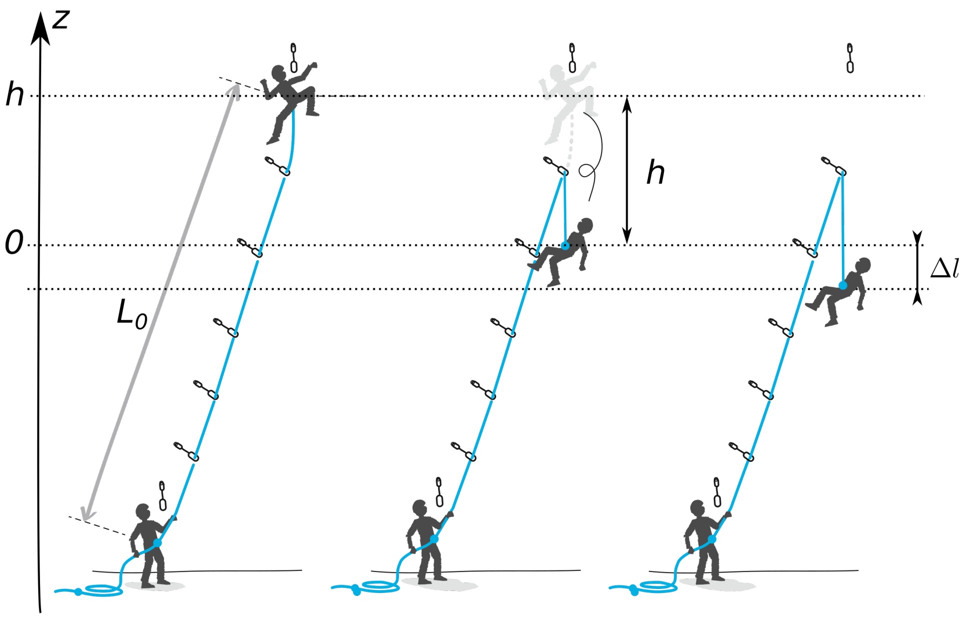
Correction du TD d'entraînement

I Chute sur corde en escalade

On étudie une grimpeuse qui chute. Une corde d'escalade de longueur L_0 peut, en première approximation, être modélisée par un ressort de longueur à vide L_0 et de raideur $k = \alpha/L_0$, avec α une caractéristique de la corde.



La grimpeuse est en chute libre sur une hauteur h pendant laquelle la corde n'est pas sous tension. La corde passe ensuite sous tension, et la chute se poursuit sur une hauteur Δl. La vitesse de la grimpeuse devient ainsi nulle au bout d'une hauteur totale de chute $h + \Delta l$.

On prendra $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, $\alpha = 5{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N}$ et une grimpeuse de masse $m = 50\,\mathrm{kg}$.

1) À l'aide d'un bilan énergétique, donner l'expression de la vitesse maximale atteinte par la grimpeuse. Faire l'application numérique pour une hauteur de chute $h = 5\,\mathrm{m}$.

Réponse

Pendant la chute libre, la grimpeuse ne subit que l'action du poids, qui est conservatif. On peut donc utiliser le TEM, avec :

- ◇ **Au début de la chute libre :** $z = h$, $v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = mgh$ et $\mathcal{E}_c = 0$
- ◇ **À la fin de la chute libre :** $z = 0$, $v = v \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = 0$ et $\mathcal{E}_c = mv^2/2$.

D'où

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ h = 5\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{v = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

2) Toujours à l'aide d'une méthode énergétique, donner l'expression de l'allongement maximal Δl de la corde. On supposera $\Delta l \ll h$ afin de simplifier le calcul.

Réponse

On peut utiliser le TEM entre le point tout en haut et le point le plus bas, ou entre le point O et le point le plus bas. Faisons le premier cas :

- **Au début de la chute libre :** $z = h$, $v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = mgh$ et $\mathcal{E}_c = 0$
- **À la fin de la chute amortie :** $z = -\Delta l$, $v = 0 \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = -mg\Delta l$, $\boxed{\mathcal{E}_{p,el} = k\Delta l^2/2}$ et $\mathcal{E}_c = 0$.

Ainsi,

$$mgh = \frac{1}{2}k\Delta l^2 + mg(-\Delta l) \Leftrightarrow mg(h + \underbrace{\cancel{\Delta l}}_{\ll h}) = \frac{1}{2}k\Delta l^2 \Leftrightarrow \boxed{\Delta l = \sqrt{\frac{2mgh}{k}}} \qquad \blacksquare$$

La solution trouvée est plausible : homogène, augmente avec m, h et g mais diminue avec k.

◇

3) Donner enfin l'expression de la norme de la force maximal $F_{\max}$ qu'exerce la corde sur la grimpeuse. On introduira le facteur de chute $f = h/L_0$.

