

Correction du TD

I Étude qualitative de l'induction

- 1) Dans toutes ces situations, on a un aimant proche d'un solénoïde non alimenté, formant un circuit fermé par un ampèremètre. Selon l'orientation de l'aimant, il y a initialement dans le solénoïde un champ magnétique dirigé vers la gauche ou la droite (les lignes de champ sortent par le Nord et rentrent par le Sud), et le déplacement de l'aimant va venir faire varier son amplitude dans un sens ou l'autre.

Or, par la loi de FARADAY, on sait qu'une variation de flux dans un circuit électrique est à l'origine d'une tension induite en son sein, et donc à une intensité induite si le circuit est fermé. On sait de plus qu'une spire de courant parcourue par une intensité électrique est à l'origine d'un champ magnétique \vec{B} dirigé perpendiculairement au plan de la spire et dont le sens respecte la règle de la main droite (version tire-bouchon).

De plus, avec la loi de modération de LENZ, on sait que les effets de l'induction modèrent les causes qui lui ont donné naissance. Ainsi, la **variation du flux extérieur** dû au mouvement de l'aimant sera **modéré par la création du champ induit**.

On va donc déterminer physiquement le sens de \vec{B}_{ind} dans le solénoïde pour répondre à la loi de LENZ, et vérifier s'il correspond au sens du champ \vec{B} qu'on aura en prenant $I > 0$ sur les différents graphiques. Il serait aussi possible de raisonner à partir de la première situation uniquement, et en répercutant ensuite les relations entre les causes sur les relations entre les conséquences.

- a – Le champ magnétique initial dans le solénoïde est dirigé vers la gauche. En déplaçant l'aimant vers la gauche, son amplitude à l'intérieur du solénoïde augmente également dans ce sens. Le champ induit est donc **vers la droite** pour compenser cette augmentation vers la gauche. L'intensité représentée doit donc être **négative**.
- b – Le champ magnétique initial est dirigé vers la gauche. En déplaçant l'aimant vers la droite, son amplitude décroît donc vers la gauche (ou augmente vers la droite) : le champ induit est donc **vers la gauche**. Ceci s'obtient bien avec ($I > 0$) avec la règle de la main droite.

On peut aussi remarquer qu'on ne fait que changer le sens de déplacement de l'aimant par rapport à la première situation, et qu'on s'attend donc en effet à trouver une conséquence opposée.

- c – Le champ magnétique initial est dirigé vers la droite. En déplaçant l'aimant vers la gauche, son amplitude augmente vers la droite : le champ induit est donc **vers la gauche**. Ceci s'obtient bien avec ($I > 0$) avec la règle de la main droite.

On peut aussi remarquer qu'on ne fait que changer le signe initial du champ dans le solénoïde par rapport à la première situation, et qu'on s'attend donc en effet à trouver une conséquence opposée.

- d – Le champ magnétique initial est dirigé vers la droite. En déplaçant l'aimant vers la droite, son amplitude décroît vers la droite : le champ induit est donc **vers la droite**. Ceci s'obtient alors avec ($I < 0$) avec la règle de la main droite.

On peut aussi remarquer qu'on applique les deux changements de causes par rapport à la première situation, et qu'on s'attend donc en effet à retrouver la même conséquence.

- 2) a – Si le courant dans S_1 est constant, alors l'amplitude du champ magnétique créé par S_1 l'est aussi (pour rappel, dans un solénoïde on a $\vec{B} = \mu_0 n i(t) \vec{u}_z$). Ainsi, le **flux du champ \vec{B}_1 dans S_2 ne varie pas** : il n'y a **pas d'induction**. FAUX
- b – Si $I \nearrow$, \vec{B}_1 augmente vers la droite. On aura alors induction dans S_2 avec un $\vec{B}_{2,\text{ind}}$ vers la gauche. Il est issu d'une intensité $i_{2,\text{ind}}$ effectivement positive dans le sens représenté. VRAI
- c – En supposant I constant, on a encore \vec{B}_1 vers la droite. Écarter S_2 revient à diminuer le flux dans S_2 , comme si I diminuait. On aura donc $\vec{B}_{2,\text{ind}}$ vers la droite, issu de $i_{2,\text{ind}}$ négative par rapport au sens représenté. FAUX
- d – Si la bobine S_2 tourne autour de son axe, avec des lignes de champ qui ne varient pas il n'y a aucune raison de voir un courant puisque cela n'implique pas de variation du flux : il n'y a pas d'induction. FAUX

