/68 P1 Étude d'une lampe de secours rechargeable *(D'après CCINP TSI 2022)*

Il est recommandé d'avoir sur soi une lampe pour être vu en cas de détresse ou tout simplement pour se déplacer par nuit noire. Pour ne pas avoir à gérer des piles défaillantes ou des accumulateurs non chargés, une « lampe à secouer » peut s'avérer utile. Un extrait d'une description publicitaire de cet objet est rapporté ci-dessous.

Extrait d'une publicité pour une lampe à secouer

En secouant la lampe 30 secondes (un peu comme une bombe de peinture), de l'énergie électrique est produite et stockée dans un condensateur. Vous obtenez alors environ 20 minutes d'une lumière produite par une DEL (diode électroluminescente).
Si vous n'utilisez pas toute l'énergie produite, elle restera stockée dans le condensateur pendant plusieurs semaines pour être ensuite immédiatement disponible sur simple pression du bouton marche/arrêt.

On part d'une situation où on suppose que le condensateur vient d'être chargé et que la tension à ses bornes est $U_0 = 3{,}3\,\mathrm{V}$. On cesse alors d'agiter la lampe et donc de recharger le condensateur.

Tout d'abord, on étudie la décharge de ce condensateur de capacité $C = 10\,\mathrm{F}$ (« supercondensateur ») dans un conducteur ohmique de résistance R pouvant modéliser une lampe à incandescence. Le circuit étudié est donc représenté par le schéma de la figure 1. La partie de circuit utile lors de la phase de charge du condensateur n'est pas représentée.
À l'instant initial $t = 0$ s, on ferme l'interrupteur K et la décharge commence.

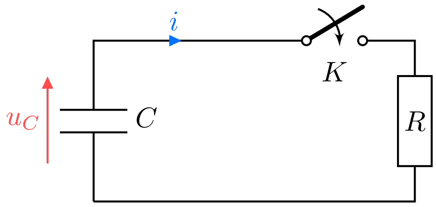

Figure 1 – Circuit électrique équivalent lors de la phase de décharge du condensateur

/10 **1** Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_c(t)$ pendant la décharge en faisant apparaître une constante de temps τ dont on donnera l'expression. Puis déterminer l'expression littérale de la solution de cette équation différentielle.

Réponse

Avec une loi des mailles :

$$
\begin{aligned}
& u_C(t) - Ri(t) \overset{(1)}{=} 0 && \text{RCT convention générateur} \\
\Leftrightarrow\ & u_C(t) + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} 0 && \text{Forme canonique et } \tau \overset{(1)}{=} RC \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C(t)}{\tau} \overset{(1)}{=} 0
\end{aligned}
$$

On résout en injectant la forme générique $u_C(t) \overset{(1)}{=} K\mathrm{e}^{rt}$:

$$
\begin{aligned}
& r \cdot \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + \frac{\cancel{K\mathrm{e}^{rt}}}{\tau} = 0 \\
\Leftrightarrow\ & r \overset{(1)}{=} -\frac{1}{\tau}
\end{aligned}
$$

Donc la forme générale de $u_C(t) \overset{(1)}{=} K\mathrm{e}^{-t/\tau}$. Or, $u_C(0^-) = U_0 = u_C(0^+)$ par continuité de la tension aux bornes de C (1). Cela donne donc $U_0 = K$ (1), et ainsi

$$
\boxed{u_C(t) \overset{(1)}{=} U_0\mathrm{e}^{-t/\tau}}
$$

◇

/3 **2** Si l'on considère que la décharge s'effectue en 20 minutes (comme précisé dans le document fourni), déterminer la valeur de la résistance R du conducteur ohmique qu'il faut alors associer au condensateur de capacité $C = 10\,\mathrm{F}$.

Réponse

La décharge d'un condensateur s'accomplit à $t_{99} \approx 5\tau = 5RC$ (1). Ainsi,

$$
5\tau = t_{99} \Leftrightarrow RC = \frac{t_{99}}{5} \Leftrightarrow \boxed{R \overset{(1)}{=} \frac{t_{99}}{5C}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_{99} = 20\,\text{minutes} = 240\,\mathrm{s} \\ C = 10\,\mathrm{F} \end{cases}
$$

$$
\text{A.N. : } \underline{R \overset{(1)}{=} 24\,\Omega}
$$

◇

Certains modèles électriques plus élaborés du « supercondensateur » utilisé ici permettent de traduire, plus fidèlement à la réalité, son comportement réel dans un circuit. Un des modèles possibles fait apparaître, autour de la capacité C, une résistance R_f en parallèle et une résistance série R_s conformément au schéma de la figure 2.

