Correction du TP

Au programme

Savoir-faire

- Capacité numérique : à l'aide d'un langage de programmation, résoudre numériquement une équation différentielle du deuxième ordre non-linéaire et faire apparaître l'effet des termes non-linéaires.
- Mettre en œuvre un protocole expérimental permettant d'étudier une loi de force par exemple à l'aide d'un microcontrôleur.

I Objectifs

- Étudier le mouvement du pendule simple, par acquisition informatisée grâce à l'interface `Sysam`.
- Interroger la conservation de l'énergie mécanique.
- Mise en évidence de l'approximation de l'énergie potentielle par un puits de potentiel harmonique.
- Vérifier l'isochronisme des petites oscillations.

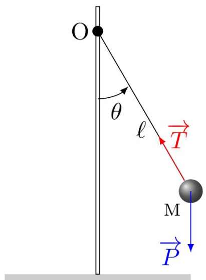
II S'approprier

Pour Galilée, la période des oscillations d'un pendule simple devait être indépendante de l'amplitude desdites oscillations. Dans ses *Dialogues* (1632), il écrit : « Chacune de ces oscillations se fait dans des temps égaux, tant celle de 90°, que celle de 50°, ou de 20°, de 10°, de 4°. »

26 ans plus tard, Huygens affine ce propos dans *Horlogium Oscillatorium* en notant que « seules les oscillations de **faible amplitude** doivent être considérées comme isochrones, c'est-à-dire avoir une période indépendante de l'amplitude. »

III Analyser

Soit une masse $m = 190\,\mathrm{g}$ attachée à l'extrémité d'une tige en fibre de carbone (de faible masse, pouvant être considérée négligeable devant celle de m) de longueur $\ell = 45\,\mathrm{cm}$ constante. Initialement, la masse m est lâchée d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. On prend $g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



(1) Montrer que l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_c = \frac{m\ell^2}{2}\dot{\theta}^2$$

Réponse

On a un mouvement circulaire non uniforme, on trouve donc

$$\vec{v} = \ell\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \Leftrightarrow \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2}$$ ■

◇

(2) En prenant l'origine des énergies potentielles en $\theta = 0$, montrer que l'énergie potentielle totale du système peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_{p,p} = mg\ell(1 - \cos\theta)$$

Réponse

L'énergie potentielle de pesanteur s'écrit

$$\mathcal{E}_{p,p} = mgz(\theta)$$

Or, par rapport à la position $\theta = 0$ où le pendule est à la distance ℓ du point O, à un angle θ quelconque la masse est à la distance $\ell\cos(\theta)$. On trouve donc

$$z(\theta) = \ell(1 - \cos(\theta)) \Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,p} = mg\ell(1 - \cos(\theta))}$$ ■

◇

IV Réaliser

Important

Attention, la tige du pendule est en fibre de carbone et est TRÈS FRAGILE ; Ne pas serrer la vis de la masse trop fort sur la tige.

Réglages

1) Ouvrir le logiciel `Latispro`.

2) Régler les paramètres d'acquisition : 200 points de mesure.

(3) Indiquer le temps total d'acquisition $T_{\text{acq,tot}}$ permettant d'avoir quelques oscillations visibles.

Que valent alors la durée d'échantillonnage Δt_{ech} et la fréquence d'échantillonnage Δf_{ech} de l'acquisition ? Vous expliquerez avec un schéma détaillé votre raisonnement.

Réponse

On sait que la période est d'environ

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\text{m}\cdot\text{s}^{-2} \\ \ell = 45 \times 10^{-2}\,\text{m} \end{cases} \text{A.N. : } \underline{T_0 = 1{,}35\,\text{s}}$$

Pour 4 périodes, il nous faut donc environ

$$\underline{T_{\text{acq,tot}} \approx 5{,}40\,\text{s}}$$

Avec $N = 200$ points au total, on a une durée d'échantillonnage

$$\Delta t_{\text{ech}} = \frac{T_{\text{acq,tot}}}{N} \approx 2{,}7 \times 10^{-2}\,\text{s} \quad \text{or} \quad \boxed{f_{\text{ech}} = \frac{1}{\Delta t_{\text{ech}}}} \Leftrightarrow \underline{f_{\text{ech}} = 37\,\text{Hz}}$$

◇

3) Faire le zéro de l'oscillateur en appuyant sur le petit bouton à l'extrémité du fil noir près de la poulie, lorsque celui-ci est en position verticale.

