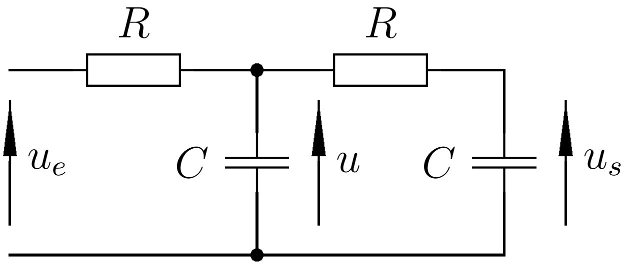
Sujet 1 – corrigé

I Filtre RC du second ordre

On considère le filtre de la figure ci-dessous avec $u_e(t) = E\cos(\omega t)$



1. Prévoir le comportement asymptotique du filtre.
   Réponse :
   En BF, on a les condensateurs qui se comportent comme un interrupteur ouvert donc d'après la loi des nœuds, on a $\underline{u}_s = \underline{u}_e$. En HF, le condensateur se comporte comme un fil donc $\underline{u}_s = 0$. On en déduit qu'il s'agit d'un filtre type passe bas.

2. Déterminez sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U}}.\frac{\underline{U}}{\underline{U_e}}$ sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{G_0}{1 - x^2 + jx/Q}$$

   On identifiera nottament la pulsation propre ω_0 tel que $x = \omega/\omega_0$ et Q
   Réponse :
   On a dans un premier de temps (pont diviseur de tension) :

$$\frac{\underline{U_s}}{\underline{U}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

   De même, en réunissant les deux dipôles de droite en //, on a

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 + R/Z_{eq}} = \frac{1}{1 + R \times \left(jC\omega + \frac{jC\omega}{1+jRC\omega}\right)}$$

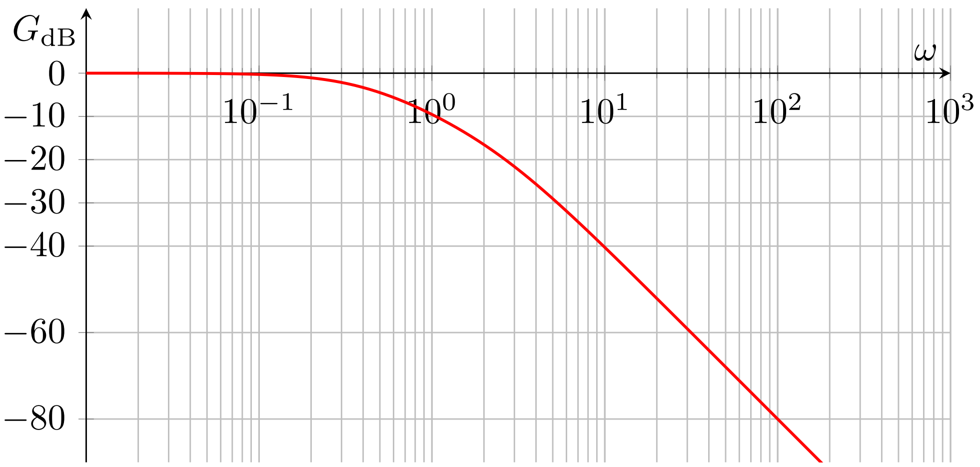
   On combine ces deux résultats :

$$\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \times \frac{1}{1 + R \times \left(jC\omega + \frac{jC\omega}{1+jRC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jRc\omega + jRC\omega + jRc\omega - (Rc\omega)^2} \tag{14.1}$$

$$= \frac{1}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2} \tag{14.2}$$

   On obtient par identification $\omega_0 = 1/(RC)$ et $Q = 1/3$

3. Tracez le diagramme de Bode du filtre
   Réponse :
   $Q = 1/3 < 1/\sqrt{2}$ donc il n'y a pas de pic (pas de résonance). On obtient alors le diag. de Bode en gain suivant :



Avec une pente de -40dB/dec en HF

4. Obtenir à partir des résultats précédents l'équation différentielle dont u_s est solution.
Réponse :
On a

$$\underline{u}_s \left(1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right) = \underline{u}_s \tag{14.3}$$

