1217 -A-H-V-S-U-Q-4-M

SUP MPSI3 Corrigé DS07 24 mars 2023

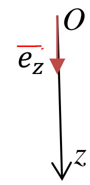
/18 **EXERCICE 1 : Etude mécanique d'un pédalo :**

(D'après banque PT 2022) ***(≈ ~~16~~ 18 pts)***

/10 **Q1.** Référentiel : Terrestre supposé galiléen. 1

Base de projection cartésienne : Axe Oz vertical descendant. 1

Système : Flotteur de masse $M/2$, car 2 flotteurs pour porter M. 1



1

Forces : Poids : $\vec{P} = \frac{M}{2}\vec{g} = \frac{M}{2}\, g\vec{e}_z$. 1

Poussée d'Archimède : $\vec{\pi_A} = -\pi_A\,\vec{e_z} = -\rho\, V_{im}\, g\,\vec{e_z}$ 1

Condition d'équilibre vertical : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ Donc $\vec{P} + \vec{\pi_A} = \vec{0}$ 1

Projetons sur l'axe vertical : On obtient donc : $\frac{M}{2} g - \rho\, V_{im}\, g = 0$ 1

Or on pose $\alpha = \frac{V_{im}}{V}$; Alors il vient $\rho\,\alpha\, V = \frac{M}{2}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{M}{2\,\rho\, V}}}$. 1

AN : $\alpha = \frac{200}{2\times1000\times0{,}5} = \frac{200}{1000} = \frac{2}{10}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\alpha = 20\ \%}}$**.** 1

1,2CS

/5 **Q2.** On utilise la notion de bras de levier :

Moment de la force par rapport à Oz : **Sens de rotation positif = sens trigonométrique** car $\vec{e_z}$ est vers nous.

- Situation (a) : 1 1

$\left|\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_{pied}})\right| = d_1.\left\|\vec{F_{pied}}\right\|$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = d$ (ici). 1

De plus $\vec{F_{pied}}$ a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **sens négatif.**

D'où : $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_{pied}}) = -d\, F_{pied}}}$. 1

- Situation (b) :

Même raisonnement, mais cette fois la **distance bras de levier est nulle**, car la force passe par l'axe de rotation.

Ainsi, : $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_{pied}}) = 0}}$ 1

/3 **Q3.** On sait que pour un solide en rotation, $\boldsymbol{P(\vec{F_{ext}}) = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_{ext}})\,\omega}$. 1

De plus, en moyenne, $\langle\left|\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F_{pied}})\right|\rangle = \frac{d\, F_{pied}}{2}$.

Alors $\boxed{\boldsymbol{\langle P(\vec{F_{pied}})\rangle = \frac{d\, F_{pied}\,\omega}{2}}}$. 1

2CS

AN : $\langle P(\vec{F_{pied}})\rangle = \frac{0{,}2\times50\times10}{2}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\langle P(\vec{F_{pied}})\rangle = 50\ \mathrm{W}}}$. 1

/41 **EXERCICE 2 : Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques :**

(D'après CCINP PC 2022) *(≈ ~~42~~ pts)* 41

I -Anémomètre à plaque :

/4 **Q1.** Une force s'exprime en newtons (N) et une vitesse en m.s^{-1} donc si $F = \mu U^2$ alors μ s'exprime en $\frac{N}{m^2 s^{-2}} = \frac{kg.m.s^{-2}}{m^2 s^{-2}}$; Donc finalement **l'unité SI de μ est le kg.m^{-1}**.

/15 **Q2.** Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

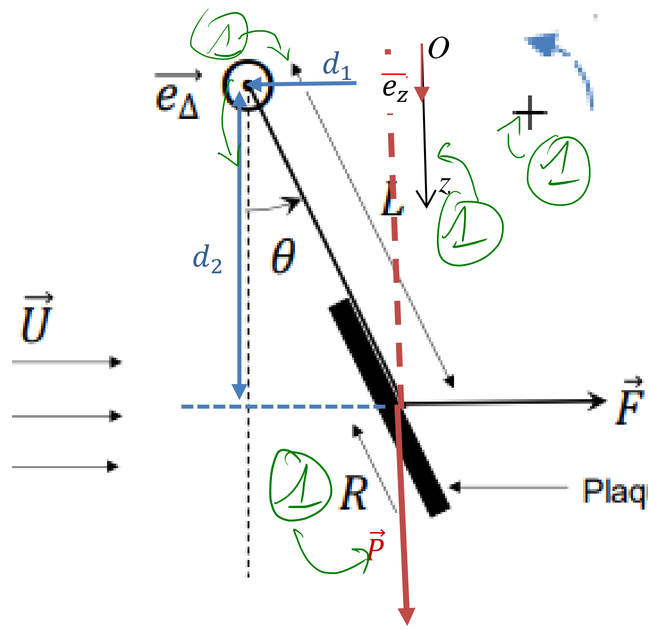
Système : {plaque + tige} .

