

# /30 P1 Suspension automobile

## I/A Comportement sur un sol non plat

Dans le cadre d'un modèle simplifié de suspension, on assimile un véhicule à un point matériel  $G$  (masse  $M = 1,0 \times 10^3 \text{ kg}$ ) repéré par sa position  $z_G \vec{e}_z$ , posé sur sa suspension.

Celle-ci est modélisée par un ressort de raideur  $k = 1,0 \times 10^5 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , associé à un amortisseur de constante d'amortissement  $k' = 4,0 \times 10^3 \text{ N}\cdot\text{m}^{-1}\cdot\text{s}$ .

Le véhicule se déplace à vitesse constante  $V_a = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  sur un sol ondulé horizontal (axe  $Oz$  vers le haut).

En outre,  $G$  est soumis à l'action d'un amortisseur fluide dont la force est de la forme  $-k' \vec{u}$  où  $\vec{u}$  est la vitesse relative de ses deux extrémités. On admet que l'on peut donc l'écrire :

$$\vec{f} = -k' \frac{d}{dt}(z_G - z_S) \vec{e}_z$$

L'ondulation du sol est assimilée à une sinusoïde de période spatiale  $L = 2 \text{ m}$  et d'amplitude  $z_{S0} = 10 \text{ cm}$  comptée à partir de la ligne moyenne.

Pour des raisons de simplicité, on supposera ici que le rayon de la roue est nul, c'est-à-dire que le centre  $O$  de la roue suit exactement l'ondulation du sol ( $z_O = z_S$ ). **On néglige également les distances  $OI$  et  $GJ$ .**

On ne s'intéressera qu'au mouvement sur  $\vec{e}_z$  bien que le véhicule se déplace horizontalement.

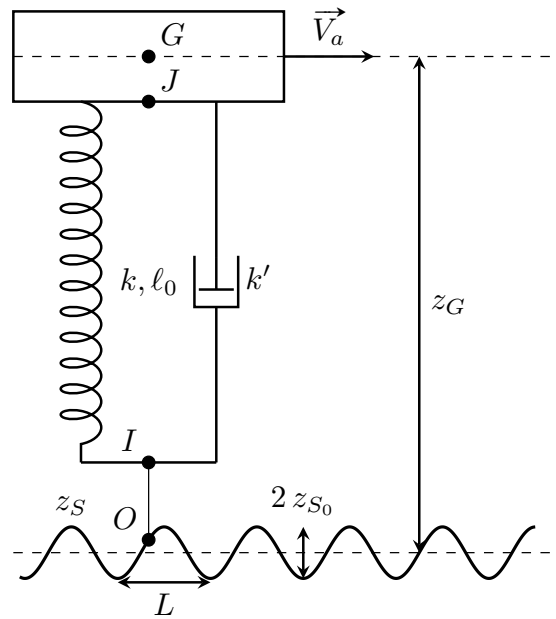


FIGURE 1

### Aide aux calculs

1

$$2\pi \approx 6 \quad ; \quad \frac{150}{3,6} = 42$$

7

$$H(4,2) = 0,10$$

8

$$3,3 \times 3,6 \approx 12$$

- 1 Donner l'expression de la pulsation d'excitation  $\omega$  du sol en fonction de la vitesse  $V_a$  du véhicule et de la période spatiale  $L$ . Justifier. Faire l'application numérique avec  $\omega$  en  $\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

### Réponse

Si on appelle  $T$  la période de l'excitation liée au sol, il faut une durée  $T = \frac{L}{V_a}$  pour parcourir la distance  $L$  qui sépare deux maxima, et

$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi V_a}{L} \Rightarrow \omega \approx 42 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

Une autre manière de voir les choses :

$$z_s = z_{s0} \cos\left(2\pi \frac{x}{L}\right) = z_{s0} \cos\left(2\pi \frac{V_a}{L} t\right) = z_{s0} \cos(2\pi f t)$$

d'où la fréquence d'excitation est  $V_a/L$ .



