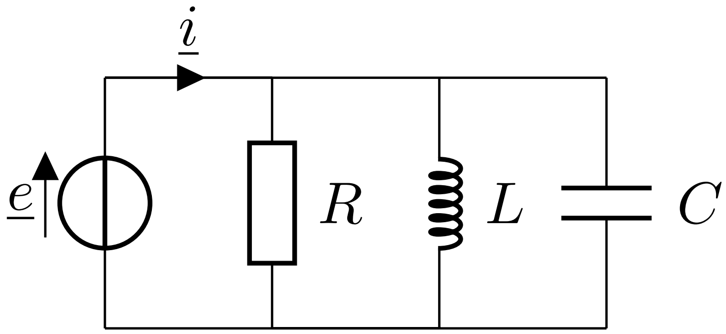
Sujet 1 – corrigé

I Circuit RLC // en RSF

On considère un circuit RLC parallèle en régime sinusoïdal forcé.



1. Exprimez l'admittance complexe $\underline{Y}$ de ce circuit.
Réponse :
On peut directement utiliser la loi d'association des admittances en parallèle :
$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \underline{Y}_C + \underline{Y}_L$ soit ici :
$\underline{Y} = \frac{1}{R} + j(C\omega - \frac{1}{L\omega})$.

2. Mettez $\underline{Y}$ sous la "forme réduite" en l'exprimant uniquement en fonction de R, Q (facteur de qualité) et u (pulsation réduite) avec :

$$Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad \text{et} \qquad u = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC}$$

Réponse :
En introduisant $Q = RC\omega_0 = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $u = \frac{\omega}{\omega_0} = \omega\sqrt{LC}$, on peut écrire
$\underline{Y} = \frac{1}{R}[1+j(RC\omega - \frac{R}{L\omega})]$ avec $RC = \frac{Q}{\omega_0}$ et $\frac{R}{L} = Q\omega_0$ d'où $\underline{Y} = \frac{1}{R}[1+j(Q\frac{\omega}{\omega_0} - Q\frac{\omega_0}{\omega})] = \frac{1}{R}[1+jQ(u-\frac{1}{u})]$

3. En déduire l'impédance complexe $\underline{Z}$ en fonction des mêmes variables réduites. Étudiez les variations du module de $\underline{Z}$ en fonction de la fréquence. On montrera la présence d'un maximum que l'on précisera. Trouvez les deux valeurs u_1 et u_2 pour lesquelles $|\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{2}}$.
Réponse :
On en déduit alors l'impédance complexe $\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}} = \frac{R}{1+jQ(u-\frac{1}{u})}$ et son module $|\underline{Z}| = \frac{R}{\sqrt{1+Q^2(u-\frac{1}{u})^2}}$
$|\underline{Z}|$ est maximale lorsque le dénominateur est minimum, c'est à dire pour $u = 1$, on a alors $|\underline{Z}| = R$.
$|\underline{Z}| = R/\sqrt{2}$ lorsque $1 + Q^2(u - \frac{1}{u})^2 = 2$ c'est à dire en $u_1 = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$ et $u_2 = \frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}}$ (racines positives, Cf. cours).

4. Montrez que $|u_2 - u_1| = \frac{1}{Q}$. À la fréquence de résonance, quelle est l'impédance simple équivalente du circuit ?
Réponse :
On vérifie que $|u_2 - u_1| = |\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} - (-\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}})| = \frac{1}{Q}$: la bande passante est moins large quand le facteur de qualité est élevé. À la fréquence de résonance $f = f_0 \iff u = 1$ le circuit est équivalent à un résistor de résistance R.

5. Que se passe-t-il loin de la fréquence de résonance ?
   Réponse :
   Pour $f \gg f_0$, $\underline{Z} \simeq \frac{1}{jC\omega}$ il est purement capacitif et pour $f \ll f_0$, $\underline{Z} \simeq jL\omega$, il est purement inductif.

Sujet 2 – corrigé

I Circuit RLC en RSF

On dispose de deux circuits A et B ci-dessous, qui sont alimentés par un GBF de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ (avec E_0 une constante positive) et de résistance interne R_g.

