Khôlles MPSI3 – semaine 3

Sujet 1 – corrigé

I Doublet de Huygens

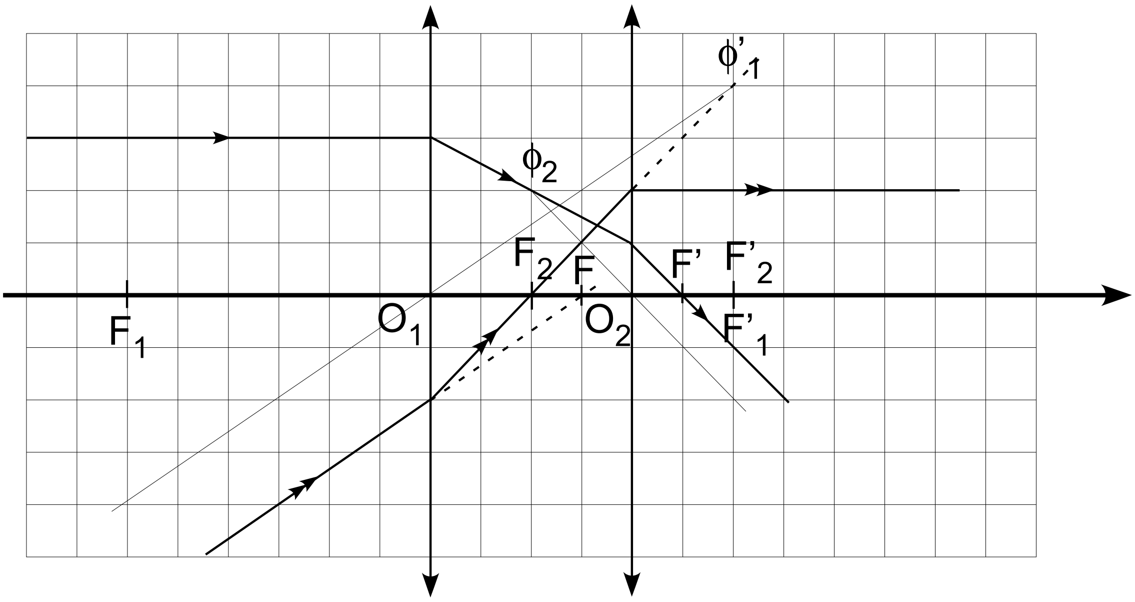
Un doublet de lentilles non accolées est constitué d'une lentille convergente L_1 de centre optique O_1, de distance focale f_1' et d'une autre lentille convergente L_2 de centre optique O_2, de distance focale f_2'. On note $e = \overline{O_1O_2} > 0$. Un doublet de Huygens est de type :

$$f_1' = 3a \qquad e = 2a \qquad f_2' = a$$

Pour l'application numérique, on prendra $a = 2{,}0\,\mathrm{cm}$. On note $\Delta = \overline{F_1'F_2}$.

1. Déterminer par construction géométrique les foyers objet et image, notés F et F', du doublet optique. Sur le schéma, on prendra un carreau pour 1,0 cm.

Réponse :
Sur le schéma, on trouve : $\overline{F_1F} = 9{,}0\,\mathrm{cm}$ et $\overline{F_2'F'} = -1{,}0\,\mathrm{cm}$



2. Exprimer $\overline{F_1F}$ et $\overline{F_2'F'}$ en fonction de e, f_1' et f_2'. Faire l'application numérique. Conclure.
Réponse :
Position du foyer objet F : $F \xrightarrow{L_1} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$
On applique la relation de conjugaison de Newton sur la lentille L_1 :

$$\overline{F_1'F_2} \cdot \overline{F_1F} = -f_1'^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F_1F} = \frac{-f_1'^2}{\overline{F_1'F_2}} = \frac{-f_1'^2}{\Delta}$$

