

Correction du DS

/65 E1 Étude d'un circuit RLC parallèle

I/A Étude de l'amplitude et de la phase

/3 [1] Dans le cas d'une association de dipôle en parallèle, on additionne les admittances :

$$\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} = \frac{1}{R} + \frac{1}{jL\omega} + jC\omega = \frac{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}{jRL\omega} \Leftrightarrow \underline{Z} = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega}$$

/5 [2] On applique la loi d'OHM généralisée sur le dipôle équivalent \underline{Z} , en utilisant les amplitudes complexes du courant et de la tension :

$$\begin{aligned} \underline{U}_0 &= \underline{Z}\eta_0 = \frac{jRL\omega}{R(1 - LC\omega^2) + jL\omega} \eta_0 \\ \Leftrightarrow \underline{U}_0 &= \frac{R\eta_0}{1 + jR(C\omega - \frac{1}{L\omega})} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Factorise} \\ \text{par } jRL\omega \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \text{Identification : } RC = \frac{Q}{\omega_0} \text{ et } \frac{R}{L} = Q\omega_0 \\ \Leftrightarrow \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \text{ et } Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \end{array}$$

avec ω_0 la pulsation propre du circuit et Q le facteur de qualité. [1]

/2 [3]
$$U_0 = |\underline{U}_0| = \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

/8 [4] La résonance correspond à un maximum de la fonction U_0 [1] à $x \neq 0$ [1]. Ici, comme $R\eta_0 = \text{cte}$ [1], on a U_0 maximale si son dénominateur est minimal [1], soit pour

$$\underbrace{1 + Q^2 \left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2}_{\geq 0} \text{ minimal} \Leftrightarrow Q^2 \left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_r = 1 \Leftrightarrow \omega_r = \omega_0$$

Ainsi, il peut toujours y avoir résonance en tension ici [1], et on obtient $U_{\max} = R\eta_0$. [1]

/8 [5] La bande passante $\Delta\omega$ est l'ensemble des pulsations ω vérifiant $U_{\max}/\sqrt{2} \leq U_0(\omega) \leq U_{\max}$, [1] soit $\Delta\omega = [\omega_1; \omega_2]$, avec ω_1 et ω_2 solutions de l'équation $U_0(\omega_k) = U_{\max}/\sqrt{2}$. En travaillant en pulsations réduites :

$$\begin{aligned} U_0(x_k) &= \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \\ \Leftrightarrow \frac{R\eta_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2}} &= \frac{R\eta_0}{\sqrt{2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On remplace} \\ \text{On isole} \end{array} \right\} \quad \begin{array}{l} \Leftrightarrow Q^2 \left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2 = 1 \\ \Leftrightarrow Q \left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) = \pm 1 \\ \Leftrightarrow Qx_k^2 - Q = \pm x_k \\ \Leftrightarrow Qx_k^2 \mp x_k - Q = 0 \end{array}$$

On a alors deux trinômes, soit quatre racines possibles, avec

$$\Delta = 1 + 4Q^2$$

$$\Rightarrow x_{k,\pm,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}}{2Q}$$

On ne garde que les racines positives, sachant que $\sqrt{1 + 4Q^2} > 1$:

$$x_1 = x_{k,-,+} = \frac{1}{2Q} \left(-1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$$

$$\text{et } x_2 = x_{k,+,+} = \frac{1}{2Q} \left(1 + \sqrt{1 + 4Q^2}\right)$$

puis on obtient la bande passante en calculant la différence $|x_2 - x_1|$:

$$\Delta x = x_2 - x_1 = \frac{1 + \sqrt{1 + 4Q^2} - (-1 + \sqrt{1 + 4Q^2})}{2Q}$$

$$\Leftrightarrow \Delta x = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}$$

/7 6

$$\begin{aligned}
 U_0(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\overset{\textcircled{1}}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q} \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\textcircled{1}}{\rightarrow}} 0 \\
 U_0(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\overset{\textcircled{1}}{\sim}} \frac{R\eta_0}{Q} \underset{x \rightarrow \infty}{\overset{\textcircled{1}}{\rightarrow}} 0 \\
 U_0(1) &\overset{\textcircled{1}}{=} R\eta_0
 \end{aligned}$$

