

Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

Au programme



Savoirs

- ◇ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
- ◇ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.



Savoir-faire

- ◇ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.
- ◇ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.



Sommaire

I Introduction	2
I/A Rappels oscillateurs	2
I/B Méthode des complexes	2
I/C Notion de résonance et bande passante	3
II Exemple d'oscillateur : circuit RLC série en RSF	3
II/A Présentation	3
II/B Étude de l'intensité	4
II/C Étude de la tension	7
III Exemple d'un oscillateur mécanique en RSF	10
III/A Présentation	10
III/B Étude de l'élongation	10
III/C Résonance en vitesse	11
IV Synthèse	12

I Introduction

I/A Rappels oscillateurs

Comme nous l'avons vu au chapitre 4, les oscillateurs amortis caractérisés par une grandeur physique x sont régis par une équation du type :

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Dans le cadre d'un signal d'entrée sinusoïdal $f(t) = A_0 \cos(\omega t)$ avec une pulsation ω (i.e. une fréquence $\omega/2\pi$), cette équation devient

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 f(t) = \omega_0^2 A_0 \cos(\omega t)$$

avec A_0 l'amplitude du forçage.

De la même manière qu'avec une excitation constante ($f(t) = E$ en échelon montant), la solution de cette équation différentielle sera la somme d'une solution homogène, caractéristique d'un régime transitoire, et d'une solution particulière. On a vu que celle-ci prendrait la même forme que le signal d'entrée, et sera donc également sinusoïdale. On a donc

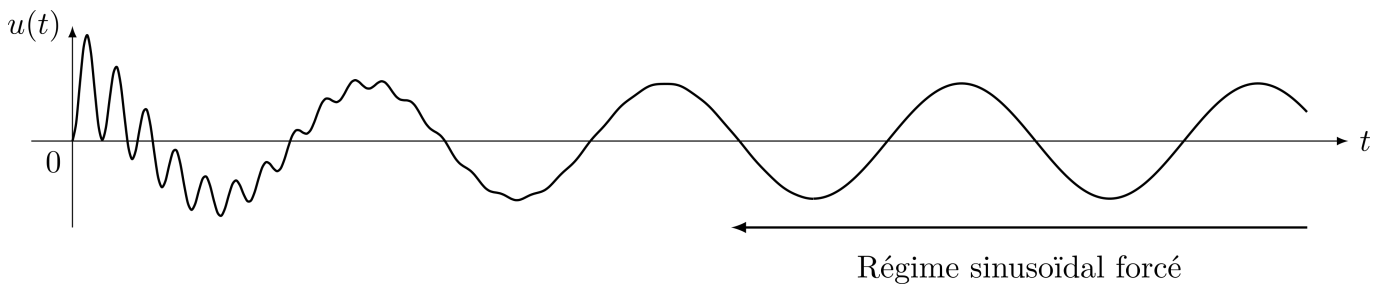
$$x(t) = x_H(t) + x_P(t)$$

$x_H(t) \xrightarrow[t \rightarrow +\infty]{} 0$

et

$x_P(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$

On rappelle que le régime sinusoïdal forcé correspond au régime où la solution homogène est négligeable devant la solution particulière. On aura donc des solutions de la forme suivante



et le but de l'étude de ces systèmes en RSF est de trouver l'amplitude X et la phase φ .

I/B Méthode des complexes

Comme dans le chapitre précédent, le passage aux complexes permet d'exprimer simplement les valeurs de X et de φ . Pour passer en complexes, on note

$$\underline{f}(t) = A_0 e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi)} \Leftrightarrow \underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{X} = X e^{j\varphi}$$

Ainsi, dériver en complexes revient à **multiplier par $j\omega$** : à partir de l'équation différentielle d'un oscillateur, on aura alors, selon les exemples, une amplitude de la forme

$$\underline{X} = \frac{A_0}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)}$$

Attention

Cette forme de résonance n'est qu'un **exemple**. Elle dépend du système.

