

/54 P1 Étude du module photographique d'un smartphone (D'après CCS MPI 2023)

En 1973, Martin Cooper invente, avec son équipe, le premier téléphone cellulaire. Depuis, l'usage du téléphone portable n'a cessé de croître, ce qui en fait l'un des biens de consommation les plus répandus de la planète.



Appareil photographique d'un téléphone portable

Résolution du capteur	4000×3000 pixels
Nombre d'ouverture	$N = 2,2$
Diagonale du capteur	$d = 1/3$ de pouce
Indice de réfraction de l'air	$n_{\text{air}} = 1,00$
Indice de réfraction de la lentille	$n = 1,52$
Rayon de courbure de la lentille	$R = 4,0$ mm
Diamètre réel la lentille	$\Phi = 5,0$ mm
Distance focale effective de l'objectif	$f' = 9,0$ mm

Propriétés de l'œil humain

Distance normale d'observation d'un téléphone portable	30 cm
Pouvoir de résolution d'un oeil « normal »	$\alpha = 3,0 \times 10^{-4}$ rad

Conversion

$$1 \text{ pouce} = 25,4 \text{ mm}$$

Estimation d'une incertitude-type composée

Si la grandeur y calculée est un produit ou un quotient du type $y = x_1 x_2$ ou $y = x_1/x_2$, alors l'incertitude-type sur y , notée $u(y)$ est reliée à l'incertitude-type sur chacun des facteurs par

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2$$

Les trois parties sont indépendantes.

I/A Étude du capteur de l'appareil photographique

On considère dans un premier temps les paramètres géométriques du capteur principal, afin de vérifier si le phénomène de diffraction dégrade ou non l'image formée sur le capteur. Tous les pixels considérés sont carrés de côté a .



FIGURE 1 – Module photographique d'un smartphone (source : wikimediacommons)

- /5 1 À partir des données du téléphone portable fournies, déterminer la longueur L et la largeur l ($L > l$) du capteur de ce téléphone. En déduire la taille a d'un pixel du capteur.

Réponse

Soit $L = 4000a$ la longueur du capteur et $l = 3000a$ sa largeur, avec a la taille d'un pixel supposé carré. On a donc $l = 3L/4$. ①

La diagonale du capteur d vaut $1/3$ de pouce soit $d = 1/3 \times 25,4 = 8,47$ mm. ①

On en déduit

$$d^2 = L^2 + l^2 = L^2 \left(1 + \frac{3^2}{4^2} \right) = \left(\frac{5}{4} L \right)^2 \quad \text{donc} \quad L = \frac{4}{5} d = 6,77 \text{ mm} \quad \textcircled{1}$$

On trouve alors

$$l = \frac{3}{4} L \textcircled{1} = 5,08 \text{ mm} \quad \text{et} \quad a = \frac{L}{4000} \textcircled{1} = 1,69 \mu\text{m}$$



Le nombre d'ouverture N de l'appareil photographique est défini par la formule ci-après, où D est le diamètre de l'ouverture et f' la distance focale de l'objectif,

$$N = \frac{f'}{D}$$

On souhaite estimer la taille caractéristique de la tache de diffraction visible sur le capteur. Pour cela on considère que l'objectif est éclairé par un « point unique » A situé à l'infini. Les rayons issus de A sont diffractés par le diaphragme de diamètre D . Les rayons extrêmes après diffraction sont caractérisés par l'angle θ .

