Machine synchrone

Exercice 19.1 : Première approche du moteur synchrone

Un aimant cylindrique allongé peut tourner autour de l'axe Δ passant par son centre et perpendiculaire à son moment magnétique $\vec{M}$. Il se trouve dans un champ magnétique, uniforme, à chaque instant, de module B constant, normal à Δ, tournant autour de cet axe à la vitesse angulaire constante ω_0.

1. L'aimant étant immobile, quelle est la valeur moyenne du couple qui s'exerce sur lui ?

2. L'aimant étant maintenant lancé à la vitesse angulaire ω_0, il s'établit un régime permanent où les vecteurs $\vec{M}$ et $\vec{B}$ font entre eux un angle α (positif si $\vec{M}$ est en retard sur $\vec{B}$). Calculer le couple exercé sur l'aimant. Dans quel cas est-il moteur ? Dans le cas du fonctionnement moteur, le régime est stable si une petite augmentation du couple résistant entraîne une augmentation du couple moteur : dans quelles conditions le régime moteur est-il stable ? Calculer les valeurs maximales du couple et de la puissance.

3. Le régime stable étant établi, on introduit une variation temporelle du couple résistant qui se traduit par une augmentation de l'angle α ; on abandonne alors le moteur à lui-même, le couple résistant reprenant sa valeur initiale.
Déterminer la nature du mouvement ultérieur de l'aimant et l'expression de la période des variations de l'angle α que l'on exprimera en fonction de M, du moment d'inertie J de l'aimant et de la valeur initiale α_0 et α.

Analyse du problème

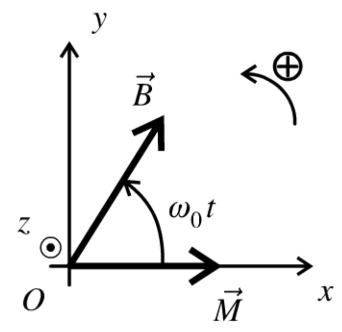
On a un circuit mobile placé dans un champ magnétique dépendant du temps. On a un phénomène d'induction avec apparition d'une forme électromotrice d'induction. Les effets de l'induction s'opposent aux causes qui lui ont donné naissance (loi de Lenz). On utilise la loi de Faraday pour calculer la fem d'induction.

1. L'aimant est immobile. Le moment du couple s'exerçant sur l'aimant est :

$$\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = MB \sin(\omega_0 t)\, \vec{u}_z$$

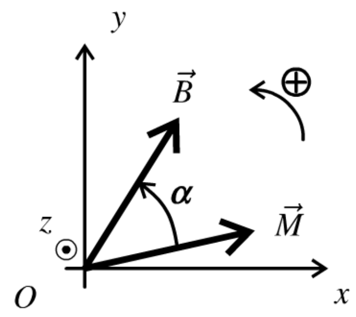
La valeur moyenne du moment du couple est :

$$\left\langle \vec{\Gamma} \right\rangle = \vec{0}$$



La valeur moyenne du couple est nulle au démarrage. Le moteur synchrone ne peut donc pas démarrer tout seul.

2. L'aimant est maintenant lancé à la vitesse angulaire ω_0.



Le moment du couple vaut : $\vec{\Gamma} = \vec{M} \wedge \vec{B} = MB \sin\alpha \vec{u}_z$.
La projection du moment sur l'axe Oz est :

$$\Gamma_z = MB \sin\alpha$$

Le couple est moteur si $\Gamma > 0$, c'est-à-dire si :

$$0 < \alpha < \pi$$

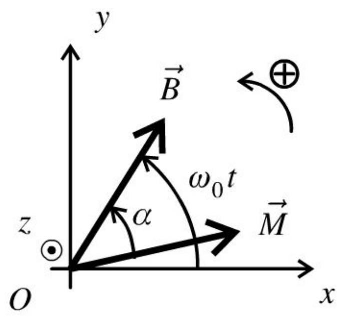
Si le couple résistant augmente, l'aimant est freiné, donc α augmente.
Quel est l'effet d'une variation de α sur le couple ?

- Si $\cos\alpha > 0$, c'est-à-dire $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}\Gamma_z > 0$. On a une augmentation du couple moteur ce qui a pour effet de diminuer l'angle α. L'équilibre est stable.
- Si $\cos\alpha < 0$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\mathrm{d}\Gamma_z < 0$. On a une diminution du couple moteur ce qui a tendance à augmenter encore plus l'angle α. L'équilibre est instable.

La valeur maximale du couple $\Gamma_z = MB \sin\alpha$ est obtenue pour $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$. On a $\Gamma_{z\,\max} = MB$. La puissance maximale du couple est :

$$P_{\max} = \Gamma_{z\,\max}\omega_0 = MB\omega_0$$

3.



