

# Correction du TD d'entraînement



## I Filtre ADSL

Un lutin malin semble avoir chourré votre filtre ADSL. Sale histoire. Heureusement, vous avez les connaissances pour en recréer un ! En sachant que les signaux transmis par une ligne téléphonique utilisent une très large gamme de fréquences, divisée en deux parties :

- ◇ les signaux téléphoniques (transmettant la voix) utilisent les fréquences de 0 à 4 kHz ;
- ◇ les signaux informatiques (Internet) utilisent les fréquences de 25 kHz à 2 MHz.

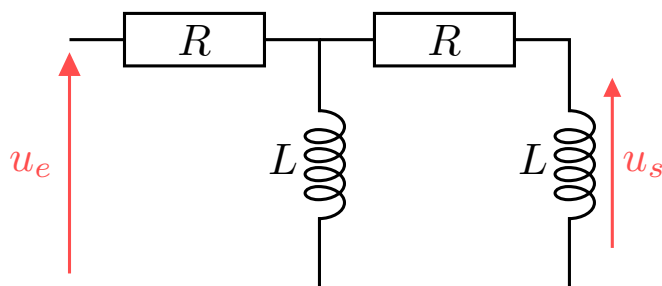
- 1) Quel type de filtre faut-il utiliser pour récupérer seulement les signaux téléphoniques ? Les signaux informatiques ? Quelle fréquence de coupure peut-on choisir ?

### Réponse

On isole les signaux téléphoniques avec un **filtre passe-bas**, et les signaux informatiques avec un **filtre passe-haut**. La fréquence de coupure doit être à la fois nettement supérieure aux fréquences téléphoniques et nettement plus faible que les fréquences informatiques : on prendra donc  $f_0 = 10 \text{ kHz}$ .



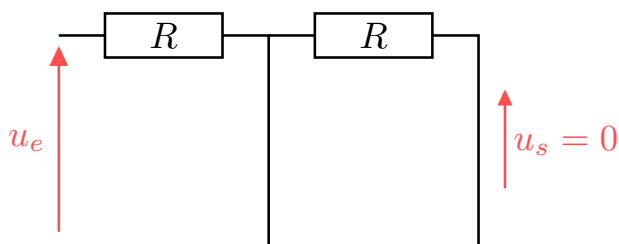
Vous réalisez le filtre ci-dessous.



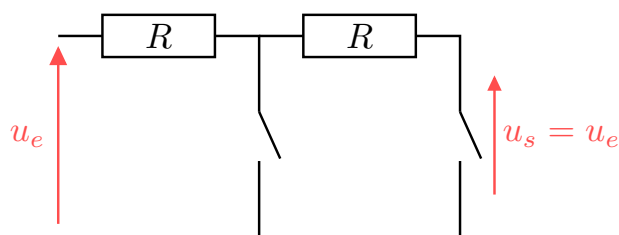
- 2) Déterminer la nature du filtre grâce à son comportement asymptotique en basses fréquences et en hautes fréquences. En déduire pour quels signaux il peut être utilisé.

### Réponse

En basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ), les bobines se comportent comme des fils, soit



En hautes fréquences ( $\omega \rightarrow \infty$ ), les bobines se comportent comme des interrupteurs ouverts, soit



Ainsi, le signal de sortie est non nul pour les hautes fréquences, et négligeable pour les basses fréquences : c'est un **filtre passe-haut**. Il permettra d'obtenir les signaux informatiques.



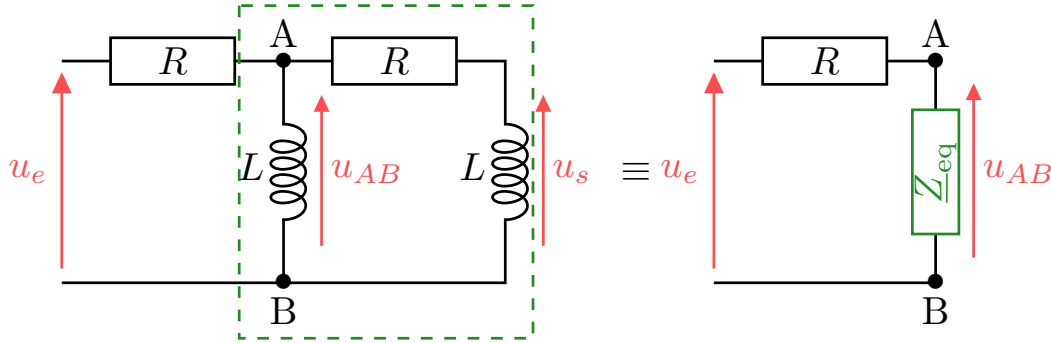
- 3) Montrer que la fonction de transfert de ce filtre peut se mettre sous la forme :

