Sujet 1 – corrigé

I Bombe nucléaire

Lorsqu'il est percuté par un neutron, l'uranium ^{235}U peut se décomposer en atomes radioactifs et ré-émettre plusieurs neutrons. Ce mécanisme permet d'envisager l'existence de réactions en chaines (contrôlées dans un réacteur **ou** non contrôlées dans une bombe). Soit $n(M,t)$ le nombre de neutron par unité de volume et j_{th} le vecteur flux de neutrons. n est solution de l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\nu - 1}{\tau} n$$

ν est un coefficient adimensionné caractérisant le nombre de neutrons efficaces produit par chaque fission, d'où le facteur $\nu - 1$ puisque par ailleurs chaque fission consomme un neutron pour être initiée. On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive. On étudie une sphère d'^{235}U de rayon R et suppose que la diffusion des neutrons dans la sphère s'effectue avec un coefficient de diffusion D.

On cherche dans le cas général une solution de la forme $n(r,t) = f(r)g(t)$.

1. Montrer que l'équation proposée peut se réécrire :

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = D\frac{\Delta f}{f} - \frac{1-\nu}{\tau}$$

Réponse :
On obtient à l'aide de la loi de Fick

$$\begin{aligned} \frac{\partial n}{\partial t} &= -D\Delta n + \frac{\nu-1}{\tau} n \\ \Rightarrow f(r)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) &= -Dg(t)\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(rf(r)\right) - \frac{1-\nu}{\tau}f(r)g(t) \\ \Rightarrow \frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) &= -D\frac{\Delta f(r)}{f(r)} - \frac{1-\nu}{\tau} \end{aligned}$$

2. En déduire que g est de la forme : $g(t) = g_0 e^{at}$ où g_0 et a sont des constantes qu'on ne demande pas de calculer pour le moment. À quelle condition sur a obtiendra-t-on une réaction en chaine ?

Réponse :
Les deux quantités sont égales quels que soient t et r donc doivent être constantes. On appelle cette constante a et on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = ga \Rightarrow g = g_0 e^{at}$$

On obtient une réaction en chaîne si la solution est temporellement divergente soit $a > 0$.

3. Montrez que la fonction $r \to rf(r)$ est solution d'une équation différentielle classique.

Réponse :
On a $D\Delta f + \frac{\nu-1}{\tau}f = af$. On obtient alors simplement :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rf) + \frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right) rf = 0$$

Et on reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique si $\frac{\nu-1}{\tau} - a > 0$.

4. Dans la sphère, $n(r,t)$ s'annule à tout instant en $r = R$ mais ne s'annule pas à l'intérieur de la sphère. On pose
$$k = \sqrt{\frac{1}{D}\left(\frac{\nu - 1}{\tau} - a\right)} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{D}\left(\frac{\nu - 1}{\tau} - a\right) > 0$$
Calculer $f(r)$ à une constante multiplicative près notée f_0.

Réponse :
On obtient $rf(r) = A\cos(kr) + B\sin(kr)$ soit $f(r) = \frac{A}{r}\cos(kr) + \frac{B}{r}\sin(kr)$ Cette solution ne devant pas diverger en $r \to 0$, on obtient $A = 0$, On observe de plus que $\sin(kR) = 0$ soit $k = p\frac{\pi}{R}$, $p \in \mathbb{Z}$. $f(r)$ devant rester positive, on trouve $p = 1$ et donc :
$$f(r) = \frac{f_0}{r}\sin\left(\pi\frac{r}{R}\right)$$

5. Exprimez le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir une réaction en chaine, en fonction de ν, D et τ.

Réponse :
On a $k = \frac{\pi}{R} = \sqrt{\frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right)}$. On en déduit $a = \frac{\nu-1}{\tau} - D\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$.
Dans le cas limite de la réaction en chaine, on a $a = 0$ et donc
$$R_c = \sqrt{\frac{\pi^2 D\tau}{\nu - 1}}$$

6. On donne pour l'uranium 235 $\rho = 19 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\pi^2 D\tau = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$ et $\nu = 2{,}5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c ainsi que de la masse critique correspondante.

