Oscillateurs harmonique et amorti

Au programme



Savoirs

- ♦ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- ♦ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- ♦ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- ♦ Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.



Savoir-faire

- ♦ Établir et reconnaître l'équation différentielle qui caractérise un oscillateur harmonique ; la résoudre compte tenu des conditions initiales.
- ♦ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- ♦ Réaliser un bilan énergétique.
- ♦ Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- ♦ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.



Sommaire

2
2
4
7
11
13
13
16
23

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des systèmes qui présentent un régime transitoire caractérisé par des exponentielles croissantes ou décroissantes. En combinant deux de ces composants, on trouve alors des régimes transitoires caractérisé par une combinaison d'exponentielles, exprimée sous la forme de fonctions sinusoïdales. Regardons un exemple.

Oscillateurs harmoniques

A Introduction harmonique

I.A.1 Signal sinusoïdal

Signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal de la forme

A est l'amplitude, telle que

 $\omega t + \varphi$ est la phase instantanée du signal, avec $\omega t + \varphi$

pulsation

phase initiale

Unités

La phase s'exprime en **radians**; la pulsation en $rad \cdot s^{-1}$.

Graphique

FIGURE 4.1

La pulsation représente la vitesse avec de variation de la phase. Pour une variation de 2π effectuée à la période T, on définit

I.A.2 Équation différentielle oscillateur harmonique



Équation différentielle —

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur x(t) solution d'une équation différentielle du type :

Avec x_{eq} la position d'équilibre du système et ω_0 la pulsation **propre**.

Solutions

La forme générale des solutions d'un oscillateur harmonique s'écrit de manière équivalente

avec A', A, B des constantes d'intégration.



I.A.3 Changement de variable : de général à homogène



Au cours du chapitre précédent, nous avons vu la méthode pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. Nous avons pu remarquer que les équations différentielles entre les échelons montants et descendants étaient en tout point similaire si ce n'est pour la présence ou non d'un second membre, impliquant la recherche d'une solution particulière ou non.

Le changement de variable permet d'éviter de chercher une solution particulière constante.



Changement de variable

Si x(t) est solution de

alors $y(t) = x(t) - x_{eq}$ est solution de



Résoudre l'équation du circuit RL montant par changement de variable.

I.A.4 Exemple expérimental : l'oscillateur LC

Soit le circuit suivant sous un échelon de tension descendant. On observe la tension $u_C(t)$ avec un oscilloscope dont la courbe est représentée à droite. Une simulation est disponible en ligne ¹.

1. https://tinyurl.com/yl9rvpqg

FIGURE 4.3

FIGURE 4.2

On remarque que la tension aux bornes du condensateur réalise des d'oscillations sinusoïdales amorties. En fonction des valeurs des caractéristiques des composants, on trouve :

- \diamond Pour $C_1 = 80 \,\mathrm{nF}$ et $L_1 = 43 \,\mathrm{mH}$, un période de $T_1 = 364 \,\mathrm{\mu s}$;
- \diamond Pour $C_2 = 20 \,\mathrm{nF}$ et $L_2 = 43 \,\mathrm{mH}$, un période de $T_2 = 184 \,\mathrm{\mu s}$;



 ${f Analyse}$

Lorsque l'on excite le système LC, la tension aux bornes du condensateur oscille de façon régulière et sinusoïdale, avec une période qui ne dépend pas de l'amplitude de l'excitation mais des caractéristiques de l'oscillateur (capacité du condensateur et inductance de la bobine).

C'est ce que nous allons maintenant démontrer analytiquement.

B Oscillateur harmonique électrique : circuit LC régime libre

I.B.1 Présentation

- ♦ Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ♦ On suppose le condensateur initialement chargé : $u_C(0^-) = E \text{ et } i(0^-) = 0$ (condensateur chargé ≡ interrupteur ouvert).
- \diamond À t=0, on coupe le générateur.

FIGURE 4.4

I.B.2 Équation différentielle du circuit



Avec la loi des mailles,



Équation diff. LC libre -

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en régime libre est

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

avec $\left|\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right|$ la pulsation propre.



