

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Toute la mécanique jusqu'aux particules chargées (mouvements courbes, énergie, particules chargées) ; architecture de la matière 1 et 2.

Sommaire

E1	Molécules de LEWIS (D'après Mines PC 2015 et CCINP MP 2020)	2
E2	Toboggans (D'après CCS TSI 2018)	5
P1	Le haut-parleur électrostatique (D'après Centrale 2013 TSI)	6
P2	Lentillage magnétique (D'après Banque PT 2017 et capes 2008)	10

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT}$$

avec

$$\begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

/44 E1 Molécules de LEWIS (D'après Mines PC 2015 et CCINP MP 2020)

I/A Chimie atmosphérique

La composition de l'atmosphère terrestre a changé de manière très significative depuis l'ère industrielle. Les conséquences sur la biosphère sont ressenties aujourd'hui plus que jamais. Ce changement est dû aux émissions de polluants principalement d'origine anthropogénique. Les polluants peuvent être regroupés en deux grandes classes : polluants classiques (CO_2 , CH_4 , HONO , H_2O_2 , Composés Organiques Volatils, O_3 , ...) et des polluants non classiques (métaux lourds tels que Pb, Zn, Hg, Cd, ...). On s'intéresse ici à la structure et à la réactivité de quelques polluants atmosphériques tels que HONO , O_3 , ... Les réactions, les réactifs et les produits issus de ces réactions jouent un rôle très important dans l'environnement.

La molécule d'ozone (O_3) possède deux isomères (deux formules de LEWIS) : l'un coudé, l'autre cyclique dont l'existence reste douteuse.

/4 1 Proposer une structure (en justifiant) de LEWIS pour l'isomère coudé.

Réponse

▷ Décompte des électrons :

→ O : 4^e colonne du bloc p donc 6 électrons de valence ①

→ Total : $3 \times 6 = 18$ électrons, 9 doublets. ①

▷ Méthode générale :

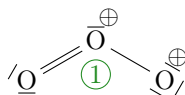
→ **Squelette** : immédiat car la molécule est linéaire.

→ **Recherche de liaisons multiples** : le squelette implique au moins 2 liaisons, soit 7 doublets restants à placer. **Si tous les doublets restant étaient non liants**, pour respecter l'octet il en faudrait 3 sur les atomes du bout et 2 sur l'atome du milieu, soit $2 \times 3 + 2 = 8$: c'est un de plus que disponible. Il y a donc **une liaison double**.

→ **Recherche des charges formelles** : ①

- Atome de gauche : il a 6 électrons qui l'entourent, contre 6 dans son état isolé : pas de charge.
- Atome central : il a 5 électrons qui l'entourent, donc une charge \oplus .
- Atome de droite : il a 7 électrons qui l'entourent, donc une charge \ominus .

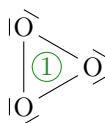
▷ Conclusion :



/1 2 Proposer une structure (en justifiant) de LEWIS pour l'isomère cyclique.

Réponse

Avec le même raisonnement, on trouve, dans le cas où la molécule serait cyclique :



/1 3 L'isomère coudé est beaucoup plus stable que l'isomère cyclique. Proposez une explication.

Réponse

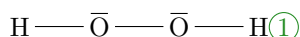
On remarque que les angles dans la molécule cyclique (60°) sont beaucoup plus petits que ceux de la molécule coudée. Ces angles impliquent une contrainte trop forte due à la répulsion des doublets ① : la molécule cyclique n'existe pas.



/2 4 Proposer (en justifiant) une structure de LEWIS pour la molécule H_2O_2 .

Réponse

L'oxygène possède 6 électrons de valence, un atome d'hydrogène en possède 1. La molécule de H_2O_2 possède donc 7 doublets ①. Les atomes d'oxygène doivent respecter la règle de l'octet alors que ceux d'hydrogène doivent respecter la règle du duet. À cause de cela, la seule géométrie possible est que les 2 atomes d'oxygène soient reliés entre eux. On trouve alors :



I/B La bétadine

Le diiode possède des propriétés redox (et électrophiles) avec pour conséquence une activité antibactérienne. Différents antiseptiques iodés existent :

- ◇ la teinture d'iode (solution alcoolique de diiode) ou la solution de Lugol (ions I_3^- dans l'eau) ;
- ◇ les molécules iodées organiques (par exemple, le iodoforme CHI_3) ;
- ◇ les iodophores.

- /3 [5] L'élément iode se situe sur la 5^e période et 5^e colonne du bloc p. À quelle famille appartient-il ? Combien d'électrons de valence possède-t-il ? Quel est le numéro atomique de l'élément iode ?

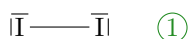
Réponse

Il appartient à la famille des **halogènes** ①. Il possède donc **7 électrons de valence** ①. On compte son nombre d'électrons : il en faut 18 pour compléter les 3 premières périodes, puis encore 18 (2 bloc s, 10 bloc d, 6 bloc p) pour la 4^e, et encore 17 pour arriver jusqu'à l'iode. On a donc $Z_{\text{I}} = 18 + 18 + 17 = 53$ ①.

- /2 [6] Donner (en justifiant) la représentation de LEWIS du diiode.

Réponse

Chaque atome d'iode possède 7 électrons de valence, donc le molécule de LEWIS du diiode possède 7 doublets ① d'électron. De plus, chaque atome d'iode doit vérifier la règle de l'octet. On trouve :



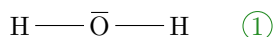
I/C L'eau

Données :

- ◇ L'unité de moment dipolaire appelé le Debye (D) : $\frac{1}{3}10^{-29} \text{ C} \cdot \text{m}$.
- ◇ La charge élémentaire : $e = 1,6 \times 10^{-19} \text{ C}$.
- ◇ La permittivité relative : $\varepsilon_r = 78,5$.

- /1 [7] Donner la formule de LEWIS de la molécule d'eau.

Réponse



- /7 [8] Qu'est-ce que l'électronégativité ? Comment augmente-t-elle dans une ligne et une colonne de la classification périodique ? Justifier.

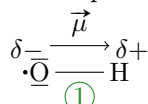
Expliquer alors pourquoi la liaison O–H est polarisée, et représenter son moment dipolaire avec un schéma.

Réponse

L'électronégativité traduit la tendance d'un élément à attirer les électrons ① d'une liaison chimique : plus χ est grand, plus un élément attire à lui les électrons.

- ◇ Elle augmente de bas en haut ① dans une colonne. En effet, les électrons des édifices les plus grands (en bas du tableau) sont moins attirés par le noyau puisque plus éloignés ① et écrantés par les électrons de cœur.
- ◇ Elle augmente de gauche à droite ① dans une ligne. En effet, les éléments **à gauche perdent** facilement leurs électrons pour atteindre la configuration du gaz noble le plus proche, alors que ceux **à droite gagnent** facilement des électrons. ①

Ainsi dans O–H, comme $\chi_{\text{O}} > \chi_{\text{H}}$ ①, on a un moment dipolaire de O vers H :



- [9] L'étude expérimentale permet de constater que la molécule d'eau est plane, coudée, faisant un angle de 104,45° avec une distance entre oxygène et hydrogène qui vaut 95,84 pm.

