Sujet 1 – corrigé

I Comparaison entre transformations

On considère un système composé d'une quantité de matière n de gaz parfait diatomique enfermée dans une enceinte. Cette enceinte est fermée par un piston de surface S et dont on négligera la masse, pouvant coulisser sans frottement. L'ensemble est situé dans l'atmosphère, dont on note T_0 et P_0 la température et la pression. On note I l'état initial. L'objectif est de comparer deux transformations du système : l'une brutale et l'autre lente. Le gaz de cet exercice se comporte comme le gaz parfait et on suppose que la capacité thermique du gaz est beaucoup plus importante que celle de la paroi de l'enceinte. On peut alors considérer que la variation d'énergie interne du système est uniquement celle du gaz.

Donnée. Capacité thermique à volume constant $C_V = 5nR/2$.
Commençons par la transformation brutale : on lâche brusquement une masse M sur le piston, qui se stabilise en un état intermédiaire 1.

1. Le meilleur modèle pour la transformation est-il isotherme ou adiabatique ? Peut-on en déduire un résultat sur la température T_1 ?

   Réponse :
   Le système considéré est le gaz et l'enceinte autour. On s'intéresse à une transformation brusque. Le système n'a pas le temps d'échanger de l'énergie sous forme de transfert thermique avec l'extérieur : la transformation peut donc être considérée comme **adiabatique**. En revanche, comprimer un gaz rapidement le rend plus chaud (comme dans une pompe à vélo). La température du gaz va varier, la transformation **ne** sera donc **pas** isotherme.

   On ne peut rien dire sur T_1. On peut s'attendre à ce qu'elle soit supérieure à T_0 puisque l'on comprime rapidement le gaz.

2. Déterminer la pression P_1.

   Réponse :
   À l'état 1, le système est à l'équilibre mécanique. La pression qui s'exerce sur le piston est alors la somme de la pression atmosphérique plus celle de la masse posée sur la section S du piston. On en déduit que :

   $$\boxed{P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}}.$$

3. Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chacun des termes $W_{I\to 1}$, $Q_{I\to 1}$ et $\Delta_{I\to 1}U$.

   Réponse :
   Le travail des forces de pressions entre les états I et 1 est :

   $$W_{I\to 1} = -\int_I^1 P_{\text{ext}} dV.$$

   La pression extérieur qui s'exerce que le système est $P_0 + \frac{Mg}{S}$. La transformation est donc monobare. Ainsi :

   $$W_{I\to 1} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)\int_I^1 dV = \boxed{\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_I - V_1)}.$$

Puisque cette transformation est considérée comme adiabatique :

$$\boxed{Q_{I\to 1} = 0}.$$

D'après les hypothèses de l'exercice, on suppose que la variation d'énergie interne est uniquement celle du gaz. De plus, le gaz est parfait, donc il suit la première loi de Joule (rappel : son énergie interne ne dépend que de la température), donc

$$\boxed{\Delta_{I\to 1} U = C_V(T_1 - T_I)}.$$

On observe qu'en fait l'état 1 n'est pas un réel état d'équilibre : le piston continue de bouger, mais beaucoup plus lentement, jusqu'à atteindre l'état 2 qui est l'état final.

4. Quel phénomène, négligé précédemment, est responsable de cette nouvelle transformation du système ?

   Réponse :
   On a négligé les transfert d'énergie thermique entre le gaz et l'extérieur.

5. Comment peut-on qualifier cette transformation ?

   Réponse :
   Cette transformation peut alors être qualifiée de monobare et monotherme (la température et la pression de l'extérieur ne varient pas). On peut aussi considérer que cette transformation est **isobare** car, comme la transformation est lente, le système sera à chaque instant à l'équilibre mécanique avec l'extérieur.