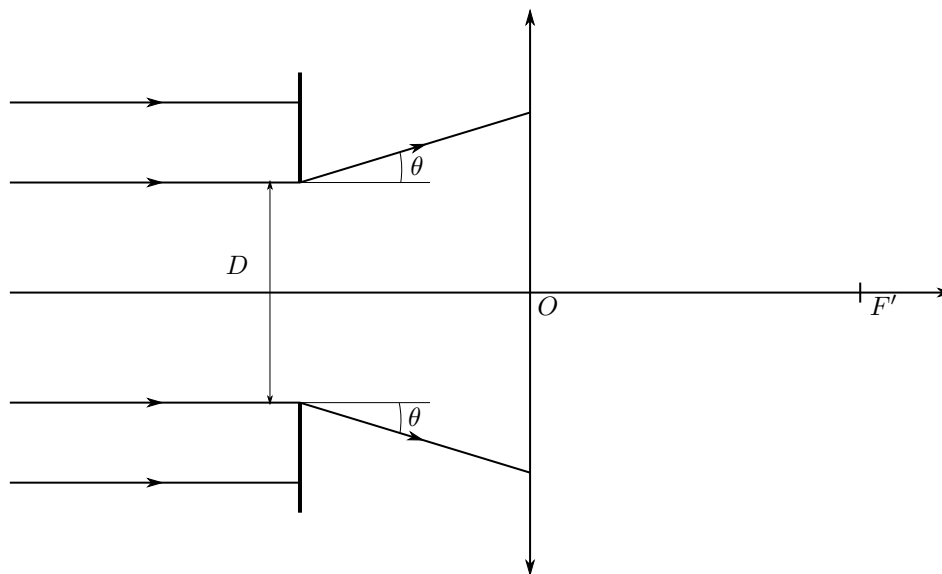


FIGURE 2 – Tracé de rayons lors de la diffraction par le diaphragme d'ouverture D .

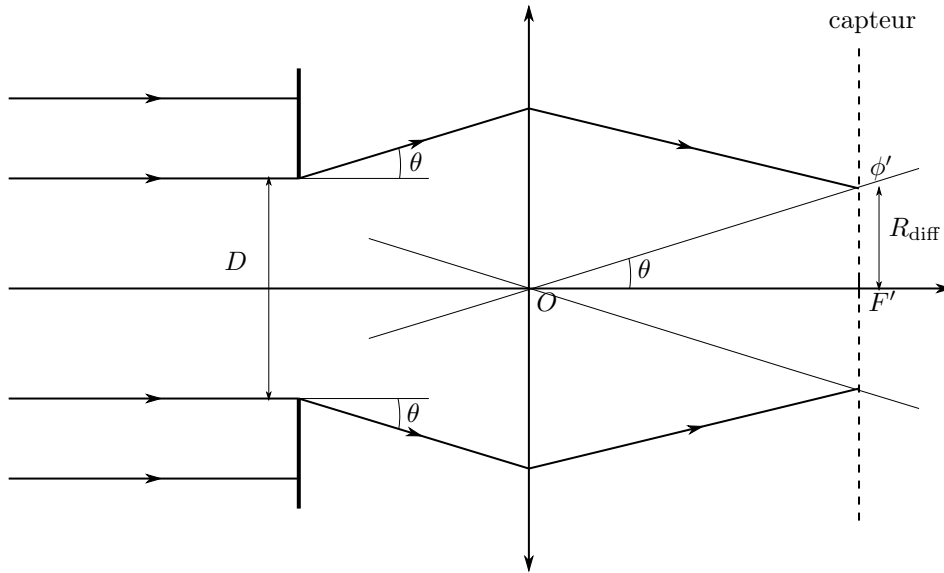
- /4 2 Préciser où doit être placé le capteur pour former l'image de A , puis compléter la figure 7 du document réponse en traçant les rayons émergents de la lentille issus des deux rayons incidents déjà tracés. Placer le rayon R_{diff} de la tache centrale de diffraction perçue sur le capteur.

Réponse

L'objet étant à l'infini sur l'axe optique, son image (en l'absence de diffraction) est F' . 1 Donc on place le capteur dans le plan focal image. 1

Pour déterminer le rayon émergent, on trace le rayon incident incliné de θ par rapport à l'axe optique et passant par O . Ce rayon n'est pas dévié et passe par ϕ' . 1

On fait de même pour l'autre rayon. On pose alors R_{diff} , 1 distance entre F' et ϕ' .



- /6 3 Après avoir justifié la longueur d'onde lumineuse choisie, déterminer R_{diff} . Commenter.

Réponse

On choisit $\lambda = 500 \text{ nm}$, ① longueur dans le visible, proche du maximum de sensibilité de l'œil.

