Khôlles PSI – semaine 7

Sujet 1 – corrigé

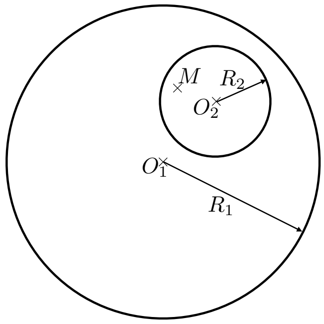
I Champ électrostatique dans une cavité

1. Démontrez le théorème de Gauss pour le champ électrostatique par intégration de l'équation de Maxwell-Gauss.

   Réponse :
   On part de l'équation de Maxwell-Gauss :

$$\text{div}\overrightarrow{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow \overrightarrow{E} \cdot d\overrightarrow{S} = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0}$$

Une sphère de centre O_1 et de rayon R_1 de densité de charge volumique uniforme ρ_e est percé d'un trou sphérique de centre O_2 et de rayon R_2 (donc de densité de charge volumique nulle). On cherche à déterminer le champ électrostatique à l'intérieur de cette sphère.



2. Donnez le champ électrostatique $_1$ créé par une sphère de centre O_1 et de rayon R_1, de densité de charge volumique uniforme ρ_e, au point M (dans le cas où M est à l'**intérieur** de cette première sphère). On l'exprimera alors en fonction du vecteur $\overrightarrow{O_1M}$.

   Réponse :
   On a un problème à symétrie sphérique donc un a $_1(\overrightarrow{r}) = \mathcal{E}_1(r)\overrightarrow{e}_r$.
   D'après le théorème de Gauss, on obtient :

$$\mathcal{E}_1(r) \times 4\pi r^2 = \frac{\rho_e}{\epsilon_0} \times \frac{4}{3}\pi r^3 \Rightarrow \mathcal{E}_1(r) = \frac{\rho_e r}{3\epsilon_0}$$

   Soit au final $_1 = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1M}$ car $r\overrightarrow{e}_r = \overrightarrow{O_1M}$

3. Déterminez le champ électrostatique $_2$ créé par une sphère de centre O_2 et de rayon R_2, de densité de charge volumique uniforme ρ'_e, au point M (dans le cas où M est à l'**intérieur** de cette seconde sphère). On l'exprimera alors en fonction du vecteur $\overrightarrow{O_2M}$.

   Réponse :
   On peut simplement appliquer le résultat de la question suivante :
   $_2 = \frac{\rho'_e}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_2M}$

4. En utilisant l'additivité des champ électrostatiques, déterminez le champ réel à l'intérieur de la cavité en fonction de $_1$ et $_2$.

   Réponse :

5. En déduire le champ électrostatique en tout point M de la cavité et montrez qu'il s'exprime simplement en fonction de $\overrightarrow{O_1O_2}$.

   Réponse :
   La densité de charge est nulle dans la sphère de centre O_2. Cette distribution de charge est analogue à la superposition d'une sphère de centre O_1 et de densité de charge ρ_e et d'une autre sphère de centre

O_2 (rayon R_2) et de densité de charge $-\rho_e$. Ainsi, l'intérieur de la sphère de centre O_2 aura une densité de charge $\rho_e + -(\rho_e) = 0$ (neutre).

Par linéarité des équations de l'électrostatique, on trouve :

$$(M) =_1 (M) +_2 (M) = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0}\left(\overrightarrow{O_1M} - \overrightarrow{O_2M}\right) = \frac{\rho_e}{3\epsilon_0}\overrightarrow{O_1O_2}$$

Sujet 2 – corrigé

I Phénomène d'écrantage

On considère un conducteur plan infini d'équation $x = 0$ portant une charge surfacique uniforme positive égale à σ.

1. Déterminez la valeur du champ $\vec{E}_0$ en tout point du demi-espace vide.

   Réponse :
   Par symétrie, on peut montrer que $\vec{E}_0(\vec{r}) = E_0(x)\vec{e}_x$ pour $x > 0$. On peut donc appliquer le théorème de gauss sur un pavé de section S allant de $x = -X$ à $x = X$:

   $$E_0(X)S + E_0(-X)S = \frac{S\sigma}{\epsilon_0} \Rightarrow E_0(X) = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}$$

   Car en effet, on a $E_0(X) = E_0(-X)$ par symétrie (les champs électriques en $+x$ et $-x$ sont opposés et de mêmes normes.). On en déduit que le champ électrique créé par cette distribution ne dépend pas de x : $\vec{E}_0 = \frac{\sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$

2. En déduire, à une constante près, l'expression de $V_0(x)$ en tout point du demi-espace vide.

   Réponse :
   On a par définition du potentiel électrique $\vec{E}_0 = -\vec{\nabla}V$ d'où l'on déduit en coordonnées cartésiennes :

   $$\frac{\sigma}{2\epsilon_0} = -\frac{\mathrm{d}V}{\mathrm{d}x} \Rightarrow V = -\frac{\sigma}{2\epsilon_0}x + c$$

   avec c, une constante.

