

Correction du DS

/31 E1 Synthèse de l'ammoniac (CCP TSI 2013)

/5 1 On dresse le tableau d'avancement :

Équation	①+①	$\text{N}_{2(g)} + 3\text{H}_{2(g)} = 2\text{NH}_{3(g)}$			$n_{\text{tot,gaz}}$ ①	
Initial	$\xi = 0$	n_0	$3n_0$	0	$4n_0$	①
Interm.	ξ	$n_0 - \xi$	$3n_0 - 3\xi$	2ξ	$4n_0 - 2\xi$	①
Équilib.	ξ	$n_0(1 - \rho)$	$3n_0(1 - \rho)$	$2\rho n_0$	$2n_0(2 - \rho)$	+1 Q2

/4 2 On cherche ξ_{max} : les réactifs étant introduits dans les proportions stœchiométriques, on trouve ξ_{max} à partir de l'un des deux réactifs :

$$n_0 - \xi_{\text{max}} = 0 \Leftrightarrow \xi_{\text{max}} = n_0$$

Ainsi,

$$\rho = \frac{\xi_{\text{eq}}}{\xi_{\text{max}}} \Leftrightarrow \rho = \frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}$$

d'où la dernière ligne du tableau précédent.

/5 3

$$Q_r = \frac{a(\text{NH}_3)^2}{a(\text{N}_2)a(\text{H}_2)^3} \Rightarrow K^\circ = \frac{a(\text{NH}_3)_{\text{eq}}^2}{a(\text{N}_2)_{\text{eq}}a(\text{H}_2)_{\text{eq}}^3} \Leftrightarrow K^\circ = \frac{P(\text{NH}_3)_{\text{eq}}^2 (P^\circ)^2}{P(\text{N}_2)_{\text{eq}} P(\text{H}_2)_{\text{eq}}^3}$$

Loi de DALTON :

$$P(\text{NH}_3)_{\text{eq}} = \frac{n(\text{NH}_3)_{\text{eq}}}{n_{\text{tot}}} \times P \Leftrightarrow K^\circ = \frac{n(\text{NH}_3)_{\text{eq}}^2 n_{\text{tot}}^2}{n(\text{N}_2)_{\text{eq}} n(\text{H}_2)_{\text{eq}}^3} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2$$

/2 4 On injecte les expressions des quantités de matière à l'équilibre :

$$K^\circ = \frac{(2n_0\rho)^2 (2n_0(2-\rho))^2}{n_0(1-\rho) \times (3n_0(1-\rho))^3} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2 \Leftrightarrow K^\circ = \frac{16\rho^2(2-\rho)^2}{27(1-\rho)^4} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2$$

/10 5

$$K^\circ = \frac{16\rho^2(2-\rho)^2}{27(1-\rho)^4} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2 \Leftrightarrow \sqrt{K^\circ} = \frac{4\rho(2-\rho)}{3\sqrt{3}(1-\rho)^2} \times \frac{P^\circ}{P}$$

On rassemble

$$\Leftrightarrow 300\sqrt{K^\circ} \cdot 3\sqrt{3}(1-\rho)^2 = 4\rho(2-\rho)$$

On développe

$$\Leftrightarrow 900\sqrt{3K^\circ}(1-2\rho+\rho^2) = 8\rho-4\rho^2$$

On factorise

$$\Leftrightarrow \rho^2(900\sqrt{3K^\circ}+4) - 2\rho(900\sqrt{3K^\circ}+4) + 900\sqrt{3K^\circ} = 0$$

On identifie

$$\Leftrightarrow C\rho^2 - 2C\rho + C - 4 = 0 \quad \text{avec} \quad C = 900\sqrt{3K^\circ} + 4$$

$$\Rightarrow \Delta = 4C^2 - 4C(C - 4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta = 16C}$$

$$\text{soit } \rho_{\pm} = \frac{2C \pm 4\sqrt{C}}{2C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_{\pm} = 1 \pm \frac{2}{\sqrt{C}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 900\sqrt{3K^{\circ}} + 4 \\ K^{\circ} = 2,8 \times 10^{-5} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \rho_{+} = 1,57 \quad \text{ou} \quad \rho_{-} = 0,43$$

Le rendement ne pouvant être supérieur à 1, on obtient alors $\boxed{\rho = 0,43}$

- /3 6 En diminuant P , on augmente le quotient réactionnel par rapport à une situation d'équilibre où $Q = K^{\circ}$. La température étant constante, la constante d'équilibre reste la même. Donc $Q > K^{\circ}$, donc la réaction évolue dans le sens indirect ce qui a pour effet de diminuer le rendement.

