

## Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont *autorisées*

### Au programme

Transformations de la matière jusqu'à cinétique chimique, oscillateurs électriques et mécaniques en RSF et résonance, notions élémentaires de fonction de transfert.

### Sommaire

<b>E1</b>	Étude d'un circuit RLC parallèle . . . . .	<b>2</b>
<b>E2</b>	Monoxyde et dioxyde d'azote ( <i>D'après PSI Centrale Supélec 2020</i> ) . . . . .	<b>5</b>
<b>P1</b>	Suivi cinétique de la formation du dibrome ( <i>D'après CCMP MP 2012</i> ) . . . . .	<b>7</b>
<b>P2</b>	Résonance d'un verre ( <i>D'après TSI Centrale Supélec 2018</i> ) . . . . .	<b>11</b>

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendrez soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

#### Malus

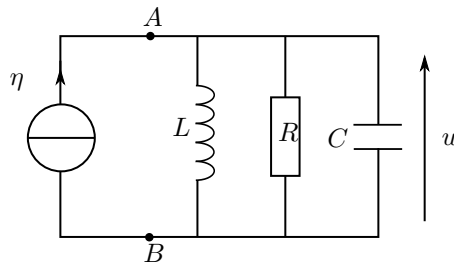
- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li>◇ A : application numérique mal faite ;</li> <li>◇ N : numéro de copie manquant ;</li> <li>◇ P : prénom manquant ;</li> <li>◇ E : manque d'encadrement des réponses ;</li> <li>◇ M : marge non laissée ou trop grande ;</li> <li>◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li>◇ Q : question mal ou non indiquée ;</li> <li>◇ C : copie grand carreaux ;</li> <li>◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;</li> <li>◇ H : homogénéité non respectée ;</li> <li>◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;</li> <li>◇ <math>\varphi</math> : loi physique fondamentale brisée.</li> </ul> |
|---|---|

#### Attention

**Au moins un exercice/problème de transformation de la matière et un exercice d'électrocinétique doivent être traités !**

## /65 E1 Étude d'un circuit RLC parallèle

Le circuit ci-contre est constitué d'une source idéale de courant de c.e.m.  $\eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t)$ . Cette source alimente une association parallèle constituée d'un condensateur, d'une bobine et d'une résistance. La tension aux bornes de cette association est  $u(t) = U_0 \cos(\omega t + \phi)$ . On note  $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\phi}$  l'amplitude complexe de  $u(t)$ .



### I/A Étude de l'amplitude et de la phase

- /3 1 Exprimer l'impédance équivalente  $\underline{Z}$  du dipôle AB.

Réponse

Dans le cas d'une association de dipôle en parallèle, on additionne les admittances :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega} \Leftrightarrow \underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

- /5 2 Montrer que l'amplitude complexe de la tension  $u$  se met sous la forme :

$$\underline{U}_0 = \frac{R\eta_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Exprimer  $Q$  et  $\omega_0$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ . Comment s'appellent ces deux constantes ?

Réponse

On applique la loi d'OHM généralisée sur le dipôle équivalent  $\underline{Z}$ , en utilisant les amplitudes complexes du courant et de la tension :

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{Z}\eta_0 = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \eta_0 \\ \Leftrightarrow \underline{U}_0 &= \frac{R\eta_0}{1 + jR\left(C\omega - \frac{1}{L\omega}\right)} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Factorise} \\ \text{par } jRL\omega \end{array} \right\}$$

$$\text{Identification : } RC = \frac{Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = Q\omega_0$$

$$\Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad \text{et} \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$$

avec  $\omega_0$  la pulsation propre du circuit et  $Q$  le facteur de qualité. ①

- /2 3 Exprimer l'amplitude réelle  $U_0$  de la tension  $u$  en fonction de  $R$ ,  $\eta_0$ ,  $Q$  et  $x$ .

Réponse

$$U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

- /8 4 Définir ce qu'est la résonance. Peut-il toujours y avoir résonance en tension ici ? Si oui, préciser la valeur de  $x$  puis de  $\omega$  à la résonance. Quelle est la valeur maximal  $U_{\max}$  de  $U_0$  ?

Réponse

La résonance correspond à un maximum de la fonction  $U_0$  ① à  $x \neq 0$  ①. Ici, comme  $R\eta_0 = \text{cte}$  ①, on a  $U_0$  maximale si son dénominateur est minimal ①, soit pour

$$\underbrace{1 + Q^2\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2}_{\geq 0} \text{ minimal} \Leftrightarrow Q^2\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2 \stackrel{①}{=} 0 \Leftrightarrow \boxed{x_r = 1} \stackrel{①}{\Leftrightarrow} \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Ainsi, il peut toujours y avoir résonance en tension ici ①, et on obtient  $U_{\max} = R\eta_0$ . ①

- /8 [5] Comment définit-on la bande passante  $\Delta\omega$ ? Montrer que  $\Delta\omega = \omega_0/Q$ .

### Réponse

La bande passante  $\Delta\omega$  est l'ensemble des pulsations  $\omega$  vérifiant  $U_{\max}/\sqrt{2} \leq U_0(\omega) \leq U_{\max}$ , ① soit  $\Delta\omega = [\omega_1; \omega_2]$ , avec  $\omega_1$  et  $\omega_2$  solutions de l'équation  $U_0(\omega_k) = U_{\max}/\sqrt{2}$ . En travaillant en pulsations réduites :

$$\begin{aligned} U_0(x_k) &= \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{R\eta_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2}} &= \frac{R\eta_0}{\sqrt{2}} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On remplace} \\ \text{On isole} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2 &\stackrel{\text{①}}{=} 1 \\ \Leftrightarrow Q\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) &= \pm 1 \\ \Leftrightarrow Qx_k^2 - Q &= \pm x_k \\ \Leftrightarrow Qx_k^2 \mp x_k - Q &\stackrel{\text{①}}{=} 0 \quad \left. \begin{array}{l} \times x_k \\ -\pm = \mp \end{array} \right\} \end{aligned}$$

On a alors deux trinômes, soit quatre racines possibles, avec

$$\Delta \stackrel{\text{①}}{=} 1 + 4Q^2$$

$$\Rightarrow x_{k,\pm,\pm} = \frac{\text{①} \pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q}$$

On ne garde que les racines positives, sachant que

$$\sqrt{1+4Q^2} > 1 :$$

$$x_1 = x_{k,-,+} = \frac{1}{2Q} \left( -1 + \sqrt{1+4Q^2} \right)$$

$$\text{① et } x_2 = x_{k,+,+} = \frac{1}{2Q} \left( 1 + \sqrt{1+4Q^2} \right)$$

puis on obtient la bande passante en calculant la différence  $|x_2 - x_1|$  :

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1 + \sqrt{1+4Q^2} - (-1 + \sqrt{1+4Q^2})}{2Q}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{\text{①}}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\text{①}\omega_0}{Q} \quad \blacksquare$$

- /7 [6] Faire l'étude asymptotique de la fonction  $U_0(x)$ . Indiquer alors les limites de  $U_0(x)$  en basses et hautes fréquences. Indiquer la valeur de  $U_0(x=1)$ . Tracer l'allure de  $U_0$  en fonction de  $x$ .

### Réponse

$$U_0(x) \underset{x \rightarrow 0}{\stackrel{\text{①}}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q} \underset{x \rightarrow 0}{\stackrel{\text{①}}{\rightarrow}} 0$$

$$U_0(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\stackrel{\text{①}}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q} \underset{x \rightarrow \infty}{\stackrel{\text{①}}{\rightarrow}} 0$$

$$U_0(1) \stackrel{\text{①}}{=} R\eta_0$$

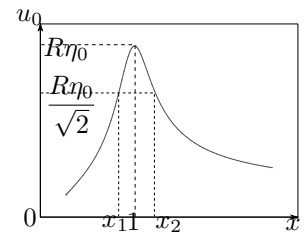


FIGURE D4.1 - ①+①

- /6 [7] Exprimer la phase  $\phi$  en fonction de  $Q$  et  $x$ . Préciser le domaine de variation de  $\phi$ .

