

Tout moyen de communication est interdit
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs.
Les calculatrices sont autorisées.

Le devoir est composé de deux exercices et de trois problèmes indépendants.

EXERCICE 1 : Étude de la cinétique de l'hydrolyse d'un complexe du fer.

EXERCICE 2 : Étude d'un réseau en régime sinusoïdal forcé.

PROBLEME 1 : Modélisation d'un double vitrage.

PROBLEME 2 : Modélisation du comportement thermique d'une habitation.

PROBLEME 3 : Traitement d'un signal.

A l'intérieur des problèmes, certaines questions sont indépendantes.

L'étudiant est invité à prendre connaissance de la totalité du sujet avant de commencer sa composition.

L'ordre dans lequel seront abordées les différentes questions est laissé au choix de l'étudiant, mais le numéro complet de la question devra être mentionné sur la copie et le correcteur appréciera qu'une partie soit traitée dans sa continuité.

*Une attention particulière sera portée à la **qualité de la rédaction** (vocabulaire, orthographe...) et à la **présentation de la copie** (numérotation des questions, encadrement des expressions littérales et soulignement des applications numériques...).*

*Et il est indispensable de **numéroter vos copies**.*

Les résultats numériques doivent être accompagnés d'une unité et présentés avec le bon nombre de chiffres significatifs.

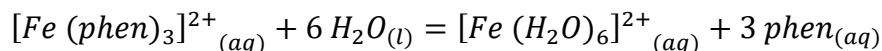
Une minoration pouvant aller jusqu'à 2 points pourra être appliquée en cas de travail négligé.

Programme de révision de ce devoir :

La partie de la transformation de la matière sur la cinétique chimique et celle sur les oscillateurs en régime sinusoïdal forcé (en mécanique et électricité), ainsi que fonctions de transfert, diagrammes de Bode et filtres.

EXERCICE 1 : Étude de la cinétique de l'hydrolyse d'un complexe du fer : (≈ 27 pts)

On s'intéresse à la réaction d'hydrolyse de l'ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ (**figure 1**), c'est-à-dire à la substitution totale des constituants phen par des constituants aqua (H_2O) en solution aqueuse d'acide fort (H^+ ; Cl^-) de concentration $2 \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$ selon la réaction :



L'ion initial $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ de couleur orange caractéristique présente une forte bande d'absorption dans le visible (**figure 2**).

En fin de réaction, l'ion $Fe(II)$ hydrolysé $[Fe(H_2O)_6]^{2+}$ présente dans le visible des bandes mille fois moins intenses que celles du complexe de départ. On considérera donc que seul l'ion de départ $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ absorbe dans le visible.

La cinétique de dégradation de l'ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ en solution aqueuse de (H^+ ; Cl^-) est suivie par spectroscopie d'absorption, en mesurant au cours du temps l'absorbance d'une solution initiale de $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ à une concentration de $2,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$, dans une cuve de longueur $l = 1,0 \text{ cm}$ de longueur.

On admet que la loi de Beer-Lambert est vérifiée dans les conditions de l'étude, donc que l'absorbance A est proportionnelle à [espèce colorée], ainsi : $A = \epsilon(\lambda) l$ [espèce colorée], où $\epsilon(\lambda)$ est le coefficient d'extinction molaire. Ce dernier dépend de la longueur d'onde et de la nature de l'espèce absorbante et l est la longueur de la cuve.

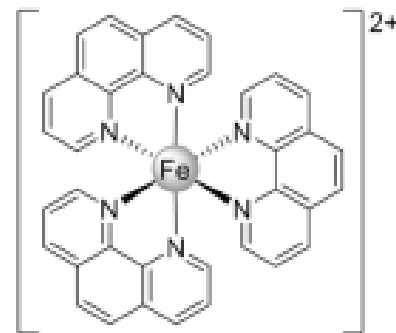


FIGURE 1 – Ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$

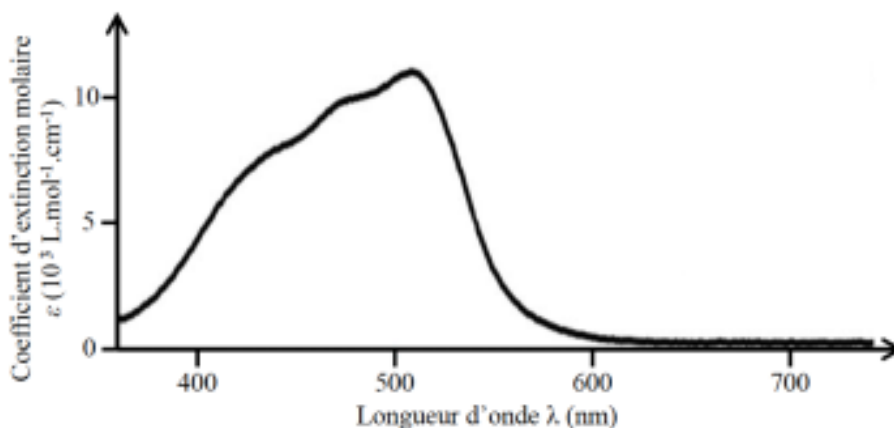


FIGURE 2 - Spectre d'absorption de l'ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ dans l'eau

Q1. À quelle longueur d'onde est-il judicieux d'enregistrer l'absorbance de la solution ? Justifier.

On suppose que la vitesse volumique de cette réaction de substitution s'écrit :

$$v = k \cdot [H_2O]^\alpha \cdot [H^+]^\beta \cdot [[Fe(Phen)_3]^{2+}]^\gamma \quad (1)$$

Q2. En absence d'acide fort (H^+ ; Cl^-), la réaction est cinétiquement bloquée. Quel est donc le rôle de l'acide introduit ? Justifier.

Q3. En tenant compte des conditions expérimentales, simplifier la loi de vitesse (1) en faisant apparaître une constante de vitesse apparente k_{app} , dont on précisera l'expression.

Q4. Établir l'équation donnant la concentration en ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ en fonction du temps, en supposant un ordre apparent de réaction de 1.

Après expérimentation, on obtient le **tableau 3** ci-dessous, décrivant l'évolution de l'absorbance de la solution en fonction du temps :

$t(\text{min})$	3	6	9	12	15	18	21	24
Absorbance A	0,93	0,80	0,72	0,65	0,58	0,51	0,46	0,41

TABLEAU 3 - Données de suivi spectrophotométrique de la cinétique de décomposition de l'ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ en solution aqueuse acide à 40 °C.

Q5. En exploitant une régression linéaire que vous préciserez, vérifier que la réaction est d'ordre 1 par rapport à l'ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$. En déduire la valeur de la constante de vitesse apparente.

On donne, dans le **tableau 4** ci-dessous, les constantes de vitesse apparentes déterminées pour des milieux réactionnels thermostatés à 25°C, 30°C et 35°C. On rappelle $T(K) = 273 + T(^{\circ}C)$.

$T(^{\circ}C)$	25	30	35	40
$k_{app}(s^{-1})$	$5,8 \cdot 10^{-5}$	$1,3 \cdot 10^{-4}$	$3,1 \cdot 10^{-4}$	Q5

TABLEAU 4 - Constantes de vitesse apparentes déterminées pour la réaction d'hydrolyse de l'ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ à 25°C, 30°C et 35°C.

Q6. Déterminer l'énergie d'activation de la réaction d'hydrolyse de l'ion $[Fe(Phen)_3]^{2+}$ en milieu acide, grâce à une régression linéaire que vous expliquerez. Donner la valeur numérique de l'énergie d'activation.

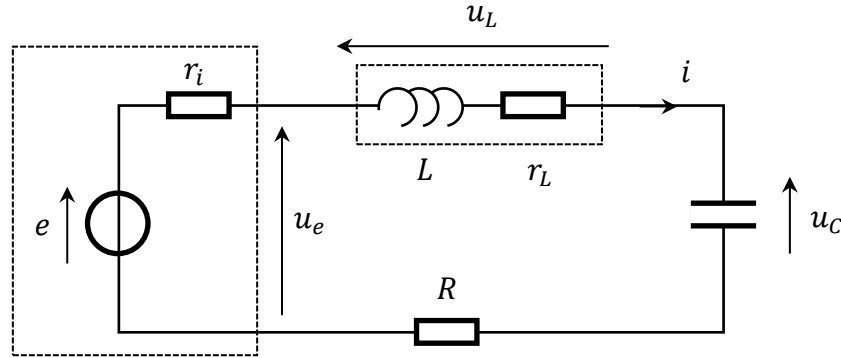
Donnée :

Constante des gaz parfaits : $R = 8,31 \text{ J.K}^{-1}.\text{mol}^{-1}$.

