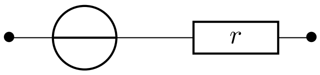
Correction du TD d'application

I Circuit simple

Données

Générateur réel (E,r) de tension :



1)

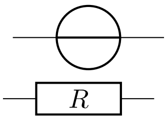
Résultat attendu

On demande un schéma normalisé, autrement dit avec les conventions de schémas *européennes*.

Outils

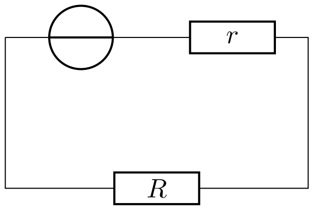
Générateur :

Résistance :



Application

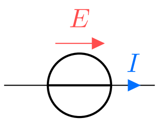
On obtient :



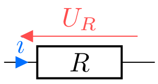
2)

Outils

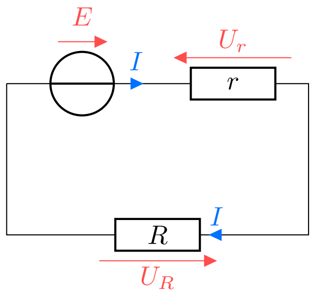
Générateur convention générateur :



Résistance convention récepteur :



Application



3)

Résultat attendu

À partir d'un circuit où on considère E, r et R comme des grandeurs connues, on cherche l'intensité I qui parcourt la maille que l'on vient de tracer.

Remarque

Il y a deux outils qui seront utiles pour déterminer des grandeurs dans des circuits : la **loi des mailles** et la **loi des nœuds**. À cela se rajoute la **loi d'Ohm** qui relie tension et intensité dans une résistance. Ces notions seront vues dans le chapitre suivant et donc décrites ultérieurement, on va ici utiliser la composition des tensions.

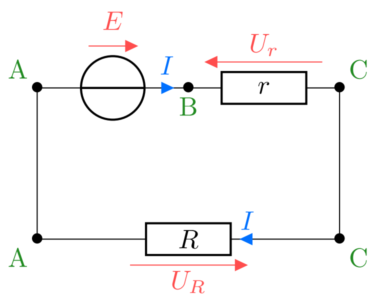
Outil

En nommant des points d'intérêt du circuit, ce qui est souvent conseillé, on va pouvoir utiliser la composition $U_{\mathrm{AC}} = U_{\mathrm{AB}} + U_{\mathrm{BC}}$ en respectant le sens des tensions pour obtenir une information supplémentaire sur le circuit.

On rappelle que deux points sur un fil sont au même potentiel, et on peut donc les nommer de la même manière.

Application

Schéma



Calcul

Ici on peut écrire

$$U_{\mathrm{AB}} + U_{\mathrm{BC}} + U_{\mathrm{CA}} = U_{\mathrm{AA}}$$
$$\Leftrightarrow -E + U_r + U_R = 0$$

et avec la **loi d'Ohm**, i.e. $U_r = rI$ et $U_R = RI$:

$$(r+R)I = E$$

soit

$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

4)

Outil

Pour un récepteur de tension U traversé par l'intensité I en convention récepteur, la puissance absorbée est $\boxed{P = UI}$.

Application

Ici, la tension aux bornes de R est $U_R = RI$, avec I l'intensité la traversant. On a donc

$$\boxed{\mathcal{P}_R = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}}$$

5)

Résultat attendu

On cherche à faire une étude de la fonction P de variable R, comme on ferait l'étude de $f(x)$ en mathématiques.

Outils

Bon sens pour l'allure de la courbe, procédés de dérivation pour le maximum. D'une manière générale, on a besoin de :

◇ Dérivation d'un produit :

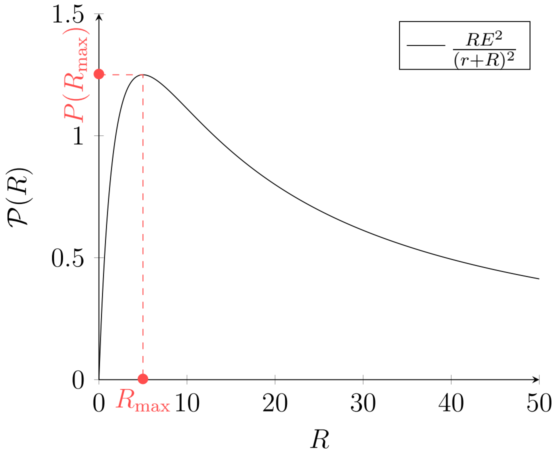
$$\boxed{D[uv] = u'v + v'u}$$

◇ Dérivation d'une fonction u élevée à une puissance α :

$$\boxed{D[u^\alpha] = \alpha u' u^{\alpha-1}}$$

Application

Tracé



Calcul

Soit

- $v(R) = R \Longrightarrow v'(R) = 1$
- $u(R) = r + R \Longrightarrow u'(R) = 1$

