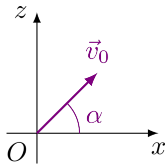
Mécanique – chapitre 3

Correction du TD

I Projection de vecteurs

1) Exprimer $\vec{v_0}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ en fonction de v_0 et α.



Réponse

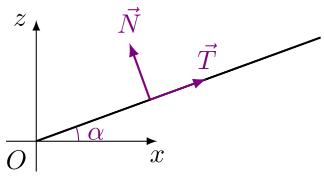
Si α vaut 0, $\vec{v_0}$ est selon $\overrightarrow{u_x}$. On sait donc que la projection de $\vec{v_0}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ donne $v_0 \cos\alpha\,\overrightarrow{u_x}$. On le remarque également avec le triangle rectangle OMH, avec M le bout de $\vec{v_0}$ et H son projeté orthogonal sur $\overrightarrow{u_x}$: la longueur OH est en effet $v_0 \cos\alpha$.

Si α vaut $\pi/2$, $\vec{v_0}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$. On sait donc que la projection de $\vec{v_0}$ sur $\overrightarrow{u_z}$ donne $v_0 \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}$. On le remarque également en prenant le triangle rectangle OMJ, avec cette fois J le projeté orthogonal de M sur $\overrightarrow{u_z}$: la longueur OJ est en effet $v_0 \sin\alpha$. Finalement,

$$\boxed{\overrightarrow{v_0} = v_0 \cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + v_0 \sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}}$$

◇

2) Exprimer $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_z})$ en fonction de N, T et α.



Réponse

Avec la même réflexion, on trouve

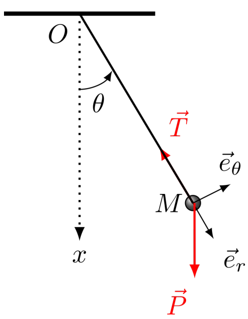
$$\boxed{\overrightarrow{T} = T\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + T\sin\alpha\,\overrightarrow{u_z}}$$

La méthode est la même pour $\overrightarrow{N}$, mais le résultat est différent. En effet, si $\alpha = 0$, $\overrightarrow{N}$ est selon $\overrightarrow{u_z}$: la projection de $\overrightarrow{N}$ sur $\overrightarrow{u_z}$ donne $N\cos\alpha\,\overrightarrow{u_z}$. Si $\alpha = \pi/2$, $\overrightarrow{N}$ est selon $-\overrightarrow{u_x}$: la projection de $\overrightarrow{N}$ sur $\overrightarrow{u_x}$ donne $-N\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}$. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{N} = -N\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x} + N\cos\alpha\,\overrightarrow{u_z}}$$

◇

3) Exprimer $\overrightarrow{P}$ et $\overrightarrow{T}$ dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta})$ en fonction de m, g, T et θ.



Réponse

Toujours même réflexion : si $\theta = 0$, $\vec{P}$ est selon $\vec{e_r}$, et si $\theta = \pi/2$, $\vec{P}$ est selon $-\vec{e_\theta}$. $\vec{T}$ est, par définition, selon $-\vec{e_r}$. Ainsi,

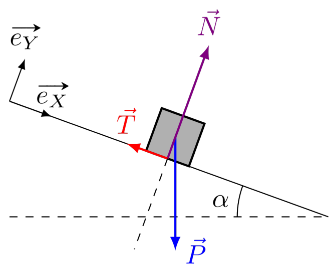
$$\boxed{\vec{P} = mg\cos\theta\,\vec{e_r} - mg\sin\theta\,\vec{e_\theta}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{T} = -T\,\vec{e_r}}$$

◇

4) **Équilibre plan incliné** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0}$$

Projeter le poids dans la base inclinée et exprimer les normes de $\vec{T}$ et $\vec{N}$ en fonction de m, g et α.



