TP0 - Mesures et incertitudes

1 Variabilité et incertitude-type

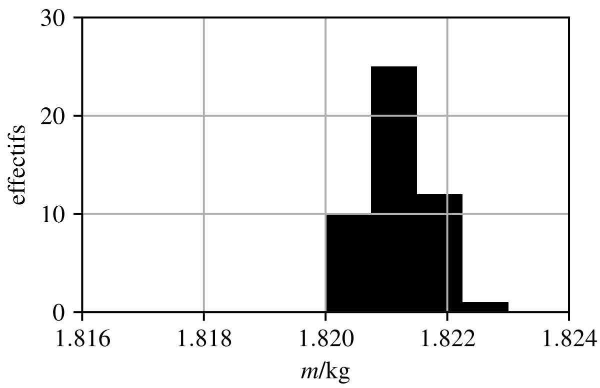
1.1 Toute mesure possède une variabilité

Toute étude scientifique d'un phénomène (physique, chimique, biologique, etc.) passe par la mesure **fiable** de ses effets. Or même en prenant toutes les précautions possibles, la répétition de la mesure d'une même grandeur présente une variabilité. **Cette variabilité fait intrinsèquement partie de toute mesure**. Il ne faut pas chercher à la faire disparaître, bien au contraire, elle renferme généralement une grande richesse d'information sur le phénomène étudié !

Cette variabilité peut provenir de nombreux aspects, dont les principaux sont les suivants :

- le choix de la méthode de mesure *(par exemple choisir de mesurer un petit élément à la règle graduée ou au pied à coulisse n'implique pas la même précision)*
- aux variations de l'environnement *(par exemple si l'on souhaite mesurer la célérité du son avec un protocole se déroulant sur une journée complète, comme la température de l'air va évoluer au cours du temps, la célérité du son aussi).*
- aux instruments de mesure *(par exemple mesurer une tension avec deux voltmètres semblant identiques amène parfois à une mesure de tension légèrement différente).*
- au processus physique lui-même *(par exemple, une expérience de mécanique quantique est intrinsèquement variable car la mécanique quantique ne prédit que des lois de probabilité).*

Histogramme d'une expérience de mesure : La figure ci-contre présente l'histogramme obtenu lors de la répétition de 48 pesées d'un objet sur une balance électronique. Seul 4 valeurs différentes de la masse m ont été obtenues (1,820 kg, 1,821 kg, 1,822 kg et 1,823 kg) car la balance possède une résolution de 1 g.



Un histogramme permet de bien visualiser la variabilité d'une expérience de mesure.

1.2 Chiffres significatifs

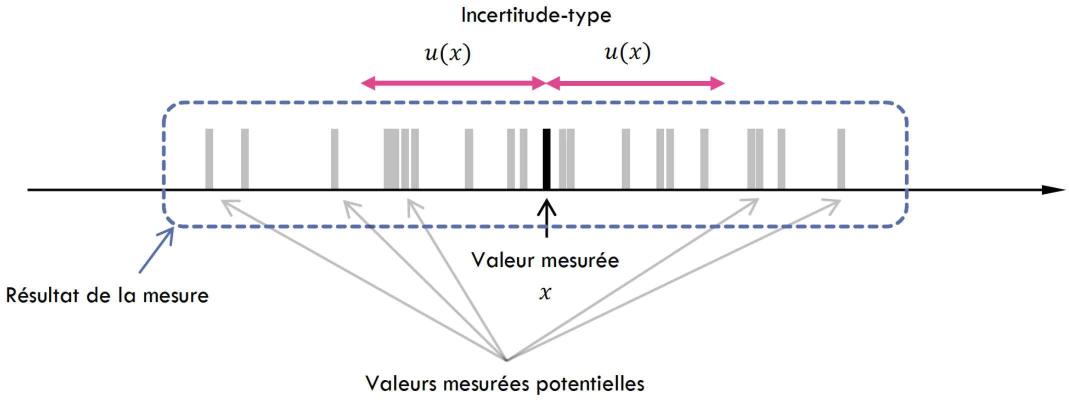
Pour un nombre écrit en écriture scientifique, le nombre de chiffres employés dans la mantisse (le facteur avant la puissance de 10) est par définition le nombre de chiffres significatifs.

Exercice préciser le nombre de chiffres significatifs des nombres suivants : $6,8$ $6,80$ 6801 $0,068$ 6800.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

1.3 Valeur mesurée et incertitude-type

le résultat d'une expérience de mesure d'une grandeur x **n'est PAS une valeur unique** mais un ensemble de valeurs, raisonnablement attribuables à x.



