}{2}}$$

/9 [11] Il faut évaluer l'énergie emmagasinée par le condensateur et la bobine à l'instant t :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2}$$

Pour $Q \gg 1$, on a $\Omega \approx \omega_0$, l'expression de $u(t)$ devient :

$$\begin{aligned}
& u(t) = u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega}\sin(\omega t)\right) && \Omega \approx \omega_0 \\
\Leftrightarrow\ & u(t) \approx u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q}\sin(\omega_0 t)\right) && Q \gg 1 \Leftrightarrow \tfrac{1}{Q} \approx 0 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u(t) \approx u_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\cos(\omega_0 t)} && i(t) = C\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow\ & i(t) = -Cu_0 e^{-\frac{t}{\tau}}\left(\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\tau}\cos(\omega_0 t)\right) && \tfrac{1}{\tau} = \tfrac{\omega_0}{2Q} \ll \omega_0 \\
\Rightarrow\ & \boxed{i(t) \approx -Cu_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{\tau}}}
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
\text{or}\quad & \mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2} && \text{On injecte} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2}Cu_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}}
\end{aligned}$$

En une pseudo-période T, l'énergie décroît de la quantité :

$$\begin{aligned}
& \Delta_T\mathcal{E} = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T) \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}\left(1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}\right) && \tau = \tfrac{2Q}{\omega_0} \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\left(1 - e^{-\frac{\omega_0 T}{Q}}\right) && \Omega \approx \omega_0 \text{ et } \Omega T = 2\pi \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T\mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}\left(1 - e^{-\frac{2\pi}{Q}}\right) && e^{-\frac{2\pi}{Q}} \underset{Q\to\infty}{\sim} 1 - \tfrac{2\pi}{Q} \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T\mathcal{E} \underset{Q\to\infty}{\sim} \frac{1}{2}Cu_0^2 \underbrace{e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}}_{\approx 1}\left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{2\pi}{Q}\right)\right) && \text{On simplifie} \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T\mathcal{E} \underset{Q\to\infty}{\sim} \frac{2\pi}{Q}\langle\mathcal{E}\rangle
\end{aligned}$$

Or, l'énergie dissipée par effet JOULE en une pseudo-période correspond à l'énergie perdue par L et C pendant cette durée donc $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{E}_J \approx \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle}$$

/58 P2 Assemblages de ressorts

A Assemblage en série

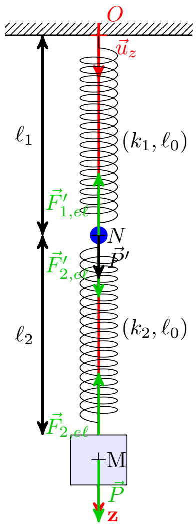


FIGURE 3.2 – Assemblages en série

/4 1

◇ **BDF :**

Poids $\vec{P} = mg\,\vec{u_z}$
Ressort 2 $\vec{F}_{2,\text{ el}} = -k_2(\ell_2 - \ell_0)\,\vec{u_z}$

En effet, si on suppose que le ressort est étiré, il exerce sur la masse une force vers le haut, donc selon $-\vec{u_z}$. Or dans ce cas, $\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_0 > 0$ et l'expression précédente avec le signe moins fournit bien une force orientée selon $-\vec{u_z}$. Voir Figure 3.2

/3 2 À l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées à la masse est nulle :

$$\begin{aligned}
&\vec{F}_{2,\text{el}} + \vec{P} = \vec{0} && \text{On remplace} \\
\Leftrightarrow\ & -k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0)\,\vec{u_z} + mg\,\vec{u_z} = \vec{0} && \text{On multiple par } \cdot\,\vec{u_z} \\
\Leftrightarrow\ & -k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + mg = 0 && \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\ell_{2,eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k_2}} && \text{Calcul} \\
\text{A.N. : }\ & \underline{\ell_{2,\text{eq}} = 15\,\text{cm}}
\end{aligned}$$

