SUP MPSI3 27 janvier 2023

DEVOIR SURVEILLÉ DE SCIENCES PHYSIQUES N°5 (3H00)

Tout moyen de communication est interdit
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les calculatrices sont autorisées.

Le devoir est composé de cinq exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1 : Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre.

EXERCICE 2 : Jeux sur une piste.

EXERCICE 3 : Expériences en laboratoire.

EXERCICE 4 : Etude de la chute de la grêle.

EXERCICE 5 : Mouvement pendulaire d'un sac de sable.

PROBLEME : Etude du mouvement d'une bille dans un tube horizontal en rotation uniforme.

A l'intérieur des problèmes, certaines questions sont indépendantes.
L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.

L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.

*Une attention particulière sera portée à la **qualité de la rédaction** (vocabulaire, orthographe…) et **à la présentation de la copie** (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques…).*
*Et il est indispensable de **numéroter vos copies**.*

Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.
Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.

Programme de révision de ce devoir :

La partie propagation des ondes et interférences, la cinématique et la dynamique du point en référentiels galiléens.

EXERCICE 1 : Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre : *(≈ 22 pts)*

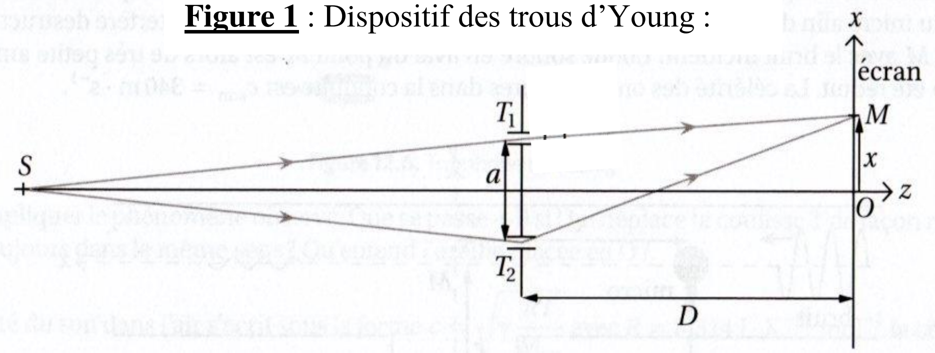
On considère un dispositif de trous de Young (schématisé figure 1 ci-dessous) composé de deux trous T_1 et T_2 séparés d'une distance $\alpha = 100\ \mu m$. Ce dispositif est éclairé par une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 532\ nm$ située sur l'axe optique.

La figure d'interférence est observée sur un écran situé à une distance $D = 1{,}00$ m du plan des trous.

L'indice optique de l'air est supposé égal à 1.

On se place dans l'approximation paraxiale $x, a \ll D$.

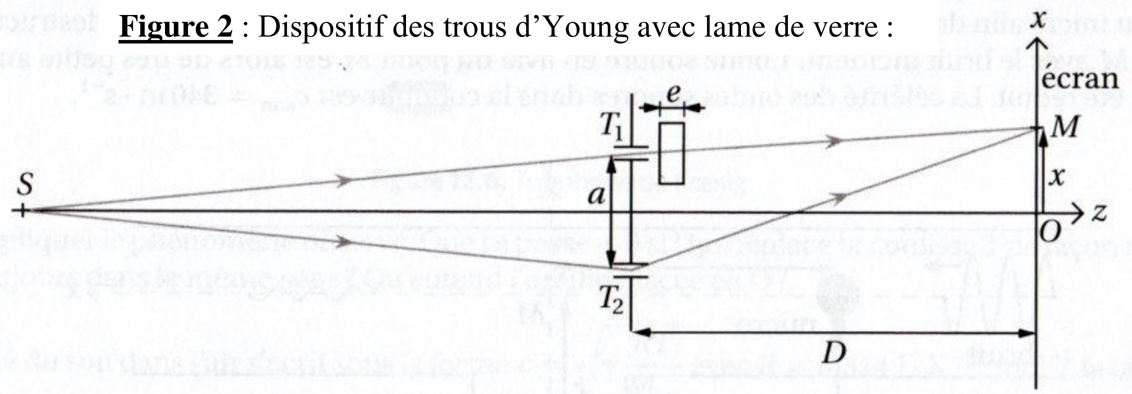
Figure 1 : Dispositif des trous d'Young :



Q1. Montrer que la différence de marche des deux rayons lumineux s'écrit $\delta \approx \frac{xa}{D}$.