- 2 Établir proprement le cadre d'étude. Sur quoi repose le véhicule ? Faire un bilan des forces pour la mise en équation du système où seront explicitées les forces agissant sur celui-ci. Les représenter sur un schéma.

### Réponse

**Système** : {châssis} repéré par  $G$  de masse  $M$  ;

**Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O, x, y, t)$  supposé galiléen.

**Repère** :  $(O, \vec{e}_x, \vec{e}_z)$  avec  $\vec{e}_z$  vertical ascendant,  $\vec{e}_x$  dans le sens de  $\vec{V}_a$ .

**Repérage** :

◇ **Position** :  $z_G \vec{e}_z$

◇ **Vitesse** :  $\dot{z}_G \vec{e}_z$

◇ **Accélération** :  $\ddot{z}_G \vec{e}_z$

**Longueur du ressort** :  $\ell = z_G - z_S$

Les forces appliquées sont (cf. Figure 2) :

- 1) le poids  $\vec{P} = M\vec{g} = -Mg\vec{e}_z$  ;
- 2) la force élastique du ressort :  $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\vec{e}_z = -k(z_G - z_S - \ell_0)\vec{e}_z$ ,
- 3) la force de frottement fluide :  $\vec{f} = -k'(\dot{z}_G - \dot{z}_S)\vec{e}_z$ .

*Attention aux points d'application des forces et aux forces à prendre en compte ici : le système étant « le châssis », il n'y a pas de réaction du support s'appliquant sur le châssis (elle s'applique à la roue, qui ne fait pas partie du système).*

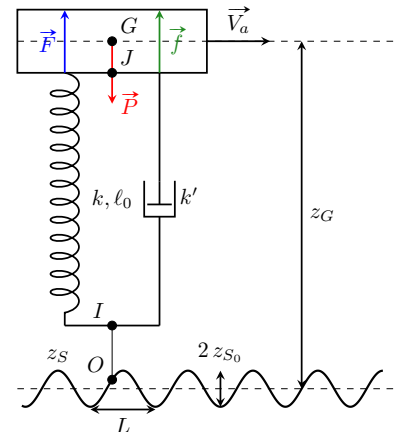


FIGURE 2

- 3 Déterminer l'équation régissant  $z_{G,eq}$  la valeur de  $z_G$  à l'équilibre pour  $z_S = 0$  (route horizontale). Montrer que :

$$z_{G,eq} = \ell_0 - \frac{Mg}{k}$$

#### Réponse

Le PFD s'écrit :

$$\begin{aligned} M\vec{a} &= \vec{F} + \vec{f} + \vec{P} \\ \Leftrightarrow M \frac{d^2 z_G}{dt^2} &= -k(z_G - z_S - \ell_0) - Mg - k' \left( \frac{dz_G}{dt} - \frac{dz_S}{dt} \right) \\ \Rightarrow 0 &= -k(z_{G,eq} - \ell_0) - Mg \\ \Rightarrow z_{G,eq} &= \ell_0 - \frac{Mg}{k} \end{aligned}$$

Équilibre  
On isole

- 4 Exprimer l'équation différentielle vérifiée par  $z = z_G - z_{G,eq}$ . On rappelle pour cela que  $z_S$  n'est pas constante.

#### Réponse

Cette condition permet de simplifier l'équation précédente : on pose  $z = z_G - z_{G,eq}$ .  $z_{G,eq}$  étant constant, on en déduit  $\frac{dz}{dt} = \frac{dz_G}{dt}$  et idem pour la dérivée seconde. On obtient finalement

$$M\ddot{z} + k'\dot{z} + kz = k'\dot{z}_S + kz_S$$

- 5 Donner les expressions de la réponse complexe  $\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S}$  ainsi que son module  $|\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S}|$  où  $\underline{Z}$  est l'amplitude complexe de la grandeur complexe  $z$  associée à  $z(t)$  et  $\underline{Z}_S$  l'amplitude complexe de celle associée à  $z_S(t)$ . On posera  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .

Montrer que :

$$\frac{\underline{Z}}{\underline{Z}_S} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$$

où les expressions ainsi que les valeurs numériques de  $Q$  et de  $\omega_0$  sont à déterminer.

#### Réponse

Puisque  $z_s$  varie de façon sinusoïdale, on passe en notation complexe en posant  $z_S(t) = \underline{Z}_S \exp(j\omega t)$  et  $z(t) = \underline{Z} \exp(j\omega t)$  en RSF.

L'équation différentielle devient, après simplification par  $\exp(j\omega t)$ ,

$$-M\omega^2 \underline{Z} + j\omega k' \underline{Z} + k \underline{Z} = j\omega k' \underline{Z}_S + k \underline{Z}_S$$

d'où

$$\frac{Z}{Z_S} = \frac{j\omega k' + k}{k - M\omega^2 + j\omega k'} = \frac{1 + j\omega \frac{k'}{k}}{1 - \frac{M\omega^2}{k} + j\omega \frac{k'}{k}}$$

$$\Rightarrow \frac{Z}{Z_S} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad \text{et} \quad \left| \frac{Z}{Z_S} \right| = \sqrt{\frac{1 + \frac{x^2}{Q^2}}{(1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$$

On en déduit  $\frac{k'}{k} = \frac{1}{\omega_0 Q}$  et  $\frac{1}{\omega_0^2} = \frac{M}{k}$  d'où au final :

$$\omega_0 \sqrt{\frac{k}{M}} = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \quad \text{et} \quad Q = \frac{\sqrt{Mk}}{k'} = 2,5.$$

- 6 Tracer l'allure de  $|H| = \left| \frac{Z}{Z_S} \right|$  en fonction de  $x$ . Quelle est la signification physique de  $|H|$  ?

### Réponse

On a affaire à un filtre mécanique passe bas du second ordre. Un tracé sous python/calculatrice donne le graphique suivant en échelle linéaire (à gauche) ou logarithmique (à droite).

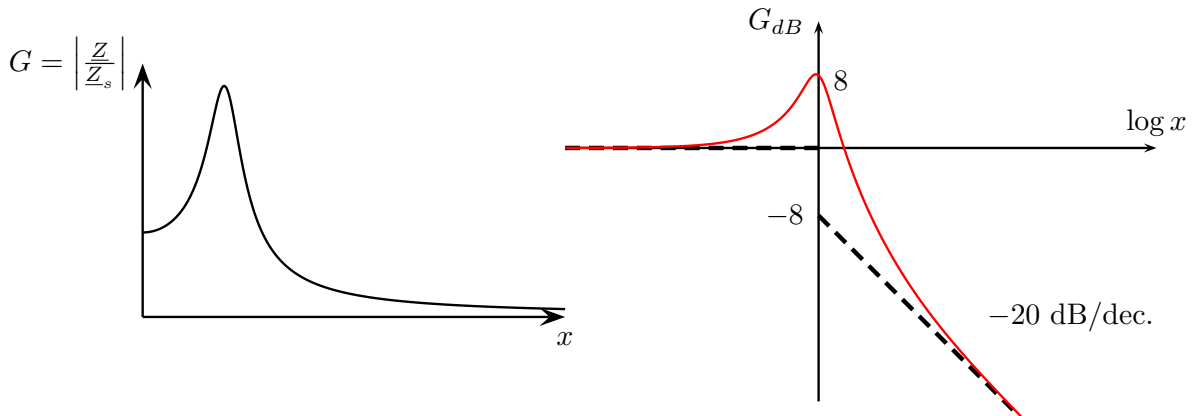


FIGURE 3

Physiquement  $H = |H|$  représente à quel point les perturbations de la route vont être amplifiées (si  $H > 1$ ) ou atténuées (si  $H < 1$ ) en fonction de la fréquence d'excitation (donc en partie en fonction de la vitesse du véhicule).

- 7 Calculer l'amplitude des oscillations du véhicule se déplaçant à la vitesse  $V_a$ .

