Méca 1

Cinématique du point

La **cinématique** est l'étude du mouvement en soi. On ne s'intéresse pas aux causes qui ont donné naissance au mouvement.

1 Description et paramétrage du mouvement

1.1 Notion de référentiel et relativité du mouvement

Description d'un mouvement Pour décrire le mouvement d'un objet, on doit :

— dire par rapport à quoi il se déplace : on définit alors une **origine** ;

— dire dans quelle direction il se déplace : on fixe alors un **repère** (un système de coordonnées) ;

— sur quel intervalle de temps il se déplace : on définit un repère de temps.

Référentiel. Un **référentiel** est un solide par rapport auquel on décrit le mouvement d'un objet. On définit ensuite :

— un repère permettant de décrire l'espace ;

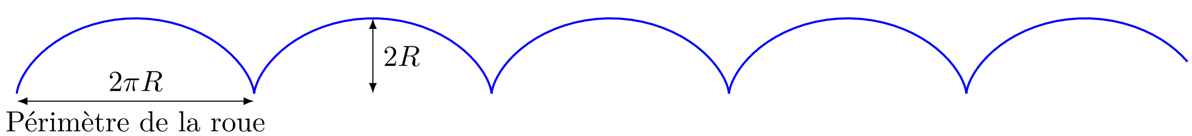
— une horloge permettant de mesurer le temps.

Un mouvement est toujours relatif, **la description d'un mouvement dépend du référentiel**.

Exemple

— Du point de vue de son voisin, le passager d'un train est immobile. Du point de vue de la vache au bord de la voie qui regarde le train passer, celui-ci est en translation.

— Du point de vue du cycliste, la valve de la roue est en rotation autour de l'axe de la roue. Selon un passant immobile, elle suit un mouvement de cycloïde. Son altitude atteint 0 à chaque tour de roue.



La mesure d'un intervalle de distance (une longueur) ou d'un intervalle de temps (une durée) est **absolue** : elle ne dépend pas du référentiel. Cela est valable en **mécanique classique**, c'est-à-dire si la vitesse des corps est très inférieure à celle de la lumière dans le vide.

Remarque. On peut mettre en évidence la relativité des durées dans plusieurs situations. Donnons un exemple.
Les muons sont des particules très instables produits par le rayonnements cosmiques dans la haute atmosphère. Ils se désintègrent suivant la loi :

$$N(t) = N_0 \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

avec $\tau = 2{,}2 \times 10^{-6}$ s.
Dans l'expérience de Frisch et Smith (1963), la vitesse des muons est $0{,}9952c$. Dans le référentiel terrestre, il mettent $6{,}392 \times 10^{-6}$ s (durée dans le référentiel terrestre) à parcourir $1\,907$ m (longueur mesurée dans le référentiel terrestre).
Sur un premier compteur en altitude, on détecte 563 muons/heure. On attend donc à en détecter au sol :

$$N(t) = 563 \exp\left(-\frac{6{,}392 \times 10^{-6}}{2{,}2 \times 10^{-6}}\right) = 31 \text{ muons par seconde}$$

Or on en détecte 408. Il faut évaluer Δt dans le référentiel des muons, celui-ci diffère significativement de la valeur évaluée dans le référentiel terrestre (d'un facteur $\sqrt{1-\dfrac{v^2}{c^2}} = 0{,}098$).

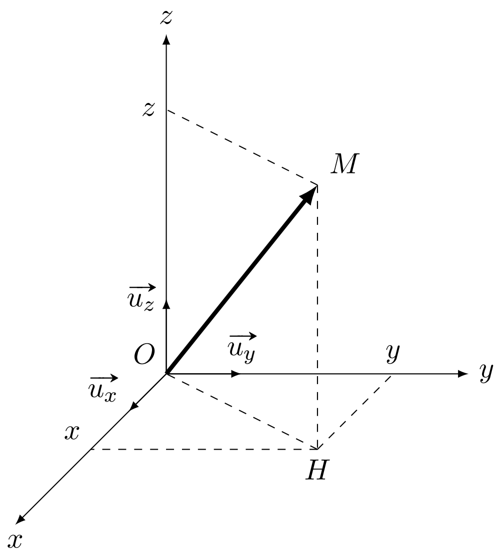
1.2 Système de coordonnées

Pour décrire le mouvement d'un point dans l'espace, on se dote d'un **repère** « accroché » au référentiel. Le plus simple est le repère cartésien.