- 3) Pour répondre à cette question, on doit déterminer ce qu'est l'auto-inductance d'une bobine. On définit le champ propre comme étant le champ magnétique créé par un circuit parcouru par une intensité i , et le flux propre comme étant le flux de ce champ propre au travers de ce **même** circuit. Alors, on a défini admis que le flux propre étant proportionnel à l'intensité qui la crée, et on a défini l'inductance propre (ou auto-inductance) comme étant le facteur multiplicatif entre ce flux propre et l'intensité à son origine :

$$\phi_p(t) = Li(t)$$

et nous avons notamment indiqué que **l'inductance propre ne dépend que du circuit et de sa forme** ; elle ne saurait dépendre de l'intensité. **FAUX**

II Spire en rotation

Notons \vec{u} le vecteur normal à la spire, défini tel que $\theta = \pi/2$ lorsque \vec{n} et \vec{B} sont colinéaires et de même sens. Le sens positif de la spire est alors défini à partir de ce vecteur \vec{n} . On choisit l'origine du temps $t = 0$ lorsque $\theta = 0$: la loi horaire $\theta(t)$ s'écrit donc simplement $\theta = \Omega t$.

- 1) Comme le champ magnétique est uniforme à l'échelle de la spire, on en déduit son flux au travers de la spire :

$$\phi(t) = \vec{B} \cdot S\vec{n} = SB \cos \theta - \frac{\pi}{2} = SB \sin \theta = SB \sin \Omega t$$

Ainsi, on obtient la f.é.m. induite à partir de la loi de FARADAY :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\Omega SB \cos \Omega t \quad \text{soit} \quad \boxed{e(t) = -\Omega SB \cos \Omega t}$$

On trouve bien une dépendance de e_{ind} avec le temps, puisque l'orientation de \vec{n} varie dans le temps. De plus, on obtient le courant induit avec i en convention **générateur** tel que

$$i = \frac{e}{r} \quad \text{donc} \quad \boxed{i(t) = -\frac{\Omega SB}{r} \cos \Omega t}$$

- 2) Le moment magnétique instantané de la spire vaut

$$\vec{m}(t) = i(t)S\vec{n} \quad \text{soit} \quad \boxed{\vec{m}(t) = -\frac{\Omega S^2 B}{r} \cos(\Omega t) \vec{n}}$$

- 3) Le couple de LAPLACE qui s'exerce sur la spire est

$$\vec{\Gamma} = \vec{m} \wedge \vec{B} = \left[-\frac{\Omega S^2 B}{r} \cos \Omega t \times B \times \sin \left(\frac{\pi}{2} - \theta \right) \right] \vec{e}_\Delta = -\frac{\Omega S^2 B^2}{r} \cos(\Omega t) \cos(\theta) \vec{e}_\Delta$$

D'où finalement

$$\boxed{\vec{\Gamma}(t) = -\frac{\Omega S^2 B^2}{r} \cos^2 \Omega t \vec{e}_\Delta \quad \text{et} \quad \langle \vec{\Gamma}(t) \rangle = -\frac{\Omega S^2 B^2}{2r} \vec{e}_\Delta}$$

La composante sur Δ de ce couple est toujours négative, c'est-à-dire qu'il **tend à freiner la spire** dans son mouvement (dans le sens positif) autour de Δ . Ce résultat aurait pu se prévoir car ce couple résulte de phénomènes d'induction, générés par le mouvement de la spire autour de l'axe. On sait donc d'après la loi de modération de LENZ qu'il a pour effet de s'opposer à ce mouvement, et donc de vouloir freiner la spire.

III Mesure d'une inductance mutuelle

- 1) Comme l'oscilloscope est idéal, tout se passe comme si la bobine 2 était en **circuit ouvert** : le **courant traversant est donc nul**, soit $\forall t \in \mathbb{R}, i_2(t) = 0$. Ainsi, en appliquant naïvement la relation courant-tension (RCT) de la bobine, on aurait

$$u_2 = L_2 \frac{di_2}{dt} = 0$$

ce qui est **faux** ici ! En effet, le flux magnétique du champ issu de L_1 dans L_2 n'est pas nul et dépend du temps : par **induction mutuelle** on va avoir une **tension** induite du flux croisé entre L_1 et L_2 .

