Ondes – chapitre 1

Ondes progressives

Au programme

Savoirs

- Identifier les grandeurs physiques correspondant à des signaux acoustiques, électriques, électromagnétiques.
- Propagation d'un signal dans un milieu illimité, non dispersif et transparent.
- Onde progressive dans le cas d'une propagation unidimensionnelle non dispersive.
- Modèle de l'onde progressive sinusoïdale unidimensionnelle. Vitesse de phase, déphasage, double périodicité spatiale et temporelle.
- Définir un milieu dispersif. Citer des exemples de situations de propagation dispersive et non dispersive.
- Citer quelques ordres de grandeur de fréquences dans les domaines acoustique, mécanique et électromagnétique.

Savoir-faire

- Écrire les signaux sous la forme $f(x-ct)$ ou $g(x+ct)$, et sous la forme $f(t-x/c)$ ou $g(t+x/c)$.
- Prévoir, dans le cas d'une onde progressive, l'évolution temporelle à position fixée et l'évolution spatiale à différents instants.
- Établir la relation entre la fréquence, la longueur d'onde et la vitesse de phase.
- Relier le déphasage entre les signaux perçus en deux points distincts au retard dû à la propagation.

Sommaire

I Introduction **3**
- I/A Signal 3
- I/B Perturbation 3
- I/C Onde 3
- I/D Perturbation et propagation 4

II Onde progressive à une dimension **4**
- II/A Définition 4
- II/B Représentation spatiale et célérité des ondes 4
- II/C Représentation temporelle et retard 6
- II/D Lien entre les représentations 7
- II/E Formes mathématiques des représentations 7

III Onde progressive sinusoïdale **8**
- III/A Définition 8
- III/B Double périodicité spatiale et temporelle 8
- III/C Expression mathématique de l'onde progressive sinusoïdale 9
- III/D Vitesse de phase 10

IV Milieux dispersifs **10**

I Introduction

I/A Signal

Définition

On appelle **signal** une grandeur physique mesurable pouvant varier dans le temps et qui transporte une information.

Exemples

- Signal **sonore** : voix, instrument de musique ;
- Signal sismique ;
- Signal électrique…

À noter que la notion de signal ou d'information **dépend de l'observation**. Les ondes radio servent bien sûr à écouter la radio, mais au départ leur découverte était perturbée par le premier signal lumineux de l'Univers, le fonds diffus cosmologique : il baigne la totalité de l'Univers et est fondamental dans la cosmologie, mais peut être parasite selon l'objectif.

I/B Perturbation

Définition

Une **perturbation** est une modification locale et temporaire des propriétés d'un milieu.

Exemples

- Jet d'un caillou dans un lac ;
- Séisme ;
- Déplacement de la membrane d'un haut-parleur…

Une perturbation, quand elle est créée, se propage autour d'elle de proche en proche : chaque point impacté va subir des modifications temporaires similaires à celle de la source. Après le passage de cette perturbation, chaque point retrouve sa position initiale.

I/C Onde

Définition

On appelle **onde** la propagation d'une perturbation, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Certaines ondes ont besoin d'un milieu matériel pour se propager : ce sont les ondes **mécaniques**. Les ondes sismiques, les ondes dans la corde ou les ondes sonores en sont des exemples. Certaines ondes peuvent se propager dans le vide, comme les ondes **électromagnétiques**. Les infrarouges, la lumière visible ou les micro-ondes sont des exemples d'ondes électromagnétiques.

Exemples

- Lorsqu'on secoue l'extrémité d'une corde tendue, les positions des différents points sont modifiées. Une fois l'onde passée, les points retrouvent leur position initiale.
- Le caillou dans le lac forme des **rides qui s'éloignent** du point d'impact, mais il n'y a pas de mouvement d'ensemble du fluide.
- La membrane du haut-parleur, lors de son déplacement elle provoque une brève **compression-dilatation** de l'air qui la touche. Cette propagation se déplace ensuite dans l'air : ce sont les ondes sonores. Elles peuvent aussi se déplacer dans les liquides et dans les solides.

