Sujet 1 – corrigé

I Calcul du moment d'une force ($\star$)

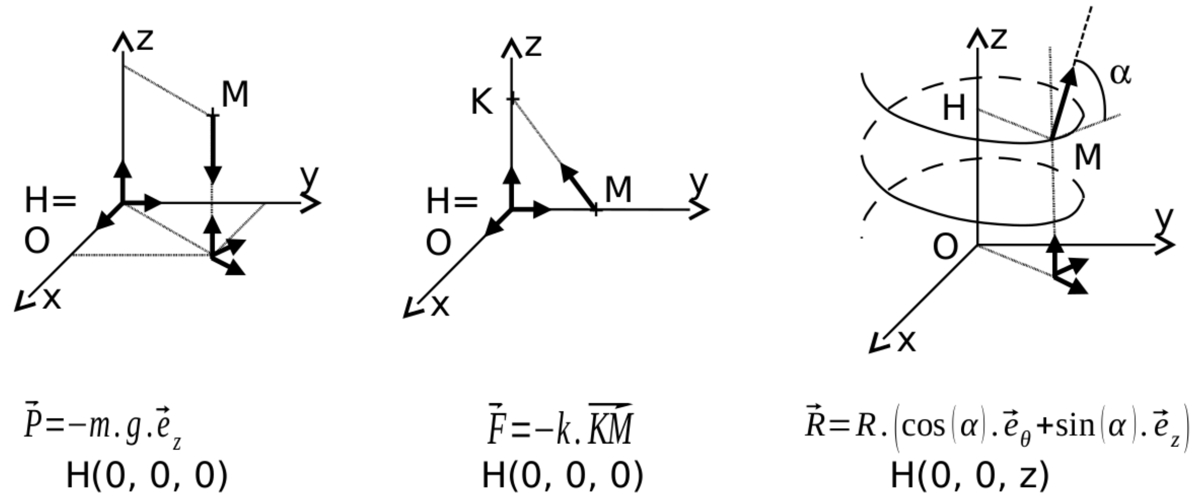


Figure 1.1 – Forces dont il faut calculer le moment.

Dans chacun des cas suivants, déterminer le moment de la force en H par calcul vectoriel direct.

1. (a) Poids $\vec{P}$ appliqué en $M(x,y,z)$.

Réponse :
On peut mener le calcul de différentes façons. Utilisez celle qui vous semble la plus logique.

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{P}) = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{P} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -mg \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix} = \boxed{-mgy\vec{e}_x + mgx\vec{e}_y}.$$

(b) Force de rappel $\vec{F}$ appliquée en $M(0,y,0)$.

Réponse :

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{F}) = -ky\vec{e}_y \wedge \overrightarrow{KM} = -ky\vec{e}_y \wedge \left(\overrightarrow{KH} + \overrightarrow{HM}\right) = kyKH\vec{e}_y \wedge \vec{e}_z = \boxed{kyKH\vec{e}_x}.$$

(c) Réaction $\vec{R}$ appliquée en $M(r,\theta,z)$.

Réponse :
On se place dans les coordonnées cylindro-polaires :

$$\vec{\mathcal{M}}_H(\vec{R}) = \overrightarrow{HM} \wedge \vec{R} = \begin{pmatrix} r \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} 0 \\ R\cos\alpha \\ R\sin\alpha \end{pmatrix} = rR \begin{pmatrix} 0 \\ -\sin\alpha \\ \cos\alpha \end{pmatrix} = \boxed{-rR\sin\alpha\,\vec{e}_\theta + rR\cos\alpha\,\vec{e}_z}.$$

2. Dans chacun des cas précédents, déterminer le moment de la force par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_x)$ pour $\vec{P}$ et $\vec{F}$ et par rapport à l'axe $(H, \vec{e}_z)$ pour $\vec{R}$ par détermination de la distance à l'axe de rotation (bras de levier) et par un raisonnement sur la direction puis par projection du moment calculé à la question 1.

