Thermodynamique – chapitre 1

Correction du TD

I Pression des pneus

La pression préconisée sur les roues avant d'une Mégane est de 2,2 bar. On règle la pression des pneus un jour froid de cet hiver, par une température extérieure de $-5\,°C$.

1) En supposant que le volume des pneus ne varie par et qu'il n'y a aucune fuite d'air possible, quelle sera l'indication du manomètre un jour chaud cet été, par une température extérieure de $30\,°C$?

Réponse

Comme la quantité de matière n d'air contenue dans le pneu et son volume sont des constantes, alors d'après l'équation d'état du gaz parfait on a

$$\frac{P_1}{T_1} = \frac{P_2}{T_2} = \frac{nR}{V}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{P_2 = \frac{T_2}{T_1}P_1} \Rightarrow \underline{P_2 = 2{,}5\,\text{bar}}$$

◇

2) Calculer la variation relative de pression due au changement de température. Que conseillez-vous ?

Réponse

La variation relative de pression est $\Delta P/P_1 = 14\%$. Elle est supérieure à 10%, ce qui est loin d'être négligeable. Le meilleur conseil à donner est de refaire la pression des pneus ! Notez par ailleurs qu'il est préconisé de la vérifier chaque mois, et **indispensable** de le faire au moins deux fois par an **et** avant les grands trajets.

◇

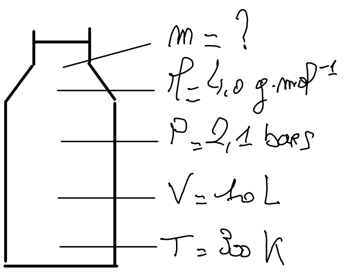
II Fuite d'hélium

On considère une bouteille de volume constant $V = 10\,\text{L}$ contenant de l'hélium, modélisé comme un gaz parfait monoatomique, à la pression $P = 2{,}1\,\text{bar}$ et à la température $T = 300\,\text{K}$.

$M(\text{He}) = 4{,}0\,\text{g·mol}^{-1}$, $k_B = 1{,}38 \times 10^{-23}\,\text{J·K}^{-1}$.

1) Calculer la masse m d'hélium dans la bouteille, puis la densité particulaire n^*, c'est-à-dire le nombre d'atomes par unité de volume.

Réponse



$$PV = nRT \quad \text{et} \quad m = nM$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m = \frac{PVM}{RT}} \Leftrightarrow \underline{m = 3{,}4\,\text{g}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P = 2{,}1 \times 10^5\,\text{Pa} \\ V = 10 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 \\ M = 4{,}0 \times 10^{-3}\,\text{kg·mol}^{-1} \\ R = 8{,}314\,\text{J·K}^{-1}\text{·mol}^{-1} \\ T = 300\,\text{K} \end{cases}$$

$$n^* = \frac{N}{V} \quad \text{avec} \quad N = n\mathcal{N}_A \quad \text{et} \quad n = \frac{m}{M} \Leftrightarrow \boxed{n^* = \frac{m\mathcal{N}_A}{MV}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 3{,}4\,\text{g} \\ \mathcal{N}_A = 6{,}022 \times 10^{23}\,\text{mol}^{-1} \\ M = 4{,}0\,\text{g·mol}^{-1} \\ V = 10 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n^* = 5{,}1 \times 10^{25}\,\text{m}^{-3}}$

◇

2) Calculer la vitesse quadratique moyenne des atomes.

Réponse

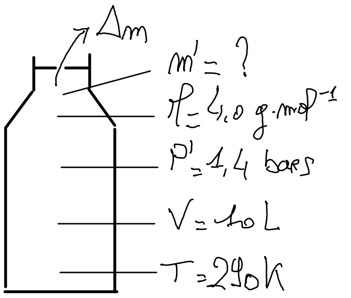
Température cinétique $\frac{1}{2}mv^{*2} = \frac{3}{2}k_BT$ avec $m = \frac{M}{\mathcal{N}_A}$ et $R = \mathcal{N}_A k_B$

$$\Leftrightarrow \boxed{v^* = \frac{3RT}{M}} \Rightarrow \underline{v^* = 1{,}4 \times 10^3\ \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

◇

3) À la suite de l'ouverture de la bouteille, la pression passe à $P' = 1{,}4\,\mathrm{bar}$ et la température à $T' = 290\,\mathrm{K}$. Calculer la masse Δm de gaz qui s'est échappé de la bouteille.