Ainsi

$$u(R)^{-2} = \frac{1}{(r+R)^2} \Rightarrow D[u(R)^{-2}] = \frac{-2 \times 1}{(r+R)^3}$$

Et donc,

$$\mathcal{P}'(R) = \frac{-2}{(r+R)^3} \times R + 1 \times \frac{1}{(r+R)^2}$$
$$\mathcal{P}'(R) = \frac{-2R}{(r+R)^3} + \frac{r+R}{(r+R)^3}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{P}'(R) = \frac{r-R}{(r+R)^3}}$$

Et donc

$$\mathcal{P}'(R_{max}) = 0 \Longrightarrow \boxed{R_{max} = r}$$

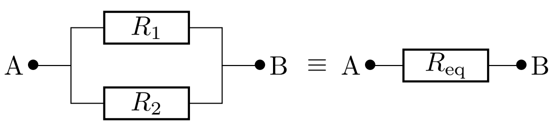
Avec

$$\boxed{\mathcal{P}(R_{max}) = \frac{E^2}{4r}}$$

II Résistances équivalentes

1)

Résultat attendu



Outil

L'association en parallèle de deux résistances R_1 et R_2 donne une résistance équivalente R_{eq} telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Attention !

Faites particulièrement attention à bien écrire $\frac{1}{R_{\text{eq}}}$ et non pas simplement R_{eq}, même après 5 lignes de calcul quand c'est nécessaire. Pensez toujours à vérifier l'homogénéité d'un résultat littéral avant de l'encadrer. Cette erreur est une des plus communes.

Application

En mettant les deux termes sur même dénominateur :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} \times \frac{R_2}{R_2} + \frac{1}{R_2} \times \frac{R_1}{R_1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$
$$\Leftrightarrow R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

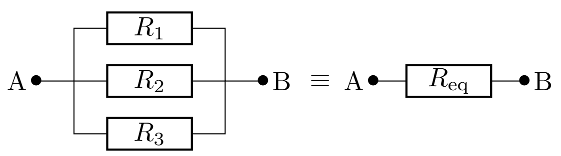
2)

Application

$$R_1 = R_2 = R \Longrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R}{2}}$$

3)

Résultat attendu



Outil

L'association en parallèle de trois résistances R_1, R_2 et R_3 donne une résistance équivalente R_{eq} telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Application

De la même manière que précédemment, la mise sous même dénominateur donne :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3} + \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3} + \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \Leftrightarrow R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

qui est bien homogène à une résistance étant de la forme $\frac{R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} = R$.

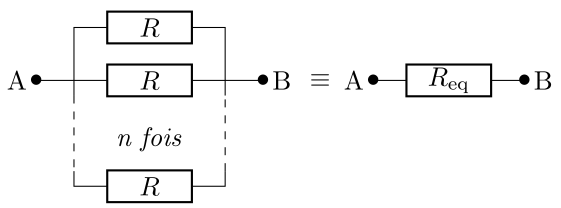
4)

Application

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \Longrightarrow R_{\text{eq}} = \frac{R^3}{3R^2} \Leftrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R}{3}}$$

5)

Résultat attendu



Application

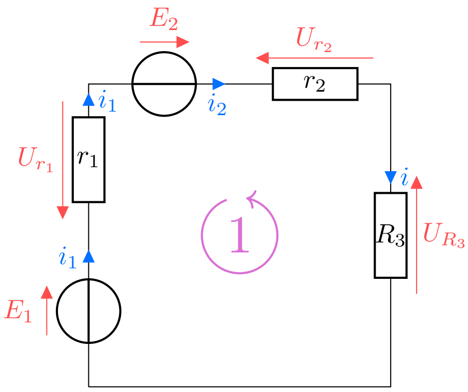
Il n'y a toujours qu'une seule formule attendue, et elle s'écrit :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} = \underbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R}}_{n \text{ fois}} \Leftrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R}{n}}$$

III Association de générateurs

1)

Schéma



Outil

Loi des mailles : la somme algébrique des tensions d'une maille est nulle (cf. exercice I). Pour l'appliquer, on se donne un sens de lecture d'une maille, ici dans le sens direct mais peu importe, puis on peut :

- ◇ Écrire les tensions traversées dans le même sens que leur flèche d'un côté du signe égal, les autres de l'autre côté ;
- ◇ Écrire les tensions traversées dans le même sens avec un « + » et les autres avec un « - », le tout devant « = 0 ».

