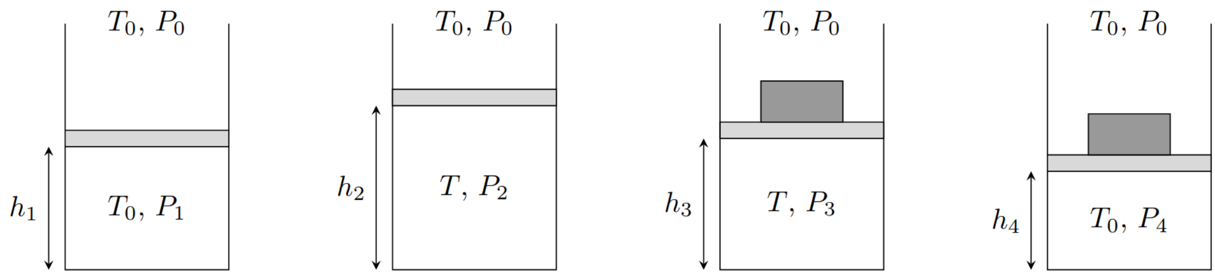
Sujet 1 – corrigé

I Gaz parfait dans une enceinte

Une quantité de matière n de gaz parfait est enfermée dans une enceinte de surface de base S. Cette enceinte est fermée par un piston de masse m, à même de coulisser sans frottement, et permet les transferts thermiques, si bien que lorsqu'on attend suffisamment longtemps le gaz contenu dans l'enceinte est en équilibre thermique avec l'extérieur. Le milieu extérieur se trouve à température et pression constantes T_0 et P_0. On fait subir au gaz la série de transformations suivante.

- Initialement, dans l'état (1), le système est au repos depuis suffisamment longtemps pour avoir atteint l'équilibre thermique et mécanique.
- Le gaz est chauffé jusqu'à ce qu'il atteigne la température $T > T_0$, plaçant le système dans l'état (2).
- Une masse supplémentaire M est brusquement placée par dessus le piston : avant tout transfert thermique, le système est dans l'état (3).
- Enfin, l'équilibre thermique est atteint, le système est alors dans l'état (4).



1. Déterminer les quatre positions du piston h_1 à h_4.

Réponse :

Système d'étude. Les n moles de gaz parfait enfermées dans l'enceinte.

Dans l'état 1, le système est à l'équilibre thermique avec l'extérieur, donc $T_1 = T_0$. Le système est aussi à l'équilibre mécanique, donc $P_1 = P_0 + \frac{mg}{S}$. Pour connaître h_1, il suffit d'appliquer la loi des gaz parfaits :

$$PSh_1 = nRT \quad \Rightarrow \quad \boxed{h_1 = \frac{nRT_0}{P_1 S}}.$$

Dans l'état 2, le système est toujours à l'équilibre mécanique avec l'extérieur, donc $P_2 = P_1$. En revanche, il n'est pas à l'équilibre thermique avec l'extérieur. On applique à nouveau la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{h_2 = \frac{nRT}{P_1 S}}.$$

Dans l'état 3, le système est à l'équilibre mécanique avec l'extérieur, donc :

$$\boxed{P_3 = P_0 + \frac{(m+M)g}{S}}.$$

Puisqu'il n'y a pas eu de transfert thermique lors du passage de l'état 2 à 3, alors la température est encore égale à T. On peut alors trouver la hauteur h_3 grâce à l'équation des gaz parfaits :

$$\boxed{h_3 = \frac{nRT}{\left(P_0 + \frac{(M+m)g}{S}\right)S}}.$$

Finalement, à l'état 4, le système est à l'équilibre thermique et mécanique avec l'extérieur donc :

