

# Correction du TD d'application

## I Mouvements simples de particules chargées

- 1) On étudie la particule M de masse  $m$  et de charge  $q$  assimilée à un point matériel dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Cette particule est soumise à la force de LORENTZ

$$\vec{F} = q(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$$

La trajectoire est rectiligne et uniformément accélérée, soit

$$\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{a} = \text{cte} \quad \Rightarrow \quad \vec{v} = \vec{a}t + \vec{v}_0$$

La norme de  $\vec{v}$  varie, donc l'énergie cinétique aussi. Or, **seule la force électrique travaille**<sup>1</sup>, le champ est un donc champ électrique. De plus, pour que la trajectoire soit rectiligne, il faut, d'après l'expression de  $\vec{v}(t)$ , que  $\vec{a}$  soit colinéaire à  $\vec{v}_0$ . Or,

$$\vec{a} = \frac{q}{m} \vec{E}$$

donc  $\vec{E}$  est colinéaire à  $\vec{v}_0$ .

- 2) On note O l'origine du repère. On intègre l'expression de la vitesse pour avoir la position  $\overrightarrow{OM}$  de la particule :

$$\overrightarrow{OM} = \frac{q}{2m} t^2 \vec{E} + t \vec{v}_0 + \overrightarrow{OM}_0$$

- 3) La trajectoire circulaire est celle d'une charge dans un champ magnétique perpendiculaire à la vitesse initiale. On en déduit que  $\vec{B}$  est suivant Oz et que  $\vec{v}_0$  est dans le plan  $xOy$ .
- 4) La trajectoire étant circulaire, la vitesse en coordonnées polaires a pour expression  $\vec{v} = R_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et l'accélération se réduit à

$$\vec{a} = -R_0 \dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R_0 \ddot{\theta} \vec{u}_\theta$$

Le principe fondamental de la dynamique, appliqué à la charge  $q$  dans le référentiel d'étude que l'on supposera galiléen, s'écrit :

$$m \vec{a} = q \vec{v} \wedge \vec{B}$$

Or,  $\vec{B} = B \vec{u}_z$ . Par conséquent,

$$\begin{aligned} q \vec{v} \wedge \vec{B} &= q R_0 \dot{\theta} \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_z \\ &= q B R_0 \dot{\theta} (\underbrace{\vec{u}_\theta \wedge \vec{u}_z}_{=\vec{u}_r}) \\ \Leftrightarrow q \vec{v} \wedge \vec{B} &= q B R_0 \dot{\theta} \vec{u}_r \end{aligned}$$

En projetant le PFD sur la base polaire  $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ , il vient :

$$\begin{cases} -m R_0 \dot{\theta}^2 = q R_0 \dot{\theta} B \\ R_0 \ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

1. La force de LORENTZ magnétique  $q(\vec{v} \wedge \vec{B})$  est perpendiculaire à  $\vec{v}$  donc à la trajectoire

On obtient alors

$$\dot{\theta} = -\frac{qB}{m} = \text{cte} \Rightarrow \theta(t) = -\frac{qB}{m}t + \theta_0$$

Si la charge est positive, elle tourne dans le sens anti-trigonométrique (horaire) par rapport à Oz. Puisque  $\dot{\theta}$  est constante, le mouvement est circulaire uniforme et  $v_0 = R_0 |\dot{\theta}|$  (c'est une norme donc nécessairement positive!) d'où

$$R_0 = \frac{mv_0}{qB}$$

## II Filtre de vitesse

- 1) Dans le référentiel du laboratoire, le système {ion} repéré par son point matériel M de masse  $m$  et de charge  $q$  dans un repère cartésien  $(F_1, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  est soumis à la force de LORENTZ, telle que

$$\begin{aligned} \vec{F} &= q \left( \vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B} \right) \\ &= qE \vec{u}_y + qBv_0 \underbrace{(\vec{u}_x \wedge \vec{u}_z)}_{= -\vec{u}_y} \\ \Leftrightarrow \vec{F} &= q(E - Bv_0) \vec{u}_y \end{aligned}$$

- 2) Pour avoir une trajectoire rectiligne sur  $\vec{u}_x$ , il faut que la somme des forces s'appliquant sur l'ion soit nulle. Ainsi, en négligeant le poids devant la force de LORENTZ, il faut **que la force de LORENTZ soit nulle**.
- 3) La condition précédente avec l'équation de la première question amène à

$$E - v_0 B = 0 \Leftrightarrow v_0 = \frac{E}{B}$$

Ainsi, si le vecteur vitesse de la particule n'est pas égal à  $v_0 \vec{u}_x$ , alors elle sera déviée et ne passera pas par la fente  $F_2$  : on filtre effectivement les vitesses.

## III Déviation d'un électron

- 1) La particule arrive dans un champ magnétique uniforme et stationnaire  $\vec{B} = B_0 \vec{e}_z$  avec une vitesse  $\vec{v}_0 = v_0 \vec{e}_x$  orthogonale à  $\vec{B}$ . La trajectoire est donc un cercle de rayon  $R = mv_0/(qB_0)$ , avec  $B_0 = \|\vec{B}\|$ . La force en A est dirigée vers le bas, on en déduit la position du centre  $C_1$  de la trajectoire.

