

# Correction du TD d'entraînement

## I Séparation isotopique

- 1) Les ions étant positifs, ils subissent la force  $\vec{F}_e = q\vec{E}$  dans le même sens que  $\vec{E}$ . Il faut donc que  $\vec{E}$  soit selon  $\vec{u}_y$ . Or,  $\vec{E} = -\text{grad} V$  indique que  $\vec{E}$  va des hauts potentiels aux bas potentiels ( $\text{grad}$  indique le sens des grandes variations,  $-\text{grad}$  indique l'inverse) : on veut donc que  $V_P$  soit plus grand que  $V_{P'}$ , soit

$$U_{PP'} = V_P - V_{P'} > 0$$

- 2) L'ion, assimilable à un point matériel  $M_i$ , de masse  $m_i$ , est soumis dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen à la force électrique qui est conservative. Donc le système est conservatif :  $\mathcal{E}_m(P) = \mathcal{E}_m(P')$ . L'énergie potentielle électrique s'écrit  $\mathcal{E}_p = qV$  (on prend la constante nulle), on part à vitesse nulle et on accélère jusqu'à  $P'$ , d'où

$$qV(P) = \frac{1}{2}m_i v_i^2 + qV(P') \quad \Rightarrow \quad v_i = \sqrt{\frac{2qU_{PP'}}{m_i}}$$

- 3) Cf. cours :  $R_i = \frac{mv_i}{|q|B}$ , donc  $R_i = \frac{\sqrt{2Um_i}}{B\sqrt{q}}$

◇ **BDF :**

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \text{négligeable devant } \vec{F} \\ \text{Force magnétique } \vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B} = \begin{pmatrix} q\dot{x} \\ q\dot{y} \\ q\dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ B \end{pmatrix} \\ \Leftrightarrow & \vec{F} = q\dot{y}B\vec{u}_x - q\dot{x}B\vec{u}_y \end{array}$$

◇ **PFD :**

$$m_i \vec{a} = \vec{F}$$

◇ **Équations scalaires :**

$$\begin{cases} m_i \ddot{x} = q\dot{y}(t)B \\ m_i \ddot{y} = -q\dot{x}(t)B \\ m_i \ddot{z} = 0 \end{cases}$$

D'où :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m_i} \dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m_i} \dot{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB}{m_i} y(t) + K \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m_i} x(t) + K' \end{cases}$$

ainsi avec les conditions initiales :

$$\dot{x}(0) = 0 \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = \frac{qB}{m_i} \underbrace{y(0)}_{=0} + K = K \quad \text{donc} \quad K = 0$$

$$\dot{y}(0) = v_i \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = -\frac{qB}{m_i} \underbrace{x(0)}_{=0} + K' = K' \quad \text{donc} \quad K' = v_i$$

Soit

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \frac{qB}{m_i} y(t) \\ \dot{y}(t) = -\frac{qB}{m_i} x(t) + v_i \end{cases}$$

Étant donné que  $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = \text{cte} = v_0^2$ , on a

$$\left(\frac{qB}{m_i} y(t)\right)^2 + \left(-\frac{qB}{m_i} x(t) + v_i\right)^2 = v_i^2$$

soit, en notant  $\omega_c = |q|B/m_i$  :

$$(y)^2 + \left(x + \frac{m_i v_i}{qB}\right)^2 = \left(\frac{v_i}{\omega_c}\right)^2$$

On reconnaît l'équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes. Dans notre cas, les centres sont  $\left(-\frac{m_i v_i}{qB}, 0\right)$  et les rayons sont  $R_i = \frac{v_i}{\omega_c} = \frac{m_i v_i}{|q|B}$ , soit

$$R_i = \frac{\sqrt{2Um_i}}{B\sqrt{q}}$$

4) Graphiquement, on a  $d = 2(R_2 - R_1)$ . Donc

$$d = \frac{2\sqrt{2}}{B} \sqrt{\frac{U}{q}} (\sqrt{m_2} - \sqrt{m_1})$$

## II Cyclotron

Inspiré CCP PC 2014, oral banque PT

- 1)  $\diamond$  **Système** : proton, assimilé à un point matériel de masse  $m$  et de charge  $q$ .  
 $\diamond$  **Référentiel** : lié au cyclotron, donc référentiel du laboratoire supposé galiléen.  
 $\diamond$  **BDF** :

