Méca 4 — Approche énergétique du mouvement

1 Rappels : énergie cinétique et travail d'une force constante

1.1 Énergie cinétique

Définition. L'**énergie cinétique** est la grandeur :

$$E_c\left(\mathrm{M}/\mathcal{R}\right) = \frac{1}{2} m v\left(\mathrm{M}/\mathcal{R}\right)^2$$

Elle s'exprime en joules (J). L'énergie cinétique, comme la vitesse, dépend du référentiel.

1.2 Travail d'une force

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

— Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.

— Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.

— Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.

— Lorsqu'un objet freine sur un support horizontal, la réaction normale ne cause pas la variation de son énergie cinétique (c'est la réaction tangentielle qui le freine).

Le travail est une grandeur physique construite pour rendre compte de l'effet d'une force sur son énergie cinétique.

— En l'absence de déplacement, le travail doit être nul.

— Si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail doit être nul.

— Si la force est dans le sens du déplacement, le travail doit être positif et maximal.

— Si la force est dans le sens opposé au déplacement, le travail doit être négatif (et minimale).

Définition. Le travail W_{AB} d'une force constante $\vec{F}$ sur un chemin $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Le travail s'exprime en joules (J).

Remarque.

1. Si $W_{\mathrm{AB}} > 0$, le travail est dit **moteur**, si $W_{\mathrm{AB}} < 0$, le travail est dit **résistant**.
2. Si le travail est nul, soit la force est nulle, soit le déplacement est nul, soit les deux sont perpendiculaires.

1.3 Exemples de travaux

On peut calculer le travail de dfférentes façons :

— on projette les forces et le déplacement dans une base cartésienne. Si :

$$\vec{F} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y} + F_z\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{AB}} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z}$$

Le produit scalaire est :
$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = xF_x + yF_y + zF_z$$

— de façon équivalente :
$$\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| \cos\alpha$$

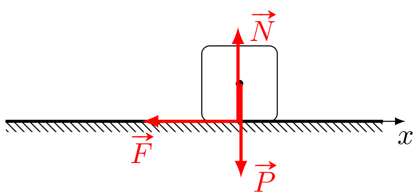
où α est l'angle entre les vecteurs $\overrightarrow{F}$ et $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$.

Application

Nous avons vu en DM qu'un objet soumis à une force de frottement solide, était pendant toute la durée du mouvement, soumis à :
$$\overrightarrow{F} = -fmg\overrightarrow{u_x}$$

Il parcourt pendant la phase de freinage
$$D = \frac{v_0^2}{2fg}$$

Calculer le travail de la force sur la distance AB qu'il parcourt. Le travail est-il moteur ou résistant ?



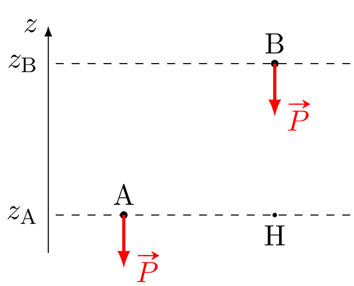
$$\begin{aligned} W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{F}\right) &= \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\ &= F \times \mathrm{AB} \times \cos(\pi) \\ &= -F \times \mathrm{AB} \end{aligned}$$

Ce travail est négatif : la force est résistante.

Sur la distance de freinage :
$$W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{F}\right) = -fmg \times \frac{v_0^2}{2fg} = -\frac{1}{2}mv_0^2$$

Application

Calculer le travail du poids lors d'un déplacement.



$$W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{P}\right) = \overrightarrow{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

Dans la base cartésienne :

$$\overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\,\overrightarrow{u_x} + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})\,\overrightarrow{u_y} + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\,\overrightarrow{u_z}$$

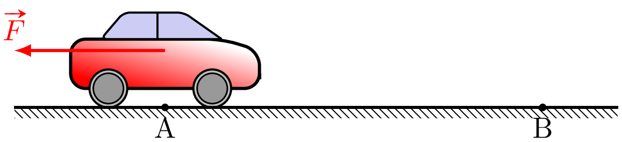
$$W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{P}\right) = -mg\,(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$$

Le travail du poids entre un point A et un point B est :
$$W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{P}\right) = mg\,(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}})$$

Application

On considère une voiture pour aller d'un point à un autre éloignés de 100 km. On suppose que l'on y va à vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est :
$$\overrightarrow{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v \overrightarrow{v}$$

On donne $S = 3{,}07\ \mathrm{m}^2$, $c_x = 0{,}33$, $\rho = 1{,}3\ \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Calculer le travail de la force. Faire l'application numérique pour $v = 50\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$, puis $80\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$.



