Mécanique – chapitre 1

# Cinématique du point

## Au programme

**Savoirs**

- ◇ Espace et temps classiques. Notion de référentiel. Caractère relatif du mouvement. Caractère absolu des distances et des intervalles de temps.
- ◇ Citer une situation où la description classique de l'espace ou du temps est prise en défaut.
- ◇ Identifier les degrés de liberté d'un mouvement. Choisir un système de coordonnées adapté au problème.

**Savoir-faire**

- ◇ Coordonnées cartésiennes : exprimer à partir d'un schéma le déplacement élémentaire, construire le trièdre local associé et en déduire géométriquement les composantes du vecteur vitesse.
- ◇ Mouvement à vecteur accélération constant : exprimer le vecteur vitesse et le vecteur position en fonction du temps. Établir l'expression de la trajectoire en coordonnées cartésiennes.
- ◇ Situer qualitativement la direction du vecteur vitesse et du vecteur accélération pour une trajectoire plane.

## Sommaire

La **cinématique** est l'étude du mouvement en soi. On ne s'intéresse pas aux causes qui ont donné naissance au mouvement. Avant toute chose, introduisons le vocabulaire autour de l'objet d'étude.

# I Système et point matériel

## I/A Système

**Définition 1.1 : Système**

En mécanique, le **système** est l'objet ou groupe d'objets dont on souhaite étudier le mouvement.

La définition du système est **primordiale et indispensable** pour la mécanique. En effet, l'étude du mouvement sera radicalement différente entre les systèmes {bille} et {bille+Terre}. Il en sera de même en dynamique, où ce sont les forces **extérieures** au système qui entrent en jeu, il faut donc définir l'extérieur.

## I/B Point matériel

Dans la cadre de la mécanique du point, la forme de l'objet importe peu. Ainsi, on choisira de suivre un point caractéristique du système, souvent son centre de gravité. Celui-ci pourra être repéré dans l'espace et le temps par 3+1 coordonnées.

**Définition 1.2 : Point matériel**

Le point matériel est le point qui représente l'objet auquel on affecte toute la masse de l'objet considéré. Ce point, appelé souvent M et affecté de la masse $m$, est le point géométrique que l'on repère dans l'espace pour connaître son mouvement.

# II Description et paramétrage du mouvement

## II/A Notion de référentiel et relativité du mouvement

Pour décrire le mouvement d'un objet, on doit :

- dire par rapport à quoi il se déplace : on définit alors une **origine** ;
- dire dans quelle direction il se déplace : on fixe alors un **repère** (système de coordonnées) ;
- dire sur quel intervalle de temps il se déplace : on définit un repère de temps.

**Définition 1.3 : Référentiel**

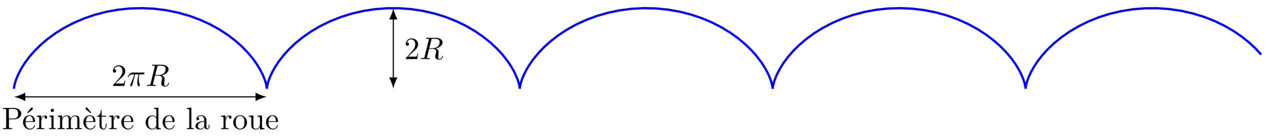
Un **référentiel**, noté $\mathcal{R}$, est une référence permettant de décrire le mouvement d'un objet, constitué par :

- un repère permettant de décrire l'espace ;
- une horloge permettant de mesurer le temps.

Un mouvement est toujours relatif, et **la description d'un mouvement dépend du référentiel**. Ainsi, on notera les grandeurs liées à un référentiel *via* l'indication de celui-ci en indice, précédé d'une barre oblique ou verticale selon la taille de la grandeur :

$$\boxed{\overrightarrow{x}_{/\mathcal{R}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}}$$

- Du point de vue de san voisin-e, læ passagær d'un train est immobile. Du point de vue du quai, cælui-ci est en translation.
- Du point de vue d'um cycliste, la valve de la roue est en rotation autour de l'axe de la roue. Selon um passant-e immobile, elle suit un mouvement de cycloïde. Son altitude atteint 0 à chaque tour de roue.




**Remarque 1.1 : Mécanique relativiste**

Nous resterons ici en mécanique **classique**, c'est-à-dire que les corps étudiés auront une vitesse très inférieure à celle de la lumière dans le vide. Ce faisant, les mesures de longueurs ou de durées seront **absolues** et indépendantes du référentiel. Ça n'est pas le cas en mécanique *relativiste*.

