Utiliser la calculatrice pour analyser des données

I Objectifs

- Utiliser les fonctions usuelles de sa calculatrice ;
- Comprendre l'intérêt et savoir mettre en place une régression linéaire pour vérifier un modèle.

II Fonctions de base

A Calcul numérique

1) Calculer les fractions suivantes à l'aide de la calculatrice (attention à vos parenthèses) :

$$\frac{7}{3\times 5}+4 \quad \text{et} \quad \frac{2}{9\times 8+5}$$
$$\frac{67}{15}=4.47 \quad \text{et} \quad \frac{2}{77}=2{,}6\times 10^{-2}$$

2) Le rayon de Bohr a_0 (caractéristique de la taille d'un atome) est donné par la formule :

$$a_0=\frac{4\pi\varepsilon_0\hbar^2}{m_e e^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e=1{,}60\times 10^{19}\,\mathrm{C} \\ \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}=9{,}00\times 10^{9}\,\mathrm{USI}=9{,}00\times 10^{9}\,\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}} \\ \hbar=5\times 10^{-34}\,\mathrm{J{\cdot}s} \\ m_e=9{,}11\times 10^{-31}\,\mathrm{kg} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{a_0=5{,}25\times 10^{-11}\,\mathrm{m}}$$

Déterminer l'unité de $1/(4\pi\varepsilon_0)$ en newtons, mètres et coulombs, ainsi que la valeur de a_0.

$$\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]=\left[\frac{\hbar^2}{a_0 m_e e^2}\right]=\frac{\mathrm{J^2{\cdot}s^2}}{\mathrm{m{\cdot}kg{\cdot}C^2}}=\frac{\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}s^2}}{\mathrm{m{\cdot}kg{\cdot}C^2}}=\frac{\mathrm{N^2{\cdot}m{\cdot}s^2{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}}{\mathrm{C^2{\cdot}N}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\left[\frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\right]=\mathrm{N{\cdot}m^2{\cdot}C^{-2}}}$$

B Utilisation des angles

Lorsque l'on travaille avec les fonctions trigonométriques (cos, sin, tan...), il faut être très vigilant-e à l'unité des angles utilisée par votre calculatrice.
Remarque : Dans la suite, on distinguera les degrés par ° et les radians par rad, mais ça ne sera pas à écrire dans la calculatrice !

Casio

Dans le mode `RUN`, on choisit entre degrés et radians en allant dans le mode `SET UP`.

TI

Dans le menu `MODE`, on choisit entre degrés et radians en allant sur la troisième ligne.

Numworks

Dans le menu `Paramètres`, on choisit entre degrés et radians en choisissant l'unité de l'angle.

1) Mettez-vous en radians. Vérifier alors que

$$\cos(\pi\,\mathrm{rad})=-1 \quad \text{et} \quad \cos(180°)\approx -0{,}5985$$

2) Mettez-vous en degrés. Vérifier alors que

$$\cos(\pi\,\mathrm{rad}) \approx 0{,}9985 \quad \text{et} \quad \cos(180°) = -1$$

3) Faire les applications numériques suivantes :

$$\tan(2\,\mathrm{rad}) \quad \text{et} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}\right) - \sin(10°)$$

$$\tan(2\,\mathrm{rad}) \approx -2{,}19 \quad \text{et} \quad \cos^2\left(\frac{\pi}{3}\,\mathrm{rad}\right) - \sin(10°) \approx 7{,}63 \times 10^{-2}$$

4) Calculer n tel que :

$$n = \frac{\sin\left(\frac{D_m + A}{2}\right)}{\sin\left(\frac{A}{2}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} D_m = 5{,}85° \\ A = \pi/3\mathrm{rad} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n = 1{,}09}$

C Résolution des équations d'ordre 2

Casio

Dans le mode `EQUA`, on sélectionne le type de l'équation à résoudre. Il y a :

- `SIML` (bouton `F1`) pour résoudre un système d'équations à plusieurs inconnues ;
- `POLY` (bouton `F2`) pour résoudre une équation polynômiale ;
- `SOLV` (bouton `F3`) pour résoudre une équation plus complexe.

Choisir ici le mode `POLY`. On peut ensuite choisir le degré de l'équation (2 ou 3). Dans notre cas, choisir 2. On est alors invité-e à rentrer les coefficients a, b et c de l'équation $ax^2 + bx + c = 0$. Une fois cela fait, presser `SOLV` (bouton `F1`). On obtient alors les deux solutions de l'équation.

TI

Aller dans `Apps`. Choisir `PlySmlt2` (bouton 4) puis `Poly Root Finder` (bouton 1). Choisir ensuite l'ordre 2 et presser `ENTER` et `NEXT`. L'équation s'affiche alors sous la forme $a2 * x^2 + a1 * x + a0 = 0$. Renseigner alors les coefficients $a2$, $a1$ et $a0$. Presser `SOLVE` pour obtenir les deux solutions de l'équation.

Numworks

Aller dans le menu `Équations`. Ajouter une équation, et choisir le modèle d'équation voulu. Compléter les coefficients. Choisir `résoudre l'équation`.

Donner les solutions des équations suivantes :

$$2x^2 + 3 = 0 \;; \qquad 3x^2 = 2x + 1 \;; \qquad x^2 + x + 1 = 0$$

$$x = \pm 1{,}22\mathrm{i} \;; \qquad x_1 = 1 \quad \text{et} \quad x_2 = 0{,}33 \;; \qquad x_\pm = -0{,}5 \pm 0{,}87\mathrm{i}$$

Pour résoudre une équation aux racines complexes :

Casio

Dans le menu polynômial `POLY`, degré ? → 2 puis `shift` → `setup` → `complex mode a+ib`.

