

## Correction du DS

Tout moyen de communication est interditLes téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacsLes calculatrices sont interdites

Au programme

Électrocinétique, résistances et sources, circuits RC et RL

## Sommaire

<b>E1</b>	Circuit de résistances . . . . .	<b>2</b>
<b>P1</b>	Alimentation d'un train . . . . .	<b>3</b>
<b>P2</b>	Étude d'une lampe de secours rechargeable (D'après CCINP TSI 2022) . . .	<b>7</b>
<b>P3</b>	Guirlandes électriques . . . . .	<b>11</b>

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

**Malus**

- |   |   |
|---|---|
| ◇ A : application numérique mal faite ;   | ◇ Q : question mal ou non indiquée ;            |
| ◇ N : numéro de copie manquant ;          | ◇ C : copie grand carreaux ;                    |
| ◇ P : prénom manquant ;                   | ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;              |
| ◇ E : manque d'encadrement des réponses ; | ◇ H : homogénéité non respectée ;               |
| ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;  | ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;    |
| ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;    | ◇ $\varphi$ : loi physique fondamentale brisée. |

**Exemple application numérique**

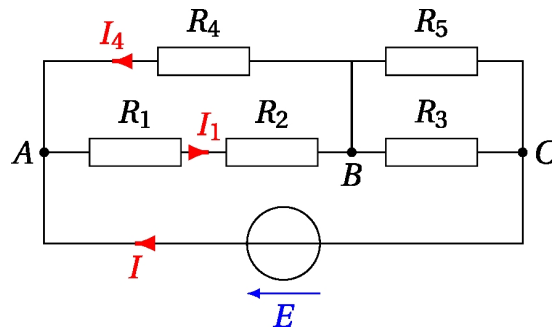
$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. :  $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

## /24 E1 Circuit de résistances

On considère le circuit ci-dessous :



- /5 1 Comment définit-on des résistances en série? en parallèle? Déterminer alors, parmi les 5 résistances du circuit ci-dessus, lesquelles sont en série et en parallèle.

Réponse

Des résistances sont en série si elles **partagent une borne** ① qui **n'est pas un nœud** ①. Elles sont en parallèle si elles **partagent leurs deux bornes** ①.

Dans ce circuit, on a  $R_1$  et  $R_2$  en série ①, et  $R_3$  et  $R_5$  en parallèle ①.

- /4 2 En considérant que toutes les résistances ont la même valeur  $R$ , exprimer en fonction de  $R$  la résistance équivalente  $R_{AB}$ .

Réponse

On commence par l'association série entre  $R_1$  et  $R_2$ , qu'on appelle  $R_{eq,1} = 2R$  ①. Celle-ci est en parallèle avec  $R_4$ . Ainsi,

$$\begin{aligned} \frac{1}{R_{AB}} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{R_4} + \frac{1}{R_{eq,1}} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R_{AB}} &= \frac{2}{2R} + \frac{1}{2R} = \frac{3}{2R} \quad \left. \begin{array}{l} R_4 = R \\ R_{eq,1} = 2R \end{array} \right\} \begin{array}{c} \downarrow \\ (\cdot)^{-1} \end{array} \\ \Leftrightarrow R_{AB} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2R}{3} \end{aligned}$$

① pour un schéma.

- /4 3 Exprimer de même les résistances équivalentes  $R_{BC}$  et  $R_{AC}$  en fonction de  $R$ .

Réponse

$R_{BC}$  est l'association en parallèle de  $R_5$  et  $R_3$ . D'après ce qui précède, on obtient alors

$$R_{BC} = \frac{R^2}{2R} \Leftrightarrow R_{BC} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R}{2}$$

Enfin,  $R_{AC} = R_{AB} + R_{BC}$ , soit

$$R_{AC} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{7}{6}R$$

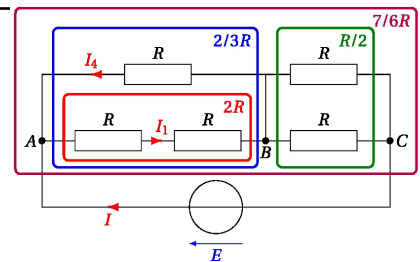


FIGURE 2.1 – ①+①

- /6 4 Exprimer les tensions  $u_{AB}$  et  $u_{CB}$  en fonction de  $E$ .

Réponse

Avec un schéma équivalent, on observe que  $u_{AB}$  s'obtient par pont diviseur de tension, tel que :

$$u_{AB} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_{AB}}{R_{AB} + R_{BC}} E \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{4}{7} E$$

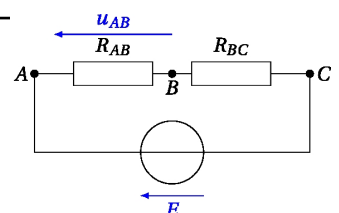


FIGURE 2.2 – ①

Pour  $u_{CB}$ , en faisant attention au sens de la flèche, on obtient

$$u_{CB} \stackrel{\textcircled{1}}{=} - \frac{R_{BC}}{R_{AB} + R_{BC}} E \stackrel{\textcircled{1}}{=} - \frac{3}{7} E$$

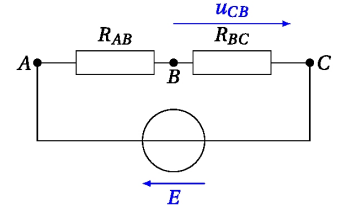


FIGURE 2.3 – ①

/5 5 Exprimer les intensités  $I_1$  et  $I_4$  en fonction de  $I$ .

Réponse

Avec un pont diviseur de courant, on obtient aisément :

$$I_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_{AB}}{2R} I \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{3} I$$

De même, en faisant attention au signe :

$$I_4 \stackrel{\textcircled{1}}{=} - \frac{R_{AB}}{R} I \stackrel{\textcircled{1}}{=} - \frac{2}{3} I$$

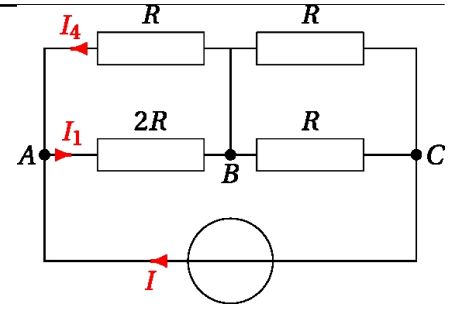


FIGURE 2.4 – ①

## /47 P1 Alimentation d'un train

Les trains fonctionnent maintenant quasiment tous avec des motrices équipées de moteurs électriques. On va étudier les problèmes causés par la longue distance des lignes SNCF.

Le courant est transmis à la motrice par la caténaire (ligne haute tension) via le pantographe, puis le retour du courant s'effectue par les rails.

### I/A Alimentation par une seule sous-station

On appelle sous-station le poste d'alimentation EDF délivrant une tension  $E = 1500 \text{ V}$ . Si toute la ligne SNCF était alimentée par une seule sous-station, on pourrait représenter cela par le schéma suivant, avec  $R_c$  la résistance de la caténaire,  $R_r$  celle du rail,  $M$  la motrice et  $E$  la tension d'alimentation.

