

## Correction du TD

## I Filtrage et spectres

- 1) Sur la figure deux, les basses fréquences sont globalement conservées, et les fréquences à partir de 3 kHz sont fortement atténuées voire coupées : **c'est un passe-bas**.
- 2) Sur la figure trois, seules les fréquences entre 3 et 4 kHz sont gardées, les fréquences supérieures ou inférieures sont coupées : **c'est un passe-bande**.
- 3) Sur la figure quatre, on ne distingue pas de relation simple vue en cours ; on remarque de plus que de nouvelles fréquences apparaissent, ce qui n'est pas le cas dans le filtrage linéaire : c'est un **filtre non-linéaire**.

## II Filtre avec une bobine

- 1) À basses fréquences,  $|\underline{Z}_L| \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ , donc  $H(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$ . À hautes fréquences,  $|\underline{Z}_L| \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} \infty$ , donc  $H(\omega) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 1$  : **c'est un passe-haut**.
- 2) On fait un pont diviseur de tension :

$$\underline{u}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \underline{u}_e \Leftrightarrow \frac{\underline{u}_s}{\underline{u}_e} = \underline{H} = \frac{R'}{R} \times \frac{j\omega \frac{L}{R}}{1 + j\omega \frac{L}{R}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = H_0 \frac{j\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \quad \text{avec} \quad H_0 = 1 \quad \text{et} \quad \omega_c = \frac{R}{L} = 1 \times 10^5 \text{ rad s}^{-1}$$

- 3)  $1 + j\frac{\omega}{\omega_c} \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} 1$ , et donc

$$\underline{H}(j\omega) \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} j\frac{\omega}{\omega_c} \Leftrightarrow G_{\text{dB}} = 20 \log(|\underline{H}|) \underset{\omega \ll \omega_c}{\sim} 20 \log x$$

d'où la pente de 20 dB/décade.

- 4) On trouve le spectre de sortie en multipliant chaque amplitude d'entrée par le module de la fonction de transfert pour avoir l'amplitude de sortie. **Attention, pulsation  $\neq$  fréquence**.  
On a

$$|\underline{H}(f)| = \frac{\frac{2\pi f}{\omega_c}}{\sqrt{1 + \left(\frac{2\pi f}{\omega_c}\right)^2}}$$

- $H(f_1) \approx 6,3 \times 10^{-3}$  : le fondamental est complètement atténué, il ne reste que 0,6% de son amplitude initiale ;
- $H(f_2) \approx 6,3 \times 10^{-2}$  : l'harmonique  $f_2$  est fortement atténué, il n'en reste que 6% ;
- $H(f_3) \approx 0,99$  : l'harmonique  $f_3$  est pratiquement entièrement conservé.

### III Lecture de diagrammes de BODE

Pour faciliter la rédaction on note  $e(t) = e_0 + e_1(t) + e_{10}(t) + e_{100}(t)$ , et de même pour le signal de sortie  $s$ . Ainsi, par linéarité, chaque composante  $e_n$  du signal d'entrée donne une composante  $s_n$  au signal de sortie.

— Filtre 1 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre passe-haut, de fréquence de coupure  $f_c$  de l'ordre de 10 kHz. Reconstruisons le signal de sortie :

- Le terme constant  $e_0$  est complètement coupé par le filtre, donc  $s_0 = 0$ .
- L'harmonique de fréquence  $f$  est atténuée de 40 dB et peut donc être négligée dans le signal de sortie (40 dB correspond à une division de l'amplitude par 100), soit  $s_1(t) \ll$  autres harmoniques de  $s(t)$ .
- L'harmonique de fréquence  $10f$  est atténuée de 10 dB, soit

$$S = 10^{-10/20} E = 10^{-1/2} E \approx 0,3E$$

et elle est également déphasée d'environ  $+\pi/2$ . Ainsi

$$s_{10}(t) \approx 0,3E \cos(10\omega t + \pi/4 + \pi/2)$$

- L'harmonique de fréquence  $100f$  n'est presque pas atténuée ni déphasée, donc  $s_{100}(t) \approx e_{100}(t)$ . Au final, on obtient le signal de sortie  $s(t)$  suivant :

$$s(t) \approx 0,3E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{3\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

— Filtre 2 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **passe-haut**, de fréquence de coupure  $f_c$  de l'ordre de 0,1 kHz. De la même manière que pour le filtre 1, on détermine que :

$$s(t) \approx E_0 \cos(\omega t) + E_0 \cos\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

