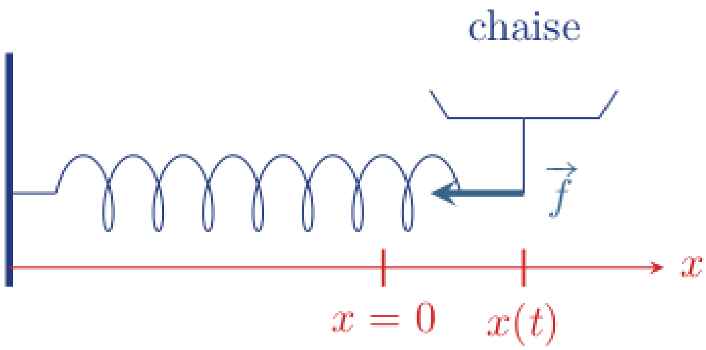
Sujet 1 – corrigé

I Mesurer la masse d'un astronaute sur l'ISS

Les astronautes passant plusieurs mois dans la station spatiale internationale (ISS) doivent se soumettre à des bilans de santé très réguliers, et en particulier vérifier qu'ils ne perdent ni ne prennent de poids. Néanmoins, l'absence de gravité rend les balances terrestres inopérantes dans l'espace. Pour permettre des pesées malgré cela, un dispositif original a été développé par l'agence spatiale russe, dont une photographie est présentée ci-contre.
Il s'agit d'une chaise de masse $m_0 = 25{,}0\,\text{kg}$ attachée à l'extrémité d'un ressort. L'autre extrémité du ressort est attachée à un point fixe de la station. On note L_0 la longueur à vide du ressort et k sa constante de raideur. La position de la chaise est repérée par son point d'attache au ressort, le long d'un axe (Ox) dont l'origine est définie telle que le point d'attache de la chaise se trouve en $x = 0$ lorsque la longueur du ressort est égale à sa longueur à vide.
On cherche dans un premier temps à mesurer la constante de raideur k du ressort. Pour cela, la chaise **vide** est mise en mouvement et on mesure la période $T_0 = 1{,}28\,\text{s}$ de ses oscillations.

1. Faire un schéma de la balance inertielle incluant l'axe (Ox) et la position $x = 0$.
   Réponse :



2. Effectuer un bilan des forces qui s'exercent sur la balance et les placer sur le schéma précédent.
   Réponse :
   La chaise n'est soumise qu'une une seule force : celle de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(l - l_0)\vec{e}_x = -kx(t)\vec{e}_x$.

3. Établir l'équation différentielle vérifiée par la position $x(t)$ de la chaise.
   Réponse :
   On peut donc appliquer la loi de la quantité de mouvement projetée sur l'axe (Ox) sur la chaise de masse m_0 dans le référentiel de l'ISS considéré comme galiléen :

$$m_0 \frac{d^2x}{dt^2} = -kx(t) \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_0}x(t) = 0}.$$

4. Comment appelle-t-on cette équation différentielle ?
   Réponse :
   Il s'agit de l'équation de l'$\boxed{\text{oscillateur harmonique}}$.

5. Donner la forme générale des solutions de cette équation différentielle (on ne cherchera pas à déterminer les constantes).
Réponse :
Les solutions de cette équation différentielle sont de la forme :

$$\boxed{x(t) = x_0 \cos(\omega_0 t + \varphi)} \qquad ; \qquad \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_0}},$$

et où x_0 et φ dépendent des conditions initiales.

6. En déduire que la constante de raideur k s'exprime en fonction de la période T_0 et de la masse m_0 par

$$k = 4\pi^2 \frac{m_0}{T_0^2}.$$

Réponse :
La chaise oscille donc à une pulsation ω_0, c'est-à-dire à une période :

$$T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{k = 4\pi^2 \frac{m_0}{T_0^2}}.$$

7. Calculer sa valeur numérique. On donne $\left(\frac{\pi}{1{,}28}\right)^2 \approx 6{,}023573$, laissant à l'étudiant le soin de choisir le bon nombre de chiffres significatifs.
Réponse :
Numériquement, en ne gardant que 3 chiffres significatifs, on trouve :

$$k = 4\pi^2 \frac{25{,}0\,\mathrm{kg}}{(1{,}28\,\mathrm{s})^2} = 10^2 \frac{\pi^2}{1{,}28^2} \cdot \mathrm{N/m} = \boxed{602 \cdot \mathrm{N/m}}.$$

On s'intéresse maintenant à la pesée proprement dite d'un astronaute dont on veut déterminer la masse m_{ast}. Celui-ci s'assoit sur la chaise et la met en mouvement. Les oscillations ont alors pour période $T_{\text{ast}} = 2{,}56$s.