### Réponse

Si le véhicule roule à  $V_a = 50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 13,9 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1}$ ,  $\omega \approx 42 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$  (pulsation des oscillations ressenties par les passagers) comme déterminé question 1. Ainsi,  $x = 4,2$ , et

$$Z = H(4,2) \cdot Z_S \approx 1,0 \text{ cm}$$

(assez faible).

- 8 À quelle(s) allure(s) ne faudrait-il surtout pas rouler sur ce sol ondulé, et pourquoi ? Répondre en  $\text{m} \cdot \text{s}^{-1}$  et en  $\text{km} \cdot \text{h}^{-1}$ . Calculer l'amplitude du mouvement.

On supposera que la valeur de  $Q$  déterminée précédemment permet de répondre simplement.

### Réponse

Il ne faut pas rouler à  $V_a = V_0$  correspondant à la résonance qui a lieu pour  $\omega \approx \omega_0$ , soit

$$V_0 \approx \frac{L\omega_0}{2\pi} \approx 3,2 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} = 12 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$$

Le système entrerait alors en résonance, les passagers ressentirait des oscillations d'amplitude  $Z(10) \approx QZ_S = 25 \text{ cm}$  et cela détériorerait les amortisseurs.

Attention, ici la résonance n'a pas lieu pour  $\omega = \omega_0$ , c'est plus compliqué. Annoncer « on sait que  $H$  est maximum pour  $x = 1$  » présente donc assez mal ! En pratique,  $\omega_r \approx \omega_0$  lorsque  $2Q^2 \gg 1$  ce qui est le cas ici ( $Q = 2,5$ ).

- 9 À la lueur des résultats obtenus, proposer un moyen de ralentissement des véhicules à l'entrée des zones urbaines, limitant la vitesse d'entrée à  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$ .

### Réponse

En plaçant des bandes rugueuses à une distance  $L$  bien choisie, on peut, en admettant que la fréquence de résonance est la même pour tous les véhicules, s'arranger pour que  $V_0$  soit légèrement supérieure à la vitesse limite de  $50 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  en zones urbaines, soit par exemple  $60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1}$  :

$$\omega_0 = \frac{2\pi V_0}{L_0} \Leftrightarrow \boxed{L_0 = \frac{2\pi V_0}{\omega_0}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} 2\pi \approx 6 \\ V_0 = 60 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = \frac{60}{3.6} \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ \omega_0 = 10 \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$

A.N. :  $L_0 = 10 \text{ m}$



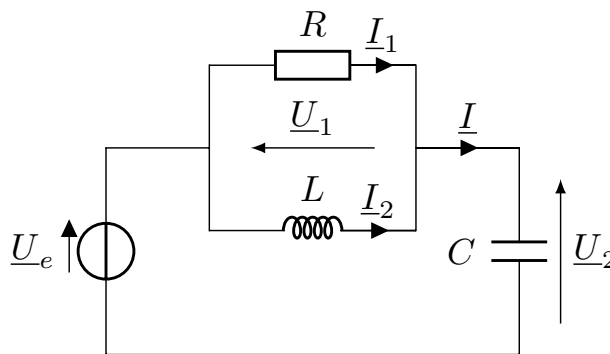
## I/B Comportement lors du franchissement d'une bordure

On s'intéresse maintenant au cas du franchissement d'une bordure (le niveau du sol s'élève brusquement) avec  $z_S(t) = 0 \forall t < 0$  et  $z_S(t) = z_0 \forall t > 0$  (échelon d'altitude).

Cette fonction n'est ni dérivable, ni continue en  $t = 0$  et on ne pourra ainsi pas résoudre simplement l'équation mécanique obtenue dans la partie précédente.

On se propose alors d'étudier le régime transitoire correspondant au franchissement de la bordure à l'aide d'un circuit électrique équivalent, c'est-à-dire régi par une équation différentielle similaire.

Le circuit ci-contre est alimenté par un générateur de tension parfait délivrant une tension sinusoïdale  $\underline{u}_e$  de pulsation  $\omega$ . On cherche dans un premier temps à identifier la tension qui correspondra à l'inconnue  $z(t)$  du problème mécanique.