6. Déterminer les caractéristiques T_2, P_2, V_2 de l'état 2.

   Réponse :
   D'après la question précédente :

$$\boxed{T_2 = T_0} \quad ; \quad \boxed{P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}.$$

   Le volume occupé par le gaz est imposé par la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}}}.$$

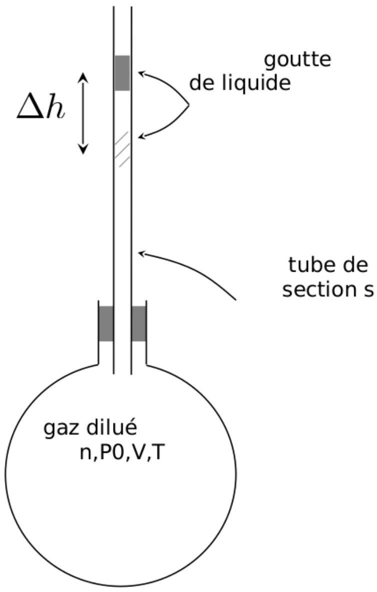
7. Déterminer le travail reçu par le système, puis sa variation d'énergie interne au cours de la transformation $1 \to 2$ en fonction de P_0, m, g, S, V_2, n, T_2, T_1 et V_1.

   Réponse :
   Puisque la transformation est monobare $P_{\text{ext}} = P_0 + Mg/S = \text{cst}$, le travail des forces de pression reçu lors de cette transformation est :

$$W_{1\to 2} = -\int_{V_1}^{V_2} \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right) dV = \boxed{\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_2)}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Thermometre à gaz ($\star$)



On peut mesurer la température à l'aide d'un gaz sous basse pression P_0 qui se comporte alors comme un gaz parfait. On mesure dans le dispositif ci-contre, appelé thermomètre à gaz, la variation de hauteur Δh d'une goutte de liquide dans le tube de section s lorsque la température varie.

1. Décrire le système thermodynamique étudié à l'équilibre. Préciser en particulier ce que l'on sait de la pression et de la température.

   Réponse :
   Le système étudié est le volume de gaz contenu dans l'enceinte, délimité par la verrerie et la surface de la goutte de liquide. Sa quantité de matière est fixée mais son volume peut varier. Il est à l'équilibre thermique, donc sa température est égale à celle de la température extérieur. Il est à l'équilibre mécanique, donc sa pression est égale à la pression qui s'exerce sur lui, c'est-à-dire la pression atmosphérique plus la pression due au poids de la goutte – cette pression reste donc constante. Finalement :

   $$T = T_{\text{ext}}; \quad n = \text{cst}; \quad P = P_0 + \frac{mg}{s}; \quad V \text{est donné par la loi des gaz parfaits.}$$

2. Exprimer la variation de volume ΔV en fonction de s et Δh.

   Réponse :
   Quand la goutte se déplace d'une hauteur Δh, le volume varie de ΔV tel que :

   $$\Delta V = s\Delta h.$$

3. Exprimer la relation entre ΔT et Δh.

   Réponse :
   D'après la loi des gaz parfaits, quand le gaz est à l'équilibre thermodynamique, on peut affirmer que :

   $$T = \frac{PV}{nR} = cst \times V,$$

puisque P, n et R sont constantes lors de cette expérience. Puisque T et V sont proportionnels, alors ils ont des variations proportionnelles (en cas de doute, il convient de différentier l'équation) :

$$\boxed{\Delta T = \frac{P}{nR} \times \Delta V = \frac{sP}{nR} \times \Delta h}.$$

4. À 300·K, la goutte est à l'équilibre et la pression dans l'enceinte est 1,00·bar. Calculer n sachant que $V = 50{,}0 \cdot \mathrm{ml}$.

Réponse :
D'après la loi des gaz parfaits (attention aux unités !) :

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1{,}00.10^5 \times 50{,}0.10^{-6}}{8{,}314 \times 300} = \boxed{2.10^{-3} \cdot \mathrm{mol}}.$$

5. Calculer le diamètre du tube pour que la goutte monte de 1·m lorsque T augmente de 100·K.

Réponse :
On utilise la relation obtenue à la question 3 :

$$s = \frac{nR\Delta T}{P\Delta h} = \frac{2.10^{-3} \times 8{,}314 \times 100}{1{,}00.10^5 \times 1} = 1{,}66.10^{-5} \cdot \mathrm{m}^2 = \boxed{16{,}6 \cdot \mathrm{mm}^2}.$$

Sujet 3 – corrigé

I Étude du cycle de Carnot

On appelle cycle de Carnot un cycle ditherme réversible. On considère une quantité n de gaz parfait subissant les transformations suivantes :

- une transformation AB qui est une détente isotherme à T_{ch},
- une transformation BC qui est une détente adiabatique et réversible dans laquelle la température passe de T_{ch} à T_{fr},
- une transformation CD qui est compression isotherme à T_{fr},
- une transformation DA qui est une compression adiabatique et réversible dans laquelle la température passe de T_{fr} à T_{ch}.