Unité de ω_0 -

On peut vérifier à cette étape que ω_0 est bien homogène à l'inverse d'un temps. Pour ça, deux manières :

Analyse directe

Sachant que RC et L/R sont des temps (cf. chapitre précédent) :

Analyse indirecte

En effet, l'équation différentielle est forcément une équation homogène. Ainsi

I.B.3 Résolution de l'équation différentielle et graphique



L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

- \diamond On trouve A avec la première condition initiale :
- \diamond On trouve B avec la seconde condition initiale :

On obtient ensuite i avec la relation courant-tension :



Solution de l'équation différentielle LC

Graphique

Z

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC en décharge avec $u_C(0) = E$ et l'intensité en découlant sont

FIGURE 4.5

I.B.4 Bilan énergétique



On fait un bilan de puissances avec la loi des mailles multipliée par i :



Bilan d'énergie -

Graphique -



L'énergie emmagasinée dans le circuit est

Elle est **conservée à chaque instant** et résulte de l'**échange périodique** d'énergie entre le condensateur et la bobine.

FIGURE 4.6



Vérification conservation de l'énergie

On vérifie avec les expressions analytiques trouvées, sachant que $\omega_0^2 = (LC)^{-1}$:



On retrouve bien des oscillations de la tension aux bornes de u_C comme dans l'approche expérimentale, avec une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ qui augmente avec L et C.

Il n'y a donc pas d'amortissement ici! En effet les composants utilisés ici sont idéaux, et conservent totalement l'énergie, il n'y a pas de raison d'en perdre.

Il y a eu une simplification que l'on effectue souvent en mécanique : on a négligé les effets dissipatifs. Regardons comment ça se traduit pour un exemple mécanique.

Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre

I.C.1Introduction



Force de rappel d'un ressort

Soit le système masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le ressort se déforme sous l'effet d'une contrainte en stockant l'énergie donnée, qu'il libère en reprenant sa forme quand la contrainte s'arrête. On définit la force de rappel du ressort par :

- $\diamond k > 0$ la constante de raideur;
- $\diamond \ell_0$ sa longueur à vide;
- $\diamond \overrightarrow{u_x}$ un vecteur unitaire ² dirigé selon x.

Unité

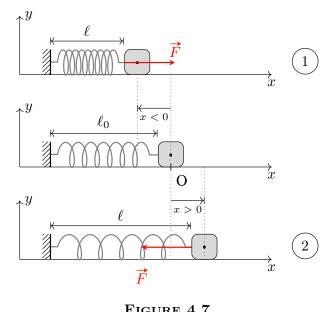


FIGURE 4.7

Si $\ell > \ell_0$, on a bien une force dirigée selon $-\overrightarrow{u_x}$, (situation 2), sinon dirigée selon $+\overrightarrow{u_x}$.

I.C.2 Présentation



Situation initiale et bilan des forces

- ♦ Système : {point M} de masse m, accroché
 à un ressort idéal sans frottements
- \diamond **Référentiel :** $\mathcal{R}_{sol}(O',x,y,t)$ supposé galiléen
- \diamond Repère : (O', $\overrightarrow{u_x},$ $\overrightarrow{u_y})$ (voir schéma)
- ♦ Repérage :

Soit $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masse

$$\overrightarrow{O'M} = x(t) \overrightarrow{u_x} ; \overrightarrow{v} = \dot{x}(t) \overrightarrow{u_x} ; \overrightarrow{a} = \ddot{x}(t) \overrightarrow{u_x}.$$

- \diamond Position initiale : O'M(0) = $x_0 > 0$
- \diamond Vitesse initiale: $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$

FIGURE 4.8

♦ Bilan des forces :

I.C.3 Équation différentielle et solution



La deuxième loi de NEWTON, ou **principe** fondamental de la dynamique (PFD) donne :

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}^3$ on trouve alors

avec

On écrit la forme générale :

 \diamond On trouve A:

 \diamond On trouve B:

Donc

On obtient ensuite v avec la relation vitesseposition.

^{2.} $\|\vec{u_r}\| = 1$

^{3.} La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids.



Équation et solution -

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

La position x et la vitesse v ont pour expressions

Avec
$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$
.

 ℓ_0 est donc la **longueur d'équilibre** du système.

A

Analogie LC-ressort

Alors qu'on partait d'un système *a priori* totalement différent, on remarque que la physique des deux systèmes sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation** différentielle.

On observe une oscillation du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x=0 \Leftrightarrow \ell=\ell_0$, tout comme u_C oscille autour de 0.

On associe donc q à x et i à v, étant donné que pour un condensateur $i=\frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t}$ et que $v=\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$.

De plus c'est la **masse** qui impose l'inertie du mouvement, comme l'**inductance** est l'inertie de l'intensité.

