Fiche pratique

Mesure et incertitude

Nous sommes constamment amenés en physique-chimie à déterminer la valeur d'une **grandeur physique**. Cela revient à trouver un nombre réel (ou de plusieurs dans le cas d'une grandeur vectorielle ou tensorielle) qui quantifie la propriété ou la qualité d'un corps ou d'un phénomène. Un tel nombre possède *a priori* une infinité de décimales qu'il est impossible de considérer toutes.

Considérons l'exemple suivant : Soit un menuisier mesurant la hauteur du chambranle d'une porte avant la fabrication et l'installation de celle-ci. Une première mesure grossière peut le conduire à estimer cette hauteur à 210 cm. En utilisant un mètre, la mesure va s'affiner et il trouvera une hauteur de $211,3$ cm. Ce faisant, il ne sait pas si la hauteur de la porte est $211,31$ ou $211,29$ cm. En adoptant des techniques de pointes (interférométrie laser), il peut espérer atteindre des précisions de l'ordre de la longueur d'onde de la lumière (soit quelques centaines de nanomètres) mais il ne saura toujours pas quelle est la hauteur exacte.

Atteindre une telle précision soulève par ailleurs d'autres problèmes : le menuisier va s'apercevoir que, suivant l'endroit où il réalise sa mesure dans la largeur de la porte, il ne trouve pas la même valeur et qu'à un endroit donné, celle-ci peut varier en fonction des conditions (température, humidité ...) ; se pose donc ici un problème crucial qui est celui de la définition de la grandeur que l'on mesure. On comprend en effet qu'il convient de préciser les **conditions** de la mesure. De la même façon, nous constaterons lors des travaux pratiques d'optique, qu'il est illusoire de vouloir relever des positions d'objet ou d'écran avec une précision inférieure au millimètre alors que du fait du stigmatisme approché réalisé, l'image sur l'écran nous paraît nette sur une plage de positions large couramment de plusieurs millimètres. Dans ce cas, le problème ne vient donc pas de la précision de nos appareils de mesure mais de notre incapacité à déterminer précisément la netteté d'une image.

Retenons de ce qui précède qu'aucune quantité n'est accessible avec une certitude absolue et que cela n'aurait dans la plupart des cas aucune signification.

I Un vocabulaire précis (la théorie pour comprendre)

A Définitions

Mesurage et mesurande

mesurage : Ensemble d'opérations ayant pour but de déterminer expérimentalement la valeur d'une grandeur physique.

mesurande : Grandeur physique soumise à mesurage.

valeur vraie : mesure que l'on obtiendrait par un mesurage parfait. C'est une grandeur hypothétique à laquelle on n'a pas accès. La valeur vraie est notée M_{vraie}.

Grandeur d'influence

Grandeur physique autre que le mesurande ayant un effet sur le résultat du mesurage (température, taux d'humidité, sens du vent, habilité de l'opérateur...)

B Comment qualifier l'erreur ?

I.B.1 Erreur aléatoire ou systématique

L'erreur de mesure E_{R} est la différence entre le résultat **d'une** mesure m_i et la valeur vraie :

$$\boxed{E_{\mathrm{R}} = m_i - M_{\text{vraie}}}$$

Attention : un mesurage peut consister en plusieurs mesures m_i. m_i ne représente donc pas le résultat du mesurage.

Erreur aléatoire

L'**erreur aléatoire** sur une série de n mesures m_i est E_{Ra} définie par

$$E_{\mathrm{Ra}} = m_i - \overline{m} \qquad \text{avec} \qquad \overline{m} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i$$

Erreur systématique

L'erreur systématique E_{Rs} représente l'écart entre la valeur moyenne des m_i et la valeur vraie (inconnue)

$$E_{\mathrm{Rs}} = \overline{m} - M_{\text{vraie}}$$

I.B.2 Fidélité et justesse

Des deux définitions précédentes, on remarque que :

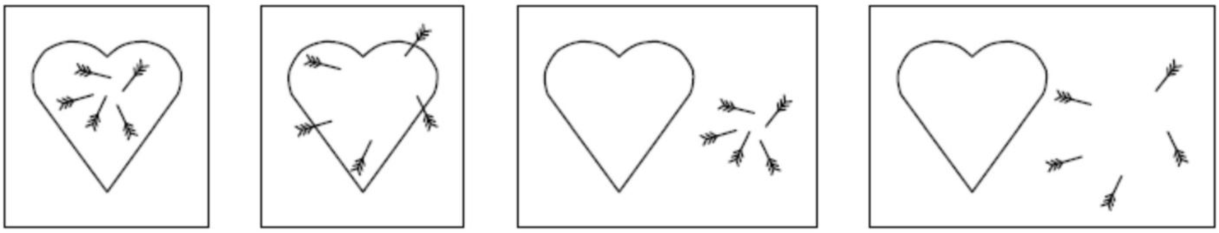
$$\boxed{E_{\mathrm{R}} = E_{\mathrm{Ra}} + E_{\mathrm{Rs}}}$$

C'est-à-dire que l'erreur de mesure est composée d'une erreur aléatoire (dispersion des résultats de chaque mesure autour de la valeur moyenne) et d'une erreur systématique (écart de la valeur moyenne à la valeur vraie).

