Mécanique – chapitre 1

Cinématique du point en cartésiennes

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.
- ▢ Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
- ▢ Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
- ▢ Coordonnées cartésiennes : exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse.
- ▢ Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cartésiennes.
- ▢ Mouvement à vecteur accélération constant : exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- ▢ Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Exemples

Points importants

Erreurs communes

Applications

Remarques

I Description et paramétrage du mouvement

I/A Système et point matériel

Définition M1.1 : Système et point matériel

En mécanique, le **système** est l'objet ou groupe d'objets dont on souhaite étudier le mouvement.

Le point matériel est le point géométrique qui représente le système entier, et que l'on repère pour connaître le son mouvement. On lui affecte toute la masse du système.

La définition du système est **primordiale et indispensable** pour la mécanique. En effet, l'étude du mouvement sera radicalement différente entre les systèmes {bille} et {bille+Terre}. Il en sera de même en dynamique, où ce sont les forces **extérieures** au système qui entrent en jeu, il faut donc définir l'extérieur.

Dans la cadre de la **mécanique du point**, la forme de l'objet importe peu. Ainsi, on choisira de suivre un point caractéristique du système, souvent son centre de gravité. Celui-ci pourra être repéré dans l'espace et le temps par 3+1 coordonnées (3 d'espace, 1 de temps).

I/B Notion de référentiel et relativité du mouvement

Un **mouvement est toujours relatif**, et **la description d'un mouvement dépend du référentiel**.

Définition M1.2 : Référentiel

Un **référentiel**, noté $\mathcal{R}$, est un **objet** de référence permettant de repérer un autre objet dans l'espace-temps. On y associe un **repère** générique pour décrire le mouvement dans l'espace, constitué de :

- ◇ une **origine** O pour mesurer des distances ;
- ◇ un **ensemble de 3 axes** pour définir des directions.

Ainsi, on notera les grandeurs liées à un référentiel *via* l'indication de celui-ci en indice, précédé d'une barre oblique ou verticale selon la taille de la grandeur :

$$\boxed{\vec{x}_{/\mathcal{R}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\vec{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}}$$

Le mouvement dépendant du référentiel, il faut choisir le référentiel adéquat par rapport au mouvement que l'on souhaite étudier. Souvent, on choisit parmi trois référentiels classiques :

Définition M1.3 : Référentiels fondamentaux

- ◇ **Référentiels terrestres** :
  - ▷ **Origine** : O centre de la Terre
  - ▷ **Axes** : 3 axes vers des **points fixes** à sa surface
  - ▷ **Utilisé** : mouvements sur la surface terrestre

$\boxed{\textbf{Un objet fixe à la surface de la Terre ne bouge pas dans ce référentiel.}}$

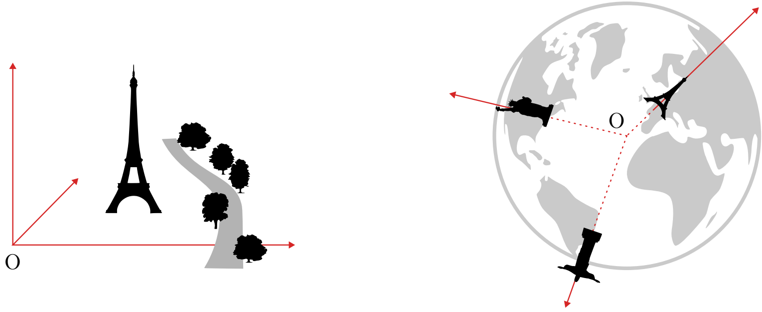


Figure M1.1 – Référentiels terrestres

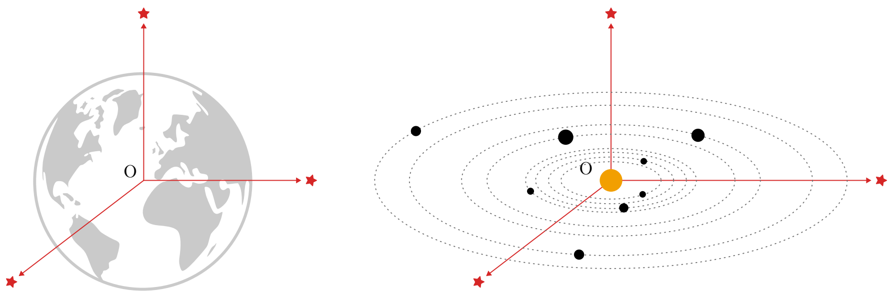
◇ **Référentiel géocentrique** :

- ▷ **Origine** : O le centre de la Terre
- ▷ **Axes** : 3 axes vers des **étoiles lointaines** fixes
- ▷ **Utilité** : étude des satellites de la Terre

Un objet fixe à la surface de la Terre se déplace dans ce référentiel.

