Correction du TD

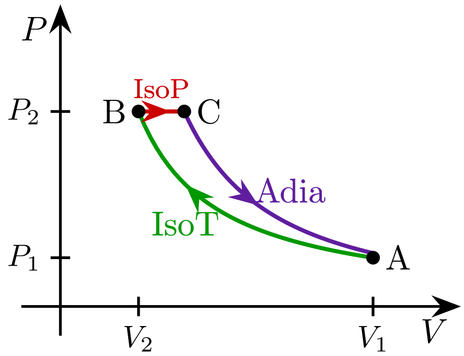
I Cycle de transformation

Deux moles de gaz parfait diatomique subissent le cycle de transformations mécaniquement réversible suivant :

1. Compression isotherme de l'état A à l'état B, avec $T_\mathrm{A} = T_\mathrm{B} = 298\,\mathrm{K}$ et $P_\mathrm{A} = 1{,}0\,\mathrm{bar}$;
2. Un chauffage isobare de l'état B à l'état C, avec $T_C = 400\,\mathrm{K}$;
3. Une détente adiabatique ramenant le système de l'état C à l'état initial A.

1) Représenter le cycle de transformations dans un diagramme de WATT.

Réponse



◇

2) Exprimer et calculer le travail et le transfert thermique pour chacune des transformations AB, BC et CA.

Réponse

TABLEAU 3.1 – Expressions de U, W_p et Q pour le gaz parfait diatomique

Transfo.	Énergie interne	Travail pression	Transfert thermique
AB isoT.	$\Delta U_\mathrm{AB} = 0$	$W_\mathrm{AB} = -nRT_A \ln \dfrac{V_B}{V_A} = 5{,}1\,\mathrm{kJ}$	$Q = -W_\mathrm{AB} = -5{,}1\,\mathrm{kJ}$
BC isoP.	$\Delta U_\mathrm{BC} = C_V(T_C - T_B)$	$W_\mathrm{BC} = \Delta U_\mathrm{BC} - Q_\mathrm{BC} = -1{,}7\,\mathrm{kJ}$	$Q_\mathrm{BC} = \Delta H_\mathrm{BC} = C_P(T_C - T_B) = 5{,}9\,\mathrm{kJ}$
CA adia.	$\Delta U_\mathrm{CA} = C_V(T_A - T_C)$	$W_\mathrm{CA} = \Delta U_\mathrm{CA} = -4{,}2\,\mathrm{kJ}$	$Q = 0$

◇

3) De quel type de machine thermique s'agit-il ?

Réponse

$W_\mathrm{cycle} < 0$: c'est un moteur.

◇

II Échauffement d'une bille en mouvement dans l'air

Une bille métallique, de capacité thermique massique c (supposée constante) est lancée vers le haut avec une vitesse $\overrightarrow{v_0}$ dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ uniforme. Elle atteint une altitude h puis redescend.

$g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$; $c = 0{,}4\,\mathrm{kJ{\cdot}kg^{-1}}$; $v_0 = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$; $h = 5\,\mathrm{m}$.

1) Déterminer l'altitude maximale h_0 que peut atteindre la bille si on néglige les forces de frottement fluide entre l'air et la bille. Exprimer h_0 en fonction de v_0 et g.

Réponse

Système = {bille} dans $\mathcal{R}_{\text{terre}}$ supposé galiléen. Seule force subie est le poids. Avec $\dot{z}(0) = v_0$ et $z(0) = 0$:

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + v_0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t$$

Altitude maximale quand $\dot{z}(t_{\max}) = 0 \Leftrightarrow t_{\max} = \dfrac{v_0}{g}$, soit

$$\boxed{h_0 = z(t_{\max}) = \frac{{v_0}^2}{2g}}$$

◇

On constate que l'altitude h est inférieure à h_0, à cause des forces de frottement. Calculer la variation de température ΔT de cette bille entre l'instant où elle est lancée et l'instant où elle atteint son point le plus haut, en supposant que :

- ◇ On néglige toute variation de volume de la bille ;
- ◇ l'air ambiant reste macroscopiquement au repos ;
- ◇ le travail des forces de frottement se dissipe pour moitié dans l'air ambiant et pour moitié dans la bille.

2) Exprimer ΔT en fonction de h_0, h, g et c.

