Mécanique – chapitre 3

Mouvements courbes

Sommaire

Capacités exigibles

- [ ] Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.
- [ ] Vitesse et accélération dans le repère de Frenet pour une trajectoire plane.
- [ ] Coordonnées cylindriques : exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse.
- [ ] Établir les expressions des composantes des vecteurs position, déplacement élémentaire, vitesse et accélération en coordonnées cylindriques.
- [ ] Mouvement circulaire uniforme et non uniforme : exprimer les composantes du vecteur position, du vecteur vitesse et du vecteur accélération en coordonnées polaires planes.
- [ ] Exploiter les liens entre les composantes du vecteur accélération, la courbure de la trajectoire, la norme du vecteur vitesse et sa variation temporelle.
- [ ] Établir l'équation du mouvement du pendule simple. Justifier l'analogie avec l'oscillateur harmonique dans le cadre de l'approximation linéaire.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Théorèmes

Preuves

Rappels

Applications

Remarques

Exemples

Outils

Points importants

Erreurs communes

I Mouvement courbe dans un plan

I/A Position en coordonnées polaires

Définition M3.1 : Repère polaire et vecteur position

Le repère polaire est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis deux vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ tels que :

- $\overrightarrow{u_r}$ dans la direction $\overrightarrow{\text{OM}}$
- $\overrightarrow{u_\theta} \perp \overrightarrow{u_r}$ dans le sens direct
- $\boxed{\overrightarrow{\text{OM}}(t) = r(t)\,\overrightarrow{u_r}}$ et $\boxed{\|\overrightarrow{\text{OM}}\|(t) = r(t)}$

$\boxed{\overrightarrow{u_r} \textbf{ et } \overrightarrow{u_\theta} \textbf{ dépendent de } \theta(t) \textbf{ donc du temps}}$

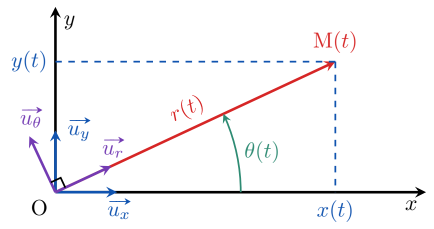


Figure M3.1 – Polaires

Attention M3.1 : Variables vs. coordonnées

Il faut opérer la distinction entre les **variables** servant à repérer le point et les **coordonnées** dans la base de projection. Ici, les variables sont $r(t)$ et $\theta(t)$, mais dans la base $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$, on a

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ 0 \end{pmatrix} = r(t)\,\overrightarrow{u_r} \quad \textbf{ET PAS} \quad \cancel{\overrightarrow{\text{OM}}(t) = \begin{pmatrix} r(t) \\ \theta(t) \end{pmatrix} = r(t)\,\overrightarrow{u_r} + \underbrace{\theta(t)\,\overrightarrow{u_\theta}}_{\text{pas homogène !}}}$$

Propriété M3.1 : Lien polaires/cartésiennes

Les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ variables se décomposent sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$ fixes tels que

$$\boxed{\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta(t))\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta(t))\,\overrightarrow{u_y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{u_r} = -\sin(\theta(t))\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta(t))\,\overrightarrow{u_y}}$$

d'où en cartésiennes pour un point M :

$$x(t) = r(t)\cos(\theta(t)) \quad \text{et} \quad y(t) = r(t)\sin(\theta(t)) \quad \text{soit} \quad \|\overrightarrow{\text{OM}}\|(t) = r(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2}$$

Démonstration M3.1 : Lien polaires/cartésiennes

On projette les vecteurs de la base polaire sur la base cartésienne en appliquer la méthode de vraisemblance ou par définition du produit scalaire, d'où la propriété. On a alors :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) = r(t)\,\overrightarrow{u_r} \Leftrightarrow \overrightarrow{\text{OM}}(t) = \underbrace{r(t)\cos(\theta(t))}_{=x(t)}\,\overrightarrow{u_x} + \underbrace{r(t)\sin(\theta(t))}_{=y(t)}\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{\text{OM}}\|(t) = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2} = \sqrt{r(t)^2\underbrace{\left(\cos^2(\theta(t)) + \sin^2(\theta(t))\right)}_{=1}} = r(t) \quad \blacksquare$$

