

Mécanique du solide

On veut généraliser les lois de la mécanique du point matériel à des systèmes constitués de plusieurs points matériels, ici pour des solides indéformables.

I Système de points matériels

A Systèmes discret et continu

Un solide peut être vu comme un ensemble de points matériels auquel on peut appliquer le PFD. On en distingue deux types :

Définition

Système discret

Un ensemble de n points matériels M_i de masses m_i FIGURE

Système continu

Un ensemble d'éléments de volumes dV de masse dm , de position M . FIGURE

Sauf cas particuliers, on considérera des systèmes **discrets** et fermés (tous les points restent dans le système).

B Centre d'inertie

Définition

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité** G d'un ensemble de points matériels M_i de masses m_i telles que $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ est défini par :

$$m_{\text{tot}} \overrightarrow{OG} = \sum_i m_i \overrightarrow{OM_i} \Leftrightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{GM_i} = \vec{0}$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

C Mouvements d'un solide indéformable

Définition

Un solide **indéformable** est un ensemble de points tels que la distance entre deux points quelconques soit constante :

$$\forall (M_1, M_2) \in (\text{solide}), \quad M_1 M_2 = \text{cte}$$

Un solide peut avoir un mouvement complexe. Dans le cadre du programme, on se limite à deux situations.

- la translation : tous les points ont le même vecteur vitesse. Dans ce cas, la connaissance du mouvement d'un des points permet de connaître le mouvement du solide. On a déjà vu le cas de la translation rectiligne (véhiculé en mouvement sur une route rectiligne), de la translation circulaire (cas de la grande roue), de la translation parabolique (cas d'un objet en chute libre sans mouvement de rotation initial).

- la rotation : tous les points ont un mouvement circulaire autour d'un axe z . C'est le cas d'un rotor de moteur. Attention, dans le cas d'une roue de voiture, l'axe de rotation n'est fixe que dans le référentiel de la voiture. Dans ce cas, la vitesse de chaque point est

$$\vec{v} = r\dot{\theta}\vec{u}_\theta$$

où r désigne la distance à l'axe de rotation, $\dot{\theta}$ la vitesse angulaire.

I.C.1 Translation

Définition : translation

Un solide en mouvement est en **translation** si son **orientation est fixe** au cours du mouvement.

Ainsi, de manière équivalente :

- 1) $\forall (M_1, M_2) \in (\text{solide}), \quad \overrightarrow{M_1 M_2} = \text{cte};$
- 2) $\forall t \text{ et } \forall (M_1, M_2) \in (\text{solide}), \quad \vec{v}(M_1) = \vec{v}(M_2).$

Alors, la connaissance du mouvement d'un point du solide en translation permet de connaître le mouvement de tout point du solide ; on prendra habituellement le centre d'inertie.

Exemples

- 1) Translation quelconque :
- 2) Translation rectiligne : chaque point décrit une droite.
- 3) Translation circulaire : chaque point décrit un arc de cercle.

I.C.2 Rotation

Définition : rotation

Un solide est dit en **mouvement de rotation** autour d'un **axe fixe** Δ lorsque tous ses points possèdent un **mouvement circulaire** autour de cet axe.

Conséquence

Tous les points du solide \mathcal{S} parcourent un cercle à la **même vitesse angulaire** $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$; ils sont donc animés avec les vitesses de rotations :

$$\vec{v}_{M/\mathcal{R}}(t) = r_M \dot{\theta}(t) \vec{u}_\theta = r_M \omega(t) \vec{u}_\theta$$

Ce mouvement est décrit complètement par le **vecteur rotation**

$$\vec{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \omega(t) \vec{u}_\Delta$$

Exemple

Rotation autour de l'axe Δ fixe :

I.C.3 Translation circulaire ou rotation ?

| Translation circulaire | Rotation autour d'un axe fixe |
|---|--|
| Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même rayon mais de centre différent | Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même centre mais de rayon différent. |

II Rappel : TRC

A Quantité de mouvement d'un ensemble de points

On souhaiterait pouvoir étudier un ensemble de points comme le mouvement d'un point unique, comme le centre d'inertie. Pour cela, il faut étudier la quantité de mouvement d'un ensemble de points.