Réponse

En norme, une force de rappel s'exprime $F = k(\ell - \ell_0)$, soit ici

$$F_{\max} = k\Delta l = \sqrt{2mgh\,k} = \sqrt{2mgh\frac{\alpha}{L_0}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{F_{\max} = \sqrt{2mg\alpha f}} \qquad \blacksquare$$

◇

4) Au-delà d'une force de 12 kN, les dommages sur le corps humain deviennent importants. Que vaut $F_{\max}$ pour une chute de $h = 4\,\mathrm{m}$ sur une corde de longueur $L_0 = 4\,\mathrm{m}$? Conclure.

Réponse

On fait l'application numérique :

$$\text{avec} \quad \begin{cases} m = 50\,\mathrm{kg} \\ g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ \alpha = 5{,}0 \times 10^4\,\mathrm{N} \\ f = 1 \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{F_{\max} = 10\,\mathrm{kN}}$$

Il n'y a donc pas de risque aggravé pour la grimpeuse avec cette chute.

◇

5) Une chute d'un mètre arrêtée par une corde de 50 cm est-elle plus ou moins dangereuse qu'une chute de 4 m arrêtée par une corde de 8 m ?

Réponse

Dans le premier cas, $f_1 = 2$; dans le second, $f_2 = 0{,}5$. Or, $F_{\max}$ évolue en $\sqrt{f}$, donc plus f augmente plus la force subie augmente : le premier cas est donc 2 fois plus dangereux que le premier !

◇

II Recul d'un canon

On considère un canon (figure 4.1) de masse $M = 800\,\mathrm{kg}$. Lors du tir horizontal d'un obus de masse $m = 2{,}0\,\mathrm{kg}$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_x}$ telle que $v_0 = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, le canon acquiert une vitesse de recul $\overrightarrow{v_c} = -\frac{m}{M}\overrightarrow{v_0}$.

Pour limiter la course du canon, on utilise un ressort de raideur k_1, de longueur à vide L_0 dont l'une des extrémités est fixe, et l'autre liée au canon. Le déplacement a lieu suivant l'axe Ox. Dans la suite, le canon est assimilé à un point matériel, son centre de gravité G (figure 4.2).

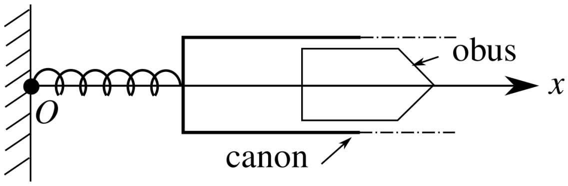


FIGURE 4.1 – Canon

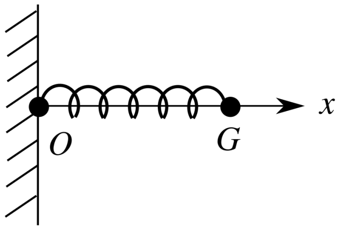


FIGURE 4.2 – Repérage

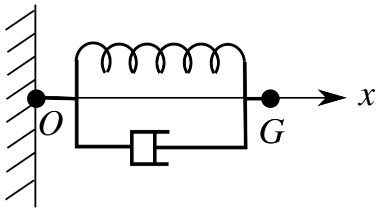


FIGURE 4.3 – Amortisseur

1) Quelle est la longueur du ressort lorsque le canon est au repos ?

Réponse

Au repos, la tension du ressort est nulle, donc $\ell = L_0$.

◇

2) En utilisant l'énergie mécanique, déterminer la distance de recul d. En déduire la raideur k_1 pour avoir un recul inférieur ou égal à d. Application numérique pour $d = 1{,}0\,\mathrm{m}$.

Réponse

- **Système :** {canon}, repéré par G de masse M
- **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$, supposé galiléen
- **Repère :** mouvement horizontal donc cartésien, $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant
- **Repérage :**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= x\,\overrightarrow{u_x}\\ \overrightarrow{v} &= \dot{x}\,\overrightarrow{u_x}\\ \overrightarrow{a} &= \ddot{x}\,\overrightarrow{u_x}\end{aligned}$$

- **BDF :**

$$\begin{array}{ll}\textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}\\ \textbf{Réaction} & \overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{u_z}\\ \textbf{Ressort} & \overrightarrow{F} = -k_1(x-L_0)\,\overrightarrow{u_x}\end{array}$$

  Le poids et la tension du ressort sont conservatives, et la réaction du sol ne travaille pas : on a donc un système conservatif, et on applique simplement le TEM :

- **Au moment du tir :** $v = v_c$, $x = L_0 \Rightarrow \mathcal{E}_{c,0} = M{v_c}^2/2$ et $\mathcal{E}_{p,el} = k_1(L_0 - L_0)^2/2 = 0$

◇ **Après le recul :** $v = 0$, $x = L_0 - d \Rightarrow \mathcal{E}_{c,f} = 0$ et $\mathcal{E}_{p,el} = k_1 d^2/2$

