Électrocinétique – chapitre 6

Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
- ▢ Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.
- ▢ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
- ▢ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

L'essentiel

Définitions

Rappels

Propriétés

Démonstrations

Outils

Applications

Points importants

Erreurs communes

I Présentation du régime forcé

I/A Définition

Jusque-là en électrocinétique, nous avons étudié la réponse d'un circuit (c'est-à-dire la tension de sortie) de systèmes linéaires soit libres, soit à un forçage constant. On s'intéresse maintenant à la physique de ces systèmes lorsqu'ils sont soumis à des forçages sinusoïdaux.

Définition E6.1 : Régimes de forçages

◇ **Libre** : $$\sum_i f_i(t)\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i} = \underbrace{0}_{\text{libre}}$$

◇ **Forçage constant** : $$\sum_i f_i(t)\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i} = \underbrace{K}_{\text{forçage cst.}}$$

◇ **Forçage sinusoïdal** : $$\sum_i f_i(t)\frac{\mathrm{d}^i y}{\mathrm{d}t^i} = F(t) = \underbrace{F_0\cos(\omega t + \varphi_0)}_{\text{forçage sinusoïdal}}$$

Rappel E6.1 : Réponses système amorti

◇ **Libre** : $$y_{\text{libre}}(t) = y_h(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} 0$$

◇ **Forçage constant** : $$y_{\text{forcé}}(t) = y_h(t) + y_p \xrightarrow[t\to\infty]{} y_p$$

avec $y_p = \text{cte}$, de la même forme que le forçage.

I/B Réponse d'un système en RSF

Propriété E6.1 : Système amorti en RSF

◇ **Forçage sinusoïdal** : $$y_{\text{forcé}}(t) = y_h(t) + y_p(t) \xrightarrow[t\to\infty]{} y_p(t)$$

Avec $y_p(t)$ **de la même forme que le forçage** : on cherchera

$$\boxed{y_p(t) = Y_0\cos(\omega t + \varphi)}$$

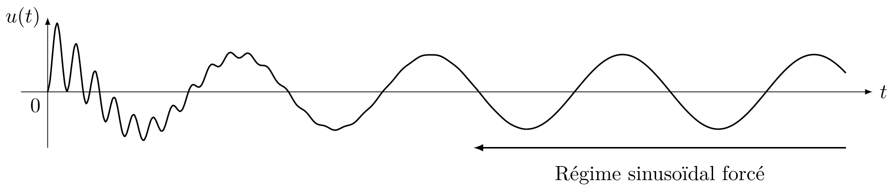


Figure E1 – Exemple d'un signal en RSF.

Définition E6.2 : Régime sinusoïdal forcé

Ainsi, concrètement on appelle **régime sinusoïdal forcé** le **régime permanent** d'un système amorti soumis à une **entrée sinusoïdale**.

Remarque E6.1 : Régimes permanents

- On est en **régime transitoire** tant que $y_h(t)$ n'est **pas négligeable** devant $y_p(t)$. Une fois l'**amortissement terminé**, quand $y_{\text{forcé}}(t) = y_p(t)$, on est en **régime permanent**.
- Précédemment, on avait un forçage constant, soit $\omega = 0 \Leftrightarrow f = 0 \Rightarrow F(\cancel{t})$; c'est ce qu'on appelle le **régime permanent <u>continu</u>**.
- Dorénavant, on étudie un **régime permanent <u>variable</u>**.

Important E6.1 : Signaux de sorties en RSF

Pour un signal d'entrée

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad (\text{ou} \quad \eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t))$$

les différentes tensions et intensités dans le circuit oscilleront **à la même pulsation** ω :

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

où U, I et $\varphi_{u,i}$ sont des grandeurs dépendant du système et de la pulsation ω.

L'objectif de ce chapitre est de donc de savoir déterminer U et φ.

Attention E6.1 : Grandeurs à déterminer

Dans le cas du **régime libre**, une solution $y_h(t)$ fait intervenir une ou plusieurs **constantes d'intégration**, que l'on détermine avec les **conditions initiales**.

En revanche, comme précédemment, les **constantes de $y_p(t)$**, ici Y_0 et φ, dépendent des **paramètres du système**, pas des conditions initiales ! En électricité, ça sera R, L, C, E_0, ω...

I/C Notions de signaux périodiques

I/C) 1 Période

Définition E6.3 : Période

$$s(t) \quad \text{périodique} \equiv \exists T \ : \forall t \in \mathbb{R}^+, s(t+T) = s(t)$$

Application E6.1 : Périodicité

Montrer que le signal $s(t) = A\sin(\omega t)$ a une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$s\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = A\sin(\omega t + 2\pi) = A\sin(\omega t) \qquad \blacksquare$$

