

Oscillateurs harmonique et amorti

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des systèmes qui présentent un régime transitoire caractérisé par des exponentielles croissantes ou décroissantes. En combinant deux de ces composants, on trouve alors des régimes transitoires caractérisés par une combinaison d'exponentielles, exprimée sous la forme de fonctions sinusoïdales. Regardons un exemple.

I Introduction harmonique

A Signal sinusoïdal

Définition 4.1 : signal sinusoïdal

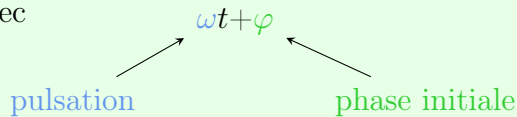
Un signal sinusoïdal est un signal de la forme

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

A est l'*amplitude*, telle que

$$A = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$$

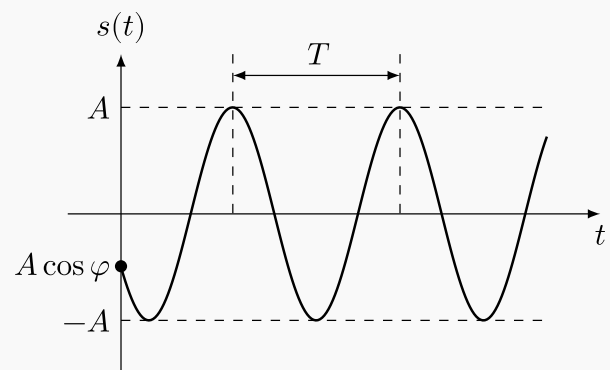
$\omega t + \varphi$ est la *phase instantanée* du signal, avec



Unités

La phase s'exprime en **radians** ; la pulsation en **rad s⁻¹**.

Exemple 4.1 : graphique



La pulsation représente la vitesse avec de variation de la phase, et s'exprime en rad s^{-1} . Pour une variation de 2π effectuée à la période T , on définit

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

B Équation différentielle oscillateur harmonique

Propriété 4.1 : équation différentielle

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Avec x_{eq} la position d'équilibre du système et ω_0 la pulsation **propre**.

Propriété 4.2 : solutions

La forme générale des solutions d'un oscillateur harmonique s'écrit de manière équivalente

$$\begin{aligned} x(t) &= A' \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{eq}} \\ x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{eq}} \end{aligned}$$

avec A' , A , B des *constantes d'intégration*.

C Changement de variable : de général à homogène

Remarque 4.1 : changement de variable

Au cours du chapitre précédent, nous avons vu la méthode pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. Nous avons pu remarquer que les équations différentielles entre les échelons montants et descendants étaient en tout point similaires si ce n'est pour la présence ou non d'un second membre, impliquant la recherche d'une solution particulière ou non. Le changement de variable permet **d'éviter de chercher une solution particulière constante**.

Propriété 4.3 : changement de variable

Si $x(t)$ est solution de

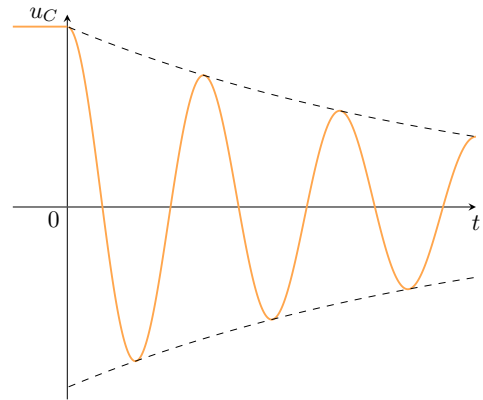
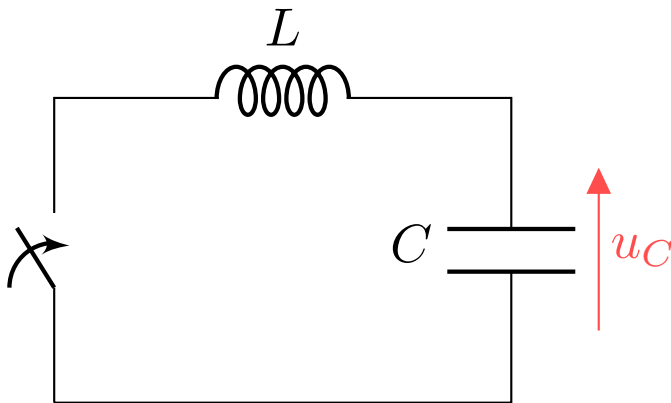
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

alors $y(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$ est solution de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$$

D Exemple expérimental : l'oscillateur LC

Soit le circuit suivant sous un échelon de tension descendant. On observe la tension $u_C(t)$ avec un oscilloscope dont la courbe est représentée à droite.



On remarque que la tension aux bornes du condensateur réalise des oscillations sinusoïdales amorties. En fonction des valeurs des caractéristiques des composants, on trouve :

- Pour $C_1 = 80 \text{ nF}$ et $L_1 = 43 \text{ mH}$, une période de $T_1 = 364 \mu\text{s}$;
- Pour $C_2 = 20 \text{ nF}$ et $L_2 = 43 \text{ mH}$, une période de $T_2 = 184 \mu\text{s}$;

Analyse

Lorsque l'on excite le système LC, la tension aux bornes du condensateur oscille de façon régulière et sinusoïdale, avec une période qui ne dépend pas de l'amplitude de l'excitation mais des caractéristiques de l'oscillateur (capacité du condensateur et inductance de la bobine).

C'est ce que nous allons maintenant démontrer analytiquement.

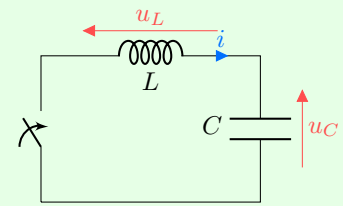
II Oscillateur harmonique électrique : circuit LC régime libre

A Présentation

Définition 4.2 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux.