Par exemple, les muons sont des particules très instables, produites par le rayonnement cosmique dans la haute atmosphère. Ils se désintègrent normalement au bout de $\tau_{\text{labo}} = 2{,}20 \times 10^{-6}\,\text{s}$. Leur vitesse est mesurée à $v_{\text{muon}} \approx 0{,}9997c$.

On s'attendrait donc à ce que de sa formation en altitude à sa désintégration vers le sol, un muon parcourt $d_{\text{NR}} = v_{\text{muon}} \times \tau_{\text{labo}} = 658{,}36\,\text{m}$, et qu'il n'y en ait presque aucun à la surface terrestre.

En réalité, on en détecte énormément au sol et même sous la mer ! En mécanique classique, cela reviendrait à leur attribuer une vitesse de plusieurs millions de kilomètres par seconde. La théorie de la relativité nous expliquant que la vitesse de la lumière est indépassable, ceci paraît absurde. C'est notre manière d'interpréter les mesures qui s'avère fausse : le temps de vie d'un muon *mesuré sur Terre* n'est pas le même que son *temps propre*. On obtient

$$\tau_{\text{propre}} = \gamma\tau_{\text{labo}} \quad \text{avec} \quad \gamma = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{v^2}{c^2}}}$$

et ici, $\gamma = 4{,}08 \times 10^{+1}$. Par dilatation du temps, le muon parcourt une plus grand distance en gardant la même vitesse, ici jusqu'à

$$d_{\text{R}} = 2{,}69 \times 10^{+4}\,\text{m}$$

## II/B Exemples de référentiels

Le mouvement dépendant du référentiel, il faut choisir le référentiel adéquat par rapport au mouvement que l'on souhaite étudier. Souvent, on choisit parmi trois référentiels classiques :

- Le référentiel **héliocentrique** est un référentiel dont le centre du repère est situé au centre du **Soleil**, et les trois axes du repère sont dirigés vers **trois étoiles lointaines considérées comme fixes** ; il est utile pour étudier les mouvements des planètes du système solaire.
- Le référentiel **géocentrique** est un référentiel centré au centre de la **Terre**, ses trois axes sont dirigés vers les trois **mêmes étoiles** que celles du référentiel de héliocentrique ; il est utilise pour étudier les mouvements de satellites terrestres par exemple ;
- Les référentiels **terrestres** sont des référentiels liés à des objets fixes à la **surface** de la Terre : lui est souvent associé un repère cartésien. Pour tous les mouvements qui se déroulent à la surface de la Terre, ce référentiel est approprié.

## II/C Vecteur, base de projection et repère

Pour décrire le mouvement d'un point dans l'espace, il est nécessaire d'utiliser des vecteurs.

**Définition 1.4 : Vecteur**

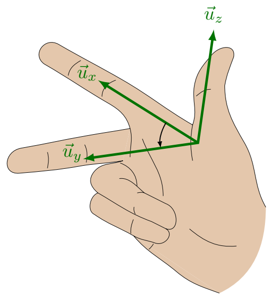
Un vecteur est un objet mathématique qui se dénote avec une flèche vers la droite au-dessus d'une lettre : $\vec{\cdot}$, et ayant :

- Un **point d'application** ;
- Un **sens** ;
- Une **direction** ;
- Une distance appelée **norme**, notée $||\vec{\cdot}||$.

**Une** égalité de vecteurs donne **trois** égalités de scalaires, pour chaque direction de l'espace.

On utilise pour ça une **base orthonormée directe**, constituée de 3 vecteurs :

- **Ortho** : les trois vecteurs de la base sont orthogonaux entre eux ;
- **Normée** : la norme des trois vecteurs de la base est égale à 1. On dit qu'ils sont *unitaires* ;
- **Directe** : respecte la règle de la main droite (chaque vecteur est égal au produit vectoriel des deux précédents).




