

Tout moyen de communication est interdit
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les calculatrices sont autorisées.

Le devoir est composé de quatre exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1 : Etude mécanique d'un pédalo.

EXERCICE 2 : Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques.

EXERCICE 3 : Particule soumise à un champ électrostatique radial.

EXERCICE 4 : Le pH sanguin.

PROBLEME : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre.

A l'intérieur des problèmes, certaines questions sont indépendantes.

L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.

L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.

*Une attention particulière sera portée à la **qualité de la rédaction** (vocabulaire, orthographe...) et à la **présentation de la copie** (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques...).*

*Et il est indispensable de **numéroter vos copies**.*

Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.

Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.

Programme de révision de ce devoir :

Toute la mécanique du second semestre et le chapitre sur les réactions acido-basiques de la partie chimie des solutions de sup MPSI.

EXERCICE 1 : Etude mécanique d'un pédalo :

(≈ 16 pts)

Nous sommes en été et un adulte traverse un lac en pédalo.

Donnée : Masse volumique de l'eau : $\rho = 1000 \text{ kg.m}^{-3}$.

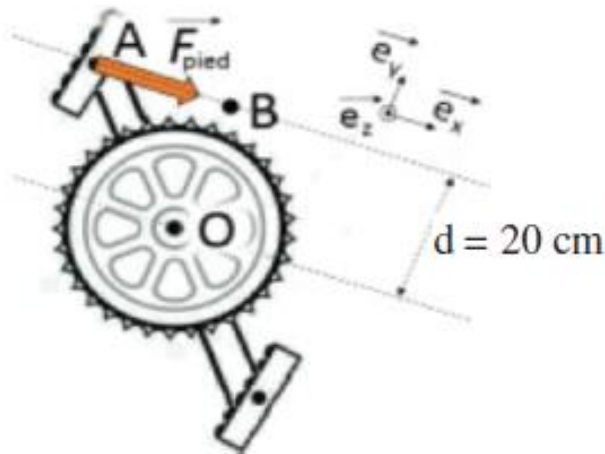
Le pédalo avec son passager possède une masse totale $M = 200 \text{ kg}$ et il dispose de deux flotteurs, chacun de volume $V = 0,5 \text{ m}^3$.
L'ensemble se déplace à vitesse constante sur le lac.



Q1. On note V_{im} le volume immergé d'un flotteur, lorsque l'équilibre vertical est réalisé, et α la fraction de volume immergé des flotteurs, ainsi $\alpha = \frac{V_{im}}{V}$.

Lorsque l'équilibre vertical est réalisé, exprimer la fraction de volume immergé des flotteurs α en fonction de ρ , V et M , puis la calculer.

Q2. La force \vec{F}_{pied} de norme $F_{pied} = 50 \text{ N}$ exercée par le vacancier sur le pédalier est modélisée sur la figure suivante :



Situation (a)



Situation (b)

Dans chacune des situations (a) et (b), exprimer le moment de la force exercée par le vacancier par rapport à l'axe de rotation du pédalier.

Q3. On considère que le moment du couple moyen exercé sur le pédalier correspond à la moyenne des 2 valeurs précédentes. Sachant que le pédalier tourne à la vitesse constante $\omega = 10 \text{ rad.s}^{-1}$, exprimer la puissance moyenne développée par le vacancier en fonction de d , $\|\vec{F}_{pied}\|$ et ω , puis la calculer.

EXERCICE 2 : Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques :

(≈ 42 pts)

Mesurer la vitesse d'un fluide est nécessaire dans nombre de contextes : météorologie (relevé de la vitesse du vent), énergie (détermination d'un potentiel d'exploitation éolien), aéronautique (test de nouveaux avions en soufflerie), confort thermique (réglage d'un système de ventilation) ...

Dans ce sujet, on se propose d'étudier deux anémomètres mécaniques permettant la mesure de la vitesse du vent. Ils utilisent la mise en mouvement d'un objet sous l'effet du vent pour en déduire sa vitesse.

Dans la partie I, on étudiera le fonctionnement d'un anémomètre à plaque, puis celui d'un anémomètre à coupelles, dans la partie II.

Données numériques :

Accélération de la pesanteur : $g = 9,81 \text{ m.s}^{-2}$

Masse volumique de l'air à température et pression ambiantes : $\rho_{\text{air}} = 1,3 \text{ kg.m}^{-3}$

Masse molaire de l'air : $M_{\text{air}} = 29 \text{ g.mol}^{-1}$

Viscosité dynamique de l'air à 300 K : $\eta_{\text{air}} = 1,85 \cdot 10^{-5} \text{ Pa.s}$

Célérité de la lumière dans le vide : $c = 3,00 \cdot 10^8 \text{ m.s}^{-1}$.

I - Anémomètre à plaque :

Le premier anémomètre dont l'histoire des sciences a gardé une trace a été conçu dans les années 1450 par l'architecte italien Leon Battista Alberti.

Il repose sur la déviation d'une plaque attachée au bout d'une tige pouvant pivoter autour d'un axe horizontal.

Le vent arrivant sur la plaque soulève cette dernière. L'inclinaison de la plaque permet de déduire la vitesse du vent.

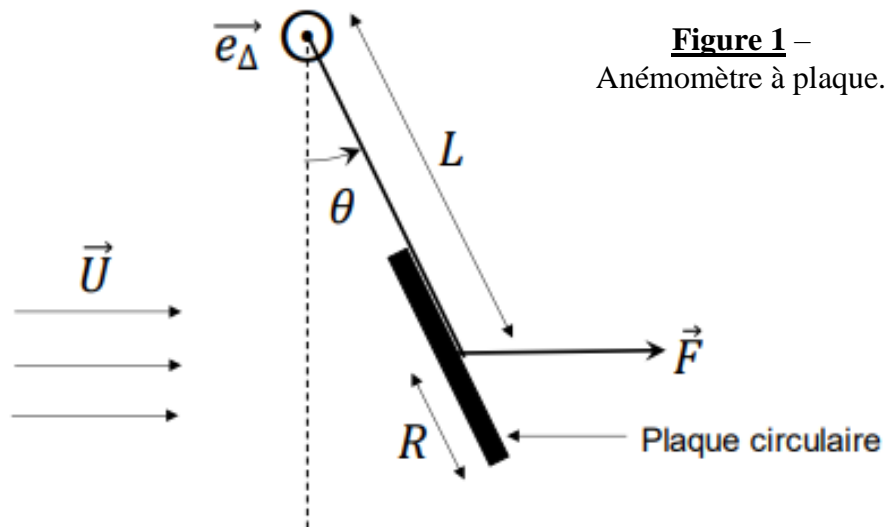


Figure 1 – Anémomètre à plaque.

Le schéma d'un anémomètre à plaque est représenté sur la figure 1 :

La plaque circulaire homogène, de masse $m = 30 \text{ g}$ et de rayon $R = 5 \text{ cm}$ est attachée en son centre à une tige de longueur $L = 15 \text{ cm}$ et de masse négligeable. Le système {plaque + tige} peut tourner sans frottements autour d'un axe horizontal (Δ) orienté par le vecteur unitaire \vec{e}_Δ : Liaison pivot parfaite. Le vent arrive horizontalement, perpendiculairement à l'axe (Δ), avec une vitesse U supposée constante, de l'ordre de quelques m.s^{-1} . On note J_Δ le moment d'inertie du système {plaque + tige} par rapport à l'axe (Δ), et θ l'angle de la tige par rapport à la verticale.

On considère que pour des angles d'inclinaison faibles, la résultante des forces aérodynamiques s'exerçant sur la plaque en raison du vent est de la forme $\vec{F} = \mu U \vec{U}$ avec $\mu = 1 \cdot 10^{-2}$ dans les unités du Système International (SI), ainsi la norme de la force \vec{F} est proportionnelle à U^2 .

Q1. Déterminer l'unité SI de μ en utilisant les unités des grandeurs de base.

Q2. On suppose que le point d'application de la résultante des forces aérodynamiques se situe au centre de la plaque circulaire comme indiqué figure 1. Exprimer les moments scalaires par rapport à l'axe (Δ) des forces s'exerçant sur le système {plaque + tige}. On présentera les notations grâce à un schéma.