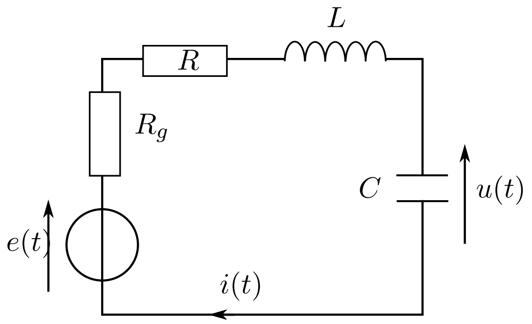


Figure 11.1: Montage A

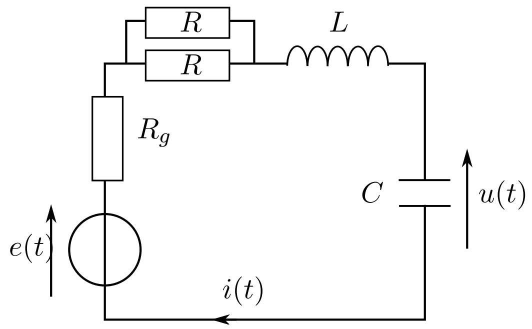
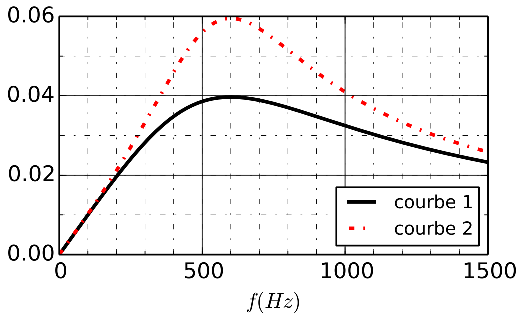
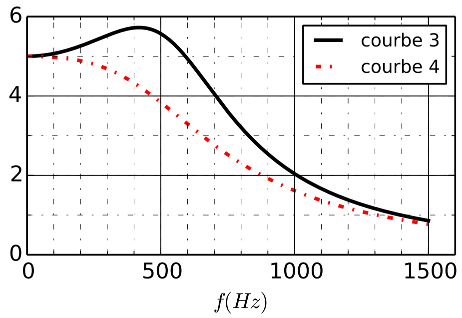


Figure 11.2: Montage B

On donne les graphiques de l'évolution de l'amplitude I_0 en ampère de l'intensité $i(t)$, ainsi que celle de l'amplitude U_0 en volt de la tension $u(t)$ en fonction de la fréquence f.





1. Pour chaque graphique, déterminer quelle est la courbe correspondant au montage A et celle au montage B. Déterminer les valeurs de E_0, R, R_g, L et C.
   Réponse :
   Courbes 1 $I_0(A)$; courbe 2 $I_0(B)$

   Courbe 3 $U_0(B)$; courbe 4 $U_0(A)$

   Utilisation de $f_0 = \dfrac{1}{2\pi\sqrt{LC}} = 600\,\text{Hz}$

   $I_{0,max}(A) = \dfrac{E_0}{R + R_g} = 40\,\text{mA}$ et $I_{0,max}(B) = \dfrac{E_0}{R/2 + R_g} = 60\,\text{mA}$, donc $\boxed{R = 2R_g}$.

$\boxed{E_0 = 5\,\mathrm{V}}$

$U(f_0) = QE_0 :\ Q_B = 1 = \dfrac{1}{2R_g}\sqrt{L/C}$

Pente à l'origine de $I_0 :\ a = 2\pi CE_0 = 1 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}$

$\boxed{C = 3{,}2\,\mu\mathrm{F}}$, $\boxed{L = 22\,\mathrm{mH}}$, $\boxed{R_g = 42\,\Omega}$, $\boxed{R = 84\,\Omega}$

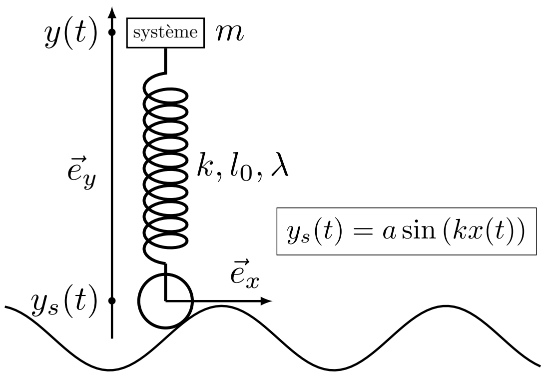
Sujet 3 – corrigé

I Entrée en résonance d'une suspension ($\star$)

On considère le cas d'un véhicule de masse m roulant à la vitesse (horizontale) v_0 sur une route de profil harmonique $y(x) = a\sin(kx)$ avec $x = v_0 t$. On posera par la suite $\omega = kv_0$.

