

# Conversion électromécanique

## I Principe de la conversion de puissance

### A Vocabulaire

On a vu précédemment quelques exemples où un mouvement mécanique crée un champ électrique, mais également l'inverse. Un peu de vocabulaire :

- ◇ On parle de circuit **moteur** lorsqu'il convertit une puissance de **électrique à mécanique** ;
- ◇ On parle de circuit **générateur** lorsqu'il convertit une puissance de **mécanique à électrique**.



FIGURE 4.1 – Schématisation des fonctionnements moteur et générateur.

### B Exemple des rails de LAPLACE moteurs

#### Définition

Les rails de LAPLACE **moteurs** sont deux conducteurs rectilignes parallèles reliés par une tige mobile conductrice rendant le circuit **déformable**, plongé dans un champ magnétique constant perpendiculaire au circuit et **alimenté par une f.é.m. constante**  $U_0$ .

Le générateur étant dans un circuit fermé, il impose un courant  $i > 0$ . **On néglige l'auto-induction**, et on appelle  $R$  la résistance totale du circuit. Nous avons déjà constaté expérimentalement la mise en mouvement de la barre à l'aide de la force de LAPLACE. Quelle vitesse atteint-elle ?

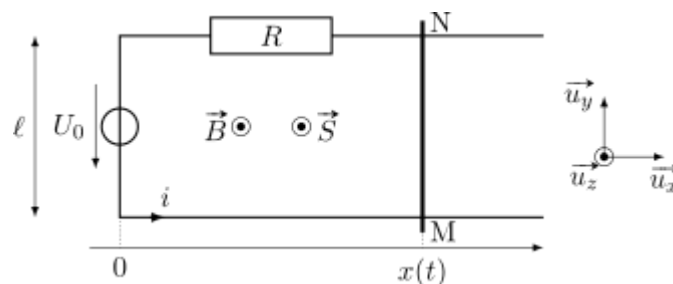


FIGURE 4.2 – Rails de LAPLACE moteurs.

#### I.B.1 Analyse qualitative

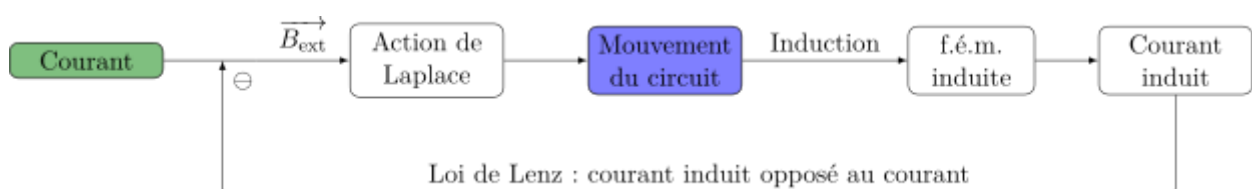


FIGURE 4.3 – Schéma de causalité des conséquences de l'induction.

Avant de se lancer dans les calculs, on peut déterminer le comportement du système avec la loi de LENZ. À l'origine de l'induction est la présence d'un champ extérieur  $\vec{B}_{\text{ext}}$  et d'un courant dans le circuit. Combinés ensemble, ils appliquent une action de LAPLACE sur le barreau, le mettant en mouvement et **déformant** le circuit. Il y a donc **variation du flux**, et d'après la loi de FARADAY une f.é.m. induite y apparaît. Le circuit étant toujours fermé, il y a également un courant induit.

L'induction modérant, par ses conséquences, les causes qui lui ont donné naissance, on en conclut que ce **courant induit s'oppose au courant initial**, ce qui générera une force de LAPLACE opposée tendant à freiner l'accélération du barreau. On veut étudier ce comportement et notamment connaître la vitesse finale : est-elle infinie ? nulle ? constante ?

### Attention

⚠ Une étude de causalité doit comparer une conséquence et une cause de mêmes natures ! ⚠

#### I.B.2 Analyse mécanique

On étudie le mouvement de la barre de masse  $m$  dans le référentiel de la salle de classe. Avec un bilan des forces :

- ◇ **Poids**  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  ;
- ◇ **Réaction normale**  $\vec{N} = N\vec{u}_z$  ;
- ◇ **Force de LAPLACE**  $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\vec{MN} \wedge \vec{B} = i\ell B\vec{u}_x$  ;
- ◇ **Frottements**  $\vec{F}_f = -F_f\vec{u}_x$  avec  $F_f > 0$ .