Ainsi pour une base générique $\left(\vec{i}, \vec{j}, \vec{k}\right)$, on représente de manière équivalente un vecteur par ses composantes sur chaque vecteur de base exprimées en colonne, ou par sa représentation explicite en fonction desdits vecteurs de base :

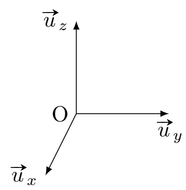
$$\vec{A} = \begin{pmatrix} a_i \\ a_j \\ a_k \end{pmatrix} \Leftrightarrow \vec{A} = a_i \vec{i} + a_j \vec{j} + a_k \vec{k}$$

Les vecteurs de base n'ont **pas d'unité**. Ils définissent les trois directions dans lesquelles le point M pourrait se mouvoir. Pour que le repérage dans l'espace du point M soit complet, on ajoute une origine O à la base : l'ensemble d'une **base** et d'une **origine** constituent un **repère**. Le plus simple est le repère cartésien :

**Définition 1.5 : Repère cartésien**

Le repère cartésien est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs $\vec{u_x}$, $\vec{u_y}$ et $\vec{u_z}$ de **direction constante dans le temps**. On trouve parfois la notation $\vec{e_x}$, $\vec{e_y}$, $\vec{e_z}$.

Jusqu'à notifié autrement, ce sera notre repère de prédilection.




$||\vec{u}_x|| = 1$ ; $||\vec{u}_y|| = 1$ ; $||\vec{u}_z|| = 1$

**Figure 1.1** – Repère cartésien.

**Attention 1.1 : Différence référentiel/repère**

Il ne faut pas confondre le **référentiel**, c'est-à-dire le système de référence (notion *physique*) avec le **repère**, c'est-à-dire l'outil géométrique qui sert à décrire le mouvement (notion *mathématique*). Il y a une infinité de repères différents qui peuvent être associés à un même référentiel.

## II/D Projection d'un vecteur sur un autre

Lors de l'étude de l'évolution d'un vecteur, il est commun de ne s'intéresser qu'à certaines composantes dudit vecteur sur les vecteurs de base du repère choisi. S'il est défini à partir ses composantes c'est une évidence, mais souvent on aura des vecteurs définis par une **norme** et un **angle** par rapport à l'un des axes.

**Outils 1.1 : Projection vectorielle (2D)**

Pour déterminer les coordonnées d'un vecteur sur les vecteurs de base d'un repère, on réalise une **projection** :

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u_x} = a_x \quad \text{et} \quad \overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{u_y} = a_y$$

On peut alors utiliser les propriétés du produit scalaire :

$$\overrightarrow{a}\cdot\overrightarrow{b} = \|a\|\|b\|\cos(\theta)$$

avec $\theta$ l'angle entre les vecteurs, pris **positivement en sens trigonométrique** (convention non explicite).

On pourra également trouver les dépendances des composantes selon cosinus ou sinus par des tests de vraisemblance.

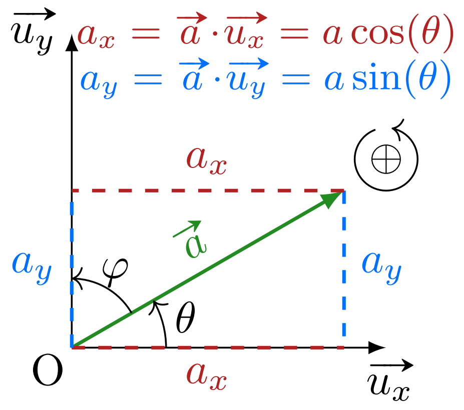



**Figure 1.2** – Projection 2D

# III Position, vitesse et accélération

## III/A Position

### III/A) 1 Définition

**Définition 1.6 : Position en cartésiennes.**

Le vecteur position noté $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ est le vecteur qui permet de repérer un point M d'un système dans l'espace et le temps par rapport à l'origine O d'un repère. **Il est homogène à une distance**.

En coordonnées cartésiennes, la position d'un point M par rapport à l'origine O s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_y}$$

et sa **norme** se calcule avec :

$$\mathrm{OM} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$

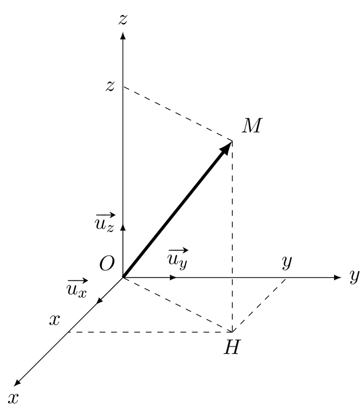



**Figure 1.3** – Position cartésienne.

### III/A) 2 Déplacement élémentaire

**Définition 1.7 : Déplacement élémentaire cartésien**

Le **déplacement élémentaire** est le déplacement infiniment petit du point M pendant un temps infinitésimal d$t$ :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\ \overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\ \overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\ \overrightarrow{u_z}}$$

