SUP MPSI 2 — 3 mars 2023.

DEVOIR SURVEILLE DE SCIENCES PHYSIQUES N°6 (3H00)

Tout moyen de communication est interdit
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les calculatrices sont autorisées.

Le devoir est composé de trois exercices et d'un problème indépendants.

EXERCICE 1 : Structure de la matière.

EXERCICE 2 : Généralités sur une molécule de monoxyde de carbone.

EXERCICE 3 : Etude d'une descente de toboggan aquatique.

PROBLEME : Particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$**.**

A l'intérieur des problèmes, certaines questions sont indépendantes.
L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.

L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.

Une attention particulière sera portée à la ***qualité de la rédaction*** *(vocabulaire, orthographe…) et* ***à la présentation de la copie*** *(numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques…).*
Et il est indispensable de ***numéroter vos copies****.*

Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.
Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.

Programme de révision de ce devoir :

Toute la mécanique du premier semestre (jusqu'à mécanique 4 compris) et toute la partie structure de la matière de SUP MPSI.

La classification périodique des éléments est fournie en annexe page 6.

EXERCICE 1 : Structure de la matière : *(≈ 32 pts)*

Les deux parties sont totalement indépendantes.

I – Etude de l'élément sodium :

Dans la classification périodique des éléments, les indications fournies à propos du sodium sont ${}^{23}_{11}Na$.

Q1. Quelle est la composition de cet atome ?
A partir de la position du sodium dans la classification périodique, expliquer comment on obtient sa configuration électronique externe (ou de valence) ? Quel est alors son schéma de Lewis ?
A quelle famille appartient-il ? Donner au moins une propriété physique ou chimique de cette famille.

Q2. Quel est l'ion monoatomique formé par le sodium ? Justifier.

II - Etude structurale de l'oxygène et l'ozone :

Le numéro atomique de l'élément oxygène est $Z = 8$.

Q3. Donner la configuration électronique de valence de l'atome d'oxygène dans son état fondamental. Quel est son schéma de Lewis ?

L'oxygène existe sous trois isotopes stables de nombres de masse respectifs 16, 17 et 18.

Q4. Rappeler la définition du terme « isotope » et préciser la composition du noyau de chacun des isotopes de l'oxygène. Justifier que les propriétés chimiques de deux isotopes sont identiques.

Q5. La masse molaire moyenne de l'oxygène est 15,9994 $g \cdot mol^{-1}$. Sachant que l'abondance de l'isotope ${}^{17}O$ est de 0,037 %, déterminer les abondances des isotopes ${}^{16}O$ et ${}^{18}O$ de l'oxygène.

Dans la suite, dans tous les schémas de Lewis demandés, la règle de l'octet est satisfaite pour tous les atomes.

Q6. Donner le schéma de Lewis de la molécule de dioxygène O_2.

L'ozone O_3 est une molécule polaire de moment dipolaire 0,533 D. Le caractère polaire de cette molécule se traduit, dans l'écriture de son modèle de Lewis, par la présence de charges positives et négatives respectivement liées à la présence de lacunes électroniques ou d'électrons non appariés sur au moins deux atomes de cette molécule.

Q7. Donner le schéma de Lewis de cette molécule si elle était cyclique. Serait-elle alors polaire ?

Q8. Proposer deux formules de Lewis équivalentes rendant compte des propriétés de la molécule d'ozone. Proposer une description de la géométrie de cette molécule. Préciser l'ordre de grandeur de l'angle. La dessiner.

Données :

Masse molaire de ${}^{16}O$	15,99491 $g \cdot mol^{-1}$
Masse molaire de ${}^{17}O$	16,99914 $g \cdot mol^{-1}$
Masse molaire de ${}^{18}O$	17,99916 $g \cdot mol^{-1}$

EXERCICE 2 : Généralités sur une molécule de monoxyde de carbone :(≈ 60 *pts*)

Le monoxyde de carbone est un gaz incolore, inodore, insipide et non irritant, indétectable par les mammifères bien que particulièrement toxique.

Chez l'être humain, il est la cause de nombreuses intoxications domestiques, parfois mortelles. Son émanation, provenant d'une combustion incomplète de composés carbonés, est accentuée par une mauvaise alimentation en air frais et/ou une mauvaise évacuation des produits de combustion

Les deux parties sont totalement indépendantes.

I – Etude structurale :

La molécule de monoxyde de carbone CO est constituée d'un atome d'oxygène ($Z = 8$) et d'un atome de carbone ($Z = 6$).

Q1 - Donner la configuration électronique de valence de l'atome de carbone dans son état fondamental, ainsi que son schéma de Lewis. Expliquer pourquoi le carbone peut être tétravalent.

Q2 - Quels sont les deux isotopes du carbone les plus répandus sur Terre ? Ecrire leur représentation symbolique.

Q3 - Proposer une structure de Lewis possible pour la molécule de monoxyde de carbone, dans laquelle la règle de l'octet est satisfaite pour les deux atomes. On fera intervenir des charges partielles si nécessaire.

Q4 - Comment évolue l'électronégativité d'un élément au sein d'une période du tableau périodique ?
La formule de Lewis proposée par vos soins est-elle alors en accord avec les électronégativités du carbone et de l'oxygène ?

Q5 - En vous basant sur la formule de Lewis de la question Q3, représenter le moment dipolaire de CO, puis donner la formule littérale du module de ce moment dipolaire : on notera d la distance entre les atomes de carbone et d'oxygène et e la valeur absolue de la charge de l'électron. On précisera son unité en chimie.

Q6 – Lors de la dissolution du monoxyde de carbone dans l'eau, déterminer, en argumentant votre réponse, la nature physico-chimique des interactions intermoléculaires entre les molécules de soluté et celles du solvant.

II - Etude mécanique :

Une molécule de monoxyde de carbone CO est modélisée par respectivement deux masses ponctuelles m_1 pour l'atome de carbone et m_2 pour l'atome d'oxygène. On supposera que l'atome de carbone est fixe dans un référentiel galiléen, et que l'atome d'oxygène ne peut subir que des déplacements rectilignes le long d'un axe (Ox) avec $x > 0$. On néglige la gravitation.

L'énergie potentielle d'interaction des deux atomes peut alors être modélisée par l'équation empirique de Morse : $E_P(x) = E_0\left[1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right]^2$ où x est la distance entre les deux noyaux et où E_0, β et x_0 des constantes positives telles que $\beta x_0 \gg 1$.

Q7 – Quelle est la dimension de β ?

Q8 – Etudier les positions d'équilibre du système et conclure quant à leur stabilité ; On montrera, en particulier, que $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} = 2E_0\beta^2$.