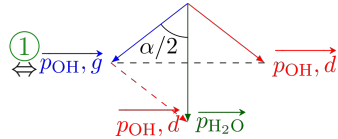
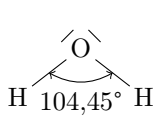
- /2 a - Comment interpréter le fait que l'angle ne soit pas celui qui existe dans un tétraèdre régulier ($109,5^\circ$) autour de son centre vers deux sommets ?

Réponse

Dans le modèle VSEPR, la **répulsion engendrée par un doublet non liant est plus importante** ① que celle liée aux électrons d'une liaison. L'atome d'oxygène est de type AX_2E_2 dans la molécule d'eau, et non AX_4E_0 . L'angle de valence est donc plus petit que celui existant dans un tétraèdre régulier. ①

- /3 b - Déterminer le moment dipolaire de l'eau connaissant $\mu_{O-H} = 1,51 \text{ D}$ et $(\widehat{HOH}) = 104,45^\circ$.

Réponse



On trouve $\cos\left(\frac{\alpha}{2}\right) = \frac{\mu_{H_2O}/2}{\mu_{OH}}$

$$\Leftrightarrow \mu_{H_2O} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2\mu_{OH} \cos(\alpha/2) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,85 \text{ D}$$

- /4 c - Écrire la norme du moment dipolaire $\|\vec{\mu}_{O-H}\|$ en fonction des données. Déterminer la charge partielle portée par l'hydrogène. L'exprimer en C puis en fraction de e la charge élémentaire. Quel est le pourcentage d'ionicité de la liaison ?

Réponse

On a $\|\vec{\mu}_{O-H}\| \stackrel{\textcircled{1}}{=} q\ell_{O-H} \Leftrightarrow q = \frac{\mu_{O-H}}{\ell_{O-H}}$ avec $\begin{cases} \mu_{O-H} = 1,51 \text{ D} = 5,03 \times 10^{-30} \text{ C}\cdot\text{m} \\ \ell_{O-H} = 95,84 \times 10^{-12} \text{ m} \end{cases}$

A.N. : $q \stackrel{\textcircled{1}}{=} 5,24 \times 10^{-20} \text{ C} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0,33e$

Par définition,

$$\delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{q}{e} \Leftrightarrow \delta = 0,33$$

- /6 d - Qu'est-ce que la liaison hydrogène et quelles sont les conditions pour qu'elle existe ? Quel type de solvant est l'eau ? Citer des conséquences de ces propriétés.

Réponse

Une **liaison hydrogène** s'établit entre un atome d'**hydrogène porté par un atome très électronégatif** ① (N, O ou F) et un autre atome B également très électronégatif, porteur d'au moins un **doublet non-liant** ① et neutre.

L'eau est un solvant **polaire et protique** ①. De plus il est **très dispersant** ① car ε_r est élevée.

L'eau est donc miscible ① avec des solvants polaires et protiques, et solubilise ① fortement tous les solides ioniques.

- /2 10 a - Indiquer ce qu'on appelle les interactions de VAN DER WAALS. Nommez les interactions possibles et préciser leur nature.

Réponse

Les interactions de VAN DER WAALS sont des interactions attractives ① dues à la force électrostatique intermoléculaires.

On peut distinguer les contributions des effets KEESOM, DEBYE et LONDON selon si ces interactions ont lieu entre deux molécules polaires, 1 polaire 1 polarisable, ou deux molécules polarisables respectivement. ①

- /3 b - Donnez un ordre de grandeur des énergies de liaison des trois grands types de liaison chimique possible (pas que VAN DER WAALS).

Réponse

$$\stackrel{\textcircled{1}}{E_{\text{covalente}}} \gg \stackrel{\textcircled{1}}{E_{\text{LH}}} \gg \stackrel{\textcircled{1}}{E_{\text{vdw}}}$$

$\approx 500 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} \quad \approx 20 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1} \quad \approx 1 \text{ kJ}\cdot\text{mol}^{-1}$

- /3 c - Selon vous le diiode est-il soluble dans l'eau ? Dans le cyclohexane ?

Réponse

Le diiode est une molécule **apolaire et aprotique** ①. Il est donc peu soluble dans l'eau ①.

Le cyclohexane étant une molécule **apolaire et aprotique**, le diiode ayant les mêmes caractéristiques, il sera soluble dans le cyclohexane ①.

/23 E2 Toboggans (D'après CCS TSI 2018)

Les toboggans font aujourd'hui partie des incontournables d'un centre aquatique. De nombreux toboggans présentent des enroulements plus ou moins complexes.

On étudie le toboggan présenté ci-contre et composé d'un enroulement hélicoïdal d'approximativement $n = 2,3$ tours. Le rayon moyen est estimé à $R = 2,0$ m et la hauteur de l'ensemble est $h = 4$ m.

On néglige les frottements. On note $\theta > 0$ la position angulaire d'une baigneuse dans le toboggan relativement à la position de départ, d'altitude h .



FIGURE 6.1 – Illustration.

Une baigneuse de masse m suit la trajectoire d'équation $r = R$, $z = \alpha\theta$, l'axe (Oz) étant orienté selon la **verticale descendante**.

- /2 1 Déterminer la valeur de α .

Réponse

$$h = z_{\max} \Leftrightarrow h = \alpha \times n \times 2\pi \Leftrightarrow \alpha = \frac{h}{2\pi n} \Leftrightarrow \alpha = 0,28 \text{ m} \cdot \text{rad}^{-1}$$



- /3 2 Sachant qu'on oriente l'axe vertical descendant, quelle est l'expression générale de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ en fonction de z ?

Réponse

L'énergie doit diminuer quand z augmente (de haut en bas), donc

$$\mathcal{E}_{p,p} = -mgz + \text{cte}$$



- /5 3 Calculer la valeur de la vitesse atteinte en sortie du toboggan, le départ se faisant sans vitesse initiale.

Réponse

Les frottements sont négligés, donc l'énergie mécanique \mathcal{E}_m se conserve :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{m,\text{init}} &= \mathcal{E}_{m,\text{fin}} \\ \text{Or } \mathcal{E}_{m,\text{init}} &= \frac{1}{2}mv_{\text{init}}^2 - mgz_{\text{init}} = 0 + 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{fin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 - mgh \\ &\Leftrightarrow v_{\text{fin}} = \sqrt{2gh} \Leftrightarrow v_{\text{fin}} = 8,86 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \end{aligned}$$



Afin d'éviter d'éventuelles collisions, le toboggan est équipé au point de départ d'un feu qui passe au vert toutes les t_f secondes. On impose une marge de $t_m = 5$ s en plus de la durée de parcours dans le toboggan.

- /2 4 Exprimer le vecteur vitesse dans la base cylindrique en fonction de R , α et $\dot{\theta}$.