/38 E2 Réaction du dibromure de cuivre

- /4 1 Il est indiqué que les mesures sont effectuées avec un excès de CuBr_2 , qui est donc encore présent à la fin de la réaction. Il s'agit donc d'un état d'équilibre, et on donc appliquer la loi d'action des masses :

$$K^{\circ} = Q_{r,\text{eq}} \\ \Leftrightarrow K^{\circ} = \frac{a_{\text{Br}_2,\text{eq}} \cdot a_{\text{CuBr}}^2}{a_{\text{CuBr}_2,\text{eq}}}$$

$$\Leftrightarrow K^{\circ} = \frac{p_{\text{Br}_2,\text{eq}}}{p^{\circ}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{\text{Br}_2,\text{eq}} = 52,6 \times 10^{-3} \text{ bar} \\ p^{\circ} = 1 \text{ bar} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } K^{\circ} = 52,6 \times 10^{-3}$$

- /13 2 On suppose un état d'équilibre. La pression finale vaut alors 52,6 mbar d'après le tableau de valeurs. On peut en déduire la quantité de dibrome formé, et donc l'avancement grâce à un tableau :

Équation ①+①		$2\text{CuBr}_{2(s)} = 2\text{CuBr}_{(s)} + \text{Br}_{2(g)}$			
Initial	$\xi = 0$	n_1	0	0	①
Final	ξ_f	$n_1 - 2\xi_f$	$2\xi_f$	ξ_f	①
Final (mmol)	$\xi_f = \xi_{\text{max}}$	0	2,00	1,00	①

Ainsi, on trouve

$$n_{\text{Br}_2,\text{eq}} = \xi_{\text{eq}} = \frac{P_{\text{eq}} V}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_{\text{eq}} = 52,6 \times 10^2 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \\ T = 473 \text{ K} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \xi_{\text{eq}} = 1,34 \text{ mmol}$$

Or, on trouve facilement l'avancement maximal :

$$n_1 - 2\xi_{\text{max}} = 0 \Leftrightarrow \xi_{\text{max}} = \frac{n_1}{2} \Rightarrow \xi_{\text{max}} = 1,00 \text{ mmol} < \xi_{\text{eq}}$$

$$\text{Ainsi, } \xi_f = \xi_{\text{max}} \quad \text{rupture d'équilibre} \quad ①$$

On complète alors la dernière ligne du tableau. Quant à la pression, on la calcule avec la quantité de dibrome à l'état final, $n_{\text{Br}_2,f} = 1,00 \text{ mmol}$:

$$P_f = \frac{n_{\text{Br}_2,f} RT}{V} \Rightarrow P_f = 3,9 \times 10^{-2} \text{ bar}$$

- 32 a – Le système était en rupture d'équilibre. L'ajout de réactif va donc entraîner l'évolution en sens direct ①, et selon la quantité ajoutée le système peut aboutir à une nouvelle rupture d'équilibre ou à un état d'équilibre. ①

- /1 b – Le système est en rupture d'équilibre car le réactif est limitant. Ajouter un produit ne change rien. ①

- /1 c – Le système est en rupture d'équilibre car le réactif est limitant. Ajouter un produit ne change rien. ①

- /6 4 De la même manière que précédemment, on a ξ_{eq} inchangé ①, seulement on trouve $\xi_{\text{max}} = 5,00 \text{ mmol} > \xi_{\text{eq}}$; ainsi $\xi_f = \xi_{\text{eq}}$ ①, on atteint donc un **état d'équilibre** ① et on peut compléter le tableau d'avancement :

Équation		$2\text{CuBr}_{2(s)} = 2\text{CuBr}_{(s)} + \text{Br}_{2(g)}$		
Initial	$\xi = 0$	n_2	0	0
Final (mmol)	$\xi_f = \xi_{\text{eq}}$	7,32	2,68	1,34

