Correction du TD

I Fibre optique à saut d'indice

Les câbles à fibres optiques permettent la transmission à haut débit de tous types de signaux électromagnétiques, sur de longues distances avec très peu d'atténuation ; ceux-ci se propagent comme la lumière. Chaque câble comporte un grand nombre de fibres très fines.

Une fibre optique à saut d'indice peut être assimilée à un cylindre de révolution d'axe Oz, constitué d'un cœur de rayon a (de l'ordre de 8 à 50 µm) et d'indice n_1, entouré d'une couche cylindrique appelée *gaine*, d'épaisseur $b - a$ et d'indice $n_2 < n_1$.

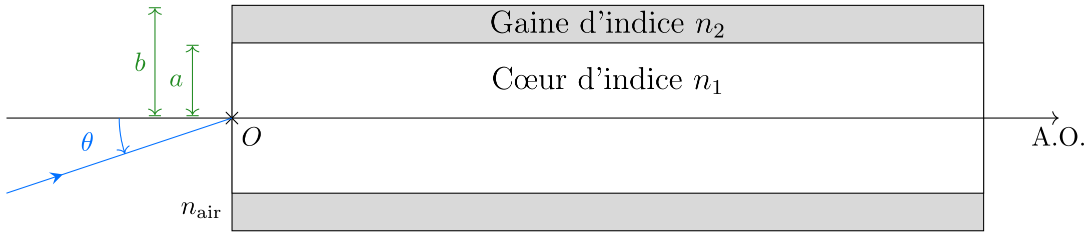


Figure 2.1 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice.

Un rayon pénètre depuis l'air dans la fibre par sa base en O, en faisant un angle θ avec l'axe optique confondu avec Oz.

1) Exprimer une condition sur θ en fonction des indices n_1 et n_2 pour que le rayon ne se propage uniquement dans le cœur de la fibre.

Réponse

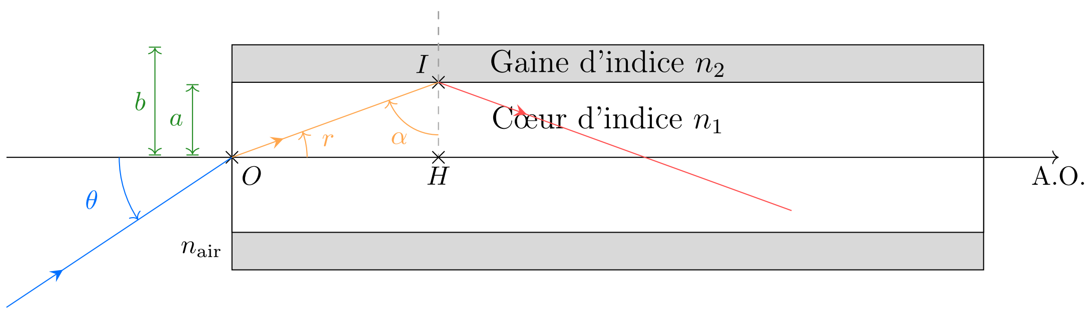


Figure 2.2 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice.

En O : $\sin(\theta) = n_1 \sin(r) \Leftrightarrow \boxed{\sin(r) = \dfrac{\sin(\theta)}{n_1}}$;

OIH : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - r$;

En I : On veut $\sin(\alpha) \geq \dfrac{n_2}{n_1}$;

$\alpha \to r$: $\sin(\alpha) = \sin(\pi/2 - r) = \cos(r)$

$$\boxed{\sin(\alpha) \geq \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \cos(r) \geq \frac{n_2}{n_1}}$$

$\cos(r) \to \sin(r)$: $\cos^2(r) = 1 - \sin^2(r)$;

$r \to \theta$: $\sin^2(r) = \dfrac{\sin^2(\theta)}{{n_1}^2}$;

Combinaison : ${n_1}^2 - \sin^2(\theta) \geq {n_2}^2$;

Conclusion : $\boxed{\theta \leq \arcsin\left(\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}\right)}$

C'est ce qu'on appelle le **cône d'acceptance**.