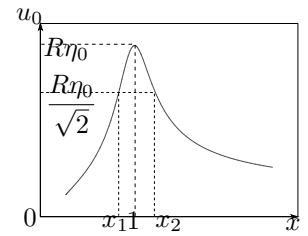


FIGURE D4.1 – ①+①

/6 7

$$\begin{aligned}
 \phi &\overset{\textcircled{1}}{=} \arg(U_0) \overset{\textcircled{1}}{=} \underbrace{\arg(R\eta_0)}_{=0} - \arg\left(1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)\right) \\
 \Rightarrow \tan(\phi) &\overset{\textcircled{1}}{=} -\tan(\arg(\underbrace{1}_{\text{Re}>0} + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right))) \Leftrightarrow \boxed{\phi \overset{\textcircled{1}}{=} -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\phi \overset{\textcircled{1}}{\in} \left]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right[}
 \end{aligned}$$

/7 8

$$\begin{aligned}
 \phi(x) &\underset{x \rightarrow 0}{\overset{\textcircled{1}}{\sim}} -\arctan\left(-\frac{Q}{x}\right) \underset{x \rightarrow 0}{\overset{\textcircled{1}}{\rightarrow}} \frac{\pi}{2} \\
 \phi(x) &\underset{x \rightarrow \infty}{\overset{\textcircled{1}}{\sim}} -\arctan(Qx) \underset{x \rightarrow \infty}{\overset{\textcircled{1}}{\rightarrow}} -\frac{\pi}{2} \\
 \phi(1) &\overset{\textcircled{1}}{=} 0
 \end{aligned}$$

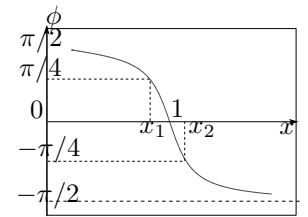


FIGURE D4.2 – ①+①

I/B Expérience

/5 9 Le montage est valable si le générateur de courant n'impose pas de masse, c'est-à-dire avec un générateur à masse flottante. ①

◇ Sur la voie A, on visualise la tension $u_r(t) = r\eta(t)$. ① Donc il faut diviser par r la voie A pour visualiser $\eta(t)$. ①

◇ Sur la voie B, on visualise $-u(t)$. ① Donc il faut inverser la voie B pour visualiser $u(t)$. ①

/4 10 La tension u est en retard ① par rapport au courant η car son maximum arrive après celui de la tension u_r . ①

Une période du signal u_r (ou u) correspond à un déphasage de 360° . ① Or ici, une période correspond à 10 carreaux, donc un retard de 1 carreau correspond à un déphasage de -36° , et on a 2 carreaux de déphasage entre u et u_r ; ainsi, $\phi = -72^\circ$. ①

/5 11 L'amplitude de $u(t)$ correspond à 2 carreaux, donc $U_0 = 2\text{ V}$. ①

Mathématiquement,

$$s_{\text{eff}} \overset{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\langle s^2(t) \rangle} \overset{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{1}{T} \int_0^T s^2(t) dt}$$

s_{eff}^2 représente l'énergie moyenne du signal ①; ainsi, s_{eff} correspond à l'amplitude constante qui porterait la même énergie moyenne que $s(t)$. ①

/5 12

$$\begin{aligned}
 s(t) &\overset{\textcircled{1}}{=} S_0 \cos(\omega t) \\
 \Rightarrow \langle s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T} \int_0^T (S_0^2 \cos^2(\omega t)) dt \\
 \Leftrightarrow \langle s^2(t) \rangle &\overset{\textcircled{1}}{=} \frac{S_0^2}{2T} \left(\int_0^T dt + \int_0^T \cos(2\omega t) dt \right) \quad \left. \begin{array}{l} \text{Linéarisa}^\circ \\ \text{=} \end{array} \right\} \\
 &\Leftrightarrow \boxed{s_{\text{eff}} \overset{\textcircled{1}}{=} \frac{S_0}{\sqrt{2}}} \quad \text{d'où} \quad \boxed{u_{\text{eff}} = \frac{U_0}{\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{u_{\text{eff}} = 1,4\text{ V}} \textcircled{1}
 \end{aligned}$$

/37 E2 Monoxyde et dioxyde d'azote (D'après PSI Centrale Supélec 2020)

/6

1

$$x_{\text{O}_2} = 0,2 \quad \text{et} \quad x_{\text{N}_2} = 0,8 = 4 \cdot x_{\text{O}_2}$$

Équation ①+①		$\text{N}_{2(\text{g})}$	+	$\text{O}_{2(\text{g})}$	=	$2\text{NO}_{(\text{g})}$	$n_{\text{tot, gaz}}$ ①	
Initial	$\xi = 0$	$4n_0$		n_0		0	$5n_0$	①
Équili.	ξ_{eq}	$4n_0 - \xi_{\text{eq}}$		$n_0 - \xi_{\text{eq}}$		$2\xi_{\text{eq}}$	$5n_0$	①
Final	$\xi_{\text{eq}} \ll n_0$	$\approx 4n_0$		$\approx n_0$		$4,9 \times 10^{-3} n_0$	$5n_0$	+1 Q2

