Correction du TD d'application

I Intérêt des raisonnements énergétiques

1) On lance une balle avec une vitesse initiale v_0 vers le haut depuis l'altitude $z = 0$. Déterminer la hauteur maximale atteinte par la balle en négligeant tout frottement.

Réponse

À $t = 0$, la balle est lancée en $z = 0$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_O\,\overrightarrow{u_z}$. Elle va monter en altitude en perdant de l'énergie cinétique et en gagnant en énergie potentielle.

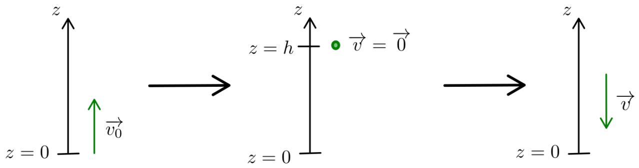


Figure 4.1 – Schéma de la situation

Le système {masse} n'est soumis qu'au poids, qui est conservatif ; le système est donc conservatif et l'énergie mécanique se conserve :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_m(0) = \mathcal{E}_m(t_{\max})$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}{v_0}^2 + \underbrace{mgz_0}_{=0} = \frac{1}{2}\cancel{m}v(t_{\max})^2 + \cancel{m}gh$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h = \sqrt{\frac{{v_0}^2}{2g}}}$$

■

◇

2) On considère un pendule simple (masse m ponctuelle, longueur ℓ, pas de frottements). On fait partir ce pendule de la verticale ($\theta = 0$, en bas) en lui communiquant une vitesse initiale v_0. Déterminer l'expression de l'amplitude maximale $\theta_{\max}$ du mouvement.

Réponse

Le système est conservatif puisque le poids est une force conservative et que le travail de la force de tension est nul ($\overrightarrow{T} \perp \overrightarrow{v}$). On peut donc utiliser le TEM en déterminant l'énergie potentielle en fonction de θ.

On prend la référence d'altitude $z = 0$ en bas du pendule. La longueur du pendule étant ℓ, on trouve l'altitude en projetant le point M sur l'axe z pour trouver

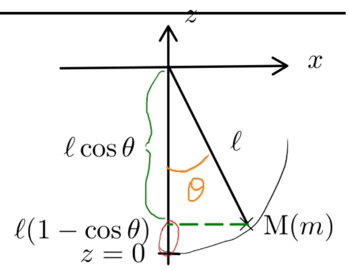


Figure 4.2 – Schéma pour $z(\theta)$

$$z(\theta) = \ell(1 - \cos\theta)$$

Ainsi,

$$\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\cancel{m}{v_0}^2 + \underbrace{mgz_0}_{=0} = \frac{1}{2}\cancel{m}{v_{\max}}^2 + \cancel{m}gz_{\max}$$

$$\Leftrightarrow \ell(1-\cos\theta_{\max}) = \frac{{v_0}^2}{2g}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos\theta_{\max} = 1 - \frac{{v_0}^2}{2g\ell}}$$

■

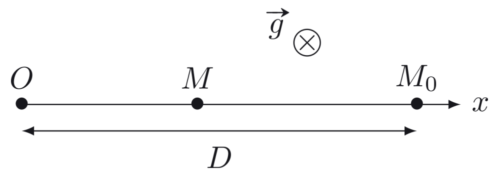
Cette équation est valable si ${v_0}^2/2g\ell < 2$, sinon $\cos\theta_{\max} < -1$. Cette condition traduit le fait que le pendule ne fait pas des tours, i.e. ne dépasse pas $\theta = \pi$.

◇

II Curling

Le curling est un sport de précision pratiqué sur la glace avec des pierres en granite, taillées et polies selon un gabarit international. Le but est de placer les pierres le plus près possible d'une cible circulaire dessinée sur la glace, appelée la maison.

Nous envisageons le lancer d'une pierre assimilée à un point M de masse $m = 20\,\mathrm{kg}$ glissant selon l'axe Ox vers le point M$_0$ visé (la maison). La pierre est lancée de la position initiale O avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$, la maison se trouvant à la distance $D = \mathrm{OM}_0 = 25\,\mathrm{m}$ du point O.



Nous supposerons que la force de frottement solide $\vec{F} = -F_0\,\overrightarrow{u_x}$ de la glace sur la pierre est constante pendant toute la glissade et s'annule lorsque la vitesse de la pierre s'annule. Nous prendrons $F_0 = 3{,}0\,\mathrm{N}$. Nous négligerons par ailleurs toute force de frottement fluide.

