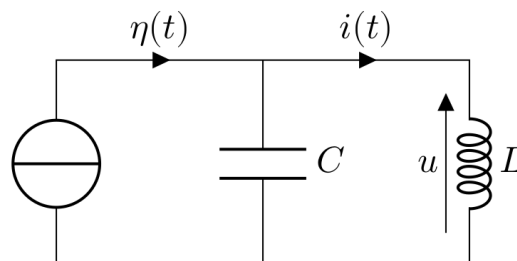


TD application : oscillateurs harmonique et amorti



I Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

Dans le circuit ci-contre, la source idéale de courant est brusquement éteinte. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.

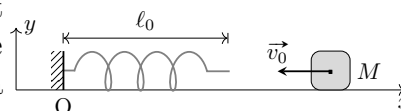


- 1) Exprimer $\frac{d\mathcal{E}_{\text{tot}}}{dt}$ en fonction de i et $\frac{di}{dt}$.
- 2) Justifier qualitativement que \mathcal{E}_{tot} est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i .
- 3) Retrouver cette équation par application des lois des nœuds et des mailles.
- 4) Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.
- 5) En déduire l'expression de $i(t)$.



II Masse percutant un ressort

Un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) fixé en O est initialement au repos. Une masse m glisse sans frottement à vitesse constante $\vec{v} = -v_0 \vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$ et s'accroche *définitivement* au ressort à l'instant $t = 0$.

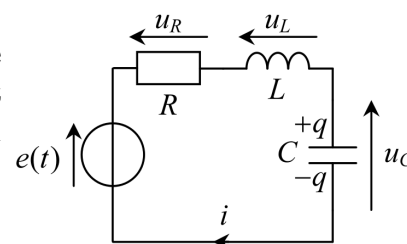


- 1) Déterminer l'équation du mouvement de la masse une fois qu'elle est accrochée (pour $t \geq 0$).
- 2) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.
- 3) À quelle condition la masse vient-elle percuter la paroi en O ?



III RLC sur q et bilan d'énergie

Un circuit électrique est composé d'une résistance R , d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C . Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que : $\begin{cases} e(t < 0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$. On pose $\gamma = \frac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$



- 1) Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls.

- 2) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$ est :

$$\frac{d^2q}{dt^2} + 2\gamma \frac{dq}{dt} + \omega_0^2 q = \frac{E}{L}$$

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R , L et C . On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

- 3) Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

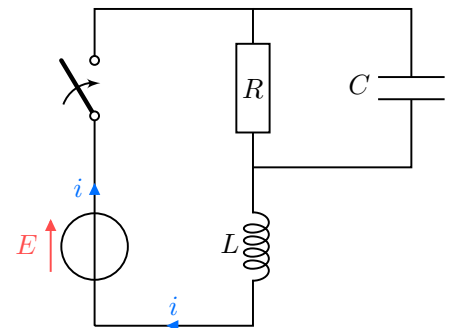
$$q(t) = [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]e^{-\gamma t} + D$$

avec A , B et D des constantes à exprimer en fonction de C , E , ω_0 et γ .

- 4) Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C , E , ω_0 et γ .
- 5) la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.
- 6) Déterminer l'énergie totale \mathcal{E}_G fournie par le générateur ainsi que l'énergie \mathcal{E}_{LC} emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E . En déduire l'énergie dissipée par effet JOULE dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \rightarrow 0$.

☆☆ IV | Oscillateur amorti RLC à 2 mailles

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



- 1) Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i .
- 2) L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.
- 3) Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.
- 4) Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.
- 5) En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.