Correction du DS

/20 E1 Oscillations d'un métronome

/2 **1** Plus x augmente et plus J augmente (1), ce qui est normal puisque le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est répartie loin de l'axe. (1)

/8 **2**
- ◇ **Système** : {métronome} = {disque+tige+curseur} de moment d'inertie J_z ;
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen ; (1)
- ◇ **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$;
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \ell\,\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -x\,\overrightarrow{u_r}$. (1)

Les actions qui s'exercent sur le métronome sont :

- ◇ poids du disque $\vec{P}_{\mathrm{C}} = M\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_{\mathrm{C}}) = -Mg\ell\sin\theta$; (1)
- ◇ poids du curseur $\vec{P}_{\mathrm{A}} = m\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_{\mathrm{A}}) = +mgx\sin\theta$; (1)
- ◇ liaison pivot parfaite dont le moment par rapport à l'axe Oz est nul. (1)
- ◇ De plus, $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = J\dot{\theta}$. (1)

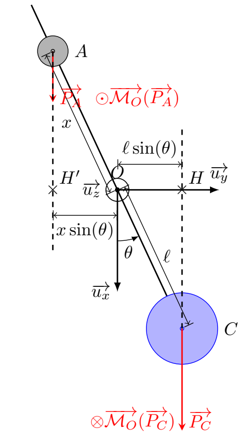

Figure 7.1 – Schéma (2)

/2 **3** On applique la loi du moment cinétique dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\mathrm{ext}}) \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = mgx\sin\theta - Mg\ell\sin\theta \quad\Leftrightarrow\quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}\sin\theta \overset{(1)}{=} 0}$$

/4 **4** Si les oscillations sont petites, alors $\sin\theta \approx \theta$, donc on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}tp = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 tp \overset{(1)}{=} 0}$$

$$\Rightarrow \omega_0 \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{Mg\ell - mgx}{J}} \Leftrightarrow T_0 \overset{(1)}{=} 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mg\ell - mgx}} \Leftrightarrow \boxed{T_0 \overset{(1)}{=} 2\pi\sqrt{\frac{mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2}{Mg\ell - mgx}}}$$

/2 **5** Cela correspond à 50 périodes par minute (1), donc

$$\boxed{T_0 = \frac{60\,\mathrm{s{\cdot}min^{-1}}}{50\,\text{périodes}{\cdot}\mathrm{min}^{-1}} = 1{,}2\,\mathrm{s}{\cdot}\text{période}^{-1}\,(1)}$$

/2 **6** Pour augmenter la fréquence, il faut diminuer T_0, (1) donc diminuer son numérateur et augmenter son dénominateur, ce qui revient dans les 2 cas à diminuer x. (1)

/50 E2 Satellite en orbite terrestre *(D'après TSI 2010)*

II/A Etude dynamique

/5 **1** Le référentiel géocentrique est lié au repère dont le centre est le centre de masse (1) de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes lointaines. (1)

Un référentiel terrestre est lié au repère dont le centre est un point à la surface de la Terre (1) et dont les axes sont solidaires à la Terre, donc en rotation par rapport à l'axe des pôles fixe (1) dans le référentiel géocentrique.

On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. (1)

/4 $\boxed{2}$ La force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est

$$\boxed{\vec{F} \overset{1}{=} -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre O vers le centre du satellite M. (1)

D'après le principe des actions réciproques (troisième loi de Newton (1)), on a :

$$\boxed{\vec{F'} \overset{1}{=} -\vec{F} = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

/7 $\boxed{3}$ On se place dans le référentiel géocentrique. La seule force exercée par le satellite est la force $\vec{F}$. (1) Elle est centrale de centre O, ainsi, son moment par rapport à O est nul : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \overset{1}{=} \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} \overset{1}{=} \vec{0}$.

