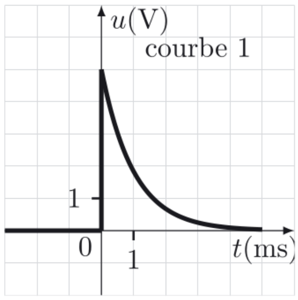
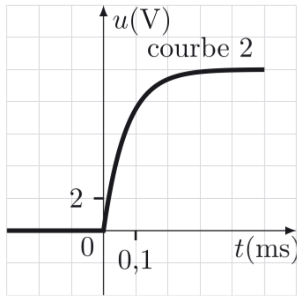
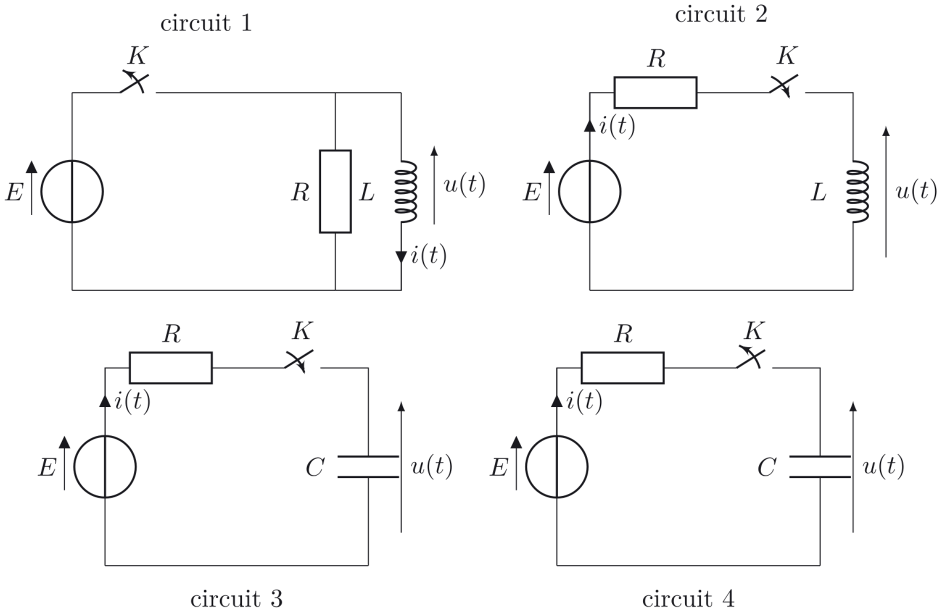
Correction du TD

I Quelle courbe pour quel circuit ?

Um étudiantx distrait, mais surtout maladroitx, rentrant d'une séance de travaux pratiques sur l'observation de régimes transitoires sur les circuits du premier ordre, fait tomber toutes ses notes qui s'éparpillent. En les rangeant, iel retrouve alors 2 courbes expérimentales, tracées en utilisant une résistance $R = 1\,\mathrm{k\Omega}$, mais iel ne sait plus à quel montage les attribuer.







1. Associer chaque courbe avec l'un des 4 montages ci-dessus, et calculer les valeurs de E et L ou C utilisées. Tous les interrupteurs s'ouvrent ou se ferment à $t = 0$.

   Réponse :

   - Pour la courbe 1 : on observe une diminution exponentielle de la **tension** et une **discontinuité** de cette dernière en $t = 0$. Or, les condensateurs ont une tension continue à leurs bornes, cette courbe ne peut donc **pas** être issue d'un circuit avec un **condensateur** : ni le 3, ni le 4.

     Ensuite, comme c'est forcément une bobine, on observe que $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0$, autrement dit l'intensité monte dans le circuit. Le circuit 1 s'ouvre à $t = 0$, donc l'intensité devrait y baisser : finalement il ne nous reste que le **circuit 2**.

     Dans ce circuit, la constante de temps est connue (cf. cours) et vaut $\tau = L/R$. On la détermine avec l'intersection entre la tangente en $t = 0$ et l'asymptote $u = 0$, où en trouvant l'instant où u et son asymptote ont un écart relatif de 37%, c'est-à-dire ici quand $u(\tau) = 1{,}8\,\mathrm{V}$. On trouve dans tous les cas $\boxed{\tau = 1{,}0\,\mathrm{ms}}$, soit $\boxed{L = 1{,}0\,\mathrm{H}}$.

