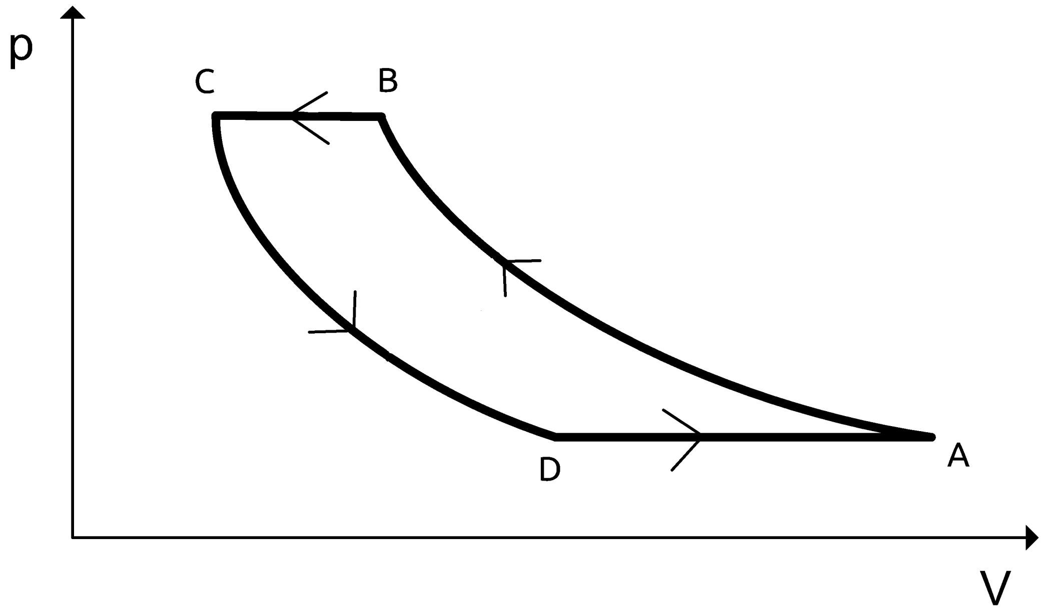
Sujet 1 – corrigé

I Pompe à chaleur d'un gaz parfait

Une pompe à chaleur effectue le cycle de Joule inversé suivant. L'air pris dans l'état A à la température T_0 et de pression P_0 est comprimé suivant une adiabatique réversible jusqu'au point B où il atteint la pression P_1. L'air est ensuite refroidi à pression constante et atteint la température finale de la source chaude T_1 correspondant à l'état C. L'air est encore refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique réversible pour atteindre l'état D de pression P_0. Il se réchauffe enfin à pression constante au contact de la source froide et retrouve son état initial. L'air est considéré comme un gaz parfait de rapport des capacités thermiques $\gamma = 1{,}4$ indépendant de la température. On pose $\beta = 1 - \frac{1}{\gamma}$ et $\alpha = \frac{P_1}{P_0}$.
On prendre $T_0 = 283\text{K}$, $T_1 = 298\text{K}$, $\alpha = 5$ et $R = 8{,}31\text{J} \cdot \text{K}^{-1}\text{mol}^{-1}$.

1. Représenter le cycle parcouru par les gaz dans un diagramme (P,v).
   Réponse :



2. Rappeler les conditions nécessaires pour assurer la validité des lois de Laplace. Donner la loi de Laplace relative à la pression et la température, et la réécrire en fonction de β.
   Réponse :
   Pour appliquer la loi de Laplace, il faut :
   - que le système soit un gaz parfait
   - que la transformation soit isentropique.

$$T^{\gamma} P^{1-\gamma} = \text{cst}.$$

   Avec la notation de l'exercice, on peut écrire cette relation :

$$TP^{-\beta} = \text{cst'}.$$

3. En déduire l'expression des températures T_B et T_D des états B et D en fonction de T_0, T_1, α et β.

   Réponse :
   On applique donc la loi de Laplace lors des deux transformations adiabatiques réversibles :

$$T_0 P_0^{-\beta} = T_B P_1^{-\beta} \quad ; \quad T_1 P_1^{-\beta} = T_D P_0^{-\beta}.$$

On trouve :

$$\boxed{T_B = T_0\alpha^{\beta}} \quad ; \quad \boxed{T_D = T_1\alpha^{-\beta}}.$$

