

# Correction du TD d'entraînement



## I Oscillateur à deux ressorts

Un mobile supposé ponctuel de masse  $m$  est astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction  $(Ox)$ . Ce mobile est relié par deux ressort linéaires à deux points fixes  $A$  et  $B$ . On le repère par sa position  $OM = x$ .



Les deux ressorts sont identiques : même constante de raideur  $k$  et même longueur au repos  $\ell_0$ . Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent  $\ell_{eq}$  et le mobile se trouve à l'origine  $O$  de l'axe. On se place dans le référentiel terrestre (lié au sol), considérée comme galiléen. À  $t = 0$ , le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position  $x_0 \neq 0$

- 1) Dans un premier temps, on néglige tout frottement.
  - a) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$ .
  - b) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation  $\omega_0$  et la période  $T_0$  propres en fonction de  $k$  et  $m$ .
  - c) Donner l'expression de  $x(t)$  en tenant compte des conditions initiales.

### Réponse

- a) Cette fois-ci, on a deux ressorts : le premier tire dans le sens  $-\vec{u}_x$  et le second dans le sens  $+\vec{u}_x$  ; ainsi le bilan des forces s'exprime :

**Poids**  $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$

**Support**  $\vec{R} = R \vec{u}_y$

**Ressort 1**  $\vec{F}_1 = -k(\ell_1(t) - \ell_0) \vec{u}_x = -k(\ell_{eq} + x(t) - \ell_0) \vec{u}_x$

**Ressort 2**  $\vec{F}_2 = +k(\ell_2(t) - \ell_0) \vec{u}_x = +k(\ell_{eq} - x(t) - \ell_0) \vec{u}_x$

On a en effet  $\ell_1(t)$  la longueur du ressort 1 qui s'exprime  $\ell_1 = AM$ . Or, d'après l'énoncé  $\ell_{eq} = AO = OB$  : en décomposant (**puisque les distance sont sur le même axe**), on a donc  $AM = AO + OM = \ell_{eq} + x$ .

Le ressort 2 a comme longueur  $\ell_2(t) = MB = MO + OB$  soit  $\ell_2(t) = \ell_{eq} - x(t)$ .

Ainsi, le PFD donne

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2$$

$$\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(\ell_{eq} + x - \ell_0) + k(\ell_{eq} - x - \ell_0) \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

Sur l'axe  $\vec{u}_x$  on trouve

$$\boxed{m \frac{d^2x}{dt^2} + 2kx = 0} \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{2k}{m}x = 0}$$

La projection sur  $\vec{u}_y$  montre que la réaction du support compense le poids.

b) Sous forme canonique, cette équation se réécrit

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = 0$$

C'est bien l'équation d'un oscillateur harmonique de pulsation  $\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}$  et donc de période

$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m}{2k}}$ . Doubler la constante de raideur divise par  $\sqrt{2}$  la période : le ressort oscille plus vite qu'avec un seul ressort.

c) L'expression générale de  $x(t)$  est donc  $x(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$ . Or, en  $t = 0$ , on a  $x(0) = x_0 = A$ , et  $\frac{dx}{dt} = 0 = \omega_0 B$  ; ainsi

$$x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t)$$



2) En fait il existe entre le mobile et la tige un frottement de type visqueux linéaire, la force de frottement s'exprime  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$  (avec  $\alpha > 0$  et  $\vec{v}$  la vitesse de la masse  $m$  dans le référentiel terrestre).

a) Établir l'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$ . On posera  $h = \frac{\alpha}{m}$ .

b) Montrer que lorsque  $\alpha < 2^{3/2}\sqrt{km}$ , le mouvement comporte des oscillations amorties. Donner l'expression de  $x(t)$  en tenant compte des conditions initiales et exprimer la pseudo-période  $T$  en fonction de  $\omega_0$  et  $h$ .