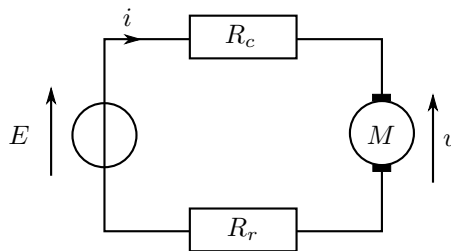


FIGURE 2.5 – Schéma électrique avec une sous-station

La résistance du rail et celle de la caténaire dépendent de la distance entre la motrice et le poste d'alimentation. On peut écrire

$$R_c = \rho_c x \quad ; \quad R_r = \rho_r x$$

avec  $x$  la distance entre la motrice et le poste d'alimentation,  $\rho_c = 30 \mu\Omega \cdot \text{m}^{-1}$  la résistance linéique de la caténaire et  $\rho_r = 20 \mu\Omega \cdot \text{m}^{-1}$  celle du rail.

La motrice peut être modélisée par un dipôle consommant une puissance constante  $P = 1,5 \text{ MW}$ . On note  $u$  la tension aux bornes de la motrice et  $i$  le courant la traversant.

/3 1 Exprimer  $u$  en fonction de  $i$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $E$  et  $x$ . La motrice est un dipôle à caractère récepteur. Définir ce terme.

Réponse

Par la loi des mailles et le loi d'Ohm :

$$u \stackrel{\textcircled{1}}{=} E - (\rho_r + \rho_c) x i$$

Pour un dipôle à caractère récepteur, la puissance reçue est positive. ①

/2 [2] Montrer que l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par  $u$  s'écrit

$$u^2 - Eu + (\rho_c + \rho_r)xP = 0 \quad (2.1)$$

### Réponse

La puissance reçue par la motrice est  $P = ui$  ( $u$  et  $i$  en convention récepteur).

$$u = E - (\rho_r + \rho_c)xP/u \Leftrightarrow u^2 = Eu - (\rho_r + \rho_c)xP \Leftrightarrow \boxed{u^2 - Eu + (\rho_c + \rho_r)xP = 0}$$

/5 [3] Donner les solutions réelles de cette équation. Donner un encadrement du discriminant  $\Delta$ . En déduire un encadrement de  $u$ .

### Réponse

Les solutions sont réelles si le discriminant est positif ou nul.

$$\Delta = E^2 - 4(\rho_r + \rho_c)xP \geq 0 \Rightarrow \boxed{u = \frac{E \pm \sqrt{\Delta}}{2}}$$

Physiquement, quand  $x$  augmente,  $u$  décroît. Comme  $\Delta$  diminue quand  $x$  augmente (on rappelle que  $P > 0$ ), alors la

seule solution physiquement acceptable est  $\boxed{u = \frac{E + \sqrt{\Delta}}{2}}$ .

Comme  $0 \leq \Delta \leq E^2$ , on en déduit  $\boxed{E/2 \leq u \leq E}$ . ①

### Remarque

Pour  $x \rightarrow 0$ ,  $\Delta \rightarrow E^2$ , physiquement  $u$  est maximale, donc  $u_{max} = E$ . La solution  $u = (E - \sqrt{\Delta})/2 = 0$  n'est pas physiquement acceptable, car cela impliquerait  $i \rightarrow +\infty$  pour avoir  $P = ui = cste$ .

/4 [4] Déterminer l'expression  $x_{max}$  de  $x$  telle que  $u$  soit minimale. Exprimer  $u_{min}$  la valeur minimale de  $u$ . Faire les applications numériques.

### Réponse

$x_{max}$  vérifie  $\Delta = 0$  :

$$\boxed{x_{max} = \frac{E^2}{4(\rho_c + \rho_r)P}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{min} = E/2} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} E = 1,5 \times 10^3 \text{ V} \\ \rho_c = 30 \mu\Omega \cdot \text{m}^{-1} \\ \rho_r = 20 \mu\Omega \cdot \text{m}^{-1} \\ P = 1,5 \text{ MW} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{x_{max} = 7,5 \text{ km}} \quad \text{et} \quad \boxed{u_{min} = 750 \text{ V}}$$

## I/B Transformation Thévenin/Norton

On veut montrer qu'un générateur de Thévenin de f.e.m.  $e_{th}$  et de résistance  $r_{th}$  est équivalent à un générateur de Norton de c.e.m.  $\eta$  et de résistance  $r_N$ .

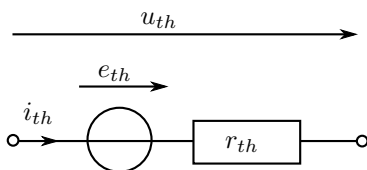


FIGURE 2.6 – Générateur de Thévenin

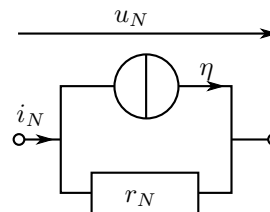
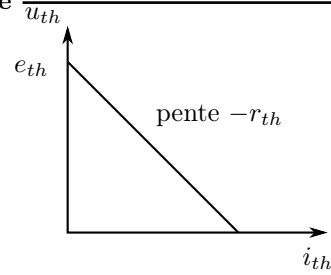


FIGURE 2.7 – Générateur de Norton

- /3 [5] Pour le générateur de Thévenin, établir l'expression de  $u_{th}$  en fonction de  $i_{th}$ ,  $e_{th}$  et  $r_{th}$ . Tracer la caractéristique tension/courant correspondante.

$$\textcircled{1} \quad u_{th} = e_{th} - r_{th} i_{th}$$

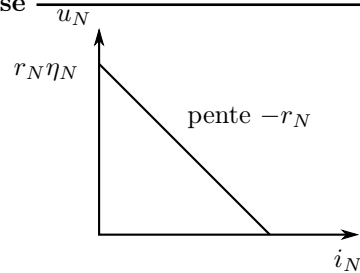
Réponse

FIGURE 2.8 –  $\textcircled{1} + \textcircled{1}$ 

- /3 [6] Pour le générateur de Norton, établir l'expression de  $u_N$  en fonction de  $i_N$ ,  $\eta$  et  $r_N$ . Tracer la caractéristique tension/courant correspondante,  $u_N$  en fonction de  $i_N$ .

$$\textcircled{1} \quad u_N = r_N \eta - r_N i_N$$

Réponse

FIGURE 2.9 –  $\textcircled{1} + \textcircled{1}$ 

- /2 [7] Déterminer les expressions de  $\eta$  et  $r_N$  en fonction de  $e_{th}$  et  $r_{th}$  afin que les deux générateurs soient équivalents.

