Correction TD M8 - Introduction à la mécanique des systèmes

1 Levier

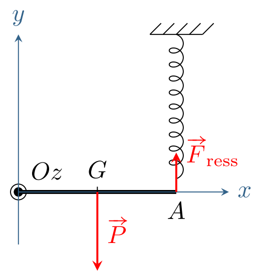
2 Pendule pesant non amorti

3 Oscillations d'un glaçon dans un verre

4 Chute d'un arbre

5 Barre fixée à ses extrémités

Correction :



$\boxed{1}$ On étudie la barre, en mouvement par rapport au référentiel terrestre, considéré galiléen. Par hypothèse, dans la position d'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical, ce qui permet d'orienter les forces. Comme les forces sont perpendiculaires à la barre, utiliser le bras de levier donne immédiatement les résultats. Elle est soumise à son poids, exercé en G au centre de la barre, de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times a$$

et à la force de rappel exercée par le ressort, exercée en A, de moment

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) \times 2a\,.$$

Dans la position d'équilibre, on a alors

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) + \mathcal{M}_z(\text{ressort}) = 0 \qquad \text{soit} \qquad -mga + 2ak(\ell_{\text{éq}} - \ell_0) = 0 \qquad \text{d'où} \qquad \boxed{\ell_{\text{éq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}\,.}$$

théorème du moment cinétique. Utilisons toujours le bras de levier pour déterminer les moments. Le moment du poids vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{poids}) = -mg \times OB_{\vec{P}} = -mga\cos\theta \simeq -mga$$

car $\theta \ll 1$. Le moment de la force exercée par le ressort vaut

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +k(\ell - \ell_0) \times OB_{\vec{F}} = +k(\ell_{\text{éq}} - 2a\sin\theta - \ell_0) \times 2a\cos\theta \simeq +2ka(\ell_{\text{éq}} - 2a\theta - \ell_0)$$

En remplaçant $\ell_{\text{éq}}$ par son expression,

$$\mathcal{M}_z(\text{ressort}) = +2ka\left(\ell_0 + \frac{mg}{2k} - 2a\theta - \ell_0\right) = mga - 4ka^2\theta$$

Ainsi, d'après la loi du moment cinétique,

$$I_z\ddot{\theta} = -mga + mga - 4ka^2\theta \qquad \text{donc} \qquad \ddot{\theta} + \frac{4ka^2}{I_z}\theta = 0 \qquad \text{et} \qquad \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta = 0$$

On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{3k/m}$, d'où on déduit la période propre

$$\boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{3k}}\,.}$$

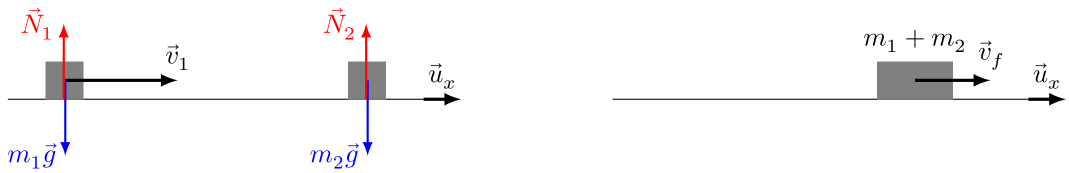
6 Choc de deux chariots

Correction :

- Système : 2 chariots (chacun est considérer comme un point matériel)

- Actions extérieures : poids ($m_1\vec{g}$ et $m_2\vec{g}$) et réactions sans frottements du support ($\vec{N}_1$ et $\vec{N}_2$), *aucune n'est selon $\vec{u}_x$!*

