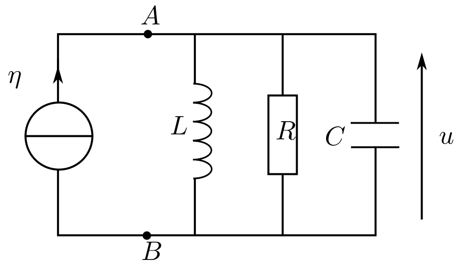
/65 E1 Étude d'un circuit RLC parallèle

Le circuit ci-contre est constitué d'une source idéale de courant de c.e.m. $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$. Cette source alimente une association parallèle constituée d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance. La tension aux bornes de cette association est $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$. On note $\underline{U_0} = U_0 e^{j\phi}$ l'amplitude complexe de $u(t)$.



I/A Étude de l'amplitude et de la phase

/3 [1] Exprimer l'impédance équivalente $\underline{Z}$ du dipôle AB.

Réponse

Dans le cas d'une association de dipôle en parallèle, on additionne les admittances :

$$\underline{Y} \overset{1}{=} \frac{1}{\underline{Z}} \overset{1}{=} \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z} \overset{1}{=} \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}}$$

/5 [2] Montrer que l'amplitude complexe de la tension u se met sous la forme :

$$\underline{U_0} = \frac{R\eta_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Exprimer Q et ω_0 en fonction de R, L et C. Comment s'appellent ces deux constantes ?

Réponse

On applique la loi d'Ohm généralisée sur le dipôle équivalent $\underline{Z}$, en utilisant les amplitudes complexes du courant et de la tension :

$$\underline{U_0} \overset{1}{=} \underline{Z}\eta_0 = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}\eta_0$$

Factorise par $jRL\omega$

$$\Leftrightarrow \underline{U_0} \overset{1}{=} \frac{R\eta_0}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)}$$

Identification

$$\Leftrightarrow RC = \frac{Q}{\omega_0} \quad \overset{1}{\text{et}} \quad \frac{R}{L} = Q\omega_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \overset{1}{\text{et}} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

avec ω_0 la pulsation propre du circuit et Q le facteur de qualité. 1

/2 [3] Exprimer l'amplitude réelle U_0 de la tension u en fonction de R, η_0, Q et x.

Réponse

$$\boxed{U_0 \overset{1}{=} |\underline{U_0}| \overset{1}{=} \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

/8 [4] Définir ce qu'est la résonance. Peut-il toujours y avoir résonance en tension ici ? Si oui, préciser la valeur de x puis de ω à la résonance. Quelle est la valeur maximal U_{max} de U_0 ?

Réponse

La résonance correspond à un maximum de la fonction U_0 1 à $x \neq 0$ 1. Ici, comme $R\eta_0 = \text{cte}$ 1, on a U_0 maximale si son dénominateur est minimal 1, soit pour

$$1 + \underbrace{Q^2\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2}_{\geq 0} \quad \text{minimal}$$

$$\Leftrightarrow Q^2\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2 \overset{1}{=} 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_r = 1} \overset{1}{\Leftrightarrow} \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Ainsi, il peut toujours y avoir résonance en tension ici 1, et on obtient $U_{\max} = R\eta_0$. 1

/8 5 Comment définit-on la bande passante $\Delta\omega$? Montrer que $\Delta\omega = \omega_0/Q$.

Réponse

La bande passante $\Delta\omega$ est l'ensemble des pulsations ω vérifiant $U_{\max}/\sqrt{2} \leq U_0(\omega) \leq U_{\max}$, 1 soit $\Delta\omega = [\omega_1\,;\omega_2]$, avec ω_1 et ω_2 solutions de l'équation $U_0(\omega_k) = U_{\max}/\sqrt{2}$. En travaillant en pulsations réduites :

$$U_0(x_k) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$$

On remplace

$$\Leftrightarrow \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2}} = \frac{R\eta_0}{\sqrt{2}}$$

On isole

$$\Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_r}\right)^2 \overset{1}{=} 1}$$

$\sqrt{\cdot}$

$$\Leftrightarrow Q\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) = \pm 1$$

$\times x_k$

$$\Leftrightarrow Q{x_k}^2 - Q = \pm x_k$$

$-\pm = \mp$

$$\Leftrightarrow Q{x_k}^2 \mp x_k - Q \overset{1}{=} 0$$

On a alors **deux trinômes**, soit **quatre racines possibles**, avec

$$\Delta \overset{1}{=} 1 + 4Q^2$$

$$\Rightarrow x_{k,\pm,\pm} \overset{1}{=} \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

On ne garde que les racines positives, sachant que $\boxed{\sqrt{1+4Q^2} > 1}$:

$$x_1 = x_{k,-,+} = \frac{1}{2Q}\left(-1 + \sqrt{1+4Q^2}\right)$$

1 et
$$x_2 = x_{k,+,+} = \frac{1}{2Q}\left(1 + \sqrt{1+4Q^2}\right)$$

puis on obtient la bande passante en calculant la différence $|x_2 - x_1|$:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1 + \cancel{\sqrt{1+4Q^2}} - \left(-1 + \cancel{\sqrt{1+4Q^2}}\right)}{2Q}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta x \overset{1}{=} \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega \overset{1}{=} \frac{\omega_0}{Q}}$$ ■

/7 6 Faire l'étude asymptotique de la fonction $U_0(x)$. Indiquer alors les limites de $U_0(x)$ en basses et hautes fréquences. Indiquer la valeur de $U_0(x=1)$. Tracer l'allure de U_0 en fonction de x.