Le lancer étudié est supposé gagnant : la pierre atteint la maison et s'y arrête.

1) Que valent les énergies cinétiques initiale $\mathcal{E}_{c,I}$ et finale $\mathcal{E}_{c,F}$ de la pierre ?

Réponse

On a simplement

$$\mathcal{E}_{c,I} = \frac{1}{2}m{v_0}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{c,F} = 0$$

◇

2) Calculer le travail des forces appliquées sur la pierre pendant la glissade.

Réponse

- **Système :** {pierre}
- **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{piste}}$, galiléen
- **Repère :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$
- **Repérage :**

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x}$$
$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = D\,\overrightarrow{u_x}$$
$$\vec{v} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$$

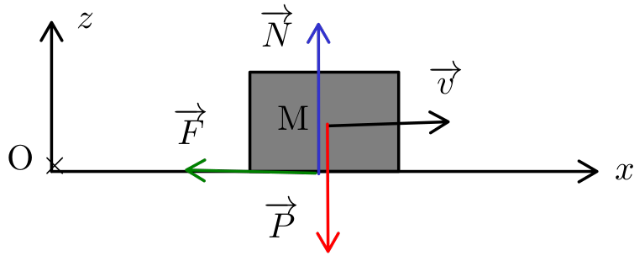


Figure 4.3 – Schéma de la situation

- **BDF et BDW :**

Poids	$\vec{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$	
Réaction	$\vec{N} = N\,\overrightarrow{u_z}$	$\Rightarrow$
Frottements	$\vec{F} = -F_0\,\overrightarrow{u_x}$	

$$W_{\mathrm{OM}_0}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = -mgD(\underbrace{\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{u_x}}_{=0}) = 0$$

$$W_{\mathrm{OM}_0}(\vec{N}) = \vec{N}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = ND(\underbrace{\overrightarrow{u_z}\cdot\overrightarrow{u_x}}_{=0}) = 0$$

$$W_{\mathrm{OM}_0}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{OM}_0} = -F_0D(\underbrace{\overrightarrow{u_x}\cdot\overrightarrow{u_x}}_{=1}) = -F_0D$$

3) Appliquer le théorème de l'énergie cinétique à la pierre et en déduire la vitesse initiale v_0.

Réponse

Ici,

$$\Delta_{\mathrm{OM_0}}\mathcal{E}_c = \sum_i W_{\mathrm{OM_0}}(\vec{F}_i)$$

$$\Leftrightarrow 0 - \frac{1}{2}m{v_0}^2 = -F_0 D$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{\frac{2F_0 D}{m}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} F_0 = 3{,}0\,\mathrm{N} \\ D = 25\,\mathrm{m} \\ m = 20\,\mathrm{kg} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{v_0 = 2{,}7\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

■

III Piégeage d'un électron

Considérons le mouvement selon un axe (Oz) d'un électron de masse $m = 9{,}1 \times 10^{-31}$ kg et de charge $-e = -1{,}6 \times 10^{-19}$ C dans un dispositif de piégeage. Il est soumis uniquement à des forces conservatives, d'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(z)$ telle que :

$$\mathcal{E}_p(z) = \frac{eV_0}{2d^2}z^2$$

avec $V_0 = 5{,}0$ V et $d = 6{,}0$ mm.

1) Tracer l'allure de $\mathcal{E}_p(z)$. Identifier la position d'équilibre et donner sa stabilité.

Réponse

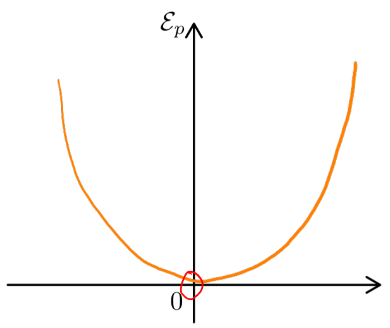


Figure 4.4 – $\mathcal{E}_p(z)$

On trace l'énergie potentielle, qui est **évidemment** une parabole convexe. On trouve le point d'équilibre en calculant sa dérivée et en trouvant quand elle s'annule ; visuellement, la dérivée s'annule en $z_{\mathrm{eq}} = 0$, mathématiquement

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z}\right|_{z_{\mathrm{eq}}} = \frac{eV_0}{d^2}z_{\mathrm{eq}} = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_{\mathrm{eq}} = 0}$$

On trouve sa stabilité en évaluant sa dérivée seconde en ce point, et il sera stable si elle est positive. En tant que fonction convexe en ce point, il est visiblement stable. On calcule :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2}\right|_{z_{\mathrm{eq}}} = \frac{eV_0}{d^2} > 0}$$

Il est donc bien stable.

