Correction du TD d'application

I Filtrage et spectres

Un signal périodique $e(t)$ (de fréquence 1 kHz), dont le spectre est donné en figure 1, est envoyé à l'entrée de trois filtres différents. On effectue l'analyse spectrale du signal de sortie pour chaque filtre, les spectres obtenus sont donnés en figure 2, 3 et 4.

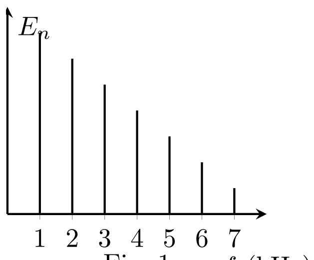


Fig. 1

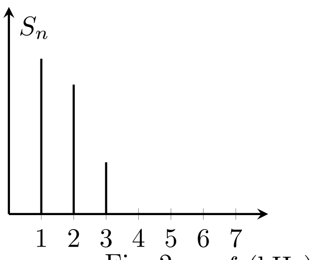


Fig. 2

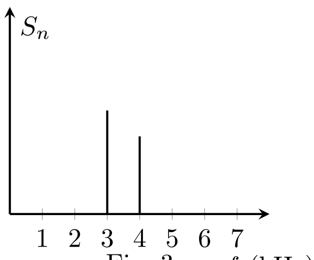


Fig. 3

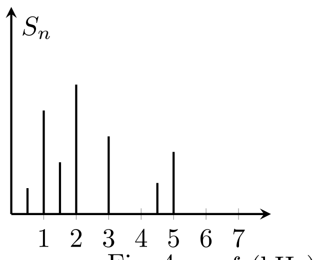


Fig. 4

1) Quelles caractéristiques de chaque filtre peut-on déduire de ces spectres ?

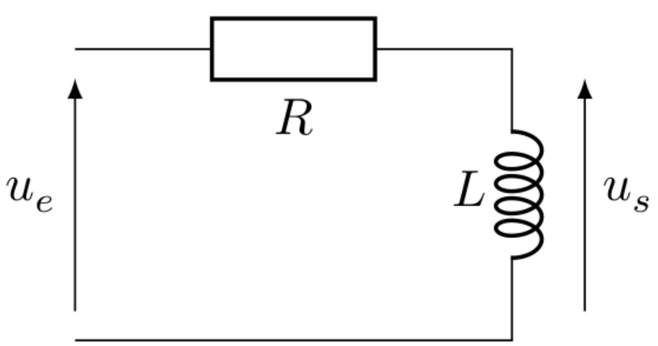
Réponse

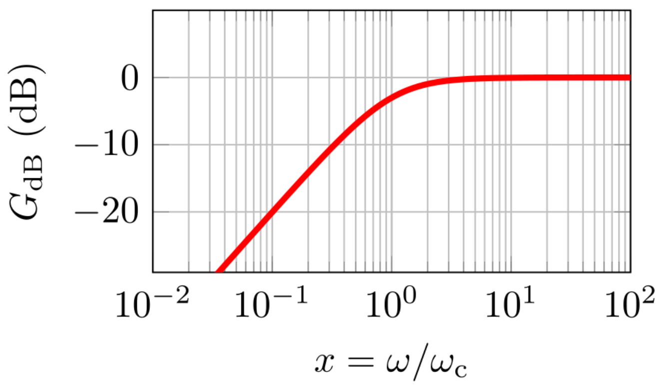
1) Sur la figure deux, les basses fréquences sont globalement conservées, et les fréquences à partir de 3 kHz sont fortement atténuées voire coupées : **c'est un passe-bas**.
2) Sur la figure trois, seules les fréquences entre 3 et 4 kHz sont gardées, les fréquences supérieures ou inférieures sont coupées : **c'est un passe-bande**.
3) Sur la figure quatre, on ne distingue pas de relation simple vue en cours ; on remarque de plus que de nouvelles fréquences apparaissent, ce qui n'est pas le cas dans le filtrage linéaire : c'est un **filtre non-linéaire**.

◇

II Filtre avec une bobine

On considère le circuit ci-contre, avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 10\,\mathrm{mH}$, donnant le diagramme de Bode ci-dessous :





1) Sans utiliser le diagramme de Bode, quelle est la nature du filtre ?

