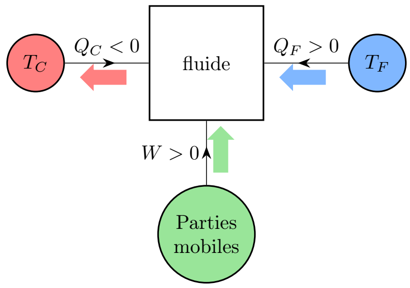
Thermodynamique – chapitre 5

Correction du TD

I Pompe à chaleur domestique

1) 

Une pompe à chaleur reçoit un transfert thermique de la source froide ($Q_F = Q_2 > 0$) et cède un transfert thermique à la source chaude ($Q_C = Q_1 < 0$). Cela nécessite de lui apporter un travail ($W > 0$).

2) Le cycle d'efficacité maximale est le **cycle de Carnot**, composé de deux isothermes aux températures des sources et de deux adiabatiques réversibles.

3)
$$
\begin{aligned}
e^{\text{PAC}} &= \frac{-Q_C}{W} = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} \\
\Leftrightarrow e^{\text{PAC}} &= \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}} \qquad \frac{Q_F}{T_F} \leq -\frac{Q_C}{T_C} \\
& \qquad\qquad\qquad \text{Or, } Q_C < 0 \\
\Leftrightarrow e^{\text{PAC}} &\leq \frac{1}{1 - \frac{T_C}{T_F}} \qquad 1 + \frac{Q_F}{Q_C} \geq 1 - \frac{T_F}{T_C} \\
\Leftrightarrow e^{\text{PAC}} &\leq \boxed{\frac{T_C}{T_C - T_F} = e_C^{\text{PAC}}} \\
\Rightarrow & \boxed{e_C^{\text{PAC}} = \frac{T_1}{T_1 - T_2}} \Rightarrow \underline{e_C^{\text{PAC}} = 20}
\end{aligned}
$$

L'efficacité quantifie la performance énergétique de la PAC : pour 1 J d'énergie électrique fournie au moteur, on récupère e joules de transfert thermique cédé à la source chaude.

4) Par définition, s'il faut fournir un travail W à la PAC pendant une durée Δt, alors la puissance électrique minimale qu'elle consomme vaut $\mathcal{P}_{\text{élec}} = W/\Delta t$. C'est un minimum, car le rendement du moteur électrique qui permet l'écoulement de fluide dans la PAC n'est sûrement pas de 1. L'énoncé donne par ailleur la puissance thermique $\mathcal{P}_{\text{th}} = Q_C/\Delta t = 0{,}55\,\text{W}$ qu'il faut apporter à la maison pour maintenir sa témpérature constante. En utilisant la définition de l'efficatié, on en déduit

$$
e = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}\Delta t}{\mathcal{P}_{\text{élec}}\Delta t} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{élec}} = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{e}} \Rightarrow \underline{\mathcal{P}_{\text{élec}} = 2{,}8\,\text{kW}}
$$

5) L'efficacité de la PAC augmente lorsque la différence de témpérature entre les soures décroît, elle est optimale lorsque les deux sources ont la même température… mais alors il n'y a plus besoin de chauffer ! En tout état de cause, il vaut mieux utiliser une PAC avec un chauffage au sol plutôt que par radiateurs car l'eau de chauffage y est moins chaude (35 °C contre 60 °C).

II Rafraîchir sa cuisine en ouvrant son frigo

1) Un frigo est une machine réceptrice, qui prélève du transfert thermique à la source froide ($Q_{\text{int}} > 0$ car le transfert thermique est fourni au fluide) pour le céder à la source chaude ($Q_{\text{ext}} < 0$). Cela demande de fournir de l'énergie sous forme de travail ($W > 0$).

