/86 P1 Résonance d'un verre *(D'après TSI Centrale Supélec 2018)*

Dans le vingt-et-unième album de la série *Les Aventures de Tintin*, intitulé *Les Bijoux de la Castafiore*, cette dernière est en mesure de faire exploser un verre par la simple utilisation de sa voix. Le présent sujet se penche sur les aspects physiques de ce phénomène. Nous tenterons ainsi de déterminer les circonstances dans lesquelles il est effectivement possible de réaliser une telle prouesse et nous nous pencherons sur les rôles joués par les différents paramètres physiques susceptibles d'influer sur ces circonstances.

Les deux parties sont indépendantes.

I/A Analyse expérimentale des vibrations du verre suite à un choc

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre mis ainsi en vibration.

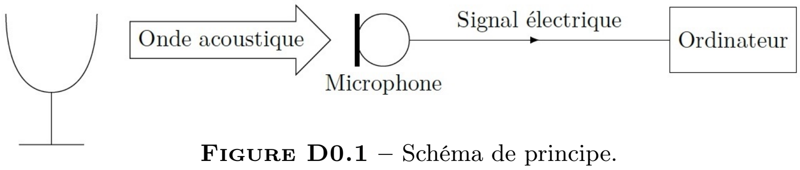

FIGURE D0.1 – Schéma de principe.

Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur et représenté sur la figure D0.2. Le spectre de ce signal temporel est représenté sur la figure D0.3.

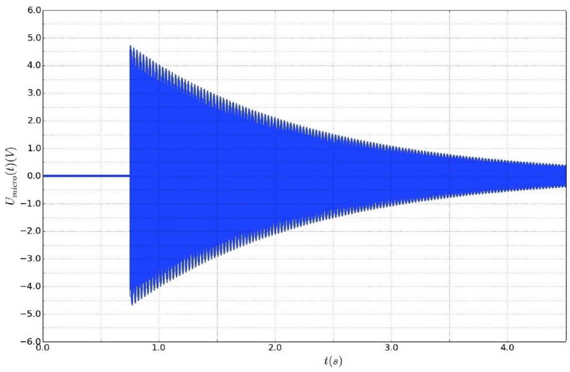

FIGURE D0.2 – Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre.

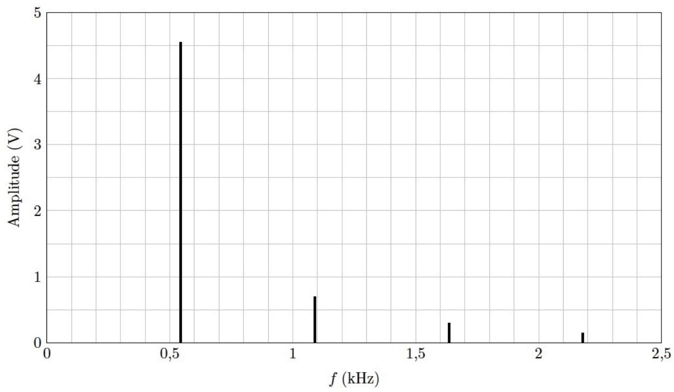

FIGURE D0.3 – Analyse spectrale du son réalisé peu après la frappe du verre.

Les « pics » représentés dans la figure D0.3 correspondent à des modes propres de vibration du verre.

/5 **1** Donner les fréquences des différents modes propres. Elles sont liées par une relation simple, laquelle ? Comment nomme-t-on ces différents modes propres ? Quelle est la fréquence du signal ?

Réponse

On relève les fréquences suivantes : $f_1 \approx 550\,\text{Hz}$, $f_2 \approx 1090\,\text{Hz}$, $f_3 \approx 1620\,\text{Hz}$ et $f_4 \approx 2180\,\text{Hz}$. 1 On remarque donc que l'on a $\boxed{f_n = n f_1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ 1

Le premier mode est appelé <u>fondamental</u>. 1 Les autres sont appelés <u>harmoniques de rang n</u>. 1

La fréquence du signal est la fréquence de son fondamental, donc ici $\underline{f = 550\,\text{Hz}}$. 1

◇

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse m mobile sur l'axe (Ox) horizontal associée à un ressort de raideur k, de longueur à vide nulle (figure D0.4). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ où $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse de la masse m.