Avant la perturbation : l'angle α vaut α_0. Le couple résistant vaut Γ_r, le couple moteur vaut Γ_0. En régime permanent, on a :

$$\Gamma_0 + \Gamma_r = 0$$

On applique une perturbation : Le couple résistant prend sa valeur initiale Γ_r. On cherche l'équation différentielle donnant l'angle α. Comme l'équilibre est stable, il est astucieux de chercher l'écart par rapport à la position d'équilibre α_0. On pose :

$$\alpha = \alpha_0 + \mathrm{d}\alpha = \alpha_0 (1 + \varepsilon)$$

Remarque : $\mathrm{d}\alpha$ est la variation de l'angle α. À quelle variation du couple $\mathrm{d}\Gamma$ correspond $\mathrm{d}\alpha$? Pour trouver la relation entre $\mathrm{d}\Gamma$ et $\mathrm{d}\alpha$, il est plus simple de trouver la relation entre Γ et α et de calculer la différentielle.

Comme $\Gamma = MB \sin\alpha$, la différentielle s'écrit :

$$\mathrm{d}\Gamma = MB \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

Le nouveau couple moteur vaut :

$$\Gamma' = \Gamma_0 + \mathrm{d}\Gamma = \Gamma_0 + MB \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

Il reste à écrire le théorème du moment cinétique pour le moteur :

L'angle $\left(Ox, \vec{M}\right) = \omega_0 t - \alpha$.

$$J\frac{\mathrm{d}^2 (\omega_0 t - \alpha)}{\mathrm{d}t^2} = -J\frac{\mathrm{d}^2\alpha}{\mathrm{d}t^2} = -J\alpha_0\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} = \Gamma_r + \Gamma'$$
$$= \Gamma_r + \Gamma_0 + MB \cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha$$

On a vu que $\Gamma_r + \Gamma_0 = 0$.
On fait un développement limité au premier ordre : $\cos\alpha \, \mathrm{d}\alpha = \cos\alpha_0 \, \mathrm{d}\alpha$ car les autres termes sont d'ordre supérieur à 1. On a donc :

$$-J\alpha_0\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} = MB\,(\cos\alpha_0)\;\alpha_0\varepsilon$$

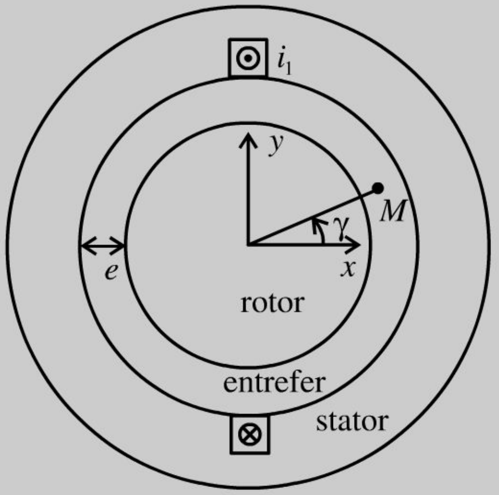
On en déduit l'équation différentielle :

$$\frac{\mathrm{d}^2\varepsilon}{\mathrm{d}t^2} + \frac{MB\cos\alpha_0}{J}\varepsilon = 0$$

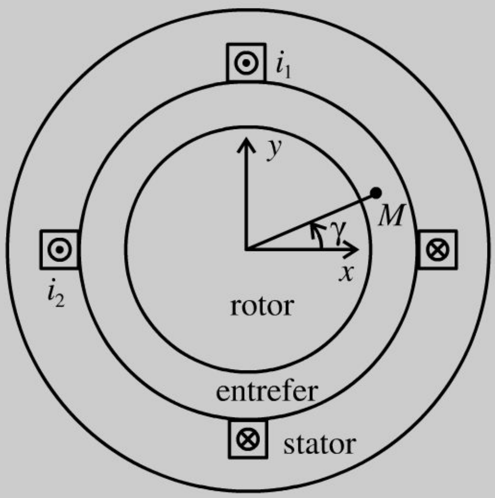
On pose $\omega_{\text{oscillations}} = \sqrt{\dfrac{MB\cos\alpha_0}{J}}$ et $T = \dfrac{2\pi}{\omega_{\text{oscillations}}}$.
On retrouve bien le résultat établi dans la question 2. : l'équilibre est stable si $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 19.2 : Moteur synchrone et couple électromagnétique

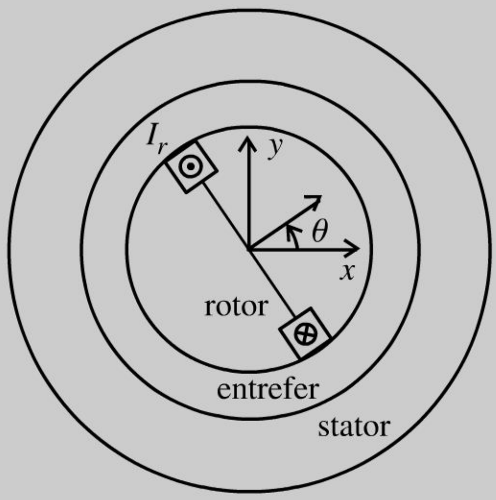
Un moteur synchrone est constitué d'un rotor cylindrique en fer doux, d'un entrefer e constant (de volume V, de rayon a) et d'un stator cylindrique en fer doux. On place dans deux encoches opposées sur le stator, une spire parcourue par un courant $i(t)$. On suppose que la perméabilité relative μ_r est infinie dans le rotor et le stator et que le vecteur excitation se met dans l'entrefer sous la forme : $\vec{H} = H(\gamma)\,\vec{u}_r$. On note ℓ la longueur des cylindres.



