Ondes – chapitre 2

Interférences à deux ondes

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Interférences entre deux ondes acoustiques, mécaniques ou lumineuses de même fréquence.
- ▢ Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives.
- ▢ Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique.
- ▢ Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives.
- ▢ Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
- ▢ Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique.
- ▢ Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes.
- ▢ Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Applications

Exemples

Points importants

I Introduction

I/A Approximation par une onde plane

Soit une source en un point S, émettant une onde sinusoïdale. En toute généralité, et même sans atténuation, son amplitude dépend du point considéré :

$$s(\vec{r},t) = A(r)\cos\left(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r} + \varphi_0\right)$$

avec $\vec{k}$ le vecteur d'onde et $\vec{r}$ le vecteur position en 3 dimensions. En effet, l'énergie totale d'une perturbation se répartit selon l'espace disponible. On les différencie alors selon les « vagues » qu'elles forment :

Définition ON2.1 : Fronts d'ondes

Si les fronts d'ondes dessinent :

- une **droite**, alors l'onde est **plane** ;
- un **cercle**, alors l'onde est **circulaire** ;
- une **sphère**, alors l'onde est **sphérique**.

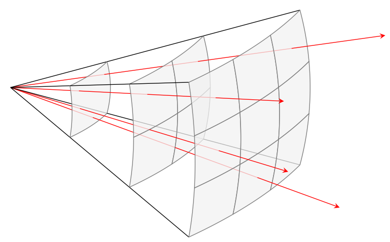


Figure ON2.1 – Front d'onde sphérique.

Pour obtenir de résultats simples, on se limite à des ondes planes avec l'approximation suivante :

Propriété ON2.1 : Approxima° par une onde plane

À des distances de la source S **suffisamment grandes devant la longueur d'onde** λ, on peut approximer la vibration $s(\mathrm{M},t)$ par une **onde plane** :

$$\boxed{s(\mathrm{M},t) = A\cos(\omega t - k\mathrm{SM} + \varphi_0)}$$

avec A constante au voisinage de M.

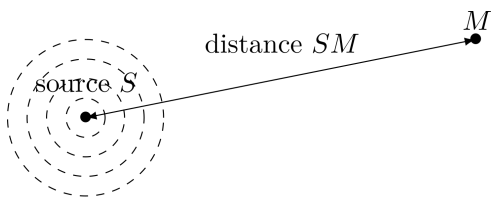


Figure ON2.2 – Approximation par une onde plane

I/B Déphasage

Définition ON2.2 : Phase spatiale et déphasage

Soit deux signaux sinusoïdaux, de **même fréquence**, **longueur d'onde** et **nature**, provenant de 2 sources S_1 et S_2, se superposant en un point M. Avec $n \in [1;2]$:

$$s_n(\mathrm{M},t) = A_n\cos(\omega t - k\mathrm{S}_n\mathrm{M} + \varphi_{0n})$$

On introduit alors pour simplifier la **phase spatiale** :

$$\varphi_1(\mathrm{M}) = -k\mathrm{S}_1\mathrm{M} + \varphi_{01} \quad \text{et} \quad \varphi_2(\mathrm{M}) = -k\mathrm{S}_2\mathrm{M} + \varphi_{02}$$

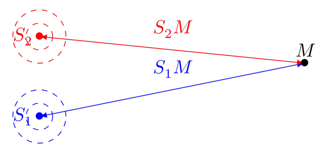


Figure ON2.3

Ainsi, le **déphasage** entre s_2 et s_1 se réduit à leur **différence de phase spatiale** :

$$\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = (\omega t \underbrace{-k\mathrm{S}_1\mathrm{M} + \varphi_{02}}_{\varphi_2(\mathrm{M})}) - (\omega t \underbrace{-k\mathrm{S}_2\mathrm{M} + \varphi_{01}}_{\varphi_1(\mathrm{M})}) \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = \varphi_2(\mathrm{M}) - \varphi_1(\mathrm{M})}$$

I/C Valeurs particulières

Rappel ON2.1 : Déphasages particuliers

En phase

Deux signaux sont **en phase** si leur **déphasage est nul** (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2p\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.

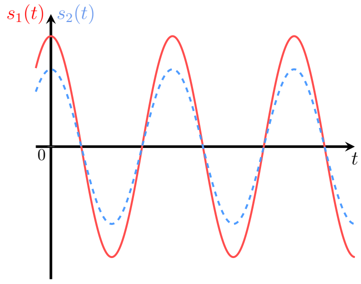


Figure ON2.4 – En phase.

En quadrature

Deux signaux sont en **quadrature phase** si leur déphasage est de $\pm\pi/\mathbf{2}$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.

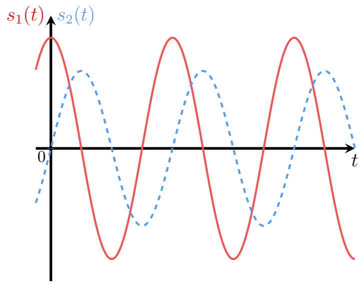


Figure ON2.5 – En quadrature.

En opposition

Deux signaux sont en **opposition de phase** si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = (2p+1)\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à la valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.

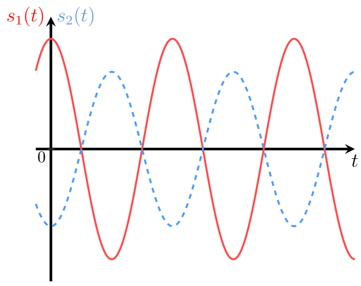


Figure ON2.6 – En opposition.

I/D Déphasage et différence de marche

I/D) 1 Présentation

Comme les fréquences sont les mêmes, le déphasage se réexprime par une différence de distances.

