Devoir maison 1

Fibre optique

Ce sujet comporte 4 pages et doit être traité en intégralité. Comme pour tous DMs, vous pouvez vous entraider pour les questions les plus difficiles. Cependant, **la rédaction doit rester personnelle**.

Dans tout cet exercice, on notera $c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m\,s^{-1}}$ la célérité de la lumière dans le vide.

I Généralités

1. Énoncer les lois de Snell-Descartes relatives à la réflexion et à la réfraction de la lumière en les accompagnant d'un schéma.

II La fibre optique à saut d'indice

Une fibre optique à saut d'indice, représentée figure 1.1, est constituée d'un cœur cylindrique transparent d'indice $n_c = 1{,}500$ et de rayon r_c, entouré d'une gaine transparente d'indice $n_g = 1{,}485$. L'axe Ox de la fibre est normal au dioptre air-cœur. En raison de la symétrie de révolution de la fibre autour de l'axe Ox, on se restreint à une étude dans le plan (Oxy).

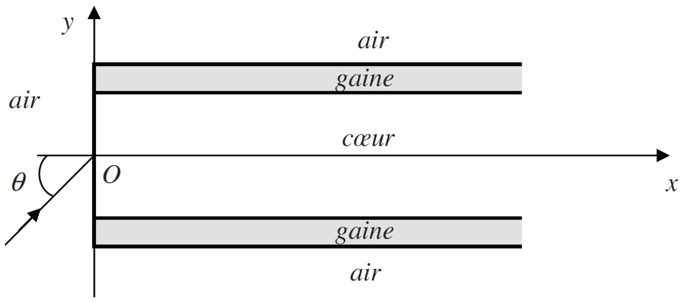


Figure 1.1 – Fibre optique à saut d'indice

2. Un rayon lumineux monochromatique se propageant dans l'air, situé dans le plan (Oxy), pénètre dans le cœur de la fibre en O avec un angle d'incidence θ. Justifier que le rayon reste dans le cœur si l'angle θ est inférieur à un angle limite θ_L, appelé angle d'acceptance de la fibre optique. Montrer que θ_L peut se mettre sous la forme :

$$\theta_L = \arcsin\left(\frac{n_c}{n_a}\sqrt{1 - \left(\frac{n_g}{n_c}\right)^2}\right)$$

   Calculer la valeur de θ_L. On considèrera que l'indice de l'air vaut $n_a = 1{,}000$.

On considère maintenant une fibre optique de longueur L. Le rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable compris entre 0 et θ_L.

3. Quel est le rayon qui traverse le plus rapidement la fibre ? Exprimer, en fonction de L, c et n_c, la durée du parcours T_1 de ce rayon.

4. Quel est le rayon qui met le plus de temps à traverser la fibre ? Exprimer, en fonction de L, c, n_g et n_c, la durée du parcours T_2 de ce rayon.

5. En déduire l'expression de l'intervalle de temps $\delta T = T_2 - T_1$ en fonction de L, c, n_g et n_c.

À l'aide de développements limités, on peut démontrer que :

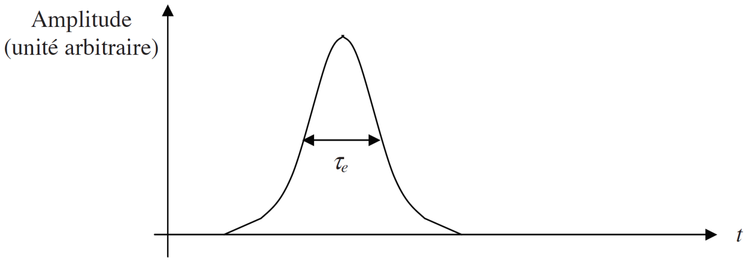
$$\text{si } \alpha \ll 1 \text{ , alors } \begin{cases} \sqrt{1-2\alpha} & \simeq & 1-\alpha \\ \dfrac{1}{1-\alpha} & \simeq & 1+\alpha \end{cases}$$

On admettra ces deux relations sans chercher à les démontrer.

6. On définit $2\Delta = 1 - \left(\dfrac{n_g}{n_c}\right)^2$. Calculer Δ. Est-il raisonnable d'écrire $\Delta \ll 1$?

7. À l'aide des relations précédentes, exprimer δT en fonction de L, c, n_c et Δ uniquement. Calculer la valeur de δT pour $L = 10\,\text{km}$.

On injecte à l'entrée de la fibre une impulsion lumineuse de durée τ_e, appelée *un bit* et représentée ci-dessous, formée par un faisceau de rayons ayant un angle d'incidence compris entre 0 et θ_L.



