

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont interdites

Au programme

Toute l'électrocinétique, oscillateurs en RSF résonance et filtrage ; toutes les ondes et interférences ; cinématique et dynamique du point sans mouvement courbe.

Sommaire

E1	Ondes gravitationnelles	2
E2	Chute d'une bille	4
P1	Microphone pour guitare	6
P2	Le bleu du ciel	11

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

/23 E1 Ondes gravitationnelles

Le prix Nobel 2017 a été remis aux responsables de l'expérience Ligo, qui a détecté des ondes gravitationnelles trois fois en un an. Cette expérience n'est pas la seule dans le monde. L'expérience franco-italienne Virgo a également détecté cette même année et pour la première fois des ondes gravitationnelles. Ces expériences exploitent le phénomène d'interférences lumineuses.



FIGURE 5.1 – Photo aérienne de l'interféromètre Virgo

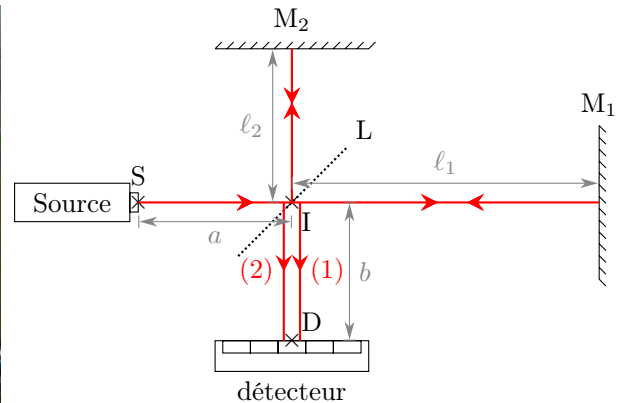


FIGURE 5.2 – Schématisation de l'interféromètre

Une source laser de longueur d'onde $\lambda = 633 \text{ nm}$ se trouve au point S et émet un faisceau de lumière le long de l'axe (Ox) . Ce faisceau laser est séparé en deux par une lame séparatrice L, qui divise l'amplitude d'un signal la rencontrant par 2. On considère alors que la moitié de la lumière entre dans le bras 1 et l'autre moitié dans le bras 2. Chaque faisceau ainsi obtenu parcourt un bras de l'interféromètre, est réfléchi sur un miroir (M_1 ou M_2) et revient vers la séparatrice.

Le faisceau est recombinaison par la séparatrice et le signal résultant est détecté par le détecteur D. La source laser émet au point S un signal de la forme $A \cos(\omega t)$. Les deux bras de l'interféromètre ont pour longueurs respectives ℓ_1 et ℓ_2 . La distance entre la source S et la séparatrice est noté a et la distance entre la séparatrice et le détecteur D est notée b .

On négligera toute diminution de l'amplitude de l'onde lumineuse au cours de sa propagation (sur la Figure 5.2, les rayons incidents et réfléchis sont décalés dans les bras de l'interféromètre pour améliorer la lisibilité de la figure ; en pratique, les rayons sont superposés).

- /6 1 Quelles sont les conditions pour que 2 ondes interfèrent ? Expliquer en détail la nécessité de faire des interférences lumineuses avec une unique source.

Réponse

Pour interférer, il faut que deux ondes soient **de même nature** ① et **de même fréquence** ①.

Les sources lumineuses ont une phase à l'origine qui varie ① aléatoirement sur un temps très court, appelé **temps de cohérence** ①, bien plus petit que le temps d'acquisition des capteurs classiques : on dit qu'elles émettent des **trains d'onde** ①.

Pour pouvoir interférer de manière continue dans l'espace, il faut que les ondes aient la **même phase à l'origine** ($\Delta\varphi_0 = 0$ ①), sinon l'intensité moyenne du signal serait nulle. On utilise pour cela une unique source.

- /2 2 Exprimer la distance parcourue par le rayon qui effectue le parcours $(SD)_1$ se réfléchissant sur M_1 en fonction de a , ℓ_1 et b .

Réponse

$$(SD)_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} (SI) + (IM_1) + (M_1I) + (ID) \stackrel{\textcircled{1}}{=} a + 2\ell_1 + b$$

- /5 3 En déduire l'expression du signal s_1 au point D de l'onde lumineuse ayant effectuée le parcours $(SD)_1$. Comment s'appelle la valeur ω/c ?

Réponse

Le signal met une durée $\Delta t_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} (a + 2\ell_1 + b)/c$ pour aller de la source au détecteur. De plus, la moitié du signal est perdu à chaque fois que le faisceau traverse la lame semi-réfléchissante. Finalement

①

$$s_1(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} \cos(\omega(t - \Delta t_1)) = \frac{A}{4} \cos\left(\omega\left(t - \frac{a + 2\ell_1 + b}{c}\right)\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} \cos(\omega t - k(a + 2\ell_1 + b))$$

avec $k \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega}{c}$ le vecteur d'onde.

- /1 [4] Exprimer la distance parcourue par le rayon qui effectue le parcours $(SD)_2$ se réfléchissant sur M_2 en fonction de a , ℓ_2 et b .