Ainsi,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{F}_{\text{Lap}} + \vec{N} + \vec{F}_f$$

D'où, en projetant sur  $\vec{u}_x$  :

### Équation mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = i\ell B - F_f \quad (4.1)$$

#### I.B.3 Analyse électrique

La déformation du circuit entraîne une variation de sa surface. Ainsi, même avec un champ magnétique constant, le flux magnétique varie, impliquant l'apparition d'une f.é.m. induite.

Avec  $\vec{S} = S\vec{u}_z$  pris dans le sens de  $i$ , on trouve pour  $\phi$  :

$$\phi = B\vec{u}_z \cdot S\vec{u}_z = BS = B\ell x$$

D'où, avec la loi de FARADAY :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -B\ell \dot{x}$$

Placée en **convention générateur**. Donc, avec la loi des mailles :

$$e + U_0 = Ri \quad \Rightarrow \quad U_0 = Ri + B\ell \dot{x}$$

Ainsi,

### Équation électrique

$$U_0 = Ri + B\ell v \quad (4.2)$$

**I.B.4** Résolution

On cherche à éliminer  $i$  pour obtenir une équation différentielle sur  $v$ . On l'isole dans (4.2) :

$$i = \frac{U_0}{R} - \frac{B\ell}{R}v$$

Et on substitue  $i$  dans l'équation mécanique (4.1) **en l'absence de frottements** :

$$\begin{aligned} m \frac{dv}{dt} &= \left( \frac{U_0}{R} - \frac{B\ell}{R} \right) \ell B \\ \Leftrightarrow m \frac{dv}{dt} &= \frac{U_0 \ell B}{R} - \frac{B^2 \ell^2}{R} v \\ \Leftrightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{B^2 \ell^2}{Rm} v &= \frac{U_0 \ell B}{Rm} \end{aligned}$$

On obtient donc une équation différentielle de la forme :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = \frac{v_{\text{lim}}}{\tau} \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{Rm}{B^2 \ell^2} \quad \text{et} \quad v_{\text{lim}} = \frac{U_0}{B\ell}$$

Qui se résout en

$$v(t) = v_{\text{lim}} (1 - e^{-t/\tau}) \Leftrightarrow i(t) = \frac{U_0}{R} e^{-t/\tau}$$

Ainsi, **l'intensité finit par être nulle et la vitesse du rail finit par atteindre une valeur limite.**

**I.B.5** Résumé méthode**Méthode**

- 1) Obtenir l'équation mécanique :
  - ◇ PFD si translation
  - ◇ TMC si rotation
- 2) Obtenir l'équation électrique :
  - a – Définir un sens pour le courant, avoir  $\vec{S}$ , calculer  $\phi$  ;
  - b – Utiliser la loi de FARADAY pour avoir la f.é.m. induite ;
  - c – L'ajouter dans le circuit en **convention générateur** ;
  - d – Appliquer la loi des mailles
- 3) Résoudre les équations couplées

**I.B.6** Bilan énergétique

◇ **Bilan électrique** : On multiplie la LdM par  $i$  :

$$U_0 i = Ri^2 + B\ell v i$$

On identifie :

▷ puissance du générateur :  $\mathcal{P}_g = U_0 i$

- ▷ puissance dissipée par effet Joule :  $\mathcal{P}_J = Ri^2$
- ▷ puissance reçue par la f.é.m. :  $\mathcal{P}_e = -ei = B\ell vi$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_e}$$

◇ **Bilan mécanique** : On multiplie le PFD par  $v$  :

$$mv \frac{dv}{dt} = i\ell Bv - F_f v$$

On identifie :

- ▷ dérivée de l'énergie cinétique :  $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = mv \frac{dv}{dt}$
- ▷ puissance des forces de LAPLACE :  $\mathcal{P}_{\text{Lap}} = i\ell Bv$
- ▷ puissance perdue par frottements :  $\mathcal{P}_f = -(-F_f v) = F_f v$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \mathcal{P}_f = \mathcal{P}_{\text{Lap}}}$$

