Sujet 1 – corrigé

I Moteur réel ($\star$)

Un moteur réel fonctionnant entre deux sources de chaleur, l'une à $T_F = 400\,\mathrm{K}$, l'autre à $T_C = 650\,\mathrm{K}$, produit 500 J par cycle pour 1500 J de transfert thermique fourni.

1. Déterminer son rendement.

   Réponse :
   Le rendement est :
   $$\boxed{\eta = \frac{|W|}{Q_C} = \frac{500}{1500} = \frac{1}{3} = 0{,}33}.$$

2. Quel serait le rendement d'une machine de Carnot fonctionnant entre les deux mêmes sources ? Comparer les deux rendements.

   Réponse :
   Le rendement de Carnot est :
   $$\boxed{\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 0{,}38}.$$
   Le rendement est inférieur à celui de Carnot, comme attendu.

3. Calculer l'entropie créée par cycle notée $S_{\text{créée}}$.

   Réponse :
   D'après le sujet et puisque la machine est un moteur ditherme :
   $$W = -500\,\mathrm{J} \quad ; \quad Q_C = 1500\,\mathrm{J}.$$
   D'après le premier principe appliqué sur un cycle :
   $$W + Q_C + Q_F = 0 \quad \Rightarrow \quad Q_F = -W - Q_C = -1000\,\mathrm{J}.$$
   D'après le 2$^{\mathrm{e}}$ principe sur un cycle :
   $$\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créée}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{S_{\text{créée}} = \frac{-Q_C}{T_C} - \frac{Q_F}{T_F} = 0{,}19\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{K}^{-1}}.$$

4. Montrer que la différence entre le travail fourni par la machine de Carnot et la machine réelle est égale à $T_F \times S_{\text{créée}}$, pour une dépense identique.

   Réponse :
   On applique les 2 principes de la thermodynamique sur un cycle pour une machine réelle :
   $$W + Q_C + Q_F = 0 \quad ; \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{\text{créée}} = 0,$$
   et pour une machine de Carnot :
   $$W_c + Q_C + Q_{F,c} = 0 \quad ; \quad \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_{F,c}}{T_F} = 0,$$
   Pour que la comparaison ait un sens, le transfert thermique depuis la source chaude est la même dans ces 2 machines, de même que les températures des 2 thermostats. Par identification :
   $$Q_{F,c} = Q_F + T_F S_{\text{créée}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{W - T_F S_{\text{créée}} = W_c}.$$
   En valeur absolue, le travail échangé par une machine de Carnot est bien supérieur à celui d'un moteur réel, en cohérence avec le rendement supérieur.

Sujet 2 – corrigé

I Cycle de Joule (⋆⋆)

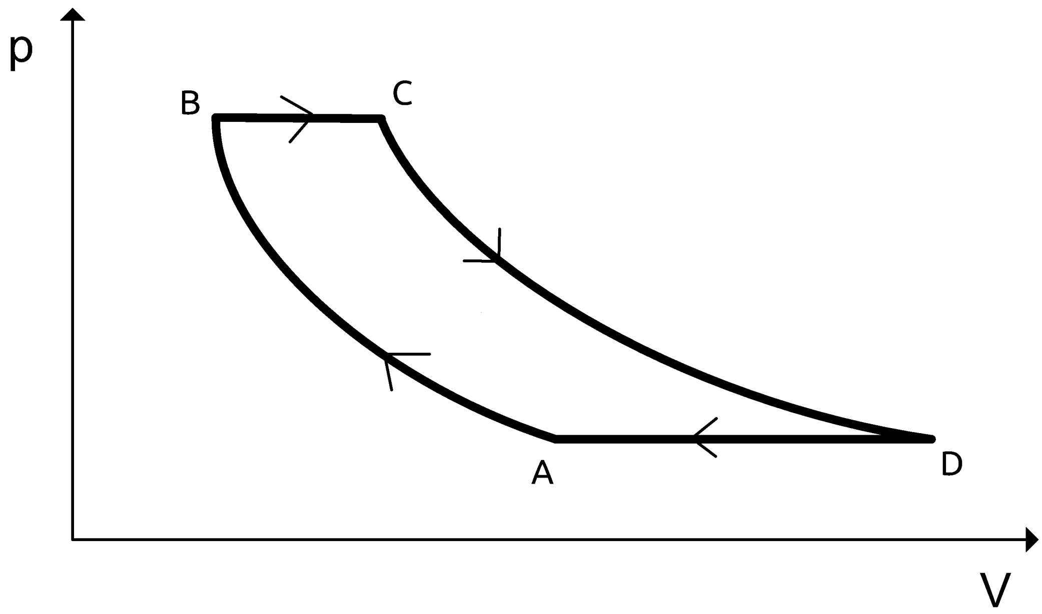
Une mole de gaz parfait diatomique décrit un cycle moteur dit de Joule constitué par :

- deux adiabatiques réversibles AB et CD,
- deux isobares BC et DA.

