

Circuits du 1^{er} ordre

Sommaire

I Circuit RC	3
I/A Circuit RC série : charge	3
I/B Circuit RC série : décharge	8
I/C Méthode pour les circuits à plusieurs mailles	10
II Bobine et circuit RL	11
II/A Circuit RL série : échelon montant	11
II/B Circuit RL série : décharge	14

Capacités exigibles

- | | |
|---|--|
| <input type="checkbox"/> Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension. | <input type="checkbox"/> Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles. |
| <input type="checkbox"/> Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine. | <input type="checkbox"/> Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension |
| <input type="checkbox"/> Réaliser un bilan énergétique. | <input type="checkbox"/> Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire. |

✓ L'essentiel

☰ Définitions

<input type="checkbox"/> E3.1 : Échelon de tension	3
<input type="checkbox"/> E3.2 : Circuit RC en charge	3
<input type="checkbox"/> E3.3 : Temps de réponse	5
<input type="checkbox"/> E3.4 : Circuit RC en décharge	8
<input type="checkbox"/> E3.5 : Circuit RC en charge	11
<input type="checkbox"/> E3.6 : Circuit RL descendant	14

⚡ Propriétés

<input type="checkbox"/> E3.1 : Équa. diff. RC montant	3
<input type="checkbox"/> E3.2 : Tension RC montant	5
<input type="checkbox"/> E3.3 : Temps de réponse RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.4 : Intensité RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.5 : Bilan de puissances RC montant	7
<input type="checkbox"/> E3.6 : Bilan d'énergie RC montant	8
<input type="checkbox"/> E3.7 : Équa. diff. RC descendant	8
<input type="checkbox"/> E3.8 : Tension RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.9 : Temps de réponse RC descendant	10
<input type="checkbox"/> E3.10 : Intensité RC décharge	10
<input type="checkbox"/> E3.11 : Équa. diff. RL montant	11
<input type="checkbox"/> E3.12 : Intensité RL montant	12
<input type="checkbox"/> E3.13 : Temps de réponse RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.14 : Tension RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.15 : Bilan de puissances RL montant	14
<input type="checkbox"/> E3.16 : Équa. diff. RL descendant	14
<input type="checkbox"/> E3.17 : Intensité RL descendant	15
<input type="checkbox"/> E3.18 : Temps de réponse RL descendant	16
<input type="checkbox"/> E3.19 : Tension RL descendant	16

» Implications

<input type="checkbox"/> E3.1 : Détermination τ RC montant	5
<input type="checkbox"/> E3.2 : Détermination τ RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.3 : Détermination τ RL montant	12
<input type="checkbox"/> E3.4 : Détermination τ RL descendant	15

☰ Démonstrations

<input type="checkbox"/> E3.1 : Équa. diff. RC montant	3
<input type="checkbox"/> E3.2 : Tension RC série montant	4
<input type="checkbox"/> E3.3 : Temps de réponse RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.4 : Intensité RC montant	6
<input type="checkbox"/> E3.5 : Bilan de puissances RC montant	7
<input type="checkbox"/> E3.6 : Bilan d'énergie RC montant	7
<input type="checkbox"/> E3.7 : Équa. diff. RC descendant	8
<input type="checkbox"/> E3.8 : Tension RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.9 : Temps de réponse RC descendant	9
<input type="checkbox"/> E3.10 : Intensité RC décharge	10
<input type="checkbox"/> E3.11 : Équa. diff. RL montant	11
<input type="checkbox"/> E3.12 : Intensité RL série montant	11
<input type="checkbox"/> E3.13 : Tension RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.14 : Bilan de puissances RL montant	13
<input type="checkbox"/> E3.15 : Équa. diff. RL descendant	15
<input type="checkbox"/> E3.16 : Intensité RL descendant	15
<input type="checkbox"/> E3.17 : Tension RL descendant	16

♥ Points importants

<input type="checkbox"/> E3.1 : Résolution equa. diff. ordre 1	4
<input type="checkbox"/> E3.2 : Bilan de puissance en élec.	7
<input type="checkbox"/> E3.3 : Méthode avec plusieurs mailles	10

⚠ Erreurs communes

<input type="checkbox"/> E3.1 : Conditions initiales	10
<input type="checkbox"/> E3.2 : Bilan d'énergie RL charge	14

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

I Circuit RC

I/A Circuit RC série : charge

Définition E3.1 : Échelon de tension

Un échelon de tension est montant s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t < 0) = 0 \\ u(t \geq 0) = E \end{cases}$$

et descendant si E avant et 0 après.

