MPSI 1 - DS2 - Circuits électriques

Durée 3h / Calculettes autorisées

Le devoir est composé de **4 parties indépendantes** :

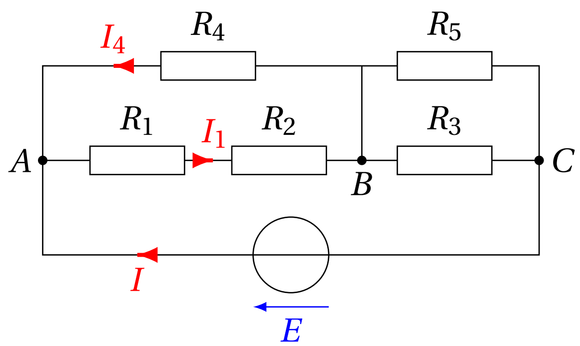
- **Exercice :** Circuit de résistances
- **Problème 1 :** Étude d'une lampe de secours rechargeable
- **Problème 2 :** Guirlandes électriques
- **Problème 3 :** Étude d'une inductance

Consignes générales

- La présentation, la lisibilité, l'orthographe, la qualité de la rédaction, la clarté et la précision des raisonnements entreront pour une part *importante* dans l'appréciation des copies.
- On portera une attention toute particulière à la vraisemblance des résultats obtenus : homogénéité des formules littérales, étude de cas particuliers, ordres de grandeur des valeurs numériques. *Des points y seront attribués.*
- Les réponses non justifiées et les applications numériques ne comportant pas d'unité ne donneront pas lieu à l'attribution de points.
- Les résultats finaux *non encadrés ou soulignés à la règle* ne seront tout simplement pas lus.
- Si un candidat repère ce qui lui semble être une erreur d'énoncé, il le signale sur sa copie et poursuit sa composition en expliquant les raisons des initiatives qu'il est amené à prendre.

Exercice : circuit de résistances

On considère le circuit ci-dessous.



1. Déterminer parmi les 5 résistances, lesquelles sont en série et en parallèle.
2. En considérant que toute les résistances ont la même valeur $R = 1$ kΩ, exprimer en fonction de R la résistance équivalente R_{AB} : équivalente à toutes les résistances entre les points A et B, soit R_1, R_2 et R_4. Faire l'application numérique.
3. De même exprimer les résistances équivalentes R_{BC} et R_{AC}. Faire les applications numériques.
4. Exprimer les tensions u_{AB} et u_{CB} en fonction de E.
5. Exprimer les intensités I_1 et I_4 en fonction de I.

Problème 1 : Etude d'une lampe de secours rechargeable

Il est recommandé d'avoir sur soi une lampe pour être vu en cas de détresse ou tout simplement pour se déplacer par nuit noire. Pour ne pas avoir à gérer des piles défaillantes ou des accumulateurs non chargés, une "lampe à secouer" peut s'avérer utile. Un extrait d'une description publicitaire de cet objet est rapporté ci-dessous.

Document - Extrait d'une publicité pour une lampe à secouer

En secouant la lampe 30 secondes (un peu comme une bombe de peinture), de l'énergie électrique est produite et stockée dans un condensateur. Vous obtenez alors environ 20 minutes d'une lumière produite par une DEL (diode électroluminescente).
Si vous n'utilisez pas toute l'énergie produite, elle restera stockée dans le condensateur pendant plusieurs semaines pour être ensuite immédiatement disponible sur simple pression du bouton marche/arrêt.

On part d'une situation où on suppose que le condensateur vient d'être chargé et que la tension à ses bornes est $U_0 = 3,3$ V. On cesse alors d'agiter la lampe et donc de recharger le condensateur.

Tout d'abord, on étudie la décharge de ce condensateur de capacité $C = 10$ F ("supercondensateur") dans un conducteur ohmique de résistance R pouvant modéliser une lampe à incandescence. Le circuit étudié est donc représenté par le schéma de la figure 1. La partie de circuit utile lors de la phase de charge du condensateur n'est pas représentée.

