Mécanique du solide

On veut généraliser les lois des la mécanique du point matériel à des systèmes constitués de plusieurs points matériels, ici pour des solides indéformables.

I Système de points matériels

A Systèmes discret et continu

Un solide peut être vu comme un ensemble de points matériels auquel on peut appliquer le PFD. On en distingue deux types :

Définition

Système discret	Système continu
Un ensemble de n points matériels M_i de masses m_i FIGURE	Un ensemble d'éléments de volumes $\mathrm{d}V$ de masse $\mathrm{d}m$, de position M. FIGURE

Sauf cas particuliers, on considèrera des systèmes **discrets** et fermés (tous les points restent dans le système).

B Centre d'inertie

Définition

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité** G d'un ensemble de points matériels M_i de masses m_i telles que $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ est défini par :

$$\boxed{m_{\text{tot}}\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{OM}_i}} \Leftrightarrow \boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{GM}_i} = \overrightarrow{0}}$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

C Mouvements d'un solide indéformable

Définition

Un solide **indéformable** est un ensemble de points tels que la distance entre deux points quelconques soit constante :

$$\forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in (\text{solide}), \quad \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = \text{cte}$$

Un solide peut avoir un mouvement complexe. Dans le cadre du programme, on se limite à deux situations.

I.C.1 Translation

Définition : translation

Un solide $\mathcal{S}$ en mouvement est en **translation** si son **orientation est fixe** au cours du mouvement. Ainsi, de manière équivalente :
1) $\forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in \mathcal{S}, \quad \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$;
2) $\forall t, \forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in \mathcal{S}, \quad \vec{v}(\mathrm{M}_1) = \vec{v}(\mathrm{M}_2)$.

Alors, la connaissance du mouvement d'un point du solide en translation permet de connaître le mouvement de tout point du solide ; on prendra habituellement le centre d'inertie.

Exemples

1) Translation quelconque :
2) Translation rectiligne : chaque point décrit une droite.
3) Translation circulaire : chaque point décrit un arc de cercle.

I.C.2 Rotation

Définition : rotation

Un solide est dit en **mouvement de rotation** autour d'un **axe fixe** Δ lorsque tous ses points possèdent un **mouvement circulaire** autour de cet axe. FIGURE COROT

Conséquence

Tous les points du solide $\mathcal{S}$ parcourent un cercle à la **même vitesse angulaire** $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$; ils sont donc animés avec les vitesses de rotations :

$$\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = r_{\mathrm{M}}\dot{\theta}(t)\overrightarrow{u_\theta} = r_{\mathrm{M}}\omega(t)\overrightarrow{u_\theta}$$

Ce mouvement est décrit complètement par le **vecteur rotation**

$$\overrightarrow{\Omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \omega(t)\overrightarrow{u_\Delta}$$

Exemple

Rotation autour de l'axe Δ fixe :

I.C.3 Translation circulaire ou rotation ?

Translation circulaire	Rotation autour d'un axe fixe
Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même rayon mais de centre différent	Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même centre mais de rayon différent.

II Rappel : TRC

A Quantité de mouvement d'un ensemble de points

On souhaiterait pouvoir étudier un ensemble de points comme le mouvement d'un point unique, comme le centre d'inertie. Pour cela, il faut étudier la quantité de mouvement d'un ensemble de points.

Définition

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{p}(\mathrm{M}_i) = \sum_i m_i \vec{v}(\mathrm{M}_i)}$$

Pour que les choses soient simples, il faudrait donc que $\vec{p}(\mathcal{S})$ soit relié au centre d'inertie. Ça tombe bien :

Propriété : quantité de mouvement d'un système

La quantité de mouvement d'un ensemble de points est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} :

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G})}$$

Tout se passe comme si la masse était concentrée en G.

Démonstration

$$m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G}) = m_{\text{tot}} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{p}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G})} \qquad \blacksquare$$

B Forces intérieures et extérieures

Si on peut étudier la cinématique d'un corps par l'étude de son centre de gravité, comment les forces interviennent-elles sur cet ensemble de points ? Les forces s'appliquant aux points M_i de $\mathcal{S}$ se rangent en deux catégories :

1) Les forces intérieures $\vec{F}_{\text{int}\to\mathrm{M_i}}$ exercées par les autres points M_j du système, avec $j \neq i$;
2) Les forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext}\to\mathrm{M_i}}$ exercées par une origine externe au système.

