C7 - Oscillateurs linéaires en régime sinusoïdal forcé

1 Forçage sinusoïdal d'un oscillateur linéairement amorti

1.1 Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé

Nécessité de l'entretient des oscillations : sans apport extérieur d'énergie (régime libre), l'amortissement provoque la disparition des oscillation en dissipant l'énergie initiale contenu dans l'oscillateur. Pour conserver des oscillations, il faut compenser cette perte en fournissant de l'énergie via une source extérieure (forçage)

Forme canonique (excitation sinusoïdale) :

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = f(t) = A_0 \cos \omega t}$$

- A_0 amplitude du forçage. On considérera la cas $A_0 > 0$.
- ω pulsation du forçage.

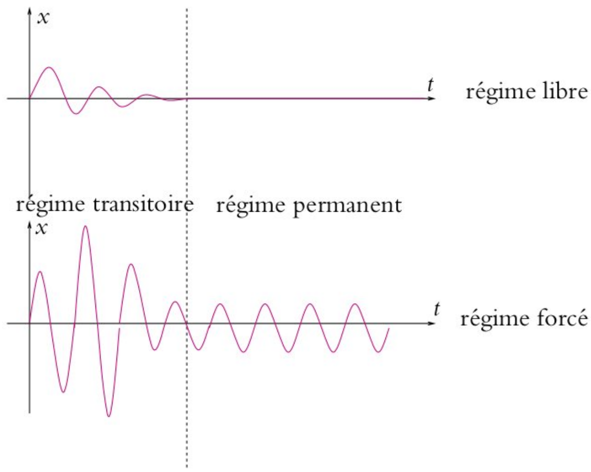
La solution s'écrit $x(t) = x_H(t) + x_P(t)$ avec

- $x_H(t)$ sol de l'eq homogène : correspond au régime libre de l'oscillateur (pas de second membre = pas d'excitation). Il peut être apériodique, critique ou bien pseudopériodique. Dans tout les cas :

$$\boxed{x_H(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$$

- $x_P(t)$ une solution particulière de l'équation complète. Le second membre étant sinusoïdal, $x_P(t)$ est **sinusoïdale et de même pulsation que l'excitation**

$$\boxed{x_P(t) = X \cos(\omega t + \varphi)}$$



Donc il y a deux phase dans l'évolution du signal $x(t)$.

1. Tant que x_H et x_P sont du même ordre de grandeur, le signal $x(t)$ peut avoir des formes très variées, on est en régime transitoire
2. Au bout d'un certain temps ($t > 5\tau$), $|x_H| \ll |x_P|$ donc $x(t) \simeq x_P(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$, on est en régime permanent sinusoïdal que l'on appelle **régime sinusoïdal forcé**.

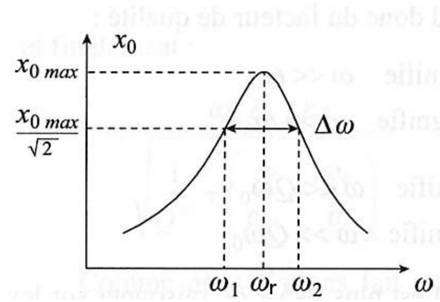
1.2 Notions de Résonance et de bande passante

Un oscillateur forcé présente une résonance si l'amplitude de ses oscillations est maximale pour une fréquence de forçage finie et non nulle. La fréquence correspondante est appelée fréquence de résonance.

Soit X l'amplitude d'un signal oscillant $x(t)$ en RSF de pulsation ω.

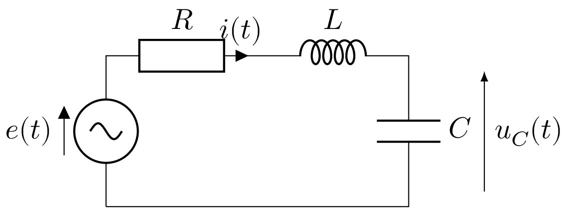
Largeur de résonance (ou bande passante) pour $X(\omega)$: domaine de pulsation de forçage pour lequel $X(\omega) > X_{\max}/\sqrt{2}$. Critère arbitraire pour évaluer la largeur du pic de résonance qui donne des expressions simples