— Filtre 3 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **coupe-bande**, la bande coupée étant proche de 1 kHz. Ainsi seule l'harmonique  $e_1(t)$  est coupée (soit  $s_1 = 0$ ). Les autres composantes harmoniques du signal d'entrée, y compris la composante continue, sont de fréquences suffisamment différentes de la fréquence coupée pour n'être ni atténuée ni déphasée. Le signal de sortie  $s(t)$  s'écrit donc sous la forme :

$$s(t) = E_0 + E_0 \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + E_0 \cos\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

— Filtre 4 : d'après l'allure du diagramme de BODE, il s'agit d'un filtre **passe-bas**, de fréquence de coupure  $f_c$  de l'ordre de 0,1 kHz. Le terme constant  $e_0$  passe au travers du filtre sans être modifié. Les termes suivants sont de fréquence suffisamment supérieure à la fréquence de coupure pour que le diagramme de BODE puisse être approximé par son asymptote. On peut alors déterminer le signal de sortie comme dans le cas du premier filtre, mais il y a plus simple ! Comme le filtre est d'ordre 1 (une seule asymptote de pente  $-20$  dB/décade, alors il se comporte comme un intégrateur pour les signaux de fréquence supérieure à sa fréquence de coupure. En déduire le signal de sortie est donc très simple :

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \sin(\omega t) + \frac{\omega_c}{10\omega} \sin\left(10\omega t + \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} \sin\left(100\omega t - \frac{\pi}{3}\right)$$

— En écrivant le signal en termes de cosinus, on obtient :

$$s(t) = E_0 + \frac{\omega_c}{\omega} E_0 \cos\left(\omega t - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\omega_c}{10\omega} \cos\left(10\omega t - \frac{\pi}{4}\right) + \frac{\omega_c}{100\omega} \cos\left(100\omega t - \frac{5\pi}{6}\right)$$

## IV Filtre de WIEN

- 1) Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc  $\underline{S} = 0$ . Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également  $\underline{S} = 0$ . Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passé-bande**.
- 2) Notons  $\underline{Z}$  l'impédance et  $\underline{Y}$  l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} = \frac{\underline{Z}}{R + \frac{1}{jC\omega} + \underline{Z}} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \underline{Y}} = \frac{1}{1 + \left(R + \frac{1}{jC\omega}\right) \left(\frac{1}{R} + jC\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{3 + j\left(RC\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}$$

- 3) En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1 + \frac{j}{3}\left(x - \frac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} H_0 = 1/3 \\ Q = 1/3 \end{cases}$$

- 4) Le gain en amplitude du filtre est défini par

$$G = |\underline{H}| = \frac{H_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Il est maximal lorsque le dénominateur est minimal, c'est-à-dire lorsque le terme entre parenthèses s'annule. Cela correspond à  $x = 1$ , d'où le gain maximal  $\mathbf{G_{max} = 1/3}$ .

Le gain **en décibels** du filtre est défini par

$$G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|)$$

et on trouve donc  $\mathbf{G_{dB,max} = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}}$ . De plus, en  $x = 1$  la fonction de transfert est réelle, donc son argument est nul : à la pulsation  $\omega_0$ , la sortie et l'entrée ne sont donc pas déphasées.

- 5) Dans la limite très basses fréquences, la fonction de transfert est équivalente à

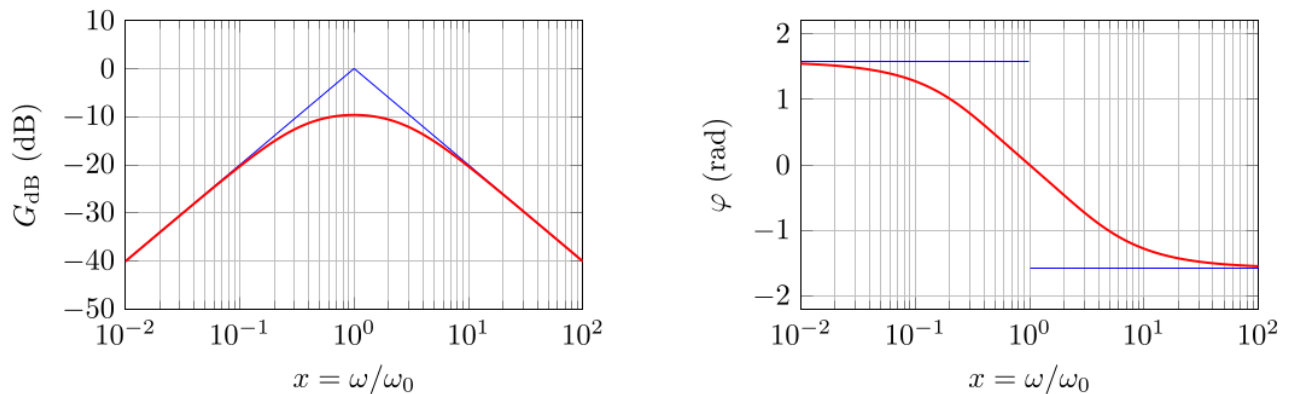
$$\underline{H} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{H_0}{-jQ/x} = j\frac{H_0}{Q}x \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = \frac{\pi}{2} \end{cases}$$

