

Correction du TD

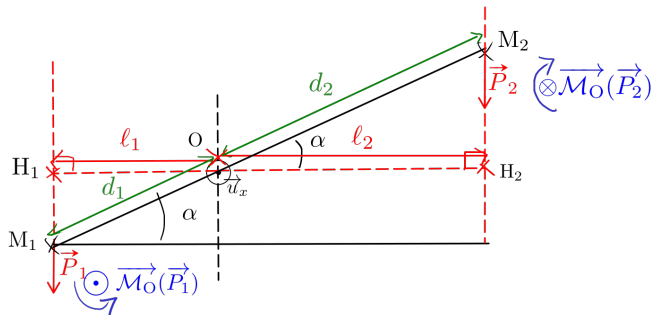
I Levier

1) On fait un schéma et on détermine les distances des bras de levier pour calculer les moments :

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}_1) = +\ell_1 m_1 g = m_1 d_1 g \cos(\alpha)$$

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}_2) = -\ell_2 m_2 g = -m_2 d_2 g \cos(\alpha)$$

Pour avoir rotation, il faut que le moment total soit **négatif** (sens horaire autour de (Ox)), soit



$$\underbrace{g \cos(\alpha)}_{\neq 0} (m_1 d_1 - m_2 d_2) < 0$$

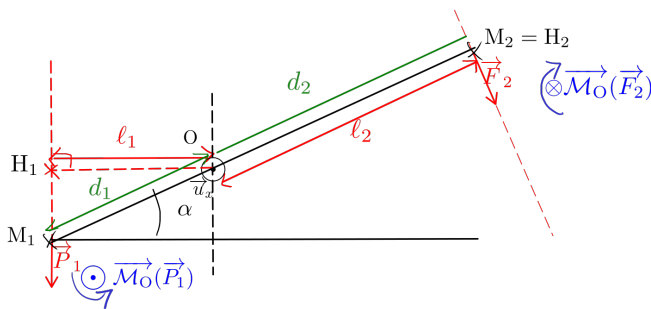
$$\Leftrightarrow m_2 d_2 > m_1 d_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_2 > m_1 \frac{d_1}{d_2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_1 = 200 \text{ kg} \\ d_1 = 0,50 \text{ m} \\ d_2 = 1,5 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{m_{2,\min} = 67 \text{ kg}}$$

2) On fait un schéma et on détermine les distances des bras de levier pour calculer les moments :

En modifiant la direction de la force, donc de la droite d'action, la longueur du bras de levier est modifiée : on a, au mieux, $\boxed{\ell_2 = d_2}$, obtenu pour une force perpendiculaire au levier.



$$\sum_i \mathcal{M}_x(\vec{F}_i) < 0 \quad \left. \begin{array}{l} \Leftrightarrow m_1 g d_1 \cos(\alpha) - m_2 g d_2 < 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{m_2 > m_1 \frac{d_1}{d_2} \cos(\alpha)} \end{array} \right\} \|\vec{F}_2\| = m_2 g$$

$$\text{A.N. : } \underline{m_{2,\min} = 33 \text{ kg}}$$

Autrement dit, avec $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, c'est 330 N de force gagné par rapport à la situation précédente, soit un gain de 50% !



À retenir

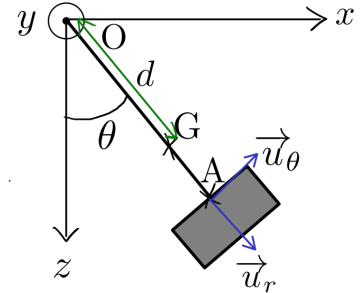
- ◇ Dessinez les moments et les bras de levier des forces **et** indiquez la direction de rotation induite par la force.
- ◇ Le moment total est la somme des moments

II Pendule pesant non amorti

- ◇ **Système** : {benne+bras} solide de masse $m_{\text{tot}} = m + M$
- ◇ **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
- ◇ **Repère** : cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y)$ avec O centre de la liaison pivot.