On trouve donc l'amplitude du signal en en prenant le module :

$$X = |\underline{X}| = \frac{A_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_r} - \frac{\omega_r}{\omega} \right)^2}}$$

I/C Notion de résonance et bande passante

Par l'étude de l'amplitude, on retrouve bien que X ne dépend pas des conditions initiales, mais bien de l'amplitude d'entrée mais surtout **dépend de la pulsation**. Notamment, on trouve que

$$X \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad X \xrightarrow[\omega \rightarrow 0]{} 0$$

Ainsi, il y a une valeur particulière de pulsation telle que l'amplitude est maximale : c'est ce qu'on appelle la résonance.

Résonance

Un oscillateur forcé présente une résonance si l'amplitude de ses oscillations est maximale pour une fréquence de forçage finie et non nulle. La fréquence correspondante est appelée fréquence de résonance.

La représentation de l'amplitude en fonction de la pulsation est donc piquée autour de son maximum X_{\max} à la pulsation de résonance ω_r . Ce pic peut être plus ou moins fin, ce que l'on caractérise par la **bande passante**

Bande passante

C'est le domaine de pulsations du forçage pour lequel

$$X(\omega) > X_{\max}/\sqrt{2}$$

- ◇ ω_1 et ω_2 les **pulsations de coupure** ;
- ◇ $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$ la **bande passante** ;
- ◇ $\omega_r/\Delta\omega$ l'**acuité de la résonance**.

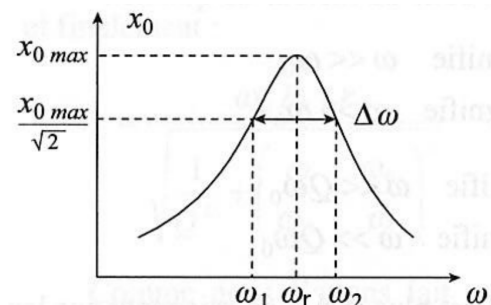


FIGURE 6.1 – Bande passante et pic de résonance.

II Exemple d'oscillateur : circuit RLC série en RSF

II/A Présentation

On étudie l'oscillateur amorti RLC série, dont le circuit en réel et en complexes est le suivant :

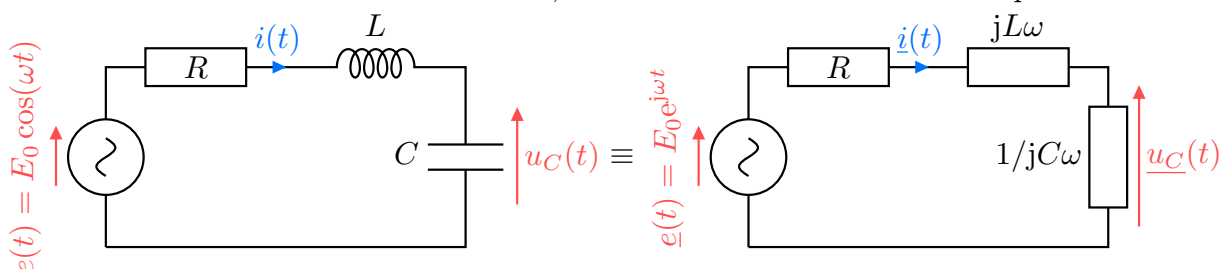


FIGURE 6.2 – RLC série en RSF.

Rappel

Pour un signal d'entrée $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ les différentes tensions et intensités dans le circuit oscilleront **à la même pulsation** ω , et seront de la forme $u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u)$ et $i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$ où U, I et $\varphi_{u,i}$ sont quatre constantes dépendant du système et de l'excitation ω .