On suppose le condensateur initialement chargé :
 $u_C(0^-) = E$ et $i(0^-) = 0$ (condensateur chargé \equiv interrupteur ouvert).



B Équation différentielle du circuit

Propriété 4.4 : équation diff. LC

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en décharge est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre.

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration 4.1 : équation diff. LC

Avec la loi des mailles,

$$u_L + u_C = 0$$

Ensuite, **en convention récepteur** on a :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + u_C &= 0 \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat. L assure $i(0^+) = 0$ et C assure $u_C(0^+) = E$ par continuité.

Remarque 4.2 : Unité de ω_0

On peut vérifier à cette étape que ω_0 est bien homogène à l'inverse d'un temps. Pour ça, deux manières :

Par analyse dimensionnelle directe. Sachant que RC et L/R sont des temps (cf. chapitre précédent) :

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{R}{LRC} = \underbrace{\left[\frac{L}{R} \right]^{-1}}_{s^{-1}} \times \underbrace{[RC]^{-1}}_{s^{-1}}$$

Et on a bien ω_0^2 en s^{-2} , et donc ω_0 en s^{-1} , les radians n'ayant pas de dimension.

Par analyse dimensionnelle indirecte. En effet, l'équation différentielle est forcément une équation homogène. Ainsi

$$\left[\frac{d^2 u_C}{dt^2} \right] = \frac{[u_C]}{[dt]^2} = \frac{V}{s^2}$$

et l'autre terme doit avoir la même unité :

$$[w_0^2 u_C] = [w_0]^2 \times [u_C] = V s^{-2}$$

On en déduit que ω_0^2 est de dimension s^{-2} , d'où la dimension de ω_0 .

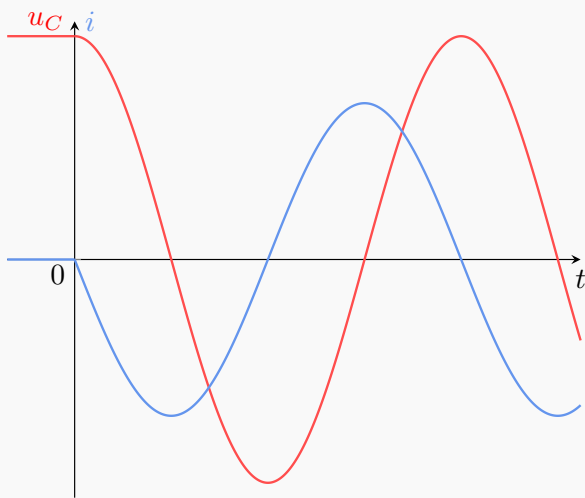
C Résolution de l'équation différentielle et graphique

Propriété 4.5 : solution de l'équation différentielle LC

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC en décharge avec $u_C(0) = E$ et l'intensité en découplant sont

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E \cos(\omega_0 t) \\ i(t) &= -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Graphique



Démonstration 4.2 : solution LC série

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Celle-ci est souvent plus pratique pour trouver les constantes d'intégration. On trouve A avec la première condition initiale : $u_C(0^+) = E$. En effet,

$$u_C(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

donc $A = E$.

On trouve B avec la seconde condition initiale : $i(0^+) = 0 = C \frac{du_C}{dt}$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) &= B\omega_0 \end{aligned}$$

Donc $B = 0$ ($\omega_0 \neq 0$). On obtient ensuite i avec la relation courant-tension.

D Bilan énergétique

Propriété 4.6 : bilan d'énergie

L'énergie emmagasinée dans le circuit est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

Elle est conservée à chaque instant et résulte de l'échange périodique d'énergie entre le condensateur et la bobine.

Démonstration 4.3 : bilan d'énergie

On fait un bilan de puissances avec la loi des mailles multipliée par i :

$$\begin{aligned} u_C i + u_L i &= 0 \\ \Leftrightarrow u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

On identifie l'intérieur de la parenthèse à l'énergie du système (car par définition $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$) pour avoir la propriété.

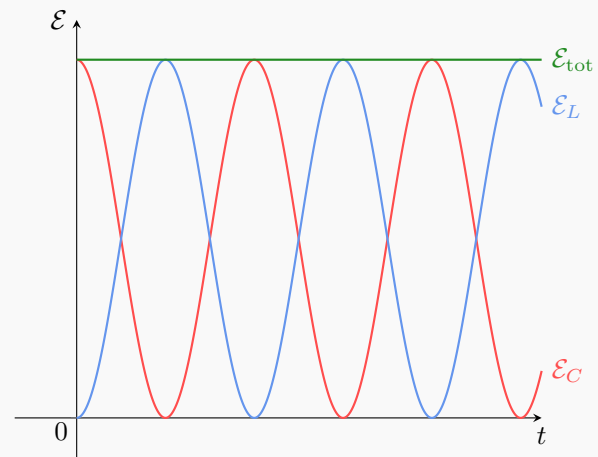
Implication 4.1 : vérification

On vérifie avec les expressions analytiques trouvées, sachant que $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Cu_C^2 &= \frac{1}{2}CE^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{1}{2}\underbrace{LC^2\omega_0^2}_{=C} E^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \frac{1}{2}CE^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CE^2 = \text{cste}$$

Graphique**Important 4.1 : résultat**

On retrouve bien des oscillations de la tension aux bornes de u_C comme dans l'approche expérimentale, avec une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ qui augmente avec L et C . Cependant, **nous n'avons pas d'amortissement ici** ! En effet les composants utilisés ici sont idéaux, et conservent totalement l'énergie, il n'y a pas de raison d'en perdre. Il y a eu une simplification que l'on effectue souvent en mécanique : **on a négligé les effets dissipatifs**. Regardons comment ça se traduit pour un exemple mécanique.

