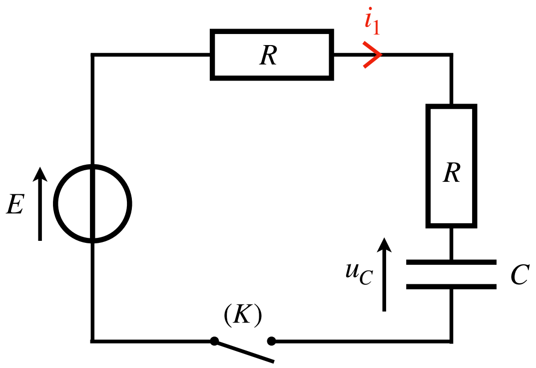
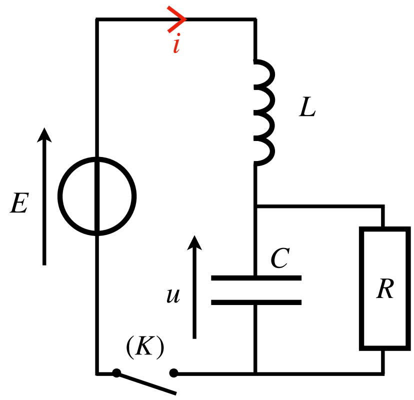
Sujet 1 – corrigé

I Mise en équation de deux circuits

Dans cet exercice nous étudions indépendamment deux circuits représentés ci-dessous. **Nous ne chercherons pas à déterminer l'évolution du régime transitoire**. Nous nous limiterons à l'étude des circuits à l'instant initial et en régime permanent, ainsi qu'à l'établissement de l'équation différentielle déterminant l'évolution du régime transitoire.



Circuit 1



Circuit 2

Circuit 1 : On considère que l'interrupteur (K) est ouvert pour $t < 0$, et que le condensateur est initialement déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Déterminer les valeurs de u_C et i_1 juste après la fermeture de l'interrupteur, à $t = 0^+$.
   Réponse :
   Ici, il suffit d'utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur. Comme le condensateur était initialement déchargé, $u_C(t = 0^-) = 0$. Ainsi par continuité, $u_C(t = 0^+) = 0$. Une loi des mailles à $t = 0^+$ donne $E = Ri_1 + Ri_1$, donc $\boxed{i_1(t = 0^+) = \dfrac{E}{2R}}$

2. Déterminer les valeurs de u_C et i_1 lorsque $t \to \infty$.
   Réponse :
   Lorsque $t \to \infty$, le régime permanent est atteint. Le condensateur en régime stationnaire est équivalent à un interrupteur ouvert. Donc $\boxed{i_1(t \to \infty) = 0}$.
   Par conséquence, la loi d'Ohm donne que la tension aux bornes des deux résistances est nulle, et la loi des mailles s'écrit alors $\boxed{u_C(t \to \infty) = E}$.

3. Établir l'équation différentielle portant sur u_C la tension aux bornes du condensateur après la fermeture de l'interrupteur. On introduira un temps caractéristique τ à exprimer en fonction de R et C.
   On ne cherchera pas à résoudre l'équation différentielle.
   Réponse :
   La loi des mailles s'écrit :
   $$E - Ri_1 - Ri_1 - u_C = 0$$
   Or $i_1 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, on trouve donc :
   $$2RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{\tau} = \frac{E}{\tau}}, \text{ avec } \boxed{\tau = 2RC}$$

Circuit 2 : On considère que l'interrupteur (K) est ouvert pour $t < 0$, et le condensateur est initialement déchargé. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur (K).

4. Déterminer les valeurs de u et i juste après la fermeture de l'interrupteur, à $t = 0^+$.
   Réponse :
   Juste avant la fermeture de l'interrupteur, $u(t = 0^-) = 0$ car le condensateur est initialement déchargé. De plus, comme le circuit est ouvert, alors le courant $i(t = 0^-) = 0$.
   Juste après la fermeture de l'interrupteur, par continuité de u (tension aux bornes d'un condensateur) et de i (intensité du courant traversant un bobine), on trouve donc $\boxed{u(t = 0^+) = 0}$ et $\boxed{i(t = 0^+) = 0}$.

5. Déterminer la valeur de i, ainsi que celle de u lorsque $t \to \infty$.
   Réponse :
   Lorsque le régime permanent est atteint et que le circuit est en régime stationnaire, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert et la bobine est équivalente à un fil. Donc le circuit équivalent se résume à la source de tension E en série avec la résistance R, les deux parcourus par le même courant i.
   Ainsi, une simple loi des mailles donne $\boxed{i(t \to \infty) = \frac{E}{R}}$ et $\boxed{u(t \to \infty) = E}$.

6. En appliquant la loi de nœuds et la loi des mailles, établir l'équation différentielle portant sur le courant i (on pourra pour cela d'abord exprimer le courant i en fonction de u et $\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ grâce à la loi de nœuds). La mettre sous forme canonique en introduisant ω_0 et Q, que l'on exprimera en fonction des grandeurs du circuit.
   Réponse :
   Si on note i_1 et i_2 les intensités du courant traversant le condensateur et la résistance respectivement (en convention récepteur), la loi des mailles donne : $i = i_1 + i_2$. u étant la tension aux bornes de ces deux dipôles, on trouve :

$$i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R} \tag{19.1}$$

   Or la loi des mailles donne $E = u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, cela permet de remplacer u dans l'équation 19.1 et obtenir :

$$i = C\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) + \frac{1}{R}\left(E - L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\right) = -CL\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

   En divisant par LC, on obtient :

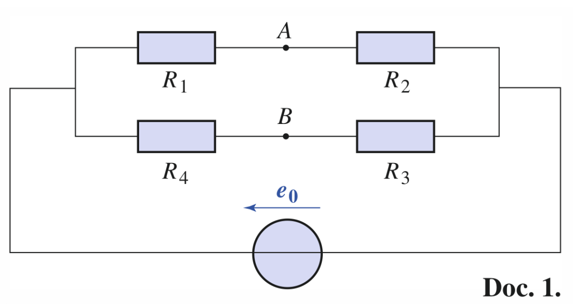
$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{RC}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}i = \frac{E}{RLC} \implies \boxed{\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 i = \omega_0^2\frac{E}{R}}$$

   où on a posé $\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}}$ et $\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$.

