Mécanique – chapitre 5

Mouvement de particules chargées

Au programme

Savoirs

- Force de Lorentz exercée sur une charge ponctuelle ; champs électrique et magnétique ; puissance de la force de Lorentz.

Savoir-faire

- Évaluer les ordres de grandeur des forces électrique ou magnétique et les comparer à ceux des forces gravitationnelles.
- Justifier qu'un champ électrique peut modifier l'énergie cinétique d'une particule alors qu'un champ magnétique peut courber la trajectoire sans fournir d'énergie à la particule.
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{E}$ uniforme :
  - Mettre en équation le mouvement et le caractériser comme un mouvement à vecteur $\vec{a}$ constant ;
  - Effectuer un bilan énergétique pour déterminer la valeur de la vitesse d'une particule chargée accélérée par une différence de potentiel.
- Mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{B}$ uniforme pour $\vec{v_0} \perp \vec{B}$: déterminer le rayon de la trajectoire et le sens de parcours.

Sommaire

I Champs électrique et magnétique . . . **3**
I/A Champ électrique . . . 3
I/B Champ magnétique . . . 3
II La force de Lorentz . . . **4**
II/A Définition . . . 4
II/B Comparaison au poids . . . 4
II/C Produit vectoriel . . . 5
II/D Puissance de la force de Lorentz . . . 5
II/E Potentiel électrostatique . . . 6
III Mouvement dans un champ électrique . . . **7**
III/A Situation générale . . . 7
III/B Accélération d'une particule chargée . . . 8
III/C Déviation d'une particule chargée . . . 9
III/D Applications . . . 9
IV Mouvement dans un champ magnétique . . . **10**
IV/A Mise en équation . . . 10
IV/B Vitesse initiale colinéaire au champ . . . 11
IV/C Vitesse initiale perpendiculaire au champ . . . 11
IV/D Cas général . . . 13
IV/E Applications . . . 13

Résultats phares

Liste des définitions

Définition 5.1 : Champ électrique 3
Définition 5.2 : Champ magnétique 3
Définition 5.3 : Force de LORENTZ 4
Définition 5.4 : Potentiel électrostatique 7
Définition 5.5 : Tension 7
Définition 5.6 : Mouvement circulaire en champ $\vec{B}$ 12

Liste des rappels

Rappel 5.1 : Produit vectoriel 5
Rappel 5.2 : Équation cartésienne d'un cercle 11

Liste des propriétés

Propriété 5.1 : Puissance force magnétique 5
Propriété 5.2 : Force conservative et énergie potentielle 6

Liste des démonstrations

Démonstration 5.1 : Puissance de LORENTZ 6
Démonstration 5.2 : Énergie potentielle 6

Liste des remarques

Remarque 5.1 : Comparaison champ $\vec{E}$ et champ $\vec{g}$ 6
Remarque 5.2 : Accélération rectiligne 8

Liste des points importants

Important 5.1 : Impact du poids vs. LORENTZ 4
Important 5.2 : Tension et et champ électrique 7
Important 5.3 : Particule $\vec{v_0} /\!/ \vec{E}$ 8
Important 5.4 : Particule $\vec{v_0} \perp \vec{E}$ 9
Important 5.5 : Analyse du mouvement en champ $\vec{B}$ 11
Important 5.6 : Particule avec $\vec{v_0} /\!/ \vec{B}$ 11
Important 5.7 : Particule avec $\vec{v_0} \perp \vec{B}$ 13

I Champs électrique et magnétique

I/A Champ électrique

Définition 5.1 : Champ électrique

Un champ électrique $\overrightarrow{E}(\mathrm{M},t)$ est un champ de vecteurs créé par des charges électriques et par des variations temporelles du champ magnétique.

Unités

La manière la plus simple pour créer un champ électrique est de constituer un condensateur avec deux armatures métalliques de surface S. On a alors

$$\overrightarrow{E} = \frac{1}{\varepsilon_0}\frac{q}{S}\,\overrightarrow{u_z}$$

avec la ε_0 permittivité diélectrique du vide.

