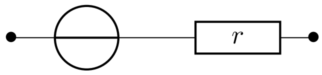
Électrocinétique – chapitre 2

Correction du TD

I Circuit simple

Données

Générateur <u>réel</u> (E,r) de tension :



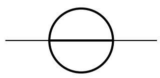
1)

Résultat attendu

On demande un schéma <u>normalisé</u>, autrement dit avec les conventions de schémas *européennes*.

Outils

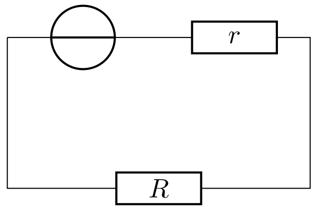
Générateur :



Résistance :

Application

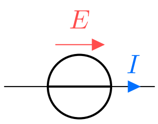
On obtient :



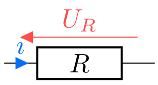
2)

Outils

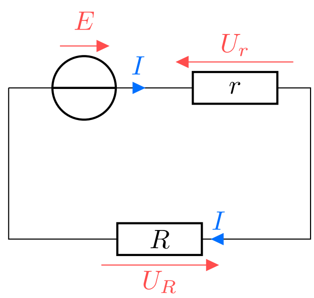
Générateur convention générateur :



Résistance convention récepteur :



Application



3)

Résultat attendu

À partir d'un circuit où on considère E, r et R comme des grandeurs connues, on cherche l'intensité I qui parcourt la maille que l'on vient de tracer.

Remarque

Il y a deux outils qui seront utiles pour déterminer des grandeurs dans des circuits : la **loi des mailles** et la **loi des nœuds**. À cela se rajoute la **loi d'Ohm** qui relie tension et intensité dans une résistance. Ces notions seront vues dans le chapitre suivant et donc décrites ultérieurement, on va ici utiliser la composition des tensions.

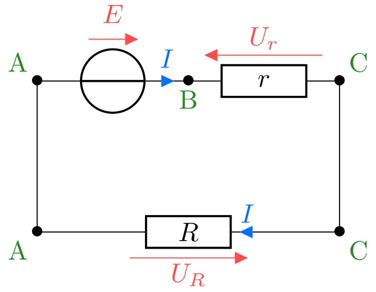
Outil

En nommant des points d'intérêt du circuit, ce qui est souvent conseillé, on va pouvoir utiliser la composition $U_{\text{AC}} = U_{\text{AB}} + U_{\text{BC}}$ en respectant le sens des tensions pour obtenir une information supplémentaire sur le circuit.

On rappelle que deux points sur un fil sont au même potentiel, et on peut donc les nommer de la même manière.

Application

Schéma



Calcul

Ici on peut écrire

$$U_{\text{AB}} + U_{\text{BC}} + U_{\text{CA}} = U_{\text{AA}}$$
$$\Leftrightarrow -E + U_r + U_R = 0$$

et avec la **loi d'Ohm**, i.e. $U_r = rI$ et $U_R = RI$:

$$(r+R)I = E$$

soit

$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

4)

Outil

Pour un récepteur de tension U traversé par l'intensité I en convention récepteur, la puissance absorbée est $\boxed{P = UI}$.

Application

Ici, la tension aux bornes de R est $U_R = RI$, avec I l'intensité la traversant. On a donc

$$\boxed{P_R = RI^2 = \frac{RE^2}{(r+R)^2}}$$

5)

Résultat attendu

On cherche à faire une étude de la fonction P de variable R, comme on ferait l'étude de $f(x)$ en mathématiques.

Outils

Bon sens pour l'allure de la courbe, procédés de dérivation pour le maximum. D'une manière générale, on a besoin de :

- Dérivation d'un produit :

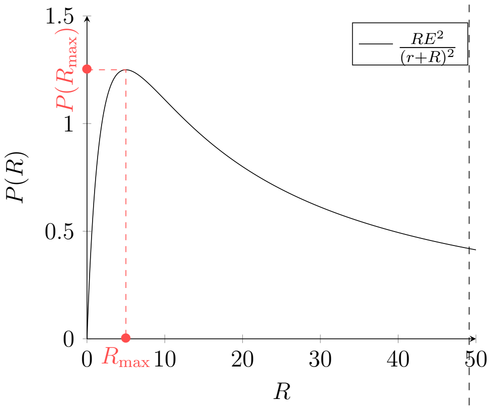
$$\boxed{D[uv] = u'v + v'u}$$

- Dérivation d'une fonction u élevée à une puissance α :

$$\boxed{D[u^\alpha] = \alpha u' u^{\alpha-1}}$$

Application

Tracé



Calcul

Soit

◇ $\begin{cases} v & : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & R \mapsto R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} v' & : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & R \mapsto 1 \end{cases}$

◇ $\begin{cases} u & : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & R \mapsto r + R \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} u' & : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & R \mapsto 1 \end{cases}$

Ainsi

$$\begin{cases} u^{-2} & : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^+ \\ & R \mapsto \frac{1}{(r+R)^2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} D[u^{-2}] & : \mathbb{R}^+ \to \mathbb{R}^- \\ & R \mapsto \frac{-2\times 1}{(r+R)^3} \end{cases}$$