À l'instant initial $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur K et la décharge commence.

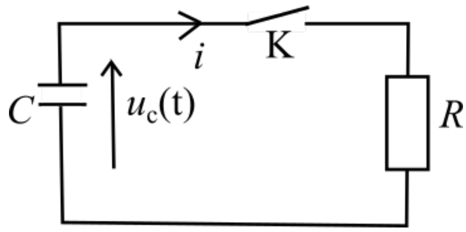


Figure 1 – Circuit électrique équivalent lors de la phase de décharge du condensateur

1. Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ pendant la décharge en faisant apparaître une constante de temps τ dont on donnera l'expression. Puis déterminer l'expression littérale de la solution de cette équation différentielle.

Au bout d'une durée environ égale à 5τ on peut considérer que la décharge du condensateur est quasi-complète.

2. Si l'on considère que cette durée est égale à 20 minutes (comme précisé dans le document fourni), déterminer la valeur de la résistance R du conducteur ohmique qu'il faut alors associer au condensateur de capacité $C = 10$ F.

Certains modèles électriques plus élaborés du "supercondensateur" utilisé ici permettent de traduire, plus fidèlement à la réalité, son comportement réel dans un circuit. Un des modèles possibles fait apparaître, autour de la capacité C, une résistance R_f en parallèle et une résistance série R_s conformément au schéma de la figure 2.

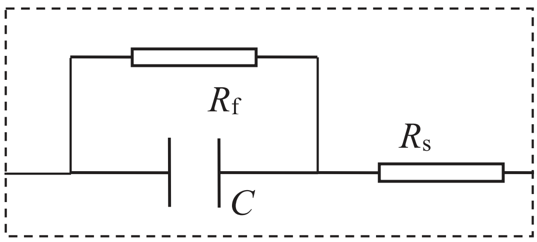


Figure 2 – Modèle plus fidèle à la réalité pour le "supercondensateur"

3. Pour quelles valeurs limites de R_s et R_f retrouve-t-on le modèle simple (C seul) du "supercondensateur" ?

Pour la suite des questions, on revient au modèle simple (C seul) pour le condensateur, toujours initialement chargé sous une tension $U_0 = 3,3$ V.
On remplace maintenant le conducteur ohmique de résistance R par une DEL dont les caractéristiques sont les suivantes (figures 3, 4) :

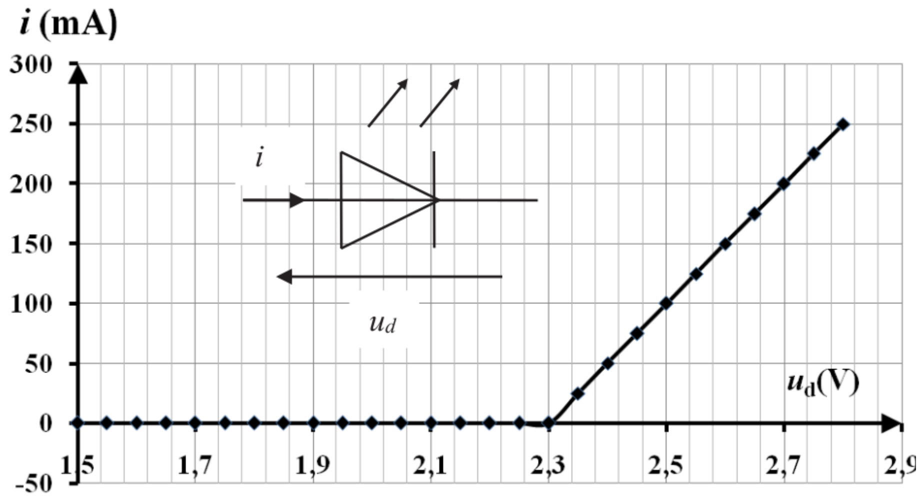


Figure 3 – Caractéristique $i = f(u_d)$ et symbole pour la diode électroluminescente DEL.