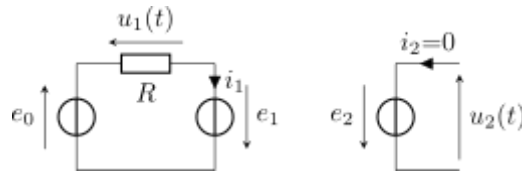


FIGURE 3.1 – Schéma électrique équivalent au dispositif de mesure d'inductance mutuelle.

- 2) On peut raisonner ou bien sur le schéma de l'énoncé en se méfiant de la tension aux bornes de la bobine (il est tentant d'écrire uniquement la RCT), ou bien sur le schéma électrique équivalent de la Figure 3.1, qui fait apparaître directement des générateurs induits et qui traduisent **à la fois** l'induction propre et mutuelle. En tout cas, il faut éviter de mélanger les deux. Pour obtenir un lien entre la tension de droite et la tension $u_1(t)$ à gauche, il est donc nécessaire d'utiliser la loi de FARADAY sur au moins l'un des deux circuits. Par exemple, directement sur le circuit de L_2 et en prenant bien $e_2 = -u_2$, on trouve

$$e_2 = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

et avec la RCT sur la résistance, $u_1 = Ri_1$, on a

$$u_2 = M \frac{di_1}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{M}{R} \frac{du_1}{dt}}$$

- 3) À partir de la relation précédente et connaissant les amplitudes des signaux électriques, on voudrait calculer M . Étant donné que l'entrée est sinusoïdale, en RSF on s'attend à ce que la sortie soit sinusoïdale également, et on peut passer en complexes pour obtenir une relation sur les amplitudes complexes :

$$\underline{U}_2 = j\omega \frac{M}{R} \underline{U}_1$$

et avec $U_{1,2} = |\underline{U}_{1,2}|$, on obtient

$$U_2 = \omega \frac{M}{R} U_1 \Leftrightarrow \boxed{M = \frac{RU_2}{2\pi f U_1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 100 \, \Omega \\ U_2 = 0,5 \, \text{V} \\ U_1 = 3,00 \, \text{V} \\ f = 2,0 \, \text{kHz} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{M = 1,3 \text{ mH}}$$

- 4) a – Lorsque la bobine 2 est tournée de 180° , elle retrouve exactement la configuration géométrique de départ, excepté le sens de branchement des fils, qui est inversé. On mesure alors $u'_2 = -u_2$, et le même calcul que précédemment montre que **la valeur absolue de M n'a pas changé**. On a en effet les mêmes lignes de champ et la même surface totale, il n'y a que son orientation qui varie. En toute rigueur, on aura $M' = -M$.
- b – Lorsque la bobine est tournée de 90° , beaucoup moins de lignes de champ issues de la bobine 1 ne traversent la bobine 2. Le flux croisé $\phi_{1 \rightarrow 2}$ est donc nettement diminué alors que i_1 est fixée : c'est forcément que **M est plus faible**.
- c – Au contraire, si la bobine 2 est placée sur le même axe que la bobine 1, et à une distance comparable à la première situation, alors davantage de lignes de champs de 1 traversent 2 : $\phi_{1 \rightarrow 2}$ augmente à i_1 fixé, donc **M est plus grande**.

IV Solénoïdes imbriqués

- 1) Il faut savoir traduire la phrase classique de l'énoncé : « ℓ est très supérieure aux rayons ». Mathématiquement, on a donc $\ell \gg r_1$ et r_2 . Physiquement, cela permet d'approximer les solénoïdes comme étant « infinis », donc **sans effet de bord** où les lignes de champ ne sont plus parallèles et commencent à boucler. Ainsi, on pourra utiliser l'expression du champ magnétique créé par un solénoïde en son sein sans réserve quant aux bords.