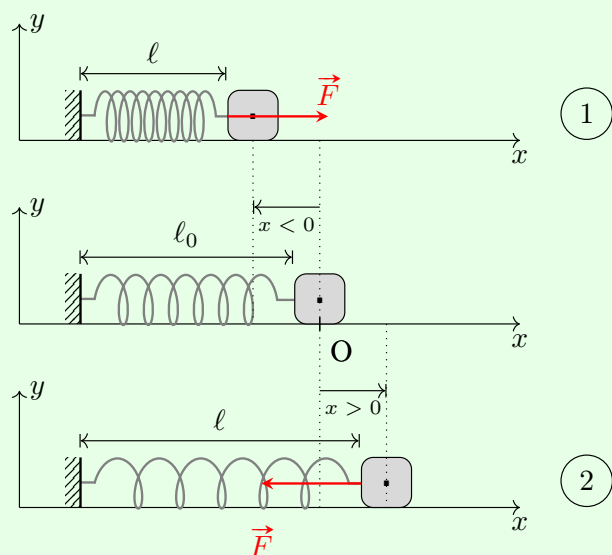
III Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre**A Introduction****Définition 4.3 : force de rappel d'un ressort**

Soit le système masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le ressort se déforme sous l'effet d'une contrainte en stockant l'énergie donnée, qu'il libère en reprenant sa forme quand la contrainte s'arrête. On définit la force de rappel du ressort par :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$$

avec

- $k > 0$ la **constante de raideur** en N m^{-1} ($[\vec{F}] = [k][\ell]$) ;
- ℓ_0 sa **longueur à vide** ;
- \vec{u}_x un vecteur unitaire ($\|\vec{u}_x\| = 1$) dirigé selon l'axe x



Si $\ell > \ell_0$, on a bien une force dirigée selon $-\vec{u}_x$, (situation (2)), sinon dirigée selon $+\vec{u}_x$.

B Présentation

Définition 4.4 : situation initiale et bilan des forces

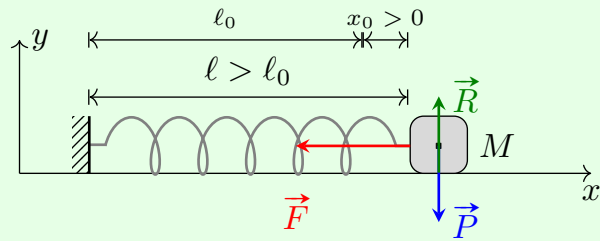
Système : point matériel M de masse m relié à un ressort horizontal **idéal et sans frottements**.

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O, x, y, t)$;

Soit $x = \ell - \ell_0$ la position de la masse

Conditions initiales :

- 1) À $t = 0$ la masse est à la position $x_0 > 0$;
- 2) À $t = 0$ sa vitesse est $v_0 = 0$.



Bilan des forces :

- 1) Poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$;
- 2) Réaction du support $\vec{R} = R\vec{u}_y$;
- 3) Force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$

C Équation différentielle et solution

Propriété 4.7 : équation et solution

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \omega_0^2 \ell &= \omega_0^2 \ell_0 \end{aligned}$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. ℓ_0 est donc la longueur d'équilibre du système.

La position x et la vitesse v ont pour expression

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) \\ v(t) &= -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Démonstration 4.4 : équation différentielle

La deuxième loi de NEWTON, aussi appelée **principe fondamental de la dynamique** (PFD) donne :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \\ \Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -kx \\ -mg + R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur l'axe \vec{u}_x on trouve bien $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$, d'où l'équation différentielle. La projection sur \vec{u}_y montre que la réaction du support compense le poids.

On a la même démonstration que précédemment.

Remarque 4.3 : analogie LC-ressort

Alors qu'on parlait d'un système *a priori* totalement différent, on remarque que la physique des deux systèmes sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation différentielle**. On observe une oscillation du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x = 0 \Leftrightarrow \ell = \ell_0$.

On peut donc associer u_C à x et i à v , étant donné que pour un condensateur $i = C\frac{du_C}{dt}$ et que $v = \frac{dx}{dt}$. Ainsi, **les échanges énergétiques sont les mêmes** entre l'énergie emmagasinée dans la déformation du ressort et l'énergie cinétique de la masse comme on va le voir juste après.

D Bilan énergétique

Définition 4.5 : énergies potentielle élastique et mécanique

Le ressort emmagasine une énergie *potentielle* lors de sa déformation, telle que

$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

On définit alors l'énergie mécanique totale \mathcal{E}_m du système par

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

avec, évidemment, $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Propriété 4.8 : conservation énergie

Dans le système masse-ressort horizontal sans frottements, l'énergie mécanique est conservée.

Démonstration 4.5 : conservation énergie

À partir de l'équation différentielle on multiplie par $\frac{dx}{dt}$ et on utilise que $ff' = (\frac{1}{2}f^2)'$ pour f une fonction :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

On a bien $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathcal{E}_m$ conservé.

Implication 4.2 : vérification

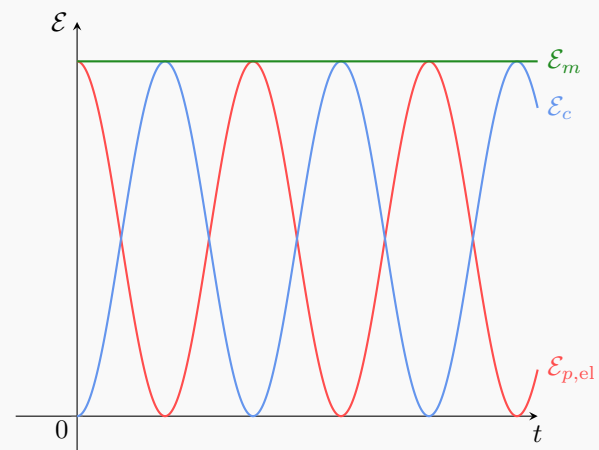
On vérifie avec les expressions analytiques trouvées, sachant que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{=k} x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}kx_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) \end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{cste}$$