Le véhicule est relié aux roues par une suspension, modélisée par un ressort de longueur à vide l_0, et de raideur k. De plus, on prendre en compte une force de frottement fluide exercée par l'air ambiant sur le véhicule d'expression $\vec{f} = -\lambda v_y \vec{e}_y$.

Dans toute la suite, on notera $y(t)$ l'abscisse du véhicule et $y_s(t)$, l'abscisse du sol.



1. Effectuer un bilan des force verticales exercées sur le véhicule
   Réponse :
   On se place en base cartesienne et on obtient pour le bilan des forces
   - Le poids $\vec{P} = -mg\vec{e}_y$
   - La force de frottement $\vec{f} = -\lambda v_y \vec{e}_y$
   - La force de rappel élastique $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_y$ avec $l = y(t) - y_s(t)$

2. En déduire l'équation du mouvement pour l'inconnue y sous sa forme canonique.
   Réponse :
   On applique le principe fondamental de la dynamique au véhicule dans le référentiel galiléen lié au sol selon l'axe vertical $\vec{e}_y$.
   $$m\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} = -mg - \lambda\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} - ky + ky_s + kl_0$$
   soit sous la forme canonique
   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}(y_s + l_0) - g}$$

On cherche à obtenir une solution particulière $y_p(t)$ de cette équation sous la forme $y_p(t) = y_h(t) + y_c$ avec $y_h = Y\cos(\omega t + \phi)$, une fonction harmonique, associée à la partie harmonique du second membre et y_c, une fonction constante, associée à la partie constante du second membre.

3. De quelle équation y_c est-elle solution ? Exprimer alors y_c en fonction des données du problème.
   Réponse :
   On ne garde que la partie constante du second membre d'où
   $$\frac{\mathrm{d}^2y_c}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y_c}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y_c = \frac{k}{m}(l_0) - g$$
   d'où l'on déduit $\boxed{y_c = l_0 - mg/k}$.

4. De quelle équation y_h est-elle solution ? On pose alors $\underline{y}_h(t) = \underline{Y}_c e^{j\omega t}$ tel que $y_h(t) = \mathrm{Re}(\underline{y}_h(t))$. Déduire de ce qui précède l'expression de $\underline{Y}_c$ en fonction de λ,k,m,ω et a.
   Réponse :

Comme pour la question précédente, on ne garde cette fois ci que la partie harmonique du second membre d'où

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\lambda}{m}\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}y = \frac{k}{m}a\cos(\omega t - \pi/2)$$

en remarquant que $\sin(\omega t) = \cos(\omega t - \pi/2)$. On passe ensuite l'équation aux complexe d'où

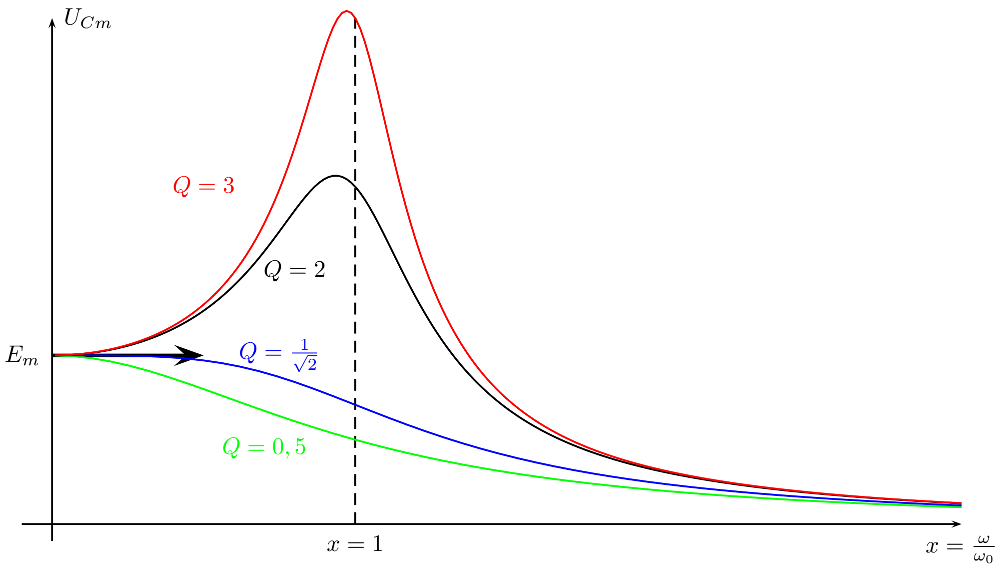
$$(j\omega)^2\underline{Y}_c + \frac{\lambda}{m}j\omega\underline{Y}_c + \frac{k}{m}\underline{Y}_c = \frac{k}{m}ae^{-j\pi/2}e^{j\omega t}$$