On remarque notamment que

$$\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_{\text{Lap}}$$

C'est-à-dire que le **couplage électromécanique est parfait** : la puissance électrique reçue par la force électromotrice induite est égale à la puissance mécanique (motrice) des forces de LAPLACE. Ainsi, en définissant le rendement par

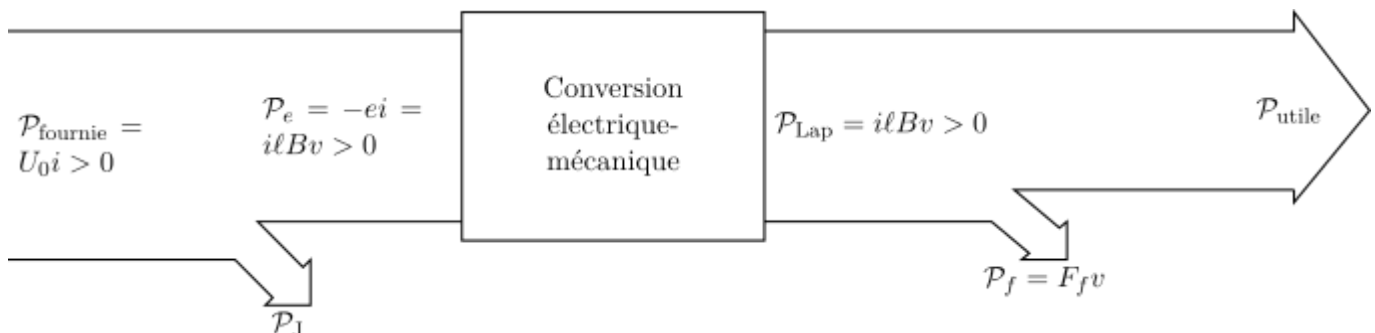
$$\boxed{\eta = \left| \frac{\text{puissance utile}}{\text{puissance fournie}} \right|}$$

on voit que **contrairement à la thermodynamique**, le **rendement théorique** de conversion électromécanique est de 1 ! En effet, seules les **pertes limitent le transfert**.

### I.B.7 Bilan global

En combinant les résultats de puissance, on a mathématiquement puis schématiquement :

$$\boxed{\mathcal{P}_g = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_f + \frac{d\mathcal{E}_c}{dt}}$$



## C Exemple des rails de LAPLACE générateurs

### Définition

Les rails de LAPLACE **générateurs** sont deux conducteurs rectilignes parallèles reliés par une tige mobile conductrice rendant le circuit **déformable**, plongé dans un champ magnétique constant perpendiculaire au circuit avec **une force**  $\vec{F} = F \vec{u}_x$  **constante sur la tige**.

On **néglige l'auto-induction**, et on appelle  $R$  la résistance totale du circuit. Nous pouvons constater expérimentalement que le déplacement du barreau est à l'origine d'un courant de quelques  $\mu\text{A}$  dans le circuit. On étudie alors le circuit ci-dessous, avec un dipôle récepteur (tension  $U$ ) quelconque. Comment se caractérise cette conversion ?

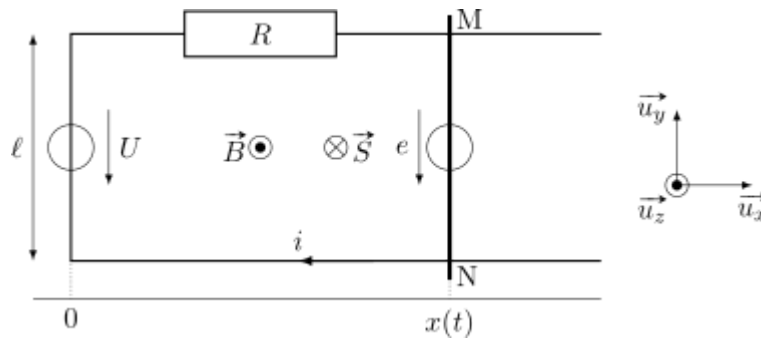


FIGURE 4.4 – Rails de LAPLACE générateurs.