- 10 Déterminer l'impédance équivalente  $\underline{Z}$  de ce circuit vue depuis le générateur. L'écrire comme une fraction de 2 expressions adimensionnées, sans chercher à faire apparaître des constantes  $w_0$  ou  $Q$ .

### Réponse

Vue du générateur, l'impédance est un condensateur en série avec (une résistance et une bobine en parallèle). D'où

$$\begin{aligned} \underline{Z} &= \frac{1}{jC\omega} + \frac{jRL\omega}{R + jL\omega} \\ \Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{R + jL\omega - RLC\omega^2}{jC\omega(R + jL\omega)} \quad \left. \begin{array}{l} \text{Même dénominateur} \\ \text{On factorise par } R \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{1 + j\frac{L}{R}\omega - LC\omega^2}{jC\omega(1 + j\frac{L}{R}\omega)} \end{aligned}$$



- 11 Par une analyse du comportement à basses et hautes fréquences, quelle grandeur de sortie  $\underline{U}_s$  doit être choisie (parmi  $\underline{U}_1$  ou  $\underline{U}_2$ ) pour obtenir une fonction de transfert harmonique équivalente à celle de la suspension automobile  $\{ M, k, k' \}$  sur une route déformée sinusoïdalement, c'est-à-dire que :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}} \quad (1)$$

où  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$  est la pulsation réduite ;  $\omega_0$  une pulsation propre et  $Q$ , le facteur de qualité. Déterminer alors les expressions de ces constantes en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

### Réponse

Deux choix sont possibles et dans les deux cas, on va vérifier les comportements asymptotiques :

- ◇ pour  $u_s = u_1$ , on a  $\underline{U}_1 \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow 0$  (car la bobine est équivalente à un fil en BF) et ce résultat n'est pas compatible avec la fonction de transfert attendue (réponse non nulle en basse fréquence).

◇ pour  $u_s = u_2$ , on a  $\underline{U}_2 \rightarrow 0$  quand  $\omega \rightarrow +\infty$  (condensateur équivalent à un fil en HF) puis  $\underline{U}_2 \rightarrow \underline{U}_e$  quand  $\omega \rightarrow 0$  (tension nulle aux bornes de la bobine + loi des mailles). Ce comportement asymptotique est compatible avec celui du filtre proposé dans la partie précédente.

On retient ainsi pour la suite  $u_s = u_2$  et on obtient la fonction de transfert en utilisant la formule du pont diviseur de tension :

$$\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\underline{Z}(\omega)} = \frac{1}{\frac{1+j\frac{L}{R}\omega-LC\omega^2}{1+j\frac{L}{R}\omega}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\underline{U}_s}{\underline{U}_e} = \frac{1+j\frac{L}{R}\omega}{1-LC\omega^2+j\frac{L}{R}\omega}}$$

En identifiant à la forme proposée par l'énoncé on obtient

$$\omega^2/\omega_0^2 = LC\omega^2 \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega}{Q\omega_0} = \omega \frac{L}{R} \Rightarrow \boxed{Q = \frac{R}{L\omega_0} = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

L'expression du facteur de qualité n'est pas la même que celle obtenue pour le circuit RLC série. Cependant, elle est bien sans dimension.



- 12 En comparant les expressions obtenues dans les deux modélisations (mécanique et électrique), proposer des équivalences électromécaniques. Attention, ce ne sont pas forcément les équivalences classiques du RLC série.

**Réponse**

$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  en électrique et  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}$  d'un coté, et de l'autre coté  $Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}$  et  $Q = \frac{1}{k'}\sqrt{Mk}$ .

Vu la forme de  $\omega_0$ , on est amené à proposer naturellement ( $k = \frac{1}{L}$  ;  $M = C$ ) ou ( $k = \frac{1}{C}$  ;  $M = L$ ) toutefois, du côté de  $Q$ , les grandeurs qui « passent du dénominateur dans  $\omega_0$  au numérateur dans  $Q$  » sont  $M$  et  $C$ .