### Réponse

$$\phi \stackrel{\text{①}}{=} \arg(U_0) \stackrel{\text{①}}{=} \underbrace{\arg(R\eta_0)}_{=0} - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \tan(\phi) \stackrel{\text{①}}{=} -\tan(\arg(\underbrace{1}_{\text{Re}>0} + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right))) \Leftrightarrow \phi \stackrel{\text{①}}{=} -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \quad \text{avec} \quad \phi \in \left] -\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2} \right[ \quad \text{①}$$

- /7 [8] Faire l'étude asymptotique de la fonction  $\phi(x)$ . Indiquer alors ses limites en hautes et basses fréquences. Indiquer l'allure de  $\phi(x=1)$ . Tracer l'allure de  $\phi$  en fonction de  $x$ .

### Réponse

$$\phi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\stackrel{\text{①}}{\sim}} -\arctan\left(-\frac{Q}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\stackrel{\text{①}}{\rightarrow}} \frac{\pi}{2}$$

$$\phi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\stackrel{\text{①}}{\sim}} -\arctan(Qx) \underset{x \rightarrow \infty}{\stackrel{\text{①}}{\rightarrow}} -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi(1) \stackrel{\text{①}}{=} 0$$

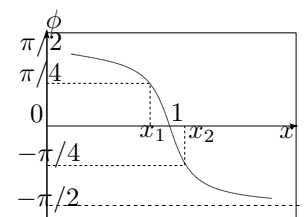
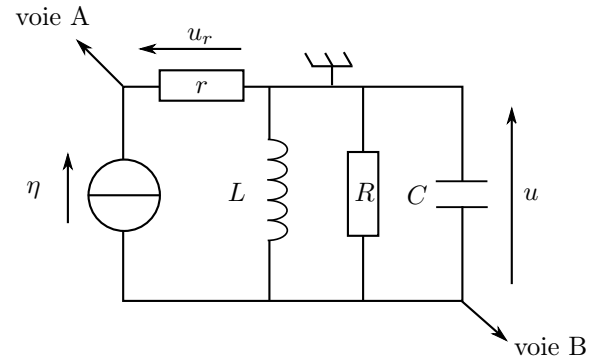


FIGURE D4.2 - ①+①

## I/B

### Expérience

Pour tracer les graphiques  $U_0$  et  $\phi$  en fonction de  $\omega$ , il faut pouvoir observer simultanément le courant  $\eta(t)$  et la tension  $u(t)$ . On ajoute une résistance  $r$  en série avec le générateur de courant afin de visualiser le courant  $\eta(t)$  par l'intermédiaire de la tension  $u_r(t)$ . On propose le montage ci-contre.



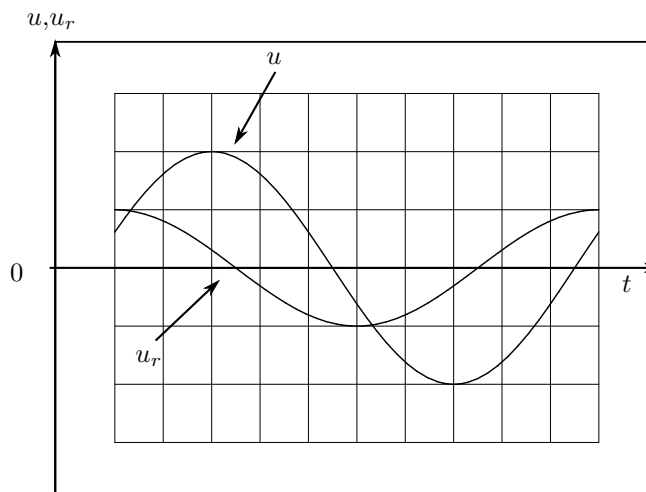
- /5 [9] À quelle condition le montage proposé est-il valable ? On suppose cette condition vérifiée dans la suite. Quelle tension visualise-t-on sur la voie A ? sur la voie B ? Que faut-il faire pour visualiser  $\eta(t)$  et  $u(t)$  ?

#### Réponse

Le montage est valable si le générateur de courant n'impose pas de masse, c'est-à-dire avec un générateur à masse flottante. ①

- ◇ Sur la voie A, on visualise la tension  $u_r(t) = r\eta(t)$ . ① Donc il faut diviser par  $r$  la voie A pour visualiser  $\eta(t)$ . ①
- ◇ Sur la voie B, on visualise  $-u(t)$ . ① Donc il faut inverser la voie B pour visualiser  $u(t)$ . ①

La figure suivante montre une acquisition des tensions  $u_r$  et  $u$  faite pour une pulsation  $\omega$  donnée. Le calibre vertical est de 1 V sur les deux voies. **On ne connaît pas l'échelle de temps.**



- /4 [10] La tension  $u$  est-elle en avance ou en retard par rapport au courant  $\eta$  ? Justifier. En degrés, quel est la valeur de déphasage correspondant à un décalage d'une période ? Déterminer alors, toujours en degrés, la valeur du déphasage  $\Delta\varphi_{u/i} = \phi$  de la tension  $u$  par rapport au courant  $\eta$ .

#### Réponse

La tension  $u$  est en retard ① par rapport au courant  $\eta$  car son maximum arrive après celui de la tension  $u_r$ . ①

Une période du signal  $u_r$  (ou  $u$ ) correspond à un déphasage de  $360^\circ$ . ① Or ici, une période correspond à 10 carreaux, donc un retard de 1 carreau correspond à un déphasage de  $-36^\circ$ , et on a 2 carreaux de déphasage entre  $u$  et  $u_r$  ; ainsi,  $\phi = -72^\circ$ . ①

- /5 [11] Que vaut l'amplitude  $U_0$  de la tension  $u$  ? Définir mathématiquement la valeur efficace  $s_{\text{eff}}$  d'un signal  $s(t)$  périodique de période  $T$ . Que représentent physiquement  $s_{\text{eff}}^2$  et  $s_{\text{eff}}$  ?

#### Réponse

L'amplitude de  $u(t)$  correspond à 2 carreaux, donc  $U_0 = 2 \text{ V}$ . ①

Mathématiquement,

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} = \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

$s_{\text{eff}}^2$  représente l'énergie moyenne du signal ①; ainsi,  $s_{\text{eff}}$  correspond à l'amplitude constante qui porterait la même énergie moyenne que  $s(t)$ . ①

- /5 12 Soit un signal  $s(t)$  sinusoïdal de période  $T$ , d'amplitude  $S_0$  et de phase à l'origine nulle. Établir l'expression de sa valeur efficace  $s_{\text{eff}}$  en fonction de  $S_0$ . En déduire la valeur efficace de la tension  $u(t)$ . On donne  $\sqrt{2} = 1,4$ .

Réponse

$$\begin{aligned}
 s(t) &= S_0 \cos(\omega t) \\
 \Rightarrow \langle s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (S_0^2 \cos^2(\omega t)) dt \\
 \Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle &= \frac{S_0^2}{2T} \left( \int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right) \quad \text{Linéarisation} \\
 &\Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle = \frac{S_0^2}{2T} \left( \underbrace{\int_0^T dt}_{=T} + \underbrace{\int_0^T \cos(2\omega t) dt}_0 \right) \\
 &\Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle = \frac{S_0^2}{2} \quad \Leftrightarrow s_{\text{eff}} = \frac{S_0}{\sqrt{2}} \quad \text{d'où} \quad u_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}} \Rightarrow u_{\text{eff}} = 1,4 \text{ V} \text{ ①}
 \end{aligned}$$

## /37 E2 Monoxyde et dioxyde d'azote (D'après PSI Centrale Supélec 2020)

En consommant du kérosène, les moteurs d'avions entraînent le rejet de nombreux polluants parmi lesquels les monoxyde d'azote NO et dioxyde d'azote NO<sub>2</sub>, regroupés sous l'appellation NO<sub>x</sub>. Ces composés sont responsables d'une augmentation de la production d'ozone O<sub>3</sub>, gaz à effet de serre, dans la basse atmosphère.