Propriété ON2.2 : Déphasage et différence de marche

On a alors $\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = -k\Delta L_{2/1}(\mathrm{M}) + \Delta\varphi_0}$ avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Différence de marche

$$\boxed{\Delta L_{2/1}(\mathrm{M}) = \mathrm{S_2M} - \mathrm{S_1M}}$$

Déphasage à l'origine

$$\boxed{\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}}$$

Interprétation ON2.1 : Différence de marche

ΔL traduit la distance supplémentaire que doit parcourir une onde par rapport à une autre pour arriver au même point M. Comme elles vont à la même vitesse c (même nature, même fréquence), cette distance supplémentaire introduit un retard de l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire un déphasage.

Démonstration ON2.1 : Différence de marche

$$\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = -k\mathrm{S_2M} + \varphi_{02} - (-k\mathrm{S_1M} + \varphi_{01}) = -k(\mathrm{S_2M} - \mathrm{S_1M}) + \varphi_{02} - \varphi_{01}$$

I/D) 2 Valeurs particulières

Propriété ON2.3 : ΔL particuliers

Pour des sources de même phase à l'origine, on a $\Delta\varphi_0 = 0$. Les déphasages particuliers se réécrivent alors en termes de différence de marche, avec $p \in \mathbb{Z}$:

Type	**En phase**	**En quadrature**	**En opposition**
$\Delta L(\mathrm{M})$	$\boxed{p\lambda}$	$\boxed{\left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}}$	$\boxed{(2p+1)\frac{\lambda}{2}}$

Démonstration ON2.2 : ΔL particuliers

On part du lien entre $\Delta\varphi$ et ΔL, avec $\Delta\varphi_0 = 0$, et de la définition du vecteur d'onde :

$$\Delta\varphi(\mathrm{M}) = -k\Delta L(\mathrm{M}) \Leftrightarrow \Delta L(\mathrm{M}) = -\Delta\varphi(\mathrm{M})\frac{\lambda}{2\pi}$$

Comme $p \in \mathbb{Z}$, $-p \in \mathbb{Z}$, donc le signe $-$ importe peu. Ainsi,

◇ **En phase** :

$$\Delta L(\mathrm{M}) = 2p\pi \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = p\lambda$$

◇ **En quadrature** :

$$\Delta L(\mathrm{M}) = \left(p+\frac{1}{2}\right)\pi \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = \left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{2}$$

◇ **En opposition** :

$$\Delta L(\mathrm{M}) = (2p+1)\,\pi \cdot \frac{\lambda}{2\pi} = (2p+1)\,\frac{\lambda}{2}$$

Tout fonctionne comme si on remplaçait 2π par λ.

II Superposition d'ondes sinusoïdales de mêmes fréquences

II/A Présentation

La plupart du temps, les ondes se croisent sans interagir particulièrement, et on ne voit que la somme des signaux. Voir l'animation `geogebra`[1].

1. https://www.geogebra.org/m/jyh2ZMXJ

Exemple ON2.1 : Superpositions sur une corde

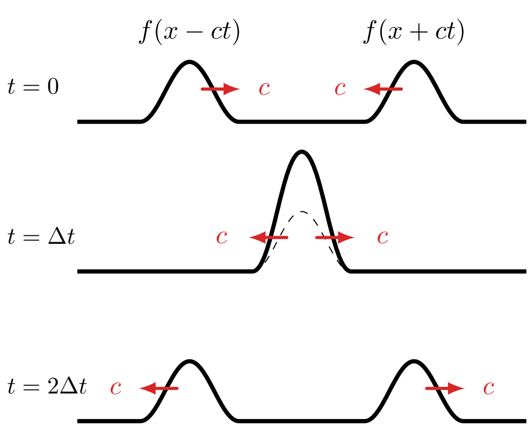


Figure ON2.7 – Mêmes amplitudes.

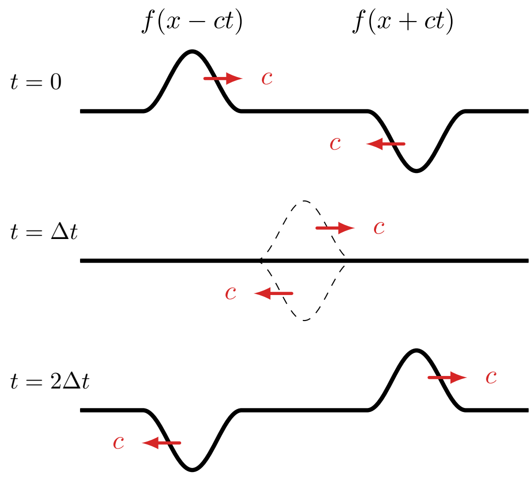


Figure ON2.8 – Amplitudes opposées.

Étudions mathématiquement ce phénomène en utilisant **deux sources sinusoïdales**.

Définition ON2.3 : Hypothèses

Chaque source émet une OPPS[2] **de même fréquence** et **même nature** depuis les points S_1 et S_2 :

$$s_1(\mathrm{M},t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1(\mathrm{M})) \quad \text{et} \quad s_2(\mathrm{M},t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2(\mathrm{M}))$$

et on s'intéresse à leur somme $s(\mathrm{M},t) = s_1(\mathrm{M},t) + s_2(\mathrm{M},t)$ en un point M de l'espace.

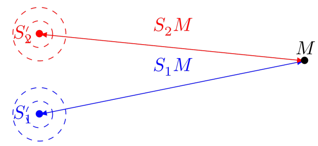


Figure ON2.9 – Schéma.