La demi-ouverture angulaire de la tâche centrale de diffraction vaut $\theta \approx \frac{\lambda}{D}$. ①

D'après la figure précédente, $\tan \theta = R_{\text{diff}}/f'$. La lentille étant utilisée dans les conditions de Gauss, on a

$$\tan \theta \approx \theta = \frac{\lambda}{D} \quad \text{donc} \quad R_{\text{diff}} = \frac{\lambda f'}{D} = \lambda N$$

L'application numérique donne $R_{\text{diff}} \approx 1,1 \mu\text{m}$. ①

On obtient une valeur du même ordre de grandeur que a , la taille d'un pixel, donc on est à la limite de résolution ① de l'appareil liée au phénomène de diffraction.

- /3 4 Proposer une justification du choix de l'entreprise de configurer par défaut la prise d'image en full HD (1920×1080 pixels) au lieu de la résolution 4K (3840×2160 pixels).

Réponse

Déterminons la taille des pixels dans les deux cas

$$a_{\text{HD}} = \frac{L}{1920} = 3,5 \mu\text{m} > R_{\text{diff}} \quad \text{et} \quad a_{4\text{K}} = \frac{L}{3840} = 1,7 \mu\text{m} \approx R_{\text{diff}}$$

Ainsi en full HD, on ne sera pas sensible à la diffraction ①. De plus, l'enregistrement de l'image nécessitera moins de capacité de mémoire ① qu'en résolution 4K sans que cela soit visible sur la qualité de l'image pour un photographe amateur.

I/B

Étude des aberrations géométriques dues à la lentille de l'appareil photographique

La lentille de forme plano-convexe est constituée de silice fondue associée à du quartz. On peut la modéliser comme une demi-boule de rayon $R = 4,0 \text{ mm}$ et d'indice de réfraction $n = 1,52$, plongée dans l'air dont l'indice de réfraction est pris égal à 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon $r_m < R$, arrive sous incidence normale sur la face plane de cette lentille. On note C l'intersection de la face plane de la demi-boule avec l'axe optique (Ox) et S l'intersection de la face hémisphérique avec ce même axe. On s'intéresse au rayon lumineux incident qui arrive parallèle à l'axe optique et à une distance r de cet axe.

I/B) 1 Condition de traversée de la lentille

/10 **5** Compléter sur la figure 8 du document réponse le trajet de ce rayon lumineux lors de son passage à travers la lentille.

◇ On notera I le point d'incidence sur le dioptre verre-air et J son projeté orthogonal sur l'axe x .

◇ On notera i l'angle d'incidence **orienté** sur le dioptre verre-air et t l'angle de réfraction correspondant.

Déterminer l'expression de r_0 , valeur limite du rayon du faisceau à respecter si l'on souhaite que tous les rayons incidents émergent de la lentille. Calculer numériquement la valeur de r_0 . En réalité, le constructeur a choisi un diamètre de la lentille $\Phi = 5,0 \text{ mm}$. Justifier ce choix.

Réponse

Le rayon arrive normalement au dioptre air-verre, donc il n'est pas dévié. Il arrive avec un angle d'incidence i sur le dioptre verre-air et est réfracté dans une direction caractérisée par l'angle de réfraction $t > i$ car $n_{\text{air}} < n$.