/11

2

Comme $K_1^\circ \ll 1$, on peut supposer la réaction quasi-nulle ①, soit

$$\xi_{\text{eq}} \ll n_0 \quad \Rightarrow \quad \begin{cases} x_{\text{O}_2, \text{eq}} \approx x_{\text{O}_2, 0} \\ x_{\text{N}_2, \text{eq}} \approx x_{\text{N}_2, 0} \end{cases}$$

$$\Rightarrow x_{\text{NO}, \text{eq}} \ll (x_{\text{O}_2, \text{eq}} ; x_{\text{N}_2, \text{eq}})$$

D'après la loi d'action de masse et la loi de DALTON $p_X = x_X p_{\text{tot}}$ ①,

L'hypothèse est bien vérifiée ①, et on trouve

$$x_{\text{NO}, \text{eq}} = \frac{2\xi_{\text{eq}}}{5n_0} \Leftrightarrow 2\xi_{\text{eq}} = 5x_{\text{NO}, \text{eq}} n_0 \Rightarrow n_{\text{NO}, \text{eq}} \approx 4,9 \times 10^{-3} n_0$$

$$K_1^\circ = \frac{p_{\text{NO}, \text{eq}}^2}{p_{\text{N}_2, \text{eq}} p_{\text{O}_2, \text{eq}}} = \frac{x_{\text{NO}, \text{eq}}^2}{x_{\text{N}_2, \text{eq}} x_{\text{O}_2, \text{eq}}}$$

$$\Leftrightarrow x_{\text{NO}, \text{eq}} = \sqrt{K_1^\circ \cdot x_{\text{N}_2, 0} \cdot x_{\text{O}_2, 0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K_1^\circ = 6,0 \times 10^{-6} \\ x_{\text{N}_2, 0} = 0,8 \\ x_{\text{O}_2, 0} = 0,2 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } x_{\text{NO}, \text{eq}} = 9,8 \times 10^{-4} \ll 0,2$$

/7 3 Cette réaction peut être considérée comme quasi-totale car $K_2^\circ \gg 1$. ① Avec les ordres partiels indiqués, on trouve

$$v(t) = k[\text{NO}](t)^p \cdot [\text{O}_2](t)^q$$

Or, on a $[\text{O}_2]_0 \gg [\text{NO}]_0$

$$\Rightarrow [\text{O}_2](t) \approx [\text{O}_2]_0$$

$$\Rightarrow v(t) = k[\text{O}_2]_0^q \cdot [\text{NO}](t)^p$$

$$\Leftrightarrow v(t) = k_{\text{app}}[\text{NO}](t)^p \quad \text{avec} \quad k_{\text{app}} = k[\text{O}_2]_0^q$$

C'est la méthode de **dégénérescence de l'ordre**. ①

/4 4 C'est la **méthode différentielle** ①. Il s'agit de tracer $\ln(v(t))$ en fonction de $\ln([\text{NO}](t))$. En effet, on a alors

$$\ln(v(t)) = q \cdot \ln([\text{NO}](t)) + \ln(k_{\text{app}}) \Leftrightarrow y = a \cdot x + b$$

c'est-à-dire que le coefficient directeur est l'ordre partiel p , et l'ordonnée à l'origine est $\ln(k_{\text{app}})$. En l'occurrence, pour les deux expériences on trouve

$$a \approx 2 \Rightarrow p = 2$$

/4 5 D'après la question 3, on a

$$k_{\text{app},1} = k[\text{O}_2]_{01}^q \quad \text{et} \quad k_{\text{app},2} = k[\text{O}_2]_{02}^q$$

$$\Leftrightarrow \frac{k_{\text{app},1}}{k_{\text{app},2}} = \frac{[\text{O}_2]_{01}^q}{[\text{O}_2]_{02}^q}$$

$$\Leftrightarrow \ln \frac{k_{\text{app},1}}{k_{\text{app},2}} = q \ln \frac{[\text{O}_2]_{01}}{[\text{O}_2]_{02}}$$

$$\Leftrightarrow q = \frac{\ln(k_{\text{app},1}) - \ln(k_{\text{app},2})}{\ln([\text{O}_2]_{01}) - \ln([\text{O}_2]_{02})} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ln(k_{\text{app},1}) = -3,7841 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ \ln(k_{\text{app},2}) = -4,723 \mu\text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \cdot \text{min}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{01} = 5,0 \times 10^{-3} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{02} = 2,0 \times 10^{-3} \text{mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } q = 1,02 \approx 1$$

/2 6 Les ordres partiels sont donc égaux aux coefficient stœchiométriques : c'est une **réaction simple**, qui suit donc la **loi de VAN'T HOFF**.