$$\underline{H}(x) = \frac{-x^2}{1 + 3jx - x^2} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

et exprimer  $\omega_0$  en fonction de  $R$  et  $L$ .

### Réponse

Pour exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_e$ , on peut faire un premier pont diviseur de tension pour exprimer  $u_s$  en fonction de  $u_{AB}$  du milieu ; puis avec une impédance équivalente à l'ensemble des 3 dipôles de droite, on refait un pont diviseur de tension pour avoir  $u_{AB}$  en fonction de  $u_e$ , et on combine.



On a donc d'abord :

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{jL\omega + R} \underline{U}_{AB}$$

On aura donc ensuite :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_R} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e$$

On calcule alors  $\underline{Y}_{eq}$  :

$$\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{jL\omega} + \frac{1}{R + jL\omega}$$

Et on combine :

$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= \frac{jL\omega}{R + jL\omega} \times \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + R \left( \frac{R + jL\omega}{jL\omega} + 1 \right)} \times \frac{jL\omega}{jL\omega} \underline{U}_e \\ &\Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{-(L\omega)^2}{R^2 + 3jRL\omega - (L\omega)^2} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{\cancel{R^2} - \left( \frac{L}{R} \omega \right)^2}{1 + 3j \frac{L}{R} \omega - \left( \frac{L}{R} \omega \right)^2} \underline{U}_e \end{aligned}$$

Ainsi, en divisant par  $\underline{U}_e$  pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\boxed{\underline{H} = \frac{-x^2}{1 - x^2 + 3jx}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{R}{L}}$$



- 4) Tracer le diagramme de Bode asymptotique (gain et phase) de ce filtre, puis esquisser l'allure de la courbe réelle de gain en la justifiant.

### Réponse

Pour  $x \gg 1$ , les termes en  $x^2$  l'emportent sur les autres termes au numérateur et au dénominateur, et la fonction de transfert devient  $\underline{H} \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 1$ , donc  $\boxed{G_{dB} = 0}$  et  $\boxed{\varphi = 0}$  (réel positif).

