Contrôle de connaissances 11

Électrocinétique en RSF : oscillateurs et filtrage

/10 1 À partir de $U(x) = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$, démontrer la condition de résonance ainsi que l'amplitude à la résonance.

Condition de résonance

$$U(x_r) = U_{\max}$$

$$\Leftrightarrow f(X_r) = (1-X_r)^2 + \frac{X_r}{Q^2} \quad \text{min.}$$

$X = x^2$

$$\Leftrightarrow f'(X_r) = 0$$

On dérive

$$\Leftrightarrow -2\left(1-X_r\right) + \frac{1}{Q^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow X_r - 1 = -\frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow X_r = 1 - \frac{1}{2Q^2}$$

$X_r = x^2$

$$\Leftrightarrow x_r = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \Leftrightarrow \boxed{x_r = \frac{1}{Q}\sqrt{Q^2-\frac{1}{2}}}$$

$x_r \in \mathbb{R}$

$$\Rightarrow x_r > 0 \Leftrightarrow \boxed{Q > \frac{1}{\sqrt{2}}}$$

Amplitude de résonance

$$f(X_r) = \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)$$

$$\Leftrightarrow f(X_r) = \left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}$$

Même dénom.

$$\Leftrightarrow f(X_r) = \frac{1}{4Q^2} - \frac{2}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2}$$

On calcule

$$\Leftrightarrow f(X_r) = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4}$$

On factorise

$$\Leftrightarrow \boxed{f(X_r) = \frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}$$

$$\Rightarrow U(x_r) = \frac{E_0}{\sqrt{f(X_r)}}$$

$\sqrt{(\cdot)}$

$$\Leftrightarrow U(x_r) = \frac{E_0}{\frac{1}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

Simplifie

$$\Leftrightarrow \boxed{U(x_r) = \frac{QE_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

/5 2 Montrer que diviser l'amplitude par 10 revient à réduire le gain en décibel de 20 dB. Montrer ensuite qu'on trouve la bande passante d'un filtre en trouvant les ω tels que $G_{\rm dB}(\omega) \geq G_{\rm dB,max} - 3\,\rm dB$.

$$|\underline{H}(\omega_2)| = \frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10}$$

$$\Leftrightarrow 20\log\left(|\underline{H}(\omega_2)|\right) = 20\log\left(\frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10}\right)$$

$$\Leftrightarrow 20\log\left(|\underline{H}(\omega_2)|\right) = 20\log(|\underline{H}(\omega_1)|) - 20\log(10)$$

$$\Leftrightarrow G_{\rm dB}(\omega_2) = G_{\rm dB}(\omega_1) - 20\,\rm dB \qquad \blacksquare$$

$$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$$

$$\Leftrightarrow 20\log(|\underline{H}(\omega)|) \geq 20\log\left(\frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}\right)$$

$$\Leftrightarrow G_{\rm dB}(\omega) \geq \underbrace{20\log\left(|\underline{H}|_{\max}\right)}_{=G_{\rm dB,\ max}} - \underbrace{20\log\left(\sqrt{2}\right)}_{\approx 3\,\rm dB} \qquad \blacksquare$$

/5 3 À partir de $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+\mathrm{j}x}$, déterminer les asymptotes de $G_{\rm dB}(x)$ et $\varphi(x)$.

$$\underline{H}(x) \underset{x\to 0}{\sim} \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{\mathrm{j}x}$$

$G_{\rm dB}(x) = 20\log|\underline{H}(x)|$

$$\Rightarrow G_{\rm dB}(x) \underset{x\to 0}{\sim} 20\log(1) = 0 \quad \text{et} \quad G_{\rm dB}(x) \underset{x\to\infty}{\sim} 20\log\left|\frac{1}{\mathrm{j}x}\right| = -20\log x$$

$\varphi(x) = \arg(\underline{H}(x))$

$$\Rightarrow \varphi(x) \underset{x\to 0}{\sim} \arg(1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \underset{x\to\infty}{\sim} \arg\left(\frac{1}{\mathrm{j}x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$