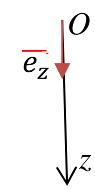
# SUP MPSI3 Corrigé DS07 24 mars 2023

## **EXERCICE 1 :** Etude mécanique d'un pédalo :

***(D'après banque PT 2022)*** ***(≈ 16 pts)***

**Q1.** Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cartésienne : Axe $Oz$ vertical descendant.
Système : Flotteur de masse $M/2$, car 2 flotteurs pour porter $M$.




Forces : Poids : $\vec{P} = \frac{M}{2}\vec{g} = \frac{M}{2}\, g\vec{e}_z$ .
Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\pi_A} = -\pi_A\,\overrightarrow{e_z} = -\rho\, V_{im}\, g\,\overrightarrow{e_z}$
Condition d'équilibre vertical : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ Donc $\vec{P} + \overrightarrow{\pi_A} = \vec{0}$
Projetons sur l'axe vertical : On obtient donc : $\frac{M}{2} g - \rho\, V_{im}\, g = 0$
Or on pose $\alpha = \frac{V_{im}}{V}$ ; Alors il vient $\rho\,\alpha\, V = \frac{M}{2}$ ; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{M}{2\,\rho\, V}}}$ .
AN : $\alpha = \frac{200}{2\times1000\times0{,}5} = \frac{200}{1000} = \frac{2}{10}$ ; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\alpha = 20\ \%}}$**.**

**Q2.** On utilise la notion de bras de levier :
Moment de la force par rapport à $Oz$ : **Sens de rotation positif = sens trigonométrique** car $\overrightarrow{e_z}$ est vers nous.

- Situation (a) :
  $\left|\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F_{pied}})\right| = d_1.\left\|\overrightarrow{F_{pied}}\right\|$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = d$ (ici).
  De plus $\overrightarrow{F_{pied}}$ a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **<u>sens négatif.</u>**
  D'où : $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F_{pied}}) = -d\, F_{pied}}}$.

- Situation (b) :

Même raisonnement, mais cette fois la **<u>distance bras de levier est nulle</u>**, car la force passe par l'axe de rotation.
Ainsi, : $\boxed{\boldsymbol{\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F_{pied}}) = 0}}$

**Q3.** On sait que pour un solide en rotation, $\boldsymbol{P(\overrightarrow{F_{ext}}) = \mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F_{ext}})\,\omega}$ .
De plus, en moyenne, $\langle\left|\mathcal{M}_{Oz}(\overrightarrow{F_{pied}})\right|\rangle = \frac{d\, F_{pied}}{2}$.
Alors $\boxed{\boldsymbol{\langle P(\overrightarrow{F_{pied}})\rangle = \frac{d\, F_{pied}\,\omega}{2}}}$ .
AN : $\langle P(\overrightarrow{F_{pied}})\rangle = \frac{0{,}2\times50\times10}{2}$ ; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\langle P(\overrightarrow{F_{pied}})\rangle = 50\ \mathrm{W}}}$.

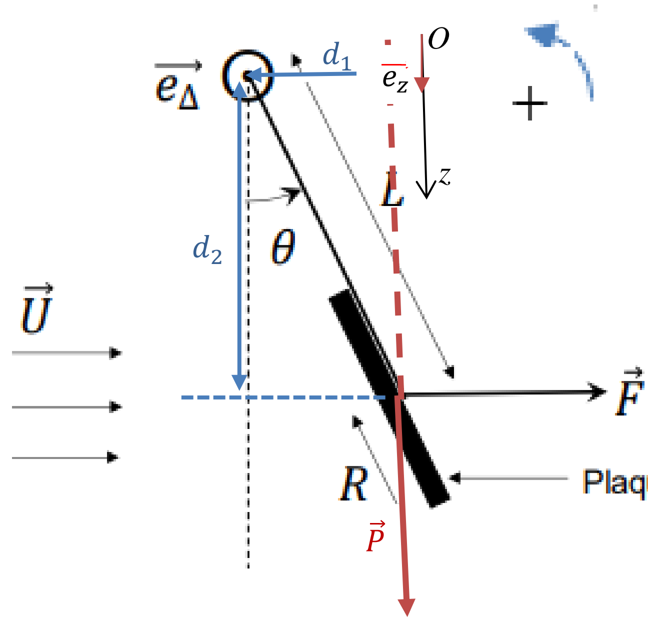
## **EXERCICE 2 :** Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques :

***(D'après CCINP PC 2022)*** *(≈ **42** pts)*

### I -Anémomètre à plaque :

**Q1.** Une force s'exprime en newtons (N) et une vitesse en m.s$^{-1}$ donc si $F = \mu U^2$
alors $\mu$ s'exprime en $\frac{N}{m^2 s^{-2}} = \frac{kg.m.s^{-2}}{m^2 s^{-2}}$ ; Donc finalement **l'unité SI de $\mu$ est le kg.m$^{-1}$**.