Fidélité et justesse

Un mesurage est qualifié de **fidèle** si tous les mesurages m_i réalisés ont une valeur très voisine (erreur aléatoire E_{Ra} faible).

Un mesurage est qualifié de **juste** si la moyenne des mesurages donne une valeur voisine de la valeur vraie (erreur systématique E_{Rs} faible).



II L'incertitude-type de mesure (la pratique à retenir)

De ce qui précède, on comprend que la connaissance de la valeur vraie M_{vraie} est essentiel pour estimer l'erreur de mesure E_{R}. M_{vraie} étant inconnue, nous allons ici formaliser l'estimation **pratique** de l'erreur de mesure E_{R} via la notion d'**incertitude-type**.

L'incertitude-type $u(x)$ est un paramètre qui quantifie l'erreur de mesure potentiellement réalisée lors d'un mesurage de la grandeur physique x. Le résultat d'un mesurage va alors s'exprimer selon

$$\boxed{M(x) = m(x) \pm u(x)}$$

Une telle écriture indique que la valeur vraie de la grandeur mesurée se trouve dans l'intervalle $[m(x) - u(x), m(x) + u(x)]$ avec un certain **niveau de confiance**.

Vos résultats expérimentaux devront donc dorénavant être présentés sous cette forme, une partie du travail expérimental consistant alors à déterminer avec rigueur $u(x)$. Cette évaluation peut se faire de deux manières : évaluation de type A ou de type B

L'**erreur relative** e_{r} est définie par $$\boxed{e_{\text{r}} = \frac{u(x)}{m(x)}}$$

A Incertitude de type A

L'évaluation de type A permet de donner un résulat de mesurage par une **analyse statistique** réalisées sur plusieurs mesures $m_i(x)$ réalisées dans des **conditions de répétabilité** (les grandeurs d'influence n'ont pas changées). L'avantage est qu'il n'est **pas nécessaire de connaître les caractéristiques techniques des dispositifs de mesure employés**. Pour un ensemble $m_i(x)$ de n mesures de x,

$$\boxed{M(x) = \overline{m}(x) \pm \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(x)}$$

Avec $$\overline{m}(x) = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} m_i(x) \qquad \text{et} \qquad \sigma(x) = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(m_i(x) - \overline{m}(x))^2}$$

$\sigma(x)$ est l'écart-type (et l'incertitude-type) sur une mesure de x. C'est-à-dire que si l'on souhaite prévoir le résultat d'une **unique** mesure de x, l'incertitude-type que l'on devra considérer est $\sigma(x)$. Mais ici, le mesurage ayant été réalisé sur un échantillon de taille n, l'incertitude-type sur le résultat de mesure est en réalité l'écart-type $\sigma(\overline{m}(x))$ sur la moyenne des n mesures. Un résultat de mathématiques statistiques (que l'on ne cherchera pas à démontrer est que),

$$\sigma(\overline{m}(x)) = \frac{1}{\sqrt{n}}\sigma(x)$$

Ce qui permet de comprendre le résultat précédent.

B Incertitude de type B

II.B.1 Définition

L'évaluation de type B permet à l'inverse de donner un résultat de mesurage à partir d'une unique mesure. L'incertitude-type est alors évaluée à partir de toutes les informations connues sur les dispositifs de mesure. Dans la plupart des cas, cela revient à se référer aux informations fournies par le constructeur. Plusieurs cas doivent être envisagés :

