

# TD : Premier principe de la thermodynamique



## I Cycle de transformation

Deux moles de gaz parfait diatomique subissent le cycle de transformations mécaniquement réversible suivant :

- 1) Compression isotherme de l'état A à l'état B, avec  $T_A = T_B = 298 \text{ K}$  et  $P_A = 1,0 \text{ bar}$  ;
  - 2) Un chauffage isobare de l'état B à l'état C, avec  $T_C = 400 \text{ K}$  ;
  - 3) Une détente adiabatique ramenant le système de l'état C à l'état initial A.
- 1) Représenter le cycle de transformations dans un diagramme de WATT.
  - 2) Exprimer et calculer le travail et le transfert thermique pour chacune des transformations AB, BC et CA.
  - 3) De quel type de machine thermique s'agit-il ?



## II Échauffement d'une bille en mouvement dans l'air

Une bille métallique, de capacité thermique massique  $c$  (supposée constante) est lancée vers le haut avec une vitesse  $\vec{v}_0$  dans le champ de pesanteur  $\vec{g}$  uniforme. Elle atteint une altitude  $h$  puis redescend.



$$g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} ; c = 0,4 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1} ; v_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} ; h = 5 \text{ m}.$$

- 1) Déterminer l'altitude maximale  $h_0$  que peut atteindre la bille si on néglige les forces de frottement fluide entre l'air et la bille. Exprimer  $h_0$  en fonction de  $v_0$  et  $g$ .

On constate que l'altitude  $h$  est inférieure à  $h_0$ , à cause des forces de frottement. Calculer la variation de température  $\Delta T$  de cette bille entre l'instant où elle est lancée et l'instant où elle atteint son point le plus haut, en supposant que :

- ◇ On néglige toute variation de volume de la bille ;
  - ◇ l'air ambiant reste macroscopiquement au repos ;
  - ◇ le travail des forces de frottement se dissipe pour moitié dans l'air ambiant et pour moitié dans la bille.
- 2) Exprimer  $\Delta T$  en fonction de  $h_0$ ,  $h$ ,  $g$  et  $c$ .
  - 3) Calculer  $h_0$  puis  $\Delta T$ .



## III Détente de JOULE GAY-LUSSAC

Le dispositif étudié dans cet exercice a été mis en point au XIX<sup>e</sup> siècle par JOULE et GAY-LUSSAC en vue d'étudier le comportement des gaz. Deux compartiments indéformables aux parois calorifugées communiquent par un robinet initialement fermé. Le compartiment (1), de volume  $V_1$ , est initialement rempli de gaz en équilibre à la température  $T_i$ . Le vide est fait dans le compartiment (2). Une fois le robinet ouvert, un nouvel équilibre s'établit, caractérisé par une température  $T_f$  du gaz.

- 1) Faire un schéma des états initial et final. En considérant comme système fermé le contenu des deux compartiments, caractériser la transformation subie par ce système.
- 2) Montrer que cette détente est isoénergétique, c'est-à-dire que l'énergie interne du gaz ne varie pas au cours de la transformation. Cette propriété dépend-elle du gaz ?
- 3) Déterminer la température  $T_f$  dans le cas où le gaz est parfait.

En réalité, on observe une légère diminution de la température du gaz dans la quasi-totalité des cas. L'expérience est ici réalisée avec du dioxygène, qui peut être efficacement modélisé par un gaz de VAN DER WAALS. L'équation d'état d'un tel gaz s'écrit

$$\left(P + \frac{an^2}{V^2}\right)(V - nb) = nRT \quad \text{tel que} \quad U = nC_{V,m}T - \frac{an^2}{V}$$

avec  $a$  et  $b$  deux constantes positives caractéristiques du gaz. Les travaux de VAN DER WAALS sur le comportement microscopique des gaz ont été de première importance, et il en a été récompensé par le prix NOBEL 1910. Pour le dioxygène,  $C_{V,m} = 21 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$  et  $a = 1,32 \text{ USI}$ .