Q2. On interpose une lame de verre à faces parallèles d'épaisseur e inconnue et d'indice $n_v = 1{,}57$, positionnée en sortie du trou T_1 comme sur la figure 2 ci-dessous. On suppose que $e \ll D$ si bien qu'en première approximation, on considère que **le rayon lumineux traverse la lame perpendiculairement à ses faces.**

Figure 2 : Dispositif des trous d'Young avec lame de verre :



En utilisant le résultat de la question Q1, montrer que la différence de marche δ' en un point M de l'écran s'écrit alors : $\delta' = \frac{ax}{D} - (n_v - 1)e$.

Q3. Déterminer la position x_c sur l'écran de la frange centrale correspond à $\delta' = 0$. De quelle distance s'est déplacée cette frange par rapport au cas où la lame est absente ?

Q4. En déduire l'expression de l'épaisseur e de la lame en fonction de $x_{c,} a, n_v$ et D.
Calculer e pour $x_c = 28{,}5$ cm.

Q5. Expliquer pourquoi en réalité la position de la frange centrale ne peut être connue que modulo l'interfrange i.

<u>Donnée</u> : si $\varepsilon \ll 1$ alors $\sqrt{1+\varepsilon} \approx 1 + \frac{\varepsilon}{2}$;

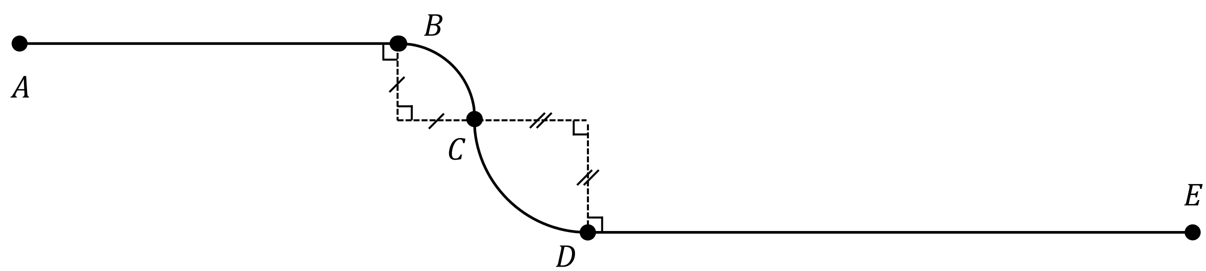
EXERCICE 2 : Jeux sur une piste : (≈ 28 *pts)*

Indiquer la ou les bonnes réponses, en justifiant tout votre raisonnement. Une réponse juste sans justification (ou avec une justification fausse) ne rapportera aucun point.

On étudie un mobile M_a, assimilé à un point matériel (ou corpuscule), **en mouvement uniforme** dans le référentiel du laboratoire à la vitesse de $v = 25\ \mathrm{cm.s^{-1}}$, sur toute la piste qui comporte quatre portions :

- Un segment rectiligne AB de longueur 1 m ;
- Un quart de cercle BC de longueur d'arc 50 cm ;
- Un quart de cercle CD de longueur d'arc 75 cm ;
- Un segment rectiligne DE de longueur 2 m.

La piste est parcourue par M_a de A vers E (Fig. ci-après).



Q1. Quelle durée τ met M_a pour parcourir la totalité de la piste (de A à E) ? Justifier.

A) $\tau = 0{,}17\ \mathrm{s}$ B) $\tau = 1{,}6\ \mathrm{s}$ C) $\tau = 17\ \mathrm{s}$ D) $\tau = 160\ \mathrm{s}$

Q2. On note a_1 la norme de l'accélération de M_a sur la portion BC.
En utilisant la base de Frenet, exprimer a_1 en fonction de v et de la longueur de l'arc BC, puis calculer a_1.