2) Calculer la fréquence des oscillations de l'électron dans le piège.

Réponse

Tout système conservatif autour de son point d'équilibre stable est régit par une équation d'oscillateur harmonique, faisant donc apparaître la pulsation propre ω_0. Il suffit pour démontrer cela d'utiliser la caractéristique principale d'un système conservatif : le fait que son énergie mécanique se conserve, i.e. $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$. En effet, le TPC nous indique

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \sum_i \underbrace{\mathcal{P}(\overrightarrow{F}_{\mathrm{NC},i})}_{=0 \text{ car conservatif}} = 0$$

On nous donne $\mathcal{E}_p(z)$, donc pour avoir $\mathcal{E}_m$ il faut trouver la vitesse de la particule. Rien n'est indiqué dans l'énoncé, mais le problème n'indique qu'un potentiel selon $\overrightarrow{u_z}$; on peut supposer que la vitesse ne se fait que selon $\overrightarrow{u_z}$ également, et qu'on a donc $\overrightarrow{v} = \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p) &= 0 \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\dot{z}^2 + \frac{eV_0}{2d^2}z^2\right) &= 0 \\
\Leftrightarrow m\cancel{\dot{z}}\ddot{z} + \frac{eV_0}{d^2}z\cancel{\dot{z}} &= 0 \\
\Leftrightarrow \boxed{\ddot{z} + {\omega_0}^2 z = 0} &\quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}}
\end{aligned}$$

Étant donné que $\omega_0 = 2\pi f_0$, on obtient finalement

$$\boxed{f_0 = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{eV_0}{md^2}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \\ V_0 = 5{,}0\,\mathrm{V} \\ m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \\ d = 6{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

A.N. : $\boxed{f_0 = 25\,\mathrm{MHz}}$ ■

◇

3) Exprimer la résultante des forces $\overrightarrow{F}$ sur l'électron. On rappelle qu'en coordonnées cartésiennes, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(x,y,z) = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

Réponse

Une force conservative dérive d'une énergie potentielle selon

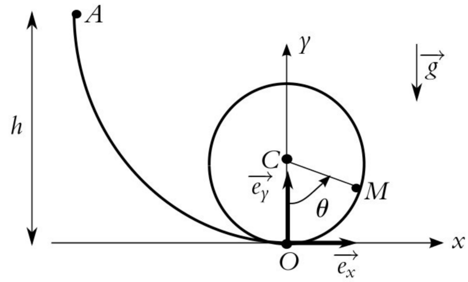
$$\begin{aligned}
\overrightarrow{F} &= -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p \\
\Leftrightarrow \overrightarrow{F} &= -\begin{pmatrix} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial y} \\ \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \end{pmatrix} = -\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ \frac{eV_0}{d^2}z \end{pmatrix} \\
\Leftrightarrow &\boxed{\overrightarrow{F} = -\frac{eV_0}{d^2}z\,\overrightarrow{u_z}}
\end{aligned}$$

■

◇

IV Balle dans un tonneau

Une balle, assimilée à un point matériel M de masse m, est lâchée sur une rampe sans vitesse initiale depuis le point A d'une hauteur h par rapport au point O le bout de la rampe. Elle achève sa course dans un tonneau circulaire de rayon R lui permettant éventuellement de faire des *loopings*. On néglige les frottements.



1) Exprimer la norme v_{O} de la vitesse en O, puis v_{M} en un point M quelconque du tonneau repéré par l'angle θ, en fonction de g, h, a et θ. Donner la relation entre v_{M} et $\dot{\theta}$.