II/B Signaux de même amplitude : $A_1 = A_2 = A_0$

II/B) 1 Cas général

Outils ON2.1 : Somme de cosinus

On remplace la somme par un produit grâce à la relation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Démonstration ON2.3 : Signal somme même amplitude

$$\begin{aligned}
& s(\mathrm{M},t) = s_1(\mathrm{M},t) + s_2(\mathrm{M},t) \\
\Leftrightarrow\ & s(\mathrm{M},t) = A_0\left[\cos(\omega t + \varphi_1(\mathrm{M})) + \cos(\omega t + \varphi_2(\mathrm{M}))\right] \\
\Leftrightarrow\ & s(\mathrm{M},t) = 2A_0\cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1(\mathrm{M}) - \omega t - \varphi_2(\mathrm{M})}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1(\mathrm{M}) + \omega t + \varphi_2(\mathrm{M})}{2}\right) \\
\Leftrightarrow\ & s(\mathrm{M},t) = 2A_0\cos\left(\frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1(\mathrm{M}) + \varphi_2(\mathrm{M})}{2}\right)
\end{aligned}$$

2. Onde Plane Progressive Sinusoïdale

Propriété ON2.4 : Signal somme même amplitude

Ainsi, $$s(\mathrm{M},t) = A(\mathrm{M})\cos(\omega t + \varphi(\mathrm{M}))$$ avec

$$\boxed{A(\mathrm{M}) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2}\right)} \qquad \boxed{\varphi(\mathrm{M}) = \frac{\varphi_1(\mathrm{M}) + \varphi_2(\mathrm{M})}{2}}$$

II/B) 2 Cas extrêmes

Propriété ON2.5 : Cas extrêmes même amplitude

L'amplitude de $s(\mathrm{M},t)$ est **maximale** pour des signaux **en phase** et **minimale** pour des signaux en **opposition de phase**, avec :

En phase $\boxed{A_{\max} = 2A_0}$ **En opposition** $\boxed{A_{\min} = 0}$

Démonstration ON2.4 : Cas extrêmes même amplitude

Amplitude maximale

$A(\mathrm{M})$ est maximale pour $\cos\left(\frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2}\right) = \pm 1 \Rightarrow A_{\max} = 2A_0$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2}\right) = \pm 1 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2} = p\pi \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = 2p\pi \qquad p \in \mathbb{Z}$$

Ce déphasage correspond à des **signaux en phase**. Lorsque les signaux sont en phase, les maxima et minima de vibration se correspondent et donnent à chaque instant une amplitude double.

Amplitude minimale

$A(\mathrm{M})$ est minimale pour $\cos\left(\frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2}\right) = 0 \Rightarrow A_{\min} = 0$

$$\Rightarrow \quad \cos\left(\frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2}\right) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \frac{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}{2} = p\pi + \frac{\pi}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi \qquad p \in \mathbb{Z}$$

Ce sont donc des **signaux en opposition de phase**. Lorsque les signaux sont en opposition de phase, les maxima et minima de vibration s'opposent, et l'amplitude résultante est nulle.

II/B) 3 Conclusion

Important ON2.1 : Analyse même amplitude

Le signal somme de deux OPPS de **même amplitude** A_0 et **même pulsation** ω est :

1) Un signal **sinusoïdal** et **de même pulsation** ω ;
2) D'amplitude **dépendante de M**, et
   - ◇ **Maximale** $A_{\max} = 2A_0$ pour signaux **en phase** ($\Delta\varphi_{2/1} = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$) ;
   - ◇ **Minimale** $A_{\min} = 0$ pour signaux **en opposition de phase** ($\Delta\varphi_{2/1} = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$).

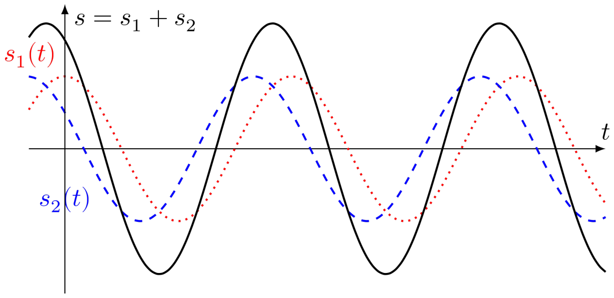


Figure ON2.10 –
Somme avec déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \pi/3$.

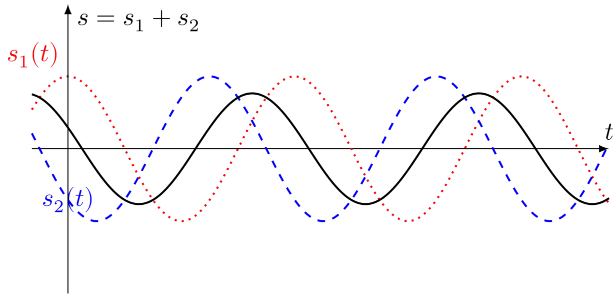


Figure ON2.11 –
Somme avec déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = 3\pi/4$.

II/C Signaux d'amplitudes différentes : $A_1 \neq A_2$

II/C) 1 Cas général

On peut soit utiliser la trigonométrie classique, soit les complexes :

Outils ON2.2 : Trigonométrie

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$
$$|\underline{z}|^2 = \underline{z} \cdot \underline{z}^* \quad \text{et} \quad \tan(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{\mathrm{Re}(\underline{z})}$$

Propriété ON2.6 : Signal somme amplitudes ≠

Ainsi, $s(\mathrm{M},t) = A(\mathrm{M})\cos(\omega t + \varphi(\mathrm{M}))$ avec

$$\boxed{A(\mathrm{M}) = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}))}}$$

$$\boxed{\varphi(\mathrm{M}) = \arctan\left(\frac{A_1\sin\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\sin\varphi_2(\mathrm{M})}{A_1\cos\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\cos\varphi_2(\mathrm{M})}\right)}$$

