

Oscillateurs et transformation de la matière

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Oscillateurs harmonique et amortis (mécanique et électricité), transformation et équilibre chimique.

Sommaire

E1	Pentachlorure de phosphore	2
E2	États finaux variés	3
P1	Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC	4
P2	Assemblages de ressorts	6

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

/23 **E1** | Pentachlorure de phosphore

Le pentachlorure de phosphore PCl_5 est un composé très toxique, servant de réactif en synthèse organique pour ajouter des atomes de chlore à une chaîne carbonée. Mis en phase gazeuse, il se décompose spontanément en trichlorure de phosphore et en dichlore, donnant naissance à un équilibre en phase gazeuse.

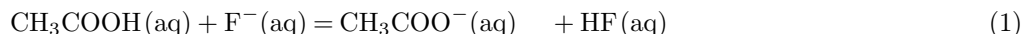
Considérons un réacteur fermé de volume constant $V = 2 \text{ L}$ maintenu à température constante $T = 180^\circ\text{C}$. À cette température, la constante thermodynamique de l'équilibre précédemment cité vaut $K^\circ = 8$. On y met $n_0 = 0,5 \text{ mol}$ de PCl_5 .

On rappelle que $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.

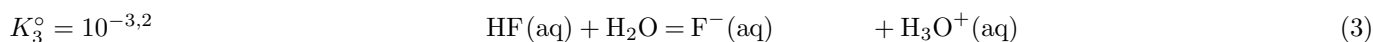
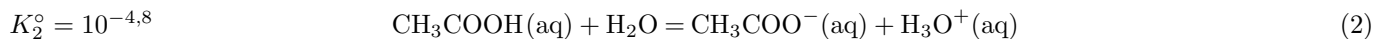
- 1 Exprimer puis calculer la pression initiale dans le réacteur p_0 en fonction des données.
- 2 Écrire l'équation de réaction modélisant le processus dans le réacteur, et dresser le tableau d'avancement correspondant.
- 3 Exprimer les pressions partielles des gaz en fonction de n_0 , ξ et de la pression initiale p_0 .
- 4 Exprimer le coefficient de dissociation à l'équilibre $\alpha = \xi_{\text{eq}}/n_0$ en fonction de K° , p° et p_0 . Faire l'application numérique. Que représente-t-il physiquement ?
- 5 Exprimer la pression à l'équilibre en fonction p_0 et α . La calculer.

/41 **E2 États finaux variés**

On s'intéresse dans un premier temps à une solution aqueuse obtenue à 298 K par un mélange d'acide éthanoïque CH_3COOH (concentration $c_1 = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ après mélange) et d'ions fluorure F^- (concentration $c_2 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$ après mélange). La réaction (1) susceptible de se produire s'écrit :

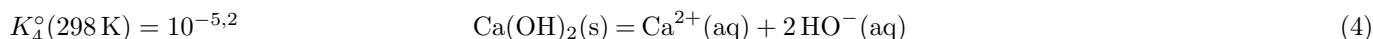


On connaît les constantes d'équilibre à 298 K des réactions suivantes :



- 1 Exprimer la constante K_1° relative à l'équilibre (1) en fonction d'autres constantes de réaction, puis la calculer. Donner le résultat sous la forme d'une puissance de 10 uniquement.
- 2 Déterminer l'état d'équilibre de la solution issue du mélange de l'acide éthanoïque et des ions fluorure : exprimer l'équation dont l'avancement est solution, et l'expression littérale de la solution en fonction de c_1 , c_2 et K_1° .

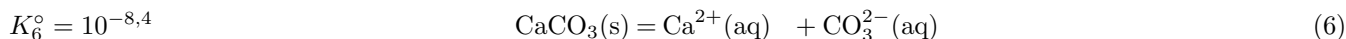
On étudie dans la suite de l'exercice quelques constituants du béton. L'hydroxyde de calcium $\text{Ca}(\text{OH})_2(\text{s})$ confère au béton ses propriétés basiques (au sens de acide ou base). Il se dissout en solution aqueuse selon la réaction (4) :



- 3 On introduit en solution aqueuse un net excès d'hydroxyde de calcium. La phase solide est alors présente en fin d'évolution. Calculer les concentrations de chacun des ions présents à l'équilibre.
- 4 On donne la relation $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = 10^{-14}$. Sachant que $\text{pH} = -\log([\text{H}_3\text{O}^+])$, déterminer le pH de la solution. Le milieu est-il acide, basique ou neutre ?