4. Exprimer l'efficacité e de la pompe à chaleur en fonction des transferts thermiques.
Réponse :
L'efficacité de la pompe à chaleur est :

$$e = \frac{|Q_c|}{|W|} = \frac{-Q_{BC}}{W}.$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur un cycle (puisque l'énergie interne est une fonction d'état) :

$$W + Q_{BC} + Q_{DA} = 0.$$

Finalement

$$\boxed{e = \frac{1}{1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}}}.$$

5. En déduire l'expression de e en fonction de α et β. Donner sa valeur numérique.
Réponse :
On peut appliquer le premier principe de la thermodynamique aux transformations BC et DA qui sont isobares :

$$\Delta_{BC}H = Q_{BC} \quad ; \quad \Delta_{DA}H = Q_{DA}.$$

Puisque le système est un gaz parfait :

$$\Delta_{BC}H = C_p(T_C - T_B) \quad ; \quad \Delta_{DA}H = C_p(T_A - T_D).$$

Finalement :

$$\frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \frac{T_0 - T_1\alpha^{-\beta}}{T_1 - T_0\alpha^{\beta}} = \boxed{-\alpha^{-\beta}}.$$

L'efficacité est donc :

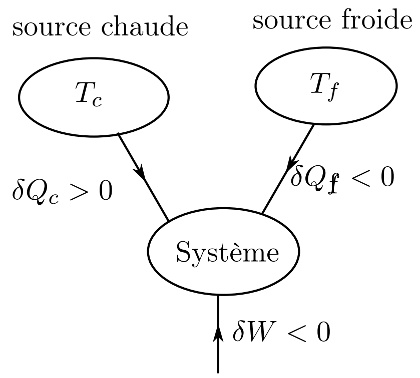
$$\boxed{e = \frac{1}{1 - \alpha^{-\beta}} = 2{,}7}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Moteur ditherme fonctionnant avec des pseudo-sources

Soit un moteur réversible fonctionnant entre deux sources de même capacité thermique, $C = 4{,}0 \times 10^5\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}$, dont les températures initiales respectives sont $T_{f,0} = 10\,^\circ\mathrm{C}$ et $T_{c,0} = 100\,^\circ\mathrm{C}$. Ces températures ne sont pas maintenues constantes.

1. Donner le schéma de principe de ce moteur au cours d'un cycle en indiquant par des flèches le sens des échanges de chaleur et de travail. On désignera par T_c la température de la source chaude et par T_f celle de la source froide. On définira des échanges énergétiques élémentaires δQ_c, δQ_f et δW. On pourra supposer les températures des sources constantes au cours d'un cycle.
Réponse :
On note les échanges comme des échanges élémentaires au cours d'un cycle, car ces grandeurs évoluent entre chaque cycle. Par convention, ce sont des grandeurs algébriques reçues par le système.



2. Exprimer la température T des deux sources quand le moteur s'arrête de fonctionner en fonction de $T_{f,0}$ et $T_{c,0}$. Il sera utile d'appliquer le second principe au système subissant N cycles jusqu'à l'arrêt du moteur. Calculer T.
Réponse :
Le moteur s'arrête quand les températures des deux sources sont égales $T_{c,f} = T_{f,f} = T$.
   - second principe appliqué au système Σ au cours d'un cycle réversible :
   $$dS = 0 = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f}$$
   On a supposé les températures des deux sources constantes au cours d'un cycle.
   - premier principe appliqué sur la source chaude au cours d'un cycle :
   $$dU_c = -\delta Q_c = C dT_c \qquad \Longrightarrow \qquad \delta Q_c = -C dT_c > 0 \quad \text{car} \quad dT_c < 0$$
   - premier principe appliqué sur la source froide au cours d'un cycle :
   $$dU_f = -\delta Q_f = C dT_f \qquad \Longrightarrow \qquad \delta Q_f = -C dT_f \quad \text{car} \quad dT_f > 0$$
   - On remplace dans l'expression du second principe, et on intègre au cours des N cycles :
   $$dS = 0 = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dT_c}{T_c} + \frac{dT_f}{T_f} = 0$$
   $$\int_{T_{c,0}}^{T} \frac{dT_c}{T_c} + \int_{T_{f,0}}^{T} \frac{dT_f}{T_f} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{T^2}{T_{c,0}T_{f,0}}\right) = 0$$
   $$\boxed{T = \sqrt{T_{c,0}T_{f,0}} = 325\,\mathrm{K}}$$

3. Exprimer le travail reçu W par ce moteur jusqu'à son arrêt en fonction de C, T, $T_{f,0}$ et $T_{c,0}$. Calculer W et interpréter le signe.
Réponse :
On applique le premier principe au système sur N cycles :

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad W = -(Q_c + Q_f)$$

$$\boxed{W = C(2T_f - T_{c,0} - T_{f,0}) = -2{,}5 \times 10^6\ \mathrm{J} < 0}$$

Le travail reçu par le système est négatif. C'est bien un moteur !