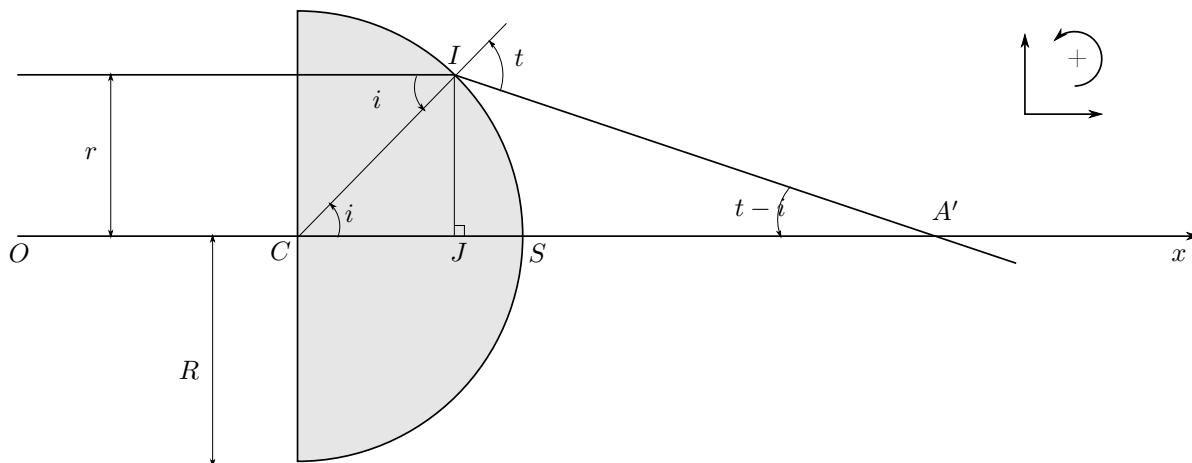


FIGURE 3 – ① pour incidence normale, ① pour angle qui s'écarte de la normale, ① pour les sens de comptage, ① pour les flèches sur les rayons.

Le rayon réfracté existe tant que $t < \pi/2$, ① i.e. par application de la relation de Snell-Descartes

$$n \sin i < 1 \text{ ①} \quad \text{avec} \quad \sin i = \frac{r}{R} \text{ ①}$$

On en déduit

$$r < \frac{R \text{ ①}}{n} = r_0 \quad ; \quad r_0 = 2,6 \text{ mm ①}$$

Le constructeur choisit un rayon $\Phi/2 = 2,5 \text{ mm} < r_0 < R$ afin de n'avoir que des rayons pouvant émerger. ① Néanmoins il risque d'y avoir des aberrations géométriques car il y a des rayons très éloignés de l'axe optique (cf la suite).

I/B) 2 Étude des rayons proches de l'axe optique

/5 **6** On note A' la position de l'intersection du rayon incident avec l'axe optique après son passage au travers de la lentille. Le placer sur le schéma annexe, puis montrer que la distance algébrique $\overline{CA'}$ vérifie

$$\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t-i)}$$

Réponse

① Pour le schéma et l'angle $t - i$.

On a $\overline{CA'} = \overline{CJ} + \overline{JA'}$ ①. Dans les triangles ICJ et IJA' :

$$\overline{CJ} = R \cos i \text{ ①} \quad \text{et} \quad \overline{JA'} = \frac{\overline{JI}}{\tan(t-i)} \text{ ①} \quad \text{avec} \quad \overline{JI} = R \sin i$$

On obtient alors

$$\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t-i)} \text{ ①}$$

- /5 [7] En déduire, en fonction de R et n , l'expression de la limite $\overline{CF'}$ de $\overline{CA'}$ lorsque la distance r tend vers 0. Calculer numériquement $\overline{CF'}$.

Réponse

Si $r \rightarrow 0$, alors les angles i et t sont faibles, donc

$$\cos i \approx 1 \quad \text{et} \quad \sin i \approx i \quad \text{et} \quad \tan(t - i) \approx t - i \quad (1)$$

De plus, la relation de Snell-Descartes devient

$$ni \approx t \quad \text{donc} \quad \overline{CA'} \approx R + R \times \frac{i}{ni - i} \quad \text{soit} \quad \overline{CA'} \approx R \left(1 + \frac{1}{n - 1}\right)$$

On a alors

$$\overline{CF'} = \lim_{r \rightarrow 0} \overline{CA'} = \frac{nR}{n - 1}$$

L'AN donne $\overline{CF'} = 12 \text{ mm}$. (1)



- /2 [8] Dans quelles conditions peut-on considérer que le point F' est stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe? Comment peut-on nommer le point F' ?

Réponse

Le point F' est approximativement stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe optique dans le cas des rayons paraxiaux, i.e. dans les conditions de GAUSS. (1) F' est alors le foyer principal image (1) de la lentille demi-boule utilisée dans les conditions de GAUSS.



