

Correction du DS

E1 Étude de deux gaz parfaits dans un cylindre

Q1. Le compartiment (2) est séparé du milieu extérieur par une paroi diathermane et est en contact avec un thermostat à la température T_0 . Alors $T_2 = T_0$.

L'équation d'état des GP donne $P_1 V_1 = nRT_1$ et $P_2 V_2 = nRT_2 = nRT_0$

De plus, l'équilibre mécanique du piston implique $P_1 = P_2$ D'où la relation $\frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_0}{V_2}$.

Et puisque $V_t = V_1 + V_2$. On en déduit $V_1 = \frac{T_1}{T_0} V_2 = \frac{T_1}{T_0} (V_t - V_1)$; Soit $V_1 \left(1 + \frac{T_1}{T_0}\right) = \frac{T_1}{T_0} V_t$:

On a finalement : $V_1 = \frac{T_1}{T_0 + T_1} V_t$. Puis $V_2 = V_t - V_1 = V_t \left(1 - \frac{T_1}{T_0 + T_1}\right) = \frac{T_0}{T_0 + T_1} V_t$; Soit $V_2 = \frac{T_0}{T_0 + T_1} V_t$.

Réponses B et D.

Q2. D'après l'équilibre mécanique du piston, on s'est déjà servi de $P_1 = P_2$.

De plus, on a $P_1 = \frac{nRT_1}{V_1} = \frac{nRT_1}{T_1 V_t} \times (T_1 + T_0) = \frac{nR}{V_t} \times (T_1 + T_0)$:

Réponses A et B.

Q3. U est une fonction d'état extensive, donc $\Delta U = \Delta U_1 + \Delta U_2$.

Mais la **transformation (2) est monotherme, car la température initiale est aussi T_0** . Ainsi $\Delta T_2 = 0$.

La première loi de Joule pour un gaz parfait $U = U(T)$ nous indique alors que $\Delta U_2 = 0$.

De plus, pour n moles gaz parfait dont on connaît γ , on sait que $dU = nC_{vm}dT = n \frac{R}{\gamma-1} dT$

On en déduit après intégration que $\Delta U = \Delta U_1 = \frac{nR}{\gamma-1} (T_1 - T_0)$.

Réponse B.

Q4. La transformation étant supposée **réversible**, on a, à tout instant $P = P_{ext}$ et $T = T_0$ (une transformation monotherme réversible étant isotherme). Ainsi, la définition du travail des forces de pression pour le compartiment 2, nous permet d'écrire que :

$$W_2 = \int_{V_0}^{V_2} -p_{ext} dV = - \int_{V_0}^{V_2} p dV = - \int_{V_0}^{V_2} \frac{nRT_0}{V} dV = nRT_0 \ln \left(\frac{V_0}{V_2} \right) = nRT_0 \ln \left(\frac{V_0(T_0 + T_1)}{T_0 V_t} \right)$$

Soit $W_2 = nRT_0 \ln \left(\frac{T_0 + T_1}{2T_0} \right)$, car $V_t = 2V_0$.

D'autre part d'après le 1^{er} principe de la thermodynamique, $\Delta U_2 = W_2 + Q_2 = 0$; Ainsi $Q_2 = -W_2$.

Réponses A et D.

Q5. D'une part, la chaleur apportée par le résistor est $Q_1 = ri^2\tau$ par définition de la puissance électrique d'un résistor fournie sur une durée τ , mais on a également $W_{tot} = W_1 + W_2 = 0$, car le volume total du système est constant. D'où : $W_2 = -W_1$. Ainsi : $\Delta U = \Delta U_1 = Q_1 + W_1 = Q_1 - W_2$; Soit : $Q_1 = \Delta U + W_2$.

Réponses B et D.

Q6.

On sait d'après le 2nd principe de la thermodynamique que $\Delta S_2 = S_2^{(c)} + S_2^{(r)}$.

Or on sait d'après la question Q4, que la transformation est réversible, alors $S_2^{(c)} = 0$.