I/C) 2 Moyenne

Définition E6.4 : Valeur moyenne

Pour un **signal périodique** $s(t)$, on définit sa valeur moyenne $\langle s(t) \rangle$ par

$$\langle s(t) \rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t$$

Application E6.2 : Moyenne d'un cosinus décalé

Calculer la valeur moyenne du signal

$$s(t) = S_0 + A\cos(\omega t)$$

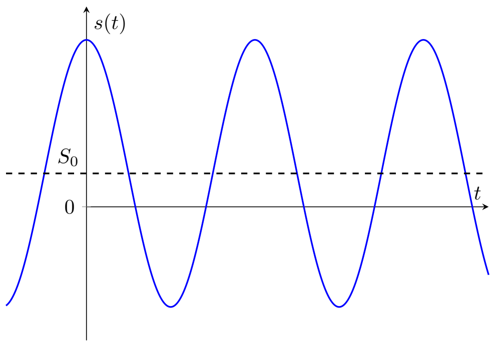


FIGURE E2 – $s(t) = S_0 + A\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T (S_0 + A\cos(\omega t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^T S_0\,\mathrm{d}t + \int_0^T A\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{T}\left([S_0 t]_0^T + \left[\frac{A}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^T\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(S_0(T-0) + \frac{A}{\omega}\underbrace{(\sin(\omega T) - \sin(\omega\times 0))}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{T}S_0 T \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\langle s(t)\rangle = S_0}
\end{aligned}$$

Important E6.2 : Moyenne d'un signal sinusoïdal

Un signal purement sinusoïdal a une moyenne nulle.

I/C) 3 Valeur efficace

Ainsi, si on envoie une tension sinusoïdale dans un circuit et qu'on mesure la moyenne de la tension reçue, on trouvera une tension nulle. Pourtant, l'énergie transmise n'est pas nulle ! C'est parce que les électrons réagissent à la fois aux tensions positives et négatives du signal, et ce pourquoi on obtient $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}C{u_C}^2$: l'**énergie est proportionnelle au carré des signaux**.

Définition E6.5 : Valeur efficace

On définit la valeur efficace d'un signal **périodique** par

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t)\rangle}$$

Ainsi, s_{eff}^2 représente l'**énergie moyenne du signal**.

Application E6.3 : Calcul de valeur efficace

Calculer la valeur efficace du signal

$$s(t) = A\cos(\omega t)$$

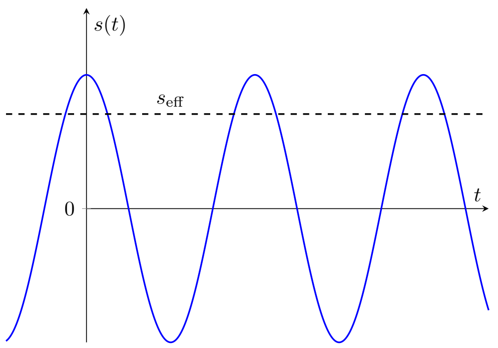


FIGURE E3 – s_{eff} de $A\cos(\omega t)$.

$$\begin{aligned}
\langle s^2(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A^2\cos^2(\omega t)\right)\mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\int_0^T \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\underbrace{\left[\frac{1}{2}t\right]_0^T}_{=\frac{T}{2}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}\frac{A}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T}_{=0}\right) \\
&= \frac{A^2}{2} \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{s_{\text{eff}} = \frac{A}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

I/D Passage en complexes

Outils E6.1 : Représentation complexe

$$\begin{aligned}
& y(t) = Y_0 \cos(\omega t + \varphi) && \text{Passage } \mathbb{C}\\
\Leftrightarrow\ & \underline{y}(t) = Y_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)} && \text{Séparation de } t\\
\Leftrightarrow\ & \underline{y}(t) = \underbrace{Y_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}_{=\text{cte}} \cdot \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} && \text{Réécriture}\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\underline{y}(t) = \underline{Y} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}
\end{aligned}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\underline{Y} = Y_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}} \Rightarrow \begin{cases} Y_0 = |\underline{Y}| \\ \varphi = \arg(\underline{Y}) \end{cases}$$

Comme **on connaît** ω la pulsation du signal d'entrée, on ne **cherchera que l'amplitude complexe** $\underline{Y}$, qu'on peut représenter dans le plan complexe :

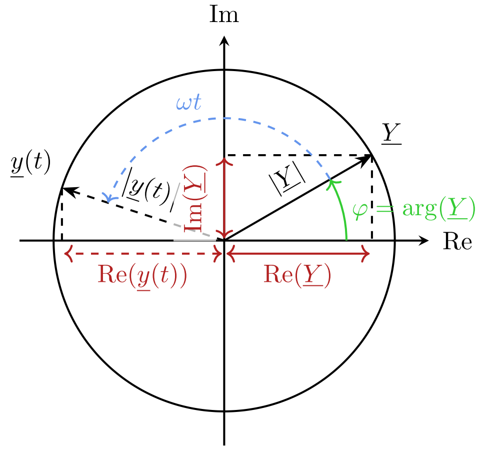


Figure E4 – Représentation de $\underline{Y}$.

Attention E6.2 : Passage en complexes

Le passage ne fonctionne **que si le signal est un cosinus** ! Dans le cas contraire, **on se ramène à un cosinus** par un terme de phase $(\sin\left(x + \frac{\pi}{2}\right) = \cos(x))$.