Or $\Delta = \overline{F_1'O_1} + \overline{O_1O_2} + \overline{O_2F_2} = e - f_1' - f_2'$, donc

$$\boxed{\overline{F_1F} = \frac{f_1'^2}{f_1' + f_2' - e} \quad ; \quad \overline{F_1F} = \frac{9a^2}{3a + a - 2a} = 9{,}0\,\text{cm}}$$

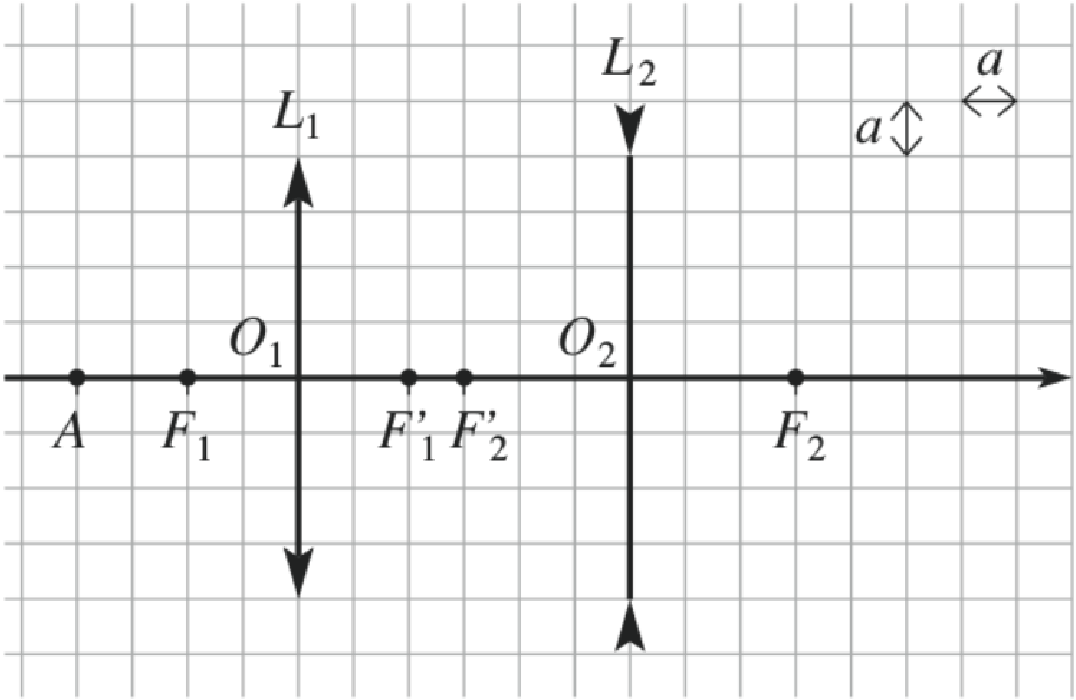
Position du foyer image F' : $A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_2} F'$
On applique la relation de conjugaison de Newton sur la lentille L_2 :

$$\overline{F_2'F'} \cdot \overline{F_2F_1'} = -f_2'^2 \quad \Leftrightarrow \quad \overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{-\overline{F_1'F_2}} = \frac{f_2'^2}{\Delta}$$

$$\boxed{\overline{F_2'F'} = \frac{-f_2'^2}{f_1' + f_2' - e} \quad ; \quad \overline{F_2'F'} = \frac{-a^2}{3a + a - 2a} = -1{,}0\,\text{cm}}$$