### I.C.1 Analyse qualitative

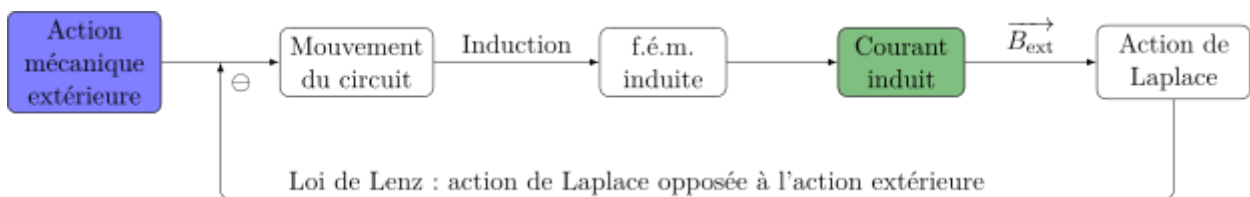


FIGURE 4.5 – Schéma de causalité des conséquences de l'induction.

À l'origine de l'induction est la présence d'un champ extérieur  $\vec{B}_{\text{ext}}$  et d'une action mécanique extérieure. Ce mouvement implique un **déformation** du circuit, et donc une **variation du flux** et, d'après la loi de FARADAY, une f.é.m. induite y apparaît. Le circuit étant fermé, il y a donc également un courant induit, et avec  $\vec{B}_{\text{ext}}$  il apparaît une action de LAPLACE.

L'induction modérant, par ses conséquences, les causes qui lui ont donné naissance, on en conclut que cette **action de LAPLACE s'oppose à la force initiale**, tendant à freiner le barreau.

### I.C.2 Analyse électrique

La déformation du circuit entraîne une variation de sa surface. Ainsi, même avec un champ magnétique constant, le flux magnétique varie, impliquant l'apparition d'une f.é.m. induite.

On fixe un sens pour  $i$  (qui respecte cependant la loi de LENZ). Avec  $\vec{S} = -S\vec{u}_z$  pris dans le sens de  $i$ , on trouve pour  $\phi$  :

$$\phi = B\vec{u}_z \cdot -S\vec{u}_z = -BS = -Blx$$

D'où, avec la loi de FARADAY :

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = Bl\dot{x}$$

Placée en **convention générateur**. Donc, avec la loi des mailles :

$$e = Ri + U \quad \Rightarrow \quad Bl\dot{x} = Ri + U$$

Ainsi,

### Équation électrique

$$Blv = Ri + U \quad (4.3)$$

Remarque

On peut observer le lien entre la loi de FARADAY et la loi de LENZ par le signe « - » : si  $\dot{x} > 0$ , la surface augmente donc, en valeur absolue, le flux augmente. La loi de LENZ nous indique que le courant induit doit modérer cette augmentation, et donc créer un champ induit opposé au champ constant, donc dirigé selon  $-\vec{u}_z$  : on en déduit directement le sens réel de  $i$ .

Avec la loi de FARADAY et un choix arbitraire pour  $i$ , le signe moins nous donne directement que le flux diminue avec  $x$ , ce qui donne  $e > 0$  et effectivement  $i > 0$  !

### I.C.3 Analyse mécanique

On étudie le mouvement de la barre de masse  $m$  dans le référentiel de la salle de classe. Avec un bilan des forces :

- ◇ **Poids**  $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$  ;
- ◇ **Réaction normale**  $\vec{N} = N\vec{u}_z$  ;
- ◇ **Force opérante**  $\vec{F} = F\vec{u}_x$  ;
- ◇ **Frottements**  $\vec{F}_f = -F_f\vec{u}_x$  avec  $F_f > 0$  ;
- ◇ **Force de LAPLACE**  $\vec{F}_{\text{Lap}} = i\vec{MN} \wedge \vec{B} = -ilB\vec{u}_x$ .

Ainsi,

$$m \frac{d\vec{v}}{dt} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{F} + \vec{F}_f + \vec{F}_{\text{Lap}}$$

D'où, en projetant sur  $\vec{u}_x$  :

### Équation mécanique

$$m \frac{dv}{dt} = F - ilB - F_f \quad (4.4)$$

On a donc de nouveau deux équations couplées, reliant  $v$  et  $i$ . On peut obtenir une seule équation que l'on peut résoudre à partir des deux équations obtenues, en utilisant l'équation électrique (4.3) pour éliminer  $i$  de l'équation mécanique (4.4).