1. Comment peut-on qualifier les transformations adiabatiques et réversibles ?

   Réponse :
   Pour une transformation adiabatique :
   $$Q = 0 \quad \Rightarrow \quad S_{\text{ech}} = 0.$$
   Pour une transformation réversible :
   $$S_{\text{créée}} = 0.$$
   D'après le second principe de la thermodynamique :
   $$\Delta S = S_{\text{ech}} + S_{\text{créée}} = 0$$
   Une transformation adiabatique et réversible est donc une transformation **isentropique**. En revanche, la réciproque n'est pas toujours vraie.

2. Quelle est l'équation de la courbe correspondant aux transformations BC et DA dans le diagramme de Clapeyron ?

   Réponse :
   Une transformation isentropique d'un gaz parfait vérifie la loi de Laplace :
   $$PV^\gamma = \text{cst} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{\text{cst}}{V^\gamma}}.$$
   Lorsque $\gamma > 1$, ce qui est vérifié ici, cette courbe est plus pentue qu'une branche d'hyperbole.

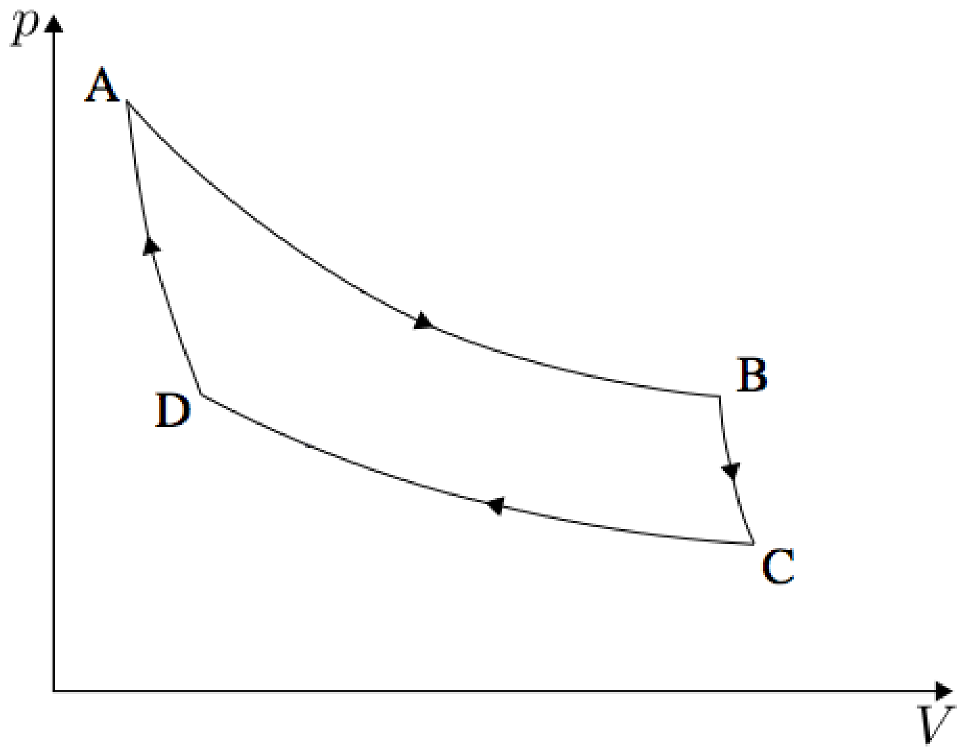
3. Tracer l'allure du cycle subit par ce gaz dans le diagramme de Clapeyron et noter son sens de parcours.

