

# Fibre optique

Ce sujet comporte 4 pages et doit être traité en intégralité. Comme pour tous DMs, vous pouvez vous entraider pour les questions les plus difficiles. Cependant, **la rédaction doit rester personnelle**.

Dans tout cet exercice, on notera  $c = 3,00 \times 10^8 \text{ m s}^{-1}$  la célérité de la lumière dans le vide.

## I Généralités

1. Énoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière en les accompagnant d'un schéma.
2. Lors d'une séance de travaux pratiques, on dispose d'un disque métallique gradué en degrés, d'un laser et d'un demi-cylindre de plexiglas dont la face plane est confondue avec un diamètre du disque métallique. La lumière du laser arrive sur la face courbe du demi-cylindre de plexiglas suivant un de ses rayons comme indiqué sur la figure ci-dessous. Le demi-cylindre peut pivoter sur le disque métallique autour de l'axe  $(Oz)$ ,  $O$  étant le centre du disque.

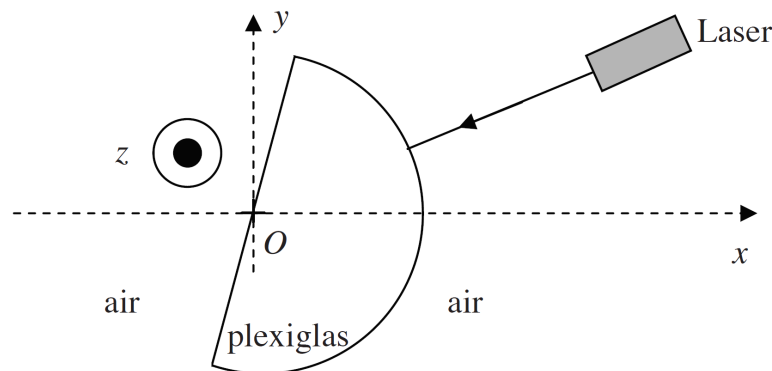


Figure 1.1 – Expérience avec un demi-cylindre en plexiglas

Reproduire la figure et tracer les rayons réfractés et réfléchis issus du laser. Quelle(s) loi(s) peut-on vérifier avec cette expérience ? Quel phénomène pourra être mis en évidence à l'occasion de cette expérience ? Pourquoi utiliser un laser comme source lumineuse ?

## II La fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice, représentée figure 1.2, est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice  $n_c = 1,500$  et de rayon  $r_c$ , entouré d'une gaine transparente d'indice  $n_g = 1,485$ . L'axe  $Ox$  de la fibre est normal au dioptré air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe  $Ox$ , on se restreint à une étude dans le plan  $(Oxy)$ .

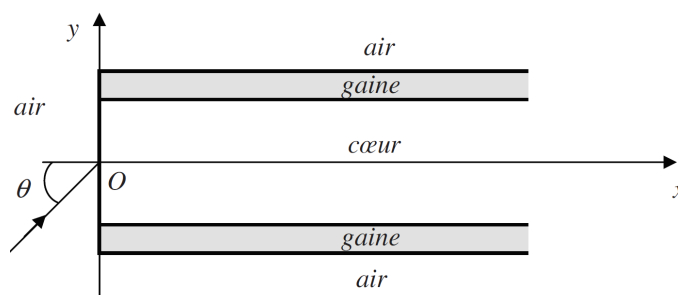


Figure 1.2 – Fibre optique à saut d'indice

On rappelle les résultats de trigonométrie suivants :

$$\forall x \in \mathbb{R} \text{ et } \forall y \in [-1; 1], \quad \begin{cases} \cos x = \sin\left(\frac{\pi}{2} - x\right) \\ \cos(\arcsin y) = \sqrt{1 - y^2} \end{cases}$$

3. Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air, situé dans le plan  $(Oxy)$ , pénètre dans le cœur de la fibre en  $O$  avec un angle d'incidence  $\theta$ . Justifier que le rayon reste dans le cœur si l'angle  $\theta$  est inférieur à un angle limite  $\theta_L$ , appelé angle d'acceptance de la fibre optique. Montrer que  $\theta_L$  peut se mettre sous la forme :

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a} \sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}\right)$$

Calculer la valeur de  $\theta_L$ . On considérera que l'indice de l'air vaut  $n_a = 1,000$ .

On considère maintenant une fibre optique de longueur  $L$ . Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence  $\theta$  variable compris entre 0 et  $\theta_L$ .

4. Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer, en fonction de  $L$ ,  $c$  et  $n_c$ , la durée du parcours  $T_1$  de ce rayon.
5. Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer, en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n_g$  et  $n_c$ , la durée du parcours  $T_2$  de ce rayon.
6. En déduire l'expression de l'intervalle de temps  $\delta T = T_2 - T_1$  en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n_g$  et  $n_c$ .

