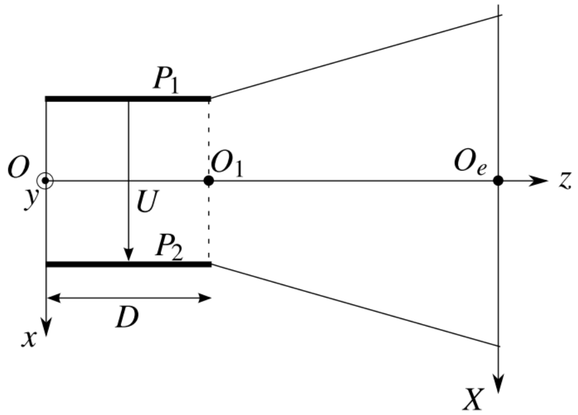
Sujet 1 – corrigé

I Oscilloscope analogique

Dans tout l'exercice on se place dans un référentiel galiléen, associé à un repère cartésien $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$. Une zone de champ électrique uniforme (voir figure) est établie entre les plaques P_1 et P_2 (le champ est supposé nul en dehors et on néglige les effets de bord) ; la distance entre les plaques est d, la longueur des plaques D et la différence de potentiel est $U = V_{P2} - V_{P1}$ positive. Des électrons (charge $q = -e$, masse m) pénètrent en O dans la zone de champ électrique uniforme avec une vitesse $\vec{v_0} = v_0 \vec{u}_z$ selon l'axe Oz.



1) Etablir l'expression de la force subie par les électrons en fonction de U, q, d et $\vec{u}_x$.

Réponse

On néglige le poids. Les électrons ne sont soumis qu'à la force électrique. Le potentiel de la plaque P_2 est supérieur à celui de la plaque P_1 puisque $U = V_{P2} - V_{P1} > 0$. $\vec{E}$ est de norme U/d (d'après le cours car il est uniforme d'après l'énoncé) et dirigé selon les potentiels décroissants donc selon $-\vec{u}_x$. On en déduit, avec $q = -e$ la charge de l'électron :

$$\vec{E} = -\frac{U}{d}\vec{u}_x \quad \text{d'où} \quad \vec{F} = q\vec{E} = -q\frac{U}{d}\vec{u}_x = +e\frac{U}{d}\vec{u}_x$$

◇

Etude du mouvement des électrons

2) Déterminer l'expression de la trajectoire $x = f(z)$ de l'électron dans la zone du champ en fonction de d, U et v_0.

Réponse

On applique le principe fondamental de la dynamique à l'électron dans le référentiel de l'oscilloscope supposé galiléen :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

La force n'a pas de composante sur Oy et comme la vitesse initiale n'a pas de composante non plus sur Oy on en déduit que le mouvement est dans le plan xOz. La projection de la relation fondamentale donne

$$m\ddot{x} = e\frac{U}{d} \quad \text{et} \quad m\ddot{z} = 0$$

et les intégrations successives donnent :

$$\dot{x} = \frac{eU}{md}t + \alpha_1 \quad \text{et} \quad \dot{z} = \alpha_2$$

$$x = \frac{eU}{2md}t^2 + \alpha_1 t + \alpha_3 \quad \text{et} \quad z = \alpha_2 t + \alpha_4$$

Finalement, par utilisation des conditions initiales, les constantes d'intégration α_i peuvent être déterminées et il vient

$$x = \frac{eU}{2md}t^2 \quad \text{et} \quad z = v_0 t$$

En éliminant t dans les équations précédentes, on obtient

$$x = \frac{eU}{2md\,{v_0}^2}\,z^2$$

Il s'agit de l'équation d'une parabole. Une telle trajectoire est attendue dans le cas d'un mouvement uniformément accéléré comme ici.

◇

3) Déterminer le point de sortie K de la zone de champ ainsi que les composantes de la vitesse en ce point.

