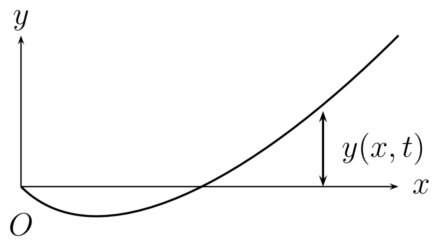
Sujet 1 – corrigé

I Progation d'une onde sur une corde

On considère une corde homogène de masse linéique μ soumise à une tension T. Au repos, la corde est horizontale. On se limite aux mouvements dans le plan vertical (Oxy), avec x horizontal et y vertical ascendant.
Soit $y(x,t)$ le déplacement vertical de l'élément de corde à l'abscisse x et à l'instant t.



1) Rappeler les dimensions T et μ.

Réponse

Une tension est une force, et une masse linéique est une masse par unité de longueur :

$$\boxed{[T] = M \cdot L \cdot T^{-2} \quad ; \quad [\mu] = M \cdot L^{-1}}$$

◇

2) On suppose que la célérité c des ondes est de la forme $c = \mu^\alpha T^\beta$. Exprimer α et β.

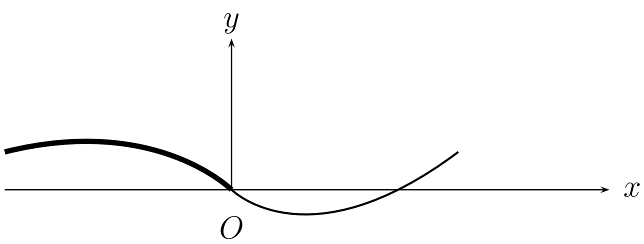
Réponse

Par analyse dimensionnelle :

$$[c] = [\mu]^\alpha [T]^\beta \quad \Rightarrow \quad L \cdot T^{-1} = M^{\alpha+\beta} \cdot L^{-\alpha+\beta} \cdot T^{-2\beta}$$

On en déduit $\boxed{\alpha = -1/2}$ et $\boxed{\beta = 1/2}$. Donc $c = \sqrt{\dfrac{T}{\mu}}$.

◇



On considère désormais une corde infinie formée de deux brins de masses linéiques μ_1 pour $-\infty < x < 0$ et μ_2 pour $0 < x < \infty$. Au point $x = 0$, il existe une discontinuité de milieu (changement de milieu).
On pose

$$\eta = \sqrt{\frac{\mu_2}{\mu_1}}$$

Les deux cordes sont raccordées en $x = 0$. Elles sont soumises à la même tension T. Une onde incidente provenant de $x \to -\infty$

$$y_i(x,t) = A\cos(\omega t - kx), \text{ pour } x < 0 \quad \text{avec} \quad k \in \mathbb{R}$$

donne naissance à une onde réfléchie

$$y_r(x,t) = A_r \cos(\omega t - k_r x), \text{ pour } x < 0 \quad \text{avec} \quad k_r \in \mathbb{R}$$

et une onde transmise

$$y_t(x,t) = A_t \cos(\omega t - k_t x), \text{ pour } x > 0 \quad \text{avec} \quad k_t \in \mathbb{R}$$

3) Exprimer la célérité des ondes dans la corde 1 ($x < 0$) puis dans la corde 2 ($x > 0$).

Réponse

Dans la corde 1, $\boxed{c_1 = \sqrt{T/\mu_1}}$, et dans la corde 2, $\boxed{c_2 = \sqrt{T/\mu_2}}$.

◇

4) Préciser le sens de propagation de l'onde réfléchie. Donner la relation entre k_r et k.

Réponse

L'onde réfléchie se propage vers les x décroissants, donc $k_r < 0$.

Le milieu de propagation est le même que celui de l'onde incidente, donc la vitesse de propagation est la même (c_1). De plus, comme l'onde incidente et l'onde réfléchie ont la même fréquence, on en déduit $|k_r| = |k|$. (On rappelle que $|k_r| = 2\pi/\lambda_1 = \omega/c_1$).

Or $k_r < 0$ et $k > 0$, $\boxed{k_r = -k}$.

◇

5) Exprimer l'onde pour les $x < 0$.