d'où l'on déduit après simplification

$$\underline{Y}_c = \frac{ae^{-j\pi/2}}{1 + \frac{\lambda}{k}j\omega + \frac{m}{k}(j\omega)^2}$$

On pose $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ la pulsation propre du système et $Q = \sqrt{mk}/\lambda$, son facteur de qualité

5. Vers quelle limite tend l'amplitude Y de $y_h(t)$ en basse fréquence ? De même, donner un équivalent de cette amplitude en haute fréquence. Exprimer ensuite cette amplitude pour $\omega = \omega_0 = \sqrt{k/m}$ en fonction de a et de Q. En déduire la courbe de Y en fonction de ω pour différentes valeurs du facteur de qualité (par exemple 0,5 ; 1 ; 2)
Réponse :
On a $Y = |\underline{Y}_c| \to a$ lorsque $\omega \to 0$. De même, en haute fréquences, on obtient $Y \sim \frac{k}{m}\frac{a}{\omega^2}$ donc l'amplitude tend vers 0 lorsque $\omega \to +\infty$.
De plus, on a pour $\omega = \omega_0$, $Y = a\frac{k}{\lambda\omega_0} = a\frac{mk}{\lambda} = aQ$
Ces expressions permettent de tracer les courbes demandées.



6. La résonance est-elle obtenue pour toute les valeurs possible du facteur de qualité ? S'agit-il du même type de résonance que celle obtenue pour l'intensité d'un circuit RLC ?
Réponse :
On observe graphiquement que la résonance n'apparait que lorsque Q est élevé. Ce résultat est contraire à celui obtenu en cours. C'est donc bien un autre type de résonance que celui en intensité. C'est logique puisque l'élongation du système ressort est analogue à la charge du condensateur, soit à C près analogue à la tension ; en étudiant la vitesse du système on trouverait la même résonance.

7. ($\star\star$) Déterminer précisément, et par le calcul, à partir de quelle valeur notée Q_c la résonance apparaît. Cette dernière se caractérise par l'apparition d'un maximum local dans la courbe $|Y(\omega)|$.
Réponse :
On a

$$|Y| = \frac{a}{1 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}}$$

On peut alors poser $x = \omega/\omega_0$, appelée la pulsation réduite, afin d'alléger les calculs. Cette notation sera régulièrement reprise en RSF.

Il y a résonance lorsque $|Y|$ passe par un extremum local pour $x \in]0, +\infty[$. Il convient alors d'étudier les variation du module, où plus simplement, du carré de son dénominateur :

$$f(x) = (1-x^2)^2 + x^2/Q^2 \Rightarrow f'(x) = 2(-2x)(1-x^2) + 2x/Q^2$$

L'extremum est obtenu lorsque la dérivée est nulle (pour $x > 0$) soit après simplification par $2x$:

$$f'(x) = 0 \Rightarrow -2(1-x^2) + \frac{1}{Q^2} = 0 \Rightarrow x^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

