Correction du TD

☆ I Fréquence, longueur d'onde et indice

La lumière visible possède des longueurs d'onde dans le vide comprises entre $[400\ ;\ 800]\,\mathrm{nm}$.

1) À quel intervalle de fréquences cela correspond-il ?

Réponse

On définit $\lambda_{r,0} = 800\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_{b,0} = 400\,\mathrm{nm}$ les longueurs d'ondes dans le vide correspondant au extrémités bleue et rouge du spectre de la lumière visible.

On sait que

$$f = \frac{c}{\lambda_0}$$

On aura donc

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= \frac{c}{\lambda_{b,0}} \\ f_r &= \frac{c}{\lambda_{r,0}} \end{aligned}} \qquad \text{avec} \qquad \left\{ \begin{aligned} c &= 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ \lambda_{b,0} &= 400\,\mathrm{nm} = 4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \\ \lambda_{r,0} &= 800\,\mathrm{nm} = 8{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \end{aligned} \right.$$

L'application numérique donne

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= 7{,}50 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} = 750\,\mathrm{THz} \\ f_r &= 3{,}80 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} = 380\,\mathrm{THz} \end{aligned}}$$

◇

2) Que deviennent ces longueurs d'ondes

a – dans l'eau d'indice $n_1 = 1{,}33$?

b – dans un verre d'indice $n_2 = 1{,}5$?

Réponse

Dans un milieu TLHI, la longueur d'onde change de valeur selon

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Ainsi,

a – dans l'eau d'indice $n_1 = 1{,}33$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\text{eau}} &= 300\,\mathrm{nm} \\ \lambda_{r,\text{eau}} &= 602\,\mathrm{nm} \end{aligned}}$$

b – dans un verre d'indice $n_2 = 1{,}5$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\text{eau}} &= 267\,\mathrm{nm} \\ \lambda_{r,\text{eau}} &= 533\,\mathrm{nm} \end{aligned}}$$

Leur couleur ne change cependant pas puisque **la couleur d'une lumière est définie par sa fréquence/longueur d'onde dans le vide**.

◇

3) Calculer la valeur de la vitesse de la lumière dans un verre d'indice $n = 1{,}5$.

Réponse

Dans un milieu TLHI, la vitesse de la lumière se calcule avec

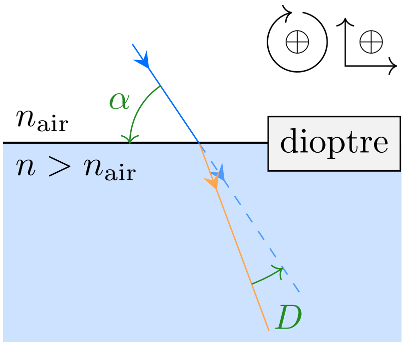
$$v = \frac{c}{n}$$

Avec $n = 1{,}5$, on a donc

$$\boxed{v = 2{,}00 \times 10^{8}\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

II Détermination directe de l'indice d'un liquide

1) Un rayon lumineux dans l'air (n_{air}) tombe sur la surface horizontale d'un liquide d'indice n. Il fait un angle $\alpha = 56°$ avec le plan horizontal. La déviation entre le rayon incident et le rayon réfracté est $D = 13{,}5°$. Quel est l'indice n du liquide ?

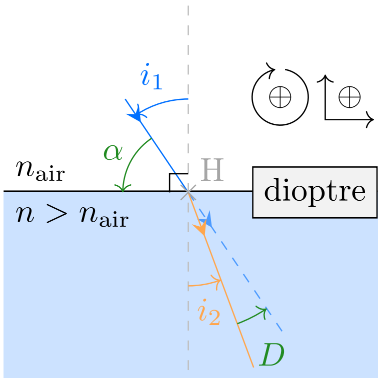


Réponse

Cet exercice est d'une simplicité absolue. Et pourtant…

Données

1) Rayon incident sur un dioptre entre air et milieu d'indice n : angle avec le dioptre de 56° ;
2) Différence d'angle entre rayon incident et réfléchi (« déviation ») de 13,5°.