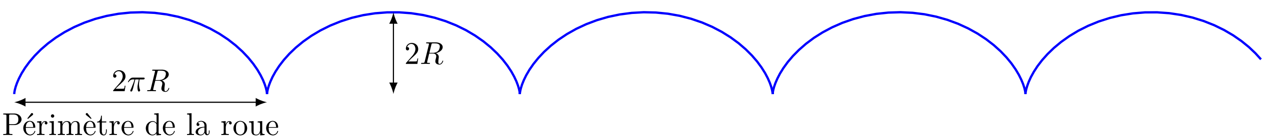
◇ **Référentiel héliocentrique** :

- ▷ **Origine** : O le centre du **Soleil**
- ▷ **Axes** : 3 axes vers des **étoiles lointaines** fixes
- ▷ **Utilité** : étude du mouvement des planètes du système solaire



Exemple M1.1 : Importance du référentiel

◇ Du point de vue d'um cycliste, la valve de sa roue est en rotation autour de l'axe de la roue. Selon um passant-e immobile, elle suit un mouvement de cycloïde. Son altitude atteint 0 à chaque tour de roue.



◇ Du point de vue d'um terrien-ne fixe sur Terre (référentiel terrestre), un arbre planté ne bouge pas. Du point de vue du centre de la Terre (référentiel géocentrique), il tourne à la vitesse vertigineuse de $\underline{1100\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}}$.

Remarque M1.1 : Mécanique relativiste

Nous resterons cette année en mécanique **classique**, c'est-à-dire que les corps étudiés auront une vitesse très inférieure à celle de la lumière dans le vide :

$$v \ll c = 3{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Ce faisant, les mesures de longueurs ou de durées seront **absolues** et indépendantes du référentiel. Ça n'est pas le cas en mécanique *relativiste* : il faut alors ajouter une **horloge interne** au référentiel pour prendre en compte les effets de dilatation du temps.

Exemple M1.2 : Exemple d'effet relativiste

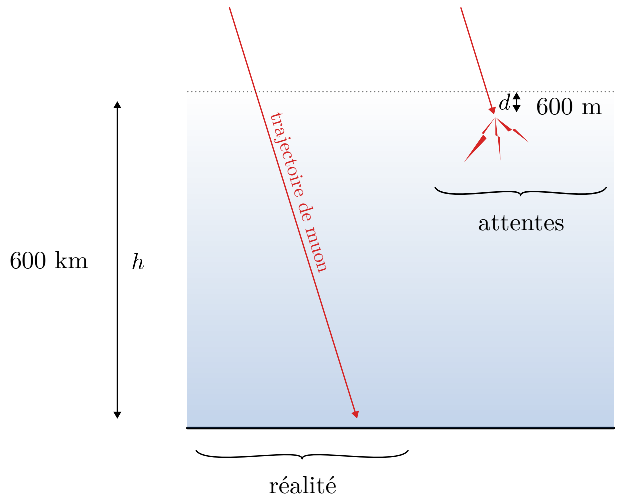
En plus de sa lumière, le Soleil émet plein de particules. Parmi elles se trouvent les **muons**. On peut en recréer en laboratoire et mesurer leur durée de vie dans l'atmosphère ; on trouve alors

$$\tau_{\text{labo}} = 2{,}0\ \mathrm{\mu s}$$

Ainsi, même en allant à la vitesse de la lumière, leur distance de parcours attendue d dans l'atmosphère d'épaisseur h serait de :

$$d = c\tau_{\text{labo}} = 600\ \mathrm{m} \ll h = 600\ \mathrm{km}$$

Or, **on détecte de nombreux muons au sol** ! Dans le cadre de la mécanique classique, ils devraient aller à une vitesse **supérieure à la célérité de la lumière dans le vide**, ce qui est prohibé par la théorie.