   Réponse :

   Lors d'une transformation isotherme d'un gaz parfait :
   $$PV = nRT = \text{cst} \quad \Rightarrow \quad \boxed{P = \frac{\text{cst}}{V}}.$$

   - la transformation AB est une détente donc le volume augmente et la pression diminue, dont la courbe est une branche d'hyperbole,

- la transformation BC est une détente donc le volume augmente et la pression diminue, et dont la courbe représentation est du type $P = \frac{\text{cst}}{V^\gamma}$,
- la transformation CD est compression isotherme donc est une branche d'hyperbole où le volume diminue et la pression augmente,
- la transformation DA est une compression adiabatique et réversible donc la pression augmente et le volume diminue.



4. La machine thermique utilisant ce cycle a-t-elle un fonctionnement moteur ? Pourquoi ?

Réponse :
L'air de la courbe représentant ce cycle est positif, le travail reçu au cours du cycle par cette machine est alors négatif : il s'agit donc d'un **moteur**.

On appelle

$$\alpha = \frac{V_B}{V_A}.$$

5. Déterminer le travail et le transfert thermique échangée Q_{ch} avec la source chaude en fonction de n, T_{ch} et α.

Réponse :
La travail des forces de pression reçu lors de la transformation AB est :

$$W_{AB} = -\int_A^B P_{\text{ext}} dV.$$

Un cycle de Carnot est réversible, donc mécaniquement réversible, donc à tout instant la pression du gaz est égale à la pression extérieur :

$$W_{AB} = -\int_A^B P dV.$$

Puisque le gaz est parfait et que la transformation est isotherme :

$$PV = nRT_{\text{ch}} \quad \Rightarrow \quad W_{AB} = -nRT_{\text{ch}} \int_A^B \frac{dV}{V} = -nRT_{\text{ch}} \ln\left(\frac{V_B}{V_A}\right) = \boxed{-nRT_{\text{ch}} \ln(\alpha)}.$$

Le travail reçu est négatif, ce qui correspond bien à une détente. D'après le premier principe appliqué à ce gaz lors de la transformation AB :

$$Q_{\text{ch}} = \Delta_{AB}U - W_{AB}.$$

Puisque qu'un gaz parfait suit la première loi de Joule et que la transformation est isotherme, alors $\Delta_{AB}U = 0$. On trouve alors :

$$\boxed{Q_{\text{ch}} = nRT_{\text{ch}} \ln{(\alpha)}}.$$

6. Déterminer le travail et le transfert thermique échangée Q_{fr} avec la source froide en fonction de n, T_{fr} et α.

Réponse :
On peut faire le même raisonnement lors de la transformation entre C et D :

$$W_{CD} = -\int_C^D P_{\text{ext}} dV = -\int_C^D P dV = -nRT_{\text{fr}} \int_C^D \frac{dV}{V} = -nRT_{\text{fr}} \ln\left(\frac{V_D}{V_C}\right).$$

Pour déterminer les lien entre $\frac{V_D}{V_C}$ et α, on utilise la loi de Laplace lors des transformations BC et DA car celles-ci sont bien isentropiques pour un gaz parfait :

$$T_B V_B^{\gamma-1} = T_C V_C^{\gamma-1} \quad ; \quad T_A V_A^{\gamma-1} = T_D V_D^{\gamma-1}.$$

On a alors :

$$T_{\text{ch}}^{1/(\gamma-1)} = T_{\text{fr}}^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{V_C}{V_B}\right) \quad ; \quad T_{\text{ch}}^{1/(\gamma-1)} = T_{\text{fr}}^{1/(\gamma-1)} \left(\frac{V_D}{V_A}\right),$$

Et donc :

$$V_C = V_B \left(\frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}}\right)^{1/(\gamma-1)} \quad ; \quad V_D = V_A \left(\frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}}\right)^{1/(\gamma-1)}.$$

Finalement :

$$\frac{V_D}{V_C} = \frac{1}{\alpha} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W_{DA} = nRT_{\text{fr}} \ln(\alpha)}$$