Réponse

C'est la superposition de l'onde incidente et de l'onde réfléchie :

$$\boxed{y(x,t) = A\cos(\omega t - kx) + A_r \cos(\omega t + kx) \quad \text{pour} \quad x < 0}$$

◇

6) Préciser le sens de propagation de l'onde transmise. Quelle est la relation entre k_t, ω, T et les masses linéiques ? Quelle est la relation entre k, ω, T et les masses linéiques ? Donner la relation entre k_t, k et η.

Réponse

L'onde transmise se propage vers les x croissants donc $k_t > 0$.

Par définition $|k_t| = \dfrac{\omega}{c_2}$, donc $\boxed{k_t = \omega\sqrt{\mu_2/T}}$.

De même $\boxed{k = \omega\sqrt{\mu_1/T}}$. On en déduit $\boxed{k_t = \eta k}$.

◇

7) Exprimer l'onde pour les $x > 0$.

Réponse

Cela correspond uniquement à l'onde transmise :

$$\boxed{y(x,t) = A_t \cos(\omega t - k\eta x) \quad \text{pour} \quad x > 0}$$

◇

8) La corde ne subit pas de discontinuité en $x = 0$. En déduire une équation reliant A_r, A_t et A.

Réponse

La fonction $y(x,t)$ est continue en $x = 0$:

$$y(x = 0^-,t) = y(x = 0^+,t) \quad \forall t \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{A + A_r = A_t}$$

◇

9) Remarquer que la corde n'est pas coudée en $x = 0$. Montrer que

$$A - A_r = \eta A_t$$

Réponse

La tangente à la courbe $y(x)$ est continue pour tout t en $x = 0$:

$$\frac{dy}{dx}(0^-,t) = \frac{dy}{dx}(0^+,t) \quad \Leftrightarrow \quad Ak\sin(\omega t) - A_r k\sin(\omega t) = A_t\eta k\sin(\omega t)$$

Cette relation doit être vraie pour tout t, donc $\boxed{A - A_r = \eta A_t}$

◇

10) Exprimer A_r en fonction de A et η. Discuter les limites $\mu_2 \to \mu_1$ et $\mu_2 \to \infty$.

Réponse

En utilisant les réponses aux deux questions précédentes : $\boxed{A_r = A\frac{1-\eta}{1+\eta}}$

Si les deux cordes sont identiques, il n'y a pas d'onde réfléchie (l'onde se propage dans un même milieu).

$$\lim_{\mu_2 \to \mu_1} A_r = \lim_{\eta \to 1} A_r = 0$$

Si $\mu_2 \to \infty$, l'inertie de la corde 2 est énorme, donc il n'y aura pas d'onde transmise.

$$\lim_{\mu_2 \to +\infty} A_r = \lim_{\eta \to +\infty} A_r = -A$$

On en déduit $A_t = 0$ et $y(0,t) = 0$ pour tout t comme si l'extrémité était fixe. L'onde incidente "se heurte" à un mur.

◇

11) Les deux cordes sont en fer de masse volumique $\rho_{\mathrm{Fe}} = 7 \times 10^3\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$. Les deux cordes sont cylindriques. Le rayon de la corde 2 est le triple de celui de la corde 1. Exprimer η.

Réponse

La masse linéique d'une corde cylindrique de rayon r vaut : $\mu_1 = \rho_{\mathrm{Fe}}\pi r^2$ (πr^2 représente la surface d'un disque de rayon r).

La corde 2 a un rayon $r_2 = 3r$, donc $\mu_2 = 9\mu_1$.

On en déduit $\boxed{\eta = 3}$.

