Travaux pratiques – TP 0

Mesures et incertitudes

I Variabilité et incertitude-type

A Variabilités de mesures

Une expérience de mesure en science expérimentale est un processus généralement complexe qui entremêle de très nombreux processus. Cette complexité se traduit systématiquement par une variabilité de la mesure, qui implique que la répétition de l'ensemble de la mesure conduit généralement à une valeur mesurée sensiblement différente de la première. Cette variabilité est naturelle et fait intrinsèquement partie de la mesure. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le processus physique !
Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- la méthode de mesure : règle graduée ou pied à coulisse pour une longueur ;
- les variations de l'environnement : célérité du son différente s'il fait chaud ou froid ;
- les instruments de mesure : deux voltmètres *a priori* identiques peuvent donner des résultats différents ;
- le processus physique même : expériences de mécanique quantique, par essence probabiliste ;
- l'expérimentataire.

B Incertitude-type

Définition

La variabilité d'une mesure x_{exp} sur une grandeur x est appelée **incertitude-type**, et se note $u(x_{\text{exp}})$. Elle correspond mathématiquement à l'écart-type de la distribution qui surviendrait de mesures répétées.

Il est utile de définir l'incertitude-type **relative**, en pourcentages :

$$\boxed{u_r(x_{\text{exp}}) = \frac{u(x_{\text{exp}})}{x_{\text{exp}}}}$$

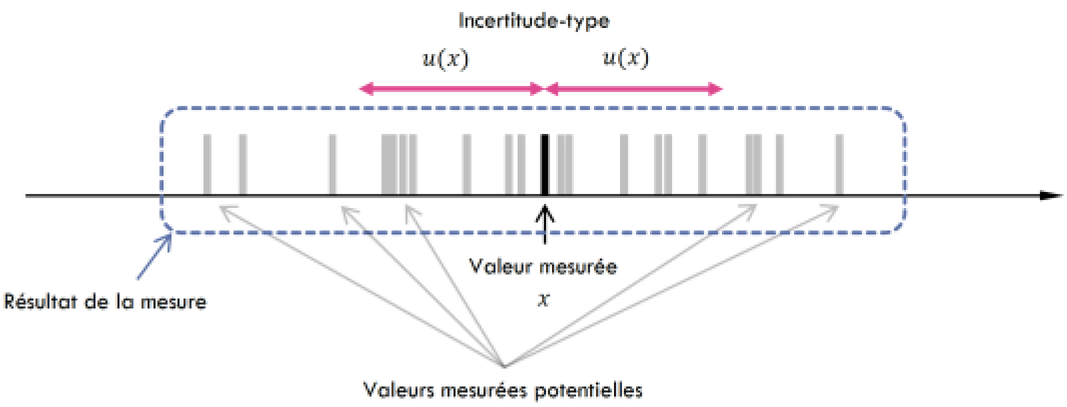


Figure 1 – Représentation d'un résultat de mesure expérimentale et du rôle de l'incertitude-type.

On notera que cette incertitude-type rend compte de toutes les grandeurs d'influence possibles.

Présentation d'un résultat de TP

Le résultat numérique d'une grandeur x s'écrit :

$$\boxed{x = x_{\text{exp}} \pm u(x_{\text{exp}}) \quad \textit{unité}}$$

x_{exp} est la valeur **mesurée**, la meilleure estimation possible de la grandeur mesurée.

Par convention,

- Une incertitude-type comporte 2 chiffres significatifs ;
- Le dernier chiffre significatif de la mesure correspond à celui de l'incertitude :

$$d = (12{,}35 \pm 0{,}27)\,\text{m} \quad \text{et pas} \quad d = (12{,}35\cancel{2} \pm 0{,}27)\,\text{m}$$

Application

Corriger la présentation des valeurs suivantes, indiquer leur nombre de chiffres significatifs et calculer leurs incertitudes relatives u_r :

$$\lambda = (589{,}0 \pm 11{,}0)\,\text{nm} \qquad t = (0{,}473 \pm 0{,}122)\,\text{s} \qquad V = (14{,}00 \pm 0{,}15)\,\text{mL}$$

