Khôlles MPSI3 – semaine 2

Sujet 1 – corrigé

I Question de cours

Construire l'image d'un objet après le centre optique d'une lentille convergente, précisez la nature de l'objet et de l'image. Construire le rayon émergent d'un rayon quelconque pour une lentille divergente en présentant les règles de construction secondaires et nommant tous les points d'intérêt.

II Étude d'un rétroprojecteur

Un rétroprojecteur est un ensemble lentille-miroir, avec un miroir plan incliné à 45° par rapport à la lentille. L'ensemble lentille-miroir est réglable en hauteur (h). On étudie un rétroprojecteur dont la lentille a une vergence de $2{,}0\,\delta$, avec une distance lentille-miroir $d = 10\,\text{cm}$.
On désire projeter un objet transparent AB sur un écran placé à $D = 3{,}0\,\text{m}$ de l'axe optique de la lentille.

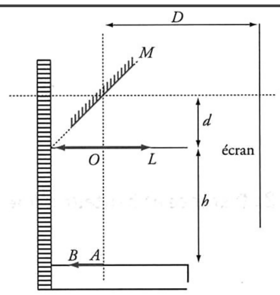


Figure 1.1 – Schéma du rétroprojecteur

1. Déterminer la distance h permettant d'obtenir une image nette sur l'écran.

Réponse :
On a $AB \xrightarrow[O]{\mathcal{L}} A_1B_1 \xrightarrow[H]{M} A'B'$, avec H le point d'intersection entre le miroir plan et l'axe optique de la lentille. L'image finale A' donnée par le miroir plan est telle que

$$\boxed{\overline{HA'} = \overline{HA_1} = D}$$

On a donc pour la lentille

$$\boxed{\begin{aligned} &\overline{OA_1} = \overline{OH} + \overline{HA_1} \\ \Leftrightarrow\ &\overline{OA_1} = d + D \end{aligned}}$$

On utilise la relation de conjugaison des lentilles minces en nommant V la vergence de la lentille :

$$V = \frac{1}{d+D} - \frac{1}{-h} \Leftrightarrow \boxed{h = \frac{d+D}{V(d+D)-d}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} d & = & 10\times10^{-2}\,\text{m} \\ D & = & 3{,}0\,\text{m} \\ V & = & 2{,}0\,\text{m}^{-1} \end{array}\right.$$

Et l'application numérique donne

$$\boxed{h = 60\,\text{cm}}$$

2. Calculer le grandissement.

Réponse :
Le miroir plan a un grandissement de 1, donc le grandissement du système est celui de la lentille : on a $\gamma = \dfrac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} = \dfrac{\overline{OA_1}}{\overline{OA}}$, soit

$$\boxed{\begin{aligned} &\gamma = \frac{d+D}{-h} \\ &\gamma = -5.2 \end{aligned}}$$

Sujet 2 – corrigé

I Exercice de cours : condition de netteté

1. Soit $AB \xrightarrow[O]{\mathcal{L}} A'B'$ avec $\mathcal{L}$ convergente projetant sur un écran. On appelle x la distance $\left|\overline{OA}\right|$ et D la distance fixe AA'. Quelle est la contrainte sur le choix de lentille pour que $A'B'$ soit nette ?

Réponse :

Données

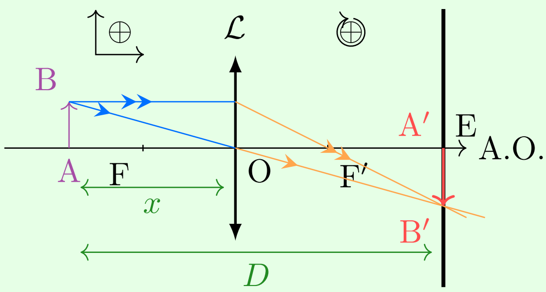


Figure 2.1 – Schéma de situation

Résultat attendu

L'image est nette si la lentille forme l'image sur l'écran. Avec D fixe, on cherche une équation avec x.

Outils

Relation de Descartes

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}}$$

et $\overline{OA} = -x$, $\overline{OA'} = D - x$.