**Q2.** Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Système : {plaque + tige} .
Bilan des forces :




**4 actions mécaniques** dont on peut calculer les moments grâce à la notion de bras de levier :

Moments scalaires des forces par rapport à $\Delta$ :

$\boxed{\textbf{Sens de rotation positif = sens trigonométrique}}$ car $\overrightarrow{e_\Delta}$ est vers nous.

- La réaction du support : $\vec{R}$ passe par l'axe de rotation, son moment est donc nul : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0}$.
- La liaison pivot est supposée parfaite, donc $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{liaison\ pivot}) = 0}$.
- Le poids :
$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})| = d_1.\|\vec{P}\| = mg\, d_1$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = L\sin(\theta)$.
De plus le poids $\vec{P}$ a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **sens négatif.**
D'où : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgL\sin(\theta)}$.
- La force aérodynamique $\vec{F}$ :
$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = d_2.\|\vec{F}\| = \mu U^2\, d_2$ en utilisant le bras de levier avec $d_2 = L\cos(\theta)$.
De plus le poids $\vec{P}$ a tendance à faire tourner la tige dans le sens trigonométrique, donc dans le **sens positif.**
D'où : $\boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mu U^2 L\cos(\theta)}$.

**Q3. Condition d'équilibre** : $\boxed{\sum \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F_{ext}}) = 0}$.

D'où : $\mu U^2 L\cos(\theta_{eq}) - mgL\sin(\theta_{eq}) = 0$ ; Ou encore : $U^2 = \frac{mg\sin(\theta_{eq})}{\mu\cos(\theta_{eq})}$ ; Ainsi $\boxed{U = \sqrt{\frac{mg}{\mu}\tan(\theta_{eq})}}$.

AN : $U = \sqrt{\frac{0{,}03\times 9{,}81}{0{,}01}\tan(8°)} = \sqrt{3\times 9{,}81\times\tan(8)}$ ; On obtient : **$U \approx$ 2 m.s$^{-1}$.**

## II - Anémomètre à coupelles :

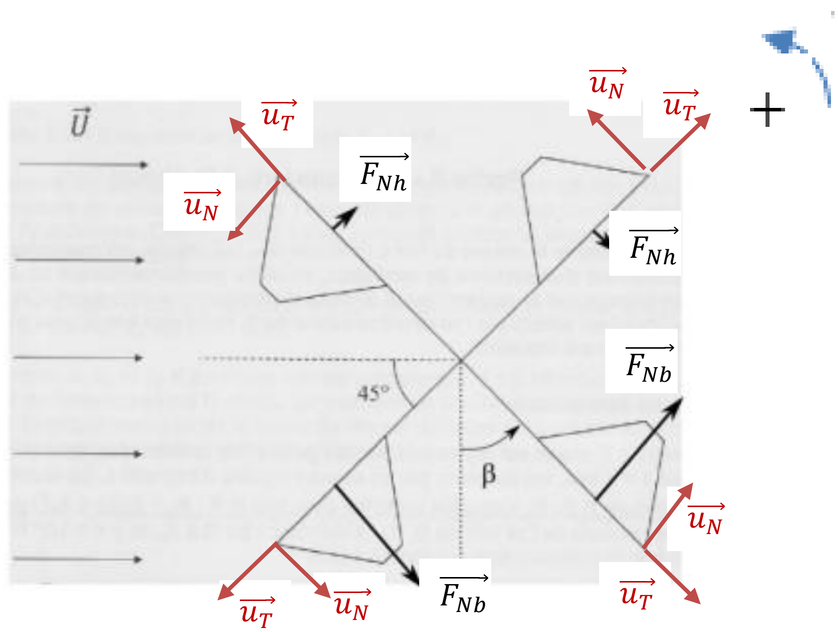
**Q4.** On nous donne : $\overrightarrow{F_N} = \frac{1}{2}\,\rho_{air}\mathcal{A}\;C_N\;U^2\;\overrightarrow{u_N}$ et $\|\overrightarrow{F_N}\,(-\beta)\| = \|\overrightarrow{F_N}\,(\beta)\|$.