Finalement, $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_C^2 = \frac{1}{2}\frac{q^2}{C}$, et $\mathcal{E}_{p,\text{el}} = \frac{1}{2}kx^2$ donc on associe k à C^{-1} .

Tableau 4.1 – Correspondences

Méca←→Élec
\longleftrightarrow

[I.C.4]

Bilan énergétique



Énergies potentielle élastique et mécanique

Le ressort emmagasine une énergie *potentielle* lors de sa déformation, telle que

On définit alors l'énergie mécanique totale \mathcal{E}_m du système par

avec, évidemment, $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$.



Bilan de puissance en méca

On effectue un bilan de puissance en écrivant le PFD multiplié par $v: \mathcal{P}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v}$.



À partir du PFD :



Conservation énergie

Graphique

Z

Dans le système masse-ressort horizontal sans frottements, l'énergie mécanique est conservée :

FIGURE 4.9



Vérification

On vérifie avec les expressions analytiques, sachant que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

I.C.5 Analyse correspondance



Espace des phases -

Il est utile d'observer la physique des systèmes oscillants non pas dans un espace (grandeur, temps) mais dans un espace (grandeur, dérivée), qui permet plus rapidement de sonder son évolution : c'est ce qu'on appelle l'espace des phases.

Par exemple, le ressort lâché à x_0 et $v_0 = 0$ voit sa position diminuer et sa vitesse augmenter (algébriquement) jusqu'à ce qu'il passe par sa position d'équilibre (x = 0) avec une vitesse extrémale v_{\min} , avant de se comprimer en perdant de sa vitesse.

Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.

FIGURE 4.10



Conclusion

En réalité, les **frottements en mécanique existent**, et à chaque étape le système masse-ressort perd de l'énergie dans la dissipation par frottement créant de la chaleur. On va donc avoir une **trajectoire amortie** plus ou moins fortement.

Dans le cas électrique, c'est la **résistance que nous avions négligée** alors qu'elle existe toujours : notamment la bobine réelle est composée d'une bobine idéale et d'une résistance en série. C'est la résistance qui va **dissiper l'énergie** de l'oscillateur harmonique LC sous forme de chaleur par effet JOULE et amortir l'oscillation de u_C .

D Complément : circuit LC montant

I.D.1 Présentation

- ♦ Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ♦ On suppose le condensateur initialement déchargé : $u_C(0^-) = 0$ et $i(0^-) = 0$ (condensateur chargé ≡ interrupteur ouvert).
- \diamond À t=0, on allume le générateur ⁴.

FIGURE 4.11

I.D.2 Équation différentielle du circuit



Équation diff. LC montant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC sous échelon montant est

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre.

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

Équation diff. LC montant

Avec la loi des mailles,

4. https://tinyurl.com/ypagwnb6

I.D.3 Résolution de l'équation différentielle et graphique



Solution LC montant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC en charge avec $u_C(0) = 0$ et l'intensité en découlant sont



D'après la propriété I.A.3, on sait que $u_C - E$ est solution de l'équation homogène associée, donc on a

 \diamond On trouve A:

 \diamond On trouve B:

Donc

On obtient ensuite i avec la relation couranttension :

[]

Graphique -

FIGURE 4.12



Valeur de u_C —

On remarque aisément que u_C atteint 2E par moment, ce qui pourrait paraître dérangeant puisqu'on donne une tension E au système. En réalité ceci est tout à fait normal puisque $u_L = L \frac{di}{dt}$ prend des valeurs négatives quand i diminue : la somme des deux fait bien E.

On peut réaliser un bilan d'énergie pour vérifier que $\mathcal{E}_g = CE^2(1 - \cos(\omega_0 t)) = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$, voir graphique ci-contre.

Bilan d'énergie





I.D.4 Intérêt oscillateur harmonique

Le principal intérêt de l'observation régulière d'une oscillation est la mesure du temps. Une excitation quelconque (comme un échelon) produit un phénomène se reproduisant à intervalle régulier et fait alors apparaître un étalon temporel. Ce principe est utilisé :

- ♦ dans les horloges mécaniques à balancier : on exploite le mouvement régulier du pendule ;
- ♦ dans les horloges à ressort : la période est liée au rapport de l'inertie et de la raideur du système ;
- ♦ dans les horloges électroniques : un cristal de quartz dont la fréquence d'oscillation est précisément connue (en général une puissance de 2 en Hz);
- dans les horloges atomiques : on utilise la régularité des oscillations des ondes électromagnétiques absorbées par un atome. L'actuelle définition de la seconde est basée sur le fonctionnement d'une horloge atomique.

