Sujet 1 – corrigé

I Bombe nucléaire

Lorsqu'il est percuté par un neutron, l'uranium ^{235}U peut se décomposer en atomes radioactifs et ré-émettre plusieurs neutrons. Ce mécanisme permet d'envisager l'existence de réactions en chaines (contrôlées dans un réacteur **ou** non contrôlées dans une bombe). Soit $n(M,t)$ le nombre de neutron par unité de volume et j_{th} le vecteur flux de neutrons. n est solution de l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\text{div}\,\vec{j} + \frac{\nu - 1}{\tau} n$$

ν est un coefficient adimensionné caractérisant le nombre de neutrons efficaces produit par chaque fission, d'où le facteur $\nu - 1$ puisque par ailleurs chaque fission consomme un neutron pour être initiée. On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive. On étudie une sphère d'^{235}U de rayon R et suppose que la diffusion des neutrons dans la sphère s'effectue avec un coefficient de diffusion D.

On cherche dans le cas général une solution de la forme $n(r,t) = f(r)g(t)$.

1. Montrer que l'équation proposée peut se réécrire :

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = D\frac{\Delta f}{f} - \frac{1-\nu}{\tau}$$

Réponse :
On obtient à l'aide de la loi de Fick

$$\begin{aligned}
\frac{\partial n}{\partial t} &= -D\Delta n + \frac{\nu-1}{\tau}n \\
\Rightarrow f(r)\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) &= -Dg(t)\frac{1}{r}\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(rf(r)\right) - \frac{1-\nu}{\tau}f(r)g(t) \\
\Rightarrow \frac{1}{g(t)}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t}(t) &= -D\frac{\Delta f(r)}{f(r)} - \frac{1-\nu}{\tau}
\end{aligned}$$

2. En déduire que g est de la forme : $g(t) = g_0 e^{at}$ où g_0 et a sont des constantes qu'on ne demande pas de calculer pour le moment. À quelle condition sur a obtiendra-t-on une réaction en chaine ?

Réponse :
Les deux quantités sont égales quels que soient t et r donc doivent être constantes. On appelle cette constante a et on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = ga \Rightarrow g = g_0 e^{at}$$

On obtient une réaction en chaîne si la solution est temporellement divergente soit $a > 0$.

3. Montrez que la fonction $r \to rf(r)$ est solution d'une équation différentielle classique.

Réponse :
On a $D\Delta f + \frac{\nu-1}{\tau}f = af$. On obtient alors simplement :

$$\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}\left(rf\right) + \frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right)rf = 0$$

Et on reconnait l'équation de l'oscillateur harmonique si $\frac{\nu-1}{\tau} - a > 0$.

4. Dans la sphère, $n(r,t)$ s'annule à tout instant en $r = R$ mais ne s'annule pas à l'intérieur de la sphère. On pose
$$k = \sqrt{\frac{1}{D}\left(\frac{\nu - 1}{\tau} - a\right)} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{D}\left(\frac{\nu - 1}{\tau} - a\right) > 0$$
Calculer $f(r)$ à une constante multiplicative près notée f_0.

   Réponse :
   On obtient $rf(r) = A\cos(kr) + B\sin(kr)$ soit $f(r) = \frac{A}{r}\cos(kr) + \frac{B}{r}\sin(kr)$ Cette solution ne devant pas diverger en $r \to 0$, on obtient $A = 0$, On observe de plus que $\sin(kR) = 0$ soit $k = p\frac{\pi}{R}$, $p \in \mathbb{Z}$. $f(r)$ devant rester positive, on trouve $p = 1$ et donc :
$$f(r) = \frac{f_0}{r}\sin\left(\pi\frac{r}{R}\right)$$

5. Exprimez le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir une réaction en chaine, en fonction de ν, D et τ.

   Réponse :
   On a $k = \frac{\pi}{R} = \sqrt{\frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right)}$. On en déduit $a = \frac{\nu-1}{\tau} - D\left(\frac{\pi}{R}\right)^2$.
   Dans le cas limite de la réaction en chaine, on a $a = 0$ et donc
$$R_c = \sqrt{\frac{\pi^2 D\tau}{\nu - 1}}$$

6. On donne pour l'uranium 235 $\rho = 19 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\pi^2 D\tau = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$ et $\nu = 2{,}5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c ainsi que de la masse critique correspondante.