/3 [7] Avec $q = 1$, on trouve k à partir de la connaissance de $k_{\text{app},1}$ ou $k_{\text{app},2}$:

$$\boxed{k = \frac{k_{\text{app},1}}{[\text{O}_2]_{01}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \ln(k_{\text{app},1}) = -3,784 \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}\cdot\text{min}^{-1} \\ [\text{O}_2]_{01} = 5,0 \times 10^3 \mu\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $k = 4,5 \times 10^{-6} \mu\text{mol}^{-2}\cdot\text{L}^2\cdot\text{min}^{-1} \Rightarrow k = 7,5 \times 10^{10} \text{mol}^{-2}\cdot\text{L}^2\cdot\text{s}^{-1}$

/52 P1 Suivi cinétique de la formation du dibrome (D'après CCMP MP 2012)

/2 [1] Le dibrome absorbe fortement à la longueur d'onde $\lambda \approx 400 \text{ nm}$ ①. Sa couleur correspond à la couleur complémentaire du bleu, soit l'orange ①.

/8 [2] ① pour un schéma qui montre que le volume total est $2V$. On détermine alors les concentrations initiales C_1 et C_2 en faisant attention au facteur de dilution :

$$C_1 = \frac{C_{01}}{2} = 1,0 \times 10^{-3} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad \text{et} \quad C_2 = \frac{C_{02}}{2} = 5,0 \times 10^{-3} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

On effectue un tableau d'avancement en concentration :

Équation ①+①		$\text{BrO}_3^- (\text{aq})$	+	$5\text{Br}^- (\text{aq})$	+	$6\text{H}_3\text{O}^+ (\text{aq})$	=	$3\text{Br}_2 (\text{aq})$	+	$9\text{H}_2\text{O} (\text{l})$	
Initial	$x = 0$	C_1		C_2		C_3		0		excès	①
Interm.	x_{eq}	$C_1 - x_{\text{eq}}$		$C_2 - 5x_{\text{eq}}$		$C_3 - 6x_{\text{eq}}$		$3x_{\text{eq}}$		excès	①

D'après l'énoncé, 90% des ions BrO_3^- ont réagi, donc $x_{\text{eq}} = 0,9C_1 = 9,0 \times 10^{-4} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$. ① On en déduit les concentrations à l'équilibre ① :

$$[\text{BrO}_3^-]_{\text{eq}} = 1,0 \times 10^{-4} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{Br}^-]_{\text{eq}} = 5,0 \times 10^{-4} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \quad ; \quad [\text{Br}_2]_{\text{eq}} = 2,7 \times 10^{-3} \text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$$

/6 [3]
$$v = k[\text{BrO}_3^-]^p(t) \cdot [\text{Br}^-]^q(t) \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]^r(t)$$

On constate que $[\text{H}_3\text{O}^+]_0 \gg [\text{BrO}_3^-]_0$ et $[\text{Br}^-]_0 \gg [\text{BrO}_3^-]_0$. ① On peut négliger la variation temporelle de la concentration en ions oxonium ainsi que celle en ions bromure. ① C'est la méthode de la dégénérescence de l'ordre. ① Dans ces conditions, la loi de vitesse se simplifie :

$$\boxed{v \approx k[\text{Br}^-]_0^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^r \cdot [\text{BrO}_3^-]^p = k_{\text{app}}[\text{BrO}_3^-]^p} \quad \text{avec} \quad \boxed{k_{\text{app}} = k[\text{Br}^-]_0^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^r}$$

/13 [4] Dans chaque cas, la vitesse de la réaction s'écrit $v(t) = -\frac{1}{1} \frac{dC}{dt}$ ①

◇ Ordre 0 :

$$\begin{aligned} v(t) &= k_{\text{app}} C(t)^0 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} \\ \Leftrightarrow C(t) &= C_0 - k_{\text{app}} t \end{aligned} \quad \int_0^t$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