D'après le théorème du moment cinétique par rapport au point O, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_O(M)}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_O(M) \overset{1}{=} \overrightarrow{\mathrm{cte}} = \mathcal{L}_0\,\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{OM}(t) \wedge m\vec{v}_M(t) \overset{1}{=} \mathcal{L}_0\,\vec{u_z} = \overrightarrow{OM}(0) \wedge m\vec{v}_M(0)$$

avec $\vec{u_z}$ la direction initiale du moment cinétique. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{OM}$ reste constamment perpendiculaire à un vecteur constant, donc le mouvement est plan et le plan du mouvement passe par le centre de force O. En l'occurrence, le plan est $(O, \overrightarrow{OM_0}, \vec{v_0})$. (1)

/4 $\boxed{4}$

$$\overrightarrow{OM} = r\,\vec{e_r} \qquad \vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad (1)$$

D'après le PFD appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on a :

$$m\vec{a} \overset{1}{=} \vec{F} \Rightarrow -mr\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + rm\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}$$

Sur $\vec{e_\theta} \Rightarrow$ $\quad \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \mathrm{cte}$ $\quad$ donc $\|\vec{v}\| = \left|r\dot{\theta}\right|$ uniforme (1)

Sur $\vec{e_r} \Rightarrow$ $\quad mr\dot{\theta}^2 = \dfrac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \Rightarrow r\dfrac{v^2}{r^2} = \dfrac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \Rightarrow \boxed{v \overset{1}{=} \sqrt{\dfrac{\mathcal{G}M_T}{r}}}$

/2 $\boxed{5}$ On a

$$T \overset{1}{=} \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} \overset{1}{=} \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$$

ce qui correspond à la traduction mathématique de la troisième loi énoncée par Kepler.

/3 $\boxed{6}$ On peut, à partir de la trajectoire d'un satellite naturel ou artificiel connaître r et T, on en déduit alors M_T en utilisant la 3ème loi de Kepler (1). Mieux, on peut relever r et T pour différent satellites, et tracer T^2 en fonction de r^3. On obtient alors une droite de pente $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$, ce qui permet d'en déduire M_T (en supposant $\mathcal{G}$ connu !).

Pour le cas de la lune : $T = 28$ jours et $r = 384 \times 10^6$ m (1). On en déduit la masse de la Terre : $\underline{M_T = 6{,}10 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}}$. (1)

/3 $\boxed{7}$ Si les deux satellites sont à la même distance de la terre, ils ont la même vitesse. (1) Si de plus ils sont dans un même plan, alors ils ont des trajectoires identiques, (1) parcourues à la même vitesse : ils ne peuvent pas se heurter (sauf si leurs vitesses sont opposées). (1)

II/B Étude énergétique

/4 $\boxed{8}$

$$\delta W \overset{1}{=} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OM} = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r^2}\,\vec{e_r}\cdot(\mathrm{d}r\,\vec{e_r} \overset{1}{+} r\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} + \mathrm{d}z\,\vec{e_z}) = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r} + C\right)$$

Ainsi, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ peut se mettre sous la forme $-\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, donc elle est conservative et dérive de l'énergie $\mathcal{E}_p(r) \overset{1}{=} -\dfrac{\mathcal{G}M_Tm}{r} + C$. En choisissant $Ep(+\infty) \overset{1}{=} 0$, on a $C = 0$, et on en déduit

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad \boxed{k \overset{1}{=} \mathcal{G}M_Tm}$$

/10 $\boxed{9}$ $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{\text{TEM}}{=} 0$ et $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$ 1

Or $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$

$$\Rightarrow v^2 \overset{1}{=} \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + -\frac{k}{r}}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}$$

or $\boxed{\dot{\theta} = C/r^2}$ d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}}$$

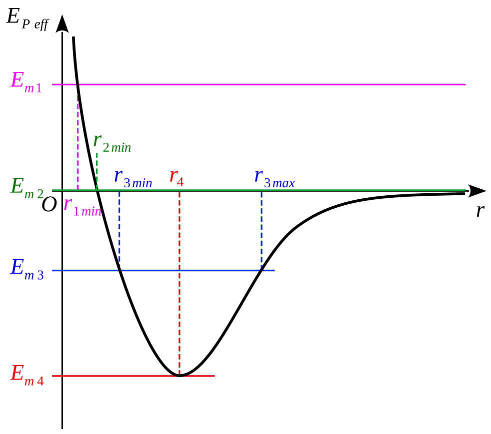

FIGURE 7.2 – Graphique de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ 2

- $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r\to 0}{\sim} \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$, et tend donc vers ∞. 1
- $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r\to +\infty}{\sim} -\frac{k}{r}$, et tend donc vers 0^- (donc par valeurs négatives). 1
- De plus, $\mathcal{E}_m = \text{cte} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) > \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, donc les régions accessibles sont celles pour lesquelles $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) < \mathcal{E}_m}$. 1