Réponse

◇ **Système :** {balle}

◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$, supposé galiléen

◇ **Repère :** cartésien pour la chute sur la rampe, avec $\vec{u_z}$ vertical ascendant, et (C, $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$) quand la balle est dans le tonneau ; voir schéma

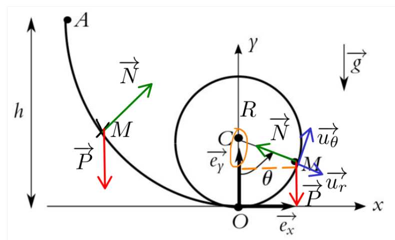


FIGURE 4.5 – Schéma de la situation

◇ **Repérage :** dans le tonneau,

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{CM}} &= R\,\vec{u_r}\\
\vec{v}_{\mathrm{M}} &= R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}\\
\vec{a}_{\mathrm{M}} &= R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}
\end{aligned}$$

◇ **BDF :** dans le tonneau,

$$\begin{aligned}
&\textbf{Poids} && \vec{P} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})\\
&\textbf{Réaction} && \vec{N} = -N\,\vec{u_r}
\end{aligned}$$

◇ **BDW :**

$$\begin{aligned}
W_{\mathrm{AM}}(\vec{N}) &= 0 \quad (\vec{N} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}})\\
\vec{P} &= \text{conservatif}
\end{aligned}$$

Le système est donc **conservatif**. On peut appliquer le TEM :

◇ **En A :** $v_{\mathrm{A}} = 0$, $z_{\mathrm{A}} = h$

◇ **En O :** $v_{\mathrm{O}} = v_{\mathrm{O}}$, $\boxed{z_{\mathrm{O}} = 0}$ ⇐ référence **pour toute l'étude**

◇ **En M :** $z(\theta) = R(1 - \cos\theta)$

◇ **TEM :**

$$\begin{aligned}
&\Delta_{\mathrm{AO}}\mathcal{E}_m = 0\\
\Leftrightarrow\ &\cancel{m}gh = \frac{1}{2}\cancel{m}{v_{\mathrm{O}}}^2\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{v_{\mathrm{O}} = \sqrt{2gh}}
\end{aligned}$$

■

Puis

$$\Delta_{\mathrm{OM}}\mathcal{E}_m = 0$$

$$\Leftrightarrow \overbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}{v_\mathrm{M}}^2}^{\mathcal{E}_c(\mathrm{M})} + \overbrace{\cancel{m}gR(1-\cos\theta)}^{\mathcal{E}_{p,p}(\mathrm{M})} = \overbrace{\frac{1}{2}\cancel{m}{v_\mathrm{O}}^2}^{\mathcal{E}_c(\mathrm{O})} + \overbrace{\underbrace{mgz_\mathrm{O}}_{=0}}^{\mathcal{E}_{p,p}(\mathrm{O})}$$

$$\Leftrightarrow v_\mathrm{M} = \sqrt{{v_\mathrm{O}}^2 + 2gR(\cos\theta - 1)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_\mathrm{M} = \sqrt{2g}\sqrt{h + R(\cos\theta - 1)}} = R\dot{\theta}$$ ■

◇

2) Déterminer la réaction du tonneau en un point du cercle en fonction de g, h, a et θ.

Réponse

On sort de l'analyse énergétique, puisqu'on veut une valeur de force **en un point** du mouvement. On applique donc le **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - N \\ mR\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases} \Rightarrow N = mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2$$

Or, $v_\mathrm{M} = R\dot{\theta} \Leftrightarrow {v_\mathrm{M}}^2 = R^2\dot{\theta}^2 \Leftrightarrow R\dot{\theta}^2 = {v_\mathrm{M}}^2/R$ donc

$$N = m\left(g\cos\theta + \frac{2g}{R}\left(h + R(\cos\theta - 1)\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow N = m\left(g\cos\theta + 2g\cos\theta - 2g + 2g\frac{h}{R}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{N = mg\left(3\cos\theta - 2 + 2\frac{h}{R}\right)}$$ ■

◇

3) Déterminer la hauteur minimale h_min pour que la bille fasse le tour complet du tonneau sans tomber.

Réponse

La condition de contact entre deux solides est que la réaction normale ne soit pas nulle. Autrement dit, si la réaction normale est nulle, il n'y a plus contact : on cherche donc ici à voir si $N > 0$ à chaque instant. On pourrait tracer la fonction $N(\theta)$, mais on remarque facilement que l'endroit où N est la plus susceptible de s'annuler est quand $\theta = \pi$, quand la belle est « la tête à l'envers ». On résout donc

$$N(\pi) > 0$$

$$\Leftrightarrow \cancel{mg}\left(-3 - 2 + 2\frac{g}{R}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 2\frac{h}{R} > 5$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h > \frac{5}{2}R} = h_\mathrm{min}$$ ■

◇