Réponse

Le point de sortie correspond à $z_K = D$, soit dans l'équation précédente

$$x_K = \frac{eU}{2md\,{v_0}^2}\,D^2$$

D'après les équations paramétriques obtenues à la question 2, l'instant de passage en K est $t_K = z_K/v_0$ soit D/v_0. Les composantes de la vitesse en K sont obtenues en reportant t_K dans les expressions de $\dot{x}$ et $\dot{z}$, soit :

$$v_x(t_K) = \dot{x}(t_K) = \frac{eUD}{mdv_0} \quad \text{et} \quad v_z(t_K) = \dot{z}(t_K) = v_0$$

◇

4) Montrer que dans la zone en dehors des plaques, le mouvement est rectiligne uniforme.

Réponse

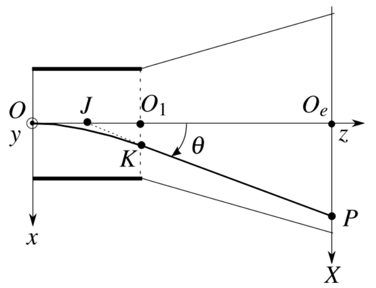
En dehors des plaques, puisqu'on néglige l'effet du champ de pesanteur et que l'on suppose le champ électrique nul, aucune force ne s'exerce sur l'électron : il est isolé. D'après le principe d'inertie, sa trajectoire est rectiligne uniforme.

◇

5) On note L la distance O_1O_e (voir figure introductive). Déterminer l'abscisse X_P du point d'impact P de l'électron sur l'écran en fonction de U, v_0, D, d et L. Que dire de la relation entre U et X_P ? En quoi est-ce important pour l'utilisation du dispositif en tant qu'oscilloscope ?

Réponse

Dans le triangle O_eJP (figure ci-dessous), $X_P = O_eP = (JO_1 + L)\tan\theta$. Il faut donc exprimer $\tan\theta$ et JO_1 sachant que le segment JP est tangent à la trajectoire en K. On peut écrire :



$$\tan\theta = \frac{O_1K}{JO_1} = \frac{x_K}{JO_1} = \frac{eUD^2}{2mdv_0{}^2\,JO_1}$$

et $$\tan\theta = \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}z}\right)_K = \left(\frac{\dot{x}}{\dot{z}}\right)_K = \frac{eUD}{mdv_0{}^2}$$

En combinant les deux équations précédentes, on obtient $JO_1 = D/2$. Ainsi,

$$X_P = \left(\frac{D}{2} + L\right)\frac{eD}{mdv_0{}^2}\,U$$

La déviation X_P est **proportionnelle** à la tension U. La mesure de X_P est donc pertinente pour suivre la tension et il suffit de connaître le coefficient $\left(\frac{D}{2} + L\right)\frac{eD}{mdv_0{}^2}$ qui est fixe et ne dépend que des caractéristiques de l'oscilloscope.

◇

Sujet 2 – corrigé

I Pendule électrique

On étudie un pendule constitué d'une boule de polystyrène expansé recouverte d'une feuille d'aluminium, et suspendue à une potence par une fine tige de longueur $R = 10\,\text{cm}$ dont nous négligerons la masse. La boule de masse $m = 20\,\text{g}$ sera assimilée à un point matériel M.

Une boule identique est placée en A (voir schéma). Les deux boules sont chargées électriquement avec la même charge, et donc se repoussent. La force exercée par A sur M s'écrit

$$\vec{F}_e = \frac{k}{\text{AM}^3}\overrightarrow{\text{AM}} \quad \text{avec} \quad k = 4{,}4 \times 10^{-3}\,\text{N}{\cdot}\text{m}^2$$

