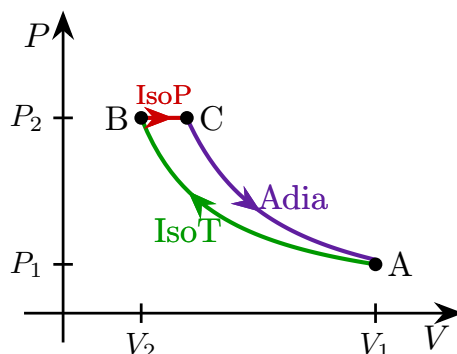


Correction du TD



I Cycle de transformation

1)



2)

TABLEAU 3.1 – Expressions de U , W_p et Q pour le gaz parfait diatomique

Transfo.	Énergie interne	Travail pression	Transfert thermique
AB isoT.	$\Delta U_{AB} = 0$	$W_{AB} = -nRT_A \ln \frac{V_B}{V_A} = 5,1 \text{ kJ}$	$Q = -W_{AB} = -5,1 \text{ kJ}$
BC isoP.	$\Delta U_{BC} = C_V(T_C - T_B)$	$W_{BC} = \Delta U_{BC} - Q_{BC} = -1,7 \text{ kJ}$	$Q_{BC} = \Delta H_{BC} = C_P(T_C - T_B) = 5,9 \text{ kJ}$
CA adia.	$\Delta U_{CA} = C_V(T_A - T_C)$	$W_{CA} = \Delta U_{CA} = -4,2 \text{ kJ}$	$Q = 0$

3) $W_{\text{cycle}} < 0$: c'est un moteur.

II Échauffement d'une bille en mouvement dans l'air


 $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$; $c = 0,4 \text{ kJ}\cdot\text{kg}^{-1}$; $v_0 = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}$; $h = 5 \text{ m}$.
1) Système = {bille} dans $\mathcal{R}_{\text{terre}}$ supposé galiléen. Seule force subie est le poids. Avec $\dot{z}(0) = v_0$ et $z(0) = 0$:

$$\ddot{z} = -g \Rightarrow \dot{z} = -gt + v_0 \Rightarrow z = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0t$$

Altitude maximale quand $\dot{z}(t_{\text{max}}) = 0 \Leftrightarrow t_{\text{max}} = \frac{v_0}{g}$, soit

$$h_0 = z(t_{\text{max}}) = \frac{v_0^2}{2g}$$

2) L'énergie mécanique de la bille, sans frottement, est constante, et en utilisant l'énergie au maximum d'altitude s'écrit $E_{m,0} = mgh_0$. Avec frottement, son énergie n'est **plus constante**, mais à son maximum d'altitude on a $E_m = mgh$.

La différence entre ces énergie est égale à l'énergie perdue par frottement avec l'air, soit le travail reçu de l'air :

$$W_f = E_{m,0} - E_m = mg(h_0 - h)$$

Or, la moitié de cette énergie est évacuée dans l'air, tandis que l'autre moitié est emmagasinée sous forme d'énergie interne de la bille. Ainsi,

$$\Delta U = \frac{1}{2}mg(h_0 - h) \Leftrightarrow mc\Delta T = \frac{1}{2}mg(h_0 - h)$$

$$\Leftrightarrow \Delta T = \frac{g}{2c}(h_0 - h)$$

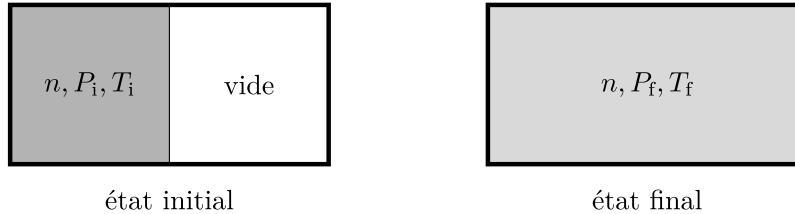
étant donné que la bille est supposée incompressible et indilatable, et qu'elle suit donc la première loi de JOULE.

- 3) On trouve $h_0 \approx 5,097 \text{ m}$, soit $\Delta T \approx 1,2 \text{ mK}$.