Réponse

À basses fréquences, $|\underline{Z}_L| \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0$, donc $H(\omega) \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0$. À hautes fréquences, $|\underline{Z}_L| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \infty$, donc $H(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 1$: **c'est un passe-haut**.

◇

2) Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = H_0 \frac{\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}{1+\mathrm{j}\dfrac{\omega}{\omega_c}}$$

avec H_0 et ω_c des constantes à préciser.

Réponse

On fait un pont diviseur de tension :

$$\underline{u_s} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R+\mathrm{j}L\omega}\underline{u_e} \Leftrightarrow \frac{\underline{u_s}}{\underline{u_e}} = \underline{H} = \frac{\cancel{R}}{\cancel{R}} \times \frac{\mathrm{j}\omega\frac{L}{R}}{1+\mathrm{j}\omega\frac{L}{R}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = H_0 \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}{1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R}{L} = 1\times 10^5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

3) Montrer par le calcul que la pente de l'asymptote du diagramme de Bode pour $\omega \ll \omega_c$ est de $20\,\mathrm{dB/décade}$.

Réponse

$1+\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \underset{\omega\ll\omega_c}{\sim} 1$, et donc

$$\underline{H}(\mathrm{j}\omega) \underset{\omega\ll\omega_c}{\sim} \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c} \Leftrightarrow \boxed{G_{\mathrm{dB}} = 20\log\left(|\underline{H}|\right) \underset{\omega\ll\omega_c}{\sim} 20\log x}$$

d'où la pente de $20\,\mathrm{dB/décade}$.

◇

4) On considère une tension d'entrée $u_e(t)$ somme de 3 harmoniques de mêmes amplitudes, de mêmes phases initiales, mais de fréquences respectives $f_1 = 100\,\mathrm{Hz}$, $f_2 = 1\,\mathrm{kHz}$ et $f_3 = 100\,\mathrm{kHz}$. Donner le spectre de sortie.

Réponse

On trouve le spectre de sortie en multipliant chaque amplitude d'entrée par le module de la fonction de transfert pour avoir l'amplitude de sortie. **Attention, pulsation ≠ fréquence**. On a

$$|\underline{H}(f)| = \frac{\dfrac{2\pi f}{\omega_c}}{\sqrt{1+\left(\dfrac{2\pi f}{\omega_c}\right)^2}}$$

- ◇ $H(f_1) \approx 6{,}3\times 10^{-3}$: le fondamental est complètement atténué, il ne reste que 0,6% de son amplitude initiale ;
- ◇ $H(f_2) \approx 6{,}3\times 10^{-2}$: l'harmonique f_2 est fortement atténué, il n'en reste que 6% ;
- ◇ $H(f_3) \approx 0{,}99$: l'harmonique f_3 est pratiquement entièrement conservé.