### I.C.4 Bilan énergétique

- ◇ **Bilan électrique** : On multiplie la LdM par  $i$  :

$$ei = Ui + Ri^2$$

On identifie :

- ▷ puissance fournie par la f.é.m. :  $\mathcal{P}_e = +ei = Blvi$

▷ puissance dissipée par effet Joule :  $\mathcal{P}_J = Ri^2$

▷ puissance reçue par le récepteur :  $\mathcal{P}_r = Ui$

Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{P}_e = \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_r}$$

◇ **Bilan mécanique** : On multiplie le PFD par  $v$  :

$$mv \frac{dv}{dt} = Fv - i\ell Bv - F_f v$$

On identifie :

▷ puissance fournie par l'opérant :  $\mathcal{P}_{\text{ope}} = Fv$

▷ variation d'énergie cinétique de la barre :  $\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} = mv \frac{dv}{dt}$

▷ puissance reçue des forces de LAPLACE :  $\mathcal{P}_{\text{Lap}} = -(i\ell Bv)$

▷ puissance perdue par frottements :  $\mathcal{P}_f = -(-F_f v) = F_f v$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_{\text{Lap}} = \mathcal{P}_{\text{ope}}}$$

On remarque notamment que

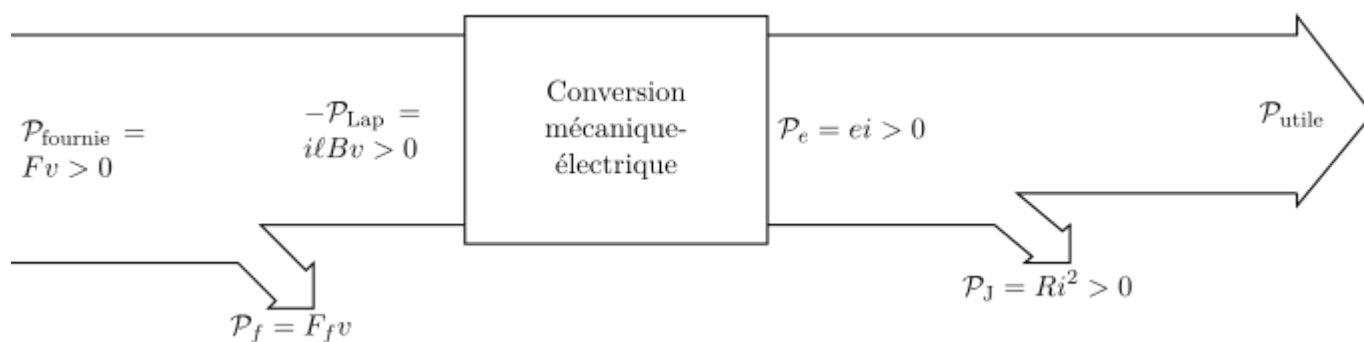
$$\mathcal{P}_e = -\mathcal{P}_{\text{Lap}}$$

C'est-à-dire que le **couplage électromécanique est parfait** : la puissance électrique fournie par la force électromotrice induite ( $ei$ ) est égale à la puissance mécanique reçue des forces de LAPLACE ( $-\mathcal{P}_{\text{Lap}} = i\ell Bv$ )

#### I.C.5 Bilan global

En combinant les résultats de puissance, on a mathématiquement puis schématiquement :

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{fournie}} = \frac{d\mathcal{E}_c}{dt} + \mathcal{P}_f + \mathcal{P}_J + \mathcal{P}_r}$$



Au travers de ces deux expériences, on en conclut donc que

### Conversion électromécanique

- ◇ La conversion de puissance électromécanique passe par des **phénomènes d'induction** ;
- ◇ La conversion est **réversible** : même dispositif peut réaliser la conversion dans un sens ou l'autre.
- ◇ Le rendement de la conversion électromécanique n'est **pas borné par un principe physique** et peut atteindre 1 en principe.

## II Exemples des convertisseurs

### A Le moteur à entrefer plan

La géométrie des rails de LAPLACE peut être modifiée pour obtenir un moteur rotatif alimenté courant continu. Il se compose d'un **stator**, partie fixe constitué d'aimants qui produisent un champ magnétique stationnaire  $\vec{B}_0$ , et d'un **rotor**, partie mobile constituée de  $N$  fils passant dans la direction radiale et parcouru par un courant d'intensité  $i$ .

