Sujet 1 – corrigé

I Corde de Melde : superposition d'ondes

On considère une corde de Melde de longueur L. On interprète la vibration de la corde de la manière suivante : le vibreur émet une onde qui se propage en direction de la poulie où elle est réfléchie ; cette onde réfléchie se propage en direction du vibreur où elle est elle-même réfléchie ; l'onde réfléchie se propage en direction de la poulie où elle se réfléchit, et ainsi de suite. L'axe (Ox) est parallèle à la corde au repos ; le vibreur est en $x = 0$ et la poulie en $x = L$. Le vibreur émet une onde $s_0(x,t)$ telle que

$$s_0(0,t) = a_0 cos(\omega t)$$

La célérité des ondes sur la corde est c et on note $k = \omega/c$. On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur la poulie en $x = L$, l'onde réfléchie s_r vérifie :

$$s_r(L,t) = -r\, s_i(L,t)$$

  où r est un coefficient compris entre 0 et 1 ;

- lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur le vibreur en $x = 0$, l'onde réfléchie s'_r vérifie :

$$s'_r(0,t) = -r' s'_i(0,t)$$

  où r' est un coefficient compris entre 0 et 1.

1) Exprimer l'onde $s_0(x,t)$.

Réponse

L'onde s_0 se propage dans le sens de (Ox) avec la célérité c donc :

$$s_(x,t) = s_0(0,t - x/c) = a_0 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} = a_0 \cos(\omega t - kx)$$

◇

2) Exprimer l'onde $s_1(x,t)$ qui apparaît par réflexion de l'onde s_0 sur la poulie, puis l'onde $s_2(x,t)$ qui apparaît par réflexion de s_1 sur le vibreur, puis l'onde $s_3(x,t)$ qui apparaît par réflexion de s_2 sur la poulie.

Réponse

L'onde s_1 provient de l'onde s_0 par réflexion sur la poulie donc :

$$s_1(L,t) = -rs_0(L,t) = -ra_0 \cos(\omega t - kL)$$

De plus, s_1 se propage dans le sens inverse de (Ox) avec la célérité c, donc

$$s_1(x,t) = s_1\left(L,t - \frac{L-x}{c}\right) = -ra_0 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{L-x}{c}\right) - kL\right\} = -ra_0 \cos(\omega t + kx - 2kL)$$

De manière analogue, $$s_2(0,t) = -r's_1(0,t) = -rr'a_0 \cos(\omega t - 2kL)$$

D'où $$s_2(x,t) = s_2(0,t - x/c) = rr'a_0 \cos(\omega t - kx - 2kL)$$

Enfin $$s_3(L,t) = -rs_2(L,t) = -r^2r'a_0 \cos(\omega t - 3kL)$$

Soit, $$s_3(x,t) = s_3\left(L,t - \frac{L-x}{c}\right) = -r^2r'a_0 \cos(\omega t + kx - 4kL)$$

◇

3) À quelle condition les ondes s_0 et s_2 sont-elles en phase en tout point ? Que constate-t-on alors pour les ondes s_1 et s_2 ? La condition précédente est supposée réalisée dans la suite.

Réponse

La phase initiale de s_0 au point d'abscisse x est égale à $-kx$; la phase initiale de s_2 au même point est égale à $-kx - 2kL$. Les deux ondes sont en phase en tout point à condition que :

$$2kL = 2n\pi$$

où n est un entier. Si cette condition est vérifiée, les ondes s_1 et s_3 sont elles aussi en phase en tout point.

◇

4) Justifier l'expression suivante de l'onde totale existant sur la corde :

$$s(x,t) = a_0 \left\{1 + rr' + (rr')^2 + \ldots + (rr')^n + \ldots\right\} \cos(\omega t - kx) - r\, a_0 \left\{1 + rr' + (rr')^2 + \ldots + (rr')^n + \ldots\right\} \cos(\omega t + kx)$$

Réponse

Par réflexion continuelle sur les extrémités de la corde, il existe une infinité d'ondes se propageant dans les deux sens. Par ailleurs, les ondes se propageant dans un sens donné sont toutes en phase.

