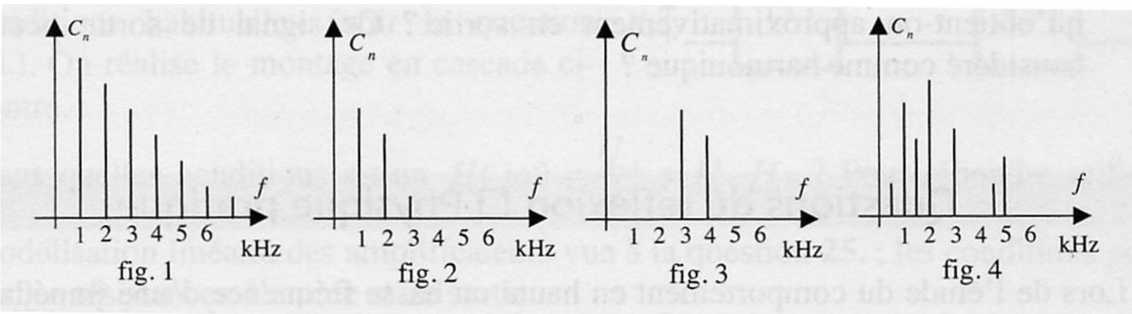
TD C8 - Filtrage analogique linéaire

Capacités exigibles

- *Faire le lien entre fonction de transfert et réponse d'un filtre linéaire :* tout les exercices !
- *Déterminer la nature d'un filtre sans calculer sa fonction de transfert :* exercices 1, 2, 3, 5, 6.
- *Construire ou utiliser un diagramme de Bode (asymptotes comprises), en particulier pour reconnaître des domaines intégrateur ou dérivateur :* exercices 2, 3, 5, 6.

1 Filtrage et spectres

Un signal périodique $e(t)$ (de fréquence 1 kHz), dont le spectre est donné en figure 1, est envoyé à l'entrée de trois filtres différents. On effectue l'analyse spectrale du signal de sortie pour chaque filtre, les spectres obtenus sont donnés en figure 2, 3 et 4.

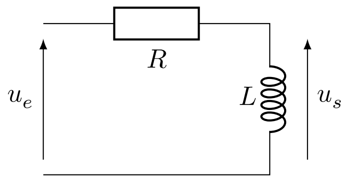


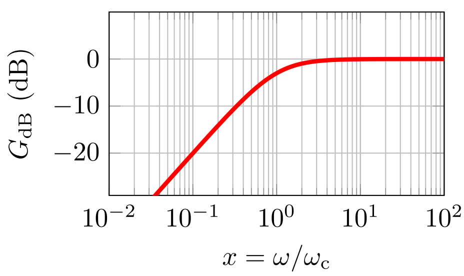
Quelles caractéristiques de chaque filtre peut-on déduire de ces spectres ?

2 Filtre avec une bobine

On considère le circuit ci-contre avec $R = 1,0$ kΩ et $L = 10$ mH.

1. Quel est la nature du filtre ?
2. Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme
$$\underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}}$$
avec H_0 et ω_c des constantes à préciser.
3. Le diagramme de Bode en gain en décibels est représenté ci-dessous. Montrer que la pente de l'asymptote pour $\omega \ll \omega_c$ est de 20 dB/décade.
4. On considère une tension d'entrée $u_e(t)$,somme de trois harmoniques de même amplitude, de même phase initiale, et de fréquences respectives $f_1 = 100$ Hz, $f_2 = 1$ kHz et $f_3 = 100$ kHz. Donner le spectre puis l'allure de $u_e(t)$ puis de $u_s(t)$.





