

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont interdites

Au programme

Transformations de la matière jusqu'à cinétique chimique, oscillateurs électriques et mécaniques en RSF et résonance, notions élémentaires de fonction de transfert.

Sommaire

E1	Étude cinétique de l'oxydation de la méthylhydrazine	2
E2	Comparaison de deux circuits RLC	4
P1	Suspension automobile	8
P2	Cinétique de CaCO_3 : dissolution du calcaire et coraux	15

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

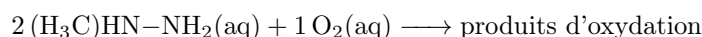
/26 E1 Étude cinétique de l'oxydation de la méthylhydrazine

L'hydrazine, de formule N_2H_4 , est, à température ambiante, un liquide incolore cancérigène et toxique pour les organismes aquatiques mais qui ne répond pas aux critères environnementaux de persistance et de bioaccumulation. Son odeur est comparable à celle de l'ammoniac. L'hydrazine est un composé inflammable, extrêmement corrosif et irritant. L'hydrazine est principalement utilisée sous forme d'hydrate de formule $\text{N}_2\text{H}_4 \cdot \text{H}_2\text{O}$. L'hydrate d'hydrazine a été synthétisé pour la première fois en 1889 par Theodor Curtius, un chimiste allemand. Actuellement, sa production mondiale annuelle est estimée à plus de 50 000 tonnes.

Le secteur de l'aérospatial est le plus gros consommateur d'hydrazine pure. En effet, si dès la fin de la seconde guerre mondiale, l'hydrate d'hydrazine a été utilisé comme carburant dans le premier avion de chasse à réaction, l'hydrazine pure et ses dérivés méthylés sont utilisés depuis plus de 50 ans comme propergol en association avec le tétraoxyde de diazote N_2O_4 dans les fusées (notamment Ariane) ou monergol pour la mise en orbite des satellites et sondes spatiales.

La méthylhydrazine (H_3C)HN-NH₂ est également utilisée comme biergol en association avec un oxydant fort tel que le tétraoxyde de diazote (N_2O_4).

On s'intéresse ici à l'oxydation de la méthylhydrazine, notée par la suite MH, par le dioxygène dissous en milieu strictement monophasique modélisée par l'équation de réaction :



Aide au calcul

$$\frac{1}{2 \times 62.5} = 8,00 \times 10^{-3} \quad ; \quad \frac{\ln 2}{62.5 \times 5} = 2,22 \times 10^{-3} \quad ; \quad \frac{1}{5^2 \times 62.5} = 6,40 \times 10^{-4}$$

$$\frac{298 \times 313}{298 - 313} = -6218,3 \quad ; \quad \ln \frac{2,62}{2,22} = 1,67 \times 10^{-1} \quad ; \quad 8,31 \times 6,22 \times 10^{+3} \times 1,67 \times 10^{-1} = 8,61 \times 10^{+3}$$

- /2 1 Donner deux définitions de la vitesse de la réaction, l'une avec [MH] et l'autre avec [O₂].

Réponse

$$v(t) = -\frac{1}{2} \frac{d[\text{MH}]}{dt} = -\frac{1}{1} \frac{d[\text{O}_2]}{dt}$$



Quatre séries de mesures sont réalisées à 298 K en faisant varier la concentration initiale en O₂, la concentration initiale en MH étant fixée à $5,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$. Dans le tableau suivant, sont reportées les valeurs de la variation $v_0 = -\frac{d[\text{O}_2]}{dt}(t=0)$ et le temps de demi-réaction $t_{1/2}$.

$[\text{O}_2]_0$ ($10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	$[\text{MH}]_0$ ($10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$)	v_0 ($10^{-6} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$)	$t_{1/2}$ (min)
0,25	5,00	0,29	60,0
1,07	5,00	1,11	65,0
1,78	5,00	2,27	62,0
3,02	5,00	3,32	63,0

- /1 2 La réaction est supposée admettre un ordre. La constante de vitesse est notée k et les ordres partiels par rapport à la méthylhydrazine et au dioxygène sont notés respectivement p et q . Exprimer la vitesse de réaction à l'aide de ces paramètres.

Réponse

$$v(t) = k[\text{MH}]^p(t) \times [\text{O}_2]^q(t)$$



- /6 3 Expliquer en quoi consiste la méthode de dégénérescence de l'ordre. Est-ce qu'on peut dire que les concentrations initiales en MH et O₂ sont en accord avec cette méthode? Si oui, donner une expression approchée de la vitesse de réaction.

Réponse

La méthode de la dégénérescence de l'ordre consiste à introduire en excès tous les réactifs sauf un. Alors on peut considérer que la concentration des réactifs en excès ne varie presque pas au cours du temps, et donc que seule la

concentration du réactif A introduit en faible proportion influe sur la vitesse de la réaction qui peut se mettre sous la forme

$$v(t) = k_{\text{app}}[A]^\alpha(t)$$

avec k_{app} la constante de vitesse apparente. Cette méthode permet d'avoir accès à l'ordre partiel sur le réactif A.

La concentration en MH est au moins 10 fois supérieure à celle en O_2 , donc c'est en accord avec la méthode de la dégénérescence de l'ordre. On peut alors donner une expression approchée de la vitesse de réaction

$$v(t) \approx k[MH]_0^p \times [O_2]^q(t) = k_{\text{app}}[O_2]^q(t) \quad \text{avec} \quad k_{\text{app}} = k[MH]_0^p$$

- /4 4 Définir ce qu'est la méthode différentielle. Pour cette réaction admettant un ordre, comment peut-on employer cette méthode afin de déterminer la valeur de l'ordre partiel q par rapport au dioxygène? À l'aide de la Figure 4.1, déterminer alors la valeur de q .

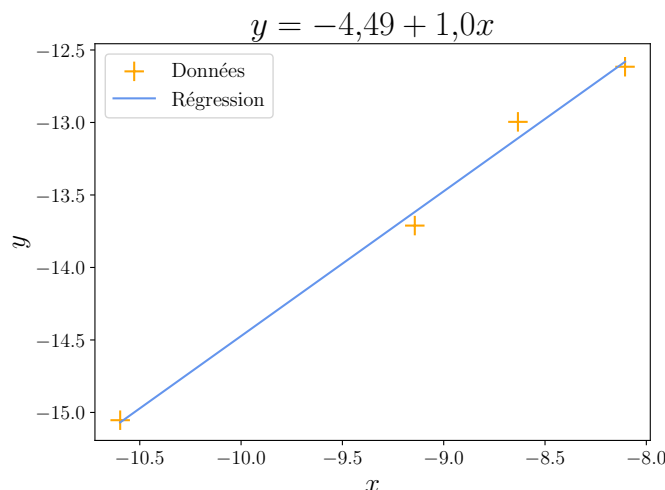


FIGURE 4.1 – Régression linéaire

Réponse

La méthode différentielle consiste à travailler directement avec la vitesse, en traçant v connaissant les concentrations en réactifs. Dans notre cas, la vitesse initiale peut s'écrire :

$$v_0 = k_{\text{app}}[O_2]_0^q \quad \text{soit} \quad \ln(v_0) = \ln(k_{\text{app}}) + q \ln([O_2]_0) \quad \text{avec} \quad v_0 = -\frac{d[O_2]}{dt}(t=0)$$

Ainsi, on trace

$$\begin{array}{c} y = ax + b \\ \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \\ \ln(v_0) \quad q \quad \ln([O_2]_0) \quad \ln(k_{\text{app}}) \end{array}$$

On constate que l'ajustement affine passe bien par les points. On en déduit $q = 1$.

- /5 5 En supposant que la valeur de cet ordre initial n'est pas modifiée au cours du temps, établir l'expression du temps de demi-réaction $t_{1/2}$ en fonction d'une constante apparente k_{app} à définir. Comparer aux données expérimentales et conclure quant à la validité de cette hypothèse.

Réponse

On supposant $q = 1$ pour tout temps, et dans le cas de la méthode de la dégénérescence de l'ordre, on peut écrire

$$v(t) = k_{\text{app}}[O_2](t) \quad \text{avec} \quad v(t) = -\frac{d[O_2]}{dt}$$

Par intégration, on obtient

$$[O_2](t) = [O_2]_0 \exp(-k_{\text{app}}t)$$

Par définition du temps de demi-réaction,

$$[O_2](t_{1/2}) = \frac{[O_2]_0}{2} \quad \text{soit} \quad t_{1/2} = \frac{\ln(2)}{k_{\text{app}}}$$

On en déduit que $t_{1/2}$ est indépendant de la concentration initiale $[O_2]_0$, ce qui est en accord avec des données expérimentales. On en conclut que la valeur de l'ordre initial n'est pas modifiée au cours du temps.

