

## Correction du DS

## /65 E1 Étude d'un circuit RLC parallèle

## I/A Étude de l'amplitude et de la phase

/3 1 Dans le cas d'une association de dipôle en parallèle, on additionne les admittances :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega \Leftrightarrow \underline{Z} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega} \quad \text{ou} \quad \underline{Z} = \frac{R}{1 + jRC\omega - j\frac{R}{L\omega}}$$

/5 2 On applique la loi d'OHM généralisée sur le dipôle équivalent  $\underline{Z}$ , en utilisant les amplitudes complexes du courant et de la tension :

$$\underline{U}_0 = \underline{Z}\eta_0$$

$$\Leftrightarrow \underline{U}_0 = \frac{R\eta_0}{1 + j(RC\omega - \frac{R}{L\omega})}$$

Identification :  $RC = \frac{Q}{\omega_0}$  et  $\frac{R}{L} = Q\omega_0$

$$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

avec  $\omega_0$  la pulsation propre du circuit et  $Q$  le facteur de qualité.

/2 3

$$U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2(x - \frac{1}{x})^2}}$$

/8 4 La résonance correspond à un maximum de la fonction  $U_0$  à  $x \neq 0$ . Ici, comme  $R\eta_0 = \text{cte}$ , on a  $U_0$  maximale si son dénominateur est minimal, soit pour

$$1 + Q^2 \underbrace{\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2}_{\geq 0} \text{ minimal} \Leftrightarrow Q^2 \left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_r = 1 \Leftrightarrow \omega_r = \omega_0$$

Ainsi, il peut toujours y avoir résonance en tension ici, et on obtient  $U_{\max} = R\eta_0$ .

/8 5 La bande passante  $\Delta\omega$  est l'ensemble des pulsations  $\omega$  vérifiant  $U_{\max}/\sqrt{2} \leq U_0(\omega) \leq U_{\max}$ , soit  $\Delta\omega = [\omega_1; \omega_2]$ , avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  solutions de l'équation  $U_0(\omega_k) = U_{\max}/\sqrt{2}$ . En travaillant en pulsations réduites :

$$\begin{aligned} U_0(x_k) &= \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2}} &= \frac{R\eta_0}{\sqrt{2}} \end{aligned}$$

On remplace

$$\Leftrightarrow Q^2 \left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2 = 1$$

On isole

$$\Leftrightarrow Q \left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) = \pm 1$$

$\times x_k$

$$\Leftrightarrow Qx_k^2 - Q = \pm x_k$$

$-\pm = \mp$

$$\Leftrightarrow Qx_k^2 \mp x_k - Q = 0$$

On a alors deux trinômes, soit quatre racines possibles, avec

$$\Delta = 1 + 4Q^2$$

$$\Rightarrow x_{k,\pm,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

On ne garde que les racines positives, sachant que  $\sqrt{1 + 4Q^2} > 1$  :

$$x_1 = x_{k,-,+} = \frac{1}{2Q} (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$$

et  $x_2 = x_{k,+,+} = \frac{1}{2Q} (1 + \sqrt{1 + 4Q^2})$

puis on obtient la bande passante en calculant la différence  $|x_2 - x_1|$  :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2} - (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2})}{2Q}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

■

/7 6

$$\begin{aligned}
 U_0(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\overset{(1)}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q} \underset{x \rightarrow 0}{\overset{(1)}{\rightarrow}} 0 \\
 U_0(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\overset{(1)}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q} \underset{x \rightarrow \infty}{\overset{(1)}{\rightarrow}} 0 \\
 U_0(1) &\overset{(1)}{=} R\eta_0
 \end{aligned}$$

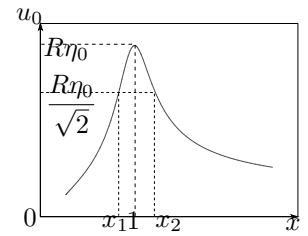


FIGURE D4.1 – (1)+(1)

/6 7

$$\begin{aligned}
 \phi &\overset{(1)}{=} \arg(U_0) \overset{(1)}{=} \underbrace{\arg(R\eta_0)}_{=0} - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \\
 \Rightarrow \tan(\phi) &\overset{(1)}{=} -\tan(\arg(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right))) \Leftrightarrow \boxed{\phi \overset{(1)}{=} -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\phi \overset{(1)}{\in} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}
 \end{aligned}$$

