Travaux pratiques – TP 14

Correction du TP

Au programme

Savoir-faire

- Mettre en œuvre un dispositif expérimental illustrant l'utilité des fonctions de transfert pour un système linéaire à un ou plusieurs étages.
- Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale

I Objectifs

- Être attentif-ve aux problèmes liés aux masses des appareils de mesure.
- Apprécier rapidement le comportement en fréquence d'un filtre par balayage rapide avant de faire les mesures.
- Effectuer les mesures permettant de tracer le diagramme de Bode en amplitude d'un filtre.
- Utiliser un multimètre en mode dBmètre.
- Apprendre à tracer un diagramme de Bode sur papier semi-logarithmique : fréquence de coupure à $-3\,\mathrm{dB}$, bande passante, nature et ordre du filtre.

II Méthode pour mesurer un gain en dB (rappel)

Rappel : mesure de gain

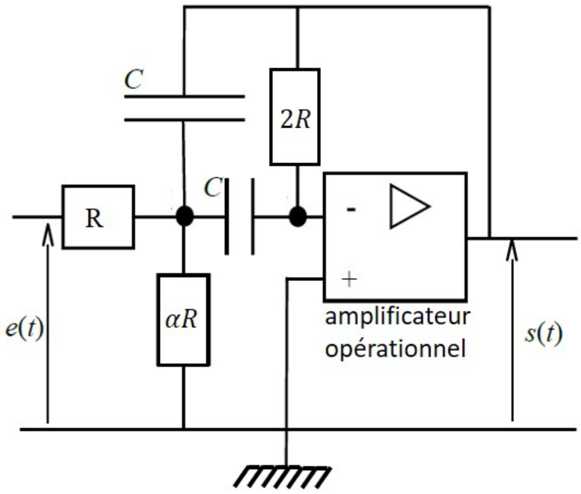
1) Appuyez sur la fonction Volt alternatif (symbole $\boxed{\mathrm{V}\sim}$), **puis** dBmètre (bouton $\boxed{\mathrm{dB}}$) pour activer la fonction dBmètre ;
2) Brancher le multimètre sur l'entrée $e(t)$ du montage ;
3) Appuyer sur `rel` une ou deux fois jusqu'à ce que le multimètre affiche 0 : on indique alors au multimètre que c'est cette tension $e(t)$ qui sert de référence.
4) Brancher ensuite le multimètre sur la sortie $s(t)$. Il affiche directement le gain en dB.

Attention !

Il faut refaire le zéro relatif pour chaque fréquence.

III Analyser

Le filtre de Rauch est un filtre actif, c'est-à-dire qu'il est alimenté électriquement par un générateur extérieur pour fonctionner. Il repose sur l'utilisation de 5 dipôles passifs et d'un amplificateur opérationnel (AO). Ces derniers ne sont pas au programme de première année. Il n'est donc pas possible pour vous de déterminer la fonction de transfert associée à ce filtre. Vous pouvez donc voir le filtre comme une boîte noire qui réalise la fonction de transfert suivante :



$$\boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

Avec
$$Q = \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}, \quad H_0 = -1 \quad \text{et} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\frac{1}{RC}$$

Ainsi, bien que ce filtre soit nouveau par rapport à ce que vous avez étudié, sa fonction de transfert est analogue à des cas étudiés en classe. Vous pouvez donc étudier sa fonction de transfert. Pour ce faire :

(1) Déterminer les équations des asymptotes BF et HF du Bode en gain. En déduire la nature de ce filtre.

Réponse

On a ici $|\underline{H}_0| = 1$, donc on peut réaliser la même étude qur le RLC sur R :

Tableau 14.1 – Étude du filtre.

	$\forall x$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\dfrac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}$	$\mathrm{j}\dfrac{x}{Q}$	$-\mathrm{j}\dfrac{1}{xQ}$
$G_{\mathrm{dB}} = 20\log\lvert\underline{H}\rvert$	$-10\log\left(1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\right)$	$20\log\left(\dfrac{x}{Q}\right)$	$-20\log(Qx)$

On trouvera également $G_{\mathrm{dB}}(x=1) = 20\log\left(\frac{|H_0|}{\sqrt{2}}\right) = -3\,\mathrm{dB}$. Par l'étude des asymptotes, on obtient un passe-bande.

◇

(2) Déterminer la pulsation de résonance ω_r en fonction de ω_0 et Q. Déterminer la largeur de la bande passante de ce filtre en fonction de ω_0 et Q, puis de R et C.

