

Résonance RLC parallèle – corrigé

I Étude de l'amplitude et de la phase

1. Exprimer l'impédance équivalente \underline{Z} du dipôle AB .

Réponse :

Dans le cas d'une association de dipôle en parallèle, on additionne les admittances :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega}$$

$$\underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

2. Montrer que l'amplitude complexe de la tension u se met sous la forme :

$$\underline{U}_0 = \frac{R\eta_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec } x = \omega/\omega_0$$

Exprimer Q et ω_0 en fonction de R , L et C . Comment s'appellent ces deux constantes ?

Réponse :

On applique la loi d'Ohm généralisée sur le dipôle équivalent \underline{Z} , en utilisant les amplitudes complexes du courant et de la tension :

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}\eta_0 = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}\eta_0$$

On divise par $jL\omega$ et on trouve :

$$\underline{U}_0 = \frac{R\eta_0}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

Par identification on a $RC = \frac{Q}{\omega_0}$ $\frac{R}{L} = Q\omega_0$.

On en déduit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$.

ω_0 est la pulsation propre du circuit et Q le facteur de qualité.

3. Exprimer l'amplitude réelle U_0 de la tension u en fonction de R , η_0 , Q et x .

Réponse :

$$U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

4. Y-a-t-il résonance en tension ? Si oui, préciser la valeur de x à la résonance. En déduire la valeur de ω à la résonance.

Réponse :

La résonance correspond à un maximum de la fonction U_0 à $x \neq 0$. U_0 est maximale si son dénominateur est minimal, soit quand $x - 1/x = 0$.

Il y a toujours résonance en tension pour $x = 1$, soit $\omega = \omega_0$.

5. Comment définit-on la bande passante $\Delta\omega$? Montrer que $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

Réponse :

La bande passante $\Delta\omega$ est l'ensemble des pulsations ω vérifiant $U_{max}/\sqrt{2} \leq U_0(\omega) \leq U_{max}$.

Soit $\Delta\omega = [\omega_1; \omega_2]$, avec ω_1 et ω_2 solutions de l'équation $U_0(\omega) = U_{max}/\sqrt{2}$, soit :

$$Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2 = 1 \quad \Leftrightarrow \quad x^2 \pm \frac{x}{Q} - 1 = 0$$

Parmi les 4 solutions de ces 2 équations polynomiales de degré 2, seules 2 solutions sont acceptables car donnant $x > 0$:

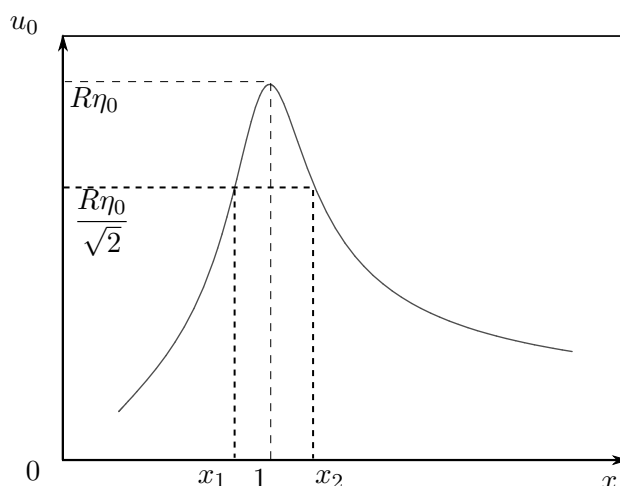
$$x_1 = -\frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2} \quad x_2 = \frac{1}{2Q} + \frac{1}{2Q} \sqrt{1 + 4Q^2}$$

On obtient $\Delta x = x_2 - x_1 = 1/Q$, soit $\Delta\omega = \omega_0 \Delta x = \omega_0/Q$

6. Faire l'étude asymptotique de la fonction $U_0(x)$. Tracer l'allure de U_0 en fonction de x .

Réponse :

- si $x \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} U_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R\eta_0}{Q} x = 0$
- si $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} U_0(x) = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{R\eta_0}{Q} \frac{1}{x} = 0$
- si $x = 1$, $U_0(1) = R\eta_0$



7. Exprimer la phase ϕ en fonction de Q et x . Préciser le domaine de variation de ϕ .

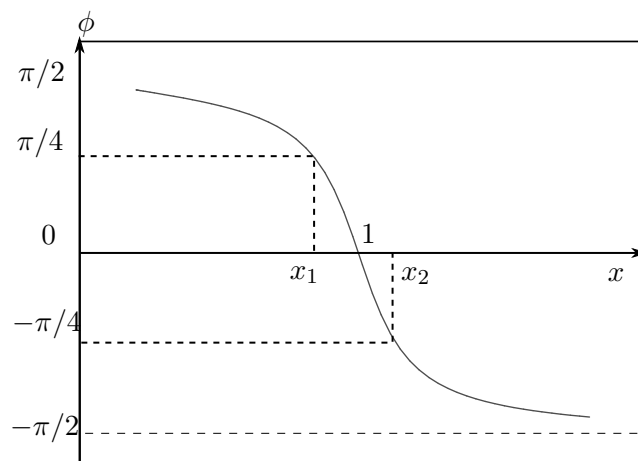
Réponse :

$$\phi = -\arctan(Q(x - 1/x)) \in]-\pi/2; \pi/2[$$

8. Faire l'étude asymptotique de la fonction $\phi(x)$. Tracer l'allure de ϕ en fonction de x .

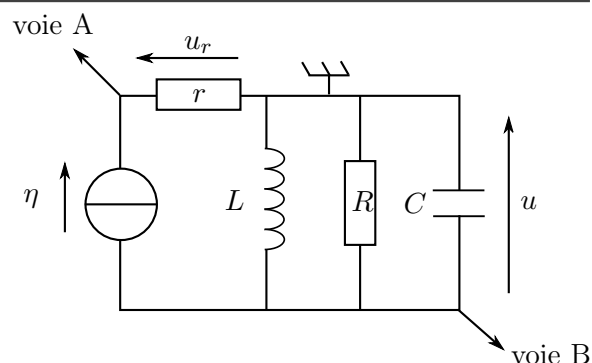
Réponse :