De même, dans la limite très hautes fréquences, on a

$$\underline{H} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{H_0}{jQx} = -j\frac{H_0}{Q} \frac{1}{x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} G_{dB} = 20 \log |\underline{H}| \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} -20 \log x \\ \varphi = \arg \underline{H} = -\frac{\pi}{2} \end{cases}$$

Ainsi, le diagramme de BODE asymptotique en gain compte **deux asymptotes de pentes  $\pm 20 \text{ dB/dcade}$  passant par  $G_{dB} = 0$  pour  $x = 1$** , alors que le diagramme asymptotique en phase compte **deux asymptotes horizontales de hauteurs  $\pm \pi/2$** .

Pour tracer l'allure du diagramme réel, on utilise en plus les résultats de la question précédente qui indique que la courbe réelle passe par  $G_{\text{dB}} = -9,5 \text{ dB}$  en  $x = 1$ , alors que la courbe de phase réelle passe par 0 en  $x = 1$  ; d'où les diagrammes ci-dessous.



6) Numériquement, on trouve  $\omega_0 = 2,0 \times 10^3 \text{ rad s}^{-1}$ . Comme le diagramme de BODE réel n'est pas donné dans l'énoncé, on peut au choix utiliser la fonction de transfert ou raisonner sur le diagramme asymptotique. Étudions le signal de sortie du filtre associé à chaque composante du signal d'entrée :

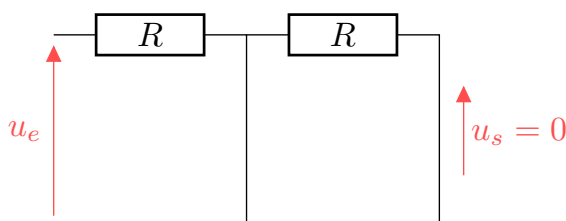
- Le terme continu est complètement coupé par le filtre ;
- Le terme de pulsation  $\omega = \omega_0/10$  se trouve une décade en-dessous de la pulsation propre : avec le diagramme asymptotique il est donc atténué de 20 dB, ce qui correspond à un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ 1,2 rad si le diagramme réel tracé ;
- Le terme de pulsation  $10\omega = \omega_0$  est à la pulsation propre du filtre : il n'est pas déphasé mais seulement atténué d'un facteur 1/3 (gain maximal) ;
- Le terme à la pulsation  $100\omega = 10\omega_0$  est une décade au-dessus de la pulsation propre : il est atténué comme le premier terme d'un facteur 10 en amplitude, et déphasé d'environ  $-1,2 \text{ rad}$ . Ainsi,

$$s(t) = \frac{E_0}{10} \cos(\omega t - 1,2) + \frac{E_0}{3} \cos(10\omega t) + \frac{E_0}{10} \cos(100\omega t + 1,2)$$

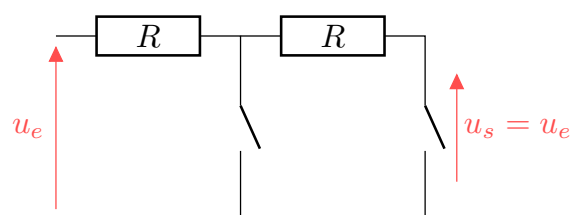
## V Filtre ADSL

1) On isole les signaux téléphoniques avec un **filtre passe-bas**, et les signaux informatiques avec un **filtre passe-haut**. La fréquence de coupure doit être à la fois nettement supérieure aux fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : on prendra donc  $f_0 = 10 \text{ kHz}$ .

2) En basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ), les bobines se comportent comme des fils, soit

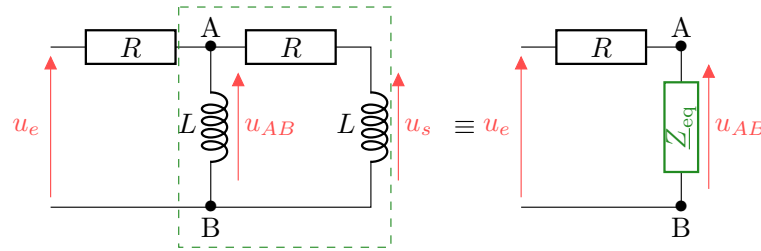


En hautes fréquences ( $\omega \rightarrow \infty$ ), les bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts, soit



Ainsi, le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un **filtre passe-haut**. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.