3 Lecture de diagramme de Bode

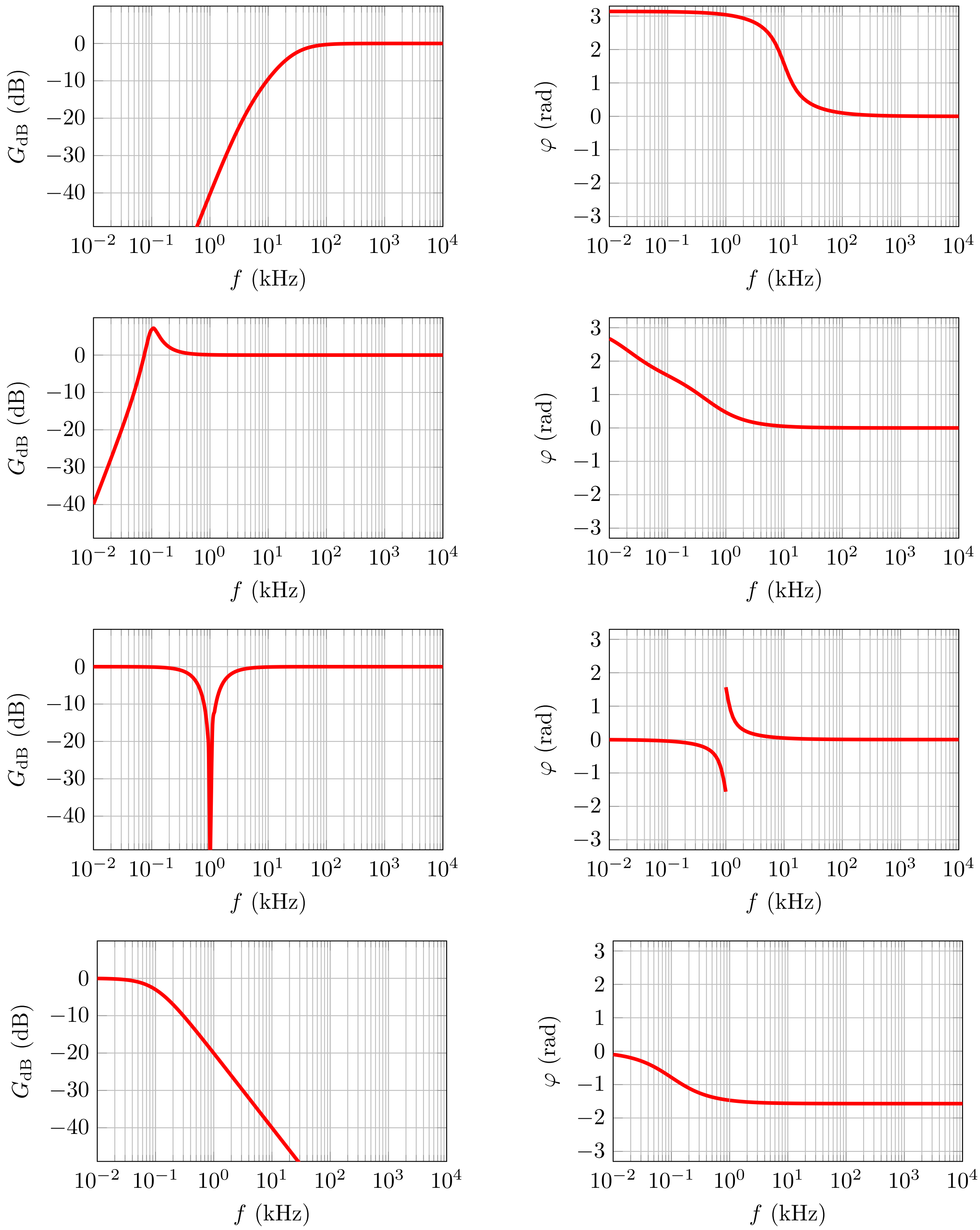
On donne page suivante les diagrammes de Bode de quatre filtres.

1. Indiquer le type de filtre dont il s'agit.

2. On envoie en entrée de chacun des filtres le signal

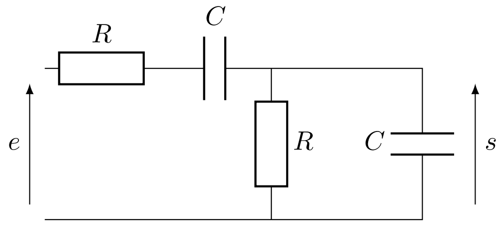
$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0\cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

où la fréquence $f = \omega/2\pi$ vaut 1 kHz. Déterminer l'expression du signal $s(t)$ de sortie du filtre.



4 Filtre de Wien

On s'intéresse au filtre de Wien représenté ci-contre. Ce type de filtre est notamment utilisé dans des oscillateurs auto-entretenus assez simples à réaliser : vous y reviendrez dans le cours d'électronique de PT.



