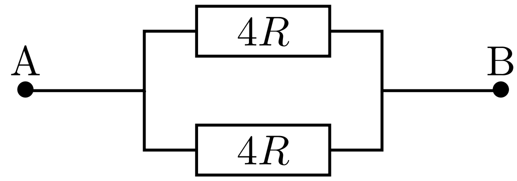
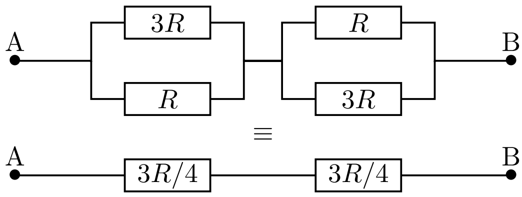
MPSI3 – 29 septembre 2023 – Devoir surveillé 1

Électrocinétique – corrigé

/30 E1 Modélisation d'un dipôle linéaire

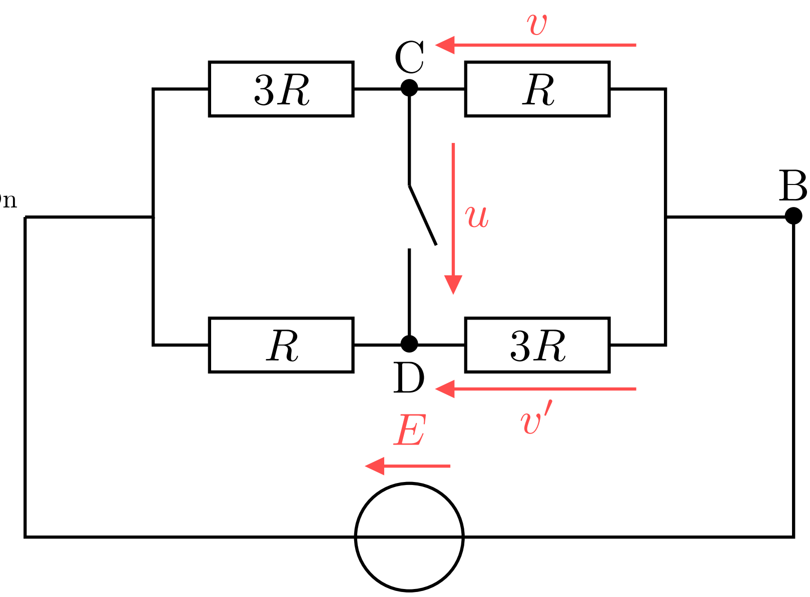


1 Si D est un interrupteur ouvert, alors le circuit est composé de deux branches de résistance $4R$ en parallèle, donc $\boxed{R_\infty = 2R = 200\,\Omega}$.



2 Si D est un fil, le circuit est l'association en série de deux résistances R_{eq} identiques correspondant à l'association en parallèle de la résistance $3R$ et de la résistance R. Donc $R_{\text{eq}} = 3R/4$ et $\boxed{R_0 = 3R/2 = 150\,\Omega}$.

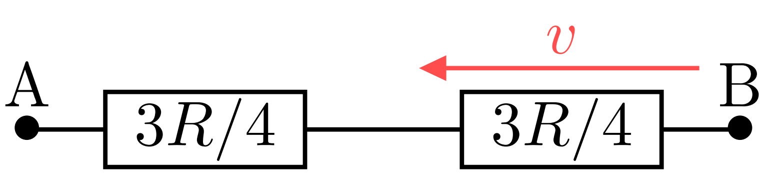
A Sur une source de tension



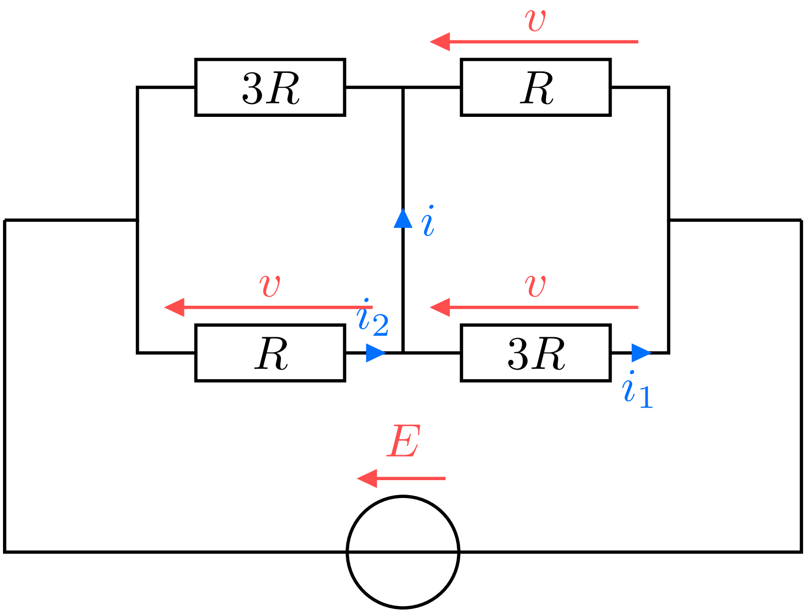
3 Par additivité des tensions, $u = v' - v$. On reconnait deux ponts diviseurs de tension :