III Détente de JOULE GAY-LUSSAC

- 1) On a le schéma suivant :



Pour le système entier, la transformation est **isochore** car parois indéformables, et **adiabatique** car calorifugées.

- 2) Pour le système {gaz}, on a $Q = 0$ puisqu'il n'y a pas de transfert thermique avec l'extérieur ou avec le vide. De plus, $W_p = 0$ puisqu'il n'y a pas de force de pression exercée par l'extérieur sur le système. Il n'y a pas d'autres travaux. Ainsi, avec le premier principe,

$$\Delta U = W + Q \Leftrightarrow \Delta U = 0$$

Ce résultat **ne dépend pas du gaz**, qu'il soit réel ou non, puisqu'il dépend des propriétés de son environnement uniquement.

- 3) Comme le gaz est parfait, il suit la première loi de JOULE, donc

$$\Delta U = C_V \Delta T \Rightarrow \Delta T = 0 \Leftrightarrow T_f = T_i$$

- 4) Le volume exclu b est simple à interpréter : il traduit qualitativement l'**effet du volume occupé par les atomes** du gaz, et qui n'est donc pas accessible à leur mouvement. Le terme de cohésion lui traduit l'**existence de forces de VAN DER WAALS attractives** entre les atomes de dioxygène. Ces forces attractives ont pour effet une diminution de la pression au sein du gaz, ce que traduit bien l'équation d'état :

$$P^{\text{GP}} = P^{\text{vdW}} + \frac{an^2}{V^2} \Leftrightarrow P^{\text{vdW}} = P^{\text{GP}} - \frac{an^2}{V^2} < P^{\text{GP}}$$

Pour les unités, on trouve

$$[a] = \text{Pa} \cdot \text{m}^6 \cdot \text{mol}^{-2} = \text{J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2} \quad \text{et} \quad [b] = \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-1}$$

Le coefficient $C_{V,m}$ est la **capacité thermique molaire à volume constant** du gaz de VAN DER WAALS,

$\left. \frac{\partial U}{\partial T} \right|_{n,V} = n \cdot C_{V,m}$. C'est l'énergie qu'il faut apporter à 1 mol du gaz pour augmenter sa température de 1 K.

- 5) Avec l'expression de U donnée, comme la transformation reste isoénergétique on trouve

$$\begin{aligned} \Delta U &= nC_{V,m}(T_2 - T_i) + an^2 \left(\frac{1}{V_1} - \frac{1}{V_1 + V_2} \right) = 0 \\ \Leftrightarrow T_2 &= T_i + \frac{an}{C_{V,m}} \left(\frac{1}{V_1 + V_2} - \frac{1}{V_1} \right) \end{aligned}$$

- 6)

$$\underline{\Delta T = -5,06 \text{ K}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = 0,80 \text{ mol} \\ a = 1,32 \text{ J} \cdot \text{m}^3 \cdot \text{mol}^{-2} \\ C_{V,m} = 21 \text{ J} \cdot \text{K} \cdot \text{mol}^{-1} \\ V_1 = V_2 = 5,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$$



IV Calorimétrie du fer

- 1) a – On a une transformation monobare, avec un état d'équilibre initial et final. On peut donc appliquer le premier principe enthalpique, avec $W_u = 0$: $\Delta H = Q$. Or, on néglige les échanges thermiques avec l'extérieur, soit $Q = 0$. Ainsi,

$$\Delta H = 0$$

- b – On évalue la variation d'enthalpie en séparant les contributions des différentes parties du système :

$$\begin{aligned} \Delta H &= \Delta H_{\text{eau froide}} + \Delta H_{\text{eau chaude}} + \Delta H_{\text{calo}} \\ \Leftrightarrow 0 &= mc(T_0 - T_f) + mc(T_1 - T_f) + C(T_0 - T_f) \\ \Leftrightarrow C &= mc \left(\frac{T_1 - T_f}{T_0 - T_f} - 1 \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 100 \times 10^{-3} \text{ kg} \\ T_0 = 293 \text{ K} \\ T_1 = 353 \text{ K} \\ T_f = 316,6 \text{ K} \\ c = 4,18 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\text{A.N. : } C = 226 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1}$$

c –

$$C = m_0 c \Leftrightarrow m_0 = \frac{C}{c} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 226 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \\ c = 4,18 \text{ J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } m_0 = 54 \text{ g}$$

