Correction du DS

/20 E1 Oscillations d'un métronome

/2 1 Plus x augmente et plus J augmente 1, ce qui est normal puisque le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est répartie loin de l'axe. 1

/8 2 ◇ **Système** : {métronome} = {disque+tige+curseur} de moment d'inertie J_z ;

◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen ; 1

◇ **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$;

◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \ell\,\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -x\,\overrightarrow{u_r}$. 1

Les actions qui s'exercent sur le métronome sont :

◇ poids du disque $\vec{P}_{\mathrm{C}} = M\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_{\mathrm{C}}) = -Mg\ell\sin\theta$; 1

◇ poids du curseur $\vec{P}_{\mathrm{A}} = m\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_{\mathrm{A}}) = +mgx\sin\theta$; 1

◇ liaison pivot parfaite dont le moment par rapport à l'axe Oz est nul. 1

◇ De plus, $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = J\dot{\theta}$. 1

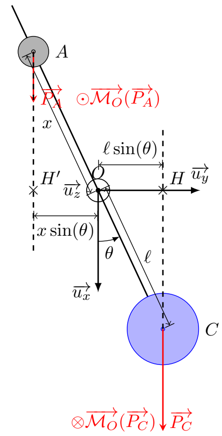

Figure 7.1 – Schéma 2

/2 3 On applique la loi du moment cinétique dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\mathrm{ext}}) \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = mgx\sin\theta - Mg\ell\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}\sin\theta = 0}$$

1 1

/4 4 Si les oscillations sont petites, alors $\sin\theta \approx \theta$, donc on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}\dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\dot{\theta} = 0}$$

1

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg\ell - mgx}{J}} \Leftrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mg\ell - mgx}} \Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2}{Mg\ell - mgx}}}$$

1 1 1

/2 5 Cela correspond à 50 périodes par minute 1, donc

$$\boxed{T_0 = \frac{60\,\mathrm{s{\cdot}min^{-1}}}{50\,\text{périodes}{\cdot}\mathrm{min}^{-1}} = 1{,}2\,\mathrm{s}{\cdot}\text{période}^{-1}}$$

1

/2 6 Pour augmenter la fréquence, il faut diminuer T_0, 1 donc diminuer son numérateur et augmenter son dénominateur, ce qui revient dans les 2 cas à diminuer x. 1

/47 E2 Satellite en orbite terrestre *(D'après TSI 2010)*

II/A Etude dynamique

/5 1 Le référentiel géocentrique est lié au repère dont le centre est le centre de masse 1 de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes lointaines. 1

Un référentiel terrestre est lié au repère dont le centre est un point à la surface de la Terre 1 et dont les axes sont solidaires à la Terre, donc en rotation par rapport à l'axe des pôles fixe 1 dans le référentiel géocentrique.

On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. 1

/4 [2] La force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est

$$\boxed{\vec{F} \overset{①}{=} -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

où $\vec{e_r}$ est le vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre O vers le centre du satellite M. ①

D'après le principe des actions réciproques (troisième loi de Newton ①), on a :

$$\boxed{\vec{F'} \overset{①}{=} -\vec{F} = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}}$$

/7 [3] On se place dans le référentiel géocentrique. La seule force exercée par le satellite est la force $\vec{F}$. ① Elle est centrale de centre O, ainsi, son moment par rapport à O est nul : $\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) \overset{①}{=} \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} \overset{①}{=} \vec{0}$.

