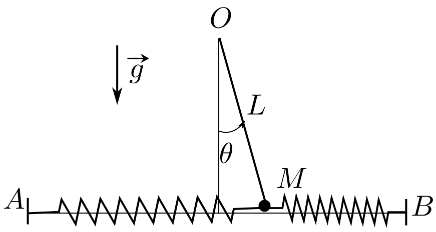
Sujet 1 – corrigé

I Question de cours

Définir la force de LORENTZ ; comparer les ordres de grandeurs des forces électriques et magnétiques au poids ; déterminer la puissance de la force de LORENTZ et discuter des conséquences. Démontrer qu'elle est conservative et déterminer l'expression de l'énergie potentielle associée.

II Oscillateur linéarisé

Soit une tige rigide de longueur L, de masse négligeable, accrochée en O. Une masse m est accrochée à l'autre extrémité, et reliée à deux ressorts identiques de constante de raideur k et de longueur à vide. On repère la position du point M par l'angle θ entre la verticale et la tige. A l'équilibre $\theta = 0$ et les deux ressorts sont horizontaux. La distance AB entre les deux points d'attache des deux ressorts est notée D.
On écarte le point M de sa position d'équilibre d'un angle θ_0 faible et on le lâche sans vitesse initiale.



1. Justifier que le système est conservatif à une dimension. Quelle coordonnée permet de décrire le mouvement ?

   Réponse :
   Le système est le point matériel M de masse m, soumis aux deux forces de rappel des ressorts, au poids et à la réaction de la tige. Seule la dernière force est non conservative, mais elle ne travaille pas.

   Donc le système est conservatif, donc $dE_m/dt = 0$.

   La trajectoire est circulaire, donc le mouvement est décrit par la seule coordonnée $\theta(t)$.

2. Montrer que le mouvement est harmonique. Exprimer la pulsation des petites oscillations.

   On donne le développement limité de la fonction cosinus à l'ordre 2 autour de 0 :

   $$\cos(\theta) = 1 - \frac{\theta^2}{2} + o(\theta^2)$$

   Réponse :

   - énergie potentielle élastique du ressort de gauche :

   $$E_{p,1} = \frac{1}{2}k(l_1(t) - l_0)^2 + cste \quad \text{avec} \quad l_1(t) \approx D/2 + L\theta$$

   - énergie potentielle élastique du ressort de gauche :

   $$E_{p,2} = \frac{1}{2}k(l_2(t) - l_0)^2 + cste \quad \text{avec} \quad l_2(t) \approx D/2 - L\theta$$

   On somme ces deux énergies potentielles, donc

   $$E_{p,el} = E_{p,1} + E_{p,2} = \frac{1}{2}k(D/2 + L\theta - l_0)^2 + \frac{1}{2}k(D/2 - L\theta - l_0)^2 + cste$$

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k[2(D/2 - l_0)^2 + 2(L\theta)^2] + cste = kL^2\theta^2 + cste2$$

Le terme $2(D/2 - l_0)^2$ peut être inclus dans la constante

- énergie potentielle de pesanteur : $E_{p,pes} = mgL(1 - cos(\theta)) + cste$
  On fait un DL à l'ordre 2 (premier terme non nul) : $E_{p,pes} \approx mgL\theta^2/2 + cste$
- énergie cinétique (mouvement circulaire de centre O et de rayon L :

$$E_c = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta})^2$$

On en déduit l'énergie mécanique :

$$E_m = \frac{1}{2}mL^2(\dot{\theta})^2 + mgL\theta^2/2 + kL^2\theta^2 + cste$$

On dérive par rapport au temps :

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = mL^2\dot{\theta}\ddot{\theta} + mgL\dot{\theta}\theta + 2kL^2\dot{\theta}\theta) = 0$$

On obtient l'équation différentielle suivante :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \left(\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}\right)\theta = 0}$$

On reconnait l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique de pulsation :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{L} + \frac{2k}{m}}$$

