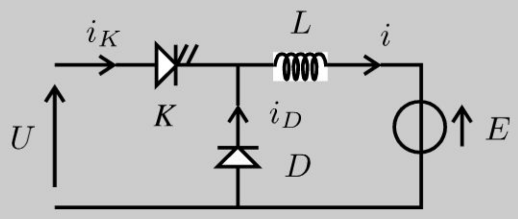
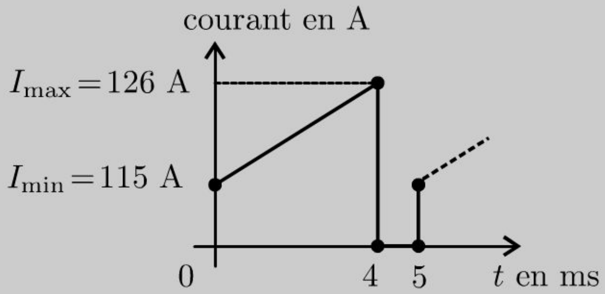
21 Conversion électronique statique

Exercice 21.1 : Hacheur à stockage inductif

On considère un hacheur, de rapport cyclique α et de période de hachage T. Il alimente une machine à courant continu considérée comme parfaite. On la modélise par une inductance L en série avec une force électromotrice $E > 0$ constante. La source de tension délivre une tension constante $U = 400$ V. On suppose que $U > E$. La commande du transistor K est la suivante :

- Sur l'intervalle $[0,\alpha T]$, le transistor K est passant.
- Sur l'intervalle $[\alpha T,T]$, le transistor K est bloqué.





1. Parmi les courants i_K,i_D et i, quel est celui relevé sur le chronogramme ? Quelle est la fréquence de hachage ? Que vaut le rapport cyclique α ?
2. Écrire l'équation différentielle reliant i,U et E sur l'intervalle de temps $[0,\alpha T]$. En déduire l'ondulation du courant $\Delta i = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de L,U,E,α et T.
3. Écrire l'équation différentielle reliant i et E sur l'intervalle de temps $[\alpha T,T]$. En déduire une autre expression de l'ondulation de courant $\Delta i = I_{\max} - I_{\min}$ en fonction de L,E,α et T.
4. En déduire la relation entre E,α et U. Exprimer Δi en fonction de L,α,T et U. Calculer la valeur de l'inductance L.
5. Représenter i en fonction du temps.
6. Effectuer un bilan de puissance moyenne.

Analyse du problème

Cet exercice étudie un hacheur à stockage inductif puisqu'on a un transfert de puissance entre deux sources de tension continue. On n'étudie pas le régime transitoire. Il ne faut donc pas être surpris d'avoir un courant non nul à $t = 0$. Comme le courant ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine, on utilise cette propriété pour intégrer les deux équations différentielles et en déduire une relation entre E,U et α.

1. Le courant représenté ne peut pas être i car l'intensité ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine.
Lorsque le transistor est bloqué, $i = i_D \geqslant 0$ puisque le courant i passe dans la diode D. L'intensité i est une fonction décroissante du temps d'après l'orientation de E. Le courant représenté ne peut pas être i_D
Le courant représenté est donc nécessairement le courant i_K.

- Dans l'intervalle de temps $[0,\alpha T]$, le transistor est passant. L'intensité i_K est une fonction croissante du temps puisque $U > E$. Cela correspond à l'intervalle $[0{,}4\ \mathrm{ms}]$ sur le graphe.
- Dans l'intervalle de temps $[\alpha T,T]$, le transistor est bloqué. La diode est nécessairement passante. On a donc $i_D > 0$ et $i_K = 0$. Cela correspond à l'intervalle $[4\ \mathrm{ms},5\ \mathrm{ms}]$ sur le graphe.