I/B) 3

Étude de l'aberration sphérique de la lentille

Le capteur de l'appareil photographique est placé dans le plan focal image de la lentille (figure 4). On s'intéresse à présent au rayon lumineux qui arrive parallèle à l'axe optique à la distance $r < r_0$ de l'axe (question [5]).

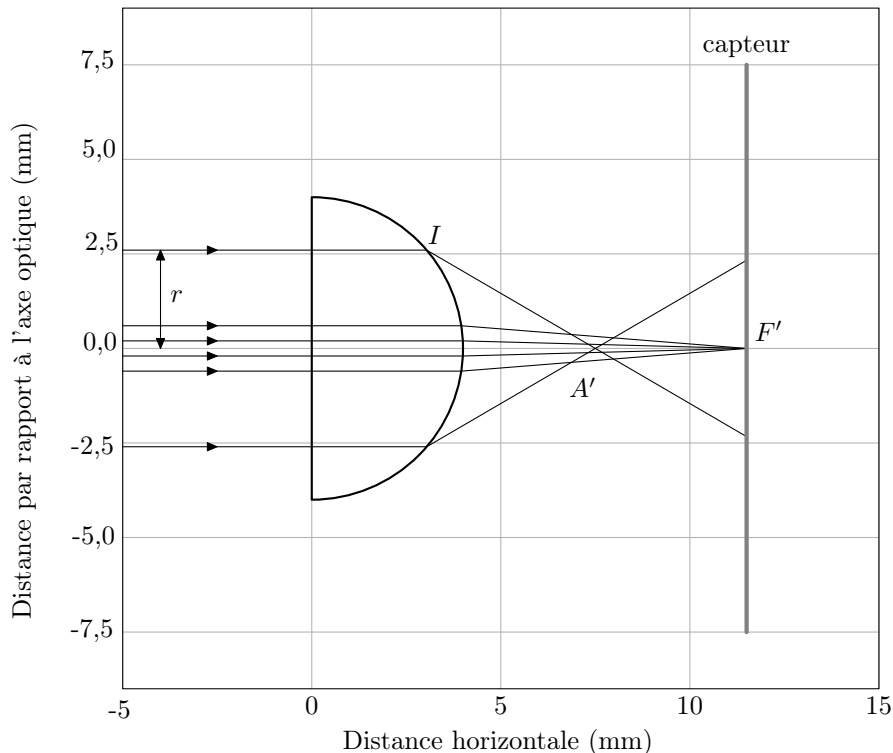


FIGURE 4 – Aberration sphérique

- /6 [9] On définit la distance TSA (*transversal spherical aberration*) comme la distance entre F' et le point où le rayon émergent extrême correspondant à $r = r_0$ rencontre le capteur. Faire un schéma en faisant apparaître la distance TSA. On notera i_0 l'angle d'incidence au niveau du dioptre sphérique verre-air.

Réponse

Pour $r = r_0$, $t = \pi/2$.