1) ◇ **Repérage** :

$$\begin{cases} \vec{OG} = d \vec{e}_r \\ \vec{v}(G) = d \dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a}(G) = d \ddot{\theta} \vec{e}_\theta - d \dot{\theta}^2 \vec{e}_r \end{cases}$$



◇ **Bilan des forces** :

- ▷ $\vec{P} = m_{\text{tot}} g \vec{e}_y = m_{\text{tot}} g (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$
- ▷ $\vec{F} = \vec{0}$ car pivot parfaite

◇ **Bilan des moments** :

$$\triangleright \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = (d \vec{e}_r) \wedge (m_{\text{tot}} g (\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta)) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -m_{\text{tot}} g d \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

Par projection, on retrouve le résultat qu'on aurait eu avec le bras de levier :

$$\ell = d \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \|\vec{P}\| = m_{\text{tot}} g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_y(\vec{P}) = -m_{\text{tot}} g d \sin(\theta)}$$

$$\triangleright \mathcal{L}_y(\mathcal{S}) = J_{\text{tot}} \dot{\theta}$$

$$\diamond \text{ TMC : } \frac{d\mathcal{L}_y(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_y(\vec{P}) \Leftrightarrow J_{\text{tot}} \ddot{\theta} = -m_{\text{tot}} g d \sin(\theta) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_{\text{tot}} g d}{J_{\text{tot}}} \sin(\theta) = 0}$$

2) Petites oscillations $\Rightarrow \sin(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$, donc oscillateur harmonique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{tot}} g d}{J_{\text{tot}}}} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}} g d}}}$$

3) En restant autour du même axe, les moments cinétiques se somment, soit $J_{\text{tot}} = J_{\text{bras}} + J_{\text{benne}}$. On isole J_{tot} :

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}} g d \\ \Leftrightarrow J &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}} g d - J' \\ \Leftrightarrow J &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}} g d - \frac{m L^2}{3} \end{aligned} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = 4,1 \text{ s} \\ L = 3,0 \text{ m} \\ d = 4,5 \text{ m} \\ m = 300 \text{ kg} \\ m_{\text{tot}} = 2,3 \times 10^3 \text{ kg} \\ g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{J = 4,2 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2}$

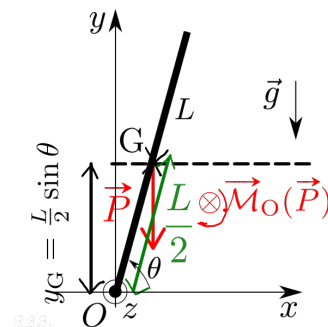
III Chute d'un arbre

1)

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{p,p} = mgy_G + 0$$

Or $y_G = \frac{L}{2} \sin(\theta) \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = \frac{mgL}{2} \sin(\theta)$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{2} \sin(\theta)} \quad (8.1)$$



2) Le système n'est soumis qu'à son poids, conservatif, et à l'action de la liaison pivot, supposée parfaite donc sans frottement. Le système est donc conservatif, et par TPM on a $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$.

On a donc $\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(0)$, or $\mathcal{E}_c(0) = 0$ et $\mathcal{E}_{p,p}(0) = \frac{mgL}{2} \sin(\theta_0)$, soit

$$3) \quad \mathcal{E}_m = \frac{mgL}{2} \sin(\theta_0) \quad (8.2)$$

$$\begin{aligned} (8.1) &= (8.2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{mgL}{2} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 &= \frac{3mgL}{mL^2} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \pm \sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))} \end{aligned}$$

Or, de toute évidence θ **diminue** puisque l'arbre tombe ($\mathcal{M}_z(\vec{P}) < 0$), soit

$$\boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}} \quad \blacksquare$$