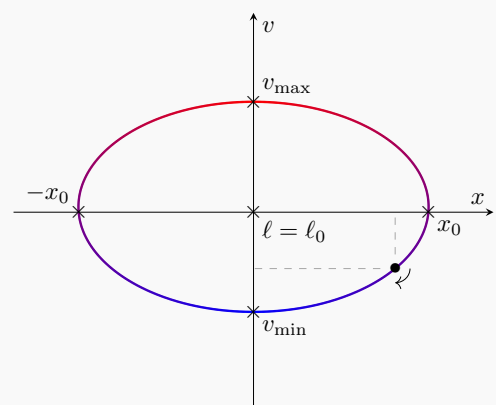
Graphique



E Analyse correspondance

Visualisation

Il est utile d'observer la physique des systèmes oscillants non pas dans un espace (grandeur, temps) mais dans un espace (**grandeur, dérivée**), qui permet plus rapidement de sonder son évolution. Par exemple, le ressort lâché à x_0 et $v_0 = 0$ voit sa position diminuer et sa vitesse augmenter (algébriquement) jusqu'à ce qu'il passe par sa position d'équilibre ($x = 0$) avec une vitesse extrême v_{\min} , avant de se comprimer en perdant de sa vitesse. Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.

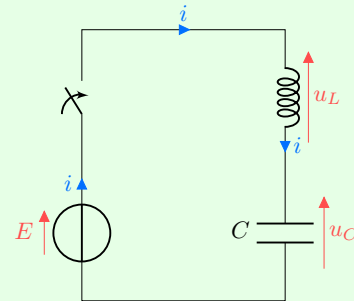


Important 4.2 : Conclusion

En réalité, les **frottements en mécanique existent**, et à chaque étape le système masse-ressort perd de l'énergie dans la dissipation par frottement créant de la chaleur. On va donc avoir une **trajectoire amortie** plus ou moins fortement. Dans le cas électrique, c'est la **résistance que nous avons négligée** alors qu'elle existe toujours : notamment la bobine réelle est composée d'une bobine idéale et d'une résistance en série. C'est la résistance qui va **dissiper l'énergie** de l'oscillateur harmonique LC sous forme de chaleur par effet JOULE et amortir l'oscillation de u_C . Nous allons donc étudier le circuit *RLC* dans la suite.

IV Complément : circuit LC montant**A Présentation****Définition 4.6 : situation initiale**

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux alimentés par un générateur de tension fixe E . On suppose le condensateur initialement déchargé : $u_C(0^-) = 0$, et on ferme l'interrupteur à $t = 0$, soit $i(0^-) = 0$.

**B Équation différentielle du circuit****Propriété 4.9 : équation diff. LC**

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en charge est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = \omega_0^2 E$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre.

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = 0 \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration 4.6 : équation diff. LC

Avec la loi des mailles,

$$u_L + u_C = E$$

Ensuite, en convention récepteur on a :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$L \frac{di}{dt} + u_C = E \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = E$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = \frac{1}{LC} E$$

D'où le résultat. L assure $i(0^+) = 0$ et C assure $u_C(0^+) = E$ par continuité.

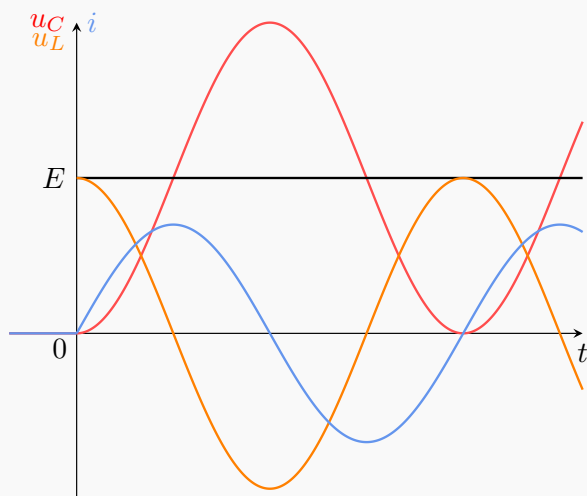
C Résolution de l'équation différentielle et graphique

Propriété 4.10 : solution de l'équation différentielle LC

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC en charge avec $u_C(0) = 0$ et l'intensité en découplant sont

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E(1 - \cos(\omega_0 t)) \\ i(t) &= CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Graphique



Démonstration 4.7 : solution LC série

D'après la propriété 4.3, on sait que $u_C - E$ est solution de l'équation homogène associée, donc on a

$$u_C(t) - E = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

On trouve alors A avec la première condition initiale : $u_C(0^+) = 0$. En effet,

$$u_C(0) - E = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

donc $A = -E$.

On trouve B avec la seconde condition initiale : $i(0^+) = 0 = C \frac{du_C}{dt}$. En effet,

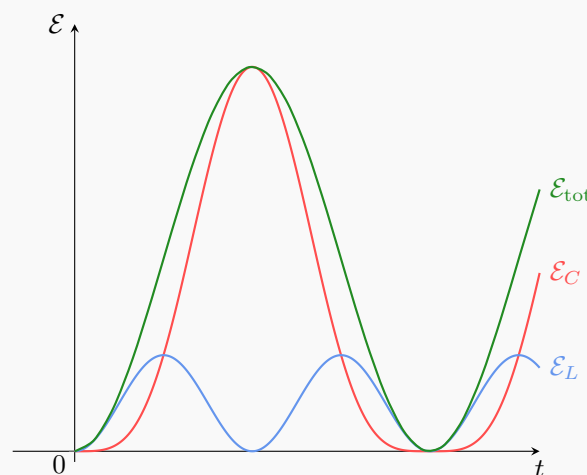
$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) &= B\omega_0 \end{aligned}$$

Donc $B = 0$ ($\omega_0 \neq 0$), et $u_C - E = -E \cos(\omega_0 t)$. On obtient ensuite i avec la relation courant-tension.

Remarque 4.4 : valeur de u_C

On remarque aisément que u_C atteint $2E$ par moment, ce qui pourrait paraître déroutant puisqu'on donne une tension E au système. En réalité ceci est tout à fait normal puisque $u_L = L \frac{di}{dt}$ prend des valeurs négatives quand i diminue : la somme des deux fait bien E . On peut réaliser un bilan d'énergie pour vérifier que $\mathcal{E}_g = CE^2(1 - \cos(\omega_0 t)) = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$, voir graphique ci-contre.