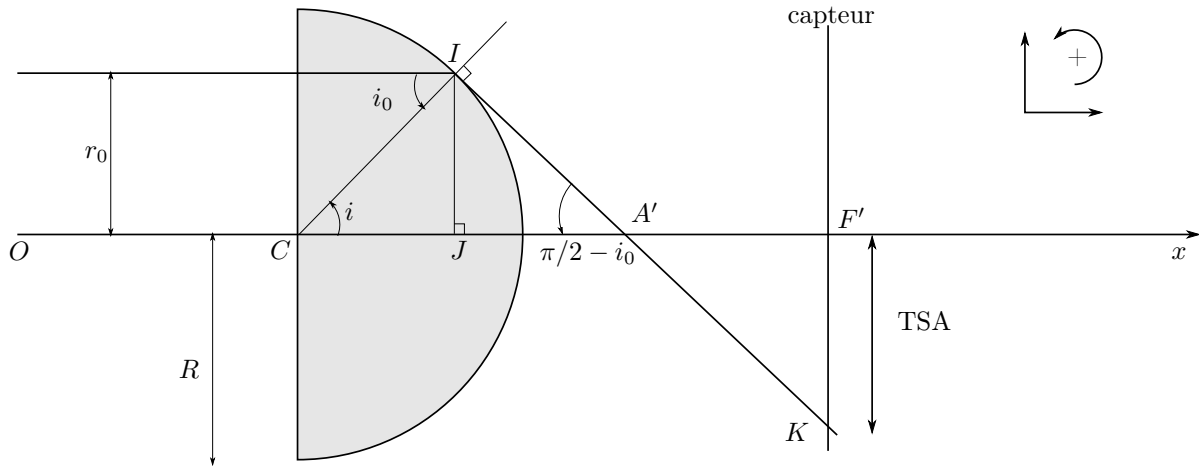


FIGURE 5 – ① Pour l'axe optique, ① pour les flèches sur les rayons, ① pour $t = \pi/2$, ① pour les sens de comptage, ① pour l'écran, ① pour la TSA



/10 10 Montrer que la distance TSA peut se mettre sous la forme

$$TSA = \frac{r_0}{\sin^2 i_0} \left(\frac{\overline{CF'}}{R} \cos i_0 - 1 \right)$$

Réponse

D'après le théorème de Thalès :

$$\frac{\overline{F'K}}{\overline{JI}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\overline{A'F'}}{\overline{A'J}} \quad \text{avec} \quad \overline{JI} = r_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} R/n \quad ; \quad \overline{A'F'} = \overline{CF'} - \overline{CA'} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{CF'} - \left(R \cos i_0 + \frac{R \sin i_0}{\tan(\pi/2 - i_0)} \right)$$

Or $\frac{1}{\tan(\pi/2 - i_0)} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \tan i_0$, d'où

$$\overline{A'F'} = \overline{CF'} - (R \cos i_0 + R \sin i_0 \tan i_0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \overline{CF'} - \underbrace{\left(R \cos i_0 + R \frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0} \right)}_{= \frac{R}{\cos i_0} \textcircled{1}} > 0$$

De plus $\overline{JA'} \stackrel{\textcircled{1}}{=} R \frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0} > 0$, on en déduit

$$TSA \stackrel{\textcircled{1}}{=} |\overline{F'K}| = r_0 \times \frac{\overline{CF'}/R - \frac{1}{\cos i_0}}{\frac{\sin^2 i_0}{\cos i_0}} \quad \text{soit} \quad TSA \stackrel{\textcircled{1}}{=} r_0 \left(\frac{\overline{CF'}}{R} \frac{\cos i_0}{\sin^2 i_0} - \frac{1}{\sin^2 i_0} \right)$$

On obtient alors la forme donnée dans l'énoncé

$$TSA \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{r_0}{\sin^2 i_0} \left(\frac{\overline{CF'}}{R} \cos i_0 - 1 \right)$$



/5 11 Exprimer alors la distance TSA en fonction de R et n . Faire l'application numérique. Comparer la distance TSA à la taille de la tache de diffraction obtenue en question 3 et à la dimension d'un pixel. Conclure sur l'adéquation de cette lentille au téléphone portable considéré.

Réponse

On a montré que $\sin i_0 = 1/n$ ①, on en déduit

$$\cos i_0 = \sqrt{1 - \sin^2 i_0} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1}$$

De plus $r_0 = R/n$ et $\overline{CF'} = \frac{nR}{n-1}$. En remplaçant dans l'expression de la distance TSA obtenue à la question précédente, on obtient

$$TSA \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{n^2 R}{n} \left(\frac{n}{n-1} \times \frac{1}{n} \sqrt{n^2 - 1} - 1 \right) \quad \text{soit} \quad TSA \stackrel{\textcircled{1}}{=} nR \left(\frac{\sqrt{n^2 - 1}}{n-1} - 1 \right)$$

L'AN donne $TSA = 7,3 \text{ mm}$. $\textcircled{1}$

On a $TSA \gg R_{\text{diff}}$ et $TSA \gg a$. La lentille demi-boule est extrêmement sensible aux aberrations géométriques. $\textcircled{1}$

I/C Estimation de la taille d'un pixel de l'écran d'un smartphone

Depuis l'apparition des premiers smartphones, la qualité des écrans a fait des progrès considérables. Un célèbre constructeur de téléphones affirme que « la densité de pixels des écrans est si élevée qu'à l'œil nu et à une distance normale, il est impossible de discerner les pixels individuels ».