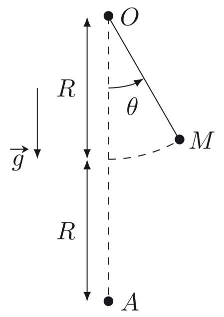


FIGURE 18.1 – Dispositif

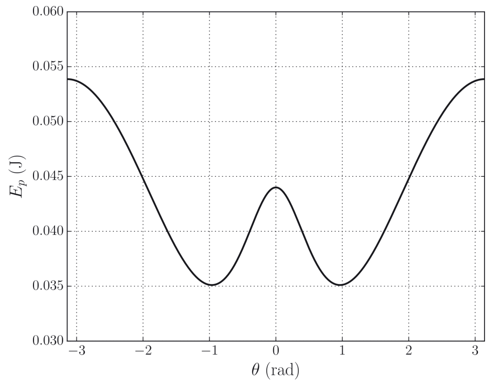


FIGURE 18.2 – Courbe $\mathcal{E}_p(\theta)$

1) Exprimer la distance AM en fonction de R et θ.

Réponse

Pour exprimer la distance AM, on la décompose par des vecteurs connus et on pourra prendre la norme du vecteur $\overrightarrow{\text{AM}}$ avec $\sqrt{x_{\text{AM}}{}^2 + y_{\text{AM}}{}^2}$, ou $\sqrt{\overrightarrow{\text{AM}} \cdot \overrightarrow{\text{AM}}}$. Notamment, $\overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AO}} + \overrightarrow{\text{OM}}$.

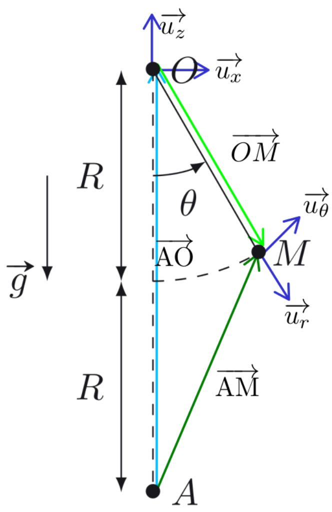


FIGURE 18.3 – Détermination de AM

Il faut donc décomposer $\overrightarrow{\text{AO}}$ et $\overrightarrow{\text{OM}}$ sur la même base, comme on le fait pour le poids sur un plan incliné. En effet,

$$\overrightarrow{\text{AO}} = 2R\,\vec{u_z} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{\text{OM}} = R\,\vec{u_r}$$

mais on ne peut pas sommer les deux dans des bases différentes. Décomposons $\vec{u_r}$ sur $(\vec{u_x}, \vec{u_z})$: on trouve $\vec{u_r} = \sin\theta\,\vec{u_x} - \cos\theta\,\vec{u_z}$ Ainsi, $\overrightarrow{\text{AM}} = \overrightarrow{\text{AO}} + \overrightarrow{\text{OM}}$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{\text{AM}} = \begin{pmatrix} R\sin\theta \\ 2R - R\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\Rightarrow \|\overrightarrow{\text{AM}}\| = \sqrt{R^2\sin^2\theta + (2R - R\cos\theta)^2}$$

$$\Leftrightarrow \text{AM} = \sqrt{R^2\sin^2\theta + 4R^2 - 2R^2\cos\theta + R^2\cos^2\theta}$$

$$\Leftrightarrow \text{AM} = \sqrt{5R^2 - 2R^2\cos\theta} \quad \text{avec} \quad \cos^2\theta + \sin^2\theta = 1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\text{AM} = R\sqrt{5 - 2\cos\theta}}$$

■

◇

2) Montrer que la force $\vec{F}_e$ est conservative, et que son énergie potentielle s'exprime

$$\mathcal{E}_{p,e}(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5 - 4\cos\theta}}$$

