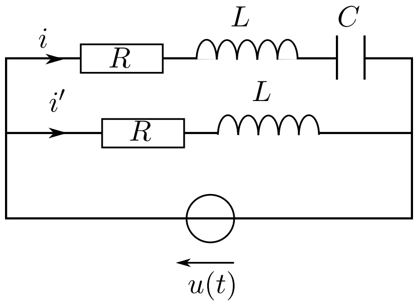
Sujet 1 – corrigé

I Circuit en RSF

Un générateur idéal de tension de f.e.m. sinusoïdale $u(t) = U\sqrt{2}\cos\left(\omega t + \dfrac{\pi}{4}\right)$ alimente le circuit suivant.



On cherche à exprimer les intensités instantanées $i(t)$ et $i'(t)$ sous la forme :

$$i(t) = I\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi) \qquad i'(t) = I'\sqrt{2}\cos(\omega t + \phi')$$

1) Les grandeurs U, I et I' correspondent-elles aux amplitudes ou aux grandeurs efficaces ?

Réponse

Ce sont les grandeurs efficaces.

◇

2) Définir les complexes $\underline{u}(t)$, $\underline{i}(t)$ et $\underline{i'}(t)$ associés aux grandeurs $u(t)$, $i(t)$ et $i'(t)$. On notera $\underline{U}$, $\underline{I}$ et $\underline{I'}$ les amplitudes complexes.

Réponse

Notations complexes :

$$\begin{aligned} \underline{u} &= \underline{U}e^{j\omega t} & \underline{U} &= U\sqrt{2}e^{j\pi/4} \\ \underline{i} &= \underline{I}e^{j\omega t} & \underline{I} &= I\sqrt{2}e^{j\phi} \\ \underline{i'} &= \underline{I'}e^{j\omega t} & \underline{I'} &= I'\sqrt{2}e^{j\phi'} \end{aligned}$$

◇

3) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{I}$ en fonction de $\underline{U}$, L, R, C et ω. En déduire les expressions de I et ϕ. Préciser le domaine d'appartenance de la phase ϕ.

Réponse

Loi d'Ohm généralisée : $\boxed{\underline{I} = \dfrac{\underline{U}}{R + j(L\omega - 1/(C\omega))}}$

Module :

$$I\sqrt{2} = \frac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}}}$$

Phase $\phi \in]-\pi/4, 3\pi/4[$: $\boxed{\phi = \pi/4 - \arctan((L\omega - 1/C\omega)/R)}$

◇

4) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{I'}$ en fonction de $\underline{U}$, L, R et ω. En déduire les expressions de I' et ϕ'. Préciser le domaine d'appartenance de la phase ϕ'.

Réponse

Loi d'Ohm généralisée : $\boxed{\underline{I'} = \dfrac{\underline{U}}{R + jL\omega}}$

Module : $I'\sqrt{2} = \dfrac{U\sqrt{2}}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{I' = \dfrac{U}{\sqrt{R^2 + L^2\omega^2}}}$

Phase $\phi' \in]-\pi/4, \pi/4]$: $\boxed{\phi' = \pi/4 - \arctan(L\omega/R)}$

◇

5) A quelle condition doivent satisfaire L, C et ω pour que les déphasages respectifs ψ et ψ' des courants i et i' avec la tension u soient opposés ?

Réponse

Définition des déphasages :

$$\psi = \phi - \pi/4 = -\arctan((L\omega - 1/C\omega)/R)$$
$$\psi' = \phi' - \pi/4 = -\arctan(L\omega/R)$$

Pour que $\psi = -\psi'$, il faut $L\omega/R = -(L\omega - 1/C\omega)/R$, soit $\boxed{2LC\omega^2 = 1}$.

◇

6) A quelle condition doivent satisfaire R, L, C et ω pour que le déphasage entre i et i' soit de $\pi/2$?

Réponse

Déphasage α entre i et i' : $\alpha = \phi - \phi' = \psi - \psi' = \pi/2$

Soit $-\arctan(L\omega/R - 1/(C\omega R)) + \arctan(L\omega/R) = \pi/2$

Or $\arctan(1/x) + \arctan(x) = \pi/2$, donc

$$\frac{1}{RC\omega} - \frac{L\omega}{R} = \frac{R}{L\omega}$$

D'où $\boxed{R^2 + L^2\omega^2 - L/C = 0}$.

◇

7) Les deux conditions précédentes étant satisfaites simultanément, quelles sont les intensités efficaces I et I' et les phases à l'origine ϕ et ϕ' des intensités $i(t)$ et $i'(t)$. On exprimera I et I' en fonction uniquement de U et R.