Réponse

Le vecteur position est (avec les notations habituelles) :

$$\begin{aligned} \vec{OM} &= R\vec{e}_r + z\vec{e}_z \Leftrightarrow \vec{OM} = R\vec{e}_r + \alpha\theta\vec{e}_z \\ &\Leftrightarrow \vec{v} = R\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \alpha\dot{\theta}\vec{e}_z \end{aligned}$$



/2 [5] Exprimer l'énergie mécanique de la baigneuse en fonction de m , g , R , α , θ et $\dot{\theta}$.

Réponse

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2}m \left[(R\dot{\theta})^2 + (\alpha\dot{\theta})^2 \right] \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = -mgz + K \stackrel{\textcircled{1}}{=} -mg\alpha\theta + K.$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m \left[(R\dot{\theta})^2 + (\alpha\dot{\theta})^2 \right] - mg\alpha\theta + K$$

/6 [6] Dériver cette expression et en déduire, après résolution de l'équation obtenue, l'expression de $\theta(t)$.

Réponse

Puisqu'il n'y a pas de frottement, l'énergie mécanique se conserve dans le temps, donc $d\mathcal{E}_m/dt = 0 \stackrel{\textcircled{1}}{=}$:

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0 \Leftrightarrow m \left[(R^2\ddot{\theta}) + (\alpha^2\ddot{\theta}) \right] - mg\alpha\dot{\theta} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow (R^2 + \alpha^2)\ddot{\theta} - g\alpha\dot{\theta} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \quad \left. \vphantom{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0} \right\} \dot{\theta} \neq 0 \text{ constamment}$$

On trouve : $\ddot{\theta} = \frac{g\alpha}{R^2 + \alpha^2} \Rightarrow \dot{\theta} = \frac{g\alpha}{R^2 + \alpha^2}t + K_1 \Rightarrow \theta(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{g\alpha}{2(R^2 + \alpha^2)}t^2 + K_1t + K_2.$

On peut trouver les valeurs des constantes d'intégrations en utilisant les conditions initiales :

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \Rightarrow K_1 = K_2 = 0 \stackrel{\textcircled{1}}{=}$$

$$\Rightarrow \theta(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{g\alpha}{2(R^2 + \alpha^2)}t^2.$$

/3 [7] Calculer t_f . On prendra $g = 9,8 \text{ m/s}^2$.

Réponse

En inversant la relation précédente :

$$t \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{2\theta(R^2 + \alpha^2)}{g\alpha}}$$

La valeur de θ lorsque la baigneuse sort du toboggan est $\theta_{\max} = 2\pi \times n$. On a alors :

$$t_f \stackrel{\textcircled{1}}{=} t_m + \sqrt{\frac{4n\pi(R^2 + \alpha^2)}{g\alpha}} \Leftrightarrow t_f \stackrel{\textcircled{1}}{=} 11,5 \text{ s} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = 2,3 \\ R = 2,0 \text{ m} \\ \alpha = 0,28 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \\ g = 9,8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases}$$

/45 P1 Le haut-parleur électrostatique (D'après Centrale 2013 TSI)

Deux disques conducteurs de même rayon, parallèles, sont écartés d'une faible distance e . L'un d'eux est fixe (la base), l'autre constituant la membrane est mobile en translation selon l'axe Oz .

La membrane de surface S est rappelée vers la position $z = 0$ par la force de rappel élastique $\vec{F}_r = -kz\vec{u}_z$ (on considère donc $\ell_0 = 0$). L'air séparant les disques est assimilable, du point de vue électrostatique, au vide.

Lorsqu'on établit une différence de potentiel U entre les disques, il apparaît une charge électrique Q sur la base et une charge opposée $-Q$ sur la membrane. Ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque. On négligera l'effet du poids.

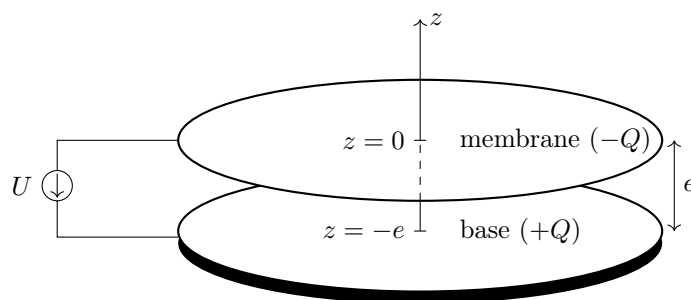


FIGURE 6.2 – Schéma du dispositif.

I/A Force exercée sur la membrane

La base étant assimilable à un plan infini, la charge portée par la base crée un champ électrique

$$\vec{E} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0} \vec{u}_z \quad \text{pour } z > -e$$

On peut montrer que la capacité du condensateur s'écrit $C = \frac{S\varepsilon_0}{e+z}$. Ainsi la capacité évolue en fonction de la distance $(e+z)$ séparant les deux armatures.

- /2 1 Rappeler la relation liant la tension U , la capacité C et la charge Q portée par les armatures d'un condensateur. En déduire l'expression de la charge Q en fonction de z , U et des constantes du problème.

Réponse

$$Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} CU \quad \text{donc} \quad Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{US\varepsilon_0}{e+z}$$

- /3 2 Déterminer la force électrique \vec{F}_e subie par la membrane. Est-elle attractive ou répulsive ?

Réponse

$$\vec{F}_e \stackrel{\textcircled{1}}{=} -Q\vec{E} = -\frac{Q^2}{2S\varepsilon_0} \vec{u}_z \Leftrightarrow \vec{F}_e \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)^2} \vec{u}_z$$

La force est attractive $\textcircled{1}$ car orientée selon $-\vec{u}_z$.

I/B Étude énergétique

- /2 3 Définir ce qu'est une force conservative et son lien avec l'énergie potentielle associée.

Réponse

Une force est dite conservative si **son travail ne dépend pas du chemin suivi** $\textcircled{1}$, c'est-à-dire qu'elle dérive d'une énergie potentielle :

$$\delta W(\vec{F}_e) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -d\mathcal{E}_p$$

- /6 4 Établir l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,e}(z)$ électrique. On prendra son origine en $z = 0$.

Réponse

On calcule le travail élémentaire $\delta W(\vec{F}_e) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{F}_e \cdot d\vec{OM}$, avec $d\vec{OM} \stackrel{\textcircled{1}}{=} dx \vec{u}_x + dy \vec{u}_y + dz \vec{u}_z$:

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F}_e) &= -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)^2} dz \stackrel{\textcircled{1}}{=} -d\left(-\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)}\right) = -d\mathcal{E}_{p,e} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,e}(z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)} + \underset{=cte}{A} \quad \text{or} \quad \mathcal{E}_{p,e}(0) = 0 \Rightarrow A \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2e} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,e}(z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2} \left(\frac{1}{e+z} - \frac{1}{e}\right) \end{aligned}$$

- /3 5 L'énergie mécanique de la membrane est-elle conservée ?