### Réponse

a) On ajoute  $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha v \vec{u}_x$  au PFD, ce qui donne

$$\frac{d^2x}{dt^2} + h \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

b) On sait qu'on a des oscillations amorties quand le discriminant  $\Delta$  de l'équation caractéristique est négatif :  $\Delta < 0$ . Or ici, l'équation caractéristique est

$$\begin{aligned} r^2 + hr + \omega_0^2 &= 0 \Rightarrow \Delta = h^2 - 4\omega_0^2 \\ \Delta < 0 &\Leftrightarrow \left(\frac{\alpha}{m}\right)^2 < 4\omega_0^2 \Leftrightarrow \alpha < 2m\sqrt{\frac{2k}{m}} \\ &\Leftrightarrow \alpha < 2^{3/2}\sqrt{km} \end{aligned}$$

Dans ce régime, on aura donc les racines

$$r_{\pm} = -\frac{h}{2} \pm i\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}} \Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{h}{2} \pm i\omega \quad \text{avec} \quad \omega = \sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}}$$

La solution générale est alors

$$x(t) = e^{-ht/2} [D \cos(\omega t) + E \sin(\omega t)]$$

On a les mêmes conditions initiales, soit  $x(0) = x_0 = D$  et  $\frac{dx}{dt} = 0 = -\frac{h}{2}x_0 + \omega E$ , d'où  $E = \frac{h}{2\omega}x_0$ . Ainsi,

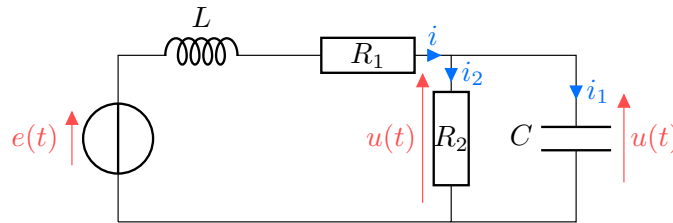
$$x(t) = x_0 e^{-ht/2} \left[ \cos(\omega t) + \frac{h}{2\omega} \sin(\omega t) \right]$$

On a donc une pseudo-période  $T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \frac{h^2}{4}}}$



## ★ II | Décroissement logarithmique électrique

On étudie la réponse  $u(t)$  à un échelon de tension  $e(t)$  tel que  $\begin{cases} e(t < 0) = 0 \\ e(t \geq 0) = E \end{cases}$  dans le circuit ci-dessous.



- 1) Déterminer la valeur  $u_\infty$  vers laquelle tend  $u(t)$  lorsque  $t \rightarrow \infty$ .

### Réponse

$R_2$  et  $C$  sont en parallèle, donc  $u(t)$  est à la fois la tension aux bornes de  $C$  et de  $R_2$ . De plus, à  $t \rightarrow \infty$ , la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension avec  $R_1$  et  $R_2$  en série alimentées par la tension  $e(t)$ , et on a donc

$$u(\infty) = u_\infty = \frac{R_2}{R_1 + R_2} E$$



- 2) Montrer que  $\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty$ . Exprimer  $\lambda$  et  $\omega_0$  en fonction de  $L$ ,  $C$ ,  $R_1$  et  $R_2$ .

### Réponse

On applique les lois de KIRCHHOFF :

Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L \frac{di}{dt} + R_1 i = E$$

Avec la loi des nœuds :

$$i = i_1 + i_2 = C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2}$$

En combinant :

$$\begin{aligned} u + L \frac{d}{dt} \left( C \frac{du}{dt} + \frac{u}{R_2} \right) + R_1 C \frac{du}{dt} + R_1 \frac{u}{R_2} &= E \\ \Leftrightarrow u + LC \frac{d^2u}{dt^2} + \frac{L}{R_2} \frac{du}{dt} + R_1 C \frac{du}{dt} + \frac{R_1}{R_2} u &= E \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{L}{R_2} + R_1 C \right) \frac{du}{dt} + \left( \frac{R_1}{R_2} + \frac{1}{\frac{R_2}{R_1}} \right) u &= E \end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{du}{dt} + \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2u}{dt^2} + \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right) \frac{du}{dt} + \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u}{LC} = \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right) \frac{u_\infty}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + 2\lambda \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = \omega_0^2 u_\infty}$$