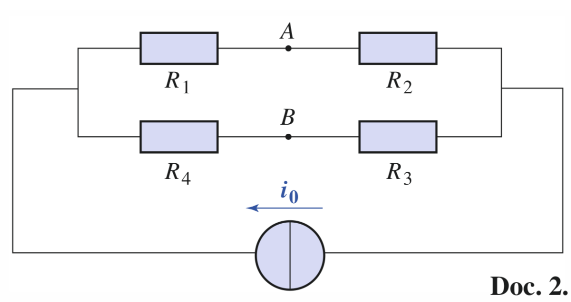
Sujet 2 – corrigé

I Pont de Wheatstone

On considère un pont de Wheatstone purement résistif avec R_1, R_2, R_3 et R_4 les résistances des conducteurs ohmiques. Le circuit est alimenté soit par un générateur idéal de tension de force électromotrice e_0 (doc. 1), soit par un générateur idéal de courant de courant électromoteur i_0 (doc. 2).
On dit que le pont est équilibré lorsque $u_{AB} = 0$.



Doc. 1.



Doc. 2.

Dans ces 2 circuits, la masse du circuit est choisie au niveau de la borne négative du générateur.

Générateur idéal de tension (Doc. 1.) On s'intéresse au circuit du document 1.

1. Exprimer la tension u_A entre le point A et la masse en fonction de certaines résistances et de e_0.
   Réponse :
   On utilise la formule du pont diviseur de tension :
   $$\boxed{u_A = \frac{R_2}{R_1 + R_2} e_0}.$$

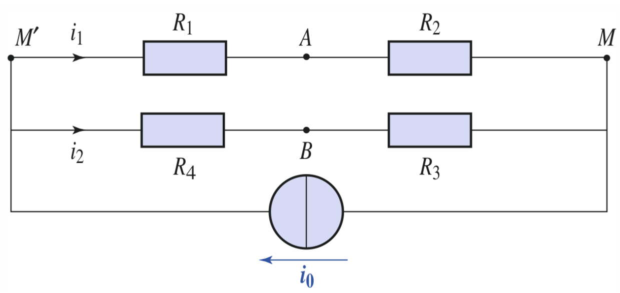
2. Exprimer la tension u_B entre le point B et la masse en fonction de certaines résistances et de e_0.
   Réponse :
   De la même façon :
   $$\boxed{u_B = \frac{R_3}{R_3 + R_4} e_0}.$$

3. Montrer alors que la valeur de la tension $u_{AB} = u_A - u_B$ est :
   $$u_{AB} = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e_0$$
   .
   Réponse :
   On a :
   $$u_{AB} = \left(\frac{R_2}{R_1 + R_2} - \frac{R_3}{R_3 + R_4} \right) e_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_{AB} = \frac{R_2 R_4 - R_1 R_3}{(R_1 + R_2)(R_3 + R_4)} e_0}.$$

Générateur idéal d'intensité (Doc. 2) On s'intéresse maintenant au circuit du document 2.

4. Exprimer la tension u_A entre le point A et la masse en fonction des valeurs des résistances et de i_0.

   Réponse :
   On définit les courants i_1 et i_2 :



D'après la formule du pont diviseur d'intensité :

$$i_1 = \frac{R_3 + R_4}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} i_0.$$

D'après la loi d'Ohm :

$$\boxed{u_A = R_2 i_1 = \frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} i_0}.$$

5. Exprimer la tension u_B entre le point B et la masse en fonction des valeurs des résistances et de i_0.

Réponse :
De même :

$$i_2 = \frac{R_1 + R_2}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} i_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_B = \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} i_0}.$$

6. Montrer alors que la valeur de la tension $u_{AB} = u_A - u_B$ est :

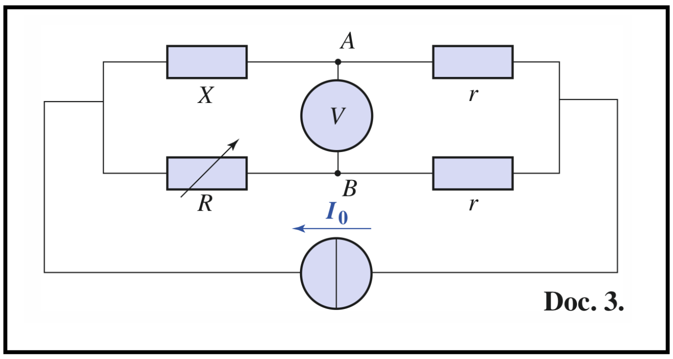
$$u_{AB} = \frac{(R_2 R_4 - R_3 R_1) i_0}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}.$$

Réponse :
Finalement :

$$u_{AB} = \left(\frac{R_2(R_3 + R_4)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} - \frac{R_3(R_1 + R_2)}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4} \right) i_0 = \boxed{\frac{(R_2 R_4 - R_3 R_1) i_0}{R_1 + R_2 + R_3 + R_4}}.$$

Mesure de températures On remplace (doc.3.), dans ce pont de Wheatstone, la résistance R_1 par une résistance de platine, notée X, et dont la valeur varie avec la température θ(°C) selon la relation :

$$X = X_0(1 + a\theta) \quad ; \quad X_0 = 50\,\Omega \quad ; \quad a = 0{,}40 \times 10^{-3}\,\text{SI}.$$



Doc. 3.