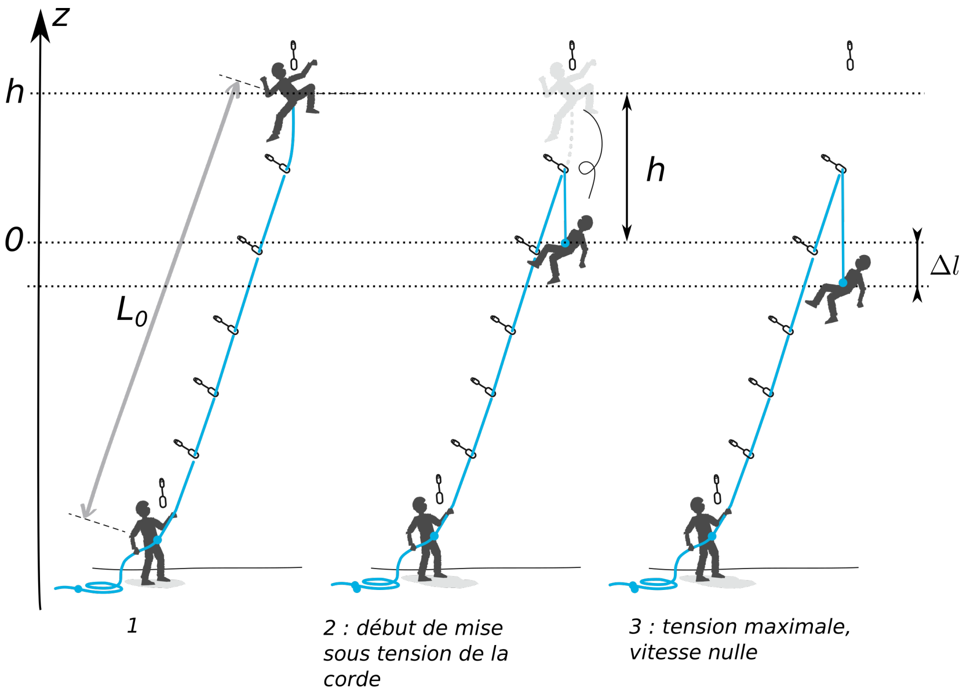
Sujet 2 – corrigé

I Question de cours

Savoir discuter le mouvement d'une particule en comparant son profil d'énergie potentielle et son énergie mécanique ; état lié ou de diffusion. Expliquer l'obtention des positions d'équilibre et leur stabilité sur un graphique $\mathcal{E}_p(x)$. Traduire l'équilibre et sa stabilité en terme de conditions sur la dérivée première et seconde de l'énergie potentielle.

II Chute sur corde en escalade

On étudie une grimpeuse qui chute. Une corde d'escalade de longueur L_0 peut, en première approximation, être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \alpha/L_0$, avec α une caractéristique de la corde.



La grimpeuse est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. La corde passe ensuite sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur Δl. La vitesse de la grimpeuse devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta l$.
On prendra $g = 10\,\mathrm{m\,s^{-2}}$, $\alpha = 5{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N}$ et une grimpeuse de masse $m = 50\,\mathrm{kg}$.

1. À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par la grimpeuse. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5\,\mathrm{m}$.

   Réponse :
   Pendant la chute libre, la grimpeuse ne subit que l'action du poids, qui est conservatif. On peut donc utiliser le TEM, avec :

   - **Au début de la chute libre :** $z = h$, $v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = mgh$ et $\mathcal{E}_c = 0$
   - **À la fin de la chute libre :** $z = 0$, $v = v \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = 0$ et $\mathcal{E}_c = mv^2/2$.

D'où

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} g & = & 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ h & = & 5\,\mathrm{m} \end{array}\right.$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{v = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

2. Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal Δl de la corde. On supposera $\Delta l \ll h$ afin de simplifier le calcul.