1. Déterminer le champ magnétique créé par une spire, en un point M (repéré par l'angle γ) en fonction de μ_0, i_1 et e.
2. Expliquer qualitativement comment obtenir un champ magnétique dont la dépendance angulaire est sinusoïdale dans l'entrefer en associant plusieurs spires décalées. Pour simplifier les schémas par la suite, on ne représentera pas l'ensemble des spires nécessaires pour créer un tel champ magnétique mais uniquement une spire. On le met sous la forme $B = K_s i_1 \cos\gamma$.
3. Sur le stator, on rajoute une deuxième spire. On pose : $i_1(t) = I_{sm}\cos(\omega t)$, $i_2(t) = I_{sm}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$ et $B_{sm} = K_s I_{sm}$. Justifier l'existence d'un champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature.



4. Sur le rotor, on rajoute de la même façon des spires parcourues par un courant constant I_r. Montrer que le champ magnétique créé par le rotor dans l'entrefer peut se mettre sous la forme : $B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \theta)$. On appelle $\Omega = \dot{\theta}$ la vitesse angulaire du rotor. On pose $B_{rm} = K_r I_r$. Justifier l'existence d'un champ glissant rotorique associé à la rotation du rotor.



5. Montrer que l'énergie magnétique totale s'écrit : $U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3}$ avec $U_{m1} = \dfrac{V}{4\mu_0} B_{sm}^2$; $U_{m2} = \dfrac{V}{4\mu_0} B_{rm}^2$ et $U_{m3} = \dfrac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)$.

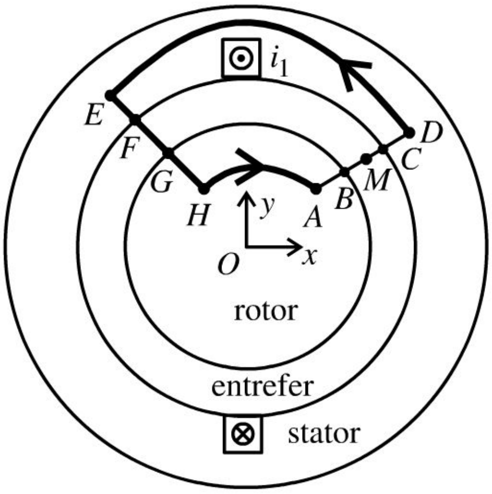
6. On admet que le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor est $\Gamma = \left(\dfrac{\partial U_m}{\partial \theta}\right)_i$. Quelle est la condition de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique afin d'obtenir un couple moyen non nul ? On suppose cette condition vérifiée dans toute la suite de l'exercice. On pose alors $\alpha = \omega t - \theta$ le déphasage entre les deux champs glissants. À quelle condition sur α a-t-on un couple moteur ? Discuter qualitativement la stabilité du système en fonction de α.

7. Quelle difficulté a-t-on au démarrage d'un moteur synchrone ? Décrire qualitativement le principe de l'autopilotage.

Analyse du problème

Le théorème d'Ampère permet de calculer le vecteur excitation magnétique et d'en déduire le champ magnétique. On calcule le moment électromagnétique à partir de l'énergie magnétique du système.

1. On considère le contour d'Ampère $ABCDEFGH$ (F symétrique de C par rapport au plan (Oyz) et G symétrique de B par rapport au plan (Oyz).



- Dans le rotor et le stator, la perméabilité relative est infinie. L'excitation magnétique vaut :

$$H = \frac{B}{\mu_0 \mu_r} = 0$$

- Soit un point M défini par $\gamma \in \left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$. Le vecteur excitation est de la forme $\vec{H} = H(\gamma)\,\vec{u}_r$.
- Le plan (Oyz) est un plan de symétrie. Le vecteur excitation au point M' symétrique de M par rapport au plan (Oyz) est :

$$\vec{H}\left(M'\right) = -sym\left(\vec{H}\left(M\right)\right).$$

- Le théorème d'Ampère avec l'excitation magnétique s'écrit :

$\oint \vec{H} \cdot \overrightarrow{\mathrm{d}l} = I_{\text{enlacé}} = i_1.$

La circulation de $\vec{H}$ est nulle dans le rotor et le stator.