1. Par analyse des comportements asymptotiques, déterminer le type de filtre dont il s'agit.
2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}$ du filtre.
3. On pose $\omega_0 = 1/RC$ et $x = \omega/\omega_0$. Écrire la fonction de transfert sous la forme
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}$$
en précisant les valeurs de H_0 et Q.
4. Calculer simplement le gain maximal du filtre, exprimer sa valeur de dB, et calculer le déphasage correspondant.
5. Représenter le diagramme de Bode asymptotique du filtre et en déduire qualitativement le tracé réel.
6. Calculer la pulsation propre ω_0 pour $R = 1,0$ kΩ et $C = 500$ nF. Donner le signal de sortie du filtre si le signal d'entrée est
$$e(t) = E_0 + E_0\cos(\omega t) + E_0\cos(10\omega t) + E_0\cos(100\omega t)$$
avec $E_0 = 10$ V et $\omega = 200$ rad.s^{-1}

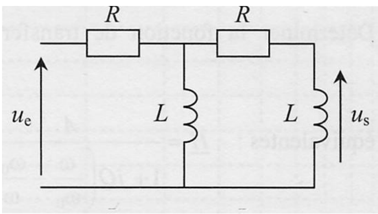
5 Filtre ADSL

Le chien de Madame Michu à mangé son filtre ADSL ! Qu'à cela ne tienne, elle va en fabriquer un elle-même ! Les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

- les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4kHz ;
- les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

1. Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

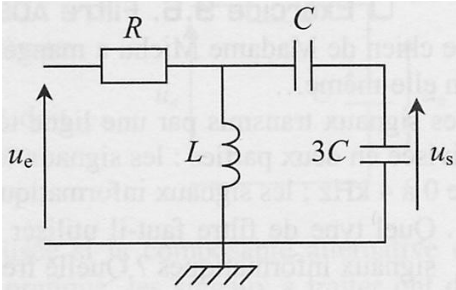
Madame Michu réalise le filtre ci-dessous.



1. Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique en basses fréquences et en hautes fréquences. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.
2. Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :
$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} \qquad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$
et ω_0 à exprimer en fonction de R et L.
3. Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.
4. Madame Michu possède des résistances de 100 Ω. Quel valeur d'inductance L doit-elle choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

6 Filtre de Colpitts

On considère le quadripôle suivant, où C est une capacité, R une résistance et L une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé de pulsation ω, en sortie «ouverte» (rien n'est branchées aux bornes de sortie).