Réponse :
On peut utiliser le TEM entre le point tout en haut et le point le plus bas, ou entre le point O et le point le plus bas. Faisons le premier cas :

- ◇ **Au début de la chute libre :** $z = h$, $v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = mgh$ et $\mathcal{E}_c = 0$
- ◇ **À la fin de la chute amortie :** $z = -\Delta l$, $v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = -mg\Delta l$, $\boxed{\mathcal{E}_{p,el} = k\Delta l^2/2}$ et $\mathcal{E}_c = 0$.

Ainsi,

$$mgh = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l) \Leftrightarrow mg(h + \underbrace{\cancel{\Delta l}}_{\ll h}) = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Leftrightarrow \boxed{\Delta l = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}}$$ ■

La solution trouvée est plausible : homogène, augmente avec m, h et g mais diminue avec k.

3. Donner enfin l'expression de la norme de la force maximal $F_{\max}$ qu'exerce la corde sur la grimpeuse. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.

Réponse :
En norme, une force de rappel s'exprime $F = k(\ell - \ell_0)$, soit ici

$$F_{\max} = k\Delta l = \sqrt{2mgh\,k} = \sqrt{2mgh\frac{\alpha}{L_0}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{F_{\max} = \sqrt{2mg\alpha f}}$$ ■

4. Au-delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4\,\mathrm{m}$ sur une corde de longueur $L_0 = 4\,\mathrm{m}$? Conclure.

Réponse :
On fait l'application numérique :

$$\text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} m & = & 50\,\mathrm{kg} \\ g & = & 10\,\mathrm{m\,s^{-2}} \\ \alpha & = & 5{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N} \\ f & = & 1 \end{array}\right.$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{F_{\max} = 10\,\mathrm{kN}}$$

Il n'y a donc pas de risque aggravé pour la grimpeuse avec cette chute.

5. Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

Réponse :
Dans le premier cas, $f_1 = 2$; dans le second, $f_2 = 0{,}5$. Or, $F_{\max}$ évolue en $\sqrt{f}$, donc plus f augmente plus la force subie augmente : le premier cas est donc 2 fois plus dangereux que le premier !

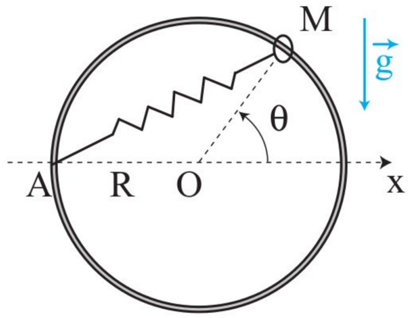
Sujet 3 – corrigé

I Question de cours

Action de $\vec{B}$ uniforme sur une particule chargée avec $\vec{v_0} \perp \vec{B}$: présenter la situation, et prouver que le mouvement est uniforme, plan et circulaire. On déterminera l'équation de la trajectoire en introduisant le rayon et la pulsation cyclotron, ainsi que les équations scalaires.

II Positions d'équilibre d'un anneau sur un cercle

Un anneau assimilable à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur une glissière circulaire de rayon R et de centre O. L'anneau est attaché à un ressort de raideur k dont une extrémité est fixée à la glissière au point A. Sa position est repérée par l'angle θ entre le rayon OM et l'axe horizontal (Ox). Pour simplifier les calculs, on considérera que la longueur à vide ℓ_0 du ressort est nulle.



