/21 E1 Toboggans

Les toboggans font aujourd'hui partie des incontournables d'un centre aquatique. De nombreux toboggans présentent des enroulements plus ou moins complexes.

On étudie le toboggan présenté ci-contre et composé d'un enroulement hélicoïdal d'approximativement $n = 2{,}3$ tours. Le rayon moyen est estimé à $R = 2{,}0\,\mathrm{m}$ et la hauteur de l'ensemble est $h = 4\,\mathrm{m}$.

On néglige les frottements. On note $\theta > 0$ la position angulaire d'une baigneuse dans le toboggan relativement à la position de départ, d'altitude h.

FIGURE 1 – Illustration.

Une baigneuse de masse m suit la trajectoire d'équation $r = R$, $z = \alpha\theta$, l'axe $(z'z)$ étant orienté selon la **verticale descendante**.

/2 **1** Déterminer la valeur de α.

Réponse

$$h = z_{\max} \Leftrightarrow h = \alpha \times n \times 2\pi \Leftrightarrow \boxed{\alpha \overset{(1)}{=} \frac{h}{2\pi n}} \Leftrightarrow \underline{\alpha \overset{(1)}{=} 0{,}28\,\mathrm{m{\cdot}rad^{-1}}}$$

◇

/2 **2** Sachant qu'on oriente l'axe vertical descendant, quelle est l'expression générale de l'énergie potentielle de pesanteur $\mathcal{E}_{p,p}$ en fonction de z ?

Réponse

L'énergie doit diminuer quand z augmente (1) (de haut en bas), donc

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,p} \overset{(1)}{=} -mgz + \overset{(1)}{\mathrm{cte}}}$$

◇

/4 **3** Calculer la valeur de la vitesse atteinte en sortie du toboggan, le départ se faisant sans vitesse initiale.

Réponse

Les frottements sont négligés, donc l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ se conserve (1) :

$$\mathcal{E}_{m,\text{init}} \overset{(1)}{=} \mathcal{E}_{m,\text{fin}}$$

Or $$\mathcal{E}_{m,\text{init}} = \frac{1}{2}mv_{\text{init}}^2 - mgz_{\text{init}} = 0 + 0 \quad \overset{(1)}{\text{et}} \quad \mathcal{E}_{m,\text{fin}} = \frac{1}{2}mv_{\text{fin}}^2 - mgh$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_{\text{fin}} \overset{(1)}{=} \sqrt{2gh}}$$

◇

Afin d'éviter d'éventuelles collisions, le toboggan est équipé au point de départ d'un feu qui passe au vert toutes les t_f secondes. On impose une marge de $t_m = 5\,\mathrm{s}$ en plus de la durée de parcours dans le toboggan.

/2 **4** Exprimer le vecteur vitesse dans la base cylindrique en fonction de R, α et $\dot{\theta}$.

Réponse

Le vecteur position est (avec les notations habituelles) :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{(1)}{=} R\,\overrightarrow{e_r} + z\,\overrightarrow{e_z} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\,\overrightarrow{e_r} + \alpha\theta\,\overrightarrow{e_z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{v} \overset{(1)}{=} R\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_\theta} + \alpha\dot{\theta}\,\overrightarrow{e_z}}$$

◇

/2 $\boxed{5}$ Exprimer l'énergie mécanique de la baigneuse en fonction de m, g, R, α et $\dot{\theta}$.

Réponse

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \overset{(1)}{=} \frac{1}{2}m\left[(R\dot{\theta})^2 + (\alpha\dot{\theta})^2\right] \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_p = -mgz + K \overset{(1)}{=} -mg\alpha\theta + K.$$

$$\Rightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\left[(R\dot{\theta})^2 + (\alpha\dot{\theta})^2\right] - mg\alpha\theta + K}$$

◇

/6 $\boxed{6}$ Dériver cette expression et en déduire, après résolution de l'équation obtenue, l'expression de $\theta(t)$.

Réponse

Puisqu'il n'y a pas de frottement, l'énergie mécanique se conserve dans le temps, donc $\mathrm{d}\mathcal{E}_m/\mathrm{d}t = 0$ (1) :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Leftrightarrow m\left[(R^2\dot{\theta}\ddot{\theta}) + (\alpha^2\dot{\theta}\ddot{\theta})\right] - mg\alpha\dot{\theta} = 0$$

$\dot{\theta} \neq 0$ constamment

$$\Leftrightarrow \boxed{(R^2+\alpha^2)\ddot{\theta} - g\alpha \overset{(1)}{=} 0}$$

On trouve : $\ddot{\theta} = \dfrac{g\alpha}{R^2+\alpha^2} \quad \Rightarrow \quad \dot{\theta} = \dfrac{g\alpha}{R^2+\alpha^2}t + K_1 \quad \Rightarrow \quad \theta(t) \overset{(1)}{=} \dfrac{g\alpha}{2(R^2+\alpha^2)}t^2 + K_1 t + K_2.$

On peut trouver les valeurs des constantes d'intégrations en utilisant les conditions initiales :

$$\dot{\theta}(0) = 0 \quad \theta(0) = 0 \quad \Rightarrow \quad K_1 = K_2 = 0 \text{ (1)}$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) \overset{(1)}{=} \frac{g\alpha}{2(R^2+\alpha^2)}t^2}.$$

◇

/3 $\boxed{7}$ Calculer t_f. On prendra $g = 9{,}8\,\mathrm{m/s^2}$.

Réponse

En inversant la relation précédente : $\boxed{t \overset{(1)}{=} \sqrt{\dfrac{2\theta(R^2+\alpha^2)}{g\alpha}}}$

La valeur de θ lorsque la baigneuse sort du toboggan est $\theta_{\max} = 2\pi \times n$. On a alors :

$$\boxed{t_f \overset{(1)}{=} t_m + \sqrt{\frac{4n\pi(R^2+\alpha^2)}{g\alpha}}} \Leftrightarrow \underline{t_f \overset{(1)}{=} 11{,}5\,\mathrm{s}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n = 2{,}3 \\ R = 2{,}0\,\mathrm{m} \\ \alpha = 0{,}28\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \\ g = 9{,}8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \end{cases}$$

◇