Bilan des forces : Repère cylindrique

4 actions mécaniques dont on peut calculer les moments grâce à la notion de bras de levier :

Moments scalaires des forces par rapport à Δ :

Sens de rotation positif = sens trigonométrique car $\vec{e_\Delta}$ est vers nous.



- ~~La réaction du support : $\vec{R}$ passe par l'axe de rotation, son moment est donc nul~~ : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0}$.
- La liaison pivot est supposée parfaite, donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{liaison\ pivot}) = 0}$.
- Le poids :

$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})| = d_1 . \|\vec{P}\| = mg\, d_1$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = L\sin(\theta)$.

De plus le poids $\vec{P}$ a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **sens négatif.**

D'où : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgL\, sin(\theta)}$.

- La force aérodynamique $\vec{F}$:

$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = d_2 . \|\vec{F}\| = \mu U^2 d_2$ en utilisant le bras de levier avec $d_2 = L\cos(\theta)$.

De plus le poids $\vec{P}$ a tendance à faire tourner la tige dans le sens trigonométrique, donc dans le **sens positif.**

D'où : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mu U^2 L\, cos(\theta)}$.

/3 **Q3. Condition d'équilibre** : $\boxed{\sum \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}}) = 0}$.

D'où : $\mu U^2 L\, cos(\theta_{eq}) - mgL\, sin(\theta_{eq}) = 0$; Ou encore : $U^2 = \frac{mg\, sin(\theta_{eq})}{\mu cos(\theta_{eq})}$; Ainsi $\boxed{U = \sqrt{\frac{mg}{\mu}\tan(\theta_{eq})}}$.

AN : $U = \sqrt{\frac{0{,}03 \times 9{,}81}{0{,}01}\tan(8°)} = \sqrt{3 \times 9{,}81 \times \tan(8)}$; On obtient : ***U* ≈ 2 m.s^{-1}.** 2,0

1,2 CS

II - Anémomètre à coupelles :

18

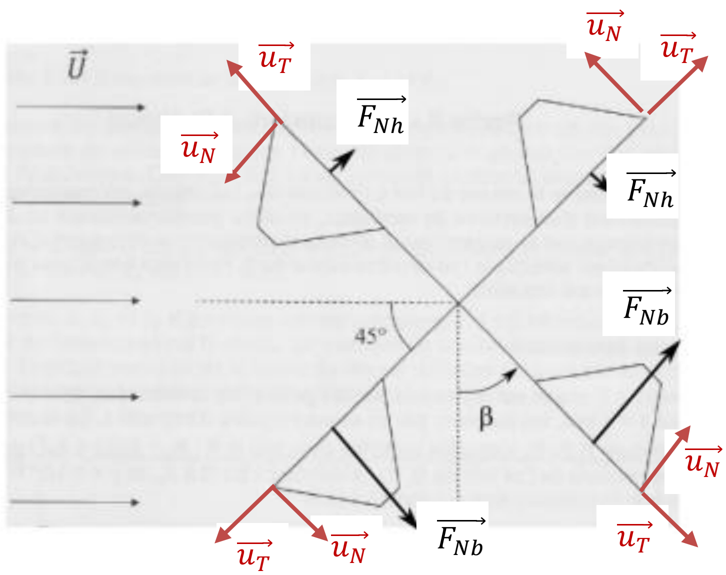
Q4. On nous donne : $\overrightarrow{F_N} = \frac{1}{2}\,\rho_{air}\mathcal{A}\,C_N\,U^2\,\overrightarrow{u_N}$ et $\|\overrightarrow{F_N}\,(-\beta)\| = \|\overrightarrow{F_N}\,(\beta)\|$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{u_N}$ et $\overrightarrow{u_T}$ ont été schématisés ci-dessous sur chaque coupelle comme demandé.
- Pour les deux coupelles du bas, on est à **β = ±45°.** 1

D'après le graphe du document 2, **C_N est alors <u>positif et élevé</u>**, donc la **<u>force $\overrightarrow{F_{Nb}}$ est importante et vers la droite</u>** **(selon $+\overrightarrow{u_N}$).** 1

- Pour les 2 coupelles du haut, on est à **β = ±135°.** 1

D'après le graphe du document 2, **<u>C_N est alors négatif et faible</u>**, donc la force **<u>$\overrightarrow{F_{Nh}}$ est faible, mais toujours vers la droite,</u>** (**selon -$\overrightarrow{u_N}$**) ce qui est naturel compte tenu du sens de l'écoulement. 1 1



+

1 pour les $(\overrightarrow{u_N}, \overrightarrow{u_T})$

1 pour les sens (droite) $\overrightarrow{F_N}$

1 pour les mêmes $\|\overrightarrow{F_N}\|$

15

Q5. Les **deux forces agissant dans le sens d'une augmentation de β sont plus importantes** que celles en sens inverse.