①

On a alors

$$P_f = P_{\text{eq}} \Rightarrow P_f \overset{\textcircled{1}}{=} 52,6 \text{ mbar}$$

51 a – Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant solide ne modifie pas le quotient de réaction. Il n'y a donc pas d'évolution. ①

/1 b – Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant solide ne modifie pas le quotient de réaction. Il n'y a donc pas d'évolution. ①

/2 c – Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant gazeux augmente le quotient de réaction ①. Celui-ci devient donc plus grand que la constante d'équilibre, et il y a alors **évolution en sens indirect**. ①

/7 6 Pour un excès de CuBr_2 , l'état final sera un état d'équilibre donc la pression sera constante, avec

$$P_f = K^\circ P^\circ \quad \textcircled{1}$$

En revanche, si CuBr_2 est en défaut, il y a rupture d'équilibre, et on aura

$$n_{\text{Br}_2, f} = \xi_{\text{max}} \overset{\textcircled{1}}{=} \frac{n_0}{2} \Rightarrow P_f \overset{\textcircled{1}}{=} \frac{n_0 RT}{2V}$$

La limite de défaut/excès de CuBr_2 est trouvée lorsque la quantité introduite permet tout juste d'atteindre l'état d'équilibre tout en ayant donc la pression maximale; soit V_{lim} le volume limite, on a alors

$$\frac{n_0 RT}{2V_{\text{lim}}} \overset{\textcircled{1}}{=} K^\circ P^\circ \Leftrightarrow V_{\text{lim}} \overset{\textcircled{1}}{=} \frac{n_0 RT}{2K^\circ P^\circ}$$

D'où le graphique :

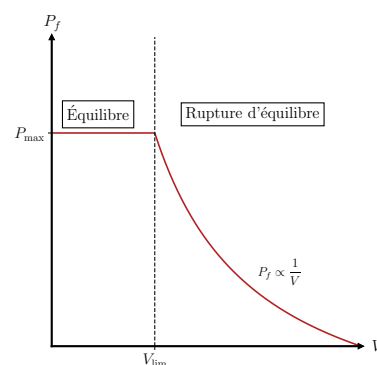


FIGURE 3.1 – Tracé $P_f = f(V)$.
① + ①

/29 E3 RLC échelon montant

/5 1 Intéressons-nous d'abord au circuit à $t < 0$. L'interrupteur est alors fermé si bien que u_C est une tension aux bornes d'un fil donc

$$u_C(t = 0^-) = 0 \quad \textcircled{1}$$

De plus, le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, donc

$$u_C(t = 0^+) = u_C(t = 0^-) = 0 \quad \textcircled{1}$$

Par ailleurs en régime permanent constant, on sait que la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (un fil) ①. Si bien que le circuit est alors équivalent à uniquement la résistance R en série avec la source idéale de fem E . Ainsi avec une loi des mailles et loi d'OHM :

$$i(t = 0^-) = E/R \quad \textcircled{1}$$

De plus, la bobine assure la continuité de l'intensité qui la traverse, donc

$$i(t = 0^+) = i(t = 0^-) = \frac{E}{R} \quad \textcircled{1}$$

Réponses [B] et [C].

/6 2 On se place après l'ouverture de l'interrupteur ($t > 0$). On a alors un circuit RLC série pour lequel on cherche à établir l'équation différentielle du second ordre sur la variable $u_C(t)$. Appliquons la loi des mailles en notant u_R et u_L les tensions respectivement aux bornes du résistor et de la bobine.

$$\begin{aligned}
 u_L + u_R &= u_C \stackrel{\textcircled{1}}{=} E \\
 \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C &\stackrel{\textcircled{1}}{=} E \\
 \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &\stackrel{\textcircled{1}}{=} E \\
 \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{LC}
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } u_R = Ri \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{forme} \\ \text{canonique} \end{array}$$

Par identification, on a alors :

$$\begin{aligned}
 \omega_0^2 &= \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \\
 \Leftrightarrow Q &= \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R} \frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}
 \end{aligned}$$

Réponses A et D.

