Mécanique – chapitres 8

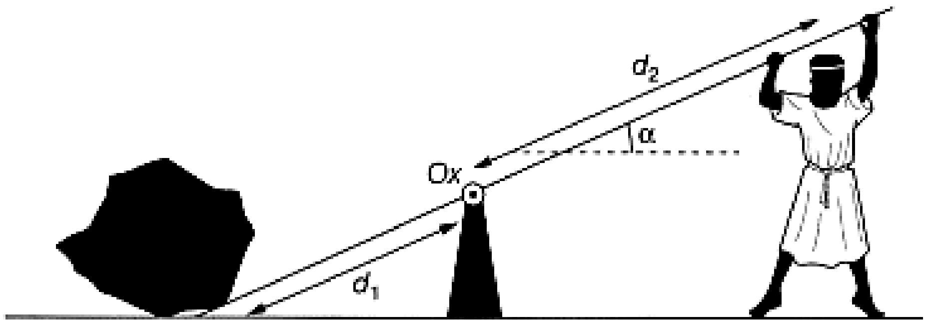
TD : mécanique du solide

I Levier

Archimède (240 av. J.-C.) est le premier à établir la théorie physique du levier et de la balance. Il aurait dit [1] :

> « Donnez-moi un point fixe et un levier, et le soulèverai la Terre. »

Imaginons une situation pour réaliste où Archimède utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200\,\mathrm{kg}$. Les longueurs sont $d_1 = 50\,\mathrm{cm}$, $d_2 = 1{,}5\,\mathrm{m}$ et $\alpha = 60°$.

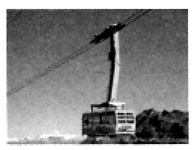


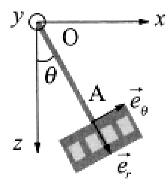
1) Archimède se suspend verticalement au levier. Quelle doit être sa masse minimale pour que le rocher se soulève ?

2) Archimède décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier sans changer sa norme. Comment doit-il procéder pour être le plus efficace ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

II Pendule pesant non amorti

Une benne de téléphérique, de masse $M = 2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{kg}$, est accrochée au point A situé à l'extrémité inférieure d'un bras de masse $m = 300\,\mathrm{kg}$ relié à des câbles au point O. On note $d = 4{,}5\,\mathrm{m}$ la distance entre O et G le centre de gravité de l'ensemble {benne+bras}, situé sur l'axe (OA).





On note J_{tot} le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation y, et la liaison est supposée parfaite. On effectue un test d'oscillations de la benne, le point O étant maintenant fixe.

1) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ.

2) En déduire la période T des petites oscillations de la benne.

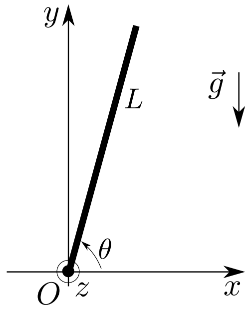
3) Sachant que la période des petites oscillations est $T = 4{,}1\,\mathrm{s}$ et que le bras de longueur $L = 3{,}0\,\mathrm{m}$ a un moment d'inertie $J' = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à l'axe y, calculer le moment d'inertie J de la benne par rapport à y. On rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ et on indique que dans ce cas, les moments d'inertie se somment.

1. Voir https://www.persee.fr/doc/antiq_0770-2817_1955_num_24_1_3257 pour une restitution plus fidèle

III Chute d'un arbre

On étudie la chute d'une arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.

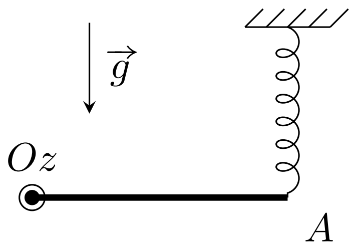
On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10\,\mathrm{m}$ et de masse m, reliée au sol par une liaison pivot parfaite et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 1{,}5\,\mathrm{rad}$ avec une vitesse initiale nulle. On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J_z = \frac{1}{3}mL^2$.



1) Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre.
2) Justifier que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.
3) En déduire la relation $\dfrac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t} = -\sqrt{\dfrac{3g}{L}(\sin\theta_0 - \sin\theta)}$
4) Retrouver ce résultat par le TMC.
5) Pour exprimer la durée T de la chute, isoler dt dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$. Faire l'application numérique, sachant que $\displaystyle\int_0^{\theta_0} \frac{\mathrm{d}\theta}{\sqrt{\sin\theta_0 - \sin\theta}} \approx 5{,}44$ pour $\theta_0 = 1{,}5\,\mathrm{rad}$.
6) *Bonus* Écrire un script `Python` permettant de calculer numériquement l'intégrale précédente.

IV Barre fixée à ses extrémités

Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre homogène de masse m, de longueur OA $= 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz (liaison parfaite). Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k. L'autre extrémité du ressort est fixe.



1) À l'équilibre, las barre est horizontale et le ressort vertical. En déduire la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k, ℓ_0, m et g.
2) La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

V Choc de deux chariots

Deux masses m_1 et m_2 sont montées sur un banc horizontal à coussins d'air, de sorte qu'on peut négliger tout frottements. On les projette l'une contre l'autre avec des vitesses initiales $\vec{v}_1 = v_1\,\vec{u_x}$ et $\vec{v}_2 = \vec{0}$ (m_2 initialement à l'arrêt).

1) *Dans cette partie, on suppose qu'après le choc les masses restent solidaires.*

   a – Quelle est la vitesse commune des deux masses après le choc ?

   b – Quel est le travail des actions intérieures lors du choc ? Commenter le signe du résultat.