Application

Avec les notations de l'énoncé, la relation de Descartes devient

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f'} &= \frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{f'} &= \frac{x+D-x}{x(D-x)} \\
\Leftrightarrow f' &= \frac{x(D-x)}{D} \\
\Leftrightarrow 0 &= x^2 - xD + f'D
\end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = D^2 - 4f'D = D(D-4f')$. x étant une distance physique, on cherche $\Delta \geq 0$.

- $\Delta = 0$ si $D = 4f'$, et alors

$$\boxed{x = \frac{D}{2}}$$

- $\Delta > 0$ si $D > 4f'$, et alors

$$\boxed{x_\pm = \frac{D \pm \sqrt{D(D-4f')}}{2}}$$

Ainsi, la zone de netteté de l'image se situe entre x_+ et x_-, et a donc une largeur $d = x_+ - x_- = \sqrt{D(D-4f')}$.

II Grenouille intelligente

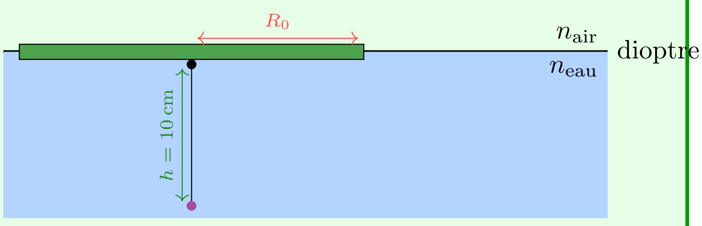
Pour se cacher des prédateurs, une grenouille s'est accrochée sous un nénuphar qui flotte sur l'étang. La grenouille a une hauteur h et le nénuphar un rayon R et une épaisseur très faible.

1. Quel doit être le rayon minimal R_0 du nénuphar pour que les pieds de la grenouille ne soient pas visibles par un prédateur situé en-dehors de l'eau?

Réponse :

Données

Pour une hauteur de grenouille fixée, il y a une taille de nénuphar permettant à tous les rayons partant de la grenouille de ne pas traverser le dioptre.



But à atteindre

Origine physique de ce phénomène et traduction mathématique.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

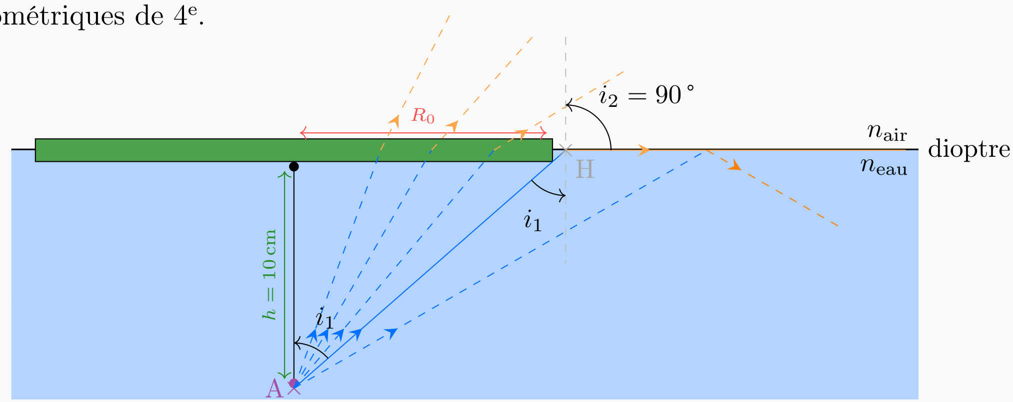
et angle limite de réfraction, tel que

$$n_1 \sin i_\ell = n_2 \sin 90° = n_2$$

qui indique que pour $n_1 > n_2$, il y a un angle d'incidence à partir duquel il n'y a pas de rayon réfracté (les rayons réfractés font un angle de 90° avec la normale et sont donc parallèles au dioptre).