Il s'opère en réalité une **dilatation de son temps de vie** pour um observataire extérieurx en fonction de sa vitesse :

$$\tau_{\text{propre}} = \gamma\, \tau_{\text{labo}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1 - \dfrac{v^2}{c^2}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{\tau_{\text{propre}} = 82\ \mathrm{\mu s}} \quad \Rightarrow \quad \underline{d_{\text{réelle}} = 27{,}0\ \mathrm{km}}$$

I/C Outils mathématiques

I/C) 1 Vecteur

Rappel M1.1 : Vecteur

Un vecteur est un objet mathématique qui se dénote avec une flèche vers la droite au-dessus d'une lettre : $\vec{\cdot}$, et ayant :

- Un **point d'application** ;
- Un **sens** ;
- Une **direction** ;
- Une distance appelée **norme**, notée $\|\vec{\cdot}\|$.

Une égalité de vecteurs ⇒ **trois** égalités de scalaires, une pour chaque direction de l'espace.

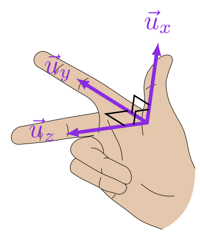
I/C) 2 Base de projection

En plus du repère générique du référentiel, il faut choisir un **repère spécifique** à l'étude du problème.

Définition M1.4 : Base de projection et repère

On construit le repère spécifique à l'aide d'une **origine** et d'une **base de projection orthonormée directe**, constituée de 3 vecteurs tels que :

- **Ortho** : les trois vecteurs sont orthogonaux entre eux ;
- **Normée** : leur norme est égale à 1 [1] ;
- **Directe** : ils respectent la **règle de la main droite** (chaque vecteur est égal au produit vectoriel des deux précédents).



Les vecteurs de base n'ont **pas d'unité**. Ils définissent les trois directions dans lesquelles le point M pourrait se mouvoir.

Notation M1.1 : Vecteur colonne ou explicite

Ainsi pour une base générique $(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k})$, on représente de manière équivalente un vecteur par ses composantes sur chaque vecteur de base exprimées en colonne, ou par sa représentation explicite en fonction desdits vecteurs de base :

$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{A} = a_i\,\vec{i} + a_j\,\vec{j} + a_k\,\vec{k}$$

Attention M1.1 : Différence référentiel/repère

Il ne faut pas confondre le **référentiel**, c'est-à-dire le système de référence (notion *physique*) avec le **repère**, c'est-à-dire l'outil géométrique qui sert à décrire le mouvement (notion *mathématique*). Il y a une infinité de repères spécifiques différents qui peuvent être associés à un même référentiel.

I/C) 3 Repère fondamental cartésien

Définition M1.5 : Repère cartésien

Le repère cartésien est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs :

$$\overrightarrow{u_x},\ \overrightarrow{u_y} \text{ et } \overrightarrow{u_z} \text{ de } \textbf{direction constante dans le temps}\,^{2}.$$

Jusqu'à notifié autrement, ce sera notre repère de prédilection.

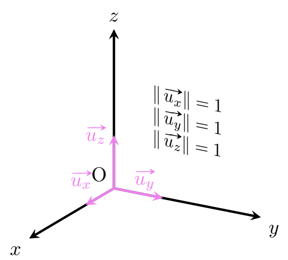


Figure M1.2 – Repère cartésien.

1. On dit qu'ils sont *unitaires*.
2. On trouve parfois la notation $\overrightarrow{e_x}$, $\overrightarrow{e_y}$, $\overrightarrow{e_z}$.

I/D Projection d'un vecteur sur un autre

On aura souvent des vecteurs définis par une **norme** et un **angle** par rapport à l'un des axes, et l'on souhaiterait obtenir sa décomposition dans la base de projection.

Outils M1.1 : Projection vectorielle (2D)

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur $\overrightarrow{A}$ sur les vecteurs de base d'un repère, on réalise une **projection** :

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_x} = A_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{u_y} = A_y$$

On peut alors utiliser les propriétés du produit scalaire :

$$\overrightarrow{A}\cdot\overrightarrow{B} = \|\overrightarrow{A}\|\|\overrightarrow{B}\|\cos(\theta)$$

avec θ l'angle entre les vecteurs, pris **positivement en sens trigonométrique**.