Démonstration ON2.5 : Signal somme amplitudes ≠

En réels

$$\begin{aligned}
& s(\mathrm{M},t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1(\mathrm{M})) + A_2\cos(\omega t + \varphi_2(\mathrm{M})) \\
\Leftrightarrow\ & s(\mathrm{M},t) = A_1(\cos(\omega t)\cos(\varphi_1(\mathrm{M})) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_1(\mathrm{M}))) \\
& \qquad + A_2(\cos(\omega t)\cos(\varphi_2(\mathrm{M})) - \sin(\omega t)\sin(\varphi_2(\mathrm{M}))) \\
\Leftrightarrow\ & s(\mathrm{M},t) = (A_1\cos(\varphi_1(\mathrm{M})) + A_2\cos(\varphi_2(\mathrm{M})))\cos(\omega t) \\
& \qquad - (A_1\sin(\varphi_1(\mathrm{M})) + A_2\sin(\varphi_2(\mathrm{M})))\sin(\omega t) \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{s(\mathrm{M},t) = A(\mathrm{M})\cos(\omega t + \varphi(\mathrm{M}))}
\end{aligned}$$

car $\quad A(\mathrm{M})\cos(\omega t + \varphi(\mathrm{M})) = A(\mathrm{M})\cos(\varphi(\mathrm{M}))\cos(\omega t) - A(\mathrm{M})\sin(\varphi(\mathrm{M}))\sin(\omega t)$

On trouve donc

$$\begin{cases} A(\mathrm{M})\cos\varphi(\mathrm{M}) = A_1\cos\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\cos\varphi_2(\mathrm{M}) (1) \\ A(\mathrm{M})\sin\varphi(\mathrm{M}) = A_1\sin\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\sin\varphi_2(\mathrm{M}) (2) \end{cases}$$

On obtient $A(\mathrm{M})$ l'amplitude de l'onde somme en prenant $(1)^2 + (2)^2$, et $\tan\varphi(\mathrm{M})$ avec $(2)/(1)$:

$$\begin{cases} A(\mathrm{M})^2 \underbrace{\left(\cos^2\varphi(\mathrm{M}) + \sin^2\varphi(\mathrm{M})\right)}_{=1} = {A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2 \underbrace{\left(\cos\varphi_1(\mathrm{M})\cos\varphi_2(\mathrm{M}) + \sin\varphi_1(\mathrm{M})\sin\varphi_2(\mathrm{M})\right)}_{=\cos(\varphi_1(\mathrm{M})-\varphi_2(\mathrm{M}))} \\ \tan\varphi(\mathrm{M}) = \dfrac{A_1\sin\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\sin\varphi_2(\mathrm{M})}{A_1\cos\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\cos\varphi_2(\mathrm{M})} \end{cases}$$

En complexes

En supposant directement que $s(\mathrm{M},t) = A(\mathrm{M})\cos(\omega t + \varphi(\mathrm{M}))$ (par linéarité),

$$\begin{aligned} \underline{s}(\mathrm{M},t) &= \underline{s_1}(\mathrm{M},t) + \underline{s_2}(\mathrm{M},t) \\ \Leftrightarrow A(\mathrm{M})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\mathrm{M})}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} &= A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} \\ \Leftrightarrow A(\mathrm{M})\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi(\mathrm{M})} &= A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \begin{cases} |\underline{A}(\mathrm{M})|^2 = \underline{A}(\mathrm{M}) \cdot \underline{A}^*(\mathrm{M}) = (\underline{A_1} + \underline{A_2})({\underline{A_1}}^* + {\underline{A_2}}^*) \\ \arg(\underline{A}) = \arg\left(\underline{A_1} + \underline{A_2}\right) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(\mathrm{M})^2 = \left(A_1\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})} + A_2\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})}\right) \cdot \left(A_1\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_1(\mathrm{M})} + A_2\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\varphi_2(\mathrm{M})}\right) \\ \varphi(\mathrm{M}) = \arg(A_1\cos\varphi_1(\mathrm{M}) + \mathrm{j}A_1\sin\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\cos\varphi_2(\mathrm{M}) + \mathrm{j}A_2\sin\varphi_2(\mathrm{M})) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} A(\mathrm{M})^2 = {A_1}^2 \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1(\mathrm{M})-\varphi_1(\mathrm{M}))}}_{=1} + {A_2}^2 \underbrace{\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_2(\mathrm{M})-\varphi_2(\mathrm{M}))}}_{=1} + A_1A_2 \underbrace{\left(\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\varphi_1(\mathrm{M})-\varphi_2(\mathrm{M}))} + \mathrm{e}^{-\mathrm{j}(\varphi_1(\mathrm{M})-\varphi_2(\mathrm{M}))}\right)}_{=2\cos\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})} \\ \tan\varphi(\mathrm{M}) = \dfrac{A_1\sin\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\sin\varphi_2(\mathrm{M})}{A_1\cos\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\cos\varphi_2(\mathrm{M})} \end{cases}$$

Dans tous les cas, on trouve $\begin{cases} A(\mathrm{M}) = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\right)} \\ \varphi(\mathrm{M}) = \arctan\left(\dfrac{A_1\sin\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\sin\varphi_2(\mathrm{M})}{A_1\cos\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\cos\varphi_2(\mathrm{M})}\right) \end{cases}$

II/C) 2 Cas extrêmes

Propriété ON2.7 : Cas extrêmes amplitudes ≠

L'amplitude de $s(\mathrm{M},t)$ est **maximale** pour des signaux **en phase** et **minimale** pour des signaux en **opposition de phase**, avec :

En phase $\boxed{A_{\max} = A_1 + A_2}$

En opposition $\boxed{A_{\min} = |A_1 - A_2|}$

Démonstration ON2.6 : Cas extrêmes amplitudes ≠

Amplitude maximale

Max pour $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\right) = 1 \Rightarrow A_{\max} = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2$

