12,3 -V-A-H-U

SUP MPSI3 Corrigé DS06 03 mars 2023

/32 EXERCICE 1 : Structure de la matière : *(≈ 32 pts)*

/10 I – Etude de l'élément sodium : *(D'après Centrale Supelec TSI 2022)* *(≈ 10 pts)*

/8 **Q1.** ${}^{23}_{11}Na$ comprend **11 protons** et donc **11 électrons**, ainsi que $23 - 11 =$ **12 neutrons**.

- Na appartient à la **3e période** du tableau périodique, il aura donc un configuration de valence en 3..
Et il se trouve dans la **1ère colonne ou 1er groupe** du tableau, donc c'est un 1er **élément du bloc s.**
Sa configuration externe (ou de valence) est donc Na : $\boxed{\mathbf{3s^1}}$.
D'où son schéma de Lewis : 

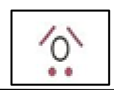
- Le sodium fait donc partie de la famille **des alcalins**.
Ces métaux sont **extrêmement réducteurs**, **très réactifs avec l'eau** et forment en réagissant avec celle-ci des solutions basiques.

/2 **Q2.** Le sodium va avoir tendance à **perdre l'électron célibataire de la 3ème couche** pour atteindre la **configuration électronique du gaz rare qui le précède** (le néon) en formant **Na^+**.

/22 II - Etude structurale de l'oxygène et l'ozone : *(D'après Centrale Supelec PSI 2022)* *(≈ 22 pts)*

/3 **Q3.** L'oxygène est situé dans la 2ème période et est le 4ème élément du bloc p (ou dans la 16e colonne).
Sa configuration électronique externe dans son état fondamental s'écrit donc :

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{2s^2 2p^4}}_{\text{électrons de valence}}}$$

L'atome d'oxygène possède donc **6 électrons de valence**. Son schéma de Lewis est : 

/5 **Q4.** Les isotopes d'un élément chimique donné possèdent **le même nombre de protons** (et d'électrons, bien sûr) mais **diffèrent par leur nombre de neutrons**.

Le noyau des isotopes de l'oxygène contient :

$$\begin{cases} {}^{16}O : 8 \text{ protons et } \mathbf{8\ neutrons} \\ {}^{17}O : 8 \text{ protons et } \mathbf{9\ neutrons} \\ {}^{18}O : 8 \text{ protons et } \mathbf{10\ neutrons} \end{cases}$$

Ce sont les électrons de valence, seuls, qui déterminent les propriétés chimiques d'un atome.
Ces **trois isotopes ont 6 électrons de valence** : ils ont donc les **mêmes propriétés chimiques.**

/4 **Q5.** On note $\overline{M}$ la masse molaire moyenne de l'oxygène et M_{16}, M_{17} et M_{18} les masses molaires respectives des isotopes ${}^{16}O$, ${}^{17}O$ et ${}^{18}O$. On peut écrire, en introduisant les fractions massiques x_{16}, x_{17} et x_{18} :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\overline{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18}} \\ \boldsymbol{x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1} \end{cases}$$

Soit : $\begin{cases} \overline{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} \overline{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + (1 - x_{16} - x_{17})M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$

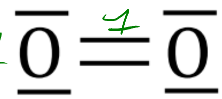
D'où : $\begin{cases} x_{16}M_{16} - x_{16}M_{18} = \overline{M} - x_{17}M_{17} - M_{18} + x_{17}M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$

On en déduit :

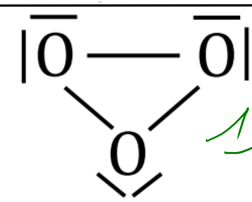
$$\begin{cases} x_{16} = \dfrac{M_{18} + x_{17}(M_{17} - M_{18}) - \overline{M}}{M_{18} - M_{16}} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$$

Comme on connaît $x_{17} = 0{,}037$ %, d'où : $\begin{cases} x_{16} = \dfrac{17{,}99916 + 0{,}00037(+16{,}99914 - 17{,}99916) - 15{,}9994}{17{,}99916 - 15{,}99491} \\ x_{18} = 1 - 0{,}99758 - 0{,}00037 \end{cases}$

On obtient : $\boldsymbol{x_{16} = 0,99758 = 99,758}$ **%** et $\boldsymbol{x_{18} = 0,00205 = 0,205}$ **%** .