Réponse

$$(SD)_2 = (SI) + (IM_2) + (M_2I) + (ID) \stackrel{\textcircled{1}}{=} a + 2\ell_2 + b$$

- /1 [5] En déduire l'expression du signal s_2 au point D de l'onde lumineuse ayant effectue le parcours $(SD)_2$.

Réponse

De la même manière,

$$s_1(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} \cos(\omega t - k(a + 2\ell_2 + b))$$

On rappelle la formule d'addition :

$$\cos p + \cos q = 2 \cos\left(\frac{p+q}{2}\right) \cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

- /3 [6] Déterminer l'expression du signal lumineux total $s(t)$ mesuré par le détecteur au point D.

Réponse

$$\begin{aligned} s(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{4} (\cos(\omega t - k(a + 2\ell_1 + b)) + \cos(\omega t - k(a + 2\ell_2 + b))) \\ \Leftrightarrow s(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{2} \left(\cos\left(\omega t - \frac{k}{2}(a + 2\ell_1 + b) - \frac{k}{2}(a + 2\ell_2 + b)\right) \times \cos\left(-\frac{k}{2}(a + 2\ell_1 + b) + \frac{k}{2}(a + 2\ell_2 + b)\right) \right) \\ \Leftrightarrow s(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A}{2} (\cos(\omega t - k(a + \ell_1 + \ell_2 + b)) \times \cos(k(\ell_2 - \ell_1))) \end{aligned}$$

- /3 [7] Proposer une condition sur ℓ_1 et ℓ_2 pour que les deux signaux s_1 et s_2 soient en quadrature de phase au niveau du détecteur.

Réponse

On veut $k(\ell_2 - \ell_1) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \pi/2$. Avec $k \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2\pi/\lambda$:

$$\frac{2\pi(\ell_2 - \ell_1)}{\lambda} = \frac{\pi}{2} \Rightarrow \ell_2 - \ell_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\lambda}{4}$$

Lors du passage d'une onde gravitationnelle, les bras de l'interféromètre se déforment. Les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 varient alors en fonction du temps.

- /2 [8] Expliquer comment cet interféromètre permet de détecter le passage d'une onde gravitationnelle.

Qu'observe-t-on au niveau du détecteur ?

Réponse

Quand il y a une onde gravitationnelle, les longueurs ℓ_2 et ℓ_1 ne varient pas de la même façon et $(\ell_2 - \ell_1)$ varie. On voit donc une variation du signal en D qui est maximum quand les 2 ondes sont en phase (interférence constructives) et minimale quand les 2 ondes sont en opposition de phase (interférences destructives).

/33 E2 Chute d'une bille

On dispose du matériel suivant :

- ◇ une bille de masse volumique $\rho_a = 7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$, de rayon $R = 5 \text{ mm}$;
- ◇ une éprouvette graduée ;
- ◇ de la glycérine de masse volumique $\rho_g = 1260 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$;
- ◇ un dynamomètre, avec un point d'accroche permettant de mesurer une force de traction ;
- ◇ trois béchers ;
- ◇ une boîte de masses variées.

- /2 1 Donner l'expression générale de la poussée d'Archimède. Que devient son expression pour la bille dans la glycérine en fonction des données de l'énoncé ?

Réponse

L'expression de la poussée d'Archimède est :

$$\vec{\Pi} \textcircled{1} - \rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergée}} \vec{g} \Rightarrow \vec{\Pi} \textcircled{1} - \frac{4\rho_g \pi R^3}{3} \vec{g}$$

- /4 2 Proposer un protocole expérimental permettant de vérifier l'expression de la poussée d'Archimède en utilisant le matériel listé.

Réponse

On propose :

- ① ◇ Remplir l'éprouvette graduée de glycérine à un volume connu ;
- ① ◇ Mesurer le poids des masses dans l'air à l'aide du dynamomètre ;
- ① ◇ Immerger les masses dans l'éprouvette, et relever le volume déplacé ainsi que la force indiquée par le dynamomètre ;
- ① ◇ Vérifier avec les données que la différence des forces est égale à $\|\vec{\Pi}\|$.

La bille en acier tombe dans un tube rempli de glycérine. On considère que la force de frottement fluide exercée par la glycérine est $\vec{f} = -6\pi\eta R \vec{v}$ où η est une constante appelée constante de viscosité dynamique de la glycérine. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$.

- /7 3 Établir le système d'étude et faire un bilan des forces exercées sur la bille. On prendra un axe vertical descendant.