- Pour la courbe 2 : on observe une augmentation exponentielle de la tension et un continuité de cette dernière en $t = 0$. On peut donc affirmer que u est la tension aux bornes d'un ondensateur, et que ce dernier se charge : on y associe donc le **circuit 3**.

  L'asymptote quand $t \to \infty$ est $u = E$, puisqu'alors $i = 0$ (comportement condensateur RP) et donc toute la tension du générateur se retrouve aux bornes de C (et pas de R car $i = 0$) ; ainsi, $\boxed{E = 10\,\mathrm{V}}$, et $u(\tau) = 6{,}3\,\mathrm{V}$ ou la tangente en 0 donnent $\boxed{\tau = 0{,}070\,\mathrm{ms}}$; comme ici $\tau = RC$, on trouve $\boxed{C = 7{,}0 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}}$.

II Associations en parallèle

A Condensateurs

On considère le circuit ci-contre avec deux condensateurs différents associés en parallèle. À $t = 0$, les deux condensateurs sont totalement déchargés et on ferme l'interrupteur K.

1. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u_(t)$.

   Réponse :
   Loi des mailles et loi d'Ohm :
   $$E = u_R + u = Ri + u$$
   Loi des nœuds :
   $$\begin{aligned} & i = i_1 + i_2 \\ \Leftrightarrow\ & i = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & i = (C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$
   Ainsi,
   $$\boxed{E = R(C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u}$$

2. Trouver un composant équivalent aux deux condensateurs en parallèle.

   Réponse :
   On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne un condensateur équivalent de capacité $\boxed{C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_2}$.

B Bobines

On considère le circuit ci-contre avec deux bobines différentes associées en parallèle. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.

3. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$.

Réponse :
Loi des mailles et loi d'Ohm :

$$E = u_R + u = Ri + u$$

En dérivant :

$$0 = R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Loi des nœuds :

$$\begin{aligned} & i = i_1 + i_2 \\ \Rightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} \end{aligned}$$

Ainsi,

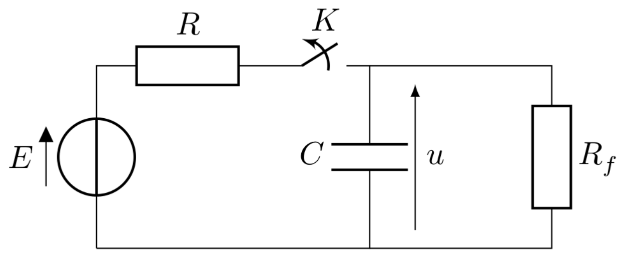
$$\boxed{0 = R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}$$

4. Trouver un composant équivalent aux deux condensateurs en parallèle.

Réponse :
On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne une bobine équivalente d'inductance $\boxed{\frac{1}{L_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$.

III Résistance de fuite d'un condensateur

Un condensateur non idéal peut être modélisé par une capacité C associée en parallèle avec une résistance R_f appelée résistance de fuite. Ce condensateur est complètement chargé sous une tension $E > 0$. Une fois le régime permanent atteint, la mesure, à l'aide d'un voltmètre parfait (résistance d'entrée infinie), de la tension u aux bornes du condensateur est égale à E.



A $t = 0$, on ouvre le circuit. Au bout d'un temps $T > 0$, la valeur mesurée de u est $E' < E$.

1. Comment peut-on expliquer ces observations ?

Réponse :
En ouvrant le circuit, sans la résistance de fuite on s'attend à ce que le condensateur reste chargé, comme une pille. Or dans ce circuit, en ouvrant l'interrupteur la capacité C est reliée à la résistance R_f dans laquelle elle se décharge donc, ce qui explique la diminution de la tension.

2. Donner l'expression de R_f en fonction de C, E, E' et T. Faire l'application numérique pour $C = 100\,\mathrm{pF}$, $T = 2\,\mathrm{min}$, $E = 10\,\mathrm{V}$ et $E' = 1\,\mathrm{V}$.