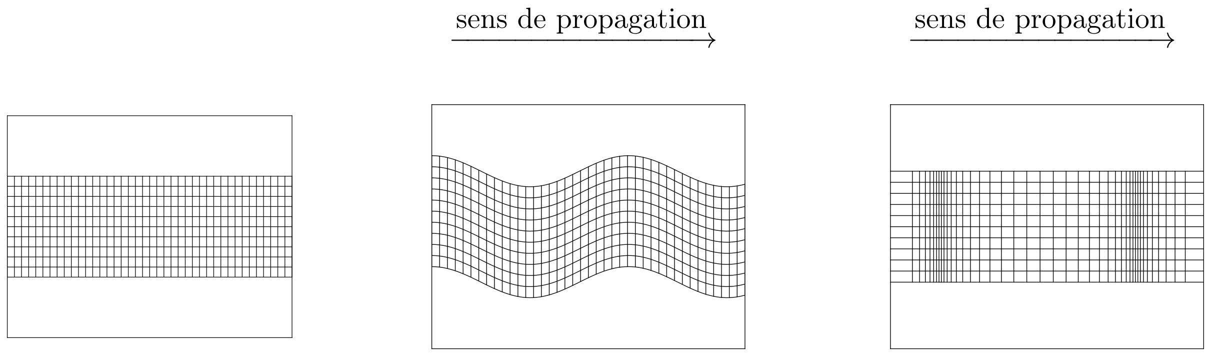
◇

Khôlles PSI – semaine 12

Sujet 2 – corrigé

I Ondes sismiques

On distingue deux types d'ondes sismiques : les ondes P qui se propagent à la vitesse c_P et les ondes S qui se propagent à la vitesse $c_S < c_P$. Après un séisme, les ondes P atteignent une station sismographique à l'instant t_P et les ondes S, à l'instant t_S.
On cherche à en déduire la distance D de la station à l'épicentre (le foyer du séisme) et la date t_0 du séisme. Les figures ci-dessous représentent l'allure d'une portion de la croûte terrestre pour ces deux types d'ondes.



En l'absence d'onde — Onde S — Onde P

1) Quelle est la différence entre les ondes P et les ondes S ? Quel adjectif décrit les ondes P ? les ondes S ?

Réponse

Les ondes P sont longitudinales, les ondes S sont transversales

◇

2) Préciser quelles sont les ondes détectées les premières.

Réponse

Celles qui courent le plus vite : les ondes P

◇

3) Avant de déterminer les expressions générales de D et t_0, on cherche un (ou plusieurs) cas particulier(s) pour lequel (lesquels) ces expressions sont intuitives et simples. Imaginer une (des) valeur(s) particulière(s) des paramètres t_S et t_P pour laquelle (lesquelles) il est très facile de donner l'expression de t_0 ou de D.

Réponse

Si $t_S = t_P$ alors $D = 0$ et $t_0 = t_S = t_P$

◇

4) Exprimer t_0 et D dans le cas général. Vérifier que les expressions trouvées sont en accord avec la réponse à la question précédente.

Réponse

$$t_P = t_0 + D/c_P \quad \text{et} \quad t_S = t_0 + D/c_S$$

$$\Rightarrow t_0 = \frac{c_P t_P - c_S t_S}{c_P - c_s} \Leftrightarrow \boxed{D = c_P c_S \frac{t_S - t_P}{c_P - c_S}}$$

5) Quelle hypothèse a-t-on faite implicitement sur la propagation des ondes ? Cette hypothèse est-elle réaliste sachant que la terre est formée de différentes « couches » ?

Réponse

On suppose que les ondes se propagent en ligne droite : on néglige tout phénomène de réflexion ou de réfraction.

Pour localiser l'épicentre, on utilise les mesures de plusieurs stations.

6) Dans cette question, on considère deux stations respectivement à une distance D_1 et D_2 de l'épicentre. On suppose que la distance séparant les deux stations est petite devant le rayon terrestre. On peut alors considérer que la Terre est plane localement. En supposant que les deux stations et l'épicentre sont dans un même plan vertical, montrer que la connaissance de D_1 et D_2 permet de trouver la position de l'épicentre. Vous vous justifierez votre réponse à l'aide d'une construction graphique.

Réponse

Chaque station permet de décrire un cercle. Il y deux intersections mais une seule dans la Terre !

7) Combien faut-il de stations au minimum si on enlève l'hypothèse simplificatrice que les stations et l'épicentre sont coplanaires ?

Réponse

3 : c'est le principe de la triangulation. Il y a deux intersections, on élimine celle qui a une altitude positive.

8) Quel autre système de localisation s'appuie sur un principe similaire ?

