

# Conversion de puissance électromécanique

## Exercices

### Exercice 1 : Haut parleur « de Laplace »

**1** Le champ magnétique est uniforme à l'échelle du circuit. Les variations de flux proviennent de la variation de surface du circuit, dû au mouvement de la tige mobile. Notons  $S_0$  l'aire entourée par le circuit lorsque  $x = 0$ . On a alors

$$S(t) = S_0 + ax.$$

Compte tenu du sens du courant dans le circuit indiqué sur le schéma de l'énoncé, le vecteur normal est égal à  $+\vec{e}_z$ . Ainsi,

$$\phi(t) = S(t) \vec{B} \cdot \vec{n} = (S_0 + ax)B$$

et d'après la loi de Faraday

$$e = -aB\dot{x}.$$

**2** Pour établir l'équation mécanique, appliquons la loi de la quantité de mouvement à l'ensemble tige et membrane, dans le référentiel terrestre. Les actions mécaniques qu'il subit sont

- ▷ son poids  $\vec{P}$ , vertical ;
- ▷ la réaction normale du rail  $\vec{N}$ , verticale aussi en négligeant les frottements solides, et dont on sait qu'elle compense le poids car le mouvement est selon  $\vec{e}_x$  seulement ;
- ▷ la force de frottements  $\vec{f} = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{x}\vec{e}_x$  de l'air sur la membrane ;
- ▷ la force de Laplace exercée sur la tige, qui vaut

$$\vec{F}_L = i\overrightarrow{AA'} \wedge \vec{B} = iaB(\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z) = iaB\vec{e}_x ;$$

- ▷ la force de rappel exercée par le ressort sur la tige,

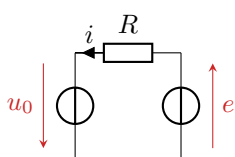
$$\vec{F}_r = -k[(\ell_0 + x) - \ell_0] \vec{e}_x = -kx\vec{e}_x.$$

La loi de la quantité de mouvement donne alors

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{f} + \vec{F}_L + \vec{F}_r$$

d'où on déduit en projetant sur  $\vec{e}_x$

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + iaB.$$



Écrivons maintenant l'équation électrique en se basant sur un schéma électrique équivalent. Les effets à prendre en compte sont la tension de commande  $u_0$ , la résistance  $R$  du circuit, et la f.é.m. d'induction  $e$ . D'après la loi des mailles,

$$u_0 + e = Ri \quad \text{soit} \quad u_0 - aB\dot{x} = Ri.$$

**3** On cherche une équation sur  $x$  : il faut donc remplacer  $i$  dans l'équation mécanique en utilisant l'équation électrique. D'après cette équation,

$$i = \frac{u_0}{R} - \frac{aB}{R}\dot{x},$$

ce qui donne en remplaçant

$$m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} - kx + \frac{aB}{R}u_0 - \frac{(aB)^2}{R}\dot{x}.$$

C'est une équation d'oscillateur harmonique amorti, que l'on peut écrire sous forme canonique

$$\ddot{x} + \frac{1}{m} \left( \alpha + \frac{(aB)^2}{R} \right) \dot{x} + kx = \frac{aB}{R}u_0.$$

Lorsque l'on remplace  $i$  dans l'expression de la force de Laplace, on voit que celle-ci compte deux contributeurs : **un terme de forçage constant, qui change la position d'équilibre de la tige, et un terme analogue à une force de frottement fluide**, proportionnelle à  $\dot{x}$ . Le fait de trouver un terme de frottement (donc avec un signe  $-$ ) est **cohérent avec la loi de Lenz** : l'induction a pour conséquence un freinage qui s'oppose au mouvement de la tige, source de l'induction.