Or, $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\right) = 1 \quad\Leftrightarrow\quad \Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = 2p\pi \qquad p \in \mathbb{Z}$

Amplitude minimale

Min pour $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\right) = -1 \Rightarrow A_{\min} = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$

Or, $\cos\left(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\right) = -1 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi \qquad p \in \mathbb{Z}$

II/C) 3 Conclusion

Important ON2.2 : Analyse amplitudes différentes

Le signal somme de deux OPPS d'amplitudes A_1 et A_2 de même pulsation ω est :

1) Un signal **sinusoïdal** et **de même pulsation** ω ;
2) D'amplitude **dépendante de M**, et
   - ◇ **Maximale** $A_{\max} = A_1 + A_2$ pour signaux **en phase** $(\Delta\varphi_{2/1} = 2p\pi)$;
   - ◇ **Minimale** $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ pour signaux **en opposition de phase** $(\Delta\varphi_{2/1} = (2p+1)\pi)$.

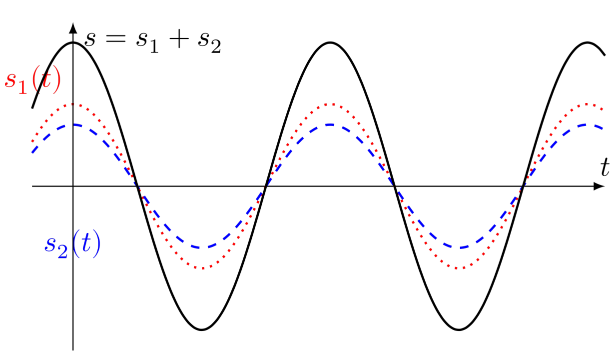


FIGURE ON2.12 – Signaux en phase.

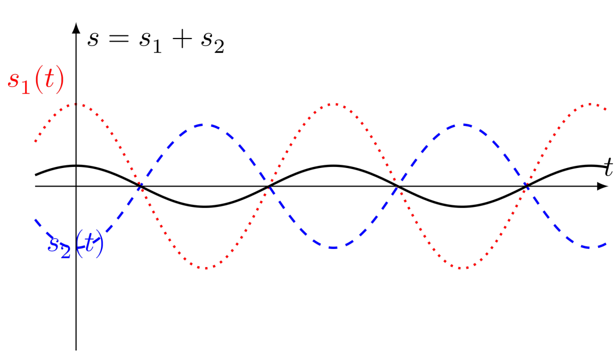


FIGURE ON2.13 – Signaux en opposition.

II/D Bilan

Important ON2.3 : Interférences (pour $\Delta\varphi_0 = 0$)

Pour deux OPPS **de même fréquence**, **nature** et **phase à l'origine*** se superposant en M :

L'amplitude de la somme est **maximale** si les signaux sont **en phase** :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = 2p\pi} \overset{*}{\Leftrightarrow} \boxed{\Delta L_{2/1}(\mathrm{M}) = p\lambda}$$

On parle d'**interférences constructives**.

L'amplitude de la somme est **minimale** si les signaux sont **en opposition de phase** :

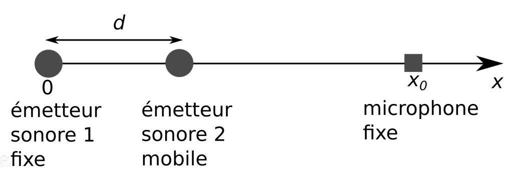
$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi} \overset{*}{\Leftrightarrow} \boxed{\Delta L_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\frac{\lambda}{2}}$$

On parle d'**interférences destructives**.

$p \in \mathbb{Z}$ est appelé l'**ordre d'interférence**[a].

Application ON2.1 : Interférences sonores

Soient 2 émetteurs sonores envoyant une onde progressive sinusoïdale de même fréquence, même amplitude et **même phase à l'origine**. Le premier est fixé à l'origine du repère, l'émetteur 2 est mobile et à une distance d du premier, et un microphone est placé à une distance fixe x_0 de l'émetteur 1 et est aligné avec les deux émetteurs.



a. Pour une animation et visualisation dans le plan, voir ce site.

On néglige l'influence de l'émetteur 2 sur l'émetteur 1 et toute atténuation.

1 Lorsque $d = 0$, qu'enregistre-t-on au niveau du microphone ?

2 On part de $d = 0$ et on augmente d jusqu'à ce que le signal enregistré soit nul. Ceci se produit pour $d = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. Expliquer cette extinction.

3 En déduire la longueur d'onde du son émis.

4 Pour $d = 12{,}0\,\mathrm{cm}$, quelle sera l'amplitude du signal enregistré ?

---

1 Si $d = 0$, alors la différence de marche $\Delta L_{1/2}(x_0) = 0$; de plus, comme les phases à l'origine des temps de chaque source est la même, on a $\Delta\varphi_0 = 0$: ainsi, on a

$$\boxed{\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = 0}$$

Autrement dit, les signaux sont en phase. Comme ils ont la même amplitude, au microphone on enregistre un signal de la fréquence d'émission, avec une amplitude double de celle d'un émetteur.

2 On a toujours $\Delta\varphi_0 = 0$, donc $\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = -k\Delta L_{1/2}(x_0)$. En augmentant la distance entre les sources, on augmente le déphasage (en valeur absolue), en mettant la source 1 en retard par rapport à la 2. Ainsi, il y a une valeur de différence de marche telle que $\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = -\pi$, c'est-à-dire que les signaux seront en opposition de phase et s'annuleront.