Q3. Lorsque le système est à l'équilibre mécanique, on mesure l'angle $\theta_{eq} = 8^\circ$ à l'aide d'un rapporteur. Déterminer l'expression de la vitesse U du vent, en fonction de μ , m , g et θ_{eq} . Faire l'application numérique.

II - Anémomètre à coupelles :

Document 1 - Description de l'anémomètre à coupelles :

L'anémomètre à coupelles, inventé en 1846 par John Thomas Romney Robinson, est composé de trois ou quatre coupelles creuses de forme hémisphérique ou conique, reliées à un axe de rotation vertical. En régime permanent, l'anémomètre tourne à une fréquence f (nombre de tours par seconde) dépendant de la vitesse horizontale U du vent loin de l'anémomètre selon la relation : $U = \ell_0 f + U_0$ avec ℓ_0 la distance d'étalonnage et U_0 la vitesse de démarrage. Ces deux constantes dépendent des caractéristiques de chaque anémomètre et sont déterminées par le constructeur préalablement à la mise en place de l'anémomètre sur site.

L'anémomètre à coupelles est aujourd'hui l'instrument de référence pour mesurer la vitesse du vent dans le domaine de la météorologie.



Document 2 - Force aérodynamique sur une coupelle conique immobile :

Pour étudier l'effet du vent sur une coupelle conique, on effectue des tests en soufflerie. La coupelle étant maintenue immobile, on relève la force aérodynamique s'exerçant sur la coupelle. On fait pivoter la coupelle dans un plan vertical pour tester différents angles d'incidence β par rapport au vent de vitesse $U = 16 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$.

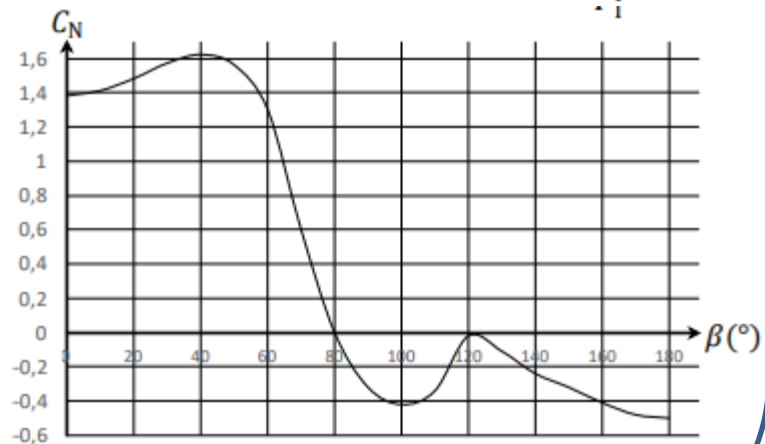
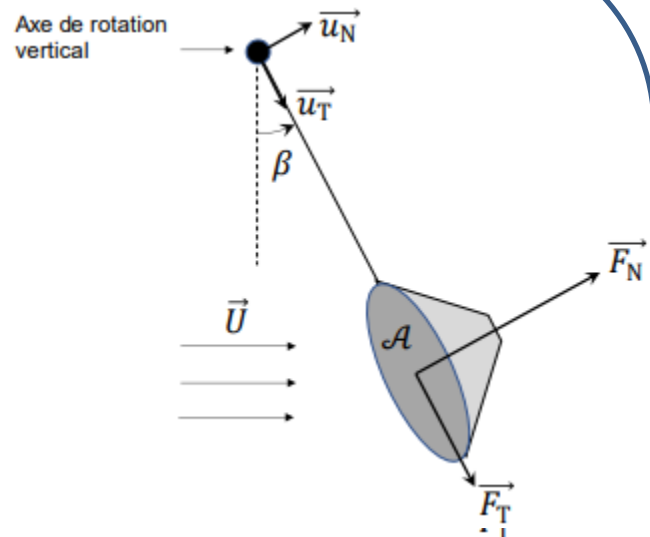
La force aérodynamique s'exerçant au centre de la coupelle se décompose en une force \vec{F}_N normale à la surface $\mathcal{A} = 1 \text{ dm}^2$ de la base du cône, et une force \vec{F}_T tangentielle à cette même surface (cf schéma ci-contre).

Ces forces ont pour expression :

Et
$$\begin{cases} \vec{F}_N = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \mathcal{A} C_N U^2 \vec{u}_N \\ \vec{F}_T = \frac{1}{2} \rho_{\text{air}} \mathcal{A} C_T U^2 \vec{u}_T \end{cases}$$
 avec C_N et C_T des coefficients sans dimension, dont on lit les valeurs en fonction de l'angle d'inclinaison β sur le graphe ci-contre.

Par symétrie et en supposant que le bras de l'anémomètre a une influence négligeable sur l'écoulement :

$$\|\vec{F}_N(-\beta)\| = \|\vec{F}_N(\beta)\|.$$



Source : MJ Brevoort, U.T. Joyner, « aerodynamic characteristics of anemometer cup », note technique (1934).

Q4. On représente sur la figure 2 un anémomètre composé de 4 coupelles coniques décalées de 90° les unes par rapport aux autres et soumises à un vent de vitesse \vec{U} .

Sur le schéma de la figure 2 reproduit sur le document réponse p11, à rendre avec la copie, ajouter les vecteurs \vec{u}_N et \vec{u}_T au niveau de chaque coupelle.

En supposant que l'anémomètre est initialement immobile, représenter **sur le même schéma du document réponse p11**, les forces \vec{F}_N s'exerçant sur chaque coupelle, en vous aidant du document 2 : On comparera (entre autres) les normes de ces forces les unes par rapport aux autres et on expliquera les sens obtenus.

Q5. Expliquer à partir de votre schéma pourquoi l'anémomètre va se mettre en mouvement, et représenter le sens de rotation sur le schéma.

Q6. Justifier que la force tangentielle \vec{F}_T est sans importance pour l'étude du mouvement de rotation de l'anémomètre.

Q7. Rappeler la définition d'un couple de forces. Le terme de « couple » aérodynamique vous paraît-il approprié, pour les forces s'exerçant sur un anémomètre ?

Q8. Lorsque la vitesse U du vent est inférieure à la vitesse de démarrage U_0 (document 1), l'anémomètre est immobile. Quel phénomène peut expliquer l'existence de cette vitesse de démarrage ?

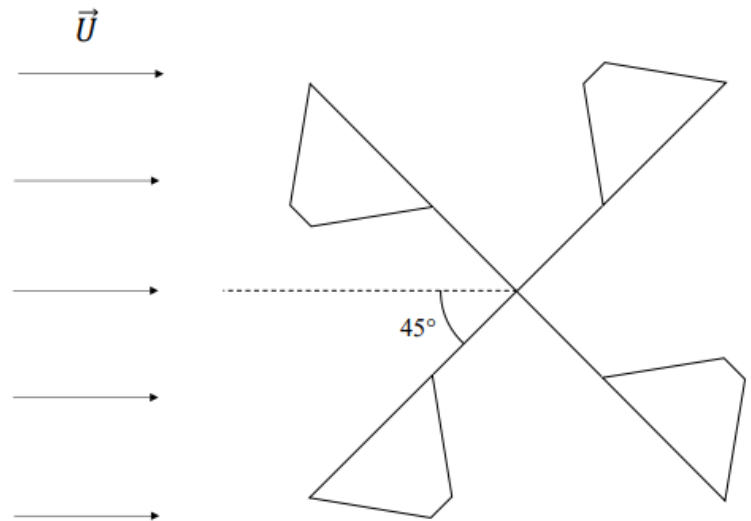


Figure 2 –
Position initiale de l'anémomètre soumis au vent.

EXERCICE 3 : Particule soumise à un champ électrostatique radial :

(≈ 40 pts)

Dans le référentiel galiléen auquel est associé le repère d'espace $\mathcal{R} (O ; \vec{u}_x ; \vec{u}_y ; \vec{u}_z)$ une particule M de masse m de charge $q > 0$ est soumise à un champ électrostatique radial dirigé vers le point O et de norme : $E = E_0 \left(\frac{r_0}{r} \right)^n$.

Dans cette expression :

- E_0 et n sont des constantes positives ;
- $r = \|\vec{OM}\|$;
- $r_0 = \|\vec{OM}_0\| = \|\vec{OM}(t=0)\|$;
- On pose $\vec{u}_r = \frac{\vec{OM}}{\|\vec{OM}\|}$;

Dans tout l'exercice, on suppose qu'à $t = 0$ la particule est dans le plan $\pi (O ; \vec{u}_x ; \vec{u}_y)$ avec une vitesse initiale \vec{v}_0 parallèle à π .