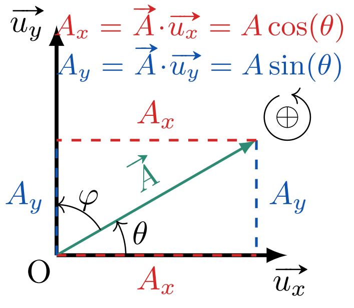


FIGURE M1.3 – Projection 2D

II Position, vitesse et accélération

II/A Position

II/A) 1 Définition

Définition M1.6 : Position en cartésiennes

On note la postion $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$, **homogène à une distance**. Elle s'exprime

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_y}}$$

et sa **norme** se calcule avec :

$$\boxed{\mathrm{OM}(t) = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)\right\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}}$$

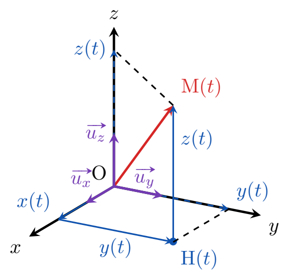


FIGURE M1.4 – Position cartésienne.

II/A) 2 Déplacement élémentaire

Définition M1.7 : Déplacement élémentaire cartésien

Le **déplacement élémentaire** est le déplacement infiniment petit du point M pendant un temps infinitésimal dt. En cartésiennes,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix} \rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) = \begin{pmatrix} x(t)+\mathrm{d}x \\ y(t)+\mathrm{d}y \\ z(t)+\mathrm{d}z \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \mathrm{d}x\ \overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\ \overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\ \overrightarrow{u_z}}$$

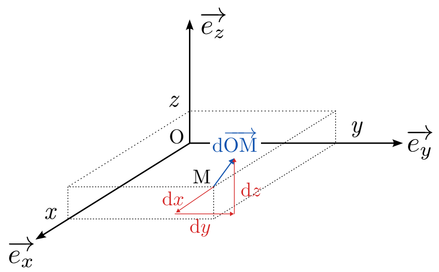


FIGURE M1.5 – d$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en cartésiennes.

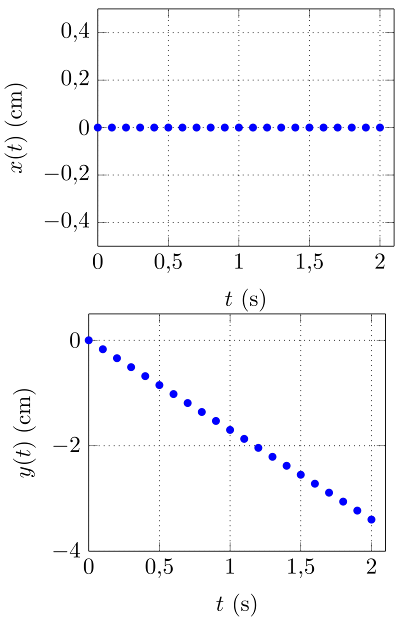
II/A) 3 Équations horaires et trajectoire

Définition M1.8 : Équations horaires

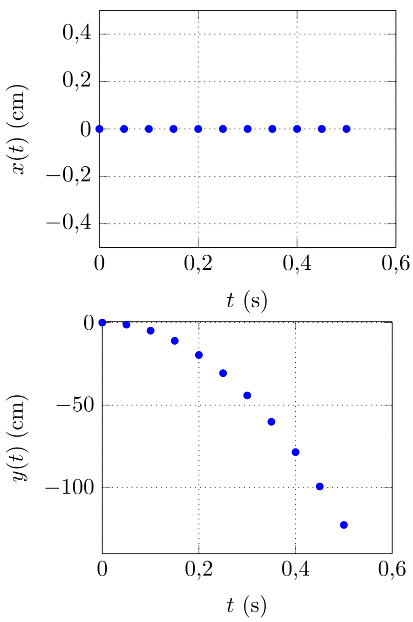
Les **équations horaires** du mouvement sont les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ exprimées **explicitement** en fonction du temps t.