Et donc,

$$P'(R) = \frac{-2}{(r+R)^3} \times R + 1 \times \frac{1}{(r+R)^2}$$

$$P'(R) = \frac{-2R}{(r+R)^3} + \frac{r+R}{(r+R)^3}$$

Ainsi

$$\boxed{P'(R) = \frac{r-R}{(r+R)^3}}$$

Et donc

$$P'(R_{\max}) = 0 \Longrightarrow \boxed{R_{\max} = r}$$

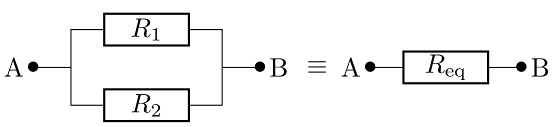
Avec

$$\boxed{P(R_{\max}) = \frac{E^2}{4r}}$$

II Résistances équivalentes

1)

Résultat attendu



Outil

L'association en parallèle de deux résistances R_1 et R_2 donne une résistance équivalente R_{eq} telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2}}$$

Attention !

Faites particulièrement attention à bien écrire $\frac{1}{R_{eq}}$ et non pas simplement R_{eq}, même après 5 lignes de calcul quand c'est nécessaire. Pensez toujours à vérifier l'homogénéité d'un résultat littéral avant de l'encadrer. Cette erreur est une des plus communes.

Application

En mettant les deux termes sur même dénominateur :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} \times \frac{R_2}{R_2} + \frac{1}{R_2} \times \frac{R_1}{R_1}$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_2 + R_1}{R_1 R_2}$$
$$\Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$$

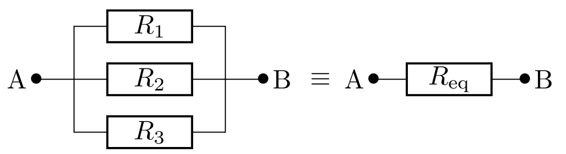
2)

Application

$$R_1 = R_2 = R \Longrightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R}{2}}$$

3)

Résultat attendu



Outil

L'association en parallèle de trois résistances R_1, R_2 et R_3 donne une résistance équivalente R_{eq} telle que :

$$\boxed{\frac{1}{R_{eq}} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} + \frac{1}{R_3}}$$

Application

De la même manière que précédemment, la mise sous même dénominateur donne :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \frac{R_2 R_3}{R_1 R_2 R_3} + \frac{R_1 R_3}{R_1 R_2 R_3} + \frac{R_1 R_2}{R_1 R_2 R_3} \Leftrightarrow R_{eq} = \frac{R_1 R_2 R_3}{R_1 R_2 + R_2 R_3 + R_1 R_3}$$

qui est bien homogène à une résistance étant de la forme $\frac{R^{\cancel{3}}}{\cancel{R^2}} = R$.

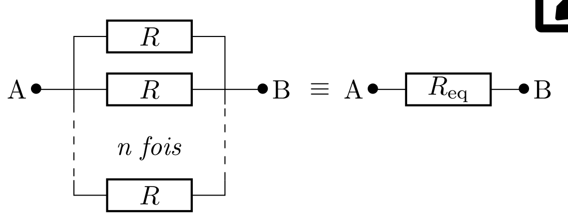
4)

Application

$$R_1 = R_2 = R_3 = R \Longrightarrow R_{eq} = \frac{R^3}{3R^2} \Leftrightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R}{3}}$$

5)

Résultat attendu



Application

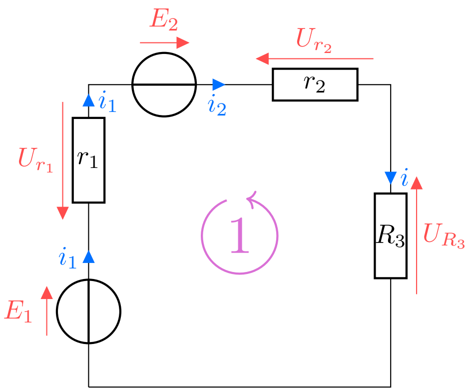
Il n'y a toujours qu'une seule formule attendue, et elle s'écrit :

$$\frac{1}{R_{eq}} = \underbrace{\frac{1}{R} + \frac{1}{R} + \cdots + \frac{1}{R}}_{n \text{ fois}} \Leftrightarrow \boxed{R_{eq} = \frac{R}{n}}$$

III Association de générateurs

Schéma

1)



Outil

2) **Loi des mailles** : la somme algébrique des tensions d'une maille est nulle (cf. exercice I). Pour l'appliquer, on se donne un sens de lecture d'une maille, ici dans le sens direct mais peu importe, puis on peut :

- Écrire les tensions traversées dans le même sens que leur flèche d'un côté du signe égal, les autres de l'autre côté ;
- Écrire les tensions traversées dans le même sens avec un « + » et les autres avec un « - », le tout devant « = 0 ».