Application

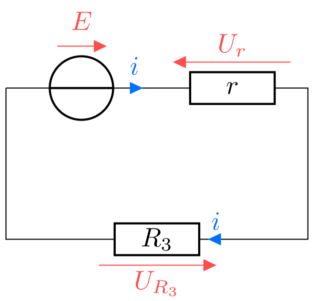
Étant donné qu'il n'y a qu'une maille, il ne peut y avoir qu'une seule intensité dans le circuit. On pose donc $i_1 = i_2 = i$, et en applicant la loi des mailles on a

$$U_{R_3} + U_{r_2} - E_2 + U_{r_1} - E_1 = 0$$
$$\Leftrightarrow R_3 i + r_2 i + r_1 i = E_1 + E_2$$
$$\Leftrightarrow i\,(r_1 + r_2 + R_3) = E_1 + E_2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{i = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_3}}$$

2)

Schéma simplifié

L'expression que l'on a trouvée est en tout point similaire à celle du premier exercice si on considère qu'on a un générateur de force électromagnétique $E = E_1 + E_2$ et de résistance interne $r = r_1 + r_2$; on peut donc dessiner :



Situation particulière

Quand r_1 et r_2 sont nulles, on se retrouve avec un générateur de résistance interne $r = 0$: c'est donc un générateur idéal.

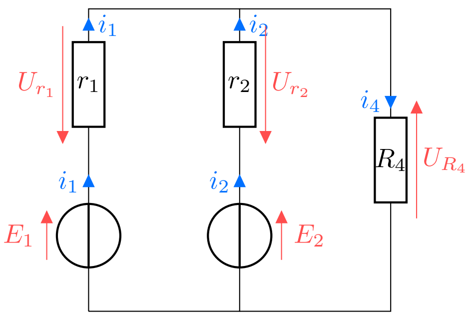
3)

Conclusion

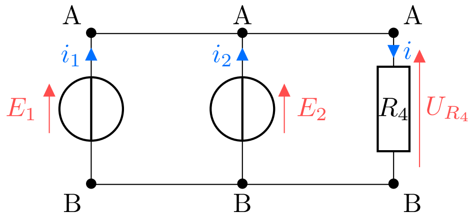
L'étude théorique précédente ne présente aucune incohérence ou impossibilité de pratique peu importe la situation, si tant est que les générateurs sont branchés dans le même sens ; si ça n'est pas le cas l'un considère l'autre comme un récepteur et le fait surchauffer.

4)

Schéma



Générateurs idéaux



On doit trouver (avec l'unicité de la tension entre deux points, ici par exemple A et B) que $U_{R_4} = E_2 = E_1$.

5)

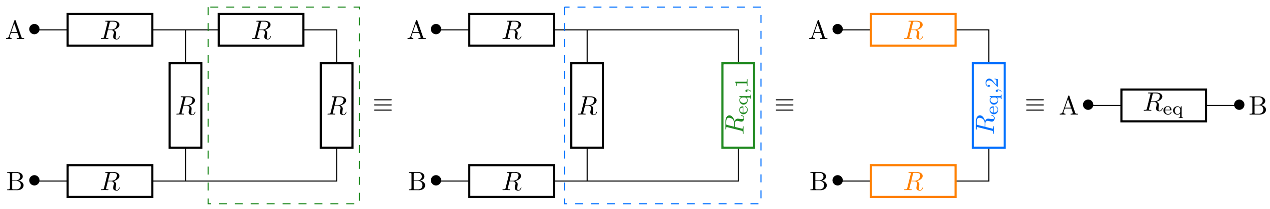
Conclusion

On ne peut brancher des générateurs idéaux de tension en parallèle que si leurs tensions sont les mêmes ; les générateurs réels peuvent l'être et ce sont les intensités qui vont s'adapter pour suivre la loi des mailles ; dans tous les cas leurs **intensités se somment**.