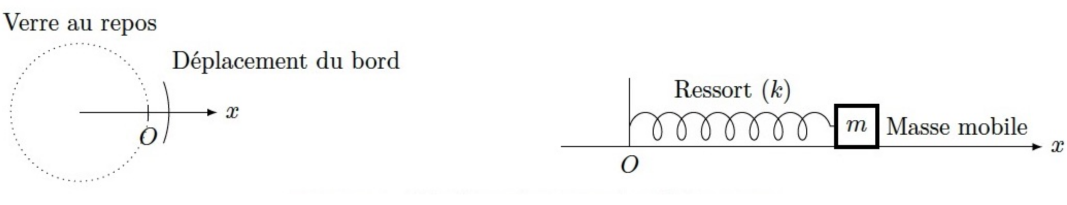

FIGURE D0.4 – Modèle mécanique du déplacement.

/10 2 Établir proprement le système d'étude.

Réponse

2 pour un beau schéma propre.

1 ◇ Système : {point M} de masse m

1 ◇ Référentiel d'étude : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

1 ◇ Repère : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ avec $\overrightarrow{u_y}$ vertical ascendant

1 ◇ Repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\vec{v} = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\vec{a} = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$

◇ **Bilan des forces :**

1 **Poids** $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$

1 **Réaction support** $\vec{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$

1 **Force rappel** $\vec{F} = -k(\ell(t) - \underbrace{\ell_0}_{=0})\,\overrightarrow{u_x} = -kx(t)\,\overrightarrow{u_x}$

1 **Force frottement** $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x}$

◇

/5 3 Montrer que l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ s'écrit de la façon suivante, avec ω_0 et Q deux constantes que l'on exprimera en fonction de α, k et m :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = 0$$

Réponse

Avec le PFD :

$$m\vec{a} \overset{1}{=} \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_r$$

$$\xrightarrow{\cdot\,\overrightarrow{u_x}}\quad \Rightarrow m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx(t) = 0$$

$$\xrightarrow{\div m}\quad \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}x(t) \overset{1}{=} 0$$

D'où la forme demandée.

On identifie ω_0 et Q :

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

et

$$\frac{\alpha}{m} \overset{1}{=} \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{1}{=} \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

◇

/3 4 Quels sont les noms, les unités et les significations physiques de ω_0 et de Q ?

Réponse

ω_0 est la pulsation propre (0.5) du système, elle s'exprime en rad/s (0.5). Elle correspond à la pulsation à laquelle oscillerait le système s'il n'y avait pas de frottement. (0.5)

Q est appelé facteur de qualité du système. (0.5) Il est sans unité. (0.5) Plus Q est grand, moins il y a de dissipation d'énergie, plus le système s'approche d'un oscillateur harmonique non amorti. (0.5)

◇

/9 5 Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas de frottements « faibles », l'expression approchée de la solution $x(t)$. Montrer en particulier que la fonction $x(t)$ peut se mettre sous la forme d'un signal sinusoïdal de pulsation Ω délimité par une enveloppe exponentielle décroissante, dont on précisera l'expression du temps caractéristique τ en fonction de ω_0 et Q.

Réponse

L'équation différentielle est homogène, donc $x(t) = x_h(t)$. (1) Pour déterminer $x_h(t)$, on injecte la forme générique $x_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ (1) pour trouver l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 \overset{1}{=} 0$$

$$\Rightarrow \Delta \overset{1}{=} \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right) \overset{1}{<} 0 \quad \text{faible amortissement}$$

$$\Rightarrow r_\pm \overset{1}{=} \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\xrightarrow{\text{On injecte }\Delta}\quad \Leftrightarrow r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(4Q^2 - 1\right)}$$

$$\Leftrightarrow r_\pm \overset{1}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\xrightarrow{\Omega\text{ et }\tau}\quad \Leftrightarrow r_\pm \overset{1}{=} -\frac{1}{\tau} \pm \mathrm{j}\Omega$$

$$\Rightarrow \boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}} \overset{1}{\text{et}} \boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-t/\tau}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)}$$

◇

/4 [6] Déterminer l'expression complète de $x(t)$ avec les conditions initiales $x(0) = 0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = V_0$.