Q9 - Tracer l'allure du graphe $E_P(x)$ pour $x > 0$, en faisant bien apparaitre E_0 et x_0. On rappelle que $\beta x_0 \gg 1$.

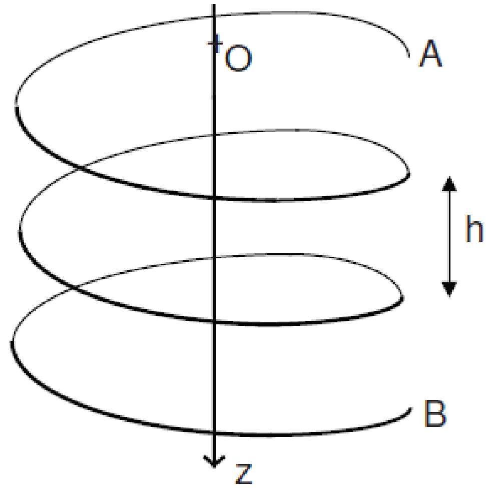
Q10 – Discuter qualitativement de la nature du mouvement selon la valeur de l'énergie mécanique. On expliquera la démarche. Que représente physiquement E_0 ?

Q11 – Déterminer l'équation différentielle du mouvement de l'atome d'oxygène, pour des oscillations **de faible amplitude autour de la position d'équilibre**. On pourra poser $X = x - x_0$. En déduire la fréquence des petites oscillations en fonction de E_0 , β et m_2 .

Q12 – Préciser le sens de la force associée à cette énergie potentielle en fonction de la valeur de x. On traitera deux cas.

EXERCICE 3 : Etude d'une descente de toboggan aquatique : *(≈ **35** pts)*

Nous sommes en été et un enfant dévale un toboggan aquatique
Cette partie s'intéresse à l'étude de ce mouvement.



Le toboggan est représenté sur la figure ci-contre :

Pour l'étude du mouvement, on propose le modèle suivant :
- L'enfant de masse m = 50 kg est assimilé à un point matériel M.
- Le toboggan, de forme hélicoïdale, débute en A et se termine en B après 3 tours exactement ; il s'enroule sur un cylindre vertical de rayon R = 5 m.
- **On néglige tout frottement**.
- A chaque tour complet, l'enfant descend d'une hauteur h.

Le point M, initialement immobile en A, est repéré par ses coordonnées cylindriques (r ; θ ; z), z étant la cote du point M sur l'axe de symétrie de la trajectoire, choisi **vertical descendant**.
L'origine O de l'axe Oz est choisie à l'intersection de cet axe et du plan horizontal passant par A.
On donne l'accélération de la pesanteur g = 10 m.s^{-2}.
On note $(\overrightarrow{u_r} ; \overrightarrow{u_\theta} ; \overrightarrow{u_z})$ la base locale orthonormée directe associée au système des coordonnées cylindriques.

Q1. Les équations de la trajectoire sont données par les relations : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma\ \theta$ où γ est une constante positive. Exprimer h en fonction de γ.

Q2. Exprimer le vecteur position et le vecteur vitesse du point M en fonction de R ; γ et θ et de la dérivée temporelle $\dot{\theta}$ si besoin et des vecteurs de la base cylindrique nécessaires.

Q3. Montrer que l'énergie mécanique de l'enfant peut se mettre sous la forme : $E_m = \frac{1}{2}\ A\ \dot{z}^2 - B\ z + cste$, où A et B sont des constantes à expliciter en fonction de m, g , γ et R.

Q4. Déterminer la vitesse v_S de l'enfant en sortie de toboggan en fonction de g et h.

Q5. Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $z(t)$ et en déduire la durée τ de la descente en fonction de A, B et h.

Q6. Si on prend en compte une force de frottement de norme constante F tangente au toboggan, exprimer l'énergie perdue par l'enfant au cours de la descente, en fonction de F, R et γ.

PROBLEME : Particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$: *(≈ 77 pts)*

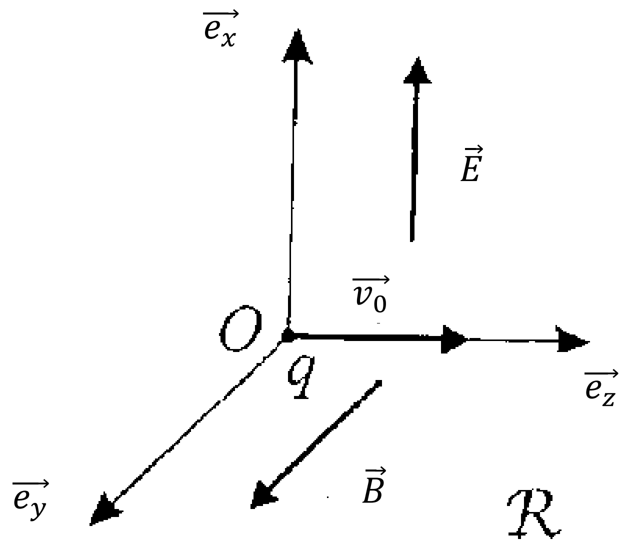
Les questions Q1, Q2 et Q3 sont largement indépendantes.

Un électron de charge q = - 1,6.10 $^{-19}$ C et de masse m = 9,1.10 $^{-31}$ kg, assimilé à un point matériel M, évolue dans le référentiel $\mathfrak{R}$ du laboratoire supposé galiléen et muni d'un repère cartésien : $(O;\ \vec{e}_x\ ;\ \vec{e}_y\ ;\ \vec{e}_z)$, sous l'action d'un champ électrique $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$ et magnétique $\vec{B} = B\,\vec{e}_y$, tous deux uniformes et stationnaires.

On désigne par x, y et z les coordonnées cartésiennes de M dans la base cartésienne et par $\vec{v_0} = V_0\,\vec{e}_z$ la vitesse initiale de M telle que $V_0 =$ 500 km.s $^{-1}$ (cf figure ci-contre).

A t = 0, la particule est en O.

On place en $z_0 =$ 10 cm un écran d'observation parallèle au plan $(O;\ \vec{e}_x\ ;\ \vec{e}_y)$ destiné à intercepter M.



Q1. Dans le cas particulier où $B = 0$, et $E = 10$ V.m^{-1}, déterminer l'abscisse x_e de M sur l'écran en fonction de q, E, m, z_0 et V_0, puis la calculer (en cm).

Q2. Dans le cas particulier où $E = 0$, et $B = 10^{-5}$ T,

2.a - Montrer que la vitesse de la particule reste constante et égale à V_0.

