Sujet 1 – corrigé

I Plasma ionosphérique ($\star$)

L'ionosphère est considérée comme un plasma dilué neutre contenant une densité d'électrons non relativistes avec $n = 1{,}0 \times 10^{12}\,\mathrm{m^{-3}}$. Soit une onde électromagnétique incidente $\vec{E}_\mathrm{i} = E_0 e^{j(\omega t - kz)}\vec{e}_x$ qui se réfléchit à l'interface entre l'atmosphère et l'ionosphère en $z = 0$: $\vec{E}_\mathrm{r} = E_{0\mathrm{r}} e^{j(\omega t + kz)}\vec{e}_x$ et qui se transmet aussi: $\vec{E}_\mathrm{t} = E_{0\mathrm{t}} e^{j(\omega t - k'z)}\vec{e}_x$.

Données: $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$, $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$, $\epsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F \cdot m^{-1}}$.

1) Rappeler pourquoi on peut négliger la composante magnétique de la force de Lorentz agissant sur les électrons. Déterminer la vitesse des électrons et le vecteur densité de courant.

Réponse

La force de Lorentz sur un électron est

$$\vec{F} = -e\left(\vec{E} + \vec{v} \wedge \vec{B}\right) \qquad \text{donc} \qquad \frac{|\vec{v} \wedge \vec{B}|}{|\vec{E}|} \approx \frac{v}{c}$$

Donc on pourra négliger la composante magnétique de la force de Lorentz devant la composante électrique si $\frac{v}{c} \ll 1$ donc pour des électrons non relativistes, ce qui est le cas ici.

Appliquons le PFD au système électron(m,-e) dans le référentiel terrestre supposé galiléen:

$$m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2}\vec{e}_x = -eE\vec{e}_x$$

On a une équation différentielle donc la solution en régime permanent est obtenue en se plaçant en complexe:

$$\boxed{\underline{v} = -\frac{e}{jm\omega}\underline{E}}$$

On en déduit le vecteur densité de courant:

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = -ne\underline{\vec{v}} = \frac{ne^2}{jm\omega}\underline{\vec{E}}}$$

En notant la pulsation plasma $\omega_\mathrm{p} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}}$, on a finalement en notant $\underline{\gamma}$ la conductivité complexe du milieu:

$$\boxed{\underline{\vec{j}} = \underline{\gamma}\underline{\vec{E}} \qquad \text{avec} \qquad \underline{\gamma} = \frac{\epsilon_0 \omega_\mathrm{p}^2}{j\omega}}$$

◇

2) Déterminer l'équation de propagation du champ électrique dans l'ionosphère. En déduire la relation de dispersion. On introduira la pulsation de plasma ω_p.

Réponse

L'ionosphère est neutre donc la densité volumique de charge $\rho = 0$. Les équations de Maxwell s'écrivent donc:

$$\begin{cases} div\vec{E} = 0 \\ div\vec{B} = 0 \\ \overrightarrow{rot}\vec{E} = -\dfrac{\partial \vec{B}}{\partial t} \\ \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0\vec{j} + \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \vec{E}}{\partial t} \end{cases}$$

D'après la relation $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}\vec{E}\right) = \overrightarrow{grad}\left(div\vec{E}\right) - \vec{\Delta}\vec{E}$, on en déduit l'équation de propagation:

$$\boxed{\vec{\Delta}\underline{\vec{E}} - \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\underline{\vec{E}}}{\partial t^2} = \mu_0\underline{\gamma}\frac{\partial\underline{\vec{E}}}{\partial t}}$$

On en déduit l'équation de dispersion en remplaçant l'onde plane $\vec{E}_{\mathrm{t}} = E_{0\mathrm{t}}e^{j(\omega t-k'z)}\vec{e}_x$ solution de l'équation de propagation:

$$-k'^2 + \frac{\omega^2}{c^2} = \mu_0\underline{\gamma}j\omega = \frac{\omega_{\mathrm{p}}^2}{c^2} \tag{17.1}$$
$$soit \tag{17.2}$$
$$\boxed{k'^2 = \frac{\omega^2 - \omega_{\mathrm{p}}^2}{c^2}} \tag{17.3}$$

---

3) Soit une onde incidente de fréquence 168 kHz. Peut-elle se propager ? Même question pour une onde de 100 MHz.