Réponse

On établit le système d'étude :

- ① ◇ **Système** : {bille} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
- ② ◇ **Schéma** : cf. Figure 5.3.
- ① ◇ **Modélisation** : repère (O, \vec{u}_z) , repérage : $\vec{OM} = z \vec{u}_z$, $\vec{v} = \dot{z} \vec{u}_z$, $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$.
- ◇ **Bilan des forces** :

$$\begin{aligned} \textcircled{1} \text{Poids} & \quad \vec{P} = mg \vec{u}_z \\ \textcircled{1} \text{Poussée d'Archimède} & \quad \vec{\Pi} = -\frac{4\rho_g \pi R^3}{3} g \vec{u}_z \\ \textcircled{1} \text{Frottement fluide} & \quad \vec{f} = -6\pi\eta R v \vec{u}_z \end{aligned}$$

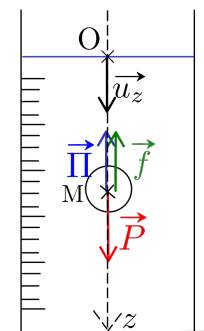


FIGURE 5.3 – Schéma

- /3 4 Montrer que considérer la poussée d'Archimède sur la bille est équivalent à considérer une bille de masse volumique $\rho = \rho_a - \rho_g$ qui n'est pas soumise à la poussée d'Archimède.

Réponse

On a :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} \textcircled{1} = \left(m - \frac{4\rho_g \pi R^3}{3} \right) \vec{g} \textcircled{1} = m' \vec{g} = \vec{P}'$$

$$\Leftrightarrow m' = m - \frac{4\rho_g\pi R^3}{3} \Leftrightarrow m' \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_a - \rho_g)$$

d'où le résultat.



- /6 [5] Établir l'équation différentielle vérifiée par v , la norme de la vitesse, en utilisant le résultat de la question précédente. La mettre sous forme canonique et en déduire la constante de temps τ caractéristique du régime transitoire, ainsi que la vitesse limite v_l atteinte par la bille.

Réponse

On applique le PFD à la bille :

$$\begin{aligned} m \frac{d\vec{v}}{dt} &= \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} \\ \Rightarrow \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{dv}{dt} &= \rho \frac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi\eta R v \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{9\eta}{2\rho_a R^2} v &= \frac{\rho g}{\rho_a} \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} &= \frac{v_l}{\tau} \end{aligned}$$

Forme canonique
 Constantes

Ainsi,

$$\tau = \frac{2\rho_a R^2}{9\eta} \quad \text{et} \quad v_l = \frac{\tau \rho g}{\rho_a} = \frac{2\rho g R^2}{9\eta}$$



L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1,6$ s mise pour passer de l'altitude $z_1 = 40$ cm à $z_2 = 80$ cm.

- /5 [6] En déduire la valeur de la vitesse limite, puis l'expression et la valeur de la viscosité η . L'exprimer en terme de pascals (Pa).

Réponse

On suppose que le régime permanent est atteint (on vérifiera *a posteriori* cette hypothèse) :

$$v_l \frac{\Delta z}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta z = 40 \times 10^{-2} \text{ m} \\ \Delta t = 1,6 \text{ s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } v_l = 0,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$$

$$\Rightarrow \eta \frac{2\rho g R^2}{9v_l} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 6,640 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ R = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ v_l = 0,25 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \eta = 1,45 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} = 1,45 \text{ Pa}\cdot\text{s}$$



- /1 [7] Pourquoi ne pas avoir réalisé de mesure depuis la surface du liquide ?

Réponse

Il faut attendre d'être sûr-e que la bille ait atteint le régime permanent.



- /3 [8] Que vaut numériquement τ ? Commenter.

Réponse

$$\tau = \frac{2\rho_a R^2}{9\eta} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_a = 7900 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ R = 5 \times 10^{-3} \text{ m} \\ \eta = 1,45 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \tau = 30 \times 10^{-3} \text{ s}$$

L'hypothèse de régime permanent est donc bien validée car $\tau \ll \Delta t$.



/2 [9] Pourquoi avoir choisi de la glycérine plutôt que de l'eau ?

Réponse

La glycérine est plus visqueuse ① donc le régime permanent est atteint plus rapidement. Avec de l'eau ($\eta = 10^{-3} \text{ Pa}\cdot\text{s}$), il n'est pas sûr que la bille puisse atteindre sa vitesse limite avant la fin de la chute ①.



/53 P1 Microphone pour guitare

Situés sous les cordes, les microphones sont l'un des éléments les plus fondamentaux d'une guitare électrique, car c'est sur eux que repose toute production du son, même en l'absence totale de caisse de résonance. Un microphone de guitare est composé d'un ou plusieurs aimants, entourés d'une bobine de cuivre.

Le comportement électrique du microphone est donné sur la figure ci-dessous. L'excitation sinusoïdale provoquée par la vibration de la corde, est modélisée par un générateur de tension sinusoïdale $e(t)$ de pulsation ω .

Le condensateur de capacité C_0 et le dipôle ohmique de résistance R_0 sont dus à la présence d'un aimant à l'intérieur du bobinage.

Données pour les composants :

$$e(t) = E_m \cos(\omega t) \quad ; \quad C_0 = 100 \text{ pF} \quad ; \quad R_0 = 1 \text{ M}\Omega \quad ; \quad R_L = 3 \text{ k}\Omega$$

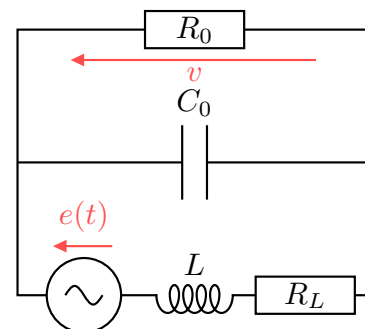


FIGURE 5.4 – Circuit étudié.