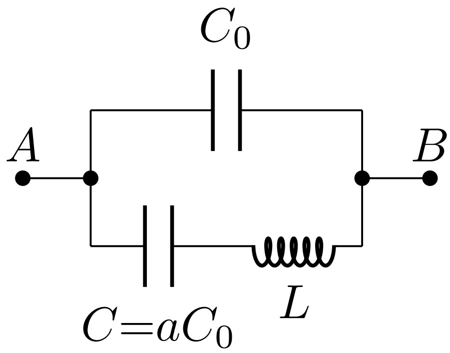
Cette dernière équation admet une solution sur $]0, +\infty[$ seulement si $1 - 1/(2Q^2) > 0$ donc si

$$\boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Sujet 4 – corrigé

I Quartz piézo-electrique

On considère, comme schéma électrique simplifié équivalent d'un quartz piézo-électrique destiné à servir d'étalon de fréquence dans une horloge, un dipôle AB composé de deux branches en parallèle.
Dans l'une, une inductance L pure en série avec un condensateur de capacité C ; dans l'autre, un condensateur de capacité C_0.
On posera $\frac{C}{C_0} = a$, et on gardera les variables L, C_0, ω et a.



1. Le dipôle AB étant alimenté par une tension sinusoïdale de pulsation ω, calculez l'impédance complexe $\underline{Z_{AB}} = \underline{Z}$. Calculez ensuite son module $|\underline{Z}| = Z$, et son argument φ.
   Réponse :
   Le dipôle AB est en régime sinusoïdal forcé. On représente son équivalent en notation complexe.

   Pour simplifier les calculs, on calculera $\underline{Y}$ l'admittance complexe du dipôle.

   $$\underline{Y} = \underline{Y}_{C_0} + \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} \Rightarrow \frac{1}{\underline{Z}} = jC_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega} = jC_0\omega + \frac{jC\omega}{1 - LC\omega^2} \Rightarrow \underline{Z} = \frac{1 - LC\omega^2}{jC_0\omega(1 - LC\omega^2) + jC\omega}$$

   Et avec $C = aC_0$, on en déduit

   $$\underline{Z} = -j\frac{1 - aLC_0\omega^2}{C_0\omega(1 + a - aLC_0\omega^2)} \Rightarrow Z = \frac{|1 - aLC_0\omega^2|}{C_0\omega|1 + a - aLC_0\omega^2|} \text{ et } \varphi = \pm\frac{\pi}{2}$$

   car $\underline{Z}$ est un imaginaire pur.

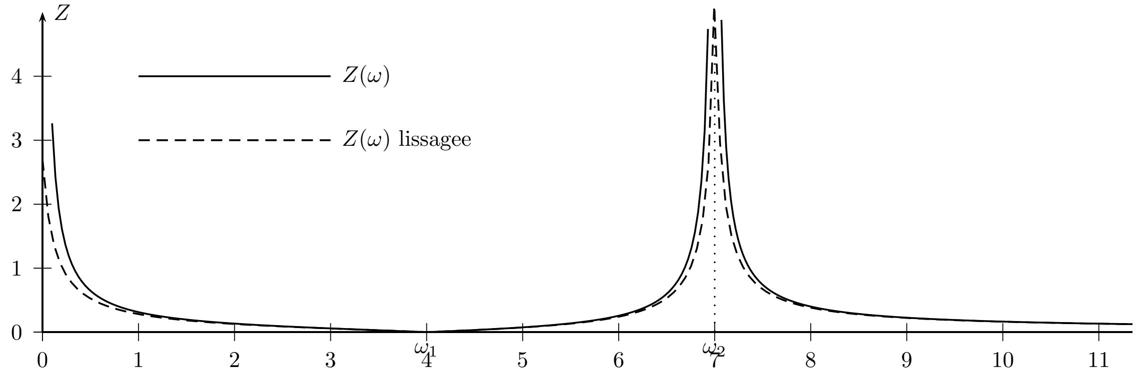
2. Étudiez l'impédance $\underline{Z}$ en fonction de la pulsation ; pour cela :

   - on précisera tout particulièrement les limites de Z quand ω tend vers zéro ou l'infini ;
   - on appellera ω_1 et ω_2, les valeurs finies non nulles de la pulsation pour lesquelles Z est respectivement nulle et infinie. Quel est le comportement électrique simple de AB pour $\omega = \omega_1$ et $\omega = \omega_2$?

   Donnez $Z = f(C_0,\omega,\omega_1,\omega_2)$.
   Réponse :
   Etude de $\underline{Z}$: $Z(\omega) = \frac{|N(\omega)|}{|D(\omega)|}$ est le rapport d'un polynôme du second degré $N(\omega) = 1 - aLC_0\omega^2$ par un polynôme de degré trois $D(\omega) = C_0\omega|1 + a - aLC_0\omega^2|$ en ω.