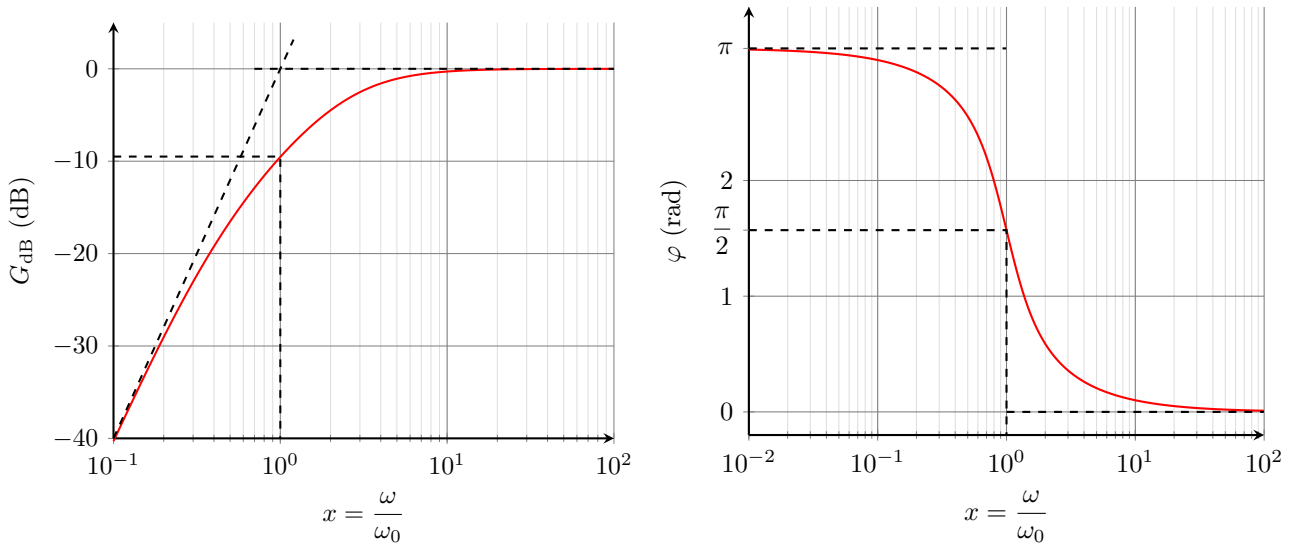
Pour  $x \ll 1$ , les termes en  $x$  sont négligeables devant 1 au dénominateur, et on garde le numérateur : la fonction de transfert devient donc  $\underline{H} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} -x^2$ , donc  $\boxed{G_{dB} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 40 \log(x)}$  (pente de 40 dB/décade). Pour la phase, c'est moins évident, on pourrait avoir  $\varphi = \pm\pi$  puisque c'est un réel négatif. Il faut étudier le domaine d'existence  $\forall x$  :

$$\begin{aligned} \arg(\underline{H}(x)) &= \arg(-x^2) - \arg(1 - x^2 + 3jx) \\ &= \arg(-x^2) + \arg\left((1 - x^2 - 3jx) \frac{j}{j}\right) \\ &= \underbrace{\arg(-x^2)}_{\pm\pi} + \underbrace{\arg(3x + j(1 - x^2))}_{\in ]-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}[} - \underbrace{\arg(j)}_{\frac{\pi}{2}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} -\arg(z) = \arg(z^*) \\ \arg\left(\frac{z_1}{z_2}\right) = \arg(z_1) - \arg(z_2) \end{array} \right\}$$

$\in ]-\pi; 0[$

Ainsi, pour que l'angle s'exprime entre  $]-\pi; \pi[$ , on a forcément  $\arg(-x^2) = +\pi$ , soit  $\boxed{\varphi = \pi}$ .

Pour  $x = 1$ , on trouve  $\underline{H}(1) = j/3$  donc  $\boxed{G_{dB}(1) = 20 \log(1/3) = -9,5 \text{ dB}}$ , et  $\boxed{\varphi(1) = \pi/2}$  (imaginaire pur).



Il n'y a pas de pic de résonance car le facteur de qualité  $Q$  est plus petit que  $1/\sqrt{2}$ .



- 5) Vous possédez des résistances de  $100 \Omega$ . Quelle valeur d'inductance  $L$  choisir pour réaliser le filtre souhaité ?

**Réponse**

La fréquence de coupure est  $f_0 = \frac{\omega_0}{2\pi} = \frac{R}{2\pi L}$  ; on doit donc prendre

$$\boxed{L = \frac{R}{2\pi f_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 100 \Omega \\ f_0 = 10 \text{ kHz} \end{cases}$$