On trouve

$$\lambda = (589 \pm 11)\,\text{nm} \qquad t = (0{,}47 \pm 0{,}12)\,\text{s} \qquad V = (14{,}0000 \pm 0{,}0015)\,\text{mL}$$

avec respectivement 3, 2 et 6 chiffres significatifs. Pour les u_r, on trouve

$$u_r(\lambda) = 1.9\% \qquad u_r(t) = 26\% \qquad u_r(V) = 0{,}011\%$$

C Comparaison de deux mesures

Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère quantitatif pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

Écart normalisé

L'**écart normalisé** E_N [1] entre deux mesures de valeurs x_1 et x_2 et d'incertitudes $u(x_1)$ et $u(x_2)$ est défini par :

$$\boxed{E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(m_2)^2}}}$$

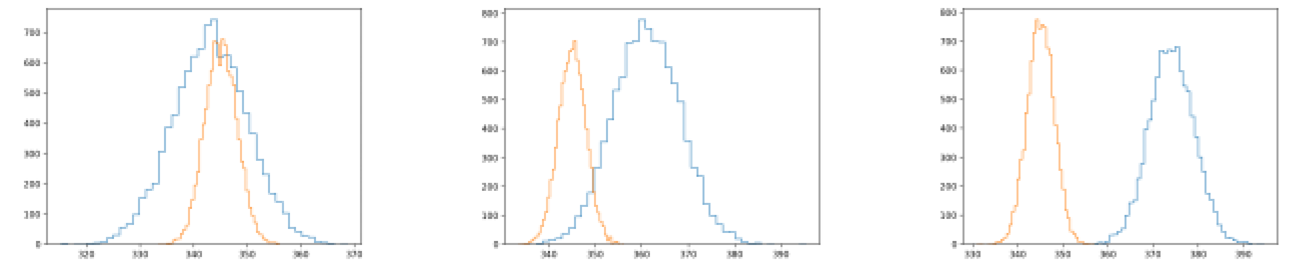
Par *convention*, on considère que **deux résultats sont compatibles si** $E_N \lesssim 2$.

Interprétation Pour justifier cette convention, on peut revenir à la définition de l'incertitude-type. Celle-ci quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque deux mesures sont cohérentes, on s'attend à ce qu'elles ne coïncident pas exactement, mais qu'elles ne s'écartent pas l'une de l'autre de plus que de quelques incertitudes-type.

Comparaison avec une valeur de référence Dans le cas d'une valeur donnée sans incertitude, ou avec une incertitude très faible comparée à la nôtre, $u(x_{\text{exp}}) \gg u(x_{\text{ref}})$ implique donc

$$E_N = \frac{|x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}|}{u(x_{\text{exp}})}$$

1. Il est parfois appelé *z-score*, et noté z.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$. (b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$. (c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

Figure 2 – Tracé de deux distributions de résultats de mesures.

En dépit d'incertitudes Si aucune des incertitudes n'est connue ou déterminée, on peut utiliser :

Écart absolu

$$\varepsilon = |x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}|$$

Écart relatif

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x_{\text{exp}} - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right|$$

Cette notion n'est officiellement plus au programme mais reste utilisée dans certains sujets.

II Estimation pour une mesure variable : type A

Lorsque l'on réalise plusieurs fois et de manière indépendante une mesure, il est possible d'évaluer statistiquement la mesure. Ainsi, pour n mesures notées x_i :

1) on définit $\bar{x} = x_{\text{exp}}$ la **moyenne** de l'ensemble avec :

$$\bar{x} = x_{\text{exp}} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

2) et l'incertitude-type sur **UNE MESURE** x_i

$$u(x_i) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} (x_i - \bar{x})^2}$$

Attention, selon les logiciels ou calculatrices, c'est n au lieu $n-1$! Notamment pour les Casio, σx est la version non désirée, et `sx` est la version avec $n-1$ comme attendu. On notera quoiqu'il en soit que cette incertitude-type est la même pour <u>toutes</u> les mesures x_i, par construction.