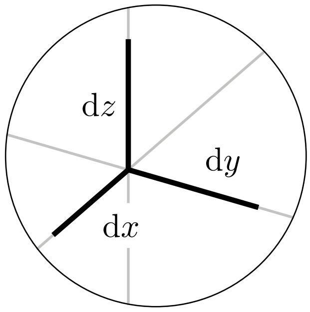


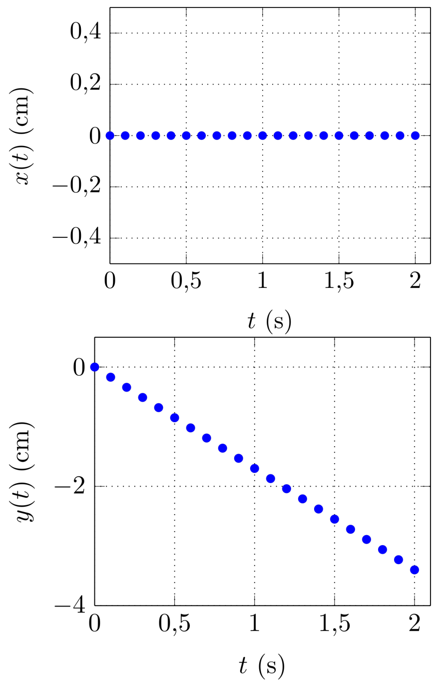

**FIGURE 1.4** – d$\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ en cartésiennes.

### III/A) 3 Équations horaires et trajectoire

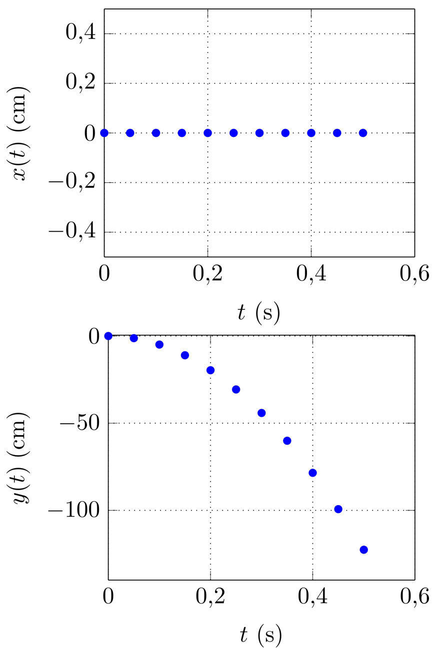
Les **équations horaires** du mouvement sont les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ exprimées **explicitement** en fonction du temps $t$.

En TP, on pourra étudier l'évolution de $x(t)$ et $y(t)$ dans différents cas :

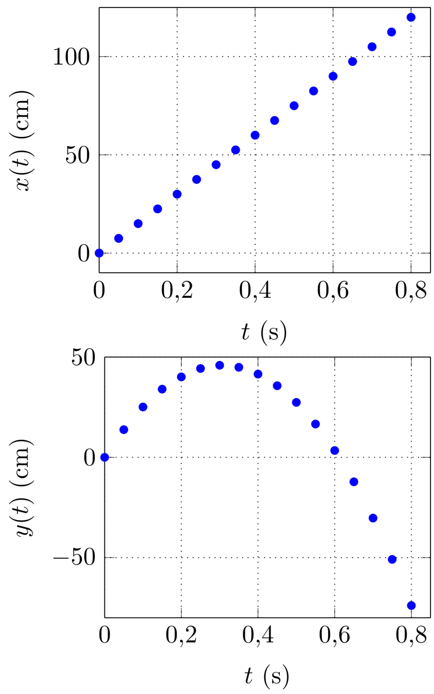
◇ chute dans le glycérol :




◇ chute libre $v_0 = 0$ :

