Sujet 1 – corrigé

I Réflexion et transmission

Deux câbles coaxiaux différents, d'impédances caractéristiques Z_1 et Z_2 sont mis bout à bout en $x = 0$. Une onde harmonique est émise dans le câble occupant les abscisses $x < 0$, qui se propage dans le sens des x croissants.

1) Proposez une expression pour les ondes incidente, réfléchie et transmise (courant et tension).

Réponse

On a $\underline{u}_i = u_{0,i}e^{j(\omega t - k_i x)}$ puis $\underline{u}_r = u_{0,r}e^{j(\omega t + k_r x)}$ et $\underline{u}_t = u_{0,t}e^{j(\omega t - k_t x)}$. On obtient le même type de solution pour les courants avec $\underline{i} = \pm\underline{u}/Z$ (+ si propagation dans le sens croissant, - sinon)

◇

2) Quelles sont les deux conditions limites en $x = 0$

Réponse

On peut appliquer la loi des nœuds : $i_i(0,t) + i_r(0,t) = i_t(0,t)$ et la loi des maille $u_i(0,t) + u_r(0,t) = u_t(0,t)$

◇

3) Définir et établissez les expressions des coefficients de transmission et de réflexion en amplitude pour la tension à la jonction entre les deux câbles.

Réponse

On a $r = \frac{u_r}{u_i}(0,t)$ et $t = \frac{u_t}{u_i}(0,t)$. Pour déterminer ces coefficients, on utilise les conditions limites précédentes :

$$u_i + u_r = u_t \Rightarrow 1 + r = t \tag{18.1}$$

$$\frac{u_i}{Z_1} - \frac{u_r}{Z_1} = \frac{u_t}{Z_2} \Rightarrow \frac{1}{Z_1} - \frac{r}{Z_1} = \frac{t}{Z_2} \tag{18.2}$$

Et on en déduit :

$$r = \frac{Z_2 - Z_1}{Z_2 + Z_1} \quad \text{et} \quad t = \frac{2Z_2}{Z_2 + Z_1}$$

◇

4) On définit les coefficients de réflexion et transmission en puissance par la valeur absolue du rapport entre la valeur moyenne de la puissance réfléchie/transmise sur la valeur moyenne de la puissance incidente. Calculez ces deux coefficients ; par quelle relation simple sont-ils reliés ?

Réponse

La puissance moyenne incidente a pour expression $< P_i > = < u_i(t)i_i(t) > = \frac{1}{2}\frac{u_i^2}{Z_1}$. De même, $p_r = -\frac{u_r^2}{2Z_1}$ et $p_t = \frac{u_t^2}{2Z_2}$.

On en déduit :

$$R = \frac{p_r}{p_i} = \left(\frac{u_r}{u_i}\right)^2 = r^2 \tag{18.3}$$

$$T = \frac{p_t}{p_i} = \left(\frac{u_t}{u_i}\right)^2 \frac{Z_1}{Z_2} = t^2 \frac{Z_1}{Z_2} \tag{18.4}$$

$$\tag{18.5}$$

au passage, on observe que $R+T = r^2 + t^2 = \frac{Z^2+Z_1^2-2Z_1Z_2+4Z_2Z_1}{(Z_1+Z_2)^2} = 1$

Sujet 2 – corrigé

I Puits canadien

Un puits canadien est un échangeur géothermique à très basse énergie utilisé pour rafraîchir ou réchauffer l'air ventilé dans un bâtiment. Ce type d'échangeur est notamment utilisé dans l'habitat passif. (Source : wikipdia).
On donne de plus les données suivantes :

- Conductivité thermique du sol terrestre : $\lambda = 0{,}75\,\mathrm{W \cdot m^{-1} \cdot K^{-1}}$
- Capacité thermique du sol terrestre : $c = 1350\,\mathrm{kJ \cdot m^{-3} \cdot K^{-1}}$

1) A quelle profondeur doit on enterrer une canalisation d'air servant à ventiler une habitation pour la refroidir l'été et la réchauffé l'hiver à moindre frais d'usage.

Il s'agit ici d'un problème libre dont la résolution n'est pas immédiate. Pensez donc effectuer des hypothèses soigneusement justifiées.

Réponse

On établit l'équation de diffusion :

$$\frac{\partial T}{\partial t} = D\frac{\partial^2 T}{\partial x^2} \quad \text{avec} \quad D = \frac{\lambda}{c}$$

On peut vérifier par analyse dimensionnelle que D est bien en $\mathrm{m^2{\cdot}s^{-1}}$.