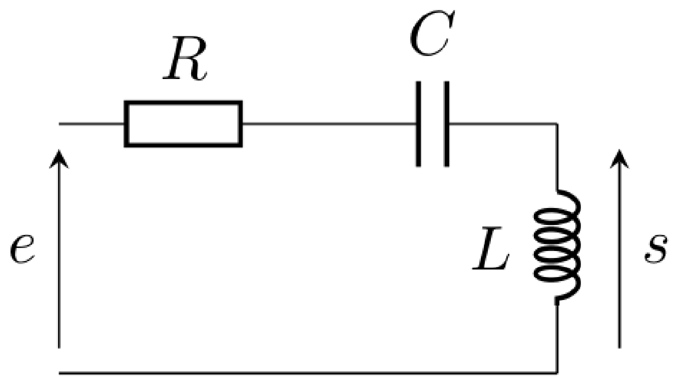
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e \tag{14.4}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2} u_s = \frac{1}{(RC)^2} u_e \tag{14.5}$$

Sujet 2 – corrigé

I Filtre passe-haut d'ordre 2

On considère le filtre suivant :



1. Justifier que ce filtre est un filtre passe-haut.
   Réponse :
   On regarde le comportement du filtre à haute et à basse fréquences :

   - $\omega \to 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : $s = 0$.
   - $\omega \to \infty$: le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert : $s = e$.

   Le circuit se comporte donc comme un filtre passe-haut.

2. Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{jQx}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

   On donnera l'expression de la pulsation caractéristique ω_0 et celle du facteur de qualitéQ.
   Réponse :

   En utilisant la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{j\frac{L\omega}{R}}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

   On a donc :

$$\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \quad ; \quad \frac{1}{RC} = Q\omega_0$$

   En multipliant et divisant ces équations entre elles, on trouve :

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{L}{R^2C}}} \quad ; \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

3. Déterminer la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain. Tracer qualitativement son allure en supposant que le facteur de qualité est tel que le circuit n'est pas résonant.
   Réponse :

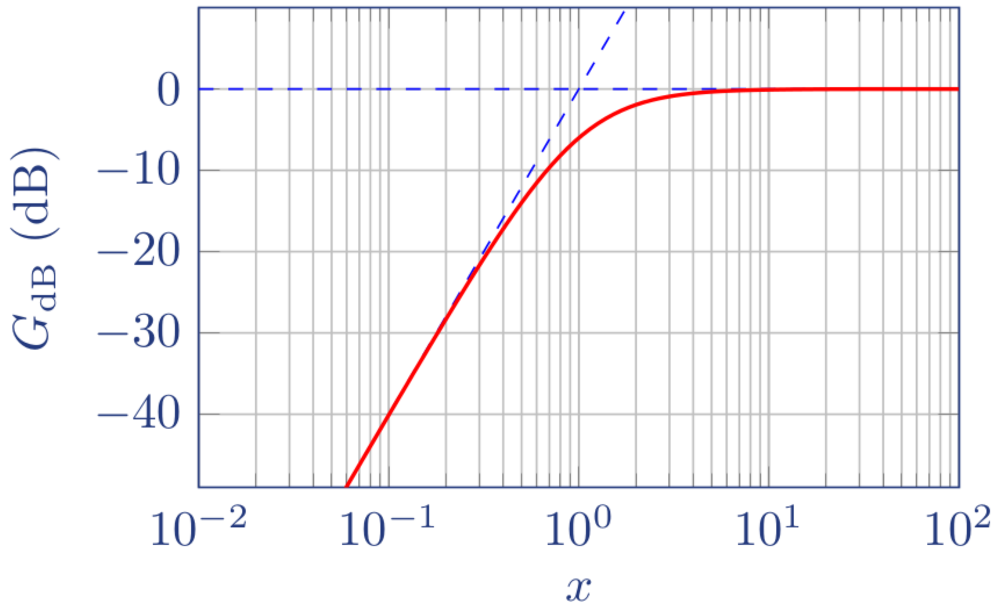
On regarde la limite de la fonction de transfert à basse et à haute fréquences :

$$\underline{H}(x \to 0) = \frac{jQx}{-\frac{jQ}{x}} = -x^2 \qquad ; \qquad \underline{H}(x \to \infty) = \frac{jQx}{jQx} = 1.$$