Réponse :
On a la situation de décharge du cours, où l'équation différentielle sur u est

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R_f C} = 0$$

Sachant que $u_C(t=0) = E$, la solution s'écrit

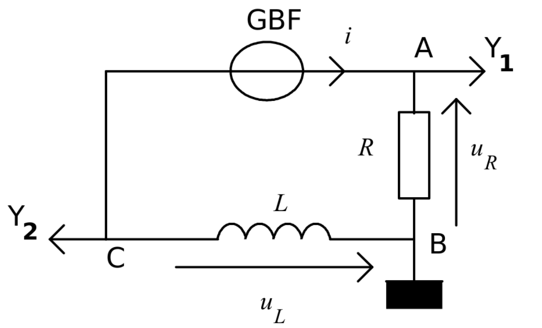
$$\boxed{u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{R_f C}\right)}$$

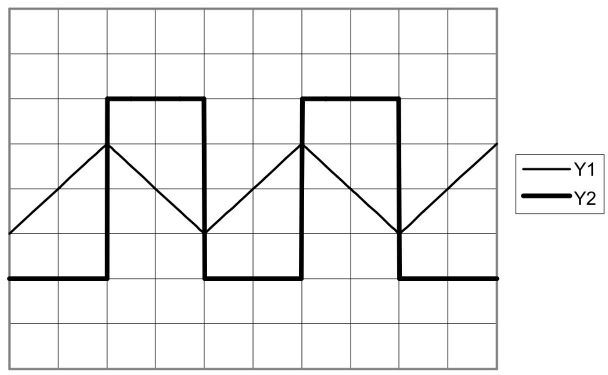
Pour que $u_C(T) = E'$, il faut donc $\exp\left(-\frac{T}{R_f C}\right) = \frac{E'}{E}$, et finalement

$$\boxed{R_f = \frac{T}{C \ln \frac{E}{E'}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{R_f \approx 5{,}0 \times 10^{11}\,\Omega}$$

IV Circuit RL et oscilloscope

On considère le circuit ci-dessous constitué d'un générateur basse fréquence (GBF), d'une résistance de valeur R, d'une bobine d'inductance L (sa résistance de valeur r est négligeable dans ce circuit). Un oscilloscope est branché sur ce circuit. Le GBF délivre une tension périodique triangulaire. On obtient sur l'oscilloscope les courbes suivantes :





Données : $R = 10\mathrm{k}\Omega$, sensibilités de l'oscilloscope : voie 1 : 2 V/div, voie 2 : 50 mV/div, base de temps : 1 ms/div.

1. D'après les branchements figurant sur le schéma, quelles sont les grandeurs physiques qui sont visualisées sur l'écran de l'oscilloscope ?

   Réponse :

   - Voie 1 : u_R
   - Voie 2 : $-u_L$

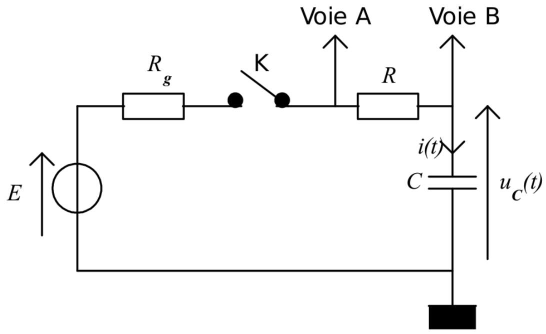
2. Vérifier que la forme de la tension u_L aux bornes de la bobine correspond bien à $L\frac{di}{dt}$.

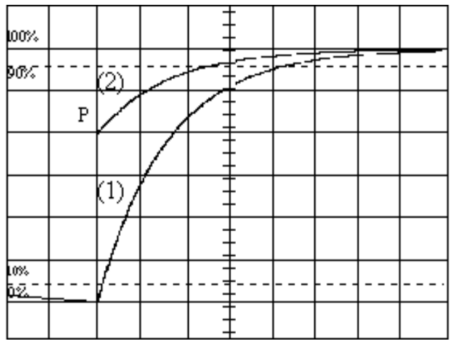
   Réponse :

   D'après la loi d'Ohm : $i(t) = \frac{u_R}{R}$. La courbe Y_1 est donc une image de l'intensité dans le circuit. La courbe de la voie Y_2 correspond bien à l'opposée de la primitive de la courbe de la voie Y_1.

