Électrocinétique – chapitre 7

Oscillateurs en régime sinusoïdal forcé

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.
- ☐ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.
- ☐ Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité.
- ☐ Déterminer la pulsation propre et le facteur de qualité à partir de graphes expérimentaux d'amplitude et de phase.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Points importants

Parmi les systèmes soumis à une excitation sinusoïdale, les oscillateurs ont une place d'importance par l'émergence d'une propriété remarquable : celle de la **résonance**. Regardons deux exemples.

I Exemple d'oscillateur : circuit RLC série en RSF

I/A Présentation

Définition E7.1 : RLC série en RSF

On s'intéresse au circuit suivant, composé d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur C, alimentés par un GBF. On suppose une phase nulle pour le signal entrant :

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad \text{ainsi} \quad u_C(t) = U_C \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

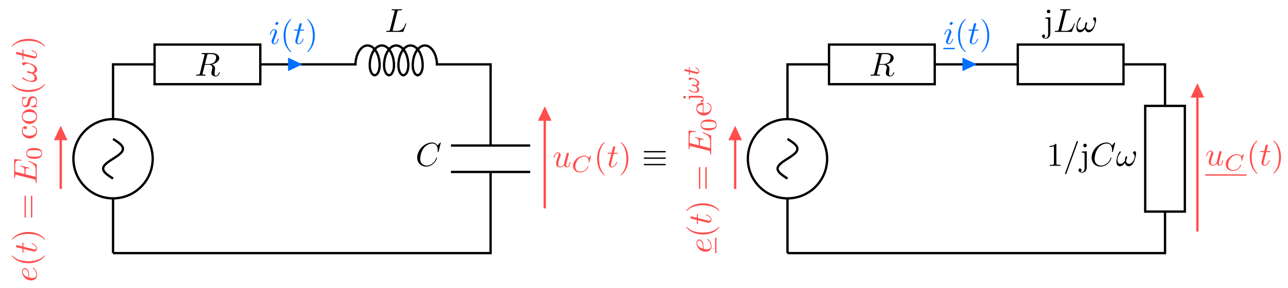


Figure E7.1 – RLC série en RSF.

I/B Étude de l'intensité

I/B) 1 Amplitude complexe

Propriété E7.1 : Amplitude complexe $\underline{I}$

L'amplitude complexe de l'intensité dans un RLC série s'écrit :

$$\boxed{\underline{I}(x) = \frac{E_0/R}{1 + jQ\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Démonstration E7.1 : Amplitude complexe $\underline{I}$

Pour étudier le comportement de l'intensité, on va comme d'habitude se ramener à une seule maille avec une impédance équivalente

$$E_0 = \underline{Z}_{\text{eq}}\underline{I} = \left(R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}\right)\underline{I}$$

$1/j = -j$

$$\Leftrightarrow \underline{I} = \frac{E_0}{R + j\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Forme canonique

$$\Leftrightarrow \underline{I} = \frac{E_0/R}{1 + j\left(\dfrac{L}{R}\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}$$

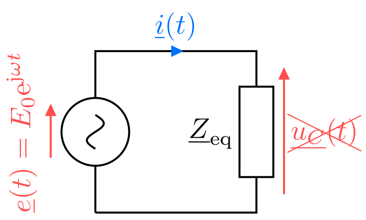


Figure E7.2

On identifie alors : $\dfrac{L}{R} = \dfrac{Q}{\omega_0}$ et $\dfrac{1}{RC} = Q\omega_0$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{L}{R}} = \frac{Q\omega_0}{\frac{Q}{\omega_0}} \Leftrightarrow {\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{et} \quad \frac{L}{R} \times \frac{1}{RC} = Q^2 \Leftrightarrow Q^2 = \frac{1}{R^2}\frac{L}{C}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

D'où le résultat. ■

I/B) 2 Solution réelle

Propriété E7.2 : $i(t)$ RLC série en RSF

L'intensité réelle s'écrit donc $\quad i(t) = I(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi_i(x))$

Amplitude réelle

$$\boxed{I(x) = |\underline{I}| = \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}}$$

Phase

$$\boxed{\varphi_i = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)}$$

avec $\quad \varphi_i \in \left]-\dfrac{\pi}{2} ; \dfrac{\pi}{2}\right[$

Démonstration E7.2 : $i(t)$ RLC série en RSF

Amplitude réelle

C'est évident.