IV Calcul de résistances équivalentes

1)

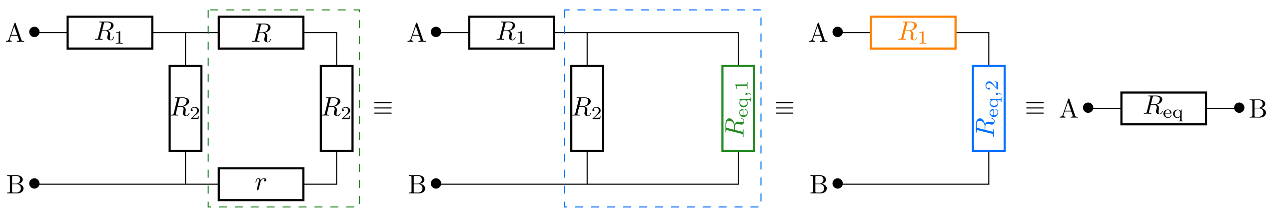
IV/A Schéma 1



La suite de schémas équivalents précédents donne :

$$
\begin{aligned}
& R_{\text{eq}} = R + R + R_{\text{eq},2} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = 2R + \frac{R \times R_{\text{eq},1}}{R + R_{\text{eq},1}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = 2R + \frac{R \times 2R}{R + 2R} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = 2R + \frac{2R^{\cancel{2}}}{3\cancel{R}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = \frac{8R}{3}
\end{aligned}
$$

IV/B Schéma 2

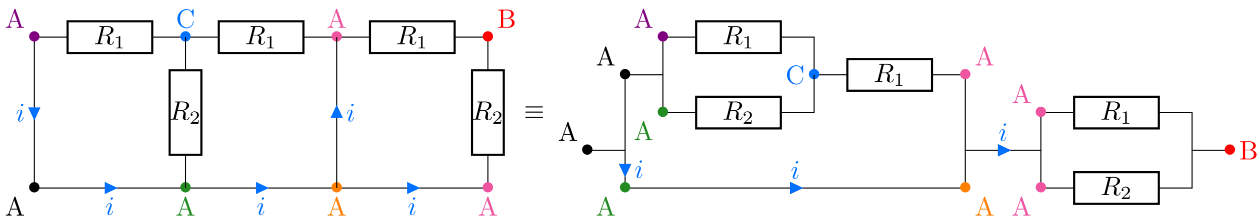


Et cette fois :

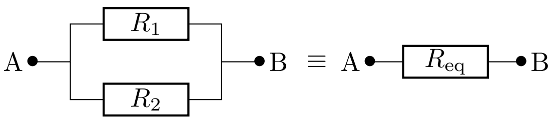
$$\begin{aligned}
& R_{\text{eq}} = R_1 + R_{\text{eq},2} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = R_1 + \frac{R_2 \times R_{\text{eq},1}}{R_2 + R_{\text{eq},1}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{\text{eq}} = R_1 + \frac{R_2 \times (r + R + R_2)}{r + R + 2R_2}
\end{aligned}$$

IV/C Schéma 3

Ce schéma est un peu plus compliqué, mais la bonne pratique de nommer des points de potentiel sur un schéma aide à ne pas se perdre. En effet, étant donné que l'on nous demande de déterminer la résistance équivalente entre A et B, toute simplification du circuit est à faire. On a travaillé sur les associations de résistances mais il ne faut pas oublier, et donc savoir reconnaître, les potentiels court-circuits. Ici, en reportant le point A sur chaque point d'intérêt où il peut être reporté (c'est-à-dire s'il n'y a pas de dipôle entre les deux), on voit qu'un courant qui partirait de A pour aller à B (ce que fait un Ohmmètre) éviterait complètement les trois premières résistances. On peut redessiner le schéma différemment pour faire apparaître le court-circuit de manière plus explicite :



Ainsi, le circuit se simplifie en :



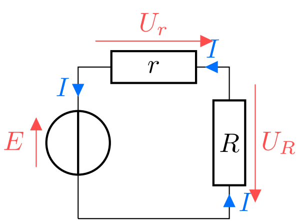
Soit

$$\boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

V Conventions et puissances

1)

Schéma



Calcul

- ◇ $\mathcal{P}_{\text{r}}(E) = -EI$
- ◇ $\mathcal{P}_{\text{r}}(r) = rI^2$
- ◇ $\mathcal{P}_{\text{r}}(R) = RI^2$

Application

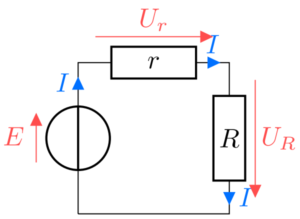
On a $\sum \mathcal{P}_{\text{f}} = \sum \mathcal{P}_{\text{r}}$, donc d'après la question précédente :

$$\begin{aligned}
0 &= -EI + rI^2 + RI^2 \\
I(r+R) &= E
\end{aligned}$$

$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

2)