Il reste :
$\int_{r=r_B}^{r=r_C} H(\gamma)\,\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}r\vec{u}_r + \int_{r=r_F}^{r=r_G} -H(\gamma)\,\vec{u}_r \cdot \mathrm{d}r\vec{u}_r = 2eH(\gamma) = i_1$,
d'où $H(\gamma) = \dfrac{i_1}{2e}$ pour $\gamma \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$.

On en déduit le champ magnétique : Si $\gamma \in \left]-\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{\pi}{2}\right[$:

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 i_1}{2e}\vec{u}_r$$

Si $\gamma \in \left]\dfrac{\pi}{2}, \dfrac{3\pi}{2}\right[$:

$$\vec{B} = -\frac{\mu_0 i_1}{2e}\vec{u}_r$$

2. On place plusieurs spires parcourues par un courant $i_1(t)$ dans des encoches opposées et décalées.

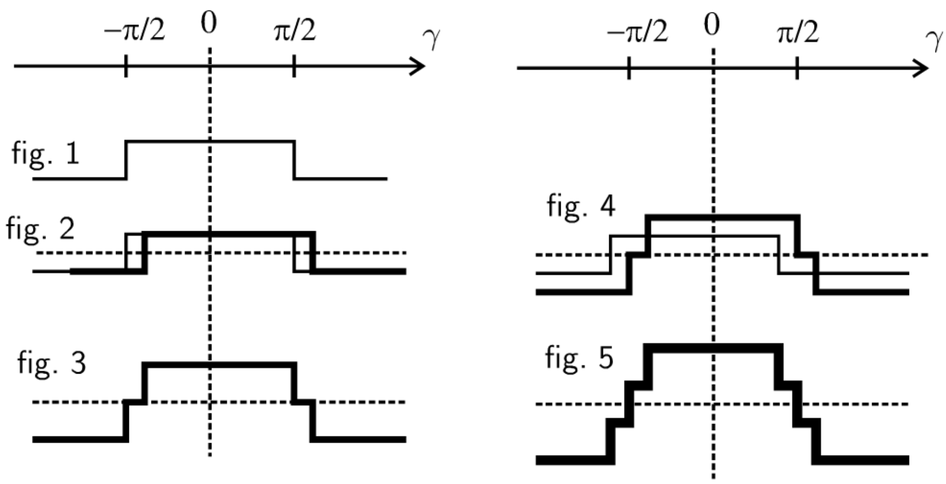


Figure 1 : champ magnétique créé par une spire en fonction de γ.
Figure 2 : champ magnétique créé par la spire étudiée précédemment et champ magnétique créé par une spire décalée.
Figure 3 : champ magnétique résultant.
Figure 4 : champ magnétique créé par une autre spire décalée.
Figure 5 : champ magnétique résultant.

Au fur et à mesure que l'on rajoute des spires disposées dans des encoches opposées et décalées, le champ résultant se rapproche de la forme $B = K_s i_1 \cos\gamma$.

3. Le champ créé par la bobine 1 génère un champ magnétique :

$$B_1 = K_s i_1 \cos(\gamma) = K_s I_{sm} \cos(\omega t)\cos(\gamma)$$

Il suffit de remplacer γ par $\gamma - \dfrac{\pi}{2}$ pour en déduire le champ créé par la bobine 2 :

$$B_2 = K_s i_2 \cos\left(\gamma - \frac{\pi}{2}\right) = K_s I_{sm} \sin(\omega t)\sin\gamma$$

Le champ magnétique résultant créé par le stator est :

$$B_s = B_1 + B_2 = K_s I_{sm} \left(\cos(\omega t)\cos(\gamma) + \sin(\omega t)\sin(\gamma)\right)$$

On en déduit que :

$$B_s = K_s I_{sm} \cos(\gamma - \omega t) = B_{sm} \cos(\gamma - \omega t)$$

Le champ magnétique est maximal lorsque $\gamma = \omega t$. Le maximum du champ magnétique est dans une direction $\vec{n}_s$ tournant à la vitesse angulaire ω. On retrouve une expression similaire lors de la propagation d'une onde progressive de la forme $f(x - ct)$. Par analogie, on a une onde sinusoïdale se propageant dans l'entrefer de la forme $f(\gamma - \omega t)$.
On a donc un **champ glissant statorique lorsque les deux phases sont alimentées en quadrature** (déphasage de $\frac{\pi}{2}$ entre les intensités i_1 et i_2).

4. Comme pour le stator, on dispose sur le rotor un ensemble de conducteurs disposés dans des encoches opposées décalées. On a vu dans la question 2 que le champ magnétique créé par la spire 1 dans l'entrefer est :

$$B = K_s i_1 \cos\gamma.$$

En un point M repéré par l'angle γ, le champ créé par le rotor dans l'entrefer est donc de la forme : $B_r = K_r I_r \cos(\gamma - \theta)$. Il suffit de remplacer γ par $\gamma - \theta$ puisque la spire I_r est décalée d'un angle θ par rapport à la spire 1 sur les schémas. Le champ magnétique créé par le rotor peut se mettre sous la forme :

$$B_r = B_{rm} \cos(\gamma - \theta)$$

Le rotor tourne d'un angle θ autour de l'axe Oz. Le champ magnétique créé par le rotor est maximal lorsque l'angle $\gamma = \theta$. Le maximum du champ magnétique est dans une direction $\vec{n}_r$ tournant à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \Omega$. On a donc comme dans la question précédente une onde sinusoïdale se propageant dans l'entrefer de la forme $f(\gamma - \Omega t)$ si on suppose $\Omega = cte$.
On a donc un **champ glissant rotorique associé à la rotation du rotor**.