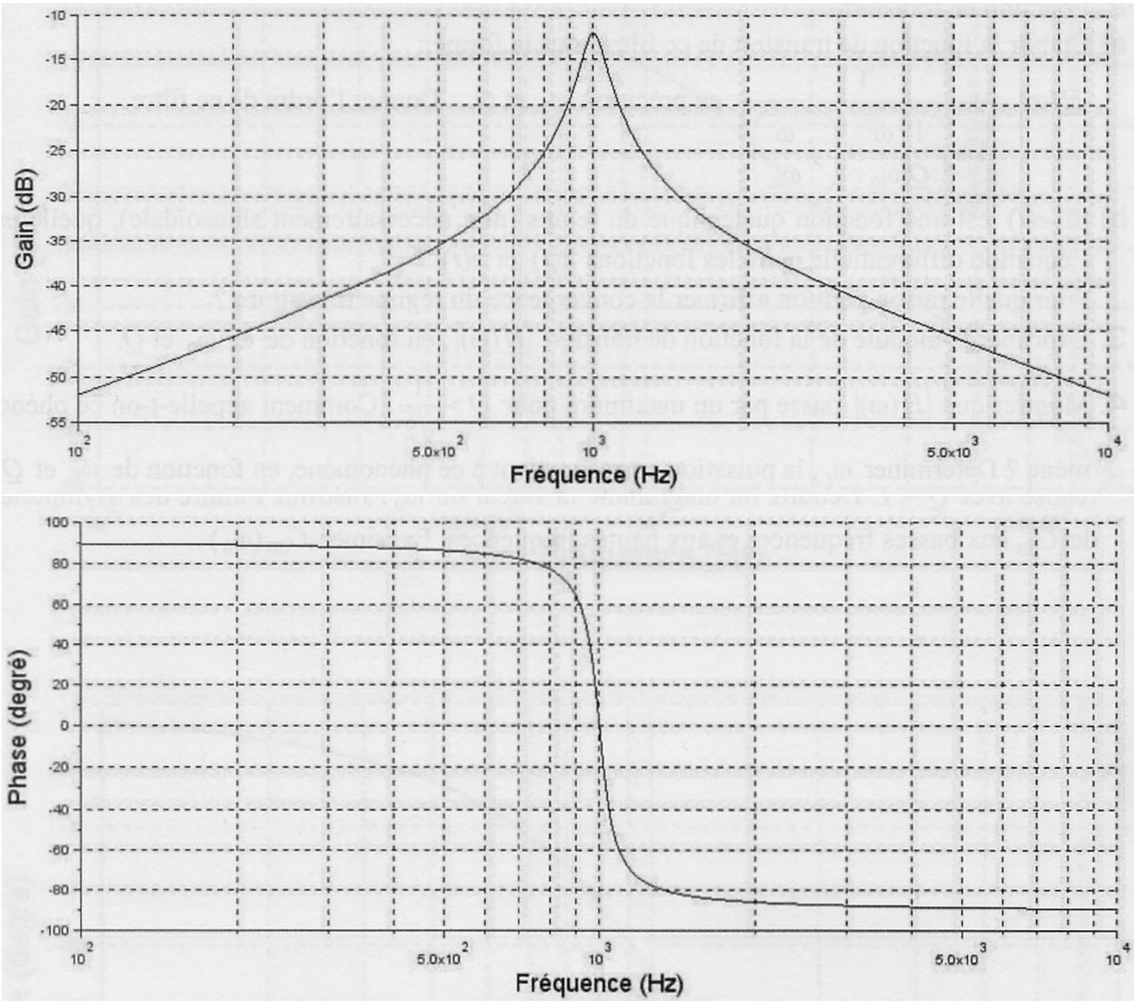
1. Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en haute fréquence et en basse fréquence. De quel type de filtre s'agit-il ?

2. Déterminer la fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \dfrac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e}$ et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)} = \frac{j\frac{A}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + \frac{j}{Q}\frac{\omega}{\omega_0}}$$

en introduisant des constantes A, ω_0 et Q dont on précisera les expressions en fonctions de R, L et C.

3. Le diagramme de Bode de ce quadripôle pour $Q = 10$ est donné ci-dessous. Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme. Déduire du diagramme la valeur de la fréquence d'accord $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi}$ ainsi que des fréquences de coupures.



7 Filtre de Butterworth d'ordre 3

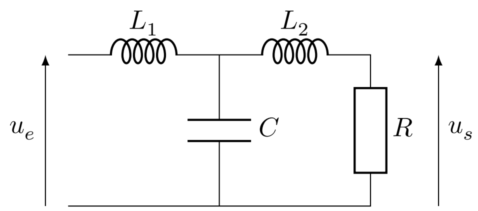
On veut réaliser un filtre de Butterworth d'ordre 3 dont le module H de sa fonction de transfert harmonique en tension $\underline{H}$ s'exprime :

$$H = |\underline{H}| = \sqrt{\frac{1}{1+\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}} = \sqrt{\frac{1}{1+x^6}} \qquad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0} \text{ et } \omega_0 \text{ une constante positive}$$

a) Montrer qu'un fonction de transfert $\underline{H} = \dfrac{1}{1+2jx+2(jx)^2+(jx)^3}$ correspond bien à un filtre de Butterworth d'ordre 3.

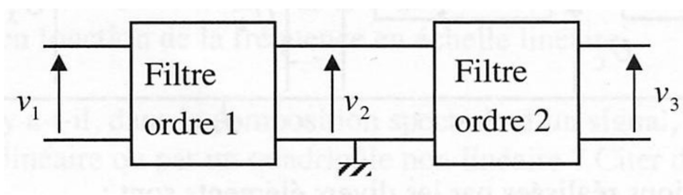
b) Étudier et représenter le diagramme de Bode asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.

c) On considère le quadripôle ci-dessous :



Calculer en fonction de R et ω_0, les valeurs de L_1, L_2 et C pour que ce filtre soit un filtre de Butterworth d'ordre 3.

d) Justifier que l'on puisse réaliser le filtre de Butterworth d'ordre 3 en associant en cascade un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2, comme sur le circuit suivant :



Préciser la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.