Contrôle de connaissances 15

Dynamique du point et mouvements courbes

/3 **1** Énoncer les trois lois de Newton. On travaille avec un système ouvert.

- 1 a – $\exists \mathcal{R}$ galiléens : $(\forall \mathrm{M} \mid \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}} = \vec{0})$, M est soit au repos, soit en translation rectiligne uniforme ;
- 1 b – $\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}$;
- 1 c – $\forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2), \vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}$.

/7 **2** Établir la longueur d'équilibre d'un ressort vertical. Porter une attention particulière à l'établissement du système d'étude.

1 **1** **Système** : {masse} M (m) dans $\mathcal{R}_{\mathrm{labo}}$ supposé galiléen.

1 **2** **Schéma** : cf. Figure 15.1.

1 **3** **Modélisation** : repère $(\mathrm{O}, \vec{u_z})$, repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\ell\,\vec{u_z}$, $\vec{v} = -\dot{\ell}\,\vec{u_z}$, $\vec{a} = -\ddot{\ell}\,\vec{u_z}$.

4 **BdF** :

1 **Poids** $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_z}$

1 **Force Hooke** $\vec{F} = k(\ell - \ell_0)\,\vec{u_z}$

5 **PFD à l'équilibre** :

$$\vec{0} \overset{1}{=} \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}} \Leftrightarrow 0 = -mg + k(\ell_{\mathrm{eq}} - \ell_0)$$

$$\Leftrightarrow k(\ell_{\mathrm{eq}} - \ell_0) = mg \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\mathrm{eq}} \overset{1}{=} \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

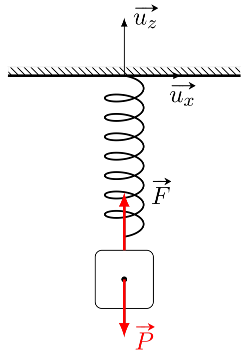

Figure 15.1

/7 **3** Représenter sur un schéma les coordonnées cylindriques. Détaillez les projections de $\vec{u_r}$ et $\vec{u_\theta}$ sur la base cartésienne, donner l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sans démonstration, et démontrer les expressions de $\vec{v}$ et $\vec{a}$ **sans démontrer les expressions de $\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$**.

1 $$\vec{u_r} = \cos(\theta)\,\vec{u_x} + \sin(\theta)\,\vec{u_y} \quad \text{et} \quad \vec{u_r} = -\sin(\theta)\,\vec{u_x} + \cos(\theta)\,\vec{u_y}$$

1 $$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\vec{u_r} + z\,\vec{u_z}$$

1 $$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\ \vec{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\ \vec{u_\theta} + \mathrm{d}z\ \vec{u_z}$$

1 $$\vec{v} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}$$

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + \dot{z}\,\vec{u_z}\right) \Leftrightarrow \vec{a} \overset{1}{=} \ddot{r}\,\vec{u_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\vec{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\vec{u_\theta}}{\mathrm{d}t} + \ddot{z}\,\vec{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{a} \overset{1}{=} \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\vec{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\vec{u_\theta} + \ddot{z}\,\vec{u_z}}$$

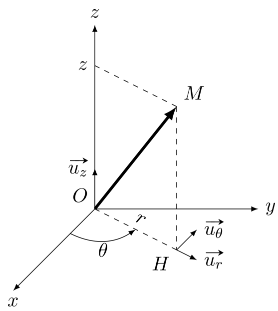

Figure 15.2 – Cylindriques 1

/4 **4** Projetez $\vec{P}$ et $\vec{T}$ dans les conditions de la Figure 15.3. Avec $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \ell\,\vec{u_r}$ et $\dot{\ell} = 0 = \ddot{\ell}$ et votre réponse à la question précédente, appliquer le PFD pour obtenir deux équations différentielles. Sous quelles conditions l'une d'entre elle est celle d'un oscillateur harmonique ?

1 **Poids** $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$

Tension $\vec{T} = -T\,\vec{u_r}$

Or, $$m\vec{a} \overset{1}{=} m(-\ell\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + \ell\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}) = \vec{P} + \vec{T}$$

$$\boxed{\overset{1}{\Leftrightarrow} \begin{cases} mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = T \\ m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \end{cases}} \tag{15.1}$$

L'équation (15.1) est l'équation d'un oscillateur harmonique pour des petits angles ($\sin(\theta) \underset{\theta\to0}{\sim} \theta$) 1.

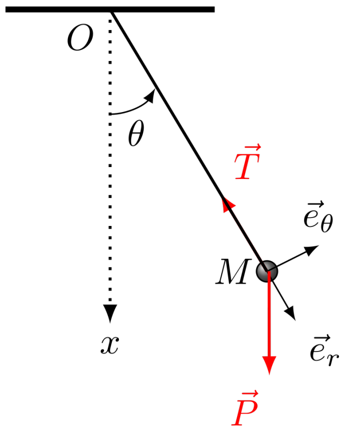

Figure 15.3 – Schéma