Alors $\Delta S_2 = S_2^{(r)} = nR \ln \left(\frac{V_2}{V_0} \right) = nR \ln \left(\frac{2T_0}{T_0 + T_1} \right)$ car $\frac{V_2}{V_0} = \frac{2T_0}{T_0 + T_1}$, puisque $V_t = 2V_0$. **Réponses A et D.**

E2 Cycle de Carnot

1. Les deux principes de la thermodynamique s'écrivent :

$$\begin{cases} \Delta U = W^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}} \\ \Delta S = S^{\text{éch}} + S^{\text{créée}} \geq S^{\text{éch}} \end{cases}$$

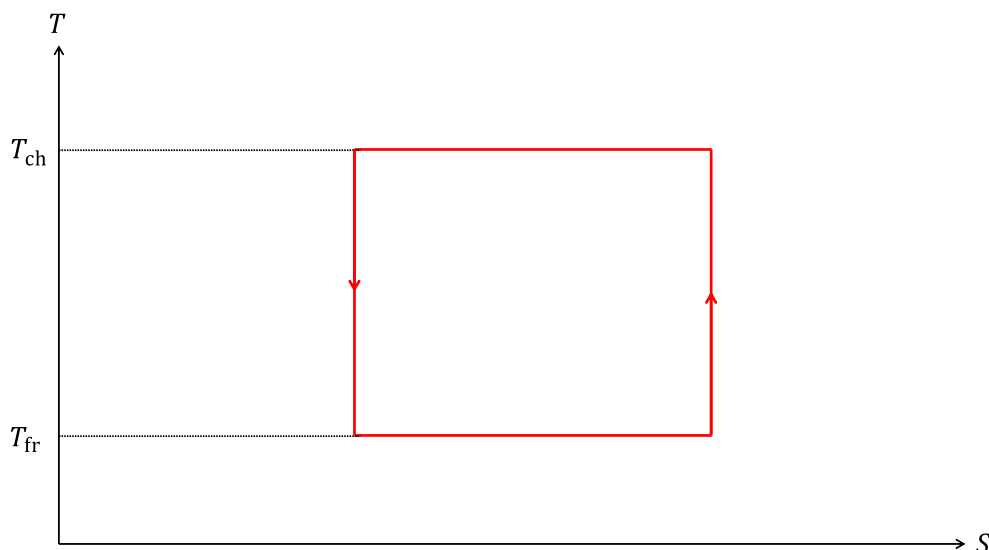
où

$$S^{\text{éch}} = \int \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{T^{\text{ext}}}$$

Sur un cycle :

$$\begin{cases} W^{\text{ext}} + Q^{\text{ext}} = 0 \\ \int \frac{\delta Q^{\text{ext}}}{T^{\text{ext}}} \leq 0 \end{cases}$$

2. Un cycle de Carnot est constitué de deux transformations isentropiques (adiabatiques réversibles) et de deux transformations isothermes intercalées entre les isentropiques. Voici un cycle de Carnot moteur :



3. Pour un cycle de Carnot :

$$\begin{cases} Q_{\text{ch}} + Q_{\text{fr}} = -W^{\text{ext}} \\ \frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{fr}}}{T_{\text{fr}}} = 0 \end{cases}$$

En fonctionnement moteur, le rendement s'écrit :

$$\eta = \frac{-W^{\text{ext}}}{Q_{\text{ch}}} = 1 + \frac{Q_{\text{fr}}}{Q_{\text{ch}}} = 1 - \frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}}}$$

4. Plus l'écart de température entre les deux sources est élevé, plus le rendement de Carnot est élevé. Or, le rendement de Carnot est le rendement maximal d'un cycle moteur ditherme. Cela explique le classement de l'ADEME par écart de température.
- Ecart de 30°C : $\eta = 1 - \frac{300}{330} \approx 9\%$ donc récupération maximale de 1,8 TWh.
 - Ecart de 75°C : $\eta = 1 - \frac{300}{375} \approx 20\%$ donc récupération maximale de 4 TWh.

