

EXERCICE : Etude d'une lunette de Galilée :**(≈ 36 pts)**

Q1. Un système afocal est tel que le foyer image de la 1^{ère} lentille soit confondu avec le foyer objet de la 2^{de}. Alors $\overline{F'_1} = \overline{F_2}$; Soit $\overline{F'_1 F_2} = 0$.

D'après la relation de Chasles, on a : $\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 O_2}$.

Or $\overline{O_1 F'_1} = f'_1 = \frac{1}{v_1}$ et $\overline{F_2 O_2} = \overline{O_2 F'_2} = f'_2 = \frac{1}{v_2}$.

Il vient donc : $\overline{O_1 O_2} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$.

AN : ATTENTION : La lentille (L_2) est divergente, donc $V_2 = -50 \delta$.

$\overline{O_1 O_2} = \frac{1}{1,33} + \frac{1}{-50}$; On obtient : $\overline{O_1 O_2} \approx 0,73 \text{ m} \approx 73 \text{ cm}$.

Q2. On cherche la position de l'image de O_1 à travers la lentille (L_2).

Relation de Descartes à (L_2) : $\frac{1}{\overline{O_2 O'_1}} - \frac{1}{\overline{O_2 O_1}} = \frac{1}{f'_2} = V_2$

Soit $\frac{1}{\overline{O_2 O'_1}} = \frac{1}{\overline{O_2 O_1}} + V_2 = \frac{1 + V_2 \overline{O_2 O_1}}{\overline{O_2 O_1}}$; Ainsi : $\overline{O_2 O'_1} = \frac{\overline{O_2 O_1}}{1 + V_2 \overline{O_2 O_1}}$.

AN : $\overline{O_2 O'_1} = -0,731 / (1 + 50 \times 0,73)$; On obtient : $\overline{O_2 O'_1} \approx -0,0195 \text{ m} \approx -1,95 \text{ cm}$.

Cette **image est donc virtuelle pour la lentille (L_2)** ; On ne **peut donc pas y placer l'œil**.

On cherche aussi la dimension de l'image. Formule du grandissement transversal : $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

Ici, il vient : $\frac{D'_1}{D_1} = \left| \frac{\overline{O_2 O'_1}}{\overline{O_2 O_1}} \right|$; Soit : $D'_1 = D_1 \left| \frac{\overline{O_2 O'_1}}{\overline{O_2 O_1}} \right|$.

AN : $D'_1 = 10 \frac{1,95}{73}$; On obtient : $D'_1 \approx 0,27 \text{ cm} \approx 2,7 \text{ mm}$.

Q3.a. Sur le schéma : $f'_1 = 75 \text{ cm}$; $f'_2 = -2 \text{ cm}$; $\overline{O_1 O_2} = 73 \text{ cm}$.

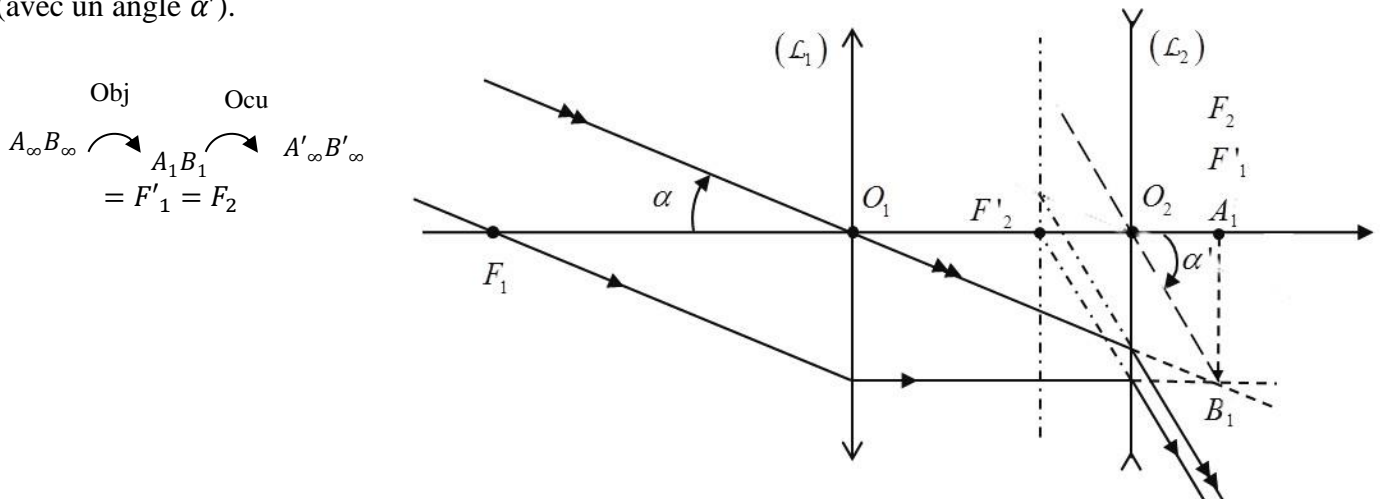
Donc le foyer image de (L_1) confondu avec le foyer objet de (L_2) est à droite de (L_2) ; Cohérent puisque (L_2) est divergente.

On notera $A_1 B_1$ l'image intermédiaire à travers (L_1) et $A' B'$ l'image définitive.