Q1. On ne travaille pas en coordonnées cartésiennes dans la suite. Exprimer vectoriellement et représenter la force électrique \vec{F} à laquelle est soumise la particule. Cette force est-elle attractive ou répulsive ?

Q2. Montrer que le mouvement est plan et préciser le plan du mouvement.

Dans le plan du mouvement, on repère dans toute la suite du problème, la particule grâce à ses coordonnées polaires.

Q3. Faire un schéma définissant les coordonnées polaires de la particule, ainsi que la base polaire associée dans le plan du mouvement.

Q4. Démontrer l'expression de la constante des aires C .

On se place dans le cas où $n=2$ et v_0 quelconque :

Q5. Déterminer l'énergie potentielle $E_p(r)$ dont dérive la force électrique en supposant qu'il n'y a pas d'interaction à l'infini. En déduire l'énergie mécanique E_m de la particule, puis montrer que l'énergie potentielle effective peut se mettre sous la forme : $E_{p\text{ eff}}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - qE_0 \frac{r_0^2}{r}$, en faisant intervenir la constante des aires.

Q6. Tracer l'allure de $E_{p\text{ eff}}(r)$, puis discuter graphiquement la nature de la trajectoire. Quatre cas sont à envisager. Préciser dans chaque cas, s'il s'agit d'un état lié ou un état de diffusion.

EXERCICE 4 : Le pH sanguin :

(≈ 33 pts)

Dans cet exercice tous les calculs sont effectués à 37°C , température du corps humain.

L'activité métabolique et l'ingestion d'aliments peuvent introduire des espèces acido-basiques dans le sang. Or la survie des cellules nécessite que le pH varie très peu autour d'une valeur optimale. Ainsi le sang humain constitue un milieu tamponné, puisque le pH reste compris entre 7,36 et 7,44 en temps normal.

Q1. Tracer le diagramme de prédominance entre les espèces H_2CO_3 ; HCO_3^- ; CO_3^{2-} ; $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$ et $\text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-$ sur un même axe de pH.

Q2. Le sang est en partie tamponné par le couple $\text{H}_2\text{CO}_3 / \text{HCO}_3^-$ de concentration totale en ces deux espèces égale à $C_0 = 0,0280 \text{ mol.L}^{-1}$. Sachant que le pH du sang vaut 7,40, calculer les concentrations en H_2CO_3 et HCO_3^- avec trois chiffres significatifs.

Q3. Dans certains cas, après des efforts physiques intenses, des crampes apparaissent. Il se forme alors dans les muscles de l'acide lactique $\text{CH}_3\text{CHOHCOOH}$ qui est transférée dans le sang.

Q3.a. Justifier et écrire l'équation de la réaction ayant lieu dans le sang et déterminer la valeur de sa constante d'équilibre. Conclure.

Q3.b. Dans le sang, avant l'effort musculaire et donc avant que l'équilibre décrit dans la question 3.a ne s'établisse, les concentrations des différentes espèces sont les suivantes :

$[\text{HCO}_3^-]_0 = C_1 = 2,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ et $[\text{H}_2\text{CO}_3]_0 = C_2 = 1,4 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Après l'effort musculaire, dans un volume de 100 mL, apparaît initialement $3,0 \cdot 10^{-4} \text{ mol}$ d'acide lactique.

Faire un bilan des concentrations des différentes espèces présentes dans le sang à l'équilibre, et en déduire alors la valeur du pH local du sang. Conclure.

Q3.c. Afin d'éviter cette variation de pH sanguin, l'hémoglobine notée Hb, ainsi que le phénomène de respiration, interviennent pour éliminer l'excès de dioxyde de carbone dissous (H_2CO_3 correspond à du dioxyde de carbone dissous dans l'eau). Les échanges entre les gaz dissous dans le sang peuvent être mobilisés par la réaction d'équation : $\text{HbO}_2 + \text{CO}_2 \rightarrow \text{HbCO}_2 + \text{O}_2$. Expliquer qualitativement comment la respiration permet de maintenir constante la valeur du pH sanguin.

Données (à 37°C) :

- Produit ionique de l'eau tel que : $\text{p}K_e = 13,7$
- $\text{p}K_{A1} (\text{H}_2\text{CO}_3 / \text{HCO}_3^-) = 6,1$; $\text{p}K_{A2} (\text{HCO}_3^- / \text{CO}_3^{2-}) = 10,2$;
- $\text{p}K_{A3} (\text{CH}_3\text{CHOHCOOH} / \text{CH}_3\text{CHOHCOO}^-) = 3,9$
- L'espèce H_2CO_3 s'identifie à $\text{CO}_2 + \text{H}_2\text{O}$.

PROBLEME : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre : (≈ 80 pts)

La télédétection par satellite est utilisée en météorologie, climatologie et en cartographie. Nous étudions dans ce sujet le mouvement d'un satellite de télédétection en orbite autour de la Terre.

On étudie le mouvement du satellite, assimilé à un point matériel M, autour de la Terre de rayon $R_T = 6,4 \cdot 10^3$ km et de centre O.

L'étude est réalisée dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g(O; \vec{i}; \vec{j}; \vec{k})$ supposé galiléen au cours du temps noté t .

L'ensemble des grandeurs vectorielles seront exprimées dans la base cylindro-polaire $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{k})$.

On suppose que la trajectoire du satellite de masse $m = 4,0 \cdot 10^3$ kg est plane et se fait dans le plan $(O; \vec{i}; \vec{j})$ représenté sur la figure 2 ci-dessous.

Les différentes parties sont largement indépendantes.

I – Préliminaires :

Q1. La position du satellite est repérée par le point M de coordonnées $(r(t), \theta(t), z = 0)$. Déterminer l'expression du vecteur position \vec{OM} et du vecteur vitesse \vec{v}_M dans la base $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{k})$ en fonction de r, θ et de leurs dérivées éventuelles.

Q2. On note $g_0 = 10 \text{ m.s}^{-2}$ la norme de l'accélération de pesanteur à la surface de la Terre. L'énergie potentielle $E_p(r)$ associée à l'interaction gravitationnelle $\vec{F} = F(r) \vec{u}_r$ s'exprime sous la forme $E_p(r) = -m g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

En déduire l'expression de l'interaction \vec{F} exercée par la Terre sur le satellite en fonction de g_0, m, R_T et r . L'interaction gravitationnelle est-elle attractive ou répulsive ?

Dans toute la suite (sauf dans la partie V), on supposera que le satellite est soumis uniquement à \vec{F} .

Q3. Soit $\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M$. Comment s'appelle cette grandeur mécanique associée au satellite ? Déterminer son expression dans la base $(\vec{u}_r; \vec{u}_\theta; \vec{k})$, puis sa norme L_0 en fonction de $r, \dot{\theta}$ et m . Montrer que le vecteur \vec{L}_0 est constant au cours du mouvement.

II - Mise en orbite circulaire du satellite :

La mise en orbite terrestre d'un satellite se fait en deux étapes :

- Phase balistique : le satellite s'éloigne de la Terre sur une ellipse de foyer le centre de la Terre jusqu'à l'apogée ;
- Phase de satellisation : le satellite accélère pour obtenir une trajectoire circulaire autour de la Terre.

On considère dans cette partie II que le satellite est placé en orbite circulaire de rayon r constant autour de la Terre.

Q4. Exprimer pour cette trajectoire circulaire le vecteur vitesse \vec{v}_M et le vecteur accélération \vec{a}_M du satellite uniquement en fonction de la quantité $v = r \dot{\theta}$, de sa dérivée temporelle \dot{v} , de r et des vecteurs de base nécessaires.

Q5. Montrer que, dans ce cas, le mouvement est uniforme et exprimer v^2 en fonction de g_0, R_T et r .

Q6. En déduire l'expression des énergies cinétique E_c et mécanique E_m du satellite en fonction de m, g_0, R_T et r . Justifier le signe de E_m .

Application numérique : Calculer l'énergie mécanique du satellite pour une trajectoire circulaire de rayon $r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km, puis pour un rayon $r_h = 40 \cdot 10^3$ km.