Réponse :

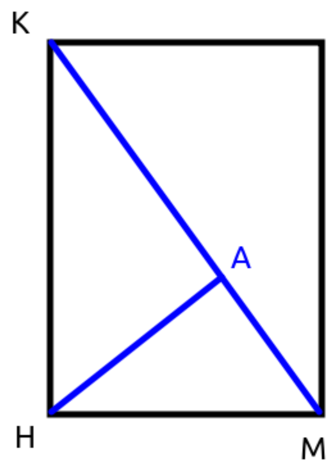
$$\mathcal{M}_x(\vec{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_H(\vec{P}).\vec{e}_x = \boxed{-mgy}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_x)$ est y. L'intensité de la force est mg. Cette force tend à faire tourner le point M autour de l'axe $(H\vec{e}_x)$ dans le sens indirect. Finalement on retrouve :

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}) = \boxed{-mgy}.$$

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_H(\vec{F}).\vec{e}_x = \boxed{kyKH}.$$

On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_x)$ est la distance entre H et le projeté orthogonal de H sur le segment $[KM]$ (appelons le A). L'intensité de la force est $k \times KM$. Cette force tend à faire tourner le point M autour de l'axe $(H\vec{e}_x)$ dans le sens direct. On remarque que $HA \times KM$ est le double de l'aire du triangle HKM.



On en déduit que :

$$HA \times KM = HM \times HK = yHK$$

Finalement on retrouve :

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}) = +HA \times kKM = \boxed{kyHK}.$$

$$\mathcal{M}_z(\vec{R}) = \overrightarrow{\mathcal{M}}_H(\vec{R}).\vec{e}_z = \boxed{rR\cos\alpha}.$$

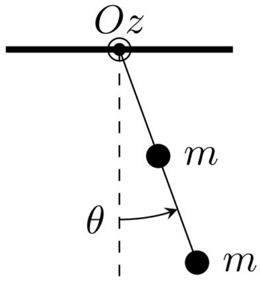
On peut aussi appliquer la méthode du bras de levier : la distance entre la droite d'application de la force et l'axe $(H\vec{e}_z)$ est r. L'intensité de la force dans le plan orthogonal à l'axe $(H\vec{e}_z)$ est $R\cos\alpha$. Cette force tend à faire tourner le point M sans le sens direct autour de l'axe $(H\vec{e}_z)$. Finalement :

$$\mathcal{M}_z(\vec{R}) = +R \times R\cos\alpha = \boxed{rR\cos\alpha}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Pendule à deux masses

On considère un pendule formé d'une tige rigide de longueur L sur laquelle sont fixées deux masses m identiques à distance $L/2$ et L du centre. On néglige le moment d'inertie de la tige et on suppose l'absence de frottement au niveau de la liaison pivot.



1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit

$$\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin\theta = 0$$

Réponse :
Utilisons le théorème du moment cinétique autour de l'axe (Oz) au système composé de la barre rigide et des deux masses qui y sont attachées. On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen. Seul le poids associé à chacune des deux masses est associé à un moment non nul, considérant comme l'indique l'énoncé que la liaison pivot est parfaite.

Considérons tout d'abord le poids $\overrightarrow{P_1}$ de la masse m à la distance $L/2$ du point O. Le bras de levier est égal à $(L/2)\sin(\theta)$, si bien que

$$\left|\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1})\right| = mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De plus, le poids a tendance à faire tourner le pendule dans le sens horaire si θ est positif dans le sens trigonométrique. Ainsi,

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta)$$

De manière tout à fait analogue, le moment du poids $\overrightarrow{P_2}$ associée à la masse située à la distance L s'écrit

$$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2}) = -mgL\sin(\theta)$$

Evaluons par ailleurs le moment cinétique associé au systèmes de points par sommation des moments cinétiques de chacun des points

$$\overrightarrow{L}_O = \frac{L}{2}\overrightarrow{u_r}\wedge m\frac{L}{2}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + L\overrightarrow{u_r}\wedge mL\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = mL^2\left(\frac{1}{4}+1\right)\dot{\theta}\overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

Soit
$$L_{Oz} = \overrightarrow{L}_O\cdot\overrightarrow{u_z} = \frac{5}{4}mL^2\dot{\theta}$$

En appliquant le théorème du moment cinétique,

$$\frac{\mathrm{d}L_{Oz}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_1}) + \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_2})$$

Il vient
$$\frac{5}{4}mL^2\ddot{\theta} = -mg\frac{L}{2}\sin(\theta) - mgL\sin(\theta)$$

Soit
$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{6g}{5L}\sin(\theta) = 0}$$

Remarque : Au besoin, il serait possible de linéariser cette équation pour retomber sur l'équation classique d'un oscillateur harmonique.