- 3) Pour exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_e$ , on peut faire un premier pont diviseur de tension pour exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_{AB}$  du milieu ; puis avec une impédance équivalente à l'ensemble des 3 dipôles de droite, on refait un pont diviseur de tension pour avoir  $u_{AB}$  en fonction de  $u_e$ , et on combine.



On a donc d'abord :

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{jL\omega + R} \underline{U}_{AB}$$

On aura donc ensuite :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_R} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e$$

On calcule alors  $\underline{Y}_{eq}$  :

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$$

Et on combine :

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R \left( \frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1 \right)} \times \frac{jL\omega}{jL\omega} \underline{U}_e \\ &\Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 + 3jRL\omega - (L\omega)^2} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{R^2}{R^2} \frac{-\left(\frac{L}{R}\omega\right)^2}{1 + 3j\frac{L}{R}\omega - \left(\frac{L}{R}\omega\right)^2} \underline{U}_e \end{aligned}$$

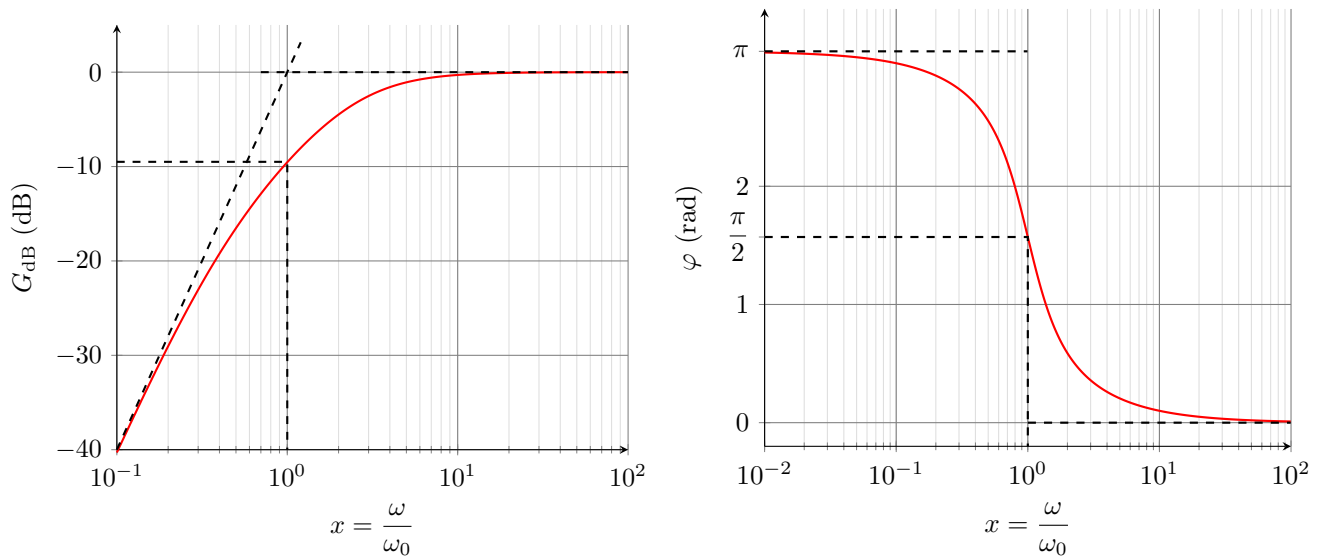
Ainsi, en divisant par  $\underline{U}_e$  pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx} \quad \text{avec} \quad \omega_0 = \frac{R}{L}$$

- 4) Pour  $x \gg 1$ , les termes en  $x^2$  l'emportent sur les autres termes au numérateur et au dénominateur, et la fonction de transfert devient  $\underline{H} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1$ , donc  $G_{dB} = 0$  et  $\varphi = 0$  (réel positif).

Pour  $x \ll 1$ , les termes en  $x$  sont négligeables devant 1 au dénominateur, et on garde le numérateur : la fonction de transfert devient donc  $\underline{H} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$ , donc  $G_{dB} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 40 \log(x)$  (pente de 40 dB/décade), et  $\varphi = -\pi$  (réel négatif).

Pour  $x = 1$ , on trouve  $\underline{H}(1) = j/3$  donc  $G_{dB}(1) = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}$ , et  $\varphi(1) = \pi/2$  (imaginaire pur).



5) Il n'y a pas de pic de résonance car le facteur de qualité  $Q$  est plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .

6) La fréquence de coupure est  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$ ; on doit donc prendre

$$\boxed{L = \frac{R}{2\pi f_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 100 \, \Omega \\ f_0 = 10 \, \text{kHz} \end{cases}$$

A.N. :  $\boxed{L = 1,6 \, \text{mH}}$