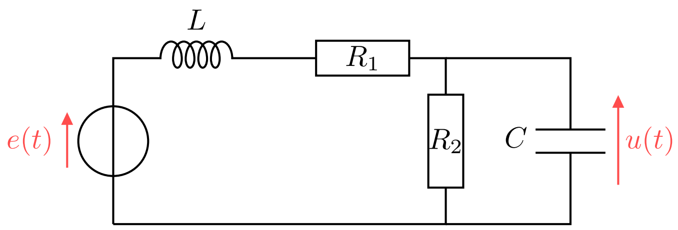
/49 P1 Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\begin{cases} e(t<0)=0 \\ e(t\geq 0)=E \end{cases}$ dans le circuit ci-dessous.



/4 **1** Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Réponse

R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2.

De plus, à $t \longrightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension 1 avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension $e(t)$, et on a donc

$$\boxed{u(\infty) \overset{1}{=} u_\infty = \frac{R_2}{R_1+R_2}E}$$

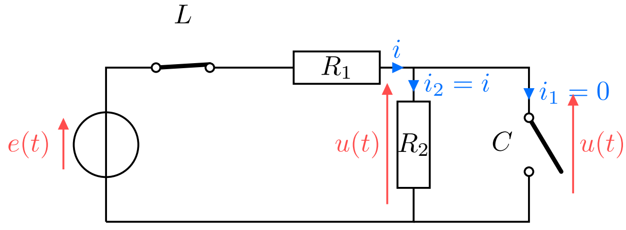


FIGURE 1 – Schéma équivalent. 1+1

/8 **2** Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

Réponse

On applique les lois de KIRCHHOFF :

Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i \overset{1}{=} E \quad (1)$$

Avec la loi des nœuds :

$$i \overset{1}{=} i_1 + i_2 \overset{1}{=} C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}$$

En combinant :

$$\begin{aligned}
& u + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}\right) + R_1C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1\frac{u}{R_2} = E \\
\Leftrightarrow\ & u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{R_2}u = E \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \cancel{1}_{\frac{R_2}{R_2}}\right)u \overset{1}{=} E \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \frac{E}{LC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} \overset{1}{=} \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u_\infty}{LC} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u = {\omega_0}^2u_\infty}
\end{aligned}$$

avec $\boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_2}\right)}}$ et $\boxed{\lambda \overset{1}{=} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_2C} + \dfrac{R_1}{L}\right)}$

/10 **3** Exprimer la forme générale de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ, de la pulsation et de deux constantes d'intégration qu'on ne cherche pas à déterminer pour le moment.

Réponse

Pour la solution de l'équation homogène, on injecte $u_h(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ (1) la forme générique pour obtenir l'équation caractéristique. On en cherche alors les racines grâce au discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 \overset{(1)}{=} 0 \Rightarrow \Delta \overset{(1)}{=} 4(\lambda^2 - {\omega_0}^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ (1) puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_\pm \overset{(1)}{=} -\frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm \overset{(1)}{=} -\lambda \pm \mathrm{j}\Omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega \overset{(1)}{=} \sqrt{{\omega_0}^2 - \lambda^2}}$$

La solution particulière étant visiblement $u_p = u_\infty$ (1), on aura la forme générale

$$u(t) \overset{(1)}{=} u_h(t) + up \Leftrightarrow \boxed{u(t) \overset{(1)}{=} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + u_\infty}$$

◇

/9 **4** Justifier entièrement les conditions initiales. Deux schémas sont attendus.

Réponse

En $t = 0^-$

Or, avant l'échelon montant, le générateur est éteint depuis longtemps. Ainsi, le condensateur est déchargé, et $\boxed{u(0^-) = 0}$ (1), et aucun courant ne circule dans le circuit, donc $\boxed{i(0^-) = 0}$ (1).

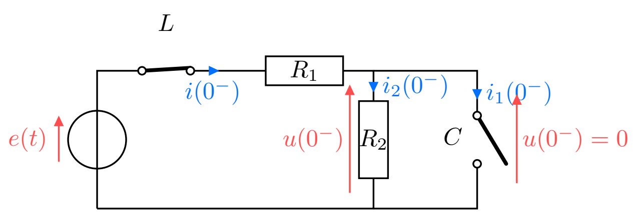


Figure 2 – Schéma en $t = 0^-$. (1)

En $t = 0^+$

Or, par continuité de l'intensité traversant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur (1), lors de l'échelon de tension on garde $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$ et $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ (1).

