Électrocinétique – chapitre 7

Filtrage linéaire

Au programme

Savoirs

- ◇ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- ◇ Définir la valeur moyenne et la valeur efficace d'un signal.
- ◇ Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- ◇ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de Bode en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- ◇ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ◇ Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

Savoir-faire

- ◇ Établir par le calcul la valeur efficace d'un signal sinusoïdal.
- ◇ Tracer le diagramme de Bode (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- ◇ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
- ◇ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyenneur, intégrateur, ou dérivateur.
- ◇ Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- ◇ Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).

◇

Sommaire

I Signaux périodiques . . . 3
I/A Période . . . 3
I/B Moyenne . . . 3
I/C Valeur efficace . . . 3
II Décomposition en série de Fourier . . . 4
II/A Théorème de Fourier . . . 4
II/B Analyse spectrale . . . 5
II/C Relation de Parseval . . . 6
III Filtrage . . . 7
III/A Traitement du signal et filtre . . . 7
III/B Fonction de transfert d'un filtre . . . 7
III/C Effet d'un filtre sur un signal périodique . . . 8
IV Description d'un filtre . . . 9
IV/A Gain et gain en décibels . . . 9
IV/B Diagramme de Bode . . . 11
IV/C Filtres moyenneurs, dérivateurs et intégrateurs . . . 13
V Exemples de filtres d'ordre 1 . . . 13
V/A RC sur C : passe-bas . . . 13
V/B RC sur R : passe-haut . . . 16
VI Exemples de filtres d'ordre 2 . . . 18
VI/A RLC sur C : passe-bas ordre 2 . . . 18
VI/B RLC sur R : passe-bande . . . 20
VII Résumé . . . 23
VIII Filtres en cascade . . . 23

À travers les précédents chapitres, nous avons mis en place des moyens d'étudier l'amplitude d'un signal de sortie (tension u_C, élongation x) en fonction de la pulsation d'un signal d'entrée sinusoïdal. Dans la pratique, les signaux purement sinusoïdaux sont rares et sont en réalité des signaux complexes, comportant de nombreuses fréquences. La lumière blanche, par exemple, est un signal lumineux composé d'une continuité de longueur d'ondes (allant du violet au rouge dans le visible), qui se décompose en ses longueurs d'ondes constitutives sous certaines conditions : chacune de ses couleurs est déviée différemment lors du passage dans un prise par exemple.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier des signaux complexes, qu'on décomposera en somme de signaux sinusoïdaux, et leur traitement par des systèmes traitant différemment ces longueurs d'ondes – qu'on appelle des filtres. Ils sont au cœur de toutes les innovations technologiques du XX^{e} et XXI^{e} siècles, qui reposent entièrement sur le traitement du signal. Cela s'applique aux transfert de données, à la création et diffusion de musique, et même à la couleur bleue du ciel. Commençons par revenir sur les signaux périodiques.

I Signaux périodiques

I/A Période

Définition 7.1 : Période

$$s(t) \quad \text{périodique} \Leftrightarrow \exists T \ : \forall t \in \mathbb{R}^+, s(t+T) = s(t)$$

Montrer que le signal $s(t) = A\sin(\omega t)$ a une période $T = \frac{2\pi}{\omega}$.

$$s\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right) = A\left(\omega\left(t + \frac{2\pi}{\omega}\right)\right) = A\sin(\omega t + 2\pi) = A\sin(\omega t) \qquad \blacksquare$$

I/B Moyenne

Définition 7.2 : Valeur moyenne

Pour un **signal périodique** $s(t)$, on définit sa valeur moyenne $\langle s(t)\rangle$ par