- ω_1 et ω_2 : pulsations de coupure
- $\Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$: bande passante
- $\omega_r/\Delta\omega$: **acuité de la résonance**



2 Exemple du circuit RLC série en RSF

2.1 Circuit

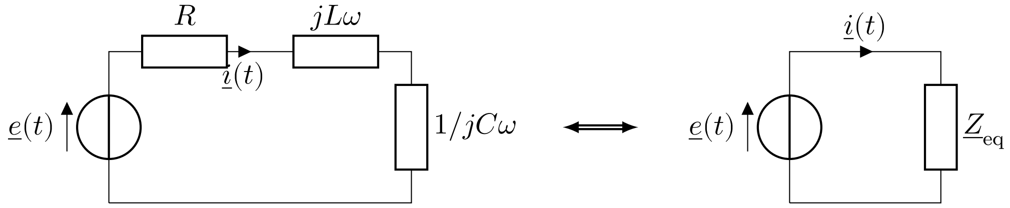


- Source sinusoïdale : $e(t) = E\cos\omega t$

2.2 Résonance en intensité

2.2.1 Intensité parcourant le circuit en RSF

On passe en notation complexe : $\underline{i}(t) = \underline{I}e^{j\omega t}$ $\underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$ $(E > 0)$ x



$$E = \underline{Z}_{\text{eq}}\underline{I} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I}$$

Au final, on obtient l'amplitude complexe en fonction de la pulsation de la source :

$$\boxed{\underline{I}(\omega) = \frac{E}{R + j\left(L\omega - \frac{1}{C\omega}\right)} = \frac{E/R}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}}$$

- pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ ($[\omega_0] = T^{-1}$, unité : rad.s^{-1})
- facteur de qualité : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ (sans dimension)

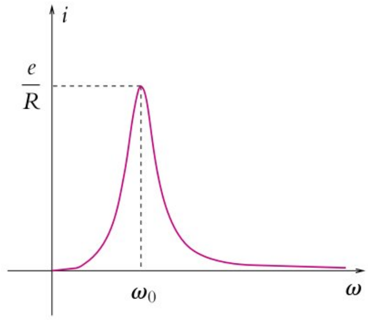
2.2.2 Amplitude réelle de l'intensité

$$\boxed{I(\omega) = |\underline{I}| = \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}}$$

expression analogue à l'amplitude de la vitesse d'un oscillateur harmonique amorti en RSF !
L'intensité est maximale quand $A = 1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2$ est minimal donc :

$$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\omega = \omega_0}$$

$$I_{\max} = I(\omega_0) = E/R$$



- **Il y a toujours une résonance en intensité**
- la pulsation de résonance en intensité est la pulsation propre du système !

2.2.3 Phase de l'intensité

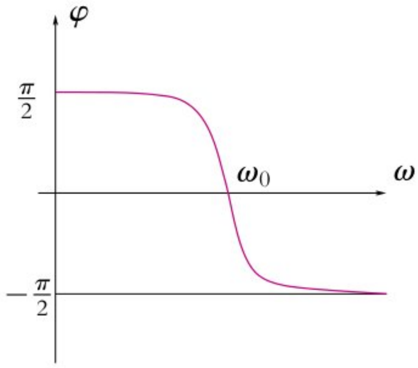
On détermine le déphasage entre l'intensité et la tension de la source :

$$\varphi_i(\omega) = \arg(E/R) - \arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = -\arg\left(1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right) = -\psi$$

$$\boxed{\tan\varphi_i = -\tan\psi = -Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)}$$

$$\cos\psi > 0 \Rightarrow \psi \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right] \Rightarrow \boxed{\varphi_i \in \left[\frac{-\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]}$$

- Pour $\omega \to 0^+$, $\tan\varphi_i \to +\infty \Rightarrow \varphi_i \to \pi/2$
- Pour $\omega = \omega_0$, $\tan\varphi_i = 0 \Rightarrow \boxed{\varphi_i(\omega_0) = 0}$
  Pas de déphasage à la résonance ! Bon moyen expérimental de détection.
- Pour $\omega \to +\infty$, $\tan\varphi_i \to -\infty \Rightarrow \varphi_i \to -\pi/2$