$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = \vec{F}\cdot\overrightarrow{\mathrm{AB}} = -F\times\mathrm{AB}$$

Ce travail est négatif : la force est résistante.

— $v = 50\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$: $W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = -1{,}27\times10^7$ J soit l'équivalent de 0,4 litres d'essence ;

— $v = 80\ \mathrm{km}\cdot\mathrm{h}^{-1}$: $W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = -3{,}25\times10^7$ J soit environ 1 litres d'essence.

Mais dans les deux cas, le rendement d'un moteur thermique est très éloigné de 1 !

Nous remarquons que dans certains cas, le travail ne dépend pas que du point de départ et du point d'arrivée, mais peut dépendre de la façon d'y aller (vitesse, chemin suivi).

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

1.4 Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique. Dans un référentiel galiléen :

$$\Delta E_c\left(\mathrm{M}/\mathcal{R}\right) = W_{\mathrm{AB}}\left(\sum\vec{F}\right)$$

Application

Déterminer la vitesse d'un skieur en bas d'une piste de 5 mètres de dénivelé, si on néglige les frottements.

Variation d'énergie cinétique L'énergie cinétique initiale est nulle car la vitesse du skieur en haut de la piste l'est : $E_c(\mathrm{A}) = 0$. En bas de la piste, elle vaut $E_c(\mathrm{B}) = \dfrac{1}{2}mv^2$.

$$\Delta E_c = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

Travaux des forces La réaction de la piste est perpendiculaire au mouvement donc son travail est nul. Le travail du poids est quant à lui :

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = mg\left(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}\right) = mgh$$

Conclusion On applique le théorème de l'énergie cinétique entre le haut de la piste (point A) et le bas (point B) :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 10\ \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

1.5 Quand utiliser une approche énergétique ?

Si l'on veut connaître seulement une vitesse / une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.

Si on cherche les équations horaires / un temps / une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

Dans tous les cas, ça donne le même résultat !

2 Puissance d'une force et théorème de la puissance cinétique

2.1 Définition

On définit la puissance mécanique comme la rapidité avec laquelle le travail W peut être effectué. La puissance moyenne est ainsi définie comme :

$$\mathcal{P}_m = \frac{W}{\Delta t}$$

pour un travail W fourni pendant Δt.

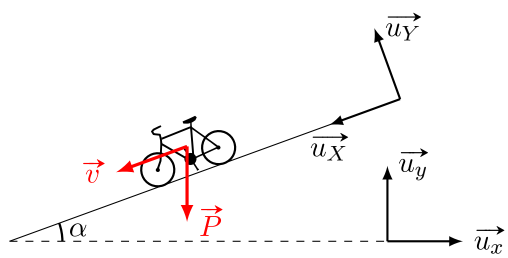
Définition. On définit la **puissance instantannée de la force** $\vec{F}$ comme :

$$\mathcal{P}\left(\vec{F}\right)\Big|_{\mathcal{R}} = \vec{F} \cdot \left.\vec{v}\right|_{\mathcal{R}}$$

Elle dépend du référentiel choisi et s'exprime en watts (W).

Application

Calculer la puissance du poids lors d'une descente sur une pente d'angle α.