1. Le système est pseudo-isolé ($\sum \vec{f}_{\text{ext}} = m_1\vec{g} + m_2\vec{g} + \vec{N}_1 + \vec{N}_2 = \vec{0}$)



   a. Donc la quantité de mouvement du système $\vec{p}$ est conservé au cours du choc :

$$m_1\vec{v}_1 + m_2\vec{v}_2 = (m_1 + m_2)\vec{v}_f \quad \Rightarrow \quad \boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \vec{u}_x}$$

   b. Théorème de l'énergie cinétique au cours du choc :

$$\Delta E_c^{\text{choc}} = W^{\text{int}} + \overbrace{W^{\text{ext}}}^{=0 \text{ car } \perp \vec{v}} \quad \Rightarrow \quad W^{\text{int}} = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = -\frac{m_1 m_2}{2(m_1 + m_2)}v_1^2 < 0$$

   $W^{\text{int}} < 0$ est cohérent avec le fait que le système perd de l'énergie cinétique qui est transformée en énergie thermique lors du choc.

2. le système reste pseudo-isolé

   a. la quantité de mouvement $\vec{p}$ et l'énergie cinétique sont conservées au cours du chocs :

$$\begin{cases} m_1 v_1 = m_1 v_1' + m_2 v_2' \\ \frac{1}{2}m_1 v_1^2 = \frac{1}{2}m_1 v_1'^2 + \frac{1}{2}m_2 v_2'^2 \end{cases} \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} v_1' = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2} v_1 \\ v_2' = \frac{2m_1}{m_1 + m_2} v_1 \end{cases}$$

   b. si $m_2 \gg m_1$ alors $v_1' \simeq -v_1$ et $v_2' \simeq 0$. La masse m_1 rebondit sur la masse m_2 qui elle reste immobile.
   c. Pour faire un carreau, on doit avoir $v_1' = 0$ donc $m_1 = m_2$ et ainsi $v_2' = v_1$.

7 Étagère murale

Correction :

1. Faisons le recensement des forces s'exerçant sur l'étagère : en B et B', les tensions des câbles obliques sont portées par les vecteurs $\overrightarrow{BA}$ et $\overrightarrow{B'A'}$, elles ont la même norme T_1 par symétrie, et on peut les écrire $\vec{T}_B = \frac{\sqrt{2}}{2}T_1(\vec{u}_y - \vec{u}_z) = \vec{T}_{B'}$.
   Leur moment résultant par rapport à (Δ) est $\mathscr{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}'_B) = -R\sqrt{2}T_1$.
   En O et O', les tensions des câbles verticaux, égales par symétrie, s'écrivent $\vec{T}_O = T_2\vec{u}_y = \vec{T}_{O'}$. Leurs moments par rapport à (Δ) sont nuls.
   La réaction du mur est $\vec{R}_N = R_N\vec{u}_z$, son moment par rapport à (Δ) est nul car son point d'application est au milieu de OO'. Le poids de la planche est $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$, son moment par rapport à (Δ) est $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2}$.
   À l'équilibre la somme de ces forces est nulle, soit $\sqrt{2}T_1 + 2T_2 = mg$ et $\sqrt{2}T_1 = R_N$.
   À l'équilibre, la somme des moments de ces forces par rapport à l'axe (Δ) est nulle, soit :
   $R\sqrt{2}T_1 = \frac{mgR}{2}$. On obtient ainsi $T_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}} = 3{,}5\,\mathrm{N}$, $R_N = \frac{mg}{2} = 4{,}9\,\mathrm{N}$, $T_2 = \frac{mg}{4} = 2{,}5\,\mathrm{N}$.