I/D Perturbation et propagation

La perturbation se propageant peut être soit parallèle, soit perpendiculaire à la direction de propagation. On distingue donc :

Définition

- **Onde transversale**[1] : la perturbation est perpendiculaire à la direction de propagation ;
- **Onde longitudunale**[2] : la perturbation est parallèle à la direction de propagation.

Exemples

- **Longitudinales** :
  - Certaines ondes sismiques ;
  - Contraction-élongation d'un ressort.
- **Transversales** :
  - Mouvement d'une corde secouée ;
  - Vagues sur l'eau.

II Onde progressive à une dimension

II/A Définition

Définitions

- **Progressive** : sa propagation ne se fait que **dans un seul sens depuis sa source**. À un instant ultérieur, on retrouve la perturbation *à l'identique plus loin*.
- **À une dimension** :
  - une onde qui se propage dans un milieu matériel à une dimension ;
  - ou une onde qui se propage dans un milieu matériel à deux ou trois dimensions, avec une direction de propagation unique.

Exemples

- **1D** : onde le long d'une corde, compression le long d'un ressort ;
- **2D** : vagues sur l'eau ;
- **3D** : son, lumière.

II/B Représentation spatiale et célérité des ondes

Définition

Dans une représentation **spatiale**, on regarde à un **temps fixé** la perturbation dans **tout l'espace** ; on parle également de représentation **photographique**[3].

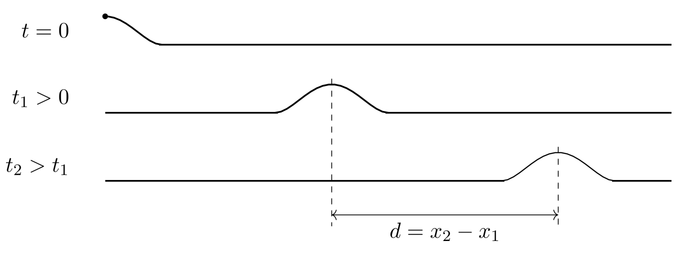


FIGURE 1.1 – Exemple représentation spatiale

1. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/onde_transversale.php
2. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/onde_longitudinale.php
3. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/retard.php

Lorsqu'une onde se propage, on peut définir une **vitesse de propagation de la perturbation**. Pour la distinguer de la vitesse d'un point matériel, on emploi plutôt le terme **célérité**. Par convention, celle-ci est toujours positive.

Définition

La célérité c d'une onde est le quotient de la distance d parcourue par la perturbation, sur l'intervalle de temps Δt que dure ce parcours :

$$\boxed{c = \frac{d}{\Delta t}}$$

Sur le schéma précédent,

$$\boxed{c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

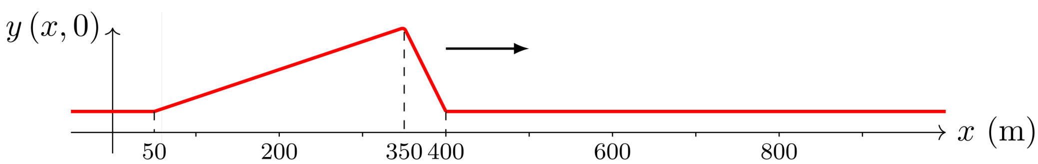
En première approximation, la célérité ne dépend pas de la perturbation mais seulement de la nature et des propriétés du **milieu**.

Tableau 1.1 – Ordres de grandeur de célérité à connaître

Signal	Célérité
Ondes électromagnétiques	$3{,}0 \times 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Son dans l'air (20 °C, 1 bar)	$\approx 340\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$
Son dans les métaux	quelques $\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$
Son dans l'eau	$1{,}5\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$

Application

On considère ici une vague solitaire qui se déplace à la vitesse $\boxed{c = 18\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}}$ le long d'un fleuve rectiligne, et on définit un axe (Ox) dans la direction du sens de sa propagation.
À l'instant $t = 0$, le profil du niveau de l'eau du fleuve a l'allure suivante :



Faire un schéma du profil du fleuve à $\tau = 1\,\mathrm{min}$ en supposant que l'onde se propage sans déformation.