Le courant représenté sur le chronogramme est donc bien i_K. La période du phénomène est T = 5 ms. La fréquence est :

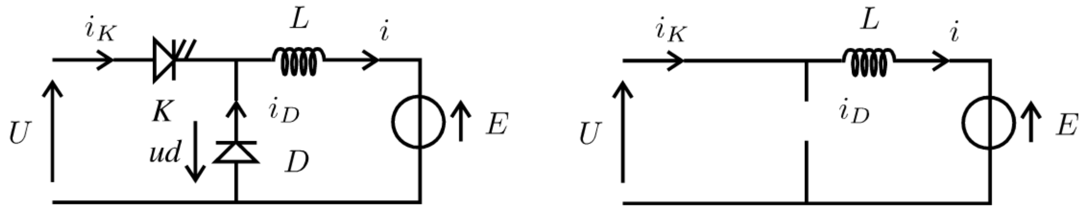
$$f = \frac{1}{T} = 200\,\mathrm{Hz}$$

Graphiquement, on lit : αT = 4 ms. On a donc :

$$\alpha = \frac{4}{5} = 0{,}8$$

2. Intervalle de temps $[\mathbf{0},\boldsymbol{\alpha T}]$:

Le transistor est équivalent à un interrupteur fermé. La tension aux bornes de la diode vaut $u_D = -U < 0$. La diode est donc bloquée.
On a le schéma équivalent suivant :



La loi des mailles s'écrit :

$$U = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + E$$

En séparant les variables, on a :

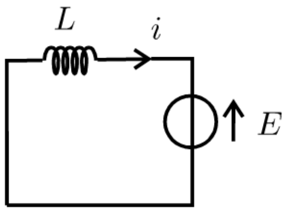
$$\mathrm{d}i = \frac{U - E}{L}\mathrm{d}t$$

On intègre entre 0 et αT :

$$\Delta i = I_{\max} - I_{\min} = \frac{U - E}{L}\alpha T$$

3. Intervalle de temps $[\alpha T, T]$:

Le transistor est équivalent à un interrupteur ouvert. On suppose la diode passante.
On a le schéma équivalent suivant :



La loi des mailles s'écrit :

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + E = 0$$

En séparant les variables, on a :

$$\mathrm{d}i = -\frac{E}{L}\mathrm{d}t$$

On intègre entre αT et T :

$$I_{\min} - I_{\max} = -\frac{E}{L}(T - \alpha T)$$

Soit :

$$\Delta i = I_{\max} - I_{\min} = \frac{E}{L}(T - \alpha T)$$

Vérification des hypothèses : $i_D = i > 0$. La diode est bien passante tant que $I_{\min} > 0$.

4. On a vu dans les deux questions précédentes que :
$I_{\max} - I_{\min} = \dfrac{U - E}{L}\alpha T$ et que $I_{\max} - I_{\min} = \dfrac{E}{L}(T - \alpha T)$.
On obtient en simplifiant :

$$E = \alpha U$$

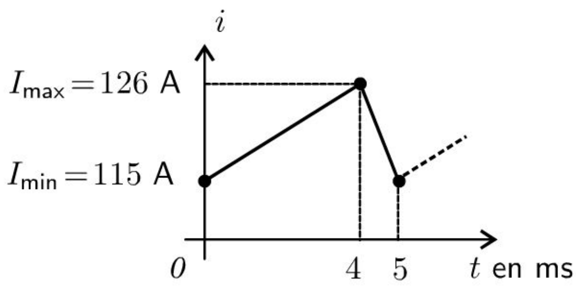
On en déduit :

$$I_{\max} - I_{\min} = \frac{U(1-\alpha)}{L}\alpha T$$

L'inductance L vaut :

$$L = \frac{U(1-\alpha)}{I_{\max} - I_{\min}}\alpha T = \frac{400 \times (1 - 0{,}8)}{126 - 115} \times \frac{0{,}8}{200} = 29 \text{ mH}$$

5. L'intensité ne peut pas varier de façon discontinue dans une bobine. Le graphe suivant représente i en fonction du temps.



6. Puissance moyenne P_1 fournie par le générateur U :

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_0^T U i_K \mathrm{d}t = \frac{U}{T}\int_0^{\alpha T} i_K \mathrm{d}t$$

Il faut se placer en convention générateur pour calculer une puissance fournie et en convention récepteur pour calculer une puissance reçue.