3

$$\begin{aligned}
\Delta L_{1/2}(x_0) &= \mathrm{S_1M} - \mathrm{S_2M} = d \\
\Leftrightarrow \Delta\varphi_{1/2}(x_0) &= -k\Delta L_{1/2} = -kd \\
\Leftrightarrow -\pi &= -\frac{2\pi}{\lambda}d \\
\Leftrightarrow &\boxed{\lambda = 2d} \quad \text{avec} \quad d = 6{,}0\,\mathrm{cm} \\
\text{A.N.} \ : \ &\underline{\lambda = 12{,}0\,\mathrm{cm}}
\end{aligned}$$

Les émetteurs émettent dans les micro-ondes.

4 Si on double la distance, alors on aura $\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = -2kd = -2\pi$: ceci est congru à 0 modulo 2π, donc les signaux seront de nouveau en phase, et on récupère le signal trouvé question 1.

III Interférences lumineuses

III/A Cohérence d'ondes lumineuses

Définition ON2.4 : Cohérence entre sources

La plupart des sources lumineuses ont une phase à l'origine qui **n'est pas constante**, mais prend une valeur aléatoire au bout d'un certain temps généralement très court : on dit qu'elles envoient des **trains d'ondes**. On définit ainsi :

- **Temps de cohérence** : τ_c, durée pour laquelle $\varphi_0 = \text{cte}$. Après τ_c, le prochain train d'onde a un autre φ_0.
- **Longueur de cohérence** : $L_c = c\tau_c$, c'est la distance de cohérence d'un train d'onde, i.e. avec une unique phase à l'origine.

Propriété ON2.8 : Condition d'interférence

Pour interférer, **deux sources doivent être cohérentes**, c'est-à-dire avoir $\Delta\varphi_0 = \text{cte}$; ceci n'est en général pas réalisable par manque de contrôle sur cette variation de phase à l'origine, et les interférences lumineuses se font donc **avec une unique source**, donnant forcément des ondes cohérentes.

Exemple ON2.2 : Cohérence

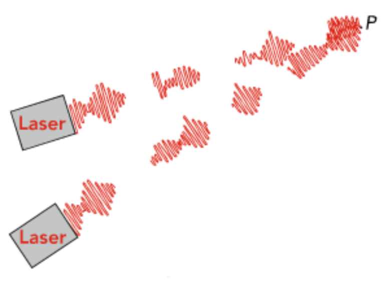


Tableau ON2.1 – Temps et longueurs de cohérence

Source	τ_c (s)	L_c (m)
Lumière du Soleil	2×10^{-15}	6×10^{-7}
Ampoule	3×10^{-14}	1×10^{-5}
Raie rouge hydrogène	1×10^{-11}	4×10^{-3}
Laser hélium-néon	1×10^{-9}	3×10^{-1}

III/B Intensité lumineuse

Propriété ON2.9 : Intensité lumineuse

En général

L'intensité lumineuse est reliée à son signal par :

$$\boxed{I(\mathrm{M}) = K\left\langle s^2(\mathrm{M},t)\right\rangle = K{s_{\text{eff}}}^2}$$

OPPS

Pour une OPPS :

$$\boxed{I(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}KA(\mathrm{M})^2}$$

Démonstration ON2.7 : Intensité lumineuse OPPS

La période (temporelle) typique d'une onde lumineuse est de l'ordre de 10^{-15} s, ou ≈ 1 fs : c'est une échelle de temps infinitésimale **bien inférieure au temps de détection** de n'importe quel capteur optique : l'œil humain a un temps de réponse $\approx 10^{-1}$ s, un capteur CCD $\approx 10^{-6}$ s.

Ainsi, un récepteur optique n'est sensible **qu'à l'énergie moyenne du signal**. Cette énergie est proportionnelle au carré de la grandeur $s(\mathrm{M},t)$ propagée par l'onde (ici électromagnétique), d'où l'expression précédente.

Pour une OPPS (monochromatique), on a donc

$$I(\mathrm{M}) = KA(\mathrm{M})^2 \underbrace{\left\langle \cos^2(\omega t + \varphi(\mathrm{M}))\right\rangle}_{=\frac{1}{2}} = \frac{1}{2}KA(\mathrm{M})^2$$

cohérent avec sa représentation temporelle. On le démontre aussi par intégration (cf. Ap.E6.3).

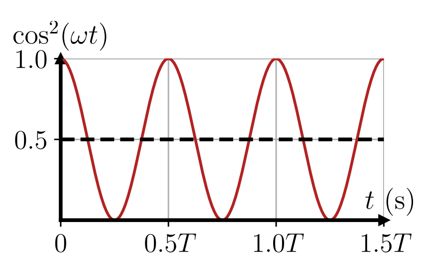


Figure ON2.14 – $\cos^2(\omega t)$ et sa moyenne.

III/C Formule de Fresnel

Propriété ON2.10 : Formule de Fresnel

L'intensité lumineuse $I(\mathrm{M})$ résultant de l'interférence de 2 ondes monochromatiques en un point M de l'espace s'écrit :

$$\boxed{I(\mathrm{M}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\big(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\big)} \quad \text{ou} \quad \boxed{I(\mathrm{M}) = 2I_0\big(1+\cos\big(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\big)\big)}$$

si $A_1 = A_2 = A_0$, c'est-à-dire $I_1 = I_2 = I_0$. On trouve alors

En phase $\boxed{I_{\max} = 4I_0}$ **En opposition** $\boxed{I_{\min} = 0}$

Démonstration ON2.8 : Formule de Fresnel

Soient 2 ondes lumineuses **cohérentes** et de même pulsation, d'amplitudes A_1 et A_2, interférant en un point M. On a vu que le signal somme $s(\mathrm{M},t) = s_1(\mathrm{M},t) + s_2(\mathrm{M},t)$ avait une amplitude

$$A(\mathrm{M}) = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}$$

On trouve donc l'intensité $I(\mathrm{M})$ en en prenant le carré et en multipliant par $\frac{1}{2}K$:

$$I(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}KA(\mathrm{M})^2 = \frac{1}{2}K{A_1}^2 + \frac{1}{2}K{A_2}^2 + 2\frac{1}{2}KA_1A_2\cos\big(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\big)$$

avec $$I_1 = \frac{1}{2}K{A_1}^2 \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2}K{A_2}^2 \quad \text{on trouve} \quad \sqrt{I_1I_2} = \frac{1}{2}KA_1A_2$$ ■

