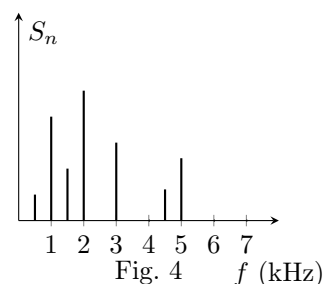
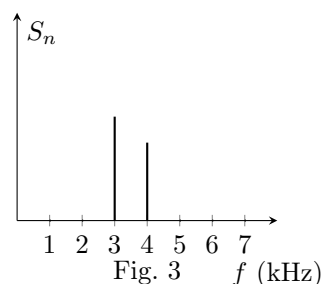
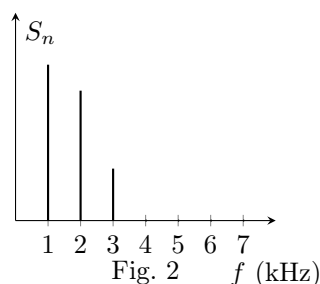
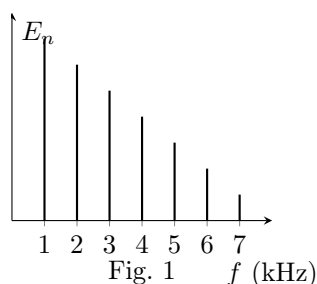


# Correction du TD

## I Filtrage et spectres

Un signal périodique  $e(t)$  (de fréquence 1 kHz), dont le spectre est donné en figure 1, est envoyé à l'entrée de trois filtres différents. On effectue l'analyse spectrale du signal de sortie pour chaque filtre, les spectres obtenus sont donnés en figure 2, 3 et 4.



- 1) Quelles caractéristiques de chaque filtre peut-on déduire de ces spectres ?

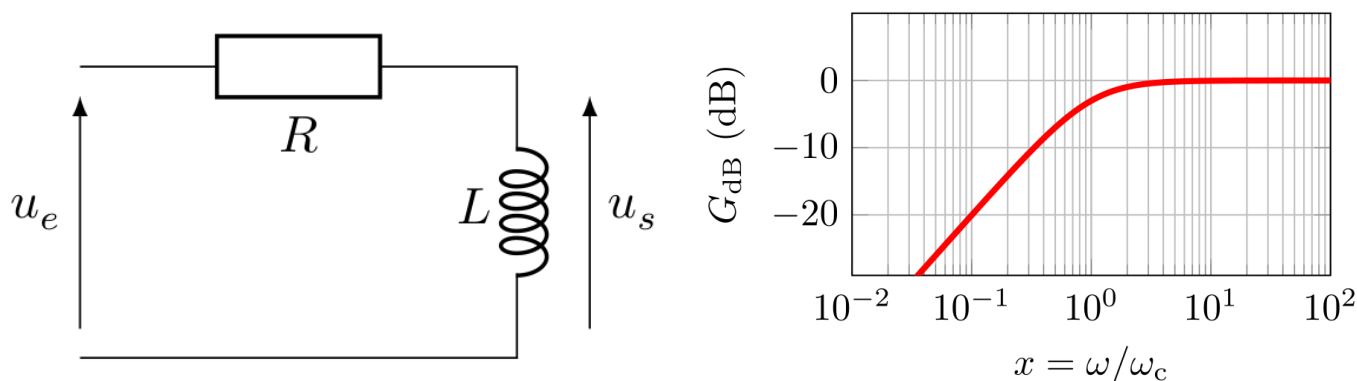
### Réponse

- Sur la figure deux, les basses fréquences sont globalement conservées, et les fréquences à partir de 3 kHz sont fortement atténuées voire coupées : **c'est un passe-bas.**
- Sur la figure trois, seules les fréquences entre 3 et 4 kHz sont gardées, les fréquences supérieures ou inférieures sont coupées : **c'est un passe-bande.**
- Sur la figure quatre, on ne distingue pas de relation simple vue en cours ; on remarque de plus que de nouvelles fréquences apparaissent, ce qui n'est pas le cas dans le filtrage linéaire : **c'est un filtre non-linéaire.**



## II Filtre avec une bobine

On considère le circuit ci-contre, avec  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $L = 10 \text{ mH}$ , donnant le diagramme de BODE ci-dessous :



- 1) Sans utiliser le diagramme de BODE, quelle est la nature du filtre ?

---

**Réponse**


---

À basses fréquences,  $|\underline{Z}_L| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ , donc  $H(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ . À hautes fréquences,  $|\underline{Z}_L| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty$ , donc  $H(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1$  : **c'est un passe-haut.**

---



- 2) Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec  $H_0$  et  $\omega_c$  des constantes à préciser.

---

**Réponse**


---

On fait un pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{u}_e \Leftrightarrow \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \underline{H} = \frac{R'}{R} \times \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R}{L} = 1 \times 10^5 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$


---



- 3) Montrer par le calcul que la pente de l'asymptote du diagramme de BODE pour  $\omega \ll \omega_c$  est de 20 dB/décade.

---

**Réponse**


---

$1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} 1$ , et donc

$$\underline{H}(j\omega) \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} j\frac{\omega}{\omega_c} \Leftrightarrow \boxed{G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|) \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} 20 \log x}$$

d'où la pente de 20 dB/décade.

---



- 4) On considère une tension d'entrée  $u_e(t)$  somme de 3 harmoniques de mêmes amplitudes, de mêmes phases initiales, mais de fréquences respectives  $f_1 = 100 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 1 \text{ kHz}$  et  $f_3 = 100 \text{ kHz}$ . Donner le spectre de sortie.

