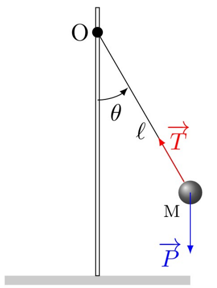
Travaux pratiques – TP 17

Correction du TP

I Analyser

Soit une masse $m = 190\,\mathrm{g}$ attachée à l'extrémité d'une tige en fibre de carbone (de faible masse, pouvant être considérée négligeable devant celle de m) de longueur $\ell = 45\,\mathrm{cm}$ constante. Initialement, la masse m est lâchée d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. On prend $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



(1) On a un mouvement circulaire non uniforme, on trouve donc

$$\overrightarrow{v} = \ell\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \Leftrightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2}$$ ■

(2) L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,p} = mgz(\theta)$$

Or, par rapport à la position $\theta = 0$ où le pendule est à la distance ℓ du point O, à un angle θ quelconque la masse est à la distance $\ell\cos(\theta)$. On trouve donc

$$z(\theta) = \ell(1-\cos(\theta)) \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,p} = mg\ell(1-\cos(\theta))}$$ ■

II Réaliser

Important

Attention, la tige du pendule est en fibre de carbone et est TRÈS FRAGILE ; Ne pas serrer la vis de la masse trop fort sur la tige.

Réglages

1) Ouvrir le logiciel `Latispro`.
2) Régler les paramètres d'acquisition : 200 points de mesure.

(3) On sait que la période est d'environ

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ \ell = 45\times10^{-2}\,\mathrm{m} \end{cases} \text{A.N.} \ : \ \underline{T_0 = 1{,}35\,\mathrm{s}}$$

Pour 4 périodes, il nous faut donc environ

$$\underline{T_{\text{acq,tot}} \approx 5{,}40\,\mathrm{s}}$$

Avec $N = 200$ points au total, on a une durée d'échantillonnage

$$\Delta t_{\text{ech}} = \frac{T_{\text{acq,tot}}}{N} \approx 2{,}7 \times 10^{-2}\,\text{s} \quad \text{or} \quad \boxed{f_{\text{ech}} = \frac{1}{\Delta t_{\text{ech}}}} \Leftrightarrow \underline{f_{\text{ech}} = 37\,\text{Hz}}$$

3) Faire le zéro de l'oscillateur en appuyant sur le petit bouton à l'extrémité du fil noir près de la poulie, lorsque celui-ci est en position verticale.

Acquisition et enregistrement

1) Écarter le pendule d'un angle de 20° à 30° environ.

2) Lancer l'acquisition :

III Valider

III/A Exploitation de l'enregistrement

Visualisation des angles, vitesses et accélérations en fonction du temps

1) En utilisant la feuille de calcul, créer une nouvelle variable, notée `angle`, correspondant à l'angle exprimé en radians.

2) Visualiser `angle` en fonction du temps ; ajuster l'échelle grâce au calibrage (en cliquant droit).

3) Créer les variables `deriv_Pendule` (dérivée première) et `dderiv_Pendule` (dérivée seconde), en utilisant les fonctions traitements → calculs spécifiques → dérivée et dérivée seconde.

4) À partir des variables `deriv_Pendule` et `dderiv_Pendule` (exprimées en degrés), introduire les variables `deriv_angle` et `dderiv_angle` exprimées en radians.

5) Afficher simultanément les trois courbes obtenues et les lisser en utilisant les fonctions traitements → calculs spécifiques → lissage.

3 Non corrigé.

4 On trouve

$$\Delta\varphi_{v/p} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \Delta\varphi_{a/v} = -\frac{\pi}{2}$$

C'est logique, la vitesse est la dérivée de la position qui s'exprime comme un oscillateur harmonique en

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot\theta(t) = \omega_0\theta_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Et de même pour l'accélération qui est la dérivée de la vitesse.

III/A) 1 Propriété de l'énergie mécanique

4 Grâce à la feuille de calculs, on détermine `Ec` et `Ep` les énergies cinétique et potentielle dont les expressions ont été démontrées dans la Partie III, puis `Em = Ec + Ep` l'énergie totale.

Pour observer la conservation de l'énergie, on doit observer l'éventuelle pente négative de `Em` en fonction du temps. Pour une durée d'expérience relativement courte, on a en effet ce constat ; plus longtemps et les frottements solides et visqueux diminuent l'énergie du pendule.

3 Non corrigé.

III/A) 2 Approximation harmonique autour de la position d'équilibre

5 On trace $\mathcal{E}_{p,p}(\theta)$ en mettant l'angle θ en abscisse et `Ep` en ordonnée sur `LatisPro`. On regarde visuellement que c'est une parabole, et on peut modéliser la courbe grâce à l'outil de modélisation.

4 Impression non corrigée. Ça marche. En effectuant le DL de $\cos(\theta)$ à l'ordre 2, on obtient

$$\cos(\theta) \underset{\theta \to 0}{\sim} 1 - \frac{\theta^2}{2} \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,p}(\theta) = mg\ell(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)) \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,p}(\theta) = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2}$$

On doit trouver que le coefficient directeur de la modélisation est égal à

$$\boxed{a = \frac{1}{2}m\ell^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 190 \times 10^{-3}\,\text{kg} \\ \ell = 45 \times 10^{-2}\,\text{m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \underline{a_{\text{theo}} \approx 1{,}9 \times 10^{-2}\,\text{J}}$$

Expérimentalement, on trouve

$$a_{\text{exp}} = (1{,}9 \pm 0{,}1) \times 10^{-2}\,\text{J}$$

D'où l'écart

$$E_N = \frac{|a_{\text{exp}} - a_{\text{theo}}|}{u(a_{\text{exp}})} \Leftrightarrow \underline{E_N = ?}$$

Malgré les frottements, on trouve une réponse similaire, ce qui valide le faible angle.

III/B Amplitude et (non-)isochronisme des oscillations

III/B) 1 Protocole expérimental

5 Pour plusieurs valeurs de θ_0, on mesure la période T observée grâce aux curseurs de `LatisPro`. On remplit un tableau de valeurs et on compare cette période à la période des petites oscillations $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

6 Il n'y a pas d'isochronisme, $T \neq T_0$ à partir de $\theta_0 \approx 40°$.

7 C'est la valeur la plus basse du tableau. On trouve...

III/B) 2 Résolution numérique

L'objectif de cette résolution numérique est de résoudre l'équation différentielle non linéarisée et donc non analytique :

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin(\theta) = 0$$

6 Voir corrigé : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/21b7-2947279

Le script précédent sera ensuite amélioré afin de résoudre l'équation différentielle pour un ensemble de solutions initiales comprises entre $\theta_0 \approx 0$ et $\theta_0 = \pi/2$. Vous trouverez la fréquence de chaque solution grâce à une fonction `freqfinder` déjà créée l'occasion ; elle réalise la transformée de Fourier numérique de la solution temporelle (à l'aide de `numpy.fft`) afin d'en déduire le spectre puis la fréquence du pic spectral. Il vous faudra modifier la période propre par la valeur expérimentale T_{iso}.

9 Voir corrigé.

$\boxed{10}$ Idem.

$\boxed{11}$ Idem.

$\boxed{12}$ Idem.

$\boxed{13}$ Très vite, non. Il n'y a donc pas isochronisme.