

Correction TD C8 - Filtrage analogique linéaire

1 Filtrage et spectres

2 Filtre avec une bobine

3 Lecture de diagramme de Bode

Correction :

Pour faciliter la rédaction on note $e(t) = e_0 + e_1(t) + e_{10}(t) + e_{100}(t)$ et de même pour le signal de sortie s . Ainsi, par linéarité, chaque composante e_n du signal d'entrée donne une composante s_n au signal de sortie.

- **Filtre 1** : d'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre passe-haut**, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 10 kHz. Reconstruisons le signal de sortie :
 - Le terme constant e_0 est complètement coupé par le filtre, donc $s_0 = 0$.
 - l'harmonique de fréquence f est atténuée de 40 dB et peut donc être négligée dans le signal de sortie (40 dB correspond à une division de l'amplitude par 100), soit $s_1(t) \ll$ autres harmoniques de $s(t)$.
 - L'harmonique de fréquence $10f$ est atténuée de 10 dB (soit $S = 10^{-10/20} E = 10^{-1/2} E \simeq 0,3E$ et elle est également déphasée d'environ $+\pi/2$. Ainsi $s_{10}(t) \simeq 0,3E \cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2)$.
 - l'harmonique de fréquence $100f$ n'est presque pas atténuée ni déphasée, donc $s_{100}(t) \simeq e_{100}(t)$

Au final, on obtient le signal de sortie $s(t)$ suivant :

$$s(t) \simeq 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- **Filtre 2** : d'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre passe-haut**, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 0,1 kHz. De la même manière que pour le filtre 1, on détermine que :

$$s(t) \simeq E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- **Filtre 3** : d'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre coupe-bande**, la bande coupée étant proche de 1 kHz. Ainsi seule l'harmonique $e_1(t)$ est coupée (soit $s_1 = 0$). Les autres composantes harmoniques du signal d'entrée, y compris la composante continue, sont de fréquence suffisamment différente de la fréquence coupée pour n'être ni atténuée ni déphasée. Le signal de sortie $s(t)$ s'écrit donc sous la forme :

$$s(t) = E_0 + E_0 \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

- **Filtre 4** : d'après l'allure du diagramme de Bode, il s'agit d'un **filtre passe-bas**, de fréquence de coupure f_c de l'ordre de 0,1 kHz. Le terme constante e_0 passe au travers du filtre sans être modifié. Les termes suivants sont de fréquence suffisamment supérieure à la fréquence de coupure pour que le diagramme de Bode puisse être approximé par son asymptote. On peut alors déterminer le signal de sortie comme dans le cas du premier filtre, mais il y a plus simple ! Comme le filtre est d'ordre 1 (une seule asymptote de pente -20 dB/décade), alors il se comporte comme un intégrateur pour les signaux de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. En déduire le signal de sortie est donc très simple :

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \sin(\omega t) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \sin\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} \sin\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

En écrivant le signal en termes de cosinus, on obtient :

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} E_0 \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} \cos\left(100\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

4 Filtre de Wien

Correction :

1 Dans la limite très haute fréquence, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{S} = 0$. Dans la limite très basse fréquence, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et ainsi on a également $\underline{S} = 0$. Selon toute vraisemblance, ce filtre est donc **un filtre passe-bande**.

2 Notons \underline{Y} l'admittance de l'association R, C parallèle,

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + jC\omega.$$

En utilisant cette admittance équivalente, on reconnaît un pont diviseur de tension, d'où on déduit

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}}$$

Pour l'obtenir directement sous la forme donnée dans l'énoncé, on multiplie le numérateur et le dénominateur par \underline{Y} , ce qui donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)} = \frac{1}{1 + 1 + jRC\omega + \frac{1}{jRC\omega} + 1}$$

3 En réécrivant la fonction de transfert en termes des variables réduites de l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1}{3 + jx + \frac{1}{jx}} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3} \left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

ce qui donne bien

$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

4 Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{|H_0|}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}.$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à $x = 1$, qui donne le **gain maximal** $G_{\max} = 1/3$, soit $G_{\text{dB}} = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}$. La fonction de transfert en $x = 1$ est réelle, c'est-à-dire d'argument égal à 0. À la pulsation ω_0 , la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

5 Dans la limite très basse fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{-jQ/x} = \frac{jH_0x}{Q} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} \sim 20 \log \frac{H_0x}{Q} = 20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = \pi/2 \end{cases}$$

