Mécanique – chapitre 4

Approche énergétique du mouvement

I Notions énergétiques

A Énergie

L'énergie est un concept physique très puissant et présent dans tout les domaines de la physique mais qu'il est difficile de définir simplement. En voici une première définition qualitative :

Définition : énergie

L'énergie d'un système est sa capacité à agir sur lui-même ou d'autres systèmes.

Unité : le **Joule** (J)

Ainsi, le mouvement d'un corps, les échanges de chaleur, les courants électriques et tous les phénomènes physiques résultent d'échanges d'énergie. Elle respecte une propriété principale, fondamentale de l'approche du monde qui nous entoure :

Propriété : conservation de l'énergie

L'énergie est une grandeur conservative. Elle ne peut être créée ou détruite. Elle ne peut que changer de forme et/ou passer d'un système à un autre.

Ces notions serons retravaillées en thermodynamique.

B Puissance

Une énergie totale peut varier différemment selon les conditions du système, et notamment varier plus ou moins vite. Cette variation est une information caractéristique de l'évolution d'un système : une voiture qui freine pour diminuer son énergie cinétique peut le faire lentement ou rapidement et donnerons des ressentis physiques très différents. On définit pour ça la puissance d'une énergie :

Puissance

La **puissance** $\mathcal{P}$ d'une énergie $\mathcal{E}$ traduit sa **variation temporelle**, et on a

$$\boxed{\mathcal{P} = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t}}$$

L'unité d'une puissance est donc homogène à des $\mathrm{J\,s^{-1}}$, et se compte couramment en **Watts** (W). On a

$$\boxed{1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\,s^{-1}}}$$

II Énergie cinétique et travail d'une force constante

A Énergie cinétique

Définition : énergie cinétique

Un point matériel M de masse m allant à la vitesse v dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$ a pour énergie cinétique :

$$\boxed{\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{2} m v_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})^2}$$

L'unité d'une énergie est en $\boxed{\textbf{joules}}$ (J), et dépend du référentiel.

B Travail d'une force

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

- Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.
- Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.
- Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.
- Lorsqu'un objet freine sur un support horizontal, la réaction normale ne cause pas la variation de son énergie cinétique (c'est la réaction tangentielle qui le freine).

Le travail est une grandeur physique construite pour rendre compte de l'effet d'une force sur son énergie cinétique.

- En l'absence de déplacement, le travail doit être nul.
- Si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail doit être nul.
- Si la force est dans le sens du déplacement, le travail doit être positif et maximal.
- Si la force est dans le sens opposé au déplacement, le travail doit être négatif (et minimale).

Définition : travail d'une force constante

Le travail W_{AB} d'une force **constante** $\overrightarrow{F}$ sur un chemin $\overrightarrow{\mathrm{AB}}$ est

$$\boxed{W_{\mathrm{AB}}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

où « $\cdot$ » désigne le produit scalaire entre deux vecteurs.

Un **travail** est homogène à une **énergie**, donc s'exprime en $\boxed{\textbf{joules}}$.

Remarques

- Si $W_{\mathrm{AB}} > 0$, on dit que le travail est **moteur** ; si $W_{\mathrm{AB}} < 0$ il est **résistant**.
- $W_{\mathrm{AB}} = 0 \Rightarrow$ soit $\overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}} = \overrightarrow{0}$, soit $\overrightarrow{\mathrm{AB}} \perp \overrightarrow{F}$.

C Exemples de travaux

On peut calculer un travail avec deux formes mathématiques équivalentes :

- En utilisant une base de projection, *par exemple* cartésienne, on décompose la force et le déplacement :

$$\overrightarrow{F} = F_x\overrightarrow{u_x} + F_y\overrightarrow{u_y} + F_z\overrightarrow{u_y} = \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = x\overrightarrow{u_x} + y\overrightarrow{u_y} + z\overrightarrow{u_z} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

  On a alors

$$\boxed{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = xF_x + yF_x + zF_z} = \begin{matrix} \\ + \\ + \end{matrix} \begin{pmatrix} F_x \\ F_y \\ F_z \end{pmatrix} \begin{matrix} \times \\ \times \\ \times \end{matrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

- En utilisant une autre définition du produit scalaire :

$$\boxed{\overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \left\|\overrightarrow{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| \cos\alpha}$$

  avec α l'angle entre les vecteurs.

Application

On a vu en TD qu'un objet, de vitesse initiale $v_0\overrightarrow{u_x}$, soumis à une force de frottements solides sur un support horizontal subissait, lors de son mouvement avec glissement,

$$\overrightarrow{F} = -fmg\overrightarrow{u_x}$$

et parcourait pendant la phase de freinage la distance

$$D = \frac{{v_0}^2}{2fg}$$

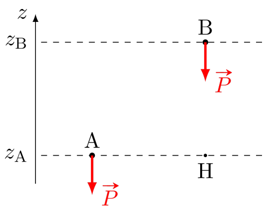
Calculer le travail de la force de frottements sur cette distance. Est-il moteur ou résistant ?

$$\begin{aligned}
& W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} \\
\Leftrightarrow\ & W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \left\|\vec{F}\right\| \times \left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}}\right\| \times \cos(\pi) \\
\Leftrightarrow\ & W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = fmg \times \frac{{v_0}^2}{2fg} \times (-1) \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = -\frac{1}{2} m{v_0}^2}
\end{aligned}$$

Le travail étant négatif, on dit qu'il est (et que la force est) **résistant**(e). On observe que l'énergie initiale du système, son énergie cinétique, a été dissipée par la force de frottements.

