/65

P1 Guirlandes électriques

Dans ce problème, on cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlande électriques G_1 et G_2, chacune étant modélisée par un conducteur ohmique de résistance identique $R_1 = R_2 = R$.

La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée avec un interrupteur S en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement.

On supposera dans ce problème que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

I/A Système de base

On considère dans un premier temps le circuit ci-contre alimenté par un générateur réel de f.e.m. E et de résistance interne r. **Les expressions demandées ne feront intervenir que E,r et R.**

On considère que l'interrupteur S est ouvert (Figure 1).

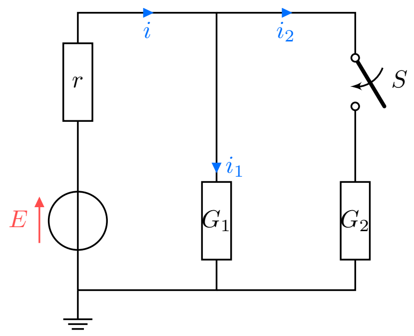

Figure 1

/2 [1] Quelle est la puissance reçue $\mathcal{P}_{2,o}$ par la seconde guirlande G_2 ?

Réponse

L'intensité i_2 est alors nulle (1), donc $\boxed{\mathcal{P}_{2,o} = 0}$. (1)

◇

/6 [2] Établir l'expression du courant i_o passant à travers le générateur. En déduire que la puissance électrique $\mathcal{P}_{1,o}$ reçue par la guirlande G_1 s'exprime :

$$\mathcal{P}_{1,o} = R\left(\frac{E}{r+R}\right)^2$$

Réponse

Le circuit est équivalent à :

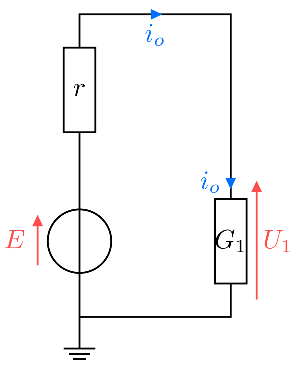

Figure 2 – (1)

La loi des mailles donne :

$$E \overset{(1)}{=} i_0(r+R) \Rightarrow \boxed{i_0 \overset{(1)}{=} \frac{E}{r+R}}$$

Or, d'après la loi d'Ohm, $U_1 = Ri_0$ (1).

D'où la puissance reçue par G_1 :

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} \overset{(1)}{=} i_o U_1 \overset{(1)}{=} R\left(\frac{E}{r+R}\right)^2}$$

◇

On considère désormais que l'interrupteur S est fermé.

/5 [3] Établir l'expression du courant i_f passant à travers le générateur.

Réponse

Les deux guirlandes sont en dérivation. On peut les remplacer par une résistance équivalente :

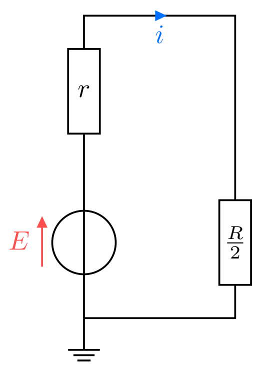

Figure 3 – 1

$$\frac{1}{R_{\text{eq}}} \overset{1}{=} \frac{1}{R} + \frac{1}{R} \Leftrightarrow \boxed{R_{\text{eq}} \overset{1}{=} \frac{R}{2}}$$

La loi des mailles donne :

$$E \overset{1}{=} i_f \left(r + \frac{R}{2} \right) \Rightarrow \boxed{i_f \overset{1}{=} \frac{E}{r + \frac{R}{2}}}$$

/3 4 À l'aide d'un pont diviseur de courant, déterminer les expressions de $i_{1,f}$ et $i_{2,f}$.