On exprime le poids dans la base $(\overrightarrow{u_X}, \overrightarrow{u_Y})$:

$$\begin{aligned}\vec{P} &= m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_y} \\ &= -mg\cos\alpha\overrightarrow{u_Y} + mg\sin\alpha\overrightarrow{u_X}\end{aligned}$$

Et la vitesse :

$$\vec{v} = v\overrightarrow{u_X}$$

Donc, dans le référentiel de la route :

$$\begin{aligned}\mathcal{P}\left(\vec{P}\right) &= \vec{P} \cdot \vec{v} = \left(-mg\cos\alpha\overrightarrow{u_Y} + mg\sin\alpha\overrightarrow{u_X}\right) \cdot \left(v\overrightarrow{u_X}\right) \\ &= mgv\sin\alpha\end{aligned}$$

Dans ce cas, la puissance du poids est positive : le poids est moteur. Le cas de la montée revient simplement à inverser le sens de $\vec{v}$: le poids devient résistant.

On aurait aussi pu obtenir ce résultat en remarquant que l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ est $\pi/2 - \alpha$, puis utiliser $\cos(\pi/2 - \alpha) = \sin\alpha$.

2.2 Théorème de la puissance cinétique

Théorème de la puissance cinétique. Dans un référentiel galiléen :

$$\frac{\mathrm{d}E_c(\mathrm{M}/\mathcal{R})}{\mathrm{d}t} = \sum \mathcal{P}\left(\vec{F}\right)\Big|_{\mathcal{R}}$$

Démonstration : Calculons $\dfrac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right) \\ &= \frac{1}{2}m\left[\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\right] \\ &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\vec{v} \\ &= \left(\sum\vec{F}\right)\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

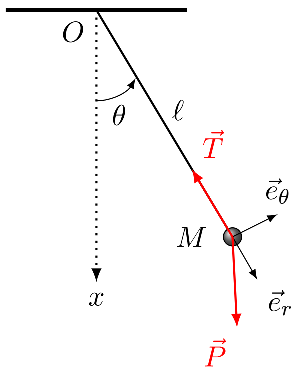
Application

Justifier que les frottements conduisent à une baisse de l'énergie cinétique.

Les frottements sont dans la direction opposée à la vitesse, donc leur puissance est négative. La dérivée de l'énergie cinétique étant égale à la somme des puissance des forces est donc négative : l'énergie cinétique décroît.

Application

Établir l'équation différentielle du pendule.



Le mouvement est circulaire donc la vitesse est $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$. Ainsi l'énergie cinétique est :

$$E_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Donc (on utilise la dérivée d'une fonction au carré) :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

$\vec{v}$ et $\vec{T}$ sont perpendiculaires, l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ est $\pi/2 + \theta$:

$$\vec{T}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{P}\cdot\vec{v} = mg \times \ell\dot{\theta} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -mg\sin\theta\ell\dot{\theta}$$

On applique le théorème de la puissance cinétique :

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 - mg\sin\theta\ell\dot{\theta}$$

D'où, en simplifiant par $m\ell^2\dot{\theta}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{l}\sin\theta = 0}$$

On retrouve bien l'équation différentielle du pendule.

2.3 Quand appliquer le TPC ?

Si le mouvement est sur une coordonnées (x, y ou z en coordonnées cartésiennes, θ en coordonnées cylindriques), il est pertinent d'utiliser le TPC. Sinon (chute libre par exemple), on en revient au PFD qui contient toute l'information.

3 Travail élémentaire

3.1 Définition

La variation d'énergie cinétique pendant un temps infinitésimal dt est, d'après le TPC :

$$\mathrm{d}E_c = \sum \vec{F}\cdot\vec{v}\mathrm{d}t$$

On retrouve le vecteur déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{v}\mathrm{d}t$.

Définition. Le **travail élémentaire** δW d'une force est :

$$\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Nous avons vu les déplacements élémentaires en cinématique :

— coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

— coordonnées cartésiennes :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\overrightarrow{u_r} + r\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$$

Attention

Il ne faut pas confondre la notation δ avec la notation d. La notation δ fait référence au fait que le travail total dépend *a priori* du chemin suivi, et de la vitesse à laquelle on parcourt ce chemin, et non pas uniquement du point de départ et du point d'arrivée. On peut écrire :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_c = E_c\left(\mathrm{B}\right) - E_c\left(\mathrm{A}\right) \qquad \text{ou} \qquad \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OB}} - \overrightarrow{\mathrm{OA}}$$

Mais il est absurde d'écrire :

$$\xcancel{\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = W\left(\mathrm{B}\right) - W\left(\mathrm{A}\right)}$$

Définition. Le **travail** d'une force sur un chemin AB est : $W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{F}\right) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W$.

