Cristallographie et induction – corrigé

E1 Oxyde de zirconium solide /30

/1 **1** Le modèle des sphères dures consiste à considérer les entités monoatomiques (atomes ou ions) comme des sphères impénétrables et indéformables.

/3 **2** On a 8 atomes aux sommets, et 6 atomes au centre des faces (voir Figure 10.1). Les premiers sont partagés entre huit mailles, les seconds entre 2 mailles, d'où

$$N = 6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} \Leftrightarrow \boxed{N = 4} \text{ cations par maille}$$

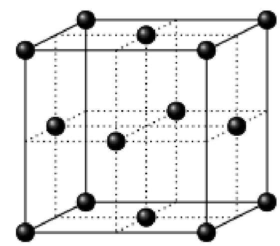


Figure 10.1 – Maille d'une CFC.

/3 **3** La compacité est le rapport du volume occupé par les entités sur le volume d'une maille. Pour une CFC, elle est de **74%**. C'est la compacité maximale pour une structure de sphères dures identiques. Il reste donc **26% de vide** qui peut être occupé par d'autres entités plus petites.

/3 **4** Dans la CFC, les sites tétraédriques (sites T) sont **au centre des huit cubes d'arête** $a/2$. Il y en a donc **8 par maille** (voir Figure 10.2).

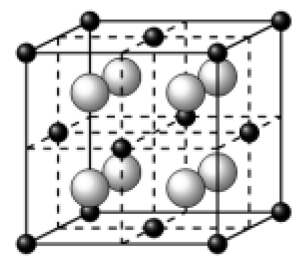


Figure 10.2 – Sites T de la structure CFC.

/4 **5** À la limite où l'anion occupe le site T sans déformer la structure de cations, le contact anion-cation se fait sur la grande diagonale du petit cube d'arête $a/2$ (voir Figure 10.3), soit

$$r_+ + r_- \leq \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{r_- \leq \frac{a\sqrt{3}}{4} - r_+}$$

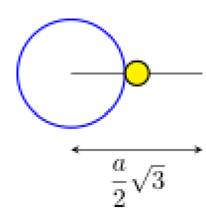


Figure 10.3 – Habitabilité d'un site T d'une CFC.

/1 **6** Les sites T appartiennent en propre à la maille, il y a donc autant d'anions que de site, c'est-à-dire **8 anions par maille**.

/2 **7** Il y a donc deux fois plus d'anions O^{2-} que de cations Zr^{4+}. La formule avec les plus petits entiers naturels est donc ZrO_2.

/3 **8** La coordinence d'une entité est son nombre de plus proches voisins (PPV). Ici, un anion est dans un site T, donc entouré de 4 cations PPV, donc la coordinence des **anions par rapport aux cations est de 4**. Un cation au centre d'une face, lui, est entouré de 8 petits cubes d'arête $a/2$, au centre desquels se trouvent les anions : la coordinence des **cations par rapport aux anions est de 8**.

/3 **9** La masse volumique est le rapport de la masse des entités *en propre* sur le volume de la maille. Ainsi,

$$\rho = \frac{N_{Zr} m_{Zr} + N_O m_O}{a^3} \Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{4M_{Zr} + 8M_O}{\mathcal{N}_A a^3}}$$

/2 **10** L'oxygène se trouve toujours sous la forme d'anions O^{2-}. Par neutralité de la structure, on a donc

$$2z + 3 \times (-2) = 0 \Leftrightarrow z = 3$$

d'où la notation Y^{3+}.

/2 $\boxed{11}$ Si la substitution se fait le plus simplement possible, un cation Zr^{4+} est remplacé par un cation Y^{3+} : tout se passe donc comme si le cristal avait perdu une charge +, et donc qu'il s'est chargé négativement.

/3 $\boxed{12}$ En fonction de x et y, la formule chimique de la structure s'écrit $Zr_{1-x}Y_xO_y$. La neutralité impose

$$4(1-x)+3x-2y=0 \Leftrightarrow \boxed{y = 2-\frac{x}{2}}$$

Ainsi, au cours du processus de substitution, certains sites tétraédriques de l'alliage se vident de leurs ions O^{2-} pour préserver la neutralité de la structure. On vérifie par ailleurs qu'avec $x=0$, c'est-à-dire sans dopage, on retrouve bien $y=2$.

E2 Questions de cours /36

A Couple sur un aimant /10

/4 $\boxed{1}$ Voir Figure 10.4. On étudie l'aimant, caractérisé par un moment $\vec{m}$ uniquement, dans un champ magnétique uniforme et stationnaire $\vec{B}$ dans le plan de l'aimant. On utilise le référentiel du laboratoire supposé galiléen, avec une base cartésienne $(\vec{u_x},\vec{u_y},\vec{u_z})$ orthonormée directe. On appelle θ l'angle orienté de $\vec{B}$ à $\vec{m}$, compté positivement dans le sens direct.