---

**Réponse**


---

On trouve le spectre de sortie en multipliant chaque amplitude d'entrée par le module de la fonction de transfert pour avoir l'amplitude de sortie. **Attention, pulsation  $\neq$  fréquence.** On a

$$|\underline{H}(f)| = \frac{\frac{2\pi f}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f}{\omega_c}\right)^2}}$$

- ◇  $H(f_1) \approx 6,3 \times 10^{-3}$  : le fondamental est complètement atténué, il ne reste que 0,6% de son amplitude initiale ;
  - ◇  $H(f_2) \approx 6,3 \times 10^{-2}$  : l'harmonique  $f_2$  est fortement atténué, il n'en reste que 6% ;
  - ◇  $H(f_3) \approx 0,99$  : l'harmonique  $f_3$  est pratiquement entièrement conservé.
- 



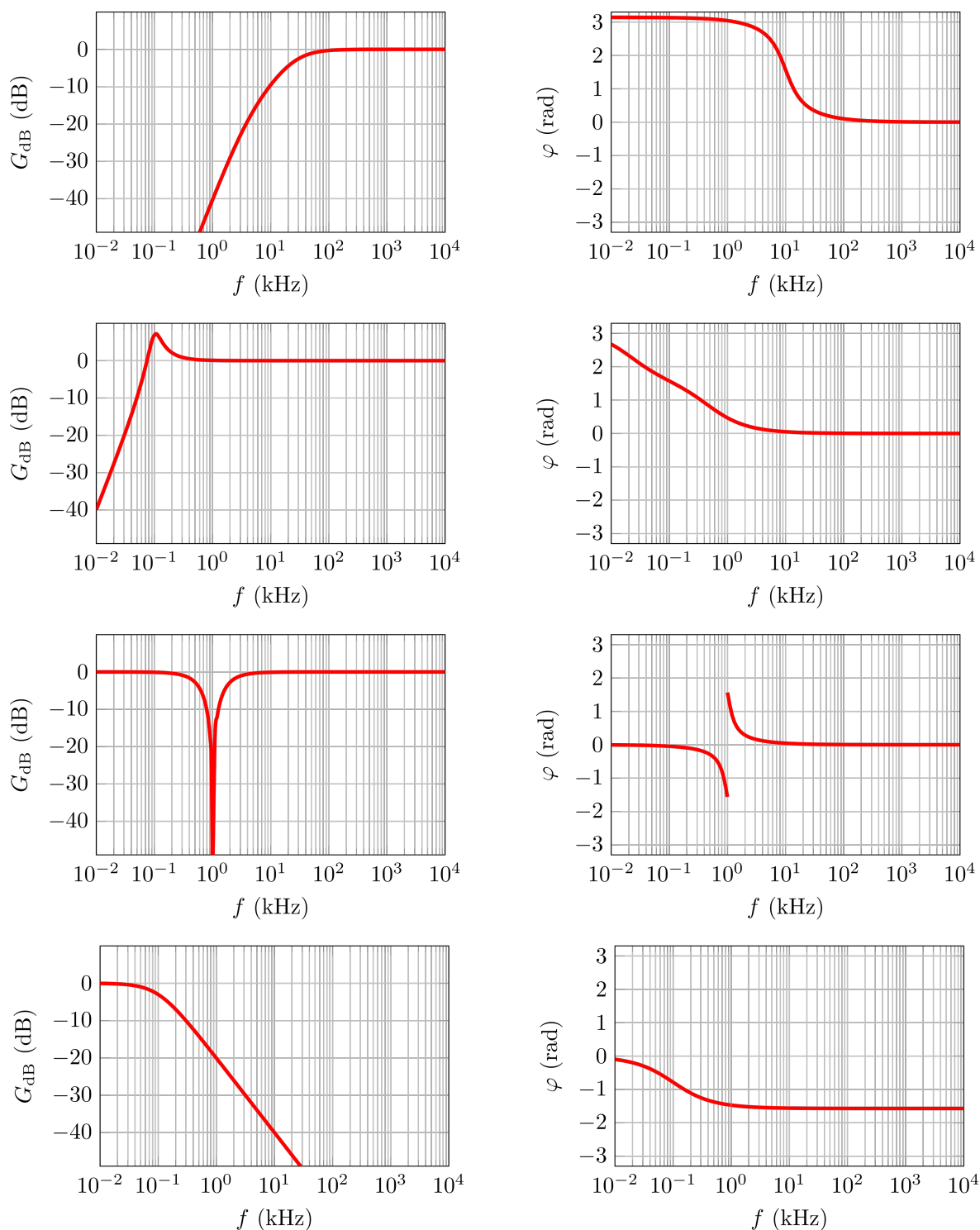


FIGURE 7.1 – Diagrammes exercice III

### III Lecture de diagrammes de BODE

On donne Figure 7.1 les diagrammes de BODE de quatre filtres.

1) Pour chacun d'eux :

1) Indiquer le type de filtre dont il s'agit.

2) Déterminer l'expression du signal  $s(t)$  de sortie du filtre pour un signal d'entrée

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

avec une fréquence  $f = 1$  kHz.

#### Réponse

Pour faciliter la rédaction on note  $e(t) = e_0 + e_1(t) + e_{10}(t) + e_{100}(t)$ , et de même pour le signal de sortie  $s$ . Ainsi, par linéarité, chaque composante  $e_n$  du signal d'entrée donne une composante  $s_n$  au signal de sortie.

