

# Oscillateurs harmonique et amorti

## Au programme

### Savoirs

- ◇ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- ◇ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- ◇ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- ◇ Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.

### Savoir-faire

- ◇ Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.
- ◇ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- ◇ Réaliser un bilan énergétique.
- ◇ Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- ◇ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.



## Sommaire

<b>I Oscillateurs harmoniques</b>	<b>2</b>
A Introduction harmonique	2
B Oscillateur harmonique électrique : circuit LC régime libre	4
C Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre	7
D Complément : circuit LC montant	11
<b>II Oscillateurs amortis</b>	<b>13</b>
A Introduction amorti	13
B Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre	16
C Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides	23

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des systèmes qui présentent un régime transitoire caractérisé par des exponentielles croissantes ou décroissantes. En combinant deux de ces composants, on trouve alors des régimes transitoires caractérisés par une combinaison d'exponentielles, exprimée sous la forme de fonctions sinusoïdales. Regardons un exemple.

## I Oscillateurs harmoniques

### A Introduction harmonique

#### I.A.1 Signal sinusoïdal

##### Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal de la forme

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

$A$  est l'*amplitude*, telle que

$$A = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$$

$\omega t + \varphi$  est la *phase instantanée* du signal, avec

$$\begin{array}{ccc} & \nearrow \omega t + \varphi \nwarrow & \\ \text{pulsation} & & \text{phase initiale} \end{array}$$

#### Unités

La phase s'exprime en **radiants** ; la pulsation en **rad·s<sup>-1</sup>**.

##### Graphique

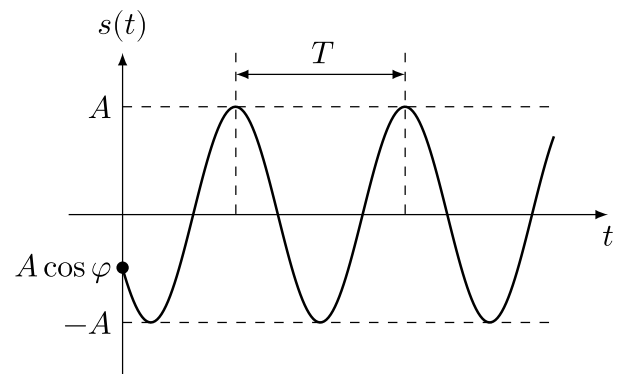


FIGURE 4.1

La pulsation représente la **vitesse avec de variation de la phase**. Pour une variation de  $2\pi$  effectuée à la période  $T$ , on définit

$$\omega = 2\frac{\pi}{T} = 2\pi f \Leftrightarrow T = \frac{2\pi}{\omega}$$

#### I.A.2 Équation différentielle oscillateur harmonique

##### Équation différentielle

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur  $x(t)$  solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Avec  $x_{\text{eq}}$  la position d'équilibre du système et  $\omega_0$  la pulsation **propre**.

##### Solutions

La forme générale des solutions d'un oscillateur harmonique s'écrit de manière équivalente

$$\begin{aligned} x(t) &= A' \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{eq}} \\ x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{eq}} \end{aligned}$$

avec  $A'$ ,  $\varphi$ ,  $A$ ,  $B$  des *constantes d'intégration*.

### I.A.3 Changement de variable : de général à homogène



Au cours du chapitre précédent, nous avons vu la méthode pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. Nous avons pu remarquer que les équations différentielles entre les échelons montants et descendants étaient en tout point similaires si ce n'est pour la présence ou non d'un second membre, impliquant la recherche d'une solution particulière ou non.

Le changement de variable permet **d'éviter de chercher une solution particulière constante**.



#### Changement de variable

Si  $x(t)$  est solution de

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

alors  $y(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$  est solution de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$$



Résoudre l'équation du circuit RL montant par changement de variable.

L'équation différentielle totale s'écrit

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{1}{\tau} \frac{E}{R} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{i - \frac{E}{R}}{\tau} = 0$$

On peut donc définir

$$i_h(t) = i(t) - \frac{E}{R} \Rightarrow \frac{di_h}{dt} = \frac{di}{dt} + 0$$

donc  $i_h$  est solution de

$$\frac{di_h}{dt} + \frac{i_h}{\tau} = 0$$

de solution générale

$$i_h(t) = Ae^{-t/\tau}$$

On peut directement chercher l'expression de  $A$  par CI :

$$i_h(0) = \underbrace{i(0)}_{=0} - \frac{E}{R} = A$$

Et en ré-isolant  $i(t)$ , on trouve bien

$$i(t) = \frac{E}{R} (1 - e^{-t/\tau})$$

### I.A.4 Exemple expérimental : l'oscillateur LC

Soit le circuit suivant sous un échelon de tension descendant. On observe la tension  $u_C(t)$  avec un oscilloscope dont la courbe est représentée à droite. **Une simulation est disponible en ligne**<sup>1</sup>.

1. <https://tinyurl.com/yl9rvpqg>

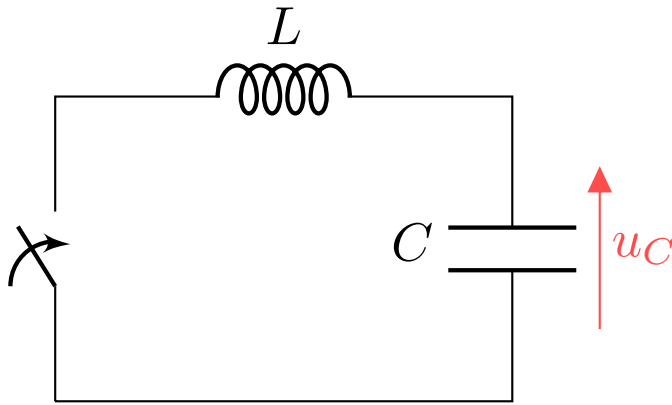


FIGURE 4.2

On remarque que la tension aux bornes du condensateur réalise des oscillations sinusoïdales amorties. En fonction des valeurs des caractéristiques des composants, on trouve :

- ◇ Pour  $C_1 = 80 \text{ nF}$  et  $L_1 = 43 \text{ mH}$ , une période de  $T_1 = 364 \mu\text{s}$  ;
- ◇ Pour  $C_2 = 20 \text{ nF}$  et  $L_2 = 43 \text{ mH}$ , une période de  $T_2 = 184 \mu\text{s}$  ;

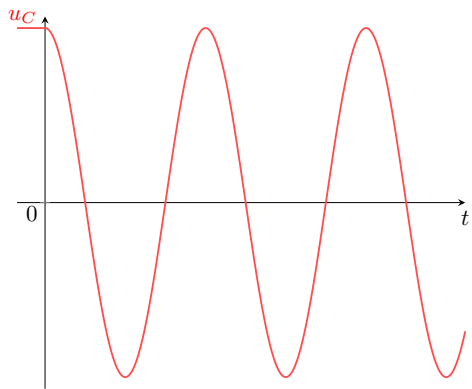


FIGURE 4.3

### Analyse

Lorsque l'on excite le système LC, la tension aux bornes du condensateur oscille de façon régulière et sinusoïdale, avec une période qui ne dépend pas de l'amplitude de l'excitation mais des caractéristiques de l'oscillateur (capacité du condensateur et inductance de la bobine).

C'est ce que nous allons maintenant démontrer analytiquement.