Phase

$$\varphi_i = \underbrace{\cancel{\arg(E_0/R)}}_{=0} - \arg\left(1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi_i) = -\tan(\arg(\underbrace{1}_{\mathrm{Re}>0} + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi_i = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\varphi_i \in \left]-\frac{\pi}{2} ; \frac{\pi}{2}\right[}$$

I/B) 3 Notion de résonance et bande passante

Par l'étude de l'amplitude, on retrouve bien que $\underline{I}$ ne dépend pas des conditions initiales, mais bien de l'amplitude d'entrée et surtout **dépend de la pulsation**. Notamment, on trouve que

$$\boxed{I \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{I \xrightarrow[x \to 0]{} 0}$$

Ainsi, il y a une valeur particulière de pulsation telle que l'amplitude est maximale : c'est ce qu'on appelle la **résonance**.

Définition E7.2 : Résonance

Un oscillateur forcé présente une résonance si l'**amplitude de ses oscillations est maximale** pour une **fréquence de forçage finie et non nulle**.

La fréquence correspondante est appelée **fréquence de résonance** f_r (ou ω_r ou x_r).

Soit, pour une amplitude réelle $X(\omega)$,

$$\exists \text{résonance} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\exists \omega_r \neq (0, +\infty) \ : \ X(\omega_r) = X_{\max}}$$

La représentation de l'amplitude en fonction de la pulsation est donc piquée autour de son maximum $X_{\max}$ à la pulsation de résonance ω_r. Ce pic peut être plus ou moins fin, ce que l'on caractérise par la **bande passante**.

Définition E7.3 : Bande passante

C'est le domaine de pulsations du forçage défini par :

$$\text{bande passante} \triangleq \left\{ \omega \mid X(\omega) \geq X_{\max,\,\text{eff}} = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}} \right\}$$

◇ ω_1 et ω_2 les **pulsations de coupure**, telles que

$$X(\omega_{1,2}) = \frac{X_{\max}}{\sqrt{2}}$$

◇ la **bande passante** $\quad \Delta\omega = |\omega_2 - \omega_1|$;

◇ l'**acuité de la résonance** $\quad \omega_r/\Delta\omega$.

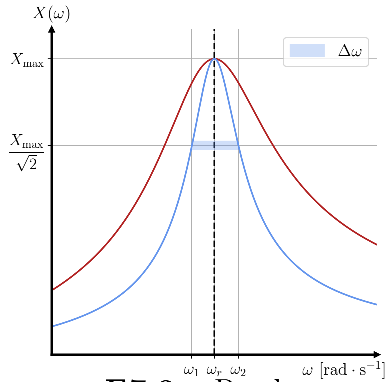


Figure E7.3 – Bande passante.

I/B) 4 Comportements à la résonance

Propriété E7.3 : Résonance en intensité RLC série

La pulsation de résonance en intensité est :

$$\boxed{\omega_r = \omega_0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{x_r = 1}$$

Amplitude de résonance

$$\boxed{I(x_r) = I_{\max} = \frac{E_0}{R}}$$

Phase à la résonance

$$\boxed{\varphi_i(x_r) = 0}$$

Démonstration E7.3 : Résonance en intensité RLC série

Amplitude de résonance

On trouve la résonance en trouvant le **maximum de l'amplitude réelle**.

Ici, <u>comme le numérateur est constant</u>, il suffit d'avoir **le dénominateur minimal** :

$$I(x_r) = I_{\max} \Leftrightarrow 1 + Q^2 \underbrace{\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2}_{\geq 0} \quad \text{minimal}$$

$$\Leftrightarrow Q^2\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_r = \frac{1}{x_r}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x_r = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\omega_r = \omega_0}$$

Phase à la résonance

On reprend l'étude de l'argument faite précédemment :

$$\tan(\varphi_i(x_r)) = -Q\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\varphi_i(x_r) = 0} \quad \text{car} \quad \varphi_i \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

I/B) 5 Bande passante et facteur de qualité

Nous avons déterminé l'amplitude et la phase du signal, ainsi que la pulsation de résonance. Pour finir de caractériser la résonance, il ne reste qu'à déterminer la bande passante.

Propriété E7.4 : Bande passante et facteur de qualité

Plus le facteur de qualité est grand, plus la résonance est sélective. On relie la bande passante à la pulsation propre et au facteur de qualité *via* la relation :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

On retrouve l'**acuité de la résonance**.

