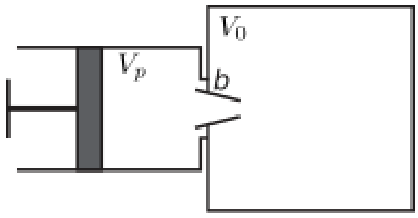
Devoir maison 4 – À rendre le 13 mai 2024

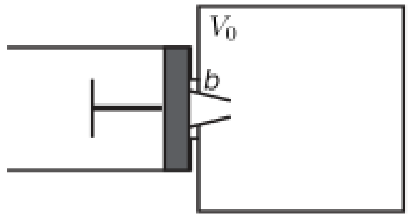
Correction du DM

On s'intéresse au gonflage d'un pneu de vélo à l'aide d'une pompe manuelle. On étudiera uniquement le premier coup de pompe, décrit ci-contre, pendant lequel la soupape b reste toujours ouverte.

Le volume de la pompe est $V_p = 2{,}0\,\mathrm{L}$, celui de la chambre à air est $V_0 = 5{,}0\,\mathrm{L}$ (constant), et l'ensemble est initialement à la pression $P_0 = 1\,\mathrm{bar}$ et à la température $T_0 = 300\,\mathrm{K}$. On note 1 l'état initial et 2 l'état final. On envisage deux moyens de réaliser la compression $1 \to 2$:



état 1, volume $V_1 = V_0 + V_p$



état 2, volume $V_2 = V_0$

- ◇ **Compression lente** : dans ce cas les échanges thermiques ont le temps de s'établir, et la température reste constante et égale à T_0 ;
- ◇ **Compression brusque** : dans ce cas la température du gaz va augmenter et il faudra, après la compression, attendre qu'elle redescende à T_0.

On suppose dans les deux cas la transformation mécaniquement réversible, et le gaz est modélisé par un gaz parfait d'indice adiabatique $\gamma = 1{,}4$.

1) Dans le premier cas, que valent la température et le volume final ? Donner ensuite l'expression de la pression finale P_2 en fonction de P_0 et $\alpha = V_p/V_0$. La calculer.

Réponse

La transformation est la suivante :

$$\text{État initial}\left|\begin{array}{l} P_1 = P_0 = 1\,\mathrm{bar} \\ V_1 = V_0 + V_p \\ T_1 = T_0 \\ n_1 \end{array}\right. \quad \xrightarrow[\text{G.P.}]{\text{isotherme}} \quad \text{État final}\left|\begin{array}{l} P_2 = \,? \\ V_2 = V_0 \\ T_2 = T_0 \\ n_2 = n_1 \end{array}\right.$$

T et n étant constants, on a $P_0V_1 = nRT_0 = P_2V_2$, soit

$$P_0(V_0 + V_p) = P_2V_0 \Leftrightarrow \boxed{P_2 = P_0(1+\alpha)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_0 = 1\,\mathrm{bar} \\ V_p = 2{,}0\,\mathrm{L} \\ V_0 = 5{,}0\,\mathrm{L} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{P_2 = 1{,}4\,\mathrm{bar}}$

◇

2) Justifier que ces valeurs sont les mêmes dans le second cas.

Réponse

Le volume final est évidemment le même : $V_2 = V_0$. La température l'est aussi, puisqu'on attend suffisamment longtemps pour que ça soit le cas : $T_2 = T_0$. On a également $n_2 = n_1$. La pression finale est donc

$$P_2 = \frac{n_2RT_2}{V_2} = \frac{n_1RT_0}{V_0} = \frac{P_0(V_0+V_p)}{V_0} = P_0(1+\alpha)$$

donc identique au cas précédent.

◇

3) Dans le premier cas, donner l'expression du travail à fournir au gaz pour le comprimer en fonction de P_0, V_1 et $\alpha = V_p/V_0$.

Réponse

C'est une compression isotherme ($T = T_0 = \text{cte}$) et mécaniquement réversible ($P = P_{\text{ext}}$) d'un gaz parfait :

$$W_{12} = -\int_{V_1}^{V_2} P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V = -n_1RT_0\int_{V_1}^{V_2}\frac{\mathrm{d}V}{V} = -n_1RT_0\ln\frac{V_2}{V_1}$$

Or $n_1RT_0 = P_0V_1$, $V_1 = V_0 + V_p$ et $V_2 = V_0$, soit

$$\boxed{W_{12} = P_0V_1\ln(1+\alpha)} \Rightarrow \underline{W_{12} = 236\,\text{J}}$$

◇

4) Dans le second cas, il faut décomposer la transformation en deux étapes : de l'état 1 à un état 1'. Il s'agit de la compression où le volume passe de $V_1 = V_0 + V_p$ à $V_{1'} = V_0$, puis de l'état 1' à l'état 2 le volume ne change plus et le gaz se refroidit jusqu'à T_0.

a – Expliquer pourquoi l'étape $1 \to 1'$ peut être supposée adiabatique et mécaniquement réversible.

Réponse

L'étape $1 \to 1'$ est réalisée rapidement, donc les transferts thermiques n'ont pas le temps de s'établir : on peut la supposer adiabatique. De plus, l'énoncé indique qu'elle est supposée réversible, c'est-à-dire qu'on néglige tout frottement.

◇

b – Calculer la température atteinte en 1' grâce à une des loi de Laplace.

Réponse

On est en présence d'un gaz parfait lors d'une transformation adiabatique et mécaniquement réversible entre les états 1 et 1', on peut donc utiliser la loi de Laplace :

$$T_1V_1^{\gamma-1} = T_{1'}V_{1'}^{\gamma-1} \quad \text{soit} \quad T_{1'} = T_1\left(\frac{V_1}{V_{1'}}\right)^{\gamma-1}$$

Or $T_1 = T_0$, $V_1 = V_0 + V_p$ et $V_{1'} = V_0$, donc

$$\boxed{T_{1'} = T_0(1+\alpha)^{\gamma-1}} \Rightarrow \underline{T_{1'} = 343\,\text{K}}$$

◇

c – Calculer le travail à fournir au gaz durant l'évolution $1 \to 1' \to 2$.

