

# DEVOIR SURVEILLE DE SCIENCES PHYSIQUES DE REVISIONS

(3H00)

**Tout moyen de communication est interdit**  
**Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.**  
**Les calculatrices sont autorisées.**

*Le devoir est composé d'un exercice et de trois problèmes indépendants.*

**EXERCICE 1 :** Etude d'une lunette de Galilée.

**PROBLEME 1 :** Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie.

**PROBLEME 2 :** Production de vagues dans une piscine.

**PROBLEME 3 :** Autour de l'aluminium.

*A l'intérieur des exercices, certaines questions sont indépendantes.*

*L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.*

*L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.*

*Une attention particulière sera portée à la qualité de la rédaction (vocabulaire, orthographe...) et à la présentation de la copie (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques...).*

*Et il est indispensable de numéroter vos copies.*

*Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.*

*Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.*

## **Programme de révision de ce devoir :**

**Tout ce qui a été vu depuis le début de l'année de SUP MPSI, sauf la thermodynamique.**

## EXERCICE : Etude d'une lunette de Galilée :

( $\approx 36$  pts)

Une lunette de Galilée est constituée :

- d'un objectif assimilable à une lentille mince convergente ( $L_1$ ) de centre  $O_1$  de vergence  $V_1$  telle que  $|V_1| = 1,333 \delta$  et de diamètre  $D_1 = 10$  cm.
- d'un oculaire assimilable à une lentille mince divergente ( $L_2$ ) de centre  $O_2$ , de vergence  $V_2$  telle que  $|V_2| = 50,0 \delta$  et de même axe optique que ( $L_1$ ).

**Q1.** Quelle doit être la distance  $\overline{O_1 O_2}$  séparant les deux lentilles ( $L_1$ ) et ( $L_2$ ) pour que le système soit afocal, c'est-à-dire pour que les foyers du système global sont rejetés à l'infini ? On attend une expression en fonction des vergences. La calculer.

**On conserve cette disposition pour toute la suite de l'exercice.**

Pour une lunette l'image de l'objectif à travers l'oculaire est appelée *cercle oculaire* et correspond à la densité maximale de lumière.

On note  $O'_1$  l'image de  $O_1$  par la lentille ( $L_2$ ) et  $D'_1$  le diamètre du cercle oculaire de la lentille ( $L_1$ ) à travers ( $L_2$ ).

**Q2.** Déterminer l'expression de la position  $\overline{O_2 O'_1}$  de l'image de la lentille ( $L_1$ ) à travers l'oculaire. Faire l'application numérique. Peut-on placer son œil au niveau du cercle oculaire ? Calculer aussi la taille  $D'_1$  de l'image de la lentille ( $L_1$ ) à travers l'oculaire.

**Q3.** L'œil n'accomode pas et regarde l'image d'un objet étendu  $AB$  situé à l'infini.

On note  $A_1 B_1$  l'image intermédiaire de l'objet  $AB$  à travers ( $L_1$ ) et  $A' B'$  son image définitive.

On note  $\alpha$  l'inclinaison du rayon incident par rapport à l'axe optique et  $\alpha'$  l'inclinaison du rayon émergent par rapport à l'axe optique.

a) Sur votre copie, faire un schéma de la lunette faisant apparaître l'angle  $\alpha$ , la construction de l'image intermédiaire  $A_1 B_1$ , la marche complète du rayon lumineux incident passant par le foyer objet  $F_1$ , ainsi que l'angle  $\alpha'$ .

b) En déduire l'expression du grossissement angulaire  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$  de la lunette en fonction de  $V_1$  et  $V_2$ , puis le calculer.

**Q4.** L'œil, placé à 15 mm derrière l'oculaire, accomode maintenant à la distance minimale de vision nette  $d_m = 25$  cm. Il regarde l'image  $A'' B''$  par la lunette d'un objet  $AB$  situé à une distance finie devant l'objectif. Déterminer la position  $\overline{O_1 A}$  de l'objet  $AB$  par rapport au centre  $O_1$  de l'objectif.

**Q5.** Quelle est la latitude de mise au point de la lunette ?

## PROBLEME 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie :

( $\approx 64$  pts)

Un pH-mètre est composé d'une électrode de verre qui délivre un signal électrique fonction affine du  $pH$ , de la forme :  $U_0 = A + B \times pH$  où  $A$  et  $B$  sont des constantes ajustées par étalonnage du pH-mètre.

Du fait de la proximité de dispositifs d'agitation, un signal sinusoïdal de fréquence égale à 4 kHz se superpose au signal utile. Ainsi le signal s'écrit  $e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi)$ .

**Q1.** Le signal parasite n'étant pas utile, on souhaite l'éliminer tout en conservant la partie utile du signal, à savoir  $U_0$ . Quel type de filtre faut-il utiliser ? Estimer alors la fréquence de coupure nécessaire à ce filtrage.

On propose de réaliser le quadripôle ci-contre avec  $C = 1,0 \cdot 10^{-7}$  F et  $R = 5,3 \cdot 10^3 \Omega$ , alimenté par un signal d'entrée  $e(t)$  sinusoïdal de pulsation  $\omega$ .

**Q2.** Sans calcul, déterminer la nature du filtre.

**Q3.** Montrer que la fonction de transfert complexe de ce filtre peut se mettre sous la forme :  $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$  avec

$x = \frac{\omega}{\omega_0}$  la pulsation réduite. Déterminer les expressions et les

significations des constantes  $H_0$  et  $\omega_0$ . En déduire l'ordre du filtre.

**Q4.** Exprimer le gain linéaire  $G(x)$  et le déphasage  $\varphi(x)$  introduits par le filtre à la pulsation réduite  $x$ .

**Q5.** Après avoir défini la pulsation de coupure  $\omega_c$ , établir son expression en fonction de  $R$  et  $C$ . Calculer la fréquence de coupure  $f_c$  et vérifier que cette valeur est cohérente avec celle attendue en Q1.

**Q6.** En utilisant la pulsation réduite, déterminer les équations des asymptotes du diagramme de Bode en gain et en phase. Représenter le diagramme asymptotique sur votre copie. Préciser si le filtre a un caractère pseudo-dérivateur ou pseudo-intégrateur dans certains domaines de fréquences. Justifier.

**Q7.** À partir des valeurs du gain en décibels et du déphasage à la pulsation de coupure, représenter les diagrammes de Bode réels.

Le filtre précédent est maintenant alimenté par le signal issu du pH-mètre :  $e(t) = U_0 + E_m \cos(\omega t + \varphi_e)$  tel que  $f = 4$  kHz. On cherche à déterminer l'expression du signal de sortie  $s(t)$ .

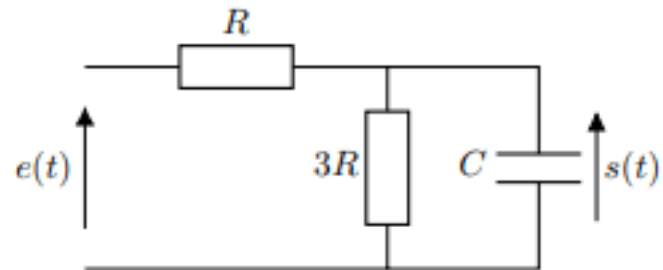
On donne l'écriture générale de  $s(t)$  en introduisant une amplitude  $S_m$ , une phase à l'origine des temps  $\varphi_s$  et une composante continue  $S_0$ , sous la forme :  $s(t) = S_0 + S_m \cos(\omega t + \varphi_s)$ .

**Q8.** En utilisant la fonction de transfert, déterminer :

- L'expression de  $S_0$  en fonction de  $U_0$  ;
- L'expression de  $S_m$  en fonction de  $E_m$  ;
- L'expression de  $\varphi_s$  en fonction de  $\varphi_e$ .

En déduire l'expression du signal de sortie  $s(t)$ .

Enfin, représenter sur le même graphique les signaux  $e(t)$  et  $s(t)$ . A-t-on réalisé ce que l'on souhaitait ?



## PROBLEME 2 : Production de vagues dans une piscine :

(≈ 66 pts)

Pour créer des vagues dans la piscine, on fait effectuer des oscillations verticales à une grosse masse  $M$  immergée, située sur un côté du bassin. La perturbation engendrée se traduit par des vagues à l'intérieur de la piscine.

On considère une masse  $M$  homogène de masse volumique  $\rho$  et de volume  $V$ , plongée dans l'eau (de masse volumique  $\rho_{eau}$ ). Cette masse est suspendue à un ressort de raideur  $k$  et de longueur à vide  $l_0$ , accroché en un point  $A$  (voir figure 1, ci-contre).

Soit  $\mathcal{R}$  le référentiel terrestre supposé galiléen.

Soit  $(Oz)$  un axe vertical orienté vers le bas et de vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ .

Initialement, Le point  $A$  est fixe à la cote  $z_A = 0$ .

On s'intéresse au mouvement suivant  $(Oz)$  de la masse  $M$  et on note  $z$  la cote du centre de gravité  $G$  de la masse.

A l'équilibre la masse est située en  $z_{eq} = h$ .

On négligera la hauteur de la masse  $M$  devant  $h$ .

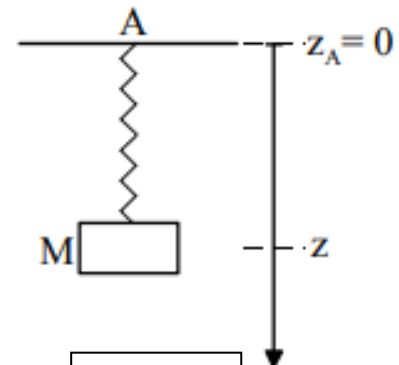


Figure 1

### I – Etude de l'équilibre :

**Q1.** Donner les caractéristiques de la poussée d'Archimède  $\vec{\pi}$  exercée sur la masse  $M$  immergée dans l'eau, sachant que c'est une force verticale orientée vers le haut, de module égal au poids du liquide qui serait occupé par le volume de cet objet.