II | Oscillateurs amortis

$oxed{A}$

Introduction amorti

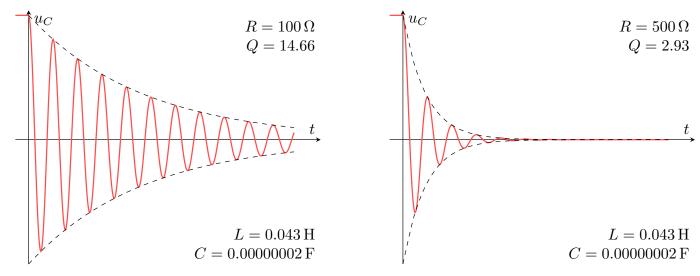
II.A.1 Évolutions en régime libre, exemple RLC

En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC suivant 5 , avec $L=43\,\mathrm{mH}$ et $C=20\,\mathrm{nF}$:

FIGURE 4.14

♦ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**.

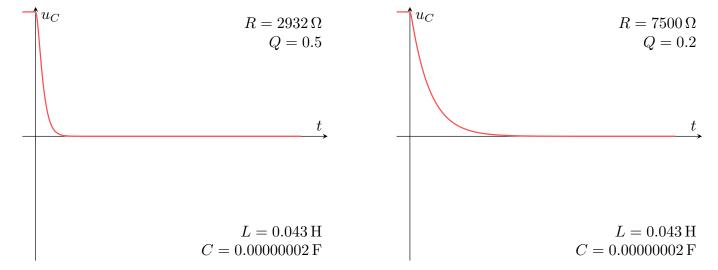
On observe une série d'oscillations à la période $T \approx 184\,\mu s$. On observe environ 25 oscillations lorsque $R \approx 60\,\Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180\,\Omega$, 5 oscillations lorsque $R \approx 500\,\Omega$.



♦ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

5. https://tinyurl.com/ypbwcwfs

Lorsque $R \approx 2.9 \,\mathrm{k}\Omega$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ 250 µs (à 95%). Lorsque $R \approx 7.5 \,\mathrm{k}\Omega$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ 420 µs.





Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

- 1) Système oscillant pour $R < R_c$: la période ne dépend alors que de L et C;
- 2) Système non-oscillant pour $R > R_c$: la période augmente alors avec R.

II.A.2 Équation différentielle



Équation différentielle -

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur x(t) solution d'un équation différentielle du type :

Avec $x_{\rm eq}$ la position d'équilibre, ω_0 la pulsation **propre**, et Q > 0 le **facteur de qualité**, sans dimension.



Par lecture de cette équation, avec Q sans dimension on retrouve que ω_0 s'exprime en s⁻¹ car $\frac{dx}{dt}$ est de dimension $[x] \cdot s^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus** Q **est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**.

Le facteur de qualité traduit donc à quel point le système est idéal.

II.A.3 Équation caractéristique et régimes de solutions



Équation caractéristique

Pour résoudre une équation différentielle, on suppose une solution de la forme $x(t) = A \exp(rt)$ avec $r \in \mathbb{C}$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'équation caractéristique :

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant Δ est



Régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r, doubles réelles, simple réelle ou doubles complexes. On a en effet

Q > 1/2: régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes;

Q = 1/2: régime **critique**, racine double réelle;

 $\mathbf{Q} < \mathbf{1/2}$: régime apériodique, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.



$$\pm$$
 et \mp

Il est courant de noter les racines r_{\pm} pour dénoter à la fois r_{+} et r_{-} . Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe \pm , ce qui signifie que r_{+} correspond à l'expression avec le +, et r_{-} correspond à l'expression avec le -.

Si l'expression contient le signe \mp , c'est l'opposé : r_+ correspond à l'expression avec -.



Solutions Pseudo-périodique	Critique	A périodique
$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$
$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\Omega$ $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$
$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times $ partie décroissante $[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$ partie oscillante	$x(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$	$x(t) = A \exp(r_{+}t) + B \exp(r_{-}t)$



Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

II.B.1 Présentation

- ♦ Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- \diamond On suppose le condensateur initialement chargé : $\boxed{u_C(0^-) = E \ \underline{\text{et}} \ i(0^-) = 0} \ (\text{condensateur chargé} \equiv \text{interrupteur ouvert}). }$
- \diamond À t=0, on coupe le générateur.