<u>Les bras de levier étant équivalents</u>, le **<u>moment global est donc positif par rapport à l'axe de rotation</u>**, donc d'après le théorème du moment cinétique : $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta\,\ddot{\beta} = \sum M_\Delta\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$

L'anémomètre va tourner dans le **<u>sens direct ou trigonométrique</u>**. 1

12

Q6. Le moment de la force $\overrightarrow{F_T}$ est nul par rapport à l'axe de rotation, car **<u>sa droite d'action coupe l'axe</u>** de rotation, le **<u>bras de levier est donc nul</u>**. 1

4

Q7. On appelle <u>couple</u>, un système de forces dont la **<u>résultante est nulle</u>** (somme vectorielle), mais dont le **<u>moment résultant des forces par rapport à un axe est non nul</u>**. Ici, **<u>ce n'est pas le cas</u>** : les différentes forces poussent vers la droite sur le schéma, donc **<u>la résultante est non nulle</u>**.
Cependant, elles sont compensées par la liaison pivot qui retient la structure, donc cet effet est sans importance

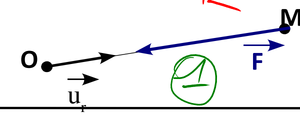
---

12

Q8. Il existe sans doute des frottements solides dans la **<u>liaison pivot qui n'est pas parfaite</u>**.

12 **EXERCICE 3 : Particule soumise à un champ électrostatique radial :** ***(≈ ~~40~~ 42 pts)***

/4 **Q1.** La particule est soumise à la force électrique $\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E} = -qE_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u_r}\,;}$.
Schéma ci-contre. **La force est attractive**, la particule est attirée par le point O.



/6 **Q2.** Pour montrer que le mouvement est plan, on applique le théorème du moment cinétique en O à la particule : $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\,\vec{u_r} \wedge \left(-E_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u_r}\right) = \vec{0}\,;$

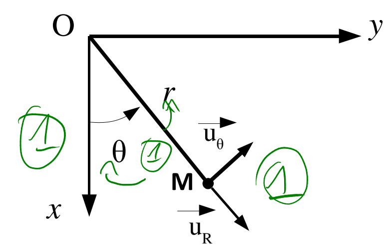
On en déduit que $\vec{L_O}$ est constant, tel que : $\vec{L_O} = \vec{L_O}(t=0) = \vec{OM_0} \wedge m\,\vec{v_0}\,;$

A t = 0, $\vec{OM_0}$ et $\vec{v_0}$ sont dans le plan π (O,$\vec{u_x}$; $\vec{u_y}$), donc $\boxed{\vec{L_O} = L_O\,\vec{u_z}}$;

Calculons $\vec{OM}.\vec{L_O}$: $\vec{OM}.\vec{L_O} = \vec{OM}.\big(\underbrace{\vec{OM} \wedge m\,\vec{v}}_{\perp \vec{OM}}\big) = 0\,;$ Donc $\vec{OM} \perp \vec{L_O}$ à chaque instant.

Donc à tout moment, $\vec{OM} \perp \vec{u_z}$: Le **mouvement est plan dans le plan π (O,$\vec{u_x}$; $\vec{u_y}$)**.

/3 **Q3.** Coordonnées polaires :



/3 **Q4.** Il faut exprimer le moment cinétique :

$\vec{OM} = r\,\vec{u_r}$ et $\vec{v_M} = \frac{d\,\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$.

Alors : $\vec{L_O} = \vec{OM} \wedge m\,\vec{v_M} = r\,\vec{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}\right);$

Ainsi : $\boxed{\vec{L_O} = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{k} = mC\,\vec{k} = cste}$ $(\vec{k} = \vec{u_z})$

Par identification : $\boxed{C = r^2\,\dot{\theta} : \textbf{Constante des Aires}}$.