La position d'un point M par rapport à un point O est représentée par un **vecteur** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ pouvant éventuellement varier dans le temps. En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

Remarque. Les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont appelés **vecteurs de base**, ce sont des vecteurs de norme 1. Ils n'ont pas d'unité, tandis que $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ sont des longueurs.

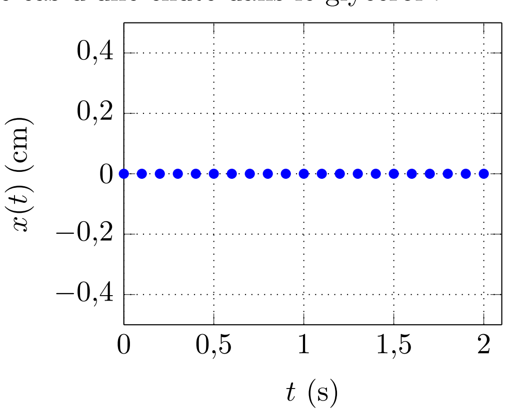


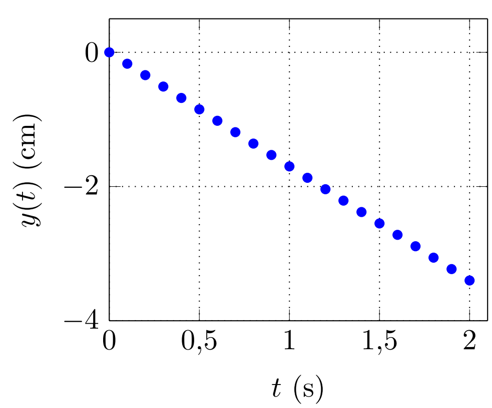
1.3 Équations horaires et trajectoire

Définition. Les **équations horaires** du mouvement sont les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$, exprimées **explicitement** en fonction du temps t.

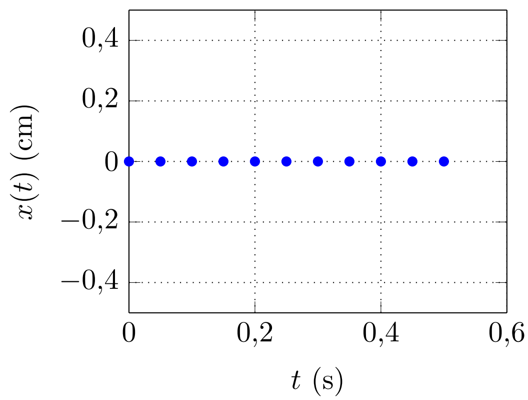
En TP, nous verrons l'évolution de $x(t)$ et $y(t)$

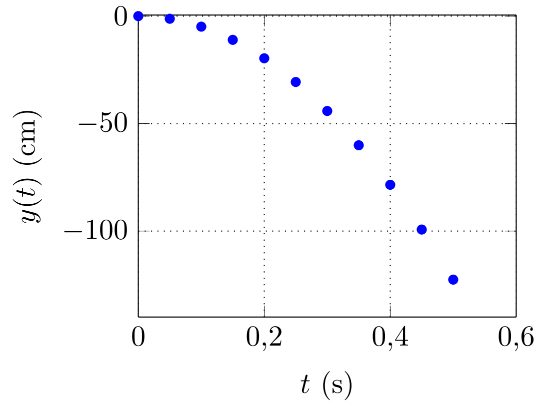
— dans le cas d'une chute dans le glycérol :



