Sujet 1 – corrigé

I Grenouille intelligente

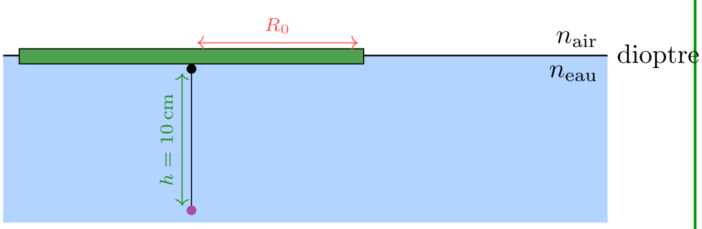
1. Pour se cacher des prédateurs, une grenouille s'est accrochée sous un nénuphar qui flotte sur l'étang. La grenouille a une hauteur h et le nénuphar un rayon R et une épaisseur très faible.

   Quel doit être le rayon minimal R_0 du nénuphar pour que les pieds de la grenouille ne soient pas visibles par un prédateur situé en-dehors de l'eau?

   Réponse :

Données

Pour une hauteur de grenouille fixée, il y a une taille de nénuphar permettant à tous les rayons partant de la grenouille de ne pas traverser le dioptre.



But à atteindre

Origine physique de ce phénomène et traduction mathématique.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

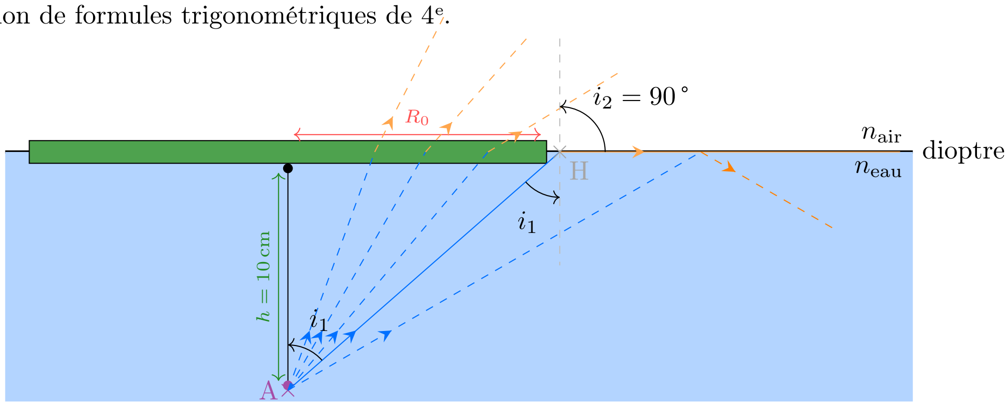
et angle limite de réfraction, tel que :

$$n_1 \sin i_\ell = n_2 \sin 90° = n_2$$

qui indique que pour $n_1 > n_2$, il y a un angle d'incidence à partir duquel il n'y a pas de rayon réfracté (les rayons réfractés font un angle de 90° avec la normale et sont donc parallèles au dioptre).

Application

Pour que les pieds de la grenouille ne soient pas visibles par un prédateur situé en-dehors de l'eau, c'est-à-dire au-dessus du dioptre, il faut simplement qu'il n'y ait pas de rayon partant de ses pieds et qui puissent sortir de l'eau : il faut que tous les rayons avec un angle d'incidence plus faible que cet angle limite soient bloqués par le nénuphar. C'est possible puisqu'on est dans une situation où le rayon passe dans un milieu **moins réfringent**, i.e. $n_2 < n_1$. En effet, dans cette situation il y a une inclinaison du rayon incident qui implique que le rayon émergent est parallèle à la surface, et tous les rayons au-delà de cet angle limite sont tous réfléchis. Un beau, grand schéma avec toutes les données reportées dessus mène naturellement à l'utilisation de formules trigonométriques de 4e.