4. Exprimer, puis calculer le rendement global η. Comparer avec le rendement théorique maximal que l'on pourrait obtenir si les températures initiales des deux sources restaient constantes.
Réponse :
Expression du rendement :

$$\boxed{\eta = -\frac{W}{Q_c} = \frac{2T - T_{c,0} - T_{f,0}}{T_f - T_{c,0}} = 13\%}$$

Rendement maximal de Carnot :

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{f,0}}{T_{c,0}} = 24\%$$

Bien que les cycles soient réversibles, le fait que les sources ne soient pas des thermostats diminue le rendement.

Sujet 3 – corrigé

I Variation d'entropie pour N transformations

Soit n moles de gaz ($n = 1$) parfait à la pression $p = 1$ bar et à température la $T_0 = 450\,\mathrm{K}$ (état 0). On comprime ce gaz de la pression p à $p' = 10$ bar de façon réversible et isotherme, puis, on détend le gaz de façon réversible et adiabatique de p' à p (état 1).

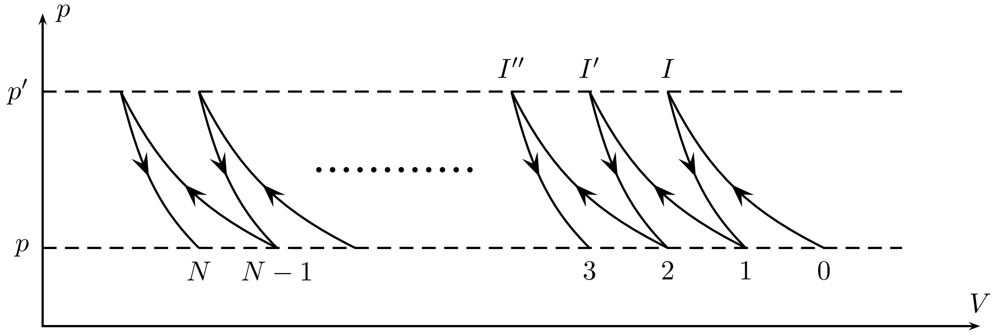
1. Représentez la suite des transformations dans un diagramme de Watt (p,V).
Réponse :
Lors de la transformation menant de l'état 0 (p,T_0) à l'état 1 (p,T_1), le système { gaz parfait monoatomique } subit d'abord une compression isotherme réversible ($pV = Cte$: branche d'hyperbole dans le diagramme de Watt) de p à p'.

Il se situe alors dans un état intermédiaire (p',T_0) avant de subir une détente adiabatique réversible ($pV^\gamma = Cte$: courbe de pente plus raide dans le diagramme de Watt) de p' à p.

On résume cette suite de transformations dans le tableau suivant.

État 0	isotherme	État Intermédiaire (I)	adiab rév	État 1
$T_0 = 450$ K	$\longrightarrow$	T_0	$\longrightarrow$	T_1
$p = 1$ bar	$pV = Cte$	$p' = 10$ bar	$pV^\gamma = Cte$	p

On trace enfin l'allure de la transformation (état 0 → état intermédiaire → état 1 : $0 \to I \to 1$) sur la figure ci-dessous.



