Correction du TP

Au programme

Savoir-faire

- Mettre en évidence la similitude des comportements des oscillateurs mécanique et électronique.
- Réaliser l'acquisition d'un régime transitoire pour un système linéaire du deuxième ordre et analyser ses caractéristiques.

I Objectifs

- Étudier plus précisément le régime pseudo-périodique d'un circuit RLC peu amorti.
- Étudier le comportement d'un oscillateur mécanique vertical amorti avec amortissement faible.
- Tracer une allure de trajectoire de phase correspondant au régime pseudo-périodique.
- Vérifier la décroissance exponentielle des amplitudes dans les deux domaines.
- Établir un tableau des analogies entre la mécanique et l'électricité.

II S'approprier

A Rappel concernant l'oscillateur mécanique vertical

Soit un oscillateur mécanique vertical (cf. Figure 8.1), constitué d'un ressort de raideur $k = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ et d'une masse $m = 200\,\mathrm{g}$. Il est légèrement amorti par frottement fluide dans l'air, caractérisé par une force de la forme : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$.

Dans ce cas, l'équation différentielle (obtenue par projection selon la direction verticale z du PFD) de l'oscillateur harmonique amorti peut se mettre sous la forme :

$$\boxed{\ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = 0}$$

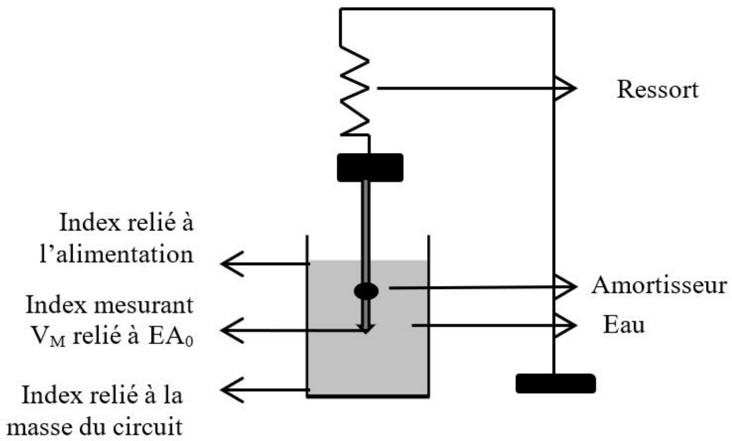

FIGURE 8.1

1. Quelle est la période propre attendue ? Peut-on déterminer la pseudo-période attendue ?

Réponse

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}} \\ m = 0{,}200\,\mathrm{kg} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{T_0 = 8{,}9 \times 10^{-1}\,\mathrm{s}}$$

On ne peut pas déterminer T car il dépend de Q qui dépend de λ, non indiqué.

◇

Remarque

z est une variable bien choisie pour qu'on ait à l'équilibre $z = 0$. C'est la raison pour laquelle le poids ainsi que la longueur à vide du ressort n'apparaissent pas explicitement dans l'expression.

B Décrément logarithmique

Pour un régime pseudo-périodique de pulsation Ω, l'amplitude des oscillations décroît de manière exponentielle :

$$u(t) = u_\infty + \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t} \times (A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t))$$

On peut accéder au facteur de qualité en étudiant le **décrément logarithmique** δ :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty}\right)}$$

avec n le nombre de périodes sélectionnées.

(2) Déterminer la relation entre δ, ω_0, Q et T d'abord, puis la relation entre δ et Q uniquement ensuite.

Réponse

$$u(t+nT) - u_\infty = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T} \times \overbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0}{2Q}t}\Big(A\underbrace{\cos(\Omega(t+nT))}_{=\cos\Omega t} + B\underbrace{\sin(\Omega(t+nT))}_{=\sin\Omega t}\Big)}^{=u(t)-u_\infty}$$

$$\Leftrightarrow u(t+nT) - u_\infty = \mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T}\,(u(t) - u_\infty)$$

$$\Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{\cancel{u(t) - u_\infty}}{\mathrm{e}^{-n\frac{\omega_0}{2Q}T}\,\cancel{(u(t) - u_\infty)}}\right) = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{n\frac{\omega_0}{2Q}T}\right)$$

$$\Leftrightarrow \delta = \frac{\omega_0}{2Q}T \Leftrightarrow \boxed{\delta = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

◇

III Analyser : régime pseudo-périodique du RLC série

(3) Faire le schéma d'un circuit RLC série alimenté par une tension $e(t)$. On veut visualiser à l'oscilloscope simultanément $e(t)$ sur la voie 1 et $u_C(t)$ sur la voie 2 : indiquer les connexions de l'oscilloscope à réaliser et positionner la masse sur le circuit.