Réponse

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$x(0) = 0 = 1\,[A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = 0}$$ ①

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} B \sin(\Omega t) + \mathrm{e}^{-t/\tau} B\Omega \cos(\Omega t)$$ ①

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0 = \Omega B = V_0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{V_0}{\Omega}}$$ ①

Finalement,

$$\boxed{x(t) = \frac{V_0}{\Omega}\mathrm{e}^{-t/\tau}\sin(\Omega t)}$$ ①

◇

/4 [7] À l'aide de la figure D0.2, que vous recopierez sommairement sur votre copie pour montrer votre construction graphique, déterminer numériquement τ.

Réponse

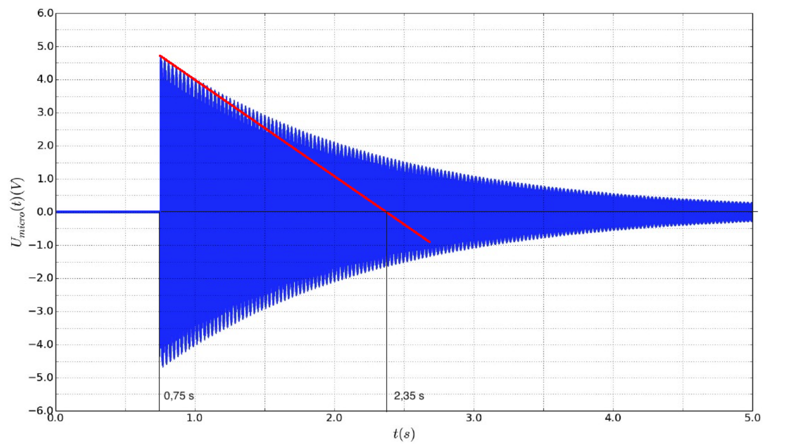

Figure 2 Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre

Figure D0.5 – ①+①

On trace la tangente à l'origine de l'enveloppe exponentielle. Elle coupe l'asymptote $x = 0$ en $t = \tau$. On lit donc

$$\tau = t_{\text{its}} - t_0 \Rightarrow \underline{\tau = 1{,}6\,\mathrm{s}}$$ ① ①

En effet, sur le graphique, l'excitation a lieu à $t_0 = 0{,}75\,\mathrm{s}$ et non $t = 0$ comme dans la résolution mathématique.

◇

/2 [8] Comment se simplifie l'expression de la pseudo-pulsation Ω avec l'hypothèse des faibles frottements (justifier précisément) ?

Réponse

On a déjà vu lors de la résolution de l'équation que $\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}}$. Or, on remarque que de très nombreuses pseudo-périodes sont visibles, on a donc $Q \gg 1$. ① Ainsi,

$$\Omega \approx \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - \cancel{1}} \Rightarrow \boxed{\Omega \approx \omega_0}$$ ①

◇

/5 [9] Déduire des questions précédentes les valeurs numériques de ω_0 et Q. Commenter le résultat.

Réponse

On a relevé précédemment la fréquence du signal $f = 550\,\mathrm{Hz}$. ① Comme on a montré que $\Omega \approx \omega_0$, on en déduit

$$\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0} \Rightarrow \underline{\omega_0 \approx 3{,}5 \times 10^3\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$ ① ①

De plus,

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{Q = \pi f_0 \tau} \Rightarrow \underline{Q \approx 2{,}8 \times 10^3}$$ ① ①

◇

I/B Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée.

Un haut-parleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f. Le verre, placé à proximité du haut-parleur (figure D0.6), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

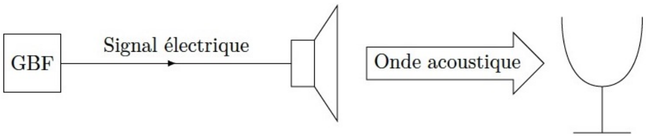

Figure D0.6

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ est alors de la forme suivante, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et Φ la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$. On introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X}\exp(\mathrm{j}\omega t)$ avec $\mathrm{j}^2 = -1$.

/4 **10** Expliquer pourquoi on cherche une solution de cette forme.