2. Montrer que le centre de masse G du système se trouve à distance $3L/4$ de l'axe.

Réponse :
Appliquons la définition du barycentre G à partir d'un point quelconque, ici nous choisirons le point O :

$$2m\overrightarrow{OG} = m\overrightarrow{OM_1} + m\overrightarrow{OM_2} = m\left(\frac{L}{2}\overrightarrow{u_r} + L\overrightarrow{u_r}\right)$$

Ainsi
$$\boxed{\overrightarrow{OG} = \frac{3L}{4}\overrightarrow{u_r}}$$

La distance OG est donc bien de $3L/4$.

3. Est-il équivalent d'appliquer le théorème du moment cinétique à un point matériel de masse $2m$ situé au centre de masse G ?

Réponse :
Pour s'en convaincre, le plus simple est encore d'essayer. Si toute la masse $2m$ est concentrée au point G, nous aurions :

- $$\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{P_{\text{tot}}}) = -2mg(3L/4)\sin(\theta) = -mg(3L/2)\sin(\theta)$$
- $$L_{Oz} = 2m(3L/4)^2\dot{\theta} = m(9L^2/8)\dot{\theta}$$

Soit, d'après le théorème du moment cinétique,
$$\ddot{\theta} + \frac{4g}{3L}\sin(\theta) = 0$$

L'équation du mouvement n'est pas identique, preuve que les deux systèmes ne sont pas mécaniquement équivalents. Pour les solides en rotation, il n'est pas possible de traiter le problème "comme si"toute la masse était concentrée au barycentre du système. Cela est du au fait que l'expression dépend de la répartition de masse par rapport à l'axe de rotation et non uniquement de la position du barycentre.

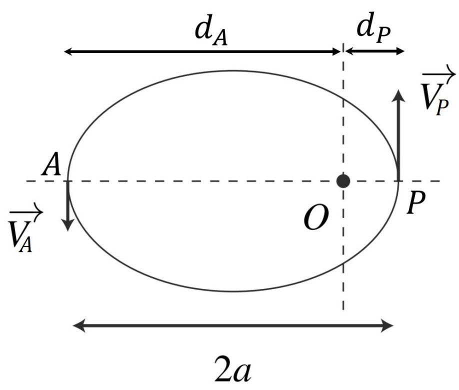
Sujet 3 – corrigé

I Satellite en orbite elliptique

Lors de son lancement, le satellite d'observation Hipparcos est resté sur son orbite de transfert à cause d'un problème technique. On l'assimile à un point matériel M de masse $m = 1{,}1 \times 10^3$ kg. L'orbite de transfert est elliptique et la distance Terre-satellite varie entre $d_P = 200$ km au périgée et $d_A = 35{,}9 \times 10^3$ km à l'apogée. On rappelle que le périgée est le point de l'orbite le plus proche du centre attracteur (ici la Terre) et que l'apogée est le point le plus éloigné. On mesure la vitesse du satellite à son apogée $v_A = 3{,}5 \times 10^2\,\mathrm{m\,s^{-1}}$.

1. Faire un schéma de la trajectoire en faisant apparaître la position O du centre de la Terre, l'apogée A et le périgée P.

Réponse :
La Terre est située à l'un des foyers de l'ellipse. A et P sont situés sur le grand-axe de l'ellipse de part et d'autre du point O.



2. Déterminer le demi-grand axe a de la trajectoire.

Réponse :
On a
$$a = \frac{d_P + d_A}{2} = \frac{18{,}1e3}{km}$$

3. En déduire l'énergie mécanique et la période du satellite.

Réponse :
D'après le cours, on suppose que l'énergie mécanique vaut, pour une trajectoire ellpitique et par analogie avec une trajectoire circulaire

$$E_m = \frac{-\mathcal{G} m M_T}{2a} = -1{,}2 \times 10^{10}\,\mathrm{J}$$

Afin de déterminer la période, utilisons la troisième loi de Kepler et évaluons la valeur de la constante T^2/a^3 pour la Terre comme centre attracteur en se souvenant que pour un satellite géostationnaire (donc tel que $T_{\text{geo}} = 24$ h), son altitude est $h_{\text{geo}} = 36 \times 10^3$ km soit $a_{\text{geo}} = 42{,}4 \times 10^3$ km en additionnant le rayon de la Terre. Sachant que T^2/a^3 est une constante, il vient