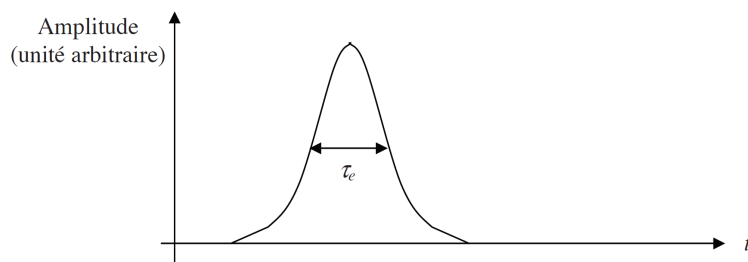
À l'aide de développements limités, on peut démontrer que :

$$\text{si } \alpha \ll 1, \text{ alors } \begin{cases} \sqrt{1 - 2\alpha} \simeq 1 - \alpha \\ \frac{1}{1 - \alpha} \simeq 1 + \alpha \end{cases}$$

On admettra ces deux relations sans chercher à les démontrer. On pose également  $2\Delta = 1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2$  et on admet que  $\Delta \ll 1$ .

7. À l'aide des relations précédentes, exprimer  $\delta T$  en fonction de  $L$ ,  $c$ ,  $n_c$  et  $\Delta$  uniquement. Calculer la valeur de  $\delta T$  pour  $L = 10$  km.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée  $\tau_e$ , appelée *un bit* et représentée ci-dessous, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et  $\theta_L$ .



On admet ici, en négligeant tout phénomène d'absorption de la lumière par la fibre, que l'allure de l'impulsion en sortie de fibre est identique à l'impulsion d'entrée, mais avec une amplitude plus faible (par conservation de l'énergie lumineuse du *bit*) et une durée  $\tau_s = \tau_e + \delta T$ .

8. Recopier la figure et tracer l'allure de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre optique.

9. Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (les *bits*) périodiquement avec une fréquence  $f$ . En supposant  $\tau_e$  négligeable devant  $\delta T$ , quelle est la fréquence maximale de transmission  $f_{max}$  qui empêche le recouvrement des impulsions à la sortie de la fibre ?
10. En considérant  $L_{max}$  la longueur maximale de fibre optique qui permet d'éviter le phénomène de recouvrement des impulsions, on définit le produit  $B_0 = L_{max} \times f$  comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer  $B_0$  en fonction de  $c$ ,  $n_c$  et  $\Delta$ . Expliquer l'intérêt d'introduire cette grandeur.
11. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l'on peut utiliser pour transmettre le signal.
12. Si la fibre peut être courbée sans grand inconvénient mécanique, cette courbure peut néanmoins conduire à une perte de l'énergie guidée. Expliquer la raison de cette perte dans une fibre optique à saut d'indice en raisonnant avec des rayons entrant perpendiculairement à la section d'entrée de la fibre.

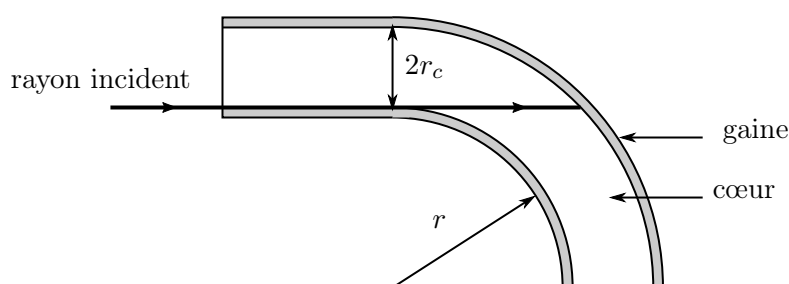


Figure 1.3 – Perte de courbure dans la fibre optique à saut d'indice

13. En considérant un rayon pénétrant dans la fibre, perpendiculairement à sa section, à la limite du bord inférieur, donner en fonction de  $n_c$ ,  $n_g$  et  $r_c$ , l'expression du rayon de courbure  $r$  à partir duquel la perte énergétique apparaîtra. On négligera l'épaisseur de la gaine devant le rayon  $r_c$  du cœur de la fibre. Calculer ce rayon  $r$  en considérant que  $r_c = 5,0 \times 10^{-1}$  mm,  $n_c = 1,500$  et  $n_g = 1,485$ . Conclure.

### III La fibre optique à gradient d'indice

Pour remédier à l'élargissement des impulsions, on a fabriqué des fibres dites à gradient d'indice dans lesquelles on a remplacé le cœur par un milieu inhomogène d'indice  $n(y)$  vérifiant la relation

$$n^2(y) = n_c^2 \times \left[ 1 - 2\Delta \left( \frac{y}{r_c} \right)^2 \right] \quad \text{pour } |y| \leq r_c,$$

où  $y$  désigne la distance algébrique du point considéré à l'axe  $Ox$  et  $r_c$  le rayon du cœur de la fibre. La gaine reste homogène d'indice  $n_g$  et on a encore  $n(y=0) = n_c = 1,500$ . Le rayon entre dans la fibre en  $O$  avec un angle d'incidence  $\theta$  compris entre 0 et  $\theta_L$ . Dans ces conditions, la trajectoire du rayon lumineux est celle indiquée en figure 1.4.