Des mesures complémentaires ont permis de mesurer un ordre partiel égal à 1 par rapport à la méthylhydrazine.

- /4 6 En considérant $t_{1/2} = 62,5$ min, déterminer la valeur de la constante de vitesse à 298 K, en $\text{L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$.

Réponse

On prend la valeur moyenne $t_{1/2} = 62,5$ min, et on en déduit

$$k_{\text{app}} = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}} \quad \text{avec} \quad k_{\text{app}} = k[\text{MH}]_0 \quad \text{donc} \quad k = \frac{\ln(2)}{t_{1/2}[\text{MH}]} = 2,22 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$$



- /4 7 À 313 K, la détermination expérimentale de la constante de vitesse conduit à une valeur de $2,62 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1}$. Calculer la valeur de l'énergie d'activation de la réaction d'oxydation de la méthylhydrazine par le dioxygène en supposant que cette grandeur est indépendante de la température. On prendra $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$.

Réponse

D'après la loi d'Arrhénius,

$$k(T) = A \exp\left(-\frac{E_a}{RT}\right)$$

En notant $k_1 = k(T_1)$ et $k_2 = k(T_2)$, on a

$$\frac{k_1}{k_2} = \frac{A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_1}\right)}{A \exp\left(-\frac{E_a}{RT_2}\right)} = \exp\left(\frac{E_a}{R} \left(\frac{1}{T_2} - \frac{1}{T_1}\right)\right)$$

$$\Leftrightarrow E_a = R \frac{T_1 T_2}{T_1 - T_2} \ln\left(\frac{k_1}{k_2}\right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ T_1 = 298 \text{ K} \\ T_2 = 313 \text{ K} \\ k_1 = 2,22 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ k_2 = 2,62 \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $E_a = 8,61 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$



/40 E2 Comparaison de deux circuits RLC

Dans toute la suite du problème, on considère les deux circuits suivants, composés d'un résistor de résistance $R = 0,5 \text{ k}\Omega$, d'un condensateur de capacité $C = 1,0 \mu\text{F}$ et d'une bobine d'inductance $L = 1,0 \text{ mH}$. Ces composants sont branchés sur un générateur idéal de tension de f.e.m. E .

On considère de plus que les interrupteurs K sont ouverts lorsque $t < 0$ et sont fermés à partir de l'instant initial $t = 0$. De plus, les condensateurs sont initialement déchargés.

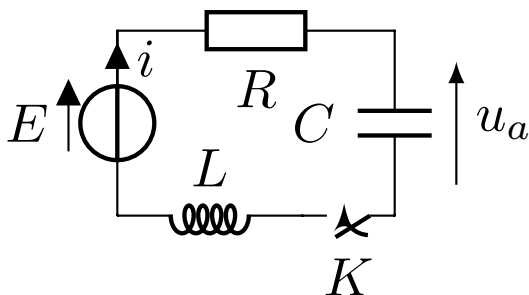


FIGURE 4.2 – Circuit A

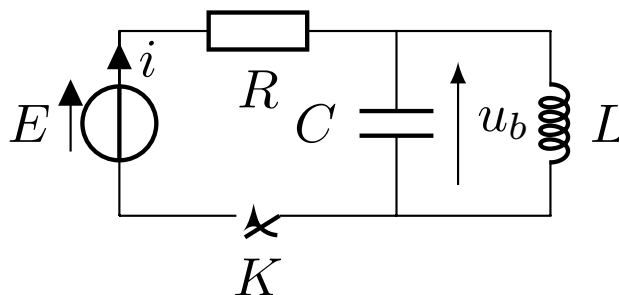


FIGURE 4.3 – Circuit B



Aide au calcul

$$\frac{1}{5} = 0,2 \quad ; \quad 10^{-1/2} \approx 0,32 \quad ; \quad \frac{1}{6,3} \approx 0,16$$

$$\sqrt{2} \approx 1,414$$

II/A Étude en régime transitoire

On considère dans un premier temps le circuit A et on cherche à obtenir l'expression de $u_a(t)$

- /7 1 Obtenir l'équation dont u_a est solution lorsque $t > 0$ et la mettre sous la forme

$$\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_a} \frac{du_a}{dt} + \omega_0^2 u_a = \omega_0^2 E \quad (4.1)$$

On veillera en particulier à donner les expressions de ω_0 et Q_a , le facteur de qualité du circuit A. Réaliser ensuite l'application numérique pour Q_a .

Réponse

Le circuit ne comporte qu'une maille et ne peut donc être simplifié, on applique alors la loi des mailles

$$E = Ri + u_a + L \frac{di}{dt} \Rightarrow E = RC \frac{du_a}{dt} + u_a + LC \frac{d^2 u_a}{dt^2} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_a}{dt} + \frac{1}{LC} u_a = \frac{1}{LC} E}$$

On en déduit par identification que $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ puis après calcul que $Q_a = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \approx 0,063$.



- /5 2 Obtenir l'équation dont u_b est solution lorsque $t > 0$ et la mettre sous la forme

$$\frac{d^2 u_b}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_b} \frac{du_b}{dt} + \omega_0^2 u_b = 0 \quad (4.2)$$

On veillera en particulier à vérifier que l'expression de ω_0 est compatible avec celle obtenue pour le circuit A et on vérifiera que $Q_b = 1/Q_a$. Réaliser ensuite l'application numérique pour Q_b .

Réponse

Aucune simplification ne peut être réalisée pour ce circuit, on considère alors la loi des noeuds et la loi des mailles (petite maille de gauche) :

$$i = C \frac{du_b}{dt} + i_L \Rightarrow \frac{di}{dt} = C \frac{d^2 u_b}{dt^2} + u_b/L \quad \text{et} \quad E = Ri + u_b$$

En combinant ces équations, on obtient après avoir dérivé la loi des mailles

$$0 = RC \frac{d^2 u_b}{dt^2} + \frac{R}{L} u_b + \frac{du_b}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{d^2 u_b}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_b}{dt} + \frac{1}{LC} u_b = 0}$$

On obtient alors par identification $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$. Cette expression est bien identique à celle obtenue pour le circuit A d'où le même nom. De plus, on trouve après calcul que $Q_b = R\sqrt{C/L}$. On en déduit que $Q_b = 1/Q_a$, soit

$$Q_b \approx 16$$



II/B Etude en régime sinusoïdal forcé

On remplace maintenant le générateur de f.e.m. E par un générateur délivrant une tension sinusoïdale $e(t) = E \cos(\omega t)$ avec ω , une pulsation pouvant être modifiée. Dans toute la suite, on notera \underline{U} , l'amplitude complexe associée à la tension $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé telle que $u(t) = \text{Re}(\underline{U}e^{j\omega t}) = \text{Re}(\underline{u}(t))$ avec j , le nombre complexe de module unité et d'argument $+\pi/2$ puis $x = \omega/\omega_0$, la pulsation réduite identique aux deux circuits.

On considère de plus que l'interrupteur K est remplacé par un fil.

II/B) 1 Etude du circuit A

- /2 3 En partant de l'équation (4.1), dont on adaptera le second membre en remplaçant E par $E \cos(\omega t)$, montrer que

$$\underline{U}_a = \frac{E}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q_a}}$$

Réponse

On a donc

$$\frac{d^2 u_a}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q_a} \frac{du_a}{dt} + \omega_0^2 u_a = \omega_0^2 E \cos(\omega t) \Rightarrow \underline{u}(t) \left(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q_a} + \omega_0^2 \right) = \omega_0^2 E e^{j\omega t}$$

On simplifie alors par les exponentielles complexes et on isole \underline{U}_a :

$$\underline{U}_a = \frac{\omega_0^2 E}{\omega_0^2 - \omega^2 + j \frac{\omega \omega_0}{Q_a}} = \frac{E}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q_a}}$$

d'où le résultat.

- /8 [4] Exprimer alors l'amplitude des oscillations $U_a = |\underline{U}_a|$. Qu'est-ce que la résonance ? Donner une condition sur Q_a pour que cette amplitude atteigne la résonance. On ne cherchera **pas** à déterminer la pulsation de résonance. Cette condition est-elle remplie au regard de la valeur de Q_a obtenue dans la première partie du problème ?