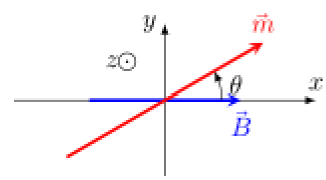


FIGURE 10.4 – Aimant dans $\vec{B}$.

/2 $\boxed{2}$ On a

$$\vec{m} = m\,(\cos\theta\vec{u_x} + \sin\theta\vec{u_y}) \text{ et } \vec{B} = B_0\vec{u_x}$$

D'où

$$\vec{\Gamma}_z = (\vec{m}\wedge\vec{B})\cdot\vec{u_z} \Leftrightarrow \boxed{\vec{\Gamma}_z = -mB_0\sin\theta\vec{u_z}}$$

/2 $\boxed{3}$ On est à l'équilibre si la somme des forces et la somme des moments sont nulles. Avec uniquement le couple magnétique, on a bien une résultante nulle : on a donc équilibre si $\vec{\mathcal{M}}_z = \vec{0}$, soit

$$\sin\theta_{\rm eq} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{\rm eq} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_{\rm eq} = \pi$$

/2 $\boxed{4}$
- En $\theta_{\rm eq} = \pi$, une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens horaire, qui écarte donc l'aimant de sa position d'équilibre : il est **instable**.
- À l'inverse, en $\theta_{\rm eq} = 0$, une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens direct, le ramenant à sa position d'équilibre : il est **stable**.

B Modération de Lenz /7

/1 $\boxed{5}$ **L'induction modère, par ses conséquences, les causes qui lui a donné naissance.**

/6 $\boxed{6}$ Les lignes de champ vont du Nord vers le Sud. On doit déterminer le sens de variation du champ vu par la spire : le champ induit atténue cette variation. On en déduit le signe réel de i par la règle de la main droite.

A) $\overrightarrow{B}_{\text{aimant}}$ augmente vers la gauche : $\overrightarrow{B}_{\text{induit}}$ est vers la droite, donc issu de $i_{\text{ind}} > 0$.

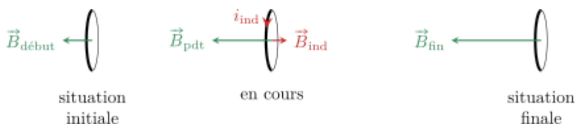


FIGURE 10.5 – Situation 1.

B) Même situation physique, convention opposée : $i_{\text{ind}} < 0$.

C) Cette fois $\overrightarrow{B}_{\text{aimant}}$ augmente vers la droite : $\overrightarrow{B}_{\text{ind}}$ est vers la gauche. Sens réel du courant opposé : $i_{\text{ind}} < 0$. Voir Figure 10.6.

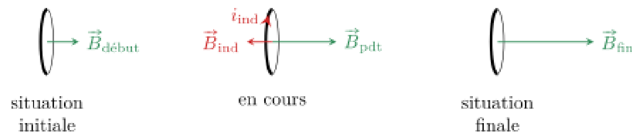


FIGURE 10.6 – Situation 3.

D) Pareil qu'à la question 2 : $i_{\text{ind}} < 0$.

E) Pas de mouvement relatif donc pas de variation de champ donc pas d'induction : $i_{\text{ind}} = 0$.

F) Mouvement relatif amplifié. Ici, le champ **diminue** vers la gauche, donc le champ induit le **renforce** ; ainsi $i_{\text{ind}} < 0$.

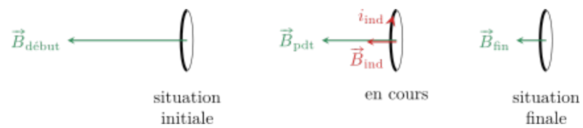


FIGURE 10.7 – Situation 6.

C Loi de FARADAY /11

/4 7 Le champ magnétique est variable, et la surface $S = a^2$ est fixe. Ainsi, le flux est variable. D'après la loi de FARADAY, une f.é.m. induite va apparaître dans le circuit : il y a donc un phénomène d'induction.

/4 8 On a alors :

$$\phi_S(\overrightarrow{B}) = -Ba^2 = -B_0 a^2 \mathrm{e}^{-t/\tau} \quad \text{soit} \quad e_{\text{ind}} = -\frac{\mathrm{d}\phi}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \boxed{e_{\text{ind}} = -\frac{B_0 a^2}{\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} < 0}$$

Or, comme le circuit est fermé, **et que e est en convention générateur**,

$$e_{\text{ind}} = Ri_{\text{ind}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i_{\text{ind}} = -\frac{B_0 a^2}{T\tau}\mathrm{e}^{-t/\tau} < 0}$$

donc l'intensité est **négative**.