/7 8

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\overset{(1)}{\sim}} -\arctan\left(-\frac{Q}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\overset{(1)}{\rightarrow}} \frac{\pi}{2} \\
 \phi(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\overset{(1)}{\sim}} -\arctan(Qx) \underset{x \rightarrow \infty}{\overset{(1)}{\rightarrow}} -\frac{\pi}{2} \\
 \phi(1) &\overset{(1)}{=} 0
 \end{aligned}$$

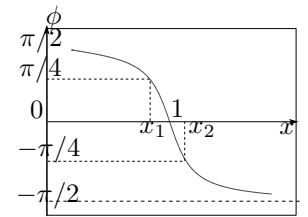


FIGURE D4.2 – (1)+(1)

## I/B Expérience

/5 9 Le montage est valable si le générateur de courant n'impose pas de masse, c'est-à-dire avec un générateur à masse flottante. (1)

◇ Sur la voie A, on visualise la tension  $u_r(t) = r\eta(t)$ . (1) Donc il faut diviser par  $r$  la voie A pour visualiser  $\eta(t)$ . (1)

◇ Sur la voie B, on visualise  $-u(t)$ . (1) Donc il faut inverser la voie B pour visualiser  $u(t)$ . (1)

/4 10 La tension  $u$  est en retard (1) par rapport au courant  $\eta$  car son maximum arrive après celui de la tension  $u_r$ . (1)

Une période du signal  $u_r$  (ou  $u$ ) correspond à un déphasage de  $360^\circ$ . (1) Or ici, une période correspond à 10 carreaux, donc un retard de 1 carreau correspond à un déphasage de  $-36^\circ$ , et on a 2 carreaux de déphasage entre  $u$  et  $u_r$ ; ainsi,  $\phi = -72^\circ$ . (1)

/5 11 L'amplitude de  $u(t)$  correspond à 2 carreaux, donc  $U_0 = 2\text{ V}$ . (1)

Mathématiquement,

$$s_{\text{eff}} \overset{(1)}{=} \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

$s_{\text{eff}}^2$  représente l'énergie moyenne du signal (1); ainsi,  $s_{\text{eff}}$  correspond à l'amplitude constante qui porterait la même énergie moyenne que  $s(t)$ . (1)

/5 12

$$\begin{aligned}
 s(t) &\overset{(1)}{=} S_0 \cos(\omega t) \\
 \Rightarrow \langle s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (S_0^2 \cos^2(\omega t)) dt \\
 \Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle &\overset{(1)}{=} \frac{S_0^2}{2T} \left( \int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Linéarisa}^\circ \\ \text{et} \end{array} \right\} \\
 &\Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle \overset{(1)}{=} \frac{S_0^2}{2T} \left( \underbrace{[t]_0^T}_{=T} + \underbrace{\left[ \frac{S_0}{2\omega} \sin(2\omega t) \right]_0^T}_{=0} \right) \\
 &\Leftrightarrow \boxed{s_{\text{eff}} \overset{(1)}{=} \frac{S_0}{\sqrt{2}}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{u_{\text{eff}} = 1,4\text{ V}} \quad (1)
 \end{aligned}$$

## /37 E2 Monoxyde et dioxyde d'azote (D'après PSI Centrale Supélec 2020)

/6

1

$$x_{\text{O}_2} = 0,2 \quad \text{et} \quad x_{\text{N}_2} = 0,8 = 4 \cdot x_{\text{O}_2}$$

Équation ①+①		$\text{N}_{2(\text{g})}$	+	$\text{O}_{2(\text{g})}$	=	$2\text{NO}_{(\text{g})}$	$n_{\text{tot, gaz}}$ ①	
Initial	$\xi = 0$	$4n_0$		$n_0$		0	$5n_0$	①
Équili.	$\xi_{\text{eq}}$	$4n_0 - \xi_{\text{eq}}$		$n_0 - \xi_{\text{eq}}$		$2\xi_{\text{eq}}$	$5n_0$	①
Final	$\xi_{\text{eq}} \ll n_0$	$\approx 4n_0$		$\approx n_0$		$4,9 \times 10^{-3} n_0$	$5n_0$	+1 Q2