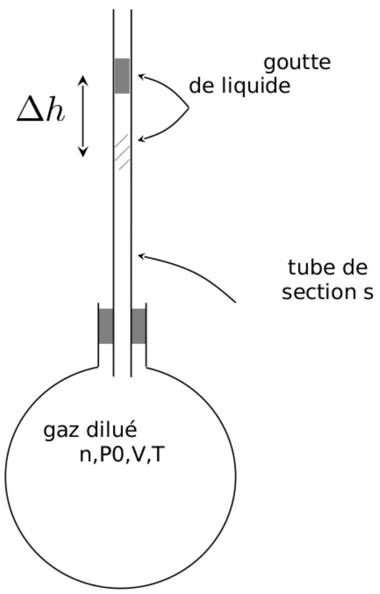
$$\boxed{P_4 = P_0 + \frac{(M+m)g}{S}} \quad ; \quad \boxed{T_4 = T_0}.$$

Ainsi (encore et toujours en utilisant la loi des gaz parfaits) :

$$\boxed{h_4 = \frac{nRT_0}{\left(P_0 + \frac{(M+m)g}{S}\right)S}}.$$

Sujet 2 – corrigé

I Thermometre à gaz ($\star$)



On peut mesurer la température à l'aide d'un gaz sous basse pression P_0 qui se comporte alors comme un gaz parfait. On mesure dans le dispositif ci-contre, appelé thermomètre à gaz, la variation de hauteur Δh d'une goutte de liquide dans le tube de section s lorsque la température varie.

1. Décrire le système thermodynamique étudié à l'équilibre. Préciser en particulier ce que l'on sait de la pression et de la température.

   Réponse :
   Le système étudié est le volume de gaz contenu dans l'enceinte, délimité par la verrerie et la surface de la goutte de liquide. Sa quantité de matière est fixée mais son volume peut varier. Il est à l'équilibre thermique, donc sa température est égale à celle de la température extérieur. Il est à l'équilibre mécanique, donc sa pression est égale à la pression qui s'exerce sur lui, c'est-à-dire la pression atmosphérique plus la pression due au poids de la goutte – cette pression reste donc constante. Finalement :

   $$T = T_{\text{ext}}; \quad n = \text{cst}; \quad P = P_0 + \frac{mg}{s}; \quad V \text{est donné par la loi des gaz parfaits.}$$

2. Exprimer la variation de volume ΔV en fonction de s et Δh.

   Réponse :
   Quand la goutte se déplace d'une hauteur Δh, le volume varie de ΔV tel que :

   $$\Delta V = s\Delta h.$$

3. Exprimer la relation entre ΔT et Δh.

   Réponse :
   D'après la loi des gaz parfaits, quand le gaz est à l'équilibre thermodynamique, on peut affirmer que :

   $$T = \frac{PV}{nR} = cst \times V,$$

puisque P, n et R sont constantes lors de cette expérience. Puisque T et V sont proportionnels, alors ils ont des variations proportionnelles (en cas de doute, il convient de différentier l'équation) :

$$\boxed{\Delta T = \frac{P}{nR} \times \Delta V = \frac{sP}{nR} \times \Delta h}.$$

4. À 300·K, la goutte est à l'équilibre et la pression dans l'enceinte est 1,00·bar. Calculer n sachant que $V = 50{,}0\cdot\text{ml}$.

   Réponse :
   D'après la loi des gaz parfaits (attention aux unités !) :

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1{,}00.10^5 \times 50{,}0.10^{-6}}{8{,}314 \times 300} = \boxed{2.10^{-3}\cdot\text{mol}}.$$

5. Calculer le diamètre du tube pour que la goutte monte de 1·m lorsque T augmente de 100·K.

   Réponse :
   On utilise la relation obtenue à la question 3 :

$$s = \frac{nR\Delta T}{P\Delta h} = \frac{2.10^{-3} \times 8{,}314 \times 100}{1{,}00.10^5 \times 1} = 1{,}66.10^{-5}\cdot\text{m}^2 = \boxed{16{,}6\cdot\text{mm}^2}.$$

Sujet 3 – corrigé

I Recherche d'un état final

Une enceinte indéformable aux parois calorifugées est séparée en deux compartiments par une cloison étanche de surface S, mobile, diathermane et reliée à un ressort de constante de raideur k. Les deux compartiments contiennent chacun un gaz parfait. Dans l'état initial, le gaz du compartiment 1 est dans l'état (T_0, P_0, V_0, n), le gaz du compartiment 2 dans l'état (T_0, $2P_0$, V_0, $2n$), une cale bloque la cloison mobile et le ressort est au repos. On enlève la cale et on laisse le système atteindre un état d'équilibre.