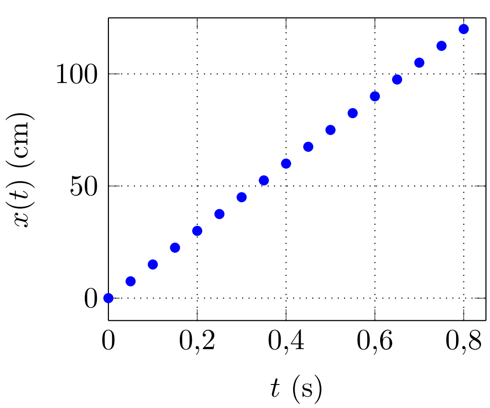


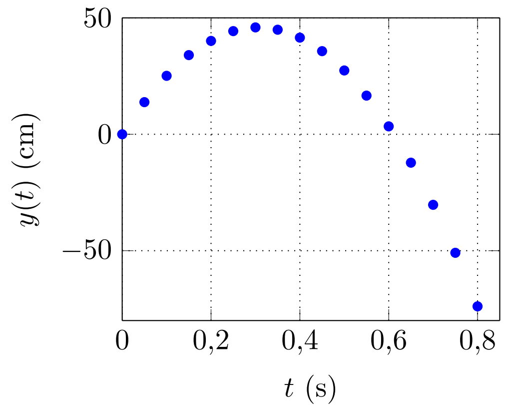
— d'une chute libre sans vitesse initiale :





— d'une chute libre avec vitesse initiale :

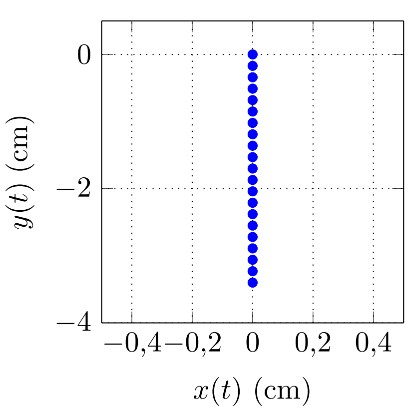


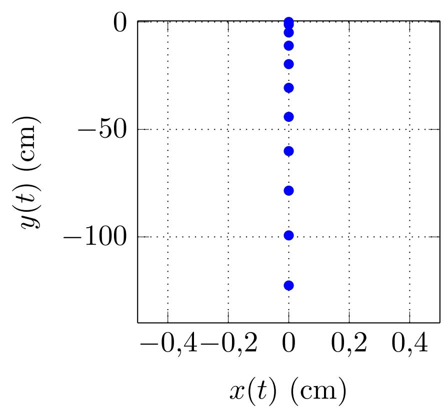


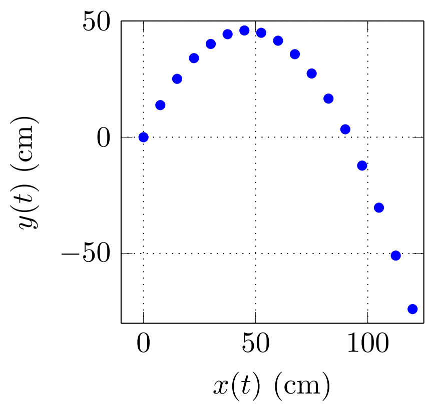
Les équations horaires peuvent aussi être une expressions analytiques de $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ obtenue à partir d'une modélisation du problème.

Définition. La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point M au cours du temps. C'est le « dessin » fait par le mobile au cours du temps.

Sur ces expériences, la trajectoire est la courbe $y(x)$ car le mouvement est plan. C'est une droite dans les deux premiers cas (chute dans le glycérol et chute libre sans vitesse initiale) et une parabole dans le dernier (chute avec vitesse initiale).