$$\langle s(t)\rangle = \frac{1}{T}\int_0^T s(t)\,\mathrm{d}t$$

Application 7.2 : Moyenne d'un cosinus décalé

Calculer la valeur moyenne du signal

$$s(t) = S_0 + A\cos(\omega t)$$

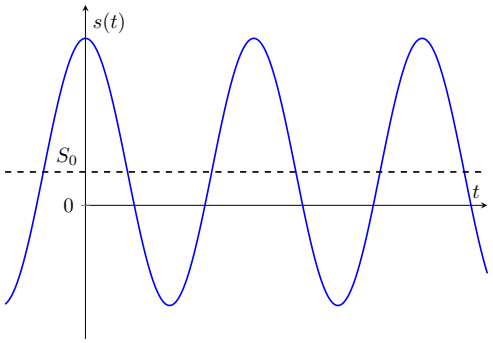


Figure 7.1 – $s(t) = S_0 + A\cos(\omega t)$

$$\begin{aligned}
\langle s(t)\rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T (S_0 + A\cos(\omega t))\,\mathrm{d}t \\
&= \frac{1}{T}\left(\int_0^T S_0\,\mathrm{d}t + \int_0^T A\cos(\omega t)\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{1}{T}\left([S_0 t]_0^T + \left[\frac{A}{\omega}\sin(\omega t)\right]_0^T\right) \\
&= \frac{1}{T}\left(S_0(T-0) + \underbrace{\frac{A}{\omega}(\sin(\omega T) - \sin(\omega\times 0))}_{=0}\right) \\
&= \frac{1}{T}S_0 T \\
\Leftrightarrow \boxed{\langle s(t)\rangle = S_0} & \qquad \blacksquare
\end{aligned}$$

Important 7.1 : Moyenne d'un signal sinusoïdal

Un signal purement sinusoïdal a une moyenne nulle.

I/C Valeur efficace

Ainsi, si on envoie une tension sinusoïdale dans un circuit et qu'on mesure la moyenne de la tension reçue, on trouvera une tension nulle. Pourtant, l'énergie transmise n'est pas nulle ! C'est parce que les électrons réagissent à la fois aux tensions positives et négatives du signal, et ce pourquoi on obtient $\mathcal{E}_C = \frac{1}{2}Cu_C{}^2$: l'**énergie est propotionnelle au carré des signaux**.

Définition 7.3 : Valeur efficace

On définit la valeur efficace d'un signal **périodique** par

$$s_{\text{eff}} = \sqrt{\langle s^2(t) \rangle}$$

Ainsi, s_{eff}^2 représente l'énergie moyenne. Notamment, la valeur de 230 V pour la tension secteur est la valeur *efficace* : c'est une tension sinusoïdale qui oscille entre des valeurs de ± 325 V.

Application 7.3 : Calcul de valeur efficace

Calculer la valeur efficace du signal

$$s(t) = A\cos(\omega t)$$

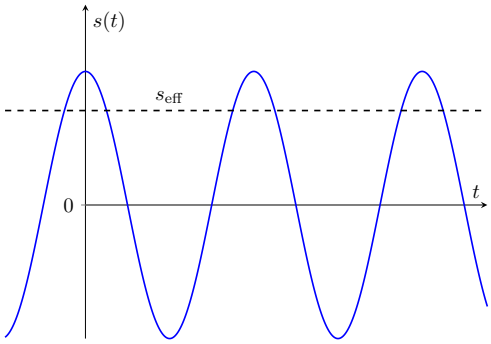


Figure 7.2 – s_{eff} de $A\cos(\omega t)$.

$$\begin{aligned}
\langle s^2(t) \rangle &= \frac{1}{T}\int_0^T \left(A^2\cos^2(\omega t)\right) \mathrm{d}t \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\int_0^T \frac{1}{2}\,\mathrm{d}t + \int_0^T \frac{\cos(2\omega t)}{2}\,\mathrm{d}t\right) \\
&= \frac{A^2}{T}\left(\underbrace{\left[\frac{1}{2}t\right]_0^T}_{=\frac{T}{2}} + \underbrace{\left[\frac{1}{2}\frac{A}{2\omega}\sin(2\omega t)\right]_0^T}_{=0}\right) \\
&= \frac{A^2}{2} \\
\Leftrightarrow \boxed{s_{\text{eff}} &= \frac{A}{\sqrt{2}}}
\end{aligned}$$

■

Il n'y a pas toujours de rapport $\sqrt{2}$ entre amplitude et valeur efficace ! Pour un signal triangle, la valeur efficace est $A/\sqrt{3}$, et pour un créneau pur sa valeur efficace est son amplitude A.

II Décomposition en série de Fourier

Le traitement de signal complexe a pu émerger grâce à un des théorèmes les plus importants de la physique dans sa totalité, le théorème de Fourier. Pour une introduction visuelle et des analyses de qualité, je vous recommande les vidéos de 3Blue1Brown portant sur le sujet [1,2]. Pour une approche un peu plus historique et concernant l'importance de l'algorithme informatique basé sur ce théorème, je vous recommande la vidéo de Veritasium [3].

II/A Théorème de Fourier

Théorème 7.1 : Fourier

Tout signal périodique se décompose comme une somme, éventuellement infinie, de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal périodique complexe $s(t)$ de pulsation ω s'écrit

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n) \Leftrightarrow s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(2\pi n f t + \varphi_n)$$

Avec S_0 la valeur moyenne (composante continue), et les S_n et φ_n des caractéristiques du signal. Les amplitudes S_n constituent le **spectre** du signal.