Les gains en décibel $G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ sont :

$$G_{\text{dB}}(x \to 0) = 20 \log |x^2| = \boxed{40 \log x} \qquad ; \qquad G_{\text{dB}}(x \to \infty) = 20 \log 1 = \boxed{0}.$$

Le diagramme de Bode en gain asymptotique est alors :



4. Tracer qualitativement l'allure du diagramme de Bode en phase en supposant toujours que le facteur de qualité est tel que le circuit n'est pas résonant.
Réponse :

Les phases $\varphi = \arg \underline{H}$ asymptotique sont :

$$\boxed{\varphi(x \to 0) = \pi} \qquad ; \qquad \boxed{\varphi(x \to 1) = \frac{\pi}{2}} \qquad ; \qquad \boxed{\varphi(x \to \infty) = 0}.$$

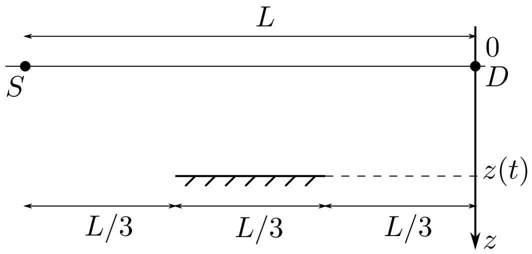
5. Ce filtre peut-il avoir un comportement dérivateur ? intégrateur ?
Réponse :

Pour qu'un filtre possède un caractère dérivateur ou intégrateur, il faut qu'il possède une pente ± 20dB/dec, ce qui n'est jamais le cas ici. Ce filtre n'a donc un comportement ni dérivateur ni intégrateur.

Sujet 3 – corrigé

I Miroir de Lloyd

On dispose une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 650\,\mathrm{nm}$ à une distance horizontale $L = 45\,\mathrm{cm}$ d'un détecteur D. Initialement, un miroir de longueur $L/3$ positionné à égale distance de S et D se trouve en $z = 0$ (même côte que S et D). On lâche le miroir à $t = 0$ sans vitesse initiale. Il ne subit que les effets de la pesanteur.
La réflexion sur le miroir métallique s'accompagne d'un retard de phase égale à π.
L'indice optique de l'air est supposé égal à 1.

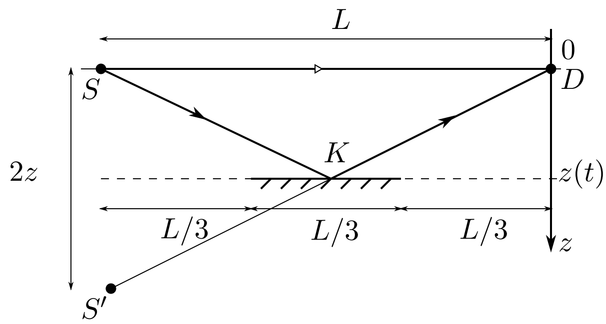


On donne dans le tableau ci-dessous l'instant t_k auquel est mesuré le $k^{\text{ième}}$ maximum d'intensité par le détecteur D.

indice k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_k (ms)	7,42	9,77	11,11	12,08	12,86	13,53	14,10	14,62	15,00

1. Pour une position $z(t)$ du miroir, représenter les deux rayons qui interfèrent au niveau du détecteur D.

   Réponse :



2. Déterminer l'expression de la différence de marche δ_D entre ces deux ondes au point D. Pour cela, il pourra être utile de faire apparaitre une source fictive S' image de S par le miroir. Simplifier cette expression dans le cas où $L \gg z(t)$. On rappelle qu'au premier ordre en $\epsilon \ll 1$, $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$.
   Réponse :

$$\begin{aligned}\delta_D = S'D + \lambda/2 - SD &= \sqrt{L^2 + (2z)^2} + \lambda/2 - L \\ &= L\left(\sqrt{1 + (2z/L)^2} - 1\right) + \lambda/2 \\ &\approx \frac{2z^2}{L} + \lambda/2\end{aligned}$$