5. L'énergie magnétique se calcule à partir de la relation :

$$U_m = \iiint \frac{B^2}{2\mu_0\mu_r}\,\mathrm{d}\tau$$

Dans le rotor et le stator, la perméabilité relative est infinie. Il suffit de calculer l'intégrale dans le volume de l'entrefer. Le champ dans l'entrefer est créé par le rotor et le stator. On a donc :

$$U_m = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{(B_s + B_r)^2}{2\mu_0}\,(l)\,(a\mathrm{d}\gamma)\,e$$

En développant le carré, on fait apparaître trois termes : $U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3}$. Le volume de l'entrefer est $V = 2\pi ael$. On a alors :

- $U_{m1} = \displaystyle\int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_s^2}{2\mu_0}(l)(a\mathrm{d}\gamma)\, e = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_{sm}^2}{2\mu_0}(l)\cos^2(\gamma - \omega t)(a\mathrm{d}\gamma)\, e$.

  Comme $\displaystyle\int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos^2(\gamma - \omega t)\,\mathrm{d}\gamma = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{1 + \cos(2(\gamma - \omega t))}{2}\mathrm{d}\gamma = \pi$,

  alors :

$$U_{m1} = \frac{\pi ael}{2\mu_0} B_{sm}^2 = \frac{V}{4\mu_0} B_{sm}^2$$

- $U_{m2} = \displaystyle\int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{B_r^2}{2\mu_0}(l)(a\mathrm{d}\gamma)\, e = \frac{\pi ael}{2\mu_0} B_{rm}^2 = \frac{V}{4\mu_0} B_{rm}^2$

  car $\displaystyle\int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos^2(\gamma - \omega t)\,\mathrm{d}\gamma = \int_{\gamma=0}^{2\pi} \frac{1 + \cos(2(\gamma - \omega t))}{2}\mathrm{d}\gamma = \pi$.

- $$U_{m3} = \int_{\gamma=0}^{2\pi p} \frac{2B_s B_r}{2\mu_0}(l)(a\mathrm{d}\gamma)\, e = \frac{ael}{\mu_0} B_{sm} B_{rm} \int_{\gamma=0}^{2\pi} \cos(\gamma - \omega t)\cos(\gamma - \theta)\,\mathrm{d}\gamma$$

Comme $\cos(a)\cos(b) = \dfrac{1}{2}[\cos(a+b) + \cos(a-b)]$, on a :

$$\cos(\gamma - \omega t)\cos(\gamma - \theta) = \frac{1}{2}(\cos(2\gamma - \omega t - \theta) + \cos(\theta - \omega t))$$

La première intégrale donne 0. Il reste finalement :

$U_{m3} = \dfrac{ael}{\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)\dfrac{1}{2}2\pi$, soit :

$$U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)$$

6. U_{m1} et U_{m2} ne dépendent pas de θ. Le moment électromagnétique s'exerçant sur le rotor est :

$$\Gamma = \left(\frac{\partial U_{em}}{\partial \theta}\right)_i = -\frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin(\theta - \omega t)$$

S'il n'y pas de synchronisme entre le champ statorique et le champ rotorique, alors $\theta - \omega t \neq cte$ et le moment moyen est nul. Il faut donc avoir un synchronisme entre les deux champs glissants pour avoir un couple moyen non nul.

D'après l'énoncé, on pose $\alpha = \omega t - \theta$, on a alors :

$$\langle \Gamma \rangle = \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin(\alpha)$$

Dans l'exercice précédent (première approche du moteur synchrone), on a vu que $\Gamma_z = MB \sin\alpha$. $\vec{M}$ et $\vec{B}$ sont représentés sur la figure 6.
Sur la figure 7, on représente $\vec{n}_r$ et $\vec{n}_s$ les directions où les champs glissants rotorique et statorique passent par un maximum.
Les deux approches donnent le même résultat.

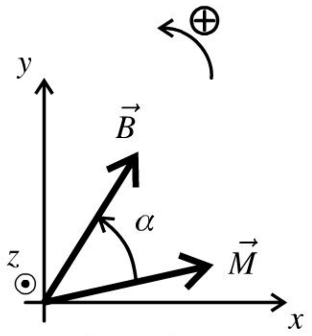


Figure 6

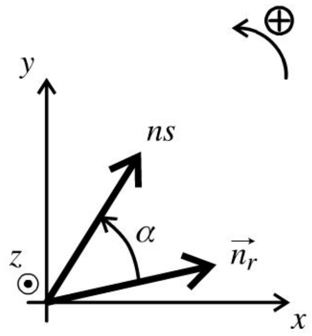


Figure 7

Si le couple résistant augmente, l'aimant est freiné, donc α augmente. Quel est l'effet d'une augmentation de α sur le couple ?