**4** Pour obtenir le bilan de puissance, on multiplie l'équation mécanique par  $\dot{x}$  et l'équation électrique par  $i$ , ce qui donne

$$m\dot{x}\ddot{x} = -\alpha\dot{x}^2 - kx\dot{x} + iaB\dot{x} \quad \text{et} \quad u_0 i - aB\dot{x}i = Ri^2$$

L'équation mécanique donne

$$iaB\dot{x} = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) + \alpha\dot{x}^2$$

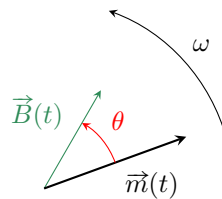
ce qui se substitue dans l'équation électrique sous la forme

$$u_0 i = \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2}m\dot{x}^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) + \alpha\dot{x}^2 + Ri^2.$$

Le membre de gauche traduit la puissance électrique fournie par le générateur. Cette puissance est utilisée pour **modifier l'énergie mécanique** de la partie mobile (tige et membrane), ce qu'indique le terme dans la dérivée. Une partie est « perdue » par frottements fluides, ce qui traduit **l'émission de l'onde sonore**. Enfin, le reste de cette puissance est **dissipée sous forme d'effet Joule**, décrit par le dernier terme du bilan de puissance.

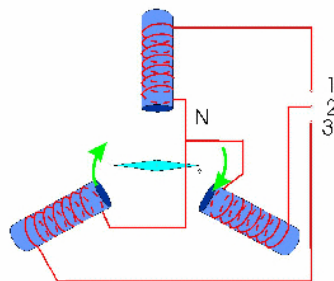
## Exercice 2 : Moteur synchrone

Les notations utilisées dans tout l'exercice sont présentées figure 3.



**Figure 3 – Notations pour l'étude du moteur synchrone.**

**1** On peut utiliser deux bobines dont les axes forment un angle de  $\pi/2$  et alimentées par des courants déphasés d'autant. Cependant, EDF fournit du courant triphasé, c'est-à-dire trois sorties (les phases) déphasées de  $2\pi/3$  les unes par rapport aux autres. La solution technologique la plus simple consiste donc à utiliser trois bobines dont les axes se coupent en un même point et inclinées de  $2\pi/3$  les unes par rapport aux autres, comme indiqué sur la figure 4.



**Figure 4 – Champ tournant généré par trois bobines.** Chacune des bobines est reliée à une phase de l'alimentation de secteur et au neutre, qui joue le rôle de masse.

**2** Appliquons le théorème du moment cinétique au rotor dans le référentiel du stator. Lorsque le moteur tourne à vide, il n'est soumis qu'au couple magnétique  $\vec{\mathcal{M}}$ . D'après la loi du moment cinétique,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{\mathcal{M}} = \vec{m} \wedge \vec{B}$$

mais comme on s'intéresse au régime permanent,

$$\frac{d\vec{L}}{dt} = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \vec{m} \wedge \vec{B} = \vec{0}.$$

On en déduit que  $\vec{m}$  et  $\vec{B}$  sont colinéaires, c'est-à-dire  $\theta = 0$ .

**3** Toujours en régime permanent, le couple moteur et le moment résistant se compensent vectoriellement,

$$\vec{m} \wedge \vec{B} + \vec{M}_r = \vec{0}$$

donc en norme

$$mB \sin \theta = \mathcal{M}_r \quad \text{soit} \quad \boxed{\theta = \arcsin \frac{\mathcal{M}_r}{mB} = 24^\circ.}$$

L'angle  $\theta$  est bien positif, d'une part car il est défini de  $\vec{m}$  vers  $\vec{B}$ , et d'autre part car le couple résistant a forcément pour effet de retarder le rotor par rapport au champ. De façon générale, lorsque le moteur entraîne une charge, le moment magnétique suit le champ mais avec un angle interne d'autant plus grand que le couple résistant est important. La puissance fournie par le moteur vaut

$$\mathcal{P} = \mathcal{M}_r \omega \quad \text{donc} \quad \boxed{\mathcal{P} = mB\omega \sin \theta = 205 \text{ W}.}$$

Cette puissance **provient du générateur électrique qui alimente les bobines** produisant le champ tournant.

**4** La question précédente montre que  $mB \sin \theta = \mathcal{M}_r$ , c'est-à-dire que la charge mécanique entraînée (décrite par le moment  $\mathcal{M}_r$ ) n'a d'influence que sur l'angle interne  $\theta$  mais pas sur la vitesse de rotation. C'est d'ailleurs un des avantages de la machine synchrone par rapport à la machine asynchrone. Le couple maximal que peut fournir le moteur est obtenu pour  $\sin \theta = 1$ , soit

$$\boxed{\mathcal{M}_{\max} = mB = 1,6 \text{ N} \cdot \text{m} .}$$

Au delà, le couple exercé par le champ sur le rotor est trop faible pour le mettre en mouvement.