Figure 1- Satellite de télédétection ;
(Source : opticsvalley)

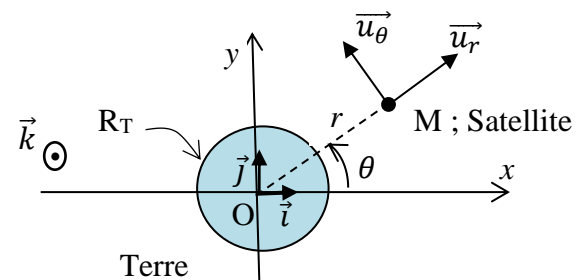


Figure 2

III - Étude énergétique du satellite :

On suppose dans cette partie III que la trajectoire du satellite n'est plus nécessairement circulaire.

Q7. Justifier que l'énergie mécanique du satellite est constante au cours du mouvement, puis introduire l'énergie potentielle effective $E_{P,eff}(r)$ et l'exprimer en fonction de L_0 , m , r , g_0 et R_T .

Q8. Au cours du mouvement, les valeurs du rayon r sont liées à E_m et $E_{P,eff}$. Expliquer comment.

De plus, le graphe de $E_{P,eff}(r)$ pour une valeur donnée de L_0 est représenté figure 3 ci-contre. On montre que la trajectoire du satellite est nécessairement une conique : circulaire, elliptique, parabolique ou hyperbolique.

✚ À quelle énergie E_{m1} ou E_{m2} peut correspondre une trajectoire elliptique ? Une trajectoire hyperbolique ? Justifier.

✚ Pour quelle valeur particulière de E_m la trajectoire est-elle circulaire ? Justifier.

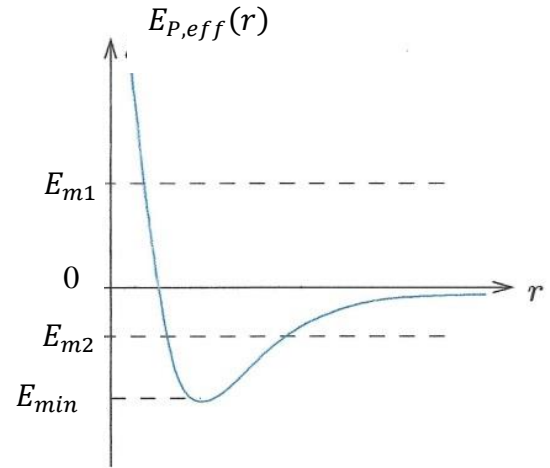


Figure 3 – Allure de l'énergie potentielle effective en fonction de r

IV - Mise en orbite haute du satellite :

Pour atteindre des trajectoires de très hautes altitudes, le satellite est dans un premier temps placé sur une trajectoire circulaire basse ($r_b = 8,0 \cdot 10^3$ km) puis, dans un deuxième temps, sur une trajectoire circulaire haute ($r_h = 40 \cdot 10^3$ km) comme illustré sur la figure 4 ci-dessous.

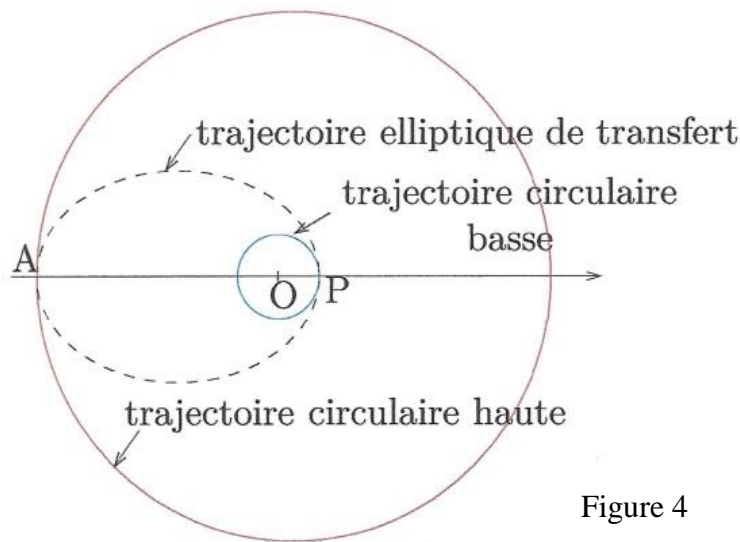


Figure 4

Pour passer de la trajectoire basse à la trajectoire haute, on utilise une trajectoire de transfert elliptique dont l'un des foyers est le centre de la Terre O : son périégée P est situé sur l'orbite basse et son apogée A sur l'orbite haute.

Le changement d'orbite s'effectue en réalisant des variations brutales de vitesse du satellite à l'aide des moteurs qui correspondent à des variations d'énergie mécanique que l'on cherche à déterminer.

On considère désormais le satellite parcourant la trajectoire elliptique de transfert et on note $E_{m,t}$ l'énergie mécanique du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique.

Q9. Que peut-on dire des valeurs de \dot{r} lorsque le satellite est en A ($r_A = r_h$) ou en P ($r_P = r_b$) ? Justifier. Exprimer le demi-grand axe a de l'ellipse de transfert en fonction de r_b et r_h ? Illustrer les propriétés sur un dessin.

Q10. Montrer que r_h et r_b sont solutions d'une équation du second degré de la forme : $r^2 + \alpha r + \beta = 0$. Exprimer α et β en fonction de m , L_0 , $E_{m,t}$, g_0 et R_T .
En déduire que $E_{m,t} = -\frac{m g_0 R_T^2}{2a}$.

Q11. Relever sur la figure 5 ci-contre, la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,t}$ du satellite sur la trajectoire de transfert elliptique, au début du transfert. Justifier.

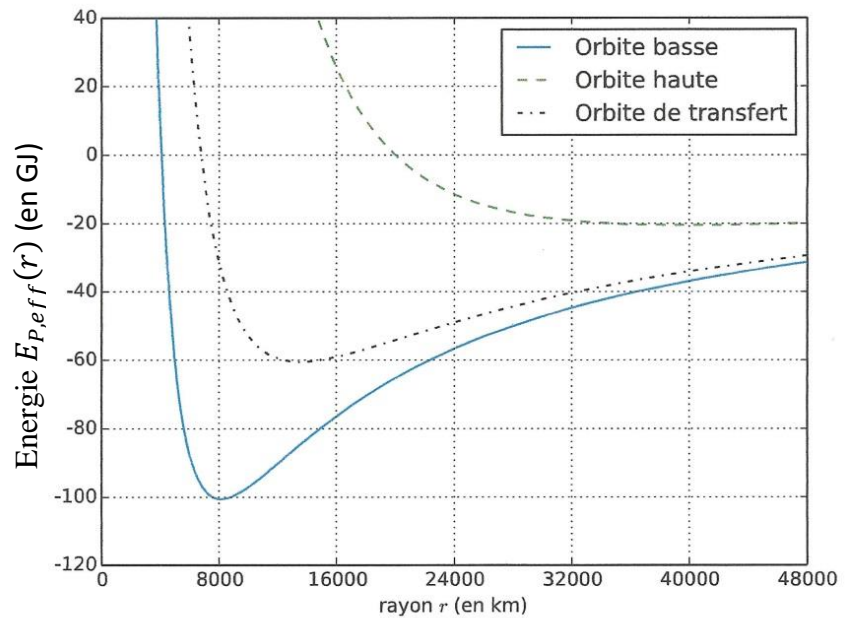


Figure 5 - $E_{P,eff}(r)$ pour les 3 orbites

Pour changer de trajectoire le satellite, il faut modifier la valeur de son énergie mécanique. Durant cette phase le principe de conservation de l'énergie n'est plus vérifié. Ce sont les moteurs du satellite qui vont permettre d'accélérer ou de ralentir le satellite.

Q12. Relever sur la figure 5 précédente, la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,b}$ du satellite sur l'orbite circulaire basse de rayon r_b . De même relever la valeur de l'énergie mécanique $E_{m,h}$ du satellite sur l'orbite circulaire haute de rayon r_h .

Q13. En déduire la variation d'énergie mécanique ΔE_{mP} à communiquer au satellite pour passer en P de l'orbite circulaire basse à l'orbite elliptique de transfert. Sachant que le pouvoir calorifique du carburant est d'environ 50 MJ.kg^{-1} , déterminer la masse m_c de carburant nécessaire.