4) Avec le bras de levier, on a $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\frac{mgL}{2} \cos(\theta)$. Ainsi, avec le TMC,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_z}{dt} &= \mathcal{M}_z(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow J\ddot{\theta} &= -\frac{mgL}{2} \cos(\theta) \\ \Leftrightarrow J\ddot{\theta} &= -\frac{mgL}{2} \cos(\theta)\dot{\theta} \\ \Rightarrow J \int_{t=0}^t \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right] dt &= -\frac{mgL}{2} \int_{t=0}^t \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} dt \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) - \underbrace{\dot{\theta}^2(0)}_{=0} &= -\frac{mgL}{2J} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= -\frac{3mgL}{mL^2} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= \frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Rightarrow \boxed{\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}} \end{aligned}$$

$\times \theta$
 \downarrow
 $f(\cdot) dt$
 \downarrow
 $\int \cos(\theta) d\theta = \int d[\sin(\theta)]$
 \downarrow
 $J = \frac{mL^2}{3}$
 \downarrow
 On prend l'opposé
 \downarrow
 $\frac{d\theta}{dt} < 0$

\blacksquare

On retiendra ici deux choses :



À retenir

- ◇ Penser à multiplier par $\dot{\theta}$ pour facilement intégrer les relations avec $\ddot{\theta}$ et des fonctions transcendantes (cos, sin...)
- ◇ Attention en prenant la racine carré d'une fonction : toujours écrire les deux valeurs possibles et vérifier la faisabilité physiquement.

5) On inverse pour avoir

$$dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}}$$

Or, quand $t|_0^{t_f}$, on a $\theta|_{\theta_0}^{\theta_f=0}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \int_0^{t_f} dt &= \int_{\theta_0}^0 \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}} \\ \Leftrightarrow t_f - 0 &= \sqrt{\frac{L}{3g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On inverse les bornes avec } - \\ \text{et on simplifie par } \sqrt{\frac{3g}{L}} \end{array} \right\}$$

A.N. : $t_f = 3,2 \text{ s}$

6) On obtient bien $t_f = 3,17 \text{ s}$ avec :



```
1 from scipy.integrate import quad # Module d'intégration "quad"
2 import numpy as np
3
4 # Intervalle d'intégration
5 theta_0 = 1.5 # rad
6 theta_f = 0 # rad
7
8 # Constantes
9 L = 10 # m
10 g = 9.81 # m.s^-2
11 K = np.sqrt(L/(3*g)) # s
12
13 # Fonction à intégrer
14 def function(theta):
15     return K/(np.sqrt(np.sin(theta_0) - np.sin(theta)))
16
17 # Calcul de l'intégrale
18 res, err = quad(function, theta_f, theta_0)
19
20 # Affichage du résultat
21 print(f"Résultat de l'intégrale = {res:.2f} ± {err:.2f}")
```

IV Barre fixée à ses extrémités

1) ◇ Système : {barre}

◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$

◇ **Repérage** : $\vec{OG} = a \vec{u}_x$ et $\vec{OA} = 2a \vec{u}_x$

◇ **BdF** : à l'équilibre, le ressort est vertical, soit

$$\triangleright \vec{P} = -mg \vec{u}_y;$$

$$\triangleright \vec{F}_r = k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \vec{u}_y.$$

$$\triangleright \vec{F}_f = \vec{0} \text{ pas de frottements}$$

◇ **BdM** : avec les bras de levier, qui se confondent ici avec les distances des points d'application puisque les droites d'actions sont perpendiculaires à l'objet, on trouve

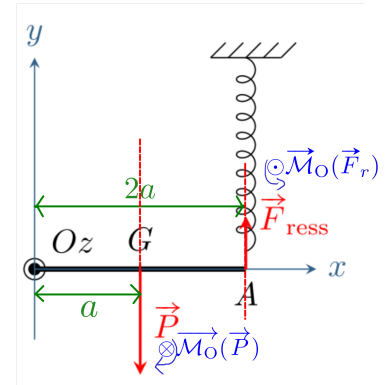
$$\triangleright \mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \times mg \text{ (sens horaire)};$$

$$\triangleright \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \times k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0).$$

