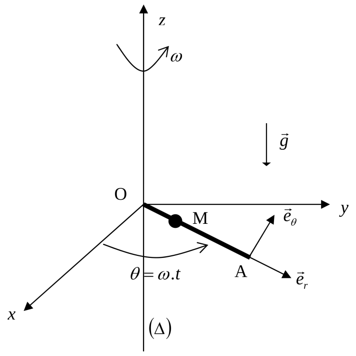
Sujet 1

I Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$, de longueur ℓ, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical Δ passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère :



- le repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$ fixe dans le référentiel du laboratoire et associé aux axes x, y et z ;
- la base cylindrique locale $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ associée au point M.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance r_0 du point O (avec $r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance $r = \mathrm{OM}$ entre le point O et l'anneau M.

1) Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

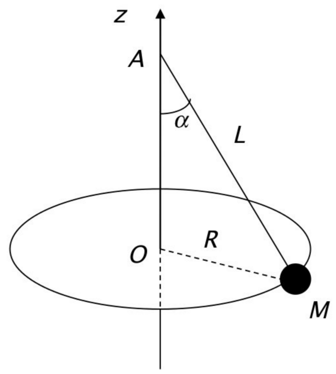
2) Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.

3) Exprimer les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur M dans la base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ en fonction de m, g, $\dot{r}$ et ω.

4) Déduire de la question 2 le temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, ℓ et ω.

Sujet 2

I Pendule conique



Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.

1) Quel système de coordonnées utiliser ?

1) Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.

2) Appliquer le PFD puis exprimer $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.

3) Que dire du cas où ω devient très grande ?

4) Application numérique : calculer α pour $L = 20\,\text{cm}$ et $\omega = 3\,\text{tours}\cdot\text{s}^{-1}$.

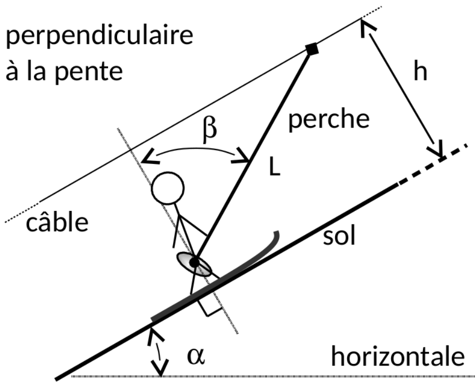
Sujet 3

I Quelques notions de ski ($\star$)

A Leçon n° 1 : le remonte-pente

On considère une skieuse de masse m remontant une pente d'angle α à l'aide d'un téléski. Celui-ci est constitué de perches de longueur L accrochées à un câble parallèle au sol situé à une hauteur h.

On néglige les frottements de la neige sur les skis.



1) Quelles sont les trois forces que subit la skieuse ?

On considère une skieuse de 50kg sur une pente de 15% (c'est-à-dire que la skieuse s'élève de 15 m lorsqu'elle parcourt horizontalement 100 m). La force exercée par la perche sur la skieuse sera supposée fixée et égale à $F = 100$N.

2) Existe-t-il un angle limite β_l pour lequel le contact entre les skis et le sol serait rompu ?

On suppose maintenant que sa trajectoire est rectiligne et sa vitesse constante.

3) Quelle relation les 3 forces que subit la skieuse doivent-elles vérifier ?

On note β l'angle que forme la perche du téléski avec la perpendiculaire à la pente.

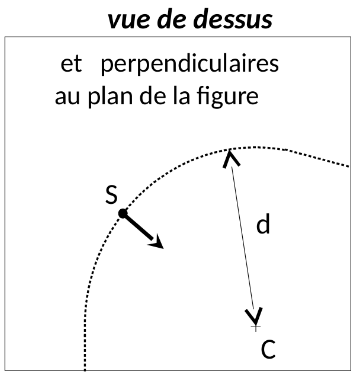
4) Représenter les trois forces sur une même figure en repérant bien les angles α et β.

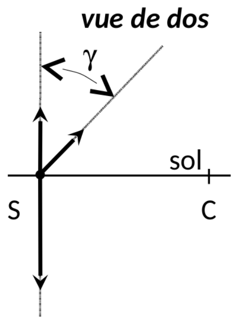
5) En déduire une relation entre m, g, α, β et F (la norme de la force exercée par la perche).

6) En négligeant la distance entre la rondelle et le sol, exprimer F en fonction m, g, α, h et L. Comment varie F avec α et h ? Commenter.

B Leçon n° 2 : le virage

La skieuse est toujours sur le remonte pente et aborde une zone horizontale où sa trajectoire est un cercle de centre C et de rayon d. Sa célérité est toujours constante. On suppose pour les questions suivantes que la perche est contenue dans le plan formé par la droite SC et la verticale.





7) Que peut-on dire de son accélération ?

On a représenté ci-dessus différentes vues de la situation où la skieuse est modélisée par un point matériel S posé sur le sol. On néglige les frottements, on note $\vec{F}$ la force exercée par la perche du téléski et γ l'angle qu'elle forme avec la verticale.

8) Déterminer $F = ||\overrightarrow{F}||$ en fonction de m, $v = ||\overrightarrow{v}||$ la célérité, d et γ.

9) En déduire $R = ||\overrightarrow{R}||$ en fonction de toutes les autres données.

10) Comment évolue R lorsque la célérité augmente ?

11) En pratique la perche n'est pas rigoureusement orthogonale à la trajectoire mais est également dirigée vers l'avant. Expliquer pourquoi.