Introduction – chapitre 1

Correction du TD

I Vitesse du son

1) Donner l'expression de la célérité c du son dans un fluide en fonction de la masse volumique du ρ du fluide et du coefficient d'incompressibilité χ, homogène à l'inverse d'une pression.

Réponse

Données

c est une vitesse, ρ une masse volumique et χ une grandeur relative à la pression. On nous donne $\dim \chi = \dim P^{-1}$ avec P une pression.

Résultat attendu

On cherche c en fonction de ρ et χ, soit

$$\boxed{c = \rho^{\alpha}\chi^{\beta}}$$

avec α et β à déterminer.

Outil

Une pression est une force surfacique, c'est-à-dire une force répartie sur une surface. On a donc

$$\dim P = \frac{\dim F}{\mathrm{L}^2}$$

De plus, la force de pesanteur s'exprime $F = mg$, avec g l'accélération de la pesanteur : ainsi,

$$\dim F = \dim m \cdot \dim g = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$$

Application

On commence par déterminer la dimension de c. En tant que vitesse, on a

$$\dim c = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

On exprime ensuite les dimensions de ρ et χ. D'une part,

$$\dim \rho = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \dim \chi &= \frac{\mathrm{L}^2}{\dim F} \\ \Leftrightarrow \dim \chi &= \frac{\mathrm{L}^{\cancel{2}}}{\mathrm{M} \cdot \cancel{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{T}^{-2}} \\ \Leftrightarrow \dim \chi &= \mathrm{L} \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2 \end{aligned}$$

L'expression recherchée revient à résoudre

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1} = (\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-1})^{\alpha}(\mathrm{L} \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2)^{\beta}$$

En développant, on trouve un système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta \\ -1 = 2\beta \\ 0 = \alpha - \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on peut exprimer c tel que

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}}$$

II Faire cuire des pâtes

Sur une facture d'électricité, on peut lire sa consommation d'énergie électrique exprimée en kWh (kilowatt-heure).

1) Quelle est l'unité SI associée ? Que vaut 1 kWh dans cette unité SI ?

Réponse

Donnée

Consommation électrique en kWh.

Résultat attendu

Unité associée en unités SI.

Outil

Toute énergie s'exprime en joules (J), et les **puissances** sont des **énergies par unité de temps**. Notamment pour les watts on a $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$.

Application

On a directement

$$1\,\mathrm{kWh} = 1 \times 10^3\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}{\cdot}h}$$

Avec l'évidence que $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$, finalement

$$1\,\mathrm{kWh} = 3{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}$$

◇

2) Sachant que la capacité thermique massique de l'eau est $c = 4{,}18\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}K^{-1}}$ et que le prix du kilowatt-heure est de 0,16 €, évaluer le coût du chauffage électrique permettant de faire passer 1 L d'eau de 20 °C à 100 °C.

Réponse

Données

Notre objet d'étude est l'eau. On a :

- $V_{\mathrm{eau}} = 1\,\mathrm{L}$;
- $T_{\mathrm{i}} = 20\,°\mathrm{C}$;
- $T_{\mathrm{f}} = 100\,°\mathrm{C}$;
- $c = 4{,}18\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}K^{-1}}$

De plus, on nous donne

- 1 kWh = 1 €.

Résultat attendu

On cherche à monter 1 L d'eau de 20 à 100 °C et d'en calculer le coût en euros.

Outil

On doit donc trouver le coût en énergie et le convertir en euro. On cherche pour ça une loi reliant l'énergie consommée avec les données du problème, sachant que **pour l'eau**, 1 L = 1 kg.

Application

L'énergie à apporter Q se déduit de la dimension de la capacité thermique massique : $\dim c = \dim Q \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \Theta^{-1}$. En appelant m la masse du volume d'eau, par cette analyse dimensionnelle on a

$$\boxed{Q = mc\Delta T}$$

On a donc

$$Q = 3{,}3 \times 10^{5}\,\mathrm{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 1\,\mathrm{kg} \\ c = 4{,}18\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ \Leftrightarrow c = 4{,}18 \times 10^{3}\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ \Delta T = 80\,\mathrm{K} \end{cases}$$

et pour utiliser le coût en euros, on la converti en kWh :

$$\underline{Q = 9{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{kWh} = 1{,}5 \times 10^{-2}\,€}$$

3) Si la plaque chauffe avec une puissance de $P = 1200\,\mathrm{W}$, combien de temps faudra-t-il pour chauffer ce litre d'eau ?