Réponse

Cette équation différentielle se résout en prenant la somme de $x_h(t)$ et d'une solution particulière $x_p(t)$ (1). Or, on a montré dans la partie précédente que $\lim_{t\to\infty} x_h(t) = 0$ (1). Ainsi, en régime permanent, il ne reste que $x(t) = x_p(t)$.

Or, l'entrée étant sinusoïdale, il paraît naturel de chercher une sortie sinusoïdale. (1) De plus, l'équation différentielle étant linéaire, on s'attend à ce que la pulsation du signal de sortie soit la même que celle du signal d'entrée, sans non-linéarités. (1)

◇

/2 **11** Comment nomme-t-on la grandeur $\underline{X}$? Que représente son module, son argument ?

Réponse

$\underline{X}$ est appelée amplitude complexe associée à $x(t)$. (1) $\underline{X} = Xe^{\mathrm{j}\varphi}$, on a donc $\boxed{|\underline{X}| = X}$ et $\boxed{\arg(\underline{X}) = \varphi}$. (1)

◇

/4 **12** Établir l'expression de $\underline{X}$ puis de son module en fonction de A_0, Φ, Q et $u = \omega/\omega_0$.

Réponse

On réécrit l'équation différentielle en complexes :

$$\left((\mathrm{j}\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}\mathrm{j}\omega + {\omega_0}^2\right)\underline{X} \overset{(1)}{=} \underline{A} = A\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$$

$\div {\omega_0}^2$

$$\Leftrightarrow \left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1\right)\underline{X} \overset{(1)}{=} \frac{A_0}{{\omega_0}^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{X}(u) \overset{(1)}{=} \frac{A_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}/{\omega_0}^2}{1 - u^2 + \mathrm{j}\frac{u}{Q}}}$$

$X(u) = |\underline{X}|$

$$\Rightarrow \boxed{X(u) \overset{(1)}{=} \frac{A_0/{\omega_0}^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}}}$$

◇

/3 **13** À partir d'une étude qualitative mais précise, justifier le numéro de graphe de la figure D0.7 compatible avec le tracé du module de $\underline{X}$ en fonction de la pulsation ω.

Réponse

On fait une étude en hautes et basses fréquences :

Basses fréquences

$$X(u) \xrightarrow[u\to 0]{(1)} \frac{A_0}{{\omega_0}^2} \neq 0$$

Hautes fréquences

$$X(u) \xrightarrow[u\to\infty]{(1)} 0$$

On en déduit donc qu'il s'agit du graphe 2. (1)

◇

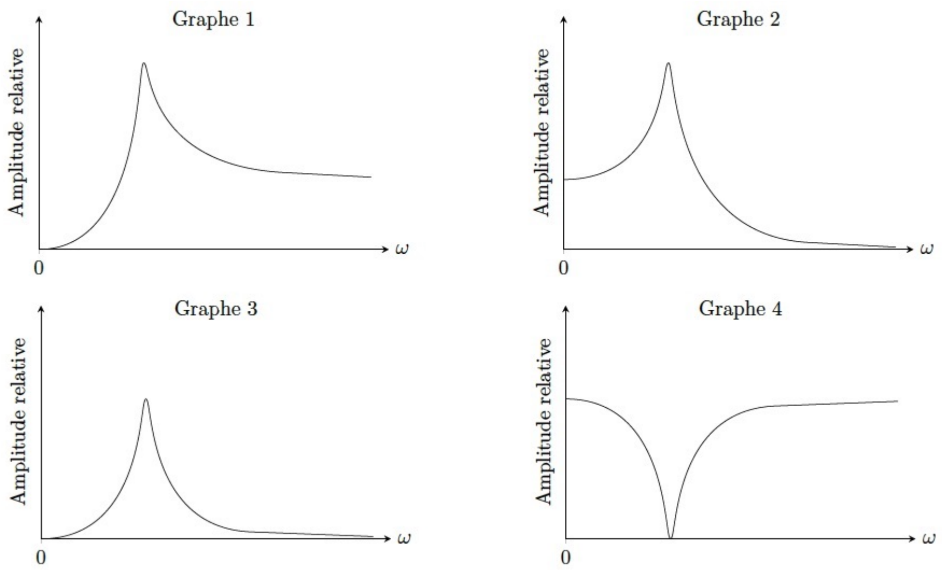

FIGURE D0.7 – Module de $\underline{X}$ en fonction de ω.