III/D Chemin optique et déphasage

La propagation des ondes lumineuses se fait dans des milieux avec des indices optiques n qui peuvent être différents, et donc avec des vitesses $v = c/n$ différentes. Pour continuer à travailler comme on le fait, il faut cependant que la vitesse des signaux soient les mêmes (même fréquence et même longueur d'onde). On définit ainsi le **chemin optique** :

♥ Définition ON2.5 : Chemin optique

Le trajet d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice n entre les points A et B s'écrit (AB) :

$$\boxed{(\mathrm{AB}) = n \cdot \mathrm{AB}}$$

Démonstration ON2.9 : Chemin optique et $\delta_{2/1}(\mathrm{M})$

En effet, si l'onde 1 parcourt la distance AB dans le milieu n, elle le fait à la vitesse $v = c/n$. Pour considérer qu'elle va à la vitesse $c = nv$, il faut multiplier la distance par n :

$$n\mathrm{AB} = nvt \Leftrightarrow n\mathrm{AB} = ct$$

Tout se passe comme si **l'onde allait à la vitesse c mais parcourait une distance n fois plus grande** : on retrouve alors Impl.O1.2 :

$$\boxed{\lambda = \frac{\lambda_0}{n}} \qquad \text{et} \qquad -k\mathrm{S_1M} = -\frac{2\pi}{\lambda}\mathrm{S_1M} = -\frac{2\pi}{\lambda_0}\cdot n\mathrm{S_1M} = -\frac{2\pi}{\lambda_0}(\mathrm{S_1M})$$

Propriété ON2.11 : Différence de chemin optique

Le déphasage entre 2 ondes *lumineuses*, de même longueur d'onde λ_0 dans le vide, se superposant en M est

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = -k_0\delta_{2/1}(\mathrm{M}) + \Delta\varphi_0} \qquad \text{avec } k_0 = \frac{2\pi}{\lambda_0}$$

Différence de chemin

$$\boxed{\delta_{2/1}(\mathrm{M}) = (\mathrm{S_2M}) - (\mathrm{S_1M})}$$

Déphasage à l'origine

$$\boxed{\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}}$$

IV Expérience des trous d'Young

IV/A Introduction

La nature de la lumière a été sujet à de grands débats durant de nombreux siècles, entre vision corpusculaire et ondulatoire. C'est en 1802 que l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférences lumineuses [3]. Une version moderne de cette expérience consiste à pointer un unique laser de longueur d'onde λ_0 sur deux fentes fines horizontales et parallèles : ces fentes diffractent la lumière est se comportent **comme deux sources cohérentes**.

Définition ON2.6 : Description du résultat

La zone de l'espace où les faisceaux se superposent est appelé **champ d'interférences**. Sur un écran, on observe alors des variations d'intensité lumineuse :

- au milieu des zones claires (**maximum** local d'intensité) on a des **interférences constructives** ;
- au milieu des zones sombres (**minimum** local d'intensité) on a des **interférences destructives**.

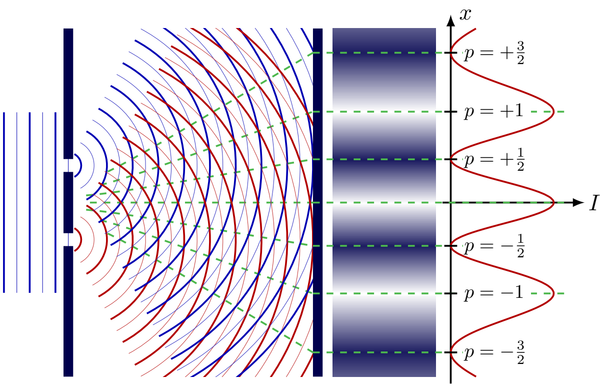


Figure ON2.15 – Figure d'interférence.

On appelle **interfrange** et on le note i la **distance** séparant **deux milieux de franges** brillantes (ou sombres) consécutives.

IV/B Présentation

Définition ON2.7 : Présentation trous d'Young

Soit S une source lumineuse ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde λ_0, éclairant deux fentes fines horizontales et parallèles $\mathrm{F_1}$ et $\mathrm{F_2}$ distantes de $2a$, avec O au milieu. S est situé sur un axe optique perpendiculaire à un écran placé à une distance D très supérieure à a (pour l'approximation en ondes planes). Le milieu de propagation est l'air, d'indice optique $n = 1$.

3. Voir la vidéo La plus belle expérience de la Physique

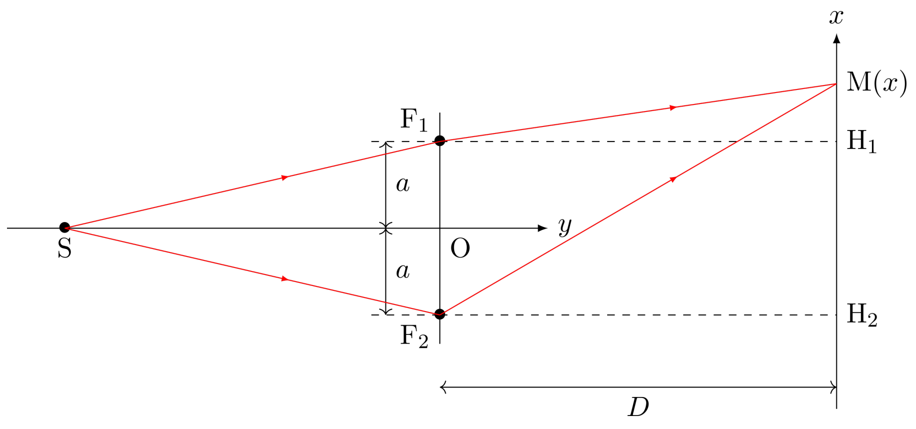


FIGURE ON2.16 – Schéma des trous d'YOUNG

On se limite au tracé de 2 rayons qui interfèrent au point $\mathrm{M}(x)$, passant chacun par une des fentes (voir Figure ON2.16). On a alors successivement :