II/B Étude de l'intensité

Situation initiale

Pour étudier le comportement de l'intensité, on va comme d'habitude se ramener à une seule maille avec une impédance équivalente

$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_R + \underline{Z}_L + \underline{Z}_C$$

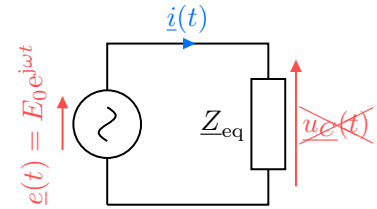


FIGURE 6.3

II/B) 1 Équation

Avec l'impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$, on a

$$\begin{aligned} E &= \underline{Z}_{\text{eq}} \underline{I} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} \right) \underline{I} && \text{On isole et on factorise par } j \\ \Leftrightarrow \underline{I} &= \frac{E}{R + j \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)} && \text{On factorise par } R \\ \Leftrightarrow \underline{I} &= \frac{E/R}{1 + j \left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega} \right)} \end{aligned}$$

Ici on a factorisé par R pour avoir un numérateur homogène à une intensité, et un dénominateur adimensionné. On aimerait aller plus loin, et transformer les $\frac{L}{R}$ et RC en expressions semblables à ω , en les reliant à $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$. Pour cela, on se rappelle la forme canonique de l'équation différentielle sur $i(t)$ du RLC :

$$\frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{di}{dt} + \frac{1}{LC} i = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2 i}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{di}{dt} + \omega_0^2 i = 0$$

avec ω_0 la **pulsation propre** et Q le **facteur de qualité**, tels que

$$\boxed{\omega_0^2 = \frac{1}{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{RC} = Q\omega_0}$$

Méthode de calcul

Résultat

On peut donc réécrire la fraction initiale :

$$\underline{I} = \frac{E/R}{1 + j \left(\frac{Q\omega}{\omega_0} - \frac{Q\omega_0}{\omega} \right)} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{E/R}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}$$

II/B) 2 Amplitude

Résultat

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module, et comme en introduction cette amplitude dépend de la pulsation du système :

$$I(\omega) = |\underline{I}| = \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

Méthode

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} I(\omega_r) = I_{\max} &\Leftrightarrow 1 + Q^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r} \right)^2 \text{ minimal} \\ &\Leftrightarrow Q^2 \left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r} \right)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0} \end{aligned}$$

Conclusion

On trouve alors

$$I_{\max} = I(\omega_0) = \frac{E_0}{R} \quad \text{et} \quad \boxed{I \xrightarrow[\omega \rightarrow 0^+]{}} 0 \quad \text{et} \quad \boxed{I \xrightarrow[\omega \rightarrow +\infty]{}} 0$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas de condition pour avoir résonance en intensité**, et que **la pulsation de résonance est la pulsation propre du système**.

II/B) 3 Phase

Résultat

Pour finir l'étude du système, il nous faut déterminer la phase en prenant l'argument de \underline{I} , en se souvenant que l'argument d'un rapport est la différence des arguments :

$$\begin{aligned} \varphi_i &= \underbrace{\arg(E_0/R)}_{=0} - \arg \left(1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \right) \\ &\Leftrightarrow \boxed{\tan \varphi_i = -Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\varphi_i \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[} \end{aligned}$$

puisque $\cos \varphi_i > 0$ (la partie réelle est positive).

Conclusion

$$\tan \varphi_i \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} +\infty \rightarrow \boxed{\varphi_i \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} +\pi/2}$$

$$\tan(\varphi_i(\omega_0)) = 0 \rightarrow \boxed{\varphi_i(\omega_0) = 0}$$

on peut détecter la résonance quand le déphasage entre \underline{i} et \underline{e} est nul.

$$\tan \varphi_i \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\infty \rightarrow \boxed{\varphi_i \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\pi/2}$$

II/B) 4 Facteur de qualité et bande passante

Nous avons déterminé l'amplitude et la phase du signal, ainsi que la pulsation de résonance. Pour finir de caractériser la résonance, il ne reste qu'à déterminer la bande passante. On cherche donc les pulsations de coupure telles que $I(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$.