A) $a_1 = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$ B) $a_1 = 0{,}2\ \mathrm{m.s^{-2}}$ C) $a_1 = 1{,}3\ \mathrm{m.s^{-2}}$ D) $a_1 = 13\ \mathrm{m.s^{-2}}$

Q3. On note a_2 la norme de l'accélération de M_a sur la portion CD. Quelle relation existe-t-il entre a_1 et a_2 ? Expliquer votre raisonnement.

A) $a_2 = 0\ \mathrm{m.s^{-2}}$ B) $a_2 = a_1$ C) $a_2 = \frac{2}{3}a_1$ D) $a_2 = \frac{3}{2}a_1$

Q4. Lorsque M_a atteint le point D à la vitesse $v = v_a = 25\ \mathrm{cm.s^{-1}}$, à un instant pris comme origine temporelle, un second mobile M_b (également assimilé à un point matériel) quitte E en direction de D. Son mouvement est uniforme dans le référentiel du laboratoire à la vitesse de $v_b = 50\ \mathrm{cm.s^{-1}}$.
À quelle date t_r les deux mobiles se rencontrent-ils ? On exprimera t_r en fonction de la distance DE, de la vitesse v_a de M_a et de la vitesse v_b de M_b. Puis on fera l'application numérique.

A) $t_r \approx 0{,}4\ \mathrm{s}$ B) $t_r \approx 2{,}7\ \mathrm{s}$ C) $t_r \approx 4\ \mathrm{s}$ D) $t_r \approx 8\ \mathrm{s}$

Q5. Quelle est alors la distance d_a parcourue par M_a sur la piste DE, avant que les points ne se rencontrent ?

A) $d_a \approx 40\ \mathrm{cm}$ B) $d_a \approx 67\ \mathrm{cm}$ C) $d_a \approx 1\ \mathrm{m}$ D) $d_a \approx 1{,}5\ \mathrm{m}$

Q6. Quelle était, $1/5$ s avant la rencontre, la distance d séparant M_a et M_b ?

A) $d \approx 5\ \mathrm{cm}$ B) $d \approx 10\ \mathrm{cm}$ C) $d \approx 15\ \mathrm{cm}$ D) $d \approx 50\ \mathrm{cm.}$

EXERCICE 3 : Expériences en laboratoire : *(≈ 43 pts)*

Les deux parties sont totalement indépendantes.

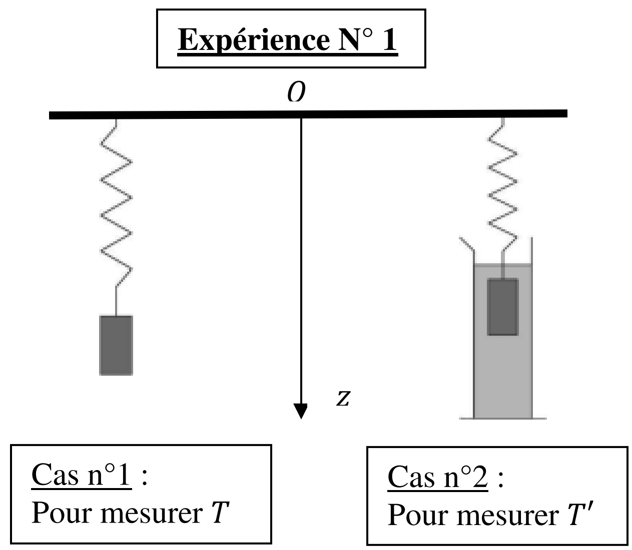
Le référentiel terrestre est supposé galiléen.
La valeur du champ de pesanteur au lieu où sont réalisées les expériences est g = 9,81 m·s^{-2}.
On rappelle le volume d'une sphère de rayon R : $V_{spère} = \frac{4}{3}\pi R^3$.
On dispose du matériel suivant :

- De l'eau distillée de masse volumique : ρ_{eau} = 1000 kg·m^{-3} ;
- De l'eau salée saturée de masse volumique : $\rho_{eau\ salée}$;
- D'un dynamomètre permettant de mesurer la valeur d'une tension d'un ressort pour l'expérience N° 1.
- D'un ressort de raideur k et de longueur à vide l_0 pour l'expérience N° 2.
- Des éprouvettes.
- Un cylindre en plomb.
- Une bille sphérique.