- Si $\cos\alpha > 0$, c'est-à-dire $0 < \alpha < \dfrac{\pi}{2}$, $\mathrm{d}\Gamma_z > 0$. On a une augmentation du couple moteur ce qui a pour effet de diminuer l'angle α. L'équilibre est stable.
- Si $\cos\alpha < 0$, c'est-à-dire $\dfrac{\pi}{2} < \alpha < \pi$, $\mathrm{d}\Gamma_z < 0$. On a une diminution du couple moteur ce qui a tendance à augmenter encore plus l'angle α. L'équilibre est instable.

7. La machine ne peut pas se lancer au démarrage puisque $\theta = cte$, $\theta - \omega t \neq cte$ et $\langle\Gamma\rangle = 0$. Le moteur synchrone ne peut pas démarrer sans dispositif extérieur permettant de lancer le rotor à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$. Le principe du moteur synchrone autopiloté consiste à augmenter progressivement la pulsation de synchronisme ω pour toujours avoir $\dot{\theta} \approx \omega$. On cherche à se rapprocher de la condition $\alpha = \dfrac{\pi}{2}$.

Exercice 19.3 : Moteur synchrone et bilan de puissance

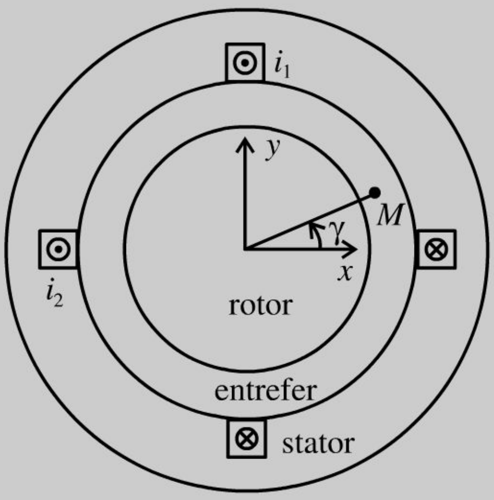
Un moteur synchrone est constitué d'un rotor cylindrique en fer doux, d'un entrefer e constant (de volume V, de rayon a) et d'un stator cylindrique en fer doux. On dispose sur le stator des spires parcourues par un courant $i_1(t) = I_{sm}\cos(\omega t)$ et $i_2(t) = I_{sm}\cos\left(\omega t - \dfrac{\pi}{2}\right)$. Le champ magnétique créé par le stator au point M repéré par l'angle γ est :

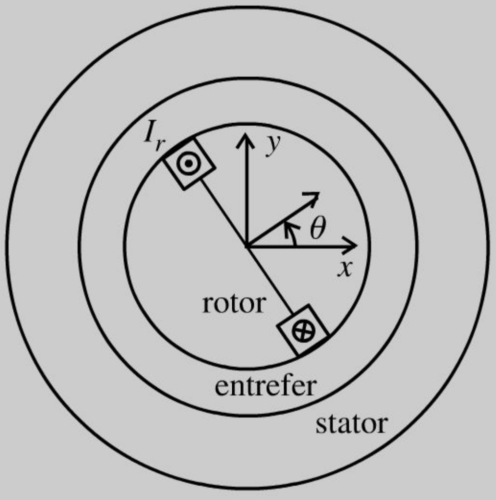
$$B_s = K_s I_{sm}\cos(\gamma - \omega t) = B_{sm}\cos(\gamma - \omega t).$$

On dispose sur le rotor des spires parcourues par un courant constant I_r. Le champ magnétique créé par le rotor au point M est :

$$B_r = K_r I_r \cos(\gamma - \theta) = B_{rm} \cos(\gamma - \theta).$$

On appelle $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire du rotor.





La condition de synchronisme est vérifiée. On pose $\alpha = \omega t - \theta$.
L'énergie magnétique se met sous la forme : $U_m = U_{m1} + U_{m2} + U_{m3}$
avec $U_{m1} = \dfrac{V}{4\mu_0} B_{sm}^2$; $U_{m2} = \dfrac{V}{4\mu_0} B_{rm}^2$ et $U_{m3} = \dfrac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)$.

1. Écrire l'énergie magnétique totale sous la forme :

$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} L_r I_r^2 + M_1 I_r i_1 + M_2 I_r i_2 + M' i_1 i_2$$

On pose $M_0 = \dfrac{V}{2\mu_0} K_s K_r$. En déduire les inductances propres et les inductances mutuelles en fonction de V, μ_0, K_r, K_s, M_0 et θ.