### Exercice 3 : Moteur asynchrone

**1** Supposons la spire immobile. Du fait de la rotation du champ tournant, le flux magnétique au travers de la spire varie. Il y a donc un phénomène d'induction, qui génère un courant dans la spire. Ce courant a pour conséquence l'apparition d'un moment magnétique qui tend à s'aligner avec le champ. Comme le champ tourne, la spire tourne également. On peut donner une vision équivalente à partir de la loi de Lenz : l'effet du courant induit est de diminuer les variations de flux magnétique au travers de la spire, et donc de chercher à donner à la spire une orientation constante par rapport au champ  $\vec{B}$ . Comme le champ tourne, la spire tourne également.

Les deux vitesses de rotation ne peuvent pas être égales. Si tel était le cas, en se plaçant dans le référentiel de la spire, le champ magnétique serait fixe et de norme constante, et il ne pourrait donc plus y avoir d'induction. La spire ralentirait alors en raison des frottements ... ce qui impliquerait de nouveau un phénomène d'induction.

**2** À l'instant  $t$ ,  $\vec{n}$  forme avec  $\vec{e}_z$  un angle  $\omega t$  et  $\vec{B}$  un angle  $\omega' t$ . L'angle  $\theta$  vaut donc

$$\theta(t) = \omega' t - \omega t = \Omega t.$$

La vitesse de glissement  $\Omega$  est la vitesse angulaire à laquelle  $\vec{n}$  et  $\vec{B}$  se décalent l'un par rapport à l'autre.

**3** **Circuit électrique équivalent** : voir figure 5. Il n'y a pas de couplage inductif à prendre en compte. Le sens de  $i$  et de  $e$  doit être le même pour pouvoir appliquer la loi de Faraday.

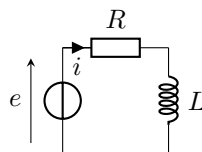


Figure 5 – Schéma électrique équivalent à la machine asynchrone.

**Calcul de la fém induite** : Le flux magnétique au travers de la spire à l'instant  $t$  est égal à

$$\phi(t) = S\vec{B} \cdot \vec{n} = SB \cos \theta = SB \cos(\Omega t).$$

On en déduit la f.é.m. induite par le champ extérieur par la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = SB\dot{\theta} \sin \theta \quad \text{soit} \quad e = SB\Omega \sin(\Omega t).$$

**Équation électrique** : d'après la loi des mailles,

$$e = Ri + L \frac{di}{dt} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{di}{dt} + \frac{R}{L}i = \frac{SB}{L}\Omega \sin(\Omega t)}.$$

**4** L'équation différentielle décrit un circuit en forçage harmonique de pulsation  $\Omega$ . La pulsation du courant dans la bobine en régime permanent est donc  $\Omega$ .

Passer l'équation différentielle en représentation complexe pose une difficulté à cause du terme de droite. En représentation complexe  $\cos \Omega t \mapsto e^{j\Omega t}$ , donc

$$\sin \Omega t = \cos\left(\Omega t - \frac{\pi}{2}\right) \mapsto e^{j(\Omega t - \pi/2)} = -j e^{j\Omega t}.$$

Plus astucieux, on peut aussi noter que ce terme de droite s'écrit

$$\frac{E_{ind}}{L} = -\frac{j\Omega}{L}\Phi = \frac{j\Omega SB}{L}$$

L'équation différentielle devient

$$j\Omega \underline{I} e^{j\Omega t} + \frac{R}{L} \underline{I} e^{j\Omega t} = -j\Omega \frac{SB}{L} e^{j\Omega t}$$

ce qui donne

$$\frac{jL\Omega + R}{L} \underline{I} = -j\Omega \frac{SB}{L}$$

soit

$$\underline{I} = -\frac{j\Omega SB}{R + jL\Omega} = \frac{-j\Omega SB(R - jL\Omega)}{R^2 + L^2\Omega^2} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (jR + L\Omega)$$

et enfin

$$\underline{I} e^{j\Omega t} = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega - jR) (\cos \Omega t + j \sin \Omega t).$$