Réponse

Il y a équivalence si les caractéristiques des deux dipôles sont les mêmes, donc

$$\textcircled{1} \quad r_N = r_{th} \quad \text{et} \quad \textcircled{1} \quad \eta = e_{th}/r_{th}$$

## I/C

## Alimentation par plusieurs sous-stations

Afin d'alimenter la motrice sur de longues distances, on répartit des sous-stations tout le long de la ligne SNCF. Les sous-stations sont espacées entre elles d'une distance  $L$ . Le schéma équivalent est le suivant

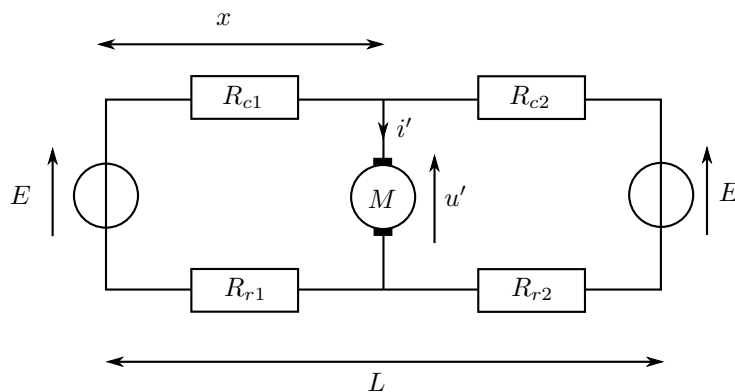


FIGURE 2.10 – Schéma électrique avec deux sous-stations

On note  $x$  la distance entre la sous-station de gauche et la motrice,  $R_{c1}$  la résistance de la caténaire et  $R_{r1}$  celle des rails entre la sous-station de gauche et la motrice,  $R_{c2}$  la résistance de la caténaire et  $R_{r2}$  celle des rails entre la sous-station de droite et la motrice.

On note  $u'$  la tension aux bornes de la motrice et  $i'$  le courant la traversant.

- /4 [8] Exprimer les résistances  $R_{c1}$ ,  $R_{c2}$ ,  $R_{r1}$  et  $R_{r2}$  en fonction de  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $L$  et  $x$ .

Réponse

1)  $R_{c1} = \rho_c x$

2)  $R_{c2} = \rho_c (L - x)$

3)  $R_{r1} = \rho_r x$

4)  $R_{r2} = \rho_r (L - x)$

- /6 9 En utilisant les résultats de la question 8, exprimer les courants  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , ainsi que les résistances  $R_1$  et  $R_2$  en fonction de  $E$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $x$  et  $L$  pour que le schéma de la figure 2.11 soit équivalent à celui de la figure 2.10.

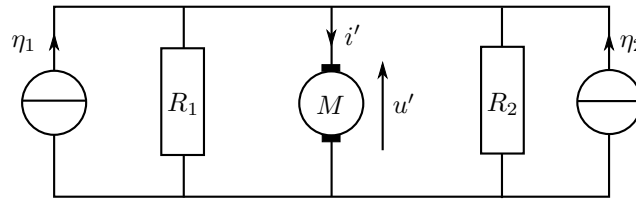


FIGURE 2.11 – Schéma équivalent n°1

## Réponse

$$R_1 = R_{c1} + R_{r1} = (\rho_c + \rho_r)x \quad \text{et} \quad \eta_1 = E/R_1 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)x}$$

$$R_2 = R_{c2} + R_{r2} = (\rho_c + \rho_r)(L - x) \quad \text{et} \quad \eta_2 = E/R_2 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)(L - x)}$$

- /7 10 Le schéma précédent est équivalent aux schémas ci-dessous. Donner alors les expressions de  $\eta_3$  et  $R_3$ , puis  $E'$  et  $R_4$  en fonction de  $E$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $x$  et  $L$ .

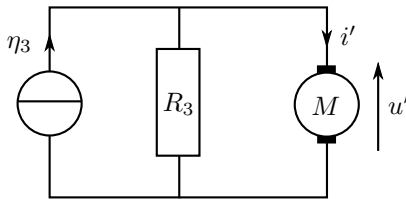


FIGURE 2.12 – Schéma équivalent n°2

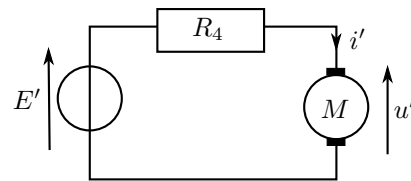


FIGURE 2.13 – Schéma équivalent n°3

## Réponse

Par association en parallèle de générateurs de Norton :

$$\eta_3 = \eta_1 + \eta_2 = \frac{E}{(\rho_c + \rho_r)} \left( \frac{1}{x} + \frac{1}{L - x} \right) \Leftrightarrow \eta_3 = \frac{EL}{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}$$

Par association en parallèle des résistances  $R_1$  et  $R_2$  :

$$\frac{1}{R_3} = \frac{1}{R_1} + \frac{1}{R_2} \Leftrightarrow R_3 = \frac{R_1 R_2}{R_1 + R_2} \Leftrightarrow R_3 = \frac{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}{L}$$

Transformation Thévenin/Norton :  $E' = R_3 \eta_3 = E$  ;  $R_4 = R_3 = \frac{(\rho_c + \rho_r)x(L - x)}{L}$

- /2 11 En utilisant l'équation (2.1), exprimer l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par  $u'$  en fonction de  $P$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $E$ ,  $L$  et  $x$ .

## Réponse

On remplace  $E$  par  $E'$  et  $(\rho_c + \rho_r)x$  par  $R_4$  :  $u'^2 - Eu' + P(\rho_c + \rho_r)x(1 - x/L) = 0$

/4 12 Quelle est l'équation polynomiale vérifiée par  $x$  pour que  $u'$  soit minimale ?

Réponse

$u'$  admet des solutions réelles si  $\Delta \stackrel{(1)}{=} E^2 - 4P(\rho_c + \rho_r)x(L-x)/L \geq 0$ . On a alors

$$u' \stackrel{(1)}{=} \frac{E \pm \sqrt{\Delta}}{2} \in [E/2, E]$$

Ainsi  $u'$  est minimale quand  $\Delta = 0$ , soit  $x^2 - xL + \frac{LE^2}{4P(\rho_c + \rho_r)} \stackrel{(1)}{=} 0$

/2 13 Déterminer l'expression de  $L$  telle que  $u'$  soit minimale en  $x = L/2$ . Faire l'application numérique.

Réponse

On remplace  $x_{\max} = L/2$  dans l'équation précédente :  $L \stackrel{(1)}{=} \frac{E^2}{(\rho_c + \rho_r)P}$  soit  $L \stackrel{(1)}{=} 30 \text{ km}$

## /68 P2 Étude d'une lampe de secours rechargeable (D'après CCINP TSI 2022)

Il est recommandé d'avoir sur soi une lampe pour être vu en cas de détresse ou tout simplement pour se déplacer par nuit noire. Pour ne pas avoir à gérer des piles défaillantes ou des accumulateurs non chargés, une « lampe à secouer » peut s'avérer utile. Un extrait d'une description publicitaire de cet objet est rapporté ci-dessous.

### Extrait d'une publicité pour une lampe à secouer

En secouant la lampe 30 secondes (un peu comme une bombe de peinture), de l'énergie électrique est produite et stockée dans un condensateur. Vous obtenez alors environ 20 minutes d'une lumière produite par une DEL (diode électroluminescente).

Si vous n'utilisez pas toute l'énergie produite, elle restera stockée dans le condensateur pendant plusieurs semaines pour être ensuite immédiatement disponible sur simple pression du bouton marche/arrêt.