Schéma



Calcul

- ◇ $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(E) = EI$
- ◇ $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(r) = -rI^2$
- ◇ $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(R) = -RI^2$

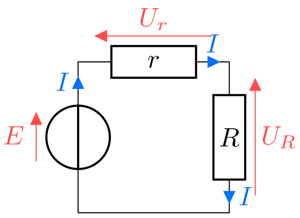
Application

On a $\sum \mathcal{P}_{\mathrm{f}} = \sum \mathcal{P}_{\mathrm{r}}$, donc d'après la question précédente :

$$EI - rI^2 - RI^2 = 0$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

3)

Schéma



Calcul

- ◇ $\mathcal{P}_{\mathrm{f}}(E) = EI$
- ◇ $\mathcal{P}_{\mathrm{r}}(r) = rI^2$
- ◇ $\mathcal{P}_{\mathrm{r}}(R) = RI^2$

Application

On a $\sum \mathcal{P}_{\mathrm{f}} = \sum \mathcal{P}_{\mathrm{r}}$: avec les conventions adaptées, on a :

$$EI = rI^2 + RI^2$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

4)

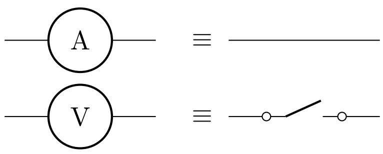
Conclusion

On trouve bien toujours la même valeur de l'intensité dans le circuit, ce qui montre bien que les conventions ne sont que des conventions et ne changent pas la manière dont la physique fonctionne ensuite. Il faut noter cependant que le I du premier schéma n'est pas le I des schémas 2 et 3, étant donné que le sens n'est pas le même : les intensitées sont opposées.

VI Mesures de tensions et intensités

1)

Rappel

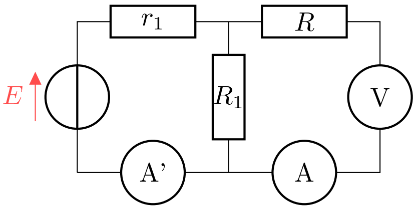


Données

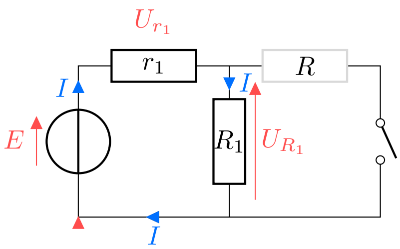
- ◇ $E = 5{,}0\,\mathrm{V}$
- ◇ $r_1 = 10\,\Omega$
- ◇ $R = 20\,\Omega$
- ◇ $R_1 = 30\,\Omega$
- ◇ $R_2 = 40\,\Omega$

VI/A Schéma 1

Schéma



Simplification

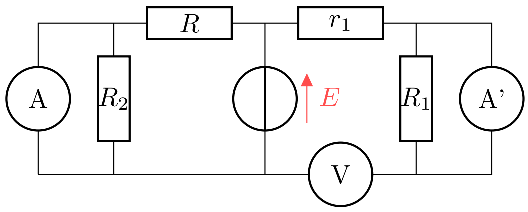


Application

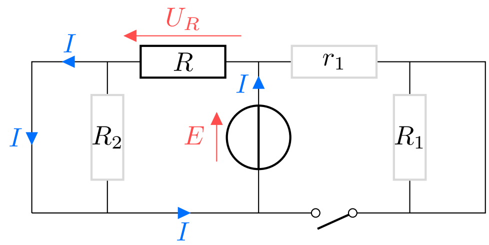
V ouvre le circuit, donc aucun courant ne passe dans la boucle de droite : A mesure $0\,\mathrm{A}$. On trouve I avec la loi des mailles et on trouve $I = \dfrac{E}{r_1 + R_1}$, et donc A' mesure $0{,}125\,\mathrm{A}$. Pour V, R n'a pas de différence de potentiel donc il mesure $U_{R_1} = 3{,}75\,\mathrm{V}$.

VI/B Schéma 2

Schéma



Simplification



Application

Cette fois c'est la partie de droite qui est ouverte, et donc pas parcourue par un courant : A' mesure $0\,\mathrm{A}$. L'ampèremètre de gauche court-circuite quant à lui la résitance R_2, ainsi toute l'intensité se trouve dans la boucle où on a tracé I ; une rapide loi des mailles donne $I = \dfrac{E}{R} = 0{,}25\,\mathrm{A}$. V mesure ici aussi la tension E.