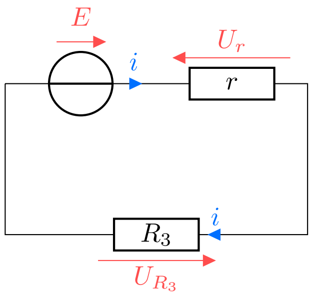
Application

Étant donné qu'il n'y a qu'une maille, il ne peut y avoir qu'une seule intensité dans le circuit. On pose donc $i_1 = i_2 = i$, et en appliquant la loi des mailles on a

$$
\begin{aligned}
& U_{R_3} + U_{r_2} - E_2 + U_{r_1} - E_1 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & R_3 i + r_2 i + r_1 i = E_1 + E_2 \\
\Leftrightarrow\ & i\,(r_1 + r_2 + R_3) = E_1 + E_2 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{i = \frac{E_1 + E_2}{r_1 + r_2 + R_3}}
\end{aligned}
$$

Schéma simplifié

3) L'expression que l'on a trouvée est en tout point similaire à celle du premier exercice si on considère qu'on a un générateur de force électromagnétique $E = E_1 + E_2$ et de résistance interne $r = r_1 + r_2$; on peut donc dessiner :



Situation particulière

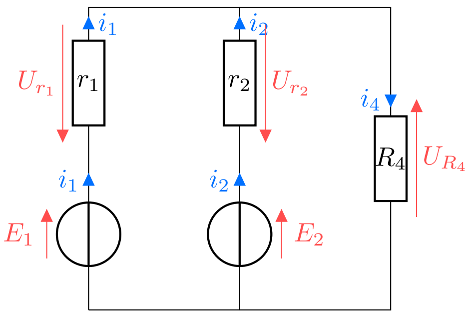
4) Quand r_1 et r_2 sont nulles, on se retrouve avec un générateur de résistance interne $r = 0$: c'est donc un générateur idéal.

Conclusion

L'étude théorique précédente ne présente aucune incohérence ou impossibilité de pratique peu importe la situation, si tant est que les générateurs sont branchés dans le même sens ; si ça n'est pas le cas l'un considère l'autre comme un récepteur et le fait surchauffer.

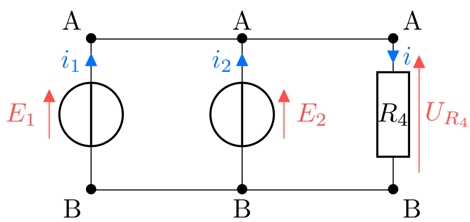
Schéma

5)



Générateurs idéaux

6)



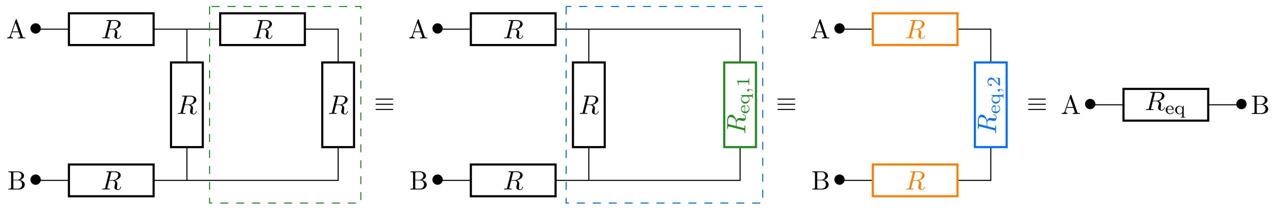
On doit trouver (avec l'unicité de la tension entre deux points, ici par exemple A et B) que $U_{R_4} = E_2 = E_1$.

Conclusion

On ne peut brancher des générateurs idéaux de tension en parallèle que si leurs tensions sont les mêmes ; les générateurs réels peuvent l'être et ce sont les intensités qui vont s'adapter pour suivre la loi des mailles.

IV Calcul de résistances équivalentes

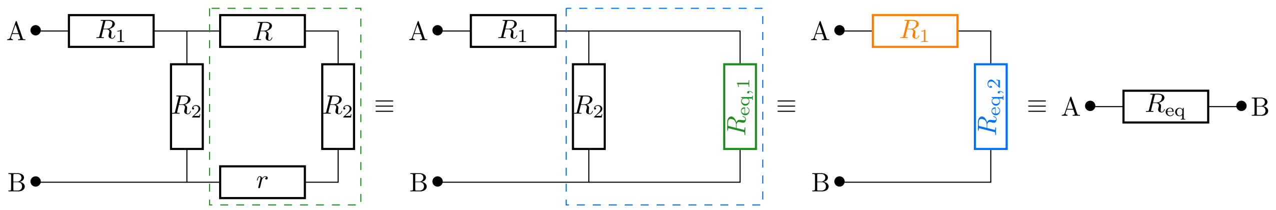
A Schéma 1



La suite de schémas équivalents précédents donne :

$$
\begin{aligned}
& R_{eq} = R + R + R_{eq,2} \\
\Leftrightarrow\ & R_{eq} = 2R + \frac{R \times R_{eq,1}}{R + R_{eq,1}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{eq} = 2R + \frac{R \times 2R}{R + 2R} \\
\Leftrightarrow\ & R_{eq} = 2R + \frac{2R^{\cancel{2}}}{3\cancel{R}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{eq} = \frac{8R}{3}
\end{aligned}
$$