◇

5) En quels points de la corde l'amplitude de la vibration est-elle maximale ? Exprimer l'amplitude maximale A_{max} en fonction de a, r et r'. On rappelle la formule :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (rr')^n = \frac{1}{1 - rr'}$$

Réponse

On peut réécrire $s(x,t)$ en utilisant la formule de sommation fournie :

$$s(x,t) = \frac{a_0}{1 - rr'} \cos(\omega t - kx) - \frac{r a_0}{1 - rr'} \cos(\omega t + kx)$$

L'amplitude est maximale en un point où les deux ondes sont en interférence constructive, c'est-à-dire aux points tels que $kx = -kx + \pi + 2p\pi$ (attention au signe - devant le second cosinus qui introduit un déphasage de π) où p est un entier soit :

$$x = \frac{(2p+1)\pi}{2k} = \frac{2p+1}{2n} L$$

L'entier p est compris entre 0 et $n-1$ puisque x est compris entre 0 et L. La valeur maximale de l'amplitude est :

$$A_{\text{min}} = \frac{a_0}{1 - rr'} + \frac{r a_0}{1 - rr'} = a_0 \frac{1 + r}{1 - rr'}$$

◇

6) En quels points l'amplitude est-elle minimale ? Exprimer l'amplitude minimale A_{min}.

Réponse

L'amplitude est minimale en un point où les deux ondes sont en interférence destructrice, c'est-à-dire aux points tels que $kx = -kx + 2p\pi$ où p est un entier soit :

$$x = \frac{p\pi}{k} = \frac{p}{n} L$$

L'entier p est compris entre 0 et n puisque x est compris entre 0 et L. La valeur minimale de l'amplitude est :

$$A_{\min} = \frac{a_0}{1 - rr'} - \frac{ra_0}{1 - rr'} = a_0 \frac{1 - r}{1 - rr'}$$

7) Expérimentalement on trouve $$\frac{A_{\min}}{a_0} \approx 1 \quad \text{et} \quad \frac{A_{\max}}{a_0} \approx 10$$

Déterminer r et r'.

Réponse

On a $$\frac{1 - r}{1 + rr'} \approx 1 \quad \text{et} \quad \frac{1 + r}{1 + rr'} \approx 1$$

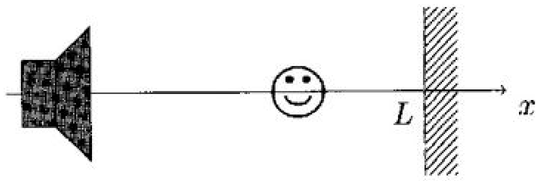
Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Il vient, après calcul,

$$r \approx 0{,}8 \quad \text{et} \quad r' \approx 1$$

Sujet 2 – corrigé

I Réflexion d'une onde acoustique sur un mur

Un haut-parleur, placé à l'origine $x = 0$, émet une onde acoustique. Un auditeur se trouve à l'abscisse x et un mur à la distance L, avec $L > x$ (cf schéma ci-contre). L'onde se réfléchit sur le mur et se propage à la vitesse c. On suppose que la réflexion n'engendre aucun déphasage supplémentaire et que l'amplitude réflechie est identique à l'amplitude de l'onde incidente. Par ailleurs, on admettra qu'il n'y a aucune réflexion sur le haut-parleur (si bien que l'onde réfléchit sur le mur se propage vers $-\infty$). Le haut-parleur émet la surpression



$$p(t) = P_0 \cos(\omega t)$$

1) Exprimer les deux ondes $s_1(x,t)$ (onde arrivant directement sur l'auditeur) et $s_2(x,t)$ (onde arrivant sur l'auditeur après réflexion sur le mur) reçues par l'auditeur en fonction de P_0, ω, L, t, c et x.

Réponse

La première onde ne parcourt que la distance x à la vitesse c, soit

$$\tau_1 = \frac{x}{c}$$

La deuxième onde parcourt $L + (L - x) = 2L - x$ à la vitesse c, soit

$$\tau_2 = \frac{2L - x}{c}$$

Pour la première onde : $s_1(x,t) = p(t - \tau_1) = p\left(t - \frac{x}{c}\right) = P_0 \cos\left(\omega(t - \frac{x}{c})\right)$

Soit
$$s_1(x,t) = P_0 \cos\left(\omega t - \omega \frac{x}{c}\right)$$

De même :
$$s_2(x,t) = p(t - \tau_2) = p\left(t - \frac{2L - x}{c}\right) = P_0 \cos\left(\omega(t - \frac{2L - x}{c})\right)$$

Soit
$$s_2(x,t) = P_0 \cos\left(\omega t + \omega \frac{x}{c} - \omega \frac{2L}{c})\right)$$