V Régime transitoire d'un circuit RC

Un dipôle comporte entre ses bornes un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C placés en série. On le place aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R_g en série avec un interrupteur K. Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. On appelle u_c la tension aux bornes du condensateur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.





1. Déterminer, sans calcul et en le justifiant $u_c(0^+)$ et $i(0^+)$.

Réponse :

- Initialement, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. De plus, la tension aux borne d'un condensateur est une grandeur continue, donc $u_c(0^-) = u_c(0^+)$. On en déduit alors que $\boxed{u_c(0^+) = 0}$.
- Si on applique la loi d'Ohm aux 2 résistances (en série) et la loi des mailles à $t = 0^+$, on trouve directement : $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R + R_g}}$. On observe que l'intensité n'est pas continue dans ce circuit car $i(0^-) = 0$.

2. Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $u_c(t)$.

Réponse :

On applique la loi des mailles, la loi d'Ohm et la loi des condensateurs dans le circuit pour des $t > 0$:

$$E = (R + R_g)i + u_c(t) \qquad ; \qquad i(t) = C\frac{du_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = (R + R_g)C\frac{du_c}{dt} + u_c(t)}.$$

3. Déterminer la constante de temps τ du circuit et donner son interprétation physique.

Réponse :

La constante de temps est :

$$\boxed{\tau = (R + R_g)C}.$$

Il s'agit de l'ordre de grandeur de la durée de charge ou de décharge du condensateur.

4. Établir l'expression de $u_c(t)$.

Réponse :
L'équation différentielle se réécrit :
$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}.$$
La solution homogène $u_{c,h}(t)$ et la solution particulière $u_{c,p}$ sont :
$$u_{c,h}(t) = Ae^{-t/\tau} \quad ; \quad u_{c,p}(t) = E. \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E.$$
Pour trouver la constante A, on utilise la condition initiale :
$$u_c(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -E \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}.$$

5. Déterminer l'expression de t_1 pour que $u_c(t_1) = 0{,}9E$.

Réponse :
$$u_c(t_1) = 0{,}9E \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-t_1/\tau} = 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t_1/\tau} = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_1 = \tau \ln(10) \approx 2{,}3\tau}.$$

Dans l'étude expérimentale du circuit RC, on observe l'oscillogramme ci-dessus en utilisant un générateur délivrant des signaux créneaux. Les sensibilités sont : 1V/carreau vertical ; 0,1 ms/carreau horizontal. On néglige les caractéristiques de l'oscilloscope.

6. Identifier les courbes (1) et (2) aux voies A et B en justifiant votre choix.

Réponse :

- Sur la voie B, on mesure la tension $u_c(t)$. Cette fonction est continue en $t = 0$. Il s'agit donc de la courbe (1).
- Sur la voie A, on mesure la tension $u_c(t) + Ri(t)$. Or la fonction $i(t)$ n'est pas continue en $t = 0$, donc il s'agit de la courbe (2).

7. Doit-on être sur le couplage alternatif AC ou le couplage continu DC ?

Réponse :

On doit utiliser un **couplage DC** car on étudie un signal continu (et non sinusoïdal).

8. Préciser l'expression de la tension au point P.

Réponse :

À l'instant $t = 0^+$, on a :
$$u_c(0^+) + Ri(0^+) = 0 + \frac{RE}{R + R_g}.$$
La tension au point P est donc $\boxed{\dfrac{RE}{R + R_g}}$.

9. Sachant que $R = 100\,\Omega$, déterminer R_g.

Réponse :

D'après la courbe, la tension en P est $4E/6$. ON en déduit que :

$$\frac{4E}{6} = \frac{RE}{R+R_g} \quad \Rightarrow \quad \frac{4(R+R_g)}{6} = R \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_g = \frac{R}{2} = 50\,\Omega}.$$

10. En utilisant les valeurs expérimentales et les questions précédentes, en déduire la valeur de C et E.

Réponse :

- D'après la courbe expérimentale : $\boxed{E = 6\,\text{V}}$.
- D'après la courbe expérimentale : $t_1 = 0{,}42\,\text{ms}$.