2. On appelle u_1, u_2 et u_r les tensions extérieures appliquées aux phases du stator et du rotor. Les résistances des enroulements du stator et du rotor sont notées R_s et R_r. On pose $\Phi_1 = L_1 i_1 + M' i_2 + M_1 I_r$ et $\Phi_2 = L_2 i_2 + M' i_1 + M_2 I_r$. Définir les forces électromotrices et contre électromotrices des phases du stator et du rotor. Écrire les équations électriques vérifiées par les phases du stator et par le rotor en faisant intervenir les fcem, les résistances des enroulements et les inductances propres. Pourquoi appelle-t-on le rotor l'inducteur et les phases du stator l'induit ?

3. Montrer que la puissance électrique absorbée par la fcem est égale à la puissance mécanique fournie. Comment s'écrit le bilan de puissance ?

Analyse du problème

On a calculé l'énergie magnétique dans l'exercice précédent. Les inductances propres et mutuelles sont déterminées par identification à partir de l'énergie magnétique. On effectue un bilan de puissance en multipliant par l'intensité chaque loi des mailles.

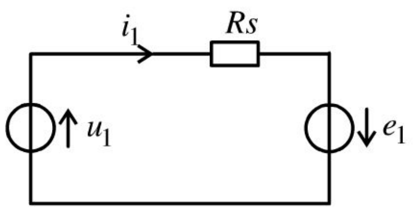
1. On exprime l'énergie magnétique en fonction des intensités :

- D'après la définition de i_1 et i_2, on a $i_1^2 + i_2^2 = I_{sm}^2$.
  Comme $B_{sm} = K_s I_{sm}$, alors :
$$U_{m1} = \frac{V}{4\mu_0} K_s^2 \left(i_1^2 + i_2^2\right) = \frac{V}{4\mu_0} K_s^2 I_{sm}^2$$
- Comme $B_{rm} = K_r I_r$ et $I_r = cte$, alors :
$$U_{m2} = \frac{V}{4\mu_0} K_r^2 I_r^2$$
- En développant U_{m3}, on a :
  $U_{m3} = \dfrac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_{sm} I_r \left(\cos\theta \cos\omega t + \sin\theta \sin\omega t\right)$, soit :
$$U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_r \left(I_{sm} \cos\theta \cos\omega t + I_{sm} \sin\theta \sin\omega t\right)$$
  Finalement, on obtient :
$$U_{m3} = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_r \left(i_1 \cos\theta + i_2 \sin\theta\right)$$

On peut exprimer l'énergie magnétique en fonction des inductances propres et des inductances mutuelles :
$$U_m = \frac{1}{2} L_1 i_1^2 + \frac{1}{2} L_2 i_2^2 + \frac{1}{2} L_r I_r^2 + M_1 I_r i_1 + M_2 I_r i_2$$

En identifiant, on a : $L_1 = L_2 = \dfrac{V}{2\mu_0}K_s^2$; $L_r = \dfrac{V}{2\mu_0}K_r^2$; $M_1 = M_0 \cos\theta$; $M_2 = M_0 \sin\theta$ et $M' = 0$.
C'est normal d'avoir $M' = 0$ puisque les enroulements (1) et (2) sont orthogonaux.

2. Phase 1 du stator : On a le schéma électrique équivalent.



La force électromotrice e_1 se représente en convention générateur sur le schéma. Elle est définie par : $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}$.
Le flux Φ_1 à travers la bobine (1) est :

$$\Phi_1 = L_1 i_1 + M_0 I_r \cos\theta = L_1 i_1 + M_0 I_r \cos(\omega t - \alpha)$$

L'équation électrique pour l'enroulement (1) est : $u_1 + e_1 = R_s i_1$. Soit :

$$u_1 = R_s i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} - M_0 \omega I_r \sin(\omega t - \alpha)$$

On obtient finalement :

$$u_1 = R_s i_1 + L_1 \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + e'_1$$

$e'_1 = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{1,ext}}{\mathrm{d}t} = -M_0 \omega I_r \sin(\omega t - \alpha) =$ fcem (force contre électromotrice) (eq.1)

Il ne faut pas confondre la force électromotrice $e_1 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_1}{\mathrm{d}t}$ orientée en convention générateur et la force contre électromotrice $e'_1 = \dfrac{\mathrm{d}\Phi_{1,ext}}{\mathrm{d}t}$ qui ne tient compte que du flux extérieur et qui est orientée en convention récepteur.

Phase 2 du stator : On a de même : $u_2 + e_2 = R_s i_2$ avec $e_2 = -\dfrac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}$ et $\Phi_2 = L_2 i_2 + M_0 I_r \sin\theta = L_2 i_2 + M_0 I_r \sin(\omega t - \alpha)$.
On a alors :

$$u_2 = R_s i_2 + L_2 \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} + e'_2$$

avec $e'_2 = \frac{\mathrm{d}\Phi_{2,ext}}{\mathrm{d}t} = M_0 \omega I_r \cos(\omega t - \alpha) =$ fcem (force contre électromotrice) (eq.2)

Il ne faut pas confondre la force électromotrice $e_2 = -\frac{\mathrm{d}\Phi_2}{\mathrm{d}t}$ orientée en convention générateur et la force contre électromotrice $e'_2 = \frac{\mathrm{d}\Phi_{2,ext}}{\mathrm{d}t}$ qui ne tient compte que du flux extérieur et qui est orientée en convention récepteur.