2) Déterminer l'écart temporel entre la sortie du rayon le plus rapide (en ligne droite) et le rayon le plus lent ($\theta = \theta_{\text{lim}}$).

Réponse

Soit L la longueur de la fibre optique. Un rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable, compris entre 0 et θ_{lim}.

Le rayon le plus rapide parcourt la distance L à la vitesse c/n_1, soit

$$\boxed{T_1 = \frac{n_1 L}{c}}$$

Le rayon le plus lent arrive avec l'incidence θ_{lim}. Il parcourt l'hypoténuse du triangle, soit $L/\sin(\alpha_{\text{lim}})$, au lieu de parcourir L. Ainsi,

$$T_2 = \frac{n_1 L}{c \sin(\alpha_{\text{lim}})}$$

Or, d'après la question 1, $\sin(\alpha_{\text{lim}}) = \frac{n_2}{n_1}$. Ainsi,

$$\boxed{T_2 = \frac{{n_1}^2 L}{c n_2}}$$

L'écart de temps à la réception est $\Delta T = T_1 - T_2$, soit

$$\boxed{\Delta T = \frac{n_1 L}{c}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

C'est ce qu'on appelle la **dispersion intermodale**.

3) La fibre permet de transporter de très courtes impulsions lumineuses, qu'on doit pouvoir distinguer à la sortie. Déterminer le débit maximal d'information possible avec cette fibre en Mb/s, avec 1 b correspondant à une impulsion, avec $L = 100\,\text{km}$, $n_1 = 1{,}500$ et $n_2 = 1{,}498$.

Réponse

Les impulsions en entrée vont être étalées de la durée ΔT. En les supposant très courtes, il faudra quand même ΔT pour pouvoir les séparer, donc le débit sera inférieur à $1/\Delta T$. Pour $L = 100\,\text{km}$, $n_1 = 1{,}500$ et $n_2 = 1{,}498$, on obtient $\Delta T \approx 1\,\mu\text{s}$, soit un débit maximal de $1\,\text{Mb/s}$, ce qui est bien inférieur à ce que proposent les fournisseurs d'accès à internet. Ainsi, en pratique on n'utilise pas de fibre optique à saut d'indice pour cette raison.

II Mirages

1) Lorsque le sol est très « chaud », la température de l'air est d'autant plus élevée qu'il est proche du sol. Plus la température de l'air est élevée, moins son indice optique est élevé. On décompose l'atmosphère en N couches planes isothermes dont l'indice optique augmente avec l'altitude :

$$\forall k \in \mathbb{N}^* \quad \text{et} \quad 1 \leq k \leq N, \quad n_{k+1} > n_k$$

FIGURE 2.3 – Photo d'un mirage chaud

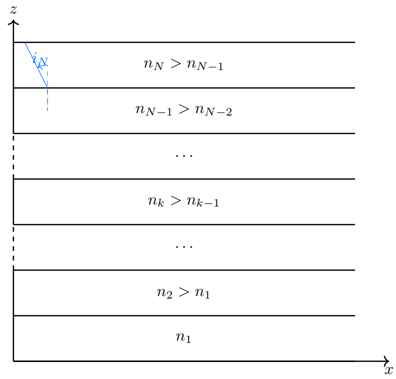


FIGURE 2.4 – Modèle d'atmosphère stratifié

a – Montrer que $n_k \sin(i_k)$ est constant, où k désigne la k-ième couche atmosphérique.

Réponse

À chaque interface, $n_k \sin(i_k) = n_{k-1} \sin(i_{k-1})$; notamment, avec $k = 2$, on a $n_2 \sin(i_2) = n_1 \sin(i_1)$. Ainsi, tous les $n_k \sin(i_k)$ sont égaux.

