Introduction – chapitre 0

Unités et analyse dimensionnelle

Au programme

Savoir-faire

- Conduire une analyse dimensionnelle.

En sciences physiques, il faut opérer la distinction entre :

1) **Le phénomène** : du domaine de la sensation (« il fait chaud ») ou de l'observation (« une lumière blanche traversant un prisme sort en arc-en-ciel ») ;
2) **La grandeur physico-chimique** : quantité mesurable (directement ou indirectement) et rendant compte du phénomène (par exemple, la température). Elle est représentée par un **symbole** (T dans le même exemple) qui intervient dans les équations mathématiques caractérisant le phénomène physique, et est caractérisée par sa **dimension** traduisant sa nature ;
3) **La valeur** de la grandeur : résultant d'une mesure et associée à une **unité** (K ou °C) ; la valeur change selon l'unité utilisée et contient un certain nombre de **chiffres significatifs**.

Ces notions sont la fondation de tout raisonnement scientifique qui repose sur la précision et l'objectivité.

I Systèmes d'unités

A Grandeurs de base

Les grandeurs physiques sont **reliées** entre elles, soit par des **définitions** (surface d'un carré = carré d'un côté) soit par des **lois** physiques ($U = RI$ en électronique). Par souci de concision, il est pratique de choisir des grandeurs de base à partir desquelles nous exprimerons toutes les autres : en mécanique par exemple, nous utilisons la longueur, la masse et le temps. Ce choix n'est pas unique mais pratique.

À partir de grandeurs de base choisies, nous leur associons donc des unités « de base ». Le bureau international des poids et mesures (BIPM [1]) a défini le **système international (SI)**, et se réunit tous les 4 ans pour discuter de leurs définitions et de leurs choix.

B Définition du SI

Grandeurs, dimensions et unités de base du SI

Grandeur	Dimension	Unité	Symbole de l'unité
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	Ampère [2]	A
Température	Θ	Kelvin [3]	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J [4]	candela	cd

On remarquera que les unités provenant d'un nom propre s'écrivent avec une majuscule, et leur symbole l'est également.

Notation

On utilisera $\dim X$ pour dénoter la dimension de X, et $[X]$ son unité.

1. https://www.bipm.org/fr/measurement-units/
2. Du nom du physicien André-Marie Ampère (XVIII-XIX^e^), précurseur de la mathématisation de la physique et créateur du vocabulaire tenant à l'électricité.
3. Du nom du physicien William Thomson (XIX^e^), anobli en Lord Kelvin, à l'origine de la thermodynamique.
4. Ne pas confondre avec l'unité des énergies en joules. . .

C Opérations sur les grandeurs

D'une manière générale, vous étudierez les dimensions de vos équations directement *via* les opérateurs qui la composent. Il faut donc savoir déduire les dimensions dans les cas suivants :

Opérations

1) **Dérivation** : la dimension d'une dérivée est le rapport des dimensions de la grandeur dérivée et de la grandeur dérivante.
2) **Intégration** : la dimension d'une intégrale est le produit des dimensions de la grandeur intégrée et de la grandeur intégrante.
3) **Fonction transcendantes** [5] : une fonction transcendante est adimensionnée, donc son argument également

Exemples

1) **Dérivation** :

$$v_z = \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \dim v_z = \frac{\dim z}{\dim t} = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$$

2) **Intégration** :

$$\mathcal{E} = \int_{t_1}^{t_2} \mathcal{P}(t)\,\mathrm{d}t \Rightarrow \dim \mathcal{E} = \dim \mathcal{P} \times \dim t$$

3) **Fonctions transcendantes** :

$$[\exp(-t/\tau)] = 1 \Leftrightarrow \dim \tau = \dim t$$

D Grandeurs dérivées

Les grandeurs exprimées à partir des grandeurs de bases *via* des équations physiques sont appelées « grandeurs dérivées ». Leurs dimensions sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions de base : d'une manière générique, une grandeur G a pour dimension

$$\boxed{\dim G = \mathrm{L}^{\alpha}\mathrm{M}^{\beta}\mathrm{T}^{\gamma}\mathrm{I}^{\delta}\Theta^{\epsilon}\mathrm{N}^{\xi}\mathrm{J}^{\eta}}$$

où les lettres grecques sont les **exposants dimensionnels**, qui peuvent être nuls. S'ils sont tous nuls, la grandeur et dite **adimensionnée**.