D'après le théorème du moment cinétique par rapport au point O, on a

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} \overset{①}{=} \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}) \overset{①}{=} \overrightarrow{\mathrm{cte}} = \mathcal{L}_0\,\vec{u_z}$$

$$\Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge m\,\vec{v}_{\mathrm{M}}(t) \overset{①}{=} \mathcal{L}_0\,\vec{u_z} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) \wedge m\,\vec{v}_{\mathrm{M}}(0)$$

avec $\vec{u_z}$ la direction initiale du moment cinétique. Ainsi, le vecteur $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ reste constamment perpendiculaire à un vecteur constant, donc le mouvement est plan et le plan du mouvement passe par le centre de force O. En l'occurrence, le plan est $(\mathrm{O},\overrightarrow{\mathrm{OM}_0},\vec{v_0})$. ①

/4 [4]

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{e_r} \qquad \vec{v} = r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + r\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} \qquad ①$$

D'après le PFD appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on a :

$$m\vec{a} \overset{①}{=} \vec{F} \Rightarrow -mr\dot{\theta}^2\,\vec{e_r} + rm\ddot{\theta}\,\vec{e_\theta} = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2}\,\vec{e_r}$$

Sur $\vec{e_\theta} \Rightarrow$ $\quad \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \mathrm{cte}$ $\quad$ donc $\|\vec{v}\| = \left|r\dot{\theta}\right|$ uniforme ①

Sur $\vec{e_r} \Rightarrow$ $\quad mr\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \Rightarrow r\frac{v^2}{r^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \Rightarrow \boxed{v \overset{①}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}}$

/2 [5] On a

$$T \overset{①}{=} \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}} = 2\pi\sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{r^3} \overset{①}{=} \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}}$$

ce qui correspond à la traduction mathématique de la troisième loi énoncée par Kepler.

/3 [6] On peut, à partir de la trajectoire d'un satellite naturel ou artificiel connaître r et T, on en déduit alors M_T en utilisant la 3ème loi de Kepler ①. Mieux, on peut relever r et T pour différent satellites, et tracer T^2 en fonction de r^3. On obtient alors une droite de pente $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$, ce qui permet d'en déduire M_T (en supposant $\mathcal{G}$ connu !).

Pour le cas de la lune : $T = 28$ jours et $r = 384\times10^6$ m ①. On en déduit la masse de la Terre : $\underline{M_T = 6{,}10\times10^{24}\,\mathrm{kg}}$. ①

/3 [7] Si les deux satellites sont à la même distance de la terre, ils ont la même vitesse. ① Si de plus ils sont dans un même plan, alors ils ont des trajectoires identiques, ① parcourues à la même vitesse : ils ne peuvent pas se heurter (sauf si leurs vitesses sont opposées). ①

II/B Étude énergétique

/5 [8]

$$\delta W \overset{①}{=} \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r^2}\,\vec{e_r}\cdot(\mathrm{d}r\,\vec{e_r} + r\mathrm{d}\theta\,\vec{e_\theta} \overset{①}{+} \mathrm{d}z\,\vec{e_z}) = -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r^2}\mathrm{d}r = -\mathrm{d}\left(\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r} + C\right)$$

Ainsi, le travail élémentaire de la force $\vec{F}$ peut se mettre sous la forme $-\mathrm{d}\mathcal{E}_p$, donc elle est conservative et dérive de l'énergie $\mathcal{E}_p(r) \overset{①}{=} -\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r} + C$. En choisissant $\mathcal{E}_p(+\infty) \overset{①}{=} 0$, on a $C = 0$, et on en déduit

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r} \qquad \text{avec} \qquad \boxed{k \overset{①}{=} \mathcal{G}M_Tm}$$

/10 9

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{\text{TEM}}{=} 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad 1$$

Or $\qquad \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{e_r} \Rightarrow \overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{e_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta}$

$$\Rightarrow v^2 \overset{1}{=} \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + -\frac{k}{r}}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}$$

or $\boxed{\dot{\theta} = C/r^2}$ d'où

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \overset{1}{=} \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}}$$