Réponse

La membrane, étudiée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, est soumise :

- $\textcircled{1} \diamond$ à la force de rappel élastique qui est une force conservative,
- $\textcircled{1} \diamond$ à la force électrique qui est une force conservative.

Donc le système est conservatif $\textcircled{1}$.

- /2 [6] Exprimer l'énergie potentielle totale du système $\mathcal{E}_p(z)$. On rappelle que l'origine de l'énergie potentielle est prise en $z = 0$.

Réponse

C'est la somme ① de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,el}$ et de l'énergie potentielle électrique. Comme l'énergie potentielle est nulle en $z = 0$, on en déduit que la constante de $\mathcal{E}_{p,el}$ est nulle, et ainsi :

$$\mathcal{E}_p(z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2}kz^2 - \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2} \left(\frac{1}{e+z} - \frac{1}{e} \right)$$

◇

- /3 [7] Expliquer en quoi l'étude de $\mathcal{E}_p(z)$ permet de prévoir l'ensemble des valeurs possibles de z .

Réponse

Le système est un système conservatif à un degré de liberté, donc $\mathcal{E}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{E}_c(z) + \mathcal{E}_p(z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \text{cte}$. Or $\mathcal{E}_c \geq 0$, d'où les valeurs possibles de z vérifient

$$\mathcal{E}_p(z) \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \mathcal{E}_m$$

◇

- /3 [8] Montrer que les positions d'équilibre possibles z_0 vérifient $z_0(e+z_0)^2 = A$. Donner l'expression de A .

Réponse

Les positions d'équilibre z_0 vérifient

$$\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}(z_0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \Leftrightarrow kz_0 + \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z_0)^2} = 0 \Leftrightarrow z_0(e+z_0)^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2k} \quad \text{avec} \quad A \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2k}$$

◇

- /6 [9] On étudie la fonction $f(z) = z(e+z)^2$ pour $z \in [-e, 0]$. Montrer qu'elle admet un minimum une valeur z_m à déterminer. Préciser la valeur de f en ce minimum. En déduire la valeur maximale U_m de U pour qu'il y ait deux positions d'équilibre z_1 et z_2 telles que $-e < z_1 < z_2 < 0$.

Réponse

Valeurs extrêmes :

◇ $f(-e) = 0$

◇ $f(0) = 0$

Étude de la dérivée :

◇ $f'(z) = (e+z)^2 + 2z(e+z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} (e+z)(3z+e)$

◇ $f'(z) = 0$ si $z = -e$ ou $z = -e/3$ ①

◇ en $z = -e$: maximum local de $f(z)$

◇ en $z = -e/3$: minimum de $f(z)$ ①

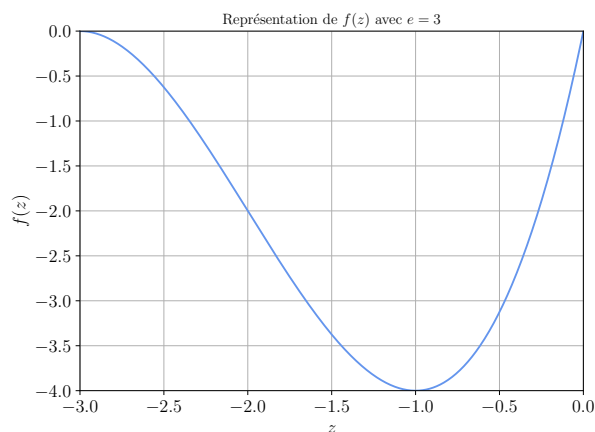


FIGURE 6.3 – Représentation de $f(z)$.

La fonction f admet un minimum en $z_m = -e/3$, alors $f(z_m) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -4e^3/27$.

On en déduit que pour $z \in [-e, 0]$, $f(z) \in [-4e^3/27, 0]$. Il faut donc que $A \in [-4e^3/27, 0]$:

$$-4e^3/27 \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2k} \leq 0 \quad \text{donc} \quad U \stackrel{\textcircled{1}}{\leq} \sqrt{\frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}} = U_m$$

◇

- /1 [10] Que valent z_1 et z_2 pour $U = U_m$?

Réponse

D'après la réponse à la question précédente, $z_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} z_2 = -e/3$.

◇

- /4 [11] Montrer que la position d'équilibre stable vérifie $z_0 > -e/3$.

Réponse

On étudie le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en z_0 :

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} k - \frac{S \varepsilon_0 U^2}{(e+z)^3} = k \left(1 - \frac{S \varepsilon_0 U^2}{k(e+z)^3} \right)$$

Or la position d'équilibre vérifie $\frac{S \varepsilon_0 U^2}{k} = -2z_0(e+z_0)^2$, donc

$$\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}(z_0) \stackrel{\textcircled{1}}{=} k \left(1 + \frac{2z_0}{e+z_0} \right)$$

Si la position d'équilibre z_0 est stable, alors $\frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}(z_0) \stackrel{\textcircled{1}}{>} 0$, soit

$$1 + \frac{2z_0}{e+z_0} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad z_0 \stackrel{\textcircled{1}}{>} -e/3$$



- /3 [12] Application numérique. On prend $z_0 = -e/100$ pour la position d'équilibre stable, $e = 3 \text{ mm}$, $S = 0,05 \text{ m}^2$, $k = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ et $\varepsilon_0 = 8,85 \times 10^{-12} \text{ F} \cdot \text{m}^{-1}$. Déterminer U et U_m .

Réponse

$$U \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{-z_0(e+z_0)^2 \cdot \frac{2k}{S \varepsilon_0}} \Leftrightarrow U \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,1 \text{ kV} \quad \text{et} \quad U_m = \sqrt{\frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}} \Leftrightarrow U_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} 4,3 \text{ kV}$$



I/C Dynamique

On étudie les petits mouvements de la membrane au voisinage de la position d'équilibre stable $z_0 = -e/100$ et on pose $z(t) = z_0 + \xi(t)$ avec $|\xi(t)| \ll e + z_0$.

- /4 [13] Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(t)$. Définir la pulsation propre en fonction de k , m , e et z_0 .

Réponse

On applique la loi de la quantité de mouvement à la membrane, projetée selon \vec{u}_z : $m \frac{d^2 z}{dt^2} = F(z) = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}$, (ou la conservation de l'énergie mécanique).

On effectue un développement limité $\textcircled{1}$ autour de z_0 : $m \frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dz}(z_0) - (z - z_0) \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}(z_0)$

Or $\ddot{z} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ddot{\xi}$, donc $\frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{1}{m} \frac{d^2 \mathcal{E}_p}{dz^2}(z_0) \xi = 0$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 \xi}{dt^2} + \frac{k}{m} \left(1 + \frac{2z_0}{e+z_0} \right) \xi \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

On pose donc la pulsation propre

$$\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{k}{m} \left(1 + \frac{2z_0}{e+z_0} \right)}$$



- /3 [14] La membrane est une feuille d'aluminium d'épaisseur $a = 20 \text{ mm}$, d'aire $S = 0,05 \text{ m}^2$ et de masse volumique $\rho = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$. Calculer la période propre T_0 du système.