On peut alors en déduire  $i(t) = \text{Re} [\underline{I} e^{j\Omega t}]$  soit

$$\boxed{i(t) = -\frac{\Omega SB}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t)}.$$

**5** Le moment magnétique de la spire est égal à  $\vec{m}(t) = i(t) S \vec{n}(t)$ , et le couple magnétique auquel la spire est soumise vaut

$$\vec{\Gamma}(t) = \vec{m}(t) \wedge \vec{B} = \|\vec{m}\| \|\vec{B}\| \sin \theta(t) \vec{e}_x \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{\Gamma} = i(t) S B \sin \Omega t \vec{e}_x}$$

d'où

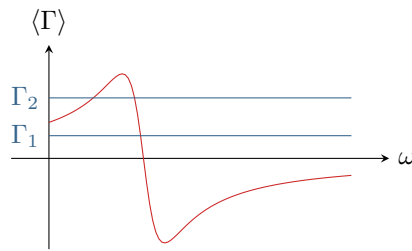
$$\Gamma = i(t) S B \sin \Omega t \quad \text{soit} \quad \boxed{\Gamma = -\frac{\Omega(SB)^2}{R^2 + L^2\Omega^2} (L\Omega \cos \Omega t - R \sin \Omega t) \sin \Omega t}.$$

En moyenne,  $\langle \sin^2 \Omega t \rangle = 1/2$  et  $\langle \sin \Omega t \cos \Omega t \rangle = 0$ , d'où

$$\boxed{\langle \Gamma \rangle = \frac{R\Omega(SB)^2}{2(R^2 + L^2\Omega^2)}}$$

**6** Lorsque la vitesse de rotation est nulle,  $\omega = 0$  et  $\Omega = \omega'$ . Le couple moyen exercé sur le rotor est donc non-nul : le moteur asynchrone est donc en mesure de démarrer seul.

**7** En régime permanent, le couple moteur moyen  $\langle \Gamma \rangle$  doit compenser le couple résistant. Le point de fonctionnement du moteur asynchrone correspond donc à la (aux) vitesse(s) de rotation  $\omega$  telle(s) que  $\langle \Gamma \rangle = \Gamma_r$ . Les deux cas sont représentés figure 6 : le(s) point(s) de fonctionnement sont situés aux intersections des courbes. Dans le premier cas, un seul point de fonctionnement est possible, et la charge est entraînée à une vitesse de rotation  $\omega$  légèrement inférieure à  $\omega'$ . Dans le second cas, deux points de fonctionnement sont envisageables. Celui à plus basse vitesse de rotation est instable : si le couple résistant augmente par exemple sous l'effet d'une perturbation, alors d'après la loi du moment cinétique la vitesse de rotation du moteur diminue ... mais dans ce cas le couple moteur moyen diminue aussi. Le moteur ne peut donc plus entraîner la charge et décroche. Au contraire, pour le point de fonctionnement à plus haute vitesse de rotation, le couple moteur augmente si  $\omega$  diminue, ce qui permet de compenser la perturbation.



**Figure 6 – Points de fonctionnement du moteur asynchrone.** Les points de fonctionnement sont les points d'intersection des droites bleues représentant le couple résistant et de la courbe rouge représentant le couple moteur moyen.

#### Exercice 4 : Pendule pesant conducteur avec induction

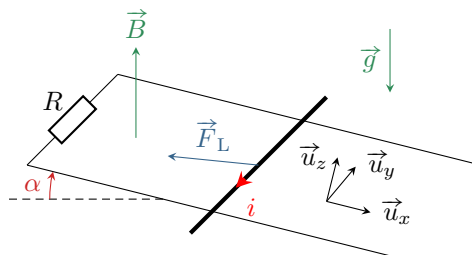
Cf. livre Ellipses MPSI pp. 747 à 749.