Résultat attendu

Indice du liquide.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

avec n_1 l'indice du milieu d'incidence, n_2 celui du milieu de réfraction, i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction.

Application

Un bon schéma fait attentivement est **nécessaire** ici. En effet, les angles donnés ne sont pas ceux qu'on utilise dans la relation de SNELL-DESCARTES.

En appelant α l'angle entre le rayon et le dioptre, on a

$$\alpha + i_1 = 90°$$

donc $\boxed{i_1 = 34°}$. Et en appelant D la déviation entre les deux rayons, on a

$$i_1 = i_2 + D$$

soit $\boxed{i_2 = 20{,}5°}$. On en déduit donc

$$\boxed{n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i_1 = 34° \\ i_2 = 20{,}5° \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{n = 1.6}$$

◇

III Incidence de BREWSTER

1) Un dioptre plan sépare l'air d'un milieu d'indice n. Pour quelle valeur de l'angle d'incidence le rayon réfléchi est-il perpendiculaire au rayon réfracté ?

Réponse

Les rayons réfléchis et réfractés sont perpendiculaires si $r + i = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\pi}{2} - i$. En venant de l'air, on a $\sin i = n \sin r$, soit $\sin i = n \cos i$; autrement dit

$$\boxed{\tan i = n}$$

◇

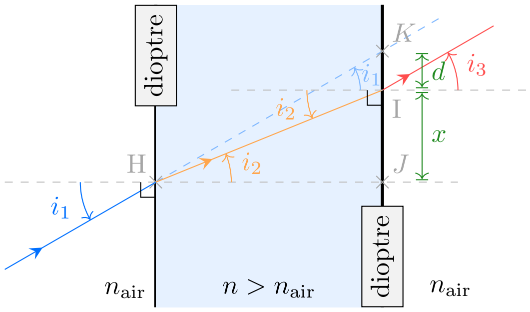
IV Rayon lumineux à travers une vitre

Un rayon lumineux traverse une vitre d'épaisseur $a = 5{,}0\,\text{mm}$ et d'indice $n = 1{,}5$ sous une incidence $i_1 = 45°$. Le milieu extérieur est l'air.

1) Faire un schéma et calculer l'angle de réfraction i_2 lors du passage à travers la première face (air→verre). Calculer alors l'angle de réfraction i_3 lors du passage à travers la deuxième face (verre→air).

Réponse

Schéma



Outils

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Résultat attendu

Le rayon passe deux dioptres de l'air au verre, puis du verre à l'air. On utilise Snell-Descartes pour déterminer la direction du rayon émergent et la comparer à celle du rayon incident.

Application

En H : $\sin i_1 = n \sin i_2$

$\Leftrightarrow i_2 = \arcsin(\sin(i_1)/n) = 28°$;

Dedans : i_2 aux deux dioptres ;

En I : $\sin i_3 = n \sin i_2$;

D'où : $\cancel{n_1} \sin i_3 = \cancel{n_1} \sin i_1$

Ainsi,

$\boxed{i_3 = i_1}$

(retour inverse)

2) Justifier que le rayon entrant et le rayon sortant sont parallèles.

Réponse

Comme les dioptres sont parallèles, leurs normales le sont aussi. Ainsi, les rayons émergent et incident sont parallèles.

3) Calculer la déviation latérale d (la distance entre le point où sort le rayon émergeant et celui où sortirait le rayon incident s'il n'était pas dévié) entre ces deux rayons.

Réponse

$$\tan(i_2) = \frac{\text{IJ}}{\text{HJ}} = \frac{x}{a} \text{ et } \tan(i_1) = \frac{x+d}{a}, \text{ d'où } \frac{d}{a} = \tan(i_1) - \frac{x}{a} = \tan(i_1) - \tan(i_2), \text{ soit}$$

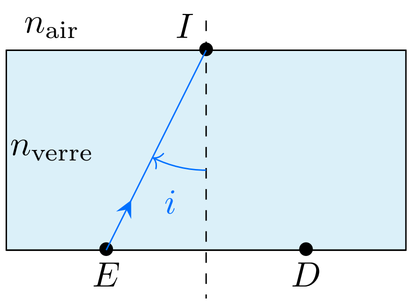
$$\boxed{d = a(\tan(i_1) - \tan(i_2))} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 5{,}0\,\text{mm} \\ i_1 = 45° \\ i_2 = 28° \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{d = 2{,}3\,\text{mm}}$$