Réponse

L'énergie mécanique de la bille, sans frottement, est constante, et en utilisant l'énergie au maximum d'altitude s'écrit $E_{m,0} = mgh_0$. Avec frottement, son énergie n'est **plus constante**, mais à son maximum d'altitude on a $E_m = mgh$.

La différence entre ces énergie est égale à l'énergie perdue par frottement avec l'air, soit le travail reçu de l'air :

$$W_f = E_{m,0} - E_m = mg(h_0 - h)$$

Or, la moitié de cette énergie est évacuée dans l'air, tandis que l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie interne de la bille. Ainsi,

$$\Delta U = \frac{1}{2}mg(h_0 - h) \Leftrightarrow mc\Delta T = \frac{1}{2}mg(h_0 - h)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta T = \frac{g}{2c}(h_0 - h)}$$

étant donné que la bille est supposée incompressible et indilatable, et qu'elle suit donc la première loi de Joule.

◇

3) Calculer h_0 puis ΔT.

Réponse

On trouve $h_0 \approx 5{,}097\,\mathrm{m}$, soit $\underline{\Delta T \approx 1{,}2\,\mathrm{mK}}$.

◇

★☆☆ III Détente de Joule Gay-Lussac

Le dispositif étudié dans cet exercice a été mis eu point au XIXe siècle par **Joule** et **Gay-Lussac** en vue d'étudier le comportement des gaz. Deux compartiments indéformables aux parois calorifugées communiquent par un robinet initialement fermé. Le compartiment (1), de volume V_1, est initialement rempli de gaz en équilibre à la température T_i. Le vide est fait dans le compartiment (2). Une fois le robinet ouvert, un nouvel équilibre s'établit, caractérisé par une température T_f du gaz.

1) Faire un schéma des états initial et final. En considérant comme système fermé le contenu des deux compartiments, caractériser la transformation subie par ce système.

Réponse

solu

◇

2) Montrer que cette détente est isoénergétique, c'est-à-dire que l'énergie interne du gaz ne varie pas aucours de la transformation. Cette propriété dépend-elle du gaz ?

Réponse

solu

◇

3) Déterminer la température T_f dans le cas où le gaz est parfait.

Réponse

solu

◇

En réalité, on observe une légère diminution de la température du gaz dans la quasi-totalité des cas. L'expérience est ici réalisée avec du dioxygène, qui peut être efficacement modélisé par un gaz de VAN DER WAALS. L'équation d'état d'une tel gaz s'écrit

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \qquad \text{tel que} \qquad U = nC_{V,m}T - \frac{na^2}{V}$$

avec a et b deux constantes positives caractéristiques du gaz. Les travaux de VAN DER WAALS sur le comportement microscopique des gaz ont été de première importance, et il en a été récompensé par le prix NOBEL 1910. Pour le dioxygène, $C_{V,m} = 21\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$ et $a = 1{,}32\,\mathrm{USI}$.

4) Interpréter physiquement l'origine du terme de cohésion a et du volume exclu b, et donner leur dimension. Nommer et interpréter la constante $C_{V,m}$.

Réponse

solu

◇

5) Déterminer l'expression de la température finale T_f du gaz.

Réponse

solu

◇

6) Effectuer l'application numérique de ΔT pour $n = 0{,}80\,\mathrm{mol}$ et $V_1 = V_2 = 5{,}0\,\mathrm{L}$.

Réponse

solu

◇

★☆☆ IV Calorimétrie du fer

La calorimétrie consiste en la mesure d'échanges thermiques. On utilise pour cela un calorimètre, dont les parois son conçues pour minimiser les échanges thermiques entre l'intérieur et l'extérieur du calorimètre. Ces échanges seront considérés comme nuls. Les transformations se font à la pression atmosphérique constante, et sont donc supposées monobares.

1) **Mesure de la capacité thermique C du calorimètre**

Le calorimètre contient initialement une masse $m = 100\,\mathrm{g}$ d'eau, l'ensemble étant à la température ambiante $\theta_0 = 20{,}0\,°\mathrm{C}$. On ajoute alors la même masse d'eau à $\theta_1 = 80{,}0\,°\mathrm{C}$. On remue pour homogénéiser le système et on mesure la température $\theta_f = 43{,}6\,°\mathrm{C}$. La capacité thermique massique de l'eau est $c = 4{,}18\,\mathrm{kJ{\cdot}K^{-1}{\cdot}kg^{-1}}$.

a – Montrer que l'enthalpie du système {parois + eau} reste constante au cours de la transformation.