◇ Filtre 1 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre passe-haut, de fréquence de coupure  $f_c$  de l'ordre de 10 kHz. Reconstituons le signal de sortie :

- ▷ Le terme constant  $e_0$  est complètement coupé par le filtre, donc  $s_0 = 0$ .
- ▷ L'harmonique de fréquence  $f$  est atténuée de 40 dB et peut donc être négligée dans le signal de sortie (40 dB correspond à une division de l'amplitude par 100), soit  $s_1(t) \ll$  autres harmoniques de  $s(t)$ .
- ▷ L'harmonique de fréquence  $10f$  est atténuée de 10 dB, soit

$$S = 10^{-10/20} E = 10^{-1/2} E \approx 0,3E$$

et elle est également déphasée d'environ  $+\pi/2$ . Ainsi

$$s_{10}(t) \approx 0,3E \cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2)$$

- ▷ L'harmonique de fréquence  $100f$  n'est presque pas atténuée ni déphasée, donc  $s_{100}(t) \approx e_{100}(t)$ . Au final, on obtient le signal de sortie  $s(t)$  suivant :

$$s(t) \approx 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

◇ Filtre 2 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **passe-haut**, de fréquence de coupure  $f_c$  de l'ordre de 0,1 kHz. De la même manière que pour le filtre 1, on détermine que :

$$s(t) \approx E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

◇ Filtre 3 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **coupe-bande**, la bande coupée étant proche de 1 kHz. Ainsi seule l'harmonique  $e_1(t)$  est coupée (soit  $s_1 = 0$ ). Les autres composantes harmoniques du signal d'entrée, y compris la composante continue, sont de fréquences suffisamment différentes de la fréquence coupée pour n'être ni atténuée ni déphasée. Le signal de sortie  $s(t)$  s'écrit donc sous la forme :

$$s(t) = E_0 + E_0 \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- ◇ Filtre 4 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **passé-bas**, de fréquence de coupure  $f_c$  de l'ordre de 0,1 kHz. Le terme constant  $e_0$  passe au travers du filtre sans être modifié. Les termes suivants sont de fréquence suffisamment supérieure à la fréquence de coupure pour que le diagramme de BODE puisse être approximé par son asymptote. On peut alors déterminer le signal de sortie comme dans le cas du premier filtre, mais il y a plus simple ! Comme le filtre est d'ordre 1 (une seule asymptote de pente  $-20$  dB/décade, alors il se comporte comme un intégrateur pour les signaux de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. En déduire le signal de sortie est donc très simple :

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \sin(\omega t) + \frac{\omega_c}{10\omega} \sin\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} \sin\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

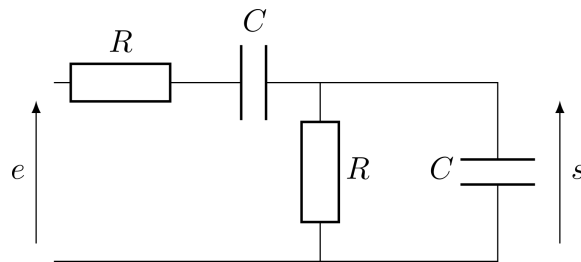
- ◇ En écrivant le signal en termes de cosinus, on obtient :

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} \cos\left(100\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$



## IV Filtre de WIEN

On s'intéresse au filtre de WIEN, représenté ci-contre.



- 1) Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

### Réponse

Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc  $\underline{S} = 0$ . Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également  $\underline{S} = 0$ . Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passé-bande**.



- 2) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}$  du filtre.

### Réponse

Notons  $\underline{Z}$  l'impédance et  $\underline{Y}$  l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$



- 3) On pose  $\omega_0 = 1/RC$  et  $x = \omega/\omega_0$ . Écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

en précisant les valeurs de  $H_0$  et  $Q$ .

---

**Réponse**

---

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left( x - \frac{1}{x} \right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$



- 4) Calculer simplement le gain maximal du filtre, puis le gain maximal en décibels, et le déphasage correspondant à ce maximum.

---

**Réponse**

---

Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à  $x = 1$ , d'où le gain maximal  $\mathbf{G_{max} = 1/3}$ .

Le gain **en décibels** du filtre est défini par

$$G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|)$$

et on trouve donc  $\mathbf{G_{dB,max} = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}}$ . De plus, en  $x = 1$  la fonction de transfert est réelle, donc son argument est nul : à la pulsation  $\omega_0$ , la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.



- 5) Représenter le diagramme de BODE asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

---

**Réponse**

---

Dans la limite très basses fréquences, la fonction de transfert est équivalente à

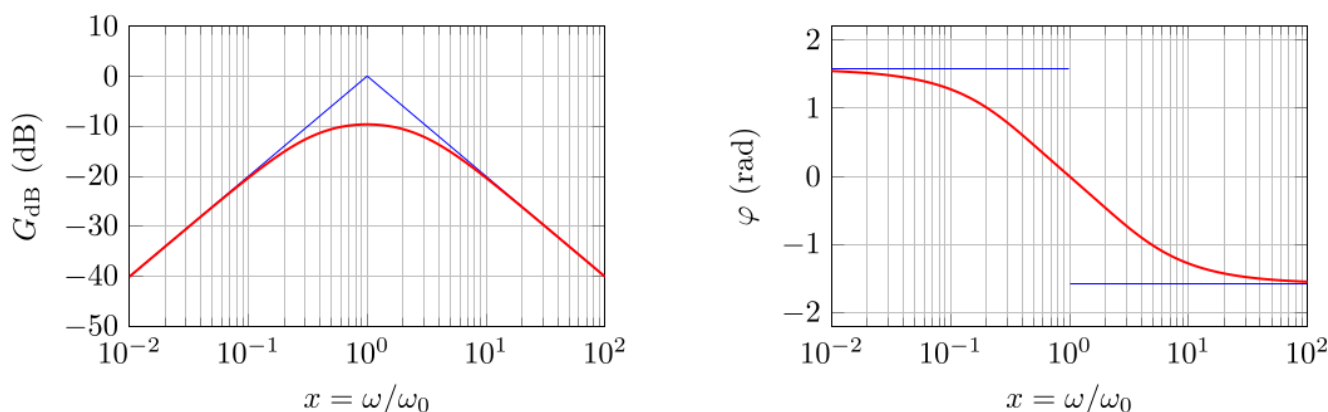
$$\underline{H} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{H_0}{-jQ/x} = j \frac{H_0}{Q} x \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 20 \log x \\ \varphi = \arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

De même, dans la limite très hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_0}{jQx} = -j \frac{H_0}{Q} \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log |\underline{H}| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -20 \log x \\ \varphi = \arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de BODE asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pentes  $\pm 20 \text{ dB/décade}$  passant par  $G_{\text{dB}} = 0$  pour  $x = 1$** , alors que le diagramme asymptotique en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteurs  $\pm \pi/2$** .

Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus les résultats de la question précédente qui indique que la courbe réelle passe par  $G_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB}$  en  $x = 1$ , alors que la courbe de phase réelle passe par 0 en  $x = 1$  ; d'où les diagrammes ci-dessous.



- 6) Calculer la pulsation propre  $\omega_0$  pour  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 500 \text{ nF}$ . Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(10\omega t) + E_0 \cos(100\omega t)$$

avec  $E_0 = 10 \text{ V}$  et  $\omega = 200 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### Réponse

Numériquement, on trouve  $\omega_0 = 2,0 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ . Comme le diagramme de BODE réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée :

- ◆ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ◆ Le terme de pulsation  $\omega = \omega_0/10$  se trouve une décade en-dessous de la pulsation propre : avec le diagramme asymptotique il est donc atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad si le diagramme réel tracé ;
- ◆ Le terme de pulsation  $10\omega = \omega_0$  est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- ◆ Le terme à la pulsation  $100\omega = 10\omega_0$  est une décade au-dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ  $-1,2 \text{ rad}$ . Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10} \cos(\omega t - 1,2) + \frac{E_0}{3} \cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10} \cos(100\omega t + 1,2)$$



## V Filtre ADSL

Un lutin malin semble avoir chourré votre filtre ADSL. Sale histoire. Heureusement, vous avez les connaissances pour en recréer un ! En sachant que les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

- ◆ les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ;
- ◆ les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

- 1) Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

---

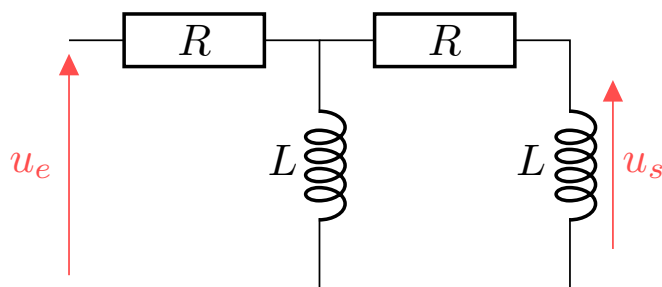
**Réponse**

---

On isole les signaux téléphoniques avec un **filtre passe-bas**, et les signaux informatiques avec un **filtre passe-haut**. La fréquence de coupure doit être à la fois nettement supérieure aux fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : on prendra donc  $f_0 = 10 \text{ kHz}$ .



Vous réalisez le filtre ci-dessous.



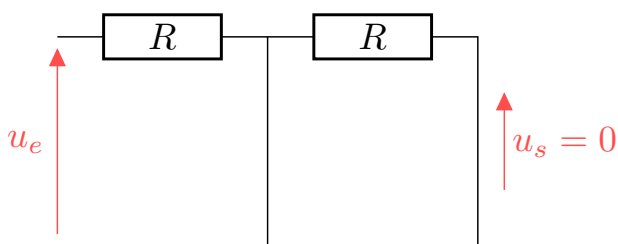
- 2) Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique en basses fréquences et en hautes fréquences. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.

---

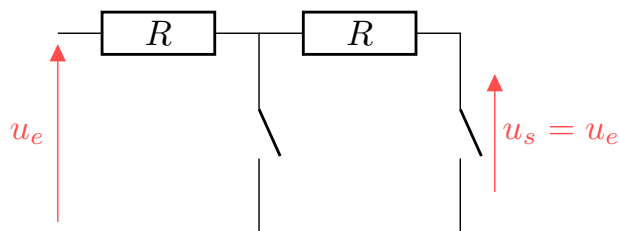
**Réponse**

---

En basses fréquences ( $\omega \leftrightarrow 0$ ), les bobines se comportent comme des fils, soit



En hautes fréquences ( $\omega \leftrightarrow \infty$ ), les bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts, soit



Ainsi, le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un **filtre passe-haut**. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.



- 3) Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

et exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $L$ .

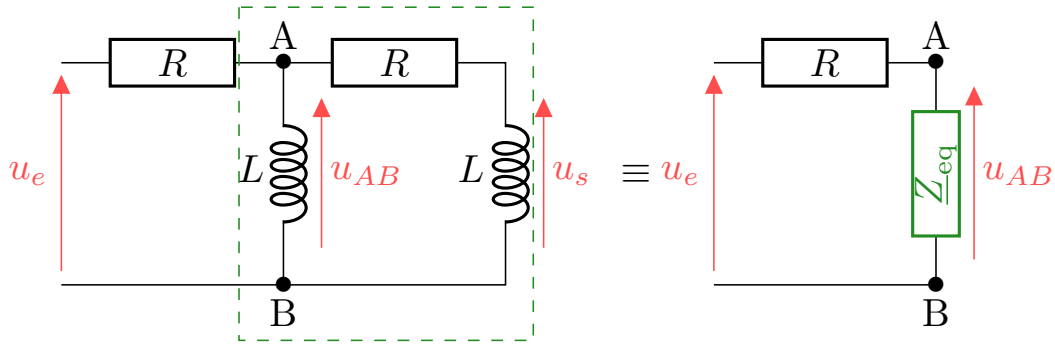
---

**Réponse**

---

Pour exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_e$ , on peut faire un premier pont diviseur de tension pour exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_{AB}$  du milieu ; puis avec une impédance équivalente à l'ensemble des 3 dipôles de droite, on refait un pont diviseur de tension pour avoir  $u_{AB}$  en fonction de  $u_e$ , et on combine.