On part d'une situation où on suppose que le condensateur vient d'être chargé et que la tension à ses bornes est  $U_0 = 3,3 \text{ V}$ . On cesse alors d'agiter la lampe et donc de recharger le condensateur.

Tout d'abord, on étudie la décharge de ce condensateur de capacité  $C = 10 \text{ F}$  (« supercondensateur ») dans un conducteur ohmique de résistance  $R$  pouvant modéliser une lampe à incandescence. Le circuit étudié est donc représenté par le schéma de la figure 2.14. La partie de circuit utile lors de la phase de charge du condensateur n'est pas représentée.

À l'instant initial  $t = 0 \text{ s}$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et la décharge commence.

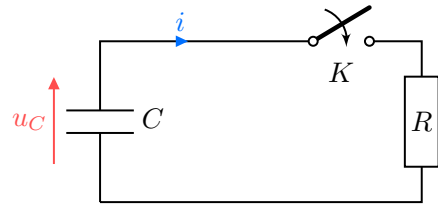


FIGURE 2.14 – Circuit électrique équivalent lors de la phase de décharge du condensateur

/10 1 Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u_C(t)$  pendant la décharge en faisant apparaître une constante de temps  $\tau$  dont on donnera l'expression. Puis déterminer l'expression littérale de la solution de cette équation différentielle.

Réponse

Avec une loi des mailles :

$$\begin{aligned} u_C(t) - Ri(t) &\stackrel{(1)}{=} 0 \\ \Leftrightarrow u_C(t) + RC \frac{du_C}{dt} &\stackrel{(1)}{=} 0 \quad \left. \begin{array}{l} \text{RCT convention générateur} \\ \text{Forme canonique et } \tau = RC \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{u_C(t)}{\tau} &\stackrel{(1)}{=} 0 \end{aligned}$$

On résout en injectant la forme générique  $u_C(t) \stackrel{(1)}{=} Ke^{rt}$  :

$$\begin{aligned} r \cdot Ke^{rt} + \frac{Ke^{rt}}{\tau} &= 0 \\ \Leftrightarrow r &\stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{\tau} \end{aligned}$$

Donc la forme générale de  $u_C(t) \stackrel{(1)}{=} Ke^{-t/\tau}$ . Or,  $u_C(0^-) = U_0 = u_C(0^+)$  par continuité de la tension aux bornes de  $C$   $\stackrel{(1)}{}$ . Cela donne donc  $U_0 = K$   $\stackrel{(1)}{}$ , et ainsi

$$u_C(t) \stackrel{(1)}{=} U_0 e^{-t/\tau}$$

- /3 [2] Si l'on considère que la décharge s'effectue en 20 minutes (comme précisé dans le document fourni), déterminer la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique qu'il faut alors associer au condensateur de capacité  $C = 10 \text{ F}$ .

**Réponse**

La décharge d'un condensateur s'accomplit à  $t_{99} \approx 5\tau = 5RC$  ①. Ainsi,

$$5\tau = t_{99} \Leftrightarrow RC = \frac{t_{99}}{5} \Leftrightarrow R = \frac{① t_{99}}{5C} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_{99} = 20 \text{ minutes} = 240 \text{ s} \\ C = 10 \text{ F} \end{cases}$$

A.N. :  $R = ① 24 \Omega$

Certains modèles électriques plus élaborés du « supercondensateur » utilisé ici permettent de traduire, plus fidèlement à la réalité, son comportement réel dans un circuit. Un des modèles possibles fait apparaître, autour de la capacité  $C$ , une résistance  $R_f$  en parallèle et une résistance série  $R_s$  conformément au schéma de la figure 2.15.

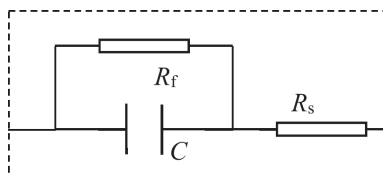


FIGURE 2.15 – Modèle plus fidèle à la réalité pour le « supercondensateur »

- /4 [3] Pour quelles valeurs limites de  $R_s$  et  $R_f$  retrouve-t-on le modèle simple ( $C$  seul) du « supercondensateur » ?

**Réponse**

Avec  $R_f \rightarrow \infty$  ①, on a un interrupteur ouvert ①, et avec  $R_s = 0$  ① on a un fil ①, ce qui correspond bien à une capacité idéale seule.

Pour la suite des questions, on revient au modèle simple ( $C$  seul) pour le condensateur, toujours initialement chargé sous une tension  $U_0 = 3,3 \text{ V}$ .

On remplace maintenant le conducteur ohmique de résistance  $R$  par une DEL dont les caractéristiques sont les suivantes (Figure 2.16 et Tableau 2.1) :

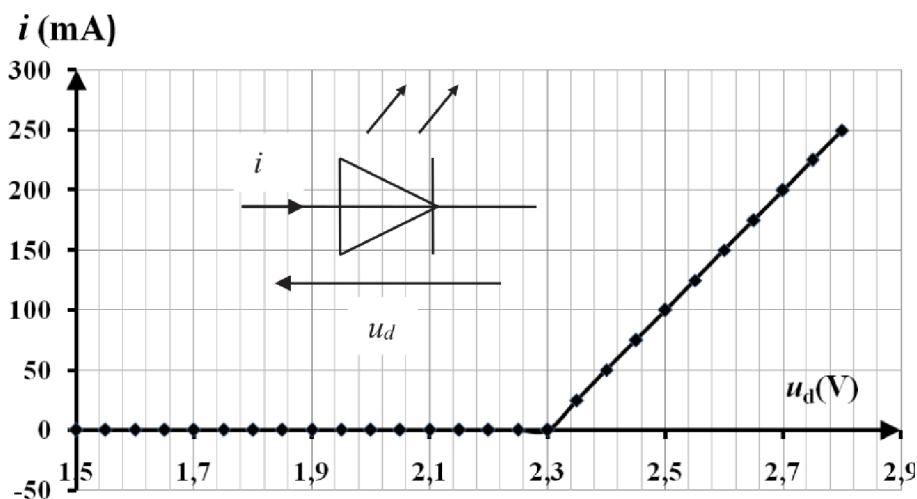


FIGURE 2.16 – Caractéristique  $i = f(u_d)$  et symbole pour la diode électroluminescente DEL.

Pour cette diode, on appelle tension seuil, notée  $U_S$  la tension minimale au-delà de laquelle la diode devient passante. On convient alors que la diode électroluminescente cesse d'émettre suffisamment de lumière dès que  $u_d < U_S + 0,1 \text{ V}$ .

- /14 [4] Comment se comporte la DEL lorsque la diode est bloquée ( $u_d < 2,3 \text{ V}$ ) ? D'autre part, proposer un modèle électrique équivalent pour la DEL lorsqu'elle est passante ( $u_d > 2,3 \text{ V}$ ), sous forme d'un générateur de Thévenin (valeurs numériques attendues). On fera le schéma électrique correspondant en précisant bien les sens de l'intensité de la tension  $u_d$ .