Réponse

solu

◇

b – En déduire la capacité thermique massique C des parois internes du calorimètre.

Réponse

solu

◇

c – Quelle est la masse en eau m_0 du calorimètre ?

Réponse

solu

◇

d – Pourquoi ne faut-il pas trop attendre pour mesurer la température finale ? Quelle serait sa valeur si on attendait un temps très long ?

Réponse

solu

◇

2) **Mesure de la capacité thermique massique du fer**

On considère l'état initial où une masse $m = 100\,\mathrm{g}$ d'eau et une masse $m_f = 140\,\mathrm{g}$ de fer sont dans le calorimètre. Une résistance électrique de masse négligeable est aussi immergée dans le liquide. Lensemble est initialement à la température $\theta_0 = 20{,}0\,°\mathrm{C}$. Pendant une durée $\tau = 30\,\mathrm{s}$, un générateur électrique fourni à la résistance une puissance $\mathcal{P} = 350\,\mathrm{W}$. On homogénéise la solution et on mesure la température $\theta'_f = 34{,}8\,°\mathrm{C}$.

a – Exprimer la variation d'enthalpie du système {parois + eau + fer + résistance} au cours de la transformation précédente.

Réponse

solu

◇

b – En déduire l'expression puis la valeur de la capacité thermique massique du fer c_{Fe}.

Réponse

solu

◇

V Transformation polytropique

Une transformation polytropique est une transformation d'un gaz pour laquelle il existe un coefficient $k > 0$ tel que $PV^k = \text{cte}$ tout au long de la transformation. De telles transformations sont intermédiaires entre des adiabatiques et des isothermes, et se rencontrent en thermodynamique industrielles, par exemple lorsque le système réfrigérant ne permet pas d'éliminer tout le transfert thermique produit par une réaction chimique. On raisonnera à partir d'une transformation quasi-statique d'un gaz parfait.

Pour un gaz parfait, $$C_V = \frac{nR}{\gamma - 1} \text{ et } C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}.$$

1) À quelles transformations connues correspondent les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = +\infty$?

Réponse

solu

◇

2) Calculer le travail des forces de pression pour un gaz subissant uns transformation polytropique entre deux états (P_0,V_0,T_0) et (P_1,V_1,T_1) en fonction d'abord des pressions et des volumes, puis dans un second temps des températures seulement.

Réponse

solu

◇

3) Montrer que le transfert thermique au cours de la transformation précédente s'écrit

$$Q = nR\left(\frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1}\right)(T_1 - T_0)$$

Réponse

solu

◇

4) Analyser les cas $k = 0$, $k = 1$ et $k = +\infty$, et vérifier la cohérence avec l'analyse initiale.

Réponse

solu

◇

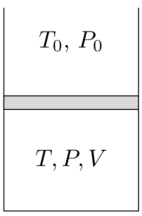
5) À quel type de transformation correspond le cas $k = \gamma$?

Réponse

solu

◇

VI Comparaison entre transformations



On considère un système composé d'une quantité de matière n de gaz parfait diatomique enfermée dans une enceinte. Cette enceinte est fermée par un piston de surface S et dont on négligera la masse, pouvant coulisser sans frottement. L'ensemble est situé dans l'atmosphère, dont on note T_0 et P_0 la température et la pression. On note I l'état initial. L'objectif est de comparer deux transformations du système : l'une brutale et l'autre lente.

Commençons par la transformation brutale : on lâche brusquement une masse M sur le piston, qui se stabilise en un état intermédiaire 1.

1) Le meilleur modèle pour la transformation est-il isotherme ou adiabatique ? Peut-on en déduire un résultat sur la température T_1 ?

Réponse

Le système considéré est le gaz et l'enceinte autour. On s'intéresse à une transformation brusque. Le système n'a pas le temps d'échanger de l'énergie sous forme de transfert thermique avec l'extérieur : la transformation peut donc être considérée comme **adiabatique**. En revanche, comprimer un gaz rapidement le rend plus chaud (comme dans une pompe à vélo). La température du gaz va varier, la transformation **ne** sera donc **pas** isotherme.