1. pour un appareil de mesure analogique possédant des graduations (règle, rapporteur, vernier, appareil à cadran...) l'incertitude de lecture est estimée à partir de la valeur g d'une graduation :

$$\boxed{u(x) = \frac{g}{\sqrt{3}}}$$

2. le constructeur fournit une indication d'incertitude maximale que l'on note ΔC. L'incertitude relative vaut alors

$$\boxed{u(x) = \frac{\Delta C}{\sqrt{3}}}$$

II.B.2 Exemples

1. un résistor électrique a, d'après le constructeur, une résistance $R = 10\ \Omega \pm 5\%$. L'incertitude-type associée vaut alors :

$$u(R) = \frac{10 \times 5/100}{\sqrt{3}} = 0,3\ \Omega$$

2. Notice d'un thermomètre : « Range -200 to $+700$ °C, Temperature resolution below 700 °C : $0,01$ °C. »
   On considère que l'indication constructeur est l'incertitude maximale liée à la résolution. L'incertitude due à la résolution associée à une mesure de $T = 18,545$ °C est :

$$u(T) = \frac{0,01}{\sqrt{3}} = 0,006\ °\mathrm{C}$$

3. Notice d'une boîte à décades : « Range : 1 Ω to $1,11$ MΩ, number of decades : 5, full scale accuracy $0,1\%$. »
   On considère que l'indication du constructeur est l'incertitude maximale. L'incertitude de type B associée à une boîte réglée sur 10 kΩ est :

$$u(R) = \frac{10000 \times 0,1/100}{\sqrt{3}} = 6\ \Omega$$

4. On cherche à mesurer une tension de 0,9 V à l'aide d'un voltmètre de classe 2 (signifie une incertitude de 2%), réglé sur le calibre 100 V. Le résultat lu est 3 V et reste constant. Le calibre est-il bien choisi ?
   Voltmètre de classe 2 sur calibre 100 V induit une erreur absolue de $(2/100) \times 100 = 2$ V. L'incertitude-type est alors

$$u(V) = \frac{2}{\sqrt{3}} = 1\ \mathrm{V}$$

   On mesure alors une valeur de tension de 3 ± 2 V. Le calibre est mal choisi car la sensibilité du voltmètre n'est pas suffisante pour mesurer $0,9$ V. En pratique, on choisit comme vous le savez le calibre immédiatement supérieur à la valeur que l'on souhaite mesurer.

C Comment écrire son résultat de mesure ?

Nombre de chiffres significatifs

Les incertitudes $u(x)$ sont à écrire avec un unique chiffre significatif. Concernant la valeur $m(x)$, elle prendra comme dernier chiffre significatif celui de même position que celui de l'incertitude.

Exemple : On mesure $R = 100,251389\ \Omega$ avec une incertitude $u(R) = 0,812349\ \Omega$. On écrit alors le résultat sous la forme $R = 100,3 \pm 0,8\ \Omega$.

Notons qu'il est courant de confondre le résultat du mesurage $M(x)$ avec la grandeur mesurée. Aussi, on écrira souvent $R = 100,3 \pm 0,8\ \Omega$ à la place de $M(R) = 100,3 \pm 0,8\ \Omega$

D Propagation des incertitudes : méthode Monte-Carlo

II.D.1 Position du problème

Un problème qui se pose réguliérement lorsqu'on cherche à déterminer l'incertitude sur une valeur se nomme propagation des incertitudes. Considérons le cas suivant afin d'illustrer notre propos. Nous cherchons à déterminer la valeur d'une résistance R fournie à partir d'une mesure expérimentale de la tension et de l'intensité.

On a procédé au mesurage de la tension U et de l'intensité I aux bornes d'une résistance R. On veut déterminer la valeur de la grandeur $R = U/I$. Nous avons mesuré expérimentalement $U = 1,5 \pm 0,1$ V et $I = 122 \pm 1$ mA. Comment alors évaluer $m(R)$ ainsi que son incertitude-type associée $u(R)$?

II.D.2 Philosophie de la méthode

On suppose qu'une incertitude-type de $0,1$ V sur la tension signifie que la tension pourrait être obtenue lors de la mesure dans l'intervalle $[1,4\ \text{V}; 1,6\ \text{V}]$ de manière aléatoire. On traduit cela en réalisant un grand nombre de tirages aléatoires de la tension dans cet intervalle. On fait de même pour l'intensité. Chacun de ces couples de valeurs (U_i, I_i) va alors nous permettre d'estimer R. On a alors autant de valeurs de R_i que de tirages réalisés. Le résultat de mesurage de R s'obtient alors par calcul de moyenne et écart-type sur l'ensemble statistique $\{R_i\}$ (comme si les $\{R_i\}$ étaient différents résultats possibles d'une **même unique** mesure et qu'on faisait une évaluation de type A).