1. Montrer que la longueur ℓ s'exprime $\ell = R\sqrt{2(1+\cos\theta)}$.

Réponse :

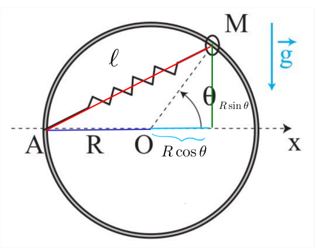


Figure 3.1 – Détermination de ℓ

On peut réutiliser la relation de Chasles pour écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ et déterminer la distance en prenant la norme, mais ici une simple utilisation du théorème de Pythagore suffit. On projette M sur l'axe x pour avoir

$$\begin{aligned}
&\ell^2 = (R + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 \\
\Leftrightarrow\ &\ell^2 = R^2 + 2R^2\cos\theta + R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\
\Leftrightarrow\ &\ell^2 = 2R^2(1+\cos\theta) \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\ell = R\sqrt{2(1+\cos\theta)}}
\end{aligned}$$

■

2. Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système constitué de l'anneau et du ressort en fonction de l'angle θ.

Réponse :
L'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$ est constituée de l'énergie potentielle de pesanteur de l'anneau et de l'énergie potentielle élastique du ressort. Pour $\mathcal{E}_{p,p}$ avec origine en O, on a une altitude $R\sin\theta$; pour $\mathcal{E}_{p,el}$ on a la différence de longueur à a vide $\ell - \ell_0$ avec $\ell_0 = 0$, d'où

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,p} + \mathcal{E}_{p,el} \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{E}_p = mgR\sin\theta + \frac{k}{2}\ell^2 \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\mathcal{E}_p = mgR\sin\theta + kR^2(1+\cos\theta)}
\end{aligned}$$

■

3. Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau.

Réponse :

On trouve les positions d'équilibre de l'anneau en trouvant les angles θ_{eq} tels que la dérivée de $\mathcal{E}_p$ s'annule, soit

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta_{\text{eq}}} &= -kR^2\sin\theta_{\text{eq}} + mgR\cos\theta_{\text{eq}} = 0 \\
\Leftrightarrow \sin\theta_{\text{eq}} &= \frac{mg\cancel{R}}{kR^{\cancel{2}}}\cos\theta_{\text{eq}} \\
\Leftrightarrow \tan\theta_{\text{eq}} &= \frac{mg}{kR} \\
\Leftrightarrow \boxed{\theta_{\text{eq},1} = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)} \quad &\text{et} \quad \boxed{\theta_{\text{eq},2} = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)}
\end{aligned}$$ ■

avec $\theta_{\text{eq},1}$ compris entre 0 et 90°, et $\theta_{\text{eq},2}$ compris entre 180 et 270°.

4. Préciser si les positions d'équilibre obtenues sont stables.

Réponse :
On étudie la stabilité des positions en évaluant la dérivée seconde de $\mathcal{E}_p$ en ce point et en vérifiant son signe. On obtient

$$\begin{aligned}
\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\text{eq}}} &= -kR^2\cos\theta_{\text{eq}} - mgR\sin\theta_{\text{eq}} \\
\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\text{eq}}} &= -\left(kR^2 + \frac{m^2g^2}{k}\right)\cos\theta_{\text{eq}}
\end{aligned}$$

en utilisant les résultats précédents sur la dérivée première de $\mathcal{E}_p$. L'intérieur de la parenthèse étant positif, le signe de cette dérivée seconde est opposé à celui du cosinus de la position d'équilibre. Or, $\cos\theta_{\text{eq},1} > 0$ et $\cos\theta_{\text{eq},2} < 0$, donc

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\text{eq},1}} < 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\text{eq},2}} > 0}$$ ■

La première position est donc instable, et la seconde stable.

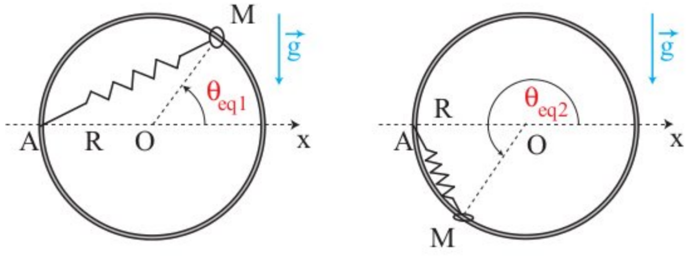


Figure 3.2 – Positions d'équilibre du système