On voit ici qu'une simple fonction tan permet d'exprimer R_0 :

$$\boxed{\tan i_1 = \frac{R_0}{h}}$$

Seulement on n'a pas encore la valeur de i_1. Or, on a déterminé que pour fonctionner l'astuce de la grenouille est d'avoir $i_1 = i_\ell$, c'est-à-dire :

$$n_{\text{eau}} \sin i_\ell = n_{\text{air}} \tag{1.1}$$
$$\Leftrightarrow i_\ell = \operatorname{asin} \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \tag{1.2}$$

On peut donc écrire :

$$\boxed{R_0 = h \times \tan\left(\operatorname{asin}\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}\right)} \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{rcl} h & = & 10{,}0\,\text{cm} \\ n_{\text{air}} & = & 1{,}00 \\ n_{\text{eau}} & = & 1{,}33 \end{array} \right.$$

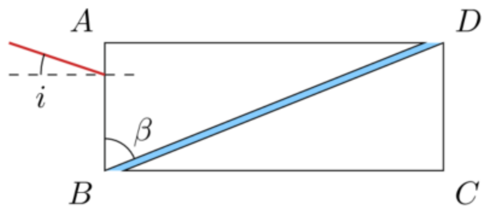
et finalement,

$$\underline{R_0 = 11{,}4\,\text{cm}}$$

Sujet 2 – corrigé

I Réfractomètre d'Abbe

Un réfractomètre d'Abbe est un appareil servant à mesurer des indices optiques, très utilisé notamment à des fins de caractérisation rapide déchantillons. Ce réfractomètre est composé de deux prismes identiques, d'indice $n_0 = 1{,}732$, à base en forme de triangle rectangle. L'angle au sommet β vaut 60°. Entre ces prismes est intercalé un film de liquide d'indice n que l'on cherche à déterminer. Pour ce faire, le réfractomètre est éclairé par la face AB par un rayon d'angle d'incidence i réglable.



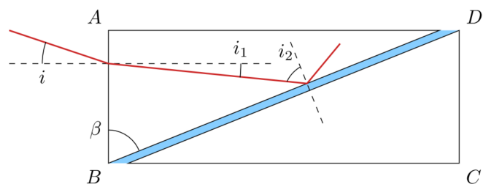
1. Si le rayon sort par la face CD, quelle sera sa direction ? Répondre par un argument physique sans calcul, éventuellement à confirmer par un schéma propre.
   Réponse :

   Compte tenu des symétries du dispositif, le principe du retour inverse de la lumière garantit que si le rayon sort du réfractomètre par la face CD alors l'angle d'émergence vaut i. En effet,

   - à l'interface AB, la seconde loi de Snell–Descartes donne l'angle d'émergence dans le prisme, noté i_1 ;
   - la géométrie du prisme donne l'angle d'incidence sur la première interface BD, noté i_2 ;
   - sur cette interface, la seconde loi de Snell–Descartes donne l'angle d'émergence dans le liquide, noté i_3 ;
   - comme les deux interfaces BD sont parallèles, alors l'angle d'incidence sur la deuxième interface BD vaut nécessairement i_3 ;
   - la même loi de Descartes que précédemment permet d'en déduire que l'angle d'émergence dans le prisme vaut alors forcément i_2 ;
   - les deux prismes étant identiques, l'angle d'incidence sur l'interface CD est alors nécessairement i_1 ;
   - et par conséquent, la même loi de Descartes qu'à l'interface AB indique que l'angle d'émergence dans l'air par la face CD vaut i.

2. Expliquer comment la mesure de l'angle d'incidence pour laquelle le rayon transmis ne sort plus par la face CD mais par la face AD permet d'en déduire la valeur de l'indice du liquide.
   Réponse :
   Si le rayon transmis sort par la face AD , c'est qu'il a subi une réflexion totale. Cette réflexion totale ne peut avoir eu lieu qu'à l'interface BD dans le sens prisme → liquide, à condition que $n < n_0$. En effet, si elle avait lieu dans le sens liquide → prisme le faisceau serait guidé dans le liquide le long de l'interstice entre les deux prismes. Comme l'angle critique de rélexion totale dépend du rapport des indices des deux milieux, ici n_0 et n, il est possible d'en déduire la valeur de n.