3.2 Exemples

Poids : on écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi $\delta W = -mg\mathrm{d}z$ et :

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -mg\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}z$$

On retrouve logiquement le résultat :

$$\boxed{W = -mg\left(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right)}$$

Force de rappel élastique : on écrit :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{F} = -k\left(x - \ell_0\right)\overrightarrow{u_x}$$

Ainsi :

$$\delta W = -k\left(x - \ell_0\right)\mathrm{d}x$$

$$W = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -k\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \left(x - \ell_0\right)\mathrm{d}x = -k\left[\frac{1}{2}\left(x - \ell_0\right)^2\right]_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}}$$

$$\boxed{W = -\frac{k}{2}\left(\left(x_{\mathrm{B}} - \ell_0\right)^2 - \left(x_{\mathrm{A}} - \ell_0\right)^2\right)}$$

3.3 Théorème de l'énergie cinétique

On peut alors démontrer le TEC. On part de :

$$\mathrm{d}E_c = \sum \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}\mathrm{d}t = \sum \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

On intègre :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_c = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum \overrightarrow{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Or :

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_c = E_c\left(\mathrm{B}\right) - E_c\left(\mathrm{A}\right) = \Delta E_c$$

$$\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \sum \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \sum \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \sum \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = \sum W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right)$$

On a bien montré que :

$$\boxed{\Delta E_c = \sum W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right)}$$

4 Énergie potentielle et énergie mécanique

4.1 Forces conservatives et non-conservatives

Comme on l'a vu, le travail peut dépendre du chemin suivi. Dans le cas du poids ou de la force de rappel, nous voyons que le travail ne dépend que des coordonnées des points de départ et d'arrivée.

Définition. Une force est dite **conservative** si son travail ne dépend pas du chemin suivi / de la vitesse, mais uniquement des positions de A et B. Elle est dite **non-conservative** dans le cas contraire.

Exemple

Forces conservatives :

- le poids ;
- la force de rappel d'un ressort ;
- force gravitationnelle ;
- force électrostatique.

Forces non-conservatives :

- frottement fluide : nous avons vu un exemple au paragraphe 1.3 ;
- frottement solide : elle dépend de la distance parcourue entre A et B : si on fait un détour pour aller de A à B, la valeur du travail sera plus élevée.

4.2 Énergie potentielle

Définition. On définit alors l'**énergie potentielle** associée à la force $\vec{F}$:

$$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = -\left(E_p(\mathrm{B}) - E_p(\mathrm{A})\right) = -\Delta E_p$$

Exemples

- Énergie potentielle de pesanteur : nous avons démontré que :

  $$W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{P}\right) = -mg\left(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}}\right)$$

  Ainsi, en identifiant avec la définition ci-dessus, on obtient l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

  $$E_{p,p}(M) = mgz + C$$

  L'énergie potentielle est toujours définie à une constante près.

  L'énergie potentielle de pesanteur est :

  $$E_{p,p} = mgz$$

— Énergie potentielle élastique : nous avons démontré que :

$$\boxed{W = -\frac{k}{2}\left(\frac{1}{2}\left((x_{\mathrm{B}} - \ell_0)^2 - (x_{\mathrm{A}} - \ell_0)^2\right)\right)}$$

Ainsi, en identifiant avec la définition ci-dessus, on obtient l'expression de l'énergie potentielle de pesanteur :

$$E_{p,\text{él}}(M) = \frac{1}{2}k\,(x - \ell_0)^2 + C$$

L'énergie potentielle élastique est :

$$E_{p,\text{él}} = \frac{1}{2}k\,(\ell - \ell_0)^2$$

4.3 Gradient

Définition. On définit l'opérateur **gradient** d'une fonction $f(x, y, z)$ par :

$$\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial E_p}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial E_p}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial E_p}{\partial z}\overrightarrow{u_z}$$

$\dfrac{\partial f}{\partial x}$ désigne la dérivée partielle de f par rapport à la variable x, les autres variables étant constantes.

