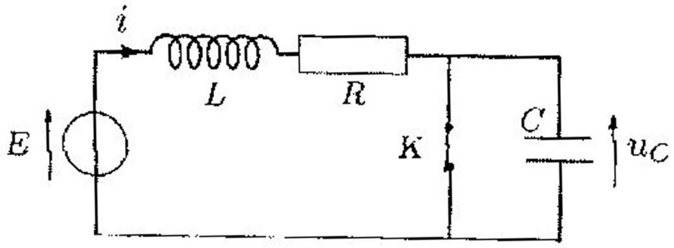
TD : oscillateurs harmonique et amorti

I Etude d'un RLC série en régime transitoire

Indiquer la ou les bonnes réponses en justifiant tout votre raisonnement.
On considère un circuit RLC série, alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice E constante comme schématisé ci-contre. Le condensateur peut être court-circuité lorsque l'interrupteur K est fermé. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la bobine et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur C.



Le condensateur est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue, pour que le régime permanent soit établi. A l'instant pris comme origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

1. Que valent l'intensité $i\left(0^+\right)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$, succédant immédiatement à l'ouverture de l'interrupteur K. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $i\left(0^+\right) = 0$
   - B - $i\left(0^+\right) = \dfrac{E}{R}$
   - C - $u_C\left(0^+\right) = 0$
   - D - $u_C\left(0^+\right) = E$

2. Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$. On la mettra sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C(t)}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C(t)}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C(t) = \alpha$$

   Exprimer ω_0 et Q.
   - A - $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$
   - B - $\omega_0 = \dfrac{1}{LC}$
   - C - $Q = R\sqrt{\dfrac{L}{C}}$
   - D - $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$

3. Exprimer α.
   - A - $\alpha = 0$
   - B - $\alpha = E$
   - C - $\alpha = QE$
   - D - $\alpha = {\omega_0}^2\, E$
4. Que peut-on affirmer concernant le facteur de qualité ?
   - A - La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 2$.
   - B - La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 1/2$.
   - C - Plus la valeur de l'inductance est élevée, plus le facteur de qualité est faible.
   - D - Plus la valeur de la capacité est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

Dans la suite, on considère que la bobine possède une inductance L=50 mH et que la capacité du condensateur vaut $C = 20\,\mu\text{F}$. On souhaite obtenir un facteur de qualité $Q = 10$.

5. Calculer la valeur à donner à la résistance R du résistor.
   - A - $R = 0{,}002\,\Omega$
   - B - $R = 0{,}2\,\Omega$
   - C - $R = 5\,\Omega$
   - D - $R = 500\,\Omega$

On admet alors que la tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C\,(t) = \exp\left\{\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right\}\left[A\cos\left(\omega_a t\right) + B\sin\left(\omega_a t\right)\right] + u_{CP}$$

6. Exprimer τ en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $\tau = \dfrac{\omega_0}{2Q}$
   - B - $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0}$
   - C - $\tau = \dfrac{\omega_0}{Q}$
   - D - $\tau = \dfrac{Q}{\omega_0}$
7. Exprimer la pseudo-pulsation ω_a en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $\omega_a = \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$
   - B - $\omega_a = \omega_0\sqrt{\dfrac{1}{4Q^2} - 1}$
   - C - $\omega_a = \omega_0\left(1 + \dfrac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$
   - D - $\omega_a = \dfrac{\omega_0}{\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}}$

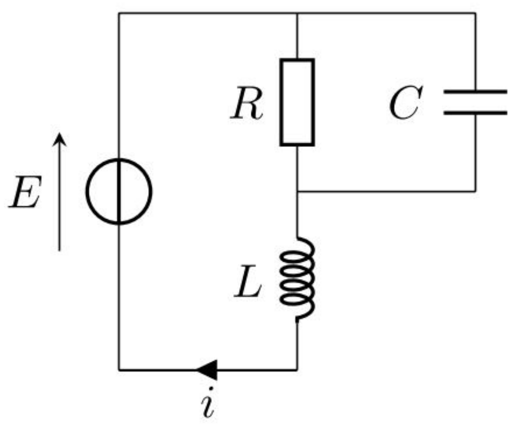
8. Exprimer u_{CP} en fonction de E. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $u_{CP} = E$
   - B - $u_{CP} = 0$
   - C - $u_{CP} = {\omega_0}^2\, E$
   - D - $u_{CP} = 2E$