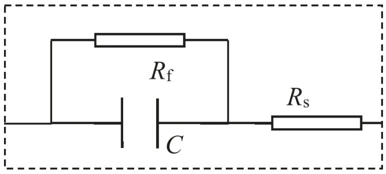

Figure 2 – Modèle plus fidèle à la réalité pour le « supercondensateur »

/4 $\boxed{3}$ Pour quelles valeurs limites de R_s et R_f retrouve-t-on le modèle simple (C seul) du « supercondensateur » ?

Réponse

Avec $R_f \to \infty$ (1), on a un interrupteur ouvert (1), et avec $R_s = 0$ (1) on a un fil (1), ce qui correspond bien à une capacité idéale seule.

◇

Pour la suite des questions, on revient au modèle simple (C seul) pour le condensateur, toujours initialement chargé sous une tension $U_0 = 3{,}3$ V.

On remplace maintenant le conducteur ohmique de résistance R par une DEL dont les caractéristiques sont les suivantes (Figure 3 et Tableau 1) :

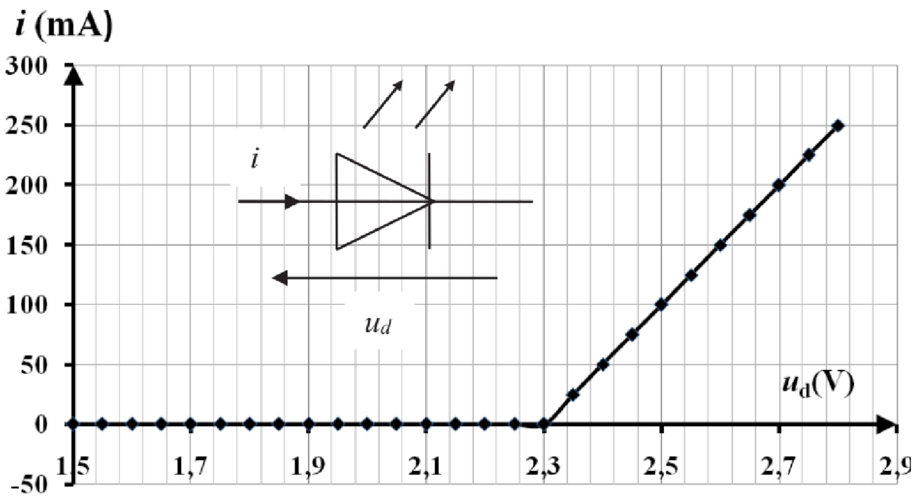

Figure 3 – Caractéristique $i = f(u_d)$ et symbole pour la diode électroluminescente DEL.

Tableau 1 – Electrical & Optical Characteristics

Parameter	Symbol	Condition	Min.	Typ.	Max.	Unit
Luminous Flux	Φ_V	$i = 200\,\mathrm{mA}$	6	8.5	–	lm
Forward Voltage	u_d	$i = 200\,\mathrm{mA}$	–	2.5	2.8	V
D.C. Forward Current Max	i_M	–	–	–	250	mA
Peak Wavelength	λ_p	$i = 200\,\mathrm{mA}$	–	635	–	nm
Dominant Wavelength	λ_d	$i = 200\,\mathrm{mA}$	–	624	–	nm
Reverse Current	i_r	$u_r = 5\,\mathrm{V}$	–	–	50	µA
Viewing angle	$2\Phi_{1/2}$	$i = 200\,\mathrm{mA}$	–	120	–	deg
Spectrum Line Halfwidth	$\Delta\lambda$	$i = 200\,\mathrm{mA}$	–	20	–	nm

Pour cette diode, on appelle tension seuil, notée U_S la tension minimale au-delà de laquelle la diode devient passante. On convient alors que la diode électroluminescente cesse d'émettre suffisamment de lumière dès que $u_d < U_S + 0{,}1\,\mathrm{V}$.

/14 $\boxed{4}$ Comment se comporte la DEL lorsque la diode est bloquée ($u_d < 2{,}3\,\mathrm{V}$) ?. D'autre part, proposer un modèle électrique équivalent pour la DEL lorsqu'elle est passante ($u_d > 2{,}3\,\mathrm{V}$), sous forme d'un générateur de Thévenin (valeurs numériques attendues). On fera le schéma électrique correspondant en précisant bien les sens de l'intensité de la tension u_d.

Réponse

◇ Lorsque la DEL est bloquée, on a $i = 0$ (1) et c'est donc un **interrupteur ouvert** (1).