/11

2

Comme  $K_1^\circ \ll 1$ , on peut supposer la réaction quasi-nulle ①, soit

$$\xi_{\text{eq}} \ll n_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{\text{O}_2, \text{eq}} \approx x_{\text{O}_2, 0} \\ x_{\text{N}_2, \text{eq}} \approx x_{\text{N}_2, 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{\text{NO}, \text{eq}} \ll (x_{\text{O}_2, \text{eq}} ; x_{\text{N}_2, \text{eq}})$$

D'après la loi d'action de masse et la loi de DALTON  $p_X = x_X p_{\text{tot}}$  ①,

L'hypothèse est bien vérifiée ①, et on trouve

$$x_{\text{NO}, \text{eq}} = \frac{2\xi_{\text{eq}}}{5n_0} \Leftrightarrow 2\xi_{\text{eq}} = 5x_{\text{NO}, \text{eq}} n_0 \Rightarrow n_{\text{NO}, \text{eq}} \approx 4,9 \times 10^{-3} n_0$$

$$K_1^\circ = \frac{p_{\text{NO}, \text{eq}}^2}{p_{\text{N}_2, \text{eq}} p_{\text{O}_2, \text{eq}}} = \frac{x_{\text{NO}, \text{eq}}^2}{x_{\text{N}_2, \text{eq}} x_{\text{O}_2, \text{eq}}}$$

$$\Leftrightarrow x_{\text{NO}, \text{eq}} = \sqrt{K_1^\circ \cdot x_{\text{N}_2, 0} \cdot x_{\text{O}_2, 0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_1^\circ = 6,0 \times 10^{-6} \\ x_{\text{N}_2, 0} = 0,8 \\ x_{\text{O}_2, 0} = 0,2 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } x_{\text{NO}, \text{eq}} = 9,8 \times 10^{-4} \ll 0,2$$

/7 3 Cette réaction peut être considérée comme quasi-totale car  $K_2^\circ \gg 1$ . ① Avec les ordres partiels indiqués, on trouve

$$v(t) = k[\text{NO}](t)^p \cdot [\text{O}_2](t)^q$$

Or, on a  $[\text{O}_2]_0 \gg [\text{NO}]_0$

$$\Rightarrow [\text{O}_2](t) \approx [\text{O}_2]_0$$

$$\Rightarrow v(t) = k[\text{O}_2]_0^q \cdot [\text{NO}](t)^p$$

$$\Leftrightarrow v(t) = k_{\text{app}}[\text{NO}](t)^p \quad \text{avec} \quad k_{\text{app}} = k[\text{O}_2]_0^q$$

C'est la méthode de **dégénérescence de l'ordre**. ①

/4 4 C'est la **méthode différentielle** ①. Il s'agit de tracer  $\ln(v(t))$  en fonction de  $\ln([\text{NO}](t))$ . En effet, on a alors

$$\ln(v(t)) = p \cdot \ln([\text{NO}](t)) + \ln(k_{\text{app}}) \Leftrightarrow y = a \cdot x + b$$

c'est-à-dire que le coefficient directeur est l'ordre partiel  $p$ , et l'ordonnée à l'origine est  $\ln(k_{\text{app}})$ . En l'occurrence, pour les deux expériences on trouve

$$a \approx 2 \Rightarrow p = 2$$

/4 5 D'après la question 3, on a

$$k_{\text{app},1} = k[\text{O}_2]_{01}^q \quad \text{et} \quad k_{\text{app},2} = k[\text{O}_2]_{02}^q$$

$$\Leftrightarrow \frac{k_{\text{app},1}}{k_{\text{app},2}} = \frac{[\text{O}_2]_{01}^q}{[\text{O}_2]_{02}^q}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{k_{\text{app},1}}{k_{\text{app},2}} = q \ln \frac{[\text{O}_2]_{01}}{[\text{O}_2]_{02}}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{\ln(k_{\text{app},1}) - \ln(k_{\text{app},2})}{\ln([\text{O}_2]_{01}) - \ln([\text{O}_2]_{02})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ln(k_{\text{app},1}) = -3,7841 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ \ln(k_{\text{app},2}) = -4,723 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{01} = 5,0 \times 10^{-3} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{02} = 2,0 \times 10^{-3} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } q = 1,02 \approx 1$$