Réponse

Ici aussi :

◇ $\alpha = 0 \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{e_Y} = -1 \quad (\vec{P} \text{ selon } -\vec{e_Y})$

◇ $\alpha = \pi/2 \Rightarrow \vec{P}\cdot\vec{e_X} = 1 \quad (\vec{P} \text{ selon } \vec{e_X})$

Ainsi

$$\boxed{\vec{P} = mg(\sin\alpha\vec{e_X} - \cos\alpha\vec{e_Y})} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{N} = N\vec{e_Y}} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{T} = -T\vec{e_X}}$$

D'où

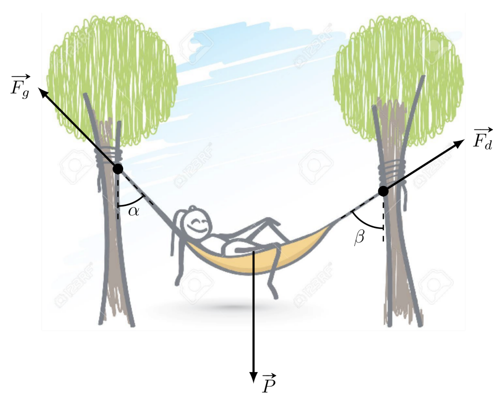
$$\vec{N} + \vec{T} + \vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} mg\sin\alpha - T \\ -mg\cos\alpha + N \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} T = mg\sin\alpha \\ N = mg\cos\alpha \end{cases}}$$

◇

5) **Équilibre hamac** À l'équilibre des forces, on a

$$\vec{F}_g + \vec{F}_d + \vec{P} = \vec{0}$$

Projeter les vecteurs $\vec{F}_g$ et $\vec{F}_d$ dans la base $(\vec{u_x}, \vec{u_y})$ avec $\vec{u_x}$ parallèle au sol vers la droite et $\vec{u_y}$ vertical ascendant. En déduire la norme littérale de ces deux vecteurs. On prend $m = 60\,\text{kg}$, $\alpha = 45°$ et $\beta = 60°$.



Réponse

On projette :

$$\overrightarrow{F}_g = F_g(\cos\alpha\,\overrightarrow{u_y} - \sin\alpha\,\overrightarrow{u_x}) \quad \text{et} \quad \overrightarrow{F}_d = F_d(\cos\beta\,\overrightarrow{u_y} + \sin\beta\,\overrightarrow{u_x})$$

et avec l'égalité de vecteurs on obtient

$$\begin{cases} 0 = F_d\sin\beta - F_g\sin\alpha \\ 0 = -mg + F_g\cos\alpha + F_d\cos\beta \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg = F_g\cos\alpha + F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta}\cos\beta \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} F_d = F_g\dfrac{\sin\alpha}{\sin\beta} \\ mg\sin\beta = F_g(\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta) \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} F_d = \dfrac{mg\sin\alpha}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \\ F_g = \dfrac{mg\sin\beta}{\cos\alpha\sin\beta + \sin\alpha\cos\beta} \end{cases}}$$

Les applications numériques, **non demandées**, donnent

$$\boxed{\begin{cases} F_d = 4{,}4 \times 10^2\,\mathrm{N} \\ F_g = 5{,}4 \times 10^2\,\mathrm{N} \end{cases}}$$

◇

II Masse du Soleil

La Terre subit de la part du Soleil la force d'attraction gravitationnelle :

$$\overrightarrow{F}_g = -\mathcal{G}\frac{M_T M_S}{R^2}\,\overrightarrow{u_r} \quad \text{où} \quad \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI}$$

avec $\overrightarrow{u_r}$ le vecteur unitaire allant du Soleil vers la Terre. La Terre tourne autour du Soleil en décrivant un cercle de rayon $R = 149{,}6 \times 10^6\,\mathrm{km}$.

1) Déterminer la masse du Soleil.