◇ **TEM :**

$$\begin{aligned}
\frac{1}{2}k_1 d^2 &= \frac{1}{2}M \underbrace{v_c}_{=mv_0/M}{}^2 \\
\Leftrightarrow d^2 &= \frac{m^2}{k_1 M}{v_0}^2 \\
\Leftrightarrow &\boxed{d = \frac{m}{\sqrt{k_1 M}}v_0}
\end{aligned}$$
■

$$\Leftrightarrow \boxed{k_1 = \frac{m^2 {v_0}^2}{d^2 M}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 2{,}0\,\mathrm{kg} \\ M = 800\,\mathrm{kg} \\ v_0 = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ d = 1{,}0\,\mathrm{m} \end{cases}$$
■

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{k_1 = 1800\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}$$

◇

3) Retrouver la relation entre k_1 et d en appliquant le PFD.

Réponse

Avec le **PFD** et en projetant sur $\overrightarrow{u_x}$ (on a $N = mg$ sur $\overrightarrow{u_z}$) :

$$\begin{aligned}
M\ddot{x} &= -k_1(x - L_0) \\
\Leftrightarrow \ddot{x} + {\omega_0}^2 x &= {\omega_0}^2 L_0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\frac{k_1}{M}} \\
\Rightarrow x(t) &= A\cos(\omega_0 t + \varphi) + L_0
\end{aligned}$$

Or,

$$x(t=0) = L_0 \Rightarrow A\cos\varphi = 0$$

On choisit $\varphi = -\pi/2$, et ainsi

$$\begin{aligned}
x(t) &= A\sin(\omega_0 t) + L_0 \\
\Rightarrow \dot{x}(t) &= A\omega_0\cos(\omega_0 t)
\end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned}
\dot{x}(t=0) &= -\frac{m}{M}v_0 \\
\Rightarrow A &= -\frac{m}{M}\frac{v_0}{\omega_0}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{mv_0}{\sqrt{k_1 M}}\sin(\omega_0 t) + L_0}$$
■

On obtient alors d comme étant l'amplitude du sinus, c'est-à-dire le résultat précédent.

◇

4) Quel est l'inconvénient d'utiliser un ressort seul ?

Réponse

On vient donc de démontrer qu'avec un seul ressort, le canon va osciller et donc après le recul, il va repartir vers l'avant. L'amplitude va diminuer petit à petit à cause des frottements inéluctables, mais le temps avant immobilisation sera important : on a donc intérêt à ajouter une force de frottements visqueux.

◇

Pour pallier ce problème, on ajoute au système un dispositif amortisseur (figure 4.3), exerçant une force de frottement $\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v}$, $\overrightarrow{v}$ étant la vitesse du canon.

5) Le dispositif de freinage absorbe une fraction $\mathcal{E}_a = 778\,\mathrm{J}$ de l'énergie cinétique initiale. Calculer la nouvelle valeur k_2 de la constante de raideur du ressort avec les données numériques précédentes. Déterminer la pulsation propre ω_0 de l'oscillateur.

Réponse

Le système n'est plus conservatif, et la variation d'énergie mécanique est maintenant égale à l'énergie absorbée par le dispositif de freinage, c'est-à-dire

$$\Delta\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,f} - \mathcal{E}m,i = -\mathcal{E}_a$$

puisque l'énergie cinétique doit décroître et que $\mathcal{E}_a$ est positive. Or, initialement et finalement,

$$\mathcal{E}_{m,i} = \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}M{v_c}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,f} = \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}k_2 d^2$$

Soit

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}k_2 d^2 - \frac{1}{2}M{v_c}^2 &= -\mathcal{E}_a \\ \Leftrightarrow k_2 &= \frac{1}{d^2}\left(M{v_c}^2 - 2\mathcal{E}_a\right) \\ \Leftrightarrow \boxed{k_2 = \frac{1}{d^2}\left(\frac{m^2}{M}{v_0}^2 - 2\mathcal{E}_a\right)} &\quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 2{,}0\,\mathrm{kg} \\ M = 800\,\mathrm{kg} \\ v_0 = 600\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ \mathcal{E}_a = 778\,\mathrm{J} \end{cases} \end{aligned}$$

■

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{k_2 = 244\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}$$

$$\text{De plus,} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_2}{M}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_2 = 244\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ M = 800\,\mathrm{kg} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\omega_0 = 0{,}55\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

6) Déterminer λ pour que le régime soit critique. Application numérique.