EXERCICE 2 : Étude d'un réseau en régime sinusoïdal forcé : (≈ 32 pts)

Indiquer la ou les bonnes réponses, en justifiant tout votre raisonnement. Une réponse juste sans justification (ou avec une justification fausse) ne rapportera aucun point.

Un générateur de résistance interne r_i délivre des signaux sinusoïdaux $e(t)$, de pulsation ω , et d'amplitude complexe $\underline{e}_m = e_m$, ici réelle (phase à l'origine nulle). Ce générateur alimente un circuit série constitué d'une bobine d'inductance L et de résistance r_L , d'un résistor de résistance R et d'un condensateur de capacité C . Le circuit est étudié en régime établi (dit aussi régime sinusoïdal forcé). On note $\underline{u}_{L,m}$ et $\underline{u}_{C,m}$ les amplitudes complexes des tensions u_L aux bornes de la bobine et u_C aux bornes du condensateur respectivement. On désigne par $\underline{u}_{e,m}$ l'amplitude complexe de la tension u_e aux bornes du générateur, et \underline{i}_m , celle de l'intensité i du courant dans le circuit (Fig. ci-après) :



Q1. Le rapport des amplitudes complexes $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}}$ se met sous la forme suivante :

$$\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{H_0}{1 - x^2 + j \frac{x}{Q}} \text{ avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

où H_0 , Q et ω_0 sont des constantes indépendantes de ω , j est l'unité imaginaire ($j^2 = -1$). Exprimer H_0 et ω_0 :

- A) $H_0 = 1$ B) $H_0 = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i}$ C) $\omega_0 = \frac{1}{RC}$ D) $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Q2. Exprimer Q :

- A) $Q = \frac{1}{R+r_i} \sqrt{\frac{L}{C}}$ B) $Q = \frac{1}{R+r_L} \sqrt{\frac{L}{C}}$ C) $Q = \frac{1}{R+r_L+r_i} \sqrt{\frac{L}{C}}$ D) $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

On suppose désormais, jusqu'à la fin de l'exercice, que $\omega = \omega_0$.

Q3. Quelle relation existe-t-il alors entre $\underline{u}_{e,m}$ et e_m ?

- A) $\underline{u}_{e,m} = \frac{R}{R+r_L+r_i} e_m$ C) $\underline{u}_{e,m} = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i} e_m$
 B) $\underline{u}_{e,m} = \frac{R}{R+r_L} e_m$ D) $\underline{u}_{e,m} = e_m$

Q4. Déterminer \underline{i}_m et $\underline{u}_{C,m}$:

- A) $\underline{i}_m = \frac{e_m}{R+r_L}$ B) $\underline{i}_m = \frac{e_m}{R+r_L+r_i}$ C) $\underline{u}_{C,m} = -jQH_0\underline{u}_{e,m}$ D) $\underline{u}_{C,m} = jQH_0e_m$

Q5. L'amplitude complexe $\underline{u}_{L,m}$ s'écrit alors $\underline{u}_{L,m} = (a + jb)e_m$ où a et b sont des constantes qui ne dépendent que des caractéristiques du circuit. Déterminer a :

- A) $a = \frac{r_L}{R+r_L+r_i}$ B) $a = \frac{r_L}{R+r_L}$ C) $a = \frac{r_i}{R+r_L+r_i}$ D) $a = 1$

Q6. Déterminer b :

- A) $b = 0$ B) $b = 1$ C) $b = \frac{1}{R+r_L+r_i} \sqrt{\frac{L}{C}}$ D) $b = \frac{1}{Q}$

PROBLEME 1 : Modélisation d'un double vitrage :

(≈ 63 pts)

On s'intéresse à l'isolation acoustique d'un double vitrage.

I – Présentation de l'isolation acoustique :

Sur la figure 1, la courbe en traits pointillés représente l'atténuation acoustique d'un simple vitrage en fonction de la fréquence de l'onde incidente. La fréquence $f = 3000$ Hz, autour de laquelle on constate une baisse d'atténuation, est appelée fréquence critique de la vitre. On ne cherche pas à la déterminer ici.

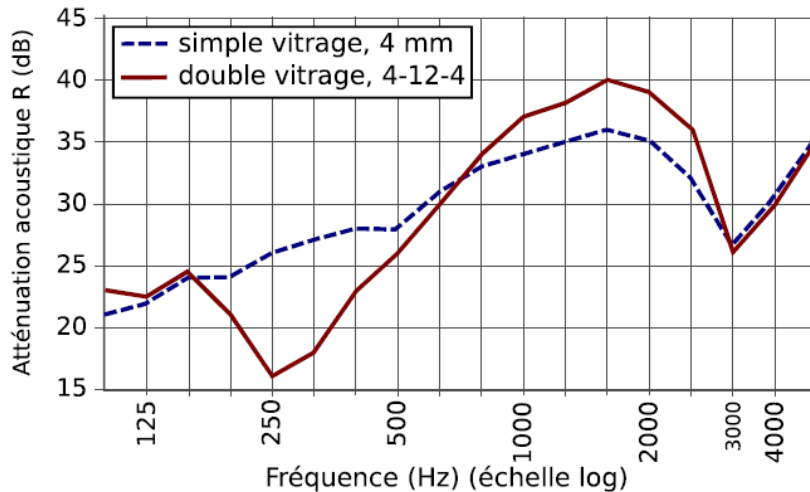


Figure 1 : Atténuation par un simple vitrage (vitre de 4 mm) et un double vitrage (vitre de 4 mm, vide de 12 mm, vitre de 4 mm). L'échelle verticale est en décibels.

Q1. Rappeler la gamme de fréquences audibles par l'homme.

II – Étude du régime forcé d'un double vitrage :

La figure 1 montre également la courbe d'atténuation acoustique du double vitrage (en trait plein). Elle présente deux baisses d'atténuation : Une vers 250 Hz et une vers 3000 Hz.

Q2. Que remarquez-vous concernant la baisse d'atténuation du double vitrage vers 3000 Hz ?

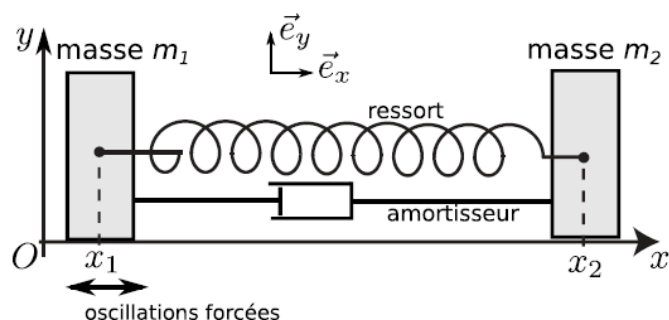
La présence de la baisse d'atténuation vers 250 Hz, absente pour le simple vitrage, montre que le double vitrage est globalement moins performant que le simple vitrage aux environs de cette fréquence, d'un point de vue acoustique. Nous allons étudier l'origine de cette baisse.

Pour cela, on modélise le double vitrage comme deux masses m_1 et m_2 qui représentent chacune une vitre.

La lame d'air qui sépare les deux vitres est modélisée par un ressort (pour son rôle élastique de transmission des vibrations) associé à un amortisseur visqueux (pour rendre compte de la dissipation).

- Le ressort possède une longueur à vide l_0 et une constante de raideur k .
- L'amortisseur exerce sur la masse 2 une force de frottement fluide $\vec{f} = -\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\vec{e}_x$ avec α une constante et \dot{x}_1 et \dot{x}_2 les vitesses des masses m_1 et m_2 respectivement.
- On suppose qu'il n'y a pas de frottement sur le support.
- Une onde sonore incidente force la vitre 1 à osciller selon $x_1(t) = A \cos(\omega t)$.
- Le schéma de la modélisation du double vitrage avec amortisseur est rappelé figure 2.

Figure 2 : Schéma de la modélisation du double vitrage avec amortisseur.