On remplace également la résistance R_4 par une résistance réglable notée R. Dans le pont du schéma du document 3, tous les éléments, sauf X, sont maintenus à la température du laboratoire, supposée fixe. Les résistances R_2 et R_3 sont identiques de valeur $r = 1000\,\Omega$ chacune. Le générateur de courant est idéal et fournit une intensité $I_0 = 5{,}0\,\text{mA}$. On néglige la résistance des fils de jonction.

7. Quelle est la dimension de a ?
   Réponse :
   Par analyse dimensionnelle : $\boxed{[a] = \theta^{-1}}$.

Le pont est initialement équilibré pour la température 100 °C. On appellera R_{eq} la valeur de R dans ce cas.

8. Exprimer R_{eq} en fonction de X_0 et a.
   Réponse :
   D'après la question 6) :
   $$u_{AB} = \frac{(rR - Xr)i_0}{2r + R + X}.$$
   Si le pont est équilibré :
   $$rR_{\text{eq}} = X_0(1 + 100a)r \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_{\text{eq}} = X_0(1 + 100a)}.$$

9. Effectuer l'application numérique.
   Réponse :
   $$R_{\text{eq}} = 50 \times (1 + 100 \times 0{,}4.10^{-3}) = 50 \times 1{,}04 = \boxed{52\,\Omega}.$$

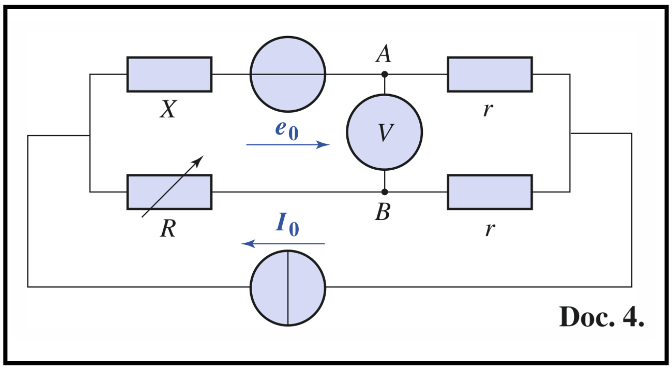
La résistance de platine subit une variation de température $\Delta\theta = 1{,}0 \times 10^{-2}$ °C, alors que l'on a toujours $R = R_{\text{eq}}$.

10. Exprimer la tension u_{AB} due à cette variation de température en fonction de r, X_0, a, $\Delta\theta$, R_{eq} et I_0.

    Réponse :
    Comme $X = R_{\text{eq}} + X_0 a\Delta\theta$, on a alors
    $$\boxed{u_{AB} = -\frac{rX_0 a\Delta\theta I_0}{2r + 2R_{\text{eq}} + X_0 a\Delta\theta}}$$

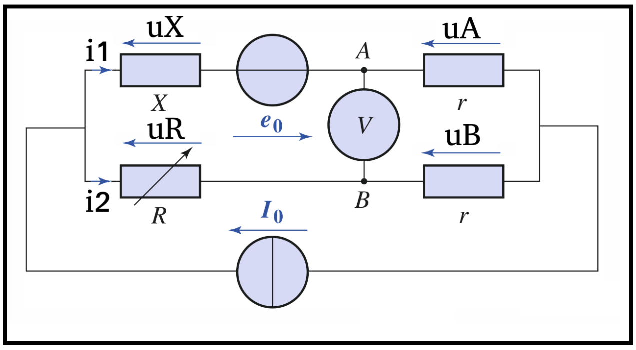
11. Faire l'application numérique.
    Réponse :
    $$\boxed{u_{AB} = -4{,}75.10^{-7}\cdot\text{V} = -0{,}48\,\mu\text{V}}.$$

Le pont étant initialement équilibré pour la température 100 °C, les jonctions font apparaître une force électromotrice parasite e_0 en série avec la résistance de platine, la température étant toujours 100 °C (doc. 4.).



12. Quelle est la tension u_{AB} due à cette force électromotrice parasite ? On donnera une expression en fonction de r, R et e_0. Simplifier ensuite l'expression obtenue, compte-tenu des ordres de grandeur.

Réponse :



D'après les lois d'Ohm, des mailles et des nœuds :

$$I_0 = i_1 + i_2, \quad u_X = Xi_1, \quad u_A = ri_1, \quad u_R = Ri_2, \quad u_B = ri_2, \quad u_X + u_A - e_0 = u_R + u_B$$

On cherche à calculer $u_{AB} = u_A - u_B$. Puisque le pont est initialement équilibré : $X = R$.

Les équations deviennent :

$$I_0 = i_1 + i_2, \quad u_A = ri_1, \quad u_B = ri_2, \quad Ri_1 + u_A - e_0 = Ri_2 + u_B,$$

et alors :

$$rI_0 = u_A + u_B, \quad \frac{Ru_A}{r} + u_A - e_0 = \frac{Ru_B}{r} + u_B,$$

ce qui donne :

$$rI_0 = u_A + u_B, \quad \frac{R+r}{r}(u_A - u_B) = e_0$$

Finalement :

$$\boxed{u_{AB} = \frac{re_0}{r+R} \approx e_0 \qquad \text{car} \quad r \gg R}.$$

13. Quelle est la valeur numérique maximale admissible de e_0 pour que l'on puisse utiliser ce pont de Wheatstone pour la mesure de température avec une précision $\Delta\theta$?
Réponse :
La valeur admissible est alors $\boxed{e_0 \ll 0{,}48\,\mu\text{V}}$.