Sujet 2 – corrigé

I Doublet

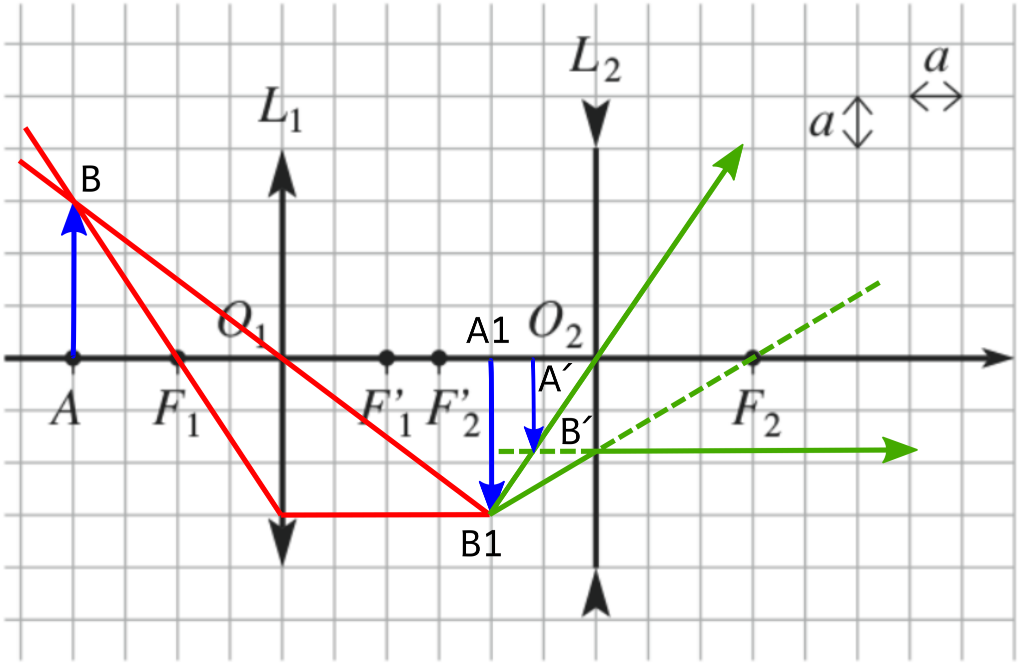


Données. Relations de conjugaison et de grandissement pour une lentille mince :

$$\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}} = \frac{1}{f'} \qquad ; \qquad \gamma = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}.$$

La distance focale image est notée f' alors que la distance focale objet est notée $f = -f'$.

1. Déterminer, par construction géométrique, la position de l'image A' de l'objet A à travers le système de deux lentilles L_1 et L_2. On précisera la position de l'image intermédiaire A_1 (image de A par L_1 ainsi que sa nature (réelle ou virtuelle)).
   Réponse :
   La position de A' se trouve à une distance un peu supérieure à a, en amont de O_2.



2. Vérifier le résultat en utilisant la relation de conjugaison.
Réponse :
Position de la première image A_1 :
On note $\overline{O_1A} = -4a$ la distance algébrique entre le centre optique de la première lentille et l'objet. La relation de conjugaison pour L_1 s'écrit :

$$\frac{1}{\overline{O_1A_1}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1}$$

D'où :

$$\overline{O_1A_1} = \frac{\overline{O_1A}f'_1}{\overline{O_1A} + f'_1} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{(-4a)(2a)}{-4a+2a} = 4a$$

Position de la seconde image A' :
La relation de conjugaison pour L_2 s'écrit :