Réponse

L'onde ne pourra se propager dans l'ionosphère que si k' a une partie réelle non nulle. Or k'^2 est un réel:

- positif si $\omega > \omega_{\mathrm{p}}$ donc k' réel positif;
- négatif si $\omega < \omega_{\mathrm{p}}$ donc k' imaginaire pur.

Or $\omega_{\mathrm{p}} = \sqrt{\frac{ne^2}{m\epsilon_0}} = \sqrt{\frac{1{,}0\times10^{12}\times1{,}6\times10^{-19\,2}}{9{,}1\times10^{-31}\times8{,}85\times10^{-12}}} = 5{,}6\times10^7\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}}$ soit une fréquence plasma $f_{\mathrm{p}} = 9{,}0\,\mathrm{MHz}$

- si $f = 168\,\mathrm{kHz} < 9{,}0\,\mathrm{MHz}$, k' est imaginaire pur donc on n'aura pas de propagation;
- si $f = 100\,\mathrm{MHz} > 9{,}0\,\mathrm{MHz}$, k' est réel donc on aura propagation du signal dans l'ionosphère;

---

4) Dans le cas d'une propagation dans le milieu plasma, donner les relations entre E_0, $E_{0\mathrm{r}}$ et $E_{0\mathrm{t}}$. En déduire $\underline{r} = \frac{E_{0\mathrm{r}}}{E_0}$ et le cœfficient de réflexion en puissance R.

Réponse

Le champ électrique dans le milieu incident est la superposition du champ incident et du champ réfléchi:

$$\vec{E}_{\mathrm{inc}} = \vec{E} + \vec{E}_{\mathrm{r}} \tag{17.4}$$
$$\vec{E}_{\mathrm{inc}} = \left(E_0e^{j(\omega t-kz)} + E_{0\mathrm{r}}e^{j(\omega t+kz)}\right)\vec{e}_x \tag{17.5}$$

Le champ électrique dans le milieu plasma s'écrit:

$$\vec{E}_{\mathrm{t}} = E_{0\mathrm{t}}e^{j(\omega t-k'z)}\vec{e}_x$$

Par continuité du champ à l'interface $z = 0$, on a:

$$E_0 + E_{0\mathrm{r}} = E_{0\mathrm{t}}$$

On fait de même pour le champ magnétique $\vec{B} = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}}{\omega}$ lorsque le champ $\vec{E}$ est une onde plane.
Le champ magnétique dans le milieu incident est la superposition du champ incident et du champ réfléchi:

$$\vec{B}_{\mathrm{inc}} = \vec{B} + \vec{B}_{\mathrm{r}} \tag{17.6}$$
$$\vec{B}_{\mathrm{inc}} = \left(\frac{k}{\omega}E_0e^{j(\omega t-kz)} - \frac{k}{\omega}E_{0\mathrm{r}}e^{j(\omega t+kz)}\right)\vec{e}_y \tag{17.7}$$

Le champ magnétique dans le milieu plasma s'écrit:

$$\vec{B}_\mathrm{t} = \frac{k'}{\omega} E_{0\mathrm{t}} e^{j(\omega t - k' z)} \vec{e}_y$$

Par continuité du champ à l'interface $z = 0$, on a:

$$E_0 - E_{0\mathrm{r}} = \frac{k'}{k} E_{0\mathrm{t}}$$

En notant $\underline{r} = \frac{E_{0\mathrm{r}}}{E_0}$ le cœfficient de réflexion en amplitude de champ électrique, on a à résoudre le système:

$$\begin{cases} 1 + \underline{r} = \underline{t} \\ 1 - \underline{r} = \frac{k'}{k} \underline{t} \end{cases}$$

On obtient:

$$\boxed{\underline{r} = \frac{k - k'}{k + k'} = \frac{\omega - \sqrt{\omega^2 - \omega^2}}{\omega + \sqrt{\omega^2 - \omega^2}}}$$