5. Détaillons les 4 étapes :

- $1 \rightarrow 2$: compression isentropique depuis l'état $(T_{\text{fr}}, P_1 = 1 \text{ bar})$ jusque dans l'état $(T_{\text{ch}}, P_2 > P_1)$
 - $2 \rightarrow 3$: détente isotherme réversible depuis l'état $(T_{\text{ch}}, P_2 = 1,4 \text{ bar})$ jusque dans l'état $(T_{\text{ch}}, P_3 = P_2 - 0,4 \text{ bar})$
 - $3 \rightarrow 4$: détente isentropique depuis l'état $(T_{\text{ch}}, P_3 = P_2 - 0,4 \text{ bar})$ jusque dans l'état $(T_{\text{fr}}, P_4 < P_3)$
 - $4 \rightarrow 1$: compression isotherme réversible depuis l'état (T_{fr}, P_4) jusque dans l'état $(T_{\text{fr}}, P_1 > P_4)$
6. Pour les deux transformations isentropiques, la loi de Laplace s'écrit : $PV^\gamma = \text{cste}$. En différentiant logarithmiquement, on en déduit $dP/P + \gamma dV/V = 0$ soit :

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{\gamma P}{V}$$

Pour les deux transformations isothermes, la loi des gaz parfaits $PV = nRT = \text{cste}$ donne, en différentiant logarithmiquement :

$$\frac{dP}{dV} = -\frac{P}{V}$$

7. La relation de Mayer permet d'écrire $nR = m(c_p - c_v)$. Par conséquent :

$$dS = mc_p \frac{dT}{T} - m(c_p - c_v) \frac{dP}{P}$$

Or, $m = nM = \frac{MP_1V_1}{RT_1}$. On obtient donc :

$$dS = \frac{MP_1V_1}{RT_1} \left(c_p \frac{dT}{T} - (c_p - c_v) \frac{dP}{P} \right)$$

8. Examinons les 4 étapes successives :

- Compression isentropique $1 \rightarrow 2$: $dS = 0$. On en déduit (on ne fait que retrouver la loi de Laplace !) :

$$\frac{dP}{P} = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \frac{dT}{T}$$

En intégrant, il vient :

$$\ln\left(\frac{P_2}{P_1}\right) = \frac{\gamma}{\gamma - 1} \ln\left(\frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}}\right)$$

soit :

$$P_2 = P_1 \left(\frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = P_1 \left(\frac{330}{300}\right)^{\frac{1,4}{0,4}} = (1,1)^{3,5} P_1 = 1,4 \text{ bar}$$

- Détente isotherme $2 \rightarrow 3$: la pression finale est donnée par l'énoncé et vaut

$$P_3 = P_2 - 0,4 \text{ bar} = 1 \text{ bar}$$

- Détente isentropique $3 \rightarrow 4$: on procède comme pour l'étape $1 \rightarrow 2$ et on obtient

$$P_4 = P_3 \left(\frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}}}\right)^{\frac{\gamma}{\gamma-1}} = (1,1)^{-3,5} P_3 = 0,7 \text{ bar}$$

9. Pour la détente isotherme réversible $2 \rightarrow 3$, on peut écrire :

$$\delta Q_{\text{ch}} = T_{\text{ch}} dS = -\frac{MP_1V_1}{RT_1} T_{\text{ch}}(c_P - c_V) \frac{dP}{P} = -\frac{P_1V_1T_{\text{ch}}}{T_1} \frac{dP}{P}$$

On en déduit :

$$Q_{\text{ch}} = \frac{P_1V_1T_{\text{ch}}}{T_1} \ln\left(\frac{P_2}{P_3}\right) = \frac{P_1V_1T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} \ln\left(\frac{P_2}{P_3}\right)$$

De même, pour la compression isotherme réversible $4 \rightarrow 1$, on obtient :

$$Q_{\text{fr}} = \frac{P_1V_1T_{\text{fr}}}{T_1} \ln\left(\frac{P_4}{P_1}\right) = P_1V_1 \ln\left(\frac{P_4}{P_1}\right)$$

Numériquement, on trouve :

$$\begin{cases} Q_{\text{ch}} = \frac{10^5 \times 10^{-7} \times 330}{300} \ln(1,4) = 1,1 \times 0,3 \times 10^{-2} = 3,3 \text{ mJ} \\ Q_{\text{fr}} = 10^5 \times 10^{-7} \times \ln(0,7) = -3,0 \text{ mJ} \end{cases}$$

10. Le travail vaut donc :

$$W^{\text{ext}} = -Q_{\text{ch}} - Q_{\text{fr}} = -0,3 \text{ mJ}$$

L'expression littérale s'écrit :

$$W^{\text{ext}} = -P_1V_1 \left(\frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} \ln\left(\frac{P_2}{P_3}\right) + \ln\left(\frac{P_4}{P_1}\right) \right)$$

Or, $\ln\left(\frac{P_2}{P_3}\right) = -\ln\left(\frac{P_4}{P_1}\right)$. Par conséquent, travail se récrit :

$$W^{\text{ext}} = -P_1V_1 \ln\left(\frac{P_2}{P_3}\right) \left(\frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} - 1 \right) = -Q_{\text{ch}} \frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}}} \left(\frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} - 1 \right) = -Q_{\text{ch}} \left(1 - \frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}}} \right) = -\eta_{\text{Carnot}} Q_{\text{ch}}$$

C'est cohérent, le cycle étant un cycle de Carnot !