8. Donner, sans calcul, l'équation différentielle vérifiée par la position du point d'attache de la chaise lorsqu'un astronaute est assis.
Réponse :
L'équation différentielle est la même que celle de la question 1) en remplaçant m_0 par $m_{\text{ast}} + m_0$:

$$\boxed{\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{k}{m_0 + m_{\text{ast}}} x(t) = 0}.$$

9. En déduire que la masse de l'astronaute vaut :

$$m_{\text{ast}} = m_0 \left[\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0} \right)^2 - 1 \right].$$

Réponse :
La période d'oscillation est alors :

$$T_{\text{ast}} = 2\pi \sqrt{\frac{m_0 + m_{\text{ast}}}{k}} \qquad \Rightarrow \qquad T_{\text{ast}}^2 = T_0^2 + \frac{(2\pi)^2 m_{\text{ast}}}{\left(\frac{4\pi^2 m_0}{T_0^2}\right)} = T_0^2 \left(1 + \frac{m_{\text{ast}}}{m_0}\right).$$

On trouve alors le résultat désiré :

$$\boxed{m_{\text{ast}} = m_0 \left[\left(\frac{T_{\text{ast}}}{T_0} \right)^2 - 1 \right]}.$$

10. Calculer sa valeur numérique.
Réponse :
Numériquement :

$$m_{\text{ast}} = 25{,}0\,\mathrm{kg} \times \left[\left(\frac{2{,}56\,\mathrm{s}}{1{,}28\,\mathrm{s}} \right)^2 - 1 \right] = 25{,}0\,\mathrm{kg} \times 3 = \boxed{75{,}0\,\mathrm{kg}}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Énergie de l'oscillateur harmonique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

On suppose qu'il n'y a aucun phénomène dissipatif : l'énergie mécanique est donc constante.

Formules trigonométriques. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$ et $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$

1. En utilisant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

   Réponse :
   Puisque l'énergie mécanique est constante, il suffit de la dériver par rapport au temps :

   $$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\omega_0^2 x\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 x + \ddot{x} = 0.$$

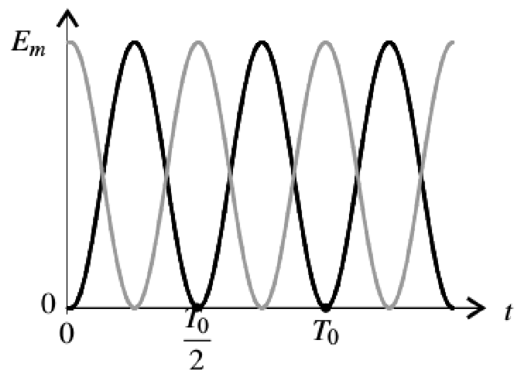
2. On suppose que $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de m, ω_0, A et $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$. Vérifier que l'énergie mécanique est bien constante.
   Réponse :
   On trouve :

   $$E_c(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left(1-\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right) \quad ; \quad E_p(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left(1+\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right).$$

   L'énergie mécanique est bien constante :

   $$E_m = E_p + E_c = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}.$$

3. Tracer sur un même graphe les courbes donnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction du temps. Quelle est la fréquence de variation de ces énergies ?
   Réponse :
   Les énergies oscillent avec une pulsation de $2\omega_0$, donc une fréquence de ω_0/π.



Sujet 3 – corrigé

I Vibration d'une molécule

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8{,}5 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. On donne les masse atomiques molaires : $M_{\mathrm{H}} = 1{,}0\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$ et $M_{\mathrm{Cl}} = 35{,}5\,\mathrm{g}\cdot\mathrm{mol}^{-1}$, ainsi que le nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\,\cdot\mathrm{mol}^{-1}$.
On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un "ressort" de raideur k.

