Mécanique – chapitre 3

Mouvements courbes

Au programme

Savoirs

- ◇ Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
- ◇ Systèmes de coordonnées cartésiennes, cylindriques et sphériques.
- ◇ Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.

Savoir-faire

- ◇ Coordonnées cylindriques : exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse.
- ◇ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.
- ◇ Mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
- ◇ Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.
- ◇ Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

Sommaire

Résultats phares

Liste des définitions

Liste des propriétés

Liste des démonstrations

Liste des applications

Liste des points importants

Liste des erreurs communes

I Mouvement courbe dans un plan

I/A Position en coordonnées polaires

Définition 3.1 : Repère polaire et vecteur position

Le repère polaire est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis deux vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ de **direction variable dans le temps**, avec $\overrightarrow{u_r}$ dans la direction $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\overrightarrow{u_\theta} \perp \overrightarrow{u_r}$ dans le sens direct tels que :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = r}$$

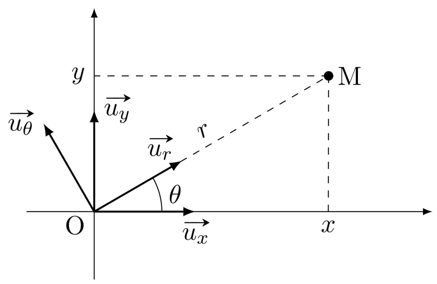


Figure 3.1 – Polaires

Soit un point matériel M dans l'espace : il se repère en coordonnées cartésiennes et polaires par

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{avec} \quad r = \sqrt{x^2+y^2} = \|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\|$$

On peut projeter les vecteurs de la base polaire sur la base cartésienne. Il suffit pour cela de prendre des valeurs particulières de θ, comme 0 et $\pi/2$, pour trouver les dépendances en cos et sin suivantes :

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_r} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y}$$

Ainsi, r, θ mais également $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ **dépendent du temps**.

Propriété 3.1 : Position en polaires et projection cartésienne

En coordonnées polaires et dans le plan d'une trajectoire, le vecteur position s'écrit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}}$$

et les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ variables se décomposent sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ fixes tels que

$$\boxed{\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{u_r} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y}}$$

I/B Déplacement élémentaire en polaires

On a toujours $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$. Pour trouver son expression, on se place au point $\mathrm{M}(t)$, et pour chaque axe $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ on **fixe l'autre coordonnée et on fait varier la variable d'intérêt**.

Démonstration 3.1 : Déplacement élémentaire polaire

Soit M repéré par la distance r et l'angle θ. On trouve la composante de $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sur $\overrightarrow{u_r}$ en **fixant** θ et on incrémente la variable r de $\mathrm{d}r$.

La distance ainsi obtenue est $\mathrm{d}r$ sur $\overrightarrow{u_r}$.

On trouve la composante de $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sur $\overrightarrow{u_\theta}$ en **fixant** r et on incrémente la variable θ de $\mathrm{d}\theta$.

La distance ainsi obtenue est $r\,\mathrm{d}\theta$ sur $\overrightarrow{u_\theta}$.

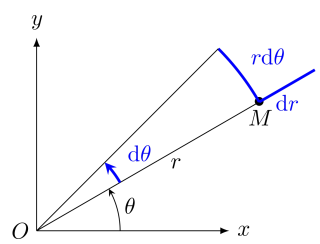


Figure 3.2 – $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ polaire

Propriété 3.2 : Déplacement élémentaire polaire

En coordonnées polaires, le déplacement élémentaire s'exprime

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

I/C Vitesse en coordonnées polaires

Ici aussi, il y a deux manières d'obtenir l'expression de la vitesse. Soit on applique $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$ sur $r\,\overrightarrow{u_r}$, soit on prend $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}$ comme une fraction. Les deux résultats sont équivalents, et donnent

Propriété 3.3 : Vitesse en coordonnées polaires

Ainsi, la vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\boxed{\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

Démonstration 3.2 : Vitesse en polaires par dérivation

Par définition, $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \vec{v} = \frac{\mathrm{d}(r\,\overrightarrow{u_r})}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}$$