On en déduit que :

$$C = \frac{\tau}{R+R_g} = \frac{t_1}{\ln(10) \times (R+R_g)} = \boxed{1{,}2\,\mu\text{F}.}$$

11. Estimer une majoration de la fréquence du signal carré utilisé.

Réponse :
La demi-période T du signal utilisé est supérieure à 8 carreaux, donc :

$$T > 2 \times 0{,}8 = 1{,}6\,\text{ms}.$$

On en déduit que

$$f = \frac{1}{T} < \frac{1}{1{,}6.10^{-3}} = \boxed{625\,\text{Hz}}.$$

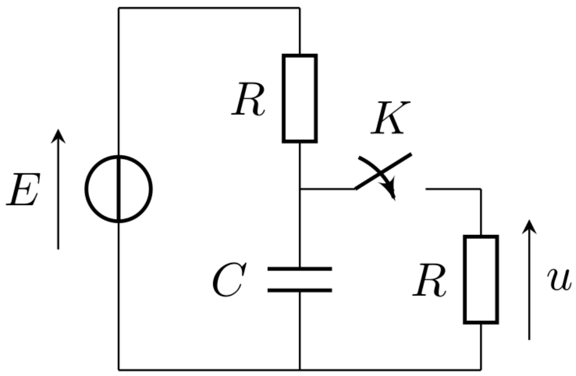
12. Comment pourrait-on observer l'intensité du courant ?

Réponse :

Pour observer l'intensité du courant, on peut observer la tension aux bornes de la résistance R (qui est une image de i *via* la loi d'Ohm) en affichant $u_A - u_B$.

VI Circuit RC à 2 mailles

On considère le circuit représenté ci-contre, dans lequel l'interrupteur K est fermé à $t = 0$.



1. Trouver l'expression de la tension $u(t)$ et tracer son allure.

Réponse :
LdMailles :

$$E = Ri + u \quad \text{et} \quad u_C = u$$

LdN :

$$i = i_1 + i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}$$

D'où

$$E = RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 2u$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u + \frac{E}{2\tau}$$

avec $\tau = \frac{RC}{2}$.

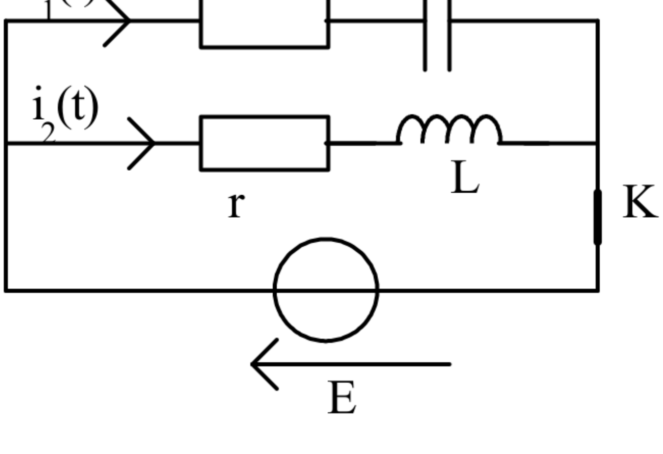
Après résolution avec $u(0^+) = E$, on obtient

$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}(1 + e^{-t/\tau})}$$

Ainsi, u_C décroit exponentiellement de E à $E/2$.

VII Circuit RL – RC

À l'instant de date $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur K, le condensateur est déchargé.



1. Déterminer les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Réponse :
Loi des mailles :

$$E = Ri_1(t) + U_c \qquad \& \qquad E = ri_2(t) + U_L$$

On a alors :

$$RC\frac{di_1}{dt} + i_1 = 0 \qquad \& \qquad Ri_2 + L\frac{di_2}{dt} = E$$

Et alors

$$i_1(t) = Ae^{-t/RC} \qquad \& \qquad i_2(t) = \frac{E}{R} + Be^{-t/(L/R)}$$

Continuité de u_C et i_2, donc $u_C(0) = 0$ et $i_2(0) = 0$. Finalement $Ri_1(0^+) = E$.