◇

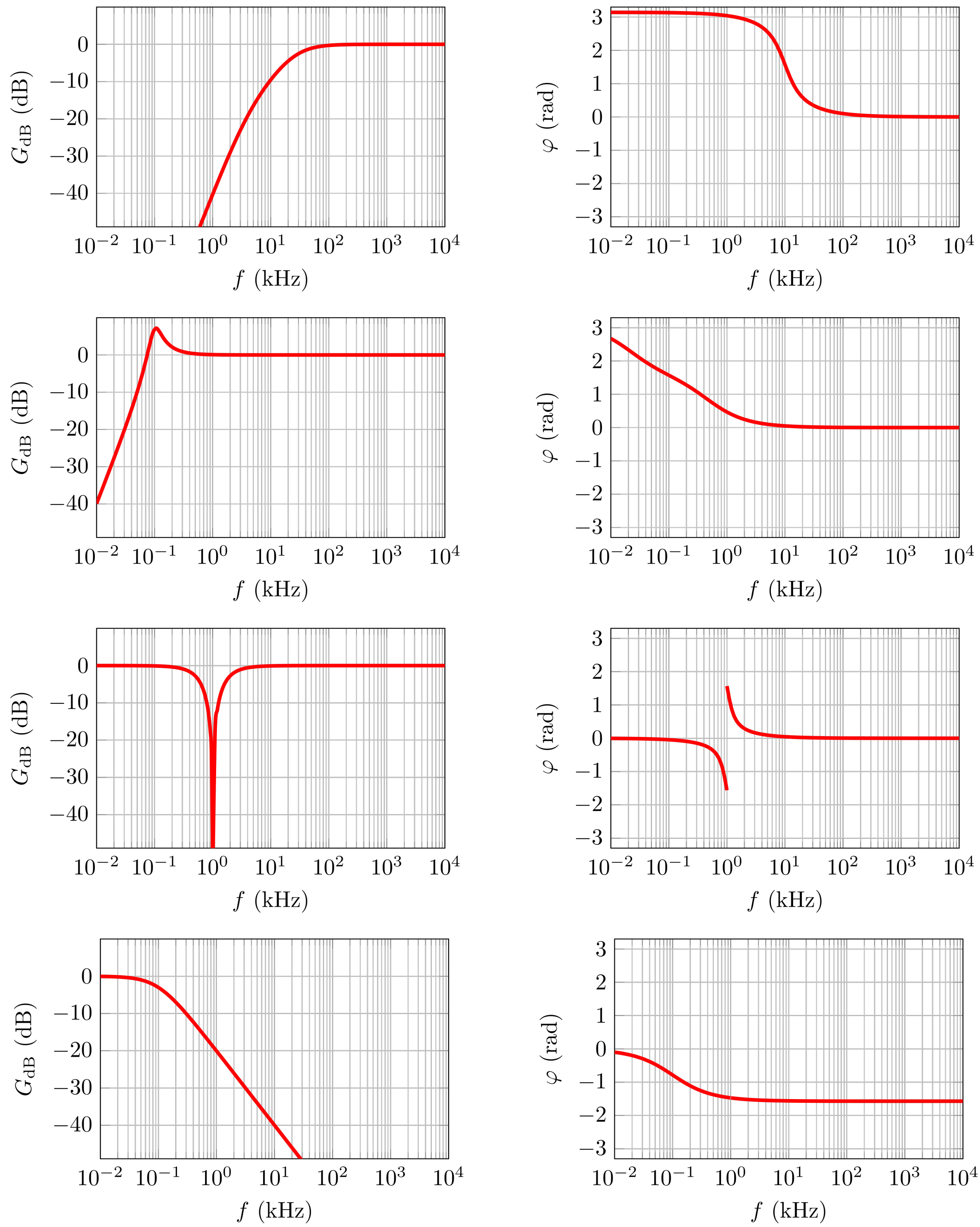


FIGURE E8.1 – Diagrammes exercice III

III Lecture de diagrammes de Bode

On donne Figure E8.1 les diagrammes de Bode de quatre filtres.

1) Pour chacun d'eux :

   1) Indiquer le type de filtre dont il s'agit.
   2) Déterminer l'expression du signal $s(t)$ de sortie du filtre pour un signal d'entrée

$$e(t) = E_0 + E_1\cos(\omega t) + E_{10}\cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_{100}\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

avec une fréquence $f = 1\,\mathrm{kHz}$

Réponse

Pour faciliter la rédaction on note $e(t) = e_0 + e_1(t) + e_{10}(t) + e_{100}(t)$, et de même pour le signal de sortie s. Ainsi, par linéarité, chaque composante e_n du signal d'entrée donne une composante s_n au signal de sortie.

- Filtre 1 : d'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un filtre passe-haut, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de $10\,\mathrm{kHz}$. Reconstruisons le signal de sortie :
  - Le terme constant e_0 est complètement coupé par le filtre, donc $s_0 = 0$.
  - L'harmonique de fréquence f est atténuée de $40\,\mathrm{dB}$ et peut donc être négligée dans le signal de sortie ($40\,\mathrm{dB}$ correspond à une division de l'amplitude par 100), soit $s_1(t) \ll$ autres harmoniques de $s(t)$.
  - L'harmonique de fréquence $10f$ est atténuée de $10\,\mathrm{dB}$, soit

    $$S_{10} = 10^{-10/20}E_{10} = 10^{-1/2}E_{10} \approx 0{,}3E_{10}$$

    et elle est également déphasée d'environ $+\pi/2$. Ainsi

    $$s_{10}(t) \approx 0{,}3E_{10}\cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2)$$

  - L'harmonique de fréquence $100f$ n'est presque pas atténuée ni déphasée, donc $s_{100}(t) \approx e_{100}(t)$. Au final, on obtient le signal de sortie $s(t)$ suivant :

$$\boxed{s(t) \approx 0{,}3E_{10}\cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_{100}\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