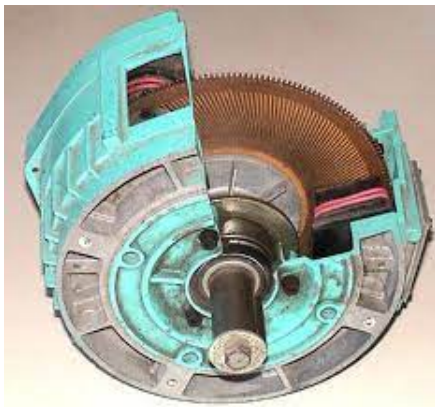


FIGURE 4.6 – Photo d'un moteur à entrefer plan.

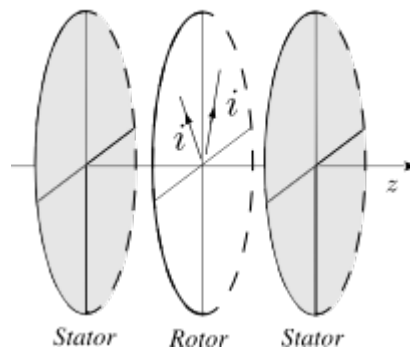


FIGURE 4.7 – Schéma simplifié, vue de côté.

Ce dispositif peut s'utiliser de deux manières :

**Fonctionnement moteur** On impose un courant  $i$  dans chaque rayon, qui va du centre vers la périphérie. Chaque rayon sera comme un rail de LAPLACE moteur, créant des moments qui s'additionnent.

Via la loi de LENZ, ce mouvement va *in fine* être à l'origine d'une f.é.m. induite, à l'origine d'un courant qui modèrera ce mouvement : le rotor atteint une vitesse angulaire limite, proportionnelle à la tension d'alimentation.

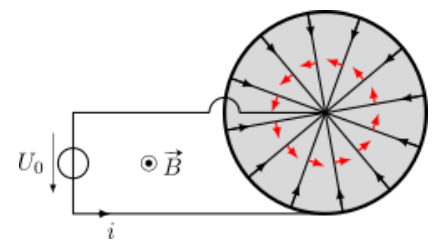
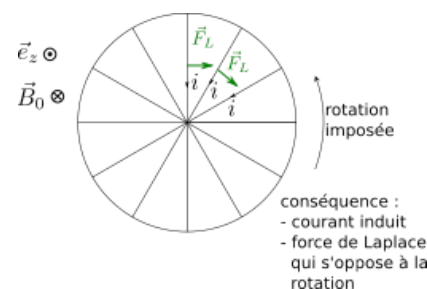


FIGURE 4.8 – Schéma électromécanique du moteur à entrefer.



**Fonctionnement générateur** On exerce sur la roue un couple  $\Gamma_0$  afin de la forcer à tourner à une vitesse angulaire  $\omega$ .

Chaque rayon joue le rôle d'un rail de LAPLACE générateur, créant un courant induit à cause de la rotation dans le champ magnétique stationnaire  $\vec{B}_0$ .



La vitesse de rotation de ces moteurs est très stable, le couple est indépendant de la vitesse de rotation et du fait de la faible inertie du rotor, il réagissent rapidement aux changements de vitesse de rotation. Ils sont également peu encombrants. En revanche, leur puissance est limitée à 1 kW.

**Applications :**

- Motorisation des vélos et des chaises roulantes ;
- robotique industrielle ;
- médical (pompes à sang, dialyse).

## B Le haut-parleur électrodynamique

**Cas particulier des ondes sonores** Le son étant une onde mécanique (propagation de proche en proche de vibrations mécaniques dans un milieu), on peut utiliser des phénomènes d'induction pour convertir un signal électrique en un signal sonore (énergie mécanique).

### Définition

- ◇ On parle de haut-parleur pour la conversion de puissance électrique en puissance sonore.
- ◇ On parle de circuit microphone pour la conversion de puissance sonore en puissance électrique.

