Correction du TD

I Fréquence, longueur d'onde et indice

1) On définit $\lambda_{r,0} = 800\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_{b,0} = 400\,\mathrm{nm}$ les longueurs d'ondes dans le vide correspondant au extrémités bleue et rouge du spectre de la lumière visible.

   On sait que

$$f = \frac{c}{\lambda_0}$$

   On aura donc

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= \frac{c}{\lambda_{b,0}} \\ f_r &= \frac{c}{\lambda_{r,0}} \end{aligned}} \qquad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} c &=& 3{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}} \\ \lambda_{b,0} &=& 400\,\mathrm{nm} = 4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \\ \lambda_{r,0} &=& 800\,\mathrm{nm} = 8{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \end{array} \right.$$

   L'application numérique donne

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= 7{,}50 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} = 750\,\mathrm{THz} \\ f_r &= 3{,}80 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} = 380\,\mathrm{THz} \end{aligned}}$$

2) Dans un milieu TLHI, la longueur d'onde change de valeur selon

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

   Ainsi,

   a – dans l'eau d'indice $n_1 = 1{,}33$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\text{eau}} &= 300\,\mathrm{nm} \\ \lambda_{r,\text{eau}} &= 602\,\mathrm{nm} \end{aligned}}$$

   b – dans un verre d'indice $n_2 = 1{,}5$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\text{eau}} &= 267\,\mathrm{nm} \\ \lambda_{r,\text{eau}} &= 533\,\mathrm{nm} \end{aligned}}$$

   Leur couleur ne change cependant pas puisque **la couleur d'une lumière est définie par sa fréquence/longueur d'onde dans le vide**.

3) Dans un milieu TLHI, la vitesse de la lumière se calcule avec

$$v = \frac{c}{n}$$

   Avec $n = 1{,}5$, on a donc

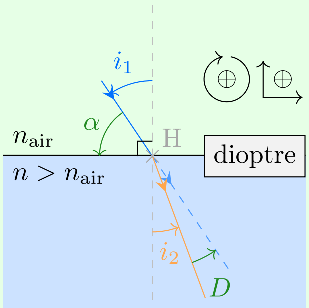
$$\boxed{v = 2{,}00 \times 10^{8}\,\mathrm{m\,s^{-1}}}$$

II Détermination directe de l'indice d'un liquide

Cet exercice est d'une simplicité absolue. Et pourtant…

Données

1) Rayon incident sur un dioptre entre air et milieu d'indice n : angle avec le dioptre de 56° ;
2) Différence d'angle entre rayon incident et réfléchi (« déviation ») de 13,5°.



Résultat attendu

Indice du liquide.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

avec n_1 l'indice du milieu d'incidence, n_2 celui du milieu de réfraction, i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction.

Application

Un bon schéma fait attentivement est **nécessaire** ici. En effet, les angles donnés ne sont pas ceux qu'on utilise dans la relation de Snell-Descartes.

En appelant α l'angle entre le rayon et le dioptre, on a

$$\alpha + i_1 = 90°$$

donc $\boxed{i_1 = 34°}$. Et en appelant D la déviation entre les deux rayons, on a

$$i_1 = i_2 + D$$

soit $\boxed{i_2 = 20{,}5°}$. On en déduit donc

$$\boxed{n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} i_1 & = & 34° \\ i_2 & = & 20{,}5° \end{array}\right. \quad \text{soit} \quad \boxed{n = 1.6}$$

III Détecteur de pluie sur un pare-brise

On modélise un pare-brise par une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur $e = 5{,}00\,\text{mm}$, d'indice $n_v = 1{,}5$. Un fin pinceau lumineux issu d'un émetteur situé en E arrive de l'intérieur du verre sur le dioptre verre → air en I avec un angle d'incidence $i = 60{,}0°$.

1) Pour savoir si le pinceau lumineux revient intégralement, il faut savoir s'il y a réflexion totale à l'interface verre→air. Pour cela, on utilise la formule de l'angle limite de réfraction

$$i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Ici, on a

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{lcl} n_{\text{air}} & = & 1{,}00 \\ n_{\text{verre}} & = & 1{,}5 \end{array}\right.$$

L'application numérique donne

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = 41{,}8^\circ}$$

Comme $i = 60{,}0^\circ$, $i > i_{\text{limv}\to\text{a}}$, et on a donc réflexion totale : aucun rayon ne sera réfracté.

