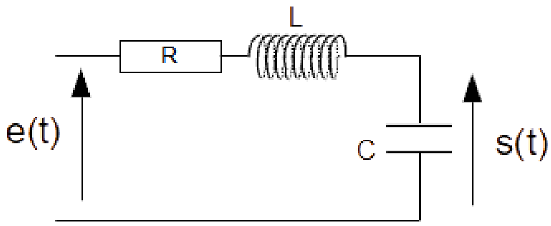
Devoir maison 2 – À rendre le 8 janvier 2024 – Facultatif

Étude d'un filtre d'ordre 2 – corrigé

On étudie le circuit linéaire représenté ci-dessous, soumis à une tension d'entrée sinusoïdale $e(t) = E_m \cos(\omega t + \varphi)$.



1) Prévoir sans calcul la nature de ce filtre.

Réponse

En basse fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un interrupteur fermé. Il n'y a pas de tension aux bornes de R (courant nul). La tension imposée en entrée se retrouve aux bornes de C :

En haute fréquence, le condensateur se comporte comme un interrupteur fermé et la bobine comme un interrupteur ouvert. La tension aux bornes de C est quasi-nulle (fil).

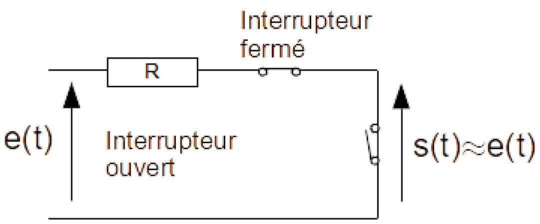


Figure .1 – Basses fréquences.

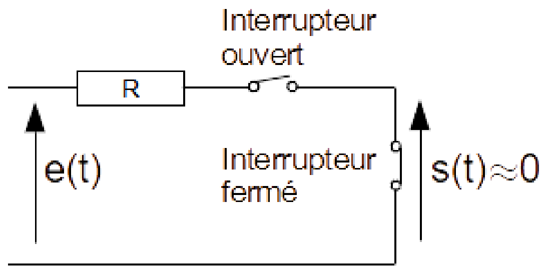


Figure .2 – Hautes fréquences.

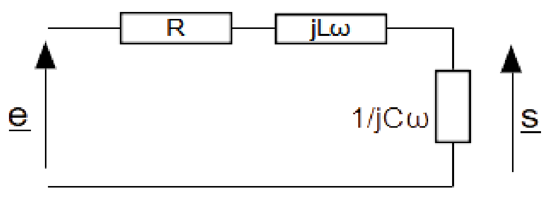
Le filtre présente un comportement de passe-bas.

◇

2) Etablir sa fonction de transfert et l'écrire sous forme canonique. On introduira une pulsation propre ω_0 et un facteur de qualité Q.

Réponse

En notation complexe :



En reconnaissant un diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Posons $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \frac{1}{RC\omega_0}$:

$$\boxed{\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}}}$$

◇

3) En utilisant les résultats des questions précédentes, donner l'équation différentielle vérifiée par le signal $s(t)$.

Réponse

En réutilisant l'expression de la fonction de transfert :

$$\underline{e} = \underline{s} + \frac{1}{\omega_0 Q}(j\omega)\underline{s} + \frac{1}{\omega_0^2}(j\omega)^2\underline{s}$$

En notation réelle :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 s = \omega_0^2 e}$$

◇

4) Exprimer le gain en fonction de ω, ω_0 et Q.