Réponse

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est minimal, c'est-à-dire

$$H(\omega_r) = H_{\max} \Leftrightarrow 1 + Q^2\left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2 \text{ minimal}$$
$$\Leftrightarrow Q^2\left(\frac{\omega_r}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Et ainsi $H_{\max} = H_0$. Pour la bande passante, on commence par déterminer les pulsations réduites x_1 et x_2 telles que $|\underline{H}(x_i)| = |H_0|/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
& 1 + Q^2(x_i - 1/x_i)^2 = 2 && \sqrt{\cdot} \\
\Leftrightarrow\ & Q\left(x_i - \frac{1}{x_i}\right) = \pm 1 && \times x_i \\
\Leftrightarrow\ & Q{x_i}^2 \mp x_i - Q = 0 && \text{Discriminant} \\
\Rightarrow\ & \Delta = 1 + 4Q^2 && \text{Solutions} \\
\Rightarrow\ & x_{i,\pm,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}
\end{aligned}$$

On obtient alors deux polynômes du second degré (un avec le signe +, l'autre avec le signe −). On ne garde que les racines positives, sachant que $\sqrt{1+4Q^2} > 1$:

$$x_1 = x_{i,-,+} = \frac{1}{2Q}\left(-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{i,+,+} = \frac{1}{2Q}\left(1 + \sqrt{1+4Q^2}\right)$$

puis on obtient $x_2 - x_1 = 1/Q$ soit au final $\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} = \frac{1}{RC}}$.

◇

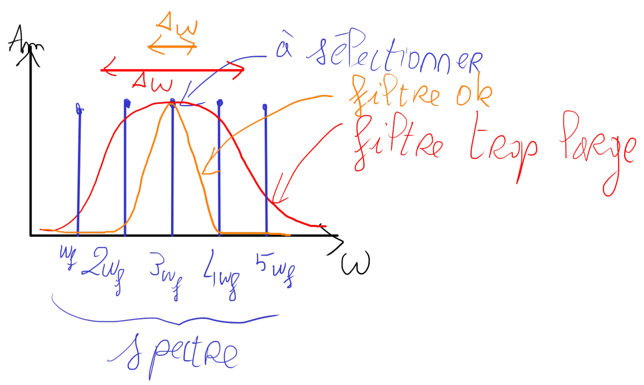
3) À quelle condition sur α ce filtre peut-il être efficace pour sélectionner individuellement les fréquences constituant le signal d'entrée ? On supposera, afin de fixer les idées, un signal d'entrée périodique (non sinusoïdal) de pulsation fondamentale ω_f dont on souhaite sélectionner l'harmonique de rang 3 (pulsation $3\omega_f$).

Réponse

Pour sélectionner $3\omega_f$, il faut que $\omega_0 = 3\omega_f$, mais aussi que le filtre soit **suffisamment fin** pour que les pulsations $2\omega_f$ et $4\omega_f$ soient atténuées. En représentation spectrale, on obtient la figure suivante :

On cherche donc à avoir :

$$\begin{aligned}
& \Delta\omega < \omega_f && \omega_f = \omega_0/3,\ \Delta\omega = 1/RC \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{RC} < \frac{1}{3}\omega_0 && \omega_0 = \sqrt{\tfrac{\alpha+1}{2\alpha}}\,\tfrac{1}{RC} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\cancel{RC}} < \frac{1}{3}\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\,\frac{1}{\cancel{RC}} && \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & 3^2 < \left(\sqrt{\frac{\alpha+1}{2\alpha}}\right)^2 && \text{On simplifie} \\
\Leftrightarrow\ & 9 < \frac{\alpha+1}{2\alpha} && \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & 18\alpha < \alpha + 1 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\alpha < \frac{1}{17}}
\end{aligned}$$



Il faut donc avoir α petit pour avoir Q grand et sélectionner précisément des fréquences.

◇

4) On prend $RC = 1{,}0 \times 10^{-4}$ s. Pour $\alpha = 10^{-2}$ puis $\alpha = 1$, préciser les coordonnées des points d'intersection des asymptotes BF et HF (f_I ; $G_{\mathrm{dB},I}$).