- d – En réalité, $Q \neq 0$, il y a des fuites thermiques. Ainsi, si on attend longtemps, on ne peut plus considérer le système comme isolé, et la température finale sera la température extérieure :

$$T_f \xrightarrow[t \rightarrow \infty]{} T_0$$

- 2) a – On peut toujours appliquer le premier principe enthalpique, mais cette fois on a $W_u \neq 0$:

$$\Delta H = W_u + \underbrace{Q}_{=0} \Leftrightarrow \Delta H = W_{\text{généré}}$$

Or,

$$\mathcal{P} = \frac{W_{\text{généré}}}{\tau} \Leftrightarrow W_{\text{généré}} = \mathcal{P}\tau$$

De plus

$$\Delta H = \Delta H_{\text{eau}} + \Delta H_{\text{fer}} + \Delta H_{\text{calo}}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{P}\tau = (T'_f - T_0)(mc + m_f c_f + C)$$

$$\Leftrightarrow m_f c_f = \frac{\mathcal{P}\tau}{T'_f - T_0} - mc - C$$

$$\Leftrightarrow c_f = \frac{\mathcal{P}\tau}{m_f(T'_f - T_0)} - c \frac{m}{m_f} - \frac{C}{m_f}$$

- b – On effectue l'application numérique :

$$c_f = 467 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{kg}^{-1}$$



V Transformation polytropique

- 1) $\diamond k = 0 \Rightarrow P = \text{cte}$ donc **isobare** ;
 $\diamond k = 1 \Rightarrow PV = \text{cte} = nRT$ donc **isotherme** ;
 $\diamond K = +\infty \Rightarrow V = \text{cte}$ donc **isochore** (sinon toute infime variation de volume entraîne des effets infinis).
- 2) Par définition, on a tout au long de la transformation $PV^k = P_0 V_0^k$, soit $P = P_0 (V_0/V)^k$. Si de plus la transformation est quasi-statique, c'est-à-dire mécaniquement réversible donc que l'équilibre mécanique est atteint tout au long de la

transformation, on aura $P = P_{\text{ext}}$. Le travail reçu entre les états est donc :

$$\begin{aligned}
 W &= - \int_{V_0}^{V_1} P \, dV \\
 \Leftrightarrow W &= - \int_{V_0}^{V_1} P_0 V_0^k \frac{dV}{V^k} \\
 \Leftrightarrow W &= -P_0 V_0^k \frac{V_1^{1-k} - V_0^{1-k}}{1-k} \\
 \Leftrightarrow W &= -\frac{1}{1-k} (P_1 V_1 - P_0 V_0) \\
 \Leftrightarrow W &= \frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0)
 \end{aligned}
 \left. \begin{array}{l} P_0 V_0^k = P_1 V_1^k \\ P_1 V_1^k V_1^{1-k} = P_1 V_1 \\ PV = nRT \end{array} \right\}$$

3)

$$\begin{aligned}
 \Delta U &= W + Q \Leftrightarrow Q = \Delta U - W \Leftrightarrow Q = C_V \Delta T - \frac{nR}{k-1} \Delta T \\
 \Leftrightarrow Q &= nR \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) (T_1 - T_0)
 \end{aligned}$$

4) $\diamond k = 0$ donne par le calcul :

$$Q = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} = C_P \Delta T$$

Or, $k = 0 \Rightarrow$ isobare, donc

$$\begin{aligned}
 \Delta H &= \underbrace{W_u}_0 + Q \\
 \Leftrightarrow C_P \Delta T &= Q
 \end{aligned}$$

On retrouve bien la même chose.

$\diamond k = 1$ donne une forme indéterminée mathématiquement, ce qui implique qu'on ait $\Delta T = 0$ pour la réalité physique : c'est cohérent avec le résultat précédent de transformation isotherme.

$\diamond k \rightarrow \infty$ donne

$$Q = C_V \Delta T \Leftrightarrow \Delta U = C_V \Delta T$$

ce qui est effectivement la relation connue pour un gaz parfait.

5) $k = \gamma$ donne $\boxed{Q = 0}$: c'est une transformation **adiabatique**.