$\displaystyle\int_0^{\alpha T} i_K \mathrm{d}t$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2}\alpha T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{\alpha U}{2}(I_{\min} + I_{\max})$$

Puissance moyenne P_2 reçue par la force électromotrice E :

$$P_2 = \frac{1}{T}\int_0^T E i \mathrm{d}t = \frac{E}{T}\int_0^T i \mathrm{d}t$$

$\int_0^T i\mathrm{d}t$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} T\,(1 - \alpha) + \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} \alpha T = \frac{I_{\min} + I_{\max}}{2} T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{E}{2}\,(I_{\min} + I_{\max}) = \frac{\alpha U}{2}\,(I_{\min} + I_{\max})$$

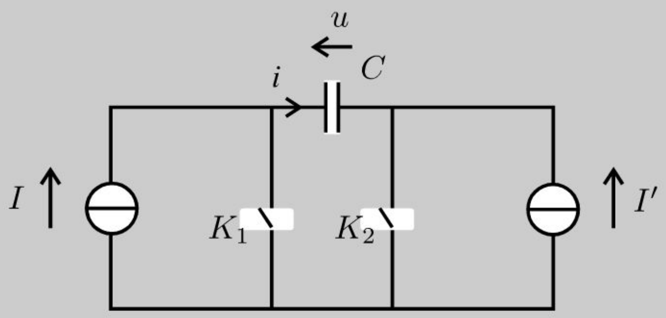
Les deux puissances moyennes P_1 et P_2 sont égales. Toute la puissance est transférée de l'entrée vers la sortie.

Interprétation physique : En régime permanent, la bobine ne consomme pas de puissance en moyenne. Le transistor et la diode sont idéaux. Ils ne consomment pas de puissance en moyenne.

Exercice 21.2 : Hacheur à stockage capacitif

On considère un hacheur, de rapport cyclique α et de période de hachage T. Il alimente un récepteur modélisé par un courant électromoteur $I' > 0$ constante. La source de courant délivre une intensité $I > 0$ constante. La commande des interrupteurs est la suivante :

- Sur l'intervalle $[0,\alpha T]$, l'interrupteur K_1 est fermé et l'interrupteur K_2 est ouvert.
- Sur l'intervalle $[\alpha T, T]$, l'interrupteur K_1 est ouvert et l'interrupteur K_2 est fermé.



1. Écrire l'équation différentielle reliant u et I' sur l'intervalle de temps $[0,\alpha T]$. En déduire l'ondulation de la tension $\Delta u = U_{\max} - U_{\min}$ en fonction de C, I', α et T.

2. Écrire l'équation différentielle reliant u et I sur l'intervalle de temps $[\alpha T, T]$. En déduire une autre expression de l'ondulation de la tension $\Delta u = U_{\max} - U_{\min}$ en fonction de C, I, α et T.

3. En déduire la relation entre I,α et I'.
4. Représenter u en fonction du temps.
5. Effectuer un bilan de puissance moyenne.

Analyse du problème

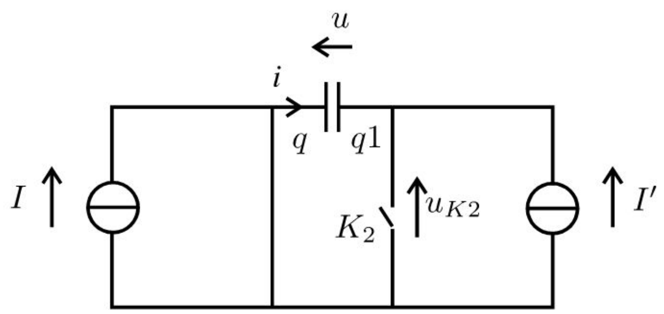
Cet exercice étudie un hacheur à stockage capactif puisqu'on a un transfert de puissance entre deux sources de courant continu. Comme la tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue, on utilise cette propriété pour intégrer les deux équations différentielles et en déduire une relation entre I,I' et α.

Il faut penser à introduire les tensions $U_{\max}$ et $U_{\min}$ aux bornes du condensateur comme intermédiaire de calcul.

La tension à $t=0$ n'est pas nulle puisqu'on n'étudie pas le régime transitoire. Il faut donc prendre l'initiative de définir une tension u à $t=0$ (ici $U_{\max}$ puisque la tension est décroissante au delà) et une autre tension u à $t=\alpha T$ (ici $U_{\min}$ puisque la tension est croissante au delà). En régime permanent, on retrouve nécessairement la même tension u à $t=0$ et à $t=T$.