### Annales de concours

#### Exercice 5 : Rails de Laplace inclinés

[d'après oral CCP]

**1** La cause du phénomène d'induction est la glissade du barreau sur les rails, dans la direction  $+\vec{u}_x$ . Le courant induit qui circule dans le circuit génère une force de Laplace induite, dont la loi de Lenz indique qu'elle s'oppose au mouvement : **elle freine le barreau**, donc est dirigée selon  $-\vec{u}_x$ . On en déduit que le sens réel du courant lorsqu'il traverse le barreau mobile est selon  $-\vec{u}_y$ , comme indiqué figure 7. Le barreau ne peut cependant pas s'arrêter : s'il venait à s'arrêter, alors il n'y aurait plus de variations de flux donc plus d'induction ... et plus de force de Laplace induite pour le retenir, si bien que son poids l'entraînerait à nouveau.



**Figure 7 – Rails de Laplace inclinés.**

**2** On choisit le sens positif de  $i$  comme étant celui déterminé à la question précédente. La force de Laplace subie par le barreau vaut donc

$$\vec{F}_L = i(-a\vec{u}_y) \wedge \vec{B} \quad \text{avec} \quad \vec{B} = B(-\sin \alpha \vec{u}_x + \cos \alpha \vec{u}_z)$$

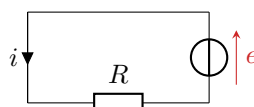
ce qui conduit donc à

$$\vec{F}_L = iaB (\sin \alpha \vec{u}_y \wedge \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y \wedge \vec{u}_z) \quad \text{d'où} \quad \boxed{\vec{F}_L = -iaB (\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z) .}$$

**3** La puissance fournie par la force de Laplace vaut

$$\mathcal{P}_{\text{Lapl}} = \vec{F}_L \cdot (v\vec{u}_x) = -iaB v \cos \alpha .$$

Le circuit électrique équivalent, figure 8, ne compte que le générateur induit et la résistance. Ainsi,  $e = Ri$ .



**Figure 8 – Circuit électrique équivalent aux rails de Laplace inclinés.**

Enfin, on utilise la conservation de la puissance,

$$\mathcal{P}_{\text{Lapl}} + ei = 0 \quad \text{d'où} \quad -iaB v \cos \alpha + Ri^2 = 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{Ri = aB v \cos \alpha .}$$

- 4** ▷ Système : barreau mobile ;  
 ▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;  
 ▷ Bilan des forces :  
 → poids du barreau :  $\vec{P} = m\vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_z)$  ;  
 → force de Laplace :  $\vec{F}_L = -iaB(\cos \alpha \vec{u}_x + \sin \alpha \vec{u}_z)$  ;  
 → réaction des rails, normale aux rails car sans frottement :  $\vec{R} = R\vec{u}_z$ .  
 ▷ Loi de la quantité de mouvement :

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_L + \vec{R}$$

soit en projection sur  $\vec{u}_x$

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - iaB \cos \alpha.$$

En utilisant la question précédente pour remplacer  $i$  (découpler les équations électrique et magnétique), on aboutit à

$$m \frac{dv}{dt} = mg \sin \alpha - \frac{(aB \cos \alpha)^2}{R} v$$

et finalement

$$\frac{dv}{dt} + \frac{(aB \cos \alpha)^2}{mR} v = g \sin \alpha.$$

Cette équation différentielle se met sous forme canonique,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = g \sin \alpha \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{mR}{(aB \cos \alpha)^2}.$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre, et on sait que  $\tau$  est la durée du régime transitoire.

- ▷ Résolution de l'équation différentielle :

→ Forme générale des solutions :

\* solution particulière : comme le second membre est constant, la solution particulière est constante, et on trouve

$$0 + \frac{1}{\tau} v_p = g \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad v_p = g\tau \sin \alpha = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2}.$$

\* solution générale de l'équation homogène :  $v_h = A e^{-t/\tau}$ .

\* bilan :  $v(t) = A e^{-t/\tau} + g\tau \sin \alpha$ .