On a donc d'abord :

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{jL\omega + R} \underline{U}_{AB}$$

On aura donc ensuite :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_R} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e$$

On calcule alors  $\underline{Y}_{eq}$  :

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$$

Et on combine :

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R \left( \frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1 \right)} \times \frac{jL\omega}{jL\omega} \underline{U}_e \\ &\Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 + 3jRL\omega - (L\omega)^2} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{\cancel{R^2}}{\cancel{R^2}} \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + 3j\frac{L}{R}\omega - \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2} \underline{U}_e \end{aligned}$$

Ainsi, en divisant par  $\underline{U}_e$  pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}$$



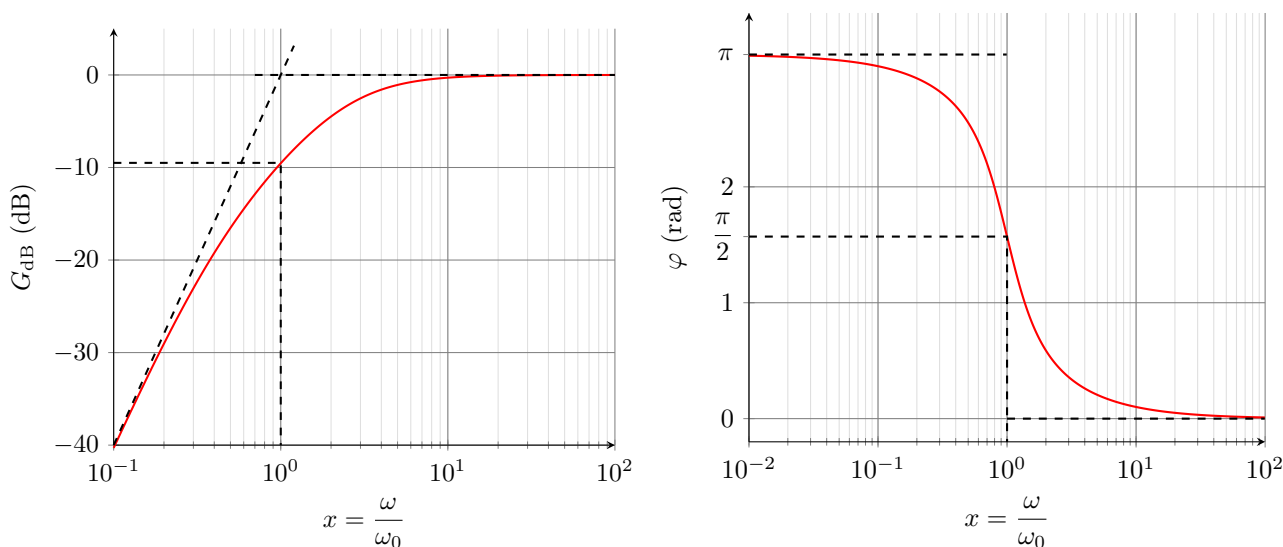
- 4) Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.

### Réponse

Pour  $x \gg 1$ , les termes en  $x^2$  l'emportent sur les autres termes au numérateur et au dénominateur, et la fonction de transfert devient  $\underline{H} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1$ , donc  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = 0$  (réel positif).

Pour  $x \ll 1$ , les termes en  $x$  sont négligeables devant 1 au dénominateur, et on garde le numérateur : la fonction de transfert devient donc  $\underline{H} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$ , donc  $G_{dB} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 40 \log(x)$  (pente de 40 dB/décade), et  $\varphi = -\pi$  (réel négatif).

Pour  $x = 1$ , on trouve  $\underline{H}(1) = j/3$  donc  $G_{dB}(1) = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}$ , et  $\varphi(1) = \pi/2$  (imaginaire pur).



Il n'y a pas de pic de résonance car le facteur de qualité  $Q$  est plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .



- 5) Vous possédez des résistances de  $100 \Omega$ . Quelle valeur d'inductance  $L$  choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

**Réponse**

La fréquence de coupure est  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$  ; on doit donc prendre

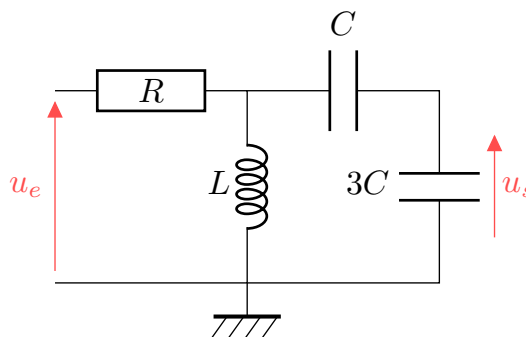
$$L = \frac{R}{2\pi f_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 100 \Omega \\ f_0 = 10 \text{ kHz} \end{cases}$$

A.N. :  $L = 1,6 \text{ mH}$



## VI Filtre de COLPITTS

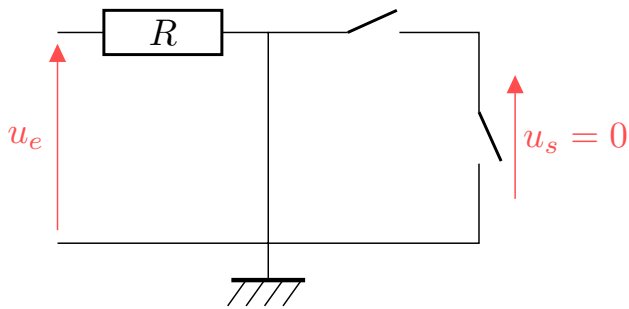
On considère le quadripôle suivant, où  $C$  est une capacité,  $R$  une résistance et  $L$  une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , en sortie « ouverte » (rien n'est branché aux bornes de sortie).