Réponse

On étudie le système {Terre} dans le référentiel héliocentrique. La Terre étant sur une orbite circulaire, on utilise un repère polaire $(\mathrm{S}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ en appelant S le centre de gravité du Soleil et T le centre de gravité de la Terre. On a :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{ST}} &= R\,\overrightarrow{u_r} \\ \overrightarrow{v} &= R\dot\theta\,\overrightarrow{u_\theta} \\ \overrightarrow{a} &= \underbrace{\cancel{R\ddot\theta\,\overrightarrow{u_\theta}}}_{\ddot\theta=0} - R\dot\theta^2\,\overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$

étant donné que la distance Terre-Soleil est fixe, et que la vitesse angulaire de la Terre autour du Soleil est constante. On a d'ailleurs, en appelant $\omega = \dot\theta$ cette vitesse angulaire,

$$\omega = \frac{2\pi}{T_0}$$

avec T_0 la période de révolution de la Terre autour du Soleil, telle que $T_0 = 365{,}26 \times 24 \times 3600\mathrm{s} = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s}$. Ainsi, la seule force s'exerçant sur la Terre étant l'attraction gravitationnelle du Soleil, on a avec le PFD :

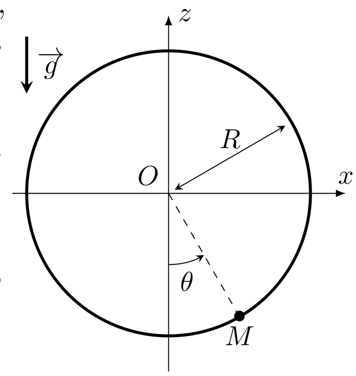
$$M_T\overrightarrow{a} = \overrightarrow{F}_g \Leftrightarrow -\cancel{M_T}R\omega^2 = -\mathcal{G}\frac{\cancel{M_T}M_S}{R^2}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{M_S = \frac{R^3\omega^2}{\mathcal{G}} = \frac{4\pi^2 R^3}{\mathcal{G}{T_0}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 1{,}496 \times 10^{11}\,\mathrm{m} \\ \mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{SI} \\ T_0 = 3{,}16 \times 10^7\,\mathrm{s} \end{cases} \Rightarrow \boxed{M_S = 1{,}99 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}}$$

◇

III Oscillations d'un anneau sur un cerceau

Un cerceau de centre O et de rayon R est maintenu dans un plan vertical, et un anneau de masse m assimilé à un point matériel M peut glisser sans frottements le long de ce cerceau.



1) Qu'est-ce que l'hypothèse « sans frottements » implique pour la réaction du cerceau sur l'anneau ?

Réponse

L'hypothèse « sans frottements » signifie que la réaction du cerceau est uniquement normale : il n'y a pas de composante tangentielle.

◇

2) Écrire le PFD appliqué à l'anneau et le projeter dans une base adaptée.

Réponse

- **Système :** {anneau}
- **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- **Repère :** $(\mathrm{O}, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ avec $\vec{u_\theta}$ dans le sens de θ
- **Repérage :**

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\,\vec{u_r} \\ \vec{v}(t) &= R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta} \\ \vec{a}(t) &= R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r} \end{aligned}$$

- **BDF :**

Poids $\vec{P} = mg(\cos\theta\,\vec{u_r} - \sin\theta\,\vec{u_\theta})$
Réaction $\vec{R} = -R_N\,\vec{u_r}$

- **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta - R_N \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = R_N \\ mR\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \end{cases}} \tag{3.1}$$

◇

3) En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.

Réponse

Avec (3.1), en la mettant sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\sin\theta = 0} \tag{3.2}$$

avec $$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

◇

On se place dans l'approximation des petits angles ($|\theta| < \theta_0 = 20°$). Initialement, l'anneau est situé à la verticale en-dessous de O et il est lancé vers la droite, avec une vitesse initiale de norme v_0.

4) En déduire l'équation horaire du mouvement.

Réponse

On a donc
$$\boxed{\theta(0) = 0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = v_0\,\vec{u_\theta} = R\dot{\theta}(0)\,\vec{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}}$$

L'équation (3.2) se simplifie avec $\sin\theta \approx \theta$, pour donner

$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Et avec les CI,
$$\theta(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 0}$$
$$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{R\omega_0}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

◇

5) À quelle condition sur v_0 l'approximation des petits angles est-elle vérifiée ?