**Q2.** Faire un bilan des forces et exprimer la longueur  $h$  du ressort à l'équilibre en fonction de  $l_0$ ,  $V$ ,  $g$ ,  $k$ ,  $\rho$  et  $\rho_{eau}$ .

### II – Mouvement sans frottement :

**Q3.** En déduire l'équation différentielle en  $z$  du mouvement de l'oscillation de  $M$  sous forme canonique. On introduira la pulsation propre  $\omega_0$  en fonction de  $k$  et  $M$  et on gardera  $h$ .

Commenter le fait que  $\omega_0$  ne dépende pas de l'intensité de la poussée d'Archimède. Y a-t-il un terme de l'équation différentielle précédente qui en dépende ?

### III – Mouvement avec frottements visqueux exercés par l'eau :

Dans cette question, on tient compte, en plus, d'une force de frottement visqueux exercée par l'eau sur la masse  $M$ , colinéaire à la vitesse et de norme  $\|\vec{F}_v\| = \alpha \left| \frac{dl}{dt} \right|$  où  $l$  est la longueur du ressort.

**Q4.** Etablir la nouvelle équation différentielle vérifiée par  $z$ .

On la mettra sous la forme :  $\ddot{z} + \lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$ . On exprimera  $\lambda$  en fonction de  $\alpha$  et  $M$ .

**Q5.** En se plaçant dans le cas d'un amortissement faible, donner la forme de la solution de cette équation différentielle. On ne cherchera pas à exprimer les constantes d'intégration.

Tracer ensuite l'allure de  $z(t)$  en tenant compte des conditions initiales suivantes :

A  $t = 0$ ,  $z(0) = h_1 > h$  et la vitesse initiale est nulle.

### IV – Cas du régime sinusoïdal forcé :

A l'aide d'un piston, on impose, à l'extrémité  $A$  du ressort, un mouvement vertical sinusoïdal de pulsation  $\omega$  et d'amplitude  $z_{Am}$  (voir figure 2 ci-contre). Ainsi  $z_A(t) = z_{Am} \cos(\omega t)$  ; ces oscillations modifient donc la longueur du ressort.

On pose alors  $Z(t) = z(t) - h$ .

**Q6.** Montrer que  $Z$  vérifie une équation nouvelle différentielle de la forme :  $\ddot{Z} + \lambda \dot{Z} + \omega_0^2 Z = F(t)$  où  $F(t)$  est une fonction (pas une force) qui dépend de  $z_A$ ,  $\dot{z}_A$ ,  $\alpha$ ,  $M$  et  $k$ . Exprimer  $F(t)$ .

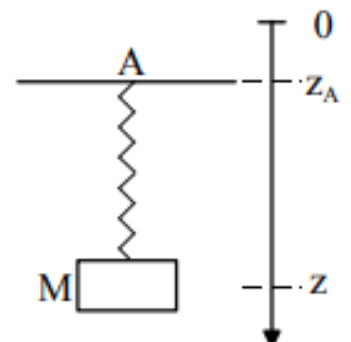


Figure 2

On admet maintenant que  $F(t)$  peut se mettre sous la forme simplifiée d'une fonction sinusoïdale d'amplitude  $\omega^2 z_{Am}$  et de pulsation  $\omega$ . On posera donc pour la suite :  $F(t) = \omega^2 z_{Am} \cos(\omega t)$ .

**Q7.** En utilisant les notations complexes et en introduisant  $\omega_0$ ,  $\tau = \frac{M}{\alpha}$  et la variable réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ , exprimer l'amplitude  $Z$  des oscillations de la masse  $M$  dans le référentiel  $\mathcal{R}$ .

**Q8.** Dans ce dispositif, l'intérêt du ressort est de permettre d'obtenir des oscillations de la masse d'amplitude supérieure à celle de l'excitation  $z_{Am}$ . Chercher un intervalle de pulsations pour lequel cette condition est vérifiée. Vous montrerez que cet intervalle n'existe que si la masse  $M$  est supérieure à une certaine valeur que vous préciserez, en fonction de  $\alpha$  et  $k$ . Justifier physiquement cette condition.

**Q9.** Si la condition précédente est vérifiée, pour quelle pulsation  $\omega_r$  l'amplitude d'oscillation de la masse  $M$  est-elle maximale ? On exprimera  $\omega_r$  en fonction de  $\omega_0$  et de  $\tau$ . Comment s'appelle ce phénomène ?

## PROBLEME 3 : Autour de l'aluminium :

(≈ 76 pts)

La croûte terrestre contient 7,5 % d'aluminium. C'est le métal le plus utilisé sur la planète après le fer. La production mondiale progresse chaque année, atteignant 100 tonnes par jour. Ce sujet a pour but d'illustrer quelques aspects de la chimie de ce métal familier.

### Données :

- ✚ Constante de Faraday :  $F = 96\,500 \text{ C.mol}^{-1}$  ;
- ✚ Masses molaires en  $\text{g.mol}^{-1}$  :  
 $H = 1,0$  ;  $O = 16,0$  ;  $Al : 27,0$  ;  $Cl : 35,5$ .
- ✚ Potentiels standards à  $pH = 0$  :  $Al^{3+}_{(aq)} / Al_{(s)}$   $E^\circ_1 = -1,66 \text{ V}$  ;
- ✚ Produit ionique de l'eau :  $Ke = 10^{-14}$  ;
- ✚ Constante d'acidité :  $H_2CO_{3(aq)} / HCO^-_{3(aq)}$   $Ka = 10^{-6,2}$  ;

**Les trois parties sont totalement indépendantes  
et à l'intérieur de la partie III, les sous-parties sont largement indépendantes.**

### I - Propriétés de l'atome d'aluminium :

L'aluminium est un élément chimique de symbole  $Al$  et de numéro atomique 13.

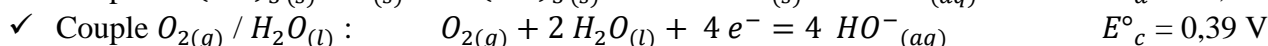
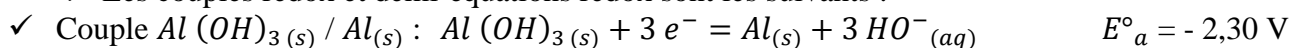
**Q1.** Que représente le numéro atomique d'un élément ? Quel est le schéma de Lewis de l'atome d'aluminium ? Justifier. Quel est l'ion le plus probable de l'élément aluminium ? Justifier.

### II – L'aluminium comme source d'énergie :

Depuis quelques années, les piles aluminium/air sont des sources d'énergie à l'étude pour la propulsion des véhicules électriques. Cette technologie repose sur l'association en série de plusieurs dizaines de cellules.

Chaque cellule peut être décrite de façon simplifiée :

- ✚ L'anode est en aluminium métallique  $Al_{(s)}$  ;
- ✚ A la cathode, il y a consommation de dioxygène  $O_{2(g)}$  en excès.
- ✚ Un électrolyte basique assure la jonction entre les deux compartiments.
- ✚ La température de fonctionnement est de  $25^\circ\text{C}$ .
- ✚ Les couples redox et demi-équations redox sont les suivants :



$E^\circ_a$  et  $E^\circ_c$  sont les potentiels standards des couples mis en jeu dans les conditions de l'expérience (en milieu basique).

**Q2.** Ecrire l'équation de la réaction modélisant la transformation chimique qui se produit lorsque la pile débite avec des coefficients stœchiométriques entiers les plus faibles possibles. Justifier votre façon de faire.

**Q3.** Donner l'expression littérale de la constante d'équilibre  $K^\circ$  associée à l'équation de la réaction précédente et la calculer. Conclure.

**Q4.** Le compartiment anodique contient initialement  $m = 25 \text{ g}$  d'aluminium. Calculer l'avancement maximal  $\xi_{\max}$  de la réaction.

**Q5.** En réalité l'avancement maximal n'est pas atteint. En moyenne cette cellule délivre une quantité d'électricité  $Q = 2,1 \cdot 10^5 \text{ C}$ , ainsi qu'une intensité de  $6,5 \text{ A}$ . En déduire :

- ✚ La durée de fonctionnement du dispositif en heures.
- ✚ Le pourcentage d'aluminium non consommé.

### III – Présence d'aluminium (III) dans un vaccin :

L'aluminium (III) est utilisé comme adjuvant dans la plupart des vaccins (tétanos, coqueluche, hépatite B...). Son rôle est d'activer la production d'anticorps. Cependant, une surdose de ce métal peut s'avérer nocive pour des personnes fragiles. Il est donc important de savoir sous quelle forme se trouve l'aluminium dans les vaccins afin de pouvoir le doser.

### Diagramme potentiel-pH de l'élément aluminium :

Le diagramme  $E - pH$  de l'élément aluminium est tracé en **annexe 1 du document-réponse** à rendre avec la copie. Il a été établi en tenant compte des espèces :  $Al_{(s)}$ ,  $Al^{3+}_{(aq)}$ ,  $Al(OH)_3_{(s)}$  et  $Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$ . La concentration totale en aluminium dissous est  $C_T = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$ .

**Q6.** Déterminer les degrés d'oxydation de l'élément aluminium dans les espèces suivantes :  $Al_{(s)}$ ,  $Al^{3+}_{(aq)}$ ,  $Al(OH)_3_{(s)}$  et  $Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$ . Distribuer ensuite l'espèce chimique correspondant à chaque domaine du diagramme  $E - pH$  en utilisant l'annexe 1 du document réponse. Justifier la réponse.

**Q7.** En exploitant le diagramme retrouver la valeur numérique du potentiel standard  $E^\circ_1$  du couple  $Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}$ .

*Un vaccin est une solution aqueuse de pH proche du pH sanguin.*

Le sang est un mélange contenant notamment de l'acide carbonique  $H_2CO_{3(aq)}$  et des ions hydrogénocarbonate  $HCO_3^{-}_{(aq)}$  en concentrations moyennes respectives  $0,0014 \text{ mol.L}^{-1}$  et  $0,027 \text{ mol.L}^{-1}$ .