Réponse

$$U_0(x) \underset{x\to 0}{\overset{1}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q} x \overset{1}{\longrightarrow} 0$$

$$U_0(x) \underset{x\to \infty}{\overset{1}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q}\frac{1}{x} \overset{1}{\longrightarrow} 0$$

$$U_0(1) \overset{1}{=} R\eta_0$$

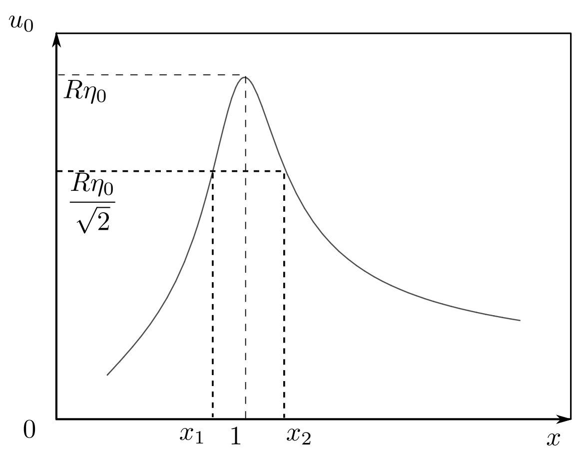


Figure D0.1 – 1+1

/6 7 Exprimer la phase ϕ en fonction de Q et x. Préciser le domaine de variation de ϕ.

Réponse

$$\phi \overset{1}{=} \arg(\underline{U_0}) \overset{1}{=} \underbrace{\cancel{\arg(R\eta_0)}}_{=0} - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \tan(\phi) \overset{1}{=} -\tan(\arg(\underbrace{1}_{\mathrm{Re}>0 \, 1} + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\phi \overset{1}{=} -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\overset{1}{\phi} \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[}$$

/7 8 Faire l'étude asymptotique de la fonction $\phi(x)$. Indiquer alors ses limites en hautes et basses fréquences. Indiquer l'allure de $\phi(x = 1)$. Tracer l'allure de ϕ en fonction de x.

Réponse

$$\phi(x) \overset{1}{\underset{x \to 0}{\sim}} -\arctan\left(-\frac{Q}{x}\right) \overset{1}{\to} \frac{\pi}{2}$$

$$\phi(x) \overset{1}{\underset{x \to \infty}{\sim}} -\arctan(Qx) \overset{1}{\to} -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi(1) \overset{1}{=} 0$$

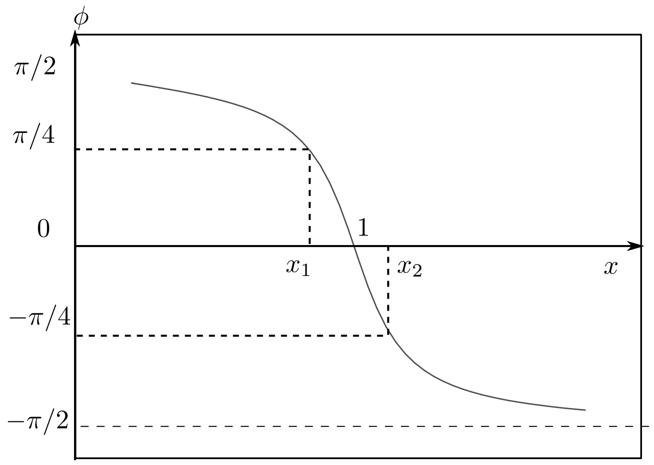
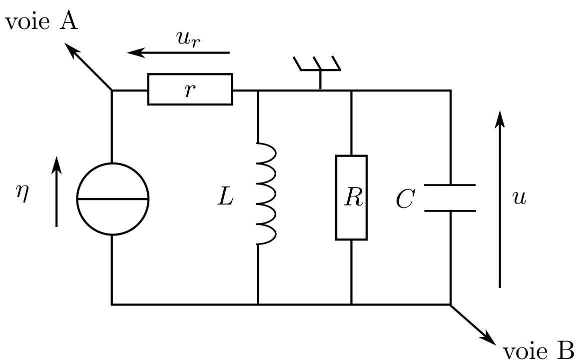


FIGURE D0.2 – 1+1

I/B Expérience

Pour tracer les graphiques U_0 et ϕ en fonction de ω, il faut pouvoir observer simultanément le courant $\eta(t)$ et la tension $u(t)$. On ajoute une résistance r en série avec le générateur de courant afin de visualiser le courant $\eta(t)$ par l'intermédiaire de la tension $u_r(t)$. On propose le montage ci-contre.