2. Calculez la température finale T_1 du gaz ainsi que la variation d'entropie ΔS_1 en fonction de n, p et p' et R la constante des gaz parfaits (On pourra utiliser l'expression de C_p en fonction de γ pour simplifier le résultat). Faire l'application numérique.
Réponse :
Pour déterminer T_1, on peut utiliser une relation de Laplace entre l'état I et l'état 1 car la transformation est adiabatique réversible et le système est un gaz parfait (conditions d'application remplies). Ainsi, $pV = RT \Rightarrow V = \frac{RT}{p}$ et $pV^\gamma = Cte \Rightarrow p^{1-\gamma}.T^\gamma = Cte$ avec $\gamma = \frac{C_p}{C_v} = \frac{5/2}{3/2} = \frac{5}{3}$. D'où entre I et 1

$$p'^{1-\gamma}.T_0^\gamma = p^{1-\gamma}.T_1^\gamma \Rightarrow T_1 = T_0\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} \simeq 179 \text{ K}$$

Puis pour calculer la variation d'entropie $\Delta S_1 = S_1 - S_0$ du gaz, on utilise d'abord le fait que S est une fonction d'état : peu importe le chemin suivi. La pression initiale et la pression finale sont les mêmes, on peut donc utiliser directement la formule donnée : $S_m(T_f) - S_m(T_i) = C_{p,m} \ln \frac{T_f}{T_i} \Rightarrow S(T_f) - S(T_i) = C_p \ln \frac{T_f}{T_i}$.

On a affaire à un GP donc $C_p = \frac{\gamma}{\gamma-1}nR$ d'où $S(T_f) - S(T_i) = \frac{\gamma}{\gamma-1}nR\ln\left(\frac{p'}{p}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = \frac{\gamma}{\gamma-1}nR\frac{1-\gamma}{\gamma}\ln\left(\frac{p'}{p}\right) = -nR\ln\left(\frac{p'}{p}\right)$ A.N. $-8.314\ln(10) = -19{,}1$ J/K.

3. On recommence la même opération depuis l'état 1 $(p{,}T_1) \rightarrow$ état 2 $(p{,}T_2) \rightarrow \ldots \rightarrow$ état N $(p{,}T_N)$. Complétez le diagramme de Watt et déterminez la variation d'entropie du gaz après les N opérations ainsi que la température finale T_N et enfin la variation d'énergie interne ΔU_N en supposant le gaz parfait monoatomique.
   Faîtes ensuite les applications numériques pour $N = 5$.
   Réponse :
   On répète N fois la même opération depuis l'état 1 $(p{,}T_1) \rightarrow$ état 2 $(p{,}T_2) \rightarrow ... \rightarrow$ état N $(p{,}T_N)$, le diagramme de Watt est constitué de N isothermes réversibles et N adiabatiques réversibles (Cf figure ci-dessus).

   En décomposant la variation d'entropie

   $$\Delta S_N = \Delta S_{0\rightarrow N} = \Delta S_{0\rightarrow 1} + \Delta S_{1\rightarrow 2} + ... + \Delta S_{N-1\rightarrow N} = \sum_{i=1}^{N} \Delta S_{i-1\rightarrow i}$$

   avec, en reprenant le même raisonnement que lors de la question 2, $\Delta S_{i-1\rightarrow i} = -nR\ln\frac{p'}{p}$ pour tout i. On en déduit $\Delta S_N = -NnR\ln\frac{p'}{p} \simeq -95{,}7$ J.K^{-1} pour $N = 5$.

   En utilisant une relation de Laplace entre les états 0 et 1, on a montré que $T_1 = T_0(\frac{p'}{p})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

   De même, entre les états 2 et 1, on pourra montrer que $T_2 = T_1(\frac{p'}{p})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0(\frac{p'}{p})^{\frac{2(1-\gamma)}{\gamma}}$.

   Ou encore, entre 3 et 2 : $T_3 = T_2(\frac{p'}{p})^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_0(\frac{p'}{p})^{\frac{3(1-\gamma)}{\gamma}}$.

   On généralise immédiatement : $T_N = T_0(\frac{p'}{p})^{\frac{N(1-\gamma)}{\gamma}} = 4{,}5$ K pour $N = 5$.
   Enfin, comme on travaille sur un gaz parfait, on a d'après la première loi de Joule,

   $$\Delta U_N = C_V.\Delta T = \frac{3}{2}R(T_N - T_0) \simeq -5560 \text{ J.}$$

4. Voyez-vous une application ? Discuter l'hypothèse du gaz parfait si N grand
   Réponse :
   On voit qu'on peut rapidement obtenir un fluide à très faible température, c'est le principe d'un liquéfacteur. Mais à des températures si faibles, on n'a plus un gaz mais un liquide puis un solide

Rappel pour un GP :