Il est judicieux de tracer le rayon initial passant par O_1 (avec un angle α) qui n'est pas dévié et son parallèle passant par F_1 qui émerge de (L_1) en étant parallèle à l'axe optique. Et comme il est parallèle à l'axe optique avant (L_2), il sort du système optique en passant par F'_2 (son prolongement).

Par construction de la lunette (objet à l'infini), l'image intermédiaire $A_1 B_1$ se trouve dans le plan focal image de (L_1) et donc aussi dans le plan focal objet de (L_2). On a donc $A_1 = F'_1 = F_2$; Ces 3 points sont confondus.

Et toujours par construction, l'image définitive est à l'infini, donc les rayons émergent parallèles entre eux (avec un angle α').



Q3.b. On cherche l'expression de $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$.

Dans l'approximation de Gauss, les angles sont petits, ainsi :

$$\tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_1 F'_1}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_1} = V_1 \times \overline{A_1 B_1} \quad (\alpha < 0 \text{ et } \overline{A_1 B_1} < 0)$$

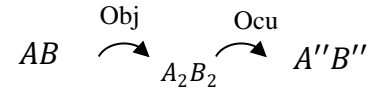
$$\text{Et } \tan(\alpha') \approx \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{F'_2 O_2}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{-\overline{O_2 F'_2}} = -\frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_2} = -V_2 \times \overline{A_1 B_1} \quad (\alpha' < 0)$$

$$\text{D'où } \boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{V_2}{V_1}};$$

$$\text{AN : } G = -\frac{-50}{1,33}; \text{ On obtient : } \underline{G \approx 37,6}.$$

Q4. Question plus difficile !!

Soit $\overline{A_2 B_2}$ l'image de \overline{AB} à travers l'objectif et $\overline{A'' B''}$ l'image de $\overline{A_2 B_2}$ à travers l'oculaire.



On nous précise que l'œil est à 1,5 cm derrière (L_2) et qu'il voit une image située à $d_m = 25$ cm.

$$\text{Alors } \underline{\overline{O_2 A''} = 1,5 - 25 = -23,5 \text{ cm.}}$$

Méthode : En appliquant la relation de Descartes à (L_2), on va obtenir $\overline{O_2 A_2}$.

Puis on va utiliser une relation de Chasles pour obtenir $\overline{O_1 A_2}$ et enfin une relation de Descartes à (L_1) pour obtenir $\overline{O_1 A}$ que l'on cherche.

$$\text{Relation de Descartes à } (L_2) : \frac{1}{\overline{O_2 A''}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_2}} = V_2.$$

$$\text{Soit } \frac{1}{\overline{O_2 A_2}} = \frac{1}{\overline{O_2 A''}} - V_2 = \frac{1 - V_2 \overline{O_2 A''}}{\overline{O_2 A''}} \text{ et } \boxed{\overline{O_2 A_2} = \frac{\overline{O_2 A''}}{1 - V_2 \overline{O_2 A''}}}.$$

$$\text{AN : } \overline{O_2 A_2} = \frac{-0,235}{1 - (-50) \times (-0,235)}. \text{ On obtient : } \underline{\overline{O_2 A_2} \approx +0,0219 \text{ m} \approx 2,19 \text{ cm.}}$$

$$\text{Relation de Chasles : } \boxed{\overline{O_1 A_2} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A_2}}.$$

$$\text{AN : } \overline{O_1 A_2} = 73 + 2,19; \text{ On obtient : } \underline{\overline{O_1 A_2} \approx 75,19 \text{ cm.}}$$

$$\text{Relation de Descartes à } (L_1) : \frac{1}{\overline{O_1 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1} = V_1$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{\overline{O_1 A_2}} - V_1 = \frac{1 - V_1 \overline{O_1 A_2}}{\overline{O_1 A_2}} \text{ et } \boxed{\overline{O_1 A} = \frac{\overline{O_1 A_2}}{1 - V_1 \overline{O_1 A_2}}}.$$

$$\text{AN : } \overline{O_1 A} = \frac{0,7519}{1 - 1,333 \times 0,7519}; \text{ On obtient : } \underline{\overline{O_1 A} \approx -329 \text{ m.}}$$

Q5. L'œil peut donc voir tous les objets situés entre l'infini et 300 m devant l'objectif de la lunette.

PROBLEME 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie :

(≈ 64 pts)

Q1. Il faut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure f_c faible devant 4 kHz afin de conserver la composante continue et supprimer le signal sinusoïdal de fréquence 4 kHz.

On choisira, par exemple, $f_c \approx \frac{4000}{10} \approx 400 \text{ Hz}$.

Q2. Schéma électrique équivalent en BF :

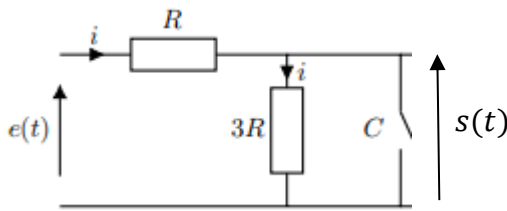
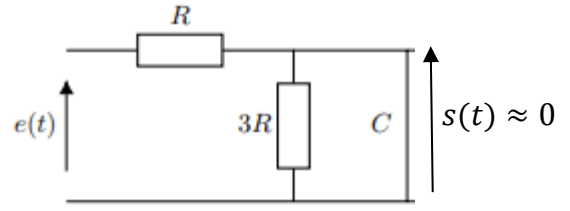


Schéma électrique équivalent en HF :



En BF : Les résistances R et $3R$ sont en série :

Pont diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{3R}{3R+R} = \frac{3}{4} = \text{cste}$; $G_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB} = \text{cste}$.