On se place dans le cas où n = 2 et v_0 quelconque :

/9 **Q5.** $dE_P = -\delta W(\vec{F}) = -\vec{F}.d\vec{OM} = -F\,\vec{u_r}.(dr\vec{u_r} + rd\theta\vec{u_\theta}) =$ - F dr ;

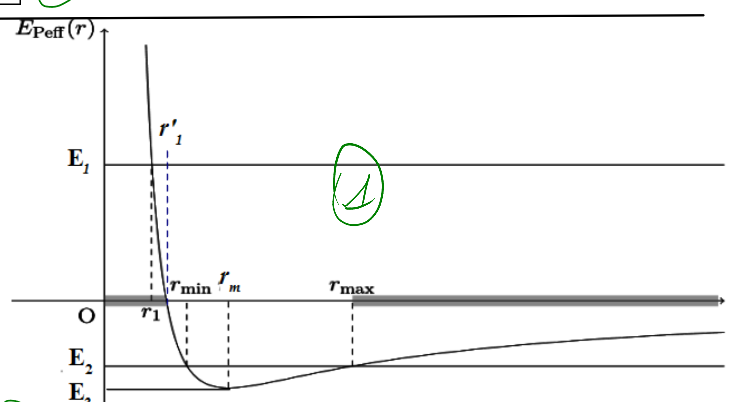
Ainsi : $dE_P = qE_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 dr$; Et : $E_P(r) = -qE_0\,\frac{r_0^2}{r} + cste$;

Et si on considère que l'énergie potentielle est nulle lorsque $r \to \infty$, alors $\boxed{E_P(r) = -qE_0\,\frac{r_0^2}{r}}$;

- $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - qE_0\,\frac{r_0^2}{r}$;
- Pour obtenir $E_{Peff}(r)$, il faut exprimer la vitesse en coordonnées polaires et éliminer $\dot{\theta}$ grâce à la constante des aires. On obtient donc : $E_m = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) - qE_0\,\frac{r_0^2}{r} = \frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - qE_0\,\frac{r_0^2}{r}$;

On isole $\frac{1}{2}\,m\dot{r}^2$ et on obtient : $\boxed{E_{P\,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - qE_0\,\frac{r_0^2}{r}\,;}$

/17 **Q6.** Il faut tracer l'allure de $E_{P\,eff}(r)$:



- $\lim\limits_{r\to 0} E_{P\,eff} = +\infty$ et $\lim\limits_{r\to +\infty} E_{P\,eff} = 0$;
- $\frac{d\,E_{P\,eff}}{dr} = -m\frac{C^2}{r^3} + qE_0\,\frac{r_0^2}{r^2}$;

$E_{P\,eff}(r)$ est min pour r_m tel que $\frac{d\,E_{P\,eff}}{dr} = 0$, dc pour

$\boxed{r_m = \frac{m\,C^2}{qE_0\,r_0^2} > 0}$ et $\boxed{E_{P\,eff}(r_m) = -\frac{q^2 r_0^2 E_0^2}{2mC^2} < 0.}$

Discussion : $E_m \geq E_{P\,eff}$ à chaque instant car $\frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 \geq 0$

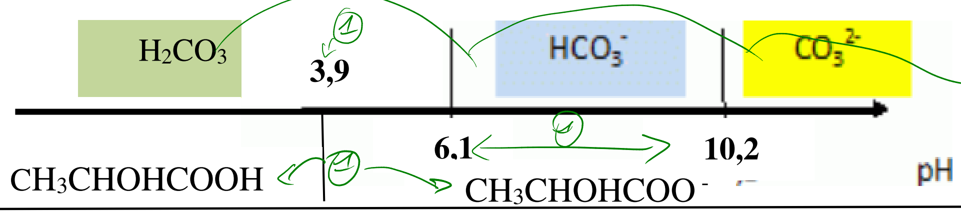
- 1[er] cas : $E_m = E_1$: Alors $r \geq r_1$: **Etat de diffusion**.
  La trajectoire est une **branche d'hyperbole.**
- 2[ème] cas : $E_m = 0$: Alors $r \geq r'_1$: **Etat de diffusion**. La trajectoire est une branche de parabole.
- 3[ème] cas : $E_m = E_3$: Alors $r = r_m = cste$: **Etat lié**.

La trajectoire est **circulaire** de centre O et de rayon $r_0 = r_m = \frac{m\,C^2}{qE_0\,r_0^2}$.

- 4[ème] cas : $E_m = E_2 < 0$: Alors $\mathbf{r_{min}} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{r_{max}}$: **Etat lié**. La trajectoire est une **ellipse** dont O est un foyer.