I/B Variation temporelle des vecteurs de base

Outils M3.1 : Dérivée composée en physique

En physique, on a l'habitude (mathématiquement valable) de penser les dérivées comme des fractions. Ainsi, on peut traiter la dérivée d'une composition en faisant intervenir d'autres dérivée par une écriture fractionnaire. Par exemple :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cos(\theta(t))) = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\theta}(\cos(\theta(t))) = -\dot{\theta}(t)\sin(\theta(t))$$

Propriété M3.2 : Dérivées de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$

La variation temporelle des vecteurs de la base polaire est :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_r}}$$

Démonstration M3.2 : Dérivées de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$

Géométriquement

On représente les deux vecteurs après un petit temps $\mathrm{d}t$, c'est-à-dire augmentés d'un angle $\mathrm{d}\theta$:

$$\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r} = \underbrace{\|\overrightarrow{u_r}\|}_{=1}\cdot\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta} = \underbrace{\|\overrightarrow{u_\theta}\|}_{=1}\cdot\mathrm{d}\theta\,(-\overrightarrow{u_r})$$

Soit $$\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_r}$$ ■

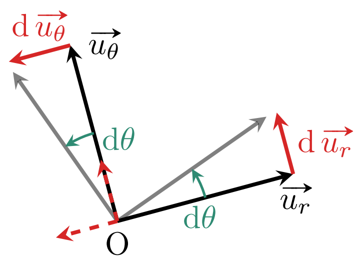


FIGURE M3.2 – d $\overrightarrow{u_r}$ et d $\overrightarrow{u_\theta}$

Mathématiquement

On part des décompositions dans la base cartésienne et on dérive :

$\boxed{\overrightarrow{u_r}}$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\sin(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y} && \text{Composée} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \dot{\theta}\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y} && \text{Factorisa°} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\underbrace{(-\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y})}_{=\overrightarrow{u_\theta}} && \text{Identifica°} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}
\end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)$ ■

$\boxed{\overrightarrow{u_\theta}}$

$$\begin{aligned}
&\overrightarrow{u_\theta} = -\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\,\overrightarrow{u_y} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(-\sin(\theta))}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}\cos(\theta)}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y} && \text{Composée} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} - \dot{\theta}\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y} && \text{Facto.} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\underbrace{(\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\,\overrightarrow{u_y})}_{=\overrightarrow{u_r}} && \text{Identif.} \\
\Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)$ ■

I/C Déplacement élémentaire en polaires

Propriété M3.3 : Déplacement élémentaire polaire

En coordonnées polaires, le déplacement élémentaire s'exprime

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r(t)\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

Démonstration M3.3 : Déplacement élémentaire polaire

On trouve la composante de $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sur $\overrightarrow{u_r}$ en fixant θ et on incrémente la variable r de $\mathrm{d}r$.

La distance ainsi obtenue est $\mathrm{d}r$ sur $\overrightarrow{u_r}$.

On trouve la composante de $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sur $\overrightarrow{u_\theta}$ en fixant r et on incrémente la variable θ de $\mathrm{d}\theta$.

La distance ainsi obtenue est $r(t)\,\mathrm{d}\theta$ sur $\overrightarrow{u_\theta}$.

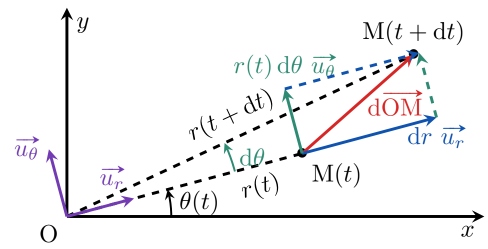


Figure M3.3 – $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ polaire

I/D Vitesse en coordonnées polaires

Propriété M3.4 : Vitesse en coordonnées polaires

La vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r} + r(t)\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

Démonstration M3.4 : Vitesse en polaires

Ici aussi, il y a deux manières d'obtenir l'expression de la vitesse.