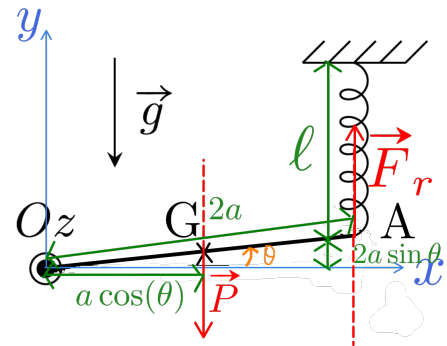
$$\triangleright \mathcal{M}_z(\vec{F}_f) = 0 \text{ pivot parfaite.}$$

◇ **TMC** : à l'équilibre, pas de rotation donc

$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = 0 \Leftrightarrow -mga + 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$



2) Avec un angle, les droites d'actions ne sont plus perpendiculaires à la barre donc les bras de levier ne se confondent plus avec les distances des points d'application. Il faut refaire un schéma et recalculer les moments :



◇ **BdM** :

$$\triangleright \mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \cos(\theta) \times mg;$$

$$\triangleright \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell - \ell_0)$$

Or, ℓ n'est plus ℓ_{eq} puisqu'on n'est plus à l'équilibre. On trouve $\ell = \ell_{\text{eq}} - 2a \sin(\theta)$, soit finalement

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell_{\text{eq}} - 2a \sin(\theta) - \ell_0)$$

$$\triangleright \mathcal{L}_z = J_z \dot{\theta}$$

◇ **TMC** :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} &= \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i) \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -a \cos(\theta) \times mg + 2a \cos(\theta) \times k(\ell_{\text{eq}} - 2a \sin(\theta) - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} \cos(\theta) \approx 1 \\ \sin(\theta) \approx \theta \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga + 2ak(\ell_{\text{eq}} - 2a\theta - \ell_0) \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga - 4ak\theta + 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mga \\ J_z = \frac{4}{3}ma^2 \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga + mga - 4ak\theta \\
\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta &= 0 \\
\Rightarrow T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{k}{3}}
\end{aligned}$$

V Choc de deux chariots

1) Dans cette partie, on suppose qu'après le choc les masses restent solidaires.

a – ♦ **Système** : {2 chariots} considérés chacun comme un point matériel

♦ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

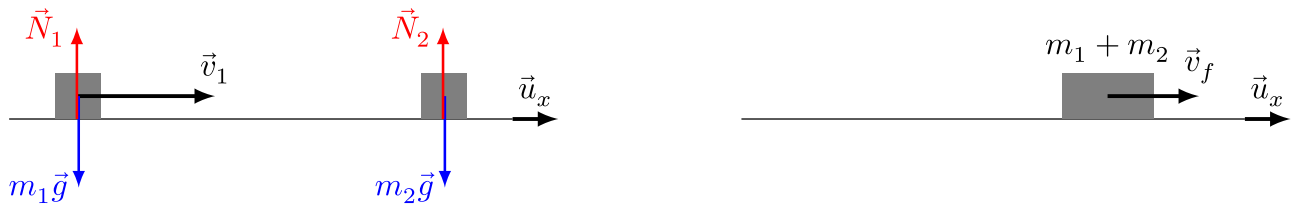
♦ **Base** : (\vec{u}_x, \vec{u}_z) avec \vec{u}_z vertical ascendant

♦ **BdF** :

▷ $\vec{P}_1 = -m_1g\vec{u}_z$ et $\vec{N}_1\vec{u}_z$ pour le premier

▷ $\vec{P}_2 = -m_2g\vec{u}_z$ et $\vec{N}_2\vec{u}_z$ pour le second

▷ Aucune force de frottements, donc système pseudo-isolé ($\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$)



Ainsi, $\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{0}$ soit $\vec{p}_{\text{tot}} = \text{cte.}$ Ainsi,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \quad \Leftrightarrow \quad \vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \vec{u}_x$$

b – On utilise le TEC :

$$\begin{aligned}
\Delta\mathcal{E}_c &= W_{\text{int}} + \underbrace{W_{\text{ext}}}_{=0} \quad \Leftrightarrow \quad W_{\text{int}} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2 \\
&\Leftrightarrow \quad W_{\text{int}} = -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}v_1^2 < 0
\end{aligned}$$

Le travail des forces intérieures est donc **négatif**, ce qui est cohérent avec le fait que le système perd de l'énergie cinétique, transformée en énergie thermique lors du choc.

