Correction du TD d'application

I Quelques ondes

I/A Onde sur une corde

On excite l'extrémité d'une corde à une fréquence de 50 Hz. Les vibrations se propagent le long de la corde avec une célérité de $10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

1) Quelle est la longueur d'onde ?

Réponse

$$\boxed{\lambda = \frac{c}{f}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ f = 50\,\mathrm{Hz} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\lambda = 0{,}20\,\mathrm{m}}$$

◇

I/B Ondes infrasonores des éléphants

Les éléphants émettent des infrasons dont la fréquence est inférieure à 20 Hz. Cela leur permet de communiquer sur de longues distances et de se rassembler. Un éléphant est sur le bord d'une étendue d'eau et désire indiquer à d'autres éléphants sa présence. Pour cela, il émet un infrason. Un autre éléphant, situé à une distance $L = 24{,}0\,\mathrm{km}$, reçoit l'onde au bout d'une durée $\Delta t = 70{,}6\,\mathrm{s}$.

2) Quelle est la valeur de la célérité c de l'infrason dans l'air ?

Réponse

$$\boxed{c = \frac{L}{\Delta t}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L = 24{,}0 \times 10^3\,\mathrm{m} \\ \Delta t = 70{,}6\,\mathrm{s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{c = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

On retrouve bien la célérité connue ! On avait en effet indiqué dans le cours que la propagation des ondes acoustiques se faisait sans dispersion, donc toutes les longueurs d'ondes vont à la même vitesse.

◇

I/C Ondes à la surface de l'eau

Au laboratoire, on dispose d'une cuve à onde contenant de l'eau immobile à la surface de laquelle flotte un petit morceau de polystyrène. On laisse tomber une goutte d'eau au-dessus de la cuve, à l'écart du morceau de polystyrène. Une onde se propage à la surface de l'eau. Quelles sont les affirmations exactes ?

3) Ceci correspond :

a) à une onde mécanique, b) à une onde longitudinale, c) à une onde transversale.

Réponse

a) oui b) non c) oui

◇

4) L'onde atteint le morceau de polystyrène.

1) Celui-ci se déplace parallèlement à la direction de propagation de l'onde,
2) Celui-ci se déplace perpendiculairement à la direction de propagation de l'onde,
3) Celui-ci monte et descend verticalement,
4) Celui-ci reste immobile.

Réponse

a) non b) oui c) oui d) non

◇

Pour les ondes progressives sinusoïdales se propageant à la surface de l'eau, la relation de dispersion s'écrit

$$\omega^2 = gk$$

avec g l'accélération de pesanteur constante.

5) Exprimer la vitesse de phase $v_\varphi(k)$. Le milieu est-il dispersif ?

Réponse

La vitesse de phase est définie comme

$$v_\varphi(k) = \frac{\omega}{k} = \frac{g}{\omega}$$

La vitesse de phase dépend de la pulsation ω, ce qui signifie que la vitesse de propagation dans le milieu d'une OPPM de pulsation ω dépend de ω ; le milieu est donc dispersif. D'une manière générale, la relation liant ω et k est appelée **relation de dispersion** ; le milieu est alors dispersif si la relation de dispersion n'est pas linéaire, ce qui est bien le cas ici.

◇

★☆☆ II Applications directes du cours

1) Calculer la longueur d'onde correspondant à la note La$_3$, de fréquence $f = 440\,\mathrm{Hz}$ se propageant dans l'air à la célérité $c = 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$.

Réponse

$$\lambda = \frac{c}{f} = 0{,}77\,\mathrm{m}$$

◇

2) Soit $g(t)$ la fonction modélisant le signal en $x = 0$. Donner l'expression du signal en $M(x)$ $(x > 0)$ en considérant une onde qui se propage vers les x croissants de O à M à la célérité c. De même pour une onde se propageant vers les x décroissants.

Réponse

On obtient simplement $s(x,t) = g(t - x/c)$ et $s(x,t) = g(t + x/c)$, le signe étant adapté au sens de propagation.

◇

3) Soit $f(x)$ la fonction donnant à la date $t = 0$ la valeur d'une grandeur physique en fonction de l'abscisse x du point d'observation. Donner l'expression de cette grandeur en fonction de x à la date t en considérant une onde se propageant vers les x décroissants à la célérité c.

Réponse

On obtient simplement $s(x,t) = f(x + ct)$. Ç'aurait été $f(x - ct)$ pour le sens croissant.