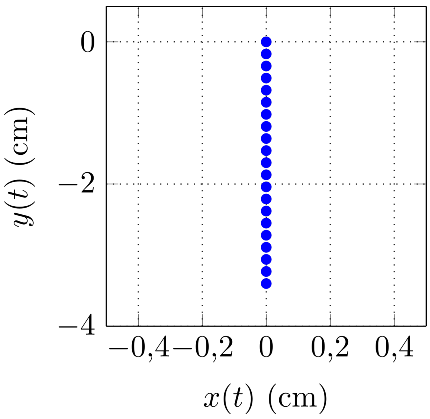


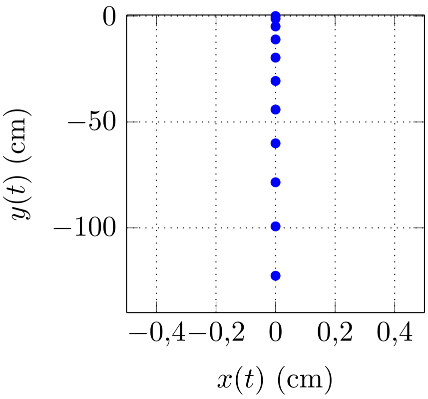

◇ chute libre $v_0 \neq 0$ :

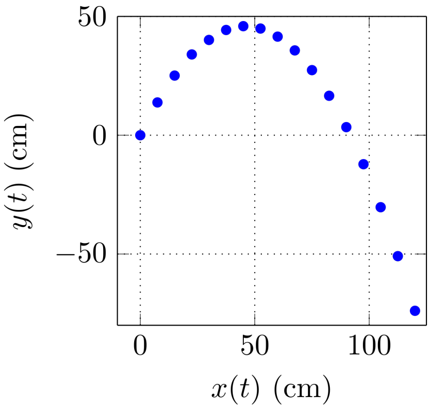



La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point M au cours du temps. C'est le « dessin » fait par le mobile au cours du temps.

Sur les exemples précédents, la trajectoire est la courbe $y(x)$ car le mouvement est plan. C'est une droite dans les deux premiers cas, et une parabole dans le dernier.




## III/B Vitesse

**Définition 1.10 : Vitesses**

On définit la **vitesse** comme le **taux d'accroissement** du vecteur position :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\Delta t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\Delta t}} \quad \text{donc} \quad [\vec{v}] = \mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$$

Si on effectue des mesures très rapprochées, c'est-à-dire $\Delta t \to 0$, on définit alors la vitesse *instantanée* par :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t}}$$

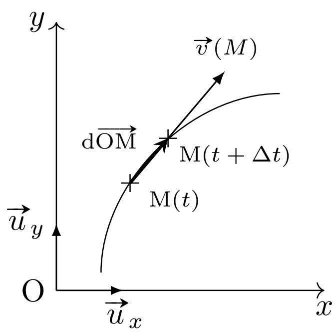



**Figure 1.5** – Vecteur vitesse.

**Important 1.1 : Vitesse et trajectoire**

**Le vecteur vitesse est toujours tangent à la trajectoire.**

On peut donc voir la vitesse comme étant le rapport du déplacement élémentaire par la durée infinitésimal $\mathrm{d}t$, ou comme étant la dérivée du vecteur positoin.

Ainsi, si le vecteur position est

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_z} \Rightarrow \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$$

alors dans la vision dérivative, on obtient

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y} + z(t)\,\overrightarrow{u_z}\right)$$

Or, **en coordonnées cartésiennes**, les vecteurs de base ne varient pas avec le temps : il ne changent pas de direction et restent unitaires. On peut donc les considérer comme des constantes multiplicatives, et ainsi

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_z}$$

On obtient la même chose avec la vision rapport déplacement/temps. Pour alléger l'écriture, on introduit une notation :

En mécanique, les dérivées **par rapport au temps** se notent avec un point sur la fonction :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$$

Ainsi, on trouve

$$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y} + \dot{z}(t)\,\overrightarrow{u_z}}$$

En reprenant les exemples précédents :

- ◇ Pour la chute dans le glycérol, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = \text{cte}$. Ainsi, $\overrightarrow{v}$ est constant, et dirigé vers le bas.
- ◇ Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable, dirigé vers le bas.
- ◇ Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\dot{x} = \text{cte}$ et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable et change de direction.

**Attention 1.2 : Différence vecteur/norme**

Selon le contexte, on fera particulièrement attention à ne pas confondre le mot « vitesse » avec le **vecteur** ou avec sa **norme**. Une vitesse, en norme, ne saurait être négative ; un vecteur vitesse peut être négatif.

## III/C Accélération

L'accélération est la grandeur physique qui mesure la variation de la vitesse.