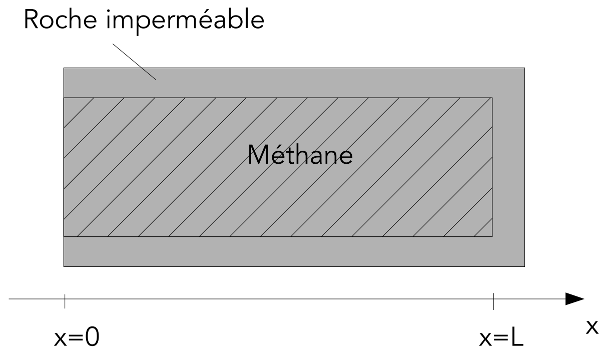
   Réponse :
   $R_c = 0{,}12\ m$ et $m_c = \rho\frac{4}{3}\pi R_c^3 = 140\ kg$

Pour cette géométrie sphérique, on a $\Delta n = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rn)$

Sujet 2 – corrigé

I Diffusion de méthane dans un gisement

On considère un gisement de méthane de volume V cylindrique de section S et de longueur L fermé sur sa surface latérale et à l'une de ses extrémités par de la roche imperméable. Le méthane occupe le volume qV où q est la porosité du milieu. On note $P(x,t)$ la pression du méthane et $\mu(x,t)$ sa masse volumique. La température est constante et uniforme et $P(x=0,t)=P_0$ est constante.



La masse de gaz traversant la surface S d'abscisse x pendant la durée dt est proportionnelle au gradient de pression $\delta m = -kS\dfrac{\partial P}{\partial x}dt$ où k est un coefficient dépendant de la viscosité, de la masse volumique du gaz et de la nature du gisement.

1. Donner la relation entre μ et P.

   Réponse :
   D'après la relation du GP, on obtient $P = \mu\frac{R}{M}T$. Il s'agit d'une relation de proportionnalité car la température T est constante dans le milieu.

2. Déterminer, en fonction de q, S, μ et $\mathrm{d}x$, la masse de méthane contenue à la date t dans le volume élémentaire contenu entre x et $x+\mathrm{d}x$. Montrer que la pression vérifie $D\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial P}{\partial t}$. Exprimer D en fonction des données.

   Réponse :
   On a simplement $dm = \mu Sq\mathrm{d}x = \frac{SMq}{RT}P\mathrm{d}x$. On peut ensuite effectuer un bilan de quantité de matière pour ce système :
   $$dm = -kSdt\frac{\partial P}{\partial x}(x) + kSdt\frac{\partial P}{\partial x}(x+\mathrm{d}x) = kS\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dt\mathrm{d}x$$
   On obtient au final en combinant ces deux expressions :
   $$\frac{SMq}{RT}P\mathrm{d}x = kS\frac{\partial^2 P}{\partial x^2}dtdx \Rightarrow \frac{\partial P}{\partial t} = \frac{kRT}{Mq}\Delta P$$
   D'où le résultat avec $D = \frac{kRT}{Mq}$

3. Dans quelle situation trouve-t-on une équation analogue ?

   Réponse :
   Cette équation est analogue à l'équation de la diffusion de particule. Ou bien la diffusion thermique.

4. Au regard de l'énoncé, que peut-on dire de $\dfrac{\partial P}{\partial x}(L)$

   Réponse :
   La parois est imperméable aux particules donc il ne pourra y avoir de flux et donc la dérivée spatiale de la pression y est nulle.

