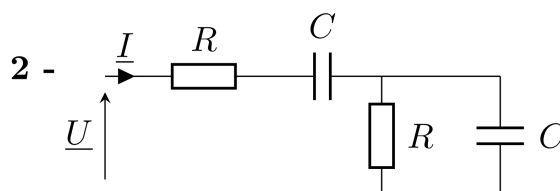
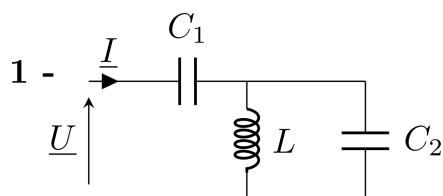


Correction du TD d'application



I Impédance équivalente

Déterminer l'impédance complexe équivalente de chacun des dipôles ci-dessous en RSF.



Réponse

1) On commence par convertir le circuit avec les impédances complexes :

- ◇ $\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{jC_1\omega}$;
- ◇ $\underline{Z}_L = jL\omega$;
- ◇ $\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{jC_2\omega}$.

On peut ensuite déterminer l'impédance équivalente à l'association en parallèle de L et C_2 . Avec les admittances, on a

$$\underline{Z}_{eq,1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{C_2}} + \frac{1}{\underline{Z}_L}} = \frac{1}{jC_2\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - \omega^2 LC_2}$$

Il suffit alors de faire l'association en série de \underline{Z}_{C_1} et de $\underline{Z}_{eq,1}$:

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{jL\omega}{1 - \omega^2 LC_2}$$

Il n'est ici pas nécessaire d'aller plus loin dans le calcul.

2) Ici, on utilise que $\underline{Z}_R = R$ et comme précédemment, on effectue l'association en parallèle des R et C de droite avant de faire l'association en série de R et C de gauche avec cette impédance équivalente :

$$\underline{Z}_{eq,1} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Et on a donc finalement

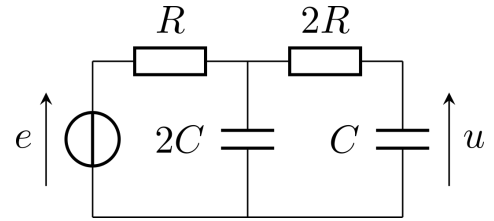
$$\underline{Z}_{eq} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$



II Obtention d'une équation différentielle

- 1) En utilisant les complexes, montrer que la tension $u(t)$ est solution de l'équation différentielle

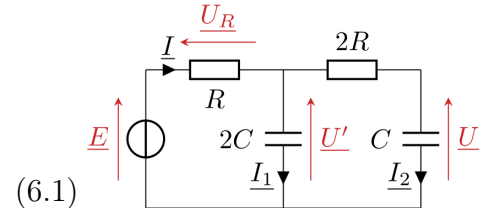
$$4\tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 5\tau \frac{du}{dt} + u(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



Réponse

On nomme les tensions et intensités dans le circuit, et on utilise la loi des nœuds et la loi d'Ohm généralisée :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R} \underline{U}_R &= \frac{1}{\underline{Z}_{2C}} \underline{U}' + \frac{1}{\underline{Z}_C} \underline{U} \\ \Leftrightarrow \underline{U}_R &= 2jRC\omega \underline{U}' + jRC\omega \underline{U} \end{aligned} \quad (6.1)$$



On utilise ensuite la loi des mailles à droite et à gauche, donnant respectivement :

$$\underline{U}' = \underline{U} + 2R\underline{I}_2 = \underline{U} + 2jRC\omega \underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{U}_R = \underline{E} - \underline{U}' = \underline{E} - \underline{U} - 2jRC\omega \underline{U}$$

On regroupe les équations dans (6.1) et on introduit $\tau = RC$:

$$\begin{aligned} \underline{E} - \underline{U} - 2j\omega\tau \underline{U} &= j\omega\tau (\underline{U} + 2j\omega\tau \underline{U}) + j\omega\tau \underline{U} \\ \Leftrightarrow \underline{E} &= \underline{U} + 5j\omega\tau \underline{U} + 4\tau^2 (j\omega)^2 \underline{U} \end{aligned}$$