Sujet 3 – corrigé

I Alimentation d'un train

Les trains fonctionnent maintenant quasiment tous avec des motrices équipées de moteurs électriques. On va étudier les problèmes causés par la longue distance des lignes SNCF.
Le courant est transmis à la motrice par la caténaire (ligne haute tension) via le pantographe, puis le retour du courant s'effectue par les rails.

A Alimentation par une seule sous-station

On appelle sous-station le poste d'alimentation EDF délivrant une tension $E = 1500\,\text{V}$. Si toute la ligne SNCF était alimentée par une seule sous-station, on pourrait représenter cela par le schéma suivant, avec R_c la résistance de la caténaire, R_r celle du rail, M la motrice et E la tension d'alimentation.

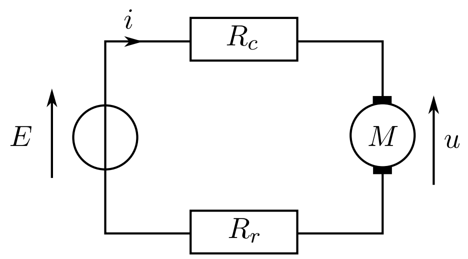


Figure 19.1: Schéma électrique avec une sous-station

La résistance du rail et celle de la caténaire dépendent de la distance entre la motrice et le poste d'alimentation. On peut écrire

$$R_c = \rho_c x \quad ; \quad R_r = \rho_r x$$

avec x la distance entre la motrice et le poste d'alimentation, $\rho_c = 30\,\mu\Omega\cdot\text{m}^{-1}$ la résistance linéique de la caténaire et $\rho_r = 20\,\mu\Omega\cdot\text{m}^{-1}$ celle du rail.
La motrice peut être modélisée par un dipôle consommant une puissance constante $P = 1{,}5\,\text{MW}$. On note u la tension aux bornes de la motrice et i le courant la traversant.

1. Exprimer u en fonction de i, ρ_c, ρ_r, E et x.
   Réponse :
   Par la loi des mailles et le loi d'Ohm : $\boxed{u = E - (\rho_r + \rho_c)xi}$

2. La motrice est un dipôle à caractère récepteur. Définir ce terme.
   Réponse :
   Pour un dipôle à caractère récepteur, la puissance reçue est positive.

3. Montrer que l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par u s'écrit

$$u^2 - Eu + (\rho_c + \rho_r)xP = 0 \tag{19.1}$$

   Réponse :
   La puissance reçue par la motrice est $P = ui$ (u et i en convention récepteur).

$$u = E - (\rho_r + \rho_c)xP/u \quad \Leftrightarrow \quad u^2 = Eu - (\rho_r + \rho_c)xP \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u^2 - Eu + (\rho_c + \rho_r)xP = 0}$$

4. Donner les solutions réelles de cette équation. Donner un encadrement du discriminant Δ. En déduire un encadrement de u.
Réponse :
Les solutions sont réelles si le discriminant est positif ou nul.

$$\Delta = E^2 - 4(\rho_r + \rho_c)xP \geq 0 \quad ; \quad \boxed{u = \frac{E \pm \sqrt{\Delta}}{2}}$$

Physiquement, quand x augmente, u décroit. Comme Δ diminue quand x augmente (on rappelle que $P > 0$), alors la seule solution physiquement acceptable est $\boxed{u = \frac{E + \sqrt{\Delta}}{2}}$.

Comme $0 \leq \Delta \leq E^2$, on en déduit $\boxed{E/2 \leq u \leq E}$.

Pour $x \to 0$, $\Delta \to E^2$, physiquement u est maximale, donc $u_{max} = E$. La solution $u = (E - \sqrt{\Delta})/2 = 0$ n'est pas physiquement acceptable, car cela impliquerait $i \to +\infty$ pour avoir $P = ui = cste$.

5. Déterminer l'expression x_{max} de x telle que u soit minimale. Exprimer u_{min} la valeur minimale de u. Faire les applications numériques.
Réponse :
x_{max} vérifie $\Delta = 0$:

$$\boxed{x_{max} = \frac{E^2}{4(\rho_c + \rho_r)P} = 7{,}5\,\mathrm{km}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{min} = E/2 = 750\,\mathrm{V}}$$

B Transformation Thévenin/Norton

On veut montrer qu'un générateur de Thévenin de f.e.m. e_{th} et de résistance r_{th} est équivalent à un générateur de Norton de c.e.m. η et de résistance r_N.

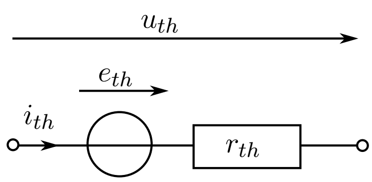


Figure 19.2: Générateur de Thévenin

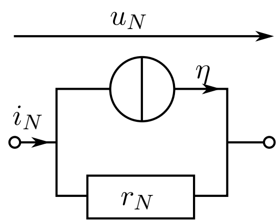
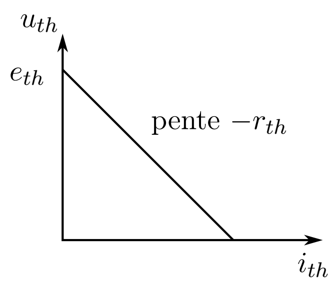
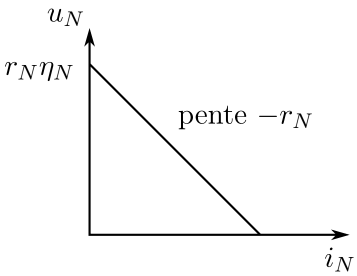