/2 6 Les ordres partiels sont donc égaux aux coefficient stœchiométriques ; on peut suppose que c'est une **réaction simple** ①, ce qui expliquerait pourquoi elle suit donc la **loi de VAN'T HOFF**. ①

/3 [7] Avec  $q = 1$ , on trouve  $k$  à partir de la connaissance de  $k_{\text{app},1}$  ou  $k_{\text{app},2}$  :

$$\boxed{k = \frac{k_{\text{app},1}}{[\text{O}_2]_{01}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ln(k_{\text{app},1}) = -3,784 \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{01} = 5,0 \times 10^3 \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \end{cases}$$

A.N. :  $k = 4,5 \times 10^{-6} \mu\text{mol}^{-2}\cdot\text{L}^2\cdot\text{min}^{-1} \Rightarrow k = 7,5 \times 10^{10} \text{mol}^{-2}\cdot\text{L}^2\cdot\text{s}^{-1}$

## /52 P1 Suivi cinétique de la formation du dibrome (D'après CCMP MP 2012)

/2 [1] Le dibrome absorbe fortement à la longueur d'onde  $\lambda \approx 400 \text{ nm}$ . Sa couleur correspond à la couleur complémentaire du bleu, soit l'orange.

/8 [2] pour un schéma qui montre que le volume total est  $2V$ . On détermine alors les concentrations initiales  $C_1$  et  $C_2$  en faisant attention au facteur de dilution :

$$C_1 = \frac{C_{01}}{2} = 1,0 \times 10^{-3} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{C_{02}}{2} = 5,0 \times 10^{-3} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

On effectue un tableau d'avancement en concentration :

Équation		$\text{BrO}_3^- (\text{aq})$	+	$5\text{Br}^- (\text{aq})$	+	$6\text{H}_3\text{O}^+ (\text{aq})$	=	$3\text{Br}_2 (\text{aq})$	+	$9\text{H}_2\text{O} (\text{l})$	
Initial	$x = 0$	$C_1$		$C_2$		$C_3$		0		excès	①
Interm.	$x_{\text{eq}}$	$C_1 - x_{\text{eq}}$		$C_2 - 5x_{\text{eq}}$		$C_3 - 6x_{\text{eq}}$		$3x_{\text{eq}}$		excès	①

D'après l'énoncé, 90% des ions  $\text{BrO}_3^-$  ont réagi, donc  $x_{\text{eq}} = 0,9C_1 = 9,0 \times 10^{-4} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . On en déduit les concentrations à l'équilibre :

$$[\text{BrO}_3^-]_{\text{eq}} = 1,0 \times 10^{-4} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{Br}^-]_{\text{eq}} = 5,0 \times 10^{-4} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{Br}_2]_{\text{eq}} = 2,7 \times 10^{-3} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

/6 [3] 
$$v = k[\text{BrO}_3^-]^p(t) \cdot [\text{Br}^-]^q(t) \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]^r(t)$$

On constate que  $[\text{H}_3\text{O}^+]_0 \gg [\text{BrO}_3^-]_0$  et  $[\text{Br}^-]_0 \gg [\text{BrO}_3^-]_0$ . On peut négliger la variation temporelle de la concentration en ions oxonium ainsi que celle en ions bromure. C'est la méthode de la dégénérescence de l'ordre. Dans ces conditions, la loi de vitesse se simplifie :

$$\boxed{v \approx k[\text{Br}^-]_0^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^r \cdot [\text{BrO}_3^-]^p = k_{\text{app}}[\text{BrO}_3^-]^p} \quad \text{avec} \quad \boxed{k_{\text{app}} = k[\text{Br}^-]_0^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^r}$$

/13 [4] Dans chaque cas, la vitesse de la réaction s'écrit  $v(t) = -\frac{1}{1} \frac{dC}{dt}$

◇ Ordre 0 :

$$\begin{aligned} v(t) &= k_{\text{app}} C(t)^0 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} \\ \Leftrightarrow C(t) &= C_0 - k_{\text{app}} t \end{aligned} \quad \int_0^t$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

$\swarrow$   $\searrow$   $\swarrow$   $\searrow$   
 $C(t)$   $-k_{\text{app}}$   $t$   $C_0$