- Les vecteurs $\overrightarrow{u_N}$ et $\overrightarrow{u_T}$ ont été schématisés ci-dessous sur chaque coupelle comme demandé.
- Pour les deux coupelles du bas, on est à **β = ±45°.**

D'après le graphe du document 2, **$C_N$ est alors positif et élevé**, donc la **force $\overrightarrow{F_{Nb}}$ est importante et vers la droite** (**selon +$\overrightarrow{u_N}$).**

- Pour les 2 coupelles du haut, on est à **β = ±135°.**

D'après le graphe du document 2, **$C_N$ est alors négatif et faible**, donc la force **$\overrightarrow{F_{Nh}}$ est faible, mais toujours vers la droite,** (**selon -$\overrightarrow{u_N}$** ) ce qui est naturel compte tenu du sens de l'écoulement.




**Q5.** Les **deux forces agissant dans le sens d'une augmentation de β sont plus importantes** que celles en sens inverse.

**Les bras de levier étant équivalents**, le **moment global est donc positif par rapport à l'axe de rotation**, donc d'après le théorème du moment cinétique : $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta\,\ddot{\beta} = \sum M_\Delta\left(\overrightarrow{F_{ext}}\right)$

L'anémomètre va tourner dans le **sens direct ou trigonométrique**.

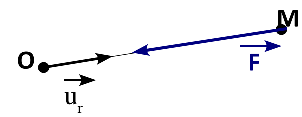
**Q6.** Le moment de la force $\overrightarrow{F_T}$ est nul par rapport à l'axe de rotation, car **sa droite d'action coupe l'axe** de rotation, le **bras de levier est donc nul**.

**Q7.** On appelle couple, un système de forces dont la **résultante est nulle** (somme vectorielle), mais dont le **moment résultant des forces par rapport à un axe est non nul**. Ici, **ce n'est pas le cas** : les différentes forces poussent vers la droite sur le schéma, donc **la résultante est non nulle**.

Cependant, elles sont compensées par la liaison pivot qui retient la structure, donc cet effet est sans importance

**Q8.** Il existe sans doute des frottements solides dans la **liaison pivot qui n'est pas parfaite**.

## EXERCICE 3 : Particule soumise à un champ électrostatique radial : (≈40 pts)




**Q1.** La particule est soumise à la force électrique $\boxed{\vec{F} = q\,\vec{E} = -qE_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u_r}\,;}$.
Schéma ci-contre. **La <u>force est attractive</u>**, la particule est attirée par le point O.

**Q2.** Pour montrer que le mouvement est plan, on applique le théorème du moment cinétique en O à la particule : $\frac{d\vec{L_O}}{dt} = \vec{\mathcal{M}_O}(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r\,\vec{u_r} \wedge \left(-E_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u_r}\right) = \vec{0}\,;$

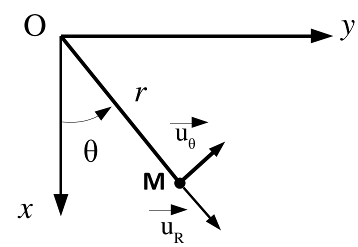
On en déduit que $\vec{L_O}$ est constant, tel que : $\vec{L_O} = \vec{L_O}(t=0) = \vec{OM_0} \wedge m\,\vec{v_0}\,;$

A t = 0, $\vec{OM_0}$ et $\vec{v_0}$ sont dans le plan $\pi$ (O,$\vec{u_x}$ ; $\vec{u_y}$ ), donc $\boxed{\vec{L_O} = L_O\,\vec{u_z}}$;

<u>Calculons $\vec{OM}.\vec{L_O}$ :</u> $\vec{OM}.\vec{L_O} = \vec{OM}.\big(\underbrace{\vec{OM} \wedge m\,\vec{v}}_{\perp \vec{OM}}\big) = 0\,;$ Donc $\vec{OM} \perp \vec{L_O}$ à chaque instant.

Donc à tout moment, $\vec{OM} \perp \vec{u_z}$ : Le **<u>mouvement est plan dans le plan $\pi$ (O,$\vec{u_x}$ ; $\vec{u_y}$ )</u>**.

**Q3.** Coordonnées polaires :




**Q4.** Il faut exprimer le moment cinétique :

$\vec{OM} = r\,\vec{u_r}$ et $\vec{v_M} = \frac{d\,\vec{OM}}{dt} = \dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$ .

Alors : $\vec{L_0} = \vec{OM} \wedge m\,\vec{v_M} = r\,\vec{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\,\vec{u_r} + r\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}\right);$

Ainsi : $\boxed{\vec{L_0} = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\vec{k} = mC\,\vec{k} = cste}$

Par identification : $\boxed{C = r^2\,\dot{\theta} : \textbf{Constante des Aires}}$.