Figure 19.3: Générateur de Norton

6. Pour le générateur de Thévenin, établir l'expression de u_{th} en fonction de i_{th}, e_{th} et r_{th}. Tracer la caractéristique tension/courant correspondante.
Réponse :
$\boxed{u_{th} = e_{th} - r_{th}i_{th}}$



7. Pour le générateur de Norton, établir l'expression de u_N en fonction de i_N, η et r_N. Tracer la caractéristique tension/courant correspondante.
Réponse :
$\boxed{u_N = r_N\eta - r_Ni_N}$



8. Déterminer les expressions de η et r_N en fonction de e_{th} et r_{th} afin que les deux générateurs soient équivalents.
   Réponse :
   Il y a équivalence si les caractéristiques des deux dipôles sont les mêmes, donc $\boxed{r_N = r_{th} \quad \text{et} \quad \eta = e_{th}/r_{th}}$

C Alimentation par plusieurs sous-stations

Afin d'alimenter la motrice sur de longues distances, on répartit des sous-stations tout le long de la ligne SNCF. Les sous-stations sont espacées entre elles d'une distance L. Le schéma équivalent est le suivant

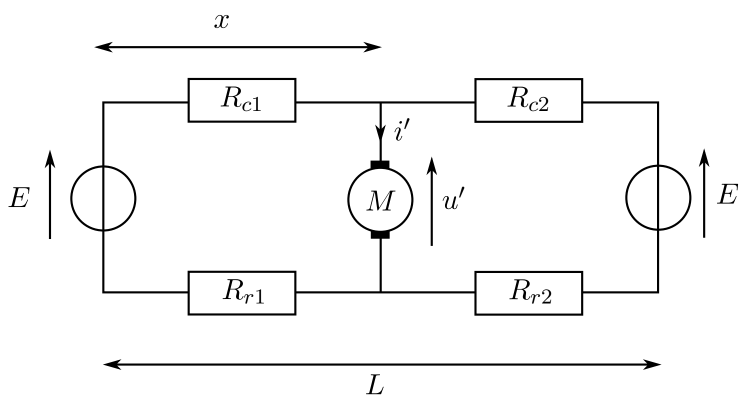


Figure 19.4: Schéma électrique avec deux sous-stations

On note x la distance entre la sous-station de gauche et la motrice, R_{c1} la résistance de la caténaire et R_{r1} celle des rails entre la sous-station de gauche et la motrice, R_{c2} la résistance de la caténaire et R_{r2} celle des rails entre la sous-station de droite et la motrice.
On note u' la tension aux bornes de la motrice et i' le courant la traversant.

9. Exprimer les résistances R_{c1}, R_{c2}, R_{r1} et R_{r2} en fonction de ρ_c, ρ_r, L et x.
   Réponse :
   $R_{c1} = \rho_c x$, $R_{c2} = \rho_c(L-x)$, $R_{r1} = \rho_r x$, $R_{r2} = \rho_r(L-x)$

10. En utilisant les résultats de la question 8., exprimer les courants η_1 et η_2, ainsi que les résistances R_1 et R_2 en fonction de E, ρ_c, ρ_r, x et L pour que le schéma de la figure 19.5 soit équivalent à celui de la figure 19.4.

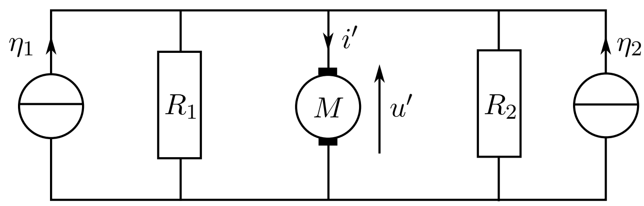


Figure 19.5: Schéma équivalent n°1

Réponse :

$$\boxed{R_1 = R_{c1} + R_{r1} = (\rho_c + \rho_r)x} \quad \text{et} \quad \boxed{\eta_1 = E/R_1 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)x}}$$

$$\boxed{R_2 = R_{c2} + R_{r2} = (\rho_c + \rho_r)(L - x)} \quad \text{et} \quad \boxed{\eta_2 = E/R_2 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)(L - x)}}$$

11. Le schéma précédent est équivalent aux schémas ci-dessous. Donner alors les expressions de η_3 et R_3, puis E' et R_4 en fonction de E, ρ_c, ρ_r, x et L.

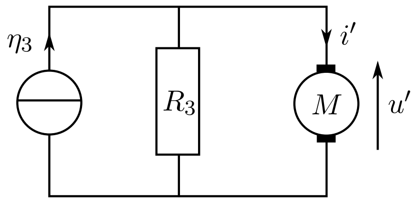


Figure 19.6: Schémas équivalents n°2

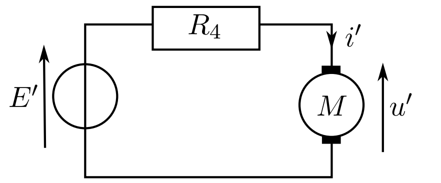


Figure 19.7: Schémas équivalents n°3

Réponse :
Par association en parallèle de générateurs de Norton :

$$\eta_3 = \eta_1 + \eta_2 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)}\left(\frac{1}{x} + \frac{1}{L - x}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\eta_3 = \frac{EL}{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}}$$

$$\boxed{R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} = \frac{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}{L}}$$