Le monoxyde d'azote NO est obtenu par oxydation du diazote N<sub>2</sub> à haute température lors de la phase de combustion, modélisée par l'équation de réaction



- /6 1 La réaction se produit dans l'air. Rappeler la fraction molaire du diazote et du dioxygène dans l'air. En déduire le tableau d'avancement de la réaction en notant  $n_0$  la quantité de matière initiale en O<sub>2(g)</sub>. Vous garderez une ligne libre pour la compléter ensuite.

Réponse

$$x_{\text{O}_2} = 0,2 \quad \text{et} \quad x_{\text{N}_2} = 0,8 = 4 \cdot x_{\text{O}_2}$$

Équation ①+①		N <sub>2(g)</sub>	+	O <sub>2(g)</sub>	=	2NO <sub>(g)</sub>	n <sub>tot, gaz</sub> ①	
Initial	ξ = 0	4n <sub>0</sub>		n <sub>0</sub>		0	5n <sub>0</sub>	①
Équili.	ξ <sub>eq</sub>	4n <sub>0</sub> - ξ <sub>eq</sub>		n <sub>0</sub> - ξ <sub>eq</sub>		2ξ <sub>eq</sub>	5n <sub>0</sub>	①
Final	ξ <sub>eq</sub> ≪ n <sub>0</sub>	≈ 4n <sub>0</sub>		≈ n <sub>0</sub>		4,9 × 10 <sup>-3</sup> n <sub>0</sub>	5n <sub>0</sub>	+1 Q2

- /11 2 En faisant une hypothèse sur l'avancement à l'équilibre, évaluer la fraction molaire de monoxyde d'azote NO présente à l'équilibre dans de l'air chauffé à 1450 K. En déduire la quantité  $n_{\text{NO,eq}}$  à l'équilibre en fonction de  $n_0$ . Compléter alors la dernière ligne du tableau d'avancement précédent.

Réponse

Comme  $K_1^\circ \ll 1$ , on peut supposer la réaction quasi-nulle ①, soit

$$\begin{aligned}
 \xi_{\text{eq}} \ll n_0 &\Rightarrow \begin{cases} x_{\text{O}_2,\text{eq}} \approx x_{\text{O}_2,0} \\ x_{\text{N}_2,\text{eq}} \approx x_{\text{N}_2,0} \end{cases} \\
 &\Rightarrow x_{\text{NO,eq}} \ll (x_{\text{O}_2,\text{eq}} ; x_{\text{N}_2,\text{eq}})
 \end{aligned}$$

D'après la loi d'action de masse et la loi de DALTON  $p_X = x_X p_{\text{tot}}$  ①,

L'hypothèse est bien vérifiée ①, et on trouve

$$x_{\text{NO,eq}} = \frac{2\xi_{\text{eq}}}{5n_0} \Leftrightarrow 2\xi_{\text{eq}} = 5x_{\text{NO,eq}}n_0 \Rightarrow n_{\text{NO,eq}} \approx 4,9 \times 10^{-3}n_0$$

$$\begin{aligned}
 K_1^\circ &= \frac{p_{\text{NO,eq}}^2}{p_{\text{N}_2,\text{eq}}p_{\text{O}_2,\text{eq}}} = \frac{x_{\text{NO,eq}}^2}{x_{\text{N}_2,\text{eq}}x_{\text{O}_2,\text{eq}}} \\
 \Leftrightarrow x_{\text{NO,eq}} &= \sqrt{K_1^\circ \cdot x_{\text{N}_2,0} \cdot x_{\text{O}_2,0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_1^\circ = 6,0 \times 10^{-6} \\ x_{\text{N}_2,0} = 0,8 \\ x_{\text{O}_2,0} = 0,2 \end{cases} \\
 \text{A.N. : } x_{\text{NO,eq}} &= 9,8 \times 10^{-4} \ll 0,2
 \end{aligned}$$

Dans un deuxième temps, il y a production de dioxyde d'azote  $\text{NO}_2$  à partir du monoxyde d'azote  $\text{NO}$ , modélisée par l'équation de réaction



La figure D4.3 fournit pour cette réaction les résultats d'une étude cinétique réalisée à 400 K, où  $v$  représente la dérivée temporelle de l'avancement volumique de la réaction. Les concentrations initiales utilisées dans cette étude sont

◇ **Expérience 1** (tracé avec  $\times$ ) :  $[\text{O}_2]_{01} = 5,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}]_{01} = 10 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}_2]_{01} = 0$  ;

◇ **Expérience 2** (tracé avec  $+$ ) :  $[\text{O}_2]_{02} = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}]_{02} = 10 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ ,  $[\text{NO}_2]_{02} = 0$ .

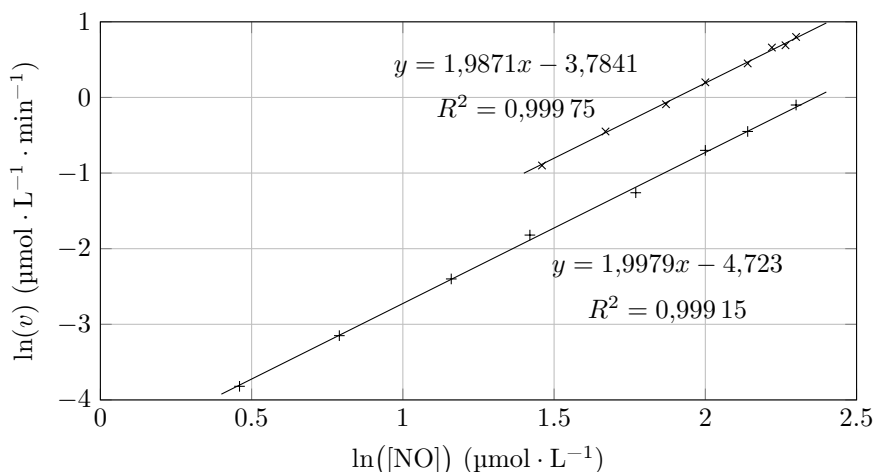


FIGURE D4.3

- /7 [3] Commenter la valeur de la constante de réaction. Écrire l'expression de la vitesse de la réaction. On appelle  $p$  l'ordre partiel sur  $\text{NO}$  et  $q$  l'ordre partiel sur  $\text{O}_2$ , **supposés entiers**. En analysant les concentrations initiales des expériences proposées, simplifier la loi de vitesse en faisant apparaître une constante de vitesse apparente  $k_{\text{app}}$ . Comment s'appelle cette méthode ?

#### Réponse

Cette réaction peut être considérée comme quasi-totale car  $K_2^\circ \gg 1$ . ① Avec les ordres partiels indiqués, on trouve

$$v(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} k[\text{NO}](t)^p \cdot [\text{O}_2](t)^q$$

Or, on a  $[\text{O}_2]_0 \gg [\text{NO}]_0$

$$\Rightarrow [\text{O}_2](t) \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} [\text{O}_2]_0$$

$$\Rightarrow v(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} k[\text{NO}](t)^p \cdot [\text{O}_2]_0^q$$

$$\Leftrightarrow v(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}}[\text{NO}](t)^p \quad \text{avec} \quad k_{\text{app}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} k[\text{O}_2]_0^q$$

C'est la méthode de **dégénérescence de l'ordre**. ①

- /4 [4] Expliquer l'intérêt de la régression linéaire effectuée. Comment s'appelle cette méthode ? Déterminer alors l'ordre partiel  $p$ .

#### Réponse

C'est la **méthode différentielle** ①. Il s'agit de tracer  $\ln(v(t))$  en fonction de  $\ln([\text{NO}](t))$ . En effet, on a alors

$$\ln(v(t)) \stackrel{\textcircled{1}}{=} p \cdot \ln([\text{NO}](t)) + \ln(k_{\text{app}}) \Leftrightarrow y \stackrel{\textcircled{1}}{=} a \cdot x + b$$

c'est-à-dire que le coefficient directeur est l'ordre partiel  $p$ , et l'ordonnée à l'origine est  $\ln(k_{\text{app}})$ . En l'occurrence, pour les deux expériences on trouve

$$a \approx 2 \Rightarrow p = 2 \textcircled{1}$$

- /4 [5] Toujours dans le cadre des expériences 1 et 2, montrer que

$$q = \frac{\ln(k_{\text{app},1}) - \ln(k_{\text{app},2})}{\ln([\text{O}_2]_{01}) - \ln([\text{O}_2]_{02})}$$

Calculer alors la valeur de  $q$ .