## B Oscillateur harmonique électrique : circuit LC régime libre

### I.B.1 Présentation

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ **On suppose le condensateur initialement chargé :**  $u_C(0^-) = E$  et  $i(0^-) = 0$  (condensateur chargé  $\equiv$  interrupteur ouvert).
- ◇ À  $t = 0$ , on coupe le générateur.

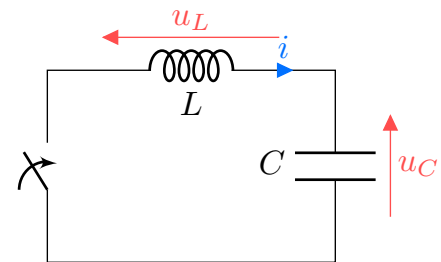


FIGURE 4.4

### I.B.2 Équation différentielle du circuit

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned}
 u_L + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C &= 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \text{forme canonique}$$

D'où le résultat.  $L$  assure  $i(0^+) = 0$  et  $C$  assure  $u_C(0^+) = E$  par continuité.

### Équation diff. LC libre



L'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en régime libre est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la pulsation propre.

Les conditions initiales (continuité de  $u_C$  aux bornes de  $C$  et de  $i$  traversant  $L$ ) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

### Unité de $\omega_0$



On peut vérifier à cette étape que  $\omega_0$  est bien homogène à l'inverse d'un temps. Pour ça, deux manières :

#### Analyse directe

Sachant que  $RC$  et  $L/R$  sont des temps (cf. chapitre précédent) :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{R}{LRC} = \underbrace{\left[\frac{L}{R}\right]^{-1}}_{s^{-1}} \times \underbrace{[RC]^{-1}}_{s^{-1}}$$

Et on a bien  $\omega_0^2$  en  $s^{-2}$ , et donc  $\omega_0$  en  $s^{-1}$ , les radians n'ayant pas de dimension.

#### Analyse indirecte

En effet, l'équation différentielle est forcément une équation homogène. Ainsi

$$\left[\frac{d^2 u_C}{dt^2}\right] = \frac{[u_C]}{[dt]^2} = \frac{V}{s^2}$$

et l'autre terme doit avoir la même unité :

$$[\omega_0^2 u_C] = [\omega_0]^2 \times [u_C] = V \cdot s^{-2}$$

On en déduit que  $\omega_0^2$  est de dimension  $s^{-2}$ , d'où la dimension de  $\omega_0$ .

### I.B.3 Résolution de l'équation différentielle et graphique



L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

◇ On trouve  $A$  avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A \quad \text{et} \quad u_C(0) = E \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = E}$$

◇ On trouve  $B$  avec la seconde condition initiale :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) = B\omega_0 \\ \text{et} \quad i(0) &= 0 = C \frac{du_C}{dt}(0) = CB\omega_0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = 0} \end{aligned}$$

On obtient ensuite  $i$  avec la relation courant-tension :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

### Solution de l'équation différentielle LC

La solution de l'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  d'un circuit LC en décharge avec  $u_C(0) = E$  et l'intensité en découplant sont

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E \cos(\omega_0 t) \\ i(t) &= -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

### Graphique

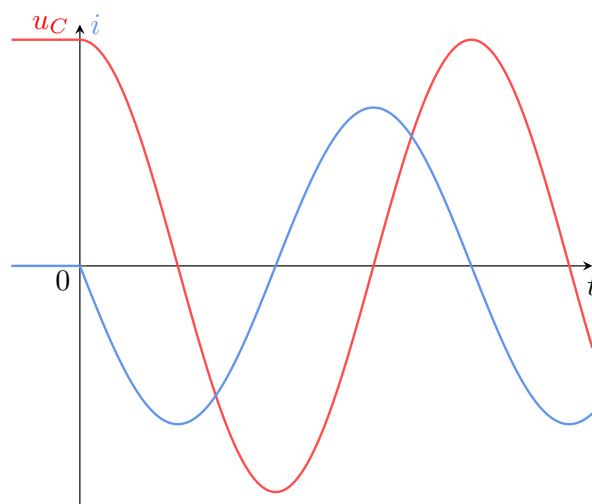


FIGURE 4.5

### I.B.4 Bilan énergétique

On fait un bilan de puissances avec la loi des mailles multipliée par  $i$  :

$$\begin{aligned} u_C i + u_L i &= 0 \\ \Leftrightarrow u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} i = C \frac{du_C}{dt} \\ \text{et } u_L = L \frac{di}{dt} \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) &= 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} f \times f' = \left( \frac{1}{2} f^2 \right)' \end{array} \right. \end{aligned}$$

On identifie l'intérieur de la parenthèse à l'énergie du système (car par définition  $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$ ) pour avoir la propriété.

### Bilan d'énergie

L'énergie emmagasinée dans le circuit est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

Elle est **conservée à chaque instant** et résulte de l'**échange périodique** d'énergie entre le condensateur et la bobine.

### Graphique

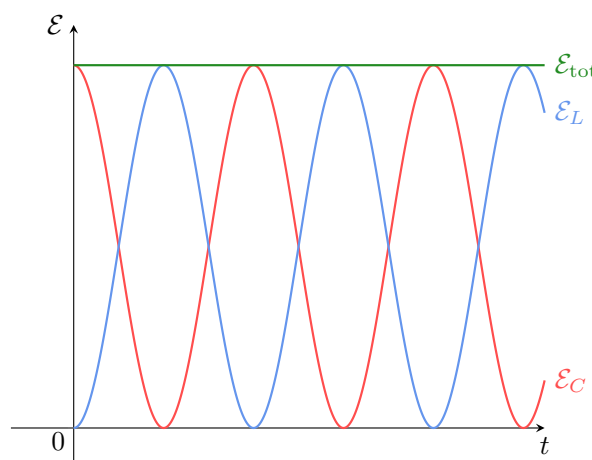


FIGURE 4.6

### Vérification conservation de l'énergie

On vérifie avec les expressions analytiques trouvées, sachant que  $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$  :

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Cu_C^2 &= \frac{1}{2}CE^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ \text{et } \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{1}{2}\underbrace{LC^2\omega_0^2}_{=C}E^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \frac{1}{2}CE^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CE^2 = \text{cste}$$

### Résultat

On retrouve bien des oscillations de la tension aux bornes de  $u_C$  comme dans l'approche expérimentale, avec une période  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$  qui augmente avec  $L$  et  $C$ .

Il n'y a donc **pas d'amortissement ici** ! En effet les composants utilisés ici sont idéaux, et conservent totalement l'énergie, il n'y a pas de raison d'en perdre.

Il y a eu une simplification que l'on effectue souvent en mécanique : **on a négligé les effets dissipatifs**. Regardons comment ça se traduit pour un exemple mécanique.

## C Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre

### I.C.1 Introduction

#### Force de rappel d'un ressort

Soit le système masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le ressort se déforme sous l'effet d'une contrainte en stockant l'énergie donnée, qu'il libère en reprenant sa forme quand la contrainte s'arrête. On définit la force de rappel du ressort par :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$$

- ◇  $k > 0$  la **constante de raideur** ;
- ◇  $\ell_0$  sa **longueur à vide** ;
- ◇  $\vec{u}_x$  un vecteur unitaire<sup>2</sup> dirigé selon  $x$ .