Parameter	Symbol	Condition	Min.	Typ.	Max.	Unit
Luminous Flux	Φ_V	i = 200 mA	6	8,5	-	lm
Forward Voltage	u_d	i = 200 mA	-	2,5	2,8	V
D.C. Forward Current Max	i_M	-	-	-	250	mA
Peak Wavelenght	λ_p	i = 200 mA	-	635	-	nm
Dominant Wavelenght	λ_d	i = 200 mA	-	624	-	nm
Reverse Current	i_r	u_r = 5 V	-	-	50	µA
Viewing Angle	$2\Phi_{1/2}$	i = 200 mA	-	120	-	deg
Spectrum Line Halfwidth	$\Delta\lambda$	i = 200 mA	-	20	-	nm

Figure 4 – Electrical & Optical Characteristics

Pour cette diode, on appelle tension seuil, notée U_S la tension minimale au-delà de laquelle la diode devient passante. On convient alors que la diode électroluminescente cesse d'émettre suffisamment de lumière dès que $u_d < U_S + 0,1$ V.

4. Comment se comporte la DEL lorsque la diode est bloquée : ($u_d < 2,3$ V). D'autre part, proposer un modèle électrique équivalent pour la DEL lorsqu'elle est passante ($u_d > 2,3$ V), sous forme d'un générateur de Thévenin (valeurs numériques attendues). On fera le schéma électrique correspondant en précisant bien les sens de l'intensité de de la tension u_d.

5. Faire le schéma électrique de la LED modélisée et insérée dans le circuit précédent. Puis, montrer que la nouvelle équation différentielle régissant l'évolution de $u_c(t)$ lorsque le condensateur se décharge dans la diode électroluminescente est $\dfrac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} + \dfrac{u_c(t)}{\tau'} = \dfrac{U_S}{\tau'}$. Préciser l'expression de τ'.

6. Déterminer la solution $u_c(t)$ de cette nouvelle équation différentielle, avec les mêmes conditions initiales que précédemment. Puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants du graphe (valeur et tangente à l'origine ainsi qu'une asymptote éventuelle).

7. Déterminer l'expression littérale de $i(t)$. Puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants.

8. À l'aide des caractéristiques techniques fournies dans la figure 4, indiquer si le fonctionnement correct de la DEL est garanti sans dommage. Proposer une solution pour éventuellement remédier au problème rencontré (valeur numérique attendue).

9. Prévoir, sans la mise en œuvre de la solution précédente, la durée approximative d'éclairage de cette lampe notée T. (on rappelle que $\ln(10) \simeq 2,3$). Conclure.

10. Exprimer, en fonction de U_0 et de $U_{Fi} = U_S + 0,1$ V, le pourcentage d'énergie restante dans le condensateur lorsque la DEL cesse d'émettre de la lumière par rapport à l'énergie initiale accumulée. (On ne cherche pas à la calculer, mais on estime ici ce pourcentage à environ 50 %).

Problème 2 : Guirlandes électriques

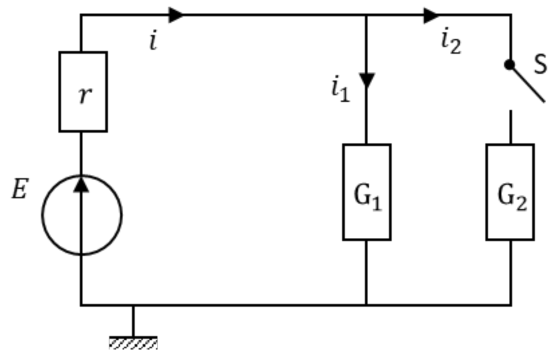
Dans ce problème, on cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlande électriques G_1 et G_2, chacune étant modélisée par un conducteur ohmique de résistance identique $R_1 = R_2 = R$.

La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée avec un interrupteur S en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement.

On supposera dans ce problème que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

Système de base

On considère dans un premier temps le circuit ci-dessous alimenté par un générateur réel de f.e.m. E et de résistance interne r. **Les expressions demandées ne feront intervenir que E, r et R.**



On considère que l'interrupteur S est ouvert.

