Devoir maison bonus

La couleur du ciel – corrigé

I La couleur du ciel

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) : il est soumis à une force de rappel $\vec{F}_R$ passant par le centre de l'atome. Dans tout l'exercice, on admettra que l'on peut se ramener à un problème selon une unique direction $(0, \vec{e}_x)$, c'est-à-dire que $\vec{F}_R = -kx\vec{e}_x$, où x est la distance entre l'électron et l'atome. Nous supposerons que cet électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnel à sa vitesse $\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\frac{dx}{dt}\vec{e}_x$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen. On admet qu'une onde lumineuse provenant du Soleil impose sur un électron de l'atmosphère, une force $\vec{F}_E = -eE_0\cos(\omega t)\vec{e}_x$.

Figure 1.1 – Ciel bleu avec des nuages.

Données. masse d'une électron : $m = 9{,}1.10^{-31}\,\text{kg}$, charge élémentaire : $e = 1{,}6.10^{-19}\,\text{C}$, célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00.10^{8}\,\text{m/s}$, $k = 500$ SI, $h = 10^{-20}$ SI.

1. Quelles sont les dimensions des grandeurs k et h ? En quelles unités du système international les exprime-t-on ?

   Réponse :
   Par analyse dimensionnelle :

   $$\dim(k) = \frac{force}{longueur} = \frac{MLT^{-2}}{L} = \boxed{MT^{-2}} \quad ; \quad \dim(h) = \frac{force}{vitesse} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = \boxed{MT^{-1}}.$$

   Leurs unités en système international sont donc :

   $$k \text{ en } \boxed{\text{kg}\,\text{s}^{-2}} \qquad ; \qquad h \text{ en } \boxed{\text{kg}\,\text{s}^{-1}}.$$

2. En utilisant la loi de la quantité de mouvement, donner l'équation différentielle vérifiée par la position de l'électron $x(t)$.

   Réponse :

D'après la loi de la quantité de mouvement appliqué à l'électron dans le référentiel de l'atome considéré comme galiléen :

$$\vec{F}_R + \vec{F}_f + \vec{F}_E = m\vec{a}.$$

En projetant cette relation sur l'axe $(O, \vec{e}_x)$, on obtient :

$$\boxed{-kx - h\dot{x} - eE_0\cos(\omega t) = m\ddot{x}}.$$

3. Montrer qu'on peut l'exprimer sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{e}{m}E_0\cos(\omega t).$$

On donnera les expressions de ω_0 et Q en fonction des données.

Réponse :
Sous forme canonique, cette équation est :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t).$$

On en déduit que :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \quad ; \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}.$$

On trouve alors :

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \qquad ; \qquad Q = \frac{m\omega_0}{h} = \boxed{\frac{\sqrt{mk}}{h}}.$$

On peut chercher les solutions de cette équation différentielle sous la forme :

$$x(t) = x_h(t) + x_p(t),$$

où $x_h(t)$ est une solution de l'équation homogène et $x_p(t)$ une solution particulière.

4. Exprimer et calculer Q. Que peut-on en déduire sur le régime transitoire ?

Réponse :
On trouve :

$$\boxed{Q = 2{,}1.10^6 > \frac{1}{2}}.$$

On en déduit que le régime transitoire est pseudo-périodique.

5. Montrer que le temps caractéristique du régime transitoire est $\tau = 2Q/\omega_0$.

Réponse :
On sait alors que la solution homogène peut s'écrire sous la forme :

$$x_h(t) = Ae^{-\omega_0 t/(2Q)}\cos(\omega t + \varphi).$$

Le temps caractéristique du régime transitoire est alors :

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}.$$

Au bout de quelques τ, on peut considérer que le régime transitoire est nul.

6. Calculer τ.

Réponse :

$$\boxed{\tau = 1{,}8.10^{-10}\,\mathrm{s}}.$$

On suppose donc que l'électron est en régime permanent.

7. Pourquoi peut-on alors dire que $x(t) \approx X_m \cos(\omega t + \varphi)$?

Réponse :
Pour des durées supérieures à quelques τ, donc supérieures à $10^{-9}\,\mathrm{s}$, on peut considérer que $x_h(t) = 0$. On alors $x(t) \approx x_p(t)$. On sait alors que la solution particulière est une fonction sinusoïdale de même fréquence que l'excitation.

8. Exprimer X_m en fonction de ω_0, de Q et des données. On pourra utiliser la notation complexe.

Réponse :
En notations complexes, on définit la représentation complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t+\varphi)}$ et l'amplitude complexe $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$.