En HF : $\underline{H} = \frac{s}{e} \approx 0$ et $G_{dB} \rightarrow -\infty$.

Conclusion : C'est un filtre passe-bas.

Q3. On calcule \underline{Z}_{eq} équivalent à $3R$ et C en parallèle à la sortie :

On a alors : $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{3R \times \frac{1}{jC\omega}}{3R + \frac{1}{jC\omega}}$; Soit $\underline{Z}_{eq} = \frac{3R}{1+j3RC\omega}$.

Ainsi, \underline{Z}_{eq} est en série avec R : Pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R} = \frac{\frac{3R}{1+j3RC\omega}}{R + \frac{3R}{1+j3RC\omega}} = \frac{3R}{R(1+j3RC\omega) + 3R} = \frac{3}{4+j3RC\omega}$$

$$\text{Soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{3}{4+j3RC\omega} = \frac{3}{4(1+j\frac{3RC\omega}{4})} = \frac{3/4}{1+j\frac{3RC\omega}{4}}$$

De la forme : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ si $H_0 = \frac{3}{4}$ et $\omega_0 = \frac{4}{3RC}$.

H_0 est la fonction de transfert statique et ω_0 la pulsation propre.

C'est un filtre passe bas du 1^{er} ordre.

Q4. Par définition, $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$.

Et $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg(\text{num}) - \arg(\text{den}) = 0 - \arctan(x)$; Ainsi : $\varphi(x) = -\arctan(x)$.

Q5. La pulsation de coupure ω_c est définie par $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$.

Or $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$; Ainsi G est max pour $x = 0$ et $G_{max} = H_0 = \frac{3}{4}$.

Ainsi, $G(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+x_c^2}}$; Il vient donc : $x_c = 1 = \frac{\omega_c}{\omega_0}$; Soit : $\omega_c = \omega_0 = \frac{4}{3RC}$ et $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{2}{3\pi RC}$.

AN : $f_c = \frac{2}{3\pi \times 5,3 \cdot 10^3 \times 1,0 \cdot 10^{-7}}$. On obtient : $f_c \approx 400 \text{ Hz}$.

On a bien f_c dix fois plus faible que la fréquence du signal parasite que l'on veut éliminer, ce qui paraît tout à fait satisfaisant.

Q6. Etude asymptotique de $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$.

- En BF : Si $\omega \ll \omega_0$ ou si $x \ll 1$: $\underline{H} \sim H_0 = \frac{3}{4}$
 - Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) = 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB}$;
 - Asymptote horizontale en BF.
 - Et $\varphi \rightarrow 0$.

- En HF : Si $\omega \gg \omega_0$ ou $x \gg 1$: $\underline{H} \sim \frac{H_0}{jx} \sim -j \frac{H_0}{x}$
 Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$:
Asymptote oblique de pente -20 dB par décade en HF.
 Et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.

Intersection des asymptotes en A tel que :

$$20 \log(H_0) - 20 \log(x_A) = 20 \log(H_0) \quad ;$$

Soit $\log(x_A) = 0$

et pour $G_{dB}(A) = 20 \log(H_0) \approx -2,5 \text{ dB}$.

Ainsi les coordonnées du point d'intersection des asymptotes : **A (0; -2,5)**.

D'où le diagramme de Bode asymptotique ci-contre.

Ce filtre présente **un caractère pseudo-intégrateur en haute fréquences**, car il présente un asymptote oblique de **pente -20 dB/décade**.

Q7. Diagramme réel : En $x = 1$ ou $\log(x) = 0$:

$$\underline{H}(jx = 1) = \frac{H_0}{1+j} \text{ et } G(1) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$G_{dB}(1) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{2}) = -2,5 - 3.$$

Ainsi : **$G_{dB}(\log(x) = 0) = -5,5$ et Et**

$$\varphi(\log(x) = 0) = -\frac{\pi}{4}.$$

D'où le diagramme de Bode réel ajouté sur le diagramme asymptotique.

Q8. - En ce qui concerne la composante continue :

On se place en basses fréquences : $\underline{H} \sim H_0 = \frac{S_0}{U_0} = \frac{3}{4}$; Ainsi : **$S_0 = \frac{3}{4} U_0$** .

- A la fréquence de 4 kHz : $f = 10 f_c$, Soit : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_c} = 10$ et $\log(x) = 1$.