**Q8.** En considérant le couple  $H_2CO_{3(aq)} / HCO_3^{-}_{(aq)}$ , donner une valeur du pH du sang.

En déduire la forme prédominante de l'aluminium (III) dans le vaccin.

### Titrage de l'aluminium (III) :

Une méthode possible de titrage de l'aluminium (III) en solution aqueuse consiste à acidifier la solution à titrer par de l'acide chlorhydrique afin de convertir l'aluminium (III) en ions  $Al^{3+}_{(aq)}$ . Puis on titre cette solution acidifiée d'ions  $Al^{3+}_{(aq)}$  par de la soude. Les mesures sont réalisées à une température de 298 K.

Titrage 1 : Titrage d'une solution d'acide chlorhydrique  $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$ .

Protocole :

Un volume  $V_0 = 20,0 \text{ mL}$  d'une solution d'acide chlorhydrique  $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$  de concentration molaire  $C_1$  est titré par une solution de soude  $\{Na^{+}_{(aq)} ; HO^{-}_{(aq)}\}$  de concentration  $C = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ . Le titrage est suivi par pHmétrie.

La courbe est donnée en **annexe 2 du document-réponse**, à rendre avec la copie.

**Q9.** Ecrire l'équation de la réaction mise en jeu lors de ce titrage et calculer la constante d'équilibre associée.

**Q10.** A l'aide d'une construction graphique, à faire apparaître sur l'annexe 2 du document-réponse, déterminer le volume équivalent  $V_e$ . En déduire la valeur de la concentration  $C_1$  de la solution d'acide chlorhydrique.

**Q11.** L'équivalence aurait pu être relevée à l'aide d'un indicateur coloré acido-basique. En vous aidant du tableau ci-dessous, proposer, en justifiant, un indicateur coloré adapté à ce titrage et préciser le changement de couleur observé.

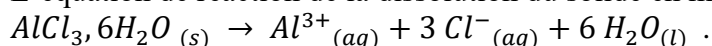
Indicateur coloré acido-basique	Couleur de la forme acide	Zone de virage	Couleur de la forme basique
Bleu de Bromophénol	jaune	3,0 – 4,6	Violet
Hélianthine	Rouge	3,1 – 4,4	Jaune
Vert de Bromocrésol	Jaune	4,0 – 5,6	Bleu
Bleu de Bromothymol	Jaune	6,2 – 7,6	Bleu
Phénolphtaléine	Incolore	8,0 – 10,0	Rouge

Titrage 2 : Titrage d'une solution acidifiée d'ions  $Al^{3+}_{(aq)}$ .

Protocole :

Une masse  $m$  de chlorure d'aluminium hexahydraté  $AlCl_3 \cdot 6H_2O$  solide est placée dans une fiole jaugée de  $V_0 = 20,0 \text{ mL}$ . On ajoute un peu de solution d'acide chlorhydrique  $\{H_3O^{+}_{(aq)} ; Cl^{-}_{(aq)}\}$  de concentration molaire  $C_1$ . On agite jusqu'à dissolution totale du solide, puis on complète avec la même solution d'acide chlorhydrique jusqu'au trait de jauge.

L'équation de réaction de la dissolution du solide en milieu acide est la suivante :



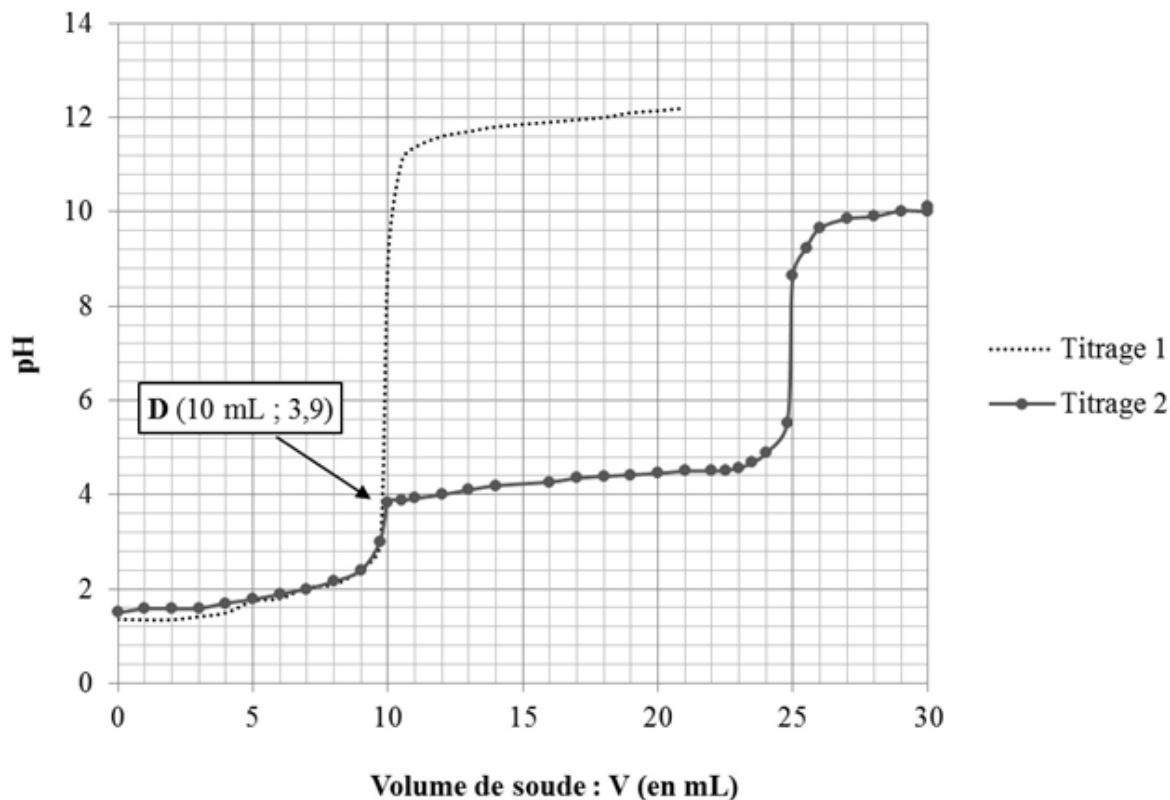
On appellera (S) la solution obtenue.

Dans cette solution, on notera :

- $C_1$  la concentration molaire en ions  $H_3O^+_{(aq)}$  ;
- $C_2$  la concentration molaire en ions  $Al^{3+}_{(aq)}$ .

Le volume  $V_0 = 20$  mL de solution (S) est titré par une solution de soude  $\{Na^+_{(aq)} ; HO^-_{(aq)}\}$  de concentration  $C = 1,0 \cdot 10^{-1} \text{ mol.L}^{-1}$ . Le titrage est suivi par pH-métrie et est fourni ci-dessous (titrage 2).

Au cours du dosage, on remarque l'apparition d'un précipité blanc.



Evolution du  $pH$  lors du titrage d'une solution composée d'un mélange d'acide chlorhydrique ( $C_1$ ) et d'ions  $Al^{3+}_{(aq)}$  ( $C_2$ ) par de la soude ( $C$ ) (titrage 2).  
La courbe du titrage 1 a été superposée.

**Q12.** Ecrire les équations des deux réactions successives mises en jeu lors de ce titrage et relever les deux valeurs de volumes équivalents  $V_{e1}$  et  $V_{e2}$ . Justifier que les ions  $H_3O^+_{(aq)}$  soient dosés en premier.

**Q13.** Donner, en mL, le volume de soude  $V_{A1}$  ayant réagi avec les cations  $Al^{3+}_{(aq)}$ .

En déduire la concentration molaire  $C_2$  en ions  $Al^{3+}_{(aq)}$  dans la solution (S).

Quelle masse de chlorure d'aluminium hexahydraté a servi à la préparation de la solution (S) ?

Exploitation du point anguleux :

Par exploitation du point anguleux D, on souhaite trouver la valeur du produit de solubilité  $K_s$  de l'hydroxyde d'aluminium  $Al(OH)_3(s)$ .

**Q14.** Donner l'équation de la réaction dont la constante thermodynamique est le produit de solubilité de l'hydroxyde d'aluminium  $K_s$ .

**Q15.** Déterminer la concentration molaire en ions  $HO^-_{(aq)}$  dans le bécher au point D.

**Q16.** En tenant compte de la dilution, évaluer la concentration molaire en ions  $Al^{3+}_{(aq)}$  dans le bécher au point D. En déduire une valeur du produit de solubilité  $K_s$  de l'hydroxyde d'aluminium à 298 K.

