

Filtrage linéaire

Au programme

Savoirs

- ◇ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- ◇ Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal.
- ◇ Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- ◇ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de BODE en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- ◇ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ◇ Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

Savoir-faire

- ◇ Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- ◇ Tracer le diagramme de BODE (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- ◇ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
- ◇ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.
- ◇ Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- ◇ Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).



Sommaire

I Signaux périodiques	3
A Période	3
B Moyenne	3
C Valeur efficace	3
II Décomposition en série de FOURIER	4
A Théorème de FOURIER	4
B Analyse spectrale	5
C Relation de PARSEVAL	6
III Filtrage	7
A Traitement du signal et filtre	7
B Fonction de transfert d'un filtre	7
C Effet d'un filtre sur un signal périodique	8
IV Description d'un filtre	9
A Gain et gain en décibels	9
B Diagramme de BODE	11
C Filtres moyennneurs, dérivateurs et intégrateurs	13
V Exemples de filtres d'ordre 1	13
A RC sur C : passe-bas	13
B RC sur R : passe-haut	14
VI Exemples de filtres d'ordre 2	15
A RLC sur C : passe-bas ordre 2	15
B RLC sur R : passe-bande	16
VII Résumé	16
VIII Filtres en cascade	16

À travers les précédents chapitres, nous avons mis en place des moyens d'étudier l'amplitude d'un signal de sortie (tension u_C , élongation x) en fonction de la pulsation d'un signal d'entrée sinusoïdal. Dans la pratique, les signaux purement sinusoïdaux sont rares et sont en réalité des signaux complexes, comportant de nombreuses fréquences. La lumière blanche, par exemple, est un signal lumineux composé d'une continuité de longueur d'ondes (allant du violet au rouge dans le visible), qui se décompose en ses longueurs d'ondes constitutives sous certaines conditions : chacune de ses couleurs est déviée différemment lors du passage dans un prisme par exemple.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier des signaux complexes, qu'on décomposera en somme de signaux sinusoïdaux, et leur traitement par des systèmes traitant différemment ces longueurs d'ondes – qu'on appelle des filtres. Ils sont au cœur de toutes les innovations technologiques du XX^e et XXI^e siècles, qui reposent entièrement sur le traitement du signal. Cela s'applique aux transferts de données, à la création et diffusion de musique, et même à la couleur bleue du ciel. Commençons par revenir sur les signaux périodiques.

I Signaux périodiques

A Période

Définition 7.1 : Période

Montrer que le signal $s(t) = A \sin(\omega t)$ a une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

B Moyenne

Définition 7.2 : Valeur moyenne

Pour un **signal périodique** $s(t)$, on définit sa valeur moyenne $\langle s(t) \rangle$ par

Application 7.2 : Moyenne d'un cosinus décalé

Calculer la valeur moyenne du signal

$$s(t) = S_0 + A \cos(\omega t)$$

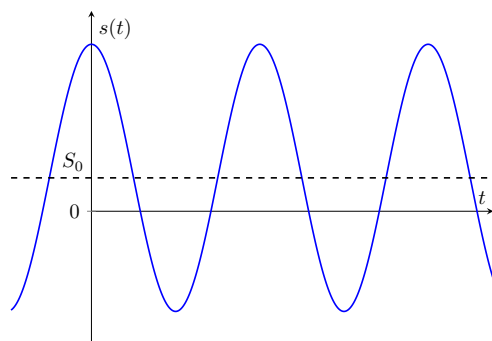


FIGURE 7.1 – $s(t) = S_0 + A \cos(\omega t)$

Important 7.1 : Moyenne d'un signal sinusoïdal

Un signal purement sinusoïdal a une moyenne nulle.