2 Vitesse et accélération

2.1 La vitesse

Vitesse : On définit la vitesse comme le rapport :

$$\overrightarrow{v\,(t)} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}\,(t+\Delta t)} - \overrightarrow{\mathrm{OM}\,(t)}}{\Delta t}$$

Si on effectue des mesures très rapprochées, $\Delta t \longrightarrow 0$. On définit alors la vitesse instantanée :

Vitesse instantanée : On définit la vitesse instantanée comme la **dérivée** du vecteur position :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}\,(t)}}{\mathrm{d}t}$$

Composantes de la vitesse Le vecteur position est :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}(t)} = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

Donc :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}\right)$$

Les vecteurs $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ ne changent pas de direction dans le temps (et restent unitaires), on peut donc les considérer comme des constantes multiplicatives :

$$\overrightarrow{v(t)} = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}(t)\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}(t)\overrightarrow{u_y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}(t)\overrightarrow{u_z}$$

Définition. En mécanique, les dérivées par rapport au temps se notent avec un point sur la fonction, autrement dit

$$\frac{\mathrm{d}x(t)}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$$

Ainsi :

$$\boxed{\overrightarrow{v(t)} = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{u_z}}$$

Exemple

En TP, nous calculerons les composantes du vecteur vitesse.

— Pour la chute dans le glycérol, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ est constant : le vecteur vitesse est constant, dirigé vers le bas.

— Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ diminue linéairement (sa valeur absolue augmente) : le vecteur vitesse est variable, dirigé vers le bas.

— Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\dot{x}$ est constant et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable et change de direction.

Définition. On définit la norme du vecteur vitesse :

$$v(t) = \|\vec{v}(t)\| = \sqrt{\dot{x}(t)^2 + \dot{y}(t)^2 + \dot{z}(t)^2}$$

Si il y a possibilité de confusion, il faut bien indiquer de quelle grandeur on parle : le vecteur vitesse ou la norme de la vitesse.

2.2 Déplacement élémentaire

Définition. Le **déplacement élémentaire** est le déplacement infiniment petit du point M pendant un temps infinitésimal $\mathrm{d}t$:

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}(t+\mathrm{d}t)} - \overrightarrow{\mathrm{OM}(t)}$$

En coordonnées cartésiennes, on a :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}}$$

2.3 L'accélération

L'accélération est une grandeur physique qui mesure la variation de la vitesse. On peut la définir ainsi :

$$\overrightarrow{a\,(t)} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{v}\,(t+\Delta t)} - \overrightarrow{\mathrm{v}\,(t)}}{\Delta t}$$

Mais si on effectue des mesures très rapprochées, $\Delta t \longrightarrow 0$. On définit alors l'accélération instantanée :

Accélération instantanée : C'est la dérivée du vecteur vitesse. Elle s'exprime en $\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{v}\,(t)}}{\mathrm{d}t}$$

Expression de l'accélération On reprend le vecteur vitesse

$$\vec{\mathrm{v}}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{u_z}$$

Donc :

$$\overrightarrow{a(t)} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{u_z}\right)$$

À nouveau, on peut considérer les vecteurs comme des constantes multiplicatives d'où :

$$\boxed{\overrightarrow{a(t)} = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}}$$

On a noté $\ddot{x}$ la dérivée seconde de la fonction $x(t)$.

Exemple

En TP, nous calculerons les composantes de l'accélération.

— Pour la chute dans le glycérol, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ sont nuls : le vecteur accélération est nul.

— Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.

— Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.

Attention

— Une accélération peut être négative ou nulle.

— En physique l'accélération est liée à la **variation de la vitesse**, c'est souvent différent de l'utilisation courante de ce mot.

— Pour que l'accélération soit nulle, il faut que toutes les composantes de la vitesse ne varient pas. Un mouvement peut être à vitesse constante en norme mais d'accélération non nulle.