2) On considère dans cette partie que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux masses est conservée au cours du choc et qu'elles ne sont plus solidaires après.

a – On a toujours un système pseudo-isolé :



On a donc la conservation de la quantité de mouvement totale, ainsi que l'énergie cinétique totale ; ainsi entre les deux situations :

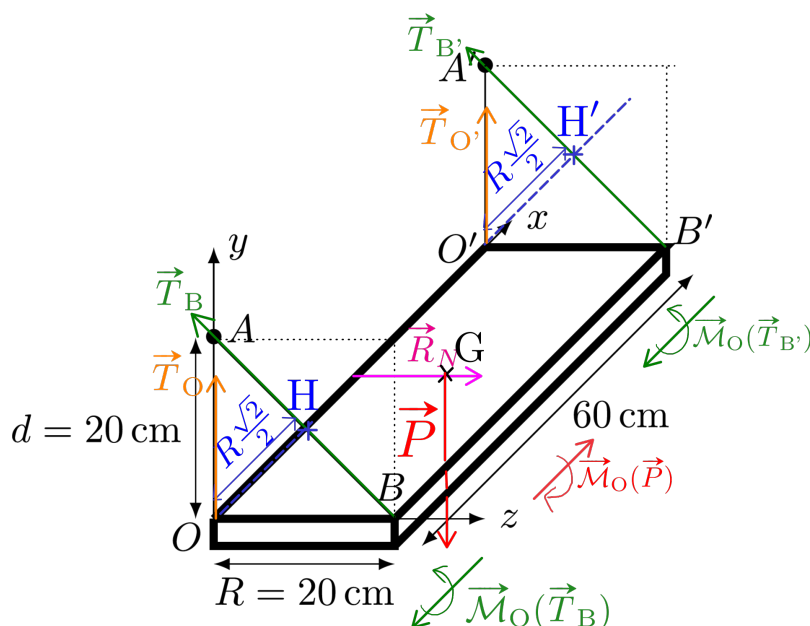
$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2} m_1 v_1^2 = \frac{1}{2} m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2} m_2 v_2'^2 \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$$

b – Si $m_2 \gg m_1$, alors $v_1' \rightarrow -v_1$ et $v_2' \rightarrow 0$. La masse m_1 rebondit sur la masse m_2 , qui elle reste immobile. C'est la situation du lancer d'une balle rebondissante sur un mur.

c – Pour faire un carreau, on veut $v_1' = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$, et on aura bien $v_2' = v_1$.

VI Étagère murale

1) On fait un schéma :



◇ **BdF :**

▷ En B et B', les tensions des câbles obliques sont portées par les vecteurs \overrightarrow{BA} et $\overrightarrow{B'A'}$. Elles ont la même norme T_1 par symétrie, et on peut déduire les angles $\widehat{OBA} = 45^\circ = \widehat{O'B'A'}$ puisque les triangles sont isocèles et rectangles. Ainsi, avec $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45^\circ)$, on trouve

$$\vec{T}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 (\vec{u}_y - \vec{u}_z) = \vec{T}_{B'}$$

▷ En O et O', les tensions sont égales et verticales, soit

$$\vec{T}_O = T_2 \vec{u}_y = \vec{T}_{O'}$$

▷ De plus, la réaction du mur est $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$.

