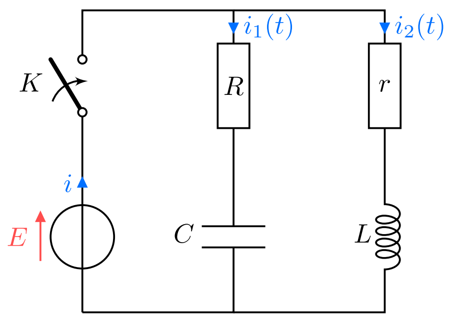
Correction du TD d'entraînement

I Circuit RL – RC

À l'instant de date $t = 0$ où l'on ferme l'interrupteur K, le condensateur est déchargé.



1) Déterminer les intensités $i_1(t)$ et $i_2(t)$.

Réponse

Maille 1

$$\begin{aligned} Ri_1(t) + u_c &= E \\ \Rightarrow RC\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + i_1 &= 0 \\ \Rightarrow i_1(t) &= A\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}} \end{aligned}$$

$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)$ RCT pour C

On résout

Maille 2

$$\begin{aligned} ri_2(t) + u_L &= E \\ \Rightarrow ri_2(t) + L\frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} &= E \\ \Rightarrow i_2(t) &= \frac{E}{r} + B\mathrm{e}^{-\frac{t}{r/L}} \end{aligned}$$

RCT pour L

On résout

On étudie les conditions initiales grâce à deux schémas :

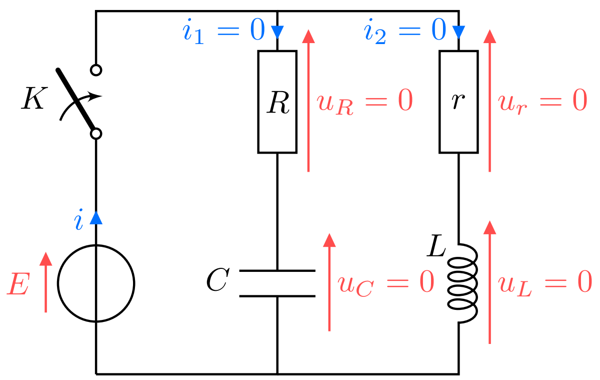


Figure 3.1 – Circuit à $\boxed{t = 0^-}$

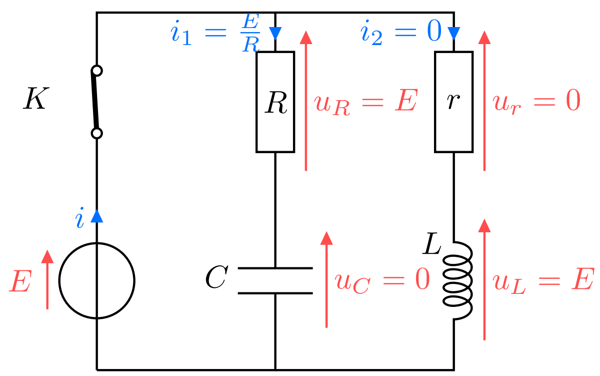


Figure 3.2 – Circuit à $\boxed{t = 0^+}$

Ainsi, $\quad i_1(0^+) = \dfrac{E}{R} \quad$ et $\quad i_2(0^+) = 0$

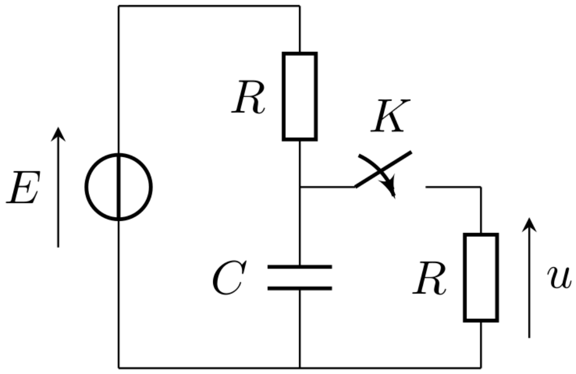
$\Rightarrow A = \dfrac{E}{R} \quad$ et $\quad B = -\dfrac{E}{r}$

Soit finalement $\quad \boxed{i_1(t) = \dfrac{E}{R}\mathrm{e}^{-\frac{t}{RC}}} \quad$ et $\quad \boxed{i_2(t) = \dfrac{E}{r}\left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{t}{L/r}}\right)}$

◇

II Circuit RC à 2 mailles

On considère le circuit représenté ci-contre, dans lequel l'interrupteur K est fermé à $t = 0$.