- Filtre 2 : d'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un filtre **passe-haut**, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de $0{,}1\,\mathrm{kHz}$. De la même manière que pour le fitre 1, on détermine que :

$$\boxed{s(t) \approx E_1\cos(\omega t) + E_{10}\cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_{100}\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

- Filtre 3 : d'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un filtre **coupe-bande**, la bande coupée étant proche de $1\,\mathrm{kHz}$. Ainsi seule l'harmonique $e_1(t)$ est coupée (soit $s_1 = 0$). Les autres composantes harmoniques du signal d'entrée, y compris la composante continue, sont de fréquences suffisamment différentes de la fréquence coupée pour n'être ni atténuée ni déphasée. La signal de sortie $s(t)$ s'écrit donc sous la forme :

$$\boxed{s(t) = E_0 + E_{10}\cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + E_{100}\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)}$$

◇ Filtre 4 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **passe-bas**, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 0,1 kHz. Le terme constant e_0 passe au travers du filtre sans être modifié. Les termes suivants sont de fréquence suffisamment supérieure à la fréquence de coupure pour que le diagramme de BODE puisse être approximé par son asymptote. On peut alors déterminer le signal de sortie comme dans le cas du premier filtre, mais il y a plus simple ! Comme le filtre est d'ordre 1 (une seule asymptote de pente $-20\,\mathrm{dB/décade}$, alors il se comporte comme un intégrateur pour les signaux de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. En déduire le signal de sortie est donc très simple :

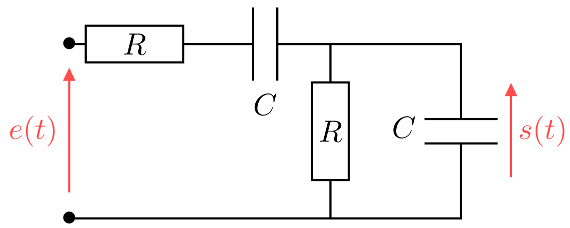
$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_1 \sin(\omega t) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_{10} \sin\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_{100} \sin\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

◇ En écrivant le signal en termes de cosinus, on obtient :

$$\boxed{s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_{10} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} E_{100} \cos\left(100\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)}$$

IV Filtre de WIEN

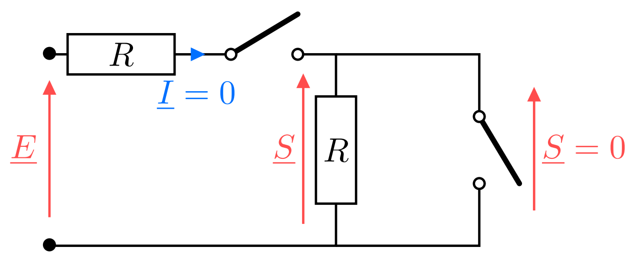
On s'intéresse au filtre de WIEN, représenté ci-contre.



1) Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.

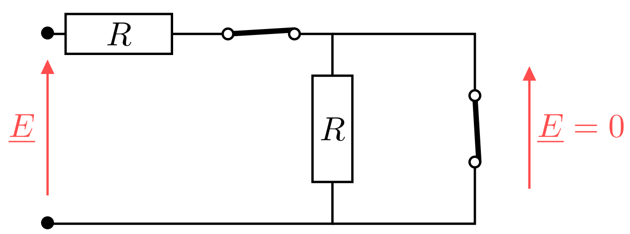
Réponse

Basses fréquences



Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également $\underline{S} = 0$.

Hautes fréquences



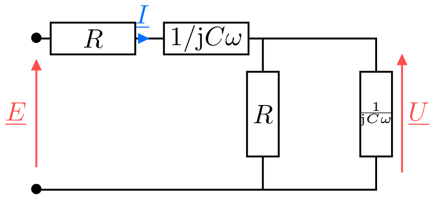
Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$.

Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passe-bande**.

2) Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.

Réponse

Notons $\underline{Z}$ l'impédance et $\underline{Y}$ l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :



$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \underline{Z}} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{3 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}}$$

◇

3) On pose $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$. Écrire la fonction de transfert sous la forme

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$

en précisant les valeurs de H_0 et Q.

Réponse

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x - \dfrac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

◇

4) Calculer simplement le gain maximal du filtre, puis le gain maximal en décibels, et le déphasage correspondant à ce maximum.