Q3. Donner l'expression de la force \vec{F} qu'exerce le ressort sur la masse 2, en fonction de l_0 , k , x_1 , x_2 et du vecteur unitaire nécessaire.

Q4. Établir l'équation différentielle suivie par la position $x_2(t)$ de la masse 2 en fonction de l_0 , k , α , m_2 , x_1 et \dot{x}_1 .

Q5. On pose $u_2(t) = x_2(t) - l_0$. En partant de l'équation précédente, montrer que $u_2(t)$ vérifie l'équation différentielle suivante : $\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2(t) = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1(t)$ (équation (1))

avec ω_0 et Q des paramètres dont on donnera les expressions en fonction de m_2 , k et α .

Dans la suite, on travaille à partir de l'équation (1). On utilise le formalisme complexe où une grandeur du type $u_2(t) = U_0 \cos(\omega t + \varphi)$ est représentée par la grandeur complexe : $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ avec $\underline{U}_0 = U_0 e^{j\varphi}$ l'amplitude complexe associée (où $j^2 = -1$).

On voit l'ensemble du double vitrage comme un filtre de fonction de transfert $\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{u}_2}{\underline{x}_1}$.

Q6. Donner l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ en fonction notamment de ω , ω_0 et Q .

On introduit la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. En déduire l'expression de $\underline{H}(jx)$.

On la mettra sous la forme : $\underline{H}(jx) = \frac{\sigma + j\frac{x}{Q}}{1 - x^2 + j\frac{x}{Q}}$ où σ est un nombre entier dont on précisera la valeur numérique.

Q7. Donner l'expression du gain $G(x) = |\underline{H}(jx)|$ du filtre.

Le graphique (figure 3) ci-dessous montre l'évolution de $G(x) = |\underline{H}(jx)|$ en fonction de x pour différentes valeurs de Q .

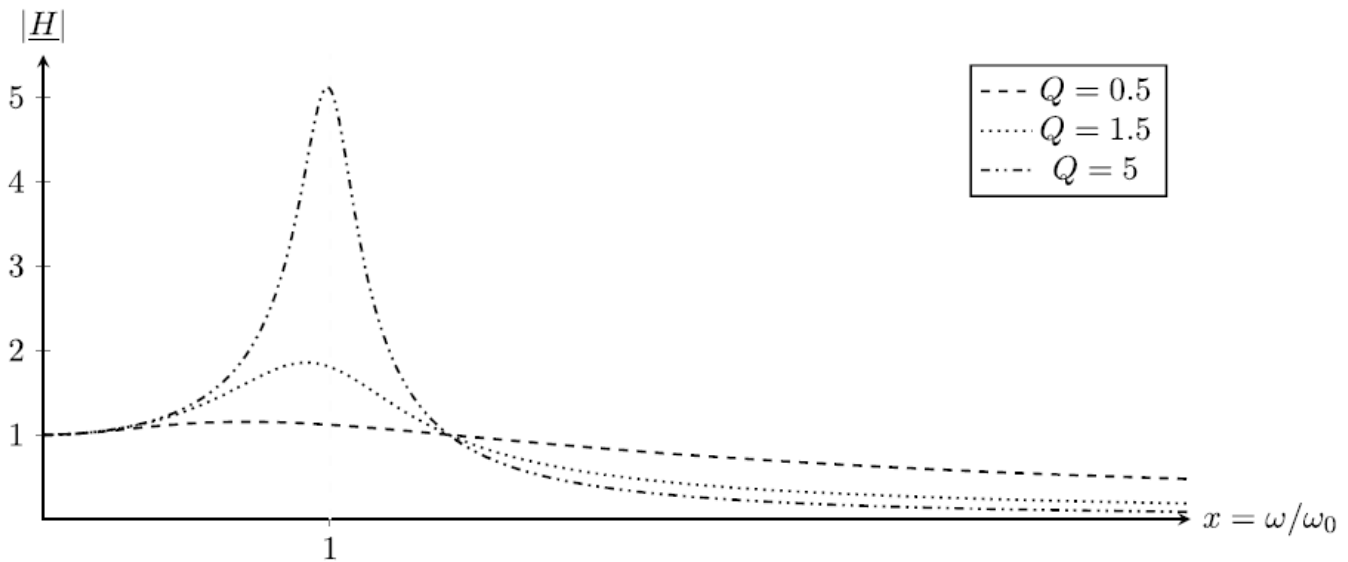


Figure 3 : Allure du gain en fonction de la variable réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, pour différentes valeurs de Q

Q8. Comment appelle-t-on le phénomène qui se manifeste par un maximum marqué sur la courbe de gain ?

Q9. On souhaite obtenir la position du maximum de la courbe $G(x) = |\underline{H}(jx)|$. Pour les valeurs élevées de Q qui nous concernent ici, le numérateur de $G(x)$ ne varie pas beaucoup autour du maximum. Le maximum est donc atteint lorsque le dénominateur est minimum

Etablir, **dans ce cas**, l'expression de la position notée x_r conduisant au maximum de $G(x)$ en fonction de Q . Indiquer également à quelle condition sur Q ce maximum existe. Est-ce cohérent avec les valeurs de Q indiquées sur le graphique figure 3 ci-dessus ?

Q10. Simplifier l'expression de x_r dans le cas où Q est grand.

III – Détermination plus fine de la fréquence de résonance :

Les questions qui précèdent expliquent la présence de la baisse d'atténuation du double vitrage aux fréquences voisines de 250 Hz. Pour ces fréquences, l'ensemble vitre-air-vitre entre en résonance et laisse passer l'onde sonore. Nous avons montré que la pulsation de résonance est quasi égale à la pulsation propre du système.

Notre expression de la pulsation propre ω_0 n'est toutefois pas correcte, car elle ne prend en compte que la masse de la seconde vitre. Or celle de la première doit aussi intervenir, car sa mise en mouvement par l'onde sonore incidente en dépend.

Pour obtenir la bonne expression de ω_0 , il faut déterminer la pulsation des oscillations d'un système masse 1 – ressort – masse 2 en oscillations libres. On considère donc un tel système.

On note $l(t) = x_2(t) - x_1(t)$ la longueur du ressort et l_0 sa longueur à vide. Il est initialement comprimé d'une quantité δ telle que : $l(t = 0) = l_0 - \delta$ et est lâché sans vitesse initiale. Dans ce paragraphe III, **on néglige toute force de frottement** et on ne considère que l'action de ressort, du poids et de la réaction normale du support sur les masses.

Le schéma de la modélisation du double vitrage sans amortisseur est rappelé figure 4.

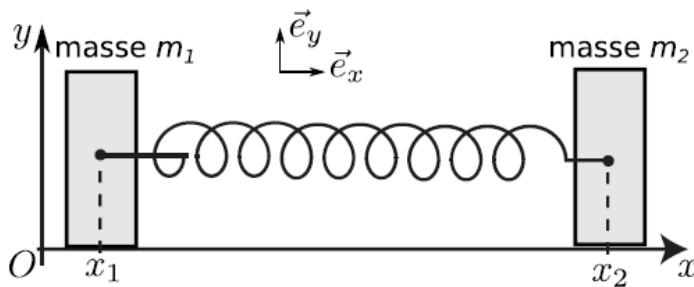


Figure 4 : Schéma de la modélisation du double vitrage sans amortisseur.

Q11. Établir l'équation différentielle suivie par la position $x_1(t)$ de la masse m_1 , puis celle suivie par la position $x_2(t)$ de la masse m_2 .

Q12. En déduire l'équation différentielle d'ordre 2, portant sur la longueur $l(t)$.

On la mettra sous la forme : $\ddot{l} + \omega_0'^2 l(t) = \omega_0'^2 l_0$,

En déduire l'expression de la pulsation propre ω_0' des oscillations, en fonction de m_1 , m_2 et k .

Q13. Établir $l(t)$ en fonction de l_0 , δ et ω_0' .

C'est cette pulsation ω_0' qui correspond à la résonance d'un double vitrage.

On trouve en effet, dans les guides acoustiques la formule suivante pour les fréquences de résonance :

$f_r = 84 \times \sqrt{\frac{1}{d} \left(\frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'} \right)}$ avec f_r la fréquence en Hertz, d la distance entre les vitres en mètres (dont dépend la raideur du ressort équivalent) et m_1' et m_2' les masses surfaciques des vitrages en kg/m^2 .