Grandeurs dérivées

Grandeurs dérivées	Symbole	Équation aux dimensions	Unités SI dérivées
Surface	S	$\dim S = \mathrm{L}^2$	$[S] = \mathrm{m}^2$
Volume	V	$\dim V = \mathrm{L}^3$	$[V] = \mathrm{m}^3$
Angle	α	$\dim \alpha = 1$	$[\alpha] = \mathrm{rad}$
Vitesse	$\vec{v}$	$\dim v = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-1}$	$[v] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}$
Accélération	$\vec{a}$	$\dim a = \mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$	$[a] = \mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Masse volumique	ρ	$\dim \rho = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}$	$[\rho] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3}$
Force	$\vec{F}$	$\dim F = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}\cdot\mathrm{T}^{-2}$	$[F] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$
Charge électrique	q	$\dim q = \mathrm{I}\cdot\mathrm{T}$	$[q] = \mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$
Énergie	$\mathcal{E}$	$\dim E = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}$	$[E] = \mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$

Remarque

Certaines de ces unités dérivées portent des noms usuels : le newton N ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-2}$) pour la force, le coulomb C ($1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A}\cdot\mathrm{s}$) pour la charge électrique, ou l'énergie en joules [6] J ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^2\cdot\mathrm{s}^{-2}$)

II Analyse dimensionnelle

À l'aide de ces outils, nous pouvons effectuer des actions sur les équations-mêmes pour en extraire les dimensions. Pour qu'une équation mathématique ait un sens physique, elle doit suivre un principe fondamental et naturel : le **principe d'homogénéité**.

5. Fonctions type exponentielle, logarithme, cosinus.
6. Du physicien James JOULE (XIXᵉ), contemporain de KELVIN.

A Homogénéité

Homogénéité

Dans une équation ou dans l'expression d'une loi physique, les deux membres de chaque côté du signe égal doivent être de **même nature**[7] et avoir la **même dimension**, quel que soit le système d'unités. Une telle formule est alors dite **homogène**.

Corollaire : natures des équations

Il serait ainsi *barbare* d'égaliser un vecteur d'un côté avec un scalaire de l'autre, ou d'additionner ou soustraire des mètres à des secondes, etc.

B Écrire un résultat

Un objectif récurrent des sujets de physique-chimie est d'obtenir la **valeur numérique** d'une grandeur physico-chimique. Elle découle alors d'une équation, forcément homogène, mais doit également être calculée avec les bonnes unités au sein des dimensions. Ainsi, **tout résultat numérique** devra être rédigé sous la forme suivante :

Règle d'application numérique

$$\boxed{n = \frac{PV}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ T = 300\,\mathrm{K} \end{cases}$$

$$\cancel{n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8.32 \cdot 300} = 0.56}$$

A.N. : $\underline{n = 5{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}}$

Avec ces règles de mise en page doivent venir des réflexes :

$\boxed{\text{Encadrer}}$

Encadrer implique d'avoir vérifié :

1) La cohérence mathématique ;
2) L'homogénéité de la formule proposée.

$\boxed{\text{Souligner}}$

Souligner implique d'avoir vérifié :

1) La cohérence physique de la grandeur ;
2) Les chiffres significatifs à utiliser.

Effectuer un changement d'unités

Il est très commun de se tromper d'unité lors d'une conversion, et ce pour deux raisons : à cause d'une unité mise à une puissance, ou à cause d'un rapport de deux grandeurs. Il suffit d'appliquer le processus suivant :

1) Écrire la valeur numérique actuelle de la grandeur avec son unité sous forme de **fraction explicite** ;
2) Convertir les unités concernées **en y mettant des parenthèses** ;
3) Recondenser le calcul.