3 Exemples de mouvement

3.1 Rappel mathématique

— Si $\dot{x}(t) = 0$, alors $x(t) = x_0$, où x_0 est une constante.
— Si $\dot{x}(t) = v_0$, alors $x(t) = v_0 t + x_0$, où x_0 est une constante.
— Si $\dot{x}(t) = a_0 t$, alors $x(t) = \dfrac{1}{2} a_0 t^2 + x_0$, où x_0 est une constante.

Il suffit de dériver les expressions de $x(t)$ pour vérifier ce résultat.

3.2 Le mouvement rectiligne uniforme

Exemple

Chute d'une bille dans le glycérol.

Définition. Le mouvement est dit rectiligne uniforme si le vecteur vitesse est constant.

Par exemple :

$$\vec{v} = v_0 \overrightarrow{u_x}$$

Une égalité de vecteurs donne **trois** égalité de scalaires, une par composante.

On peut alors écrire :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Il faut intégrer ces équations pour connaître la position :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Où x_0, y_0 et z_0 sont trois constantes que l'on peut calculer à l'aide des conditions initiales.

3.3 Le mouvement rectligne uniformément accéléré

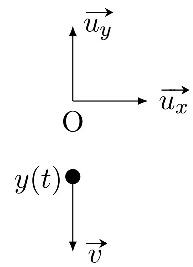
On considère le cas d'une balle en chute libre sans vitesse initiale (situation que nous avons étudié en TP). On donne l'accélération :

$$\vec{a} = -g \overrightarrow{u_z}$$

Il faut définir le référentiel et le repère d'étude :

— on étudie le mouvement de la balle par rapport au référentiel de la salle de TP (de la caméra qui filme la chute) ;
— la verticale ascendante est représentée par le vecteur $\overrightarrow{u_y}$, les deux vecteurs $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_z}$ sont horizontaux ;
— origine des temps : le moment où on lâche la balle, ainsi $\vec{v}(0) = \vec{0}$;
— origine du repère : la position de la balle à $t = 0$, ainsi $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$.

Faisons un schéma de la situation :



L'accélération est :

$$\overrightarrow{a(t)} = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}$$

Donc :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On intègre ces équations :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y0} \\ \dot{z}(t) = v_{z0} \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

$$\dot{x}(0) = v_{x0} \qquad \dot{y}(0) = v_{y0} \qquad \dot{z}(0) = v_{z0}$$

Or, la balle est lâchée sans vitesse initiale, $\vec{v}(0) = 0$ donc :

$$\dot{x}(0) = 0 \qquad \dot{y}(0) = 0 \qquad \dot{z}(0) = 0$$

D'où $v_{x0} = v_{y0} = v_{z0} = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On intègre ces équations une seconde fois pour avoir la position :

$$\begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

$$x(0) = x_0 \qquad y(0) = y_0 \qquad z(0) = z_0$$

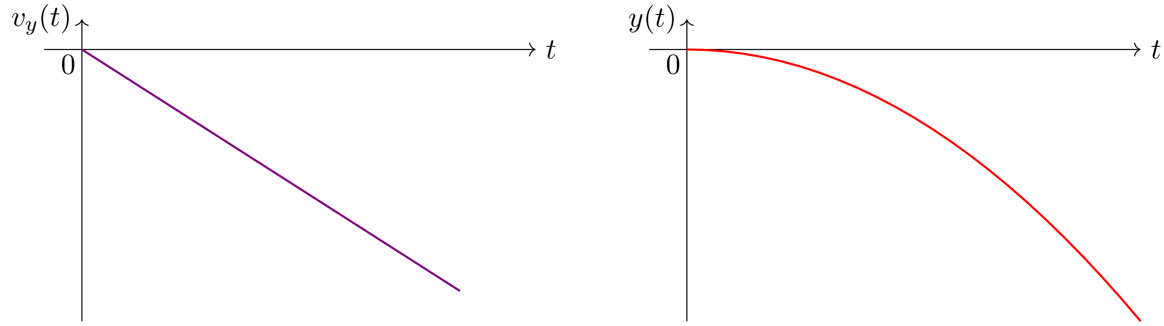
Or l'origine est la position de la balle à l'instant initial ainsi $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$ soit :

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad z(0) = 0$$

D'où $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$

Ce sont les équations horaires du mouvement.