Pour déterminer la vitesse il faut donc déterminer la variation dans le temps du vecteur $\overrightarrow{u_r}$. Pour cela, on décompose $\overrightarrow{u_r}$ dans la base cartésienne qui, elle, a des vecteurs de base fixes dans le temps :

$$\begin{aligned}
& \overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} && \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y} && \text{Dérivée composée}\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y} && \text{Factorisation}\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\underbrace{(-\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y})}_{=\overrightarrow{u_\theta}} && \text{Identification}\\
\Leftrightarrow\quad & \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

■

Remarque 3.1 : Dérivée composée en physique

En physique, on a l'habitude (mathématiquement valable) de penser les dérivées comme des fractions. Ainsi, on peut traiter la dérivée d'une composition en faisant intervenir d'autres dérivée par une écriture fractionnaire. Par exemple :

$$\begin{aligned}
& \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos(\theta)) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\theta}(\cos(\theta)) && \text{On réarrange}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos(\theta)) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos(\theta)) && \text{On applique les dérivées}\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos(\theta)) = -\dot{\theta}\sin(\theta)}
\end{aligned}$$

I/D Accélération

Pour l'accélération, on doit appliquer la dérivée puisqu'on n'a pas l'expression de $\mathrm{d}\vec{v}$:

Démonstration 3.3 : Accélération en polaires

Par définition,

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}\right)$$
$$\Leftrightarrow \vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\,\vec{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\,\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$$

Pour déterminer l'accélération, il faut donc déterminer la variation dans le temps du vecteur $\vec{u_\theta}$. Pour cela, on décompose $\vec{u_\theta}$ dans la base cartésienne qui a des vecteurs de base fixes dans le temps :

$$\vec{u_\theta} = -\sin(\theta)\,\vec{u_x} + \cos(\theta)\,\vec{u_y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\,\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(-\sin(\theta))}{\mathrm{d}t}\,\vec{u_x} + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\vec{u_y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\,\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\,\vec{u_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\,\vec{u_y}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\,\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\underbrace{\left(\cos(\theta)\,\vec{u_x} + \sin(\theta)\,\vec{u_y}\right)}_{=\vec{u_r}}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\,\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\vec{u_r}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)$

Dérivée composée

Factorisation

Identification ■

Ainsi, $$\vec{a} = \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$

Propriété 3.4 : Accélération en coordonnées polaires

Finalement, la vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\,\vec{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\,\vec{u_\theta}}$$

II Exemples de mouvements plans

II/A Mouvement circulaire

Définition 3.2 : Mouvement circulaire

Un mouvement est dit **circulaire** s'il se fait dans un plan, à une distance de l'axe de rotation r constante, soit

$$r(t) = R$$

Dans ce cas-là, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\,\vec{u_r} \quad \text{et} \quad \dot{r} = 0 = \ddot{r}$$

En notant $\omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire, la vitesse et l'accélération donnent

$$\vec{v} = R\omega\,\vec{u_\theta} \quad \text{et} \quad \vec{a} = -R\omega^2\,\vec{u_r} + R\dot{\omega}\,\vec{u_\theta}$$

Attention 3.1 : ω en mécanique vs. ω en filtrage

Bien que les symboles des variables soient les mêmes, les deux grandeurs décrites n'ont **rien à avoir** entre elles :

- ω en filtrage est la *pulsation* ;
- ω en mécanique est la *vitesse angulaire*.

Cependant, les deux ont la **même unité**, les $\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$, puisqu'elles décrivent bien la variation d'un angle/d'une phase dans le temps.

II/B Mouvement circulaire uniforme

Définition 3.3 : Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est dit **circulaire *uniforme*** si c'est un mouvement circulaire ($r(t) = \text{cte}$) à *vitesse angulaire constante*, soit

$$\begin{cases} r(t) = R \\ \dot{\theta}(t) = \omega \end{cases}$$

Dans ce cas, $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$ mais également $\ddot{\theta} = 0$, donc la vitesse et l'accélération donnent

$$\overrightarrow{v} = R\omega\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a} = -R\omega^2\,\overrightarrow{u_r}$$

Important 3.1 : Observations mouvement circulaire

Dans le cas du mouvement circulaire uniforme,

- Le vecteur vitesse est selon $\overrightarrow{u_\theta}$ et est de norme constante, égale à $R\omega$;
- Le vecteur accélération pointe vers le centre et est de norme constance, égale à $R\omega^2 = \dfrac{v^2}{R}$.