1. Mais qu'est-ce que la Transformée de Fourier ? Une introduction visuelle.
2. Mais qu'est-ce qu'une série de Fourier? Du transfert thermique à des dessins avec des cercles.
3. The Remarkable Story Behind The Most Important Algorithm Of All Time

II/B Analyse spectrale

Le **spectre** d'un signal représente l'amplitude des différentes composantes sinusoïdales le constituant en fonction de leurs **fréquences**. Il donne les fréquences et les importances relatives des sinus.

Fondamental et harmoniques

- ◇ La première composante sinusoïdale, $S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, s'appelle le **fondamental**. Il **donne sa fréquence au signal entier**.
- ◇ Le signal $S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est appellé **harmonique de rang n**. Sa pulsation est un **multiple** du fondamental.

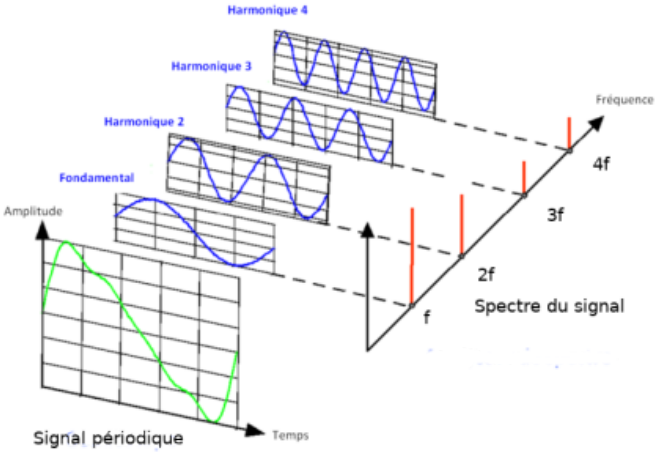


Figure 7.3 – Décomposition de Fourier d'un signal complexe [4].