◇

b – Tracer les rayons réfractés par les couches d'air successives en faisant apparaître les angles d'incidence et de réfraction, puis montrer que pour un angle d'incidence initial suffisamment grand, une réflexion totale se produit.

Réponse

Voir figure ci-après.

À chaque « dioptre », on a $\sin(i_{\text{lim,k}}) = \frac{n_{k-1}}{n_k}$. Sa valeur maximale est à $k = 2$: $\sin(i_{\text{lim},2}) = \frac{n_1}{n_2}$. Comme $n_k \sin(i_k)$ est constant et que n_k diminue, on sait que i_k augmente : ainsi, si l'angle d'incidence i_N est suffisamment grand, il y aura un i_k supérieur à $i_{\text{lim},2}$ et donc réflexion totale.

◇

c – Pour une variation continue de l'indice n, tracer qualitativement le trajet d'un rayon lumineux issu du ciel. Dans quel sens et direction sa trajectoire est-elle courbée ?

Réponse

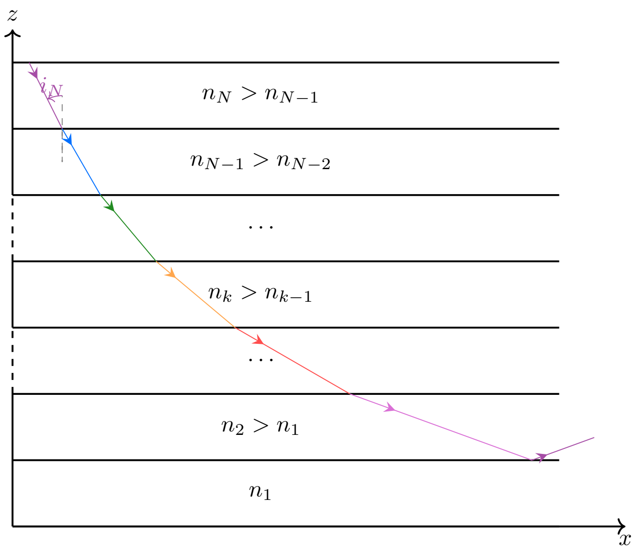


FIGURE 2.5 – Rayons d'un mirage chaud. La trajectoire est courbée perpendiculairement vers le haut.

◇

d – Interpréter alors le mirage chaud observé sur la photo ci-dessus. Faire un schéma.

Réponse

Alors qu'on devrait voir le sable, les rayons venant du haut des collines sont déviés vers le haut : on a l'impression de voir à travers la dune.

◇

2) Il arrive que la mer soit nettement plus « froide » que l'atmosphère. La température de l'air augmente alors avec l'altitude. Que peut-on observer si on regarde un bateau ou une île au loin ? Interpréter le mirage froid de la photo 2.6 ci-contre. Justifier par un schéma.

Figure 2.6 – Mirage froid.

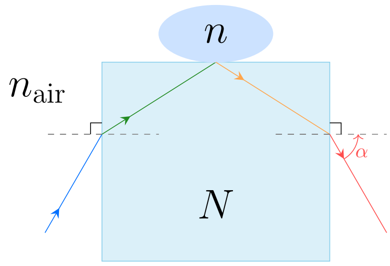
Réponse

Cette fois ce sont les rayons dirigés vers le haut d'un objet lointain qui sont déviés vers le bas : on a l'impression de voir des objets au-dessus du niveau de la mer. Schéma non fourni.

◇

III Réfractomètre de Pulrich

Un réfractomètre de Pulrich est constitué d'un bloc de verre de section rectangulaire d'indice N connu, sur lequel on a déposé une goutte de liquide d'indice n inconnu ($n < N$). On observe un faisceau de rayons parallèles à la limite réfraction/réflexion totale et on mesure en sortie l'angle α dans ce cas.