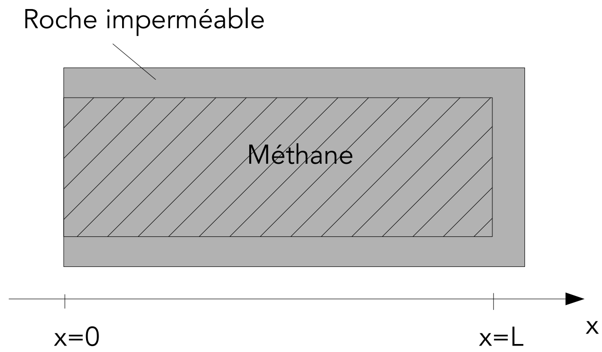
Réponse :
$R_c = 0{,}12\ m$ et $m_c = \rho\frac{4}{3}\pi R_c^3 = 140\ kg$

Pour cette géométrie sphérique, on a $\Delta n = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rn)$

Sujet 2 – corrigé

I Diffusion de méthane dans un gisement

On considère un gisement de méthane de volume V cylindrique de section S et de longueur L fermé sur sa surface latérale et à l'une de ses extrémités par de la roche imperméable. Le méthane occupe le volume qV où q est la porosité du milieu. On note $P(x,t)$ la pression du méthane et $\mu(x,t)$ sa masse volumique. La température est constante et uniforme et $P(x=0,t) = P_0$ est constante.



La masse de gaz traversant la surface S d'abscisse x pendant la durée dt est proportionnelle au gradient de pression $\delta m = -kS\dfrac{\partial P}{\partial x}dt$ où k est un coefficient dépendant de la viscosité, de la masse volumique du gaz et de la nature du gisement.

1. Donner la relation entre μ et P.

   Réponse :
   D'après la relation du GP, on obtient $P = \mu\frac{R}{M}T$. Il s'agit d'une relation de proportionnalité car la température T est constante dans le milieu.

2. Déterminer, en fonction de q, S, μ et $\mathrm{d}x$, la masse de méthane contenue à la date t dans le volume élémentaire contenu entre x et $x+\mathrm{d}x$. Montrer que la pression vérifie $D\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial P}{\partial t}$. Exprimer D en fonction des données.

   Réponse :
   On a simplement $dm = \mu Sq\mathrm{d}x = \frac{SMq}{RT}P\mathrm{d}x$. On peut ensuite effectuer un bilan de quantité de matière pour ce système :
   $$dm = -kSdt\frac{\partial P}{\partial x}(x) + kSdt\frac{\partial P}{\partial x}(x+\mathrm{d}x) = kS\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dt\mathrm{d}x$$
   On obtient au final en combinant ces deux expressions :
   $$\frac{SMq}{RT}P\mathrm{d}x = kS\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dtdx \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{kRT}{Mq}\Delta P$$
   D'où le résultat avec $D = \frac{kRT}{Mq}$

3. Dans quelle situation trouve-t-on une équation analogue ?

   Réponse :
   Cette équation est analogue à l'équation de la diffusion de particule. Ou bien la diffusion thermique.

4. Au regard de l'énoncé, que peut-on dire de $\dfrac{\partial P}{\partial x}(L)$

   Réponse :
   La parois est imperméable aux particules donc il ne pourra y avoir de flux et donc la dérivée spatiale de la pression y est nulle.

5. On cherche une solution de la forme $P(x,t) = P_0 + P_1 \sin(ax)e^{-\frac{t}{\tau}}$. Déterminer τ. Déterminer les valeurs possibles de a en fonction de L. On prend a égal à sa valeur minimale. Faire l'application numérique pour τ.