2.b - On pose $\omega = \frac{qB}{m}$. Ecrire les équations différentielles en x, y et z . Dans quel plan a lieu le mouvement ? Justifier.

2.c – Résoudre les équations couplées par la méthode intégration / substitution.

2.d - Cette trajectoire est un cercle de centre C et de rayon R_0. Exprimer R_0 et les coordonnées du centre C en fonction de V_0 et ω, puis calculer R_0.

2.e - Faire un schéma de la trajectoire dans le plan $(O\,, x, z\,)$ et positionner l'écran. En déduire l'expression de l'abscisse x_m de M sur l'écran, en fonction de R_0 et z_0, puis la calculer.

Q3. On suppose que $E = 1$ kV.m^{-1}. A quelle condition sur B, le mouvement de M est-il rectiligne et uniforme ? On exprimera B en fonction de E et V_0 , puis on le calculera.

Q4. On suppose E et B non nuls et on pose encore $\omega = \frac{qB}{m}$.

4.a - Montrer que l'équation différentielle d'évolution de l'abscisse x de M peut s'écrire sous la forme $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$ où a est une constante que l'on exprimera en fonction de q, E, m, B et V_0.

4.b - On se place dans le cas particulier où $B = \frac{2E}{V_0}$. Exprimer alors $x(t)$ en fonction de E, B et ω.

Annexe : Classification périodique des éléments :

	1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	11	12	13	14	15	16	17	18
1	1 H																	2 He
2	3 Li	4 Be											5 B	6 C	7 N	8 O	9 F	10 Ne
3	11 Na	12 Mg											13 Al	14 Si	15 P	16 S	17 Cl	18 Ar
4	19 K	20 Ca	21 Sc	22 Ti	23 V	24 Cr	25 Mn	26 Fe	27 Co	28 Ni	29 Cu	30 Zn	31 Ga	32 Ge	33 As	34 Se	35 Br	36 Kr
5	37 Rb	38 Sr	39 Y	40 Zr	41 Nb	42 Mo	43 Tc	44 Ru	45 Rh	46 Pd	47 Ag	48 Cd	49 In	50 Sn	51 Sb	52 Te	53 I	54 Xe
6	55 Cs	56 Ba	57 La	72 Hf	73 Ta	74 W	75 Re	76 Os	77 Ir	78 Pt	79 Au	80 Hg	81 Tl	82 Pb	83 Bi	84 Po	85 At	86 Rn
7	87 Fr	88 Ra	89 Ac	104 Rf	105 Db	106 Sg	107 Bh	108 Hs	109 Mt									

Lanthanides 6	58 Ce	59 Pr	60 Nd	61 Pm	62 Sm	63 Eu	64 Gd	65 Tb	66 Dy	67 Ho	68 Er	69 Tm	70 Yb	71 Lu
Actinides 7	90 Th	91 Pa	92 U	93 Np	94 Pu	95 Am	96 Cm	97 Bk	98 Cf	99 Es	100 Fm	101 Md	102 No	103 Lr

SUP MPSI 2 CORRIGE du DS 6 du 3 mars 2023.

EXERCICE 1 : Structure de la matière : *(≈ 32 pts)*

I – Etude de l'élément sodium : *(D'après Centrale Supelec TSI 2022)* *(≈ 10 pts)*

Q1. ${}^{23}_{11}Na$ comprend **11 protons** et donc **11 électrons**, ainsi que $23 - 11 =$ **12 neutrons**.

- Na appartient à la **3e période** du tableau périodique, il aura donc un configuration de valence en 3..
Et il se trouve dans la **1ère colonne ou 1er groupe** du tableau, donc c'est un 1er **élément du bloc s.**
Sa configuration externe (ou de valence) est donc Na : $\boxed{\mathbf{3s^1}}$.
D'où son schéma de Lewis : 

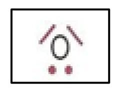
- Le sodium fait donc partie de la famille **des alcalins**.
Ces métaux sont **extrêmement réducteurs**, **très réactifs avec l'eau** et forment en réagissant avec celle-ci des solutions basiques.

Q2. Le sodium va avoir tendance à **perdre l'électron célibataire de la 3ème couche** pour atteindre la **configuration électronique du gaz rare qui le précède** (le néon) en formant **Na^+**.

II - Etude structurale de l'oxygène et l'ozone : *(D'après Centrale Supelec PSI 2022)* *(≈ 22 pts)*

Q3. L'oxygène est situé dans la 2ème période et est le 4ème élément du bloc p (ou dans la 16e colonne).
Sa configuration électronique externe dans son état fondamental s'écrit donc :

$$\boxed{\underbrace{\mathbf{2s^2 2p^4}}_{\text{électrons de valence}}}$$

L'atome d'oxygène possède donc **6 électrons de valence**. Son schéma de Lewis est : 

Q4. Les isotopes d'un élément chimique donné possèdent **le même nombre de protons** (et d'électrons, bien sûr) mais **diffèrent par leur nombre de neutrons**.

Le noyau des isotopes de l'oxygène contient :

$$\begin{cases} {}^{16}O : 8 \text{ protons et } \mathbf{8\ neutrons} \\ {}^{17}O : 8 \text{ protons et } \mathbf{9\ neutrons} \\ {}^{18}O : 8 \text{ protons et } \mathbf{10\ neutrons} \end{cases}$$

Ce sont les électrons de valence, seuls, qui déterminent les propriétés chimiques d'un atome.
Ces **trois isotopes ont 6 électrons de valence** : ils ont donc les **mêmes propriétés chimiques.**

Q5. On note $\overline{M}$ la masse molaire moyenne de l'oxygène et M_{16}, M_{17} et M_{18} les masses molaires respectives des isotopes ${}^{16}O$, ${}^{17}O$ et ${}^{18}O$. On peut écrire, en introduisant les fractions massiques x_{16}, x_{17} et x_{18} :

$$\begin{cases} \boldsymbol{\overline{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18}} \\ \boldsymbol{x_{16} + x_{17} + x_{18} = 1} \end{cases}$$

Soit : $\begin{cases} \overline{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + x_{18}M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$ ou encore : $\begin{cases} \overline{M} = x_{16}M_{16} + x_{17}M_{17} + (1 - x_{16} - x_{17})M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$

D'où : $\begin{cases} x_{16}M_{16} - x_{16}M_{18} = \overline{M} - x_{17}M_{17} - M_{18} + x_{17}M_{18} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}$