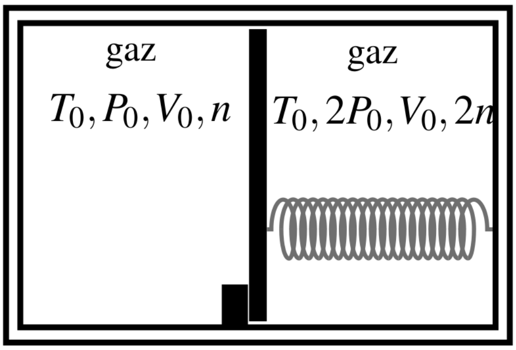


Figure 3.1: Schéma du système étudié.

Remarque. Une paroi séparant deux milieux est dite **diathermane** lorsqu'elle permet un transfert entre ces deux milieux. Tout déséquilibre thermique entre les deux milieux aura tendance à diminuer pour atteindre un nouvel équilibre commun.

1. Décrire l'évolution du système.

   Réponse :
   La paroi mobile n'est pas à l'équilibre : la pression étant plus forte dans le compartiment 2, il est poussé vers la gauche.

2. Écrire cinq relations faisant intervenir certaines des six variables d'état : V_1, V_2 (volumes finaux des deux compartiments), P_1 , P_2 (pressions finales dans les deux compartiments), T_1, T_2 (températures finales dans les deux compartiments).

   Réponse :
   On peut écrire les conditions suivantes :

   (a) conservation du volume total $V_1 + V_2 = 2V_0$
   (b) équation d'état pour le gaz du compartiment 1 : $\frac{P_1V_1}{T_1} = \frac{P_0V_0}{T_0}$
   (c) équation d'état pour le gaz du compartiment 2 : $\frac{P_2V_2}{T_2} = \frac{2P_0V_0}{T_0}$
   (d) équilibre thermique de part et d'autre de la cloison diathermane : $T_1 = T_2$
   (e) équilibre mécanique de la cloison mobile : $P_1 = P_2 - k\frac{V_2-V_0}{S}$, en tenant compte de la force du ressort qui est allongé.

Remarque. Il n'y a aucune raison pour que T_1 et T_2 soient égales à T_0. L'enceinte étant calorifugée et indéformable, le système global est isolé et on obtient, en appliquant le premier principe de la thermodynamique, la relation

$$T_1 = T_2 = T_0 - \frac{k}{6nC_v}\left(\frac{V_2 - V_0}{S}\right)^2 .$$

La température finale est donc plus petite que T_0.

Sujet 4 – corrigé

I Équation de gaz parfait et interprétation microscopique

Considérons un système de N particules identiques de masse m contenue dans un volume V. Ce gaz théorique suit le modèle du gaz parfait.

1. Rappeler les hypothèses du gaz parfait.

   Réponse :
   Un gaz parfait est un ensemble de particules (atomes ou molécules) qui n'interagissent pas entre elles mais qui interagissent avec la paroi qui délimite le volume dans lequel se trouve le gaz.

2. Justifier qu'entre deux chocs, on peut considérer les vecteurs vitesses des particules comme constants.

   Réponse :
   Entre 2 chocs, les particules ne sont soumises à aucune force (car il n'y a pas d'interactions entre particules), donc, d'après la loi de l'inertie, leurs vecteurs vitesse sont constants (le référentiel d'étude étant supposé galiléen).

Nous allons démontrer la relation donnée en cours entre la pression au sein du gaz et la vitesse quadratique des particules. Nous ajouterons à notre modèle les hypothèses simplificatrices suivantes :

- les particules possèdent toutes la même norme de vitesse u (on parle de distribution homocinétique),
- elles ne se déplacent que selon trois directions : $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ou $\vec{e}_z$ (cela signifie qu'aucune n'a un vecteur vitesse qui n'est pas colinéaire à un vecteur de la base),
- il y a une répartition égale des particules dans chaque direction et sens de l'espace : autant de particules ont un vecteur vitesse dirigé suivant $\pm\vec{e}_x$, $\pm\vec{e}_y$ ou $\pm\vec{e}_z$.