3. En déduire l'expression de l'intensité en D en fonction du temps. On rappelle la formule de Fresnel

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi)$$

Réponse :
En étudiant le mouvement du miroir soumis à l'accélération $\vec{a} = g\vec{e}_z$,

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

En notant $I_1 = I_2 = I_0$, l'intensité des deux ondes, on a

$$\begin{aligned} I_D &= 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{2z^2}{L}+\pi\right)\right)\\ &= 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi g^2t^4}{\lambda L}+\pi\right)\right)\end{aligned}$$

4. Quelle est l'intensité reçue en D à $t = 0$?
   Réponse :
   $I_D(t = 0) = 0$: intéreférences destructives liées au déphasage de π ajouté par la réflexion.

5. Déterminer l'expression de l'instant t_k auquel est observé le $k^{\text{ième}}$ maximum d'intensité en D.
   Réponse :
   On résout $I_D(t_k) = 4I_0$, soit $\dfrac{\pi g^2 t_k^4}{\lambda L} = (2k-1)\pi$:

$$\boxed{t_k = \left(\frac{(2k-1)\lambda L}{g^2}\right)^{1/4}}$$

6. Á l'aide d'une régression linéaire, déterminer la valeur de g.
   Réponse :
   On trace t_k^4 en fonction de k, et on trouve $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

Sujet 4 – corrigé

I Corde de Melde : superposition d'ondes

On considère une corde de Melde de longueur L. On interprète la vibration de la corde de la manière suivante : le vibreur émet une onde qui se propage en direction de la poulie où elle est réfléchie ; cette onde réfléchie se propage en direction du vibreur où elle est elle-même réfléchie ; l'onde réfléchie se propage en direction de la poulie où elle se réfléchit, et ainsi de suite. L'axe (Ox) est parallèle à la corde au repos ; le vibreur est en $x = 0$ et la poulie en $x = L$. Le vibreur émet une onde $s_0(x,t)$ telle que

$$s_0(0,t) = a_0 cos(\omega t)$$

La célérité des ondes sur la corde est c et on note $k = \omega/c$. On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur la poulie en $x = L$, l'onde réfléchie s_r vérifie :

  $$s_r(L,t) = -r\, s_i(L,t)$$

  où r est un coefficient compris entre 0 et 1 ;

- lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur le vibreur en $x = 0$, l'onde réfléchie s'_r vérifie :

  $$s'_r(0,t) = -r' s'_i(0,t)$$

  où r' est un coefficient compris entre 0 et 1.

1. Exprimer l'onde $s_0(x,t)$.
   Réponse :
   L'onde s_0 se propage dans le sens de (Ox) avec la célérité c donc :

   $$s_(x,t) = s_0(0,t - x/c) = a_0 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} = a_0 \cos(\omega t - kx)$$

2. Exprimer l'onde $s_1(x,t)$ qui apparaît par réflexion de l'onde s_0 sur la poulie, puis l'onde $s_2(x,t)$ qui apparaît par réflexion de s_1 sur le vibreur, puis l'onde $s_3(x,t)$ qui apparaît par réflexion de s_2 sur la poulie.
   Réponse :
   L'onde s_1 provient de l'onde s_0 par réflexion sur la poulie donc :

   $$s_1(L,t) = -rs_0(L,t) = -ra_0 \cos(\omega t - kL)$$

   De plus, s_1 se propage dans le sens inverse de (Ox) avec la célérité c, donc

   $$s_1(x,t) = s_1\left(L,t - \frac{L-x}{c}\right) = -ra_0 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{L-x}{c}\right) - kL\right\} = -ra_0 \cos(\omega t + kx - 2kL)$$