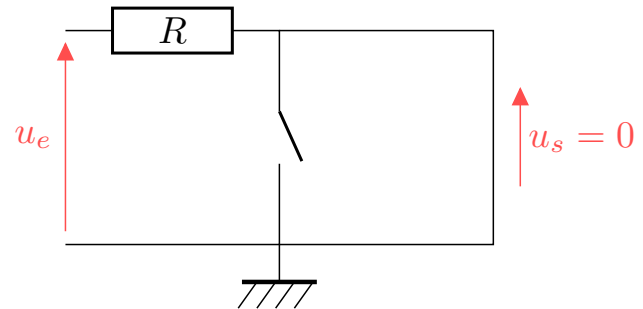
- 1) Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en hautes et basses fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

**Réponse**

En basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ), les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, la bobine comme un fil : la tension  $u_s$  est donc nulle.



En hautes fréquences ( $\omega \rightarrow \infty$ ), les condensateurs se comportent comme des fils, la bobine comme un interrupteur ouvert : la tension  $u_s$  est donc nulle.



Comme la tension est nulle aux extrêmes, c'est un **passe-bande**. Si elle était égale à la tension d'entrée aux extrêmes, ça serait un coupe-bande.



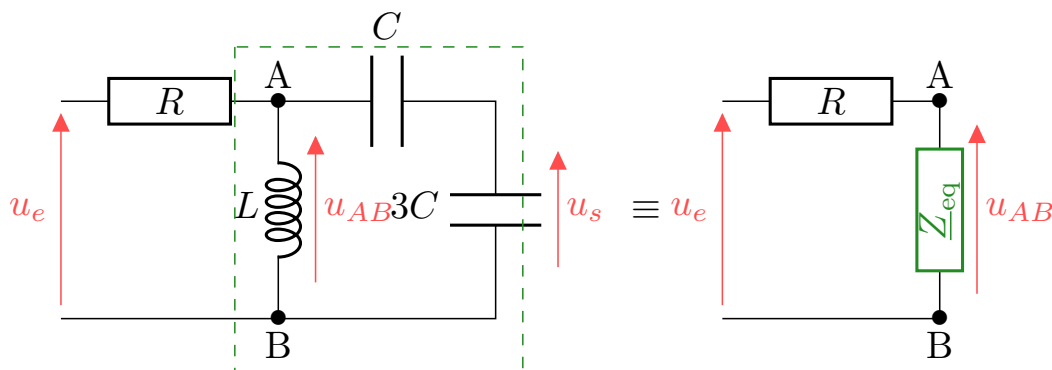
- 2) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$  et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

En introduisant des constantes  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  dont on précisera les expressions en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

### Réponse

On effectue deux diviseurs de tension successifs : un pour déterminer  $u_s$  en fonction de  $u_L$ , puis avec une impédance équivalente des trois dipôles de droite, on détermine  $u_L$  en fonction de  $u_e$  et on combine. C'est le même fonctionnement que pour l'exercice sur l'ADSL, question 3.



On a ainsi en premier lieu

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_{3C}}{\underline{Z}_{3C} + \underline{Z}_C} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1/j3C\omega}{1/j3C\omega + 1/jC\omega} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1}{1+3} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_s = \frac{\underline{U}_{AB}}{4}}$$

On aura donc ensuite :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_R} \underline{U}_e \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e}$$

On calcule alors  $\underline{Y}_{\text{eq}}$  de l'association en parallèle de  $L$  et  $C$  en série avec  $3C$ . **Attention** à l'association en série de capacités :

$$Z_{C+3C} = \frac{1}{j3C\omega} + \frac{1}{jC\omega} \times \frac{3}{3} = \frac{4}{j3C\omega}$$

$$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_{C+3C} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + j3C\omega/4}$$

Et on combine :

$$\underline{U}_s = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + R \left( \frac{1}{jL\omega} + \frac{j3C\omega}{4} \right)} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + j \left( -\frac{R}{L\omega} + \frac{3RC\omega}{4} \right)} \underline{U}_e$$

Ainsi, en divisant par  $\underline{U}_e$  pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\underline{H} = \frac{1/4}{1 + j \left( \frac{3RC\omega}{4} - \frac{R}{L\omega} \right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

Reste à trouver  $Q$  et  $\omega_0$ . Pour cela, on identifie membre à membre :

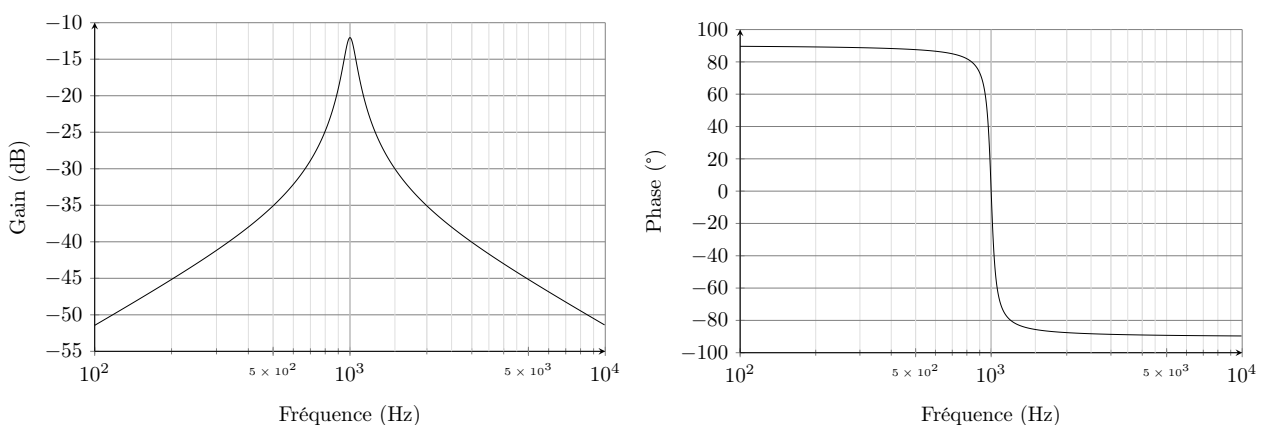
$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{3RC}{4} \quad (1) \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{R\sqrt{3C}}{2\sqrt{L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}}$$

où l'on obtient  $Q$  et  $\omega_0$  en multipliant les équations (1) et (2) d'une part puis en en prenant la racine carrée, et en divisant (2) par (1) en en prenant la racine carrée, respectivement.