I – Expérience N° 1 : Détermination de la masse volumique de l'eau salée :

On considère un axe vertical Oz descendant.
On réalise deux mesures successives :

- Cas n°1 : On suspend un cylindre en plomb à un dynamomètre. On mesure alors une tension T du ressort.
- Cas n°2 : On refait la même expérience, le cylindre étant à présent immergé dans de l'eau salée contenue dans une éprouvette. On mesure alors une tension T'.



Q1. En tenant compte des deux cas précédents, exprimer la norme de la poussée d'Archimède π_A en fonction de T et T'. Justifier entièrement votre raisonnement.

Q2. Un élève mesure les valeurs suivantes :
- Tension du ressort dans l'air : T = 2,0 N ;
- Tension du ressort lorsque l'objet est immergé dans l'eau saturée en sel : T' =1,7 N ;
- Volume de l'objet immergé : V_{im} =25 mL.

En déduire l'expression de la masse volumique de l'eau saturée en sel notée $\rho_{eau\ salée}$ en fonction des grandeurs mesurées nécessaires et des données éventuellement, puis la calculer.

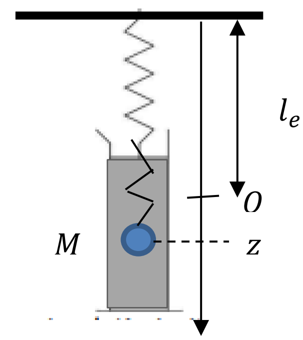
II – Expérience N° 2 : Détermination du coefficient de viscosité η de l'eau :

On considère maintenant une bille sphérique M de masse m_b et de rayon b, placée dans une éprouvette contenant de l'eau distillée de masse volumique ρ_{eau} et de viscosité η.

La bille est suspendue à un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0.

La bille subit de la part du fluide, en plus de la poussée d'Archimède $\overrightarrow{\pi_A}$, une force de frottements fluides donnée par la loi de Stockes : $\vec{f} = -6\pi\eta b\vec{v}$, $\vec{v}$ étant la vitesse de la bille.

On considère un axe Oz vertical descendant et on note z l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre



Expérience N° 2

Q3. Soit l_e la longueur du ressort à l'équilibre ; Exprimer $l_e - l_0$ en fonction de m_b, g, k, b et ρ_{eau}.

Q4. On met la bille en mouvement. Celle-ci reste totalement immergée. On note z l'allongement du ressort par rapport à sa position d'équilibre. Montrer que z vérifie une équation différentielle de la forme :
$\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$; On exprimera λ et ω_0 en fonction de η., b, m_b et k.

Q5. A quelle condition liant λ et ω_0, obtient-on des oscillations ? Justifier.
Exprimer dans ce cas, la période T des pseudo-oscillations en fonction de λ et ω_0.

Q6. Si le mouvement a lieu dans l'air et que l'on néglige tout frottement fluide et la poussée d'Archimède, donner l'expression de la période du mouvement T_0 en fonction de m_b et k.

Q7. Exprimer η en fonction de T, T_0, b et m_b. En déduire un protocole expérimental permettant de déterminer le coefficient de viscosité η de l'eau.

EXERCICE 4 : Etude de la chute de la grêle : (≈ 22 *pts*)

Il arrive que certains orages soient accompagnés de chutes de grêle. Celle-ci est constituée de blocs de glace, appelés grêlons, de formes variées et de tailles pouvant aller de quelques millimètres à plusieurs centimètres. Ces blocs se forment au sein des nuages, à des altitudes comprises entre 1 et 10 km. Leur vitesse de chute au sol avoisine les 100 km/h pour des grêlons de 4 à 8 centimètres de diamètre. Ce sujet s'intéresse à la modélisation de leur chute, dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

I - Chute sans frottement :

On considère un grêlon de masse m, qui chute dans le champ de pesanteur $\vec{g}$. On néglige ici tout frottement. On note z un axe descendant vers le sol. $z = 0$ marque la position initiale du grêlon lorsqu'il est lâché dans le nuage. La vitesse initiale est nulle. On note $\vec{e}_z$ un vecteur unitaire ce cet axe orienté vers le bas.