Démonstration E7.4 : Bande passante et facteur de qualité

On cherche donc les pulsations de coupure réduites telles que $I(x_k) = I_{\text{max, eff}} = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}}$:

$$\begin{aligned}
& I(x_k) = \frac{I_{\max}}{\sqrt{2}} && \text{On remplace}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{E_0/R}{\sqrt{1+Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right)^2}} = \frac{E_0/R}{\sqrt{2}} && \text{On isole}\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{Q^2\left(x_k - \frac{1}{x_r}\right)^2 = 1} && \sqrt{\cdot}\\
\Leftrightarrow\ & Q\left(x_k - \frac{1}{x_k}\right) = \pm 1 && \times x_k\\
\Leftrightarrow\ & Q{x_k}^2 - Q = \pm x_k && -\pm = \mp\\
\Leftrightarrow\ & Q{x_i}^2 \mp x_k - Q = 0 &&
\end{aligned}$$

On a alors **deux trinômes**, soit **quatre racines possibles**.

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & \Delta = 1 + 4Q^2 && \text{Solutions}\\
\Rightarrow\ & x_{i,\pm,\pm} = \frac{\pm 1 \pm \sqrt{1+4Q^2}}{2Q} &&
\end{aligned}$$

On ne garde que les racines positives, sachant que $\boxed{\sqrt{1+4Q^2} > 1}$:

$$x_1 = x_{k,-,+} = \frac{1}{2Q}\left(-1+\sqrt{1+4Q^2}\right) \quad \text{et} \quad x_2 = x_{k,+,+} = \frac{1}{2Q}\left(1+\sqrt{1+4Q^2}\right)$$

puis on obtient la bande passante en calculant la différence $|x_2 - x_1|$:

$$x_2 - x_1 = \frac{1+\cancel{\sqrt{1+4Q^2}} - \left(-1+\cancel{\sqrt{1+4Q^2}}\right)}{2Q} \Leftrightarrow \boxed{\Delta x = \frac{1}{Q} \Leftrightarrow \Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}}$$

■

Important E7.1 : À retenir pour $\underline{I}$

- Il n'y a **aucune condition** pour avoir résonance : celle-ci existe peu importe le facteur de qualité ;
- La **pulsation de résonance** est **égale à la pulsation propre** ;
- L'**amplitude maximale** ne **dépend pas de** Q ;
- La **phase à la résonance** est **nulle**.

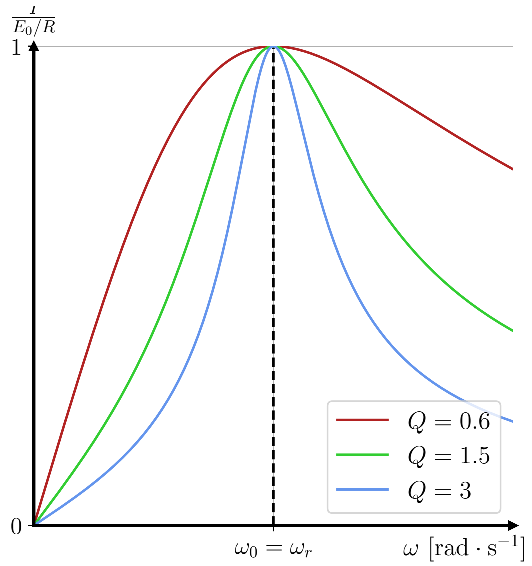


Figure E7.4 – $|\underline{I}|$ selon Q.

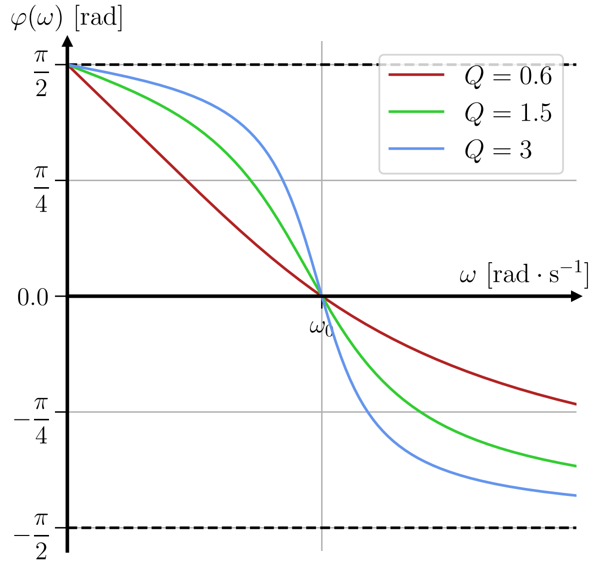


Figure E7.5 – $\arg(\underline{I})$ selon Q.