Acquisition et enregistrement

1) Écarter le pendule d'un angle de 20° à 30° environ.

2) Lancer l'acquisition : 

V Valider

V/A Exploitation de l'enregistrement

Visualisation des angles, vitesses et accélérations en fonction du temps

1) En utilisant la feuille de calcul, créer une nouvelle variable, notée `angle`, correspondant à l'angle exprimé en radians.

2) Visualiser `angle` en fonction du temps ; ajuster l'échelle grâce au calibrage (en cliquant droit).

3) Créer les variables `deriv_Pendule` (dérivée première) et `dderiv_Pendule` (dérivée seconde), en utilisant les fonctions traitements → calculs spécifiques → dérivée et dérivée seconde.

4) À partir des variables `deriv_Pendule` et `dderiv_Pendule` (exprimées en degrés), introduire les variables `deriv_angle` et `dderiv_angle` exprimées en radians.

5) Afficher simultanément les trois courbes obtenues et les lisser en utilisant les fonctions traitements → calculs spécifiques → lissage.

3 Imprimer vos courbes.

Réponse

Non corrigé.

◇

4 Déterminer et commenter les déphasages entre les différentes courbes. Justifier mathématiquement ces déphasages.

Réponse

On trouve

$$\Delta\varphi_{v/p} = -\frac{\pi}{2} \qquad \text{et} \qquad \Delta\varphi_{a/v} = -\frac{\pi}{2}$$

C'est logique, la vitesse est la dérivée de la position qui s'exprime comme un oscillateur harmonique en

$$\theta(t) = \theta_0 \cos(\omega_0 t) \Rightarrow \dot{\theta}(t) = \omega_0 \theta_0 \cos\left(\omega_0 t - \frac{\pi}{2}\right)$$

Et de même pour l'accélération qui est la dérivée de la vitesse.

◇

V/A) 1 Propriété de l'énergie mécanique

(4) Proposer une exploitation graphique permettant de visualiser graphiquement et simultanément la conservation de l'énergie mécanique ainsi que les échanges énergétiques entre énergie cinétique et énergie potentielle. Vous représenterez sur un même graphique $\mathcal{E}_p(t)$, $\mathcal{E}_c(t)$ et $\mathcal{E}_m(t)$.

Réponse

Grâce à la feuille de calculs, on détermine `Ec` et `Ep` les énergies cinétique et potentielle dont les expressions ont été démontrées dans la Partie III, puis `Em = Ec + Ep` l'énergie totale.

Pour observer la conservation de l'énergie, on doit observer l'éventuelle pente négative de `Em` en fonction du temps. Pour une durée d'expérience relativement courte, on a en effet ce constat ; plus longtemps et les frottements solides et visqueux diminuent l'énergie du pendule.

◇

3 Imprimer les courbes et les commenter.

Réponse

Non corrigé.

◇

V/A) 2 Approximation harmonique autour de la position d'équilibre

5 Proposer une exploitation permettant de vérifier la parabolisation (énergie potentielle est équivalente à un polynôme d'ordre 2 en θ) de l'énergie potentielle autour de la position d'équilibre.

Réponse

On trace $\mathcal{E}_{p,p}(\theta)$ en mettant l'angle θ en abscisse et `Ep` en ordonnée sur `LatisPro`. On regarde visuellement que c'est une parabole, et on peut modéliser la courbe grâce à l'outil de modélisation.

◇

4 Réaliser l'exploitation proposée. Imprimer et commenter. Faire le développement limité autour de $\theta = 0$ (position d'équilibre) de l'expression de l'énergie potentielle précédemment obtenue pour comparer à la valeur obtenue à l'aide d'un écart normalisé.