Réponse

La valeur maximale de $|\theta(t)|$ est $v_0/(R\omega_0)$, quand le sinus vaut ± 1. Pour avoir des petits angles, il faut que l'angle maximal ne dépasse pas θ_0, soit

$$\frac{v_0}{R\omega_0} < \theta_0 \Leftrightarrow v_0 < \theta_0 R\sqrt{\frac{g}{R}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 < \theta_0\sqrt{Rg}}$$

◇

IV Mouvement hélicoïdal

Un point matériel M a pour équations horaires en coordonnées cylindriques :

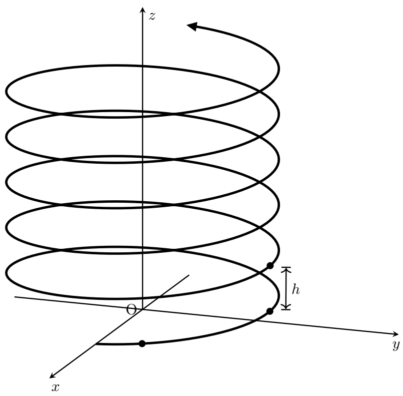
$$\begin{cases} r(t) = R \\ \theta(t) = \omega t \\ z(t) = \alpha t \end{cases} \quad \text{avec} \quad (\alpha,\omega) \quad \text{des constantes}$$

1) Exprimer le vecteur vitesse et le vecteur accélération dans la base cylindrique.

Réponse

On a

$$
\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\,\vec{u_r} + \alpha t\,\vec{u_z} \\
\vec{v}(t) &= \underbrace{\cancel{\dot{R}\,\vec{u_r}}}_{=0} + R\underbrace{\dot{\theta}}_{=\omega}\,\vec{u_\theta} + \alpha\,\vec{u_z} + \alpha t\underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{d}\,\vec{u_z}}{\mathrm{d}t}}}_{=0} \\
&= R\omega\,\vec{u_\theta} + \alpha\,\vec{u_z} \\
\vec{a}(t) &= R\underbrace{\cancel{\dot{\omega}}}_{=0}\,\vec{u_\theta} - R\omega^2\,\vec{u_r} + \vec{0} \\
&= -R\omega^2\,\vec{u_r}
\end{aligned}
$$



2) Dessiner l'allure de la trajectoire.

Réponse

Cf. ci-dessus.

3) Déterminer h le pas de l'hélice, c'est-à-dire la distance selon l'axe $(\mathrm{O}z)$ dont sont séparés deux points successifs de la trajectoire correspondant à un même angle θ (modulo 2π).

Réponse

Soit t_0 un instant quelconque. Un point à ce temps-là est tel que

$$
\begin{cases}
r(t_0) = R \\
\theta(t_0) = \omega t_0 \\
z(t_0) = \alpha t_0
\end{cases}
$$

Le premier point qui est au même angle θ mais avec 2π de plus se trouve donc à t_1 tel que

$$
\begin{aligned}
&\theta(t_1) = \theta(t_0) + 2\pi \\
\Leftrightarrow\ &\omega t_1 = \omega t_0 + 2\pi \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{t_1 = t_0 + \frac{2\pi}{\omega}}
\end{aligned}
$$

On a alors

$$
\begin{aligned}
&z(t_1) - z(t_0) = h = \alpha t_1 - \alpha t_0 \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{h = 2\pi\frac{\alpha}{\omega}}
\end{aligned}
$$

4) Ce mouvement est-il uniforme ? À quelle condition est-il circulaire ?

Réponse

$\|\vec{v}\| = \sqrt{R^2\omega^2 + \alpha^2} =$ cte, donc il est uniforme. Il est circulaire ssi $\boxed{\alpha = 0}$.

5) Déterminer les coordonnées cartésiennes de ce mouvement.

Réponse

En regardant dans le plan polaire, on trouve $x(t)$ et $y(t)$:

$$
\boxed{\begin{cases}
x(t) = R\cos(\omega t) \\
y(t) = R\sin(\omega t) \\
z(t) = \alpha t
\end{cases}}
$$