$\overrightarrow{E}$ va des **charges positives aux négatives**. On le verra, il indique le **sens de la force subie par une charge positive**.

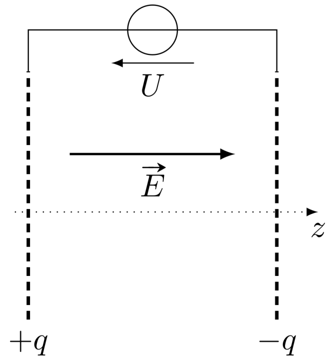

FIGURE 5.1 – Condensateur et champ électrique

Ordre de grandeur 5.1 : Champs électriques

- À l'intérieur d'un condensateur en TP, on a environ $10\,\mathrm{V{\cdot}mm^{-1}}$, soit $10\,\mathrm{kV{\cdot}m^{-1}}$
- À la surface de la Terre, le champ électrique est d'environ $10^2\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$
- Le champ électrique créé lors d'un orage est d'environ $10^4\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$
- Le champ électrique pour la téléphonie mobile est d'environ $50\,\mathrm{V{\cdot}m^{-1}}$

I/B Champ magnétique

Définition 5.2 : Champ magnétique

Un champ magnétique $\overrightarrow{B}(\mathrm{M},t)$ est un champ de vecteurs créé par des courants électriques et par des variations temporelles du champ électrique.

Unités

La manière la plus simple pour créer un champ magnétique est de constituer une bobine, par enroulement de N spires d'un fil métallique sur une longueur L. On a alors

$$\overrightarrow{B} = \mu_0 i \frac{N}{L}\,\overrightarrow{u_z}$$

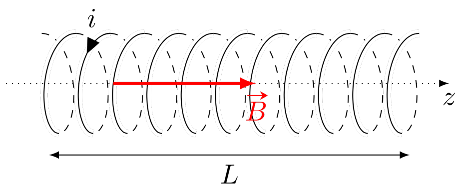

FIGURE 5.2 – Bobine et champ magnétique

avec la μ_0 perméabilité magnétique du vide.
On le verra en électromagnétisme, le champ magnétique est **orienté par le courant**.

Ordre de grandeur 5.2 : Champs magnétiques

Le Tesla est une « grande unité» : il est très difficile de dépasser les $10\,\mathrm{T}$.

- À l'intérieur d'une bobine en TP, on a environ $10^{-4}\,\mathrm{T}$
- Une bobine avec $N = 1000$, $L = 10\,\mathrm{cm}$ et $i = 1\,\mathrm{A}$ donne $10^{-2}\,\mathrm{T}$
- À la surface de la Terre, le champ magnétique est d'environ $5 \times 10^{-5}\,\mathrm{T}$
- Le champ magnétique au centre d'un IRM est d'environ $1\,\mathrm{T}$
- Le champ magnétique d'un aimant permanent est d'environ $(10^{-2}\ ;\ 10^{-1})\,\mathrm{T}$

II La force de Lorentz

On considèrera dans toute la suite des champs **uniformes** [1] et **stationnaires** [2].

II/A Définition

Définition 5.3 : Force de Lorentz

La force subie par une charge q plongée dans un champ électrique $\vec{E}$ et un champ magnétique $\vec{B}$ est appelée **force de Lorentz**, telle que

On appelle $\vec{F}_e = q\vec{E}$ la **force électrique** et $\vec{F}_m = q\vec{v} \wedge \vec{B}$ la **force magnétique**

II/B Comparaison au poids

Les particules chargées sont généralement très légères et rapides : pour un électron, on a $m \approx 10^{-30}\,\mathrm{kg}$ et $\|\vec{v}\| \approx 10^{6}\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Seulement, leur charge est également faible, avec $|e| \approx 10^{-19}\,\mathrm{C}$ pour un électron ou un proton. Il est donc intéressant de connaître la différence de force entre le poids qu'elle subit et la force de Lorentz, ce qui nous permettrait de négliger le poids dans le PFD. Avec $g \approx 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$, on trouve

Regardons ce qu'il en est pour les parties électrique et magnétique de la force de Lorentz.