En effet, l'opération inverse du passage en complexe est la partie réelle :

$$\begin{aligned}
& y(t) = \mathrm{Re}(\underline{y}(t)) = \mathrm{Re}(Y_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)})\\
\Leftrightarrow\ & y(t) = \mathrm{Re}(Y_0(\cos(\omega t+\varphi) + \mathrm{j}\sin(\omega t+\varphi))) = Y_0\cos(\omega t+\varphi)
\end{aligned}$$

Rappel E6.2 : Outils mathématiques

Soit $\underline{z} = x + \mathrm{j}y$ un nombre complexe. On peut le représenter comme un **vecteur dans le plan complexe**. On retrouve alors facilement les résultats suivants :

Module

Le module d'un nombre complexe est **la norme du vecteur dans le plan complexe**. On a

$$\boxed{|\underline{z}| = \sqrt{x^2+y^2}} \qquad \text{et} \qquad \forall(\underline{z_1}, \underline{z_2}) \in \mathbb{C}^2, \qquad \left|\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\right| = \frac{|\underline{z_1}|}{|\underline{z_2}|}$$

Argument

Son argument est **l'angle dans le plan complexe** : $\arg(\underline{z}) = \varphi$. On retrouve alors

$$\cos(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Re}(\underline{z})}{|\underline{z}|} \qquad \sin(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{|\underline{z}|} \qquad \tan(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{\mathrm{Re}(\underline{z})}$$

Mais encore, $\forall(\underline{z_1}, \underline{z_2}) \in \mathbb{C}^2$, $\boxed{\arg\left(\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\right) = \arg(\underline{z_1}) - \arg(\underline{z_2})}$

Dérivée

$$\frac{\mathrm{d}\underline{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega \cdot \underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\underline{y}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega\underline{y}(t)}$$

Primitive

$$\int \underline{y} = \int \underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \frac{\underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega} \Leftrightarrow \boxed{\int \underline{y}(t) = \frac{\underline{y}(t)}{\mathrm{j}\omega}}$$

Attention E6.3 : Arguments en physique complexe

Par convention, on choisit d'exprimer **tous les angles dans** $[-\pi;\pi]$. Pour trouver la valeur d'un angle, on procède de la même manière que d'habitude : avec de la trigonométrie. Notamment, en connaissant $\mathrm{Re}(\underline{Y})$ et $\mathrm{Im}(\underline{Y})$, on cherchera souvent à calculer $\tan(\arg(\underline{Y}))$, puis à **appliquer arctan** pour retrouver $\varphi = \arg(\underline{Y})$.

Cependant, arctan est définie telle que $\arctan :]-\infty;\infty[\rightarrow \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ c'est-à-dire que

$$\boxed{\arctan(\tan(\theta)) = \theta \Leftrightarrow \theta \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[}$$

