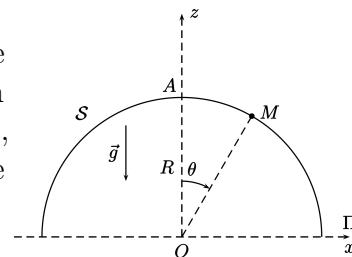


# TD entraînement : mouvements courbes

## I Glissade d'un pingouin sur un igloo

Un pingouin, assimilable à un point matériel  $M$  de masse  $m$  décide de faire du toboggan. Il s'élance sans vitesse initiale du sommet  $A$  d'un igloo voisin, assimilable à une demi sphère  $S$  de rayon  $R$  et de centre  $O$ , posée sur un plan horizontal  $\Pi$ . On considère que le glissement s'effectue sans frottement dans le plan vertical  $(xOz)$ .



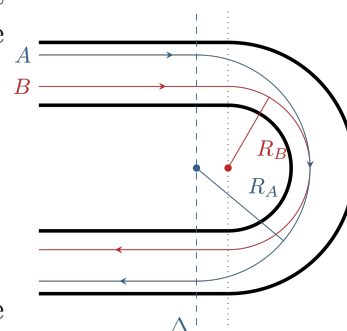
- 1) Appliquer le PFD au pingouin pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle  $\theta$ . Identifier l'équation du mouvement qui permet de déterminer  $\theta(t)$ . Quelle information l'autre information contient-elle ?
- 2) En multipliant l'équation du mouvement par  $\dot{\theta}$  et en intégrant sur  $t$ , montrer que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1 - \cos \theta)$$

- 3) En déduire la norme de la force de réaction de l'igloo.
- 4) Le pingouin décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

## II Course de F1

Lors des essais chronométrés d'un grand prix, Fernando ALONSO (point A) et Jenson BUTTON (point B) arrivent en ligne droite et coupent l'axe  $\Delta$  au même instant de leur parcours. Ils prennent cependant le virage de deux façons différentes :



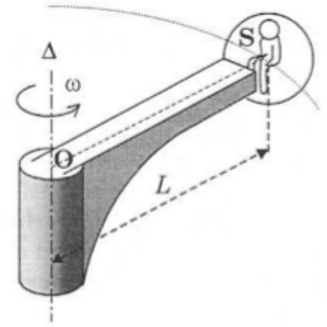
- ◇ ALONSO suit une trajectoire circulaire de rayon  $R_A = 90,0 \text{ m}$  ;
- ◇ BUTTON choisit une trajectoire de rayon  $R_B = 75,0 \text{ m}$ .

On cherche à déterminer quelle est la meilleure trajectoire, c'est-à-dire lequel des deux pilote gagne du temps par rapport à l'autre à la sortie du virage.

- 1) Déterminer les distances  $D_A$  et  $D_B$  parcourues par les deux pilotes entre leurs deux passages par l'axe  $\Delta$ . Que peut-on conclure ?
- 2) Pour simplifier, on imagine que les deux voitures roulent à des vitesses  $v_A$  et  $v_B$  constantes entre leurs deux passages par l'axe  $\Delta$ . Déterminer ces vitesses, sachant que l'accélération des voitures doit rester inférieur à  $0,8g$  sous risque de dérapage. Les calculer numériquement.
- 3) Conclure quant à la meilleure trajectoire des deux.

### III Entraînement d'une spationaute

Une spationaute doit subir différents tests d'aptitude aux vols spatiaux, notamment le test des accélérations. Pour cela, on l'installe dans une capsule de centre O, fixée au bout d'un bras métallique horizontal dont l'autre extrémité est rigidement liée à un arbre de rotation vertical  $\Delta$ . La longueur du bras est notée  $L$ . On assimilera la spationaute au point matériel S.



L'ensemble {capsule + bras + arbre} est mis en rotation avec une vitesse angulaire croissant progressivement selon la loi

$$\omega(t) = \omega_0(1 - \exp^{-t/\tau})$$

avec  $\omega_0$  la vitesse angulaire nominale du simulateur, et  $\tau$  un temps caractéristique. On donne  $L = 10,0 \text{ m}$  et  $g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2}$ .