VI Comparaison entre transformations

1) Le système considéré est le gaz et l'enceinte autour. On s'intéresse à une transformation brusque. Le système n'a pas le temps d'échanger de l'énergie sous forme de transfert thermique avec l'extérieur : la transformation peut donc être considérée comme **adiabatique**. En revanche, comprimer un gaz rapidement le rend plus chaud (comme dans une pompe à vélo). La température du gaz va varier, la transformation **ne** sera donc **pas** isotherme.

On ne peut rien dire sur T_1 . On peut s'attendre à ce qu'elle soit supérieure à T_0 puisque l'on comprime rapidement le gaz.

2) À l'état 1, le système est à l'équilibre mécanique. La pression qui s'exerce sur le piston est alors la somme de la pression atmosphérique plus celle de la masse posée sur la section S du piston. On en déduit que :

$$P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

3) Puisque cette transformation est considérée comme adiabatique :

$$\boxed{Q_{I \rightarrow 1} = 0}$$

La transformation qu'il subit est monobare : tout au long de cette transformation, la pression extérieure est celle exercée par le piston sur le gaz qui est constante (la masse M est déposée en bloc). Ainsi,

$$W_{I \rightarrow 1} = -P_{\text{ext}} \Delta V \Leftrightarrow W_{I \rightarrow 1} = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_1 - V_I)$$

Comme le gaz est parfait, il suit la première loi de JOULE, donc

$$\Delta U_{I \rightarrow 1} = C_V \Delta T \Leftrightarrow \boxed{\Delta_{I \rightarrow 1} U = \frac{5}{2} nR(T_1 - T_I)}$$

D'après le premier principe appliqué au système pendant la transformation $I \rightarrow 1$:

$$\Delta U_{I \rightarrow 1} = W_{I \rightarrow 1} \Leftrightarrow \boxed{\frac{5}{2} nR(T_1 - T_I) = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_1 - V_0)}$$

- 4) La pression P_1 est déjà connue. Pour déterminer la température T_1 , on peut remplacer les volumes par $V_i = nRT_i/P_i$ dans l'expression du premier principe. Sachant que l'état initial est un état d'équilibre, on a $T_I = T_0$ et, **sans la masse**, $P_I = P_0$. Ainsi, on trouve

$$\begin{aligned} \frac{5}{2} nR(T_1 - T_I) &= -nRP_1 \left(\frac{T_1}{P_1} - \frac{T_I}{P_I} \right) & \text{donc} & \quad \boxed{T_1 = \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I} \right) T_I} \\ \Leftrightarrow \underbrace{\frac{nRT_1}{P_1 V_1}}_{P_1 V_1} &= \frac{2}{7} \left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I} \right) \underbrace{\frac{nRT_0}{P_0 V_0}}_{P_0 V_0} & \Leftrightarrow & \quad \boxed{V_1 = \frac{2}{7} \left(\frac{5P_0}{2P_1} + 1 \right) V_0} \end{aligned}$$

- 5) On a négligé les transfert d'énergie thermique entre le gaz et l'extérieur.

Cette transformation peut alors être qualifiée de **monobare** et **monotherme** (la température et la pression de l'extérieur ne varient pas). On peut aussi considérer que cette transformation est **isobare** car, comme la **transformation est lente**, le système sera à chaque instant à l'équilibre mécanique avec l'extérieur.

- 6) Dans l'état final, l'équilibre est complètement atteint : il y a équilibre thermique et mécanique. D'après la question précédente :

$$\boxed{T_2 = T_0} \quad \text{et} \quad \boxed{P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

Le volume occupé par le gaz est imposé par la loi du gaz parfait :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}}}$$

- 7) Le travail des forces de pression a cours de $1 \rightarrow 2$ se calcule comme précédemment :

$$W_{1 \rightarrow 2} = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_1)$$

et on a
$$\Delta U_{1 \rightarrow 2} = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)$$

Le transfert thermique reçu s'obtient alors par

$$\begin{aligned} Q_{1 \rightarrow 2} &= \Delta U_{1 \rightarrow 2} - W_{1 \rightarrow 2} \\ &= \frac{5}{2} nR \left(\underbrace{T_2}_{=T_0} - T_1 \right) + \underbrace{\left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_1)}_{=-W_{I \rightarrow 1}} \\ &\Leftrightarrow \boxed{Q_{1 \rightarrow 2} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0)} \end{aligned}$$

Finalement, le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque valent :

$$W_{\text{tot}} = - \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0) \quad \text{et} \quad Q_{\text{tot}} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S} \right) (V_2 - V_0)$$

Ainsi, on a évidemment $W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$: en effet, dans l'état I et l'état final 2, le gaz est en équilibre thermique avec l'extérieur à T_0 ; or $\Delta U = C_V \Delta T$ donc $\Delta U = W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$!