Transition

Si la trajectoire d'un objet change de courbure, il peut être fastidieux de travailler avec les coordonnées polaires : on utilisera alors un repère attaché à l'objet.

II/C Repère de Frenet

Définition 3.4 : Repère de Frenet

Pour un point M sur une trajectoire courbe, on peut approximer la trajectoire à un instant t comme étant celle d'un cercle, appelé **cercle osculateur**, localement tangent à la trajectoire et de rayon R. On définit alors le repère de Frenet avec :

- $\overrightarrow{u_T}$ tangent à la trajectoire en M ;
- $\overrightarrow{u_N} \perp \overrightarrow{u_T}$ et dirigé vers l'intérieur de la courbe, vers le centre du cercle osculateur.

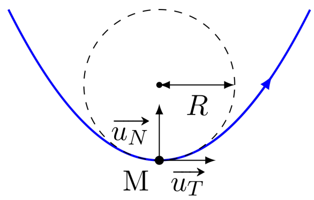


Figure 3.3 – Frenet

Le rayon R est appelé **rayon de courbure**, et son inverse $\gamma = 1/R$ est appelé **courbure** de la trajectoire.

On peut alors exprimer la vitesse et l'accélération dans ce repère ; pour la vitesse, on repart de la définition :

$$\overrightarrow{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) + \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)}}{\mathrm{d}t}$$

Or, par définition, la trajectoire est l'ensemble des positions du point M dans le temps, donc le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)}$ définit la trajectoire et la direction du vecteur $\overrightarrow{u_T}$; ainsi, **la vitesse est tangente à la trajectoire** et on a

$$\boxed{\overrightarrow{v} = v\overrightarrow{u_T}}$$

Concernant l'accélération, avec la définition du rayon de courbure on admet

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_T}}{\mathrm{d}t} = \frac{v}{R}\overrightarrow{u_N}$$

et ainsi

$$\boxed{\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T} + \frac{v^2}{R}\overrightarrow{u_N}}$$

Remarque 3.2 : Cas limites repère de Frenet

- On retrouve le mouvement rectiligne uniforme avec $R = +\infty \Leftrightarrow \gamma = 0$, puisqu'on a alors

$$\overrightarrow{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T}$$

  avec $\overrightarrow{u_T}$ dans le sens de la trajectoire.
- On retrouve également le mouvement circulaire puisque dans ce cas la trajectoire **est** le cercle osculateur, donc $\overrightarrow{u_T} = \overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_N} = -\overrightarrow{u_r}$.

III Application : pendule simple

III/A Tension d'un fil

Définition 3.5 : Tension d'un fil

Un point matériel M accroché à un fil tendu subit de la part de ce fil une force appelée **tension du fil** et notée $\overrightarrow{T}$ telle que

$$\boxed{\overrightarrow{T} = \|\overrightarrow{T}\|\,\overrightarrow{u_r}}$$

avec $\overrightarrow{u_r}$ un vecteur unitaire dirigé **du point M vers le fil** et $\|\overrightarrow{T}\|$ la norme de la tension du fil.

Important 3.2 : Condition de support

La condition de tension est $\|\overrightarrow{T}\| > 0$.

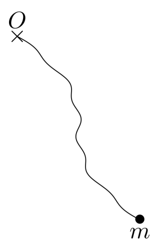


Figure 3.4 – Fil détendu : pas de force.

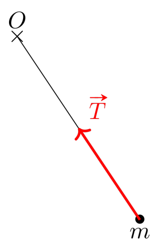


Figure 3.5 – Fil tendu : force vers O.

III/B Pendule simple

Et si je vous disais qu'on peut mesurer l'attraction de la pesanteur… avec un bout de ficelle et une masse ?