Données numériques. $(1{,}7\pi)^2/6{,}02 \approx 4{,}738065$, $\sqrt{\frac{6{,}63\times6{,}02\times10}{34\pi^2}} \approx 1{,}09060$ et $2\pi \times 8{,}5 \times 1{,}09 \approx 58{,}2136997$.

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.

   Réponse :
   La masse de l'atome de chlore est beaucoup plus grande que celle d'un atome d'hydrogène.

2. Exprimer puis calculer k.
   Réponse :
   La fréquence d'oscillation d'un oscillateur harmonique est :
   $$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_{\mathrm{H}}}} \qquad ; \qquad m_{\mathrm{H}} = \frac{M_{\mathrm{H}}}{N_A},$$
   donc
   $$\boxed{k = (2\pi f)^2 \times \frac{M_{\mathrm{H}}}{N_A}} = \frac{(1{,}7\pi)^2}{6{,}02} \times 10^{28-3-23} = \boxed{4{,}7 \times 10^2\,\mathrm{N}\cdot\mathrm{m}^{-1}}$$

On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}$ est la constante de Planck.

3. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.
   Réponse :
   On sait que :
   $$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 \times \frac{M_{\mathrm{H}}}{N_A}A^2,$$
   et alors :
   $$\boxed{A = \sqrt{\frac{hN_A}{4\pi^2 M_{\mathrm{H}} f}}} = \sqrt{\frac{6{,}63 \times 6{,}02}{4\pi^2 8{,}5}} \times 10^{(23-34+3-13)/2} = \boxed{1{,}09 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}},$$
   ce qui est plus petit que la taille typique d'un atome (tout va bien).

4. Calculer sa vitesse maximale.
   Réponse :
   La vitesse d'un oscillateur harmonique est :
   $$v(t) = 2\pi A f \cos(2\pi f t + \varphi).$$
   La vitesse maximale est donc :
   $$\boxed{v_{\max} = 2\pi A f} = 2\pi \times 1{,}09 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \times 8{,}5 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz} = 5{,}8 \times 10^3\,\mathrm{m}\cdot\mathrm{s}^{-1}.$$

Sujet 4 – corrigé

I Longueurs à l'équilibre ($\star$)

On considère un ressort de constante de raideur k et de longueur à vide l_0 auquel est attaché une masse m.

1. En utilisant l'analyse dimensionnelle, trouver une longueur caractéristique (autre que l_0).
   Réponse :
   Dans ce corrigé, seules les réponses sont proposées, et non les détails. Ainsi, vous pouvez juste vérifier si vos résultats sont bons.

$$\boxed{l_{\text{carac}} = \frac{mg}{k}}$$

2. En utilisant un argument physique, donner la valeur de la longueur à l'équilibre l_{eq} du ressort dans les 3 cas suivants :
   (a) le ressort est horizontal,
   (b) le ressort est vertical avec la masse accrochée en dessous du ressort,
   (c) le ressort est vertical avec la masse accrochée sur le ressort.

   Réponse :
   On trouve :

$$(a)\ l_{\text{eq}} = l_0 \quad ; \quad (b)\ l_{\text{eq}} = l_0 + \frac{mg}{k} \quad ; \quad (c)\ l_{\text{eq}} = l_0 - \frac{mg}{k}$$

II Approche énergétique ($\star\star\star$)

On écarte un oscillateur mécanique de sa position d'équilibre ($m = 100\,\text{g}$; $k = 10\,\text{N}\cdot\text{m}^{-1}$) en lui communiquant une énergie initiale $E_m = 2{,}0\,\text{J}$. On suppose qu'aucune force dissipative ne s'exerce sur le système.