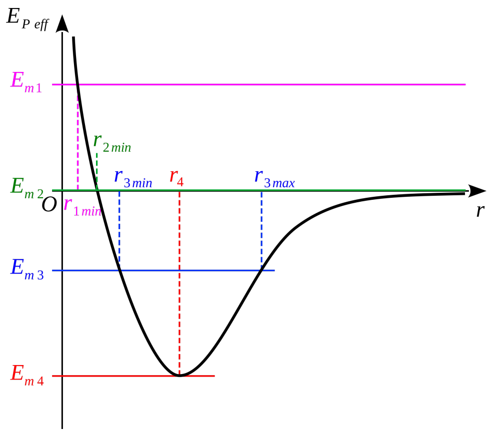

Figure 7.2 – Graphique de $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$ 2

- ◇ $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r\to 0}{\sim} \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}$, et tend donc vers ∞. 1
- ◇ $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r\to+\infty}{\sim} -\frac{k}{r}$, et tend donc vers 0^- (donc par valeurs négatives). 1
- ◇ De plus, $\mathcal{E}_m = \text{cte} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) > \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, donc les régions accessibles sont celles pour lesquelles $\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) < \mathcal{E}_m}$. 1

On en déduit donc : 2

- ◇ Si $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,4}$, aucun mouvement n'est possible
- ◇ Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,4}$, alors $r = r_4$ est constant : la trajectoire est circulaire (état lié)
- ◇ Si $\mathcal{E}_{m_4} < \mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,2} = 0$, r est compris entre 2 valeurs $r_{3,min}$ et $r_{3,max}$: mouvement elliptique (état lié)
- ◇ Si $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} = 0$, le satellite peut partir à l'infini mais sa vitesse à l'infini est nulle : le mouvement est parabolique (état de diffusion)
- ◇ Si $\mathcal{E}_m > 0$: le mouvement est hyperbolique (état de diffusion)

/5 10

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}mv^2 - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}$$

Or, $v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r_c}} \Rightarrow$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} - \frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c} \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m \overset{1}{=} -\frac{1}{2}\frac{\mathcal{G}M_Tm}{r_c}}$$

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** autour de la Terre, à un rayon R_T : 1

$$\mathcal{E}_{m,\text{sol}} \overset{1}{=} \frac{1}{2}m{v_c}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{cercle}} \overset{1}{=} -\mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{2R_{\text{T}}}$$

Or système conservatif après le lancer $\Rightarrow \frac{1}{2}m{v_c}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} = -\mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{2R_{\text{T}}}$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_c \overset{1}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}}}$$

/32×1,5 P1 Rotation d'un œuf dur *(D'après TPC CCP 2018)*

/2 1 Comme $b > a$, on a $J_H > J_V$. 1 En effet, la masse est globalement répartie plus loin de l'axe de rotation, 1 donc le moment d'inertie est plus grand.

/2 2 Dans les deux cas, $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2}J\Omega^2 + mgz_G$, 1 on a donc

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga} \quad \overset{1}{\text{et}} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} = \frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb}$$

/3 3 On cherche la condition sur Ω pour avoir $\mathcal{E}_{m_V} \overset{1}{<} \mathcal{E}_{m_H}$, ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2}J_V\Omega^2 + mgb < \frac{1}{2}J_H\Omega^2 + mga \Leftrightarrow 2mg(b-a) < (J_H - J_V)\Omega^2$$

$$\Leftrightarrow 2mg(b-a) \overset{(1)}{<} \frac{m}{5}\underbrace{\left(b^2-a^2\right)}_{(a-b)(a+b)}\Omega^2 \Leftrightarrow \Omega > \boxed{\Omega_c \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{10g}{a+b}}}$$

/2 4 L'application numérique donne $\Omega_c = 45\,\text{rad·s}^{-1}$ (1), soit environ 7 tour/s. Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'on nous parle dans le document d'une vitesse de rotation d'une dizaine de tours par seconde. (1)

/3 5 À l'état initial, on a

$$\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2}J_H\Omega_0^2 + mga \overset{(1)}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)^2 + mga$$

soit au premier ordre en ε (DL1) :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} \overset{(1)}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon) + mga} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} \overset{(1)}{=} \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon r) + mgb}$$