Dans certains cas, la pollution urbaine liée à l'humidité entraîne la dissolution du dioxyde de carbone atmosphérique dans l'eau à l'intérieur du béton (sous forme H_2CO_3), provoquant la carbonatation du béton (formation de carbonate de calcium $\text{CaCO}_3(\text{s})$) par réaction de l'hydroxyde de calcium $\text{Ca}(\text{OH})_2(\text{s})$ avec la forme $\text{H}_2\text{CO}_3(\text{aq})$.

- 5 Écrire la réaction (5) mise en jeu dans la carbonatation du béton et calculer sa constante d'équilibre K_5° à 298 K. On donne à 298 K les constantes d'équilibre des réactions suivantes :



On étudie désormais la réaction de décomposition du carbonate de calcium $\text{CaCO}_3(\text{s})$ en oxyde de calcium $\text{CaO}(\text{s})$ et dioxyde de carbone $\text{CO}_2(\text{g})$ de constante d'équilibre $K^\circ = 0,20$ à 1093 K.



Soit un récipient indéformable de volume $V = 10 \text{ L}$, vidé au préalable de son air, et maintenu à la température constante de 1093 K. On introduit progressivement une quantité de matière n en carbonate de calcium solide et on mesure la pression p à l'intérieur de l'enceinte.

- 6 Lorsque l'équilibre est établi, calculer la quantité de matière en dioxyde de carbone $n(\text{CO}_2)_{\text{eq}}$ dans l'enceinte. On supposera les gaz comme parfaits. On rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8,31 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$.
- 7 On introduit une quantité de matière $n = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol}$ en carbonate de calcium. Décrire l'état final. On précisera notamment si l'état final est un état d'équilibre.
- 8 Reprendre la question précédente dans le cas où $n = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol}$.
- 9 Montrer que la courbe $p = f(n)$, avec p la pression à l'intérieur de l'enceinte, est constituée de deux segments de droites dont on donnera les équations pour $0 \leq n \leq 0,10 \text{ mol}$.

/60 P1 Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC

On considère le circuit RLC série représenté ci-contre. L'interrupteur K est fermé à un instant $t = 0$ choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0) = u_0$.

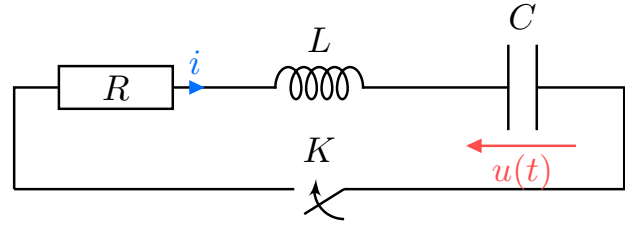


FIGURE 3.1 – Circuit.

- 1 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geq 0$. La mettre sous la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

et donner les expressions de ω_0 et Q en fonction de R , L et C .

- 2 Montrer que le système répond différemment selon la valeur de Q . Nommer chaque régime possible, sans chercher à donner les formes de solutions correspondantes.

On suppose $Q > 1/2$ dans la suite.

- 3 Définir la pseudo-pulsation Ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q . Définir aussi le temps caractéristique τ d'amortissement exponentiel des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q .

- 4 Établir l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction de u_0 , ω_0 , Q et ω , compte tenu des conditions initiales que vous explicitez et justifierez.

On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$ et d'une capacité $C_0 = 11 \text{ pF}$.

- 5 Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :

$$L(C + C_0) \frac{d^2u}{dt^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0 \right) \frac{du}{dt} + \left(1 + \frac{R}{R_0} \right) u = 0$$

- 6 Quelles relations qualitatives doivent vérifier R , L , C , R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R , L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

- 7 On définit le décrément logarithmique comme étant la quantité $d_m = \ln \frac{u(t)}{u(t + mT)}$ où $T = 2\pi/\omega$ et m est un entier strictement positif. Exprimer d_m en fonction de m et de Q .