/6 [1] Déterminer qualitativement l'expression de la tension v à basse fréquence puis à haute fréquence. On utilisera pour cela les schémas équivalents pour les fréquences concernées. Quel est le type de filtre correspondant à cette situation ?

Réponse

En basse et haute fréquence, on a les schémas équivalents suivants :

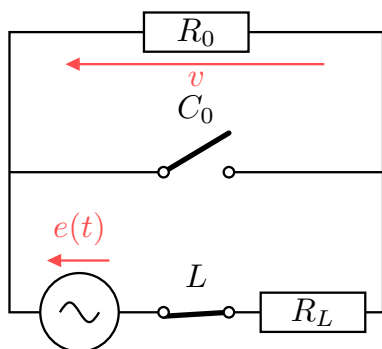


FIGURE 5.5 – Basses fréquences ①.

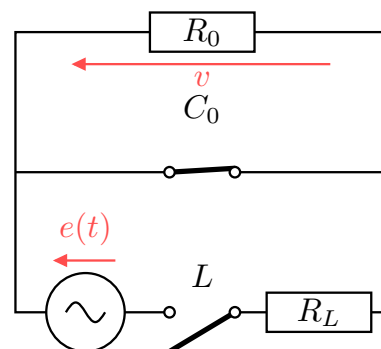


FIGURE 5.6 – Hautes fréquences ①.

Ainsi, à basse fréquence, en appliquant un pont diviseur de tension ①, on a

$$\underline{v} = \frac{R_0}{R_0 + R_L} \underline{e} \approx \underline{e}$$

puisque $R_0 \gg R_L$.

À haute fréquence,

$$\underline{v} = 0$$

car c'est la tension aux bornes d'un fil.

Le circuit se comporte donc comme un **filtre passe-bas** ①.




/4 [2] Déterminer, en fonction des données, de l'inductance de la bobine L et de la pulsation ω , la fonction de transfert complexe $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{V}}{\underline{E}}$ où \underline{V} et \underline{E} sont les amplitudes complexes associées aux signaux $v(t)$ et $e(t)$. La mettre sous la forme $\underline{H} = \frac{1}{\dots}$.

Réponse

L'association parallèle du condensateur et de la résistance R_0 est équivalente à une admittance $\underline{Y}_{\text{eq}} = jC_0\omega + \frac{1}{R_0}$. On

applique ensuite un pont diviseur de tension :

$$\begin{aligned}
 V &= \frac{\textcircled{1} Z_{\text{eq}}}{Z_{\text{eq}} + Z_{R_L} + Z_L} E \\
 \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{V}{E} = \frac{\textcircled{1}}{1 + (R_L + jL\omega)Y_{\text{eq}}} \\
 \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{1}{1 + (R_L + jL\omega)(jC_0\omega + \frac{1}{R_0})} \\
 \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{\textcircled{1}}{1 + \frac{R_L}{R_0} - LC_0\omega^2 + j\omega \left(R_L C_0 + \frac{L}{R_0} \right)}
 \end{aligned}$$



On remplace
On développe

On rappelle les formes canoniques pour deux types de filtre d'ordre 2 :

$$\begin{aligned}
 \underline{H} &= \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}} \quad (\text{passe-bas}) \\
 \underline{H} &= \frac{H_0}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})} \quad (\text{passe-bande})
 \end{aligned}$$

avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ la pulsation réduite et Q le facteur de qualité.

- /7 3 Écrire la fonction de transfert précédente sous la forme canonique appropriée. En déduire le facteur de qualité et la pulsation propre ω_0 en fonction de C_0 , R_0 , R_L , et L .

Réponse

On a $1 + \frac{R_L}{R_0} = \frac{R_0 + R_L}{R_0}$. On multiplie en haut et en bas $\textcircled{1}$ l'expression de \underline{H} par $\frac{R_0}{R_0 + R_L}$:


$$\underline{H} = \frac{\textcircled{1} \frac{R_0}{R_0 + R_L}}{1 - \frac{LC_0 R_0}{R_0 + R_L} \omega^2 + j\omega \frac{R_0}{R_0 + R_L} \left(R_L C_0 + \frac{L}{R_0} \right)}$$

On a donc la forme canonique souhaitée (celle du passe-bas du second ordre) : $\underline{H} = \frac{H_0}{1 - x^2 + \frac{jx}{Q}}$ avec

$$\boxed{H_0 = \frac{\textcircled{1} R_0}{R_0 + R_L}} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{R_0 + R_L}{LCR_0} \Rightarrow \omega_0 \textcircled{1} \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{LCR_0}}$$