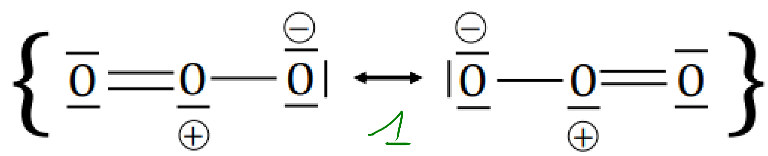
/2 **Q6.** Schéma de Lewis du dioxygène : 

/3 **Q7.** Si la molécule d'ozone était cyclique, elle présenterait un centre de symétrie et ne serait donc **pas polaire**. De plus, aucun excès et aucun défaut de charge n'apparaît, ce qui confirmerait son caractère apolaire.

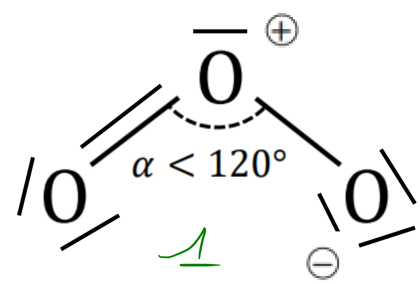


$\Rightarrow \omega \; \|\vec{\mu}_{O-O}\| = 0$ D

/5 **Q8.** Les deux formes mésomères de la molécule d'ozone sont les suivantes :



La molécule est donc du **type AX_2E_1** (deux liaisons assimilées à des liaisons simples et un doublet non-liant sur l'atome central). La méthode VSEPR donne donc une **molécule coudée**, avec un **angle d'environ 120°.**



/60 **EXERCICE 2 : Généralités sur une molécule de monoxyde de carbone :**

(≈ 60 *pts)*

/20 I – Etude structurale :

(D'après Banque PT 2013)

/6 **Q1** – Le carbone est situé dans la 2ème période et est le 2ème élément du bloc p (ou dans la 14e colonne).
Sa configuration électronique externe dans son état fondamental s'écrit donc :

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{2s^2 2p^2}}_{\text{électrons de valence}}}$$

L'atome d'oxygène possède donc **4 électrons de valence**. Son schéma de Lewis est $\boxed{\cdot\overline{\mathrm{C}}\cdot}$

- Pour obtenir un carbone tétravalent, il faut imaginer un $\boxed{\textbf{réarrangement en } \mathbf{2s^1\, 2p^3}}$.

/2 **Q2** - On trouve le carbone 12 ; 13 et 14 : $\boxed{{}^{12}_{6}C \text{ ; } {}^{13}_{6}C \text{ et } {}^{14}_{6}C}$.

/2 **Q3** – Représentation possible de Lewis pour la molécule de monoxyde de carbone : $\overset{\ominus}{|\mathrm{C}}\equiv\overset{\oplus}{\mathrm{O}|}$

/1 **Q4 - L'électronégativité augmente de la gauche vers la droite** sur une ligne. Donc $\boxed{\chi(C) < \chi(O)}$.
La charge partielle devrait donc **être négative sur l'oxygène et positive** sur le carbone, ce qui **n'est pas en accord** avec les électronégativités des éléments.

/3 **Q5 -** Le moment dipolaire, orienté du pôle négatif vers le pôle positif, est représenté de la façon ci-contre en tenant compte de la structure de Lewis de Q3.

$$\overset{\ominus}{|\mathrm{C}}\equiv\overset{\oplus}{\mathrm{O}|}$$
$$\xrightarrow{\quad\vec{\mu}\quad}$$

L'expression littérale du module du moment dipolaire $\vec{\mu}$ est donnée par : $\boxed{\|\vec{\mu}\| = e\, d}$;
Son unité est le **Debye (D).**

/3 **Q6** – Les molécules de monoxyde de carbone et d'eau H_2O sont **polaires**.
Les **trois types d'interactions de van der Walls (Keesom, Debye et London**) sont donc présentes.
Cependant, les interactions intermoléculaires les plus importantes sont des **liaisons hydrogènes** entre les hydrogènes de H_2O et le doublet non liant des oxygènes de CO.

/10 II - Etude mécanique :

/2 **Q7** - βx doit être sans dimension ; Donc β est homogène à l'inverse d'une longueur ; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\beta} \textbf{ en m}^{-1}}$.

/7 **Q8** – On nous donne : $E_P(x) = E_0\left[1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right]^2$;

- Les positions d'équilibre sont telles que : $\dfrac{dE_P}{dx} = 0$.