#### Réponse

D'après la question [3], on a

$$\begin{aligned}
 k_{\text{app},1} &= k[\text{O}_2]_{01}^q \quad \text{et} \quad k_{\text{app},2} = k[\text{O}_2]_{02}^q \\
 \Leftrightarrow \frac{k_{\text{app},1}}{k_{\text{app},2}} &= \frac{[\text{O}_2]_{01}^q}{[\text{O}_2]_{02}^q} \\
 \Leftrightarrow \ln \frac{k_{\text{app},1}}{k_{\text{app},2}} &= q \ln \frac{[\text{O}_2]_{01}}{[\text{O}_2]_{02}}
 \end{aligned}
 \Leftrightarrow \boxed{q = \frac{\ln(k_{\text{app},1}) - \ln(k_{\text{app},2})}{\ln([\text{O}_2]_{01}) - \ln([\text{O}_2]_{02})}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ln(k_{\text{app},1}) = -3,7841 \, \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1} \\ \ln(k_{\text{app},2}) = -4,723 \, \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{01} = 5,0 \times 10^{-3} \, \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{02} = 2,0 \times 10^{-3} \, \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \end{cases}$$

A.N. :  $q = 1,02 \approx 1$

- /2 [6] Que peut-on déduire sur la nature de la réaction décrite par l'équation-bilan précédente? Comment s'appelle la loi qui donne la loi de vitesse de ce type de réactions?

### Réponse

Les ordres partiels sont donc égaux aux coefficient stœchiométriques; on peut supposer que c'est une **réaction simple** ①, ce qui expliquerait pourquoi elle suit donc la **loi de VAN'T HOFF**. ①

- /3 [7] Calculer la valeur de la constante de vitesse. L'exprimer en utilisant des mol, des L et des s.

### Réponse

Avec  $q = 1$ , on trouve  $k$  à partir de la connaissance de  $k_{\text{app},1}$  ou  $k_{\text{app},2}$  :

$$\boxed{k = \frac{k_{\text{app},1}}{[\text{O}_2]_{01}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ln(k_{\text{app},1}) = -3,784 \, \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{01} = 5,0 \times 10^{-3} \, \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \end{cases}$$

A.N. :  $k = 4,5 \times 10^{-6} \, \mu\text{mol}^{-2}\cdot\text{L}^2\cdot\text{min}^{-1} \Rightarrow k = 7,5 \times 10^{10} \, \text{mol}^{-2}\cdot\text{L}^2\cdot\text{s}^{-1}$

## /52 P1 Suivi cinétique de la formation du dibrome (D'après CCMP MP 2012)

À température ambiante, le dibrome de formule  $\text{Br}_2$  est un liquide brun-orangé très volatil, dégageant des vapeurs toxiques de même couleur.

- /2 [1] Justifier la couleur du dibrome en vous servant de son spectre d'absorption, donné ci-après.

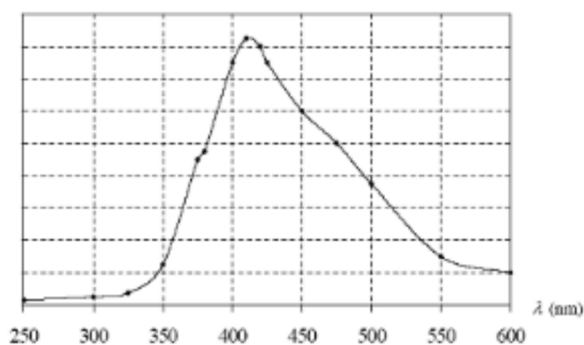


FIGURE D4.4 – Spectre d'absorption du dibrome gazeux.

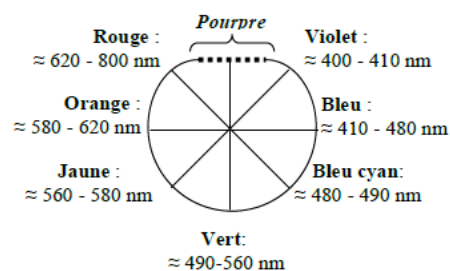


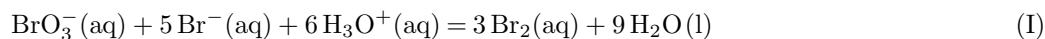
FIGURE D4.5 – Cercle chromatique simplifié.

### Réponse

Le dibrome absorbe fortement à la longueur d'onde  $\lambda \approx 400 \, \text{nm}$  ①. Sa couleur correspond à la couleur complémentaire du bleu, soit l'orange ①.

On effectue la synthèse du dibrome en mélangeant un même volume  $V$  d'une solution de bromate de sodium ( $\text{NaBrO}_3$ ) de concentration  $C_{01} = 2,0 \times 10^{-3} \, \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$  et d'une solution de bromure de sodium ( $\text{NaBr}$ ) de concentration  $C_{02} = 1,0 \times 10^{-2} \, \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . Des ions  $\text{H}_3\text{O}^+_{(\text{aq})}$  sont naturellement présents en solution. Une coloration brune apparaît alors après un certain temps.

L'équation de la réaction est la suivante :



- /8 [2] Faire un schéma de la préparation. Cette réaction est réalisée dans des conditions où on constate que 90% des ions bromate ont réagi une fois l'équilibre atteint. Déterminer les concentrations des différentes espèces bromées à l'équilibre.

### Réponse

① pour un schéma qui montre que le volume total est  $2V$ . On détermine alors les concentrations initiales  $C_1$  et  $C_2$  en faisant attention au facteur de dilution :

$$C_1 = \frac{C_{01}}{2} = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{C_{02}}{2} = 5,0 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

On effectue un tableau d'avancement en concentration :

Équation ①+①		$\text{BrO}_3^-(\text{aq})$	+	$5\text{Br}^-(\text{aq})$	+	$6\text{H}_3\text{O}^+(\text{aq})$	=	$3\text{Br}_2(\text{aq})$	+	$9\text{H}_2\text{O}(\text{l})$	
Initial	$x = 0$	$C_1$		$C_2$		$C_3$		0		excès	①
Interm.	$x_{\text{eq}}$	$C_1 - x_{\text{eq}}$		$C_2 - 5x_{\text{eq}}$		$C_3 - 6x_{\text{eq}}$		$3x_{\text{eq}}$		excès	①

D'après l'énoncé, 90% des ions  $\text{BrO}_3^-$  ont réagi, donc  $x_{\text{eq}} = 0,9C_1 = 9,0 \times 10^{-4} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ . ① On en déduit les concentrations à l'équilibre ① :

$$[\text{BrO}_3^-]_{\text{eq}} = 1,0 \times 10^{-4} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{Br}^-]_{\text{eq}} = 5,0 \times 10^{-4} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{Br}_2]_{\text{eq}} = 2,7 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$



L'étude cinétique de la réaction (I) montre que la réaction admet un ordre vis-à-vis de chacun des réactifs. On se propose de déterminer les ordres partiels de réaction ainsi que la constante de vitesse.

On notera respectivement  $p$ ,  $q$  et  $r$  les ordres partiels des espèces  $\text{BrO}_3^-(\text{aq})$ ,  $\text{Br}^-(\text{aq})$  et  $\text{H}_3\text{O}^+$ , et  $k$  la constante de vitesse de la réaction. On considérera que les ordres restent inchangés tout au long de la réaction.

Une première expérience est réalisée à  $0^\circ\text{C}$  à partir des concentrations initiales suivantes :

$$[\text{BrO}_3^-]_0 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{Br}^-]_0 = 1,4 \times 10^{-1} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{H}_3\text{O}^+]_0 = 1,0 \times 10^{-1} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

- /6 [3] Exprimer la vitesse volumique de la réaction en fonction des concentrations des espèces considérées, des ordres partiels et de la constante de vitesse. Commenter les concentrations choisies pour réaliser cette expérience. Quelle approximation peut-on effectuer ? Comment s'appelle cette méthode ? Sous quelle forme peut-on simplifier l'expression de la vitesse volumique de la réaction donnée à la question précédente ?