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{T_{\text{geo}}^2}{a_{\text{geo}}^3} \quad \Rightarrow \quad T = T_{\text{geo}} \left(\frac{a}{a_{\text{geo}}}\right)^{3/2} = 6{,}7\,\mathrm{h}$$

4. On note v_A et v_P les vitesses du satellite en A et en P. Exprimer le module moment cinétique calculé au point O du satellite à son apogée puis à son périgée en fonction, entre autre, des vitesses.

   Réponse :
   Notons S le point matériel décrivant le satellite. A l'apogée et au périgée, la distance OS est extrémale (respectivement maximale et minimale). Par conséquent, la vitesse est purement orthoradiale en ces points, si bien que $\overrightarrow{v_A}$ et $\overrightarrow{v_P}$ sont orthogonales à respectivement OA et OP. Ainsi le module du moment cinétique en ces points s'écrit

$$L_{/O}S = A = md_A v_A \quad \text{et} \quad L_{/O}S = P = md_P v_P$$

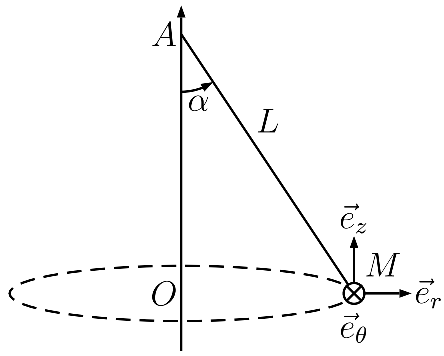
5. En déduire la vitesse du satellite à son périgée.

   Réponse :
   Le mouvement est à force centrale de centre O. Le moment cinétique en O est donc une grandeur conservée au cours du mouvement si bien que

$$d_A v_A = d_P v_P \quad \Rightarrow \quad v_P = v_A \frac{d_A}{d_P} = 6{,}3 \times 10^4 \,\mathrm{m\,s^{-1}}$$

Sujet 4 – corrigé

I Pendule conique



Un point matériel M de masse m est suspendu à un fil inextensible de longueur L attaché en un point A fixe d'un axe Oz. Le point matériel M tourne autour de l'axe Oz dans un plan horizontal passant par O, à la vitesse angulaire ω constante par rapport au référentiel lié au laboratoire.
La direction du fil fait un angle α constant avec l'axe Oz.

1. En appliquant le théorème du moment cinétique, exprimer l'angle d'inclinaison α du pendule avec l'axe Oz en fonction de L, ω et du champ de pesanteur g.

   Réponse :
   $\overrightarrow{AM} = -L\cos\alpha\vec{e}_z + L\sin\alpha\vec{e}_r$

   $\vec{v}(M) = L\sin\alpha\omega\vec{e}_\theta$

   $\overrightarrow{L_A} = L^2m\omega(\cos\alpha\sin\alpha\vec{e}_r + \sin\alpha^2\vec{e}_z)$

   TMC : $\sin\alpha = 0$ *ou* $\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}$

2. Retrouver le résultat de la question précédente en appliquant le principe fondamental de la dynamique.

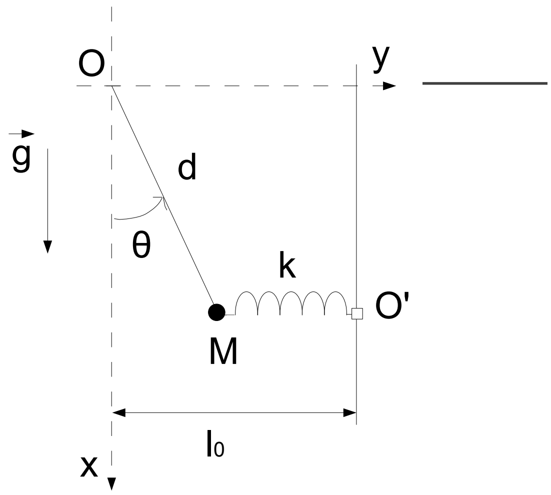
   Réponse :

Sujet 5 – corrigé

I Pendule et ressort (⋆⋆)

On considère un pendule constitué d'une tige de masse négligeable, de longueur d et d'un point matériel M de masse m. La liaison en O' est parfaitement coulissante de sorte que le ressort est constamment horizontal.