2.2.4 Influence du facteur de qualité Q

Déterminons la bande passante. Pour cela on cherche les pulsation de coupure ω telles que :

$$I(\omega) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} \Rightarrow \frac{E/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{E/R}{\sqrt{2}} \Rightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

Résolvons cette équation :

$$Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1 \Rightarrow (\omega^2 - \omega_0^2)^2 = \frac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2}$$

En factorisant, on obtient :

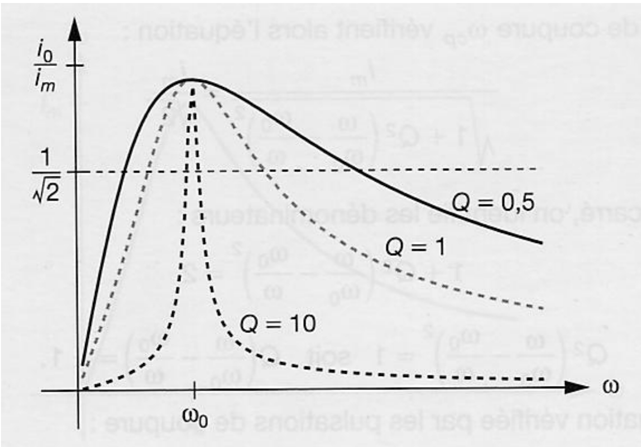
$$(\omega^2 - \omega_0^2)^2 - \frac{\omega^2\omega_0^2}{Q^2} = 0 \Leftrightarrow \left(\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2\right)\left(\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - \omega_0^2\right) = 0$$

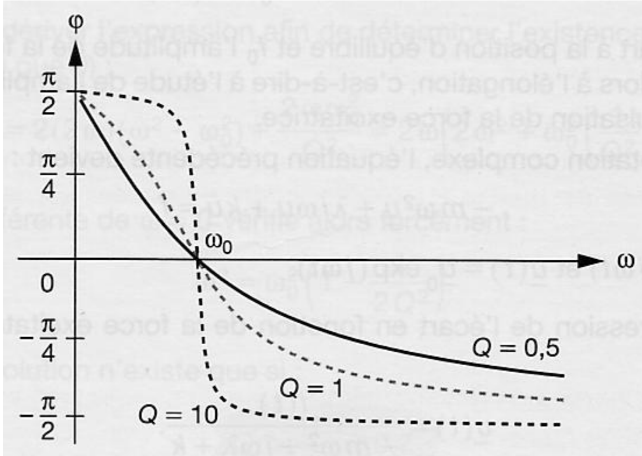
$\Delta = \omega_0^2 \left(4 + \frac{1}{Q^2}\right) > 0 \Rightarrow$ 4 solutions réelles mais 2 seulement sont positives :

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} - 1\right) \qquad \omega_2 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} + 1\right)$$

On en déduit la bande passante et une nouvelle définition pour le facteur de qualité (valable pour toute valeur de Q !)

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$



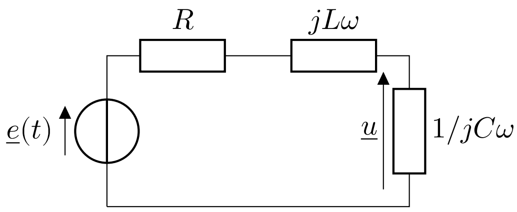


Le facteur de qualité est donc une mesure de l'acuité de la résonance en intensité.