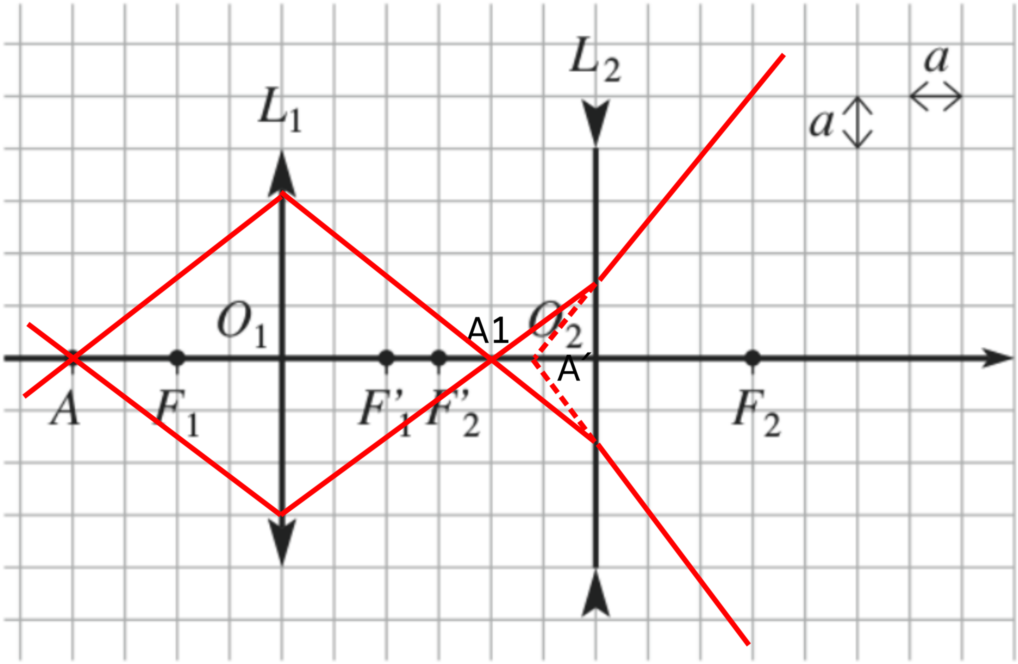
$$\frac{1}{\overline{O_2A'}} - \frac{1}{\overline{O_2A_1}} = \frac{1}{f'_2}$$

D'où :

$$\overline{O_2A'} = \frac{\overline{O_2A_1}f'_2}{\overline{O_2A_1} + f'_2} \overset{\text{A.N.}}{=} \frac{(4a-6a)(-3a)}{-2a-3a} = \frac{6}{5}a$$

Où la relation $\overline{O_2A_1} = \overline{O_2O_1} + \overline{O_1A_1}$ a été utilisée lors de l'application numérique. Le résutlat confirme la position approximativement obtenue lors du tracé.

3. Tracer un faisceau de rayons issu de A.
Réponse :
Les rayons sont obtenus en connaissant la position de l'image intermédiaire A_1 et en assurant que les rayons sortant de L_2 proviennent de l'image virtuelle A'.



L_1
L_2
a
a
O_1
A1
O_2
A´
A
F_1
F'_1
F'_2
F_2

Sujet 3 – corrigé

I Téléobjectif d'appareil photographique

Modélisons un téléobjectif d'appareil photo par une association de lentilles suivie d'un capteur CCD de taille $15{,}8 \times 23{,}6\,\mathrm{mm}^2$. La lentille d'entrée est convergente, de vergence $5{,}0\,\delta$. Une seconde lentille est présente entre la lentille d'entrée et le capteur, à 15,5 cm de la lentille d'entrée. Elle est divergente, de vergence $-20\,\delta$. La distance entre la lentille d'entrée de l'objectif et le capteur, notée habituellement Δ, est appelée encombrement du téléobjectif. Cet appareil est utilisé pour photographier un chamois de hauteur 80 cm au garot situé à 150 m du photographe.

1. En l'absence de la lentille divergente, quelle serait la taille de l'image du chamois sur le capteur? Commenter.
   Réponse :
   Notons, dans toute la suite, D la distance entre le photographe et le chamois, et d la distance entre les deux lentilles du téléobjectif.

   Le chamois est à une distance du photographe bien supérieure à la focale de la lentille d'entrée (L_1), qui vaut $f'_1 = 1/V_1 = 20\,\mathrm{cm}$: il est donc à l'infini optique de cette lentille. On peut donc légitimement faire l'approximation que la distance entre le centre optique de la lentille d'entrée et le capteur est égale à f'_1. Par conséquent, le grandissement de la lentille d'entrée vaut

   $$\gamma_1 = \frac{f'_1}{D} = 1{,}3 \times 10^{-3}$$

   La hauteur du chamois sur le capteur CCD est donc de l'ordre de 1,1 mm , ce qui signifie que moins de 10% de la hauteur de la photo est occupée par le chamois...