Le travail reçu par le gaz au cours de cette compression est bien positif. Puisque la transformation est isotherme, en utilisant les même arguments qu'à la question précédente :

$$\boxed{Q_{\text{fr}} = -nRT_{\text{fr}} \ln(\alpha)}.$$

7. En déduire le travail W reçu par le système au cours d'un cycle en fonction de n, des températures et de α.

Réponse :
Puisque l'énergie interne est une fonction d'état, sur un cycle :

$$\Delta_{ABCDA}U = 0.$$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta_{ABCDA}U = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} + Q_{AB} + Q_{BC} + Q_{CD} + Q_{DA},$$

Or, d'après les notations de l'exercice et le fait que les transformations BC et DA sont adiabatiques :

$$W = W_{AB} + W_{BC} + W_{CD} + W_{DA} \quad ; \quad Q_{AB} = Q_{\text{ch}} \quad ; \quad Q_{CD} = Q_{\text{fr}} \quad ; \quad Q_{BC} = Q_{DA} = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{W = -Q_{\text{ch}} - Q_{\text{fr}} = nR\ln(\alpha)\left(T_{\text{fr}} - T_{\text{ch}}\right)}.$$

Remarque. Même si on ne les a pas calculées, W_{BC} et W_{DA} ne sont pas nuls, en revanches, on peut déduire du résultat précédent qu'ils sont opposés : $W_{BC} = -W_{DA} \neq 0$.

8. Déterminer le rendement de ce système.

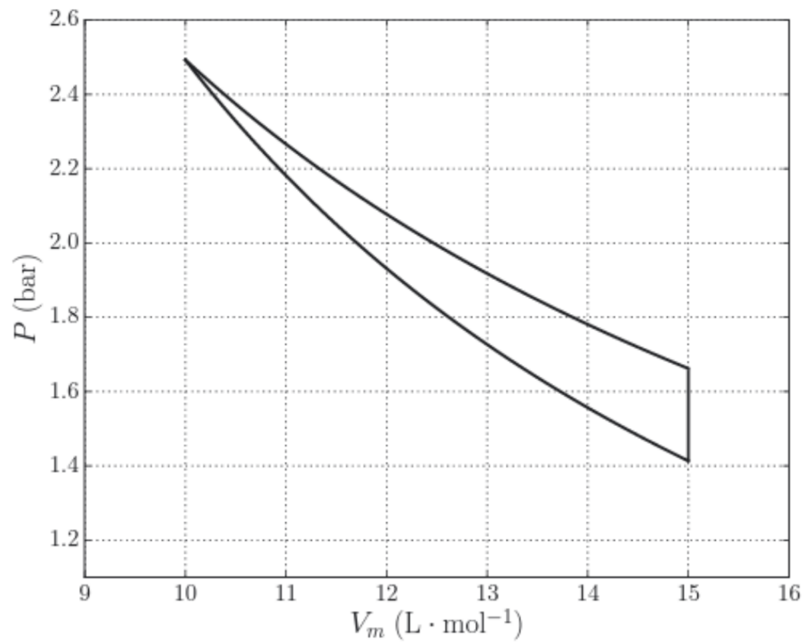
Réponse :
Pour un moteur thermique, la grandeur énergétique coûteuse est le transfert thermique de la source chaude et la grandeur énergétique utile est le travail sur un cycle :

$$\eta = \frac{|W|}{|Q_{\mathrm{ch}}|} = \frac{nR\ln(\alpha)\,(T_{\mathrm{ch}} - T_{\mathrm{fr}})}{nRT_{\mathrm{ch}}\ln(\alpha)} = \boxed{\frac{T_{\mathrm{ch}} - T_{\mathrm{fr}}}{T_{\mathrm{ch}}}}.$$

Sujet 4 – corrigé

I Adiabatique vs isotherme

Une mole d'un gaz parfait de coefficient isentropique $\gamma > 1$ subit un cycle de transformation représenté sur le diagramme ci-dessous : partant de l'état (1) de pression $P_1 = 2{,}5\,\text{bar}$, un détente isotherme réversible l'amène à l'état (2), elle subit ensuite une évolution isochore l'amenant dans l'état (3), puis retourne dans l'état (1) par une compression adiabatique réversible.
La seconde transformation a lieu en contact thermique avec un thermostat à la température $T_e = 200\,\text{K}$.