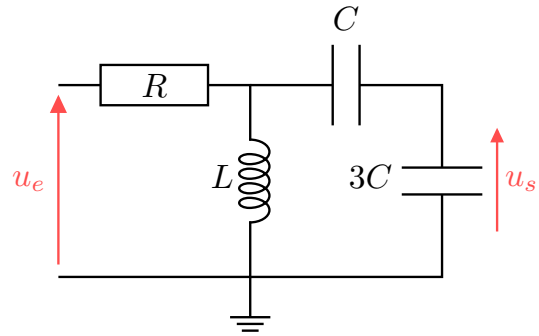
A.N. :  $\boxed{L = 1,6 \text{ mH}}$





## II Filtre de COLPITTS

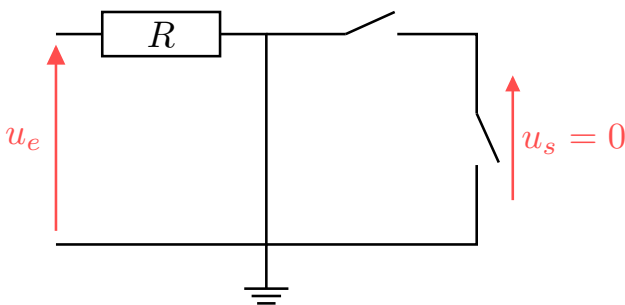
On considère le quadripôle suivant, où  $C$  est une capacité,  $R$  une résistance et  $L$  une inductance. Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé de pulsation  $\omega$ , en sortie « ouverte » (rien n'est branché aux bornes de sortie).



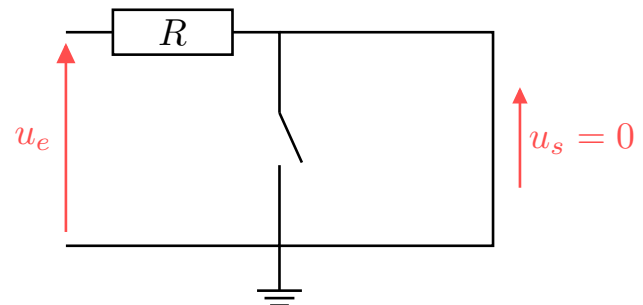
- 1) Étudier qualitativement le comportement de ce quadripôle en hautes et basses fréquences. De quel type de filtre s'agit-il ?

### Réponse

En basses fréquences ( $\omega \rightarrow 0$ ), les condensateurs se comportent comme des interrupteurs ouverts, la bobine comme un fil : la tension  $u_s$  est donc nulle.



En hautes fréquences ( $\omega \rightarrow \infty$ ), les condensateurs se comportent comme des fils, la bobine comme un interrupteur ouvert : la tension  $u_s$  est donc nulle.



Comme la tension est nulle aux extrêmes, c'est un **passes-bande**. Si elle était égale à la tension d'entrée aux extrêmes, ça serait un coupe-bande.



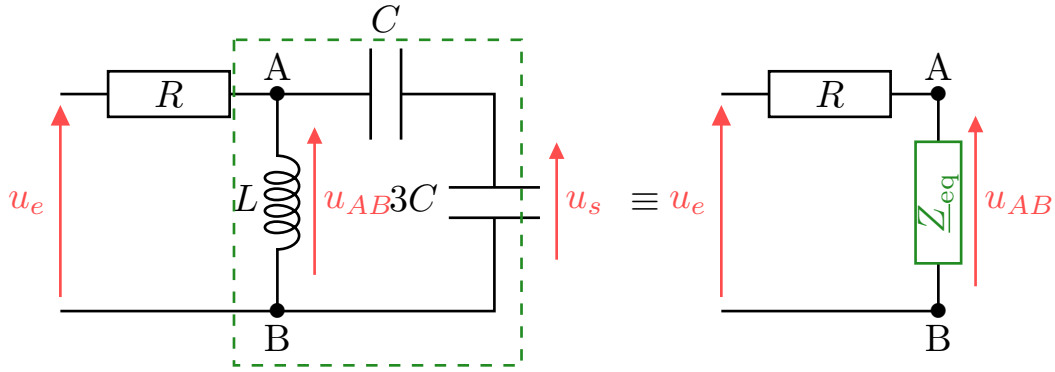
- 2) Déterminer la fonction de transfert  $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_s}{u_e}$  et la mettre sous l'une des formes équivalentes :

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} = \frac{j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j \frac{\omega}{Q \omega_0}}$$

En introduisant des constantes  $A$ ,  $\omega_0$  et  $Q$  dont on précisera les expressions en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

### Réponse

On effectue deux diviseurs de tension successifs : un pour déterminer  $u_s$  en fonction de  $u_L$ , puis avec une impédance équivalente des trois dipôles de droite, on détermine  $u_L$  en fonction de  $u_e$  et on combine. C'est le même fonctionnement que pour l'exercice sur l'ADSL, question 3.



