Contrôle de connaissances 15

Dynamique du point et mouvements courbes

/3 **1** Énoncer les trois lois de Newton. On travaille avec un système ouvert.

1 a – $\exists\mathcal{R}$ galiléens : $(\forall \mathrm{M} \mid \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}} = \vec{0})$, M est soit au repos, soit en translation rectiligne uniforme ;

1 b – $\dfrac{\mathrm{d}\,\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}$;

1 c – $\forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2), \vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$.

/7 **2** Établir la longueur d'équilibre d'un ressort vertical. Porter une attention particulière à l'établissement du système d'étude.

1 **1** **Système** : {masse} M (m) dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.

1 **2** **Schéma** : cf. Figure 15.1.

1 **3** **Modélisation** : repère $(\mathrm{O}, \vec{u_z})$, repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\ell\vec{u_z}$, $\vec{v} = -\dot{\ell}\vec{u_z}$, $\vec{a} = -\ddot{\ell}\vec{u_z}$.

4 **BdF** :

1 **Poids** $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_z}$

1 **Force Hooke** $\vec{F} = k(\ell-\ell_0)\vec{u_z}$

5 **PFD à l'équilibre** :

$$\vec{0} \overset{1}{=} \sum \vec{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow 0 = -mg + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$$

$$\Leftrightarrow k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mg \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} \overset{1}{=} \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

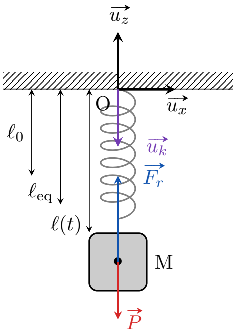

Fig. C15.1

/8 **3** Représenter sur un schéma les coordonnées cylindriques. Détaillez les projections de $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ sur la base cartésienne, donner l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sans démonstration, et **démontrer les expressions** de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ sans démontrer les expressions de $\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$.

1 $$\vec{u_r} = \cos(\theta)\vec{u_x} + \sin(\theta)\vec{u_y} \quad \text{et} \quad \vec{u_r} = -\sin(\theta)\vec{u_x} + \cos(\theta)\vec{u_y}$$

1 $$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r(t)\vec{u_r} + z(t)\vec{u_z}$$

1 $$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\vec{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\vec{u_z}$$

1 $$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}$$

$$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\vec{u_r} + r\dot{\theta}\vec{u_\theta} + \dot{z}\vec{u_z}\right) \Leftrightarrow \vec{a}(t) \overset{1}{=} \ddot{r}\vec{u_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} + \ddot{z}\vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{a}(t) \overset{1}{=} \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\vec{u_z}}$$

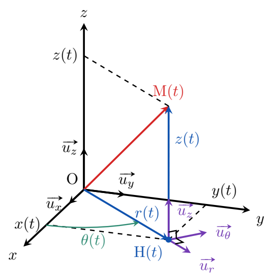

Fig. C15.2 – Cylindriques 1 1

/4 **4** Effectuez le bilan des forces et appliquer le PFD grâce à la question précédente, que vous simplifierez dans les conditions de l'exercice. Sous quelle condition l'une des 2 équations différentielles obtenues est celle d'un oscillateur harmonique ?

1 **Poids** $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\vec{u_r} - \sin\theta\vec{u_\theta})$

Tension $\vec{T} = -T\vec{u_r}$

Or, $$m\vec{a} \overset{1}{=} m(-\ell\dot{\theta}^2\vec{u_r} + \ell\ddot{\theta}\vec{u_\theta}) = \vec{P} + \vec{T}$$

$$\boxed{\overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = T \\ m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \end{cases}} \tag{15.1}$$

L'équation (15.1) est l'équation d'un oscillateur harmonique pour des petits angles ($\sin(\theta) \underset{\theta\to0}{\sim} \theta$) 1.

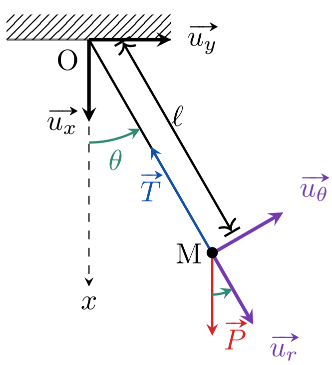

Fig. C15.3 – Schéma