Correction du TD



I | Vitesse du son

1) Donner l'expression de la célérité c du son dans un fluide en fonction de la masse volumique du ρ du fluide et du coefficient d'incompressibilité χ , homogène à l'inverse d'une pression.

- Réponse -



Données

c est une vitesse, ρ une masse volumique et χ une grandeur relative à la pression. On nous donne dim $\chi=\dim P^{-1}$ avec P une pression.



Résultat attendu

On cherche c en fonction de ρ et χ , soit

$$c = \rho^{\alpha} \chi^{\beta}$$

avec α et β à déterminer.



Outil

Une pression est une force surfacique, c'est-à-dire une force répartie sur une surface. On a donc

$$\dim P = \frac{\dim F}{\mathbf{L}^2}$$

De plus, la force de pesanteur s'exprime F = mg, avec g l'accélération de la pesanteur : ainsi,

$$\dim F = \dim m \cdot \dim g = \mathbf{M} \cdot \mathbf{L} \cdot \mathbf{T}^{-2}$$



Application

On commence par déterminer la dimension de c. En tant que vitesse, on a

$$\dim c = L \cdot T^{-1}$$

On exprime ensuite les dimensions de ρ et χ . D'une part,

$$\dim \rho = M \cdot L^{-3}$$

D'autre part,

$$\dim \chi = \frac{L^2}{\dim F}$$

$$\Leftrightarrow \dim \chi = \frac{L^2}{M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2}}$$

$$\Leftrightarrow \dim \chi = L \cdot M^{-1} \cdot T^2$$

L'expression recherchée revient à résoudre

$$L \cdot T^{-1} = (M \cdot L^{-1})^{\alpha} (L \cdot M^{-1} \cdot T^2)^{\beta}$$

En développant, on trouve un système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta \\ -1 = 2\beta \\ 0 = \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on peut exprimer c tel que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}}$$



II | Faire cuire des pâtes

Sur une facture d'électricité, on peut lire sa consommation d'énergie électrique exprimée en kWh (kilowatt-heure).

1) Quelle est l'unité SI associée? Que vaut 1 kWh dans cette unité SI?

- Réponse ·



Donnée

Consommation électrique en kWh.

Résultat attendu

Unité associée en unités SI.



Y

Outil

Toute énergie s'exprime en joules (J), et les **puissances** sont des **énergies par unité de temps**. Notamment pour les watts on a $1 \, \mathrm{W} = 1 \, \mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.



Application

On a directement

$$1 \,\mathrm{kWh} = 1 \times 10^3 \,\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot h}$$

Avec l'évidence que 1 h = 3600 s, finalement

$$1 \text{ kWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$



2) Sachant que la capacité thermique massique de l'eau est $c=4.18\,\mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$ et que le prix du kilowatt-heure est de 0.16 €, évaluer le coût du chauffage électrique permettant de faire passer 1 L d'eau de $20\,\mathrm{^{\circ}C}$ à $100\,\mathrm{^{\circ}C}$.





Données

Notre objet d'étude est l'eau. On a :

- $\diamond V_{\text{eau}} = 1 \,\text{L};$
- $\Leftrightarrow T_{\rm i} = 20\,^{\circ}{\rm C};$
- $\Rightarrow T_{\rm f} = 100 \,^{\circ} \text{C};$
- $\diamond c = 4.18 \,\mathrm{J} \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

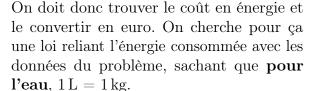
De plus, on nous donne

 \Diamond 1 kWh = 1 \in .

Résultat attendu

On cherche à monter 1L d'eau de 20 à 100 °C et d'en calculer le coût en euros.