A cette fréquence, $G_{dB}(1) = -22,5 \text{ dB} = 20 \log(G)$; D'où $\log(G) = -\frac{22,5}{20}$ et $G = \frac{S_m}{E_m} = 10^{-1,03}$

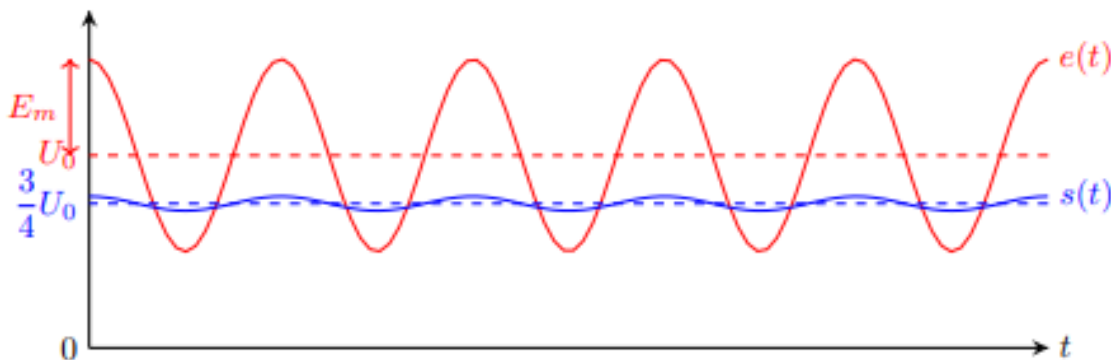
D'où **$S_m \approx 0,09 E_m \approx \frac{E_m}{10}$** : L'amplitude du signal parasite est atténuée d'un facteur 10.

Et $\varphi_s = \Phi(x) + \varphi_e$ où $\Phi(x)$ est le déphasage lié au filtre. Or en $\log(x) = 1$, **$\Phi \approx -1,5 \text{ rad}$**

Alors **$\varphi_s \approx \varphi_e - 1,5 \text{ rad}$** .

Conclusion : **$s(t) = \frac{3}{4} U_0 + \frac{E_m}{10} \cos(\omega t + \varphi_e - 1,5)$** .

D'où l'allure ci-dessous :



PROBLEME 2 : Production de vagues dans une piscine : (D'après ENSTIM)

(≈ 66 pts)

I – Etude de l'équilibre :

Q1. Expression de la poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_{eau} V \vec{g} = -\rho_{eau} V g \vec{u}_z$.

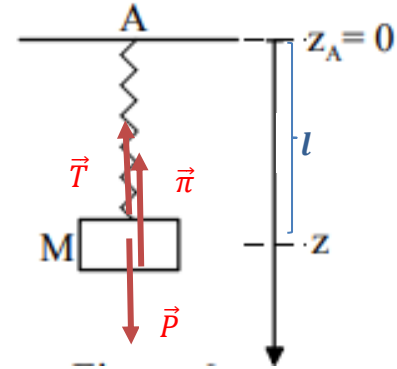
Q2. Référentiel terrestre \mathcal{R} supposé galiléen.

Base de projection cartésienne. L'axe Oz est orienté vers le bas.

Système : La masse M .

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Le poids : $\vec{P} = M\vec{g} = +Mg\vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_{eau} V g \vec{u}_z$.
- La force de Hooke dirigée vers le haut : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - l_0)\vec{u}_z$
Car $z = l$



Condition d'équilibre : $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$; Soit : $\vec{T} + \vec{\pi} + \vec{P} = \vec{0}$.

Projetons sur l'axe (Oz) : $Mg - \rho_{eau} V g - k(z_{eq} - l_0) = 0$

Ou encore, avec $z_{eq} = h$, il vient : $k(h - l_0) = Mg - \rho_{eau} V g$

Il faut supprimer $M = \rho V$: D'où : $h - l_0 = \frac{\rho - \rho_{eau}}{k} V g$; Ou encore : $h = l_0 + \frac{Vg}{k} (\rho - \rho_{eau})$.

II – Mouvement sans frottement :

Q3. Equation différentielle du mouvement : 2^{ème} loi de Newton : $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\vec{u}_z$

En projetant sur l'axe (Oz), il vient : $Mg - \rho_{eau} V g - k(z - l_0) = M\ddot{z}$

Ou encore : $M\ddot{z} + kz = \underline{Mg - \rho_{eau} V g + kl_0 - kh} + kh$
 $= 0$ (d'après Q2)

En simplifiant, il vient : $M\ddot{z} + kz = kh$ et sous forme canonique, on obtient : $\ddot{z} + \frac{k}{M} z = \frac{k}{M} h$.

On pose alors $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$ la pulsation propre, il vient : $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$.

La **pulsation propre** de cet oscillateur ne dépend **que de ses caractéristiques intrinsèques k et M** .

Par contre, c'est la **position d'équilibre h** (autour de laquelle la masse oscille) qui **dépend la poussée d'Archimède**.

III – Mouvement avec frottements visqueux exercés par l'eau :

Q4. On refait une 2^{ème} loi de Newton, en ajoutant la force de frottement visqueux : $\vec{F}_v = -\alpha \frac{d\vec{l}}{dt} = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$

Il vient : $Mg - \rho_{eau} V g - k(z - l_0) - \alpha \dot{z} = M\ddot{z}$

Soit : $M\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = \underline{Mg - \rho_{eau} V g + kl_0 - kh} + kh$
 $= 0$ (d'après Q2)

En simplifiant et en mettant sous forme canonique, il vient : $\ddot{z} + \frac{\alpha}{M} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$

Par identification avec $\ddot{z} + \lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$, il vient : $\lambda = \frac{\alpha}{M}$.