Avec la figure ci-après, on a $\tan(i) = \frac{ED}{2e}$, soit

$$\boxed{ED = 2e\tan(i)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e &= 5{,}00\,\text{mm} \\ i &= 60{,}0^\circ \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{ED = 1{,}7\,\text{cm}}$$

2) Dans le cas où une fine couche d'eau recouvre le verre, on doit calculer le nouvel angle limite de réfraction pour l'interface verre→eau. Comme précédemment, on utilise la formule et on trouve

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{e}} = 62{,}5^\circ} \tag{2.1}$$

Cette fois, l'angle d'incidence $i < i_{\text{lim,v}\to\text{e}}$. On va donc avoir réfraction. On détermine l'angle de réfraction i_2 avec la loi de Snell-Descartes pour la réfraction : $n_2\sin(i_2) = n_1\sin(i_1)$. Dans notre cas, $n_2 = n_{\text{eau}}$, $n_1 = n_{\text{verre}}$ et $i_1 = i$; on aura donc

$$\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n_{\text{verre}}\sin(i)}{n_{\text{eau}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{\text{verre}} &= 1{,}5 \\ i &= 60{,}0^\circ \\ n_{\text{eau}} &= 1{,}33 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{i_2 = 77{,}6^\circ}$$

Ce rayon réfracté (en vert sur la figure) va ensuite rencontrer le dioptre eau→air en J, pour lequel l'angle limite de réfraction est

$$\boxed{i_{\text{lim,e}\to\text{a}} = 48{,}8^\circ}$$

Comme $i_2 > i_{\text{lim,e}\to\text{a}}$, on a une nouvelle réflexion totale avec $r = -i_2$, ramenant le pinceau vers le dioptre eau→verre en un point K. Dans cette situation comme la valeur absolue de r est la même que celle de i_2, le principe du retour inverse de la lumière nous permet de déterminer directement que l'angle de réfraction de l'eau vers le verre i_3 a la même valeur absolue que l'angle d'incidence du verre vers l'eau i_1.

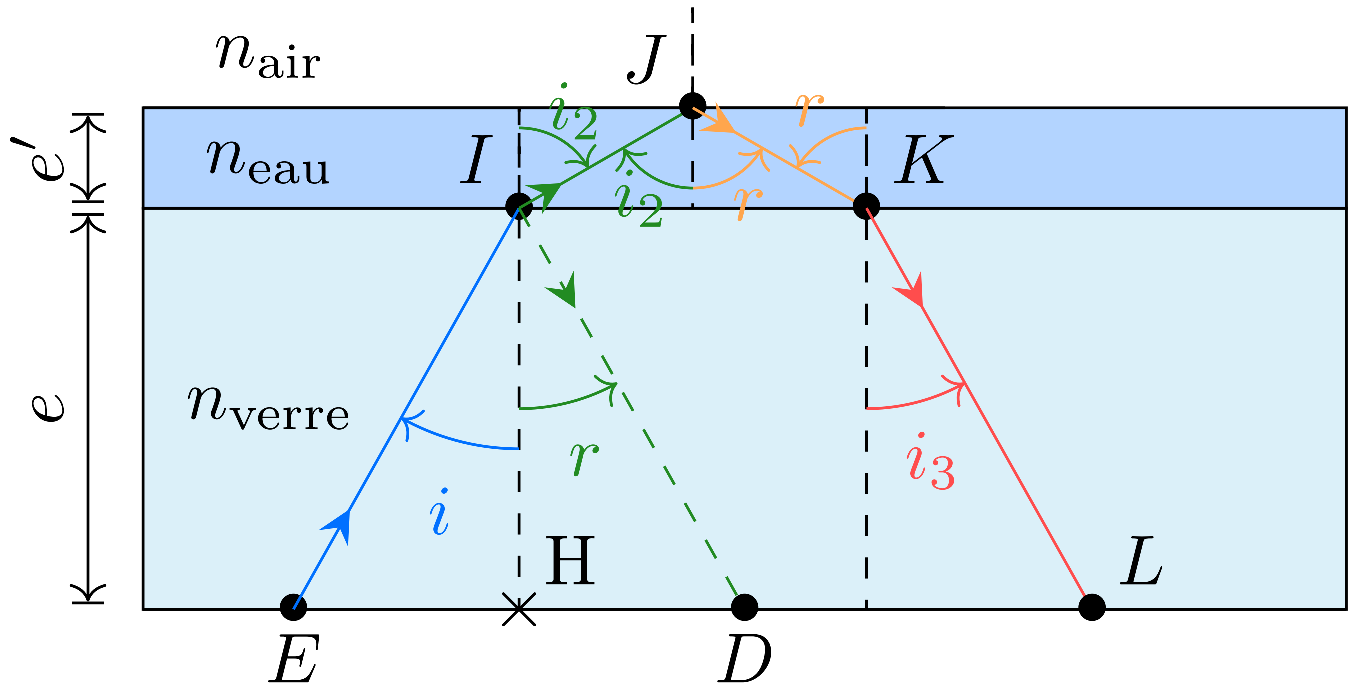
Avec le schéma ci-après, on peut déterminer que $DL = IK$ (l'abscisse supplémentaire du trajet dans l'eau) et utiliser la trigonométrie pour trouver