Application

Calculer le travail du poids lors d'un déplacement avec changement d'altitude.



$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) = \vec{P} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}}$$

En projection cartésienne :

$$\vec{P} = -mg\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\mathrm{AB}} = (x_{\mathrm{B}} - x_{\mathrm{A}})\vec{u_x} + (y_{\mathrm{B}} - y_{\mathrm{A}})uy + (z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})\vec{u_z}$$

$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) = -mg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$$

Propriété : travail du poids

Le travail du poids entre un point A et un point B est :

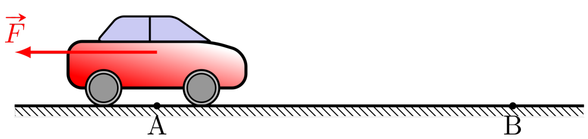
$$\boxed{W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) = mg(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}})}$$

Application

On considère une voiture allant d'un point A à un point B, éloignés de 100 km, avec une vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v \vec{v}$$

Déterminer son travail, et faire l'application numérique pour $v = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}}$ puis $80\,\mathrm{km\,h^{-1}}$. On donne $S = 3{,}07\,\mathrm{m^2}$, $c_x = 0{,}33$, $\rho = 1{,}3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.



$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = \vec{F} \cdot \overrightarrow{\mathrm{AB}} = -F \times \mathrm{AB}$$

Le travail est négatif, la force est résistante.

- $v = 50\,\mathrm{km\,h^{-1}} \Rightarrow W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = -1{,}27 \times 10^7\,\mathrm{J}$, soit $\approx 0{,}4\,\mathrm{L}$ d'essence ;
- $v = 80\,\mathrm{km\,h^{-1}} \Rightarrow W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}) = -3{,}25 \times 10^7\,\mathrm{J}$, soit $\approx 1\,\mathrm{L}$ d'essence.

Ainsi, dans certains cas le travail ne dépend pas que du point de départ et d'arrivée, mais peut dépendre de la **façon** d'y aller (vitesse, chemin suivi...). En realité,

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

D Théorème de l'énergie cinétique

Théorème de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, un point matériel M de masse m, d'énergie cinétique $\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$ et subissant les forces extérieures $\vec{F}_i$ sur la distance AB vérifie

$$\boxed{\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \mathcal{E}(\mathrm{B}) - \mathcal{E}(\mathrm{A}) = \sum_i W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_i)}$$

Application

Déterminer la vitesse d'une skieuse en bas d'une piste de $h = 5\,\mathrm{m}$ de dénivelé partant avec une vitesse nulle, si on néglige les frottements.

- $\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$: l'énergie cinétique initiale est nulle en supposant une vitesse initiale nulle ; en bas de la piste, on a la vitesse v, soit
$$\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = \frac{1}{2}mv^2 - 0 = \frac{1}{2}mv^2$$
- $W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_i)$: la réaction de la piste est perpendiculaire au mouvement, donc son travail est nul. Pour le poids, on a
$$W_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) = mg(z_{\mathrm{A}} - z_{\mathrm{B}}) = mgh$$

Ainsi, avec le TEC entre le haut et le base de la piste, on a

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gh} = 10\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

E Quand utiliser une approche énergétique ?

- Si l'on veut connaître seulement une vitesse / une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.
- Si on cherche les équations horaires / un temps / une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

Dans tous les cas, ça donne le même résultat !

III Puissance d'une force et théorème de la puissance cinétique

A Définition

Si la puissance est en effet la dérivée d'une énergie par rapport au temps, on peut l'exprimer comme étant la rapidité avec laquelle un travail (homogène à une énergie) peut être effectué. La puissance moyenne ainsi définie comme

$$\mathcal{P}_m = \frac{W_{\mathrm{AB}}}{\Delta t}$$

Comme pour la vitesse et l'accélération, on définit cette grandeur sur un temps infinitésimal :

Définition : puissance instantanée d'une force

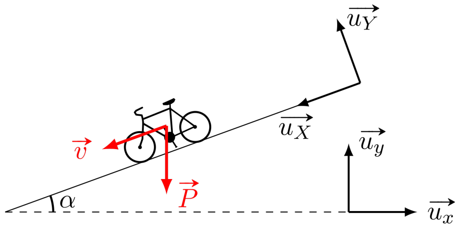
On définit la **puissance instantanée** d'une force $\vec{F}$ comme étant :

$$\boxed{\mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}) = \vec{F}\cdot\vec{v}_{/\mathcal{R}}}$$

Elle dépend du référentiel, et s'exprime en **watts** (W).

Application

Calculer la puissance du poids lors d'une descente à vélo d'une pente d'angle α.



Dans la base $(\overrightarrow{u_X},\overrightarrow{u_Y})$:

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg(-\cos\alpha\overrightarrow{u_Y} + \sin\alpha\overrightarrow{u_X})$$
$$\text{et}\quad \vec{v} = v\overrightarrow{u_X}$$

Ainsi, dans le référentiel de la route :

$$\boxed{\mathcal{P}(\vec{P}) = \vec{P}\cdot\vec{v} = mgv\sin\alpha}$$

Dans ce cas, la puissance du poids est positive : le poids en moteur. Dans le cas de la montée, on inverse le sens de $\vec{v}$, et le poids devient résistant.