Le ressort est idéal de constante de raideur k et de longueur à vide l_0. On néglige tout frottement.



1. Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M. Les exprimer en fonction de θ et des vecteurs de la base polaire.

Réponse :
Bilan des forces :

- $\overrightarrow{P} = mg\overrightarrow{u_x} = mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}$
- $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$
- $\overrightarrow{F} = -k(l-l_0)(-\overrightarrow{u_y})$. Avec $l = l_0 - d\sin\theta$, on a $\overrightarrow{F} = -kd\sin\theta\overrightarrow{u_y} = -kd\sin\theta(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})$

2. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0$$

et préciser les expressions des constantes ω_1 et ω_2

Réponse :
On se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

On a $\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{u}_r$, $\overrightarrow{v} = d\dot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$ et $\overrightarrow{a} = -d\dot{\theta}^2\overrightarrow{u}_r + d\ddot{\theta}\overrightarrow{u}_\theta$

Le PFD projeté sur le vecteur $\overrightarrow{u}_\theta$ s'écrit donc :

$$md\ddot{\theta} = -kd\sin\theta\cos\theta - mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \sin\theta\left(\frac{k}{m}\cos\theta + \frac{g}{d}\right) = 0 \tag{5.1}$$

$$\Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0} \tag{5.2}$$

avec $\omega_1 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\omega_2 = \sqrt{\frac{g}{d}}$. On retrouve les pulsations propres caractéristiques d'un pendule pensant et d'un oscillateur masse-ressort.

3. Retrouver l'équation du mouvement à l'aide du théorème du moment cinétique.

Réponse :
Le théorème du moment cinétique par rapport au point O s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\sigma_O}(M)}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{F}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{T}) + \overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{P})$$

Or, on a $\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{T}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{T} = \overrightarrow{0}$, soit

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{P}) = \overrightarrow{OM} \wedge (mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}) = d\overrightarrow{u_r} \wedge (mg\cos\theta\overrightarrow{u_r} - mg\sin\theta\overrightarrow{u_\theta}) = -mgd\sin\theta\overrightarrow{u_z}$$

et enfin

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}(\overrightarrow{F}) = d\overrightarrow{u_r} \wedge (-kd\sin\theta(\sin\theta\overrightarrow{u_r} + \cos\theta\overrightarrow{u_\theta})) = -kd^2\cos\theta\sin\theta\overrightarrow{u_z}$$

D'autre part, on a $\overrightarrow{OM} = d\overrightarrow{u_r}$ d'où $\overrightarrow{v} = d\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$ et $\overrightarrow{\sigma_O}(M) = \overrightarrow{OM} \wedge m\overrightarrow{v} = md^2\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$

Le théorème du moment cinétique projeté sur $\overrightarrow{u_z}$ donne donc

$$\frac{\mathrm{d}(md^2\dot{\theta})}{\mathrm{d}t} = -kd^2\cos\theta\sin\theta - mgd\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \sin\theta\left(\frac{k}{m}\cos\theta + \frac{g}{d}\right) = 0$$

Avec $\frac{k}{m} = \omega_1^2$ et $\frac{g}{d} = \omega_2^2$, il vient finalement $\boxed{\ddot{\theta} + \sin\theta\left(\omega_1^2\cos\theta + \omega_2^2\right) = 0}$

4. Montrer que le système est conservatif et mettre son énergie potentielle sous la forme :

$$E_p(\theta) = md^2(\frac{\omega_1^2}{2}\sin^2\theta - \omega_2^2\cos\theta)$$

Réponse :
La tension du fil ne travaille pas car elle reste toujours perpendiculaire à la vitesse. Le poids est conservatif et l'énergie potentielle associée est $E_{p_p} = -mgx = -mgd\cos\theta$.
La force de rappel élastique est conservative et l'énergie potentielle associée est $E_{p_{el}} = \frac{1}{2}k(l - l_0)^2 = \frac{1}{2}d^2\sin^2\theta$
Finalement, le système est bien conservatif et

$$\boxed{E_p(\theta) = \frac{1}{2}kd^2\sin^2\theta - mgd\cos\theta}$$

Et on retrouve bien le résultat attendu par ré-identification de ω_1 et ω_2

5. Montrer que le système possède toujours au moins deux positions d'équilibre. Montrer également qu'il en existe deux autres à une condition sur ω_1 et ω_2 que l'on précisera. Préciser alors dans quel intervalle se trouvent ces positions d'équilibre.