◇

2) Montrer que le déphasage $\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1|$ entre les deux ondes au niveau de l'auditeur peut se mettre sous la forme

$$\Delta\varphi = \frac{2\omega}{c}(L - x)$$

Réponse

D'après les expressions de $s_1(x,t)$ et de $s_2(x,t)$, on a $\varphi_1 = -\omega\frac{x}{c} < 0$ et $\varphi_2 = \omega\frac{x}{c} - \omega\frac{2L}{c} < 0$. Ainsi,

$$\Delta\varphi = |\varphi_2 - \varphi_1| = \left|2\omega \times \frac{x}{c} - \omega \times \frac{2L}{c}\right| = \frac{2\omega}{c}|x - L| = 2\omega c(L - x) \qquad \text{car } x < L$$

◇

3) En déduire l'expression générale des abscisses x de l'auditeur pour lesquelles il perçoit des interférences destructives. On introduira la longueur d'onde λ. On exprimera x en fonction de L, λ et un entier n uniquement.

Réponse

On a des interférences destructives pour $\Delta\varphi = \pi + 2n\pi$ avec n nombre entier positif, soit pour

$$\frac{2\omega}{c}(L - x) = \pi + 2n\pi$$

Alors $$\frac{2\omega x}{c} = \frac{2\omega L}{c} - \pi - 2n\pi \quad \text{d'où} \quad x = L - \frac{c\pi}{2\omega} - n\frac{c\pi}{\omega}$$

De plus comme $\omega = kc$ et $\lambda = 2\pi/k$, il vient

$$x = L - \frac{\lambda}{4} - n\frac{\lambda}{2}$$

Il faut ne garder que les valeurs de n pour lesquelles $0 < x < L$.

◇

On cherche à déterminer l'amplitude de l'onde résultante pour l'auditeur placé à l'abscisse x quelconque.

4) Rappeler, dans le cas général, l'expression de la formule de Fresnel donnant l'amplitude $S(x)$ du signal à la position x résultant de la superposition des signaux $s_1(x,t)$ et $s_2(x,t)$. On fera apparaître les amplitudes S_1 et S_2 ainsi que le déphasage $\Delta\varphi$.

Simplifier l'expression obtenue afin de déduire l'expression de l'amplitude A de l'onde résultante au niveau de l'auditeur positionné à l'abscisse x quelconque en fonction de P_0 et $\Delta\varphi$.

Réponse

D'après la formule de Fresnel, l'amplitude $S(x)$ d'un signal $s(x,t)$ superposition de deux signaux $s_1(x,t)$ et $s_2(x,t)$ s'écrit

$$S(x) = \left\{{S_1}^2 + {S_2}^2 + 2S_1S_2\cos(\Delta\varphi(x))\right\}^{1/2}$$

Les deux ondes étant de même amplitude, $S_1 = S_2 = P_0$, il vient

$$S(x) = \sqrt{2}P_0\sqrt{1 + \cos(\Delta\varphi(x))}$$

◇

5) L'auditeur se place à l'abscisse $x = L - \lambda/8$. Calculer l'amplitude en fonction de P_0. Commenter.

Réponse

A l'abscisse $x = L - \lambda/8$:

$$\Delta\varphi = \frac{2\omega}{c}\left(L + \frac{\lambda}{8} - L\right) = \frac{\omega\lambda}{4c}$$

De plus comme, $\omega = kc$ et $\lambda = 2\pi/k$, il vient

$$\Delta\varphi = \frac{k\lambda}{4} = \frac{2\pi}{4} \quad \text{soit} \quad \Delta\varphi = \frac{\pi}{2}$$

Alors $$A = \sqrt{2}P_0\sqrt{1 + \cos\left(\frac{\pi}{2}\right)} = \sqrt{2}P_0$$

L'amplitude est alors inférieure à l'amplitude de l'onde P_0. Le niveau sonore perçu est inférieur à celui qui serait atteint en l'absence du mur.

◇

6) Calculer le contraste des interférences

$$C = \frac{{A_M}^2 - {A_m}^2}{{A_M}^2 + {A_m}^2}$$

où A_M est l'amplitude maximale et A_m l'amplitude minimale.

Réponse

Comme
$$A = \sqrt{2}P_0\sqrt{1+\cos(\Delta\varphi)}$$

l'amplitude est maximale lorsque $\Delta\varphi = 0 + 2n\pi$, si bien que

$$\cos(\Delta\varphi) = \cos(0) = 1 \quad \text{et} \quad A_M = 2P_0$$

Et l'amplitude est minimale lorsque $\Delta\varphi = \pi + 2n\pi$ d'où

$$\cos(\Delta\varphi) = \cos(\pi) = -1 \quad \text{et} \quad A_m = 0$$

Ainsi $C = 1$, ce qui est en accord avec le fait que l'amplitude des deux signaux soit identique.