11. Les changements d'état mettent en œuvre des quantités de chaleur beaucoup plus élevées. Comme le rendement s'écrit $\eta = \frac{-W^{\text{ext}}}{Q_{\text{ch}}} = 1 + \frac{Q_{\text{fr}}}{Q_{\text{ch}}}$, on a intérêt à augmenter Q_{ch} ce qu'un changement d'état permet de faire.

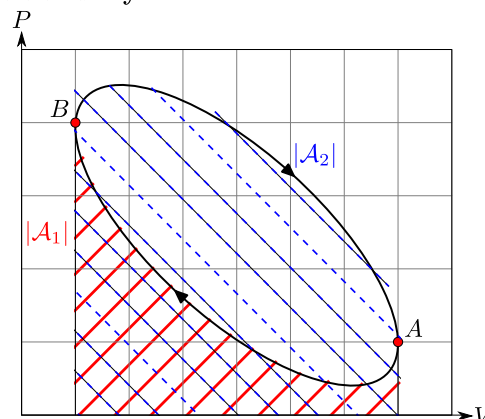
P3 Moteur de Stirling

Q1. ▷ En diagramme de Watt (P, V) le cycle tourne en **sens horaire**, c'est donc bien un **cycle moteur**.

En effet, d'après la figure ci-contre on a grâce à l'interprétation du travail en terme d'aire ($W = - \int_1^2 P dV = \pm |\mathcal{A}| : +$ (resp. $-$) si c'est une compression $dV < 0$ (resp. dilatation $dV > 0$)).

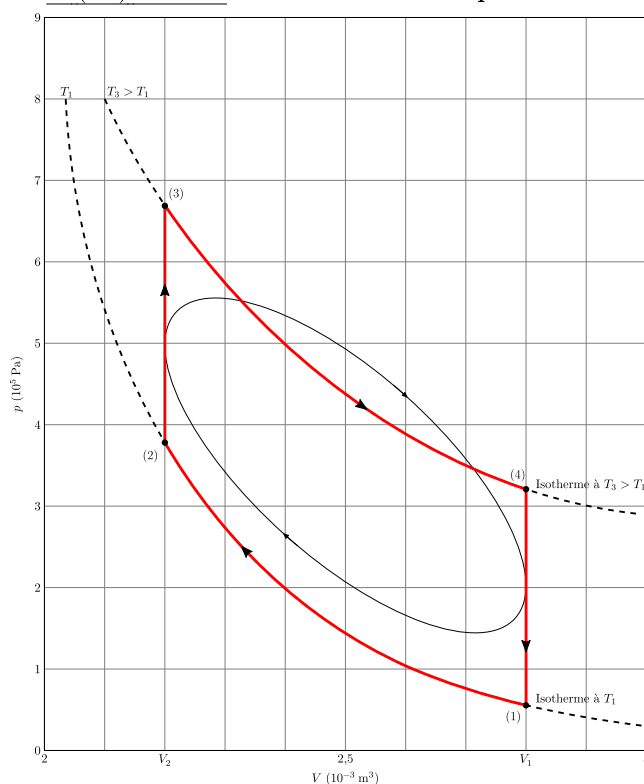
$$W_{A \rightarrow A} = \underbrace{W_{A \rightarrow B}}_{+|\mathcal{A}_1|} + \underbrace{W_{B \rightarrow A}}_{-|\mathcal{A}_2|} = +|\mathcal{A}_1| - |\mathcal{A}_2| < 0$$

Cette différence d'aire est évidemment négative pour un cycle en sens horaire car $|\mathcal{A}_2| > |\mathcal{A}_1|$.
 $|\mathcal{A}_2| - |\mathcal{A}_1|$ = l'aire du cycle représente le travail fourni par le moteur en un cycle.