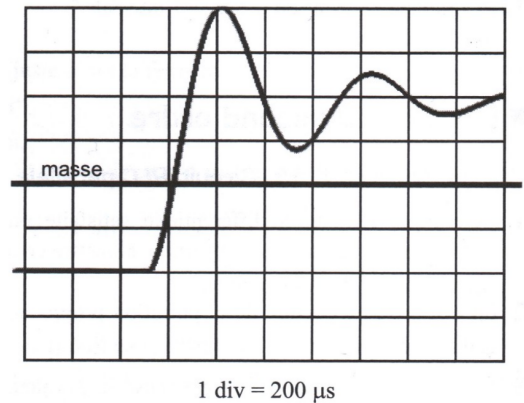
avec  $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC} \left( \frac{R_1 + R_2}{R_2} \right)}}$  et  $\boxed{\lambda = \frac{1}{2} \left( \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \right)}$



3) On observe à l'oscilloscope la courbe  $u(t)$  ci-contre, avec 1 V/div de calibre vertical.

- a) Déterminer la valeur numérique de la pseudo-période  $T$ .  
 b) Déterminer la valeur numérique du décrément logarithmique

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty} \right)}$$



### Réponse

- a) On a un régime pseudo-périodique, où on lit que  $\boxed{T = 600 \mu s}$ .  
 b) On ne peut calculer  $\delta$  qu'avec une pseudo-période ici. On lit au premier pic à  $t_1$  la valeur de la tension **par rapport à la masse** :  $u(t_1) = 4 \text{ V}$ . Au second pic à  $t_2 = t_1 + T$  on a :  $u(t_1 + T) = 2,5 \text{ V}$ . De plus,  $u_\infty = 2 \text{ V}$ . Ainsi,

$$\boxed{\delta = \ln \left( \frac{4 - 2}{2,5 - 2} \right) = \ln(4) = 1,39}$$



4) Exprimer  $u(t)$  en fonction de  $u_\infty$ ,  $\omega_0$ ,  $\lambda$  et  $t$  (sans chercher à déterminer les constantes d'intégration).

### Réponse

Pour la solution de l'équation homogène, on cherche les racines du polynôme caractéristique de discriminant  $\Delta$  :

$$r^2 + 2\lambda r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$$

On sait que  $\Delta < 0$  puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_{\pm} = -\frac{2\lambda}{2} \pm j\frac{1}{2}\sqrt{4(\omega_0^2 - \lambda^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_{\pm} = -\lambda \pm j\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}$$

La solution particulière étant visiblement  $u_\infty$ , on aura la forme générale

$$\boxed{u(t) = e^{-\lambda t} (A \cos \omega t + B \sin \omega t) + u_\infty}$$



- 5) Déterminer la relation entre  $\delta$ ,  $\lambda$  et  $T$ . En déduire la valeur numérique de  $\lambda$ .

**Réponse**

Avec l'expression de  $u(t)$ , on peut développer le dénominateur de  $\delta$  :

$$u(t + nT) - u_\infty = e^{-\lambda nT} \times e^{-\lambda t} \underbrace{\left( \underbrace{A \cos(\omega t + n\omega t)}_{=\cos \omega t} + \underbrace{B \sin(\omega t + n\omega t)}_{=\sin \omega t} \right)}_{u(t) - u_\infty}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t + nT) - u_\infty} = e^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n} \ln(e^{\lambda nT})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda = \frac{\delta}{T}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 1,39 \\ T = 600 \mu\text{s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \lambda = 2,32 \times 10^3 \text{ s}^{-1}$$



- 6) Sachant que  $R_1 = 200 \Omega$ ,  $R_2 = 5 \text{ k}\Omega$  et  $L = 500 \text{ mH}$ , déterminer la valeur de  $C$ .