→ Détermination de la constante à partir de la condition initiale :

$$v(0) \underset{\text{CI}}{=} 0 \underset{\text{sol}}{=} A + g\tau \sin \alpha \quad \text{d'où} \quad A = -g\tau \sin \alpha.$$

→ Conclusion :

$$v(t) = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} (1 - e^{-t/\tau}).$$

- 5** La loi horaire  $x(t)$  se déduit par intégration :

$$x(t) = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} (t + \tau e^{-t/\tau} + B).$$

La constante  $B$  se déduit de la condition initiale,

$$x(0) \underset{\text{CI}}{=} 0 \underset{\text{sol}}{=} \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} (0 + \tau + B) \quad \text{d'où} \quad B = -\tau.$$

Finalement,

$$x(t) = \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} [t + \tau (e^{-t/\tau} - 1)].$$

- 6** Par conservation de la puissance, l'énergie fournie à la résistance  $R$  pendant la durée de chute est égale à l'opposé du travail de la force de Laplace. En supposant le temps de chute très grand devant  $\tau$ , on peut considérer qu'à tout instant  $v \simeq v_p$ . La force de Laplace est donc une force constante. Son travail vaut alors

$$W_L = \int \vec{F}_L \cdot d\vec{M} = (\vec{F}_L \cdot \vec{u}_x) \int_0^L dx = -\frac{(aB \cos \alpha)^2}{R} vL$$

et ainsi

$$W_L = -\frac{(aB \cos \alpha)^2}{R} \frac{Rmg \sin \alpha}{(aB \cos \alpha)^2} L = -mg \sin \alpha L.$$

On en déduit l'énergie  $Q_R$  fournie à la résistance, égale à l'énergie fournie par le générateur induit,

$$W_L + Q_R = 0 \quad \text{d'où} \quad \boxed{Q_R = mg \sin \alpha L.}$$

## Exercice 6 : Oscillateur amorti par induction

[inspiré oral banque PT]

**1 • Équation mécanique :** Étudions le mouvement de la barre dans le référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

*Bilan des actions mécaniques :*

▷ poids :

$$\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$$

▷ force de rappel des ressorts : identique pour chaque ressort, d'où le facteur 2

$$\vec{F}_r = -2k(\ell - \ell_0)\vec{u}_{\text{sortant}} = -2k(z - \ell_0)\vec{e}_z;$$

▷ force de Laplace : compte tenu de l'orientation,

$$\vec{F}_L = ia\vec{e}_x \wedge B_0\vec{e}_y = iaB_0\vec{e}_z.$$

*Théorème de la résultante cinétique :*

$$m \left. \frac{d\vec{v}}{dt} \right|_{\mathcal{R}} = \vec{P} + \vec{F}_r + \vec{F}_L$$

soit en projetant

$$\boxed{m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - 2k(z - \ell_0) + iaB_0.}$$

• **Équation électrique :** le circuit électrique équivalent, représenté figure 9, compte une résistance  $R$  qui modélise celle de la barre et des ressorts et un générateur induit de fém  $e$ .

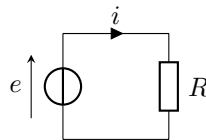


Figure 9 – Circuit électrique équivalent.

Compte tenu de l'orientation, le flux magnétique vaut

$$\phi = \iint (B_0 \vec{e}_y) \cdot (dS \vec{e}_y) = B_0 a z(t)$$

donc d'après la loi de Faraday,

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B_0 a \frac{dz}{dt}.$$

et ainsi, d'après la loi des mailles,

$$e = Ri \quad \text{soit} \quad \boxed{-B_0 a \frac{dz}{dt} = Ri.}$$

• **Découplage :** d'après l'équation électrique,

$$i = -\frac{B_0 a}{R} \frac{dz}{dt},$$

d'où en injectant dans l'équation mécanique

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} = mg - 2k(z - \ell_0) - \frac{(aB_0)^2}{R} \frac{dz}{dt}.$$

Sous forme canonique,

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{(aB_0)^2}{mR} \frac{dz}{dt} + \frac{2k}{m} z = g + \frac{2k}{m} \ell_0,$$

ce que l'on met sous la forme

$$\frac{d^2 z}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dz}{dt} + \omega_0^2 z = g + \omega_0^2 \ell_0 \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}} \\ Q = \frac{(aB_0)^2}{mR} \sqrt{\frac{2k}{m}} \end{cases}$$