/32 **EXERCICE 4 : Le pH sanguin :** *(D'après Centrale PSI 2009)* *(≈ ~~33~~ 32 pts)*

4 **Q1**. DP :



7 **Q2.** D'après le DP, à pH = 7,40, **[CO_3^{2-}] est négligeable**.
On sait que $\boxed{[H_2CO_3]_{eq} + [HCO_3^-]_{eq} = C_0}$.
D'autre part : $pH = pK_A + \log\frac{[A^-]_{eq}}{[HA]_{eq}}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}}}$;
D'où : $\log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}} = pH - pK_{A1}$; En substituant, il vient : $\log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0-[HCO_3^-]_{eq}} = pH - pK_{A1}$.
Ainsi : $\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0-[HCO_3^-]_{eq}} = 10^{pH-pK_{A1}}$; Puis $[HCO_3^-]_{eq} = (C_0 - [HCO_3^-]_{eq})10^{pH-pK_{A1}}$;
$[HCO_3^-]_{eq}\{1 + 10^{(pH-pK_{A1})}\} = C_0\,10^{(pH-pK_{A1})}$ et enfin : $\boxed{\boldsymbol{[HCO_3^-]_{eq} = \frac{C_0\,10^{(pH-pK_{A1})}}{1+10^{(pH-pK_{A1})}}}}$;
AN : $[HCO_3^-]_{eq} = \frac{0{,}028\times 10^{(7{,}4-6{,}1)}}{1+10^{(7{,}4-6{,}1)}}$; On trouve : **$[HCO_3^-]_{eq}$ = 0,0267 mol.L^{-1} = 2,67.10^{-2} mol.L^{-1}** . 3CS
Et $\boxed{\boldsymbol{[H_2CO_3]_{eq} = C_0 - [HCO_3^-]_{eq}}}$; AN : $[H_2CO_3]_{eq} = 0{,}028 - 0{,}0267$;
On trouve : **$[H_2CO_3]_{eq}$ =1,34.10^{-3} mol.L^{-1}**. 3CS

8 **Q3.a.** D'après le DP, à pH = 7,4, c'est **$[HCO_3^-]_{eq}$ est l'espèce majoritaire**.
De plus, $CH_3CHOHCOOH$ et HCO_3^- ont des **DP disjoints**, Donc réaction selon la règle du gamma.
Ou faire la réaction **entre l'acide le plus fort et la base la plus forte**.
(R) $\boxed{\textbf{CH}_3\textbf{CHOHCOOH + HCO}_3^- \textbf{ = CH}_3\textbf{CHOHCOO}^- \textbf{ + H}_2\textbf{CO}_3}$
ou (R) = (3) - (1)

bases — pKa — acides
HO^- | H_2O
CO_3^{2-} | HCO_3^-
HCO_3^- | H_2CO_3
$CH_3CHOHCOO^-$ | $CH_3CHOHCOOH$
H_2O | H_3O^+

$$K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq}[H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}[HCO_3^-]_{eq}} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}} \times \frac{[H_2CO_3]_{eq}}{[HCO_3^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}$$

Ainsi $\boxed{\boldsymbol{K_{eq} = \frac{K_{A3}}{K_{A1}} = 10^{pK_{A1}-pK_{A3}}}}$; AN : $K_{eq} = 10^{6{,}1-3{,}9}$;
On trouve : **$K_{eq} = 10^{2{,}2}$** ; La **réaction n'est ni totale, ni négligeable**.

11 **Q3.b.** Tableau d'avancement :
$\boxed{[CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{n}{V}}$; AN : **$[CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{3.10^{-4}}{0{,}1}$ = 3.10^{-3} mol.L^{-1} = C_3**.

	$CH_3CHOHCOOH$	+ HCO_3^- =	$CH_3CHOHCOO^-$	+ H_2CO_3
EI	C_3	C_1		C_2
EE	$C_3 - x$	$C_1 - x$	x	$C_2 + x$

Alors $K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq}[H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}[HCO_3^-]_{eq}} = \frac{x(C_2+x)}{(C_3-x)(C_1-x)}$; Soit : $K_{eq}(C_3 - x)(C_1 - x) = x(C_2 + x)$;
Ou encore : $\boxed{\boldsymbol{x^2(1 - K_{eq}) + x(C_2 + K_{eq}C_1 + K_{eq}C_3) - K_{eq}C_1C_3 = 0}}$
Résolution du polynôme du 2nd degré : On trouve $\Delta \approx 14{,}433$;
$x_1 \approx 0{,}027 > C_3$ donc impossible **ou $x_2 \approx 2{,}98.10^{-3}$ mol.L^{-1}**.
Ainsi : **$[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} = x$ = 2,98.10^{-3} mol.L^{-1}.** **$[H_2CO_3]_{eq} = C_2 + x$ = 4,38.10^{-3} mol.L^{-1}**.
$[CH_3CHOHCOOH]_{eq} = C_3 - x$ = 2,00.10^{-5} mol.L^{-1}. **$[HCO_3^-]_{eq} = C_1 - x$ = 2,40.10^{-2} mol.L^{-1}**.