#### Unité

$k$  en  $\text{N} \cdot \text{m}^{-1}$  ( $[\vec{F}] = [k][\ell]$ )

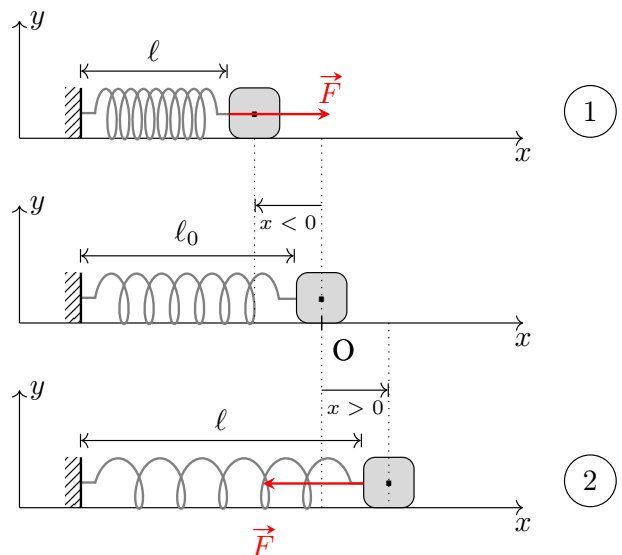


FIGURE 4.7

Si  $\ell > \ell_0$ , on a bien une force dirigée selon  $-\vec{u}_x$ , (situation ②), sinon dirigée selon  $+\vec{u}_x$ .

## I.C.2 Présentation

## Situation initiale et bilan des forces

- ◇ **Système** : {point M} de masse  $m$ , accroché à un **ressort idéal sans frottements**
- ◇ **Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O', x, y, t)$  supposé galiléen
- ◇ **Repère** :  $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  (voir schéma)
- ◇ **Repérage** :

Soit  $x(t) = \ell(t) - \ell_0$  la position de la masse

$$\overrightarrow{O'M} = x(t) \vec{u}_x ; \vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x ; \vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x.$$

- ◇ **Position initiale** :  $O'M(0) = x_0 > 0$
- ◇ **Vitesse initiale** :  $\vec{v}(0) = \vec{0}$

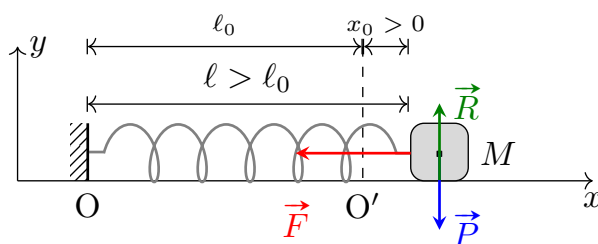


FIGURE 4.8

- ◇ **Bilan des forces** :

$$\begin{aligned} \text{Poids} & \quad \vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y \\ \text{Réaction normale} & \quad \vec{R} = R \vec{u}_y \\ \text{Force de rappel} & \quad \vec{F} = -kx(t) \vec{u}_x \end{aligned}$$

## I.C.3 Équation différentielle et solution

La deuxième loi de NEWTON, ou **principe fondamental de la dynamique** (PFD) donne :

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}}{dt} &= m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \\ \Leftrightarrow m \left( \frac{d^2x}{dt^2} \right) &= \begin{pmatrix} -kx \\ -mg + R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur l'axe  $\vec{u}_x$ <sup>3</sup> on trouve alors

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0}$$

avec

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

On écrit la forme générale :

$$x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

- ◇ On trouve  $A$  :

$$x(0) = A \quad \text{et} \quad x(0) = x_0 \Rightarrow \boxed{A = x_0}$$

- ◇ On trouve  $B$  :

$$v(0) = 0 = \frac{dx}{dt}(0) = B\omega_0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

Donc

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)}$$

On obtient ensuite  $v$  avec la relation vitesse-position.

2.  $\|\vec{u}_x\| = 1$

3. La projection sur  $\vec{u}_y$  montre que la réaction du support compense le poids.



### Équation et solution

La position  $x$  de la masse et la longueur  $\ell$  du ressort sont régies par :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0 \Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \omega_0^2 \ell = \omega_0^2 \ell_0$$

Avec  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ .

$\ell_0$  est donc la **longueur d'équilibre** du système.

La position  $x$  et la vitesse  $v$  ont pour expressions

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) \\ \text{et } v(t) &= -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

### Analogie LC-ressort

Alors qu'on parlait d'un système *a priori* totalement différent, on remarque que la physique des deux systèmes sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation différentielle**.

On observe une oscillation du ressort autour d'une position d'équilibre, ici  $x = 0 \Leftrightarrow \ell = \ell_0$ , tout comme  $u_C$  oscille autour de 0.

On associe donc  $q$  à  $x$  et  $i$  à  $v$ , étant donné que pour un condensateur  $i = \frac{dq}{dt}$  et que  $v = \frac{dx}{dt}$ .

De plus c'est la **masse** qui impose l'inertie du mouvement, comme l'**inductance** est l'inertie de l'intensité.

Finalement,  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$  en électrocinétique et  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  en mécanique, donc on associe  $k$  à  $C^{-1}$ .

TABLEAU 4.1 – Correspondances

Méca	↔	Élec
$x$	↔	$q$
$v$	↔	$i$
$m$	↔	$L$
$k$	↔	$C^{-1}$
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	↔	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$

### I.C.4 Bilan énergétique

### Énergies potentielle élastique et mécanique

Le ressort emmagasine une énergie *potentielle* lors de sa déformation, telle que

$$\mathcal{E}_{p,\text{el}} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

On définit alors l'énergie mécanique totale  $\mathcal{E}_m$  du système par

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\text{el}}$$

avec, évidemment,  $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$ .

### Bilan de puissance en méca

On effectue un bilan de puissance en écrivant le PFD multiplié par  $v$  :  $\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}$ .

À partir du PFD :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} + kx &= 0 \\ \Leftrightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2}m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2}_{\mathcal{E}_c} + \underbrace{\frac{1}{2}kx^2}_{\mathcal{E}_{p,\text{el}}} \right) &= 0 \end{aligned}$$

$\begin{aligned} &\nearrow \times v \\ &\searrow f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)' \end{aligned}$

### Conservation énergie

Dans le système masse-ressort horizontal sans frottements, l'énergie mécanique est conservée :

$$\mathcal{E}_m = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$$

### Graphique

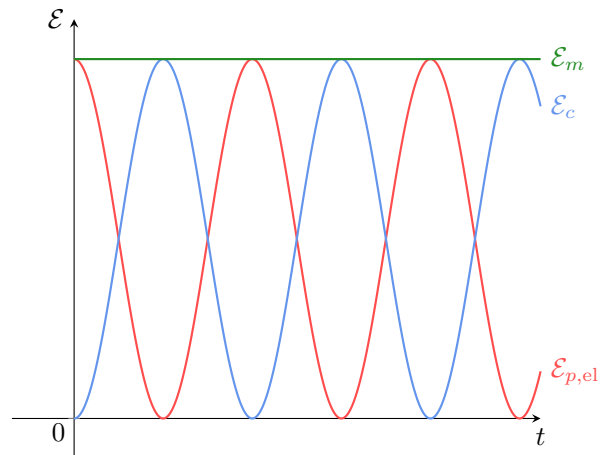


FIGURE 4.9

### Vérification

On vérifie avec les expressions analytiques, sachant que  $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$  :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ \text{et } \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{=k} x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}kx_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) \end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{cste}$$

### I.C.5 Analyse correspondance

#### Espace des phases

Il est utile d'observer la physique des systèmes oscillants non pas dans un espace (grandeur, temps) mais dans un espace (**grandeur, dérivée**), qui permet plus rapidement de sonder son évolution : c'est ce qu'on appelle l'**espace des phases**.