Pour le cœfficient de réflexion en puissance, on a $R = \frac{|\langle \vec{\Pi}_\mathrm{r}(0,t) . \vec{e}_z \rangle|}{|\langle \vec{\Pi}_\mathrm{i}(0,t) . \vec{e}_z \rangle|}$ avec $\left\langle \vec{\Pi} \right\rangle = \frac{1}{2} Re \left(\underline{\vec{E}} \wedge \frac{\underline{\vec{B}}^*}{\mu_0} \right)$ donc on trouve:

$$\boxed{R = r^2}$$

Sujet 2 – corrigé

I Recherche des modes propres acoustiques d'un tuyau ($\star\star$)

La colonne d'air contenue dans un instrument à vent (flûte, clarinette…) ou dans un tuyau d'orgue vibre selon des modes propres correspondant à des conditions limites données.

Dans une modélisation très simple, on envisage deux types de conditions :

- si l'extrémité du tuyau est **ouverte**, la surpression acoustique, notée $P(x,t)$, **est nulle**à cette extrémité; (la pression est imposée par l'extérieur)
- si l'extrémité du tuyau est **fermée**, l'amplitude de variation de la surpression acoustique $P(x,t)$ est **maximale**à cette extrémité.

On considère un tuyau de longueur L dans lequel la célérité des ondes sonores est notée v.

1) Détermine les fréquences des modes propres du tuyau lorsque ses deux extrémités sont **ouvertes**. Représentez graphiquement la surpression dans le tuyau pour le troisième mode, les modes étant classés par fréquence croissante.

Réponse

$L = n\frac{\lambda}{2}$ donc $f = n\frac{c}{2L}$

◇

2) Même question si l'une des deux extrémités du tuyau est ouverte et l'autre fermée.

Réponse

$L = n\frac{\lambda}{2} + \frac{\lambda}{4} = \frac{c}{2f}\left(n+\frac{1}{2}\right)$ donc $f = \frac{c}{2L}\left(n+\frac{1}{2}\right)$.

◇

3) Première application : les grands orgues peuvent produire des notes très graves. Calculez la longueur d'onde d'un son de fréquence 34 Hz, en prenant la valeur de la célérité du son à 0°C dans l'air, soit $v = 331$ m/s. Calculez la longueur minimale d'un tuyau produisant cette note (considérez pour cela les configurations des questions 1)et 2)).

Réponse

$\lambda = c/f = 331/34 = 9{,}7\,\text{m}$. La longueur minimale est $L = \frac{\lambda}{4} = 2{,}4\,\text{m}$.

◇

4) Deuxième application : on peut modéliser très grossièrement une clarinette par un tube fermé au niveau de l'embouchure et ouvert à l'extrémité de l'instrument. Expliquez pourquoi le son produit par une clarinette ne comporte que des harmoniques impairs.

Réponse

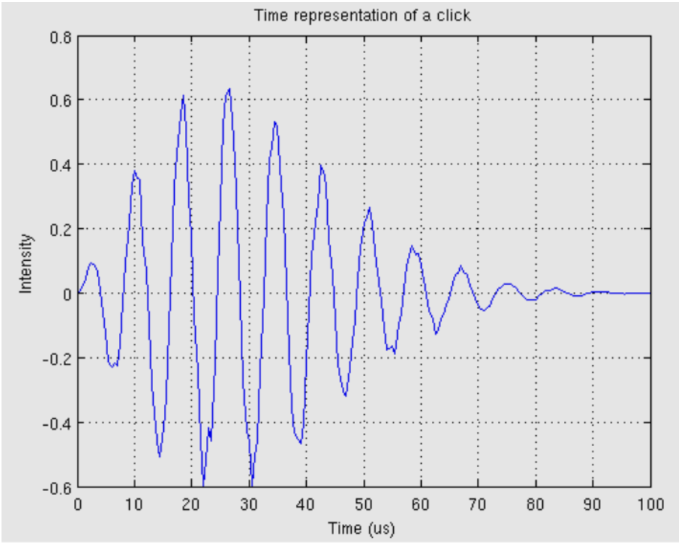
on est dans le cas (b) de la première question, le premier harmonique est pour $n = 0$ et le 2e pour $n = 1$ vaut 3 fois le premier et ainsi de suite à cause du $n + \frac{1}{2}$: quand n augmente de 1, la fréquence augmente de $2f_0$

