Mécanique – chapitre 2

Dynamique du point

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Exploiter la conservation de la masse pour un système fermé.
- ▢ Établir l'expression de la quantité de mouvement pour un système de deux points sous la forme : $\vec{p} = m\vec{v}(\mathrm{G})$.
- ▢ Première loi de Newton : décrire le mouvement relatif de deux référentiels galiléens.
- ▢ Force de gravitation. Modèle du champ de pesanteur uniforme au voisinage de la surface d'une planète. Mouvement dans le champ de pesanteur uniforme.
- ▢ Modèles d'une force de frottement fluide. Influence de la résistance de l'air sur un mouvement de chute.
- ▢ Troisième loi de Newton : établir un bilan des forces sur un système ou sur plusieurs systèmes en interaction et en rendre compte sur un schéma.
- ▢ Deuxième loi de Newton : déterminer les équations du mouvement d'un point matériel ou du centre de masse d'un système fermé dans un référentiel galiléen.
- ▢ Étudier le mouvement d'un système modélisé par un point matériel dans un champ de pesanteur uniforme en l'absence de frottement.
- ▢ Exploiter, sans la résoudre analytiquement, une équation différentielle : analyse en ordres de grandeur, détermination de la vitesse limite, utilisation des résultats obtenus par simulation numérique. Écrire une équation adimensionnée.

L'essentiel

I Introduction

I/A Inertie et quantité de mouvement

Mettre en mouvement un corps revient à en **modifier la vitesse**. Il est cependant plus facile de mettre en mouvement (ou arrêter le mouvement) certains corps par rapport à d'autres. Ce phénomène s'appelle l'**inertie**, et est proportionnel à la **masse d'un corps**.

Définition M2.1 : Inertie et quantité de mouvement

La résistance d'un corps matériel de masse m à varier de vitesse est appelée **inertie**, quantifié par la **masse** et le **vecteur quantité de mouvement** du point matériel M du corps :

$$\boxed{\overrightarrow{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = m\overrightarrow{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)}$$

avec $\overrightarrow{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$ le vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Il est en effet plus difficile de déplacer une voiture à l'arrêt qu'un caddie à l'arrêt, et inversement il est plus difficile d'arrêter une voiture qu'un caddie. Dans l'analogie électromécanique, c'est l'inductance L qui s'oppose à la variation du courant quand m s'oppose à la variation de la vitesse.

I/B Forces fondamentales

Les causes du mouvement d'un corps sont appelées **forces**.

Définition M2.2 : Forces

Les **forces** caractérisent les actions mécaniques sur un point matériel M. Ce sont des **vecteurs** et elles sont **indépendantes du référentiel**.

Unité

$$\boxed{1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}}$$

Il existe quatre de ces forces que l'on caractérise de « fondamentales », qui permettent de classer les interactions physiques entre les systèmes :

Tableau M2.1 – Interactions fondamentales

Type / Caract.	Faible	Forte	Électromag.	Gravitationnelle
Intensité	Faible	Très forte	Forte	Faible
Portée	Extrême$^{\text{t}}$ courte ($\approx 10^{-18}$ m)	Très courte ($\approx 10^{-14}$ m)	Longue	Très longue
Agit sur	Fermions	Quarks et gluons	Particules chargées	Particules massives
Conséquences	Désintégration radioactive, fusion nucléaire	Cohésion des nucléons	Cohésion des matériaux, propriétés mécaniques	Poids, organisation cosmique

Rappel M2.1 : Interaction électrostatique

Avec l'interaction électrostatique, les particules de **même signe** se **repoussent**, tandis que celles de signes **opposées s'attirent**. Elle est responsable de la **cohésion des matériaux** et de leurs propriétés mécaniques (dureté, viscosité, propriétés chimiques…).

La force d'interaction électrostatique causée par une particule de charge q_A sur une charge q_B est :

$$\vec{F}_{e,\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{\mathrm{AB}^2}\vec{u_r} \quad \text{avec} \quad \vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$$

$\vec{u_r}$ vecteur unitaire dirigé de A vers B.

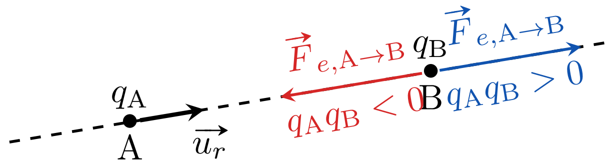

Figure M2.1 – Interaction électrostatique.