Par exemple, le ressort lâché à  $x_0$  et  $v_0 = 0$  voit sa position diminuer et sa vitesse augmenter (algébriquement) jusqu'à ce qu'il passe par sa position d'équilibre ( $x = 0$ ) avec une vitesse extrême  $v_{\min}$ , avant de se comprimer en perdant de sa vitesse.

Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.

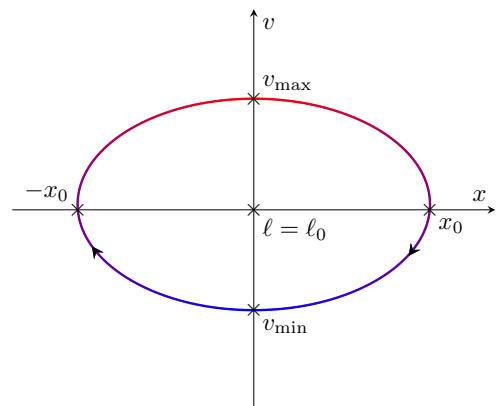


FIGURE 4.10

### Conclusion

En réalité, les **frottements en mécanique existent**, et à chaque étape le système masse-ressort perd de l'énergie dans la dissipation par frottement créant de la chaleur. On va donc avoir une **trajectoire amortie** plus ou moins fortement.

Dans le cas électrique, c'est la **résistance que nous avons négligée** alors qu'elle existe toujours : notamment la bobine réelle est composée d'une bobine idéale et d'une résistance en série. C'est la résistance qui va **dissiper l'énergie** de l'oscillateur harmonique LC sous forme de chaleur par effet JOULE et amortir l'oscillation de  $u_C$ .

## D Complément : circuit LC montant

### I.D.1 Présentation

- Il est constitué de l'association en série d'un générateur idéal de f.e.m.  $E$ , d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- On suppose le condensateur initialement déchargé :  $u_C(0^-) = 0$  et  $i(0^-) = 0$  (condensateur chargé  $\equiv$  interrupteur ouvert).
- À  $t = 0$ , on allume le générateur<sup>4</sup>.

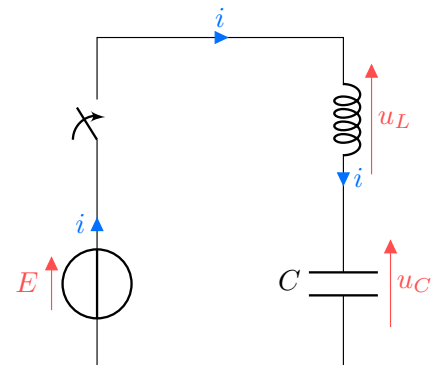


FIGURE 4.11

### I.D.2 Équation différentielle du circuit

#### Équation diff. LC montant

L'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC sous échelon montant est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$$

avec  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la pulsation propre.

Les conditions initiales (continuité de  $u_C$  aux bornes de  $C$  et de  $i$  traversant  $L$ ) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = 0 \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

#### Équation diff. LC montant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_L + u_C &= E \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C &= E \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C &= \frac{1}{LC} E \end{aligned} \quad \left. \begin{aligned} u_L &= L \frac{di}{dt} \\ \text{et } i &= C \frac{du_C}{dt} \end{aligned} \right\} \begin{array}{l} \text{forme canonique} \end{array}$$

D'où le résultat.  $L$  assure  $i(0^+) = 0$  et  $C$  assure  $u_C(0^+) = 0$  par continuité.

4. <https://tinyurl.com/ypagwnb6>

## I.D.3 Résolution de l'équation différentielle et graphique

**Solution LC montant**

La solution de l'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  d'un circuit LC en charge avec  $u_C(0) = 0$  et l'intensité en découlant sont

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E(1 - \cos(\omega_0 t)) \\ i(t) &= CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

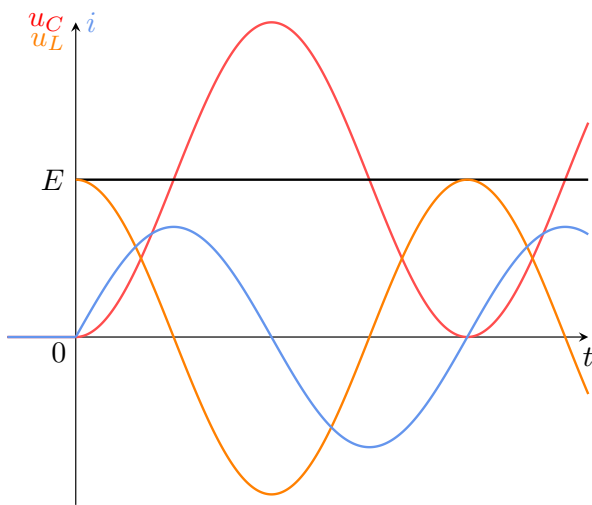
**Graphique**

FIGURE 4.12

**Solution LC montant**

D'après la propriété I.A.3, on sait que  $u_C - E$  est solution de l'équation homogène associée, donc on a

$$u_C(t) - E = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

◇ On trouve  $A$  :

$$u_C(0) - E = A \Rightarrow \boxed{A = -E}$$

◇ On trouve  $B$  :

$$i(0) = 0 = C \frac{du_C}{dt}(0) = CB\omega_0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

Donc

$$\boxed{u_C(t) = E(1 - \cos(\omega_0 t))}$$

On obtient ensuite  $i$  avec la relation courant-tension :

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} = CE\omega_0 \sin(\omega_0 t)$$

**Valeur de  $u_C$** 

On remarque aisément que  $u_C$  atteint  $2E$  par moment, ce qui pourrait paraître déroutant puisqu'on donne une tension  $E$  au système. En réalité ceci est tout à fait normal puisque  $u_L = L \frac{di}{dt}$  prend des valeurs négatives quand  $i$  diminue : la somme des deux fait bien  $E$ .

On peut réaliser un bilan d'énergie pour vérifier que  $\mathcal{E}_g = CE^2(1 - \cos(\omega_0 t)) = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ , voir graphique ci-contre.