$$v' = \frac{3E}{4} \quad ; \quad v = \frac{E}{4}$$

$$\boxed{u = \frac{E}{2} = 3\,\text{V}}$$



4 La tension v correspond à la tension aux bornes de la résistance équivalente R_{eq}.
On applique la formule du pont diviseur de tension sur l'association en série des deux résistances R_{eq} : $\boxed{v = E/2 = 3\,\text{V}}$.



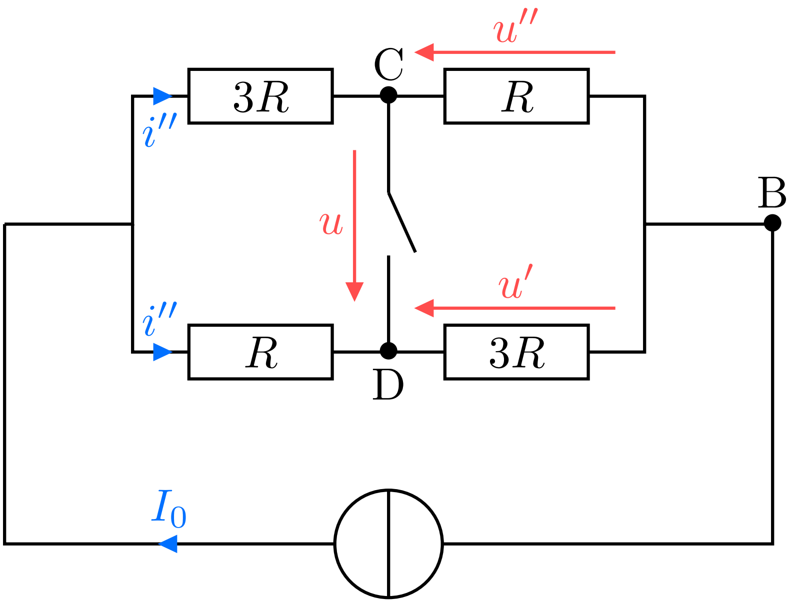
Par l'application de la loi des nœuds et de la loi d'Ohm :

5

$$i = i_2 - i_1 = \frac{v}{R} - \frac{v}{3R}$$

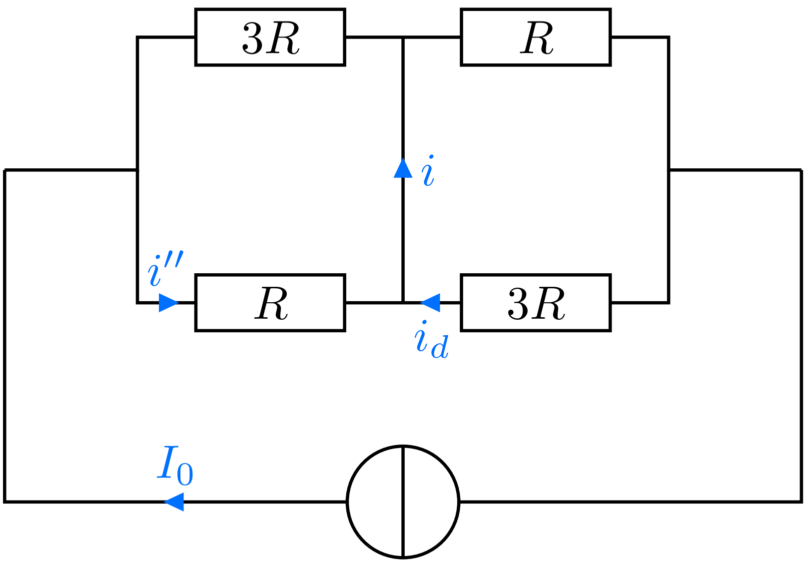
$$\boxed{i = \frac{E}{3R} = 20\,\mathrm{mA}}$$

B Sur une source de courant



6 Si D est un interrupteur ouvert, alors le courant est le même dans les deux branches qui ont la même résistance équivalente, donc $i'' = I_0/2$. Par l'additivité des tensions, $u = u' - u''$. En appliquant la loi d'Ohm, on obtient $\boxed{u = RI_0 = 4\,\mathrm{V}}$.

7 On applique la formule du pont diviseur de courant $\boxed{i'' = 3I_0/4 = 30\,\mathrm{mA}}$.



8 D'après la formule du pont diviseur de courant $i_R = -I_0/4$. Par la loi des nœuds $\boxed{\frac{I_0}{2} = 20\,\mathrm{mA}}$.