Q5. Il faut résoudre l'équation précédente, dans le cas d'un amortissement faible, donc lorsque α reste petit.

Solution homogène :

- Equation caractéristique : $s^2 + \lambda s + \omega_0^2 = 0$
- Discriminant : $\Delta = \lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$ si amortissement faible ; Donc régime pseudo-périodique.
- Solutions de l'équation caractéristique : $s_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \Omega$
avec Ω la pseudo pulsation .
- Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors : $\mathbf{z}_h(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$

Solution particulière constante : $\mathbf{z}_p = h$.

Solution générale :

$$\mathbf{z}(t) = h + e^{-\frac{\lambda}{2}t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] .$$

On ne cherche pas A et B d'après l'énoncé.

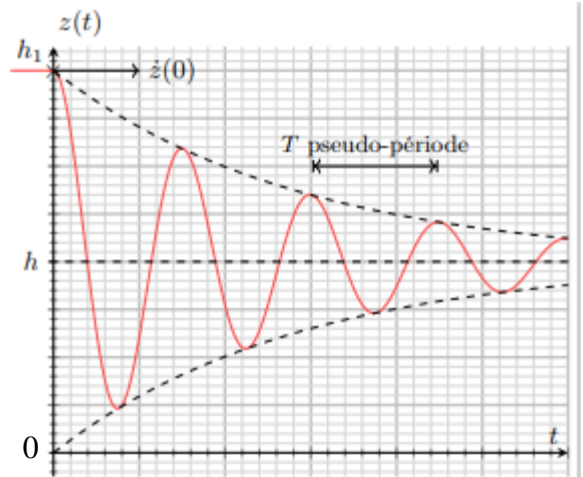
Allure de la courbe :

A $t = 0$, $z(0) = h_1 > h$

et $\dot{z}(0) = 0$, donc tangente horizontale en 0.

De plus, $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = h < h_1$.

Et entre temps, oscillations amorties avec décroissance exponentielle de l'amplitude.



IV – Cas du régime sinusoïdal forcé :

Q6. On a maintenant : $z_A(t) = z_{Am} \cos(\omega t)$,

donc $l = z - z_A$ et $\frac{dl}{dt} = \dot{z} - \dot{z}_A$

Ce qui modifie la force de Hooke : $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - z_A - l_0)\vec{u}_z$.

Et la force de frottement fluide : $\vec{F}_v = -\alpha \frac{dl}{dt} \vec{u}_z = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) \vec{u}_z$

La 2^{ème} loi de Newton devient donc : $Mg - \rho_{eau}Vg - k(z - z_A - l_0) - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) = M\ddot{z}$

Qui se simplifie en : $M\ddot{z} + \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - z_A) = \underline{Mg - \rho_{eau}Vg} + \underline{kl_0 - kh} + kh = 0$ (d'après Q2)

Ou encore : $M\ddot{z} + \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - h - z_A) = 0$.

On pose : $Z(t) = z(t) - h$; Soit $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$

L'équation différentielle devient : $M\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ(t) = \alpha\dot{z}_A + k z_A(t)$.

Sous forme canonique, il vient : $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = \frac{\alpha}{M}\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t)$.

Par identification avec $\ddot{Z} + \lambda\dot{Z} + \omega_0^2 Z = F(t)$, il vient : $F(t) = \frac{\alpha}{M}\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t)$.

Q7. Passage aux notations complexes :

On nous donne $F(t) = \omega^2 z_{Am} \cos(\omega t)$. Alors $\underline{F} = \omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}$.

On introduit $\underline{Z}_{com}(i\omega) = \underline{Z}(i\omega) e^{i\omega t}$ la grandeur complexe associée à $Z(t)$

et $\underline{Z}(i\omega)$ l'amplitude complexe telle que $\underline{Z}(i\omega) = Z(\omega) e^{i\omega t}$

On reprend l'équation différentielle précédente, en la passant en complexes :

$\underline{Z}_{com}'' + \lambda \underline{Z}_{com}' + \omega_0^2 \underline{Z}_{com} = \underline{F}$; Soit : $-\omega^2 \underline{Z}_{com} + i\omega \lambda \underline{Z}_{com} + \omega_0^2 \underline{Z}_{com} = \underline{F}$

Avec $\tau = \frac{M}{\alpha} = \frac{1}{\lambda}$, il vient : $\underline{Z}_{com} (\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}) = \underline{F} = \omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}$.

D'où : $\underline{Z}_{com} = \frac{\omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})}$ et $\underline{Z}(i\omega) = \frac{\omega^2 z_{Am}}{(\omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau})} = \frac{z_{Am}}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + i\frac{1}{\omega\tau}}$;

Ainsi, avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$: $\underline{Z}(ix) = \frac{z_{Am}}{\frac{1}{x^2} - 1 + i\frac{1}{x\omega_0\tau}}$

Enfin $\underline{Z}(x) = |\underline{Z}(ix)| = \frac{z_{Am}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2}}}$.

Q8. On veut $Z(x) > z_{Am}$, soit $\frac{Z(x)}{z_{Am}} > 1$; ou encore : $\frac{1}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2}}} > 1$; Soit : $\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2}} < 1$

On a donc : $(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2} < 1$; On développe : $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2\omega_0^2\tau^2} - 1 < 0$.