2) Pour pouvoir refroidir sa cuisine en ouvrant son frigo, il faudrait que globalement le transfert thermique prélevé à l'intérieur du frigo $|Q_{\text{int}}|$ (qui serait finalement prélevé à l'air de la cuisine, puisque la porte est ouverte) soit **plus grand** que celui cédé à la source chaude $|Q_{\text{ext}}|$, qui n'est autre que l'air de la cuisine. Or, avec le premier principe,

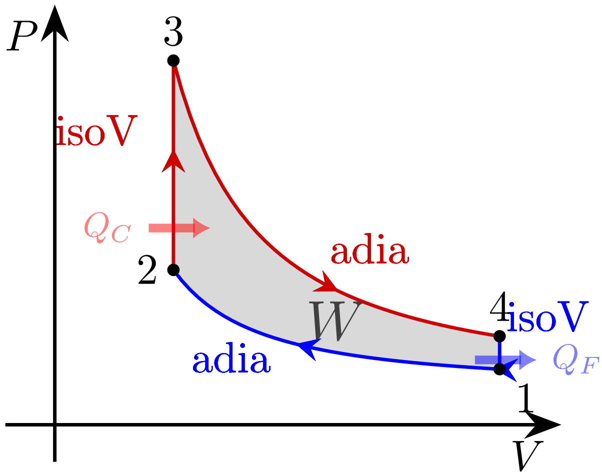
$$W + |Q_{\text{int}}| - |Q_{\text{ext}}| = 0 \Leftrightarrow |Q_{\text{int}}| - |Q_{\text{ext}}| = -W < 0$$

On en déduit qu'il est **impossible** d'avoir $|Q_{\text{int}}| > |Q_{\text{ext}}|$ comme on l'aurait aimé : laisser son frigo ouvert **ne peut que conduire à réchauffer l'air de la cuisine**.

3) Un climatiseur est relié à l'**extérieur** de la maison, qui joue le rôle de source chaude. Ainsi, quand on climatise sa maison ou sa voiture par une journée de canicule, on réchauffe l'air extérieur.

III Moteur à explosion – cycle de Beau de Rochas

1)



2) Pour les adiabatiques, $Q = 0$, et pour les isochores, $W = 0$. De plus, $\Delta U = C_V \Delta T$ et $C_V = \frac{nR}{\gamma-1}$.

◇ $1 \to 2$:
$$Q_{12} = 0 \Rightarrow \boxed{W_{12} = \Delta U_{12} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_2 - T_1)}$$

◇ $2 \to 3$:
$$W_{23} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_{23} = \Delta U_{23} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2)}$$

◇ $3 \to 4$:
$$Q_{34} = 0 \Rightarrow \boxed{W_{34} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_4 - T_3)}$$

◇ $4 \to 1$:
$$W_{41} = 0 \Rightarrow \boxed{Q_{41} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_4)}$$

Pour un moteur,

$$r = -\frac{W_{\text{tot}}}{Q_C} \quad \text{et} \quad Q_C = Q_{23}$$

car $Q_{23} > 0$ et $Q_{41} < 0$. Ainsi,

$$r = -\frac{\cancel{nR}}{\cancel{\gamma-1}}(T_2 - T_1 + T_4 - T_3) \times \frac{\cancel{\gamma-1}}{\cancel{nR}} \times \frac{1}{T_3 - T_2}$$
$$\Leftrightarrow r = \frac{T_3 + T_1 - T_2 - T_4}{T_3 - T_2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r = 1 + \frac{T_1 - T_4}{T_3 - T_2}}$$

3) Sur les adiabatiques quasi-statiques du gaz parfait, on a des transformations isentropiques donc on applique la loi de LAPLACE : $PV^\gamma = \text{cte} \Leftrightarrow TV^{\gamma-1} = \text{cte}$:

$$\begin{aligned} T_3V_3^{\gamma-1} &= T_4V_4^{\gamma-1} \quad \text{Isochores} \\ \Leftrightarrow T_3V_2^{\gamma-1} &= T_4V_1^{\gamma-1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} &= \frac{T_3}{T_4} \quad x = \frac{V_1}{V_2} \\ \Leftrightarrow &\boxed{T_3 = T_4x^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