$\dfrac{dE_P}{dx} = 2E_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)\left(+\beta\, e^{-\beta(x-x_0)}\right)$, car de la forme : $(u^2)' = 2\,u\,u'$
avec $u = 1 - e^{-\beta(x-x_0)}$ et $u' = \beta\, e^{-\beta(x-x_0)}$

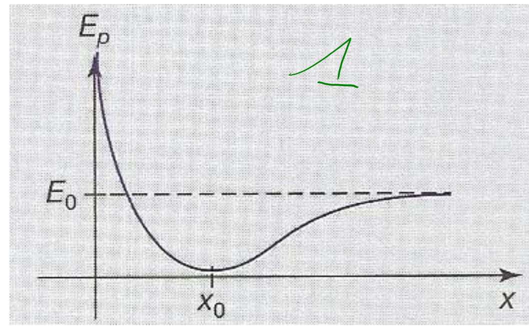
Ainsi : $\dfrac{dE_P}{dx} = 0$ pour $x - x_0 = 0$; la seconde parenthèse ne s'annulant jamais.
Ainsi $\boxed{\boldsymbol{x = x_0} \textbf{ est position d'équilibre}}$.

- Pour étudier les stabilités, on étudie le signe de $\left(\dfrac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0}$.

Or $\dfrac{d^2E_P}{dx^2} = 2E_0\,\beta\, e^{-\beta(x-x_0)}\beta\, e^{-\beta(x-x_0)} + 2E_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)\left(-\beta^2 e^{-\beta(x-x_0)}\right)$, car de la forme : $(uv)'$
Ou encore : $\dfrac{d^2E_P}{dx^2} = 2E_0\beta^2 e^{-2\beta(x-x_0)} - 2E_0\beta^2\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)e^{-\beta(x-x_0)}$;
Ainsi en évaluant cette expression en $x = x_0$:

$\boxed{\left(\dfrac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} = 2E_0\beta^2 > 0}$. Donc $\boldsymbol{x = x_0}$ **est position d'équilibre stable.**

14 **Q9** - $E_P(x) = E_0\left[1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right]^2$:



- $\boxed{\lim_{x\to 0} \boldsymbol{E_P(x) \sim E_0\, e^{2\beta x_0}} \;\to +\infty}$, car $\beta x_0 \gg 1$.

Donc **asymptote verticale d'équation $x = 0$**.

- $\boxed{\lim_{x\to\infty} \boldsymbol{E_P(x) = E_0}}$.

Donc asymptote horizontale d'équation $y = E_0$.

- Coordonnées de l'extrémum (minimum) :

On a vu que : $\frac{dE_P}{dx} = 0$ pour $\underline{\boldsymbol{x = x_0}}$ **alors** $\underline{\boldsymbol{E_P(x_0) = 0}}$;

- D'où l'allure de la courbe ci-contre.

---

17 **Q10** – $E_m = E_C + E_P$ avec $E_C \geq 0$; Donc : $\underline{\boldsymbol{E_m \geq E_P}}$ **<u>à chaque instant.</u>**

- **Si $E_m \geq E_0$** : Domaine de variation de x non borné : L'atome d'oxygène arrive de l'infini se rapproche et repart. On parle **<u>d'état de diffusion</u>** : Mais ce cas correspondrait à une rupture de la liaison C-O.
- **Si $0 < E_m < E_0$** : Domaine de variation de x borné : L'atome d'oxygène oscille entre deux positions extrêmes. On parle **<u>d'état lié</u>**.
- $\boldsymbol{E_0}$ représente donc l'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour que les atomes puissent s'éloigner à l'infini, c'est donc **<u>l'énergie de dissociation de la molécule.</u>** (de liaison)

/15 **Q11** – Pour étudier le mouvement autour de la position d'équilibre, il faut faire un **<u>développement de Taylor de l'énergie potentielle autour de x_0</u>** :

$$\boldsymbol{E_P(x) \approx E_P(x_0) + (x - x_0)\underbrace{\left(\frac{dE_P}{dx}\right)_{x_0}}_{=\,0\ \text{(équilibre)}} + \frac{1}{2}(x-x_0)^2\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0}}$$

Or $E_P(x_0) = 0$ et $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} = 2E_0\beta^2$; Donc : $E_P(x) \approx \frac{1}{2}\,2E_0\beta^2(x-x_0)^2$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{E_P(x) \approx E_0\beta^2(x-x_0)^2}}$;

- De plus : $E_C(\dot{x}) = \frac{1}{2}\,m_2\dot{x}^2$;
- D'où : $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}\,m_2\dot{x}^2 + E_0\beta^2(x-x_0)^2}}$;
- Le système est **<u>conservatif</u>** car aucune force dissipative n'est mentionnée par l'énoncé, donc d'après le **<u>théorème de la puissance mécanique</u>**,

E_m = cste ou encore $\boxed{\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = 0}}$.