5. On cherche une solution de la forme $P(x,t) = P_0 + P_1 \sin(ax)e^{-\frac{t}{\tau}}$. Déterminer τ. Déterminer les valeurs possibles de a en fonction de L. On prend a égal à sa valeur minimale. Faire l'application numérique pour τ.

   Réponse :
   Il convient d'injecter cette solution dans l'équation précédente :

$$-\frac{P_1}{\tau}\sin(ax)e^{-t/\tau} = -DP_1a^2\sin(ax)e^{-t/\tau}$$

   Cette relation est vérifiée lorsque $\tau = \frac{1}{Da^2}$. On doit ensuite déterminer les conditions limites pour trouver a. La condition limite en $x = 0$ est toujours vérifiée par la solution proposée. Or, on a montré que $\dfrac{\partial P}{\partial r}(L) = 0$ et donc $\cos(aL) = 0$ soit $aL = \pi/2$ d'où $a = \frac{\pi}{2L}$

6. Déterminer la masse $m(t)$ de méthane contenu dans le gisement à la date t.

   Réponse :
   on a $\mu = \frac{PM}{RT}$ t on peut intégrer cette expression :

$$m(t) = \int_0^L \mu(x,t)S\mathrm{d}x = \frac{MS}{RT}\int_0^L P_0 + P_1\sin(ax)e^{-t/\tau}\mathrm{d}x = \frac{MS}{RT}\left(P_0L + \frac{2L}{\pi}P_1e^{-t/\tau}\right)$$

Données : $D = 3{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{U\cdot S\cdot I\cdot}$; $q = 0{,}15$; $L = 5{,}0\,\mathrm{km}$; masse molaire du méthane $16{,}0\,\mathrm{g/mol}$.

Sujet 3 – corrigé

I Diffusion dans une sphère radioactive

Dans un réacteur nucléaire fonctionnant en régime stationnaire, on considère un boulet sphérique de rayon R jouant le rôle de source de neutrons. Un processus de production fait apparaître σ neutrons par unité de volume et de temps. On admet que σ est constant à l'intérieur de la sphère et nul à l'extérieur. On notera D la constante de diffusion des neutrons dans le réacteur.

1. Établir l'équation stationnaire vérifiée par $n(r)$ à l'intérieur et à l'extérieur de la sphère.

   Réponse :
   Il faut résoner sur une couronne sphérique. On obtient en régime stationnaire $dN = 0 = \Phi_i + \Phi_e + \sigma V$. En utilisant la loi de Fick, on obtient après calcul :

   $$0 = D\Delta n + \sigma(r) \Rightarrow D\frac{1}{r^2}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right) + \sigma(r) = 0$$

   avec $\sigma(r > R) = 0$.

2. La résoudre complètement (*il faudra prendre en compte plusieurs conditions limites à déterminer*)

   Réponse :
   A l'extérieur du milieu ($r > R$), on a $\Delta n = 0$ soit

   $$r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = a \Rightarrow n = -\frac{a}{r} + b$$

   où a et b sont des constantes d'intégrations à déterminer à l'aide des CIs.

   A l'intérieur, on obtient après une double intégration :

   $$r^2\frac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r} = -\frac{\sigma}{D}\frac{r^3}{3} + c \Rightarrow n = -\frac{\sigma r^2}{6D} - \frac{c}{r} + d$$

   Il convient maintenant de prendre en compte les conditions limites suivantes :

   - $n(0)$ est fini (n ne diverge pas en 0)
   - n est continue en $r = R$
   - n est dérivable en $r = R$ (continuité du flux de particule j)
   - On peut supposer que $n \to 0$ lorsque $r \to +\infty$

   On déduit de la première et de la dernière condition que $b = 0$ et $c = 0$. La continuité de n et de sa dérivée en $r = R$ implique :

   $$-\frac{\sigma R^2}{6D} + d = -\frac{a}{R} \quad \text{et} \quad -\frac{\sigma R}{3D} = \frac{a}{R^2} \tag{4.1}$$