\swarrow \searrow \swarrow \searrow
 $C(t)$ $-k_{\text{app}}$ t C_0

◇ Ordre 1 :

$$\begin{aligned} v(t) &= k_{\text{app}} C(t)^1 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} C(t) \\ \Leftrightarrow C(t) &= C_0 e^{-k_{\text{app}} t} \end{aligned} \quad \begin{aligned} C(t) &= K e^{rt} \\ C(0) &= C_0 \end{aligned}$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

\swarrow \searrow \swarrow \searrow
 $\ln(C(t)) - k_{\text{app}}$ t $\ln(C_0)$

◇ **Ordre 2 :**

$$\begin{aligned} v(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} C(t)^2 \\ \Leftrightarrow \frac{dC}{dt} &= -k_{\text{app}} C(t)^2 \\ \Leftrightarrow -\frac{dC}{C^2} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} k_{\text{app}} dt \quad \left. \int_0^t \right. \\ \Leftrightarrow \int_{C_0}^C -\frac{dC}{C^2} &= \int_{t=0}^t k_{\text{app}} dt \end{aligned}$$

Or, $d\left(\frac{1}{f}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{df}{f^2} :$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \int_{C_0}^{C(t)} d\left(\frac{1}{C(t)}\right) &= k_{\text{app}} \cdot \int_{t=0}^t dt \quad \left. \int_a^b d(\cdot) = [(\cdot)]_a^b \right. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{C} - \frac{1}{C_0} &= k_{\text{app}} \cdot t \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{1}{C} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{C_0} + k_{\text{app}} t} \end{aligned}$$

On trace donc

$$y = ax + b$$

\swarrow \searrow \swarrow \searrow
 $\frac{1}{C}$ k_{app} t $\frac{1}{C_0}$

/9 **5** On obtient

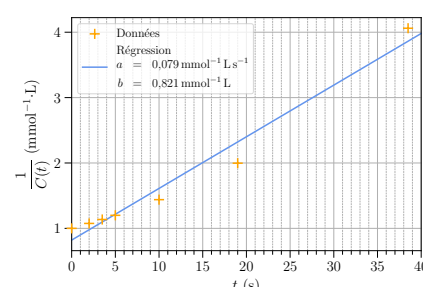
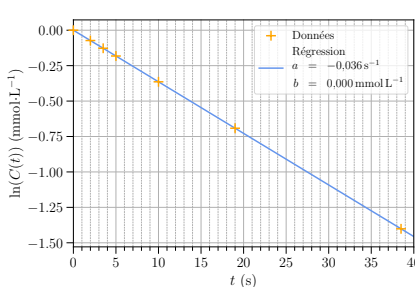
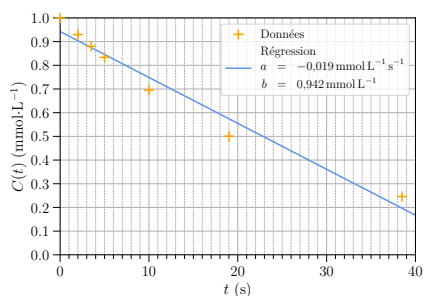


FIGURE D4.3 – Régression ordre 0. **②**

FIGURE D4.4 – Régression ordre 1. **②**

FIGURE D4.5 – Régression ordre 2. **②**

La seule régression valide est celle de la Figure D4.4, puisque la droite passe effectivement par les points sans déviation particulière **①** : on a donc

$$p = 1 \textcircled{1}$$

De plus, d'après la régression linéaire établie précédemment, on obtient

$$a = -k_{\text{app}} \Rightarrow \underline{k_{\text{app}} = 3,6 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1}} \textcircled{1}$$

/2 **6** Par définition, on a $t_{1/2}$ tel que

$$\boxed{C(t_{1/2}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{C(0)}{2}}$$

Ici, avec $C(0) = 1,0 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$, on trouve $C(t_{1/2}) = 0,50 \text{ mmol} \cdot \text{L}^{-1}$, et on a donc directement $t_{1/2}$ dans le Tableau ?? :

$$\underline{t_{1/2} = 19 \text{ s}} \textcircled{1}$$

/9 **7** On pose le système d'équations :

$$\textcircled{1} \quad v_{01} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{01}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{01}^r \quad (4.1)$$

$$\textcircled{1} \quad v_{02} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{02}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{02}^r \quad (4.2)$$

$$v_{03} = k[\text{BrO}_3^-]_0 \cdot [\text{Br}^-]_{03}^q \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_{03}^r \quad (4.3)$$

$$(4.2)/(4.1) \Rightarrow \frac{v_{02}}{v_{01}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\frac{[\text{Br}^-]_{02}}{[\text{Br}^-]_{01}} \right)^q$$

car $[\text{H}_3\text{O}^+]_{02} \stackrel{\textcircled{1}}{=} [\text{H}_3\text{O}^+]_{01}$

$$\Leftrightarrow \boxed{q \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\ln(v_{02}/v_{01})}{\ln([\text{Br}^-]_{02}/[\text{Br}^-]_{01})}}$$