- **Partie électrique :** $\|\vec{F}_e\| = eE$, avec $E \approx$:

$$\|\vec{F}_e\| \approx$$

- **Partie magnétique :** $\|\vec{F}_m\| = evB$, avec $B \approx$:

$$\|\vec{F}_m\| \approx$$

Ainsi, dans les deux cas, on a

Important 5.1 : Impact du poids vs. Lorentz

Pour des particules chargées dans des conditions générales, le poids est négligeable *devant* la force de Lorentz.

1. Est uniforme une grandeur constante dans l'espace.
2. Est stationnaire une grandeur constante dans le temps.

II/C Produit vectoriel

Pour calculer la force magnétique, il va falloir manipuler les produits vectoriels. Quelques rappels :

Rappel 5.1 : Produit vectoriel

Le produit vectoriel de deux vecteurs $\vec{u}$ et $\vec{v}$ s'écrit $\vec{u} \wedge \vec{v}$, et se lit « u vectoriel v ». C'est un **vecteur** :

- de direction **perpendiculaire** à $\vec{u}$ **et** à $\vec{v}$:

  et

- de sens donné par la règle de la **main droite** ;
- de norme $\|\vec{u} \wedge \vec{v}\| = \|\vec{u}\|\|\vec{v}\||\sin(\theta)|$ avec θ l'angle entre les deux vecteurs.

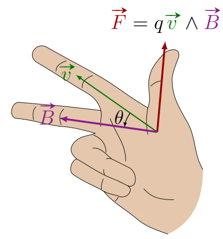

FIGURE 5.3 – Règle de la main droite

L'ordre des vecteurs est **primordial** dans un produit vectoriel : c'est en effet un opérateur **antisymétrique**, c'est-à-dire qu'il respecte

Pour une base orthonormée **directe** (BOND), qu'elle soit cartésienne, cylindrique ou sphérique, le produit vectoriel de deux vecteurs de base donne le troisième avec un signe + s'ils se suivent dans une permutation circulaire ($x \to y \to z \to x$ ou $r \to \theta \to z \to r$), et un signe − sinon. Par exemple :

$$\vec{u_x} \wedge \vec{u_y} = \qquad \vec{u_y} \wedge \vec{u_z} = \qquad \vec{u_z} \wedge \vec{u_x} =$$
$$\vec{u_y} \wedge \vec{u_x} = \qquad \vec{u_z} \wedge \vec{u_y} = \qquad \vec{u_x} \wedge \vec{u_z} =$$

Ces données permettent de calculer n'importe quel produit vectoriel exprimé dans une BOND. En termes de composantes des vecteurs, on pourra déterminer le produit vectoriel avec la « règle du gamma » ; par exemple :

$$\vec{u} \wedge \vec{v} = \begin{pmatrix} u_x \\ u_y \\ u_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} v_x \\ v_y \\ v_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} u_y v_z - u_z v_y \\ u_z v_x - u_x v_z \\ u_x v_y - u_y v_x \end{pmatrix}$$

II/D Puissance de la force de LORENTZ

Propriété 5.1 : Puissance force magnétique

La puissance de la force de LORENTZ est

La puissance de la force magnétique est nulle : un champ magnétique ne peut pas accélérer ou ralentir une particule chargée mais ne peut que la dévier.

