Sujet 1 – corrigé

I Etude d'une roue de vélo

On considère une roue de bicyclette de rayon R et de masse m dont on étudie l'arrêt de la rotation par un frein à étrier. Le frein exerce sur la jante une force de direction orthoradiale et d'intensité F, que l'on considérera constante tant que la roue tourne. Le vélo étant retourné sur sa selle, la roue est en rotation autour de son moyeu, fixe, noté (Δ). On suppose que la liaison pivot est parfaite.

1. Quel est le modèle le plus approprié pour décrire le moment d'inertie de la roue : celui du cylindre plein ou celui du cylindre vide ?
   Réponse :
   La masse étant disposé principalement sur un cercle, le modèle le plus adapté est celui du cylindre vide.

2. On donne les moments d'inertie associés aux deux modèles : $J_\Delta = mR^2/2$ et $J_\Delta = mR^2$. Attribuer à chaque modèle le moment d'inertie correspondant.
   Réponse :
   Plus la masse est loin de l'axe de rotation et plus le moment d'inertie sera grand. On en déduit que $J_\Delta = mR^2/2$ correspond au cylindre plein et $J_\Delta = mR^2$ au cylindre creux.

3. Quel est le moment résultant sur l'axe (Δ) ? On justifiera avec soin en précisant les moments éventuellement nuls avec la raison de cette nullité.
   Réponse :
   Il y a 2 actions s'exercent sur la roue. Le moment de la liaison pivot par rapport à l'axe Δ est nul car la liaison est parfaite. Celui de la force de freinage est $-FR$ d'après la formule du bras de levier.

4. En déduire l'équation différentielle d'évolution de l'angle θ (tel que $\omega = d\theta/dt$) autour de l'axe.
   Réponse :
   On applique la loi du moment cinétique projeté sur l'axe Δ à la roue dans le référentiel galiléen du laboratoire :
   $$J_\Delta \frac{d^2\theta}{dt} = -FR$$

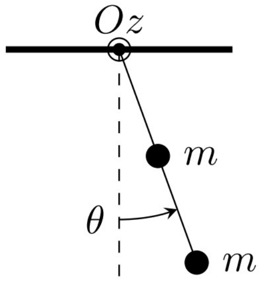
5. Déterminer alors les expressions de $d\theta(t)/dt$ et $\theta(t)$ si à $t = 0$, on a $\theta(0) = 0$ et $d\theta/dt(0) = \omega_0$.
   Réponse :
   On trouve :
   $$\dot\theta = \omega_0 - \frac{FR}{J}t \quad ; \quad \theta(t) = \omega_0 t - \frac{FRt^2}{2J}.$$

6. Déterminer l'intensité F de la force nécessaire pour arrêter la roue en un seul tour. On cherchera dans un premier temps à quelle condition la roue s'arrête, et quel angle la roue aura parcouru. On donne, pour l'application numérique, $R = 33\,\text{cm}$, $m = 1{,}6\,\text{kg}$ et $\omega_0 = 17\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$.
   Réponse :
   La roue s'arrête quand $\dot\theta = 0$, soit pour $t_{\text{stop}} = \omega_0 J/(FR)$. Elle aura alors parcouru un angle : $\theta(t_{\text{stop}}) = J\omega_0^2/(FR) - \frac{J\omega_0^2}{2FR} = \frac{J\omega_0^2}{2FR}$.
   Si la roue s'arrête au bout d'un tour, on trouve :
   $$2\pi = \frac{J\omega_0^2}{2FR} \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{J\omega_0^2}{4\pi R} = 1{,}2\,\text{N}}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Pendule à deux masses

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige et on suppose l'absence de frottement au niveau de la liaison pivot.



1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0$$

Réponse :
Utilisons le théorème du moment cinétique autour de l'axe (Oz) au système composé de la barre rigide et des deux masses qui y sont attachées. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Seul le poids associé à chacune des deux masses est associé à un moment non nul, considérant comme l'indique l'énoncé que la liaison pivot est parfaite.

Considérons tout d'abord le poids $\overrightarrow{P_1}$ de la masse m à la distance $L/2$ du point O. Le bras de levier est égal à $(L/2)\sin(\theta)$, si bien que

$$\left|\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1})\right| = mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De plus, le poids a tendance à faire tourner le pendule dans le sens horaire si θ est positif dans le sens trigonométrique. Ainsi,

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De manière tout à fait analogue, le moment du poids $\overrightarrow{P_2}$ associée à la masse située à la distance L s'écrit

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2}) = -mgL\sin(\theta)$$

Evaluons par ailleurs le moment cinétique associé au systèmes de points par sommation des moments cinétiques de chacun des points

$$\overrightarrow{L}_O = \frac{L}{2}\overrightarrow{u_r} \wedge m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + L\overrightarrow{u_r} \wedge mL\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mL^2\left(\frac{1}{4}+1\right)\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Soit
$$L_{Oz} = \overrightarrow{L}_O \cdot \overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) + \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2})$$

Il vient
$$\frac{5}{4}mL^2\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta) - mgL\sin(\theta)$$

Soit $$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin(\theta) = 0}$$

Remarque : Au besoin, il serait possible de linéariser cette équation pour retomber sur l'équation classique d'un oscillateur harmonique.