Q1. Etablir l'expression de la vitesse $v(z)$ du grêlon en fonction de z.
Puis estimer la valeur de cette vitesse après une chute de 1 km. Est-ce en accord avec ce qui est rapporté ci-dessus en introduction ? Quelle hypothèse n'est pas raisonnable ?

II - Chute avec frottements quadratiques :

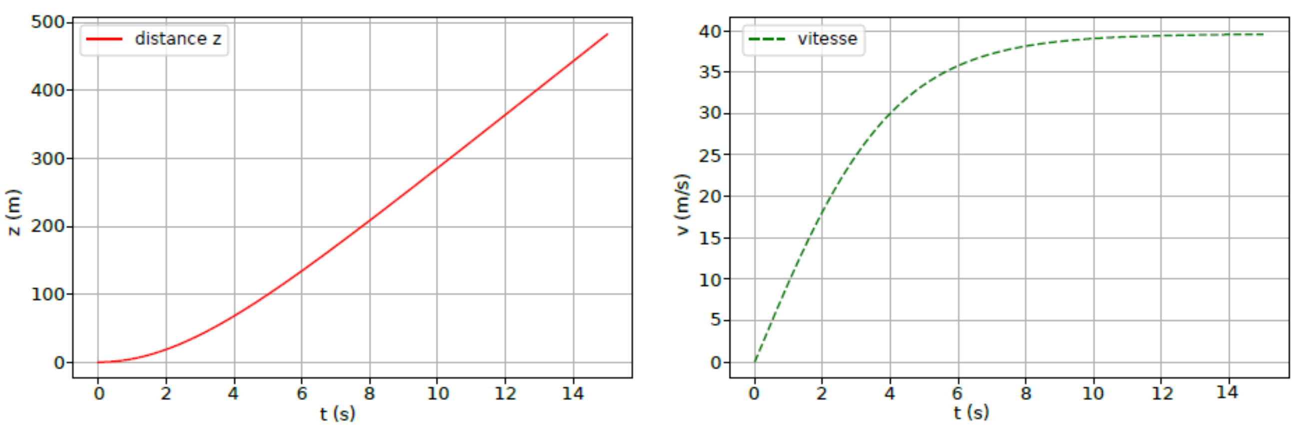
On conserve les mêmes notations que précédemment, mais on rend cette fois compte des frottements entre le grêlon et l'air. On note $\vec{v} = v(t)\,\vec{e}_z$ la vitesse du grêlon.
La force de frottement de l'air sur le grêlon peut s'écrire : $\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z$.
Pour les vitesses atteintes par les grêlons, des études en soufflerie sur des sphères montrent que le coefficient α est donné par $\alpha = \frac{1}{2}\rho_{air}\pi R^2 C$, avec ρ_{air} la masse volumique de l'air, R le rayon du grêlon et $C \simeq 0{,}5$.

Q2. Établir l'équation différentielle portant sur la vitesse $v(t)$ du grêlon.

Q3. Sans résoudre cette équation, montrer qu'il existe une solution où la vitesse est constante. On note v_{lim} cette constante. On donnera son expression en fonction de α, m et g.

Q4. La vitesse limite obtenue à la question précédente est-elle compatible avec ce qui est rapporté en introduction, pour un grêlon supposé sphérique de 8 cm de diamètre ? Que pensez-vous de cette nouvelle hypothèse ? On rappelle le volume d'une sphère de rayon R : $V_{sphère} = \frac{4}{3}\pi R^3$.