/1 3 En poursuivant l'identification :

$$\alpha = \frac{E}{LC} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \omega_0^2 E$$

Réponse D

/1 4 La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque le système a une évolution pseudo-périodique avec un très faible dépassement, soit pour un $Q > 1/2$ (précisément, c'est pour $Q = 0,72$). Aucune des deux premières réponses A ou B n'est juste. Notons en revanche que pour $Q = 1/2$, on a le transitoire le plus bref sans dépassement. Par ailleurs, le facteur de qualité s'écrivant

$$Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$$

Une inductance élevée induira un facteur de qualité grand tandis qu'une capacité élevée conduira à un facteur de qualité petit. ① Réponse D.

/2 5 On cherche la valeur de R pour obtenir $Q = 10$ à L et C fixé. On isole alors R dans l'expression de Q :

$$R \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{Q} \sqrt{\frac{L}{C}} \Rightarrow R = 5 \Omega \stackrel{\textcircled{1}}{}$$

Réponse C.

/6 6 Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle canonique s'écrit :

$$\begin{aligned}
 r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\
 \Rightarrow \Delta &= \left(\frac{\omega_0}{Q} \right)^2 - 4\omega_0^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \omega_0^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4 \right) \stackrel{\textcircled{1}}{<} 0 \\
 \text{car} \quad Q &= 10 > \frac{1}{2}
 \end{aligned}$$

$$\Rightarrow r_{\pm} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Que l'on identifie en cohérence avec $u_C(t)$:

$$r_{\pm} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega \Leftrightarrow \tau \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2Q}{\omega_0}$$

Réponse B.

/1 7 De même, par identification,

$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Réponse A.

/1 8 $u_{C,p}$ est la solution particulière de l'équation différentielle. On peut la chercher sous la forme d'une constante. Soit, en l'injectant dans l'équation différentielle :

$$\underbrace{\frac{d^2 u_{C,p}}{dt^2}}_{=0} + \frac{\omega_0}{Q} \underbrace{\frac{du_{C,p}}{dt}}_{=0} + \omega_0^2 u_{C,p}(t) = \omega_0^2 E \Leftrightarrow u_{C,p} \stackrel{\textcircled{1}}{=} E$$

Réponse A

/1 9 Exprimons la constante d'intégration A à l'aide des conditions initiales déterminées à la question 1 :

$$u_C(t=0^+) = 0 = \exp(-0/\tau) [A \cos(0) + B \sin(0)] + E \Leftrightarrow A \stackrel{\textcircled{1}}{=} -E$$

Réponse B.

/5 10 D'après 1, on a aussi $i(t=0^+) = E/R$. Or, la loi courant tension aux bornes du condensateur permet d'écrire que :

$$\left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0^+} = \frac{i(t=0^+)}{C} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{RC}$$

Or,

$$\frac{du_C}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \Omega \times e^{-\frac{t}{\tau}} [-A \sin(\Omega t) + B \cos(\Omega t)]$$

$$\Rightarrow \left. \frac{du_C}{dt} \right|_{0^+} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{A}{\tau} + \Omega B = \frac{E}{RC}$$

$$\Leftrightarrow \Omega B = \frac{E}{RC} + \frac{A}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow B \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{\Omega} \left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau} \right) \quad \left. \begin{array}{l} A = -E \\ \text{Réponse A} \end{array} \right\}$$

De plus, $\tau = \frac{2Q}{\omega_0} = \frac{2}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \times \sqrt{LC} \Leftrightarrow \tau \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2L}{R}$

Donc τ ne s'exprime pas en fonction de R et C uniquement. Ainsi, la réponse B est fausse. De même, RC ne peut pas s'exprimer simplement en fonction de τ donc la réponse D est fausse.

/60 P1 Décroissement logarithmique électrique

/4 1 R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2 .

De plus, à $t \rightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension $\textcircled{1}$ avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension $e(t)$, et on a donc

$$u(\infty) \stackrel{\textcircled{1}}{=} u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$

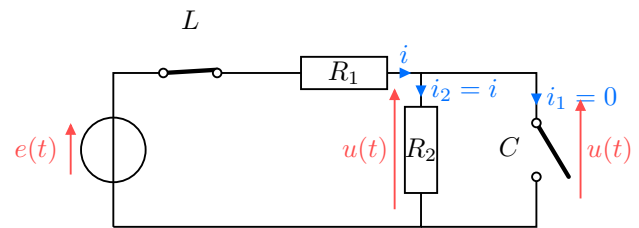


FIGURE 3.2 – Schéma équivalent. $\textcircled{1} + \textcircled{1}$

/8 2 Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L \frac{di}{dt} + R_1 i \stackrel{\textcircled{1}}{=} E$$