Réponse :
Les positions d'équilibre correspondent aux extrema d'énergie potentielle, on cherche donc les points d'annulation de la dérivée de $E_p(\theta)$:

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = kd^2\cos\theta\sin\theta + mgd\sin\theta$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta} = 0 \Rightarrow \sin\theta = 0 \text{ ou} kd\cos\theta + mg = 0 \tag{5.3}$$

$$\Rightarrow \theta = 0 \text{ ou}\pi \text{ ou} \cos\theta = -\frac{mg}{kd} = -\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} \tag{5.4}$$

Les deux premières solutions existent toujours, la troisième équation ne possède de solution que si $\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2} < 1 \Rightarrow \omega_2 < \omega_1$ (l'effet du ressort prédomine sur les effets de la gravité). Les solutions sont alors $\boxed{\theta_{eq} = \pm\arccos\left(-\frac{\omega_2^2}{\omega_1^2}\right)}$
Elles sont situées de façon symétrique par rapport à l'axe Ox. De plus, comme $\cos\theta_{eq} > 0$, l'une est située entre $\pi/2$ et π, l'autre entre $-\pi/2$ et $-\pi$.

6. Montrer que la position d'équilibre $\theta = 0$ est stable. Déterminer alors l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = 0$ et en déduire la pulsation Ω des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

Réponse :
Pour connaître la stabilité des positions d'équilibre, on étudie le signe de la dérivée seconde de l'énergie :

$$\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2} = mgd\cos\theta + kd^2\cos^2\theta - kd^2\sin^2\theta$$

Ainsi, $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=0} = mgd + kd^2 > 0$
La position d'équilibre $\theta_{eq} = 0$ est donc stable.

Pour connaître la pulsation des oscillations autour de cette position d'équilibre, on fait un développement limité de l'énergie potentielle au voisinage de $\theta_{eq} = 0$:

$$E_p(\theta) \sim E_p(0) + \theta \underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_0}_{=0} + \frac{\theta^2}{2}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_0}_{=mgd+kd^2} = E_p(0) + \frac{1}{2}\theta^2(mgd + kd^2)$$

On injecte dans l'intégrale première du mouvement : $E_c + E_p = E_{m_0} = \text{cte}$ avec $E_c = \frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2$:

$$\frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + E_p(0) + \frac{1}{2}\theta^2(mgd + kd^2) = \text{cte}$$

On dérive par rapport au temps :

$$md^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}\theta(mgd + kd^2) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \theta\left(\underbrace{\frac{g}{d}}_{\omega_2^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_1^2}\right) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \Omega^2\theta = 0$$

avec $\boxed{\Omega = \sqrt{\omega_1^2 + \omega_2^2}}$

Remarque : on peut aussi retrouver ce résultat en faisant des approximations à l'ordre 1 dans le PFD. On se place à autour de $\theta_{eq} = 0$ c'est-à-dire pour $\theta \ll 1$. On a alors $\sin\theta \sim \theta$ et $\cos\theta \sim 1$.

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$\boxed{\ddot{\theta} + \theta\underbrace{(\omega_1^2 + \omega_2^2)}_{\Omega^2} = 0}$$

7. Montrer que la position d'équilibre $\theta = \pi$ n'est pas toujours stable et préciser alors à quelle condition est l'est. Commenter physiquement.

Réponse :
$\left(\dfrac{\mathrm{d}^2 E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta=\pi} = -mgd + kd^2 > 0$ si $mg < kd \Rightarrow \dfrac{g}{d} < \dfrac{k}{m} \Rightarrow \omega_2 < \omega_1$. Ainsi, cette position n'est stable que si l'effet du ressort prédomine sur les effets de la gravité. Si c'est l'inverse, elle est instable, ce qui est conforme à l'intuition physique.