I/C Étude de la tension u_C

On repart du circuit en complexes, avec $\underline{u_C}(t) = \underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$ et $\underline{e}(t) = E\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$, et on applique le pont diviseur de tension.

I/C) 1 Amplitude complexe $\underline{U_C}$

Propriété E7.5 : Amplitude complexe $\underline{U_C}$

L'amplitude complexe de la tension du condensateur d'un RLC série s'écrit :

$$\boxed{\underline{U_C}(x) = \frac{E_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{x = \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Démonstration E7.5 : Amplitude complexe $\underline{U}_C$

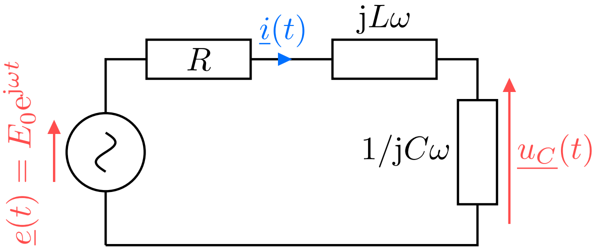


Figure E7.6 – RLC série : étude de $\underline{u}_C$.

$$\underline{U} = \frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R + \mathrm{j}L\omega + 1/\mathrm{j}C\omega} E_0$$

$\times \mathrm{j}C\omega$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{E_0}{1 - (LC\omega)^2 + \mathrm{j}RC\omega}$$

ω_0 et Q

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{E_0}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

■

I/C) 2 Solution réelle

Propriété E7.6 : $u_C(t)$ RLC série en RSF

La tension réelle s'écrit donc $u_C(t) = U_C(x) \cdot \cos(\omega t + \varphi_u(x))$

Amplitude réelle

$$\boxed{U(x) = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2}}}$$

Phase

$$\boxed{\tan(\varphi_u(x)) = -\frac{x}{Q\,(1-x^2)}}$$

avec $\varphi_u \in \left]-\pi\,;0\right[$

Démonstration E7.6 : $u_C(t)$ RLC série en RSF

Amplitude réelle

C'est évident.

Phase

$$\varphi_u = \underbrace{\cancel{\arg(E_0)}}_{=0} - \arg\left(1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}\right)$$

$$\Rightarrow \tan(\varphi_u) = -\tan(\arg(\overbrace{\underbrace{1 - x^2}_{\mathrm{Re} \lesseqgtr 0} + \mathrm{j}\underbrace{\frac{x}{Q}}_{\mathrm{Im}>0}}^{\in]0\,;\pi[}))$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\tan(\varphi_u(x)) = -\frac{x}{Q\,(1-x^2)}}$$

avec $\varphi_u \in \left]-\pi\,;0\right[$

■

I/C) 3 Comportements à la résonance

Propriété E7.7 : Résonance en tension du RLC série

La résonance en tension n'**existe pas toujours** :

$\mathbf{Q \leq 1/\sqrt{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{x = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = E_0}$$

$\mathbf{Q > 1/\sqrt{2}}$: La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{x_r = \frac{1}{Q}\sqrt{Q^2 - \frac{1}{2}} < 1} \quad \text{et} \quad \boxed{U(x_r) = \frac{QE}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}}$$

$\mathbf{Q > 5}$: $\boxed{x_r \approx 1} \Leftrightarrow \boxed{\omega_r \approx \omega_0}$ et $\boxed{U(x_r) \approx QE}$

Démonstration E7.7 : Résonance en tension du RLC série

Condition de résonance

On trouve le maximum de l'amplitude quand le dénominateur est **non nul** et minimal, c'est-à-dire

$$U(x_r) = U_{\max} \Leftrightarrow \left(1-x^2\right)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2 \quad \text{minimal}$$