On aurait pu obtenir ce résultant et remarquant que l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ et $\pi/2-\alpha$, et utiliser $\cos(\pi/2-\alpha) = \sin\alpha$.

B Théorème de la puissance cinétique

Théorème de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen $_{/\mathcal{R}}$, la variation instantanée de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la somme des puissances de forces qui s'exercent sur ce point :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)}$$

Démonstration

Bilan de puissance

$$m\vec{a} = \sum_i \vec{F}_i$$
$$\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} = \sum_i \vec{F}_i\cdot\vec{v}$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_i)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}_{/\mathcal{R}}(\vec{F}_i)}$$

Définition de $\mathcal{E}_c$

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\vec{v}\cdot\vec{v}\right)\\ &= \frac{1}{2}m\left(\vec{v}\cdot\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\right)\\ &= m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v}\\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} &= \left(\sum_i \vec{F}_i\right)\cdot\vec{v}\end{aligned}$$

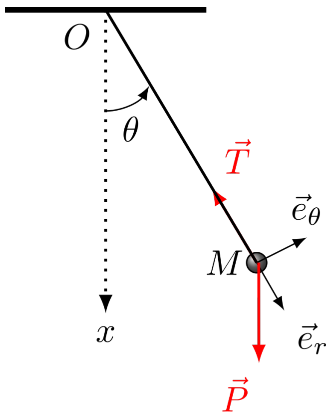
Application

Justifier que les frottements conduisent à une baisse de l'énergie cinétique.

Les frottements sont dans la direction opposée à la vitesse, donc leur puissance est négative. La dérivée de l'énergie cinétique étant égale à la somme des puissances des forces est donc négative : l'énergie cinétique décroît.

Application

Établir l'équation différentielle du pendule.



Le mouvement étant circulaire, $\vec{v} = \ell\dot{\theta}\vec{u_\theta}$ et on a

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

De plus, $\vec{v} \perp \vec{T}$ et l'angle entre $\vec{v}$ et $\vec{P}$ est $\pi/2 + \theta$:

$$\vec{T}\cdot\vec{v} = 0 \quad \text{et} \quad \vec{P}\cdot\vec{v} = mg \times \ell\dot{\theta} \times \cos\left(\frac{\pi}{2} + \theta\right) = -mg\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

Avec le TPC,

$$m\ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0 - mg\ell\dot{\theta}\sin\theta$$

et en simplifiant par $m\ell^2\dot{\theta}$:

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

C Quand appliquer le TPC ?

- Si le mouvement est **selon une coordonnée** (x, y ou z en cartésiennes, θ en coordonnées cylindriques), il est pertinent d'utiliser le TPC.
- Sinon (chute libre avec angle par exemple), on revient au PFD qui contient toute l'information.

IV Travail élémentaire

A Définition

La variation d'énergie cinétique due à une force $\vec{F}$ pendant un temps infinitésimal dt est, d'après le TPC :

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_c = \sum \vec{F}\cdot\vec{v}\,\mathrm{d}t$$

On retrouve le déplacement élémentaire $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \vec{v}\,\mathrm{d}t$. Ainsi, ayant deux énergies à gauche et à droite, on définit :

Définition : travail élémentaire

Le travail élémentaire δW d'une force $\vec{F}$ sur un déplacement infinitésimal $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ est :

$$\boxed{\delta W = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

Attention

Il ne faut pas confondre la notation δ et la notation d.

La notation δ fait référence au fait que le travail total dépend *a priori* du chemin suivi et de la vitesse à laquelle on parcourt ce chemin, et non pas uniquement du point de départ et du point d'arrivée. Un travail se définit sur une **distance**, pas ~~en un point~~. On peut écrire :

$$\int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_c = \mathcal{E}_c(B) - \mathcal{E}_c(A) \quad \text{et} \quad \int_A^B \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{OB} - \overrightarrow{OA} = \overrightarrow{AB}$$

mais il est absurde d'écrire

$$\xcancel{\int_A^B \delta W = W(B) - W(A)}$$

Propriété

Le travail d'une force sur un chemin AB se déduit du travail inifitésimal par :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \delta W}$$

B Exemples

IV.B.1 Poids

On a

$$\vec{P} = -mg\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{u_x} + \mathrm{d}y\,\vec{u_y} + \mathrm{d}z\,\vec{u_z}$$

D'où $\delta W = -mg\,\mathrm{d}z$ et

$$W_{AB} = \int_A^B \delta W = -mg \int_A^B \mathrm{d}z$$

et ainsi, on retrouve le résultat précédent :

$$\boxed{W_{AB}(\vec{P}) = mg(z_A - z_B)}$$

IV.B.2 Force de rappel élastique

$$\vec{F}_r = -k(x - \ell_0)\vec{u_x} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \mathrm{d}x\,\vec{u_x} + \mathrm{d}y\,\vec{u_y} + \mathrm{d}z\,\vec{u_z}$$

D'où $\delta W = -k(x - \ell_0)\,\mathrm{d}x$ et

$$W = \int_A^B \delta W = -k \int_A^B (x - \ell_0)\,\mathrm{d}x = -k \left[\frac{1}{2}(x - \ell_0)^2\right]_A^B$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W = -\frac{1}{2}k\left((x_B - \ell_0)^2 - (x_A - \ell_0)^2\right)}$$