En notant i_1 et i_2 les courants (possiblement nuls) circulant dans les bobines, et en tenant compte de l'orientation des spires, ce champ dans chacune des bobines est

$$\vec{B}_{1,2} = \mu_0 \frac{N}{\ell} i_{1,2} \vec{e}_z$$

Inductance propre L_1

- Flux créé par S_1 dans **une spire** s_1 d'elle-même :

$$\phi_{S_1 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_1(M) \cdot dS \vec{e}_z = \vec{B}_1 \cdot \vec{S} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_1$$

- Flux **propre** créé par S_1 dans **toutes ses spires** :

$$\phi_{p,1} = \phi_{S_1 \rightarrow S_1} = N \times \phi_{S_1 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{p,1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell} i_1$$

- Inductance propre : par **définition**, $\phi_{p,1} = L_1 i_1$, soit

$$L_1 = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}$$

Inductance propre L_2 Par la même démarche, et ce même si $i_2 = 0$, on trouve

$$L_2 = \pi r_2^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}$$

et elle ne dépendent bien que du circuit, et pas de l'intensité.

Inductance mutuelle Comme le champ créé par S_2 est uniforme à l'intérieur de S_1 (la réciproque n'est pas vraie!), il suffit de calculer ce flux croisé pour obtenir M .

- Flux créé par S_2 au travers d'une spire s_1 de S_1 :

$$\phi_{S_2 \rightarrow s_1} = \iint_{M \in s_1} \vec{B}_2(M) \cdot dS \vec{e}_z = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N}{\ell} i_2$$

- Flux **croisé** créé par S_2 dans **tout S_1** :

$$\phi_{2 \rightarrow 1} = \phi_{S_2 \rightarrow S_1} = N \phi_{S_2 \rightarrow s_1} \quad \text{donc} \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N_2}{\ell} i_2$$

- Inductance mutuelle : par **définition**, $\phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2$, soit

$$M = \pi r_1^2 \mu_0 \frac{N^2}{\ell}$$

- 2) Le circuit équivalent est tracé Figure 3.2. Le circuit 1 contient une bobine et un générateur de **courant**, imposant le courant i_1 ; le circuit 2 ne contient qu'une bobine court-circuitée. Il a couplage inductif entre les deux circuits, donc on prend en compte les deux flux qui traversent chaque bobine pour utiliser la loi de FARADAY. En convention récepteur, on a pour la deuxième :

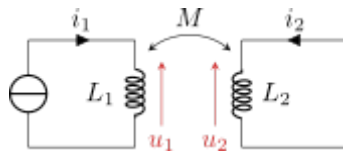


FIGURE 3.2 – Circuit électrique équivalent

$$u_2 = +L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt}$$

et il nous faut alors une relation électrique pour relier tension et courant : loi des mailles ou loi des nœuds. Ici, la loi des mailles sur le circuit de droite donne simplement $u_2 = 0$, d'où

$$\begin{aligned} \frac{di_2}{dt} &= -\frac{M}{L_2} \frac{di_1}{dt} \\ \Rightarrow i_2 &= -\frac{M}{L_2} i_1 + \text{cte} \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\frac{di_2}{dt}} \right\} \text{par intégration}$$

sans oublier la constante. Cependant, comme le solénoïde S_2 n'est pas relié à un générateur, il n'y a aucune raison pour qu'un courant continu existe dans le circuit ; notamment, prendre $i_1 = 0 \forall t$ nous amène bien à remarquer que $c_1 = 0$. Ainsi, en remplaçant i_1 par son expression on obtient

$$i_2(t) = -\frac{M}{L_2} I \cos \omega t \quad \text{d'amplitude} \quad I_2 = \frac{M}{L_2} I$$

On fera en effet bien attention à ne pas prendre le signe « - » dans l'amplitude de I_2 : $I_2 = |\max I_2|$.

- 3) D'après le principe de superposition, en un point M se trouvant à l'intérieur des deux solénoïdes on trouve

$$\vec{B}(M) = \vec{B}_1(M) + \vec{B}_2(M) = \mu_0 \frac{N}{l} (i_1 + i_2) \vec{e}_z$$

et en factorisant par i_1 et en le remplaçant par son expression :

$$\vec{B}(M) = \mu \frac{N}{l} \left(1 - \frac{M}{L} \right) I \cos(\omega t) \vec{e}_z$$

V Plaque de cuisson à induction

- 1) Un schéma de principe et un schéma électrique équivalent faisant apparaître des générateurs induits sont représentés Figure 3.3. On peut raisonner indifféremment sur l'un ou sur l'autre, à condition de se méfier de la loi de comportement de la bobine si on choisit le schéma de gauche, et de ne pas oublier l'auto-induction si on choisit le schéma de droite. Pour obtenir les tensions dans les bobines, il faut prendre en compte l'auto-induction ainsi que l'induction mutuelle.