**<u>On se place dans le cas où n = 2 et $v_0$ quelconque :</u>**

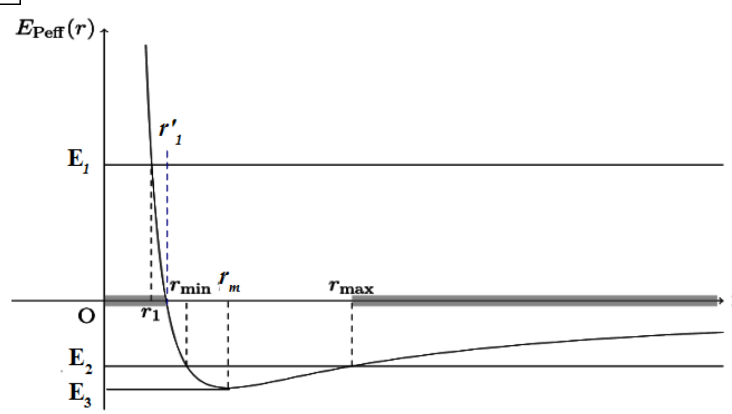
**Q5.** $dE_P = -\,\delta W(\vec{F}) = -\vec{F}.d\vec{OM} = -F\,\vec{u_r}.(dr\vec{u_r} + rd\theta\vec{u_\theta}) = -\,F\,dr\,;$

Ainsi : $dE_P = qE_0\left(\frac{r_0}{r}\right)^2 dr\,;$ Et : $E_P(r) = -qE_0\,\frac{r_0^2}{r} + cste\,;$

Et si on considère que l'énergie potentielle est nulle lorsque $r \to \infty$, alors $\boxed{E_P(r) = -qE_0\,\frac{r_0^2}{r}}$ ;

- $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}mv^2 - qE_0\,\frac{r_0^2}{r}\,;$
- Pour obtenir $E_{Peff}(r)$, il faut exprimer la vitesse en coordonnées polaires et éliminer $\dot{\theta}$ grâce à la constante des aires. On obtient donc : $E_m = \frac{1}{2}\,m(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) - qE_0\,\frac{r_0^2}{r} = \frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - qE_0\,\frac{r_0^2}{r}\,;$

On isole $\frac{1}{2}\,m\dot{r}^2$et on obtient : $\boxed{E_{P\,eff}(r) = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - qE_0\,\frac{r_0^2}{r}\,;}$




**Q6.** Il faut tracer <u>l'allure de $E_{P\,eff}(r)$ </u>:

- $\lim\limits_{r\to 0} E_{P\,eff} = +\infty$ et $\lim\limits_{r\to +\infty} E_{P\,eff} = 0\,;$
- $\frac{d\,E_{P\,eff}}{dr} = -m\frac{C^2}{r^3} + qE_0\,\frac{r_0^2}{r^2}\,;$

$E_{P\,eff}(r)$ est min pour $r_m$ tel que $\frac{d\,E_{P\,eff}}{dr} = 0$, dc pour

$\boxed{r_m = \frac{m\,C^2}{qE_0\,r_0^2} > 0}$ et $\boxed{E_{P\,eff}(r_m) = -\frac{q^2 r_0^2 E_0^2}{2mC^2} < 0}$.

<u>Discussion :</u> $E_m \geq E_{P\,eff}$ à chaque instant car $\frac{1}{2}\,m\dot{r}^2 \geq 0$

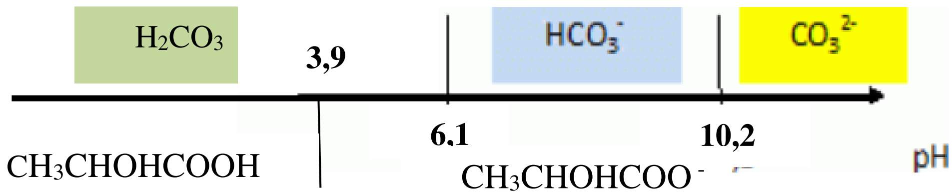
- <u>1^er cas : $E_m = E_1$</u> : Alors $r \geq r_1$ : **<u>Etat de diffusion</u>**.
  La trajectoire est une **branche d'<u>hyperbole</u>.**
- <u>2^ème cas : $E_m = 0$</u> : Alors $r \geq r'_1$ : **<u>Etat de diffusion</u>**. La trajectoire est une branche de <u>parabole</u>.
- <u>3^ème cas : $E_m = E_3$</u> : Alors $r = r_m = cste$ : **<u>Etat lié</u>**.

La trajectoire est **<u>circulaire</u>** de centre O et de rayon $r_0 = r_m = \frac{m\,C^2}{qE_0\,r_0^2}$.

- <u>4^ème cas : $E_m = E_2$</u> $< 0$ : Alors $\mathbf{r_{min}} \leq \mathbf{r} \leq \mathbf{r_{max}}$ : **<u>Etat lié</u>**. La trajectoire est une **<u>ellipse</u>** dont O est un foyer.