   - Quand $\omega \to 0$, $N(\omega) \to 1$ et $D(\omega) \to 0$ donc $Z(\omega) \to \infty$. De même, quand $\omega \to \infty$, $N(\omega) \to -aLC_0\omega^2$ et $D(\omega) \to -aLC_0^2\omega^3$ donc $Z(\omega) \to \frac{1}{C_0\omega} \to 0$.
   - La pulsation ω_1 finie pour laquelle $Z \to 0$ vérifie $N(\omega_1) = 0 \Rightarrow \omega_1 = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \frac{1}{\sqrt{aLC_0}}$.
     De même, $\omega_2 \neq 0$ pour laquelle $Z \to \infty$ ($AB \leftrightarrow$ interrupteur ouvert, $I \to 0$, anti résonance) vérifie $D(\omega_2) = 0 \Rightarrow 1 + a - aLC_0\omega_2^2 = 0 \Rightarrow \omega_2 = \sqrt{\frac{a+1}{aLC_0}} = \omega_1\sqrt{a+1} > \omega_1$. Pour $\omega \simeq \omega_1$, AB se comporte comme un interrupteur fermé et quand $\omega \simeq \omega_2$, AB se comporte comme un interrupteur ouvert.
     On peut écrire Z sous la forme
     $$Z = \frac{|\omega^2 - \omega_1^2|}{C_0\omega|\omega^2 - \omega_2^2|}$$

3. Représentez graphiquement Z en fonction de ω.
   Réponse :
   On en déduit le graphe $Z(\omega)$: asymptotes verticales en $\omega \to 0$ et ω_2 et $Z \to 0$ pour $\omega = \omega_1 < \omega_2$ et $\omega \to \infty$.



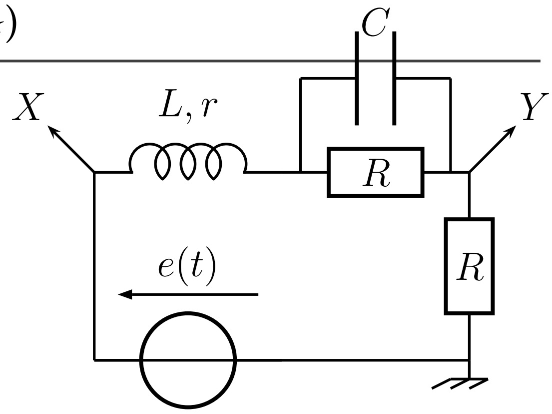
4. Précisez par un graphe à main levée, et sans aucun calcul, comment qualitativement est modifié la courbe $Z = f(\omega)$ si l'on tient compte de la résistance du bobinage d'inductance L.
   Réponse :
   La présence d'une résistance interne au dipôle AB va empêcher Z d'atteindre une valeur nulle ou infinie, cela va donc "lisser" la courbe précédente.

Sujet 5 – corrigé

I Détermination d'une inductance ($\star\star\star$)

On réalise le montage représenté ci-contre, et on constate sur l'oscilloscope que pour une fréquence $f_0 = 180\,\text{Hz}$, les signaux recueillis sur les voies X et Y sont en phase.

Données : $R = 100\,\Omega$ et $C = 10\,\mu\text{F}$.



1. En déduire l'expression puis la valeur de l'inductance L de la bobine.

Réponse :
Sur la voie X, on visualise $e(t)$, et sur la voie Y, on visualise la tension $Ri(t)$. S'il n'y a pas de déphasage entre ces deux voies, c'est que le courant $i(t)$ délivré par le générateur est en phase avec la tension $e(t)$ délivrée par le générateur. Donc l'impédance totale du circuit est un réel (partie imaginaire nulle).

Exprimons l'impédance totale : $\underline{Z} = r + jL\omega + \underline{Z'} + R$ où $\underline{Z'}$ est l'impédance de l'association en parallèle de la résistance R et de la capacité C.

$$\underline{Z'} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = r + R + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{Z} = r + R + \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}\right)$$

On veut $\text{Im}[\underline{Z}] = 0$, soit $\boxed{L = \dfrac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2} = 44\,\text{mH}}$.