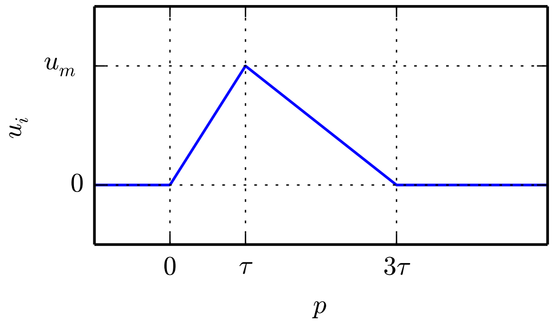
Réponse

Le GPS.

Sujet 3 – corrigé

I Onde progressive

Un signal dont la forme est indiquée sur le graphe ci-contre se propage sur une corde vibrante. La courbe représente l'élongation $u_i(p)$ de la corde avec $p = t - z/c$. On suppose que $u_i(p) = 0$ pour les valeurs de p non représentées sur le graphique.



1) Décrire la nature de cette onde.

Réponse

C'est une onde transversale progressive selon les z croissants se propageant à la vitesse c.

◇

2) Représenter l'élongation u_i en fonction du temps pour $z = -\tau c$.

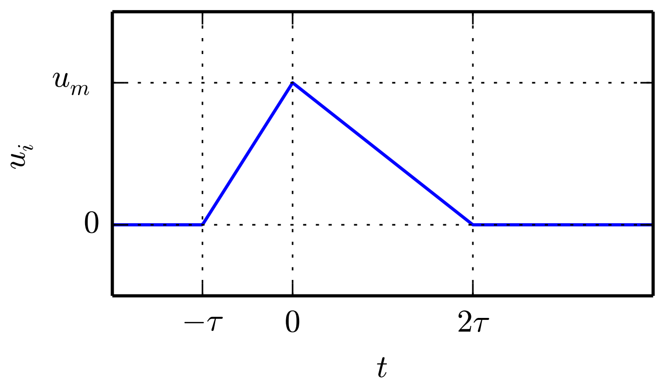
Réponse

On pose trois points de l'onde :

- point A : $u_i = 0$ et $p_A = 0$
- point B : $u_i = u_m$ et $p_B = \tau$
- point C : $u_i = 0$ et $p_C = 3\tau$

Pour $z = -\tau c$, $p = t + \tau$, soit $\boxed{t = p - \tau}$. Cela revient à effectuer un changement de l'origine de l'axe du temps de τ vers la droite.

- point A : $p_A = 0$, $t_A = -\tau$
- point B : $p_B = \tau$, $t_B = 0$
- point C : $p_C = 3\tau$, $t_C = 2\tau$



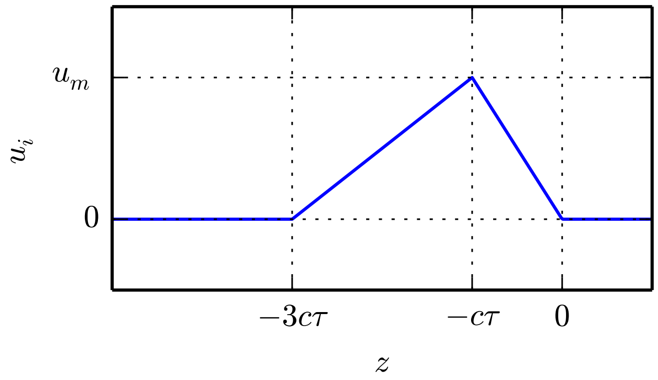
◇

3) Représenter l'élongation u_i en fonction de z pour $t = 0$.

Réponse

Pour $t = 0$, $p = -z/c$, donc $z = -pc$

- point A : $p_A = 0$, $z_A = 0$
- point B : $p_B = \tau$, $z_B = -c\tau$
- point C : $p_C = 3\tau$, $z_C = -3c\tau$



---

4) La corde se trouve dans le demi-espace $z \leq 0$ et est attachée en $z = 0$. Montrer que cette condition aux limites conduit à une onde réfléchie u_r en opposition de phase de l'onde incidente u_i en $z = 0$.