Réponse

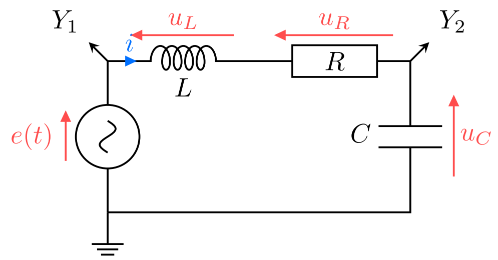

Figure 8.2

$e(t)$ est une tension créneau de fréquence 100 Hz, C une boite de capacités. On prendra $C = 0{,}01\,\mu\mathrm{F}$. L est une bobine d'inductance $L = 0{,}1\,\mathrm{H}$.

4 Écrire l'équation différentielle en $u_C(t)$, puis celle en $q(t) = Cu_C(t)$ et calculer la valeur R_c à donner à R pour visualiser le régime critique.

Réponse

$$\begin{aligned}
& u_L + u_R + u_C = E \\
\Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = E && u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_R = Ri \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E && i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC} && \text{forme canonique} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u_C = {\omega_0}^2E \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2q}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2q = {\omega_0}^2CE && q = Cu_C
\end{aligned}$$

Régime critique pour $Q = 1/2$:

$$Q = \frac{1}{2} \Leftrightarrow \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} = \frac{1}{2} \Leftrightarrow R_c = 2\sqrt{\frac{L}{C}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L = 0{,}1\,\mathrm{H} \\ C = 0{,}01\times10^{-6}\,\mathrm{F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{R_c = 6{,}3\times10^3\,\Omega}$$

---

5 En vous basant sur la Section II.A., quelle régression linéaire peut-on étudier pour obtenir le facteur de qualité ? Exprimer le coefficient directeur en fonction de a.

Aide

La variable x doit être nT.

Réponse

On peut tracer

$$y = ax + b$$
$$y \to n\delta, \quad a \to \frac{\omega_0}{2Q}, \quad x \to nT, \quad b \to 0$$

On a alors

$$\boxed{a = \frac{\delta}{T}}$$

IV Réaliser et valider

A Étude expérimentale du régime pseudo-périodique du RLC

Réaliser le montage vu précédemment dans l'analyse en prenant les mêmes valeurs de $e(t)$, C et L que ci-dessus.

IV.A.1 Visualisation et mesure de la pseudo-période

1) Faire varier R de façon à observer un régime pseudo-périodique très peu amorti. Il faut observer au moins une dizaine de maxima successifs sur l'oscillogramme.

Dans le cas d'un amortissement très faible, on peut assimiler la pseudo-période des oscillations T à la période propre T_0 du circuit.

1 Mesurer expérimentalement la pseudo-période T en prenant plusieurs périodes pour gagner en précision. La comparer à la période propre théorique en calculant l'écart normalisé entre les deux grandeurs.

Réponse

On mesure

$$T_1 = (0{,}50 \pm 0{,}05)\,\mathrm{s} \quad \text{et} \quad T_4 = (2{,}50 \pm 0{,}05)\,\mathrm{s}$$
$$\Rightarrow \boxed{T_{\mathrm{exp}} = \frac{T_4 - T_1}{4}} \quad \text{et} \quad u(T_{\mathrm{exp}}) = \frac{u(T_1)\sqrt{2}}{4}$$
$$\Rightarrow \underline{T_{\mathrm{exp}} = (0{,}50 \pm 0{,}02)\,\mathrm{s}}$$

Or,

$$\boxed{T_{\mathrm{theo}} = 2\pi\sqrt{LC}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} L = 0{,}1\,\mathrm{H} \\ C = 0{,}01\,\mathrm{\mu F} \end{cases}$$
$$\text{A.N. : } \underline{T_{\mathrm{theo}} = 2{,}0 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$$
$$\Rightarrow \boxed{E_N = \frac{|T_{\mathrm{exp}} - T_{\mathrm{theo}}|}{T_{\mathrm{theo}}}}$$
$$\text{A.N. : } \underline{E_N = 0{,}3}$$

Ce qui est acceptable.

◇

2 Imprimer la courbe obtenue en tenant compte des consignes indiquées sur les fiches plastifiées.

Réponse

solu

◇

IV.A.2 Décroissance exponentielle de l'amplitude

Activité `Capytale` disponible[1].

1. 3e47-2247217

1) Grâce au curseur horizontal de l'oscilloscope, déterminer u_∞ et relever les valeurs des amplitudes successives $u_{C,\max}$ en fonction du nombre de périodes nT. Remplir le tableau ci-contre.
2) Rentrer vos valeurs expérimentales sur `Capytale`. Créer la variable `delta_list` calculant δ pour chaque itération. Compléter le Tableau 8.1.
3) Créer la variable nécessaire et effectuer la régression linéaire déterminée à la question 5. Tracer la régression.