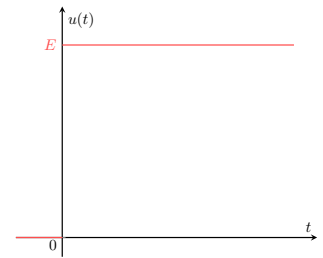


FIGURE 3.1

I/A) 1 Présentation

♥ Définition E3.2 : Circuit RC en charge

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- ◇ **On suppose le condensateur initialement déchargé.**
- ◇ À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

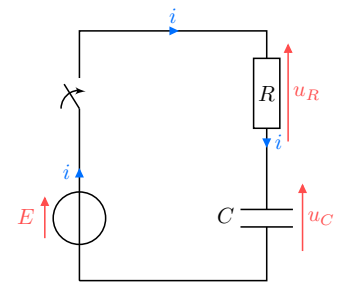


FIGURE 3.2

I/A) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= E \\ \Leftrightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= E \quad \left. \begin{array}{l} u_R = Ri \\ \text{et } i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C &= \frac{E}{RC} \end{aligned}$$

♥ Propriété E3.1 : Équation différentielle RC échelon montant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$$

Application E3.1 : Dimension de RC

Montrer, par analyse dimensionnelle, que RC est homogène à un temps.

Méthode 1

On a $[RC] = \Omega \cdot F$. Or,

$$\begin{aligned} [q] = [Cu] &\Leftrightarrow C = F \cdot V \\ &\Leftrightarrow F = C \cdot V^{-1} \\ &\Leftrightarrow F = A \cdot s \cdot V^{-1} \end{aligned}$$

de plus, $[u] = [Ri] \Leftrightarrow V = \Omega \cdot A$ ■
 $\Leftrightarrow \Omega = V \cdot A^{-1}$

Ainsi, $[RC] = \Omega \cdot F$
 $\Leftrightarrow [RC] = V \cdot A^{-1} \cdot A \cdot s \cdot V^{-1}$
 $\Leftrightarrow [RC] = s$ ■

Méthode 2

Une équation physique étant homogène, comme

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

alors

$$\left[\frac{du_C}{dt} \right] = \left[\frac{u_C}{RC} \right]$$

$$\Leftrightarrow \frac{[u_C]}{[t]} = \frac{[u_C]}{[RC]}$$

$$\Leftrightarrow [RC] = [t] \quad \blacksquare$$

I/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Important E3.1 : Résolution équation différentielle coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant, de la forme $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau}y = k$:

- 1 On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
- 2 On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.
- 3 On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y_p(t) = \lambda$.
- 4 On écrit la **solution générale**, somme de la solution particulière et de la forme générale.
- 5 On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

♥ Démonstration E3.2 : Tension RC série montant

- 1 L'équation homogène est :

$$\frac{du_{C,h}}{dt} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0$$

- 2 La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$u_{C,h}(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- 3 Une solution particulière avec $u_{C,p}(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Donc $u_{C,p}(t) = E$ est **une** solution de l'équation différentielle.

4 La solution générale est donc

$$u_C(t) = E + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

5 Les conditions initiales donnent ici

$$u_C(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad u_C(0) = K + E \Rightarrow K = -E$$

♥ Propriété E3.2 : Tension RC montant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumis à un échelon de tension E avec $u_C(0) = 0$ est

$$u_C(t) = E \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

et $u_C(t)$ est continue.

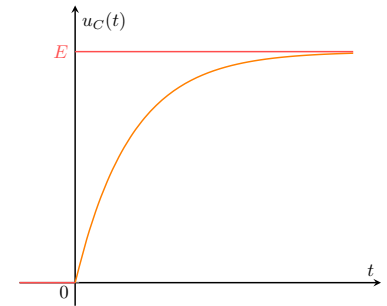


FIGURE 3.3

I/A) 4 Constante de temps, régime transitoire

Quand $t \rightarrow +\infty$, $u_C(t) = E$. On est alors en **régime permanent** : $u_C(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps.

♥ Implication E3.1 : Détermination τ RC montant

1) $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,632 \times E$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $u_C(\tau) = 0,632 \times E$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{du_C}{dt}(0) + \underbrace{\frac{u_C(0)}{\tau}}_{=0} = \frac{E}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow y'_0(t) = \frac{E}{\tau} \Rightarrow \boxed{y_0(t) = E \frac{t}{\tau}}$$

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $\boxed{t = \tau}$.