La géométrie des haut-parleurs rend difficile un calcul du flux magnétique à travers un circuit déformable, néanmoins, on peut mettre en évidence quelques-unes de ses caractéristiques sur un modèle très simple dans la géométrie des rails de LAPLACE. Nous le ferons en TD.

## C Freinage électromagnétique

Dans le dispositif des rails de LAPLACE, la force de LAPLACE s'oppose au mouvement de la barre, conformément à la loi de LENZ. En l'absence d'opération externe pour maintenir le mouvement ( $F = 0$ ) :

$$v_{\text{lim}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \frac{dv}{dt} + \frac{v}{\tau} = 0 \quad \Rightarrow \quad v(t) = A \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Cela conduit à une décroissance exponentielle de la vitesse de la barre sur un temps  $\tau$ .

C'est le principe des ralentisseurs électromagnétiques utilisés sur les poids lourds. Dans un camion, il y a un disque solidaire de l'essieu qui tourne à la même vitesse angulaire que les roues. Sur demande du conducteur, un électroaimant peut générer un champ magnétique orthogonal au disque : des courants induits apparaissent dans le volume du disque : ces courants sont nommés **courant de FOUCAULT**. Un couple proportionnel à  $\omega$  induit une décroissance exponentielle de la vitesse du camion.

### Avantages

- ◇ pas de frottements solides, pas d'usure mécanique ;
- ◇ les forces de LAPLACE sont réparties sur le volume, donc pour d'échauffement localisé ;
- ◇ pas de blocage de la roue : vitesse nulle  $\Rightarrow$  pas de force de freinage ;
- ◇ possibilité de récupérer l'énergie créée.

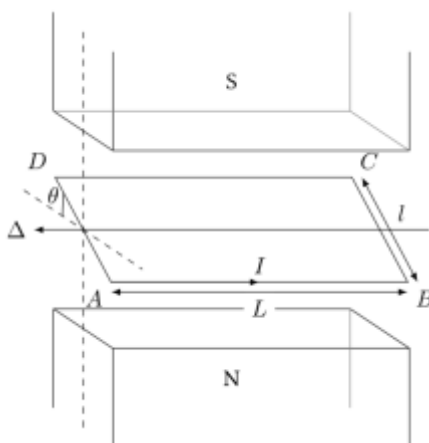
### Inconvénients

- ◇ freinage peu efficace à basse vitesse, et ne permet pas au véhicule de s'arrêter totalement puisque la décroissance est exponentielle (ou au bout d'un temps très long).

## III Notions d'électrotechnique

### A Machine à courant continu

On fabrique un moteur en plaçant un rotor constitué d'une spire rectangulaire plongée dans le champ magnétique créé par deux aimants permanents (le champ magnétique est supposé uniforme). La spire a une longueur  $\ell$  et une largeur  $L$  et est parcourue par un courant  $I$ . Le champ magnétique est



vertical, du Nord vers le Sud. On note  $\vec{u}_y$  son sens, soit  $\vec{B} = B\vec{u}_y$ ,  $\vec{u}_x$  est la direction perpendiculaire à  $\vec{u}_y$  et l'axe  $\Delta$  de sorte que  $(xy\Delta)$  soit directe. Ainsi,

**Couple des actions de LAPLACE** La norme du moment magnétique est  $\mathfrak{M} = iS$ , donc sur  $(\vec{u}_x, \vec{u}_y)$  :

$$\vec{\mathfrak{M}} = iS \cos \theta \vec{u}_y + iS \sin \theta \vec{u}_x$$

Soit le couple :

$$\Gamma = iSB \sin \theta$$

*A priori*, la spire se stabilise alors dans sa position d'équilibre  $\theta = 0$ . Pour que ce système se comporte comme un moteur, on ajoute un mécanisme qui permet d'inverser le sens du courant à chaque demi-tour. Ainsi, si  $0 < \theta < \pi$ , on a le même couple que précédemment, et si  $\pi < \theta < 2\pi$ , on a  $\Gamma = -iS \sin \theta$  ; autrement dit,

$$\boxed{\Gamma = iSB |\sin \theta|}$$

Le couple moyen est alors

$$\begin{aligned} \langle \Gamma \rangle &= iSB \langle |\sin \theta| \rangle_{[0, 2\pi]} \\ \Leftrightarrow \boxed{\langle \Gamma \rangle &= \frac{2}{\pi} BSi} \end{aligned}$$

On a alors un couple proportionnel à l'intensité,  $\langle \Gamma \rangle = KI$  avec  $K = 2BS/\pi$ .