**2** On multiplie l'équation mécanique par  $v_z = \frac{dz}{dt}$ ,

$$m \frac{d^2 z}{dt^2} \frac{dz}{dt} = mg \frac{dz}{dt} - 2k(z - \ell_0) \frac{dz}{dt} + iaB_0 \frac{dz}{dt},$$

et on multiplie l'équation électrique par  $i$ ,

$$-iaB_0 \frac{dz}{dt} = Ri^2.$$

Il suffit ensuite de combiner les deux équations et de reconnaître des dérivées,

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 \right) = \frac{d}{dt} \left( mgz - 2 \times \frac{1}{2} k (z - \ell_0)^2 \right) - Ri^2$$

et d'écrire sous la forme

$$\frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m v_z^2 - mgz + 2 \times \frac{1}{2} k (z - \ell_0)^2 \right) = -Ri^2.$$

On reconnaît dans le membre de gauche la dérivée de l'énergie mécanique de la barre. Le bilan de puissance indique que **l'énergie mécanique de la barre ne peut que diminuer** (dérivée négative), et que l'énergie perdue est **dissipée par effet Joule**.

**3** • **Forme générale des solutions :**

*Solution particulière :* Le second membre de l'équation est constant, donc la solution particulière aussi, soit

$$0 + 0 + \omega_0^2 z_p = g + \omega_0^2 \ell_0 \quad \text{d'où} \quad z_p = \frac{g + \omega_0^2 \ell_0}{\omega_0^2} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}.$$

*Solution homogène :* Le polynôme caractéristique de l'équation homogène s'écrit

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0,$$

et son discriminant vaut

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = \omega_0^2 \left( \frac{1}{Q^2} - 4 \right)$$

Si la résistance du circuit est suffisamment faible, on peut supposer  $Q > 1/2$ , soit  $\Delta < 0$ , ce qui indique un régime pseudo-périodique. Les racines sont complexes conjuguées et s'écrivent

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2} \sqrt{\frac{1}{Q^2} - 4}$$

que l'on pose sous la forme

$$r_{\pm} = -\frac{1}{\tau} \pm j\omega_p$$

avec  $\tau$  le temps caractéristique d'amortissement et  $\omega_p$  la pseudo-pulsation. La solution homogène s'écrit donc

$$z_h(t) = [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-t/\tau}$$

d'où on déduit la forme générale des solutions,

$$z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{2k} + [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-t/\tau},$$

où les constantes  $A$  et  $B$  se déterminent à partir des conditions initiales.



- **Détermination des constantes :** à l'instant initial, la barre est écartée d'une distance  $b$  par rapport à la position d'équilibre, c'est-à-dire

$$z(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} \ell_0 + \frac{mg}{2k} + b \underbrace{=}_{\text{sol}} \ell_0 + \frac{mg}{2k} + A \quad \text{d'où} \quad A = b.$$

Calculons maintenant la vitesse,

$$v = \frac{dz}{dt} = [-\omega_p A \sin(\omega_p t) + \omega_p B \cos(\omega_p t)] e^{-t/\tau} - \frac{1}{\tau} [A \cos(\omega_p t) + B \sin(\omega_p t)] e^{-t/\tau}$$

et comme la barre est immobile à l'instant initial, alors

$$\frac{dz}{dt}(0) \underbrace{=}_{\text{CI}} 0 \underbrace{=}_{\text{sol}} \omega_p B - \frac{A}{\tau} \quad \text{soit} \quad B = \frac{A}{\omega_p \tau}.$$

- **Conclusion :** on en déduit finalement

$$z(t) = \ell_0 + \frac{mg}{2k} + b \left[ \cos(\omega_p t) + \frac{1}{\omega_p \tau} \sin(\omega_p t) \right] e^{-t/\tau}.$$

D'après l'équation électrique,

$$i = -\frac{B_0 a}{R} \frac{dz}{dt}$$

d'où

$$i = -\frac{B_0 a}{R} b \left[ \left( -\omega_p \sin(\omega_p t) + \frac{1}{\tau} \cos(\omega_p t) \right) - \frac{1}{\tau} \left( \cos(\omega_p t) + \frac{1}{\omega_p \tau} \sin(\omega_p t) \right) \right] e^{-t/\tau}$$

qui se « simplifie » en

$$i = -\frac{B_0 a}{R} b \left[ -\omega_p \sin(\omega_p t) - \frac{1}{\omega_p \tau^2} \sin(\omega_p t) \right] e^{-t/\tau}$$

puis

$$i = \frac{B_0 a}{R} b \left( \omega_p - \frac{1}{\omega_p \tau^2} \right) \sin(\omega_p t) e^{-t/\tau}.$$

... sauf erreur de calcul de ma part !