Il paraît donc raisonnable de proposer

$$\boxed{M \leftrightarrow C \quad ; \quad k \leftrightarrow \frac{1}{L} \quad ; \quad k' \leftrightarrow \frac{1}{R}}$$

(et bien sûr  $U_s = z_v$  et  $U_e = z_s$ )

D'autres relations d'équivalences pourront être obtenues lors de l'étude d'autres circuits électriques. Ces résultats ne sont donc pas à apprendre par cœur.



- 13 Montrer que l'équation différentielle reliant  $u_s(t)$  ( $u_1$  ou  $u_2$ ) à  $u_e(t)$  et aux données du problème s'écrit :

$$\frac{d^2}{dt^2}u_s + \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}u_s + \frac{1}{LC}u_s = \frac{1}{RC}\frac{d}{dt}u_e + \frac{1}{LC}u_e$$

avec  $u_e(t)$  la tension aux bornes du générateur non constante.

**Réponse**

Avec la loi des mailles :

$$u_e = u_1 + u_2 \Leftrightarrow u_1 = u_e - u_2$$

On cherche à simplifier  $u_1$ . On a pour ça :

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 \\ \Leftrightarrow i &= \frac{u_1}{R} + i_2 \\ \Rightarrow \frac{di}{dt} &= \frac{1}{R}\frac{du_1}{dt} + \frac{di_2}{dt} \\ \Leftrightarrow \frac{di}{dt} &= \frac{1}{R}\frac{du_1}{dt} + \frac{1}{L}u_1 \\ \Leftrightarrow \boxed{u_1 = L\frac{di}{dt} - \frac{L}{R}\frac{du_1}{dt}} & \quad \left. \begin{array}{l} i_1 = \frac{u_1}{R} \\ \frac{di}{dt} \\ u_1 = L\frac{di_2}{dt} \end{array} \right\} \text{On isole } u_1 \\ \Leftrightarrow u_1 = LC\frac{d^2u_2}{dt^2} - \frac{L}{R}\frac{du_1}{dt} & \quad \left. \begin{array}{l} i = C\frac{du_2}{dt} \\ u_1 = u_e - u_2 \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow \boxed{u_1 = LC\frac{d^2u_2}{dt^2} - \frac{L}{R}\left(\frac{du_e}{dt} - \frac{du_2}{dt}\right)} & \end{aligned}$$

Ainsi, dans la loi des mailles :

$$\begin{aligned} u_1 &= u_e - u_2 \\ \Leftrightarrow LC\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du_2}{dt} - \frac{L}{R}\frac{du_e}{dt} &= u_e - u_2 \quad \left. \begin{array}{l} \text{On injecte } u_1 \\ \text{On regroupe} \end{array} \right\} \\ \Leftrightarrow LC\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{L}{R}\frac{du_2}{dt} + u_2 &= \frac{L}{R}\frac{du_e}{dt} + u_e \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2u_2}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{du_2}{dt} + \frac{1}{LC}u_2} &= \frac{1}{RC}\frac{du_e}{dt} + \frac{1}{LC}u_e \quad \left. \begin{array}{l} \text{On regroupe} \\ \times \frac{1}{LC} \end{array} \right\} \end{aligned}$$

On aurait aussi pu partir de la fonction de transfert obtenue précédemment :

$$\begin{aligned}
 \frac{\underline{U}_2}{\underline{U}_e} &= \frac{1 + j\frac{x}{Q}}{1 + (jx)^2 + j\frac{x}{Q}} \\
 \Leftrightarrow \underline{U}_2 \left( 1 + \left( \frac{j\omega}{\omega_0} \right)^2 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q} \right) &= \underline{U}_e \left( 1 + \frac{j\omega}{\omega_0 Q} \right) \quad \begin{array}{l} \text{On isole} \\ \text{En réels} \end{array} \\
 \Leftrightarrow \frac{1}{\omega_0^2} \frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{du_2}{dt} + u_2 &= u_e + \frac{1}{\omega_0 Q} \frac{du_e}{dt} \\
 \Leftrightarrow \boxed{\frac{d^2 u_2}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_2}{dt} + \omega_0^2 u_2} &= \boxed{\frac{\omega_0}{Q} \frac{du_e}{dt} + \omega_0^2 u_e} \quad \begin{array}{l} \times \omega_0^2 \end{array}
 \end{aligned}$$

Ce qui est bien la même chose en développant et  $\omega_0$  et  $Q$ .