B Schéma 2

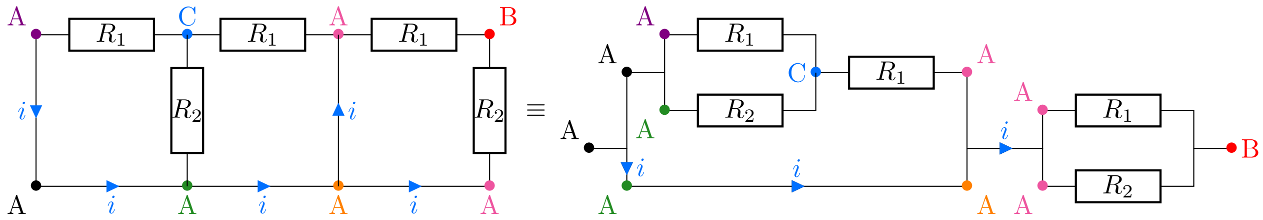


Et cette fois :

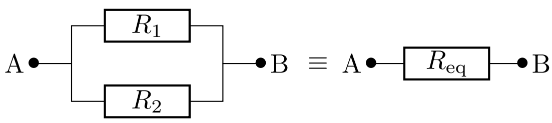
$$
\begin{aligned}
& R_{eq} = R_1 + R_{eq,2} \\
\Leftrightarrow\ & R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 \times R_{eq,1}}{R_2 + R_{eq,1}} \\
\Leftrightarrow\ & R_{eq} = R_1 + \frac{R_2 \times (r + R + R_2)}{r + R + 2R_2}
\end{aligned}
$$

C Schéma 3

Ce schéma est un peu plus compliqué, mais la bonne pratique de nommer des points de potentiel sur un schéma aide à ne pas se perdre. En effet, étant donné que l'on nous demande de déterminer la résistance équivalente entre A et B, toute simplification du circuit est à faire. On a travaillé sur les associations de résistances mais il ne faut pas oublier, et donc savoir reconnaître, les potentiels court-circuits. Ici, en reportant le point A sur chaque point d'intérêt où il peut être reporté (c'est-à-dire s'il n'y a pas de dipôle entre les deux), on voit qu'un courant qui partirait de A pour aller à B (ce que fait un Ohmmètre) éviterait complètement les trois premières résistances. On peut redessiner le schéma différemment pour faire apparaître le court-circuit de manière plus explicite :



Ainsi, le circuit se simplifie en :



Soit

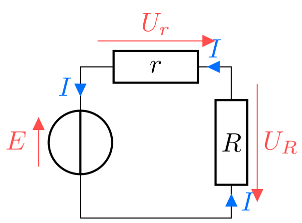
$$\boxed{R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}}$$

V Conventions

A Tout récepteur

Schéma

V.A.1



Calcul

V.A.2

- $P_{\text{r}}(E) = -EI$
- $P_{\text{r}}(r) = rI^2$
- $P_{\text{r}}(R) = RI^2$

Application

V.A.3

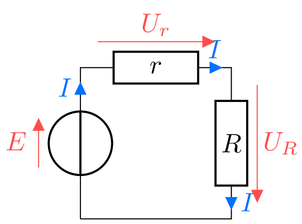
On a $\sum P_{\text{f}} = \sum P_{\text{r}}$, donc d'après la question précédente :

$$0 = -EI + rI^2 + RI^2$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

B Tout générateur

Schéma

V.B.1



Calcul

V.B.2

- $P_{\text{f}}(E) = EI$
- $P_{\text{f}}(r) = -rI^2$
- $P_{\text{f}}(R) = -RI^2$

Application

V.B.3

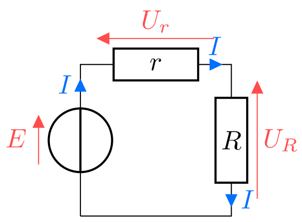
On a $\sum P_{\text{f}} = \sum P_{\text{r}}$, donc d'après la question précédente :

$$EI - rI^2 - RI^2 = 0$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

C Conventions combinées

Schéma

V.C.1



Calcul

V.C.2

- $P_f(E) = EI$
- $P_r(r) = rI^2$
- $P_r(R) = RI^2$

Application

V.C.3

On a $\sum P_f = \sum P_r$: avec les conventions adaptées, on a :

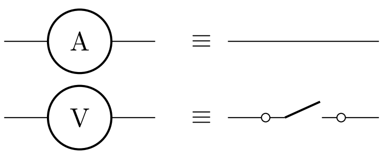
$$EI = rI^2 + RI^2$$
$$I(r+R) = E$$
$$\boxed{I = \frac{E}{r+R}}$$

Conclusion

On trouve bien toujours la même valeur de l'intensité dans le circuit, ce qui montre bien que les conventions ne sont que des conventions et ne changent pas la manière dont la physique fonctionne ensuite. Il faut noter cependant que le I du premier schéma n'est pas le I des schémas 2 et 3, étant donné que le sens n'est pas le même : les intensitées sont opposées.