C Valeur efficace

Ainsi, si on envoie une tension sinusoïdale dans un circuit et qu'on mesure la moyenne de la tension reçue, on trouvera une tension nulle. Pourtant, l'énergie transmise n'est pas nulle ! C'est parce que les électrons réagissent à la fois aux tensions positives et négatives du signal, et ce pourquoi on obtient $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C u_C^2$: **l'énergie est proportionnelle au carré des signaux.**

Définition 7.3 : Valeur efficace

On définit la valeur efficace d'un signal **périodique** par

Ainsi, s_{eff}^2 représente l'énergie moyenne. Notamment, la valeur de 230 V pour la tension secteur est la valeur *efficace* : c'est une tension sinusoïdale qui oscille entre des valeurs de ± 325 V.

Application 7.3 : Calcul de valeur efficace

Calculer la valeur efficace du signal

$$s(t) = A \cos(\omega t)$$

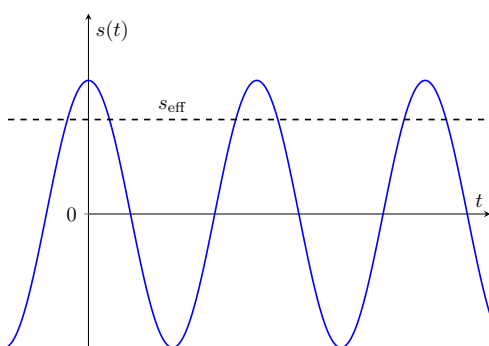


FIGURE 7.2 – s_{eff} de $A \cos(\omega t)$.



Il n'y a pas toujours de rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace ! Pour un signal triangle, la valeur efficace est $A/\sqrt{3}$, et pour un créneau pur sa valeur efficace est son amplitude A .

II Décomposition en série de FOURIER

Le traitement de signal complexe a pu émerger grâce à un des théorèmes les plus importants de la physique dans sa totalité, le théorème de FOURIER. Pour une introduction visuelle et des analyses de qualité, je vous recommande les vidéos de 3BLUE1BROWN portant sur le sujet^{1,2}. Pour une approche un peu plus historique et concernant l'importance de l'algorithme informatique basé sur ce théorème, je vous recommande la vidéo de VERITASIVM³.

A Théorème de FOURIER

Théorème 7.1 : FOURIER

Tout signal périodique se décompose comme une somme, éventuellement infinie, de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal périodique complexe $s(t)$ de pulsation ω s'écrit

Avec S_0 la valeur moyenne (composante continue), et les S_n et φ_n des caractéristiques du signal. Les amplitudes S_n constituent le **spectre** du signal.

1. Mais qu'est-ce que la Transformée de Fourier ? Une introduction visuelle.
2. Mais qu'est-ce qu'une série de Fourier? Du transfert thermique à des dessins avec des cercles.
3. The Remarkable Story Behind The Most Important Algorithm Of All Time

B Analyse spectrale

Le **spectre** d'un signal représente l'amplitude des différentes composantes sinusoïdales le constituant en fonction de leurs **fréquences**. Il donne les fréquences et les importances relatives des sinus. .

Fondamental et harmoniques

- ◇ La première composante sinusoïdale, $S_1 \sin(\omega t + \varphi_1)$, s'appelle le **fondamental**. Il donne sa fréquence au signal entier.
- ◇ Le signal $S_n \sin(n\omega t + \varphi_n)$ est appelé **harmonique de rang n**. Sa pulsation est un **multiple** du fondamental.

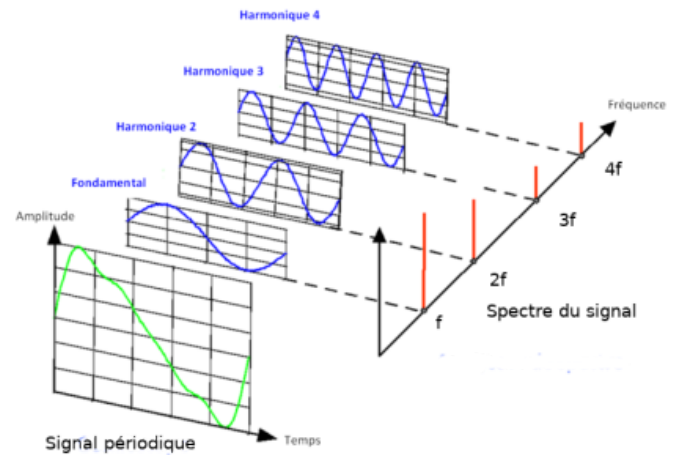


FIGURE 7.3 – Décomposition de FOURIER d'un signal complexe⁴.