◇ Lorsqu'elle est passante, on a une caractéristique affine, d'équation

$$\overset{(1)}{i = a u_d + b}$$

▷ a est le coefficient directeur :

$$\boxed{a \overset{(1)}{=} \frac{i_{\max} - i_{\min}}{u_{d,\max} - u_{d,\lim}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i_{\max} = 250\,\text{mA} \\ \phantom{i_{\max}} = 0{,}250\,\text{A} \\ i_{\min} = 0 \\ u_{d,\max} = 2{,}8\,\text{V} \\ u_{d,\lim} = 2{,}3\,\text{V} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{a \overset{(1)}{=} 0{,}50\,\text{S}}$

▷ b est l'ordonnée à l'origine, que l'on obtient en connaissant les coordonnées d'un point. Ici, pour le point limite de blocage, on a

$$\underbrace{i_{\lim}}_{=0} = a u_{d,\lim} + b \Leftrightarrow \boxed{b \overset{(1)}{=} -a u_{d,\lim}}$$

A.N. : $\underline{b \overset{(1)}{=} -1{,}15\,\text{A}}$

Pour la modéliser en générateur de Thévenin, il faut écrire sa caractéristique sous la forme $u_d = ri + U_S$ (1); on l'isole de l'équation précédente puis on détermine a' et b' en fonction des données précédemment trouvées :

$$i = au_d + b \Leftrightarrow au_d = i - b \Leftrightarrow \boxed{u_d \overset{(1)}{=} \frac{1}{a} i + \frac{-b}{a}}$$

donc $\boxed{r = \frac{1}{a}}$ et $\boxed{U_s = \frac{-b}{a}}$

A.N. : $\underline{r \overset{(1)}{=} 2\,\Omega}$ et $\underline{U_s \overset{(1)}{=} 2{,}3\,\text{V}}$

D'où le schéma équivalent Figure 4.

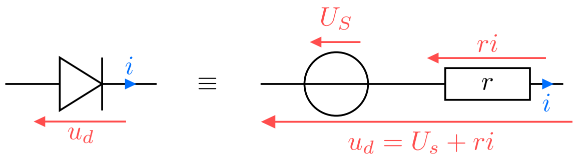

Figure 4 – (1)+(1)

/6 [5] Faire le schéma électrique de la DEL modélisée et insérée dans le circuit précédent. Puis, montrer que la nouvelle équation différentielle régissant l'évolution de $u_c(t)$ lorsque le condensateur se décharge dans la diode électroluminescente est $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau'} = \frac{U_S}{\tau'}$. Préciser l'expression de τ'.

Réponse

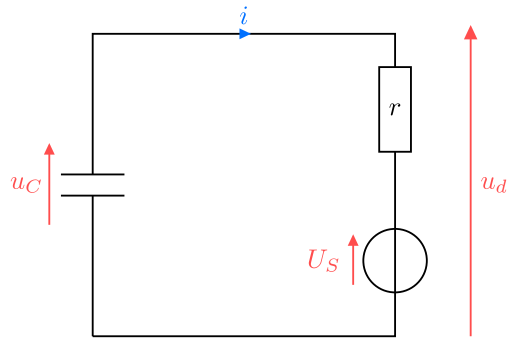

Figure 5 – Schéma équivalent (1)+(1)

$$\begin{aligned} & u_C - ri - U_S \overset{(1)}{=} 0 && \text{RCT C conv. géné.} \\ \Leftrightarrow\ & u_C + rC\frac{du_C}{dt} \overset{(1)}{=} U_S && \text{Canonique et } \tau' \overset{(1)}{=} rC \\ \Leftrightarrow\ & \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau'} \overset{(1)}{=} \frac{U_S}{\tau'} \end{aligned}$$

/8 [6] Déterminer la solution $u_c(t)$ de cette nouvelle équation différentielle, avec les mêmes conditions initiales que précédemment. Puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants du graphe (valeur et tangente à l'origine ainsi qu'une asymptote éventuelle).

Réponse

On trouve comme précédemment une solution homogène de la forme $\boxed{u_{C,h}(t) = Be^{-t/\tau'}}$ (1). La solution particulière constante donne $\boxed{u_{C,p}(t) = U_S}$ (1). D'où la solution générale totale :

$$u_C(t) \overset{(1)}{=} u_{C,h}(t) + u_{C,p} = Be^{-t/\tau'} + U_S$$

On a toujours $u_C(0) = U_0$, soit ici

$$U_0 = B + U_S \Leftrightarrow \boxed{B \overset{(1)}{=} U_0 - U_S}$$

$$\Rightarrow \boxed{u_C(t) \overset{(1)}{=} U_S + (U_0 - U_S)e^{-t/\tau'}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau' = rC}$$

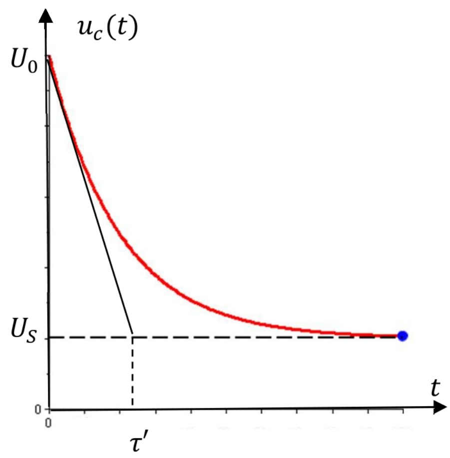

Figure 6 – (1)+(1)+(1)

/7 7 Déterminer l'expression littérale de $i(t)$. Puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants.