Démonstration 5.1 : Puissance de Lorentz

La puissance de la force de Lorentz est :

En effet, $\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$, et le produit scalaire de deux vecteurs orthogonaux est nul. Ainsi, la partie magnétique de la force de Lorentz ne travaille pas ; le TPC donne alors

c'est-à-dire que seule la **partie électrique** peut faire varier l'énergie cinétique, et donc la vitesse, d'une particule chargée. ■

II/E Potentiel électrostatique

Propriété 5.2 : Force conservative et énergie potentielle

La force de Lorentz est **conservative**, et dérive d'une d'une énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,e}$ telle que

avec E la norme du champ électrique subit et z la position dans ce champ.

Démonstration 5.2 : Énergie potentielle

Le champ magnétique ne travaillant pas, on s'intéresse au travail élémentaire de la force électrique. Supposons un champ électrique $\vec{E} = E\,\vec{u_z}$:

■

Remarque 5.1 : Comparaison champ $\vec{E}$ et champ $\vec{g}$

La situation avec un champ $\vec{E}$ est en essence tout à fait similaire à celle du poids, provenant d'un champ gravitationnel : on obtient la même énergie potentielle à un signe près. En effet, la masse ne peut qu'être positive, alors qu'une charge peut être négative ; mais l'effet d'un champ $\vec{E}$ sur une particule chargée est en tous points similaire à celle de l'action de la gravité sur une masse m.

Ainsi, puisque $\vec{F}_e$ est conservative, on a

$$\vec{F}_e = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_{p,e}$$

Il est souvent utile de déterminer $\vec{E}$ plutôt que $\vec{F}$; on introduit donc une autre grandeur :

Définition 5.4 : Potentiel électrostatique

Le **potentiel électrostatique** est la grandeur scalaire qui permet de calculer le champ $\vec{E}$ associé, tel que

On retrouve alors les notions du début d'année en électrocinétique :

Définition 5.5 : Tension

La **tension** entre deux points A et B est la **différence de potentiel** entre ces deux points :

On trouve finalement le lien entre champ électrique et tension entre deux plaques chargées : en utilisant

$$\mathcal{E}_{p,e} = -qEz \quad \text{et} \quad V = \mathcal{E}_{p,e}/q \Leftrightarrow V = -Ez \quad \text{et} \quad U_{\text{AB}} = V(\text{A}) - V(\text{B})$$

on a

Important 5.2 : Tension et et champ électrique

En appliquant une tension U entre deux grilles planes parallèles et distantes de d, on obtient un champ électrique **perpendiculaire** aux grilles, dirigé vers les potentiels **décroissants** (borne $\ominus$) de norme

Voilà donc comment faire un condensateur ! Mais alors, à quoi ça sert ?

III Mouvement dans un champ électrique

III/A Situation générale

1 **Système :** {particule} de masse m de charge q dans un champ $\vec{E}$.

2 **Schéma :** ci-contre.

3 **Modélisation :**

- Repère : cartésien, $\vec{u_z} \perp$ grilles, soit $\vec{E} = E\,\vec{u_z}$ avec $E = U/d$
- Instant initial : la particule part de $z = 0$, $\overrightarrow{\text{OM}}(0) = \vec{0}$

4 **BDF :**

Figure 5.4 – Situation générale

5 **PFD :**

$\boxed{6}$ **Équations scalaires :**

$\boxed{7}$ **Réponse aux questions.** Il est possible d'intégrer ces équations pour obtenir les équations horaires, E étant uniforme et stationnaire ; on va distinguer deux cas selon la vitesse initiale de la particule.

III/B Accélération d'une particule chargée

On suppose ici une particule chargée positivement ($q > 0$), arrivant en $z = 0$ avec une vitesse $\overrightarrow{v_0} = v_0\,\overrightarrow{u_z}$, c'est-à-dire **dans le sens du champ**. On s'intéresse à sa vitesse en sortie, en $z = d$. Comme le système est **conservatif** et qu'on s'intéresse à un instant précis du mouvement, il est plus astucieux d'utiliser le **TEM** plutôt que le PFD :

- **En $z = 0$:** la norme de la vitesse est v_0, et l'énergie potentielle est $qV(0)$, d'où l'énergie mécanique

- **En $z = d$:** la norme de la vitesse est v_f, et l'énergie potentielle est $qV(d)$, d'où l'énergie mécanique

Ainsi

Important 5.3 : Particule $\overrightarrow{v_0} /\!/ \overrightarrow{E}$

Une particule chargée positivement et lancée dans le sens d'un champ électrique est accélérée, sa vitesse finale augmentant en $\sqrt{U}$.