Rappel M2.2 : Interaction gravitationnelle

Avec l'interaction gravitationnelle, la masse étant une grandeur positive, toutes les massives s'attirent entre elles. Elle prédomine à l'échelle astronomique.

La force d'interaction gravitationnelle causée par une masse m_A sur une masse m_B est :

$$\vec{F}_{g,\mathrm{A}\to\mathrm{B}} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{\mathrm{AB}^2}\vec{u_r} \quad \text{avec} \quad \vec{u_r} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{AB}}}{\mathrm{AB}}$$

$\vec{u_r}$ vecteur unitaire dirigé de A vers B.

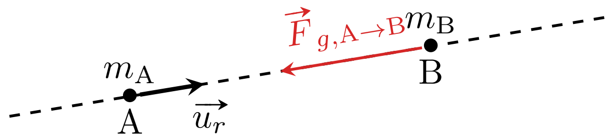

Figure M2.2 – Interaction gravitationnelle.

II Les trois lois de Newton (1687)

II/A Principe d'inertie

Loi M2.1 : Principe d'inertie

Il existe des référentiels appelés **référentiels galiléens** dans lesquels un point matériel M soumis à **aucune action mécanique** est

- soit **au repos** ;
- soit en **translation rectiligne uniforme**.

Ainsi, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen.

Il n'existe rigoureusement aucun référentiel galiléen, mais on peut en considérer certains comme *approximativement* galiléens lorsqu'on étudie le problème sur **une durée assez courte** devant une durée typique du système, afin que les effets de non-galiléeanité soient négligeables.

Propriété M2.1 : Caractère galiléen des référentiels

Les référentiels fondamentaux sont *supposés* galiléens si le mouvement est plus court que :

- **Référentiel héliocentrique** : un *trajet significatif du Soleil dans la galaxie*, soit plusieurs millions d'années ;

- **Référentiel géocentrique** : un *trajet significatif de la Terre autour du Soleil*, soit une année ;
- **Référentiels terrestres** : une *rotation significative de la Terre*, soit une journée.

II/B Principe fondamental de la dynamique

C'est une des lois les plus importantes de la physique, permettant de **relier le mouvement cinématique** (vitesse et associés) d'un corps en **fonction de ses causes** (les forces extérieures).

Loi M2.2 : Principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, l'évolution du vecteur **quantité de mouvement** $\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$ est reliée aux **forces extérieures** agissant sur le système :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}}$$

Lorsque le **système est fermé** et donc la **masse est constante**, on a $\forall t, m(\cancel{t}) \Rightarrow \vec{p}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = m\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$, ainsi

$$\boxed{m\,\vec{a}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}}$$

avec $\vec{a}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t)$ le vecteur accélération du point M.

Remarque M2.1 : Mouvements de systèmes ouverts

Certains mouvements ne peuvent donc pas être traités avec cette dernière formulation s'ils s'accompagnent d'une variation de masse :

- Le mouvement d'une fusée qui brûle son carburant puis abandonne ses réservoirs ;
- Le mouvement d'une goutte d'eau qui s'évapore lors de sa chute.

Dans ces cas-là, on utilise la première formulation.

II/C Loi des actions réciproques

Loi M2.3 : Loi des actions réciproques

Pour deux points M_1 et M_2 en interaction, la force exercée par le point 1 sur le point 2 est égale à l'**opposé** de la force exercée par le point 2 sur le point 1 :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}}$$

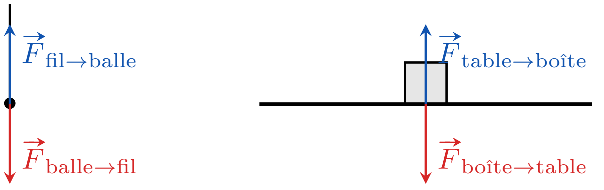

Figure M2.3 – Actions réciproques

III Ensembles de points

Aucun système n'est rigoureusement ponctuel, mais sous certaines conditions il est possible d'étudier le mouvement d'un corps en tant que point matériel de manière rigoureuse.

III/A Centre d'inertie

Définition M2.3 : Centre d'inertie

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité** G d'un ensemble de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \sum_i \frac{m_i}{m_{\text{tot}}} \overrightarrow{\mathrm{OM}_i}} \Leftrightarrow \boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{GM}_i} = \vec{0}}$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

Le centre d'inertie correspond au **centre d'équilibre gravitationnel** d'un ensemble de point. Ainsi, pour mettre une règle en équilibre horizontalement il faut la reposer en son milieu. Un marteau, en revanche, a son centre d'inertie bien plus proche de la masse que du milieu.