On en déduit le facteur de qualité par identification :

$$\begin{aligned}
 \frac{1}{Q\omega_0} &= \frac{\textcircled{1} R_0}{R_0 + R_L} \left(R_L C_0 + \frac{L}{R_0} \right) \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{Q\omega_0} &= \frac{R_L R_0 C_0 + L}{R_L + R_0} \\
 \Leftrightarrow \omega_0 Q &= \frac{R_L + R_0}{R_L C_0 R_0 + L} \\
 \Leftrightarrow Q &= \frac{R_L + R_0}{R_L C_0 R_0 + L} \frac{1}{\omega_0} \\
 \Leftrightarrow Q &= \frac{R_L + R_0}{R_L C_0 R_0 + L} \sqrt{\frac{LC_0 R_0}{R_0 + R_L}} \\
 \Leftrightarrow Q &= \frac{\textcircled{1} \sqrt{(R_L + R_0)LC_0 R_0}}{R_L C_0 R_0 + L}
 \end{aligned}$$



On développe
On remplace
On simplifie la racine

Dans toute la suite, on utilisera la forme canonique.

- /7 4 Qu'est-ce que la résonance ? Établir la condition d'existence d'une résonance et déterminer la pulsation réduite de résonance x_r en fonction du facteur de qualité.

Réponse

Par définition, il y a résonance quand un système excité par l'extérieur atteint un maximum d'amplitude ① pour une fréquence d'excitation non nulle et non infinie ①, appelée fréquence d'excitation. On cherche donc le maximum de

$$|H| = \frac{|H_0|}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

Comme le numérateur est constant, cette fonction est maximale si le dénominateur est minimal ①. Par ailleurs, la fonction racine étant monotone croissante, on peut alors chercher le minimum de la fonction

$$f : x \rightarrow (1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$$

sur \mathbb{R}^{+*} . Pour cela, on dérive et on cherche la valeur d'annulation :

$$f'(x) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2(-2x)(1-x^2) + \frac{2x}{Q^2}$$

$$\text{Ainsi, } f'(x_r) = 0 \Rightarrow 2(2x_r)(1-x_r^2) = \frac{2x_r}{Q^2}$$

On cherche une solution non nulle, on en déduit

$$2(1-x_r^2) = \frac{1}{Q^2} \Leftrightarrow 1-x_r^2 = \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow x_r^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

Cette équation n'admet de solution que si $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0$, soit si

$$Q \stackrel{\textcircled{1}}{\geq} \frac{1}{\sqrt{2}}$$

qui est la condition de résonance. On a alors

$$x_r \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < 1$$



- /10 [5] Établir l'expression des asymptotes des diagrammes de BODE en gain **et** en phase. Tracer les allures de G_{dB} et $\Delta\varphi_{s/e}$ en fonction de la pulsation réduite x pour $Q \approx 0,5$ et $Q \approx 5$.

Réponse

On trace les diagrammes de BODE, avec :

TABLEAU 5.1 – Étude RLC sur C.

	$\forall x$	$x \rightarrow 0$	$x \rightarrow \infty$
$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\frac{1}{1-x^2 + j\frac{x}{Q}}$	1 ①	$-\frac{1}{x^2}$ ①
$G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} $	$-10 \log \left((1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \right)$	0 ①	$-40 \log x$ ①
$\tan(\arg(\underline{H}))$	$-\frac{x/Q}{1-x^2}$	0	0
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$	---	0 ①	$-\pi$ ①



Dans les questions suivantes, on suppose que le facteur de qualité est grand. La réponse expérimentale du microphone (amplitude de la tension v en fonction de la fréquence f pour une amplitude de tension d'entrée constante) est donnée par la Figure 5.8. On propose d'étudier trois méthodes pour estimer le facteur de qualité à l'aide de cette courbe. **On exprimera Q avec un seul chiffre significatif.**

- /2 [6] Comment se simplifie l'expression de la pulsation de résonance lorsque $Q \gg 1$? Exprimer la valeur maximale du gain G_{max} en fonction du facteur de qualité et de H_0 .

Réponse

Si $Q \gg 1$, $\frac{1}{Q^2} \ll 1$ donc $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \approx 1$. Ainsi, $\omega_r = \omega_0$. ①