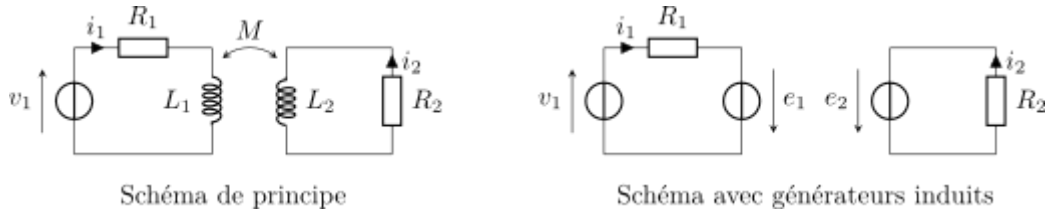


FIGURE 3.3 – Schémas équivalents à une plaque à induction.

Par définition,

$$\phi_1 = \phi_{p,1} + \phi_{2 \rightarrow 1} \quad \text{et} \quad \phi_{p,1} = L_1 i_1 \quad ; \quad \phi_{2 \rightarrow 1} = M i_2 \quad \text{donc} \quad e_1 = -\frac{d\phi_1}{dt} = -L_1 \frac{di_1}{dt} - M \frac{di_2}{dt}$$

mais également

$$\phi_2 = \phi_{p,2} + \phi_{1 \rightarrow 2} \quad \text{et} \quad \phi_{p,2} = L_2 i_2 \quad ; \quad \phi_{1 \rightarrow 2} = M i_1 \quad \text{donc} \quad e_2 = -\frac{d\phi_2}{dt} = -L_2 \frac{di_2}{dt} - M \frac{di_1}{dt}$$

Pour les relier entre elles, on doit trouver d'autres équations électriques ; ici avec la loi des mailles :

$$v_1 + e_1 = R_1 i_1 \quad \text{et} \quad e_2 = R_2 i_2$$

d'où finalement

$$\begin{cases} v_1 = R_1 i_1 + L_1 \frac{di_1}{dt} + M \frac{di_2}{dt} \\ 0 = R_2 i_2 + L_2 \frac{di_2}{dt} + M \frac{di_1}{dt} \end{cases} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

- 2) Parmi ces deux équations, la 3.2 est plus simple pour obtenir la fraction demandée puisque la première fait intervenir v_1 . En la passant en complexes :

$$\begin{aligned} 0 &= R_2 \underline{I}_2 + j\omega L_2 \underline{I}_2 + j\omega M \underline{I}_1 \\ \Leftrightarrow \underline{H} &= -\frac{j\omega M}{R_2 + j\omega L_2} \end{aligned} \quad (3.3)$$

- 3) Avec l'équation 3.1, on obtient

$$\begin{aligned} \underline{V}_1 &= (R_1 + j\omega L_1) \underline{I}_1 + j\omega M \underline{I}_2 \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_e &= \frac{\underline{V}_1}{\underline{I}_1} = R_1 + j\omega L_1 + j\omega M \underline{H} \\ \Leftrightarrow \underline{Z}_e &= R_1 + j\omega L_1 + \frac{(M\omega)^2}{R_2 + j\omega L_2} \end{aligned} \quad (3.4)$$

- 4) $\omega \gg R_2/L_2$ et $\omega \gg R_1/L_1$ nous guide vers l'idée de prendre $\omega \rightarrow +\infty$. On va faire apparaître ça en factorisant par L_2 en haut et en bas de l'équation 3.3 :

$$\underline{H} = -\frac{L_2}{L_2} \frac{j\omega M/L_2}{R_2/L_2 + j\omega} \Leftrightarrow \underline{H} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} \frac{j\omega M/L_2}{j\omega + \underbrace{R_2/L_2}_{\ll \omega}} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} \underset{\omega \rightarrow \infty}{\sim} -\frac{M}{L_2}}$$

qu'on réinjecte ensuite dans l'équation 3.4 :

$$\boxed{\underline{Z}_e = j\omega L_1 \left(1 - \frac{M^2}{L_1 L_2}\right)}$$

Ainsi,

$$\left| \frac{\underline{I}_2}{\underline{I}_1} \right| = 8,3 \quad \text{et} \quad \left| \underline{Z}_e \right| = 2,1 \, \Omega \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = 2 \, \mu\text{H} \\ L_1 = 30 \, \mu\text{H} \\ L_2 = 0,24 \, \mu\text{H} \\ \omega = 7,0 \times 10^4 \, \text{rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