Exemple 7.1 : Décompositions en séries de Fourier

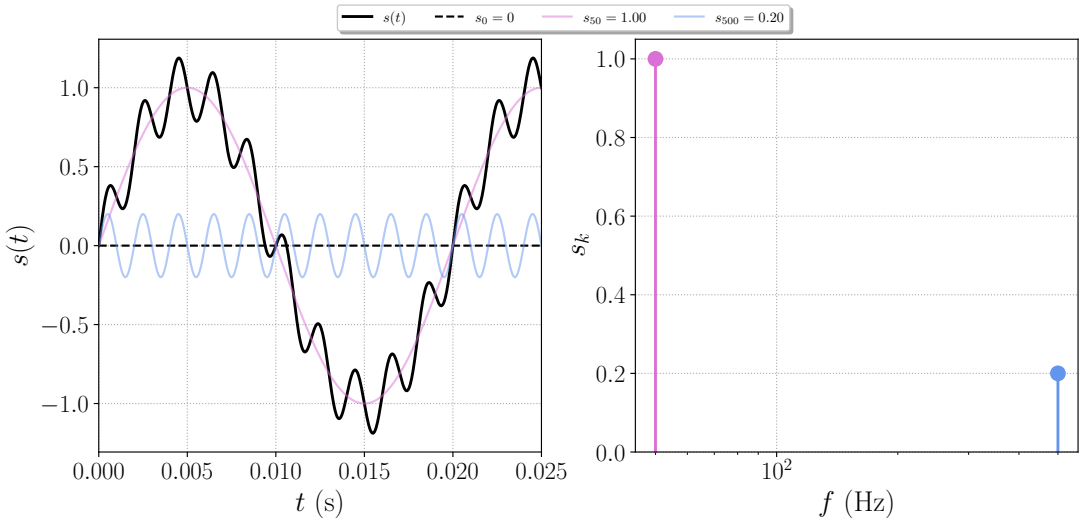


Figure 7.4 – Signal somme de 50 et 500 Hz

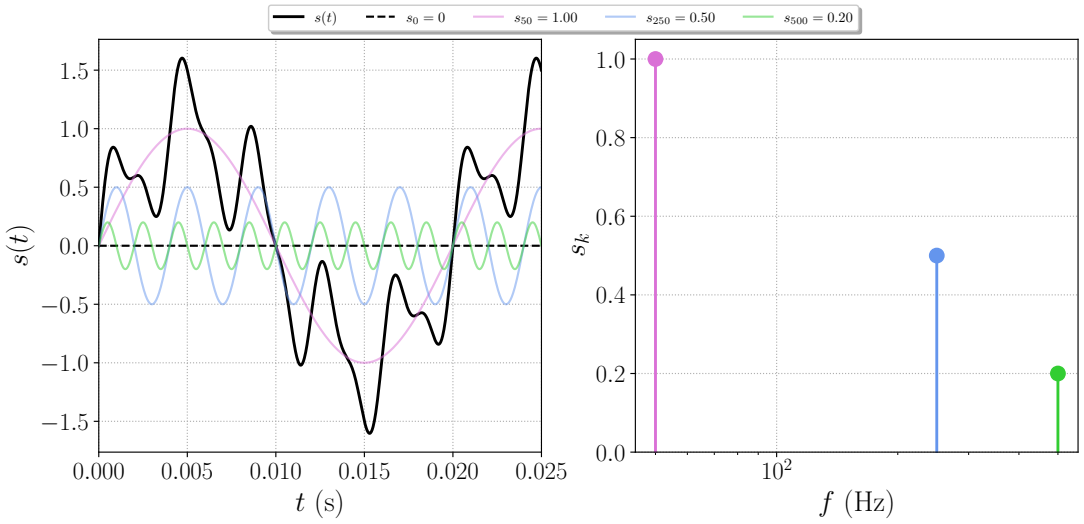


Figure 7.5 – Signal somme de 50, 250 et 500 Hz

4. Pour un approche ludique, essayer ce site : Composeur de séries de Fourier

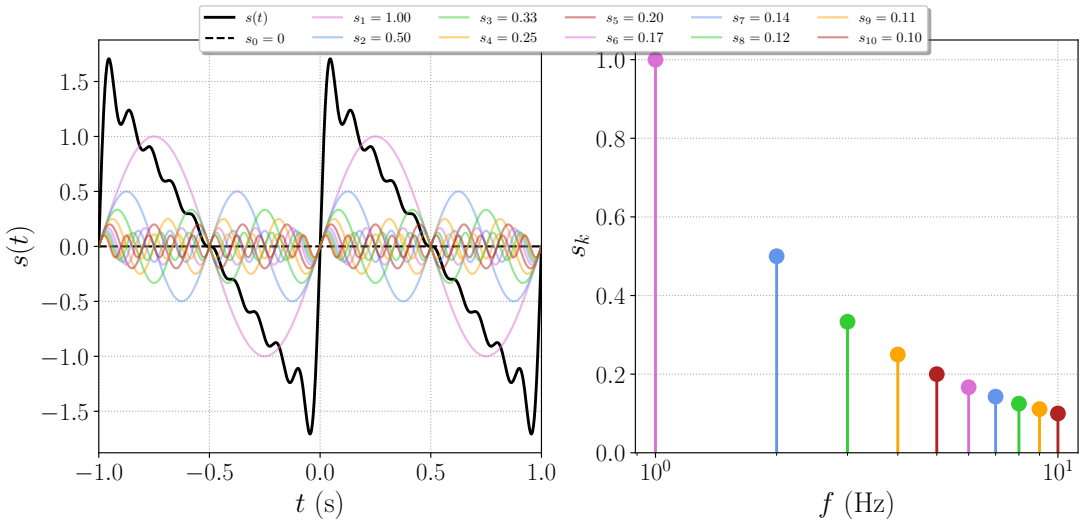


Figure 7.6 – Signal rampe : $S_k = 1/k$

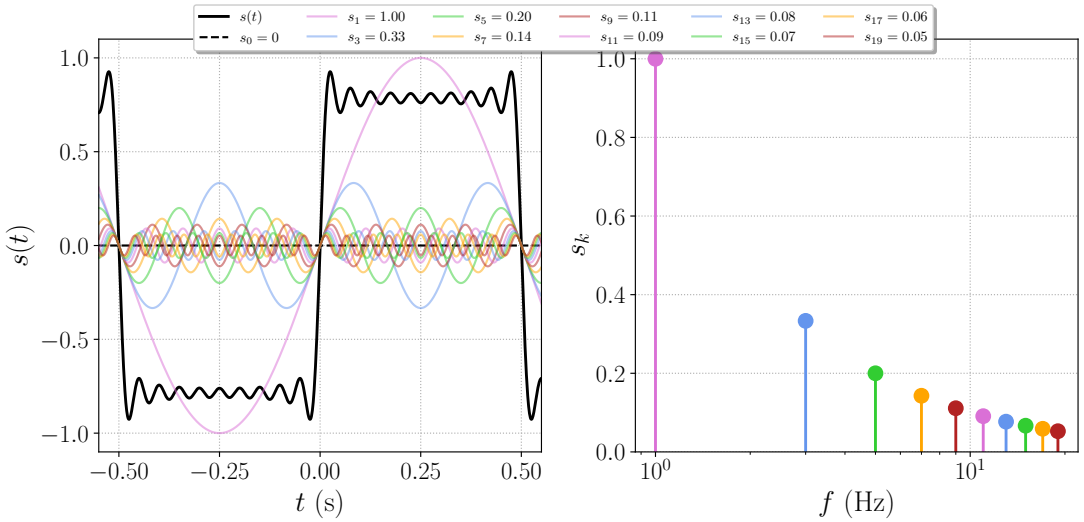


Figure 7.7 – Signal créneau : $S_{2k+1} = 1/(2k+1)$

Remarque 7.1 : Hautes et basses fréquences

◇ Les **basses fréquences** « codent » les **variations lentes** d'un signal ;

◇ les **hautes fréquences** « codent » les **variations brusques** d'un signal.

II/C Relation de Parseval

Si l'on peut décomposer tout signal en somme de sinus, et que l'énergie moyenne d'une fonction sinusoïdale est $\langle s^2(t) \rangle$, alors on peut espérer que l'énergie de tout le signal est la somme des fréquences individuelles le composant. C'est en effet le cas :

Propriété 7.1 : Relation de Parseval

$$\langle s^2(t) \rangle = s_{\text{eff}}^2 = {S_0}^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} {S_n}^2$$

Ainsi, l'énergie portée par un signal se répartit dans ses harmoniques, et ce de façon indépendante.

III Filtrage

III/A Traitement du signal et filtre

Le but du **traitement du signal** est d'**extraire l'information utile** d'un signal issu d'un capteur où de multiples signaux se superposent au signal utile : bruits électromagnétiques, autres informations, etc.

◇ Pour recevoir la radio, on doit sélectionner le signal autour d'une bande de fréquence précise et éliminer le reste ;

◇ Pour isoler une voix dans un morceau de musique, c'est le même principe.

Définition 7.4 : Filtre