Réponse

On reprend la question 3) mais avec la force de frottements, pour obtenir l'équation d'un oscillateur amorti :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{M}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 L_0$$

Le discriminant de l'équation caractéristique associée est

$$\Delta = \left(\frac{\lambda}{M}\right)^2 - 4{\omega_0}^2$$

et on a un régime critique quand ce discriminant est nul ; soit

$$\boxed{\lambda = 2M\omega_0} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} M = 800\,\mathrm{kg} \\ \omega_0 = 0{,}55\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \end{cases}$$

■

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\lambda = 884\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

7) Déterminer l'expression de l'élongation $x(t)$ du ressort, ainsi que celle de la vitesse $\dot{x}(t)$. En déduire l'instant t_m pour lequel le recul est maximal. Exprimer alors ce recul en fonction de m, v_0 et λ. L'application numérique redonne-t-elle la valeur de d précédente ?

Réponse

Avec le régime critique, on a

$$x(t) = (At + B)\exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) + L_0$$

Or,

$$x(0) = 0 \Rightarrow \boxed{B = 0}$$
$$\Rightarrow \dot{x}(t) = A\exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2M}t\right)$$

Or,

$$\dot{x}(0) = v_c \Rightarrow \boxed{A = v_c}$$
$$\Rightarrow \boxed{\dot{x}(t) = -\frac{m}{M}\exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right)\left(1 - \frac{\lambda}{2M}t\right)}$$
$$\text{et} \quad \boxed{x(t) = -\frac{m}{M}v_0 t\exp\left(-\frac{\lambda t}{2M}\right) + L_0} \quad \blacksquare$$

Le recul est maximal quand la vitesse s'annule, soit

$$t_m = \frac{2M}{\lambda} = 1{,}8\,\mathrm{s}$$

On calcule $x(t_m)$, sachant qu'on a par définition $x(t_m) = L_0 - d$:

$$x(t_m) = -\frac{m}{M}v_0\frac{2M}{\lambda}\mathrm{e}^{-1} + L_0$$
$$\Leftrightarrow L_0 - d = L_0 - \frac{2mv_0}{\lambda\mathrm{e}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{d = \frac{2mv_0}{\lambda\mathrm{e}}} \quad \blacksquare$$

et l'application numérique donne

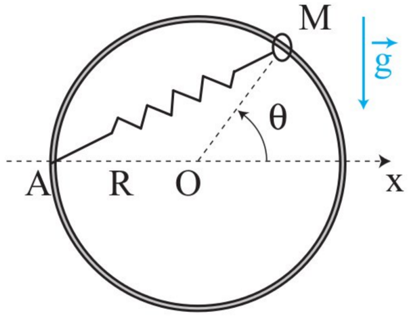
$$\boxed{d = 1{,}0\,\mathrm{m}}$$

On retrouve bien la distance de recul précédente, mais cette fois il n'y a pas d'oscillation ! Cahier des charges rempli.

◇

III Positions d'équilibre d'un anneau sur un cercle

Un anneau assimilable à un point matériel M de masse m peut glisser sans frottement sur une glissière circulaire de rayon R et de centre O. L'anneau est attaché à un ressort de raideur k dont une extrémité est fixée à la glissière au point A. Sa position est repérée par l'angle θ entre le rayon OM et l'axe horizontal (Ox). Pour simplifier les calculs, on considérera que la longueur à vide ℓ_0 du ressort est nulle.



1) Montrer que la longueur ℓ s'exprime $\ell = R\sqrt{2(1+\cos\theta)}$.

Réponse

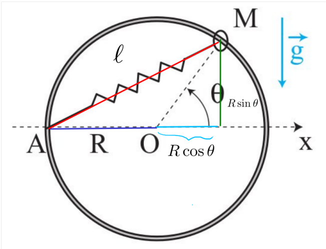


FIGURE 4.4 – Détermination de ℓ

On peut réutiliser la relation de CHASLES pour écrire $\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}$ et déterminer la distance en prenant la norme, mais ici une simple utilisation du théorème de PYTHAGORE suffit. On projette M sur l'axe x pour avoir

$$\begin{aligned} & \ell^2 = (R + R\cos\theta)^2 + (R\sin\theta)^2 \\ \Leftrightarrow\ & \ell^2 = R^2 + 2R^2\cos\theta + R^2(\cos^2\theta + \sin^2\theta) \\ \Leftrightarrow\ & \ell^2 = 2R^2(1+\cos\theta) \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\ell = R\sqrt{2(1+\cos\theta)}} \end{aligned}$$

■

◇

2) Exprimer l'énergie potentielle $\mathcal{E}_p$ du système constitué de l'anneau et du ressort en fonction de l'angle θ.

Réponse

L'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p$ est constituée de l'énergie potentielle de pesanteur de l'anneau et de l'énergie potentielle élastique du ressort. Pour $\mathcal{E}_{p,p}$ avec origine en O, on a une altitude $R\sin\theta$; pour $\mathcal{E}_{p,el}$ on a la différence de longueur à a vide $\ell - \ell_0$ avec $\ell_0 = 0$, d'où

$$\begin{aligned} & \mathcal{E}_p = \mathcal{E}_{p,p} + \mathcal{E}_{p,el} \\ \Leftrightarrow\ & \mathcal{E}_p = mgR\sin\theta + \frac{k}{2}\ell^2 \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\mathcal{E}_p = mgR\sin\theta + kR^2(1+\cos\theta)} \end{aligned}$$

■

◇

3) Déterminer les positions d'équilibre de l'anneau.