2.3 Résonance EVENTUELLE pour la tension au borne du condensateur

2.3.1 Tension aux bornes du condensateur en RSF

On passe en notation complexe : $\underline{u}(t) = \underline{U}e^{j\omega t}$ $\quad \underline{e}(t) = Ee^{j\omega t}$ $(E > 0)$
On peut déterminer à la formule du diviseur de tension :



$$\boxed{\underline{U}(\omega) = \frac{1/jC\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}}E = \frac{E}{1 - (LC\omega)^2 + jRC\omega} = \frac{E}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

- pulsation propre : $\boxed{\omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$ ($[\omega_0] = T^{-1}$, unité : rad.s^{-1})
- facteur de qualité : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ (sans dimension)

2.3.2 Amplitude réelle et influence du facteur de qualité Q

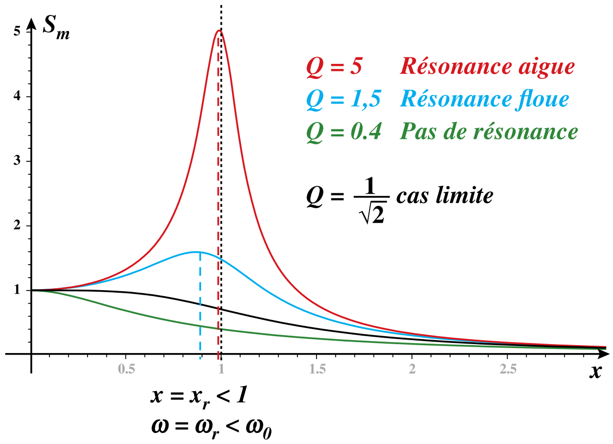
$$\boxed{U(\omega) = \frac{E}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Quelle est la pulsation de forçage qui donne l'amplitude d'oscillation maximale ?
U est maximal si $f(\omega) = \left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2$ est minimale. On pose $X = (\omega/\omega_0)^2$.

$$f(X) = (1-X)^2 + \frac{X}{Q^2} \text{ minimale} \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}X} = 0 \text{ et} \frac{\mathrm{d}^2 f}{\mathrm{d}X^2} < 0 \quad \Rightarrow \quad \ldots$$

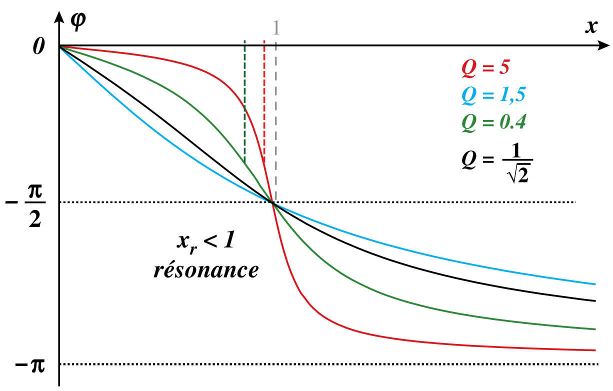
Bilan :

- $Q \leq 1/\sqrt{2}$; l'amplitude est maximale pour $\omega = 0$, $U(\omega = 0) = E$
  Pas de résonance !
- $Q > 1/\sqrt{2}$: l'amplitude est maximale pour
  $$\boxed{\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$$
  $$\boxed{U(\omega_r) = E\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$
- mais pour $Q > 5$: $\omega_r \simeq \omega_0$ et $U(\omega_r) \simeq QE$ (avec moins de 1% d'erreur). **Plus Q est grand, plus le résonance est aiguë**



2.3.3 Phase

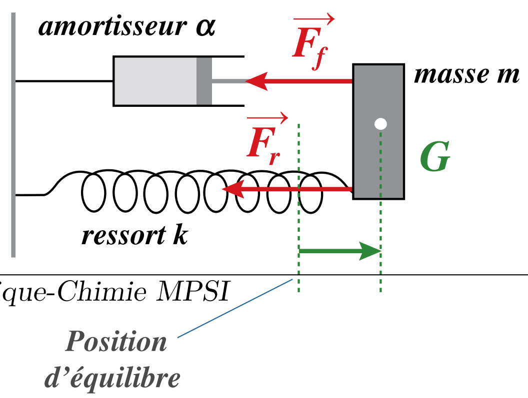
rien de particulier



$$\boxed{\tan\varphi(\omega) = \arctan\left(Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)\right)}$$

3 Exemple d'un oscillateur mécanique en RSF

3.1 Dispositif et modélisation



- poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_y$
- réaction du support : $\vec{R} = \vec{R}_N$
- amortisseur linéaire : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$
- force de rappel du ressort : $\vec{f} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x = -k(x - \ell_0)\vec{u}_x$
- **Force excitatrice :** $\vec{f}_e = F_0\cos(\omega t)\vec{u}_x$