Réponse

En $z = 0$, il y a un nœud de vibration :

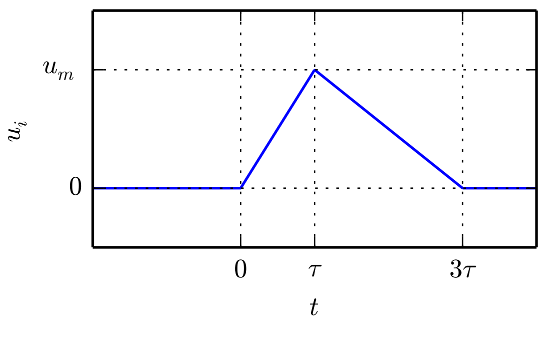
$\forall t\, u(z = 0,t) = u_i(z = 0,t) + u_r(z = 0,t) = 0$, d'où $\boxed{u_r(z = 0,t) = -u_i(z = 0,t)}$.

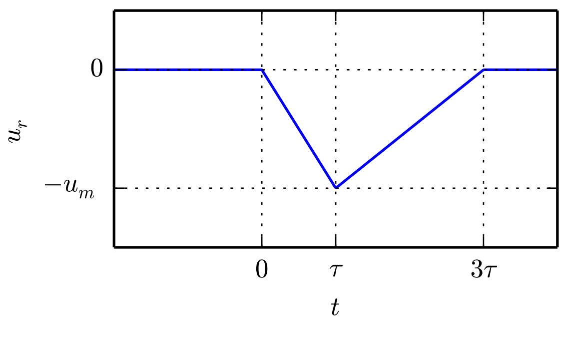
Le signe - traduit l'opposition de phase.

---

5) Représenter le signal incident u_i et celui réfléchi u_r en $z = 0$ en fonction du temps t.

Réponse



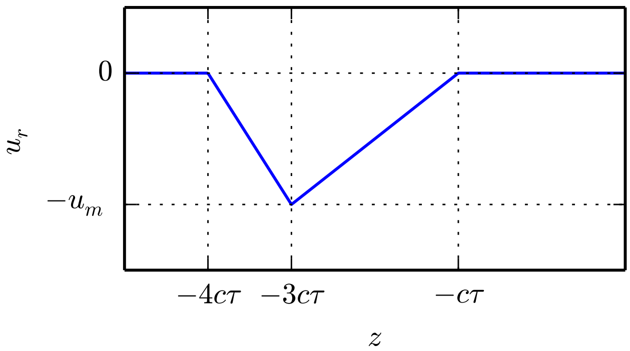


---

6) Représenter $u_r(z,t_0)$ en fonction de z à l'instant $t_0 = 4\tau$.

Réponse

L'onde se propage selon les z décroissants, donc s'écrit $u_r(t + z/c) = u_r(q)$ avec $q = t + z/c$. Le graphique précédent représente alors $u_r(q)$. On fait le même raisonnement qu'à la question **3** : $t = 4\tau$, donc $z = c(q - 4\tau)$. Pour $q = 0$, $z = -4c\tau$, pour $q = \tau$, $z = -3c\tau$ et pour $q = 3\tau$, $z = -c\tau$.


0
u_r
$-u_m$
$-4c\tau$
$-3c\tau$
$-c\tau$
z

Sujet 4 – corrigé

I Interféromètre de Mach-Zender

On considère une lame semi-réfléchissante non équilibrée qui divise un faisceau incident de puissance $\mathcal{P}$ en un faisceau réfléchi de puissance $\mathcal{P}_r = R\mathcal{P}$ et un faisceau transmis de puissance

$$\mathcal{P}_t = T\mathcal{P} \quad \text{avec} \quad R + T = 1$$

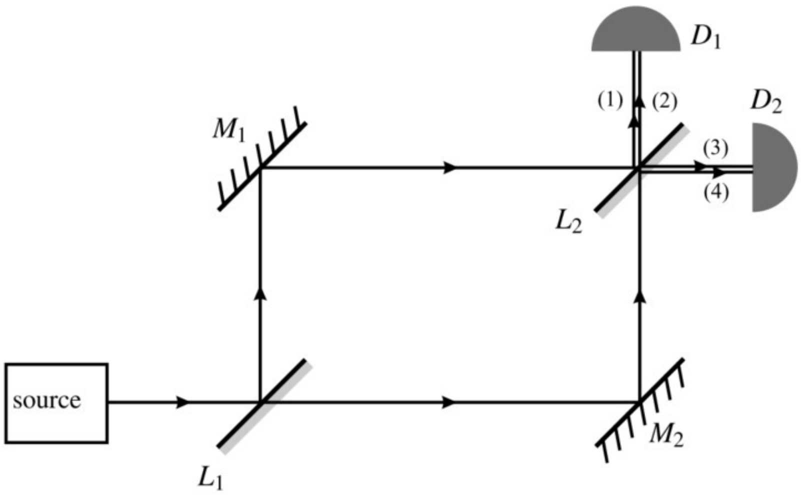
1) Traduire ces renseignements en termes de probabilité de réflexion et de transmission du photon.