Exemple M1.3 : Équations horaires en TP

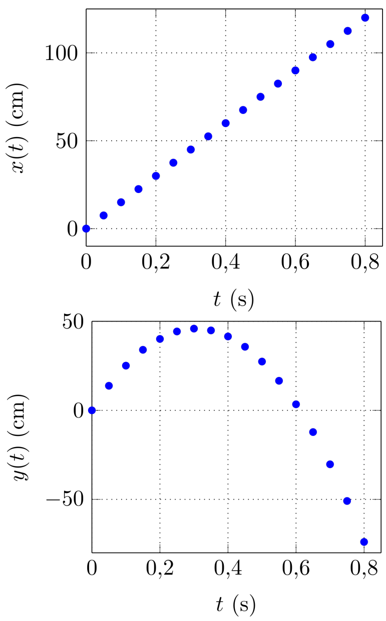
Chute dans glycérol



Chute libre verticale



Chute libre $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{u_x}$



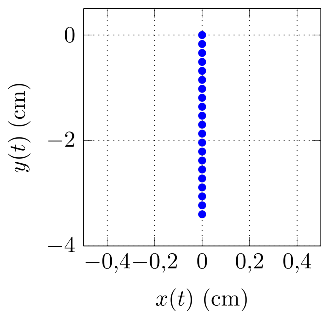
Définition M1.9 : Trajectoire

La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point M(t) au cours du temps. C'est le « dessin » fait par le mobile au cours du temps dans l'espace.

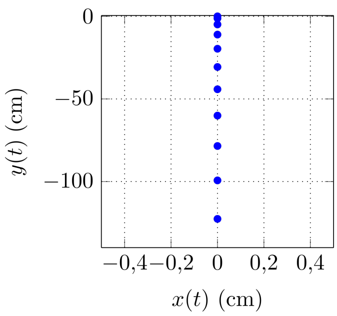
Exemple M1.4 : Trajectoires en TP

Sur les exemples précédents, la trajectoire est la courbe $y(x)$ car le mouvement est plan. C'est une droite dans les deux premiers cas, et une parabole dans le dernier.

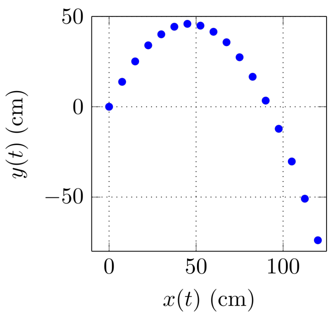
Chute dans glycérol



Chute libre verticale



Chute libre $\vec{v}(0) = v_0\,\vec{u_x}$



II/B Vitesse

Définition M1.10 : Vitesse

On définit la **vitesse** comme la **limite du taux d'accroissement** du vecteur position :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\Delta t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\Delta t} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t}} \quad \text{donc} \quad [\vec{v}] = \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

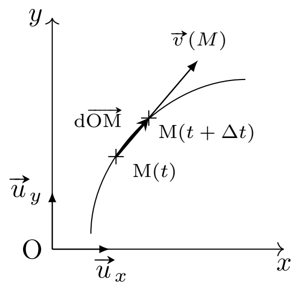


Figure M1.6 – Vecteur vitesse.

Important M1.1 : Vitesse et trajectoire

Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.

Interprétation M1.1 : Vecteur vitesse

On peut donc voir la vitesse comme étant le rapport du déplacement élémentaire par la durée infinitésimal $\mathrm{d}t$, ou comme étant la dérivée du vecteur position.

Ainsi, si le vecteur position est

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\vec{u_x} + y(t)\,\vec{u_y} + z(t)\,\vec{u_z} \Rightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\vec{u_x} + \mathrm{d}y\,\vec{u_y} + \mathrm{d}z\,\vec{u_z}$$

alors dans la vision dérivative, on obtient

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\,\vec{u_x} + y(t)\,\vec{u_y} + z(t)\,\vec{u_z}\right)$$

Or, **en coordonnées cartésiennes**, les vecteurs de base ne varient pas avec le temps : il ne changent pas de direction et restent unitaires. On peut donc les considérer comme des constantes multiplicatives, et ainsi

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\vec{u_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\vec{u_y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\vec{u_z}$$

On obtient la même chose avec la vision rapport déplacement/temps. Pour alléger l'écriture, on introduit une notation :

Ainsi, on trouve

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\vec{u_x} + \dot{y}(t)\,\vec{u_y} + \dot{z}(t)\,\vec{u_z}}$$

En reprenant les exemples précédents :

- Pour la chute dans le glycérol, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = \text{cte}$. Ainsi, $\vec{v}$ est constant, et dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable, dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\dot{x} = \text{cte}$ et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable et change de direction.