Exemple

Si $f(x, y, z) = xy^2$ alors :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Le vecteur gradient indique la direction de la plus forte augmentation et est perpendiculaire aux lignes de niveau.

Définition. La **différentielle** d'une fonction f est :

$$\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Lien avec l'énergie potentielle : On a :

$$E_p(\mathrm{B}) - E_p(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}E_p = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Or :

$$E_p(\mathrm{B}) - E_p(\mathrm{A}) = -W_{\mathrm{AB}}\left(\vec{F}\right) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

On identifie alors :

$$\boxed{\vec{F} = -\,\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, E_p}$$

Exemples :

— Énergie potentielle de pesanteur $\vec{P} = -mg\overrightarrow{u_z}$ soit :

$$-\frac{\partial E_{p,p}}{\partial x} = 0 \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial z} = -mg$$

$E_{p,p}$ ne dépend ni de x, ni de y, et peut s'écrire comme $mgz + C$.

— Énergie potentielle élastique $\vec{F} = -k\,(x - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$ soit :

$$-\frac{\partial E_{p,p}}{\partial x} = -k\,(x - \ell_0) \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial E_{p,p}}{\partial z} = 0$$

$E_{p,p}$ ne dépend ni de y, ni de z, et peut s'écrire comme $\dfrac{1}{2}k\,(x - \ell_0)^2 + C$.

4.4 Énergie mécanique

L'écriture du travail des forces conservatives comme la variation d'énergie potentielle permet d'écrire :

$$\Delta E_c + \Delta E_p = W\left(\sum \overrightarrow{F_{NC}}\right)$$

Où les $\overrightarrow{F_{NC}}$ désignent les forces non conservatives.

Définition. L'**énergie mécanique** est définie comme :

$$E_m = E_c + E_p$$

Où toutes les énergies potentielles sont additionnées.

Théorème de l'énergie mécanique. Dans un référentiel galiléen :

$$\Delta E_m\left(\mathrm{M}/\mathcal{R}\right) = W_{\mathrm{AB}}\left(\sum \overrightarrow{F_{NC}}\right)$$

Cette formule n'est qu'une reformulation du théorème de l'énergie cinétique : simplement on peut considérer le travail d'une force conservative comme une énergie potentielle.

Application

Exprimer l'énergie mécanique d'un skieur en haut et en bas d'une piste et retrouver sa vitesse.

L'énergie mécanique en haut de la piste est :

$$E_m\left(\mathrm{A}\right) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{A}}^2 + mgz_{\mathrm{A}} = mgh$$

L'énergie mécanique en bas de la piste est :

$$E_m\left(\mathrm{B}\right) = \frac{1}{2}mv_{\mathrm{B}}^2 + mgz_{\mathrm{B}} = \frac{1}{2}mv^2$$

Sans frottements, l'énergie mécanique se conserve ($W_{\mathrm{AB}}\left(\overrightarrow{N}\right) = 0$) donc :

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Méthode Pour traiter un problème où l'énergie mécanique se conserve :

1. Calculer l'énergie mécanique à l'instant initial, puis à un instant quelconque en fonction de sa vitesse et/ou de sa position.
2. Conclure en utilisant l'égalité $E_m(\mathrm{A}) = E_m(\mathrm{B})$.

5 Utilisation de l'énergie potentielle

Un graphique d'énergie potentielle est pratique pour déterminer qualitativement la trajectoire suivie.