A.N. : $\underline{q = 1}$ **①**

$$(4.3)/(4.1) \Rightarrow \frac{v_{03}}{v_{01}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \left(\frac{[\text{H}_3\text{O}^+]_{03}}{[\text{H}_3\text{O}^+]_{01}} \right)^r$$

car $[\text{Br}^-]_{03} \stackrel{\textcircled{1}}{=} [\text{Br}^-]_{01}$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{\ln(v_{03}/v_{01})}{\ln([\text{H}_3\text{O}^+]_{03}/[\text{H}_3\text{O}^+]_{01})}}$$

A.N. : $\underline{r = 1}$ **①**

/3 [8] D'après [3] et en prenant les données de l'expérience **initiale**, on a

$$k = \frac{k_{\text{app}}}{[\text{Br}^-]_0 \cdot [\text{H}_3\text{O}^+]_0^2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k_{\text{app}} = 3,6 \times 10^{-2} \text{ s}^{-1} \\ [\text{Br}^-]_0 = 0,14 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \\ [\text{H}_3\text{O}^+]_0 = 0,10 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } k \approx 26 \text{ mol}^{-3} \cdot \text{L}^3 \cdot \text{s}^{-1}$$

/86 P2 Résonance d'un verre (D'après TSI Centrale Supélec 2018)

II/A Analyse expérimentale des vibrations du verre suite à un choc

/5 [1] On relève les fréquences suivantes : $f_1 \approx 550 \text{ Hz}$, $f_2 \approx 1090 \text{ Hz}$, $f_3 \approx 1620 \text{ Hz}$ et $f_4 \approx 2180 \text{ Hz}$. (1) On remarque donc que l'on a $f_n = n f_1$, avec $n \in \mathbb{N}^*$ (1)

Le premier mode est appelé fondamental. (1) Les autres sont appelés harmoniques de rang n . (1)

La fréquence du signal est la fréquence de son fondamental, donc ici $f = 550 \text{ Hz}$. (1)

/10 [2] (2) pour un beau schéma propre.

(1) ◇ Système : {point M} de masse m

(1) ◇ Référentiel d'étude : \mathcal{R}_{sol} supposé galiléen

(1) ◇ Repère : (O, \vec{u}_x , \vec{u}_y) avec \vec{u}_y vertical ascendant

(1) ◇ Repérage : $\vec{OM} = x(t) \vec{u}_x$; $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$; $\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x$

◇ Bilan des forces :

(1) Poids $\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$

(1) Réaction support $\vec{R} = R \vec{u}_y$

(1) Force rappel $\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x = -kx(t) \vec{u}_x$

(1) Force frottement $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha \vec{v} = -\alpha \frac{dx}{dt} \vec{u}_x$

/5 [3] Avec le PFD :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_f + \vec{F}_r \\ \Rightarrow m \frac{d^2 x}{dt^2} + \alpha \frac{dx}{dt} + kx(t) &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{dx}{dt} + \frac{k}{m} x(t) &= 0 \end{aligned}$$

D'où la forme demandée.

/3 [4] ω_0 est la pulsation propre (0.5) du système, elle s'exprime en rad/s (0.5). Elle correspond à la pulsation à laquelle oscillerait le système s'il n'y avait pas de frottement. (0.5)

Q est appelé facteur de qualité du système. (0.5) Il est sans unité. (0.5) Plus Q est grand, moins il y a de dissipation d'énergie, plus le système s'approche d'un oscillateur harmonique non amorti. (0.5)

/9 [5] L'équation différentielle est homogène, donc $x(t) = x_h(t)$. (1) Pour déterminer $x_h(t)$, on injecte la forme générique $x_h(t) = K e^{rt}$ (1) pour trouver l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0 \quad \text{faible amortissement} \\ \Rightarrow r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2} \sqrt{4Q^2 - 1} \end{aligned}$$

On identifie ω_0 et Q :

$$\begin{aligned} \omega_0^2 &= \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \\ \text{et} \quad \frac{\alpha}{m} \omega_0 &= \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \Omega \text{ et } \tau$$

$$\Rightarrow \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \quad \text{et} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\Rightarrow x(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t))$$

/4 [6]