Attention M1.2 : Différence vecteur/norme

Selon le contexte, on fera particulièrement attention à ne pas confondre le mot « vitesse » avec le **vecteur** ou avec sa **norme**. Une vitesse, en norme, ne saurait être négative ; un vecteur vitesse peut être négatif.

II/C Accélération

L'accélération est la grandeur physique qui mesure la variation de la vitesse.

Définition M1.11 : Accélérations

On définit l'**accélération** comme le **taux d'accroissement** du vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}} \quad \text{donc} \quad [\vec{a}] = \mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$$

Si on effectue des mesures très rapprochées, c'est-à-dire $\Delta t \to 0$, on définit alors l'accélération *instantanée* comme étant la *dérivée* du vecteur vitesse, et dérivée seconde de la position :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t^2}}$$

Important M1.2 : Accélération et trajectoire

Le vecteur accélérations est toujours dirigé vers l'intérieur à la trajectoire (partie concave).

Par distribution de l'opérateur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, on obtient en cartésiennes

$$\boxed{\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\vec{u_x} + \ddot{y}(t)\,\vec{u_y} + \ddot{z}(t)\,\vec{u_z}}$$

En reprenant les exemples précédents :

- Pour la chute dans le glycérol, $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ sont nuls : le vecteur accélération est nul.
- Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.

Attention M1.3 : Accélération

Une accélération peut être négative ou nulle :

- En physique l'accélération est liée à la **variation du vecteur vitesse**, souvent différent de l'utilisation courante de ce mot.
- Pour que l'accélération soit nulle, il faut que toutes les composantes de la vitesse ne varient pas. Un mouvement peut être à vitesse constante en norme, mais d'accélération non nulle.

III Exemples de mouvements

III/A Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est dit **uniforme** si la **norme du vecteur vitesse** $\|\vec{v}\|$ est constante. Il est dit rectiligne si la trajectoire est une droite.

Par exemple,

$$\vec{v} = v_0 \, \vec{u_x}$$

donne un mouvement rectiligne uniforme. C'est le cas de la chute dans le glycérol. Dans ce cas,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

avec x_0, y_0 et z_0 des constantes que l'on peut calculer à l'aide des conditions initiales.

III/B Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* si la **norme du vecteur accélération** $\|\vec{a}\|$ est constant.

Par exemple,

$$\vec{a} = -g \, \vec{u_y}$$

avec des conditions initiales nulles donne un mouvement rectiligne uniformément accéléré. C'est le cas de la chute libre sans vitesse initiale. Contextualisons l'étude :

- **Système** : point matériel.
- **Référentiel** : celui du laboratoire, supposé galiléen.
- **Repère** : cartésien avec $\vec{u_y}$ verticale ascendante.
- **Origine des temps** : le moment où la balle est lâchée, tel que $\vec{v}(0) = \vec{0}$.
- **Origine du repère** : O tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$.

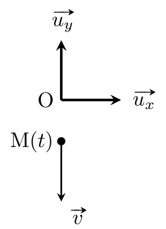


FIGURE M1.7 – Situation initiale.

Par définition,

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t) \, \vec{u_x} + \ddot{y}(t) \, \vec{u_y} + \ddot{z}(t) \, \vec{u_z}$$

Soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x,0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y,0} \\ \dot{z}(t) = v_{z,0} \end{cases}$$

Or,

$$\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} = 0 \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} = 0 \\ \dot{z}(0) = v_{z,0} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Seulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x(0) = y_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \\ z(0) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

Ce sont les équations horaires du mouvement, décrivant une droite dans l'espace.

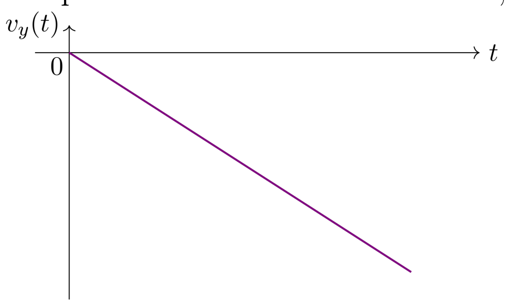


Figure M1.8 – Évolution de v_y avec le temps.