Réponse

On a

$$U_a = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + x^2/Q_a^2}}$$

Il y a résonance si l'amplitude réelle passe par un maximum à une pulsation non nulle et non infinie. Ici, cela revient à avoir le dénominateur minimal. Soit $X = x^2$, et $f(X) = (1 - X)^2 + \frac{X}{Q_a^2}$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

$$\begin{aligned} f'(X_r) &= 0 \\ \Leftrightarrow -2(1 - X_r) + \frac{1}{Q_a^2} &= 0 && \left. \begin{array}{l} \text{On dérive} \\ \text{On isole} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow X_r - 1 &= -\frac{1}{2Q_a^2} \Leftrightarrow X_r = 1 - \frac{1}{2Q_a^2} \end{aligned}$$

Et on observe qu'il existe une racine réelle uniquement si $Q_a \geq \frac{1}{\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2}$ (sinon, racines complexes).

En pratique, on a obtenu $Q_a \approx 0,063 < \frac{\sqrt{2}}{2} \approx 0,707$. La courbe ne va donc **pas passer** par un maximum local.

II/B) 2 Etude du circuit B

Pour le circuit B, on ne peut appliquer la méthode précédente à partir de l'équation (4.2) car on y a dérivé des constantes qu'il aurait fallu remplacer par des fonctions harmoniques. On se propose alors de débiter une nouvelle étude à partir du circuit électronique.

- /2 [5] Dessiner la représentation équivalente du circuit B en régime sinusoïdal forcé.

Réponse

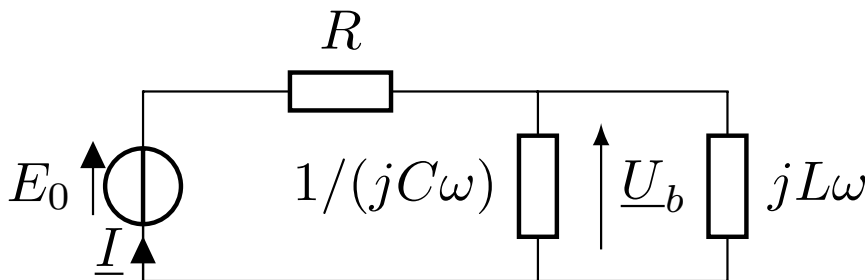


FIGURE 4.4 – Circuit B en RSF.

- /3 [6] Obtenir alors l'expression de \underline{U}_b en fonction de x , Q_b et E .

Réponse

On peut regrouper la bobine et le condensateur en parallèles (impédance Z_{eq}) puis appliquer un pont diviseur de

tension

$$\begin{aligned}
\underline{U}_b &= \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{R + \underline{Z}_{\text{eq}}} E \\
\Leftrightarrow \underline{U}_b &= \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\text{eq}}} E \\
\Leftrightarrow \underline{U}_b &= \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + jRC\omega} E = \\
\Leftrightarrow \underline{U}_b &= \frac{E}{1 + jR\sqrt{C/L} \left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}} \right)} \\
\Leftrightarrow \underline{U}_b &= \frac{E}{1 + jQ_b \left(x - \frac{1}{x} \right)}
\end{aligned}$$

$\times \frac{\underline{Y}_{\text{eq}}}{\underline{Y}_{\text{eq}}}$
 \downarrow
 $\underline{Y}_{\text{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + jC\omega$
 \downarrow
 $Q_b = R\sqrt{\frac{C}{L}}$

/2 [7] Montrer alors que l'amplitude des oscillations $U_b = |\underline{U}_b|$ s'exprime selon

$$U_b = \frac{E}{\sqrt{1 + Q_b^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

puis montrer que cette dernière atteint toujours la résonance, quel que soit la valeur de $Q_b \in \mathbb{R}^+$. Donner la pulsation de résonance.

Réponse

On obtient bien l'expression attendue en prenant le module de l'expression précédente

$$U_b = \frac{E}{\sqrt{1 + Q_b^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

L'amplitude passe par un maximum local si le carré de son dénominateur passe par un minimum local soit quand $x = 1$ et ce, quelque soit Q_b . En effet, on a $1 + Q_b^2(x - 1/x)^2 \geq 1 + Q_b^2(1 - 1)^2 \forall x > 0$.

/5 [8] Comment se définit la bande passante? Déterminer l'expression de la largeur de la bande passante $\Delta\omega$ en fonction de ω_0 et Q_b . On pourra travailler avec la pulsation réduite ou conserver les pulsations.

Réponse

C'est l'ensemble des pulsations telles que $U_b(\omega) \geq U_{b,\text{max}}/\sqrt{2}$. On commence par déterminer les pulsations réduites x_1 et x_2 telles que $U_b(x_i) = E/\sqrt{2}$:

$$\begin{aligned}
1 + Q_b^2(x_i - 1/x_i)^2 &= 2 \\
\Leftrightarrow Q_b \left(x_i - \frac{1}{x_i} \right) &= \pm 1 \\
\Leftrightarrow Q_b x_i^2 \mp x_i - Q_b &= 0 \\
&\Rightarrow \Delta = 1 + 4Q_b^2 \\
&\Rightarrow x_{i,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q_b^2}}{2Q_b}
\end{aligned}$$

$\sqrt{}$
 \downarrow
 $\times x_i$
 \downarrow
Discriminant
 \downarrow
Solutions

On obtient alors deux polynômes du second degré (un avec le signe +, l'autre avec le signe -). On ne garde que les racines positives, sachant que $\sqrt{1 + 4Q_b^2} > 1$:

$$x_1 = x_{i,-,+} = \frac{1}{2Q_b} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q_b^2} \right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{i,+,+} = \frac{1}{2Q_b} \left(1 + \sqrt{1 + 4Q_b^2} \right)$$

puis on obtient $x_2 - x_1 = 1/Q_b$ soit au final $\Delta\omega = \omega_0/Q_b$.

II/B) 3 Synthèse

/6 [9] Quelle est la valeur de $U_a(x = 1)$? La valeur de $U_b(x = 1)$? La valeur de Δx ?

Tracer alors, approximativement mais proprement et sur le même graphique, les courbes de U_a et U_b en fonction de $x \in [0, 2]$ pour les valeurs des facteurs de qualité obtenues dans la première partie. On prendra $E = 5 \text{ V}$. On donne $U_a(x = 0,74) = U_b(x = 0,74) \approx 0,4 \text{ V}$.

Réponse

Pour le circuit A, on observe que $U_a(x = 1) = Q_a E \approx 0,32 \text{ V}$ et il n'y a pas résonance. Pour le circuit B, on observe une résonance telle que $U_b(x = 1) = E = 5 \text{ V}$, avec une faible largeur ($\Delta x = 1/Q_b \approx 0,063$). On obtient alors les courbes suivantes Figure 4.5.

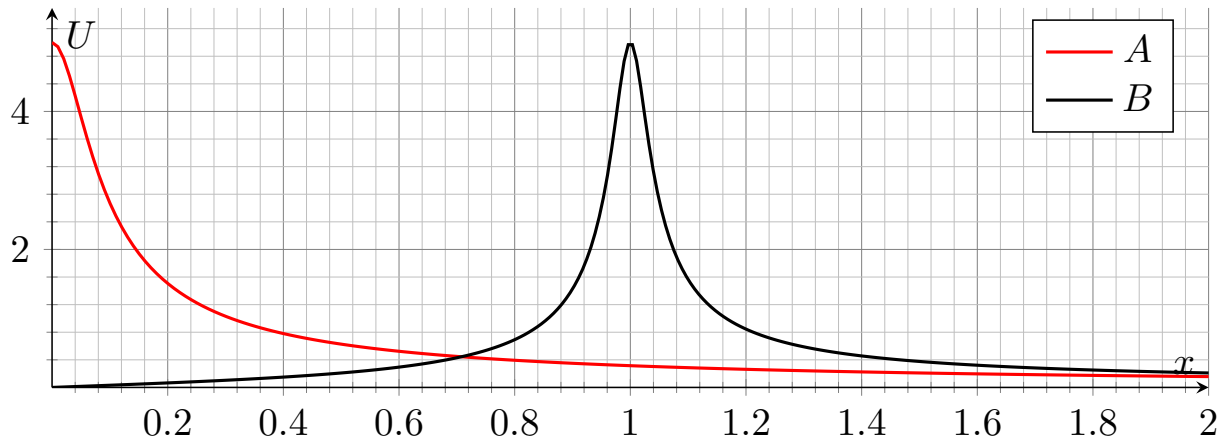


FIGURE 4.5 – Gains

/85 P1 Suspension automobile

I/A Comportement sur un sol non plat

Dans le cadre d'un modèle simplifié de suspension, on assimile un véhicule à un point matériel G (masse $M = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}$) repéré par sa position $z_G \vec{e}_z$, posé sur sa suspension.

