Contrôle de connaissances 20

Forces centrales et solides

/10 [1] Compléter le schéma du pendule pesant avec les forces et leurs moments, calculés **par le bras de levier**. On suppose la liaison pivot parfaite. Trouver alors l'équation du mouvement par application du **TMC scalaire d'abord** puis **TPC ensuite**.

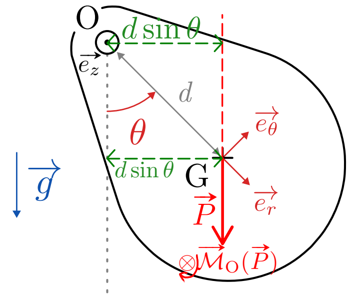


Figure 20.1 – Pendule pesant

[1] **Système** : {pendule} solide indéformable de masse m

[2] **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.

[3] **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ avec O centre de la liaison pivot.

[4] **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = d\,\vec{e_r}$

[5] **Bilan des actions** :

Origine	Force	Moment
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$	$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd\sin(\theta)$
Pivot parfaite	$\vec{0}$	$\vec{\Gamma} = \vec{0}$

[6] **TMC** : $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = J_z\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_z}\sin(\theta) = 0}$$

[7] **TPC** : on calcule $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{P}) = \mathcal{M}_z(\vec{P})\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{P}) \Leftrightarrow J_z\dot{\omega}\cancel{\omega} = -mgd\sin(\theta)\cancel{\omega} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_z}\sin(\theta) = 0}$$

/2 [2] Démontrer la relation de Henderson.

$$K_A \triangleq \frac{[\mathrm{H_3O^+}]_{\mathrm{eq}} \times [\mathrm{A^-}]_{\mathrm{eq}}}{[\mathrm{AH}]_{\mathrm{eq}}c^\circ} \Leftrightarrow \frac{[\mathrm{H_3O^+}]_{\mathrm{eq}}}{c^\circ} = K_A\frac{[\mathrm{AH}]_{\mathrm{eq}}}{[\mathrm{A^-}]_{\mathrm{eq}}}$$

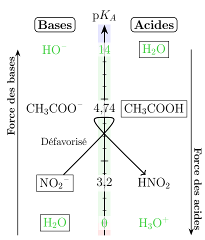
$-\log\cdot$

$$-\log[\mathrm{H_3O^+}]_{\mathrm{eq}} = -\log K_A - \log\frac{[\mathrm{AH}]_{\mathrm{eq}}}{[\mathrm{A^-}]_{\mathrm{eq}}} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{pH} = \mathrm{p}K_A + \log\frac{[\mathrm{A^-}]}{[\mathrm{AH}]}}$$

■

/6 [3] On mélange $V_0 = 50\,\mathrm{mL}$ d'une solution d'acide éthanoïque de $\mathrm{p}K_{A,1} = 4{,}74$ à $c_0 = 0{,}10\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$, et le même volume d'une solution de nitrite de sodium $(\mathrm{Na^+};\mathrm{NO_2}^-)$ de $\mathrm{p}K_{A,2} = 3{,}2$ à la même concentration. Déterminer l'avancement puis le pH.

Équation		$\mathrm{CH_3COOH_{(aq)}}$ +	$\mathrm{NO_2}^-{}_{\mathrm{(aq)}}$	$= \mathrm{CH_3COO^-{}_{(aq)}}$ +	$\mathrm{HNO_{2(aq)}}$
Initial	$x = 0$	$c_0/2$	$c_0/2$	0	0
Final	$x_f = x_{\mathrm{eq}}$	$c_0/2 - x_{\mathrm{eq}}$	$c_0/2 - x_{\mathrm{eq}}$	x_{eq}	x_{eq}



$$K^\circ = \frac{x_{\mathrm{eq}}^2}{(c_0/2 - x_{\mathrm{eq}})^2} \underset{x_{\mathrm{eq}}>0}{\Rightarrow} x_{\mathrm{eq}} = \left(\frac{c_0}{2} - x_{\mathrm{eq}}\right)\sqrt{K^\circ} \Leftrightarrow \boxed{x_{\mathrm{eq}} = \frac{\sqrt{K^\circ}}{1+\sqrt{K}}\frac{c_0}{2}} \Rightarrow \underline{x_{\mathrm{eq}} = 7{,}3\times 10^{-3}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}}$$

$$\Rightarrow \mathrm{pH} = \mathrm{p}K_{A,1} + \log\left(\frac{x_{\mathrm{eq}}}{c_0/2 - x_{\mathrm{eq}}}\right) = \mathrm{p}K_{A,1} + \frac{1}{2}\log K^\circ = \mathrm{p}K_{A,1} + \frac{\mathrm{p}K_{A,2} - \mathrm{p}K_{A,1}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\mathrm{pH} = \frac{\mathrm{p}K_{A,2} + \mathrm{p}K_{A,1}}{2} = 3{,}97}$$

/4 [4] On ajoute $n = 10^{-5}\,\mathrm{mol}$ d'ions $\mathrm{Cl^-}$ dans $V_0 = 10\,\mathrm{mL}$ de nitrate d'argent $(\mathrm{Ag^+},\mathrm{NO_3}^-)$ à $c_0 = 10^{-3}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$. On donne $\mathrm{p}K_s(\mathrm{AgCl}) = 9{,}8$. Obtient-on un précipité de chlorure d'argent AgCl ?

Formation de AgCl : $\mathrm{Ag^+{}_{(aq)}} + \mathrm{Cl^-{}_{(aq)}} = \mathrm{AgCl_{(s)}}$ $\qquad K^\circ = \frac{1}{K_s}$

Sens direct $\Rightarrow$ $$Q_{r,i} < \frac{1}{K_s} \Leftrightarrow \frac{c^{\circ 2}}{[\mathrm{Ag^+}]_i[\mathrm{Cl^-}]_i} < \frac{1}{K_s} \Leftrightarrow \boxed{\frac{[\mathrm{Ag^+}]_i[\mathrm{Cl^-}]_i}{c^{\circ 2}} > K_s}$$

A.N. : $[\mathrm{Ag^+}]_i = 10^{-3}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$ et $[\mathrm{Cl^-}]_i = n/V_0 = 10^{-3}\,\mathrm{mol{\cdot}L^{-1}}$ $\Rightarrow$ $\underline{\dfrac{[\mathrm{Ag^+}]_i[\mathrm{Cl^-}]_i}{c^{\circ 2}} = 10^{-6} > K_s}$