2. La planche n'est plus soumise qu'aux deux forces $\vec{T}_{O'} = \vec{T}_O$ verticales, à la réaction du mur et à son poids, elle est en rotation autour de (Δ). On note $\theta(t)$ l'angle que fait à l'instant t l'étagère avec l'axe horizontal $\vec{u}_z$.
Le théorème de l'énergie cinétique appliqué à l'étagère entre l'instant $t_0 = 0$ où l'étagère est immobile en position horizontale et un instant t quelconque s'écrit : $\Delta(E_c) = E_c(t) - E_c(t_0) = W(\vec{P})_{t_0 \to t}$ car les tensions et la réaction du mur ne travaillent pas dans le référentiel du laboratoire. En une position quelconque de l'étagère, le moment du poids par rapport à (Δ) est $\mathscr{M}_\Delta(\vec{P}) = \dfrac{mgR}{2}\cos(\theta)$ et l'énergie cinétique de l'étagère par rapport à (Δ) est $E_c = \dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2$. On en déduit, avec $\dot{\theta}(0) = 0$ et $\theta(0) = 0$:
$\dfrac{1}{2}J_\Delta\dot{\theta}^2 - 0 = \int_0^\theta \mathscr{M}_\Delta(\vec{P})\,\mathrm{d}\theta = \int_0^\theta \dfrac{mgR}{2}\cos(\theta)\,\mathrm{d}\theta = \dfrac{mgR}{2}[\sin(\theta) - \sin(0)]$. D'où $\dot{\theta}^2 = \dfrac{mgR}{J_\Delta}\sin(\theta)$.
Lorsque l'étagère touche le mur, $\theta = \pi/2$, et $\dot{\theta}_f = \sqrt{\dfrac{mgR}{J_\Delta}} = \sqrt{\dfrac{3g}{R}} = 12\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$.

8 Équilibrage statique

Correction :

3. a) On applique le théorème du moment cinétique scalaire au disque. Le pivot est parfait donc le moment scalaire de la liaison est nul. Celui du poids est aussi nul, vu que le poids est parallèle à Δ. Au final, le moment cinétique scalaire du système se conserve : $J_\Delta\,\omega = \text{cte}$, soit $\omega(t) = \omega_0$.

b) La loi de la quantité de mouvement appliquée au disque donne $m\,\vec{a}(C) = m\vec{g} + \vec{R}$. Comme

$$\overrightarrow{OC} = a\cos(\omega_0 t)\,\vec{u}_x + a\sin(\omega_0 t)\,\vec{u}_y,$$

on déduit :

$$\vec{R} = mg\,\vec{u}_z - m\,a\,\omega_0^2\left(\cos(\omega_0 t)\,\vec{u}_x + \sin(\omega_0 t)\,\vec{u}_y\right).$$

c) La réaction du support comporte une part opposée au poids, et une autre causée par le fait que le centre d'inertie n'est pas situé sur l'axe de rotation. Cette contribution peut devenir très importante aux vitesses angulaires élevées, et causer une usure des mécanismes. Si possible, il est recommandé de placer C sur l'axe pour que $a = 0$.

9 Entraînement par frottements

Correction :

2. a) Appelons ω_{1f} et ω_{2f} les vitesses angulaires finales. Le moment cinétique total projeté sur $\vec{u}_z$ se conserve car les axes des poids passent par l'axe de rotation, les actions de liaison étant parfaites, leur moment scalaire est aussi nul.

Par conservation du moment cinétique sur l'axe de rotation,

$$0 + J_2\,\omega_0 = J_1\,\omega_{1f} + J_2\,\omega_{2f}.$$

Le système atteint l'état final qui ne dissipe plus d'énergie, quand les deux disques ont la même vitesse angulaire. En effet, si les deux disques ont même vitesse angulaire, ils constituent désormais un solide et la puissance des frottements (qui constituent une action extérieure) est nulle :

$$\omega_{1f} = \omega_{2f} = \omega_f.$$

Ainsi, $\omega_f = \dfrac{J_2}{J_1 + J_2}\,\omega_0$.

Ce résultat est indépendant de la nature des frottements. Celle-ci influe en revanche sur la durée du régime transitoire.

b) Pour le premier solide,

$$\Delta E_{m1} = \Delta E_{c1} = \frac{1}{2}J_1\,\omega_f^2 - 0 = \frac{1}{2}J_1\left(\frac{J_2}{J_1 + J_2}\right)^2\omega_0^2 > 0.$$

Le disque 1 gagne donc de l'énergie cinétique grâce aux frottements avec le disque 2.

