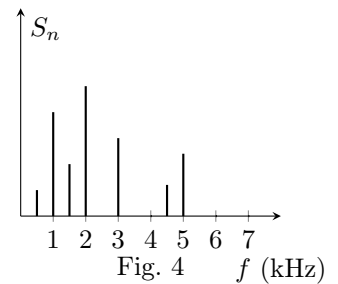
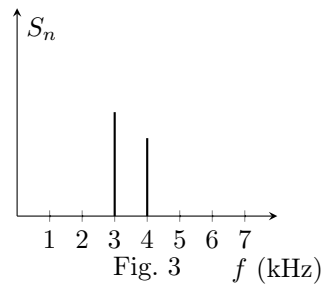
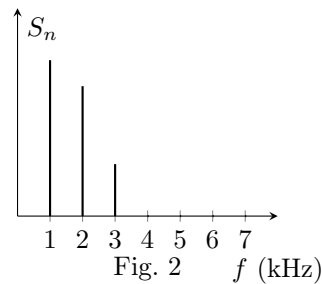
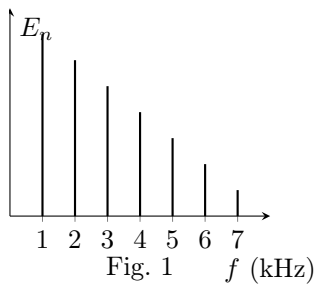


# TD : filtrage linéaire

## I Filtrage et spectres

Un signal périodique  $e(t)$  (de fréquence 1 kHz), dont le spectre est donné en figure 1, est envoyé à l'entrée de trois filtres différents. On effectue l'analyse spectrale du signal de sortie pour chaque filtre, les spectres obtenus sont donnés en figure 2, 3 et 4.



Quelles caractéristiques de chaque filtre peut-on déduire de ces spectres ?

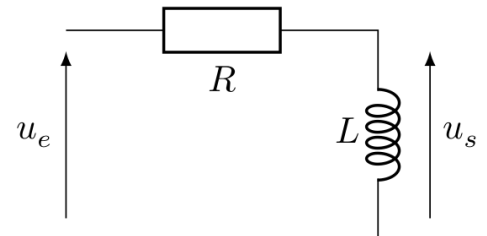
## II Filtre avec une bobine

On considère le circuit ci-contre, avec  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $L = 10 \text{ mH}$ .

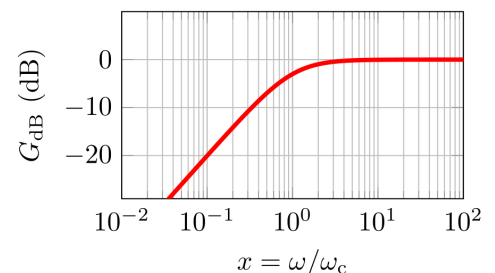
- 1) Sans utiliser le diagramme de BODE, quelle est la nature du filtre ?
- 2) Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j \frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j \frac{\omega}{\omega_c}}$$

avec  $H_0$  et  $\omega_c$  des constantes à préciser.



- 3) Le diagramme de BODE en gain en décibels et représenté ci-dessous. Montrer que la pente de l'asymptote pour  $\omega \ll \omega_c$  est de 20 dB/décade.
- 4) On considère une tension d'entrée  $u_e(t)$  somme de 3 harmoniques de mêmes amplitudes, de mêmes phases initiales, mais de fréquences respectives  $f_1 = 100 \text{ Hz}$ ,  $f_2 = 1 \text{ kHz}$  et  $f_3 = 100 \text{ kHz}$ . Donner le spectre de sortie.