On admet ici, en négligeant tout phénomène d'absorption de la lumière par la fibre, que l'allure de l'impulsion en sortie de fibre est identique à l'impulsion d'entrée, mais avec une amplitude plus faible (par conservation de l'énergie lumineuse du *bit*) et une durée $\tau_s = \tau_e + \delta T$.

8. Recopier la figure et tracer l'allure de l'impulsion lumineuse en sortie de fibre optique.

9. Le codage binaire de l'information consiste à envoyer des impulsions lumineuses (les *bits*) périodiquement avec une fréquence f. En supposant τ_e négligeable devant δT, quelle est la fréquence maximale de transmission f_{max} pour pouvoir utiliser correctement la fibre ?

10. En considérant L_{max} la longueur maximale de fibre optique permettant d'utiliser la fibre correctement, on définit le produit $B_0 = L_{max} \times f$ comme étant la bande passante de la fibre optique. Exprimer B_0 en fonction de c, n_c et Δ. Expliquer l'intérêt d'introduire cette grandeur.

11. Pour un débit de 100 Mbits par seconde, évaluer et commenter la longueur maximale de fibre optique que l'on peut utiliser pour transmettre le signal.

12. Si la fibre peut être courbée sans grand inconvénient mécanique, cette courbure peut néanmoins conduire à une perte de l'énergie guidée. Expliquer la raison de cette perte dans une fibre optique à saut d'indice en raisonnant avec des rayons entrant perpendiculairement à la section d'entrée de la fibre. On produira un schéma.

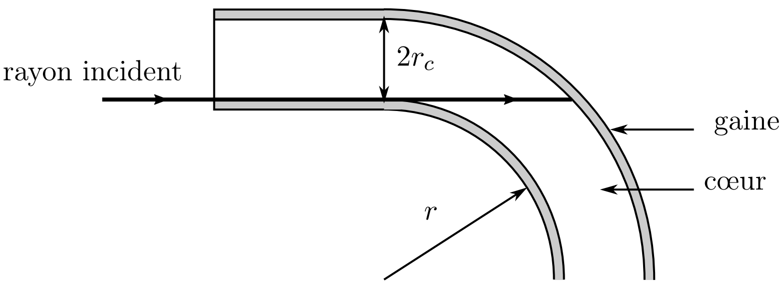


Figure 1.2 – Perte de courbure dans la fibre optique à saut d'indice

13. En considérant un rayon pénétrant dans la fibre, perpendiculairement à sa section, à la limite du bord inférieur, donner en fonction de n_c, n_g et r_c , l'expression du rayon de courbure r à partir duquel la perte énergétique apparaîtra. On négligera l'épaisseur de la gaine devant le rayon r_c du cœur de la fibre. Calculer ce rayon r en considérant que $r_c = 5{,}0 \times 10^{-1}\,\text{mm}$, $n_c = 1{,}500$ et $n_g = 1{,}485$. Conclure.

III La fibre optique à gradient d'indice

Pour remédier à l'élargissement des impulsions, on a fabriqué des fibres dites à gradient d'indice dans lesquelles on a remplacé le coeur par un milieu inhomogène d'indice $n(y)$ vérifiant la relation

$$n^2(y) = n_c^2 \times \left[1 - 2\Delta \left(\frac{y}{r_c}\right)^2\right] \quad \text{pour} \quad |y| \leq r_c,$$

où y désigne la distance algébrique du point considéré à l'axe Ox et r_c le rayon du coeur de la fibre, et $2\Delta = 1 - (n_g/n_c)^2$. La gaine reste homogène d'indice n_g et on a encore $n(y=0) = n_c = 1{,}500$. Le rayon entre dans la fibre en O avec un angle d'incidence θ compris entre 0 et θ_L. Dans ces conditions, la trajectoire du rayon lumineux est celle indiquée en figure 1.3.