/7 6

$$\mathcal{E}_{m_H} \overset{(1)}{=} \mathcal{E}_{m_V} \Rightarrow \quad \frac{m}{5}a^2(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon r) + mgb = \frac{m}{10}(a^2+b^2)(\Omega_c^2+2\Omega_c\varepsilon) + mga \qquad (1)$$

$$\text{Or, } \boxed{3} \Rightarrow \quad \frac{m}{5}a^2\Omega_c^2 + mgb \overset{(1)}{=} \frac{m}{10}(a^2+b^2)\Omega_c^2 + mga \qquad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{10}(a^2+b^2)2\Omega_c\varepsilon \overset{(1)}{=} \frac{m}{5}a^2 2\Omega_c r\varepsilon \qquad (3) = (1) - (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \overset{(1)}{=} \frac{a^2+b^2}{2a^2}}$$

$b > a$ donc $r > 1$ donc $\Omega_f > \Omega_0$. (1) Lors de son redressement, la vitesse de rotation de l'oeuf augmente.

Dans le cas où $a = b$, c'est-à-dire dans le cas d'un oeuf sphérique, on retrouve $r = 1$ (1) puisque le système reste inchangé (dans ce cas, on ne peut même plus parler de redressement), donc sa vitesse de rotation ne varie pas. (1)

/4 7

$$\boxed{\mathcal{L}_H = J_H\Omega_0 = \frac{m}{5}(a^2+b^2)(\Omega_c+\varepsilon)} \quad \overset{(1)}{\text{et}} \quad \boxed{\mathcal{L}_V = J_V\Omega_f = \frac{2m}{5}a^2(\Omega_c+r\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \Delta\mathcal{L} \overset{(1)}{=} \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c + \frac{m}{5}(2a^2r-a^2-b^2)\varepsilon$$

$$r = \tfrac{a^2+b^2}{2a^2} \Rightarrow \quad \boxed{\Delta\mathcal{L} \overset{(1)}{=} \frac{m}{5}(a^2-b^2)\Omega_c < 0}$$

Le moment cinétique de l'oeuf a diminué lors de son redressement. (1)

/5 8 D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t} = \Gamma_z$. (1) En supposant que le redressement est de courte durée, on peut approcher $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}}{\mathrm{d}t}$ par $\frac{\Delta\mathcal{L}}{\Delta t}$, on a donc

$$\Gamma_z = \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c}{\Delta t} \overset{(1)}{=} \frac{m}{5}(a^2-b-2)\frac{\Omega_c^2}{\Omega_c\Delta t}$$

On injecte l'expression de Ω_c obtenue à la question 3 :

$$\boxed{\Gamma_z = \frac{m}{5}(a^2-b^2)\frac{10g}{(a+b)\Omega_c\Delta t} \overset{(1)}{=} \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c\Delta t}}$$

Ce couple est négatif, (1) ce qui est cohérent avec le fait que le moment cinétique de l'oeuf ait diminué pendant le redressement. (1)

/4 9 Le poids et la réaction normale ne peuvent (1) pas être responsable d'un tel couple car ces deux forces sont parallèles à l'axe de rotation, donc leur moment par rapport à cet axe est nul (1). Ce couple peut éventuellement provenir des frottements, (1) car on nous dit dans le document qu'il faut que la surface ne soit « pas trop lisse ». Cependant, cela contredit l'hypothèse de l'énergie mécanique constante. (1)

/64 P2 Satellites de télécommunication *(D'après Mines-Ponts MP 2007)*

II/A Couverture d'un réseau de satellite

/9 1 Dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen ① on ne prend en compte que la force de gravitation exercée par la Terre $\overrightarrow{F} = -\dfrac{k}{r^2}\overrightarrow{e_r}$ ① avec $k = \mathcal{G}M_T M_S$. On a de plus $r = R_T + h$. On peut ainsi appliquer le PFD $m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}$ au satellite dans le repère cylindrique O, $\overrightarrow{e_r}$, $\overrightarrow{e_\theta}$, $\overrightarrow{e_z}$: ①

$$-M_S r\dot{\theta}^2 = -\frac{k}{r^2} \quad ①$$
$$M_S r\ddot{\theta} = 0 \quad ①$$