▷ Enfin, le poids s'exprime $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$

◇ **BdM** :

▷ le moment des tensions en B et B' se trouvent par le bras de levier. Avec H le projeté orthogonal de O sur AB, on trouve $OH = R\frac{\sqrt{2}}{2}$ (OBA triangle rectangle isocèle, OH moitié de la diagonale et diagonale d'un carré de côté $a = a\sqrt{2}$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) &= 2 \times \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B) = \underbrace{-2 OH}_{\text{sens direct}} \|\vec{T}_B\| \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = -2 \underbrace{R \frac{\sqrt{2}}{2}}_{OH} \underbrace{T_1}_{\|\vec{T}_B\|} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = -RT_1\sqrt{2}} \end{aligned}$$

▷ Les moments des tensions \vec{T}_O et $\vec{T}_{O'}$, ainsi que la réaction du support \vec{R}_N sont tous nuls, puisque leurs droites d'actions passent par l'axe Δ .
 ▷ Finalement, à l'équilibre la droite d'action du poids est à une distance $R/2$ de l'axe de rotation, et comme le poids fait tourner l'étagère dans le sens horaire, on a

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2}$$

◇ **PFD** : à l'équilibre, la somme des forces est nulle, soit

$$\begin{cases} T_1\sqrt{2} + 2T_2 = mg & \text{sur } \vec{u}_y \\ T_1\sqrt{2} = R_N & \text{sur } \vec{u}_z \end{cases}$$

◇ **TMC** : à l'équilibre, il n'y a pas de rotation donc la somme des moments est nulle :

$$RT_1\sqrt{2} = \frac{mgR}{2}$$

◇ **Ccl** : on trouve

$$\boxed{T_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{T_1 = 3,5 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{R_N = \frac{mg}{2}} \Rightarrow \underline{R_N = 4,9 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{T_2 = \frac{mg}{4}} \Rightarrow \underline{T_2 = 2,5 \text{ N}}$$

2) On reconnaît l'énergie cinétique dans la partie gauche de l'équation proposée. Il serait donc logique de partir du TEC. On sait que la puissance d'une force de rotation est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\omega$, donc le travail élémentaire associé est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})d\theta$. Or, les tensions en B et B' n'existent plus et les moments des tensions en O et de la réaction normale sont toujours nuls : il ne reste que le moment du poids.

Or, avec un angle θ , le bras de levier diminue et on trouve $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_c &= W(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 &= \int_0^\theta \frac{mgR}{2} \cos(\theta) d\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{c,\text{rot}} = \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta) \\ \int_0^\theta \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^\theta \\ \sin(0) = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 &= \frac{mgR}{2} \sin(\theta) \\ \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

Quand l'étagère touche le mur, $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\boxed{\dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{3g}{R}}} \Leftrightarrow \underline{\dot{\theta}_f = 12 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

VII Entraînement par frottements

- 1) Il n'y a plus de frottements si les deux disques vont à la même vitesse angulaire. Or, le moment cinétique **total** se conserve puisque $\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = 0$ (forces passent par l'axe de rotation) et les liaisons pivot sont supposées parfaites ; ainsi $\frac{d\mathcal{L}_z(\mathcal{S})}{dt} = 0$ soit $\boxed{\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = \text{cte}}$.

En prenant une situation avant contact et à la fin du contact, on obtient

$$\begin{aligned} 0 + J_2\omega_0 &= J_1\omega_{1,f} + J_2\omega_{2,f} \\ \Leftrightarrow \boxed{\omega_f = \frac{J_2}{J_1 + J_2}\omega_0} &\quad \left. \vphantom{\omega_f = \frac{J_2}{J_1 + J_2}\omega_0} \right\} \omega_{1,f} = \omega_{2,f} = \omega_f \end{aligned}$$

Ce résultat ne dépend aucunement du type de frottements ; seule la durée du régime transitoire est impactée par l'expression des frottements.

