Sujet 1

I Calcul du moment d'une force ($\star$)

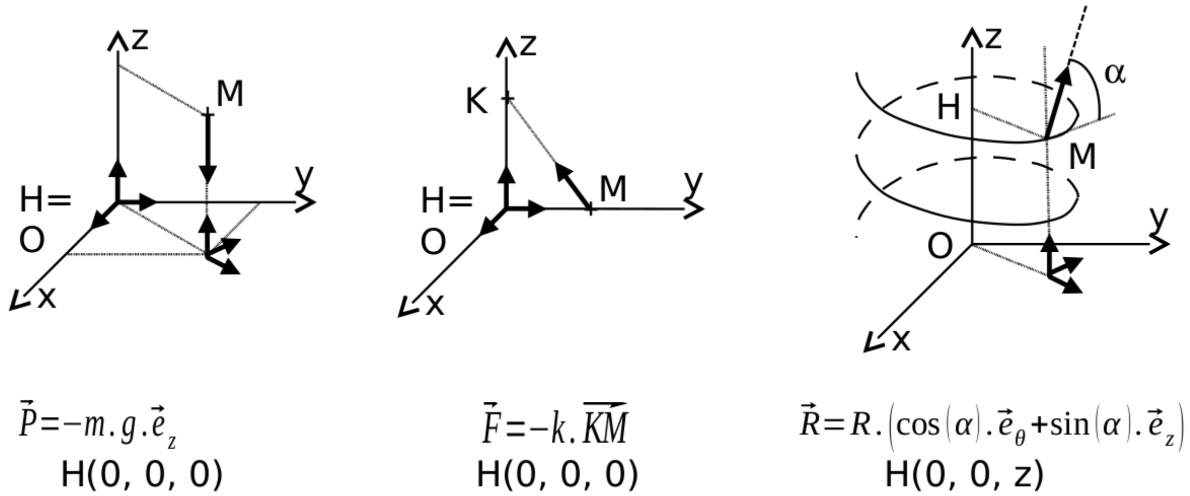


Figure 1.1 – Forces dont il faut calculer le moment.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le moment de la force en H par calcul vectoriel direct.

1. (a) Poids $\vec{P}$ appliqué en $M(x, y, z)$.

   (b) Force de rappel $\vec{F}$ appliquée en $M(0, y, 0)$.

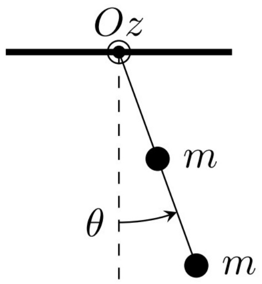
   (c) Réaction $\vec{R}$ appliquée en $M(r,\theta,z)$.

2. Dans chacun des cas précédents, déterminer le moment de la force par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_x)$ pour $\vec{P}$ et $\vec{F}$ et par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_z)$ pour $\vec{R}$ par détermination de la distance à l'axe de rotation (bras de levier) et par un raisonnement sur la direction puis par projection du moment calculé à la question 1.

Sujet 2

I Pendule à deux masses

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige et on suppose l'absence de frottement au niveau de la liaison pivot.



1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L} \sin \theta = 0$$

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Sujet 3

I Satellite en orbite elliptique

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{kg}$. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200\,\mathrm{km}$ au périgée et $d_A = 35{,}9 \times 10^3\,\mathrm{km}$ à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche du centre attracteur (ici la Terre) et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée $v_A = 3{,}5 \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.

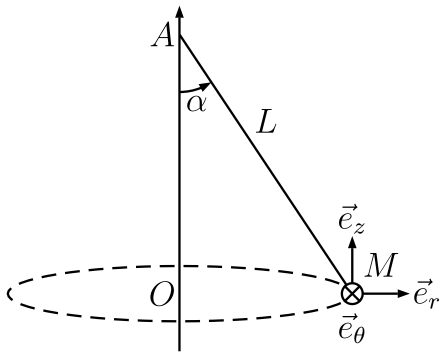
3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.

4. On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée en fonction, entre autre, des vitesses.

5. En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

Sujet 4

I Pendule conique



Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Oz. Le point matériel M tourne autour de l'axe Oz dans un plan horizontal passant par O, à la vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel lié au laboratoire.
La direction du fil fait un angle α constant avec l'axe Oz.

1. En appliquant le théorème du moment cinétique, exprimer l'angle d'inclinaison α du pendule avec l'axe Oz en fonction de L, ω et du champ de pesanteur g.

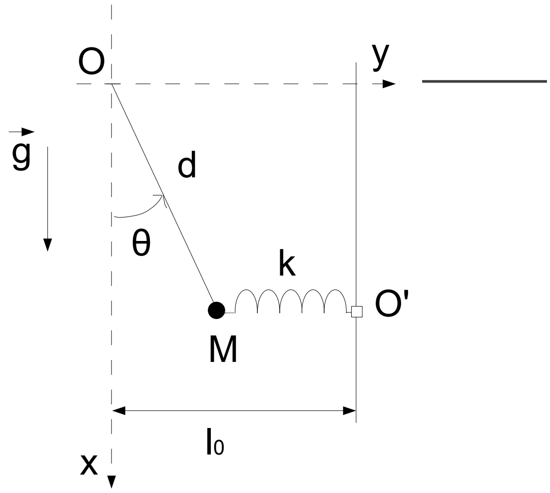
2. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

Sujet 5

I Pendule et ressort (⋆⋆)

On considère un pendule constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur d et d'un point matériel M de masse m. La liaison en O' est parfaitement coulissante de sorte que le ressort est constamment horizontal.

Le ressort est idéal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On néglige tout frottement.



1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Les exprimer en fonction de θ et des vecteurs de la base polaire.

2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0$$

et préciser les expressions des constantes ω_1 et ω_2

3. Retrouver l'équation du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.

4. Montrer que le système est conservatif et mettre son énergie potentielle sous la forme :

$$E_p(\theta) = md^2\left(\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - \omega_2^2\cos\theta\right)$$

5. Montrer que le système possède toujours au moins deux positions d'équilibre. Montrer également qu'il en existe deux autres à une condition sur ω_1 et ω_2 que l'on précisera. Préciser alors dans quel intervalle se trouvent ces positions d'équilibre.

6. Montrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable. Déterminer alors l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = 0$ et en déduire la pulsation Ω des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

7. Montrer que la position d'équilibre $\theta = \pi$ n'est pas toujours stable et préciser alors à quelle condition est l'est. Commenter physiquement.

8. Dans le cas où elle est stable, déterminer l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = \pi$ et en déduire la pulsation Ω' des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

9. Montrer enfin que les deux dernières positions d'équilibre déterminées en question 5 ne sont jamais stables lorsqu'elle existent.

Données :
On rappelle l'approximation de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$