- 4) Interpréter physiquement l'origine du terme de cohésion  $a$  et du volume exclu  $b$ , et donner leur unité. Nommer et interpréter la constante  $C_{V,m}$ .
- 5) Déterminer l'expression de la température finale  $T_f$  du gaz.
- 6) Effectuer l'application numérique de  $\Delta T$  pour  $n = 0,80 \text{ mol}$  et  $V_1 = V_2 = 5,0 \text{ L}$ .



## IV Calorimétrie du fer

La calorimétrie consiste en la mesure d'échanges thermiques. On utilise pour cela un calorimètre, dont les parois sont conçues pour minimiser les échanges thermiques entre l'intérieur et l'extérieur du calorimètre. Ces échanges seront considérés comme nuls. Les transformations se font à la pression atmosphérique constante, et sont donc supposées monobares.

### 1) Mesure de la capacité thermique $C$ du calorimètre

Le calorimètre contient initialement une masse  $m = 100 \text{ g}$  d'eau, l'ensemble étant à la température ambiante  $\theta_0 = 20,0^\circ\text{C}$ . On ajoute alors la même masse d'eau à  $\theta_1 = 80,0^\circ\text{C}$ . On remue pour homogénéiser le système et on mesure la température  $\theta_f = 43,6^\circ\text{C}$ . La capacité thermique massique de l'eau est  $c = 4,18 \text{ kJ}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{kg}^{-1}$ .

- a – Montrer que l'enthalpie du système {parois + eau} reste constante au cours de la transformation.
- b – En déduire la capacité thermique massique  $C$  des parois internes du calorimètre.
- c – Quelle est la masse en eau  $m_0$  du calorimètre ?
- d – Pourquoi ne faut-il pas trop attendre pour mesurer la température finale ? Quelle serait sa valeur si on attendait un temps très long ?

### 2) Mesure de la capacité thermique massique du fer

On considère l'état initial où une masse  $m = 100 \text{ g}$  d'eau et une masse  $m_f = 140 \text{ g}$  de fer sont dans le calorimètre. Une résistance électrique de masse négligeable est aussi immergée dans le liquide. L'ensemble est initialement à la température  $\theta_0 = 20,0^\circ\text{C}$ . Pendant une durée  $\tau = 30 \text{ s}$ , un générateur électrique fourni à la résistance une puissance  $P = 350 \text{ W}$ . On homogénéise la solution et on mesure la température  $\theta'_f = 34,8^\circ\text{C}$ .

- a – Exprimer la variation d'enthalpie du système {parois + eau + fer + résistance} au cours de la transformation précédente.
- b – En déduire l'expression puis la valeur de la capacité thermique massique du fer  $c_{\text{Fe}}$ .



## V Transformation polytropique

Une transformation polytropique est une transformation d'un gaz pour laquelle il existe un coefficient  $k > 0$  tel que  $PV^k = \text{cte}$  tout au long de la transformation. De telles transformations sont intermédiaires entre des adiabatiques et des isothermes, et se rencontrent en thermodynamique industrielles, par exemple lorsque le système réfrigérant ne permet pas d'éliminer tout le transfert thermique produit par une réaction chimique. On raisonnera à partir d'une transformation quasi-statique d'un gaz parfait.



Pour un gaz parfait,  $C_V = \frac{nR}{\gamma - 1}$  et  $C_P = \frac{\gamma nR}{\gamma - 1}$ .

- 1) À quelles transformations connues correspondent les cas  $k = 0$ ,  $k = 1$  et  $k = +\infty$  ?
- 2) Calculer le travail des forces de pression pour un gaz subissant une transformation polytropique entre deux états  $(P_0, V_0, T_0)$  et  $(P_1, V_1, T_1)$  en fonction d'abord des pressions et des volumes, puis dans un second temps des températures seulement.

- 3) Montrer que le transfert thermique au cours de la transformation précédente s'écrit

$$Q = nR \left( \frac{1}{\gamma - 1} - \frac{1}{k - 1} \right) (T_1 - T_0)$$

- 4) Analyser les cas  $k = 0$ ,  $k = 1$  et  $k = +\infty$ , et vérifier la cohérence avec l'analyse initiale.  
 5) À quel type de transformation correspond le cas  $k = \gamma$  ?