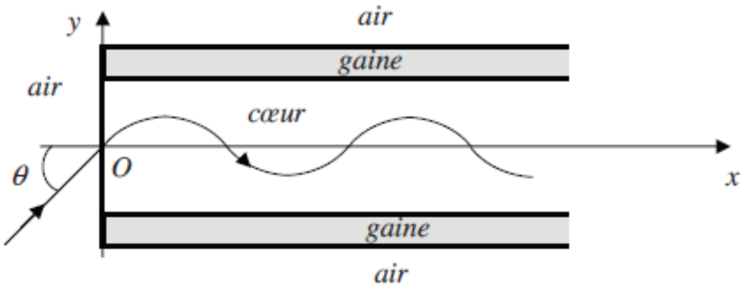


Figure 1.3 – Fibre à gradient d'indice

14. Tracer l'évolution de n^2 en fonction de $X = \dfrac{y}{r_c}$ pour $X \in [-1{,}1]$.

15. Soit un point M du rayon lumineux repéré par ses coordonnées (x, y). On introduit φ, l'angle formé en M entre la tangente au rayon lumineux et l'axe Ox comme indiqué en figure 1.4. En considérant le cœur comme un milieu stratifié formé de milieux d'indices $n_0, n_1, \ldots n_j, \ldots$ limités par des dioptres plans parallèles, d'équation $y =$ cste, quelles relations lient les indices n_{j-1}, n_j, et n_{j+1} aux angles d'incidence i_{j-1}, i_j, i_{j+1} ?

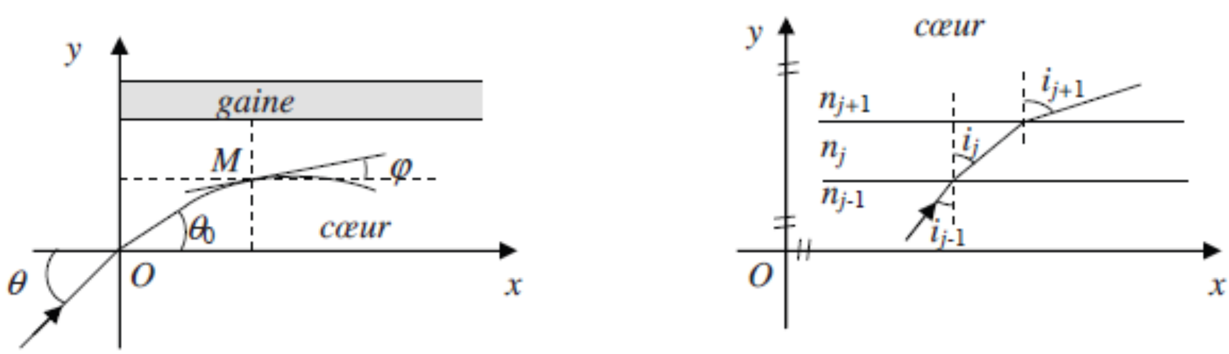


Figure 1.4 – Trajectoire du rayon lumineux dans une fibre à gradient d'indice

16. En considérant que cette propriété est valable pour une fibre à gradient d'indice, que peut-on dire de la quantité $n(y)\cos\varphi$? Exprimez-la en fonction de n_c et $\theta_0 = \arcsin\left(\dfrac{n_a \sin\theta}{n_c}\right)$.

17. Relier, $\dfrac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}$, la pente de la tangente du rayon lumineux en M, à l'angle φ. Montrer alors que :

$$\left(\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}x}\right)^2 = \left(\frac{n(y)}{n_c \cos\theta_0}\right)^2 - 1.$$

18. En dérivant l'équation précédente et en utilisant l'expression de $n^2(y)$, on aboutit à l'équation différentielle suivante :

$$\frac{\mathrm{d}^2 y}{\mathrm{d}x^2} + k^2 y = 0 \quad \text{avec} \quad k^2 = \frac{2\Delta}{(r_c \cos\theta_0)^2}.$$

L'ensemble des solutions à cette équation s'écrit

$$y(x) = A_1 \cos(kx) + A_2 \sin(kx) \quad \text{avec} \quad (A_1,A_2) \in \mathbb{R}^2$$

Déterminer les constantes A_1 et A_2 en exploitant les conditions aux limites $y(x=0)$ et $y'(x=0)$.

19. Montrer que le rayon lumineux coupe l'axe Ox en des points régulièrement espacés d'une distance d que l'on exprimera en fonction k, puis en fonction de r_c, Δ et θ_0.

20. Tracer l'allure du rayon dans la fibre optique en plaçant sur le schéma la distance d ainsi que l'amplitude Y_0 des oscillations. À quelle condition sur Y_0 le rayon peut-il ressortir de la fibre ? On suppose toujours que $\theta \leq \theta_L$.

21. On considère une impulsion lumineuse identique à celle de la question 8. Cette impulsion, en sortie d'une fibre optique à gradient d'indice de longueur L, possède un élargissement temporel,

$$\delta T' = \frac{n_c L}{c}\left(\frac{1}{2\cos\theta_0} - 1 + \frac{\cos\theta_0}{2}\right).$$

Évaluer cette durée pour $L = 10\,\mathrm{km}$ et l'angle θ_0 maximum. Commenter. Interpréter physiquement pourquoi l'élargissement temporel est plus petit dans une fibre à gradient d'indice.