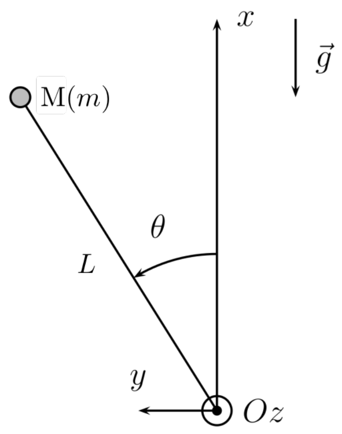
TD : moment cinétique et forces centrales

I Gravimètre de Holweck-Lejay



Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité M d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = \mathrm{OM}$, articulée en O et mobile dans un plan vertical. Un ressort « spirale » (non représenté sur la figure) exerce sur M, via la tige, un couple de rappel (notion abordée au chapitre 8) équivalent à un moment de force $\overrightarrow{\mathcal{M}_{\mathrm{O}}} = -C\theta\,\overrightarrow{u_z}$, avec $C > 0$.

1) Déterminer, par l'application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz), l'équation différentielle vérifiée par θ.

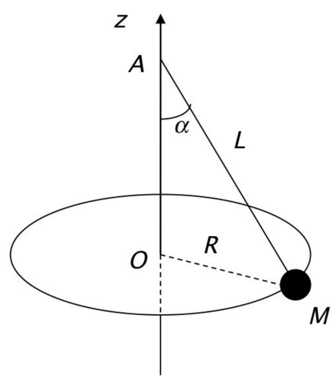
2) Pour $\theta \ll 1$, linéariser le sinus pour obtenir une équation différentielle linéaire. À quelle condition entre C, m, g et L, la solution à cette équation est-elle stable ?

3) Déterminer l'expression de la force du ressort spiral à partir de son moment. Établir alors l'expression de l'énergie potentielle totale du système, et retrouver la stabilité de la position d'équilibre $\theta_{\text{eq}} = 0$.

4) À partir de l'équation différentielle simplifiée à la question 2, calculer la période T des petites oscillations autour de $\theta = 0$.

5) En posant $g_0 = C/mL$, déduire des résultats précédents une méthode de mesure de g.

II Pendule conique



Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz), dirigé vers le haut, et décrit ainsi un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendue à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.

On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On utilisera le repère de la base cylindrique tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\,\overrightarrow{u_r}$.

1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à A en fonction de m, M, ω et α.

2) Appliquer le TMC pour déduire $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω.

3) Retrouver ce résultat à partir du PFD.

III Frottements d'un satellite

Un satellite S de masse m décrit une trajectoire circulaire uniforme d'altitude h_0 autour de la Terre de masse m_T et de rayon R_T, dans le référentiel géocentrique.

1) Exprimer la norme v de son vecteur vitesse et son énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, m, R_T et h_0. On pourra localement introduire $R = R_T + h_0$.

2) Le satellite étant sur une orbite basse, il subit de la part des hautes couches de l'atmosphère une force de frottements qui modifie son altitude h. Cependant, **on considère que la trajectoire sur un tour reste quasi-circulaire** ; ainsi les expressions précédentes restent valables en remplaçant h_0 par $h(t)$.

   a – Le travail des forces de frottements est-il moteur ou résistant ? En déduire le signe de $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}$.

   b – Comment évolue le rayon de l'orbite du satellite au cours du temps ? Tracer l'allure de sa trajectoire.

   c – En déduire le sens de variation de la vitesse. Commenter.

IV Comète de Halley

La comète de Halley est la plus connue. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen Âge, évidemment sans savoir qu'il s'agit d'une seule comète. Cette découverte a été formalisée en 1705 par Edmond Halley, qui publia un livre avançant que les observations en 1531, 1607 et 1682 concernaient en fait la même comète. Son prochain passage est prévu en 2061. On sait aujourd'hui que la comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_{\min} = 0{,}59\,\text{UA}$.

Données

- Masse solaire $M_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\text{kg}$.
- UA signifie « unité astronomique », et correspond à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil. $1\,\text{UA} = 1{,}5 \times 10^{11}\,\text{m}$.

1) Faire un schéma de la trajectoire de la comète en faisant aussi apparaître la position du Soleil et $d_{\min}$.

2) Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance de la comète au Soleil.

3) Une conique est décrite par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

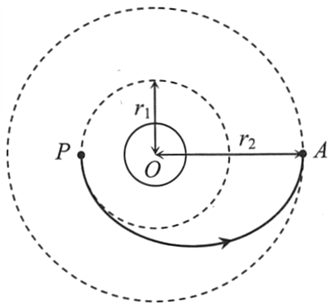
où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

V Changement d'orbite

Un satellite artificiel assimilé à un point matériel M de masse m trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7500\,\text{km}$ autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon $r_2 = 42\,200\,\text{km}$ (orbite géostationnaire).

Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_1 et l'apogée A à la distance r_2 du centre O de la Terre. Dès que le satellite arrive en A, on le fait passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2.

Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport aux périodes orbitales), donc on considérera que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} en P, puis de v_{e2} à v_2 en A (sans changer de direction dans les deux cas).