On en déduit donc : 2

- Si $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,4}$, aucun mouvement n'est possible
- Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,4}$, alors $r = r_4$ est constant : la trajectoire est circulaire (état lié)
- Si $\mathcal{E}_{m_4} < \mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,2} = 0$, r est compris entre 2 valeurs $r_{3,min}$ et $r_{3,max}$: mouvement elliptique (état lié)
- Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} = 0$, le satellite peut partir à l'infini mais sa vitesse à l'infini est nulle : le mouvement est parabolique (état de diffusion)
- Si $\mathcal{E}_m > 0$: le mouvement est hyperbolique (état de diffusion)

/5 $\boxed{10}$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}$$

Or, $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_c}} \Rightarrow$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m \overset{1}{=} -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}}$$

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** autour de la Terre, à un rayon R_T : 1

$$\mathcal{E}_{m,\text{sol}} \overset{1}{=} \frac{1}{2}m{v_c}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{cercle}} \overset{1}{=} -\mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{2R_{\text{T}}}$$

Or système conservatif après le lancer $\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_c}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} = -\mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{2R_{\text{T}}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_c \overset{1}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}}}$$

/32×1,5 P1 Rotation d'un œuf dur *(D'après TPC CCP 2018)*

/2 $\boxed{1}$ Comme $b > a$, on a $J_H > J_V$. 1 En effet, la masse est globalement répartie plus loin de l'axe de rotation, 1 donc le moment d'inertie est plus grand.

/2 $\boxed{2}$ Dans les deux cas, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}J\Omega^2 + mgz_G$, 1 on a donc

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga} \quad \overset{1}{\text{et}} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} = \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb}$$

/3 $\boxed{3}$ On cherche la condition sur Ω pour avoir $\mathcal{E}_{m_V} \overset{1}{<} \mathcal{E}_{m_H}$, ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb < \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \Leftrightarrow 2mg(b-a) < (J_H - J_V)\Omega^2$$

$$\Leftrightarrow 2mg(b-a) \overset{1}{<} \frac{m}{5}\underbrace{\left(b^2-a^2\right)}_{(a-b)(a+b)}\Omega^2 \Leftrightarrow \Omega > \boxed{\Omega_c \overset{1}{=} \sqrt{\frac{10g}{a+b}}}$$

/2 $\boxed{4}$ L'application numérique donne $\Omega_c = 45\,\text{rad}{\cdot}\text{s}^{-1}$ 1, soit environ 7 tour/s. Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'on nous parle dans le document d'une vitesse de rotation d'une dizaine de tours par seconde. 1

/3 $\boxed{5}$ À l'état initial, on a

$$\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega_0^2 + mga \overset{1}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)^2 + mga$$

soit au premier ordre en ε (DL1) :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} \overset{1}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon) + mga} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} \overset{1}{=} \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon r) + mgb}$$

/7 $\boxed{6}$

$$\mathcal{E}_{m_H} \overset{1}{=} \mathcal{E}_{m_V} \Rightarrow \quad \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon r) + mgb = \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon) + mga \qquad (1)$$

$$\text{Or, } \boxed{3} \Rightarrow \quad \frac{m}{5}a^2\Omega_c^2 + mgb \overset{1}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)\Omega_c^2 + mga \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{10}(a^2+b^2)2\Omega_c\varepsilon \overset{1}{=} \frac{m}{5}a^2 2\Omega_c r\varepsilon \qquad (3) = (1) - (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \overset{1}{=} \frac{a^2+b^2}{2a^2}}$$

$b > a$ donc $r > 1$ donc $\Omega_f > \Omega_0$. 1 Lors de son redressement, la vitesse de rotation de l'oeuf augmente.

Dans le cas où $a = b$, c'est-à-dire dans le cas d'un oeuf sphérique, on retrouve $r = 1$ 1 puisque le système reste inchangé (dans ce cas, on ne peut même plus parler de redressement), donc sa vitesse de rotation ne varie pas. 1

/4 $\boxed{7}$

$$\boxed{\mathcal{L}_H = J_H\Omega_0 = \frac{m}{5}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)} \quad \overset{1}{\text{et}} \quad \boxed{\mathcal{L}_V = J_V\Omega_f = \frac{2m}{5}a^2(\Omega_c+r\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{L} \overset{1}{=} \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c + \frac{m}{5}(2a^2r-a^2-b^2)\varepsilon$$

$$r = \frac{a^2+b^2}{2a^2} \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\mathcal{L} \overset{1}{=} \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c < 0}$$