C Application

9 Dans le cas où D' est un générateur de tension de f.e.m. $u' = E$:

- Si D est un interrupteur ouvert, $i = 0$ et $u = E/2$: $E = bE/2$, donc $\boxed{b = 2}$
- Si D est un fil, $u = 0$ et $i = E/(3R)$: $E = aE/(3R)$, donc $\boxed{a = 3R}$

Dans le cas où D' est un générateur de courant de c.e.m. $i' = I_0$:

- Si D est un fil, $u = 0$ et $i = I_0/2$: $I_0 = cI_0/2$, donc $\boxed{c = 2}$
- Si D est un interrupteur ouvert, $i = 0$ et $u = RI_0$: $I_0 = dRI_0$, donc $\boxed{d = 1/R}$

10 $\lim_{\rho\to\infty} R_\rho = 2R = R_\infty$, il y a cohérence avec la réponse à la question 1.

11 $\lim_{\rho\to 0} R_\rho = 3R/2 = R_0$, il y a cohérence avec la réponse à la question 2.

/30 E2 Point de fonctionnement d'une diode

1 Une diode bloquée est modélisable par un interrupteur ouvert ($i = 0$).

2 Le coefficient directeur est donné par le taux d'accroissement $\boxed{a = \dfrac{i_C}{u_C - u_s} = 5{,}0\,\mathrm{S}}$.

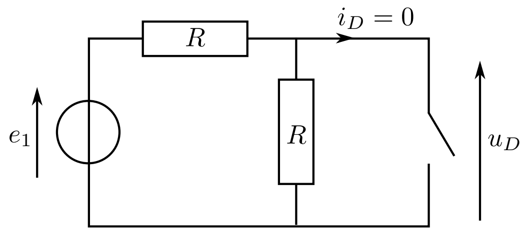
Pour déterminer l'ordonnée à l'origine, on utilise le point d'abscisse u_s et d'ordonnée nulle :

$$0 = au_s + b \quad \text{soit} \quad \boxed{b = -au_s = \frac{-i_C u_s}{u_C - u_s} = -3{,}0\,\mathrm{A}}$$

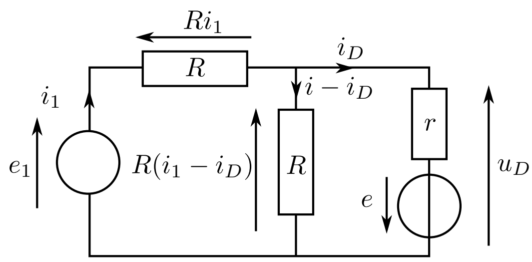
3 D'après l'additivité des tensions et la loi d'Ohm, $u = ri - e$, soit $\boxed{i = e/r + u/r}$.

4 Deux dipôles sont équivalents s'ils ont la même caractéristique. On en déduit $i = i_D\ \forall u = u_D$, soit $e/r = b$ et $1/r = a$. Donc $\boxed{e = b/a = -u_s = -0{,}60\,\mathrm{V}}$ et $\boxed{r = 1/a = 0{,}20\,\Omega}$.

5 En remplaçant la diode par un interrupteur, on reconnait un pont diviseur de tension : $u_D = \frac{e_1}{2}$. La diode est bloquée si $u_D < u_s$, donc il faut que $\boxed{e_1 < 2us}$.



6 On refait le circuit en faisant attention à l'orientation de la tension e.



La loi des nœuds et les lois d'Ohm sont appliquées sur le schéma. On définit u_D comme étant la tension aux bornes des trois branches en parallèle :

$$u_D = e_1 - Ri_1 \tag{1.1}$$
$$u_D = R(i_1 - i_D) \tag{1.2}$$
$$u_D = ri_D - e \tag{1.3}$$

$$(1.1) + (1.2)\ : 2u_D = e_1 - Ri_D \quad \text{soit} \quad i_D = \frac{e_1 - 2u_D}{R}$$

$$(1.3)\ : u_D = \frac{r}{R}(e_1 - 2u_D) - e \quad \text{soit} \quad \boxed{u_D = \frac{re_1 - Re}{2r + R} = 1{,}0\,\mathrm{V}}$$

On remarque que $u_D > u_s$, donc la diode est bien passante.

