Correction TD-M3 - Mouvements circulaires

1 Échauffement

2 Oscillations d'un anneau sur un cerceau

3 Satellite géostationnaire

4 Glissade d'un esquimau sur un igloo

5 Duel de Mac Laren

Correction :

$\boxed{1}$ La voiture A d'Alonso entame son virage dès qu'il passe par l'axe Δ et parcourt un demi-cercle, de longueur

$$D_A = \frac{2\pi\, R_A}{2} \qquad \text{soit} \qquad \boxed{D_A = \pi\, R_A = 283\,\mathrm{m}\,.}$$

En revanche, la voiture B de Button continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_A - R_B) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}\,.}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

$\boxed{2}$ Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{0{,}8\,g\,R_A} = 26{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \qquad \text{et} \qquad v_B = \sqrt{0{,}8\,g\,R_B} = 24{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

$\boxed{3}$ Calculons pour conclure le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage,

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

ce qui donne numériquement

$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s} \qquad \text{et} \qquad \Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Alonso va plus vite que Button pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la plus extérieure des deux** ... ne vérifiez pas en rentrant chez vous ;)

6 Entraînement d'un spationaute

Correction :

1. Le spationaute a une trajectoire circulaire de rayon L et de centre O. La base adaptée est $(\vec{u}_r,\ \vec{u}_\theta)$ associée aux coordonnées cylindriques.
2. Vecteur position : $\vec{OS} = L\vec{u}_r$; Vecteur vitesse : $\vec{v}_S = \frac{d\vec{OS}}{dt} = L\frac{d\vec{u}_r}{dt} = L\dot{\theta}\vec{u}_\theta = L\omega\vec{u}_\theta$; Vecteur accélération : $\vec{a}_S = \frac{d\vec{v}_S}{dt} = L(\dot{\omega}\vec{u}_\theta - \omega^2\vec{u}_r)$.
3. Au bout de quelques τ, $\omega(t) = \omega_0$, et le mouvement est circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent : $\vec{v}_S = L\omega_0\vec{u}_\theta$ et $\vec{a}_S = -L\omega_0^2\vec{u}_r$. La norme de l'accélération subie par le spationaute vaut alors $|a_S| = L\omega_0^2$.
4. $\omega_0 = \sqrt{\frac{|a_S|}{L}} = \sqrt{\frac{10g}{L}} = 3.1\ rad.s^{-1} = 0.5\ tour.s^{-1}$.

Ordres de grandeurs d'accélérations :
- accélération latérale : en formule 1 : 4 à 5g.
- accélération latérale : en avion de chasse ou voltige : jusqu'à 9 ou 10 g pendant qq secondes maximum.
- accélération verticale : dans un siège éjectable d'avion de chasse : environ 20 g (un pilote n'est plus autorisé à voler après deux incidents de ce type, à cause notamment du tassement des vertèbres...).
- accélération négative frontale : dans un accident de voiture : jusqu'à 40 à 60 g ! L'accélération négative peut expliquer à elle seule les hémoragies internes à causes des organes internes percutant les os...

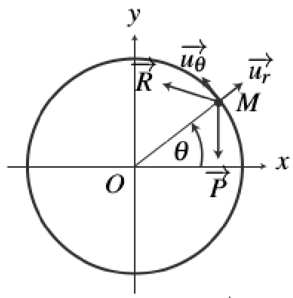
7 Chaussette dans un sèche-linge

Correction :

1. On étudie le mouvement de la chaussette assimilée à un point matériel M de masse m dans le référentiel terrestre galiléen. Lors de la première phase, M est en mouvement circulaire et uniforme de centre O et de rayon R à la vitesse angulaire ω.

Sa vitesse est tangente au cercle et de norme $v = R\omega$ et son accélération est radiale centripète de norme $\frac{v^2}{R}$ d'où :

$$\vec{a} = -\frac{v^2}{R}\vec{u_r} = -R\omega^2\vec{u_r} \quad \text{où} \quad \vec{u_r} = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}.$$



2. La chaussette étant collée à la paroi du tambour, elle est soumise à son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ et à la réaction du tambour $\vec{R}$. On lui applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \quad \Rightarrow \quad \vec{R} = m\vec{a} - \vec{P} = \begin{cases} \vec{R}\cdot\vec{u_r} & = -mR\omega^2 + mg\sin\theta \\ \vec{R}\cdot\vec{u_\theta} & = mg\cos\theta. \end{cases}$$

3. La composante radiale de la réaction du support s'annule lorsque $mR\omega^2 = mg\sin\theta$ soit pour $\theta = \theta_0$ tel que :

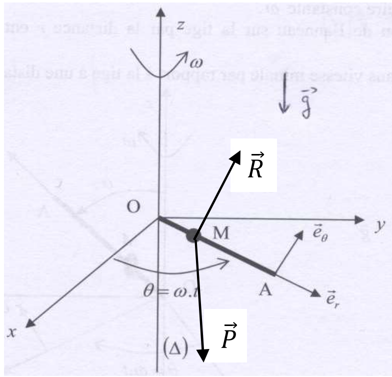
$$\sin\theta_0 = \frac{R}{g}\omega^2 = \frac{0,25}{9,8} \times \left(\frac{50 \times 2 \times 3,1415}{60}\right)^2 = 0,70 \quad \Rightarrow \quad \theta_0 = 44,4°.$$

4. L'annulation de la force de contact entre le tambour et la chaussette montre qu'il y a rupture de contact. La chaussette décolle de la paroi et est alors projetée avec une vitesse $R\omega$ tangente au tambour depuis le point repéré par la coordonnée angulaire θ_0. Le mouvement ultérieur, sous la seule action du poids, est un vol parabolique.