Bilan d'énergie



D Intérêt oscillateur harmonique

Le principal intérêt de l'observation régulière d'une oscillation est la mesure du temps. Une excitation quelconque (comme un échelon) produit un phénomène se reproduisant à intervalle régulier et fait alors apparaître un étalon temporel. Ce principe est utilisé :

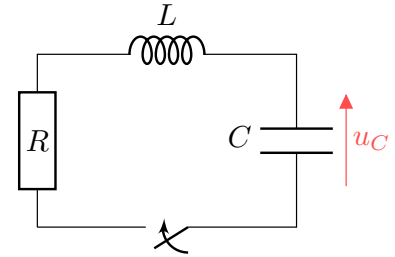
- dans les horloges mécaniques à balancier : on exploite le mouvement régulier du pendule ;
- dans les horloges à ressort : la période est liée au rapport de l'inertie et de la raideur du système ;

- dans les horloges électroniques : un cristal de quartz dont la fréquence d'oscillation est précisément connue (en général une puissance de 2 en Hz) ;
- dans les horloges atomiques : on utilise la régularité des oscillations des ondes électromagnétiques absorbées par un atome. L'actuelle définition de la seconde est basée sur le fonctionnement d'une horloge atomique.

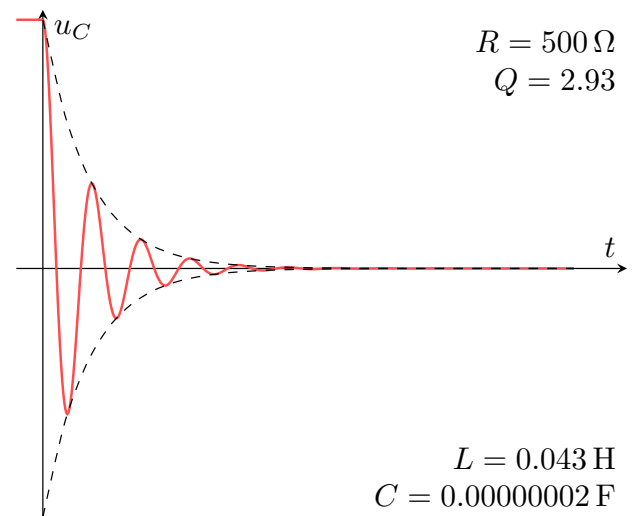
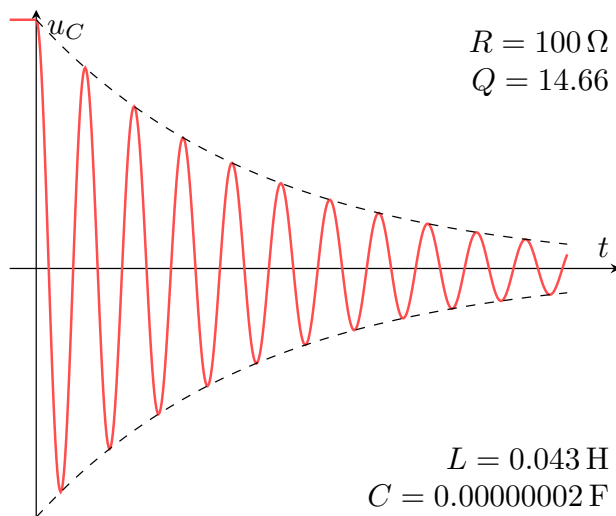
V Introduction amorti

A Évolutions en régime libre, exemple RLC

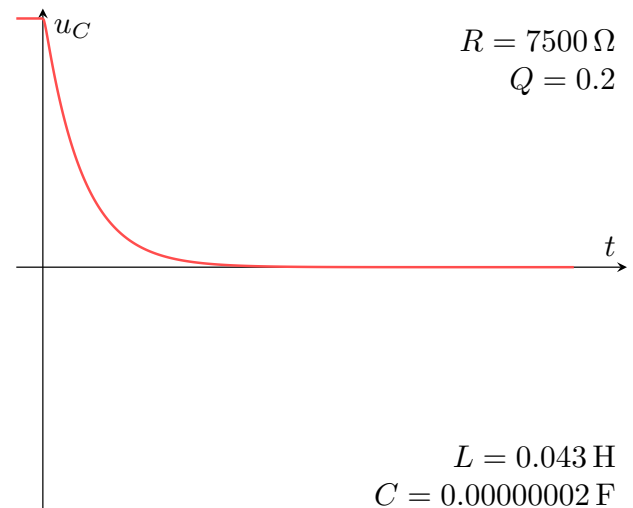
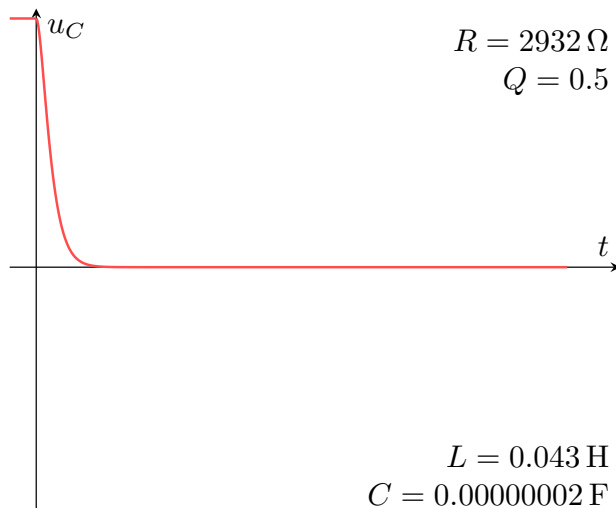
En reprenant les résultats de la section II, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Plus quantitativement, avec le circuit suivant on a :



- Lorsque la résistance est petite : on observe plusieurs oscillations. Nous avons câblé un circuit avec $L = 43 \text{ mH}$ et $C = 20 \text{ nF}$. On observe une série d'oscillations à la période $T \approx 184 \mu\text{s}$. On observe environ 25 oscillations lorsque $R \approx 60 \Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180 \Omega$, 5 oscillations lorsque $R \approx 500 \Omega$.