Dérivée

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}(r(t)\,\overrightarrow{u_r})}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r} + r(t)\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} \Leftrightarrow \vec{v}(t) = \dot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r} + r(t)\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \blacksquare$$

Rapport

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r(t)\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_r} + r(t)\frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \blacksquare$$

I/E Accélération

Démonstration M3.5 : Accélération en polaires

Par définition,

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r} + r(t)\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\Leftrightarrow \vec{a} = \ddot{r}(t)\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}(t)\underbrace{\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}}_{=\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta}} + \dot{r}(t)\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta} + r(t)\ddot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_\theta} + r(t)\dot{\theta}(t)\underbrace{\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}}_{=-\dot{\theta}(t)\,\overrightarrow{u_r}} \quad \blacksquare$$

Propriété M3.5 : Accélération en coordonnées polaires

Finalement, la vitesse en coordonnées polaires s'écrit

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

II Exemples de mouvements plans

II/A Mouvement circulaire

Définition M3.2 : Mouvement circulaire

Un mouvement est dit **circulaire** s'il se fait dans un plan, à une distance de l'axe de rotation r constante, soit

$$r(t) = \text{cte} = R$$

Implication M3.1 : Mouvement circulaire

Dans ce cas-là, on a

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = R\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{et} \quad \dot{r}(t) = 0 = \ddot{r}(t)$$

En notant $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$ la vitesse angulaire, la vitesse et l'accélération donnent

$$\boxed{\vec{v}(t) = R\omega(t)\,\overrightarrow{u_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a}(t) = -R\omega^2(t)\,\overrightarrow{u_r} + R\dot{\omega}(t)\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

II/B Mouvement circulaire uniforme

Définition M3.3 : Mouvement circulaire uniforme

Un mouvement est dit **circulaire *uniforme*** si c'est un mouvement circulaire ($r(t) = \text{cte}$) à *vitesse angulaire constante*, soit

$$r(t) = R \quad \text{et} \quad \dot{\theta}(t) = \omega_0$$

Implication M3.2 : Mouvement circulaire uniforme

Dans ce cas, $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$ mais également $\ddot{\theta} = 0$, donc la vitesse et l'accélération donnent

$$\boxed{\vec{v}(t) = R\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a}(t) = -R{\omega_0}^2\,\overrightarrow{u_r}}$$

II/C Repère de Frenet

Définition M3.4 : Repère de Frenet

Soit un point M sur une trajectoire courbe d'origine O. On approxime sa trajectoire à un instant t par son **cercle osculateur**, de **rayon de courbure** $R(t)$. D'où le repère de Frenet :

- $\overrightarrow{u_T}$ tangent à la trajectoire en M ;
- $\overrightarrow{u_N} \perp \overrightarrow{u_T}$ dirigé vers le centre.

$\gamma(t) = 1/R(t)$ s'appelle la **courbure** de la trajectoire.

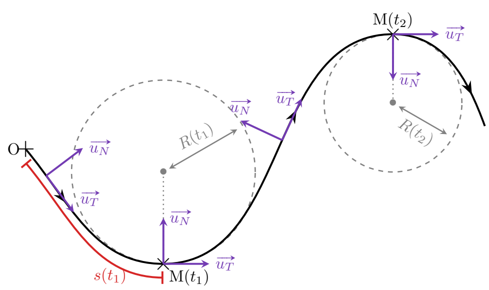


Figure M3.4 – Frenet

Propriété M3.6 : Vitesse et accélération Frenet

La vitesse et l'accélération dans le repère mobile de Frenet s'expriment :

$$\boxed{\vec{v}(t) = v(t)\overrightarrow{u_T}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\overrightarrow{u_T} + \frac{v(t)^2}{R(t)}\overrightarrow{u_N}}$$

Démonstration M3.6 : Vitesse et accélération Frenet

Soit $s(t)$ la distance parcourue sur la courbe de la trajectoire $\mathcal{C}$ depuis l'origine O. On l'appelle **abscisse curviligne**, telle que

$$s(t) = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}s$$

Vitesse

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\mathrm{d}t) + \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{O}} = \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)} = \mathrm{d}s\,\overrightarrow{u_T}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{u_T} = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}s} \Rightarrow \vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}}_{=v(t)} \underbrace{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}s}}_{=\overrightarrow{u_T}} \qquad \blacksquare$$

Accélération

De plus, $$\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} = \dot{v}(t)\overrightarrow{u_T} + v(t)\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_T}}{\mathrm{d}t}$$

Or, $\mathrm{d}\overrightarrow{u_T} = \mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_N}$ et $\mathrm{d}s = R(t)\,\mathrm{d}\theta$ soit $\dfrac{\mathrm{d}s}{R(t)}\overrightarrow{u_N}$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_T}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{R(t)}\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_N} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_T}}{\mathrm{d}t} = \frac{v(t)}{R(t)}\overrightarrow{u_N}}$$