De même,

$$\begin{aligned} T_1V_1^{\gamma-1} &= T_2V_2^{\gamma-1} \\ \Leftrightarrow \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} &= \frac{T_2}{T_1} \\ \Leftrightarrow &\boxed{T_2 = T_1x^{\gamma-1}} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} r &= 1 + \frac{T_1 - T_4}{(T_4 - T_1)x^{\gamma-1}} \\ \Leftrightarrow &\boxed{r = 1 - x^{1-\gamma}} \end{aligned}$$

4) a – On a $V_{\text{tot}} = S\ell = 500\,\text{cm}^3 = V_1$, et $V_{\min} = 100\,\text{cm}^3 = V_2$. Ainsi,

$$\boxed{r = 47{,}5\,\%}$$

b –

$$W_{\text{tot}} = -rQ_C = -r\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2)$$

Or, $\begin{cases} T_2 = T_1x^{\gamma-1} \\ nR = \frac{P_1V_1}{T_1} \end{cases}$ avec $\begin{cases} T_1 = 300\,\text{K} \\ P_1 = 1\,\text{bar} = 1 \times 10^5\,\text{Pa} \\ V_1 = 500\,\text{cm}^3 = 500 \times 10^{-6}\,\text{m}^3 \end{cases}$

Soit $\boxed{W_{\text{tot}} = -\left(\frac{1 - x^{1-\gamma}}{\gamma - 1}\right)\frac{P_1V_1}{T_1}(T_3 - T_1x^{\gamma-1})}$ avec $\begin{cases} x = 5 \\ \gamma = 1{,}4 \\ T_3 = 900\,\text{K} \end{cases}$

A.N. : $\underline{W = -65{,}1\,\text{J}}$

IV Étude d'un moteur de STIRLING

1) En utilisant les informations de l'énoncé et l'équation d'état du gaz parfait, on obtient les valeurs suivantes :

État 1	**État 2**	**État 3**	**État 4**
$P_1 = 1\,\text{bar}$ $V_1 = \frac{nRT_1}{P_1} = 0{,}98\,\text{L}$ $T_1 = T_F = 300\,\text{K}$	$P_2 = 10P_1 = 10\,\text{bar}$ $V_2 = \frac{V_1}{10} = 0{,}098\,\text{L}$ $T_2 = T_1$	$P_3 = \frac{T_3}{T_2}P_2 = \frac{T_C}{T_F}P_2 = 20\,\text{bar}$ $V_3 = V_2$ $T_3 = T_C = 600\,\text{K}$	$P_4 = \frac{V_2}{V_1}P_3 = 2\,\text{bar}$ $V_1 = V_1$ $T_4 = T_3$

2)

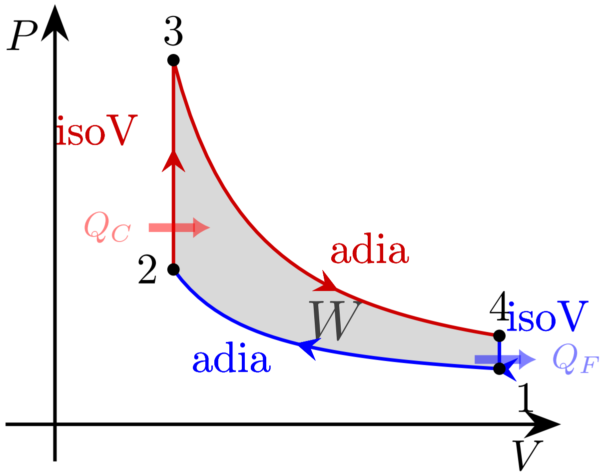


FIGURE 5.1 – Cycle de STIRLING. Sens horaire $\Rightarrow$ cycle **moteur**.