Réponse

Pour $i_{k,f}$ découlant de i_f, avec R_{eq} la résistance équivalente en parallèle et R_k la résistance dans la branche, on a

$$i_{k,f} \overset{1}{=} \frac{R_{\text{eq}}}{R_k} i_f \quad \text{soit} \quad i_{k,f} = \frac{R/2}{R} i_f$$

d'où

$$\boxed{i_{1,f} \overset{1}{=} \frac{E}{2r + R} = i_{2,f}}$$

1 pour un schéma.

/2 5 En déduire que les puissances $\mathcal{P}_{1,f}$ et $\mathcal{P}_{2,f}$ reçues par les deux guirlandes s'expriment :

$$\mathcal{P}_{1,f} = \mathcal{P}_{2,f} = R \left(\frac{E}{2r + R} \right)^2$$

Réponse

On a simplement

$$\mathcal{P}_{k,f} \overset{1}{=} R i_{k,f} \Rightarrow \boxed{\mathcal{P}_{1,f} \overset{1}{=} \mathcal{P}_{2,f} = R \left(\frac{E}{2r + R} \right)^2}$$

Comparaisons des 2 situations.

/3 6 La puissance reçue par la première guirlande est-elle identique dans les deux situations étudiées (S ouvert et fermé) ? Sachant qu'elle ne doit pas clignoter, est-ce un problème ? Expliquer.

Réponse

On a :

$$\mathcal{P}_{1,o} = R \left(\frac{E}{r + R} \right)^2 \overset{1}{\neq} \mathcal{P}_{1,f} = R \left(\frac{E}{2r + R} \right)^2$$

La guirlande 1 va donc se mettre à clignoter 1, puisque la puissance lumineuse qu'elle émet varie périodiquement. Ce montage ne **satisfait donc pas le cahier des charges**. 1

/3 7 Comment doit-on choisir r par rapport à R pour limiter le problème ? Cette condition est-elle vérifiée pour $r = R = 1\,\Omega$?

Réponse

Pour limiter cet effet, il faut que $\boxed{r \ll R}$ 1. Dans ce cas, on peut négliger r devant R, et il vient

$$\boxed{\mathcal{P}_{1,o} \approx \mathcal{P}_{1,f} \overset{1}{\approx} R \left(\frac{E}{R} \right)^2}$$

Ce n'est pas le cas avec les valeurs données dans l'énoncé. 1

I/B Système amélioré

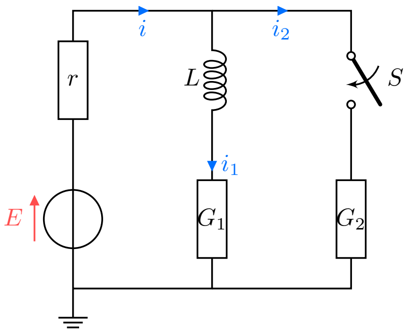

Figure 4

On considère maintenant le circuit ci-dessous afin de limiter la variation de puissance électrique reçue par la première guirlande, donc la variation du courant i_1.
Une bobine d'inductance L a donc été ajoutée en série avec la première guirlande. L'interrupteur S est ouvert de manière périodique pour $t \in \left[0; \frac{T}{2}\right[$ et fermé pour $t \in \left[\frac{T}{2}; T\right[$.

/2 8 En régime stationnaire (permanent continu), donner le schéma équivalent du nouveau montage.

Réponse

En régime stationnaire, la bobine est équivalente à un fil électrique 1. Le montage est donc équivalent à celui de la partie précédente (Figure 1). 1

◇

On se place juste avant la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire en $t = \frac{T}{2}^-$, et on admet que le régime stationnaire a été atteint.

/3 9 Déterminer la valeur de $i_1\left(\frac{T}{2}^-\right)$. En déduire la valeur de $i_1\left(\frac{T}{2}^+\right)$.