Réponse

On trouve les positions d'équilibre de l'anneau en trouvant les angles θ_{eq} tels que la dérivée de $\mathcal{E}_p$ s'annule, soit

$$\begin{aligned} & \left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}\right|_{\theta_{\text{eq}}} = -kR^2\sin\theta_{\text{eq}} + mgR\cos\theta_{\text{eq}} = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \sin\theta_{\text{eq}} = \frac{mg\cancel{R}}{kR^{\cancel{2}}}\cos\theta_{\text{eq}} \\ \Leftrightarrow\ & \tan\theta_{\text{eq}} = \frac{mg}{kR} \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\theta_{\text{eq},1} = \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{\theta_{\text{eq},2} = \pi + \arctan\left(\frac{mg}{kR}\right)} \end{aligned}$$

■

avec $\theta_{\text{eq},1}$ compris entre 0 et 90°, et $\theta_{\text{eq},2}$ compris entre 180 et 270°.

◇

4) Préciser si les positions d'équilibre obtenues sont stables.

Réponse

On étudie la stabilité des positions en évaluant la dérivée seconde de $\mathcal{E}_p$ en ce point et en vérifiant son signe. On obtient

$$\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\text{eq}}} = -kR^2\cos\theta_{\text{eq}} - mgR\sin\theta_{\text{eq}}$$

$$\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq}}} = -\left(kR^2 + \frac{m^2g^2}{k}\right)\cos\theta_{\mathrm{eq}}$$

en utilisant les résultats précédents sur la dérivée première de $\mathcal{E}_p$. L'intérieur de la parenthèse étant positif, le signe de cette dérivée seconde est opposé à celui du cosinus de la position d'équilibre. Or, $\cos\theta_{\mathrm{eq},1} > 0$ et $\cos\theta_{\mathrm{eq},2} < 0$, donc

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq},1}} < 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right|_{\theta_{\mathrm{eq},2}} > 0}$$ ■

La première position est donc instable, et la seconde stable.

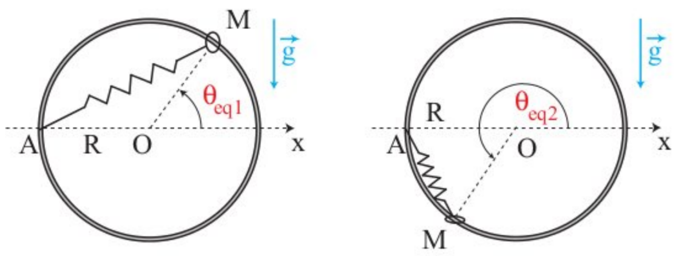


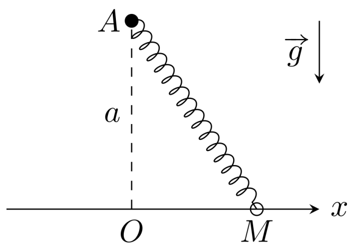
Figure 4.5 – Positions d'équilibre du système

◇

IV Oscillateur de Landau

L'oscillateur de Landau est un modèle théorique permettant de modéliser efficacement des systèmes physiques pour lesquelles des faibles non-linéarités sont à prendre en compte. Il s'agit d'une approximation un peu plus précise que celle de l'oscillateur harmonique pour étudier le comportement de systèmes au voisinage de leur position d'équilibre.

Un exemple de système modèle permettant de réaliser un oscillateur de Landau est un petit anneau, assimilé à un point matériel M de masse m, astreint à se déplacer sans frottement le long d'une tige rectiligne horizontale choisie comme axe (Ox). Cet anneau est relié à un ressort, de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k, dont l'autre extrémité est fixée en A. La distance de A à la tige est notée AO $= a$.



1) Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(x)$.

Réponse

Comme l'anneau est contraint de se déplacer sur une ligne horizontale, son énergie potentielle de pesanteur est constante. Ainsi, la seule contribution à l'énergie potentielle est d'origine élastique,

$$\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}k(\mathrm{AM} - \ell_0)^2$$

La longueur AM s'exprime à partir du théorème de Pythagore,

$$\mathrm{AM}^2 = a^2 + x^2 \quad \text{d'où} \quad \boxed{\mathcal{E}_p(x) = \frac{1}{2}k\left(\sqrt{a^2+x^2} - \ell_0\right)^2}$$

◇

2) La courbe d'énergie potentielle est représentée ci-dessous pour quatre valeurs de a : $a_1 = \ell_0/10$, $a_2 = \ell_0/3$, $a_3 = \ell_0$ et $a_4 = 3\ell_0$. En raisonnement qualitativement sur les positions d'équilibre, attribuer chaque courbe à la valeur de a qui lui correspond.