◇

4) Une onde progressive sinusoïdale d'amplitude A_0 et de longueur d'onde λ se propage dans le sens des x décroissants à la célérité c. La phase à $t = 0$ au point A d'abscisse $x_A = \lambda/4$ est nulle. Donner l'expression de la fonction $s(x,t)$ en fonction de A_0, λ, c, x et t. Quel est le déphasage entre A et l'origine O du repère ?

Réponse

Tout d'abord, $s(x,t) = A_0 \cos(\omega t + kx + \varphi)$

De plus, avec $k = 2\pi/\lambda$, on obtient :

$$s(x_A = \lambda/4, 0) = A_0 \cos(k\lambda/4 + \varphi) = A_0 \cos(\pi/2 + \varphi)$$

Or, la phase est nulle d'après l'énoncé donc $\varphi = -\pi/2$. Finalement,

$$s(x,t) = A_0 \cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}(x + ct) - \frac{\pi}{2}\right)$$

Le déphasage en A par rapport à l'origine est par définition la différence des phases instantanées entre les points A et O soit au final :

$$\Delta\varphi_{A/O} = \left[\frac{2\pi}{\lambda}(x_A + ct) - \frac{\pi}{2}\right] - \left[\frac{2\pi}{\lambda}(0 + ct) - \frac{\pi}{2}\right] = \frac{2\pi}{\lambda}x_A = \frac{\pi}{2}$$

◇

5) Donner la période, la fréquence, la pulsation, la longueur d'onde, le nombre d'onde $(1/\lambda)$ et le vecteur d'onde, de l'onde :

$$s(x,t) = 5 \sin\left(2{,}4 \times 10^3 \pi t - 7{,}0\pi x + 0{,}7\pi x\right)$$

où x et t sont exprimés respectivement en mètres et en secondes. Quelle est sa vitesse de propagation ?

Réponse

- ◇ Pulsation : $\omega = 2{,}4 \times 10^3 \pi = 7{,}5 \times 10^3\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$
- ◇ Période : $T = 2\pi/\omega = 8{,}3 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$
- ◇ Fréquence : $f = \omega/2\pi = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{Hz}$
- ◇ Vecteur d'onde : $k = 6{,}3\pi = 19{,}8\,\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}}$
- ◇ Longueur d'onde : $\lambda = 2\pi/k = 0{,}32\,\mathrm{m}$
- ◇ Nombre d'onde : $\sigma = k/2\pi = 3{,}15\,\mathrm{m^{-1}}$
- ◇ La vitesse de propagation est : $c = \lambda f = 384\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$

◇

6) Une onde sinusoïdale se propage dans la direction de l'axe (Ox) dans le sens négatif avec la célérité c. On donne : $s_2(0,t) = A \sin(\omega t)$.

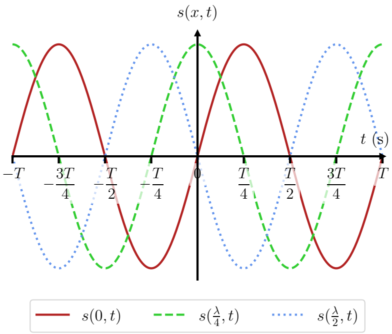
Déterminer l'expression de $s_2(x,t)$. Représenter graphiquement $s_2(\lambda/4,t)$ et $s_2(\lambda/2,t)$ en fonction de t.

Réponse

L'onde se propageant avec la célérité c dans le sens négatif de (Ox) , on a :

$$s_2(x,t) = s_2(0,t + x/c) = A\sin(\omega t + kx)$$

On en déduit que $s_2(\lambda/4,t)$ est en quadrature avance sur $s_2(0,t)$ et $s_2(\lambda/2,t)$ est en quadrature avance sur $s_2(\lambda/4,t)$ et en opposition de phase par rapport à $s_2(0,t)$.



◇

7) En $x = 0$ on excite un train d'onde de la forme

$$s(0,t) = S_0 \exp\left(-\left(\frac{t}{\tau}\right)^2\right)\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$$

Avec $T = 0{,}2\,\mathrm{s}$ et $\tau = 1\,\mathrm{s}$. L'onde se propage dans la direction des x positifs à la célérité $c = 2\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Donner l'expression de $s(x,t)$.