◇ Ordre 1 :

$$\begin{aligned} v(t) &= k_{\text{app}} C(t)^1 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} C(t) \\ \Leftrightarrow C(t) &= C_0 e^{-k_{\text{app}} t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} C(t) &= K e^{rt} \\ C(0) &= C_0 \end{aligned}$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

$\swarrow$   $\searrow$   $\swarrow$   $\searrow$   
 $\ln(C(t)) - k_{\text{app}}$   $t$   $\ln(C_0)$

◇ **Ordre 2 :**

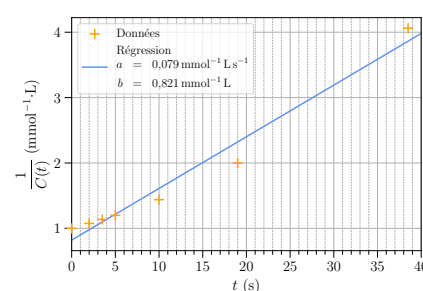
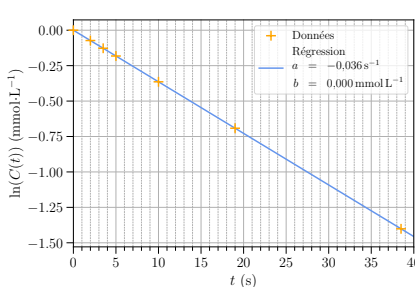
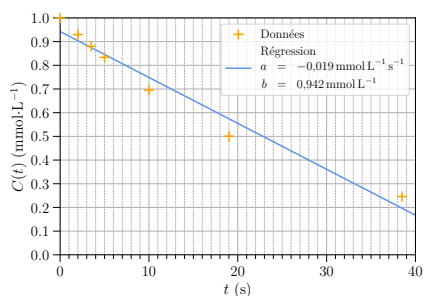
$$\begin{aligned}
 v(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} C(t)^2 \\
 \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} C(t)^2 \\
 \Leftrightarrow -\frac{dC}{C^2} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} dt \quad \left. \vphantom{\frac{dC}{C^2}} \right) \int_0^t \\
 \Leftrightarrow \int_{C_0}^C -\frac{dC}{C^2} &= \int_{t=0}^t k_{\text{app}} dt
 \end{aligned}$$

Or,  $d\left(\frac{1}{f}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{df}{f^2} :$

$$\begin{aligned}
 \Leftrightarrow \int_{C_0}^{C(t)} d\left(\frac{1}{C(t)}\right) &= k_{\text{app}} \cdot \int_{t=0}^t dt \quad \left. \vphantom{\int_{C_0}^{C(t)}} \right) \int_a^b d(\cdot) = [(\cdot)]_a^b \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} &= k_{\text{app}} \cdot t \\
 \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{C} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{C_0} + k_{\text{app}} t}
 \end{aligned}$$

On trace donc

$$\begin{array}{c}
 \textcircled{1} \\
 y = ax + b \\
 \swarrow \quad \downarrow \quad \searrow \quad \swarrow \\
 \frac{1}{C} \quad k_{\text{app}} \quad t \quad \frac{1}{C_0}
 \end{array}$$

/9 **5** On obtient**FIGURE D4.3** – Régression ordre 0. **②****FIGURE D4.4** – Régression ordre 1. **②****FIGURE D4.5** – Régression ordre 2. **②**

La seule régression valide est celle de la Figure **D4.4**, puisque la droite passe effectivement par les points sans déviation particulière **①** : on a donc

$$p = 1 \textcircled{1}$$

De plus, d'après la régression linéaire établie précédemment, on obtient

$$a = -k_{\text{app}} \Rightarrow \underline{k_{\text{app}} = 3,6 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \textcircled{1}}$$

/2 **6** Par définition, on a  $t_{1/2}$  tel que

$$\boxed{C(t_{1/2}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{C(0)}{2}}$$