$$I(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} = \frac{E_0/R}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2 \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned} & Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = -1 \quad \text{et} \quad Q \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) = 1 \\ \Leftrightarrow & \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \times \omega \omega_0 = -\frac{\omega \omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right) \times \omega \omega_0 = \frac{\omega \omega_0}{Q} \\ \Leftrightarrow & \omega^2 - \omega_0^2 = -\frac{\omega \omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega^2 - \omega_0^2 = \frac{\omega \omega_0}{Q} \\ \Leftrightarrow & \boxed{\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q} \omega - \omega_0^2 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q} \omega - \omega_0^2 = 0} \\ \Rightarrow & \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} + 4\omega_0^2 \quad \Leftrightarrow \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 + 4Q^2) \\ \Rightarrow & \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \\ \Leftrightarrow & \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} (-1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}) \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} (1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}) \end{aligned}$$

$\times \omega \omega_0$
 On développe
 Trinôme
 Discriminant
 Solutions
 Factorisation

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1 - \sqrt{1 + 4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1 - \sqrt{1 + 4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

$$\boxed{\omega_{1,+} = \frac{\omega_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} - 1) \quad \text{et} \quad \omega_{2,+} = \frac{\omega_0}{2Q} (\sqrt{1 + 4Q^2} + 1)}$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}$$

ce qui est également une **nouvelle définition de Q** ! En effet, cette égalité traduit le fait qu'à haut facteur de qualité, la bande passante est très faible, ou que **l'acuité de la résonance est élevée**.

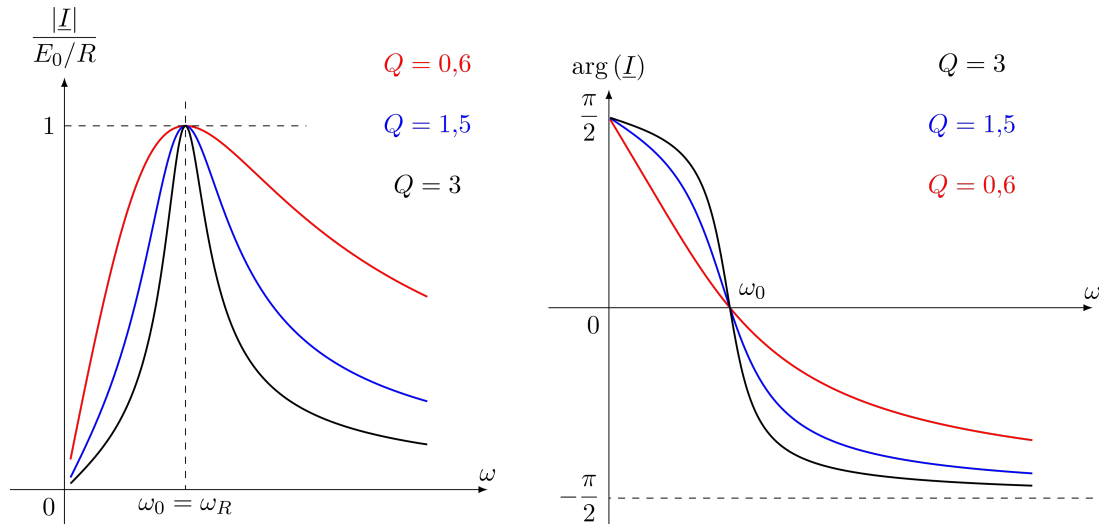


FIGURE 6.4 – Amplitude et phase en fonction de Q pour \underline{I} en RLC série.

II/C Étude de la tension

On repart du circuit en complexes, avec $\underline{u}_C(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$ et $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$, et on applique le pont diviseur de tension.

II/C) 1 Amplitude complexe

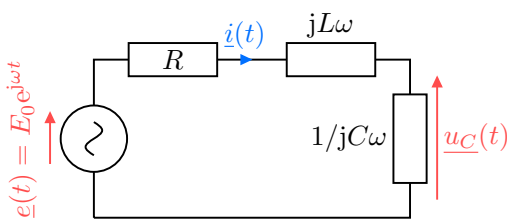


FIGURE 6.5 – RLC série : étude de \underline{u}_C .