On cherche l'évolution temporelle au cours d'une année.

On pose la température de l'air

$$T_a = T_0 + T_1\cos(\omega t)$$

On va cherche une solution sinusoïdale temporelle telle que

$$T(0,t) = T_a = T_0 + T_1\cos(\omega t)$$

On va chercher une solution en régime permanent sinusoïdal sous la forme

$$T(x,t) = T_0 + A\cos(\omega t - kx)$$

et on passe en complexe, alors

$$\underline{T}(x,t) = T_0 + Ae^{i(\omega t - kx)}$$

On injecte dans l'équation de diffusion :

$$k^2 = -i\frac{\omega}{D} \quad \text{soit} \quad k^2 = \frac{\omega}{D}e^{-i\pi/2}$$

On en déduit

$$k = \sqrt{\frac{\omega}{D}}e^{-i\pi/4} \quad \text{soit} \quad \boxed{k = \sqrt{\frac{\omega}{2D}}(1-i)}$$

Or $D = \lambda/c$, alors

$$\boxed{\underline{T}(x,t) = T_0 + Ae^{-\sqrt{c\omega/(2\lambda)}x}e^{i(\omega t - \sqrt{c\omega/(2\lambda)}x)}}$$

On observe donc le comportement d'une onde progressive qui s'atténue lors de sa progression. Il est donc intéressant de placer la canalisation à une demie longueur d'onde du sol : là où la température est la plus élevée en hiver et la plus froide en été.

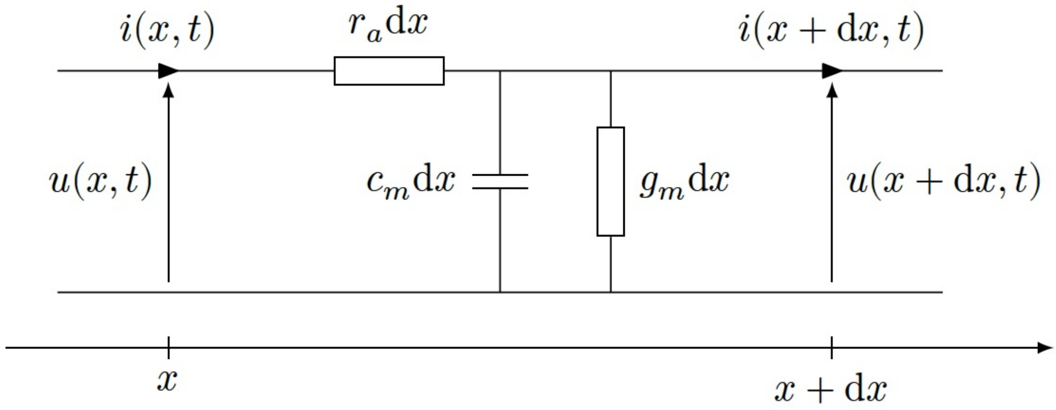
$$\boxed{x_p = \frac{\pi}{\sqrt{c\omega/(2\lambda)}} \approx 7{,}5\,\mathrm{m}}$$

avec $\omega = \frac{2\pi}{1\,\mathrm{an}}$

Sujet 3 – corrigé

I Fibre nerveuse

On considère une chaîne électrique dont on représente une longueur élémentaire $\mathrm{d}x$, modélisant une fibre nerveuse.



Attention, $g_m\,\mathrm{d}x$ représente une conductance (l'inverse d'une résistance).

1) Déterminer les équations différentielles couplées vérifiées par $u(x,t)$ et $i(x,t)$

Réponse

Pour cet exercice, on ne peut à priori utiliser la méthode des complexes ; il faut donc utiliser les lois de Kirchoff :

$$u(x) = r_a\mathrm{d}x\ i(x) + u(x+\mathrm{d}x) \tag{18.1}$$

$$u(x+\mathrm{d}x) = \frac{i_g}{g_m\mathrm{d}x} \quad \text{et} \quad i_c = c_m\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x) \tag{18.2}$$

$$i(x) = i(x+\mathrm{d}x) + i_g + i_c \tag{18.3}$$

On obtient bien un système de 4 inconnues (u, i, i_g et i_g) et 4 équations donc on peut commencer la résolution pour faire disparaitre i_c et i_g :

$$\frac{\partial u}{\partial x} = -r_a i(x) \Rightarrow \frac{\partial u}{\partial x} + r_a i(x) = 0 \tag{18.4}$$

$$\frac{\partial i}{\partial x} = -\frac{i_g+i_c}{\mathrm{d}x} = -\frac{g_m\mathrm{d}x u(x+\mathrm{d}x) + c_m\mathrm{d}x\frac{\partial u}{\partial t}(x+\mathrm{d}x)}{\mathrm{d}x} \Rightarrow \frac{\partial i}{\partial x} + c_m\frac{\partial u}{\partial t} + g_m u = 0 \tag{18.5}$$