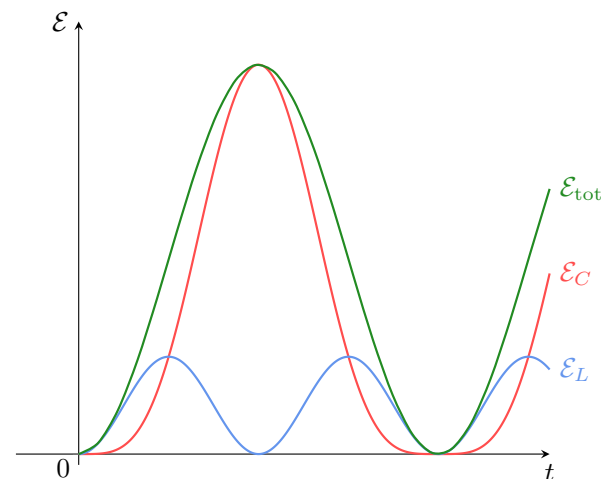
**Bilan d'énergie**

FIGURE 4.13

### I.D.4 Intérêt oscillateur harmonique

Le principal intérêt de l'observation régulière d'une oscillation est la mesure du temps. Une excitation quelconque (comme un échelon) produit un phénomène se reproduisant à intervalle régulier et fait alors apparaître un étalon temporel. Ce principe est utilisé :

- ◇ dans les horloges mécaniques à balancier : on exploite le mouvement régulier du pendule ;
- ◇ dans les horloges à ressort : la période est liée au rapport de l'inertie et de la raideur du système ;
- ◇ dans les horloges électroniques : un cristal de quartz dont la fréquence d'oscillation est précisément connue (en général une puissance de 2 en Hz) ;
- ◇ dans les horloges atomiques : on utilise la régularité des oscillations des ondes électromagnétiques absorbées par un atome. L'actuelle définition de la seconde est basée sur le fonctionnement d'une horloge atomique.

## II Oscillateurs amortis

### A Introduction amorti

#### II.A.1 Évolutions en régime libre, exemple RLC

En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC suivant<sup>5</sup>, avec  $L = 43 \text{ mH}$  et  $C = 20 \text{ nF}$  :

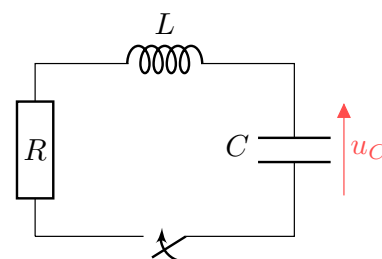
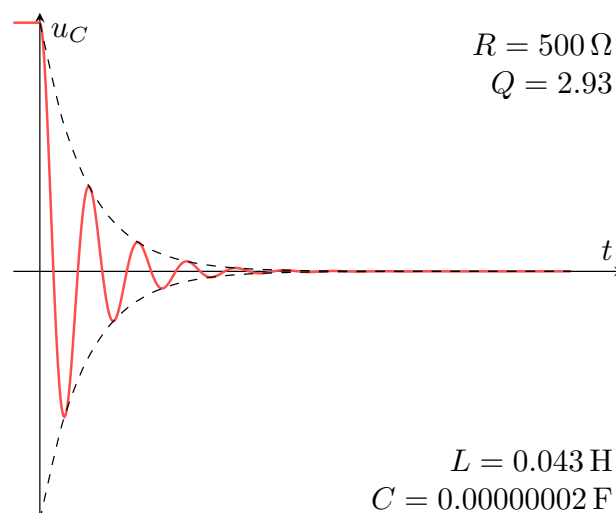
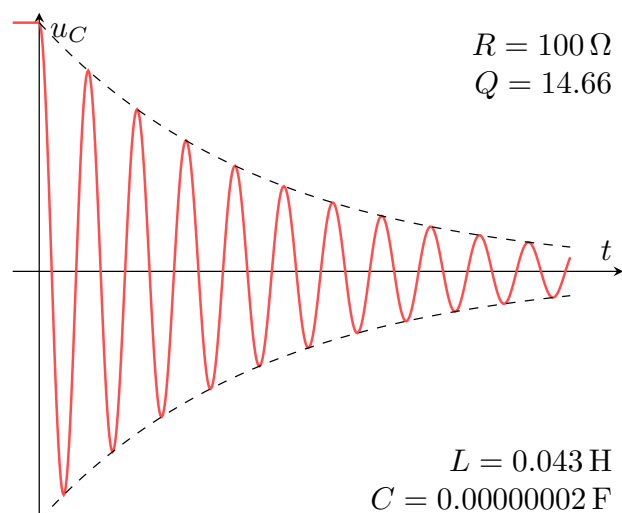


FIGURE 4.14

- ◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**.

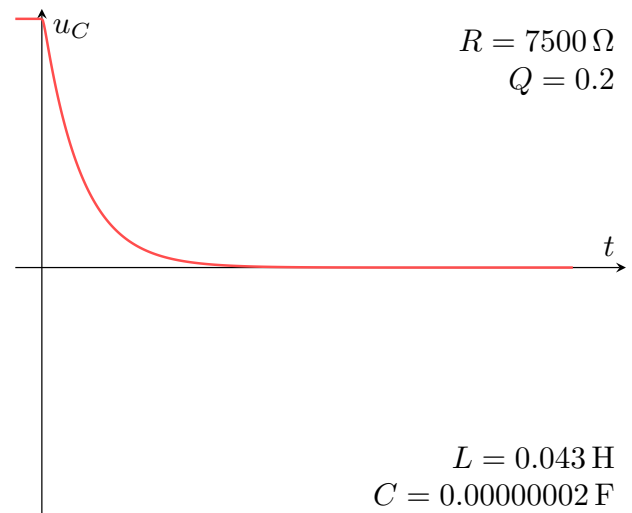
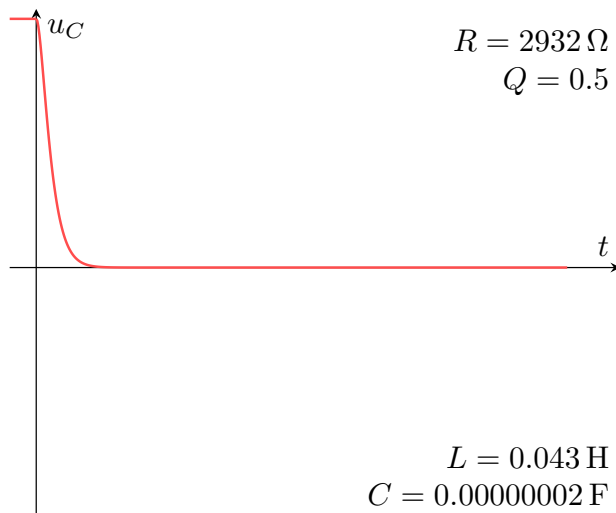
On observe une série d'oscillations à la période  $T \approx 184 \mu\text{s}$ . On observe environ 25 oscillations lorsque  $R \approx 60 \Omega$  (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque  $R \approx 180 \Omega$ , 5 oscillations lorsque  $R \approx 500 \Omega$ .



- ◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

5. <https://tinyurl.com/ypbcwfs>

Lorsque  $R \approx 2,9 \text{ k}\Omega$ , on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ  $250 \mu\text{s}$  (à 95%).  
Lorsque  $R \approx 7,5 \text{ k}\Omega$ , on observe un régime transitoire plus long, d'environ  $420 \mu\text{s}$ .



### Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

- 1) **Système oscillant** pour  $R < R_c$ , de pseudo-période<sup>6</sup> **supérieure** à  $T_0$  ;
- 2) **Système non-oscillant** pour  $R > R_c$  : le transitoire **augmente avec**  $R$ .

### II.A.2 Équation différentielle

#### Équation différentielle

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur  $x(t)$  solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Avec  $x_{\text{eq}}$  la position d'équilibre,  $\omega_0$  la pulsation **propre**, et  $Q > 0$  le **facteur de qualité**, sans dimension.