$$\boxed{IK = 2e'\tan(i_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e' &= 1{,}00\,\text{mm} \\ i_2 &= 77{,}6^\circ \end{cases}$$

soit

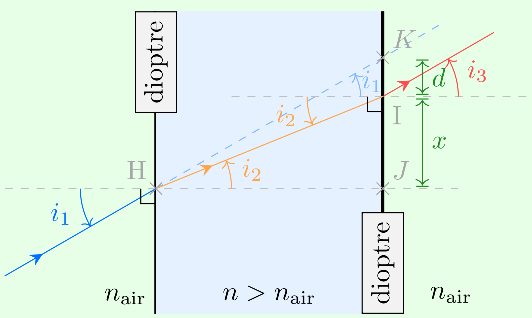
$$\boxed{DL = 0{,}9\,\text{cm}}$$

Ainsi, le rayon ne tombe plus sur le détecteur mais à côté ; un système de commande relié au détecteur peut alors déclencher les essuie-glaces.



IV Rayon lumineux à travers une vitre

Schéma



Résultat attendu

Le rayon passe deux dioptres de l'air au verre, puis du verre à l'air. On utilise Snell-Descartes pour déterminer la direction du rayon émergent et la comparer à celle du rayon incident.

Outils

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Application

En H : $\sin i_1 = n \sin i_2$

$\Leftrightarrow i_2 = \arcsin(\sin(i_1)/n) = 28°$;

Dedans : i_2 aux deux dioptres ;

En I : $\sin i_3 = n \sin i_2$;

D'où : $\cancel{n_1} \sin i_3 = \cancel{n_1} \sin i_1$

Finalement,

$\boxed{i_3 = i_1}$

(retour inverse)

3) Comme les dioptres sont parallèles, leurs normales le sont aussi. Ainsi, les rayons émergent et incident sont parallèles.

4) $\tan(i_2) = \dfrac{IJ}{HJ} = \dfrac{x}{a}$ et $\tan(i_1) = \dfrac{x+d}{a}$, d'où $\dfrac{d}{a} = \tan(i_1) - \dfrac{x}{a} = \tan(i_1) - \tan(i_2)$, soit

$$\boxed{d = a(\tan(i_1) - \tan(i_2))} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a &= 5{,}0\,\text{mm} \\ i_1 &= 45° \\ i_2 &= 28° \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{d = 2{,}3\,\text{mm}}$$

