

Approche énergétique du mouvement

Sommaire

I Notions énergétiques	4
I/A Énergie	4
I/B Puissance	4
II Énergie cinétique et travail d'une force constante	4
II/A Énergie cinétique	4
II/B Travail d'une force	5
II/C Exemples de travaux	5
III Puissance et travail élémentaire	7
III/A Travail élémentaire	7
III/B Puissance	8
III/C Théorème de la puissance cinétique	9
III/D Version intégrale : théorème de l'énergie cinétique	10
IV Énergie potentielle	12
IV/A Forces conservatives et non-conservatives	12
IV/B Travail d'une force conservative	12
IV/C Gradient	13
IV/D Lien entre énergie potentielle et force conservative	14
V Énergie mécanique	15
V/A Définition	15
V/B Théorème de l'énergie mécanique	15
V/C Théorème de la puissance mécanique	16
VI Énergie potentielle et équilibres	17
VI/A Notion d'équilibre	17
VI/B Équilibres stables et instables	18
VI/C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable	19
VII Énergie potentielle et trajectoire	20
VII/A Détermination qualitative d'une trajectoire	20
VII/B Cas du pendule simple	21

✂ Capacités exigibles

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"><input type="checkbox"/> Puissance et travail d'une force dans un référentiel.<input type="checkbox"/> Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.<input type="checkbox"/> Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.<input type="checkbox"/> Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.<input type="checkbox"/> Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.<input type="checkbox"/> Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.<input type="checkbox"/> Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie. | <ul style="list-style-type: none"><input type="checkbox"/> Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.<input type="checkbox"/> Dédire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.<input type="checkbox"/> Distinguer force conservative et force non conservative, reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique.<input type="checkbox"/> Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.<input type="checkbox"/> Dédire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions. |
|---|---|

✓ L'essentiel

📖 Définitions

<input type="checkbox"/> M4.1 : Énergie	4
<input type="checkbox"/> M4.2 : Puissance en terme d'énergie . .	4
<input type="checkbox"/> M4.3 : Énergie cinétique	4
<input type="checkbox"/> M4.4 : Travail d'une force constante . .	5
<input type="checkbox"/> M4.5 : Travail élémentaire	7
<input type="checkbox"/> M4.6 : Puissances d'une force	8
<input type="checkbox"/> M4.7 : Forces conservatives ou non . .	12
<input type="checkbox"/> M4.8 : Travail d'une force conservative	12
<input type="checkbox"/> M4.9 : Énergie potentielle de pesanteur	13
<input type="checkbox"/> M4.10 : Énergie potentielle élastique . .	13
<input type="checkbox"/> M4.11 : Gradient (cartésien)	13
<input type="checkbox"/> M4.12 : Opérateur différentiel d	14
<input type="checkbox"/> M4.13 : Énergie mécanique	15
<input type="checkbox"/> M4.14 : Point à l'équilibre	17
<input type="checkbox"/> M4.15 : Équilibres stables et instables .	18

🔍 Propriétés

<input type="checkbox"/> M4.1 : Conservation de l'énergie	4
<input type="checkbox"/> M4.2 : Travail du poids	7
<input type="checkbox"/> M4.3 : Travail total et infinitésimal . .	10
<input type="checkbox"/> M4.4 : Force conservative et énergie po- tentielle	14
<input type="checkbox"/> M4.5 : Équilibre et énergie potentielle .	18
<input type="checkbox"/> M4.6 : Stabilité des positions d'équilibre	19

📋 Démonstrations

<input type="checkbox"/> M4.1 : Théorème de la puissance cinétique	9
<input type="checkbox"/> M4.2 : Théorème de l'énergie cinétique	11
<input type="checkbox"/> M4.3 : Force conservative et énergie po- tentielle	14
<input type="checkbox"/> M4.4 : Théorème de l'énergie mécanique	15
<input type="checkbox"/> M4.5 : Théorème de la puissance méca- nique	17

🔧 Applications

<input type="checkbox"/> M4.1 : Travail des frottements solides .	6
<input type="checkbox"/> M4.2 : Travail du poids	6
<input type="checkbox"/> M4.3 : Travail des frottements fluides .	7
<input type="checkbox"/> M4.4 : Puissance du poids en pente . .	8
<input type="checkbox"/> M4.5 : Conséquence énergétique des frot- tements	9
<input type="checkbox"/> M4.6 : Pendule <i>via</i> TPC	9
<input type="checkbox"/> M4.7 : Vitesse maximale en skis	11
<input type="checkbox"/> M4.8 : Calcul de dérivées partielles . .	14
<input type="checkbox"/> M4.9 : TEM appliqué au ski	16
<input type="checkbox"/> M4.10 : Équilibre d'un ressort par énergie potentielle	19

📌 Remarques

<input type="checkbox"/> M4.1 : Étude mouvement équilibre instable	20
--	----

🔗 Exemples

<input type="checkbox"/> M4.1 : Exemples de forces conservatives ou non	12
<input type="checkbox"/> M4.2 : $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,el}$ par le travail	13
<input type="checkbox"/> M4.3 : $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,el}$ par le gradient . . .	14

🔧 Outils

<input type="checkbox"/> M4.1 : Calculer un travail	5
<input type="checkbox"/> M4.2 : Quand appliquer le TPC ?	10
<input type="checkbox"/> M4.3 : TEC ou PFD ?	11
<input type="checkbox"/> M4.4 : Système conservatif et TEM . .	16

⚠ Erreurs communes

<input type="checkbox"/> M4.1 : Puissance d'une force	4
<input type="checkbox"/> M4.2 : Notations δ vs. d	8
<input type="checkbox"/> M4.3 : Gradient et systèmes de coordon- nées	14

I Notions énergétiques

I/A Énergie

L'énergie est un concept physique très puissant et présent dans tout les domaines de la physique mais qu'il est difficile de définir simplement. En voici une première définition qualitative :

♥ Définition M4.1 : Énergie

L'énergie d'un système est sa capacité à agir sur lui-même ou d'autres systèmes.