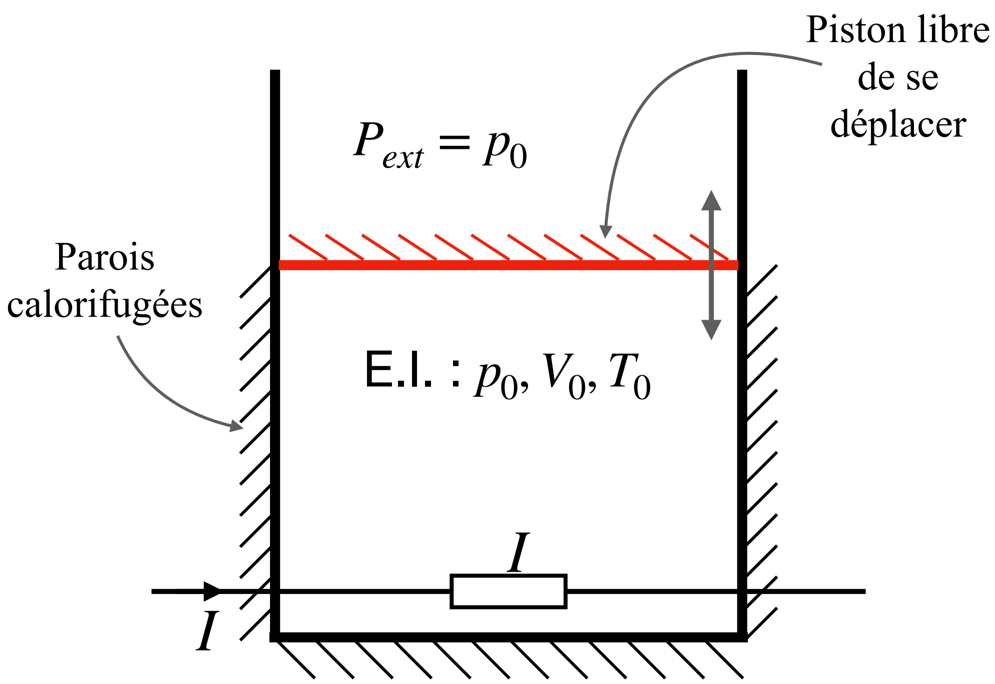
$$S_m(T_f{,}p_f) - S_m(T_i{,}p_i) = C_{p,m}\ln\frac{T_f}{T_i} - R\ln\frac{p_f}{p_i}$$

Sujet 4 – corrigé

I Chauffage isobare d'un gaz parfait

On considère une enceinte calorifugée, fermée par un piston libre de coulisser sans frottements, contenant un gaz parfait. La pression extérieure est notée p_0. Initialement, le volume de l'enceinte est $V = V_0$, la température et la pression du gaz T_0 et p_0.
Il y a dans l'enceinte un résistor de capacité thermique négligeable, alimenté par un générateur de courant idéal délivrant l'intensité I supposée faible.
On considère dans un premier temps que la résistance du résistor est constante : R_0

1. Réaliser un schéma de l'expérience.
Réponse :



2. Justifier que la transformation subie par le gaz parfait présent dans l'enceinte est quasi-statique et isobare.
Réponse :
Le courant circulant dans le résistor est responsable du déplacement de l'équilibre thermodynamique. Ce dernier étant faible, la transformation sera lente donc quasi-statique.

   On en déduit que le piston sera à l'équilibre mécanique à tout instant et donc que $p_{int} = p_{ext} = cste$ donc la transformation est bien isobare (et donc aussi monobare).

3. Déterminer l'évolution de la température du gaz au cours à l'instant t. On pourra pour cela appliquer le premier principe de la thermodynamique à un système judicieusement choisi entre l'instant initial $t_0 = 0$ et l'instant t.
Réponse :
On applique le premier principe à l'ensemble { resistor + GP } entre l'instant initial et l'instant t pour l'enthalpie (transformation monobare)

$$\Delta H = H(t) - H(0) = W_a + Q$$

avec $W_a = R_0 I^2(t-0)$ et $Q = 0$ (parois calorifugées). De plus, on obtient en négligeant la capacité thermique du résistor par rapport à celle du GP que $\Delta H = C_p(T(t) - T_0)$ soit au final

$$\boxed{T(t) = T_0 + \frac{R_0 I^2}{C_p} t}$$

4. En déduire l'expression de l'évolution du volume V au cours du temps.
Réponse :
On a d'après l'équation d'état du GP $V = nRT/p = \frac{nR}{p_0}(T_0 + \frac{R_0 I^2}{C_p} t)$. De plus, on a à l'instant initial $p_0 V_0 = nRT_0$ soit au final

$$V(t) = V_0 \left(1 + \frac{R_0 I^2}{C_p T_0} t\right)$$

On considère maintenant que la résistance varie avec la température selon la loi $R(T) = R_0 \frac{T}{T_0}$.