Réponse

Impression non corrigée. Ça marche. En effectuant le DL de $\cos(\theta)$ à l'ordre 2, on obtient

$$\cos(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} 1 - \frac{\theta^2}{2} \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,p}(\theta) = mg\ell(1 - \left(1 - \frac{\theta^2}{2}\right)) \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,p}(\theta) = \frac{1}{2}mg\ell\theta^2}$$

On doit trouver que le coefficient directeur de la modélisation est égal à

$$\boxed{a = \frac{1}{2}m\ell^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 190 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg} \\ \ell = 45 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

$$\text{A.N.} : \underline{a_{\text{theo}} \approx 1{,}9 \times 10^{-2}\,\mathrm{J}}$$

Expérimentalement, on trouve

$$a_{\text{exp}} = (1{,}9 \pm 0{,}1) \times 10^{-2}\,\mathrm{J}$$

D'où l'écart

$$E_N = \frac{|a_{\text{exp}} - a_{\text{theo}}|}{u(a_{\text{exp}})} \Leftrightarrow \underline{E_N = ?}$$

Malgré les frottements, on trouve une réponse similaire, ce qui valide le faible angle.

◇

V/B Amplitude et (non-)isochronisme des oscillations

V/B) 1 Protocole expérimental

5 Proposer puis réaliser un protocole expérimental qui permettrait de lever la contradiction historique présentée dans la partie S'approprier, sans dépasser un angle initial de 60° environ (on pourra utiliser l'icône : Outils → mesures automatiques).

Réponse

Pour plusieurs valeurs de θ_0, on mesure la période T observée grâce aux curseurs de `LatisPro`. On remplit un tableau de valeurs et on compare cette période à la période des petites oscillations $T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$.

◇

6 Présenter vos mesures sous forme d'un tableau $T_{\text{exp}} = f(\theta_0)$ et d'une courbe expérimentale que vous imprimerez et commenterez. Conclure quant à l'isochronisme (ou non) des oscillations.

Réponse

Il n'y a pas d'isochronisme, $T \neq T_0$ à partir de $\theta_0 \approx 40°$.

◇

7 En déduire la valeur de T_{iso} en tenant compte de vos différents mesurages **dans le cas où il y a isochronisme**. Comparer avec T_0 la période propre du pendule pour les petits angles par un écart normalisé.

Réponse

C'est la valeur la plus basse du tableau. On trouve...

◇

V/B) 2 Résolution numérique

L'objectif de cette résolution numérique est de résoudre l'équation différentielle non linéarisée et donc non analytique :

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 \sin(\theta) = 0$$

(6) Dans un premier temps, vous allez compléter le script suivant sur `Capytale` à ce lien : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/eb53-1348043. Il devra permettre de résoudre, pour une condition initiale θ_0 donnée, l'équation différentielle ci-dessus à l'aide du schéma numérique python `solve_ivp`. Pour ce faire, vous devrez importer `scipy.integrate` au début de votre script avec

```
from scipy.integrate import solve_ivp
```

Pour vous aider, consulter la page suivante : https://tinyurl.com/pythonsolveivp.

Réponse

Voir corrigé : https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/21b7-2947279

◇

Le script précédent sera ensuite amélioré afin de résoudre l'équation différentielle pour un ensemble de solutions initiales comprises entre $\theta_0 \approx 0$ et $\theta_0 = \pi/2$. Vous trouverez la fréquence de chaque solution grâce à une fonction `freqfinder` déjà créée l'occasion ; elle réalise la transformée de Fourier numérique de la solution temporelle (à l'aide de `numpy.fft`) afin d'en déduire le spectre puis la fréquence du pic spectral. Il vous faudra modifier la période propre par la valeur expérimentale T_{iso}.

9 Expliquer sur `Capytale` (avec une cellule en `markdown`) en une dizaine de lignes les principales étapes de ce script.

Réponse

Voir corrigé.

◇

10 Construire, grâce à ce script, le graphe permettant d'obtenir la période T_{simu} en fonction de l'amplitude initiale θ_0.

Réponse

Idem.

◇

11 Commenter l'influence des variables `duree` et `nb_point_temporel`. Faites des essais pour constater leur influence.

Réponse

Idem.

◇

12 Superposer à ce premier graphe vos résultats expérimentaux obtenus précédemment ($T_{\text{exp}} = f(\theta_0)$). Enregistrer votre travail sur `Capytale` et imprimer la courbe obtenue.

Réponse

Idem.

◇

13 Les résultats numériques et expérimentaux sont-ils en accord ? Conclure.

Réponse

Très vite, non. Il n'y a donc pas isochronisme.

◇