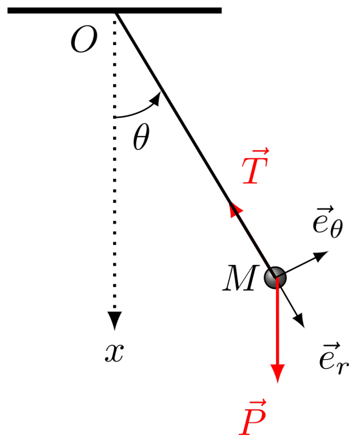


Figure 3.6 – Schéma

1 **De quoi parle-t-on ?** On étudie le mouvement d'une masse de 20 g suspendue à un fil, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La masse est écartée de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

2 **Schéma.**

3 **Modélisation.** On choisit d'utiliser des coordonnées polaires.

- La masse est assimilée à un point matériel M.
- Origine : point d'accroche du fil (centre de rotation pendule).
- Repère : $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ avec base polaire (voir schéma).
- t initial : moment du lâché, $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta(0) = 0$.

4 **Bilan des forces.**

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}) \\ \textbf{Tension} & \vec{T} = -T\,\vec{u_r} \end{array}$$

5 **PFD.**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Le mouvement étant circulaire (mais pas uniforme), on a

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + \ell\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

6 **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les axes :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

7 **Résolution.** La première équation n'est pas utilisable telle qu'elle, puisque T n'est pas connue ; cependant la seconde donne une équation différentielle homogène :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

qui constitue l'équation du mouvement du pendule. Sous cette forme, elle est **non-linéaire** donc non résoluble analytiquement ; elle peut l'être numériquement, voir `Capytale`[1].

En revanche, dans l'approximation des petits angles, on a $\sin\theta \approx \theta$, et ainsi on obtient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ! On met donc en évidence la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

1. https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/a7c5-1241282

et on a la solution générale homogène :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On obtient A et B avec les CI,

$$\theta(0) = \theta_0 \Leftrightarrow A\times 1 + B\times 0 = \theta_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \theta_0}$$
$$\dot{\theta}(0) = 0 \Leftrightarrow -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{B = 0}$$

et finalement $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$ Le pendule oscille à la pulsation ω_0 et à la période T_0 telles que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{et} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{donc} \quad \boxed{g = \frac{4\pi^2\ell}{{T_0}^2}}$$

Dans cette approximation, la période ne dépend **ni de la masse, ni de l'angle initial**. En réalité, si on s'écarte beaucoup de la verticale ($|\theta| > \pi/4$), la période change et n'est plus celle que l'on a aux petits angles. Voir le changement sur le graphique ci-dessous et en ligne [2].

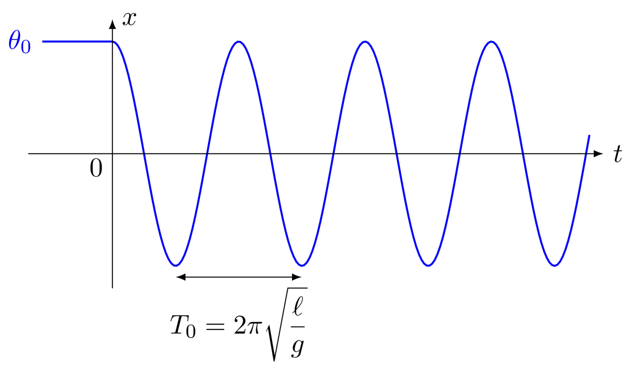


FIGURE 3.7 – $\theta(t)$ pour petits angles.

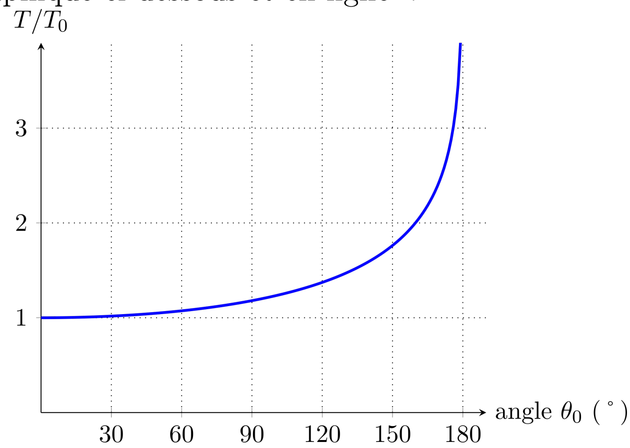


FIGURE 3.8 – Évolution de T selon θ_0.