Réponse

La répartition de puissance entre partie transmise et réfléchie est identique à la répartition de photons et donc à leur probabilité individuelle à être transmis ou réfléchi. Un photon arrivant sur la lame est donc aléatoirement transmis ou réfléchi. La probabilité qu'il soit réfléchi est R, la probabilité qu'il soit transmis est $T = 1 - R$. Elle ne sont pas égales *a priori*.

◇

On réalise un interféromètre de Mach-Zender avec deux lames semi-réfléchissantes de ce type. La puissance du faisceau entrant dans l'interféromètre est $\mathcal{P}_0$.



2) Quelles sont les puissances des quatre faisceaux sortant de l'interféromètre ? Vérifier que la puissance totale est conservée.

Réponse

- Le faisceau (1) se réfléchit sur L_1 et sur L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_1 = R^2\mathcal{P}_0$.
- Le faisceau (2) est transmis par L_1 et par L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_2 = T^2\mathcal{P}_0$.
- Le faisceau (3) se réfléchit sur L_1 et est transmis par L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_3 = TR\mathcal{P}_0$.
- Le faisceau (4) est transmis par L_1 et se réfléchit sur L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_4 = RT\mathcal{P}_0$.

On retrouve alors bien

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 = (R^2 + T^2 + 2RT)\mathcal{P}_0 = (R + T)^2\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0$$

◇

3) Quelle serait, dans une image corpusculaire, les puissances reçues par les détecteurs D_1 et D_2 ? Expérimentalement la puissance reçue par D_2 est nulle. Expliquer l'échec du modèle corspusculaire à prévoir cette observation.

Réponse

Dans une image corpusculaire, les photons reçus par D_1 sont ceux du faisceau (1) auxquels s'ajoutent ceux du faisceau (2) donc la puissance reçue par D_1 est :

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = (R^2 + T^2)\mathcal{P}_0$$

De même la puissance reçue par D_2 est :

$$\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 = 2RT\,\mathcal{P}_0$$

Ce n'est pas ce que donne l'expérience parce que les corpuscules doivent, dans l'interféromètre être appréhendé comme **des ondes de matière qui interfèrent**.

◇

4) Dans l'image ondulatoire, en appelant A_0 l'amplitude de l'onde entrant dans l'appareil, écrire les amplitudes des quatre ondes sortant de l'interféromètre.

Réponse

La puissance lumineuse est proportionnelle au carré du signal (l'onde lumineuse). Ainsi, en prenant la racine carré des relations précédentes, il vient

$$A_1 = RA_0 \quad , \quad A_2 = TA_0 \quad \text{et} \quad A_3 = A_4 = \sqrt{RT}A_0$$

◇

5) L'appareil est réglé de manière à ce que les deux trajets de la lumière soient géométriquement rigoureusement identiques. On admet que le faisceau qui se réfléchit sur l'arrière de L_2 subit un déphasage de π, ce qui n'arrive pas au faisceau se réfléchissant sur l'avant de cette lame. Quelles sont les amplitudes des ondes reçues par chacun des détecteurs ? En déduire les puissances qu'ils reçoivent en fonction de la puissance $\mathcal{P}_0$ entrant dans l'appareil. Conclure.

Réponse

Les ondes (1) et (2) arrivant sur D_1 sont en phase (elles ont suivi des chemins de longueurs strictement égales et ont été réfléchies sur les même faces des lames). Elles ont donc une interférence constructrice et l'amplitude de l'onde résultante reçue par D_1 est :

$$A_{D1} = A_1 + A_2 = (R + T)A_0 = A_0$$

Les ondes (3) et (4) arrivant sur D_2 sont en opposition de phase (elles ont suivi des chemins de longueurs strictement égales mais se sont réfléchies sur des faces différentes des lames). Elles sont donc en interférence destructrive et l'amplitude de l'onde résultante reçue par D_2 est :

$$A_{D2} = A_3 - A_4 = 0$$

Ainsi le détecteur $D1$ reçoit l'intégralité de la puissance $\mathcal{P}_0$ et le détecteur $D2$ reçoit une puissance nulle. Ces résultats sont indépendants de R et T.