## VI Comparaison entre transformations

$T_0, P_0$	On considère un système composé d'une quantité de matière $n$ de gaz parfait diatomique enfermée dans une enceinte. Cette enceinte est fermée par un piston de surface $S$ et dont on négligera la masse, pouvant coulisser sans frottement. L'ensemble est situé dans l'atmosphère, dont on note $T_0$ et $P_0$ la température et la pression. On note I l'état initial. L'objectif est de comparer deux transformations du système : l'une brutale et l'autre lente.
$T, P, V$	Commençons par la transformation brutale : on lâche brusquement une masse $M$ sur le piston, qui se stabilise en un état intermédiaire 1.

- 1) Le meilleur modèle pour la transformation est-il isotherme ou adiabatique ? Peut-on en déduire un résultat sur la température  $T_1$  ?
- 2) Déterminer la pression  $P_1$ .
- 3) Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chacun des termes  $W_{I \rightarrow 1}$ ,  $Q_{I \rightarrow 1}$  et  $\Delta_{I \rightarrow 1}U$ , et appliquer le premier principe.
- 4) Exprimer alors  $T_1$  en fonction des pressions  $P_1, P_0$  et la température  $T_0$ , et  $V_1$  en fonction des pressions et du volume  $V_I = V_0$ .

On observe qu'en fait l'état 1 n'est pas un réel état d'équilibre : le piston continue de bouger, mais beaucoup plus lentement, jusqu'à atteindre l'état 2 qui est l'état final.

- 5) Quel phénomène, négligé précédemment, est responsable de cette nouvelle transformation du système ? Comment peut-on qualifier cette transformation ?
- 6) Déterminer les caractéristiques  $T_2$ ,  $P_2$ ,  $V_2$  de l'état 2.
- 7) Déterminer le travail reçu par le système, puis sa variation d'énergie interne au cours de la transformation  $1 \rightarrow 2$ . En déduire le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque.

Comparons maintenant à une transformation lente : la même masse  $M$  est lâchée très progressivement sur le piston, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ».

- 8) Comment qualifie-t-on une telle transformation ? Que peut-on en déduire sur la température du système au cours de la transformation ?
- 9) Déterminer la pression dans l'état final et en déduire le volume. Commenter.
- 10) Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chaque terme.
- 11) Représenter alors ces deux transformations dans un diagramme de WATT ( $P, V$ ), en considérant la transformation  $I \rightarrow 1$  mécaniquement réversible, et commenter.



## VII Chauffage d'une chambre

On étudie le chauffage d'une chambre au dernier étage de l'internat en hiver. On installe un radiateur électrique d'appoint fournissant une puissance de chauffe  $\mathcal{P}_c$ . Le volume de la chambre est  $V = 36 \text{ m}^3$ , et est rempli d'air de capacité thermique molaire  $C_{V,m} = \frac{5}{2}R$ . On la suppose vide de meubles.

Les échanges thermiques se font *via* par deux surfaces : le mur et les vitres en contact avec l'extérieur et le toit, de surfaces égales  $S = 12 \text{ m}^2$ . Les autres surfaces sont supposées à l'équilibre thermique du fait des chambres voisines et en-dessous. On note  $T_{\text{int}}(t)$  la température intérieure, et  $T_{\text{ext}} = 10^\circ\text{C}$  la température extérieure, supposée constante.

Les fuites thermiques à la date  $t$  à travers le mur sont données par la puissance  $\mathcal{P}_{\text{mur}} = g_{\text{mur}}S(T_{\text{int}}(t) - T_{\text{ext}})$ , et celles à travers le toit par  $\mathcal{P}_{\text{toit}} = g_{\text{toit}}S(T_{\text{int}}(t) - T_{\text{ext}})$ .