Soit $X = x^2$, et $f(X) = (1-X)^2 + \dfrac{X}{Q^2}$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche X_r tel que **sa dérivée s'annule**, c'est-à-dire

$$\begin{aligned}
& f'(X_r) = 0 && \text{On dérive}\\
\Leftrightarrow\ & -2\,(1-X_r) + \frac{1}{Q^2} = 0 && \text{On isole}\\
\Leftrightarrow\ & X_r - 1 = -\frac{1}{2Q^2} \Leftrightarrow X_r = 1 - \frac{1}{2Q^2} && X_r = x^2\\
\Leftrightarrow\ & x_r = \sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}} \Leftrightarrow \boxed{x_r = \frac{1}{Q}\sqrt{Q^2-\frac{1}{2}}}
\end{aligned}$$

ce qui n'est défini **que si** $Q > \dfrac{1}{\sqrt{2}}$. Si $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$, alors le maximum se trouve en $\omega = 0$, ce qui n'est **pas une résonance** puisqu'il n'y a alors **pas d'excitation**.

Amplitude de résonance

On calcule alors $f(X_r)$ en injectant la solution :

$$\begin{aligned}
& f(X_r) = \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{1}{2Q^2}\right)\right)^2 + \frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{2Q^2}\right)\\
\Leftrightarrow\ & f(X_r) = \left(\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4} && \text{Même dénom.}\\
\Leftrightarrow\ & f(X_r) = \frac{1}{4Q^2} - \frac{2}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} && \text{On calcule}\\
\Leftrightarrow\ & f(X_r) = \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{4Q^4} && \text{On factorise}\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{f(X_r) = \frac{1}{Q^2}\left(1-\frac{1}{4Q^2}\right)}
\end{aligned}$$

Dans $U(x)$:

$$\begin{aligned}
\Rightarrow\ & U(x_r) = \frac{E_0}{\sqrt{f(X_r)}} && \sqrt{(\cdot)}\\
\Leftrightarrow\ & U(x_r) = \frac{E_0}{\frac{1}{Q}\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}} && \text{Simplifie}\\
\Leftrightarrow\ & U(x_r) = \frac{QE_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}
\end{aligned}$$

Important E7.2 : À retenir pour $\underline{U_C}$

- Il y **a une condition** pour avoir résonance, $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$, elle s'obtient par étude de fonction ;
- La **pulsation de résonance** est **différente de la pulsation propre** mais s'en rapproche avec $Q \nearrow$;
- **L'amplitude maximale dépend de** Q : $Q \nearrow \Rightarrow U_{\max} \nearrow$;
- La **phase à la résonance** est **quelconque** ;
- La **phase à la pulsation propre** est $\varphi_u(\omega_0) = -\frac{\pi}{2}$;

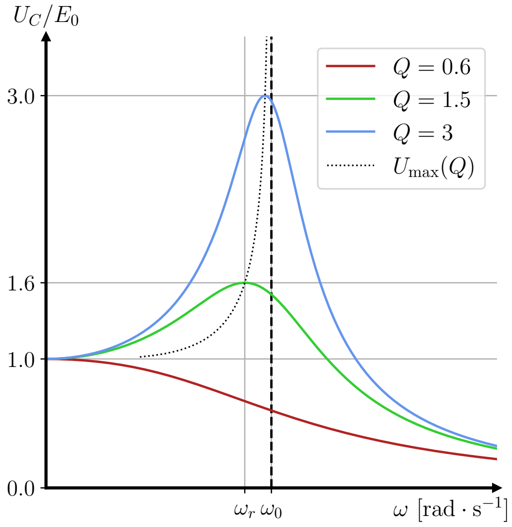


FIGURE E7.7 – $|\underline{U}|$ selon Q.

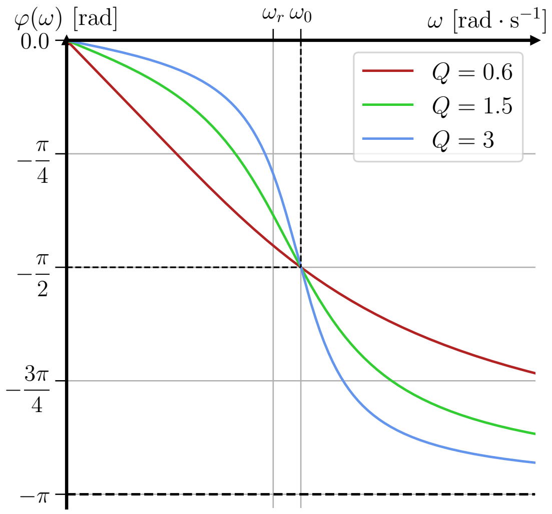


FIGURE E7.8 – $\arg(\underline{U})$ selon Q.