Réponse

Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, d'où le gain maximal $\mathbf{G_{\mathrm{max}} = 1/3}$.

Le gain **en décibels** du filtre est défini par

$$G_{\mathrm{dB}} = 20\log(|\underline{H}|)$$

et on trouve donc $\mathbf{G_{\mathrm{dB,max}} = 20}\log(\mathbf{1/3}) = -9{,}5\,\mathrm{dB}$. De plus, en $x = 1$ la fonction de transfert est réelle, donc son argument est nul : à la pulsation ω_0, la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

◇

5) Représenter le diagramme de BODE asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.

Réponse

Dans la limite très basses fréquences, la fonction de transfert est équivalente à

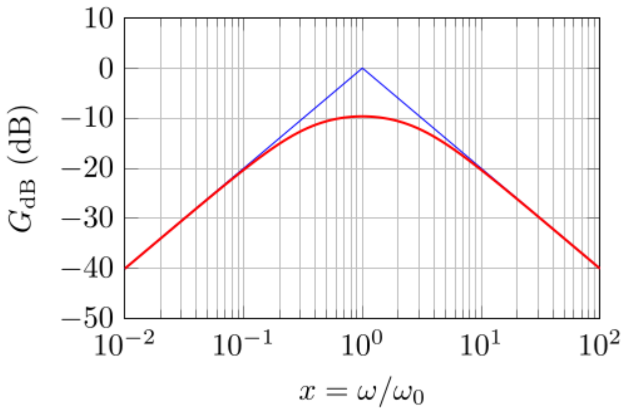
$$\underline{H} \underset{x\to 0}{\sim} \frac{H_0}{-\mathrm{j}Q/x} = \mathrm{j}\frac{H_0}{Q}x \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| \underset{x\to 0}{\sim} 20\log x \\ \varphi = \arg(\underline{H}) = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

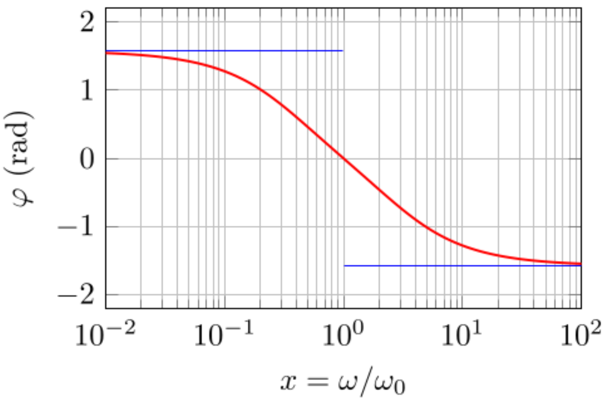
De même, dans la limite très hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \underset{x\to \infty}{\sim} \frac{H_0}{\mathrm{j}Qx} = -\mathrm{j}\frac{H_0}{Q}\frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{\mathrm{dB}} = 20\log|\underline{H}| \underset{x\to 0}{\sim} -20\log x \\ \varphi = \arg(\underline{H}) = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de BODE asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pentes $\pm$ 20 dB/décade passant par $\mathbf{G_{dB} = 0}$ pour $\mathbf{x = 1}$**, alors que le diagramme asymptotique en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteurs $\pm\pi/2$**.

Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus les résultats de la question précédente qui indique que la courbe réelle passe par $G_{\mathrm{dB}} = -9{,}5\,\mathrm{dB}$ en $x = 1$, alors que la courbe de phase réelle passe par 0 en $x = 1$; d'où les diagrammes ci-dessous.





◇

6) Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 500\,\mathrm{nF}$. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est

$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t)$$

avec $E_0 = 10\,\mathrm{V}$ et $\omega = 200\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

Réponse

Numériquement, on trouve $\omega_0 = 2{,}0 \times 10^3\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Comme le diagramme de BODE réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée :

- ◇ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ◇ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en-dessous de la pulsation propre : avec le diagramme asymptotique il est donc atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad si le diagramme réel tracé ;

◇ Le terme de pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur $1/3$ (gain maximal) ;

◇ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au-dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ $-1{,}2\,\mathrm{rad}$. Ainsi,

$$\boxed{s(t) = \frac{E_0}{10}\cos(\omega t - 1{,}2) + \frac{E_0}{3}\cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10}\cos(100\omega t + 1{,}2)}$$