Le fait de répéter un grand nombre de fois une mesure *réduit* l'incertitude associée à la moyenne, puisque les fluctuations supposées aléatoires se compensent. Ainsi,

3) l'incertitude-type sur **LA MOYENNE** x_{exp} réduit avec le nombre de mesures, tel que

$$u(\bar{x}) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$

On remarquera que le procédé n'est pas linéaire : pour avoir une incertitude 10 fois plus faible, il faut 100 fois plus de mesures !

Incertitude de type A

Pour n mesures x_i,

Valeur mesurée

C'est la moyenne des mesures.

$$\boxed{x_{\text{exp}} = \bar{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$$

Incertitude

C'est l'écart-type divisé par $\sqrt{n}$.

$$\boxed{u(\bar{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$$

Application

On a obtenu par dosage rédox le degré d'alcool d'un vin à 8 reprises. Les mesures ont donné :

Degré (°)	11,9	12,5	13,1	12,4	12,9	12,6	12,8	12,6

À l'aide de votre calculatrice, d'un tableur ou d'un script `Python`, exprimer le résultat de ces mesures ainsi que son incertitude.

```python
import numpy as np

vals = np.array([11.9, 12.5, 13.1, 12.4, 12.9, 12.8, 12.6])
mean = np.mean(vals)
incert = np.std(vals, ddof=1)
print(f'D = {mean:.2f} +- {incert:.2f}')
```

On trouve

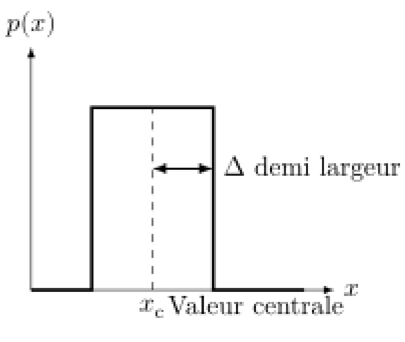
$$\underline{D = (12{,}60 \pm 0{,}39)^\circ}$$

III Estimation pour une mesure invariable : type B

Lorsque qu'il est impossible (*pas de variabilité observée de la mesure*), ou trop long, de faire une évaluation de type A, l'incertitude est alors évaluée à l'aide de connaissances préalables sur le dispositif expérimental : mesures antérieures, spécifications du fabricant, expérience ou connaissances du comportement ou des propriétés des instruments utilisés.

Dans beaucoup de cas, il est possible d'estimer le plus petit intervalle dans lequel on est certain-e trouver toutes les valeurs possibles de x. On note x_c la valeur centrale de cet intervalle.

En l'absence d'autre information sur la variabilité, on attribue une *loi de probabilité rectangulaire* à la mesure (équiprobabilité des mesures dans l'intervalle de largeur 2Δ) et on calcule l'écart-type de la distribution rectangulaire de demi-largeur Δ :



$$\boxed{u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$$

On a trois cas de figures courant pour la mesure de Δ :

1) Δ est égale à **une graduation** de l'appareil ;

2) Δ est fournie sur la notice ;

3) Δ est estimée directement avec honnêteté.

Incertitude de type B

Pour une mesure invariable,

Valeur mesurée

C'est la valeur centrale de l'intervalle.

$$\boxed{x_{\text{exp}} = x_c}$$

Incertitude

C'est la demi-largeur de l'intervalle divisé par $\sqrt{3}$.

$$\boxed{u(x_c) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$$

Application

Évaluer les incertitudes et donnez les résultats des expériences suivantes :

1) Mesure d'une longueur $\ell = 13\,\text{cm}$ avec une règle graduée au mm.

   Largeur $= 1\,\text{mm}$, donc demi-largeur $\Delta = 0{,}5\,\text{mm}$. Ainsi,

   $$\underline{\ell = (13{,}000 \pm 0{,}029)\,\text{cm}}$$

2) Utilisation d'un multimètre pour mesurer une tension U. Il affiche $2{,}5462\,\text{V}$ et la notice indique *Accuracy=0.3% rdg + 2 digits*, autrement dit de 0,3% de la valeur lue (*rdg* = *reading*) auquel on ajoute 2 fois la valeur du dernier chiffre.