**Réponse**



TABLEAU 2.1 – Electrical &amp; Optical Characteristics

Parameter	Symbol	Condition	Min.	Typ.	Max.	Unit
Luminous Flux	$\Phi_V$	$i = 200 \text{ mA}$	6	8.5	–	lm
Forward Voltage	$u_d$	$i = 200 \text{ mA}$	–	2.5	2.8	V
D.C. Forward Current Max	$i_M$	–	–	–	250	mA
Peak Wavelength	$\lambda_p$	$i = 200 \text{ mA}$	–	635	–	nm
Dominant Wavelength	$\lambda_d$	$i = 200 \text{ mA}$	–	624	–	nm
Reverse Current	$i_r$	$u_r = 5 \text{ V}$	–	–	50	$\mu\text{A}$
Viewing angle	$2\Phi_{1/2}$	$i = 200 \text{ mA}$	–	120	–	deg
Spectrum Line Halfwidth	$\Delta\lambda$	$i = 200 \text{ mA}$	–	20	–	nm

◇ Lorsque la DEL est bloquée, on a  $i = 0$  ① et c'est donc un **interrupteur ouvert** ①.

◇ Lorsqu'elle est passante, on a une caractéristique affine, d'équation

$$i = au_d + b$$

▷  $a$  est le coefficient directeur :

$$a = \frac{i_{\max} - i_{\min}}{u_{d,\max} - u_{d,\lim}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i_{\max} = 250 \text{ mA} \\ \quad = 0,250 \text{ A} \\ i_{\min} = 0 \\ u_{d,\max} = 2,8 \text{ V} \\ u_{d,\lim} = 2,3 \text{ V} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } a = 0,50 \text{ S}$$

▷  $b$  est l'ordonnée à l'origine, que l'on obtient en connaissant les coordonnées d'un point. Ici, pour le point limite de blocage, on a

$$i_{\lim} = au_{d,\lim} + b \Leftrightarrow b = -au_{d,\lim}$$

$$\text{A.N. : } b = -1,15 \text{ A}$$

Pour la modéliser en générateur de THÉVENIN, il faut écrire sa caractéristique sous la forme  $u_d = ri + U_S$  ① ; on l'isole de l'équation précédente puis on détermine  $a'$  et  $b'$  en fonction des données précédemment trouvées :

$$i = au_d + b \Leftrightarrow au_d = i - b \Leftrightarrow u_d = \frac{1}{a}i + \frac{-b}{a}$$

donc  $r = \frac{1}{a}$  et  $U_S = \frac{-b}{a}$

A.N. :  $r = 2 \Omega$  et  $U_S = 2,3 \text{ V}$

D'où le schéma équivalent Figure 2.17.

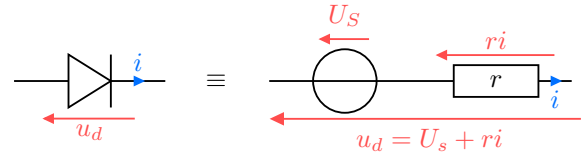


FIGURE 2.17 – ①+①

- /6 5 Faire le schéma électrique de la DEL modélisée et insérée dans le circuit précédent. Puis, montrer que la nouvelle équation différentielle régissant l'évolution de  $u_c(t)$  lorsque le condensateur se décharge dans la diode électroluminescente est  $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau'} = \frac{U_S}{\tau'}$ . Préciser l'expression de  $\tau'$ .

Réponse

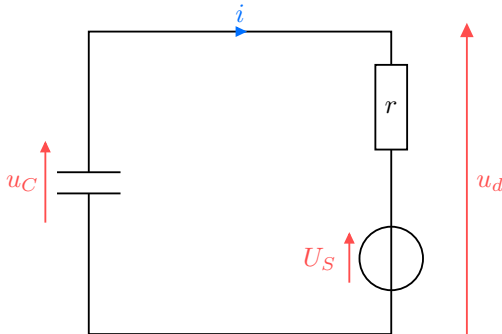


FIGURE 2.18 – Schéma équivalent ①+①

$$\begin{aligned} u_c - ri - U_S &\stackrel{①}{=} 0 \\ \Leftrightarrow u_c + rC \frac{du_c}{dt} &\stackrel{①}{=} U_S \quad \left. \begin{array}{l} \text{RCT C conv. gén.} \\ \text{Canonique et } \tau' = rC \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \frac{du_c}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau'} &\stackrel{①}{=} \frac{U_S}{\tau'} \end{aligned}$$

- /8 6 Déterminer la solution  $u_c(t)$  de cette nouvelle équation différentielle, avec les mêmes conditions initiales que précédemment. Puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants du graphe (valeur et tangente à l'origine ainsi qu'une asymptote éventuelle).

## Réponse

On trouve comme précédemment une solution homogène de la forme  $u_{C,h}(t) = Be^{-t/\tau'}$  ①. La solution particulière constante donne  $u_{C,p}(t) = U_S$  ①. D'où la solution générale totale :

$$u_C(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} u_{C,h}(t) + u_{C,p} = Be^{-t/\tau'} + U_S$$

On a toujours  $u_C(0) = U_0$ , soit ici

$$U_0 = B + U_S \Leftrightarrow B \stackrel{\textcircled{1}}{=} U_0 - U_S$$

$$\Rightarrow u_C(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} U_S + (U_0 - U_S)e^{-t/\tau'} \quad \text{avec} \quad \tau' = rC$$

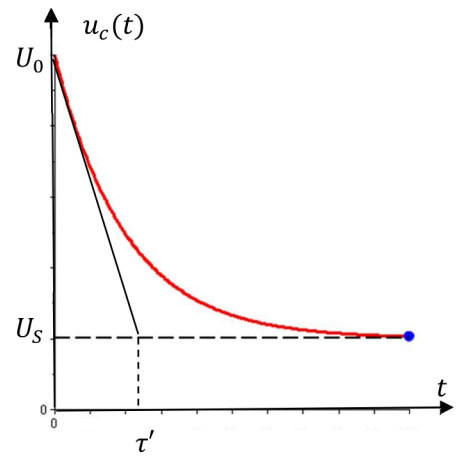


FIGURE 2.19 – ①+①+①

- /7 7 Déterminer l'expression littérale de  $i(t)$ . Puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants.

## Réponse

Avec la RCT de C en convention générateur :

$$\begin{aligned} i \stackrel{\textcircled{1}}{=} -C \frac{du_C}{dt} &\Leftrightarrow i = -C \left( -\frac{1}{\tau'} \right) (U_0 - U_S) e^{-t/\tau'} \\ &\Leftrightarrow i(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{U_0 - U_S}{r} e^{-t/\tau'} \end{aligned}$$

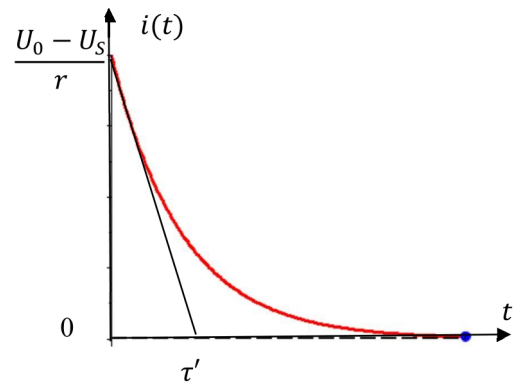


FIGURE 2.20 – ①+①+①

- /6 8 À l'aide des caractéristiques techniques fournies dans le Tableau 2.1, indiquer si le fonctionnement correct de la DEL est garanti sans dommage. Proposer une solution pour éventuellement remédier au problème rencontré.

