

# Étude des oscillations forcées d'un oscillateur mécanique amorti

## I Objectifs

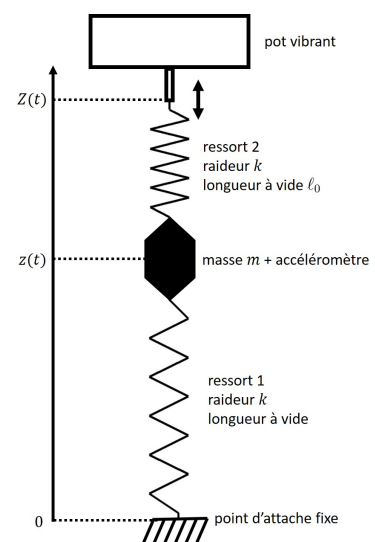
- Utiliser un microcontrôleur Arduino afin de mettre en œuvre un accéléromètre.
- Tracer l'allure de la courbe de résonance en vitesse et en position.
- Vérifier les principales caractéristiques des oscillations mécaniques forcées.
- Déterminer le facteur de qualité du montage.

## II S'appropriier : montage expérimental

Une masse  $m$ , assimilée à un point matériel  $M$ , est suspendue entre deux ressorts dont l'un d'eux – celui du haut – est relié à un pot vibrant permettant d'induire un mouvement linéaire quasi sinusoïdal d'amplitude constante mais de fréquence réglable. Le déplacement du système vibrant dans l'air est à l'origine d'un amortissement fluide modélisé par une force du type :

$$\vec{F} = -\alpha \vec{v}$$

Un accéléromètre est attaché directement à la masse en translation verticale afin de suivre son déplacement au cours du temps.



## III Analyser

On repère la position de la masse  $m$  grâce à son abscisse  $z$  sur l'axe  $(Oz)$  dont l'origine  $O$  est au point d'attache fixe du ressort (1). Les deux ressorts ont une longueur à vide  $\ell_0$  et sont de raideur  $k$ .

### A À excitation nulle

À excitation nulle, on suppose que  $Z(t) = h$ , une constante.

- ① Montrer que la longueur du ressort (1) à l'équilibre est :

$$\ell_{eq1} = z_{eq} = \frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}$$

- ② On pose  $u = z - z_{eq}$ . Montrer que l'équation différentielle du mouvement de la masse  $m$  peut se mettre sous la forme canonique :

$$\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u} + \omega_0^2 u = 0$$

Identifier  $\omega_0$  et  $Q$ , rappeler leur nom et leur unité.

- ③ Quel est le ressort équivalent aux deux ressorts ?

## B En régime sinusoïdal forcé

On se place en régime sinusoïdal forcé et on suppose que le point d'attache haut du ressort (2) suit un mouvement sinusoïdal autour de sa position d'équilibre  $h$  :

$$Z(t) = h + \alpha \cos(\omega t)$$

Ainsi, le mouvement de la masse est lui aussi sinusoïdal, de même fréquence que le forçage :

$$u = U \cos(\omega t + \varphi)$$

- ④ Rappeler l'allure des courbes de résonance (amplitude des oscillations en fonction de la fréquence) en position ( $u(t)$ ) et en vitesse ( $v_z = \dot{u}(t)$ ) pour un tel système mécanique. À quel type de filtre correspond chaque courbe ?
- ⑤ Exprimer  $v_z = \dot{u}(t)$  et  $a_z = \ddot{u}(t)$ , puis les amplitudes  $V$  et  $A$  de leurs oscillations en fonction de  $U$  et  $\omega$ .
- ⑥ Quelle relation relie la bande passante et le facteur de qualité lors de la résonance en vitesse ?

## C Détection automatique de la fréquence et de l'amplitude

Un signal réel est souvent bruité. Afin de détecter l'amplitude de l'accélération, on réalise une transformée de Fourier numérique du signal. Un pic dans le spectre apparaît autour de la fréquence d'excitation. En mesurant l'amplitude de ce pic, on obtient (par le théorème de PARSEVAL) l'amplitude du signal dans le domaine réel. Tout ce traitement est réalisé par la fonction `freq_finder` dans un script `Python`.