L'objectif de cette partie est de vérifier si l'écran de l'objet d'étude vérifie ou non ce critère.

- /6 $\boxed{12}$ Montrer qu'il existe une taille de pixel maximale pour satisfaire à la description précédente. Calculer sa valeur numérique.

Réponse

L'œil pourra discerner deux pixels voisins s'ils sont vus sous un angle β supérieur au pouvoir de résolution de l'œil $\alpha = 3,0 \times 10^{-4} \text{ rad}$. $\textcircled{1}$

Un pixel de taille a , vu à une distance D est observé sous un angle β tel que

$$\tan \beta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{a}{D}$$

On se place dans le cas où β est faible (proche de α qui est faible), donc $\tan \beta \approx \beta$. $\textcircled{1}$ On prend $D = 30 \text{ cm}$, on a alors

$$\frac{a}{D} > \alpha \quad \text{soit} \quad a > D\alpha = 9,0 \times 10^{-5} \text{ m} = 90 \mu\text{m} \quad \textcircled{1}$$

Cette limite est très grande devant la taille d'un pixel qui est de l'ordre du micromètre. Donc on ne peut en effet pas distinguer deux pixels à l'œil nu. $\textcircled{1}$

- /8 $\boxed{13}$ Estimer la dimension a d'un pixel de l'écran présenté dans la figure 6, ainsi que l'incertitude $u(a)$ de cette mesure, et conclure sur la véracité du propos du constructeur.



FIGURE 6 – Écran de téléphone, grossit 10 fois (source wikimediacommons)

Réponse

Je mesure la hauteur du chiffre 4 : $h = 1,7 \text{ cm}$ pour $N = 18$ pixels. $\textcircled{1}$

J'évalue les incertitudes maximales :

- ◇ $\Delta h = 0,05 \text{ cm}$ soit une demi-graduation $\textcircled{1}$
- ◇ $\Delta N = 1$ $\textcircled{1}$

On choisit une loi uniforme pour calculer les incertitudes types correspondantes

$$u(h) = \frac{\Delta h}{\sqrt{3}} \quad \textcircled{1} \quad \text{et} \quad u(N) = \frac{\Delta N}{\sqrt{3}}$$

La taille d'un pixel est donnée par la relation (en n'oubliant pas le facteur 10 du grossissement) :

$$\stackrel{\textcircled{1}}{a} = \frac{h}{10N} = 94,4 \mu\text{m} \quad \text{et} \quad u(a) \stackrel{\textcircled{1}}{=} a \sqrt{\left(\frac{u(h)}{h}\right)^2 + \left(\frac{u(N)}{N}\right)^2} = 3,4 \mu\text{m}$$

Le résultat de la mesure est donc

$$a = (94,4 \pm 3,4) \mu\text{m} \text{ ①}$$

On rappelle que l'on donne 2 chiffres significatifs sur l'incertitude-type et autant que nécessaire sur la valeur moyenne pour avoir la même précision que celle de l'incertitude-type.

On constate que la valeur de a est assez élevée. Elle n'est pas cohérente avec les caractéristiques de l'appareil photo données en début d'énoncé. ①