Réponse

On veut $\psi = -\psi'$ et $\psi - \psi' = \pi/2$, soit $\psi = \pi/4$ et $\psi' = -\pi/4$.

On en déduit les phases

$$\boxed{\phi = \psi + \pi/4 = \pi/2 \quad ; \quad \phi' = \psi' + \pi/4 = 0}$$

D'après les relations précédentes, on montre que $L\omega = R$ et $(L\omega - 1/(C\omega)) = R^2/(L\omega) = R$, d'où

$$I' = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega)^2}} = \frac{U}{\sqrt{2}R} \quad \text{et} \quad I = \frac{U}{\sqrt{R^2 + (L\omega - 1/(C\omega))^2}} = \frac{U}{\sqrt{2}R}$$

On peut alors écrire les signaux temporels :

$$i(t) = \frac{U\sqrt{2}}{R\sqrt{2}}\cos(\omega t + \pi/2) \quad \text{et} \quad i'(t) = \frac{U\sqrt{2}}{R\sqrt{2}}\cos(\omega t)$$

$$\boxed{i(t) = -\frac{U}{R}\sin(\omega t)} \quad ; \quad \boxed{i'(t) = \frac{U}{R}\cos(\omega t)}$$

Rappel :

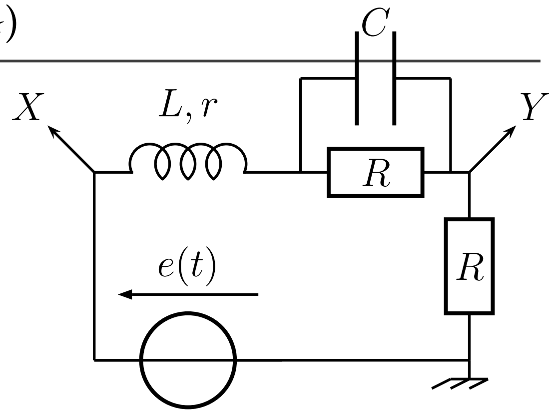
$$\arctan(1/x) + \arctan(x) = \mathrm{signe}(x)\pi/2$$

Sujet 2 – corrigé

I Détermination d'une inductance ($\star\star\star$)

On réalise le montage représenté ci-contre, et on constate sur l'oscilloscope que pour une fréquence $f_0 = 180\,\mathrm{Hz}$, les signaux recueillis sur les voies X et Y sont en phase.

Données : $R = 100\,\Omega$ et $C = 10\,\mu\mathrm{F}$.



1) En déduire l'expression puis la valeur de l'inductance L de la bobine.

Réponse

Sur la voie X, on visualise $e(t)$, et sur la voie Y, on visualise la tension $Ri(t)$. S'il n'y a pas de déphasage entre ces deux voies, c'est que le courant $i(t)$ délivré par le générateur est en phase avec la tension $e(t)$ délivrée par le générateur. Donc l'impédance totale du circuit est un réel (partie imaginaire nulle).

Exprimons l'impédance totale : $\underline{Z} = r + jL\omega + \underline{Z'} + R$ où $\underline{Z'}$ est l'impédance de l'association en parallèle de la résistance R et de la capacité C.

$$\underline{Z'} = \frac{R}{1 + jRC\omega} \quad \Rightarrow \quad \underline{Z} = r + R + jL\omega + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

$$\Leftrightarrow \quad \underline{Z} = r + R + \frac{R}{1 + (RC\omega)^2} + j\left(L\omega - \frac{R^2C\omega}{1 + (RC\omega)^2}\right)$$

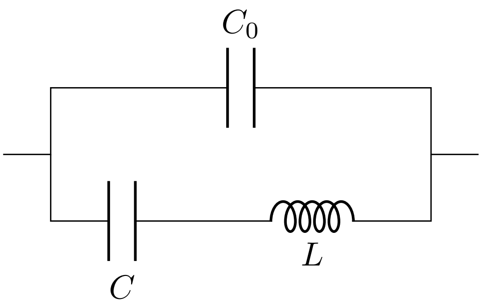
On veut $\mathrm{Im}[\underline{Z}] = 0$, soit $\boxed{L = \frac{R^2C}{1 + (RC\omega)^2} = 44\,\mathrm{mH}}$.

Khôlles MPSI – semaine 10

Sujet 3 – corrigé

I Oscillateur à quartz

Un quartz piézo-électrique se modélise par un condensateur (de capacité C_0) placé en parallèle avec un condensateur (de capacité C) en série avec une inductance L. On se place en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω.



1) Donner l'impédance équivalente $\underline{Z}$ de l'oscillateur.