Transformation Thévenin/Norton : $\boxed{E' = R_3\eta_3 = E \quad ; \quad R_4 = R_3 = \frac{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}{L}}$

12. En utilisant l'équation (19.1), exprimer l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par u' en fonction de P, ρ_c, ρ_r, E, L et x.
Réponse :
On remplace E par E' et $(\rho_c + \rho_r)x$ par R_4 :

$\boxed{u'^2 - Eu' + P(\rho_c + \rho_r)x(1 - x/L) = 0}$

13. Quelle est l'équation polynomiale vérifiée par x pour que u' soit minimale ?
Réponse :
u' admet des solutions réelles si $\Delta = E^2 - 4P(\rho_c + \rho_r)x(L - x)/L \geq 0$. On a alors

$$u' = \frac{E \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in [E/2, E]$$

Ainsi u' est minimale quand $\Delta = 0$, soit $\boxed{x^2 - xL + \frac{LE^2}{4P(\rho_c + \rho_r)} = 0}$

14. Déterminer l'expression de L telle que u' soit minimale en $x = L/2$. Faire l'application numérique.

Réponse :

On remplace $x_{max} = L/2$ dans l'équation précédente : $\boxed{L = \frac{E^2}{(\rho_c + \rho_r)P} = 30\,\text{km}}$

Sujet 4 – corrigé

I Station TGV

Longtemps après son démarrage, on peut supposer que le TGV fonctionne en régime permanent. La puissance électrique nécessaire à son fonctionnement est fournie au TGV à partir de sous-stations électriques implantées tout le long de la voie et espacées d'une distance $\ell = 60\,\mathrm{km}$. Elles sont reliées par un fil conducteur, la caténaire, suspendu au-dessus des rails. La motrice TGV reçoit l'alimentation de la caténaire par un contact glissant appelé pantographe sur son toit. Tous les moteurs électriques de la locomotrice sont montés en parallèle entre le pantographe et les rails qui servent de liaison masse à la Terre. La situation peut donc être schématisée sur la Fig. 19.1.

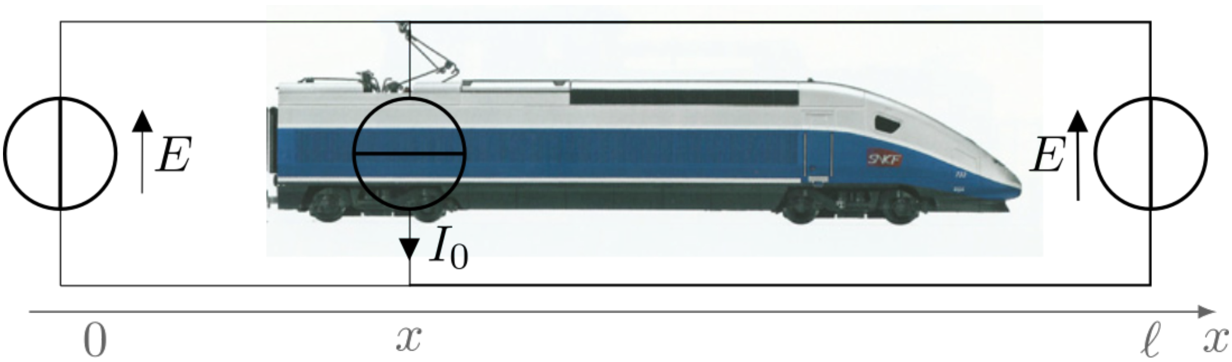


Figure 19.1: Locomotive assimilée à une source de courant idéale, entre deux stations séparées d'une distance ℓ

Les sous-stations électriques seront assimilées à des générateurs idéaux de force électro-motrice E constante et identique pour toutes les sous-stations. On admettra que les moteurs de la locomotive se comportent, d'un point de vue électrique, de la même manière qu'un générateur idéal de courant, imposant un courant I_0 constant orienté de la caténaire vers le sol (voir Fig. 19.1).
Le mardi 3 avril 2007, à 13h14, la SNCF, associée à la compagnie ALSTOM, portait le record du monde de vitesse sur rail à la valeur $574{,}8\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}$ au point kilométrique 194 de la ligne à grande vitesse est-européenne. Lors du record de vitesse, la puissance des moteurs avait été augmentée par rapport aux moteurs habituels et la tension d'alimentation en sortie des sous-stations avait été montée exceptionnellement à $E = 31{,}2\,\mathrm{kV}$ sur la zone du record à la place des $25\,\mathrm{kV}$ habituels. Au moment du record, l'intensité électrique reçue au pantographe a été mesurée : elle était de $I_0 = 800\,\mathrm{A}$.
Pour l'étude qui va suivre, on s'intéresse au trajet du train entre deux sous-stations. On supposera que la section transverse de la caténaire (surface transversale du fil) est de $s = 1{,}47\,\mathrm{cm^2}$. La caténaire est en cuivre, métal dont la conductivité est de $\sigma = 5{,}82\times10^{7}\,\Omega^{-1}\cdot\mathrm{m^{-1}}$.
Le rail rectiligne est confondu avec l'axe (Ox) dont l'origine O est placée au niveau de la sous-station à gauche sur le schéma. La variable $x \in [0\,\mathrm{km}; 60\,\mathrm{km}]$ repère la position de la locomotive entre les deux sous-stations d'alimentation. Une longueur ℓ de rail est équivalente à un conducteur ohmique de résistance R telle que :

$$R = \frac{\ell}{\sigma s}$$

Nous allons chercher tout d'abord à justifier que le rail peut être modélisé par un simple fil de résistance nulle.