Tableau 8.1

n	nT	$u_{c,\max}$	δ
0	...	...	...
1	...	...	...
2	...	...	...
3	...	...	...
4	...	...	...
⋮	⋮	⋮	⋮

3 Quel est le coefficient directeur a_{exp} de la droite obtenue ? Quel est donc le facteur de qualité Q_{exp} obtenu ? Donner l'expression de Q_{theo}, en fonction de R, C et L. Calculer l'écart normalisé. Commenter.

Réponse

On obtient
$$a_{\text{exp}} = 0{,}314\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1} = \frac{\omega_0}{2Q}$$

Ainsi,
$$Q_{\text{exp}} = \frac{\pi}{a_{\text{exp}}T} \quad\Rightarrow\quad \underline{Q_{\text{exp}} = 15}$$

Or,
$$Q_{\text{theo}} = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}} \quad\Rightarrow\quad \underline{Q_{\text{theo}} = 0{,}314\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$$

Ainsi
$$E_N = \frac{|Q_{\text{exp}} - Q_{\text{theo}}|}{Q_{\text{theo}}} = 0{,}3$$

C'est tout à fait acceptable.

◇

B Étude expérimentale d'oscillations mécaniques amorties

IV.B.1 Montage expérimental

Le montage est schématisé dans la partie S'approprier, et est déjà réalisé. On mesure une tension sur la voie $EA0$ qui est proportionnelle à l'ordonnée z du point matériel de masse m.

La masse m ne doit pas toucher à l'eau de l'éprouvette.

IV.B.2 Réglages de l'ordinateur

1) Avant tout réglage : brancher l'interface SYSAM et l'alimentation stabilisée sur 7 V.
2) Ouvrir latispro (programmes → discipline → physique-chimie → eurosmart → latispro).
3) Pour faire une acquisition : bouton 
4) Pour activer la voie $EA0$:
   - ◇ Dans le cadre *entrées analogiques*, cliquer sur les boutons des entrées à activer.

- ◇ Cliquer droit et choisir *trait*.

5) Pour paramétrer l'acquisition :
   - ◇ Dans le cadre acquisition, onglet temporel, mode normal, entrer le nombre de points de mesure et la durée totale de l'acquisition.
   - ◇ Acquisition temporelle ; durée : 30 s ; nombre de points : 2000.
6) Fin des réglages ! Vous êtes prêt-es à faire vos enregistrements.

IV.B.3 Mesures

1) Lorsque la position est à sa position d'équilibre, le bout du fil doit être au milieu du bécher. Si ce n'est pas le cas, modifier la hauteur du point d'attache du ressort.
2) Étirer légèrement le ressort sans qu'il ne touche au fond du bécher.
3) Lorsque les oscillations paraissent régulières, lancer l'acquisition en cliquant sur .

IV.B.4 Exploitation des résultats

Dans le cas d'un amortissement très faible, on peut assimiler la pseudo-période des oscillations T à la période propre T_0 du circuit.

4 Grâce au réticule (cliquer droit et choisir), mesurer expérimentalement la pseudo-période T en prenant plusieurs périodes pour gagner en précision. La comparer à la période propre théorique en calculant l'écart normalisé entre les deux grandeurs.

Réponse

solu

◇

1) Grâce au réticule (lié à la courbe pour plus de facilité), relever les valeurs des amplitudes successives $u_{\max}$ en fonction du nombre de périodes nT (environ 15 mesures) ; cliquer droit, puis calibrage pour modifier l'échelle.
2) Créer le tableau de valeurs (nT ; $u_{\max}$) correspondant (cf. Tableau 8.1), que vous recopierez sur vos copies.
3) Créer la variable nécessaire de façon à vérifier que l'amplitude des oscillations décroit de façon exponentielle, et la modéliser par une droite.

5 Quel est le coefficient directeur $a_{\exp}$ de la droite obtenue ? Grâce aux relations vues en cours, en déduire un ordre de grandeur du coefficient d'amortissement λ.

Réponse

solu

◇

6 Imprimer la courbe obtenue ainsi que sa modélisation.

Réponse

solu

◇

V Conclure

7 Quelles similitudes de comportements entre les deux types d'oscillateurs ont été observées ? En utilisant les études théoriques demandées (équations différentielles), ainsi que les résultats expérimentaux trouvés, recopier et compléter le tableau suivant :

Tableau 8.2 – Correspondances

Méca	$\longleftrightarrow$	Élec
z	$\longleftrightarrow$	q
	$\longleftrightarrow$	i
	$\longleftrightarrow$	L
	$\longleftrightarrow$	C
	$\longleftrightarrow$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
	$\longleftrightarrow$	R
	$\longleftrightarrow$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Réponse

Tableau 8.3 – Correspondances

Méca	$\longleftrightarrow$	Élec
z	$\longleftrightarrow$	q
v	$\longleftrightarrow$	i
m	$\longleftrightarrow$	L
k	$\longleftrightarrow$	C
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\longleftrightarrow$	$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$
λ	$\longleftrightarrow$	R
$Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}$	$\longleftrightarrow$	$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$