On a ainsi en premier lieu

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_{3C}}{\underline{Z}_{3C} + \underline{Z}_C} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1/j3C\omega}{1/j3C\omega + 1/jC\omega} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1}{1+3} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_s = \frac{\underline{U}_{AB}}{4}}$$

On aura donc ensuite :

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_R} \underline{U}_e \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_R \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e}$$

On calcule alors  $\underline{Y}_{eq}$  de l'association en parallèle de  $L$  et  $C$  en série avec  $3C$ . **Attention** à l'association en série de capacités :

$$\underline{Z}_{C+3C} = \frac{1}{j3C\omega} + \frac{1}{jC\omega} \times \frac{3}{3} = \frac{4}{j3C\omega}$$

$$\underline{Y}_{eq} = \underline{Y}_L + \underline{Y}_{C+3C} \Leftrightarrow \boxed{\underline{Y}_{eq} = \frac{1}{jL\omega} + j3C\omega/4}$$

Et on combine :

$$\underline{U}_s = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + R \left( \frac{1}{jL\omega} + \frac{j3C\omega}{4} \right)} \underline{U}_e \Leftrightarrow \underline{U}_s = \frac{1}{4} \frac{1}{1 + j \left( -\frac{R}{L\omega} + \frac{3RC\omega}{4} \right)} \underline{U}_e$$

Ainsi, en divisant par  $\underline{U}_e$  pour avoir la fonction de transfert, on a :

$$\underline{H} = \frac{1/4}{1 + j \left( \frac{3RC\omega}{4} - \frac{R}{L\omega} \right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{A}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{A = \frac{1}{4}}$$

Reste à trouver  $Q$  et  $\omega_0$ . Pour cela, on identifie membre à membre :

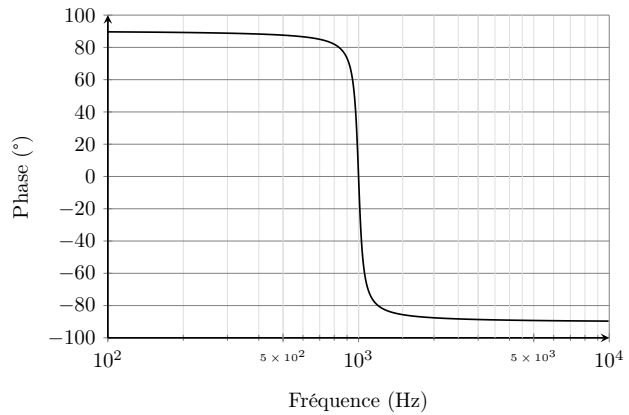
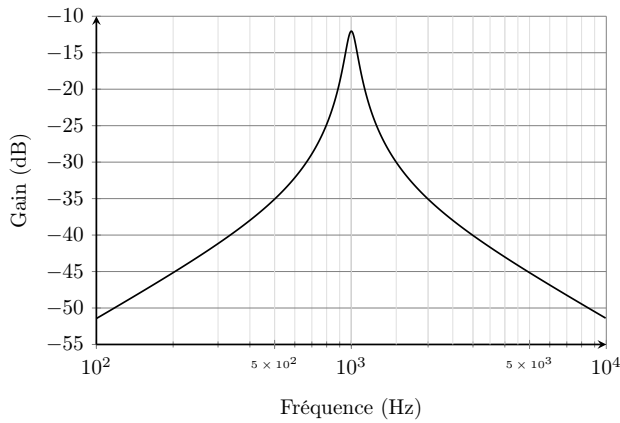
$$\frac{Q}{\omega_0} = \frac{3RC}{4} \quad (1) \quad \text{et} \quad Q\omega_0 = \frac{R}{L} \quad (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{R\sqrt{3C}}{2\sqrt{L}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_0 = \frac{2}{\sqrt{3LC}}}$$

où l'on obtient  $Q$  et  $\omega_0$  en multipliant les équations (1) et (2) d'une part puis en en prenant la racine carrée, et en divisant (2) par (1) en en prenant la racine carrée, respectivement.



Le diagramme de BODE de ce quadripôle pour  $Q = 6$  est donné ci-dessous.



