Travaux pratiques – TP 19

Correction du TP

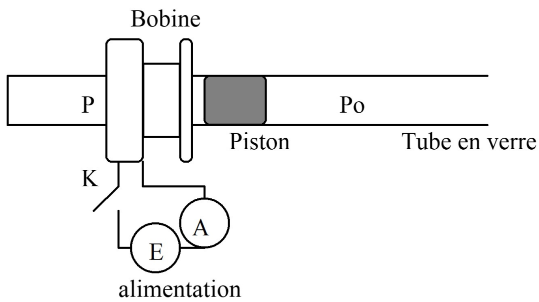
I Objectifs

- Observer des résonances d'amplitude pour un système mécanique.
- Déterminer la valeur numérique du coefficient adiabatique γ de l'air par étude de sa compressibilité.
- Tracer une régression linéaire avec incertitudes et déterminer un paramètre par simulation Monte-Carlo.

II S'approprier

II/A Principe des mesures

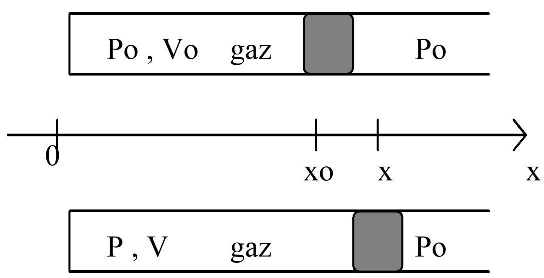
On considère un tube en verre horizontal dont une des extrémités est fermée et l'autre est en communication avec l'air ambiant. À l'intérieur de ce tube, un piston muni d'un aimant permanent peut se déplacer sans frottements. La bobine parcourue par un courant crée un champ magnétique sinusoïdal et excite l'aimant permanent qui se trouve à l'intérieur du piston.



En faisant varier la fréquence du courant dans la bobine, on recherche la résonance en amplitude du piston. La fréquence de résonance est liée au coefficient adiabatique γ de l'air que l'on se propose de déterminer.

II/B Étude mécanique du piston

On étudie le système {piston} dans le référentiel du laboratoire, supposé galiléen. Il est soumis aux forces de pression qui s'exercent sur ses deux faces latérales, ainsi qu'à son poids et à la réaction du support, forces qui se compensent. Enfin, il est soumis à la force d'excitation magnétique $\vec{F}_{\text{mag}}$ engendrée par la bobine. On suppose cette force proportionnelle au courant $i(t)$ circulant dans la bobine selon



$$\vec{F}_{\text{mag}} = \beta i(t)\,\vec{u_x}$$

avec β une constante que l'on ne cherchera pas à déterminer.

Étudions le mouvement du piston selon l'axe horizontal (Ox). À l'équilibre, le piston se trouve en x_0, la pression étant égale à la pression atmosphérique P_0 sur chaque face. Le volume fermé de gaz est V_0. On considère un petit déplacement du piston dans le sens des x croissants. Le volume de gaz fermé devient V, et la pression qui s'exerce sur la face gauche du piston est $P < P_0$ puisque le volume fermé de gaz a subi une détente. En appliquant la deuxième loi de Newton en projection selon l'axe (Ox), on obtient :

$$\boxed{m\ddot{x} = (P - P_0)S + \beta i(t)}$$

où m est la masse du piston et S sa section.

II/C Transformations thermodynamiques subies par le volume fermé de gaz

Au cours de l'expérience, les oscillations du piston sont suffisamment rapides pour pouvoir supposer que les transformations subies par le gaz sont adiabatiques, c'est-à-dire sans échange de chaleur avec l'extérieur. D'autre part on assimile le gaz (l'air) à un gaz parfait de coefficient adiabatique γ constant. Au cours de telles transformations, l'équation d'état du gaz suit la loi dite de LAPLACE telle que

$$PV^\gamma = C$$

avec C une constante. L'expression différentielle de cette loi est :

$$\frac{\mathrm{d}P}{P} + \gamma\frac{\mathrm{d}V}{V} = 0$$

On en déduit donc une relation entre la variation de pression $\mathrm{d}P$ du gaz et sa variation $\mathrm{d}V$ de volume au cours de la transformation.