Présentation d'un résultat en TP

Le résultat de la mesure d'une grandeur x s'écrit :

$$\boxed{x = x_{\text{exp}} \pm u(x_{\text{exp}}) \quad \text{unité}}$$

- x_{exp} est la **valeur mesurée** qui est la *meilleure estimation possible de la grandeur mesurée.* Il s'agit d'une valeur particulière de l'ensemble des valeurs possibles de x (souvent la **plus probable**).
- $u(x_{\text{exp}})$ est l'**incertitude type** qui est une estimation de la variabilité de la mesure à l'aide d'un **écart-type**.

Cohérence du nombre de chiffres significatifs : par convention en physique-chimie,

- une incertitude-type comporte 2 chiffres significatifs
- Le dernier chiffre significatif de la mesure doit être cohérent avec l'incertitude.
Exemple : $d = 12,35\cancel{2} \pm 0,27$ m $= 12,35 \pm 0,27$ m.

On note $u(x)$ l'incertitude-type sur x en référence au mot anglais *uncertainty*.

Exercice : Proposer une écriture correcte pour chacune des grandeurs ci-dessous, et indiquer le nombre de chiffres significatifs sur le résultat final.

$$\lambda = 589,0 \pm 11 \text{ nm} \qquad t = 0,473 \pm 0,122 \text{ s} \qquad V = 14 \pm 0,0015 \text{ mL}$$

....
....
....
....
....
....

Incertitude-type relative : souvent exprimée en pourcentage.

$$\boxed{u_r(x_{\text{exp}}) = \frac{u(x_{\text{exp}})}{x_{\text{exp}}}}$$

Exercice : calculer les incertitudes relatives des 3 mesures de l'exercice précédent.

....
....
....

2 Comparaison de deux mesures

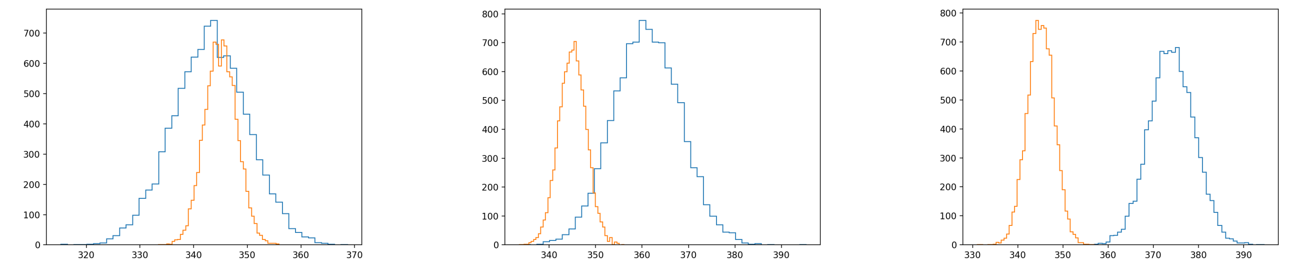
Pour pouvoir comparer deux mesures entre elles, il faut un critère numérique pour indiquer si ces deux mesures sont considérées comme compatibles ou incompatibles.

L'écart normalisé E_N (aussi appelé *z-score* et noté z) entre deux expériences de mesure donnant les valeurs mesurées x_1 et x_2 et d'incertitudes types $u(x_1)$ et $u(x_2)$ est défini par :

$$\boxed{E_N = \frac{|x_1 - x_2|}{\sqrt{u(x_1)^2 + u(x_2)^2}}}$$

Par convention, on qualifie deux résultats de compatibles si $E_N < 2$.

Interprétation Pour justifier cette convention, on peut revenir à la définition de l'incertitude-type. Celle-ci quantifie les fluctuations potentielles de la valeur mesurée annoncée. Lorsque deux mesures sont cohérentes, on s'attend à ce qu'elles ne coïncident pas exactement, mais qu'elles ne s'écartent pas l'une de l'autre de plus que de quelques incertitudes-type.



(a) Deux distributions avec $E_N \approx 0.3$. (b) Deux distributions avec $E_N \approx 2.1$. (c) Deux distributions avec $E_N \approx 5.0$.