- 3) Justifier l'allure des parties rectilignes du diagramme. Dédurre du diagramme la valeur de la fréquence d'accord  $f_0 = \omega_0/2\pi$  ainsi que des fréquences de coupure.

### Réponse

Les parties rectilignes du diagramme correspondent aux limites asymptotiques du gain en décibels, c'est-à-dire pour  $\omega \ll \omega_0$  et  $\omega \gg \omega_0$ . En effet,

$$\begin{aligned} \underline{H} &\underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} j \frac{A}{Q} \frac{\omega}{\omega_0} & \text{et} & \quad \underline{H} \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -j \frac{A}{Q} \frac{\omega_0}{\omega} \\ \Leftrightarrow G_{\text{dB}} &\underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} 20 \log \frac{A}{Q} + 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} & \text{et} & \quad G_{\text{dB}} \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} 20 \log \frac{A}{Q} - 20 \log \frac{\omega}{\omega_0} \\ &\Leftrightarrow \varphi \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \frac{\pi}{2} & \text{et} & \quad \varphi \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$

Pour  $\omega = \omega_0$ , on trouve simplement  $\underline{H} = A$  donc  $G_{\text{dB}}(\omega_0) = -12 \text{ dB}$  et  $\varphi = 0$ . La fréquence de résonance (ou fréquence d'accord) correspond au pic du diagramme de BODE (ou à l'intersection des asymptotes du gain en décibels) d'une part, ou correspond à la fréquence pour laquelle la phase est nulle : on lit simplement  $f_0 = 1 \text{ kHz}$ .

On trouve les fréquences de coupure en trouvant les fréquences  $f_1$  et  $f_2$  telles que  $G_{\text{dB}} = G_{\text{max}} - 3 \text{ dB}$ , soit  $G_{\text{dB}} = -15 \text{ dB}$  : on lit approximativement  $f_1 = 950 \text{ Hz}$  et  $f_2 = 1050 \text{ Hz}$ .



## ★ III Filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3

On veut réaliser un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3, dont le module  $H$  de sa fonction de transfert harmonique en tension  $\underline{H}$  s'exprime :

$$H = |\underline{H}| = \sqrt{\frac{1}{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^6}} = \sqrt{\frac{1}{1 + x^6}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

- 1) Montrer qu'une fonction de transfert  $\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}$  correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

### Réponse

Il suffit pour cette question de développer les puissances sur les  $j$ , de calculer le module et de développer :

$$\underline{H} = (1 + 2jx - 2x^2 - jx^3)^{-1} \Leftrightarrow |\underline{H}| = ((1 - 2x^2)^2 + (2x - x^3)^2)^{-1/2}$$

$$\Leftrightarrow |H| = (1 - \cancel{4x^2} + \cancel{4x^4} + \cancel{4x^2} - \cancel{4x^4} + x^6)^{-1/2} = (1 + x^6)^{-1/2}$$

ce qui correspond bien à un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.



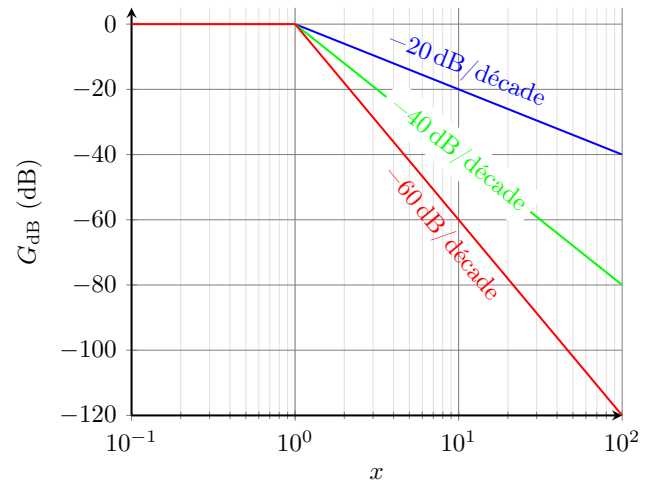
- 2) Étudier et représenter le diagramme de BODE asymptotique en amplitude de cette fonction de transfert.