La queue de la vague est à $x_{q,0} = 50\,\mathrm{m}$. À $\tau = 1\,\mathrm{min}$, elle est en $x_{q,1}$. Par définition de la célérité,

$$\frac{x_{q,1} - x_{q,0}}{\tau - 0} = c \Leftrightarrow x_{q,1} = x_{q,0} + c\tau = 350\,\mathrm{m}$$

On procèderait de même pour repérer le haut de la vague et sa tête : en réalité, chaque point du mascaret se déplace de $c\tau = 300\,\mathrm{m}$ vers la droite.

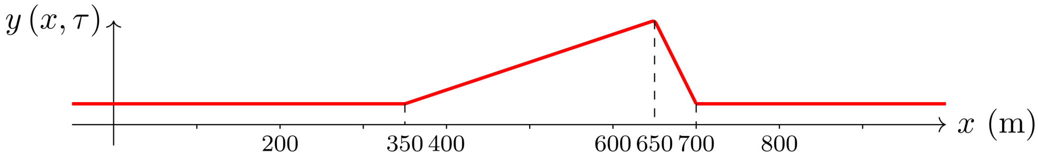


Figure 1.2 – Vague solitaire à $\tau = 1\,\mathrm{min}$

II/C Représentation temporelle et retard

Définition

Dans une représentation **temporelle**, on regarde à un **endroit fixé** la perturbation **sur sa durée**. Voir cette animation [4].

On crée à l'instant $t = 0$ une déformation à un endroit M. Cette perturbation se propage le long d'une corde avec une célérité c. Elle parvient en un point M_0, situé à une distance D de M au temps t_1 tel que :

$$t_1 = \frac{\mathrm{MM}'}{c}$$

Définition : retard

La grandeur τ est le retard du point M' par rapport au point M :

$$\tau = \frac{\mathrm{MM}'}{c}$$

avec c la célérité de l'onde.

Application

On reprend l'exemple de la vague précédente.

1) À quel instant la vague arrive-t-elle au point d'abscisse $x_1 = 2{,}2\,\mathrm{km}$?

À $t = 0$, la tête de la vague est à $x_0 = 400\,\mathrm{m}$. Elle arrive en x_1 avec un retard :

$$t = \frac{x_1 - x_0}{c} = 6\,\mathrm{min}$$

2) Un détecteur fixe, enregistrant la hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse $x_d = 1{,}6\,\mathrm{km}$. Dessiner l'allure des variations $y(x_d,t)$ en fonction du temps à cette abscisse.

La tête de la vague arrive avec un retard :

$$\tau_{\text{tête}} = \frac{x_d - x_{t,0}}{c} = 4\,\mathrm{min}$$

Le haut de la vague arrive avec un retard :

$$\tau_{\text{haut}} = \frac{x_h - x_{h,0}}{c} = 4\,\mathrm{min}10\,\mathrm{s}$$

La queue de la vague arrive avec un retard :

$$\tau_{\text{queue}} = \frac{x_q - x_{q,0}}{c} = 5\,\mathrm{min}10\,\mathrm{s}$$

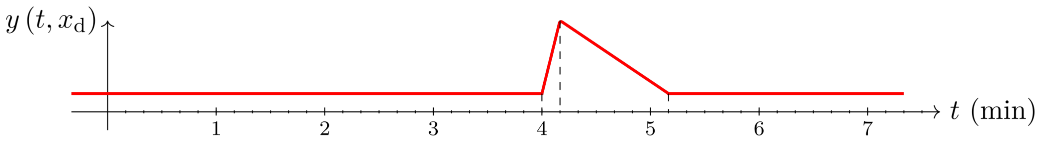


Figure 1.3 – Vague solitaire en représentation temporelle.

4. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/general/evolution_temporelle.php

II/D Lien entre les représentations

Nous avons vu deux représentations graphiques différentes, une selon l'espace et une selon le temps. En réalité, le signal d'une onde est une fonction de **deux** variables :

$$y(x,t)$$

Pour obtenir l'une au l'autre des représentations, on fixe l'une des variables. Une animation sur les représentations temporelles et spatiales est disponible au lien suivant : https://www.geogebra.org/m/RkmRF9M6

II/E Formes mathématiques des représentations

II/E) 1 À partir de la représentation spatiale

L'onde observée à $t = 0$ se déplace vers la droite. À l'instant t, elle est décalée vers la droite de $\boxed{\delta = ct}$: la valeur de $y(x,t)$ en x et à l'instant t était en $x - ct$ à l'instant $t = 0$, soit :

$$y(x,t) = y(x - ct,0)$$

On note alors $f(x) = y(x,0)$: c'est la représentation spatiale de l'onde à $t = 0$. On a alors

$$\boxed{y(x,t) = f(x - ct)}$$

II/E) 2 À partir de la représentation temporelle

Lorsqu'une onde se propage sans atténuation ni déformation, les valeurs observées en $x = 0$ au cours du temps sont aussi observées en $x > 0$ mais avec un retard $\boxed{\tau = \frac{x}{c}}$ lié à la propagation. La valeur de $y(x, t)$ en x à l'instant t était en $x = 0$ plus tôt, à l'instant $t - x/c$. Ainsi,

$$y(x,t) = y\left(0,t - \frac{x}{c}\right)$$

La fonction $y(0,t)$ est la hauteur de la perturbation en $x = 0$ à l'instant t : c'est la perturbation imposée par la source. On la note alors $g(t) = y(0,t)$: c'est la représentation temporelle de l'onde à $x = 0$. On a alors

$$\boxed{y(x,t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Conclusion

La représentation **spatiale en $\mathbf{t_0}$** est le graphique de la fonction $x \mapsto y(x,t_0)$, soit :

$$x \mapsto f(x - ct_0) = g\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$$

La représentation **temporelle en $\mathbf{x_0}$** est le graphique de la fonction $t \mapsto y(x_0,t)$, soit :

$$t \mapsto f(x_0 - ct) = g\left(t - \frac{x_0}{c}\right)$$

Vers la droite ou vers la gauche ?

Vous ferez bien attention, à défaut de travailler votre intuition pour comprendre que $f(x-ct)$ est une onde se propageant vers la droite, à ne pas penser « signe moins donc vers la gauche » ! Il faudrait refaire le raisonnement, et on arrive à :

Vers la gauche	Vers la droite
$f(x+ct) = g\left(t+\frac{x}{c}\right)$	$f(x-ct) = g\left(t-\frac{x}{c}\right)$

III Onde progressive sinusoïdale

III/A Définition

Définition : OPS

Une onde progressive est dite **sinusoïdale** si la source impose une **perturbation sinusoïdale** au milieu.

Si on relie un haut-parleur à un GBF délivrant une tension sinusoïdale, on observe le mouvement périodique dont est animé la membrane de l'air, qui génère une perturbation périodique de l'air.

III/B Double périodicité spatiale et temporelle

III/B) 1 Observations sur l'animation `Geogebra`

1) Lorsque l'on impose une excitation sinusoïdale, la représentation spatiale est aussi sinusoïdale.
2) À célérité constante, lorsque la fréquence de l'excitation augmente (la période diminue), la période spatiale diminue.
3) À fréquence de l'excitation constante, si on augmente la célérité, la période spatiale diminue.

III/B) 2 Périodicité temporelle

Si la perturbation créée en S est sinusoïdale avec une période T, alors l'onde en M l'est également (il n'y a qu'un retard entre les deux dû à la propagation).