   Ce qui donne :

   $$a = -\frac{\sigma R^3}{3D} \quad \text{et} \quad d = \sigma R^2\left(\frac{1}{6D} + \frac{1}{3D}\right) = \frac{\sigma R^2}{2D}$$

   soit au final :

   $$n(r < R) = \sigma\left(\frac{R^2}{2D} - \frac{r^2}{6D}\right) \qquad \text{et} \qquad n(r > R) = \frac{\sigma R^3}{3rD}$$

3. Donner une représentation graphique de $n(r)$ et de la norme du vecteur densité de courant de particule $j_n(r)$ lorsque r varie de 0 à $+\infty$.

   Réponse :
   ok

On donne le laplacien de $n(r,t)$ en coordonnées sphériques : $\Delta n = \frac{1}{r^2}\dfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}r}\left(r^2\dfrac{\mathrm{d}n}{\mathrm{d}r}\right)$

Sujet 4 – corrigé

I Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5\,\mathrm{mm}$, et de longueur L jouant le rôle d'une ailette de refroidissement.
En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330\,\mathrm{K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300\,\mathrm{K}$. On appelle $\lambda = 400\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$
On considère dans un premier temps la barre quasi-infinie.

1. Dessinez un schéma correspondant à la situation et dans lequel une tranche d'épaisseur dx sera mise en valeur. Quelle est la section de cette tranche ? Et sa surface latérale ?

   Réponse :
   On a pour la section : pia^2 et pour la surface latérale : $2\pi a dx$.

2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ dans la barre en régime permanent.

   Réponse :
   On effectue un bilan thermodynamique sur une petite tranche d'épaisseur dx de la tige :

   $$\frac{\mathrm{d}Q}{\mathrm{d}t} = \pi a^2(F(x) - F(x+\mathrm{d}x)) + (2\pi a\mathrm{d}x)h(T_e - T(x)) \qquad \text{avec} \quad F(x) = -\lambda\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}x}T$$

   De plus, l'application du premier principe donne : $dU = \delta q = 0$ en régime permanent et on en déduit :

   $$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}x^2}T - \frac{2h}{\lambda a}T = -\frac{2h}{\lambda a}T_e}$$

3. La résoudre en tenant compte de deux conditions aux limites qu'on précisera.

   Réponse :
   Cette équation peut se résoudre en utilisant les fonction exponentielles :

   $$T(x) = \alpha\exp(x/\delta) + \beta\exp(-x/\delta) + T_e$$

   On utilise comme première CL, la température en $x = 0$ qui donne $\alpha + \beta = T_0 - T_e$. On suppose de plus qu'à l'infini, la température de la tige tend vers celle de l'extérieur. On en déduit $\alpha = 0$ d'où au final :

   $$\boxed{T(x) = (T_0 - T_e)e^{-x/\delta} + T_e}$$

4. Calculez δ. Que représente cette grandeur ?

   Réponse :
   $\boxed{\delta \approx 28\,\mathrm{cm}}$ représente la profondeur de pénétration sous laquelle on peut observer l'influence de la température de surface T_0. Au delà de quelque δ, on a $T(x) \approx T_e$

5. On considère maintenant la tige de longueur $L = 20\,\text{cm}$. Peut-on toujours la considérer infinie ? Pourquoi ?

   Réponse :
   non, car on n' a pas $L \gg \delta$. La température à l'extrémité de l'ailette n'est donc pas égale à la température extérieure.

6. En déduire le nouveau jeu de conditions limites permettant de résoudre le problème.

   Réponse :
   Il suffit de reconsidérer la seconde condition limite à l'aide de la continuité du flux thermique en $x = L$:

$$\boxed{\lambda \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}x}(L) = h(T(L) - T_e)}$$

   La première CL n'est elle, pas changée : $T(0) = T_0$.