Réponse

Une force est conservative si son travail élémentaire s'exprime sous la forme $-\mathrm{d}\mathcal{E}_p$. Calculons son travail élémentaire :

$$\begin{aligned}
&\delta W(\vec{F}_e) = \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{\mathrm{AM}^3}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}} \\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{\mathrm{AM}^3}\underbrace{\|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|}_{=\mathrm{AM}}\|\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\|\underbrace{\cos\left(\overrightarrow{\mathrm{AM}}, \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{AM}}\right)}_{=1} \\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = \frac{k}{\mathrm{AM}^2}\underbrace{\cancel{\frac{\mathrm{AM}}{\mathrm{AM}}}}_{=1}\mathrm{d}\mathrm{AM} \\
\Leftrightarrow\ &\delta W(\vec{F}_e) = -k\,\mathrm{d}\left(\frac{1}{\mathrm{AM}}\right) \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\delta W(\vec{F}_e) = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,e}} \\
\text{avec}\quad &\boxed{\mathcal{E}_{p,e} = \frac{k}{\mathrm{AM}} = \frac{k}{R\sqrt{5-4\cos\theta}}}
\end{aligned}$$

■

◇

3) Exprimer l'énergie potentielle totale $\mathcal{E}_p(\theta)$ de la boule M.

Réponse

La boule M a également une énergie potentielle de pesanteur. En prenant O comme origine de l'altitude, l'altitude de la boule M $z(\theta)$ s'exprime

$$z(\theta) = -R\cos\theta$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
&\mathcal{E}_p(\theta) = \mathcal{E}_{p,p}(\theta) + \mathcal{E}_{p,e}(\theta) \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\mathcal{E}_p(\theta) = \frac{k}{R\sqrt{5-4\cos\theta}} - mgR\cos\theta}
\end{aligned}$$

■

◇

4) Le tracé de l'énergie potentielle est proposé sur la figure 2. Déduire de ce graphe l'existence de positions d'équilibres, et indiquer leur nature.

Réponse

On observe en tout 5 positions d'équilibres : deux stables dans les puits de potentiel vers $\pm 1\,\mathrm{rad}$, et trois instables (maxima locaux d'énergie potentielle) en $-\pi$, 0 et π.

◇

5) Discuter de la nature de la trajectoire de M suivant la valeur de son énergie mécanique.

Réponse

Le mouvement du pendule ne se fait que dans les zones du graphique où $\mathcal{E}_p < \mathcal{E}_m$. On distingue donc 4 cas :

Cas 1	$0\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 3{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ pas de mouvement
Cas 2	$3{,}5\times10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 4{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ oscillations $\approx$ position stable
Cas 3	$4{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < 5{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J}$	$\Rightarrow$ mouvement périodique entre $\mathcal{E}_{p,\max}$
Cas 4	$5{,}4\times10^{-2}\,\mathrm{J} < \mathcal{E}_m < +\infty$	$\Rightarrow$ mouvement révolutif : tours à l'infini