/10 **14** Montrer qu'il ne peut y avoir de résonance que si $Q > Q_{\text{lim}}$ et déterminer Q_{lim}. Donner alors l'expression de la pulsation ω_r correspondant à la résonance.

Réponse

Pour qu'il y ait résonance, il faut que $|\underline{X}| = X$ passe par un maximum 1 pour $u \neq 0$ 1. Or, le numérateur de $X(u)$ est constant 1 et la fonction racine carrée monotone donc X passe par un maximum si la fonction $f(u) = (1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$ passe par un minimum. 1 On cherche donc u_r tel que la dérivée de $f(u)$ s'annule :

$$\left(\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u}\right)_{u_r} \overset{1}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2(-2u_r)(1-u_r^2) + \frac{2u_r}{Q} \overset{1}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow 2u_r\left(-2(1-u_r^2) + \frac{1}{Q^2}\right) \overset{1}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{u_r = 0}_{\text{impossible par définition}} \quad \text{ou} \quad -2(1-u_r^2) + \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$\Rightarrow u_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow u_r \overset{1}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$$

Possible que si $1 - \dfrac{1}{2Q^2} > 0$

$$\Leftrightarrow Q > \boxed{\frac{1}{\sqrt{2}} \overset{1}{=} Q_{\text{lim}}}$$

On a alors $\boxed{\omega_r \overset{1}{=} \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}}$

Dans la suite, on suppose $Q \gg Q_{\text{lim}}$.

/2 **15** Comment se simplifie alors l'expression de la pulsation de résonance ω_r ? On note X_r le module de $\underline{X}$ pour $\omega = \omega_r$. Établir son expression en fonction de ω_0, A_0 et Q.

Réponse

Si $Q \gg Q_{\text{lim}}$, alors $Q \gg 1$, et on a $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \cancel{\frac{1}{2Q^2}}} \overset{1}{\approx} \omega_0}$

Par définition $X_r = X(\omega_r)$. D'après la question précédente, on a donc $X_r \approx X(\omega_0) = X(u=1)$, ce qui donne

$$X_r = \frac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} \Leftrightarrow \boxed{X_r \overset{1}{=} Q\frac{A_0}{\omega_0^2}}$$

/2 **16** Quelles sont les définitions des pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) du module de $\underline{X}$? On ne cherchera pas ici à établir leurs expressions.

Quelle relation existe-t-il entre ω_0, Q et $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$? *On admettra que cette relation est la même que dans le cas d'une résonance de type « passe-bande » et on cherchera pas à la démontrer.*

Réponse

Les pulsations de coupures sont définies par $\boxed{X(\omega_1) = X(\omega_2) = \frac{X_r}{\sqrt{2}}}$ 1

L'acuité de la résonance est égale à Q, soit $\boxed{\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q}$ ①

Une série de mesures de l'amplitude X au voisinage de la résonance (réalisée par un dispositif interférentiel non présenté ici) permet de tracer le graphe représenté sur la figure D0.8.

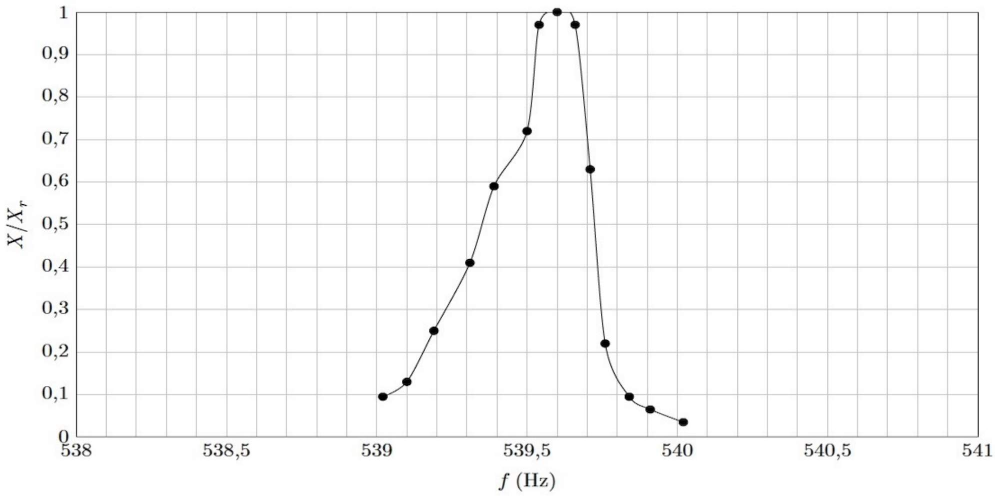

Figure D0.8 – Amplitude relative en fonction de la fréquence.