C TEC

On peut alors démontrer le TEC :

Démonstration

$$\mathrm{d}\mathcal{E}_c = \sum_i \vec{F}_i \cdot \vec{v}\mathrm{d}t = \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$$\Rightarrow \int_A^B \mathrm{d}\mathcal{E}_c = \int_A^B \sum_i \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM} = \sum_i \int_A^B \vec{F}_i \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{OM}$$

$$\Leftrightarrow \Delta_{AB}\mathcal{E}_c = \sum_i \int_A^B \delta W_i$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_c = \sum_i W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_i)}$$

V Énergie potentielle et énergie mécanique

A Forces conservatives et non-conservatives

Comme on l'a vu, le travail **peut** dépendre du chemin suivi. Dans le cas du poids ou de la force de rappel, nous voyons que le travail ne dépend cependant que des coordonnées des points de départ et d'arrivée ; ce sont des forces particulières à cet égard, d'où la définition :

Définition

Une force est dite **conservative** si son travail de A à B ne dépend pas du chemin suivi ou de la vitesse, mais uniquement des **positions A et B**. Elle est non-conservative dans le cas contraire.

Exemples

Forces conservatives :
- Le poids ;
- La force de rappel d'un ressort ;
- La force gravitationnelle ;
- La force électrostatique.

Forces non-conservatives :
- Frottement fluide ;
- Frottement solide…

Tous les frottements sont non-conservatifs, puisqu'en faisant un détour pour aller de A à B, les frottements s'exerceront plus longtemps et donc la valeur du travail effectué sera plus élevé.

B Énergie potentielle

Dans le cas d'une force conservative, on remarque qu'on peut donc légitimement l'écrire avec une forme différentielle d plutôt qu'avec δ, définissant l'**énergie potentielle** d'une force :

Définition

À une force **conservative** $\vec{F}_{\text{cons}}$ s'associe une énergie **potentielle** $\mathcal{E}_p$ telle que :

$$\boxed{\begin{gathered}\delta W(\vec{F}_{\text{cons}}) = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p \\ \Leftrightarrow W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_{\text{cons}}) = -\Delta_{\mathrm{AB}}\mathcal{E}_p = -(\mathcal{E}_p(\mathrm{B}) - \mathcal{E}_p(\mathrm{A}))\end{gathered}}$$

Exemples

- **Énergie potentielle de pesanteur** : on a démontré que

$$\delta W(\vec{P}) = -mg\,\mathrm{d}z \Leftrightarrow \mathrm{W}_{\mathrm{AB}}(\vec{P}) = -mg(z_{\mathrm{B}} - z_{\mathrm{A}})$$

Ainsi, en identifiant avec les formes ci-dessus, on obtient

$$\mathcal{E}_{p,p}(\mathrm{M}) = mgz + C$$

L'énergie potentielle est toujours définie à une constante près.

L'énergie potentielle de pesanteur s'exprime

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,p} = mgz}$$

avec z l'altitude par rapport à l'origine.

– **Énergie potentielle élastique** : on a démontré que

$$\delta W = -k(x-\ell_0)\,\mathrm{d}x \Leftrightarrow W = -\frac{1}{2}k\left((x_\mathrm{B}-\ell_0)^2-(x_\mathrm{A}-\ell_0)^2\right)$$

Ainsi, en identifiant avec les formes ci-dessus, on obtient

$$\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + C$$

L'énergie potentielle élastique d'un ressort s'exprime

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}} = \frac{1}{2}k(\ell-\ell_0)^2}$$

avec ℓ la longueur du ressort

C Gradient

Dans certaines situations, on souhaite exprimer une force conservative $\overrightarrow{F}_\mathrm{cons}$ associée à une énergie potentielle $\mathcal{E}_p(\mathrm{M})$ connue. Pour cela, on utilise l'opérateur **gradient d'une fonction scalaire** $f(x,y,z)$, dépendant uniquement de la position du point M dans l'espace :

Définition : gradient (cartésien)

L'opérateur **gradient** d'une fonction **scalaire** $f(x,y,z)$, noté $\overrightarrow{\mathrm{grad}}$ ou parfois $\overrightarrow{\nabla}$ [a], est :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f = \frac{\partial f}{\partial x}\overrightarrow{u_x} + \frac{\partial f}{\partial y}\overrightarrow{u_y} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{\partial}{\partial y} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(x,y,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f(x,y,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

avec $\dfrac{\partial}{\partial x}$ la **dérivée partielle** (∂ se lit « d rond ») de f par rapport à la variable x, les autres variables étant constantes.

Le vecteur gradient indique la direction de la **plus forte augmentation** et est perpendiculaire aux lignes de niveau, telles que $f(x,y,z) = \mathrm{cte}$.

a. notation interdite au concours, mais vous le verrez plus tard, très utile pour retenir les formules…

Important

L'opérateur gradient dépend des coordonnées. Notamment, en coordonnées cylindriques, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f(r,\theta,z) = \frac{\partial f}{\partial r}\overrightarrow{u_r} + \frac{1}{r}\frac{\partial f}{\partial \theta}\overrightarrow{u_\theta} + \frac{\partial f}{\partial z}\overrightarrow{u_z}} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \dfrac{\partial}{\partial x} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial r} \\ \dfrac{1}{r}\dfrac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial \theta} \\ \dfrac{\partial f(r,\theta,z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Les formules de gradient ne sont pas à connaître, et seront extensivement revues et justifiées en deuxième année.

