Électrocinétique – chapitre 3

Capacités et inductances

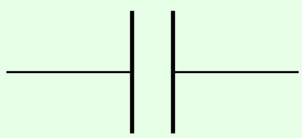
I Condensateur idéal

A Présentation

Définition 3.1 : condensateur

Un condensateur est un composant constitué de deux **surfaces conductrices**[a] appelées *armatures* et séparées par un **matériau isolant**[b]. Son symbole est représenté ci-dessous.

a. Ce sont souvent des plaques, parfois des demi-sphères ou d'autres formes.
b. Par exemple l'air ou du polyéthylène.

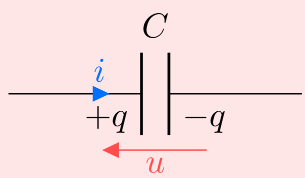


Propriété 3.1 : charge et capacité

Quand un courant traverse le condensateur, des charges s'accumulent sur les plaques : si l'une est chargée q, l'autre est chargée $-q$. La **tension à ses bornes** est **proportionnelle à** q, et on appelle ce coefficient de proportionnalité sa **capacité** notée C. On a donc

$$\boxed{q = Cu}$$

avec C en Farad (F), $C \approx 1\,\mu\text{F}$



B Caractéristique d'un condensateur

Propriété 3.2 : relation courant-tension

Pour un condensateur **en convention récepteur**, l'intensité que le traverse s'exprime par

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$$

Démonstration 3.1 : relation courant-tension

Par définition de i et de la charge au borne de C,

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$$
$$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Implication 3.1 : continuité

Si u_C présente une variation brusque, alors $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ devrait être infini. Or, comme $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, ceci n'est pas possible puisque ça impliquerait que le courant le soit. Ainsi,

> La tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier instantanément, c'est une fonction continue.

Implication 3.2 : régime permanent

En régime permanent (continu), les tensions et courants ne dépendent pas du temps. Alors $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, ainsi

> En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et bloque le courant.

C Énergie stockée dans un condensateur

Propriété 3.3 : énergie stockée

L'énergie emmagasinée dans un condensateur de tension u_C est

$$\boxed{E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C(t)^2}$$

Démonstration 3.2 : énergie stockée

En convention récepteur, la puissance **reçue** est $P_{\text{reçue}} = u_C i = C u_C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \triangleq \frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t}$.
Or, $\forall f$ fonction dérivable, $\boxed{f \times f' = \left(\frac{1}{2} f^2\right)'}$

$$P_{\text{reçue}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} C {u_C}^2\right) \Rightarrow E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C(t)^2$$

Remarque 3.1 : condensateur récepteur ou générateur

Par l'étude de la relation précédente, si $u_C \nearrow$, alors $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} > 0$: ainsi, le condensateur reçoit bien de l'énergie au reste du circuit, et il se **comporte comme récepteur**.

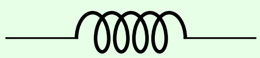
À l'inverse, on lit que si $u_C \searrow$, alors $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} < 0$: ainsi, le condensateur cède en réalité de l'énergie au reste du circuit, autrement dit **il peut se comporter comme générateur** !

II Bobine idéale

A Présentation et caractéristique

Définition 3.2 : bobine

Une bobine est constituée de l'enroulement régulier d'une grande longueur d'un fil métallique, recouvert d'une gaine ou d'un vernis isolant. Son symbole est représenté ci-dessous.

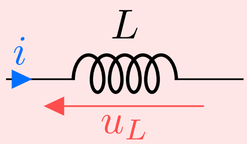


Propriété 3.4 : relation courant-tension

Quand un courant traverse la bobine, une tension apparaît à ses bornes. **En convention récepteur**, celle-ci s'exprime par

$$\boxed{u_L = L \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

avec L l'**inductance**, exprimée en Henry (H), $L \approx 10\,\mathrm{mH}$



Implication 3.3 : continuité

Si i présente une variation brusque, alors $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ devrait être infini. Or, comme $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ceci n'est pas possible puisque ça impliquerait que la tension le soit. Ainsi,

> Le courant i traversant une bobine ne peut pas varier instantanément, c'est une fonction continue.