◇

6) On fait varier le déphasage φ (déphasage du seulement à la propagation) entre les deux ondes arrivant sur le détecteur D_1. Exprimer les puissances reçues par chacun des détecteurs en fonction de $\mathcal{P}_0$, R, T, φ. Comparer le cas où les lames sont parfaitement équilibrées ($R = T = 1/2$) et le cas où elles ne le sont pas.

Réponse

On applique la formule des interférences (revoir les cours de mécanique ondulatoire) avec un déphasage φ entre les ondes (1) et (2) :

$$A_{D1}{}^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi) = A_0{}^2\left\{R^2 + T^2 + 2RT\cos(\varphi)\right\}$$

La puissance reçue par D_1 est donc :

$$\mathcal{P}_{D1} = \mathcal{P}_0\left\{R^2 + T^2 + 2RT\cos(\varphi)\right\}$$

On applique la formule des interférences avec un déphasage $\varphi + \pi$ entre les ondes (3) et (4) :

$$A_{D2}{}^2 = A_3{}^2 + A_4{}^2 + 2A_3A_4\cos(\varphi + \pi) = 2RTA_0{}^2\left\{1 - \cos(\varphi)\right\}$$

La puissance reçue par D_2 est ainsi :

$$\mathcal{P}_{D2} = 2RT\mathcal{P}_0\left\{1 - \cos(\varphi)\right\}$$

Dans le cas où les lames sont parfaitement équilibrées ($R = T = 1/2$) on a :

$$\mathcal{P}_{D1} = \frac{\mathcal{P}_0}{2}(1 + \cos\varphi) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{D2} = \frac{\mathcal{P}_0}{2}(1 - \cos\varphi)$$

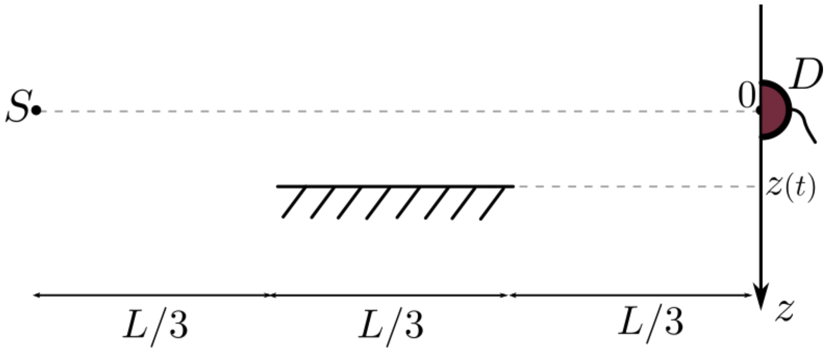
Si la lame n'est pas équilibrée :

- L'amplitude d'oscillation des puissances est plus faible car $2RT = 2R(1-R) \leq 1/2$ (le montrer par étude de fonction sur l'intervalle [0,1]) ;
- La puissance arrivant sur D_1 ne s'annule jamais.

Sujet 5 – corrigé

I Mesure de l'accélération de la pesanteur avec un miroir de Lloyd (⋆⋆⋆)

On place une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 650nm$ à une distance horizontale $L = 45cm$ d'un détecteur D. Initialement, un miroir de longueur $L/3$ positionné à égale distance de S et D se trouve en $z = 0$ (même altitude que S et D). On lâche ce miroir à $t = 0$ sans vitesse initiale et il subit alors une chute libre.