Application

Pour que les pieds de la grenouille ne soient pas visibles par un prédateur situé en-dehors de l'eau, c'est-à-dire au-dessus du dioptre, il faut simplement qu'il n'y ait pas de rayon partant de ses pieds et qui puissent sortir de l'eau : il faut que tous les rayons avec un angle d'incidence plus faible que cet angle limite soient bloqués par le nénuphar. C'est possible puisqu'on est dans une situation où le rayon passe dans un milieu **moins réfringent**, i.e. $n_2 < n_1$. En effet, dans cette situation il y a une inclinaison du rayon incident qui implique que le rayon émergent est parallèle à la surface, et tous les rayons au-delà de cet angle limite sont tous réfléchis. Un beau, grand schéma avec toutes les données reportées dessus mène naturellement à l'utilisation de formules trigonométriques de 4e.



On voit ici qu'une simple fonction tan permet d'exprimer R_0 :

$$\boxed{\tan i_1 = \frac{R_0}{h}} \tag{2.1}$$

Seulement on n'a pas encore la valeur de i_1. Or, on a déterminé que pour fonctionner l'astuce de la grenouille est d'avoir $i_1 = i_\ell$, et d'après le cours :

$$n_{\text{eau}} \sin i_\ell = n_{\text{air}} \tag{2.2}$$

$$\Leftrightarrow i_\ell = \frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}} \tag{2.3}$$

On peut donc écrire, avec 2.1 et 2.3 :

$$\boxed{R_0 = h \times \tan\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{eau}}}\right) \quad \text{avec} \left\{ \begin{array}{rcl} h & = & 10{,}0\,\text{cm} \\ n_{\text{air}} & = & 1{,}00 \\ n_{\text{eau}} & = & 1{,}33 \end{array} \right.} \tag{2.4}$$

et finalement,

$$\boxed{R_0 = 11{,}4\,\text{cm}} \tag{2.5}$$

Sujet 3 – corrigé

I Question de cours

1. On modélise l'objectif d'un vidéoprojecteur par une lentille mince convergente de distance focale de 5,0 cm. L'objet transverse a une hauteur de 24 mm et l'écran se situe à 4,0 m de la lentille. Déterminer la position, la nature de l'objet ainsi que la taille de l'image.

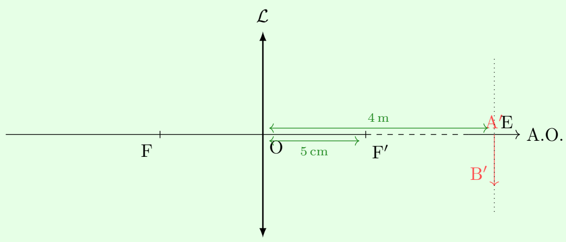
Réponse :

Données

(a) $(AB) = 24\,\text{mm}$: « l'objet est une matrice de 24 mm » ;

(b) $\overline{OA'} = +4{,}0\,\text{m}$: « l'écran se situe à 4,0 m » (c'est là que se forme l'image, c'est donc la position de A') ;

(c) $\overline{OF'} = +5{,}0\,\text{cm}$.



Résultats attendus

(a) Que vaut $\overline{OA}$? : « Déterminer la position et la nature de l'objet » (O est bon point d'intérêt à partir duquel on peut mesurer des distances, et selon la valeur algébrique de $\overline{OA}$ on saura de quel côté de la lentille l'objet se situe, et donc son caractère virtuel ou réel) ;

(b) Que vaut $\overline{A'B'}$? : « Déterminer [...] la taille de l'image ».

Outils du cours

(a) Relation de conjugaison pour une lentille mince :

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}}$$

(b) Grandissement pour une lentille mince

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

Application

(a) De la relation de conjugaison, on a :

$$\overline{OA} = \left[\frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OF'}}\right]^{-1}$$

Et avec les données,

$$\boxed{\overline{OA} = -5{,}0\,\text{cm}}$$

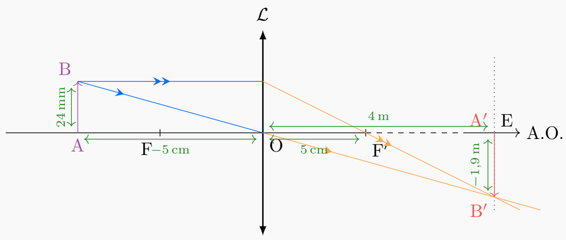
Ainsi, on a un objet réel situé à 5 centimètres à gauche de la lentille.