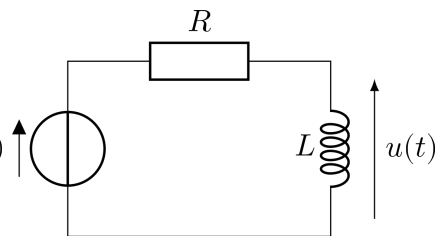
En identifiant les puissances de $j\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on a donc bien

$$e = u + 5\tau \frac{du}{dt} + 4\tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2}$$



III Circuit RL série en RSF

On considère le circuit ci-contre en régime sinusoïdal forcé, où la source de tension impose $e(t) = E \cos(\omega t)$ avec $E > 0$.



- 1) Déterminer l'amplitude de u à « très haute » ($\omega \rightarrow \infty$) et « très basse » ($\omega \rightarrow 0$) fréquence.

Réponse

Pour les comportements limites, on utilise la modélisation d'une bobine à haute et basse fréquence : étant donné que $\underline{Z}_L = jL\omega$, pour $\omega \rightarrow 0$ on a $\underline{Z}_L = 0$, et pour $\omega \rightarrow \infty$ on a $\underline{Z}_L \rightarrow \infty$. On a donc respectivement un fil et un interrupteur ouvert. En effet, l'impédance étant homogène à une résistance, une impédance nulle est semblable à une résistance nulle (un fil), et une impédance infinie est semblable à une résistance infinie (un interrupteur ouvert).

Or, la tension d'un fil est nul, donc

$$\boxed{u \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0}$$

Le courant ne peut traverser un interrupteur, donc en faisant la loi des mailles dans le circuit équivalent, on a $u_R = Ri = 0$, et forcément

$$\boxed{u \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} E}$$

- 2) Exprimer l'amplitude complexe \underline{U} de $u(t)$ en fonction de E , R , L et ω .

Réponse

Pour cela, on utilise la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} E \Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E}$$

- 3) Les tensions e et u peuvent-elles être en phase ? En opposition de phase ? En quadrature de phase ? Préciser le cas échéant pour quelle(s) pulsation(s).

Réponse

La phase de $e(t)$ est nulle par construction. On calcule donc la phase de u en prenant l'argument de son amplitude complexe :

$$\arg((\underline{U})) = \arg((jL\omega E)) - \arg((R + jL\omega)) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

où on peut prendre l'arctangente parce que la partie réelle est positive. Ainsi :

- 1) Signaux en phase

$$\Leftrightarrow \arg((\underline{U})) = 0 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \rightarrow \infty}$$

C'est donc mathématiquement possible et physiquement approchable, mais pas rigoureusement.

- 2) Signaux en opposition de phase

$$\Leftrightarrow \arg((\underline{U})) = \pi \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \rightarrow -\infty}$$

C'est donc mathématiquement possible, mais **physiquement impossible** : la pulsation est proportionnelle à la fréquence, et une fréquence ne saurait être négative.

- 3) Signaux en quadrature de phase

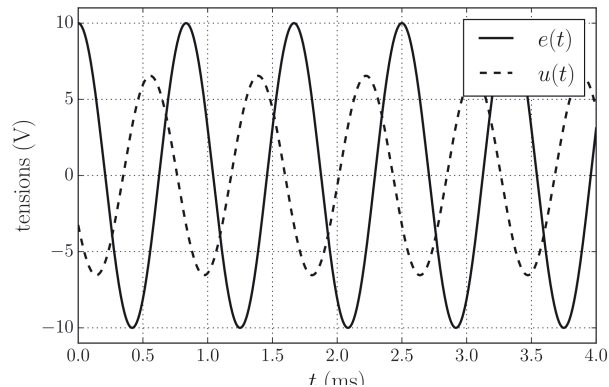
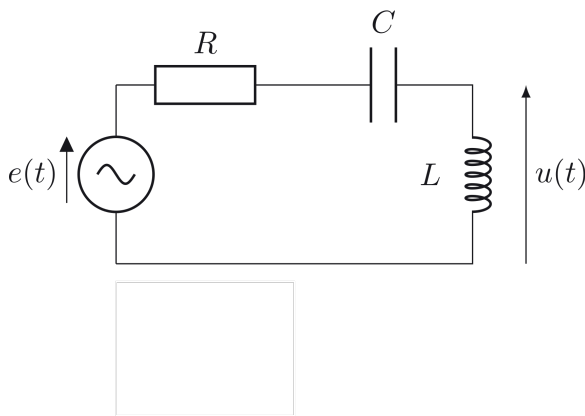
$$\Leftrightarrow \arg((\underline{U})) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 0}$$