Pour le second solide,

$$\Delta E_{m2} = \Delta E_{c2} = \frac{1}{2}J_2\,\omega_f^2 - \frac{1}{2}J_2\,\omega_0^2 = \frac{1}{2}J_2\left(\left(\frac{J_2}{J_1 + J_2}\right)^2 - 1\right)\omega_0^2 < 0.$$

Le second disque, en revanche, voit son énergie cinétique décroître : les frottements avec le premier le ralentissent.

c) Pour le système total, on somme les résultats précédents :

$$\Delta E_m = \Delta E_{m1} + \Delta E_{m2} = \frac{1}{2}(J_1 + J_2)\frac{J_2^2}{(J_1 + J_2)^2}\,\omega_0^2 - \frac{1}{2}J_2\,\omega_0^2 = -\frac{1}{2}\frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2}\,\omega_0^2 < 0.$$

d) À cause des frottements, l'énergie mécanique totale diminue. En revanche, l'énergie mécanique d'un sous-système peut augmenter ou diminuer.

10 Expérience de Cavendish

Correction :

1. **a.** On note $(\Delta) = (Oz)$ l'axe vertical ascendant. Chacune des deux sphères étant en mouvement de rotation de rayon $\ell/2$ autour de (Oz) à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la masse de la tige étant négligée, le moment cinétique total de l'ensemble {tige+deux sphères} par rapport à (Oz) est $L_\Delta = \dfrac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}$. Ce système est soumis à l'action de son poids et de la tension du fil, dont les moments par rapport à (Δ) sont nuls, et au couple de torsion $\vec{\Gamma} = -C\theta\vec{u}_z$. L'application du théorème scalaire du moment cinétique à ce système par rapport à (Δ) conduit à $\dfrac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta$, soit $\ddot{\theta} + \dfrac{2C}{m\ell^2}\theta = 0$.

   On reconnaît l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{2C}{m\ell^2}}$.

   b. $C = \dfrac{2\pi^2 m\ell^2}{T_0^2} = 2{,}6 \cdot 10^{-4}\,\mathrm{N \cdot m \cdot rad^{-1}}$.
2. On se place dans le système de coordonnées polaires, de base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ pour chacune des deux sphères, et on estime que la distance entre une des sphères et la boule correspondante est $r - \dfrac{\ell}{2}\sin(\theta) \approx r - \dfrac{\ell}{2}\theta$. On néglige aussi l'action de la boule la plus éloignée. On suppose de plus que la force de gravitation exercée par la boule sur la sphère est portée par $\vec{u}_\theta$:
   $\vec{F}_g = \dfrac{GMm}{\left(r - \dfrac{\ell}{2}\theta\right)^2}\vec{u}_\theta \approx \dfrac{GMm}{r^2}\left(1 + \dfrac{\ell}{r}\theta\right)\vec{u}_\theta$. Le moment de cette force par rapport à (Oz) est ainsi $\mathscr{M}_\Delta(\vec{F}_g) = \dfrac{GMm\ell}{2r^2}\left(1 + \dfrac{\ell}{r}\theta\right)$, et le moment total par rapport à (Δ) des deux forces gravitationnelles s'exerçant sur le système {tige+deux sphères} s'écrit $\mathscr{M}_\Delta = \dfrac{GMm\ell}{r^2}\left(1 + \dfrac{\ell}{r}\theta\right)$.
   On applique alors le théorème scalaire du moment cinétique par rapport à (Δ) au système :
   $\dfrac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \dfrac{GMm\ell}{r^2}\left(1 + \dfrac{\ell}{r}\theta\right)$. À l'équilibre, on obtient $\theta_{eq} = \dfrac{GMm\ell r}{Cr^3 - GMm\ell^2}$.
3. $\theta_{eq} = 1{,}4 \cdot 10^{-3}$ rad : Cavendish avait donc développé une méthode de mesure d'angle avec une précision inférieure au milliradian.