De la deuxième équation, on obtient $\dot{\theta} = cte \Rightarrow v = r\dot{\theta} = \text{cte}$. ① On peut ainsi ré-exprimer l'accélération radiale $a_r = -v^2/r$ d'où :

$$M_S\frac{v^2}{r} = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}} \quad ①$$

De plus, on sait que $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \boxed{\dfrac{T^2}{(R_T + h)^3} = \dfrac{4\pi^2}{GM_T}}$ ①. On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler. Les A.N.s donnent $\underline{T = 6{,}05 \times 10^3\,\text{s}}$ et $\underline{v = 7{,}45\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}}$. ①

/2 2 L'énergie potentielle a pour expression $\mathcal{E}_p(r) = -\dfrac{k}{r}$ ①. On a $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = M_S v^2 - \frac{GM_T M_S}{r} = M_S\left(\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T}{r}\right) = 0$ ① d'où le résultat.

/5 3 Il convient pour cela d'établir l'expression de l'angle φ tel que $\cos(\varphi) = R_T/(R_T + h)$. ① La vitesse du satellite étant uniforme, on en déduit $\tau = \dfrac{2\varphi}{2\pi}T$ ① soit au final :

$$\boxed{\tau = 2\arccos\frac{R_T}{R_T + h}\underbrace{\sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}}}_{=f(h)\,①}} \quad ①$$

L'application numérique donne $\underline{\tau = 9{,}2 \times 10^2\,\text{s}}$. ①

/3 4 On a simplement $\dfrac{T}{\tau} = \dfrac{2\pi}{2\varphi} = \dfrac{\pi}{\arccos\frac{R_T}{R_T+h}} \approx 6{,}6$ ① ①. Le satellite est ainsi visible pendant 1/6,6 ième de son trajet. Il faudra donc 7 satellites ① pour garantir la couverture permanente au sol (arrondi au supérieur).

/3 5 D'après la question précédente, il faudrait aussi 7 « trains de satellites » pour couvrir toutes les longitudes. ① Cependant, un train de satellite couvre « deux côtés » et donc $\lfloor 7/2 \rfloor = 4$ trains suffisent. ① On aboutit ainsi à un total de $7 \times 4 = 28$ satellites. ①

/7 6 Sur l'orbite géostationnaire, la période de révolution du satellite est celle de la terre $T_T \approx 86 \times 10^3\,\text{s}$. ① On peut utiliser la 3ième loi de Kepler :

$$\frac{T_T^2}{(R_T + h_g)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{soit} \quad \boxed{h_g = \left(\frac{GM_T T_T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T \approx 35\,700\,\text{km}} \quad ① ①$$

La notion de « visibilité » est à prendre avec prudence : pour un point du globe, le satellite est alors soit visible et la durée de visibilité est infinie, soit invisible. ① Il ne faut pas utiliser la formule de la question ④ pour la durée de visibilité car on y faisait l'hypothèse d'une Terre immobile (le schéma permettant le calcul de φ est incorrect dans ce cas !!).

Pour une zone donnée de la Terre, il suffit de disposer d'un seul ① satellite au lieu d'une bonne quarantaine. Mais il est beaucoup plus éloigné, ce qui pose des problèmes de perte de transmission. ①

Il faut aussi remarquer que les Pôles et les régions qui les entourent ne voient pas les satellites géostationnaires. ①

II/B Influence des frottements aérodynamiques

/5 **7** On a $\dim F = \mathrm{M.L.T}^{-2} \Leftrightarrow \dim(\alpha).\mathrm{M.L}^2.\mathrm{T}^{-2}$. On en déduit par identification que $\boxed{\dim\alpha = \mathrm{L}^{-1}}$. (1)