On peut démontrer l'équivalence entre les deux définitions :

Démonstration M2.1 : Centre d'inertie

$$m_{\text{tot}} = \sum_i m_i \Rightarrow \sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{OM}_i} \Leftrightarrow \vec{0} = \sum_i m_i \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} \right)$$

Or, comme $\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} - \overrightarrow{\mathrm{OG}} = \overrightarrow{\mathrm{GO}} + \overrightarrow{\mathrm{OM}_i} = \overrightarrow{\mathrm{GM}_i}$, on aura bien :

$$\boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{GM}_i} = \vec{0}}$$

Application M2.1 : Application

Soient 2 masses placées en A et en B. Déterminer la position de G en calculant $\overrightarrow{\mathrm{AG}}$ dans les deux cas suivants :

1


2


1)
$$m\overrightarrow{\mathrm{GA}} + m\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{0} \Leftrightarrow \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{0}$$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, donc

$$2\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0} \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

2)
$$3m\overrightarrow{\mathrm{GA}} + m\overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{0} \Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = \vec{0}$$

Or, $3\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GB}} = 3\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}}$, donc

$$4\overrightarrow{\mathrm{GA}} + \overrightarrow{\mathrm{AB}} = \vec{0} \Leftrightarrow 4\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \overrightarrow{\mathrm{AB}} \Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{\mathrm{AG}} = \frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}$$

Cette définition peut être étendue aux solides qui peuvent être vus comme un ensemble infini de points infiniment proches. Dans ce cas, la somme discrète devient une intégrale.

III/B Quantité de mouvement d'un ensemble de points

On souhaiterait pouvoir étudier un ensemble de points comme le mouvement d'un point unique, comme le centre d'inertie. Pour cela, il faut étudier la quantité de mouvement d'un ensemble de points.

Définition M2.4 : Quantité de mouvement d'un ensemble de points

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points matériels M_i de masses m_i est la somme des quantités de mouvement de chacun des points :

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_i m_i \vec{v}(\mathrm{M}_i)}$$

Propriété M2.2 : Quantité de mouvement et centre d'inertie

La quantité de mouvement d'un ensemble de points est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} :

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G})}$$

Tout se passe comme si la masse était concentrée en G.

Démonstration M2.2 : Quantité de mouvement et centre d'inertie

Pour que les choses soient simples, il faudrait donc que $\vec{p}(\mathcal{S})$ soit relié au centre d'inertie. Or,

$$\vec{v}(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{m_{\text{tot}}} \underbrace{\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{p}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G})}$$

III/C Théorème de la résultante cinétique

Si on peut étudier la cinématique d'un corps par l'étude de son centre de gravité, comment les forces interviennent-elles sur cet ensemble de points ? Considérons pour simplifier un système de deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 en mouvement dans un référentiel galiléen. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacun d'entre eux :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathrm{M}_1)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_1} + \vec{F}_{\text{ext} \to \mathrm{M}_1}$$

avec deux types de forces : les forces intérieures du système, ici celles exercées par M_2 sur M_1, et les forces extérieures, c'est-à-dire toutes les autres. En faisant de même pour M_2 :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathrm{M}_2)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2} + \vec{F}_{\text{ext} \to \mathrm{M}_2}$$

Ainsi, avec la définition de la quantité de mouvement d'un ensemble de points,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{F}_{\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2} + \vec{F}_{\mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_1}}_{= \vec{0} \text{ d'après la 3ème loi}} + \vec{F}_{\text{ext} \to \mathrm{M}_1} + \vec{F}_{\text{ext} \to \mathrm{M}_2}$$

Propriété M2.3 : Théorème de la résultante cinétique

Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel s'applique à un ensemble de point en prenant pour point matériel le centre d'inertie G affecté de la masse totale m_{tot} du système, en ne considérant que les **forces extérieures** s'appliquant à l'ensemble :

$$\boxed{m_{\text{tot}} \frac{\mathrm{d}\vec{v}(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\text{ext}}}$$

Important M2.1 : Conclusion

Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans la suite, on étudiera le **mouvement du centre de gravité**, de masse m_{tot}, soumis aux **forces extérieures** au système.

