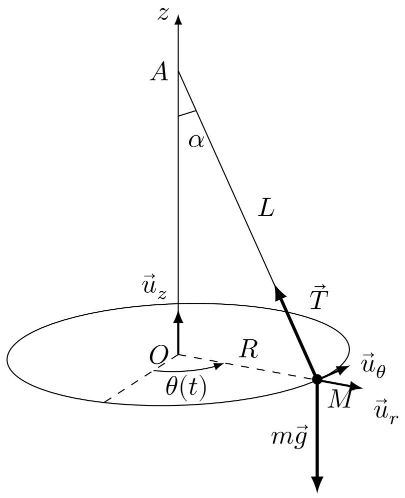
6 Pendule conique

Correction :



1. On étudie le mouvement du point matériel M, de masse m dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen. Il est soumis au poids $m\vec{g}$ et à la tension du fil $\vec{T}$.
   - position : $\overrightarrow{OM} = R\vec{u}_r = L\sin(\alpha)\vec{u}_r$
   - vitesse : $\vec{v}_M = \dfrac{\mathrm{d}\overrightarrow{OM}}{\mathrm{d}t} = L\sin(\alpha)\dot{\theta}\vec{u}_\theta$
     Or $\dot{\theta} = \omega = \text{cte}$ donc $\vec{v}_M = L\sin(\alpha)\omega\vec{u}_\theta$

   Ainsi le moment cinétique de M en A est :

$$\begin{aligned}\vec{L}_A &= \overrightarrow{AM} \wedge m\vec{v}_M\\ &= \left(\overrightarrow{AO} + \overrightarrow{OM}\right) \wedge m\vec{v}_M\\ &= (-L\cos\alpha\vec{u}_z + L\sin\alpha\vec{u}_r) \wedge mL\omega\sin\alpha\vec{u}_\theta\end{aligned}$$

   Au final, on obtient :

$$\boxed{\vec{L}_A = mL^2\omega\left(\cos\alpha\sin\alpha\vec{u}_r + \sin^2\alpha\vec{u}_z\right)}$$

2. Le théorème du moment cinétique au point A donne :

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{L}_A}{\mathrm{d}t} &= \vec{\mathcal{M}}_A(m\vec{g}) + \vec{\mathcal{M}}_A\left(\vec{T}\right)\\ mL^2\omega\left(\cos\alpha\sin\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{u}_r}{\mathrm{d}t} + \sin^2\alpha\frac{\mathrm{d}\vec{u}_z}{\mathrm{d}t}\right) &= \overrightarrow{AM}\wedge m\vec{g} + \underbrace{\overrightarrow{AM}\wedge\vec{T}}_{=\vec{0}\text{ car }\vec{T}//\overrightarrow{AM}}\\ mL^2\omega\cos\alpha\sin\alpha\times\dot{\theta}\vec{u}_\theta &= (-L\cos\alpha\vec{u}_z + L\sin\alpha\vec{u}_r)\wedge(-mg\vec{u}_z)\\ mL^2\omega^2\cos\alpha\sin\alpha\vec{u}_\theta &= mgL\sin\alpha\vec{u}_\theta\\ \underbrace{mL\sin\alpha}_{\neq 0}(L\omega^2\cos\alpha - g)\underbrace{\vec{u}_\theta}_{\neq\vec{0}} &= \vec{0}\end{aligned}$$

   Donc au final :

$$L\omega^2\cos\alpha - g = 0 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

3. Le principe fondamental de la dynamique donne :

$$\begin{aligned}m\frac{\mathrm{d}\vec{v}_M}{\mathrm{d}t} &= m\vec{g} + \vec{T}\\ -mL\omega^2\sin\alpha\vec{u}_r &= -mg\vec{u}_z + T(-\sin\alpha\vec{u}_r + \cos\alpha\vec{u}_z)\end{aligned}$$

   - projection sur $\vec{u}_r$:

$$\begin{aligned}-mL\omega^2\sin\alpha &= -T\sin\alpha\\ T &= mL\omega^2\end{aligned}$$

   - projection sur $\vec{u}_z$:

$$\begin{aligned}0 &= -mg + T\cos\alpha\\ T &= \frac{mg}{\cos\alpha}\end{aligned}$$

   Au final :

$$\frac{mg}{\cos\alpha} = mL\omega^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$