5.1 Équilibres stables et instables

Considérons une force ne dépendant que d'une coordonnée x, dirigée selon $\overrightarrow{u_x}$. Développons l'expression de la force au voisinage d'un point x_0 :

$$F(x) = F\left(x_0\right) + \left(x - x_0\right) \times \frac{\partial F}{\partial x}\left(x_0\right)$$

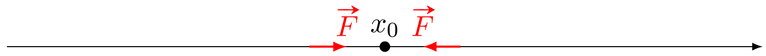
Soit :

$$F(x) = -\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) - (x - x_0) \times \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$$

On a une position d'équilibre si $F(x_0) = 0$.

Stabilité :

— l'équilibre est stable si la force ramène le point vers sa position d'équilibre :

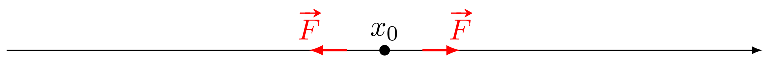


Il faut donc $F < 0$ si $x - x_0 > 0$. Or :

$$F(x) = \underbrace{-\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0)}_{0} - (x - x_0)\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$$

Il nous faut alors $\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$.

— l'équilibre est instable dans le cas constraire :



C'est le cas si $\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$.

Définition. Une position d'**équilibre** est un point x_0 où la dérivée de l'énergie potentielle totale E_p s'annule :

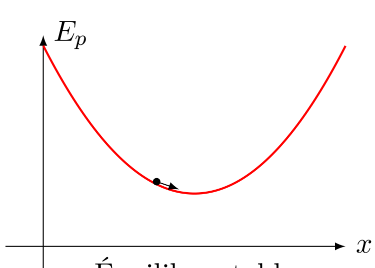
$$\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) = 0$$

Elle est dite :

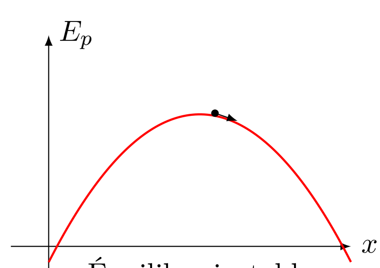
— **stable** si x_0 est un minimum (la dérivée seconde est positive) : $\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$;

— **instable** si x_0 est un maximum (la dérivée seconde est négative) : $\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) < 0$.

Illustration graphique :



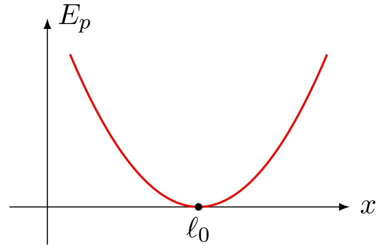
Équilibre stable



Équilibre instable

Application

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Cette position est-elle stable ou instable ?



On remarque graphiquement que la position d'équilibre est en $x = \ell_0$ est qu'elle est stable. On peut également le montrer par le calcul :

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}x} = k\,(x - \ell_0) \times 1$$

qui s'annule si $x = \ell_0$. La dérivée seconde est égale à k donc positive : l'équilibre est stable.

5.2 Détermination qualitative de la trajectoire

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (et éventuellement des forces ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile et l'aspect général de la trajectoire.

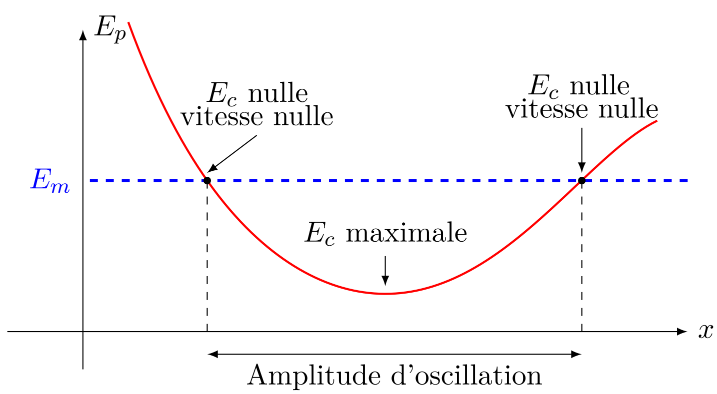
$$E_m = E_c + E_p \geq E_p$$

car l'énergie cinétique est nécessairement positive.