**Réponse**

On sait que  $\lambda$  s'exprime en fonction de  $C$ , on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2 C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1 R_2}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 200 \Omega \\ R_2 = 5 \text{ k}\Omega \\ L = 500 \text{ mH} \\ \lambda = 2,32 \times 10^3 \text{ s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } C = 76 \mu\text{F}$$

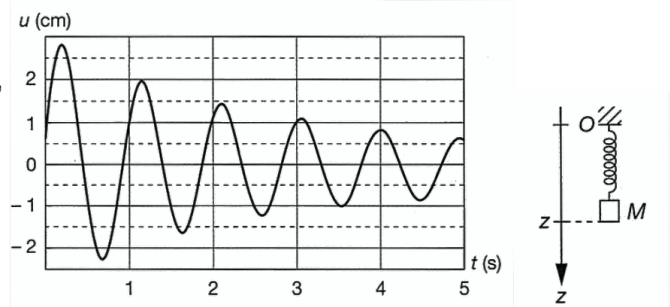


**Interprétation E5.1 : À retenir**

En régime pseudo-périodique, l'amortissement du signal est dû à l'exponentielle de la solution générale. En calculant le logarithme du rapport de la solution à un instant  $t$  et de la solution à un instant  $t + nT$  avec  $T$  la période on calcule donc le facteur de l'exponentielle décroissante, ce qui permet de trouver les caractéristiques du circuit.

## ★★ III | Décroissement logarithmique mécanique

Une masse  $m$  est accrochée à un ressort de raideur  $k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  et de longueur à vide  $\ell_0 = 10 \text{ cm}$ , fixé au point  $O$ . En plus de son poids et de la force de rappel du ressort, la masse est soumise à une force de frottement fluide  $\vec{F} = -\alpha \vec{v}$ . Un capteur fournit l'évolution de  $u(t) = z(t) - z_{\text{eq}}$  au cours du temps.



- 1) Établir l'équation d'évolution de  $z(t)$ . Quelle est la position d'équilibre  $z_{\text{eq}}$  de la masse ? En déduire une équation satisfaite par  $u(t)$ .

---

**Réponse**


---

On repère par  $z(t)$  l'altitude du ressort. Étant donné le système, le mouvement ne s'effectue que selon  $\vec{u}_z$ , et on a  $v = \frac{dz}{dt}$  et  $a = \frac{d^2z}{dt^2}$ . De plus, la longueur  $\ell$  du ressort s'identifie à l'altitude  $z(t)$  de la masse. On effectue donc le **bilan des forces** en faisant attention au sens de  $\vec{u}_z$  :

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \vec{P} = mg \vec{u}_z \\ \text{Ressort} & \vec{F}_{\text{ressort}} = -k(z(t) - \ell_0) \vec{u}_z \\ \text{Frottement} & \vec{F} = -\alpha \frac{dz}{dt} \vec{u}_z \end{array}$$

Ainsi, le **PFD** donne

$$m \frac{d^2z}{dt^2} = mg - k(z(t) - \ell_0) - \alpha \frac{dz}{dt} \Leftrightarrow \boxed{m \frac{d^2z}{dt^2} + \alpha \frac{dz}{dt} + kz = mg + k\ell_0}$$

À l'équilibre,  $\frac{dz}{dt} = 0$  et  $\frac{d^2z}{dt^2} = 0$ , on trouve donc

$$z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}$$

À cause du poids qui n'est cette fois pas compensé par la réaction du support, la longueur d'équilibre est plus grande que la longueur à vide du ressort. On réexprime l'équation différentielle avec le changement de variable de l'énoncé pour avoir

$$\boxed{m \frac{d^2u}{dt^2} + \alpha \frac{du}{dt} + ku = 0}$$



- 2) Exprimer la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  en fonction des données du problème.

---

**Réponse**


---

On met l'équation sous forme canonique et on identifie :

$$\boxed{\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$



- 3) Résoudre l'équation différentielle. Exprimer la pseudo-période  $T$  en fonction de  $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$  et de  $Q$ .