- Enfin $\boxed{\boldsymbol{pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}}}$; Ainsi pH= 6,1 + $\log\frac{2{,}40.10^{-2}}{4{,}38.10^{-3}}$; On trouve **pH ≈ 6,8**.

Le sang est donc **légèrement plus acide** qu'en temps normal.

12 **Q3.c.** La respiration permet **l'expiration de CO_2** et **donc de H_2CO_3**, ce qui permet au pH de ne pas diminuer malgré la production d'acide lactique.

PROBLEME : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre :

(D'après ATS 2014) ***(≈ ~~80~~ pts)*** 84

I – Préliminaires :

1/2 **Q1.** On a : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}}$ et $\boxed{\overrightarrow{v_M} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot r\,\overrightarrow{u_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

1/4 **Q2.** On sait que $\vec F(r) = -\overrightarrow{grad}(\mathrm{Ep}) = -\frac{d\,\mathrm{Ep}(r)}{dr}\,\overrightarrow{u_r}$.

ou $\delta W = -dE_p = +\vec F\cdot d\overrightarrow{OM} = F\,dr \Leftrightarrow F = -\frac{dE_p}{dr}$

Ainsi : $F(r) = -\frac{d\,\mathrm{Ep}(r)}{dr} = -\frac{d\left(-m\,g_0\frac{R_T^2}{r}\right)}{dr} = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}$; D'où $\boxed{\vec F = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$;

C'est donc une **<u>force attractive,</u>** car selon ($-\overrightarrow{u_r}$).

1/10 **Q3.** $\overrightarrow{L_0}$ est le **<u>vecteur moment cinétique du point M par rapport à O.</u>**

- $\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM}\wedge m\,\overrightarrow{v_M} = r\,\overrightarrow{u_r}\wedge m\left(\dot r\,\overrightarrow{u_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$; Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{L_0} = m\,r^2\,\dot\theta\,\vec k}$;
- Donc : $\boxed{L_0 = \left\|\overrightarrow{L_0}\right\| = m\,r^2\,|\dot\theta|}$;
- Système : le satellite en M ;

  Référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

  Seule force $\vec F$: Son moment par rapport à O : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec F) = \overrightarrow{OM}\wedge\vec F = \vec 0}$, car vecteurs colinéaires.

  Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe : $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec F) = \vec 0$; Soit $\boxed{\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{cst}}$;

ou $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \vec v\wedge m\vec v = \vec 0 + \overrightarrow{OM}\wedge m\vec a = \overrightarrow{OM}\wedge\vec F = \vec 0$

<u>II - Mise en orbite circulaire du satellite :</u>

1/5 **Q4.** Trajectoire circulaire de rayon r, donc $\dot r = 0$; Alors $\overrightarrow{v_M} = r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$; Ou encore : $\boxed{\overrightarrow{v_M} = v\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

Et $\overrightarrow{a_M} = \frac{d\,\overrightarrow{v_M}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{u_\theta} - v\,\dot\theta\,\overrightarrow{u_r}$; Ou encore : $\boxed{\overrightarrow{a_M} = -\frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot v\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

On retrouve l'expression de l'accélération dans la base de Frenet.

1/4 **Q5.** Seule force $\vec F = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$; PFD : $\vec F = m\overrightarrow{a_M}$; Ainsi : $m\left(-\frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot v\,\overrightarrow{u_\theta}\right) = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$;

En projetant sur les 2 axes, il vient : $\boxed{\dot v = 0}$; Ainsi : $\boxed{v = cste}$: Le **<u>mouvement est donc uniforme.</u>**

$\frac{v^2}{r} = g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}$; Soit : $\boxed{v^2 = g_0\,\frac{R_T^2}{r}}$;

1/6 **Q6.** $E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2$; Ainsi : $\boxed{E_C = \frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r}}$;

$E_m = E_C + E_P = \frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r} - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$; Ainsi : $\boxed{E_m = -\frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r}} = -E_C$; $\boxed{E_m < 0}$ normal car **<u>c'est un état lié</u>**.