/6 3

◇ **BDF :**

Poids $\vec{P} = m'g\,\vec{u_z}$
Ressort 2 $\vec{F'}_{2,\text{ el}} = k_2(\ell_2 - \ell_0)\,\vec{u_z}$
Ressort 1 $\vec{F'}_{1,\text{ el}} = -k_1(\ell_1 - \ell_0)\,\vec{u_z}$

En effet, si on suppose que le ressort 2 est étiré, il exerce sur la masse une force vers le bas, donc selon $+\vec{u_z}$. Or dans ce cas, $\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_0 > 0$ et l'expression précédente avec le signe plus fournit bien une force orientée selon $+\vec{u_z}$. La justification du signe de la force $\vec{F'}_{1,\text{el}}$ est identique à celle de la question 1.

/4 $\boxed{4}$ À l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées à la masse est nulle :

$$\begin{aligned}
\vec{F}'_{1,\mathrm{el}} + \vec{F}'_{2,\mathrm{el}} + \vec{P}' = \vec{0} &\Leftrightarrow -k_1(\ell_{1,eq} - \ell_0)\,\vec{u_z} + k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0)\,\vec{u_z} + m'g\,\vec{u_z} = \vec{0} \\
&\Leftrightarrow -k_1(\ell_{1,eq} - \ell_0) + k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + m'g = 0 \\
&\Leftrightarrow k_1(\ell_{1,eq} - \ell_0) = k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + m'g \\
&\Leftrightarrow \ell_{1,eq} = \ell_0 + \frac{k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + m'g}{k_1} \\
&\Leftrightarrow \boxed{\ell_{1,eq} = \ell_0 + \frac{(m+m')g}{k_1}}
\end{aligned}$$

?? $\Rightarrow k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) = mg$

/2 $\boxed{5}$ Du point de vue du ressort 1, tout se passe comme si on avait accroché une masse de valeur $m + m'$. En effet, pour le ressort, que cette masse soit d'un seul tenant ou constituée de deux masses (et un ressort de masse nulle) ne change rien.

/4 $\boxed{6}$ Dans la configuration établie par l'énoncé, on a $z = \ell_1 + \ell_2$. À l'équilibre, on a alors :

$$z_{\mathrm{eq}} = \ell_{1,eq} + \ell_{2,eq} = \ell_0 + \frac{(m+m')g}{k_1} + \ell_0 + \frac{mg}{k_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{z_{\mathrm{eq}} = 2\ell_0 + \frac{(m+m')g}{k_1} + \frac{mg}{k_2}}$$

En tenant compte d'une masse nulle pour le point N, on obtient :

$$\boxed{z_{\mathrm{eq}} = 2\ell_0 + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) mg}$$

/3 $\boxed{7}$ Le cas d'un seul ressort vertical donne :

$$z_{\mathrm{eq}} = \ell_0 + \frac{1}{K} mg$$

En identifiant les deux formules terme à terme, on a :

$$\boxed{\ell_0 = 2\ell_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$$

/2 $\boxed{8}$ On calcule K avec les valeurs fournies : $\underline{K = 6{,}7\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$. C'est trop faible.

B Assemblage en parallèle

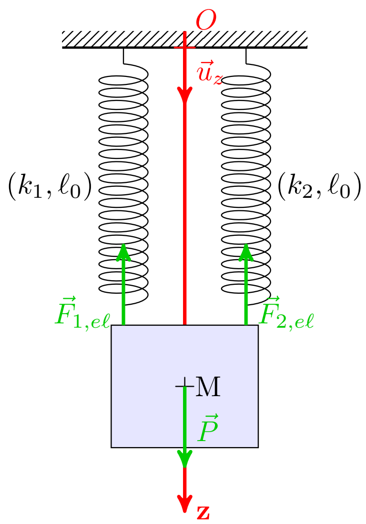


Figure 3.3 – Assemblages en parallèle

/7 $\boxed{9}$

◇ **BDF :**

Poids	$\vec{P} = mg\,\vec{u_z}$
Ressort 1	$\vec{F}_{1,\,\mathrm{el}} = -k_1(\ell - \ell_0)\,\vec{u_z}$
Ressort 2	$\vec{F}_{2,\,\mathrm{el}} = -k_2(\ell - \ell_0)\,\vec{u_z}$