3. Que vaut cet indice si l'angle d'incidence critique vaut 18,0° ?
   Réponse :
   Commençons par introduire les notations sur le schéma ci-dessous.



À la limite de la réflexion totale,

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{n}{n_0}\right)$$

Une relation de somme des angles permet d'en déduire i_1, puisque

$$\beta + \left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi \qquad \text{d'où} \qquad i_1 = \beta - i_2$$

Enfin, la seconde loi xprde Descartes eimée à l'interface AB donne

$$1 \times \sin i = n_0 \sin i_1 \qquad \text{soit} \qquad \sin i = n_0 \left(\beta - \arcsin\left[\frac{n}{n_0}\right]\right)$$

Remonter à n demande d'inverser cette relation, soit

$$n = n_0 \sin\left(\beta - \arcsin\left\{\frac{\sin i}{n_0}\right\}\right) = 1{,}32$$

4. Quelles sont les limites d'utilisation du dispositif?
Réponse :
Une première limitation évidente est qu'un réfractomètre d'Abbe ne permet de mesurer que des indices de liquides, voire de gaz en prenant des précautions pour empêcher les fuites, mais en aucun cas de solides. Par ailleurs, comme il repose sur une réflexion totale, **il faut que l'indice du liquide soit inférieur à celui du verre composant les prismes**.

Sujet 3 – corrigé

I Capteur de niveau d'eau

On désire connaître le niveau du liquide dans un château d'eau. Pour cela on l'équipe d'un capteur optique schématisé sur la figure 1.1. L'émetteur (E) est un faisceau laser et le récepteur (R) une photodiode. Cette dernière fournit un signal électrique lorsqu'elle reçoit de la puissance lumineuse. L'indice du verre est $n = 1.5$, celui de l'air est 1.0.

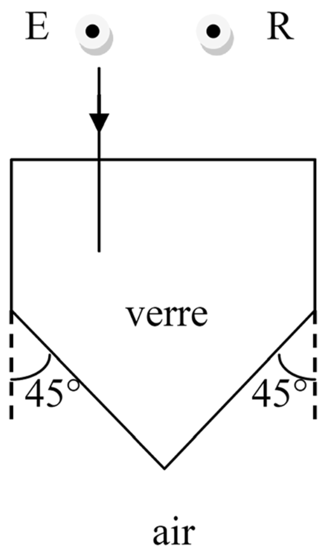


Figure 1.1: Schéma d'un capteur d'eau

1. Montrer que le faisceau laser se réfléchit totalement sur les faces et ressort en (R).
   Réponse :
   1. Sur les dioptres verre/air, l'angle de réflexion totale est :
   $$i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{1}{n}\right) = 41°$$
   Or l'angle d'incidence du faisceau laser est $i = 45°$, donc $i > i_{\text{lim}}$: il y a réflexion totale sur la face oblique de gauche (avec un angle de réflexion de 45°), puis à nouveau sur la face de droite (avec les mêmes angles), et le rayon revient finalement entièrement vers (R).

2. À la place de l'air, il y a maintenant de l'eau d'indice $n' = 1.33$. Le récepteur (R) reçoit il toujours de la lumière ?
   Réponse :
   La nouvelle valeur de l'angle de réflexion totale est :
   $$i'_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n'}{n}\right) = 62°$$
   Maintenant $i < i_{\text{lim}}$: il n'y a plus réflexion totale. Cependant il y a toujours une réflexion partielle en même temps que la réfraction, donc le récepteur recoît encore un peu de lumière mais avec une intensité beaucoup plus faible que dans le cas précédent.