Unité : le **Joule** (J)

Ainsi, le mouvement d'un corps, les échanges de chaleur, les courants électriques et tous les phénomènes physiques résultent d'échanges d'énergie. Elle respecte une propriété principale, fondamentale de l'approche du monde qui nous entoure :

♥ Propriété M4.1 : Conservation de l'énergie

L'énergie est une grandeur conservative. Elle ne peut être créée ou détruite. Elle ne peut que changer de forme et/ou passer d'un système à un autre.

Ces notions seront retravaillées en thermodynamique.

I/B Puissance

Une énergie totale peut varier différemment selon les conditions du système, et notamment varier plus ou moins vite. Cette variation est une information caractéristique de l'évolution d'un système : une voiture qui freine pour diminuer son énergie cinétique peut le faire lentement ou rapidement et donnerons des ressentis physiques très différents. On définit pour ça la puissance d'un système :

♥ Définition M4.2 : Puissance en terme d'énergie

La **puissance** \mathcal{P} d'un système traduit la **variation temporelle** de son énergie \mathcal{E} , et on a

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

L'unité d'une puissance est donc homogène à des $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$, et se compte couramment en **Watts** (W). On a

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$$

♥ Attention M4.1 : Puissance d'une force

Pratique pour retrouver son unité, cette expression est cependant peu utilisée ; en effet, lors de l'étude mécanique d'un corps, on connaît moins facilement son énergie que sa vitesse ou les forces qui s'y appliquent. On verra la Définition 4.6 qui est plus utile.

II Énergie cinétique et travail d'une force constante

II/A Énergie cinétique

♥ Définition M4.3 : Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point M de masse m et de vitesse $v_{M/\mathcal{R}}(t)$ est :

$$\mathcal{E}_{c,M\mathcal{R}} = \frac{1}{2} m v_{M/\mathcal{R}}^2(t)$$

L'unité d'une énergie est en **joules** (J), et dépend du référentiel.

II/B Travail d'une force

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

- ◇ Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.
- ◇ Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.
- ◇ Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.
- ◇ Lorsqu'un objet freine sur un support horizontal, la réaction normale ne cause pas la variation de son énergie cinétique (c'est la réaction tangentielle qui le freine).

♥ Interprétation M4.1 : Travail d'une force

Le travail est une grandeur physique construite pour rendre compte de l'effet d'une force sur son énergie cinétique.

- ◇ En l'absence de déplacement, le travail doit être nul.
- ◇ Si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail doit être nul.
- ◇ Si la force est dans le sens du déplacement, le travail doit être positif et maximal.
- ◇ Si la force est dans le sens opposé au déplacement, le travail doit être négatif (et minimale).

♥ Définition M4.4 : Travail d'une force constante

Le travail W_{AB} d'une force **constante** \vec{F} sur un chemin \overrightarrow{AB} est

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB}$$

où « \cdot » désigne le produit scalaire entre deux vecteurs.

Unité

Un **travail** est homogène à une **énergie**, donc s'exprime en **joules**.

♥ Important M4.1 : Vocabulaire et conséquence du travail

- ◇ Si $W_{AB} > 0$, on dit que le travail est **moteur** ; si $W_{AB} < 0$ il est **résistant**.
- ◇ $W_{AB} = 0 \Rightarrow$ soit $\vec{F} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{AB} = \vec{0}$, soit $\overrightarrow{AB} \perp \vec{F}$.

II/C Exemples de travaux

♥ Outils M4.1 : Calculer un travail

On peut calculer un travail avec deux formes mathématiques équivalentes :

- ◇ En utilisant une base de projection, *par exemple* cartésienne, on décompose la force et le déplacement :

$$\vec{F} = F_x \vec{u}_x + F_y \vec{u}_y + F_z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{AB} = x \vec{u}_x + y \vec{u}_y + z \vec{u}_z = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

On a alors

$$\vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = xF_x + yF_y + zF_z = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \times \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

◇ En utilisant une autre définition du produit scalaire :

$$\vec{F} \cdot \vec{AB} = \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \cos \alpha$$

avec α l'angle entre les vecteurs.

♥ Application M4.1 : Travail des frottements solides

On a vu en TD qu'un objet, de vitesse initiale $v_0 \vec{u}_x$, soumis à une force de frottements solides sur un support horizontal subissait, lors de son mouvement avec glissement,

$$\vec{T} = -fmg\vec{u}_x$$

et parcourait pendant la phase de freinage la distance

$$D = \frac{v_0^2}{2fg}$$

- 1 Calculer le travail de la force de frottements sur cette distance. Est-il moteur ou résistant ?
- 2 Que vaut $\mathcal{E}_{c,0}$ l'énergie cinétique initiale ? $\mathcal{E}_{c,\infty}$ est l'énergie cinétique finale ? Que peut-on en conclure ?

1

$$\begin{aligned} W_{AB}(\vec{F}) &= \vec{F} \cdot \vec{AB} \\ \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}) &= \|\vec{F}\| \times \|\vec{AB}\| \times \cos(\pi) \\ \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}) &= fmg \times \frac{v_0^2}{2fg} \times (-1) \\ \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}) &= -\frac{1}{2}mv_0^2 \end{aligned}$$

Le travail étant négatif, on dit qu'il est (et que la force est) **résistant(e)**.

2

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{c,0} &= \frac{1}{2}mv_0^2 \\ \mathcal{E}_{c,\infty} &= 0 \\ \Rightarrow W_{AB} &= \Delta_{AB}\mathcal{E}_c \end{aligned}$$

On observe que l'énergie initiale du système, son énergie cinétique, a été dissipée par la force de frottements et est quantifiée par le travail de cette force sur le chemin suivi.

♥ Application M4.2 : Travail du poids

Calculer le travail du poids lors d'un déplacement avec changement d'altitude.