De même, dans la limite très haute fréquence, la fonction de transfert est équivalente à

$$\underline{H} \sim \frac{H_0}{jQx} \quad \text{d'où} \quad \begin{cases} G_{\text{dB}} = 20 \log \underline{H} \sim 20 \log \frac{H_0}{Qx} = -20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = -\pi/2 \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de Bode asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pente $\pm 20 \text{ dB/décade}$ passant par $G_{\text{dB}} = 0$ pour $x = 1$** , alors que le diagramme de Bode en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteur $\pm \pi/2$** . Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus la question précédente qui indique que la courbe de gain réelle passe par le point $G_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB}$ en $x = 1$ alors que la courbe de phase réelle y passe par 0. Le diagramme de Bode est représenté figure 8.

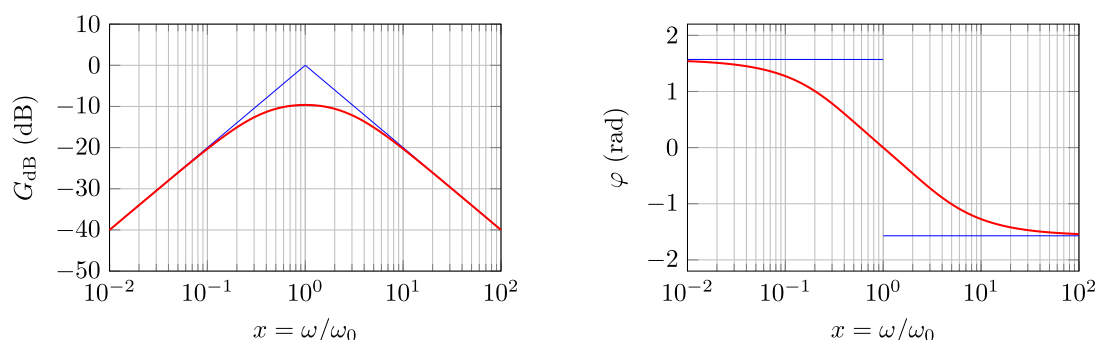


Figure 8 – Diagramme de Bode du filtre de Wien. Diagramme de Bode asymptotique en bleu, diagramme réel en rouge. Version couleur sur le site de la classe.

6 Numériquement, $\omega_0 = 2,0 \cdot 10^3 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$. Comme le diagramme de Bode réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée,

- ▷ Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- ▷ Le terme de pulsation $\omega = \omega_0/10$ se trouve une décade en dessous de la pulsation propre : en utilisant le diagramme asymptotique il est atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad ;
- ▷ Le terme pulsation $10\omega = \omega_0$ est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- ▷ Le terme à la pulsation $100\omega = 10\omega_0$ est une décade au dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ -1,2 rad.

Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10} \cos(\omega t - 1,2) + \frac{E_0}{3} \cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10} \cos(100\omega t + 1,2)$$

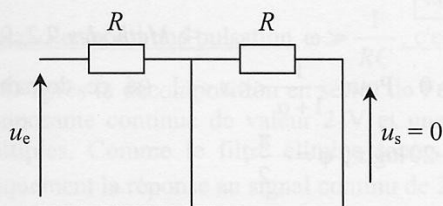
5 Filtre ADSL

Correction :

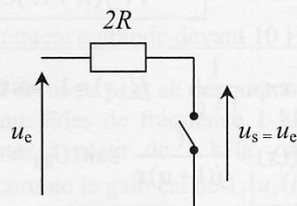
1. On isole les signaux téléphoniques (basses fréquences) avec un filtre passe-bas, et les signaux informatiques avec un filtre passe-haut.

La fréquence de coupure doit être nettement plus grande que les fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : le meilleur choix est $f_0 = 10 \text{ kHz}$.

2. En basse fréquence ($\omega \rightarrow 0$), les bobines se comportent comme des fils, d'où :



En haute fréquence ($\omega \rightarrow \infty$), les bobines se comportent comme des coupe-circuits, d'où :



Le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences et négligeable pour les basses fréquences : c'est un filtre passe-haut. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

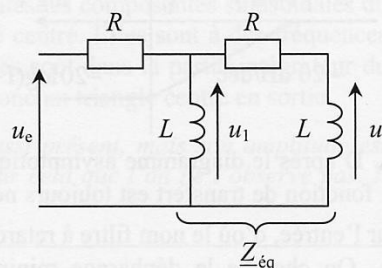
3. On considère deux ponts diviseurs successifs.