Réponse



$$\boxed{m' = \frac{P'VM}{RT'}} \Rightarrow \underline{m = 2{,}0\,\mathrm{g}}$$

$$\Delta m = m - m' \Leftrightarrow \underline{\Delta m = 1{,}0\,\mathrm{g}}$$

◇

4) On a vite refermé la bouteille. À quelle température T'' faudrait-il porter le gaz pour atteindre à nouveau la pression P ? L'exprimer en fonction de P, P' et T'.

Réponse

On garde m' et V, on revient à $P'' = P$ et on cherche T'' :

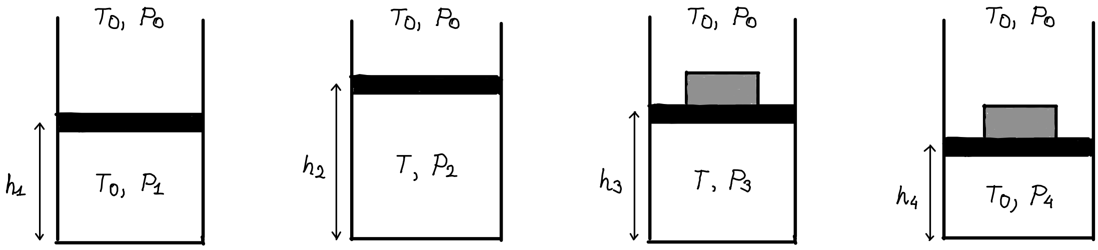
$$\boxed{T'' = \frac{PVM}{m'R} = \frac{P}{P'}T'} \Rightarrow \underline{T'' = 435\,\mathrm{K} = 4{,}4 \times 10^2\,\mathrm{K}}$$

◇

III Gaz parfait dans une enceinte

Une quantité de matière n de gaz parfait est enfermée dans une enceinte de surface de section S. Cette enceinte est fermée par un piston de masse m, à même de coulisser sans frottement, et permet les transferts thermiques, si bien que lorsqu'on attend suffisamment longtemps le gaz contenu dans l'enceinte est en équilibre thermique avec l'extérieur. Le milieu extérieur se trouve à température et pression constantes T_0 et P_0 . On fait subir au gaz la série de transformations suivante :

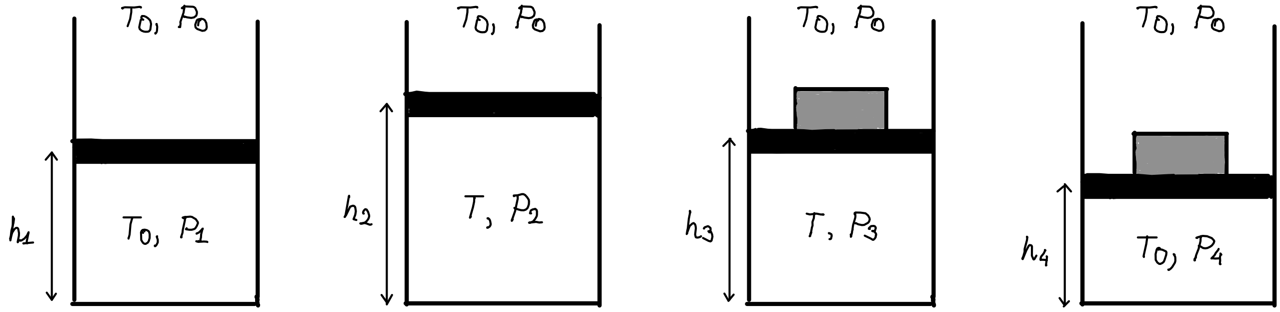
1. Initialement, dans l'état (1), le système est au repos depuis suffisamment longtemps pour avoir atteint l'équilibre thermique et mécanique ;
2. État (2) : le gaz est chauffé jusqu'à ce qu'il atteigne la température $T > T_0$, on est à l'équilibre dynamique ;
3. État (3) : on place brusquement une masse supplémentaire M sur le piston, l'équilibre thermique n'est pas atteint ;
4. État (4) : l'équilibre thermique est atteint.