III/B) 3 Périodicité spatiale

Au moment de l'émission du deuxième maximum, le premier maximum a déjà parcouru une distance cT. L'écart entre deux maximum successifs est la période spatiale soit :

$$\lambda = cT$$

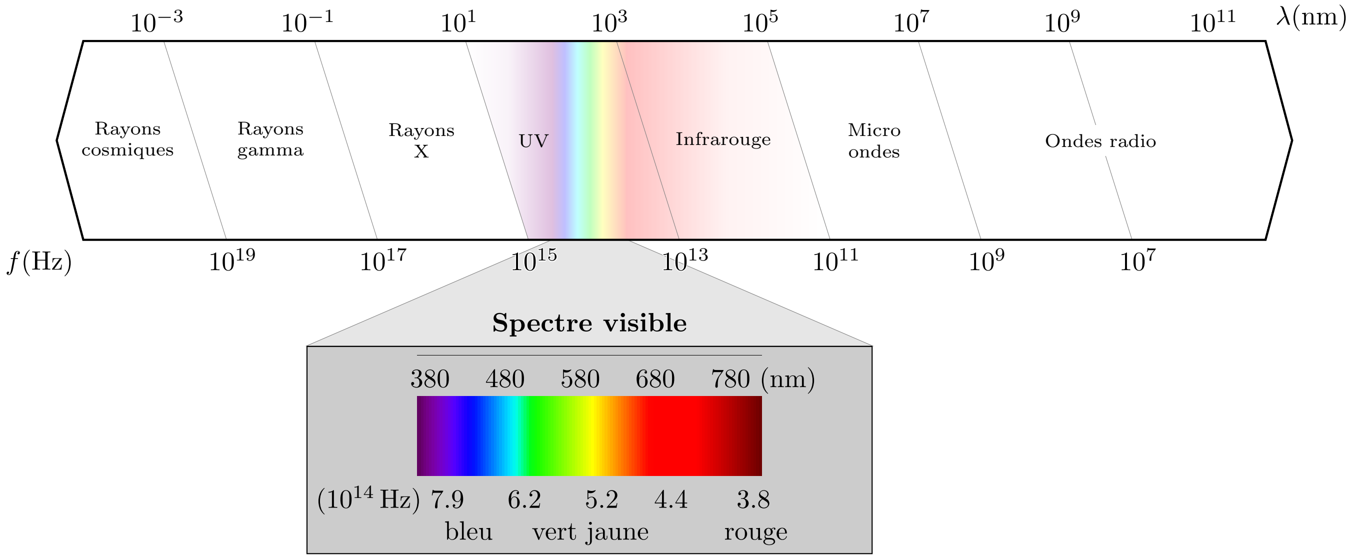
Bilan

Une onde progressive sinusoïdale présente à la fois une périodicité spatiale et une périodicité temporelle. La période temporelle T et la période spatiale, nommée longueur d'onde et notée λ, sont reliées par la relation

$$\boxed{\lambda = cT = \frac{c}{f}}$$

avec c la célérité de l'onde.

Cette relation ne vous est sûrement pas inconnue : c'est de cette manière qu'on définit à la fois la fréquence (temporelle) et la période (spatiale) d'une onde électromagnétique, donnant les domaines connus rappelés ci-dessous :



III/C Expression mathématique de l'onde progressive sinusoïdale

On s'intéresse à un mouvement vers la droite. Par définition, la perturbation $g(t)$ imposée en $x = 0$ est un signal sinusoïdal :

$$g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & s(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right) \\ \Leftrightarrow\ & s(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right) \\ \Leftrightarrow\ & s(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{2\pi}{cT}x + \varphi\right) \end{aligned}$$

Définition

Comme pour la fréquence et la pulsation, on relie la longueur d'onde à une autre grandeur permettant une expression simple dans une fonction sinusoïdale : le **vecteur d'onde** k, tel que

$$\boxed{k = \frac{2\pi}{\lambda} = \frac{\omega}{c}} \quad \text{avec} \quad k \quad \text{en} \quad \boxed{\mathrm{rad{\cdot}m^{-1}}}$$

Propriété

L'expression générale d'une onde progressive sinusoïdale se propageant *vers la droite* sans déformation ni atténuation est :

$$\boxed{s(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi)}$$
$$\Leftrightarrow s(x,t) = A\cos\left(\frac{2\pi}{T}t - \frac{2\pi}{\lambda}x + \varphi\right)$$

Application

On peut vérifier la double périodicité de l'onde (T et λ). Vérifer par exemple la périodicité spatiale. : soit un signal $s(x,t)$ double-périodique. Montrer que $s(x + \lambda,t) = s(x,t)$.