Soit $Y_{\text{eq}} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$ l'admittance de l'ensemble

L en parallèle avec RL (ayant la tension u_1 à ses bornes).

Un premier pont diviseur donne :

$$\underline{U}_1 = \frac{\underline{Z}_{\text{eq}}}{\underline{Z}_{\text{eq}} + R} \underline{U}_e = \frac{1}{1 + RY_{\text{eq}}} \underline{U}_e.$$



⚡ La résistance et l'inductance de gauche ne sont pas en série, et ne constituent pas à elles seules un diviseur de tension. En revanche la résistance et l'inductance de droite, elles, sont bien en série.

Un second diviseur de tension donne : $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{U}_1$, soit $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \cdot \frac{1}{1 + RY_{\text{eq}}} \underline{U}_e$.

On obtient en développant : $\underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R \left(\frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1 \right)} \underline{U}_e = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 + j3RL\omega - (L\omega)^2} \underline{U}_e$.

On divise par R^2 pour avoir une partie réelle unitaire et des puissances croissantes de ω au

dénominateur : $\underline{H} = \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + j3\frac{L}{R}\omega - \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}$. En posant $\omega_0 = \frac{R}{L}$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2}$.

4. Pour $x \gg 1$, la fonction de transfert devient $\underline{H}(x) \approx 1$ donc $G_{dB} = 0$ et $\varphi = 0$ (réel positif).

Pour $x = 1$, $\underline{H}(1) = \frac{-1}{1+3j-1} = \frac{j}{3}$, donc $G_{dB} = 20 \log\left(\frac{1}{3}\right) = -9,5 \text{ dB}$ et $\varphi = \frac{\pi}{2}$ (imaginaire pur positif).

Pour $x \ll 1$, $\underline{H} \approx -x^2$, donc $G_{dB} = 40 \log x$ (pente de +40 dB/décade) et $\varphi = \arg(-x^2) = \pi$: on choisit π car le saut de phase ne peut être que de $\frac{\pi}{2}$ avec la valeur pour $x = 1$.

☛ Pour un nombre réel négatif comme $-x^2$, on pourrait choisir aussi un argument de $-\pi$ au lieu de $+\pi$, les deux sont équivalents. Mais ici ce sont les autres valeurs qui nous imposent ce choix.

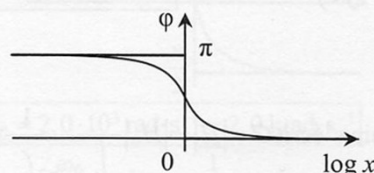
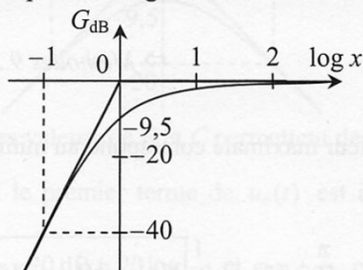
Autre rédaction : pour tout x , $G_{dB} = 20 \log \frac{x^2}{\sqrt{(1-x^2)^2 + 9x^2}} = 40 \log x - 10 \log[(1-x^2)^2 + 9x^2]$

et $\varphi = \arg \frac{-x^2}{1+3jx-x^2} = \arg \frac{jx}{3+j\left(x-\frac{1}{x}\right)} = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(x - \frac{1}{x}\right)$, d'où on peut déduire les limites

et valeurs précédentes (avec $\arctan(0) = 0$, $\arctan(+\infty) = +\frac{\pi}{2}$ et $\arctan(-\infty) = -\frac{\pi}{2}$).

On note que les asymptotes de gain se coupent pour $\log x = 0$.

On complète le diagramme avec les valeurs calculées précédemment en $x = 1$.



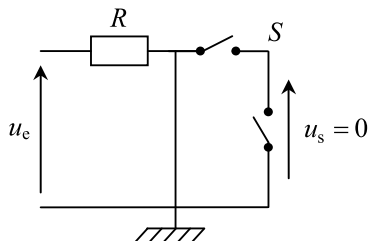
Le diagramme de Bode réel n'a pas de pic de résonance car le facteur de qualité du filtre vaut $Q = \frac{1}{3} < \frac{1}{\sqrt{2}}$ (voir exercice 9.9) ; de plus en $x = 1$ la courbe est nettement en dessous de la valeur maximale, il est donc impossible d'avoir un pic dans ces conditions.