III Analyser

III/A Équation différentielle du mouvement

D'après les caractéristiques du tube, $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x$. On suppose toutes les variations faibles par rapport aux grandeurs de repos, si bien que

$$P = P_0 + \mathrm{d}P \approx P_0 \qquad \text{et} \qquad V = V_0 + \mathrm{d}V \approx V_0$$

Sous ces hypothèses, l'expression différentielle de la loi de LAPLACE permet d'écrire :

$$\mathrm{d}P = -\gamma P_0 \frac{\mathrm{d}V}{V_0}$$

Et, en utilisant le fait que $\mathrm{d}V = S\mathrm{d}x = S(x - x_0)$,

$$\boxed{P - P_0 = \mathrm{d}P = -\gamma\frac{P_0}{V_0}\,S\,(x - x_0)}$$

/2 (1) Donner alors l'équation différentielle du mouvement du piston en x

Réponse

On a

$$\begin{cases} m\ddot{x} = (P - P_0)S + \beta i(t) \\ P - P_0 = -\gamma\frac{P_0}{V_0}S(x - x_0) \end{cases} \quad\Rightarrow\quad m\ddot{x} = -\gamma\frac{P_0}{v_0}S^2(x - x_0) + \beta i(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{P_0S^2\gamma}{mV_0}x = \frac{P_0S^2\gamma}{mV_0}x_0 + \frac{\beta}{m}i(t)}$$

◇

/1 (2) Déterminer la pulsation propre du mouvement.

Réponse

$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_0}^2x = {\omega_0}^2x_0 + \frac{\beta}{m}i(t)} \quad\Rightarrow\quad \omega_0 = \sqrt{\frac{P_0S^2\gamma}{mV_0}}$$

◇

/2 ③ Montrer que le tracé de la **fréquence** de résonance au carré en fonction de $1/V_0$ est une droite de coefficient directeur a dont on précisera l'expression.

Réponse

D'où
$$\omega_0{}^2 = (2\pi f_0)^2 \Leftrightarrow \boxed{f_0{}^2 = \frac{P_0 S^2 \gamma}{4m\pi^2}\frac{1}{V_0}}$$

$$y = ax + b$$
$$\swarrow \quad \swarrow \quad \searrow \quad \searrow$$
$$f_0{}^2 \quad \frac{P_0 S^2\gamma}{4m\pi^2} \quad \frac{1}{V_0} \quad 0$$

III/B Excitation de l'oscillateur

Les frottements étant suffisamment faibles, le facteur de qualité est alors grand devant 1, si bien que la pulsation de résonance obtenue expérimentalement est très proche de la pulsation propre ω_0. On a donc accès expérimentalement à la valeur de la fréquence propre du piston.

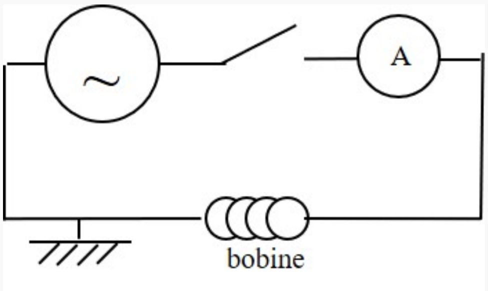
IV Réaliser

IV/A Schéma du montage et alimentation de la bobine

Montage

On alimente la bobine à l'aide d'un GBF sur sa **sortie amplifiée** 0,5 Ω), qui peut délivrer environ 1 A (nécessaire au fonctionnement du dispositif), ce qui est impossible avec la sortie classique du GBF.

L'ampèremètre branché en série permet de vérifier l'intensité efficace débitée dans le circuit. Il faut qu'elle soit de l'ordre de [0,8 ; 0,9] A, et toujours inférieure à 1 A.



Rappel

On rappelle que la valeur efficace S_{eff} d'un signal $s(t)$ dit T-périodique est définie par

$$S_{\text{eff}} = \frac{1}{T}\sqrt{\int_0^T s^2(t)\mathrm{d}t}$$

Pour un signal sinusoïdal comme le courant ici, la valeur efficace est liée à l'amplitude S_0 selon :

$$S_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}}$$

IV/B Mode opératoire

Aller sur `Capytale`, en cliquant sur https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/4523-1426759

Mesures

1) Ouvrir le robinet de la burette, et choisir un volume initial V_0 grâce à l'aimant. Notez cette valeur de V_0 dans la liste `python` correspondante, et fermer le robinet.

2) Disposer alors la bobine de manière à ce que son bord se trouve à hauteur du bord du piston.

3) Allumer le GBF et augmenter le `level` jusqu'à ce que l'intensité (lue sur l'ampèremètre) soit d'environ [0,8 ; 0,9] A.

4) Chercher la fréquence de résonance, en partant d'une fréquence de [40 ; 50] Hz environ et en la diminuant (ne pas descendre sous les 10 Hz). À la résonance, le cylindre oscille alors avec une relativement grande amplitude.