Celle-ci est modélisée par un ressort de raideur $k = 1,0 \times 10^5 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et de longueur à vide ℓ_0 , associé à un amortisseur de constante d'amortissement $k' = 4,0 \times 10^3 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \cdot \text{s}$.

Le véhicule se déplace à vitesse constante $V_a = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ sur un sol ondulé horizontal (axe Oz vers le haut).

En outre, G est soumis à l'action d'un amortisseur fluide dont la force est de la forme $-k' \vec{u}$ où \vec{u} est la vitesse relative de ses deux extrémités. On admet que l'on peut donc l'écrire :

$$\vec{f} = -k' \frac{d}{dt}(z_G - z_S) \vec{e}_z$$

L'ondulation du sol est assimilée à une sinusoïde de période spatiale $L = 2 \text{ m}$ et d'amplitude $z_{S0} = 10 \text{ cm}$ comptée à partir de la ligne moyenne.

Pour des raisons de simplicité, on supposera ici que le rayon de la roue est nul, c'est-à-dire que le centre O de la roue suit exactement l'ondulation du sol ($z_O = z_S$). On néglige également les distances **OI** et **GJ**.

On ne s'intéressera qu'au mouvement sur \vec{e}_z bien que le véhicule se déplace horizontalement.

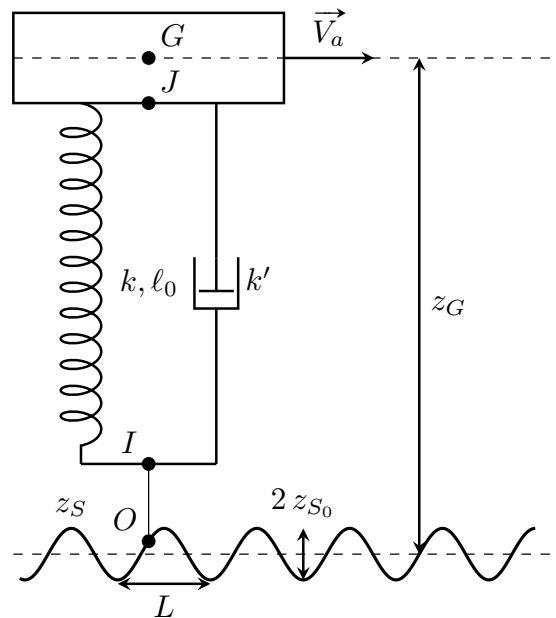


FIGURE 4.6

Aide aux calculs

1

$$2\pi \approx 6 \quad ; \quad \frac{150}{3,6} = 42$$

7

$$H(4,2) = 0,10$$

8

$$3,3 \times 3,6 \approx 12$$

- /3 [1] Donner l'expression de la pulsation d'excitation ω du sol en fonction de la vitesse V_a du véhicule et de la période spatiale L . Justifier. Faire l'application numérique avec ω en $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Réponse

Si on appelle T la période de l'excitation liée au sol, il faut une durée $T = \frac{L}{V_a}$ pour parcourir la distance L qui sépare deux maxima, et

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V_a}{L} \Rightarrow \omega \approx 42 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Une autre manière de voir les choses :

$$z_s = z_{s0} \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) = z_{s0} \cos\left(2\pi \frac{V_a}{L} t\right) = z_{s0} \cos(2\pi f t)$$

d'où la fréquence d'excitation est V_a/L .

- /7 [2] Établir proprement le cadre d'étude. Sur quoi repose le véhicule ? Faire un bilan des forces pour la mise en équation du système où seront explicitées les forces agissant sur celui-ci. Les représenter sur un schéma.

Réponse

Système : {châssis} repéré par G de masse M ;

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O, x, y, t)$ supposé galiléen.

Repère : $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$ avec \vec{e}_z vertical ascendant, \vec{e}_x dans le sens de \vec{V}_a .

Repérage :

◇ **Position** : $z_G \vec{e}_z$

◇ **Vitesse** : $\dot{z}_G \vec{e}_z$

◇ **Accélération** : $\ddot{z}_G \vec{e}_z$

Longueur du ressort : $\ell = z_G - z_S$

Les forces appliquées sont (cf. Figure 4.7) :

- 1) le poids $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{e}_z$;
- 2) la force élastique du ressort : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z_G - z_S - \ell_0)\vec{e}_z$,
- 3) la force de frottement fluide : $\vec{f} = -k'(\dot{z}_G - \dot{z}_S)\vec{e}_z$.

Attention aux points d'application des forces et aux forces à prendre en compte ici : le système étant « le châssis », il n'y a pas de réaction du support s'appliquant sur le châssis (elle s'applique à la roue, qui ne fait pas partie du système).

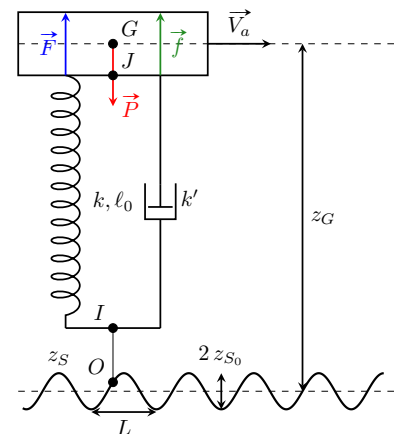


FIGURE 4.7

- /3 [3] Déterminer l'équation régissant $z_{G,eq}$ la valeur de z_G à l'équilibre pour $z_S = 0$ (route horizontale). Montrer que :

$$z_{G,eq} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$$

Réponse

Le PFD s'écrit :

$$\begin{aligned} M\vec{a} &= \vec{F} + \vec{f} + \vec{P} \\ \Leftrightarrow M \frac{d^2 z_G}{dt^2} &= -k(z_G - z_S - \ell_0) - Mg - k' \left(\frac{dz_G}{dt} - \frac{dz_S}{dt} \right) \\ \Rightarrow 0 &= -k(z_{G,eq} - \ell_0) - Mg \\ \Rightarrow z_{G,eq} &= \ell_0 - \frac{Mg}{k} \end{aligned}$$

Équilibre
 On isole

- /2 [4] Exprimer l'équation différentielle vérifiée par $z = z_G - z_{G,eq}$. On rappelle pour cela que z_S n'est pas constante.

Réponse

Cette condition permet de simplifier l'équation précédente : on pose $z = z_G - z_{G,eq}$. $z_{G,eq}$ étant constant, on en déduit $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_G}{dt}$ et idem pour la dérivée seconde. On obtient finalement

$$M\ddot{z} + k'\dot{z} + kz = k'\dot{z}_S + kz_S$$



- /8 [5] Donner les expressions de la réponse complexe $\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S}$ ainsi que son module $|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S}|$ où \underline{Z} est l'amplitude complexe de la grandeur complexe z associée à $z(t)$ et \underline{Z}_S l'amplitude complexe de celle associée à $z_S(t)$. On posera $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. Montrer que :

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

où les expressions ainsi que les valeurs numériques de Q et de ω_0 sont à déterminer.

Réponse

Puisque z_S varie de façon sinusoïdale, on passe en notation complexe en posant $\underline{z}_S(t) = \underline{Z}_S \exp(j\omega t)$ et $\underline{z}(t) = \underline{Z} \exp(j\omega t)$ en RSF.

L'équation différentielle devient, après simplification par $\exp(j\omega t)$,

$$-M\omega^2 \underline{Z} + j\omega k' \underline{Z} + k \underline{Z} = j\omega k' \underline{Z}_S + k \underline{Z}_S$$

d'où

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{j\omega k' + k}{k - M\omega^2 + j\omega k'} = \frac{1 + j\omega \frac{k'}{k}}{1 - \frac{M\omega^2}{k} + j\omega \frac{k'}{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} \right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{x^2}{Q^2}}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On en déduit $\frac{k'}{k} = \frac{1}{\omega_0 Q}$ et $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{k}$ d'où au final :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{Mk}}{k'} = 2,5.$$



- /5 [6] Tracer l'allure de $|H| = |\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S}|$ en fonction de x . Quelle est la signification physique de $|H|$?