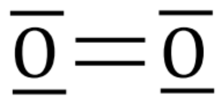
On en déduit :

$$\boxed{\begin{cases} x_{16} = \dfrac{M_{18} + x_{17}(M_{17} - M_{18}) - \overline{M}}{M_{18} - M_{16}} \\ x_{18} = 1 - x_{16} - x_{17} \end{cases}}$$

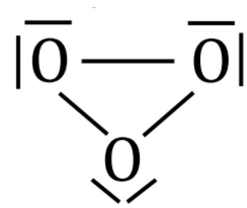
Comme on connaît $x_{17} = 0{,}037$ %, d'où : $\begin{cases} x_{16} = \frac{17{,}99916 + 0{,}00037(+16{,}99914 - 17{,}99916) - 15{,}9994}{17{,}99916 - 15{,}99491} \\ x_{18} = 1 - 0{,}99758 - 0{,}00037 \end{cases}$

On obtient : <u>$\boldsymbol{x_{16} = 0{,}99758 = 99{,}758}$ **%** **et** $\boldsymbol{x_{18} = 0{,}00205 = 0{,}205}$ **%**</u> .

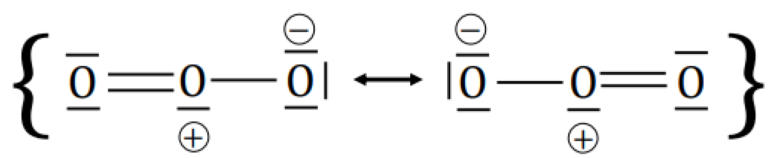
Q6. Schéma de Lewis du dioxygène :



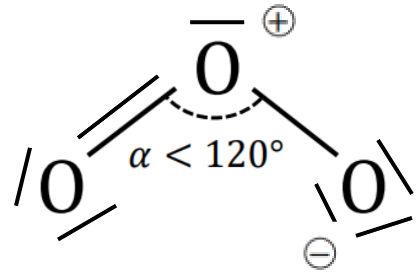
Q7. Si la molécule d'ozone était cyclique, elle présenterait un centre de symétrie et ne serait donc **<u>pas polaire</u>**. De plus, aucun excès et aucun défaut de charge n'apparaît, ce qui confirmerait son caractère apolaire.



Q8. Les deux formes mésomères de la molécule d'ozone sont les suivantes :



La molécule est donc du **<u>type AX_2E_1</u>** (deux liaisons assimilées à des liaisons simples et un doublet non-liant sur l'atome central). La méthode VSEPR donne donc une **<u>molécule coudée</u>**, avec un **<u>angle d'environ 120°.</u>**



EXERCICE 2 : Généralités sur une molécule de monoxyde de carbone :

(≈ 60 *pts*)

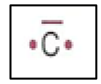
I – Etude structurale :

(D'après Banque PT 2013)

Q1 – Le carbone est situé dans la 2ème période et est le 2ème élément du bloc p (ou dans la 14e colonne).
Sa configuration électronique externe dans son état fondamental s'écrit donc :

$$\boxed{\underbrace{2s^2 2p^2}_{\text{électrons de valence}}}$$

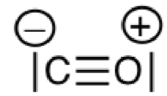
L'atome d'oxygène possède donc **4 électrons de valence**. Son schéma de Lewis est



- Pour obtenir un carbone tétravalent, il faut imaginer un $\boxed{\textbf{réarrangement en } \mathbf{2s^1\ 2p^3}}$.

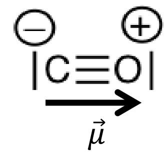
Q2 - On trouve le carbone 12 ; 13 et 14 : $\boxed{{}^{12}_{6}\boldsymbol{C}\ ;\ {}^{13}_{6}\boldsymbol{C}\ \textbf{et}\ {}^{14}_{6}\boldsymbol{C}}$.

Q3 – Représentation possible de Lewis pour la molécule de monoxyde de carbone :



Q4 - **L'électronégativité augmente de la gauche vers la droite** sur une ligne. Donc $\boxed{\boldsymbol{\chi(C) < \chi(O)}.}$
La charge partielle devrait donc **être négative sur l'oxygène et positive** sur le carbone, ce qui **n'est pas en accord** avec les électronégativités des éléments.

Q5 - Le moment dipolaire, orienté du pôle négatif vers le pôle positif, est représenté de la façon ci-contre en tenant compte de la structure de Lewis de Q3.



L'expression littérale du module du moment dipolaire $\vec{\mu}$ est donnée par **:** $\boxed{\|\vec{\boldsymbol{\mu}}\| = \mathbf{e\ d}}$;
Son unité est le **Debye (D).**

Q6 – Les molécules de monoxyde de carbone et d'eau H_2O sont **polaires**.
Les **trois types d'interactions de van der Walls (Keesom, Debye et London**) sont donc présentes.
Cependant, les interactions intermoléculaires les plus importantes sont des **liaisons hydrogènes** entre les hydrogènes de H_2O et le doublet non liant des oxygènes de CO.

II - Etude mécanique :

Q7 - βx doit être sans dimension ; Donc β est homogène à l'inverse d'une longueur ; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\beta}\ \textbf{en m}^{-1}}$.

Q8 – On nous donne : $E_P(x) = E_0\left[1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right]^2$;

- Les positions d'équilibre sont telles que : $\boldsymbol{\frac{dE_P}{dx} = 0}$.

$\frac{dE_P}{dx} = 2E_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)\left(+\beta\, e^{-\beta(x-x_0)}\right)$, car de la forme : $(u^2)' = 2\,u\,u'$
avec $u = 1 - e^{-\beta(x-x_0)}$ et $u' = \beta\, e^{-\beta(x-x_0)}$

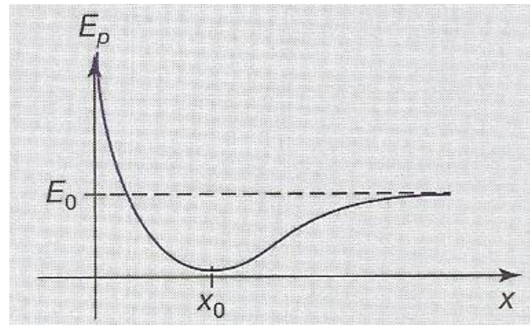
Ainsi : $\frac{dE_P}{dx} = 0$ pour $x - x_0 = 0$; la seconde parenthèse ne s'annulant jamais.
Ainsi $\boxed{\boldsymbol{x = x_0}\ \textbf{est position d'équilibre}}$.

- Pour étudier les stabilités, on étudie le signe de $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0}$.