Système qui **traite un signal** sur un **critère fréquentiel**. On le représente par un **quadripôle** dans les schémas électrique, avec $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie. On en distingue 3 types principaux :

◇ **Passe-bas** : ne laisse passer que les basses fréquences ;

◇ **Passe-haut** : ne laisse passer que les hautes fréquences ;

◇ **Passe-bande** : ne laisse passer qu'une bande de fréquences.

Il est dit **linéaire** si la sortie est de même(s) fréquence(s) que l'entrée (i.e., l'équation différentielle derrière son action est une EDL).

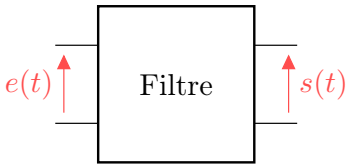


Figure 7.8 – Filtre.

III/B Fonction de transfert d'un filtre

La grandeur caractérisant l'action d'un filtre est sa **fonction de transfert** :

Définition 7.5 : Fonction de transfert

C'est la grandeur complexe

$$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}} \Leftrightarrow \underline{S} = \underline{H}\underline{E}$$

avec $\underline{S}$ l'amplitude complexe du signal de sortie, et $\underline{E}$ celle du signal d'entrée.

Pour un filtre linéaire, la fonction de transfert s'applique à chaque sinusoïde du signal d'entrée pour donner une sinusoïde de sortie :

$$e_n(t) = E_n \sin(n\omega_e t + \varphi_n) \Rightarrow s_n(t) = S_n \sin(n\omega_e t + \psi_n)$$

et on trouve l'amplitude réelle et la phase réelle de sortie en prenant le module et l'argument de $\underline{S}$, soit

$$S_n = |\underline{S_n}| = |\underline{H}\underline{E_n}| \quad \text{et} \quad \psi_n = \arg(\underline{S_n}) = \arg(\underline{H}\underline{E_n})$$

Nous avons, sans le mentionné, déjà rencontré et manipulé des filtres. Le premier exemple est celui du filtre RC :

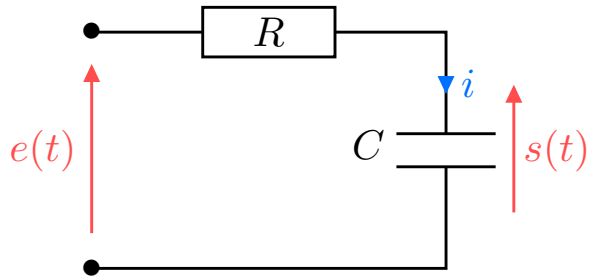


Figure 7.9 – Filtre RC.