1) Trouver l'expression de la tension $u(t)$ et tracer son allure.

Réponse

LdMailles :

$$Ri + u = E \quad \text{et} \quad u_C = u$$

LdN :

$$i = i_1 + i_2 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R}$$

D'où

$$RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + 2u = E$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E}{2\tau}$$

avec $\tau = \frac{RC}{2}$.

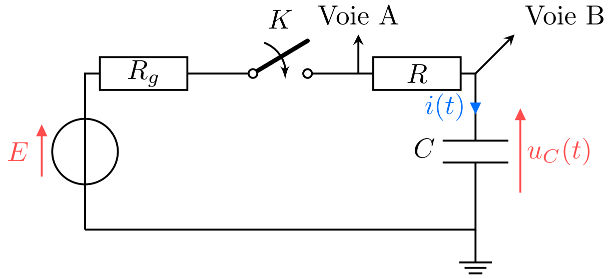
Après résolution avec $u(0^+) = E$, on obtient

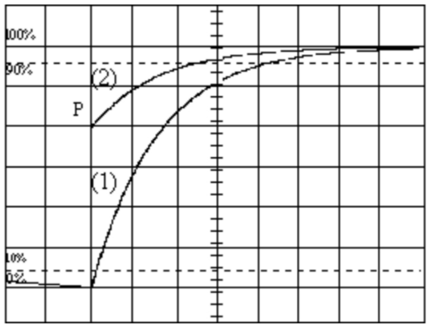
$$\boxed{u(t) = \frac{E}{2}(1 + e^{-t/\tau})}$$

Ainsi, u_C décroit exponentiellement de E à $E/2$.

III Régime transitoire d'un circuit RC

Un dipôle comporte entre ses bornes un résistor de résistance R et un condensateur de capacité C placés en série. On le place aux bornes d'un générateur de force électromotrice E et de résistance interne R_g en série avec un interrupteur K. Initialement, le circuit est ouvert et le condensateur déchargé. On appelle u_c la tension aux bornes du condensateur. À l'instant $t = 0$, on ferme l'interrupteur K.





1) Déterminer, sans calcul et en le justifiant, $u_c(0^+)$ et $i(0^+)$.

Réponse

◇ Initialement, le condensateur est déchargé, donc $u_c(0^-) = 0$. De plus, la tension aux borne d'un condensateur est une grandeur continue, donc $u_c(0^-) = u_c(0^+)$. On en déduit alors que $\boxed{u_c(0^+) = 0}$.

◇ Si on applique la loi d'Ohm aux 2 résistances (en série) et la loi des mailles à $t = 0^+$, on trouve directement : $\boxed{i(0^+) = \dfrac{E}{R + R_g}}$. On observe que l'**intensité n'est pas continue** dans ce circuit car $i(0^-) = 0$.

◇

2) Établir l'équation différentielle à laquelle obéit $u_c(t)$.

Réponse

On applique la loi des mailles, la loi d'Ohm et la loi des condensateurs dans le circuit pour des $t > 0$:

$$E = (R + R_g)i + u_c(t) \quad ; \quad i(t) = C\frac{du_c}{dt} \quad \Rightarrow \quad \boxed{E = (R + R_g)C\frac{du_c}{dt} + u_c(t)}$$

◇

3) Déterminer la constante de temps τ du circuit et donner son interprétation physique.

Réponse

La constante de temps est :

$$\boxed{\tau = (R + R_g)C}$$

Il s'agit de l'ordre de grandeur de la durée de charge ou de décharge du condensateur.