D'où le résultat. (on à remplacé $u(x+\mathrm{d}x)$ par $u(x)$ qui est vrai à l'ordre 0 en $\mathrm{d}x$)

◇

2) En déduire l'équation vérifiée par $u(x,t)$ seulement.

Réponse

On a un système de deux équations couplées à deux inconnues. On peut procéder par substitution en dérivant la première équation par rapport à x :

$$\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + r_a[-c_m\frac{\partial u}{\partial t} - g_m u] = 0 \Rightarrow \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - r_a c_m\frac{\partial u}{\partial t} - r_a g_m u = 0$$

◇

On envisage dans la suite une solution sous forme d'onde plane progressive monochromatique $\underline{u}(x,t) = u_0 \mathrm{e}^{j(\omega t - kx)}$.

3) À quelle condition sur ω, c_m et g_m l'équation différentielle vérifiée par $u(x,t)$ se simplifie-t-elle en

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} = r_a c_m \frac{\partial u}{\partial t}$$

Réponse

On injecte la solution proposée :

$$-k^2 - r_a c_m j\omega - r_a g_m = 0 \Rightarrow k^2 + r_a(jc_m\omega + g_m)$$

On peut s'affranchir de la conductivité lorsque $g_m \ll c_m\omega$ (ce terme disparait de l'équation de dispersion)

◇

On supposera cette condition vérifiée par la suite.

4) Déterminer la relation de dispersion entre ω et k. Montrer que le milieu est dispersif et absorbant. Que valent les vitesses de phase et de groupe ? Quelle relation lie ces deux grandeurs ?

Réponse

On obtient ainsi $k^2 + jr_a c_m\omega = 0$ On cherche premièrement v_ϕ :

$$v_\phi = \frac{\omega}{k} = j\frac{k}{r_a c_m}$$

Cette vitesse de phase dépend de k donc de ω. Le milieu est donc dispersif. La résolution de cette question montre de plus que k sera complexe donc le milieu est aussi absorbant. On trouve pour la vitesse de groupe :

$$v_g = \frac{\mathrm{d}\omega}{\mathrm{d}k} = \frac{2jk}{r_a c_m} = 2v_\phi$$

◇

5) Mettre en évidence une distance caractéristique d'atténuation. Commenter.

Réponse

On a $l \propto \frac{1}{|k|} = \frac{1}{\sqrt{rc\omega}}$. Ainsi, la longueur caractéristique d'atténuation dépend de la fréquence. Plus cette dernière est élevée et mois le signal se propagera dans la fibre nerveuse. A l'inverse, un signal basse fréquence pourra se propager beaucoup plus loin.

◇

Sujet 4 – corrigé

I Transmission entre deux cordes

Une corde infinie est constituée de deux parties :

- $x < 0$: masse linéique μ_1, tension T
- $x > 0$: masse linéique μ_2, même tension T

Une onde progressive se dirige vers le point O en provenant de la région des x négatifs. On notera c_1 (respectivement c_2) la célérité des ondes susceptibles de se propager sur la partie $x < 0$ (respectivement $x > 0$) de la corde.

On note $y_i(x,t)$, $y_r(x,t)$, $y_t(x,t)$ les élongations correspondant à l'onde incidente, réfléchie et transmise. À ces élongations correspondent les ondes de vitesse respectives

$$v_i(x,t) = \frac{\partial y_i(x,t)}{\partial t} \quad , \quad v_r(x,t) = \frac{\partial y_r(x,t)}{\partial t} \quad , \quad v_t(x,t) = \frac{\partial y_t(x,t)}{\partial t}.$$

1) Définir une onde progressive se propageant à la vitesse v selon les x croissants. Justifier que $\dfrac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = -\dfrac{v_i(x,t)}{c_1}$.