Application 3.1 : Mesure de g par un pendule

Ainsi, avec un fil de longueur $\ell = (0{,}84 \pm 0{,}06)$ cm, on mesure une période de $T_0 = (1{,}84 \pm 0{,}10)$ s.

D'où $\boxed{g = 9{,}75\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$

Transition

S'il existe de nombreux mouvements plans, il est nécessaire de pouvoir décrire des mouvements de rotation qui ne restent pas dans un plan mais évoluent dans l'espace 3D.

IV Mouvement courbe dans l'espace

IV/A Coordonnées cylindriques

La manière la plus simple de passer du plan à l'espace est de prendre les coordonnées polaires et d'y ajouter la coordonnée cartésienne z : on définit ainsi les coordonnées **cylindriques**.

2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.php

Définition 3.6 : Repère cylindrique et vecteur position

Le repère cylindrique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, avec $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ la base polaire et $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur de base cartésienne tel que $\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z}$.

En appelant H le projeté orthogonal de M sur le plan polaire, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = \sqrt{r^2 + z^2}}$$

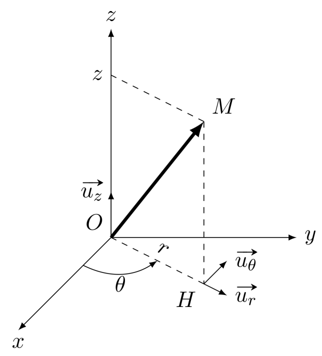


FIGURE 3.9 – Cylindriques.

La détermination de la vitesse et de l'accélération est la même qu'en polaires, il suffit d'ajouter les dérivées de z puisque $\overrightarrow{u_z}$ est fixe dans le temps. Ainsi,

Important 3.3 : Bilan : coordonnées cylindriques

- **Coordonnées :** (r,θ,z)
- **Vecteurs de base :** $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
- **Position :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$
- **Vitesse :** $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$
- **Déplacement élém. :** $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\ \overrightarrow{u_z}$
- **Accélération :** $\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

Une conséquence fondamentale du déplacement élémentaire est de pouvoir définir une surface et un volume infinitésimaux suivant une variation infinitésimale des trois coordonnées.

En effet, pour une petite variation $(\mathrm{d}r\,, \mathrm{d}\theta\,, \mathrm{d}z)$, on se déplace de $\mathrm{d}r$ dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, de $\mathrm{d}z$ dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ et l'arc de cercle formé par la variation d'angle $\mathrm{d}\theta$ est de longueur $r\,\mathrm{d}\theta$.

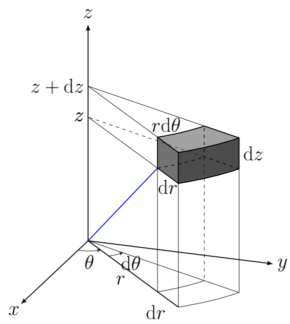


FIGURE 3.10 – dV cylindriques.

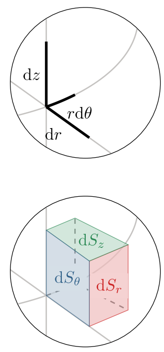


FIGURE 3.11 – Zoom volume.

Le volume élémentaire est alors le **produit de trois composantes de** $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$:

$$\boxed{\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

On trouve le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h en intégrant sur les trois coordonnées :

$$V_{\text{cyl}} = \iiint_{r,\theta,z} \mathrm{d}V = \int_{r'=0}^{R} r'\,\mathrm{d}r' \int_{\theta'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta' \int_{z'=0}^{h} \mathrm{d}z' = \frac{1}{2}R^2 \times 2\pi \times h = \boxed{h\pi R^2}$$

C'est l'aire d'un disque multiplié par la hauteur !

Attention 3.2 : Choix des coordonnées

Dans un problème de mécanique, on choisit les coordonnées judicieusement en fonction des symétries du système. **Sauf proposition de l'énoncé**, on utilisera les coordonnées **cylindriques** pour les mouvements de **rotation**. On utilisera les coordonnées cartésiennes sinon.