V Fibre optique à saut d'indice

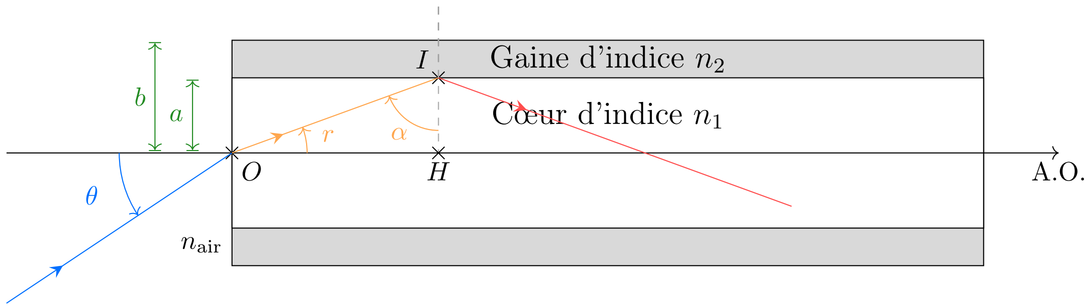


FIGURE 2.1 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice.

En O : $\sin(\theta) = n_1 \sin(r) \Leftrightarrow \boxed{\sin(r) = \dfrac{\sin(\theta)}{n_1}}$;

OIH : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - r$;

En I : On veut $\sin(\alpha) \geq \dfrac{n_2}{n_1}$;

$\alpha \rightarrow r$: $\sin(\alpha) = \sin(\pi/2 - r) = \cos(r)$

$$\boxed{\sin(\alpha) \geq \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \cos(r) \geq \frac{n_2}{n_1}}$$

$\cos(r) \rightarrow \sin(r)$: $\cos^2(r) = 1 - \sin^2(r)$;

$r \rightarrow \theta$: $\sin^2(r) = \dfrac{\sin^2(\theta)}{{n_1}^2}$;

Combinaison : ${n_1}^2 - \sin^2(\theta) \geq {n_2}^2$;

Conclusion : $\boxed{\theta \leq \arcsin\left(\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}\right)}$

VI Mirages

1) a – À chaque interface, $n_k \sin(i_k) = n_{k-1} \sin(i_{k-1})$; notamment, avec $k = 2$, on a $n_2 \sin(i_2) = n_1 \sin(i_1)$. Ainsi, tous les $n_k \sin(i_k)$ sont égaux.

   b – Voir figure ci-après.

   À chaque « dioptre », on a $\sin(i_{\text{lim,k}}) = \frac{n_{k-1}}{n_k}$. Sa valeur maximale est à $k = 2$: $\sin(i_{\text{lim},2}) = \frac{n_1}{n_2}$. Comme $n_k \sin(i_k)$ est constant et que n_k diminue, on sait que i_k augmente : ainsi, si l'angle d'incidence i_N est suffisamment grand, il y aura un i_k supérieur à $i_{\text{lim},2}$ et donc réflexion totale.

   c – Voir figure.

   d – Alors qu'on devrait voir le sable, les rayons venant du haut des collines sont déviés vers le haut : on a l'impression de voir à travers la dune.

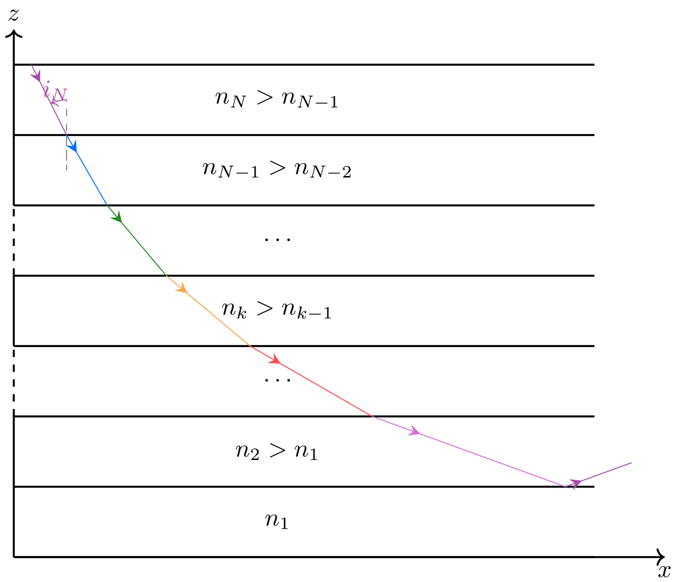
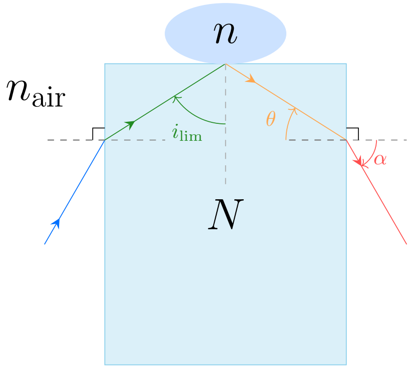