Cas particulier de la comparaison avec une valeur de référence : parfois on veut comparer notre résultat de mesure x avec une valeur x_{ref} qui a été déterminer par des métrologues professionnels avec une incertitude très faible comparer à la notre (on parle alors de *valeur de référence*). Dans ce cas particulier, $u(x) \gg u(x_{\text{ref}})$ et donc l'expression de l'écart normalisé se simplifie :

$$\boxed{E_N = \frac{|x - x_{\text{ref}}|}{u(x)}}$$

Écart relatif à une valeur de référence : L'écart relatif ε_r est égal (en valeur absolue) à la différence entre valeur mesurée et une valeur de référence, rapportée à la valeur de référence :

$$\varepsilon_r = \left| \frac{x - x_{\text{ref}}}{x_{\text{ref}}} \right|$$

Cette notion n'est officiellement plus au programme mais reste utilisé dans certains sujets.

3 Évaluation de type A (plusieurs mesures qui donnent des résultats différents) d'une incertitude

Lorsque l'on réalise plusieurs fois et de manière indépendante une mesure, il est possible d'évaluer *statistiquement* la mesure.

Soit $x_1, x_2, \dots, x_n$ les valeurs mesurées au cours de n expérience indépendantes :

- La meilleure estimation de x_{exp} est la moyenne $\overline{x}$ des n valeurs obtenues :

$$x_{\text{exp}} = \overline{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_n}{n} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} x_i$$

- la meilleur estimation de l'incertitude-type sur UNE SEULE valeur mesurée x_i est l'écart-type expérimental σ :
$$u(x_i) = \sigma = \sqrt{\frac{1}{n-1}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$$
Attention : certains logiciels (et calculatrices) appelle écart-type $\sigma = \sqrt{\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{n}}\sum_{i=1}^{n}(x_i - \overline{x})^2}$. Penser à lire la notice pour savoir quelle formule a été employée, même si la différence entre les deux valeurs est faible dès que $n > 5$.

La répétition des mesures rend l'incertitude sur la moyenne plus faible que celle sur chaque mesure car les fluctuations aléatoires se compensent dans le calcul de la moyenne $\overline{x}$.

- La meilleur estimation de l'incertitude-type sur la MOYENNE $\overline{x}$ est d'autant plus faible que le nombre n de valeurs mesurées est grand :
$$u(\overline{x}) = \frac{u(x_i)}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}$$
Cependant le facteur $\frac{1}{\sqrt{n}}$ limite l'efficacité de la méthode. Il faut réaliser 100 fois plus de mesures pour diviser par 10 l'incertitude sur $\overline{x}$!

Type A

- **La valeur mesurée est la moyenne des n valeurs obtenues** $\boxed{x_{\text{exp}} = \overline{x} = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} x_i}$
- **L'incertitude est l'écart-type σ des n valeurs obtenues divisé par $\sqrt{n}$:** $\boxed{u(\overline{x}) = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}}$

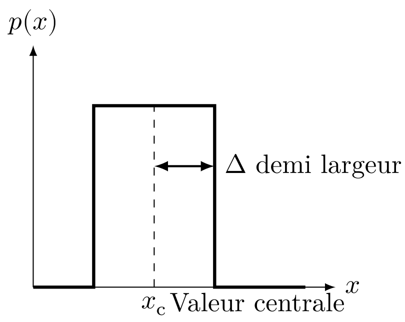
Exercice : On a obtenu par dosage rédox le degré d'alcool d'un vin a 8 reprises. En voici les résultats : 11,9° ; 12,5° ; 13,1° ; 12,4° ; 12,9° ; 12,6° ; 12,8° ; 12,6°. A l'aide de votre calculatrice ou d'un tableur (`LibreOffice, Excel, Regressi, Latispro,`), exprimer le résultat de ces mesures avec son incertitude.

....
....
....
....
....
....

4 Évaluation de type B (mesure unique ou qui donnent toujours le même résultat) d'une incertitude

Lorsque qu'il est impossible (*pas de variabilité observée de la mesure*), ou trop long, de faire une évaluation de type A, l'incertitude est alors évaluée à l'aide de **connaissances préalables sur le dispositif** expérimental : mesures antérieures, spécifications du fabricant, expérience ou connaissances du comportement ou des propriétés des instruments utilisés.

Dans beaucoup de cas, il est possible de d'estimé **le plus petit intervalle dans lequel on est certain trouver toutes les valeurs possibles de x.** On note x_c la valeur centrale de cet intervalle.
En l'absence d'autre information sur la variabilité, on attribue une *loi de probabilité rectangulaire* à la mesure (équiprobabilité des mesures dans l'intervalle de largeur 2Δ) et on calcule l'écart-type de la distribution rectangulaire de demi largeur Δ :
$$u(x) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}$$



Type B

- **La valeur mesurée est la valeur centrale de l'interval des valeurs possibles** $x_{\text{exp}} = x_{\text{c}}$
- **L'incertitude est la demi-largeur de l'interval des valeurs possibles divisée par** $\sqrt{3}$:

$$\boxed{u(x_{\text{c}}) = \frac{\Delta}{\sqrt{3}}}$$

Trois cas de figure pour déterminer la demi-largeur Δ

1. Δ est fournie par le constructeur de l'appareil (notice de l'appareil)
2. **Pour un instrument gradué Δ est égale à une graduation (ou une demi-graduation si on est très soigneux)**
3. Δ est estimé directement par l'expérimentateur

Exercice : Évaluer les incertitudes des expériences suivantes.