$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + 1/jC\omega} E \\ \Leftrightarrow \underline{U} &= \frac{E}{1 - (LC\omega)^2 + jRC\omega} \\ \Leftrightarrow \underline{U} &= \frac{E}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}} \end{aligned}$$

(multiplier par $\times jC\omega$)
ω₀ et Q

Ici encore, on a factorisé par $1/jC\omega$ pour avoir un numérateur homogène à une tension et un dénominateur adimensionné d'abord. Ensuite puis pour aller plus loin, on transforme les LC et RC en expressions semblables à ω , en les reliant à ω_0 . On a comme précédemment

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{donc} \quad Q\omega_0 = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \frac{1}{RC} = Q\omega_0$$

II/C) 2

 Amplitude réelle et condition de résonance

Résultat

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module, et comme en introduction cette amplitude dépend de la pulsation du système :

$$U(\omega) = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est **non nul** et minimal, c'est-à-dire

$$U(\omega_r) = U_{\max} \Leftrightarrow \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2 \text{ minimal}$$

Soit $X = \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2$, et $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q^2}$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

Méthode

$$\begin{aligned} f'(X_r) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2(1 - X_r) + \frac{1}{Q^2} &= 0 && \left. \begin{array}{l} \text{On dérive} \\ \text{On isole} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow X_r - 1 &= -\frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow X_r = 1 - \frac{1}{2Q^2} \\ \Leftrightarrow \omega_r &= \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{Q^2 - \frac{1}{2}}} && \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} X_r = \left(\frac{\omega_r}{\omega_0}\right)^2 \end{aligned}$$

ce qui n'est défini **que si** $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$. On calcule alors $f(X_r)$ en injectant la solution :

$$\begin{aligned} f(X_r) &= \left(1 - \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right) && \left. \begin{array}{l} \text{On simplifie et développe} \\ \text{Même dénominateur} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow f(X_r) &= \left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4} \\ \Leftrightarrow f(X_r) &= \frac{1}{4Q^2} - \frac{2}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} && \left. \begin{array}{l} \text{On calcule} \\ \text{On factorise} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow f(X_r) &= \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} \\ \Leftrightarrow \boxed{f(X_r) &= \frac{1}{Q^2} \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)} \end{aligned}$$

Conclusion

On trouve alors :

$Q \leq 1/\sqrt{2}$: pas de résonance, l'amplitude est maximale pour

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = E_0$$



$Q > 1/\sqrt{2}$: La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{Q^2 - \frac{1}{2}} < \omega_0 \quad \text{et} \quad U(\omega_r) = \frac{QE}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

$Q > 5$:

$$\omega_r \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad U(\omega_r) \approx QE$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en tension**, et que la **résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

II/C) 3 Phase

Ici aussi, on détermine la phase en prenant l'argument de l'amplitude complexe :

$$\varphi_u = \underbrace{\arg(E_0)}_{=0} - \arg\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan \varphi_u = -\frac{\omega}{Q\omega_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)} \quad \text{avec} \quad \varphi_u \in]-\pi; 0[$$

Conclusion

$$\begin{aligned} \tan \varphi_u \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} 0 &\Rightarrow \varphi_u \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} 0 \\ \tan(\varphi_u(\omega_0)) &\rightarrow -\infty \Rightarrow \varphi_u(\omega_0) = -\frac{\pi}{2} \\ \tan \varphi_u \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0 &\Rightarrow \varphi_u \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} -\pi \end{aligned}$$