On admet que, quelles que soient les conditions initiales, la vitesse du grêlon tend vers la vitesse v_{lim}, appelée vitesse limite. Un algorithme utilisant la méthode d'Euler a permis d'obtenir les graphes ci-dessous de la position $z(t)$ et de la vitesse $v(t)$ (cf **document 1**).



Document 1 : Position $z(t)$ et vitesse $v(t)$ au cours de la chute d'un grêlon de 8 cm de diamètre, courbes obtenues en traçant les résultats d'un algorithme d'Euler.

Q5. Grâce au document 1, déterminer la distance z au bout de laquelle le grêlon atteint 75% de sa vitesse limite. Expliquer ce que votre démarche.

Données : Intensité de la pesanteur : $g = 9{,}8\ m.s^{-2}$.
Masse volumique de l'eau : $\rho_{eau} = 1\ kg.L^{-1}$.
Masse volumique de l'air : $\rho_{air} = 1{,}2\ kg.m^{-3}$.

EXERCICE 5 : Mouvement pendulaire d'un sac de sable : *(≈ 25 pts)*

Le référentiel terrestre est supposé galiléen.

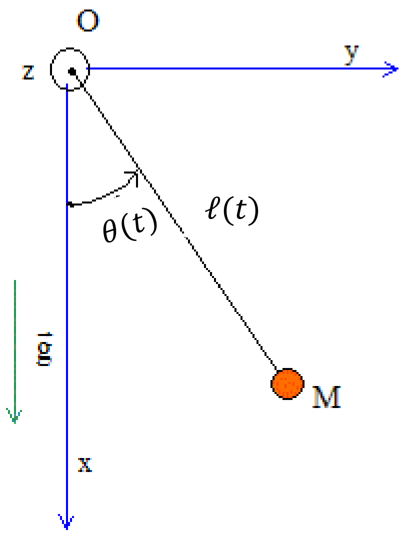
Un sac de sable de masse $m = 200$ kg utilisé pour la construction de la maison, assimilé à un point matériel M, est déplacé par une grue grâce à un treuil (voir schéma ci-dessous).

On néglige la masse du câble et les frottements de l'air et on suppose que le système se comporte comme un pendule simple de longueur variable, le câble étant enroulé sur un treuil tournant à vitesse constante.

La longueur ℓ du câble varie alors selon l'équation horaire du temps : $\boldsymbol{\ell(t) = \ell_0 + kt}$ avec $k = cste$.

Le cas $k < 0$ correspond au cas où le sac remonte, et le cas $k > 0$ correspond au cas où le sac descend.

On se place dans une base polaire d'origine O et de vecteurs mobiles $\vec{e_r}$ et $\vec{e_\theta}$. On souhaite établir l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ et commenter la solution obtenue par analyse numérique.



I - Cinématique du point :

Q1. Donner les expressions des vecteurs position, vitesse et accélération dans la base choisie en fonction de $k, \ell(t), \dot{\theta}$ et $\ddot{\theta}$, si nécessaire.
A quelle grandeur cinématique, la constante k est-elle homogène ?

II - Dynamique du point :

Q2. Reproduire le schéma ci-dessus et y schématiser les vecteurs de la base polaire, ainsi que les forces s'exerçant sur M. Les projeter dans la base polaire.