On ne peut rien dire sur T_1. On peut s'attendre à ce qu'elle soit supérieure à T_0 puisque l'on comprime rapidement le gaz.

◇

2) Déterminer la pression P_1.

Réponse

À l'état 1, le système est à l'équilibre mécanique. La pression qui s'exerce sur le piston est alors la somme de la pression atmosphérique plus celle de la masse posée sur la section S du piston. On en déduit que :

$$\boxed{P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

◇

3) Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chacun des termes $W_{I\to 1}$, $Q_{I\to 1}$ et $\Delta_{I\to 1}U$, et appliquer le premier principe.

Réponse

Puisque cette transformation est considérée comme adiabatique :

$$\boxed{Q_{I\to 1} = 0}$$

La transformation qu'il subit est monobare : tout au long de cette transformation, la pression extérieure est celle exercée par le piston sur le gaz qui est constante (la masse M est déposée en bloc). Ainsi,

$$W_{I\to 1} = -P_{\text{ext}}\Delta V \Leftrightarrow \boxed{W_{I\to 1} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_I)}$$

Comme le gaz est parfait, il suit la première loi de Joule, donc

$$\Delta U_{I\to 1} = C_V \Delta T \Leftrightarrow \boxed{\Delta_{I\to 1}U = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_I)}$$

D'après le premier principe appliqué au système pendant la transformation $I \to 1$:

$$\Delta U_{I\to 1} = W_{I\to 1} \Leftrightarrow \boxed{\frac{5}{2}nR(T_1 - T_I) = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_0)}$$

◇

4) Exprimer alors T_1 en fonction des pressions P_1,P_0 et la température T_0, et V_1 en fonction des pressions et du volume $V_I = V_0$.

Réponse

La pression P_1 est déjà connue. Pour déterminer la température T_1, on peut remplacer les volumes par $V_i = nRT_i/P_i$ dans l'expression du premier principe. Sachant que l'état initial est un état d'équilibre, on a $T_I = T_0$ et, **sans la masse**, $P_I = P_0$. Ainsi, on trouve

$$\frac{5}{2}nR(T_1 - T_I) = -nRP_1\left(\frac{T_1}{P_1} - \frac{T_I}{P_I}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T_1 = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I}\right)T_I}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{nRT_1}_{P_1V_1} = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I}\right)\underbrace{nRT_0}_{P_0V_0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{V_1 = \frac{2}{7}\left(\frac{5P_0}{2P_1} + 1\right)V_0}$$

◇

On observe qu'en fait l'état 1 n'est pas un réel état d'équilibre : le piston continue de bouger, mais beaucoup plus lentement, jusqu'à atteindre l'état 2 qui est l'état final.

5) Quel phénomène, négligé précédemment, est responsable de cette nouvelle transformation du système ? Comment peut-on qualifier cette transformation ?

Réponse

On a négligé les transfert d'énergie thermique entre le gaz et l'extérieur.

Cette transformation peut alors être qualifiée de **monobare** et **monotherme** (la température et la pression de l'extérieur ne varient pas). On peut aussi considérer que cette transformation est **isobare** car, comme la **transformation est lente**, le système sera à chaque instant à l'équilibre mécanique avec l'extérieur.

◇

6) Déterminer les caractéristiques T_2, P_2, V_2 de l'état 2.

Réponse

Dans l'état final, l'équilibre est complètement atteint : il y a équilibre thermique et mécanique. D'après la question précédente :

$$\boxed{T_2 = T_0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

Le volume occupé par le gaz est imposé par la loi du gaz parfait :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}}}$$

◇

7) Déterminer le travail reçu par le système, puis sa variation d'énergie interne au cours de la transformation $1 \to 2$. En déduire le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque.

Réponse

◇

Comparons maintenant à une transformation lente : la même masse M est lâchée très progressivement sur le piston, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ».

8) Comment qualifie-t-on une telle transformation ? Que peut-on en déduire sur la température du système au cours de la transformation ?

Réponse

solu

◇

9) Déterminer la pression dans l'état final et en déduire le volume. Commenter.

Réponse

solu

◇

10) Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chaque terme.

Réponse

solu

◇

11) Représenter alors ces deux transformations dans un diagramme de Watt (P,V), en considérant la transformation $I \to 1$ mécaniquement réversible, et commenter.