- 2) Avec l'énergie potentielle de pesanteur prise à 0, on a :

- 1) $\Delta\mathcal{E}_{m,1} = \Delta\mathcal{E}_{c,1} = \frac{1}{2}J_1\omega_f^2 - 0$ soit

$$\boxed{\Delta\mathcal{E}_{m,1} = \frac{1}{2}J_1 \left(\frac{J_2}{J_1 + J_2} \right)^2 \omega_0^2 > 0}$$

Le disque 1 gagne donc de l'énergie cinétique grâce aux frottements avec le second disque.

- 2) Pour le second,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_{m,2} &= \Delta\mathcal{E}_{c,2} = \frac{1}{2}J_2\omega_f^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_0^2 \\ \text{Soit } \boxed{\Delta\mathcal{E}_{m,2} = \frac{1}{2}J_2 \left(\left(\frac{J_2}{J_1 + J_2} \right)^2 - 1 \right) \omega_0^2 < 0} \end{aligned}$$

Évidemment, le second **perd** de l'énergie : il l'a cédée au premier et perdu une partie par frottements.

- 3) On somme les résultats précédents :

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_m &= \Delta\mathcal{E}_{m,1} + \Delta\mathcal{E}_{m,2} \\ &= \frac{1}{2}(J_1 + J_2) \frac{J_2^2}{(J_1 + J_2)^2} \omega_0^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_0^2 \\ \Leftrightarrow \Delta\mathcal{E}_m &= -\frac{1}{2} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \omega_0^2 < 0 \end{aligned}$$

- 4) À cause des frottements, l'énergie mécanique totale diminue. En revanche, l'énergie mécanique d'un sous-système peut augmenter ou diminuer.

VIII Expérience de CAVENDISH

- 1) Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.

- a – Soit $\Delta = (Oz)$ l'axe vertical ascendant. Chacune des deux sphères étant en mouvement de rotation de rayon $\ell/2$ autour de Δ à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la masse de la tige étant négligée, le moment cinétique total de l'ensemble {tige+deux sphères} par rapport à Δ est $\mathcal{L}_\Delta = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}$.

Ce système est soumis à l'action de son poids et de la tension du fil, dont les moments par rapport à Δ sont nuls, et au couple de torsion $\vec{\Gamma} = -C\theta \vec{u}_z$.

L'application du TMC scalaire conduit donc à

$$\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2}\theta = 0}$$

C'est bien un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.

b –

$$\boxed{C = \frac{2\pi^2 m\ell^2}{T_0^2}} \Rightarrow \underline{C = 2,6 \times 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}}$$

- 2) On se place dans le système de coordonnées polaires, de base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ pour chacune des deux sphères, et on estime que la distance entre une des sphères et la boule correspondante est

$$r - \frac{\ell}{2} \sin(\theta) \approx r - \frac{\ell}{2} \theta$$

On néglige aussi l'action de la boule la plus éloignée. On suppose de plus que la force de gravitation exercée par la boule sur la sphère est portée par \vec{u}_θ , et on utilise le développement limité $(1 - x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + 2x$:

$$\vec{F}_g = \mathcal{G} \frac{mM}{(r - \frac{\ell}{2}\theta)^2} \vec{u}_\theta \approx \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right) \vec{u}_\theta$$

Le moment de cette force par rapport à Δ est ainsi, avec d du bras de levier égal à $\ell/2$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_g) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{2r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

On en déduit que le moment total des deux forces gravitationnelles est le double de ce moment unique :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{g,\text{tot}}) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

Ainsi, avec le TMC :

$$\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{\text{eq}} = \frac{\mathcal{G}mM\ell r}{Cr^3 - \mathcal{G}mM\ell_2}} \quad \left. \vphantom{\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)} \right\} \text{Équilibre}$$

3)

$$\underline{\theta_{\text{eq}} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

Ainsi, CAVENDISH avait donc développé une méthode de mesure d'angle avec une précision inférieure au milliradian !

Pour une vidéo sur le sujet, voir notamment celle de Steve MOULD : https://youtu.be/70-_GBymrck?si=6iBDUeYnSixdLS3c