Réponse

Données

On utilise une plaque chauffante de puissance $P = 1200\,\mathrm{W}$.

Résultat attendu

On cherche la durée que cette plaque prendrait pour transférer l'énergie calculée précédemment.

Outil

Une puissance est une énergie par unité de temps, et $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$.

Application

On en déduit

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 3{,}3 \times 10^{5}\,\mathrm{J} \\ P = 1200\,\mathrm{J \cdot s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\Delta t = \frac{Q}{P} = \underline{2{,}8 \times 10^{2}\,\mathrm{s}}}$$

III TAYLOR meilleur que James BOND ?

À l'aide d'un film sur bande magnétique et en utilisant l'analyse dimensionnelle, le physicien Geoffrey TAYLOR a réussi en 1950 à estimer l'énergie $\mathcal{E}$ dégagée par l'explosion nucléaire du test TRINITY de 1945, valeur pourtant évidemment classifiée. Le film permet d'avoir accès à l'évolution du rayon $R(t)$ du « nuage » de l'explosion au cours du temps. Nous supposons que les grandeurs influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie $\mathcal{E}$ de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air.

1) Quelles sont les dimensions de ces grandeurs ?

Réponse

On a directement $\boxed{\dim R = \mathrm{L}}$, $\boxed{\dim t = \mathrm{T}}$, $\boxed{\dim \rho = \mathrm{M \cdot L^{-3}}}$ et $\boxed{\dim \mathcal{E} = \mathrm{M \cdot L^{2} \cdot T^{-2}}}$.

2) Chercher une expression de R sous la forme $R = k \times \mathcal{E}^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$, avec k une constante adimensionnée.

Réponse

Données

On nous donne la formule $R = k \times \mathcal{E}^\alpha t^\beta \rho^\gamma$ et que $\dim k = 1$.

Résultat attendu

On cherche α, β et γ tels que $R = k \times \mathcal{E}^\alpha t^\beta \rho^\gamma$

Outils

- $\dim \mathcal{E} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}$;
- $\dim t = \mathrm{T}$;
- $\dim \rho = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}$.

Application

$\dim R = L$, donc on a $$L = \left(\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}\right)^\alpha \mathrm{T}^\beta \left(\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}\right)^\gamma$$

Soit $$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 3\gamma \\ 0 = -2\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \gamma \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \alpha = \beta/2 \\ \alpha = 1/5 \end{cases}$$

Ainsi, $$\begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \gamma = -1/5 \\ \beta = 2/5 \end{cases}$$

Soit $$\boxed{R = k \times \mathcal{E}^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}}$$

◇

3) L'analyse du film montre que le rayon augmente au cours du temps comme $t^{2/5}$. Exprimer alors $\mathcal{E}$ en fonction de R, ρ et t.

Réponse

On isole simplement en mettant la relation à la puissance 5 : $\boxed{\mathcal{E} = k^{-5} R^5 t^{-2} \rho}$.

◇

4) En estimant que $R \approx 70\,\mathrm{m}$ après $t = 5\,\mathrm{ms}$, sachant que la masse volumique de l'air vaut $\rho \approx 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$ et en prenant $k \approx 1$, calculer la valeur de $\mathcal{E}$ en joules puis en kilotonnes de TNT (une tonne de TNT libère $4{,}18 \times 10^9$ J).

Réponse

On fait une simple application numérique :

$$\mathcal{E} = 8{,}0 \times 10^{13}\,\mathrm{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} k = 1 \\ R = 70\,\mathrm{m} \\ t = 5 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ \rho = 1{,}2\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \end{cases}$$

En équivalent tonne de TNT, on trouve :

$$\underline{\mathcal{E} = 19\,\mathrm{kT\ de\ TNT}}$$

Remarque

En réalité, l'explosion aura été estimée à [21 ; 24] kT de TNT des années plus tard, connaissant la composition de la bombe. Cependant, l'analyse dimensionnelle marche très bien, même si le $k \approx 1$ n'était pas évident. Voir le billet de blog de Science Étonnante joint à sa vidéo sur l'analyse dimensionnelle – que je vous recommande aussi.

◇