Par lecture de cette équation, avec  $Q$  sans dimension on retrouve que  $\omega_0$  s'exprime en  $\text{s}^{-1}$  car  $\frac{dx}{dt}$  est de dimension  $[x] \cdot \text{s}^{-1}$ .

De plus, on remarque que **plus  $Q$  est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**.

Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

6. On parle de *pseudo*-période car le signal est diminué.

## II.A.3 Équation caractéristique et régimes de solutions

## Équation caractéristique

Pour résoudre une équation différentielle, on suppose une solution de la forme  $x(t) = A \exp(rt)$  avec  $r \in \mathbb{C}$ . En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$$

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant  $\Delta$  est

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

## Régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de  $r$ , doubles réelles, simple réelle ou doubles complexes. On a en effet

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$Q > 1/2$  : régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

$Q = 1/2$  : régime **critique**, racine double réelle ;

$Q < 1/2$  : régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

 $\pm$  et  $\mp$ 

Il est courant de noter les racines  $r_{\pm}$  pour dénoter à la fois  $r_+$  et  $r_-$ . Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe  $\pm$ , ce qui signifie que  $r_+$  correspond à l'expression avec le  $+$ , et  $r_-$  correspond à l'expression avec le  $-$ .

Si l'expression contient le signe  $\mp$ , c'est l'opposé :  $r_+$  correspond à l'expression avec  $-$ .

## Solutions

## Pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$$

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$$

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \times \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$$

## Critique

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

$$x(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

## Apériodique

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$$

$$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

$$x(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

## B Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

### II.B.1 Présentation

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ **On suppose le condensateur initialement chargé :**  $u_C(0^-) = E$  et  $i(0^-) = 0$  (condensateur chargé  $\equiv$  interrupteur ouvert).
- ◇ À  $t = 0$ , on coupe le générateur.

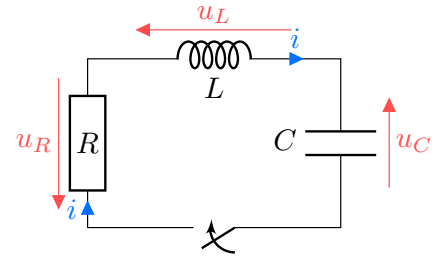


FIGURE 4.15

### II.B.2 Bilan énergétique

On fait un bilan de puissances :

$$\begin{aligned}
 & u_C i + u_L i + u_R i = 0 \\
 \Leftrightarrow & u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i + R i^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2} C u_C^2}_{\mathcal{E}_C} + \underbrace{\frac{1}{2} L i^2}_{\mathcal{E}_L} \right) = -\mathcal{P}_J
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} i = C \frac{du_C}{dt}, u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } u_R = R i \\ \mathcal{P}_J = R i^2 \text{ et } f \times f' = \left( \frac{1}{2} f^2 \right)' \end{array} \right\}$$

#### Bilan d'énergie

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\mathcal{P}_J$$

avec  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$ .

#### Résultat

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de  $u_C$ , d'où l'amortissement.



## II.B.3 Équation différentielle du circuit

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned}
 u_L + u_R &= u_C = 0 \\
 \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\
 \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &= 0
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } u_R = Ri \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{forme} \\ \text{canonique} \end{array}$$

On détermine l'expression de  $Q$  par identification :

$$\begin{aligned}
 \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{Q\sqrt{LC}} &= \frac{R}{L} \\
 \Leftrightarrow Q &= \frac{L}{R\sqrt{LC}} \\
 \Leftrightarrow Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \text{On isole } Q \\ L = \sqrt{L}^2 \end{array} \right\}$$

## Équation diff. RLC libre

L'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC en régime libre est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

◇  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la pulsation propre ;

◇  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  le facteur de qualité.

Les conditions initiales (continuité de  $u_C$  aux bornes de  $C$  et de  $i$  traversant  $L$ ) sont

$$\begin{aligned}
 u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\
 i(0^-) &= i(0^+) = 0
 \end{aligned}$$

## II.B.4 Solutions

II.B.4.1 Cas  $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$  : régime pseudo-périodique

On part de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

On a donc, avec  $Q > 1/2$ ,

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0$$

Ainsi,

$$r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} (4Q^2 - 1)} \\
 \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \\
 \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} \text{On injecte } \Delta \\ \text{On extrait } \frac{\omega_0}{Q} \\ \text{On définit } \Omega \end{array} \right\}$$

d'où la définition de  $\Omega$  :

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

◇ On trouve  $A$  avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = 1 [A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \Rightarrow \boxed{A = E}$$

◇ On trouve  $B$  avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)] \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) &= -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0 \\ \Leftrightarrow B &= \frac{\omega_0}{2Q\Omega}E = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \end{aligned}$$

### Solution

Pour un facteur de qualité  $Q > 1/2$ ,  $u_C$  s'exprime par

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[ \cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\Omega t) \right]$$

avec

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

La période des oscillations **diffère des oscillations harmoniques**  $T_0 = 2\pi/\omega_0$  selon

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Les oscillations se font entre les courbes

$$y(t) = \pm E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

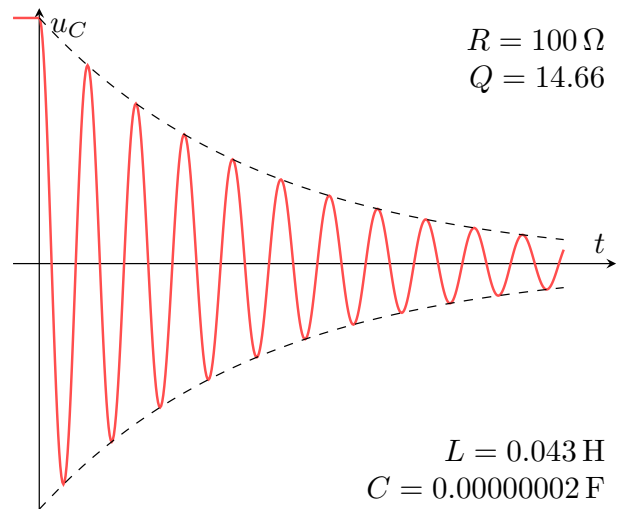


FIGURE 4.16



L'amplitude varie selon  $E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$ ; on définit donc  $t_{95}$  tel que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t_{95}\right) &= 0.05 \\ \Leftrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(0.05) \\ \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(20) \\ \Leftrightarrow t_{95} &= 2 \ln(20) \frac{Q}{\omega_0} \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \left. \begin{array}{l} \ln( ) \\ 0.05 = 1/20 \text{ et } \ln(a^b) = b \ln a \end{array} \right\} \\ \left. \begin{array}{l} \text{On isole} \end{array} \right\} \end{array}$$

Or  $2 \ln(20) \approx 2\pi$ , d'où



Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de  $t_{95}$  tel que

$$t_{95} \approx QT_0 \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



### Résultat à grand $Q$

Avec ces résultats on remarque en effet que quand  $Q \rightarrow \infty$ , on a à la fois

$$\Omega \approx \omega_0 \quad \text{donc} \quad T \approx T_0$$

Mais aussi

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{donc} \quad u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.



### Visualisation dans l'espace des phases

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace  $(u_C, i)$  n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**.

On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand  $Q$  diminue ou que l'amortissement augmente.