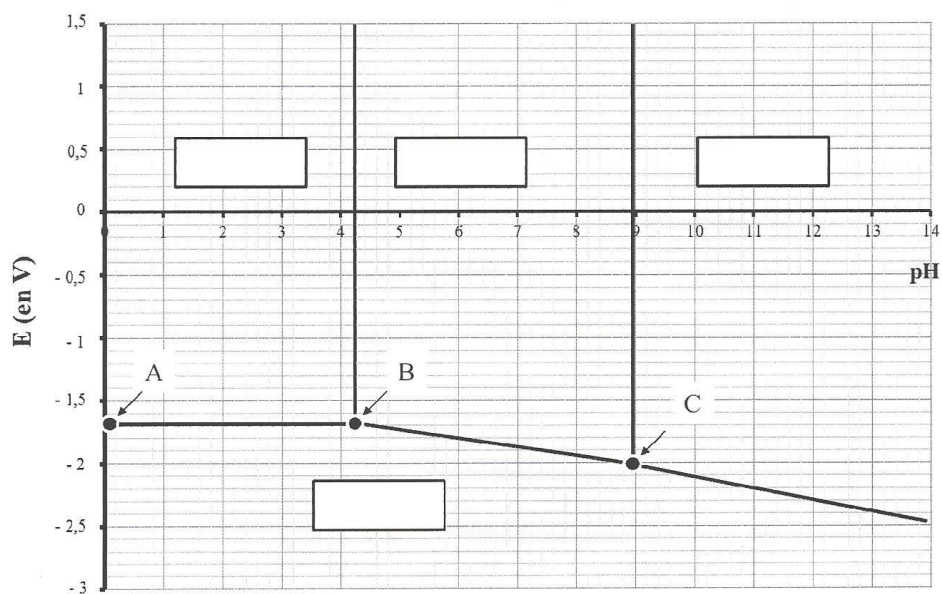


**Document réponse du problème de chimie :**

Nom prénom :

Annexe 1 :

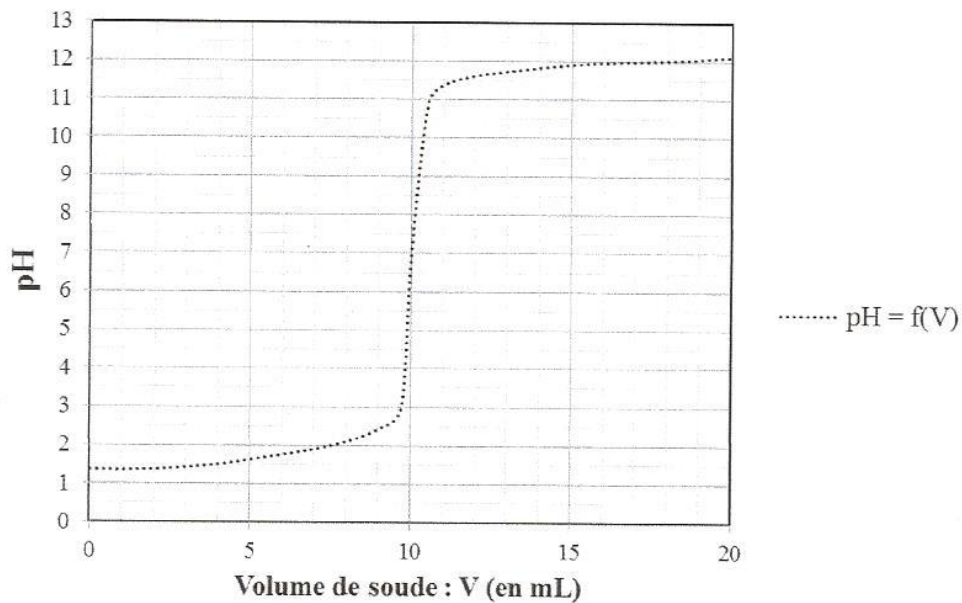
Diagramme E-pH de l'aluminium à 298 K  
Concentration de trace :  $C_T = 1,0 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$



Coordonnées des points : **A(0,0 ; - 1,72)**      **B(4,3 ; - 1,72)**      **C(9,0 ; - 2,05)** .

Annexe 2 :

Evolution du pH lors du titrage d'une solution d'acide chlorhydrique ( $C_1$ ) par de la soude (C)



**EXERCICE : Etude d'une lunette de Galilée :****(≈ 36 pts)**

**Q1.** Un système afocal est tel que le foyer image de la 1<sup>ère</sup> lentille soit confondu avec le foyer objet de la 2<sup>de</sup>. Alors  $\overline{F'_1} = \overline{F_2}$ ; Soit  $\overline{F'_1 F_2} = 0$ .

D'après la relation de Chasles, on a :  $\overline{O_1 O_2} = \overline{O_1 F'_1} + \overline{F'_1 F_2} + \overline{F_2 O_2}$ .

Or  $\overline{O_1 F'_1} = f'_1 = \frac{1}{v_1}$  et  $\overline{F_2 O_2} = \overline{O_2 F'_2} = f'_2 = \frac{1}{v_2}$ .

Il vient donc :  $\overline{O_1 O_2} = \frac{1}{v_1} + \frac{1}{v_2}$ .

AN : ATTENTION : La lentille ( $L_2$ ) est divergente, donc  $V_2 = -50 \delta$ .

$\overline{O_1 O_2} = \frac{1}{1,33} + \frac{1}{-50}$ ; On obtient :  $\overline{O_1 O_2} \approx 0,73 \text{ m} \approx 73 \text{ cm}$ .

**Q2.** On cherche la position de l'image de  $O_1$  à travers la lentille ( $L_2$ ).

Relation de Descartes à ( $L_2$ ) :  $\frac{1}{\overline{O_2 O'_1}} - \frac{1}{\overline{O_2 O_1}} = \frac{1}{f'_2} = V_2$

Soit  $\frac{1}{\overline{O_2 O'_1}} = \frac{1}{\overline{O_2 O_1}} + V_2 = \frac{1+V_2 \overline{O_2 O_1}}{\overline{O_2 O_1}}$ ; Ainsi :  $\overline{O_2 O'_1} = \frac{\overline{O_2 O_1}}{1+V_2 \overline{O_2 O_1}}$ .

AN :  $\overline{O_2 O'_1} = -0,731/(1 + 50 \times 0,73)$ ; On obtient :  $\overline{O_2 O'_1} \approx -0,0195 \text{ m} \approx -1,95 \text{ cm}$ .

Cette **image est donc virtuelle pour la lentille ( $L_2$ )**; On ne **peut donc pas y placer l'œil**.

On cherche aussi la dimension de l'image. Formule du grandissement transversal :  $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$

Ici, il vient :  $\frac{D'_1}{D_1} = \left| \frac{\overline{O_2 O'_1}}{\overline{O_2 O_1}} \right|$ ; Soit :  $D'_1 = D_1 \left| \frac{\overline{O_2 O'_1}}{\overline{O_2 O_1}} \right|$ .

AN :  $D'_1 = 10 \frac{1,95}{73}$ ; On obtient :  $D'_1 \approx 0,27 \text{ cm} \approx 2,7 \text{ mm}$ .

**Q3.a.** Sur le schéma :  $f'_1 = 75 \text{ cm}$ ;  $f'_2 = -2 \text{ cm}$ ;  $\overline{O_1 O_2} = 73 \text{ cm}$ .

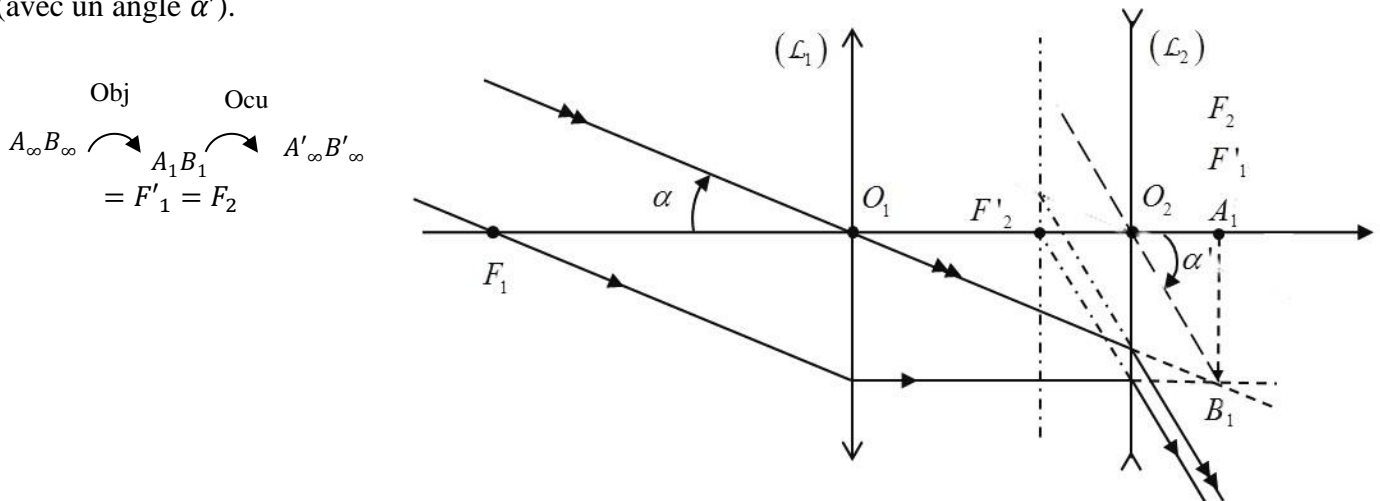
Donc le foyer image de ( $L_1$ ) confondu avec le foyer objet de ( $L_2$ ) est à droite de ( $L_2$ ); Cohérent puisque ( $L_2$ ) est divergente.

On notera  $A_1 B_1$  l'image intermédiaire à travers ( $L_1$ ) et  $A' B'$  l'image définitive.

Il est judicieux de tracer le rayon initial passant par  $O_1$  (avec un angle  $\alpha$ ) qui n'est pas dévié et son parallèle passant par  $F_1$  qui émerge de ( $L_1$ ) en étant parallèle à l'axe optique. Et comme il est parallèle à l'axe optique avant ( $L_2$ ), il sort du système optique en passant par  $F'_2$  (son prolongement).

Par construction de la lunette (objet à l'infini), l'image intermédiaire  $A_1 B_1$  se trouve dans le plan focal image de ( $L_1$ ) et donc aussi dans le plan focal objet de ( $L_2$ ). On a donc  $A_1 = F'_1 = F_2$ ; Ces 3 points sont confondus.

Et toujours par construction, l'image définitive est à l'infini, donc les rayons émergent parallèles entre eux (avec un angle  $\alpha'$ ).