- si $x \rightarrow 0$: $\lim_{x \rightarrow 0} \phi(x) = \pi/2$
- si $x \rightarrow +\infty$: $\lim_{x \rightarrow +\infty} \phi(x) = -\pi/2$
- si $x = 1$: $\phi(1) = 0$



II Expérience

Pour tracer les graphiques U_0 et ϕ en fonction de ω , il faut pouvoir observer simultanément le courant $\eta(t)$ et la tension $u(t)$. On ajoute une résistance r en série avec le générateur de courant afin de visualiser le courant $\eta(t)$ par l'intermédiaire de la tension $u_r(t)$. On propose le montage ci-contre.



9. Le montage proposé est-il valable ? Si oui, à quelle condition ?

Réponse :

Le montage est valable si le générateur de courant n'impose pas de masse, c'est-à-dire avec un générateur à masse flottante.

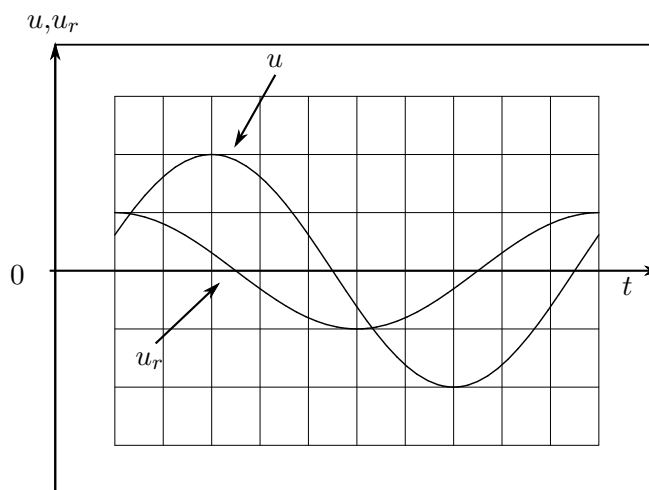
10. Quelle tension visualise-t-on sur la voie A ? sur la voie B ? Que faut-il faire pour visualiser $\eta(t)$ et $u(t)$?

Réponse :

Sur la voie A, on visualise la tension $u_r(t) = r\eta(t)$. Donc il faut diviser par r la voie A pour visualiser $\eta(t)$.

Sur la voie B, on visualise $-u(t)$. Donc il faut inverser la voie B pour visualiser $u(t)$.

La figure suivante montre une acquisition des tensions u_r et u faite pour une pulsation ω donnée. Le calibre est de 1 V sur les deux voies.



11. La tension u est-elle en avance ou en retard par rapport au courant i ?

Réponse :

La tension u est en retard par rapport au courant i car son maximum arrive après celui de la tension i .

12. Déterminer la valeur de la phase ϕ de la tension u par rapport au courant i . On donnera sa valeur en degré.

Réponse :

Une période du signal i (ou u) correspond à 10 carreaux. Donc un retard de 1 carreau correspond à un déphasage de -36° .

Ici, on a 2 carreaux de déphasage entre u et i , donc $\phi = -72^\circ$

13. Que vaut l'amplitude U_0 de la tension u ?

Réponse :

L'amplitude de $u(t)$ correspond à 2 carreaux, donc $U_0 = 2 \text{ V}$.

14. Définir mathématiquement la valeur efficace s_{eff} d'un signal $s(t)$ périodique de période T .

Réponse :

$$s_{eff} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

15. Soit un signal $s(t)$ sinusoïdal de période T , d'amplitude S_0 et de phase à l'origine nulle. Exprimer sa valeur efficace s_{eff} en fonction de S_0 . On établira cette relation.

Réponse :

On écrit la fonction $s(t)$: $s(t) = S_0 \cos(2\pi t/T)$

$$s_{eff}^2 = \frac{1}{T} \int_0^T S_0^2 \cos^2(2\pi t/T) dt$$

On linéarise le cosinus carré : $\cos^2(2\pi t/T) = \frac{1 + \cos(4\pi t/T)}{2}$

Puis on intègre, et on obtient :

$$s_{eff}^2 = \frac{S_0^2}{2T} \left[\int_0^T dt + \int_0^T \cos(4\pi t/T) dt \right] = \frac{S_0^2}{2}$$

Car $\int_0^T \cos(4\pi t/T) dt = 0$. On en déduit $s_{eff} = S_0/\sqrt{2}$

16. En déduire la valeur efficace de la tension $u(t)$. On donne $\sqrt{2} = 1,4$.

Réponse :

$$u_{eff} = 2/\sqrt{2} = \sqrt{2} = 1,4 \text{ V}$$