Q14. Si on souhaite envoyer le pic de résonance vers les basses fréquences hors du domaine audible, que faut-il faire concernant les masses des vitres ?

PROBLEME 2 : Modélisation du comportement thermique d'une habitation :

(≈ 57 pts)

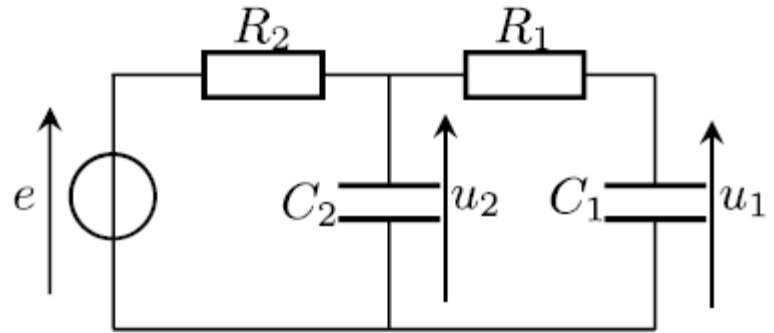
On étudie le comportement thermique d'une habitation, par analogie avec un modèle électrique.

Dans la modélisation proposée par cet énoncé, la capacité C_1 représente l'intérieur de la maison qui se charge et se décharge à mesure que son énergie thermique augmente ou diminue. De même pour C_2 qui représente les murs. Les valeurs de R_1 et R_2 dépendent du type d'isolation (Soit une isolation à l'intérieur des murs, soit une isolation à l'extérieur).

On considère le circuit électrique ci-contre en régime sinusoïdal forcé.

Dans le modèle :

- Le générateur $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ représente l'évolution de la température extérieure qui varie avec une période $T = 24$ h, suite à l'alternance jour-nuit.
- La tension $u_1(t)$ représente l'évolution de la température intérieure.
- La tension $u_2(t)$ représente l'évolution de la température des murs.



Q1. Donner la valeur numérique de la pulsation ω .

On se place en régime sinusoïdal forcé à la pulsation ω .

La tension $u_1(t) = U_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ est représentée par $\underline{u}_1(t) = \underline{U}_1 e^{j\omega t}$ la grandeur complexe,

et $\underline{U}_1 = U_1 e^{j\varphi_1}$ l'amplitude complexe avec $j^2 = -1$.

On pose $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}}$.

Q2. Sans faire de gros calculs, indiquer la nature du filtre ainsi constitué. Justifier.

Q3. On note \underline{Z}_{eq} l'impédance équivalente à l'association C_2 , R_1 et C_1 . Donner son expression, sous forme d'une fraction simple, en fonction de ω , C_2 , R_1 et C_1 .

Q4. Lorsque l'on considère une impédance \underline{Z}_1 et une impédance \underline{Z}_2 en dérivation et que $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$, quelle approximation sur l'impédance équivalente à cet ensemble, peut-on faire ? On attend une justification.

Pour la suite, comme $C_2 \gg C_1$, on admet que $\underline{Z}_{eq} \approx \frac{1}{jC_2 \omega}$.

Q5. En utilisant entre-autre cette approximation, montrer que $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}}$ peut se mettre sous la forme :

$\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1+j\frac{\omega}{\omega_1})(1+j\frac{\omega}{\omega_2})}$ avec ω_1 et ω_2 des pulsations à exprimer en fonction des capacités et résistances du réseau.

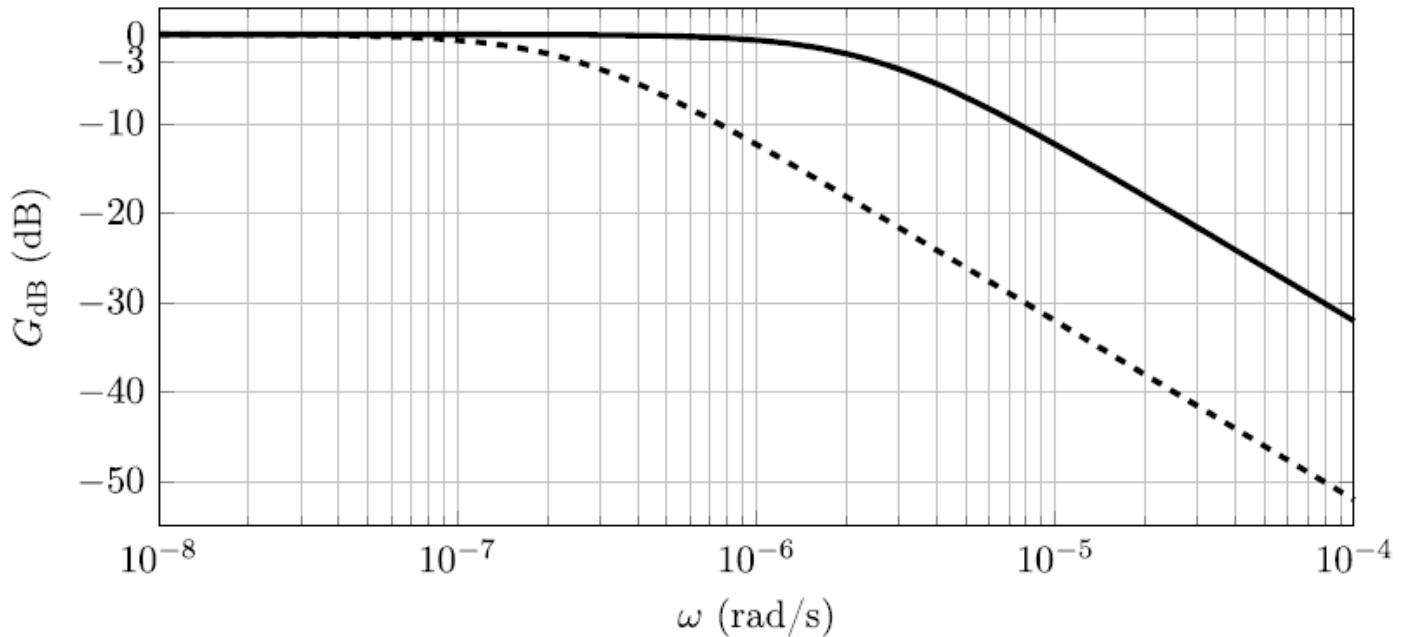
Q6. En déduire la pente des asymptotes et les valeurs du déphasage en basse et haute fréquence. On pourra développer l'expression de $\underline{H}(j\omega)$ si besoin.

Q7. Donner l'expression du gain en décibel de ce filtre en fonction de ω , ω_1 et ω_2 .

On obtient les valeurs numériques suivantes :

- Dans le cas d'une isolation par l'intérieur : $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 \rightarrow \infty$.
- Dans le cas d'une isolation par l'extérieur : $\omega_1 \rightarrow \infty$ et $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$.

Les deux diagrammes de Bode en amplitude, l'un correspondant à l'isolation par l'intérieur et l'autre à l'isolation par l'extérieur dont tracés ci-dessous.



Q8. Identifier les deux courbes : Laquelle correspond à une isolation par l'intérieur et laquelle correspond à l'isolation par l'extérieur ? Justifier votre façon de faire.

On suppose que sur une journée, la variation de température extérieure a une amplitude $\Delta T = 10 \text{ }^\circ\text{C}$. On admet que ceci se traduit dans notre analogie électrique par une amplitude $E_0 = 10 \text{ V}$ pour le signal d'entrée.

Q9. On considère le cas d'une isolation par l'intérieur. En vous aidant du diagramme de Bode et en arrondissant à la dizaine la plus proche la valeur de G_{dB} , calculer la valeur de l'amplitude U_1 de $u_1(t)$.

Q10. Faire de même pour le cas de l'isolation extérieure et conclure sur l'avantage de celle-ci.

Q11. Dans les deux cas (isolation intérieure ou extérieure), l'argument de la fonction de transfert vaut environ $-\frac{\pi}{2}$ pour la pulsation considérée ici. La tension $u_1(t)$ est-elle en avance ou en retard par rapport à $e(t)$?

De quelle fraction de période ? Traduire ceci en heures.