Définition

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble \mathcal{S} de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{p}(M_i) = \sum_i m_i \vec{v}(M_i)$$

Pour que les choses soient simples, il faudrait donc que $\vec{p}(\mathcal{S})$ soit relié au centre d'inertie. Ça tombe bien :

Propriété : quantité de mouvement d'un système

La quantité de mouvement d'un ensemble de points est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} :

$$\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(G)$$

Tout se passe comme si la masse était concentrée en G .

Démonstration

$$m_{\text{tot}} \vec{v}(G) = m_{\text{tot}} \frac{d\vec{OG}}{dt} = \underbrace{\sum_i m_i \frac{d\vec{OM}_i}{dt}}_{\vec{p}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(G)} \quad \blacksquare$$

B Forces intérieures et extérieures

Si on peut étudier la cinématique d'un corps par l'étude de son centre de gravité, comment les forces interviennent-elles sur cet ensemble de points ? Les forces s'appliquant aux points M_i de \mathcal{S} se rangent en deux catégories :

- 1) Les forces intérieures $\vec{F}_{\text{int} \rightarrow M_i}$ exercées par les autres points M_j du système, avec $j \neq i$;
- 2) Les forces extérieures $F f_{\text{ext} \rightarrow M_i}$ exercées par une origine externe au système.

Les forces intérieures ont cependant une propriété remarquable :

Propriété : résultante des forces intérieures

La résultante \vec{F}_{int} des forces intérieures d'un système est toujours nulle.

Démonstration

La résultante des forces intérieures exercées sur M_i s'écrit

$$\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} = \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Ainsi la résultante des forces intérieures au système s'écrit

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} = \sum_i \sum_{j \neq i} \vec{F}_{j \rightarrow i}$$

Or, d'après la troisième loi de NEWTON, $\forall i \neq j, \vec{F}_{j \rightarrow i} = -\vec{F}_{i \rightarrow j}$; ainsi, les termes de la somme précédente s'annulent deux à deux, et on a bien

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_i \vec{F}_{\text{int} \rightarrow i} = \vec{0}$$

Rien de remarquable ne se produit pour les forces extérieures, et on aura simplement

$$\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_i \vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}$$

C Théorème de la résultante cinétique

Théorème de la résultante cinétique

Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel s'applique à un ensemble de point en prenant pour point matériel le centre d'inertie G affecté de la masse totale m_{tot} du système, en ne considérant que les forces extérieures s'appliquant à l'ensemble :

$$\frac{d\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} = m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} &= \sum_i \frac{d\vec{p}_{/\mathcal{R}}(M_i)}{dt} \\ &= \sum_i \underbrace{\vec{F}_{\text{int} \rightarrow i}}_{=\vec{0} \text{ par 3e loi}} + \sum_i \underbrace{\vec{F}_{\text{ext} \rightarrow i}}_{=\vec{F}_{\text{ext}} \text{ par déf.}} \\ \Leftrightarrow \frac{d\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{dt} &= m_{\text{tot}} \frac{d\vec{v}(G)}{dt} = \vec{F}_{\text{ext}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans la suite, on étudiera le mouvement du centre de gravité, de masse m_{tot} , soumis aux forces extérieures au système.

III Énergétique des systèmes de points

On l'a vu dans les chapitres précédents, différentes approches sont possibles en mécanique selon le résultat désiré. Si le PFD permet d'avoir l'information dynamique sur le centre d'inertie, on cherche à établir les résultats de l'approche énergétique aux solides. Commençons par le plus simple :

A Cinétique

Définition

Comme pour la masse ou la quantité de mouvement, l'énergie cinétique d'un solide est la **somme des énergies cinétiques de chaque point le constituant** :

$$\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \sum_i \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(M_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i v_{i/\mathcal{R}}^2$$

B Puissance intérieure

Pour pouvoir appliquer les théorèmes énergétiques, il faut détailler les puissances des forces s'appliquant au solide, et notamment les forces intérieures. TBD.

C Théorèmes**IV Moments pour un système de points**

A Moment cinétique et moment d'inertie

Mélange Olivier/Schweitzer

B Moments intérieurs

Olivier

C TMC

Olivier

Analogie Schweitzer

D Énergie cinétique de rotation

Schweitzer

V Cas particuliers et application

Schweitzer : couple, pivot ; aucun moment = pas de frottements

Schweitzer pendule pesant