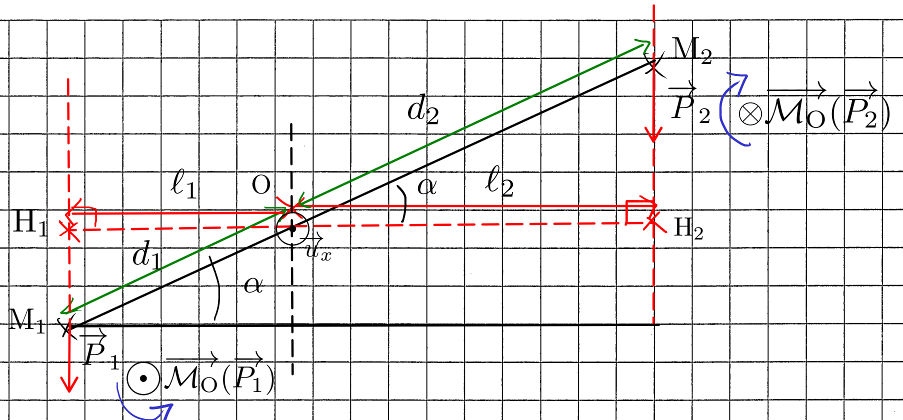
I/1)



$$\mathcal{M}_x(\vec{P_1}) = +\ell_1 m_1 g = m_1 d_1 g \cos\alpha$$

$$\mathcal{M}_x(\vec{P_2}) = -\ell_2 m_2 g = -m_2 d_2 g \cos\alpha$$

Pour avoir rotation, il faut $\mathcal{M}_x(\vec{P_2}) + \mathcal{M}_x(\vec{P_1}) < 0$

(rota° sens horaire autour de (Ox))

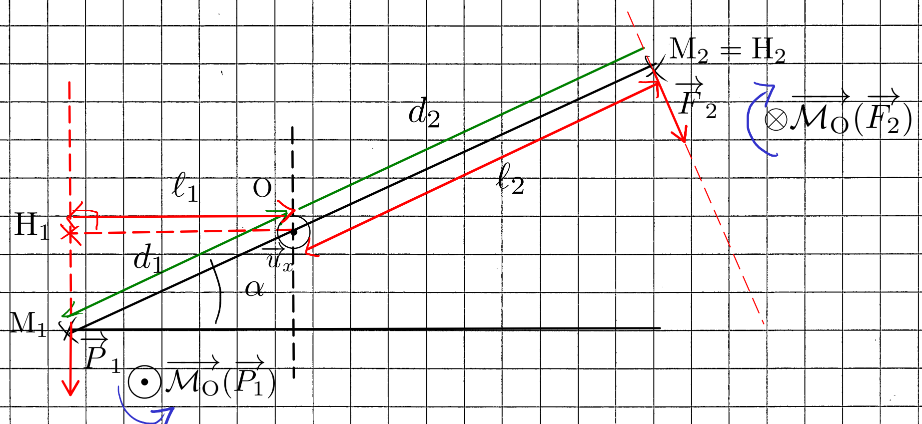
Soit $\underbrace{g\cos\alpha}_{\neq 0}\,(m_1 d_1 - m_2 d_2) < 0$

$\Leftrightarrow m_2 d_2 > m_1 d_1$

$\Leftrightarrow \boxed{m_2 > m_1 \dfrac{d_1}{d_2}}$ avec $\begin{cases} m_1 = 200\text{ kg} \\ d_1 = 0{,}50\text{ m} \\ d_2 = 1{,}5\text{ m} \end{cases}$

A.N. : $\boxed{m_{2,min} = 67\text{ kg}}$

2)



En modifiant la direc° de la force, donc de la droite d'action, la longueur du bras de levier est modifiée : or a, au mieux, $\ell_2 = d_2$.

Ainsi, $\sum_i \mathcal{M}_y(\vec{F_i}) < 0$ avec $\|\vec{F_2}\| = m_2 g$

$$\Leftrightarrow m_1 \cancel{g} d_1 \sin\alpha - m_2 \cancel{g} d_2 < 0$$

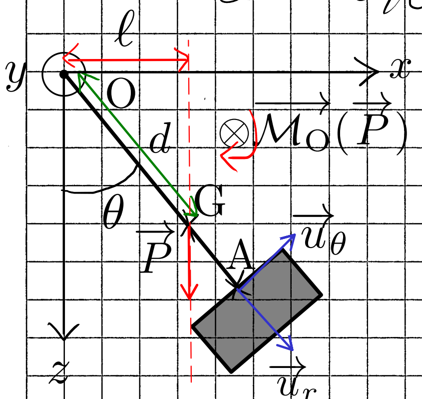
$$\Leftrightarrow \boxed{m_2 > m_1 \frac{d_1}{d_2} \cos\alpha}$$

A.N : $\boxed{m_{2,min} = 33 \text{ kg}}$ $g = 10 \text{ m.s}^{-2}$

Autrement dit, c'est 330 N de force gagné par rapport à la situa° précédente !

Gain de 50%.