Données. $A(P_0 = 1\,\mathrm{bar}, T_0 = 280\,\mathrm{K})$, $B(P_1 = 10\,\mathrm{bar}, T1)$, $C(P_1, T_2 = 1000\,\mathrm{K})$, $D(P_0, T_3)$.

1. Tracer l'allure du cycle dans le plan (P, v)

Réponse :
Dans le diagramme de Watt, les transformations isobares sont des segments horizontaux et les adiabatiques réversibles sont des courbes $P \propto 1/V^\gamma$ (d'après la loi de Laplace). Pour un cycle moteur, l'aire du cycle doit être positif pour que le travail reçu soit négatif.



2. Calculer T_1 et T_3.

Réponse :
Le système considéré est un gaz parfait qui subit une transformation adiabatique et réversible lors des transformations AB et CD, donc on peut appliquer la loi de Laplace au cours de ces 2 transformations :

$$T_0^\gamma P_0^{1-\gamma} = T_1^\gamma P_1^{1-\gamma} \quad \Rightarrow \quad \boxed{T_1 = T_0 \left(\frac{P_0}{P_1}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 540\,\mathrm{K}}.$$

On rappelle que pour un gaz parfait diatomique : $\gamma = 7/5$. De même !

$$\boxed{T_3 = T_2 \left(\frac{P_1}{P_0}\right)^{(1-\gamma)/\gamma} = 518\,\mathrm{K}}.$$

3. Exprimer le rendement de ce moteur en fonction de $a = P_1/P_0$ et γ. Calculer sa valeur.

Réponse :
Le rendement du moteur est :

$$\eta = \frac{-W}{Q_c} \quad ; \quad Q_c = Q_{BC}.$$

Si on applique le premier principe de la thermodynamique sur un cycle :

$$W = -Q_{BC} - Q_{DA} \quad \Rightarrow \quad \eta = 1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}.$$

On applique maintenant le premier principe de la thermodynamique lors des transformations BC et DA :

$$\Delta_{BC}U = W_{BC} + Q_{BC} \quad ; \quad \Delta_{DA}U = W_{DA} + Q_{DA}.$$

Puisque le système d'étude est un gaz parfait diatomique :

$$\Delta_{BC}U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_C - T_B) \quad ; \quad \Delta_{DA}U = \frac{nR}{\gamma - 1}(T_A - T_D).$$

Puisque ces 2 transformations sont isobares (et que le système est un gaz parfait) :

$$W_{BC} = P_1(V_C - V_B) = nR(T_C - T_B) \quad ; \quad W_{DA} = P_0(V_A - V_D) = nR(T_A - T_D).$$

On obtient :

$$\frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = \frac{\frac{nR}{\gamma-1}(T_A - T_D) - nR(T_A - T_D)}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_C - T_B) - nR(T_C - T_B)} = \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \frac{T_0 - T_2\alpha^{(1-\gamma)/\gamma}}{T_2 - T_0\alpha^{-(1-\gamma)/\gamma}} = \boxed{-\alpha^{(1-\gamma)/\gamma}}.$$

Finalement, le rendement est :

$$\boxed{\eta = 1 - \alpha^{(1-\gamma)/\gamma} = 0{,}48}.$$

Sujet 3 – corrigé

I Perte de performance d'un congélateur

Un congélateur neuf a un coefficient d'efficacité $e = 2{,}0$. Un appareil dans lequel on a laissé s'accumuler une couche de glace a une efficacité réduite. On suppose que l'effet de la couche de glace est de multiplier par 2 l'entropie créée pour un même transfert thermique pris à la source froide. L'intérieur du congélateur est à $-20\,°\mathrm{C}$ et la pièce dans laquelle il se trouve à $19\,°\mathrm{C}$.

1. Calculer numériquement α , rapport entre l'efficacité du congélateur neuf et l'efficacité d'une machine réversible fonctionnant avec les mêmes sources.