Les forces intérieures ont cependant une propriété remarquable :

Propriété : résultante des forces intérieures

La résultante $\vec{F}_{\text{int}}$ des forces intérieures d'un système est toujours nulle.

Démonstration

La résultante des forces intérieures exercées sur M_i s'écrit

$$\vec{F}_{\text{int}\to\mathrm{i}} = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

Ainsi la résultante des forces intérieures au système s'écrit

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_i \vec{F}_{\text{int}\to\mathrm{i}} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

Or, d'après la troisième loi de Newton, $\forall i \neq j, \quad \vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$; ainsi, les termes de la somme précédente s'annulent deux à deux, et on a bien

$$\boxed{\vec{F}_{\text{int}} = \sum_i \vec{F}_{\text{int}\to\mathrm{i}} = \vec{0}} \qquad \blacksquare$$

Rien de remarquable ne se produit pour les forces extérieures, et on aura simplement

$$\boxed{\overrightarrow{F}_{\text{ext}} = \sum_i \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\text{i}}}$$

C Théorème de la résultante cinétique

Théorème de la résultante cinétique

Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel s'applique à un ensemble de point en prenant pour point matériel le centre d'inertie G affecté de la masse totale m_{tot} du système, en ne considérant que les forces extérieurs s'appliquant à l'ensemble :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}}}$$

Démonstration

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i)}{\mathrm{d}t}\\ &= \underbrace{\sum_i \overrightarrow{F}_{\text{int}\to\text{i}}}_{=\overrightarrow{0}\text{ par 3}^{\text{e}}\text{ loi}} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\text{i}}}_{=\overrightarrow{F}_{\text{ext}}\text{ par déf.}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \overrightarrow{F}_{\text{ext}}} \qquad \blacksquare$$

Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans la suite, on étudiera le mouvement du centre de gravité, de masse m_{tot}, soumis aux forces extérieures au système.

III Énergétique des systèmes de points

On l'a vu dans les chapitres précédents, différentes approches sont possibles en mécanique selon le résultat désiré. Si le PFD permet d'avoir l'information dynamique sur le centre d'inertie, on cherche à établir les résultats de l'approche énergétique aux solides. Commençons par le plus simple :

A Cinétique

Définition

Comme pour la masse ou la quantité de mouvement, l'énergie cinétique d'un solide est la **somme des énergies cinétiques de chaque point le constituant** :

$$\boxed{\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \sum_i \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i {v_{i/\mathcal{R}}}^2}$$

B Puissance intérieure

Pour pouvoir appliquer les théorèmes énergétiques, il faut détailler les puissances des forces s'appliquant au solide, et notamment les forces intérieures. Les points M_j avec $j \neq i$ exercent des forces sur M_i. La puissance de ces actions s'exprime :

$$\mathcal{P}_{\text{int}\to\text{i}} = \sum_{j\neq i} \overrightarrow{F}_{j\to i}\cdot\overrightarrow{v}_i$$

Seulement, on a la propriété suivante :

Propriété : puissance des forces intérieures

La puissance des forces intérieures est nulle pour un système indéformable.

Démonstration

En effet, la puissance de toutes les forces intérieures s'exprime

$$\mathcal{P}_{\text{int}} = \sum_i \mathcal{P}_{\text{int}\to\text{i}} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \cdot \vec{v}_i = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}{\mathrm{d}t}$$