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \text{négligeable devant } \vec{F} \\ \text{Force de LORENTZ} & \vec{F} = e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}) \end{array}$$

À l'intérieur des *dees*, seule la force magnétique  $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$  existe. Ainsi, d'après le TEM,

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = e \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}}_{\substack{\perp \vec{v} \\ =0}} = 0 \quad \text{soit} \quad mv \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} = 0}$$

- 2) La trajectoire d'un proton dans un champ magnétique est un arc de cercle, parcouru à vitesse constante. Utilisons un repérage **polaire**, centré sur le centre de l'arc de cercle. D'après la deuxième loi de NEWTON,

$$m\vec{a} = e\vec{v} \wedge \vec{B}$$

soit en utilisant les résultats connus sur la cinématique du mouvement circulaire,

$$m \left( -\frac{v^2}{R} \vec{u}_r \right) = evB \underbrace{(-\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z)}_{=\vec{u}_r} = -evB \vec{e}_r$$

avec  $\vec{v} = -v \vec{u}_\theta$  : la trajectoire est parcourue en sens horaire pour un proton (à connaître ou à retrouver par la cohérence des signes). Finalement,

$$\frac{mv^2}{R} = evB \quad \text{d'où} \quad \boxed{R = \frac{mv}{eB}}$$

La trajectoire dans un des *dee* est ainsi un demi-cercle, de longueur  $\pi R$  et, **puisque la vitesse est constante**, parcourue en un temps

$$\boxed{\Delta t_d = \frac{\pi R}{v} = \frac{\pi m}{eB} = 22 \text{ ns}}$$

On remarque ainsi que  $\Delta t_d$  ne dépend pas de la vitesse du proton, mais seulement du champ appliqué dans le *dee* (en plus des variables intrinsèques au proton,  $e$  et  $m$ ).

- 3) Pour que le proton soit accéléré de façon optimale à chaque passage entre les *dees*, il faut que la force électrique qu'il subit soit alternativement orientée selon  $+\vec{u}_x$  lorsqu'il passe de  $D_2$  à  $D_1$ , et selon  $-\vec{u}_x$  en passant de  $D_1$  à  $D_2$ . En négligeant le temps de passage dans l'espace entre les *dees* ( $a \ll \pi R$ ), il faut donc qu'une demi-période de la tension appliquée soit égale à  $\Delta t_d$ , soit pour une période entière :

$$T = 2\Delta t_d = \frac{2\pi m}{eB} \quad \text{et} \quad \boxed{f = \frac{eB}{2\pi m} = 23 \text{ MHz}}$$

Utiliser une tension harmonique plutôt qu'une tension créneau a l'intérêt de regrouper tous les protons pour que leur passage dans les *dees* soit en phase avec la tension. Regrouper les protons permet aux impulsions du faisceau d'être plus puissantes. De plus, en pratique, une tension créneau requiert beaucoup d'harmoniques qu'il peut ne pas être simple d'imposer à de telles fréquences.

- 4) Jusqu'à présent, nous avons relié le rayon à la vitesse du proton. Il faut donc maintenant relier la vitesse du proton au nombre de passage dans les *dees*, ou plutôt au nombre de passage dans la zone accélératrice. Comme on ne s'intéresse qu'à la norme, le théorème de l'énergie cinétique est le plus adapté. Appliquons ce théorème sur une trajectoire entre la sortie d'un *dee* et l'entrée de l'autre, en supposant que le passage du proton se fait au moment où la tension atteint son maximum (justifié par la question précédente), et en supposant aussi que la durée de passage dans la zone accélératrice est négligeable devant la période de la tension, ce qui permet de supposer que la tension est presque constante égale à  $U_m$ . Sous ces hypothèses, on trouve :

$$\frac{1}{2}mv_{n+1}^2 - \frac{1}{2}mv_n^2 = W(\vec{F}_e) = e \frac{U_m}{a}$$

En raisonnant par récurrence, on obtient

$$\frac{1}{2}mv_n^2 - \frac{1}{2}mv_0^2 \approx \frac{1}{2}mv_n^2 = neU_m \quad \text{soit} \quad v_n = \sqrt{\frac{2neU_m}{m}}$$

et en utilisant le résultat d'une question précédente,

$$R_n = \frac{m}{eB} \sqrt{\frac{2neU_m}{m}} \quad \text{soit} \quad \boxed{R_n = \sqrt{\frac{2nmU_m}{B^2e}}}$$