1. Évaluer approximativement la surface de section s_{rail} d'un rail de chemin de fer.
   Réponse :
   La taille d'un rail de chemin de fer est d'environ 5,0 cm de large pour 8,0 cm de haut. La surface d'une section de rail est donc approximativement de :

$$\boxed{s_{\text{rail}} \simeq 40\,\mathrm{cm^2}}$$

2. En considérant que le rail est fait du même métal que la caténaire (donc même valeur de conductivité), justifier que la résistance du rail R_{rail} est négligeable devant celle de la caténaire (notée R).
Réponse :
Le rapport entre les résistances du rail et de la caténaire s'écrit :

$$\frac{R_{\text{rail}}}{R} = \frac{s}{s_{\text{rail}}}$$

Car la longueur et la conductivité des du rail et de la caténaire sont identiques. L'application numérique donne :

$$\boxed{\frac{R_{\text{rail}}}{R} \overset{\text{A.N.}}{=} 3{,}7\,\%}$$

Ce rapport étant $\ll 1$, la résistance du rail est négligeable devant celle de la caténaire.

3. Déterminer la résistance totale R de la caténaire entre les deux sous-stations considérées et effectuer l'application numérique.
Réponse :
D'après l'éq. (19.1), la résistance de la caténaire est :

$$\boxed{R = \frac{\ell}{\sigma s} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{6{,}0 \times 10^{4}\,\text{m}}{1{,}47 \times 10^{-4}\,\text{m}^2 \times 5{,}82 \times 10^{7}\,\Omega^{-1}\cdot\text{m}} = 7{,}0\,\Omega}$$

4. Donner l'expression de la résistance R_1 de la portion de caténaire amenant le courant à la locomotive depuis la sous-station de gauche en fonction de σ, s, x et ℓ dans un premier temps, puis en fonction de R.
Réponse :
Lorsque la locomotive est à une distance x de la station située à l'origine, la résistance de la portion de caténaire la séparant de l'origine est :

$$R_1 = \frac{x}{\sigma s} = \frac{\ell}{\sigma s}\frac{x}{\ell}\boxed{= \frac{R \times x}{\ell}}$$

5. De même, exprimer la résistance électrique R_2 de la portion de caténaire amenant le courant à la locomotive depuis la sous-station de droite en fonction de R, x et ℓ.
Réponse :
Pour la portion de caténaire menant jusqu'à la station suivante, la résistance R_2 est directement donnée par :

$$\boxed{R_2 = \frac{R \times (\ell - x)}{\ell}}$$

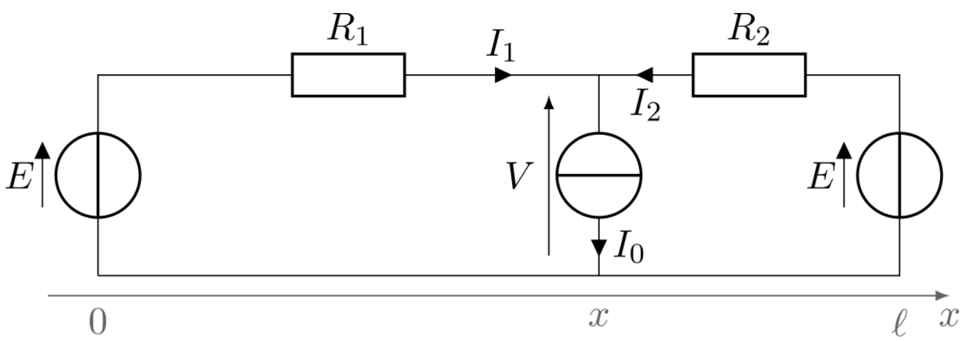


Figure 19.2: Schéma électrique équivalent.

Le système électro-mécanique étudié est donc équivalent au circuit électrique représenté sur la Fig. 19.2.

6. Établir les expressions de I_1, I_2 et V en fonction de E, I_0, R_1 et R_2, puis en fonction de R, E, I_0, x et ℓ. Justifier alors que :
$$I_1 = I_0 \frac{\ell - x}{\ell}$$

Réponse :
Ce circuit électrique comporte 3 inconnues indépendantes : I_1, I_2 et V. Pour le résoudre, il faut donc au minimum trois équations indépendantes. Celles-ci seront les 3 lois de Kirchhoff :
$$E = V + R_1 I_1 \tag{19.1}$$
$$E = V + R_2 I_2 \tag{19.2}$$
$$I_1 + I_2 - I_0 = 0 \tag{19.3}$$
En remplaçant les expressions de I_1 et I_2 issues de l'éq. (19.1) et l'éq. (19.2) dans l'éq. (19.3), on obtient :
$$\boxed{\frac{E-V}{R_1}} + \boxed{\frac{E-V}{R_2}} = I_0 \Leftrightarrow (E-V)\left(\frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}\right) = I_0 \Leftrightarrow E - V = I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$
Ainsi $\boxed{V = E - I_0 \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$.
On peut en déduire, avec les expressions de R_1 et R_2 établies précédemment :
$$V = E - I_0 \times \frac{R\frac{x}{\ell} \times R\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}{R}$$
D'où
$$V = E - RI_0 \times \frac{x}{\ell} \times \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)$$
On déduit donc de l'éq. (19.1) et d'après $I_1 = I_0 \frac{R_2}{R_1 + R_2}$, que :
$$\boxed{I_1 = I_0 \left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$$
De même :
$$\boxed{I_2 = I_0 \frac{x}{\ell}}$$

Pour aller plus loin :
Après application des lois des mailles, on observe que les tensions des résistors sont identiques. Tout se passe comme si ces derniers sont branchés en parallèle et on peut alors appliquer le résultat du pont diviseur de courant : $I_1 = R_2/(R_2 + R_1) \times I_0$.