(b) De l'expression du grandissement, on a

$$\overline{A'B'} = \overline{AB} \times \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$$

Et avec les données,

$$\boxed{\overline{A'B'} = -1{,}9\,\text{m}}$$

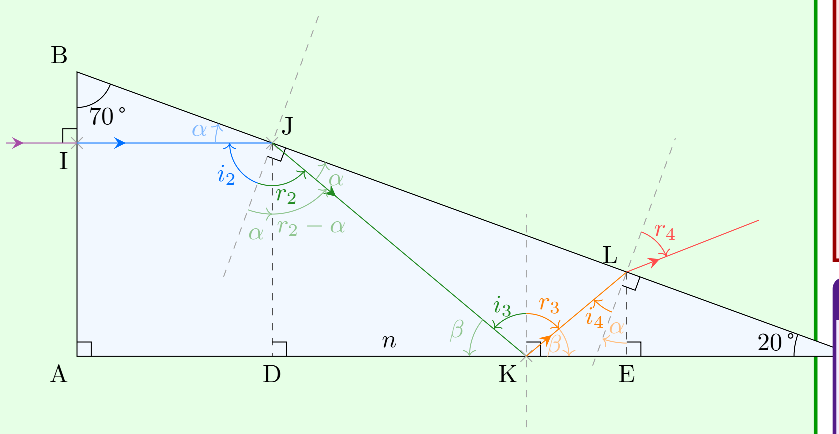


II Prisme rectangle

1. On utilise un prisme de verre d'indice $n = 1{,}5$. Sa section principale est un triangle ABC rectangle en A tel que l'angle en B soit égal à 70°. Un rayon lumineux dans le plan ABC rencontre le prisme en I sur le côté AB perpendiculairement à AB. Sachant que le rayon incident est dans l'air, étudier la marche de la lumière jusqu'à la sortie du prisme.

Réponse :

Schéma



$$\text{A} \xrightarrow[I]{\text{DP}} \text{B} \xrightarrow[J]{\text{DP}} \text{C} \xrightarrow[K]{\text{DP}} \text{D} \xrightarrow[L]{\text{DP}} \text{E}$$

Résultat attendu

On cherche à suivre le chemin du rayon indiqué dans l'énoncé. Il faut pour cela savoir ce qui peut arriver au rayon. Dans le cas du passage par un dioptre plan, il peut y avoir traversée du dioptre avec Snell-Descartes, ou réflexion dans le cas $n_2 < n_1$.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i = n_2 \sin r$$

et pour $n_2 < n_1$, i_ℓ :

$$n_1 \sin i_\ell = n_2 \sin 90° = n_2$$

tel que $i_1 > i_\ell$ est réfléchi.

Application

Ici, l'angle limite de réflexion à l'intérieur du prisme est :

$$i_\ell = \arcsin \frac{1}{n} = \boxed{41{,}8°}$$

I : $\boxed{i_1 = 0°}$ donc $\boxed{r_1 = 0°}$;

J : Ici, on doit voir que $\alpha = 20°$ puisque dans le triangle BIJ, la somme des angles doit valoir 180° et qu'on a un angle droit + un angle de 70°. On en déduit que $\boxed{i_2 = 70°}$ également, car $i_2 + \alpha = 90°$.

Comme $\underline{i_2 > i_\ell}$, le rayon ne traverse pas mais est réfléchi, soit $\boxed{r_2 = 70°}$.

K : Pour trouver l'angle en K, on peut par exemple chercher l'angle β : en construisant le triangle rectangle JDK, on trouve que l'angle au sommet est $r_2 - \alpha = 50°$; avec l'angle droit en D, $\beta = 40°$, et $\boxed{i_3 = 50° > i_\ell}$ donc rayon réfléchi $\boxed{r_3 = 50°}$.