FIGURE 4.15



Bilan énergétique



On fait un bilan de puissances :



Bilan d'énergie

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

avec
$$\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$$
.



Résultat

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C , d'où l'amortissement.

II.B.3 Équation différentielle du circuit

 \equiv

Avec la loi des mailles,

On détermine l'expression de Q par identification :



Équation diff. RLC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RLC en régime libre est

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

- $\diamond \left[\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right]$ la pulsation propre;
- \diamond $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

II.B.4 Solutions

II.B.4.1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique



On part de l'équation caractéristique :

On a donc, avec Q > 1/2,

Ainsi,

d'où la définition de Ω :

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 - 4Q^2}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

- \diamond On trouve A avec la première condition initiale :
- \diamond On trouve B avec la seconde CI :



Solution

Pour un facteur de qualité $Q>1/2,\,u_C$ s'exprime par

avec

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

La période des oscillations diffère des oscillations harmoniques $T_0 = 2\pi/\omega_0$ selon

Les oscillations se font entre les courbes

$$y(t) = \pm E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

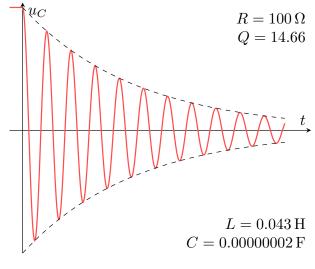


FIGURE 4.16



L'amplitude varie selon $E \exp \left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$; on définit donc t_{95} tel que

Or $2 \ln(20) \approx 2\pi$, d'où



Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que



Résultat à grand Q -

Avec ces résultats on remarque en effet que quand $Q \to \infty$, on a à la fois

$$\Omega \approx \omega_0$$
 donc $T \approx T_0$

Mais aussi

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{donc} \quad u_C(t) = E \cos(\Omega t)$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.



Visualisation dans l'espace des phases -

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C,i) n'est **pas** symétrique par inversion du temps : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la tension diminue progressivement.

On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue ou que l'amortissement augmente.

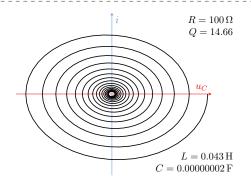


FIGURE 4.17 – Faible amortissement

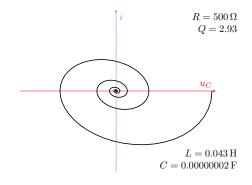


FIGURE 4.18 - Moyen amortissement

II.B.4.2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique



La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

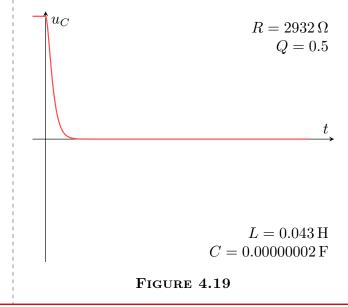
- \diamond On trouve B avec la première condition initiale :
- \diamond On trouve A avec la seconde CI :



Solution

Pour un facteur de qualité $Q=1/2,\,u_C$ s'exprime par

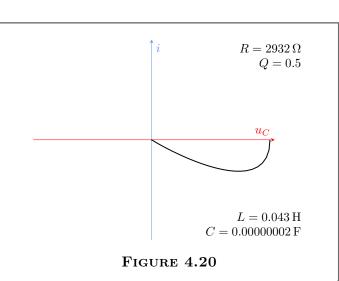
et on n'observe pas une oscillation.





Visualisation dans l'espace des phases

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.





En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance exponentielle, on a



Et avec $ln(20) \approx \pi$ on a :

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

II.B.4.3 Cas $\Delta > 0$: régime apériodique



Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

- ♦ Avec la première CI :
- \diamond Avec la seconde CI :

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

En combinant, on trouve

et

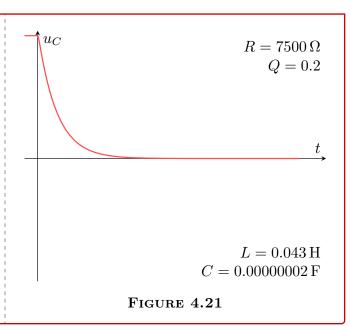
D'où le résultat :



Solution

Pour un facteur de qualité Q < 1/2, u_C s'exprime par

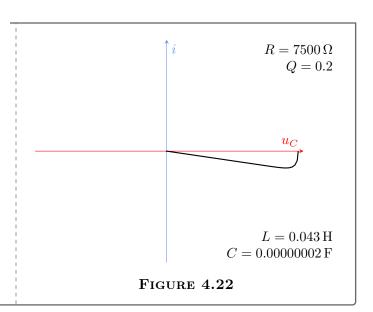
et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour Q = 1/2.