1. En utilisant la loi des gaz parfaits ainsi que la loi de Laplace, justifier que, dans le diagramme de Clapeyron, la pente d'une transformation abiabatique-réversible soit supérieur (en valeur absolue) à celle d'une transformation isotherme.

   Réponse :

   - Transformation adiabatique-réversible, d'après la loi de Laplace : $P = \frac{cst}{V^\gamma}$.
   - Transformation isotherme, d'après la loi des gaz parfaits : $P = \frac{cst}{V}$.

   Puisque $\gamma > 1$, la pente correspondant à la transformation adiabatique-réversible est plus importante que celle de la transformation isotherme.

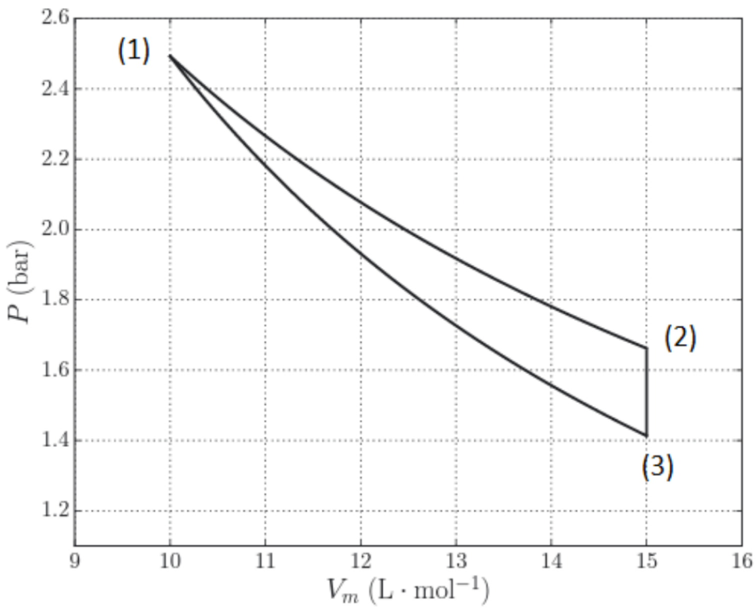
2. En justifiant soigneusement, placer les points (1), (2), (3) sur le diagramme.

   Réponse :
   (1) $\rightarrow$ (2) Détente isotherme : V augmente, P diminue comme $P = \dfrac{cste}{V}$

   (2) $\rightarrow$ (3) transformation isochore : V constant

   (3) $\rightarrow$ (1) compression adiabatique réversible : V diminue, P augmente comme $P = \dfrac{cste}{V^\gamma}$

   En (1) : la pente de la tangente à la courbe de la transformation adiabatique réversible est supérieure à celle à la courbe de la transformation isotherme.



3. En déduire la valeur du coefficient γ. Le gaz parfait est-il diatomique ou monoatomique ?

   Réponse :

   Sur la transformation (3) $\to$ (1) : $P_3V_3^\gamma = P_1V_1^\gamma$, soit $\boxed{\gamma = \dfrac{\ln\left(\dfrac{P_1}{P_3}\right)}{\ln\left(\dfrac{V_3}{V_1}\right)} = 1{,}4}$

4. Pour chacune des transformations $(i) \to (j)$, exprimer et calculer la variation d'énergie interne ΔU_{ij} du gaz.

   Réponse :

   - Transformation isotherme d'un gaz parfait : $\Delta U_{12} = 0$.
   - $\boxed{\Delta U_{23} = nC_{Vm}(T_3 - T_2) = \dfrac{P_3V_3 - P_2V_2}{\gamma - 1} = -900\,\text{J} < 0}$
   - $\boxed{\Delta U_{31} = \dfrac{P_1V_1 - P_3V_3}{\gamma - 1} = 925\,\text{J} > 0}$.

5. Pour chacune des transformations $(i) \to (j)$, exprimer et calculer le travail W_{ij} reçu du gaz.

   Réponse :

   - $W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} PdV = -\int_{V_1}^{V_2} \dfrac{nRT_1}{V} dV$, ainsi $W_{12} = -nRT_1 \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right)$,

     soit $\boxed{W_{12} = -P_1V_1 \ln\left(\dfrac{V_2}{V_1}\right) = 1{,}0 \times 10^3\,\text{J} > 0}$
   - Transformation isochore : $\boxed{W_{23} = 0}$.
   - premier principe sur (3) $\to$ (1) : $\boxed{W_{31} = \Delta U_{31}}$.