On combine :

$$\Rightarrow u + L \frac{d}{dt} \left(C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2} \right) + R_1 C \frac{du}{dt} + R_1 \frac{u}{R_2} = E$$

$$\Leftrightarrow u + LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{du}{dt} + R_1 C \frac{du}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u = E$$

$$\Leftrightarrow LC \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1 C \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{R_2} \right) u \stackrel{\textcircled{1}}{=} E$$

avec $\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{1}{LC} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)}$ et $\lambda \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2} \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right)$

Avec la loi des nœuds :

$$i \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_1 + i_2 = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} + \left(\frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$\stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u_\infty}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$$

/10 3 Pour la solution de l'équation homogène, on injecte $u_h(t) = K e^{rt}$ $\textcircled{1}$ la forme générique pour obtenir l'équation caractéristique. On en cherche alors les racines grâce au discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \Rightarrow \Delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ $\textcircled{1}$ puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_{\pm} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{2\lambda}{2} \pm j \frac{1}{2} \sqrt{4(\omega_0^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow r_{\pm} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\lambda \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$$

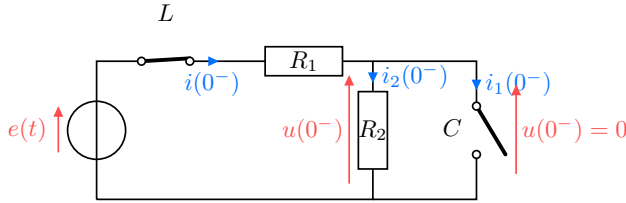
La solution particulière étant visiblement $u_p = u_\infty$ $\textcircled{1}$, on aura la forme générale

$$u(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} u_h(t) + u_p \Leftrightarrow u(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} e^{-\lambda t} (A \cos \Omega t + B \sin \Omega t) + u_\infty$$

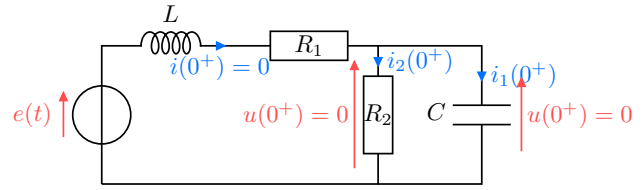
/9 4

En $t = 0^-$

Or, avant l'échelon montant, le générateur est éteint depuis longtemps. Ainsi, le condensateur est déchargé, et $u(0^-) = 0$ ①, et aucun courant ne circule dans le circuit, donc $i(0^-) = 0$ ①.

**FIGURE 3.3** – Schéma en $t = 0^-$. ①**En $t = 0^+$**

Or, par continuité de l'intensité traversant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur ①, lors de l'échelon de tension on garde $i(0^+) = i(0^-) = 0$ et $u(0^+) = u(0^-) = 0$ ①.

**FIGURE 3.4** – Schéma en $t = 0^+$. ①

Ainsi, avec une loi des nœuds, on a $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$ ①. Seulement, comme $i_2(0^+)$ est le courant passant dans la résistance R_2 de tension $u(0^+) = 0$, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ ①, soit avec la loi des nœuds, $i_1(0^+) = 0 = C \frac{du}{dt} \Big|_{0^+}$.

/3 5

Première condition

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + u_\infty = 0 \Leftrightarrow A = -u_\infty \quad \text{①}$$

Seconde condition

$$\frac{du}{dt} \Big|_0 = 0 \Leftrightarrow -\lambda A + B\Omega = 0 \Leftrightarrow B = \frac{-\lambda u_\infty}{\Omega} \quad \text{①}$$

Finalement,

$$u(t) = u_\infty \left(1 - e^{-\lambda t} \left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega} \sin(\Omega t) \right) \right) \quad \text{①}$$

/4 6 On lit l'abscisse du premier et du troisième maximum, qu'on appelle t_1 et t_3 respectivement. On a alors

$$2T = t_3 - t_1 \Leftrightarrow T = \frac{t_3 - t_1}{2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_3 = 0,95 \times 10^{-3} \text{ s} \\ t_1 = 0,19 \times 10^{-3} \text{ s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } T = 3,8 \times 10^{-4} \text{ s} \quad \text{①}$$