5) Noter cette valeur dans la liste `python` correspondante. Remplir la liste `Df0` de la plage de valeurs où vous estimez que la résonance se trouve (i.e. on a f_0 dans $[f_0 - \Delta, f_0 + \Delta]$) ; l'incertitude-type $u(f_0)$ est alors $\Delta/\sqrt{3}$.

6) Ouvrir l'interrupteur pour couper le courant et lire le volume correspondant après oscillation. La différence avec V_0 correspond à l'écart à rentrer dans `DV0`, et l'incertitude-type sera alors `uV0 = DV0/np.sqrt(3)`.

7) Déplacer de nouveau le piston en ayant ouvert le robinet, et faire ainsi une série de mesures en faisant varier V_0 et en repérant la valeur de f_0, sa plage d'existence et la plage d'existence de V_0 pour chaque valeur de V_0.

V Valider et conclure

1 Toujours sur `Capytale`, remplissez les listes des erreurs **relatives** pour V_0 et f_0.

Réponse

Voir Capytale : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/c758-3021536.

◇

2 Créer les variables nécessaires au tracé de ${f_0}^2$ en fonction de $1/V_0$.

Réponse

Idem.

◇

3 Effectuer la régression linéaire avec `polyfit`, compléter la fonction définissant la régression linéaire, et tracer le graphique des données relevées avec la régression. Les erreurs à afficher sont les incertitudes absolues, pas relatives.

Réponse

Idem.

◇

/1 4 La régression est-elle valide ?

Réponse

Pour qu'elle soit valide, il faut que les points soient répartis aléatoirement autour de la droite, et qu'elle passe par les incertitudes. Sur `Capytale` c'est globalement le cas, par contre la droite ne passe pas par 0 même avec les incertitudes. Elle est donc peu fiable.

◇

/1 5 Relever le coefficient directeur a de la droite modélisée. Quelle est son unité ?

Réponse

Pour la valeur, cf. Capytale.

$$a = V_0 {f_0}^2 \quad \Rightarrow \quad [a] = [V_0][{f_0}^2] \quad \boxed{[a] = \mathrm{cm}^3{\cdot}\mathrm{s}^{-2}}$$

◇

/1 $\boxed{6}$ Déduire, de la partie Analyse, l'expression littérale du coefficient adiabatique γ de l'air en fonction du coefficient directeur a de la droite modélisée, de la masse m de l'aimant, **du diamètre d du piston** et de la pression atmosphérique P_0.

Réponse

On isole γ :

$$\gamma = \frac{4\pi^2 ma}{P_0 S^2} \Leftrightarrow \boxed{\gamma = \frac{64ma}{P_0 d^4}}$$

◇

/1 $\boxed{7}$ On a $m = 8{,}8\,\mathrm{g}$ et $d = 13{,}97\,\mathrm{mm}$. La pression atmosphérique P_0 se lit sur le baromètre placé dans la salle (en mbar). Après avoir détaillé les valeurs expérimentales et leurs unités correctes sur votre copie, utilisez `Capytale`, pour calculer la valeur expérimentale de γ de l'air. Quelle est son unité ?

Réponse

On a, en unités SI,

$$m = 8{,}8 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \quad ; \quad P_0 = 982{,}5 \times 10^2\,\mathrm{Pa} \quad ; \quad d = 13{,}97 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \quad ; \quad a = 8430{,}51 \times 10^{-6}\,\mathrm{m^3{\cdot}s^{-2}}$$

D'où

$$\boxed{\gamma = 1{,}27}$$

Avec des calculs ou en analysant la loi de Laplace, on trouve que γ est **adimensionné**.

◇

$\boxed{8}$ Utiliser le code `Monte-Carlo` pour estimer la valeur moyenne de a et l'incertitude sur la valeur de a. En déduire la valeur moyenne et l'incertitude sur la valeur de γ.

Réponse

Cf. Capytale.

◇

$\boxed{9}$ Le cours de thermodynamique permettra de déterminer le coefficient γ d'un gaz selon qu'il soit un gaz parfait diatomique ou monoatomique. On a

$$\gamma_{\text{dia,théo}} = \frac{7}{5} \quad \text{et} \quad \gamma_{\text{mono,théo}} = \frac{5}{3}$$

Déterminer la bonne valeur théorique par calcul d'écart normalisé. Comparez à ce que vous savez des gaz composant l'air (mono- ou diatomique).

Réponse

Idem. On doit trouver le coefficient pour un gaz parfait diatomique, puisque l'air est principalement constitué de N_2 et O_2.

◇

/1 $\boxed{10}$ Conclure.

Réponse

Dû à l'usure des tubes et de problèmes d'étanchéité, les mesures sont peu précises. On obtient cependant une valeur bien plus proche du gaz diatomique que monoatomique.

◇