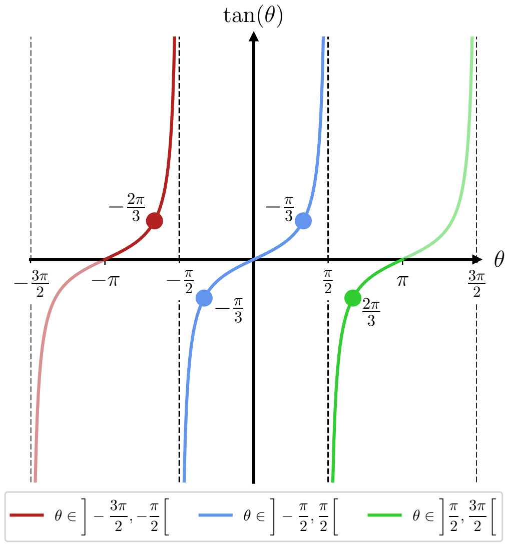


FIGURE E5 – $\tan(\theta)$

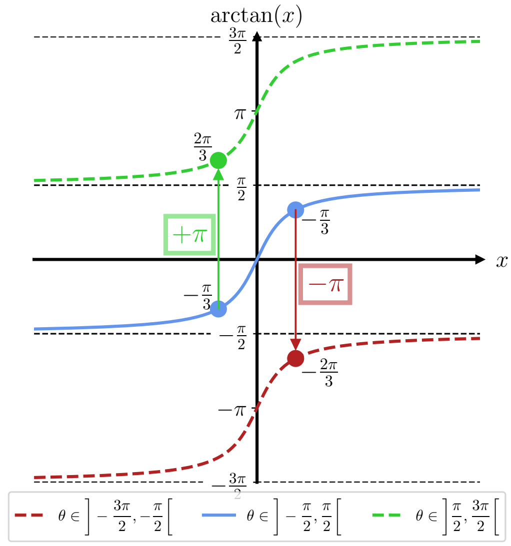


FIGURE E6 – $\arctan(x)$

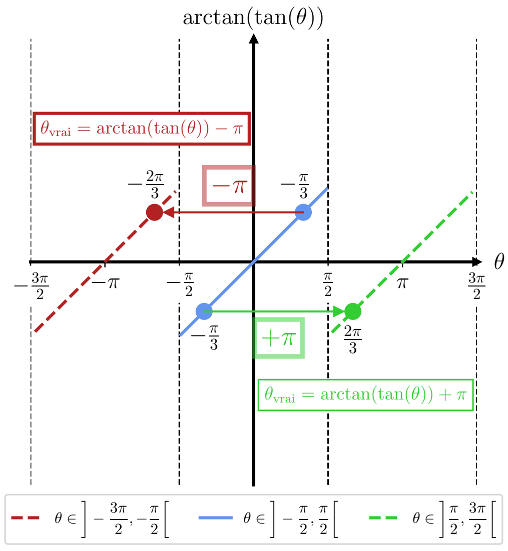


FIGURE E7 – $\arctan(\tan(\theta))$

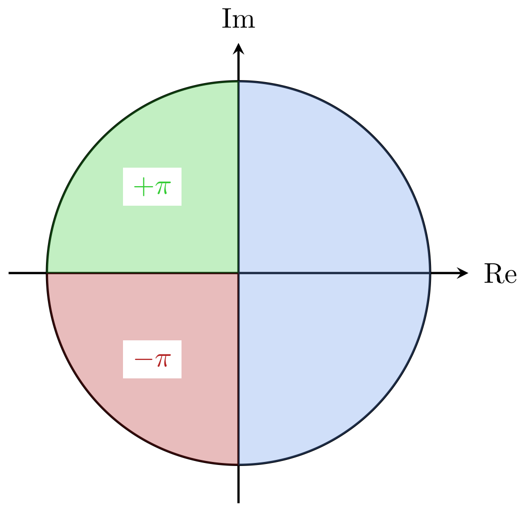


FIGURE E8 – Résumé

Ainsi, **il faut vérifier** que $\varphi = \arg(\underline{Y}) \in \left]-\frac{\pi}{2};\frac{\pi}{2}\right[$ pour appliquer $\arctan(\tan(\varphi))$ sans souci. Pour cela, il suffit de vérifier que

$$\mathrm{Re}(\underline{Y}) > 0 \Leftrightarrow \cos(\arg(\underline{Y})) = \frac{\mathrm{Re}(\underline{Y})}{|\underline{Y}|} > 0$$

Si ça n'est pas le cas, on détermine le signe de $\mathrm{Im}(\underline{Y})$. Alors, en utilisant également que $\tan(\varphi)$ soit π-périodique :

◇ $\varphi = \arg(\underline{Y}) \in \left]\dfrac{\pi}{2};\pi\right] \Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(\underline{Y}) < 0 \\ \mathrm{Im}(\underline{Y}) > 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \arctan(\tan(\varphi - \pi)) = \varphi - \pi = \arctan(\tan(\varphi))$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi = \arctan(\tan(\varphi)) + \pi}$$

◇ $\varphi = \arg(\underline{Y}) \in \left[-\pi;-\dfrac{\pi}{2}\right[\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{Re}(\underline{Y}) < 0 \\ \mathrm{Im}(\underline{Y}) < 0 \end{cases}$

$$\Rightarrow \arctan(\tan(\varphi + \pi)) = \varphi + \pi = \arctan(\tan(\varphi))$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi = \arctan(\tan(\varphi)) - \pi}$$

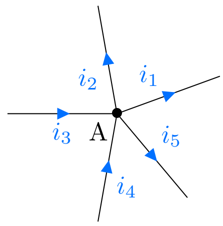
II Circuits électriques en RSF

Comme au début de l'année, nous nous plaçons toujours dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), c'est-à-dire que pour un circuit de taille L alimenté par une source sinusoïdale de fréquence f, on doit avoir $\boxed{Lf \ll c}$ avec c la célérité de la lumière/des ondes électromagnétiques.

II/A Lois de l'électrocinétique

II/A) 1 Loi des nœuds en RSF

Soit un nœud où se rejoignent 5 branches. Dans l'ARQS, nous avions la relation ci-contre. En RSF, les intensités sont sinusoïdales **et de même pulsation** ω : on aurait donc



$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4 \\ \Longleftrightarrow i_1 + i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0 \end{cases}$$

Figure E9 – Loi des nœuds

$$i_1(t) = I_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \ldots$$

Propriété E6.2 : Loi des nœuds en $\mathbb{C}$

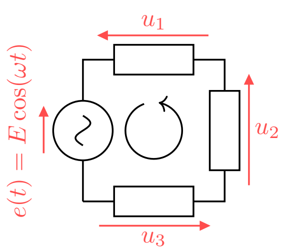
Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{i_1} + \underline{i_2} + \underline{i_5} = \underline{i_3} + \underline{i_4} \Leftrightarrow \boxed{\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_5} = \underline{I_3} + \underline{I_4}}$$
$$\text{avec} \quad \underline{i_k} = I_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{I_k} = I_k\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$$

On a donc la même relation avec les grandeurs et leurs amplitudes complexes.

II/A) 2 Loi des mailles

Soit une maille avec des dipôles quelconques, alimentée par une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Dans l'ARQS, nous avions la relation ci-contre. En RSF, les tensions sont sinusoïdales **et de même pulsation** ω : on aurait donc



$$\Rightarrow \begin{cases} u_3 + u_2 + u_1 - e = 0 \\ \Longleftrightarrow e = u_1 + u_2 + u_3 \end{cases}$$

Figure E10 – Loi des mailles.

$$u_1(t) = U_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \ldots$$

Propriété E6.3 : Loi des mailles en $\mathbb{C}$

Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{e} = \underline{u_1} + \underline{u_2} + \underline{u_3} \Leftrightarrow \boxed{\underline{E} = \underline{U_1} + \underline{U_2} + \underline{U_3}}$$

$$\text{avec} \quad \underline{u_k} = U_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \qquad \text{et} \qquad \underline{U_k} = U_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$$

On a donc la même relation avec les grandeurs et leurs amplitudes complexes.