Ou encore : $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2\omega_0^2\tau^2} < 0$.

Multiplions par x^4 , il vient : $1 - 2x^2 + \frac{x^2}{\omega_0^2\tau^2} < 0$; Soit $x^2(-\frac{1}{\omega_0^2\tau^2} + 2) > 1$.

Ou encore $x > \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{\omega_0^2\tau^2}}}$;

Or $\omega = x \omega_0$;

Il faut donc que $\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{2 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}}} = \frac{\omega_0 \omega_0 \tau}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{\omega_0^2 \tau}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \omega_{lim}$

On remarque que ω_{lim} n'existe que si $2 \omega_0^2 \tau^2 - 1 > 0$; Donc que si $\omega_0^2 \tau^2 > \frac{1}{2}$.

Or $\tau = \frac{M}{\alpha}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$; Ainsi ω_{lim} n'existe que si $\frac{k}{M} \frac{M^2}{\alpha^2} > \frac{1}{2}$; Donc pour $M > \frac{\alpha^2}{2k}$.

Cette condition revient à avoir un **facteur de qualité suffisamment grand** pour que la condition de résonance soit respectée.

Q9. On a vu que $Z(x) = |\underline{Z}(ix)| = \frac{Z_{Am}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}}}$.

Le numérateur est constant, ainsi Z est maximum si $(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}$ est **minimum**.

Posons $f(x) = (\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}$.

Alors $\frac{df(x)}{dx} = 0$ ssi $2(\frac{1}{x^2} - 1) \left(\frac{-2}{x^3}\right) - \frac{2}{\omega_0^2 \tau^2 x^3} = 0$; Soit $\left(\frac{-2}{x^3}\right) \left[2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\right] = 0$

Il vient : $2\left(\frac{1}{x_r^2} - 1\right) + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2} = 0$; D'où : $\frac{1}{x_r^2} - 1 = -\frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}$; ou $\frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2} = \frac{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}{2 \omega_0^2 \tau^2}$

Enfin : $x_r = \sqrt{\frac{2 \omega_0^2 \tau^2}{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}}} = \frac{\omega_0 \tau \sqrt{2}}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}}$.

Et $\omega_r = \omega_0 x_r = \frac{\omega_0^2 \tau \sqrt{2}}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}}}$: **Pulsation de résonance.**

Et le phénomène est appelé **phénomène de résonance**.

PROBLEME 3 : Autour de l'aluminium : (D'après CCP TSI) (≈ 76 pts)

I - Propriétés de l'atome d'aluminium :

Q1. Le numéro atomique d'un élément est le nombre de protons du noyau atomique (et nombre d'électrons de l'atome neutre).

✚ $Z = 13$: Soit $2+8+3$: Dans la classification périodique, il sera donc situé sur la 3^{ème} période et 1^{er} élément du groupe p, soit dans le groupe 13. Il a donc 3 électrons de valence ($3s^2 3p^1$).

Son schéma de Lewis est : $| Al \cdot$

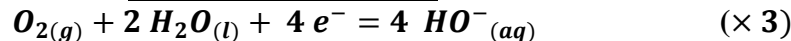
L'ion le plus probable a la configuration du gaz rare le plus proche, celle où toutes les couches sont occupées. Il aura donc tendance à perdre ses 3 électrons de valence et donner l'ion Al^{3+} .

II – L'aluminium comme source d'énergie :

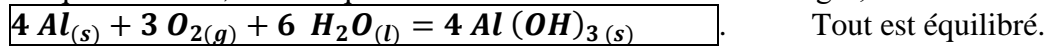
Q2. A l'anode, il se produit une oxydation du réducteur, d'où le sens de la réaction :



✚ A la cathode, il se produit une réduction de l'oxydant :



✚ Pour obtenir l'équation bilan, il faut équilibrer le nombre d'électrons échangés, on obtient donc :



Q3. $K^\circ = \frac{(P^\circ)^3}{(P(O_2))_{eq}^3} = \frac{1}{(P(O_2))_{eq}^3};$

✚ ½ équation redox : $Al(OH)_{3(s)} + 3 e^- = Al_{(s)} + 3 HO^-_{(aq)}$

$$\text{Relation de Nernst : } E_a = E^\circ_a + \frac{0,06}{3} \log \frac{1}{[HO^-]^3};$$

✚ ½ équation redox : $O_{2(g)} + 2 H_2O_{(l)} + 4 e^- = 4 HO^-_{(aq)}$

$$\text{Relation de Nernst : } E_c = E^\circ_c + \frac{0,06}{4} \log \frac{P(O_2)}{[HO^-]^4};$$

✚ A l'équilibre, les potentiels redox sont égaux, soit : $E_{a\,eq} = E_{c\,eq}$;

✚ D'où : $E^\circ_a + \frac{0,06}{3} \log \frac{1}{[HO^-]^3_{eq}} = E^\circ_c + \frac{0,06}{4} \log \frac{P(O_2)_{eq}}{[HO^-]^4_{eq}};$

✚ **Multiplions par 12** : $12 E^\circ_a + 0,06 \log \frac{1}{[HO^-]^{12}_{eq}} = 12 E^\circ_c + 0,06 \log \frac{(P(O_2))_{eq}^3}{[HO^-]^{12}_{eq}};$