- 8) On la dit **quasi-statique**. On peut supposer qu'elle laisse largement le temps aux échanges thermiques d'avoir lieu, si bien que l'équilibre thermique est atteint à tout instant. Par conséquent, on peut considérer la transformation **isotherme** : $T = T_0$.

9) Dans l'état final F , la masse placée sur le piston est exactement la même que dans le cas précédent : on en déduit

$$P_F = P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}$$

et comme par ailleurs $T_F = T_0 = T_2$, avec la loi du gaz parfait on a également $V_F = V_2$. Ainsi, **les états finaux sont les mêmes**. Cela n'a rien d'étonnant : les équilibres thermique et mécanique sont établis dans les 2 états, et les contraintes extérieures (masse M , pression P_0 et température T_0) sont les mêmes.

10) La transformation étant quasi-statique, on a $P = P_{\text{ext}}$, soit

$$W = - \int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}} dV = - \int_{V_i}^{V_f} P dV$$

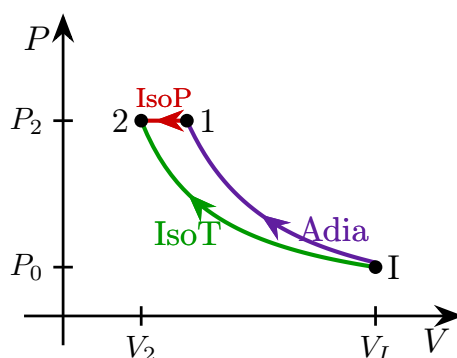
$$\Leftrightarrow W = -nRT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{dV}{V} \Leftrightarrow \boxed{W = -nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

Par ailleurs, la transformation étant isotherme on a $\Delta U = C_V \Delta T = 0$, et avec le premier principe

$$\Delta U = W + Q \Leftrightarrow Q = -W \quad \text{soit} \quad \boxed{Q = nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

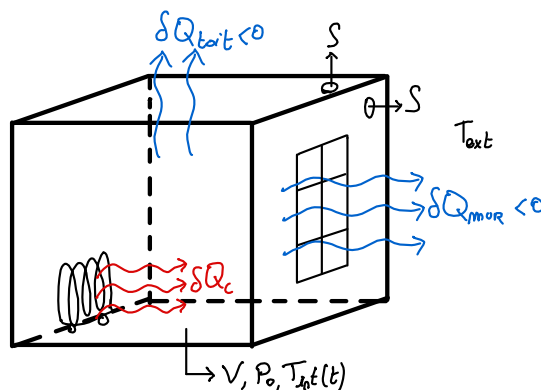
On voit ainsi que les deux transformations ont les mêmes états initial et final, donc la même variation d'énergie interne, alors que les échanges d'énergie ne sont pas les mêmes.

11)



★★ VII Chauffage d'une chambre

1)



2)

$$P_0 V = nRT_c \Leftrightarrow \boxed{n = \frac{P_0 V}{RT_c}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_0 = 1 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 36 \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ T_c = 292 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. : $n = 1,5 \times 10^3 \text{ mol}$

Par définition,

$$C_{V,m} = \frac{C_V}{n} \Leftrightarrow \boxed{C_V = nC_{V,m}} \Rightarrow \underline{C_V = 31 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}}$$

- 3) Le volume de la chambre étant fixé, il n'y a pas de W_p . Si la température est constante, c'est que le radiateur **compense les pertes**, et on a que $dU = C_V dT = 0$. Ainsi, avec le premier principe,