1. En déduire l'amplitude de l'élongation (longueur du ressort à l'instant t).

   Réponse :

   Soit C l'amplitude de l'élongation du ressort (mouvement général d'équation $x(t) = l_0 + C\cos(\omega_0 t + \phi)$). L'énergie mécanique est constante (toutes les forces sont conservatives). On a d'après le cours :

$$Em(t) = \text{Cste} = \frac{1}{2}kC^2$$

   On en déduit :

$$C = \sqrt{\frac{2E_m}{k}}$$

   A.N. : $C = 0{,}63\,\text{m}$

2. Écrivez les équations horaires possibles de l'élongation si la vitesse initiale est nulle.
   Réponse :
   À $t = 0$, la vitesse du système est nulle. On peut dériver l'expression générale du mouvement :

$$\dot{x}(t) = -C\omega\sin(\omega_0 t + \phi) = 0$$

   D'où l'on déduit $\phi = 0\,(2\pi)$. On obtient donc le résultat :

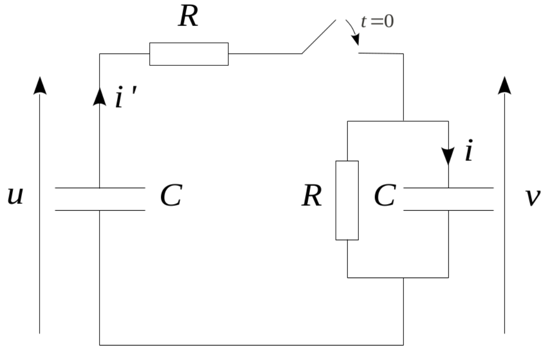
$$x(t) = l_0 + \sqrt{\frac{2E_m}{k}}\cos(\omega_0 t)$$

Sujet 5 – corrigé

I Circuit de Wien

On réalise le montage suivant. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, C traversé par i' étant initialement chargé et C traversé par i étant initialement déchargé.

On pose $\tau = RC$. Données : $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}$.



1. À partir de considérations physiques, préciser les valeurs de la tension v lorsque $t = 0$ et $t = \infty$.
   Réponse :
   Le condensateur de tension v est indiqué être initialement déchargé, on a donc $v(0^-) = 0$. Comme un condensateur est de tension continue, on a donc $\boxed{v(0^+) = 0}$. De plus, à $t \longrightarrow \infty$, les deux condensateurs seront forcément déchargés à cause des résistances dissipant l'énergie, il ne peut y avoir conservation : il seront donc équivalent à des interrupteurs ouverts, et on aura donc notamment $\boxed{v(\infty) = 0}$.

2. Établir l'équation différentielle du second ordre dont la tension v est solution.
   Réponse :
   Avec une loi des mailles, on a
   $$u = v + Ri'$$
   Or, la RCT du condensateur de gauche **en convention générateur** est
   $$i' = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Rightarrow i' = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}$$
   On a donc une équation avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. On cherche donc à exprimer i' en fonction de v, ce que l'on fait avec la loi des nœuds et les RCT du condensateur de droite $i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et de la résistance $R(i' - i) = v$:
   $$i' = i + \frac{v}{R} \Leftrightarrow i' = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} \tag{6.1}$$
   En combinant les deux, on a
   $$C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R}\right) \Leftrightarrow C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} - C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$
   $$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{(RC)^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau^2} = 0}$$

3. En déduire l'expression de $v(t)$ sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.
   Réponse :
   On écrit l'équation caractéristique de discriminant Δ :
   $$r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$$
   $$\Longrightarrow r_\pm = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau} < 0$$
   On a donc un régime apériodique, dont les solutions générales sont
   $$\boxed{v(t) = A\mathrm{e}^{r_+t} + B\mathrm{e}^{r_-t}}$$

4. Donner l'allure du graphe correspondant à $v(t)$.

Réponse :

Le condensateur est initialement chargé. Soit E sa tension initiale. On utilise l'équation 6.1 pour trouver que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{i'(0)}{C}$, sachant qu'à $t=0$ le circuit est équivalent à un circuit RC en décharge et qu'on a donc $i'(0) = E/R$. On trouve ainsi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{\tau}}$$

En finissant la détermination des constantes d'intégration, on trouve

$$\boxed{v(t) = \frac{E}{\tau(r_+ - r_-)}\left[\mathrm{e}^{r_+ t} - \mathrm{e}^{r_- t}\right]}$$