Réponse

Les asymptotes se croisent si

$$
\begin{aligned}
& G_{\mathrm{dB}}(x \to 0) = G_{\mathrm{dB}}(x \to \infty) && \text{On remplace}\\
\Leftrightarrow\ & 20\log(x) - \cancel{20\log Q} = -20\log(x) - \cancel{20\log Q} && \text{On simplifie}\\
\Leftrightarrow\ & \log(x) = 0 && \text{On inverse le log}\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{x = 1}
\end{aligned}
$$

$$
\boxed{\begin{cases} f_{0,\alpha=10^{-2}} = 11{,}4\,\mathrm{kHz} \quad ; \quad G_{\mathrm{dB},10^{-2}} = -17\,\mathrm{dB} \\ f_{0,\alpha=1} = 1{,}6\,\mathrm{kHz} \quad ; \quad G_{\mathrm{dB},1} = 0\,\mathrm{dB} \end{cases}}
$$

Croisement asymptotes

En réalité, les asymptotes se croisent toujours en $x = 1$ (mais il faut savoir le démontrer).

IV Réaliser

On étudie ce montage pour deux valeurs de α. On prendra successivement

$$\boxed{\alpha = 10^{-2}} \qquad \text{puis} \qquad \boxed{\alpha = 1}$$

Le filtre schématisé ci-dessus est une « boite noire » dans laquelle on trouve un amplificateur opérationnel. Pour s'en servir, il faut au préalable polariser l'amplificateur opérationnel, c'est-à-dire :

Manipulation amplificateur

1) Connecter la borne $+15\,\mathrm{V}$ du boitier à la sortie $+15\,\mathrm{V}$ d'un générateur de tension continue,
2) Connecter la borne $-15\,\mathrm{V}$ du boitier à la sortie $-15\,\mathrm{V}$ du générateur
3) Connecter le point milieu du boitier à la masse du générateur.

Attention

À la fin de la séance, on coupe le signal du GBF avant les alimentations de l'amplificateur opérationnel qui doivent être coupées en dernier.

4) Réalisez ensuite le montage en prenant $C = 1\,\mathrm{nF}$ (cavalier prêt à être connecté sur la boite) et αR avec une boite de résistances variables.

On alimente le filtre avec un GBF en tension sinusoïdale et on souhaite visualiser simultanément $e(t)$ sur la voie 1 et $s(t)$ sur la voie 2 de l'oscilloscope. On utilisera le voltmètre pour mesurer le gain en dB.

5 La « boite noire » a été fabriquée avec $R = 100\,\mathrm{k\Omega}$. Déterminer la valeur à donner à αR pour $\alpha = 10^{-2}$.

Réponse

$$\boxed{\alpha R = 1\,\mathrm{k\Omega}}$$

1 Étude rapide : Faire varier la fréquence du signal d'entrée et vérifier rapidement que le filtre fonctionne correctement. En particulier, vous déterminerez la fréquence de résonance.

Réponse

On observe $f_{0,\,\mathrm{exp}} = (11{,}30 \pm 0{,}01)\,\mathrm{kHz}$ avec $\alpha = 10^{-2}$. On a bien une amplitude de sortie nulle pour les basses **et** hautes fréquences : c'est bien un passe-bande.

2 Étude complète : Prendre comme amplitude du signal d'entrée $E_m \approx 2\,\mathrm{V}$ puis, pour des fréquences entre 100 Hz et 80 kHz, mesurer le gain en dB. Faire un tableau *numérique* avec l'outil de votre choix (LatisPro recommandé, calculatrice recommandée) et imprimez ou réécrire les valeurs sur votre copie.

Réponse

Non corrigé.

◇

3 Recommencer les deux mêmes études pour $\alpha = 1$.

Réponse

On observe $f_{0,\,\mathrm{exp}} = (1{,}5 \pm 0{,}1)\,\mathrm{kHz}$ avec $\alpha = 1$.

◇

V Valider

4 Tracer, pour chacune des deux valeurs de α, les diagrammes de Bode en gain expérimentaux sur papier semi-log en mettant la fréquence en abscisse. Ajouter sur ces deux diagrammes, les asymptotes obtenues grâce à l'étude théorique de l'analyse.

Réponse

Voir pages finales.

◇

VI Conclure

5 Quelle différence essentielle constate-t-on entre ces deux filtres ? Comment faire varier la capacité C afin de faire varier Q sans faire varier ω_0 ?