2. Quelle est en fait la taille de l'image formée par le système composé ?
   Réponse :
   Le téléobjectif complet est un système optique composé, où l'image formée par la lentille convergente (L_1) sert d'objet à la lentille divergente L_2. Comme $f'_1 > d$, il s'agit d'un objet virtuel situé à une distance $\overline{O_2A} = f'_1 - d = 4{,}5\,\mathrm{cm}$ avant le centre optique de la lentille divergente. Utilisons la formule de grandissement avec origine au foyer objet. On a alors besoin de

   $$\overline{F_2A} = \overline{F_2O_2} + \overline{O_2A} = -f_2 + \overline{O_2A}$$

   On en déduit alors le grandissement dû à la deuxième lentille selon

   $$\gamma_2 = \frac{f_2}{-f_2 + \overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2\overline{O_2A}} = \frac{1}{1 + V_2(f'_1 - d)} = 10$$

   Remarque : Attention aux signes : la vergence est égale à l'opposée de l'inverse de la distance focale objet, soit ici $V_2 \times f_2 = -1$!

   Le grandissement du système optique complet est égal au produit des grandissements des deux lentilles le composant. Par conséquent,

   $$\gamma = \gamma_1\gamma_2 = -\frac{f'_1}{D\,[1 + V_2(f'_1 - d)]} = -1{,}3 \times 10^{-2}$$

   et on déduit que l'image du chamois formée par le téléobjectif mesure 10,6 mm , ce qui peut tout à fait correspondre à une photo bien cadrée compte tenu de la taille du capteur.

3. Quel est alors l'encombrement du téléobjectif?
   Réponse :
   Pour que l'image soit nette, le capteur doit être placée là où l'image finale du chamois est formée. Puisque l'on connaît tant le grandissement γ_2 que la distance $\overline{O_2A}$, on déduit de la formule de grandissement avec origine au centre que le capteur doit être placé à une distance

$$d' = \gamma_2 \overline{O_2A} = 45\,\mathrm{cm}$$

   en aval de la lentille divergente L_2. L'encombrement du téléobjectif vaut donc

$$\Delta = d + d' = 60\,\mathrm{cm}$$

4. Quelle serait la distance focale d'une lentille convergente qui donnerait à elle seule une image de la même dimension que la précédente? En déduire ce que vaudrait l'encombrement du téléobjectif dans ce cas.
   Réponse :
   La lentille divergente permet de multiplier le grandissement par un facteur 10. En utilisant directement le résultat de la question 1, il faudrait que la lentille L_1 ait une focale dix fois supérieure, soit 2,0 m.

   Compte tenu des distances mises en jeu, l'objectif du capteur doit être placé pratiquement dans le plan focal image de la lentille L_1. L'encombrement d'un tel objectif vaudrait donc 2,0 m , ce qui serait très peu pratique à manipuler.

Sujet 4 – corrigé

I Lunette astronomique

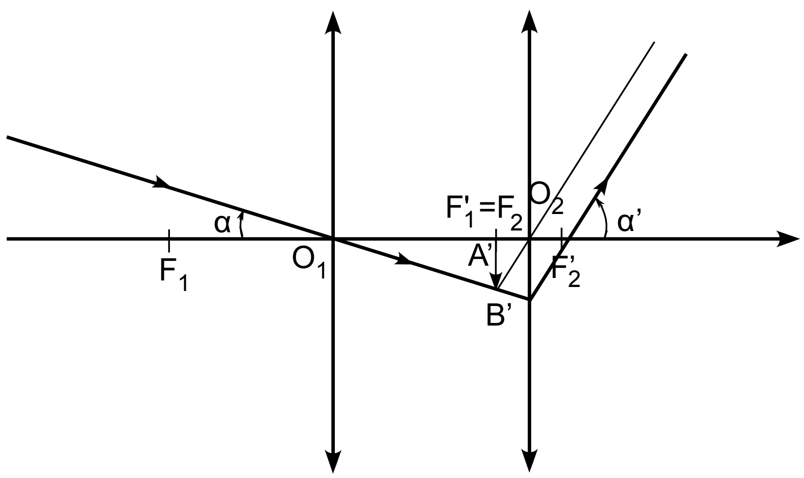
On considère une lunette astronomique formée d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_1' = \overline{O_1F_1'}$ et d'un oculaire constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_2' = \overline{O_2F_2'}$. Ces deux lentilles ont même axe optique Δ. On rappelle qu'un œil normal voit un objet sans accommoder quand celui-ci est placé à l'infini. On souhaite observer la planète Mars, qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent 2α, symétriquement par rapport à l'axe optique de la lunette.
Pour voir la planète nette à travers la lunette, on forme un système afocal.