Réponse

Puisque le montge est équivalent à celui de la partie précédente, on sait que :

$$i_1\left(\frac{T^-}{2}\right) \overset{1}{=} \frac{E}{r+R}$$

Or, le courant traversant une bobine est continu 1, soit

$$i_1\left(\frac{T^-}{2}\right) = i_1\left(\frac{T^+}{2}\right) \overset{1}{=} \frac{E}{r+R}$$

◇

/5 10 Déterminer les valeurs de $i_2\left(\frac{T}{2}^-\right)$ et $i_2\left(\frac{T}{2}^+\right)$.

Réponse

L'interrupteur étant ouvert, on a :

$$\boxed{i_2\left(\frac{T^-}{2}\right) \overset{1}{=} 0}$$

Une fois l'interrupteur fermé, la loi des mailles à $t = \frac{T}{2}^+$ donne :

$$\begin{aligned}
E &\overset{1}{=} ri + Ri_2\left(\frac{T^+}{2}\right) && i \overset{1}{=} i_1 + i_2\\
\Leftrightarrow E &= r\left(i_1\left(\frac{T^+}{2}\right) + i_2\left(\frac{T^+}{2}\right)\right) + Ri_2\left(\frac{T^+}{2}\right) && \text{On isole}\\
\Leftrightarrow i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) &\overset{1}{=} \frac{E - ri_1(\frac{T^+}{2})}{r+R} && \text{On remplace}\\
\Leftrightarrow i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) &= \frac{E - r\left(\frac{E}{r+R}\right)}{r+R} && \text{On simplifie}\\
\Leftrightarrow &\boxed{i_2\left(\frac{T^+}{2}\right) \overset{1}{=} E\frac{R}{(r+R)^2}}
\end{aligned}$$

◇

On considère l'intervalle $\left[0; \frac{T}{2}\right[$, *lorsque l'interrupteur est ouvert.*

/5 11 Établir l'équation différentielle dont i_1 est solution sur l'intervalle $\left[0; \frac{T}{2}\right[$. On fera apparaître un temps caractéristique τ_o en fonction de L, r et R.

Réponse

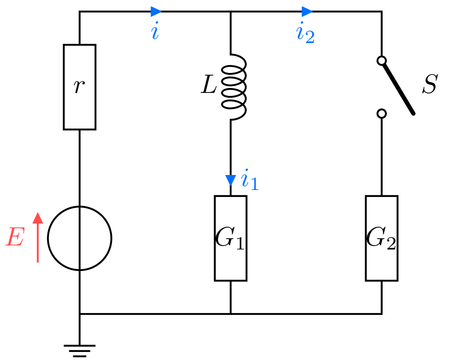

Figure 5 – (1)

Loi des mailles :

$$E \overset{(1)}{=} r_1 i + u_L + R i_1 \quad \Big) \; u_L \overset{(1)}{=} L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + (r+R)i_1 = E \quad \Big) \text{ Canonique}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1(t)}{\tau_o} \overset{(1)}{=} \frac{E}{L}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau_o \overset{(1)}{=} \frac{L}{r+R}}$$

◇

On s'intéresse maintenant à l'intervalle $\left[\frac{T}{2}; T\right[$, lorsque l'interrupteur est fermé.

/8 12 Montrer que i_1 est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1+\frac{r}{R}\right)} \quad \text{avec} \quad \tau_f = \frac{L\left(1+\frac{r}{R}\right)}{2r+R}$$

Réponse

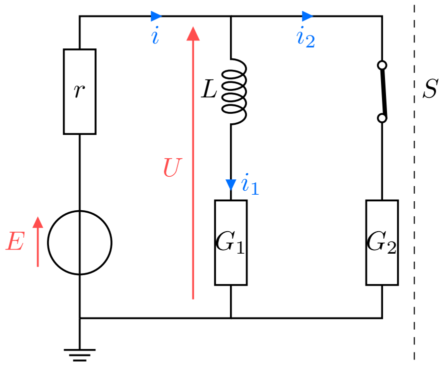

Figure 6 – (1)