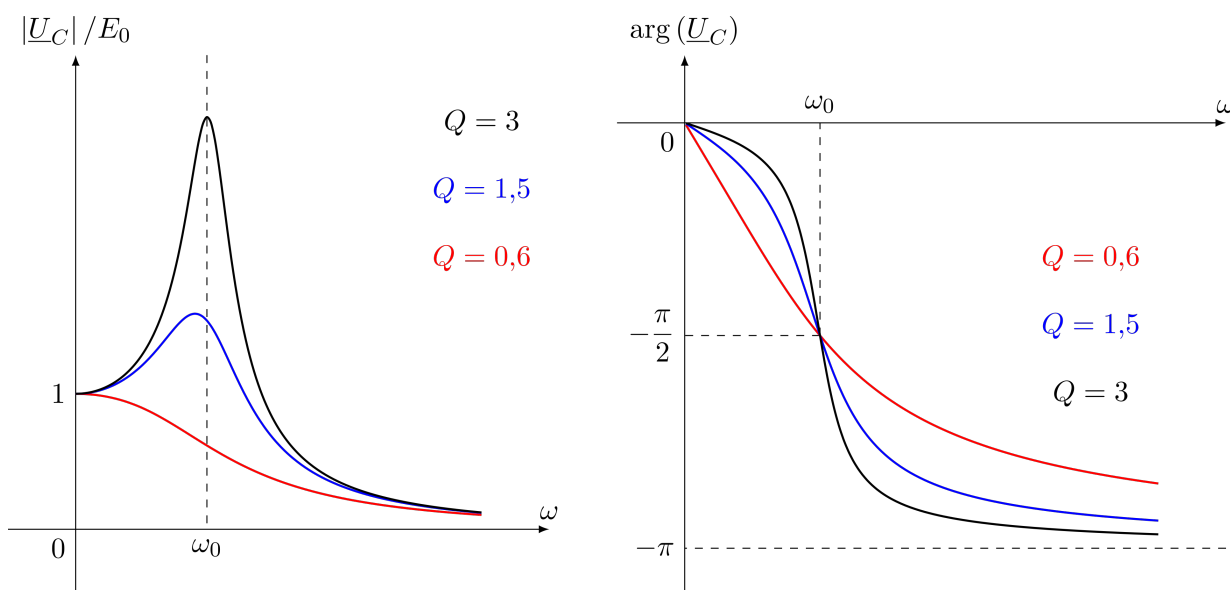


FIGURE 6.6 – Amplitude et phase en fonction de Q pour \underline{U}_C en RLC série.

III Exemple d'un oscillateur mécanique en RSF

III/A Présentation

Système : point matériel M de masse m relié à un ressort horizontal **idéal**.

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O, x, y, t)$;

Soit $x = \ell - \ell_0$ la position de la masse

Bilan des forces :

- 1) Poids $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$;
- 2) Réaction du support $\vec{R} = R \vec{u}_y$;
- 3) Force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ressort}} = -kx \vec{u}_x$;
- 4) Force de frottement fluide $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha \vec{v}$;
- 5) Force excitatrice $\vec{f}_e = F_0 \cos(\omega t) \vec{u}_x$.

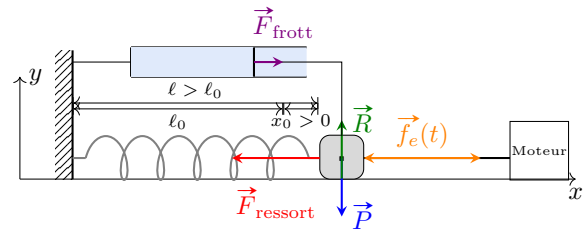


FIGURE 6.7 – Schéma du ressort en RSF.

III/B Étude de l'élongation

III/B) 1 Équation

Avec le PFD :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{ressort}} + \vec{F}_{\text{frott}} + \vec{f}_e$$

$$\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2 x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx - \alpha v + F_0 \cos(\omega t) \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

La projection sur \vec{u}_y montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe \vec{u}_x on trouve

$$m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = F_0 \cos(\omega t) \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x = \frac{F_0}{m} \cos(\omega t)$$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$

En passant en complexes,

$$\underline{X} = \frac{F_0/m}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q}} \Leftrightarrow$$

$$\underline{X} = \frac{F_0}{m \omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