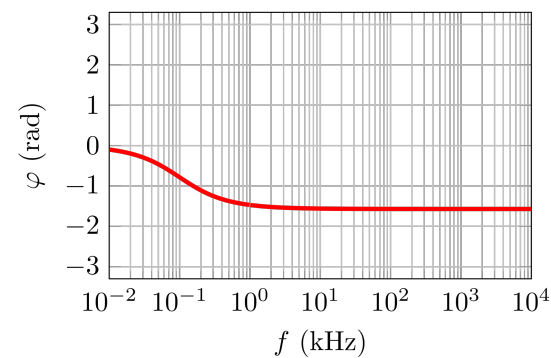
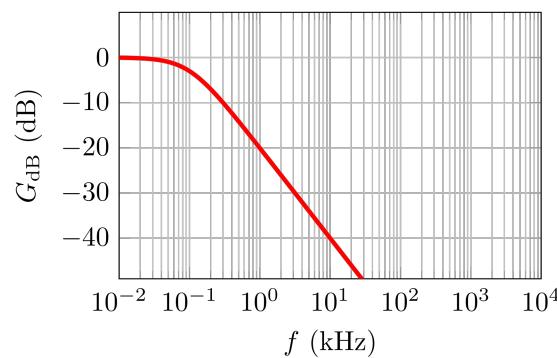
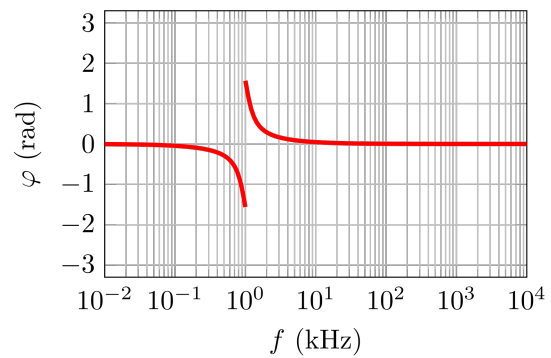
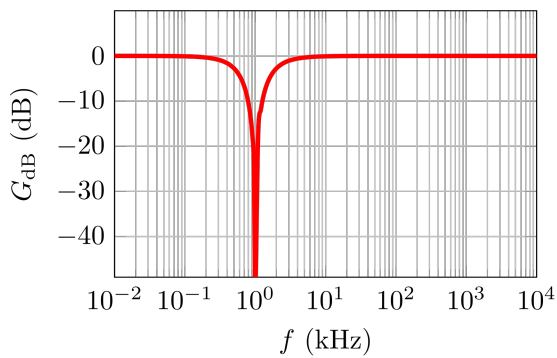
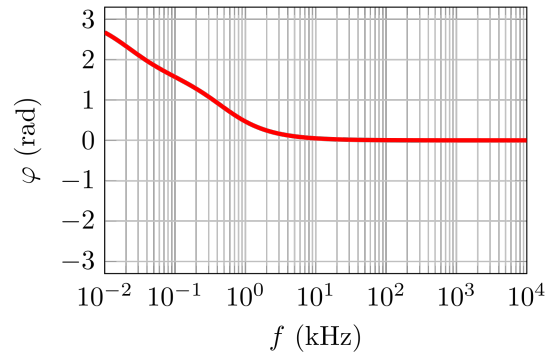
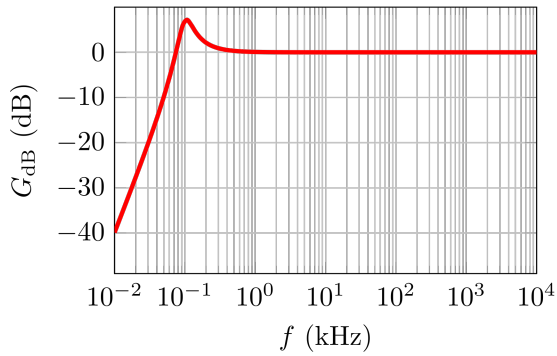
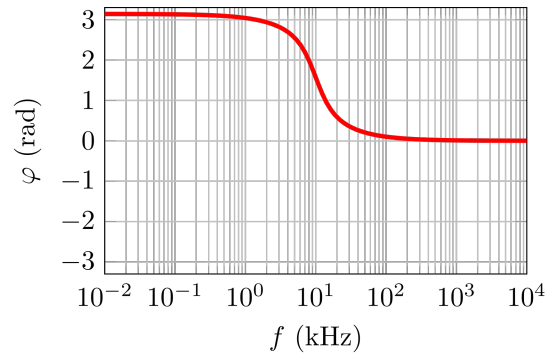
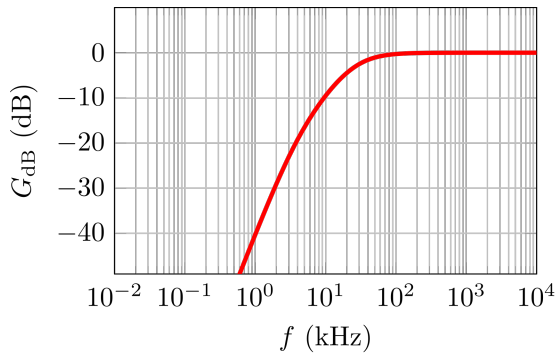
## III Lecture de diagrammes de BODE