7. En déduire la puissance consommée $\mathcal{P}_c$ consommée par la locomotive en fonction de R, E, I_0, x et ℓ.

Réponse :
Par définition de la puissance reçue par un dipôle en convention récepteur (ici la locomotive et ses moteurs) :
$$\boxed{\mathcal{P}_c = V \times I_0 = EI_0 - RI_0^2 \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$$

8. Déterminer la puissance $\mathcal{P}_J$ reçue par l'ensemble de la caténaire en fonction de R, E, I_0, x et ℓ. Que devient l'énergie ainsi reçue ?
Réponse :
Par définition de la puissance reçue par un dipôle en convention récepteur (ici les résistance R_1 et R_2) :
$$\boxed{\mathcal{P}_J = R_1 I_1^2 + R_2 I_2^2 = RI_0^2 \frac{x}{\ell}\left(1 - \frac{x}{\ell}\right)}$$
Cette énergie est dissipée donc perdue d'un point de vue électrique.

9. Déterminer la puissance totale $\mathcal{P}_f$ fournie par les deux sous-stations en fonction de E et de I_0.
Réponse :
La puissance fournie par un dipôle en convention générateur est, par définition :

$$\boxed{\mathcal{P}_{f,i} = E \times I_i}$$

Donc la puissance totale fournie par les deux stations est la somme de ces puissances :

$$\boxed{\mathcal{P}_f = E \times (I_1 + I_2) = E \times I_0}$$

10. Que vaut $\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_J - \mathcal{P}_c$. Pourquoi ?
Réponse :
Combiner les résultats des questions précédentes donne :

$$\mathcal{P}_f - \mathcal{P}_J - \mathcal{P}_c = 0$$

Cette relation traduit directement la conservation de l'énergie du système fermé {Stations + Caténaire + Locomotive} : l'énergie fournie par les stations est la somme de l'énergie dissipée par effet Joule et de celle consommée par la locomotive.

On suppose que le train roule à la vitesse $v_0 = 574{,}8\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$ constante.

11. Quelle est l'énergie totale $\mathcal{E}_{f,t_0\to t_f}$ fournie par les stations lors du passage du train sur ce tronçon en fonction de E,I_0, v_0 et ℓ ?
Réponse :
La locomotive parcourt la distance séparant les deux stations en une durée $t_f = \frac{\ell}{v_0}$. Par conséquent, l'énergie fournie par les stations lors du passage de la locomotive est :

$$\boxed{\mathcal{E}_{f,t_0\to t_f} = \int_{t=0\,\mathrm{s}}^{t_f} \mathcal{P}_f \mathrm{d}t' = \frac{EI_0\ell}{v_0}}$$

12. Montrer que la puissance dissipée par effet Joule s'écrit :

$$\mathcal{P}_J\left(t\right) = RI_0^2 \frac{v_0 t \left(\ell - v_0 t\right)}{\ell^2}$$

Réponse :
La position de la locomotive au cours de son trajet entre les stations s'écrit :

$$x\left(t\right) = v_0 \times t$$

Par conséquent, la puissance instantanée dissipée par effet Joules s'écrit bien :

$$\boxed{\mathcal{P}_J\left(t\right) = RI_0^2 \frac{v_0 t \left(\ell - v_0 t\right)}{\ell^2}}$$

13. En déduire alors l'énergie totale $\mathcal{E}_{J,t_0\to t_f}$ dissipée par effet Joule pendant le passage du train sur ce tronçon en fonction de R,I_0, v_0 et ℓ.
Réponse :
L'énergie totale dissipée par effet Joule est donnée par :

$$\mathcal{E}_{J,0\to t_f} = \int_{t=0\,\mathrm{s}}^{t_f} \mathcal{P}_J\left(t'\right)\mathrm{d}t' = \frac{RI_0^2}{\ell^2}\left[\ell v_0 \frac{t^2}{2} - v_0^2 \frac{t^3}{3}\right]_{0\,\mathrm{s}}^{t_f}$$

Autrement dit, après simplification :

$$\boxed{\mathcal{E}_{J,0\to t_f} = \frac{RI_0^2\ell}{6v_0}}$$

14. En déduire l'énergie consommée par les moteurs $\mathcal{E}_{c,t_0\to t_f}$ lors du trajet de la locomotive sur ce tronçon.

    Réponse :
    La conservation de l'énergie décrite à la question 10 permet de donner directement :

$$\boxed{\mathcal{E}_{c,0\to t_f} = \mathcal{E}_{f,0\to t_f} - \mathcal{E}_{J,0\to t_f} = \frac{I_0\ell}{v_0}\left(E - RI_0\right)}$$

On rappelle que le rendement η d'un système énergétique consiste à comparer l'énergie utile (affectée à la tâche cible) à l'énergie fournie :

$$\eta = \frac{\mathcal{E}_{c,t_0\to t_f}}{\mathcal{E}_{f,t_0\to t_f}}$$

15. Calculer le rendement de ce système et commenter sa valeur.
    Réponse :
    Le rendement de ce système de transport d'énergie est donné par :

$$\boxed{\eta = \frac{\mathcal{E}_{c,0\to t_f}}{\mathcal{E}_{f,0\to t_f}} = 1 - \frac{RI_0}{6E} \overset{\text{A.N.}}{=} 97\,\%}$$

    Ce transport d'énergie est, heureusement, très efficace, mais il serait intéressant de connaître le rendement des moteurs électriques de locomotive pour estimer le rendement global de ce déplacement à très haute vitesse par rapport à d'autres sources d'énergie (moteur thermique voire moteur à hydrogène).