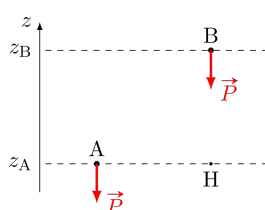


FIGURE M4.1 –
Schéma

$$W_{AB}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{AB}$$

En projection cartésienne :

$$\begin{aligned} \vec{P} &= -mg\vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{AB} = (x_B - x_A)\vec{u}_x + (y_B - y_A)\vec{u}_y + (z_B - z_A)\vec{u}_z \\ W_{AB}(\vec{P}) &= -mg(z_B - z_A) \end{aligned}$$

♥ Propriété M4.2 : Travail du poids

Le travail du poids entre un point A et un point B est :

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$$

♥ Application M4.3 : Travail des frottements fluides

On considère une voiture allant d'un point A à un point B, éloignés de 100 km, avec une vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v \vec{v}$$

Déterminer son travail, et faire l'application numérique pour $v = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ puis $80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$. On donne $S = 3,07 \text{ m}^2$, $c_x = 0,33$, $\rho = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

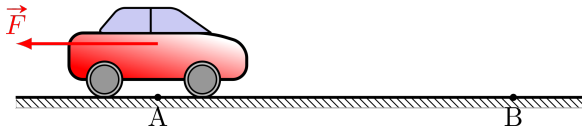


FIGURE M4.2 – Schéma

$$W_{AB}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{AB} = -F \times AB$$

Le travail est négatif, la force est résistante.

$$\diamond v = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \Rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = -1,27 \times 10^7 \text{ J, soit } \approx 0,4 \text{ L d'essence ;}$$

$$\diamond v = 80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1} \Rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = -3,25 \times 10^7 \text{ J, soit } \approx 1 \text{ L d'essence.}$$

Ainsi, dans certains cas le travail ne dépend pas que du point de départ et d'arrivée, mais peut dépendre de la **façon** d'y aller (vitesse, chemin suivi...). En réalité,

♥ Important M4.2 : Travail et chemin

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

III Puissance et travail élémentaire

III/A Travail élémentaire

♥ Définition M4.5 : Travail élémentaire

Le travail élémentaire δW d'une force \vec{F} sur un déplacement infinitésimal $d\overrightarrow{OM}$ est :

$$\delta W = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM}$$

♥ Attention M4.2 : Notations δ vs. d

$\delta \Rightarrow$ grandeur totale dépend *a priori* du chemin et de la vitesse. $d \Rightarrow$ grandeur dépend uniquement du point de départ et du point d'arrivée ; or W défini sur une **distance**, pas ~~en un point~~ :

$$\int_A^B d\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) \quad \text{et} \quad \int_A^B d\vec{OM} = \vec{OB} - \vec{OA} = \vec{AB}$$

mais il est absurde d'écrire

$$\int_A^B \delta W = W(B) - W(A)$$

III/B Puissance

Si la puissance est en effet la dérivée d'une énergie par rapport au temps, on peut l'exprimer comme étant la rapidité avec laquelle un travail (homogène à une énergie) peut être effectué.

♥ Définition M4.6 : Puissances d'une force

Moyenne

$$\mathcal{P}_m = \frac{W_{AB}(\vec{F})}{\Delta t}$$

Instantanée

$$\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) = \frac{\delta W(\vec{F})}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \vec{v}_{/\mathcal{R}}$$

Unité

Les **watts** (W).
Elle dépend du référentiel.

♥ Application M4.4 : Puissance du poids en pente

Exprimer la puissance du poids lors d'une descente à vélo d'une pente d'angle α .

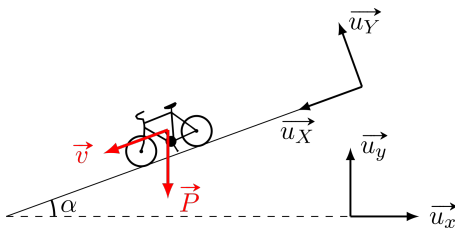


FIGURE M4.3 – Schéma

Dans la base (\vec{u}_X, \vec{u}_Y) :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\vec{u}_Y + \sin\alpha\vec{u}_X)$$

et $\vec{v} = v\vec{u}_X$

Ainsi, dans le référentiel de la route :

$$\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \vec{v} = mgv \sin\alpha > 0 \Rightarrow \text{poids moteur}$$

Dans le cas de la montée, on inverse le sens de \vec{v} , et le poids devient résistant.

♥ Implication M4.1 : Puissance d'une force perpendiculaire

Par conséquence du produit scalaire, **toute force perpendiculaire au mouvement a un travail nul et une puissance nulle.**

III/C Théorème de la puissance cinétique

♥ Démonstration M4.1 : Théorème de la puissance cinétique

Deux méthodes possibles pour la démonstration :

Bilan de puissance

$$\begin{aligned}
 m\vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i \\
 \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v} \\
 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i) \\
 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_{M/R}}{dt} &= \sum_i \mathcal{P}_{/R}(\vec{F}_i) \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

Définition de \mathcal{E}_c

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} &= \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \vec{v} \cdot \vec{v} \right) \\
 &= \frac{1}{2} m \left(\vec{v} \cdot \frac{d\vec{v}}{dt} + \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \right) \\
 &= m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} \\
 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} &= \left(\sum_i \vec{F}_i \right) \cdot \vec{v} \quad \blacksquare
 \end{aligned}$$

♥ Théorème M4.1 : de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la variation instantanée de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la somme des puissances de forces qui s'exercent sur ce point :

$$\frac{d\mathcal{E}_{M/R}}{dt} = \sum_i \mathcal{P}_{/R}(\vec{F}_i)$$

♥ Application M4.5 : Conséquence énergétique des frottements

Justifier que les frottements conduisent à une baisse de l'énergie cinétique.

$$\vec{F}_f \cdot \vec{v} < 0 \quad \Rightarrow \quad \mathcal{P}_{/R}(\vec{F}_f) < 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} < 0$$

♥ Application M4.6 : Pendule *via* TPC

Établir l'équation différentielle du pendule.