Réponse

On a affaire à un filtre mécanique passe bas du second ordre. Un tracé sous python/calculatrice donne le graphique suivant en échelle linéaire (à gauche) ou logarithmique (à droite).

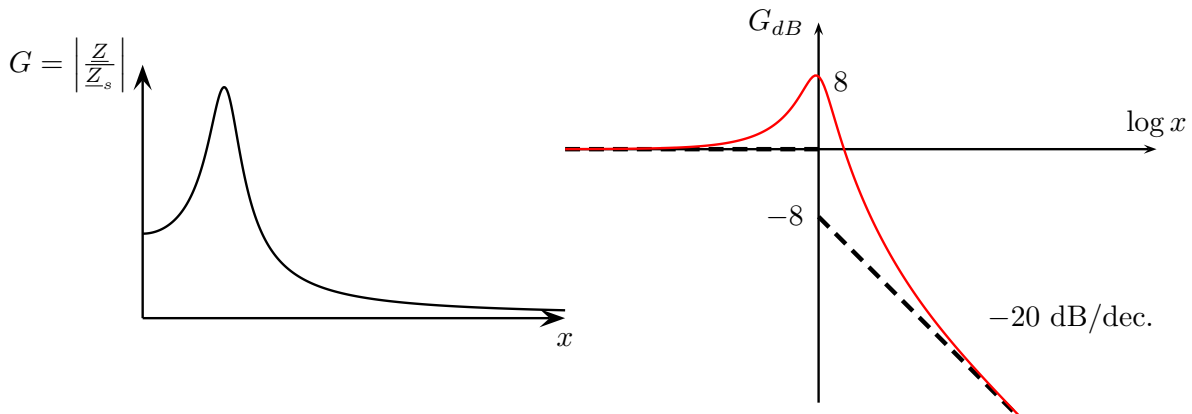


FIGURE 4.8

Physiquement $H = |H|$ représente à quel point les perturbations de la route vont être amplifiées (si $H > 1$) ou atténuées (si $H < 1$) en fonction de la fréquence d'excitation (donc en partie en fonction de la vitesse du véhicule).



- /2 [7] Calculer l'amplitude des oscillations du véhicule se déplaçant à la vitesse V_a .

Réponse

Si le véhicule roule à $V_a = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 13,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$, $\omega \approx 42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$ (pulsation des oscillations ressenties par le passager) comme déterminé question [1]. Ainsi, $x = 4,2$, et

$$Z = H(4,2) \cdot Z_S \approx 1,0 \text{ cm}$$

(assez faible).

- /4 [8] À quelle(s) allure(s) ne faudrait-il surtout pas rouler sur ce sol ondulé, et pourquoi ? Répondre en $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$ et en $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$. Calculer l'amplitude du mouvement.

On supposera que la valeur de Q déterminée précédemment permet de répondre simplement.

Réponse

Il ne faut pas rouler à $V_a = V_0$ correspondant à la résonance qui a lieu pour $\omega \approx \omega_0$, soit

$$V_0 \approx \frac{L\omega_0}{2\pi} \approx 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = \underline{12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}}$$

Le système entrerait alors en résonance, le passager ressentirait des oscillations d'amplitude $Z(10) \approx QZ_S = 25 \text{ cm}$ et cela détériorerait les amortisseurs.

Attention, ici la résonance n'a pas lieu pour $\omega = \omega_0$, c'est plus compliqué. Annoncer « on sait que H est maximum pour $x = 1$ » présente donc assez mal ! En pratique, $\omega_r \approx \omega_0$ lorsque $2Q^2 \gg 1$ ce qui est le cas ici ($Q = 2,5$).

- /3 [9] À la lueur des résultats obtenus, proposer un moyen de ralentissement des véhicules à l'entrée des zones urbaines, limitant la vitesse d'entrée à $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$.

Réponse

En plaçant des bandes rugueuses à une distance L_0 bien choisie, on peut, en admettant que la fréquence de résonance est la même pour tous les véhicules, s'arranger pour que V_0 soit légèrement supérieure à la vitesse limite de $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ en zones urbaines, soit par exemple $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$:

$$\omega_0 = \frac{2\pi V_0}{L_0} \Leftrightarrow \boxed{L_0 = \frac{2\pi V_0}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 2\pi \approx 6 \\ V_0 = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{60}{3.6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{L_0 = 10 \text{ m}}$

I/B Comportement lors du franchissement d'une bordure

On s'intéresse maintenant au cas du franchissement d'une bordure (le niveau du sol s'élève brusquement) avec $z_S(t) = 0 \forall t < 0$ et $z_S(t) = z_0 \forall t > 0$ (échelon d'altitude).

Cette fonction n'est ni dérivable, ni continue en $t = 0$ et on ne pourra ainsi pas résoudre simplement l'équation mécanique obtenue dans la partie précédente.

On se propose alors d'étudier le régime transitoire correspondant au franchissement de la bordure à l'aide d'un circuit électrique équivalent, c'est-à-dire régi par une équation différentielle similaire.

Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de tension parfait délivrant une tension sinusoïdale \underline{u}_e de pulsation ω . On cherche dans un premier temps à identifier la tension qui correspondra à l'inconnue $z(t)$ du problème mécanique.

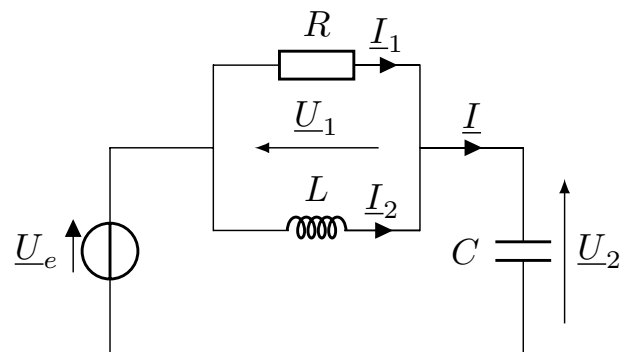


FIGURE 4.9 – Circuit électrique équivalent.

- /5 [10] Déterminer l'impédance équivalente \underline{Z} de ce circuit vue depuis le générateur. L'écrire sous la forme $\frac{1}{jC\omega}$ multipliant une fraction de 2 expressions adimensionnées, sans chercher à faire apparaître des constantes ω_0 ou Q .

Réponse

Vue du générateur, l'impédance est un condensateur en série avec (une résistance et une bobine en parallèle). D'où

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} \\ \Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{jC\omega(R + jL\omega)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Même dénominateur} \\ \text{On factorise par } R \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}{jC\omega(1 + j\frac{L}{R}\omega)} \end{aligned}$$



- /7 [11] Par une analyse du comportement à basses et hautes fréquences, quelle grandeur de sortie \underline{U}_s doit être choisie (parmi \underline{U}_1 ou \underline{U}_2) pour obtenir une fonction de transfert harmonique équivalente à celle de la suspension automobile $\{ M, k, k' \}$ sur une route déformée sinusoïdalement, c'est-à-dire que :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad (4.1)$$

où $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite ; ω_0 une pulsation propre et Q , le facteur de qualité. Déterminer alors les expressions de ces constantes en fonction de R , L et C .

Réponse

Deux choix sont possibles et dans les deux cas, on va vérifier les comportements asymptotiques :

- ◇ pour $u_s = u_1$, on a $\underline{U}_1 \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow 0$ (car la bobine est équivalente à un fil en BF) et ce résultat n'est pas compatible avec la fonction de transfert attendue (réponse non nulle en basse fréquence).
- ◇ pour $u_s = u_2$, on a $\underline{U}_2 \rightarrow 0$ quand $\omega \rightarrow +\infty$ (condensateur équivalent à un fil en HF) puis $\underline{U}_2 \rightarrow \underline{U}_e$ quand $\omega \rightarrow 0$ (tension nulle aux bornes de la bobine + loi des mailles). Ce comportement asymptotique est compatible avec celui du filtre proposé dans la partie précédente.

On retient ainsi pour la suite $u_s = u_2$ et on obtient la fonction de transfert en utilisant la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{1}{\frac{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}{1 + j\frac{L}{R}\omega}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega}{1 - LC\omega^2 + j\frac{L}{R}\omega}}$$

En identifiant à la forme proposée par l'énoncé on obtient

$$\omega^2/\omega_0^2 = LC\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{Q\omega_0} = \omega \frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

L'expression du facteur de qualité n'est pas la même que celle obtenue pour le circuit RLC série. Cependant, elle est bien sans dimension.