Or $\frac{d^2E_P}{dx^2} = 2E_0\,\beta\, e^{-\beta(x-x_0)}\beta\, e^{-\beta(x-x_0)} + 2E_0\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)\left(-\beta^2 e^{-\beta(x-x_0)}\right)$, car de la forme : $(uv)'$
Ou encore : $\frac{d^2E_P}{dx^2} = 2E_0\beta^2 e^{-2\beta(x-x_0)} - 2E_0\beta^2\left(1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right)e^{-\beta(x-x_0)}$;
Ainsi en évaluant cette expression en $x = x_0$:

$\boxed{\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} = \boldsymbol{2E_0\beta^2 > 0}}$. Donc $\boldsymbol{x = x_0}$ **est position d'équilibre stable.**

Q9 - $E_P(x) = E_0\left[1 - e^{-\beta(x-x_0)}\right]^2$:



- $\boxed{\lim_{x\to 0} \boldsymbol{E_P}\ (\boldsymbol{x}) \sim \boldsymbol{E_0}\ \boldsymbol{e^{2\beta x_0}}\ \rightarrow +\infty}$, car $\beta x_0 \gg 1$.

Donc **asymptote verticale d'équation** $\boldsymbol{x} = 0$.

- $\boxed{\lim_{x\to \infty} \boldsymbol{E_P}\ (\boldsymbol{x}) = \boldsymbol{E_0}}$.

Donc asymptote horizontale d'équation $y = E_0$.

- Coordonnées de l'extrémum (minimum) :

On a vu que : $\frac{dE_P}{dx} = 0$ pour $\underline{\boldsymbol{x = x_0}}$ **alors** $\underline{\boldsymbol{E_P(x_0) = 0}}$;

- D'où l'allure de la courbe ci-contre.

Q10 – $E_m = E_C + E_P$ avec $E_C \geq 0$; Donc : **$\underline{E_m \geq E_P}$ <u>à chaque instant.</u>**

- **Si $E_m \geq E_0$** : Domaine de variation de x non borné : L'atome d'oxygène arrive de l'infini se rapproche et repart. On parle **<u>d'état de diffusion</u>** : Mais ce cas correspondrait à une rupture de la liaison C-O.
- **Si 0 < E_m < E_0** : Domaine de variation de x borné : L'atome d'oxygène oscille entre deux positions extrêmes. On parle **<u>d'état lié</u>**.
- **E_0** représente donc l'énergie qu'il faut fournir à la molécule pour que les atomes puissent s'éloigner à l'infini, c'est donc **<u>l'énergie de dissociation de la molécule</u>.**

Q11 – Pour étudier le mouvement autour de la position d'équilibre, il faut faire un **<u>développement de Taylor de l'énergie potentielle autour de x_0</u>** : $\boldsymbol{E_P(x) \approx E_P(x_0) + (x - x_0)\underbrace{\left(\frac{dE_P}{dx}\right)_{x_0}}_{=0\ \text{(équilibre)}} + \frac{1}{2}(x - x_0)^2\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0}}$

Or $E_P(x_0) = 0$ et $\left(\frac{d^2E_P}{dx^2}\right)_{x_0} = 2E_0\beta^2$; Donc : $E_P(x) \approx \frac{1}{2}\ 2E_0\beta^2(x - x_0)^2$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{E_P(x) \approx E_0\beta^2(x - x_0)^2}}$;

- De plus : $E_C(\dot{x}) = \frac{1}{2}\ m_2\dot{x}^2$;
- D'où : $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}\ m_2\dot{x}^2 + E_0\beta^2(x - x_0)^2}}$;
- Le système est **<u>conservatif</u>** car aucune force dissipative n'est mentionnée par l'énoncé, donc d'après le **<u>théorème de la puissance mécanique</u>**,

E_m = cste ou encore $\boxed{\boldsymbol{\frac{dE_m}{dt} = 0}}$.

Or $\frac{dE_m}{dt} = m_2\dot{x}\ddot{x} + 2E_0\beta^2(x - x_0)\dot{x} = 0$; Posons X = $x - x_0$ alors $\dot{X} = \dot{x}$ et $\ddot{X} = \ddot{x}$.

L'équation précédente devient donc $\boxed{: \boldsymbol{m_2\ddot{X} + 2E_0\beta^2X = 0}}$, car $\dot{X} \neq 0$, puisqu'il y a mvt (non tjs nul).

De la forme : $\ddot{X} + \omega_0^2X = 0$ avec $\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{2E_0\beta^2}{m_2}}}}$: **<u>pulsation propre du mouvement</u>** de l'atome d'oxygène ;

Et $\boxed{\boldsymbol{f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{2E_0\beta^2}{m_2}}}}$: **<u>fréquence des petites oscillations autour de la position d'équilibre x_0.</u>**

Q12 – On sait que $\boxed{\boldsymbol{\vec{F} = -\overrightarrow{grad}(E_P) = -\frac{dE_P}{dx}\ \overrightarrow{u_x}}}$ car comme le système est unidirectionnel, $\frac{\partial E_P}{\partial x} = \frac{dE_P}{dx}$.

Donc : $\boldsymbol{F_x = -\frac{dE_P}{dx}}$; On trouve ainsi le signe de F_x à partir du signe de la dérivée de EP. D'après le graphe :

- **<u>Si $x < x_0$</u>** , alors $\frac{dE_P}{dx} < 0$ et **<u>$F_x > 0$</u>** : Force dans le même sens que l'axe *Ox* qui a tendance à ramener l'atome d'oxygène dans sa position d'équilibre.
- **<u>Si $x > x_0$</u>** , alors $\frac{dE_P}{dx} > 0$ et **<u>$F_x < 0$</u>** : Force dans le sens contraire à l'axe *Ox* qui a tendance à ramener l'atome d'oxygène dans sa position d'équilibre.

EXERCICE 3 : Etude d'une descente de toboggan aquatique :

(D'après banque PT 2022) *(≈ **35** pts)*

Q1. On nous donne : $r(\theta) = R$ et $z(\theta) = \gamma\,\theta$ et h corresopnd à la **variation d'altitude lors d'un tour**, donc pour $\theta = 2\pi$; Ainsi, $\boxed{\boldsymbol{h = 2\pi\,\gamma}}$.

Q2. $\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{Om} + \overrightarrow{mM} = R\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_z}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\overrightarrow{OM} = R\,\overrightarrow{u_r} + \gamma\,\theta\,\overrightarrow{u_z}}}$.

Alors $\vec{v} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = R\,\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \gamma\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\vec{v} = R\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \gamma\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}}$.