   Réponse :
   Il convient d'injecter cette solution dans l'équation précédente :

$$-\frac{P_1}{\tau}\sin(ax)e^{-t/\tau} = -DP_1a^2\sin(ax)e^{-t/\tau}$$

   Cette relation est vérifiée lorsque $\tau = \frac{1}{Da^2}$. On doit ensuite déterminer les conditions limites pour trouver a. La condition limite en $x = 0$ est toujours vérifiée par la solution proposée. Or, on a montré que $\dfrac{\partial P}{\partial r}(L) = 0$ et donc $\cos(aL) = 0$ soit $aL = \pi/2$ d'où $a = \frac{\pi}{2L}$

6. Déterminer la masse $m(t)$ de méthane contenu dans le gisement à la date t.

   Réponse :
   on a $\mu = \frac{PM}{RT}$ t on peut intégrer cette expression :

$$m(t) = \int_0^L \mu(x,t)S\mathrm{d}x = \frac{MS}{RT}\int_0^L P_0 + P_1\sin(ax)e^{-t/\tau}\mathrm{d}x = \frac{MS}{RT}\left(P_0L + \frac{2L}{\pi}P_1e^{-t/\tau}\right)$$

Données : $D = 3{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{U\cdot S\cdot I\cdot}$; $q = 0{,}15$; $L = 5{,}0\,\mathrm{km}$; masse molaire du méthane $16{,}0\,\mathrm{g/mol}$.

Sujet 3 – corrigé

I Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5\,\text{mm}$, et de longueur L jouant le rôle d'une ailette de refroidissement.
En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330\,\text{K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300\,\text{K}$. On appelle $\lambda = 400\,\text{W}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12\,\text{W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$
On considère dans un premier temps la barre quasi-infinie.

1. Dessinez un schéma correspondant à la situation et dans lequel une tranche d'épaisseur dx sera mise en valeur. Quelle est la section de cette tranche ? Et sa surface latérale ?

   Réponse :
   On a pour la section : pia^2 et pour la surface latérale : $2\pi a dx$.

2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ dans la barre en régime permanent.

   Réponse :
   On effectue un bilan thermodynamique sur une petite tranche d'épaisseur dx de la tige :

   $$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \pi a^2(F(x) - F(x+\mathrm{d}x)) + (2\pi a\mathrm{d}x)h(T_e - T(x)) \qquad \text{avec} \quad F(x) = -\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T$$

   De plus, l'application du premier principe donne : $dU = \delta q = 0$ en régime permanent et on en déduit :

   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}T - \frac{2h}{\lambda a}T = -\frac{2h}{\lambda a}T_e}$$

3. La résoudre en tenant compte de deux conditions aux limites qu'on précisera.

   Réponse :
   Cette équation peut se résoudre en utilisant les fonction exponentielles :

   $$T(x) = \alpha\exp(x/\delta) + \beta\exp(-x/\delta) + T_e$$

   On utilise comme première CL, la température en $x = 0$ qui donne $\alpha + \beta = T_0 - T_e$. On suppose de plus qu'à l'infini, la température de la tige tend vers celle de l'extérieur. On en déduit $\alpha = 0$ d'où au final :

   $$\boxed{T(x) = (T_0 - T_e)e^{-x/\delta} + T_e}$$

4. Calculez δ. Que représente cette grandeur ?

   Réponse :
   $\boxed{\delta \approx 28\,\text{cm}}$ représente la profondeur de pénétration sous laquelle on peut observer l'influence de la température de surface T_0. Au delà de quelque δ, on a $T(x) \approx T_e$

5. On considère maintenant la tige de longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$. Peut-on toujours la considérer infinie ? Pourquoi ?

   Réponse :
   non, car on n' a pas $L \gg \delta$. La température à l'extrémité de l'ailette n'est donc pas égale à la température extérieure.

6. En déduire le nouveau jeu de conditions limites permettant de résoudre le problème.

   Réponse :
   Il suffit de reconsidérer la seconde condition limite à l'aide de la continuité du flux thermique en $x = L$:

$$\boxed{\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(L) = h(T(L) - T_e)}$$

   La première CL n'est elle, pas changée : $T(0) = T_0$.