IV/B Coordonnées sphériques

La manière la plus complète de décrire un mouvement général dans l'espace repose sur un dernier système de coordonnées, les coordonnées **sphériques**.

Définition 3.7 : Repère sphérique

Le repère sphérique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, tels que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_z}, \overrightarrow{\mathrm{OM}}})} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = (\widehat{\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{\mathrm{OP}}})}$$

où $\widehat{(\cdot, \cdot)}$ est l'**angle orienté**, et P le projeté orthogonal de M sur le plan polaire. φ **correspond à** θ **des coordonnées polaires.**

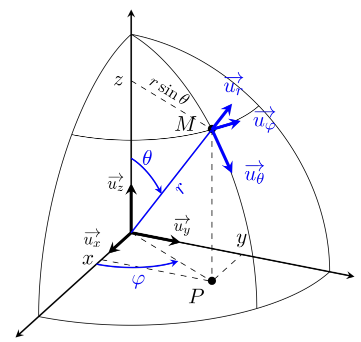


FIGURE 3.12 – Sphériques.

- ◇ $\theta \in [0\ ;\ \pi]$ est nommé **colatitude** ($\lambda = |\pi/2 - \theta|$ la latitude) , et respecte

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OP}}{z} \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

- ◇ $\varphi \in [0\ ;\ 2\pi]$ est nommé **longitude**, et respecte $\varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

- ◇ Une courbe $\theta =$ cte est appelée **parallèle** ; le **rayon** d'un parallèle est $\boxed{r\sin\theta}$.
- ◇ Une courbe $\varphi =$ cte est appelée **méridien** ; le **rayon** d'un méridien est $\boxed{r}$.

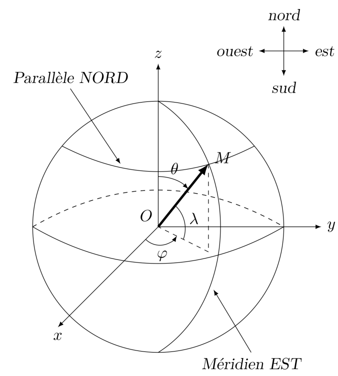
On peut inverser les définitions en prenant $x = \mathrm{OP}\cos\varphi$ et $y = \mathrm{OP}\sin\varphi$, pour avoir

$$\boxed{x = r\sin\theta\cos\varphi} \quad , \quad \boxed{y = r\sin\theta\sin\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{z = r\cos\theta}$$

Exemple 3.1 : Repérage sphérique sur Terre

Le repérage sur la Terre utilise la latitude et la longitude. Par exemple, le lycée Pothier se situe à 47,90°N, 1,90°E ; on a donc

$$\theta_{\text{Pothier}} = 42{,}1° \quad \text{et} \quad \varphi_{\text{Pothier}} = 1{,}90°$$



Propriété 3.5 : Déplacement élémentaire sphérique

- Variation $\mathrm{d}r \Rightarrow$ déplace$^{\underline{\mathrm{t}}}$ $\mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r}$;
- Variation $\mathrm{d}\theta \Rightarrow$ déplace$^{\underline{\mathrm{t}}}$ $r\,\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta}$;
- Variation $\mathrm{d}\varphi \Rightarrow$ déplace$^{\underline{\mathrm{t}}}$ $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}$.

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

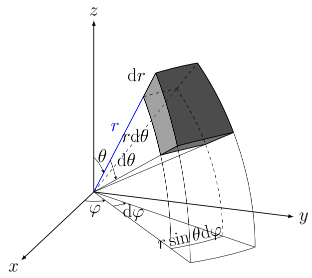


Figure 3.13 – $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sphériques

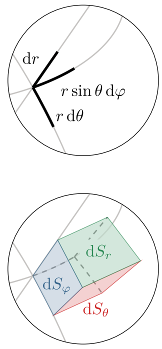


Figure 3.14 – Zoom volume.

On trouve de la même manière le volume élémentaire :

$$\boxed{\mathrm{d}V = r^2\sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$$

Il permet de déterminer le volume d'une boule :

$$V_{\text{boule}} = \iiint_{r,\theta,\varphi} = \int_{r'=0}^{R} r'^2\,\mathrm{d}r' \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \int_{r'=0}^{R} 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$