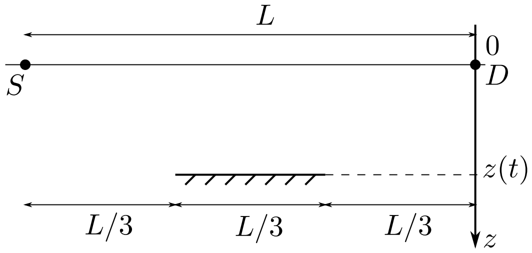
Sujet 3 – corrigé

I Miroir de Lloyd

On dispose une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 650\,\text{nm}$ à une distance horizontale $L = 45\,\text{cm}$ d'un détecteur D. Initialement, un miroir de longueur $L/3$ positionné à égale distance de S et D se trouve en $z = 0$ (même côte que S et D). On lâche le miroir à $t = 0$ sans vitesse initiale. Il ne subit que les effets de la pesanteur.

La réflexion sur le miroir métallique s'accompagne d'un retard de phase égale à π.

L'indice optique de l'air est supposé égal à 1.

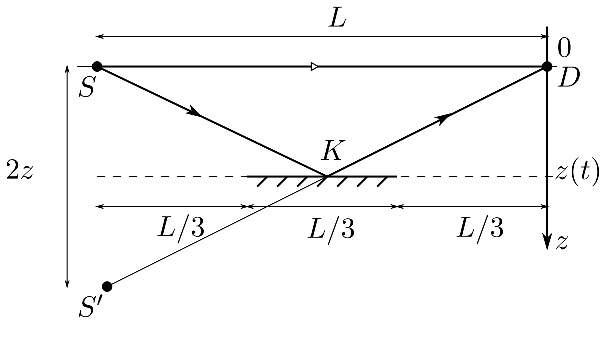


On donne dans le tableau ci-dessous l'instant t_k auquel est mesuré le $k^{\text{ième}}$ maximum d'intensité par le détecteur D.

indice k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_k (ms)	7,42	9,77	11,11	12,08	12,86	13,53	14,10	14,62	15,00

1) Pour une position $z(t)$ du miroir, représenter les deux rayons qui interfèrent au niveau du détecteur D.

Réponse



◇

2) Déterminer l'expression de la différence de marche δ_D entre ces deux ondes au point D. Pour cela, il pourra être utile de faire apparaitre une source fictive S' image de S par le miroir. Simplifier cette expression dans le cas où $L \gg z(t)$. On rappelle qu'au premier ordre en $\epsilon \ll 1$, $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$.

Réponse

$$\begin{aligned}\delta_D &= S'D + \lambda/2 - SD = \sqrt{L^2 + (2z)^2} + \lambda/2 - L \\ &= L\left(\sqrt{1 + (2z/L)^2} - 1\right) + \lambda/2 \\ &\approx \frac{2z^2}{L} + \lambda/2\end{aligned}$$

◇

3) En déduire l'expression de l'intensité en D en fonction du temps. On rappelle la formule de Fresnel

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi)$$

Réponse

En étudiant le mouvement du miroir soumis à l'accélération $\vec{a} = g\,\vec{e}_z$,

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

En notant $I_1 = I_2 = I_0$, l'intensité des deux ondes, on a

$$\begin{aligned} I_D &= 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{2z^2}{L}+\pi\right)\right) \\ &= 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi g^2 t^4}{\lambda L}+\pi\right)\right) \end{aligned}$$

◇

4) Quelle est l'intensité reçue en D à $t = 0$?

Réponse

$I_D(t=0) = 0$: intéreférences destructives liées au déphasage de π ajouté par la réflexion.

◇

5) Déterminer l'expression de l'instant t_k auquel est observé le $k^{\text{ième}}$ maximum d'intensité en D.

Réponse

On résout $I_D(t_k) = 4I_0$, soit $\dfrac{\pi g^2 t_k^4}{\lambda L} = (2k-1)\pi$:

$$\boxed{t_k = \left(\frac{(2k-1)\lambda L}{g^2}\right)^{1/4}}$$

◇

6) Á l'aide d'une régression linéaire, déterminer la valeur de g.

Réponse

On trace t_k^4 en fonction de k, et on trouve $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

◇