### Réponse

$$v = k[\text{BrO}_3^-]^p(t) \cdot [\text{Br}^-]^q(t) \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]^r(t)$$

On constate que  $[\text{H}_3\text{O}^+]_0 \gg [\text{BrO}_3^-]_0$  et  $[\text{Br}^-]_0 \gg [\text{BrO}_3^-]_0$ . ① On peut négliger la variation temporelle de la concentration en ions oxonium ainsi que celle en ions bromure. ① C'est la méthode de la dégénérescence de l'ordre.

① Dans ces conditions, la loi de vitesse se simplifie :

$$v \approx k[\text{Br}^-]_0^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^r \cdot [\text{BrO}_3^-]^p \stackrel{\text{①}}{=} k_{\text{app}}[\text{BrO}_3^-]^p \quad \text{avec} \quad k_{\text{app}} \stackrel{\text{①}}{=} k[\text{Br}^-]_0^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^r$$



- /13 [4] Établir les expressions reliant la concentration en ions bromate, notée  $C(t)$  par commodité, et le temps dans le cas où la réaction est d'ordre 0, 1 et 2 par rapport aux ions bromates. Indiquer pour chaque cas la régression linéaire à effectuer pour vérifier chaque hypothèse.

### Réponse

Dans chaque cas, la vitesse de la réaction s'écrit  $v(t) \stackrel{\text{①}}{=} -\frac{1}{1} \frac{dC}{dt}$



◇ **Ordre 0 :**

$$\begin{aligned} v(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} C(t)^0 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} \\ \Leftrightarrow C(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} C_0 - k_{\text{app}} t \end{aligned} \quad \int_0^t$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$   
 $C(t) \quad -k_{\text{app}} \quad t \quad C_0$

◇ **Ordre 2 :**

$$\begin{aligned} v(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} C(t)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} C(t)^2 \\ \Leftrightarrow -\frac{dC}{C^2} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} dt \\ \Leftrightarrow \int_{C_0}^C -\frac{dC}{C^2} &= \int_{t=0}^t k_{\text{app}} dt \end{aligned} \quad \int_0^t$$

Or,  $d\left(\frac{1}{f}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{df}{f^2} :$

◇ **Ordre 1 :**

$$\begin{aligned} v(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} C(t)^1 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} C(t) \\ \Leftrightarrow C(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} C_0 e^{-k_{\text{app}} t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} &C(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} K e^{rt} \\ &C(0) = C_0 \end{aligned}$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$   
 $\ln(C(t)) - k_{\text{app}} \quad t \quad \ln(C_0)$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{C_0}^{C(t)} d\left(\frac{1}{C(t)}\right) &= k_{\text{app}} \cdot \int_{t=0}^t dt \\ \Leftrightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} &= k_{\text{app}} \cdot t \end{aligned} \quad \int_a^b d(\cdot) = [\cdot]_a^b$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{C} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{C_0} + k_{\text{app}} t$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

$\swarrow \quad \downarrow \quad \searrow$   
 $\frac{1}{C} \quad k_{\text{app}} \quad t \quad \frac{1}{C_0}$

On a relevé les données suivantes (Tableau D4.1) de la concentration en ions  $\text{BrO}_3^-$ , notée  $C$  par commodité, en fonction du temps :

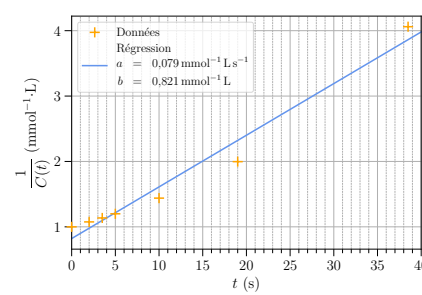
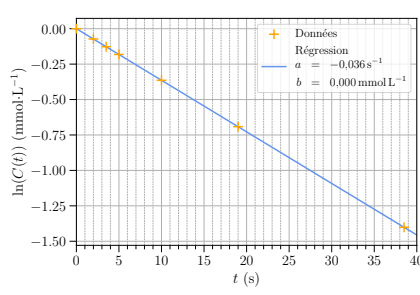
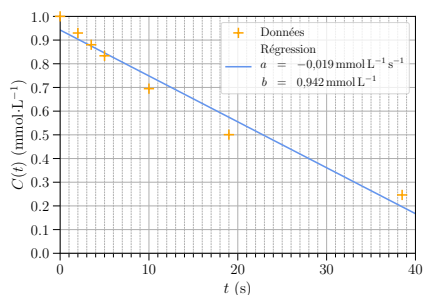
**TABLEAU D4.1** – Données de  $c(t)$

$t$ (s)	0	2,0	3,5	5,0	10,0	19,0	38,5
$C(t)$ (mmol·L <sup>-1</sup> )	1,00	0,93	0,88	0,83	0,69	0,50	0,25

/9 5 Tracer chaque régression sur votre calculatrice et reproduire sommairement l'allure des courbes sur votre copie. Vous prendrez soin d'indiquer l'unité des axes pour chacun d'eux. En déduire l'ordre partiel de la réaction par rapport aux ions bromate. Justifier. Déterminer alors la constante de vitesse apparente.

**Réponse**

On obtient



**FIGURE D4.6** – Régression ordre 0. ② **FIGURE D4.7** – Régression ordre 1. ② **FIGURE D4.8** – Régression ordre 2. ②

La seule régression valide est celle de la Figure D4.7, puisque la droite passe effectivement par les points sans déviation particulière ① : on a donc

$$p = 1 \textcircled{1}$$

De plus, d'après la régression linéaire établie précédemment, on obtient

$$a = -k_{\text{app}} \Rightarrow k_{\text{app}} = 3,6 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \text{ ①}$$



/2 6 Définir et déterminer ensuite le temps de demi-réaction relatif aux ions bromate.

Réponse

Par définition, on a  $t_{1/2}$  tel que

$$C(t_{1/2}) = \frac{C(0)}{2} \text{ ①}$$

Ici, avec  $C(0) = 1,0 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ , on trouve  $C(t_{1/2}) = 0,50 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$ , et on a donc directement  $t_{1/2}$  dans le Tableau D4.1 :

$$t_{1/2} = 19 \text{ s} \text{ ①}$$



Plusieurs autres expériences ont été réalisées à  $0^\circ\text{C}$  pour une même concentration initiale en ions bromate  $[\text{BrO}_3^-]_0 = 1,0 \times 10^{-3} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$  et pour des concentrations variables en ions bromure et oxonium. Dans chaque expérience, la vitesse initiale a été déterminée. Les résultats sont rassemblés dans le tableau suivant :

Expériences	$[\text{Br}^-]_0 (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	$[\text{H}_3\text{O}^+]_0 (\text{mol} \cdot \text{L}^{-1})$	Vitesse initiale ( $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{s}^{-1}$ )
N°1	0,10	0,10	$4,1 \times 10^{-5}$
N°2	0,15	0,10	$6,2 \times 10^{-5}$
N°3	0,10	0,20	$16,4 \times 10^{-5}$

/9 7 Déterminer l'ordre partiel par rapport aux ions bromures et l'ordre partiel par rapport aux ions  $\text{H}_3\text{O}^+$ .