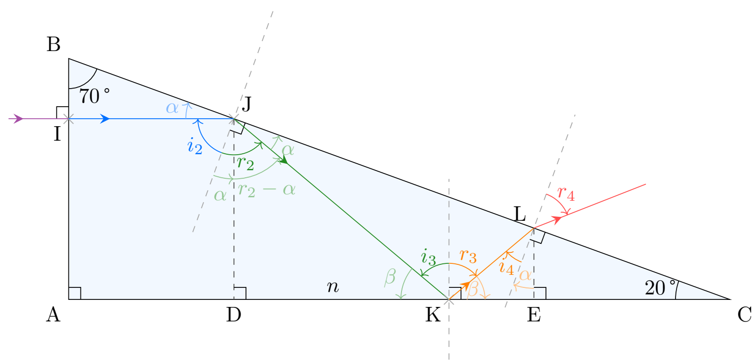
3. Expliquer comment utiliser ce dispositif pour connaître le niveau de remplissage du château d'eau.
   Réponse :
   On peut suspendre ce dispositif au-dessus du réservoir et le faire descendre progressivement, tout en observant le signal capté par (R). L'intensité de ce signal reste sensiblement constante tant que le capteur est au-dessus de l'eau, puis diminue brusquement lorsqu'il s'immerge dans l'eau. Ainsi, en repérant la distance dont on a fait descendre le capteur (longueur de fil déroulé...), on peut connaître le niveau de l'eau.

Sujet 4 – corrigé

I Prisme rectangle

1. On utilise un prisme de verre d'indice $n = 1{,}5$. Sa section principale est un triangle ABC rectangle en A tel que l'angle en B soit égal à 70°. Un rayon lumineux dans le plan ABC rencontre le prisme en I sur le côté AB perpendiculairement à AB. Sachant que le rayon incident est dans l'air, étudier la marche de la lumière jusqu'à la sortie du prisme.
Réponse :

Schéma



$$A \xrightarrow[I]{DP} B \xrightarrow[J]{DP} C \xrightarrow[K]{DP} D \xrightarrow[L]{DP} E$$

Résultat attendu

On cherche à suivre le chemin du rayon indiqué dans l'énoncé. Il faut pour cela savoir ce qui peut arriver au rayon. Dans le cas du passage par un dioptre plan, il peut y avoir traversée du dioptre avec Snell-Descartes, ou réflexion dans le cas $n_2 < n_1$.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

et pour $n_2 < n_1$, i_ℓ :

$$n_1 \sin i_\ell = n_2 \sin 90° = n_2$$

tel que $i_1 > i_\ell$ est réfléchi.

Application

Ici, l'angle limite de réflexion à l'intérieur du prisme est :

$$i_\ell = \arcsin \frac{1}{n} = \boxed{41{,}8°}$$

I : $\boxed{i_1 = 0°}$ donc $\boxed{r_1 = 0°}$;

J : Ici, on doit voir que $\alpha = 20°$ puisque dans le triangle BIJ, la somme des angles doit valoir 180° et qu'on a un angle droit + un angle de 70°. On en déduit que $\boxed{i_2 = 70°}$ également, car $i_2 + \alpha = 90°$.

Comme $\underline{i_2 > i_\ell}$, le rayon ne traverse pas mais est réfléchi, soit $\boxed{r_2 = 70°}$.

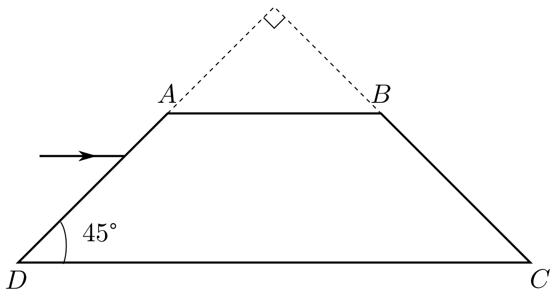
K : Pour trouver l'angle en K, on peut par exemple chercher l'angle β : en construisant le triangle rectangle JDK, on trouve que l'angle au sommet est $r_2 - \alpha = 50°$; avec l'angle droit en D, $\beta = 40°$, et $\boxed{i_3 = 50° > i_\ell}$ donc rayon réfléchi $\boxed{r_3 = 50°}$.