Réponse

On calcule l'association en série de C et L d'abord, puis on fait l'association en parallèle de ce dipôle avec C_0 :

$$\underline{Z}_{\text{eq, 1}} = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega$$

D'où

$$\begin{aligned}
&\underline{Z} = \frac{1}{\underline{Y}_{C_0} + \underline{Y}_{\text{eq, 1}}} \\
\Leftrightarrow\ &\underline{Z} = \frac{1}{\mathrm{j}C_0\omega + \frac{1}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega}} \times \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega}{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega} \\
\Leftrightarrow\ &\underline{Z} = \frac{\frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \mathrm{j}L\omega}{1 + \frac{C_0}{C} - LC_0\omega^2} \times \frac{\mathrm{j}C\omega}{\mathrm{j}C\omega} \\
\Leftrightarrow\ &\underline{Z} = \frac{1 - LC\omega^2}{\mathrm{j}C\omega + \mathrm{j}C_0\omega - \mathrm{j}LCC_0\omega^3} \\
\Leftrightarrow\ &\underline{Z} = -\mathrm{j}\frac{1 - LC\omega^2}{(C + C_0)\omega - LCC_0\omega^3} \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{Z} = \mathrm{j}\frac{LC\omega^2 - 1}{\omega\left((C + C_0) - LCC_0\omega^2\right)}}
\end{aligned}$$

◇

2) Trouver la pulsation pour laquelle l'impédance de l'ensemble est nulle, puis celle pour laquelle elle est infinie.

Réponse

L'impédance est nulle si le numérateur est nul, c'est-à-dire

$$\boxed{\underline{Z} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

À cette pulsation, assimilable à la pulsation propre d'un circuit RLC série, le dipôle est donc équivalent à un fil. On retrouvera ce résultat en étudiant la résonance dans le chapitre suivant.

L'impédance est infinie si le dénominateur est nul, c'est-à-dire

$$\boxed{|\underline{Z}| \to \infty \Leftrightarrow \omega = \omega_0' = \sqrt{\frac{C+C_0}{LCC_0}}}$$

Cette pulsation serait la pulsation propre d'une bobine L et d'un condensateur de capacité $C_{\text{eq}} = \frac{CC_0}{C+C_0}$, autrement dit l'association en série d'un condensateur C et d'un autre condensateur C_0 (les inverses des capacités s'ajoutent en série).

À cette pulsation (dite « de résonance », cf. chapitre suivant), la bobine et les condensateurs se chargent et déchargent alternativement, l'énergie arrivant dans le dipôle est piégée et n'a pas transmise au reste du circuit, comme le fait un interrupteur ouvert.

---

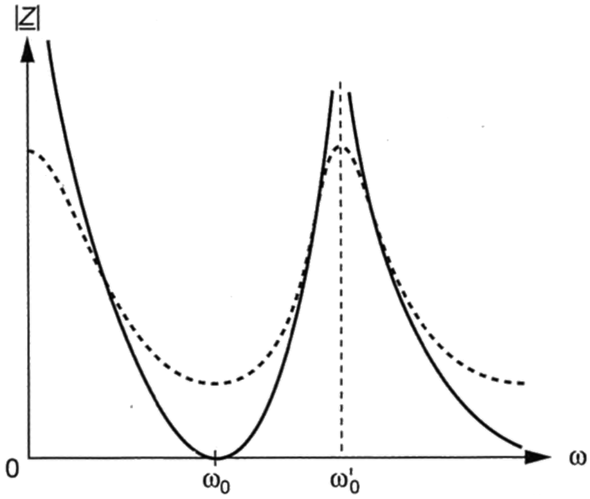
3) Tracer l'allure de $|\underline{Z}(\omega)|$.

Réponse

On regarde les cas limites à très haute et très basse fréquence :

$$|\underline{Z}| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}| \xrightarrow[\omega\to 0^+]{} \infty$$

En effet, à $\omega \to 0$, les condensateurs sont des interrupteurs ouverts donc l'impédance totale est celle d'un interrupteur ouvert. À l'inverse, à $\omega \to \infty$, les condensateurs sont des fils donc l'impédance totale est celle d'un fil : 0.



---

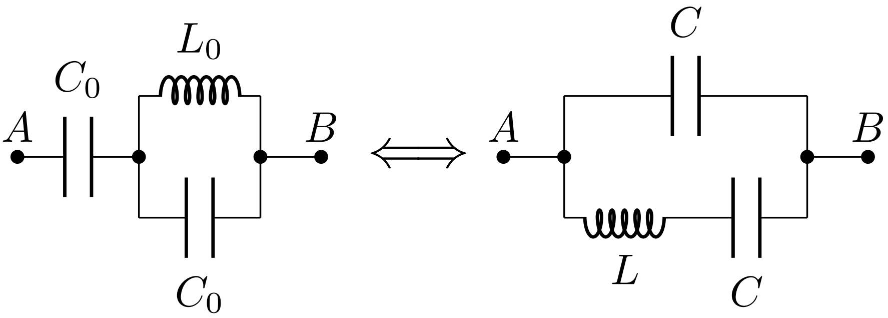
4) Comment la courbe précédente serait-elle modifiée si on prenant en compte les résistances de chacun des composants ?