III/D Méthode générale de résolution en mécanique

Important M2.2 : Étapes de résolution

1. **Système**Quel est l'objet en mouvement, dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement ?
2. **Schéma.**Faire un schéma du problème dans une **situation quelconque**[1].
3. **Modélisation.**Donner le repère, détailler le repérage, les conditions initiales, les représenter sur le schéma et *définir les notations* nécessaires.
4. **Bilan des forces.**Faire le bilan des forces, les exprimer **dans le repère** choisi et les représenter sur le schéma.
5. **Deuxième loi de Newton.**Appliquer le PFD au système.
6. **Équations scalaires.**Donner les trois équations $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$.
7. **Répondre aux questions.**Le plus souvent, obtenir les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

1. On ne fait **jamais** de schéma à l'équilibre ou à des angles particuliers (45° par exemple)

IV Forces usuelles

IV/A Le poids

IV/A) 1 Définition

Définition M2.5 : Poids et pesanteur

Dû à l'attraction gravitationnelle de la Terre, un corps de masse m à sa surface subit une force que l'on appelle le **poids**, telle que :

$$\boxed{\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_z}}$$

avec $\vec{g}$ le vecteur **accélération de la pesanteur**, de norme $g = \|\vec{g}\| = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$ et dirigé **verticalement vers le sol**.

Par définition de l'interaction gravitationnelle, on a

$$\vec{g} = -\mathcal{G}\frac{m_T}{{R_T}^2}\,\vec{u_z}$$

avec m_T et R_T la masse et le rayon de la Terre, $\mathcal{G}$ la constante gravitationnelle, et $\vec{u_z}$ vertical ascendant.

IV/A) 2 La chute libre

Définition M2.6 : Chute libre

Un système en chute libre pure ne subit que l'action de son poids.

1 **Système.** {balle} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$, supposé galiléen.

2 **Schéma.**

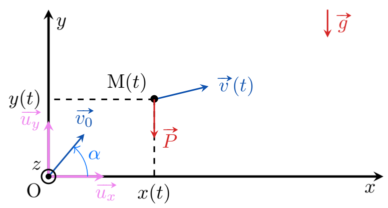

Figure M2.4 – Chute libre.

3 **Modélisation.**

◇ Repère : $(\vec{u_x}, \vec{u_y}, \vec{u_z})$ base orthonormée directe (BOND) avec $\vec{u_x}$ dans le sens du lancer et $\vec{u_y}$ verticale ascendante.

◇ Repérage :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= x\,\vec{u_x} + y\,\vec{u_y}\\ \vec{v} &= \dot{x}\,\vec{u_x} + \dot{y}\,\vec{u_y}\\ \vec{a} &= \ddot{x}\,\vec{u_x} + \ddot{y}\,\vec{u_y}\end{aligned}$$

◇ Conditions initales :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0} \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = v_0\cos\alpha\,\vec{u_x} + v_0\sin\alpha\,\vec{u_y}$$

avec α l'angle du vecteur $\vec{v_0}$ avec l'axe horizontal et v_0 sa norme.

4 **Bilan des forces.** Ici, seul le poids s'applique :

$$\textbf{Poids}\ \vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_y}$$

5 **PFD.** $m\vec{a} = \vec{P}$

6 **Équations scalaires.** On projette sur les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{y}(t) = -mg \\ m\ddot{z}(t) = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse au mouvement plan donc pas à la coordonnée z. Aussi, la masse n'étant pas nulle, elle se simplifie dans les équations et on a

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases}$$

On remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse.

Important M2.3 : Chute libre

Lors d'une chute libre **sans frottements**, la masse du corps en chute n'intervient pas. Cela signifie en particulier que, dans le vide, tous les corps chutent à la même vitesse. [2]

7 **Répondre aux questions.** On intègre l'accélération pour obtenir la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + K_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha = K_1 \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha = K_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}}$$

De même pour les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha + C_1 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + C_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x(0) = 0 = C_1 \\ y(0) = 0 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases}}$$

Si on cherche la trajectoire, il s'agit alors d'obtenir la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy, c'est-à-dire éliminer le temps t. À partir de l'équation horaire sur $\overrightarrow{u_x}$, on a

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ \Rightarrow y(x) &= -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2\cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0\cos\alpha} \\ \Leftrightarrow \boxed{y(x)} &\boxed{= -\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha} \end{aligned}$$

C'est une parabole :

On peut en définir deux caractéristiques principales, la **portée** et la **flèche**.

Définition M2.7 : Portée d'un tir

La **portée** d'un tir est la distance **horizontale** entre l'origine du tir et l'endroit où retombe le tir.