Réponse

On pose le système d'équations :

$$v_{01} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{01}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{01}^r \quad (4.1)$$

$$\text{① } v_{02} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{02}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{02}^r \quad (4.2)$$

$$v_{03} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{03}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{03}^r \quad (4.3)$$

$$(4.2)/(4.1) \Rightarrow \frac{v_{02}}{v_{01}} = \left( \frac{[\text{Br}^-]_{02}}{[\text{Br}^-]_{01}} \right)^q$$

$$\text{car } [\text{H}_3\text{O}^+]_{02} = [\text{H}_3\text{O}^+]_{01}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{\ln(v_{02}/v_{01})}{\ln([\text{Br}^-]_{02}/[\text{Br}^-]_{01})}$$

$$\text{A.N. : } q = 1 \text{ ①}$$

$$(4.3)/(4.1) \Rightarrow \frac{v_{03}}{v_{01}} = \left( \frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{03}}{[\text{H}_3\text{O}^+]_{01}} \right)^r$$

$$\text{car } [\text{Br}^-]_{03} = [\text{Br}^-]_{01}$$

$$\Leftrightarrow r = \frac{\ln(v_{03}/v_{01})}{\ln([\text{H}_3\text{O}^+]_{03}/[\text{H}_3\text{O}^+]_{01})}$$

$$\text{A.N. : } r = 2 \text{ ①}$$



/3 8 Calculer la constante de vitesse  $k$  de la réaction. Préciser clairement son unité.

Réponse

D'après 3 et en prenant les données de l'expérience initiale, on a

$$k = \frac{k_{\text{app}}}{[\text{Br}^-]_0 \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_{\text{app}} = 3,6 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ [\text{Br}^-]_0 = 0,14 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{H}_3\text{O}^+]_0 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases} \text{ ①}$$

$$\text{A.N. : } k \approx 26 \text{ mol}^{-3} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{s}^{-1} \text{ ①}$$



## /86 P2 Résonance d'un verre (D'après TSI Centrale Supélec 2018)

Dans le vingt-et-unième album de la série *Les Aventures de Tintin*, intitulé *Les Bijoux de la Castafiore*, cette dernière est en mesure de faire exploser un verre par la simple utilisation de sa voix. Le présent sujet se penche sur les aspects physiques de ce phénomène. Nous tenterons ainsi de déterminer les circonstances dans lesquelles il est effectivement possible de réaliser une telle prouesse et nous nous pencherons sur les rôles joués par les différents paramètres physiques susceptibles d'influer sur ces circonstances.

Les deux parties sont indépendantes.

### II/A Analyse expérimentale des vibrations du verre suite à un choc

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre mis ainsi en vibration.

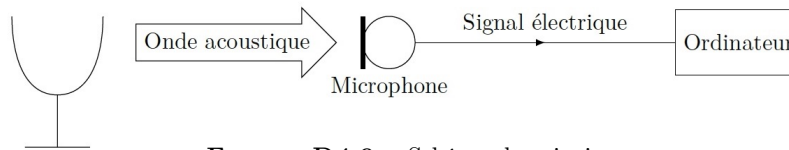


FIGURE D4.9 – Schéma de principe.

Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant  $t = 0$ , au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur et représenté sur la figure D4.10. Le spectre de ce signal temporel est représenté sur la figure D4.11.

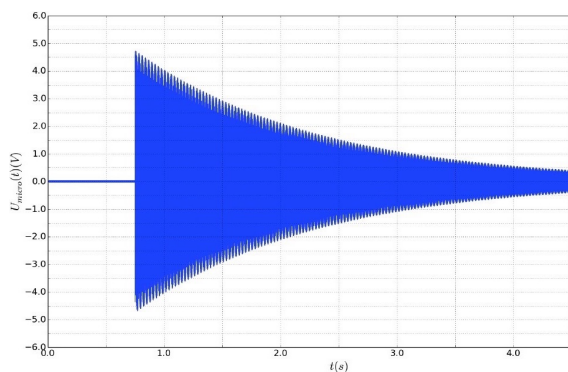


FIGURE D4.10 – Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre.

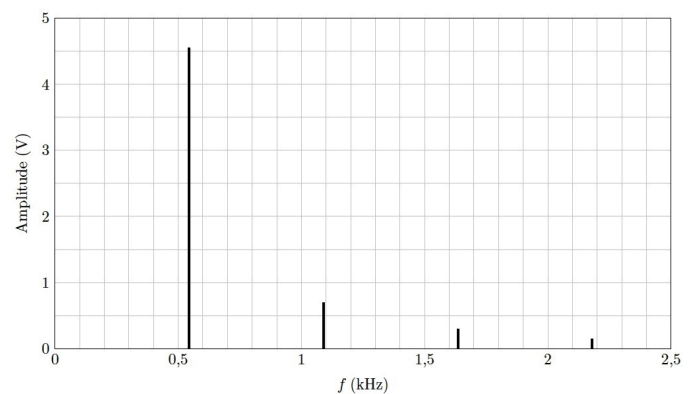


FIGURE D4.11 – Analyse spectrale du son réalisé peu après la frappe du verre.

Les « pics » représentés dans la figure D4.11 correspondent à des modes propres de vibration du verre.

- /5 1 Donner les fréquences des différents modes propres. Elles sont liées par une relation simple, laquelle ? Comment nomme-t-on ces différents modes propres ? Quelle est la fréquence du signal ?

#### Réponse

On relève les fréquences suivantes :  $f_1 \approx 550$  Hz,  $f_2 \approx 1090$  Hz,  $f_3 \approx 1620$  Hz et  $f_4 \approx 2180$  Hz. ① On remarque donc que l'on a  $f_n = n f_1$ , avec  $n \in \mathbb{N}^*$  ①

Le premier mode est appelé fondamental. ① Les autres sont appelés harmoniques de rang  $n$ . ①

La fréquence du signal est la fréquence de son fondamental, donc ici  $f = 550$  Hz. ①



Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse  $m$  mobile sur l'axe  $(Ox)$  horizontal associée à un ressort de raideur  $k$ , de longueur à vide nulle (figure D4.12). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$  où  $\vec{v}$  désigne le vecteur vitesse de la masse  $m$ .



FIGURE D4.12 – Modèle mécanique du déplacement.

/10 [2] Établir proprement le système d'étude.

**Réponse**

② pour un beau schéma propre.

- ① ◇ Système : {point M} de masse  $m$
- ① ◇ Référentiel d'étude :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}$  supposé galiléen
- ① ◇ Repère :  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  avec  $\vec{u}_y$  vertical ascendant
- ① ◇ Repérage :  $\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{u}_x$  ;  $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$  ;  $\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x$

◇ **Bilan des forces :**

- ① **Poids**  $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$
- ① **Réaction support**  $\vec{R} = R \vec{u}_y$
- ① **Force rappel**  $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x = -kx(t) \vec{u}_x$
- ① **Force frottement**  $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$

/5 [3] Montrer que l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de  $x(t)$  s'écrit de la façon suivante, avec  $\omega_0$  et  $Q$  deux constantes que l'on exprimera en fonction de  $\alpha$ ,  $k$  et  $m$  :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = 0$$

**Réponse**

Avec le PFD :

$$m \vec{a} \stackrel{\text{①}}{=} \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_r$$

$$\Rightarrow m \frac{d^2x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx(t) = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x(t) \stackrel{\text{①}}{=} 0$$

On identifie  $\omega_0$  et  $Q$  :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 \stackrel{\text{①}}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}$$

et

$$\frac{\alpha}{m} \stackrel{\text{①}}{=} \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow Q \stackrel{\text{①}}{=} \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

D'où la forme demandée.

/3 [4] Quels sont les noms, les unités et les significations physiques de  $\omega_0$  et de  $Q$  ?

**Réponse**

$\omega_0$  est la pulsation propre ① du système, elle s'exprime en rad/s ①. Elle correspond à la pulsation à laquelle oscillerait le système s'il n'y avait pas de frottement. ①

$Q$  est appelé facteur de qualité du système. ① Il est sans unité. ① Plus  $Q$  est grand, moins il y a de dissipation d'énergie, plus le système s'approche d'un oscillateur harmonique non amorti. ①

/9 [5] Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas de frottements « faibles », l'expression approchée de la solution  $x(t)$ . Montrer en particulier que la fonction  $x(t)$  peut se mettre sous la forme d'un signal sinusoïdal de pulsation  $\Omega$  délimité par une enveloppe exponentielle décroissante, dont on précisera l'expression du temps caractéristique  $\tau$  en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

**Réponse**

L'équation différentielle est homogène, donc  $x(t) = x_h(t)$ . Pour déterminer  $x_h(t)$ , on injecte la forme générique  $x_h(t) = K e^{rt}$  ① pour trouver l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 \stackrel{\text{①}}{=} 0$$

$$\Rightarrow \Delta \stackrel{\text{①}}{=} \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) \stackrel{\text{①}}{<} 0 \quad \text{faible amortissement}$$

$$\Rightarrow r_{\pm} \stackrel{\text{①}}{=} \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} (4Q^2 - 1)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On injecte } \Delta \\ \text{et } \omega_0 \end{array} \right\}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} \stackrel{\text{①}}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} \stackrel{\text{①}}{=} -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega$$

Ω et τ

$$\Rightarrow \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{①} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x(t) \stackrel{\text{①}}{=} e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

- /4 [6] Déterminer l'expression complète de  $x(t)$  avec les conditions initiales  $x(0) = 0$  et  $\frac{dx}{dt} = V_0$ .