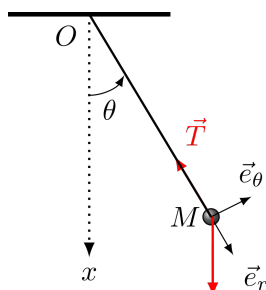


FIGURE
Pendule

M4.4

Le mouvement étant circulaire, $\vec{v} = \ell \dot{\theta} \vec{e}_\theta$ et on a

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m \ell^2 \dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta}$$

De plus, $\vec{v} \perp \vec{T}$ et l'angle entre \vec{v} et \vec{P} est $\pi/2 + \theta$:

$$\vec{T} \cdot \vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{P} \cdot \vec{v} = mg \times \ell \dot{\theta} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -mg\ell \dot{\theta} \sin \theta$$

$$\text{TPC} \Rightarrow m \ell^2 \dot{\theta} \ddot{\theta} = 0 - \frac{mg\ell \dot{\theta} \sin \theta}{m \ell \dot{\theta}} \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin \theta = 0$$

♥ Outils M4.2 : Quand appliquer le TPC ?

- ◇ Si le mouvement est **selon une seule coordonnée** (x, y ou z en cartésiennes, θ en coordonnées cylindriques), il sera pertinent d'utiliser le TPC.
- ◇ Sinon (chute libre avec angle par exemple), on revient au PFD qui contient toute l'information.

III/D Version intégrale : théorème de l'énergie cinétique

♥ Propriété M4.3 : Travail total et infinitésimal

Le travail d'une force sur un chemin AB se déduit du travail infinitésimal par :

$$W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W$$

III/D) 1 Exemples

Travail du poids

On a $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$ et $d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$

D'où $\delta W = -mg dz \Rightarrow W_{AB} = \int_A^B \delta W = -mg \int_A^B dz$

et ainsi, on retrouve le résultat précédent :

$$W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)$$

Travail de la force de HOOKE

On a $\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$ et $d\vec{OM} = dx\vec{u}_x + dy\vec{u}_y + dz\vec{u}_z$

D'où $\delta W = -k(x - \ell_0) dx$

$$\Rightarrow W = \int_A^B \delta W = -k \int_A^B (x - \ell_0) dx = -k \left[\frac{1}{2}(x - \ell_0)^2 \right]_A^B$$

$$\Leftrightarrow W = -\frac{1}{2}k((x_B - \ell_0)^2 - (x_A - \ell_0)^2)$$

III/D) 2 Théorème de l'énergie cinétique

Si la puissance donne la variation instantanée de l'énergie cinétique, alors sa variation totale sur un interval quelconque s'obtient par **intégration** :

♥ Démonstration M4.2 : Théorème de l'énergie cinétique

$$\begin{aligned}
 \frac{d\mathcal{E}_{cM/\mathcal{R}}}{dt} &= \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i) \\
 \Leftrightarrow d\mathcal{E}_c &= \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v} dt = \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{OM} \\
 \Rightarrow \int_A^B d\mathcal{E}_c &= \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot d\vec{OM} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot d\vec{OM} \\
 \Leftrightarrow \Delta_{AB}\mathcal{E}_c &= \sum_i \int_A^B \delta W_i = \boxed{\Delta_{AB}\mathcal{E}_c = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i)}
 \end{aligned}$$

Séparation des variables
 $\int(\cdot)$
 et $\int \sum = \sum \int$
 Infinitésimal à total

♥ Théorème M4.2 : de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , un point matériel M de masse m , d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$ et subissant les forces extérieures \vec{F}_i sur la distance AB vérifie

$$\Delta_{AB}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \mathcal{E}(B) - \mathcal{E}(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_i)$$

♥ Application M4.7 : Vitesse maximale en skis

Déterminer la vitesse d'une skieuse en bas d'une piste de $h = 5$ m de dénivelé partant avec une vitesse nulle, si on néglige les frottements.

- ◇ $\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$: l'énergie cinétique initiale est nulle en supposant une vitesse initiale nulle ; en bas de la piste, on a la vitesse v , soit

$$\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$

- ◇ $W_{AB}(\vec{R}_N) = 0$: la réaction de la piste est perpendiculaire au mouvement, donc son travail est nul.

- ◇ Pour le poids, on a $W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B) = mgh$

Ainsi, avec le TEC entre le haut et le base de la piste, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow \boxed{v = \sqrt{2gh} = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

♥ Outils M4.3 : TEC ou PFD ?

- ◇ Si l'on veut connaître seulement une vitesse/une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.
- ◇ Si on cherche les équations horaires/un temps/une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

Dans tous les cas, ça donne le même résultat !

IV Énergie potentielle

IV/A Forces conservatives et non-conservatives

Comme on l'a vu, le travail **peut** dépendre du chemin suivi. Dans le cas du poids ou de la force de rappel, nous voyons que le travail ne dépend cependant que des coordonnées des points de départ et d'arrivée ; ce sont des forces particulières à cet égard, d'où la définition :

♥ Définition M4.7 : Forces conservatives ou non

Une force est dite **conservative** si son travail de A à B ne dépend pas du chemin suivi ou de la vitesse, mais uniquement des **positions A et B**. Elle est non-conservative dans le cas contraire.

♥ Exemple M4.1 : Exemples de forces conservatives ou non

Forces conservatives :

- ◇ Le poids ;
- ◇ La force de rappel d'un ressort ;
- ◇ La force gravitationnelle ;
- ◇ La force électrostatique.

Forces non-conservatives :

- ◇ Frottement fluide ;
- ◇ Frottement solide...

Tous les frottements sont non-conservatifs, puisqu'en faisant un détour pour aller de A à B, les frottements s'exerceront plus longtemps et donc la valeur du travail effectué sera plus élevé.