Soit : $0,06 \log K^\circ = 12(E^\circ_c - E^\circ_a)$; Soit : $\boxed{K^\circ = 10^{\frac{12(E^\circ_c - E^\circ_a)}{0,06}}}$; AN : $K^\circ = 10^{538} > 10^3$: **Réaction totale.**

Q4. Calcul du nbre de moles initiales d'Al : $\boxed{n(Al)_{init} = \frac{m}{M(Al)}}$; AN : $n(Al)_{init} = \frac{25}{27}$; **$n(Al)_{init} = 0,93 \text{ mol.}$**

Tableau d'avancement :

	$4 Al_{(s)} +$	$3 O_{2(g)} +$	$6 H_2O_{(l)} =$	$4 Al(OH)_{3(s)}$
EI	$n(Al)_{init} = 0,93$	excès	excès	
EF	$0,93 - 4 \xi_{max}$	excès	excès	$4 \xi_{max}$

La réaction étant totale, on a disparition du réactif limitant :

Soit : $0,93 - 4 \xi_{max} = 0$; Soit : $\xi_{max} = \frac{0,93}{4}$; **$\xi_{max} = 0,23 \text{ mol.}$**

Q5. On sait que : $Q = I \Delta t$; Donc : Durée de fonctionnement : $\boxed{\Delta t = \frac{Q}{I}}$;

AN : $\Delta t = \frac{2,1 \cdot 10^5}{6,5}$; On obtient **$\Delta t \approx 3,2 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 9 \text{ h.}$**

✚ Pourcentage d'aluminium consommé :

✓ Quantité d'électricité ayant circulé : $Q = n_{e^-} F = 3 \times n_{Al\,consommé} \times F$; Soit $\boxed{n_{Al,consommé} = \frac{Q}{3F}}$;

AN : $n_{Al\,consommé} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{3 \times 96500}$; Soit **$n_{Al,consommé} = 0,73 \text{ mol.}$**

✓ $n_{Al\,restant} = 0,93 - 0,73 = 0,20 \text{ mol.}$ Soit en pourcentage : $p = \frac{0,20}{0,93} \times 100$;

D'où le pourcentage d'aluminium non consommé : **$p = 21,5\%$** ;

III – Présence d'aluminium (III) dans un vaccin :

Q6. Diagramme potentiel-pH de l'élément aluminium :

espèce	degré d'oxydation de Al	espèce	degré d'oxydation de Al
$Al_{(s)}$	0	$Al(OH)_3_{(s)}$	+ III
$Al^{3+}_{(aq)}$	+ III	$Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$	+ III

De bas en haut du diagramme, les espèces sont placées par ordre croissant de nombre d'oxydation.

D'autre part, l'espèce la plus acide ($Al^{3+}_{(aq)}$) est majoritaire à bas pH et l'espèce la plus basique ($Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$) est majoritaire à haut pH. D'où les identifications ci-contre.

Remarque : on aurait aussi pu faire un diagramme primitif.

Q7. Couple $Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}$:

1/2 équation redox : $Al^{3+}_{(aq)} + 3e^{-} = Al_{(s)}$

Relation de Nernst :

$$E(Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}) = E^{\circ}_1 + 0,02 \log([Al^{3+}]) ;$$

Sur la frontière entre Al^{3+} et $Al_{(s)}$, le solide est présent à l'état de trace et $[Al^{3+}] = C_T$. Soit $E_{1\text{ Front}} = E^{\circ}_1 + 0,02 \log(C_T)$

On donne $E_{1\text{ Front}} = -1,72\text{ V}$. Donc $E^{\circ}_1 = E_{1\text{ Front}} - 0,02 \log(C_T)$.

AN : $E^{\circ}_1 = -1,72 + 0,02 \times 3$; $E^{\circ}_1 = -1,66\text{ V}$; (valeur déjà donnée dans le sujet).

Q8. On sait que pour un couple acido-basique : $H_2CO_{3(aq)}/HCO_3^{-}_{(aq)}$:

On a la relation : $pH = pKa + \log\left(\frac{[HCO_3^{-}]}{[H_2CO_3]}\right)$; AN : $pH = 6,2 + \log\left(\frac{0,027}{0,0014}\right)$; On obtient : $pH \approx 7,5$.

A un tel pH, d'après le diagramme $E - pH$, $Al(OH)_3_{(s)}$ est l'espèce majoritaire de Al (III).

Titrage de l'aluminium (III) :

Titration 1 : Titration d'une solution d'acide chlorhydrique $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$.

Q9. Réaction du dosage acide fort / base forte : $H_3O^{+}_{(aq)} + HO^{-}_{(aq)} = 2H_2O_{(l)}$: $K = \frac{1}{K_e}$;

AN : $K = 10^{14}$; Réaction totale.

Q10. On utilise la méthode des tangentes :

On trace une 1^{ère} droite tangente à la courbure après l'équivalence (droite 1).