Pour l'étude du régime transitoire associé au franchissement de la bordure, on considère la fonction échelon

$$u_e : t \mapsto 0, \forall t \leq 0 \quad \text{et} \quad u_e : t \mapsto E, \forall t > 0$$

Dans toute la suite, on raisonnera sur les équations faisant intervenir des grandeurs  $\omega_0$  et  $Q$  afin de pouvoir relier aisément le système mécanique au système électrique.

- 14 En quoi le choix pour  $u_e$  est-il pertinent pour la description du franchissement d'une bordure ?

#### Réponse

Dans le cadre de l'analogie électromécanique, la tension  $u_e$  aux bornes du GBF est analogue à la hauteur du sol  $z_s$ . Lors du franchissement d'un trottoir, la hauteur (constante avant) va ainsi soudainement augmenter d'une dizaine de centimètres puis redevenir constante. C'est bien le comportement qui est décrit ici.

- 15 Obtenir deux conditions initiales sur  $u_s$  en  $t = 0^+$ . Une réponse rigoureusement rédigée est attendue. Exprimez ensuite ces dernières à l'aide de  $E$ ,  $\omega_0$  et  $Q$ .

#### Réponse

La charge initiale du condensateur n'est pas mentionnée dans l'énoncé. À  $t = 0^-$ , on a  $i(0^-) = 0$  (condensateur en RP) puis  $u_1(0^-) = 0$  (bobine  $\leftrightarrow$  fil en RP) donc  $i_1(0^-) = 0$  (résistance) et finalement  $i_2(0^-) = 0$  (loi des nœuds).

On en déduit à l'aide de la loi des mailles appliquées à  $t = 0^-$  que  $0 = 0 + u_2(0^-) \Rightarrow u_2(0^-) = 0$  or la tension aux bornes du condensateur est continue donc  $\boxed{u_2(0^+) = 0}$ .

La dérivée de cette tension n'est pas nécessairement continue (aucun résultat de cours ne permet de le prouver rapidement). On va donc étudier le circuit à  $t = 0^+$  en y appliquant la loi des mailles :  $E = u_1(0^+) + u_2(0^+) \Rightarrow u_1(0^+) = E$ . De plus, on a par continuité du courant à travers la bobine,  $i_2(0^+) = i_2(0^-) = 0$  mais aussi  $i_1(0^+) = u_1(0^+)/R = E/R$ .

Finalement, l'application de la loi des nœuds donne  $i(0^+) = i_1(0^+) = E/R = C \frac{du_2}{dt} \Rightarrow \boxed{\frac{du_2}{dt} = \frac{E}{RC} = \frac{E\omega_0}{Q}}$

- 16 Résoudre ensuite l'équation différentielle obtenue pour  $t > 0$  (on retiendra la valeur du facteur de qualité obtenue dans la première partie).

#### Réponse

Pour  $t > 0$ , on a  $u_e(t) = E$  et donc :

$$\frac{d^2}{dt^2} u_2 + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d}{dt} u_2 + \omega_0^2 u_2 = \omega_0^2 E$$

Pour  $Q = 2,5 > 1/2$ , on se place dans le cas du régime pseudo-périodique et donc

$$u_2(t) = e^{-t/\tau} (A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)) + E$$

avec  $\Omega = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$  et  $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$ . La première CI donne  $A + E = 0$ . On dérive ensuite la tension :

$$\frac{du_2}{dt} = -\frac{1}{\tau} e^{-t/\tau} (B \sin(\Omega t) - E \cos(\Omega t)) + e^{-t/\tau} (B \Omega \cos(\Omega t) + E \sin(\Omega t))$$