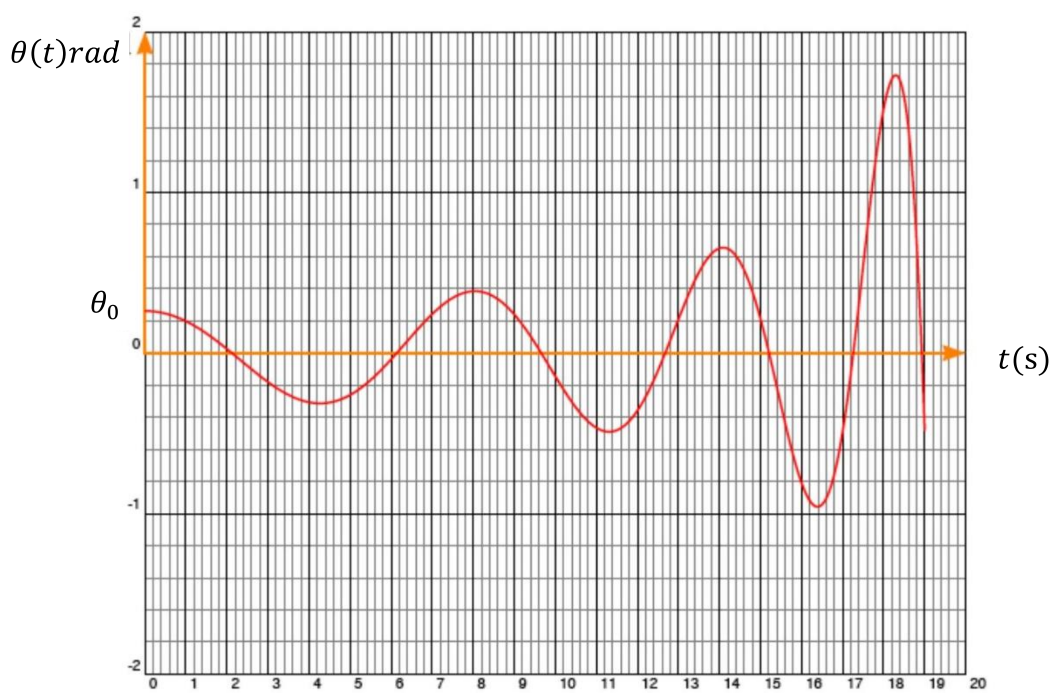
Q3. Exprimer la tension $\vec{T}$ du câble en fonction de $m, g, \ell(t), \theta$ et $\dot{\theta}$.

Q4. Dans le cadre de petits mouvements ($\theta << 1$), montrer que l'équation différentielle vérifiée par $\theta(t)$ se présente sous la forme canonique suivante : $\ddot{\theta} + \frac{2k}{\ell(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)}\theta = 0$.

On donne ci-contre l'allure de la courbe $\theta(t)$, obtenue après résolution numérique de l'équation différentielle précédente pour $k = -1 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ (remontée du sac de sable), $\theta_0 = 15°$et $\ell_0 = 20$ m.

Q5. Calculer la tension du câble à $t = 0\ s$.

Q6. A partir de l'équation différentielle obtenue précédemment, proposer une explication au fait que θ puisse diverger pour $t \approx 20$ s.



Donnée : Accélération de la pesanteur $g = 9{,}8 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$.

PROBLEME : Etude du mouvement d'une bille dans un tube horizontal en rotation uniforme : *(≈ 47 pts)*

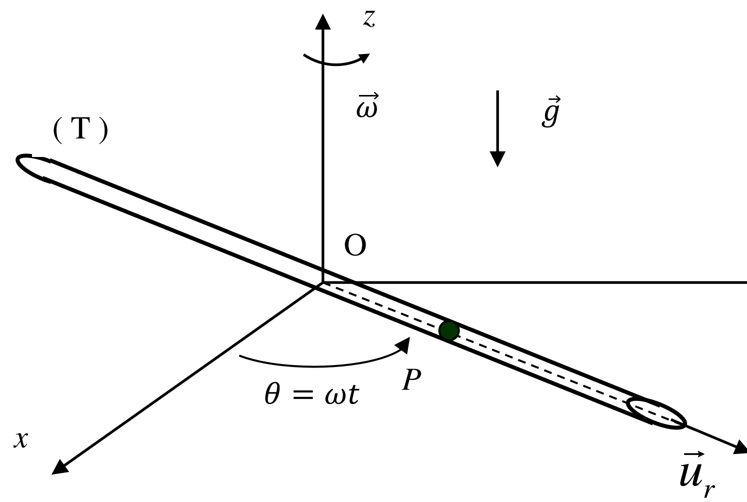
Une bille P de masse m considérée ponctuelle, soumise à la pesanteur est susceptible de se déplacer à l'intérieur d'un tube cylindrique (T) de longueur $2L$ et de centre O.