Exemple

Soit $f(x,y,z) = xy^2$. Déterminer les dérivées partielles de f.

$$\frac{\partial f}{\partial x} = y^2 \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = 2xy \qquad \frac{\partial f}{\partial z} = 0$$

Cet opérateur permet alors de définir la différentielle d'une fonction de manière univoque :

Définition : différentielle

La **différentielle** d'une fonction **scalaire** f est

$$\boxed{\mathrm{d}f = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\, f \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

Lien avec l'énergie potentielle : On a

$$\mathcal{E}_p(\mathrm{B}) - \mathcal{E}_p(\mathrm{A}) = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \mathrm{d}\mathcal{E}_p = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Or,

$$\mathcal{E}_p(\mathrm{B}) - \mathcal{E}_p(\mathrm{A}) = -W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_{\mathrm{cons}}) = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \delta W = -\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} \vec{F}_{\mathrm{cons}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

Ainsi,

$$\vec{F}_{\mathrm{cons}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p$$

Propriété

Une force **conservative** $\vec{F}_{\mathrm{cons}}$ dérive d'une **énergie potentielle** $\mathcal{E}_p$ selon la relation :

$$\boxed{\vec{F}_{\mathrm{cons}} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p}$$

avec $\mathcal{E}_p$ définie donc à une constante près.

Exemples

- **Énergie potentielle de pesanteur** : $\vec{P} = -mg\vec{u_z}$, soit

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial x} = 0 \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,p}}{\partial z} = -mg$$

  Ainsi, $\mathcal{E}_{p,p}$ ne dépend ni de x, ni de y, et peut s'écrire comme $mgz + \mathrm{cte}$.
- **Énergie potentielle élastique** : $\vec{F}_r = -k(x-\ell_0)\vec{u_x}$, soit

$$-\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}}{\partial x} = -k(x-\ell_0) \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}}{\partial y} = 0 \qquad -\frac{\partial \mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}}{\partial z} = 0$$

  Ainsi, $\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}$ ne dépend ni de y, ni de z, et peut s'écrire comme $\dfrac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 + \mathrm{cte}$.

D Énergie mécanique

V.D.1 Définition

L'écriture du travail des forces conservatives comme la variation d'énergie potentielle permet d'écrire, à partir du TEC :

$$\Delta\mathcal{E}_c = \sum_j \underbrace{W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}_{\mathrm{cons},j})}_{=-\Delta\mathcal{E}_{p,j}} + \sum_i W_{\mathrm{AB}}(\vec{F}\mathrm{NC},i)$$

$$\Leftrightarrow \Delta\mathcal{E}_c + \Delta\mathcal{E}_{p,\text{tot}} = \sum_i W_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{NC},i})$$

avec $\vec{F}_{\text{NC},i}$ les forces non-conservatives. Ainsi :

Définition : énergie mécanique

L'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ d'un point matériel en mouvement dans un référentiel $\mathcal{R}$ est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant sur ce point :

$$\boxed{\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\text{tot}}}$$

Les énergies potentielles étant définies à une constante près, l'énergie mécanique l'est également.

V.D.2 Théorème de l'énergie mécanique

Théorème de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux points de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

$$\boxed{\Delta_{\text{AB}}\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = \mathcal{E}_m(\text{B}) - \mathcal{E}_m(\text{A}) = \sum_i W_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{NC},i})}$$

Ce n'est qu'une reformulation du TEC, en séparant forces conservatives et non-conservatives, et en exprimant le travail des forces conservatives comme un énergie potentielle.

Application

Exprimer l'énergie mécanique d'une skieuse en haut et en bas d'une piste de ski, et retrouver sa vitesse.

L'énergie mécanique en haut de la piste est

$$\mathcal{E}_m(\text{A}) = \frac{1}{2}m{v_{\text{A}}}^2 + mgz_{\text{A}} = 0 + mgh$$

Et en bas de la piste :

$$\mathcal{E}_m(\text{B}) = \frac{1}{2}m{v_{\text{B}}}^2 + mgz_{\text{B}} = \frac{1}{2}mv^2 + 0$$

Sans frottements, on a juste $W_{\text{AB}}(\vec{N}) = 0$, donc

$$\frac{1}{2}mv^2 = mgh \quad \Rightarrow \quad \boxed{v = \sqrt{2gh}}$$

Ainsi, pour traiter un problème où l'énergie mécanique se conserve :

1) Calculer l'énergie mécanique à l'instant initial, puis à un instant quelconque en fonction de sa vitesse et/ou de sa position ;
2) Comme l'énergie mécanique se conserve, $\sum_i W_{\text{AB}}(\vec{F}_{\text{NC},i}) = 0$, et on conclut donc en utilisant $\mathcal{E}_m(\text{A}) = \mathcal{E}_m(\text{B})$.

