Représentation complexe d'un signal sinusoïdal

1 Rappels sur les nombres complexes

Notations du physicien : en physique, il est d'usage

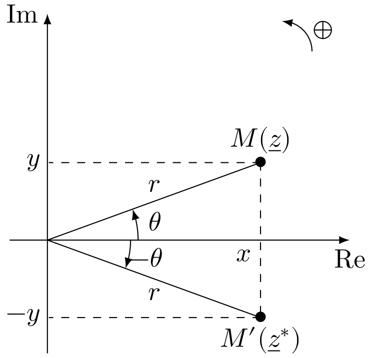
- d'écrire $\boxed{j^2 = -1}$ car la lettre i est déjà utilisée pour désigner l'intensité du courant électrique
- de souligner toute grandeur $\underline{Z}$ à valeurs complexes.
- de noter $\underline{Z}^*$ le conjugué de $\underline{Z}$

1.1 Formes d'un nombre complexe

Soit $\underline{z}$ un nombre complexe, on peut l'écrire sous deux formes *équivalentes* :

1. **forme rectangulaire :** $\boxed{\underline{z} = x + jy}$
   - $x = \mathrm{Re}(\underline{z})$ la partie réelle de $\underline{z}$
   - $y = \mathrm{Im}(\underline{z})$ la partie imaginaire de $\underline{z}$
2. **forme trigonométrique :** $\boxed{\underline{z} = re^{j\theta} = r(\cos\theta + j\sin\theta)}$
   - $r = |\underline{z}|$ le module de $\underline{z}$
   - $\theta = \mathrm{Arg}(\underline{z})$ l'argument de $\underline{z}$.

Plan complexe



Conjugué :

$$\boxed{\underline{z}^* = x - jy = re^{-j\theta}}$$

Relations à connaître :

$$\boxed{|\underline{z}| = \sqrt{\mathrm{Re}(\underline{z})^2 + \mathrm{Im}(\underline{z})^2}} \quad \boxed{\cos(\mathrm{Arg}(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Re}(\underline{z})}{|\underline{z}|}} \quad \boxed{\sin(\mathrm{Arg}(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{|\underline{z}|}} \quad \boxed{\tan(\mathrm{Arg}(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{\mathrm{Re}(\underline{z})}}$$

1.2 Opérations sur les nombres complexes

Somme ou différence : $\underline{Z} = X + jY = \underline{z}_1 \pm \underline{z}_2 = (x_1 + jy_1) \pm (x_2 + jy_2) = (x_1 + x_2) \pm j(y_1 + y_2)$ donc

$$\boxed{\mathrm{Re}(\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2) = \mathrm{Re}(\underline{z}_1) \pm \mathrm{Re}(\underline{z}_1)} \quad \boxed{\mathrm{Im}(\underline{z}_1 \pm \underline{z}_2) = \mathrm{Im}(\underline{z}_1) \pm \mathrm{Im}(\underline{z}_1)}$$

Produit : $\underline{Z} = Re^{j\theta} = \underline{z}_1 \times \underline{z}_2 = r_1 e^{j\theta_1} \times r_2 e^{j\theta_2} = r_1 r_2 e^{j(\theta_1 + \theta_2)}$ donc

$$\boxed{|\underline{z}_1 \underline{z}_2| = |\underline{z}_1|\,|\underline{z}_2|} \quad \boxed{\mathrm{Arg}(\underline{z}_1 \underline{z}_2) = \mathrm{Arg}(\underline{z}_1) + \mathrm{Arg}(\underline{z}_2)}$$

Rapport : $\underline{Z} = Re^{j\theta} = \dfrac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2} = \dfrac{r_1 e^{j\theta_1}}{r_2 e^{j\theta_2}} = \dfrac{r_1}{r_2} e^{j(\theta_1 - \theta_2)}$ donc

$$\boxed{\left|\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right| = \frac{|\underline{z}_1|}{|\underline{z}_2|}} \quad \boxed{\mathrm{Arg}\left(\frac{\underline{z}_1}{\underline{z}_2}\right) = \mathrm{Arg}(\underline{z}_1) - \mathrm{Arg}(\underline{z}_2)}$$

Exercice d'application : déterminer le module et l'argument (ou sa tangente) des nombres complexes suivants, où x est un réel strictement positif :

$$\underline{z}_1 = 1 \qquad \underline{z}_2 = -x^2 \qquad \underline{z}_3 = jx \qquad \underline{z}_4 = 1 + j \qquad \underline{z}_5 = \frac{1}{1+jx}$$

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

2 Signal complexe associé à un signal réel *sinusoïdal*

2.1 Définition

Au signal *sinusoïdal réel* $x(t)$, on associe le signal *complexe* $\underline{x}(t)$ tel que :

$$\boxed{x(t) = X\cos(\omega t + \varphi) \qquad \longleftrightarrow \qquad \underline{x}(t) = Xe^{j(\omega t+\varphi)} = Xe^{j\varphi}e^{j\omega t} = \underline{X}e^{j\omega t}}$$

avec $\underline{X}$ l'amplitude *complexe* du signal complexe.