   De manière analogue, $$s_2(0,t) = -r's_1(0,t) = -rr'a_0 \cos(\omega t - 2kL)$$

   D'où $$s_2(x,t) = s_2(0,t - x/c) = rr'a_0 \cos(\omega t - kx - 2kL)$$

   Enfin $$s_3(L,t) = -rs_2(L,t) = -r^2r'a_0 \cos(\omega t - 3kL)$$

   Soit, $$s_3(x,t) = s_3\left(L,t - \frac{L-x}{c}\right) = -r^2r'a_0 \cos(\omega t + kx - 4kL)$$

3. À quelle condition les ondes s_0 et s_2 sont-elles en phase en tout point ? Que constate-t-on alors pour les ondes s_1 et s_2 ? La condition précédente est supposée réalisée dans la suite.
Réponse :
La phase initiale de s_0 au point d'abscisse x est égale à $-kx$; la phase initiale de s_2 au même point est égale à $-kx - 2kL$. Les deux ondes sont en phase en tout point à condition que :

$$2kL = 2n\pi$$

où n est un entier. Si cette condition est vérifiée, les ondes s_1 et s_3 sont elles aussi en phase en tout point.

4. Justifier l'expression suivante de l'onde totale existant sur la corde :

$$s(x,t) = a_0 \left\{1 + rr' + (rr')^2 + \ldots + (rr')^n + \ldots\right\} \cos(\omega t - kx) - r\, a_0 \left\{1 + rr' + (rr')^2 + \ldots + (rr')^n + \ldots\right\} \cos(\omega t + kx)$$

Réponse :
Par réflexion continuelle sur les extrémités de la corde, il existe une infinité d'ondes se propageant dans les deux sens. Par ailleurs, les ondes se propageant dans un sens donné sont toutes en phase.

5. En quels points de la corde l'amplitude de la vibration est-elle maximale ? Exprimer l'amplitude maximale $A_{\max}$ en fonction de a, r et r'. On rappelle la formule :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (rr')^n = \frac{1}{1 - rr'}$$

Réponse :

On peut réécrire $s(x,t)$ en utilisant la formule de sommation fournie :

$$s(x,t) = \tfrac{a_0}{1-rr'} \cos(\omega t - kx) - \tfrac{ra_0}{1-rr'} \cos(\omega t + kx)$$

L'amplitude est maximale en un point où les deux ondes sont en interférence constructive, c'est-à-dire aux points tels que $kx = -kx + \pi + 2p\pi$ (attention au signe - devant le second cosinus qui introduit un déphasage de π) où p est un entier soit :

$$x = \tfrac{(2p+1)\pi}{2k} = \tfrac{2p+1}{2n} L$$

L'entier p est compris entre 0 et $n-1$ puisque x est compris entre 0 et L. La valeur maximale de l'amplitude est :

$$A_{\min} = \tfrac{a_0}{1-rr'} + \tfrac{ra_0}{1-rr'} = a_0 \tfrac{1+r}{1-rr'}$$

6. En quels points l'amplitude est-elle minimale ? Exprimer l'amplitude minimale $A_{\min}$.
Réponse :
L'amplitude est minimale en un point où les deux ondes sont en interférence destructrice, c'est-à-dire aux points tels que $kx = -kx + 2p\pi$ où p est un entier soit :

$$x = \tfrac{p\pi}{k} = \tfrac{p}{n} L$$

L'entier p est compris entre 0 et n puisque x est compris entre 0 et L. La valeur minimale de l'amplitude est :

$$A_{\min} = \tfrac{a_0}{1-rr'} - \tfrac{ra_0}{1-rr'} = a_0 \tfrac{1-r}{1-rr'}$$

7. Expérimentalement on trouve $\quad \tfrac{A_{\min}}{a_0} \approx 1 \quad$ et $\quad \tfrac{A_{\max}}{a_0} \approx 10$

Déterminer r et r'.
Réponse :
On a $\quad \tfrac{1-r}{1+rr'} \approx 1 \quad$ et $\quad \tfrac{1+r}{1+rr'} \approx 1$

Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Il vient, après calcul,

$$r \approx 0{,}8 \quad \text{et} \quad r' \approx 1$$