Loi des mailles et loi des nœuds :

$$E \overset{(1)}{=} r_1 i + R i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \Big) \; i \overset{(1)}{=} i_1 + i_2$$

$$\Leftrightarrow E = r(i_1 + i_2) + R i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

Or, avec les branches en parallèle,

$$R i_2 \overset{(1)}{=} R i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \Rightarrow i_2 \overset{(1)}{=} i_1 + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}$$

D'où en combinant :

$$E \overset{(1)}{=} r\left(i_1 + i_1 + \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t}\right) + R i_1 + L\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \Big) \text{ On simplifie}$$

$$\Leftrightarrow E = i_1(2r+R) + L\left(1+\frac{r}{R}\right)\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} \quad \Big) \text{ Canonique}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{i_1(t)}{\tau_f} \overset{(1)}{=} \frac{E}{L\left(1+\frac{r}{R}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\tau_f \overset{(1)}{=} \frac{L\left(1+\frac{r}{R}\right)}{2r+R}}$$

◇

/7 13 Donner la forme générale $i_1(t)$ de la solution de cette équation différentielle. On ne cherchera pas à déterminer la constante intervenant dans la solution.

Réponse

La solution générale est la somme de la solution homogène et de la solution particulière (1). Or, pour la solution homogène, en injectant $i_{1,h}(t) = A\mathrm{e}^{rt}$ (1) on obtient :

$$r + \frac{1}{\tau_f} = 0 \Leftrightarrow \boxed{r \overset{(1)}{=} -\frac{1}{\tau_f}} \quad \text{soit} \quad i_{1,h}(t) \overset{(1)}{=} A\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau_f}}$$

De plus, avec $i_{1,p}$ la solution particulière constante, on trouve

$$\frac{i_{1,p}}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1+\frac{r}{R}\right)} \Leftrightarrow i_{1,p} \overset{(1)}{=} E\frac{\cancel{L}\cancel{(1+\frac{r}{R})}}{(2r+R)\cancel{L}\cancel{(1+\frac{r}{R})}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{i_{1,p} \overset{(1)}{=} \frac{E}{2r+R}}$$

Ainsi,
$$\boxed{i_1(t) \overset{(1)}{=} Ae^{-\frac{t}{\tau_f}} + \frac{E}{2r+R}}$$

On étudie expérimentalement les variations du courant $i_1(t)$ en mesurant la tension aux bornes de la guirlande G_1 à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant (Figure 7) pour deux valeurs différentes de l'inductance L. La résistance R vaut $2\,\Omega$ et la résistance r vaut $1\,\Omega$.