Q14. Connaissez-vous un carburant utilisé dans les moteurs-fusées pour l'aérospatiale ? Qu'appelle-t-on orbite géostationnaire ? Connaissez-vous l'altitude de cette orbite ?

V- Chute du satellite :

Les satellites d'observation retombent inéluctablement sur la Terre. Lors des chocs avec les molécules contenues dans les couches supérieures de l'atmosphère, le satellite est soumis à une force de frottement \vec{f} du type $\vec{f} = -k \vec{v}$. On supposera que k est une constante positive.

Supposons que le satellite est en orbite circulaire. Au cours de sa chute, à chaque tour effectué, la variation d'altitude est suffisamment faible pour supposer que les expressions de l'énergie mécanique

$E_m(t) = -\frac{m g_0 R_T^2}{2r(t)}$ et de la vitesse $v^2(t) = g_0 \frac{R_T^2}{r(t)}$ restent valables.

Q15. À l'aide de l'expression de la vitesse, déterminer la durée T nécessaire au satellite pour effectuer un tour de l'orbite circulaire de rayon r . Quelle est le nom de la relation obtenue ?

Q16. À l'aide du théorème de la puissance mécanique, montrer que le rayon $r(t)$ est solution de l'équation différentielle $\frac{dr}{dt} + \frac{1}{\tau} r(t) = 0$ où τ est une constante que l'on exprimera en fonction de k et m . Montrer que τ est bien homogène à un temps.

Q17. En déduire l'expression de $r(t)$. On supposera que le satellite est à l'instant $t = 0$ sur une orbite circulaire de rayon r_0 . Représenter graphiquement sur votre copie l'évolution de $r(t)$. On fera apparaître notamment les grandeurs r_0 et τ et on négligera R_T devant r_0 .

Document réponse pour l'exercice 2, question Q4 :

Nom prénom :

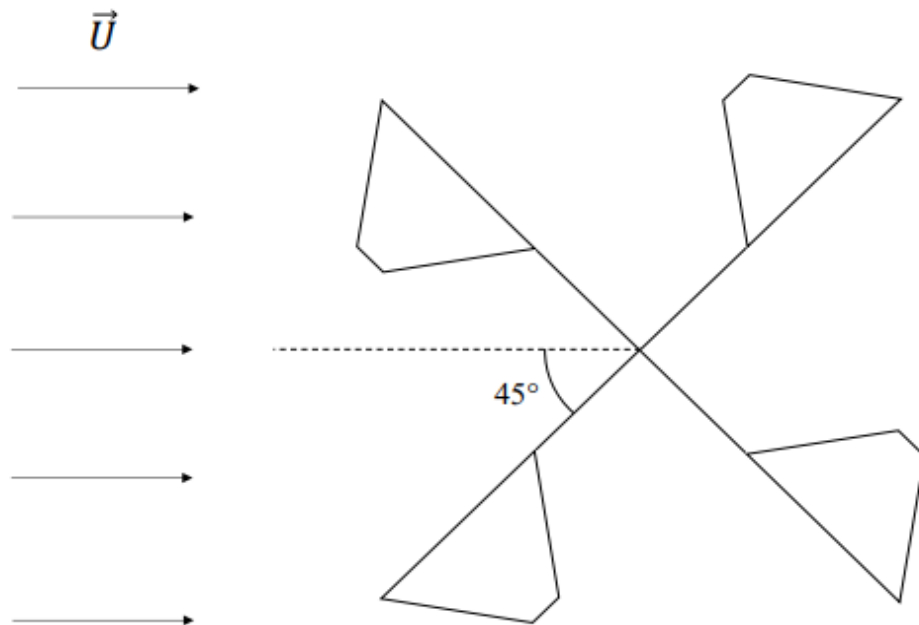
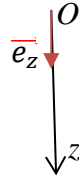


Figure 2 –
Position initiale de l'anémomètre soumis au vent.

Pensez à rendre ce document réponse avec votre copie.

EXERCICE 1 : Etude mécanique d'un pédalo :**(D'après banque PT 2022) (≈ 16 pts)****Q1. Référentiel :** Terrestre supposé galiléen.**Base de projection cartésienne :** Axe Oz vertical descendant.**Système :** Flotteur de masse $M/2$, car 2 flotteurs pour porter M .**Forces :** Poids : $\vec{P} = \frac{M}{2} \vec{g} = \frac{M}{2} g \vec{e}_z$.Poussée d'Archimède : $\vec{\pi}_A = -\pi_A \vec{e}_z = -\rho V_{im} g \vec{e}_z$ **Condition d'équilibre vertical :** $\sum \vec{F} = \vec{0}$ Donc $\vec{P} + \vec{\pi}_A = \vec{0}$ Projetons sur l'axe vertical : On obtient donc : $\frac{M}{2} g - \rho V_{im} g = 0$ Or on pose $\alpha = \frac{V_{im}}{V}$; Alors il vient $\rho \alpha V = \frac{M}{2}$; Soit : $\alpha = \frac{M}{2\rho V}$.**AN :** $\alpha = \frac{200}{2 \times 1000 \times 0,5} = \frac{200}{1000} = \frac{2}{10}$; On obtient : **$\alpha = 20 \%$** .**Q2.** On utilise la notion de bras de levier :**Moment de la force par rapport à Oz :** **Sens de rotation positif = sens trigonométrique** car \vec{e}_z est vers nous.**Situation (a) :** $|\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied})| = d_1 \cdot \|\vec{F}_{pied}\|$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = d$ (ici).De plus \vec{F}_{pied} a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **sens négatif**.D'où : $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied}) = -d F_{pied}$.**Situation (b) :**Même raisonnement, mais cette fois la **distance bras de levier est nulle**, car la force passe par l'axe de rotation.Ainsi, : $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied}) = 0$.**Q3.** On sait que pour un solide en rotation, $\vec{P}(\vec{F}_{ext}) = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{ext}) \omega$.De plus, en moyenne, $\langle |\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied})| \rangle = \frac{d F_{pied}}{2}$.Alors $\langle \vec{P}(\vec{F}_{pied}) \rangle = \frac{d F_{pied} \omega}{2}$.**AN :** $\langle P(\vec{F}_{pied}) \rangle = \frac{0,2 \times 50 \times 10}{2}$; On obtient : **$\langle P(\vec{F}_{pied}) \rangle = 50 \text{ W}$** .

EXERCICE 2 : Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques :

(D'après CCINP PC 2022)

(≈ 42 pts)

I -Anémomètre à plaque :

Q1. Une force s'exprime en newtons (N) et une vitesse en m.s^{-1} donc si $F = \mu U^2$

alors μ s'exprime en $\frac{\text{N}}{\text{m}^2 \text{s}^{-2}} = \frac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{m}^2 \text{s}^{-2}}$; Donc finalement **l'unité SI de μ est le kg.m^{-1} .**

Q2. Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Système : {plaque + tige} .

Bilan des forces :

4 actions mécaniques dont on peut calculer les moments grâce à la notion de bras de levier :

Moments scalaires des forces par rapport à Δ :

Sens de rotation positif = sens trigonométrique car \vec{e}_Δ est vers nous.

La réaction du support : \vec{R} passe par l'axe de rotation, son moment est donc nul : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$.

La liaison pivot est supposée parfaite, donc $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) = 0$.

Le poids :

$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})| = d_1 \cdot \|\vec{P}\| = mg d_1$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = L \sin(\theta)$.

De plus le poids \vec{P} a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **sens négatif**.

D'où : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgL \sin(\theta)$.

La force aérodynamique \vec{F} :

$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = d_2 \cdot \|\vec{F}\| = \mu U^2 d_2$ en utilisant le bras de levier avec $d_2 = L \cos(\theta)$.