Document réponse

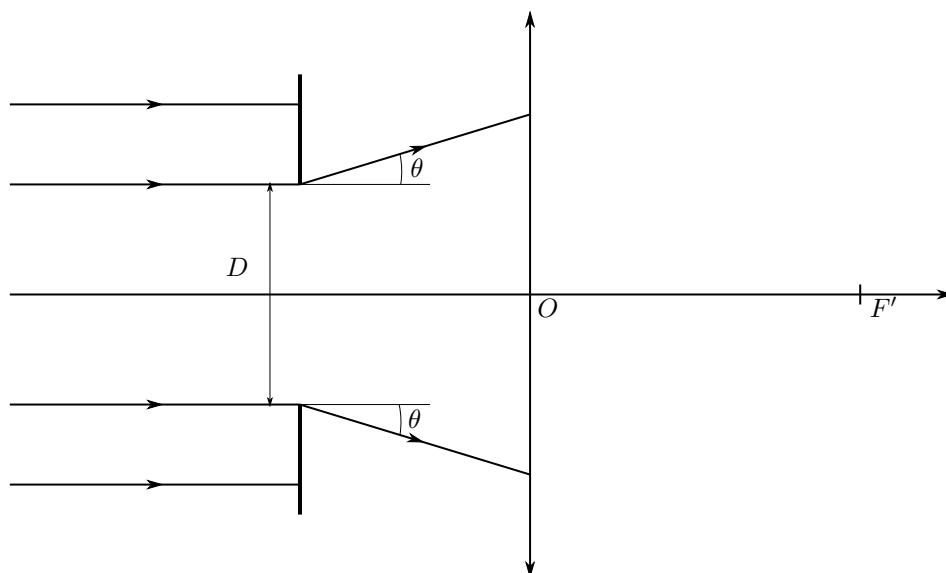
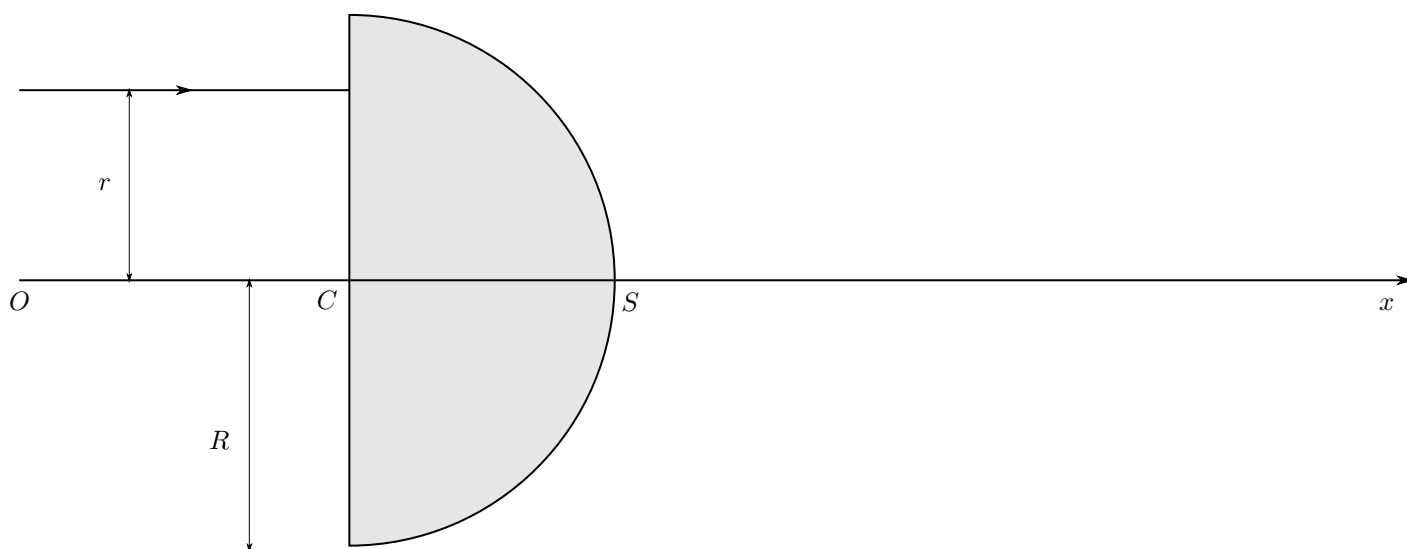
FIGURE 7 – Tracé de rayons lors de la diffraction par le diaphragme d'ouverture D .

FIGURE 8 – Modèle de la lentille demi-boule.