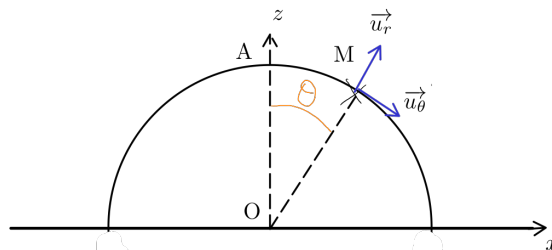


Correction TD entraînement

I Glissade d'un pingouin sur un igloo

- 1) ◇ **Système** : {pingouin}
 ◇ **Référentiel** : \mathcal{R}_{sol} supposé galiléen
 ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ avec \vec{u}_θ dans le sens de θ
 ◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}\vec{OM}(t) &= R\vec{u}_r \\ \vec{v}(t) &= R\dot{\theta}\vec{u}_\theta \\ \vec{a}(t) &= R\ddot{\theta}\vec{u}_\theta - R\dot{\theta}^2\vec{u}_r\end{aligned}$$



- ◇ **Origine et instant initial** :

$$\begin{aligned}\vec{OM}(0) &= \vec{OA} \Rightarrow \theta(0) = 0 \\ \vec{v}(0) &= \vec{0} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0\end{aligned}$$

- ◇ **BDF** :

$$\begin{aligned}\text{Poids} \quad \vec{P} &= mg(-\cos\theta\vec{u}_r + \sin\theta\vec{u}_\theta) \\ \text{Réaction} \quad \vec{R} &= R_N\vec{u}_r\end{aligned}$$

- ◇ **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\cos\theta + R_N \\ mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 \\ \ddot{\theta} = \frac{g}{R}\sin\theta \end{cases} \quad (3.1)$$

$$(3.2)$$

L'équation du mouvement est celle qui donne l'équation d'oscillateur harmonique aux petits angles, et qu'on a déjà utilisée en cours sur le pendule, et linéaire en θ : l'équation (3.2). L'équation (3.1) contient l'information sur le contact à l'igloo.

- 2) En prenant (3.2) $\times \dot{\theta}$, on a

$$\begin{aligned}\ddot{\theta}\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) &= \frac{g}{R}\frac{d}{dt}(-\cos\theta) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t=0}^t \frac{d\dot{\theta}^2}{dt}dt &= \frac{g}{R}\int_{t=0}^t \frac{d(-\cos\theta)}{dt}dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\right]_{t=0}^t &= \frac{g}{R}[-\cos\theta]_{t=0}^t \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 &= \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)\end{aligned}$$

- 3) En reprenant (3.1), on peut remplacer $\dot{\theta}^2$:

$$\begin{aligned}R_N &= mg\cos\theta - mR\frac{2g}{R}(1 - \cos\theta) \\ \Leftrightarrow R_N &= mg(3\cos\theta - 2)\end{aligned}$$

- 4) La condition de support d'un solide est $R_N > 0$: le pingouin décolle du support si la force de réaction est nulle, soit $R_N = 0$. Or,

$$\begin{aligned} R_N &= 0 \\ \Leftrightarrow 3 \cos \theta - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \theta &= \arccos\left(\frac{2}{3}\right) \end{aligned}$$

Une application numérique donne $\theta = 48,2^\circ$.

II Course de F1

- 1) La voiture A d'ALONSO entame son virage dès qu'elle passe par l'axe Δ , et parcourt un demi-cercle de longueur

$$D_A = \pi R_A = 283 \text{ m}$$

En revanche, la voiture B de BUTTON continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$D_B = 2(R_1 - R_2) + \pi R_B = 266 \text{ m}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

- 2) Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0,8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$v_A = \sqrt{aR_A} = 26,6 \text{ m s}^{-1} \quad \text{et} \quad v_B = \sqrt{aR_B} = 24,3 \text{ m s}^{-1}$$

- 3) Calculons le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage. On sait que

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

d'où les résultats

$$\Delta t_A = 10,6 \text{ s} \quad \text{et} \quad \Delta t_B = 10,9 \text{ s}$$

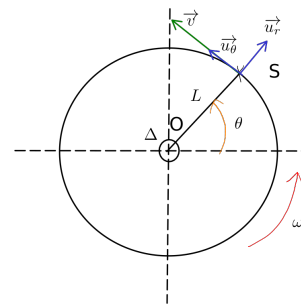
Finalement, ALONSO va plus vite que BUTTON pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la meilleure des deux**. À ne pas tenter en vérifiant chez soi, mais de quoi briller sur Mario Kart... ?

III Entraînement d'une spationaute

- ◇ **Système** : {spationaute}
- ◇ **Référentiel** : référentiel du laboratoire, supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ avec \vec{u}_θ selon le sens de rotation

◇ Repérage :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OS}(t) &= L\vec{u}_r \\ \vec{v}_S(t) &= L\omega\vec{u}_\theta \\ \vec{a}_S(t) &= L\dot{\omega}\vec{u}_\theta - L\omega^2\vec{u}_r\end{aligned}$$



- 1) Cf. schéma.
- 2) Fait en introduction
- 3) Au bout de quelques τ , $\omega(t) = \omega_0$ et le mouvement sera circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\begin{cases} \vec{v}_S(t) = L\omega_0\vec{u}_\theta \\ \vec{a}_S(t) = -L\omega_0^2\vec{u}_r \end{cases}$$

La norme de l'accélération subie est alors $\|\vec{a}_S\| = L\omega_0^2$.

