# Sujet 1 – corrigé

## I Mesurer la masse d'un-e astronaute sur l'ISS

Les astronautes passant plusieurs mois dans la station spatiale internationale (ISS) doivent se soumettre à des bilans de santé très réguliers, et en particulier vérifier qu'ils et elles ne perdent ni ne prennent de poids. Néanmoins, l'absence de gravité rend les balances terrestres inopérantes dans l'espace. Pour permettre des pesées malgré cela, un dispositif original a été développé par l'agence spatiale russe, dont une photographie est présentée ci-contre. Il s'agit d'une chaise de masse $m_0 = 25{,}0\,\mathrm{kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe de la station. On note $L_0$ la longueur à vide du ressort et $k$ sa constante de raideur. La position de la chaise est repérée par son point d'attache au ressort, le long d'un axe $(Ox)$ dont l'origine est définie telle que le point d'attache de la chaise se trouve en $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.

1) Tracer un schéma complet, précis et propre de la situation à un instant quelconque, indiquant en particulier la position $x(t)$ de la chaise et l'origine $x = 0$.

**Réponse**

- référentiel de l'ISS supposé galiléen
- repérage cartésien unidimensionnel
- système : chaise de masse $m_0$
- bilan des actions mécaniques : uniquement la force de rappel élastique

$$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0)\vec{u}_x = -kx(t)\vec{u}_x$$

◇

2) En s'appuyant sur un bilan des forces, établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la chaise.

**Réponse**

Par principe fondamental de la dynamique en projection selon $\vec{u_x}$ :

$$\boxed{m\ddot{x} = -kx}$$

◇

3) Écrire cette équation sous forme canonique (préfacteur 1 devant la dérivée d'ordre le plus élevé). Exprimer alors la pulsation propre des oscillations de la chaise.

**Réponse**

Sous forme canonique $\boxed{\ddot{x} + {\omega_0}^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m_0}}}$

◇

4) On cherche dans un premier temps à mesurer la constante de raideur $k$ du ressort. Pour cela, la chaise vide est mise en mouvement et on mesure la période $T_0 = 1{,}28\,\mathrm{s}$ de ses oscillations. Exprimer puis calculer la constante de raideur.

**Réponse**

On a
$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0}{k}}$$

D'où
$$\boxed{k = 4\pi^2 \frac{m_0}{{T_0}^2}}$$

L'application numérique donne (attention à bien préciser l'unité) :
$$\boxed{k = 602\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$$

◇

On s'intéresse maintenant à la pesée proprement dite d'un-e astronaute dont on veut déterminer la masse $m_{\text{ast}}$. L'astronaute s'assoit sur la chaise et la met en mouvement. Les oscillations ont alors pour période $T_{\text{ast}} = 2{,}34\,\mathrm{s}$.

5) Donner **sans calcul** l'équation différentielle vérifiée par la position du point d'attache de la chaise lorsqu'un-e astronaute est assis-e.

**Réponse**

L'unique différence avec la première question est que dorénavant le système est l'ensemble {chaise + astronaute} de masse $m_0 + m_{\text{ast}}$. La nouvelle équation différentielle devient, sous forme canonique :
$$\boxed{\ddot{x} + {\omega_{\text{ast}}}^2 = 0 \quad \text{avec} \quad \omega_{\text{ast}} = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m_{\text{ast}}}}}$$

◇

6) En déduire la nouvelle pulsation propre $\omega_{\text{ast}}$ et la nouvelle période $T_{\text{ast}}$ des oscillations de la chaise en fonction de $k$, $m_0$ et $m_{\text{ast}}$.