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.
Réponse :
Appliquons la définition du barycentre G à partir d'un point quelconque, ici nous choisirons le point O :

$$2m\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OM_1} + m\overrightarrow{OM_2} = m\left(\frac{L}{2}\overrightarrow{u_r} + L\overrightarrow{u_r}\right)$$

Ainsi $$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3L}{4}\overrightarrow{u_r}}$$

La distance OG est donc bien de $3L/4$.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?
Réponse :
Pour s'en convaincre, le plus simple est encore d'essayer. Si toute la masse $2m$ est concentrée au point G, nous aurions :

- $$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_{\text{tot}}}) = -2mg(3L/4)\sin(\theta) = -mg(3L/2)\sin(\theta)$$
- $$L_{Oz} = 2m(3L/4)^2\dot{\theta} = m(9L^2/8)\dot{\theta}$$

Soit, d'après le théorème du moment cinétique,

$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{3L}\sin(\theta) = 0$$

L'équation du mouvement n'est pas identique, preuve que les deux systèmes ne sont pas mécaniquement équivalents. Pour les solides en rotation, il n'est pas possible de traiter le problème "comme si"toute la masse était concentrée au barycentre du système. Cela est du au fait que l'expression dépend de la répartition de masse par rapport à l'axe de rotation et non uniquement de la position du barycentre.

Sujet 3 – corrigé

I Véhicule sur une colline

Un véhicule M de masse m se déplace de haut en bas d'une colline ; la trajectoire est assimilée à un quart de cercle vertical de centre O et de rayon R. On note θ, l'angle que fait $\overrightarrow{OM}$ avec la verticale. Le véhicule démarre du point le plus haut ($\theta = 0$) avec une vitesse v_0. On suppose que le conducteur laisse la voiture rouler sans accélérer ni freiner. Il n'y a pas de frottements. On appelle J le moment d'inertie du véhicule par rapport à l'axe Δ perpendiculaire au cercle formé par la colline orienté dos à nous (dans le sens des θ croissants).

1. En appliquant la loi du moment cinétique, déterminer une équation différentielle vérifiée par θ et ses dérivées.
   Réponse :
   Le système considéré est le véhicule qui se déplace dans un référentiel galiléen (celui de la Terre). Les forces qui s'exercent sur la voiture sont la résistance du sol $\vec{R} = R\vec{e}_r$ et le poids du véhicule $\vec{P} = -mg\vec{e}_z$ en appelant $\vec{e}_z$ le vecteur unitaire de l'axe vertical orienté vers le haut. Puisque le vecteur $\vec{R}$ est colinéaire au vecteur position, son moment par rapport à l'axe Δ est nul. Le moment du poids par rapport à l'axe Δ est :
   $$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = Rmg\sin\theta.$$
   La loi du moment cinétique projetée sur l'axe (O,Δ) est :
   $$\boxed{J\ddot{\theta} = Rmg\sin\theta}$$

2. Intégrer cette équation, après l'avoir multipliée par $\dot{\theta}$ et déterminer l'expression de $\dot{\theta}(t)$ en fonction de θ et des données du problème.
   Réponse :
   On multiplie par $\dot{\theta}$ pour reconnaître l'équation de la conservation de l'énergie mécanique :
   $$J\ddot{\theta}\dot{\theta} = Rmg\dot{\theta}\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \frac{J}{2}\frac{d\dot{\theta}^2}{dt} = -Rmg\frac{d\cos\theta(t)}{dt}.$$
   On intègre alors cette relation entre l'instant initial $t = 0$ et un instant t quelconque :
   $$\frac{J}{2}\int_0^t \frac{d\dot{\theta}^2}{dt}dt = -Rmg\int_0^t \frac{d\cos\theta(t)}{dt}dt \quad \Leftrightarrow \quad \frac{J}{2}\left[\dot{\theta}(t)^2 - \dot{\theta}(0)^2\right] = -Rmg\left[\cos\theta(t) - 1\right].$$
   De plus, d'après les conditions initiales :
   $$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R},$$
   donc :
   $$\boxed{\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}\left[1 - \cos\theta(t)\right]}}.$$

3. Exprimer la vitesse du véhicule considéré comme ponctuel en bas de la colline.
   Réponse :
   En bas de la colline, $\theta = \pi/2$, donc :
   $$\boxed{\dot{\theta}(t_f) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t_f) = R\dot{\theta}(t_f) = R\sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}}}$$

4. Retrouver par une autre méthode l'expression de $\dot{\theta}(t)$ obtenue à la seconde question.
Réponse :
On peut utiliser la conservation de l'énergie mécanique de la voiture : en effet, la réaction du sol ne travaille pas car elle est orthogonal au déplacement élémentaire et le poids est une force conservative. On peut alors affirmer que l'énergie mécanique se conserve :

$$\frac{dEm}{dt} = 0 \quad ; \quad E_m = \frac{1}{2} J \dot{\theta}^2 + mgz + \text{cst},$$