Autrement dit, on trouve x_P tel que :

$$\begin{aligned} y(x_P) &= 0 \\ \Leftrightarrow x_P\left(-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x_P + \tan\alpha\right) &= 0 \end{aligned}$$

2. https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs

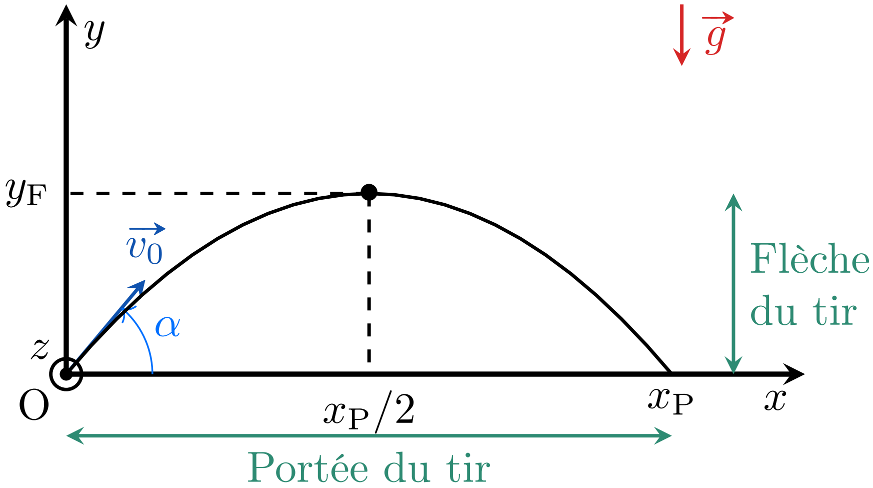

FIGURE M2.5 – Chute libre (sans frottements).

On cherche $x_P \neq 0$ (origine du tir), d'où

$$
\begin{aligned}
&-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha}x_P + \tan\alpha = 0 \\
\Leftrightarrow\ & x_P = \frac{2{v_0}^2\cos^2\alpha}{g}\tan\alpha = \frac{2{v_0}^2\cos^{\cancel{2}}\alpha}{g}\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{x_P = \frac{{v_0}^2}{g}\times 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{{v_0}^2}{g}\sin(2\alpha)}
\end{aligned}
$$

Implication M2.1 : Portée maximale altitude nulle

Ainsi, pour un tir à altitude nulle, la portée est maximale si $\sin(2\alpha) = 1$, soit $\boxed{\alpha = \pi/4}$.

Définition M2.8 : Flèche d'un tir

La **flèche** d'un tir est la **hauteur maximale** atteinte par le projectile.

On trouve y_F quand la vitesse **verticale** s'annule, $\dot{y}(t_F) = 0$; ainsi

$$
\begin{aligned}
&-gt_F + v_0\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_F = \frac{v_0\sin\alpha}{g} \\
\Rightarrow\ & y_F = y(t_F) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\sin\alpha\times\frac{v_0\sin\alpha}{g} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{y_F = \frac{{v_0}^2}{2g}\sin^2\alpha}
\end{aligned}
$$

Implication M2.2 : Flèche maximale

Le maximum se trouve en $\alpha = \pi/2$.

Application M2.2 : Temps de vol

Pour quel angle le temps de vol est-il le plus grand ?

Le temps de vol correspond au temps pour lequel le projectile retombe au sol, c'est-à-dire $t(x_P)$.

$$t_{\max} = t(x_P) \Leftrightarrow t_{\max} = \frac{\frac{v_0\cancel{^2}}{g} \times 2 \sin\alpha \cancel{\cos\alpha}}{\cancel{v_0}\cancel{\cos\alpha}} \Leftrightarrow \boxed{t_{\max} = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha}$$

Le temps de vol est donc maximal pour $\boxed{\alpha = \pi/2}$.

IV/B Poussée d'Archimède

Définition M2.9 : Poussée d'Archimède

Lorsqu'un objet est dans un fluide, il subit une force nommée **Poussée d'Archimède** et égale à l'opposé du poids du fluide déplacé. Elle est parfois notée $\vec{\Pi}$ ou $\vec{F}_A$, et on a :

$$\boxed{\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}} \vec{g}}$$

avec ρ_{fluide} la masse volumique du fluide et $V_{\text{immergé}}$ le volume de l'objet qui est dans le fluide.