▷ On estime l'aire du cycle à **13 (± 2) carreaux** donc le **travail fourni par le moteur** est de $13 \times 0,1 \cdot 10^{-3} \times 10^5 = 130 \text{ J}$

Q 2.



Q 3. ▷ Puisque l'on a un gaz parfait (noté GP dans la suite) en transformation isotherme, on a :

$$W_{12} = - \int_1^2 P dV = -nRT_1 \int_1^2 \frac{dV}{V} = nRT_1 \ln \frac{V_1}{V_2} = nRT_1 \ln r \text{ soit } \boxed{W_{12} = nRT_1 \ln r > 0}$$

▷ Pour Q_{12} on applique le 1^{er} principe sur le fluide de la machine entre 1 et 2 :

$$Q_{12} = \Delta U_{12} - W_{12} = 0 - W_{12} = -nRT_1 \ln r \quad (\Delta U_{12} = 0 \text{ car } U(T) \text{ pour un GP et que } 1 \rightarrow 2 \text{ est une isotherme}).$$

$$\text{D'où } \boxed{Q_{12} = -W_{12} = -nRT_1 \ln r < 0}$$

▷ Les signes étaient attendus car $1 \rightarrow 2$ est une compression (donc $W_{12} > 0$) au cours de laquelle le fluide cède un transfert thermique à la source froide (donc $Q_{12} < 0$).

Q 4. Pour une transformation isochore, comme le travail est nul on a directement via le 1^{er} principe :

$Q_{23} = \Delta U_{23} = C_V (T_3 - T_1)$ soit $Q_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_3 - T_1) > 0$. Le signe était attendu car le fluide reçoit un transfert thermique pour s'échauffer de T_1 à T_3 au contact de la source chaude.

Q 5. Dans cette question les justifications sont identiques à celle de la **Q 3**.

$$\triangleright W_{34} = - \int_3^4 P dV = -nRT_3 \int_3^4 \frac{dV}{V} = -nRT_3 \ln \frac{V_1}{V_2} = -nRT_3 \ln r \text{ d'où } W_{34} = -nRT_3 \ln r < 0$$

$$\triangleright \text{Puis } Q_{34} = \Delta U_{34} - W_{34} = -W_{34} = nRT_3 \ln r \text{ soit } Q_{34} = -W_{34} = nRT_3 \ln r > 0$$

\triangleright Les signes étaient attendus car $3 \rightarrow 4$ est une détente (donc $W_{34} < 0$) au cours de laquelle le fluide reçoit un transfert thermique de la part de la source chaude (donc $Q_{34} > 0$).

Q 6. Similairement à la **Q 3**, $Q_{41} = \Delta U_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_4)$ avec $T_4 = T_3$ car $3 \rightarrow 4$ est isotherme.

Ainsi, $Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1} (T_1 - T_3) < 0$. On a donc $Q_{41} = -Q_{23} < 0$ car le fluide cède un transfert thermique pour se refroidir de T_3 à T_1 au contact de la source froide.

Q 7. $\eta = \frac{\text{Grandeur utile}}{\text{Grandeur payante}} = \frac{-(W_{34} + W_{12})}{Q_{23} + Q_{34}}$

\triangleright La grandeur utile est $-(W_{34} + W_{12})$ car elle représente l'aire du cycle c'est-à-dire l'énergie récupérable sous forme de travail sur un cycle.

\triangleright La grandeur payante est $Q_{23} + Q_{34}$ car ce sont les deux échanges énergétiques coûteux puisqu'ils se font au contact de la source chaude.

$$\triangleright \text{Les questions } \mathbf{Q 3} \text{ à } \mathbf{Q 6} \text{ donnent : } \eta = \frac{nRT_3 \ln r - nRT_1 \ln r}{\frac{nR}{\gamma - 1} (T_3 - T_1) + nRT_3 \ln r} = \frac{1 - T_1/T_3}{1 + \frac{T_3 - T_1}{T_3 \times (\gamma - 1) \ln r}}$$

Q 8. \triangleright Le **rendement de Carnot** est le **rendement maximal** d'un **moteur ditherme** avec une source chaude à $T_c = T_3$ et une source froide à $T_f = T_1$. Le rendement de Carnot est atteint pour le cycle théorique constitué de deux transformations adiabatiques-réversibles et de deux isothermes réversibles.