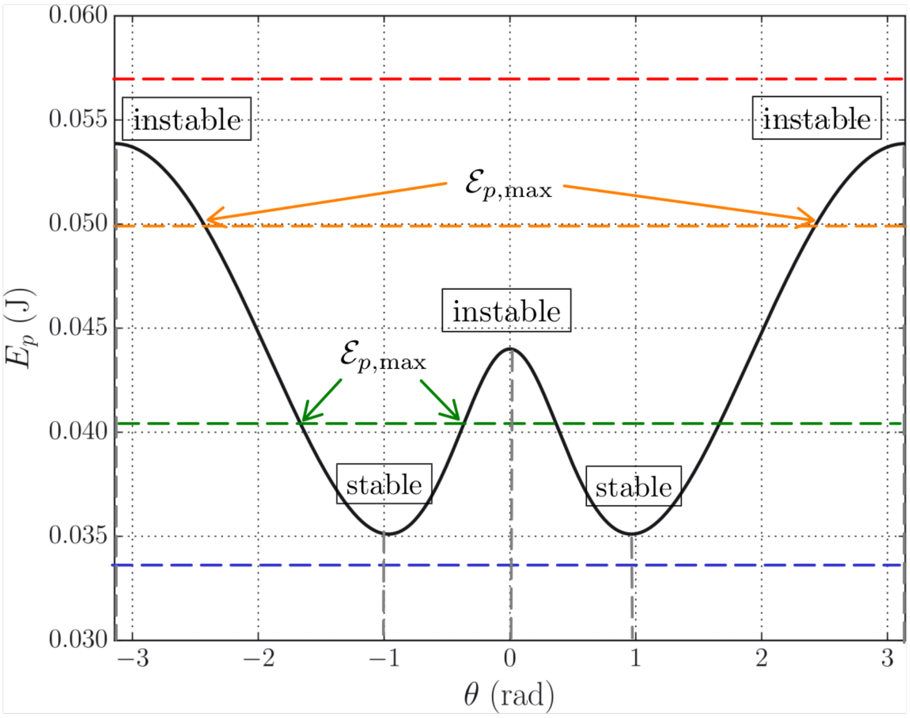


FIGURE 18.4 – Mouvement selon $\mathcal{E}_m$

Sujet 3 – corrigé

I Charge dans B et avec frottements fluides.

Une particule de masse m et de charge $q = -e < 0$ se trouve initialement en un point O avec une vitesse $\vec{v}_0 = v_0\vec{e}_x$.

Elle se déplace dans un champ magnétique $\vec{B}$ uniforme et permanent $\vec{B} = B\vec{e}_z$ et subit également une force de frottement fluide de la forme $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ avec λ une constante positive.

1) Quelle est le mouvement (trajectoire et vitesse) de la particule si $\lambda = 0$? Représentez la trajectoire associée.

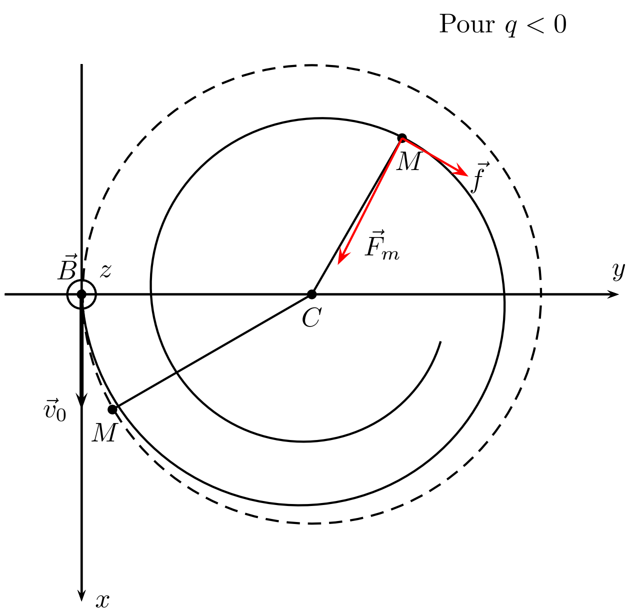
Réponse

Si $\lambda = 0$, on retrouve le cas d'une particule dans $\vec{B}$ seul. Sa vitesse initiale étant normale à $\vec{B}$, on a affaire à un mouvement circulaire uniforme de rayon $R = \frac{mv_0}{eB}$ et de centre $(0,R,0)$ (trajectoire tracée en pointillés sur la figure ci-contre).

◇

2) On considère maintenant $\lambda \neq 0$ mais faible. Représentez, sans calcul supplémentaire, l'allure de la nouvelle trajectoire.

Réponse



Si $\lambda \neq 0$ mais reste faible, la trajectoire reste quasi circulaire mais par application du théorème de la puissance cinétique :

$$\frac{\mathrm{d}E_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{F}_m) + \mathcal{P}(\vec{f}) = 0 + \mathcal{P}(\vec{f}) < 0$$

on voit que la présence de frottement diminue v.

Comme $R = \frac{mv}{eB}$, le rayon de courbure de la trajectoire diminue d'où l'apparition d'une spirale.

◇

3) Déterminez les équations différentielles du mouvement dans le cas général.