3) ◇ $1 \to 2$: réversible, donc forcément quasi-statique et $P_{\text{ext}} = P$. Ainsi,

$$W_{12} = -\int_1^2 P\,\mathrm{d}V = -\int_1^2 nRT_F \frac{\mathrm{d}V}{V} \Leftrightarrow \boxed{W_{12} = -nRT_F \ln\frac{V_2}{V_2}} \Rightarrow \underline{W_{12} = 230\,\mathrm{J}}$$

$$\text{IsoT} \Rightarrow \qquad \Delta U_{12} = 0 \Leftrightarrow Q_{12} = -W_{12} \Leftrightarrow \boxed{Q_{12} = nRT_F \ln\frac{V_2}{V_1}} \Rightarrow \underline{Q_{12} = -230\,\mathrm{J}}$$

◇ $2 \to 3$: isochore, donc

$$\boxed{W_{23} = 0}$$

$$\Leftrightarrow Q_{23} = \Delta U_{23} = C_V(T_3 - T_2) \Leftrightarrow \boxed{Q_{23} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_F)} \Rightarrow \underline{Q_{23} = 249\,\mathrm{J}}$$

◇ $3 \to 4$: même raisonnement que $1 \to 2$:

$$\boxed{W_{34} = -nRT_C \ln\frac{V_1}{V_2}} \Rightarrow \underline{W_{34} = -459\,\mathrm{J}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{Q_{34} = nRT_C \ln\frac{V_1}{V_2}} \Rightarrow \underline{Q_{34} = 459\,\mathrm{J}}$$

◇ $4 \to 1$: même raisonnement que $2 \to 3$:

$$\boxed{W_{41} = 0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{Q_{41} = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_F - T_C)} \Rightarrow \underline{Q_{41} = -249\,\mathrm{J}}$$

En sommant les travaux, on a

$$W = W_{12} + W_{34} = nR(T_C - T_F)\ln\frac{V_2}{V_1} < 0$$

c'est donc effectivement un moteur puisque le gaz **fournit en travail** en moyenne sur un cycle.

4) La **production** énergétique est le **travail** $W = W_{12} + W_{34} < 0$ qu'il fournit. Le coût est le transfert thermique qu'il reçoit de la source chaude, $Q_C = Q_{23} + Q_{34} > 0$. Le rendement est donc

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_C}\right| = -\frac{W_{12} + W_{34}}{Q_{23} + Q_{34}} \Leftrightarrow \boxed{\eta = \frac{(T_C - T_F)\ln\frac{V_1}{V_2}}{\frac{T_C - T_F}{\gamma - 1} + T_C \ln\frac{V_1}{V_2}}} \Rightarrow \underline{\eta = 0{,}32}$$

5) Le bilan d'entropie sur le cycle complet s'écrit $\Delta S = S_{\text{ech}} + S_{\text{cr}} = 0$, soit

$$S_{\text{cr}} = -S_{\text{ech}} = -\frac{Q_{12}+Q_{41}}{T_F} - \frac{Q_{12}+Q_{34}}{T_C} \Leftrightarrow \boxed{S_{\text{cr}} = \frac{nR(T_C T_F)^2}{(\gamma-1)T_C T_F}} \Rightarrow \underline{S_{\text{cr}} = 0{,}42\ \text{J}\cdot\text{K}^{-1}}$$

L'irréversibilité est d'origine thermique : pendant les deux isochores, le gaz n'est pas à la même température que le thermostat avec lequel il est en contact. Le transfert thermique s'accompagne donc de création d'entropie par inhomogénéité.

6) Le transfert thermique Q_{23}, qui diminue le rendement, est exactement opposé au transfert thermique Q_{41}. Plutôt que de perdre le transfert thermique Q_{41} en le cédant à la source froide, l'idée de Stirling consiste à le céder au régénérateur pour qu'il le rende au gaz lors de l'étape $2 \to 3$. Le transfert thermique n'est alors **plus fourni par la source chaude**, ce qui est plus économique.