On peut alors écrire :

$$(j\omega)^2\underline{X_m} + \frac{(j\omega)\omega_0}{Q}\underline{X_m} + \omega_0^2\underline{X_m} = \frac{-eE_0}{m} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\underline{X_m} = \frac{\frac{-eE_0}{m}}{-\omega^2 + \frac{(j\omega)\omega_0}{Q} + \omega_0^2}}.$$

On a alors :

$$\boxed{X_m = |\underline{X_m}| = \frac{\frac{eE_0}{m}}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}} = \frac{eE_0}{m\omega_0^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}}$$

9. Exprimer φ en fonction de ω_0 et de Q. On pourra également utiliser la notation complexe.

Réponse :

On peut réécrire l'amplitude complexe :

$$\begin{aligned}\underline{X_m} = \quad & \left(\frac{-eE_0}{m}\right) \times \left(\omega_0^2-\omega^2\right)^{-1} \times \left(1 + \frac{j}{Q}\frac{\omega\omega_0}{\omega_0^2-\omega^2}\right)^{-1} \\ = & \left(\frac{eE_0}{m}\right) \times \left(\omega^2-\omega_0^2\right)^{-1} \times \left(1 + \frac{j}{Q}\frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\right)^{-1}.\end{aligned}$$

Finalement :

$$\varphi = \arg(\underline{X_m}) = \arg(\omega_0) - \arg\left(\omega^2-\omega_0^2\right) - \arg\left(1 + \frac{j}{Q}\frac{1}{\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\right).$$

On trouve alors :

$$\boxed{\varphi = -\arg\left(\omega^2-\omega_0^2\right) - \arctan\left[\frac{1}{Q\left(\frac{\omega_0}{\omega}-\frac{\omega}{\omega_0}\right)}\right]},$$

où $\arg\left(\omega^2-\omega_0^2\right)$ est égal à 0 si $\omega > 0$ ou π sinon.

Les longueurs d'ondes λ du Soleil sont principalement incluses dans le domaine du visible, ainsi on considère que $\lambda \in [\lambda_b, \lambda_r]$, où λ_b (resp. λ_r) est la longueur d'onde du rayonnement bleu (resp. rouge).

10. Que valent λ_b et λ_r ?

Réponse :
$\boxed{\lambda_b = 400\,\text{nm}}$ et $\boxed{\lambda_b = 800\,\text{nm}}$.

11. En déduire que $\omega \in [\omega_r, \omega_b]$. On donnera les valeurs littérales de ω_r et ω_b et on effectuera les applications numériques.

Réponse :
Le lien entre pulsation et longueur d'onde est :

$$\omega = \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Ainsi :

$$\omega \in [\omega_r, \omega_b] \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_r = \frac{2\pi c}{\lambda_r} = 2{,}36.10^{15}\,\text{rad/s}} \quad ; \quad \boxed{\omega_b = \frac{2\pi c}{\lambda_b} = 4{,}71.10^{15}\,\text{rad/s}}$$

12. Calculer ω_0.

Réponse :
On trouve

$$\boxed{\omega_0 = 2{,}34.10^{16}\,\text{rad/s}}$$

13. En déduire que :

$$X_m \approx \frac{eE_0}{m\omega_0^2}.$$

Réponse :
En comparant ω et ω_0, on peut considérer que $\omega_0 \gg \omega$ (il y a au moins un facteur 5 entre les 2, c'est un peu juste). De plus, $Q \gg 1$. Ainsi on peut simplifier le dénominateur du $\underline{X_m}$ car

$$\frac{\omega\omega_0}{Q} \ll \omega^2 \ll \omega_0^2.$$

Dans ce cas,

$$\boxed{X_m \approx \frac{eE_0}{m\omega_0^2}}.$$

Un électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne P est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération.

14. Montrer que :

$$P = K\left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}\right)^2$$

où K est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

Réponse :
En amplitude complexe, l'accélération est :

$$\underline{A_m} = (j\omega)^2\underline{X_m} \quad \Rightarrow \quad A_m = \frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}.$$

D'après le sujet, la puissance est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération, donc

$$\boxed{P = KA_m^2 = K\left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}\right)^2}.$$

15. Expliquer alors pourquoi le ciel est bleu.

Réponse :
On peut comparer la puissance diffusée pour un rayonnement bleu avec un rayonnement rouge :

$$\boxed{\frac{P_b}{P_r} = \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2} = 4}$$

La puissance diffusée pour les rayonnements bleu est 4 fois plus importante que celle pour un rayonnement rouge, d'où la couleur du ciel.