Q3. Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cylindrique : fournie.
Système : L'enfant de masse m.
Forces et énergies potentielles : **Poids** : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\overrightarrow{u_z}$ et $\boldsymbol{E_{pP} = -mgz + cste}$**,** car *Oz* est un axe descedt.
Réaction du support : $\vec{R} \perp support$, donc elle ne travaille pas et $\boldsymbol{E_{pR} = cste}$

Alors, $\boldsymbol{E_m = E_c + E_{p\,tot} = \frac{1}{2}m\,v^2 + E_{pP} + cste = \frac{1}{2}m\,v^2 - mgz + cste.}$

Or, d'après Q2, $\boldsymbol{v^2 = \dot{\theta}^2(R^2 + \gamma^2)}$ et on garde z dans E_{pP}.

D'où : $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\dot{\theta}^2(R^2 + \gamma^2) - mg\,z + cste}$

Mais, on ne veut garder que z et $\dot{z}$ dans l'expression de E_m. Il faut donc supprimer $\dot{\theta}$: $\dot{\theta} = \frac{\dot{z}}{\gamma}$.

Alors $\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\,\frac{\dot{z}^2}{\gamma^2}(R^2 + \gamma^2) - mg\,z + cste}$ **;** Ainsi, $\boxed{\boldsymbol{E_m = \frac{1}{2}m\,\dot{z}^2\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right) - mgz + cste}}$.

De la forme : $E_m = \frac{1}{2}\,A\,\dot{z}^2 - B\,z + cste$ avec $\boxed{\boldsymbol{A = m\left(\frac{R^2}{\gamma^2} + 1\right)\ \text{et}\ B = mg}}$ **.**

Q4. L'enfant partant de l'altitude $z = 0$ avec une vitesse nulle, son énergie mécanique est nulle.
Les frottements étant négligés, celle-ci se conserve : Le **système est conservatif :** $\boldsymbol{E_m = cste}$**.**

En sortie de toboggan ($z = 3h$), on a donc $\boldsymbol{E_m = 0} = \frac{1}{2}m\,v_S^2 - mg3h$

On en déduit $v_S^2 = 6gh$ et $\boxed{\boldsymbol{v_S = \sqrt{6gh}}}$.

Q5. On cherche l'équation différentielle du mouvement, à partir de l'énergie mécanique :

Le **système est conservatif**, d'après le théorème de la puissance mécanique, $\boldsymbol{\frac{d\,E_m}{dt} = 0.}$

Avec $E_m = \frac{1}{2}\,A\,\dot{z}^2 - B\,z$; Il vient : $\frac{d\,E_m}{dt} = A\dot{z}\,\ddot{z} - B\,\dot{z} = 0$; Soit : $\dot{z}\,(A\,\ddot{z} - B) = 0$

Or $\dot{z} \neq 0$ à chaque instant car il y a mouvement, ainsi : $\boxed{\boldsymbol{\ddot{z} = \frac{B}{A} = cste}\ \textbf{.}}$

En prenant une primitive, il vient : $\dot{z} = \frac{B}{A}\,t + cste1$.

CI, A $t = 0$, l'anneau est lâché sans vitesse initiale, donc $\dot{z}(0) = 0 = cste1$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\dot{z} = \frac{B}{A}\,t}}$.

Nouvelle primitive : $z(t) = \frac{1}{2}\frac{B}{A}\,t^2 + cste2$. CI, A $t = 0$, $z(0) = 0 = cste2$. Soit : $\boxed{\boldsymbol{z(t) = \frac{1}{2}\frac{B}{A}\,t^2}}$.

Enfin, le temps de chute τ est tel que $\boldsymbol{z(\tau) = 3h}$ (arrivée au sol).

Ainsi, il vient : $\frac{1}{2}\frac{B}{A}\,\tau^2 = 3h$; Soit : $\tau^2 = \frac{6hA}{B}$; D'où $\boxed{\boldsymbol{\tau = \sqrt{\frac{6hA}{B}}}}$.

Q6. S'il y a une force de frottement, le système n'est plus conservatif et la force de frottement est tangente au toboggan. Le théorème de la puissance cinétique conduit à : $\boldsymbol{\frac{d\,E_m}{dt} = P_{nc} = \vec{F}.\vec{v} = -\|\vec{F}\|\|\vec{v}\| = -F\,\dot{z}\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}}$

L'énergie perdue par l'enfant correspond à la valeur absolue du travail de la force de frottement.

Or $|W_F| = \int_{t=0}^{t=\tau}|P_{nc}|\,dt = F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}\int_{t=0}^{t=\tau}\frac{dz}{dt}\,dt = F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}\int_{z=0}^{z=3h}dz$.

D'où : $|W_F| = 3h\,F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}$, Il faut supprimer h ; D'après Q1, $h = 2\pi\,\gamma$. Soit : $\boxed{\boldsymbol{|W_F| = 6\pi\gamma\,F\sqrt{\frac{R^2}{\gamma^2} + 1}}.}$

PROBLEME : Particule dans des champs $\vec{E}$ et $\vec{B}$: *(D'après ENAC)* *(≈ 77 pts)*

Q1. Cas où $B = 0$, et $E = 10$ V.m^{-1} et $\vec{E} = E\,\vec{e}_x$.

Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cartésienne : fournie.
Système : Particule de masse m.
Force : Poids négligeable.
Force de Lorentz électrique : $\vec{F} = q\vec{E} = q\,E\,\vec{e}_x$.
PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{F} = q\vec{E} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.
Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$\begin{cases} m\ddot{x} = qE \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = 0 \end{cases} \quad \text{ou encore} \quad \begin{cases} \boldsymbol{\ddot{x} = \frac{qE}{m}} \\ \boldsymbol{\ddot{y} = 0} \\ \boldsymbol{\ddot{z} = 0} \end{cases}$$

Prenons une primitive, il vient : $\begin{cases} \dot{x} = \frac{qE}{m}t + cste\ 1 \\ \dot{y} = cste\ 2 \\ \dot{z} = cste\ 3 \end{cases}$

CI, A t = 0, $\overrightarrow{v_0} = V_0\,\vec{e}_z$; D'où $cste\ 1 = cste\ 2 = 0$ et $cste\ 3 = V_0$

D'où $\begin{cases} \boldsymbol{\dot{x} = \frac{qE}{m}t} \\ \boldsymbol{\dot{y} = 0} \\ \boldsymbol{\dot{z} = V_0} \end{cases}$ Et nouvelle primitive : $\begin{cases} x = \frac{qE}{2m}t^2 + cste\ 4 \\ y = cste\ 5 \\ z = V_0 t + cste\ 6 \end{cases}$

D'après le CI, la particule est en O, donc les 3 nouvelles constantes sont nulles. Donc $\boxed{\begin{cases} \boldsymbol{x = \frac{qE}{2m}t^2} & (1) \\ \boldsymbol{y = 0} & (2) \\ \boldsymbol{z = V_0 t} & (3) \end{cases}}$

;

Il nous faut l'équation de la trajectoire et non les équations horaires.