Or $\frac{dE_m}{dt} = m_2\dot{x}\ddot{x} + 2E_0\beta^2(x-x_0)\dot{x} = 0$; Posons X = $x - x_0$ alors $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$.

L'équation précédente devient donc $\boxed{\boldsymbol{m_2\ddot{X} + 2E_0\beta^2 X = 0}}$, car $\dot{X} \neq 0$, puisqu'il y a mvt (non tjs nul).

De la forme : $\ddot{X} + \omega_0^2 X = 0$ avec $\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{2E_0\beta^2}{m_2}}}}$: **<u>pulsation propre du mouvement</u>** de l'atome d'oxygène ;

Et $\boxed{\boldsymbol{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2E_0\beta^2}{m_2}}}}$: **<u>fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre x_0.</u>**

---

5 **Q12** – On sait que $\boxed{\boldsymbol{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P) = -\frac{dE_P}{dx}\,\vec{u_x}}}$ car comme le système est unidirectionnel, $\frac{\partial E_P}{\partial x} = \frac{dE_P}{dx}$.

Donc : $\boldsymbol{F_x = -\frac{dE_P}{dx}}$; On trouve ainsi le signe de F_x à partir du signe de la dérivée de E_P. D'après le graphe :

- **<u>Si $x < x_0$</u>** , alors $\frac{dE_P}{dx} < 0$ et $\underline{\boldsymbol{F_x > 0}}$: Force dans le même sens que l'axe Ox qui a tendance à ramener l'atome d'oxygène dans sa position d'équilibre.
- **<u>Si $x > x_0$</u>** , alors $\frac{dE_P}{dx} > 0$ et $\underline{\boldsymbol{F_x < 0}}$: Force dans le sens contraire à l'axe Ox qui a tendance à ramener l'atome d'oxygène dans sa position d'équilibre.

ou $\delta W(\vec{F}) = -dE_p$

$\Leftrightarrow F_x\vec{u_x}\cdot dx\,\vec{u_x} = -dE_p$

/35 **EXERCICE 3 : Etude d'une descente de toboggan aquatique :**

(D'après banque PT 2022) (≈ 35 *pts*)

/2 **Q1.** On nous donne : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma\,\theta$ et h corresopnd à la **variation d'altitude lors d'un tour**, donc pour $\theta = 2\pi$; Ainsi, $\boxed{\boldsymbol{h = 2\pi\,\gamma}}$.

/4 **Q2.** $\overrightarrow{OM} = \cancel{\overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM}} = R\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r} + \gamma\,\theta\,\overrightarrow{u_z}}}$.

Alors $\vec{v} = \dfrac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = R\,\dfrac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \gamma\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \gamma\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}}$.

/12 **Q3.** Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Base de projection cylindrique : fournie.

Système : L'enfant de masse m.

Forces et énergies potentielles : **Poids** : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\overrightarrow{u_z}$ et $\boldsymbol{E_{pP} = -mgz + cste}$**,** car *Oz* est un axe descedt.

Réaction du support : $\vec{R} \perp support$, donc elle ne travaille pas et $\boldsymbol{E_{pR} = cste}$ (1)

Alors, $\boldsymbol{E_m = E_c + E_{p\,tot} = \frac{1}{2}m\,v^2 + E_{pP} + cste = \frac{1}{2}m\,v^2 - mgz + cste.}$

Or, d'après Q2, $\boldsymbol{v^2 = \dot{\theta}^2(R^2 + \gamma^2)}$ et on garde z dans E_{pP}.

D'où : $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(R^2 + \gamma^2) - mg\,z + cste}$

Mais, on ne veut garder que z et $\dot{z}$ dans l'expression de E_m. Il faut donc supprimer $\dot{\theta}$: $\dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{\gamma}$.

Alors $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\,\frac{\dot{z}^2}{\gamma^2}(R^2 + \gamma^2) - mg\,z + cste}$ **;** Ainsi, $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\,\dot{z}^2\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right) - mgz + cste}}$.