FIGURE 2.2 – Rayons d'un mirage chaud

2) Cette fois ce sont les rayons dirigés vers le haut d'un objet lointain qui sont déviés vers le bas : on a l'impression de voir des objets au-dessus du niveau de la mer. Schéma non fourni.

VII Réfractomètre de Pulrich



1) $\sin(i_{\text{lim,N}\to\text{n}}) = \dfrac{n}{N}$ d'une part. D'autre part, $N\sin(\theta) = \sin\alpha$, mais on a aussi $\theta = \pi/2 - i_{\text{lim}}$: on a donc $\sin\theta = \cos i_{\text{lim}} = \sqrt{1-\left(\dfrac{n}{N}\right)^2}$. Ainsi, $\sin^2\alpha = N^2\left(1-\dfrac{n^2}{N^2}\right)$; autrement dit,

$$\boxed{n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{array}{rcl} N & = & 1{,}622 \\ \alpha & = & 60^\circ \end{array}\right.$$

2) Application numérique :

$$\boxed{n = 1{,}376}$$

VIII Incidence de Brewster

Les rayons réfléchis et réfractés sont perpendiculaires si $r + i = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\pi}{2} - i$. En venant de l'air, on a $\sin i = n\sin r$, soit $\sin i = n\cos i$; autrement dit

$$\boxed{\tan i = n}$$

IX Réfraction et dispersion

La lumière blanche est constituée d'une superposition de longueurs d'onde dans le vide entre [400–800] nm. Quand ce faisceau arrive sur le dioptre et passe dans le milieu, l'indice de réfraction, qu'on utilise dans la relation de Snell-Descartes, change selon la longueur d'onde dans le vide. Pour une même valeur de i incident on aura donc deux valeurs extrêmes de r réfracté, que l'on nomme r_b et r_r pour « bleu » et « rouge », selon :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_{\text{air}}\sin(i) = n_b\sin(r_b) \\ n_{\text{air}}\sin(i) = n_r\sin(r_r) \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} r_b = \arcsin\left(\dfrac{n_{\text{air}}\sin(i)}{n_b}\right) \\ r_r = \arcsin\left(\dfrac{n_{\text{air}}\sin(i)}{n_r}\right) \end{array}}$$

Comme $\lambda_{0,b} < \lambda_{0,r}$, $\underbrace{n(\lambda_{0,b})}_{n_b} > \underbrace{n(\lambda_{0,r})}_{n_r}$ et forcément $r_b < r_r$. On calcule :

$$\boxed{\begin{array}{l} n_b = 1{,}53 \\ n_r = 1{,}51 \end{array}} \iff \boxed{\begin{array}{l} r_b = 24{,}8^\circ \\ r_r = 25{,}2^\circ \end{array}}$$

L'écart angulaire est donc

$$\boxed{\theta = r_r - r_b = 0{,}35^\circ}$$

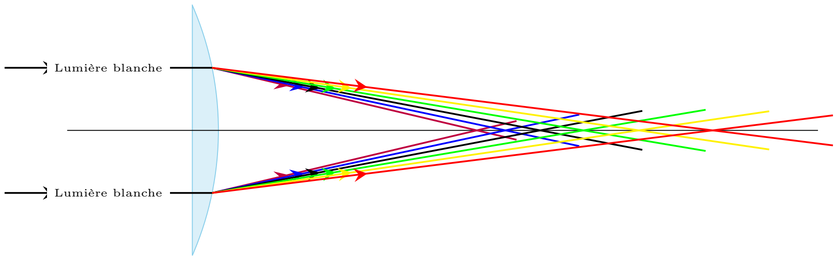


FIGURE 2.3 – Exemple (exagéré) de dispersion (aberration chromatique).