Pour trouver i_D on utilise la caractéristique de la diode :

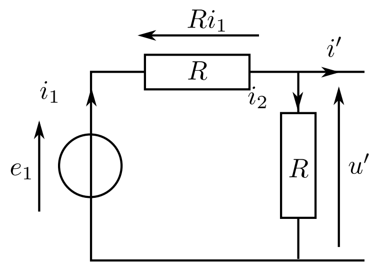
$$\boxed{i_D = au_D + b = 5 \times 0{,}67 - 3 = 2{,}0\,\mathrm{A}}$$

$\boxed{7}$ Loi des nœuds : $i' = i_1 - i_2$

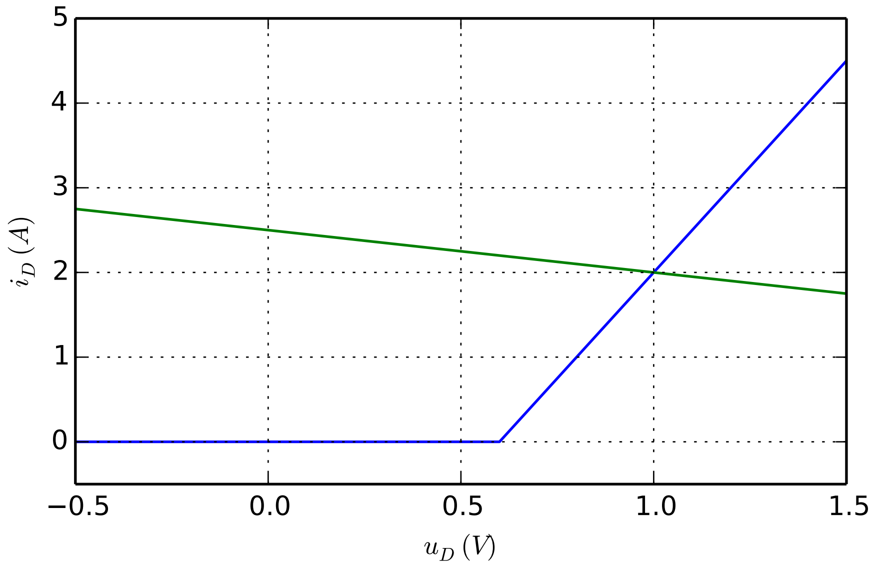
Loi des mailles et loi d'Ohm : $u' = e_1 - Ri_1 = Ri_2$

On en déduit : $i_1 = \frac{e_1 - u'}{R}$ et $i_2 = u'/R$.

On remplace dans la loi des nœuds : $\boxed{i' = \dfrac{e_1}{R} - \dfrac{2}{R}u'}$

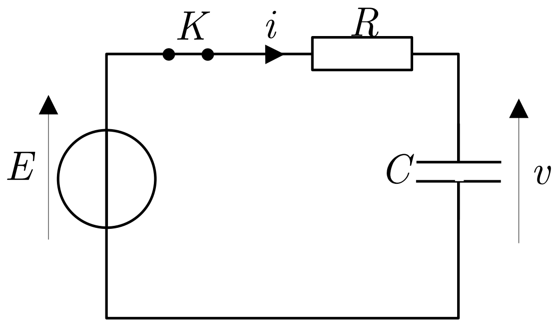


$\boxed{8}$ On lit les coordonnées du point d'intersection $I(1{,}0\,\mathrm{V},2{,}0\,\mathrm{A})$. Cela correspond aux valeurs déterminées précédemment.



/30 P1 Balise lumineuse

1 La tension aux bornes d'un condensateur est une fonction continue du temps donc $v(t=0^+) = v(t=0^-) = 0 < U_a$. Le tube est par conséquent éteint et la lampe est donc assimilable à un interrupteur ouvert. Le circuit devient donc :



Loi des mailles : $E = u_R(t) + v(t)$
Loi d'Ohm : $u_R(t) = Ri(t) \quad \Rightarrow \quad E = Ri(t) + v(t)$
Loi intensité/tension pour C : $i(t) = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} \quad \Rightarrow \quad E = RC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v(t)$
La solution générale est la somme de la solution homogène et d'une solution particulière constante :

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E \quad \text{et} \quad \tau = RC$$

A se détermine avec les conditions initiales $v(t=0) = 0$. Ainsi,

$$v(0) = A + E = 0 \quad \text{donc} \quad A = -E$$

Finalement :

$$\boxed{v(t) = E\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

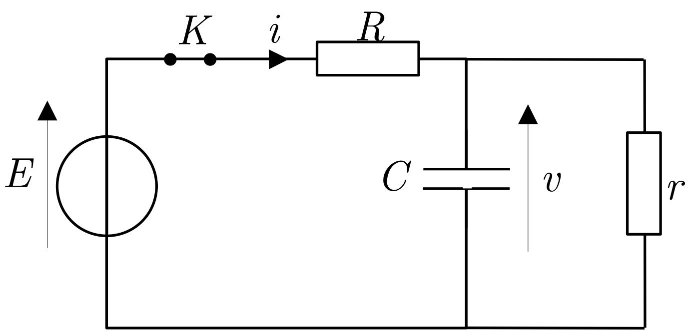
2 La décharge s'amorce à l'instant t_a tel que $v(t_a) = U_a$. Soit

$$E\left(1 - \mathrm{e}^{-t_a/\tau}\right) = U_a$$

Après calcul, il vient :

$$\boxed{t_a = \tau \ln()\frac{E}{E - U_a})}$$

3 La lampe est maintenant assimilable à une résistance r. On obtient alors le nouveau schéma équivalent :



L'équation différentielle s'obtient alors :