De la forme : $E_m = \frac{1}{2}\,A\,\dot{z}^2 - B\,z + cste$ avec $\boxed{\boldsymbol{A = m\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right) \text{ et } B = mg}}$.

/4 **Q4.** L'enfant partant de l'altitude $z = 0$ avec une vitesse nulle, son énergie mécanique est nulle.

Les frottements étant négligés, celle-ci se conserve : Le **système est conservatif : $\boldsymbol{E_m = cste}$.**

En sortie de toboggan ($z = 3h$), on a donc $\boldsymbol{E_m = 0} = \frac{1}{2}m\,v_S^2 - mg3h$

On en déduit $v_S^2 = 6gh$ et $\boxed{\boldsymbol{v_S = \sqrt{6gh}}}$.

/9 **Q5.** On cherche l'équation différentielle du mouvement, à partir de l'énergie mécanique :

Le **système est conservatif**, d'après le théorème de la puissance mécanique, $\boldsymbol{\frac{d\,E_m}{dt} = 0.}$

Avec $E_m = \frac{1}{2}\,A\,\dot{z}^2 - B\,z$; Il vient : $\frac{d\,E_m}{dt} = A\dot{z}\,\ddot{z} - B\,\dot{z} = 0$; Soit : $\dot{z}\,(A\,\ddot{z} - B) = 0$

Or $\dot{z} \neq 0$ à chaque instant car il y a mouvement, ainsi : $\boxed{\boldsymbol{\ddot{z} = \frac{B}{A} = cste}\,.}$

En prenant une primitive, il vient : $\dot{z} = \frac{B}{A}\,t + cste1$.

CI, A $t = 0$, l'anneau est lâché sans vitesse initiale, donc $\dot{z}(0) = 0 = cste1$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\dot{z} = \frac{B}{A}\,t}}$.

Nouvelle primitive : $z(t) = \frac{1}{2}\,\frac{B}{A}\,t^2 + cste2$. CI, A $t = 0$, $z(0) = 0 = cste2$. Soit : $\boxed{\boldsymbol{z(t) = \frac{1}{2}\,\frac{B}{A}\,t^2}}$.

Enfin, le temps de chute τ est tel que $\boldsymbol{z(\tau) = 3h}$ (arrivée au sol).

Ainsi, il vient : $\frac{1}{2}\,\frac{B}{A}\,\tau^2 = 3h$; Soit : $\tau^2 = \frac{6hA}{B}$; D'où $\boxed{\boldsymbol{\tau = \sqrt{\frac{6hA}{B}}}}$.

/4 **Q6.** S'il y a une force de frottement, le système n'est plus conservatif et la force de frottement est tangente au toboggan. Le théorème de la puissance cinétique conduit à : $\boldsymbol{\frac{d\,E_m}{dt} = P_{nc} = \vec{F}.\vec{v} = -\|\vec{F}\|\|\vec{v}\| = -F\,\dot{z}\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}}$

L'énergie perdue par l'enfant correspond à la valeur absolue du travail de la force de frottement.

Or $|W_F| = \int_{t=0}^{t=\tau}|P_{nc}|\,dt = F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}\int_{t=0}^{t=\tau}\frac{dz}{dt}\,dt = F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}\int_{z=0}^{z=3h}dz$.

D'où : $|W_F| = 3h\,F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}$, Il faut supprimer h ; D'après Q1, $h = 2\pi\,\gamma$. Soit : $\boxed{\boldsymbol{|W_F| = 6\pi\gamma\;F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}}}$.

76 **PROBLEME : Particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$:** ***(D'après ENAC)*** ***(≈ ~~77~~ 76 pts)***

15 **Q1.** Cas où $B = 0$, et $E = 10$ V.m^{-1} et $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$.

Référentiel : Terrestre supposé galiléen. 1

Base de projection cartésienne : fournie. 1

Système : Particule de masse m. 1

Force : Poids négligeable devant F 1

Force de Lorentz électrique : $\vec{F} = q\vec{E} = q\,E\,\vec{e}_x$. 1

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$. 1

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\ddot{x} = \frac{qE}{m}} \\ \boldsymbol{\ddot{y} = 0} \\ \boldsymbol{\ddot{z} = 0} \end{cases}$$ 1

Prenons une primitive, il vient : $\begin{cases} \dot{x} = \frac{qE}{m}t + cste\ 1 \\ \dot{y} = cste\ 2 \\ \dot{z} = cste\ 3 \end{cases}$