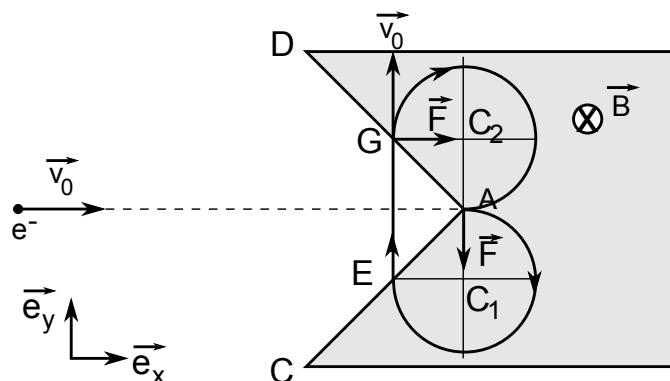


FIGURE 5.1 – Trajectoire dans la zone.

- 2) La particule ressort par la face AC en E, avec une vitesse selon  $\vec{e}_y$  car le triangle AC<sub>1</sub>E est isocèle et rectangle en C<sub>1</sub>.
- 3) En dehors de la zone grisée, la particule est isolée, donc elle est animée d'un mouvement rectiligne uniforme ( $\vec{v} = v_0 \vec{e}_y = \text{cte}$ ) dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen.

La particule entre à nouveau dans la zone où règne le champ magnétique par la face AD, avec une vitesse  $\vec{v} = v_0 \vec{e}_y$ . La trajectoire est alors circulaire de même rayon  $R$  (car la vitesse est la même en norme). On représente la force magnétique en G, et on en déduit la position C<sub>2</sub> du centre de la trajectoire. La particule arrive en A avec la vitesse  $\vec{v} = -v_0 \vec{e}_x$  et sort de la zone grisée.

Au final, la particule a subi une déviation de  $\pi$ , comme si elle avait été réfléchiée par un miroir. On pourrait donc appeler ce dispositif un **miroir magnétique**.

Remarque

Vérifiez que l'effet miroir est maintenu si la particule incidente n'arrive plus en A. On constate en revanche que la particule n'emprunte plus le même chemin qu'à l'aller.

## IV Imprimante jet d'encre

- 1) La gouttelette est chargée positivement, et subit la force électrique  $\vec{F}_e = q\vec{E}$ . Pour aller dans le sens des  $y$  croissants, il faut que  $\vec{E}$  soit selon  $\vec{u}_y$ , comme indiqué dans l'énoncé. Or,  $\vec{E} = -\text{grad } V$ , donc  $\vec{E}$  va des **hauts potentiels** vers les **bas potentiels**; il faut donc  $V_1 > V_2$ , soit

$$V_1 - V_2 > 0$$

- 2) La gouttelette a un volume  $V$  et une masse volumique  $\rho$ . On en déduit

$$\boxed{m = \rho V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3} \\ V = 10 \text{ pL} = 10 \times 10^{-12} (\text{dm})^3 \\ \quad = 1,0 \times 10^{-11} (10^{-1} \text{ m})^3 \\ \quad = 1,0 \times 10^{-14} \text{ m}^3 \end{cases}$$

A.N. :  $\boxed{m = 1,0 \times 10^{-11} \text{ kg}}$

Ainsi, on trouve

$$\|\vec{F}_e\| = qE \approx 1,7 \times 10^{-8} \text{ N} \quad \text{et} \quad \|\vec{P}\| = mg \approx 1,0 \times 10^{-10} \text{ N} \quad \text{soit} \quad \boxed{\|\vec{F}_e\| \approx 200 \times \|\vec{P}\|}$$

On peut donc négliger le poids devant la force de LORENTZ.

- 3) On applique le PFD à la gouttelette dans le référentiel de la salle d'impression, supposé galiléen, avec un repère cartésien tel qu'indiqué sur le schéma :

$$m\vec{a} = q\vec{E} \Rightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \\ \dot{y} = \frac{qE}{m}t \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = \frac{qE}{2m}t^2 \end{cases}$$

en intégrant une première fois avec  $\dot{x}(0) = v_0$  et  $\dot{y}(0) = 0$ , en ignorant le mouvement en  $z$ , puis en intégrant une seconde fois, avec  $x(0) = 0 = y(0)$ . On trouve alors l'équation de la trajectoire :

$$\boxed{y(x) = \frac{qE}{2mv_0^2}x^2}$$

qui est l'équation d'une parabole. Ainsi, on trouve  $Y_1 = y(L_1)$  :

$$\boxed{Y_1 = 5,3 \times 10^{-3} \text{ m} = 5,3 \text{ mm}}$$

- 4) Après être sortie du déflecteur, la gouttelette n'est soumise à aucune action sauf son poids, que l'on ignore sur la durée du trajet restant ( $v_0 = 20 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$ ) : sa trajectoire est donc rectiligne et uniforme.
- 5) On trouve l'angle de sortie en prenant

$$\tan \theta = \frac{dy}{dx} = \frac{\dot{y}(L_1)}{\dot{x}(L_1)} = \frac{qEL_1}{mv_0^2} = 2 \frac{Y_1}{L_1}$$

L'angle trouvé étant petit ( $\theta \approx 0,21 \text{ rad}$ ),  $\tan \theta \approx \theta \approx \sin \theta$ . Or, on a

$$Y_2 = Y_1 + L_2 \sin \theta$$

$$\Rightarrow \boxed{Y_2 = Y_1 \left(1 + 2 \frac{L_2}{L_1}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Y_1 = 5,3 \times 10^{-1} \text{ cm} \\ L_1 = 5,0 \text{ cm} \\ L_2 = 20 \text{ cm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{Y_2 = 4,8 \text{ cm}}$$