5. La fréquence de coupure est $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$ donc $L = \frac{R}{2\pi f_0}$. AN $L = 1,6 \text{ mH}$ (ordre de grandeur des inductances effectivement utilisées dans les filtres ADSL).

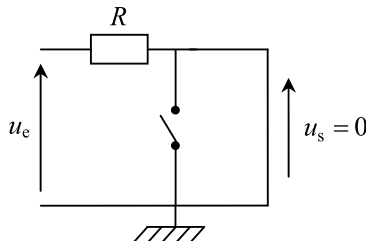
6 Filtre de Colpitts

Correction :

1. En BF ($\omega \rightarrow 0$), les condensateurs se comportent comme des coupe-circuits, la bobine comme un fil : S n'est relié à rien donc $u_s = 0$.



En HF ($\omega \rightarrow \infty$), les condensateurs se comportent comme des fils, la bobine comme un coupe-circuit : $u_s = 0$ (aux bornes d'un fil).



Ce quadripôle coupe les basses et les hautes fréquences : c'est donc un filtre passe-bande.

2. On peut identifier ici, non pas un mais deux diviseurs de tension successifs.

D'une part, les deux condensateurs peuvent être considérés comme étant en série (car rien n'est branché aux bornes de sortie). La tension aux bornes du deuxième ($2C$) est u_s et la tension aux bornes de l'ensemble des deux est aussi celle aux bornes de l'inductance L , que l'on note u . La

formule du diviseur de tension donne donc : $u_s = \frac{1/j3C\omega}{1/j3C\omega + 1/jC\omega} u = \frac{1}{1+3} u$ soit $u_s = \frac{u}{4}$.

D'autre part la résistance R est en série avec l'association des trois autres dipôles : la tension aux bornes de l'ensemble est u_e et celle aux bornes de l'association des trois dipôles est u . Pour cette association en parallèle on travaillera avec son admittance Y , beaucoup plus légère à écrire

que son impédance Z : ainsi $u = \frac{Z}{Z+R} u_e = \frac{1}{1+RY} u_e = \frac{1}{1+R\left(\frac{1}{jL\omega} + jC_{\text{eq}}\omega\right)} u_e$ avec

$$C_{\text{eq}} = \frac{C \times 3C}{C + 3C} = \frac{3C}{4} \text{ (condensateurs en série) donc } u = \frac{1}{1+jR\left(\frac{3C\omega}{4} - \frac{1}{L\omega}\right)} u_e.$$

On combine les deux relations : $4u_s = \frac{1}{1+jR\left(\frac{3C\omega}{4} - \frac{1}{L\omega}\right)} u_e$ d'où $\boxed{H = \frac{\frac{1}{4}}{1+j\left(\frac{3RC\omega}{4} - \frac{R}{L\omega}\right)}}$

qu'on peut identifier à la première forme canonique donnée.

Tout d'abord $\boxed{A = \frac{1}{4}}$. Ensuite $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{3RC}{4}$ et $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$: en multipliant membre à membre on

obtient $\boxed{Q = \frac{R\sqrt{3C}}{2\sqrt{L}}}$, tandis qu'en divisant membre à membre on trouve $\boxed{\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}}$.

3. – Pour $\boxed{\omega \ll \omega_0}$, $\underline{H} \approx j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}$.

$G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{A}{Q} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$, la courbe de gain présente une asymptote de pente $\boxed{+20 \text{ dB/décade}}$

et la phase une asymptote $\boxed{\varphi = \frac{\pi}{2}}$.

– Pour $\omega = \omega_0$, $\underline{H} = A$ donc $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{4} = -12 \text{ dB}$ et $\varphi = 0$.

– Pour $\boxed{\omega \gg \omega_0}$, $\underline{H} \approx -j \frac{A}{Q} \frac{\omega_0}{\omega}$

$G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{A}{Q} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0}$ la courbe de gain présente une asymptote de pente $\boxed{-20 \text{ dB/décade}}$

et la phase une asymptote $\boxed{\varphi = -\frac{\pi}{2}}$.