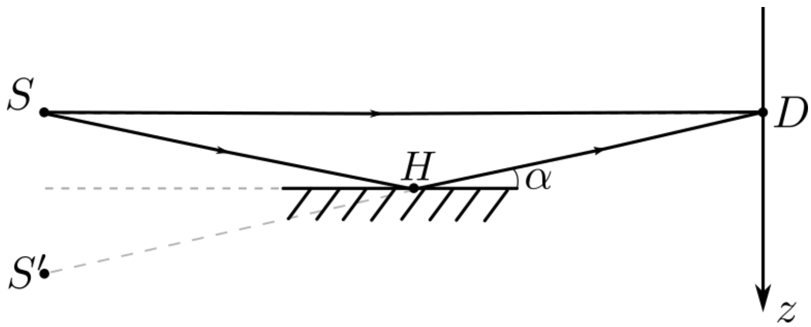
On donne dans le tableau ci-dessous les instants t_k pour lesquels on a mesuré des maxima d'intensité reçue par le détecteur D.

indice k du maximum	1	2	3	4	5	6	7	8	9
$t_k(ms)$	7,42	9,77	11,11	12,08	12,86	13,53	14,10	14,62	15,00

On rappelle que la réflexion sur un miroir métallique s'accompagne d'un retard de phase égal à π.

1) Pour une position $z(t)$ du miroir, représenter les deux rayons qui interfèrent au point D de l'écran. Ces deux ondes sont-elles cohérentes?

Réponse



Ces ondes sont issues de la même source primaire donc

- elles sont synchrones (même fréquence)
- et leur déphasage est constant un cours du temps tant que la différence de marche δ est plus petite que la longueur de cohérence temporelle ℓ_c.

◇

2) On suppose $L \gg z(t)$, déterminer la différence de marche δ_D entre ces deux ondes au point D. Pour cela, il pourra être utile de faire apparaître une source fictive S' image de S par le miroir.

Réponse

$\delta_D = (S'D) - (SD) = n_0\,(S'D - SD) + \frac{\lambda_0}{2}$ or $\cos(\alpha) = \frac{SD}{S'D}$ et $\tan(\alpha) = \frac{z}{\frac{L}{3}+\frac{L}{6}} = \frac{2z}{L}$.

$\delta_D = n_0 SD\left(\frac{1}{\cos(\alpha)} - 1\right) + \frac{\lambda_0}{2}$ or $\frac{1}{\cos(\alpha)} = \sqrt{1+\tan^2(\alpha)}$

$$\boxed{\delta_D = n_0 SL\left(\sqrt{1+\left(\frac{2z}{L}\right)^2} - 1\right) + \frac{\lambda_0}{2}}$$

Comme $L \gg z$, $\sqrt{1+\left(\frac{2z}{L}\right)^2} \approx 1 + \frac{2z^2}{L^2}$ soit $\boxed{\delta_D = 2n_0\frac{z^2}{L} + \frac{\lambda_0}{2}}$.

3) En déduire l'expression de l'intensité en D en fonction du temps. Quel est l'intensité reçue en D à $t = 0$? Expliquer.

Réponse

Li miroir est en chute libre donc $z(t) = -\frac{1}{2}gt^2$ et $I = I_0\,(1+\cos(\Delta\varphi))$ avec $\Delta\varphi = k_0\delta_D = \frac{4\pi z^2}{\lambda L} + \pi$.

$$\boxed{I = 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi g^2}{\lambda L}t^4 + \pi\right)\right)}$$

4) A l'aide du tableau de valeurs fourni, trouver une estimation de g.

Réponse

$I = I_{max}$ pour $\Delta\varphi = 2p\pi$ soit $\boxed{g^2 = \frac{(2p-1)\lambda L}{t_p^4}}$ avec $p \in \mathbb{N}^*$.

Par régression à la calculatrice, on trouve $\boxed{g = 9{,}86\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}}$.

5) On utilise maintenant une source de lumière blanche pour réaliser l'expérience. Quelle est la durée typique au bout de laquelle l'intensité ne varie plus au point D. L'expérience est-elle réalisable avec une telle source?

Réponse

Pour une lumière blanche, la longueur de cohérence temporelle $\ell_c \approx 1\,\mu$m donc la condition $\delta_D < \ell_c$ implique $2n_0\frac{g^2t^4}{4L} + \frac{\lambda_0}{2} < \ell_c$ soit $\boxed{t < \left(\frac{2L}{n_0 g^2}\left(\ell_0 - \frac{\lambda_0}{2}\right)\right)^{1/4}}$. AN: $t < 8{,}9\,\mathrm{ms}$ donc compliqué à observer.