- Lorsque la résistance est plus grande : les oscillations disparaissent. Lorsque $R \approx 2,9 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250 \mu\text{s}$ (à 95%). Lorsque $R \approx 7,5 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $420 \mu\text{s}$.



Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, la tension aux bornes du condensateur varie selon la valeur de la résistance avec plus ou moins d'oscillations, jusqu'à n'avoir aucune oscillation quand $R \gg 1$. La période ne cesse d'augmenter quand R augmente.

B Équation différentielle

Propriété 4.11 : équation différentielle

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Avec x_{eq} la position d'équilibre, ω_0 la pulsation **propre**, et $Q > 0$ le **facteur de qualité**, sans dimension.

Implication 4.3 : analyse de l'équation

Par lecture de cette équation, avec Q sans dimension on retrouve que ω_0 s'exprime en s^{-1} car $\frac{dx}{dt}$ est de dimension $[x] \text{s}^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus Q est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le facteur de qualité traduit donc à quel point le système est presque idéal.

C Équation caractéristique et régimes de solutions

Définition 4.7 : équation caractéristique

Pour résoudre une équation différentielle, on suppose une solution de la forme $x(t) = K \exp(rt)$ avec $r \in \mathbb{C}$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'**équation caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant Δ est

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2$$

Implication 4.4 : régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r , doubles réelles, simple réelle ou doubles complexes. On a en effet

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow Q^2 < \frac{1}{4} \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$Q > 1/2$: régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

$Q = 1/2$: régime **critique**, racine double réelle ;

$Q < 1/2$: régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

Notation 4.1 : \pm et \mp

Il est courant de noter les racines r_{\pm} pour dénoter à la fois r_+ et r_- . Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe \pm , ce qui signifie que r_+ correspond à l'expression avec le $+$, et r_- correspond à l'expression avec le $-$. Si l'expression contient le signe \mp , c'est l'opposé : r_+ correspond à l'expression avec $-$.

Propriété 4.12 : solutions

Pseudo-périodique

$$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$$

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$$

$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

$$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \times \underbrace{[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$$

Critique

$$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$$

$$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$$

$$x(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

Apériodique

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$$

$$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$$

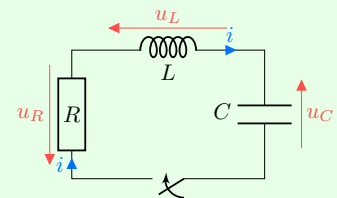
$$x(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

VI Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

A Présentation

Définition 4.8 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux. **On suppose le condensateur initialement chargé** : $u_C(0^-) = E$ et $i(0^-) = 0$ (condensateur chargé \equiv interrupteur ouvert).



B Bilan énergétique

Propriété 4.13 : bilan d'énergie

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\mathcal{P}_J$$

$$\text{avec } \mathcal{E} = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2.$$

Démonstration 4.8 : bilan d'énergie

On fait un bilan de puissances avec la loi des mailles multipliée par i :

$$\begin{aligned} u_C i + u_L i + u_R i &= 0 \\ \Leftrightarrow u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i + Ri^2 &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2 \right) &= -\mathcal{P}_J \end{aligned}$$

Important 4.3 : résultat

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C , d'où l'amortissement.

C Équation différentielle du circuit

Propriété 4.14 : équation diff. RLC

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC en décharge est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

– $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre ;

– $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration 4.9 : équation diff. RLC

Avec la loi des mailles,

$$u_L + u_R + u_C = 0$$

Ensuite, **en convention récepteur** on a :

$$u_L = L \frac{di}{dt}, \quad i = C \frac{du_C}{dt} \quad \text{et} \quad u_R = Ri$$

$$L \frac{di}{dt} + Ri + u_C = 0$$

$$\Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C = 0$$

D'où le résultat. L assure $i(0^+) = 0$ et C assure $u_C(0^+) = E$ par continuité.

D Solutions

VI.D.1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

Propriété 4.15 : solution

Pour un facteur de qualité $Q > 1/2$, u_C s'exprime par

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right]$$

avec

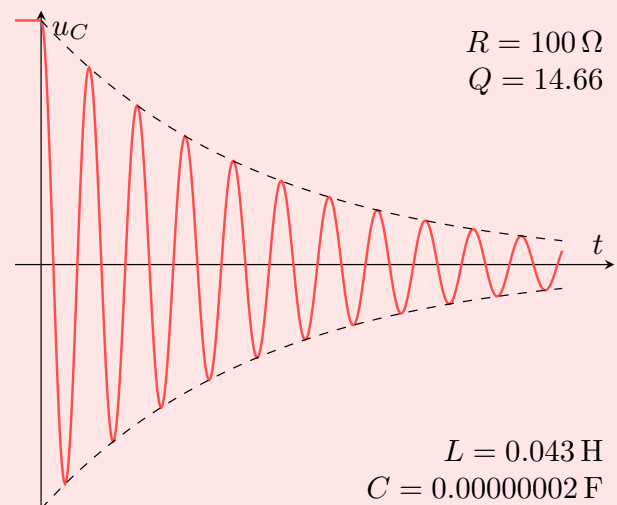
$$\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

La période des oscillations diffère des oscillations harmoniques $T_0 = 2\pi/\omega_0$ selon

$$T = \frac{2\pi}{\omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

Les oscillations se font entre les courbes

$$y(t) = \pm \frac{E}{1 - \frac{1}{4Q^2}} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$



Démonstration 4.10 : solution

On part de l'équation caractéristique pour trouver

$$r_{\pm} = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm i\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\sqrt{\omega_0^2 \left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right)}$$

$$\Leftrightarrow r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$$

d'où la définition de ω . Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)]$$

On trouve A avec la première condition initiale, $u_C(0^+) = E$:

$$u_C(0) = E = 1 [A \cdot 1 + B \cdot 0] = A$$

soit $A = E$.