1. Intervalle de temps $[\mathbf{0},\alpha \boldsymbol{T}]$:

On a le schéma équivalent suivant :



L'intensité i est égale à $-I'$. On a donc :

$$i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}=C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}=-I'$$

En séparant les variables, on a :

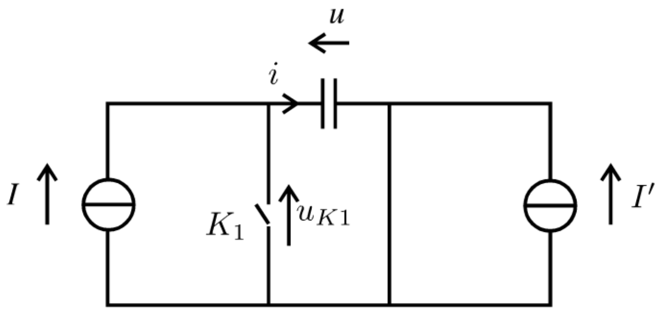
$$\mathrm{d}u=-\frac{I'}{C}\mathrm{d}t<0$$

La fonction $u(t)$ est donc décroissante.
On intègre entre 0 et αT :

$$U_{\min}-U_{\max}=-\frac{I'}{C}\alpha T$$

2. Intervalle de temps $[\alpha T, T]$:

On a le schéma équivalent suivant :



L'intensité i est égale à I. On a donc :

$$i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = I$$

En séparant les variables, on a :

$$\mathrm{d}u = \frac{I}{C}\mathrm{d}t > 0$$

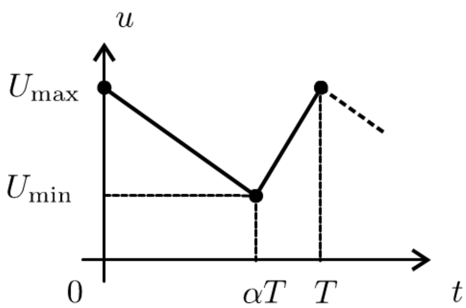
La fonction $u(t)$ est donc croissante.
On intègre entre αT et T :

$$U_{\max} - U_{\min} = \frac{I}{C}(1-\alpha)T$$

3. On a vu dans les deux questions précédentes que $U_{\max} - U_{\min} = \dfrac{I'}{C}\alpha T$ et que $U_{\max} - U_{\min} = \dfrac{I}{C}(1-\alpha)T$. On obtient en simplifiant :

$$I' = \frac{1-\alpha}{\alpha}I$$

4. La tension aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier de façon discontinue. Le graphe suivant représente u en fonction du temps.



5. Puissance moyenne P_1 fournie par le générateur I :

$$P_1 = \frac{1}{T}\int_0^T I u_{K1}\mathrm{d}t = \frac{I}{T}\int_{\alpha T}^T u\mathrm{d}t$$

Il faut se placer en convention générateur pour calculer une puissance fournie et en convention récepteur pour calculer une puissance reçue.

$\int_{\alpha T}^T u\mathrm{d}t$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{\text{grande base} + \text{petite base}}{2} \times \text{hauteur} = \frac{U_{\min} + U_{\max}}{2}(1-\alpha)\,T$$

On a donc :

$$P_1 = \frac{I}{2}(U_{\min} + U_{\max})(1-\alpha)$$

Puissance moyenne P_2 reçue par le générateur I' :

$$P_2 = \frac{1}{T}\int_0^T I'(-u_{K2})\mathrm{d}t = \frac{I'}{T}\int_0^{\alpha T} u\mathrm{d}t$$

$\int_0^{\alpha T} u\mathrm{d}t$ représente l'aire sous la courbe :

$$\frac{U_{\min} + U_{\max}}{2}\alpha T$$

On a donc : $P_1 = \frac{\alpha I'}{2}(U_{\min} + U_{\max})$. On a vu que $I' = \frac{1-\alpha}{\alpha}I$, soit :

$$P_1 = \frac{\alpha\frac{1-\alpha}{\alpha}I}{2}(U_{\min} + U_{\max}) = \frac{I}{2}(U_{\min} + U_{\max})\,\alpha$$

Les deux puissances moyennes P_1 et P_2 sont égales. Toute la puissance est transférée de l'entrée vers la sortie.

Interprétation physique : En régime permanent, la bobine ne consomme pas de puissance en moyenne. Le transistor et la diode sont idéaux. Ils ne consomment pas de puissance en moyenne.