VI Mesures de tensions et intensités

Rappel

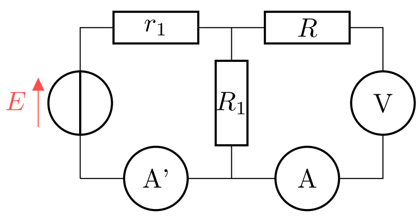


Données

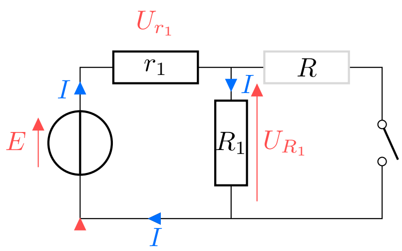
- $E = 5{,}0\,\mathrm{V}$
- $r_1 = 10\,\Omega$
- $R = 20\,\Omega$
- $R_1 = 30\,\Omega$
- $R_2 = 40\,\Omega$

A Schéma 1

Schéma



Simplification

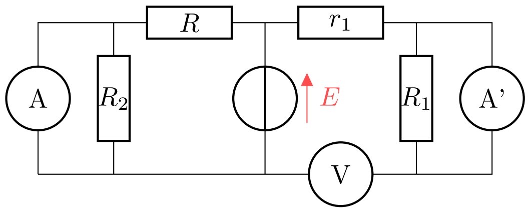


Application

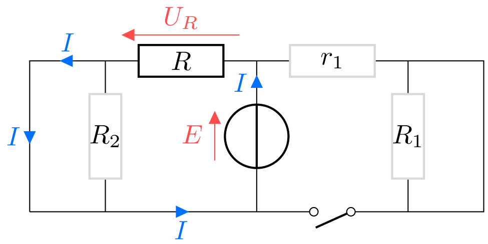
V ouvre le circuit, donc aucun courant ne passe dans la boucle de droite : A mesure $0\,\mathrm{A}$. On trouve I avec la loi des mailles et on trouve $I = \dfrac{E}{r_1 + R_1}$, et donc A' mesure $0{,}125\,\mathrm{A}$. Pour V, R n'a pas de différence de potentiel donc il mesure $U_{R_1} = 3{,}75\,\mathrm{V}$.

B Schéma 2

Schéma



Simplification

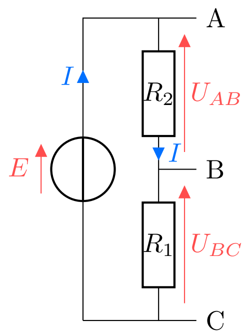


Application

Cette fois c'est la partie de droite qui est ouverte, et donc pas parcourue par un courant : A' mesure 0 A. L'ampèremètre de gauche court-circuite quant à lui la résitance R_2, ainsi toute l'intensité se trouve dans la boucle où on a tracé I ; une rapide loi des mailles donne $I = \dfrac{E}{R} = 0{,}25\,\mathrm{A}$. V mesure ici aussi la tension E.

VII Diviseur de tension

Schéma



Résultat attendu

On cherche I puis U_{BC}.

Outils

- Loi des mailles pour I ;
- Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Application

Il suffit d'une loi des mailles pour trouver

$$I = \frac{E}{R_1 + R_2}$$

Puis trivialement

$$U_{BC} = R_1 I = \frac{R_1}{R_1 + R_2} E$$

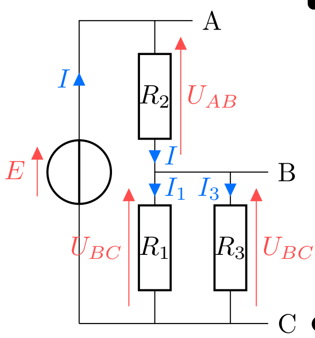
Remarque

On remarque donc que deux dipôles de résistances R_1 et R_2 se partageant une tension totale E vont se la répartir en respectant la fraction de résistance à laquelle chaque diôle participe. C'est également une simple moyenne pondérée.

Important

Ce résultat est bien plus général que pour deux dipôles et fonctionne avec n dipôles ***en série*** sur une branche. Il faut pouvoir se ramener à ce schéma précis pour appliquer la formule du pont diviseur de tension – que vous pouvez maintenant utiliser sans loi des mailles : $U_x = E \times \dfrac{R_x}{R_{\text{tot}}}$

Schéma



Réponse

Oui, elle va changer puisqu'on a branché un nouveau dipôle.

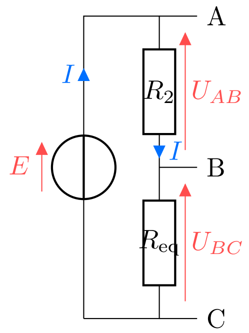
Résultat attendu

On cherche I et U_{BC}.

Outils

- Loi des mailles pour I ;
- Loi d'Ohm pour U_{BC}.