On donne, page suivante, les diagrammes de BODE de quatre filtres. Pour chacun d'eux :

- 1) Indiquer le type de filtre dont il s'agit.
- 2) Déterminer l'expression du signal  $s(t)$  de sortie du filtre pour un signal d'entrée

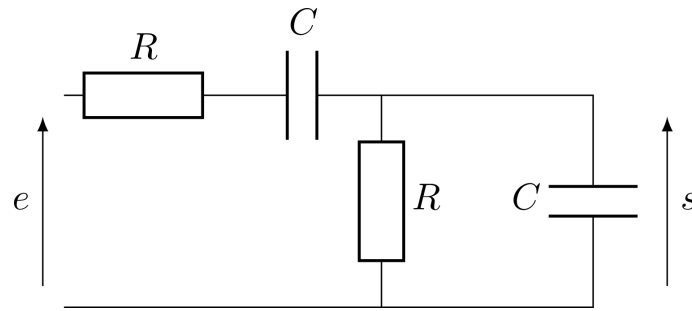
$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

avec une fréquence  $f = 1$  kHz.



## IV Filtre de WIEN

On s'intéresse au filtre de WIEN, représenté ci-contre.



- 1) Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.
- 2) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}$  du filtre.
- 3) On pose  $\omega_0 = 1/RC$  et  $x = \omega/\omega_0$ . Écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)}$$

en précisant les valeurs de  $H_0$  et  $Q$ .

- 4) Calculer simplement le gain maximal du filtre, puis le gain maximal en décibels, et le déphasage correspondant à ce maximum.
- 5) Représenter le diagramme de BODE asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.
- 6) Calculer la pulsation propre  $\omega_0$  pour  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 500 \text{ nF}$ . Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos(10\omega t) + E_0 \cos(100\omega t)$$

avec  $E_0 = 10 \text{ V}$  et  $\omega = 200 \text{ rad s}^{-1}$ .

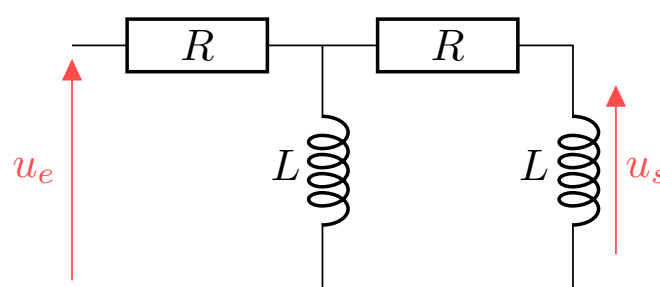
## V Filtre ADSL

Un lutin malin semble avoir chourré votre filtre ADSL. Sale histoire. Heureusement, vous avez les connaissances pour en recréer un ! En sachant que les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

- les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ;
- les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

- 1) Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

Vous réalisez le filtre ci-dessous.



- 2) Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique en basses fréquences et en hautes fréquences. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.
- 3) Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

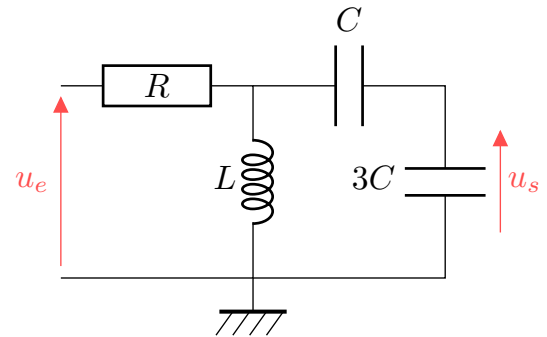
$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

et exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $L$ .