Rotor : $u_r + e_r = R_r I_r$. La force électromotrice est $e_r = -\frac{\mathrm{d}\Phi_r}{\mathrm{d}t}$. Le flux à travers le rotor est la somme du flux propre $L_r I_r$ et du flux extérieur $\Phi_{r,ext}$ (flux du champ créé par le stator à travers le rotor) :

$$\Phi_r = L_r I_r + \Phi_{r,ext}$$

– Comme I_r est constant, le flux propre est constant.
– Comme le rotor tourne à la même vitesse que le champ créé par le stator, $\Phi_{r,ext}$ est donc constant.
Le flux Φ_r est donc constant. L'équation électrique s'écrit :

$$u_r = R_r I_r \quad \text{(eq.3)}$$

Il n'y a pas de phénomène d'induction dans le rotor. Le **rotor est appelé inducteur**.
Par contre, il y a un phénomène d'induction dans le **stator appelé induit**.

3.

- Bilan énergétique pour l'enroulement (1). On multiplie par i_1 l'équation (1) :

$$u_1 i_1 = R_s i_1^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) + e'_1 i_1$$

- Bilan énergétique pour l'enroulement (2). On multiplie par i_2 l'équation (2) :

$$u_2 i_2 = R_s i_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right) + e'_2 i_2$$

- Bilan énergétique pour le rotor. On multiplie par I_r l'équation (3) :

$$u_r I_r = R_r I_r^2$$

Si on somme les trois relations, on obtient la puissance électrique totale absorbée par la machine :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_r I_r = R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} L_1 i_1^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2} L_2 i_2^2\right) + e'_1 i_1 + e'_2 i_2 + R_r I_r^2$$

On a vu que $L_1 = L_2 = L_s$ et $i_1^2 + i_2^2 = I_{sm}^2$, donc :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,L_1 i_1^2\right) + \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,L_2 i_2^2\right) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\,L_s I_{sm}^2\right) = 0$$

On obtient :

$$u_1 i_1 + u_2 i_2 + u_r I_r = R_s i_1^2 + R_s i_2^2 + R_r I_r^2 + e_1' i_1 + e_2' i_2 \quad \text{(eq.4)}$$

On développe le terme $e_1' i_1 + e_2' i_2$:

$$e_1' i_1 + e_2' i_2 = -M_0 I_r I_{sm}\omega \sin\,(\omega t - \alpha)\cos(\omega t) \\ + M_0 I_r I_{sm}\,\omega\cos(\omega t - \alpha)\sin\,(\omega t)$$

Soit :

$$e_1' i_1 + e_2' i_2 = M_0 I_r I_{sm}\omega\,(-\sin\,(\omega t - \alpha)\cos(\omega t) + \cos(\omega t - \alpha)\sin\,(\omega t))$$

Comme $\sin\,(a - b) = \sin a \times \cos b - \sin b \times \cos a$, on en déduit que :

$$e_1' i_1 + e_2' i_2 = M_0 I_r I_{sm}\omega \sin\,(\alpha)$$

On a posé : $M_0 = \dfrac{V}{2\mu_0} K_s K_r$, d'où :

$$e_1' i_1 + e_2' i_2 = \frac{V}{2\mu_0} K_s K_r I_r I_{sm}\omega \sin\,(\alpha) = \left(\frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin\,(\alpha)\right)\omega$$

On a vu dans l'exercice précédent que $\langle\Gamma\rangle = \dfrac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \sin\,(\alpha)$. On a donc :

$$e_1' i_1 + e_2' i_2 = \langle\Gamma\rangle\,\omega \quad \text{(eq.5)}$$

L'énergie magnétique est :

$$U_m = \frac{V}{2\mu_0} K_s^2 I_{sm}^2 + \frac{V}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 + \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\theta - \omega t)\,.$$

On peut la mettre sous la forme :

$$U_m = \frac{V}{2\mu_0} K_s^2 I_{sm}^2 + \frac{V}{2\mu_0} K_r^2 I_r^2 + \frac{V}{2\mu_0} B_{sm} B_{rm} \cos(\alpha)$$

Lorsque $\dot{\theta} = \omega$, l'énergie mécanique et l'énergie magnétique du moteur synchrone sont constantes.
On en déduit le bilan de puissance en interprétant l'équation (4) : La puissance électrique absorbée par la machine est la somme de la puissance dissipée par effet Joule dans les résistances des enroulements (pertes cuivre) et de la puissance mécanique fournie $\langle\Gamma\rangle\,\omega$.
L'équation (5) montre que l'on a un couplage électromécanique parfait.