Schéma simplifié



Application

On peut envisager ce calcul de deux manières :

- D'une part, $U_{BC} = R_1 I_1$ et on pourrait déterminer I_1 en fonction de I avec une LdN, et pour ça avoir I avec une LdM en calculant R_{eq} comme précédemment, et donc :
- On voit immédiatement que $U_{BC} = R_{\text{eq}} I$. Autant partir là-dessus.

On obtient ainsi

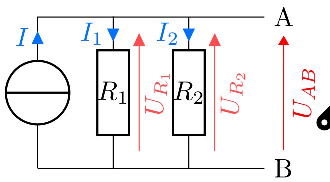
$$R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3} \quad \text{et} \quad I = \frac{E}{R_2 + \frac{R_1 R_3}{R_1 + R_3}}$$

d'où après calcul

$$\boxed{U_{BC} = \frac{E R_1 R_3}{R_2(R_1 + R_3) + R_1 R_3}}$$

VIII Diviseur de courant

Schéma



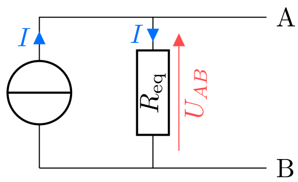
Résultat attendu

On cherche U_{R_1} et U_{R_2}.

Outils

- Unicité de la tension en parallèle ;
- Expression résistance $/\!\!/$.

Schéma simplifié



Application

On a certes $U_{R_1} = I_1 R_1$ et $U_{R_2} = I_2 R_2$, m comme on a $U_{R_1} = U_{R_2} = U_{AB}$, le plus simple est de déterminer U_{AB}. Une résistance équivalente $R_{\text{eq}} = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}$ avec l'intensité I qui est connue (car imposée par le générateur de courant) donne facilement

$$U_{R_1} = U_{R_2} = R_{\text{eq}} I = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} I$$

Important

Ce résultat est la base de la réflexion menant à l'expression du diviseur de courant qui donne l'expression de I_x : on voit directement apparaître que $I_x = I \times \dfrac{R_{\text{eq}}}{R_x}$ de par l'unicité de la tension. Souvenez-vous de cette simplicité.

Résultat attendu

On cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2 **à partir de la loi des mailles**.

Outils

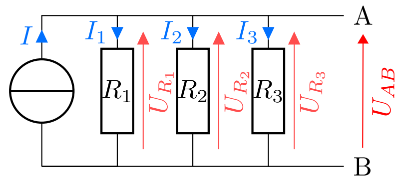
- LdM : $I_1R_1 = I_2R_2$ (1) ;
- LdN : $I = I_1 + I_2$ (2).

Application

En utilisant (2) dans (1), on a $I_2R_2 = (I - I_2)R_1$, donc en isolant I_2 on obtient facilement

$$\boxed{I_2 = I\frac{R_1}{R_1 + R_2}}$$

Schéma



Résultat attendu

Évidemment, I_2 va changer puisqu'on branche un nouveau dipôle en parallèle. Une rivière qui se divise en 3 plutôt qu'en 2 va avoir des débits différents dans les deux situations. Donc on cherche I_2 en fonction de I, R_1, R_2, R_3 **sans méthode imposée**.

Application

Avec la réflexion de la question 1 ou la relation du pont diviseur de courant qui est maintenant utilisable à volonté, on a facilement $I_2 = I \times \frac{R_{eq}}{R_2}$. Avec $R_{eq} = \frac{R_1R_2R_3}{R_1R_2+R_1R_3+R_2R_3}$, on a finalement

$$\boxed{I_2 = I \times \frac{R_1R_3}{R_1R_2 + R_1R_3 + R_2R_3}}$$

Remarque

L'intensité I ne va pas changer, puisque c'est celle que l'on fixe avec le générateur.

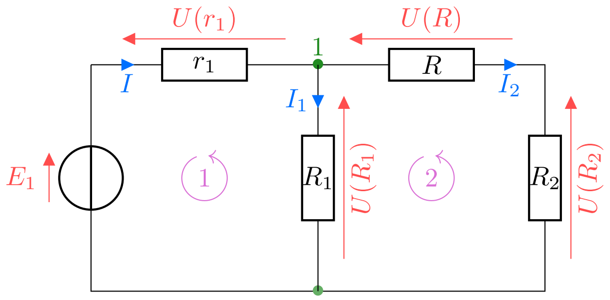
Important

Bien que la loi des mailles soit l'origine de nombreuses relations, ici c'est la simple unicité de la tension qui amène au diviseur de courant.

IX Calcul d'intensité

Schéma

A



Résultat attendu

On cherche à exprimer I_2.

LdN, LdM

- $I = I_1 + I_2$(1) (LdN) ;
- $I_1R_1 + Ir_1 = E_1$(2) (LdM 1) ;
- $I_2(R + R_2) = I_1R_1$(3) (LdM 2).