**Q3.b.** On cherche l'expression de  $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$ .

Dans l'approximation de Gauss, les angles sont petits, ainsi :

$$\tan(\alpha) \approx \alpha = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{O_1 F'_1}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_1} = V_1 \times \overline{A_1 B_1} \quad (\alpha < 0 \text{ et } \overline{A_1 B_1} < 0)$$

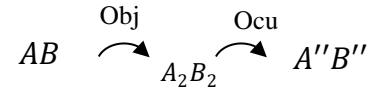
$$\text{Et } \tan(\alpha') \approx \alpha' = \frac{\overline{A_1 B_1}}{\overline{F'_2 O_2}} = \frac{\overline{A_1 B_1}}{-\overline{O_2 F'_2}} = -\frac{\overline{A_1 B_1}}{f'_2} = -V_2 \times \overline{A_1 B_1} \quad (\alpha' < 0)$$

$$\text{D'où } \boxed{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{V_2}{V_1}};$$

$$\text{AN : } G = -\frac{-50}{1,33}; \text{ On obtient : } \underline{G \approx 37,6}.$$

**Q4.** Question plus difficile !!

Soit  $\overline{A_2 B_2}$  l'image de  $\overline{AB}$  à travers l'objectif et  $\overline{A'' B''}$  l'image de  $\overline{A_2 B_2}$  à travers l'oculaire.



On nous précise que l'œil est à 1,5 cm derrière ( $L_2$ ) et qu'il voit une image située à  $d_m = 25$  cm.

$$\text{Alors } \underline{\overline{O_2 A''} = 1,5 - 25 = -23,5 \text{ cm.}}$$

Méthode : En appliquant la relation de Descartes à ( $L_2$ ), on va obtenir  $\overline{O_2 A_2}$ .

Puis on va utiliser une relation de Chasles pour obtenir  $\overline{O_1 A_2}$  et enfin une relation de Descartes à ( $L_1$ ) pour obtenir  $\overline{O_1 A}$  que l'on cherche.

$$\text{Relation de Descartes à } (L_2) : \frac{1}{\overline{O_2 A''}} - \frac{1}{\overline{O_2 A_2}} = V_2.$$

$$\text{Soit } \frac{1}{\overline{O_2 A_2}} = \frac{1}{\overline{O_2 A''}} - V_2 = \frac{1 - V_2 \overline{O_2 A''}}{\overline{O_2 A''}} \text{ et } \boxed{\overline{O_2 A_2} = \frac{\overline{O_2 A''}}{1 - V_2 \overline{O_2 A''}}}.$$

$$\text{AN : } \overline{O_2 A_2} = \frac{-0,235}{1 - (-50) \times (-0,235)}. \text{ On obtient : } \underline{\overline{O_2 A_2} \approx +0,0219 \text{ m} \approx 2,19 \text{ cm.}}$$

$$\text{Relation de Chasles : } \boxed{\overline{O_1 A_2} = \overline{O_1 O_2} + \overline{O_2 A_2}}.$$

$$\text{AN : } \overline{O_1 A_2} = 73 + 2,19; \text{ On obtient : } \underline{\overline{O_1 A_2} \approx 75,19 \text{ cm.}}$$

$$\text{Relation de Descartes à } (L_1) : \frac{1}{\overline{O_1 A_2}} - \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{f'_1} = V_1$$

$$\text{Soit : } \frac{1}{\overline{O_1 A}} = \frac{1}{\overline{O_1 A_2}} - V_1 = \frac{1 - V_1 \overline{O_1 A_2}}{\overline{O_1 A_2}} \text{ et } \boxed{\overline{O_1 A} = \frac{\overline{O_1 A_2}}{1 - V_1 \overline{O_1 A_2}}}.$$

$$\text{AN : } \overline{O_1 A} = \frac{0,7519}{1 - 1,333 \times 0,7519}; \text{ On obtient : } \underline{\overline{O_1 A} \approx -329 \text{ m.}}$$

**Q5.** L'œil peut donc voir tous les objets situés entre l'infini et 300 m devant l'objectif de la lunette.

## PROBLEME 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie :

(≈ 64 pts)

**Q1.** Il faut utiliser un filtre passe-bas de fréquence de coupure  $f_c$  faible devant 4 kHz afin de conserver la composante continue et supprimer le signal sinusoïdal de fréquence 4 kHz.

On choisira, par exemple,  $f_c \approx \frac{4000}{10} \approx 400 \text{ Hz}$ .

**Q2.** Schéma électrique équivalent en BF :

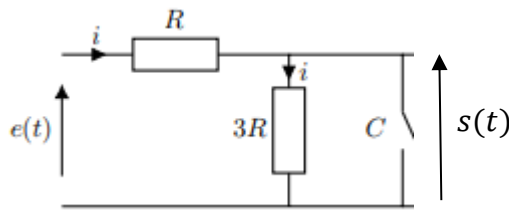
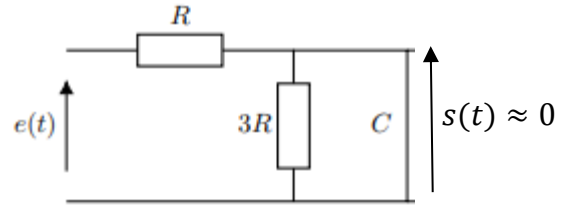


Schéma électrique équivalent en HF :



En BF : Les résistances  $R$  et  $3R$  sont en série :

Pont diviseur de tension :  $\underline{H} = \frac{s}{e} = \frac{3R}{3R+R} = \frac{3}{4} = \text{cste}$  ;  $G_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB} = \text{cste}$ .

En HF :  $\underline{H} = \frac{s}{e} \approx 0$  et  $G_{dB} \rightarrow -\infty$ .

Conclusion : C'est un filtre passe-bas.

**Q3.** On calcule  $\underline{Z}_{eq}$  équivalent à  $3R$  et  $C$  en parallèle à la sortie :

On a alors :  $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_R \underline{Z}_C}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C} = \frac{3R \times \frac{1}{jC\omega}}{3R + \frac{1}{jC\omega}}$  ; Soit  $\underline{Z}_{eq} = \frac{3R}{1+j3RC\omega}$ .

Ainsi,  $\underline{Z}_{eq}$  est en série avec  $R$  : Pont diviseur de tension :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{s}{e} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + R} = \frac{\frac{3R}{1+j3RC\omega}}{R + \frac{3R}{1+j3RC\omega}} = \frac{3R}{R + \frac{3R}{1+j3RC\omega}} = \frac{3R}{R + \frac{3R}{1+j3RC\omega}} = \frac{3}{4+j3RC\omega}$$

$$\text{Soit : } \underline{H}(j\omega) = \frac{3}{4+j3RC\omega} = \frac{3}{4(1+j\frac{3RC\omega}{4})} = \frac{3/4}{1+j\frac{3RC\omega}{4}}$$

De la forme :  $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$  avec  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  si  $H_0 = \frac{3}{4}$  et  $\omega_0 = \frac{4}{3RC}$ .

$H_0$  est la fonction de transfert statique et  $\omega_0$  la pulsation propre.

C'est un filtre passe bas du 1<sup>er</sup> ordre.

**Q4.** Par définition,  $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$ .

Et  $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(jx)) = \arg(\text{num}) - \arg(\text{den}) = 0 - \arctan(x)$  ; Ainsi :  $\varphi(x) = -\arctan(x)$ .

**Q5.** La pulsation de coupure  $\omega_c$  est définie par  $G(\omega_c) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$ .

Or  $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$  ; Ainsi  $G$  est max pour  $x = 0$  et  $G_{max} = H_0 = \frac{3}{4}$ .

Ainsi,  $G(x_c) = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+x_c^2}}$  ; Il vient donc :  $x_c = 1 = \frac{\omega_c}{\omega_0}$  ; Soit :  $\omega_c = \omega_0 = \frac{4}{3RC}$  et  $f_c = \frac{\omega_c}{2\pi} = \frac{2}{3\pi RC}$ .

AN :  $f_c = \frac{2}{3\pi \times 5,3 \cdot 10^3 \times 1,0 \cdot 10^{-7}}$ . On obtient :  $f_c \approx 400 \text{ Hz}$ .

On a bien  $f_c$  dix fois plus faible que la fréquence du signal parasite que l'on veut éliminer, ce qui paraît tout à fait satisfaisant.

**Q6.** Etude asymptotique de  $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$ .

- En BF : Si  $\omega \ll \omega_0$  ou si  $x \ll 1$  :  $\underline{H} \sim H_0 = \frac{3}{4}$ 
  - Donc  $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) = 20 \log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5 \text{ dB}$  ;
  - Asymptote horizontale en BF.
  - Et  $\varphi \rightarrow 0$ .

- En HF : Si  $\omega \gg \omega_0$  ou  $x \gg 1$  :  $\underline{H} \sim \frac{H_0}{jx} \sim -j \frac{H_0}{x}$   
 Donc  $G_{dB} \rightarrow 20 \log(H_0) - 20 \log(x)$  :  
**Asymptote oblique de pente -20 dB par décade en HF.**  
 Et  $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$ .

Intersection des asymptotes en A tel que :

$$20 \log(H_0) - 20 \log(x_A) = 20 \log(H_0) \quad ;$$

Soit  $\log(x_A) = 0$

et pour  $G_{dB}(A) = 20 \log(H_0) \approx -2,5 \text{ dB}$ .

Ainsi les coordonnées du point d'intersection des asymptotes : **A (0; -2,5)**.

D'où le diagramme de Bode asymptotique ci-contre.

Ce filtre présente **un caractère pseudo-intégrateur en haute fréquences**, car il présente un asymptote oblique de **pente -20 dB/décade**.

**Q7. Diagramme réel :** En  $x = 1$  ou  $\log(x) = 0$  :

$$\underline{H}(jx = 1) = \frac{H_0}{1+j} \text{ et } G(1) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$$

Donc

$$G_{dB}(1) = 20 \log(H_0) - 20 \log(\sqrt{2}) = -2,5 - 3.$$

Ainsi :  **$G_{dB}(\log(x) = 0) = -5,5$  et Et**

$$\varphi(\log(x) = 0) = -\frac{\pi}{4}.$$

D'où le diagramme de Bode réel ajouté sur le diagramme asymptotique.

**Q8. - En ce qui concerne la composante continue :**

On se place en basses fréquences :  $\underline{H} \sim H_0 = \frac{S_0}{U_0} = \frac{3}{4}$  ; Ainsi :  **$S_0 = \frac{3}{4} U_0$** .