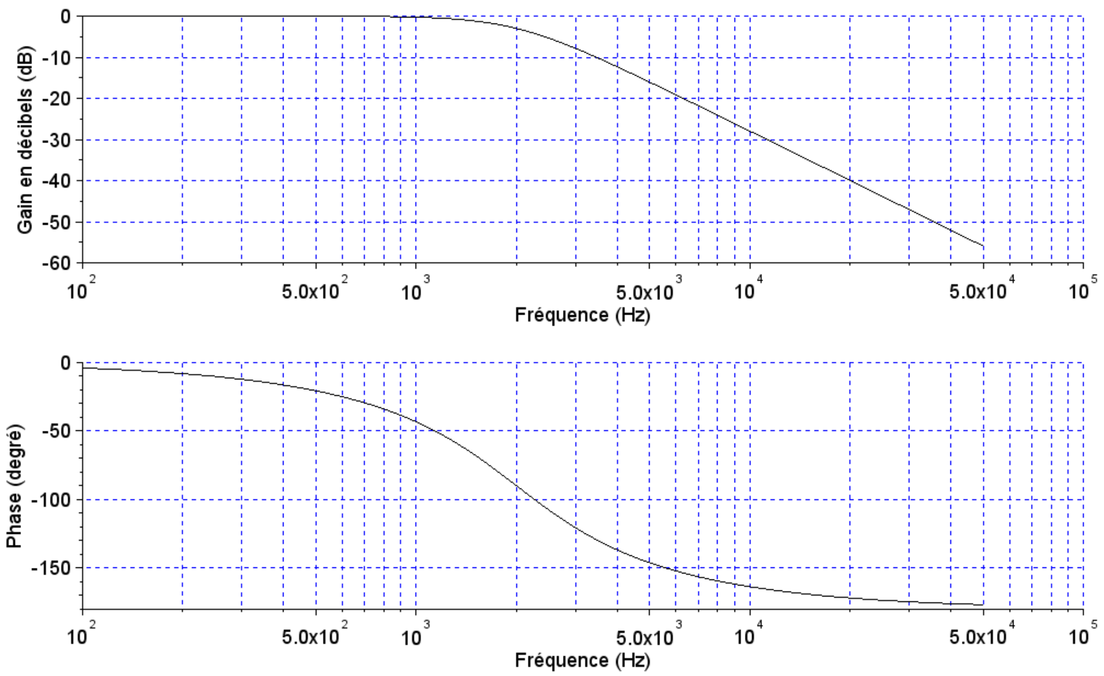
Réponse

Le gain est le module de la fonction de transfert :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right)^2}}}$$

◇

5) Le diagramme de Bode du filtre est représenté ci-dessous. Justifier l'allure des asymptotes de G_{dB} aux basses et hautes fréquences.



Réponse

	$\omega \ll \omega_0$	$\omega \gg \omega_0$
Expression approchée de $\underline{H}$	1	$-\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$
Gain	1	$\frac{\omega_0^2}{\omega^2}$
G_{dB}	0 dB	$-40\log\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)$
Asymptote réponse en gain	droite horizontale à 0dB	droite de pente -40dB/décade
Phase	0	$-\pi$

◇

6) Déduire du diagramme la valeur de ω_0 .

Réponse

La pulsation ω_0 peut être déterminée partir de la réponse en phase : La fréquence f_0 est la fréquence pour laquelle la phase passe par l'angle moitié. Ici $\varphi = -\frac{\pi}{2}$ pour $f_0 = 2{,}0 \times 10^3$ Hz.

On en déduit : $\boxed{\omega_0 = 2\pi f_0} = \underline{1{,}3 \times 10^4\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}}$

◇

7) Ce circuit peut-il être utilisé en intégrateur ? en dérivateur ?

Réponse

Le filtre ne se comporte ni comme un intégrateur, ni comme un dérivateur.

Il n'existe pas un domaine de fréquence pour lequel la fonction de transfert varie linéairement en $\frac{1}{j\omega}$ (intégrateur) ou en $j\omega$ (dérivateur).

On peut également remarquer que la courbe de réponse en gain ne présente par de zone rectiligne de pente -20dB/décade (intégrateur) ou +20dB/décade (dérivateur) pour une phase quasi-constante.

◇

8) En utilisant la valeur numérique $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, réécrire le gain du filtre puis déterminer sa bande passante.

Réponse

En utilisant $Q = \frac{1}{\sqrt{2}}$, on réécrit :

$$\boxed{G(\omega) = \frac{1}{\sqrt{(1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^4}}}$$

On cherche la pulsation de coupure ω_c en utilisant la définition :

$$G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$$

avec ici $G_{max} = 1$.

Il est facile de remarquer que $\boxed{\omega_c = \omega_0}$.

La bande passante du filtre est donc l'intervalle $[0,\omega_C]$.

◇

Dans les questions qui suivent, le diagramme de Bode du filtre sera assimilé au diagramme de Bode asymptotique pour simplifier le raisonnement.

9) Représenter le diagramme de Bode asymptotique du filtre considéré.

Réponse

Le diagramme de Bode asymptotique du filtre est représenté ci-dessous, avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$:

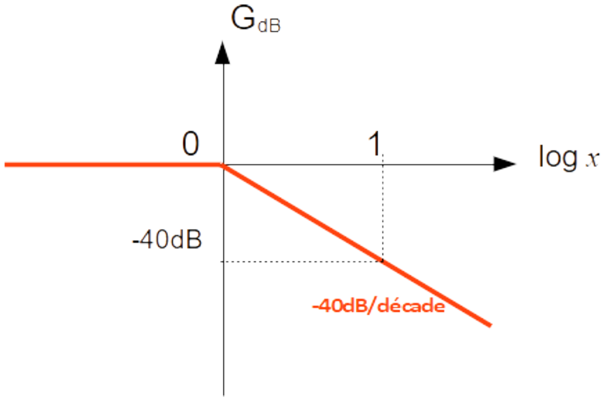


Figure .3 – Réponse en gain

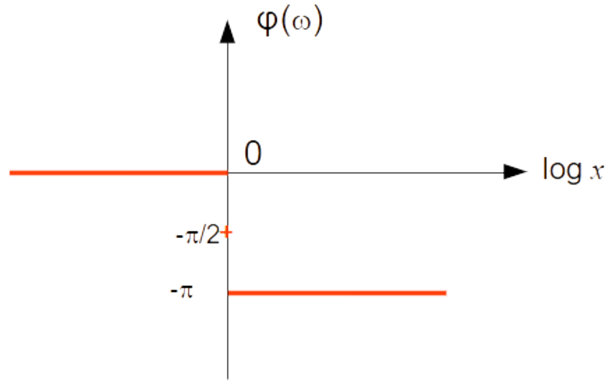


Figure .4 – Réponse en phase

◇

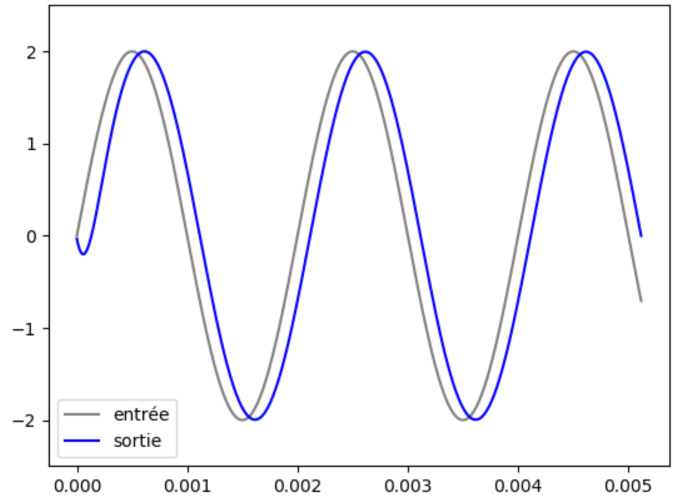
10) Le signal d'entrée est sinusoïdal centré, de fréquence $f = 5{,}0 \times 10^2$ Hz. Représenter, en justifiant, les signaux en entrée et en sortie du filtre.

Réponse

Comme $f < f_0$, le gain est égal à 1 et la phase est égale à 0 (on assimile le diagramme de Bode au diagramme asymptotique de la question 9)).

L'amplitude et la phase de la sinusoïde en sortie sont donc identiques à celles de la sinusoïde en entrée.

Sur la figure ci-dessous, le signal de sortie a été représenté à partir du diagramme de Bode réel, on note donc que la sortie est légèrement en retard de phase sur l'entrée. L'amplitude semble bien identique.



11) Reprendre la question précédente si le signal d'entrée est un signal créneau de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$, pair, de valeur basse 0 et de valeur haute a dont on donne la décomposition en série de Fourier :

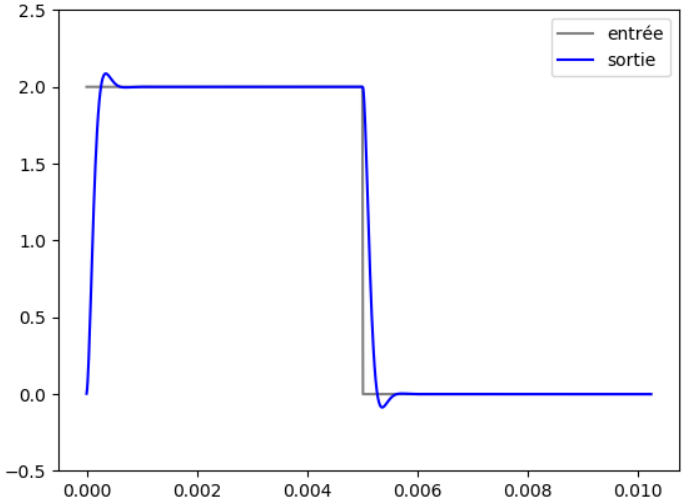
$$e(t) = \frac{a}{2} + \frac{2a}{\pi}\sum_{p=0}^{\infty}\frac{(-1)^p}{2p+1}\cos((2p+1)2\pi f t)$$

Réponse

Le filtre passe-bas transmet la composante continue ainsi qu'un grand nombre d'harmoniques car la fréquence f du créneau est très petite devant la fréquence de coupure f_c du filtre. Le signal créneau est presque reconstitué.

On peut néanmoins s'attendre à ce que les pentes soient adoucies et à ce que les "coins soient émoussés" puisque les très hautes fréquences seront éliminées et que ces très hautes fréquences contiennent les détails fins et les discontinuités.

La figure ci-dessous présente les signaux d'entrée et de sortie. Le signal de sortie a été obtenu en simulant l'action du filtre (diagramme de Bode réel).



12) Quel est l'avantage de ce filtre par rapport à un filtre passe-bas du premier ordre ?

Réponse

Avec un filtre passe-bas du deuxième ordre, la pente de l'asymptote haute fréquence est -40dB/décade, ce qui permet d'atténuer rapidement les amplitudes des composantes à éliminer.