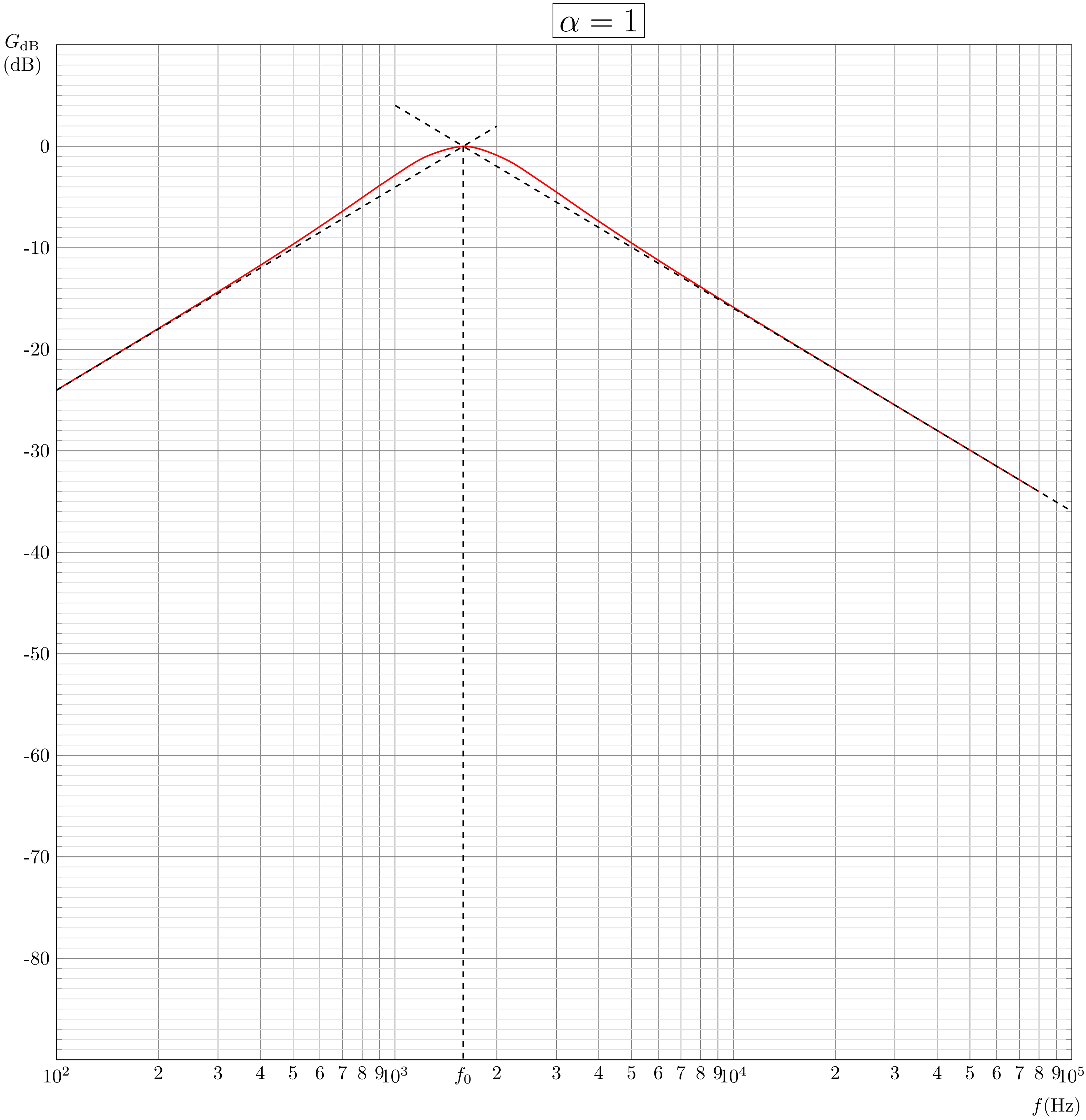
Réponse

Les fréquences de résonance sont différentes, et la forme de la courbe varie : la bande passent est la même, $\Delta\omega = \frac{1}{RC}$, mais avec l'échelle log le diagramme avec $\alpha = 10^{-2}$ semble plus piquée.