5. Reprendre alors les questions 3 et 4.
Réponse :
On reprend l'écriture du premier principe entre les instants

$$C_p(T(t) - T_0) = \int_0^t R_0 \frac{T(t')}{T_0} I^2 \mathrm{d}t'$$

En effet, la puissance dissipée n'étant plus constante, il faut utiliser une intégrale pour exprimer le travail électrique reçu. On peut ensuite dériver le résultat obtenu

$$C_p \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{R_0 I^2}{T_0} T \Rightarrow \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = \frac{R_0 I^2}{C_p T_0} T$$

Et cette équation différentielle d'ordre un admet pour solution (CI : $T(0) = T_0$)

$$\boxed{T(t) = T_0 \exp\left(\frac{R_0 I^2}{C_p T_0} t\right)}$$

On en déduit ensuite l'expression du volume

$$\boxed{V = \frac{nRT}{p_0} = V_0 \exp\left(\frac{R_0 I^2}{C_p T_0} t\right)}$$

Sujet 5 – corrigé

I Moteur réel ($\star$)

Un moteur réel fonctionnant entre deux sources de chaleur, l'une à $T_F = 400\,\mathrm{K}$, l'autre à $T_C = 650\,\mathrm{K}$, produit 500 J par cycle pour 1500 J de transfert thermique fourni.

1. Déterminer son rendement.
Réponse :
Le rendement est :
$$\boxed{\eta = \frac{|W|}{Q_C} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3} = 0{,}33}.$$

2. Quel serait le rendement d'une machine de Carnot fonctionnant entre les deux mêmes sources ? Comparer les deux rendements.
Réponse :
Le rendement de Carnot est :
$$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0{,}38}.$$
Le rendement est inférieur à celui de Carnot, comme attendu.

3. Calculer l'entropie créée par cycle notée $S_{\text{créée}}$.
Réponse :
D'après le sujet et puisque la machine est un moteur ditherme :
$$W = -500\,\mathrm{J} \quad ; \quad Q_C = 1500\,\mathrm{J}.$$
D'après le premier principe appliqué sur un cycle :
$$W + Q_C + Q_F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_F = -W - Q_C = -1000\,\mathrm{J}.$$
D'après le 2$^{\mathrm{e}}$ principe sur un cycle :
$$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créée}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{\text{créée}} = \frac{-Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} = 0{,}19\,\mathrm{J\cdot K^{-1}}}.$$

4. Montrer que la différence entre le travail fourni par la machine de Carnot et la machine réelle est égale à $T_F \times S_{\text{créée}}$, pour une dépense identique.
Réponse :
On applique les 2 principes de la thermodynamique sur un cycle pour une machine réelle :
$$W + Q_C + Q_F = 0 \quad ; \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créée}} = 0,$$
et pour une machine de Carnot :
$$W_c + Q_C + Q_{F,c} = 0 \quad ; \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_{F,c}}{T_F} = 0,$$
Pour que la comparaison ait un sens, le transfert thermique depuis la source chaude est la même dans ces 2 machines, de même que les températures des 2 thermostats. Par identification :
$$Q_{F,c} = Q_F + T_F S_{\text{créée}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W - T_F S_{\text{créée}} = W_c}.$$
En valeur absolue, le travail échangé par une machine de Carnot est bien supérieur à celui d'un moteur réel, en cohérence avec le rendement supérieur.