On considère un cylindre d'axe Ox et on cherche la pression provoqué par les chocs des particules sur la paroi avant d'axe Ox. On appelle S la surface de cette paroi.

3. Justifier que le nombre de particules allant dans vers cette paroi à l'instant t est $N/6$.

   Réponse :
   Les particules se déplacent uniquement selon 3 directions de l'espace et selon 2 sens possible pour chaque direction. Une particule peut donc se déplacer uniquement selon 6 possibilités. Puisqu'il n'y a pas de direction ni de sens privilégié, il y a $N/6$ particules qui se déplacent selon chaque couple direction $\oplus$ sens.

4. On considère la portion de cylindre de base S de hauteur $u\,\mathrm{d}t$. Pourquoi seules les particules contenues dans ce cylindre à l'instant t frapperont la paroi entre t et $t + \mathrm{d}t$?

   Réponse :
   La quantité $u\mathrm{d}t$ est la distance parcourue par une particule de vitesse v pendant une durée $\mathrm{d}t$. Les particules qui ne sont pas comprises dans le cylindre de hauteur $u\mathrm{d}t$ sont donc trop loin pour venir taper la paroi entre t et $t + \mathrm{d}t$.

5. Soit dN le nombre de particules dans ce petit cylindre. Exprimer dN en fonction de u, N, S, V et $\mathrm{d}t$.

Réponse :
On suppose que le gaz est homogène, donc le nombre de particule par unité de volume est le même partout. On en déduit alors que le nombre de particules comprises dans ce cylindre divisé par le volume du cylindre est égal au nombre de particule total divisé par le volume total :

$$\frac{dN}{S u \mathrm{d}t} = \frac{N}{V} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{dN = \frac{NSu\mathrm{d}t}{V}}.$$

6. Exprimer la variation de la quantité de mouvement d'une particule au cours du choc.

Réponse :
Avant le choc, une particule possède une quantité de mouvement :

$$\vec{p}_{\text{avant}} = mu\vec{e}_x.$$

Après le choc avec la paroi, elle se déplace dans la même direction mais dans l'autre sens, donc sa quantité de mouvement est :

$$\vec{p}_{\text{apres}} = -mu\vec{e}_x.$$

La variation de quantité de mouvement est alors :

$$\boxed{\delta\vec{p}_{\text{1particule}} = \vec{p}_{\text{apres}} - \vec{p}_{\text{avant}} = -2mu\vec{e}_x}.$$

7. Quelle est la force totale exercée par les particules pendant dt sur la paroi S ?

Réponse :
Pendant une durée dt, la variation de quantité de mouvement des particules qui effectuent un choc contre la paroi est (seule 1/6 des particules se déplace dans le bon sens et vont effectuer un choc) :

$$d\vec{p} = \frac{dN}{6}\delta\vec{p}_{\text{1particule}} = \frac{-2mNSu^2\mathrm{d}t}{V}\vec{e}_x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{-2mNSu^2}{V}\vec{e}_x.$$

En utilisant la loi de la quantité de mouvement sur la paroi et la loi des actions réciproques, on en déduit que la force exercée par les particules sur la paroi est :

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{2mNSu^2}{6V}\vec{e}_x$$

8. En déduire l'expression de la pression du gaz en fonction de u^2, N, m et V ainsi que la loi des gaz parfaits.

Réponse :
La pression est alors :

$$\boxed{P = \frac{F}{S} = \frac{mNu^2}{3V}}.$$

d'après le cours et le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$u^2 = \frac{3RT}{M} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P = \frac{mNRT}{MV} = \frac{nRT}{V}}.$$

On retrouve donc l'équation d'état des gaz parfaits à partir de considérations microscopiques.