IV/B Travail d'une force conservative

Dans le cas d'une force conservative, on remarque qu'on peut donc légitimement l'écrire avec une forme différentielle d plutôt qu'avec δ , définissant l'**énergie potentielle** d'une force :

♥ Définition M4.8 : Travail d'une force conservative

À une force **conservative** \vec{F}_{cons} s'associe une énergie **potentielle** \mathcal{E}_p telle que :

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F}_{\text{cons}}) &= -d\mathcal{E}_p \\ \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}_{\text{cons}}) &= -\Delta_{AB}\mathcal{E}_p = -(\mathcal{E}_p(B) - \mathcal{E}_p(A)) \end{aligned}$$

♥ Exemple M4.2 : $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,el}$ par le travail

◇ **Énergie potentielle de pesanteur** : on a démontré que

$$\delta W(\vec{P}) = -mg dz \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$

♥ Définition M4.9 : Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur s'exprime

$$\mathcal{E}_{p,p} = mg(z - z_{\text{ref}})$$

avec z_{ref} l'altitude de référence

◇ **Énergie potentielle élastique** : on a démontré que

$$\delta W(\vec{F}_r) = -k(x - \ell_0) dx \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}_r) = -\frac{1}{2}k((x_B - \ell_0)^2 - (x_A - \ell_0)^2)$$

♥ Définition M4.10 : Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique d'un ressort s'exprime

$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2$$

avec ℓ la longueur du ressort et ℓ_0 sa longueur à vide.

IV/C Gradient

Pour exprimer une force conservative \vec{F}_{cons} associée à une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(M)$ connue, on utilise l'opérateur **gradient** :

♥ Définition M4.11 : Gradient (cartésien)

L'opérateur **gradient**, noté $\overrightarrow{\text{grad}}$ ou parfois $\vec{\nabla}^1$, appliqué à une fonction **scalaire** $f(x,y,z)$, donne :

$$\overrightarrow{\text{grad}} f = \frac{\partial f}{\partial x} \vec{u}_x + \frac{\partial f}{\partial y} \vec{u}_y + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \Leftrightarrow \left(\frac{\partial}{\partial x}, \frac{\partial}{\partial y}, \frac{\partial}{\partial z} \right) f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \frac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

avec $\frac{\partial}{\partial x}$ la **dérivée partielle** (∂ se lit « d rond ») de f par rapport à la variable x , les autres variables étant constantes.

Le vecteur gradient indique la direction de la **plus forte augmentation** et est perpendiculaire aux lignes de niveau (i.e. courbes telles que $f(x,y,z) = \text{cte}$).

1. notation interdite au concours, mais vous le verrez plus tard, très utile pour retenir les formules...

♥ Attention M4.3 : Gradient et systèmes de coordonnées

L'opérateur gradient dépend des coordonnées. Notamment, en coordonnées cylindriques, on a

$$\overrightarrow{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Les formules de gradient ne sont pas à connaître, et seront extensivement revues et justifiées en deuxième année.

♥ Application M4.8 : Calcul de dérivées partielles

Soit $f(x, y, z) = xy^2$. Déterminer les dérivées partielles de f .

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \quad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \quad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

IV/D Lien entre énergie potentielle et force conservative

Cet opérateur permet alors de définir la différentielle d'une fonction de manière univoque :

♥ Définition M4.12 : Opérateur différentiel d

La différentielle d'une fonction scalaire f est

$$df = \overrightarrow{\text{grad}} f \cdot d\vec{\text{OM}}$$

Et on obtient :

♥ Propriété M4.4 : Force conservative et énergie potentielle

Une force conservative \vec{F}_{cons} dérive d'une énergie potentielle \mathcal{E}_p selon la relation :

$$\vec{F}_{\text{cons}} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$$

avec \mathcal{E}_p définie donc à une constante près.

♥ Démonstration M4.3 : Force conservative et énergie potentielle

On a

$$\begin{aligned} \delta W(\vec{F}_{\text{cons}}) &= -d\mathcal{E}_p \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{cons}} \cdot d\vec{\text{OM}} &= \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p \cdot d\vec{\text{OM}} \\ \Leftrightarrow \vec{F}_{\text{cons}} &= -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p \end{aligned}$$

♥ Exemple M4.3 : $\mathcal{E}_{p,p}$ et $\mathcal{E}_{p,\text{el}}$ par le gradient

◇ Énergie potentielle de pesanteur : $\vec{P} = -mg\vec{u}_z$, soit

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial x} = 0 \quad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial z} = -mg$$

Ainsi, $\mathcal{E}_{p,p}$ ne dépend ni de x , ni de y , et peut s'écrire comme $mgz + \text{cte}$

◇ **Énergie potentielle élastique** : $\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$, soit

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\partial x} = -k(x - \ell_0) \quad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\partial y} = 0 \quad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\partial z} = 0$$

Ainsi, $\mathcal{E}_{p,\text{el}}$ ne dépend ni de y , ni de z , et peut s'écrire comme $\frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 + \text{cte}$

V Énergie mécanique

V/A Définition

♥ Démonstration M4.4 : Théorème de l'énergie mécanique

L'écriture du travail des forces conservatives comme la variation d'énergies potentielles permet d'écrire :

$$\begin{aligned} \text{TEC :} \quad & \Delta_{AB}\mathcal{E}_c = \sum_n W_{AB}(\vec{F}_n) \\ \Leftrightarrow & \Delta\mathcal{E}_c = \sum_j \underbrace{W_{AB}(\vec{F}_{\text{cons},j})}_{=-\Delta\mathcal{E}_{p,j}} + \sum_i W_{AB}(\vec{F}_{\text{NC},i}) \\ \Leftrightarrow & \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_{p,\text{tot}} = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_{\text{NC},i}) \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \vec{F}_n = \vec{F}_{\text{cons},j} + \vec{F}_{\text{NC},i} \\ \sum_j \Delta\mathcal{E}_{p,j} = \Delta\mathcal{E}_{p,\text{tot}} \end{array} \right\} \quad \blacksquare$$

avec $\vec{F}_{\text{NC},i}$ les forces non-conservatives. Ainsi :

♥ Définition M4.13 : Énergie mécanique

L'énergie mécanique \mathcal{E}_m d'un point matériel en mouvement dans un référentiel \mathcal{R} est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant sur ce point :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\text{tot}}$$

Les énergies potentielles étant définies à une constante près, l'énergie mécanique l'est également.