Le diagramme de BODE de ce quadripôle pour  $Q = 6$  est donné ci-dessous.



- 3) Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme. Dédurre du diagramme la valeur de la fréquence d'accord  $f_0 = \omega_0/2\pi$  ainsi que des fréquences de coupure.

### Réponse

Les parties rectilignes du diagramme correspondent aux limites asymptotiques du gain en décibels, c'est-à-dire pour  $\omega \ll \omega_0$  et  $\omega \gg \omega_0$ . En effet,

$$\underline{H} \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \underline{H} \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -j \frac{A}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$$

$$\Leftrightarrow G_{\text{dB}} \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} 20 \log \frac{A}{Q} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}} \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} 20 \log \frac{A}{Q} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$$

$$\Leftrightarrow \varphi \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \frac{\pi}{2} \quad \text{et} \quad \varphi \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -\frac{\pi}{2}$$

Pour  $\omega = \omega_0$ , on trouve simplement  $\underline{H} = A$  donc  $G_{\text{dB}}(\omega_0) = -12 \text{ dB}$  et  $\varphi = 0$ . La fréquence de résonance (ou fréquence d'accord) correspond au pic du diagramme de BODE (ou à l'intersection des asymptotes du gain en décibels) d'une part, ou correspond à la fréquence pour laquelle la phase est nulle : on lit simplement  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .

On trouve les fréquences de coupure en trouvant les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $G_{\text{dB}} = G_{\text{max}} - 3 \text{ dB}$ , soit  $G_{\text{dB}} = -15 \text{ dB}$  : on lit approximativement  $f_1 = 950 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 1050 \text{ Hz}$ .

## VII Filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3

On veut réaliser un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3, dont le module  $H$  de sa fonction de transfert harmonique en tension  $\underline{H}$  s'exprime :

$$H = |\underline{H}| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^6}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

- 1) Montrer qu'une fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$  correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

### Réponse

Il suffit pour cette question de développer les puissances sur les  $j$ , de calculer le module et de développer :

$$\underline{H} = (1 + 2jx - 2x^2 - jx^3)^{-1} \Leftrightarrow |\underline{H}| = ((1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2)^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow |\underline{H}| = (1 - 4x^2 + 4x^4 + 4x^2 - 4x^4 + x^6)^{-1/2} = (1 + x^6)^{-1/2}$$

ce qui correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

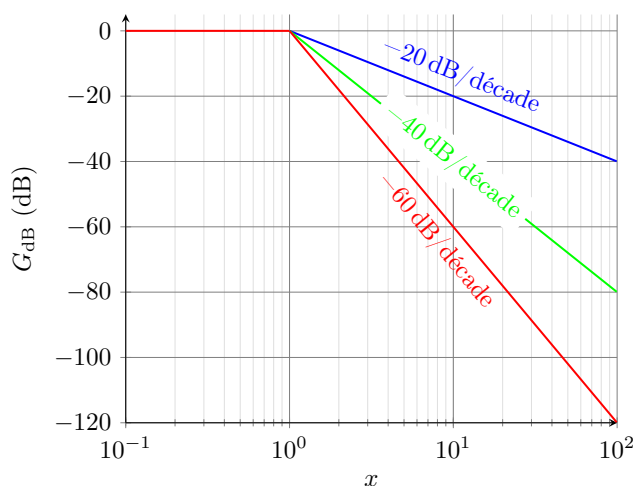
- 2) Étudier et représenter le diagramme de BODE asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.

### Réponse

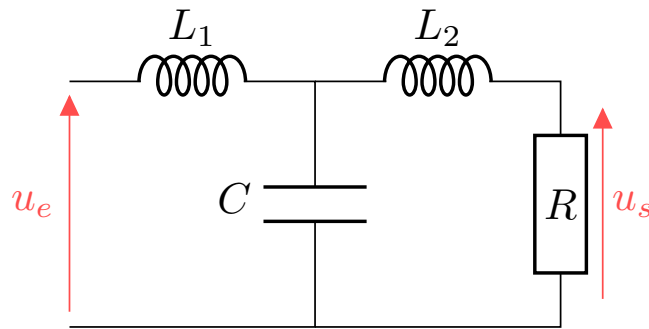
Pour étudier le diagramme de BODE asymptotique, on définit d'abord le gain en décibels :  $G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log((1 + x^6)^{-1/2}) = -10 \log(1 + x^6)$ . Ensuite, on étudie son comportement asymptotique pour  $x \ll 1$  et  $x \gg 1$  : on trouve

$$\boxed{G_{\text{dB}} \underset{x \ll 1}{\sim} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{G_{\text{dB}} \underset{x \gg 1}{\sim} -60 \log(x)}$$

d'où le diagramme de BODE asymptotique ci-contre. Par rapport à de l'ordre 1 ( $-20 \text{ dB/décade}$ ) ou de l'ordre 2 ( $-40 \text{ dB/décade}$ ), l'atténuation des hautes fréquences est encore plus prononcée : une fréquence 10 fois supérieure à  $f_0$  serait atténuée d'un facteur 1000 au lieu d'un facteur 10.