Exemple 7.1 : Décompositions en séries de FOURIER

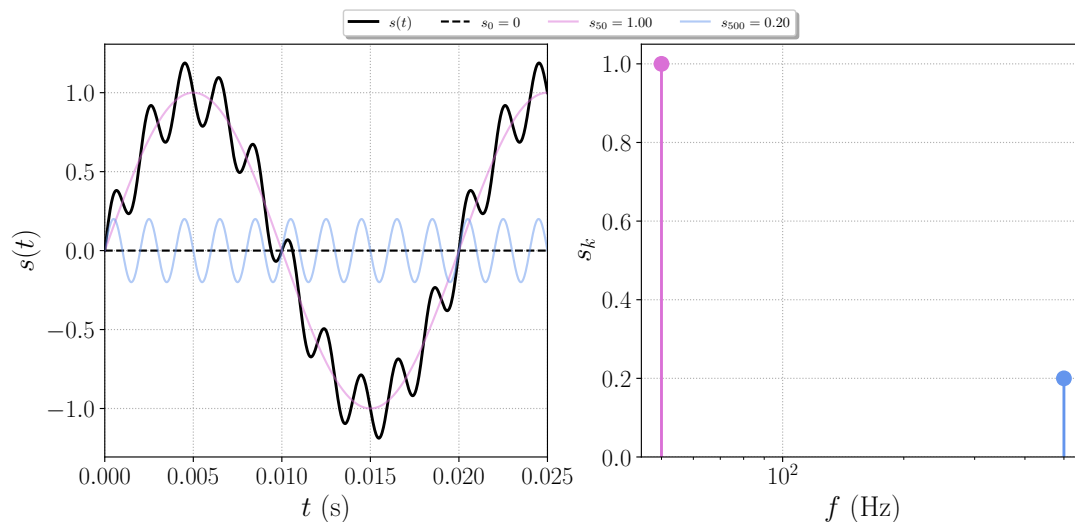


FIGURE 7.4 – Signal somme de 50 et 500 Hz