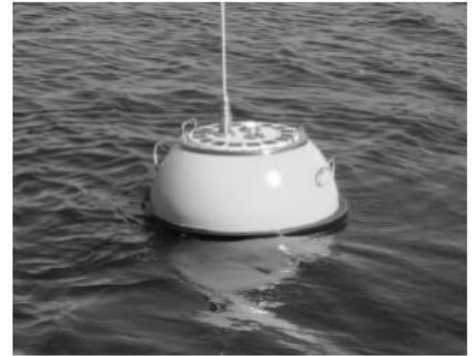
PROBLEME 3 : Traitement d'un signal :

(≈ 30 pts)

Les bouées houlographes Waverider :

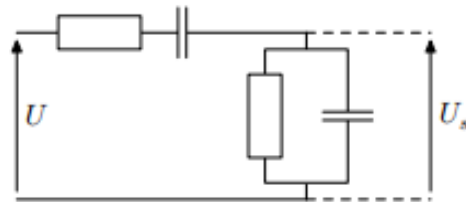
Depuis la fin des années 1960, la société néerlandaise Datawell développe des bouées houlographes commercialisées sous le nom de Waverider. Flottant à la surface de la mer, une telle bouée se déplace au gré des vagues de sorte qu'en enregistrant son mouvement, on accède aux caractéristiques de la houle.

Le Waverider est muni d'un accéléromètre uniaxe qui mesure la projection de l'accélération de la bouée sur une direction particulière.

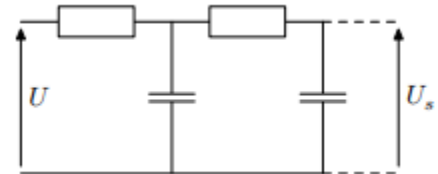


L'accéléromètre fournit un signal analogique de tension U , pollué par du bruit dont les composantes spectrales de fréquence supérieure à 1 Hz nuisent aux mesures, sans apporter aucune information sur l'état de la mer. On applique donc un filtrage analogique sur cette tension pour obtenir une tension U_s à exploiter.

Q1. Parmi les deux types de filtres A et B représentés sur la figure 1 ci-dessous, lequel convient ? Justifier votre réponse.



Filtre A



Filtre B

Q2. Les deux résistors présentent la même résistance R et les deux condensateurs la même capacité C .

On admet que la fonction de transfert du filtre choisi peut se mettre sous la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$.

Quelles valeurs proposez-vous pour R et C ?

EXERCICE 1 : Étude de la cinétique de l'hydrolyse d'un complexe du fer :

(D'après e3a PC 2022) (27 pts)

Q1. Il est préférable de travailler à la longueur d'onde correspondant au maximum d'absorption : On choisira donc $\lambda \approx 520 \text{ nm}$.

Q2. L'acide fort HCl accélère la réaction sans intervenir dans l'équation bilan, c'est donc un catalyseur.

Q3. On nous donne $v = k \cdot [H_2O]^\alpha \cdot [H^+]^\beta \cdot [Fe(Phen)_3]^{2+}]^\gamma$ (1)

Or, il est précisé que $[H^+]_0 = 2 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ et que l'eau est le solvant.

De plus, on nous donne : $[Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

Ainsi, $[H_2O]_0 \gg [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0$ et $[H^+]_0 \gg [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0$: Il y a dégénérescence de l'ordre et la vitesse de la réaction peut s'écrire sous la forme :

$$v = k_{app} [Fe(Phen)_3]^{2+}]^\gamma \text{ avec } k_{app} = k[H_2O]^\alpha [H^+]^\beta$$

Q4. D'après la définition de la vitesse, on sait que $v = -\frac{d[Fe(Phen)_3]^{2+}]}{dt} = k_{app} [Fe(Phen)_3]^{2+}]^\gamma$

Supposons que $\gamma = 1$, comme le propose l'énoncé :

Alors on obtient l'équation différentielle d'ordre 1 : $\frac{d[Fe(Phen)_3]^{2+}]}{dt} + k_{app} [Fe(Phen)_3]^{2+}] = 0$.

Alors on sait que la solution est de la forme : $[Fe(Phen)_3]^{2+}] = Cste e^{-k_{app} t}$.

CI : A $t = 0$, $[Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 = [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 = cste = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

Soit : $[Fe(Phen)_3]^{2+}] = [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 e^{-k_{app} t}$

Q5. Ou encore : $\ln([Fe(Phen)_3]^{2+}]) = \ln([Fe(Phen)_3]^{2+}]_0) - k_{app} t$.

Il faut encore relier $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$ et absorbance.

Seule l'espèce $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$ absorbe, donc :

Loi de Beer-Lambert : $A = \varepsilon(\lambda) l [Fe(Phen)_3]^{2+}]$ et $A_0 = \varepsilon(\lambda) l [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0$

Ainsi l'équation précédente devient : $\ln \frac{A}{\varepsilon(\lambda) l} = \ln \frac{A_0}{\varepsilon(\lambda) l} - k_{app} t$

En simplifiant à gauche et à droite par $-\ln(\varepsilon(\lambda) l)$, il vient : $\ln(A) = \ln(A_0) - k_{app} \times t$;

Où A_0 est l'absorbance de la solution à $t = 0$.

On fait donc la régression linéaire de $\ln(A)$ en fonction du temps t sous la forme : $y = ax + b$.

On obtient : $a = -0,038$ (en laissant le temps t en min)

$$b = 0,024$$

$$\text{Et } r = -0,99924$$

La valeur du coefficient de corrélation $|r| > 0,999$ permet de conclure que les points sont bien alignés ce qui valide que la cinétique est d'ordre 1 par rapport à $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$, donc que $\gamma = 1$.

Et par indentification, on obtient $k_{app} = -a = 0,038 \text{ min}^{-1} = \frac{0,038}{60} = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Q6. D'après la loi d'Arrhenius : $k_{app} = B e^{-\frac{E_a}{RT}}$ ou $\ln(k_{app}) = \ln(B) - \frac{E_a}{RT}$.

On fait donc la régression linéaire de $\ln(k_{app})$ en fonction de $\frac{1}{T}$ sous la forme : $y = a'x + b'$.

On obtient : $a' = -14974 \approx -1,5 \cdot 10^4$

$$b' = 40,5$$

$$\text{Et } r' = -0,9995.$$

La valeur du coefficient de corrélation $|r| > 0,999$ permet de conclure que les points sont bien alignés, donc que la loi d'Arrhenius est bien vérifiée.

Et par indentification, on obtient $a' = -\frac{E_a}{R}$; soit : $E_a = -R a'$:

AN : $E_a = -8,31 \times (-1,5 \cdot 10^4)$; On obtient donc : $E_a \approx 124,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

EXERCICE 2 : Étude d'un réseau en régime sinusoïdal forcé : (D'après ENAC 2022)

(≈ 32 pts)

Q1. Les impédances \underline{Z}_C , \underline{Z}_L et \underline{Z}_R sont en série.

Un pont diviseur de tension permet d'écrire :

$$\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R + r_L}$$

Soit $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jC(R+r_L)\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jC(R+r_L)\frac{\omega}{\omega_0} \omega_0}$.

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ou $LC\omega_0^2 = 1$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$,

on peut écrire cette expression sous la forme :

$$\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{1}{1 - x^2 + jC\omega_0(R+r_L)x}; \text{ Ou encore : } \frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{1}{1 - x^2 + jC\omega_0(R+r_L)x}.$$

Par identification avec $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$. On en déduit que $H_0 = 1$.

Réponses A et D.

Q2. Enfin, par identification, on a aussi $C\omega_0(R+r_L) = \frac{1}{Q}$; Soit : $Q = \frac{1}{C\omega_0(R+r_L)} = \frac{L\omega_0}{(R+r_L)} = \frac{1}{(R+r_L)}\sqrt{\frac{L}{C}}.$

Réponse B.

Q3. On se place en $\omega = \omega_0$.

Exprimons \underline{Z}_{eq} équivalent à l'association série de la bobine, du condensateur et de la résistance R .

$$\text{Alors } \underline{Z}_{eq} = R + r_L + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + r_L + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}$$

Or en $\omega = \omega_0$, comme $LC\omega_0^2 = 1$, il vient que : $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$; Ainsi $jL\omega_0 - j\frac{1}{C\omega_0} = 0$.

Et $\underline{Z}_{eq} = r_L + R$.