La deuxième CI donne  $\frac{E\omega_0}{Q} = \frac{2E}{\tau} = \frac{E}{\tau} + B\Omega \Rightarrow B = \frac{E}{\tau\Omega}$ . On trouve au final :

$$u_2(t) = Ee^{-t/\tau} \left( \frac{E}{\tau\Omega} \sin(\Omega t) - \cos(\Omega t) \right) + E$$



- 17 Représenter sur un même graphique la solution obtenue pour la valeur du facteur de qualité trouvée précédemment, ainsi que pour  $Q = 0,51$  et  $Q = 10$ .

Pour les applications numériques, on prendra  $E = 1 \text{ V}$  et  $\omega_0 = 10 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$ .

Réponse

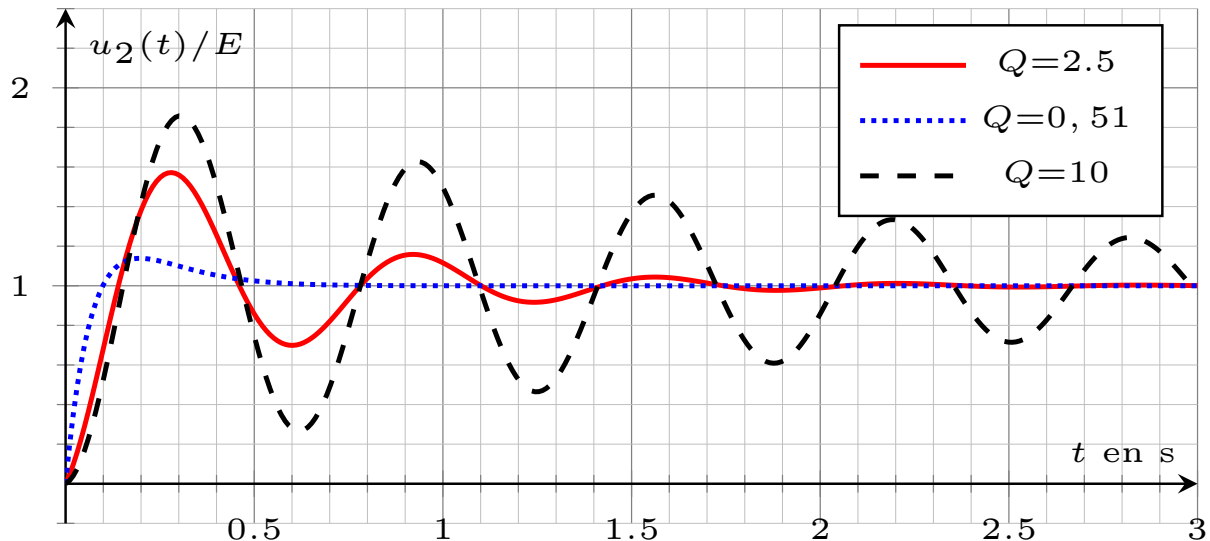


FIGURE 4

Graphiquement, on obtient  $u_{2,\max}(Q = 10) = 1,95E$ ,  $u_{2,\max}(Q = 2,5) = 1,6E$  puis finalement  $u_{2,\max}(Q = 0,51) \approx 1,15E$  (peu de dépassement dans le dernier cas).



I/C

## Conclusion

- 18 Afin de construire un système de suspension efficace, que préconisez-vous pour le choix du facteur de qualité au regard des résultats obtenus dans les précédentes parties ?

Réponse

Dans le premier cas (sol ondulé), on constate que pour un facteur de qualité élevé, on peut rencontrer un phénomène de résonance qui peut être gênant. Dans le deuxième cas (franchissement d'une bordure), on observe aussi que le dépassement dépend du facteur de qualité.

Il convient donc de réaliser un système avec un **faible facteur de qualité**, dans la limite du raisonnable : il ne faut pas non plus que les amortisseurs soient rigides. Une valeur autour de 0,5 paraît appropriée.

