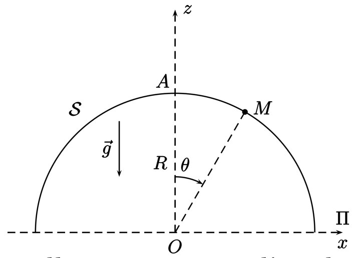
Mécanique – chapitre 3

TD entraînement : mouvements courbes

I Glissade d'un pingouin sur un igloo



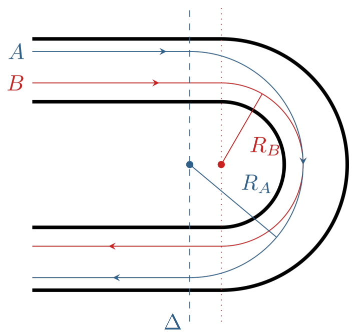
Un pingouin, assimilable à un point matériel M de masse m décide de faire du toboggan. Il s'élance sans vitesse initiale du sommet A d'un igloo voisin, assimilable à une demi sphère S de rayon R et de centre O, posée sur un plan horizontal Π. On considère que le glissement s'effectue sans frottement dans le plan vertical (xOz).

1) Appliquer le PFD au pingouin pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre information contient-elle ?
2) En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et en intégrant sur t, montrer que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos\theta)$$

3) En déduire la norme de la force de réaction de l'igloo.
4) Le pingouin décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

II Course de F1



Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando ALONSO (point A) et Jenson BUTTON (point B) arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent cependant le virage de deux façons différentes :

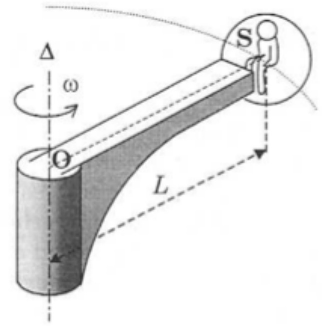
- ALONSO suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\mathrm{m}$;
- BUTTON choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75{,}0\,\mathrm{m}$.

On cherche à déterminer quelle est la meilleure trajectoire, c'est-à-dire lequel des deux pilote gagne du temps par rapport à l'autre à la sortie du virage.

1) Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Que peut-on conclure ?
2) Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesse v_A et v_B constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Déterminer ces vitesses, sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieur à 0,8 g sous risque de dérapage. Les calculer numériquement.
3) Conclure quant à la meilleure trajectoire des deux.

III Entraînement d'une spationaute

Une spationaute doit subir différents tests d'aptitude aux vols spatiaux, notamment le test des accélérations. Pour cela, on l'installe dans une capsule de centre S, fixée au bout d'un bras métallique horizontal dont l'autre extrémité est rigidement liée à un arbre de rotation vertical Δ. La longueur du bras est notée L. On assimilera la spationaute au point matériel S.



L'ensemble {capsule + bras + arbre} est mis en rotation avec un vitesse angulaire croissant progressivement selon la loi

$$\omega(t) = \omega_0(1 - \exp^{-t/\tau})$$

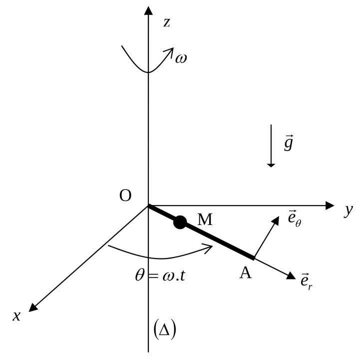
avec ω_0 la vitesse angulaire nominale du simulateur, et τ un temps caractéristique. On donne $L = 10{,}0\,\mathrm{m}$ et $g = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$.

1) Dessiner la trajectoire de la spationaute ainsi que son vecteur vitesse dans le référentiel du laboratoire, en faisant figure la base adaptée à l'étude de ce mouvement.
2) Donner l'expression des vecteurs position, vitesse et accélération de la spationaute à un instant t quelconque dans le référentiel du laboratoire.
3) À partir de quelle durée peut-on supposer que le mouvement est circulaire et uniforme ? Que deviennent les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans ce cas ? Calculer alors la norme de l'accélération subie par la spationaute.
4) Quelle doit être la valeur de ω_0 pour que l'accélération atteigne 10 g lors du régime de rotation uniforme ? On donnera le résultat en tours par second.

IV Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$, de longueur ℓ, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical Δ passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère :

- le repère cartésien $(\mathrm{O},\overrightarrow{e_x},\overrightarrow{e_y},\overrightarrow{e_z})$ fixe dans le référentiel du laboratoire et associé aux axes x, y et z ;
- la base cylindrique locale $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$ associée au point M.



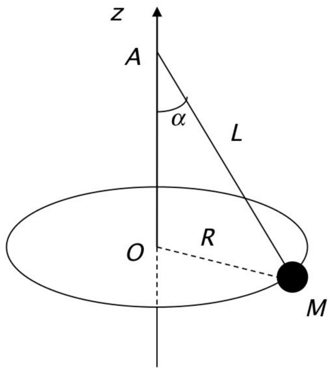
L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance r_0 du point O (avec $r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance $r = \mathrm{OM}$ entre le point O et l'anneau M.

1) Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.
2) Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.
3) Exprimer les composantes de la réaction $\overrightarrow{R}$ de la tige sur M dans la base $(\overrightarrow{e_r},\overrightarrow{e_\theta},\overrightarrow{e_z})$ en fonction de m, g, $\dot{r}$ et ω.

4) Déduire de la question 2 le temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, ℓ et ω.

V Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.



1) Quel système de coordonnées utiliser ?
2) Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.
3) Appliquer le PFD puis exprimer $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.
4) Que dire du cas où ω devient très grande ?
5) Application numérique : calculer α pour $L = 20\,\text{cm}$ et $\omega = 3\,\text{tours}\,\text{s}^{-1}$.