- 4) Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.
- 5) Vous possédez des résistances de  $100 \, \Omega$ . Quelle valeur d'inductance  $L$  choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

## VI Filtre de COLPITTS

On considère le quadripôle suivant, où  $C$  est une capacité,  $R$  une résistance et  $L$  une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , en sortie « ouverte » (rien n'est branché aux bornes de sortie).

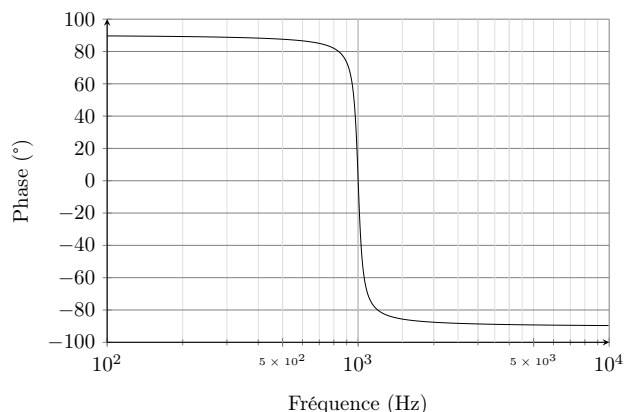
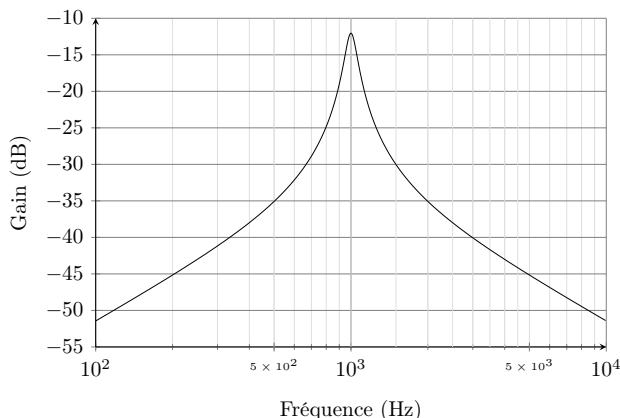


- 1) Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en hautes et basses fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?
- 2) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$  et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

En introduisant des constantes  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  dont on précisera les expressions en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

- 3) Le diagramme de BODE de ce quadripôle pour  $Q = 6$  est donné ci-dessous. Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme. Déduire du diagramme la valeur de la fréquence d'accord  $f_0 = \omega_0/2\pi$  ainsi que des fréquences de coupure.

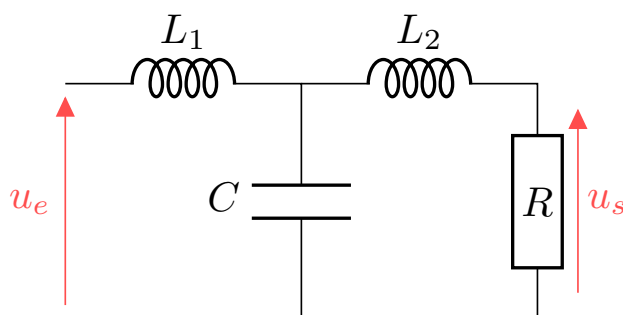


## VII Filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3

On veut réaliser un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3, dont le module  $H$  de sa fonction de transfert harmonique en tension  $\underline{H}$  s'exprime :

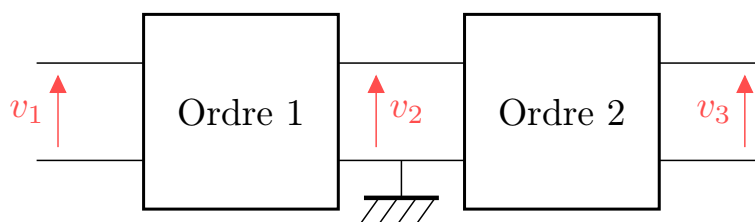
$$H = |\underline{H}| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^6}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

- 1) Montrer qu'une fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$  correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.
- 2) Étudier et représenter le diagramme de BODE asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.
- 3) On considère le quadripôle ci-dessous :



Calculer en fonction de  $R$  et  $\omega_0$ , les valeurs de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $C$  pour que ce filtre soit un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

- 4) Justifier que l'on puisse réaliser le filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 en associant en cascade un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2, comme sur le circuit suivant :



Préciser la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.