Le moment cinétique de l'oeuf a diminué lors de son redressement. 1

/5 $\boxed{8}$ D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_z$. 1 En supposant que le redressement est de courte durée, on peut approcher $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}$ par $\frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta t}$, on a donc

$$\Gamma_z = \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c}{\Delta t} \overset{1}{=} \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c^2}{\Omega_c\Delta t}$$

On injecte l'expression de Ω_c obtenue à la question $\boxed{3}$:

$$\boxed{\Gamma_z = \frac{m}{5}(a^2-b^2)\frac{10g}{(a+b)\Omega_c\Delta t} \overset{1}{=} \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c\Delta t}}$$

Ce couple est négatif, 1 ce qui est cohérent avec le fait que le moment cinétique de l'oeuf ait diminué pendant le redressement. 1

/4 $\boxed{9}$ Le poids et la réaction normale ne peuvent 1 pas être responsable d'un tel couple car ces deux forces sont parallèles à l'axe de rotation, donc leur moment par rapport à cet axe est nul 1. Ce couple peut éventuellement provenir des frottements, 1 car on nous dit dans le document qu'il faut que la surface ne soit « pas trop lisse ». Cependant, cela contredit l'hypothèse de l'énergie mécanique constante. 1

/64 P2 Satellites de télécommunication *(D'après Mines-Ponts MP 2007)*

II/A Couverture d'un réseau de satellite

/9 1 Dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen 1 on ne prend en compte que la force de gravitation exercée par la Terre $\vec{F} \overset{1}{=} -\dfrac{k}{r^2}\vec{e_r}$ avec $k = \mathcal{G}M_TM_S$. On a de plus $r = R_T + h$. On peut ainsi appliquer le PFD $m\vec{a} = \vec{F}$ au satellite dans le repère polaire O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_z}$: 1

$$\begin{aligned} -M_Sr\dot{\theta}^2 &= -\tfrac{k}{r^2} \quad ① \\ M_Sr\ddot{\theta} &= 0 \quad ① \end{aligned}$$

De la deuxième équation, on obtient $\dot{\theta} = cte \Rightarrow v = r\dot{\theta} = \text{cte}$. 1 On peut ainsi ré-exprimer l'accélération radiale $a_r = -v^2/r$ d'où :

$$M_S\frac{v^2}{r} = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{v \overset{1}{=} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T+h}}}$$

De plus, on sait que $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \boxed{\dfrac{T^2}{(R_T+h)^3} \overset{1}{=} \dfrac{4\pi^2}{GM_T}}$. On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler. Les A.N.s donnent $\underline{T = 6{,}07 \times 10^2\,\text{s}}$ et $\underline{v = 7{,}46\,\text{km·s}^{-1}}$. 1

/2 2 L'énergie potentielle a pour expression $\mathcal{E}_p(r) \overset{1}{=} -\dfrac{k}{r}$. On a $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = M_Sv^2 - \frac{GM_TM_S}{r} = M_S\left(\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T}{r}\right) \overset{1}{=} 0$ d'où le résultat.

/5 3 Il convient pour cela d'établir l'expression de l'angle φ tel que $\cos(\varphi) = R_T/(R_T+h)$. 1 La vitesse du satellite étant uniforme, on en déduit $\tau \overset{1}{=} \dfrac{2\varphi}{2\pi}T$ soit au final :

$$\boxed{\tau \overset{1}{=} 2\arccos\frac{R_T}{R_T+h}\underbrace{\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}}_{=f(h)①}}$$

L'application numérique donne $\underline{\tau = 9{,}2 \times 10^2\,\text{s}}$. 1

/3 4 On a simplement $\dfrac{T}{\tau} = \dfrac{2\pi}{2\varphi} \overset{1}{=} \dfrac{\pi}{\arccos\frac{R_T}{R_T+h}} \overset{1}{\approx} 6{,}6$. Le satellite est ainsi visible pendant 1/6,6 ième de son trajet. Il faudra donc 7 satellites 1 pour garantir la couverture permanente au sol (arrondi au supérieur).