   Réponse :
   Pour une machine réversible,

$$e_{\text{rev}} = \frac{T_{\text{fr}}}{T_{\text{ch}} - T_{\text{fr}}} = \frac{253}{292 - 253} = 6{,}5$$

   Ainsi
$$\boxed{\alpha = \frac{2{,}0}{6{,}5} = 0{,}31}$$

2. Montrer que ce rapport devient, pour le réfrigérateur usagé :

$$\alpha' = \frac{\alpha}{2 - \alpha}$$

   Calculer α et l'efficacité réduite e'.

   Réponse :
   Pour un congélateur (ou un réfrigérateur), on a

$$e = \frac{-1}{1 + Q_{\text{ch}}/Q_{\text{fr}}}$$

   Par ailleurs, le second principe de la thermodynamique, écrit sur un cycle donne :

$$\frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{ch}}} + \frac{Q_{\text{fr}}}{T_{\text{fr}}} + S_{\text{créée}} = 0$$

   Multiplions cette équation par $T_{\text{ch}}/Q_{\text{fr}}$ pour obtenir :

$$\frac{Q_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} + \frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} + \frac{T_{\text{ch}}\,S_{\text{créée}}}{Q_{\text{fr}}} = 0$$

   On en déduit alors l'inverse de l'efficacité en fonction de l'entropie créée :

$$\frac{1}{e} = \frac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} - 1 + \frac{T_{\text{ch}}\,S_{\text{créée}}}{Q_{\text{fr}}}$$

   Et on identifie $\dfrac{T_{\text{ch}}}{T_{\text{fr}}} - 1$ à l'inverse de l'efficacité de Carnot e_{rev}. Finalement,

$$\boxed{\frac{1}{e} - \frac{1}{e_{\text{rev}}} = \frac{T_{\text{ch}}\,S_{\text{créée}}}{Q_{\text{fr}}}}$$

   L'entropie créée étant doublée en présence de glace, il vient aussi

$$\boxed{\frac{1}{e'} - \frac{1}{e_{\text{rev}}} = 2\frac{T_{\text{ch}}\,S_{\text{créée}}}{Q_{\text{fr}}}}$$

On peut alors assembler ces deux équations :

$$\frac{1}{e'} - \frac{1}{e_{\text{rev}}} = 2\left(\frac{1}{e} - \frac{1}{e_{\text{rev}}}\right)$$

Soit
$$e' = \frac{e\,e_{\text{rev}}}{2e_{\text{rev}} - e} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\alpha' = \frac{e'}{e_{\text{rev}}} = \frac{\alpha}{2-\alpha}}$$

Numériquement, on obtient : $\alpha' = 0{,}18$ et $e' = 1{,}2$.

.