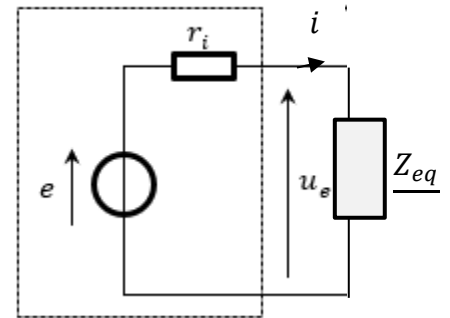
On a alors le circuit équivalent ci-contre :

On remarque que \underline{Z}_{eq} et r_i son en série.

$$\text{Pont diviseur de tension : } \frac{\underline{u}_{e,m}}{e_m} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + r_i}.$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\underline{u}_{e,m}}{e_m} = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i} \text{ ou } \underline{u}_{e,m} = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i} e_m.$$

Réponse C.



Q4. D'après le schéma équivalent ci-dessus : $e_m = (\underline{Z}_{eq} + r_i)\underline{i}_m$.

Avec $\underline{Z}_{eq} = r_L + R$; Or $e_m = e_m$, ainsi : $\underline{i}_m = \frac{e_m}{R+r_L+r_i}$.

D'autre part, en reprenant : $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$ et comme $\omega = \omega_0$ alors $x = 1$.

Ainsi : $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{1}{Q} - 1} = -jQH_0$; D'où $\underline{u}_{C,m} = -jQH_0\underline{u}_{e,m}$; enfin $\underline{u}_{e,m} \neq e_m$ **Réponses B et C.**

Q5. Par définition de l'impédance, $\underline{u}_{L,m} = (jL\omega_0 + r_L)\underline{i}_m = (jL\omega_0 + r_L)\frac{e_m}{R+r_L+r_i} = \left(\frac{r_L}{R+r_L+r_i} + j\frac{L\omega_0}{R+r_L+r_i}\right)e_m$:

Par identification avec $\underline{u}_{L,m} = (a + jb)e_m$: On obtient : $a = \frac{r_L}{R+r_L+r_i}$:

Réponse A.

Q6. On identifie également $b = \frac{L\omega_0}{R+r_L+r_i}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; il vient : $L\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\text{Ainsi : } b = \frac{1}{R+r_L+r_i}\sqrt{\frac{L}{C}} :$$

Réponse C.

PROBLEME 1 : Modélisation d'un double vitrage :

(≈ 63 pts)

(D'après EPITA – IPSA MP, PSI, PC 2022).

I – Présentation de l'isolation acoustique :

Q1. Les fréquences audibles sont situées entre **20 Hz et 20 kHz**.

II – Étude du régime forcé d'un double vitrage :

Q2. Il s'agit de la **même baisse que pour le vitrage simple** ; Il y a toujours la **fréquence critique**.

Q3. Force de rappel du ressort sur la masse 2 ou force de Hooke :

$\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_x = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$, car $l(t) = x_2 - x_1$ et si $l(t) > l_0$, \vec{F} est orienté vers la gauche.

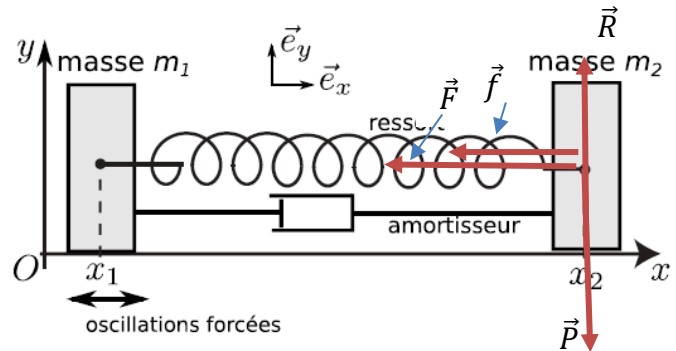
Q4. Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, z)$ supposé galiléen.

Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_y .

Système : la vitre de masse m_2 .

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{e}_y$.
- Réaction du support : $\vec{R} = R \vec{e}_y$; \vec{R} est orthogonale au déplacement car mvt sans frottements sur le support.
- Force de rappel du ressort ou force de Hooke : $\vec{F} = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$.
- Force de frottement fluide (donnée par l'énoncé) : $\vec{f} = -\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\vec{e}_x$



2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, d'où $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m_2 \vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}_2 \vec{e}_x$ car le mvt se fait sur Ox .
- Projétons sur les 2 axes :

$$\text{Sur } \vec{e}_y : R - m_2 g = 0. \quad (2) \quad (\text{pas de mvt sur } Oy).$$

$$\text{Sur } \vec{e}_x : m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) - \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (1)$$

D'où l'équation différentielle en $x_2(t)$: $m_2 \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + k x_2 = \alpha \dot{x}_1 + k(x_1 + l_0)$;

Sous forme canonique : $\ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{k}{m_2} x_2(t) = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k l_0}{m_2} + \frac{k x_1}{m_2}$.

Q5. On pose $u_2(t) = x_2(t) - l_0$ alors $\ddot{u}_2 = \ddot{x}_2$ et $\dot{u}_2 = \dot{x}_2$.

L'équation précédente s'écrit alors : $\ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{k}{m_2} (x_2(t) - l_0) = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k x_1}{m_2}$.

D'où l'équation différentielle en $u_2(t)$: $\ddot{u}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{u}_2 + \frac{k}{m_2} u_2(t) = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k x_1}{m_2}$.

De la forme : $\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2(t) = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1(t)$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$: **pulsation propre** de l'oscillateur : pulsation des oscillations sans frottement.

Et Q le **facteur de qualité** est tel que : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m_2}$; D'où $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m_2}}$; Soit : $Q = \frac{\sqrt{km_2}}{\alpha}$.

Q6. Passage aux complexes : $\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1$.

De plus, une dérivation par rapport au temps correspond à une multiplication par $(j\omega)$ et une dérivée seconde à une multiplication par $(-\omega^2)$.

L'équation précédente devient donc : $(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{u}_2 = (j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{x}_1$.

On nous donne : $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ et on pose : $\underline{x}_1 = \underline{X}_1 e^{j\omega t}$.

Il vient donc : $(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}) \underline{U}_0 = (j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{X}_1$

Q6 (suite). Alors $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_2}{x_1} = \frac{U_0}{X_1}$; D'où : $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$.

On pose : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$; Alors : $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{\omega_0}{Q}}{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{\omega_0}{Q}}$ en divisant numérateur et

dénominateur par ω_0^2 . Ainsi : $\underline{H}(jx) = \frac{1+j\frac{x}{Q}}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$. Par identification, $\sigma = 1$.

Q7. Alors $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{Q^2}}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$.

Q8. Au maximum de la courbe, on parle de **phénomène de résonance**.

Q9. D'après l'énoncé, on peut considérer que le numérateur est constant, ainsi on ne s'intéresse qu'au dénominateur.

Ainsi, on pose $D(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

$G(x)$ passe par un max, quand le dénominateur est minimum, donc quand $\frac{dD}{dx} = 0$.

Or $\frac{dD}{dx} = 2(1 - x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x \left[\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2 \right]$.

Alors $\frac{dD}{dx} = 0$ pour $\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x_r^2 = 0$; La valeur $x = 0$ correspond à la tangente horizontale en $x = 0$.

Alors $2x_r^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}$; Soit $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} > 0$;

(L'autre valeur de x_r serait négative ce qui est impossible pour un rapport de pulsations).

On remarque ainsi que x_r n'existe que si la quantité sous la racine est positive, donc si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$

Alors $\frac{1}{2Q^2} < 1$; Ou encore : $2Q^2 > 1$; Ainsi $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$.

Conclusion : Cela correspond bien au graphe de la figure 3 qui présente un **maximum pour $Q = 1,5$ et pour $Q = 5$, mais pas de maximum pour $Q = 0,5$** .

Q10. Si $Q \gg 1$, $x_r \approx 1$ (Cohérent avec le graphe).

III - Détermination plus fine de la fréquence de résonance :

Q11. Pour chaque masse, on a poids et réaction du support qui sont des forces verticales.

A l'horizontal, il reste la force de Hooke pour m_1 :

$\vec{F}_1 = +k(l - l_0)\vec{e}_x$, car qd $l > l_0$, la force est bien vers la droite.

Soit : $\vec{F}_1 = +k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$.