Implication 3.4 : régime permanent

En régime permanent (continu), les tensions et courants ne dépendent pas du temps. Alors $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, ainsi

> En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et la tension à ses bornes est nulle

B Énergie stockée dans une bobine

Propriété 3.5 : énergie stockée

L'énergie emmagasinée dans une bobine traversée par l'intensité i est

$$\boxed{E_L(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2}$$

Démonstration 3.3 : énergie stockée

En convention récepteur, la puissance **reçue** est $P_{\text{reçue}} = u_L i = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \triangleq \frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}t}$. Or, $\forall f$ fonction dérivable, $\boxed{f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)'}$

$$P_{\text{reçue}} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \Rightarrow E_L(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$$

Remarque 3.2 : bobine réceptrice ou génératrice

Par l'étude de la relation précédente, si $i \nearrow$, alors $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} > 0$: ainsi, la bobine reçoit bien de l'énergie au reste du circuit, et elle se **comporte comme un récepteur**.

À l'inverse, on lit que si $i \searrow$, alors $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} < 0$: ainsi, la bobine cède en réalité de l'énergie au reste du circuit, autrement dit **elle peut se comporter comme un générateur** !

III Circuit RC série : charge

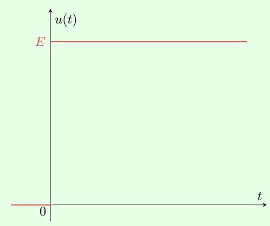
Définition 3.3 : circuits du premier ordre

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

Définition 3.4 : échelon de tension

Un échelon de tension montant est un signal électrique de la forme

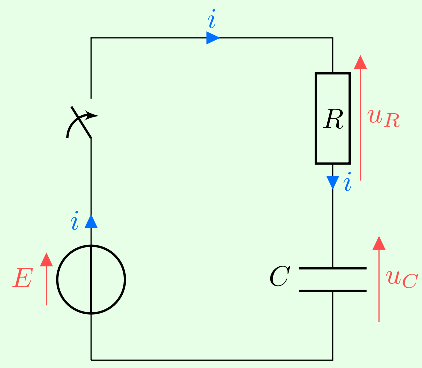
$$\begin{cases} u(t<0) &= 0 \\ u(t \geq 0) &= E \end{cases}$$



A Présentation

Définition 3.5 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal. **On suppose le condensateur initialement déchargé**. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



B Équation différentielle du circuit

Propriété 3.6 : équation diff. RC

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}}$$

avec $\boxed{\tau = RC}$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0}$$

Démonstration 3.4 : équation diff. RC

Avec la loi des mailles,

$$u_R + u_C = E \qquad (1)$$

On utilise la loi d'Ohm et la caractéristique du condensateur : $u_R = Ri$ et $i = C\dfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$$(1) \Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}$$

C Résolution de l'équation différentielle

Propriété 3.7 : solution de l'équation différentielle RC

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumise à un échelon de tension E avec $u_C(0) = 0$ est

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

Important 3.1 : résolution équation différentielle coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant, de la forme $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} + \dfrac{1}{\tau}y = k$:

1) On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
2) On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.
3) On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y(t) = \lambda$.
4) On écrit la **solution générale**, somme de la solution particulière et de la forme générale.
5) On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

Démonstration 3.5 : solution RC série

1) L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0$$

2) La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$u_C(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

3) Une solution particulière avec $u_C(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Donc $u_C(t) = E$ est **une** solution de l'équation différentielle.

