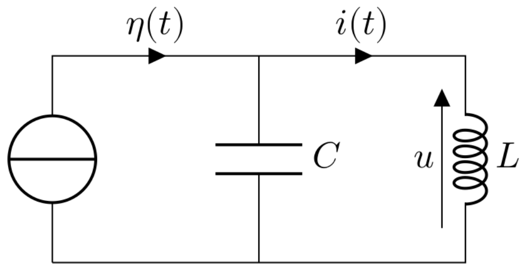
TD application : oscillateurs harmonique et amorti

I Étude énergétique d'un oscillateur harmonique électrique

Dans le circuit ci-contre, la source idéale de courant est brusquement éteinte. On le modélise par un échelon de courant, $\eta(t)$ passant de I_0 à 0 à l'instant $t = 0$. On appelle $\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$ l'énergie électrique totale stockée dans le condensateur et la bobine.



1) Exprimer $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t}$ en fonction de i et $\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$.

2) Justifier qualitativement que $\mathcal{E}_{\text{tot}}$ est constante. En déduire l'équation différentielle vérifiée par i.

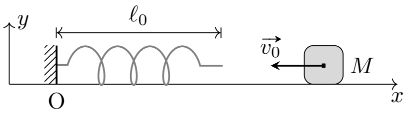
3) Retrouver cette équation par application des lois des nœuds et des mailles.

4) Établir les conditions initiales sur i et sa dérivée.

5) En déduire l'expression de $i(t)$.

II Masse percutant un ressort

Un ressort (raideur k et longueur à vide ℓ_0) fixé en O est initialement au repos. Une masse m glisse sans frottement à vitesse constante $\vec{v} = -v_0\vec{u}_x$ avec $v_0 > 0$ et s'accroche *définitivement* au ressort à l'instant $t = 0$.



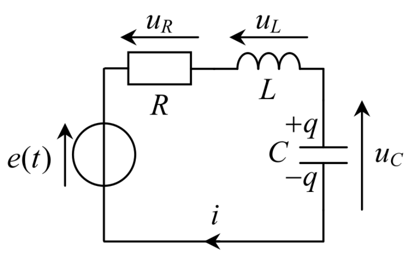
1) Déterminer l'équation du mouvement de la masse une fois qu'elle est accrochée (pour $t \geq 0$).

2) Résoudre cette équation en tenant compte des conditions initiales.

3) À quelle condition la masse vient-elle percuter la paroi en O ?

III RLC sur q et bilan d'énergie

Un circuit électrique est composé d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C. Ces dipôles sont disposés en série et on soumet le circuit à un échelon de tension tel que : $\begin{cases} e(t<0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$. On pose $\gamma = \dfrac{R}{2L}$ et $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$



1) Expliquer simplement pourquoi à $t = 0^-$ la charge q et le courant i sont nuls.

2) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par la charge $q(t)$ du condensateur pour $t > 0$ est :

$$\frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + 2\gamma\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 q = \frac{E}{L}$$

Préciser, en les justifiant, les valeurs initiales de la charge $q(0^+)$ et de sa dérivée.

Le circuit présente différents régimes suivant les valeurs de R, L et C. On suppose dans la suite la condition $\omega_0 > \gamma$ réalisée.

3) Montrer que l'expression de la charge pour $t > 0$ peut se mettre sous la forme

$$q(t) = [A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)]\mathrm{e}^{-\gamma t} + D$$

avec A, B et D des constantes à exprimer en fonction de C, E, ω_0 et γ.

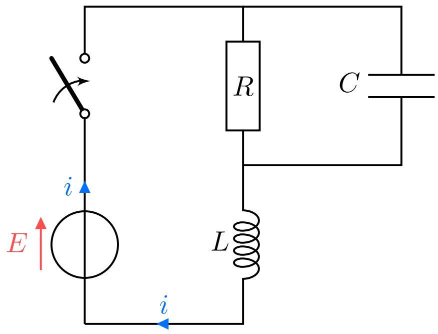
4) Exprimer le courant $i(t)$ dans le circuit pour $t > 0$ en fonction de C, E, ω_0 et γ.

5) la fin du régime transitoire ? Justifier par des considérations simples ces valeurs atteintes.

6) Déterminer l'énergie totale $\mathcal{E}_G$ fournie par le générateur ainsi que l'énergie $\mathcal{E}_{LC}$ emmagasinée dans la bobine et le condensateur à la fin du régime transitoire en fonction de C et E. En déduire l'énergie dissipée par effet Joule dans la résistance. Ces résultats dépendent-ils du régime particulier dans lequel se trouve le circuit ? Interpréter le résultat paradoxal qui apparaît dans le cas limite $R \longrightarrow 0$.

IV Oscillateur amorti RLC à 2 mailles

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1) Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

2) L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

3) Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

4) Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

5) En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.