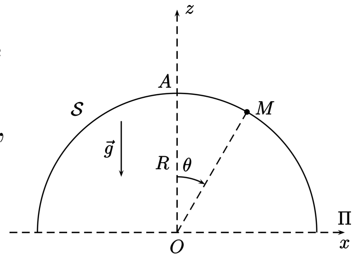
Correction du TD

I Glissade d'un pingouin sur un igloo

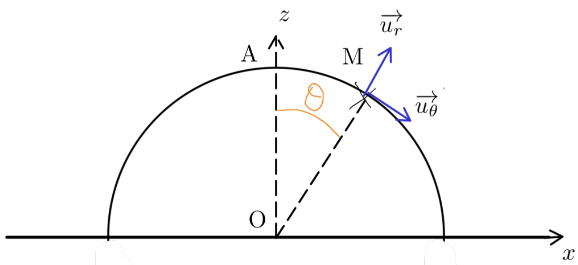
Un pingouin, assimilable à un point matériel M de masse m décide de faire du toboggan. Il s'élance sans vitesse initiale du sommet A d'un igloo voisin, assimilable à une demi sphère S de rayon R et de centre O, posée sur un plan horizontal Π. On considère que le glissement s'effectue sans frottement dans le plan vertical $(x\mathrm{O}z)$.



1) Appliquer le PFD au pingouin pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre information contient-elle ?

Réponse

- **Système :** {pingouin}
- **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- **Repère :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ **dans le sens de** θ
- **Repérage :**



$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = R\,\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v}(t) = R\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\overrightarrow{a}(t) = R\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$$

- **Origine et instant initial :**

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \Rightarrow \theta(0) = 0$$
$$\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0$$

- **BDF :**

Poids $\overrightarrow{P} = mg(-\cos\theta\,\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\,\overrightarrow{u_\theta})$
Réaction $\overrightarrow{R} = R_N\,\overrightarrow{u_r}$

- **PFD :**

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\cos\theta + R_N \\ mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 & (3.1) \\ \ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\sin\theta & (3.2) \end{cases}}$$

L'équation du mouvement est celle qui donne l'équation d'oscillateur harmonique aux petits angles, et qu'on a déjà utilisée en cours sur le pendule, et linéaire en θ : l'équation (3.2). L'équation (3.1) contient l'information sur le contact à l'igloo.

◇

2) En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et en intégrant sur t, montrer que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$

Réponse

En prenant (3.2)$\times\dot{\theta}$, on a

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) &= \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos\theta) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \frac{g}{R}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\right]_{t=0}^{t} &= \frac{g}{R}\left[-\cos\theta\right]_{t=0}^{t} \\
\Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}
\end{aligned}$$

■

◇

3) En déduire la norme de la force de réaction de l'igloo.

Réponse

En reprenant (3.1), on peut remplacer $\dot{\theta}^2$:

$$\begin{aligned}
R_N &= mg\cos\theta - m\cancel{R}\frac{2g}{\cancel{R}}(1-\cos\theta) \\
\Leftrightarrow \boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}
\end{aligned}$$

◇

4) Le pingouin décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

Réponse

La condition de support d'un solide est $R_N > 0$: le pingouin décolle du support si la force de réaction est nulle, soit $R_N = 0$. Or,

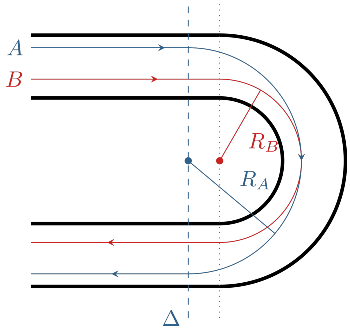
$$\begin{aligned}
R_N &= 0 \\
\Leftrightarrow 3\cos\theta - 2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)}
\end{aligned}$$

Une application numérique donne $\boxed{\theta = 48{,}2°}$.