## EXERCICE 4 : Le pH sanguin : *(D'après Centrale PSI 2009)* *(≈33 pts)*

**Q1**. DP :




**Q2.** D'après le DP, à pH = 7,40, **[ $CO_3^{2-}$ ] est négligeable**.

On sait que $\boxed{[H_2CO_3]_{eq} + [HCO_3^-]_{eq} = C_0}$.

D'autre part : $pH = pK_A + \log\frac{[A^-]_{eq}}{[HA]_{eq}}$ ; Soit : $\boxed{pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}}$ ;

D'où : $\log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}} = pH - pK_{A1}$ ; En substituant, il vient : $\log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0-[HCO_3^-]_{eq}} = pH - pK_{A1}$.

Ainsi : $\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0-[HCO_3^-]_{eq}} = 10^{pH-pK_{A1}}$ ; Puis $[HCO_3^-]_{eq} = (C_0 - [HCO_3^-]_{eq})10^{pH-pK_{A1}}$ ;

$[HCO_3^-]_{eq}\{1 + 10^{(pH-pK_{A1})}\} = C_0\,10^{(pH-pK_{A1})}$ et enfin : $\boxed{[HCO_3^-]_{eq} = \frac{C_0\,10^{(pH-pK_{A1})}}{1+10^{(pH-pK_{A1})}}}$ ;

AN : $[HCO_3^-]_{eq} = \frac{0{,}028\times 10^{(7,4-6,1)}}{1+10^{(7,4-6,1)}}$ ; On trouve : **$[HCO_3^-]_{eq}$ = 0,0267 mol.L$^{-1}$ = 2,67.10$^{-2}$ mol.L$^{-1}$** .

Et $\boxed{[H_2CO_3]_{eq} = C_0 - [HCO_3^-]_{eq}}$ ; AN : $[H_2CO_3]_{eq} = 0{,}028 - 0{,}0267$ ;

On trouve : **$[H_2CO_3]_{eq}$ =1,34.10$^{-3}$ mol.L$^{-1}$**.

**Q3.a.** D'après le DP, à pH = 7,4, c'est **$[HCO_3^-]_{eq}$ est l'espèce majoritaire**.

De plus, $CH_3CHOHCOOH$ et $HCO_3^-$ ont des **DP disjoints** ; Donc réaction selon la règle du gamma.

Ou faire la réaction **entre l'acide le plus fort et la base la plus forte**.

$$\boxed{CH_3CHOHCOOH + HCO_3^- = CH_3CHOHCOO^- + H_2CO_3}$$ ;

$$K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq}[H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}[HCO_3^-]_{eq}} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}} \times \frac{[H_2CO_3]_{eq}}{[HCO_3^-]_{eq}[H_3O^+]_{eq}}$$

Ainsi $\boxed{K_{eq} = \frac{K_{A3}}{K_{A1}} = 10^{pK_{A1}-pK_{A3}}}$ ; AN : $K_{eq} = 10^{6,1-3,9}$ ;

On trouve : **$K_{eq} = 10^{2,2}$** ; La **réaction n'est ni totale, ni négligeable**.

**Q3.b.** Tableau d'avancement :

$\boxed{[CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{n}{V}}$ ; AN : **$[CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{3.10^{-4}}{0{,}1}$ = 3.10$^{-3}$ mol.L$^{-1}$ = $C_3$**.

| | $CH_3CHOHCOOH$ | + $HCO_3^-$ = | $CH_3CHOHCOO^-$ | + $H_2CO_3$ |
|---|---|---|---|---|
| EI | $C_3$ | $C_1$ | | $C_2$ |
| EE | $C_3 - x$ | $C_1 - x$ | $x$ | $C_2 + x$ |

Alors $K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq}[H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}[HCO_3^-]_{eq}} = \frac{x(C_2+x)}{(C_3-x)(C_1-x)}$ ; Soit : $K_{eq}(C_3 - x)(C_1 - x) = x(C_2 + x)$ ;

Ou encore : $\boxed{x^2(1 - K_{eq}) + x(C_2 + K_{eq}C_1 + K_{eq}C_3) - K_{eq}C_1C_3 = 0}$

Résolution du polynôme du 2$^{nd}$ degré : On trouve $\Delta \approx 14{,}433$ ;

$x_1 \approx 0{,}027 > C_3$ donc impossible **ou $x_2 \approx 2,98.10^{-3}$ mol.L$^{-1}$**.