- /4 [12] En comparant les expressions obtenues dans les deux modélisations (mécanique et électrique), proposer des équivalences électromécaniques. Attention, ce ne sont pas forcément les équivalences classiques du RLC série.

Réponse

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ en électrique et $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ d'un côté, et de l'autre côté $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$ et $Q = \frac{1}{k'}\sqrt{Mk}$.

Vu la forme de ω_0 , on est amené à proposer naturellement ($k = \frac{1}{L}$; $M = C$) ou ($k = \frac{1}{C}$; $M = L$) toutefois, du côté de Q , les grandeurs qui « passent du dénominateur dans ω_0 au numérateur dans Q » sont M et C .

Il paraît donc raisonnable de proposer

$$\boxed{M \leftrightarrow C \quad ; \quad k \leftrightarrow \frac{1}{L} \quad ; \quad k' \leftrightarrow \frac{1}{R}}$$

(et bien sûr $U_s = z_v$ et $U_e = z_s$)

D'autres relations d'équivalences pourront être obtenues lors de l'étude d'autres circuits électriques. Ces résultats ne sont donc pas à apprendre par cœur.



/4 [13] Montrer que l'équation différentielle reliant $u_s(t)$ (u_1 ou u_2) à $u_e(t)$ et aux données du problème s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2}u_s + \frac{1}{RC} \frac{d}{dt}u_s + \frac{1}{LC}u_s = \frac{1}{RC} \frac{d}{dt}u_e + \frac{1}{LC}u_e$$

avec $u_e(t)$ la tension aux bornes du générateur non constante.

Réponse

Avec la loi des mailles :

$$u_e = u_1 + u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_e - u_2$$

On cherche à simplifier u_1 . On a pour ça :

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ \Leftrightarrow i &= \frac{u_1}{R} + i_2 \\ \Rightarrow \frac{di}{dt} &= \frac{1}{R} \frac{du_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{di}{dt} &= \frac{1}{R} \frac{du_1}{dt} + \frac{1}{L} u_1 \\ \Leftrightarrow \boxed{u_1 &= L \frac{di}{dt} - \frac{L}{R} \frac{du_1}{dt}} \\ \Leftrightarrow u_1 &= LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} - \frac{L}{R} \frac{du_1}{dt} \\ \Leftrightarrow \boxed{u_1 &= LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} - \frac{L}{R} \left(\frac{du_e}{dt} - \frac{du_2}{dt} \right)} \end{aligned}$$

$i_1 = \frac{u_1}{R}$
 $\left(\frac{d}{dt} \right)$
 $u_1 = L \frac{di_2}{dt}$
 On isole u_1
 $i = C \frac{du_2}{dt}$
 $u_1 = u_e - u_2$

Ainsi, dans la loi des mailles :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_e - u_2 \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_2}{dt} - \frac{L}{R} \frac{du_e}{dt} &= u_e - u_2 \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{L}{R} \frac{du_2}{dt} + u_2 &= \frac{L}{R} \frac{du_e}{dt} + u_e \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{RC} \frac{du_2}{dt} + \frac{1}{LC} u_2} &= \frac{1}{RC} \frac{du_e}{dt} + \frac{1}{LC} u_e \end{aligned}$$

On injecte u_1
 On regroupe
 $\times \frac{1}{LC}$

On aurait aussi pu partir de la fonction de transfert obtenue précédemment :

$$\begin{aligned} \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_e} &= \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 + (jx)^2 + j\frac{x}{Q}} \\ \Leftrightarrow \underline{U}_2 \left(1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q} \right) &= \underline{U}_e \left(1 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q} \right) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{du_2}{dt} + u_2 &= u_e + \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{du_e}{dt} \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2} &= \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt} + \omega_0^2 u_e \end{aligned}$$

On isole
 En réels
 $\times \omega_0^2$

Ce qui est bien la même chose en développant et ω_0 et Q .



Pour l'étude du régime transitoire associé au franchissement de la bordure, on considère la fonction échelon

$$u_e : t \mapsto 0, \forall t \leq 0 \quad \text{et} \quad u_e : t \mapsto E, \forall t > 0$$

Dans toute la suite, on raisonnera sur les équations faisant intervenir des grandeurs ω_0 et Q afin de pouvoir relier aisément le système mécanique au système électrique.

/2 [14] En quoi le choix pour u_e est-il pertinent pour la description du franchissement d'une bordure ?

Réponse

Dans le cadre de l'analogie électromécanique, la tension u_e aux bornes du GBF est analogue à la hauteur du sol z_s . Lors du franchissement d'un trottoir, la hauteur (constante avant) va ainsi soudainement augmenter d'une dizaine de centimètres puis redevenir constante. C'est bien le comportement qui est décrit ici.



/8 [15] Obtenir deux conditions initiales sur u_s en $t = 0^+$. Une réponse rigoureusement rédigée est attendue. Exprimez ensuite ces dernières à l'aide de E , ω_0 et Q .

Réponse

La charge initiale du condensateur n'est pas mentionnée dans l'énoncé. À $t = 0^-$, on a $i(0^-) = 0$ (condensateur en RP) puis $u_1(0^-) = 0$ (bobine \leftrightarrow fil en RP) donc $i_1(0^-) = 0$ (résistance) et finalement $i_2(0^-) = 0$ (loi des nœuds).

On en déduit à l'aide de la loi des mailles appliquées à $t = 0^-$ que $0 = 0 + u_2(0^-) \Rightarrow u_2(0^-) = 0$ or la tension aux bornes du condensateur est continue donc $\boxed{u_2(0^+) = 0}$.

La dérivée de cette tension n'est pas nécessairement continue (aucun résultat de cours ne permet de le prouver rapidement). On va donc étudier le circuit à $t = 0^+$ en y appliquant la loi des mailles : $E = u_1(0^+) + u_2(0^+) \Rightarrow u_1(0^+) = E$. De plus, on a par continuité du courant à travers la bobine, $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$ mais aussi $i_1(0^+) = u_1(0^+)/R = E/R$.

Finalement, l'application de la loi des nœuds donne $i(0^+) = i_1(0^+) = E/R = C \frac{du_2}{dt} \Rightarrow \frac{du_2}{dt} = \frac{E}{RC} = \frac{E\omega_0}{Q}$

- /8 16 Résoudre ensuite l'équation différentielle obtenue pour $t > 0$ (on retiendra la valeur du facteur de qualité obtenue dans la première partie).

Réponse

Pour $t > 0$, on a $u_e(t) = E$ et donc :

$$\frac{d^2}{dt^2}u_2 + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d}{dt}u_2 + \omega_0^2 u_2 = \omega_0^2 E$$

Pour $Q = 2,5 > 1/2$, on se place dans le cas du régime pseudo-périodique et donc

$$u_2(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) + E$$

avec $\Omega = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ et $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$. La première CI donne $A + E = 0$. On dérive ensuite la tension :

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (B \sin(\Omega t) - E \cos(\Omega t)) + e^{-t/\tau} (B\Omega \cos(\Omega t) + E \sin(\Omega t))$$

La deuxième CI donne $\frac{E\omega_0}{Q} = \frac{2E}{\tau} = \frac{E}{\tau} + B\Omega \Rightarrow B = \frac{E}{\tau\Omega}$. On trouve au final :

$$u_2(t) = E e^{-t/\tau} \left(\frac{E}{\tau\Omega} \sin(\Omega t) - \cos(\Omega t) \right) + E$$

- /5 17 Représenter sur un même graphique la solution obtenue pour la valeur du facteur de qualité trouvée précédemment, ainsi que pour $Q = 0,51$ et $Q = 10$. On prendra soin de déterminer la valeur de la période et/ou du temps de réponse pour chaque graphique, sans chercher à démontrer les expressions utilisées. Pour les applications numériques, on prendra $E = 1 \text{ V}$ et $\omega_0 = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Réponse

Littéralement, on prend $t_{95} = Q \cdot T_0$ pour $Q = 2,5$ et $Q = 10$ et $t_{95} = \frac{T_0}{2Q}$ pour $Q = 0,51$, et on a $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$ soit