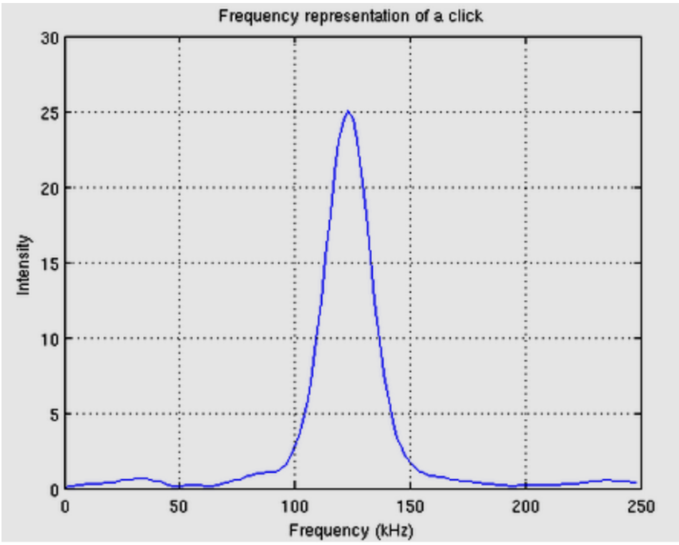
◇

Sujet 3 – corrigé

I Clic d'un dauphin

Le graphe représente l'enregistrement d'un 'clic' d'écholocation émis par un dauphin.





1) Vérifier la cohérence entre les deux graphes ci-dessus.

Réponse

On mesure sur la courbe temporelle une période d'environ $70/8 = 8{,}75$ μs, ce qui correspond à une fréquence de 114 kHz.
Sur le spectre on observe un pic à 125 kHz. Les deux valeurs ne correspondent pas exactement mais semblent compatibles, et correspondent bien à des ultrasons.

◇

2) Rappeler l'expression du niveau sonore en dB pour une onde sonore plane progressive harmonique en fonction de l'amplitude de la surpression, de l'impédance acoustique du milieu considéré, et de l'intensité de référence I_0.

Réponse

Considérons une OPPH dont la surpression est donnée par $p(x,t) = p_m \cos(\omega t - kx)$. L'onde de vitesse

associée est $v = p/Z_a$. La densité de courant d'énergie est définie par $\Pi = pv = p^2/Z_a$, et sa valeur moyenne $I = p_m^2/(2Z_a)$ est l'intensité acoustique.
Le niveau sonore en dB est

$$I_{dB} = 10 \log \frac{I}{I_0} = 10 \log \frac{p_m^2}{2Z_a I_0}$$

◇

3) L'impédance acoustique de l'eau salée est de l'ordre de 1,5 10^6 U.S.I. et l'intensité acoustique de référence est $I_0 = 10^{-12}$ W/m^2. L'intensité sonore d'un clic peut atteindre 200 dB très près du dauphin. Calculer la surpression associée. L'approximation acoustique est-elle valide ?

Réponse

Pour $I_{dB} = 200$ dB, on a $I = I_0.10^{20} = 10^8$ W/m^2. On en déduit $p_m = \sqrt{2Z_a 10^8} = \sqrt{2.1{,}5.10^6.10^8} = 1{,}7.10^7$ Pa. Cette suppression est supérieure à la pression au repos, l'approximation acoustique n'est pas valable !

◇

4) A une distance de 100 m, l'intensité perçue est plus faible. Quelle en est la raison ?

Réponse

La puissance s'étale sur une plus grande surface. On pourrait modéliser cela par une onde sphérique.

◇

5) L'impédance acoustique de l'atmosphère vaut 420 U.S.I. Pourquoi un marin sur une barque n'entend-il pas le clic du dauphin ?

Réponse

Les impédances ne sont pas adaptées, donc le coefficient de réflexion en puissance est proche de 1.

◇