On souhaite maintenir la température à une température de confort  $T_c = 19^\circ\text{C}$ . La pression de l'air intérieur est  $P_0 = 1,0\text{ bar}$  à cette température.



$$g_{\text{mur}} = 2,90 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1} \text{ et } g_{\text{toit}} = 0,50 \text{ W}\cdot\text{m}^{-2}\cdot\text{K}^{-1}, R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}.$$

- 1) Faire un schéma représentant la pièce, le radiateur et l'extérieur, en faisant apparaître les transferts thermiques entrant en rouge et les transferts thermiques sortant en bleu.
- 2) Calculer le nombre de moles d'air présentes dans la chambre dans les conditions  $(T_c, P_0)$ . En déduire la capacité thermique  $C_V$  de l'air contenu dans la chambre. Faire l'application numérique.
- 3) Quelle est la puissance  $\mathcal{P}_c$  fournie par le radiateur pour maintenir une telle température de confort dans les conditions mentionnées ci-dessus ?

On doit partir pour une khôlle et dîner, et on se demande s'il vaut mieux couper le chauffage ou le maintenir. On suppose alors qu'on arrête le chauffage à  $t = 0$ , et qu'on revient 3 h plus tard au temps  $t_1$ .

- 4) En supposant qu'il n'y a pas de circulation d'air, appliquer le premier principe sous forme différentielle à l'air de la chambre et déterminer l'équation différentielle vérifiée par  $T_{\text{int}}(t)$  pour  $t \in [0, t_1]$ . On introduira un temps caractéristique  $\tau$  que l'on calculera.
- 5) Résoudre cette équation différentielle, puis tracer cette évolution au cours du temps, et déterminer la température  $T_{\text{int},f}$  lors du retour dans la chambre.

On souhaite retrouver la température de confort  $T_c$ . Pour y revenir rapidement, on pousse la puissance de chauffe à son maximum,  $\mathcal{P}_{c,\text{max}} = 2,0\text{ kW}$ .

- 6) Écrire la nouvelle équation différentielle satisfaite par  $T_{\text{int}}(t)$ . Résoudre cette équation en prenant  $t_1$  comme origine du temps (on considère  $t_1 = 0$ ) et  $T_{\text{int},f}$  comme condition initiale, et exprimer la solution en fonction de  $T_{\text{ext}}$ ,  $T_c$ ,  $\mathcal{P}_{c,\text{max}}$ ,  $\mathcal{P}_c$  et  $\tau$ .
- 7) Tracer la solution obtenue, puis calculer la durée nécessaire pour retrouver la température de confort  $T_c$ . On appelle cet instant  $t_2$ .
- 8) Déterminer alors la différence d'énergie entre les deux situations :
  - ◊ On garde le chauffage à la puissance  $\mathcal{P}_c$  de  $t = 0$  à  $t_2$  ;
  - ◊ On a éteint le chauffage de  $t = 0$  à  $t_1$ , mais on le rallume de  $t_1$  à  $t_2$  avec  $\mathcal{P}_{c,\text{max}}$ .

On suppose que l'énergie électrique est parfaitement convertie en chaleur. Sachant que pour l'électricité on a  $1\text{ kWh} \approx 0,27\text{ €}$  avec l'augmentation de février 2024, déterminer l'écart financier entre ces deux méthodes. Commenter.

On cherche maintenant à savoir s'il existe une durée  $t_1$  telle que les deux méthodes soient similaires.

- 9) Reprendre la résolution de la seconde équation différentielle (réchauffage à  $\mathcal{P}_{c,\text{max}}$ ), avec pour condition initiale  $T_{\text{int}}(t_1)$  la solution de la première équation différentielle (arrêt du chauffage) : **on ne considère plus  $t_1 = 0$  et  $T_{\text{int},f}$  comme conditions initiales.**
- 10) Déterminer alors  $t_2$  pour retrouver  $T_c$ , en fonction de  $\tau$ ,  $\mathcal{P}_c$ ,  $\mathcal{P}_{c,\text{max}}$  et  $t_1$ .
- 11) Tracer alors la consommation énergétique des deux méthodes en fonction de  $t_1$ . Conclure.