$$4) \quad a_S = 10g \Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9,81 \text{ m s}^{-2} \\ L = 10,0 \text{ m} \end{cases} \quad (3.3)$$

$$\text{A.N. : } \omega_0 = 3,13 \text{ rad s}^{-1} \approx 0,50 \text{ tour s}^{-1} \quad (3.4)$$

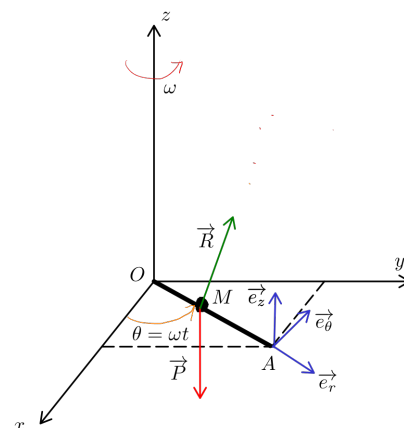
Ordres de grandeurs

- ◇ Accélération latérale en F1 : $[4 ; 5] g$;
- ◇ Accélération latérale en avion de chasse : $[9 ; 10] g$ pendant quelques secondes max ;
- ◇ Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse : $\approx 20 g$ (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;
- ◇ Accélération négative frontale en accident de voiture : $[40 ; 60] g$! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.

IV Anneau sur une tige en rotation

- 1) ◇ **Système** : {anneau} point matériel M de masse m
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
- ◇ **Repère** : cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$
- ◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{OM} &= r\vec{e}_r \\ \vec{v} &= \dot{r}\vec{e}_r + r\dot{\theta}\vec{e}_\theta \\ &= \dot{r}\vec{e}_r + r\omega\vec{e}_\theta \\ \vec{a} &= \ddot{r}\vec{e}_r + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e}_\theta + \dot{r}\omega\vec{e}_\theta - r\omega^2\vec{e}_r + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0} \\ &= (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e}_r + 2r\omega\vec{e}_\theta\end{aligned}$$



◇ **Conditions initiales** :

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0$$

◇ **BDF** : pas de frottements donc pas de composante sur \vec{e}_r :

$$\begin{aligned}\text{Poids} \quad \vec{P} &= m\vec{g} = -mg\vec{e}_z \\ \text{Réaction support} \quad \vec{R} &= R_\theta\vec{e}_\theta + R_z\vec{e}_z\end{aligned}$$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0 \\ 2m\dot{r}\omega = R_\theta \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{r} - \omega^2 r = 0 \\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega \\ R_z = mg \end{cases} \quad (3.5)$$

$$(3.6)$$

$$(3.7)$$

2) On résout (3.5) avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} \ddot{r} - \omega^2 r &= 0 \\ \Rightarrow s^2 - \omega^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow s^2 &= \omega^2 \\ \Leftrightarrow s &= \pm\omega \end{aligned}$$

On a donc des solutions de la forme

$$r(t) = Ae^{\omega t} + Be^{-\omega t}$$

Or, avec les CI :

$$\begin{aligned} r(0) &= r_0 \\ \Leftrightarrow r_0 &= A + B \end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{r}(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= A\omega - B\omega \\ \Leftrightarrow A &= B \end{aligned}$$

Soit

$$A = B = \frac{r_0}{2} \Rightarrow r(t) = \frac{r_0}{2}(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = r_0 \operatorname{ch}(\omega t)$$

3) On reprend (3.6) et (3.7) avec $\dot{r} = \omega r_0 \operatorname{sh}(\omega t)$:

$$\vec{R} = 2mr_0\omega^2 \operatorname{sh}(\omega t)\vec{e}_\theta + mg\vec{e}_z$$

4) L'anneau quitte la tige en τ quand $r(\tau) = \ell$, soit

$$\begin{aligned} \ell &= r_0 \operatorname{ch}(\omega \tau) \\ \Leftrightarrow \tau &= \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}(\omega \tau) \end{aligned}$$

V Pendule conique

1) On utilisera un repère cylindrique pour étudier la rotation.

2) ◇ **Système :** $\{M\}$ masse m

◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

◇ **Repère :** $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (voir schéma)

◇ **Repérage** : $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0, \dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r = L \sin \alpha \vec{u}_r$$

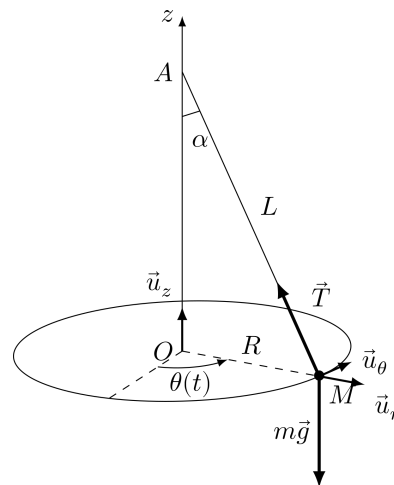
$$\begin{aligned}\vec{v}_M &= L\dot{\theta} \sin \alpha \vec{u}_\theta \\ &= L\omega \sin \alpha \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

$$\vec{a}_M = -L\omega^2 \sin \alpha \vec{u}_r$$

◇ **BDF** :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$

Tension $\vec{T} = T(-\sin \alpha \vec{u}_r + \cos \alpha \vec{u}_z)$



3) On applique le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2 \sin \alpha = -T \sin \alpha \\ 0 = T \cos \alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \frac{mg}{\cos \alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos \alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos \alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos \alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{lim}}}$$

4) Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$, alors $\cos \alpha \xrightarrow{\omega \gg \omega_{\text{lim}}} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow{\omega \gg \omega_{\text{lim}}} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

5) On trouve

$$\boxed{\cos \alpha = 0,138 \Leftrightarrow \alpha = 82^\circ}$$