Sujet 4 – corrigé

I Téléobjectif d'appareil photographique

Modélisons un téléobjectif d'appareil photo par une association de lentilles suivie d'un capteur CCD de taille $15{,}8 \times 23{,}6\mathrm{mm}^2$. La lentille d'entrée est convergente, de vergence $5{,}0\,\delta$. Une seconde lentille est présente entre la lentille d'entrée et le capteur, à 15,5 cm de la lentille d'entrée. Elle est divergente, de vergence $-20\,\delta$. La distance entre la lentille d'entrée de l'objectif et le capteur, notée habituellement Δ, est appelée encombrement du téléobjectif. Cet appareil est utilisé pour photographier un chamois de hauteur 80 cm au garot situé à 150 m du photographe.

1. En l'absence de la lentille divergente, quelle serait la taille de l'image du chamois sur le capteur? Commenter.

   Réponse :
   Notons, dans toute la suite, D la distance entre le photographe et le chamois, et d la distance entre les deux lentilles du téléobjectif.

   Le chamois est à une distance du photographe bien supérieure à la focale de la lentille d'entrée (L_1), qui vaut $f_1' = 1/V_1 = 20\,\mathrm{cm}$: il est donc à l'infini optique de cette lentille. On peut donc légitimement faire l'approximation que la distance entre le centre optique de la lentille d'entrée et le capteur est égale à f_1'. Par conséquent, le grandissement de la lentille d'entrée vaut

$$\gamma_1 = \frac{f_1'}{D} = 1{,}3 \times 10^{-3}$$

   La hauteur du chamois sur le capteur CCD est donc de l'ordre de 1,1 mm , ce qui signifie que moins de 10% de la hauteur de la photo est occupée par le chamois...

2. Quelle est en fait la taille de l'image formée par le système composé ?

   Réponse :
   Le téléobjectif complet est un système optique composé, où l'image formée par la lentille convergente (L_1) sert d'objet à la lentille divergente L_2. Comme $f_1' > d$, il s'agit d'un objet virtuel situé à une distance $\overline{O_2A} = f_1' - d = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ avant le centre optique de la lentille divergente. Utilisons la formule de grandissement avec origine au foyer objet. On a alors besoin de

$$\overline{F_2A} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2A} = -f_2 + \overline{O_2A}$$

   On en déduit alors le grandissement dû à la deuxième lentille selon

$$\gamma_2 = \frac{f_2}{-f_2 + \overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2\overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2(f_1' - d)} = 10$$

   <u>Remarque</u> : Attention aux signes : la vergence est égale à l'opposée de l'inverse de la distance focale objet, soit ici $V_2 \times f_2 = -1$!

   Le grandissement du système optique complet est égal au produit des grandissements des deux lentilles le composant. Par conséquent,

$$\gamma = \gamma_1\gamma_2 = -\frac{f_1'}{D\left[1 + V_2(f_1' - d)\right]} = -1{,}3 \times 10^{-2}$$

   et on déduit que l'image du chamois formée par le téléobjectif mesure 10,6 mm , ce qui peut tout à fait correspondre à une photo bien cadrée compte tenu de la taille du capteur.

3. Quel est alors l'encombrement du téléobjectif?

Réponse :
Pour que l'image soit nette, le capteur doit être placée là où l'image finale du chamois est formée. Puisque l'on connaît tant le grandissement γ_2 que la distance $\overline{O_2A}$, on déduit de la formule de grandissement avec origine au centre que le capteur doit être placé à une distance

$$d' = \gamma_2 \overline{O_2A} = 45\,\text{cm}$$

en aval de la lentille divergente L_2. L'encombrement du téléobjectif vaut donc

$$\Delta = d + d' = 60\,\text{cm}$$

4. Quelle serait la distance focale d'une lentille convergente qui donnerait à elle seule une image de la même dimension que la précédente? En déduire ce que vaudrait l'encombrement du téléobjectif dans ce cas.

Réponse :
La lentille divergente permet de multiplier le grandissement par un facteur 10. En utilisant directement le résultat de la question 1, il faudrait que la lentille L_1 ait une focale dix fois supérieure, soit 2,0 m.

Compte tenu des distances mises en jeu, l'objectif du capteur doit être placé pratiquement dans le plan focal image de la lentille L_1. L'encombrement d'un tel objectif vaudrait donc 2,0 m , ce qui serait très peu pratique à manipuler.