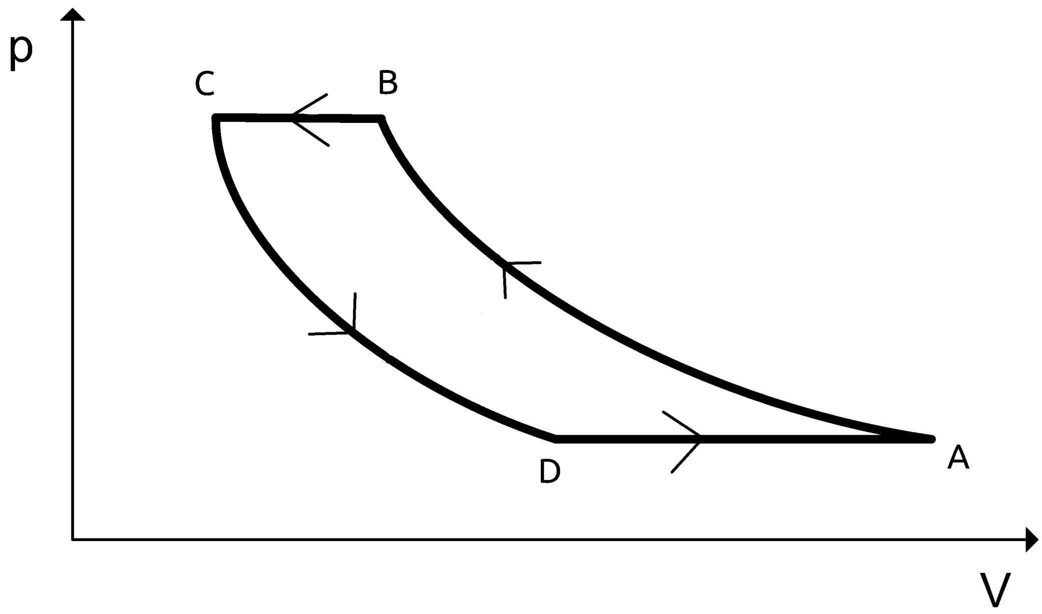
Sujet 4 – corrigé

I Pompe à chaleur d'un gaz parfait

Une pompe à chaleur effectue le cycle de Joule inversé suivant. L'air pris dans l'état A à la température T_0 et de pression P_0 est comprimé suivant une adiabatique réversible jusqu'au point B où il atteint la pression P_1. L'air est ensuite refroidi à pression constante et atteint la température finale de la source chaude T_1 correspondant à l'état C. L'air est encore refroidi dans une turbine suivant une détente adiabatique réversible pour atteindre l'état D de pression P_0. Il se réchauffe enfin à pression constante au contact de la source froide et retrouve son état initial. L'air est considéré comme un gaz parfait de rapport des capacités thermiques $\gamma = 1{,}4$ indépendant de la température. On pose $\beta = 1 - \frac{1}{\gamma}$ et $\alpha = \frac{P_1}{P_0}$.
On prendre $T_0 = 283\text{K}$, $T_1 = 298\text{K}$, $\alpha = 5$ et $R = 8{,}31\text{J} \cdot \text{K}^{-1}\text{mol}^{-1}$.

1. Représenter le cycle parcouru par les gaz dans un diagramme (P,v).

Réponse :



2. Rappeler les conditions nécessaires pour assurer la validité des lois de Laplace. Donner la loi de Laplace relative à la pression et la température, et la réécrire en fonction de β.

Réponse :
Pour appliquer la loi de Laplace, il faut :

- que le système soit un gaz parfait
- que la transformation soit isentropique.

$$T^{\gamma}P^{1-\gamma} = \text{cst}.$$

Avec la notation de l'exercice, on peut écrire cette relation :

$$TP^{-\beta} = \text{cst'}.$$

3. En déduire l'expression des températures T_B et T_D des états B et D en fonction de T_0, T_1, α et β.

Réponse :
On applique donc la loi de Laplace lors des deux transformations adiabatiques réversibles :

$$T_0 P_0^{-\beta} = T_B P_1^{-\beta} \quad ; \quad T_1 P_1^{-\beta} = T_D P_0^{-\beta}.$$

On trouve :

$$\boxed{T_B = T_0 \alpha^{\beta}} \quad ; \quad \boxed{T_D = T_1 \alpha^{-\beta}}.$$

4. Exprimer l'efficacité e de la pompe à chaleur en fonction des transferts thermiques.

Réponse :
L'efficacité de la pompe à chaleur est :

$$e = \frac{|Q_c|}{|W|} = \frac{-Q_{BC}}{W}.$$

En appliquant le premier principe de la thermodynamique sur un cycle (puisque l'énergie interne est une fonction d'état) :

$$W + Q_{BC} + Q_{DA} = 0.$$

Finalement

$$\boxed{e = \frac{1}{1 + \frac{Q_{DA}}{Q_{BC}}}}.$$

5. En déduire l'expression de e en fonction de α et β. Donner sa valeur numérique.

Réponse :
On peut appliquer le premier principe de la thermodynamique aux transformations BC et DA qui sont isobares :

$$\Delta_{BC} H = Q_{BC} \quad ; \quad \Delta_{DA} H = Q_{DA}.$$

Puisque le système est un gaz parfait :

$$\Delta_{BC} H = C_p (T_C - T_B) \quad ; \quad \Delta_{DA} H = C_p (T_A - T_D).$$

Finalement :

$$\frac{Q_{DA}}{Q_{BC}} = \frac{T_A - T_D}{T_C - T_B} = \frac{T_0 - T_1 \alpha^{-\beta}}{T_1 - T_0 \alpha^{\beta}} = \boxed{-\alpha^{-\beta}}.$$