/4 7 On calcule δ avec deux pseudo-périodes ici. On lit la valeur de tension aux premier et troisième pics, à t_1 et t_3 respectivement, ainsi que ce qui semble être la valeur limite u_∞ :

$$\delta = \frac{1}{2} \ln \left(\frac{u(t_1) - u_\infty}{u(t_3) - u_\infty} \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(t_1) = 4,9 \text{ V} \\ u(t_3) = 3,3 \text{ V} \\ u_\infty = 3,0 \text{ V} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \delta = 0,92 \quad \text{①}$$

/5 8 Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t + nT) - u_\infty = e^{-\lambda nT} \times e^{-\lambda t} \left(\underbrace{A \cos(\Omega t + n\Omega t)}_{=\cos \Omega t} + \underbrace{B \sin(\Omega t + n\Omega t)}_{=\sin \Omega t} \right) \quad \text{①}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty} = e^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln(e^{\lambda nT})$$

$$\Leftrightarrow \delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda = \frac{\delta}{T} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 0,92 \\ T = 3,8 \times 10^{-4} \text{ s} \end{cases} \quad \text{A.N. : } \lambda = 2,3 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \quad \text{①}$$

/2 9 On sait que λ s'exprime en fonction de C , on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2 C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow C = \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1R_2}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 1,0 \text{ k}\Omega \\ R_2 = 50 \text{ k}\Omega \\ L = 500 \text{ mH} \\ \lambda = 2,3 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \end{cases} \quad \text{A.N. : } C = 7,6 \text{ nF}$$

/52 P2 Mouvements d'une plateforme offshore (CCP modélisation 2019)

/8 ① ◇ Système : la plateforme M de masse m .

① ◇ Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, y)$ supposé galiléen.

① ◇ Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires \vec{u}_x et \vec{u}_y . L'origine est prise à la position d'équilibre comme indiqué dans l'énoncé. \vec{u}_y est orienté vers le haut.

① ◇ Repérage : $\vec{OM}(t) = x(t) \vec{u}_x$; $\vec{v}(t) = \dot{x}(t) \vec{u}_x$; $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \vec{u}_x$.

◇ Bilan des forces :

① 1) Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$;

① 2) Réaction du support : $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_y$;

① 3) Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x = -kx \vec{u}_x$, car $\ell = \ell_0 + x$;

① 4) Force de frottement $\vec{F}_d = -\gamma \vec{v} = -\gamma \dot{x} \vec{u}_x$

/5 ②

$$\begin{aligned} \sum \vec{F} &= m\vec{a} \\ \Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{F} + \vec{F}_d &= m\vec{a} \\ \Leftrightarrow m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} &= 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{Sur } \vec{u}_x \\ \text{Forme canonique} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2x &= 0 \\ \text{avec } \omega_0 &= \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0a = \frac{\gamma}{m} \\ \Rightarrow \xi &= \frac{\gamma}{2m\omega_0} = \frac{\gamma}{2m} \sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \xi = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{1}{mk}} \end{aligned}$$

/7 ③ On injecte la forme générique $x(t) = Ke^{rt}$ ① pour trouver l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^2 + 2\xi\omega_0 r + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= 4\xi^2\omega_0^2 - 4\omega_0^2 = 4\omega_0^2(\xi^2 - 1) \end{aligned}$$

Or, $\xi < 1$, donc $\Delta < 0$ ①; ainsi

$$\begin{aligned} r_{1,2} &= \frac{-2\xi\omega_0 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{1,2} &= -\omega_0\xi \pm j\omega_0\sqrt{1-\xi^2} \\ &= -\Omega \quad \text{①} \end{aligned}$$

En réinjectant dans la forme générique, on trouve donc une exponentielle réelle décroissante multipliée à une exponentielle complexe oscillante, qu'on écrit

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \cos \Omega t + B \sin(\Omega t)]$$

/4 ④ De plus, les conditions initiales sont, à $t = 0$, $x(0) = x_0$, donc $A = x_0$. ① Calculons de plus la dérivée :

$$\dot{x}(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)] - \xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

$$\text{Or } \dot{x}(0) = v_0 \text{ soit } B\Omega - \xi\omega_0 A = v_0 \Leftrightarrow B = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\Omega} \Leftrightarrow B = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$