9. Exprimer A. Justifier tout votre raisonnement.
   - A - $A = E$
   - B - $A = -E$
   - C - $A = 0$
   - D - $A = E/2$

10. Exprimer B. Justifier tout votre raisonnement.
    - A - $B = \dfrac{E}{\omega_a}\left(\dfrac{1}{RC} - \dfrac{1}{\tau}\right)$
    - B - $B = \dfrac{E}{RC\omega_a}$
    - C - $B = 0$
    - D - $B = \dfrac{E}{\tau\omega_a}$

II Oscillateur amorti RLC

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

2. L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

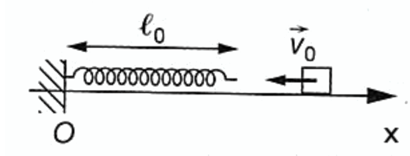
3. Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

4. Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

5. En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

III Masse percutant un ressort

Un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) fixé en O est initialement au repos. Une masse m glisse sans frottement à vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$ et s'accroche *définitivement* au ressort à l'instant $t = 0$.



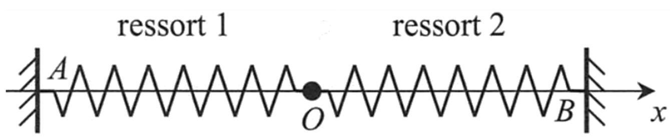
1. Déterminer l'équation du mouvement de la masse une fois qu'elle est accrochée (pour $t \geq 0$).

2. Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

3. À quelle condition la masse vient-elle percuter la paroi en O ?

IV Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse m est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction (Ox). Ce mobile est relié par deux ressort linéaires à deux points fixes A et B. On le repère par sa position x.



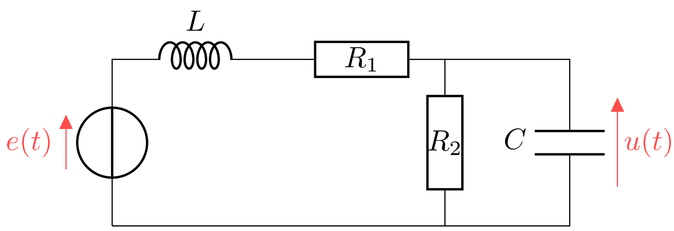
Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq} et le mobile se trouve à l'origine O de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre (lié au sol), considérée comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position $x_0 \neq 0$

1. Dans un premier temps, on néglige tout frottement.
   (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$.
   (b) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation ω_0 et la période T_0 propres en fonction de k et m.
   (c) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

2. En fait il existe entre le mobile et la tige un frottement de type visqueux linéaire, la force de frottement s'exprime $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$ (avec $\alpha > 0$ et $\vec{v}$ la vitesse de la masse m dans le référentiel terrestre).
   (a) Établir l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$. On posera $h = \dfrac{\alpha}{m}$.
   (b) Montrer que lorsque $\alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$, le mouvement comporte des oscillations amorties. Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales et exprimer la pseudo-période T en fonction de ω_0 et h.

V Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\left\{\begin{array}{lcl} e(t<0) & = & 0 \\ e(t \geq 0) & = & E \end{array}\right.$ dans le circuit ci-dessous.



1. Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

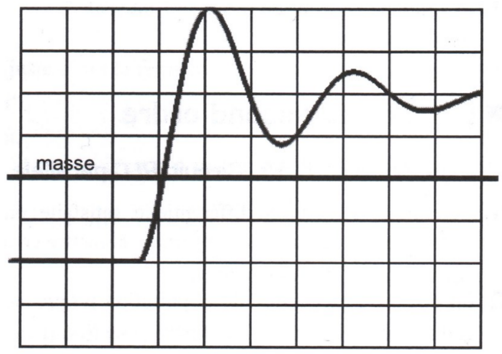
2. Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

3. On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.

   (a) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période T.

   (b) Déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)-u_\infty}{u(t+nT)-u_\infty}\right)}$$



1 div = 200 µs

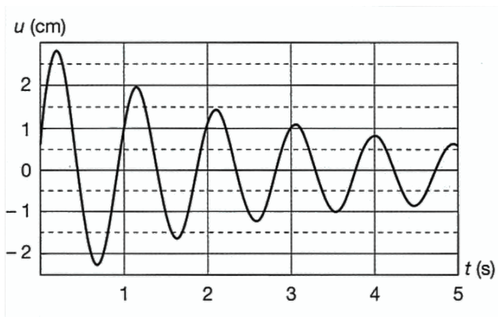
4. Exprimer $u(t)$ en fonction de u_∞, ω_0, λ et t (sans chercher à déterminer les constantes d'intégration).