1) Exprimer les hauteurs h_1 à h_4 du piston dans chaque état, en fonction des grandeurs d'état d'abord, puis en fonction de h_1 ensuite.

Réponse

On trace les 4 situations :



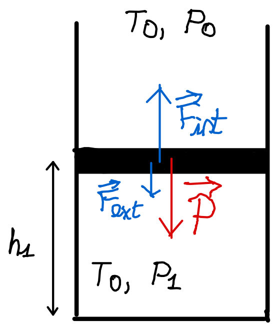
1	2	3	4
Équilibre thermodynamique	Équilibre dynamique	Équilibre dynamique	Équilibre thermodynamique
$P_1 > P_0$	$T > T_0$; $V_2 > V_1$; $P_2 > P_0$	T ; $V_3 < V_2$; $P_3 > P_2$	$T = T_0$; $V_4 < V_1$; $P_4 > P_1$

1 ◇ **Système** : {piston}, référentiel laboratoire supposé galiléen.

◇ **Repère** : cartésien, z vertical ascendant ; **repérage** $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = z\,\overrightarrow{u_z}$.

◇ **BdF** :

$$\begin{cases} \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{F}_{\text{ext}} = -P_0 S\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{F}_{\text{int}} = P_1 S\,\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$



◇ **Condition d'équilibre** :

$$\sum_i \overrightarrow{F}_i = \overrightarrow{0} \Leftrightarrow (P_1 - P_0)S = mg \Leftrightarrow P_1 S = P_0 S + mg \tag{1}$$

Gaz parfait : $\quad P_1 V_1 = nRT_0 \quad$ et $\quad V_1 = h_1 S \quad$ donc $\quad P_1 h_1 S = nRT_0$

$$\Rightarrow h_1 P_1 S = nRT_0 \tag{1'}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{h_1 = \frac{nRT_0}{P_0 S + mg}}$$

2 Même système, mêmes forces avec $\overrightarrow{F}_{\text{int}} = P_2 S\,\overrightarrow{u_z}$ et $P_2 h_2 S = nRT$, d'où

$$P_2 S = P_0 S + mg = P_1 S \tag{2}$$

et

$$h_2 P_1 S = nRT \tag{2'}$$

d'où $\quad \boxed{h_2 = \frac{nRT}{P_0 S + mg}} \quad$ et $\quad \boxed{h_2 = h_1 \times \frac{T_0}{T}} \quad$ avec (1') et (2')

3 Température inchangée, mais forces extérieures modifiées : on passe de m à $m + M$, la pression intérieure doit compenser ces forces :

$$P_3 S = P_0 S + (m + M)g \tag{3}$$

et

$$h_3 P_3 S = nRT \tag{3'}$$

d'où

$$\boxed{h_3 = \frac{nRT}{P_0 S + (m + M)g}}$$

avec (3') et (2')

$$\boxed{h_3 = h_2 \frac{P_1}{P_3}} \tag{3''}$$

Transformations rapides

Les équilibres thermiques sont plus lents à atteindre que les équilibres mécaniques : une variation mécanique brusque implique un potentiel équilibre mécanique **avant** l'équilibre thermique.