II Exemple d'un oscillateur mécanique en RSF

II/A Présentation

Définition E7.4 : Ressort amorti en RSF

- **Système** : point matériel M de masse m relié à un ressort horizontal **idéal**.
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ terrestre supposé galiléen ;
- **Repère** : $(O, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ avec $\overrightarrow{u_y}$ ascendant vers le haut
- **Repérage** :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = \ell(t)\,\overrightarrow{u_x}\ ;\ \overrightarrow{v}(t) = \dot{\ell}(t)\,\overrightarrow{u_x}\ ;\ \overrightarrow{a}(t) = \ddot{\ell}(t)\,\overrightarrow{u_x}$$

Bilan des forces :

1) Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Force de HOOKE $\overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Force de frottement fluide $\overrightarrow{F}_{\text{frott}} = -\alpha\dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$;
5) **Force excitatrice** $\overrightarrow{f}_e = F_0\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_x}$.

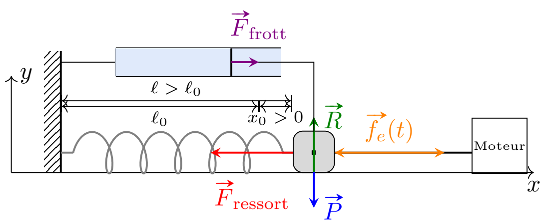


FIGURE E7.9 – Schéma du ressort en RSF.

II/B Étude de l'élongation

II/B) 1 Amplitude complexe $\underline{X}$

Propriété E7.8 : Amplitude complexe $\underline{X}_C$

L'amplitude complexe de l'élongation d'un ressort en RSF s'écrit :

$$\boxed{\underline{X}(u) = \frac{F_0/k}{1 - u^2 + \mathrm{j}\dfrac{x}{Q}}} \quad \text{avec} \quad \boxed{u = \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

Démonstration E7.8 : Amplitude complexe $\underline{X}_C$

Avec le PFD :
$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_{\text{ressort}} + \vec{F}_{\text{frott}} + \vec{f}_e$$
$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} \\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k(\ell(t)-\ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + F_0\cos(\omega t) \\ -mg + R\end{pmatrix}$$

La projection sur $\vec{u_y}$ montre que $\vec{R} = -\vec{P}$. Sur l'axe $\vec{u_x}$, avec le changement de variable $x(t) = \ell(t) - \ell_0$, on trouve

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = F_0\cos(\omega t) \Leftrightarrow$$
$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

En passant en complexes,
$$\left((\mathrm{j}\omega)^2 + \frac{\omega_0}{Q}\mathrm{j}\omega + {\omega_0}^2\right)\underline{X} = \frac{F_0}{m}$$
$$\div {\omega_0}^2$$
$$\Leftrightarrow \left(-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_0 Q} + 1\right)\underline{X} = \frac{F_0}{{\omega_0}^2 m}$$
$$m{\omega_0}^2 = k \qquad u = \omega/\omega_0$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{X}(u) = \frac{F_0/k}{1 - u^2 + \mathrm{j}\frac{u}{Q}}}$$
■

Attention E7.1 : Notations de pulsation réduites

Il peut arriver très vite de confondre $x(t)$ la position et $x = \omega/\omega_0$ la pulsation réduite, d'où la notation proposée de $u = \omega/\omega_0$, à ne pas confondre avec la tension. Soyez vigilant-es.

II/B) 2 Solution réelle

Propriété E7.9 : $x(t)$ ressort amorti en RSF

L'élongation réelle s'écrit donc $x(t) = X(u)\cdot\cos(\omega t + \varphi_x(u))$

Amplitude réelle

$$\boxed{X(u) = |\underline{X}| = \frac{F_0/k}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \left(\dfrac{u}{Q}\right)^2}}}$$

Phase

$$\boxed{\tan(\varphi_x(u)) = -\frac{u}{Q\,(1-u^2)}}$$
avec $\varphi_x \in \left]-\pi\,;0\right[$

II/B) 3 Comportements à la résonance

Propriété E7.10 : Résonance en élongation

La résonance en élongation n'**existe pas toujours** :

$\mathbf{Q \leq 1/\sqrt{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{u = 0 \quad \text{et} \quad X(0) = \frac{F_0}{k}}$$