---

**Réponse**


---

On exprime l'équation caractéristique de discriminant  $\Delta$  :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0 \Rightarrow \Delta = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

On observe des oscillations, donc  $\Delta < 0$ . Les racines sont donc

$$\boxed{r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{Q^2}}}$$

et les solutions sont de la forme

$$\boxed{z(t) = e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} [A \cos \omega t + B \sin \omega t]}$$

Sans conditions initiales, on ne peut déterminer  $A$  et  $B$ . On peut cependant exprimer  $T$  :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{T_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$



- 4) Montrer que le décrément logarithmique  $\delta$ , défini par

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{u(t) - u_{\text{eq}}}{u(t + nT) - u_{\text{eq}}} \right)$$

est indépendant du temps.

---

**Réponse**

---

Par construction,  $u_{\text{eq}} = 0$ , et on a

$$u(t + nT) = e^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} \times e^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \left[ \underbrace{\frac{A \cos(\omega(t + nT))}{=\cos \omega t} + \frac{B \sin(\omega(t + nT))}{=\sin \omega t}}_{=u(t)} \right] \Leftrightarrow u(t + nT) = e^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} u(t)$$

Ainsi,

$$\delta = \frac{1}{n} \ln \left( \frac{u(t)}{e^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} u(t)} \right) = \frac{1}{n} \ln \left( e^{n\frac{\omega_0}{2Q}T} \right) \Leftrightarrow \delta = \frac{\omega_0}{2Q} T$$

En développant  $T$  on trouve

$$\delta = \frac{1}{2Q} \frac{\overbrace{\omega_0 T_0}^{=2\pi}}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \Leftrightarrow \delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

ce qui est bien indépendant du temps  $t$ .



- 5) Comparer les données expérimentales à l'affirmation précédente. Commenter.

---

**Réponse**

---

Soit  $t_{\text{max}}$  le temps du premier maximum. On relève les ordonnées des maximums successifs de  $u(t)$ , c'est-à-dire  $u(t_{\text{max}} + nT)$ , et on calcule le logarithme népérien de deux longueurs successives :

$n$	$u(t_{\text{max}} + nT)$	$\delta$
0	2,9	0,37
1	2,0	0,29
2	1,5	0,31
3	1,1	0,31
4	0,8	0,29
5	0,6	

Mise à part la première valeur, les résultats sont assez peu dispersés. Cela valide bien le modèle d'oscillateur amorti pour cette expérience ; l'écart de la première valeur est sûrement lié à des non-linéarités du ressort aux longueurs importantes.



- 6) Estimer à l'aide des données expérimentales le facteur de qualité  $Q$  et la pseudo-pulsation  $\omega$ .

---

**Réponse**

---

On peut donc estimer qu'on a  $\delta = 0,30 \pm 0,01$ . On isole  $Q$  de son expression :

$$\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Leftrightarrow \sqrt{4Q^2 - 1}^2 = \left( \frac{2\pi}{\delta} \right)^2 \Leftrightarrow 4Q^2 = 1 + \left( \frac{2\pi}{\delta} \right)^2$$

$$\Leftrightarrow Q = \sqrt{\frac{\pi^2}{\delta^2} + \frac{1}{4}}$$

$$\text{A.N. : } Q \approx 10,5$$

On trouve bien  $Q \gg 0.5$  comme le montre l'oscillogramme. Quant à  $\omega$ , on peut estimer  $T$  en comptant plusieurs périodes : on a  $t_{\max} = 0,2 \text{ s}$  et  $t_{\max} + 5T = 4,9 \text{ s}$ , donc on a  $5T = 4,2 \text{ s}$ , c'est-à-dire  $T \approx 0,95 \text{ s}$ . Enfin,  $\omega = 2\pi/T$ , donc

$$\omega = 6,6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$



7) En déduire les valeurs de  $m$  et  $\alpha$ .

---

**Réponse**

---

Comme  $Q \gg 0.5$ , on a  $\omega \approx \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ . On a donc

$$m \approx \frac{k}{\omega^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\ \omega = 6,6 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } m \approx 230 \text{ g}$$

Finalement, on a

$$\alpha = \frac{\sqrt{km}}{Q} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1} \\ m = 230 \text{ g} \\ Q = 10,5 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \alpha \approx 0,15 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1}$$