/7 **17** Déterminer, à l'aide de la figure D0.8, la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q du verre dans son mode 1. Vous recopierez sommairement la figure sur votre copie pour faire apparaître votre construction graphique. Comparer avec les résultats de la première partie.

Réponse

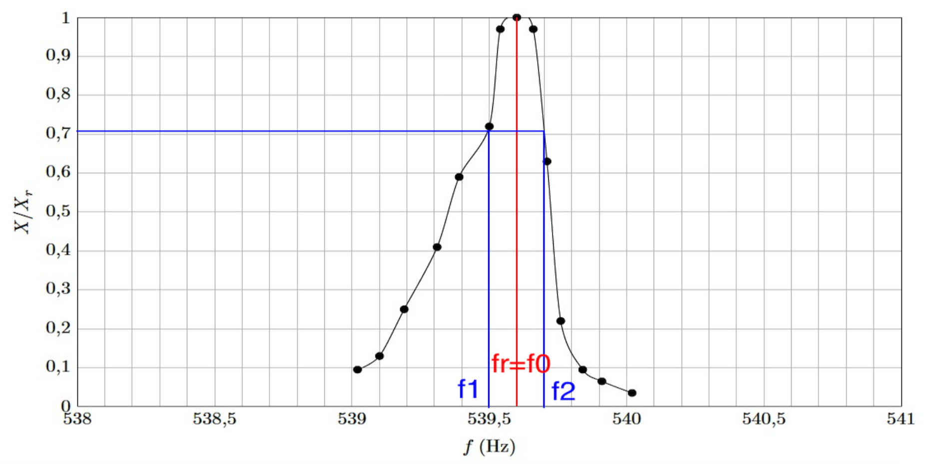

Figure 7 Amplitude relative en fonction de la fréquence

Figure D0.9 – ①+①

On a vu précédemment que le système étudié possédait bien un facteur de qualité très élevé, on a donc $\omega_r \approx \omega_0$. On relève $f_r = f_0 = 539{,}6\,\text{Hz}$ ①, soit $\underline{\omega_0 = 3390\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Les fréquences de coupures, telles que $X/X_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$ ①, valent respectivement $f_1 = 539{,}5\,\text{Hz}$ et $f_2 = 539{,}7\,\text{Hz}$ ①

On en déduit $Q = \dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \dfrac{f_0}{f_2 - f_1} = 2{,}7 \times 10^3$. ①

On retrouve bien environ les mêmes valeurs que dans la première partie. ① La détermination de ω_0 est cependant plus précise au vu de l'échelle du graphique.

/5 **18** En musique, la gamme tempérée comporte 12 demi-tons (Do - Do♯ - Ré - Ré♯ - Mi - Fa - Fa♯ - Sol - Sol♯ - La - La♯ - Si). Pour passer d'une note à la note suivante, on multiplie sa fréquence par $2^{1/12}$. Sachant que le La3 se trouve à 440 Hz, quelle note doit chanter la Castafiore pour briser le verre ? Chante-t-elle juste ?

Réponse

Pour briser le verre, il faut le mettre en résonance de sorte à ce qu'il vibre avec une amplitude telle que la déformation du matériau provoque sa rupture. ① Il faut donc l'exciter à la fréquence de 539,6 Hz. ①

Si on a la note La à 440 Hz, alors les notes suivantes dans la gamme ont pour fréquences : 1 466 Hz (La$\sharp$) , 494 Hz (si), 523 Hz (do) et 554 Hz (do$\sharp$).

D'après la courbe, on voit qu'à 554 Hz, la résonance est déjà passée. 1 Il faut donc chanter à une fréquence intermédiaire entre celle du Do et du Do$\sharp$. En en conclut donc que la CASTAFIORE chante faux lorsqu'elle brise le verre ! 1