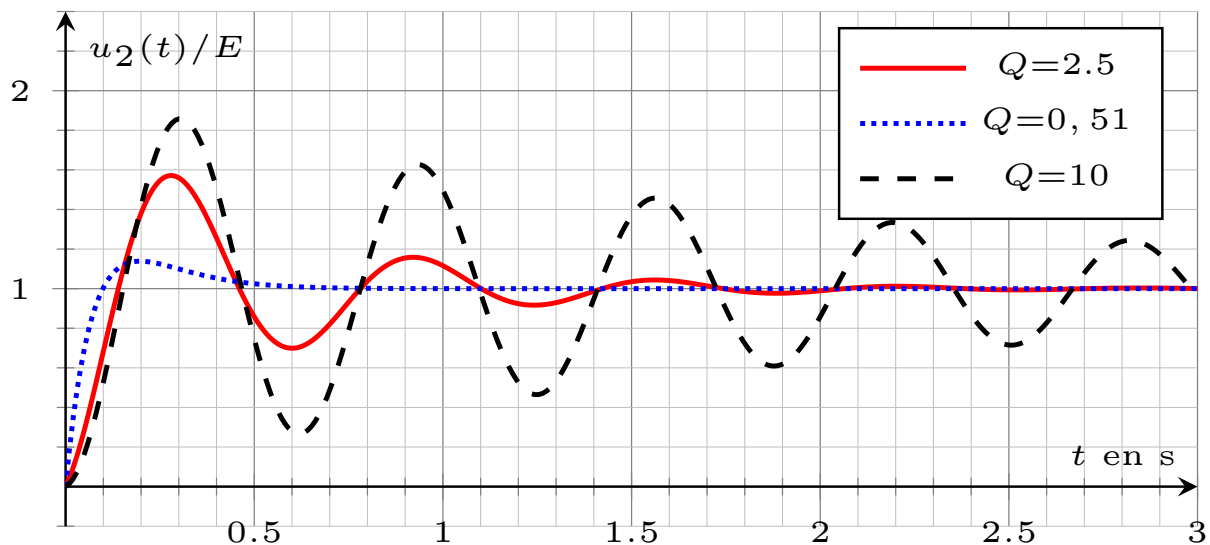


FIGURE 4.10

$T_0 \approx 0,6 \text{ s}$. Ainsi,

$$t_{95,Q=10} = 6 \text{ s} \quad ; \quad t_{95,Q=2,5} = 1,5 \text{ s} \quad ; \quad t_{95,Q=0,51} \approx 0,6 \text{ s}$$

Graphiquement, on obtient $u_{2,\max}(Q = 10) = 1,95E$, $u_{2,\max}(Q = 2,5) = 1,6E$ puis finalement $u_{2,\max}(Q = 0,51) \approx 1,15E$ (peu de dépassement dans le dernier cas).

I/C Conclusion

- /5 18 Afin de construire un système de suspension efficace, que préconisez-vous pour le choix du facteur de qualité au regard des résultats obtenus dans les précédentes parties ?

Réponse

Dans le premier cas (sol ondulé), on constate que pour un facteur de qualité élevé, on peut rencontrer un phénomène de résonance qui peut être gênant. Dans le deuxième cas (franchissement d'une bordure), on observe aussi que le dépassement dépend du facteur de qualité.

Il convient donc de réaliser un système avec un **faible facteur de qualité**, dans la limite du raisonnable : il ne faut pas non plus que les amortisseurs soient rigides. Une valeur autour de 0,5 paraît appropriée.

/42 P2 Cinétique de CaCO_3 : dissolution du calcaire et coraux

II/A Introduction

Le calcium. Le calcium est le cinquième élément le plus abondant de la croûte terrestre. On le trouve dans les roches calcaires constituées principalement de carbonate de calcium CaCO_3 . Le calcium joue un rôle essentiel chez la plupart des organismes vivants vertébrés en contribuant notamment à la formation des os ou des dents. . .

Le calcium a également de nombreuses applications dans l'industrie en tant que réducteur des fluorures d'uranium notamment, de désoxydant pour différents alliages ferreux et non-ferreux, de désulfurant des hydrocarbures. Dans la métallurgie du plomb, les alliages calcium-magnésium sont utilisés afin d'éliminer les impuretés de bismuth.

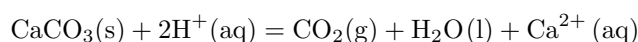
Les coraux sont généralement des colonies de polypes qui vivent regroupées pour former des superorganismes partageant un squelette calcaire. Les coraux durs, « constructeurs de récifs », ont formé par accumulation de ces squelettes minéraux des récifs coralliens dont certains sont devenus les plus grandes structures complexes connues créées par des organismes vivants (les grandes barrières de corail).

Potentiel hydrogène pH. On rappelle la définition du pH :

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+]$$

où \log est le logarithme en base 10 et $[\text{H}^+]$ est la concentration d'ion oxonium en $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$.

Réaction de dissolution. On s'intéresse maintenant à la vitesse de la réaction de dissolution du carbonate de calcium selon deux méthodes. Pour cela, on étudie l'évolution de la réaction entre le carbonate de calcium $\text{CaCO}_3(\text{s})$ et un volume $V_0 = 100 \text{ mL}$ d'une solution d'acide chlorhydrique de concentration $c_a = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. L'équation de la réaction s'écrit :



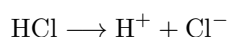
On considérera que la totalité du dioxyde de carbone formé se dégage.

Aide aux calculs

10

$$\frac{8,69}{2} \approx 4,35 \quad ; \quad \frac{1,47}{2} \approx 0,735$$

- /4 1 Sachant que la réaction de dissolution dans l'eau du chlorure d'hydrogène est totale :



quel est le pH de la solution d'acide chlorhydrique ?

Réponse

L'équation de dissolution dans l'eau du chlorure d'hydrogène est : À tout instant, $n_{\text{HCl}}(t) = n_{\text{HCl},0} - \xi$, et $n_{\text{H}^+} = \xi$. Or la réaction est totale, soit $\xi_f = \xi_{\text{max}}$. On en déduit que $[\text{H}^+] = c_a = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Ainsi :

$$\text{pH} = -\log[\text{H}^+] = 1,0$$

TABLEAU 4.1 – Pression de dioxyde de carbone au cours du temps.

$t(\text{s})$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$p_{\text{CO}_2}(\text{Pa})$	1250	2280	3320	4120	4880	5560	6090	6540	6940	7170

II/B Première méthode

Dans une première expérience, on mesure la pression du dioxyde de carbone apparu en utilisant un capteur de pression différentiel. Le gaz occupe un volume $V = 1,0\text{ L}$ à la température de 25°C . Les résultats sont regroupés dans le tableau 4.1 ci-dessous :

- /1 2 Établir la relation donnant la quantité de matière en dioxyde de carbone $n(\text{CO}_2)$ à chaque instant t en fonction de $P(\text{CO}_2)$.

Réponse

D'après la loi des gaz parfaits :

$$n_{\text{CO}_2} = \frac{p_{\text{CO}_2} V}{RT}$$



- /6 3 Établir la relation entre l'avancement x et $n(\text{CO}_2(\text{g}))$. Effectuer l'application numérique à $t = 100\text{ s}$ afin de compléter le tableau de valeurs 4.2 suivant. On prendra $\frac{1}{RT} \approx 4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{J}^{-1}$.

TABLEAU 4.2 – Avancement *via* la pression en fonction du temps.

$t(\text{s})$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$x(\text{mmol})$	0,50	0,92	1,34	1,66	1,97	2,24	2,46	2,64	2,80	

Réponse

Le tableau d'avancement de la réaction est :

Équation		$\text{CaCO}_3(\text{s}) + 2\text{H}^+(\text{aq}) \rightarrow \text{CO}_2(\text{g}) + \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + \text{H}_2\text{O}(\text{l})$					$n_{\text{tot,gaz}}$
Initial	$x = 0$	n_0	$c_a V_0$	0	0	excès	0
Interm.	x	$n_0 - x$	$c_a V_0 - 2x$	x	x	excès	x

Ainsi :

$$\Leftrightarrow x(100\text{ s}) = \frac{p_{\text{CO}_2}(100\text{ s})V}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} x = n_{\text{CO}_2} \\ p_{\text{CO}_2}(100\text{ s}) = 7170\text{ Pa} \\ V = 1,00\text{ L} = 1,00 \times 10^{-3}\text{ m}^3 \\ \frac{1}{RT} \approx 4 \times 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{J}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $x(100\text{ s}) = 2,9\text{ mmol}$



II/C Deuxième méthode

Dans une deuxième expérience, on mesure le pH de la solution afin de déterminer $[\text{H}^+(\text{aq})]$ en fonction du temps. Les résultats sont regroupés dans le tableau 4.3 ci-dessous :

TABLEAU 4.3 – Quantité de matière en ions oxonium au cours du temps.