L : De même qu'en J, tracer LEC indique que $i_4 + \alpha + \beta = 90°$, soit $\boxed{i_4 = 30° < i_\ell}$: on applique donc Snell-Descartes ici, et on obtient

$$\boxed{r_4} = \arcsin(n \times \sin i_4) = \boxed{48{,}6°}$$

Sujet 4 – corrigé

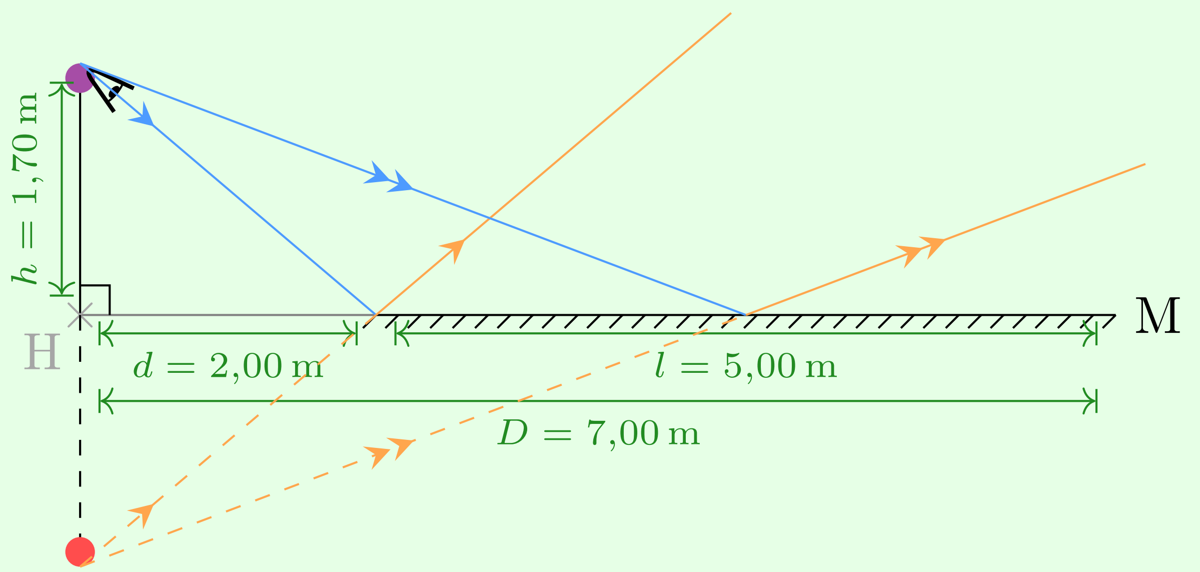
I Exercice de cours : champ de vision à travers un miroir plan

Une personne dont les yeux se situent à $h = 1{,}70\,\mathrm{m}$ du sol observe une mare gelée (équivalente à un miroir plan) de largeur $l = 5{,}00\,\mathrm{m}$ et située à $d = 2{,}00\,\mathrm{m}$ d'elle.

1. Peut-elle voir sa propre image ? Quelle est la nature de l'image ?

Réponse :

Schéma



Outil

Pour voir une image, il faut qu'un rayon partant de l'image puisse arriver jusqu'à l'œil de l'observataire. Étant donné qu'on travaille avec un miroir, l'image de l'observataire est son symétrique par le plan du miroir (même si le miroir ne s'étend pas jusque-là !).