Remarque

On remarque que la qualité du couplage inductif apparaît dans l'expression de \underline{Z}_e : si le couplage est parfait, alors $M = \sqrt{L_1 L_2}$, donc l'impédance d'entrée du système est nulle, signe d'une transmission parfaite de l'énergie électromagnétique. On retrouve exactement le même résultat à propos du transformateur.

Remarque aussi que la différence de nombre de spires dans l'inducteur et l'induit permet au courant à l'induit d'être nettement supérieur au courant à l'inducteur, et donc de fournir davantage d'effet JOULE dans le fond de la casserole que dans la plaque.

- 5) Qualitativement, si l'on éloigne la casserole le couplage sera moins bon (M diminue). Ainsi, l'**impédance d'entrée augmente**¹. Si l'impédance d'entrée augmente alors que v_1 ne change pas, étant donné que $\underline{Z}_e = \underline{V}_1/\underline{I}$ on en déduit que l'**inducteur appelle moins de courant**.

VI Peut-on négliger l'auto-induction ?

- 1) Compte-tenu du sens de i sur le schéma, le vecteur normal orienté est le vecteur $+\vec{n}$. Ainsi,

$$\phi_{\text{ext}} = S \vec{B}_{\text{ext}} \cdot \vec{n} = S B_0 \cos(\omega t)$$

Sur le schéma électrique Figure 3.4, la f.é.m. induite e_{ext} est orientée dans le même sens que l'intensité, et vaut

$$e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} = +S B_0 \omega \sin(\omega t)$$

d'où on déduit l'intensité induite par le champ extérieur $i_{\text{ext}} = e_{\text{ext}}/R$ de la loi d'OHM,

$$\boxed{i_{\text{ext}} = \frac{S B_0 \omega}{R} \sin(\omega t)}$$



FIGURE 3.4 – Schémas électriques équivalents.

- 2) En tenant compte de l'auto-induction,

$$\phi = \phi_{\text{ext}} + Li \quad \text{donc} \quad \phi = S B_0 \cos(\omega t) + Li$$

1. Plus précisément, comme la casserole est éloignée de l'inducteur qui est source de champ magnétique, le flux vu par l'induit diminue, combien même le courant dans l'induction serait imposé, ce qui indique que M diminue.

Attention

Il n'est pas possible de remplacer i par l'expression obtenue à la question précédente : cette expression n'est valable que lorsque seul le champ extérieur est pris en compte, or nous nous intéressons désormais en plus à l'auto-induction.

Le schéma électrique équivalent est représenté Figure 3.4. La f.é.m. induite tient compte des deux contributions au flux, et vaut

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB_0 \sin(\omega t) - L \frac{di}{dt}$$

D'après la loi des mailles et la loi d'OHM, on a $e = Ri$, d'où

$$L \frac{di}{dt} + Ri = SB_0 \sin(\omega t) \quad (3.5)$$

3) À partir des raisonnements précédents, on identifie

$$e_{\text{ext}} = -\frac{d\phi_{\text{ext}}}{dt} \quad \text{donc} \quad \underline{E}_{\text{ext}} = j\omega SB_0$$

et de même

$$e_L = -L \frac{di}{dt} \quad \text{donc} \quad \underline{E}_L = -j\omega LI$$

d'où on trouve

$$\underline{H} = \underline{E}_L / \underline{E}_{\text{ext}} = \frac{-j\omega LI}{j\omega SB_0} = \frac{L}{SB_0} \underline{I}$$

Or, d'après l'équation différentielle (3.5),

$$j\omega LI + RI = j\omega SB_0 \quad \text{soit} \quad \underline{I} = \frac{j\omega SB_0}{R + j\omega L}$$

L'expression finale est donc

$$\underline{H} = \frac{L}{SB_0} \frac{j\omega SB_0}{R + j\omega L} \quad \text{donc} \quad |\underline{H}| = \frac{L\omega}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} = \frac{1}{\sqrt{1 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$$