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_c + \delta Q_{\text{toit}} + \delta Q_{\text{mur}} \\ \Leftrightarrow 0 &= \mathcal{P}_c dt - \mathcal{P}_{\text{toit}} dt - \mathcal{P}_{\text{mur}} dt & \left. \begin{array}{l} \delta Q_{\text{toit}} < 0 \\ \delta Q_{\text{mur}} < 0 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_c &= \mathcal{P}_{\text{toit}} + \mathcal{P}_{\text{mur}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{P}_c &= (g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S(T_c - T_{\text{ext}}) & \text{avec} \quad \begin{cases} g_{\text{toit}} = 0,50 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \\ g_{\text{mur}} = 2,90 \text{ W} \cdot \text{m}^{-2} \cdot \text{K}^{-1} \\ S = 12 \text{ m}^2 \\ T_c = 292 \text{ K} \\ T_{\text{ext}} = 283 \text{ K} \end{cases} \\ \text{A.N. : } \mathcal{P}_c &= 3,7 \times 10^2 \text{ W} \end{aligned}$$



Remarque 3.1 : Remarque

Les expressions de \mathcal{P}_{mur} et $\mathcal{P}_{\text{toit}}$ montrent qu'il n'y a logiquement pas de fuite si $T_{\text{int}} = T_{\text{ext}}$, et que \mathcal{P}_{mur} et $\mathcal{P}_{\text{toit}} \propto S$ puisque plus la surface est grande plus il y a de fuite. Cela se retrouve dans l'unité donnée.

- 4) On a encore $dV = 0 \Rightarrow \delta W_p = 0$, et il n'y a que les pertes thermiques puisqu'on a coupé le chauffage. Ainsi,

$$\begin{aligned} dU &= \sum_i dQ_i \\ \Leftrightarrow C_V dT_{\text{int}} &= -(\mathcal{P}_{\text{toit}} + \mathcal{P}_{\text{mur}}) dt \\ \Leftrightarrow C_V \frac{dT_{\text{int}}}{dt} &= -(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S(T_{\text{int}} - T_{\text{ext}}) \\ \Leftrightarrow \frac{dT_{\text{int}}}{dt} + \frac{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S}{C_V} T_{\text{int}} &= \frac{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S}{C_V} T_{\text{ext}} \\ \Leftrightarrow \frac{dT_{\text{int}}}{dt} + \frac{T_{\text{int}}}{\tau} &= \frac{T_{\text{ext}}}{\tau} & \text{avec} \quad \tau = \frac{C_V}{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S} \Rightarrow \tau = 7,6 \times 10^2 \text{ s} \approx 13 \text{ min} \end{aligned}$$

5)

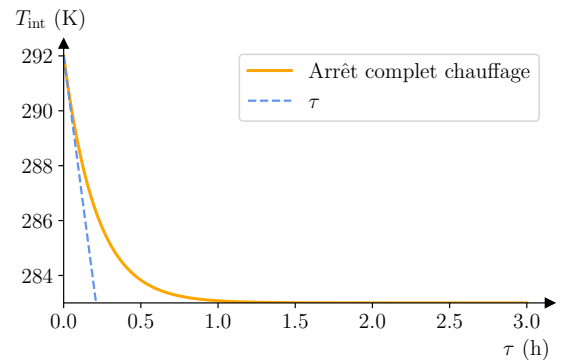
Solution particulière : $T_{\text{int,p}} = T_{\text{ext}}$

Solution homogène : $T_{\text{int,h}} = K e^{-t/\tau}$

Solution totale : $T_{\text{int}}(t) = T_{\text{int,p}} + T_{\text{int,h}} = T_{\text{ext}} + K e^{-t/\tau}$

Condition initiale : $T_{\text{int}}(0) = T_c$
 $\Leftrightarrow T_c = T_{\text{ext}} + K$
 $\Leftrightarrow K = T_c - T_{\text{ext}}$

Solution finale : $\Leftrightarrow T_{\text{int}}(t) = T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}})e^{-t/\tau}$



On a une exponentielle décroissante avec $\tau \approx 13$ min. Or, au bout de $t \approx 5\tau$ on sait que la solution particulière est atteinte, donc au bout de $t \approx 1$ h la chambre a complètement refroidi. Quand on revient après 3 h, il fait donc 10°C dans la chambre.