$$\triangleright \text{On montre en appliquant le 1^{er} et 2nd principe à ce cycle réversible que } \eta_{\text{Carnot}} = 1 - \frac{T_1}{T_3}$$

Q 9. \triangleright Dans le cas où le régénérateur est idéal, Q_{23} n'est plus « coûteux » et donc le rendement est modifié par :

$$\eta' = \frac{-(W_{34} + W_{12})}{Q_{34}} = \frac{nRT_3 \ln r - nRT_1 \ln r}{nRT_3 \ln r} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \eta_{\text{Carnot}}$$

\triangleright On a donc $\eta' = \eta_{\text{Carnot}}$ alors que le cycle considéré ici n'est pas un cycle de Carnot ! Mais il ne faut pas oublier que le **moteur Stirling** considéré ici est **idéalisé** (2 transformations réversibles et régénérateur idéal) et donc **non réaliste**.

Q10. $P_{\text{therm}} = \frac{P_{\text{élec}}}{0,4 \times (1 - T_1/T_3)} \simeq 710 \text{ W}$

P4 Étude thermodynamique d'une chambre froide

1. Cette machine est une machine réfrigérante : le principe est donc d'abaisser la température de la source froide (ici la chambre froide). Pour cela, le fluide doit prélever un transfert énergétique à la chambre froide, c'est ce qu'il fait en se vaporisant. Par conséquent, la chambre froide est au contact de l'évaporateur.

2. La machine est une machine réceptrice, le fluide frigorigène reçoit du travail de la part de l'extérieur : $W > 0$. Ce travail permet de prélever un transfert thermique à la source froide : $Q_f > 0$. Le fluide restitue par ailleurs un transfert thermique à la source chaude $Q_c < 0$.

3. L'efficacité se définit comme le rapport de la grandeur valorisable (ici Q_f) par la grandeur coûteuse (ici W) :

$$e = \frac{Q_f}{W}$$

4. Premier principe appliqué au fluide sur le cycle : $\Delta U_{cycle} = W + Q_c + Q_f = 0$

Second principe appliqué au fluide sur le cycle (considéré réversible dans le cas de l'efficacité de Carnot) :

$$\Delta S_{cycle} = S_e + S_c = \sum_i \frac{Q_i}{T_i} = \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} \text{ et } \Delta S_{cycle} = 0 \Rightarrow \frac{Q_f}{T_f} + \frac{Q_c}{T_c} = 0$$

On en déduit pour l'efficacité de Carnot :

$$e_c = -\frac{Q_f}{Q_c + Q_f} = -\frac{1}{\frac{Q_c}{Q_f} + 1} = -\frac{1}{1 - \frac{T_c}{T_f}} = \frac{T_f}{T_c - T_f}$$

Remarque : l'efficacité réelle est toujours inférieure à celle de Carnot qui correspond à l'efficacité maximale que l'on peut atteindre, $e \leq e_c$. C'est la conséquence du 2nd principe $S_c \geq 0$.