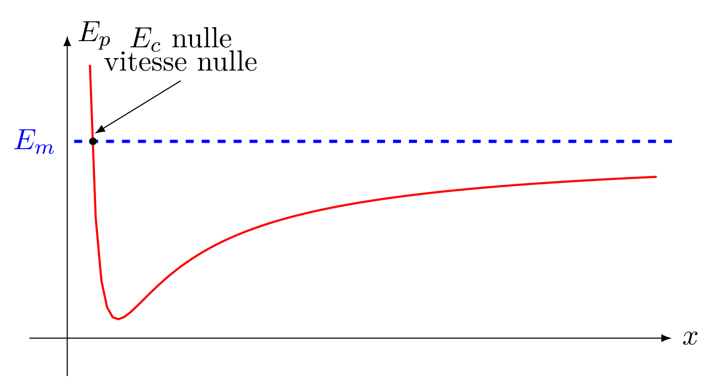
- — Dans un diagramme en énergie potentielle, seules les régions où $E_p \leq E_m$ sont accessibles.
- — Lorsque $E_p = E_m$, $E_c = 0$: la vitesse est nulle.
- — Lorsque E_p est minimal, E_c est maximale : la vitesse est maximale.

On peut distinguer plusieurs situations.

État lié La particule reste dans une zone bornée de l'espace et le mobile effectue des aller-retours périodiques autour de la position d'équilibre.



État de diffusion La particule aura tendance à partir vers $x = +\infty$ sans jamais revenir : son mouvement n'est pas borné dans l'espace.



C'est le cas de certains corps célestes qui passent brièvement dans le système solaire avant de le quitter définitivement. Citons par exemple la comète d'Arend-Roland, passée à proximité du Terre en 1956 et qui ne devrait jamais revenir.

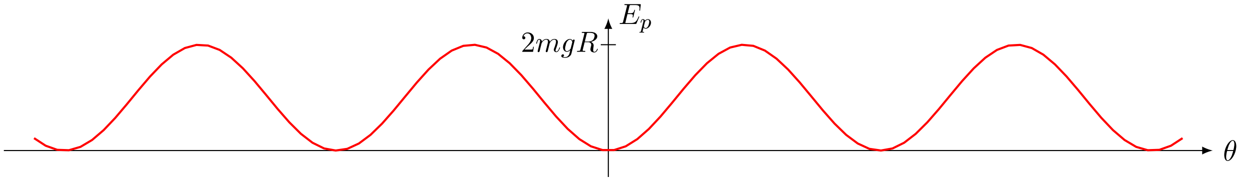
5.3 Le pendule simple

Déterminons l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'angle θ. On reprend le schéma du pendule vu plus haut. L'altitude est :