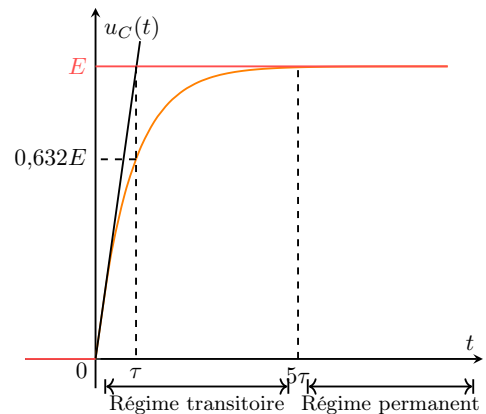


FIGURE 3.4

♥ Définition E3.3 : Temps de réponse

Le **temps de réponse** d'un circuit d'ordre 1 est le temps à partir duquel on peut considérer la consigne de tension ou de courant atteinte, c'est-à-dire qu'on est en **régime permanent**.

Pour cela, on se fixe un **seuil arbitraire** à partir duquel on considère le régime permanent atteint.

♥ Démonstration E3.3 : Temps de réponse RC montant

Dans ce cours, on prendra 99%. On cherche donc t_{99} tel que $u(t_{99}) = 0,99E$:

$$\begin{aligned}
 u_C(t_{99}) &= 0,99E \\
 \Leftrightarrow E \left(1 - \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) \right) &= 0,99E && \text{solution de } u_C \\
 \Leftrightarrow 1 - \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0,99 && \div E \\
 \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0,01 && \text{on isole l'exp} \\
 \Leftrightarrow -\frac{t_{99}}{\tau} &= \ln(0,01) = -\ln(100) && \ln(\cdot) \\
 \Leftrightarrow t_{99} &= \tau \ln(100) && \text{on isole } t_{99}
 \end{aligned}$$

♥ Propriété E3.3 : Temps de réponse RC montant

Ainsi,

le temps de réponse à 99% est à $4,6\tau$

I/A) 5 Évolution de l'intensité

Qu'advient-il de l'intensité dans un circuit RC ? On peut le déterminer de deux manières :

♥ Démonstration E3.4 : Intensité RC montant

Caractéristique de C

$$\begin{aligned}
 i(t) &= C \frac{du_C}{dt} \quad \text{avec} \quad u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \\
 \Rightarrow i(t) &= CE \left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right) \\
 \Leftrightarrow i(t) &= \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \tau = RC \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

Loi des mailles

$$\begin{aligned}
 Ri &= E - u_C \quad \text{avec} \quad u_C(t) = E(1 - e^{-t/\tau}) \\
 \Leftrightarrow Ri(t) &= E - E + E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
 \Leftrightarrow i(t) &= \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \left. \begin{array}{l} \div R \end{array} \right\}
 \end{aligned}$$

♥ Propriété E3.4 : Intensité RC montant

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et est discontinue.

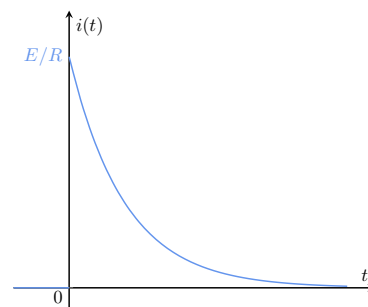


FIGURE 3.5

I/A) 6 Bilan de puissance

En électrocinétique, les puissances sont le produit d'une tension et d'une intensité. Or, par construction la loi des mailles est une relation entre les tensions du circuit ; ainsi

♥ Important E3.2 : Bilan de puissance en élec.

On effectue un bilan de puissance en écrivant la loi des mailles multipliée par i .

♥ Démonstration E3.5 : Bilan de puissances RC montant

$$\begin{aligned}
 u_C + Ri &= E \\
 \Leftrightarrow u_C i + Ri^2 &= Ei \quad \left(\begin{array}{l} \text{RCT pour C : } i = C \frac{du_C}{dt} \\ f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)' \end{array} \right) \\
 \Leftrightarrow u_C C \frac{du_C}{dt} + Ri^2 &= Ei \\
 \Leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right)}_{\frac{d\mathcal{E}_C}{dt}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} &= \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G}
 \end{aligned}$$

♥ Propriété E3.5 : Bilan de puissances RC montant

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J$$

$\mathcal{P}_G = Ei$: la puissance fournie par le générateur ;

$\mathcal{P}_C = \frac{d\mathcal{E}_C}{dt}$: la puissance reçue par le condensateur ;

$\mathcal{P}_J = Ri^2$: la puissance dissipée par effet JOULE dans la résistance.