En faisant l'application numérique pour un proton de charge $e = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, de masse $m = 1{,}673 \times 10^{-27}\,\mathrm{kg}$ partant de $v_0 = 0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et accéléré par $U = 1\,\mathrm{kV}$, on trouve

$$v_f = 4{,}4 \times 10^5\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} = 440\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}$$

Remarque 5.2 : Accélération rectiligne

- L'électron-volt est une unité d'énergie, telle que

$$1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{J} = 1{,}602 \times 10^{-19}\,\mathrm{C} \times 1\,\mathrm{V} = e \times 1\,\mathrm{V}$$

  C'est l'énergie cinétique que gagne un électron (ou un proton) lorsqu'il est accéléré par une tension de 1 V. Dans les accélérateurs de particules modernes, on touche au TeV (tera-électron-volt)

- Si $U < 0$ ou $q < 0$, on peut ralentir la particule chargée. Elle peut même faire demi-tour si l'énergie potentielle acquise est supérieure à son énergie cinétique initiale ; elle ressortira alors avec la même énergie cinétique qu'au départ (puisque $\mathcal{E}_{p,e}(z = 0)$ ne change pas), donc la même vitesse en norme, mais bien sûr de sens opposé.

III/C Déviation d'une particule chargée

On considère cette fois une particule chargée arrivant **perpendiculairement** à un champ $\vec{E}$. Prenons $\vec{v_0} = v_0\,\vec{u_x}$ et $\vec{E} = E\,\vec{u_z}$, avec $E = U/d$. On reprend le résultat obtenu dans la situation générale (III/A) :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = 0 \\ m\ddot{y} = 0 \\ m\ddot{z} = qE \end{cases}$$

On intègre, avec $\dot{x}(0) = v_0$ et $\dot{z}(0) = 0$; on ignore le mouvement en y ; on intègre une seconde fois, avec $x(0) = 0 = z(0)$:

Figure 5.5 – Situation de déviation

$$\Leftrightarrow$$

On trouve alors l'équation de la trajectoire :

C'est une trajectoire parabolique, en tout point **similaire à la chute libre**.

Application 5.1 : Angle de déviation

On peut déterminer l'angle de déviation α_f entre la trajectoire de la particule au départ de son mouvement, et une fois qu'elle a quitté le champ $\vec{E}$. On trouve le temps de sortie t_f tel que $x(t_f) = L$, soit $t_f = L/v_0$.

On trouve l'angle de sortie en prenant

$$\text{or} \quad \begin{cases} \dot{x}(t_f) = v_0 \\ \dot{z}(t_f) = \dfrac{qEL}{mv_0} \end{cases}$$

Avec $E = U/d$, et si l'angle est petit, on a donc

$$\tan\alpha_f \approx$$

Ainsi, l'angle de déviation **est proportionnel à** U.

Important 5.4 : Particule $\vec{v_0} \perp \vec{E}$

Une particule chargée positivement et lancée dans le sens d'un champ électrique est déviée, son angle final est proportionnel à $\sqrt{U}$.

III/D Applications

On utilise rarement le champ $\vec{E}$ seul, il est souvent utilisé avec $\vec{B}$. On peut néanmoins citer quelques applications :

- **Accélérateur linéaire.** On peut accélérer une particule chargée grâce à un champ électrique.

- **Oscilloscope analogique.** Un faisceau d'électrons de vitesse initiale fixée (grâce à un accélérateur linéaire) est dévié par la tension de mesure. Cette déviation est proportionnelle à la tension mesurée. En utilisant un écran fluorescent, on visualise l'impact des électrons et ainsi la tension mesurée en balayant l'écran à une vitesse déterminée par le calibre temporel.