Loi des mailles : $E = u_R + v$

Loi d'Ohm : $E = Ri + v$

Loi des nœuds : $E = R(i_1 + i_2) + v$

Loi intensité/tension aux bornes de r//C : $E = R\left(C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{r}\right) + v$

Il vient finalement,

$$\frac{r}{R}E = rC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{r}{R}\right)v \quad \Longleftrightarrow \quad E = RC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R}{r} + 1\right)v$$

En négligeant les termes en r/R : $0 = rC\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + v$
La solution s'écrit :

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau'} \quad \text{et} \quad \tau' = rC$$

En exploitant la nouvelle condition initiale $v(t = t_a) = U_a$, il vient

$$A\mathrm{e}^{-t_a/\tau'} = U_a \quad \text{soit} \quad A = U_a\mathrm{e}^{t_a/\tau'}$$

Ainsi,

$$\boxed{v(t) = U_a\mathrm{e}^{-(t-t_a)/\tau'}}$$

4 La décharge se termine à l'instant t_{ex} tel que $v(t_{ex}) = U_{ex}$. Soit

$$U_a\mathrm{e}^{-(t_{ex}-t_a)/\tau'} = U_{ex}$$

Après calcul, il vient :

$$\boxed{t_{ex} = t_a + \tau' \ln\left(\frac{U_a}{U_{ex}}\right)}$$

5

$$\boxed{T_1 = t_{ex} - t_a = \tau' \ln\left(\frac{U_a}{U_{ex}}\right)}$$

6 Par analogie directe avec la première question, dans cette phase,

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + E \quad \text{et} \quad \tau = RC$$

La nouvelle condition initiale s'écrit désormais $v(t = t_{ex}) = U_{ex}$. Soit

$$A\mathrm{e}^{-t_{ex}/\tau} + E = U_{ex} \quad \Leftrightarrow \quad A = (U_{ex} - E)\mathrm{e}^{t_{ex}/\tau}$$

Dont on déduit, après calcul,

$$v(t) = (U_{ex} - E)\mathrm{e}^{-(t-t_{ex})/\tau} + E$$

Le nouvel allumage de la lampe est réalisée à la condition $v(t = t_{ex} + T_2) = U_a$, soit

$$(U_{ex} - E)\mathrm{e}^{-T_2/\tau} + E = U_a$$

$$\text{D'où} \qquad \boxed{T_2 = \tau \ln\left(\frac{U_{ex} - E}{U_a - E}\right)}$$

7

$$T = T_1 + T_2 = \tau \ln\left(\frac{U_{ex} - E}{U_a - E}\right) + \tau' \ln\left(\frac{U_a}{U_{ex}}\right)$$

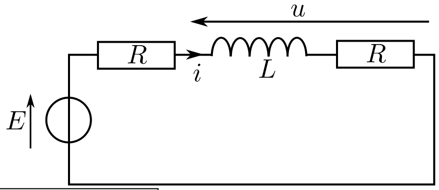
8 Les flashs lumineux sont très brefs devant la durée entre deux flashs.

/30

P2 Régimes transitoires successifs d'un circuit RL

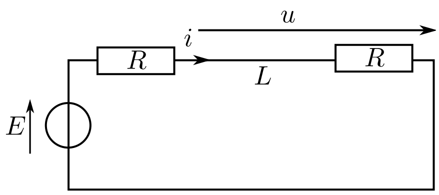
A Étude pour $t \in]0,t_1[$

1 A l'instant $t = 0^-$, le circuit est en régime permanent, et les interrupteurs sont ouverts. Comme le circuit est ouvert, il n'y a pas de courant circulant dans le circuit. Donc $\boxed{i(0^-) = 0}$.



Par continuité de l'intensité traversant la bobine, on en déduit $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$. Comme il n'y a pas de courant à $t = 0^+$, les tensions aux bornes des résistances sont nulles. En appliquant la loi des mailles : $\boxed{u(0^+) = E}$

2 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à un générateur alimentant deux résistances : $\boxed{i(t_1^-) = \dfrac{E}{2R} \quad ; \quad u(t_1^-) = \dfrac{E}{2}}$



3 On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]0,t_1[$. On applique la loi des mailles :

$$E = Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri \quad \text{soit} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{2R}{L}i = \frac{E}{L}$$

On pose alors $boxed\tau_1 = \frac{L}{2R}$ et $A_1 = \frac{E}{L}$.