Ainsi : **$[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} = x$ = 2,98.10$^{-3}$ mol.L$^{-1}$.** **$[H_2CO_3]_{eq} = C_2 + x$ = 4,38.10$^{-3}$ mol.L$^{-1}$**.

**$[CH_3CHOHCOOH]_{eq} = C_3 - x$ = 2,00.10$^{-5}$ mol.L$^{-1}$**. **$[HCO_3^-]_{eq} = C_1 - x$ = 2,40.10$^{-2}$ mol.L$^{-1}$**.

- Enfin $\boxed{pH = pK_{A1} + \log\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}}$ ; Ainsi pH= 6,1 + $\log\frac{2{,}40.10^{-2}}{4{,}38.10^{-3}}$ ; On trouve **pH ≈ 6,8**.

Le sang est donc **légèrement plus acide** qu'en temps normal.

**Q3.c.** La respiration permet **l'expiration de $CO_2$** et **donc de $H_2CO_3$**, ce qui permet au pH de ne pas diminuer malgré la production d'acide lactique.

## PROBLEME : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre :

***(D'après ATS 2014)*** ***(≈80 pts)***

### I – Préliminaires :

**Q1.** On a : $\boxed{\overrightarrow{OM} = r\,\overrightarrow{u_r}}$ et $\boxed{\overrightarrow{v_M} = \frac{d\,\overrightarrow{OM}}{dt} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

**Q2.** On sait que $\overrightarrow{F}(r) = -\overrightarrow{grad}(\mathrm{Ep}) = -\frac{d\,\mathrm{Ep}(r)}{dr}\,\overrightarrow{u_r}$.

Ainsi : $F(r) = -\frac{d\,\mathrm{Ep}(r)}{dr} = -\frac{d\left(-m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}\right)}{dr} = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}$ ; D'où $\boxed{\overrightarrow{F} = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}}$;

C'est donc une **force attractive,** car selon ($-\overrightarrow{u_r}$).

**Q3.** $\overrightarrow{L_0}$ est le **vecteur moment cinétique du point M par rapport à O.**

- $\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{OM} \wedge m\,\overrightarrow{v_M} = r\,\overrightarrow{u_r} \wedge m\left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$; Ainsi : $\boxed{\overrightarrow{L_0} = m\,r^2\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{k}}$;
- Donc : $\boxed{L_0 = \left\|\overrightarrow{L_0}\right\| = m\,r^2\,|\dot{\theta}|}$ ;
- Système : le satellite en M ;
  Référentiel géocentrique considéré comme galiléen.
  Seule force $\overrightarrow{F}$ ; Son moment par rapport à O : $\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \overrightarrow{F} = \overrightarrow{0}}$ , car vecteurs colinéaires.
  Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe : $\frac{d\overrightarrow{L_0}}{dt} = \overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{0}$ ; Soit $\boxed{\overrightarrow{L_0} = \overrightarrow{cst}}$;

### II - Mise en orbite circulaire du satellite :

**Q4.** Trajectoire circulaire de rayon $r$, donc $\dot{r} = 0$ ; Alors $\overrightarrow{v_M} = r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ ; Ou encore : $\boxed{\overrightarrow{v_M} = v\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

Et $\overrightarrow{a_M} = \frac{d\,\overrightarrow{v_M}}{dt} = \frac{dv}{dt}\,\overrightarrow{u_\theta} - v\,\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$ ; Ou encore : $\boxed{\overrightarrow{a_M} = -\frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{v}\,\overrightarrow{u_\theta}}$.

On retrouve l'expression de l'accélération dans la base de Frenet.

**Q5.** Seule force $\overrightarrow{F} = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$ ; PFD : $\overrightarrow{F} = m\overrightarrow{a_M}$ ; Ainsi : $m\left(-\frac{v^2}{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{v}\,\overrightarrow{u_\theta}\right) = -m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r^2}\,\overrightarrow{u_r}$ ;

En projetant sur les 2 axes, il vient : $\boxed{\dot{v} = 0}$ ; Ainsi : $\boxed{v = cste}$: Le **mouvement est donc uniforme.**

$$\frac{v^2}{r} = g_0\,\frac{R_T^2}{r^2} \text{ ; Soit : } \boxed{v^2 = g_0\,\frac{R_T^2}{r}} \text{ ;}$$

**Q6.** $E_C = \frac{1}{2}\,m\,v^2$ ; Ainsi : $\boxed{E_C = \frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r}}$;

$E_m = E_C + E_P = \frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r} - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$ ; Ainsi : $\boxed{E_m = -\frac{m\,g_0\,R_T^2}{2r}} = -E_C$ ; $\boxed{E_m < 0}$ normal car **c'est un état lié**.