Ici, avec  $C(0) = 1,0 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ , on trouve  $C(t_{1/2}) = 0,50 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ , et on a donc directement  $t_{1/2}$  dans le Tableau ?? :

$$\underline{t_{1/2} = 19 \text{ s} \textcircled{1}}$$

/9 **7** On pose le système d'équations :

$$\textcircled{1} \quad v_{01} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{01}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{01}^r \quad (4.1)$$

$$\textcircled{1} \quad v_{02} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{02}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{02}^r \quad (4.2)$$

$$v_{03} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{03}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{03}^r \quad (4.3)$$

$$(4.2)/(4.1) \Rightarrow \frac{v_{02}}{v_{01}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left( \frac{[\text{Br}^-]_{02}}{[\text{Br}^-]_{01}} \right)^q$$

car  $[\text{H}_3\text{O}^+]_{02} \stackrel{\textcircled{1}}{=} [\text{H}_3\text{O}^+]_{01}$

$$\Leftrightarrow \boxed{q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\ln(v_{02}/v_{01})}{\ln([\text{Br}^-]_{02}/[\text{Br}^-]_{01})}}$$

A.N. :  $\underline{q = 1} \textcircled{1}$

$$(4.3)/(4.1) \Rightarrow \frac{v_{03}}{v_{01}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{03}}{[\text{H}_3\text{O}^+]_{01}} \right)^r$$

car  $[\text{Br}^-]_{03} \stackrel{\textcircled{1}}{=} [\text{Br}^-]_{01}$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\ln(v_{03}/v_{01})}{\ln([\text{H}_3\text{O}^+]_{03}/[\text{H}_3\text{O}^+]_{01})}}$$

A.N. :  $\underline{r = 2} \textcircled{1}$

/3 [8] D'après [3] et en prenant les données de l'expérience **initiale**, on a

$$k = \frac{k_{\text{app}}}{[\text{Br}^-]_0 \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_{\text{app}} = 3,6 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ [\text{Br}^-]_0 = 0,14 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{H}_3\text{O}^+]_0 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } k \approx 26 \text{ mol}^{-3} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

## /86 P2 Résonance d'un verre (D'après TSI Centrale Supélec 2018)

### II/A Analyse expérimentale des vibrations du verre suite à un choc

/5 [1] On relève les fréquences suivantes :  $f_1 \approx 550 \text{ Hz}$ ,  $f_2 \approx 1090 \text{ Hz}$ ,  $f_3 \approx 1620 \text{ Hz}$  et  $f_4 \approx 2180 \text{ Hz}$ . (1) On remarque donc que l'on a  $f_n = n f_1$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$  (1)

Le premier mode est appelé fondamental. (1) Les autres sont appelés harmoniques de rang  $n$ . (1)

La fréquence du signal est la fréquence de son fondamental, donc ici  $f = 550 \text{ Hz}$ . (1)

/10 [2] (2) pour un beau schéma propre.

(1) ◇ Système : {point M} de masse  $m$

(1) ◇ Référentiel d'étude :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}$  supposé galiléen

(1) ◇ Repère : (O,  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ) avec  $\vec{u}_y$  vertical ascendant

(1) ◇ Repérage :  $\vec{OM} = x(t) \vec{u}_x$ ;  $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$ ;  $\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x$

◇ Bilan des forces :

(1) Poids  $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$

(1) Réaction support  $\vec{R} = R \vec{u}_y$

(1) Force rappel  $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x = -kx(t) \vec{u}_x$

(1) Force frottement  $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$

/5 [3] Avec le PFD :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_r \\ \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x(t) &= 0 \end{aligned}$$

D'où la forme demandée.

/3 [4]  $\omega_0$  est la pulsation propre (0.5) du système, elle s'exprime en rad/s (0.5). Elle correspond à la pulsation à laquelle oscillerait le système s'il n'y avait pas de frottement. (0.5)

$Q$  est appelé facteur de qualité du système. (0.5) Il est sans unité. (0.5) Plus  $Q$  est grand, moins il y a de dissipation d'énergie, plus le système s'approche d'un oscillateur harmonique non amorti. (0.5)

/9 [5] L'équation différentielle est homogène, donc  $x(t) = x_h(t)$ . Pour déterminer  $x_h(t)$ , on injecte la forme générique  $x_h(t) = K e^{rt}$  (1) pour trouver l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0 \quad \text{faible amortissement} \\ \Rightarrow r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4Q^2 - 1} \end{aligned}$$

On identifie  $\omega_0$  et  $Q$  :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \text{et} \quad \frac{\alpha}{m} \omega_0 &= \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Omega \text{ et } \tau$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