## Réponse

On remarque que  $u_{C,\max} = U_0 = 3,3 \text{ V}$  ① et que  $i_{\max} = \frac{U_0 - U_S}{r} = 0,5 \text{ A}$ . ①

Or, d'après le Tableau donné,  $i_{\max} = 250 \text{ mA}$  ① et  $u_{C,\max} = 2,8 \text{ V}$ . ①

Ainsi, il faut restreindre la charge initiale du condensateur en **secouant moins longtemps** ① ( $\approx 20 \text{ s}$ ). On peut aussi **ajouter une résistance en série** ① avec la DEL pour diviser la valeur initiale de l'intensité.

- /7 9 Prévoir, sans la mise en œuvre de la solution précédente, la durée approximative d'éclairage de cette lampe notée  $T$  (on rappelle que  $\ln(10) \approx 2,3$ ). Conclure.

## Réponse

D'après l'énoncé, la lampe éclaire tant que  $u_d > U_s + 0,1 \text{ V}$  ① ; or, d'après le schéma de la question 5,  $u_d = u_C$  ①.

La condition d'éclairage est donc

$$\begin{aligned}
 \cancel{U_S} + (U_0 - U_S)e^{-t/\tau'} &\stackrel{\textcircled{1}}{>} \cancel{U_S} + 0,1 \text{ V} \\
 \Rightarrow (U_0 - U_S)e^{-T/\tau'} &= 0,1 \text{ V} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} T \text{ la limite} \\
 \Leftrightarrow e^{-T/\tau'} &= \frac{0,1 \text{ V}}{U_0 - U_S} \\
 \Leftrightarrow \frac{-T}{\tau'} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \ln \frac{0,1 \text{ V}}{U_0 - U_S} \quad \left( \ln(\cdot) \right) \\
 \Leftrightarrow T &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \tau' \ln \frac{U_0 - U_S}{0,1 \text{ V}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{l} \tau' = rC \\ r = 2 \Omega \\ C = 10 \text{ F} \\ U_0 - U_S = 1,0 \text{ V} \end{array} \right. \\
 \text{A.N. : } T &\stackrel{\textcircled{1}}{\approx} 46 \text{ s}
 \end{aligned}$$

On est très loin des 20 minutes annoncée!  $\textcircled{1}$

- /3  $\boxed{10}$  Exprimer, en fonction de  $U_0$  et de  $U_f = U_S + 0,1 \text{ V}$ , le pourcentage d'énergie restante dans le condensateur lorsque la DEL cesse d'émettre de la lumière par rapport à l'énergie initiale accumulée (on ne cherche pas à la calculer, mais on estime ici ce pourcentage à environ 50 %).

Réponse

On a

$$\begin{aligned}
 \mathcal{E}_C(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{2} C u_C(t)^2 \\
 \Rightarrow \mathcal{E}_{C,i} &= \frac{1}{2} C U_0^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{C,f} = \frac{1}{2} C U_f^2 \\
 \Rightarrow p &\stackrel{\textcircled{1}}{=} 100 \times \frac{\mathcal{E}_{C,f}}{\mathcal{E}_{C,i}} \Leftrightarrow p \stackrel{\textcircled{1}}{=} 100 \times \frac{U_f^2}{U_0^2}
 \end{aligned}$$

## /65 P3 Guirlandes électriques

Dans ce problème, on cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlande électriques  $G_1$  et  $G_2$ , chacune étant modélisée par un conducteur ohmique de résistance identique  $R_1 = R_2 = R$ .

La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée avec un interrupteur  $S$  en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement.

On supposera dans ce problème que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

### III/A Système de base

On considère dans un premier temps le circuit ci-contre alimenté par un générateur réel de f.e.m.  $E$  et de résistance interne  $r$ . Les expressions demandées ne feront intervenir que  $E, r$  et  $R$ .

On considère que l'interrupteur  $S$  est ouvert (Figure 2.21).

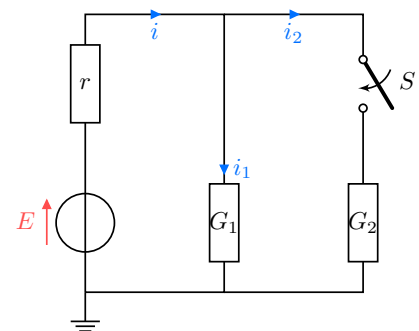


FIGURE 2.21

- /2  $\boxed{1}$  Quelle est la puissance reçue  $\mathcal{P}_{2,o}$  par la seconde guirlande  $G_2$  ?

Réponse

L'intensité  $i_2$  est alors nulle  $\textcircled{1}$ , donc  $\mathcal{P}_{2,o} = 0$ .  $\textcircled{1}$

- /6 [2] Établir l'expression du courant  $i_o$  passant à travers le générateur. En déduire que la puissance électrique  $\mathcal{P}_{1,o}$  reçue par la guirlande  $G_1$  s'exprime :

$$\mathcal{P}_{1,o} = R \left( \frac{E}{r + R} \right)^2$$

### Réponse

Le circuit est équivalent à :

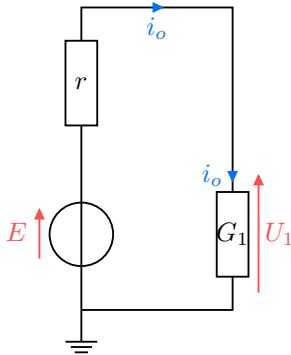


FIGURE 2.22 – ①

La loi des mailles donne :

$$E \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_o(r + R) \Rightarrow i_o \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{r + R}$$

Or, d'après la loi d'OHM,  $U_1 = Ri_o$  ①.

D'où la puissance reçue par  $G_1$  :

$$\mathcal{P}_{1,o} \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_o U_1 \stackrel{\textcircled{1}}{=} R \left( \frac{E}{r + R} \right)^2$$



On considère désormais que l'interrupteur  $S$  est fermé.

- /5 [3] Établir l'expression du courant  $i_f$  passant à travers le générateur.

### Réponse

Les deux guirlandes sont en dérivation.

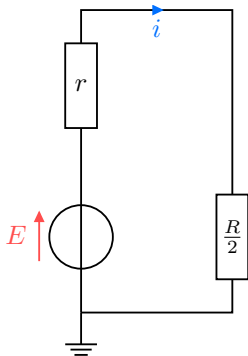


FIGURE 2.23 – ①

On peut les remplacer par une résistance équivalente :

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \Leftrightarrow R_{\text{eq}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R}{2}$$

La loi des mailles donne :

$$E \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_f \left( r + \frac{R}{2} \right) \Rightarrow i_f \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{r + \frac{R}{2}}$$



- /3 [4] À l'aide d'un pont diviseur de courant, déterminer les expressions de  $i_{1,f}$  et  $i_{2,f}$ .