4 De même :

$$P_4 S = P_0 S + (m+M)g = P_3 S \tag{4}$$

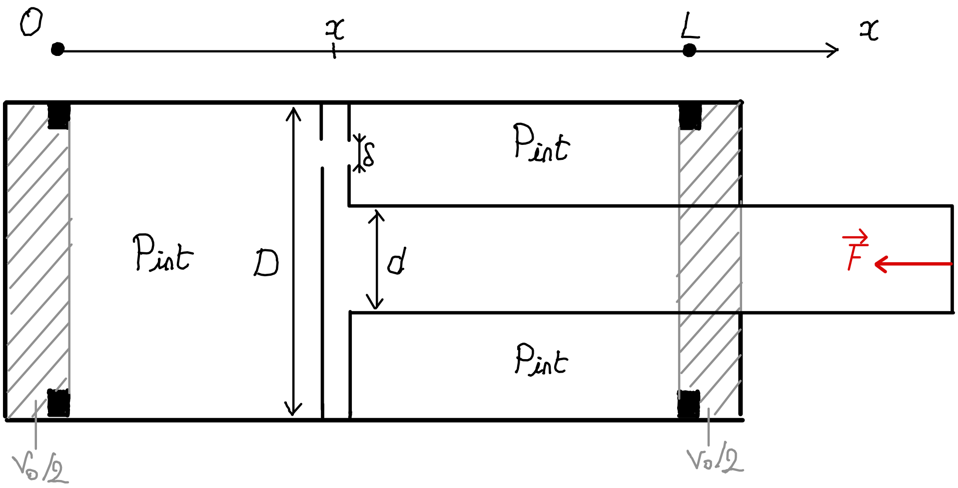
et
$$h_4 P_4 S = nRT_0 \tag{4'}$$

d'où
$$\boxed{h_4 = \frac{nRT_0}{P_0 S + (m+M)g}}$$

avec (4'), (1') et (3")
$$\boxed{h_4 = \frac{h_1 h_3}{h_2}}$$

IV Ressort à gaz

Les sièges de bureaux sont souvent montées sur un vérin cylindrique permettant d'en ajuster la hauteur. On décrit ce vérin cylindrique à air comprimé, supposé parfait, par le schéma ci-dessous.



Le piston a une épaisseur nulle, et on pourra négliger la section de l'orifice de communication de diamètre δ devant les autres sections. On note V_0 l'ensemble des deux volumes morts que le piston ne peut atteindre, situés en $x < 0$ et $x > L$. On prendra également $D = 2d$. On supposera que l'équilibre thermique du gaz avec l'air extérieur de température T_0 est réalisé pour toute position du piston, et on note P_0 la pression extérieure.

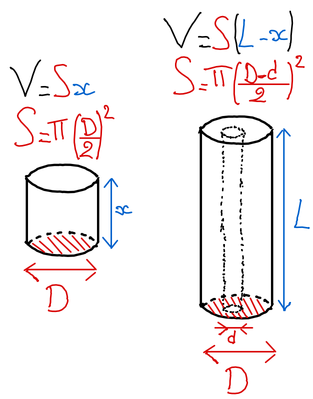
1) Exprimer le volume $V(x)$ disponible pour le gaz dans le vérin en fonction de L, x et d.

Réponse

On somme le volume de gauche, celui du cylindre de hauteur x et celui du cylindre de longueur $L - x$ qui est occupé par le piston, sans oublier les volumes morts et sachant que $D = 2d$:

$$V(x) = V_0 + x\pi d^2 + (L-x)\left(\pi d^2 - \pi\frac{d^2}{4}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{V(x) = V_0 + \frac{\pi d^2}{4}(x + 3L)}$$



2) Donnez l'expression de $p_{\text{int}}(x)$ en fonction de $V(x)$.

Réponse

On a un gaz parfait :

$$\boxed{P_{\text{int}}(x) = \frac{nRT_0}{V(x)}}$$

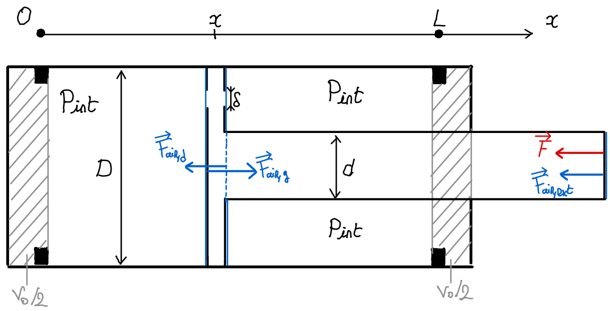
3) On suppose le système à l'équilibre mécanique avec le piston à la position x. Une personne s'assoie sur le siège, exerçant une force $\overrightarrow{F}$. Exprimer la force $\overrightarrow{F'}$ qu'exerce la tige sur le système extérieur.