II/B Exemple : RC série en RSF

II/B) 1 Présentation

Définition E6.6 : RC série en RSF

On s'intéresse au circuit suivant, composé d'une résistance et d'un condensateur C, alimentés par un GBF. On suppose une phase nulle pour le signal entrant :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \qquad \text{ainsi} \qquad u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi)$$

Étant donné qu'on étudie le système en RSF, **on cherche l'amplitude complexe $\underline{U_C}$ de la tension du condensateur.**

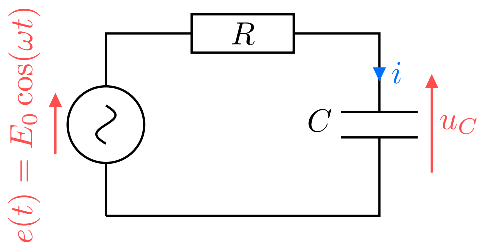


FIGURE E11 – RC en RSF.

II/B) 2 Équation différentielle

Propriété E6.4 : Equ. diff. RC série

Dans un circuit RC série en RSF, $u_C(t)$ vérifie :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{1}{\tau} E_0 \cos(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC$$

Démonstration E6.1 : Equ. diff. RC

$$u_R + u_C = e(t)$$
$$\Leftrightarrow Ri + u_C = e(t) \qquad u_R = Ri$$
$$\Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = e(t) \qquad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{1}{\tau} E_0 \cos(\omega t)} \qquad \text{Forme can.}$$

II/B) 3 Solution

Propriété E6.5 : $u_C(t)$ en RSF

Ainsi, la tension réelle s'écrit

$$\boxed{u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi)} \qquad \text{avec}$$

$$\begin{cases} U_C = \dfrac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}} \\ \varphi \quad -\arctan(RC\omega) \end{cases}$$

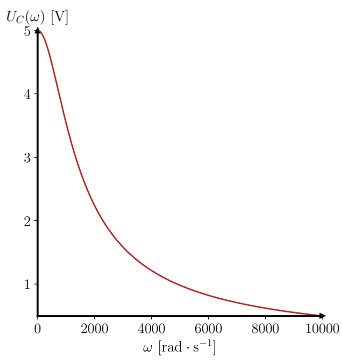


FIGURE E12

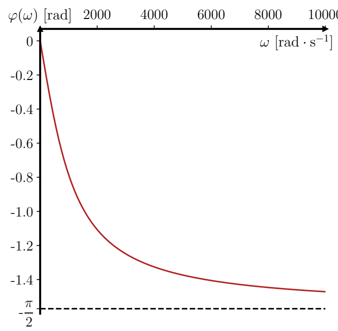


FIGURE E13

Démonstration E6.2 : Solution RC en RSF

En RSF, $u_C(t)$ prend la forme de l'entrée, donc on cherche $u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi)$. Ainsi, à partir de l'équation différentielle, on passe toutes les grandeurs en complexes :

Amplitude complexe

$$\frac{\mathrm{d}\underline{u_C}}{\mathrm{d}t} + \frac{\underline{u_C}}{\tau} = \frac{\underline{e}}{\tau}$$

$\underline{u_C} = \underline{U_C}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ et $\frac{\mathrm{d}\underline{y}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega \underline{y}(t)$

$$\Leftrightarrow \mathrm{j}\omega \underline{U_C}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} + \frac{\underline{U_C}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}}{RC} = \frac{E_0\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}}{RC}$$

On factorise

$$\Leftrightarrow \underline{U_C}\left(RC\mathrm{j}\omega + 1\right) = E_0$$

On isole

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U_C} = \frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}}$$

Module

$$U_C = \left|\underline{U_C}\right| = \left|\frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\right|$$

$$\Leftrightarrow U_C == \frac{|E_0|}{|1 + \mathrm{j}RC\omega|}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{U_C = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}}$$

Argument

$$\varphi = \arg\left(\frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\right) = \underbrace{\arg(E_0)}_{=0} - \arg(1 + \mathrm{j}RC\omega)$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi) = -\tan(\arg(\underbrace{1}_{\mathrm{Re}>0} + \mathrm{j}RC\omega)) = -\frac{RC\omega}{1}$$

Comme on a $\mathrm{Re}(\arg(1 + \mathrm{j}RC\omega)) > 0$, on applique simplement $\arctan(\cdot)$:

$$\boxed{\varphi = -\arctan(RC\omega)}$$

II/C Impédance et admittance complexes d'un dipôle passif

II/C) 1 Définition

En complexes, pour chaque dipôle on aura

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

$$\Longrightarrow \quad \underline{u}(t) = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Ainsi, on peut aisément exprimer une relation courant-tension pour un dipôle complexe, sous la forme classique $U = RI$ mais en complexes. On peut tout à fait calculer $\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ pour avoir une proportionnalité entre les deux : on appelle cette constante l'**impédance**, notée $\underline{Z}$, et on a donc la **loi d'Ohm complexe** :