1. Définir un système afocal. Que cela implique-t-il pour les positions des lentilles ?
   Réponse :
   Un système est dit afocal si ses foyers sont rejetés à l'infini. Un objet à l'infini donne alors une image à l'infini.
   $$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' = F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$
   L'image d'un objet à l'infini par la lentille L_1 est le foyer image F_1'. Si on veut que l'image de F_1' par la lentille L_2 soit à l'infini, il faut que l'objet soit au foyer objet de cette lentille.

2. On note α l'angle sous lequel est vu le bord extrême de la planète Mars. Cet objet est supposé être à l'infini. Dans le cas où $f_1' = 5f_2'$, faire une construction graphique. On placera $\overline{A'B'}$ l'image intermédiaire sur ce schéma.

   On note α' l'angle orienté que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette par rapport à l'axe optique.

   Placer l'angle α' sur la figure précédente. L'image est-elle droite ou renversée ?
   Réponse :
   L'image est renversée car l'angle α' n'est pas orienté dans le même sens que α.



3. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \alpha'/\alpha$. Exprimer G en fonction de f_1' et de f_2'. Commenter son signe. On rappelle que les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss.

   Réponse :
   Les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss, donc les angles α et α' sont petits.

   On exprime la tangente de l'angle α dans le triangle $O_1A'B'$:
   $$\tan(\alpha) = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} \sim \alpha < 0$$

On exprime la tangente de l'angle α' dans le triangle $O_2A'B'$:

$$\tan(\alpha') = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_2F_2}} \sim \alpha' > 0$$

On en déduit le grossissement : $\boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f_1'}{f_2'} < 0}$.

Le signe est cohérent avec le fait que α' et α sont de signe contraire.

On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3 de distance focale $f_3' = \overline{O_3F_3'}$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

4. Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?
   Réponse :
   La lentille L_3 doit conjuguer F_1' et F_2.

$$A_\infty \xrightarrow{L_1} F_1' \xrightarrow{L_3} F_2 \xrightarrow{L_2} A'_\infty$$

5. On appelle γ_3, le grandissement de la lentille L_3. En déduire $\overline{O_3F_1'}$ en fonction de f_3' et γ_3.
   Réponse :
   Méthode 1 :
   On utilise la relation de Newton pour le grandissement sur L_3 :

$$\gamma_3 = \frac{f_3'}{\overline{F_3F_1'}} = \frac{f_3'}{f_3' + \overline{O_3F_1'}} \quad \Leftrightarrow \quad \gamma_3 \cdot (f_3' + \overline{O_3F_1'}) = f_3'$$

$$\boxed{\overline{O_3F_1'} = f_3' \left(\frac{1-\gamma_3}{\gamma_3} \right)}$$

   Méthode 2 :
   Le grandissement est défini par

$$\gamma_3 = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}} = \frac{\overline{O_3F_2}}{\overline{O_3F_1'}}$$

   De plus, on peut appliquer la relation de conjugaison de Descartes à la lentille L_3 :