On trouve B avec la seconde CI, $i(0^+) = 0 = C \frac{du_C}{dt}$. En effet,

$$\frac{du_C}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times$$

$$[A \cos(\omega t) + B \sin(\omega t)] +$$

$$\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [-A\omega \sin(\omega t) + B\omega \cos(\omega t)]$$

$$\Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \omega B = 0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\omega_0}{2Q\omega}E = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Ainsi, on retrouve bien

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times$$

$$\left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right]$$

Propriété 4.16 : régime transitoire

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$t_{95} \approx QT_0 \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Démonstration 4.11 : régime transitoire

L'amplitude varie selon $E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$; on définit donc t_{95} tel que

$$\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t_{95}\right) = 0.05 \Leftrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q}t_{95} = \ln(0.05)$$

$$\Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2Q}t_{95} = \ln(20) \Leftrightarrow t_{95} = 2 \ln(20) \frac{Q}{\omega_0}$$

Avec $2 \ln(20) \approx 2\pi$, on a bien le résultat.

Important 4.4 : résultat à grand Q

Avec ces résultats on remarque en effet que quand $Q \rightarrow \infty$, on a à la fois

$$\omega \approx \omega_0 \quad \text{donc} \quad T \approx T_0$$

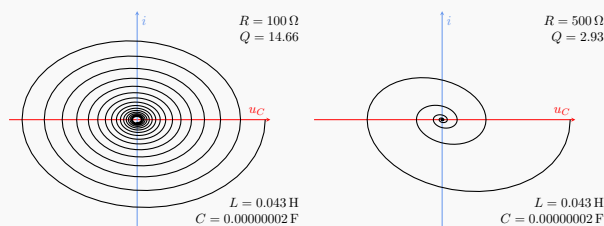
Mais aussi

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{donc} \quad u_C(t) = E \cos(\omega t)$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.

Visualisation dans l'espace des phases

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C, i) n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**. On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue ou que l'amortissement augmente.

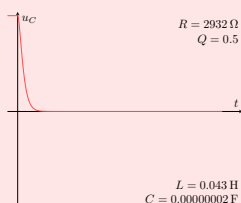
VI.D.2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

Propriété 4.17 : solution

Pour un facteur de qualité $Q = 1/2$, u_C s'exprime par

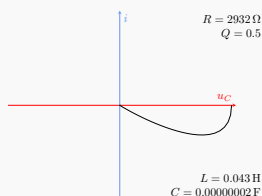
$$u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)$$

et on n'observe pas une oscillation.



Visualisation dans l'espace des phases

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.



Propriété 4.18 : régime transitoire

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Démonstration 4.12 : solution

La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut $r = -\omega_0$. Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

On trouve B avec la première condition initiale, $u_C(0^+) = E$:

$$u_C(0) = E = (A \cdot 0 + B) \cdot 1 = B$$

soit $B = E$. On trouve A avec la seconde CI, $i(0^+) = 0 = C \frac{du_C}{dt}$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= (A) \exp(-\omega_0 t) + (At + E)(-\omega_0) \exp(-\omega_0 t) \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) &= A - \omega_0 E = 0 \\ &\Leftrightarrow A = \omega_0 E \end{aligned}$$

D'où le résultat.

Démonstration 4.13 : régime transitoire

En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance, exponentielle, on a

$$\exp(-\omega_0 t_{95}) = 0,05 \Leftrightarrow t_{95} = \frac{\ln(20)}{\omega_0}$$

Et avec $\ln(20) \approx \pi$ on a bien le résultat.

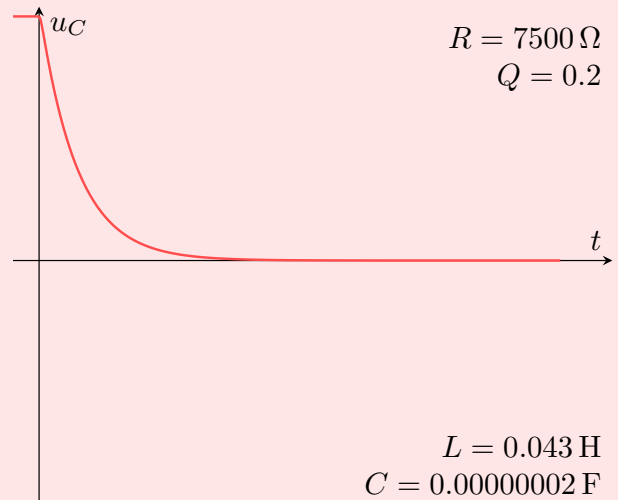
VI.D.3 Cas $\Delta > 0$: régime aperiodique

Propriété 4.19 : solution

Pour un facteur de qualité $Q < 1/2$, u_C s'exprime par

$$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} (r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$$

et on n'observe pas une oscillation. Le régime transitoire est plus long que pour $Q = 1/2$.


Démonstration 4.14 : solution

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{2Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \omega_0 \sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} (1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2}) \end{aligned}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

Avec la première condition initiale, $u_C(0^+) = E$:

$$u_C(0) = E = A + B$$

Avec la seconde CI, $i(0^+) = 0 = C \frac{du_C}{dt}$:

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= A r_+ \exp(r_+ t) + B r_- \exp(r_- t) \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) &= A r_+ + B r_- = 0 \\ \Leftrightarrow A &= -\frac{B r_-}{r_+} \end{aligned}$$

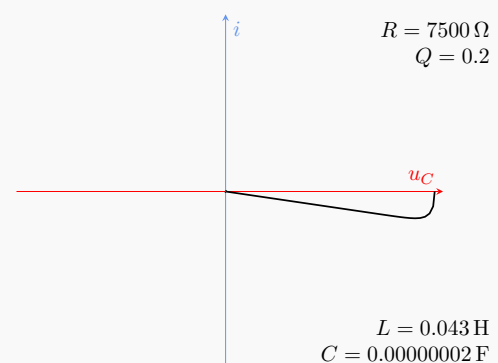
En combinant, on trouve

$$A = -\frac{E r_-}{r_+ - r_-} \quad \text{et} \quad B = \frac{E r_+}{r_+ - r_-}$$

D'où le résultat.