PFD : par rapport à SP11, on rajoute juste la force excitatrice

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = m\vec{a} = \vec{f} + -\alpha\vec{v} + \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{f}_e$$

Donc au final, on obtient l'équa diff sur $u(t) = x(t) - \ell_0$ est :

$$\boxed{m\ddot{u} + \alpha\dot{u} + ku(t) = F_0\cos(\omega t)}$$

3.2 Amplitude des oscillations en RSF

On avait obtenu l'équa diff sur $u(t) = x(t) - \ell_0$:

$$m\ddot{u} + \alpha\dot{u} + ku(t) = F_0\cos(\omega t)$$

Ce qui donne sous forme canonique :

$$\boxed{\ddot{u} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{u} + \omega_0^2 u = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \qquad \omega_0 = \sqrt{k/m} \qquad Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

en RSF, après passage par des signaux complexes, on obtient :

$$u(t) = U(\omega)\cos(\omega t) \qquad \text{avec} \qquad \boxed{U(\omega) = \frac{F_0/m}{\sqrt{\left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2}}}$$

3.3 Résonance en élongation

Quelle est la pulsation d'excitation qui donne l'amplitude d'oscillation maximale ?
U est maximal si $A = \left(\omega_0^2 - \omega^2\right)^2 + \left(\frac{\omega\omega_0}{Q}\right)^2$ est minimale

$$\frac{\mathrm{d}A}{\mathrm{d}\omega} = 0 \Leftrightarrow \boxed{4\omega\left(\omega^2 + \frac{\omega_0^2}{2Q^2} - \omega_0^2\right) = 0}$$

Donc $\omega = 0$ (pas intéressante car pas d'excitation !), ou $\omega^2 = \omega_0^2\left(1 - \frac{1}{2Q^2}\right)$. Il existe une solution réelle ssi $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0 \Rightarrow Q > 1/\sqrt{2}$

Animation : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/ressort_rsf.php?typanim=Javascript

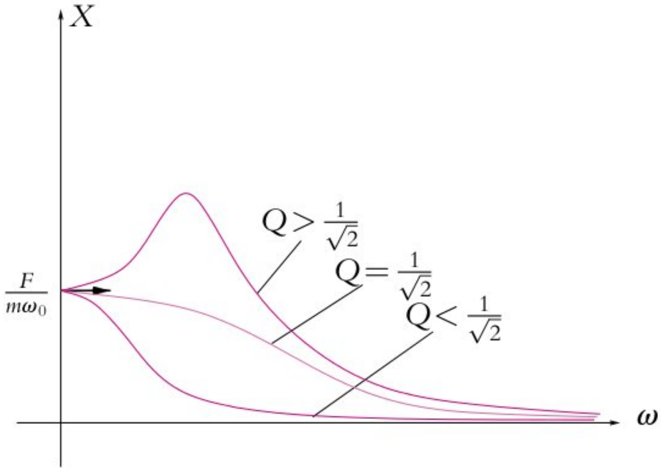
Bilan :

- $Q \leq 1/\sqrt{2}$; l'amplitude est maximale pour $\omega = 0$, $U(\omega = 0) = \dfrac{F_0}{m\omega_0^2}$
  Pas de résonance !
- $Q > 1/\sqrt{2}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega = \omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0}$$

$$\boxed{X(\omega_r) = \frac{F_0}{m\omega_0^2}\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} = X(0)\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

- $\boxed{\omega_r \neq \omega_0}$
- mais pour $Q > 5$: $\omega_r \simeq \omega_0$ et $X(\omega_r) \simeq QX(0)$ (avec moins de 1% d'erreur). **Plus Q est grand, plus le résonance est aiguë**



3.4 Résonance en vitesse

$$v_x(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad \underline{V} = j\omega \underline{X}$$

similaire à la résonance en intensité d'un circuit RL série (existe toujours en $\omega_r = \omega_0$ et $Q = \omega_r/\Delta\omega$ et $\varphi(\omega_r) = 0$).