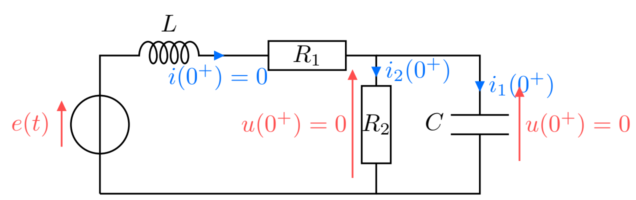


Figure 3 – Schéma en $t = 0^+$. (1)

Ainsi, avec une loi des nœuds, on a $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$ (1). Seulement, comme $i_2(0^+)$ est le courant passant dans la résistance R_2 de tension $u(0^+) = 0$, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ (1), soit avec la loi des nœuds, $\boxed{i_1(0^+) = 0 \overset{(1)}{=} C \left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+}}$.

◇

/3 **5** Déterminer alors l'expression complète de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ et Ω.

Réponse

Première condition

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + u_\infty = 0 \Leftrightarrow \boxed{A \overset{(1)}{=} -u_\infty}$$

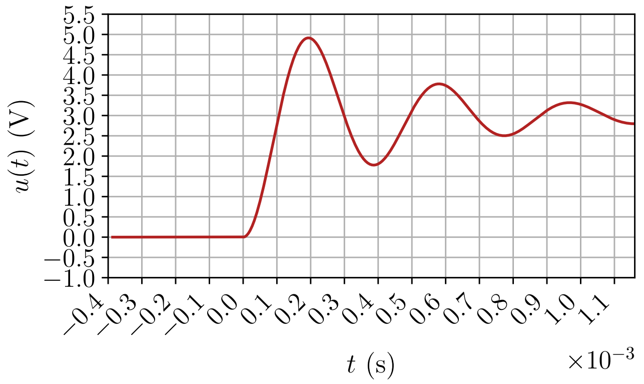
Seconde condition

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_0 = 0 \Leftrightarrow -\lambda A + B\Omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B \overset{(1)}{=} \frac{-\lambda u_\infty}{\Omega}}$$

Finalement, $$\boxed{u(t) \overset{(1)}{=} u_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right)}$$

◇

On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.



/4 6 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique de la pseudo-période T.

Réponse

On lit l'abscisse du premier et du troisième maximum, qu'on appelle t_1 et t_3 respectivement. On a alors

$$2T = t_3 - t_1 \Leftrightarrow \boxed{T \overset{1}{=} \frac{t_3 - t_1}{2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_3 \overset{1}{=} 0{,}95 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ t_1 \overset{1}{=} 0{,}19 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{T \overset{1}{=} 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$$

◇

/4 7 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique du décrément logarithmique

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty} \right)}$$

Réponse

On calcule δ avec deux pseudo-périodes ici. On lit la valeur de tension aux premier et troisième pics, à t_1 et t_3 respectivement, ainsi que ce qui semble être la valeur limite u_∞ :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u(t_1) - u_\infty}{u(t_3) - u_\infty} \right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(t_1) \overset{1}{=} 4{,}9\,\mathrm{V} \\ u(t_3) \overset{1}{=} 3{,}3\,\mathrm{V} \\ u_\infty \overset{1}{=} 3{,}0\,\mathrm{V} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\delta \overset{1}{=} 0{,}92}$$

◇

/5 8 Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

Réponse

Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t+nT) - u_\infty \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-\lambda nT} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t} \left(A \underbrace{\cos(\Omega t + n\Omega t)}_{=\cos \Omega t} + B \underbrace{\sin(\Omega t + n\Omega t)}_{=\sin \Omega t} \right)}_{u(t) - u_\infty \; 1}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty} \overset{1}{=} \mathrm{e}^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln\left(\mathrm{e}^{\lambda nT}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda \overset{1}{=} \frac{\delta}{T}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 0{,}92 \\ T = 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\lambda \overset{1}{=} 2{,}3 \times 10^{3}\,\mathrm{s}^{-1}}$$

◇

/2 9 Sachant que $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

Réponse

On sait que λ s'exprime en fonction de C, on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2 C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C \overset{1}{=} \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1 R_2}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega} \\ R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega} \\ L = 500\,\mathrm{mH} \\ \lambda = 2{,}3 \times 10^3\,\mathrm{s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{C \overset{1}{=} 7{,}6\,\mathrm{nF}}$$