Réponse

Comme

$$y_i(x,t) = f(t - x/c_1) \quad \text{et} \quad y_r(x,t) = g(t + x/c_1) \quad \text{et} \quad y_t = h(t - x/c_2)$$

On en déduit

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f(u)}{\mathrm{d}t} \times \frac{\partial t}{\partial u} \times \frac{\partial u}{\partial x} \quad \text{avec} \quad u = t - x/c_1$$

On trouve alors

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = \frac{\mathrm{d}f(t - x/c)}{\mathrm{d}t} \times \left(-\frac{1}{c_1}\right)$$

$$\text{soit} \quad \frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x} = -\frac{v_i(x,t)}{c_1}$$

◇

2) Déterminer les coefficients de réflexion r et de transmission t relatifs à la vitesse. On introduira la quantité $\eta = \sqrt{\mu_2/\mu_1}$.

Que se passe-t-il pour les cas limites $\mu_2 \to \infty$ et $\mu_1 = \mu_2$?

Réponse

On écrit la continuité de la corde en $y = 0$ et en dérivant par rapport au temps, on a

$$\boxed{v_i(0,t) + v_r(0,t) = v_t(0,t)}$$

On écrit la continuité de la tangente à la corde en $y = 0$:

$$\frac{\partial y_i(x,t)}{\partial x}(x=0) + \frac{\partial y_r(x,t)}{\partial x}(x=0) = \frac{\partial y_t(x,t)}{\partial x}(x=0)$$

$$\text{soit} \quad \boxed{-\frac{v_i(0,t)}{c_1} + \frac{v_r(0,t)}{c_1} = -\frac{v_t(0,t)}{c_2}}$$

En exploitant ces deux relation et avec $\eta = c_1/c_2$, on a

$$\boxed{r = \frac{1-\eta}{1+\eta} \quad \text{et} \quad t = 1 + r = \frac{2}{1+\eta}}$$

Cas limites :

- $\eta \Rightarrow +\infty$: $r = -1$, $t = 0$ l'onde se "heurte" à un mur, elle est uniquement réfléchie
- $\eta = 1$: $r = 0$, $t = 1$: il n'y a pas de changement de milieu, donc pas de réflexion

---

3) Définir la puissance $\Pi(x,t)$ transférée en x dans le sens des $x > 0$ dans le cas général d'une corde infinie de tension T et de masse linéique μ. On exprimera $\Pi(x,t)$ en fonction de T, c, la célérité de l'onde, et $v(x,t)$ sa vitesse transversale. On se placera dans le cas d'une onde progressive.

Réponse

$$\Pi(x,t) = -\vec{T}(x,t) \cdot \vec{v}(x,t) = -T_y(x,t) \times \frac{\partial y(x,t)}{\partial t}$$

Or $T_y(x,t) = T\sin(\alpha) \approx T\alpha = T\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x}$ et pour une onde progressive $\dfrac{\partial y(x,t)}{\partial x} = -\dfrac{v(x,t)}{c}$ on en déduit

$$\boxed{\Pi(x,t) = \frac{T}{c} v^2(x,t)}$$

---

4) En traduisant la conservation de l'énergie en $x = 0$, établir une relation entre r, t et η. Vérifier que cette expression est compatible avec les expressions obtenues précédemment.

Réponse

$$\Pi(0^-,t) = -\frac{T_y(0^-,t)}{c_1} v(0^-,t)$$

$$T_y(0^-,t) = T\left(\frac{\partial y_i}{\partial x}(x=0) + \frac{\partial y_r}{\partial x}(x=0)\right) = \frac{T}{c_1}(v_r(0,t) - v_i(0,t))$$

Comme $v(0^-,t) = v_r(0,t) + v_i(0,t)$, on en déduit

$$\Pi(0^-,t) = \frac{T}{c_1}(v_i(0,t) - v_r(0,t)) \times (v_i(0,t) + v_r(0,t))$$

$$\text{soit} \quad \boxed{\Pi(0^-,t) = \frac{T}{c_1}\left(v_i^2(0,t) - v_r^2(0,t)\right)}$$

Pour $x > 0$ l'onde est progressive, donc

$$\boxed{\Pi(0^+,t) = \frac{T}{c_2} v_t^2(0,t)}$$

La continuité de la puissance donne

$$\frac{T}{c_1}\left(v_i^2(0,t) - v_r^2(0,t)\right) = \frac{T}{c_2} v_t^2(0,t)$$

$$\text{soit} \qquad v_i^2(0,t) - v_r^2(0,t) = \frac{c_1}{c_2} v_t^2(0,t)$$

On en déduit $\boxed{1 - r^2 = \eta t^2}$.

On vérifie qu'avec les expressions de r et t établies précédemment; cette relation est vérifiée.