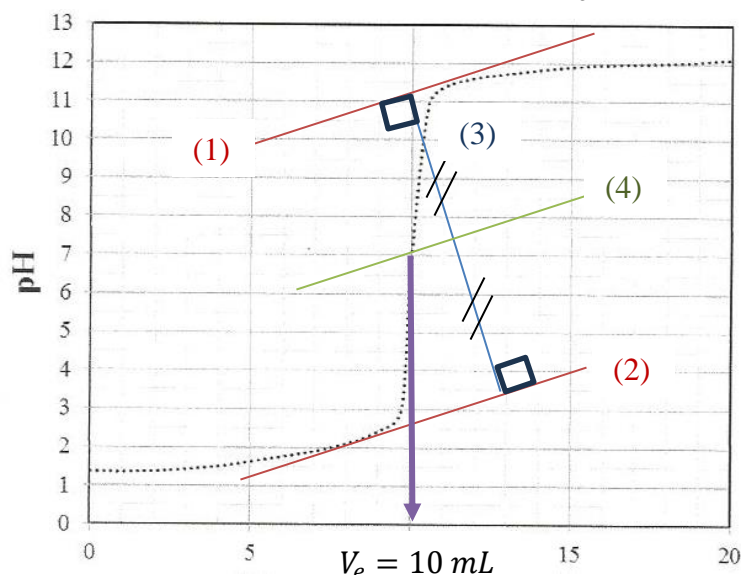
On trace une 2^{ème} droite tangente à la courbure avant l'équivalence et parallèle à la droite 1 (droite 2).

A l'aide d'une équerre, on trace une droite perpendiculaire aux deux autres (droite 3).

On trace ensuite une droite parallèle et à égale distance des droites 1 et 2 (droite 4).

Le point d'intersection avec la courbe du pH donne le volume équivalent.

On lit $V_e = 10,0\text{ mL}$.



A l'équivalence : les réactifs sont versés dans les proportions stœchiométriques.

Donc : $n(H_3O^{+})_0 = n(HO^{-})_{eq}$; Soit : $C_1 V_0 = C V_e$; Ainsi : $C_1 = \frac{C V_e}{V_0}$;

AN : $C_1 = \frac{0,1 \times 10}{20}$; On obtient : $C_1 = 5,0 \cdot 10^{-2}\text{ mol.L}^{-1}$.

Q11. L'indicateur coloré doit avoir une zone de virage comprenant le pH à l'équivalence (7 ici). Le **BBT** convient donc ; on observera le passage du jaune (milieu acide avant l'équivalence) au bleu (milieu basique lorsque l'ion hydroxyde est en excès).

Titration 2 : Titration d'une solution acidifiée d'ions $Al^{3+}_{(aq)}$.

Q12. 1^{ère} réaction : $H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = 2 H_2O_{(l)}$; $V_{e1} = 10 \text{ mL}$;

2^{ème} réaction : $Al^{3+}_{(aq)} + 3HO^-_{(aq)} = Al(OH)_3_{(s)}$; $V_{e2} = 25 \text{ mL}$.

Le premier saut de pH correspond au volume déterminé à la **question 10**, lors du titrage des 20 mL d'acide chlorhydrique { $H_3O^+_{(aq)}$; $Cl^-_{(aq)}$ } ;

Ou bien 1^{ère} réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte, soit HCl.

Q13. Volume ayant réagi avec $Al^{3+}_{(aq)}$: $V_{A1} = V_{e2} - V_{e1}$; AN : $V_{A1} = 15 \text{ mL}$.

Attention aux coefficients stœchiométriques de la 2^{ème} réaction :

Pour ce volume, on a $n(Al^{3+})_0 = \frac{n(HO^-)_{eq}}{3}$; Soit : $C_2 V_0 = \frac{C V_{A1}}{3}$; Ainsi : $C_2 = \frac{C V_{A1}}{3 V_0}$;

AN : $C_2 = \frac{0,1 \times 15}{3 \times 20}$; On obtient : $C_2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Et la masse ayant servi : $m = n(Al^{3+}) \times M(AlCl_3, 6H_2O)$.

Soit : $m = C_2 V_0 \times M(AlCl_3, 6H_2O)$.

avec $M(AlCl_3, 6H_2O) = 27 + 3 \times 35,5 + 6 \times 18$; Soit $M(AlCl_3, 6H_2O) = 241,5 \text{ g.mol}^{-1}$.

AN : $m = 2,5 \cdot 10^{-2} \times 20 \cdot 10^{-3} \times 241,5$; On obtient : $m \approx 121 \text{ mg}$.

Exploitation du point anguleux :

Q14. Attention au sens de la réaction : Sens de la dissolution du précipité :

$Al(OH)_3_{(s)} = Al^{3+}_{(aq)} + 3HO^-_{(aq)}$; $K = K_s$.

Q15. En D, $pH = 3,9$; Soit $[HO^-] = \frac{K_e}{10^{-pH(D)}}$; AN : $[HO^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-3,9}}$

On obtient : $[HO^-] = 7,9 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$.

Q16. Au point D, les ions Al^{3+} n'ont pas encore réagi.

Donc en solution, on a : $[Al^{3+}] = \frac{C_2 V_0}{V_0 + V_D}$.

AN : $[Al^{3+}] = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \times 20}{20 + 10}$; On obtient : $[Al^{3+}] \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

Et par définition, $K_s = [Al^{3+}] [HO^-]^3$.

AN : $K_s = 1,7 \cdot 10^{-2} \times (7,9 \cdot 10^{-11})^3$; On obtient : $K_s \approx 8,4 \cdot 10^{-33}$ ($pK_s \approx 32,1$)