II/



1) ◇ Système = {benne + bras}, assimilé à G de masse $m_{tot} = m + M$

◇ Référentiel : sol, galiléen

◇ Repère : $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta}, \vec{u_y})$

◇ Repérage : $\begin{cases} \vec{OG} = d\,\vec{u_r} \\ \vec{v}(G) = d\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \\ \vec{a}(G) = d\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - d\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} \end{cases}$

◇ BdF :

▷ Poids $\vec{P} = m_{tot} g\,\vec{u_z}$
$= m_{tot} g \left(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}\right)$

▷ Frott^t $\vec{F} = \vec{0}$ (Liaison pivot parfaite)

◇ BdM :

▷ $\vec{\mathcal{M}_O}(\vec{P}) = (\vec{OG} \wedge \vec{P}) = (d\,\vec{u_r}) \wedge \left(m_{tot} g \left(\underbrace{\cos\theta\,\vec{u_r}}_{=\vec{0}} - \underbrace{\sin\theta\,\vec{u_\theta}}_{=\vec{u_y}}\right)\right)$

$= -m_{tot} g d \sin\theta\,\vec{u_y}$

$\Leftrightarrow \mathcal{M}_y(\vec{P}) = -m_{tot} g d \sin\theta$

Avec le bras de levier, on a

$$\ell = d\sin\theta \quad \text{et} \quad \|\vec{P}\| = m_{tot}\, g$$

donc $$\boxed{\mathcal{M}_y(\vec{P}) = -m_{tot}\, g\, d \sin\theta}$$

▷ $L_y(S) = J_{tot}\,\dot{\theta}$

◁ TMC : $$\frac{dL_y(S)}{dt} = \mathcal{M}_y(\vec{P})$$

$$\Leftrightarrow J_{tot}\,\ddot{\theta} = -m_{tot}\, g\, d \sin\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_{tot}\, g\, d}{J_{tot}} \sin\theta = 0}$$

2) Petites oscill° : $\sin\theta \underset{\theta \to 0}{\simeq} \theta$, équa° oscillateur harmonique,

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{tot}\, g\, d}{J_{tot}}} \Leftrightarrow \boxed{T = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{J_{tot}}{m_{tot}\, g\, d}}}$$

3) $J_{tot} = J_{bras} + J_{benne}$, par construc°. On isole J_{tot} :

$$J_{tot} = 4\pi^2 T^2 \times m_{tot}\, g\, d$$

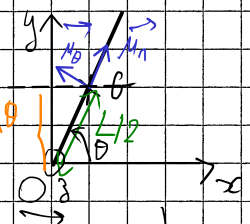
$$\Leftrightarrow J = 4\pi^2 T^2 m_{tot}\, g\, d - J'$$

$$\Leftrightarrow \boxed{J = 4\pi^2 T^2 m_{tot}\, g\, d - \frac{mL^2}{3}}$$ avec

A.N. : $$\boxed{J = 6{,}8 \cdot 10^7 \ \mathrm{kg \cdot m^2}}$$

$T = 1{,}1$ s
$L = 3{,}0$ m
$d = 1{,}5$ m
$m = 300$ kg
$m_{tot} = 2{,}3 \cdot 10^3$ kg
$g = 9{,}81$ m·s^{-2}

IV/ 1) $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2$; $\mathcal{E}_{P,P} = mg\, y_G$ + cte $\rightarrow = 0$ origine sur

On a,  soit $\mathcal{E}_{P,P} = \frac{mgL}{2} \sin\theta$

$y_G = \frac{L}{2}\sin\theta$

Donc $\boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{2}\sin\theta}$ (1)

2) BdF : $\vec{P}$ poids conservatif. Liaison pivot parfaite $\Leftrightarrow$ pas de fro H/o.

donc le système est conservatif : $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$ (TPM).

En $\theta_0 = 1,5$ rad, $\dot{\theta}_0 = 0$. Donc, en prenant $\mathcal{E}_{P,P} = 0$ au sol,

$\mathcal{E}_{c,0} = 0$ et $\mathcal{E}_{P,P,0} = \frac{mgL}{2}\sin\theta_0$

$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{mgL}{2}\sin\theta_0}$ (2)

3) À $t \neq 0$, (1) = (2)

$\Leftrightarrow \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{mgL}{2}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)$

$\Leftrightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 = \frac{mg\cancel{L}}{1/3\, mL^2}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)$

$\Rightarrow \frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)}$ ou $+\sqrt{}$

Or, de toute évidence θ diminue puisque l'arbre va tomber $\left(\mathcal{M}_z(\vec{P}) < 0\right)$, soit

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}\left(\sin\theta_0 - \sin\theta\right)}}$$

Bonus) Par le TMC,

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\frac{mgL}{2}\cos\theta$$

et $\frac{dL_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = -\frac{mgL}{2}\cos\theta < 0$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}(t) - \underbrace{\dot{\theta}(0)}_{=0} = -\frac{mgL}{J2}\left(\frac{\sin\theta}{\dot{\theta}(t)} - \frac{\sin\theta_0}{\dot{\theta}(0)}\right)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta}^2 = \frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$$

$$\Leftrightarrow \dot{\theta} = -\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$$

4) $dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}}$ soit $t\Big|_{t_f}^{0}$ et $\theta\Big|_{\theta_f=0}^{\theta_0}$

Donc $\int_0^{t_f} dt = \int_{\theta_0}^{0} \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}}$

$$\Leftrightarrow t_f - 0 = \sqrt{\frac{L}{3g}}\int_0^{\theta_0}\frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin\theta}}$$

Soit $\boxed{t_f = 3{,}2\ s}$

5) Cf. cahier de prépa.