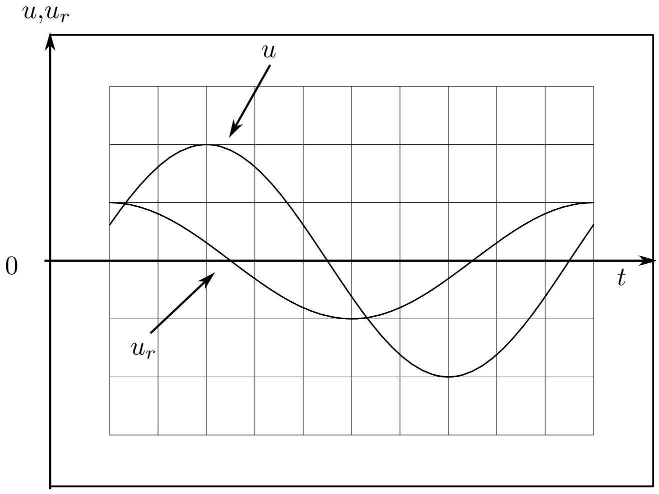
/5 9 À quelle condition le montage proposé est-il valable ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite. Quelle tension visualise-t-on sur la voie A ? sur la voie B ? Que faut-il faire pour visualiser $\eta(t)$ et $u(t)$?

Réponse

Le montage est valable si le générateur de courant n'impose pas de masse, c'est-à-dire avec un générateur à masse flottante. 1

- Sur la voie A, on visualise la tension $u_r(t) = r\eta(t)$. 1 Donc il faut diviser par r la voie A pour visualiser $\eta(t)$. 1
- Sur la voie B, on visualise $-u(t)$. 1 Donc il faut inverser la voie B pour visualiser $u(t)$. 1

La figure suivante montre une acquisition des tensions u_r et u faite pour une pulsation ω donnée. Le calibre vertical est de 1 V sur les deux voies. **On ne connaît pas l'échelle de temps**.



/4 $\boxed{10}$ La tension u est-elle en avance ou en retard par rapport au courant η ? Justifier. En degrés, quel est la valeur de déphasage correspondant à un décalage d'une période ? Déterminer alors, toujours en degrés, la valeur du déphasage $\Delta\varphi_{u/i} = \phi$ de la tension u par rapport au courant η.

Réponse

La tension u est en retard 1 par rapport au courant η car son maximum arrive après celui de la tension u_r. 1

Une période du signal u_r (ou u) correspond à un déphasage de 360°. 1 Or ici, une période correspond à 10 carreaux, donc un retard de 1 carreau correspond à un déphasage de $-36°$, et on a 2 carreaux de déphasage entre u et u_r ; ainsi, $\underline{\phi = -72°}$. 1

◇

/5 $\boxed{11}$ Que vaut l'amplitude U_0 de la tension u ? Définir mathématiquement la valeur efficace s_{eff} d'un signal $s(t)$ périodique de période T. Que représentent physiquement s_{eff}^2 et s_{eff} ?

Réponse

L'amplitude de $u(t)$ correspond à 2 carreaux, donc $\underline{U_0 = 2\,\text{V}}$. 1

Mathématiquement,

$$s_{\text{eff}} \overset{1}{=} \sqrt{\langle s^2(t)\rangle} \overset{1}{=} \sqrt{\frac{1}{T}\int_0^T s^2(t)\,\mathrm{d}t}$$

s_{eff}^2 représente l'énergie moyenne du signal 1 ; ainsi, s_{eff} correspond à l'amplitude constante qui porterait la même énergie moyenne que $s(t)$. 1

◇

/5 $\boxed{12}$ Soit un signal $s(t)$ sinusoïdal de période T, d'amplitude S_0 et de phase à l'origine nulle. Établir l'expression de sa valeur efficace s_{eff} en fonction de S_0. En déduire la valeur efficace de la tension $u(t)$. On donne $\sqrt{2} = 1{,}4$.

Réponse

On a donc

$$\begin{aligned}
s(t) &\overset{1}{=} S_0\cos(\omega t)\\
\Rightarrow \left\langle s^2(t)\right\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(S_0^2\cos^2(\omega t)\right)\mathrm{d}t\\
\Leftrightarrow \left\langle s^2(t)\right\rangle &= \frac{S_0^2}{2T}\left(\int_0^T \mathrm{d}t + \int_0^T \cos(2\omega t)\,\mathrm{d}t\right) \qquad \cos^2(\theta) \overset{1}{=} \tfrac{1}{2}\left(\cos(2\theta)+1\right)\\
\Leftrightarrow \left\langle s^2(t)\right\rangle &\overset{1}{=} \frac{S_0^2}{2T}\left(\underbrace{[t]_0^T}_{=T} + \underbrace{\left[\frac{S_0}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T}_{=0}\right)
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{s_{\text{eff}} \overset{1}{=} \frac{S_0}{\sqrt{2}}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{u_{\text{eff}} = 1{,}4\,\text{V}}\ 1$$

◇