### Réponse

Pour  $i_{k,f}$  découlant de  $i_f$ , avec  $R_{\text{eq}}$  la résistance équivalente en parallèle et  $R_k$  la résistance dans la branche, on a

$$i_{k,f} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{R_{\text{eq}}}{R_k} i_f \quad \text{soit} \quad i_{k,f} = \frac{R/2}{R} i_f$$

d'où

$$i_{1,f} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{2r + R} = i_{2,f}$$

① pour un schéma.



- /2 [5] En déduire que les puissances  $\mathcal{P}_{1,f}$  et  $\mathcal{P}_{2,f}$  reçues par les deux guirlandes s'expriment :

$$\mathcal{P}_{1,f} = \mathcal{P}_{2,f} = R \left( \frac{E}{2r + R} \right)^2$$

## Réponse

On a simplement

$$\mathcal{P}_{k,f} \stackrel{\textcircled{1}}{=} Ri_{k,f} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{1,f} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{P}_{2,f} = R \left( \frac{E}{2r + R} \right)^2}$$

Comparaisons des 2 situations.

- /3 6 La puissance reçue par la première guirlande est-elle identique dans les deux situations étudiées ( $S$  ouvert et fermé)? Sachant qu'elle ne doit pas clignoter, est-ce un problème? Expliquer.

## Réponse

On a :

$$\mathcal{P}_{1,o} = R \left( \frac{E}{r + R} \right)^2 \stackrel{\textcircled{1}}{\neq} \mathcal{P}_{1,f} = R \left( \frac{E}{2r + R} \right)^2$$

La guirlande 1 va donc se mettre à clignoter  $\textcircled{1}$ , puisque la puissance lumineuse qu'elle émet varie périodiquement. Ce montage ne **satisfait donc pas le cahier des charges**.  $\textcircled{1}$

- /3 7 Comment doit-on choisir  $r$  par rapport à  $R$  pour limiter le problème? Cette condition est-elle vérifiée pour  $r = R = 1\Omega$ ?

## Réponse

Pour limiter cet effet, il faut que  $r \ll R$   $\textcircled{1}$ . Dans ce cas, on peut négliger  $r$  devant  $R$ , et il vient

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} \approx \mathcal{P}_{1,f} \approx R \left( \frac{E}{R} \right)^2}$$

Ce n'est pas le cas avec les valeurs données dans l'énoncé.  $\textcircled{1}$

## III/B Système amélioré

On considère maintenant le circuit ci-dessous afin de limiter la variation de puissance électrique reçue par la première guirlande, donc la variation du courant  $i_1$ .

Une bobine d'inductance  $L$  a donc été ajoutée en série avec la première guirlande. L'interrupteur  $S$  est ouvert de manière périodique pour  $t \in [0; \frac{T}{2}[$  et fermé pour  $t \in [\frac{T}{2}; T[$ .

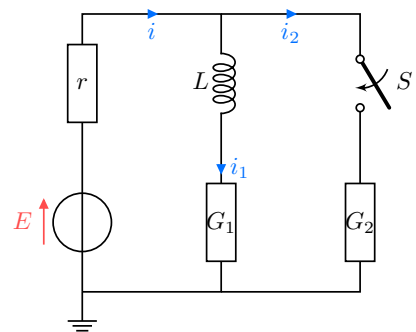


FIGURE 2.24

- /2 8 En régime stationnaire (permanent continu), donner le schéma équivalent du nouveau montage.

## Réponse

En régime stationnaire, la bobine est équivalente à un fil électrique  $\textcircled{1}$ . Le montage est donc équivalent à celui de la partie précédente.  $\textcircled{1}$

On se place juste avant la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire en  $t = \frac{T}{2}^-$ , et on admet que le régime stationnaire a été atteint.

- /3 9 Déterminer la valeur de  $i_1 \left( \frac{T}{2}^- \right)$ . En déduire la valeur de  $i_1 \left( \frac{T}{2}^+ \right)$ .

## Réponse

Puisque le montage est équivalent à celui de la partie précédente, on sait que :

$$i_1 \left( \frac{T}{2}^- \right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{r + R}$$

Or, le courant traversant une bobine est continu  $\textcircled{1}$ , soit

$$i_1 \left( \frac{T}{2}^- \right) = i_1 \left( \frac{T}{2}^+ \right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{r + R}$$

/5 [10] Déterminer les valeurs de  $i_2\left(\frac{T^-}{2}\right)$  et  $i_2\left(\frac{T^+}{2}\right)$ .

### Réponse

L'interrupteur étant ouvert, on a :

$$i_2\left(\frac{T^-}{2}\right) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$$

Une fois l'interrupteur fermé, la loi des mailles à  $t = \frac{T^+}{2}$  donne :

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\textcircled{1}}{=} r i + R i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) \\ \Leftrightarrow E &= r\left(i_1\left(\frac{T^+}{2}\right) + i_2\left(\frac{T^+}{2}\right)\right) + R i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) && \left. \begin{array}{l} \textcircled{1} i = i_1 + i_2 \\ \text{On isole} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E - r i_1\left(\frac{T^+}{2}\right)}{r + R} && \left. \begin{array}{l} \text{On remplace} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) &= \frac{E - r\left(\frac{E}{r+R}\right)}{r + R} && \left. \begin{array}{l} \text{On simplifie} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} E \frac{R}{(r + R)^2} \end{aligned}$$



On considère l'intervalle  $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ , lorsque l'interrupteur est ouvert.

/5 [11] Établir l'équation différentielle dont  $i_1$  est solution sur l'intervalle  $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ . On fera apparaître un temps caractéristique  $\tau_o$  en fonction de  $L$ ,  $r$  et  $R$ .

### Réponse

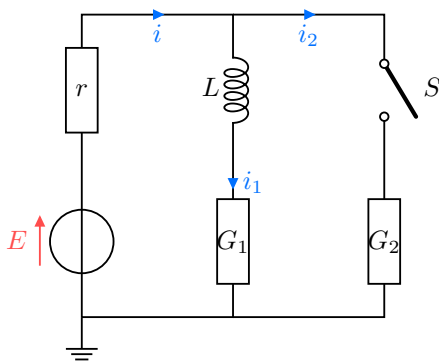


FIGURE 2.25 – ①

Loi des mailles :

$$\begin{aligned} E &\stackrel{\textcircled{1}}{=} r i_1 + u_L + R i_1 \\ \Leftrightarrow L \frac{di_1}{dt} + (r + R) i_1 &= E \\ \Leftrightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1(t) \textcircled{1} E}{\tau_o} &= \frac{E}{L} \quad \text{avec} \quad \tau_o \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{L}{r + R} \end{aligned}$$

$\left. \begin{array}{l} u_L \stackrel{\textcircled{1}}{=} L \frac{di_1}{dt} \\ \text{Canonique} \end{array} \right\}$



On s'intéresse maintenant à l'intervalle  $\left[\frac{T}{2}; T\right]$ , lorsque l'interrupteur est fermé.