6. Pour chacune des transformations $(i) \to (j)$, exprimer et calculer le transfert thermique reçus Q_{ij} par le gaz.

Réponse :
On applique le premier principe de la thermodynamique au gaz au cours des transformations (1) $\rightarrow$ (2) et (2) $\rightarrow$ (3) :

- $\Delta U_{12} = Q_{12} + W_{12}$, soit $\boxed{Q_{12} = P_1 V_1 \ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right)}$
- $\boxed{Q_{23} = \Delta U_{23} = nC_{Vm}(T_3 - T_2)}$.
- Transformation adiabatique : $\boxed{Q_{31} = 0}$

7. Pour chacune des transformations $(i) \rightarrow (j)$, exprimer et calculer la variation d'entropie ΔS_{ij} du gaz.

Réponse :

- $\boxed{\Delta S_{12} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \frac{P_1V_1}{T_1}\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = 0{,}41\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}}$.
- $\boxed{\Delta S_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1}\ln\left(\frac{P_3}{P_2}\right) = -3\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}}$
- d'après le deuxième principe de la thermodynamique : $\boxed{\Delta S_{31} = 0}$ (adiabatique : $S_{\text{éch}} = 0$ et réversible : $S_{\text{créée}} = 0$)

8. Pour chacune des transformations, faire un bilan entropique, et calculer l'entropie créée. Identifier si nécessaire les causes d'irréversibilité.

Réponse :

- Transformation (1) $\rightarrow$ (2)
  - Entropie échangée : $S_{ch,12} = \frac{Q_{12}}{T_1} = nR\ln\left(\frac{V_2}{V_1}\right) = \Delta S_{12}$
  - Le 2$^{\text{e}}$ principe donne donc une entropie créée nulle.
- Transformation (2) $\rightarrow$ (3)
  - Entropie échangée : $\boxed{S_{ch,23} = \frac{Q_{23}}{T_e} = \frac{P_3V_3 - P_2V_2}{(\gamma-1)T_e}}$
  - Le 2$^{\text{e}}$ principe donne accès à $S_{cre,23} = \Delta S_{23} - S_{ch,23}$
- Transformation (3) $\rightarrow$ (1)
  - Transformation adiabatique : $S_{\text{éch},31} = 0$
  - et réversible : $S_{\text{créée},31} = 0$

Ainsi sur le cycle entier : $\boxed{S_{\text{créée}} = S_{\text{créée},12} + S_{\text{créée},23} + S_{\text{créée},31} = S_{\text{créée},23} > 0}$

Le cycle n'est pas réversible. En effet, bien que les transformations 12 et 31 le soient, la transformation 23 ne l'est pas car le système échange du transfert thermique avec le milieu extérieur de température différente de la température du système. L'inhomogénéité de température entre le système et le milieu extérieur sur 23 est la source de l'irréversibilité.

Sujet 5 – corrigé

I Équation de gaz parfait et interprétation microscopique

Considérons un système de N particules identiques de masse m contenue dans un volume V. Ce gaz théorique suit le modèle du gaz parfait.

1. Rappeler les hypothèses du gaz parfait.

   Réponse :
   Un gaz parfait est un ensemble de particules (atomes ou molécules) qui n'interagissent pas entre elles mais qui interagissent avec la paroi qui délimite le volume dans lequel se trouve le gaz.

2. Justifier qu'entre deux chocs, on peut considérer les vecteurs vitesses des particules comme constants.

   Réponse :
   Entre 2 chocs, les particules ne sont soumises à aucune force (car il n'y a pas d'interactions entre particules), donc, d'après la loi de l'inertie, leurs vecteurs vitesse sont constants (le référentiel d'étude étant supposé galiléen).