Sujet 6 – corrigé

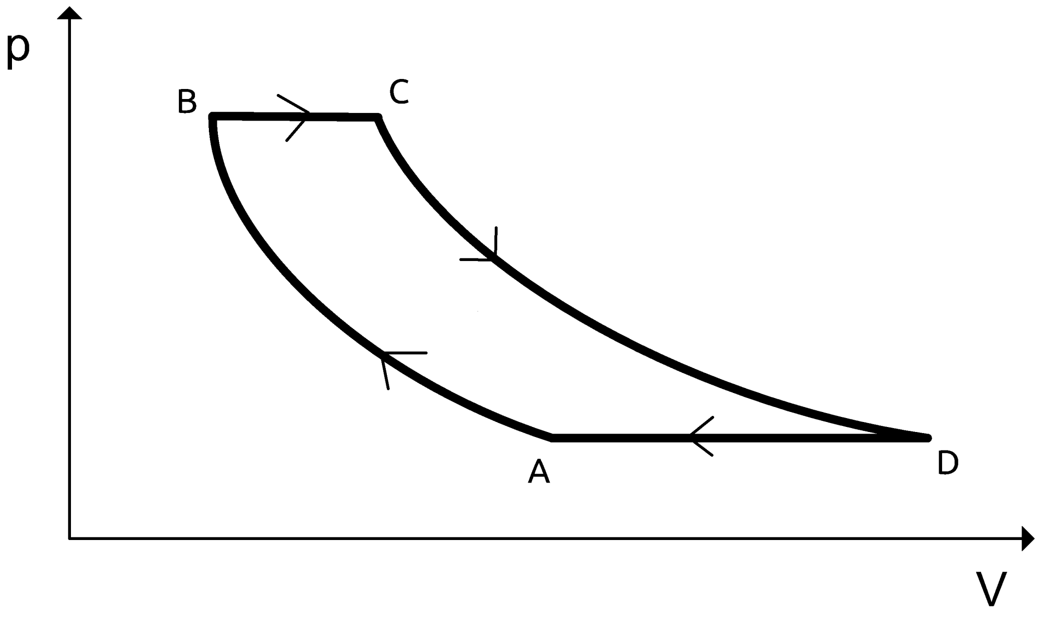
I Cycle de Joule (⋆⋆)

Une mole de gaz parfait diatomique décrit un cycle moteur dit de Joule constitué par :

- deux adiabatiques réversibles AB et CD,
- deux isobares BC et DA.

Données. $A(P_0 = 1\,\text{bar}, T_0 = 280\,\text{K})$, $B(P_1 = 10\,\text{bar}, T1)$, $C(P_1, T_2 = 1000\,\text{K})$, $D(P_0, T_3)$.

1. Tracer l'allure du cycle dans le plan (P, v)
Réponse :
Dans le diagramme de Watt, les transformations isobares sont des segments horizontaux et les adiabatiques réversibles sont des courbes $P \propto 1/V^\gamma$ (d'après la loi de Laplace). Pour un cycle moteur, l'aire du cycle doit être positif pour que le travail reçu soit négatif.



2. Calculer T_1 et T_3.
Réponse :
Le système considéré est un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique et réversible lors des transformations AB et CD, donc on peut appliquer la loi de Laplace au cours de ces 2 transformations :

$$T_0^\gamma P_0^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 540\,\text{K}}.$$

On rappelle que pour un gaz parfait diatomique : $\gamma = 7/5$. De même !

$$\boxed{T_3 = T_2 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 518\,\text{K}}.$$

3. Exprimer le rendement de ce moteur en fonction de $a = P_1/P_0$ et γ. Calculer sa valeur.

Réponse :
Le rendement du moteur est :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} \quad ; \quad Q_c = Q_{BC}.$$

Si on applique le premier principe de la thermodynamique sur un cycle :

$$W = -Q_{BC} - Q_{DA} \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}.$$

On applique maintenant le premier principe de la thermodynamique lors des transformations BC et DA :

$$\Delta_{BC}U = W_{BC} + Q_{BC} \quad ; \quad \Delta_{DA}U = W_{DA} + Q_{DA}.$$

Puisque le système d'étude est un gaz parfait diatomique :

$$\Delta_{BC}U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B) \quad ; \quad \Delta_{DA}U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_D).$$

Puisque ces 2 transformations sont isobares (et que le système est un gaz parfait) :

$$W_{BC} = P_1(V_C - V_B) = nR(T_C - T_B) \quad ; \quad W_{DA} = P_0(V_A - V_D) = nR(T_A - T_D).$$

On obtient :

$$\frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = \frac{\frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D) - nR(T_A - T_D)}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) - nR(T_C - T_B)} = \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \frac{T_0 - T_2\alpha^{(1-\gamma)/\gamma}}{T_2 - T_0\alpha^{-(1-\gamma)/\gamma}} = \boxed{-\alpha^{(1-\gamma)/\gamma}}.$$

Finalement, le rendement est :

$$\boxed{\eta = 1 - \alpha^{(1-\gamma)/\gamma} = 0{,}48}.$$