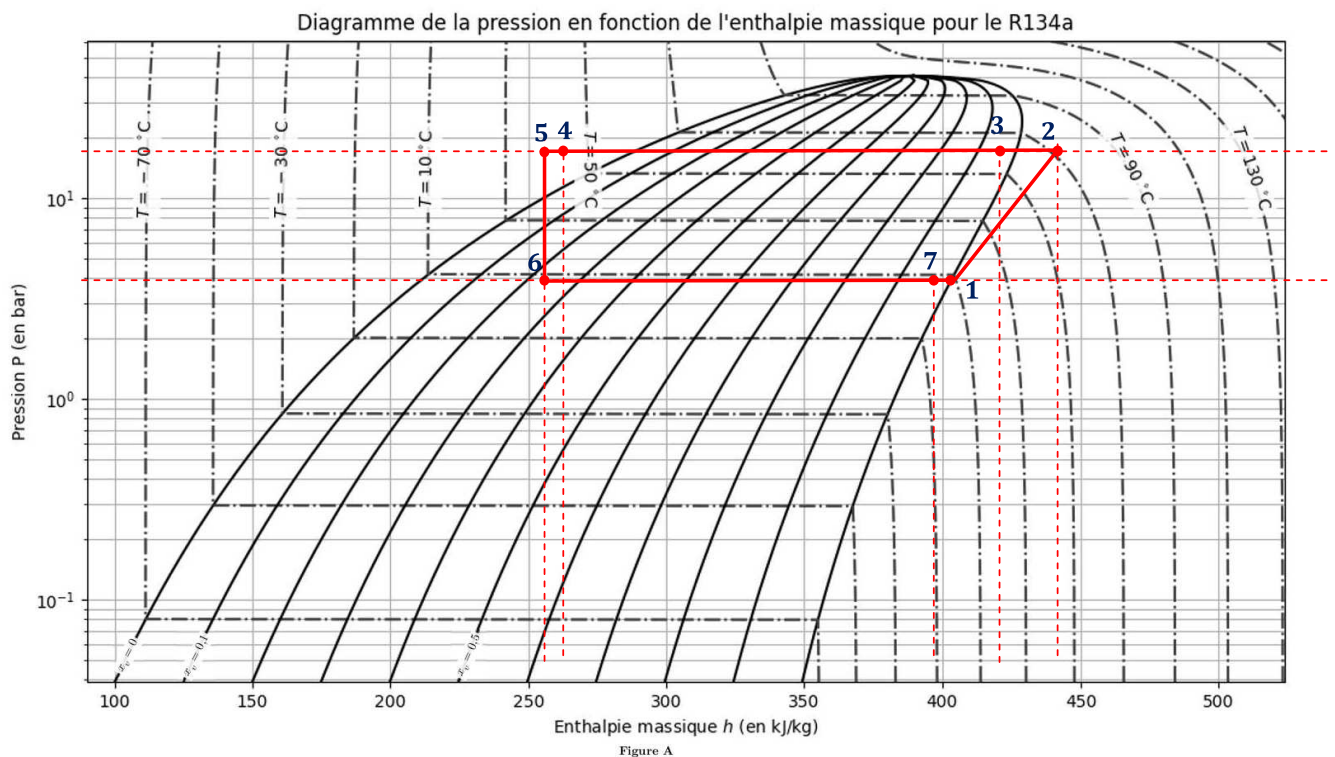
5. Application numérique :

$$e_c = \frac{273 + 3}{45 - 3} = 6,6$$

Interpréter le résultat : c'est donc l'efficacité maximale que l'on peut atteindre. C'est une efficacité et pas un rendement, donc il n'est pas surprenant qu'elle soit supérieure à 1.

6.

ANNEXE



7. Au point 3, le fluide est sous forme de vapeur saturée (que de la vapeur avec la dernière goutte de liquide) au point 4, il n'y a que du liquide avec la dernière bulle de vapeur (liquide saturé).

8. Au point 6, on lit graphiquement $x_{v6} \approx 0,3$. Il y a environ 30 % de vapeur. On pourrait vérifier la valeur à l'aide du théorème des moments.

9. Premier principe pour un fluide en écoulement stationnaire (dit principe industriel) :

$$\Delta(h + e_c + e_p) = w_i + q$$

Dans le cas où $\Delta h \gg \Delta e_c$ et Δe_p , on a : $\Delta h = w_i + q$ où w_i est le travail massique indiqué et q le transfert thermique massique reçus par le fluide. Toutes les grandeurs sont exprimées en J/kg.

10. Au contact de la source froide, dans l'évaporateur (sans partie mobile $w_i = 0$, ou isobare), entre les points 6 et 1 :

$$q_f = \Delta h_{6 \rightarrow 1} = h_1 - h_6 = 146 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

11. Au contact de la source chaude, dans le condenseur (sans partie mobile $w_i = 0$, ou isobare), entre les points 2 et 5 :

$$q_c = h_5 - h_2 = -186 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

12. Dans le compresseur, supposé calorifugé, puisque la transformation est adiabatique ($q = 0$), entre les points 1 et 2 :

$$w_i = h_2 - h_1 = 442 - 402 = 40 \text{ kJ} \cdot \text{kg}^{-1}$$

13. On en déduit l'efficacité réelle :

$$e = \frac{q_f}{w_i} = \frac{146}{40} = 3,65$$

Cette valeur est inférieure à celle de Carnot, le cycle de cette machine n'est donc pas totalement réversible.

14. Puissance thermique :

$$P_{th,f} = D_m q_f = 0,16 \times 146 = 23,4 \text{ kW}$$