C'est donc possible à la fois mathématiquement et physiquement, mais cela correspond à un signal d'entrée qui ne varie pas, c'est-à-dire un régime permanent : la sortie n'oscille donc pas non plus, et est simplement nulle. La quadrature de phase n'a donc pas vraiment de sens ici, la sortie est constamment nulle quand l'entrée est à son maximum.



IV Exploitation d'un oscillogramme en RSF

On considère le circuit ci-dessous. On pose $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. La figure ci-dessous représente un oscillogramme réalisé à la fréquence $f = 1,2 \times 10^3 \text{ Hz}$, avec $R = 1,0 \text{ k}\Omega$ et $C = 0,10 \text{ }\mu\text{F}$.



- 1) Dédurre de cet oscillogramme les valeurs expérimentales de E_m , U_m et φ .

Réponse

On lit l'amplitude de $e(t)$ à son maximum pour avoir $E_m = 10 \text{ V}$. On lit l'amplitude de $u(t)$ à son maximum pour avoir $U_m = 6 \text{ V}$. Pour la phase à l'origine des temps, on regarde le signal à $t = 0$: on lit $u(0) = U_m \cos(\varphi) = -3 \text{ V}$, soit

$$\cos(\varphi) = \frac{u(0)}{U_m} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(0) = -3 \text{ V} \\ U_m = 6 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$



- 2) Exprimer U_m et φ en fonction des composants du circuit.

Réponse

On utilise un pont diviseur de tension pour avoir l'amplitude complexe :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} E_m = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L}} E_m \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + \frac{1}{j^2\omega^2 CL}} E_m$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{\omega^2 LC}} E_m$$

On peut en vérifier l'homogénéité en se souvenant des résultats des chapitres précédents :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc} \quad \omega^2 LC \text{ adimensionné} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = \tau^{-1} \quad \text{donc} \quad \frac{R}{L\omega} \text{ adimensionné}$$

D'une manière générale, on exprimera les résultats de la sorte, avec une fraction dont le numérateur est homogène à la quantité exprimée alors que le dénominateur est adimensionné.

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module de cette expression :

$$U_m = |\underline{U}| \Leftrightarrow U_m = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$$

On trouve la phase en en prenant l'argument :

$$\begin{aligned}\varphi = \arg(\underline{U}) &= \underbrace{\arg(E)}_{=0} - \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}\right) \\ \Leftrightarrow \tan(\varphi) &= -\left(-\frac{R}{L\omega} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2}}\right) = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \Leftrightarrow \tan(\varphi) = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}\end{aligned}$$

Ici, il n'est pas évident de prendre l'arctangente de la tangente : la partie réelle de l'argument calculé n'est pas forcément positif (il l'est si $\omega^2 > \frac{1}{LC}$).



3) En déduire la valeur numérique de l'inductance L de la bobine.

Réponse

Il paraît évidemment plus simple de calculer L à partir de la phase, sachant qu'on a déterminé φ à la première question :

$$\begin{aligned}LC\omega^2 - 1 &= \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 + \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)} \\ \Leftrightarrow L &= \frac{1}{C\omega^2} + \frac{R}{\omega \tan(\varphi)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 0,10 \mu\text{F} \\ \omega = 2\pi f \\ f = 1,2 \times 10^3 \text{ Hz} \\ R = 1 \text{ k}\Omega \\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \end{cases} \\ \text{A.N. : } & \quad L = 9,9 \times 10^{-2} \text{ H}\end{aligned}$$