Définition E6.7 : Impédance complexe

Loi d'Ohm complexe

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\underline{i}(t) \Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}}$$

$$\Rightarrow \underline{Z} \quad \text{homogène à une résistance}$$

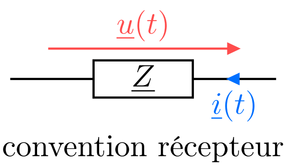


Figure E14 – Représentation d'une impédance complexe

En tant que complexe, on peut prendre son module et son argument :

Propriété E6.6 : Impédance complexe

- Son module $Z = |\underline{Z}|$ est égal au rapport de l'amplitude de u sur celle de i :

$$\boxed{|\underline{Z}| = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{i}|} = \frac{U}{I}}$$

- Son argument $\arg(\underline{Z})$ est égal à la différence de phase entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ (aussi appelée **déphasage**, voir Section ultérieure) :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \varphi_u - \varphi_i}$$

Définition E6.8 : Admittance

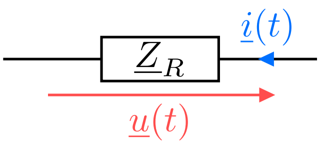
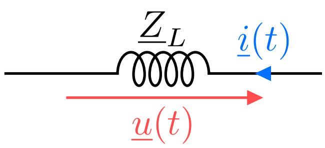
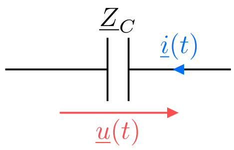
Assez naturellement, comme on avait la conductance égale à l'inverse d'une résistance, on peut définir l'inverse d'une impédance : c'est l'**admittance complexe** $\underline{Y}$:

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \Rightarrow \underline{I} = \underline{Y} \times \underline{U}}$$

II/C) 2 Impédances de bases

Pour trouver les impédances des dipôles de base, on utilise leurs relations courant-tension qu'on convertit en complexes, **en se souvenant de dériver en complexes équivaut à multiplier par** jω.

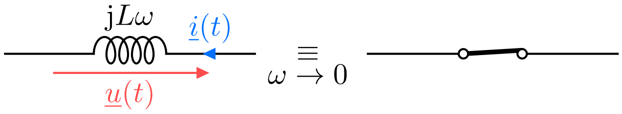
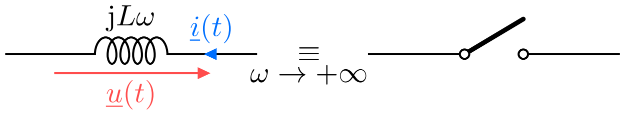
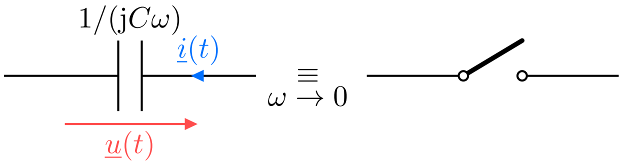
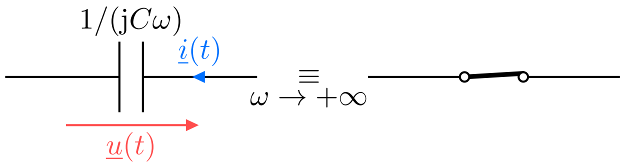
Définition E6.9 : Impédances des dipôles de base

	Résistance	Inductance	Capacité
Schéma	 **FIGURE E15** – $\underline{Z}_R$	 **FIGURE E16** – $\underline{Z}_L$	 **FIGURE E17** – $\underline{Z}_C$
Démonstration	$u(t) = Ri(t)$ $\Leftrightarrow \underline{u}(t) = R\underline{i}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_R = R}$	$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $\Leftrightarrow \underline{u}(t) = \mathrm{j}L\omega\underline{i}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega}$	$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $\Leftrightarrow \underline{i}(t) = C\mathrm{j}\omega t\underline{u}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

II/C) 3 Comportements limites

Ainsi, la résistance ne change pas d'expression entre les réels et les complexes, alors que les bobines et condensateurs ont des caractéristiques complexes différentes. En plus de ça, leurs impédances **dépendent** de ω : on peut notamment étudier deux cas limites, quand $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$:

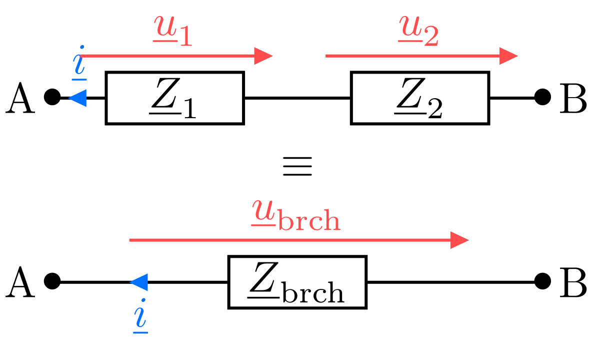
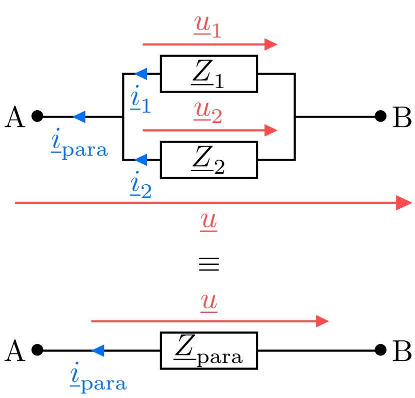
Propriété E6.7 : Dipôles équivalents aux limites