Réponse

◇ On trouve  $A$  avec la première condition initiale :

$$x(0) = 0 = 1[A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \Rightarrow \boxed{A = 0} \textcircled{1}$$

◇ On trouve  $B$  avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}B\sin(\Omega t) + e^{-t/\tau}B\Omega\cos(\Omega t) \\ \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 &= \Omega B = V_0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{V_0}{\Omega}} \textcircled{1} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{x(t) = \frac{\textcircled{1}V_0}{\Omega}e^{-t/\tau}\sin(\Omega t)}$$



- /4 [7] À l'aide de la figure D4.10, que vous recopierez sommairement sur votre copie pour montrer votre construction graphique, déterminer numériquement  $\tau$ .

Réponse

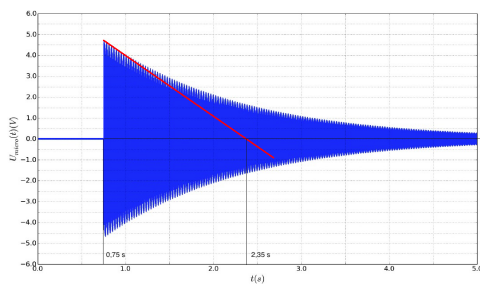


Figure 2 Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre

FIGURE D4.13 –  $\textcircled{1}+\textcircled{1}$

On trace la tangente à l'origine de l'enveloppe exponentielle. Elle coupe l'asymptote  $x = 0$  en  $t = \tau$ . On lit donc

$$\tau = t_{\text{its}} - t_0 \Rightarrow \tau \stackrel{\textcircled{1}}{=} 1,6 \text{ s}$$

En effet, sur le graphique, l'excitation a lieu à  $t_0 = 0,75 \text{ s}$  et non  $t = 0$  comme dans la résolution mathématique.



- /2 [8] Comment se simplifie l'expression de la pseudo-pulsation  $\Omega$  avec l'hypothèse des faibles frottements (justifier précisément) ?

Réponse

On a déjà vu lors de la résolution de l'équation que  $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$ . Or, on remarque que de très nombreuses pseudo-périodes sont visibles, on a donc  $Q \gg 1$ .  $\textcircled{1}$  Ainsi,

$$\Omega \approx \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} \Rightarrow \boxed{\Omega \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} \omega_0}$$



- /5 [9] Dédurre des questions précédentes les valeurs numériques de  $\omega_0$  et  $Q$ . Commenter le résultat.

Réponse

On a relevé précédemment la fréquence du signal  $f = 550 \text{ Hz}$ .  $\textcircled{1}$  Comme on a montré que  $\Omega \approx \omega_0$ , on en déduit

$$\boxed{\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 2\pi f_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 3,5 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

De plus,

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{Q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \pi f_0 \tau} \Rightarrow \boxed{Q \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 2,8 \times 10^3}$$



## II/B Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée.

Un haut-parleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence  $f$ . Le verre, placé à proximité du haut-parleur (figure D4.14), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

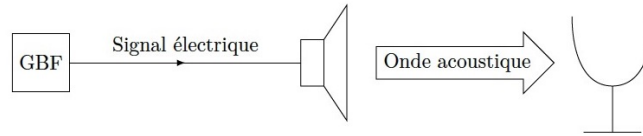


FIGURE D4.14

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de  $x(t)$  est alors de la forme suivante, avec  $\omega = 2\pi f$  la pulsation et  $\Phi$  la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme  $x(t) = X \cos(\omega t + \varphi)$ . On introduit la grandeur complexe associée  $\underline{x}(t) = \underline{X} \exp(j\omega t)$  avec  $j^2 = -1$ .

/4 10 Expliquer pourquoi on cherche une solution de cette forme.

#### Réponse

Cette équation différentielle se résout en prenant la somme de  $x_h(t)$  et d'une solution particulière  $x_p(t)$  ①. Or, on a montré dans la partie précédente que  $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$  ①. Ainsi, en régime permanent, il ne reste que  $x(t) = x_p(t)$ .

Or, l'entrée étant sinusoïdale, il paraît naturel de chercher une sortie sinusoïdale. ① De plus, l'équation différentielle étant linéaire, on s'attend à ce que la pulsation du signal de sortie soit la même que celle du signal d'entrée, sans non-linéarités. ①



/2 11 Comment nomme-t-on la grandeur  $\underline{X}$ ? Que représente son module, son argument ?

#### Réponse

$\underline{X}$  est appelée amplitude complexe associée à  $x(t)$ . ①  $\underline{X} = X e^{j\varphi}$ , on a donc  $|\underline{X}| = X$  et  $\arg(\underline{X}) = \varphi$ . ①



/4 12 Établir l'expression de  $\underline{X}$  puis de son module en fonction de  $A_0$ ,  $\Phi$ ,  $Q$  et  $u = \omega/\omega_0$ .

#### Réponse

On réécrit l'équation différentielle en complexes :

$$\begin{aligned} \left( (j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2 \right) \underline{X} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \underline{A} = A e^{j\phi} \\ \Leftrightarrow \left( -\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1 \right) \underline{X} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A_0}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \underline{X}(u) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A_0 e^{j\phi} / \omega_0^2}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \\ \Rightarrow X(u) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{A_0 / \omega_0^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q}\right)^2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} X(u) = |\underline{X}|$$



/3 13 À partir d'une étude qualitative mais précise, justifier le numéro de graphe de la figure D4.15 compatible avec le tracé du module de  $\underline{X}$  en fonction de la pulsation  $\omega$ .

#### Réponse

On fait une étude en hautes et basses fréquences :

#### Basses fréquences

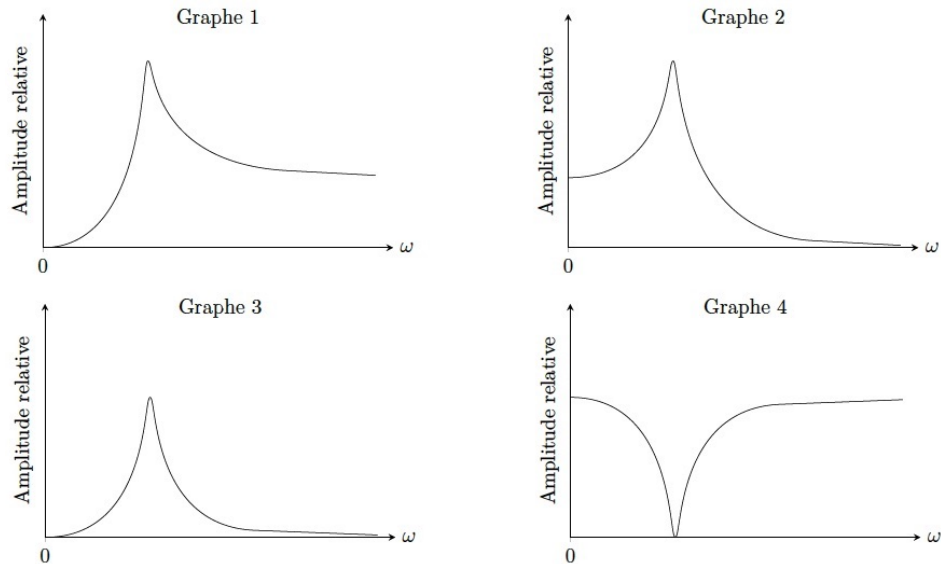
$$X(u) \xrightarrow{u \rightarrow 0} \frac{A_0}{\omega_0^2} \neq 0$$

#### Hautes fréquences

$$X(u) \xrightarrow{u \rightarrow \infty} 0$$

On en déduit donc qu'il s'agit du graphe 2. ①



FIGURE D4.15 – Module de  $\underline{X}$  en fonction de  $\omega$ .