I/A) 7 Bilan d'énergie

On peut étudier énergétiquement cette évolution en intégrant la puissance délivrée sur le temps d'utilisation.

♥ Démonstration E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

L'énergie fournie par le générateur sur toute la charge est

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_G &= \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_G dt \\
 &= \int_0^{+\infty} Ei(t) dt \quad \left(\begin{array}{l} \mathcal{P}_G = Ei \\ i(t) = E/Re^{-t/\tau} \end{array} \right) \\
 &= \frac{E^2}{R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{+\infty} \\
 &= \frac{E^2}{R} \left(\underbrace{-\tau \exp\left(-\frac{\infty}{\tau}\right)}_{=0} - \underbrace{\left(-\tau \exp(0)\right)}_{=1} \right) \\
 \Leftrightarrow \mathcal{E}_G &= \tau \frac{E^2}{R} \\
 \Leftrightarrow \mathcal{E}_G &= CE^2 \quad \left(\tau = RC \right)
 \end{aligned}$$

Or, l'énergie stockée dans le condensateur (Pt.E2.13) est

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 \quad \text{donc} \quad \mathcal{E}_J = \frac{1}{2}CE^2$$

♥ Propriété E3.6 : Bilan d'énergie RC montant

Pendant la totalité de la charge, l'énergie du générateur est

$$\mathcal{E}_G = CE^2$$

Elle se répartit équitablement entre le condensateur et la résistance :

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}CE^2 = \mathcal{E}_J$$

I/B Circuit RC série : décharge

I/B) 1 Présentation

♥ Définition E3.4 : Circuit RC en décharge

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- ◇ On suppose le condensateur initialement chargé : $u_C(0^-) = E$.
- ◇ À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

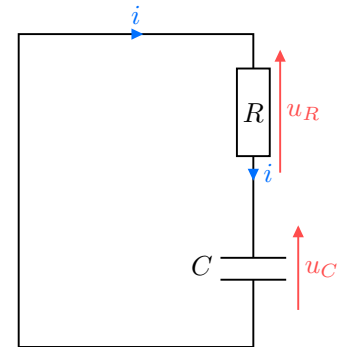


FIGURE 3.6

I/B) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Propriété E3.7 : Équation différentielle RC échelon descendant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC en décharge

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau}u_C = 0 \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = E$$

♥ Démonstration E3.7 : Équation différentielle RC échelon descendant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} u_R = Ri \\ \text{et } i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC}u_C &= 0 \end{aligned}$$

I/B) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Propriété E3.8 : Tension RC descendant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC en décharge avec $u_C(0) = E$ est **continue**, et :

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

♥ Démonstration E3.8 : Tension RC descendant

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale :

$$u_C(0) = E \quad \text{et} \quad u_C(0) = K \Rightarrow K = E$$

I/B) 4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

Implication E3.2 : Détermination τ RC descendant

1) $u_C(\tau) = Ee^{-1} \approx 0,368 \times E$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $u_C(\tau) = 0,368 \times E$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt}(0) + \frac{\overbrace{u_C(0)}^{=E}}{RC} &= 0 \\ \Leftrightarrow y'_0(t) = -\frac{E}{\tau} &\Rightarrow y_0(t) = -E\frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

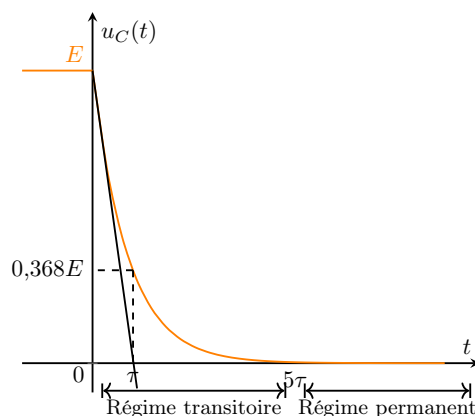


FIGURE 3.7

♥ Démonstration E3.9 : Temps de réponse RC descendant

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0,01E$:

$$\begin{aligned} u_C(t_{99}) &= 0,01E \\ \Leftrightarrow E \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0,01E \\ \Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0,01 \\ \Leftrightarrow -\frac{t_{99}}{\tau} &= \ln(0,01) = -\ln(100) \\ \Leftrightarrow t_{99} &= \tau \ln(100) \end{aligned}$$

solution de u_C
 $\div E$
 $\ln(\)$
 on isole t_{99}

♥ Propriété E3.9 : Temps de réponse RC descendant

Ainsi,

le temps de réponse à 99% est à $4,6\tau$

I/B) 5 Évolution de l'intensité

♥ Démonstration E3.10 : Intensité RC décharge

Caractéristique de C

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{avec} \quad u_C(t) = E e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow i(t) = -\frac{CE}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Leftrightarrow i(t) = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \tau = RC$$

Loi des mailles

$$Ri = -u_C$$

$$\Leftrightarrow Ri(t) = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad u_C(t) = E e^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow i(t) = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

♥ Propriété E3.10 : Intensité RC décharge

L'intensité dans un circuit RC en décharge s'exprime par

$$i(t) = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et est discontinue.

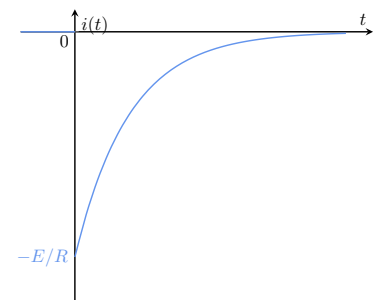


FIGURE 3.8

♥ Attention E3.1 : Conditions initiales

Attention, lorsqu'on étudie un circuit charge-décharge, il faut **étudier les conditions initiales** en $t \neq 0$.

I/C Méthode pour les circuits à plusieurs mailles

♥ Important E3.3 : Méthode avec plusieurs mailles

- 1 Écrire les différentes lois du circuit (LdN, LdM, LdΩ, RCT...);
- 2 Écrire les lois des mailles;
- 3 Isoler la grandeur dont on veut l'équation différentielle en éliminant les autres;
- 4 Mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{df}{dt} + \frac{f}{\tau} = \frac{F}{\tau}$$

et identifier F et τ ;

- 5 Établir les conditions initiales avec l'énoncé et la continuité de la tension pour C ;
- 6 Résoudre l'équation différentielle.

II Bobine et circuit RL

II/A Circuit RL série : échelon montant

II/A) 1 Présentation

♥ Définition E3.5 : Circuit RC en charge

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéals.
- ◇ On suppose l'interrupteur initialement ouvert.
- ◇ À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

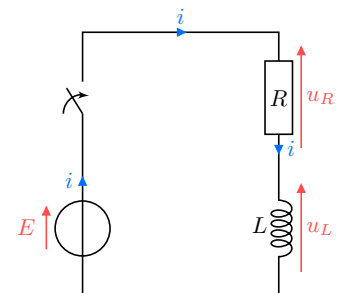


FIGURE 3.9

II/A) 2 Équation différentielle du circuit

Démonstration E3.11 : Équation différentielle RL échelon montant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned}
 u_L + u_R &= E \\
 \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri &= E \quad \left. \begin{array}{l} u_R = Ri \\ \text{et } u_L = L \frac{di}{dt} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L} i &= \frac{E}{L}
 \end{aligned}$$

♥ Propriété E3.11 : Équation différentielle RL échelon montant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'une bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau} i = \frac{1}{\tau} \frac{E}{R} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{L}{R}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

II/A) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Démonstration E3.12 : Intensité RL série montant

- 1 L'équation homogène est :

$$\frac{di_h}{dt} + \frac{1}{\tau} i_h = 0$$

- 2 La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$i_h(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- 3 Une solution particulière avec $i_p(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{1}{\tau} \frac{E}{R}$$

Donc $i_p(t) = \frac{E}{R}$ est **une** solution de l'équation différentielle.

- 4 La solution générale est donc

$$i(t) = \frac{E}{R} + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

- 5 Les conditions initiales donnent ici

$$i(t=0) = 0 \quad \text{et} \quad i(0) = K + \frac{E}{R} \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$$

♥ Propriété E3.12 : Intensité RL montant

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(0) = 0$ est

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$$

et $i(t)$ est continue.