### Réponse

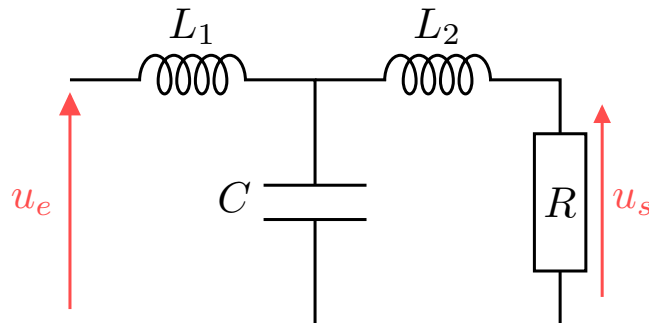
Pour étudier le diagramme de BODE asymptotique, on définit d'abord le gain en décibels :  
 $G_{dB} = 20 \log(|H|) = 20 \log((1 + x^6)^{-1/2}) = -10 \log(1 + x^6)$ . Ensuite, on étudie son comportement asymptotique pour  $x \ll 1$  et  $x \gg 1$  : on trouve

$$\boxed{G_{dB} \underset{x \ll 1}{\sim} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{G_{dB} \underset{x \gg 1}{\sim} -60 \log(x)}$$

d'où le diagramme de BODE asymptotique ci-contre. Par rapport à de l'ordre 1 ( $-20$  dB/décade) ou de l'ordre 2 ( $-40$  dB/décade), l'atténuation des hautes fréquences est encore plus prononcée : une fréquence 10 fois supérieure à  $f_0$  serait atténuée d'un facteur 1000 au lieu d'un facteur 10.



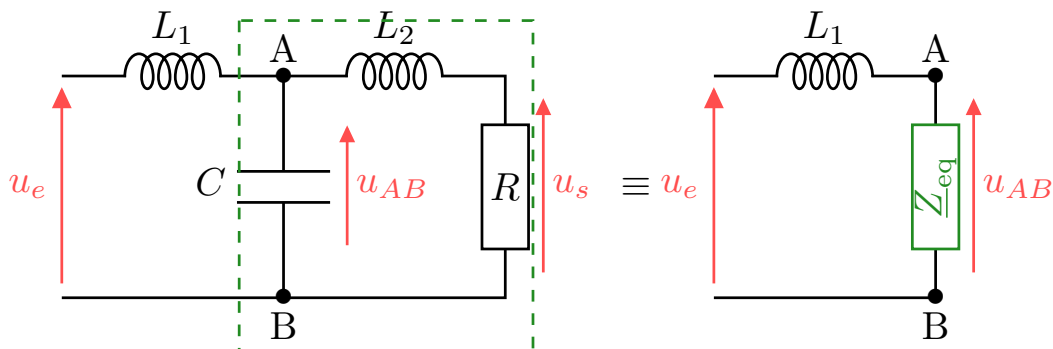
- 3) On considère le quadripôle ci-dessous :



Calculer en fonction de  $R$  et  $\omega_0$ , les valeurs de  $L_1$ ,  $L_2$  et  $C$  pour que ce filtre soit un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3.

### Réponse

Ici encore, on utilise deux ponts diviseurs de tension successifs : on calcule  $u_s$  en fonction de  $u_{AB}$ , puis  $u_{AB}$  en fonction de  $u_e$  après avoir déterminé l'impédance équivalente de l'ensemble des dipôles de droite.



On aura donc en premier lieu

$$\underline{U}_s = \frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_{L_2}} \underline{U}_{AB} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_s = \frac{R}{R + jL_2\omega} \underline{U}_{AB}}$$

Et ensuite, on aura

$$\underline{U}_{AB} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_{L_1}} \underline{U}_e \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_{AB} = \frac{1}{1 + \underline{Z}_{L_1} \underline{Y}_{eq}} \underline{U}_e}$$