	$\omega \to 0$	$\omega \to +\infty$
Bobine	$\lvert \underline{Z}_L \rvert = L\omega \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} 0$  	$\lvert \underline{Z}_L \rvert = L\omega \underset{\omega\to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$ 
Condensateur	$\lvert \underline{Z}_C \rvert = 1/(C\omega) \underset{\omega\to 0}{\longrightarrow} +\infty$  	$\lvert \underline{Z}_C \rvert = 1/(C\omega) \underset{\omega\to +\infty}{\longrightarrow} 0$ 

II/D Associations d'impédances et ponts diviseurs

Enfin, comme la relation courant-tension avec l'impédance complexe est analogue à celle d'une résistance, on peut facilement démontrer que les associations d'impédances suivent les associations de résistances, et qu'on peut donc appliquer les ponts diviseurs de tension et de courant comme si on n'avait que des résistances.

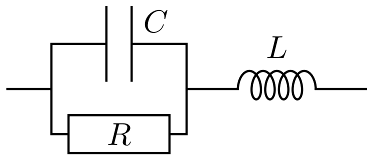
Important E6.3 : Associations d'impédances

	Schéma	**Relations**
En série	 	◇ **Impédance équivalente :** $\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ ◇ **Diviseur de tension :** $\underline{u}_k = \dfrac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{brch}}}\underline{u}_{\text{brch}}$
En parallèle	 	◇ **Dipôle équivalent :** $\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$ $\Leftrightarrow \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{eq}} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$ ◇ **Diviseur de courant :** $\underline{i}_k = \dfrac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{\text{para}}}\underline{i}_{\text{para}} \Leftrightarrow \underline{i}_k = \dfrac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_k}\underline{i}_{\text{para}}$

II/E Exercices bilan

Application E6.4 : Association d'impédances

Quelle est l'impédance de l'association suivante ?

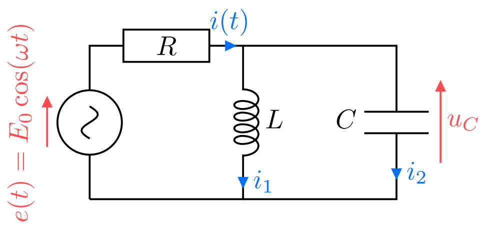


L'association en parallèle donne $\frac{\underline{Z}_C\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_R}$, et on ajoute $\underline{Z}_L$ à celle-ci :

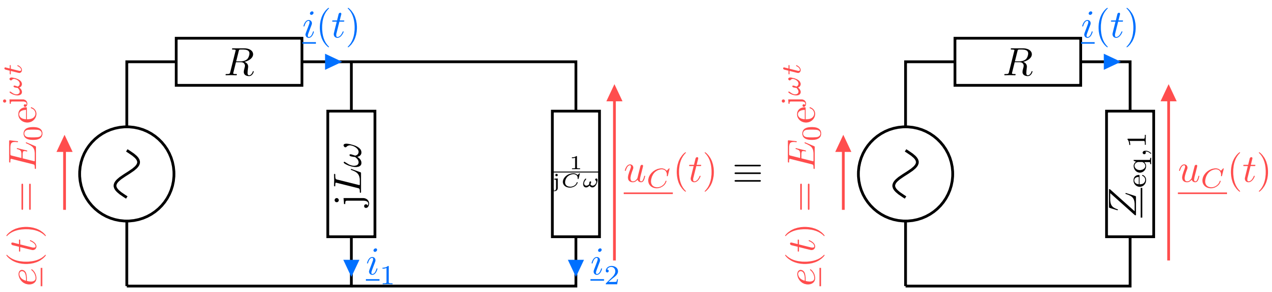
$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\times R}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega}+R} + \mathrm{j}L\omega \Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega} + \mathrm{j}L\omega}$$

Application E6.5 : RLC parallèle en RSF

Soit le circuit suivant, avec une entrée sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}_C$ associée à la tension u_C en fonction de R, L, C et ω.



S'il n'y avait pas l'inductance, on pourrait facilement utiliser un pont diviseur de tension pour exprimer $\underline{u}_C$ en fonction de $\underline{e}$, $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_C$. Pour se ramener à la situation du pont diviseur de tension, on détermine donc une première impédance équivalente issue de l'association en parallèle de L et C, après les avoir converties en complexes :



On peut déterminer $\underline{Z}_{\text{eq},1}$ avec les admittances $\underline{Y}_L = 1/\mathrm{j}L\omega$ et $\underline{Y}_C = \mathrm{j}C\omega$, et utiliser le pont diviseur de tension directement avec l'amplitude complexe : $\underline{U}_C = \frac{\underline{Z}_{\text{eq},1}}{\underline{Z}_{\text{eq},1}+\underline{Z}_R}E_0$. Ainsi,

$$\underline{U}_C = \frac{\frac{1}{\cancel{\frac{1}{\mathrm{j}L\omega}+\mathrm{j}C\omega}}}{\frac{1}{\cancel{\frac{1}{\mathrm{j}L\omega}+\mathrm{j}C\omega}}+R(\ldots)}E_0 \times \frac{\mathrm{j}C\omega+\frac{1}{\mathrm{j}L\omega}}{\mathrm{j}C\omega+\frac{1}{\mathrm{j}L\omega}} \Leftrightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{1+\mathrm{j}RC\omega+\frac{R}{\mathrm{j}L\omega}}E_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_C = \frac{E_0}{1+\mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}}$$

où on a simplifié la fraction en multipliant par le terme orange d'abord, puis en utilisant que $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$.