V/B Théorème de l'énergie mécanique

♥ Théorème M4.3 : de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen \mathcal{R} , la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux points de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

$$\Delta_{AB}\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m(B) - \mathcal{E}_m(A) = \sum_i W_{AB}(\vec{F}_{\text{NC},i})$$

Ce n'est qu'une reformulation du TEC, en séparant forces conservatives et non-conservatives, et en exprimant le travail des forces conservatives comme un énergie potentielle.

♥ Application M4.9 : TEM appliqué au ski

Exprimer l'énergie mécanique d'une skieuse en haut et en bas d'une piste de ski, et retrouver sa vitesse.

L'énergie mécanique en haut de la piste est

$$\mathcal{E}_m(A) = \frac{1}{2}mv_A^2 + mgz_A = 0 + mgh$$

Et en bas de la piste :

$$\mathcal{E}_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2 + mgz_B = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

Sans frottements, on a juste $W_{AB}(\vec{N}) = 0 = \Delta_{AB}\mathcal{E}_m$, donc

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \Rightarrow v = \sqrt{2gh}$$

♥ Outils M4.4 : Système conservatif et TEM

Ainsi, pour traiter un problème où l'énergie mécanique se conserve :

- 1) Calculer l'énergie mécanique à l'instant initial, puis à un instant quelconque en fonction de sa vitesse et/ou de sa position ;
- 2) Comme l'énergie mécanique se conserve, $\sum_i W_{AB}(\vec{F}_{NC,i}) = 0$, et on conclut donc en utilisant $\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(B)$.

V/C Théorème de la puissance mécanique

♥ Théorème M4.4 : de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{NC,i})$$

♥ Démonstration M4.5 : Théorème de la puissance mécanique

Différentes démonstrations sont ici aussi possibles, selon le point de départ. Par exemple avec un bilan de puissance :

$$\begin{aligned}
 \text{PFD : } m\vec{a} &= \sum_j \vec{F}_{\text{cons},j} + \sum_i \vec{F}_{\text{NC},i} \\
 \Leftrightarrow m \frac{d\vec{v}}{dt} \cdot \vec{v} &= \sum_j \vec{F}_{\text{cons},j} \cdot \vec{v} + \sum_i \vec{F}_{\text{NC},i} \cdot \vec{v} \\
 \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m v^2 \right) &= - \sum_j \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,j} \cdot \vec{v} + \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{NC},i}) \\
 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \sum_j \frac{\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,j} \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}}{dt} &= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{NC},i}) \\
 \Leftrightarrow \frac{d(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\text{tot}})}{dt} &= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\text{NC},i})
 \end{aligned}$$

PFD $\cdot \vec{v}$
 Définition et $\vec{F}_{\text{cons}} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p$
 $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2} m v^2$ et $\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{\text{OM}}}{dt}$
 $\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,j} \cdot d\overrightarrow{\text{OM}} = d\mathcal{E}_{p,j}$ ■

VI Énergie potentielle et équilibres

L'énergie potentielle permet de d'étudier les caractéristiques d'équilibre d'un système. Pour étudier cela, on suppose :

- ◇ Un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou de puissance nulle (**système conservatif**), en notant \mathcal{E}_p l'énergie potentielle totale et $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{\text{cons},i}$ la somme des forces conservatives.
- ◇ On considère un mouvement à **1 degré de liberté**, noté x (x peut être une longueur mais aussi un angle, dans le cas du pendule par exemple).

VI/A Notion d'équilibre

♥ Définition M4.14 : Point à l'équilibre

Un point matériel est à l'équilibre s'il est immobile dans le référentiel d'étude

Ainsi, d'après le PFD, cela se traduit par une somme des forces nulles :

$$\vec{F}(x = x_{\text{eq}}) = \vec{0}$$

Or, \vec{F} conservative donc $\vec{F} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p \Leftrightarrow \delta W = -d\mathcal{E}_p = \vec{F} \cdot d\overrightarrow{\text{OM}}$

- ◇ Si le degré de liberté x est une longueur, on aura $\delta W = F_x dx \Rightarrow F_x = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx}$;
- ◇ Si le degré de liberté x est un angle θ , on aura $\delta W = F_\theta r d\theta \Rightarrow F_\theta = -\frac{1}{r} \frac{d\mathcal{E}_p}{d\theta}$.

Ainsi, $F_x = 0 \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_p}{dx} = 0$ et

♥ Propriété M4.5 : Équilibre et énergie potentielle

Les points d'équilibre d'un système conservatif à un degré de liberté correspondent à un point stationnaire de l'énergie potentielle :

$$\left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_{eq}} = 0 \quad \text{où } (\cdot)_{x_0} \text{ signifie « } \cdot \text{ évalué en } x_0 \text{ »}$$

VI/B Équilibres stables et instables

♥ Définition M4.15 : Équilibres stables et instables

Soit un point matériel sur une position d'équilibre. En l'écartant un peu de cette position :

- ◇ s'il **revient** vers sa position d'équilibre, on dit que l'équilibre est **stable** ;
- ◇ s'il s'**écarte** définitivement de cette position, on dit qu'il est **instable**.

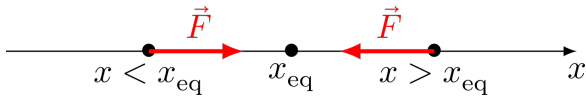


FIGURE M4.5 – Équilibre stable

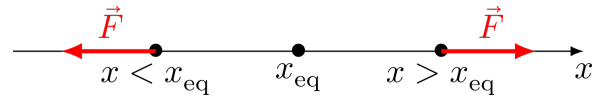


FIGURE M4.6 – Équilibre instable

Pour étudier ces situations mathématiquement, on peut développer l'expression de la somme \vec{F} au voisinage d'un point d'équilibre x_{eq} quelconque :

$$\begin{aligned} F(x) &= F(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \times \left(\frac{dF}{dx} \right)_{x_{eq}} \\ \Leftrightarrow F(x) &= - \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_{eq}} - (x - x_{eq}) \times \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} \\ \Leftrightarrow F(x) &= -(x - x_{eq}) \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} F = -\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \\ F(x_{eq}) = 0 = \left(\frac{d\mathcal{E}_p}{dx} \right)_{x_{eq}} \end{array} \right\}$$

- ◇ Si c'est un équilibre **stable**, la force doit **ramener** le point x vers sa position d'équilibre :

$$(x - x_{eq}) > 0 \Rightarrow F < 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} > 0$$

et si $(x - x_{eq}) < 0$, alors F doit être > 0 , mais la conclusion est la même.