II.D.3 En pratique

1. Lister les grandeurs expérimentales utiles pour le calcul de R et associer à chacune (ici U et I), un intervalle au sein duquel on peut raisonnablement penser qu'elles appartiennent. Ici, on supposera, en tenant compte des incertitudes-types que
$$U \in [1,4\ \text{V}; 1,6\ \text{V}] \qquad \text{et} \qquad I \in [121\ \text{mA}; 123\ \text{mA}]$$
2. Faire procéder à un tirage au sort aléatoire d'un jeu de valeurs pour chaque grandeur expérimentale $\{U_i\}$ et $\{I_i\}$ et faire calculer la valeur de la résistance $\{R_i\}$ obtenue avec ce jeu de valeurs.
3. Stocker la valeur dans une liste de résultats. Répéter le tirage pour qu'il soit statistiquement significatif (100000 fois en pratique par exemple).
4. Calculer la moyenne des valeurs de $\{R_i\}$ obtenues, meilleur estimateur de la résistance R recherchée,
5. Calculer l'écart-type de l'ensemble $\{R_i\}$, incertitude-type associée à R.

II.D.4 Un exemple de code

La bibliothèque `numpy` est ici utilisée pour simuler un processus aléatoire (`numpy.random`). Pour réaliser le tirage au sort : On supposera que la valeur centrale de l'intervalle n'est pas plus probable que les valeurs latérales de l'intervalle, on utilisera alors une distribution uniforme dans l'intervalle en appelant `numpy.random.uniform`(borneInf , borneSup). Enfin, la fonction `np.std` calcule la standard deviation, soit l'écart-type en français.

```
import numpy as np
N = 100000 # nombre de tirages

R = [] #initialisation liste vide
U = [1.4 , 1.6] #intervalle de la tension
I = [0.121, 0.123] #intervalle de l'intensite

for i in range(N):
    Utir = np.random.uniform(U[0], U[1])
    Itir = np.random.uniform(I[0], I[1])
    R.append(Utir/Itir)

# détermination du résultat de mesurage (arrondi)
Rmes = round(sum(R)/N,4)
Rinc = round(np.std(R,ddof=1),4)

#affichage
str_aff = 'R = ' + str(Rmes) + ' +/- ' + str(Rinc) + ' Ohm'
print(str_aff)
```

III Exercices

A Contrôle qualité

Un fabricant indique pour un film plastique étirable que son épaisseur vaut $e = 18\mu m$. La valeur est certifiée à 5% près. Au cours d'un TP, des étudiants mesurent l'épaisseur e du film à l'aide d'une vis micrométrique. Répartis en 10 binômes, ils obtiennent les résultats suivants :

binôme	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
e (en μm)	17.85	17.62	18.11	18.28	17.97	17.30	17.74	18.05	18.19	17.53

Peut-on faire confiance aux valeurs proposées par le fabricant ?

B Mesure de g par la méthode du pendule

La période d'oscillation T d'un pendule simple est reliée à la longueur ℓ du fil et à la constante de pesanteur g selon

$$T = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$$

La période est mesurée 10 fois et les résultats sont reportés dans le tableau suivant. Par ailleurs, la longueur ℓ du fil est mesurée à l'aide d'une règle (1 graduation = 1 mm) et permet d'obtenir $\ell = 1552,5$ mm.

i	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10
T_i (en s)	2,51	2,52	2,51	2,48	2,53	2,49	2,49	2,48	2,50	2,51

1 : Déterminer la valeur de ℓ (assortie de son incertitude-type).

2 : Déterminer la valeur de T (assortie de son incertitude-type).

3 : Ces résultats sont-ils en accord avec la valeur que vous connaissez de g ? Vous déterminerez pour cela, à l'aide d'un script Python, le résultat du mesurage de g (avec son incertitude-type).

Programme officiel

- Erreur ; composante aléatoire et composante systématique de l'erreur.
- Utiliser le vocabulaire de base de la métrologie : mesurage, valeur vraie, grandeur d'influence, erreur aléatoire, erreur systématique.
- Identifier les sources d'erreurs lors d'une mesure.
- Notion d'incertitude, incertitude-type.
- Évaluation d'une incertitude-type.
- Incertitude-type composée.
- Savoir que l'incertitude est un paramètre associé au résultat d'un mesurage, qui caractérise la dispersion des valeurs qui peuvent être raisonnablement attribuées à la grandeur mesurée.
- Procéder à l'évaluation de type A de l'incertitude- type (incertitude de répétabilité).
- Procéder à l'évaluation de type B de l'incertitude- type dans des cas simples (instruments gradués) ou à l'aide de données fournies par le constructeur (résistance, multimètre, oscilloscope, thermomètre, verrerie...).
- Évaluer l'incertitude-type d'une mesure obtenue à l'issue de la mise en œuvre d'un protocole présentant plusieurs sources d'erreurs indépendantes dans les cas simples d'une expression de la valeur mesurée sous la forme d'une somme, d'une différence, d'un produit ou d'un quotient ou bien à l'aide d'une formule fournie ou d'un logiciel.
- Comparer les incertitudes associées à chaque source d'erreurs.