On calcule alors  $\underline{Y}_{eq}$  de l'association en parallèle de  $C$  et  $L_2$  en série avec  $R$  :

$$\begin{aligned} \underline{Z}_{L_2+R} &= jL_2\omega + R \\ \underline{Y}_{eq} &= \underline{Y}_C + \underline{Y}_{L_2+R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = jC\omega + \frac{1}{jL_2\omega + R} \Leftrightarrow \underline{Y}_{eq} = \frac{jC\omega(jL_2\omega + R) + 1}{jL_2\omega + R} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\underline{Y}_{eq} = \frac{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}{R + jL_2\omega}} \end{aligned}$$

Et on combine :

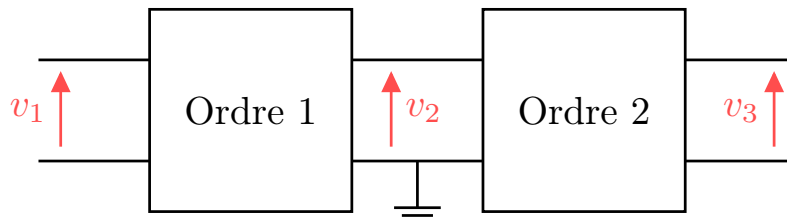
$$\begin{aligned} \underline{U}_s &= \frac{R}{R + jL_2\omega} \times \frac{1}{1 + jL_1\omega \left( \frac{1 - L_2C\omega^2 + jRC\omega}{R + jL_2\omega} \right)} \underline{U}_e \\ \Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{R}{R + jL_2\omega} \times \frac{1}{1 + \frac{jL_1\omega - jL_1L_2C\omega^3 + (j\omega)^2 RCL_1}{R + jL_2\omega}} \underline{U}_e \\ \Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{R}{R + jL_2\omega + jL_1\omega - jL_1L_2C\omega^3 + (j\omega)^2 RCL_1} \underline{U}_e \\ \Leftrightarrow \underline{U}_s &= \frac{1}{1 + j\omega \frac{L_1 + L_2}{R} + (j\omega)^2 L_1C + (j\omega)^3 \frac{L_1L_2C}{R}} \underline{U}_e \end{aligned}$$

en utilisant que  $-j = j^3$ . Ainsi, en divisant par  $\underline{U}_e$  pour avoir la fonction de transfert, on a bien

$$\boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + 2jx + 2(jx)^2 + (jx)^3}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \frac{2}{\omega_0} = \frac{L_1 + L_2}{R} \\ \frac{2}{\omega_0^2} = L_1C \\ \frac{1}{\omega_0^3} = \frac{L_1L_2C}{R} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} L_1 = \frac{3R}{2\omega_0} \\ L_2 = \frac{R}{2\omega_0} \\ C = \frac{4}{3R\omega_0} \end{cases}$$



- 4) Justifier que l'on puisse réaliser le filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 en associant en cascade un filtre d'ordre 1 et un filtre d'ordre 2, comme sur le circuit suivant :





Préciser la valeur du facteur de qualité du filtre d'ordre 2.

---

**Réponse**

---

Pour mettre des filtres en cascade et avoir  $\underline{H} = \underline{H}_1 \underline{H}_2$ , il faut que l'impédance de sortie du filtre 1 soit faible devant l'impédance d'entrée du filtre 2. Dans ce cas, on utilise un filtre d'ordre 1 avec un numérateur constant (donc un passe-bas de la forme  $\underline{H}_1 = \frac{H_1}{1+jx}$ ), et un filtre d'ordre 2 avec un numérateur lui aussi constant : soit un passe-bas soit un passe-bande. Le passe-bande fait intervenir  $jQ \left(x - \frac{1}{x}\right)$  au dénominateur, donc il est plus simple d'utiliser un passe-bas d'ordre 2 avec  $1 + j/Qx + (jx)^2$  au dénominateur :

$$\underline{H} = \frac{H_1}{1+jx} \times \frac{H_2}{1 + \frac{j}{Q}x + (jx)^2} = \frac{H_1 H_2}{1 + jx \left(1 + \frac{1}{Q}\right) + (jx)^2 \left(1 + \frac{1}{Q^2}\right) + (jx)^3}$$

Pour trouver un filtre de BUTTERWORTH d'ordre 3 de cette manière, il faut donc  $H_1 = H_2 = 1$  et  $\boxed{Q = 1}$ .