V.D.3 Théorème de la puissance mécanique

Comme pour le TEC ayant une version instantanée avec le TPC, on peut définir le TPM :

Théorème de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la variation instantanée (dérivée temporelle) de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i})}$$

Démonstration

Différentes démonstrations sont ici aussi possibles, selon le point de départ. Avec un bilan de puissances à partir du PFD :

$$\begin{aligned}
m\vec{a} &= \sum_j \vec{F}_{\mathrm{cons},j} + \sum_i \vec{F}_{\mathrm{NC},i} \\
\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t}\cdot\vec{v} &= \sum_j \vec{F}_{\mathrm{cons},j}\cdot\vec{v} + \sum_i \vec{F}_{\mathrm{NC},i}\cdot\vec{v} \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}mv^2\right) &= -\sum_j \overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{p,j}\cdot\vec{v} + \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i}) \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} + \sum_j \frac{\overbrace{\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{p,j}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}^{=\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,j}}}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i}) \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_{p,\mathrm{tot}})}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \mathcal{P}(\vec{F}_{\mathrm{NC},i})
\end{aligned}$$

VI Énergie potentielle et équilibres

L'énergie potentielle permet de d'étudier les caractéristiques d'équilibre d'un système. Pour étudier cela, on suppose :

– Un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou de puissance nulle (**système conservatif**), en notant $\mathcal{E}_p$ l'énergie potentielle totale et $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{\mathrm{cons},i}$ la somme des forces conservatives.
– On considère un mouvement à **1 degré de liberté**, noté x (x peut être une longueur mais aussi un angle, dans le cas du pendule par exemple).

A Notion d'équilibre

Définition

Un point matériel est à l'équilibre s'il est immobile dans le référentiel d'étude

Cela se traduit par une vitesse et une accélération nulles. Ainsi, d'après le PFD, cela se traduit par une somme des forces nulles :

$$\boxed{\vec{F}(x = x_{\mathrm{eq}}) = \vec{0}}$$

Or, $\vec{F}$ étant conservative, on a

$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \delta W = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p = \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$$

– Si le degré de liberté x est une longueur, on aura $\delta W = F_x\,\mathrm{d}x \Rightarrow F_x = -\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}$;

– Si le degré de liberté x est un angle θ, on aura $\delta W = F_\theta r\,\mathrm{d}\theta \Rightarrow F_\theta = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}\theta}$

Ainsi, si la force est nulle pour avoir équilibre, on a équivalence entre

$$F_x = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x} = 0$$

Propriété

Les points d'équilibre d'un système conservatif à un degré de liberté correspondent à un point stationnaire de l'énergie potentielle :

$$\boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\mathrm{eq}}} = 0} \qquad \text{où } \left.\cdot\right|_{x_0} \text{ signifie « $\cdot$ évalué en x_0 »}$$

B Équilibres stables et instables

Définition

Soit un point matériel sur une position d'équilibre. En l'écartant un peu de cette position :
- s'il **revient** vers sa position d'équilibre, on dit que l'équilibre est **stable** ;
- s'il s'**écarte** définitivement de cette position, on dit qu'il est **instable**.

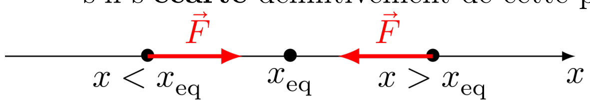


Figure 4.1 – Équilibre stable

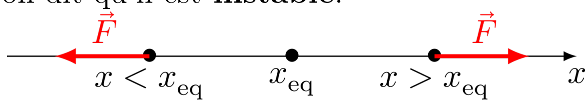


Figure 4.2 – Équilibre instable

Pour étudier ces situations mathématiquement, on peut développer l'expression de la somme $\vec{F}$ au voisinage d'un point d'équilibre x_{eq} quelconque :

$$F(x) = F(x_{\mathrm{eq}}) + (x - x_{\mathrm{eq}}) \times \left.\frac{\mathrm{d}F}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\mathrm{eq}}}$$
$$\Leftrightarrow F(x) = -\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\mathrm{eq}}} - (x - x_{\mathrm{eq}}) \times \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\mathrm{eq}}}$$

Si c'est un équilibre, on a donc $F(x_{\mathrm{eq}}) = 0$ donc $\left.\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x}\right|_{x_{\mathrm{eq}}}$, et ainsi

$$F(x) = -(x - x_{\mathrm{eq}}) \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\mathrm{eq}}}$$

– Si c'est un équilibre **stable**, la force doit **ramener** le point x vers sa position d'équilibre ; ainsi par exemple

$$(x - x_{\mathrm{eq}}) > 0 \Rightarrow F < 0$$
$$\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\mathrm{eq}}} > 0$$

et si $(x - x_{\mathrm{eq}}) < 0$, alors F doit être > 0, mais la conclusion est la même.

– Si c'est un équilibre **instable**, la force doit l'**écarter** de la position d'équilibre ; ainsi par exemple

$$(x - x_{\mathrm{eq}}) > 0 \Rightarrow F > 0$$
$$\Leftrightarrow \left.\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}x^2}\right|_{x_{\mathrm{eq}}} < 0$$

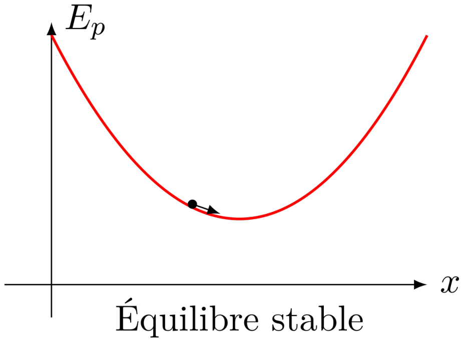
et si $(x - x_{\mathrm{eq}}) < 0$, alors F doit être < 0, mais la conclusion est la même.