Données

$M_{\text{Terre}} = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$; $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{SI}$: $m = 1000\,\text{kg}$.

1) Calculer la vitesse v_1.

2) Donner l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur chacune des trois orbites, en fonction de r_1 et r_2.

3) Calculer la vitesse v_{e1} après le premier transfert, et la variation $\Delta v_P = v_{e1} - v_1$. Calculer également le travail W_P fourni par le moteur au satellite en ce point.

4) Déterminer une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 et r_2. Calculer v_{e2}.

5) Calculer la variation de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$ lors du second transfert, ainsi que le travail W_A fourni par le moteur au satellite.

VI Alerte à l'astéroïde !

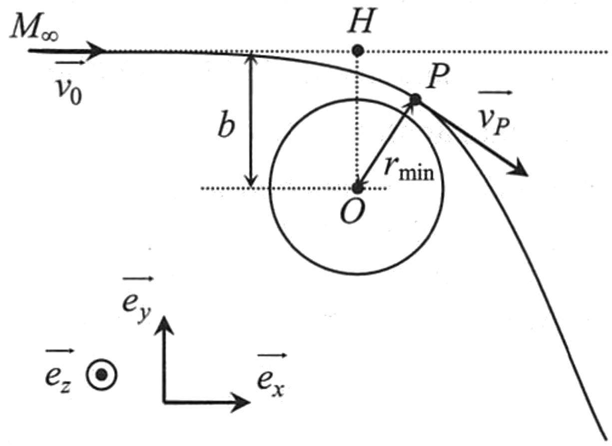


Figure 1 – Trajectoire de l'astéroïde.

De nombreux objets, dits géocroiseurs, passent à proximité de la Terre... et parfois la heurtent !

On considère ici un astéroïde de masse m actuellement très éloigné de la Terre et de tout autre astre. Il a donc un vecteur vitesse $\vec{v_0}$ constant. Le prolongement de sa trajectoire rectiligne passe à une distance b (appelée paramètre d'impact) du centre O de la Terre.

Cependant lorsqu'il se rapprochera de la Terre, l'attraction gravitationnelle de celle-ci va dévier l'astéroïde selon une trajectoire hyperbolique. On appelle périgée le point P de cette trajectoire le point le plus proche du centre de la Terre.

1) Quelles sont les deux grandeurs dynamiques de l'astéroïde qui se conservent au cours de son mouvement ? Traduire en équation leurs conservations entre les deux position M_∞ et P.

2) En déduire la distance minimale d'approche $r_{\text{min}} = \text{OP}$.

3) Application numérique : $v_0 = 2{,}0\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$ et $b = 140\,000\,\text{km}$. L'astéroïde va-t-il heurter la Terre ?

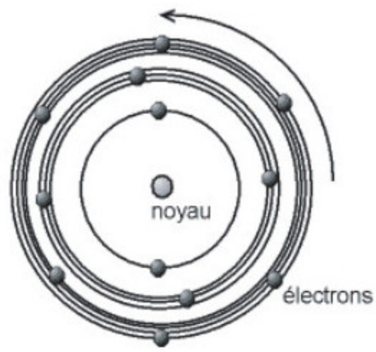
VII Modèle de Bohr de l'atome d'hydrogène

Pour expliquer le spectre de raies de l'atome d'hydrogène observées expérimentalement, Niels Bohr a proposé un modèle qui s'appuie sur les hypothèses suivantes : dans un référentiel galiléen lié au noyau O,

- ◇ l'électron décrit une trajectoire circulaire sur laquelle il ne rayonne pas d'énergie ;
- ◇ l'électron échange de l'énergie avec l'extérieur sous forme de lumière lorsqu'il change de trajectoire circulaire ;
- ◇ la norme du moment cinétique de l'électron est quantifié et ne peut prendre que des valeurs discrètes vérifiant la relation :

$$\mathcal{L}_{O_n} = n \times \frac{h}{2\pi} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

avec $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\text{J}\cdot\text{s}$



Une orbitale électronique correspond à une valeur de l'entier n. Elle est caractérisée par un rayon r_n, une vitesse v_n et une énergie mécanique $\mathcal{E}_m(n)$.

Ce modèle semi-classique n'est pas complètement satisfaisant, mais il prédit le spectre de raies de l'atome d'hydrogène. On rappelle qu'un atome d'hydrogène est constitué d'un noyau (charge $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\text{C}$, masse m_p) et d'un électron (charge $-e$, masse $m_e = 9{,}11 \times 10^{-31}\,\text{kg}$). On donne les valeurs numériques de la célérité de la lumière dans le vide $c = 3{,}00 \times 10^{8}\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et la permittivité diélectrique du vide $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$.

1) Rappeler l'expression de la force d'interaction exercée par le noyau sur l'électron et de l'énergie potentielle dont elle dérive.

2) Utiliser le fait que les orbitales soient circulaires pour exprimer le carré ${v_n}^2$ de la vitesse de l'électron en fonction de la distance r_n.

3) Utiliser la quantification du moment cinétique pour exprimer le rayon de la trajectoire en fonction de n, h, m_e et e.