4) La solution générale est donc

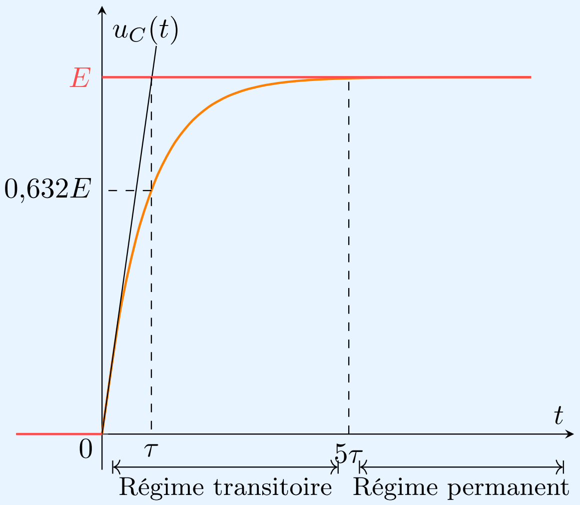
$$u_C(t) = E + K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

5) Les conditions initiales donnent ici, $u_C(t = 0) = 0$. Or, $u_C(0) = K + E$, donc $K = -E$; ainsi

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

D Représentation graphique et constante de temps

Implication 3.5 : constante de temps



Définition 3.6 : régime permanent

Le régime permanent est atteint quand $u_C(t)$ est suffisamment proche de l'asymptote.

Exemple 3.1 : détermination τ

Avec la courbe $u_C(t)$, on remarque que :

1) $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}632 \times E$;
2) La tangente à la courbe en 0 coupe l'asymptote en $t = \tau$.

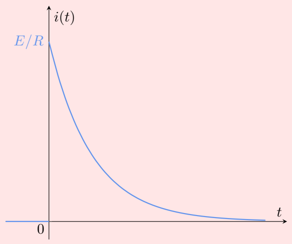
De plus, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0{,}99E$, on trouve $t_{99} = \tau\ln(100)$; ainsi $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$.

E Évolution de l'intensité

Propriété 3.8 : intensité RC charge

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$



Démonstration 3.6 : intensité RC charge

2 méthodes :

1) Avec la caractéristique de C

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow i(t) = CE\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

et $C/\tau = 1/R$.

2) Avec la loi des mailles $Ri = E - u_C$. On isole i en divisant par R.

F Bilan de puissance

Propriété 3.9 : bilan de puissances

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{P_G = P_C + P_J}$$

avec P_G la puissance fournie par le générateur, $P_C = \frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t}$ la puissance reçue par le condensateur et P_J la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.

Démonstration 3.7 : bilan de puissances

Pour obtenir des puissances, **on écrit la loi des mailles et on multiplie par** i. Ici, $E = u_C + Ri$ multiplié par i donne $Ei = u_Ci + Ri^2$. On a bien

$$\boxed{P_G = Ei}, \boxed{P_C = \frac{\mathrm{d}E_C}{\mathrm{d}t}}, \boxed{P_J = Ri^2}$$

G Bilan d'énergie

Propriété 3.10 : bilan d'énergie

Pendant la totalité de la charge

$$E_G = CE^2$$

se répartie équitablement entre le condensateur et la résistance :

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 = E_J$$

Démonstration 3.8 : bilan d'énergie

L'énergie fournie par le générateur sur toute la charge est

$$E_G = \int_0^{+\infty} P_G \mathrm{d}t = \frac{E^2}{R}\left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right]_0^{+\infty}$$
$$E_G = \tau \frac{E^2}{R} = CE^2$$

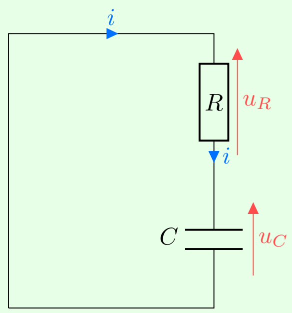
Et celle par le générateur est $E_C = \frac{1}{2}CE^2$ (propriété 3.3) ; forcément $E_J = \frac{1}{2}CE^2$.