L'efficacité est donc :

$$\boxed{e = \frac{1}{1 - \alpha^{-\beta}} = 2{,}7}.$$

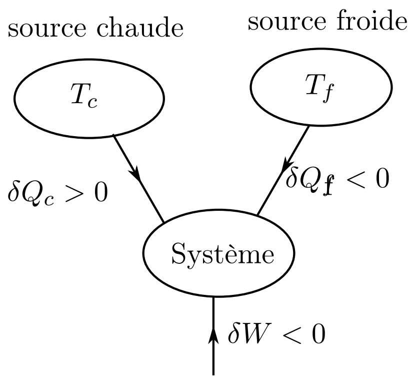
Sujet 5 – corrigé

I Moteur ditherme fonctionnant avec des pseudo-sources

Soit un moteur réversible fonctionnant entre deux sources de même capacité thermique, $C = 4{,}0 \times 10^5\,\mathrm{J \cdot K^{-1}}$, dont les températures initiales respectives sont $T_{f,0} = 10\,°\mathrm{C}$ et $T_{c,0} = 100\,°\mathrm{C}$. Ces températures ne sont pas maintenues constantes.

1. Donner le schéma de principe de ce moteur au cours d'un cycle en indiquant par des flèches le sens des échanges de chaleur et de travail. On désignera par T_c la température de la source chaude et par T_f celle de la source froide. On définira des échanges énergétiques élémentaires δQ_c, δQ_f et δW. On pourra supposer les températures des sources constantes au cours d'un cycle.

Réponse :
On note les échanges comme des échanges élémentaires au cours d'un cycle, car ces grandeurs évoluent entre chaque cycle. Par convention, ce sont des grandeurs algébriques reçues par le système.



2. Exprimer la température T des deux sources quand le moteur s'arrête de fonctionner en fonction de $T_{f,0}$ et $T_{c,0}$. Il sera utile d'appliquer le second principe au système subissant N cycles jusqu'à l'arrêt du moteur. Calculer T.

Réponse :
Le moteur s'arrête quand les températures des deux sources sont égales $T_{c,f} = T_{f,f} = T$.

- second principe appliqué au système Σ au cours d'un cycle réversible :

$$dS = 0 = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f}$$

  On a supposé les températures des deux sources constantes au cours d'un cycle.

- premier principe appliqué sur la source chaude au cours d'un cycle :

$$dU_c = -\delta Q_c = C dT_c \qquad \Longrightarrow \qquad \delta Q_c = -C dT_c > 0 \quad \text{car} \quad dT_c < 0$$

- premier principe appliqué sur la source froide au cours d'un cycle :

$$dU_f = -\delta Q_f = C dT_f \qquad \Longrightarrow \qquad \delta Q_f = -C dT_f \quad \text{car} \quad dT_f > 0$$

- On remplace dans l'expression du second principe, et on intègre au cours des N cycles :

$$dS = 0 = \frac{\delta Q_c}{T_c} + \frac{\delta Q_f}{T_f} \qquad \Longrightarrow \qquad \frac{dT_c}{T_c} + \frac{dT_f}{T_f} = 0$$

$$\int_{T_{c,0}}^{T} \frac{dT_c}{T_c} + \int_{T_{f,0}}^{T} \frac{dT_f}{T_f} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \ln\left(\frac{T^2}{T_{c,0}T_{f,0}}\right) = 0$$

$$\boxed{T = \sqrt{T_{c,0}T_{f,0}} = 325\,\mathrm{K}}$$

3. Exprimer le travail reçu W par ce moteur jusqu'à son arrêt en fonction de C, T, $T_{f,0}$ et $T_{c,0}$. Calculer W et interpréter le signe.

Réponse :
On applique le premier principe au système sur N cycles :

$$\Delta U = W + Q_c + Q_f = 0 \qquad \Longrightarrow \qquad W = -(Q_c + Q_f)$$

$$\boxed{W = C(2T_f - T_{c,0} - T_{f,0}) = -2{,}5 \times 10^6\,\mathrm{J} < 0}$$

Le travail reçu par le système est négatif. C'est bien un moteur !

4. Exprimer, puis calculer le rendement global η. Comparer avec le rendement théorique maximal que l'on pourrait obtenir si les températures initiales des deux sources restaient constantes.

Réponse :
Expression du rendement :

$$\boxed{\eta = -\frac{W}{Q_c} = \frac{2T - T_{c,0} - T_{f,0}}{T_f - T_{c,0}} = 13\%}$$

Rendement maximal de Carnot :

$$\eta_{carnot} = 1 - \frac{T_{f,0}}{T_{c,0}} = 24\%$$

Bien que les cycles soient réversibles, le fait que les sources ne soient pas des thermostats diminue le rendement.