4 La solution générale est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = B_1 \exp(-t/\tau_1) + \frac{E}{2R}$$

On utilise la condition initiale $i(0) = 0$ pour déterminer la constante B_1 :

$$i(0) = 0 = B_1 + \frac{E}{2R} \quad \text{soit} \quad B_1 = -\frac{E}{2R} \quad \text{donc} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{2R}\left(1 - e^{-t/\tau_1}\right) \quad \text{pour } t \in]0; t_1[}$$

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{t \gg \tau_1} i(t) = E/(2R)$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 2.

5 On applique la loi des mailles :

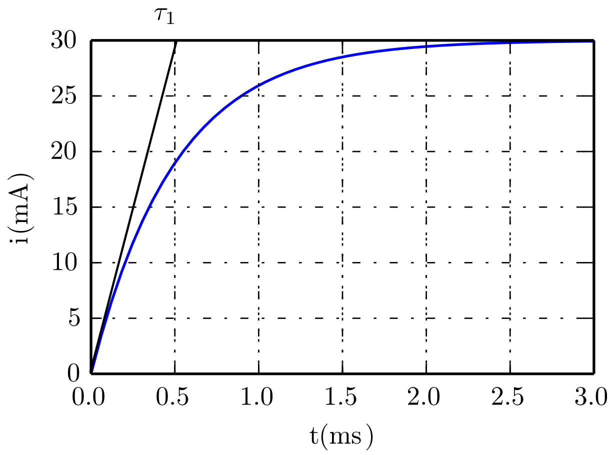
$$u(t) = E - Ri(t) \quad \text{donc} \quad \boxed{u(t) = \frac{E}{2}\left(1 + e^{-t/\tau_1}\right) \quad \text{pour } t \in]0; t_1[}$$

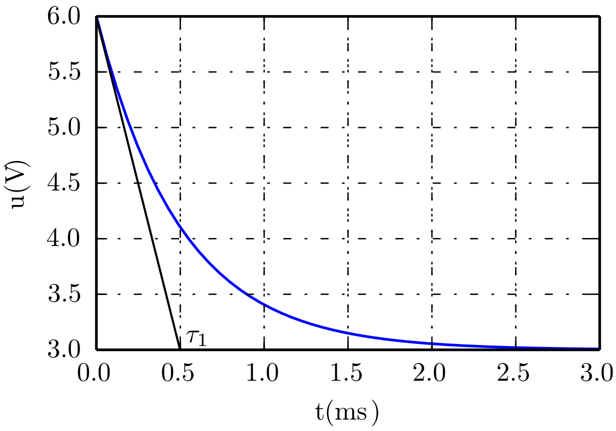
On vérifie que $u(0) = E$.

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{t \gg \tau_1} u(t) = E/2$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 2.

6 D'après le document annexe, on lit $\boxed{\tau_1 = 0{,}5\,\mathrm{ms} \ll t_1}$, donc on peut considérer que le circuit est en régime permanent à l'instant $t = t_1^-$.

On lit $u(t = 0) = 6\,\mathrm{V}$ et $i(t \gg \tau_1) = 30\,\mathrm{mA}$. Or d'après l'étude théorique, $\boxed{u(t = 0) = E = 6\,\mathrm{V}}$, $i(t \gg \tau_1) = E/2R$, donc $\boxed{R = 100\,\Omega}$. Enfin $\tau_1 = L/2R$, donc $\boxed{L = 0{,}1\,\mathrm{H}}$.

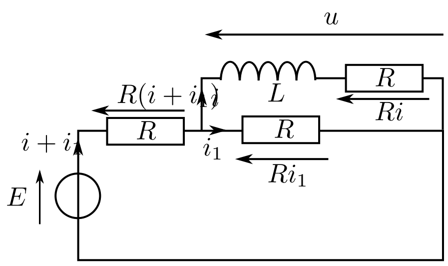




B Étude pour $t \in]t_1; t_2[$

7 Par continuité du courant circulant à travers une bobine :
$\boxed{i(t_1^+) = i(t_1^-) = \dfrac{E}{2R}}$.

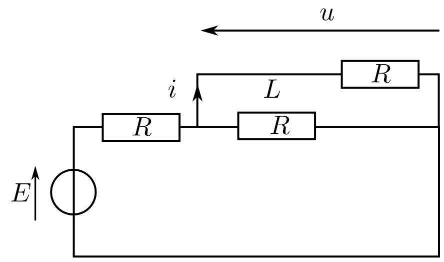
D'après la loi des mailles, avec $u(t_1^+) = Ri_1(t_1^+)$:



$$E = R(i(t_1^+) + i_1(t_1^+)) + u(t_1^+) = Ri(t_1^+) + 2u(t_1^+)$$

$$u(t_1^+) = \frac{E - Ri(t_1^+)}{2} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{u(t_1^+) = \frac{E}{4}}$$

8 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à un générateur alimentant trois résistances. On associe les deux résistances en parallèle et on applique la formule du pont diviseur de tension :



$$u(t_2^-) = \frac{R/2}{R + R/2}E \quad \text{soit} \quad \boxed{u(t_2^-) = \frac{E}{3}}$$