Exemples

$$1\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 1\frac{\mathrm{m}}{\mathrm{s}} = 1\frac{10^{-3}\,\mathrm{km}}{\frac{1}{3600}\,\mathrm{h}} = 3{,}6 \times 10^{-3}\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$$

$$1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{dm^3} = 1\,(10^{-1}\mathrm{m})^3 = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3}$$

C Application

Le principe d'homogénéité permet alors une analyse des dimensions des grandeurs mises en jeu dans une loi ou une équation. C'est un outil particulièrement puissant à bien des égards, que nous voyons ci-après.

II.C.1 Rechercher des unités

En connaissant une expression que l'on sait vraie, nous pouvons déduire les unités d'autres grandeurs (cf. les unités usuelles comme le Newton).

7. Scalaire, vecteur, matrice, tenseur. . .

Recherche d'unités

La force de rappel élastique exercée par un ressort s'écrit

$$\overrightarrow{F}_{\mathrm{el}} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$$

avec k la constante de raideur du ressort, et $\overrightarrow{u_x}$ un vecteur adimensionné. Quelle est la dimension de k ? Quelle serait une manière simple d'exprimer son unité ?

$$\dim k = \frac{\dim F}{\dim(\ell - \ell_0)\dim u_x} = \frac{\mathrm{M}\cancel{\mathrm{L}}\mathrm{T}^{-2}}{\cancel{\mathrm{L}}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\dim k = \mathrm{M{\cdot}T^{-2}}}$$

Ainsi, on peut écrire

$$[k] = \mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}$$
$$\Leftrightarrow [k] = \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$$

II.C.2 Détecter des erreurs

Par simple analyse dimensionnelle, il est aisé d'affirmer qu'un résultat est nécessairement faux : si les deux parties mises en jeu n'ont pas la même dimension, elle ne peuvent être égales entre elles !

Détecter des erreurs

En résolvant un exercice, vous trouvez l'expression suivante pour l'énergie potentielle d'une masse m accrochée à un ressort vertical de raideur k et sous pesanteur g :

$$\mathcal{E}_{\mathrm{p}}(z) = \frac{1}{2}kz^2 + mgz^2$$

avec z la hauteur de la masse. Cette expression est-elle homogène ?

$$[kz^2] = \mathrm{N{\cdot}m^{-1}{\cdot}m^2} = \mathrm{N{\cdot}m}$$
$$[mgz^2] = \mathrm{N{\cdot}m^2}$$

Cette expression n'est pas homogène ! Elle est forcément fausse. Ici, c'est le terme d'énergie potentielle gravitationnelle, qui vaut mgz.

II.C.3 Rechercher des lois physiques

D'autre part, à partir de phénomènes que nous voudrions relier entre eux, il est possible d'établir des lois les reliant entre eux grâce au principe d'homogénéité.

Recherche de loi

Donnez, par analyse dimensionnelle, la période T des oscillations d'un pendule simple.

Il faut commencer par identifier les variables propices d'intervenir dans le problème. Une pendule simple est constitué d'une masse plongée dans un champ de pesanteur et reliée par un fil de longueur ℓ à un point pivot. En négligeant les frottements, on en déduit que les variables possibles sont ℓ, g et m ; ainsi, il nous faudrait avoir

$$T = \ell^\alpha g^\beta m^\gamma$$
$$\Leftrightarrow [T] = [\ell]^\alpha [g]^\beta [m]^\gamma$$
$$\Leftrightarrow \mathrm{s} = \mathrm{m}^\alpha{\cdot}\mathrm{m}^\beta{\cdot}\mathrm{s}^{-2\beta}{\cdot}\mathrm{kg}^\gamma$$
$$\Leftrightarrow \begin{cases} \mathrm{s} = \mathrm{s}^{-2\beta} \\ 1 = \mathrm{m}^{\alpha+\beta} \\ 1 = \mathrm{kg}^\gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = \frac{1}{2} \\ \gamma = 0 \end{cases}$$

Autrement dit, on aurait tendance à écrire

$$\boxed{T = \sqrt{\frac{\ell}{g}}}$$

Ce qui serait effectivement homogène ! Mais pourtant faux… L'étude complète du système donne un **facteur 2π** avant la racine.

Limites implicites

Une loi trouvée par analyse dimensionnelle ne saurait permettre de donner les bons termes multiplicatifs !