D'après l'équation (3), $t = \frac{z}{V_0}$; On remplace dans (1), il vient : $\boldsymbol{x = \frac{qE}{2m}\left(\frac{z}{V_0}\right)^2}$

L'écran est en $z_0 = 10$ cm, Soit $\boxed{\boldsymbol{x_e = \frac{qE\,z_0^2}{2m\,V_0^2}}}$. AN : $x_e = \frac{-1{,}6.10^{-19}\times 10\times 0{,}1^2}{2\times 9{,}1.10^{-31}\times(500.10^3)^2}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{x_e \approx -3{,}5\ \text{cm}}}$.

Q2. Cas où $E = 0$, et $B = 10^{-5}$ T et $\vec{B} = B\,\vec{e}_y$.

2.a - Pour montrer que le mouvement est uniforme on calcule la puissance de la force magnétique :

$\overrightarrow{F_m} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$

$P = \overrightarrow{F_m}.\vec{v} = q(\vec{v}\wedge\vec{B}).\vec{v} = \underbrace{q(\vec{v}\wedge\vec{B})}_{\perp\vec{v}}.\vec{v}$; Donc $\boxed{\boldsymbol{P = 0}}$

Or $P = \frac{dE_C}{dt}$; Donc : $E_c = cste = \frac{1}{2}m\,v^2$; Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{\|\vec{v}\| = cste = V_0}}$.

Le champ magnétique dévie les particules mais ne modifie pas la norme de leur vitesse.

2.b - Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cartésienne : fournie
Système : Particule de masse m.
Force : Poids négligeable.
Force de Lorentz magnétique : $\overrightarrow{F_m} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B}$
PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{F} = q\,\vec{v}\wedge\vec{B} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ B\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}\wedge\begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix}.$$

Avec $\omega = \frac{qB}{m}$, il vient : Il vient : $\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix}$; Ou encore : $\boxed{\begin{cases}\boldsymbol{\ddot{x} = -\omega\,\dot{z}} & \mathbf{(1')}\\ \boldsymbol{\ddot{y} = 0} & \mathbf{(2')}\\ \boldsymbol{\ddot{z} = \omega\,\dot{x}} & \mathbf{(3')}\end{cases}}$

Il faut montrer que le mouvement est plan :

En exploitant (2'), il vient : $\ddot{y} = 0$ Soit $\dot{y} = v_y = cste = v_y(0) = 0$.

Soit $y = cste = y(0) = 0$.

<u>Conclusion</u> : La **<u>trajectoire de la particule est plane, dans le plan (O, x, z), plan $\perp \vec{B}$.</u>**

2.c – Résolution des équations couplées, parla méthode intégration/substitution. On a $\overrightarrow{v_0} = V_0\,\vec{e}_z$.

On reprend les deux équations différentielles couplées (1') et (3'):

$$\begin{cases}\ddot{x} = -\omega\,\dot{z} & (1')\\ \ddot{z} = \omega\,\dot{x} & (3')\end{cases}$$

On prend une primitive de (1') : $\dot{x} = -\omega\,z + cste$

CI : A t = 0, $z(0) = 0$ et $\dot{x}(0) = 0 = cste$.

D'où : $\boldsymbol{\dot{x} = -\omega\,z}$ (4) ;

En remplaçant (4) dans (3'), il vient :

$\ddot{z} = \omega\,(-\omega z)$ Soit : $\boldsymbol{\ddot{z} + \omega^2 z = 0}$: Equation différentielle du second ordre sans terme en $\dot{z}$ et avec second membre nul.

Les solutions sont de la forme : $\boldsymbol{z(t) = A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)}$.

CI : A t = 0, $z(0) = 0 = A$ Donc : $\boldsymbol{A = 0}$;

On dérive : $\dot{z}(t) = B\omega\cos(\omega t)$

CI : A t = 0, $\dot{z}(0) = V_0 = B\,\omega$ Donc : $\boldsymbol{B = \frac{V_0}{\omega}}$.

Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{z(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)}}$.

Même méthode pour trouver $x(t)$: On prend une primitive de (3'), puis on remplace (1').

Ou bien on reprend (4) : $\dot{x} = -\omega z$ et on remplace $z(t)$ par son expression :

$\dot{x} = -\,\omega\,\frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t) = -V_0\,\sin(\omega t)$

Ainsi : $\dot{x} = -V_0\,\sin(\omega t)$.

On prend une primitive : $x(t) = \frac{V_0}{\omega}\cos(\omega t) + cste$;

CI : A t = 0, $x(0) = 0 = cste + \frac{V_0}{\omega}$; Soit : $cste = -\frac{V_0}{\omega}$; D'où : $\boxed{x(t) = \frac{V_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)}$;

Ainsi : $\begin{cases}\boldsymbol{x(t) = \frac{V_0}{\omega}(\cos(\omega t) - 1)}\\ \boldsymbol{z(t) = \frac{V_0}{\omega}\sin(\omega t)}\end{cases}$.

2.d – D'après les équations précédentes, $\cos(\omega t) = \frac{\omega}{V_0}x + 1$ et $\sin(\omega t) = \frac{\omega}{V_0}\,z$

Comme $cos^2(\omega t) + sin^2(\omega t) = 1$, il vient : $\left(\frac{\omega}{V_0}\,x + 1\right)^2 + \left(\frac{\omega}{V_0}\,z\right)^2 = 1$

Ou encore en multipliant de chaque côté par $\frac{V_0}{\omega}$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\left(x + \frac{V_0}{\omega}\right)^2 + z^2 = \left(\frac{V_0}{\omega}\right)^2}}$.

La trajectoire est donc un **<u>cercle de centre $C\left(-\frac{V_0}{\omega} > 0; 0; 0\right)$ et de rayon $R_0 = \left|\frac{V_0}{\omega}\right| = -\frac{V_0}{\omega}$</u>** ;

Mais $\omega < 0$, car $q < 0$.

On a donc : $\boxed{\boldsymbol{R_0 = \frac{V_0\,m}{|q|\,B}}}$; <u>AN</u> : $R_0 = \frac{500.10^3 \times 9{,}1.10^{-31}}{1{,}6.10^{-19} \times 10^{-5}}$; On obtient : **<u>$R_0 \approx 28$ cm</u>**.

