/42 P1 Le bleu du ciel

Thomson a proposé un modèle d'atome dans lequel chaque électron (M) est élastiquement lié à son noyau (O) : il est soumis à une force de rappel $\vec{F}_R$ passant par le centre de l'atome. Dans tout l'exercice, on admettra que l'on peut se ramener à un problème selon une unique direction $(0, \vec{e_x})$, c'est-à-dire que $\vec{F}_R = -kx\,\vec{e_x}$, où x est la distance entre l'électron et l'atome.

Nous supposerons que cet électron est freiné par une force de frottement de type fluide proportionnel à sa vitesse $\vec{F}_f = -h\vec{v} = -h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{e_x}$ et que le centre O de l'atome est fixe dans le référentiel d'étude supposé galiléen.

On admet qu'une onde lumineuse provenant du Soleil impose sur un électron de l'atmosphère, une force $\vec{F}_E = -eE_0\cos(\omega t)\,\vec{e_x}$.

Données. masse d'une électron : $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, charge élémentaire : $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, célérité de la lumière dans le vide : $c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $k = 500\,\mathrm{SI}$, $h = 1 \times 10^{-20}\,\mathrm{SI}$.

/4 1 Quelles sont les dimensions des grandeurs k et h ? En quelles unités du système international les exprime-t-on ?

Réponse

Par analyse dimensionnelle :

$$\dim(k) = \frac{\text{force}}{\text{longueur}} = \frac{MLT^{-2}}{L} \overset{1}{=} \boxed{MT^{-2}} \quad ; \quad \dim(h) = \frac{\text{force}}{\text{vitesse}} = \frac{MLT^{-2}}{LT^{-1}} \overset{1}{=} \boxed{MT^{-1}}$$

Leurs unités en système international sont donc :

$$k \text{ en } \boxed{\mathrm{kg{\cdot}s^{-2}}} \overset{1}{\text{ou}} \boxed{\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}} \quad ; \quad h \text{ en } \boxed{\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}\ 1$$

◇

/2 2 En utilisant le PFD, donner l'équation différentielle vérifiée par la position de l'électron $x(t)$.

Réponse

D'après le PFD appliqué à l'électron dans le référentiel de l'atome considéré comme galiléen :

$$m\vec{a} \overset{1}{=} \vec{F}_R + \vec{F}_f + \vec{F}_E$$

En projetant cette relation sur l'axe $(O, \vec{e_x})$, on obtient :

$$\boxed{m\ddot{x} \overset{1}{=} -kx - h\dot{x} - eE_0\cos(\omega t)}$$

◇

/4 3 Montrer qu'on peut l'exprimer sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x(t) = -\frac{e}{m}E_0\cos(\omega t)$$

On donnera les expressions de ω_0 et Q en fonction des données.

Réponse

Sous forme canonique, cette équation est :

$$\ddot{x} + \frac{h}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x \overset{1}{=} -\frac{eE_0}{m}\cos(\omega t)$$

On en déduit que : $$\frac{\omega_0}{Q} = \frac{h}{m} \overset{1}{\text{et}} \omega_0^2 = \frac{k}{m}$$

On trouve alors : $$\boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad Q = \frac{m\omega_0}{h} \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{1}{=} \frac{\sqrt{mk}}{h}}$$

◇

/2 $\boxed{4}$ Calculer Q. Que peut-on en déduire sur le régime transitoire ?

Réponse

On trouve :

$$\boxed{Q \overset{1}{=} 2{,}1 \times 10^6 > \frac{1}{2}}$$

On en déduit que le régime transitoire est **pseudo-périodique**. 1

/9 $\boxed{5}$ Montrer que le temps caractéristique du régime transitoire est $\tau = 2Q/\omega_0$, et donnez l'expression de la pseudo-pulsation Ω. Au bout de combien de temps peut-on considérer le régime transitoire comme terminé ? Calculer τ. Peut-on considérer que l'électron est en régime permanent ?

Réponse

Le régime transitoire correspond à la solution homogène $x_h(t)$ telle que

$$\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x \overset{1}{=} 0$$

d'équation caractéristique

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 \overset{1}{=} 0 \quad \text{avec} \quad \Delta \overset{1}{=} \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

Comme le régime est pseudo-périodique, on sait que les racines sont complexes, et on aura

$$r_\pm \overset{2}{=} -\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}}_{1/\tau} \pm \mathrm{j}\underbrace{\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}_{\Omega}$$

On a donc

$$\boxed{\tau \overset{1}{=} \frac{2Q}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Omega \overset{1}{=} \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$$

Au bout de quelques τ, on peut considérer que le régime transitoire est nul. 1

Par A.N., on trouve

$$\boxed{\tau \overset{1}{=} 1{,}8 \times 10^{-10}\,\mathrm{s}}.$$

On suppose donc que l'électron est en régime permanent. 1

/2 $\boxed{6}$ Pourquoi peut-on alors dire que $x(t) \approx X_m \cos(\omega t + \varphi)$?

Réponse

On a

$$x(t) \overset{1}{=} x_h(t) + x_p(t)$$

avec x_h une solution homogène et x_p la solution particulière, de même fréquence 1 de l'excitation. Ainsi, pour des durées supérieures à quelques τ, donc supérieures à 10^{-9} s, on peut considérer que $x_h(t) = 0$, soit $\boxed{x(t) \approx x_p(t)}$.

/4 $\boxed{7}$ Exprimer X_m en fonction de ω_0, de Q et des données. On pourra utiliser la notation complexe.