L : De même qu'en J, tracer LEC indique que $i_4 + \alpha + \beta = 90°$, soit $\boxed{i_4 = 30° < i_\ell}$: on applique donc Snell-Descartes ici, et on obtient

$$\boxed{r_4} = \arcsin(n \times \sin i_4) = \boxed{48{,}6°}$$

II Prisme de Dove

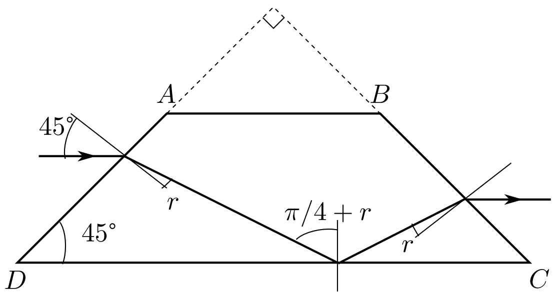
Le prisme de Dove est un prisme à angle droit tronqué parallèlement à sa base. Il a alors la forme suivante, celle d'un trapèze $ABCD$ en vue de face.



On note $n = 1{,}60$ l'indice du prisme placé dans l'air. On supposera dans la suite de l'exercice que le côté DC est tel que le rayon ne l'atteigne au plus, qu'une seule fois.

1. Un rayon entre par la face AD parallèlement à la face AB. Préciser par quelle face ressort le rayon, ainsi que sa direction.
   Réponse :
   On détermine l'angle de réfraction $r = 26°$. Le rayon intercepte la face CD avec un angle d'incidence de 71° supérieur à l'angle limite d'incidence $\theta_l = \arcsin(1/n) = 39°$. Il y a donc réflexion totale.

   Le rayon ressortira par la face BC avec la même direction que le rayon incident.



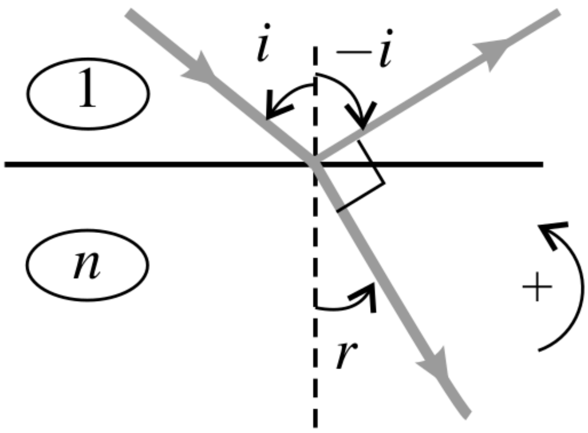
Khôlles MPSI – semaine 1

Sujet 5 – corrigé

I Incidence de Brewster

Un rayon lumineux arrive à l'interface plane séparant l'air d'un milieu d'indice n. Il se scinde en un rayon réfléchi et un rayon réfracté.

1. Trouver l'angle d'incidence i_B, appelé angle de Brewster, pour lequel ces deux rayons sont perpendiculaires entre eux.
   Réponse :
   Il convient dans un premier temps de réaliser un schéma :



   D'après la 3 ^{e}loi de Snell-Descartes et l'étude géométrique de la figure, on obtient

$$\sin i = n \sin r \qquad ; \qquad r + \pi/2 - (-i) = \pi \Rightarrow r = \frac{\pi}{2} - i$$