Voilà une question affreusement calculatoire et sans grand intérêt physique ... et l'énoncé original rapporté par le candidat était encore pire puisqu'il fallait en plus prendre en compte l'auto-induction.

## Résolution de problème

### Exercice 7 : Rail gun

[adapté oral Centrale]

Voir ici : [http://www.liberation.fr/planete/2010/12/17/le-railgun-le-giga-canon-de-la-navy\\_701446](http://www.liberation.fr/planete/2010/12/17/le-railgun-le-giga-canon-de-la-navy_701446)

Raisonnons par analogie avec les rails de Laplace en négligeant tous les frottements. Les notations sont présentées figure 10.

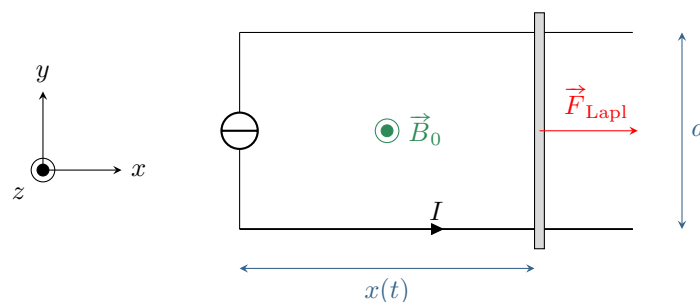


Figure 10 – Notations pour l'étude du rail gun.

Le champ susceptible de mettre en mouvement le projectile est nécessairement le champ créé par le circuit lui-même. Pour faire simple, on néglige les phénomènes d'induction : on considère que le courant est constamment égal

au courant maximal que la source peut délivrer. Le champ créé par un rail peut être modélisé par celui d'un fil infini, parcouru par un courant d'intensité  $I$  :

$$\vec{B} = \frac{\mu_0 I}{2\pi r} \vec{u}_\theta$$

(se retrouve en 30 secondes avec le théorème d'Ampère). Pour estimer le champ total, faisons l'hypothèse qu'il est uniforme sur le projectile, et calculons sa valeur en  $y = a/2$ . Les champs créés par les deux rails se superposent, et compte des orientations sont dirigés tous les deux selon  $+\vec{u}_z$ , si bien que

$$\vec{B} = 2 \times \frac{\mu_0 I}{2\pi a/2} \vec{u}_z = \frac{2\mu_0 I}{\pi a} \vec{u}_z.$$

Numériquement, on trouve  $B \simeq 8 \text{ T}$ .

Une fois ce champ déterminé, calculons la vitesse de sortie. Plus précisément, on ne s'intéresse qu'à la norme  $v_s$  de la vitesse en sortie du guide, le plus simple est donc d'appliquer le théorème de l'énergie cinétique.

- ▷ Système : projectile ;
- ▷ Référentiel : terrestre, supposé galiléen ;
- ▷ Bilan des actions mécaniques :
  - en première approche, on néglige tous les frottements ;
  - le mouvement du projectile est horizontal, son poids est donc compensé par une force de réaction normale ;
  - la force de Laplace vaut  $\vec{F}_L = I(a\vec{e}_y) \wedge (B\vec{e}_z) = IaB\vec{e}_x$ , il s'agit d'une force motrice constante, son travail au cours du déplacement du projectile sur toute la longueur  $L$  des rails vaut donc

$$W_L = IaB L.$$

- ▷ Théorème de l'énergie cinétique :

$$\frac{1}{2}mv_s^2 - 0 = W \quad \text{soit} \quad \frac{1}{2}mv_s^2 = IaB L.$$

et finalement

$$v_s = \sqrt{\frac{2IaB L}{m}} = 3 \cdot 10^3 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$$

ce qui est dix fois supérieur à la vitesse du son. En pratique, les frottements divisent cette vitesse de sortie par environ 2.