**Réponse**

$$\boxed{\omega_{\text{ast}} = \sqrt{\frac{k}{m_0 + m_{\text{ast}}}} \quad \text{d'où} \quad T_{\text{ast}} = 2\pi\sqrt{\frac{m_0 + m_{\text{ast}}}{k}}}$$

◇

7) En déduire que la masse de l'astronaute peut s'écrire
$$m_{\text{ast}} = m_0\left[\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0}\right)^2 - 1\right]$$

**Réponse**

On cherche une expression qui fait intervenir les périodes $T_0$ et $T_{\text{ast}}$ et qui fait disparaître $k$. On constate que le quotient des deux périodes réalise cela (on le prend au carré pour se débarasser des racines) :
$$\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0}\right)^2 = \frac{m_0 + m_{\text{ast}}}{m_0}$$

Ainsi, en isolant $m_{\text{ast}}$, il vient $$\boxed{m_{\text{ast}} = m_0 \left\{ \left( \frac{T_{\text{ast}}}{T_0} \right)^2 - 1 \right\}}$$

8) Donner la valeur numérique de $m_{\text{ast}}$ avec un nombre de chiffres significatifs adapté.

**Réponse**

L'application numérique permet de conclure :

$$\boxed{m_{\text{ast}} = 58{,}6\,\text{kg}}$$

# Sujet 2 – corrigé

## I Chute d'une bille dans un fluide

On dispose du matériel suivant :

- une bille de masse volumique $\rho_a = 7900\text{kgm}^{-3}$, de rayon $R = 5\text{mm}$,
- une éprouvette graduée,
- de la glycérine de masse volumique $\rho_g = 1260\text{kgm}^{-3}$,
- un dynamomètre, avec un point d'accorche permettant de mesurer une force de traction,
- trois béchers,
- une boite de masse marquée.

1) Donner l'expression générale de la poussée d'Archimède.

**Réponse**

L'expression de la poussée d'Archimède est :

$$\boxed{\vec{\Pi} = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immerge}} \vec{g}}.$$

◇

2) Proposer un protocole expérimental permettant de vérifier l'expression de la poussée d'Archimède en utilisant le matériel listé.

**Réponse**

On mesure le poids des masses dans l'air d'abord, puis on les plonge dans l'éprouvette et on mesure leur masse dite « apparente » dans la glycérine, c'est-à-dire la force qu'elles exercent en étant accrochées au dynamomètre lorsqu'elles sont immergées, ainsi que le volume de liquide déplacé.

◇

La bille en acier tombe dans un tube rempli de glycérine. On considère que la force de frottement fluide exercée par la glycérine est $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$ où $\eta$ est une constante appelée constante de viscosité dynamique de la glycérine. L'accélération de la pesanteur vaut $g = 9{,}8 \cdot \text{m} \cdot \text{s}^{-2}$.

3) Faire un bilan des forces exercées sur la bille.

**Réponse**

Les forces qui s'appliquent sur la bille sont :

- le poids $\vec{P} = m\vec{g}$,
- la poussée d'Archimède $\vec{\Pi} = -\frac{4\rho_g \pi R^3}{3}\vec{g}$,
- la force de frottement visqueux : $\vec{f} = -6\pi\eta R\vec{v}$.

◇

4) Montrer que considérer la poussée d'Archimède sur la bille est équivalent à considérer une bille de masse volumique $\rho = \rho_a - \rho_g$ qui n'est pas soumise à la poussée d'Archimède.

**Réponse**

On a :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} = \left(m - \frac{4\rho_g \pi R^3}{3}\right)\vec{g} = m'\vec{g} = \vec{P'} \quad ; \quad m' = m - \frac{4\rho_g \pi R^3}{3}.$$

Écrit autrement :

$$m' = \rho_a V_{\text{solide}} - \rho_g V_{\text{solide}} = (\rho_a - \rho_g)\, V_{\text{solide}}.$$

◇

5) Établir l'équation différentielle vérifiée par $v$, la norme de la vitesse.