- 8 On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur basses fréquences délivrant une tension crête-à-crête. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ? Répondre en terme de la constante τ et à l'aide d'un schéma.

- 9 La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure 3.2. Estimer le facteur de qualité Q du circuit.

On suppose $Q \gg 1$: la dissipation d'énergie par effet Joule est traitée comme une perturbation par rapport au cas du circuit non dissipatif ($R = 0$). On prendra alors $\omega \approx \omega_0$. On rappelle par ailleurs le développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$$

- 10 Dans le cas où $R = 0$, établir l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{E} \rangle$ de l'énergie électromagnétique stockée dans le circuit.

- 11 Dans le cas où $R \neq 0$, montrer qu'au premier ordre en $1/Q$, l'énergie \mathcal{E}_J dissipée par effet JOULE dans le circuit RLC, pendant une pseudo-période, vérifie la relation :

$$\mathcal{E}_J = \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle$$

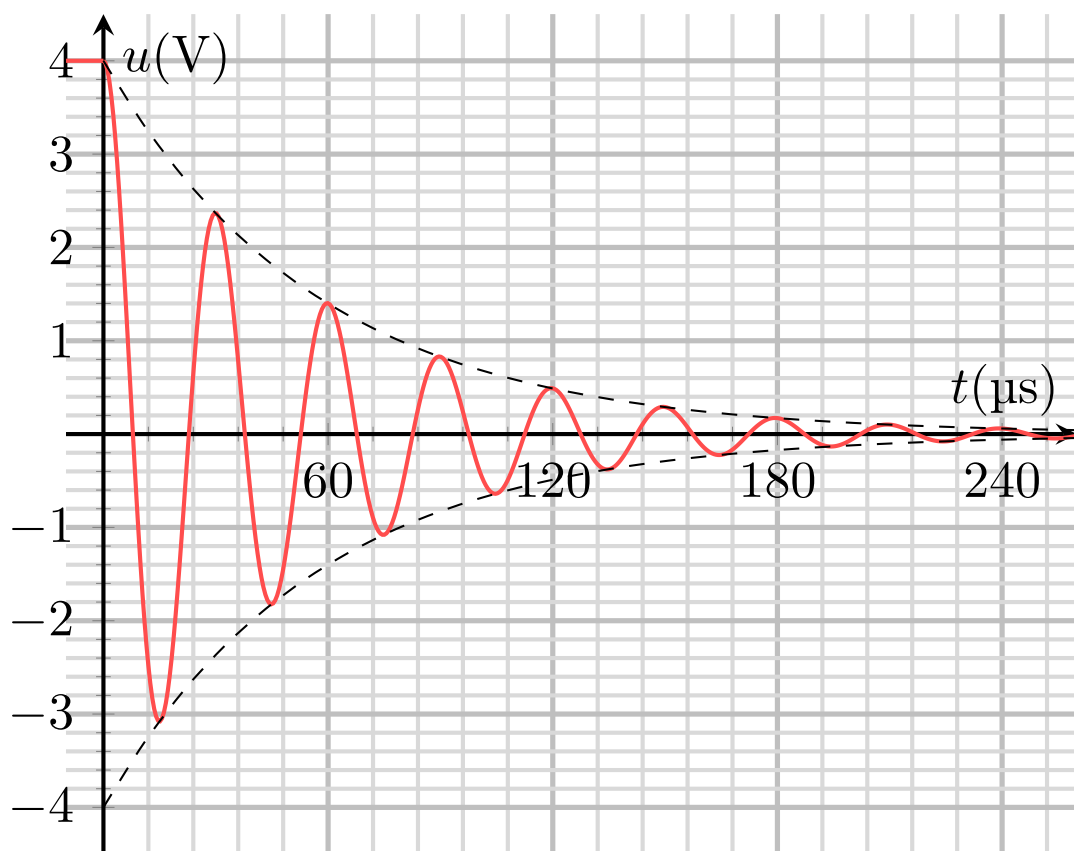


FIGURE 3.2 – Signal obtenu.