CI, A t = 0, $\overrightarrow{v_0} = V_0\,\vec{e}_z$; D'où $cste\ 1 = cste\ 2 = 0$ et $cste\ 3 = V_0$ 1

D'où $\begin{cases} \boldsymbol{\dot{x} = \frac{qE}{m}t} \\ \boldsymbol{\dot{y} = 0} \\ \boldsymbol{\dot{z} = V_0} \end{cases}$ 1 Et nouvelle primitive : $\begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 + cste\ 4 \\ y = cste\ 5 \\ z = V_0 t + cste\ 6 \end{cases}$

1

D'après le CI, la particule est en O, donc les 3 nouvelles constantes sont nulles. Donc $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{qE}{2m}t^2} & \textbf{(1)} \\ \boldsymbol{y = 0} & \textbf{(2)} \\ \boldsymbol{z = V_0 t} & \textbf{(3)} \end{cases}}$ 1

;

Il nous faut l'équation de la trajectoire et non les équations horaires.

D'après l'équation (3), $t = \frac{z}{V_0}$; On remplace dans (1), il vient : $\boldsymbol{x = \frac{qE}{2m}\left(\frac{z}{V_0}\right)^2}$ 1

L'écran est en $z_0 = 10$ cm, Soit $\boxed{\boldsymbol{x_e = \frac{qE\,{z_0}^2}{2m\,{V_0}^2}}}$ 1 . AN : $x_e = \frac{-1{,}6.10^{-19}\times 10\times 0{,}1^2}{2\times 9{,}1.10^{-31}\times(500.10^3)^2}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{x_e \approx -3{,}5\text{ cm}}}$. 1 2CS

Q2. Cas où $E = 0$, et $B = 10^{-5}$ T et $\vec{B} = B\,\vec{e}_y$.

6 **2.a -** Pour montrer que le mouvement est uniforme on calcule la puissance de la force magnétique :

$\overrightarrow{F_m} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$ 1

$P = \overrightarrow{F_m}.\vec{v} = q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v} = q\underbrace{(\vec{v}\wedge\vec{B})}_{\perp\,\vec{v}}.\vec{v}$; 1 Donc $\boxed{\boldsymbol{P = 0}}$ 1

Or $P = \frac{dE_C}{dt}$; Donc : $E_c = cste = \frac{1}{2}m\,v^2$ 1 ; Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{\|\vec{v}\| = cste = V_0}}$. 1

Le champ magnétique dévie les particules mais ne modifie pas la norme de leur vitesse. 1

---

6 (+3) **2.b -** Référentiel : Terrestre supposé galiléen. (1) → si pas fait Q1

Base de projection cartésienne : fournie (1)

Système : Particule de masse m. (1)

Force : Poids négligeable. (1)

Force de Lorentz magnétique : $\overrightarrow{F_m} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$ (1) (1)

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{F} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

(1)

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ B\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix}.$$ 1 1

Avec $\omega = \frac{qB}{m}$, il vient : Il vient : $\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix}$; Ou encore : $\boxed{\begin{cases}\ddot{x} = -\omega\,\dot{z} & (1')\\ \ddot{y} = 0 & (2')\\ \ddot{z} = \omega\,\dot{x} & (3')\end{cases}}$ 1

Il faut montrer que le mouvement est plan :

En exploitant (2'), il vient : $\ddot{y} = 0$ Soit $\dot{y} = v_y = cste = v_y(0) = 0$. 1

Soit $y = cste = y(0) = 0$. 1

<u>Conclusion</u> : La **<u>trajectoire de la particule est plane, dans le plan (O, x, z), plan $\perp \vec{B}$.</u>** 1

---

13 **2.c** – Résolution des équations couplées, parla méthode intégration/substitution. On a $\overrightarrow{v_0} = V_0\,\vec{e}_z$.

On reprend les deux équations différentielles couplées (1') et (3'):

$$\begin{cases}\ddot{x} = -\omega\,\dot{z} & (1')\\ \ddot{z} = \omega\,\dot{x} & (3')\end{cases}$$

On prend une primitive de (1') : $\dot{x} = -\omega\,z + cste$

CI : A t = 0, $z(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0 = cste$. 1 + 1

D'où : $\boldsymbol{\dot{x} = -\omega\,z}$ 1 (4) ;

En remplaçant (4) dans (3'), il vient : 1

$\ddot{z} = \omega\,(-\omega z)$ Soit : $\boldsymbol{\ddot{z} + \omega^2 z = 0}$: Equation différentielle du second ordre sans terme en $\dot{z}$ et avec second membre nul.