Nous allons démontrer la relation donnée en cours entre la pression au sein du gaz et la vitesse quadratique des particules. Nous ajouterons à notre modèle les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les particules possèdent toutes la même norme de vitesse u (on parle de distribution homocinétique),
- elles ne se déplacent que selon trois directions : $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ou $\vec{e}_z$ (cela signifie qu'aucune n'a un vecteur vitesse qui n'est pas colinéaire à un vecteur de la base),
- il y a une répartition égale des particules dans chaque direction et sens de l'espace : autant de particules ont un vecteur vitesse dirigé suivant $\pm\vec{e}_x$, $\pm\vec{e}_y$ ou $\pm\vec{e}_z$.

On considère un cylindre d'axe Ox et on cherche la pression provoqué par les chocs des particules sur la paroi avant d'axe Ox. On appelle S la surface de cette paroi.

3. Justifier que le nombre de particules allant dans vers cette paroi à l'instant t est $N/6$.

   Réponse :
   Les particules se déplacent uniquement selon 3 directions de l'espace et selon 2 sens possible pour chaque direction. Une particule peut donc se déplacer uniquement selon 6 possibilités. Puisqu'il n'y a pas de direction ni de sens privilégié, il y a $N/6$ particules qui se déplacent selon chaque couple direction $\oplus$ sens.

4. On considère la portion de cylindre de base S de hauteur $u\,\mathrm{d}t$. Pourquoi seules les particules contenues dans ce cylindre à l'instant t frapperont la paroi entre t et $t + \mathrm{d}t$?

   Réponse :
   La quantité $u\mathrm{d}t$ est la distance parcourue par une particule de vitesse v pendant une durée $\mathrm{d}t$. Les particules qui ne sont pas comprises dans le cylindre de hauteur $u\mathrm{d}t$ sont donc trop loin pour venir taper la paroi entre t et $t + \mathrm{d}t$.

5. Soit dN le nombre de particules dans ce petit cylindre. Exprimer dN en fonction de u, N, S, V et $\mathrm{d}t$.

Réponse :
On suppose que le gaz est homogène, donc le nombre de particule par unité de volume est le même partout. On en déduit alors que le nombre de particules comprises dans ce cylindre divisé par le volume du cylindre est égal au nombre de particule total divisé par le volume total :

$$\frac{dN}{Su\mathrm{d}t} = \frac{N}{V} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{dN = \frac{NSu\mathrm{d}t}{V}}.$$

6. Exprimer la variation de la quantité de mouvement d'une particule au cours du choc.

Réponse :
Avant le choc, une particule possède une quantité de mouvement :

$$\vec{p}_{\text{avant}} = mu\vec{e}_x.$$

Après le choc avec la paroi, elle se déplace dans la même direction mais dans l'autre sens, donc sa quantité de mouvement est :

$$\vec{p}_{\text{apres}} = -mu\vec{e}_x.$$

La variation de quantité de mouvement est alors :

$$\boxed{\delta\vec{p}_{\text{1particule}} = \vec{p}_{\text{apres}} - \vec{p}_{\text{avant}} = -2mu\vec{e}_x}.$$

7. Quelle est la force totale exercée par les particules pendant dt sur la paroi S ?

Réponse :
Pendant une durée dt, la variation de quantité de mouvement des particules qui effectuent un choc contre la paroi est (seule 1/6 des particules se déplace dans le bon sens et vont effectuer un choc) :

$$d\vec{p} = \frac{dN}{6}\delta\vec{p}_{\text{1particule}} = \frac{-2mNSu^2\mathrm{d}t}{V}\vec{e}_x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{-2mNSu^2}{V}\vec{e}_x.$$

En utilisant la loi de la quantité de mouvement sur la paroi et la loi des actions réciproques, on en déduit que la force exercée par les particules sur la paroi est :

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{2mNSu^2}{6V}\vec{e}_x$$

8. En déduire l'expression de la pression du gaz en fonction de u^2, N, m et V ainsi que la loi des gaz parfaits.

Réponse :
La pression est alors :

$$\boxed{P = \frac{F}{S} = \frac{mNu^2}{3V}}.$$

d'après le cours et le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$u^2 = \frac{3RT}{M} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P = \frac{mNRT}{MV} = \frac{nRT}{V}}.$$

On retrouve donc l'équation d'état des gaz parfaits à partir de considérations microscopiques.