On sait que l'intersection des asymptotes de gain d'un passe-bande se fait en f_0 . On lit donc directement sur le diagramme $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

On peut aussi remarquer que lorsque le signal d'entrée est à la pulsation ω_0 , alors la fonction de transfert s'écrit $\underline{H} = A = \frac{1}{4}$. C'est donc la fréquence pour laquelle la phase de la fonction de transfert vaut 0, soit $f_0 = 1 \text{ kHz}$.

Par définition, la fréquence de coupure correspond à la valeur maximale du gain -3 dB . On lit approximativement sur le diagramme $f_1 = 950 \text{ Hz}$ et $f_0 = 1050 \text{ Hz}$.

4. $u_e(t) = 2B \cos(100\omega_0 t) \cos(101\omega_0 t) = B[\cos(\omega_0 t) + \cos(201\omega_0 t)]$.

La pulsation $201\omega_0$ est très éloignée de la résonance, donc le second terme est pratiquement éliminé. Pour le terme à ω_0 , $G_{\text{dB}} = 20 \log \frac{1}{4} = -12 \text{ dB}$ et $\varphi = 0$ donc on obtient

$$u_s(t) \approx \frac{B}{4} \cos(\omega_0 t).$$

7 Filtre de Butterworth d'ordre 3

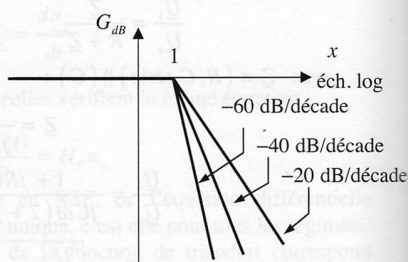
Correction :

a) $H(x) = \left[(1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2 \right]^{-\frac{1}{2}} = (1 + x^6)^{-\frac{1}{2}}$

b) $H(x)$ est une fonction décroissante de x et $G_{\text{dB}} = -10 \log(1 + x^6)$:

en BF, $G_{\text{dB}} = 0$, et en HF, $G_{\text{dB}} = -60 \log x$, donc coupure à -60 dB/décade en HF.

La coupure est meilleure qu'avec un filtre passe-bas du second ordre (-40 dB/décade), de façon générale, elle s'améliore quand l'ordre du filtre augmente et le filtre tend vers un filtre passe-bas idéal.



c) Avec deux diviseurs successifs, en notant \underline{u}_1 la tension aux bornes du condensateur :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_1} = \frac{R}{R + jL_2\omega} \quad \text{et} \quad \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + jL_1\omega} \quad (\text{attention } \underline{Z} \text{ et pas } \frac{1}{jC\omega} !)$$
 avec :

$$\underline{Z} = \frac{(R + jL_2\omega)1/jC\omega}{R + jL_2\omega + 1/jC\omega} = \frac{(R + jL_2\omega)}{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}$$

On remplace dans $\underline{H} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_1} \frac{\underline{U}_1}{\underline{U}_e}$:

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + \frac{L_1 + L_2}{R} j\omega + L_1 C (j\omega)^2 + \frac{L_1 L_2 C}{R} (j\omega)^3}$$

Soit l'expression voulue, par identification des coefficients du polynôme en $j\omega$:

$$\begin{cases} \frac{L_1 + L_2}{R} = \frac{2}{\omega_0} \\ L_1 C = \frac{2}{\omega_0^2} \\ \frac{L_1 L_2 C}{R} = \frac{1}{\omega_0^3} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} L_1 = \frac{3R}{2\omega_0} \\ L_2 = \frac{R}{2\omega_0} = \frac{L_1}{3} \\ C = \frac{4}{3R\omega_0} \end{cases}$$

- d) Il faut que les impédances de sortie des filtres 1 et 2 soient nulles, alors $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$. On veut un numérateur constant, on choisit donc des filtres fondamentaux. On peut obtenir un dénominateur de degré 3 avec un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2.

$$\underline{H}_3 = \frac{H_0}{(1 + jx) \left(1 + \frac{jx}{Q} + (jx)^2 \right)}$$

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx \left(1 + \frac{1}{Q} \right) + (jx)^2 \left(1 + \frac{1}{Q^2} \right) + (jx)^3}$$

On obtient le fonction de transfert du a) en prenant $\boxed{Q = 1}$