La force électromotrice auto-induite est négligeable devant l'induite dès lors que $|\underline{H}| \ll 1$, c'est-à-dire lorsque $R/L\omega \gg 1$, soit

$$\omega \ll \frac{R}{L}$$

Pour reprendre des termes plus familiers en électrocinétique, on vient d'établir que la f.é.m. auto-induite de la bobine était négligeable en régime très basse fréquence... là même où l'on affirmait plus tôt dans l'année qu'elle était équivalente à un fil, c'est-à-dire que son comportement « bobine » n'apparaissait pas. Comme le comportement « bobine » est justement de l'auto-induction... la boucle est bouclée !

4) Pour $L = 100 \text{ mH}$ et $R = 1 \text{ k}\Omega$, l'auto-induction est négligeable dans la limite

$$\omega \ll 1 \times 10^4 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \ll 1,6 \text{ kHz}$$

5) Considérons par exemple $d \approx 1 \text{ mm}$ et $D \approx 1 \text{ m}$. On trouve alors $L \approx 4 \times 10^{-6} \text{ H}$, ce qui donne comme condition

$$\omega \ll 2 \times 10^9 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{soit} \quad f \ll 3 \times 10^8 \text{ Hz}$$

Pour toutes les fréquences usuelles en électronique, limitées au plus à $1 \times 10^7 \text{ Hz}$, **négliger l'auto-induction du circuit est donc légitime.**

VII Principe de fonctionnement d'un générateur synchrone

oral CCP

1) Comme la distance entre la spire et l'aimant est bien plus grande que le rayon de la spire, on peut considérer le champ magnétique généré par l'aimant uniforme, et vaut

$$\vec{B}_a(\theta) = \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} (2 \cos \theta \vec{u}_r + \sin \theta \vec{u}_\theta)$$

en étant très vigilant-e à la définition de l'angle θ servant à repérer la position de la spire, voir Figure 3.5. Compte-tenu

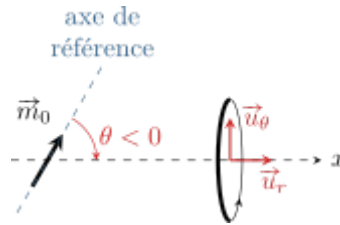


FIGURE 3.5 – Orientation relative de la spire par rapport à l'aimant.

de l'orientation de la spire, spécifiée sur le schéma, le flux du champ magnétique au travers de la spire vaut

$$\phi = S \vec{B}_a \cdot \vec{u}_r = \pi a^2 \times \frac{\mu_0 m_0}{4\pi x^3} \times 2 \cos \theta = \frac{\mu_0 m_0 a^2}{2x^3} \cos \theta$$

et on en déduit la force électromotrice induit dans la spire

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2x^3} (-\dot{\theta} \sin \theta)$$

Si l'aimant tourne à vitesse angulaire ω constante autour de l'axe z , alors compte-tenu du schéma on a $\theta = -\omega t$ (en supposant $\theta = 0$ à $t = 0$), donc $\dot{\theta} = -\omega$, et ainsi

$$e = +\frac{\mu_0 m_0 a^2}{2x^3} \omega \sin \omega t$$

Attention

Faites très attention aux multiples signes et compensations de signe ! Vérifiez également qualitativement le signe final : pour $t = 0$, l'aimant est dans l'axe de la spire, donc à $t \gtrsim 0$ il s'en éloigne ; donc le flux au travers de la spire diminue, donc d'après la loi de FARADAY $e > 0$. C'est bien ce qu'on vient de trouver !