IV Mouvement dans un champ magnétique

IV/A Mise en équation

1 **Système :** {particule} de masse m de charge q dans un champ $\vec{B}$.

2 **Schéma :**

Figure 5.6 – Situation initiale

3 **Modélisation :**

- Repère : cartésien, $\vec{u_z}$ direction de $\vec{B}$ soit $\vec{B} = B\,\vec{u_z}$
- Instant initial : la particule part de l'origine, $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$

4 **BDF :**

5 **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

6 **Équations scalaires :**

7 **Réponse aux questions.** Ici aussi, on va distinguer deux cas selon la colinéarité de la vitesse initiale avec le champ.

On remarque cependant, avant toute évolution due aux conditions initiales, que le TPC nous donne une information sur le futur du système. En effet, la force magnétique ne travaillant pas ($\vec{v} \wedge \vec{B} \perp \vec{v}$), on a

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = 0$$

donc la vitesse est constante en norme, c'est-à-dire que le mouvement est uniforme, et notamment

$$v_x(t)^2 + v_y(t)^2 + v_z(t)^2 = \mathrm{cte}$$

Or, avec la projection du PFD on a $\ddot{z} = 0 \Rightarrow \dot{z} = \text{cte}$, donc on sait déjà que

Important 5.5 : Analyse du mouvement en champ $\overrightarrow{B}$

Le mouvement dans un champ $\overrightarrow{B}$ dirigé selon $\overrightarrow{u_z}$ est **uniforme**, et tel que

$$\boxed{v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = \text{cte}}$$

Étudions les deux cas intéressants.

IV/B Vitesse initiale colinéaire au champ

Prenons $\overrightarrow{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_z}$. Comme $v_x(t)^2 + v_y(t)^2$ et qu'on part avec une vitesse nulle sur $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$, alors $v_x(t)$ et $v_y(t)$ sont nulles à tout instant. La composante de $v_z(t)$ est quant à elle également constante, et égale à v_0. Ainsi,

Important 5.6 : Particule avec $\overrightarrow{v_0} /\!/ \overrightarrow{B}$

Une particule chargée de vitesse initiale colinéaire au
champ magnétique a un mouvement rectiligne uniforme.

Regardons l'autre situation.

IV/C Vitesse initiale perpendiculaire au champ

Prenons

$$\overrightarrow{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_x}$$

$v_z(t)$ étant constant et $v_z(0)$ étant nulle, il n'y a pas de mouvement en z : le mouvement est donc **plan**.

IV/C) 1 Trajectoire

Avec le PFD précédent :

$$\Rightarrow$$

Étant donné que $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = \text{cte} = {v_0}^2$, on a

soit, en notant $\omega_c = |q|B/m$:

On reconnaît l'équation d'un cercle en coordonnées cartésiennes :

Rappel 5.2 : Équation cartésienne d'un cercle

L'équation cartésienne d'un cercle de centre (x_0,y_0) et de rayon R est :

$$(x - x_0)^2 + (y - y_0)^2 = R^2$$

Dans notre cas, le centre est $\left(0, -\dfrac{mv_0}{qB}\right)$ et le rayon est $R_c = \dfrac{v_0}{\omega_c} = \dfrac{v_0 m}{|q|B}$

- Si $q > 0$, alors $q = |q|$ et le centre est en $\left(0, -\dfrac{v_0}{\omega_c}\right) = (0, -R_c)$;
- Si $q > 0$, alors $q = -|q|$ et le centre est en $\left(0, \dfrac{v_0}{\omega_c}\right) = (0, R_c)$;

On introduit alors le vocabulaire suivant :