- 5) Remarquons bien que  $n$  compte le nombre de passages dans la zone accélératrice, faire un tour complet revient donc à passer de  $n$  à  $n + 2$ . Après un seul tour,  $n = 2$ , et

$$v_2 = \sqrt{\frac{4eU_m}{m}} \quad \text{et} \quad R_2 = 2\sqrt{\frac{mU_m}{eB^2}} = 6,1 \text{ cm}$$

Après dix tours,  $n = 20$  et

$$\boxed{R_{20} = \sqrt{10}R_2 = 19 \text{ cm}}$$

6) Avec  $R_N = 35 \text{ cm}$ , la vitesse finale vaut

$$v_{\text{fin}} = \frac{eBR_N}{m} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{E}_{c,\text{fin}} = \frac{e^2 B^2 R_N^2}{2m} = 2,1 \times 10^{-12} \text{ J} = 14 \text{ MeV}}$$

puis

$$\mathcal{E}_{c,\text{fin}} = NeU_m \quad \text{d'où} \quad \boxed{N = \frac{\mathcal{E}_{c,\text{fin}}}{eU_m} = 33}$$

ce qui correspond à 16 tours et demi au sein du cyclotron.

### III Chambre à bulles

1) Dans le référentiel terrestre supposé galiléen, la particule P n'est soumise qu'à la force magnétique  $\vec{F} = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ , en négligeant le poids devant cette force. Avec le principe fondamental de la dynamique, on trouve

$$\begin{cases} m\ddot{x} = q\dot{y}(t)B \\ m\ddot{y} = -q\dot{x}(t)B \\ m\ddot{z} = 0 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x}(t) = \frac{qB}{m}\dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\frac{qB}{m}\dot{x}(t) \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = +\omega\dot{y}(t) & (5.1) \\ \ddot{y}(t) = -\omega\dot{x}(t) & (5.2) \\ \ddot{z}(t) = 0 & (5.3) \end{cases}$$

2) L'équation 5.3 donne successivement  $\dot{z} = \text{cte} = 0$  puis  $\boxed{z = \text{cte} = 0}$  : le mouvement a donc lieu dans le plan ( $Oxy$ ).

Pour les équations horaires, on intègre une fois les deux premières équations 5.1 et 5.2 :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = \omega\dot{y}(t) \\ \ddot{y}(t) = -\omega\dot{x}(t) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = \omega y(t) + K \\ \dot{y}(t) = -\omega x(t) + K' \end{cases}$$

ainsi avec les conditions initiales :

$$\begin{aligned} \dot{x}(0) = 0 \quad \text{or} \quad \dot{x}(0) = \omega \underbrace{y(0)}_{=0} + K = K \quad \text{donc} \quad K = 0 \\ \dot{y}(0) = v_0 \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = -\omega \underbrace{x(0)}_{=0} + K' = K' \quad \text{donc} \quad K' = v_0 \end{aligned}$$

Soit

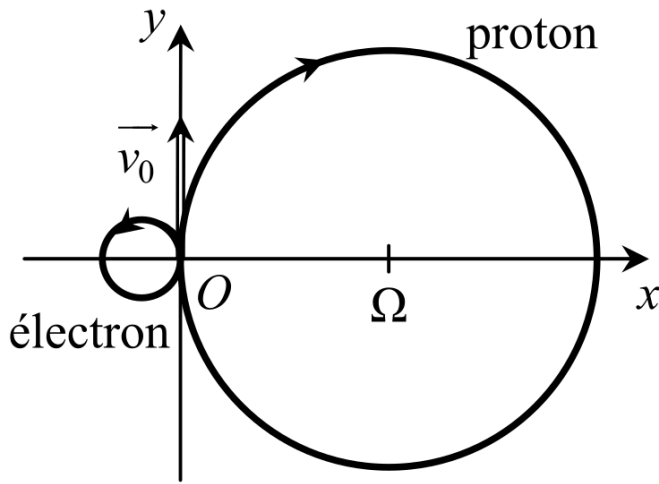
$$\begin{cases} \dot{x}(t) = \omega y(t) \\ \dot{y}(t) = -\omega x(t) + v_0 \end{cases}$$

et on injecte l'expression de  $\dot{y}$  dans 5.1 et inversement :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) + \omega^2 x(t) = \omega v_0 \\ \ddot{y}(t) + \omega^2 y(t) = 0 \end{cases}$$

en résolvant, on trouve finalement

$$\boxed{x(t) = \frac{v_0}{\omega} (1 - \cos(\omega t))} \quad \text{et} \quad \boxed{y(t) = \frac{v_0}{\omega} \sin(\omega t)}$$