II/F Résumé

Important E6.4 : Résumé méthode

Un système soumis à une excitation sinusoïdale du type $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ se comporte de la manière suivante :

- On observe un court régime transitoire dû à la solution homogène de l'ED ($A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ pour ordre 1, pseudo-périodique ou apériodique pour l'ordre 2) ;
- Après ce régime, on obtient la solution particulière :

$$x(t) = X\cos(\omega t + \varphi_X)$$

avec ω la **pulsation d'entrée**, X et φ_X définies **par le système** (et non pas des conditions initiales).

- Pour trouver ces valeurs, on définit :
  - l'entrée complexe : $\underline{e}(t) = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
  - les signaux de sortie complexes : $\underline{x}(t) = X\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_X)}$;
  - les amplitudes complexes : $\underline{X} = X\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_X} \Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{X}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$;
  - On retrouve les grandeurs réelles en en prenant le module et la phase :

$$\boxed{X = |\underline{X}|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_X = \arg(\underline{X})}$$

III Mesure de déphasages

III/A Définition

Définition E6.10 : Déphasage

Pour deux signaux sinusoïdaux **de mêmes fréquences** $s_1(t) = S_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, on définit le **déphasage** entre s_2 et s_1 comme étant la **différence de leurs phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1}$$

III/B Lecture d'un déphasage

Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$ est lié au **retard temporel** $\Delta t_{2/1} = t_2 - t_1$ du signal s_2 par rapport au signal s_1 : on a

$$\boxed{\left|\Delta\varphi_{2/1}\right| = \omega\left|\Delta t_{2/1}\right|}$$

Dans ce cas, le déphasage obtenu est entre $-\pi$ et $+\pi$. On définit :

- $\Delta\varphi_{2/1} > 0 \Rightarrow s_2$ est en avance sur s_1 ;
- $\Delta\varphi_{2/1} < 0 \Rightarrow s_2$ est en retard sur s_1.

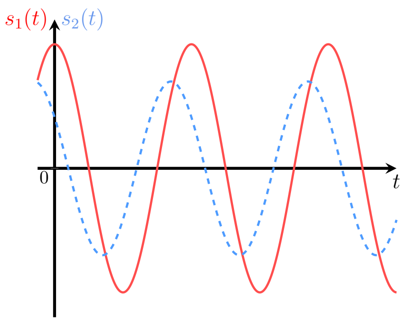


FIGURE E18 – Déphasage

Le principe est de mesurer la différence de temps entre les deux moments les plus proches tels que les deux signaux s'annulent **avec la même pente**.

III/C Valeurs particulières

Définition E6.11 : Signaux en phase

Deux signaux sont **en phase** si leur **déphasage est nul** (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2p\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.

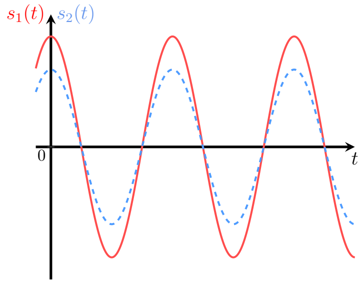


Figure E19 – En phase.

Définition E6.12 : Signaux en quadrature de phase

Deux signaux sont en **quadrature phase** si leur déphasage est de $\pm\pi/\mathbf{2}$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi}$$

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.

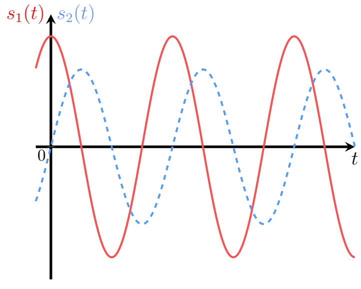


Figure E20 – En quadrature.

Définition E6.13 : Signaux en opposition de phase

Deux signaux sont en **opposition de phase** si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = (2p+1)\pi}$$

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à la valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.

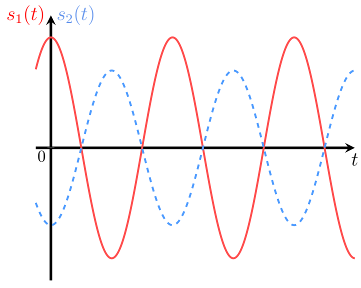


Figure E21 – En opposition.

III/D Déphasage des impédances

Pour un dipôle de tension $\underline{U}$ traversé par une intensité $\underline{I}$, on définit $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$, et on a donc $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$. Ainsi, la phase d'une impédance représente le déphasage entre la tension et le courant. Pour les différents dipôles classiques, on trouve :

- $\arg(\underline{Z}_R) = 0 \Rightarrow$ signaux en phase ;
- $\arg(\underline{Z}_L) = \arg(\mathrm{j}L\omega) = \pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en avance sur $\underline{i}$;
- $\arg(\underline{Z}_C) = \arg(1/\mathrm{j}C\omega) = -\pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en retard sur $\underline{i}$.