Visualisation dans l'espace des phases

Pendant le régime aperiodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher u_C d'osciller, mais également pour ralentir sa diminution vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire $\frac{du_C}{dt}$ plus petit donc i plus petit.



Propriété 4.20 : régime transitoire

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

Important 4.5 : résultat à faible Q

Quand $Q \rightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle, soit

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\sqrt{LC}} u_C \\ &= \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} u_C = \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C \end{aligned}$$

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de r_{\pm} tendent vers la même valeur $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$: en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance en

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R \sqrt{\frac{C}{L^3}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$.

Démonstration 4.15 : régime transitoire

$r_- < r_+$ et les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle). En effet,

$$r_+ < 0 \Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\omega_0 \text{ et } Q > 0} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - 4Q^2} > 0 \Leftrightarrow \sqrt{1 - 4Q^2} < 1^2 \Leftrightarrow 4Q^2 > 0 \quad \text{ce qui est vrai}$$

Ainsi, $|r_-| > |r_+|$, soit $\left|\frac{1}{r_-}\right| < \left|\frac{1}{r_+}\right|$. En assimilant $\tau = \left|\frac{1}{r_{\pm}}\right|$, l'exponentielle décroissant le **moins** vite est $\exp(r_+ t)$. On estime alors la durée du régime transitoire à $\ln(20)/r_+$.

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\sqrt{1+x} \approx 1 + x/2$ pour simplifier r_+ :

$$r_+ \underset{Q \ll 1}{\approx} -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - 1 - \frac{4Q^2}{2}\right) \approx Q\omega_0$$

Avec $\ln(20) \approx \pi$, on a finalement

$$t_{95} \approx \frac{\pi}{Q\omega_0} \quad \text{soit} \quad t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}$$

VII Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides**A Présentation****Définition 4.9 : situation initiale et bilan des forces**

Système : point matériel M de masse m relié à un ressort horizontal **idéal**.

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O, x, y, t)$;

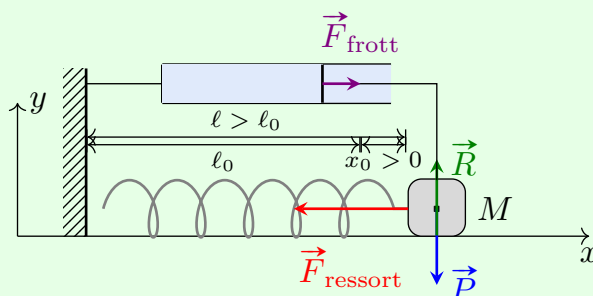
Soit $x = \ell - \ell_0$ la position de la masse

Conditions initiales :

- 1) À $t = 0$ la masse est à la position $x_0 > 0$;
- 2) À $t = 0$ sa vitesse est $v_0 = 0$.

Bilan des forces :

- 1) Poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$;



- 2) Réaction du support $\vec{R} = R\vec{u}_y$;
- 3) Force de rappel du ressort $\vec{F}_{\text{ressort}} = -kx\vec{u}_x$;
- 4) Force de frottement fluide $\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha\vec{v}$

B Équation différentielle

Propriété 4.21 : équation et solution

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\ell}{dt} + \omega_0^2 \ell &= \omega_0^2 \ell_0 \end{aligned}$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$. ℓ_0 **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

Démonstration 4.16 : équation différentielle

Avec le PFD :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \\ \Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -kx - \alpha v \\ -mg + R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur l'axe \vec{u}_x on trouve bien $m\frac{d^2x}{dt^2} + \alpha\frac{dx}{dt} + kx = 0$, d'où l'équation différentielle. La projection sur \vec{u}_y montre que la réaction du support compense le poids.

Remarque 4.5 : analogie RLC-ressort amorti

Comme pour le système sans frottements, alors qu'on parlait d'un système *a priori* totalement différent, on remarque que la physique des deux systèmes sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation différentielle**. On observe une oscillation amortie du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x = 0 \Leftrightarrow \ell = \ell_0$.

La masse caractérise l'inertie d'un corps, comme l'inductance l'inertie de la tension. On associe donc m à l'inductance L . Au contraire, on a vu que $C_1 // C_2 \Rightarrow C_{eq}^{-1} = C_1^{-1} + C_2^{-1}$, alors que $k_1 // k_2 \Rightarrow k_{eq} = k_1 + k_2$. On peut donc associer k à $1/C$. Finalement, assez évidemment on associe R à α .

$$\begin{array}{ll} x \longleftrightarrow u_C \\ v \longleftrightarrow i \\ m \longleftrightarrow L \\ k \longleftrightarrow C^{-1} \\ \sqrt{\frac{k}{m}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \longleftrightarrow \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \\ \alpha \longleftrightarrow R \end{array}$$

C Bilan énergétique

Propriété 4.22 : conservation énergie

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionnellement au coefficient de friction α :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\alpha v^2$$

Démonstration 4.17 : conservation énergie

À partir de l'équation différentielle on multiplie par $\frac{dx}{dt}$ et on utilise que $ff' = (\frac{1}{2}f^2)'$ pour f une fonction :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \alpha \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) &= -\alpha v^2 \end{aligned}$$

On a bien $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathcal{E}_m$ qui diminue.

D Solutions

Propriété 4.23 : Solutions

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par x_0

E

Résumé oscillateurs amortis

Important 4.1 : à retenir

Pseudo-périodique	Critique	Apériodique
$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$
$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\omega$ $\omega = \omega_0 \sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$
$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\omega t) \right]$	$u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)$	$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} (r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$
$t_{95} \approx QT_0$	$t_{95} \approx \frac{T_0}{2}$	$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}$