Le raisonnement se propage dans toutes les directions, on peut donc utiliser le cas général à trois dimensions :

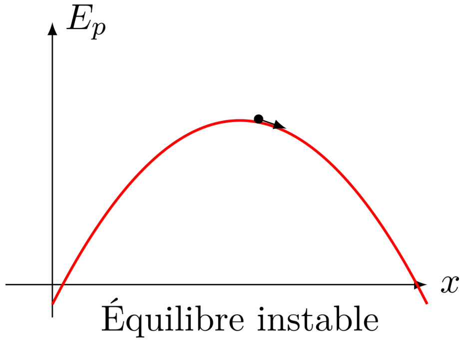
Propriété

Une position d'équilibre est :

Stable si $\boxed{\left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}} > 0}$

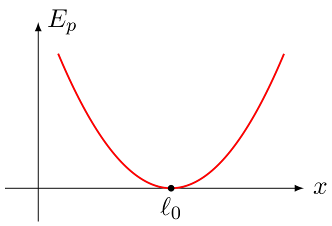


Instable si $\boxed{\left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}} < 0}$



Application

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Est-elle stable ou instable ?



L'énergie potentielle d'un ressort est

$$\mathcal{E}_{p,\text{el}} = \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2 \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\mathrm{d}x} = k(x-\ell_0) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_{p,\text{el}}}{\mathrm{d}x^2} = k > 0$$

Ainsi, la position d'équilibre est en $x_{\text{eq}} = \ell_0$, et elle est stable.

C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable

En faisant un développement limité de l'énergie potentielle d'un système autour d'une position d'équilibre stable, on a

$$\mathcal{E}_p(x) = \mathcal{E}_p(x_{\text{eq}}) + \underbrace{\left.\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial x}\right|_{x_{\text{eq}}}}_{=0} + \frac{(x-x_0)^2}{2}\left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}}$$

Notons $$\boxed{k = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}}}$$

Alors,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}k(x-x_0)^2$$

Et si l'énergie mécanique se conserve, on a $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0$ donc

$$\frac{1}{2}m(2\ddot{x}\dot{x}) + \frac{1}{2}k2\dot{x}(x-x_{\text{eq}}) = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{k}{m}(x-x_{\text{eq}}) = 0}$$

On retrouve l'équation de l'oscillateur harmonique ! Le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation $\omega_0 = \sqrt{k/m}$ avec $k = \left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}}$. Ce qui est phénoménal, c'est que **la seule supposition est que le système soit conservatif**. Ceci explique l'abondance des systèmes harmoniques dans la nature.

Remarque

Si l'équilibre est instable, on prend

$$k = -\left.\frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2}\right|_{x_{\text{eq}}} > 0$$

d'où par le même raisonnement,

$$\ddot{x} - \frac{k}{m}(x - x_{\text{eq}}) = 0$$

de solution

$$x - x_{\text{eq}} = A e^{\omega_0 t} + B^{-\omega_0 t}$$

Et pour un écart x_0 de la position d'équilibre sans vitesse initiale, on a

$$x - x_{\text{eq}} = x_0 \cosh(\omega_0 t)$$

donc proche d'un point d'équilibre instable, le mobile s'écarte exponentiellement de cette position.

VII Énergie potentielle et trajectoire

A Détermination qualitative d'une trajectoire

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile ainsi que l'aspect de la trajectoire en étudiant l'énergie potentielle. En effet,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \geq \mathcal{E}_p$$

puisque l'énergie cinétique est positive. Ainsi :

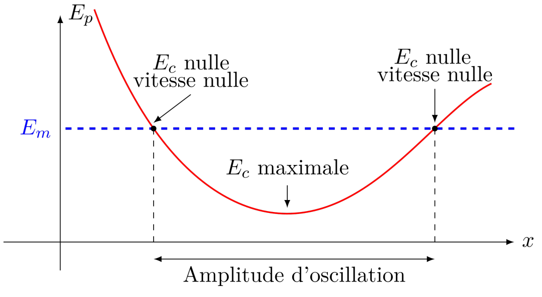
Trajectoire et énergie potentielle

Dans un diagramme d'énergie potentielle selon x :

- Seules les régions où $\mathcal{E}_p \leq \mathcal{E}_m$ sont accessibles ;
- Lorsque $\mathcal{E}_p = \mathcal{E}_m$, $\mathcal{E}_c = 0$ donc la vitesse est nulle ;
- Lorsque $\mathcal{E}_p$ est minimale, $\mathcal{E}_c$ est maximale donc la vitesse est maximale

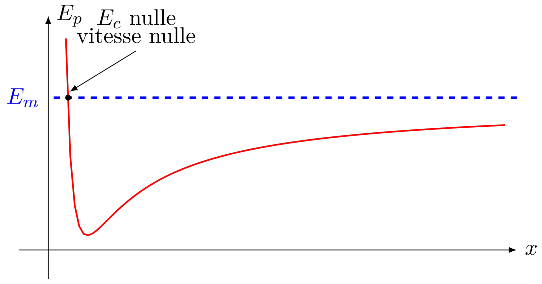
État lié

La particule reste dans une zone bornée de l'espace et le mobile effectue des aller-retours périodiques autour de la position d'équilibre.



