

## Unités et analyse dimensionnelle

## Au programme

## Savoir-faire

- ◇ Conduire une analyse dimensionnelle.



En sciences physiques, il faut opérer la distinction entre :

- 1) **Le phénomène** :
- 2) **La grandeur physico-chimique** :
- 3) **La valeur** de la grandeur :

Ces notions sont la fondation de tout raisonnement scientifique qui repose sur la précision et l'objectivité.

## I Systèmes d'unités

## A Grandeurs de base

Les grandeurs physiques sont **reliées** entre elles, soit par des **définitions** (surface d'un carré = carré d'un côté) soit par des **lois** physiques ( $U = RI$  en électronique). Par souci de concision, il est pratique de choisir des grandeurs de base à partir desquelles nous exprimerons toutes les autres : en mécanique par exemple, nous utilisons la longueur, la masse et le temps. Ce choix n'est pas unique mais pratique.

À partir de grandeurs de base choisies, nous leur associons donc des unités « de base ». Le bureau international des poids et mesures (BIPM<sup>1</sup>) a défini le **système international (SI)**, et se réunit tous les 4 ans pour discuter de leurs définitions et de leurs choix.

## B Définition du SI

## Grandeurs, dimensions et unités de base du SI

Grandeur	Dimension	Unité	Symbole de l'unité
Longueur			
Masse			
Temps			
Intensité électrique			<sup>2</sup>
Température			<sup>3</sup>
Quantité de matière			
Intensité lumineuse	<sup>4</sup>		

On remarquera que les unités provenant d'un nom propre s'écrivent avec une majuscule, et leur symbole l'est également.

## Notation

On utilisera  $\dim X$  pour dénoter la dimension de  $X$ , et  $[X]$  son unité.

1. <https://www.bipm.org/fr/measurement-units/>

2. Du nom du physicien André-Marie AMPÈRE (XVIII-XIX<sup>e</sup>), précurseur de la mathématisation de la physique et créateur du vocabulaire tenant à l'électricité.

3. Du nom du physicien William THOMSON (XIX<sup>e</sup>), anobli en Lord KELVIN, à l'origine de la thermodynamique.

4. Ne pas confondre avec l'unité des énergies en joules...

## C Opérations sur les grandeurs

D'une manière générale, vous étudierez les dimensions de vos équations directement *via* les opérateurs qui la composent. Il faut donc savoir déduire les dimensions dans les cas suivants :

### Opérations

- 1) Dérivation :
- 2) Intégration :
- 3) Fonction transcendantes<sup>5</sup> :

### Exemples

- 1) Dérivation :
- 2) Intégration :
- 3) Fonctions transcendantes :

## D Grandeurs dérivées

Les grandeurs exprimées à partir des grandeurs de bases *via* des équations physiques sont appelées « grandeurs dérivées ». Leurs dimensions sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions de base : d'une manière générique, une grandeur  $G$  a pour dimension

où les lettres grecques sont les **exposants dimensionnels**, qui peuvent être nuls. S'ils sont tous nuls, la grandeur est dite **adimensionnée**.

### Grandeurs dérivées

Grandeurs dérivées	Symbole	Équation aux dimensions	Unités SI dérivées
Surface	$S$	$\dim S =$	$[S] =$
Volume	$V$	$\dim V =$	$[V] =$
Angle	$\alpha$	$\dim \alpha =$	$\dim \alpha =$
Vitesse	$\vec{v}$	$\dim v =$	$[v] =$
Accélération	$\vec{a}$	$\dim a =$	$[a] =$
Masse volumique	$\rho$	$\dim \rho =$	$\dim \rho =$
Force	$\vec{F}$	$\dim F =$	$[F] =$
Charge électrique	$q$	$\dim q =$	$[q] =$
Énergie	$E$	$\dim E =$	$[E] =$

### Remarque

Certaines de ces unités dérivées portent des noms usuels : le Newton  $N$  ( $1 N = 1 \text{ kg} \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$ ) pour la force, le Coulomb  $C$  ( $1 C = 1 \text{ A} \cdot \text{s}$ ) pour la charge électrique, ou l'énergie en Joules<sup>6</sup>  $J$  ( $1 J = 1 \text{ kg} \cdot \text{m}^2 \cdot \text{s}^{-2}$ )

## II Analyse dimensionnelle

À l'aide de ces outils, nous pouvons effectuer des actions sur les équations-mêmes pour en extraire les dimensions. Pour qu'une équation mathématique ait un sens physique, elle doit suivre un principe fondamental et naturel : le **principe d'homogénéité**.