D'où $$\boxed{\vec{a}(t) = \dot{v}(t)\overrightarrow{u_T} + \frac{v(t)^2}{R(t)}\overrightarrow{u_N}} \qquad \blacksquare$$

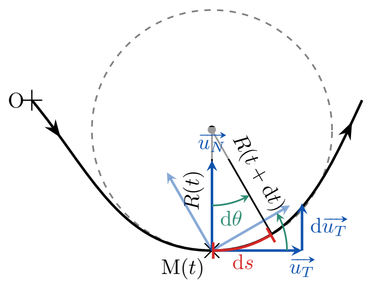


Figure M3.5 – $\mathrm{d}\overrightarrow{u_T}$

Remarque M3.1 : Cas limites repère de Frenet

- On retrouve le mouvement rectiligne uniforme avec $R = +\infty \Leftrightarrow \gamma = 0$, puisqu'on a alors

$$\vec{a} = \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_T}$$

  avec $\overrightarrow{u_T}$ dans le sens de la trajectoire.

- On retrouve également le mouvement circulaire puisque dans ce cas la trajectoire **est** le cercle osculateur, donc $\overrightarrow{u_T} = \overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{u_N} = -\overrightarrow{u_r}$.

III Application : pendule simple

III/A Tension d'un fil

Définition M3.5 : Tension d'un fil

Un point matériel M accroché à un fil tendu subit de la part de ce fil une force appelée **tension du fil** et notée $\vec{T}$ telle que

$$\boxed{\vec{T} = \|\vec{T}\|\,\overrightarrow{u_r}}$$

avec $\overrightarrow{u_r}$ un vecteur unitaire dirigé **du point M vers le fil** et $\|\vec{T}\|$ la norme de la tension du fil.

Important M3.1 : Condition de support

La condition de tension est $\|\vec{T}\| > 0$.

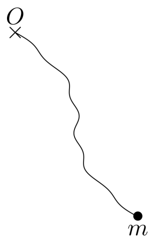


Figure M3.6 – Fil détendu : pas de force.

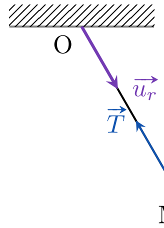


Figure M3.7 – Fil tendu : force vers O.

III/B Pendule simple

Et si je vous disais qu'on peut mesurer l'attraction de la pesanteur… avec un bout de ficelle et une masse ?

1 **De quoi parle-t-on ?** On étudie le mouvement d'une masse de 20 g suspendue à un fil, dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. La masse est écartée de sa position d'équilibre et lâchée sans vitesse initiale.

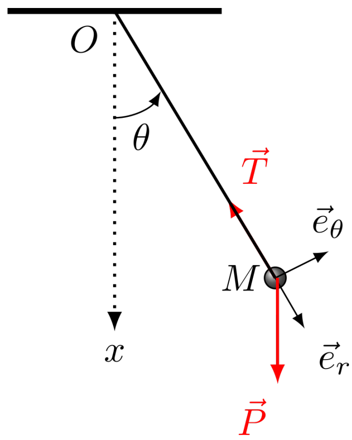


Figure M3.8 – Schéma

2 **Schéma.**

3 **Modélisation.** On choisit d'utiliser des coordonnées polaires.

- ◇ La masse est assimilée à un point matériel M.
- ◇ Origine : point d'accroche du fil (centre de rotation pendule).
- ◇ Repère : $(O, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ avec base polaire (voir schéma).
- ◇ t initial : moment du lâché, $\theta(0) = \theta_0$ et $\theta(0) = 0$.

4 **Bilan des forces.**

$$\begin{aligned} &\textbf{Poids} && \vec{P} = m\vec{g} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta}) \\ &\textbf{Tension} && \vec{T} = -T\,\vec{u_r} \end{aligned}$$

5 **PFD.**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$$

Le mouvement étant circulaire (mais pas uniforme), on a

$$\vec{a} = -\ell\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} + \ell\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$

6 **Équations scalaires.** On projette le PFD sur les axes :

$$\begin{cases} -m\ell\dot{\theta}^2 = mg\cos\theta - T \\ m\ell\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

7 **Résolution.** La première équation n'est pas utilisable telle qu'elle, puisque T n'est pas connue ; cependant la seconde donne une équation différentielle homogène :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$$

qui constitue l'équation du mouvement du pendule. Sous cette forme, elle est **non-linéaire** donc non résoluble analytiquement ; elle peut l'être numériquement, voir `Capytale`[1].