Réponse

$$\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{m}{k} \left(\frac{e+z_0}{e+3z_0} \right)}$$

$$\Leftrightarrow T_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2\pi \sqrt{\frac{\rho a S}{k} \left(\frac{e+z_0}{e+3z_0} \right)}$$

$$\Leftrightarrow T_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 10,4 \text{ ms}$$

$$\text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 2,7 \times 10^3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3} \\ a = 20 \times 10^{-6} \text{ m} \\ S = 5 \times 10^{-2} \text{ m}^2 \\ k = 1000 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1} \\ e = 3 \times 10^{-3} \text{ m} \\ z_0 = -\frac{e}{100} = -3 \times 10^{-5} \text{ m} \end{cases}$$



/99 P2 Lentillage magnétique (D'après Banque PT 2017 et capes 2008)

La microscopie optique classique est limitée par la diffraction. Pour améliorer la résolution, on remplace les photons par des électrons de charge $q = -e$ et de masse m .

- /3 1 Définir la diffraction. Donner, en argumentant, un ordre de grandeur de la résolution d'un microscope optique fonctionnant dans le visible.

Réponse

La diffraction est un phénomène ondulatoire se produisant lors de l'interaction d'une onde de longueur d'onde λ avec un objet de dimension ① comparable à λ . La diffraction d'une onde engendre un étirement spatial ① de l'onde.

La résolution d'un microscope optique est donc de l'ordre de la longueur d'onde du visible, soit ① [400 ; 800] nm.



Les trois parties sont indépendantes.

II/A Aspect énergétique

Les électrons sont accélérés dans un canon à électrons (figure 6.4) constitué de deux armatures planes et parallèles, distantes de $d = 1$ cm et séparées par du vide quasi-parfait.

On applique entre les armatures une tension positive $U = V_1 - V_2$. On suppose que le champ électrique \vec{E} entre les armatures est uniforme.

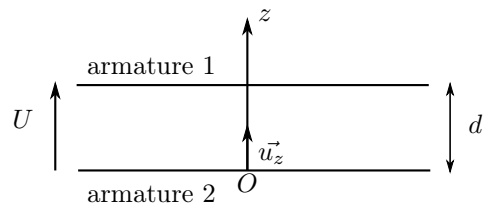


FIGURE 6.4 – Schéma du canon à électrons.

- /5 2 Représenter le champ électrique \vec{E} entre les armatures. Sur quelle armature les électrons doivent-ils être émis sachant que leur vitesse initiale est nulle? Exprimer la force électrique exercée sur l'électron en fonction de $E_0 = \|\vec{E}\|$, e et \vec{u}_z .

Réponse

Le champ électrique est orienté selon les potentiels

décroissants ①, donc $\vec{E} \text{ ① } - E_0 \vec{u}_z$.

La force électrique s'exerçant sur l'électron s'écrit $\vec{F}_e \text{ ① } - e\vec{E} = eE_0 \vec{u}_z$. Cette force est orientée selon $+\vec{u}_z$, donc les électrons doivent être émis depuis l'armature 2. ①

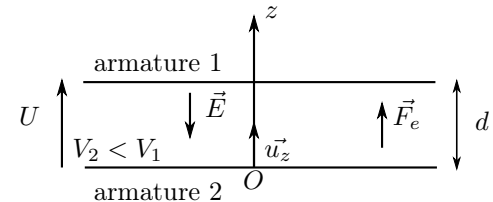


FIGURE 6.5 – Schéma complété ①

- /6 3 Déterminer l'expression de l'énergie potentielle électrique $\mathcal{E}_p(z)$ de l'électron situé à la distance z de l'armature 2 en fonction de z , puis écrire la relation entre $\mathcal{E}_p(z)$ et le potentiel $V(z)$. Montrer alors que $E_0 = \frac{U}{d}$ et donner l'expression de \vec{E} .

Réponse

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F}_e) &\text{ ① } \vec{F}_e \cdot d\vec{OM} \text{ ① } - d\mathcal{E}_p \\ &\Leftrightarrow eE_0 dz = -d\mathcal{E}_p \\ &\Leftrightarrow -d(-eE_0 z) = -d\mathcal{E}_p \end{aligned}$$

Ainsi

$$\mathcal{E}_p \text{ ① } - eE_0 z + \text{cte}$$

$$\begin{aligned} \text{Or,} \quad \mathcal{E}_p(z) &\text{ ① } - eV(z) \\ &\Rightarrow \mathcal{E}_p(d) - \mathcal{E}_p(0) = -e(V(d) - V(0)) = -eU \\ \text{Or} \quad \mathcal{E}_p(d) - \mathcal{E}_p(0) &= -eE_0 d \text{ ①} \\ \text{Donc} \quad E_0 = U/d &\Rightarrow \vec{E} \text{ ① } - \frac{U}{d} \vec{u}_z \end{aligned}$$

On donne les valeurs numériques approchées :

$$\frac{e}{m} \approx 2 \times 10^{11} \text{ SI} \quad \text{et} \quad \frac{h}{m} \approx 7 \times 10^{-4} \text{ SI}$$

où h est la constante de Planck intervenant à la question ⑤.

- /8 [4] Exprimer la vitesse v atteinte par les électrons lorsqu'ils arrivent sur l'armature opposée, en fonction de U , e et m . Calculer v sachant que $U = 1 \times 10^5 \text{ V}$. Commenter l'ordre de grandeur obtenu.

Réponse

L'électron, assimilable à un point matériel M de masse m , est étudié dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen ①. Il n'est soumis qu'à la force électrique (on néglige le poids ①) qui est une force conservative ①. Donc $\mathcal{E}_m = \text{cte}$ ①. Ainsi entre $z = 0$ et $z = d$:

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m(0) &= -eV(0) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_m(d) = -eV(d) + \frac{1}{2}mv^2 \\ \Rightarrow v &= \sqrt{\frac{2eU}{m}} \quad \text{car} \quad U = V(d) - V(0) \\ \text{A.N. : } v &\underline{=} 2 \times 10^8 \text{ m.s}^{-1} \end{aligned}$$

Donc la particule est relativiste. ①



On utilisera pour la question suivante la définition de la quantité de mouvement dans l'hypothèse d'une particule non-relativiste. On peut montrer qu'en considérant la particule comme étant relativiste, on aboutit à une longueur d'onde du même ordre de grandeur.

- /2 [5] On donne la relation de DE BROGLIE définissant la longueur d'onde d'une particule quantique : $p = h/\lambda$, avec p la quantité de mouvement de la particule. Calculer la longueur d'onde λ associée aux électrons ainsi accélérés.

Réponse

Pour une particule non-relativiste, $p = mv$ ①, donc $\lambda = 3,5 \times 10^{-12} \text{ m}$ ①.



II/B

Défecteur magnétique

Le rôle d'un déflecteur magnétique est simplement de dévier le faisceau d'électrons.