On place alors voisinage du conducteur métallique une distribution volumique uniforme de charge dont la densité volumique de charge est notée ρ, répartie dans la tranche comprise entre les valeurs $x = 0$ et $x = L$. La charge volumique ρ est de signe opposé à σ.

3. Déterminez l'expression du champ $\vec{E}_{tot}$ en tout point de l'intervalle $[0,L]$.

   Réponse :
   Le champ totale est la superposition du champ précédant et du champ créé par la nouvelle distribution (cette fois ci volumique). On calcule alors le champ créé par la nouvelle distribution en remarquant que $\vec{E}_v(\vec{r}) = E_v(x)\vec{e}_x$ (mêmes symétries que la distribution surfacique précédente).

   Pour cela, on utilise à nouveau le théorème de Gauss sur un pavé de section S entre les abscisses $x = L/2 - X$ et $x = L/2 + X$ (le champ électrique y est identique en norme par symétrie) :

   $$\underbrace{E_v(L/2 - X)}_{\text{suivant } -\vec{e_x}}S + \underbrace{E_v(L/2 + X)}_{\text{suivant } \vec{e}_x}S = \frac{Q_{\text{int}}}{\epsilon_0} = 2XS\frac{\rho}{\epsilon_0} \Rightarrow E_v(L/2 + X) = \frac{\rho X}{\epsilon_0}$$

   On pose alors $x = L/2 + X$ soit $X = x - L/2$ et on obtient $\vec{E}_v(x) = \frac{\rho(x-L/2)}{\epsilon_0}\vec{e}_x$

4. Montrez que $\vec{E}_{tot}$ est uniforme pour toute valeur $x > L$.

   Réponse :
   Lorsque $x > L$, on se retrouve au cas de la question 1) (similarité avec la distribution de charge

surfacique dès lors que l'on se trouve au delà de la distribution de charge volumique.) On peut encore déterminer E_v à l'aide du théorème de Gauss et on trouve :

$$\vec{E}_v(x > L) = \frac{\rho L}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$$

Le champ total vaut donc :

$$\vec{E}_{tot}(x > L) = \vec{E}_0 + \vec{E}_1 = \frac{\rho L + \sigma}{2\epsilon_0}\vec{e}_x$$

On dit que la distribution de charge écrante la distribution surfacique de charge lorsque le champ $\vec{E}_{tot}$ s'annule pour tout $x > L$.

5. Donnez la relation portant sur σ, ρ et L pour laquelle la condition d'écrantage est satisfaite. Dans la suite, on suppose cette condition vérifiée.

   Réponse :
   On a écrantage lorsque $E_{tot} = 0$ pour $x > L$ soit lorsque $\rho = -\frac{\sigma}{L}$

6. Donnez l'expression de $V_{tot}(x)$ en tout point du demi-espace $x > 0$. On choisira conventionnellement $V_{tot}(L) = 0$.

   Réponse :
   Pour $0 < x < L$, on a $V_e(x) = \frac{\rho(-x^2+Lx)}{2\epsilon_0}$ et donc $V_{tot}(x < L) = -\frac{\sigma(-x^2+Lx)}{2L\epsilon_0} - \frac{\sigma}{2\epsilon_0}x + c$ soit au final :

$$V_{tot}(x < L) = \frac{\sigma L}{\epsilon_0}\left(\left(\frac{x}{L}\right)^2 - 2\left(\frac{x}{L}\right) + c'\right)$$

   avec $V_{tot}(L) = 0$, on trouve $c' = 1$. De plus, lorsque $x > L$, le champ électrostatique est nul donc V est constant (et égal à 0 par continuité en $x = L$).
   soit au final :

$$V_{tot}(x < L) = \frac{\sigma L}{\epsilon_0}\left(\frac{x}{L} - 1\right)^2 \tag{7.1}$$