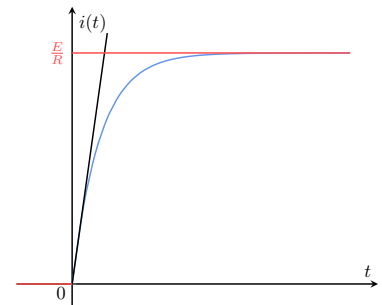


FIGURE 3.10

II/A) 4 Constante de temps, régime transitoire

♥ Implication E3.3 : Détermination τ RL montant

1) $i(\tau) = \frac{E}{R} (1 - e^{-1}) \approx 0,632 \times E/R$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $i_C(\tau) = 0,632 \times E/R$.

- 2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt}(0) + \underbrace{\frac{i(0)}{\tau}}_{=0} &= \frac{1}{\tau} \frac{E}{R} \\ \Leftrightarrow y'_0(t) &= \frac{E}{R\tau} \Rightarrow y_0(t) = \frac{E}{R} \frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

La tangente à la courbe en 0 coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

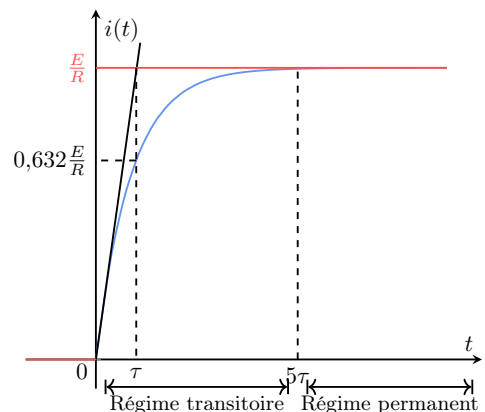


FIGURE 3.11

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0,99 \frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4,6\tau$.

Propriété E3.13 : Temps de réponse RL montant

Ainsi,

le temps de réponse à 99% est à $4,6\tau$

II/A) 5 Évolution de la tension

♥ Démonstration E3.13 : Tension RL montant

Caractéristique de L

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Rightarrow u_L(t) = \frac{LE}{R} \left(0 - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \left. \vphantom{\frac{LE}{R}} \right\} \tau = \frac{L}{R}$$

Loi des mailles

$$u_L = E - Ri \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = E - R \frac{E}{R}(1 - e^{-t/\tau})$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

♥ Propriété E3.14 : Tension RL montant

La tension dans un circuit RL en charge s'exprime par

$$u_L(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et est discontinue.

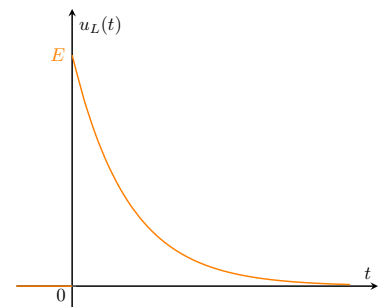


FIGURE 3.12

II/A) 6 Bilan de puissance

♥ Démonstration E3.14 : Bilan de puissances RL montant

$$u_L + Ri = E \quad \text{⊗ } i$$

$$\Leftrightarrow u_L i + Ri^2 = Ei$$

$$\Leftrightarrow i L \frac{di}{dt} + Ri^2 = Ei \quad \left. \vphantom{\frac{di}{dt}} \right\} \begin{array}{l} \text{RCT pour L : } u_L = L \frac{di}{dt} \\ f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)' \end{array}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{\frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right)}_{\frac{d\varepsilon_L}{dt}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} = \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G}$$

♥ Propriété E3.15 : Bilan de puissances RL montant

Dans un circuit RL en charge, on a le bilan de puissances

$$\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_J$$

$\mathcal{P}_G = Ei$: la puissance fournie par le générateur ;

$\mathcal{P}_L = \frac{d\mathcal{E}_L}{dt}$: la puissance reçue par la bobine ;

$\mathcal{P}_J = Ri^2$: la puissance dissipée par effet JOULE dans la résistance.

♥ Attention E3.2 : Bilan d'énergie RL charge

Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe Ri^2 . On ne peut intégrer à l'infini.