Sujet 5 – corrigé

I Lunette astronomique

On considère une lunette astronomique formée d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_1' = \overline{O_1F_1'}$ et d'un oculaire constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_2' = \overline{O_2F_2'}$. Ces deux lentilles ont même axe optique Δ. On rappelle qu'un œil normal voit un objet sans accommoder quand celui-ci est placé à l'infini. On souhaite observer la planète Mars, qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent 2α, symétriquement par rapport à l'axe optique de la lunette.
Pour voir la planète nette à travers la lunette, on forme un système afocal.

1. Définir un système afocal. Que cela implique-t-il pour les positions des lentilles ?

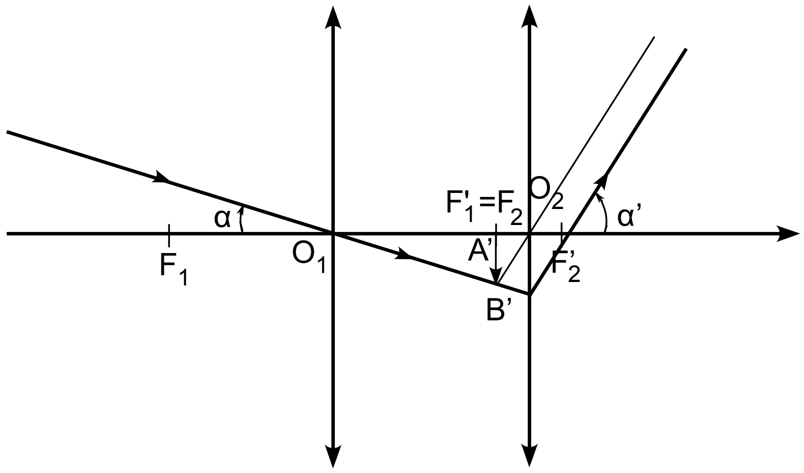
   Réponse :
   Un système est dit afocal si ses foyers sont rejetés à l'infini. Un objet à l'infini donne alors une image à l'infini.
   $$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$
   L'image d'un objet à l'infini par la lentille L_1 est le foyer image F_1'. Si on veut que l'image de F_1' par la lentille L_2 soit à l'infini, il faut que l'objet soit au foyer objet de cette lentille.

2. On note α l'angle sous lequel est vu le bord extrême de la planète Mars. Cet objet est supposé être à l'infini. Dans le cas où $f_1' = 5f_2'$, faire une construction graphique. On placera $\overline{A'B'}$ l'image intermédiaire sur ce schéma.

   On note α' l'angle orienté que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette par rapport à l'axe optique.

   Placer l'angle α' sur la figure précédente. L'image est-elle droite ou renversée ?

   Réponse :
   L'image est renversée car l'angle α' n'est pas orienté dans le même sens que α.



3. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \alpha'/\alpha$. Exprimer G en fonction de f_1' et de f_2'. Commenter son signe. On rappelle que les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss.

Réponse :
Les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss, donc les angles α et α' sont petits.
On exprime la tangente de l'angle α dans le triangle $O_1A'B'$:

$$\tan(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} \sim \alpha < 0$$

On exprime la tangente de l'angle α' dans le triangle $O_2A'B'$:

$$\tan(\alpha') = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}} \sim \alpha' > 0$$

On en déduit le grossissement : $\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'} < 0}$.

Le signe est cohérent avec le fait que α' et α sont de signe contraire.

On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3 de distance focale $f_3' = \overline{O_3F_3'}$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

4. Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?

Réponse :
La lentille L_3 doit conjuguer F_1' et F_2.