/8 [12] Montrer que  $i_1$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)} \quad \text{avec} \quad \tau_f = \frac{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{2r + R}$$

### Réponse

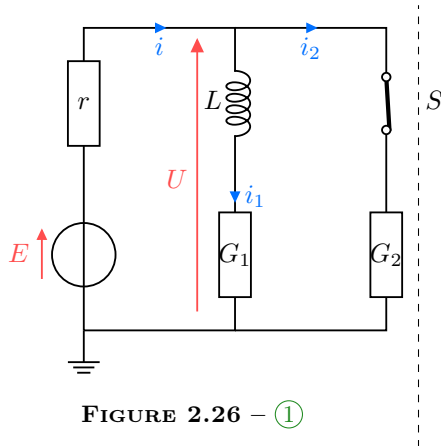


FIGURE 2.26 – ①

Loi des mailles et loi des nœuds :

$$E \stackrel{\textcircled{1}}{=} r_1 i + R i_1 + L \frac{di_1}{dt}$$

$$\Leftrightarrow E = r(i_1 + i_2) + R i_1 + L \frac{di_1}{dt} \quad \left. \vphantom{\frac{di_1}{dt}} \right\} i \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_1 + i_2$$

Or, avec les branches en parallèle,

$$R i_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} R i_1 + L \frac{di_1}{dt} \Rightarrow i_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} i_1 + \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt}$$

D'où en combinant :

$$E \stackrel{\textcircled{1}}{=} r \left( i_1 + i_1 + \frac{L}{R} \frac{di_1}{dt} \right) + R i_1 + L \frac{di_1}{dt}$$

$$\Leftrightarrow E = i_1 (2r + R) + L \left( 1 + \frac{r}{R} \right) \frac{di_1}{dt}$$

$$\Leftrightarrow \frac{di_1}{dt} + \frac{i_1(t) \textcircled{1}}{\tau_f} = \frac{E}{L \left( 1 + \frac{r}{R} \right)} \quad \text{avec} \quad \tau_f = \frac{\textcircled{1} L \left( 1 + \frac{r}{R} \right)}{2r + R}$$

On simplifie  
Canonique

/7 13 Donner la forme générale  $i_1(t)$  de la solution de cette équation différentielle. On ne cherchera pas à déterminer la constante intervenant dans la solution.

#### Réponse

La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière ①. Or, pour la solution homogène, en injectant  $i_{1,h}(t) = Ae^{rt}$  ① on obtient :

$$r + \frac{1}{\tau_f} = 0 \Leftrightarrow r \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{1}{\tau_f} \quad \text{soit} \quad i_{1,h}(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} Ae^{-\frac{t}{\tau_f}}$$

De plus, avec  $i_{1,p}$  la solution particulière constante, on trouve

$$\frac{i_{1,p}}{\tau_f} = \frac{E}{L \left( 1 + \frac{r}{R} \right)} \Leftrightarrow i_{1,p} \stackrel{\textcircled{1}}{=} E \frac{\cancel{L} \left( 1 + \frac{r}{R} \right)}{(2r + R) \cancel{L} \left( 1 + \frac{r}{R} \right)}$$

$$\Leftrightarrow i_{1,p} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{E}{2r + R}$$

Ainsi,

$$i_1(t) \stackrel{\textcircled{1}}{=} Ae^{-\frac{t}{\tau_f}} + \frac{E}{2r + R}$$

On étudie expérimentalement les variations du courant  $i_1(t)$  en mesurant la tension aux bornes de la guirlande  $G_1$  à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant (Figure 2.27) pour deux valeurs différentes de l'inductance  $L$ . La résistance  $R$  vaut  $2 \Omega$  et la résistance  $r$  vaut  $1 \Omega$ .

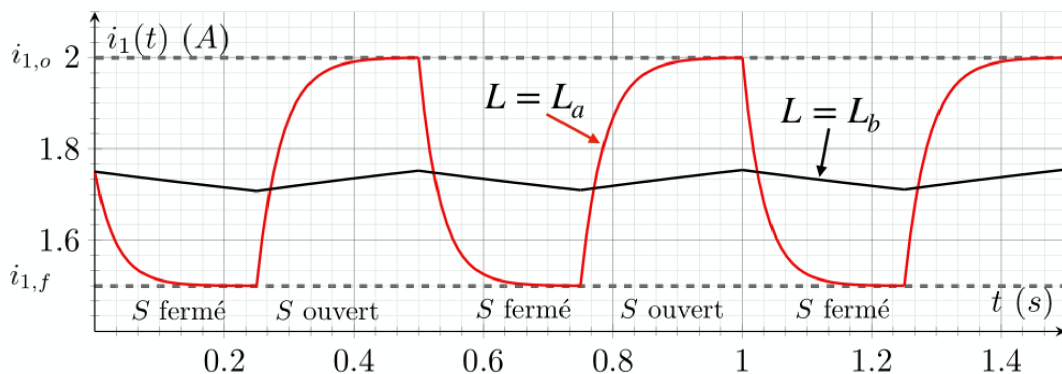


FIGURE 2.27

- /2 [14] Parmi les deux bobines d'inductance  $L_a$  et  $L_b$ , laquelle permet d'atteindre le régime stationnaire mentionné dans les questions [8] à [10] ?

**Réponse**

Il s'agit de la bobine  $L_a$  ①, puisque la charge de la bobine a le temps de se faire entièrement. ①

- /5 [15] Retrouver, par lecture graphique, la valeur de  $L_a$ . Reproduire sommairement sur votre copie la Figure ?? et indiquer la construction à effectuer.

**Réponse**

Le temps  $\tau_f$  correspond au temps nécessaire pour réaliser 63% de la décharge de la bobine ①. À partir du point de bascule en  $t = 1$  s, 63% de la décharge correspond à une intensité de 1,69 A, ce qui s'atteint pour  $t_1 = 1,033$  s ; ainsi,

$$\tau_f = 33 \text{ ms} \text{ ①} \quad \text{et} \quad L_a = \tau_f \frac{2r + R}{1 + \frac{r}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = 1 \, \Omega \\ R = 2 \, \Omega \end{cases} \quad \text{A.N. : } L_a = 88 \text{ mH} \text{ ①}$$

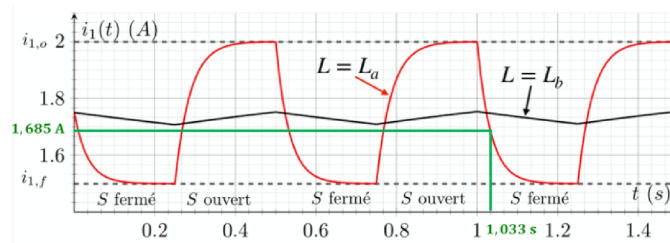


FIGURE 2.28 – ①

On peut également réaliser une tangente au point de bascule, et trouver l'intersection avec l'asymptote  $i_1(t) = i_{1,f}$ .

- /2 [16] Justifiez que  $L_b \gg L_a$ , sans chercher à déterminer sa valeur.

**Réponse**

Le temps caractéristique du régime transitoire avec  $L_b$  est très supérieur devant celui avec  $L_a$  ①, d'où  $L_b \gg L_a$ . ①

- /2 [17] Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi  $L_a$  et  $L_b$  pour minimiser les variations de puissance reçue par la première guirlande ?

**Réponse**

Il s'agit de  $L_b$ , ① car l'intensité  $i_1(t)$  ne varie presque pas ① (et il en va de même pour la tension  $U$ ).