- $E_m(r_b) = -\frac{4.10^3\times10\times(6{,}4.10^6)^2}{2\times8.10^6}$; On trouve : **<u>$E_m(r_b) \approx -1.10^{11}$ J</u>**. 2CS
- $E_m(r_h) = -\frac{4.10^3\times10\times(6{,}4.10^6)^2}{2\times40.10^6}$; On trouve : **<u>$E_m(r_h) \approx -2.10^{10}$ J.</u>** 2CS

31

<u>III - Étude énergétique du satellite :</u>

1/4 **Q7.** Le système n'est soumis qu'à **<u>une force conservative</u>**, donc son **<u>E_m est constante</u>**.

- De plus, dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a : $\overrightarrow{v_M} = \dot r\,\overrightarrow{u_r} + r\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}$; Donc : $\boxed{v_M^2 = \dot r^2 + r^2\,\dot\theta^2}$.

Alors : $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}\,m\,v_M^2 - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r} = \frac{1}{2}\,m\left(\dot r^2 + r^2\,\dot\theta^2\right) - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$;

Ou encore : $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 + \frac{1}{2}\,mr^2\,\dot\theta^2 - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$;

De plus, on a vu au 3) que : $L_0 = \left\|\overrightarrow{L_0}\right\| = m\,r^2\,|\dot\theta|$; Donc : $\dot\theta^2 = \frac{L_0^2}{m^2r^4}$ et $m\,r^2\dot\theta^2 = \frac{L_0^2}{m\,r^2}$.

37 Ainsi $\boxed{E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m\frac{R_T^2}{r}}$. Alors $\boxed{E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 + E_{P,eff}(r)}$ avec $\boxed{E_{P,eff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m\frac{R_T^2}{r}}$

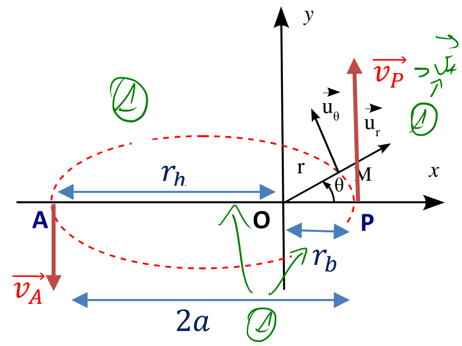
1/8 **Q8.** On a : $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $\frac{1}{2}\,m\,\dot r^2 \geq 0$.

Donc à chaque instant, on doit avoir : $\boxed{E_m \geq E_{P,eff}(r)}$;

Q8 (suite)

- Pour la <u>trajectoire elliptique</u>, il faut un **<u>domaine de variation de r qui soit borné</u>**, donc il faut un **<u>état lié</u>**, $E_{m2} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r_{min} \leq r \leq r_{max}$;
- Pour la <u>trajectoire hyperbolique</u>, il faut un **<u>domaine de variation de r qui soit non borné</u>**, donc il faut un **<u>état de diffusion</u>**, $E_{m1} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r \geq r'_{min}$;
- Pour la <u>trajectoire circulaire</u>, il faut que **<u>r soit constant,</u>** donc qu'il ne puisse prendre qu'une seule valeur. $E_{min} \geq E_{P,eff}(r)$ impose r = cste.

<u>IV - Mise en orbite haute du satellite :</u>



Q9. En A ou en P, $\overrightarrow{OA} \perp \vec{v_A}$, donc la composante en $\vec{u_r}$ est nulle, ainsi $\boxed{\dot{r} = 0}$;

Ou encore, en ces points, r est max donc $\dot{r} = 0$;

D'autre part, d'après les propriétés de l'ellipse, on a : $\boxed{r_h + r_b = 2a}$;

Q10. D'après la question Q7),

on sait que $E_{m,t} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

Or en A et en P, $\dot{r} = 0$, donc en ces points $E_{m,t} = 0 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

D'où : $r^2\, E_{m,t} = \frac{L_0^2}{2m} - g_0 m\, r\, R_T^2$; Ou encore $\boxed{: \boldsymbol{r^2 + \frac{g_0 m\, r\, R_T^2}{E_{m,t}} - \frac{L_0^2}{2mE_{m,t}} = 0}}$;

Par identification, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{g_0 m\ R_T^2}{E_{m,t}}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\beta = -\frac{L_0^2}{2mE_{m,t}}}}$;

Pour trouver l'expression de $E_{m,t}$, il faut résoudre le polynôme du second degré trouvé précédemment.