4) Calculer sa valeur pour $n = 1$.

5) Exprimer l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m(n)$ de l'électron et montrer qu'elle se met sous la forme $\mathcal{E}_m(n) = -\frac{A}{n^2}$. Donner l'expression et la valeur numérique de A en électron-volts (on rappelle que $1\,\text{eV} = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{J}$).

6) Sachant que le passage d'un niveau d'énergie $\mathcal{E}_m(n_2)$ à un autre $\mathcal{E}_m(n_1)$ se traduit par l'émission d'un photon de fréquence ν telle que $\Delta E = h\nu$, en déduire que les longueurs d'onde λ émises vérifient :

$$\frac{1}{\lambda} = R_H \left(\frac{1}{{n_2}^2} - \frac{1}{{n_1}^2} \right)$$

On rappelle que $\nu = c/\lambda$. On donnera l'expression de la constante de RYDBERG R_H et sa valeur numérique.

VIII Expérience de RUTHERFORD

Entre 1909 et 1911, Ernest RUTHERFORD et ses deux étudiants Hans GEIGER et Ernest MARSDEN ont réalisé et interprété une expérience consistant à bombarder une mince feuille d'or avec des particules α (que RUTHERFORD avait précédemment identifiées comme des noyaux d'hélium). Ils observèrent que la plupart de ces particules traversaient la feuille sans être affectées (donc ne rencontraient que du vide), mais que certaines étaient déviées, parfois très fortement : les angles de déviation pouvant être reliés aux dimensions microscopiques, cela permi la découverte du noyau atomique et l'estimation de sa taille.

On considère ici une particule α de masse m et de charge $+2e$, venant de l'infini avec la vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{e_x}$, et s'approchant avec le paramètre d'impact b d'un noyau cible de numéro atomique Z. La particule est repérée par ses coordonnées polaires (r,θ) dans le plan (Oxy).

Le noyau reste pratiquement immobile dans le référentiel terrestre : on travaille dans ce référentiel supposé galiléen, le repère étant centré sur la position O du noyau. La trajectoire suivie par la particule α est une branche d'hyperbole représentée ci-contre.

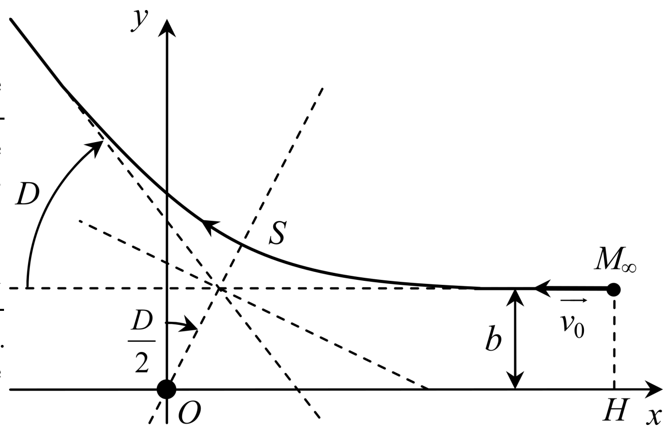


FIGURE 2 – Trajectoire suivie par la particule α.

1) Donner l'expression de la force électrique subie par la particule α, sous la forme $\overrightarrow{F} = \frac{K}{r^2}\,\overrightarrow{e_r}$ ainsi que celle de son énergie potentielle d'interaction.

2) Montrer que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ de la particule α est une constante du mouvement et donner sa valeur.

3) Montrer que le moment cinétique $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\text{O}}$ de la particule α en O est un vecteur constant, et donner la valeur de cette constante à l'aide des conditions initiales. Montrer que $\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\text{O}}$ s'exprime de manière simple en fonction des variables r et $\dot{\theta}$.

4) Montrer que l'énergie mécanique peut se mettre sous la forme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_p'(r)$ et expliciter la fonction $\mathcal{E}_p'(r)$. Comment l'appelle-t-on ?

5) On note S la position de la particule α pour laquelle elle passe au plus près du noyau d'or, et on note $r_{\min} = \text{OS}$ la distance minimale d'approche. Que revient l'expression de $\mathcal{E}_m$ lorsque $r = r_{\min}$? En déduire que

$$r_{\min} = \frac{K}{m{v_0}^2}\left[1 + \sqrt{1 + \left(\frac{mb{v_0}^2}{K}\right)^2}\right]$$

6) On donne $\varepsilon_0 = 8{,}9 \times 10^{-12}\,\text{F}\cdot\text{m}^{-1}$, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$, $m = 6{,}6 \times 10^{-27}\,\text{kg}$, $v_0 = 2{,}0 \times 10^7\,\text{m}\cdot\text{s}^{-1}$ et $Z = 79$ pour l'or. D'autre part, on peut montrer que l'angle de déviation D de la particule est donné par la relation

$$\tan\left(\frac{D}{2}\right) = \frac{K}{mb{v_0}^2}$$

Calculer b puis $r_{\min}$ pour $D_1 = 60°$ et pour $D_2 = 180°$ (particule envoyée vers l'arrière). En déduire l'ordre de grandeur de la taille du noyau d'or.