/3 5 D'après la question précédente, il faudrait aussi 7 « trains de satellites » pour couvrir toutes les longitudes. 1 Cependant, un train de satellite couvre « deux côtés » et donc $\lfloor 7/2 \rfloor = 4$ trains suffisent. 1 On aboutit ainsi à un total de $7 \times 4 = 28$ satellites. 1

/7 6 Sur l'orbite géostationnaire, la période de révolution du satellite est celle de la terre $T_T \approx 86 \times 10^3\,\text{s}$. 1 On peut utiliser la 3ième loi de Kepler :

$$\frac{T_T^2}{(R_T+h_g)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{soit} \quad \boxed{h_g \overset{1}{=} \left(\frac{GM_TT_T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T \overset{1}{\approx} 35\,700\,\text{km}}$$

La notion de « visibilité » est à prendre avec prudence : pour un point du globe, le satellite est alors soit visible et la durée de visibilité est infinie, soit invisible. 1 Il ne faut pas utiliser la formule de la question 4 pour la durée de visibilité car on y faisait l'hypothèse d'une Terre immobile (le schéma permettant le calcul de φ est incorrect dans ce cas !!).

Pour une zone donnée de la Terre, il suffit de disposer d'un seul 1 satellite au lieu d'une bonne quarantaine. Mais il est beaucoup plus éloigné, ce qui pose des problèmes de perte de transmission. 1

Il faut aussi remarquer que les Pôles et les régions qui les entourent ne voient pas les satellites géostationnaires. 1

II/B Influence des frottements aérodynamiques

/5 [7] On a $\dim F = \mathrm{M.L.T^{-2}} \Leftrightarrow \dim(\alpha).\mathrm{M.L^2.T^{-2}}$. On en déduit par identification que $\boxed{\dim\alpha = \mathrm{L}^{-1}}$. 1

Le TPM appliqué au satellite donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} \mathcal{P}(\vec{F}_a) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} -\alpha M_S v^3 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t}$$

De plus, $v^2 = 2\mathcal{E}_C/M_S \overset{1}{=} -\mathcal{E}_P/M_S = GM_T/(R_T+h)$. On en déduit en combinant ces résultats que :

$$-\alpha M_S \frac{GM_T}{R_T+h}^{3/2} = \dot{h}\frac{GM_S M_T}{2(R_T+h)^2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} -2\alpha\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h}$$

/8 [8] Entre le début et la fin de la révolution, $R_T + h$ n'a quasiment pas varié et on peut supposer ce terme constant (on note alors h_0 l'altitude initiale du satellite) :

$$\Delta h \overset{1}{=} -2\alpha \underbrace{\Delta t}_{=T} \sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0} \Rightarrow \alpha = -\frac{\Delta h}{2T\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha \overset{1}{=} -\frac{\Delta h}{4\pi(R_T+h_0)^2} \approx 1{,}53\times 10^{-15}\ \mathrm{m^{-1}}}$$

En dix années, on a effectué $n = \frac{\Delta T}{T} = 10\frac{T_T}{T} \approx 52000$ orbites donc au premier ordre (en supposant Δh identique à chaque période), on a $\underline{\Delta h \approx -52\,\mathrm{km}}$. 1

Une résolution exacte de l'équation (à l'aide de la méthode de séparation des variables 1) :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{R_T+h}} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\mathrm{d}t \Leftrightarrow 2(\sqrt{R_T+h_1} - \sqrt{R_T+h_0}) \overset{1}{=} -2\alpha\sqrt{GM_T}\Delta T$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = h_1 - h_0 \overset{1}{=} \left(\sqrt{R_T+h_0} - \alpha\sqrt{GM_T}\Delta T\right)^2 - R_T - h_0 \approx -51{,}3\,\mathrm{km}} \; 1$$

Ce résultat est très proche de celui obtenu à l'aide de l'approximation. Il peut sembler surprenant qu'une force qui s'oppose au mouvement se concrétise par une augmentation de vitesse : le freinage d'une voiture (force aérodynamique par exemple) réduit sa vitesse. Mais c'est sans compter sur l'énergie potentielle : à une orbite plus basse correspond une vitesse plus élevée. 1

/7 [9] L'énoncé nous donne que $\Delta h_{\text{haut}} = \frac{1}{2}\Delta h_{\text{bas}}$. 1 De plus, on observe que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \propto \alpha(h)$, 1 car les autres facteurs varient peu (question ??). On en déduit ainsi que :

$$\frac{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(h=h_{\text{haut}})}{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(h=h_{\text{bas}})} \overset{1}{\approx} \frac{\frac{\Delta h_{\text{haut}}}{T_T}}{\frac{\Delta h_{\text{bas}}}{T_T'}} \Leftrightarrow \left(\frac{h_{\text{bas}}}{h_{\text{haut}}}\right)^{\beta} = \frac{1/T_T}{2/T_T'} \Leftrightarrow \boxed{\beta = \frac{\log(T_T'/(2T_T))}{\log(h_{bas}/h_{haut})}} \; 1$$