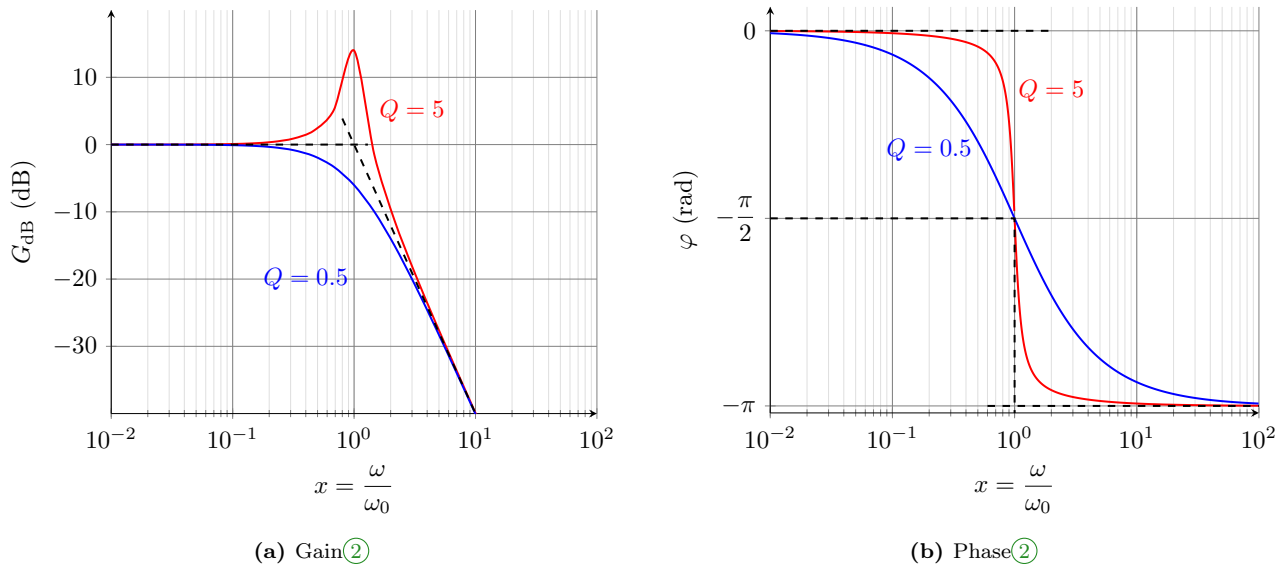


FIGURE 5.7 – Diagramme de BODE du filtre

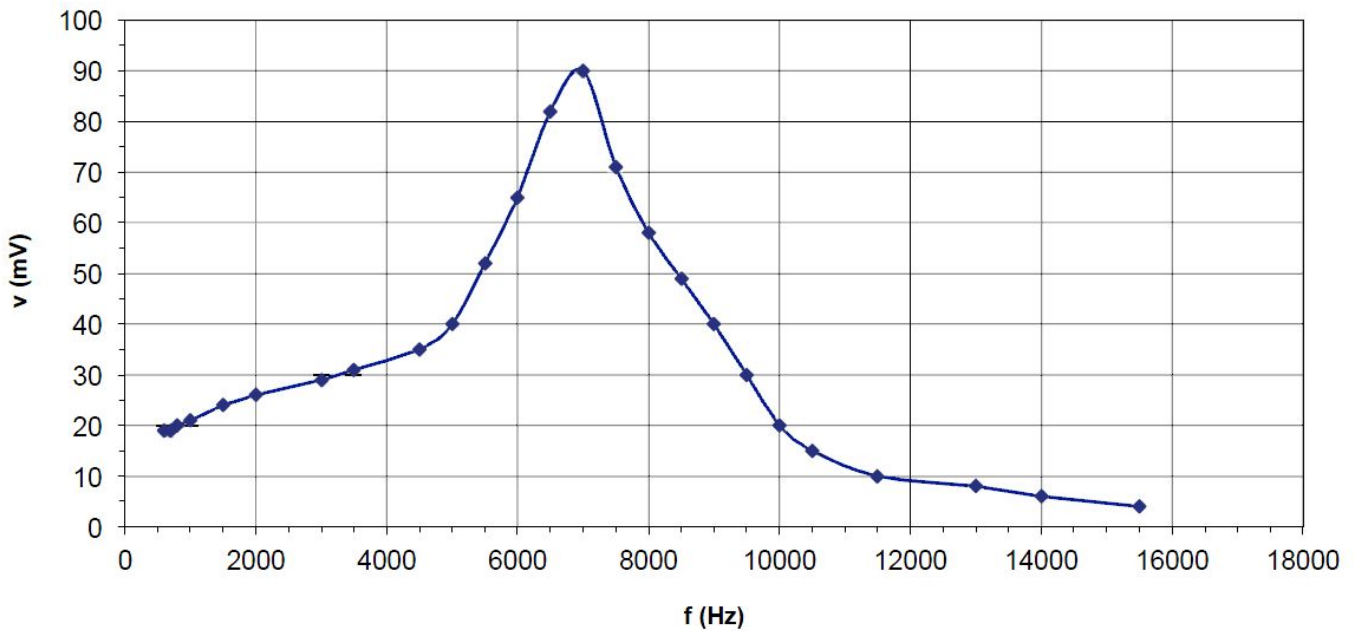


FIGURE 5.8 – Gain expérimental.

On a alors

$$G_{\max} = G(x = 1) = \left| \frac{H_0}{1 - 1 + j\frac{1}{Q}} \right| \Rightarrow \boxed{G_{\max} \textcircled{1} H_0 Q}$$



/2 7 OÙ peut-on lire H_0 ? En déduire après lecture graphique une valeur numérique pour Q .

Réponse

$H_0 \textcircled{1} G_{BF}$. On a donc

$$\boxed{Q \textcircled{1} \frac{G_{\max}}{G_{BF}}}$$

Sur le graphique, on lit $G_{\max}/G_{BF} = v_{\max}/v_0 = 90/19$. Il vient donc

$$Q \approx 4,5 \Leftrightarrow \boxed{Q \textcircled{1} \approx 5}$$



On définit l'acuité A de la résonance par la relation suivante :

$$A = \frac{f_r}{\Delta f} \approx Q$$

avec Δf la largeur de la bande passante. On admet que A est égal à Q dans le cas étudié ici.