En revanche, dans l'approximation des petits angles, on a $\sin\theta \approx \theta$, et ainsi on obtient :

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\theta = 0}$$

C'est l'équation différentielle d'un oscillateur harmonique ! On met donc en évidence la pulsation propre

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$$

et on a la solution générale homogène :

$$\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On obtient A et B avec les CI,

$$\theta(0) = \theta_0 \Leftrightarrow A \times 1 + B \times 0 = \theta_0 \quad \text{donc} \quad \boxed{A = \theta_0}$$
$$\dot{\theta}(0) = 0 \Leftrightarrow -A\omega_0 \times 0 + B\omega_0 \times 1 = 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{B = 0}$$

et finalement $\boxed{\theta(t) = \theta_0\cos(\omega_0 t)}$ Le pendule oscille à la pulsation ω_0 et à la période T_0 telles que

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}} \quad \text{et} \quad T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}} \quad \text{donc} \quad \boxed{g = \frac{4\pi^2\ell}{{T_0}^2}}$$

Dans cette approximation, la période ne dépend **ni de la masse, ni de l'angle initial**. En réalité, si on s'écarte beaucoup de la verticale ($|\theta| > \pi/4$), la période change et n'est plus celle que l'on a aux petits angles. Voir le changement sur le graphique ci-dessous et en ligne[2].

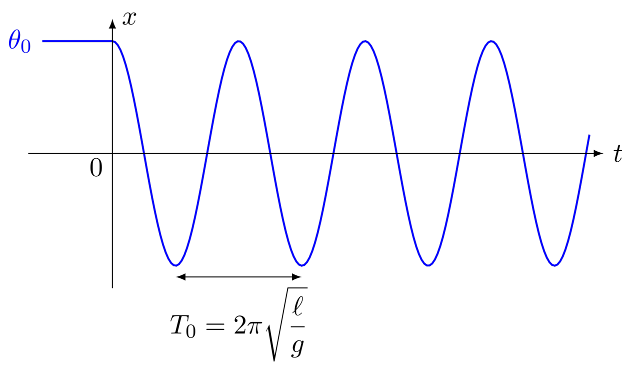


FIGURE M3.9 – $\theta(t)$ pour petits angles.

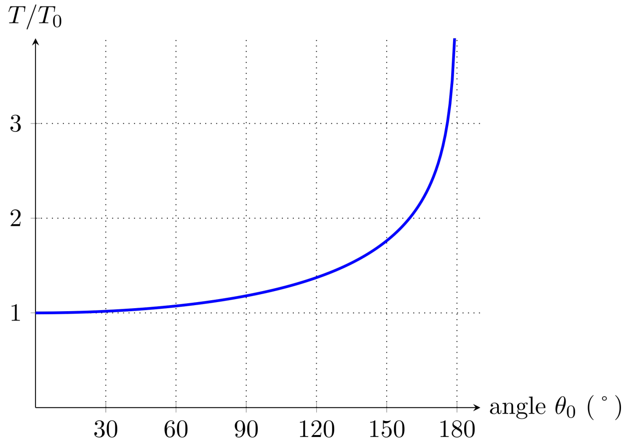


FIGURE M3.10 – Évolution de T selon θ_0.

Application M3.1 : Mesure de g par un pendule

Ainsi, avec un fil de longueur $\ell = (0{,}84 \pm 0{,}06)$ cm, on mesure une période de $T_0 = (1{,}84 \pm 0{,}10)$ s.

D'où $\boxed{g = 9{,}75\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}}$

Expérience M3.1 : Transition

S'il existe de nombreux mouvements plans, il est nécessaire de pouvoir décrire des mouvements de rotation qui ne restent pas dans un plan mais évoluent dans l'espace 3D.

1. https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/a7c5-1241282
2. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Oscillateurs/periode_pendule.php

IV Mouvement courbe dans l'espace

IV/A Coordonnées cylindriques

La manière la plus simple de passer du plan à l'espace est de prendre les coordonnées polaires et d'y ajouter la coordonnée cartésienne z : on définit ainsi les coordonnées **cylindriques**.

Définition M3.6 : Repère cylindrique et vecteur position

Le repère cylindrique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$, avec $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ la base polaire et $\overrightarrow{u_z}$ le vecteur de base cartésienne tel que $\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta} = \overrightarrow{u_z}$.