- /10 [14] Montrer qu'il ne peut y avoir de résonance que si  $Q > Q_{\text{lim}}$  et déterminer  $Q_{\text{lim}}$ . Donner alors l'expression de la pulsation  $\omega_r$  correspondant à la résonance.

## Réponse

Pour qu'il y ait résonance, il faut que  $|\underline{X}| = X$  passe par un maximum ① pour  $u \neq 0$  ①. Or, le numérateur de  $X(u)$  est constant ① et la fonction racine carrée monotone donc  $X$  passe par un maximum si la fonction  $f(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$  passe par un minimum. ① On cherche donc  $u_r$  tel que la dérivée de  $f(u)$  s'annule :

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{du}\right)_{u_r} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2(-2u_r)(1 - u_r^2) + \frac{2u_r}{Q} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2u_r \left(-2(1 - u_r^2) + \frac{1}{Q^2}\right) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{u_r = 0}_{\text{impossible par définition}} \text{ ou } -2(1 - u_r^2) + \frac{1}{Q^2} &= 0 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_r^2 &= 1 - \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow u_r \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ \text{Possible que si } 1 - \frac{1}{2Q^2} &> 0 \\ \Leftrightarrow Q &> \frac{1}{\sqrt{2}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} Q_{\text{lim}} \\ \text{On a alors } \omega_r &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned}$$

Dans la suite, on suppose  $Q \gg Q_{\text{lim}}$ .

- /2 [15] Comment se simplifie alors l'expression de la pulsation de résonance  $\omega_r$ ? On note  $X_r$  le module de  $\underline{X}$  pour  $\omega = \omega_r$ . Établir son expression en fonction de  $\omega_0$ ,  $A_0$  et  $Q$ .

## Réponse

Si  $Q \gg Q_{\text{lim}}$ , alors  $Q \gg 1$ , et on a  $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} \omega_0$

Par définition  $X_r = X(\omega_r)$ . D'après la question précédente, on a donc  $X_r \approx X(\omega_0) = X(u = 1)$ , ce qui donne

$$X_r = \frac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} \Leftrightarrow X_r \stackrel{\textcircled{1}}{=} Q \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

- /2 [16] Quelles sont les définitions des pulsations de coupure  $\omega_1$  et  $\omega_2$  ( $\omega_1 < \omega_2$ ) du module de  $\underline{X}$ ? On ne cherchera pas ici à établir leurs expressions.

Quelle relation existe-t-il entre  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$ ? On admettra que cette relation est la même que dans le cas d'une résonance de type « passe-bande » et on cherchera pas à la démontrer.

## Réponse

Les pulsations de coupures sont définies par  $X(\omega_1) = X(\omega_2) = \frac{X_r}{\sqrt{2}}$  ①

L'acuité de la résonance est égale à  $Q$ , soit  $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$  ①



Une série de mesures de l'amplitude  $X$  au voisinage de la résonance (réalisée par un dispositif interférentiel non présenté ici) permet de tracer le graphe représenté sur la figure D4.16.

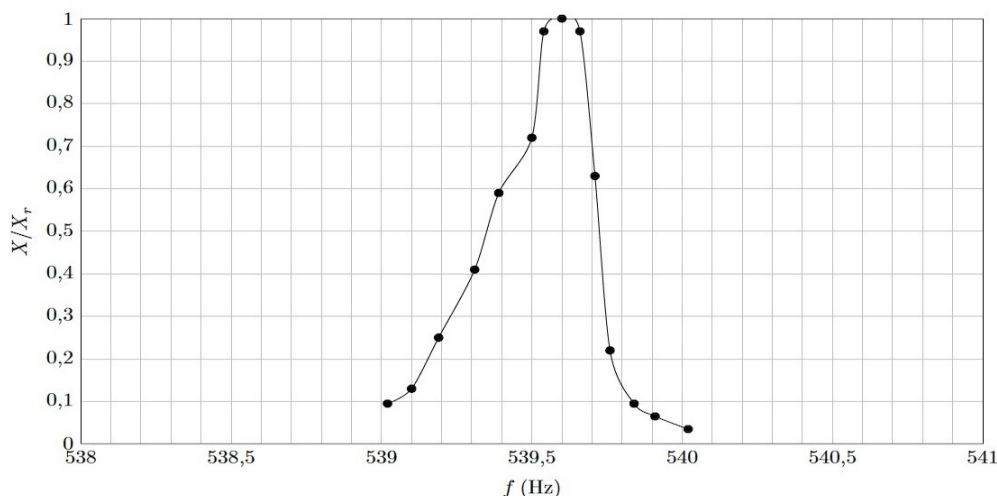


FIGURE D4.16 – Amplitude relative en fonction de la fréquence.

- /7 17 Déterminer, à l'aide de la figure D4.16, la pulsation propre  $\omega_0$  et le facteur de qualité  $Q$  du verre dans son mode 1. Vous recopierez sommairement la figure sur votre copie pour faire apparaître votre construction graphique. Comparer avec les résultats de la première partie.

#### Réponse

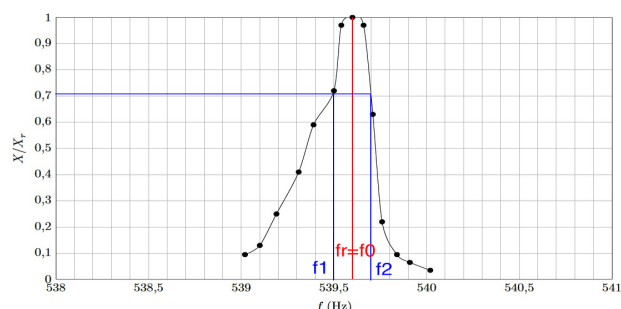


Figure 7 Amplitude relative en fonction de la fréquence

FIGURE D4.17 – ①+①

On a vu précédemment que le système étudié possédait bien un facteur de qualité très élevé, on a donc  $\omega_r \approx \omega_0$ . On relève  $f_r = f_0 = 539,6 \text{ Hz}$  ①, soit  $\omega_0 = 3390 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Les fréquences de coupures, telles que  $X/X_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$  ①, valent respectivement  $f_1 = 539,5 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 539,7 \text{ Hz}$  ①

On en déduit  $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = 2,7 \times 10^3$ . ①

On retrouve bien environ les mêmes valeurs que dans la première partie. ① La détermination de  $\omega_0$  est cependant plus précise au vu de l'échelle du graphique.



- /5 18 En musique, la gamme tempérée comporte 12 demi-tons (Do - Do♯ - Ré - Ré♯ - Mi - Fa - Fa♯ - Sol - Sol♯ - La - La♯ - Si). Pour passer d'une note à la note suivante, on multiplie sa fréquence par  $2^{1/12}$ . Sachant que le La3 se trouve à 440 Hz, quelle note doit chanter la CASTAFIORE pour briser le verre? Chante-t-elle juste?

#### Réponse

Pour briser le verre, il faut le mettre en résonance de sorte à ce qu'il vibre avec une amplitude telle que la déformation du matériau provoque sa rupture. ① Il faut donc l'exciter à la fréquence de 539,6 Hz. ①

Si on a la note La à 440 Hz, alors les notes suivantes dans la gamme ont pour fréquences : ① 466 Hz (La♯), 494 Hz (si), 523 Hz (do) et 554 Hz (do♯).

D'après la courbe, on voit qu'à 554 Hz, la résonance est déjà passée. ① Il faut donc chanter à une fréquence intermédiaire entre celle du Do et du Do♯. En en conclut donc que la CASTAFIORE chante faux lorsqu'elle brise le verre! ①