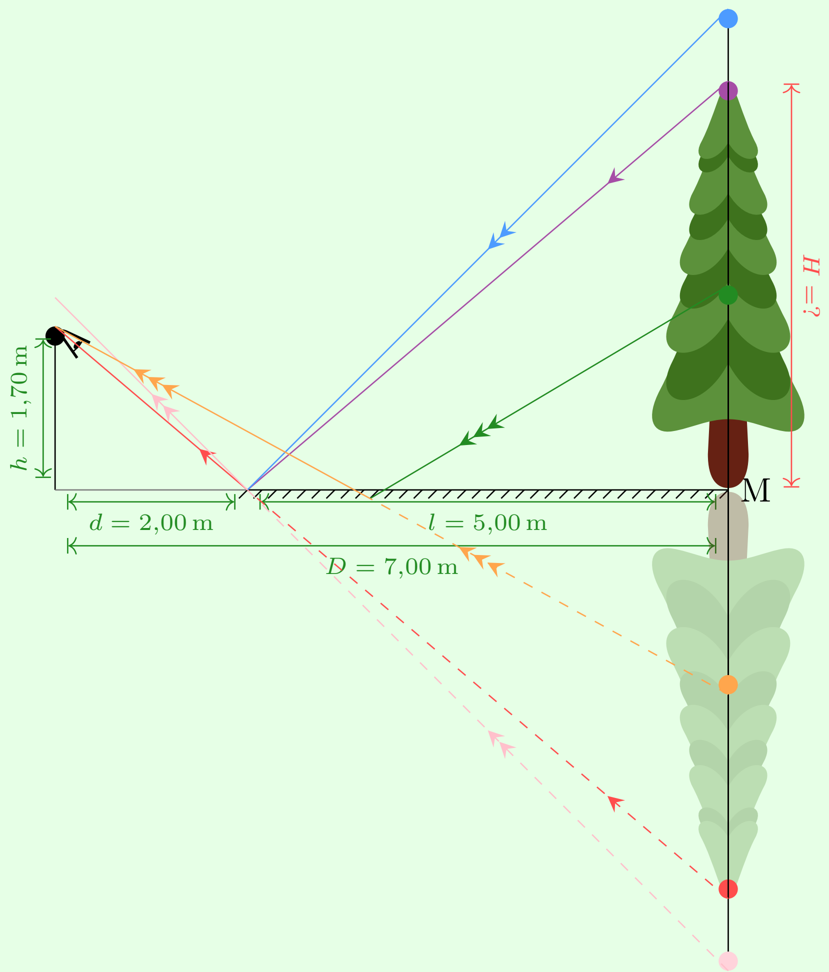
Application

On voit vite qu'il n'est pas possible qu'un rayon issu de l'image (en rouge) atteigne l'œil (en violet). On comprend par le tracé des rayons réfléchis que seul l'autre côté du lac sera visible.

2. Quelle est la hauteur maximale H d'un arbre situé de l'autre côté de la mare (en bordure de mare) qu'elle peut voir par réflexion dans la mare ? On notera $D = l + d$.

Réponse :

Schéma



Outil

Ici aussi, l'idée est de trouver l'image de l'arbre, et de voir la condition limite pour la taille visible.

Application

Un schéma avec l'image de l'arbre nous permet de voir que le point le plus haut qu'on peut voir par réflexion sur le lac est quand on regarde proche de nous : si on regarde plus loin, on voit en effet plus vers le bas de l'arbre (rayon vert incident, rayon orange émergent). Un arbre qui est trop grand ne sera pas visible en regardant ce point-là (rayon bleu incident, rose émergent). On s'intéresse donc à la construction géométrique formée par le rayon violet incident, rouge émergent, qui nous permet d'appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{H}{l} = \dfrac{h}{d}$, soit

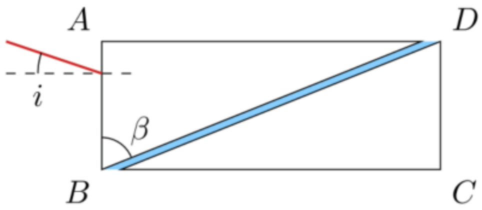
$$\boxed{H = \frac{l \times h}{d}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} l & = & 5{,}00\,\mathrm{m} \\ h & = & 1{,}70\,\mathrm{m} \\ d & = & 2{,}00\,\mathrm{m} \end{array} \right.$$

D'où

$$\boxed{H = 4{,}25\,\mathrm{m}}$$

II Réfractomètre d'Abbe

Un réfractomètre d'Abbe est un appareil servant à mesurer des indices optiques, très utilisé notamment à des fins de caractérisation rapide déchantillons. Ce réfractomètre est composé de deux prismes identiques, d'indice $n_0 = 1{,}732$, à base en forme de triangle rectangle. L'angle au sommet β vaut 60°. Entre ces prismes est intercalé un film de liquide d'indice n que l'on cherche à déterminer. Pour ce faire, le réfractomètre est éclairé par la face AB par un rayon d'angle d'incidence i réglable.