État de diffusion

La particule aura tendance à partir vers $x = +\infty$ sans jamais revenir : son mouvement n'est pas borné dans l'espace.



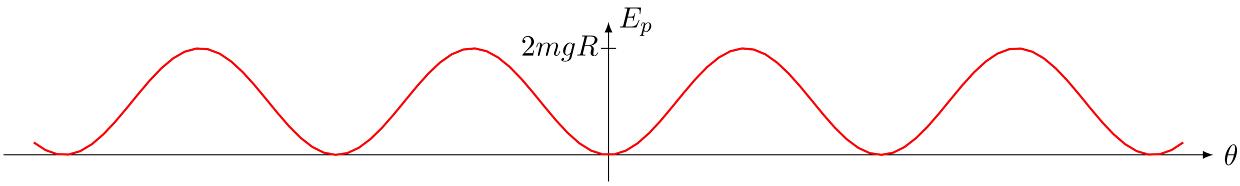
Certains corps célestes sont dans des états liés, comme la Terre et le Soleil, d'autres dans des états de diffusion : ils passent brièvement dans le système solaire avant de le quitter définitivement. C'est le cas de la comète d'Arend-Roland, passée à proximité de la Terre en 1956 mais qui ne devrait jamais revenir.

B Cas du pendule simple

On reprend le pendule simple, que l'on suppose attaché avec une tige **rigide** (pour éviter les décrochages). On souhaiterait déterminer ses positions d'équilibre et étudier ses trajectoires possibles. Le système étant conservatif ($\overrightarrow{P}$ conservatif et $\overrightarrow{T} \perp \overrightarrow{v}$), déterminons l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'angle.

L'altitude est : $$z(\theta) = \ell(1 - \cos\theta)$$

donc l'énergie potentielle est $$\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = mgz(\theta) = mg\ell(1 - \cos\theta)}$$



Les positions d'équilibre stables sont donc celles dans les « creux », soit $\theta = 2p\pi$ avec $p \in \mathbb{Z}$, et les instables sur les « collines », soit $\theta = (2p+1)\pi$. On distingue alors deux cas :

VII.B.1 Cas $\mathcal{E}_m < 2mg\ell$

Si l'énergie mécanique totale est inférieure à l'énergie potentielle maximale, on se situera dans un état lié, « coincé » dans un creux. On observera donc une oscillation autour du point d'équilibre le plus proche, et on a vu que cette oscillation état sinusoïdale aux très petits angles ($|\theta| < 20°$).

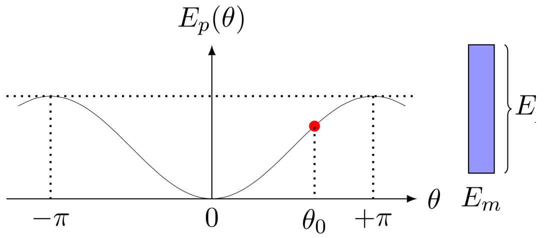


FIGURE 4.3 – État initial $\theta = \theta_0$: toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, et l'énergie est nulle.

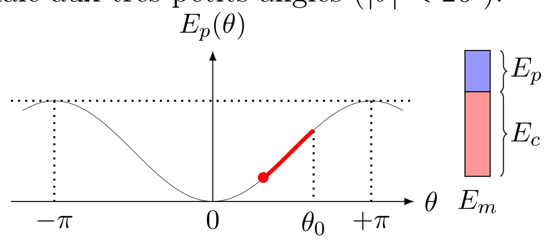


FIGURE 4.4 – La masse perd de l'énergie potentielle tout en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.

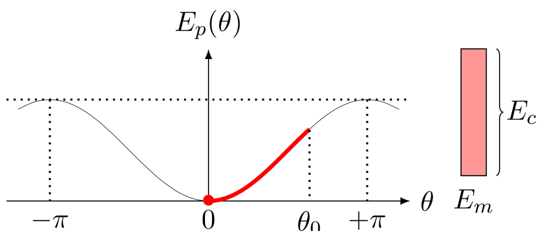


FIGURE 4.5 – La masse a perdu toute son énergie potentielle : son énergie cinétique et donc sa vitesse sont maximales.

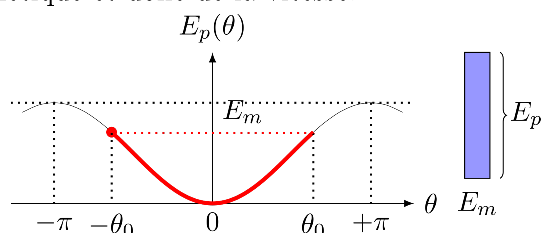


FIGURE 4.6 – La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximale $-\theta_0$, et repart dans l'autre sens.

VII.B.2 Cas $\mathcal{E}_m > 2mg\ell$

Si l'énergie mécanique totale est supérieure à l'énergie potentielle maximale, ça veut dire qu'il y a un excédent d'énergie cinétique. Ainsi, le pendule tourne autour de l'axe de rotation, et lorsqu'il arrive en $\theta = \pi$ l'énergie potentielle est maximale mais l'énergie cinétique n'est pas nulle : il continue sa rotation, sans oscillation. La vitesse n'est cependant pas constante, elle est plus faible en haut qu'en bas du mouvement (par conservation de l'énergie mécanique).

Une animation est disponible en ligne[1].

1. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.php