On n'indique pas le reste du circuit, mais **un filtre s'insère dans un circuit** :

- ◇ $e(t)$ peut venir d'un générateur, d'un amplificateur, etc.
- ◇ $s(t)$ peut aller vers un appareil de mesure, un haut-parleur, etc.

Pour trouver la fonction de transfert, on transforme le circuit en complexes et on applique un pont diviseur de tension :

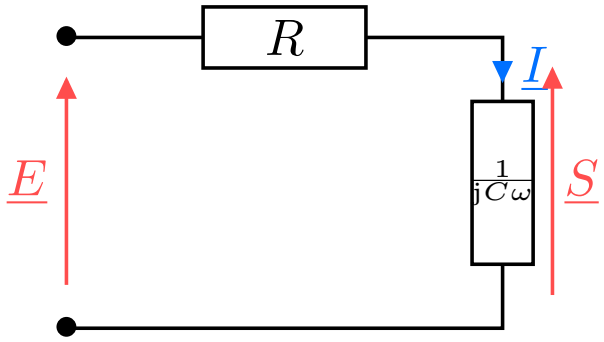


Figure 7.10 – RC en complexes.

Pont diviseur :

$$\underline{S} = \frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega}\underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}}$$

($\times \frac{\mathrm{j}C\omega}{\mathrm{j}C\omega}$; $\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}$)

avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$ la pulsation de coupure

Notation 7.1 : Pulsation réduite

Pour alléger les notations, et se ramener à des grandeurs centrées autour de l'unité, il est commode d'introduire la **pulsation réduite** :

$$x = \frac{\omega}{\omega_c}$$

Ainsi, pour le RC, on obtient pour $\underline{H}$:

$$\underline{H}(x) = \frac{1}{1 + \mathrm{j}x}$$

III/C Effet d'un filtre sur un signal périodique

L'objectif de ce chapitre est de comprendre comment un filtre impacte un signal périodique quelconque, décomposable en signaux sinusoïdaux. L'idée est semblable à ce qu'on a fait au chapitre précédent ; en effet, grâce à la linéarité du filtre, on procède par superposition :

1) On décompose le signal d'entrée en sinusoïdes, avec ω_e la pulsation d'entrée du fondamental et $\omega_n = n\omega_e$ les pulsations des harmoniques :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \sin(\omega_n t + \varphi_n)$$

2) On applique la fonction de transfert à chaque entrée sinusoïdale pour obtenir les sorties correspondantes :

$$s_n(t) = S_n \sin(\omega_n t + \psi_n) \quad \text{avec} \quad S_n = E_n \times |\underline{H}(\mathrm{j}\omega_n)| \quad \text{et} \quad \psi_n = \varphi_n + \arg(\underline{H}(\mathrm{j}\omega_n))$$

3) On recompose le signal de sortie en sommant les sorties obtenues :

$$s(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t)$$

$$e(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} E_0 & \to \boxed{\underline{H}(0\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_0 \\ + & & + \\ E_1 \sin(\omega_e t + \varphi_1) & \to \boxed{\underline{H}(1\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_1 \sin(\omega_e t + \psi_1) \\ + & & + \\ E_2 \sin(2\omega_e t + \varphi_2) & \to \boxed{\underline{H}(2\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_2 \sin(2\omega_e t + \psi_2) \\ \vdots & & \vdots \\ E_n \sin(n\omega_e t + \varphi_n) & \to \boxed{\underline{H}(n\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_n \sin(n\omega_e t + \psi_n) \end{array} \right\} = s(t)$$

IV Description d'un filtre

Pour représenter ces actions, outre la forme analytique d'un filtre, on définit des grandeurs utiles et on met en place des représentations pertinentes.

IV/A Gain et gain en décibels

Définition 7.6 : Gains

1) Le **gain** traduit l'effet du filtre sur l'amplitude d'un signal, et on a

$$\boxed{G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{S_n(x)}{E_n}}$$

Le gain est sans unité, sans dimension.

- ◇ $G(x) = 1 \Rightarrow S_n(x) = E_n$: signal d'entrée conservé à cette fréquence.
- ◇ $G(x) > 1 \Rightarrow S_n(x) > E_n$: signal d'entrée amplifié à cette fréquence.
- ◇ $G(x) < 1 \Rightarrow S_n(x) < E_n$: signal d'entrée atténué à cette fréquence.