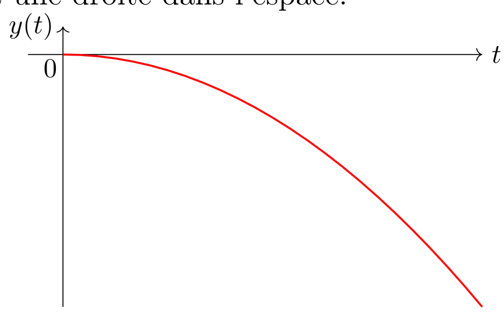


Figure M1.9 – Évolution de y avec le temps.

III/C Mouvement courbe uniformément accéléré

En reprenant la même situation que ci-dessus mais avec des conditions initiales non nulles, on trouvera un mouvement courbe. Prenons

$$\vec{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_x}$$

avec $v_0 \neq 0$. On garde $\vec{a} = -g\,\overrightarrow{u_y}$, le même repère et la même origine : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = 0$. Par définition,

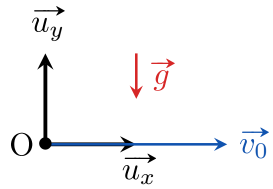


Figure M1.10 – Situation initiale.

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\,\overrightarrow{u_z}$$

Soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x,0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y,0} \\ \dot{z}(t) = v_{z,0} \end{cases}$$

Or,

$$\vec{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} = v_0 \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} = 0 \\ \dot{z}(0) = v_{z,0} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Seulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x(0) = y_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \\ z(0) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2} g t^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

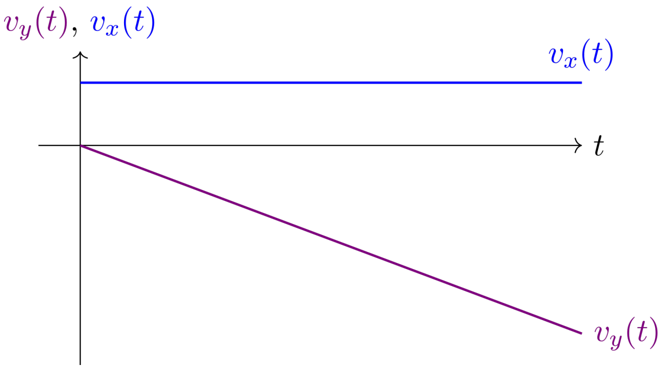


Figure M1.11 – Évolution des vitesses avec le temps.

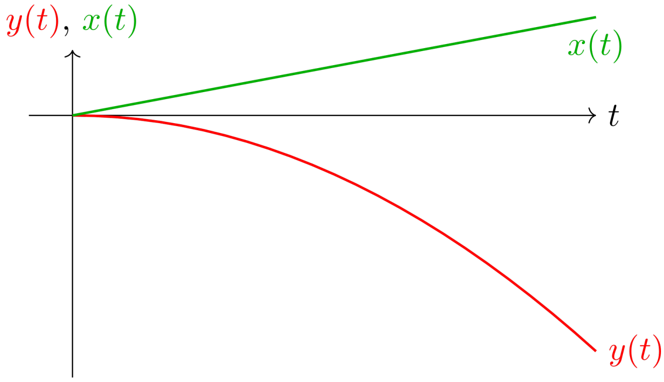


Figure M1.12 – Évolution des positions avec le temps.

Pour obtenir la trajectoire, on veut déterminer la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy. Pour cela, exprimons t en fonction de x et remplaçons t dans l'expression de y :

$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2} g \left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2} x^2}$$

La trajectoire obtenue est alors une parabole.

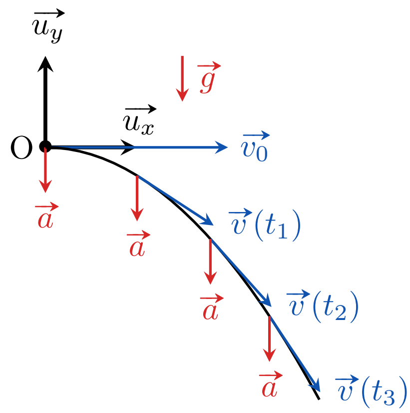


Figure M1.13 – Trajectoire parabolique.