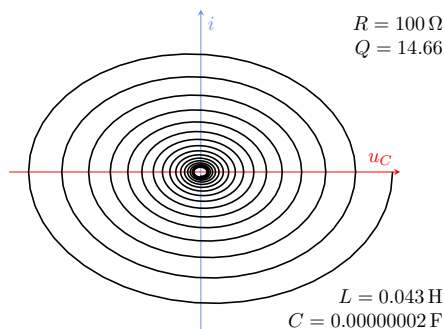


FIGURE 4.17 – Faible amortissement

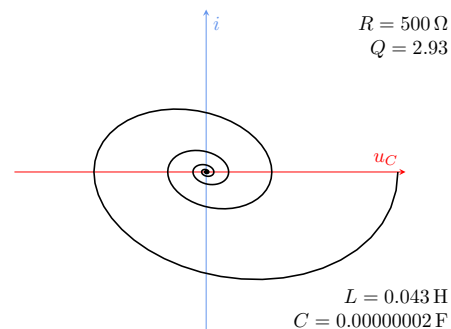


FIGURE 4.18 – Moyen amortissement

### II.B.4.2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$ : régime critique

La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut

$$r = -\omega_0$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

◇ On trouve  $B$  avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = (A \cdot 0 + B) \cdot 1 = B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = E}$$

◇ On trouve  $A$  avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= (A) \exp(-\omega_0 t) + (At + E)(-\omega_0) \exp(-\omega_0 t) \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) &= A - \omega_0 E = 0 \\ \Leftrightarrow \quad \boxed{A = \omega_0 E} \end{aligned}$$

#### Solution

Pour un facteur de qualité  $Q = 1/2$ ,  $u_C$  s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)}$$

et on n'observe **pas une oscillation**.

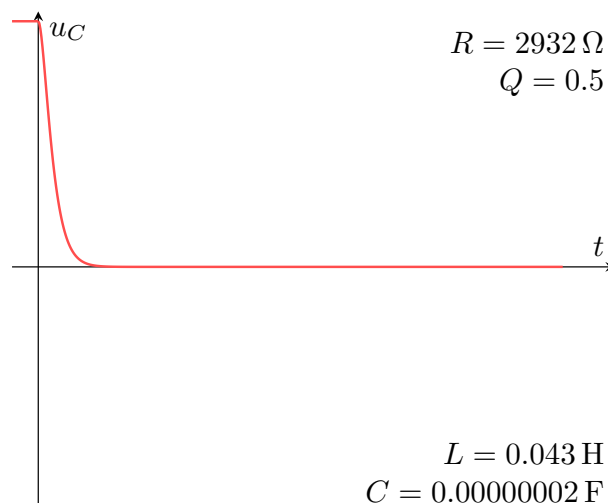


FIGURE 4.19

#### Visualisation dans l'espace des phases

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher  $u_C$  de passer sous 0.

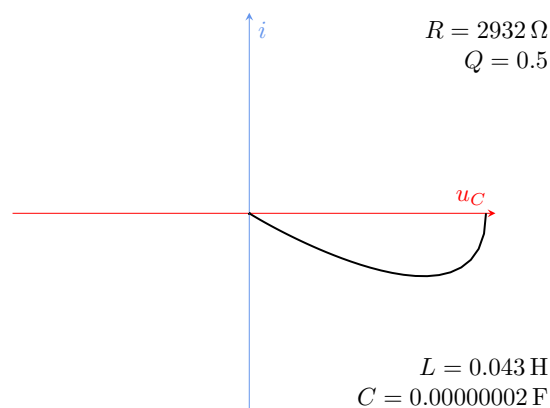


FIGURE 4.20



En négligeant le terme linéaire en  $t$  devant la décroissance exponentielle, on a

$$\exp(-\omega_0 t_{95}) = 0,05 \Leftrightarrow t_{95} = \frac{\ln(20)}{\omega_0}$$

Et avec  $\ln(20) \approx \pi$  on a :



Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de  $t_{95}$  tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

### II.B.4.3 Cas $\Delta > 0$ : régime apériodique



Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= \frac{\omega_0}{2Q} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \end{aligned}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

◇ Avec la première CI :

$$u_C(0) = E = A + B$$

◇ Avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt}(0) &= Ar_+ + Br_- = 0 \\ \Leftrightarrow B &= -\frac{Ar_+}{r_-} \end{aligned}$$

En combinant, on trouve

$$A = -\frac{Er_-}{r_+ - r_-} \quad \text{et} \quad B = \frac{Er_+}{r_+ - r_-}$$

D'où le résultat :



#### Solution

Pour un facteur de qualité  $Q < 1/2$ ,  $u_C$  s'exprime par

$$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} (r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$$

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour  $Q = 1/2$ .

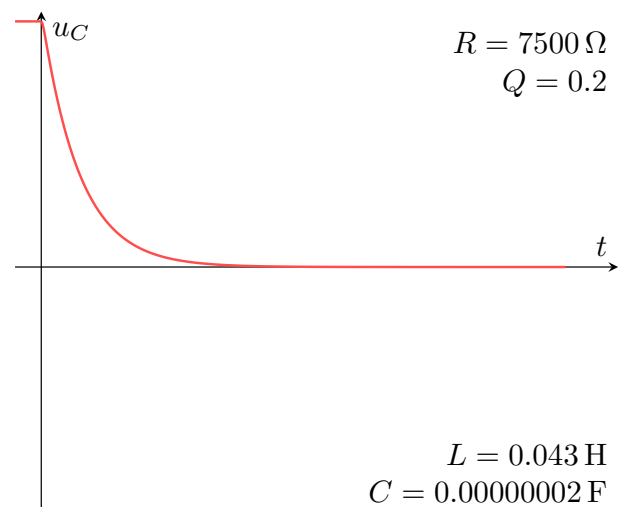


FIGURE 4.21

## Visualisation dans l'espace des phases

Pendant le régime apériodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher  $u_C$  d'osciller, mais également pour **ralentir sa diminution** vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire  $\frac{du_C}{dt}$  plus petit donc  $i$  plus petit.

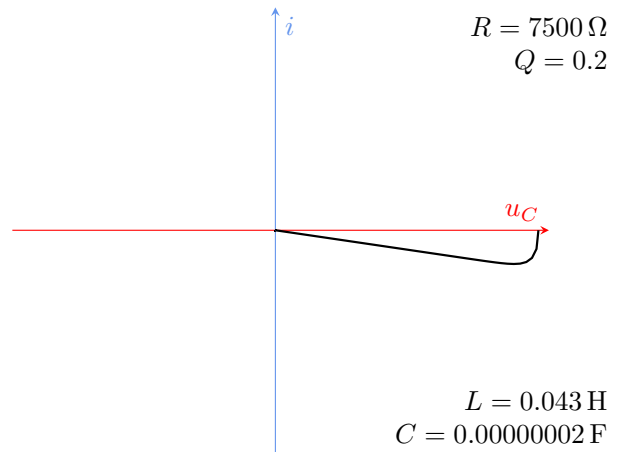


FIGURE 4.22

La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « **moins décroissante** ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc  $r_-$  et  $r_+$ .