2) Le **gain en décibel** (dB) traduit le même effet, mais en échelle logarithmique :

$$\boxed{G_{\mathrm{dB}}(x) = 20 \log |\underline{H}(x)|}$$

Le gain en décibels a pour unité le dB.

- ◇ $G_{\mathrm{dB}}(x) = 0\,\mathrm{dB} \Leftrightarrow |\underline{H}(x)| = 1$: signal d'entrée conservé à cette fréquence.
- ◇ $G_{\mathrm{dB}}(x) > 0\,\mathrm{dB} \Leftrightarrow |\underline{H}(x)| > 1$: signal d'entrée amplifié à cette fréquence.
- ◇ $G_{\mathrm{dB}}(x) < 0\,\mathrm{dB} \Leftrightarrow |\underline{H}(x)| < 1$: signal d'entrée atténué à cette fréquence.

En effet, les échelles logarithmiques sont utiles pour visualiser des données sur de grands intervalles.

Figure 7.11 – Exemple d'échelle logarithmique

À l'inverse d'une échelle linéaire, ici les incréments sont des **puissances de 10**. Le passage d'une puissance de 10 à la suivante s'appelle une **décade**.

Le logarithme décimal est la fonction inverse de la fonction $f : x \mapsto 10^x$. Ainsi,

$$\log\left(10^1\right) = 1 \quad ; \quad \log\left(10^2\right) = 2 \quad ; \quad \log\left(10^3\right) = 3$$

Propriété 7.2 : Amplitude vs. gain

1) Lorsque l'**amplitude est divisée par 10**, le **gain en décibels diminue de 20 dB** ;
2) La bande passante est l'ensemble des pulsations telles que $G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB,max}} - 3\,\text{dB}$:

$$\text{bande passante} \triangleq \{\omega \mid G_{\text{dB}}(\omega) \geq G_{\text{dB, max}} - 3\,\text{dB}\}$$

Démonstration 7.1 : Amplitude vs. gain

1)
$$|\underline{H}(\omega_2)| = \frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10}$$
$$\Leftrightarrow 20\log\left(|\underline{H}(\omega_2)|\right) = 20\log\left(\frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10}\right)$$
$$\Leftrightarrow 20\log\left(|\underline{H}(\omega_2)|\right) = 20\log(|\underline{H}(\omega_1)|) - 20\log(10)$$
$$\Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega_2) = G_{\text{dB}}(\omega_1) - 20\,\text{dB}$$ ■

2)
$$|\underline{H}(\omega)| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow 20\log(|\underline{H}(\omega)|) \geq 20\log\left(\frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}\right)$$
$$\Leftrightarrow G_{\text{dB}}(\omega) \geq \underbrace{20\log(|\underline{H}|_{\max})}_{=G_{\text{dB, max}}} - \underbrace{20\log\left(\sqrt{2}\right)}_{=3\,\text{dB}}$$ ■

Application 7.4 : Gain du filtre RC sur C

On rappelle la fonction de transfert du filtre RC sur C : $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+\text{j}x}$.

1) Déterminer son gain. Quel est son maximum ?
2) En déduire son gain en décibels. Quel est son maximum ?
3) Déterminer sa bande passante *à l'aide du gain*.
4) Déterminer sa phase. Donner ses limites pour $x \to 0$ et $x \to \infty$.

1)
$$\boxed{G(x) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \quad \text{et} \quad \underline{G_{\max} = G(0) = 1}$$

2)
$$G_{\text{dB}}(x) = 20\log\left(\sqrt{1+x^2}^{-1}\right) = \frac{20}{-2}\log\left(1+x^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{G_{\text{dB}}(x) = -10\log\left(1+x^2\right)} \Rightarrow \underline{G_{\text{dB, max}} = 0}$$

3)
$$G(x) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x \leq 1 \Leftrightarrow \omega \leq \omega_c}$$

4)
$$\varphi(x) = \arg(\underline{H}(x)) = -\arg(1+\text{j}x) \Leftrightarrow \boxed{\varphi(x) = -\arctan(x)}$$
$$\Rightarrow \varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} -\frac{\pi}{2}$$