- ◇ Si c'est un équilibre **instable**, la force doit l'**écarter** de la position d'équilibre :

$$(x - x_{eq}) > 0 \Rightarrow F > 0 \Leftrightarrow \left(\frac{d^2\mathcal{E}_p}{dx^2} \right)_{x_{eq}} < 0$$

et si $(x - x_{eq}) < 0$, alors F doit être < 0 , mais la conclusion est la même.

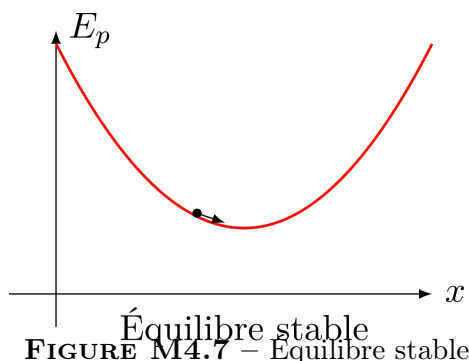
Le raisonnement se propage dans toutes les directions, on peut donc utiliser le cas général à trois dimensions :

♥ Propriété M4.6 : Stabilité des positions d'équilibre

Une position d'équilibre est :

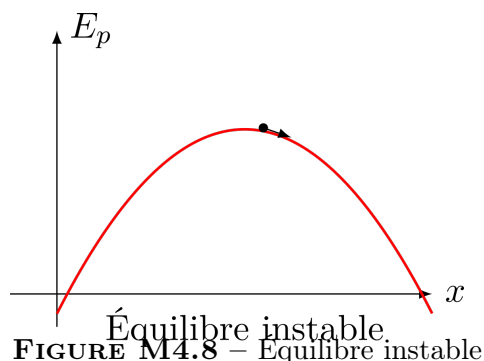
Stable si

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2} \right)_{x_{eq}} > 0$$



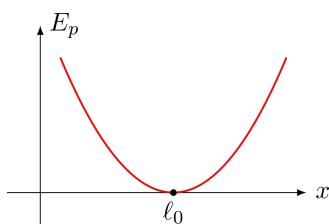
Instable si

$$\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2} \right)_{x_{eq}} < 0$$



♥ Application M4.10 : Équilibre d'un ressort par énergie potentielle

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Est-elle stable ou instable ?



L'énergie potentielle d'un ressort est

$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2 \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{p,el}}{dx} = k(x - \ell_0) \Rightarrow \frac{d^2\mathcal{E}_{p,el}}{dx^2} = k > 0$$

Ainsi, la position d'équilibre est en $x_{eq} = \ell_0$, et elle est stable.

VI/C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable

En faisant un développement limité de l'énergie potentielle d'un système autour d'une position d'équilibre stable, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_p(x) &= \mathcal{E}_p(x_{eq}) + (x - x_{eq}) \underbrace{\left(\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x} \right)_{x_{eq}}}_{=0} + \frac{(x - x_{eq})^2}{2} \underbrace{\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2} \right)_{x_{eq}}}_k \\ \Rightarrow \mathcal{E}_m &= \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x - x_{eq})^2 \end{aligned}$$

Et si l'énergie mécanique se conserve, on a $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$ donc

$$\frac{1}{2}m(2\ddot{x}) + \frac{1}{2}k2\dot{x}(x - x_{eq}) = 0 \Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique ! Le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ avec $k = \left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2} \right)_{x_{eq}}$.

Ce qui est phénoménal, c'est que **la seule supposition est que le système soit conservatif**. Ceci explique l'abondance des systèmes harmoniques dans la nature.

♥ Remarque M4.1 : Étude mouvement équilibre instable

Si l'équilibre est instable : $k = -\left(\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right)_{x_{eq}} > 0$

d'où par le même raisonnement, $\ddot{x} - \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0$

de solution $x - x_{eq} = Ae^{\omega_0 t} + B^{-\omega_0 t}$

Si $x(0) = x_0$ et $v(0) = 0$: $x - x_{eq} = x_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t)$

donc proche d'un point d'équilibre instable, le mobile **s'écarte exponentiellement** de cette position.

VII Énergie potentielle et trajectoire

VII/A Détermination qualitative d'une trajectoire

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile ainsi que l'aspect de la trajectoire en étudiant l'énergie potentielle. En effet,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \geq \mathcal{E}_p$$

puisque l'énergie cinétique est positive. Ainsi :

♥ Important M4.3 : Trajectoire et énergie potentielle

Dans un diagramme d'énergie potentielle selon x :

- ◇ Seules les régions où $\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m$ sont accessibles ;
- ◇ Lorsque $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m$, $\mathcal{E}_c = 0$ donc la vitesse est nulle ;
- ◇ Lorsque \mathcal{E}_p est minimale, \mathcal{E}_c est maximale donc la vitesse est maximale.

État lié

La particule reste dans une zone bornée de l'espace et le mobile effectue des aller-retours périodiques autour de la position d'équilibre.

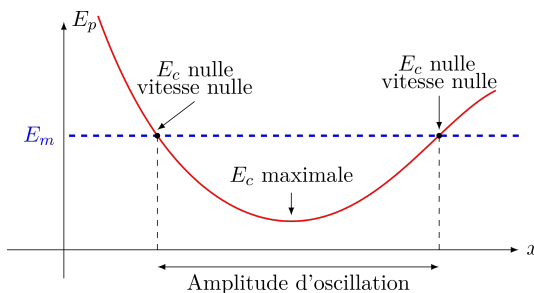


FIGURE M4.9 – État lié

État de diffusion

La particule aura tendance à partir vers $x = +\infty$ sans jamais revenir : son mouvement n'est pas borné dans l'espace.