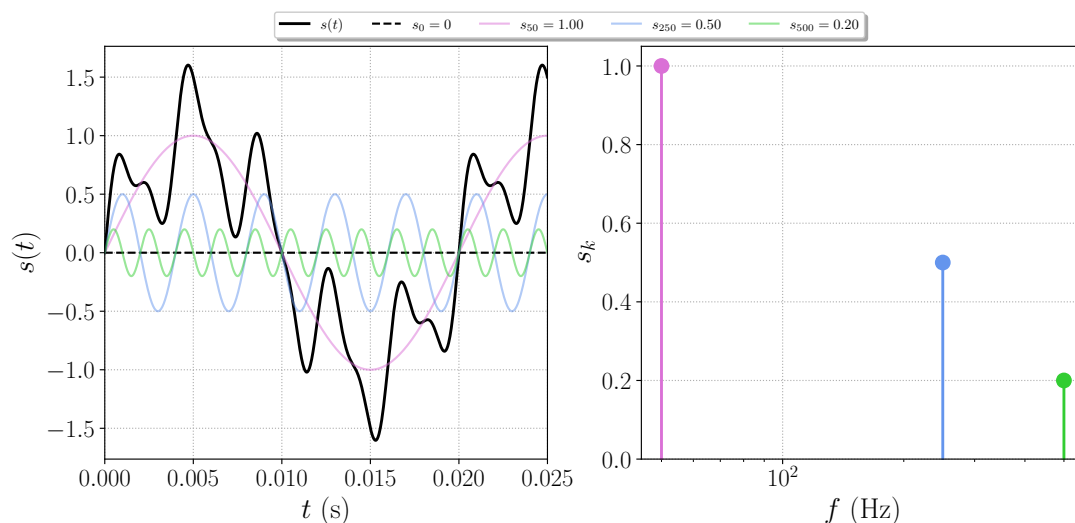
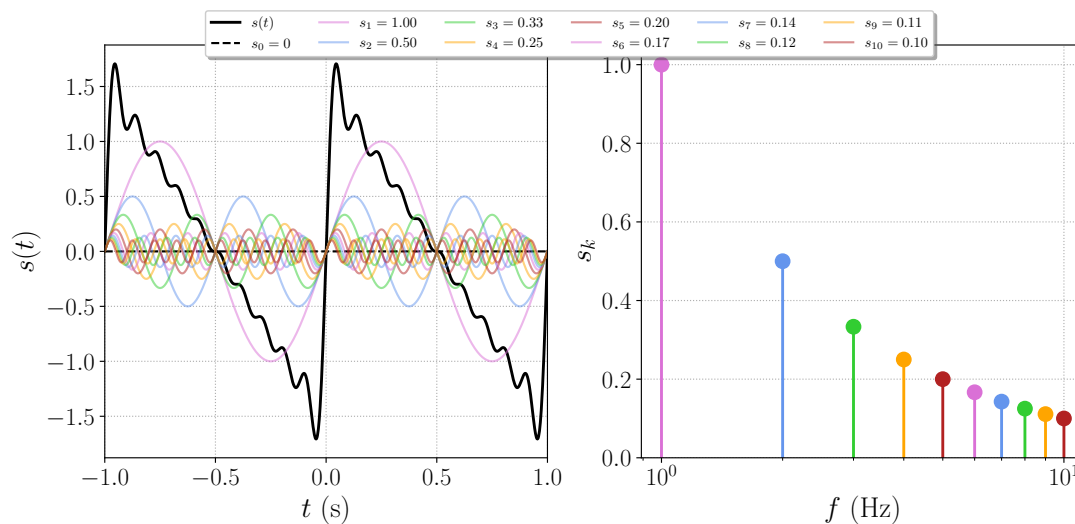
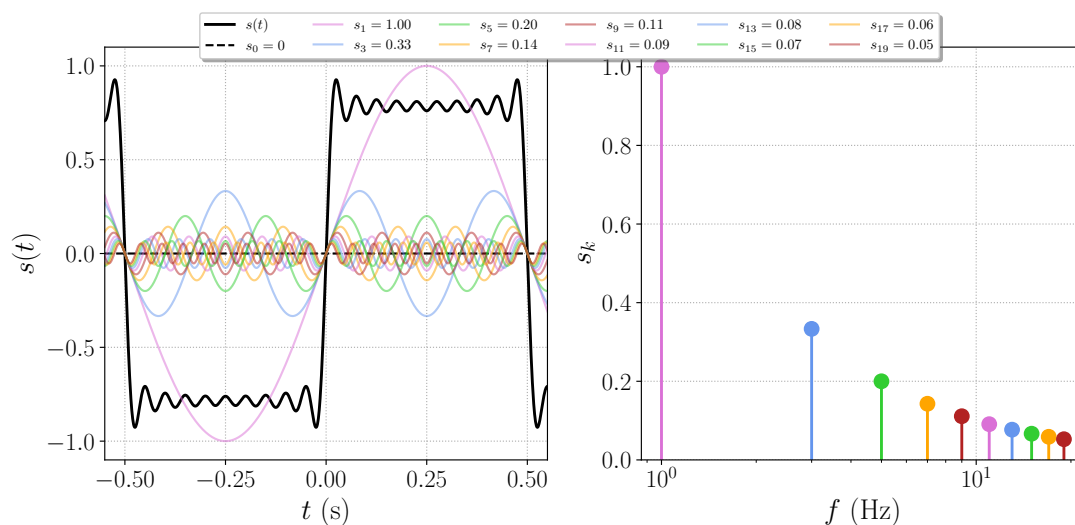