Application M2.3 : Glaçon immergé

Quelle est la proportion immergée d'un glaçon ? On donne $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^3\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$ et $\rho_{\text{glace}} = 9{,}17 \times 10^2\,\text{kg}\cdot\text{m}^{-3}$.

On suppose un glaçon immobile, donc d'accélération nulle. Il subit son poids et la poussée d'Archimède :

$$\vec{0} = \vec{F}_A + \vec{P}$$

Or $\quad \vec{P} = m\vec{g} = \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}} \vec{g} \quad$ et $\quad \vec{F}_A = -\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} \vec{g}$

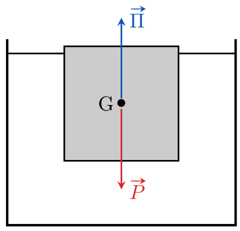

Figure M2.6

D'où

$$-\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} \cancel{\vec{g}} + \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}} \cancel{\vec{g}} = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{glaçon}}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = 91{,}7\,\%}$$

On observe également qu'un objet **plus dense** que le fluide aura une proportion immergée > 1 : il ne sera donc pas à l'équilibre mécanique et coulera.

IV/C Frottements fluides

IV/C) 1 Force de frottement fluide

Définition M2.10 : Définition

Un objet en mouvement dans un fluide subit une force de frottements dite fluide $\overrightarrow{F}_f$ qui est une force de **freinage**, donc **opposée à la vitesse** $\overrightarrow{v}$. Selon la norme de la vitesse, on a :

Faibles vitesses	Vitesses élevées[3]
$\overrightarrow{F}_f \propto v$: $\boxed{\overrightarrow{F}_f = -\alpha \overrightarrow{v}}$	$\overrightarrow{F}_f \propto v^2$: $\boxed{\overrightarrow{F}_f = -\beta v \overrightarrow{v}}$

Remarque M2.2 : Coefficient frottements fluides

En pratique, on verra souvent

$$\beta = \frac{1}{2}\rho_{\text{fluide}} S c_x$$

- ρ_{fluide} la masse volumique du fluide ;
- S la surface frontale (« l'ombre » que fait l'objet sur un flux) ;
- c_x un coefficient sans dimension dépendant surtout de la forme de l'objet.

IV/C) 2 Chute libre sans vitesse initiale avec frottements linéaires

1. **Système.** {bille} dans une éprouvette d'huile dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$, supposé galiléen.

2. **Schéma.**

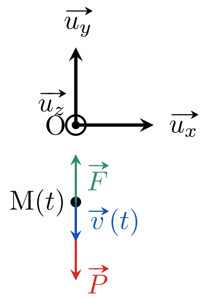

FIGURE M2.7 – Schéma.

3. **Modélisation.**
   - Repère : $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ BOND avec $\overrightarrow{u_y}$ verticale ascendante.
   - Repérage :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= y\,\overrightarrow{u_y}\\ \overrightarrow{v} &= \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}\\ \overrightarrow{a} &= \ddot{y}\,\overrightarrow{u_y}\end{aligned}$$

   - Conditions initiales : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ position de la bille lors de son entrée dans le glycérol ; $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$.
   - On néglige pour simplifier la poussée d'**Archimède**.

4. **Bilan des forces.**

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Frottements fluide	$\overrightarrow{F}_f = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$

3. On dit que $\overrightarrow{F}_f$ est **quadratique** selon v

$\boxed{5}$ **PFD.** $$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

$\boxed{6}$ **Équations scalaires.**
$$m\frac{\mathrm{d}\dot{y}}{\mathrm{d}t} = -mg - \alpha\dot{y}$$

$\boxed{7}$ **Répondre aux questions.** On obtient ici trois équations différentielles sur la vitesse ($v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ et $v_z = \dot{z}$), mais en absence de vitesse initiale sur v_x et v_z, il n'y aura pas de mouvement sur ces coordonnées : on s'intéresse donc à l'équation différentielle sur v_y que l'on appelle simplement v, avec $\tau = m/\alpha$:
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = -g} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = -g$$

Une résolution complète demande de discerner solution homogène et particulière puis d'utiliser les conditions initiales, pour trouver
$$v(t) = g\tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)$$

On peut développer une autre approche générique pour obtenir des grandeurs typiques d'un système à partir de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement : l'**adimensionnement**.