- /1 [8] Rappeler la définition d'une fréquence de coupure.

Réponse

Une fréquence de coupure f_c est telle que $G(f_c) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$, ou avec la tension $v(f_c) = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}}$



- /5 [9] Faire une seconde estimation du facteur de résonance à l'aide d'une mesure de l'acuité. Comparer avec la première méthode.

Réponse

Sur le graphique, on relève $f_r \stackrel{\textcircled{1}}{=} 7000 \text{ Hz}$. On détermine les fréquences de coupure en cherchant les points où $v = \frac{v_{max}}{\sqrt{2}} = \frac{90}{\sqrt{2}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 64 \text{ mV}$.

On lit également $f_{c1} \stackrel{\textcircled{.5}}{=} 6,00 \text{ kHz}$ et $f_{c2} \stackrel{\textcircled{.5}}{=} 7,50 \text{ kHz}$. On a donc

$$A = Q \approx 4,67 \Leftrightarrow Q \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 5$$

On retrouve bien le même résultat $\textcircled{1}$ qu'avec l'autre méthode.



- /6 [10] À l'aide des expressions de ω_0 et Q déterminées dans la question [3], donner une estimation de la valeur de l'inductance L à partir d'une lecture graphique de la fréquence de résonance f_r . En déduire le facteur de qualité puis commenter le résultat obtenu.

Réponse

La lecture de f_0 nous donne ω_0 . Or, $\omega_0 = \sqrt{\frac{R_0 + R_L}{LC_0 R_0}}$ d'où

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{R_0 + R_L}{LC_0 R_0} \\ \Leftrightarrow L &= \frac{R_0 + R_L}{C_0 R_0 \omega_0^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_0 + R_L}{4\pi^2 f_0^2 C_0 R_0} \end{aligned}$$

Or, comme $R_L = 3 \times 10^3 \Omega$ et $R_0 = 1 \times 10^6 \Omega$, on peut considérer que $R_L \ll R_0$, on a alors $R_L + R_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} R_0$ d'où

$$L \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{4\pi^2 f_0^2 C_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_0 = 7000 \text{ Hz} \\ C_0 = 100 \times 10^{-12} \text{ F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } L \stackrel{\textcircled{1}}{=} 5,17 \text{ H}$$

On peut alors retrouver Q en appliquant la formule théorique provenant de la détermination de la fonction de transfert :

$$Q = \frac{\sqrt{(R_L + R_0)LCR_0}}{R_L C R_0 + L} \approx \frac{\sqrt{LCR_0^2}}{R_L C R_0 + L} \Leftrightarrow Q \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 4$$

On obtient bien des résultats cohérents $\textcircled{1}$ avec les 3 méthodes. Le facteur de qualité est relativement grand devant 1, ce qui est cohérent avec l'hypothèse faite au début de l'étude.



- /3 [11] La fréquence de résonance varie selon le type de microphone utilisé. Quel est l'effet sur le son restitué ?

Réponse

Le microphone est un passe-bas mais du fait de son facteur de qualité élevé, il possède une résonance marquée $\textcircled{1}$. Pour une même note jouée par l'instrument, l'usage de deux microphones différents induira la restitution de la même **note** $\textcircled{1}$ (caractérisée par la fréquence du fondamental et sachant qu'un filtre linéaire ne modifie jamais la fréquence fondamentale du signal), mais le spectre sera différent car toutes les harmoniques ne seront pas amplifiées de la même façon suivant la valeur de la fréquence de résonance. Le type de microphone modifie donc le **timbre** $\textcircled{1}$ du son. Le choix du microphone peut donc donner un son plus "jazz" ou plus "rock"...



/42 P2 Le bleu du ciel

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) : il est soumis à une force de rappel \vec{F}_R passant par le centre de l'atome. Dans tout l'exercice, on admettra que l'on peut se ramener à un problème selon une unique direction ($0, \vec{e}_x$), c'est-à-dire que $\vec{F}_R = -kx\vec{e}_x$, où x est la distance entre l'électron et l'atome.

Nous supposons que cet électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnel à sa vitesse $\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\frac{dx}{dt}\vec{e}_x$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

On admet qu'une onde lumineuse provenant du Soleil impose sur un électron de l'atmosphère, une force $\vec{F}_E = -eE_0 \cos(\omega t) \vec{e}_x$.

Données. masse d'une électron : $m = 9,1 \times 10^{-31}$ kg, charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19}$ C, célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \times 10^8$ m·s⁻¹, $k = 500$ SI, $h = 1 \times 10^{-20}$ SI.

- /4 1 Quelles sont les dimensions des grandeurs k et h ? En quelles unités du système international les exprime-t-on ?