Le tube effectue un mouvement de rotation uniforme dans le plan horizontal Oxy autour de l'axe Oz à la vitesse angulaire ω supposée constante dans tout le sujet (cf figure).

L'accélération de la pesanteur est $\vec{g}$, elle est dirigée suivant la verticale descendante.

On suppose que le référentiel terrestre est galiléen.

On pose $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{u_r}$, le vecteur position de la bille dans (T).
Pour décrire le mouvement, on utilise la base de projection cylindrique $(\overrightarrow{u_r};\overrightarrow{u_\theta};\overrightarrow{u_z})$.
On notera $\vec{R}$ la réaction du support sous la forme : $\vec{R} = R_1\overrightarrow{u_r} + R_2\overrightarrow{u_\theta} + R_3\overrightarrow{u_z}$, certaines composantes pouvant être nulles parfois.



Préliminaire :

Q1 - Exprimer l'accélération de la bille dans la base de projection imposée, en introduisant ω , r et ses dérivées, si nécessaire.

I - Le mouvement de la bille a lieu sans frottement :

Q2 - Etablir l'équation différentielle en r du mouvement de la bille dans le tube.

Q3 - On suppose qu'à $t = 0$, la bille est à la distance r_0 de l'axe de rotation et qu'elle part sans vitesse initiale par rapport à la tige, ce qui correspond à $\dot{r}(0) = 0$.
Etablir l'équation horaire du mouvement de la bille.

Q4 - En déduire l'expression de la réaction du support $\vec{R}$ en fonction de m, ω, g, r_0 et du temps.

Q5 - Etablir l'expression du temps τ que mettra la bille pour sortir du tube en fonction de ω, r_0 et L.
Application numérique : Calculer τ pour L = 0,10 m ; r_0 = 0,010 m et ω = 2,0 rad.s^{-1}.

II - Le mouvement de la bille est soumis à une force de frottement solide telle que la composante de la réaction sur $\overrightarrow{u_r}$ s'écrive : $R_1 = -\mu\, R_3$ où μ le coefficient dynamique de frottement constant.

Q6 - Montrer que l'équation différentielle en r du mouvement de la bille dans le tube s'écrit :
$\ddot{r} - \omega^2 r = -\mu g$.

Q7 - En déduire la loi liant la vitesse de la bille dans le tube $\dot{r}(t)$ à sa position $r(t)$ pour t > 0, sachant qu'à t = 0, $\dot{r}(0) = v_0$ et $r(0) = 0$; On pourra par exemple multiplier l'équation différentielle du mouvement par $\dot{r}$.

Q8 - On constate que la bille s'arrête dans le tube quand $r = r_1$. En déduire l'expression du coefficient de frottement μ en fonction de g, ω, v_0 et r_1.
Application numérique : Calculer μ pour que la bille s'arrête au bout du tube, avec g = 9,81 m.s^{-2}, L = 0,10 m, v_0 = 0,50 m.s^{-1} et ω = 2,0 rad.s^{-1}.

III – le tube étant rempli d'un liquide, le mouvement de la bille est maintenant soumis à une force de frottement fluide du liquide de la forme : $\vec{f} = -6\pi\eta\, b\, \dot{r}\, \vec{u_r}$ où η est le coefficient de viscosité du liquide, b le rayon de la bille et $\dot{r}\, \vec{u_r}$ la vitesse de la bille dans le tube.
Le mouvement est de nouveau supposé sans frottement solide sur le tube (comme au I).

Q9 - Faire un nouveau bilan des forces ; En déduire l'équation différentielle en r du mouvement de la bille dans le tube.

Q10 – Dans toute la question 10, on néglige la dérivée seconde $\frac{d^2r}{dt^2}$.

Q10.a - Quelle est la validité de cette hypothèse ? Trouver alors la loi du mouvement $r(t)$ de la bille partant à $t = 0$ de $r(t = 0) = r_0$, sans vitesse initiale par rapport à la tige.

Q110.b - Exprimer le temps t_0 nécessaire à la bille pour arriver à l'extrémité du tube, en fonction de η, b, m, ω, L et r_0.