# IV Réaliser

## A Réglages

- 1) Brancher le GBF au **geneboost** par un câble coaxial. Le **geneboost** permet de délivrer le courant important demandé par le haut parleur mais ne modifie pas le signal de tension.
- 2) Relier le **geneboost** au haut parleur par une liaison bifilaire.
- 3) Régler le GBF sur une fréquence de  $f = 4 \text{ Hz}$  et une tension crête à crête de  $6 \text{ Vpp}$ .
- 4) Attendre environ  $30 \text{ s}$  que le système atteigne le régime permanent avant de commencer toute mesure. Assurez vous que les oscillations soient bien verticales et qu'il n'y ait pas de rotation de la masselotte. Pour cela, régler la position du point d'attache bas en décalant ou tournant le contre-poids (point d'attache bas). Retenez vos fils à l'aide de la pince, ils ne doivent pas toucher la paillasse.
- 5) Ouvrir `Pyzo` et dans `Pyzo` ouvrir le script `Trace_graphe_accelerometre.py`.
- 6) Faire une acquisition de l'accélération sur `t_acquisition = 5 \text{ s}`. Une acquisition relativement longue est importante afin de traiter les données par la suite.

- Si le script s'interrompt, c'est une erreur dans la liaison série Arduino. Relancez simplement une nouvelle fois votre script. Ça devrait fonctionner correctement.
- Par ailleurs, entre deux acquisitions successives, appuyer sur **Ctrl + k** afin de réinitialiser le shell.

- 7) En fin d'acquisition, le script détermine la fréquence de forçage  $f$  et l'amplitude  $A$  de l'accélération  $a_z(t)$  grâce au script et à la fonction `freqfinder`. Vérifier que la fréquence renvoyée par le script correspond à peu près à celle du GBF ; on utilisera cependant **celle du GBF**.

## B Acquisition et enregistrement

- 1) Ouvrir `Capytale` avec ce lien : <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/3b87-1426775>
- 2) Dans la cellule « Données expérimentales », créez deux listes avec :
  - a – La fréquence  $f$  (en  $\text{Hz}$ )
  - b – L'amplitude  $A$  de la réponse en accélération déterminée avec le script sur `Pyzo`.
- 3) Faire une quinzaine d'acquisition entre  $f_{\min} = 4 \text{ Hz}$  et  $f_{\max} = 15 \text{ Hz}$ . Vous resserrerez vos mesures autour de la résonance.

## V Valider et conclure

### A Traitement des données

Afin d'exploiter les enregistrements, effectuez, à partir des données précédemment regroupées sur **Capytale**, les étapes suivantes **que vous expliquerez sur votre copie** (d'où les [1]) :

- [7] Calculer la pulsation  $\omega$  de chaque enregistrement.
- [8] Déterminer l'amplitude en vitesse puis en position à partir de  $A$ . Vous créerez pour cela deux nouvelles listes sur **Capytale** :  $V$  et  $U$ .
  - Tracer les graphes de ces valeurs expérimentales avec `plt.scatter`.
  - Tracer leurs lissages grâce à `pchip`.
- [9] Déterminer graphiquement la pulsation de résonance de l'oscillateur  $\omega_0$ .
- [10] Déterminer la bande passante de l'oscillateur, en déduire le facteur de qualité  $Q$ .
- [11] Ces deux courbes ont-elles l'allure attendue (vous vérifierez en particulier que les régimes asymptotiques soient approximativement cohérents) ? Les résonances se font-elles à la même pulsation ?
- [12] Conclure.

### B Ajustement des données

L'utilisation d'un lissage n'est pas une approche scientifiquement approuvée pour déterminer des valeurs expérimentales. En effet, l'ordre de réflexion dans la recherche scientifique est de d'abord établir la théorie, puis de faire l'expérimentation et comparer la courbe obtenue aux solutions analytiques déterminées. Dans notre cas, les amplitudes réelles de la vitesse et de l'élongation s'expriment :

$$V(\omega) = \frac{K_v}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}} \quad U(\omega) = \frac{K_u}{\sqrt{\left( 1 - \left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 \right)^2 + \left( \frac{\omega}{Q\omega_0} \right)^2}}$$

- 1) Compléter les fonctions `V_func` et `U_func` à partir du squelette donné sur **Capytale**.
  - 2) Remplir les entrées de `curve_fit` afin d'obtenir les valeurs ajustées.
  - 3) Tracer sur le même graphique les données expérimentales, les lissages et les fonctions ajustées.
- [13] Relever vos observations : est-ce qu'on obtient les mêmes réponses ? Quelle approche vous paraît plus précise dans ce cas ? Quelles sont les avantages et limites au fait d'ajuster un modèle théorique à des données ?

Pensez à rendre votre projet sur **Capytale** pour que je le note !

### C Comparaison à la réalité

La masse pèse 40 g.

- [14] Proposer un protocole (que vous réaliserez) afin de déterminer la raideur  $k$  des ressorts utilisés dans l'expérience.
- [15] En déduire la valeur de la pulsation théorique  $\omega_{0\text{théo}}$ . Comparer à la pulsation  $\omega_0$  précédemment obtenue.