Réponse

On obtient :

$$s(x,t) = s(0, t - x/c) = S_0 \exp\left(-\left(\frac{t - x/c}{\tau}\right)^2\right)\cos\left(\frac{2\pi(t - x/c)}{T}\right)$$

◇

8) La vibration d'une corde tendue horizontalement est modélisée par la fonction d'onde donnant l'altitude y à la date t et au point d'abscisse x (en mètre) :

$$y(x,t) = 0{,}050\cos(10\pi t + \pi x)$$

- ◇ Préciser les valeurs et unités de l'amplitude Y_0, la pulsation ω, la fréquence f, la période T, le vecteur d'onde k et la longueur d'onde λ.
- ◇ L'onde se propage-t-elle vers les x croissants ou décroissants ?
- ◇ La célérité d'une onde le long d'une corde vibrante est donnée par l'expression $c = \sqrt{T_s/\mu}$ avec T_s la tension de la corde et $\mu = 0{,}10\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}}$ la masse linéique de la corde. Calculer la tension de la corde.
- ◇ On multiplie la tension de la corde par 2 et on garde même fréquence d'excitation f. Comment varie alors la longueur d'onde ?

Réponse

L'amplitude de l'onde vaut $Y_0 = 0{,}050\,\mathrm{m}$. On a par ailleurs :

◇ $\omega = 10\pi\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} = 31\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$

◇ $f = \omega/(2\pi) = 5{,}0\,\mathrm{Hz}$

◇ $T = 1/f = 0{,}20\,\mathrm{s}$

◇ $k = \pi\,\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}} = 3{,}1\,\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}}$

◇ $\lambda = 2\pi/k = 2{,}0\,\mathrm{m}$

L'onde se propage vers les x décroissants d'après son expression. De plus

$$c = \sqrt{\frac{T_s}{\mu}} \quad \text{et} \quad c = \lambda f \quad \text{donc} \quad \boxed{T_s = \mu(\lambda f)^2} \quad \text{soit} \quad \underline{T_s = 10\,\mathrm{N}}$$

Ainsi, λ évolue en $\sqrt{T_s}$, donc si T_s est multiplié par 2 alors λ est multiplié par $\sqrt{2}$.

◇

III Distance d'un impact de foudre

On peut lire, dans une revue de vulgarisation scientifique :

« Lorsque nous parlons, nos cordes vocales mettent en mouvement l'air qui les entoure. L'air étant élastique, chaque couche d'air se comporte comme un ressort. La couche d'air comprimé se détend, et ce faisant comprime la couche qui la suit dans le sens de propagation du son, etc. »

1) Définir une onde progressive. Quelle grandeur physique constitue la perturbation pour une onde acoustique ?

Réponse

Une onde est un phénomène de propagation d'une perturbation de proche en proche sans déplacement de matière du milieu considéré. Progressive signifie qu'elle se propage dans un unique sens. La variation de la pression de l'air est une grandeur physique qui se propage de proche en proche pour une onde acoustique.

◇

2) Le son est une onde mécanique. Que peut-on alors dire de son milieu de propagation ? Donner deux autres exemples d'ondes mécaniques (mais non acoustiques).

Réponse

Le son se propage dans un milieu matériel élastique comme toute onde mécanique. On peut, par exemple, observer des ondes mécaniques :

◇ Le long d'une corde tendue (instrument à cordes type violon/guitare ou à percussion type piano).

◇ À la surface de la croûte terrestre et à l'intérieur des roches : ondes sismiques.

◇

3) Pendant un orage, on peut grossièrement évaluer la distance à laquelle est tombée la foudre. Si on divise par trois la durée (en secondes) entre l'éclair (phénomène visible) et le tonnerre (phénomène audible), on obtient la distance cherchée (en kilomètres). À quel type d'onde est associé l'éclair ? Donner l'intervalle de longueurs d'onde dans le vide du spectre visible. À partir de l'observation faite pendant l'orage, estimer approximativement la valeur numérique de la vitesse c_{air} de propagation du son dans l'air. La réponse sera justifiée avec soin.

Réponse

Les longueurs d'onde du spectre du visible sont telles que $\lambda \in [400\,\mathrm{nm}, 800\,\mathrm{nm}]$. La célérité de la lumière étant très élevée par rapport à celle du son, on peut considérer que l'on observe l'éclair à l'instant t_0 où il est émis (durée de propagation supposée nulle). L'onde acoustique nous arrive en revanche après s'être propagée à la célérité c_{air}. Nous entendons donc le tonnerre avec un certain retard :

$$\Delta t = t_{\text{propagation}} - t_0 = \frac{L}{c_{\text{air}}}$$

L étant la distance qui nous sépare de l'endroit où la foudre est tombée. D'après le texte, $L/\text{km} = (\Delta t/\text{s})/3$; donc $L/\text{m} = 1000 \times \Delta t/3\,\text{s}$; D'où

$$\boxed{c_{\text{air}} = \frac{L}{\Delta t}} \Rightarrow \boxed{c_{\text{air}} \approx 333\,\text{m·s}^{-1}}$$

Cette valeur est très proche de celle attendue de $340\,\text{m·s}^{-1}$: l'estimation est fiable.