- A la fréquence de 4 kHz :  $f = 10 f_c$ , Soit :  $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_c} = 10$  et  $\log(x) = 1$ .

A cette fréquence,  $G_{dB}(1) = -22,5 \text{ dB} = 20 \log(G)$  ; D'où  $\log(G) = -\frac{22,5}{20}$  et  $G = \frac{S_m}{E_m} = 10^{-1,03}$

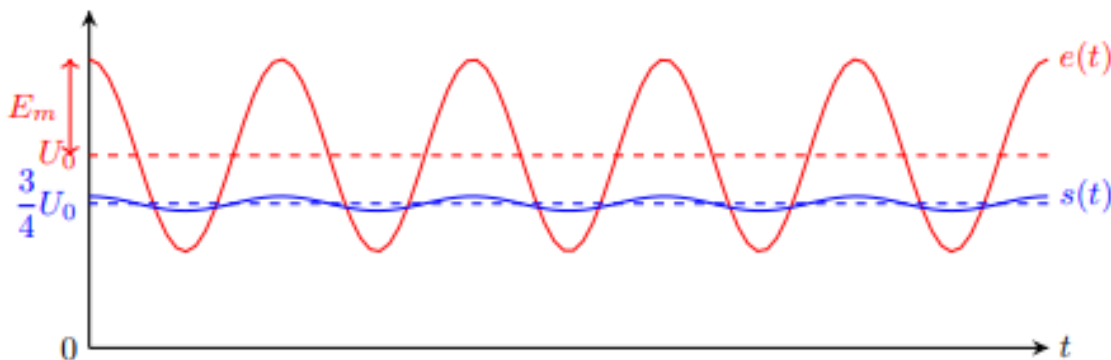
D'où  **$S_m \approx 0,09 E_m \approx \frac{E_m}{10}$**  : L'amplitude du signal parasite est atténuée d'un facteur 10.

Et  $\varphi_s = \Phi(x) + \varphi_e$  où  $\Phi(x)$  est le déphasage lié au filtre. Or en  $\log(x) = 1$ ,  **$\Phi \approx -1,5 \text{ rad}$**

Alors  **$\varphi_s \approx \varphi_e - 1,5 \text{ rad}$** .

**Conclusion :**  **$s(t) = \frac{3}{4} U_0 + \frac{E_m}{10} \cos(\omega t + \varphi_e - 1,5)$** .

D'où l'allure ci-dessous :



## PROBLEME 2 : Production de vagues dans une piscine : (D'après ENSTIM)

(≈ 66 pts)

### I – Etude de l'équilibre :

Q1. Expression de la poussée d'Archimède :  $\vec{\pi} = -\rho_{eau} V \vec{g} = -\rho_{eau} V g \vec{u}_z$ .

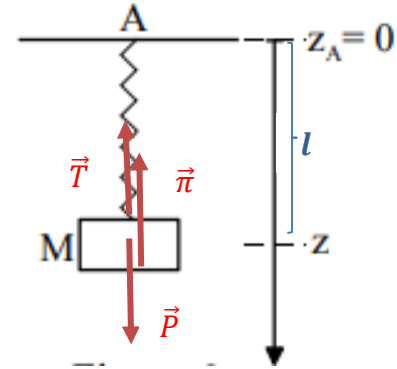
Q2. Référentiel terrestre  $\mathcal{R}$  supposé galiléen.

Base de projection cartésienne. L'axe  $Oz$  est orienté vers le bas.

Système : La masse  $M$ .

Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Le poids :  $\vec{P} = M\vec{g} = +Mg\vec{u}_z$
- La poussée d'Archimède :  $\vec{\pi} = -\rho_{eau} V g \vec{u}_z$ .
- La force de Hooke dirigée vers le haut :  $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - l_0)\vec{u}_z$   
Car  $z = l$



Condition d'équilibre :  $\sum \vec{F}_{ext} = \vec{0}$  ; Soit :  $\vec{T} + \vec{\pi} + \vec{P} = \vec{0}$ .

Projetons sur l'axe ( $Oz$ ) :  $Mg - \rho_{eau} V g - k(z_{eq} - l_0) = 0$

Ou encore, avec  $z_{eq} = h$ , il vient :  $k(h - l_0) = Mg - \rho_{eau} V g$

Il faut supprimer  $M = \rho V$  : D'où :  $h - l_0 = \frac{\rho - \rho_{eau}}{k} V g$  ; Ou encore :  $h = l_0 + \frac{Vg}{k} (\rho - \rho_{eau})$ .

### II – Mouvement sans frottement :

Q3. Equation différentielle du mouvement : 2<sup>ème</sup> loi de Newton :  $\sum \vec{F}_{ext} = M\vec{a}$  avec  $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$

En projetant sur l'axe ( $Oz$ ), il vient :  $Mg - \rho_{eau} V g - k(z - l_0) = M\ddot{z}$

Ou encore :  $M\ddot{z} + kz = \underline{Mg - \rho_{eau} V g + kl_0 - kh} + kh$   
 $= 0$  (d'après Q2)

En simplifiant, il vient :  $M\ddot{z} + kz = kh$  et sous forme canonique, on obtient :  $\ddot{z} + \frac{k}{M} z = \frac{k}{M} h$ .

On pose alors  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$  la pulsation propre, il vient :  $\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$ .

La **pulsation propre** de cet oscillateur ne dépend **que de ses caractéristiques intrinsèques  $k$  et  $M$** .

Par contre, c'est la **position d'équilibre  $h$**  (autour de laquelle la masse oscille) qui **dépend la poussée d'Archimède**.

### III – Mouvement avec frottements visqueux exercés par l'eau :

Q4. On refait une 2<sup>ème</sup> loi de Newton, en ajoutant la force de frottement visqueux :  $\vec{F}_v = -\alpha \frac{d\vec{l}}{dt} = -\alpha \dot{z} \vec{u}_z$

Il vient :  $Mg - \rho_{eau} V g - k(z - l_0) - \alpha \dot{z} = M\ddot{z}$

Soit :  $M\ddot{z} + \alpha \dot{z} + kz = \underline{Mg - \rho_{eau} V g + kl_0 - kh} + kh$   
 $= 0$  (d'après Q2)

En simplifiant et en mettant sous forme canonique, il vient :  $\ddot{z} + \frac{\alpha}{M} \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$

Par identification avec  $\ddot{z} + \lambda \dot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 h$ , il vient :  $\lambda = \frac{\alpha}{M}$ .

Q5. Il faut résoudre l'équation précédente, dans le cas d'un amortissement faible, donc lorsque  $\alpha$  reste petit.

Solution homogène :

- Equation caractéristique :  $s^2 + \lambda s + \omega_0^2 = 0$
- Discriminant :  $\Delta = \lambda^2 - 4\omega_0^2 < 0$  si amortissement faible ; Donc régime pseudo-périodique.
- Solutions de l'équation caractéristique :  $s_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \frac{\sqrt{4\omega_0^2 - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i \Omega$   
avec  $\Omega$  la pseudo pulsation .
- Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors :  $\mathbf{z}_h(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$

Solution particulière constante :  $\mathbf{z}_p = h$ .

Solution générale :

$$\mathbf{z}(t) = h + e^{-\frac{\lambda}{2}t} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] .$$

On ne cherche pas  $A$  et  $B$  d'après l'énoncé.



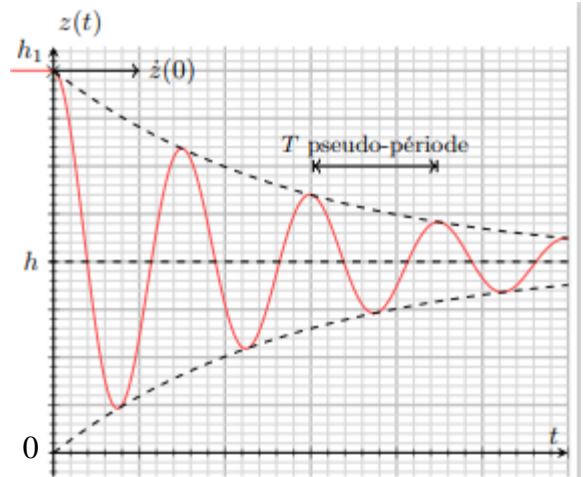
Allure de la courbe :

A  $t = 0$ ,  $z(0) = h_1 > h$

et  $\dot{z}(0) = 0$ , donc tangente horizontale en 0.

De plus,  $\lim_{t \rightarrow \infty} z(t) = h < h_1$ .

Et entre temps, oscillations amorties avec décroissance exponentielle de l'amplitude.



#### IV – Cas du régime sinusoïdal forcé :

**Q6.** On a maintenant :  $z_A(t) = z_{Am} \cos(\omega t)$ ,

donc  $l = z - z_A$  et  $\frac{dl}{dt} = \dot{z} - \dot{z}_A$

Ce qui modifie la force de Hooke :  $\vec{T} = -k(l - l_0)\vec{u}_z = -k(z - z_A - l_0)\vec{u}_z$ .

Et la force de frottement fluide :  $\vec{F}_v = -\alpha \frac{dl}{dt} \vec{u}_z = -\alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) \vec{u}_z$

La 2<sup>ème</sup> loi de Newton devient donc :  $Mg - \rho_{eau}Vg - k(z - z_A - l_0) - \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) = M\ddot{z}$

Qui se simplifie en :  $M\ddot{z} + \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - z_A) = \underline{Mg - \rho_{eau}Vg} + \underline{kl_0 - kh} + kh$   
 $= 0$  (d'après Q2)

Ou encore :  $M\ddot{z} + \alpha(\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - h - z_A) = 0$ .

On pose :  $Z(t) = z(t) - h$  ; Soit  $\dot{Z} = \dot{z}$  et  $\ddot{Z} = \ddot{z}$

L'équation différentielle devient :  $M\ddot{Z} + \alpha\dot{Z} + kZ(t) = \alpha\dot{z}_A + k z_A(t)$ .