8 Anneau sur une tige en rotation

Correction :

<ins>Référentiel</ins> : Terrestre supposé galiléen.
<ins>Base de projection cylindrique</ins> : ($\overrightarrow{e_r}$; $\overrightarrow{e_\theta}$; $\overrightarrow{e_z}$)
<ins>Système</ins> : Le petit anneau M de masse m.
<ins>Forces</ins> : $\left\{ \begin{array}{l} \text{Poids : } \vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{e_z}\,. \\ \text{Réaction du support : } \vec{R} = R_\theta \overrightarrow{e_\theta} + R_z \overrightarrow{e_z} \\ \text{car mvt sans frottement.} \end{array} \right.$



<ins>PFD à M</ins> : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$
On sait que $\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{e_r}$;
Donc $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{e_\theta} = \dot{r}\overrightarrow{e_r} + r\omega\overrightarrow{e_\theta}$
Ainsi $\vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{e_r} + \dot{r}\,\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \dot{r}\omega\,\overrightarrow{e_\theta} + r\omega\frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$, car ω = cste.
Soit : $\boxed{\vec{a} = (\ddot{r} - r\omega^2)\,\overrightarrow{e_r} + 2\,\dot{r}\omega\,\overrightarrow{e_\theta}}$;

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$\left\{ \begin{array}{l} 0 = m(\ddot{r} - r\omega^2) \\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega \\ -mg + R_z = 0 \end{array} \right.$ Soit : $\left\{ \begin{array}{l} \boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = 0} : (1) \\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega \quad (2) \\ R_z = mg \quad (3) \end{array} \right.$ **<ins>Equation différentielle du mouvement.</ins>**

2 – On veut résoudre : $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$.
Equation caractéristique : $s^2 - \omega^2 = 0$; Soit : $s^2 = \omega^2$; D'où : $\boldsymbol{s = \pm\omega}$;
Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme : $\boldsymbol{r(t) = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t}}$;
CI : A t = 0, $r(0) = \boxed{r_0 = A + B}$
Et $\dot{r} = A\omega e^{\omega t} - B\omega\,e^{-\omega t}$;
Nouvelle CI : A t = 0, $\dot{r}(0) = v_0 = 0$; Donc : $0 = A\omega - B\omega$; Soit : $\boxed{A = B}$.
<ins>Ccl</ins> : $\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}}$; Et $\boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}\,(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = r_0 ch\,\omega t}$;

3 – On a vu : $\vec{R} = R_\theta\overrightarrow{e_\theta} + R_z\overrightarrow{e_z}$ avec $R_\theta = 2m\dot{r}\omega$ et $R_z = mg$ (cf (2) et (3)).
Ainsi : $\boxed{\vec{R} = 2m\dot{r}\omega\,\overrightarrow{e_\theta} + mg\,\overrightarrow{e_z}}$;
Ou encore avec $\dot{r} = \omega r_0\,sh(\omega t)$; Soit : $\boxed{\vec{R} = 2mr_0\omega^2\,sh(\omega t)\,\overrightarrow{u_\theta} + mg\,\vec{k}\,.}$

4 – Quand t = τ alors $r = l$; soit : $l = r_0 ch\,\omega\tau$; Ou encore : $\boxed{\tau = \frac{1}{\omega}\,argch\,\frac{l}{r_0}}$;

9 Pendule conique

Correction :

1. On se place dans le repère cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$
2. On étudie le mouvement du point matériel M, de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen. Il est soumis au poids $m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$ et à la tension du fil $\vec{T} = -T\sin\alpha\vec{u}_r - T\cos\alpha\vec{u}_z$.
3.
   - position : $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r = L\sin(\alpha)\vec{u}_r$
   - vitesse : $\vec{v}_M = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = L\sin(\alpha)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
     Or $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ donc $\vec{v}_M = L\sin(\alpha)\omega\vec{u}_\theta$
   - accélération : $\vec{a}_M = -mL\omega^2\sin\alpha\vec{u}_r$

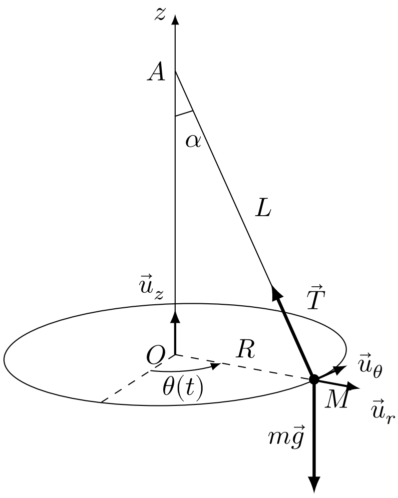
$$m\vec{a} = m\vec{g} + \vec{T}$$
$$-mL\omega^2\sin\alpha\vec{u}_r = -mg\vec{u}_z + T(-\sin\alpha\vec{u}_r + \cos\alpha\vec{u}_z)$$

   - projection PFD sur $\vec{u}_r$:

$$-mL\omega^2\sin\alpha = -T\sin\alpha$$
$$T = mL\omega^2$$

   - projection PFD sur $\vec{u}_z$:

$$0 = -mg + T\cos\alpha$$
$$T = \frac{mg}{\cos\alpha}$$



Au final :

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mL\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

or $\cos\alpha \leq 1$ donc $\omega \geq \sqrt{g/L} = \omega_{\text{lim}}$

4. Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$ alors $\cos\alpha \simeq 0$ et donc $\alpha \simeq \pi/2$. La rotation se fait dans le plan horizontal contenant A.
5. $\cos\alpha = 0,138$ donc $\alpha = 82\,^\circ$.