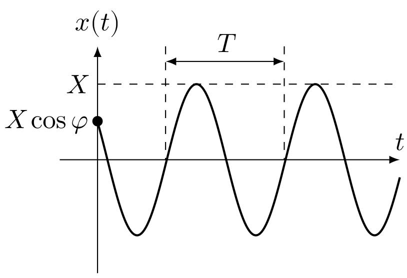
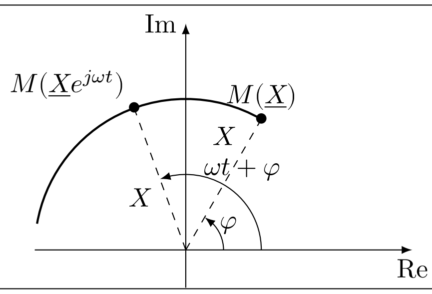
Signal Réel → signal complexe : on transforme le cosinus en exponentielle complexe

$$\boxed{\cos(\ ) \quad \rightarrow \quad e^{j(\ )}}$$

Signal complexe → signal réel : on prend la partie réelle du signal complexe

$$\boxed{x(t) = \mathrm{Re}[\underline{x}(t)]}$$

2.2 Caractéristiques des signaux

	Signal réel $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$	Signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$
Caractéristiques	• pulsation $\omega = \dfrac{2\pi}{T}$ • Amplitude réelle X • phase à l'origine φ	• **pulsation identique** ω • amplitude complexe $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$
Représentation		

l'amplitude complexe $\underline{X}$ est liée à l'amplitude réelle X et à la phase initiale φ du signal réel

$$\underline{X} = Xe^{j\varphi}$$

3 Utilisation du signal complexe associé

3.1 Dérivation de signaux

Soit un signal réel $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ et son signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$.

- la dérivée du signal réel s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = -\omega X\sin(\omega t + \varphi) = \omega X\cos(\omega t + \varphi + \pi/2)$$

- la dérivée du signal complexe s'exprime :

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t} = j\omega\underline{X}e^{j\omega t} = \omega X e^{j\frac{\pi}{2}}e^{j\varphi}e^{j\omega t} = \omega X e^{j(\omega t+\varphi+\pi/2)}$$

en prenant sa partie réelle, on retrouve la dérivée du signal réel :

$$\mathrm{Re}\left[\frac{\mathrm{d}\underline{x}(t)}{\mathrm{d}t}\right] = \mathrm{Re}\left[\omega X e^{j(\omega t+\varphi+\pi/2)}\right] = \omega X\cos(\omega t + \varphi + \pi/2) = -\omega X\sin(\omega t + \varphi)$$

Dériver un signal complexe $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$ revient à le multiplier par $j\omega$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = j\omega \times \underline{x}(t)$$

3.2 Intégration de signaux

Soit un signal réel $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$ et son signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$.

- une primitive du signal réel s'exprime :

$$\int x(t)\mathrm{d}t = \frac{X}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + \mathrm{cte} = \frac{X}{\omega}\cos(\omega t + \varphi - \pi/2) + \mathrm{cte}$$

- une primitive du signal complexe s'exprime :

$$\int \underline{x}(t)\mathrm{d}t = \underline{X}\int e^{j\omega t}\mathrm{d}t = \frac{1}{j\omega}\underline{X}e^{j\omega t} + \underline{\mathrm{cte}} = \frac{e^{-j\pi/2}}{\omega}Xe^{j\varphi}e^{j\omega t} + \underline{\mathrm{cte}} = \frac{X}{\omega}e^{j(\omega t+\varphi-\pi/2)} + \underline{\mathrm{cte}}$$

en prenant sa partie réelle, on retrouve une primitive du signal réel :

$$\mathrm{Re}\left[\int \underline{x}(t)\mathrm{d}t\right] = \mathrm{Re}\left[\frac{X}{\omega}e^{j(\omega t+\varphi-\pi/2)}\right] + \mathrm{Re}[\underline{\mathrm{cte}}] = \frac{X}{\omega}\cos(\omega t + \varphi - \pi/2) + \mathrm{cte} = \frac{X}{\omega}\sin(\omega t + \varphi) + \mathrm{cte}$$

Intégrer un signal complexe $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$ revient à le diviser par $j\omega$

$$\int \underline{x}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{j\omega} \times \underline{x}(t)\right]$$

3.3 Bilan

	Signal réel $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$	Signal complexe associé $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$
Dérivation	$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ (pas d'expression simple)	$\frac{\mathrm{d}\underline{x}}{\mathrm{d}t} = j\omega \times \underline{x}(t)$
Intégration	$\int x\mathrm{d}t$ (pas d'expression simple)	$\int \underline{x}\mathrm{d}t = \left[\frac{1}{j\omega} \times \underline{x}(t)\right]$

Exercice d'application : on considère le signal $s(t) = S_0 \cos(\omega t + \pi/2)$

1. Donner l'expression de son signal complexe associé $\underline{s}(t)$ ainsi que son amplitude complexe $\underline{S}$.

....
....
....
....
....
....

2. Déterminer l'expression de $\ddot{s}(t)$ en utilisant $\underline{s}(t)$.

....
....
....
....
....
....