Réponse

◇ **Système** = {piston + tige}

◇ **BdF** :

$$\begin{cases} \overrightarrow{F}_{\text{air,g}} = P_{\text{int}}(x)(\pi d^2)\,\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{F}_{\text{air,d}} = -P_{\text{int}}(x)(\pi \frac{d^4}{4})\,\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{F}_{\text{air,ext}} = -P_0\pi\frac{d^2}{4}\,\overrightarrow{u_x} \\ \overrightarrow{F} \end{cases}$$



◇ **Condition d'équilibre** : on cherche $\overrightarrow{F'} = -\overrightarrow{F}$, avec

$$\overrightarrow{F}_{\text{air,g}} + \overrightarrow{F}_{\text{air,d}} + \overrightarrow{F}_{\text{air,ext}} + \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}$$

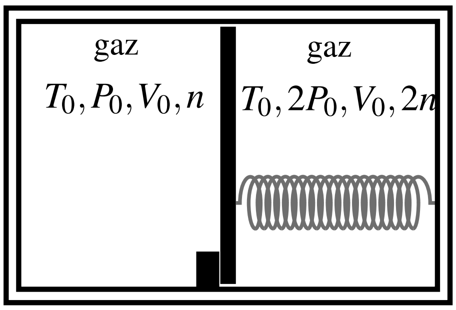
sur $\overrightarrow{u_x}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F} = \frac{\pi d^2}{4}\left((4-1)P_{\text{int}}(x) - P_0\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{F} = \frac{\pi d^2}{4}(3P_{\text{int}} - P_0)}$$

V Recherche d'un état final

Une enceinte indéformable aux parois calorifugées[1] est séparée en deux compartiments par une cloison étanche de surface S, mobile, diathermane[2] et reliée à un ressort de constante de raideur k. Les deux compartiments contiennent chacun un gaz parfait. Dans l'état initial, le gaz du compartiment 1 est dans l'état (T_0, V_0, P_0, n), le gaz du compartiment 2 dans l'état (T_0, V_0, $2P_0$, $2n$), une cale bloque la cloison mobile et la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide. On enlève la cale et on laisse le système atteindre un état d'équilibre.



1) Décrire qualitativement l'évolution du système.

Réponse

Initialement, $P_{\text{droite}} > P_{\text{gauche}}$, donc la paroi est poussée vers la gauche. Elle suivra ensuite des oscillations amorties.

2) Écrire cinq relations faisant intervenir certaines des six variables d'état : V_1 et V_2 les volumes finaux de chaque compartiment, P_1 et P_2 leurs pressions, et T_1 et T_2 leurs températures.

Réponse

On a :

1) Conservation du volume total : $2V_0 = V_1 + V_2$
2) GP compartiment 1 :

$$P_0V_0 = nRT_0 \quad \text{puis} \quad P_1V_1 = nRT_1 \quad \text{donc} \quad \frac{P_0V_0}{T_0} = \frac{P_1V_1}{T_1}$$

1. Qui ne laisse pas passer la chaleur.
2. Qui laisse passer la chaleur.

3) GP compartiment 2 :

$$2P_0V_0 = 2nRT_0 \quad \text{puis} \quad P_2V_2 = 2nRT_2 \quad \text{donc} \quad \frac{2P_0V_0}{T_0} = \frac{P_2V_2}{T_2}$$

4) Équilibre thermique à la fin : $T_1 = T_2$

5) Équilibre mécanique sur la paroi. Avec $\overrightarrow{F} = +k(x_2 - x_0)\,\overrightarrow{u_x}$ la force de rappel du ressort, $x_2 = V_2/S$ et $x_0 = V_0/S$. Avec les forces de pressions, on obtient

$$\begin{aligned} P_1S - P_2S + k\frac{V_2 - V_0}{S} &= 0 \\ \Leftrightarrow P_2 &= P_1 + k\frac{V_2 - V_0}{S^2} \end{aligned}$$

Parois diathermanes, calorifugées

- Parois **diathermanes** signifie qui **laisse passer la chaleur** ;
- Paroi externes calorifugées $\Rightarrow$ pas de transfert thermique **à l'extérieur** : a priori, $T_1 = T_2 \boxed{\neq} T_0$! On trouvera avec le premier principe que

$$T_1 = T_0 - \frac{k}{6nC_v}\left(\frac{V_2 - V_0}{S}\right)^2 \quad \text{soit} \quad \boxed{T_1 < T_0}$$