Le courant induit se détermine alors directement à partir de la loi d'OHM, $i = e/R$, d'où

$$i = \frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2x^3 R} \sin(\omega t)$$

La spire étant simplement résistive, elle ne peut stocker d'énergie, et toute la puissance qu'elle reçoit est dissipée par effet JOULE. Ainsi, la puissance électrique reçue par la spire $\mathcal{P}_e = Ri^2$ vaut

$$\mathcal{P}_e = \frac{1}{R} \left(\frac{\mu_0 m_0 a^2 \omega}{2x^3} \right)^2 \sin^2(\omega t)$$

- 2) Le champ créé par l'aimant n'exerce pas de couple sur l'aimant lui-même. On en déduit que le champ à l'origine de ce couple est donc dans le champ magnétique induit par la spire. L'énoncé donne le champ créé par un moment magnétique : il faut donc calculer le moment magnétique de la spire pour en déduire le champ qu'elle crée, en étant particulièrement vigilant-e au repérage. Compte-tenu de l'orientation du courant sur la Figure 3.5, le moment magnétique de la spire vaut

$$\vec{m}_{sp} = i \pi a^2 \vec{u}_x = \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2x^3 R} \sin \omega t \vec{u}_x$$

En coordonnées polaires d'axe \vec{u}_x et d'origine le centre **de la spire** (et donc pas O!), l'aimant a pour coordonnées $r = x$ et $\theta = \pi$, si bien que $\vec{u}_r = -\vec{u}_x$ et $\vec{u}_\theta = -\vec{u}_y$. On en déduit que le champ magnétique créé en O au niveau de l'aimant par la spire vaut

$$\begin{aligned} \vec{B}_{sp}(O) &= \frac{\mu_0 m_{sp}}{4\pi x^3} \left[\underbrace{2 \cos(\pi)}_{=-1} (-\vec{u}_x) + \underbrace{\sin(\pi)}_{=0} (-\vec{u}_y) \right] \\ \Leftrightarrow \vec{B}_{sp}(O) &= \frac{\mu_0}{4\pi x^3} \times \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2x^3 R} \sin \omega t \times 2 \vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{B}_{sp}(O) &= \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4x^6} \sin \omega t \vec{u}_x \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} m_{sp} = \frac{\pi \mu_0 m_0 a^4 \omega}{2x^3 R} \sin \omega t$$

Attention

Ici aussi, pensez à **vérifier qualitativement les signes** : d'après la question précédente, $i > 0$ pour $t \gtrsim 0$, donc avec la règle de la main droite on a \vec{B}_{sp} porté par $+\vec{u}_x$.

Compte-tenu du fait que les calculs ne sont pas très sympathiques, ces vérifications qualitatives font partie intégrante des compétences testées à l'oral des concours.

Finalement, le couple magnétique exercé par la spire sur l'aimant vaut

$$\vec{\Gamma} = \vec{m}_0 \wedge \vec{B}_{\text{sp}}(\text{O})$$

Le plus sûr pour calculer le produit vectoriel est de décomposer les coordonnées de \vec{m}_0 sur la base \vec{u}_x, \vec{u}_y . Comme l'aimant tourne à vitesse angulaire ω supposée positive autour de \vec{u}_z , alors

$$\begin{aligned} \vec{\Gamma} &= m_0 [\cos(\omega t) \vec{u}_x + \sin(\omega t) \vec{u}_y] \wedge \frac{\mu_0^2 m_0 a^4 \omega}{4x^6 R} \sin(\omega t) \vec{u}_x \\ \Leftrightarrow \vec{\Gamma} &= -\frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega}{4x^6 R} \sin^2(\omega t) \vec{u}_z \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{u}_x \wedge \vec{u}_x = \vec{0} \\ \vec{u}_y \wedge \vec{u}_x = -\vec{u}_z \end{array} \right\}$$

Vérification

Ici encore, le couple est porté par $-\vec{u}_z$, c'est-à-dire qu'il **résiste** au mouvement de l'aimant. D'après la loi de LENZ, c'est complètement normal, puisque ce couple est d'origine inductive, et que la cause de ce phénomène d'induction est le mouvement de l'aimant.

- 3) Pour maintenir la vitesse de rotation de l'aimant constante, le système mécanique doit fournir à l'aimant une puissance, sous forme d'un couple, exactement opposée à la puissance dissipée par $\vec{\Gamma}$. La puissance mécanique à fournir vaut donc $\mathcal{P}_m = -\Gamma\omega$, d'où

$$\mathcal{P}_m = \frac{\mu_0^2 m_0^2 a^4 \omega^2}{4x^6 R} \sin^2(\omega t)$$

On remarque qu'on a $\mathcal{P}_m = \mathcal{P}_e$, c'est-à-dire que **toute la puissance mécanique fournie à l'aimant est transmise à la spire sous forme de puissance électrique** : on a bien modélisé un générateur électrique simplifié.