**Définition 1.11 : Accélérations**

On définit l'**accélération** comme le **taux d'accroissement** du vecteur vitesse :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(t) = \frac{\overrightarrow{v}(t+\Delta t) - \overrightarrow{v}(t)}{\Delta t}} \qquad \text{donc} \qquad [\overrightarrow{a}] = \text{m}\cdot\text{s}^{-2}$$

Si on effectue des mesures très rapprochées, c'est-à-dire $\Delta t \to 0$, on définit alors l'accélération *instantanée* comme étant la *dérivée* du vecteur vitesse, et dérivée seconde de la position :

$$\boxed{\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{v}(t)}{\mathrm{d}t}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t^2}}$$

**Important 1.2 : Accélération et trajectoire**

**Le vecteur accélérations est toujours dirigé
vers l'intérieur à la trajectoire (partie concave).**

Par distribution de l'opérateur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, on obtient en cartésiennes

$$\boxed{\overrightarrow{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\,\overrightarrow{u_z}}$$

En reprenant les exemples précédents :

- ◇ Pour la chute dans le glycérol, $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ sont nuls : le vecteur accélération est nul.
- ◇ Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.
- ◇ Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.

**Attention 1.3 : Accélération**

Une accélération peut être négative ou nulle :

- En physique l'accélération est liée à la **variation du vecteur vitesse**, souvent différent de l'utilisation courante de ce mot.
- Pour que l'accélération soit nulle, il faut que toutes les composantes de la vitesse ne varient pas. Un mouvement peut être à vitesse constante en norme, mais d'accélération non nulle.

# IV Exemples de mouvements

## IV/A Mouvement rectiligne uniforme

Un mouvement est dit **uniforme** si la **norme du vecteur vitesse** $\|\overrightarrow{v}\|$ est constante. Il est dit rectiligne si la trajectoire est une droite.

Par exemple,

$$\overrightarrow{v} = v_0 \, \overrightarrow{u_x}$$

donne un mouvement rectiligne uniforme. C'est le cas de la chute dans le glycérol. Dans ce cas,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

avec $x_0$, $y_0$ et $z_0$ des constantes que l'on peut calculer à l'aide des conditions initiales.

## IV/B Mouvement rectiligne uniformément accéléré

Un mouvement est dit *uniformément accéléré* si la **norme du vecteur accélération** $\|\overrightarrow{a}\|$ est constant.

Par exemple,

$$\overrightarrow{a} = -g \, \overrightarrow{u_y}$$

avec des conditions initiales nulles donne un mouvement rectiligne uniformément accéléré. C'est le cas de la chute libre sans vitesse initiale. Contextualisons l'étude :

- **Système** : point matériel.
- **Référentiel** : celui du laboratoire, supposé galiléen.
- **Repère** : cartésien avec $\overrightarrow{u_y}$ verticale ascendante.
- **Origine des temps** : le moment où la balle est lâchée, tel que $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$.
- **Origine du repère** : O tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{0}$.

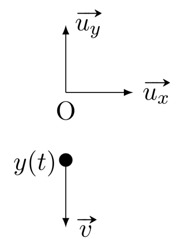



FIGURE 1.6 – Situation initiale.

Par définition,

$$\overrightarrow{a}(t) = \ddot{x}(t) \, \overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t) \, \overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t) \, \overrightarrow{u_z}$$

Soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \implies \begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x,0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y,0} \\ \dot{z}(t) = v_{z,0} \end{cases}$$

Or,

$$\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} = 0 \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} = 0 \\ \dot{z}(0) = v_{z,0} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Seulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x(0) = y_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \\ z(0) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

Ce sont les équations horaires du mouvement, décrivant une droite dans l'espace.