**Réponse**

On applique la loi de la quantité de mouvement à la bille dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f}.$$

On projette alors cette équation sur l'axe vertical orienté vers le bas :

$$\rho_a V_{\text{solide}} \frac{dv}{dt} = \rho V_{\text{solide}} g - 6\pi\eta R v.$$

On peut écrire cette équation sous la forme canonique :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{6\pi\eta R v}{\rho_a V_{\text{solide}}} = \frac{\rho g}{\rho_a} \quad ; \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_l}{\tau}.$$

◇

6) En déduire la constante de temps $\tau$ caractéristique du régime transitoire, ainsi que la vitesse limite $v_l$ atteinte par la bille.

**Réponse**

On en déduit que :

$$\tau = \frac{\rho_a V_{\text{solide}}}{6\pi\eta R} = \boxed{\frac{2\rho_a R^2}{9\eta}} \quad ; \quad v_l = \frac{\tau \rho g}{\rho_a} = \boxed{\frac{2\rho g R^2}{9\eta}}.$$

On suppose que le régime permanent est atteint (on vérifiera *a posteriori* cette hypothèse) :

$$\boxed{v_l = \frac{z_2 - z_1}{\Delta t} = 0{,}25\text{·m/s}} \quad ; \quad \boxed{\eta = \frac{2\rho g R^2}{9 v_l} = 1{,}45\text{·Pa} \cdot \text{s}}.$$

◇

L'expérience est réalisée dans un tube vertical contenant de la glycérine. On lâche la bille à la surface du liquide choisie comme référence des altitudes, puis on mesure la durée $\Delta t = 1{,}6$s mise pour passer de l'altitude $z_1 = 40$cm à $z_2 = 80$cm.

7) En déduire l'expression puis la valeur de la viscosité $\eta$.

**Réponse**

On suppose que le régime permanent est atteint (on vérifiera *a posteriori* cette hypothèse) :

$$\boxed{v_l = \frac{z_2 - z_1}{\Delta t} = 0{,}25 \cdot \mathrm{m/s}} \quad ; \quad \boxed{\eta = \frac{2\rho g R^2}{9 v_l} = 1{,}45 \cdot \mathrm{Pa \cdot s}}.$$

8) Pourquoi ne pas avoir réalisé de mesure depuis la surface du liquide ?

**Réponse**

Il faut attendre d'être sûr que la bille ait atteint le régime permanent.

9) Que vaut numériquement $\tau$ ? Commenter.

**Réponse**

$$\tau = \frac{2\rho_a R^2}{9\eta} = \boxed{30.10^{-3} \cdot \mathrm{s}}$$

L'hypothèse de régime permanent est donc bien validée car $\tau \ll \Delta t$.

10) Pourquoi avoir choisi de la glycérine plutôt que de l'eau ?

**Réponse**

La glycérine est plus visqueuse donc le régime permanent est atteint plus rapidement. Avec de l'eau ($\eta = 10^{-3} \cdot \mathrm{Pa \cdot s}$), il n'est pas sûr que la bille puisse atteindre sa vitesse limite avant la fin de la chute.

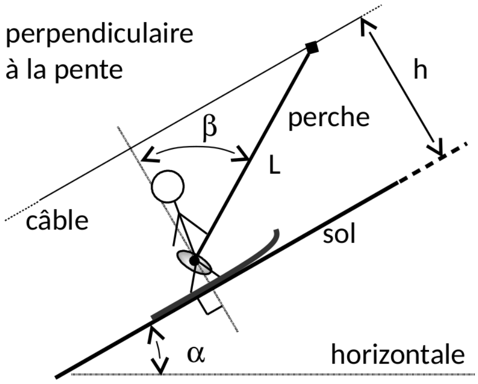
# Sujet 3 – corrigé

## I Quelques notions de ski (⋆)

### A Leçon n° 1 : le remonte-pente

On considère une skieuse de masse $m$ remontant une pente d'angle $\alpha$ à l'aide d'un téléski. Celui-ci est constitué de perches de longueur $L$ accrochées à un câble parallèle au sol situé à une hauteur $h$.