III/B) 2 Amplitude réelle et condition de résonance

Résultat

On trouve

$$X(\omega) = |X| = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}$$

Elle est maximale quand le dénominateur est minimal. Après calcul, on retrouve les résultats de l'excitation en tension :

Conclusion

On trouve alors :

$Q \leq 1/\sqrt{2}$: pas de résonance, l'amplitude est maximale pour

$$\omega = 0 \quad \text{et} \quad X(0) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}$$

$Q > 1/\sqrt{2}$: il y a résonance, et l'amplitude est maximale pour

$$\omega_r = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{Q^2 - \frac{1}{2}} < \omega_0 \quad \text{et} \quad X(\omega_r) = \frac{F_0}{m\omega_0^2} \frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

$Q > 5$:

$$\omega_r \approx \omega_0 \quad \text{et} \quad X(\omega_r) \approx \frac{QF_0}{k}$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en élongation**, et que la **résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

Vous trouverez ici ¹ une animation interactive d'un système similaire avec un ressort vertical.

III/C Résonance en vitesse

III/C) 1 Équation

À partir de $v(t) = \frac{dx}{dt} \Leftrightarrow \underline{V} = j\omega \underline{X}$:

$$\begin{aligned} \underline{V} = j\omega \underline{X} &= \frac{F}{m\omega_0} \frac{j\omega}{\omega_0 \left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)} = \frac{F}{m\omega_0} \frac{\omega}{-j \left(\omega_0 - \frac{\omega^2}{\omega_0} + j\frac{\omega}{Q}\right)} \\ \Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{F}{m\omega_0} \underbrace{\frac{\omega}{\omega}}_{=1} \frac{1}{-j\frac{\omega_0}{\omega} + j\frac{\omega}{\omega_0} - j^2\frac{1}{Q}} = \frac{F}{m\frac{\omega_0}{Q}} \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} \end{aligned}$$

Calculs

1. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Javascript

Ainsi,

$$\underline{V} = \frac{F_0}{\alpha} \frac{1}{1 + jQ \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \quad \text{car} \quad m \frac{\omega_0}{Q} = \alpha$$

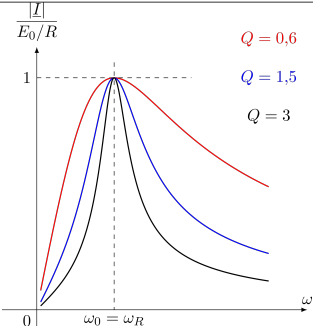
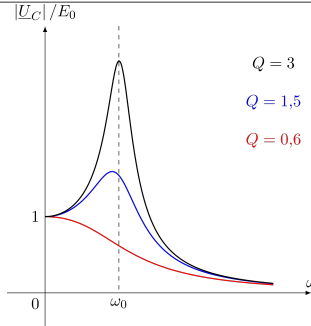
Conclusion

On trouve alors

$$V_{\max} = V(\omega_0) = \frac{F_0}{\alpha} \quad \text{et} \quad V \xrightarrow{\omega \rightarrow 0^+} 0 \quad \text{et} \quad V \xrightarrow{\omega \rightarrow +\infty} 0$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas de condition pour avoir résonance en vitesse**, et que **la pulsation de résonance est la pulsation propre du système**.

IV Synthèse**Synthèse résonances**

Grandeur	Intensité/vitesse	Tension/élongation
Existence	Toujours	$Q > 1/\sqrt{2}$
Pulsation de résonance	ω_0	$\omega_r \lesssim \omega_0$
Largeur de résonance	$\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$	$\Delta\omega \approx \frac{\omega_0}{Q}$
Aspects à ω_r	Maximum d'amplitude Déphasage nul, $\varphi = 0$	Maximum d'amplitude
Aspects à ω_0	Résonance	Sortie = $Q \times$ entrée Quadrature de phase, $\varphi = -\frac{\pi}{2}$
Courbes d'amplitude		
Courbes de phase	