On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle). En effet,

$$\begin{aligned}
 r_+ < 0 &\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\omega_0 \text{ et } Q > 0} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \underbrace{\begin{matrix} < \\ > \end{matrix}}_0 \\
 &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - 4Q^2} > 0 \\
 &\Leftrightarrow \sqrt{1 - 4Q^2} < 1 \\
 &\Leftrightarrow 4Q^2 > 0
 \end{aligned}$$

ce qui est vrai. Or,

$$\begin{aligned}
 r_- < r_+ &\quad \left. \begin{array}{l} \Leftrightarrow |r_-| > |r_+| \\ \Leftrightarrow \left|\frac{1}{r_-}\right| < \left|\frac{1}{r_+}\right| \\ \Leftrightarrow \tau_- < \tau_+ \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{||} \\ \text{()^{-1}} \\ \tau = |1/r| \end{array}
 \end{aligned}$$

On estime alors la durée du régime transitoire à  $\boxed{\ln(20)/|r_+|}$ .

Pour  $Q \ll 1$ , on utilise  $\boxed{\sqrt{1+x} \approx 1+x/2}$  pour simplifier  $r_+$  :

$$\begin{aligned}
 r_+ &= -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \\
 \Rightarrow r_+ &\underset{Q \ll 1}{\approx} -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \left(1 - \frac{4Q^2}{2}\right)\right) \\
 &\Leftrightarrow r_+ \underset{Q \ll 1}{\approx} -Q\omega_0
 \end{aligned}$$

Avec  $\ln(20) \approx \pi$ , on a finalement

$$\boxed{t_{95} \approx \frac{\pi}{Q\omega_0}} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}}$$



Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de  $t_{95}$  tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$



### Résultat à faible $Q$

Quand  $Q \rightarrow 0$ , on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle, soit

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\sqrt{LC}} u_C \\ &= \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} u_C = \left[ \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C \right] \end{aligned}$$

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de  $r_{\pm}$  tendent vers la même valeur  $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$  : en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance en

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R \sqrt{\frac{C}{L^2 C}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique  $\tau = \frac{L}{R}$ .

## C Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

### II.C.1 Présentation



### Situation initiale et bilan des forces

- ◇ **Système** : {point M} de masse  $m$ , accroché à un **ressort idéal avec frottements**
- ◇ **Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O', x, y, t)$  supposé galiléen
- ◇ **Repère** :  $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  (voir schéma)
- ◇ **Repérage** :

Soit  $x(t) = \ell(t) - \ell_0$  la position de la masse

$$\overrightarrow{O'M} = x(t) \vec{u}_x ; \vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x ; \vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x.$$

- ◇ **Position initiale** :  $O'M(0) = x_0 > 0$
- ◇ **Vitesse initiale** :  $\vec{v}(0) = \vec{0}$

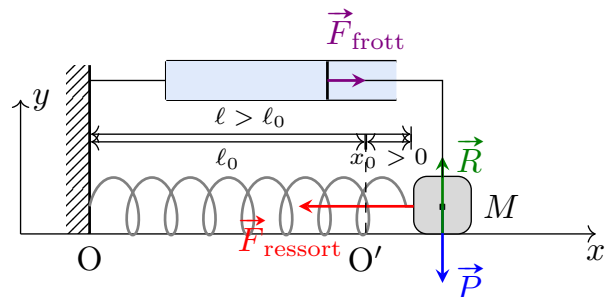


FIGURE 4.23

- ◇ **Bilan des forces** :

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
Réaction normale	$\vec{R} = R\vec{u}_y$
Force de rappel	$\vec{F} = -kx(t)\vec{u}_x$
Force de frottement	$\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha\vec{v}$

## II.C.2 Équation différentielle

## Équation et solution

La position  $x$  de la masse et la longueur  $\ell$  du ressort sont régies par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\ell}{dt} + \omega_0^2 \ell &= \omega_0^2 \ell_0 \end{aligned}$$

- ◇  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$  la pulsation propre ;
- ◇  $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$  le facteur de qualité.

$\ell_0$  **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

## Équation différentielle

Avec le PFD :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \\ \Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -kx - \alpha v \\ -mg + R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur l'axe  $\vec{u}_x$  on trouve donc

$$m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx = 0$$

## Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici  $x = 0 \Leftrightarrow \ell = \ell_0$ .

Ici, c'est le coefficient de frottements  $\alpha$  qui dissipe : on l'associe à  $R$ .

TABLEAU 4.2 – Correspondances

Méca $\longleftrightarrow$ Élec	
$x$	$\longleftrightarrow q$
$v$	$\longleftrightarrow i$
$m$	$\longleftrightarrow L$
$k$	$\longleftrightarrow C^{-1}$
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$
$\alpha$	$\longleftrightarrow R$

## II.C.3 Bilan énergétique

## Conservation énergie

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionnellement au coefficient de friction  $\alpha$  :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\alpha v^2$$

## Conservation énergie

À partir du PFD  $\times v$  :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \alpha \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) &= -\alpha v^2 \end{aligned}$$

On a bien  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{p,el}$  qui diminue.

## II.C.4 Solutions

## Solutions

On a les mêmes solutions en changeant  $u_C$  par  $x$  et  $E$  par  $x_0$



## II.C.5 Résumé oscillateurs amortis

## Résumé – à ne pas connaître par cœur !

## Pseudo-périodique

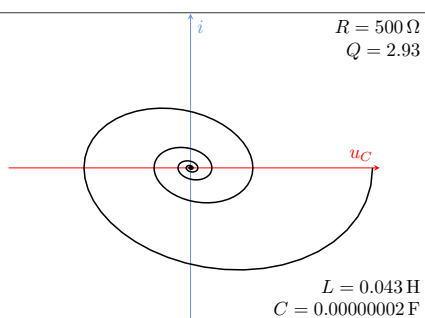
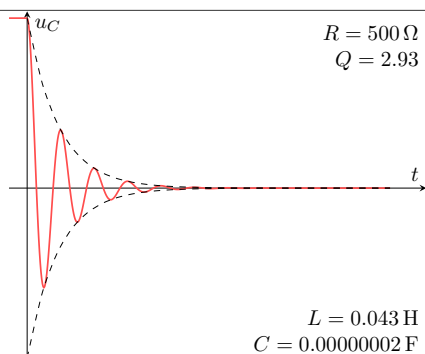
$$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$$

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$$

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[ \cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\Omega t) \right]$$

$$t_{95} \approx QT_0$$



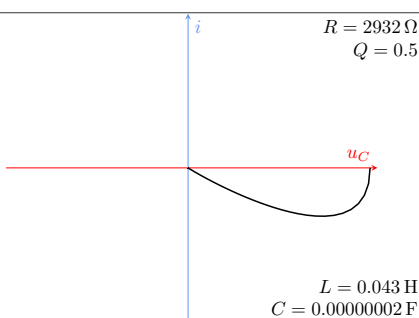
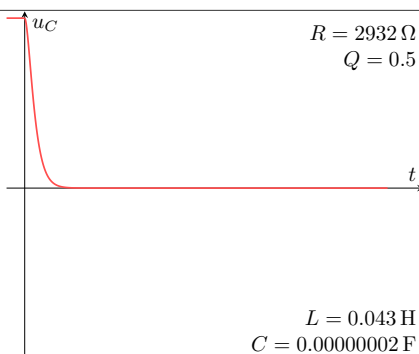
## Critique

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

$$u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)$$

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2}$$



## Apériodique

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$$

$$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$$

$$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} \times (r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$$

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}$$