Or, pour un solide en translation, $\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i = \overrightarrow{\text{cte}}$ par construction. Ça pourrait ne pas être le cas pour un solide en rotation, puisque le vecteur n'est pas fixe. On peut pour cela étudier précisément deux puissances entre M_i et M_j : on a, dans la base sphérique $(\mathrm{M}_j, \vec{u}_{r,j\to i}, \vec{u}_{\theta,j\to i}, \vec{u}_{\varphi,j\to i})$:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{j\to i} &= F_{j\to i}\vec{u}_{r,j\to i} \qquad \text{force centrale due au contact}\\
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}{\mathrm{d}t} &= \dot{r}_{i,j}\vec{u}_{r,j\to i} + r_{i,j}\dot{\theta}_{i,j}\vec{u}_{\theta,j\to i} + r_{i,j}\sin\theta_{i,j}\vec{u}_{\varphi,j\to i}\\
\Leftrightarrow \vec{F}_{j\to i} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}{\mathrm{d}t} &= F_{j\to i} \underbrace{\dot{r}_{i,j}}_{=0\text{indéformable}}\\
\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{int}} = 0}
\end{aligned}$$

■

C Théorèmes

On retrouve ainsi les théorèmes utilisés pour le point, en prenant alors en compte les forces intérieures :

Théorèmes énergétiques

Pour un système $\mathcal{S}$ dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

TEC, TPC	TEM, TPM
$\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} = W_{\text{ext}/\mathcal{R}} + W_{\text{int}/\mathcal{R}}$ $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{\text{int}/\mathcal{R}}$	$\Delta\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} = W_{\text{ext,NC}/\mathcal{R}} + W_{\text{int,NC}/\mathcal{R}}$ $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}_{\text{ext,NC}/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{\text{int,NC}/\mathcal{R}}$

Démonstrations

Il suffit d'appliquer le TPC ou TPM à chaque point matériel M_i du système.

IV Moments pour un système de points

A Moment cinétique et moment d'inertie

Comme pour le reste des grandeurs, le moment cinétique d'un système de points est la somme des moments cinétiques de chaque point :

Moment cinétique d'un système

Par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ référentiel d'étude :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i) = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{OM}}_i \wedge \overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i)}$$

Or, pour un solide en rotation autour de l'axe z, on aura

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i) = (\overrightarrow{\mathrm{OM}}_i \wedge m_i \overrightarrow{v}_i) \cdot \overrightarrow{u_z} \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i) = (r_i \overrightarrow{u_r}) \wedge (m_i r_i \dot{\theta}_i \overrightarrow{u_\theta}) \cdot \overrightarrow{u_z} \\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i) = m_i {r_i}^2 \dot{\theta}_i \underbrace{\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}}_{=\overrightarrow{u_z}} \cdot \overrightarrow{u_z} = m_i {r_i}^2 \dot{\theta}_i
\end{aligned}$$

Ainsi,
$$\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = \sum_i \mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i) \Leftrightarrow \mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = \sum_i m_i {r_i}^2 \dot{\theta}_i$$

et on définit alors

Définition : moment d'inertie

Le **moment d'inertie** d'un solide en rotation est

$$\boxed{J_z = \sum_i m_i {r_i}^2}$$

avec r_i la distance de la masse m_i à l'axe z.

Remarque

Pour un solide continu, cette somme discrète se transforme en intégrale : $J_z = \displaystyle\int \mathrm{d}m\, r^2$

Interprétation

Le moment d'inertie caractérise **l'inertie de rotation**, c'est-à-dire la facilité avec laquelle la rotation d'un solide s'établit ou s'arrête ; il est analogue à la **masse** pour la translation, qui caractérise l'inertie d'un corps à être mis en mouvement. En effet, par sa définition, le moment cinétique d'un solide en rotation autour de z fixe avec une vitesse angulaire $\dot{\theta}$ est

$$\boxed{\mathcal{L}_z = J_z \dot{\theta}}$$

Observation

Ainsi, par l'expression de J_z, on observe :

Plus la masse d'un solide est excentrée, plus le moment d'inertie est grand et plus il est difficile de le mettre en rotation.

Exemples

- Point matériel distance R, $J_z = mR^2$;
- Barre en rotation centrale : $J_z = \frac{mL^2}{12}$;
- Barre en rotation à son extrémité : $J_z = \frac{mL^2}{3}$;
- Boule pleine en rotation axiale : $J_z = \frac{2}{5}mR^2$.

B Moments intérieurs

Olivier

C TMC

Olivier
Analogie Schweitzer

D Énergie cinétique de rotation

Schweitzer

V Cas particuliers et application

Schweitzer : couple, pivot ; aucun moment = pas de frottements
Schweitzer pendule pesant