Le TPM appliqué au satellite donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} \mathcal{P}(\vec{F}_a) \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} -\alpha M_S v^3 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t}$$

De plus, $v^2 = 2\mathcal{E}_C/M_S \overset{(1)}{=} -\mathcal{E}_P/M_S = GM_T/(R_T+h)$. On en déduit en combinant ces résultats que :

$$-\alpha M_S \frac{GM_T}{R_T+h}^{3/2} = \dot{h}\frac{GM_S M_T}{2(R_T+h)^2} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} -2\alpha\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h}$$

/8 **8** Entre le début et la fin de la révolution, R_T+h n'a quasiment pas varié et on peut supposer ce terme constant (on note alors h_0 l'altitude initiale du satellite) :

$$\Delta h \overset{(1)}{=} -2\alpha \underbrace{\Delta t}_{=T} \sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0} \Rightarrow \alpha = -\frac{\Delta h}{2T\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha \overset{(1)}{=} -\frac{\Delta h}{4\pi(R_T+h_0)^2} \approx 1{,}53\times 10^{-15}\,\mathrm{m}^{-1}}$$

En dix années, on a effectué $n = \frac{\Delta T}{T} = 10\frac{T_T}{T} \approx 52000$ orbites donc au premier ordre (en supposant Δh identique à chaque période), on a $\underline{\Delta h \approx -52\,\mathrm{km}}$. (1)

Une résolution exacte de l'équation (à l'aide de la méthode de séparation des variables (1)) :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\sqrt{R_T+h}} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\mathrm{d}t \Leftrightarrow 2(\sqrt{R_T+h_1} - \sqrt{R_T+h_0}) \overset{(1)}{=} -2\alpha\sqrt{GM_T}\Delta T$$
$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = h_1 - h_0 \overset{(1)}{=} \left(\sqrt{R_T+h_0} - \alpha\sqrt{GM_T}\Delta T\right)^2 - R_T - h_0 \approx -51{,}3\,\mathrm{km}} \;(1)$$

Ce résultat est très proche de celui obtenu à l'aide de l'approximation. Il peut sembler surprenant qu'une force qui s'oppose au mouvement se concrétise par une augmentation de vitesse : le freinage d'une voiture (force aérodynamique par exemple) réduit sa vitesse. Mais c'est sans compter sur l'énergie potentielle : à une orbite plus basse correspond une vitesse plus élevée. (1)

/7 **9** L'énoncé nous donne que $\Delta h_{\text{haut}} = \frac{1}{2}\Delta h_{\text{bas}}$. (1) De plus, on observe que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \propto \alpha(h)$, (1) car les autres facteurs varient peu (question **??**). On en déduit ainsi que :

$$\frac{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(h=h_{\text{haut}})}{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}(h=h_{\text{bas}})} \overset{(1)}{\approx} \frac{\frac{\Delta h_{\text{haut}}}{T_T}}{\frac{\Delta h_{\text{bas}}}{T'_T}} \Leftrightarrow \left(\frac{h_{\text{bas}}}{h_{\text{haut}}}\right)^\beta = \frac{1/T_T}{2/T'_T} \Leftrightarrow \boxed{\beta = \frac{\log(T'_T/(2T_T))}{\log(h_{bas}/h_{haut})}} \;(1)$$

avec T'_T la période de révolution à 400 km d'altitude telle que, d'après **??**, $T'_T/T = \frac{R_T+h_{\text{bas}}}{R_T+h_{\text{haut}}}^{3/2} \approx 0{,}917$. (1) On en déduit au final $\underline{\beta \approx 1{,}13}$ (1) puis $\gamma = h_{\text{haut}}^\beta \times \alpha(h_{\text{haut}}) \approx 7{,}2\times 10^{-9}$ SI. (1) En pratique, la valeur de γ est très sensible aux différents arrondis réalisés pour obtenir β, et seul son ordre de grandeur à du sens.