V Détecteur de pluie sur un pare-brise

On modélise un pare-brise par une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur $e = 5{,}00\,\text{mm}$, d'indice $n_v = 1{,}5$. Un fin pinceau lumineux issu d'un émetteur situé en E arrive de l'intérieur du verre sur le dioptre verre → air en I avec un angle d'incidence $i = 60°$.



1) Montrer que le flux lumineux revient intégralement sur le détecteur situé en D et déterminer la distance ED.

Réponse

Pour savoir si le pinceau lumineux revient intégralement, il faut savoir s'il y a réflexion totale à l'interface verre→air. Pour cela, on utilise la formule de l'angle limite de réfraction

$$i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Ici, on a

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{\text{air}} = 1{,}00 \\ n_{\text{verre}} = 1{,}5 \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = 41{,}8°}$$

Comme $i = 60°$, $i > i_{\text{limv}\to\text{a}}$, et on a donc réflexion totale : aucun rayon ne sera réfracté.

Avec la figure ci-après, on a $\tan(i) = \frac{rmED}{2e}$, soit

$$\boxed{\text{ED} = 2e\tan(i)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = 5{,}00\,\text{mm} \\ i = 60° \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{ED = 1{,}7\,\text{cm}}$$

◇

2) Lorsqu'il pleut, une lame d'eau d'indice $n_e = 1{,}33$ et d'épaisseur $e' = 1{,}00\,\text{mm}$ se dépose sur un pare-brise. Représenter le rayon lumineux dans ce cas. À quelle distance du détecteur arrive-t-il ?

Réponse

Dans le cas où une fine couche d'eau recouvre le verre, on doit calculer le nouvel angle limite de réfraction pour l'interface verre→eau. Comme précédemment, on utilise la formule et on trouve

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{e}} = 62{,}5°} \tag{2.1}$$

Cette fois, l'angle d'incidence $i < i_{\text{lim,v}\to\text{e}}$. On va donc avoir réfraction. On détermine l'angle de réfraction i_2 avec la loi de Snell-Descartes pour la réfraction : $n_2\sin(i_2) = n_1\sin(i_1)$. Dans notre cas, $n_2 = n_{\text{eau}}$, $n_1 = n_{\text{verre}}$ et $i_1 = i$; on aura donc

$$\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n_{\text{verre}}\sin(i)}{n_{\text{eau}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{\text{verre}} = 1{,}5 \\ i = 60° \\ n_{\text{eau}} = 1{,}33 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{i_2 = 77{,}6°}$$

Ce rayon réfracté (en vert sur la figure) va ensuite rencontrer le dioptre eau→air en J, pour lequel l'angle limite de réfraction est

$$\boxed{i_{\text{lim,e}\to\text{a}} = 48{,}8°}$$

Comme $i_2 > i_{\text{lim,e}\to\text{a}}$, on a une nouvelle réflexion totale avec $r' = -i_2$, ramenant le pinceau vers le dioptre eau→verre en un point K. Dans cette situation comme la valeur absolue de r' est la même que celle de i_2, le principe du retour inverse de la lumière nous permet de déterminer directement que l'angle de réfraction de l'eau vers le verre i_3 a la même valeur absolue que l'angle d'incidence du verre vers l'eau i_1.

Avec le schéma ci-après, on peut déterminer que DL = IK (l'abscisse supplémentaire du trajet dans l'eau) et utiliser la trigonométrie pour trouver

$$\boxed{\mathrm{IK} = 2e' \tan(i_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e' = 1{,}00\,\mathrm{mm} \\ i_2 = 77{,}6° \end{cases}$$

soit

$$\boxed{\mathrm{DL} = 0{,}9\,\mathrm{cm}}$$

Ainsi, le rayon ne tombe plus sur le détecteur mais à côté ; un système de commande relié au détecteur peut alors déclencher les essuie-glaces.