◇

II Course de F1

Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando ALONSO (point A) et Jenson BUTTON (point B) arrivent en ligne droite et coupent l'axe Δ au même instant de leur parcours. Ils prennent cependant le virage de deux façons différentes :



- ALONSO suit une trajectoire circulaire de rayon $R_A = 90{,}0\,\mathrm{m}$;
- BUTTON choisit une trajectoire de rayon $R_B = 75{,}0\,\mathrm{m}$.

On cherche à déterminer quelle est la meilleure trajectoire, c'est-à-dire lequel des deux pilote gagne du temps par rapport à l'autre à la sortie du virage.

1) Déterminer les distances D_A et D_B parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Que peut-on conclure ?

Réponse

La voiture A d'ALONSO entame son virage dès qu'elle passe par l'axe Δ, et parcourt un demi-cercle de longueur

$$\boxed{D_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}}$$

En revanche, la voiture B de BUTTON continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_1 - R_2) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

◇

2) Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesse v_A et v_B constantes entre leurs deux passages par l'axe Δ. Déterminer ces vitesses, sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieur à 0,8 g sous risque de dérapage. Les calculer numériquement.

Réponse

Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{aR_A} = 26{,}6\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B = \sqrt{aR_B} = 24{,}3\,\mathrm{m\cdot s^{-1}}}$$

◇

3) Conclure quant à la meilleure trajectoire des deux.

Réponse

Calculons le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage. On sait que

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

d'où les résultats

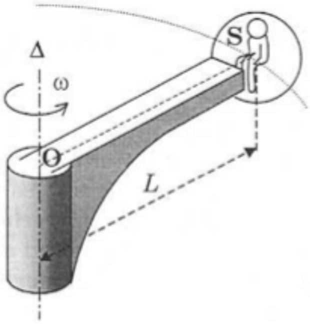
$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, ALONSO va plus vite que BUTTON pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la meilleure des deux**. À ne pas tenter en vérifiant chez soi, mais de quoi briller sur Mario Kart... ?

◇

III Entraînement d'une spationaute

Une spationaute doit subir différents tests d'aptitude aux vols spatiaux, notamment le test des accélérations. Pour cela, on l'installe dans une capsule de centre O, fixée au bout d'un bras métallique horizontal dont l'autre extrémité est rigidement liée à un arbre de rotation vertical Δ. La longueur du bras est notée L. On assimilera la spationaute au point matériel S.



L'ensemble {capsule + bras + arbre} est mis en rotation avec un vitesse angulaire croissant progressivement selon la loi

$$\omega(t) = \omega_0(1 - \exp^{-t/\tau})$$

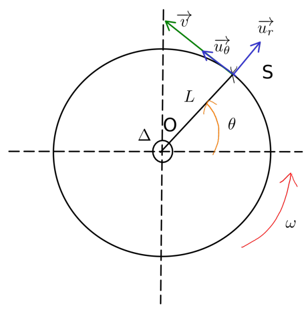
avec ω_0 la vitesse angulaire nominale du simulateur, et τ un temps caractéristique. On donne $L = 10{,}0\,\mathrm{m}$ et $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Établir proprement le système d'étude.

Réponse

- **Système :** {spationaute}
- **Référentiel :** référentiel du laboratoire, supposé galiléen
- **Repère :** $(\mathrm{O}, \vec{u_r}, \vec{u_\theta})$ avec $\vec{u_\theta}$ selon le sens de rotation
- **Repérage :**

$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}(t) = L\,\vec{u_r}$$
$$\vec{v}_S(t) = L\omega\,\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a}_S(t) = L\dot{\omega}\,\vec{u_\theta} - L\omega^2\,\vec{u_r}$$



◇

2) À partir de quelle durée peut-on supposer que le mouvement est circulaire et uniforme ? Que deviennent les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans ce cas ? Calculer alors la norme de l'accélération subie par la spationaute.