FIGURE 7.5 – Signal somme de 50, 250 et 500 Hz

4. Pour un approche ludique, essayer ce site : [Composeur de séries de FOURIER](#)

FIGURE 7.6 – Signal rampe : $S_k = 1/k$ FIGURE 7.7 – Signal créneau : $S_{2k+1} = 1/(2k+1)$ **Remarque 7.1 : Hautes et basses fréquences**

- ◇ Les **basses fréquences** « codent » les **variations lentes** d'un signal ;
- ◇ les **hautes fréquences** « codent » les **variations brusques** d'un signal.

C Relation de PARSEVAL

Si l'on peut décomposer tout signal en somme de sinus, et que l'énergie moyenne d'une fonction sinusoïdale est $\langle s^2(t) \rangle$, alors on peut espérer que l'énergie de tout le signal est la somme des fréquences individuelles le composant. C'est en effet le cas :

Propriété 7.1 : Relation de PARSEVAL

Ainsi, l'énergie portée par un signal se répartit dans ses harmoniques, et ce de façon indépendante.

III Filtrage

A Traitement du signal et filtre

Le but du **traitement du signal** est d'**extraire l'information utile** d'un signal issu d'un capteur où de multiples signaux se superposent au signal utile : bruits électromagnétiques, autres informations, etc.

- ◇ Pour recevoir la radio, on doit sélectionner le signal autour d'une bande de fréquence précise et éliminer le reste ;
- ◇ Pour isoler une voix dans un morceau de musique, c'est le même principe.

Définition 7.4 : Filtre

Système qui **traite un signal** sur un **critère fréquentiel**. On le représente par un **quadripôle** dans les schémas électrique, avec $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie. On en distingue 3 types principaux :

- ◇ **Passe-bas** : ne laisse passer que les basses fréquences ;
- ◇ **Passe-haut** : ne laisse passer que les hautes fréquences ;
- ◇ **Passe-bande** : ne laisse passer qu'une bande de fréquences.

Il est dit **linéaire** si la sortie est de même(s) fréquence(s) que l'entrée (i.e., l'équation différentielle derrière son action est une EDL).

FIGURE 7.8 – Filtre.

B Fonction de transfert d'un filtre

La grandeur caractérisant l'action d'un filtre est sa **fonction de transfert** :

Définition 7.5 : Fonction de transfert

C'est la grandeur complexe

avec \underline{S} l'amplitude complexe du signal de sortie, et \underline{E} celle du signal d'entrée.

Pour un filtre linéaire, la fonction de transfert s'applique à chaque sinusoïde du signal d'entrée pour donner une sinusoïde de sortie :

et on trouve l'amplitude réelle et la phase réelle de sortie en prenant le module et l'argument de \underline{S} , soit

Nous avons, sans le mentionné, déjà rencontré et manipulé des filtres. Le premier exemple est celui du filtre RC :



On n'indique pas le reste du circuit, mais **un filtre s'insère dans un circuit** :

- ◇ $e(t)$ peut venir d'un générateur, d'un amplificateur, etc.
- ◇ $s(t)$ peut aller vers un appareil de mesure, un haut-parleur, etc.

FIGURE 7.9 – Filtre RC.

Pour trouver la fonction de transfert, on transforme le circuit en complexes et on applique un pont diviseur de tension :

Pont diviseur :

FIGURE 7.10 – RC en complexes.



