Devoir maison 2 – À rendre le 8 janvier 2024 – Facultatif

Étude d'un filtre d'ordre 2 – corrigé

1) En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé. Il n'y a pas de tension aux bornes de R (courant nul). La tension imposée en entrée se retrouve aux bornes de C :

En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé et la bobine comme un interrupteur ouvert. La tension aux bornes de C est quasi-nulle (fil).

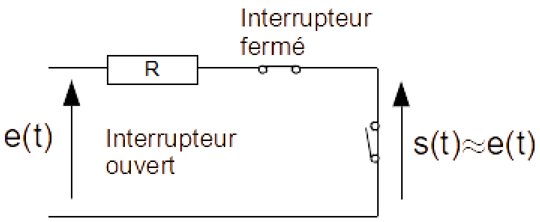


Figure .1 – Basses fréquences.

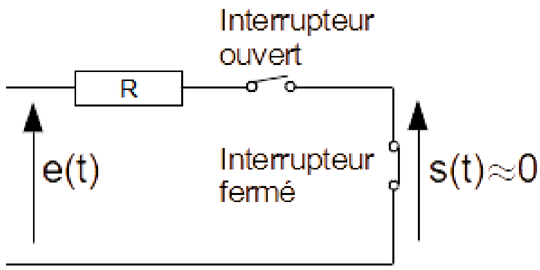
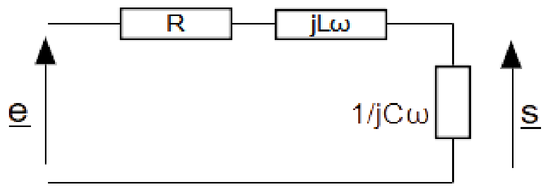


Figure .2 – Hautes fréquences.

Le filtre présente un comportement de passe-bas.

2) En notation complexe :



En reconnaissant un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$:

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}}$$

3) En réutilisant l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{e} = \underline{s} + \frac{1}{\omega_0 Q}(j\omega)\underline{s} + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2\underline{s}$$

En notation réelle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e}$$

4) Le gain est le module de la fonction de transfert :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}}$$

5)

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Expression approchée de $\underline{H}$	1	$-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$
Gain	1	$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$
G_{dB}	0 dB	$-40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
Asymptote réponse en gain	droite horizontale à 0dB	droite de pente -40dB/décade
Phase	0	$-\pi$

6) La pulsation ω_0 peut être déterminée partir de la réponse en phase : La fréquence f_0 est la fréquence pour laquelle la phase passe par l'angle moitié. Ici $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ pour $f_0 = 2{,}0 \times 10^3$ Hz.

   On en déduit : $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0} = \underline{1{,}3 \times 10^4\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$

7) Le filtre ne se comporte ni comme un intégrateur, ni comme un dérivateur.

   Il n'existe pas un domaine de fréquence pour lequel la fonction de transfert varie linéairement en $\frac{1}{j\omega}$ (intégrateur) ou en $j\omega$ (dérivateur).

   On peut également remarquer que la courbe de réponse en gain ne présente par de zone rectiligne de pente -20dB/décade (intégrateur) ou +20dB/décade (dérivateur) pour une phase quasi-constante.

8) En utilisant $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on réécrit :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}}$$

   On cherche la pulsation de coupure ω_c en utilisant la définition :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

   avec ici $G_{max} = 1$.

   Il est facile de remarquer que $\boxed{\omega_c = \omega_0}$.

   La bande passante du filtre est donc l'intervalle $[0,\omega_C]$.

9) Le diagramme de Bode asymptotique du filtre est représenté ci-dessous, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