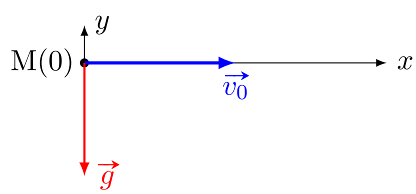
La trajectoire dans ce cas une droite.

3.4 Mouvement courbe uniformément accéléré

On considère la même situation que ci-dessus, mais la balle a été lancée avec une vitesse initiale horizontale :

$$\vec{v}(0) = v_0\vec{u_x}$$

L'accélération est constante et vaut $\vec{a} = -g\vec{u_y}$. On conserve le même repère et la même origine ainsi $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$.



Accélération L'accélération est :

$$\overrightarrow{a(t)} = \ddot{x}(t)\vec{u_x} + \ddot{y}(t)\vec{u_y} + \ddot{z}(t)\vec{u_z}$$

Or $\vec{a} = -g\vec{u_y}$ donc : Donc :

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Vecteur vitesse On intègre une à une les coordonnées du vecteur accélération :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y0} \\ \dot{z}(t) = v_{z0} \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

$$\dot{x}(0) = v_{x0} \qquad \dot{y}(0) = v_{y0} \qquad \dot{z}(0) = v_{z0}$$

Or, la vitesse initiale est $\vec{v}(0) = v_0\vec{u_x}$ donc :

$$\dot{x}(0) = v_0 \qquad \dot{y}(0) = 0 \qquad \dot{z}(0) = 0$$

D'où $v_{x0} = v_0$ et $v_{y0} = v_{z0} = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

Vecteur position On intègre une à une les coordonnées du vecteur vitesse :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

On utilise les conditions initiales. D'une part, d'après ce qui précède :

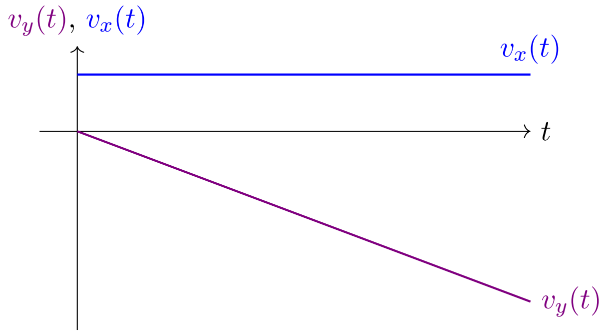
$$x(0) = x_0 \qquad y(0) = y_0 \qquad z(0) = z_0$$

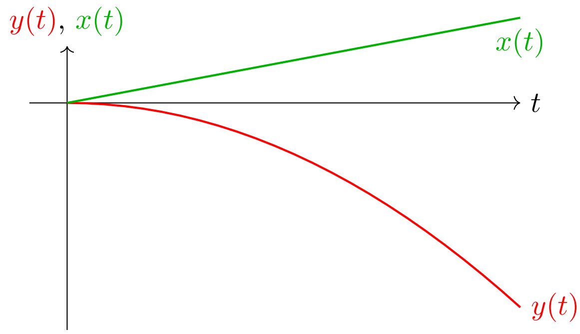
Or l'origine est la position de la balle à l'instant initial ainsi $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$ soit :

$$x(0) = 0 \qquad y(0) = 0 \qquad z(0) = 0$$

D'où $x_0 = y_0 = z_0 = 0$. Ainsi :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}$$





Trajectoire Il d'agit d'obtenir la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy. On peut procéder ainsi. On commence par exprimer t en fonction de x :

$$t = \frac{x}{v_0}$$

Donc :

$$y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2$$

$$\boxed{y(x) = -\frac{g}{2v_0^2} x^2}$$

La trajectoire est parabolique.