En appelant H le projeté orthogonal de M sur le plan polaire, on a

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OH}} + \overrightarrow{\mathrm{HM}} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}} \quad \text{et} \quad \boxed{\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\| = \sqrt{r^2 + z^2}}$$

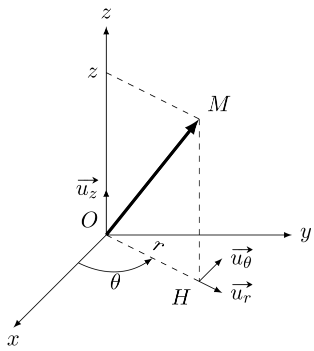


Figure M3.11 – Cylindriques.

La détermination de la vitesse et de l'accélération est la même qu'en polaires, il suffit d'ajouter les dérivées de z puisque $\overrightarrow{u_z}$ est fixe dans le temps. Ainsi,

Important M3.2 : Bilan : coordonnées cylindriques

- **Coordonnées :** (r,θ,z)
- **Vecteurs de base :** $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$
- **Position :** $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$
- **Vitesse :** $\overrightarrow{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\,\overrightarrow{u_z}$
- **Déplacement élém. :** $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$
- **Accélération :** $\overrightarrow{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\,\overrightarrow{u_z}$

Une conséquence fondamentale du déplacement élémentaire est de pouvoir définir une surface et un volume infinitésimaux suivant une variation infinitésimale des trois coordonnées.

En effet, pour une petite variation $(\mathrm{d}r\,,\mathrm{d}\theta\,,\mathrm{d}z)$, on se déplace de $\mathrm{d}r$ dans la direction $\overrightarrow{u_r}$, de $\mathrm{d}z$ dans la direction $\overrightarrow{u_z}$ et l'arc de cercle formé par la variation d'angle $\mathrm{d}\theta$ est de longueur $r\,\mathrm{d}\theta$.

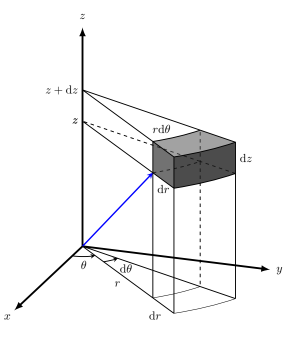


Figure M3.12 – $\mathrm{d}V$ cylindriques.

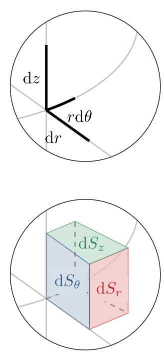


Figure M3.13 – Zoom volume.

Le volume élémentaire est alors le **produit de trois composantes de** $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$:

$$\boxed{\mathrm{d}V = r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}z}$$

On trouve le volume d'un cylindre de rayon R et de hauteur h en intégrant sur les trois coordonnées :

$$V_{\text{cyl}} = \iiint_{r,\theta,z} \mathrm{d}V = \int_{r'=0}^{R} r'\,\mathrm{d}r' \int_{\theta'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\theta' \int_{z'=0}^{h} \mathrm{d}z' = \frac{1}{2}R^2 \times 2\pi \times h = \boxed{h\pi R^2}$$

C'est l'aire d'un disque multiplié par la hauteur !

Attention M3.2 : Choix des coordonnées

Dans un problème de mécanique, on choisit les coordonnées judicieusement en fonction des symétries du système. **Sauf proposition de l'énoncé**, on utilisera les coordonnées **cylindriques** pour les mouvements de **rotation**. On utilisera les coordonnées cartésiennes sinon.

IV/B Coordonnées sphériques

La manière la plus complète de décrire un mouvement général dans l'espace repose sur un dernier système de coordonnées, les coordonnées **sphériques**.

Définition M3.7 : Repère sphérique

Le repère sphérique est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs, $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_\varphi})$, tels que

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r\,\overrightarrow{u_r}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\theta = (\widehat{\overrightarrow{u_z},\overrightarrow{\mathrm{OM}}})} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = (\widehat{\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{\mathrm{OP}}})}$$

où $(\widehat{\cdot,\cdot})$ est l'**angle orienté**, et P le projeté orthogonal de M sur le plan polaire. φ **correspond à** θ **des coordonnées polaires.**

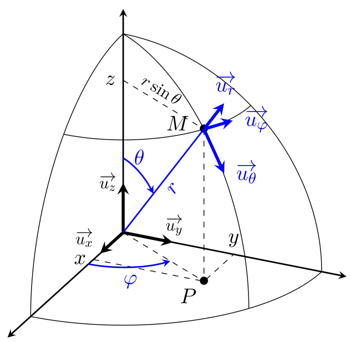


FIGURE M3.14 – Sphériques.