On néglige les frottements de la neige sur les skis.




1) Quelles sont les trois forces que subit la skieuse ?

**Réponse**

Les 3 forces sont :

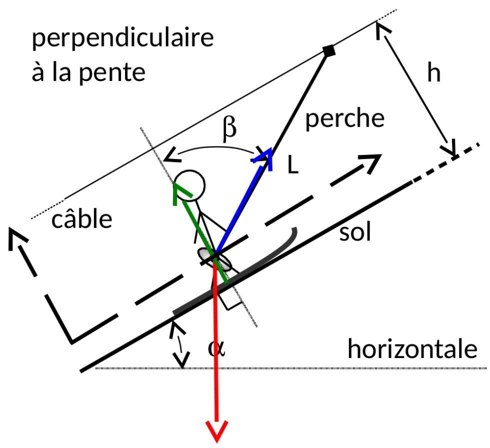
- tension de la perche $\vec{F}$,
- réaction normale du sol $\vec{R}_N$ (il n'y a pas de frottement donc la réaction est uniquement normale),
- poids de la skieuse $\vec{P}$.

◇

2) Que sait-on sur chacune d'elles a priori ?

**Réponse**

On connaît leurs direction et leur sens. On ne connaît que la norme du poids ($P = mg$).




◇

On considère une skieuse de 50kg sur une pente de 15% (c'est-à-dire que la skieuse s'élève de 15 m lorsqu'elle parcourt horizontalement 100 m). La force exercée par la perche sur la skieuse sera supposée fixée et égale à $F = 100$N.

3) Existe-t-il un angle limite $\beta_l$ pour lequel le contact entre les skis et le sol serait rompu ?

**Réponse**

Le contact entre la skieuse et le sol sera rompu lorsque $R_N = 0$. On cherche donc à calculer $R_N$ et voir s'il existe une valeur de $\beta$ telle que $R_N = 0$.

On applique alors la loi de la quantité de mouvement au skieur dans le référentiel de la montagne (galiléen) et on la projette selon l'axe orthogonal à la pente. La projection de l'accélération est alors nulle car la skieuse se déplace perpendiculairement à cet axe.

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R_N = mg\cos\alpha - F\cos\beta.$$

$$R_N > 0 \quad \Rightarrow \quad mg\cos\alpha > F\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta < \frac{mg\cos\alpha}{F}.$$

On peut calculer l'angle $\alpha$ puisque la pente est de 15% :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{15}{100}\right) = 8{,}5°.$$

On en déduit que :

$$\frac{mg\cos\alpha}{F} = \frac{50 \times 9{,}8 \times \cos(8{,}5°)}{100} \approx 5.$$

Finalement, quelque soit $\beta$,

$$\cos\beta < 5 \quad \Rightarrow \quad R_N > 0,$$

donc il n'existe pas d'angle limite : la skieuse touche toujours le sol.

◇

On suppose maintenant que sa trajectoire est rectiligne et sa vitesse constante.

4) Quelle relation les 3 forces que subit la skieuse doivent-elles vérifier ?

**Réponse**

Si la trajectoire de la skieuse est rectiligne uniforme, alors d'après la loi de l'inertie :

$$\boxed{\vec{F} + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}}.$$

◇

On note $\beta$ l'angle que forme la perche du téléski avec la perpendiculaire à la pente.

5) Représenter les trois forces sur une même figure en repérant bien les angles $\alpha$ et $\beta$.

**Réponse**

cf question 2

◇

6) En déduire une relation entre $m$, $g$, $\alpha$, $\beta$ et $F$ (la norme de la force exercée par la perche).