Réponse

solu

◇

⁂ VII Chauffage d'une chambre

On étudie le chauffage d'une chambre au dernier étage de l'internat en hiver. On installe un radiateur électrique d'appoint fournissant une puissance de chauffe $\mathcal{P}_c$. Le volume de la chambre est $V = 36\,\mathrm{m}^3$, et est rempli d'air de capacité thermique molaire $C_{V,m} = \frac{5}{2}R$. On la suppose vide de meubles.

Les échanges thermiques se font *via* par deux surfaces : le mur et les vitres en contact avec l'extérieur et le toit, de surfaces égales $S = 12\,\mathrm{m}^2$. Les autres surfaces sont supposées à l'équilibre thermique du fait des chambres voisines et en-dessous. On note $T_{\mathrm{int}}(t)$ la température intérieure, et $T_{\mathrm{ext}} = 10\,°\mathrm{C}$ la température extérieure, supposée constante.

Les fuites thermiques à la date t à travers le mur sont données par la puissance $\mathcal{P}_{\mathrm{mur}} = g_{\mathrm{mur}}S(T_{\mathrm{int}}(t) - T_{\mathrm{ext}})$, et celles à travers le toit par $\mathcal{P}_{\mathrm{toit}} = g_{\mathrm{toit}}S(T_{\mathrm{int}}(t) - T_{\mathrm{ext}})$.

On souhaite maintenir la température à une température de confort $T_c = 19\,°\mathrm{C}$. La pression de l'air intérieur est $P_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$ à cette température.

$g_{\mathrm{mur}} = 2{,}90\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$ et $g_{\mathrm{toit}} = 0{,}50\,\mathrm{W{\cdot}m^{-2}{\cdot}K^{-1}}$, $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$.

1) Faire un schéma représentant la pièce, le radiateur et l'extérieur, en faisant apparaître les transferts thermiques entrant en rouge et les transferts thermiques sortant en bleu.

Réponse

solu

◇

2) Calculer le nombre de moles d'air présentes dans la chambre dans les conditions (T_c,P_0). En déduire la capacité thermique C_V de l'air contenu dans la chambre. Faire l'application numérique.

Réponse

solu

◇

3) Quelle est la puissance $\mathcal{P}_c$ fournie par le radiateur pour maintenir une telle température de confort dans les conditions mentionnées ci-dessus ?

Réponse

solu

◇

On doit partir pour une khôlle et dîner, et on se demande s'il vaut mieux couper le chauffage ou le maintenir. On suppose alors qu'on arrête le chauffage à $t = 0$, et qu'on revient $3\,\mathrm{h}$ plus tard au temps t_1.

4) En supposant qu'il n'y a pas de circulation d'air, appliquer le premier principe sous forme différentielle à l'air de la chambre et déterminer l'équation différentielle vérifier par $T_{\mathrm{int}}(t)$ pour $t \in [0,t_1]$. On introduira un temps caractéristique τ que l'on calculera.

Réponse

solu

◇

5) Tracer cette évolution au cours du temps, et déterminer la température $T_{\mathrm{int,f}}$ lors du retour dans la chambre.

Réponse

solu

◇

6) Comme il fait très froid, on pousse la puissance de chauffe à son maximum, $\mathcal{P}_{c,\max} = 2{,}0\,\mathrm{kW}$. Écrire la nouvelle équation différentielle satisfaite par $T_{\mathrm{int}}(t)$, la résoudre et calculer la durée nécessaire pour retrouver la température de confort T_c. On appelle cet instant t_2.

Réponse

solu

◇

7) Déterminer alors la différence d'énergie entre les deux situations :

- ◇ On garde le chauffage à la puissance $\mathcal{P}_c$ de $t = 0$ à t_2 ;
- ◇ On a éteint le chauffage de $t = 0$ à t_1, mais on le rallume de t_1 à t_2 avec $\mathcal{P}_{c,\max}$.

On suppose que l'énergie électrique est parfaitement convertie en chaleur. Sachant que pour l'électricité on a $1\,\mathrm{kWh} \approx 0{,}27\,€$ avec l'augmentation de février 2024, déterminer l'écart financier entre ces deux méthodes. Commenter.

Réponse

solu

◇