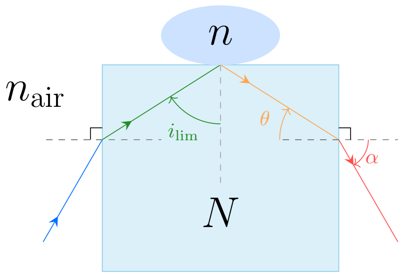


1) Établir l'expression de n en fonction de N et α.

Réponse

$\sin(i_{\text{lim,N}\to\text{n}}) = \dfrac{n}{N}$ d'une part. D'autre part, $N\sin(\theta) = \sin\alpha$, mais on a aussi $\theta = \pi/2 - i_{\text{lim}}$: on a donc $\sin\theta = \cos i_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{n}{N}\right)^2}$. Ainsi, $\sin^2\alpha = N^2\left(1 - \dfrac{n^2}{N^2}\right)$; autrement dit,

$$\boxed{n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N = 1{,}622 \\ \alpha = 60° \end{cases}$$



◇

2) Application numérique : calculer n sachant que $N = 1{,}626$ et $\alpha = 60°0'$.

Réponse

Application numérique :

$$\boxed{n = 1{,}376}$$

◇

IV Réfraction et dispersion

1) Un rayon lumineux, se propageant dans l'air, arrive avec une incidence $i = 40°$ sur un dioptre air/verre plan. Si on considère que ce rayon est constitué de lumière blanche, calculer l'écart angulaire entre les rayons réfractés extrêmes.

Données

L'indice du verre est donné par la formule de Cauchy :

$$n = A + \frac{B}{{\lambda_0}^2}$$

avec $A = 1{,}504$ et $B = 4{,}188 \times 10^{-15}\,\mathrm{m}^2$; l'indice de l'air est $n_{\text{air}} = 1{,}000$.

Réponse

La lumière blanche est constituée d'une superposition de longueurs d'onde dans le vide entre [400 ; 800] nm. Quand ce faisceau arrive sur le dioptre et passe dans le milieu, l'indice de réfraction, qu'on utilise dans la relation de Snell-Descartes, change selon la longueur d'onde dans le vide. Pour une même valeur de i incident on aura donc deux valeurs extrêmes de r réfracté, que l'on nomme r_b et r_r pour « bleu » et « rouge », selon :

$$\boxed{\begin{aligned} n_{\text{air}}\sin(i) &= n_b \sin(r_b) \\ n_{\text{air}}\sin(i) &= n_r \sin(r_r) \end{aligned}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} r_b &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}\sin(i)}{n_b}\right) \\ r_r &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}\sin(i)}{n_r}\right) \end{aligned}}$$

Comme $\lambda_{0,b} < \lambda_{0,r}$, $\underbrace{n(\lambda_{0,b})}_{n_b} > \underbrace{n(\lambda_{0,r})}_{n_r}$ et forcément $r_b < r_r$. On calcule :

$$\boxed{\begin{aligned} n_b &= 1{,}53 \\ n_r &= 1{,}51 \end{aligned}} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \boxed{\begin{aligned} r_b &= 24{,}8° \\ r_r &= 25{,}2° \end{aligned}}$$

L'écart angulaire est donc

$$\boxed{\theta = r_r - r_b = 0{,}35°}$$

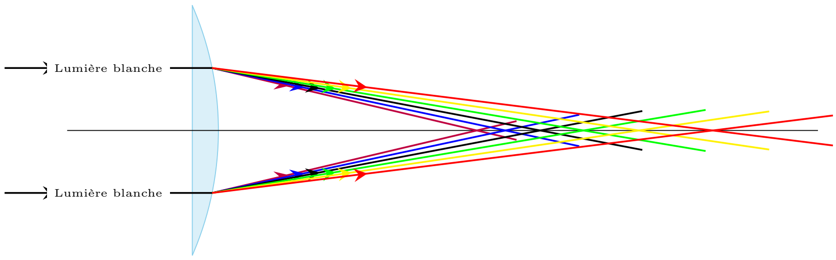


Figure 2.7 – Exemple (exagéré) de dispersion (aberration chromatique).