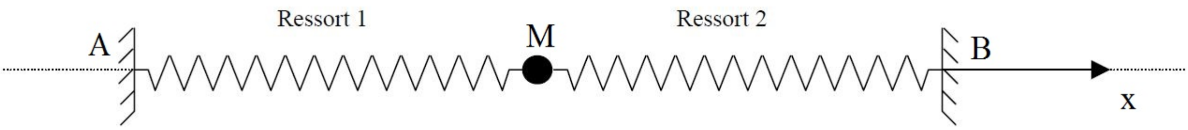
Analogies électromécaniques

I Analogies électromécaniques

I/A Oscillateur mécanique

Considérons un mobile supposé ponctuel M de masse m astreint à glisser le long d'une tige horizontale de direction Ox. Ce mobile est maintenu par deux ressorts à réponse linéaire dont les extrémités sont fixées en deux points A et B séparés d'une distance L.



Les deux ressorts sont identiques, ont même constante de raideur k et même longueur au repos ℓ_0. Dans la position d'équilibre du système, les longueurs des ressorts sont identiques et valent ℓ_{eq}. Soit O le point où se trouve le mobile lorsqu'il est à l'équilibre. O constitue l'origine de l'axe des x.

Dans un premier temps, on néglige tout frottement.

L'étude est menée dans le référentiel terrestre, considéré comme galiléen. À $t = 0$, le mobile est abandonné sans vitesse initiale d'une position x_0 (avec $x_0 \neq 0$).

1) Faire le bilan des forces appliquées au mobile lorsqu'il se trouve à un point d'abscisse x quelconque. Montrer ensuite que $x(t)$ est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{2k}{m}x = 0$$

Indication : On fera un schéma sur lequel on placera les distances ℓ_{eq}, L et x ainsi que les longueurs ℓ_1 et ℓ_2 des 2 ressorts. On écrira de plus l'équation à l'équilibre.

2) Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on précisera la pulsation propre et la période propre T_0 en fonction de k et m.posera $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$.

3) Donner l'expression de $x(t)$ en tenant compte des conditions initiales.

4) Donner les expressions des énergies potentielles élastiques $\mathcal{E}_{p1}(t)$ et $\mathcal{E}_{p2}(t)$ de chacun des deux ressorts, de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c(t)$ du mobile et de l'énergie mécanique totale $\mathcal{E}(t)$ du système en fonction de k, x_0, ω_0 et t, et éventuellement de ℓ_0 et ℓ_{eq}.

Les questions qui suivent prennent en compte l'existence de frottements lors du déplacement du mobile sur son support.

En fait, il existe entre le mobile et la tige horizontale un frottement de type visqueux. La force de frottement est de la forme $\vec{f} = -\mu\vec{v}$ où μ est une constante positive et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du mobile.

Les conditions initiales sont les mêmes que pour les questions précédentes.

5) Établir la nouvelle équation différentielle dont $x(t)$ est solution. On posera $\omega_0^2 = \frac{2k}{m}$ et $h = \mu/m$.

6) Montrer que lorsque $\mu < 2^{3/2}\sqrt{km}$ le mouvement est oscillatoire amorti.

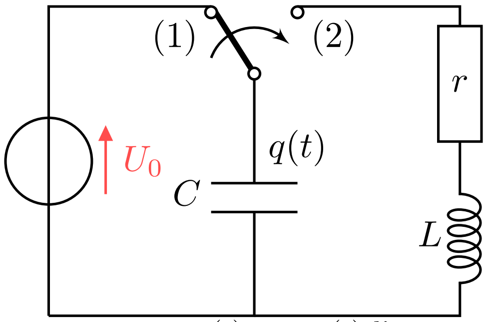
7) Donner l'expression générale de $x(t)$ dans ce cas, sans chercher à calculer les constantes d'intégration.

8) Exprimer la pseudo-période associée à ce mouvement en fonction de ω_0 et h.

9) Expliquer, qualitativement mais précisément, ce qu'il se passe au niveau énergétique lors de ce mouvement oscillatoire amorti.

I/B Oscillateur électrique

Soit le circuit schématisé ci-dessous, constitué d'un condensateur parfait de capacité C, d'une inductance L de résistance interne r et d'un générateur de tension continue U_0.
Le commutateur K est initialement en position (1). Le condensateur est donc chargé sous la tension U_0. A l'instant $t = 0$, le commutateur K est basculé dans la position (2).



On note $q(t)$ la charge portée par l'armature du condensateur pointée par $i(t)$ avec $i(t)$ l'intensité du courant dans le circuit.

10) Exprimer l'énergie électromagnétique $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_L$ stockée par la bobine et le condensateur en fonction de $q(t)$, $i(t)$, L et C.

11) Justifier que $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -ri^2$. *Indice : il est beaucoup plus rapide pour cela d'effectuer un bilan de puissance !*

12) Déduire de la question précédente l'équation différentielle qui régit la charge $q(t)$ dans le circuit. On posera $\omega_0^2 = \frac{1}{LC}$ et $Q_0 = \frac{L\omega_0}{r} = \frac{1}{rC\omega_0}$ où ω_0 est la pulsation propre du circuit oscillant et Q_0 est le facteur de qualité du circuit.
Ré-exprimer alors cette équation différentielle en utilisant les grandeurs ω_0 et Q_0.

13) Retrouver la condition sur Q_0 pour que la solution de l'équation différentielle présente des oscillations amorties. (Démonstration attendue)

14) Donner l'expression de la pseudo-période T du circuit en fonction de T_0 et Q_0 dans le cas d'oscillations amorties (où T_0 est la période propre du circuit).
Comparer T à T_0 et commenter.

I/C Analogie électromécanique

15) En comparant les équations différentielles obtenues dans les parties I/A et I/B, nous conduirons l'analogie électromécanique.

Identifier les analogues électriques des grandeurs mécaniques suivantes :

- ◇ coefficient de rappel élastique k,
- ◇ masse du mobile m,
- ◇ coefficient de frottement fluide μ,
- ◇ coordonnée de position x,
- ◇ vitesse du mobile v,
- ◇ énergie cinétique du mobile,
- ◇ énergie potentielle élastique du ressort,
- ◇ puissance dissipée par frottements.

On pourra présenter les résultats sous forme d'un tableau à deux colonnes.