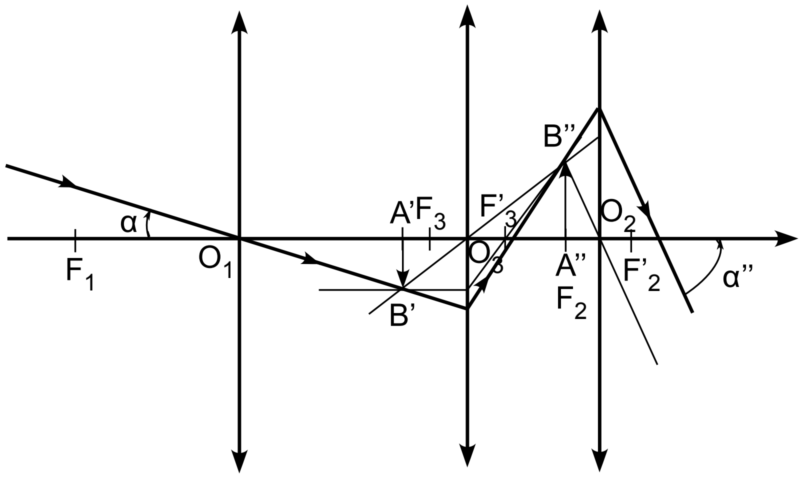
$$\frac{1}{\overline{O_3F_2}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'}$$

   On peux alors combiner ces résultats pour obtenir :

$$\frac{1}{\gamma_3\overline{O_3F_1'}} - \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} = \frac{1}{f_3'} \Rightarrow \frac{1}{\overline{O_3F_1'}} \left(\frac{1}{\gamma_3} - 1 \right) = \frac{1}{f_3'} \Rightarrow \overline{O_3F_1'} = f_3' \left(\frac{1-\gamma_3}{\gamma_3} \right)$$

   et le résultat est bien identique.

6. Faire un tracé de rayons de cette situation. On appellera $\overline{A'B'}$ la première image intermédiaire et $\overline{A''B''}$ la seconde image intermédiaire. Déterminer graphiquement ces images intermédiaires, ainsi que les positions des foyers objet F_3 et image F_3' de la lentille L_3.
   Réponse :



Remarque : Pour réaliser la construction, on peut obtenir l'image $A'B'$ de l'objet à l'infini par (L_1) puis placer la lentille (L_3) de sorte qu'elle donne de $A'B'$ une image $A''B''$ réelle. Il suffit ensuite de rajouter la lentille (L_2) en veillant à ce que $A''B''$ se trouve dans le plan focal objet de (L_2).

7. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de γ_3, f_1' et f_2'. On notera α'' l'angle sous lequel est vue l'image finale que l'on placera sur la figure précédente.

Réponse :

Par définition $G' = \dfrac{\alpha''}{\alpha}$. On exprime ces angles dans l'approximation des petits angles (conditions de Gauss).

Dans le triangle $O_1A'B'$ (bien noter que l'angle α est négatif):

$$\tan\alpha = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{O_1F_1'}} = \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \approx \alpha$$

Dans le triangle $O_2A''B''$ (l'angle α'' est négatif):

$$\tan\alpha'' = \frac{\overline{A''B''}}{\overline{O_2F_2}} = \frac{\overline{A''B''}}{-f_2'} \approx \alpha''$$

Ainsi :

$$\alpha \approx \frac{\overline{A'B'}}{f_1'} \quad ; \quad \alpha'' \approx \frac{\overline{A''B''}}{-f_2'}$$

Par définition $\gamma_3 = \dfrac{\overline{A''B''}}{\overline{A'B'}}$

On en déduit le grossissement : $\boxed{G' = -\dfrac{f_1'}{f_2'} \cdot \gamma_3 = \gamma_3 \cdot G}$

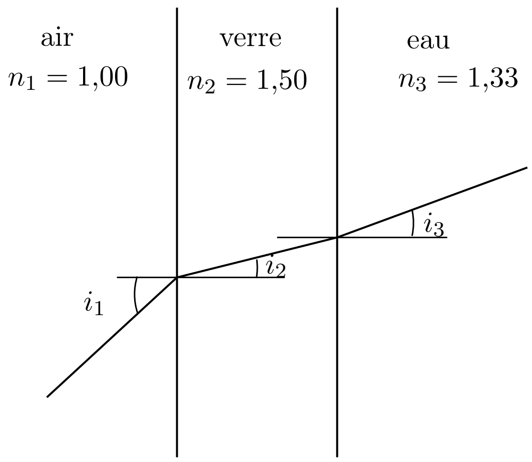
L_3 conjugue un objet réel et une image réelle donc $\gamma_3 < 0$, donc $G' > 0$. On ne peut pas conclure sur le fait que $G' > |G|$ car on ne sait pas si $|\gamma_3| > 1$ (cela dépend de la valeur de f_3').