Réponse

Les résistances évitent les infinités par dissipation, mais également les valeurs nulles : on se retrouve avec la courbe en pointillés sur la figure précédente.

Sujet 4 – corrigé

I Circuits équivalents ($\star\star\star$)



Deux dipôles sont équivalents s'ils ont la même impédance quelle que soit la fréquence de la source d'alimentation.

1) Montrez que l'on peut choisir L et C en fonction de L_0 et C_0 pour que les deux dipôles ci-contre soient équivalents.

Attention, les calculs peuvent être assez long pour cet exercice.

Réponse

L'intérêt principal de cet exercice est d'apprendre à manipuler les complexes, y compris dans des calculs qui peuvent devenir vite fastidieux ...

On commence par calculer l'impédance équivalente du dipôle en considérant les deux représentations.

Le dipôle représenté à gauche a pour impédance équivalente

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z}_{C0} + \frac{\underline{Z}_{L0}.\underline{Z}_{C0}}{\underline{Z}_{L0} + \underline{Z}_{C0}} = \underline{Z}_{C0} + \frac{\underline{Z}_{L0}}{1 + \underline{Z}_{L0}/\underline{Z}_{C0}} = \underline{Z}_{C0}\left[1 + \frac{\underline{Z}_{L0}/\underline{Z}_{C0}}{1 + \underline{Z}_{L0}/\underline{Z}_{C0}}\right]$$

avec $\underline{Z}_{L0} = j\omega L_0$ et $\underline{Z}_{C0} = \frac{1}{jC_0\omega} \Rightarrow \underline{Y}_{C0} = \frac{1}{\underline{Z}_{C0}} = jC_0\omega$.

D'où $\frac{\underline{Z}_{L0}}{\underline{Z}_{C0}} = -L_0C_0\omega^2 = \underline{Z}_{L0}.\underline{Y}_{C0}$ et

$$\boxed{\underline{Z}_0 = \frac{1}{jC_0\omega}\left[1 - \frac{L_0C_0\omega^2}{1 - L_0C_0\omega^2}\right] = \frac{1 - 2L_0C_0\omega^2}{jC_0\omega(1 - L_0C_0\omega^2)}}$$

Le second dipôle possède une admittance

$$\underline{Y} = \underline{Y}_C + \frac{1}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_C} = \underline{Y}_C + \frac{\underline{Y}_C}{1 + \underline{Z}_L.\underline{Y}_C} = \underline{Y}_C\left[1 + \frac{1}{1 + \underline{Z}_L.\underline{Y}_C}\right]$$

$$\boxed{\underline{Y} = jC\omega\left[1 + \frac{1}{1 - LC\omega^2}\right] = jC\omega\left[\frac{2 - LC\omega^2}{1 - LC\omega^2}\right]}$$

Les deux modélisations du dipôle sont équivalentes si on a

$$\underline{Z}_0 = \underline{Z} \iff \frac{\underline{Z}_0}{\underline{Z}} = 1 \iff \underline{Z}_0.\underline{Y} = 1$$

$$\Rightarrow \frac{1-2L_0C_0\omega^2}{jC_0\omega(1-L_0C_0\omega^2)} \times jC\omega\left[\frac{2-LC\omega^2}{1-LC\omega^2}\right] = 1$$
$$\Rightarrow (1-2L_0C_0\omega^2)(2C-LC^2\omega^2) = (C_0-L_0C_0^2\omega^2)(1-LC\omega^2)$$
$$\Rightarrow \boxed{2C-C_0+(-LC^2-4L_0C_0C+LCC_0+L_0C_0^2)\omega^2+(2L_0C_0LC^2-L_0C_0^2LC)\omega^4=0}$$

On obtient ainsi un polynôme en ω. L'égalité sera vérifiée pour tout ω si et seulement si les cœfficients du polynôme sont nuls.

On en déduit un système de 3 équations à deux inconnues :

$C_0 - 2C = 0 \Rightarrow \boxed{C_0 = 2C}$,

$-LC^2 - 8L_0C^2 + 2LCC^2 + 4L_0C^2 = 0 \Rightarrow \boxed{L = 4L_0}$.

La troisième équation permettant de vérifier les valeurs précédentes : $16L^2C^3 - 16L^2C^3 = 0$.