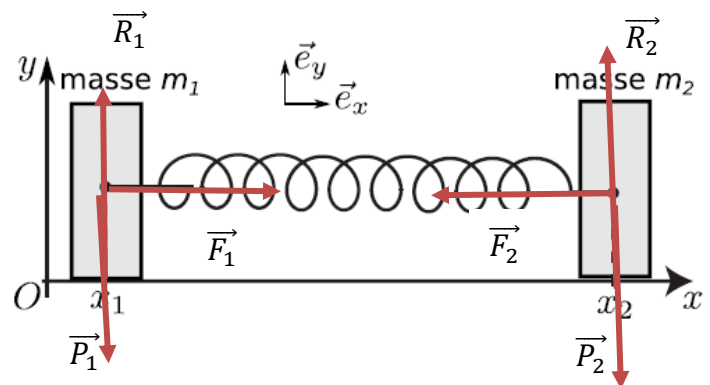
La 2^{ème} loi de Newton (pour m_1) projetée sur \vec{e}_x , conduit à : $m_1\ddot{x}_1 = +k(x_2 - x_1 - l_0)$;

Soit sous forme canonique : $\ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}x_1 = \frac{k}{m_1}x_2 - \frac{k}{m_1}l_0$ (équation (3))

De même sur m_2 : $\vec{F}_2 = -k(l - l_0)\vec{e}_x$, car qd $l > l_0$, la force est bien vers la gauche.

Soit : $\vec{F}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$; Et l'équation du mouvement de m_2 s'écrit :

$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)$; Soit sous forme canonique : $\ddot{x}_2 + \frac{k}{m_2}x_2 = \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{k}{m_2}l_0$ (équation (4))



Q12. On nous donne : $l(t) = x_2(t) - x_1(t)$.

Alors $\ddot{l} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$. En faisant (4) - (3), on obtient : $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + \frac{k}{m_2}x_2 - \frac{k}{m_1}x_1 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 + \frac{k}{m_2}l_0 + \frac{k}{m_1}l_0$

Ainsi : $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + x_2 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) - x_1 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) = l_0 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)$

Ou encore : $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + (x_2 - x_1) \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) = l_0 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)$.

Ainsi, on obtient : $\boxed{\ddot{l} + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) l(t) = kl_0 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$.

Par identification avec $\ddot{l} + \omega_0'^2 l(t) = cste$, on obtient : $\boxed{\omega_0' = \sqrt{\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)}}$.

Q13. Il faut donc résoudre cette équation différentielle :

La solution est la somme de :

- La solution homogène : $l_h(t) = A \cos(\omega_0' t) + B \sin(\omega_0' t)$.
- La solution particulière constante : $l_p = l_0$.

D'où $l(t) = A \cos(\omega_0' t) + B \sin(\omega_0' t) + l_0$.

1^{ère} CI : A $t = 0$, $l(0) = l_0 - \delta = A + l_0$; Soit : $A = -\delta$.

De plus, $\dot{l}(t) = -A\omega_0' \sin(\omega_0' t) + B\omega_0' \cos(\omega_0' t)$.

2^{me} CI : A $t = 0$, $\dot{l}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale).

D'où $B\omega_0' = 0$; Soit : $B = 0$.

Conclusion : $\boxed{l(t) = l_0 - \delta \cos(\omega_0' t)}$.

Q14. On nous donne $f_r = 84 \times \sqrt{\frac{1}{d} \left(\frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'} \right)}$

Pour envoyer le pic de résonance vers les basses fréquences, il faut **f_r faible** ;

Donc il faut **augmenter les masses des vitres** (qui se trouvent au dénominateur dans l'expression de f_r).

PROBLEME 2 : Modélisation du comportement thermique d'une habitation : (D'après EPITA -IPSA MP, PSI, PC 2022) (≈ 57 pts)

Q1. On nous donne $T = 24 \text{ h}$; Alors $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\underline{AN} : \omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$; on obtient : $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

Q2. Il faut utiliser les équivalents basse fréquence et haute fréquence des condensateurs :

En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Le circuit devient ci-contre.

Toutes les intensités sont nulles.

Ainsi $\underline{u}_1 = \underline{e}$; Et $\underline{H} = 1$; D'où $\underline{G}_{dB} \xrightarrow[\text{BF}]{} 0$;

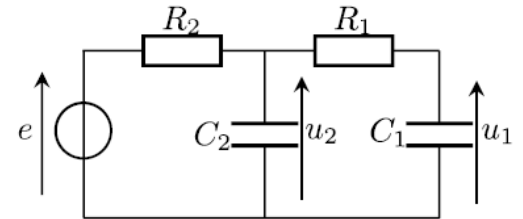
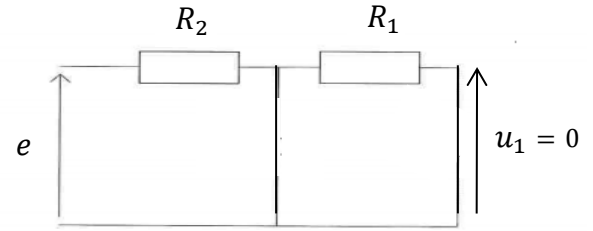
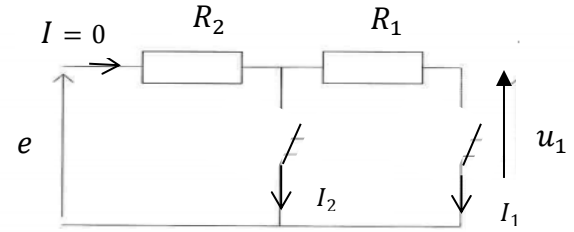
En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre.

\underline{u}_1 est la tension aux bornes d'un fil ;

Ainsi $\underline{u}_1 = 0$; Et $\underline{H} = 0$. D'où $\underline{G}_{dB} \xrightarrow[\text{HF}]{} -\infty$;

L'allure globale sera donc
D'où un **filtre passe bas attendu**.



Q3. R_1 et C_1 sont en série. Cette association est en parallèle sur C_2 .

D'où : $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_{C2}(\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1})}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{C2} + \underline{Z}_{R1}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}(\frac{1}{jC_1\omega} + R_1)}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} + R_1} = \frac{\frac{1}{jC_1\omega} + R_1}{1 + \frac{C_2}{C_1} + jR_1C_2\omega}$;

Ou encore : $\underline{Z}_{eq} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega + jC_2\omega - R_1C_1C_2\omega^2} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{j\omega(C_1 + C_2) - R_1C_1C_2\omega^2}$.

Q4. Pour deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 en dérivation.

Alors $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$; Et si $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$, alors $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \approx \underline{Z}_1$.

D'où $\underline{Z}_{eq} \approx \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$; Ainsi $\underline{Z}_{eq} \approx \underline{Z}_2$.

Autre méthode : Pour une association parallèle, on a : $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$.

Or si $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$, alors $\frac{1}{\underline{Z}_1} \ll \frac{1}{\underline{Z}_2}$; Ainsi $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} \approx \frac{1}{\underline{Z}_2}$; Et $\underline{Z}_{eq} \approx \underline{Z}_2$.

Q5. On nous donne $\underline{Z}_{eq} \approx \frac{1}{jC_2\omega}$. On cherche $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}}$;

A la sortie, R_1 et C_1 sont en série. On peut utiliser un pont diviseur de tensions :

$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1}} = \frac{\frac{1}{jC_1\omega}}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}}$; Soit $\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega}$.

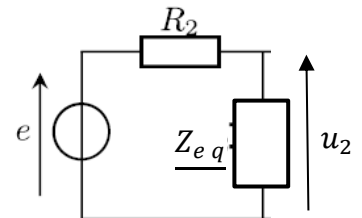
Puis, on utilise $\underline{Z}_{eq} : \underline{Z}_{eq}$ est en série avec R_2 . On peut utiliser un pont diviseur

de tensions : $\frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_{R2}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}}$; Soit $\frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Enfin, $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} \times \frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} \times \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Soit : $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{1}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)} = \frac{1}{1 + j(R_1C_1 + R_2C_2)\omega - R_1C_1R_2C_2\omega^2}$

De la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$ avec $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$



Q6. Étude asymptotique : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2} + j \left(\frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega}{\omega_2} \right)}$.