7) Comme Q_{23} n'est plus fournir par la source chaude, il ne compte plus dans le rendement, qui devient

$$\eta = \left|\frac{W}{Q_C}\right| = -\frac{W_{12}+W_{34}}{Q_{34}} = \frac{T_C - T_F}{T_C} \Leftrightarrow \boxed{\eta = 1 - \frac{T_F}{T_C}}$$

On reconnaît alors le **rendement de Carnot**, c'est-à-dire le meilleur rendement possible pour un moteur fonctionnant avec ces deux sources.

V Coût énergétique d'un goûter

1) Supposons que les bouteilles de jus de fruit sont à température initiale $T_I = 25\,°\text{C}$, et que la température finale (celle du frigo) vaut $T_F = 5\,°\text{C}$. Commençons par calculer l'énergie nécessaire au refroidissement.

◇ **Système** : {contenu du frigo}

◇ **Bilan des échanges** :

▷ Transfert thermique reçu de la part du fluide frigorigène : $Q_{\text{frigo}} < 0$ que l'on cherche à déterminer ;

▷ transfert thermique de fuite : $Q_{\text{fuite}} = +\mathcal{P}_{\text{fuite}}\Delta t > 0$ avec $P_{\text{fuite}} = 10\,\text{W}$ et $\Delta t = 1\,\text{h} = 3{,}6 \times 10^3\,\text{s}$: **attention au signe**, compte-tenu de la différence de température, c'est le **contenu du frigo** qui reçoit effectivement de l'énergie.

◇ **Variation d'énergie interne** : on assimile les jus à de l'eau du point de vue thermique, soit

$$\Delta U = m_{\text{jus}} c_{\text{eau}}(T_F - T_I) = Q_{\text{frigo}} + Q_{\text{fuite}}$$
$$\Leftrightarrow Q_{\text{frigo}} m_{\text{jus}} c_{\text{eau}}(T_F - T_I) - \mathcal{P}_{\text{fuite}}\Delta t = -5{,}4 \times 10^5\ \text{J}$$

Calculons maintenant le coût en énergie électrique du refroidissement. On fait l'hypothèse que l'énergie électrique fournie au frigo ne sert qu'à faire tourner le moteur. Par définition de l'efficacité d'un frigo, $e = |Q_{\text{froid}}/W|$ où les échanges sont ceux du fluide. Ici, on a donc

$$e = |Q_{\text{frigo}}|/\mathcal{E}_{\text{élec}}$$

Par ailleurs, l'efficacité de Carnot d'un frigo vaut $e_C = T_{\text{frigo}}/(T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}})$. En combinant, on en déduit

$$e = \frac{|Q_{\text{frigo}}|}{\mathcal{E}_{\text{élec}}} = 0{,}7\frac{T_{\text{frigo}}}{T_{\text{ext}} - T_{\text{frigo}}} \approx 10 \qquad \text{donc} \qquad \mathcal{E}_{\text{élec}} = \frac{|Q_{\text{frigo}}|}{e} = 5 \times 10^4\ \text{J}$$

Enfin, calculons le prix en euros de cette énergie, sachant que $1\,\text{kWh} = 1 \times 10^3\,\text{W} \times 3{,}6 \times 10^3\,\text{s} = 3{,}6 \times 10^6\,\text{J}$. On trouve

$$\underline{p = \frac{5 \times 10^4\ \text{J}}{3{,}6 \times 10^6\ \text{J}} \times 0{,}25\,€ \approx 0{,}33\,€}$$

VI Moteur Diesel à double combustion

1) La transformation $1 \to 2$ est une adiabatique réversible (donc isentropique) d'un gaz parfait ; d'après la loi de LAPLACE en température et volume $TV^{\gamma-1} = \text{cte}$, on a

$$T_2 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma-1} \Leftrightarrow \boxed{T_2 = \beta^{\gamma-1} T_m} \Rightarrow \underline{T_2 = 9{,}1 \times 10^2\,\mathrm{K}}$$