5. Fonctions type exponentielle, logarithme, cosinus.

6. Du physicien James JOULE (XIX<sup>e</sup>), contemporain de KELVIN.

## A Homogénéité

### Homogénéité

Dans une équation ou dans l'expression d'une loi physique, les deux membres de chaque côté du signe égal doivent être de **même nature**<sup>7</sup> et avoir la **même dimension**, quel que soit le système d'unités. Une telle formule est alors dite **homogène**.

### Corollaire : natures des équations

Il serait ainsi *barbare* d'égaliser un vecteur d'un côté avec un scalaire de l'autre, ou d'additionner ou soustraire des mètres à des secondes, etc.

## B Écrire un résultat

Un objectif récurrent des sujets de physique-chimie est d'obtenir la **valeur numérique** d'une grandeur physico-chimique. Elle découle alors d'une équation, forcément homogène, mais doit également être calculée avec les bonnes unités au sein des dimensions. Ainsi, **tout résultat numérique** devra être rédigé sous la forme suivante :

### Règle d'application numérique

$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. :  $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$

### Effectuer un changement d'unités

Il est très commun de se tromper d'unité lors d'une conversion, et ce pour deux raisons : à cause d'une unité mise à une puissance, ou à cause d'un rapport de deux grandeurs. Il suffit d'appliquer le processus suivant :

- 1) Écrire la valeur numérique actuelle de la grandeur avec son unité sous forme de **fraction explicite** ;
- 2) Convertir les unités concernées **en y mettant des parenthèses** ;
- 3) Recondenser le calcul.

### Exemple

## C Application

Le principe d'homogénéité permet alors une analyse des dimensions des grandeurs mises en jeu dans une loi ou une équation. C'est un outil particulièrement puissant à bien des égards, que nous voyons ci-après.

### II.C.1 Rechercher des unités

En connaissant une expression que l'on sait vraie, nous pouvons déduire les unités d'autres grandeurs (cf. les unités usuelles comme le Newton).

7. Scalaire, vecteur, matrice, tenseur...

## Recherche d'unités

La force de rappel élastique exercée par un ressort s'écrit

$$\vec{F}_{\text{el}} = -k(\ell - \ell_0) \vec{u}_x$$

avec  $k$  la constante de raideur du ressort, et  $\vec{u}_x$  un vecteur adimensionné. Quelle est la dimension de  $k$ ? Quelle serait une manière simple d'exprimer son unité?

## II.C.2 Détecter des erreurs

Par simple analyse dimensionnelle, il est aisé d'affirmer qu'un résultat est nécessairement faux : si les deux parties mises en jeu n'ont pas la même dimension, elle ne peuvent être égales entre elles !

## Détecter des erreurs

En résolvant un exercice, vous trouvez l'expression suivante pour l'énergie potentielle d'une masse  $m$  accrochée à un ressort vertical de raideur  $k$  et sous pesanteur  $g$  :

$$\mathcal{E}_p(z) = \frac{1}{2}kz^2 + mgz^2$$

avec  $z$  la hauteur de la masse. Cette expression est-elle homogène ?

## II.C.3 Rechercher des lois physiques

D'autre part, à partir de phénomènes que nous voudrions relier entre eux, il est possible d'établir des lois les reliant entre eux grâce au principe d'homogénéité.

## Recherche de loi

Donnez, par analyse dimensionnelle, la période  $T$  des oscillations d'un pendule simple.

## Limites implicites

Une loi trouvée par analyse dimensionnelle ne saurait permettre de donner les bons termes multiplicatifs !