✓ En BF : Si $\omega \ll \omega_i$: $\underline{H} \sim 1$
 Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(1) = 0$
Asymptote horizontale en 0 en BF.
 Et $\varphi \rightarrow 0$.

✓ En HF : Si $\omega \gg \omega_i$: $\underline{H} \sim -\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2}} \sim -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2}$ et $G \sim \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2}$
 Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2}\right) = 20 \log(\omega_1 \omega_2) - 40 \log \omega$
Asymptote oblique de pente - 40 dB par décade en HF.
 Et $\varphi \rightarrow \pi$ ou $-\pi$; Or $\sin \varphi = -\frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2) \omega}{|Den|} < 0$ donc $\varphi \rightarrow -\pi$.

Autre méthode : $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$ avec $\underline{H}_1 = \frac{1}{(1+j\omega/\omega_1)}$ et $\underline{H}_2 = \frac{1}{(1+j\omega/\omega_2)}$.

Pour \underline{H}_1 et \underline{H}_2 , on reconnaît des fonctions de transfert de filtres passe-bas d'ordre 1.

Ainsi : $G(\omega) = G_1 G_2$; Donc $G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB}$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Étude asymptotique de $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$: On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe bas du 1^{er} ordre.

✓ En BF : Si $\omega \ll \omega_1$: $\underline{H}_1 \sim 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Donc } G_{1dB} \rightarrow 20 \log(1) = 0. \\ \text{Asymptote horizontale en BF.} \\ \text{Et } \varphi_1 \rightarrow 0. \end{array} \right.$

✓ En HF : Si $\omega \gg \omega_1$: $\underline{H}_1 \sim \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1}} \sim -j \frac{\omega_1}{\omega}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Donc } G_{1dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = 20 \log(\omega_1) - 20 \log(\omega) : \\ \text{Asymptote oblique de pente - 20 dB par décade en HF.} \\ \text{Et } \varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

De même pour \underline{H}_2 ; En comme $G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB}$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

On retrouve bien les mêmes conclusions que par l'autre méthode.

Q7. $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} \right)$.

Q8. On nous précise que :

- Dans le cas d'une isolation par l'intérieur : $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 \rightarrow \infty$.

Alors $\underline{H}(j\omega) \approx \underline{H}_1$ et $G_{dB} \approx G_{1dB}$: Pulsation de coupure en $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$. ($G_{dB \text{ max}} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$).

Cela correspond donc au tracé en **trait plein**.

- Dans le cas d'une isolation par l'extérieur : $\omega_1 \rightarrow \infty$ et $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$. Même raisonnement.

Alors $\underline{H}(j\omega) \approx \underline{H}_2$ et $G_{dB} \approx G_{2dB}$: Pulsation de coupure en $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$. ($G_{dB \text{ max}} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$).

Cela correspond donc au tracé en **traits pointillés**.

Q9. On considère le diagramme de Bode en trait plein.

On nous donne $E_0 = 10 \text{ V}$. On cherche U_1 à la pulsation $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ (comme vu en Q1).

Graphiquement, on lit que pour $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, alors $G_{dB}(\text{trait plein}) = -30 \text{ dB} = 20 \log(G(x))$

Soit $\log(G(x)) = -\frac{30}{20} = -\frac{3}{2}$ et $G(x) = 10^{-\frac{3}{2}} \approx 0,032 = \frac{U_1}{E_0}$; Ainsi $U_1 \approx 0,032 E_0$.

AN : $U_1 \approx 0,32 \text{ V}$.

Q10. De même avec le diagramme de Bode en traits pointillés.

Graphiquement, on lit que pour $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, alors $G_{dB}(\text{traits pointillés}) = -50 \text{ dB} = 20 \log(G(x))$

Soit $\log(G(x)) = -\frac{50}{20} = -\frac{5}{2}$ et $G(x) = 10^{-\frac{5}{2}} \approx 0,0032 = \frac{U_1}{E_0}$; Ainsi $U_1 \approx 0,0032 E_0$.

AN : $U_1 \approx 0,032 \text{ V}$.

Conclusion : Comme la tension $u_1(t)$ représente l'évolution de la température intérieure, on cherche à ce qu'elle varie le moins possible. Ainsi, **mieux vaut une isolation par l'extérieur.**

Q11. Puisque $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ à cette fréquence, **$u_1(t)$ est en retard par rapport à $e(t)$** , d'un quart de période,

En effet : $T \leftrightarrow 2\pi$

Et $t_0 \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$; D'où $t_0 = \frac{T \times \frac{\pi}{2}}{2\pi}$. on obtient $\boxed{t_0 = \frac{T}{4}}$.

Or $T = 24 \text{ h}$ donc **$t_0 = 6 \text{ h}$** .

PROBLEME 3 : Traitement d'un signal :

(≈ 30 pts)

(D'après Centrale- Supélec MP 2022)

Q1. D'après l'énoncé, on souhaite un filtre qui coupe les fréquences supérieures à 1 Hz, il faut donc un filtre passe bas.

Filtre A :

En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

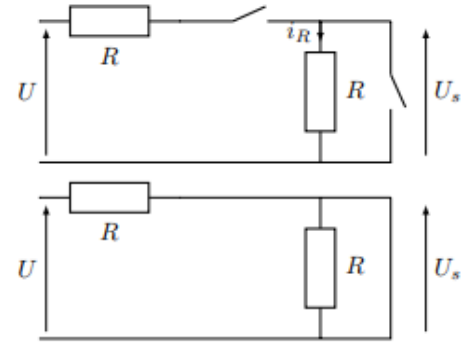
Le circuit devient ci-contre. $i_R = 0$; Alors $\underline{U_S} \approx 0$;

Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{BF} -\infty}$.

En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre. Alors $\underline{U_S} \approx 0$; Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{HF} -\infty}$.

Conclusion : Le filtre A est un filtre passe-bande.



Filtre B :

En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Le circuit devient ci-contre. $i = 0$; Alors $\underline{U_S} \approx \underline{U}$;

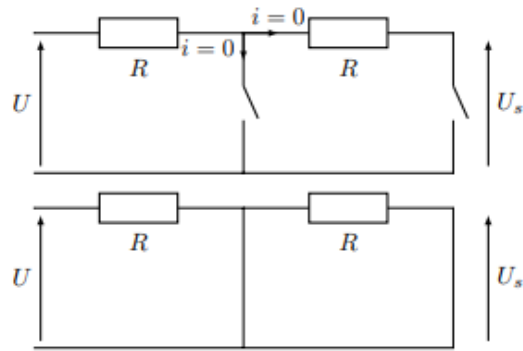
Ainsi $\underline{H} \approx 1$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{BF} 0}$.

En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre. Alors $\underline{U_S} \approx 0$; Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{HF} -\infty}$.

Conclusion : Le filtre B est un filtre passe-bas.

On choisit donc le filtre B.



Q2. On nous donne $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$;

On veut couper des fréquences supérieures à 1 Hz.

Il faudrait donc un point d'intersection des asymptotes à une fréquence $f_0 \approx 0,1 \text{ Hz}$ (1 décade avant).

En posant $x = RC \omega$; Alors on obtient : $\boxed{\underline{H}(jx) = \frac{1}{1-x^2+3jx}}$

Etude asymptotique :

✓ BF : Si $x \ll 1$: $\underline{H} \sim 1$

Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(1) = 0$

Asymptote horizontale en 0 en BF.

✓ HF : Si $x \gg 1$: $\underline{H} \sim -\frac{1}{x^2}$ et $G \sim \frac{1}{x^2}$

Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(\frac{1}{x^2}) = -40 \log x$

Asymptote oblique de pente - 40 dB par décade en HF.

✓ Intersection des asymptotes :

Pour $0 = -40 \log x$; Soit $\log(x) = 0$ et $x = 1$.

✓ D'où l'allure du diagramme de Bode asymptotique ci-contre.

Conclusion : Il faudrait donc $x_0 = RC \omega_0 = 1$;

Soit : $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi f_0$; D'où : $\boxed{RC = \frac{1}{2\pi f_0}}$.

AN : $RC = \frac{1}{2\pi \times 0,1}$; on obtient : $\boxed{RC \approx 1,6 \text{ s}}$.

Avec les ordres de grandeurs usuels, on pourrait choisir

$C = 1 \mu\text{F}$ et $R = 1,6 \text{ M}\Omega$.