- 1) Établir proprement le système d'étude.
- 2) À partir de quelle durée peut-on supposer que le mouvement est circulaire et uniforme? Que deviennent les expressions des vecteurs vitesse et accélération dans ce cas? Calculer alors la norme de l'accélération subie par la spationaute.
- 3) Quelle doit être la valeur de  $\omega_0$  pour que l'accélération atteigne  $10 \text{ g}$  lors du régime de rotation uniforme? On donnera le résultat en tours par second.

#### Ordres de grandeurs

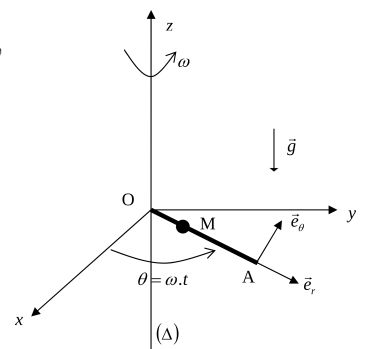
- ◇ Accélération latérale en F1 :  $(4 ; 5) \text{ g}$ ;
- ◇ Accélération latérale en avion de chasse :  $(9 ; 10) \text{ g}$  pendant quelques secondes max ;
- ◇ Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse :  $\approx 20 \text{ g}$  (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;
- ◇ Accélération négative frontale en accident de voiture :  $(40 ; 60) \text{ g}$ ! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.

### IV Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse  $m$  considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan  $(xOy)$ , de longueur  $\ell$ , effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire  $\omega$  constante autour d'un axe fixe vertical  $\Delta$  passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère :

- ◇ le repère cartésien  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_y, \vec{e}_z)$  fixe dans le référentiel du laboratoire et associé aux axes  $x$ ,  $y$  et  $z$  ;
- ◇ la base cylindrique locale  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  associée au point M.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance  $r_0$  du point O (avec

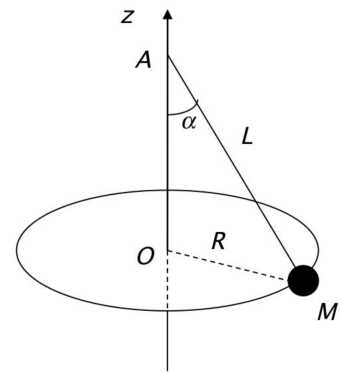


$r_0 < \ell$ ). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance  $r = OM$  entre le point O et l'anneau M.

- 1) Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$ . En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par  $r(t)$ .
- 2) Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution  $r(t)$  en fonction de  $r_0$ ,  $\omega$  et  $t$ .
- 3) Exprimer les composantes de la réaction  $\vec{R}$  de la tige sur M dans la base  $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$  en fonction de  $m$ ,  $g$ ,  $\dot{r}$  et  $\omega$ .
- 4) Dédire de la question 2 le temps  $\tau$  que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera  $\tau$  en fonction de  $r_0$ ,  $\ell$  et  $\omega$ .

## V Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur  $\vec{g}$  vertical et vers le bas, un point matériel M de masse  $m$  tourne à la vitesse angulaire  $\omega$  constante autour de l'axe  $(Oz)$  dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon  $R$ . M est suspendu à un fil inextensible de longueur  $L$  et de masse négligeable, fixé en un point A de  $(Oz)$ . L'angle  $\alpha$  de  $(Oz)$  avec AM est constant.



- 1) Quel système de coordonnées utiliser ?
- 1) Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.
- 2) Appliquer le PFD puis exprimer  $\cos \alpha$  en fonction de  $g$ ,  $L$  et  $\omega$ . En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite  $\omega_{\text{lim}}$  pour qu'un tel mouvement puisse être possible.
- 3) Que dire du cas où  $\omega$  devient très grande ?
- 4) Application numérique : calculer  $\alpha$  pour  $L = 20 \text{ cm}$  et  $\omega = 3 \text{ tours} \cdot \text{s}^{-1}$ .