**Réponse**

On a déjà projeté cette relation sur l'axe orthogonal à la pente :

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha.$$

On peut également la projeter sur l'axe de la pente :

$$0 = 0 + F\sin\beta - mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sin\beta}}.$$

◇

7) En négligeant la distance entre la rondelle et le sol, exprimer $F$ en fonction $m$, $g$, $\alpha$, $h$ et $L$. Comment varie $F$ avec $\alpha$ et $h$ ? Commenter.

**Réponse**

Dans cette hypothèse :

$$\cos\beta = \frac{h}{L} \quad\Rightarrow\quad \sin\beta = \sqrt{1-\left(\frac{h}{L}\right)^2}.$$

Finalement :

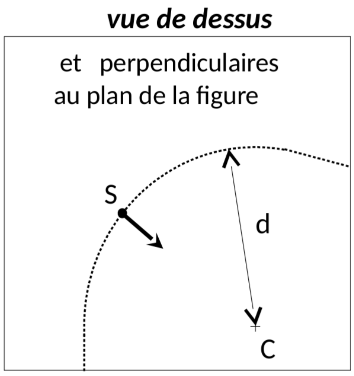
$$\boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{h}{L}\right)^2}}}.$$

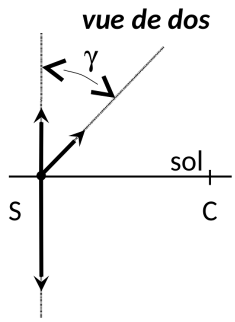
La norme de la force $F$ augmente alors lorsque $\alpha$ augmente ou lorsque $h$ augmente. On a donc tout intérêt à positionner le câble de traction horizontal le plus bas possible (en évitant bien entendu qu'il touche la tête des usagers et usagères).

◇

## B Leçon n° 2 : le virage

La skieuse est toujours sur le remonte pente et aborde une zone horizontale où sa trajectoire est un cercle de centre $C$ et de rayon $d$. Sa célérité est toujours constante. On suppose pour les questions suivantes que la perche est contenue dans le plan formé par la droite $SC$ et la verticale.




8) Que peut-on dire de son accélération ?

**Réponse**

Le mouvement de la skieuse est circulaire uniforme donc son accélération est radiale et orientée vers l'intérieur du cercle (centripète) :

$$\vec{a} = \frac{-v^2}{d}\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CS}}{||CS||}.$$

◇

On a représenté ci-dessus différentes vues de la situation où la skieuse est modélisée par un point matériel $S$ posé sur le sol. On néglige les frottements, on note $\vec{F}$ la force exercée par la perche du téléski et $\gamma$ l'angle qu'elle forme avec la verticale.

9) Déterminer $F = ||\vec{F}||$ en fonction de $m$, $v = ||\vec{v}||$ la célérité, $d$ et $\gamma$.

**Réponse**

On applique la loi de la quantité de mouvement à la skieuse dans le référentiel galiléen de la montagne. On projette cette équation sur le vecteur $\vec{e}_r$ :

$$ma = -F\sin\gamma \quad\Rightarrow\quad \boxed{F = \frac{mv^2}{d\sin\gamma}}.$$

◇

10) En déduire $R = ||\overrightarrow{R}||$ en fonction de toutes les autres données.

**Réponse**

On projette alors l'équation de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe vertical ascendant perpendiculaire à $\overrightarrow{e}_r$. La projection de l'accélération y est nulle :

$$0 = -mg + R + F\cos\gamma$$

On combine cette équation avec celle de la question précédente :

$$\boxed{R = mg - \frac{mv^2}{d\tan\gamma}}.$$

11) Comment évolue $R$ lorsque la célérité augmente ?

**Réponse**

On voit que $R$ augmente lorsque $v$ diminue.

12) En pratique la perche n'est pas rigoureusement orthogonale à la trajectoire mais est également dirigée vers l'avant. Expliquer pourquoi.

**Réponse**

En réalité il existe des frottements colinéaires à la vitesse, mais de sens opposé. Si le mouvement est uniforme, une composante de la force exercée par la perche doit compenser ces frottements