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$x(0) = 0 = 1[A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \Rightarrow \boxed{A = 0} \text{ ①}$$

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{dx}{dt} &\stackrel{\text{①}}{=} -\frac{1}{\tau}e^{-t/\tau}B\sin(\Omega t) + e^{-t/\tau}B\Omega\cos(\Omega t) \\ \Rightarrow \left(\frac{dx}{dt}\right)_0 &= \Omega B = V_0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{V_0}{\Omega}} \text{ ①} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\boxed{x(t) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{V_0}{\Omega} e^{-t/\tau} \sin(\Omega t)}$$

/4 [7]

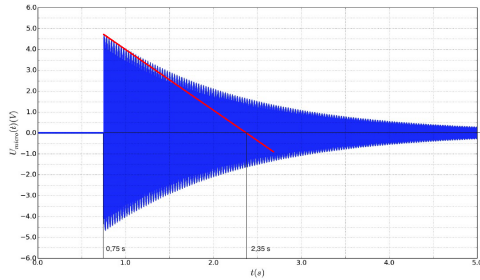


Figure 2 Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre

FIGURE D4.6 – ①+①

On trace la tangente à l'origine de l'enveloppe exponentielle. Elle coupe l'asymptote $x = 0$ en $t = \tau$. On lit donc

$$\tau = t_{\text{its}} - t_0 \Rightarrow \tau \stackrel{\text{①}}{=} 1,6 \text{ s}$$

En effet, sur le graphique, l'excitation a lieu à $t_0 = 0,75 \text{ s}$ et non $t = 0$ comme dans la résolution mathématique.

/2 [8]

On a déjà vu lors de la résolution de l'équation que $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$. Or, on remarque que de très nombreuses pseudo-périodes sont visibles, on a donc $Q \gg 1$. ① Ainsi,

$$\Omega \approx \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \Rightarrow \boxed{\Omega \stackrel{\text{①}}{\approx} \omega_0}$$

/5 [9]

On a relevé précédemment la fréquence du signal $f = 550 \text{ Hz}$. ① Comme on a montré que $\Omega \approx \omega_0$, on en déduit

$$\boxed{\omega_0 \stackrel{\text{①}}{=} 2\pi f_0} \Rightarrow \boxed{\omega_0 \stackrel{\text{①}}{\approx} 3,5 \times 10^3 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

De plus,

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{Q \stackrel{\text{①}}{=} \pi f_0 \tau} \Rightarrow \boxed{Q \stackrel{\text{①}}{\approx} 2,8 \times 10^3}$$

II/B Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

/4 [10]

Cette équation différentielle se résout en prenant la somme de $x_h(t)$ et d'une solution particulière $x_p(t)$ ①. Or, on a montré dans la partie précédente que $\lim_{t \rightarrow \infty} x_h(t) = 0$ ①. Ainsi, en régime permanent, il ne reste que $x(t) = x_p(t)$.

Or, l'entrée étant sinusoïdale, il paraît naturel de chercher une sortie sinusoïdale. ① De plus, l'équation différentielle étant linéaire, on s'attend à ce que la pulsation du signal de sortie soit la même que celle du signal d'entrée, sans non-linéarités. ①

/2 [11]

\underline{X} est appelée amplitude complexe associée à $x(t)$. ① $\underline{X} = X e^{j\varphi}$, on a donc $|\underline{X}| = X$ et $\arg(\underline{X}) = \varphi$. ①

/4 [12]

On réécrit l'équation différentielle en complexes :

$$\begin{aligned} &\left((j\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q} j\omega + \omega_0^2 \right) \underline{X} \stackrel{\text{①}}{=} \underline{A} = A e^{j\phi} \\ \Leftrightarrow &\left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0} \right)^2 + j \frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1 \right) \underline{X} \stackrel{\text{①}}{=} \frac{A_0}{\omega_0^2} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow &\underline{X}(u) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{A_0 e^{j\phi} / \omega_0^2}{1 - u^2 + j \frac{u}{Q}} \\ \Rightarrow &X(u) \stackrel{\text{①}}{=} \frac{A_0 / \omega_0^2}{\sqrt{(1 - u^2)^2 + \left(\frac{u}{Q} \right)^2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} X(u) = |\underline{X}|$$

/3 [13] On fait une étude en hautes et basses fréquences :