**Force électromotrice d'induction** Le vecteur surface est

$$\vec{S} = S \cos \theta \vec{u}_y + S \sin \theta \vec{u}_x$$

Donc le flux

$$\phi = SB \cos \theta$$

Et la f.é.m.

$$e = -\frac{d\phi}{dt} = -BS \times (-\dot{\theta} \sin \theta)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = BS\omega \sin \theta}$$

Lorsque  $\pi < \theta < 2\pi$ , la tension est inversée par le collecteur, de sorte que la tension aux bornes de la machine soit

$$u = -e = -BS\omega \sin \theta$$

Et donc, quel que soit  $\theta$  :

$$\boxed{u = BS|\sin \theta|}$$

Et la tension moyenne :

$$\langle u \rangle = BS \langle |\sin \theta| \rangle_{[0, 2\pi]}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\langle u \rangle = \frac{2}{\pi} BS}$$

Ainsi, on a  $\langle u \rangle = K\omega$  proportionnel à la vitesse angulaire, avec la même constante de proportionnalité qu'entre  $\Gamma$  et  $i$ .

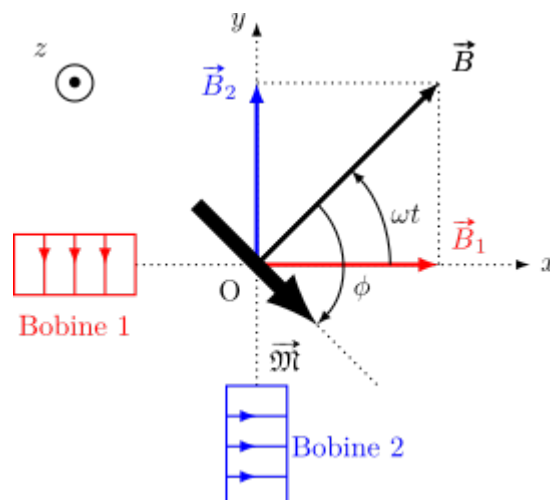
Remarques

- 1) Ce moteur présente l'inconvénient d'imposer un couple variable en fonction de  $\theta$  (le couple est nul pour certaines positions et ne peut démarrer dans ces positions). Les moteurs réels ont donc un champ magnétique radial pour avoir un couple constant.
- 2) On a montré que  $u = K\omega$  et  $\Gamma = KI$ . Ainsi,

$$uI = k\omega I = K\omega \frac{\Gamma}{K} = \Gamma\omega$$

donc la puissance électrique  $ui$  est égale à la puissance mécanique  $\Gamma\omega$ . L'avantage du MCC est donc de bien s'adapter à la charge.

## B Champ magnétique tournant



On place deux bobines à  $90^\circ$  l'une de l'autre. La bobine 1 est parcourue par un courant  $i_1 = i_0 \cos \omega t$ , et la bobine 2 par un courant  $i_2 = i_0 \sin \omega t$ . Le champ produit par la bobine 1 est  $\vec{B}_1 = B_0 \cos \omega t \vec{u}_x$ , et par la bobine 2 est  $\vec{B}_2 = B_0 \sin \omega t \vec{u}_y$ , en déphasage de  $\pi/2$ . Le champ total au centre est donc

$$\vec{B} = B_0(\cos \omega t \vec{u}_x + \sin \omega t \vec{u}_y)$$

c'est-à-dire un champ magnétique tournant. En plaçant un aimant au centre de ce champ, comme il a tendance à s'aligner sur le champ, il va se mettre à tourner : on a construit un moteur, dit **moteur synchrone**.

En pratique, on utilise des tensions triphasées, c'est-à-dire trois signaux de tensions :

$$\begin{aligned} U_0(t) &= U \cos \omega t \\ U_1(t) &= U \cos \left( \omega t + \frac{2\pi}{3} \right) \\ U_2(t) &= U \cos \left( \omega t + \frac{4\pi}{3} \right) \end{aligned}$$

avec trois bobines placées à des angles  $0, 2\pi/3$  et  $4\pi/3$ .