Sujet 5 – corrigé

I Aquarium ($\star$)

La paroi d'un aquarium est constituée d'une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur 5,0 mm. L'indice optique de l'air est $n_1 = 1{,}00$, celui du verre est $n_2 = 1{,}50$ et celui de l'eau est $n_3 = 1{,}33$.
Un rayon lumineux arrive sur la paroi (côté air) sous un angle d'incidence i_1 et ressort de la paroi (côté eau) sous un angle d'incidence i_3. On appelle i_2 l'angle d'incidence du rayon lumineux dans la lame de verre.

1. Sachant que $i_1 = 46°$, calculer i_2 et i_3.
   Réponse :
   On considère dans toute la suite des angles orientés positivement. Comme $n_2 > n_1$, on a $i_2 < i_1$. Comme $n_3 < n_2$, on a $i_3 > i_2$.



   D'après la loi de la réfraction de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(i_1)\right)}$$

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{1}{1{,}5}\sin(46°)\right) = \boxed{28{,}7°}.$$

   Idem entre 2 et 3 :

$$n_2 \sin i_2 = n_3 \sin i_3 \quad \Rightarrow \quad \boxed{i_3 = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_3}\sin(i_2)\right)}$$

$$i_3 = \arcsin\left(\frac{1{,}5}{1{,}33}\sin(28{,}7°)\right) = \boxed{32{,}8°}.$$

   Ces valeurs numériques sont bien en accord avec les inégalités proposées.

2. Existe-t-il un phénomène de réflexion totale pour les rayons pénétrant dans l'aquarium ?
   Réponse :
   Comme $n_1 < n_2$, il n'existe pas de phénomène de réflexion totale entre les milieux 1 et 2. En effet, l'indice augmente donc l'angle diminue et ne risque pas de "dépasser" $\pi/2$.

3. Existe-t-il un phénomène de réflexion totale pour les rayons sortant de l'aquarium ?
   Réponse :
   Comme $n_2 > n_3$, il existe un angle de réflexion totale, noté $i_{2,\text{lim}}$, entre les milieux 2 et 3.

$$i_{2,\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_3}{n_2}\right) = 62{,}5°.$$

Cependant, il convient de vérifier si l'angle i_2 peut dépasser ou non l'angle limite ainsi obtenu. L'étude du premier dioptre indique, via la 3ième loi de Snell-Descartes $n_1 \sin(i_1) = n_2 \sin(i_2)$. L'angle maximal pour le rayon 2 est obtenu lorsque le rayon incident (1) arrive en incidence rasante, c'est à dire avec un angle de $\pi/2$ d'ou

$$i_{2,\,\mathrm{max}} = \arcsin\left(\frac{n_1}{n_2}\sin(\pi/2)\right) \approx 41{,}8°$$

Ainsi, peu importe l'angle du rayon incident, on aura toujours $i_2 < i_{2,\mathrm{lim}}$ et **il n'y aura alors jamais de réfléxion totale**.

Pour aller plus loin :
Cette question est donc plus subtile qu'il n'y parrait ! Il faut donc proceder avec méthode. Dans un premier temps, on regarde à quel condition il peut y avoir reflexion totale. On vérifie ensuite si cette considion est réalisable. On remarque ici que c'est impossible. En effet, $n_3 > n_1$ donc en combinant les 3ièmes lois de SD sur les deux dioptres, on peut montrer que $i_3 < i_1 < \pi/2$ et donc qu'il n'y aura jamais de reflexion totale.