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_3} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

5. On appelle γ_3, le grandissement de la lentille L_3. En déduire $\overline{O_3F_1'}$ en fonction de f_3' et γ_3.

Réponse :
<u>Méthode 1 :</u>
On utilise la relation de Newton pour le grandissement sur L_3 :

$$\gamma_3 = \frac{f_3'}{\overline{F_3F_1'}} = \frac{f_3'}{f_3' + \overline{O_3F_1'}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_3 \cdot (f_3' + \overline{O_3F_1'}) = f_3'$$

$$\boxed{\overline{O_3F_1'} = f_3' \left(\frac{1-\gamma_3}{\gamma_3}\right)}$$

<u>Méthode 2 :</u>
Le grandissement est défini par

$$\gamma_3 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}}$$

De plus, on peut appliquer la relation de conjugaison de Descartes à la lentille L_3 :

$$\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'}$$

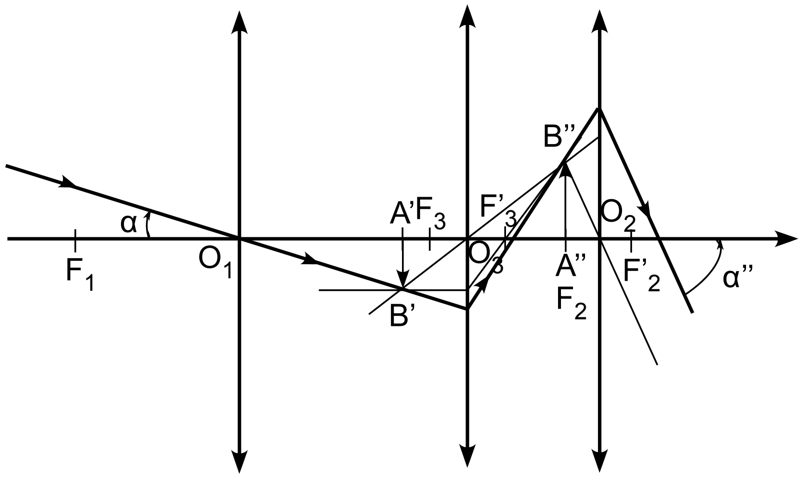
On peux alors combiner ces résultats pour obtenir :

$$\frac{1}{\gamma_3\overline{O_3F_1'}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_3F_1'}}\left(\frac{1}{\gamma_3} - 1\right) = \frac{1}{f_3'} \Rightarrow \overline{O_3F_1'} = f_3'\left(\frac{1-\gamma_3}{\gamma_3}\right)$$

et le résultat est bien identique.

6. Faire un tracé de rayons de cette situation. On appellera $\overline{A'B'}$ la première image intermédiaire et $\overline{A''B''}$ la seconde image intermédiaire. Déterminer graphiquement ces images intermédiaires, ainsi que les positions des foyers objet F_3 et image F_3' de la lentille L_3.

Réponse :



Remarque : Pour réaliser la construction, on peut obtenir l'image $A'B'$ de l'objet à l'infini par (L_1) puis placer la lentille (L_3) de sorte qu'elle donne de $A'B'$ une image $A''B''$ réelle. Il suffit ensuite de rajouter la lentille (L_2) en veillant à ce que $A''B''$ se trouve dans le plan focal objet de (L_2).

7. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de γ_3, f_1' et f_2'. On notera α'' l'angle sous lequel est vue l'image finale que l'on placera sur la figure précédente.

Réponse :

Par définition $G' = \dfrac{\alpha''}{\alpha}$. On exprime ces angles dans l'approximation des petits angles (conditions de Gauss).

Dans le triangle $O_1A'B'$ (bien noter que l'angle α est négatif):

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \approx \alpha$$

Dans le triangle $O_2A''B''$ (l'angle α'' est négatif):

$$\tan\alpha'' = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{\overline{A''B''}}{-f_2'} \approx \alpha''$$

Ainsi :

$$\alpha \approx \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \quad ; \quad \alpha'' \approx \frac{\overline{A''B''}}{-f_2'}$$

Par définition $\gamma_3 = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$

On en déduit le grossissement : $\boxed{G' = -\dfrac{f_1'}{f_2'} \cdot \gamma_3 = \gamma_3 \cdot G}$

L_3 conjugue un objet réel et une image réelle donc $\gamma_3 < 0$, donc $G' > 0$. On ne peut pas conclure sur le fait que $G' > |G|$ car on ne sait pas si $|\gamma_3| > 1$ (cela dépend de la valeur de f_3').