1. Mesure d'une longueur $\ell = 13$ cm avec une règle graduée au mm.

   ....
   ....
   ....

2. Utilisation d'un multimètre pour mesurer une tension U. Le multimètre affiche $2,5462$ V et dans la notice il est écrit : *"Accuracy=0.3% rdg + 2 digits"*. La précision est 0,3% de la valeur lue (*rdg* est l'abréviation de *reading*) auquel on ajoute 2 fois la valeur du dernier chiffre.

   ....
   ....
   ....
   ....

3. Mesure de la position d d'un écran sur un banc optique. On forme sur un écran l'image d'objet par l'intermédiaire d'une lentille convergente. L'image semble nette pour des positions allant de 29,7 à 30,5 cm.

   ....
   ....
   ....
   ....

5 Incertitudes composées

Dans de très nombreuses situations, on est amené à calculer la valeur d'une grandeur à partir de valeurs mesurées et donc possédant des incertitudes. Comment exprimer alors l'incertitude sur ce calcul en fonction de celles sur les données utilisées ?

5.1 Calcul à partir d'une seule valeur mesurée

$$\boxed{y_{\text{calc}} = f(x_{\text{mes}}) \quad \Rightarrow \quad u(y_{\text{calc}}) = \left|\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}(x_{\text{mes}})\right| u(x_{\text{mes}})}$$

Exercice : Calculer la distance d Terre/Lune sachant qu'une impulsion laser effectue l'aller-retour Terre/Lune en une durée $t = 2,57 \pm 0,02$ s. On rappelle que la vitesse de la lumière dans le vide vaut exactement $c = 299\ 792\ 458$ m.s^{-1}.

....
....
....
....

5.2 Calculs simples avec 2 valeurs mesurées *(à connaître !)*

Cas d'une somme ou d'une différence : on compose les incertitudes *absolues*

$$\boxed{y = x_1 \pm x_2 \quad \Rightarrow \quad u(y) = \sqrt{(u(x_1))^2 + (u(x_2)))^2}}$$

Exercice : On mesure la distance $d = x_2 - x_1$ entre deux points repérés avec la même incertitude $u(x_1) = u(x_2) = 1$ mm. Quelle est l'incertitude sur d ?

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Cas d'un produit ou d'un quotient : on compose les incertitudes *relatives*

$$\boxed{y = x_1 x_2 \text{ ou } y = \frac{x_1}{x_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u(y)}{y} = \sqrt{\left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}}$$

Exercice : On détermine la vitesse c du son dans l'air grâce à la relation $\lambda = \frac{c}{f}$, en ayant mesuré la fréquence $f = 500 \pm 10$ Hz et la longueur d'onde $\lambda = 68 \pm 2,5$ cm d'une onde sonore.

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

Cas d'un produit de puissances :

$$\boxed{y = x_1^{\alpha_1} x_2^{\alpha_2} \quad \Rightarrow \quad \frac{u(y)}{y} = \sqrt{|\alpha_1| \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + |\alpha_2| \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2}}$$

5.3 Calculs plus complexes (utilisation d'une simulation numérique)

Nous verrons cette méthode plus tard dans l'année.

6 Applications numériques sans incertitudes explicites

6.1 Incertitude *implicite* des données numériques

> L'incertitude sur une donnée numérique sans incertitude explicite est grossièrement de l'ordre du dernier chiffre significatif

Exemple : L'incertitude sur le rayon équatorial terrestre valant 6378 km est 0,5 km.

6.2 Règle pour les applications numériques

Pour éviter de faire à chaque fois un calcul lourd de propagation d'incertitudes, on peut appliquer la règle suivante qui à l'avantage d'être simple, mais le défaut de *surestimer* l'incertitude :

> **Règle pour les applications numériques**
>
> **lors d'une application numérique, le résultat s'écrit avec autant de chiffres significatifs que la donnée qui en possède le moins.**

Par exemple : $4,2 \times 20,3 = 85,\cancel{25} = 85$.
Exercice : calculer $13,25 \times 3,2$

. . . .
. . . .