$\mathbf{Q > 1/\sqrt{2}}$: La résonance existe, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{u_r = \frac{1}{Q}\sqrt{Q^2 - \frac{1}{2}} < 1} \quad \text{et} \quad \boxed{X(u_r) = \frac{QF_0/k}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

$\mathbf{Q > 5}$:

$$\boxed{u_r \approx 1} \Leftrightarrow \boxed{\omega_r \approx \omega_0} \quad \text{et} \quad \boxed{X(u_r) \approx Q\frac{F_0}{k}}$$

II/C Résonance en vitesse

II/C) 1 Amplitude complexe

Propriété E7.11 : Amplitude complexe $\underline{V}$

L'amplitude complexe de la vitesse d'un ressort en RSF s'écrit :

$$\boxed{\underline{V}(u) = \frac{F_0/\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(u - \dfrac{1}{u}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{u = \frac{\omega}{\omega_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

Démonstration E7.9 : Amplitude complexe $\underline{V}$

$$\begin{aligned}
v(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} &\Leftrightarrow \underline{V} = \mathrm{j}\omega\underline{X} \\
&\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{F_0}{k}\frac{\mathrm{j}\omega}{1 - u^2 + \mathrm{j}\frac{u}{Q}} && \times\tfrac{\mathrm{j}}{\mathrm{j}},\ \omega = u\omega_0 \\
&\Leftrightarrow \underline{V} = -\frac{F_0}{k}\frac{u\omega_0}{\mathrm{j} - \mathrm{j}u^2 - \frac{u}{Q}} && \text{Factorise par } u \\
&\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{F_0}{k}\cdot\frac{\cancel{u}}{\cancel{u}}\cdot\frac{\omega_0}{\frac{1}{Q} - \mathrm{j}\left(\frac{1}{u} - 1\right)} && \times\tfrac{Q}{Q} \\
&\Leftrightarrow \underline{V} = \frac{F_0}{k}\cdot\frac{Q\omega_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(u - \frac{1}{u}\right)} && \tfrac{Q\omega_0}{k} = \tfrac{1}{\alpha}
\end{aligned}$$

$$\boxed{\underline{V}(u) = \frac{F_0/\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(u - \dfrac{1}{u}\right)}}$$

■

II/C) 2 Amplitude réelle

Propriété E7.12 : Résonance en vitesse

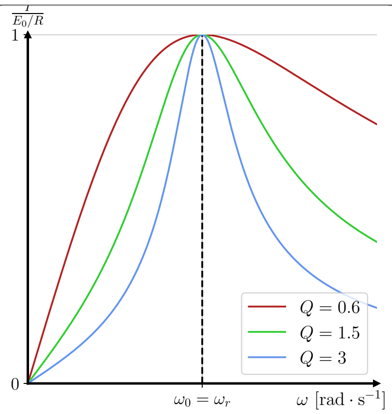
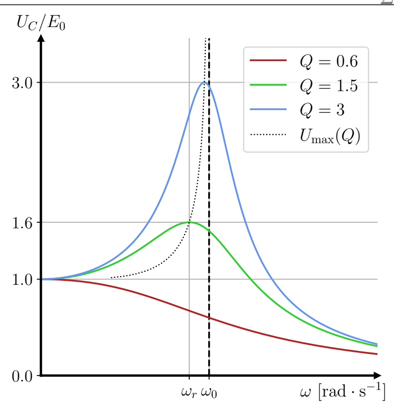
On trouve alors

$$\boxed{V_{\max} = V(\omega_0) = \frac{F_0}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{V \xrightarrow[\omega \to 0^+]{} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{V \xrightarrow[\omega \to +\infty]{} 0}$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas de condition pour avoir résonance en vitesse**, et que **la pulsation de résonance est la pulsation propre du système**.

III Synthèse

Important E7.3 : Synthèse résonances

Grandeur	Intensité/vitesse	Tension/élongation
Existence	Toujours	$Q > 1/\sqrt{2}$
Pulsation de résonance	ω_0	$\omega_r \lesssim \omega_0$
Largeur de résonance	$\Delta\omega = \dfrac{\omega_0}{Q}$	$\Delta\omega \approx \dfrac{\omega_0}{Q}$
Aspects à ω_r	Maximum d'amplitude Déphasage nul, $\varphi = 0$	Maximum d'amplitude
Aspects à ω_0	Résonance	Sortie = $Q\times$entrée Quadrature de phase, $\varphi = -\dfrac{\pi}{2}$
Courbes d'amplitude		
Courbes de phase