◇

4) Établir l'expression de $u_c(t)$.

Réponse

L'équation différentielle se réécrit :

$$\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

La solution homogène $u_{c,h}(t)$ et la solution particulière $u_{c,p}$ sont :

$$u_{c,h}(t) = Ae^{-t/\tau} \quad ; \quad u_{c,p}(t) = E \quad \Rightarrow \quad u_c(t) = Ae^{-t/\tau} + E$$

Pour trouver la constante A, on utilise la condition initiale :

$$u_c(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad A = -E \quad \Rightarrow \quad \boxed{u_c(t) = E\left(1 - e^{-t/\tau}\right)}$$

◇

5) Déterminer l'expression de t_1 pour que $u_c(t_1) = 0{,}9E$.

Réponse

$$u_c(t_1) = 0{,}9E \quad \Leftrightarrow \quad 1 - e^{-t_1/\tau} = 0{,}9 \quad \Leftrightarrow \quad e^{-t_1/\tau} = 0{,}1 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{t_1 = \tau\ln(10) \approx 2{,}3\tau}$$

◇

Dans l'étude expérimentale du circuit RC, on observe l'oscillogramme ci-dessus en utilisant un générateur délivrant des signaux créneaux. Les sensibilités sont : 1V/carreau vertical ; 0,1 ms/carreau horizontal. On néglige les caractéristiques de l'oscilloscope.

6) Identifier les courbes (1) et (2) aux voies A et B en justifiant votre choix.

Réponse

- ◇ Sur la voie B, on mesure la tension $u_c(t)$. Cette fonction est continue en $t = 0$. Il s'agit donc de la courbe (1).
- ◇ Sur la voie A, on mesure la tension $u_c(t) + Ri(t)$. Or la fonction $i(t)$ n'est pas continue en $t = 0$, donc il s'agit de la courbe (2).

◇

7) Doit-on être sur le couplage alternatif AC ou le couplage continu DC ?

Réponse

On doit utiliser un **couplage DC** car on étudie un signal continu (et non sinusoïdal).

◇

8) Préciser l'expression de la tension au point P.

Réponse

À l'instant $t = 0^+$, on a :

$$u_c(0^+) + Ri(0^+) = 0 + \frac{RE}{R + R_g}$$

La tension au point P est donc $\boxed{\dfrac{RE}{R + R_g}}$.

◇

9) Sachant que $R = 100\,\Omega$, déterminer R_g.

Réponse

D'après la courbe, la tension en P est $4E/6$. ON en déduit que :

$$\frac{4E}{6} = \frac{RE}{R + R_g} \quad \Rightarrow \quad \frac{4(R + R_g)}{6} = R \quad \Rightarrow \quad \boxed{R_g = \frac{R}{2} = 50\,\Omega}$$

◇

10) En utilisant les valeurs expérimentales et les questions précédentes, en déduire la valeur de C et E.

Réponse

D'après la courbe expérimentale :

- ◇ $\boxed{E = 6\,\text{V}}$;
- ◇ $t_1 = 0{,}42\,\text{ms}$.

On en déduit que :

$$C = \frac{\tau}{R + R_g} = \frac{t_1}{\ln(10) \times (R + R_g)} = \boxed{1{,}2\,\mu\text{F}}$$

◇

11) Estimer une majoration de la fréquence du signal carré utilisé.

Réponse

La demi-période T du signal utilisé est supérieure à 8 carreaux, donc :

$$T > 2 \times 0{,}8 = 1{,}6\,\mathrm{ms}$$

On en déduit que

$$f = \frac{1}{T} < \frac{1}{1{,}6 \times 10^{-3}} = \boxed{625\,\mathrm{Hz}}.$$

◇

12) Comment pourrait-on observer l'intensité du courant ?

Réponse

Pour observer l'intensité du courant, on peut observer la tension aux bornes de la résistance R (qui est une image de i *via* la loi d'Ohm) en affichant $u_A - u_B$.

◇