Sous forme canonique, il vient :  $\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = \frac{\alpha}{M}\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t)$ .

Par identification avec  $\ddot{Z} + \lambda\dot{Z} + \omega_0^2 Z = F(t)$ , il vient :  $\underline{F(t) = \frac{\alpha}{M}\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t)}$ .

**Q7.** Passage aux notations complexes :

On nous donne  $F(t) = \omega^2 z_{Am} \cos(\omega t)$ . Alors  $\underline{F} = \omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}$ .

On introduit  $\underline{Z}_{com}(i\omega) = \underline{Z}(i\omega) e^{i\omega t}$  la grandeur complexe associée à  $Z(t)$

et  $\underline{Z}(i\omega)$  l'amplitude complexe telle que  $\underline{Z}(i\omega) = Z(\omega) e^{i\omega t}$

On reprend l'équation différentielle précédente, en la passant en complexes :

$\underline{Z}_{com}'' + \lambda \underline{Z}_{com}' + \omega_0^2 \underline{Z}_{com} = \underline{F}$  ; Soit :  $-\omega^2 \underline{Z}_{com} + i\omega \lambda \underline{Z}_{com} + \omega_0^2 \underline{Z}_{com} = \underline{F}$

Avec  $\tau = \frac{M}{\alpha} = \frac{1}{\lambda}$ , il vient :  $\underline{Z}_{com} \left( \omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} \right) = \underline{F} = \omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}$ .

D'où :  $\underline{Z}_{com} = \frac{\omega^2 z_{Am} e^{i\omega t}}{\left( \omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} \right)}$  et  $\underline{Z}(i\omega) = \frac{\omega^2 z_{Am}}{\left( \omega_0^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau} \right)} = \frac{z_{Am}}{\frac{\omega_0^2}{\omega^2} - 1 + i\frac{1}{\omega\tau}}$  ;

Ainsi, avec la pulsation réduite  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  :  $\underline{Z}(ix) = \frac{z_{Am}}{\frac{1}{x^2} - 1 + i\frac{1}{x\omega_0\tau}}$

Enfin  $\underline{Z}(x) = |\underline{Z}(ix)| = \frac{z_{Am}}{\sqrt{\left( \frac{1}{x^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2}}}$ .

**Q8.** On veut  $Z(x) > z_{Am}$ , soit  $\frac{Z(x)}{z_{Am}} > 1$  ; ou encore :  $\frac{1}{\sqrt{\left( \frac{1}{x^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2}}} > 1$  ; Soit :  $\sqrt{\left( \frac{1}{x^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2}} < 1$

On a donc :  $\left( \frac{1}{x^2} - 1 \right)^2 + \frac{1}{(x\omega_0\tau)^2} < 1$  ; On développe :  $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2 \omega_0^2 \tau^2} - 1 < 0$ .

Ou encore :  $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2 \omega_0^2 \tau^2} < 0$ .

Multiplions par  $x^4$ , il vient :  $1 - 2x^2 + \frac{x^2}{\omega_0^2 \tau^2} < 0$  ; Soit  $x^2 \left( -\frac{1}{\omega_0^2 \tau^2} + 2 \right) > 1$ .

Ou encore  $x > \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}}}$  ;

Or  $\omega = x \omega_0$  ;

Il faut donc que  $\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{2 - \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}}} = \frac{\omega_0 \omega_0 \tau}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{\omega_0^2 \tau}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \omega_{lim}$

On remarque que  $\omega_{lim}$  n'existe que si  $2 \omega_0^2 \tau^2 - 1 > 0$  ; Donc que si  $\omega_0^2 \tau^2 > \frac{1}{2}$ .

Or  $\tau = \frac{M}{\alpha}$  et  $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$  ; Ainsi  $\omega_{lim}$  n'existe que si  $\frac{k}{M} \frac{M^2}{\alpha^2} > \frac{1}{2}$  ; Donc pour  $M > \frac{\alpha^2}{2k}$ .

Cette condition revient à avoir un **facteur de qualité suffisamment grand** pour que la condition de résonance soit respectée.

**Q9.** On a vu que  $Z(x) = |\underline{Z}(ix)| = \frac{Z_{Am}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}}}$ .

Le numérateur est constant, ainsi  $Z$  est maximum si  $(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}$  est **minimum**.

Posons  $f(x) = (\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x \omega_0 \tau)^2}$ .

Alors  $\frac{df(x)}{dx} = 0$  ssi  $2(\frac{1}{x^2} - 1) \left(\frac{-2}{x^3}\right) - \frac{2}{\omega_0^2 \tau^2 x^3} = 0$  ; Soit  $\left(\frac{-2}{x^3}\right) \left[2\left(\frac{1}{x^2} - 1\right) + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2}\right] = 0$

Il vient :  $2\left(\frac{1}{x_r^2} - 1\right) + \frac{1}{\omega_0^2 \tau^2} = 0$  ; D'où :  $\frac{1}{x_r^2} - 1 = -\frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}$  ; ou  $\frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2} = \frac{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}{2 \omega_0^2 \tau^2}$

Enfin :  $x_r = \sqrt{\frac{2 \omega_0^2 \tau^2}{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{1}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}}} = \frac{\omega_0 \tau \sqrt{2}}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}}$ .

Et  $\omega_r = \omega_0 x_r = \frac{\omega_0^2 \tau \sqrt{2}}{\sqrt{2 \omega_0^2 \tau^2 - 1}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{2 \omega_0^2 \tau^2}}}$  : **Pulsation de résonance.**

Et le phénomène est appelé **phénomène de résonance**.



## PROBLEME 3 : Autour de l'aluminium : (D'après CCP TSI) (≈ 76 pts)

### I - Propriétés de l'atome d'aluminium :

**Q1.** Le numéro atomique d'un élément est le nombre de protons du noyau atomique (et nombre d'électrons de l'atome neutre).

✚  $Z = 13$  : Soit  $2+8+3$  : Dans la classification périodique, il sera donc situé sur la 3<sup>ème</sup> période et 1<sup>er</sup> élément du groupe p, soit dans le groupe 13. Il a donc 3 électrons de valence ( $3s^2 3p^1$ ).

Son schéma de Lewis est :  $| Al \cdot$

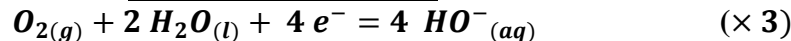
L'ion le plus probable a la configuration du gaz rare le plus proche, celle où toutes les couches sont occupées. Il aura donc tendance à perdre ses 3 électrons de valence et donner l'ion  $Al^{3+}$ .

### II – L'aluminium comme source d'énergie :

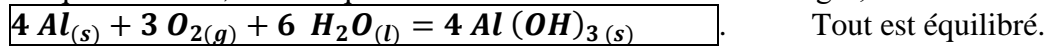
**Q2.** A l'anode, il se produit une oxydation du réducteur, d'où le sens de la réaction :



✚ A la cathode, il se produit une réduction de l'oxydant :



✚ Pour obtenir l'équation bilan, il faut équilibrer le nombre d'électrons échangés, on obtient donc :



**Q3.**  $K^\circ = \frac{(P^\circ)^3}{(P(O_2))_{eq}^3} = \frac{1}{(P(O_2))_{eq}^3};$

✚ ½ équation redox :  $Al(OH)_{3(s)} + 3 e^- = Al_{(s)} + 3 HO^-_{(aq)}$

$$\text{Relation de Nernst : } E_a = E^\circ_a + \frac{0,06}{3} \log \frac{1}{[HO^-]^3};$$

✚ ½ équation redox :  $O_{2(g)} + 2 H_2O_{(l)} + 4 e^- = 4 HO^-_{(aq)}$

$$\text{Relation de Nernst : } E_c = E^\circ_c + \frac{0,06}{4} \log \frac{P(O_2)}{[HO^-]^4};$$

✚ A l'équilibre, les potentiels redox sont égaux, soit :  $E_{a\,eq} = E_{c\,eq}$  ;

✚ D'où :  $E^\circ_a + \frac{0,06}{3} \log \frac{1}{[HO^-]^3_{eq}} = E^\circ_c + \frac{0,06}{4} \log \frac{P(O_2)_{eq}}{[HO^-]^4_{eq}};$

✚ **Multiplions par 12** :  $12 E^\circ_a + 0,06 \log \frac{1}{[HO^-]^{12}_{eq}} = 12 E^\circ_c + 0,06 \log \frac{(P(O_2))_{eq}^3}{[HO^-]^{12}_{eq}};$

Soit :  $0,06 \log K^\circ = 12(E^\circ_c - E^\circ_a)$  ; Soit :  $\boxed{K^\circ = 10^{\frac{12(E^\circ_c - E^\circ_a)}{0,06}}}$  ; AN :  $K^\circ = 10^{538} > 10^3$  : **Réaction totale.**

**Q4.** Calcul du nbre de moles initiales d'Al :  $\boxed{n(Al)_{init} = \frac{m}{M(Al)}}$  ; AN :  $n(Al)_{init} = \frac{25}{27}$  ;  **$n(Al)_{init} = 0,93 \text{ mol.}$**

**Tableau d'avancement :**

	$4 Al_{(s)} +$	$3 O_{2(g)} +$	$6 H_2O_{(l)} =$	$4 Al(OH)_{3(s)}$
<b>EI</b>	$n(Al)_{init} = 0,93$	excès	excès	
<b>EF</b>	$0,93 - 4 \xi_{max}$	excès	excès	$4 \xi_{max}$

La réaction étant totale, on a disparition du réactif limitant :

Soit :  $0,93 - 4 \xi_{max} = 0$  ; Soit :  $\xi_{max} = \frac{0,93}{4}$  ;  **$\xi_{max} = 0,23 \text{ mol.}$**

**Q5.** On sait que :  $Q = I \Delta t$  ; Donc : Durée de fonctionnement :  $\boxed{\Delta t = \frac{Q}{I}}$  ;

AN :  $\Delta t = \frac{2,1 \cdot 10^5}{6,5}$  ; On obtient  **$\Delta t \approx 3,2 \cdot 10^4 \text{ s} \approx 9 \text{ h.}$**

✚ Pourcentage d'aluminium consommé :

✓ Quantité d'électricité ayant circulé :  $Q = n_{e^-} F = 3 \times n_{Al\,consommé} \times F$  ; Soit  $\boxed{n_{Al,consommé} = \frac{Q}{3F}}$  ;

AN :  $n_{Al\,consommé} = \frac{2,1 \cdot 10^5}{3 \times 96500}$  ; Soit  **$n_{Al,consommé} = 0,73 \text{ mol.}$**

✓  $n_{Al\,restant} = 0,93 - 0,73 = 0,20 \text{ mol.}$  Soit en pourcentage :  $p = \frac{0,20}{0,93} \times 100$  ;

D'où le pourcentage d'aluminium non consommé :  **$p = 21,5\%$**  ;

### III – Présence d'aluminium (III) dans un vaccin :

#### Q6. Diagramme potentiel-pH de l'élément aluminium :

espèce	degré d'oxydation de Al	espèce	degré d'oxydation de Al
$Al_{(s)}$	0	$Al(OH)_3_{(s)}$	+ III
$Al^{3+}_{(aq)}$	+ III	$Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$	+ III

De bas en haut du diagramme, les espèces sont placées par ordre croissant de nombre d'oxydation.