8. Dans le cas où elle est stable, déterminer l'équation du mouvement au voisinage de $\theta_{eq} = \pi$ et en déduire la pulsation Ω' des petites oscillations autour de cette position d'équilibre.

Réponse :

On applique la même méthode que précédemment en utilisant un développement au voisinage de $\theta_{eq} = \pi$:

$$E_p(\theta) \sim E_p(\pi) + (\theta - \pi)\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}E_p}{\mathrm{d}\theta}\right)_\pi}_{=0} + \frac{(\theta-\pi)^2}{2}\underbrace{\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_0}_{=-mgd+kd^2} = E_p(\pi) + \frac{1}{2}\theta^2(-mgd + kd^2)$$

On injecte dans l'intégrale première du mouvement : $E_c + E_p = E_{m_0} = \text{cte}$ avec $E_c = \frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2$:

$$\frac{1}{2}md^2\dot{\theta}^2 + E_p(\pi) + \frac{1}{2}(\theta-\pi)^2(-mgd + kd^2) = \text{cte}$$

On dérive par rapport au temps :

$$md^2\ddot{\theta}\dot{\theta} + \dot{\theta}(\theta - \pi)(-mgd + kd^2) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \theta\left(-\underbrace{\frac{g}{d}}_{\omega_2^2} + \underbrace{\frac{k}{m}}_{\omega_1^2}\right) = \left(-\frac{g}{d} + \frac{k}{m}\right)\pi \Longrightarrow \ddot{\theta} + \Omega'^2\theta = \Omega'^2\pi$$

avec $\boxed{\Omega' = \sqrt{-\omega_2^2 + \omega_1^2}}$

Comme on est dans le cas où cette position est stable, on a $\omega_2 < \omega_1$ donc $-\omega_2^2 + \omega_1^2 > 0$.

Remarque : on peut à nouveau retrouver ce résultat avec le PFD. On se place proche de $\theta_{eq} = \pi$. On pose donc $\theta = \pi + q$ avec $q \ll 1$.

On a alors $\sin\theta = \sin(\pi + q) = -\sin q \sim -q$, $\cos(\pi + q) = -\cos q \sim -1$.

L'équation du mouvement s'écrit donc

$$\ddot{\theta} - q(-\omega_1^2 + \omega_2^2) = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} + \underbrace{q}_{\theta-\pi}(\omega_1^2 - \omega_2^2) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \theta(\omega_1^2 - \omega_2^2) = (\omega_1^2 - \omega_2^2)\pi}$$

9. Montrer enfin que les deux dernières positions d'équilibre déterminées en question 5 ne sont jamais stables lorsqu'elle existent.

Réponse :

On calcule à nouveau la dérivée seconde en θ_{eq} tel que $\cos\theta_{eq} = -\dfrac{\omega_2^2}{\omega_1^2} = \dfrac{mg}{kd}$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2E_p}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{eq}} = mgd\cos\theta_{eq} + kd^2\cos^2\theta_{eq} - kd^2\underbrace{\sin^2\theta_{eq}}_{1-\cos^2\theta_{eq}} = -mgd\frac{mg}{kd} + kd^2\frac{(mg)^2}{(kd)^2} - kd^2\left(1 - \frac{(mg)^2}{(kd)^2}\right) \tag{5.5}$$

$$= -\cancel{\frac{(mg)^2}{k}} + \cancel{\frac{(mg)^2}{k}} - kd^2 + \frac{(mg)^2}{k} \tag{5.6}$$

Cette position est stable si et seulement si $-kd^2 + \frac{(mg)^2}{k} > 0 \Rightarrow \dfrac{k^2}{m^2} < \frac{g^2}{d^2} \Rightarrow \omega_1^2 < \omega_2^2$

C'est la condition opposée à la condition d'existence de cette position d'équilibre. Ainsi, cette position d'équilibre n'est jamais stable lorsqu'elle existe.

Données :

On rappelle l'approximation de Taylor-Young à l'ordre 2 :

$$f(x) \sim f(x_0) + (x - x_0)\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_0) + \frac{(x-x_0)^2}{2}\frac{\mathrm{d}^2f}{\mathrm{d}x^2}(x_0)$$