Réponse

Qualitativement, il est assez simple de comprendre pourquoi certaines courbes font apparaître deux minima et d'autre un seul. Si $a < \ell_0$, alors deux positions de M, symétriques par rapport à O sont telles que $\mathrm{AM} = \ell_0$. Dans ce cas, l'énergie potentielle élastique est nulle. Au contraire, si $a > \ell_0$, le ressort est toujours étiré et l'énergie potentielle élastique jamais nulle.

Ce raisonnement se retrouve tout à fait sur l'expression mathématique de $\mathcal{E}_p$!

Ainsi on peut identifier la courbe en **pointillés violets au cas $\mathbf{a_4 = 3\ell_0}$**. La courbe en **points verts** ne fait apparaître qu'un seul minimum, mais son énergie potentielle est nulle : elle correspond au cas $\mathbf{a_3 = \ell_0}$. Enfin, il reste à identifier les deux dernières courbes, ce qui peut se faire à partir de la valeur de l'énergie potentielle en $x = 0$. Elle est plus élevée sur la courbe bleue que sur la courbe rouge, signe que le ressort est davantage comprimé. On en déduit que la **courbe bleue** est celle du cas $\mathbf{a_1 = \ell_0/10}$ alors que la courbe **rouge** correspond à $\mathbf{a_2 = \ell_0/3}$.

◇

3) Pour chaque valeur de a, analyser le mouvement possible de l'anneau en fonction des conditions initiales.

Réponse

Quelles que soient les conditions initiales, le mouvement est borné car $\mathcal{E}_p$ diverge en $\pm\infty$, et il est donc périodique. Dans le cas $a \leq \ell_0$, si les conditions initiales sont telles que $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_p(x = 0)$, alors le mouvement est restreint à un côté $x < 0$ ou $x > 0$ car l'anneau n'a pas assez d'énergie pour franchir la barrière de potentiel en $x = 0$. Si les conditions initiales sont en revanche telles que $\mathcal{E}_m > \mathcal{E}_p(x = 0)$, le mouvement a lieu de part et d'autre de la barrière, et il est symétrique car le profil d'énergie potentielle l'est. C'est également le cas si $a > \ell_0$, et ce quelles que soient les conditions initiales.

◇

4) Pour les valeurs de a précédentes, l'anneau est lâché avec les mêmes conditions initiales. Sa vitesse et sa position sont enregistrées au cours du temps, ce qui donne les trajectoires de phase de la figure ci-dessous. Déterminer la condition initiale et affecter chaque trajectoire de phase à la valeur de a qui lui correspond.

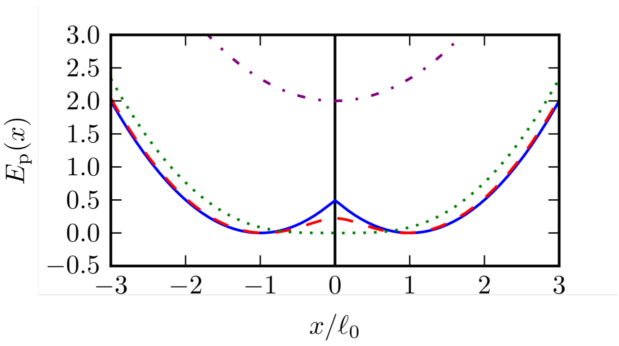
Réponse

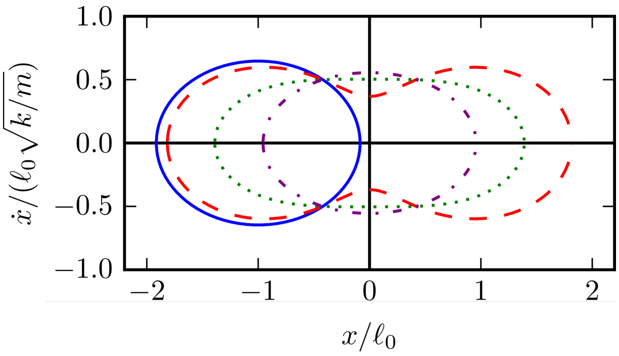
La condition initiale est très simple à déterminer : c'est le seul point commun à toutes les trajectoires de phase. Compte tenu de la symétrie des portraits de phase et des profils d'énergie potentielle, seule la norme de la vitesse peut être déterminée. On trouve

$$x_0 = 0{,}4\ell_0 \quad \text{et} \quad \dot{x}_0 = 0{,}5\ell_0\sqrt{\frac{k}{m}}$$

Seule la trajectoire de phase représentée en **bleu** n'est pas symétrique par rapport à $x = 0$. Elle correspond donc au cas où la barrière de potentiel centrale est la plus élevée, donc **le cas $\mathbf{a_1 = \ell_0/10}$**. La trajectoire de phase représentée en **rouge** montre une réduction de vitesse en $x = 0$: elle correspond donc au cas où il y a une barrière de potentiel, mais moins élevée, c'est-à-dire le cas $\mathbf{a_2 = \ell_0/3}$. Enfin, la trajectoire de phase **verte** est plus aplatie que la trajectoire de phase violette. Cet aplatissement se retrouve dans les courbes d'énergie potentielle : la courbe verte correspond au cas $\mathbf{a_3 = \ell_0}$ et la courbe **violette** au cas $\mathbf{a_4 = 3\ell_0}$.