De plus, l'altitude est :

$$z = R\cos\theta.$$

On peut alors dire que l'énergie mécanique à un instant t est égale à l'énergie mécanique à l'instant initial :

$$E_m(t) = E_m(t=0) \quad \Leftrightarrow \quad \frac{1}{2} J\dot{\theta}^2 + mgR\cos\theta = \frac{1}{2} J \left(\frac{v_0}{R}\right)^2 + mgR.$$

On retrouve alors le résultat de la question 2 :

$$\boxed{\dot{\theta}(t) = \sqrt{\frac{v_0^2}{R^2} + \frac{2Rmg}{J}\left[1 - \cos\theta(t)\right]}}.$$

Sujet 4 – corrigé

I Lancement d'un satellite

On souhaite lancer un satellite assimilable à un point matériel M de masse $m = 6\,\text{t}$ depuis un point O à la surface de la Terre, sur une orbite basse d'altitude h. On note $E_m(h)$ l'énergie du satellite sur cette orbite. Pour cela, il faut lui communiquer une énergie $\Delta E_m = E_m(h) - E_m(O)$, où $E_m(O)$ est l'énergie du satellite au point O dans le référentiel géocentrique $\mathcal{R}_g$.
On note $M_T = 6{,}0 \times 10^{24}\,\text{kg}$ la masse de la Terre, $R_T = 6400\,\text{km}$ son rayon et $G = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{SI}$ la constante gravitationnelle.

1. Définir les référentiels géocentrique et terrestre. Dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement du satellite ?
   Réponse :
   Le référentiel géocentrique est lié au repère dont le centre est le centre de masse de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes lointaines.

   Le référentiel terrestre est lié au repère dont le centre est un point à la surface de la Terre et dont les axes sont en rotation par rapport à l'axe des pôles fixe dans le référentiel géocentrique.

   On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen.

2. Exprimer l'énergie mécanique du satellite sur l'orbite en fonction de G, m, M_T, R_T et h. Calculer E_m pour $h = 1000\,\text{km}$.
   Réponse :
   $E_m(h) = -\dfrac{GmM_T}{2(R_T + h)} = -1{,}6 \times 10^{11}\,\text{J}$

3. On note Ω la vitesse angulaire correspondant à la rotation de la Terre sur elle-même. Calculer Ω.
   Réponse :
   Rotation uniforme $\Omega = \dfrac{2\pi}{T} = 7{,}3 \times 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ autour de l'axe des pôles, avec $T = 24\,\text{h}$

4. On note λ la latitude du point de lancement O du satellite. Préciser le mouvement de O dans le référentiel géocentrique. En déduire l'expression de la norme de la vitesse $v(O)$ de ce point.
   Réponse :
   O est animé d'un mouvement circulaire uniforme autour de l'axe des pôles de rayon $r(O) = R_T \cos(\lambda)$:
   $v(O) = R_T \cos(\lambda)\Omega$

5. Exprimer l'énergie mécanique dans le référentiel géocentrique $E_m(O)$ du satellite de masse m situé en O.
   Réponse :
   $E_m(O) = \dfrac{1}{2} m R_T^2 \Omega^2 \cos^2(\lambda) - \dfrac{GmM_T}{R_T}$

6. En déduire les conditions les plus favorables pour le lancement du satellite.
   Réponse :
   On veut que l'énergie à fournir $\Delta E_m = E_m(h) - E_m(O)$ soit minimale, donc que $E_m(O)$ soit maximale. Pour cela il faut que $\cos^2(\lambda)$ soit maximale, donc $\lambda = 0$ (la latitude $\lambda \in [-\pi/2; +\pi/2]$). Il faut lancer le satellite depuis l'équateur.

7. Parmi les bases de lancement suivantes, laquelle choisir de préférence ?

   - Kourou en Guyane française : $\lambda = 5{,}23°$
   - Cap Canaveral aux USA : $\lambda = 28{,}5°$

- Baïkonour au Kazakhstan : $\lambda = 46°$

Réponse :
Kourou

8. Calculer l'énergie nécessaire pour mettre le satellite en orbite basse d'altitude h depuis Kourou.
Réponse :
$E_m(O) = -3{,}75 \times 10^{11}$ J, donc $\Delta E_{m,K} = 0{,}45 \times 10^{11}$ J

9. Calculer l'énergie supplémentaire à apporter si on lance le satellite depuis Baïkonour. Commenter.

Réponse :
$\Delta E = \dfrac{1}{2} m R_T^2 \Omega^2 (\cos^2(\lambda_K) - \cos^2(\lambda_B)) = 3 \times 10^8$ J

Soit un apport relatif supplémentaire : $\Delta E / \Delta E_{m,K} = 0{,}8\%$

L'écart relatif est faible mais l'écart énergétique élevée. Donc le lancement est plus couteux en terme de carburant, mais cela représente qu'une faible portion du budget...