$$z(\theta) = \ell(1 - \cos\theta)$$

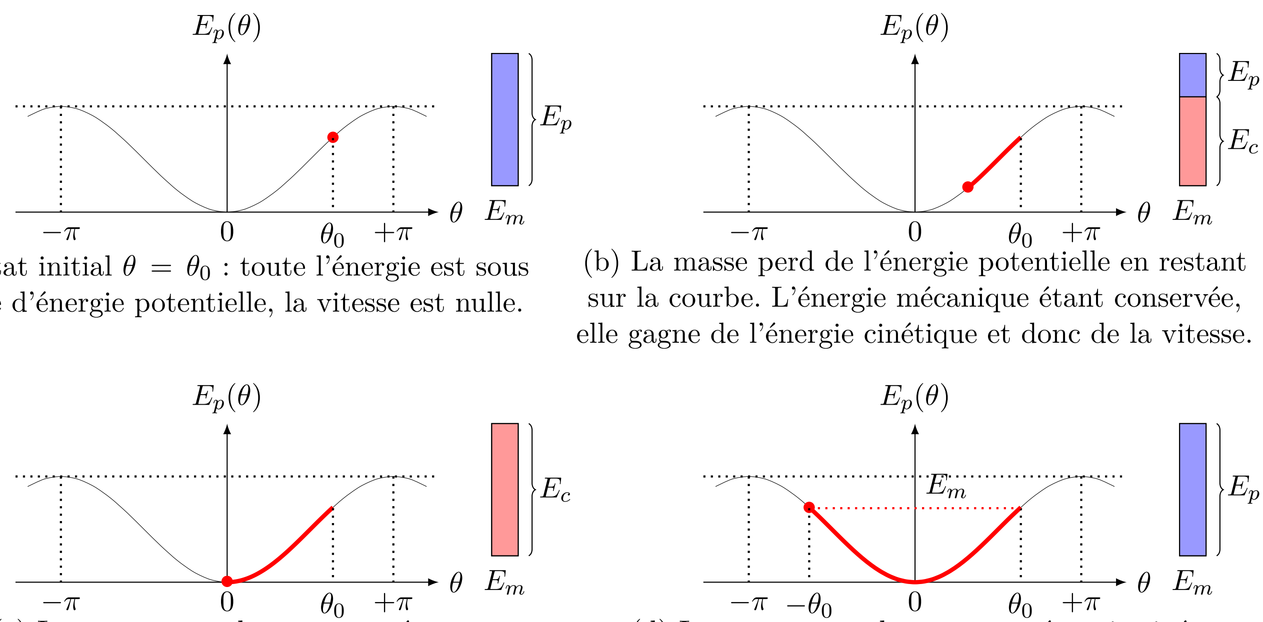
Donc l'énergie potentielle est :

$$Ep(\theta) = mgz(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)$$



Les positions d'équilibre stables sont -2π, 0, 2π, ... et les positions d'équilibre stables sont $-\pi$, π, ...

Cas $E_m < 2mgR$: On observe une oscillation autour du point d'équilibre le plus proche. Nous avons vu que celle-ci était sinusoïdale au très petits angles (typiquement plus petit que 20 $^\circ$).



(a) État initial $\theta = \theta_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, la vitesse est nulle.

(b) La masse perd de l'énergie potentielle en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.

(c) La masse a perdu toute son énergie potentielle. Son énergie cinétique, et donc sa vitesse, est maximale.

(d) La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximal $-\theta_0$. Ensuite, la masse repart dans l'autre direction et oscille.

Cas $E_m > 2mgR$: Le pendule tourne autour de l'axe de rotation. Lorsque le pendule arrive en $\theta = \pi$, l'énergie potentielle est maximale mais il lui reste encore de l'énergie cinétique. On observe donc des rotations. La vitesse n'est pas constante, elle est plus faible en haut qu'en bas (par conservation de l'énergie mécanique).

On pourra observer les deux animations :
www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/pend_pesant1.php
www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.php

5.4 Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable

On peut écrire le **développement limité** de l'énergie potentielle au voisinage d'un point

$$E_p(x) = E_p(x_0) + \frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$$

Vous aurez l'occasion d'en reparler en cours de maths. Au voisinage d'une position d'équilibre :

$$\frac{\partial E_p}{\partial x}(x_0) = 0$$

Notons $k = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$. L'énergie mécanique est :

$$E_m = E_c + E_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

Dans le cas où l'énergie se conserve $\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0$ ainsi :

$$\frac{1}{2}m \times (2\ddot{x}\dot{x}) + \frac{1}{2}k \times 2\dot{x}(x-x_0)$$

On a :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}(x-x_0) = 0}$$

C'est l'équation de l'oscillateur harmonique : le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ avec $k = \frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0)$.

Remarque. Dans le cas d'un équilibre instable, notons $k = -\frac{\partial^2 E_p}{\partial x^2}(x_0) > 0$. On obtient par le même raisonnement :

$$\ddot{x} - \frac{k}{m}(x-x_0) = 0$$

La solution est de la forme :

$$x - x_0 = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t}$$

Pour un écart ε de la position d'équilibre et aucune vitesse initiale, on a :

$$x - x_0 = \varepsilon \cosh(\omega_0 t)$$

Au voisinage d'un point d'équilibre instable, le mobile s'écarte exponentiellement de la position d'équilibre instable.