/7 ⑤ On nous donne
et

$$x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t} \cos(\Omega t + \varphi)$$

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

soit

$$x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t} [\cos(\Omega t) \cos(\varphi) - \sin(\Omega t) \sin(\varphi)]$$

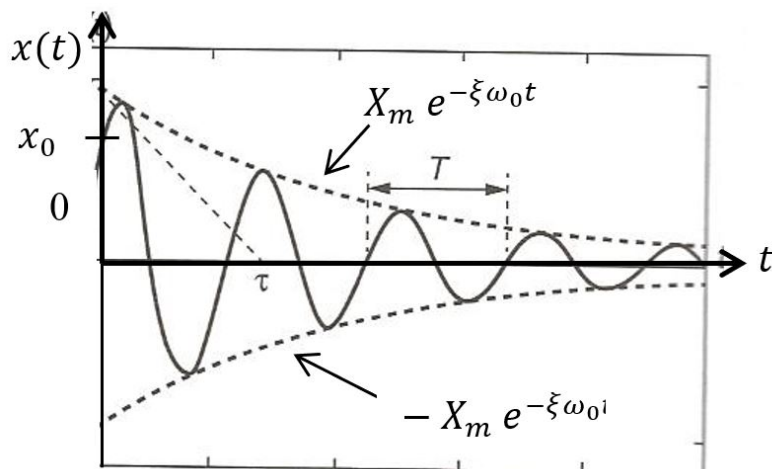
Par identification avec $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$, il vient

$$X_m \cos(\varphi) = A \quad \text{et} \quad -X_m \sin(\varphi) = B$$

Ainsi $\tan(\varphi) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{B}{A}$ et $A^2 + B^2 = X_m^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \stackrel{\textcircled{1}}{=} X_m^2$

D'où $\varphi \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)$ et $X_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{A^2 + B^2}$

/4 [6] Allure du graphe ci-contre :



/1 [7] À cause des frottements, l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t .

/6 [8] Cela fait penser au décrément logarithmique :

$$\delta = \ln \frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ln \left(\frac{X_m e^{-\xi \omega_0 t} \cos(\Omega t + \varphi)}{X_m e^{-\xi \omega_0 (t+T)} \cos(\Omega(T+t) + \varphi)} \right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \ln(e^{\xi \omega_0 T})$$

car cosinus est une fonction périodique de période T . Soit :

$$\delta = \ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \xi \omega_0 T = \xi \omega_0 \frac{2\pi}{\Omega} = \xi \omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \delta \stackrel{\textcircled{1}}{=} \xi \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}$$

Or par hypothèse, $\xi \ll 1$, donc $1 - \xi^2 \approx 1$ $\textcircled{1}$; alors

$$\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right) \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 2\pi\xi$$

/10 [9] On lit $x_1 = 0,014\,602\text{ m}$ et $t_1 = 4,004\,004\text{ s}$, puis $x_2 = 0,010\,661\text{ m}$ et $t_2 = 8,008\,008\text{ s}$. D'après l'énoncé, on a $T = t_2 - t_1$ et comme $\xi \ll 1$ alors

$$\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} \Omega \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

car $\Omega = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$. De plus, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc

$$k = m\omega_0^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} m \frac{4\pi^2}{(t_2 - t_1)^2} \Rightarrow k \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2,71 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$$

et

$$\xi \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\ln \left(\frac{x_1}{x_2} \right)}{2\pi} \Rightarrow \xi \stackrel{\textcircled{1}}{=} 5,01 \times 10^{-2}$$

On trouve en effet comme attendu $\xi \ll 1$: c'est cohérent.

Enfin, d'après Q1,

$$\xi = \frac{\gamma}{2} \sqrt{\frac{1}{mk}}$$

soit

$$\gamma \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2\xi \sqrt{mk} \Rightarrow \gamma \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,73 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

Si ξ augmentait, l'amortissement augmenterait, la décroissance exponentielle serait plus rapide, on verrait moins d'oscillations $\textcircled{1}$; la pseudo-pulsation Ω diminuerait et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ augmenterait. $\textcircled{1}$