1. Quelle est la puissance reçue $\mathcal{P}_{2,o}$ par la seconde guirlande G_2 ?
2. Établir l'expression du courant i_o passant à travers le générateur puis l'expression de la puissance électrique $\mathcal{P}_{1,o}$ reçue par la guirlande G_1.

On considère désormais que l'interrupteur S est fermé.

3. Établir l'expression du courant i_f passant à travers le générateur.
4. À l'aide d'un pont diviseur de courant, déterminer les expressions de $i_{1,f}$ et $i_{2,f}$.
5. Quelles sont alors les puissances $\mathcal{P}_{1,f}$ et $\mathcal{P}_{2,f}$ reçues par les deux guirlandes ?

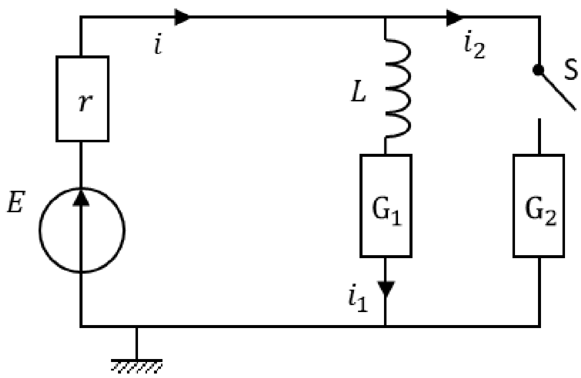
Comparaisons des 2 situations.

6. La puissance reçue par la première guirlande est-elle identique dans les deux situations étudiées (S ouvert et fermé) ? Sachant qu'elle ne doit pas clignoter, est-ce un problème ? Expliquer.
7. Comment doit-on choisir r par rapport à R pour limiter le problème ? Cette condition est-elle vérifiée pour $r = R = 1\ \Omega$?

Système amélioré

On considère maintenant le circuit ci-dessous afin de limiter la variation de puissance électrique reçue par la première guirlande, donc la variation du courant i_1.

Une bobine d'inductance L a donc été ajoutée en série avec la première guirlande. L'interrupteur S est ouvert de manière périodique pour $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right[$ et fermé pour $t \in \left[\frac{T}{2}; T\right[$.



8. En régime stationnaire (permanent continu), donner le schéma équivalent du nouveau montage.

On se place juste avant la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire en $t = \frac{T^-}{2}$, et on admet que le régime stationnaire a été atteint.

9. Déterminer la valeur de $i_1\left(\frac{T^-}{2}\right)$. En déduire la valeur de $i_1\left(\frac{T^+}{2}\right)$.

10. Déterminer les valeurs de $i_2\left(\frac{T^-}{2}\right)$ et $i_2\left(\frac{T^+}{2}\right)$.

On considère l'intervalle $\left[0; \frac{T}{2}\right[$, *lorsque l'interrupteur est ouvert.*

11. Établir l'équation différentielle dont i_1 est solution sur l'intervalle $\left[0; \frac{T}{2}\right[$. On fera apparaître un temps caractéristique τ_o.

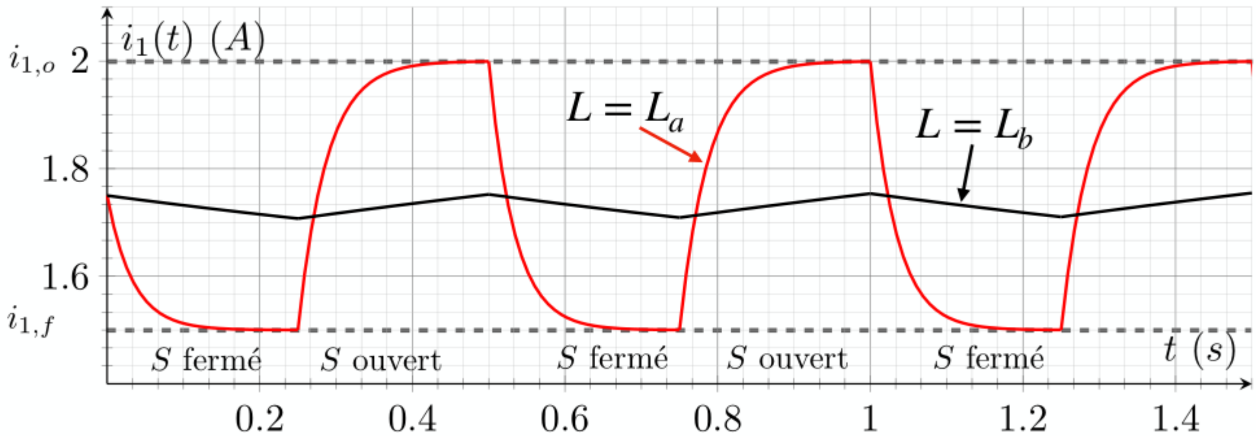
On s'intéresse maintenant à l'intervalle $\left[\frac{T}{2}; T\right[$, *lorsque l'interrupteur est fermé.*