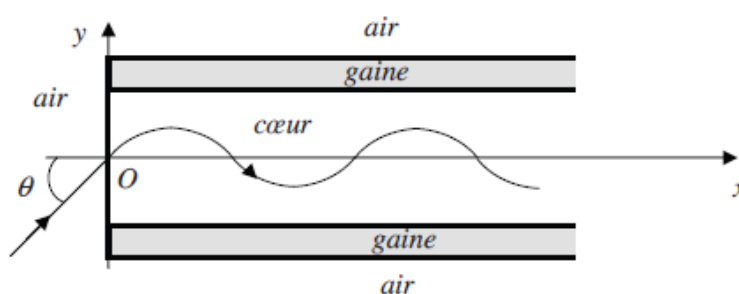


Figure 1.4 – Fibre à gradient d'indice

14. Tracer l'évolution de  $n^2$  en fonction de  $X = \frac{y}{r_c}$  pour  $X \in [-1, 1]$ .
15. Soit un point  $M$  du rayon lumineux repéré par ses coordonnées  $(x, y)$ . On introduit  $\varphi$ , l'angle formé en  $M$  entre la tangente au rayon lumineux et l'axe  $Ox$  comme indiqué en figure 1.5. En considérant le cœur comme un milieu stratifié formé de milieux d'indices  $n_0, n_1, \dots, n_j, \dots$  limités par des dioptries plans parallèles, d'équation  $y = \text{cste}$ , quelles relations lient les indices  $n_{j-1}$ ,  $n_j$ , et  $n_{j+1}$  aux angles d'incidence  $i_{j-1}$ ,  $i_j$ ,  $i_{j+1}$  ?

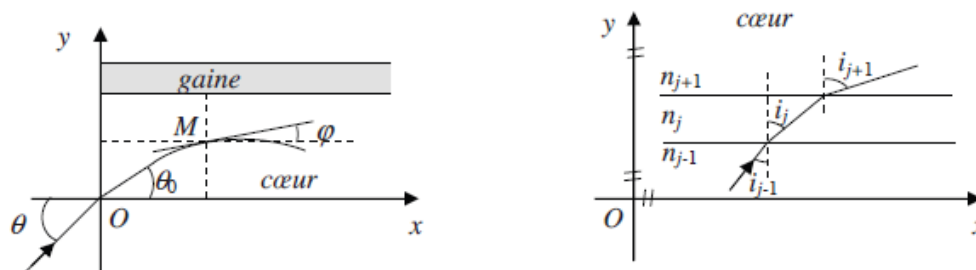


Figure 1.5 – Trajectoire du rayon lumineux dans une fibre à gradient d'indice

16. En considérant que cette propriété est valable pour une fibre à gradient d'indice, que peut-on dire de la quantité  $n(y) \cos \varphi$  ? Exprimez-la en fonction de  $n_c$  et  $\theta_0 = \arcsin \left( \frac{n_a \sin \theta}{n_c} \right)$ .
17. Relier,  $\frac{dy}{dx}$ , la pente de la tangente du rayon lumineux en  $M$ , à l'angle  $\varphi$ . Montrer alors que :

$$\left( \frac{dy}{dx} \right)^2 = \left( \frac{n(y)}{n_c \cos \theta_0} \right)^2 - 1.$$

18. En dérivant l'équation précédente et en utilisant l'expression de  $n^2(y)$ , on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2 y}{dx^2} + k^2 y = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2\Delta}{(r_c \cos \theta_0)^2}.$$

L'ensemble des solutions à cette équation s'écrit

$$y(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) \quad \text{avec} \quad (A_1, A_2) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminer les constantes  $A_1$  et  $A_2$  en exploitant les conditions aux limites  $y(x=0)$  et  $y'(x=0)$ .

19. Montrer que le rayon lumineux coupe l'axe  $Ox$  en des points régulièrement espacés d'une distance  $d$  que l'on exprimera en fonction de  $r_c$ ,  $\Delta$  et  $\theta_0$ .
20. Tracer l'allure du rayon dans la fibre optique en plaçant la distance  $d$  ainsi que l'amplitude  $Y_0$  des oscillations. À quelle condition le rayon peut-il ressortir de la fibre ? On suppose toujours que  $\theta \leq \theta_L$ .
21. On appelle ouverture numérique, O.N., la quantité  $\sin \theta_L$  où  $\theta_L$  est l'angle limite défini à la question 3. Existe-t-il une différence d'O.N. entre une fibre optique à saut d'indice et une fibre optique à gradient d'indice ?
22. On considère une impulsion lumineuse identique à celle de la question 8. Cette impulsion, en sortie d'une fibre optique à gradient d'indice de longueur  $L$ , possède un élargissement temporel,

$$\delta T' = \frac{n_c L}{c} \left( \frac{1}{2 \cos \theta_0} - 1 + \frac{\cos \theta_0}{2} \right).$$

Évaluer cette durée pour  $L = 10 \text{ km}$  et l'angle  $\theta_0$  maximum. Commenter. Interpréter physiquement pourquoi l'élargissement temporel est plus petit dans une fibre à gradient d'indice.