Visualisation dans l'espace des phases

Pendant le régime apériodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher u_C d'osciller, mais également pour **ralentir sa diminution** vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ plus petit donc i plus petit.





La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « moins décroissante ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc r_- et r_+ .

On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle). En effet,

ce qui est vrai. Or,

On estime alors la durée du régime transitoire à $\ln(20)/|r_+|$.

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\sqrt{1+x} \approx 1+x/2$ pour simplifier r_+ :

Avec $ln(20) \approx \pi$, on a finalement



Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que



Résultat à faible Q —

Quand $Q \longrightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle, soit

$$\frac{\omega_C}{Q} \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_C = R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\sqrt{LC}} u_C$$
$$= \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{\chi}{\chi_{C^2}}} u_C = \left[\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC} u_C \right]$$

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de r_{\pm} tendent vers la même valeur $r=-\frac{\omega_0}{2Q}$: en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance en

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}R\sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R\sqrt{\frac{\mathscr{L}}{L^2\mathscr{L}}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$.



II.C.1 Présentation



Situation initiale et bilan des forces

- ♦ Système : {point M} de masse m, accroché
 à un ressort idéal avec frottements
- \diamond **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O', x, y, t)$ supposé galiléen
- \diamond Repère : (O', $\overrightarrow{u_x},$ $\overrightarrow{u_y})$ (voir schéma)
- ⋄ Repérage :

Soit $x(t) = \ell(t) - \ell_0$ la position de la masse

$$\overrightarrow{O'M} = x(t) \overrightarrow{u_x} ; \overrightarrow{v} = \dot{x}(t) \overrightarrow{u_x} ; \overrightarrow{a} = \ddot{x}(t) \overrightarrow{u_x}.$$

- \diamond Position initiale : O'M(0) = $x_0 > 0$
- \diamond Vitesse initiale: $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$

FIGURE 4.23

♦ Bilan des forces :

II.C.2 Équation différentielle



Équation et solution _

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2 \ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 \ell = {\omega_0}^2 \ell_0$$

- $\diamond \left[\underline{\omega_0 = \frac{k}{m}} \right]$ la pulsation propre;
- \Diamond $Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$ le facteur de qualité.

 ℓ_0 **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

Équation différentielle



Avec le PFD:

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve donc



Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont régis par la même équation différentielle. On observe une oscillation amortie du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x=0 \Leftrightarrow \ell=\ell_0$.

Ici, c'est le coefficient de frottements α qui dissipe : on l'associe à R.

Tableau 4.2 – Correspondences

Méca←	→Élec
\leftarrow	\rightarrow

II.C.3 Bilan énergétique



Conservation énergie

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionellement au coefficient de friction α :

Conservation énergie

À partir du PFD $\times v$:



On a bien $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}$ qui diminue.

II.C.4 Solutions



Solutions

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par x_0

II.C.5 Résumé oscillateurs amortis

	$\sqrt{}$
	1/
\	. /

A retenir Pseudo-périodique	Critique	Apériodique
$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$
$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm i\Omega$ $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 \mp \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$
$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin(\Omega t)\right]$	$u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)$	$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r} (r_+ \exp(r t) - r \exp(r_+ t))$
$t_{95} \approx QT_0$	$t_{95} pprox rac{T_0}{2}$	$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}$
$R = 500 \Omega$ $Q = 2.93$	$R = 2932 \Omega$ $Q = 0.5$	$R = 7500 \Omega$ $Q = 0.2$ t
$L = 0.043 \mathrm{H}$ $C = 0.00000002 \mathrm{F}$	$L = 0.043 \mathrm{H}$ $C = 0.00000002 \mathrm{F}$	$L = 0.043 \mathrm{H}$ $C = 0.00000002 \mathrm{F}$
$R = 500 \Omega$ $Q = 2.93$	$i \qquad R = 2932 \Omega$ $Q = 0.5$	$i \qquad R = 7500 \Omega$ $Q = 0.2$
$L = 0.043 \mathrm{H}$ $C = 0.00000002 \mathrm{F}$	$L = 0.043 \mathrm{H}$ $C = 0.00000002 \mathrm{F}$	$L = 0.043 \mathrm{H}$ $C = 0.00000002 \mathrm{F}$