- 6) On rallume le chauffage, d'où

$$\begin{aligned} dU &= \delta Q_{c,\text{max}} + \sum_i \delta Q_i \\ \Leftrightarrow \frac{dT_{\text{int}}}{dt} + \frac{T_{\text{int}}}{\tau} &= \frac{T_{\text{ext}}}{\tau} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{C_V} \end{aligned}$$

Pour résoudre, on prend $t = t_1$ comme origine des temps, donc on écrira la solution initiale $T_{\text{int}}(0) = T_{\text{ext}}$ au lieu de $T_{\text{int}}(t_1) = T_{\text{ext}}$.

Solution particulière : $T_{\text{int,p}} = T_{\text{ext}} + \frac{\tau}{C_V} \mathcal{P}_{c,\text{max}} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{(g_{\text{toit}} + g_{\text{mur}})S} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}})$

Solution homogène : $T_{\text{int,h}} = K' e^{-t/\tau}$

Solution totale : $T_{\text{int}}(t) = T_{\text{int,p}} + T_{\text{int,h}} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} (T_c - T_{\text{ext}}) + K' e^{-t/\tau}$

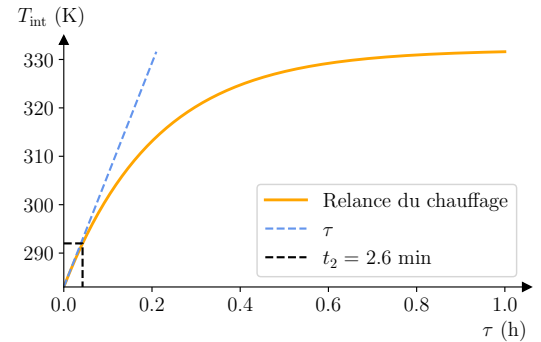
Condition initiale : $T_{\text{int}}(0) = T_{\text{ext}}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cancel{T_{\text{ext}}} &= \cancel{T_{\text{ext}}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(T_c - T_{\text{ext}}) + K' \\ \Leftrightarrow K' &= -\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(T_c - T_{\text{ext}}) \end{aligned}$$

Solution finale : $\Leftrightarrow T_{\text{int}}(t) = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(T_c - T_{\text{ext}})(1 - e^{-t/\tau})$

7) On trouve bien une exponentielle croissante. On trouve alors t_2 avec :

$$\begin{aligned} T_{\text{int}}(t_2) &= T_c \\ \Leftrightarrow T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(T_c - T_{\text{ext}})(1 - e^{-t_2/\tau}) &= T_c \\ \Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(\cancel{T_c} - \cancel{T_{\text{ext}}})(1 - e^{-t_2/\tau}) &= (\cancel{T_c} - \cancel{T_{\text{ext}}}) \\ \Leftrightarrow 1 - e^{-t_2/\tau} &= \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_{c,\text{max}}} \\ \Leftrightarrow e^{-t_2/\tau} &= 1 - \frac{\mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_{c,\text{max}}} \\ \Leftrightarrow -\frac{t_2}{\tau} &= \ln\left(\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}} - \mathcal{P}_c}{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}\right) \\ \Leftrightarrow t_2 &= \tau \ln\left(\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_{c,\text{max}} - \mathcal{P}_c}\right) \end{aligned}$$



8) \diamond **On garde le chauffage** : A.N. : $t_2 = 1,5 \times 10^2 \text{ s} = 2,6 \text{ min}$
 pendant $\Delta t_{02} \approx 3 \text{ h} = 1,1 \times 10^4 \text{ s}$, on chauffe à la puissance $\mathcal{P}_c = 3,7 \times 10^2 \text{ W}$, soit

$$Q_{\text{garde}} = \mathcal{P}_c \Delta t_{02} \Rightarrow Q_{\text{garde}} = 4,0 \text{ MJ} \Leftrightarrow Q_{\text{garde},\text{€}} = 0,30 \text{ €}$$

\diamond **On éteint puis on rallume au maximum** : on chauffe donc à $\mathcal{P}_{c,\text{max}} = 2,0 \text{ kW}$ pendant $\Delta t_{12} = 1,5 \times 10^2 \text{ s}$, soit

$$Q_{\text{rechauffe}} = \mathcal{P}_{c,\text{max}} \Delta t_{12} \Rightarrow Q_{\text{rechauffe}} = 3,1 \times 10^{-1} \text{ MJ} \Leftrightarrow Q_{\text{rechauffe},\text{€}} = 0,023 \text{ €}$$

9) Ainsi, pour une telle durée d'attente, il vaut mieux couper le chauffage !