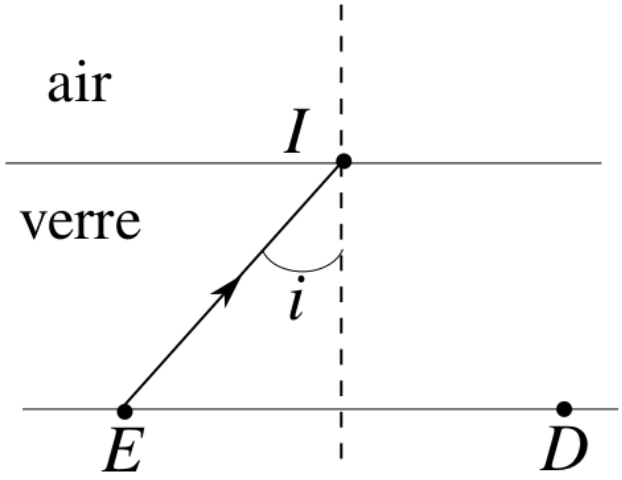
   On en déduit alors :

$$\sin i = n \cos i \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_B = \arctan(n)}$$

2. Faire l'application numérique dans le cas de l'eau d'indice $n = 1{,}33$, puis d'un verre d'indice $n = 1{,}5$.
   Réponse :
   eau : $\boxed{i_B = 53^\circ}$, verre : $\boxed{i_B = 56^\circ}$.

II Détection de pluie sur un pare-brise

On modélise un pare-brise par une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur $e = 5{,}00\,\text{mm}$, d'indice $n_v = 1{,}5$. Un fin pinceau lumineux issu d'un émetteur situé en E arrive de l'intérieur du verre sur le dioptre verre/air en I avec un angle d'incidence $i = 60^\circ$.



1. Montrer que le flux lumineux revient intégralement sur le détecteur situé en D et déterminer la distance ED.

   Réponse :

   Puisque l'indice du verre est plus grand que celui de l'air, il y a réflexion totale si

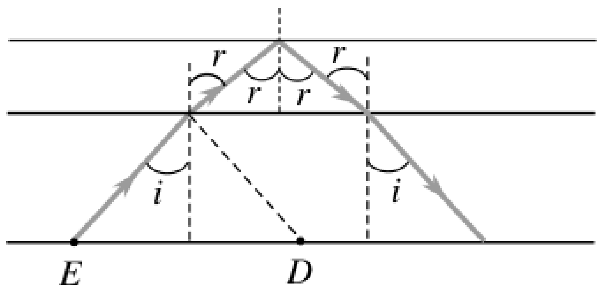
   $$i > \arcsin(1/n_v) = 41{,}8°.$$

   C'est bien le cas ici.

   $$\boxed{ED = 2e\tan i = 1{,}7\,\mathrm{cm}}.$$

2. Lorsqu'il pleut, une lame d'eau d'indice $n_e = 1,33$ et d'épaisseur $e' = 1{,}00\,\mathrm{mm}$ se dépose sur le pare-brise. Représenter le rayon lumineux dans ce cas. À quelle distance du détecteur arrive-t-il ?

   Réponse :



   Les 2 dioptres sont verre-air et eau-verre. Il peut y avoir reflexion totale. Les angles de réflexion totale sont :

   $$\theta_{\mathrm{v-e}} = \arcsin(n_e/n_v) = 62{,}5° \qquad \text{et} \qquad \theta_{\mathrm{e-a}} = \arcsin(1/n_e) = 48{,}75°.$$

   Puisque $i < \theta_{\mathrm{v-e}}$ il y a réfraction sur le premier dioptre. D'après la loi de Snell-Descartes, on trouve :

   $$r = \arcsin\left(\frac{n_v}{n_e}\sin(i)\right) = 77{,}6°.$$

   En revanche, $r > \theta_{\mathrm{e-a}}$, donc il y a réflexion totale au niveau du second dioptre.
   Le rayon lumineux arrive donc à une distance $2\epsilon\tan r = 0{,}9\,\mathrm{cm}$ du détecteur.