/58 P2 Assemblages de ressorts

Pour un TIPE, un-e étudiant-e a besoin d'un ressort de raideur $15 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. Malheureusement, le laboratoire du lycée ne possède que des ressorts de raideur $k_1 = 10 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$ et $k_2 = 20 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$. En revanche, tous les ressorts ont la même longueur à vide $\ell_0 = 10 \text{ cm}$.

L'étudiant-e décide alors d'assembler les ressorts pour obtenir la raideur qu'il souhaite. Il hésite cependant entre un assemblage en série ou en parallèle, voir Figures 3.3 et 3.4 ci-contre.

Il mène donc une étude des deux assemblages pour voir comment ils se comportent. Il dispose d'une masse $m = 100 \text{ g}$ repérée par le point M , considéré comme un point matériel. On néglige les masses des ressorts.

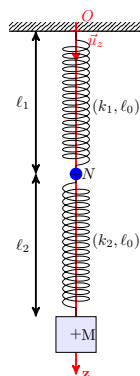


FIGURE 3.3 – Assemblages en série

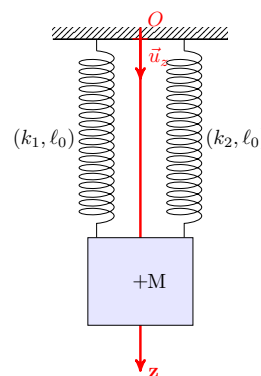


FIGURE 3.4 – Assemblages en parallèle

A Assemblage en série

Dans ce montage, le premier ressort est accroché au niveau du support fixe en un point noté O . Le second ressort est accroché au premier en un point N . Pour mener l'étude, on considèrera que le point N possède une masse m' . On note Oz la verticale descendante, dirigée par le vecteur unitaire \vec{u}_z , orienté vers le bas (cf. Figure 3.3).

- 1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M , les représenter sur un schéma et les exprimer en fonction des paramètres du problème.
- 2 En déduire l'expression de la longueur à l'équilibre $\ell_{2,\text{eq}}$ du ressort 2 (celui placé en bas) en fonction des paramètres du problème. Faire l'application numérique.
- 3 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point N , les représenter sur le même schéma et les exprimer en fonction des paramètres du problème.
- 4 En déduire que la longueur à l'équilibre $\ell_{1,\text{eq}}$ du ressort 1 (celui placé en haut) est donnée par :

$$\ell_{1,\text{eq}} = \ell_0 + \frac{(m + m')g}{k_1}$$

- 5 Commenter la formule précédente.
- 6 Déterminer l'expression de l'altitude z_{eq} du point M . Simplifier la formule dans le cas où le point N possède une masse nulle ($m' = 0$).
- 7 Par analogie avec le résultat que vous obtiendriez si la masse m n'était accrochée qu'à un seul ressort de raideur K et de longueur à vide ℓ_0 , déterminer les caractéristiques (K et ℓ_0) de ce ressort équivalent aux deux ressorts accrochés en série.
- 8 Montrer que cet assemblage ne peut pas satisfaire l'étudiant-e pour son TIPE.

B Assemblage en parallèle

Dans ce montage, les deux ressorts sont accrochés au même support fixe et à la masse m . On note toujours Oz la verticale descendante, dirigée par le vecteur unitaire \vec{u}_z , orienté vers le bas (cf. Figure 3.4).

- 9 Expliciter le lien entre ℓ_1 , ℓ_2 et z , puis faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et les représenter sur un schéma.
- 10 Établir l'équation du mouvement du point M et la mettre sous forme canonique. Vous prendrez soin de détailler extensivement le cadre mécanique nécessaire à cette étude.
- 11 Déterminer les caractéristiques K et ℓ_0 du ressort équivalent aux deux ressorts accrochés en parallèle.
- 12 Montrer que cet assemblage ne peut pas satisfaire l'étudiant-e pour son TIPE.

**Assemblage complexe**

- 13 Déterminer un assemblage équivalent à un ressort ayant la raideur souhaité par l'étudiant-e. Faire un schéma de la situation proposée.