En appliquant la loi d'Ohm, on trouve le courant i : $\boxed{i(t_2^-) = \dfrac{E}{3R}}$

9 On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]t_1,t_2[$. On exprime la tension u : $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = Ri_1$

On applique la loi des mailles :

$$E = R(i + i_1) + u = Ri + u + u = Ri + 2L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2Ri$$

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{3R}{2L}i = \frac{E}{2L} \quad \text{soit} \quad \boxed{\tau_2 = \frac{2L}{3R} \quad \text{et} \quad A_2 = \frac{E}{2L}}$$

10 La solution est la somme de la solution de l'équation homogène et d'une solution particulière :

$$i(t) = i_h(t) + i_p(t) = B_2 \exp(-t/\tau_2) + \frac{E}{3R}$$

On utilise la condition initiale pour déterminer la constante B_2 :

$$i(t_1) = \frac{E}{2R} = B_2 e^{-t_1/\tau_2} + \frac{E}{3R} \quad \text{soit} \quad B_2 = \frac{E}{6R}e^{t_1/\tau_2}$$

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{6R}\left(2 + e^{-(t-t_1)/\tau_2}\right) \quad \text{pour } t \in]t_1; t_2[}$$

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{(t-t_1)\gg\tau_2} i(t) = E/(3R)$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 8

11

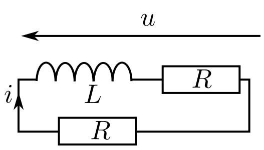
$$\boxed{u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = \frac{E}{6}\left[2 - \frac{1}{2}e^{-(t-t_1)/\tau_2}\right]}$$

On vérifie que $u(t_1) = E/4$.

Quand on atteint le régime permanent, $\lim_{(t-t_1)\gg\tau_2} u(t) = E/3$, ce qui cohérent avec la réponse à la question 8.

C Étude pour $t \in]t_2; +\infty[$

12 La branche contenant le générateur est ouverte. Elle n'a donc aucune influence sur le circuit. Je ne la représente pas.



Par continuité du courant circulant à travers une bobine : $\boxed{i(t_2^+) = i(t_2^-) = \frac{E}{3R}}$.

En appliquant la loi d'Ohm : $\boxed{u(t_2^+) = -\frac{E}{3}}$

$$u(t_2^-) = \frac{R/2}{R + R/2}E \quad \text{soit} \quad \boxed{u(t_2^-) = \frac{E}{3}}$$

13 En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil. Le circuit se résume à deux résistances sans alimentation. Donc $\boxed{i(+\infty) = 0 \quad \text{et} \quad u(+\infty) = 0}$

14 On utilise le circuit en régime transitoire pour $t \in]t_2, +\infty[$. On applique la loi des mailles

$$L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + 2Ri = 0 \quad \text{soit} \quad \frac{di}{dt} + \frac{2R}{L}i = 0$$

On pose $\boxed{\tau_3 = \frac{L}{2R} \quad \text{et} \quad A_3 = 0}$.

15 L'équation à résoudre est une équation homogène. La solution générale est $i(t) = B_3 \exp(-t/\tau_3)$.

On utilise la condition initiale pour déterminer la constante B_3 :

$$i(t_2) = \frac{E}{3R} = B_2 e^{-t_2/\tau_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{i(t) = \frac{E}{3R}e^{-(t-t_2)/\tau_3} \quad \text{pour } t \in]t_2; +\infty[}$$

16 On calcule les temps :

$$\tau_3 = \tau_1 = 0{,}5\,\mathrm{ms} \quad ; \quad \tau_2 = 4\tau_1/3 = 0{,}66\,\mathrm{ms}$$