- $E_m(r_b) = -\frac{4.10^3 \times 10 \times (6{,}4.10^6)^2}{2 \times 8.10^6}$ ; On trouve : $\underline{\boldsymbol{E_m(r_b) \approx -1.10^{11}\ \mathrm{J}}}$.
- $E_m(r_h) = -\frac{4.10^3 \times 10 \times (6{,}4.10^6)^2}{2 \times 40.10^6}$ ; On trouve : $\underline{\boldsymbol{E_m(r_h) \approx -2.10^{10}\ \mathrm{J}}}$.

### III - Étude énergétique du satellite :

**Q7.** Le système n'est soumis qu'à **une force conservative**, donc son $\boldsymbol{E_m}$ **est constante**.

- De plus, dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a : $\overrightarrow{v_M} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ ; Donc : $\boxed{v_M^2 = \dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2}$.

Alors : $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2}\,m\,v_M^2 - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r} = \frac{1}{2}\,m\,(\dot{r}^2 + r^2\,\dot{\theta}^2) - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$;

Ou encore : $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\,mr^2\,\dot{\theta}^2 - m\,g_0\,\frac{R_T^2}{r}$ ;

De plus, on a vu au 3) que : $L_0 = \left\|\overrightarrow{L_0}\right\| = m\,r^2\,|\dot{\theta}|$ ; Donc : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$ et $m\,r^2\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m\,r^2}$ .

Ainsi $\boxed{: E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m\,\frac{R_T^2}{r}}$ . Alors $\boxed{E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)}$ avec $\boxed{E_{P,eff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m\,\frac{R_T^2}{r}}$

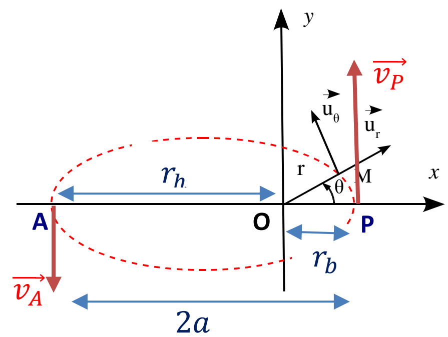
**Q8.** On a : $E_m = \frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $\frac{1}{2}\,m\,\dot{r}^2 \geq 0$.

Donc à chaque instant, on doit avoir : $\boxed{E_m \geq E_{P,eff}(r)}$;

**Q8 (suite)**

- Pour la <u>trajectoire elliptique</u>, il faut un **<u>domaine de variation de *r* qui soit borné</u>**, donc il faut un **<u>état lié</u>**, $\boldsymbol{E_{m2} \geq E_{P,eff}(r)}$ impose $r_{min} \leq r \leq r_{max}$ ;
- Pour la <u>trajectoire hyperbolique</u>, il faut un **<u>domaine de variation de *r* qui soit non borné</u>**, donc il faut un **<u>état de diffusion</u>**, $\boldsymbol{E_{m1}} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r \geq r'_{min}$ ;
- Pour la <u>trajectoire circulaire</u>, il faut que **<u>r soit constant,</u>** donc qu'il ne puisse prendre qu'une seule valeur. $E_{min} \geq E_{P,eff}(r)$ impose *r* = cste.

## <u>IV - Mise en orbite haute du satellite :</u>




**Q9.** En A ou en P, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{v_A}$ , donc la composante en $\overrightarrow{u_r}$ est nulle, ainsi $\boxed{\dot{r} = 0}$;
Ou encore, en ces points, r est max donc $\dot{r} = 0$ ;
D'autre part, d'après les propriétés de l'ellipse, on a : $\boxed{\boldsymbol{r_h + r_b = 2a}}$;

**Q10.** D'après la question Q7),
on sait que $E_{m,t} = \frac{1}{2}\, m\, \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$ ;

Or en A et en P, $\dot{r} = 0$ , donc en ces points $E_{m,t} = 0 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$ ;

D'où : $r^2\, E_{m,t} = \frac{L_0^2}{2m} - g_0 m\, r\, R_T^2$ ; Ou encore $\boxed{: \boldsymbol{r^2 + \frac{g_0 m\, r\, R_T^2}{E_{m,t}} - \frac{L_0^2}{2mE_{m,t}} = 0}}$ ;

Par identification, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\alpha = \frac{g_0 m\; R_T^2}{E_{m,t}}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\beta = -\frac{L_0^2}{2mE_{m,t}}}}$ ;

Pour trouver l'expression de $E_{m,t}$, il faut résoudre le polynôme du second degré trouvé précédemment.