On a $r^2 + \alpha\, r + \beta = 0$; $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$; $r_{h,b} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; Ainsi $\boxed{: \boldsymbol{r_h + r_b = 2a = -\alpha}}$;

D'où : $2a = -\frac{g_0 m\ R_T^2}{E_{m,t}}$ et $\boxed{\boldsymbol{E_{m,t} = -\frac{m\, g_0\, R_T^2}{2a}}}$; CQFT.

Q11. Au début du transfert, le satellite est en $\boldsymbol{r_b}$ **= 8000 km** sur l'ellipse de transfert.
Par lecture graphique, on obtient **<u>$E_{m,\text{ ellipse}}$ ≈ - 35 GJ</u>** (courbe du milieu).

Q12. De même, on lit pour l'orbite basse, on lit : **<u>$E_{m,b}$ ≈ - 100 GJ</u>** (courbe du bas).
Et pour l'orbite haute : **<u>$E_{m,h}$ ≈ - 20 GJ</u>** (courbe du haut).

<u>Rq :</u> On retrouve les ordres de grandeurs de la question 7.

Q13. En P, le satellite passe de l'orbite circulaire basse : ($E_{m,b}$ ≈ - 100 GJ) à l'ellipse de transfert ($E_{m,\text{ ellipse}}$ ≈ - 35 GJ), il faut donc lui fournir **<u>$\Delta\, E_{mP} = 65$ GJ</u>**.

Grâce aux dimensions des grandeurs fournies, on en déduit $m_C = \frac{65.10^9}{50.10^6} = \frac{65000}{50}$; Soit : **<u>m_C =1300 kg</u>.**

Q14. Les <u>ergols</u> utilisés dans la fusée Ariane sont **<u>l'oxygène et l'hydrogène liquide</u>**.
<u>L'orbite géostationnaire</u> est **<u>l'orbite circulaire dans le plan équatorial située à 36 000 km d'altitude</u>**. Sa particularité est d'avoir une période de rotation synchrone avec la terre, soit 24h. Le satellite apparait alors immobile pour l'observateur terrestre.

<u>V- Chute du satellite :</u>

Q15. L'énoncé nous donne la solution des questions Q5) et Q6) pour v^2 et E_m.
Sur l'orbite circulaire, on a démontré à la question Q5) que le mouvement était uniforme.

Alors $v = \frac{dist}{temps} = \frac{2\pi r}{T}$ (pour un tour) ; Soit : $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0\ \frac{R_T^2}{r}$, d'après l'énoncé.

Donc : $\boxed{\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0\, R_T^2}}}$; On retrouve la **<u>3ème loi de Kepler</u>.**

/7 **Q16.** Théorème de la puissance mécanique : Pour un système **non conservatif** (ce qui est le cas ici), car il y a des f**rottements**, $\boxed{\boldsymbol{\frac{d E_m}{dt} = P\left(\overrightarrow{f_{nc}}\right) = \overrightarrow{f_{nc}} \cdot \vec{v}}}$; Ainsi ici, $\boldsymbol{\frac{d E_m}{dt}} = \boldsymbol{-k\, v^2} = -k\, g_0\, \frac{R_T^2}{r}$;

Or d'après l'énoncé, $E_m(t) = -\,\frac{m\, g_0\, R_T^2}{2r(t)}$; Donc $\frac{d\, E_m}{dt} = \frac{m\, g_0\, R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r}$

Ainsi : $\frac{m\, g_0\, R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r} = -k\, g_0\, \frac{R_T^2}{r}$; D'où : $\boxed{\boldsymbol{\dot{r} + \frac{2k}{m}\, r(t) = 0}}$; Par identification, on a $\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{m}{2k}}}$;

<u>Unité de τ</u> : $[\tau] = \frac{kg}{[k]} = \frac{kg}{N.s.m^{-1}} = \frac{kg}{kg.m.s^{-2}.s.m^{-1}} = s$; **<u>$\boldsymbol{\tau}$ est bien homogène à un temps</u>**.

Car $\vec{f} = -k\, \vec{v}$.

/3 **Q17.** Solution de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre, à coefficients constants : $\boldsymbol{r(t) = A\, e^{-t/\tau}}$;

Or CI : A $t = 0$, $r(0) = \boldsymbol{r_0 = A}$; Donc : $\boxed{\boldsymbol{r(t) = r_0\, e^{-t/\tau}}}$;

<u>Remarque :</u> En toute rigueur, $r > R_T$ car le satellite ne peut pas pénétrer dans la terre. De plus, la valeur de k n'est pas constante : $k(r)$.

En effet, le frottement atmosphérique dépend de la densité de l'air donc de l'altitude.