Réponse

Au bout de quelques τ, $\omega(t) = \omega_0$ et le mouvement sera circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{v}_S(t) = L\omega_0\,\vec{u_\theta} \\ \vec{a}_S(t) = -L{\omega_0}^2\,\vec{u_r} \end{cases}}$$

La norme de l'accélération subie est alors $\boxed{\|\vec{a}_S\| = L{\omega_0}^2}$.

◇

3) Quelle doit être la valeur de ω_0 pour que l'accélération atteigne 10 g lors du régime de rotation uniforme ? On donnera le résultat en tours par second.

Réponse

$$a_S = 10g \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}} \\ L = 10{,}0\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\omega_0 = 3{,}13\,\mathrm{rad\cdot s^{-1}} \approx 0{,}50\,\mathrm{tour\cdot s^{-1}}} \tag{3.4}$$

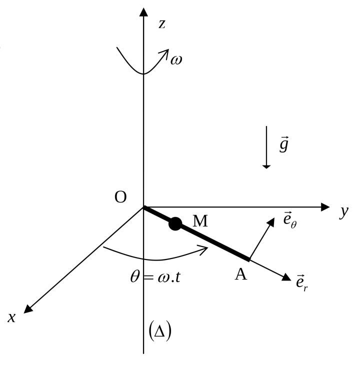
◇

Ordres de grandeurs

- Accélération latérale en F1 : (4 ; 5) g ;
- Accélération latérale en avion de chasse : (9 ; 10) g pendant quelques secondes max ;
- Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse : ≈ 20 g (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;
- Accélération négative frontale en accident de voiture : (40 ; 60) g ! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.

IV Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan $(x\mathrm{O}y)$, de longueur ℓ, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical Δ passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère :



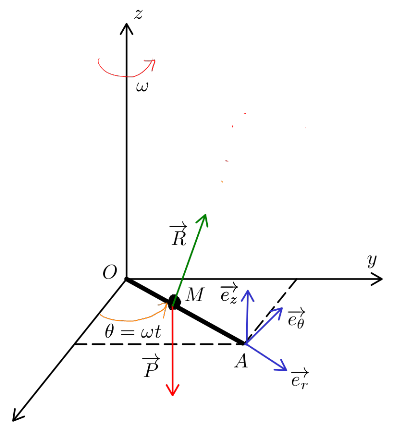
- le repère cartésien $(\mathrm{O}, \vec{e_x}, \vec{e_y}, \vec{e_z})$ fixe dans le référentiel du laboratoire et associé aux axes x, y et z ;
- la base cylindrique locale $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ associée au point M.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance r_0 du point O (avec $r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance $r = \mathrm{OM}$ entre le point O et l'anneau M.

1) Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

Réponse

- **Système :** {anneau} point matériel M de masse m
- **Référentiel :** terrestre supposé galiléen
- **Repère :** cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$
- **Repérage :**



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= r\,\vec{e_r}\\
\vec{v} &= \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta}\\
&= \dot{r}\,\vec{e_r} + r\omega\,\vec{e_\theta}\\
\vec{a} &= \ddot{r}\,\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{r}\omega\,\vec{e_\theta} - r\omega^2\,\vec{e_r} + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0}\\
&= (\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{e_r} + 2\dot{r}\omega\,\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

- **Conditions initiales :**

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0$$

- **BDF :** pas de frottements donc pas de composante sur $\vec{e_r}$:

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$
Réaction support	$\vec{R} = R_\theta\,\vec{e_\theta} + R_z\,\vec{e_z}$

- **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0\\ 2m\dot{r}\omega = R_\theta\\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{r} - \omega r = 0} & (3.5)\\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega & (3.6)\\ R_z = mg & (3.7) \end{cases}}$$

---

2) Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.