Définition 5.6 : Mouvement circulaire en champ $\vec{B}$

Les constantes R_c et ω_c sont appelées **rayon cyclotron** et **pulsation cyclotron**, et sont telles que

$$R_c = \frac{v_0}{\omega_c} \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{|q|B}{m}$$

Figure 5.7 – Cas $q > 0$

Figure 5.8 – Cas $q < 0$

IV/C) 2 Équations horaires

- **Sur x :** On part de $\dot{y} = -qBx/m$ que l'on injecte dans la projection sur $\overrightarrow{u_x}$ du PFD :

On a donc la solution générale

Et avec les conditions initiales

$$\begin{aligned} x(0) = A \quad &\text{or} \quad x(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = 0 \\ \dot{x}(0) = \omega_c B \quad &\text{or} \quad \dot{x}(0) = v_0 \quad \text{donc} \quad B = \frac{v_0}{\omega_c} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow$$

- **Sur y :** On part de $\dot{x} = qBy/m + v_0$ que l'on injecte dans la projection sur $\overrightarrow{u_y}$ du PFD :

On a donc la solution générale

Et avec les conditions initiales

$$y(0) = A - \frac{mv_0}{qB} \quad \text{or} \quad y(0) = 0 \quad \text{donc} \quad A = \frac{mv_0}{qB}$$
$$\dot{y}(0) = \omega_c B \quad \text{or} \quad \dot{y}(0) = 0 \quad \text{donc} \quad B = 0$$

$$\Rightarrow$$

Important 5.7 : Particule avec $\vec{v_0} \perp \vec{B}$

Lors du mouvement d'une particule chargée dans un champ $\vec{B}$ perpendiculaire à sa vitesse initiale v_0, la particule décrit un cercle de rayon R_c, de centre $(0, \pm R_c)$ à la vitesse angulaire ω_c.

IV/D Cas général

Supposons $\vec{v_0} = v_{0,x}\,\vec{u_x} + v_{0,z}\,\vec{u_z}$. Les équations du mouvement découplent le mouvement dans le plan xy et selon z :

- Sur z on garde une vitesse constante : $v_z(t) = v_{0,z}$;
- Pour les composantes sur x et y, on a $v_x(t)^2 + v_y(t)^2 = {v_{0,x}}^2$ et les mêmes équations différentielles : le mouvement est un cercle de rayon $R = \frac{v_{0,x}}{\omega_c}$.

Ainsi, la trajectoire est la superposition d'une rotation circulaire uniforme autour de (Oz) et d'une translation le long de cet axe : c'est un **mouvement hélicoïdal**. Une animation est disponible en ligne[3].

IV/E Applications

- **Spectromètre de masse.** Un spectromètre de masse permet de **mesurer la masse d'atomes**, et éventuellement de déterminer les abondances isotopiques (utilisable par exemple pour la datation). Le principe est le suivant :

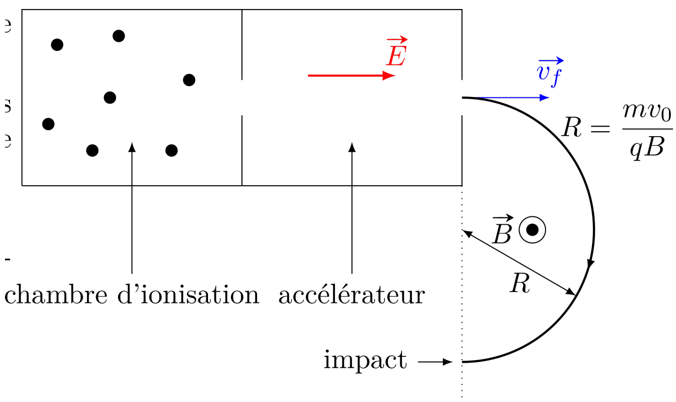

Figure 5.9 – Fonctionnement d'un spectromètre

3. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Charges/general.php

- ▹ Des atomes sont ionisés dans une chambre d'ionisation ;
- ▹ Une ouverture fait sortir un flux de particules qui son accélérées par un champ électrique, pour les amener à une vitesse $v_f = \sqrt{\dfrac{2qU}{m}}$;
- ▹ Un champ magnétique courbe ensuite leur trajectoire, avec un rayon

$$R_c = \frac{mv_f}{qB} = \sqrt{\frac{2qU}{m}}\frac{m}{qB} = \frac{1}{B}\sqrt{\frac{2U}{q}}\sqrt{m}$$

Ainsi, la donnée de la distance d'impact permet de retrouver la masse des particules !