TI

Dans le menu où l'on choisit l'ordre, sélectionner `a+ib`.

Numworks

Dans les paramètres, mettre la forme complexe en algébrique.

D Stockage et utilisation de valeurs

Lorsqu'une expression mathématique est lourde à taper, il peut devenir indispensable d'utiliser les caractères alphabétiques pour stocker des valeurs. Ainsi, la lecture des valeurs est claire, comme pour les A.N. écrites, la modification d'une d'entre elle également, et il en est de même pour l'expression en elle-même.

Casio

Depuis le menu `RUN`, entrer une valeur suivie d'une flèche → et d'une lettre, accessible par `ALPHA` puis une touche.

```
5,85xπ/180→D
π/3 →A
sin((D+A)/2)/sin(A/2)→n
```

III Régression linéaire

Note : Pour cette partie, s'aider de la fiche pratique « régression linéaire ».

A Exemple 1 : la loi d'Ohm

La tension est l'intensité est mesurée au travers d'une résistance de $R = 1\,\mathrm{k}\Omega$ d'après le constructeur.

I (en A)	0,010	0,020	0,030	0,040	0,050	0,060
U (en V)	10,1	20,0	29,8	40,2	50,0	60,1

1) Tracer le graphe de la tension en fonction de l'intensité sur votre calculatrice.
2) Réaliser la régression linéaire. Relever les valeurs des coefficients de régression a et b ainsi que le coefficient de corrélation linéaire r et le coefficient de détermination r^2.

$$a = 1001\,\Omega \quad \text{et} \quad b = -6{,}66 \times 10^{-3}\,\mathrm{V}$$
$$r = 0{,}999\,97 \quad \text{et} \quad r^2 = 0{,}999\,94$$

3) Les données suivent-elles bien la loi d'Ohm ? Vérifier la valeur de la résistance.

Les données relevées suivent bien la loi d'Ohm, étant donné l'aspect de la droite de régression.

4) Conclure quant à la valeur constructeur. Quel est l'écart relatif entre la valeur constructeur et la valeur expérimentale de R ? Commenter.

La valeur constructeur est précise. On trouve un écart relatif de :

$$\varepsilon_r = \frac{|R_{\text{const}} - R_{\text{reg}}|}{|R_{\text{const}}|} = \underline{0{,}1\%}$$

Ce qui est tout à fait satisfaisant.

B Exemple 2 : Cinétique chimique

III.B.1 Position du problème

Les relations que l'on étudie en science ne sont pas toujours linéaires. Pourtant, il est tout de même possible d'exploiter la méthode de régression linéaire pour s'assurer de la validité du modèle et déterminer des coefficients numériques inconnus. À titre d'exemple, on va étudier l'évolution de la concentration $c(t)$ d'une espèce chimique en solution lors d'une réaction chimique. La forme de cette évolution peut être de deux types :

Ordre 1	Ordre 2
$c(t) = c_0 \mathrm{e}^{-kt}$	$\dfrac{1}{c(t)} = \dfrac{1}{c_0} + kt$

Ces deux modèles sont non linéaires. Afin de vérifier si les données expérimentales valident (ou non) l'un de ces modèles à l'aide d'une régression linéaire, il convient de « linéariser » (rendre linéaire) les données.

1) Dans le cas d'une cinétique d'ordre 1, on remarque que

$$\ln(c(t)) = \ln(c_0) - kt$$

Ainsi, si ce modèle est vérifié alors le tracé de $\ln(c(t))$ en fonction de t doit aboutir à une droite de coefficient directeur $a = -k$ et d'ordonnée à l'origine $b = \ln(c_0)$.

2) Dans le cas d'une cinétique d'ordre 2, on remarque que, si ce modèle est vérifié, alors le tracé de $1/c(t)$ en fonction de t doit aboutir à une droite de coefficient directeur $a = k$ et d'ordonnée à l'origine $b = 1/c_0$.

Remarque

Il est possible d'effectuer directement des opérations sur les listes avec les calculatrices (voir la fiche pratique « régression linéaire ») pour avoir de l'aide.

III.B.2 Application

La concentration $c(t)$ d'une espèce chimique est mesurée dans la solution au cours du temps. On obtient les données suivantes :

t (en s)	20	40	60	80	100	120
c (en µmol$\cdot$L^{-1})	278	192	147	119	100	86

1) Réaliser les régressions linéaires et donner l'équation de la droite (coefficients a et b) ainsi que la valeur des coefficients de corrélation dans les cas suivants :

   a – c en fonction de t ;

   b – $\ln(c)$ en fonction de t ;

   c – $1/c$ en fonction de t.

   Avec quel modèle les résultats expérimentaux s'accordent-ils le mieux ? Conclure.

Résultats attendus :

Aide

1) $c = f(t)$: $c = -1{,}8.10^{-6}t + 0{,}0003$; $r^2 = 0{,}89$ et $r = -0{,}94$.
2) $\ln(c) = f(t)$: $\ln(c) = -0{,}0115t - 8{,}0597$; $r^2 = 0{,}97$ et $r = -0{,}98$.
3) $1/c = f(t)$: $1/c = 80{,}185t + 1993{,}6$; $r^2 = 0{,}999\,991$ et $r = -0{,}999\,995$.