On suppose qu'un électron de vitesse \vec{v}_0 arrive dans une zone où règne un champ magnétique uniforme \vec{B} perpendiculaire au vecteur vitesse. Il n'y a plus de champ électrique.

- /6 [6] Établir le système puis justifier le fait que le mouvement de l'électron est uniforme.

Réponse

◇ **Système** : électron, assimilé à un point matériel de masse m et de charge q , référentiel du laboratoire supposé galiléen. ①

◇ **BDF** : **Poids** négligeable ① devant \vec{F}
Force de LORENTZ $\vec{F} \underline{=} -e(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B})$

À l'intérieur du déflecteur, seule la force magnétique $\vec{F}_m = e\vec{v} \wedge \vec{B}$ existe. Ainsi, d'après le TPC,

$$\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} \underline{=} -e \underbrace{\vec{v} \wedge \vec{B} \cdot \vec{v}}_{\substack{\perp \vec{v} \\ =0}} \underline{=} 0 \quad \text{soit} \quad mv \frac{dv}{dt} = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\frac{dv}{dt} \underline{=} 0}$$

Ainsi la trajectoire est uniforme.



- /5 [7] On admet que la trajectoire est circulaire. On travaillera dans le repère $(C, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ avec C le centre du cercle. Donner le repérage et exprimer \vec{a} en fonction de v_0 puis tracer cette trajectoire, en faisant clairement apparaître les vecteurs \vec{v}_0 , \vec{B} et $\vec{F}(0)$.

Placer le centre C de la trajectoire circulaire, ainsi que la base polaire $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ de centre C . L'axe de référence pour l'angle θ sera pris parallèle à \vec{v}_0 et passant par C .

Réponse

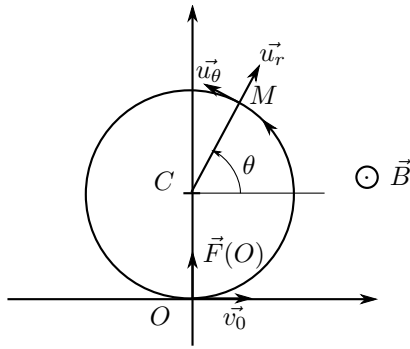


FIGURE 6.6 – Schéma ②

$$\begin{aligned}
 \overrightarrow{CM} &= R \vec{u}_r \\
 \Rightarrow \vec{v} &= R \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\
 \Rightarrow \vec{a} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} R \ddot{\theta} \vec{u}_\theta - R \dot{\theta}^2 \vec{u}_r \\
 &= 0 \text{ car uniforme } \textcircled{1} \\
 \Leftrightarrow \vec{a} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{v_0^2}{R} \vec{u}_r
 \end{aligned}$$

/3 8 Déterminer l'expression du rayon R du cercle décrit en fonction de m , v_0 , e et B .

PFD :

Réponse

$$m \vec{a} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{F}_m$$

$$\Leftrightarrow -\frac{mv_0^2}{R} \vec{u}_r = -qv_0 \vec{u}_\theta \wedge B \vec{u}_z \stackrel{\textcircled{1}}{=} -ev_0 B \vec{u}_r$$

$$\Leftrightarrow R \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{mv_0}{eB}$$

II/C Lentille magnétique

Le contrôle de la focalisation du faisceau électronique dans le microscope électronique est possible en utilisant des lentilles magnétiques. On s'intéresse ici à une lentille magnétique, modélisée par une bobine de N tours confondus, circulaires de rayon a , de centre O , d'axe Oz et parcourue par un courant permanent I . Cette bobine est obtenue par l'enroulement d'un fil électrique.

En considérant les symétries et les invariances du bobinage, on peut justifier que le champ magnétique est indépendant de θ et ne possède pas de composante orthoradiale (selon \vec{u}_θ). On peut alors écrire :

$$\vec{B}(M) = B_r(r, z) \vec{e}_r + B_z(r, z) \vec{e}_z$$

En pratique, le faisceau électronique passe dans le domaine $r \ll a$. Dans ce cas, on peut se contenter d'une expression approchée du champ \vec{B} au voisinage de l'axe Oz :

$$\vec{B}(M) \approx -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \vec{e}_r + B_z(0, z) \vec{e}_z$$

avec $B_z(0, z) = \frac{B_0}{(1+z^2/a^2)^{3/2}}$ le champ magnétique sur l'axe Oz et $B_0 = \frac{\mu_0 NI}{2a}$ le champ magnétique en O .

Un point M de l'espace sera repéré par ses coordonnées cylindriques (r, θ, z) d'axe Oz et de centre O . On place en un point P de l'axe Oz , en amont de la lentille magnétique, une source ponctuelle d'électrons. On considère un électron émis depuis le point P avec une vitesse \vec{v}_0 . On ajoute les hypothèses simplificatrices suivantes à l'étude :

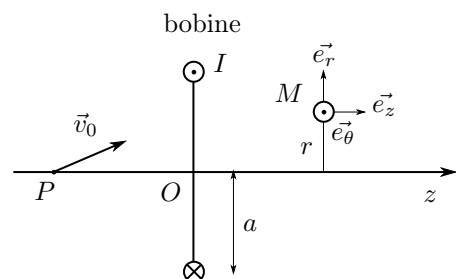


FIGURE 6.7 – Schématisation.

- ◇ L'électron est supposé non relativiste.
- ◇ L'électron ne subit que la force magnétique due à la lentille.
- ◇ Le vecteur vitesse initial \vec{v}_0 en P est dans le plan méridien $\theta = 0$ et forme un angle α avec l'axe Oz .
- ◇ L'angle α est faible ($\alpha \ll 1$) et la trajectoire ultérieure de l'électron reste dans le domaine $r \ll a$.

- /3 [9] À quelle approximation d'optique une de ces hypothèses fait-elle penser ? On définira cette approximation et on précisera les conséquences.

Réponse

La dernière hypothèse fait penser aux conditions de GAUSS ① consistant à ne considérer que des rayons paraxiaux (proches de l'axe optique et faiblement inclinés par rapport à celui-ci). ①

Dans ces conditions, il y a stigmatisme et aplanétisme approchés. ①

- /6 [10] Déterminer l'ordre de grandeur de la valeur de champ magnétique à partir de laquelle on peut ne pas tenir compte du poids de l'électron dans l'étude de son mouvement. On supposera que l'ordre de grandeur de la vitesse de l'électron est $1 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Conclure.

Réponse

L'ordre de grandeur de la force magnétique est $F_m = evB$ ①. Le poids s'exprime $P = mg$ ①. On veut que $P/F_m \ll 1$:

$$\frac{mg}{evB} \ll 1 \Leftrightarrow \boxed{\frac{mg}{B} \gg \frac{ev}{1}}$$

$$\text{A.N. : } B \gg 5 \times 10^{-19} \text{ T}$$

Il faut donc que B soit supérieur à $5 \times 10^{-19} \text{ T}$, ce qui est une valeur extrêmement faible. Donc il est raisonnable de négliger le poids. ①

- /4 [11] Exprimer l'accélération de M en coordonnées cylindriques, puis montrer que sa composante orthoradiale (selon \vec{u}_θ) peut être mise sous la forme $\frac{1}{r} \frac{d}{dt} [r^2 \dot{\theta}]$.