IV Circuit RC série : décharge

A Présentation

Définition 3.7 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué de l'association en série avec une résistance et un condensateur idéal. **On suppose le condensateur initialement chargé,** $u_C(0^-) = E$



B Équation différentielle du circuit

Propriété 3.11 : équation diff. RC

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC en décharge

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0}$$

avec $\boxed{\tau = RC}$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = E}$$

Démonstration 3.9 : équation diff. RC

Avec la loi des mailles,

$$u_R + u_C = 0$$

On utilise la loi d'Ohm et la caractéristique du condensateur : $u_R = Ri$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

$$Ri + u_C = 0$$
$$\Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0$$

C Résolution de l'équation différentielle

Propriété 3.12 : solution de l'équation différentielle RC

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC en décharge avec $u_C(0) = E$ est

$$\boxed{u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Démonstration 3.10 : solution RC série

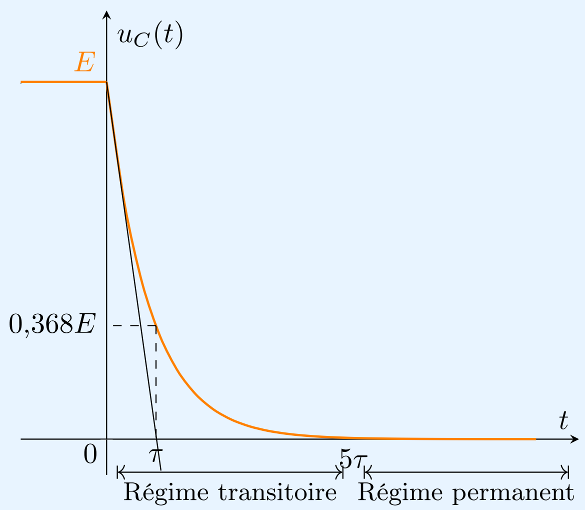
L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale : $u_C(t=0) = E$. Or, $u_C(0) = K$, donc $K = E$, d'où la réponse demandée.

D Représentation graphique et constante de temps

Implication 3.6 : constante de temps



Exemple 3.2 : détermination τ

Avec la courbe $u_C(t)$, on remarque que :

1) $u_C(\tau) = Ee^{-1} \approx 0{,}368 \times E$;
2) La tangente à la courbe en 0 coupe l'asymptote en $t = \tau$.

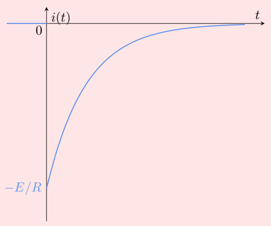
Comme précédemment, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0{,}01$, on trouve $t_{99} = 4{,}6\tau$.

E Évolution de l'intensité

Propriété 3.13 : intensité RC charge

L'intensité dans un circuit RC en décharge s'exprime par

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$



Démonstration 3.11 : intensité RC charge

2 méthodes :

1) Avec la caractéristique de C

$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow i(t) = -\frac{CE}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et $C/\tau = 1/R$.

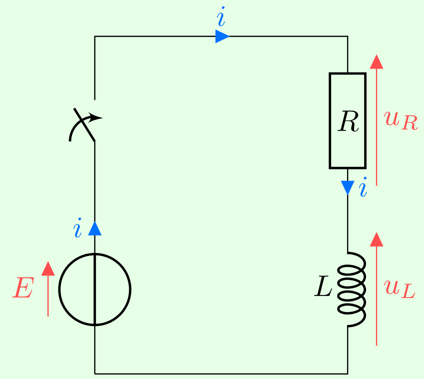
2) Avec la loi des mailles $Ri = -u_C$. On isole i en divisant par R.