Interprétation ON2.2 : Expérience des trous d'YOUNG

- **Diffraction** : quand l'**ouverture est de l'ordre de la longueur d'onde**, on observe un étalement du faisceau. Chaque trou créé une **tâche de diffraction**, et ces deux tâches **se superposent sur l'écran** en créant des interférences observables.
- **Interférences** : avec la formule de FRESNEL pour des intensités égales,

$$I(\mathrm{M}) = 2I_0\left(1+\cos\big(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\big)\right)$$

  - **Constructives** : pour $\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = 2p\pi \Leftrightarrow \boxed{\delta_{2/1}(\mathrm{M}) = p\lambda_0}$;
  - **Destructives** : pour $\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi \Leftrightarrow \boxed{\delta_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\dfrac{\lambda_0}{2}}$.

IV/C Résolution

Propriété ON2.12 : Intensité et interfrange

Pour $I_1 = I_2 = I_0$, on obtient

$$\boxed{I(\mathrm{M}) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{4\pi a x}{\lambda_0 D}\right)\right)}$$

décrivant des franges, espacées de

$$\boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{2a}}$$

FIGURE ON2.17 – Franges avec atténuation.

Démonstration ON2.10 : Intensité et interfrange

Intensité

$$\delta_{2/1}(\mathrm{M}) = (\mathrm{SM})_2 - (\mathrm{SM})_1 = \cancel{\mathrm{SF}_2} + \mathrm{F}_2\mathrm{M} - (\cancel{\mathrm{SF}_1} + \mathrm{F}_1\mathrm{M})$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\delta_{2/1}(\mathrm{M}) = \mathrm{F}_2\mathrm{M} - \mathrm{F}_1\mathrm{M}}$$

On cherche donc à exprimer F_1M et F_2M. Pour cela, on place les points H_1 et H_2 projetés orthogonaux de F_1 et F_2 sur l'écran, créant ainsi deux triangles rectangles : F_1H_1M et F_2H_2M.

$$\begin{aligned}
F_2M^2 &= F_2H_2{}^2 + H_2M^2 &\quad \text{et} \quad& F_1M^2 = F_1H_1{}^2 + H_1M^2\\
\Leftrightarrow F_2M &= \sqrt{D^2+(x+a)^2} &\quad \text{et} \quad& F_1M = \sqrt{D^2+(x-a)^2}\\
\Leftrightarrow F_2M &= D\sqrt{1+\left(\frac{x+a}{D}\right)^2} &\quad \text{et} \quad& F_1M = D\sqrt{1+\left(\frac{x-a}{D}\right)^2}
\end{aligned}$$

Or, $\sqrt{1+\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} 1+\dfrac{\varepsilon}{2}$; comme $D \gg (x\ ;\ a) \Rightarrow \dfrac{x\pm a}{D} \ll 1$, alors avec $\varepsilon = \left(\dfrac{x\pm a}{D}\right)^2$ on a :

$$\begin{aligned}
F_2M &\approx D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x+a}{D}\right)^2\right) &\quad \text{et} \quad& F_1M \approx D\left(1+\frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{D}\right)^2\right)\\
\Leftrightarrow F_1M &= D + \frac{(x-a)^2}{2D} &\quad \text{et} \quad& F_2M = D + \frac{(x+a)^2}{2D}
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}
F_2M - F_1M &= \frac{(x+a)^2-(x-a)^2}{2D}\\
\Leftrightarrow \delta_{2/1}(M) &= \frac{(x+\cancel{a}+x-\cancel{a})\times(\cancel{x}+a-(\cancel{x}-a))}{2D}\\
\Leftrightarrow \delta_{2/1}(M) &= \frac{4ax}{2D} \Leftrightarrow \boxed{\delta_{2/1}(M) = \frac{2ax}{D}}
\end{aligned}$$

Soit
$$\begin{aligned}
I(M) &= 2I_0\left(1+\cos\left(-\frac{2\pi}{\lambda_0}\frac{2ax}{D}\right)\right)\\
&\Leftrightarrow \boxed{I(M) = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{4\pi ax}{\lambda_0 D}\right)\right)}
\end{aligned}$$

■

Interfrange

◇ **Interférences constructives** :

$$\delta_{2/1}(M) = p\lambda_0 \Leftrightarrow \boxed{x_p = p\frac{\lambda_0 D}{2a}} \qquad p\in\mathbb{Z}$$

◇ **Interférences destructives** :

$$\delta_{2/1}(M) = (2p+1)\frac{\lambda_0}{2} \Leftrightarrow \boxed{x'_p = \left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda_0 D}{2a}} \qquad p\in\mathbb{Z}$$

◇ **Interfrange** :

$$i = x_{p+1}-x_p \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{\lambda_0 D}{2a}}$$

■

Exemple ON2.3 : Interfrange

Avec deux fentes séparées de 0,20 mm, $\lambda_0 = 632\,\text{nm}$ et $D = 1{,}0\,\text{m}$, on trouve [4]

$$\underline{i = 1{,}6\,\text{mm}}$$

4. Voir une autre animation ici.