Conseil

Pour les systèmes, il faut : numéroter les équations qu'on veut réutiliser en premier lieu, à l'aide des (1) par exemple, savoir qu'un système de 3 équations (indépendantes) à 3 inconnues <u>est</u> résolvable ensuite, et comprendre comment s'y prendre enfin. Cette dernière partie est bien sûr la vraie étape difficile et passe par la pratique, mais elle s'apprend.

Exemple

I_2 apparaît dans l'équation (3), mais s'exprime en fonction de I_1 inconnu. On doit donc commencer par trouver une expression de I_1 utile. I_1 fait partie de l'équation (2) qui, elle, dépend de I mais en utilisant (1) on peut facilement changer (2) en une nouvelle équation reliant I_1 à I_2 <u>et qui n'est pas (3)</u> et qu'on appellera brillamment (4). Ainsi, en réinjectant (4) dans (3), on aura une expression de I_2 en fonction uniquement des paramètres du circuit (E, R).

Application

Injecter (1) dans (2) donne :

$$\begin{aligned}
I_1R_1 + (I_1 + I_2)r_1 &= E_1\\
I_1(R_1 + r_1) &= E_1 - I_2r_1\\
I_1 &= \frac{E_1 - I_2r_1}{R_1 + r_1} \qquad (4)
\end{aligned}$$

Ainsi, il suffit de réinjecter (4) dans (3) pour avoir :

$$\begin{aligned}
I_2(R_2 + R) &= \frac{E_1 - I_2r_1}{R_1 + r_1} \times R_1\\
I_2(R_2 + R) \times (R_1 + r) &= (E_1 - I_2r) \times R_1\\
I_2\left[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1R_1\right] &= E_1R_1
\end{aligned}$$

et finalement

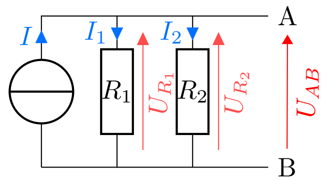
$$\boxed{I_2 = \frac{E_1R_1}{\left[(R_2 + R)(R_1 + r_1) + r_1R_1\right]}}$$

Résultat attendu

B

On cherche à trouver I_2 *avec un diviseur de courant.*

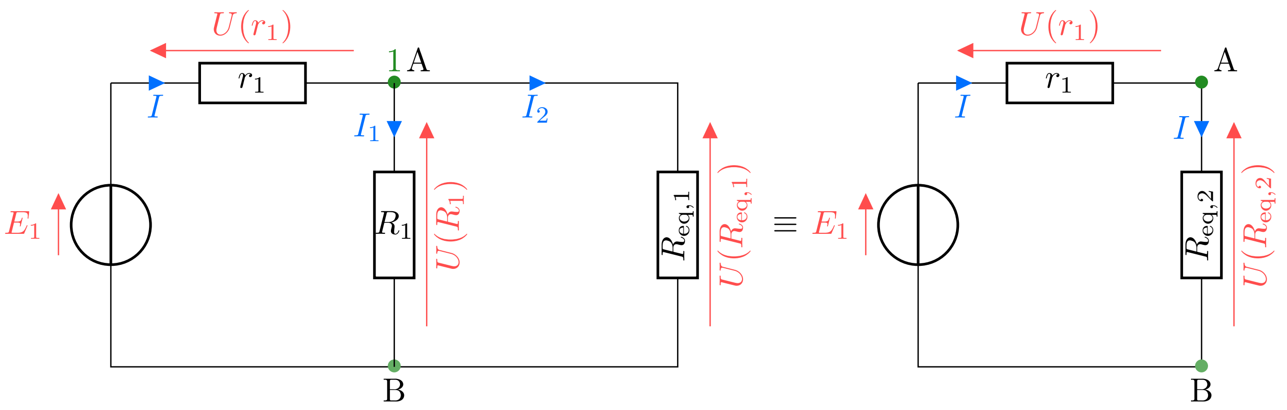
Outil



Dans le circuit ci-contre,

$$I_2 = \frac{R_{\text{eq}}}{R_2} I$$

Schéma



Application

Sur le schéma ci-dessus, on définit

$$\boxed{R_{\text{eq},1} = R + R_2} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{eq},2} = \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

pour appliquer la relation du pont diviseur de courant :

$$I_2 = \frac{R_{\text{eq},2}}{R_{\text{eq},1}} I \Leftrightarrow I_2 = \frac{R_1}{R+R_1+R_2} I$$

Avec une loi des mailles on trouve

$$I = \frac{E_1}{r_1 + R_{\text{eq},2}} \Leftrightarrow I = \frac{E_1}{r_1 + \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

Ainsi

$$I_2 = \frac{R_1}{\cancel{R+R_1+R_2}} \frac{E_1}{r_1(R+R_1+R_2) + \frac{R_1(R+R_2)}{\cancel{R+R_1+R_2}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{I_2 = \frac{R_1 E_1}{(R+R_1+R_2)r_1 + R_1(R+R_2)}}$$

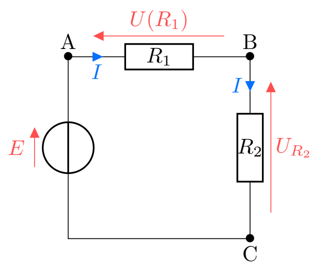
On trouve bien le même résultat (en développant un peu).