Réponse

On décompose la transformation en deux étapes :

◇ De 1 à 1', on a une transformation adiabatique mécaniquement réversible d'un gaz parfait. On peut soit calculer le travail directement, soit utiliser le premier principe :

▷ **Premier principe**

$$\begin{aligned}
&\Delta U = C_V\Delta T\\
\Leftrightarrow\ &W + Q = \frac{nR}{\gamma-1}(T_{1'} - T_1)\\
\Leftrightarrow\ &W = \frac{nRT_1}{\gamma-1}\left(\frac{T_{1'}}{T_1} - 1\right)\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{W = \frac{P_1V_1}{\gamma-1}\left(\left(\frac{V_{1'}}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right)}
\end{aligned}$$

$Q = 0$
Factorisation par T_1

Adiabatique réversible G.P.
$T_1V_1^{\gamma-1} = T_{1'}V_{1'}^{\gamma-1}$

▷ **Calcul direct**

$$W = -\int_{V_1}^{V_{1'}} P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V$$

Mécaniquement réversible $P_{\text{ext}} = P$

$$\Leftrightarrow W = -\int_{V_1}^{V_{1'}} P\,\mathrm{d}V$$

Adiabatique réversible G.P. $P = P_1\frac{V_1^\gamma}{V^\gamma}$

$$\Leftrightarrow W = -P_1V_1^\gamma\int_{V_1}^{V_{1'}}\frac{\mathrm{d}V}{V^\gamma}$$

$\int x^n\,\mathrm{d}x = \frac{x^{n+1}}{n+1}$

$$\Leftrightarrow W = -P_1V_1^\gamma\left[\frac{V^{-\gamma+1}}{-\gamma+1}\right]_{V_1}^{V_{1'}}$$

On calcule

$$\Leftrightarrow W = -\frac{P_1V_1^\gamma}{-\gamma+1}(V_{1'}^{1-\gamma} - V_1^{1-\gamma})$$

On factorise par $V_1^{1-\gamma}$

$$\Leftrightarrow W = -\frac{P_1V_1^{\cancel{\gamma}}}{-\gamma+1}V^{1-\cancel{\gamma}}\left(\left(\frac{V_{1'}}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right)$$

On simplifie les $-$

$$\Leftrightarrow \boxed{W = \frac{P_1V_1}{\gamma-1}\left(\left(\frac{V_{1'}}{V_1}\right)^{1-\gamma} - 1\right)}$$

Dans tous les cas, avec $P_1 = P_0$, $V_{1'} = V_0$ et $V_1 = V_0 + V_p$, on obtient

$$\underline{W = 252\,\mathrm{J}}$$

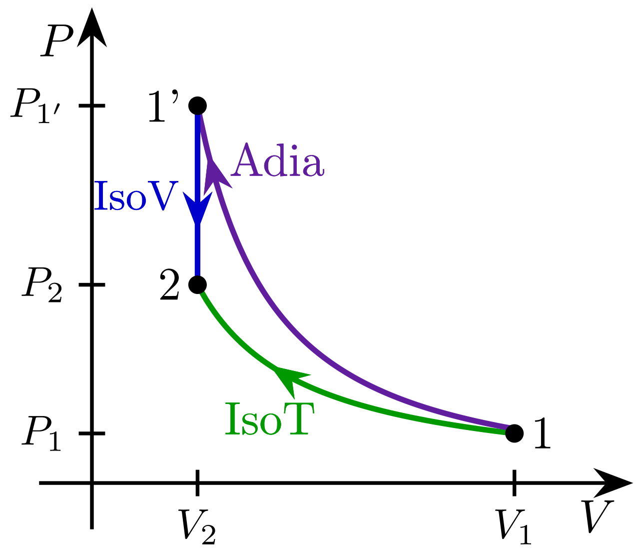
◇ De 1’ à 2, on a une transformation isochore, de travail nul.

5) Tracer sur un même diagramme (P,V) les deux transformations. Pouvait-on prédire le fait que le travail à fournir est plus grand pour une des deux compressions ? À quoi a servi le surplus de travail fourni dans celle qui en nécessite le plus ? Conclure sur la meilleure méthode.

Réponse

Dans un diagramme (P,V), le travail des forces de pression reçu par le gaz est égal à l’aire sous la courbe. Or, la compression **adiabatique mécaniquement réversible** dessine une **aire plus importante** : on pouvait donc **prédire que** $W_{\textbf{brusque}} > W_{\textbf{lente}}$.

Ce travail a servi a **chauffer le gaz**, jusqu’à 343 K. Ceci n’est cependant **pas utile** puisque le gaz refroidit ensuite. Cette énergie thermique est dissipée vers la pièce et **n’est pas récupérable**.



Ainsi, tout est une question de temps : si on n’est pas pressé, il vaut mieux **pomper lentement** !

Utilité en industrie

Ce qui précède a des conséquences pratiques importantes à l'échelle industrielle. Il existe en effet des stations qui stockent de l'air comprimé dans d'immenses réservoirs (souvent des cavités géologiques) et qui réutilisent ensuite cet air pour faire tourner une turbine et produire de l'électricité. La phase de compression de l'air doit consommer le moins possible d'énergie, et ce qui précède montre donc qu'elle a intérêt à être proche de l'isotherme réversible. Cf. par exemple https://www.connaissancedesenergies.org/fiche-pedagogique/caes-stockage-par-air-comprime.