Basses fréquences

$$X(u) \xrightarrow[u \rightarrow 0]{①} \frac{A_0}{\omega_0^2} \neq 0$$

On en déduit donc qu'il s'agit du graphe 2. ①

/10 [14] Pour qu'il y ait résonance, il faut que $|X| = X$ passe par un maximum ① pour $u \neq 0$ ①. Or, le numérateur de $X(u)$ est constant ① et la fonction racine carrée monotone donc X passe par un maximum si la fonction $f(u) = (1 - u^2)^2 + \frac{u^2}{Q^2}$ passe par un minimum. ① On cherche donc u_r tel que la dérivée de $f(u)$ s'annule :

$$\begin{aligned} \left(\frac{df}{du} \right)_{u_r} &\stackrel{①}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2(-2u_r)(1 - u_r^2) + \frac{2u_r}{Q} &\stackrel{①}{=} 0 \\ \Leftrightarrow 2u_r \left(-2(1 - u_r^2) + \frac{1}{Q^2} \right) &\stackrel{①}{=} 0 \\ \Leftrightarrow \underbrace{u_r = 0}_{\text{impossible par définition}} \text{ ou } -2(1 - u_r^2) + \frac{1}{Q^2} &= 0 \end{aligned}$$

Hautes fréquences

$$X(u) \xrightarrow[u \rightarrow \infty]{①} 0$$

$$\begin{aligned} \Rightarrow u_r^2 &= 1 - \frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow u_r \stackrel{①}{=} \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \\ \text{Possible que si } 1 - \frac{1}{2Q^2} &> 0 \\ \Leftrightarrow Q &> \frac{1}{\sqrt{2}} \stackrel{①}{=} Q_{\text{lim}} \\ \text{On a alors } \omega_r &\stackrel{①}{=} \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \end{aligned}$$

/2 [15] Si $Q \gg Q_{\text{lim}}$, alors $Q \gg 1$, et on a $\omega_r = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} \stackrel{①}{\approx} \omega_0$

Par définition $X_r = X(\omega_r)$. D'après la question précédente, on a donc $X_r \approx X(\omega_0) = X(u = 1)$, ce qui donne

$$X_r = \frac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{\frac{1}{Q^2}}} \Leftrightarrow X_r \stackrel{①}{=} Q \frac{A_0}{\omega_0^2}$$

/2 [16] Les pulsations de coupures sont définies par $X(\omega_1) = X(\omega_2) = \frac{X_r}{\sqrt{2}}$ ①

L'acuité de la résonance est égale à Q , soit $\frac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q$ ①

/7 [17]

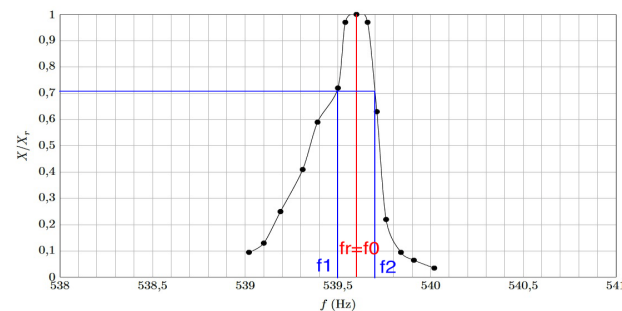


Figure 7 Amplitude relative en fonction de la fréquence

FIGURE D4.7 – ①+①

On a vu précédemment que le système étudié possédait bien un facteur de qualité très élevé, on a donc $\omega_r \approx \omega_0$. On relève $f_r = f_0 = 539,6 \text{ Hz}$ ①, soit $\omega_0 = 3390 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$.

Les fréquences de coupures, telles que $X/X_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,71$ ①, valent respectivement $f_1 = 539,5 \text{ Hz}$ et $f_2 = 539,7 \text{ Hz}$ ①

On en déduit $Q = \frac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \frac{f_0}{f_2 - f_1} = 2,7 \times 10^3$. ①

On retrouve bien environ les mêmes valeurs que dans la première partie. ① La détermination de ω_0 est cependant plus précise au vu de l'échelle du graphique.

/5 [18] Pour briser le verre, il faut le mettre en résonance de sorte à ce qu'il vibre avec une amplitude telle que la déformation du matériau provoque sa rupture. ① Il faut donc l'exciter à la fréquence de 539,6 Hz. ①

Si on a la note La à 440 Hz, alors les notes suivantes dans la gamme ont pour fréquences : ① 466 Hz (La♯), 494 Hz (si), 523 Hz (do) et 554 Hz (do♯).

D'après la courbe, on voit qu'à 554 Hz, la résonance est déjà passée. ① Il faut donc chanter à une fréquence intermédiaire entre celle du Do et du Do♯. En en conclut donc que la CASTAFIORE chante faux lorsqu'elle brise le verre! ①