Réponse

On donne le repérage en coordonnées cylindriques :

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r + z \vec{e}_z \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta + \dot{z} \vec{e}_z \Rightarrow \vec{a} = (\ddot{r} - r \dot{\theta}^2) \vec{e}_r + (r \ddot{\theta} + 2 \dot{r} \dot{\theta}) \vec{e}_\theta + \ddot{z} \vec{e}_z$$

On remarque que l'accélération orthoradiale peut s'écrire sous la forme :

$$\frac{1}{r} \frac{d}{dt} \left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \frac{1}{r} (2r \dot{r} \dot{\theta} + r^2 \ddot{\theta}) = 2 \dot{r} \dot{\theta} + r \ddot{\theta}$$

- /6 [12] En utilisant le résultat précédent, en déduire les trois équations différentielles du mouvement, que l'on notera (1), (2) et (3) et qui correspondent respectivement à la projection du principe fondamental de la dynamique sur \vec{e}_r , \vec{e}_θ et \vec{e}_z . Expliciter toutes les dérivées temporelles avec des $\frac{d}{dt}$.

Réponse

On exprime la force de Lorentz dans la base cylindrique :

$$\vec{F}_m = -e \vec{v} \wedge \vec{B} = -e \begin{pmatrix} \dot{r} \\ r \dot{\theta} \\ \dot{z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \\ 0 \\ B_z(0,z) \end{pmatrix} = -e \begin{pmatrix} r \dot{\theta} B_z(0,z) \\ -\frac{r}{2} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \dot{z} - \dot{r} B_z(0,z) \\ -r \dot{\theta} \left(-\frac{r}{2} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \right) \end{pmatrix}$$

En projetant le PFD dans la base cylindrique, on obtient les équations :

$$\frac{d^2 r}{dt^2} - r \left(\frac{d\theta}{dt} \right)^2 = -\frac{e}{m} r \frac{d\theta}{dt} B_z(0,z) \quad (6.1)$$

$$\frac{d}{dt} \left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \frac{e}{m} r \left[\frac{dr}{dt} B_z(0,z) + \frac{r}{2} \frac{dz}{dt} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \right] \quad (6.2)$$

$$\frac{d^2 z}{dt^2} = -\frac{e}{2m} r^2 \frac{d\theta}{dt} \frac{dB_z(0,z)}{dz} \quad (6.3)$$

/3 [13] Montrer que l'équation (2) peut s'écrire

$$\frac{d}{dt} \left[r^2 \frac{d\theta}{dt} \right] = \frac{e}{2m} \frac{d}{dt} [r^2 B_z(0, z)]$$

En déduire la relation $\frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} B_z(0, z)$.

Réponse

Le second membre de l'équation (6.2) peut s'écrire :

$$\begin{aligned} \frac{e}{2m} \frac{d}{dt} [r^2 B_z(0, z)] &= \frac{e}{2m} \left[2r \dot{r} B_z(0, z) + r^2 \dot{z} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \right] \\ &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{e}{m} r \left[\frac{dr}{dt} B_z(0, z) + \frac{r}{2} \frac{dz}{dt} \frac{dB_z(0, z)}{dz} \right] \end{aligned}$$

Par intégration de l'équation (6.2), $r^2 \frac{d\theta}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{e}{2m} r^2 B_z(0, z) + \text{cte}$

Or $r(t=0) = 0 \Rightarrow \text{cte} = 0 \stackrel{\textcircled{1}}{=}$

$$\Leftrightarrow \frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} B_z(0, z)$$



/6 [14] L'équation (3) présente un second membre en r^2 négligeable dans le cadre de cette étude (car d'ordre 2 en r/a). Que vaut alors $\frac{dz}{dt}$? On rappelle que l'angle α est faible.

En déduire, en partant de l'équation (1), que l'évolution radiale $r(z)$ de l'électron vérifie l'équation différentielle

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{e^2}{4m^2 v_0^2} r B_z^2(0, z) = 0 \quad (6.4)$$

Réponse

Par intégration de l'équation (6.3), $\frac{dz}{dt} = \text{cte} = v_0 \cos(\alpha) \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} v_0$. Par l'équation (6.1), en remplaçant $\dot{\theta}$ par son expression :

$$\ddot{r} - r \frac{e^2}{4m^2} B_z^2(0, z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} - \frac{e}{m} r \times \frac{e}{2m} B_z(0, z) \times B_z(0, z) \Leftrightarrow \ddot{r} + r \frac{e^2}{4m^2} B_z^2(0, z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

Or

$$\begin{aligned} \frac{dr}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{dr}{dz} \cdot \frac{dz}{dt} &\approx v_0 \frac{dr}{dz} \\ \Rightarrow \frac{d^2 r}{dt^2} &\approx v_0 \frac{d^2 r}{dz^2} \frac{dz}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} v_0^2 \frac{d^2 r}{dz^2} \end{aligned}$$

Ainsi

$$\frac{d^2 r}{dz^2} + \frac{e^2}{4m^2 v_0^2} r B_z^2(0, z) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$



/4 [15] On propose sur les figures 6.8 et 6.9 deux familles de tracés de fonctions $r(z)$ partant d'un point d'annulation avec un angle de départ α variable. Quelle figure représente effectivement un champ de solutions possible de l'équation (6.4) (on justifiera la réponse)? Le système étudié joue-t-il bien son rôle attendu de lentille?

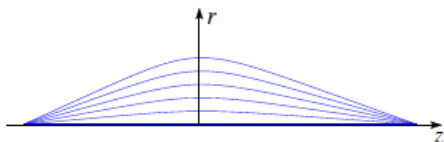


FIGURE 6.8 – Proposition 1 de $r(z)$.

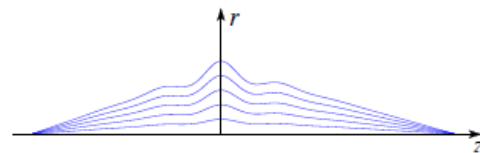


FIGURE 6.9 – Proposition 2 de $r(z)$.

Réponse

D'après l'équation (6.4), $\frac{d^2 r}{dz^2} < 0 \stackrel{\textcircled{1}}{=}$, donc la courbe $r(z)$ est forcément concave $\stackrel{\textcircled{1}}{=}$. Cette constatation est en accord avec la figure de gauche. $\stackrel{\textcircled{1}}{=}$

On constate que les courbes $r(z)$ s'annulent en un point de l'axe Oz , avec $z > 0$. Ce point P' est le conjugué du point P ①. Donc le système joue bien le rôle d'une lentille.