La transformation $2 \to 3$ est isochore, d'où par l'équation d'état

$$\frac{P_3}{T_3} = \frac{P_2}{T_2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_2 = \beta^{\gamma-1} T_m \\ P_3 = P_m \\ P_2 = \left(\frac{V_1}{V_2}\right)^{\gamma} P_1 = \beta^{\gamma} P_m \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \boxed{T_3 = \frac{P_M}{\beta P_m} T_m} \Rightarrow \underline{T_3 = 1{,}0 \times 10^3\,\mathrm{K}}$$

Enfin, la loi de LAPLACE appliquée sur $4 \to 5$ qui est isentropique donne

$$T_5 = \left(\frac{V_4}{V_5}\right)^{\gamma} T_4 \quad \text{or} \quad \frac{V_4}{T_4} \overset{\text{isoP}}{=} \frac{V_3}{T_3}$$

$$\Rightarrow T_5 = \left(\frac{V_3}{V_5}\frac{T_4}{T_3}\right)^{\gamma} T_4 = \left(\frac{1}{\beta}\frac{T_M}{T_m}\frac{\beta P_m}{P_M}\right)^{\gamma} T_M$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_5 = \left(\frac{T_M P_m}{T_m P_M}\right)^{\gamma} T_M} \Rightarrow \underline{T_5 = 8{,}8 \times 10^2\,\mathrm{K}}$$

2) Notons n la quantité de matière de gaz du mélange. Le transfert thermique Q_C est fourni au cours des étapes $2 \to 3$ est $3 \to 4$. En utilisant d'une part le bilan d'énergie (premier principe) sur $2 \to 3$ isochore et le fait que le système soit un gaz parfait, on trouve

$$\Delta U_{23} \overset{\text{1}^{\text{er}}\text{ ppe.}}{=} \underbrace{W_{23}}_{=0} + Q_{23} \quad \text{et} \quad \Delta U_{23} \overset{\text{G.P.}}{=} C_V \Delta T_{23} = \frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_2)$$

De même, pour $3 \to 4$ qui est isobare donc pour laquelle on applique le premier principe enthalpique,

$$\Delta H_{34} \overset{\text{1}^{\text{er}}\text{ ppe.}}{=} \underbrace{W_{u,34}}_{=0} + Q_{34} \quad \text{et} \quad \Delta H_{34} \overset{\text{G.P.}}{=} C_P \Delta T_{34} = \frac{\gamma n R}{\gamma-1}(T_4 - T_3)$$

Puis en introduisant m *via* $n = m/M$:

$$Q_C = Q_{23} + Q_{34} = \Delta U_{23} + \Delta H_{34} \quad \text{soit} \quad Q_C = \frac{mR}{M(\gamma-1)}[T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)]$$

$$\Leftrightarrow \boxed{q_C = \frac{R}{M(\gamma-1)}[T_3 - T_2 + \gamma(T_4 - T_3)]} \Rightarrow \underline{q_C = 1{,}1 \times 10^3\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}}$$

3) Comme $5 \to 1$ est isochore d'un gaz parfait, on a

$$\Delta U_{5\to1} \overset{\text{1}^{\text{er}}\text{ ppe.}}{=} Q_{51} \quad \text{et} \quad \Delta U_{5\to1} \overset{\text{G.P.}}{=} \frac{nR}{\gamma-1}(T_1 - T_5)$$

$$\Rightarrow \boxed{q_F = \frac{R}{M(\gamma-1)}(T_1 - T_5)} \Rightarrow \underline{q_F = -4{,}2 \times 10^2\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}}$$

4) D'après le premier principe appliqué à l'ensemble du cycle,

$$W = -Q_F - Q_C \Leftrightarrow \boxed{w = -q_F - q_C} \Rightarrow \underline{w = -7{,}1 \times 10^2\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}}$$

5) Le rendement du moteur est défini par

$$\boxed{\eta = \left|\frac{w}{q_C}\right| = -\frac{w}{q_C}} \Rightarrow \underline{\eta = 63\,\%}$$

C'est une valeur élevée, mais qui a été obtenue avec une modélisation très idéalisée des transformations. En pratique, l'ordre de grandeur du rendement d'un moteur diesel est plutôt de 40 ; 45%.