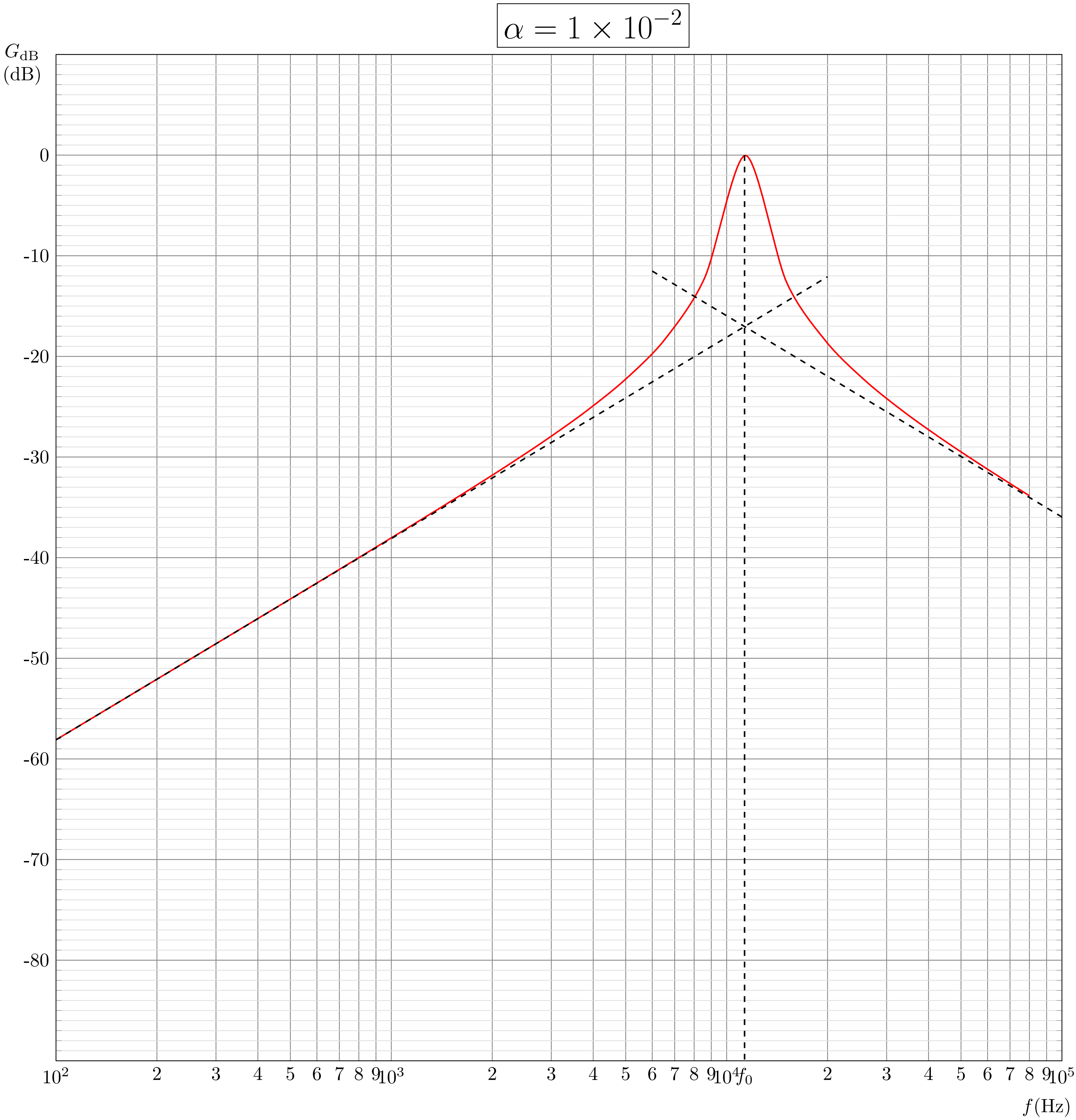
Pour changer Q sans changer ω_0, il faut faire varier C dans le même sens que Q :

$$\omega_0 = \frac{Q}{RC} \quad ; \quad \omega_0 = \mathrm{cte} \Rightarrow \begin{cases} Q \nearrow \text{et } C \nearrow \\ Q \searrow \text{et } C \searrow \end{cases}$$

◇



$\alpha = 1$
G_{dB} (dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
10^2
2
3
4
5
6
7
8
9
10^3
f_0
2
3
4
5
6
7
8
9
10^4
2
3
4
5
6
7
8
9
10^5
f (Hz)



$\alpha = 1 \times 10^{-2}$
G_{dB}
(dB)
0
-10
-20
-30
-40
-50
-60
-70
-80
10^2
2
3
4
5
6
7
8
9
10^3
2
3
4
5
6
7
8
9
10^4
f_0
2
3
4
5
6
7
8
9
10^5
$f\,(\mathrm{Hz})$