On a $r^2 + \alpha\, r + \beta = 0$ ; $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$ ; $r_{h,b} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ ; Ainsi $\boxed{: \boldsymbol{r_h + r_b = 2a = -\alpha}}$;

D'où : $2a = -\frac{g_0 m\; R_T^2}{E_{m,t}}$ et $\boxed{\boldsymbol{E_{m,t} = -\frac{m\, g_0\, R_T^2}{2a}}}$ ; CQFT.

**Q11.** Au début du transfert, le satellite est en $\boldsymbol{r_b}$ **= 8000 km** sur l'ellipse de transfert.
Par lecture graphique, on obtient **<u>$E_{m,\,\text{ellipse}} \approx$ - 35 GJ</u>** (courbe du milieu).

**Q12.** De même, on lit pour l'orbite basse, on lit : **<u>$E_{m,b} \approx$ - 100 GJ</u>** (courbe du bas).
Et pour l'orbite haute : **<u>$E_{m,h} \approx$ - 20 GJ</u>** (courbe du haut).
<u>Rq :</u> On retrouve les ordres de grandeurs de la question 7.

**Q13.** En P, le satellite passe de l'orbite circulaire basse : ($E_{m,b} \approx$ - 100 GJ) à l'ellipse de transfert ($E_{m,\,\text{ellipse}} \approx$ - 35 GJ), il faut donc lui fournir **<u>$\Delta\, E_{mP}$ = 65 GJ</u>**.
Grâce aux dimensions des grandeurs fournies, on en déduit $m_C = \frac{65.10^9}{50.10^6} = \frac{65000}{50}$ ; Soit : **<u>$m_C$ =1300 kg</u>.**

**Q14.** Les <u>ergols</u> utilisés dans la fusée Ariane sont **<u>l'oxygène et l'hydrogène liquide</u>**.
<u>L'orbite géostationnaire</u> est **<u>l'orbite circulaire dans le plan équatorial située à 36 000 km d'altitude</u>**. Sa particularité est d'avoir une période de rotation synchrone avec la terre, soit 24h. Le satellite apparait alors immobile pour l'observateur terrestre.

## <u>V- Chute du satellite :</u>

**Q15.** L'énoncé nous donne la solution des questions Q**5)** et Q**6)** pour $v^2$ et $E_m$.
Sur l'orbite circulaire, on a démontré à la question **Q5)** que le mouvement était uniforme.

Alors $v = \frac{dist}{temps} = \frac{2\pi r}{T}$ (pour un tour) ; Soit : $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0\, \frac{R_T^2}{r}$ , d'après l'énoncé.

Donc : $\boxed{\boldsymbol{\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0\, R_T^2}}}$; On retrouve la **<u>3ème loi de Kepler</u>.**

**Q16.** Théorème de la puissance mécanique : Pour un système **<u>non conservatif</u>** (ce qui est le cas ici), car il y a des f**rottements**, $\boxed{\dfrac{d\,E_m}{dt} = P\left(\overrightarrow{f_{nc}}\right) = \overrightarrow{f_{nc}}\cdot\vec{v}}$; Ainsi ici, $\dfrac{d\,E_m}{dt} = -k\,v^2 = -k\,g_0\,\dfrac{R_T^2}{r}$ ;

Or d'après l'énoncé, $E_m(t) = -\dfrac{m\,g_0\,R_T^2}{2r(t)}$ ; Donc $\dfrac{d\,E_m}{dt} = \dfrac{m\,g_0\,R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r}$

Ainsi : $\dfrac{m\,g_0\,R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r} = -k\,g_0\,\dfrac{R_T^2}{r}$ ; D'où : $\boxed{\dot{r} + \dfrac{2k}{m}\,r(t) = 0}$; Par identification, on a $\boxed{\tau = \dfrac{m}{2k}}$ ;

<u>Unité de $\tau$</u> : $[\tau] = \dfrac{kg}{[k]} \underset{\uparrow}{=} \dfrac{kg}{N.s.m^{-1}} = \dfrac{kg}{kg.m.s^{-2}.s.m^{-1}} = s$ ; **<u>$\tau$ est bien homogène à un temps</u>**.

Car $\vec{f} = -k\,\vec{v}$.

**Q17.** Solution de l'équation différentielle linéaire du 1er ordre, à coefficients constants : $r(t) = A\,e^{-t/\tau}$ ;
Or CI : A $t = 0$, $r(0) = r_0 = A$ ; Donc : $\boxed{r(t) = r_0\,e^{-t/\tau}}$ ;
<u>Remarque :</u> En toute rigueur, $r > R_T$ car le satellite ne peut pas pénétrer dans la terre. De plus, la valeur de $k$ n'est pas constante : $k(r)$.
En effet, le frottement atmosphérique dépend de la densité de l'air donc de l'altitude.