Notation 7.1 : Pulsation réduite

Pour alléger les notations, et se ramener à des grandeurs centrées autour de l'unité, il est commode d'introduire la **pulsation réduite** :

Ainsi, pour le RC, on obtient pour \underline{H} :



Effet d'un filtre sur un signal périodique

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment un filtre impacte un signal périodique quelconque, décomposable en signaux sinusoïdaux. L'idée est semblable à ce qu'on a fait au chapitre précédent ; en effet, grâce à la linéarité du filtre, on procède par superposition :

- 1) On décompose le signal d'entrée en sinusoïdes, avec ω_e la pulsation d'entrée du fondamental et $\omega_n = n\omega_e$ les pulsations des harmoniques :
- 2) On applique la fonction de transfert à chaque entrée sinusoïdale pour obtenir les sorties correspondantes :

3) On recompose le signal de sortie en sommant les sorties obtenues :

$$e(t) = \left\{ \begin{array}{l} E_0 \rightarrow \boxed{H(0j\omega_e)} \rightarrow S_0 \\ + \\ E_1 \sin(\omega_e t + \varphi_1) \rightarrow \boxed{H(1j\omega_e)} \rightarrow S_1 \sin(\omega_e t + \psi_1) \\ + \\ E_2 \sin(\omega_e t + \varphi_2) \rightarrow \boxed{H(2j\omega_e)} \rightarrow S_2 \sin(\omega_e t + \psi_2) \\ \vdots \\ E_n \sin(\omega_e t + \varphi_n) \rightarrow \boxed{H(nj\omega_e)} \rightarrow S_n \sin(\omega_e t + \psi_n) \end{array} \right\} = s(t)$$

IV Description d'un filtre

Pour représenter ces actions, outre la forme analytique d'un filtre, on définit des grandeurs utiles et on met en place des représentations pertinentes.

A Gain et gain en décibels

Définition 7.6 : Gains

1) Le **gain** traduit l'effet du filtre sur l'amplitude d'un signal, et on a

Le gain est sans unité, sans dimension.

- ◇ $G(x) = 1 \Rightarrow S_n(x) = E_n$: signal d'entrée conservé à cette fréquence.
- ◇ $G(x) > 1 \Rightarrow S_n(x) > E_n$: signal d'entrée amplifié à cette fréquence.
- ◇ $G(x) < 1 \Rightarrow S_n(x) < E_n$: signal d'entrée atténué à cette fréquence.

2) Le **gain en décibel** (dB) traduit le même effet, mais en échelle logarithmique :

Le gain en décibels a pour unité le dB.

- ◇ $G_{dB}(x) = 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |H(x)| = 1$: signal d'entrée conservé à cette fréquence.
- ◇ $G_{dB}(x) > 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |H(x)| > 1$: signal d'entrée amplifié à cette fréquence.
- ◇ $G_{dB}(x) < 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |H(x)| < 1$: signal d'entrée atténué à cette fréquence.

En effet, les échelles logarithmiques sont utiles pour visualiser des données sur de grands intervalles.

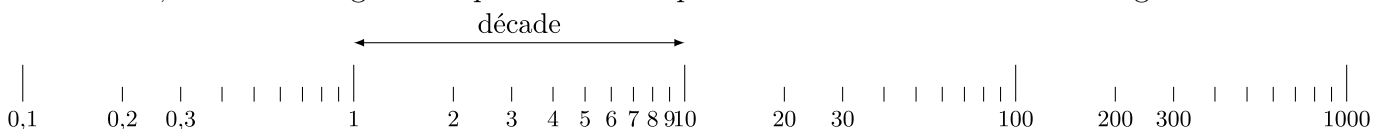


FIGURE 7.11 – Exemple d'échelle logarithmique

À l'inverse d'une échelle linéaire, ici les incréments sont des **puissances de 10**. Le passage d'une puissance de 10 à la suivante s'appelle une **décade**.



Le logarithme décimal est la fonction inverse de la fonction $f : x \mapsto 10^x$. Ainsi,

$$\log(10^1) = 1 \quad ; \quad \log(10^2) = 2 \quad ; \quad \log(10^3) = 3$$



Propriété 7.2 : Amplitude vs. gain

- 1) Lorsque l'amplitude est divisée par 10, le gain en décibels diminue de 20 dB ;
- 2) La bande passante est l'ensemble des pulsations telles que $G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}$:

$$\text{bande passante} \triangleq \{\omega \mid G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB,max}} - 3 \text{ dB}\}$$



Démonstration 7.1 : Amplitude vs. gain

- | | |
|----|----|
| 1) | 2) |
|----|----|



Application 7.4 : Gain du filtre RC sur C

On rappelle la fonction de transfert du filtre RC sur C : $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+jx}$.