Réponse

En notations complexes, on définit la représentation complexe $\underline{x}(t) = X_m e^{j(\omega t + \varphi)}$ et l'amplitude complexe $\underline{X_m} = X_m e^{j\varphi}$. On peut alors écrire :

$$(\mathrm{j}\omega)^2 \underline{X_m} + \frac{(\mathrm{j}\omega)\omega_0}{Q}\underline{X_m} + \omega_0^2 \underline{X_m} \overset{1}{=} \frac{-eE_0}{m} \Leftrightarrow \underline{X_m} \overset{1}{=} \frac{\frac{-eE_0}{m}}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \frac{(\mathrm{j}\omega)\omega_0}{Q}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{X_m} \overset{1}{=} \frac{-eE_0}{m{\omega_0}^2} \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

On a alors :

$$\boxed{X_m = \left|\underline{X_m}\right| \overset{1}{=} \frac{eE_0}{m\omega_0^2} \frac{1}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2}\right)^2 + \frac{\omega^2}{Q^2\omega_0^2}}}}$$

/3 **8** Exprimer $\tan\varphi$ en fonction de ω_0 et de Q.

Réponse

On a :

$$\underline{X_m} = \frac{eE_0}{m{\omega_0}^2}\frac{1}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 - \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}}$$

$$\Rightarrow \varphi \overset{①}{=} \arg(\underline{X_m}) = \underbrace{\arg\left(\frac{eE_0}{m{\omega_0}^2}\right)}_{=0} - \arg\left(\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1 - \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\varphi) \overset{①}{=} \frac{-\frac{\omega}{Q\omega_0}}{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 - 1} \Leftrightarrow \boxed{\tan(\varphi) \overset{①}{=} \frac{\omega\omega_0}{Q\left({\omega_0}^2 - \omega^2\right)}}$$

◇

Les longueurs d'ondes λ du Soleil sont principalement incluses dans le domaine du visible, ainsi on considère que $\lambda \in [\lambda_b, \lambda_r]$, où λ_b (resp. λ_r) est la longueur d'onde du rayonnement bleu (resp. rouge).

/1 **9** Que valent λ_b et λ_r ?

Réponse

$$\boxed{\lambda_b = 400\,\mathrm{nm}} \quad \overset{①}{\text{et}} \quad \boxed{\lambda_r = 800\,\mathrm{nm}}$$

◇

/2 **10** En déduire que $\omega \in [\omega_r,\omega_b]$. On donnera les valeurs littérales de ω_r et ω_b et on effectuera les applications numériques.

Réponse

Le lien entre pulsation et longueur d'onde est :

$$\omega \overset{①}{=} \frac{2\pi c}{\lambda}$$

Ainsi :

$$\omega \in [\omega_r,\omega_b] \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_r = \frac{2\pi c}{\lambda_r} = 2{,}36 \times 10^{15}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \overset{①}{\text{et}} \quad \boxed{\omega_b = \frac{2\pi c}{\lambda_b} = 4{,}71 \times 10^{15}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

/1 **11** Calculer ω_0.

Réponse

On trouve

$$\boxed{\omega_0 \overset{①}{=} 2{,}34 \times 10^{16}\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

/2 **12** En déduire que :

$$X_m \approx \frac{eE_0}{m\omega_0^2}$$

Réponse

En comparant ω et ω_0, on peut considérer que $\omega_0 \overset{①}{\gg} \omega$ (il y a au moins un facteur 5 entre les 2, c'est un peu juste). De plus, $Q \gg 1$. Ainsi on peut simplifier le dénominateur du $\underline{X_m}$ car

$$\frac{\omega\omega_0}{Q} \ll \omega^2 \ll \omega_0^2 \quad ①$$

Dans ce cas,

$$\boxed{X_m \approx \frac{eE_0}{m\omega_0^2}}$$

◇

Un électron diffuse dans toutes les directions un rayonnement dont la puissance moyenne $\mathcal{P}$ est proportionnelle au carré de l'amplitude de son accélération.

/2 13 Montrer que :

$$P = K\left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}\right)^2$$

où K est une constante que l'on ne cherchera pas à exprimer.

Réponse

En amplitude complexe, l'accélération est :

$$\underline{A_m} \overset{1}{=} (\mathrm{j}\omega)^2\underline{X_m} \quad\Rightarrow\quad A_m \overset{1}{=} \frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}$$

D'après le sujet, la puissance est proportionnelle au carré de l'amplitude de l'accélération, donc

$$\boxed{P = KA_m^2 = K\left(\frac{eE_0\omega^2}{m\omega_0^2}\right)^2}$$

◇

/2 14 Expliquer alors pourquoi le ciel est bleu.

Réponse

On peut comparer la puissance diffusée pour un rayonnement bleu avec un rayonnement rouge :

$$\boxed{\frac{P_b}{P_r} \overset{1}{=} \frac{\omega_b^2}{\omega_r^2} \overset{1}{=} 4}$$

La puissance diffusée pour les rayonnements bleus est 4 fois plus importante que celle pour un rayonnement rouge, d'où la couleur du ciel !

◇

/2 15 Pourquoi le ciel est-il rouge quand le Soleil se couche ?

Réponse

Le Soleil rasant parcourt une plus grand couche d'atmosphère (1) par rapport au zénith : tout le rayonnement bleu a déjà été diffusé, et il ne reste que le rouge. (1)

◇