$$i_2(0^+) = 0 \quad \& \quad i_1(0^+) = \frac{E}{R}.$$

D'où

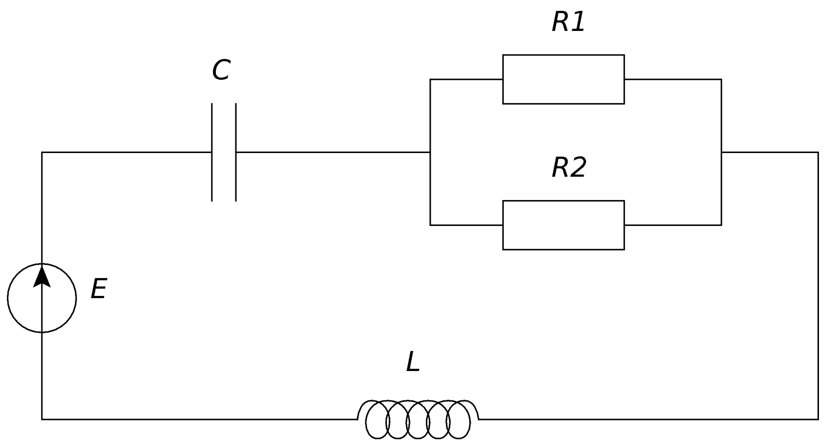
$$A = \frac{E}{R} \quad \& \quad B = -\frac{E}{R}$$

Finalement

$$i_1(t) = \frac{E}{R}e^{-t/RC} \qquad \& \qquad i_2(t) = \frac{E}{R}\left(1 - e^{-t/(L/R)}\right)$$

VIII Lois de Kirchhoff : circuit électrique dépendant du temps

On suppose que le générateur de tension fournit une tension qui dépend du temps : $E = E(t)$. Les intensités et les tensions dans le circuit dépendent donc également du temps. Dans le cas contraire, nous verrons dans un chapitre suivant que le courant ne pourrait pas circuler à cause du condensateur.



1. Flécher les tensions aux bornes des dipôles et les intensités dans les différentes branches du circuit de façon à ce que le générateur de tension soit en convention générateur et que les résistances, condensateur et bobine soient en convention récepteur. On appellera i_k et U_k l'intensité qui traverse la résistance R_k et la tension aux bornes de R_k. Pour le condensateur et la bobine, on appellera ces quantités respectivement U_C et i_C ou U_L et i_L.

Réponse :

2. Que peut-on dire de i_C et i_L ?

   Réponse :
   $i_C = i_L$

3. En appliquant la loi des nœuds, trouver 2 équations. Sont-elles indépendantes ?

   Réponse :
   $i_C = i_1 + i_2$ et $i_L = i_1 + i_2$. Elles ne sont pas indépendantes puisque $i_C = i_L$.

4. En appliquant la loi des mailles, trouver 2 équations indépendantes.

   Réponse :
   $U_1 = U_2$ et $E = U_C + U_1 + U_L$.

5. En appliquant la loi d'Ohm, trouver 2 équations indépendantes.

   Réponse :
   $U_1 = R_1 i_1$ et $U_2 = R_2 i_2$.

6. En appliquant les loi des condensateurs et des bobines, trouver 2 équations indépendantes reliant i_C,U_C,i_L,U_L et certaines de leurs dérivées par rapport au temps.

   Réponse :
   $i_C = C\frac{dU_C}{dt}$ et $u_L = L\frac{di_C}{dt}$.

7. Dans ce circuit, quelles grandeurs sont inconnues ? A-t-on suffisamment d'équations pour les déterminer ?

   Réponse :
   Grandeurs inconnues : U_C, U_1, U_2, U_L, i_1, i_C, i_2.

   On a 7 équations.

8. Trouver l'équation différentielle vérifiée par i_C.

   Réponse :
   En utilisant une résistance équivalente, la loi des mailles devient :

   $$E = U_C + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} i_C + u_L.$$

   On dérive cette équation par rapport au temps :

   $$0 = \frac{i_C}{C} + \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2}\frac{di_C}{dt} + L\frac{d^2 i_C}{dt^2}.$$

9. Que se serait-il passé si le condensateur avait été fléché en convention générateur ?

   Réponse :
   Il y aurait eu un signe moins dans la loi des condensateur et un signe moins dans la loi des mailles : l'équation finale aurait été la même.