avec T_T' la période de révolution à 400 km d'altitude telle que, d'après ??, $T_T'/T = \frac{R_T+h_{\text{bas}}}{R_T+h_{\text{haut}}}^{3/2} \approx 0{,}917$. 1 On en déduit au final $\underline{\beta \approx 1{,}13}$ 1 puis $\gamma = h_{\text{haut}}^{\beta} \times \alpha(h_{\text{haut}}) \approx 7{,}2\times 10^{-9}$ SI. 1 En pratique, la valeur de γ est très sensible aux différents arrondis réalisés pour obtenir β, et seul son ordre de grandeur à du sens.

II/C Stabilisation de l'orientation d'un satellite par gradient de gravité

/2 [10] On a $\overrightarrow{\mathrm{OM_1}} \overset{1}{=} \overrightarrow{\mathrm{OS}} + \overrightarrow{\mathrm{SM_1}} \Leftrightarrow r_1 = \sqrt{r_0^2 + \ell^2 + 2r_0\ell\cos(\theta)}$. De même, on trouve $r_2 \overset{1}{=} \sqrt{r_0^2+\ell^2-2r_0\ell\cos(\theta)}$

/5 [11] On commence par s'intéresser aux termes d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,i} = -k/r_i$ avec $k = GM_T m$. On obtient ainsi en posant $\varepsilon = \ell/r_0$:

$$\mathcal{E}_{p,12} = -\frac{k}{r_{12}} = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2+\ell^2 \pm 2r_0\ell\cos(\theta)}} \overset{1}{=} -\frac{k}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\cos(\theta)}}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,12} \overset{1}{\underset{1}{=}} -\frac{k}{r_0}\left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\cos(\theta)) + \frac{3}{8}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\cos(\theta))^2\right) + o(\varepsilon^2)$$

On peut maintenant ajouter les deux termes d'énergies potentielles (avec encore un terme quadratique à développer puis simplifier à droite du terme d'énergie potentielle) :

$$\mathcal{E}_{p,1} + \mathcal{E}_{p,2} \overset{①}{=} -\frac{k}{r_0}\left(2 - \varepsilon^2 + 3\varepsilon^2\cos^2(\theta)\right) + o(\varepsilon^2)$$

On combine ensuite ce terme avec l'expression de l'énergie cinétique donnée dans l'énoncé :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m \overset{①}{=} -\frac{GM_TM_S}{r_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ell}{r_0}^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)\right) + \frac{1}{2}M_S(\ell\dot{\theta})^2}$$

car $m = M_S/2$, d'où le résultat !

/8 $\boxed{12}$ On applique le TPM dans le référentiel géocentrique au satellite qui n'est soumis à aucune force non conservative :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{①}{=} 0 \Leftrightarrow -\frac{GM_T}{r_0}\frac{\ell}{r_0}^2 3\cos(\theta)(-\sin(\theta))\dot{\theta} + \ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \overset{①}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3GM_T}{2r_0^3}\sin(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + 3\Omega^2\frac{\sin(2\theta)}{2} \overset{①}{=} 0}$$

On est à l'équilibre lorsque $\ddot{\theta} = 0$ soit ici pour $\theta = p\frac{\pi}{2}$, $p \in \mathbb{N}$. ①

- ① ◇ Pour $\theta = 0 + x$ avec $x \ll 1$, on a comme équation du mouvement $\ddot{x} + 3\Omega^2 x = 0$ qui est l'équation de l'oscillateur harmonique donc la position d'équilibre est stable et la pulsation des petites oscillations vaut $\omega_0 = \Omega\sqrt{3}$
- ① ◇ Pour $\theta = \pi/2 + x$, on a maintenant $\ddot{x} - \omega_0^2 x$. Cette position d'équilibre n'est pas stable.
- ① ◇ Pour $\theta = \pi + x$, on a $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on retrouve la même équation que pour la première position d'équilibre. Cette position d'équilibre est donc aussi stable et de pulsation ω_0
- ① ◇ Pour $\theta = 3\pi/2 + x$, on obtient au final $\ddot{x} - \omega_0^2 x$: équilibre instable.

Ainsi, seules les positions verticale (à l'endroit ou à l'envers) sont stables. ① En cas de léger décalage, le satellite va donc osciller autour de la position d'équilibre verticale et donc toujours présenter le même côté vers la Terre. ①