◇ $\theta \in [0\ ;\ \pi]$ est nommé **colatitude** ($\lambda = |\pi/2 - \theta|$ la latitude) , et respecte

$$\tan\theta = \frac{\mathrm{OP}}{z} \Leftrightarrow \theta = \arctan\left(\frac{\sqrt{x^2+y^2}}{z}\right)$$

◇ $\varphi \in [0\ ;\ 2\pi]$ est nommé **longitude**, et respecte $\varphi = \arctan\left(\dfrac{y}{x}\right)$.

◇ Une courbe $\theta =$ cte est appelée **parallèle** ; le **rayon** d'un parallèle est $\boxed{r\sin\theta}$.

◇ Une courbe $\varphi =$ cte est appelée **méridien** ; le **rayon** d'un méridien est $\boxed{r}$.

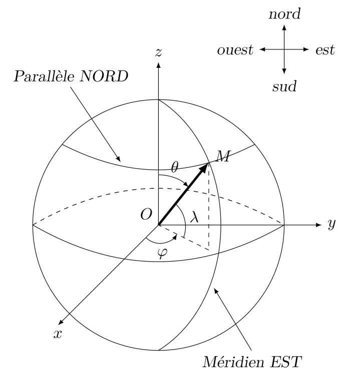
On peut inverser les définitions en prenant $x = \mathrm{OP}\cos\varphi$ et $y = \mathrm{OP}\sin\varphi$, pour avoir

$$\boxed{x = r\sin\theta\cos\varphi} \quad , \quad \boxed{y = r\sin\theta\sin\varphi} \quad \text{et} \quad \boxed{z = r\cos\theta}$$

Exemple M3.1 : Repérage sphérique sur Terre

Le repérage sur la Terre utilise la latitude et la longitude. Par exemple, le lycée POTHIER se situe à 47,90°N, 1,90°E ; on a donc

$$\theta_{\text{POTHIER}} = 42{,}1° \quad \text{et} \quad \varphi_{\text{POTHIER}} = 1{,}90°$$



Propriété M3.7 : Déplacement élémentaire sphérique

- ◇ Variation $\mathrm{d}r \Rightarrow$ déplace$^{\underline{t}}$ $\mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r}$;
- ◇ Variation $\mathrm{d}\theta \Rightarrow$ déplace$^{\underline{t}}$ $r\,\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta}$;
- ◇ Variation $\mathrm{d}\varphi \Rightarrow$ déplace$^{\underline{t}}$ $r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}$.

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\ \overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\ \overrightarrow{u_\theta} + r\sin\theta\,\mathrm{d}\varphi\ \overrightarrow{u_\varphi}}$$

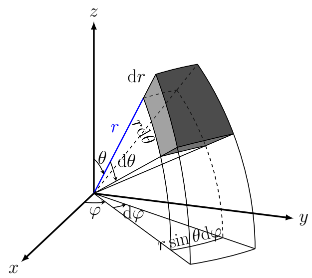


FIGURE M3.15 – $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sphériques

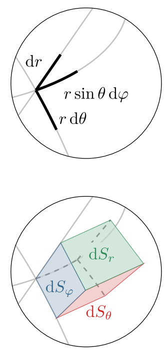


FIGURE M3.16 – Zoom volume.

On trouve de la même manière le volume élémentaire :

$$\boxed{\mathrm{d}V = r^2 \sin(\theta)\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\varphi}$$

Il permet de déterminer le volume d'une boule :

$$V_{\text{boule}} = \iiint_{r,\theta,\varphi} = \int_{r'=0}^{R} r'^2\,\mathrm{d}r' \int_{\theta'=0}^{\pi} \sin\theta'\,\mathrm{d}\theta' \int_{\varphi'=0}^{2\pi} \mathrm{d}\varphi = \int_{r'=0}^{R} 4\pi r'^2\,\mathrm{d}r = \boxed{\frac{4}{3}\pi R^3}$$