Les solutions sont de la forme : $\boldsymbol{z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$. 1

CI : A t = 0, $z(0) = 0 = A$ Donc : $\boldsymbol{A = 0}$; 1

On dérive : $\dot{z}(t) = B\omega\cos(\omega t)$ 1

CI : A t = 0, $\dot{z}(0) = V_0 = B\,\omega$ Donc : $\boldsymbol{B = \frac{V_0}{\omega}}$. 1

Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{z(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)}}$. 1

Même méthode pour trouver $x(t)$: On prend une primitive de (3'), puis on remplace (1').

Ou bien on reprend (4) : $\dot{x} = -\omega z$ et on remplace $z(t)$ par son expression :

$\dot{x} = -\,\omega\,\frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t) = -V_0\,\sin(\omega t)$

Ainsi : $\dot{x} = -V_0\,\sin(\omega t)$. 1

On prend une primitive : $x(t) = \frac{V_0}{\omega}\cos(\omega t) + cste$; 1

CI : A t = 0, $x(0) = 0 = cste + \frac{V_0}{\omega}$; Soit : $cste = -\frac{V_0}{\omega}$; D'où : $\boxed{x(t) = \frac{V_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)}$; 1 1

$$\boxed{\text{Ainsi : }\begin{cases}\boldsymbol{x(t) = \frac{V_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)}\\ \boldsymbol{z(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)}\,.\end{cases}}$$

---

19 **2.d** – D'après les équations précédentes, $\cos(\omega t) = \frac{\omega}{V_0}x + 1$ et $\sin(\omega t) = \frac{\omega}{V_0}z$ 1

Comme $cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t) = 1$, il vient : $\left(\frac{\omega}{V_0}\,x + 1\right)^2 + \left(\frac{\omega}{V_0}\,z\right)^2 = 1$ 1 1

Ou encore en multipliant de chaque côté par $\frac{V_0}{\omega}$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\left(x + \frac{V_0}{\omega}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}}$. 1

La trajectoire est donc un **<u>cercle de centre $C\left(-\frac{V_0}{\omega} > 0 ; 0 ; 0\right)$ et de rayon $R_0 = \left|\frac{V_0}{\omega}\right|$</u>** $= -\frac{V_0}{\omega}$; 1 1 1

Mais $\omega < 0$, car $q < 0$.

On a donc : $\boxed{\boldsymbol{R_0 = \frac{V_0\,m}{|q|\,B}}}$; <u>AN</u> : $R_0 = \frac{500.10^3 \times 9{,}1.10^{-31}}{1{,}6.10^{-19} \times 10^{-5}}$; On obtient : **<u>$R_0 \approx 28$ cm</u>**. 1 1 26

2.e – Le dessin n'est pas à l'échelle.

Sur l'écran, $x = x_m$ et $z = z_0$ et $R_0 = \left|\frac{V_0}{\omega}\right| = -\frac{V_0}{\omega}$

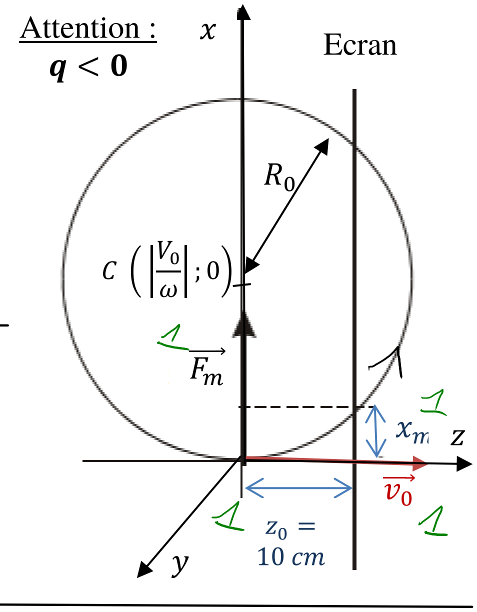
Il vient : $(x_m - R_0)^2 + {z_0}^2 = {R_0}^2$ 1

Soit : $(x_m - R_0)^2 = {R_0}^2 - {z_0}^2$ 1

D'où : $x_m - R_0 = \pm\sqrt{{R_0}^2 - {z_0}^2}$; Et $\boxed{\boldsymbol{x_m = R_0 \pm \sqrt{{R_0}^2 - {z_0}^2}}}$

<u>AN</u> : $\boldsymbol{x_{m1} \approx 54}$ **cm et** $\boldsymbol{x_{m2} \approx 1{,}8}$ **cm.** 1

Mais il faut que $\boldsymbol{x_m < R_0}$; Donc $\underline{\boldsymbol{x_m \approx 1{,}8}\ \textbf{cm}}$. 1



Q3. On nous donne $E = 1$ kV.m^{-1}.