2) *On considère dans cette partie que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux masses est conservée au cours du choc et qu'elles ne sont plus solidaires après.*

   a – Montrer que les vitesses v'_1 et v'_2 après le choc s'expriment :

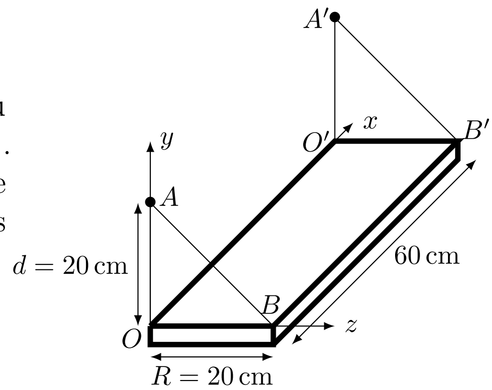
$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1$$

   b – Que se passe-t-il si $m_2 \gg m_1$?

   c – À quelle condition sur m_1 et m_2 est-il possible de réaliser un « carreau », i.e. échanger lors du choc les vitesses des deux masses, comme à la pétanque ?

VI Étagère murale

Une étagère est suspendue par quatre câbles métalliques et fixée au mur uniquement par deux pattes de fixation murale (en A et A'). La planche est en bois, de masse $m = 1{,}0\,\mathrm{kg}$, de centre de masse G situé à la distance $R/2$ de l'axe $\Delta = $ (OO') et nous négligerons la masse des câbles.

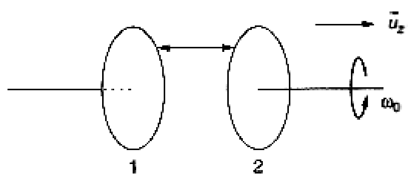


1) Exprimer les 4 forces de tension des câbles en fonction de normes arbitraires, la force de réaction $\overrightarrow{R_N}$ du mur sur la planche lorsque l'étagère est posée et en équilibre ainsi que le poids de l'étagère. $\overrightarrow{R_N}$ est supposée normale au mur. Calculer les valeurs numériques des normes des forces à l'aide de l'équilibre.

2) On imagine que les 2 câbles fixés en B et B' se rompent en même temps. La planche n'est alors retenue que par les câbles OA et OA', et elle tourne donc autour de l'axe $\Delta = (OO')$. Nous négligerons son épaisseur et admettrons que son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ vaut $J_\Delta = mR^2$. Montrer qu'alors :
$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)$$
En déduire la vitesse angulaire de la planche lorsqu'elle percute le mur.

VII Entraînement par frottements

On considère le système de deux disques en rotation, de moments d'inertie J_1 et J_2 par rapport à l'axe horizontal orienté par $\overrightarrow{u_z}$. Ils sont tous les deux en liaison pivot parfaite. Le second disque a une vitesse angulaire ω_0, alors que le premier est initialement immobile. On translate lentement les disques le long de l'axe jusqu'à ce qu'ils rentrent en contact. Il n'y a plus de frottement après la mise en contact.



1) À quelle condition sur les vitesses angulaires n'y a-t-il plus de frottements ? Déterminer alors les vitesses angulaires finales de deux disques par application du TMC sur le système total.

2) Faire un bilan d'énergie pour chaque disque séparément.

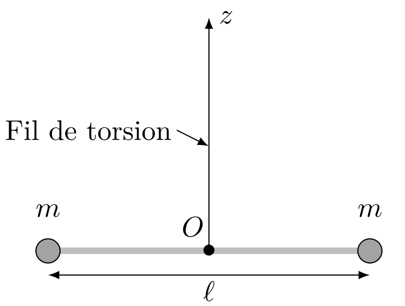
3) Faire le même bilan pour le système total.

4) Commenter les résultats.

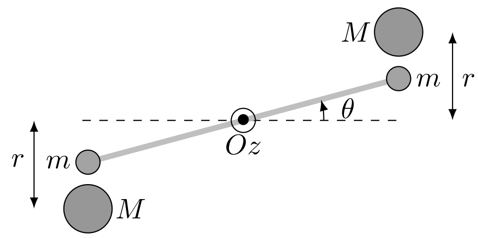
VIII Expérience de Cavendish

L'expérience réalisée par Cavendish en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle, $\mathcal{G}$. Le dispositif est constitué de deux petites sphères, de masse $m = 0{,}72\,\text{kg}$, fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, et longueur $\ell = 180\,\text{cm}$ et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion C : si la tige tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre $\theta = 0$, le fil exercice ainsi le couple de rappel $\overrightarrow{\Gamma} = -C\theta\,\overrightarrow{u_z}$ sur la tige.

Deux boules de plomb de masse $M = 160\,\text{kg}$ sont fixées, l'une derrière une petite sphère et l'autre devant l'autre petite sphère, à une distance $r = 20\,\text{cm}$ définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle θ par rapport à sa position au repos. Les deux petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.



Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb

1) Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.

   a – Montrer à l'aide du TMC que l'oscillateur est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.

   b – La mesure de la période T_0 des oscillations donne $T_0 = 7{,}0\,\text{min}$. En déduire la valeur de C.

2) Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. On tiendra compte du fait que θ est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb.

3) La valeur obtenue par Cavendish à l'aide de ce dispositif et $\mathcal{G} = 6{,}75 \times 10^{-11}\,\text{N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. En déduire la déviation angulaire et commenter.