Réponse

On détermine les équations différentielles du mouvement par application du principe fondamental de la dynamique à la particule M qui n'est soumise qu'à $\vec{F}$ et $\vec{f}$ (on néglige son poids).

$$m\vec{a} = q\vec{v}\wedge\vec{B} - \lambda.\vec{v} \Rightarrow \quad m \begin{vmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{vmatrix} = q \begin{vmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{vmatrix} \wedge \begin{vmatrix} 0 \\ 0 - \lambda \\ B \end{vmatrix} \begin{matrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{matrix} \Rightarrow \begin{vmatrix} m\dot{v}_x = qBv_y - \lambda v_x \\ m\dot{v}_y = -qBv_x - \lambda v_y \\ m\dot{v}_z = -\lambda v_z \end{vmatrix}$$

◇

On pose $\underline{u} = x + jy$, $\omega = \frac{eB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{\lambda}$.

4) Déterminez $\underline{u}(t)$. Comment calculerait-on $x(t)$ et $y(t)$? Précisez la position finale de la particule.

Réponse

En posant $\omega = \frac{eB}{m} = -\frac{qB}{m}$ et $\tau = \frac{m}{\lambda}$, les équations précédentes s'écrivent $\dot{v}_x = -\omega v_y - \frac{v_x}{\tau}$ (équation 1), $\dot{v}_y = \omega v_x - \frac{v_y}{\tau}$ (équation 2) et $\ddot{z} = -\frac{\dot{z}}{\tau}$ (équation 3).

L'équation 3 s'intègre facilement : $\dot{z} = -\frac{z}{\tau} + 0$ et $z = A.e^{-\frac{t}{\tau}}$ avec $z(0) = 0$ d'où $A = 0$ et $z(t) = 0$ pour tout t : le mouvement reste plan.

Pour déterminer $x(t)$ et $y(t)$, c'est à dire pour résoudre les équations 1 et 2, on pose $\underline{u} = x + j.y$ et en dérivant par rapport au temps,

$$\dot{\underline{u}} = v_x + j.v_y \Rightarrow \ddot{\underline{u}} = \dot{v}_x + j\dot{v}_y = -\omega v_y - \frac{v_x}{\tau} + j\omega v_x - j\frac{v_y}{\tau} = j\omega\dot{\underline{u}} - \frac{1}{\tau}\dot{\underline{u}} \Rightarrow \ddot{\underline{u}} = [j\omega - \frac{1}{\tau}]\dot{\underline{u}}$$

d'où $\dot{\underline{u}} = \underline{U}_0 \exp\left[(j\omega - \frac{1}{\tau})t\right]$ et à $t = 0$, $\dot{\underline{u}}(t) = v_x(0) + jv_y(0) = v_0 \Rightarrow \dot{\underline{u}}(t) = v_0 \exp(j\omega t)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.
Par intégration, $\underline{u}(t) = \frac{v_0\tau}{1-j\tau\omega}[1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\exp(j\omega t)]$.

Le terme $e^{j\omega t}$ correspond au mouvement de rotation et celui en $\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$ à un amortissement exponentiel d'où une trajectoire en forme de spirale.

Pour déterminer complètement $x(t)$ et $y(t)$, il faudrait calculer $x(t) = \mathrm{Re}(\underline{u}(t))$ et $y(t) = \mathrm{Im}(\underline{u}(t))$ (calcul fastidieux). Pour $t \gg \tau$, $e^{-\frac{t}{\tau}}$ tend vers 0 et

$$\underline{u}(\infty) \simeq \frac{v_0\tau}{1 - j\tau\omega} = \frac{v_0\tau(1 + j\omega\tau)}{1 + \omega^2\tau^2} = x(\infty) + jy(\infty) \tag{18.1}$$

$$\Rightarrow x(\infty) \simeq \frac{v_0\tau}{1 + \omega^2\tau^2} \quad \text{et} \quad y(\infty) \simeq \frac{\omega v_0\tau^2}{1 + \omega^2\tau^2} \tag{18.2}$$

par identification.

◇