/4 [6]

◇ On trouve  $A$  avec la première condition initiale :

$$x(0) = 0 = 1[A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \Rightarrow \boxed{A = 0} \text{ ①}$$

◇ On trouve  $B$  avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\stackrel{\text{①}}{=} -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} B \sin(\Omega t) + e^{-t/\tau} B \Omega \cos(\Omega t) \\ \Rightarrow \left( \frac{dx}{dt} \right)_0 &= \Omega B = V_0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{V_0}{\Omega}} \text{ ①} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{x(t) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{V_0}{\Omega} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)}$$

/4 [7]

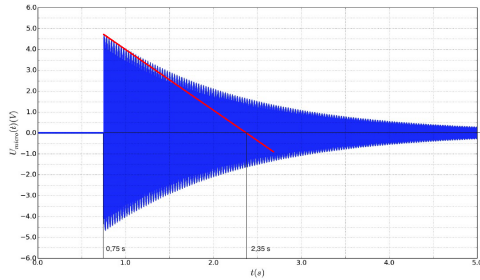


Figure 2 Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre

FIGURE D4.6 – ①+①

On trace la tangente à l'origine de l'enveloppe exponentielle. Elle coupe l'asymptote  $x = 0$  en  $t = \tau$ . On lit donc

$$\tau = t_{\text{its}} - t_0 \Rightarrow \tau \stackrel{\text{①}}{=} 1,6 \text{ s}$$

En effet, sur le graphique, l'excitation a lieu à  $t_0 = 0,75 \text{ s}$  et non  $t = 0$  comme dans la résolution mathématique.

/2 [8] On a déjà vu lors de la résolution de l'équation que  $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ . Or, on remarque que de très nombreuses pseudo-périodes sont visibles, on a donc  $Q \gg 1$ . ① Ainsi,

$$\Omega \approx \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \Rightarrow \boxed{\Omega \stackrel{\text{①}}{\approx} \omega_0}$$

/5 [9] On a relevé précédemment la fréquence du signal  $f = 550 \text{ Hz}$ . ① Comme on a montré que  $\Omega \approx \omega_0$ , on en déduit

$$\boxed{\omega_0 \stackrel{\text{①}}{=} 2\pi f_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 \stackrel{\text{①}}{\approx} 3,5 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

De plus,

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{Q \stackrel{\text{①}}{=} \pi f_0 \tau} \Rightarrow \boxed{Q \stackrel{\text{①}}{\approx} 2,8 \times 10^3}$$

## II/B Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

/4 [10] Cette équation différentielle se résout en prenant la somme de  $x_h(t)$  et d'une solution particulière  $x_p(t)$  ①. Or, on a montré dans la partie précédente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$  ①. Ainsi, en régime permanent, il ne reste que  $x(t) = x_p(t)$ .

Or, l'entrée étant sinusoïdale, il paraît naturel de chercher une sortie sinusoïdale. ① De plus, l'équation différentielle étant linéaire, on s'attend à ce que la pulsation du signal de sortie soit la même que celle du signal d'entrée, sans non-linéarités. ①

/2 [11]  $\underline{X}$  est appelée amplitude complexe associée à  $x(t)$ . ①  $\underline{X} = X e^{j\varphi}$ , on a donc  $|\underline{X}| = X$  et  $\arg(\underline{X}) = \varphi$ . ①

/4 [12] On réécrit l'équation différentielle en complexes :

$$\begin{aligned} &\left( (j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2 \right) \underline{X} \stackrel{\text{①}}{=} \underline{A} = A e^{j\phi} \\ \Leftrightarrow &\left( -\left( \frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1 \right) \underline{X} \stackrel{\text{①}}{=} \frac{A_0}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &\underline{X}(u) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{A_0 e^{j\phi} / \omega_0^2}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \\ \Rightarrow &\underline{X}(u) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{A_0 / \omega_0^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left( \frac{u}{Q} \right)^2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} X(u) = |\underline{X}|$$

/3 [13] On fait une étude en hautes et basses fréquences :