On définit $v^* = v/V$, $t^* = t/T$ avec V et T des constantes à définir. On peut donc réécrire
$$\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\alpha}{m}Vv^* = -g$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\alpha T}{m}v^* = -\frac{gT}{V}$$

On choisit alors T et V de façon à écrire
$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + v^* = -1} \quad \text{avec} \quad \boxed{T = \frac{m}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{V = gT = \frac{gm}{\alpha}}$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle adimensionnée donne T **grandeur typique du temps** d'évolution de la vitesse, et V est la **vitesse atteinte en régime permanent**.

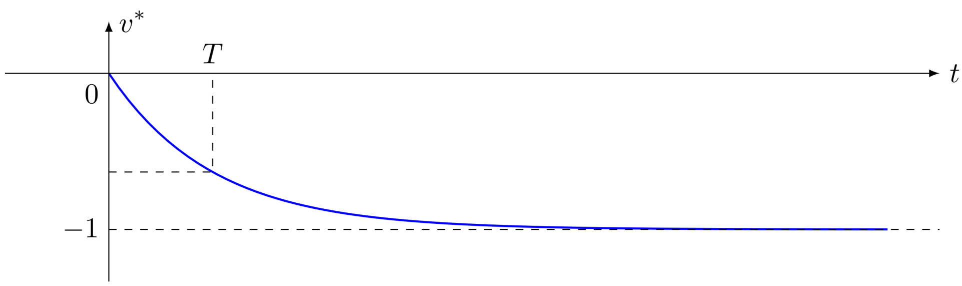

Figure M2.8 – Évolution de v^* avec le temps

Définition M2.11 : Équations adimensionnées

L'écriture sous forme adimensionnée permet de ramener la résolution de l'équation à un problème uniquement mathématique, débarrassé des constantes physiques et permettant de voir rapidement le fonctionnement d'un système même quand on ne sait pas résoudre l'équation.

IV/C) 3 Chute libre sans vitesse initiale avec frottements quadratiques

Pour une chute libre dans l'air, la vitesse d'un corps est presque toujours suffisamment élevée pour que les frottements soient quadratiques en la vitesse. On choisit ici $\overrightarrow{u_y}$ vers le bas, tel que $v = \dot{y} > 0$. Ainsi, une chute totalement verticale donne

$$\overrightarrow{F}_f = -\beta \dot{y}^2 \overrightarrow{u_y}$$

Toujours en négligeant la poussée d'Archimède, on a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{m}v^2 = g$$

La résolutions analytique exacte de cette équation sort du cadre du programme ; on peut en revanche **l'adimensionner pour trouver ses grandeurs typiques**. On définit $v^* = v/V$, $t^* = t/T$ avec V et T des constantes à définir. On peut donc réécrire

$$\begin{aligned} &\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m}V^2(v^*)^2 = g \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m}VT(v^*)^2 = \frac{gT}{V} \end{aligned}$$

On choisit alors T et V de façon à écrire

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1} \quad \text{avec} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}} \quad \text{et} \quad \boxed{V = gT = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle adimensionnée donne T grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse, et V est la vitesse atteinte en régime permanent.

Avec pour un-e humain-e en chute libre sans parachute, on a $\beta \approx 0{,}25\,\mathrm{kg\cdot m^{-1}}$, soit

$$\boxed{v_{\lim} = 60\,\mathrm{m\cdot s^{-1}} \approx 200\,\mathrm{km\cdot h^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T \approx 6\,\mathrm{s}}$$

IV/D Force de frottements solides

IV/D) 1 Réaction d'un support

Définition M2.12 : Réaction d'un support

La force exercée par un support sur un objet posé à sa surface est appelée **réaction** et est notée $\overrightarrow{R}$. Elle se décompose en deux forces :

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{R}_T$$

- $\overrightarrow{N}$ **normale** ($\perp$) au support ;
- $\overrightarrow{T}$ **tangentielle** ($\parallel$) au support, **opposée** à la vitesse.

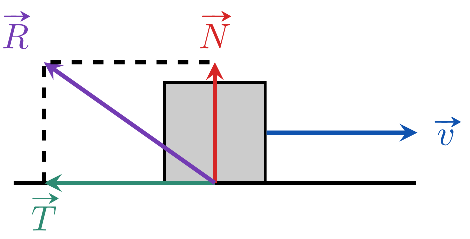

Figure M2.9 – Réaction du support

Important M2.4 : Condition de support

La condition de support est $\|\overrightarrow{N}\| > 0$.

IV/D) 2 Lois de Coulomb

Les relations entre les **normes** des forces $\vec{N}$ et $\vec{T}$ sont appelées **lois du frottement de Coulomb**.