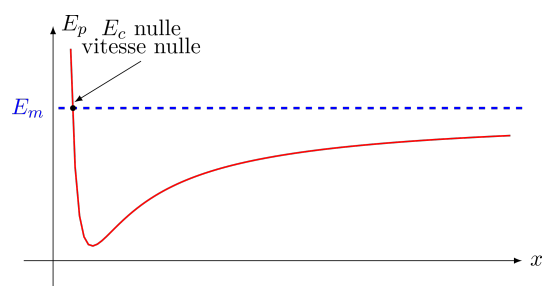


FIGURE M4.10 – État de diffusion

Certains corps célestes sont dans des états liés, comme la Terre et le Soleil, d'autres dans des états de diffusion : ils passent brièvement dans le système solaire avant de le quitter définitivement. C'est

le cas de la comète d'AREND-ROLAND, passée à proximité de la Terre en 1956 mais qui ne devrait jamais revenir.

VII/B Cas du pendule simple

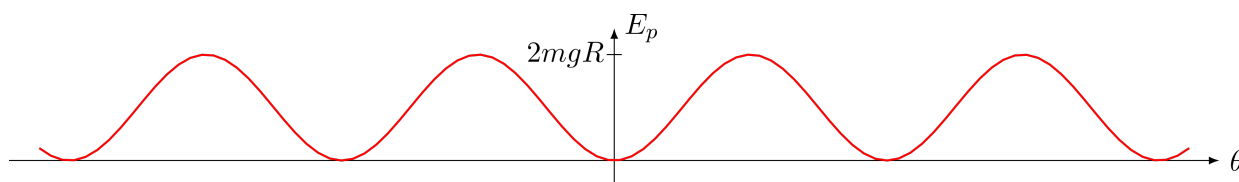
On reprend le pendule simple, que l'on suppose attaché avec une tige **rigide** (pour éviter les décrochages). On souhaiterait déterminer ses positions d'équilibre et étudier ses trajectoires possibles. Le système étant conservatif (\vec{P} conservatif et $\vec{T} \perp \vec{v}$), déterminons l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'angle.

L'altitude est :

$$z(\theta) = \ell(1 - \cos \theta)$$

donc l'énergie potentielle est

$$\mathcal{E}_p(\theta) = mgz(\theta) = mg\ell(1 - \cos \theta)$$



Les positions d'équilibre stables sont donc celles dans les « creux », soit $\theta = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, et les instables sur les « collines », soit $\theta = (2p+1)\pi$. On distingue alors deux cas :

◇ Cas $\mathcal{E}_m < 2mg\ell$

Si l'énergie mécanique totale est inférieure à l'énergie potentielle maximale, on se situera dans un état lié, « coincé » dans un creux. On observera donc une oscillation autour du point d'équilibre le plus proche, et on a vu que cette oscillation était sinusoïdale aux très petits angles ($|\theta| < 20^\circ$).

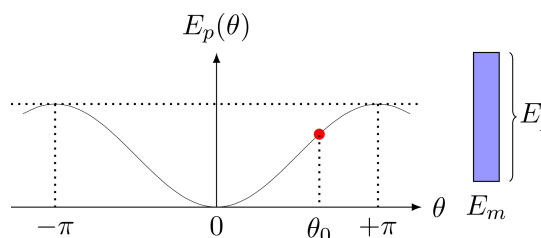


FIGURE M4.11 – État initial $\theta = \theta_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, et l'énergie cinétique est nulle.

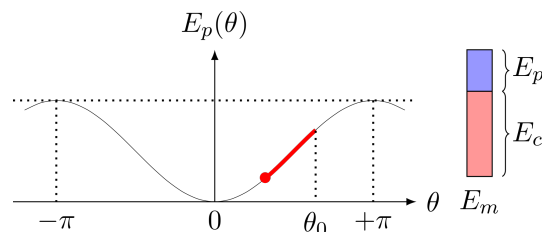


FIGURE M4.12 – La masse perd de l'énergie potentielle tout en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.

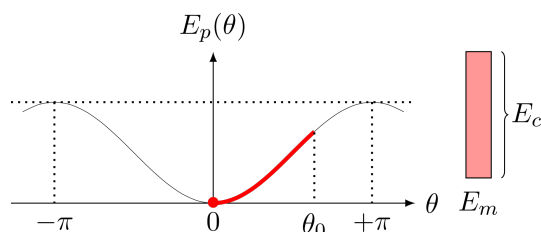


FIGURE M4.13 – La masse a perdu toute son énergie potentielle : son énergie cinétique et donc sa vitesse sont maximales.

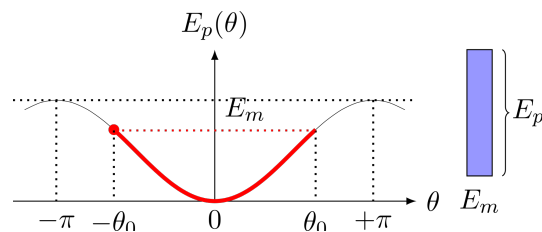


FIGURE M4.14 – La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximal $-\theta_0$, et repart dans l'autre sens.

◇ Cas $\mathcal{E}_m > 2mg\ell$

Si l'énergie mécanique totale est supérieure à l'énergie potentielle maximale, ça veut dire qu'il y a un excédent d'énergie cinétique. Ainsi, le pendule tourne autour de l'axe de rotation, et lorsqu'il arrive en $\theta = \pi$ l'énergie potentielle est maximale mais l'énergie cinétique n'est pas nulle : il continue

sa rotation, sans oscillation. La vitesse n'est cependant pas constante, elle est plus faible en haut qu'en bas du mouvement (par conservation de l'énergie mécanique).

Une animation est disponible en ligne².

2. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.php