II/B Circuit RL série : décharge

II/B) 1 Présentation

♥ Définition E3.6 : Circuit RL descendant

- ◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale.
- ◇ On suppose le courant initialement établi : $i(0^-) = \frac{E}{R}$.
- ◇ À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

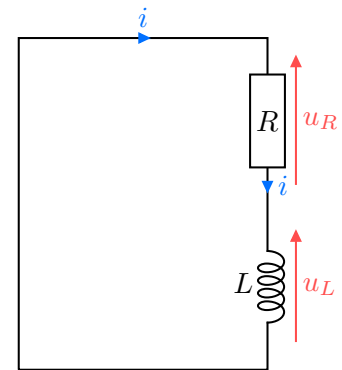


FIGURE 3.13

II/B) 2 Équation différentielle du circuit

♥ Propriété E3.16 : Équation différentielle RL échelon descendant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RL en décharge

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0$$

avec

$$\tau = \frac{L}{R}$$

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{R}$$

♥ Démonstration E3.15 : Équation différentielle RL échelon descendant

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_R + u_L &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri &= 0 \end{aligned} \left. \begin{array}{l} u_R = Ri \\ \text{et } u_L = L \frac{di}{dt} \end{array} \right\} \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = 0$$

II/B) 3 Résolution de l'équation différentielle

♥ Propriété E3.17 : Intensité RL descendant

L'intensité $i(t)$ d'un circuit RL en décharge avec $i(0) = \frac{E}{R}$ est **continue**, et :

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

♥ Démonstration E3.16 : Intensité RL descendant

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$i(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale :

$$i(0) = \frac{E}{R} \quad \text{et} \quad i(0) = K \Rightarrow K = \frac{E}{R}$$

II/B) 4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

♥ Implication E3.4 : Détermination τ RL descendant

1) $i(\tau) = \frac{E}{R} e^{-1} \approx 0,368 \times \frac{E}{R}$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $i(\tau) = 0,368 \times \frac{E}{R}$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\begin{aligned} \frac{di}{dt}(0) + \frac{\overbrace{i(0)}^{=E/R}}{\tau} &= 0 \\ \Leftrightarrow y'_0(t) = -\frac{E}{R} &\Rightarrow y_0(t) = -\frac{E}{R} \frac{t}{\tau} \end{aligned}$$

La tangente à la courbe en 0, coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

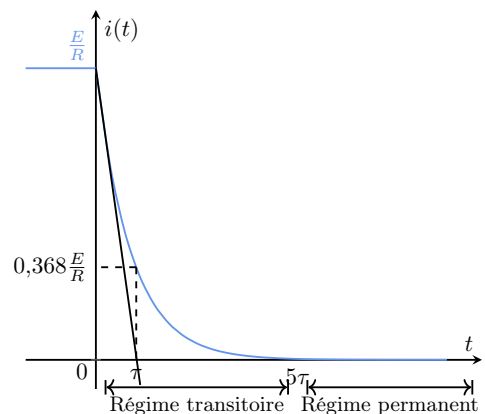


FIGURE 3.14

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0,01 \frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4,6\tau$.

♥ Propriété E3.18 : Temps de réponse RL descendant

Ainsi,

le temps de réponse à 99% est à $4,6\tau$

II/B) 5 Évolution de la tension

♥ Démonstration E3.17 : Tension RL descendant

Caractéristique de L

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt} \quad \text{avec} \quad i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = -\frac{LE}{R\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \quad \left. \vphantom{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \right\} \tau = L/R$$

Loi des mailles

$$u_L = -Ri$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = -R \frac{E}{R} e^{-t/\tau} \quad \left. \vphantom{\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)} \right\} i(t) = \frac{E}{R} e^{-t/\tau}$$

$$\Leftrightarrow u_L(t) = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

♥ Propriété E3.19 : Tension RL descendant

La tension dans un circuit RL en décharge s'exprime par

$$u_L(t) = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et est discontinue.

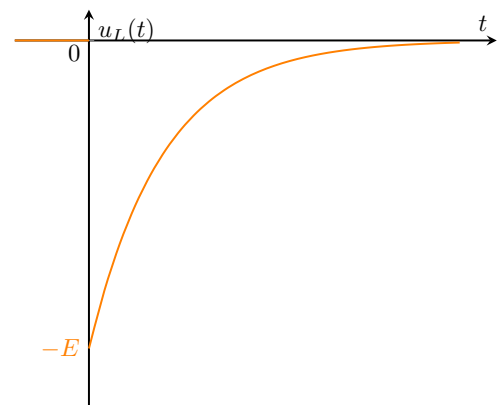


FIGURE 3.15