$$V_{tot}(x \geq L) = 0 \tag{7.2}$$

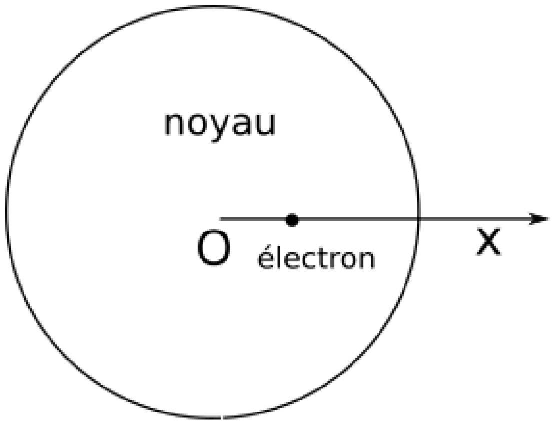
7. Représentez graphiquement l'amplitude de $\vec{E}_{tot}$ en fonction de x. Tracez également l'allure du carré du champ.

   Réponse :

Sujet 3 – corrigé

I Modèle de Thomson

On propose dans cet exercice d'estimer la taille d'un atome d'hydrogène à partir du modèle de Thomson et du principe d'incertitude de Heisenberg.
L'électron est supposé ponctuel, de charge $-e$ et de masse m alors que le noyau, de charge positive $+e$ est modélisé par une distribution de charge homogène sphériques de densité volumique de charges ρ et de rayon a. La masse du noyau est très grande devant celle de l'électron, de sorte que le noyau est considéré comme fixe, centré sur l'origine O de l'axe des x.



1. Déterminer l'expression de ρ en fonction des autres données.

   Réponse :
   La charge totale du noyau est $e = \frac{4}{3}\pi a^3 \rho$, donc $\rho = \frac{3e}{4\pi a^3}$

2. Déterminer le champ électrique créé par le noyau au niveau de l'électron d'abscisse x.

   Réponse :
   Les symétries et invariances du noyau amènent à rechercher un champ électrique qu'il crée de la forme $\vec{E} = E(r)\ \vec{e}_r$.

   Appliquons le théorème de Gauss à la sphère de rayon $r = x$ et de centre O.

   $$4\pi r^2 E = \frac{4\pi r^3 \rho}{3\epsilon_0} \Rightarrow E = \frac{\rho r}{3\epsilon_0}$$

   Le champ créé au niveau de l'électron est donc $\frac{\rho x}{3\epsilon_0}\ \vec{e}_x$.

3. Montrer que l'abscisse $x(t)$ de l'électron vérifie une équation différentielle de type oscillateur harmonique, et en donner la forme de la solution pour une position initiale $x_0 < a$ et une vitesse initiale nulle.

   Réponse :
   L'électron est seulement soumis à la force électrostatique exercée par le noyau, d'expression $\vec{F} = -e\vec{E}$. Le PFD appliqué à l'électron en projection sur x donne

   $$m\ddot{x} = \frac{-\rho x e}{3\epsilon_0} = -\frac{e^2 x}{4\pi a^3 \epsilon_0}$$

   ce qui peut se mettre sous la forme canonique

   $$\ddot{x} + \frac{e^2}{4\pi a^3 \epsilon_0 m} x = 0$$

On a donc bien un oscillateur harmonique de pulsation $\omega = \frac{e}{\sqrt{4\pi a^3 \epsilon_0 m}}$.

La solution est $x(t) = x_0 \cos \omega t$

4. En appliquant le principe de Heisenberg au mouvement de l'électron, montrer que le rayon a de l'atome doit être supérieur à une valeur minimale que l'on exprimera en fonction de m, e, ϵ_0 et $\hbar$.

Réponse :
Le principe de Heisenberg s'écrit $\Delta x \Delta p \geq \hbar$.

On peut estimer $\Delta \approx x_0$ et $\Delta p \approx m\omega x_0$.

On obtient $x_0^2 m \frac{e}{\sqrt{4\pi a^3 \epsilon_0 m}} \geq \hbar \Rightarrow x_0^2 \geq \frac{\hbar\sqrt{4\pi a^3 \epsilon_0 m}}{em}$.

Or $a > x_0$, d'où $a \geq \frac{\hbar^2 4\pi\epsilon_0}{e^2 m} = 4{,}8.10^{-11}$ A.