Voir Figure 2.2

17 Voir Figure 2.3

Annexe : exercice 2

Annexe : problème 2

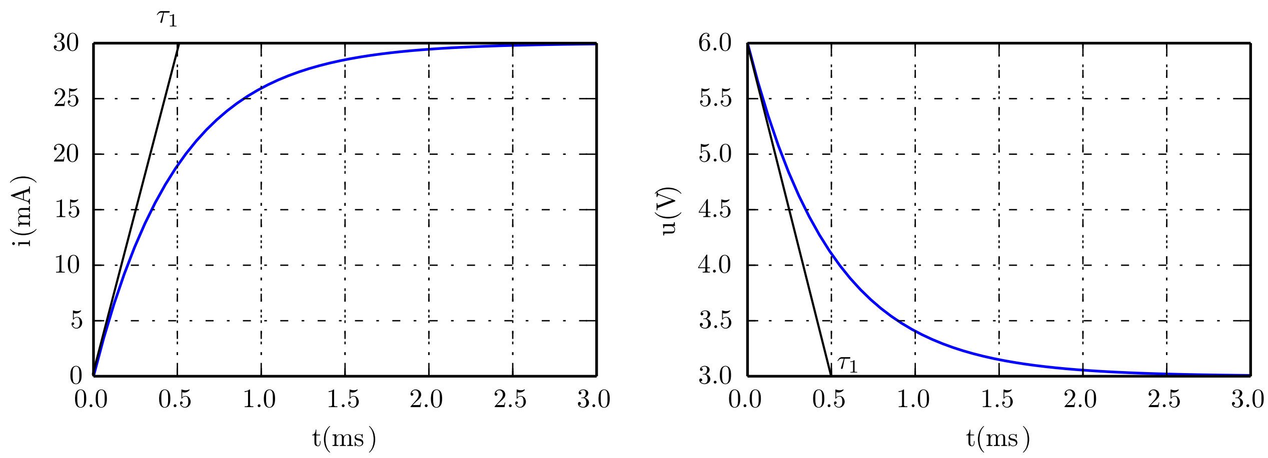


Figure 2.1 – Annexe question 6.

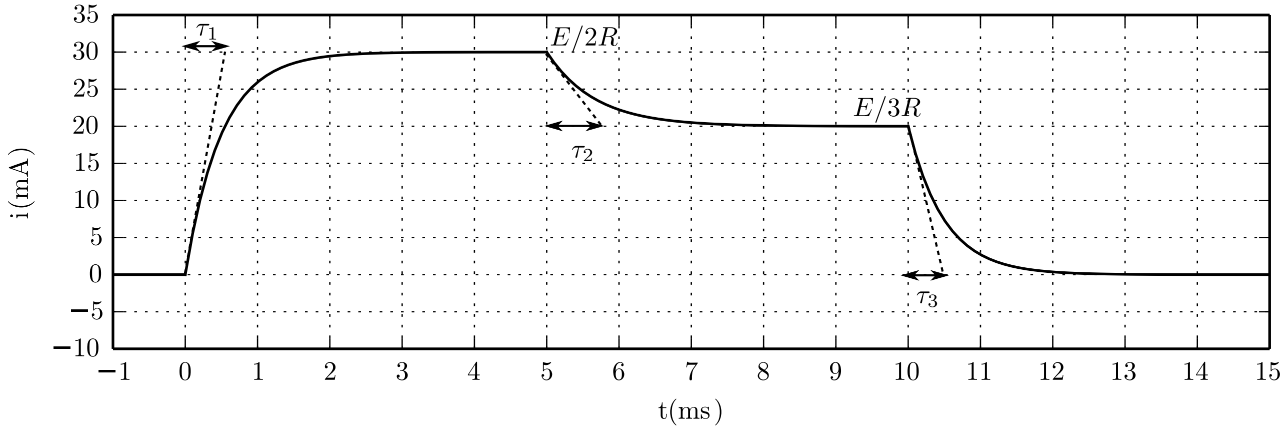


Figure 2.2 – Annexe question 6.

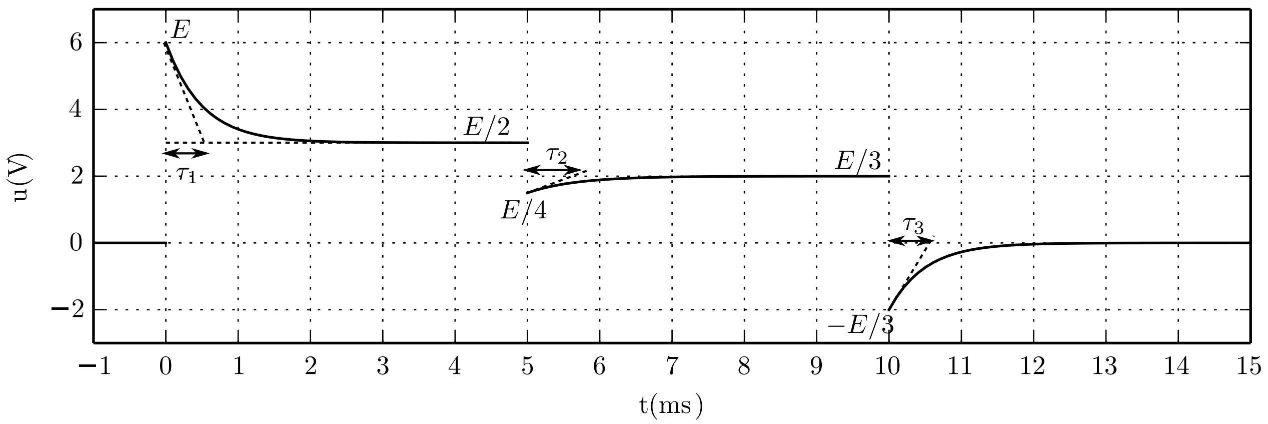


Figure 2.3 – Annexe question 6.