D'autre part, l'espèce la plus acide ( $Al^{3+}_{(aq)}$ ) est majoritaire à bas pH et l'espèce la plus basique ( $Al(OH)_4^{-}_{(aq)}$ ) est majoritaire à haut pH. D'où les identifications ci-contre.

Remarque : on aurait aussi pu faire un diagramme primitif.

#### Q7. Couple $Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}$ :

1/2 équation redox :  $Al^{3+}_{(aq)} + 3e^- = Al_{(s)}$

Relation de Nernst :

$$E(Al^{3+}_{(aq)}/Al_{(s)}) = E^{\circ}_1 + 0,02 \log([Al^{3+}]) ;$$

Sur la frontière entre  $Al^{3+}$  et  $Al_{(s)}$ , le solide est présent à l'état de trace et  $[Al^{3+}] = C_T$ . Soit  $E_{1\text{ Front}} = E^{\circ}_1 + 0,02 \log(C_T)$

On donne  $E_{1\text{ Front}} = -1,72\text{ V}$ . Donc  $E^{\circ}_1 = E_{1\text{ Front}} - 0,02 \log(C_T)$ .

AN :  $E^{\circ}_1 = -1,72 + 0,02 \times 3$  ;  $E^{\circ}_1 = -1,66\text{ V}$  ; (valeur déjà donnée dans le sujet).

#### Q8. On sait que pour un couple acido-basique : $H_2CO_{3(aq)}/HCO_3^{-}_{(aq)}$ :

On a la relation :  $pH = pKa + \log\left(\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}\right)$  ; AN :  $pH = 6,2 + \log\left(\frac{0,027}{0,0014}\right)$  ; On obtient :  $pH \approx 7,5$ .

A un tel pH, d'après le diagramme  $E - pH$ ,  $Al(OH)_3_{(s)}$  est l'espèce majoritaire de Al (III).

#### Titrage de l'aluminium (III) :

Titration 1 : Titration d'une solution d'acide chlorhydrique  $\{H_3O^+_{(aq)} ; Cl^-_{(aq)}\}$ .

Q9. Réaction du dosage acide fort / base forte :  $H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = 2H_2O_{(l)}$  :  $K = \frac{1}{K_e}$  ;

AN :  $K = 10^{14}$  ; Réaction totale.

#### Q10. On utilise la méthode des tangentes :

On trace une 1<sup>ère</sup> droite tangente à la courbe après l'équivalence (droite 1).

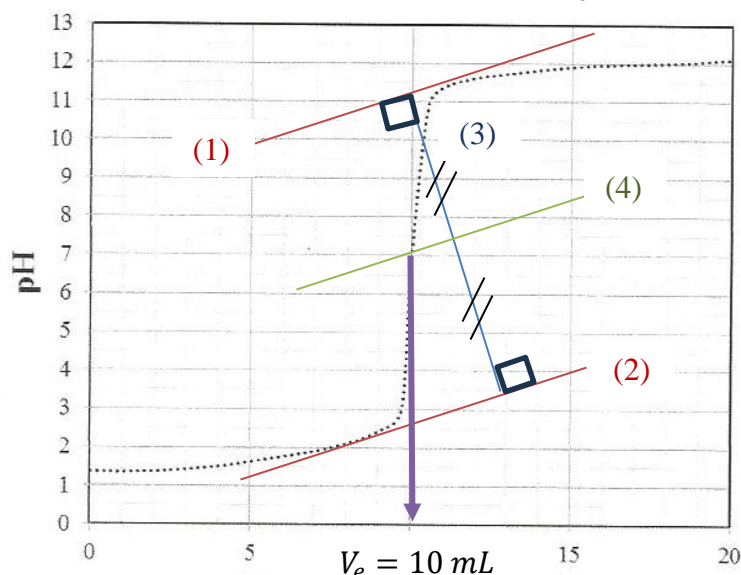
On trace une 2<sup>ème</sup> droite tangente à la courbe avant l'équivalence et parallèle à la droite 1 (droite 2).

A l'aide d'une équerre, on trace une droite perpendiculaire aux deux autres (droite 3).

On trace ensuite une droite parallèle et à égale distance des droites 1 et 2 (droite 4).

Le point d'intersection avec la courbe du pH donne le volume équivalent.

On lit  $V_e = 10,0\text{ mL}$ .



A l'équivalence : les réactifs sont versés dans les proportions stœchiométriques.

Donc :  $n(H_3O^+) = n(HO^-)_{eq}$  ; Soit :  $C_1 V_0 = C V_e$  ; Ainsi :  $C_1 = \frac{C V_e}{V_0}$  ;

AN :  $C_1 = \frac{0,1 \times 10}{20}$  ; On obtient :  $C_1 = 5,0 \cdot 10^{-2}\text{ mol.L}^{-1}$ .

**Q11.** L'indicateur coloré doit avoir une zone de virage comprenant le pH à l'équivalence (7 ici). Le **BBT** convient donc ; on observera le passage du jaune (milieu acide avant l'équivalence) au bleu (milieu basique lorsque l'ion hydroxyde est en excès).

Titration 2 : Titration d'une solution acidifiée d'ions  $Al^{3+}_{(aq)}$ .

**Q12.** 1<sup>ère</sup> réaction :  $H_3O^+_{(aq)} + HO^-_{(aq)} = 2 H_2O_{(l)}$  ;  $V_{e1} = 10 \text{ mL}$  ;

2<sup>ème</sup> réaction :  $Al^{3+}_{(aq)} + 3HO^-_{(aq)} = Al(OH)_3_{(s)}$  ;  $V_{e2} = 25 \text{ mL}$ .

Le premier saut de pH correspond au volume déterminé à la **question 10**, lors du titrage des 20 mL d'acide chlorhydrique {  $H_3O^+_{(aq)}$  ;  $Cl^-_{(aq)}$  } ;

Ou bien 1<sup>ère</sup> réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte, soit HCl.

**Q13.** Volume ayant réagi avec  $Al^{3+}_{(aq)}$  :  $V_{A1} = V_{e2} - V_{e1}$  ; AN :  $V_{A1} = 15 \text{ mL}$ .

**Attention aux coefficients stœchiométriques de la 2<sup>ème</sup> réaction :**

Pour ce volume, on a  $n(Al^{3+})_0 = \frac{n(HO^-)_{eq}}{3}$  ; Soit :  $C_2 V_0 = \frac{C V_{A1}}{3}$  ; Ainsi :  $C_2 = \frac{C V_{A1}}{3 V_0}$  ;

AN :  $C_2 = \frac{0,1 \times 15}{3 \times 20}$  ; On obtient :  $C_2 = 2,5 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .

Et la masse ayant servi :  $m = n(Al^{3+}) \times M(AlCl_3, 6H_2O)$ .

Soit :  $m = C_2 V_0 \times M(AlCl_3, 6H_2O)$ .

avec  $M(AlCl_3, 6H_2O) = 27 + 3 \times 35,5 + 6 \times 18$  ; Soit  $M(AlCl_3, 6H_2O) = 241,5 \text{ g.mol}^{-1}$ .

AN :  $m = 2,5 \cdot 10^{-2} \times 20 \cdot 10^{-3} \times 241,5$  ; On obtient :  $m \approx 121 \text{ mg}$ .

Exploitation du point anguleux :

**Q14. Attention au sens de la réaction : Sens de la dissolution du précipité :**

$Al(OH)_3_{(s)} = Al^{3+}_{(aq)} + 3HO^-_{(aq)}$  ;  $K = K_s$ .

**Q15.** En D,  $pH = 3,9$  ; Soit  $[HO^-] = \frac{K_e}{10^{-pH(D)}}$  ; AN :  $[HO^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-3,9}}$

On obtient :  $[HO^-] = 7,9 \cdot 10^{-11} \text{ mol.L}^{-1}$ .

**Q16.** Au point D, les ions  $Al^{3+}$  n'ont pas encore réagi.

Donc en solution, on a :  $[Al^{3+}] = \frac{C_2 V_0}{V_0 + V_D}$ .

AN :  $[Al^{3+}] = \frac{2,5 \cdot 10^{-2} \times 20}{20 + 10}$  ; On obtient :  $[Al^{3+}] \approx 1,7 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$ .

Et par définition,  $K_s = [Al^{3+}] [HO^-]^3$ .

AN :  $K_s = 1,7 \cdot 10^{-2} \times (7,9 \cdot 10^{-11})^3$  ; On obtient :  $K_s \approx 8,4 \cdot 10^{-33}$  ( $pK_s \approx 32,1$ )