◇





V Pendule électrique

On étudie un pendule constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium, et suspendue à une potence par une fine tige de longueur $R = 10\,\mathrm{cm}$ dont nous négligerons la masse. La boule de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ sera assimilée à un point matériel M.

Une boule identique est placée en A (voir schéma). Les deux boules sont chargées électriquement avec la même charge, et donc se repoussent. La force exercée par A sur M s'écrit

$$\overrightarrow{F}_e = \frac{k}{\mathrm{AM}^3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \quad \text{avec} \quad k = 4{,}4 \times 10^{-3}\,\mathrm{N{\cdot}m^2}$$

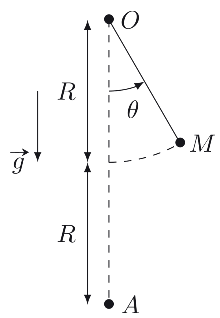


FIGURE 4.6 – Dispositif

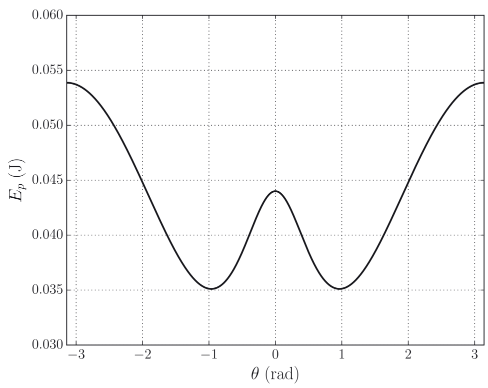


FIGURE 4.7 – Courbe $\mathcal{E}_p(\theta)$

1) Exprimer la distance AM en fonction de R et θ.

Réponse

Pour exprimer la distance AM, on la décompose par des vecteurs connus et on pourra prendre la norme du vecteur $\overrightarrow{\mathrm{AM}}$ avec $\sqrt{x_{\mathrm{AM}}{}^2 + y_{\mathrm{AM}}{}^2}$, ou $\sqrt{\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AM}}}$. Notamment, $\overrightarrow{\mathrm{AM}} = \overrightarrow{\mathrm{AO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

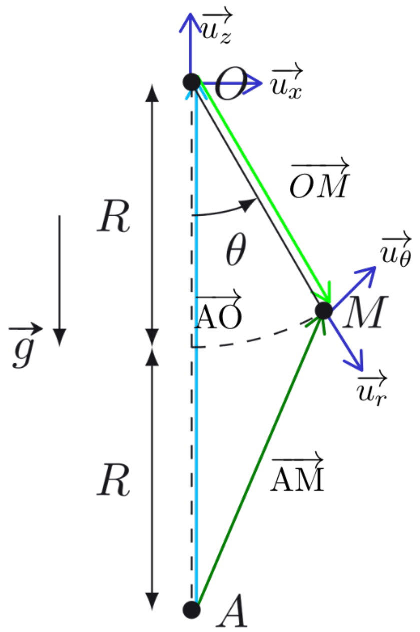


FIGURE 4.8 – Détermination de AM

Il faut donc décomposer $\overrightarrow{AO}$ et $\overrightarrow{OM}$ sur la même base, comme on le fait pour le poids sur un plan incliné. En effet,

$$\overrightarrow{AO} = 2R\,\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r}$$

mais on ne peut pas sommer les deux dans des bases différentes. Décomposons $\overrightarrow{u_r}$ sur $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$: on trouve

$$\overrightarrow{u_r} = \sin\theta\,\overrightarrow{u_x} - \cos\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

Ainsi,
$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{AM} = \overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\\
\Leftrightarrow\ &\overrightarrow{AM} = \begin{pmatrix} R\sin\theta \\ 2R - R\cos\theta \end{pmatrix}\\
\Rightarrow\ &\|\overrightarrow{AM}\| = \sqrt{R^2\sin^2\theta + (2R - R\cos\theta)^2}\\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{AM} = \sqrt{R^2\sin^2\theta + 4R^2 - 2R^2\cos\theta + R^2\cos^2\theta}\\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{AM} = \sqrt{5R^2 - 2R^2\cos\theta} \quad \text{avec} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\mathrm{AM} = R\sqrt{5 - 2\cos\theta}}
\end{aligned}$$
■

◇

2) Montrer que la force $\vec{F}_e$ est conservative, et que son énergie potentielle s'exprime

$$\mathcal{E}_{p,e}(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4\cos\theta}}$$