Résultat attendu

C

On cherche à trouver I_2 *avec un diviseur de tension.*

Outil



Dans le circuit ci-contre,

$$U_{R_2} = \frac{R_2}{R_1+R_2} E$$

Application

Sur le schéma ci-dessus, on définit

$$\boxed{R_{\text{eq},1} = R + R_2} \quad \text{et} \quad \boxed{R_{\text{eq},2} = \frac{R_1(R+R_2)}{R+R_1+R_2}}$$

pour appliquer la relation du pont diviseur de tension :

$$I_2(R_{\text{eq},1}) = U_{AB} = \boxed{U_{R_{\text{eq},2}} = \frac{R_{\text{eq},2}}{r_1 + R_{\text{eq},2}} E}$$

En développant on trouve

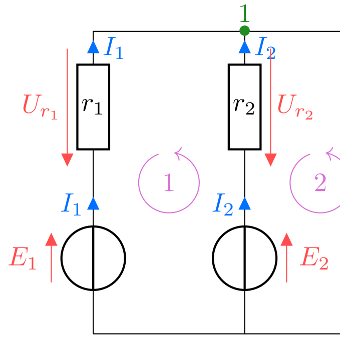
$$I_2\cancel{(R+R_2)} = \frac{R_1\cancel{(R+R_2)}}{\cancel{R+R_1+R_2}} \frac{E}{r_1(R+R_1+R_2) + \frac{R_1(R+R_2)}{\cancel{R+R_1+R_2}}}$$

Ce qui donne bien

$$\boxed{I_2 = \frac{R_1 E}{(R+R_1+R_2)r_1 + R_1(R+R_2)}}$$

X Association de générateurs : application

Schéma



Résultat attendu

On cherche I_4 puis $U_4 = R_4 I_4$.

Outils

- ◇ LdM 1 : $I_4R_4 + I_1r_1 = E_1$ (1) ;
- ◇ LdM 2 : $I_4R_4 + I_2r_2 = E_2$ (2) ;
- ◇ LdN 1 : $I_1 + I_2 = I_4$ (3).

Approche méthodique

Notre but est de trouver une équation contenant I_4 et des valeurs connues, c'est-à-dire tout sauf I_1, I_2.

L'équation (1) peut nous aider ; on peut la transformer en remplaçant I_1 par $I_4 - I_2$ grâce à (3) pour avoir une équation (4) avec I_4 et I_2.

Mais comme (2) nous permet d'isoler I_2 et de l'exprimer en fonction de I_4, en injectant cette expression dans (4) on obtient une équation entre I_4 et les éléments du circuit. Question résolue !

Application

Avec (3) dans (1) :

$$I_4R_4 + (I_4 - I_2)r_1 = E_1 \quad (4)$$

En réexprimant (2) :

$$I_2 = (E_2 - I_4R_4)/r_2$$

En injectant (2) dans (4) :

$$I_4(R_4 + r_1) - (E_2 - I_4R_4)\frac{r_1}{r_2} = E_1$$

$$\Leftrightarrow I_4(R_4 + r_1)r_2 - (E_2 - I_4R_4)r_1 = E_1r_2$$

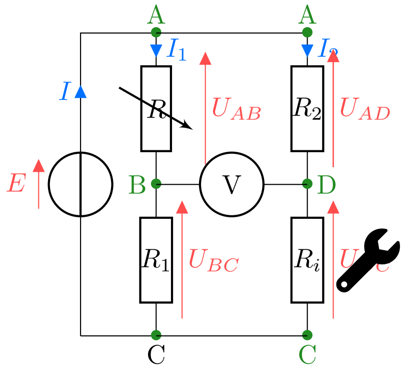
$$\Leftrightarrow I_4(r_1r_2 + r_1R_4 + r_2R_4) = E_1r_2 + E_2r_1$$

Soit

$$\boxed{I_4 = \frac{E_1r_2 + E_2r_1}{r_1r_2 + r_1R_4 + r_2R_4}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_{R_4} = R_4 \times I_4}$$

XI Pont de Wheatstone

Schéma



Résultat attendu

On cherche R_i, ou U_{DC} quand « le pont est équilibré ».

Outil

D'après l'énoncé, le pont est équilibré quand $V = 0$, soit quand $V_B = V_D$.

Application

Si le pont est équilibré, alors $U_{AB} = U_{AD}$ et $U_{BC} = U_{DC}$. Or, avec le pont diviseur de tension, on a à la fois

$$U_{BC} = E\frac{R_1}{R_1 + R}$$

$$U_{DC} = E\frac{R_i}{R_i + R_2}$$

Donc

$$U_{BC} = U_{DC}$$

$$\Leftrightarrow \cancel{E}\frac{R_1}{R_1 + R} = \cancel{E}\frac{R_i}{R_i + R_2}$$

$$\Leftrightarrow R_1(\cancel{R_i} + R_2) = R_i(\cancel{R_1} + R)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{R_i = \frac{R_1R_2}{R}}$$