On ajoute à présent l'hypothèse de lentille mince, c'est-à-dire que le champ magnétique du bobinage n'intervient que sur une zone faible d'épaisseur comprise entre deux plans Π et Π' , de positions $-z_0$ et z_0 avec $z_0 \ll OP$ (figure 6.10).

Dans ces conditions, on peut montrer que la distance focale est approximativement donnée par

$$f' = \frac{32m^2v_0^2}{3\pi ae^2 B_0^2}$$

Dans ce cadre, on peut toujours écrire que

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2m} B_z(0, z)$$

et l'équation différentielle sur le mouvement radial $r(z)$ est utilisable sous la forme approchée

$$\frac{d^2r}{dz^2} \approx -\frac{e^2}{4m^2v_0^2} r_0 B_z^2(0, z)$$

où r_0 est une valeur approchée de $r(z)$ (à l'ordre zéro en r/a) entre les plans Π et Π' .

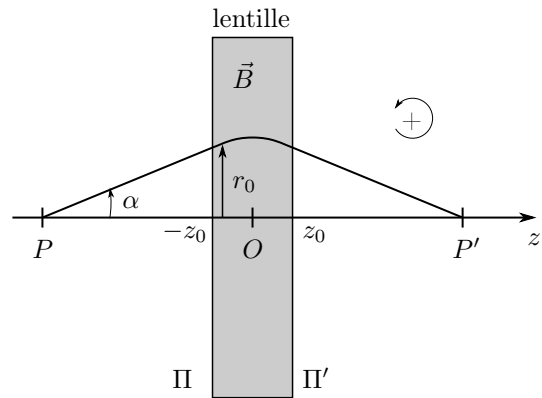


FIGURE 6.10 – Schéma de la lentille mince.

- /2 16 Pourquoi la trajectoire d'un électron seul est forcément rectiligne en dehors de la zone de champ magnétique ?

Réponse

En dehors de la zone de champ magnétique, l'électron n'est soumis qu'au poids qui est négligeable devant tout éventuel résidu de champ magnétique, donc à aucune force ①. Donc d'après le principe d'inertie, il est animé d'un mouvement de translation rectiligne uniforme. ①



- /6 17 Exprimer l'angle d'incidence α de l'électron en fonction de r_0 et de la distance algébrique \overline{OP} . Attention au sens de comptage positif des angles. L'exprimer alors comme une valeur de $\frac{dr}{dz}$ en un certain point.

On note P' le point de focalisation du rayon électronique, issu de la lentille, sur l'axe Oz et on pose α' l'angle d'émergence de la zone magnétique. Préciser sur une figure l'angle α' et son orientation, et exprimer de même α' en fonction de r_0 et de $\overline{OP'}$ puis en fonction de $\frac{dr}{dz}$.

Réponse

$$\tan(\alpha) = -\frac{r_0}{\overline{OP}} \approx \alpha = \frac{dr}{dz}(-z_0) \quad \text{et} \quad \alpha' < 0 \Rightarrow \tan(\alpha') = -\frac{r_0}{\overline{OP'}} = \frac{dr}{dz}(z_0)$$



- /7 18 Montrer alors que le système vérifie une loi de conjugaison de Descartes de lentille mince de centre O et de focale f' telle que

$$\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{f'} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4m^2v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0, z) dz$$

Réponse

$$\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} = \frac{1}{r_0} (\alpha' - \alpha)$$

Or

$$\alpha' - \alpha = \frac{dr}{dz}(z_0) - \frac{dr}{dz}(-z_0) = \int_{-z_0}^{z_0} \frac{d^2r}{dz^2} dz$$

De plus

$$\int_{-z_0}^{z_0} \frac{d^2r}{dz^2} dz = -\frac{e^2 r_0}{4m^2v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0, z) dz$$

Ainsi

$$-r_0 \left(\frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} \right) = -\frac{e^2 r_0}{4m^2v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0, z) dz$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{\overline{OP'}} - \frac{1}{\overline{OP}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{e^2}{4m^2v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0,z) dz$$

On pose alors la distance focale

$$\frac{1}{f'} = \frac{e^2}{4m^2v_0^2} \int_{-z_0}^{+z_0} B_z^2(0,z) dz$$



- /4 19 Montrer que, pendant le passage de l'électron dans la zone de champ magnétique, l'électron ne reste pas dans un même plan et qu'il y a un angle de rotation $\Delta\theta$ autour de l'axe Oz de la trajectoire de l'électron qui vaut

$$\Delta\theta = \frac{e}{2mv_0} \int_{-z_0}^{z_0} B_z(0,z) dz$$

Réponse

$$\frac{d\theta}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{d\theta}{dz} \frac{dz}{dt} \approx \frac{d\theta}{dz} v_0 \quad \text{donc} \quad \frac{d\theta}{dz} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{v_0} \frac{d\theta}{dt} = \frac{e}{2mv_0} B_z(0,z)$$

On intègre par rapport à z :

$$\Delta\theta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \int_{-z_0}^{z_0} \frac{d\theta}{dz} dz \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{e}{2mv_0} \int_{-z_0}^{z_0} B_z(0,z) dz$$



Dans le cas de la spire, les intégrales pouvant être étendues de $-\infty$ à $+\infty$, un calcul non demandé donne

$$\Delta\theta = \frac{aeB_0}{mv_0}$$

- /2 20 Quel est le signe de f' ? Conclure.

Réponse

$f' > 0$ $\textcircled{1}$, donc la lentille est convergente $\textcircled{1}$.



- /2 21 Sur quels paramètres peut-on jouer pour réduire f' à tension accélératrice U fixée ?

Réponse

Pour diminuer f' , il faut augmenter $aB_0^2 = \frac{N^2 I^2}{a}$. On peut augmenter l'intensité I $\textcircled{1}$, ou diminuer le rayon a $\textcircled{1}$ des spires.



- /2 22 On donne $B_0 = 1,0 \text{ T}$, $a = 1,0 \text{ mm}$ et on choisit la tension accélératrice U de sorte que $v_0 = 2,0 \times 10^8 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$. Calculer f' et $\Delta\theta$.

Réponse

$$f' \stackrel{\textcircled{1}}{=} 3,4 \text{ mm} \quad \text{et} \quad \Delta\theta \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1 \text{ rad} = 57^\circ$$



- /4 23 Les aberrations interviennent aussi avec une lentille magnétique. Il existe notamment l'aberration dite « de charge d'espace » qui n'existe pas en optique classique. Quelle en est selon vous l'origine ? Pourquoi la réduction de cette aberration passe par l'utilisation de faisceaux électroniques peu denses ?

Réponse

Les électrons sont des particules chargées $\textcircled{1}$ pouvant interagir entre eux par l'interaction électromagnétique. Ce n'est pas le cas des photons $\textcircled{1}$ qui sont des particules non chargées.

La répulsion $\textcircled{1}$ entre les électrons rend la focalisation du faisceau électronique plus difficile. Cet effet est d'autant plus important $\textcircled{1}$ que le faisceau électronique est dense.