Le mouvement est rectiligne et uniforme si la **<u>particule est pseudo-isolée</u>**, donc si les **<u>forces de Lorentz électrique et magnétique se compensent</u>** (alors $\vec{acc} = \vec{0}$). Soit $qE = q\,V_0\,B\sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$. 1 1 $(\vec{F} = \vec{0})$

Ou encore : $\boxed{\boldsymbol{B = \frac{E}{V_0}}}$. 1 <u>AN</u> : $B = \frac{10^3}{500.10^3}$. On obtient $\underline{\boldsymbol{B = 2.10^{-3}}\ \textbf{T = 2 mT.}}$ 1 (1,2(3))

Q4. Cas où E et B sont non nuls.

4.a - Il faut reprendre les équations vues en Q2b, en ajoutant la force électrique de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} = q\,E\,\vec{e}_x$.

<u>Forces</u> : Poids négligeable.

Force de Lorentz magnétique : $\vec{F_m} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$

Force de Lorentz électrique : $\vec{F} = q\vec{E} = q\,E\,\vec{e}_x$

<u>PFD à M</u> : $\sum\vec{F} = m\vec{a}$ Donc $q\,\vec{v}\wedge\vec{B} + q\vec{E} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ B\\ 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Avec $\omega = \frac{qB}{m}$, il vient : Il vient : $\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix} + \frac{q}{m}\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$; Ou encore : $\boxed{\begin{array}{lr}\boldsymbol{\ddot{x} = -\omega\,\dot{z} + \frac{q}{m}E} & (5)\\ \boldsymbol{\ddot{y} = 0} & (6)\\ \boldsymbol{\ddot{z} = \omega\,\dot{x}} & (7)\end{array}}$ 1

Il faut découpler les équations (5) et (7) pour obtenir la forme proposée : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$.

On prend une primitive de (7) : $\dot{z} = \omega\,x + cste$ 1

CI : A t = 0, $x(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = V_0 = cste$. D'où : $\boldsymbol{\dot{z} = \omega\,x + V_0}$ (8) ; 1

En remplaçant (8) dans (5), il vient : $\ddot{x} = -\omega\,(\omega x + V_0) + \frac{q}{m}E$ 1 Soit : $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{q}{m}E - \omega\,V_0}$: 1

Par identification avec $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$, on obtient $\boldsymbol{a = \frac{q}{m}E - \omega\,V_0}$. 1 Or $\omega = \frac{qB}{m}$, ainsi $\boxed{\boldsymbol{a = \frac{q}{m}(E - BV_0)}}$. 1

4.b – Dans le cas où $B = \frac{2E}{V_0}$, alors $a = -\frac{qE}{m}$. 1 L'équation précédente devient donc : $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{qE}{m}}$.

Solution homogène : $\boldsymbol{x_h(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)}$ 1

Solution particulière constante : $x_P = -\frac{qE}{m\,\omega^2} = -\frac{qE}{m}\times\frac{m^2}{q^2B^2}$; Soit : $\boldsymbol{x_P = -\frac{mE}{q\,B^2}}$. 1

Solution générale : $\boldsymbol{x(t) = x_h(t) + x_P = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) - \frac{mE}{q\,B^2}}$ 1

1$^{\text{ère}}$ CI, à $t = 0$, $x(0) = 0$; Soit : $\alpha - \frac{mE}{q\,B^2} = 0$; D'où $\boldsymbol{\alpha = \frac{mE}{q\,B^2}}$. 1

De plus, on dérive, $\dot{x}(t) = -\alpha\,\omega\sin(\omega t) + \beta\omega\cos(\omega t) + 0$.

2$^{\text{ème}}$ CI : à $t = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, donc $\beta\omega = 0$; Soit $\boldsymbol{\beta = 0}$. 1

<u>Conclusion</u> : $x(t) = \frac{mE}{q\,B^2}\cos(\omega t) - \frac{mE}{q\,B^2}$; Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{x(t) = \frac{mE}{q\,B^2}(\cos(\omega t) - 1) = \frac{E}{B\omega}(\cos(\omega t) - 1)}}$ 1