**FIGURE 5.1** – Trajectoires pour un proton et un électron.

Pour un proton,  $\frac{v_0}{\omega} = \frac{mv_0}{qB} > 0$ , donc la trajectoire est à droite, et le mouvement se fait dans le sens horaire. À l'inverse, pour l'électron la trajectoire est à gauche et se fait dans le sens direct, mais avec un rayon beaucoup plus petit puisque proportionnel à  $m$ .

donnant l'équation cartésienne

$$\left(x - \frac{v_0}{\omega}\right)^2 + y^2 = \left(\frac{v_0}{\omega}\right)^2$$

correspondant à l'équation d'un cercle de centre  $\Omega \left(\frac{v_0}{\omega}, 0, 0\right)$  et de rayon  $R = \frac{v_0}{|\omega|} = \frac{mv_0}{|q|B}$ .

3) On réemploie le PFD :

$$m\vec{a} = q\vec{v} \wedge \vec{B} - \lambda\vec{v} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = +qB\dot{y} - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -qB\dot{x} - \lambda\dot{y} \\ m\ddot{z} = -\lambda\dot{z} \end{cases}$$

soit

$$\begin{cases} \ddot{x} = +\omega\dot{y} - \alpha\dot{x} \\ \ddot{y} = -\omega\dot{x} - \alpha\dot{y} \\ \ddot{z} = -\alpha\dot{z} \end{cases} \quad \begin{matrix} (5.4) \\ (5.5) \\ (5.6) \end{matrix}$$

Le mouvement reste plan, puisque la solution de l'équation 5.6 est  $\dot{z}(t) = D \exp(-\alpha t)$ , mais que  $\dot{z}(0) = 0 \Rightarrow D = 0$ , soit  $\boxed{z = \text{cte} = 0}$ .

4) En posant, comme suggéré,  $\underline{u} = x + jy$ , on combine (5.4) + j(5.5) pour avoir

$$\ddot{\underline{u}} + (\alpha + j\omega)\dot{\underline{u}} = 0$$

qui est une **équation différentielle d'ordre 2 sans ordre 0**, donc d'ordre 1 en  $\dot{\underline{u}}$  : on trouve donc les solutions avec une simple exponentielle :

$$\begin{aligned} \dot{\underline{u}}(t) &= A \exp(-(\alpha + j\omega)t) \\ \text{avec } \dot{\underline{u}}(0) &= 0 + jv_0 = A \quad \text{soit} \quad \dot{\underline{u}}(t) = jv_0 \exp(-(\alpha + j\omega)t) \\ \text{ainsi } \underline{u}(t) &= \frac{jv_0}{-(\alpha + j\omega)} \exp(-(\alpha + j\omega)t) + B \quad \text{or} \quad \underline{u}(0) = 0 \Leftrightarrow B = \frac{jv_0}{\alpha + j\omega} \\ \text{finalement } \underline{u}(t) &= \frac{jv_0}{\alpha + j\omega} (1 - \exp(-(\alpha + j\omega)t)) \end{aligned}$$

En mettant la fraction avec un dénominateur réel et en séparant les exponentielles :

$$\underline{u}(t) = \frac{jv_0\alpha + v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \exp(-j\omega t))$$

puis en prenant la partie réelle pour obtenir  $x(t)$  et la partie imaginaire pour obtenir  $y(t)$  (**attention à bien distribuer la fraction**),

$$\begin{cases} x(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \cos(\omega t)) - \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t) \sin(\omega t) \\ y(t) = \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \exp(-\alpha t) \sin(\omega t) + \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} (1 - \exp(-\alpha t) \cos(\omega t)) \end{cases}$$

5) Pour  $t \rightarrow \infty$ , le point d'asymptote est

$$P_\infty = \begin{pmatrix} \frac{v_0\omega}{\alpha^2 + \omega^2} \\ \frac{v_0\alpha}{\alpha^2 + \omega^2} \\ 0 \end{pmatrix}$$

La particule tourne toujours à cause des facteurs sinusoidaux, mais le rayon de courbure diminue exponentiellement : la trajectoire est une spirale, tournant toujours vers la droite pour un proton, et s'enroulant autour du point  $P_\infty$ .