Réponse

On résout (3.5) avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}
&\ddot{r} - \omega^2 r = 0\\
\Rightarrow\ & s^2 - \omega^2 = 0\\
\Leftrightarrow\ & s^2 = \omega^2\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{s = \pm\omega}
\end{aligned}$$

On a donc des solutions de la forme

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Or, avec les CI :

$$\begin{aligned}
&r(0) = r_0\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{r_0 = A + B}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned} \dot{r}(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= A\omega - B\omega \\ \Leftrightarrow &\boxed{A = B} \end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}} \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = r_0 \operatorname{ch}(\omega t)}$$

◇

3) Exprimer les composantes de la réaction $\overrightarrow{R}$ de la tige sur M dans la base $(\overrightarrow{e_r}, \overrightarrow{e_\theta}, \overrightarrow{e_z})$ en fonction de m, g, $\dot{r}$ et ω.

Réponse

On reprend (3.6) et (3.7) avec $\dot{r} = \omega r_0 \operatorname{sh}(\omega t)$:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = 2mr_0\omega^2 \operatorname{sh}(\omega t)\,\overrightarrow{e_\theta} + mg\,\overrightarrow{e_z}}$$

◇

4) Déduire de la question 2 le temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, ℓ et ω.

Réponse

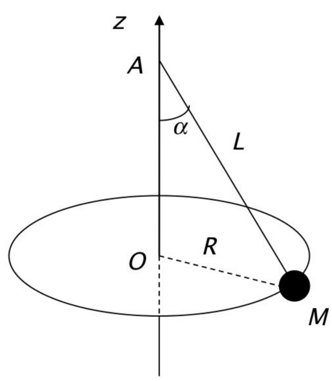
L'anneau quitte la tige en τ quand $r(\tau) = \ell$, soit

$$\begin{aligned} \ell &= r_0 \operatorname{ch}(\omega t) \\ \Leftrightarrow &\boxed{\tau = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}(\omega t)} \end{aligned}$$

◇

V Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\overrightarrow{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.



1) Quel système de coordonnées utiliser ?

Réponse

On utilisera un repère cylindrique pour étudier la rotation.

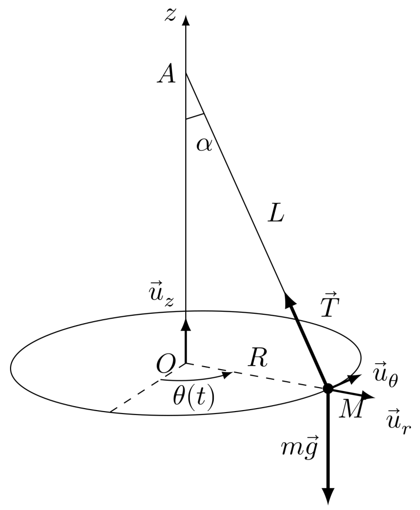
◇

1) Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.

Réponse

- **Système :** {M} masse m
- **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

◇ **Repère :** (O, $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_z}$) (voir schéma)



◇ **Repérage :** $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= R\,\overrightarrow{u_r} = L\sin\alpha\,\overrightarrow{u_r}\\
\vec{v}_{\mathrm{M}} &= L\dot{\theta}\sin\alpha\,\overrightarrow{u_\theta}\\
&= L\omega\sin\alpha\,\overrightarrow{u_\theta}\\
\vec{a}_{\mathrm{M}} &= -L\omega^2\sin\alpha\,\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

◇ **BDF :**

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$
Tension $\vec{T} = T(-\sin\alpha\,\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\,\overrightarrow{u_z})$

◇

2) Appliquer le PFD puis exprimer $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.

Réponse

On applique le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2\cancel{\sin\alpha} = -T\cancel{\sin\alpha} \\ 0 = T\cos\alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos\alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\mathrm{lim}}}$$

◇

3) Que dire du cas où ω devient très grande ?

Réponse

Si $\omega \gg \omega_{\mathrm{lim}}$, alors $\cos\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\mathrm{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\mathrm{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

◇

4) Application numérique : calculer α pour $L = 20\,\mathrm{cm}$ et $\omega = 3\,\mathrm{tours{\cdot}s^{-1}}$.

Réponse

On trouve $\boxed{\cos\alpha = 0{,}138 \Leftrightarrow \alpha = 82°}$

◇