1. Si le rayon sort par la face CD, quelle sera sa direction ? Répondre par un argument physique sans calcul, éventuellement à confirmer par un schéma propre.

   Réponse :

   Compte tenu des symétries du dispositif, le principe du retour inverse de la lumière garantit que si le rayon sort du réfractomètre par la face CD alors l'angle d'émergence vaut i. En effet,

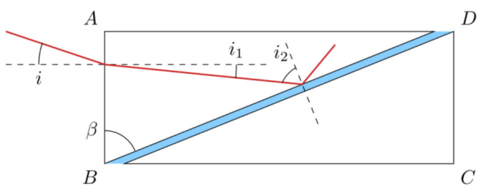
   - à l'interface AB, la seconde loi de Snell–Descartes donne l'angle d'émergence dans le prisme, noté i_1 ;
   - la géométrie du prisme donne l'angle d'incidence sur la première interface BD, noté i_2 ;
   - sur cette interface, la seconde loi de Snell–Descartes donne l'angle d'émergence dans le liquide, noté i_3 ;
   - comme les deux interfaces BD sont parallèles, alors l'angle d'incidence sur la deuxième interface BD vaut nécessairement i_3 ;
   - la même loi de Descartes que précédemment permet d'en déduire que l'angle d'émergence dans le prisme vaut alors forcément i_2 ;
   - les deux prismes étant identiques, l'angle d'incidence sur l'interface CD est alors nécessairement i_1 ;
   - et par conséquent, la même loi de Descartes qu'à l'interface AB indique que l'angle d'émergence dans l'air par la face CD vaut i.

2. Expliquer comment la mesure de l'angle d'incidence pour laquelle le rayon transmis ne sort plus par la face CD mais par la face AD permet d'en déduire la valeur de l'indice du liquide.

   Réponse :
   Si le rayon transmis sort par la face AD , c'est qu'il a subi une réflexion totale. Cette réflexion totale ne peut avoir eu lieu qu'à l'interface BD dans le sens prisme → liquide, à condition que $n < n_0$. En effet, si elle avait lieu dans le sens liquide → prisme le faisceau serait guidé dans le liquide le long de l'interstice entre les deux prismes. Comme l'angle critique de rélexion totale dépend du rapport des indices des deux milieux, ici n_0 et n, il est possible d'en déduire la valeur de n.

3. Que vaut cet indice si l'angle d'incidence critique vaut 18,0° ?

   Réponse :
   Commençons par introduire les notations sur le schéma ci-dessous.



À la limite de la réflexion totale,

$$i_2 = \arcsin\left(\frac{n}{n_0}\right)$$

Une relation de somme des angles permet d'en déduire i_1, puisque

$$\beta + \left(\frac{\pi}{2} - i_1\right) + \left(\frac{\pi}{2} - i_2\right) = \pi \qquad \text{d'où} \qquad i_1 = \beta - i_2$$

Enfin, la seconde loi xprde Descartes eimée à l'interface AB donne

$$1 \times \sin i = n_0 \sin i_1 \qquad \text{soit} \qquad \sin i = n_0 \left(\beta - \arcsin\left[\frac{n}{n_0}\right]\right)$$

Remonter à n demande d'inverser cette relation, soit

$$n = n_0 \sin\left(\beta - \arcsin\left\{\frac{\sin i}{n_0}\right\}\right) = 1{,}32$$

4. Quelles sont les limites d'utilisation du dispositif?

Réponse :
Une première limitation évidente est qu'un réfractomètre d'Abbe ne permet de mesurer que des indices de liquides, voire de gaz en prenant des précautions pour empêcher les fuites, mais en aucun cas de solides. Par ailleurs, comme il repose sur une réflexion totale, **il faut que l'indice du liquide soit inférieur à celui du verre composant les prismes**.