Contrôle de connaissances 16

Mouvements courbes et énergie

/6 **1** Donnez l'expression du travail élémentaire et de la puissance d'une force. Qu'est-ce qu'une force conservative ? Quel est le lien entre le travail élémentaire d'une telle force avec une énergie potentielle ? Définir la différentielle d'une fonction scalaire, et démontrer alors le lien entre une force conservative et l'énergie potentielle associée.

$$\delta W(\vec{F}) \overset{1}{=} \vec{F}\cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{F}) \overset{1}{=} \vec{F}\cdot\vec{v}$$

Une force est conservative si son travail ne dépend pas du chemin suivi 1, d'où $\delta W(\vec{F}_{\text{cons}}) = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p$ 1. De plus, $\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(f)\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ 1, d'où

$$\vec{F}_{\text{cons}}\cdot\cancel{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathcal{E}_p)\cdot\cancel{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{F}_{\text{cons}} \overset{1}{=} -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,(\mathcal{E}_p)}$$

/8 **2** Démontrer le théorème de la puissance cinétique par un bilan de puissance. Retrouvez l'équation du mouvement du pendule par application du TPC, sans détailler le système d'étude (mais avec un schéma détaillé !).

Bilan de puissance

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} \overset{1}{=} \sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)}$$

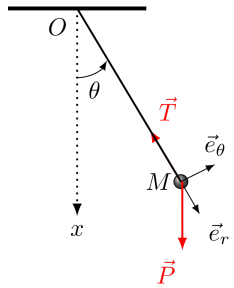

Figure 16.1 – Pendule 1

Le mouvement étant circulaire, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ 1 et on a

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

De plus, $\vec{v}\cdot\vec{T} = 0$ 1 et l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ est $\pi/2+\theta$:

$$\vec{P}\cdot\vec{v} = mg\times\ell\dot{\theta}\times\cos\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right) \overset{1}{=} -mg\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

$$\cancel{m\ell^2}\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 - \frac{\cancel{mg\ell\dot{\theta}}\sin\theta}{\cancel{m\ell^2\dot{\theta}}} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta \overset{1}{=} 0}$$

/4 **3** Démontrer le théorème de l'énergie cinétique. L'appliquer pour trouver la vitesse d'une skieuse en bas d'une piste d'un dénivelé de hauteur h. On néglige les frottements.

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\cancel{\mathrm{d}t}} \overset{1}{=} \sum_i \frac{\delta W(\vec{F}_i)}{\cancel{\mathrm{d}t}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c \overset{1}{=} \sum_i W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_i)}$$

Pour la skieuse, avec A le point en haut de la piste et B en bas,

- $\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$;
- $W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{R_N}) = 0$ car $\overrightarrow{R_N} \perp \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$; 1
- $W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) = mgh$.

Ainsi, avec le TEC entre le haut et le base de la piste, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad\Rightarrow\quad \boxed{v \overset{1}{=} \sqrt{2gh}}$$

/2 **4** Comment trouver les points d'équilibre d'un système à partir de son énergie potentielle ? Quelle est la condition pour qu'un point d'équilibre soit stable ? Instable ?

Les points d'équilibres se trouvent avec

$$\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\text{eq}}} \overset{1}{=} 0$$

Il est stable si $\left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\text{eq}}} > 0$, et instable sinon 1