- 1) Déterminer son gain. Quel est son maximum ?
- 2) En déduire son gain en décibels. Quel est son maximum ?
- 3) Déterminer sa bande passante à l'aide du gain.
- 4) Déterminer sa phase. Donner ses limites pour $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$.

1)

2)

3)

4)

B Diagramme de BODE

IV.B.1 Définition

Définition 7.7 : Diagramme de BODE

Le(s) diagramme(s) de BODE est un outil permettant de visualiser *et quantifier* l'effet d'un filtre sur une fréquence d'entrée. On représente pour cela :

- ◇ **gain en décibels** $G_{dB}(x) = 20 \log |\underline{H}(x)|$;
- ◇ et sa **phase** $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(x))$.

On les trace en fonction de la pulsation (réduite ou non) ou de la fréquence, et **en échelle logarithmique**.

Par exemple, pour le RC sur C : C'est donc un **passé-bas** !

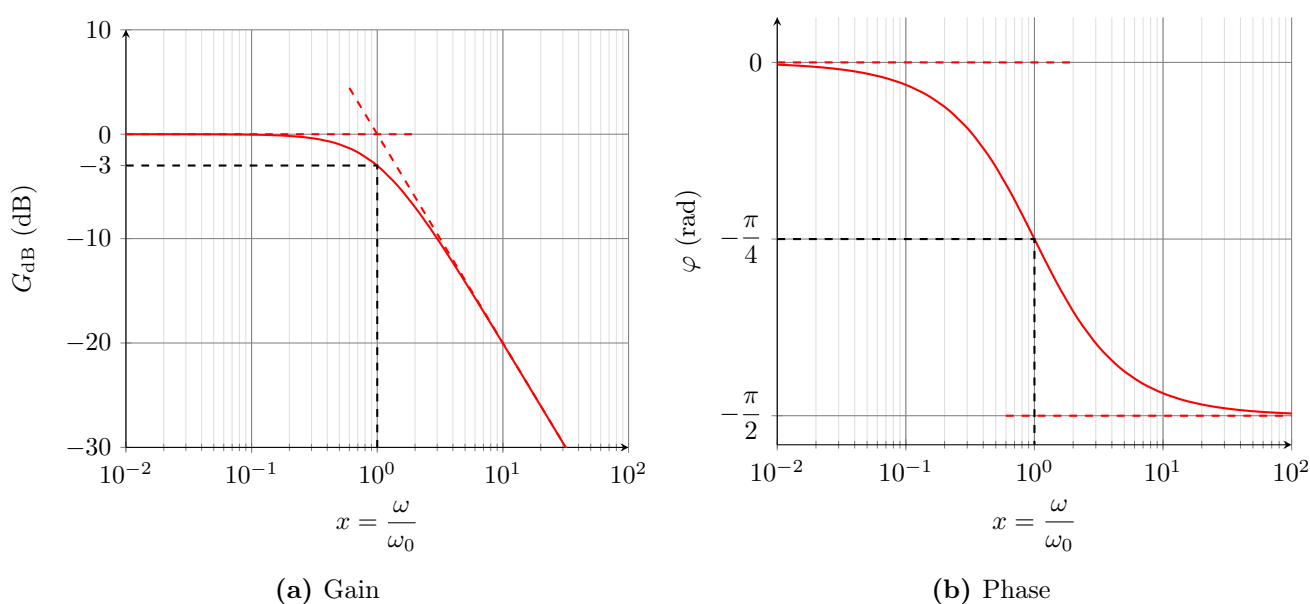


FIGURE 7.12 – Diagramme de BODE du filtre RC sur C.