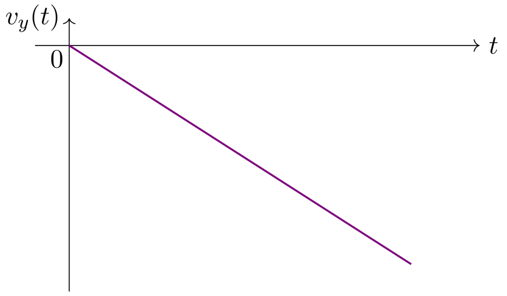



**FIGURE 1.7** – Évolution de $v_y$ avec le temps.

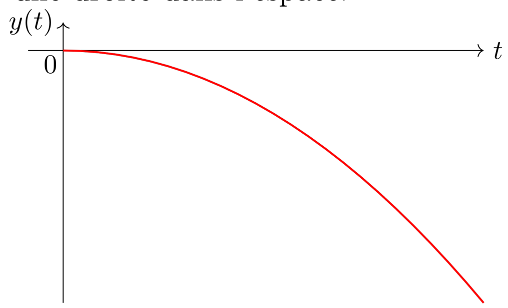



**FIGURE 1.8** – Évolution de $y$ avec le temps.

## IV/C Mouvement courbe uniformément accéléré

En reprenant la même situation que ci-dessus mais avec des conditions initiales non nulles, on trouvera un mouvement courbe. Prenons

$$\vec{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_x}$$

avec $v_0 \neq 0$. On garde $\vec{a} = -g\,\overrightarrow{u_y}$, le même repère et la même origine : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = 0$. Par définition,

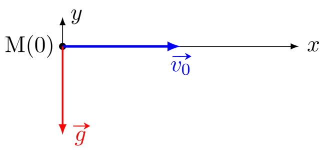



**FIGURE 1.9** – Situation initiale.

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\,\overrightarrow{u_z}$$

Soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x,0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y,0} \\ \dot{z}(t) = v_{z,0} \end{cases}$$

Or,

$$\vec{v}(0) = v_0\,\overrightarrow{u_x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} = v_0 \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} = 0 \\ \dot{z}(0) = v_{z,0} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Seulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x(0) = y_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \\ z(0) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

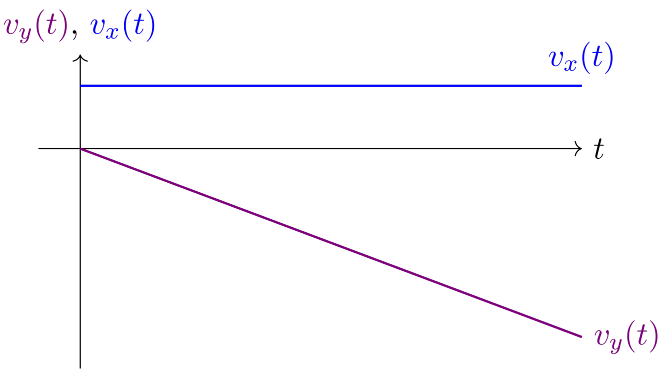



**FIGURE 1.10** – Évolution des vitesses avec le temps.

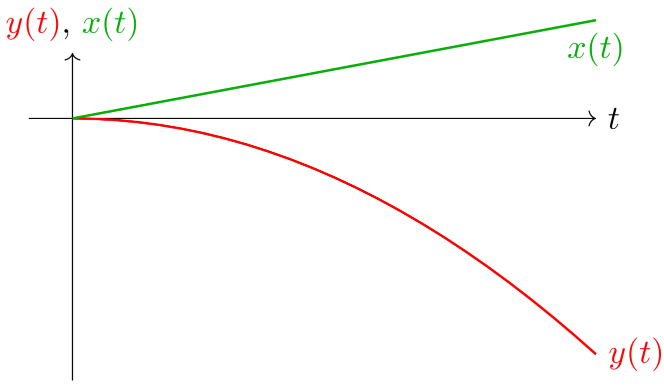



**FIGURE 1.11** – Évolution des positions avec le temps.

Pour obtenir la trajectoire, on veut déterminer la courbe $y(x)$ décrite dans le plan $xy$. Pour cela, exprimons $t$ en fonction de $x$ et remplaçons $t$ dans l'expression de $y$ :

$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2}$$

La trajectoire obtenue est alors une parabole.

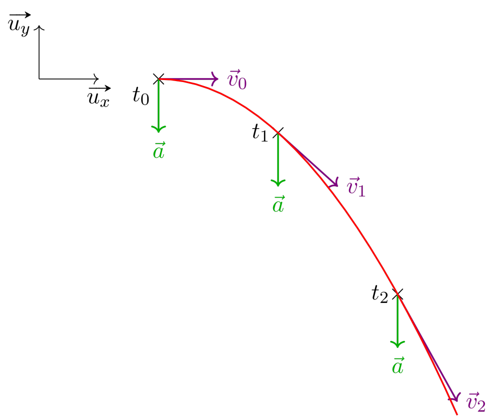



**FIGURE 1.12** – Trajectoire parabolique.