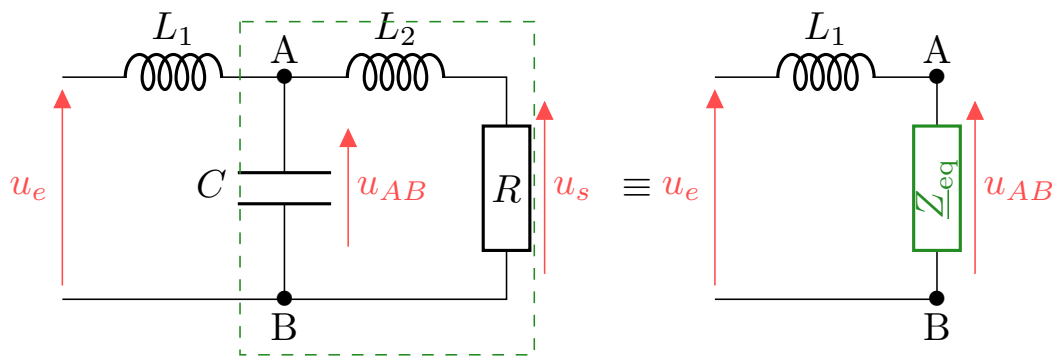
3) On considère le quadripôle ci-dessous :



Calculer en fonction de  $R$  et  $\omega_0$ , les valeurs de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $C$  pour que ce filtre soit un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

### Réponse

Ici encore, on utilise deux ponts diviseurs de tension successifs : on calcule  $u_s$  en fonction de  $u_{AB}$ , puis  $u_{AB}$  en fonction de  $u_e$  après avoir déterminé l'impédance équivalente de l'ensemble des dipôles de droite.



On aura donc en premier lieu

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L_2}} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{R}{R + jL_2\omega} \underline{U}_{AB}$$

Et ensuite, on aura

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_{L_1}} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_{L_1} \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e$$

On calcule alors  $\underline{Y}_{eq}$  de l'association en parallèle de  $C$  et  $L_2$  en série avec  $R$  :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{L_2+R} &= jL_2\omega + R \\ \underline{Y}_{eq} &= \underline{Y}_C + \underline{Y}_{L_2+R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = jC\omega + \frac{1}{jL_2\omega + R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = \frac{jC\omega(jL_2\omega + R) + 1}{jL_2\omega + R} \\ &\Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = \frac{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}{R + jL_2\omega} \end{aligned}$$

Et on combine :

$$\underline{U}_s = \frac{R}{R + jL_2\omega} \times \frac{1}{1 + jL_1\omega \left( \frac{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}{R + jL_2\omega} \right)} \underline{U}_e$$

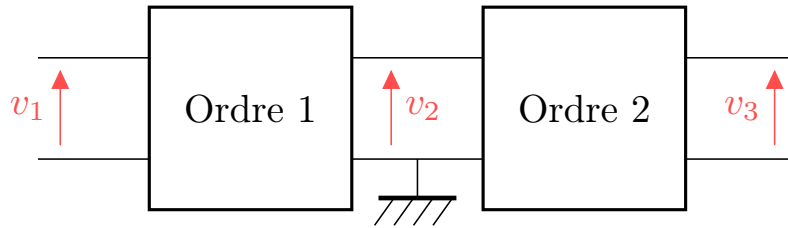
$$\begin{aligned}
\Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{R}{R + jL_2\omega} \times \frac{1}{1 + \frac{jL_1\omega - jL_1L_2C\omega^3 + (j\omega)^2RCL_1}{R + jL_2\omega}} \underline{U}_e \\
\Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{R}{R + jL_2\omega + jL_1\omega - jL_1L_2C\omega^3 + (j\omega)^2RCL_1} \underline{U}_e \\
\Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_1 + L_2}{R} + (j\omega)^2 L_1 C + (j\omega)^3 \frac{L_1 L_2 C}{R}} \underline{U}_e
\end{aligned}$$

en utilisant que  $-j = j^3$ . Ainsi, en divisant par  $\underline{U}_e$  pour avoir la fonction de transfert, on a bien

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{2}{\omega_0} = \frac{L_1 + L_2}{R} \\ \frac{2}{\omega_0^2} = L_1 C \\ \frac{1}{\omega_0^3} = \frac{L_1 L_2 C}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 = \frac{3R}{2\omega_0} \\ L_2 = \frac{R}{2\omega_0} \\ C = \frac{4}{3R\omega_0} \end{cases}$$



- 4) Justifier que l'on puisse réaliser le filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 en associant en cascade un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2, comme sur le circuit suivant :



Préciser la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.

### Réponse

Pour mettre des filtres en cascade et avoir  $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$ , il faut que l'impédance de sortie du filtre 1 soit faible devant l'impédance d'entrée du filtre 2. Dans ce cas, on utilise un filtre d'ordre 1 avec un numérateur constant (donc un passe-bas de la forme  $\underline{H}_1 = \frac{H_1}{1+jx}$ ), et un filtre d'ordre 2 avec un numérateur lui aussi constant : soit un passe-bas soit un passe-bande. Le passe-bande fait intervenir  $jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)$  au dénominateur, donc il est plus simple d'utiliser un passe-bas d'ordre 2 avec  $1 + j/Qx + (jx)^2$  au dénominateur :

$$\underline{H} = \frac{H_1}{1 + jx} \times \frac{H_2}{1 + \frac{j}{Q}x + (jx)^2} = \frac{H_1 H_2}{1 + jx \left(1 + \frac{1}{Q}\right) + (jx)^2 \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) + (jx)^3}$$

Pour trouver un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 de cette manière, il faut donc  $H_1 = H_2 = 1$  et  $\boxed{Q = 1}$ .