   On trouve $u(U) = 0{,}76\,\text{V}$, d'où

   $$\underline{U = (2{,}54 \pm 0{,}76)\,\text{V}}$$

3) Mesure de la position d d'un écran sur un banc optique. L'image semble nette pour des positions allant de 29,7 à 30,5 cm.

   On a

   $$x_c = 30{,}1\,\text{cm} \quad \text{et} \quad \Delta = 0{,}4\,\text{cm} \quad \text{donc} \quad \underline{d = (30{,}1 \pm 0{,}4)\,\text{cm}}$$

IV Incertitudes composées

Dans de très nombreuses situations, on est amené à calculer la valeur d'une grandeur à partir de valeurs mesurées et donc possédant des incertitudes. Comment exprimer alors l'incertitude sur ce calcul en fonction de celles sur les données utilisées ?

A Calcul à partir d'une seule valeur mesurée

$$\boxed{y_{\text{calc}} = f(x_{\text{mes}}) \Rightarrow u(y_{\text{calc}}) = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}\right| u(x_{\text{mes}})}$$

Application

On envoie une impulsion laser de la Terre sur la Lune. On mesure son aller-retour en $t = (2{,}57 \pm 0{,}02)\,\text{s}$. Sachant que la célérité de la lumière dans le vide est exactement

$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, déterminer la distance Terre-Lune (qu'on nommera d) ainsi que son incertitude.

L'impulsion parcourt $2d$ en t à la vitesse c. Ainsi,

$$\boxed{d = \frac{c}{2}t} \quad \Rightarrow \quad \left|\frac{\mathrm{d}\left(\frac{c}{2}t\right)}{\mathrm{d}t}\right| = \frac{c}{2}$$

Ainsi, par A.N.,

$$d = (385\,344\,308{,}50 \pm 2\,997\,924{,}58)\,\mathrm{m}$$
$$\Rightarrow \underline{d = (3{,}853 \pm 0{,}030) \times 10^5\,\mathrm{km}}$$
$$\Rightarrow \underline{d = (385{,}3 \pm 3{,}0) \times 10^3\,\mathrm{km}}$$

B Calcul avec deux valeurs mesurées (*à connaître*)

Incertitudes composées à 2 variables

Somme ou différence

$$\boxed{y = x_1 \pm x_2 \qquad \Rightarrow \qquad u(y) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2))^2}}$$

Produit de puissances

$$\boxed{y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \qquad \Rightarrow \qquad \frac{u(y)}{y} = \sqrt{|\alpha_1|\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + |\alpha_2|\left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}}$$

Application

On mesure la distance $d = x_2 - x_1$ entre deux points repérés avec la même incertitude $u(x_1) = u(x_2) = 1\,\mathrm{mm}$. Quelle est l'incertitude sur d ?

On trouve élémentairement :

$$u(d) = \sqrt{1+1} = \sqrt{2}\,\mathrm{mm}$$

On détermine la célérité c du son dans l'air grâce à la relation $\lambda = \frac{c}{f}$, avec $f = (500 \pm 10)\,\mathrm{Hz}$ et $\lambda = (68{,}0 \pm 2{,}5)\,\mathrm{cm}$. Donner sa valeur.

On trouve

$$\underline{c = (340 \pm 14)\,\mathrm{m{\cdot}^{-1}}}$$

C Incertitudes-types composées quelconques

Seules les deux formules précédentes sont à connaître, pour tous les autres cas, nous allons revenir à la définition des incertitudes puis, à l'aide d'une simulation informatique comportant une part d'aléatoire, calculer l'incertitude-type.

Définition

Un algorithme utilisant la variabilité d'une mesure pour simuler un calcul d'incertitude fait parti des algorithmes de type MONTE-CARLO.

Une fiche y sera consacrée.