V Circuit RL série

A Présentation

Définition 3.8 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



B Équation différentielle du circuit

Propriété 3.14 : équation diff. RL

L'équation différentielle de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i = \frac{E}{R\tau}}$$

avec $\boxed{\tau = L/R}$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = 0}$$

Démonstration 3.12 : équation diff. RL

Avec la loi des mailles,

$$u_L + u_C = E \qquad (1)$$

On utilise la loi d'Ohm et la caractéristique de la bobine : $u_R = Ri$ et $u_L = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$$(1) \Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i = \frac{E}{R\tau}$$

C Résolution de l'équation différentielle

Propriété 3.15 : solution de l'équation différentielle RL

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(0) = 0$ est

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

Démonstration 3.13 : solution RC série

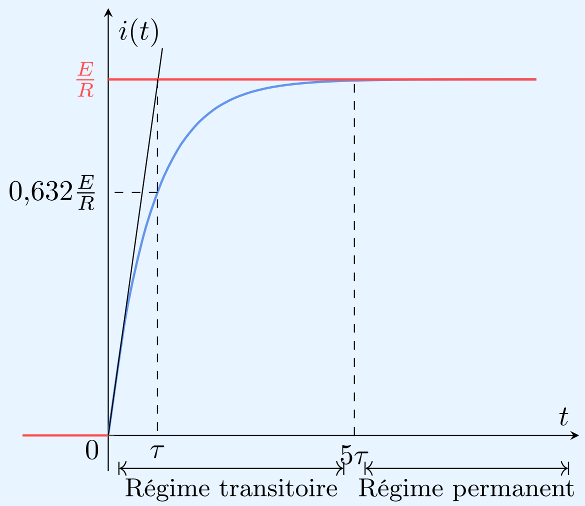
L'équation homogène $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \dfrac{1}{\tau} i = 0$ a pour forme générale de solution $i(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

$i(t) = \lambda \Leftrightarrow 0 + \dfrac{\lambda}{\tau} = \dfrac{E}{R\tau}$, soit $\lambda = \frac{E}{R}$.

Ainsi, la solution générale est $i(t) = \frac{E}{R} + K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Avec $i(0) = 0$, on trouve $K = -E/R$, d'où finalement la solution.

D Représentation graphique et constante de temps

Implication 3.7 : constante de temps



Définition 3.9 : régime permanent

Le régime permanent est atteint quand $i(t)$ est suffisamment proche de l'asymptote.

Exemple 3.3 : détermination τ

Avec la courbe $i(t)$, on remarque que :

1) $i(\tau) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}632 \times \frac{E}{R}$;
2) La tangente à la courbe en 0 coupe l'asymptote en $t = \tau$.

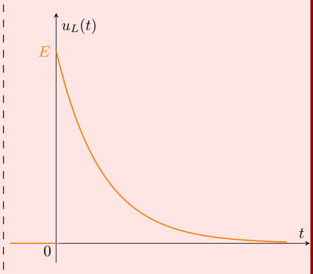
De plus, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0{,}99\frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = \tau \ln(100)$; ainsi $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$.

E Évolution de la tension

Propriété 3.16 : tension RL

La tension dans un circuit RL s'exprime par

$$\boxed{u_L(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$



Démonstration 3.14 : intensité RC charge

2 méthodes :

1) Avec la caractéristique de L

$$u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$
$$\Rightarrow u_L(t) = \frac{LE}{R}\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

et $\tau = L/R$.

2) Avec la loi des mailles $u_L = E - Ri$.

F Bilan de puissance

Propriété 3.17 : bilan de puissances

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{P_G = P_L + P_J}$$

avec P_G la puissance fournie par le générateur, $P_L = \frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}t}$ la puissance reçue par le condensateur et P_J la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.

Démonstration 3.15 : bilan de puissances

Pour obtenir des puissances, **on écrit la loi des mailles et on multiplie par i**. Ici, $E = u_L + Ri$ multiplié par i donne $Ei = u_L i + Ri^2$. On a bien (cf. énergie stockée)

$$\boxed{P_G = Ei}, \boxed{P_L = \frac{\mathrm{d}E_L}{\mathrm{d}t}}, \boxed{P_J = Ri^2}$$

Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe RI^2. On ne peut intégrer à l'infini.