IV.B.2 Asymptotes

Définition 7.8 : Diagramme asymptotique

Le diagramme de Bode asymptotique d'un filtre correspond au diagramme de Bode où seules les droites asymptotes affines sont tracées.

Outils 7.1 : Obtention des asymptotes

Pour trouver les asymptotes :

- 1) On simplifie $\underline{H}(x)$ pour $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$, en ne gardant **que le terme prépondérant** au numérateur et au dénominateur ;
- 2) On calcule G_{dB} et φ avec ces limites asymptotiques ;
- 3) On trace les droites obtenues en les faisant se rejoindre.

Application 7.5 : Diagramme asymptotique RC sur C

Déterminer les droites asymptotes du diagramme de Bode de RC sur C. Vérifier la cohérence avec les asymptotique de la Figure 7.12.

1)

2) \diamond Pour le gain :

Ainsi, à hautes fréquences, **le gain diminue de 20 dB par décade** : si ω est multiplié par 10, le gain en décibel baisse de 20 dB (i.e. l'amplitude est divisée par 10).

\diamond Pour la phase :

IV.B.3 Lecture

Pour lire le signal de sortie d'un filtre, il suffit de repérer le **gain** et la **phase** de la fonction de transfert **pour chaque fréquence** de la décomposition. Si $e(t) = E \cos(\omega t)$, la sortie sera

On trouve le gain à partir du gain en décibel en inversant la formule :

Exemple 7.2 : Filtrage par RC sur C

En reprenant la Figure 7.5, on ajoute le filtre RC en passe-bas. Pour garder les basses fréquences, on choisit une fréquence de coupure f_0 à 10 Hz. Avec $R = 1000 \Omega$ cela impose $C = 1,6 \times 10^{-5} \text{ F}$ ($\omega_0 = \frac{1}{RC}$). On obtient la figure suivante :

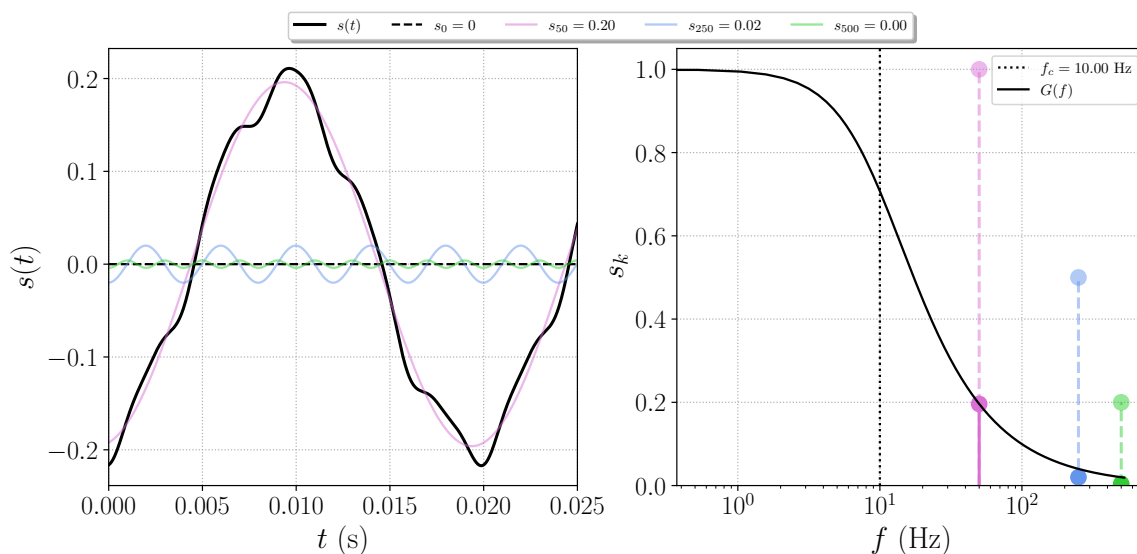


FIGURE 7.13 – Signal somme de 50, 250 et 500 Hz