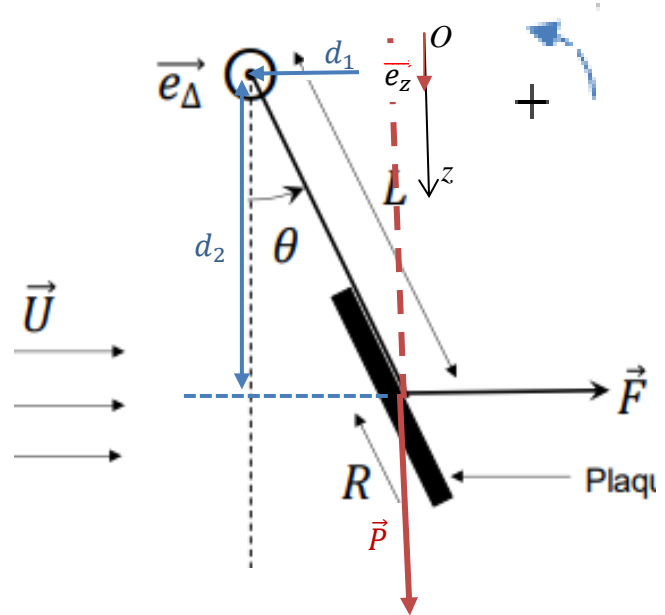
De plus le poids \vec{P} a tendance à faire tourner la tige dans le sens trigonométrique, donc dans le **sens positif**.

D'où : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mu U^2 L \cos(\theta)$.

Q3. Condition d'équilibre : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0$.

D'où : $\mu U^2 L \cos(\theta_{eq}) - mgL \sin(\theta_{eq}) = 0$; Ou encore : $U^2 = \frac{mg \sin(\theta_{eq})}{\mu \cos(\theta_{eq})}$; Ainsi $U = \sqrt{\frac{mg}{\mu} \tan(\theta_{eq})}$.

AN : $U = \sqrt{\frac{0,03 \times 9,81}{0,01} \tan(8^\circ)} = \sqrt{3 \times 9,81 \times \tan(8)} ; \quad \text{On obtient : } U \approx 2 \text{ m.s}^{-1}.$



II - Anémomètre à coupelles :

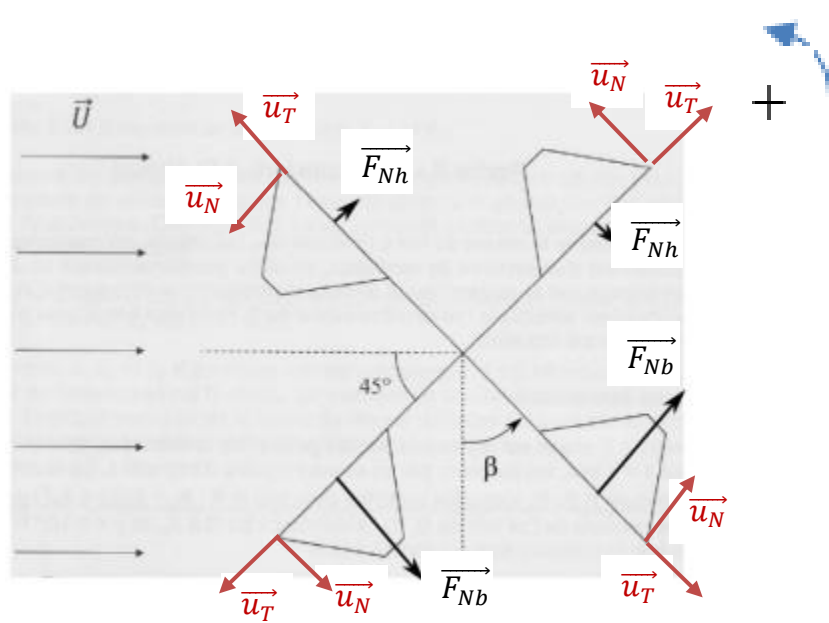
Q4. On nous donne : $\vec{F}_N = \frac{1}{2} \rho_{air} \mathcal{A} C_N U^2 \vec{u}_N$ et $\|\vec{F}_N(-\beta)\| = \|\vec{F}_N(\beta)\|$.

- Les vecteurs \vec{u}_N et \vec{u}_T ont été schématisés ci-dessous sur chaque coupelle comme demandé.
- Pour les deux coupelles du bas, on est à $\beta = \pm 45^\circ$.

D'après le graphe du document 2, C_N est alors **positif et élevé**, donc la **force \vec{F}_{Nh} est importante et vers la droite** (selon $+\vec{u}_N$).

- Pour les 2 coupelles du haut, on est à $\beta = \pm 135^\circ$.

D'après le graphe du document 2, C_N est alors **négatif et faible**, donc la force **\vec{F}_{Nb} est faible, mais toujours vers la droite**, (selon $-\vec{u}_N$) ce qui est naturel compte tenu du sens de l'écoulement.



Q5. Les deux forces agissant dans le sens d'une augmentation de β sont plus importantes que celles en sens inverse.

Les bras de levier étant équivalents, le moment global est donc positif par rapport à l'axe de rotation, donc d'après le théorème du moment cinétique : $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta \ddot{\beta} = \sum M_\Delta (\vec{F}_{ext})$

L'anémomètre va tourner dans le sens direct ou trigonométrique.

Q6. Le moment de la force \vec{F}_T est nul par rapport à l'axe de rotation, car sa droite d'action coupe l'axe de rotation, le bras de levier est donc nul.

Q7. On appelle couple, un système de forces dont la résultante est nulle (somme vectorielle), mais dont le moment résultant des forces par rapport à un axe est non nul. Ici, ce n'est pas le cas : les différentes forces poussent vers la droite sur le schéma, donc la résultante est non nulle.

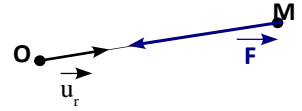
Cependant, elles sont compensées par la liaison pivot qui retient la structure, donc cet effet est sans importance

Q8. Il existe sans doute des frottements solides dans la liaison pivot qui n'est pas parfaite.

EXERCICE 3 : Particule soumise à un champ électrostatique radial : (≈ 40 pts)

Q1. La particule est soumise à la force électrique $\vec{F} = q \vec{E} = -qE_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u}_r$;

Schéma ci-contre. La **force est attractive**, la particule est attirée par le point O.



Q2. Pour montrer que le mouvement est plan, on applique le théorème du moment cinétique en O à la particule : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{u}_r \wedge (-E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u}_r) = \vec{0}$;

On en déduit que \vec{L}_O est constant, tel que : $\vec{L}_O = \vec{L}_O(t=0) = \vec{OM}_0 \wedge m \vec{v}_0$;

A $t=0$, \vec{OM}_0 et \vec{v}_0 sont dans le plan $\pi(O, \vec{u}_x; \vec{u}_y)$, donc $\vec{L}_O = L_O \vec{u}_z$;

Calculons $\vec{OM} \cdot \vec{L}_O$: $\vec{OM} \cdot \vec{L}_O = \vec{OM} \cdot (\vec{OM} \wedge m \vec{v}) = 0$;
 $\perp \vec{OM}$

Donc $\vec{OM} \perp \vec{L}_O$ à chaque instant.

Donc à tout moment, $\vec{OM} \perp \vec{u}_z$: Le **mouvement est plan dans le plan $\pi(O, \vec{u}_x; \vec{u}_y)$** .

Q3. Coordonnées polaires :

Q4. Il faut exprimer le moment cinétique :

$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \text{ et } \vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta.$$

$$\text{Alors : } \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta) ;$$

$$\text{Ainsi : } \vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{k} = m C \vec{k} = \text{cste}$$

Par identification : $C = r^2 \dot{\theta}$: **Constante des Aires**.

On se place dans le cas où $n=2$ et v_0 quelconque :

$$\text{Q5. } dE_P = -\delta W(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} = -F \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) = -F dr ;$$

$$\text{Ainsi : } dE_P = qE_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 dr ; \text{ Et : } E_P(r) = -qE_0 \frac{r_0^2}{r} + \text{cste} ;$$

Et si on considère que l'énergie potentielle est nulle lorsque $r \rightarrow \infty$, alors $E_P(r) = -qE_0 \frac{r_0^2}{r}$;

$$\text{E}_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 - qE_0 \frac{r_0^2}{r} ;$$

Pour obtenir $E_{Peff}(r)$, il faut exprimer la vitesse en coordonnées polaires et éliminer $\dot{\theta}$ grâce à la constante des aires. On obtient donc : $E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - qE_0 \frac{r_0^2}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - qE_0 \frac{r_0^2}{r}$;

$$\text{On isole } \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \text{ et on obtient : } E_{Peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - qE_0 \frac{r_0^2}{r} ;$$

Q6. Il faut tracer l'allure de $E_{Peff}(r)$:

$$\text{➤ } \lim_{r \rightarrow 0} E_{Peff} = +\infty \text{ et } \lim_{r \rightarrow +\infty} E_{Peff} = 0 ;$$

$$\text{➤ } \frac{dE_{Peff}}{dr} = -m \frac{C^2}{r^3} + qE_0 \frac{r_0^2}{r^2} ;$$

$E_{Peff}(r)$ est min pour r_m tel que $\frac{dE_{Peff}}{dr} = 0$, dc pour

$$r_m = \frac{m C^2}{qE_0 r_0^2} > 0 \text{ et } E_{Peff}(r_m) = -\frac{q^2 r_0^2 E_0^2}{2m C^2} < 0.$$

Discussion : $E_m \geq E_{Peff}$ à chaque instant car $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$

1^{er} cas : $E_m = E_1$: Alors $r \geq r_1$: **Etat de diffusion**.