Réponse

Avec la RCT de C en convention générateur :

$$i \overset{①}{=} -C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow i = -C\left(-\frac{1}{\tau'}\right)(U_0 - U_S)\mathrm{e}^{-t/\tau'}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i(t) \overset{①}{=} \frac{U_0 - U_S}{r}\mathrm{e}^{-t/\tau'}}$$

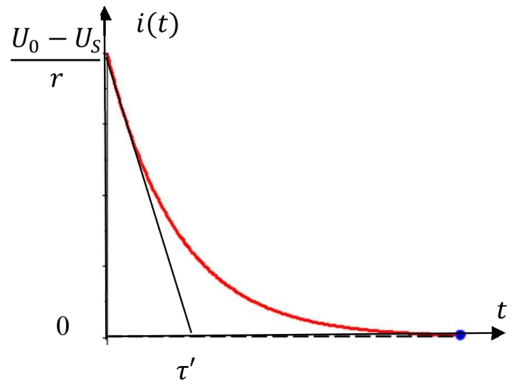

Figure 7 – ①+①+①

/6 8 À l'aide des caractéristiques techniques fournies dans le Tableau 1, indiquer si le fonctionnement correct de la DEL est garanti sans dommage. Proposer une solution pour éventuellement remédier au problème rencontré.

Réponse

On remarque que $u_{C,\max} = U_0 = 3{,}3\,\mathrm{V}$ ① et que $i_{\max} = \frac{U_0 - U_S}{r} = 0{,}5\,\mathrm{A}$. ①

Or, d'après le Tableau 1, $i_{\max} = 250\,\mathrm{mA}$ ① et $u_{c,\max} = 2{,}8\,\mathrm{V}$. ①

Ainsi, il faut restreindre la charge initiale du condensateur en **secouant moins longtemps** ① ($\approx 20\,\mathrm{s}$). On peut aussi **ajouter une résistance en série** ① avec la DEL pour diviser la valeur initiale de l'intensité.

/7 9 Prévoir, sans la mise en œuvre de la solution précédente, la durée approximative d'éclairage de cette lampe notée T (on rappelle que $\ln(10) \approx 2{,}3$). Conclure.

Réponse

D'après l'énoncé, la lampe éclaire tant que $u_d > U_s + 0{,}1\,\mathrm{V}$ ① ; or, d'après le schéma de la question 5, $u_d = u_C$ ①. La condition d'éclairage est donc

$$\cancel{U_S} + (U_0 - U_S)\mathrm{e}^{-t/\tau'} \overset{①}{>} \cancel{U_S} + 0{,}1\,\mathrm{V}$$

T la limite

$$\Rightarrow (U_0 - U_S)\mathrm{e}^{-T/\tau'} = 0{,}1\,\mathrm{V}$$

$$\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-T/\tau'} = \frac{0{,}1\,\mathrm{V}}{U_0 - U_S}$$

ln(·)

$$\Leftrightarrow \frac{-T}{\tau'} \overset{①}{=} \ln\frac{0{,}1\,\mathrm{V}}{U_0 - U_S}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T \overset{①}{=} \tau' \ln\frac{U_0 - U_S}{0{,}1\,\mathrm{V}}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} \tau' &= rC \\ r &= 2\,\Omega \\ C &= 10\,\mathrm{F} \\ U_0 - U_S &= 1{,}0\,\mathrm{V}\end{aligned}\right.$$

A.N. : $\underline{T \overset{①}{\approx} 46\,\mathrm{s}}$

On est **très loin des 20 minutes annoncée** ! ①

/3 10 Exprimer, en fonction de U_0 et de $U_f = U_S + 0{,}1\,\mathrm{V}$, le pourcentage d'énergie restante dans le condensateur lorsque la DEL cesse d'émettre de la lumière par rapport à l'énergie initiale accumulée (on ne cherche pas à la calculer, mais on estime ici ce pourcentage à environ 50 %).

Réponse

On a

$$\mathcal{E}_C(t) \overset{①}{=} \frac{1}{2}Cu_C(t)^2$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{C,i} = \frac{1}{2}C{U_0}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{C,f} = \frac{1}{2}C{U_f}^2$$

$$\Rightarrow p \overset{1}{=} 100 \times \frac{\mathcal{E}_{C,f}}{\mathcal{E}_{c,i}} \Leftrightarrow \boxed{p \overset{1}{=} 100 \times \frac{{U_f}^2}{{U_0}^2}}$$