Réponse

Une force est conservative si son travail élémentaire s'exprime sous la forme $-\mathrm{d}\mathcal{E}_p$. Calculons son travail élémentaire :

$$\begin{aligned}
&\delta W(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{AM}\\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{\mathrm{AM}^3}\overrightarrow{AM} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{AM}\\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{\mathrm{AM}^3}\underbrace{\|\overrightarrow{AM}\|}_{=\mathrm{AM}}\|\mathrm{d}\overrightarrow{AM}\|\underbrace{\cos\left(\overrightarrow{AM}, \mathrm{d}\overrightarrow{AM}\right)}_{=1}\\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{\mathrm{AM}^2}\underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AM}}}}_{=1}\mathrm{dAM}\\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = -k\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{AM}}\right)\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\delta W(\vec{F}_e) = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,e}}\\
\text{avec}\quad &\boxed{\mathcal{E}_{p,e} = \frac{k}{\mathrm{AM}} = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4\cos\theta}}}
\end{aligned}$$
■

◇

3) Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(\theta)$ de la boule M.

Réponse

La boule M a également une énergie potentielle de pesanteur. En prenant O comme origine de l'altitude, l'altitude de la boule M $z(\theta)$ s'exprime

$$z(\theta) = -R\cos\theta$$

Ainsi,

$$\mathcal{E}_p(\theta) = \mathcal{E}_{p,p}(\theta) + \mathcal{E}_{p,e}(\theta)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5-4\cos\theta}} - mgR\cos\theta}$$ ■

◇

4) Le tracé de l'énergie potentielle est proposé sur la figure 2. Déduire de ce graphe l'existence de positions d'équilibres, et indiquer leur nature.

Réponse

On observe en tout 5 positions d'équilibres : deux stables dans les puits de potentiel vers ± 1 rad, et trois instables (maxima locaux d'énergie potentielle) en $-\pi$, 0 et π.

◇

5) Discuter de la nature de la trajectoire de M suivant la valeur de son énergie mécanique.

Réponse

Le mouvement du pendule ne se fait que dans les zones du graphique où $\mathcal{E}_p < \mathcal{E}_m$. On distingue donc 4 cas :

Cas 1	$0\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 3{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ pas de mouvement
Cas 2	$3{,}5 \times 10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 4{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ oscillations $\approx$ position stable
Cas 3	$4{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 5{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ mouvement périodique entre $\mathcal{E}_{p,\max}$
Cas 4	$5{,}4 \times 10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < +\infty$	$\Rightarrow$ mouvement révolutif : tours à l'infini

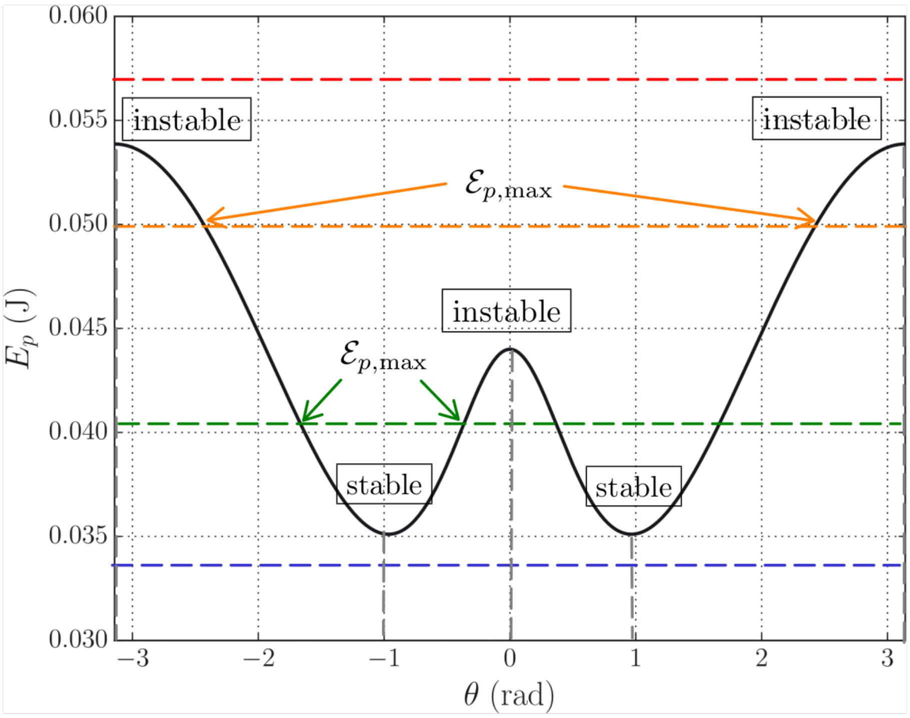


FIGURE 4.9 – Mouvement selon $\mathcal{E}_m$

◇