On a tenu compte du fait qu'ici $\ell_2 = \ell_1 = \ell$ et on a mis le signe des forces en accord avec ce qui a déjà été établi précédemment.

/10 10

- **Système :** {point M} de masse m
- **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{lab}}$ supposé galiléen
- **Repère :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vers le bas
- **Repérage :**

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = z\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{v}(t) = \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{a}(t) = \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$$

- **PFD :**

$$\begin{aligned} m\overrightarrow{a} &= \overrightarrow{P} + \overrightarrow{F}_{1,\text{el}} + \overrightarrow{F}_{2,\text{el}} && \cdot\,\overrightarrow{u_z} \text{ et } \ell = z \\ \Leftrightarrow m\ddot{z} &= -k_1(z-\ell_0) - k_2(z-\ell_0) + mg && \text{On simplifie} \\ \Leftrightarrow m\ddot{z} + (k_1+k_2)z &= (k_1+k_2)\ell_0 + mg && \text{Forme canonique} \\ \Leftrightarrow & \boxed{\ddot{z} + \frac{k_1+k_2}{m}z = \frac{k_1+k_2}{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k_1+k_2}\right)} \end{aligned}$$

On pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\dfrac{k_1+k_2}{m}}}$ et $\boxed{z_{\text{eq}} = \ell_0 + \dfrac{mg}{k_1+k_2}}$:

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{eq}}}$$

/2 11 On a déjà traité le cas d'un seul ressort dans la première partie du sujet. On constate qu'on a ici exactement la même équation que pour un seul ressort avec $\boxed{\ell_0 = \ell_0}$ et $\boxed{K = k_1 + k_2}$.

/2 12 Avec cet assemblage, l'étudiant-e obtient un système équivalent à un ressort de raideur $\underline{K = 30\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$, soit une raideur deux fois trop élevée.

C Assemblage complexe

/9 13
- l'assemblage en série donne ici une raideur deux fois trop élevée ;
- l'assemblage en parallèle peut permettre de diviser par deux la raideur.

En effet, dans la formule obtenue pour l'assemblage en série, on avait $K = \frac{k_1 k_2}{k_1+k_2}$. Avec $k_1 = k_2$, cette formule devient $K = \frac{k_1^2}{2k_1} = \frac{k_1}{2}$. Un assemblage série de deux ressorts identiques permet bien de diviser par deux la raideur.

On peut donc envisager le montage suivant : on fabrique deux assemblages en parallèle identiques, chacun avec un ressort de raideur $k_1 = 10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et un ressort de raideur $k_2 = 20\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Ces assemblages sont chacun équivalent à un ressort de raideur $k_3 = 30\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ d'après les résultats précédents.

On assemble ces deux ressorts équivalents identiques en série et on divise alors par deux la raideur k_3. La raideur équivalente totale k_4 est alors bien de la valeur recherchée ($15\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$).

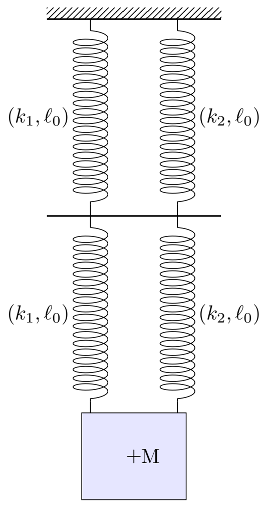


Figure 3.4 – Assemblage complexe.