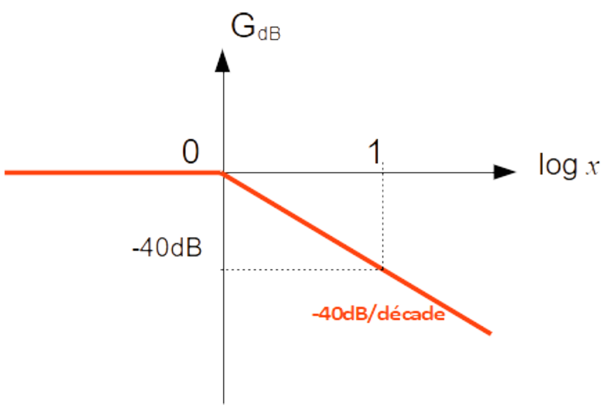


Figure .3 – Réponse en gain

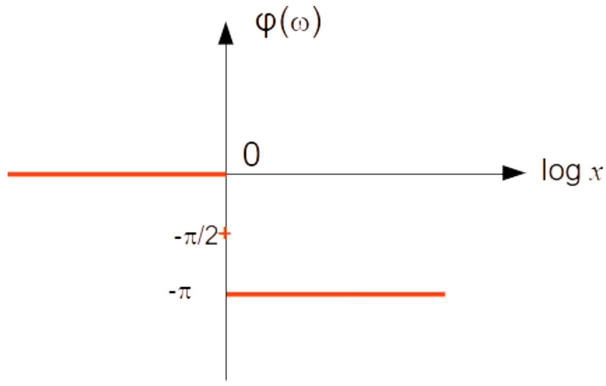
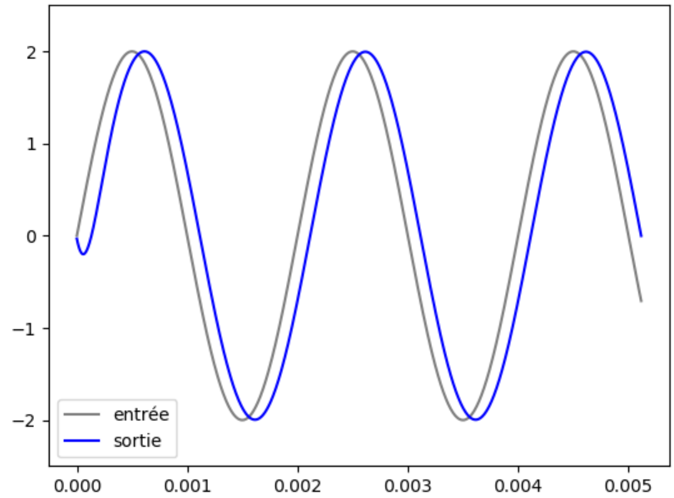


Figure .4 – Réponse en phase

10) Comme $f < f_0$, le gain est égal à 1 et la phase est égale à 0 (on assimile le diagramme de Bode au diagramme asymptotique de la question 9)).

   L'amplitude et la phase de la sinusoïde en sortie sont donc identiques à celles de la sinusoïde en entrée.

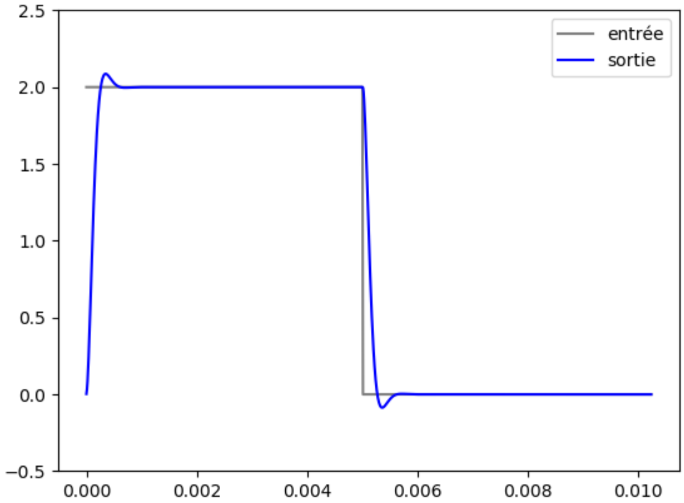
   Sur la figure ci-dessous, le signal de sortie a été représenté à partir du diagramme de Bode réel, on note donc que la sortie est légèrement en retard de phase sur l'entrée. L'amplitude semble bien identique.



11) Le filtre passe-bas transmet la composante continue ainsi qu'un grand nombre d'harmoniques car la fréquence f du créneau est très petite devant la fréquence de coupure f_c du filtre. Le signal créneau est presque reconstitué.

On peut néanmoins s'attendre à ce que les pentes soient adoucies et à ce que les "coins soient émoussés" puisque les très hautes fréquences seront éliminées et que ces très hautes fréquences contiennent les détails fins et les discontinuités.

La figure ci-dessous présente les signaux d'entrée et de sortie. Le signal de sortie a été obtenu en simulant l'action du filtre (diagramme de Bode réel).



12) Avec un filtre passe-bas du deuxième ordre, la pente de l'asymptote haute fréquence est -40dB/décade, ce qui permet d'atténuer rapidement les amplitudes des composantes à éliminer.