Réponse

Par analyse dimensionnelle :

$$\dim(k) = \frac{\text{force}}{\text{longueur}} = \frac{MLT^{-2}}{L} = MT^{-2} \quad ; \quad \dim(h) = \frac{\text{force}}{\text{vitesse}} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} = MT^{-1}$$

Leurs unités en système international sont donc :

$$k \text{ en } \boxed{\text{kg} \cdot \text{s}^{-2}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\text{N} \cdot \text{m}^{-1}} \quad ; \quad h \text{ en } \boxed{\text{kg} \cdot \text{s}^{-1}}$$

- /2 2 En utilisant le PFD, donner l'équation différentielle vérifiée par la position de l'électron $x(t)$.

Réponse

D'après le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel de l'atome considéré comme galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F}_R + \vec{F}_f + \vec{F}_E$$

En projetant cette relation sur l'axe (O, \vec{e}_x), on obtient :

$$m\ddot{x} = -kx - h\dot{x} - eE_0 \cos(\omega t)$$

- /4 3 Montrer qu'on peut l'exprimer sous la forme :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{e}{m} E_0 \cos(\omega t)$$

On donnera les expressions de ω_0 et Q en fonction des données.

Réponse

Sous forme canonique, cette équation est :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} + \frac{k}{m} x = -\frac{eE_0}{m} \cos(\omega t)$$

On en déduit que :

$$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \quad \text{et} \quad \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

On trouve alors :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{h} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{mk}}{h}$$

- /2 [4] Calculer Q . Que peut-on en déduire sur le régime transitoire ?

Réponse

On trouve :

$$Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2,1 \times 10^6 > \frac{1}{2}$$

On en déduit que le régime transitoire est **pseudo-périodique**. $\textcircled{1}$

- /9 [5] Montrer que le temps caractéristique du régime transitoire est $\tau = 2Q/\omega_0$, et donnez l'expression de la pseudo-pulsation Ω . Au bout de combien de temps peut-on considérer le régime transitoire comme terminé ? Calculer τ . Peut-on considérer que l'électron est en régime permanent ?

Réponse

Le régime transitoire correspond à la solution homogène $x_h(t)$ telle que

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{x} + \omega_0^2 x \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

d'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \quad \text{avec} \quad \Delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

Comme le régime est pseudo-périodique, on sait que les racines sont complexes, et on aura

$$r_{\pm} \stackrel{\textcircled{2}}{=} - \underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{1/\tau} \pm j \underbrace{\frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}}_{\Omega}$$

On a donc

$$\tau \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Omega \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Au bout de quelques τ , on peut considérer que le régime transitoire est nul. $\textcircled{1}$

Par A.N., on trouve

$$\tau \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,8 \times 10^{-10} \text{ s}.$$

On suppose donc que l'électron est en régime permanent. $\textcircled{1}$

- /2 [6] Pourquoi peut-on alors dire que $x(t) \approx X_m \cos(\omega t + \varphi)$?

Réponse

On a

$$x(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} x_h(t) + x_p(t)$$

avec x_h une solution homogène et x_p la solution particulière, de même fréquence $\textcircled{1}$ de l'excitation. Ainsi, pour des durées supérieures à quelques τ , donc supérieures à 10^{-9} s, on peut considérer que $x_h(t) = 0$, soit $x(t) \approx x_p(t)$.

- /4 [7] Exprimer X_m en fonction de ω_0 , de Q et des données. On pourra utiliser la notation complexe.

Réponse

En notations complexes, on définit la représentation complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ et l'amplitude complexe $\underline{X}_m = X_m e^{j\varphi}$. On peut alors écrire :

$$(j\omega)^2 \underline{X}_m + \frac{(j\omega)\omega_0}{Q} \underline{X}_m + \omega_0^2 \underline{X}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{-eE_0}{m} \Leftrightarrow \underline{X}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\frac{-eE_0}{m}}{\omega_0^2 - \omega^2 + \frac{(j\omega)\omega_0}{Q}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{-eE_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

On a alors :

$$X_m = |\underline{X}_m| = \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}$$

Un électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne \mathcal{P} est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération.

/2 13 Montrer que :

$$P = K \left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2} \right)^2$$

où K est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

Réponse

En amplitude complexe, l'accélération est :

$$\underline{A_m} \stackrel{\textcircled{1}}{=} (j\omega)^2 \underline{X_m} \Rightarrow \underline{A_m} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}$$

D'après le sujet, la puissance est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération, donc

$$P = K A_m^2 = K \left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2} \right)^2$$



/2 14 Expliquer alors pourquoi le ciel est bleu.

Réponse

On peut comparer la puissance diffusée pour un rayonnement bleu avec un rayonnement rouge :

$$\frac{P_b}{P_r} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 4$$

La puissance diffusée pour les rayonnements bleus est 4 fois plus importante que celle pour un rayonnement rouge, d'où la couleur du ciel !



/2 15 Pourquoi le ciel est-il rouge quand le Soleil se couche ?

Réponse

Le Soleil rasant parcourt une plus grande couche d'atmosphère $\textcircled{1}$ par rapport au zénith : tout le rayonnement bleu a déjà été diffusé, et il ne reste que le rouge. $\textcircled{1}$