Application

L'énergie à apporter Q se déduit de la dimension de la capacité thermique massique : dim $c = \dim Q \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \Theta^{-1}$. En appelant m la masse du volume d'eau, par cette analyse dimensionnelle on a

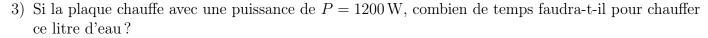
$$Q = mc\Delta T$$

On a donc

$$Q = 3.3 \times 10^{5} \,\text{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 1 \,\text{kg} \\ c = 4.18 \,\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \Leftrightarrow c = 4.18 \times 10^{3} \,\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \Delta T = 80 \,\text{K} \end{cases}$$

et pour utiliser le coût en euros, on la converti en kWh:

$$Q = 9.3 \times 10^{-2} \,\mathrm{kWh} = 1.5 \times 10^{-2} \,\mathrm{\xi}$$





Données

On utilise une plaque chauffante de puissance $P = 1200 \,\mathrm{W}$.



On cherche la durée que cette plaque prendrait pour transférer l'énergie calculée précédemment.



Outil

Une puissance est une énergie par unité de temps, et $1 \, \mathrm{W} = 1 \, \mathrm{J \cdot s^{-1}}$.

Application

Résultat attendu

On en déduit

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 3.3 \times 10^5 \,\text{J} \\ P = 1200 \,\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$
d'où
$$\Delta t = \frac{Q}{P} = \underline{2.8 \times 10^2 \,\text{s}}$$



III TAYLOR meilleur que James Bond?

À l'aide d'un film sur bande magnétique et en utilisant l'analyse dimensionnelle, le physicien Geoffrey TAYLOR a réussi en 1950 à estimer l'énergie $\mathcal E$ dégagée par une explosion nucléaire, valeur pourtant évidemment classifiée. Le film permet d'avoir accès à l'évolution du rayon R(t) du « nuage » de l'explosion au cours du temps. Nous supposons que les grandeurs influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie $\mathcal E$ de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air.

1) Quelles sont les dimensions de ces grandeurs?

On a directement
$$[\dim R = L]$$
, $[\dim t = T]$, $[\dim \rho = M \cdot L^{-3}]$ et $[\dim \mathcal{E} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}]$.

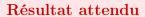
2) Chercher une expression de R sous la forme $R=k\times\mathcal{E}^{\alpha}t^{\beta}\rho^{\gamma}$, avec k une constante adimensionnée.

——— Réponse –



Données

On nous donne la formule $R = k \times \mathcal{E}^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$ et que $\dim k = 1$.



On cherche α , β et γ tels que $R = k \times \mathcal{E}^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$





Outils

$$\Leftrightarrow \dim \mathcal{E} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}; \qquad \Leftrightarrow \dim t = T;$$

$$\Rightarrow \dim t = T$$

$$\Leftrightarrow \dim \rho = M \cdot L^{-3}.$$



Application

$$\dim R = L, \text{ donc on a} \qquad L = \left(M \cdot L^2 \cdot T^{-2}\right)^{\alpha} T^{\beta} \left(M \cdot L^{-3}\right)^{\gamma}$$
 Soit
$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 3\gamma \\ 0 = -2\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \alpha = \beta/2 \\ \alpha = 1/5 \end{cases}$$
 Ainsi,
$$\begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \gamma = -1/5 \\ \beta = 2/5 \end{cases}$$
 Soit
$$R = K \times \mathcal{E}^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$$



3) L'analyse du film montre que le rayon augmente au cours du temps comme $t^{2/5}$. Exprimer alors $\mathcal E$ en fonction de R, ρ et t.

– Réponse – On isole simplement en mettant la relation à la puissance $5: \mathcal{E} = K^{-5}R^5t^{-2}\rho$

4) En estimant que $R \approx 70\,\mathrm{m}$ après $t = 1\,\mathrm{ms}$, sachant que la masse volumique de l'air vaut $\rho \approx$ $1.0 \,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et en prenant $K \approx 1$, calculer la valeur de \mathcal{E} en joules puis en kilotonnes de TNT (une tonne de TNT libère $4.18 \times 10^9 \,\mathrm{J}$).

— Réponse -

On fait une simple application numérique :

$$\mathcal{E} = 1.7 \times 10^{15} \,\text{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = 1 \\ R = 70 \,\text{m} \\ t = 1 \times 10^{-3} \,\text{s} \\ \rho = 1.0 \,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

En équivalent tonne de TNT, on trouve :

$$\mathcal{E} = 4.1 \times 10^2 \,\mathrm{kT}$$
 de TNT