II/C Stabilisation de l'orientation d'un satellite par gradient de gravité

/2 **10** On a $\overrightarrow{\mathrm{OM_1}} \overset{(1)}{=} \overrightarrow{\mathrm{OS}} + \overrightarrow{\mathrm{SM_1}} \Leftrightarrow r_1 = \sqrt{r_0^2+\ell^2+2r_0\ell\cos(\theta)}$. De même, on trouve $r_2 \overset{(1)}{=} \sqrt{r_0^2+\ell^2-2r_0\ell\cos(\theta)}$

/5 **11** On commence par s'intéresser aux termes d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,i} = -k/r_i$ avec $k = GM_Tm$. On obtient ainsi en posant $\varepsilon = \ell/r_0$:

$$\mathcal{E}_{p,12} = -\frac{k}{r_{12}} = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2+\ell^2\pm 2r_0\ell\cos(\theta)}} \overset{(1)}{=} -\frac{k}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1+\varepsilon^2\pm 2\varepsilon\cos(\theta)}}$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,12} \underset{(1)}{\overset{(1)}{=}} -\frac{k}{r_0}\left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2\pm 2\varepsilon\cos(\theta)) + \frac{3}{8}(\varepsilon^2\pm 2\varepsilon\cos(\theta))^2\right) + o(\varepsilon^2)$$

On peut maintenant ajouter les deux termes d'énergies potentielles (avec encore un terme quadratique à développer puis simplifier à droite du terme d'énergie potentielle) :

$$\mathcal{E}_{p,1} + \mathcal{E}_{p,2} \overset{①}{=} -\frac{k}{r_0}\left(2 - \varepsilon^2 + 3\varepsilon^2\cos^2(\theta)\right) + o(\varepsilon^2)$$

On combine ensuite ce terme avec l'expression de l'énergie cinétique donnée dans l'énoncé :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m \overset{①}{=} -\frac{GM_TM_S}{r_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{\ell}{r_0}^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)\right) + \frac{1}{2}M_S(\ell\dot{\theta})^2}$$

car $m = M_S/2$, d'où le résultat !

/8 $\boxed{12}$ On applique le TPM dans le référentiel géocentrique au satellite qui n'est soumis à aucune force non conservative :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} \overset{①}{=} 0 \Leftrightarrow -\frac{GM_T}{r_0}\frac{\ell}{r_0}^2 3\cos(\theta)(-\sin(\theta))\dot{\theta} + \ell^2\dot{\theta}\ddot{\theta} \overset{①}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3GM_T}{2r_0^3}\sin(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + 3\Omega^2\frac{\sin(2\theta)}{2} \overset{①}{=} 0}$$

On est à l'équilibre lorsque $\ddot{\theta} = 0$ soit ici pour $\theta = p\frac{\pi}{2}$, $p \in \mathbb{N}$. ①

- ① ◇ Pour $\theta = 0 + x$ avec $x \ll 1$, on a comme équation du mouvement $\ddot{x} + 3\Omega^2 x = 0$ qui est l'équation de l'oscillateur harmonique donc la position d'équilibre est stable et la pulsation des petites oscillations vaut $\omega_0 = \Omega\sqrt{3}$
- ① ◇ Pour $\theta = \pi/2 + x$, on a maintenant $\ddot{x} - \omega_0^2 x$. Cette position d'équilibre n'est pas stable.
- ① ◇ Pour $\theta = \pi + x$, on a $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on retrouve la même équation que pour la première position d'équilibre. Cette position d'équilibre est donc aussi stable et de pulsation ω_0
- ① ◇ Pour $\theta = 3\pi/2 + x$, on obtient au final $\ddot{x} - \omega_0^2 x$: équilibre instable.

Ainsi, seules les positions verticale (à l'endroit ou à l'envers) sont stables. ① En cas de léger décalage, le satellite va donc osciller autour de la position d'équilibre verticale et donc toujours présenter le même côté vers la Terre. ①