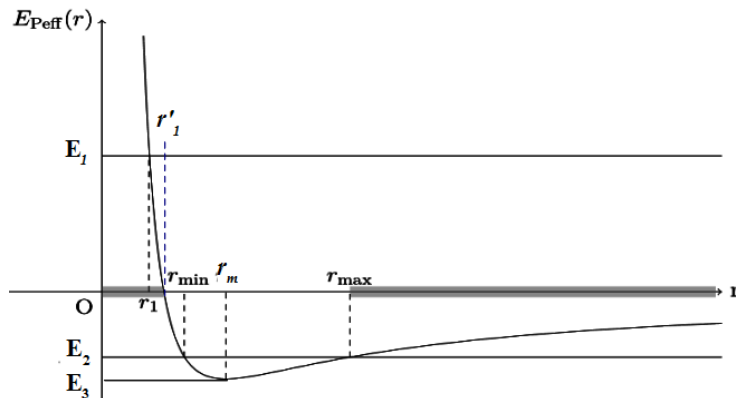
La trajectoire est une **branche d'hyperbole**.

2^{ème} cas : $E_m = 0$: Alors $r \geq r'_1$: **Etat de diffusion**. La trajectoire est une branche de parabole.

3^{ème} cas : $E_m = E_3$: Alors $r = r_m = \text{cste}$: **Etat lié**.

La trajectoire est **circulaire** de centre O et de rayon $r_0 = r_m = \frac{m C^2}{qE_0 r_0^2}$.

4^{ème} cas : $E_m = E_2 < 0$: Alors $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$: **Etat lié**. La trajectoire est une **ellipse** dont O est un foyer.

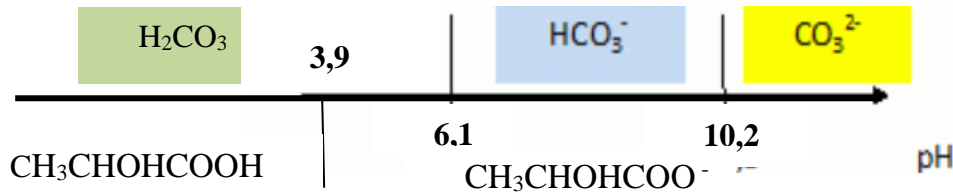


EXERCICE 4 : Le pH sanguin :

(D'après Centrale PSI 2009)

(≈ 33 pts)

Q1. DP :



Q2. D'après le DP, à pH = 7,40, $[CO_3^{2-}]$ est négligeable.

On sait que $[H_2CO_3]_{eq} + [HCO_3^-]_{eq} = C_0$.

D'autre part : $pH = pK_A + \log \frac{[A^-]_{eq}}{[HA]_{eq}}$; Soit : $pH = pK_{A1} + \log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}$;

D'où : $\log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}} = pH - pK_{A1}$; En substituant, il vient : $\log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0 - [HCO_3^-]_{eq}} = pH - pK_{A1}$.

Ainsi : $\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0 - [HCO_3^-]_{eq}} = 10^{pH - pK_{A1}}$; Puis $[HCO_3^-]_{eq} = (C_0 - [HCO_3^-]_{eq})10^{pH - pK_{A1}}$;

$[HCO_3^-]_{eq} \{1 + 10^{(pH - pK_{A1})}\} = C_0 10^{(pH - pK_{A1})}$ et enfin : $[HCO_3^-]_{eq} = \frac{C_0 10^{(pH - pK_{A1})}}{1 + 10^{(pH - pK_{A1})}}$;

AN : $[HCO_3^-]_{eq} = \frac{0,028 \times 10^{(7,4 - 6,1)}}{1 + 10^{(7,4 - 6,1)}}$; On trouve : $[HCO_3^-]_{eq} = 0,0267 \text{ mol.L}^{-1} = 2,67 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

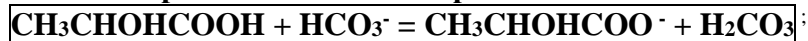
Et $[H_2CO_3]_{eq} = C_0 - [HCO_3^-]_{eq}$; AN : $[H_2CO_3]_{eq} = 0,028 - 0,0267$;

On trouve : $[H_2CO_3]_{eq} = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Q3.a. D'après le DP, à pH = 7,4, c'est $[HCO_3^-]_{eq}$ est l'espèce majoritaire.

De plus, $CH_3CHOHCOOH$ et HCO_3^- ont des **DP disjoints** ; Donc réaction selon la règle du gamma.

Ou faire la réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte.



$$K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} [H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq} [HCO_3^-]_{eq}} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} [H_3O^+]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}} \times \frac{[H_2CO_3]_{eq}}{[HCO_3^-]_{eq} [H_3O^+]_{eq}}$$

Ainsi $K_{eq} = \frac{K_{A3}}{K_{A1}} = 10^{pK_{A1} - pK_{A3}}$; AN : $K_{eq} = 10^{6,1 - 3,9}$;

On trouve : $K_{eq} = 10^{2,2}$; La réaction n'est ni totale, ni négligeable.

Q3.b. Tableau d'avancement :

$$[CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{n}{V} ; \text{AN : } [CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} = C_3.$$

	$CH_3CHOHCOOH$	+ HCO_3^-	=	$CH_3CHOHCOO^-$	+ H_2CO_3
EI	C_3	C_1			C_2
EE	$C_3 - x$	$C_1 - x$		x	$C_2 + x$

Alors $K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} [H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq} [HCO_3^-]_{eq}} = \frac{x(C_2 + x)}{(C_3 - x)(C_1 - x)}$; Soit : $K_{eq}(C_3 - x)(C_1 - x) = x(C_2 + x)$;

Ou encore : $x^2(1 - K_{eq}) + x(C_2 + K_{eq}C_1 + K_{eq}C_3) - K_{eq}C_1C_3 = 0$

Résolution du polynôme du 2nd degré : On trouve $\Delta \approx 14,433$;

$x_1 \approx 0,027 > C_3$ donc impossible ou $x_2 \approx 2,98 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Ainsi : $[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} = x = 2,98 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; $[H_2CO_3]_{eq} = C_2 + x = 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

$[CH_3CHOHCOOH]_{eq} = C_3 - x = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; $[HCO_3^-]_{eq} = C_1 - x = 2,40 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Enfin $pH = pK_{A1} + \log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}$; Ainsi $pH = 6,1 + \log \frac{2,40 \cdot 10^{-2}}{4,38 \cdot 10^{-3}}$; On trouve $pH \approx 6,8$.

Le sang est donc **légèrement plus acide** qu'en temps normal.

Q3.c. La respiration permet l'**expiration de CO_2** et **donc de H_2CO_3** , ce qui permet au pH de ne pas diminuer malgré la production d'acide lactique.

PROBLEME : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre :

(D'après ATS 2014)

(≈ 80 pts)

I – Préliminaires :

Q1. On a : $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$.

Q2. On sait que $\vec{F}(r) = -\text{grad}(\text{Ep}) = -\frac{d\text{Ep}(r)}{dr} \vec{u}_r$.

Ainsi : $F(r) = -\frac{d\text{Ep}(r)}{dr} = -\frac{d\left(-m g_0 \frac{R_T^2}{r}\right)}{dr} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$; D'où $\vec{F} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;
C'est donc une **force attractive**, car selon $(-\vec{u}_r)$.

Q3. \vec{L}_0 est le **vecteur moment cinétique du point M par rapport à O**.

$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta)$; Ainsi : $\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{k}$;

Donc : $L_0 = \|\vec{L}_0\| = m r^2 |\dot{\theta}|$;

Système : le satellite en M ;

Référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

Seule force \vec{F} ; Son moment par rapport à O : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, car vecteurs colinéaires.

Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe : $\frac{dL_0}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$; Soit $\vec{L}_0 = \text{cste}$;

II - Mise en orbite circulaire du satellite :

Q4. Trajectoire circulaire de rayon r , donc $\dot{r} = 0$; Alors $\vec{v}_M = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Ou encore : $\vec{v}_M = v \vec{u}_\theta$.

Et $\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - v \dot{\theta} \vec{u}_r$; Ou encore : $\vec{a}_M = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta$.

On retrouve l'expression de l'accélération dans la base de Frenet.

Q5. Seule force $\vec{F} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$; PFD : $\vec{F} = m \vec{a}_M$; Ainsi : $m \left(-\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta \right) = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;

En projetant sur les 2 axes, il vient : $\dot{v} = 0$; Ainsi : $v = \text{cste}$; Le **mouvement est donc uniforme**.

$$\frac{v^2}{r} = g_0 \frac{R_T^2}{r^2} ; \text{ Soit : } v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{r} ;$$

Q6. $E_C = \frac{1}{2} m v^2$; Ainsi : $E_C = \frac{m g_0 R_T^2}{2r}$;

$E_m = E_C + E_P = \frac{m g_0 R_T^2}{2r} - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$; Ainsi : $E_m = -\frac{m g_0 R_T^2}{2r} = -E_C$; $E_m < 0$ normal car **c'est un état lié**.

$E_m(r_b) = -\frac{4.10^3 \times 10 \times (6.4.10^6)^2}{2 \times 8.10^6}$; On trouve : $E_m(r_b) \approx -1.10^{11} \text{ J}$.

$E_m(r_h) = -\frac{4.10^3 \times 10 \times (6.4.10^6)^2}{2 \times 40.10^6}$; On trouve : $E_m(r_h) \approx -2.10^{10} \text{ J}$.

III - Étude énergétique du satellite :

Q7. Le système n'est soumis qu'à **une force conservative**, donc son **E_m est constante**.

De plus, dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a : $\vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Donc : $v_M^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$.

Alors : $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v_M^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

Ou encore : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

De plus, on a vu au 3) que : $L_0 = \|\vec{L}_0\| = m r^2 |\dot{\theta}|$; Donc : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$ et $m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m r^2}$.

Ainsi : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$. Alors $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $E_{P,eff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$

Q8. On a : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$.

Donc à chaque instant, on doit avoir : $E_m \geq E_{P,eff}(r)$;

Q8 (suite)

- ✚ Pour la trajectoire elliptique, il faut un **domaine de variation de r qui soit borné**, donc il faut un **état lié**, $E_{m2} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r_{min} \leq r \leq r_{max}$;
- ✚ Pour la trajectoire hyperbolique, il faut un **domaine de variation de r qui soit non borné**, donc il faut un **état de diffusion**, $E_{m1} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r \geq r'_{min}$;
- ✚ Pour la trajectoire circulaire, il faut que **r soit constant**, donc qu'il ne puisse prendre qu'une seule valeur. $E_{min} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r = cste$.

IV - Mise en orbite haute du satellite :

Q9. En A ou en P, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{v_A}$, donc la composante en $\overrightarrow{u_r}$ est nulle, ainsi $\dot{r} = 0$;

Ou encore, en ces points, r est max donc $\dot{r} = 0$;

D'autre part, d'après les propriétés de l'ellipse, on a : $r_h + r_b = 2a$;

Q10. D'après la question Q7),

on sait que $E_{m,t} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

Or en A et en P, $\dot{r} = 0$, donc en ces points $E_{m,t} = 0 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

D'où : $r^2 E_{m,t} = \frac{L_0^2}{2m} - g_0 m r \frac{R_T^2}{r}$; Ou encore : $r^2 + \frac{g_0 m r R_T^2}{E_{m,t}} - \frac{L_0^2}{2mE_{m,t}} = 0$;

Par identification, il vient : $\alpha = \frac{g_0 m R_T^2}{E_{m,t}}$ et $\beta = - \frac{L_0^2}{2mE_{m,t}}$;

Pour trouver l'expression de $E_{m,t}$, il faut résoudre le polynôme du second degré trouvé précédemment.

On a $r^2 + \alpha r + \beta = 0$; $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$; $r_{h,b} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; Ainsi : $r_h + r_b = 2a = -\alpha$;

D'où : $2a = - \frac{g_0 m R_T^2}{E_{m,t}}$ et $E_{m,t} = - \frac{m g_0 R_T^2}{2a}$; CQFT.

Q11. Au début du transfert, le satellite est en $r_b = 8000$ km sur l'ellipse de transfert.

Par lecture graphique, on obtient $E_{m, ellipse} \approx -35$ GJ (courbe du milieu).

Q12. De même, on lit pour l'orbite basse, on lit : $E_{m,b} \approx -100$ GJ (courbe du bas).

Et pour l'orbite haute : $E_{m,h} \approx -20$ GJ (courbe du haut).

Rq : On retrouve les ordres de grandeurs de la question 7.

Q13. En P, le satellite passe de l'orbite circulaire basse : ($E_{m,b} \approx -100$ GJ) à l'ellipse de transfert ($E_{m, ellipse} \approx -35$ GJ), il faut donc lui fournir $\Delta E_{mp} = 65$ GJ.

Grâce aux dimensions des grandeurs fournies, on en déduit $m_c = \frac{65 \cdot 10^9}{50 \cdot 10^6} = \frac{65000}{50}$; Soit : $m_c = 1300$ kg.

Q14. Les ergols utilisés dans la fusée Ariane sont **l'oxygène et l'hydrogène liquide**.

L'orbite géostationnaire est **l'orbite circulaire dans le plan équatorial située à 36 000 km d'altitude**. Sa particularité est d'avoir une période de rotation synchrone avec la terre, soit 24h. Le satellite apparaît alors immobile pour l'observateur terrestre.

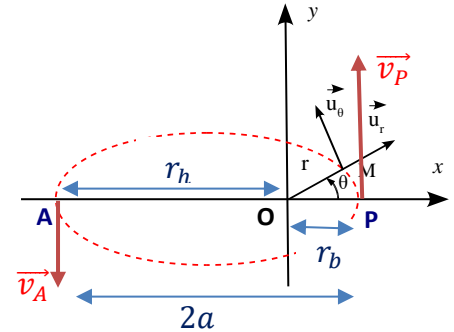
V- Chute du satellite :

Q15. L'énoncé nous donne la solution des questions Q5) et Q6) pour v^2 et E_m .

Sur l'orbite circulaire, on a démontré à la question Q5) que le mouvement était uniforme.

Alors $v = \frac{dist}{temps} = \frac{2\pi r}{T}$ (pour un tour) ; Soit : $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0 \frac{R_T^2}{r}$, d'après l'énoncé.

Donc : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}$; On retrouve la **3^{ème} loi de Kepler**.



Q16. Théorème de la puissance mécanique : Pour un système **non conservatif** (ce qui est le cas ici), car il y a des frottements, $\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{f}_{nc}) = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}$; Ainsi ici, $\frac{dE_m}{dt} = -k v^2 = -k g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

Or d'après l'énoncé, $E_m(t) = -\frac{m g_0 R_T^2}{2r(t)}$; Donc $\frac{dE_m}{dt} = \frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r}$

Ainsi : $\frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r} = -k g_0 \frac{R_T^2}{r}$; D'où : $\dot{r} + \frac{2k}{m} r(t) = 0$; Par identification, on a $\tau = \frac{m}{2k}$;

Unité de τ : $[\tau] = \frac{kg}{[k]} = \frac{kg}{N.s.m^{-1}} = \frac{kg}{kg.m.s^{-2}.s.m^{-1}} = s$; **τ est bien homogène à un temps.**

Car $\vec{f} = -k \vec{v}$.

Q17. Solution de l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre, à coefficients constants : $r(t) = A e^{-t/\tau}$;

Or CI : A $t = 0$, $r(0) = r_0 = A$; Donc : $r(t) = r_0 e^{-t/\tau}$;

Remarque : En toute rigueur, $r > R_T$ car le satellite ne peut pas pénétrer dans la terre. De plus, la valeur de k n'est pas constante : $k(r)$.

En effet, le frottement atmosphérique dépend de la densité de l'air donc de l'altitude.