$t(\text{s})$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$n_{\text{H}^+}(\text{mmol})$	9,00	8,20	7,30	6,70	6,10	5,50	5,10	4,70	4,40	4,20

- /4 4 Quelle relation existe-t-il entre $n(\text{H}^+)$ et $[\text{H}^+(\text{aq})]$ à tout instant ? Établir la relation entre $n(\text{H}^+)$ et l'avancement x . Effectuer l'application numérique à $t = 10,0\text{ s}$ afin de compléter le tableau de valeurs 4.4 suivant :

Réponse

$$n_{\text{H}^+} = [\text{H}^+]V_0$$

TABLEAU 4.4 – Avancement *via* le pH en fonction du temps.

$t(\text{s})$	10,0	20,0	30,0	40,0	50,0	60,0	70,0	80,0	90,0	100
$x(\text{mmol})$		0,90	1,35	1,65	1,95	2,25	2,45	2,65	2,80	2,90

D'après le tableau d'avancement :

$$\boxed{n_{\text{H}^+} = c_a V_0 - 2x} \Leftrightarrow \boxed{x = \frac{c_a V_0 - n_{\text{H}^+}}{2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_a = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ V_0 = 0,100 \text{ L}^{-1} \\ n_{\text{H}^+}(10 \text{ s}) = 9,00 \times 10^{-3} \text{ mol} \end{cases}$$

A.N. : $x(10 \text{ s}) = 0,5 \text{ mmol}$

/1 [5] Les deux méthodes sont-elles cohérentes ?

Réponse

Les 2 méthodes sont cohérentes car on retrouve les même valeurs pour les 2 tableaux de $x(t)$ à quelques pourcents près.

Une fois les résultats expérimentaux obtenus, on désire déterminer l'ordre de la réaction par rapport à $\text{H}^+(\text{aq})$. On utilisera comme expression de la vitesse :

$$v = k[\text{H}^+(\text{aq})]^p$$

où p est l'ordre de la réaction.

/1 [6] Définir la vitesse de la réaction par rapport à $[\text{H}^+(\text{aq})]$.

Réponse

La vitesse de réaction est :

$$\boxed{v = \frac{1}{-2} \frac{d[\text{H}^+(\text{aq})]}{dt}}$$

/5 [7] Établir la relation entre $[\text{H}^+(\text{aq})]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 0 par rapport à $\text{H}^+(\text{aq})$. Établir alors la relation entre l'avancement et le temps et la mettre sous la forme :

$$x = V_0 k t$$

Réponse

On suppose que la réaction est d'ordre 0 :

$$v = k$$

On trouve alors :

$$\frac{d[\text{H}^+(\text{aq})]}{dt} = -2k \Rightarrow [\text{H}^+(\text{aq})] = [\text{H}^+(\text{aq})]_0 - 2kt = c_a - 2kt.$$

En utilisant le tableau d'avancement :

$$c_a - \frac{2x}{V_0} = c_a - 2kt \Rightarrow \boxed{x = V_0 k t}.$$

/4 [8] Établir la relation entre $[\text{H}^+(\text{aq})]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 1 par rapport à $\text{H}^+(\text{aq})$. Établir alors la relation suivante :

$$\ln \left(\frac{c_a V_0 - 2x}{c_a V_0} \right) = -2kt$$

Réponse

On suppose que la réaction est d'ordre 1 :

$$v = k[\text{H}^+] \Rightarrow k[\text{H}^+] = \frac{-1}{2} \frac{d[\text{H}^+]}{dt} \Rightarrow [\text{H}^+](t) = c_a e^{-2kt}$$

En passant au logarithme et en utilisant le tableau d'avancement :

$$\boxed{\ln \left(\frac{c_a V_0 - 2x}{c_a V_0} \right) = -2kt}$$

- /6 [9] Établir la relation entre $[H^+(aq)]$ et le temps en supposant que la réaction est d'ordre 2 par rapport à $H^+(aq)$. Établir alors la relation suivante :

$$\frac{1}{V_0 c_a - 2x} - \frac{1}{V_0 c_a} = \frac{2kt}{V_0}$$

Réponse

On suppose que la réaction est d'ordre 2 :

$$v = k[H^+]^2 \Rightarrow k[H^+]^2 = \frac{-1}{2} \frac{d[H^+]}{dt} \Rightarrow -2k dt = \frac{d[H^+]}{[H^+]^2}$$

On intègre cette relation entre l'état initial et un état quelconque :

$$-2k \int_0^t dt' = \int_{c_a}^{c_a V_0 - 2x} \frac{d[H^+]}{[H^+]^2} \Rightarrow \frac{1}{c_a} - \frac{1}{c_a - \frac{2x}{V_0}} = -2kt \Rightarrow \boxed{\frac{1}{V_0 c_a - 2x} - \frac{1}{V_0 c_a} = \frac{2kt}{V_0}}$$



On obtient les graphes suivants :

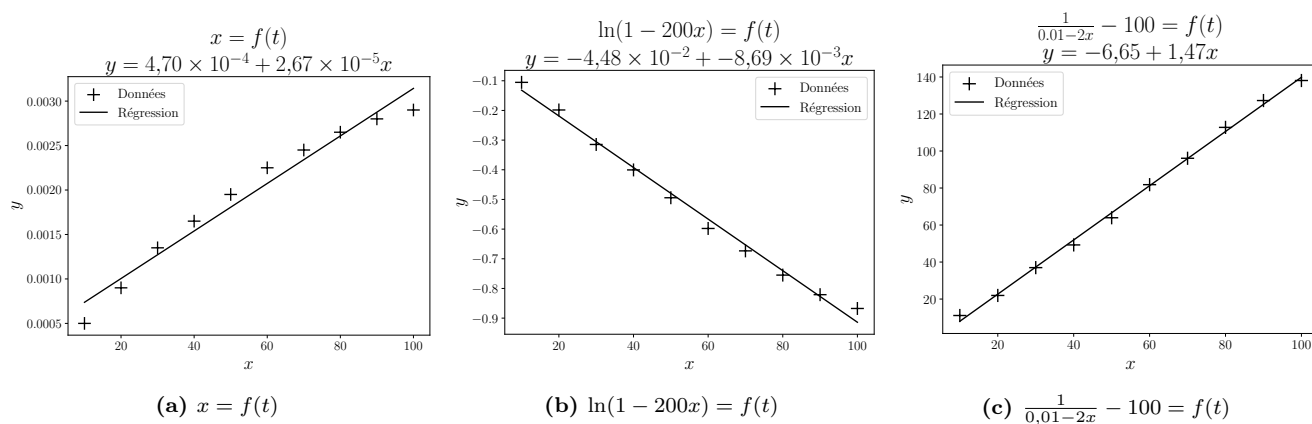


FIGURE 4.11 – Graphiques.

- /5 [10] À l'aide d'un des graphes, déterminer l'ordre de la réaction et la constante de vitesse dont on précisera l'unité.

Réponse

La courbe qui ressemble le plus à une droite est la courbe 3 : les données sont réparties plus aléatoirement que la courbe 2 qui ressemble plus à une parabole. La première ne convient clairement pas.

On en déduit que la réaction est le mieux modélisée par une réaction d'ordre 2. La pente de la droite ajustée est $1,47 \text{ mol}^{-1} \text{s}^{-1} = 2k/V_0$. Puisque $V_0 = 100 \times 10^{-3} \text{ L}$, on en déduit que

$$\boxed{k = 7,35 \times 10^{-2} \text{ L} \cdot \text{mol}^{-1} \text{s}^{-1}}$$



- /5 [11] Que pensez-vous quant à la vitesse de dissolution des coraux dans l'océan ?

Réponse

La vitesse de dissolution des coraux est assez lente car elle est d'autant plus grande que la concentration en ions H^+ est grande, c'est-à-dire que le pH est petit. Or, actuellement, le pH de l'océan est de l'ordre de 8,0. Cependant, à cause des activités humaines, les océans s'acidifient en raison de la hausse de CO_2 dissout dedans. Les coraux vont donc se dissoudre de plus en plus vite.