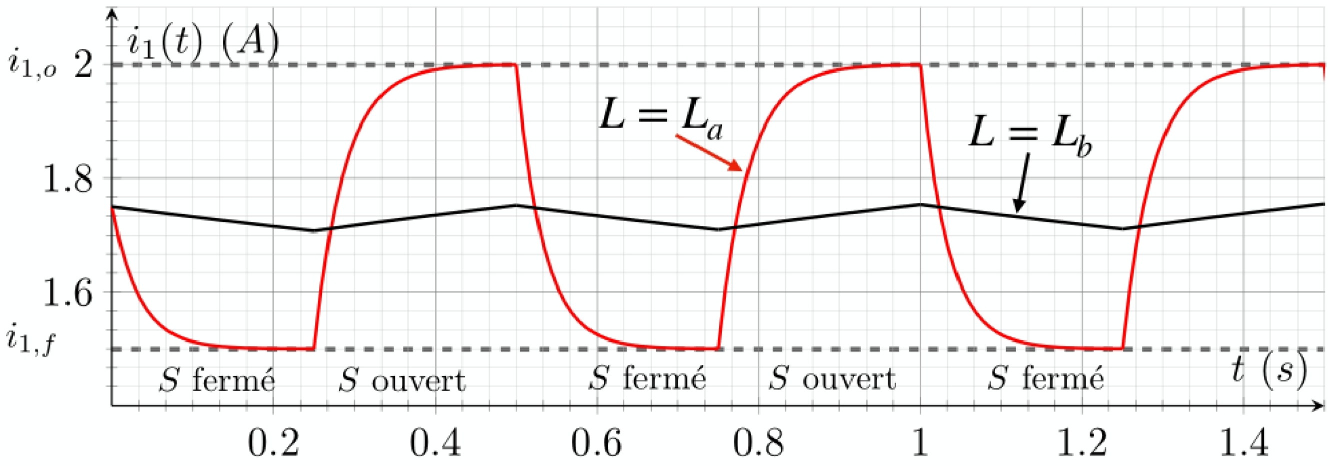

Figure 7

/2 14 Parmi les deux bobines d'inductance L_a et L_b, laquelle permet d'atteindre le régime stationnaire mentionné dans les questions 8 à 10 ?

Réponse

Il s'agit de la bobine L_a (1), puisque la charge de la bobine a le temps de se faire entièrement. (1)

/5 15 Retrouver, par lecture graphique, la valeur de L_a. Reproduire sommairement sur votre copie la Figure ?? et indiquer la construction à effectuer.

Réponse

Le temps τ_f correspond au temps nécessaire pour réaliser 63% de la décharge de la bobine (1). À partir du point de bascule en $t = 1\,\mathrm{s}$, 63% de la décharge correspond à une intensité de 1,69 A, ce qui s'atteint pour $t_1 = 1{,}033\,\mathrm{s}$; ainsi,

$$\underline{\tau_f = 33\,\mathrm{ms}}\ (1) \quad \text{et} \quad L_a \overset{(1)}{=} \tau_f \frac{2r+R}{1+\frac{r}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} r = 1\,\Omega \\ R = 2\,\Omega \end{cases} \quad \text{A.N. :}\ \underline{L_a \overset{(1)}{=} 88\,\mathrm{mH}}$$

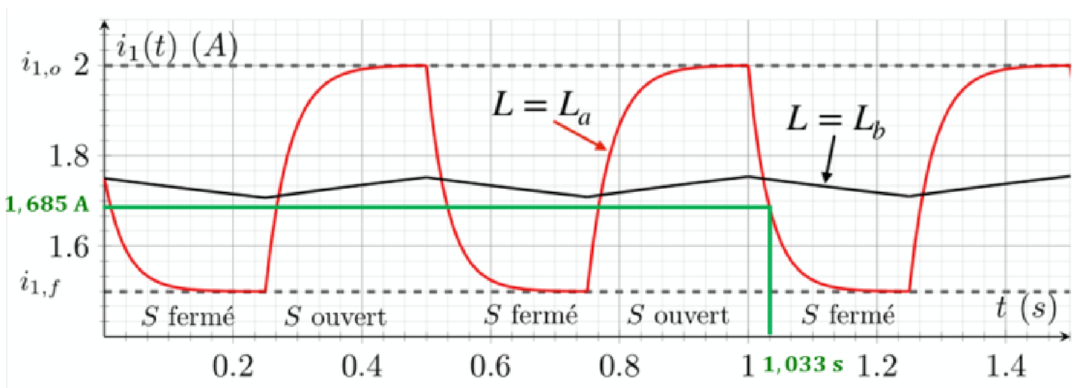

Figure 8 – (1)

On peut également réaliser une tangente au point de bascule, et trouver l'intersection avec l'asymptote $i_1(t) = i_{1,f}$.

◇

/2 16 Justifiez que $L_b \gg L_a$, sans chercher à déterminer sa valeur.

Réponse

Le temps caractéristique du régime transitoire avec L_b est très supérieur devant celui avec L_a (1), d'où $\boxed{L_b \gg L_a}$.
(1)

◇

/2 17 Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi L_a et L_b pour minimiser les variations de puissance reçue par la première guirlande ?

Réponse

Il s'agit de L_b, (1) car l'intensité $i_1(t)$ ne varie presque pas (1) (et il en va de même pous la tension U).

◇