### Basses fréquences

$$X(u) \xrightarrow[u \rightarrow 0]{①} \frac{A_0}{\omega_0^2} \neq 0$$

On en déduit donc qu'il s'agit du graphe 2. ①

/10 [14] Pour qu'il y ait résonance, il faut que  $|X| = X$  passe par un maximum ① pour  $u \neq 0$  ①. Or, le numérateur de  $X(u)$  est constant ① et la fonction racine carrée monotone donc  $X$  passe par un maximum si la fonction  $f(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$  passe par un minimum. ① On cherche donc  $u_r$  tel que la dérivée de  $f(u)$  s'annule :

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{du}\right)_{u_r} &\stackrel{①}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2(-2u_r)(1 - u_r^2) + \frac{2u_r}{Q} &\stackrel{①}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2u_r \left(-2(1 - u_r^2) + \frac{1}{Q^2}\right) &\stackrel{①}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{u_r = 0}_{\text{impossible par définition}} \text{ ou } -2(1 - u_r^2) + \frac{1}{Q^2} &= 0 \end{aligned}$$

### Hautes fréquences

$$X(u) \xrightarrow[u \rightarrow \infty]{①} 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_r^2 = 1 - \frac{1}{2Q^2} &\Leftrightarrow u_r \stackrel{①}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ \text{Possible que si } 1 - \frac{1}{2Q^2} &> 0 \\ \Leftrightarrow Q > \frac{1}{\sqrt{2}} &\stackrel{①}{=} Q_{\text{lim}} \\ \text{On a alors } \omega_r &\stackrel{①}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned}$$

/2 [15] Si  $Q \gg Q_{\text{lim}}$ , alors  $Q \gg 1$ , et on a  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \stackrel{①}{\approx} \omega_0$

Par définition  $X_r = X(\omega_r)$ . D'après la question précédente, on a donc  $X_r \approx X(\omega_0) = X(u = 1)$ , ce qui donne

$$X_r = \frac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} \Leftrightarrow X_r \stackrel{①}{=} Q \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

/2 [16] Les pulsations de coupures sont définies par  $X(\omega_1) = X(\omega_2) = \frac{X_r}{\sqrt{2}}$  ①

L'acuité de la résonance est égale à  $Q$ , soit  $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$  ①

/7 [17]

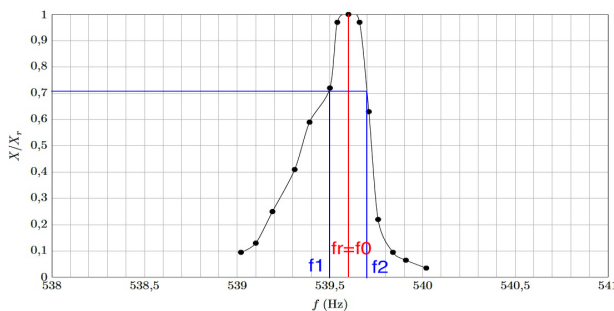


Figure 7 Amplitude relative en fonction de la fréquence

FIGURE D4.7 – ①+①

On a vu précédemment que le système étudié possédait bien un facteur de qualité très élevé, on a donc  $\omega_r \approx \omega_0$ . On relève  $f_r = f_0 = 539,6 \text{ Hz}$  ①, soit  $\omega_0 = 3390 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Les fréquences de coupures, telles que  $X/X_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$  ①, valent respectivement  $f_1 = 539,5 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 539,7 \text{ Hz}$  ①

On en déduit  $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = 2,7 \times 10^3$ . ①

On retrouve bien environ les mêmes valeurs que dans la première partie. ① La détermination de  $\omega_0$  est cependant plus précise au vu de l'échelle du graphique.

/5 [18] Pour briser le verre, il faut le mettre en résonance de sorte à ce qu'il vibre avec une amplitude telle que la déformation du matériau provoque sa rupture. ① Il faut donc l'exciter à la fréquence de 539,6 Hz. ①

Si on a la note La à 440 Hz, alors les notes suivantes dans la gamme ont pour fréquences : ① 466 Hz (La♯), 494 Hz (si), 523 Hz (do) et 554 Hz (do♯).

D'après la courbe, on voit qu'à 554 Hz, la résonance est déjà passée. ① Il faut donc chanter à une fréquence intermédiaire entre celle du Do et du Do♯. En en conclut donc que la CASTAFIORE chante faux lorsqu'elle brise le verre! ①