12. Montrer que i_1 est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1+\dfrac{r}{R}\right)} \qquad \text{avec } \tau_f = \frac{L\left(1+\dfrac{r}{R}\right)}{2r+R}$$

13. Donner la forme générale $i_1(t)$ de la solution de cette équation différentielle. On ne cherchera pas à déterminer la constante intervenant dans la solution.

On étudie expérimentalement les variations du courant $i_1(t)$ en mesurant la tension aux bornes de la guirlande G_1 à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant pour deux valeurs différentes de l'inductance L. La résistance R vaut 2 Ω et la résistance r vaut 1 Ω.



14. Parmi les deux bobines d'inductance L_a et L_b , laquelle permet d'atteindre le régime stationnaire mentionné dans les questions 8 à 10 ?

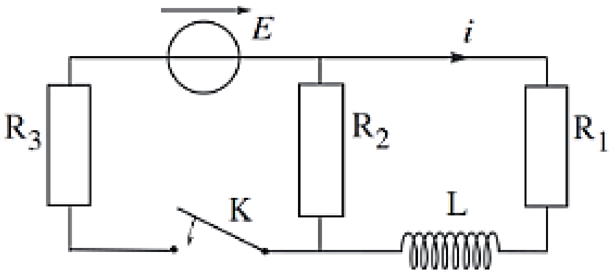
15. Retrouver, par lecture graphique, la valeur de L_a.

16. Justifiez que $L_b \gg L_a$, sans chercher à déterminer sa valeur.

17. Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi L_a et L_b pour minimiser les variations de puissance reçue par la première guirlande ?

Problème 3 : Étude d'une inductance

On considère le circuit ci-dessous, composé de 3 résistances R_1, R_2 et R_3, d'une bobine idéale d'inductance L et d'une source idéale de force électromotrice E. On suppose que l'interrupteur K est ouvert depuis un temps très grand devant le temps caractéristique d'évolution du circuit.



En $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

1. Dessiner le circuit équivalent en $t = 0^-$. En déduire $i(0^-)$.
2. Déterminer la valeur de $i(0^+)$.
3. Dessiner le circuit équivalent en $t \to \infty$. En déduire $i(+\infty)$, notée i_∞ dans la suite.
4. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour des temps $t > 0$. On pourra poser la constante de temps τ suivante :
$$\tau = \frac{L(R_2 + R_3)}{R_1R_2 + R_2R_3 + R_1R_3}$$
5. Déterminer la solution de cette équation différentielle. L'exprimer fonction de t, τ et i_∞.

On suppose dans la suite que l'interrupteur K est fermé depuis un temps très grand devant le temps caractéristique d'évolution du circuit. À $t = 0$ (nouvelle origine des temps), on ouvre l'interrupteur.

6. Déterminer l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$ pour $t > 0$.
7. Déterminer l'énergie initialement stockée dans la bobine (en $t = 0$, lorsque l'on ouvre l'interrupteur), ainsi que l'énergie dissipée par effet Joule par l'ensemble des résistances entre $t = 0$ et $t \to \infty$.