◇ **Le cyclotron.** Il est constitué de deux demi-cylindres dans lequel règne un champ magnétique. Entre les deux demi-cylindres, deux électrodes imposent un champ électrique.

- ▹ La particule chargée est accélérée dans l'espace entre les cylindres ;
- ▹ Elle fait demi-tour grâce à un champ magnétique qui la fait revenir dans la zone entre-deux ;
- ▹ Avec un courant alternatif bien réglé, la tension accélère de nouveau la particule ;
- ▹ Le champ magnétique la fait revenir, et ainsi de suite.

À chaque demi-tour, l'énergie cinétique croît de $|qU|$. La vitesse croît donc comme la racine carré du nombre de passages dans l'espace entre les cylindres.

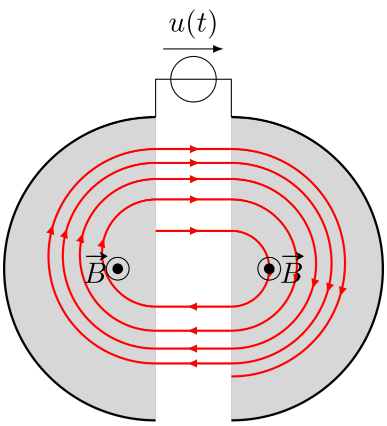

FIGURE 5.10 – Fonctionnement d'un cyclotron

Le rayon de courbure est proportionnel à la vitesse de la particule : la sélection de ce rayon permet la sélection de l'énergie cinétique voulue. Voir l'animation en ligne [4].

◇ **L'effet HALL.** On considère un fil parcouru par une intensité i vers la droite. Les électrons se déplacent en sens inverse, soit $\vec{v} = -v\,\vec{u_x}$. Si un champ magnétique est imposé selon $\vec{u_z}$, ils sont déviés selon $-\vec{u_y}$ $(q < 0)$, et s'accumulent sur une paroi du fil. Un déséquilibre de charge s'installe, créant alors un champ appelé champ de HALL.

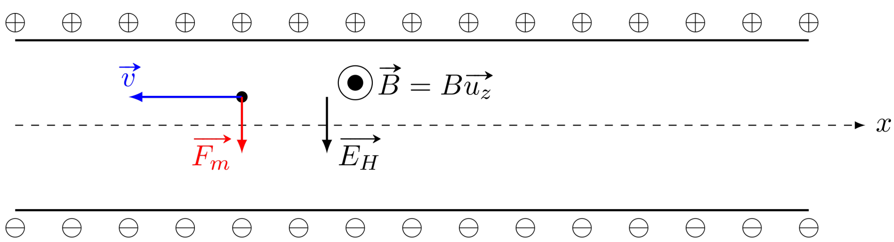

FIGURE 5.11 – Effet HALL dans un fil

4. http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Meca/Charges/cyclotron.php

En régime permanent, la force résultant de ce champ de Hall compense la force magnétique :

$$-e\overrightarrow{E}_H - evB\,\overrightarrow{u_y} = \overrightarrow{0} \quad \text{donc} \quad \overrightarrow{E}_H = -vB\,\overrightarrow{u_z}$$

On mesure la tension entre la partie supérieure du conducteur et sa partie inférieure :

$$U = V(y = D) - V(y = 0) = vBd$$

Ainsi, la mesure de U permet la mesure du champ B ! C'est le principe des teslamètres à effet Hall.