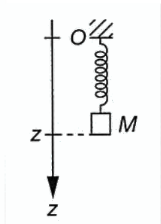
5. Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

6. Sachant que $R_1 = 200\,\Omega$, $R_2 = 5\,\mathrm{k}\Omega$ et $L = 500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

VI Décrément logarithmique mécanique

Une masse m est accrochée à un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N\,m^{-1}}$ et de longueur à vide $\ell_0 = 10\,\mathrm{cm}$, fixé au point O. En plus de son poids et de la force de rappel du ressort, la masse est soumise à une force de frottement fluide $\vec{F} = -\alpha\vec{v}$. Un capteur fournit l'évolution de $u(t) = z(t) - z_{\mathrm{eq}}$ au court du temps.





1. Établir l'équation d'évolution de $z(t)$. Quelle est la position d'équilibre z_{eq} de la masse ? En déduire une équation satisfaite par $u(t)$.

2. Exprimer la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q en fonction des données du problème.

3. Résoudre l'équation différentielle. Exprimer la pseudo-période T en fonction de $T_0 = \dfrac{2\pi}{\omega_0}$ et de Q.

4. Montrer que le décrément logarithmique δ, défini par

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln \left(\frac{u(t) - u_{\text{eq}}}{u(t+nT) - u_{\text{eq}}} \right)}$$

est indépendant du temps.

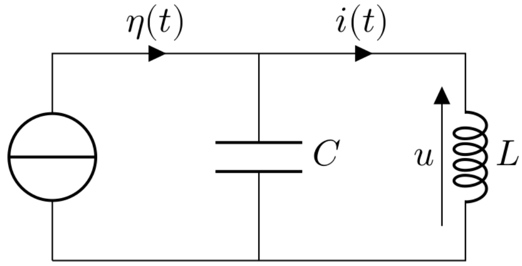
5. Comparer les données expérimentales à l'affirmation précédente. Commenter.

6. Estimer à l'aide des données expérimentales le facteur de qualité Q et la pseudo-pulsation ω.

7. En déduire les valeurs de m et α.

VII Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

Dans le circuit ci-contre, la source idéale de courant est brusquement éteinte. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.



1. Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

2. Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i.

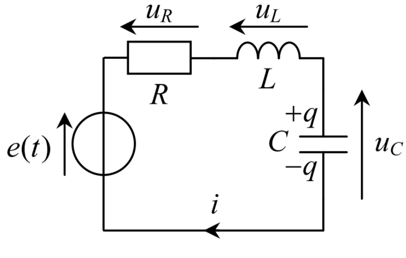
3. Retrouver cette équation par application des lois des nœuds et des mailles.

4. Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.

5. En déduire l'expression de $i(t)$.

VIII Étude énergétique d'un oscillateur amorti électrique

Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que : $\begin{cases} e(t<0) & = & 0 \\ e(t \geq 0) & = & E \end{cases}$. On pose $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



1. Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls.

2. Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2 q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 q = \frac{E}{L}$$

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

3. Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\mathrm{e}^{-\gamma t} + D$$

avec A, B et D des constantes à exprimer en fonction de C, E, ω_0 et γ.

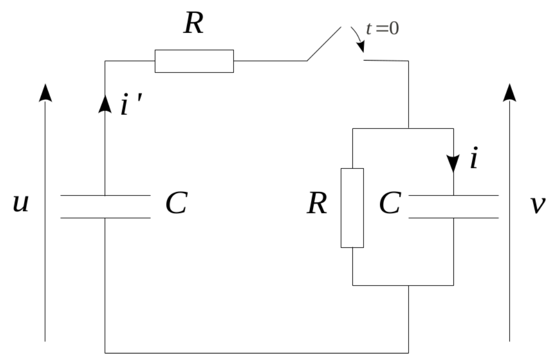
4. Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.

5. Donner l'allure des courbes $q(t)$ et $i(t)$. Quelles sont leurs valeurs à la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.

6. Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_G$ fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet JOULE dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \longrightarrow 0$.

IX Circuit de WIEN

On réalise le montage suivant. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, C traversé par i' étant initialement chargé et C traversé par i étant initialement déchargé.
On pose $\tau = RC$. Données : $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}$.



1. À partir de considérations physiques, préciser les valeurs de la tension v lorsque $t = 0$ et $t = \infty$.

2. Établir l'équation différentielle du second ordre dont la tension v est solution.

3. En déduire l'expression de $v(t)$ sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.

4. Donner l'allure du graphe correspondant à $v(t)$.