$$\begin{aligned} & s(x+\lambda,t) = A\cos(\omega t - k(x+\lambda) + \varphi) \\ \Leftrightarrow\ & s(x+\lambda,t) = A\cos\left(\omega t - kx - \frac{2\pi}{\lambda}\lambda + \varphi\right) \\ \Leftrightarrow\ & s(x+\lambda,t) = A\cos(\omega t - kx - 2\pi + \varphi) \\ \Leftrightarrow\ & s(x+\lambda,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi) \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{s(x+\lambda,t) = s(x,t)} \end{aligned}$$

III/D Vitesse de phase

Soit une onde progressive sinusoïdale. La **phase** de l'onde est, par définition, le terme à l'intérieur de la fonction : $\omega t - kx + \varphi$. Cette phase varie spatialement *et* temporellement, de manières corrélées. Si on trouve une phase mesurée en x_1 à l'instant t_1, le signal aura la même phase en x_2 à un instant t_2 donnés par la **vitesse de phase**, notée v_φ, telle que :

$$\boxed{v_\varphi = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned} & \omega t_2 - kx_2 + \varphi = \omega t_1 - kx_1 + \varphi \\ \Leftrightarrow\ & \omega(t_2 - t_1) = k(x_2 - x_1) \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{v_\varphi = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k}} \end{aligned}$$

Unité

Naturellement, la vitesse de phase s'exprime en $\boxed{\mathrm{m \cdot s^{-1}}}$.

IV Milieux dispersifs

Définition

Un milieu est dit **dispersif** si la célérité c dépend de la fréquence ou de la longueur d'onde.

Si c'est le cas, les différentes composantes spectrales d'un signal ne vont pas à la même vitesse, et donc le signal peut se déformer lors de la propagation.

Exemples

Propagation non-dispersive

◇ Propagation des ondes acoustiques dans un fluide. La célérité est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$$

avec ρ_0 la masse volumique du fluide au repos et χ_0 sa compressibilité.

◇ Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$c = 299\,792\,458\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

C'est une des constantes fondamentales de la physique.

Propagation dispersive

◇ Propagation des ondes à la surface de l'eau. On a

$$\omega^2 = gk \quad \text{soit} \quad v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Ainsi, la vitesse de phase dépend de k, et donc de la longueur d'onde.

◇ Propagation des ondes électromagnétiques dans le verre :

$$v_\varphi = \frac{c}{n(\lambda)}$$

avec $n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$. C'est la dispersion qui cause la décomposition spectrale de la lumière par un prisme.

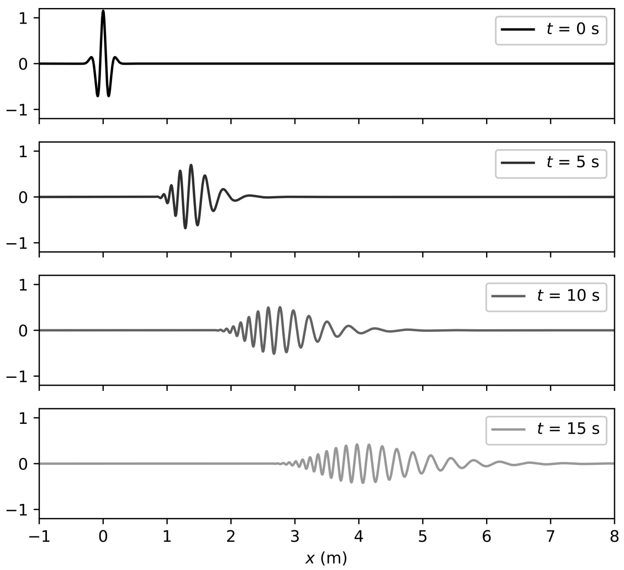


Figure 1.4 – Propagation dispersive d'une onde à la surface de l'eau. On observe nettement que les composantes sinusoïdales de hautes fréquences se propagent avec une moins grande vitesse que les composantes de basses fréquences. En ordonnée, l'unité de la hauteur d'eau est arbitraire.