Solution particulière : $T_{\text{int},p} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(T_c - T_{\text{ext}})$

Solution homogène : $T_{\text{int},h} = K'' e^{-t/\tau}$

Solution totale : $T_{\text{int}}(t) = T_{\text{int},p} + T_{\text{int},h} = T_{\text{ext}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(T_c - T_{\text{ext}}) + K'' e^{-t/\tau}$

Condition initiale : $T_{\text{int}}(t_1) = T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}})e^{-t_1/\tau}$

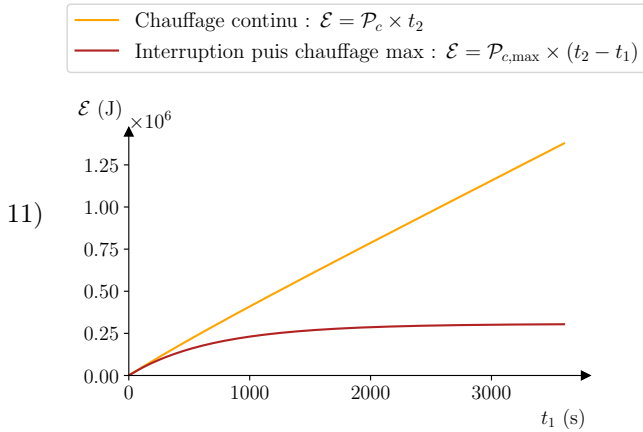
$$\begin{aligned} \Leftrightarrow \cancel{T_{\text{ext}}} + \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c}(T_c - T_{\text{ext}}) + K'' e^{-t_1/\tau} &= \cancel{T_{\text{ext}}} + (T_c - T_{\text{ext}})e^{-t_1/\tau} \\ \Leftrightarrow K'' e^{-t_1/\tau} &= (T_c - T_{\text{ext}}) \left[e^{-t_1/\tau} - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} \right] \\ \Leftrightarrow K'' &= (T_c - T_{\text{ext}}) \left[1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right] \end{aligned}$$

Solution finale : $\Leftrightarrow T_{\text{int}}(t) = T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}}) \left[\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) \right]$

10)

$$\begin{aligned} T_{\text{int}}(t_2) &= T_c \\ \Leftrightarrow T_{\text{ext}} + (T_c - T_{\text{ext}}) \left[\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t_2/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) \right] &= T_c \\ \Leftrightarrow (\cancel{T_c} - \cancel{T_{\text{ext}}}) \left[\frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t_2/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\text{max}}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) \right] &= (\cancel{T_c} - \cancel{T_{\text{ext}}}) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\Leftrightarrow \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} + e^{-t/\tau} \left(1 - \frac{\mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c} e^{t_1/\tau} \right) = 1 \\
&\Leftrightarrow \mathcal{P}_{c,\max} + e^{-t_2/\tau} (\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max} e^{t_1/\tau}) = \mathcal{P}_c \\
&\Leftrightarrow e^{-t_2/\tau} (\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max} e^{t_1/\tau}) = \mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max} \\
&\Leftrightarrow e^{-t_2/\tau} = \frac{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max} e^{t_1/\tau}} \\
&\Leftrightarrow -\frac{t_2}{\tau} = \ln \left(\frac{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max}}{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max} e^{t_1/\tau}} \right) \\
&\Leftrightarrow t_2 = \tau \ln \left(\frac{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max} e^{t_1/\tau}}{\mathcal{P}_c - \mathcal{P}_{c,\max}} \right)
\end{aligned}$$



On observe que la méthode de **maintenir le chauffage** est **toujours pire** que le fait de l'arrêter, même si c'est pour le relancer avec une plus grande puissance. Il n'y a que pour $t_1 \rightarrow 0$ que les deux méthodes sont semblables. Ainsi, **il vaut toujours mieux couper le chauffage en sortant !**