Propriété M2.4 : Lois du frottement de Coulomb

Les réactions normales et tangentielles sont reliées par les lois de Coulomb, telles que :

Solide glissant	Solide non-glissant
$\lVert\vec{T}\rVert = f\lVert\vec{N}\rVert$ ou $\lVert\vec{T}\rVert = f_d\lVert\vec{N}\rVert$	$\lVert\vec{T}\rVert \leq f\lVert\vec{N}\rVert$ ou $\lVert\vec{T}\rVert \leq f_s\lVert\vec{N}\rVert$

f le coefficient de frottements solides. C'est un nombre sans dimension, souvent inférieur à 1 et qui dépend de l'**état** de la surface (humide, graissée) mais **pas de son aire**.

De manière plus particulière, on définit f_d le coefficient de frottements dynamiques (glissement) et f_s le coefficient de frottement statique (pas glissement), avec $f_d < f_s$; souvent, $f_s = f_d$.

Attention M2.1 : Absence de frottements solides

L'absence de frottements solides implique $f = 0$, donc $T = 0$, mais **la force normale n'est jamais nulle**.

IV/E Force de rappel d'un ressort

IV/E) 1 Force de rappel élastique

Définition M2.13 : Force de rappel d'un ressort

Soit le système masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le ressort se déforme sous l'effet d'une contrainte en stockant l'énergie donnée, qu'il libère en reprenant sa forme quand la contrainte s'arrête. On définit la force de rappel du ressort par :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = \pm k(\ell - \ell_0)\,\vec{u_r}$$

- $k > 0$ la **constante de raideur** ;
- ℓ_0 sa **longueur à vide** ;
- $\vec{u_r}$ unitaire dirigé selon l'axe du ressort.

Elle est aussi appelée **force de Hooke**.

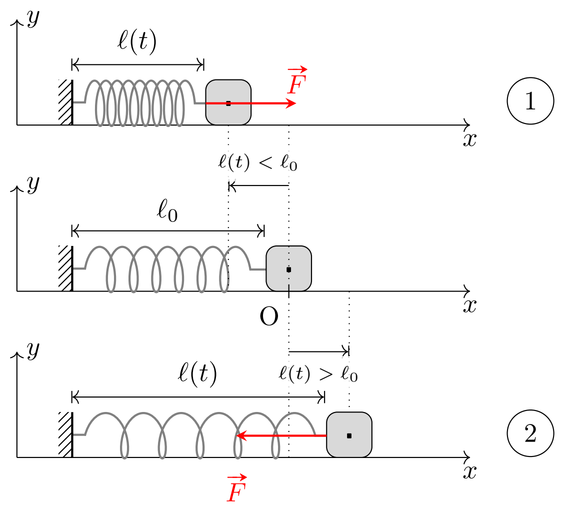

Figure M2.10 – Force de Hooke.

Attention M2.2 : Signe ±

Le signe de la force dépend du repère : de façon générale, il faut regarder le sens dans lequel s'exerce la force si on étire le ressort ($(\ell - \ell_0) > 0$) et placer le signe en conséquence.

IV/E) 2 Position d'équilibre verticale

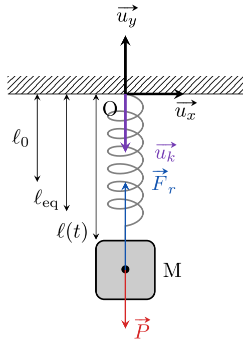

Figure M2.11

À l'horizontale, on voit vite que $\ell_{eq} = \ell_0$. À la verticale, $\ell_{eq} > \ell_0$ à cause du poids. Quelle est son expression ?

1 **Système** : {masse} accrochée à un ressort, représenté par M de masse m.

2 **Référentiel** : $\mathcal{R}_{labo}$ supposé galiléen.

3 **Repère** : (O, $\vec{u_z}$) vertical ascendant.

4 **BdF** :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_z}$
Force Hooke $\vec{F} = k(\ell - \ell_0)\,\vec{u_z}$

5 **PFD à l'équilibre** :

$$0 = -mg + k(\ell_{eq} - \ell_0) \Leftrightarrow k(\ell_{eq} - \ell_0) = mg$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\ell_{eq} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

D'où

$$m \text{ ou } g \nearrow \Rightarrow \ell_{eq} \nearrow \quad \text{et} \quad k \nearrow \Rightarrow \ell_{eq} \searrow$$