/1 9 En effet, le champ magnétique induit réel doit s'opposer à la diminution du champ extérieur $\overrightarrow{B}$, en créant un champ magnétique positif selon $\overrightarrow{u_z}$: le sens réel du courant donné par la main droite est l'opposé de celui représenté.

/2 10 On peut faire varier la surface. Les rails de LAPLACE générateurs sont un exemple. L'expérience de TP avec le galvanomètre en est un autre.

D Inductance propre /8

/1 11 Le flux propre, noté ϕ_P d'un circuit est le flux de son propre champ magnétique à travers sa surface.

/1 12 L'auto-inductance est le facteur de proportionnalité entre le flux propre et le courant à l'origine de son champ propre :

$$\phi_p(t) = Li(t)$$

/6 13

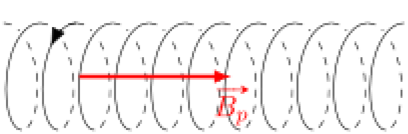


FIGURE 10.8 – Champ propre d'un solénoïde.

Le champ propre dans un solénoïde est

$$\overrightarrow{B_p}(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t)\,\overrightarrow{u_z}$$

i et $\overrightarrow{B_p}$ respectent la règle de la main droite.

Pour N spires :

$$\phi_p = N \times \overrightarrow{B_p} \cdot \overrightarrow{S}$$

Or, $\overrightarrow{B_p}$ et $\overrightarrow{S}$ sont tous deux orientés à partir de i selon la règle de la main droite, donc

$$\overrightarrow{S} = S\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B_p} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t)\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S i(t)}$$

On a démontré que le flux magnétique propre et l'intensité étaient proportionnels, et que la constante de proportionnalité était positive. On identifie simplement :

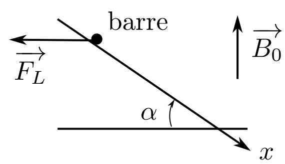
$$\boxed{L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S}$$

D'où par application numérique

$$\underline{L \approx 35\,\mathrm{mH}}$$

E3 Rails de Laplace inclinés /19

/4 1 Par définition, $\mathrm{d}\overrightarrow{F_L} = i\mathrm{d}\overrightarrow{\ell} \wedge \overrightarrow{B_0}$. Cette force est orthogonale à la barre et à $\overrightarrow{B_0}$. Elle est donc horizontale, orientée vers la gauche : **réponse C)**



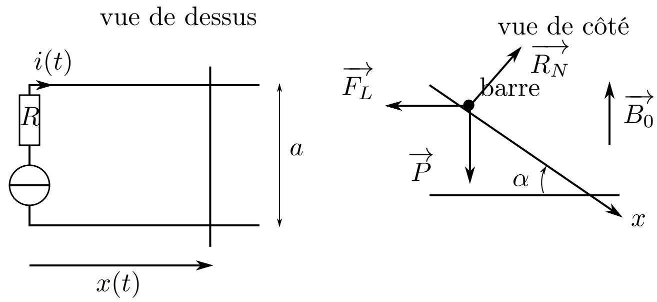
/4 2 Par définition de la puissance d'une force $\mathcal{P}_L = \overrightarrow{F_L} \cdot \overrightarrow{v}$. Or $\overrightarrow{v} = \dot{x}\overrightarrow{e_x}$.

Donc $\mathcal{P}_L = (\overrightarrow{F_L} \cdot \overrightarrow{e_x})\dot{x}$, avec $\overrightarrow{F_L} = -iB_0 a\overrightarrow{n}$ et $\overrightarrow{n}$ le vecteur unitaire associé à l'axe horizontal vers la droite.

On en déduit $\boxed{\mathcal{P}_L = -B_0 ia\cos(\alpha)\dot{x}}$: **réponse C)**

/5 3 On étudie la barre en translation selon $\overrightarrow{e_x}$, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La barre est soumise au poids, à la résultante des forces de Laplace et aux 2 réactions au niveau des rails (forces orthogonales à $\overrightarrow{e_x}$ en l'absence de frottement de glissement).



On applique le PFD projeté selon $\overrightarrow{e_x}$ pour obtenir la **réponse A)** :

$$\boxed{m\ddot{x} = mg\sin(\alpha) - B_0 ia\cos(\alpha)}$$

/6 4 On utilise l'expression de $i(t) = I_0\cos(\omega t)$.

Par intégration avec la CI $\dot{x}(t=0) = 0$:

$$\dot{x}(t) = g\sin(\alpha)t - \frac{B_0 I_0 a\cos(\alpha)}{m\omega}\sin(\omega t)$$

On intègre encore une fois avec la CI $x(t=0) = x_0$ pour obtenir la **réponse D)** :

$$\boxed{x(t) = \frac{g\sin(\alpha)}{2}t^2 + \frac{B_0 I_0 a\cos(\alpha)}{m\omega^2}(\cos(\omega t) - 1) + x_0}$$