2.e – Le dessin n'est pas à l'échelle.

Sur l'écran, $x = x_m$ et $z = z_0$ et $R_0 = \left|\frac{V_0}{\omega}\right| = -\frac{V_0}{\omega}$

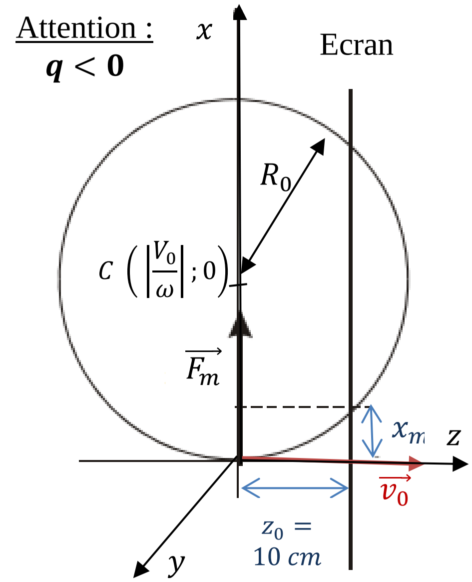
Il vient : $(x_m - R_0)^2 + {z_0}^2 = {R_0}^2$

Soit : $(x_m - R_0)^2 = {R_0}^2 - {z_0}^2$

D'où : $x_m - R_0 = \pm\sqrt{{R_0}^2 - {z_0}^2}$; Et $\boxed{\boldsymbol{x_m = R_0 \pm \sqrt{{R_0}^2 - {z_0}^2}}}$.

AN : $\boldsymbol{x_{m1} \approx 54}$ **cm et** $\boldsymbol{x_{m2} \approx 1,8}$ **cm.**

Mais il faut que $\boldsymbol{x_m < R_0}$; Donc $\underline{\boldsymbol{x_m \approx 1,8}\ \textbf{cm}}$.



Q3. On nous donne $E = 1$ kV.m^{-1}.

Le mouvement est rectiligne et uniforme si la **particule est pseudo-isolée**, donc si les **forces de Lorentz électrique et magnétique se compensent** (alors $\overrightarrow{acc} = \vec{0}$). Soit $qE = q\, V_0\, B \sin\left(\frac{\pi}{2}\right)$;

Ou encore : $\boxed{\boldsymbol{B = \frac{E}{V_0}}}$. AN : $B = \frac{10^3}{500.10^3}$. On obtient $\underline{\boldsymbol{B = 2.10^{-3}}\ \textbf{T = 2 mT.}}$

Q4. Cas où E et B sont non nuls.

4.a - Il faut reprendre les équations vues en Q2b, en ajoutant la force électrique de Lorentz : $\vec{F} = q\vec{E} = q\, E\, \vec{e}_x$.

Forces : Poids négligeable.

Force de Lorentz magnétique : $\overrightarrow{F_m} = q\, \vec{v} \wedge \vec{B}$

Force de Lorentz électrique : $\vec{F} = q\vec{E} = q\, E\, \vec{e}_x$

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $q\, \vec{v} \wedge \vec{B} + q\vec{E} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{e}_x + \ddot{y}\vec{e}_y + \ddot{z}\vec{e}_z$.

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = q\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ B\\ 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix}0\\ 1\\ 0\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix} = qB\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix} + q\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix}.$$

Avec $\omega = \frac{qB}{m}$, il vient : Il vient : $\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = \omega\begin{pmatrix}-\dot{z}\\ 0\\ \dot{x}\end{pmatrix} + \frac{q}{m}\begin{pmatrix}E\\ 0\\ 0\end{pmatrix}$; Ou encore : $\boxed{\begin{array}{ll}\boldsymbol{\ddot{x} = -\omega\,\dot{z} + \frac{q}{m}E} & \textbf{(5)}\\ \boldsymbol{\ddot{y} = 0} & \textbf{(6)}\\ \boldsymbol{\ddot{z} = \omega\,\dot{x}} & \textbf{(7)}\end{array}}$

Il faut découpler les équations (5) et (7) pour obtenir la forme proposée : $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$.

On prend une primitive de (7) : $\dot{z} = \omega\, x + cste$

CI : A t = 0, $x(0) = 0$ et $\dot{z}(0) = V_0 = cste$. D'où : $\boldsymbol{\dot{z} = \omega\, x + V_0}$ (8) ;

En remplaçant (8) dans (5), il vient : $\ddot{x} = -\omega\,(\omega x + V_0) + \frac{q}{m}E$ Soit : $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega^2 x = \frac{q}{m}E - \omega\, V_0}$:

Par identification avec $\frac{d^2x}{dt^2} + \omega^2 x = a$, on obtient $\boldsymbol{a = \frac{q}{m}E - \omega\, V_0}$. Or $\omega = \frac{qB}{m}$, ainsi $\boxed{\boldsymbol{a = \frac{q}{m}(E - BV_0)}}$.

4.b – Dans le cas où $B = \frac{2E}{V_0}$, alors $a = -\frac{qE}{m}$. L'équation précédente devient donc : $\boldsymbol{\ddot{x} + \omega^2 x = -\frac{qE}{m}}$.

Solution homogène : $\boldsymbol{x_h(t) = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t)}$

Solution particulière constante : $x_P = -\frac{qE}{m\,\omega^2} = -\frac{qE}{m} \times \frac{m^2}{q^2\, B^2}$; Soit : $\boldsymbol{x_P = -\frac{mE}{q\, B^2}}$.

Solution générale : $\boldsymbol{x(t) = x_h(t) + x_P = \alpha\cos(\omega t) + \beta\sin(\omega t) - \frac{mE}{q\, B^2}}$

1$^{\text{ère}}$ CI, à $t = 0$, $x(0) = 0$; Soit : $\alpha - \frac{mE}{q\, B^2} = 0$; D'où $\boldsymbol{\alpha = \frac{mE}{q\, B^2}}$.

De plus, on dérive, $\dot{x}(t) = -\alpha\,\omega\sin(\omega t) + \beta\omega\cos(\omega t) + 0$.

2$^{\text{ème}}$ CI : à $t = 0$, $\dot{x}(0) = 0$, donc $\beta\omega = 0$; Soit $\boldsymbol{\beta = 0}$.

Conclusion : $x(t) = \frac{mE}{q\, B^2}\cos(\omega t) - \frac{mE}{q\, B^2}$; Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{x(t) = \frac{mE}{q\, B^2}(\cos(\omega t) - 1) = \frac{E}{B\omega}(\cos(\omega t) - 1)}}$