IV/B Diagramme de Bode

IV/B) 1 Définition

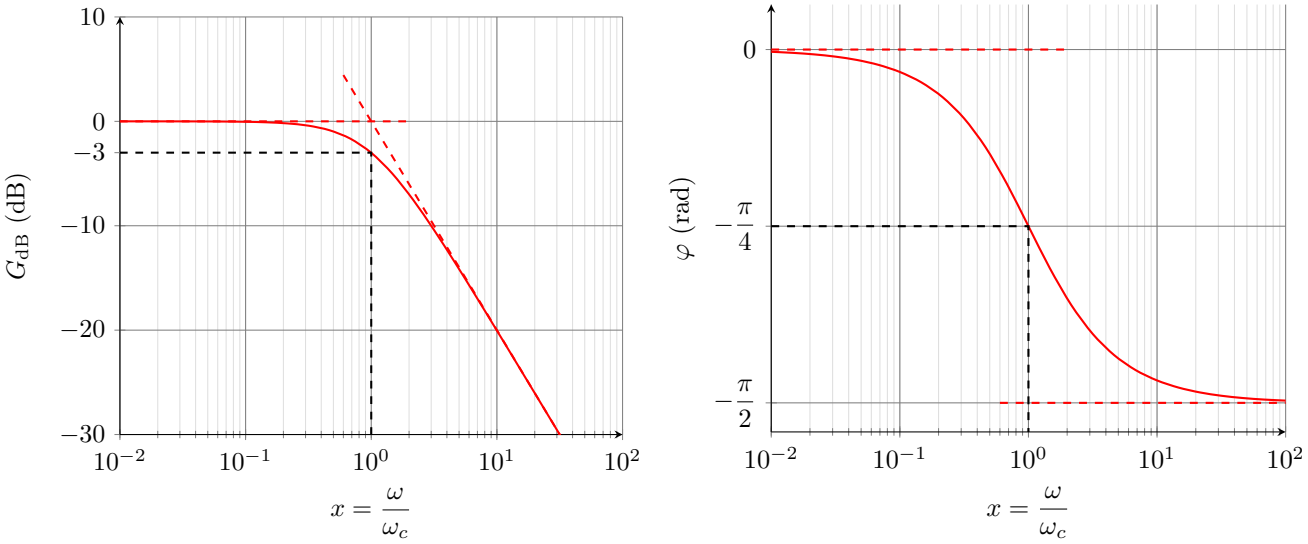
Définition 7.7 : Diagramme de Bode

Le(s) diagramme(s) de Bode est un outil permettant de visualiser *et quantifier* l'effet d'un filtre sur une fréquence d'entrée. On représente pour cela :

- ◇ **gain en décibels** $G_{\text{dB}}(x) = 20\log|\underline{H}(x)|$;
- ◇ et sa **phase** $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(x))$.

On les trace en fonction de la pulsation (réduite ou non) ou de la fréquence, et **en échelle logarithmique**.

Par exemple, pour le RC sur C : C'est donc un **passe-bas** !



(a) Gain **(b)** Phase

Figure 7.12 – Diagramme de Bode du filtre RC sur C.

IV/B) 2 Asymptotes

Définition 7.8 : Diagramme asymptotique

Le diagramme de Bode asymptotique d'un filtre correspond au diagramme de Bode où seules les droites asymptotes affines sont tracées.

Outils 7.1 : Obtention des asymptotes

Pour trouver les asymptotes :

1) On simplifie $\underline{H}(x)$ pour $x \to 0$ et $x \to \infty$, en ne gardant **que le terme prépondérant** au numérateur et au dénominateur ;
2) On calcule G_{dB} et φ avec ces limites asymptotiques ;
3) On trace les droites obtenues en les faisant se rejoindre.

Application 7.5 : Diagramme asymptotique RC sur C

Déterminer les droites asymptotes du diagramme de Bode de RC sur C. Vérifier la cohérence avec les asymptotique de la Figure 7.12.

1) $$\underline{H}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \frac{1}{\mathrm{j}x}$$

2) ◇ Pour le gain :

$$G_{\mathrm{dB}}(x) \xrightarrow[x\to 0]{} 20\log(1) = 0 \quad \text{et} \quad G_{\mathrm{dB}}(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} 20\log\left|\frac{1}{\mathrm{j}x}\right| = -20\log x$$

Ainsi, à hautes fréquences, **le gain diminue de 20 dB par décade** : si ω est multiplié par 10, le gain en décibel baisse de 20 dB (i.e. l'amplitude est divisée par 10).

◇ Pour la phase :

$$\varphi(x) \xrightarrow[x\to 0]{} \arg(1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow[x\to\infty]{} \arg\left(\frac{1}{\mathrm{j}x}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

IV/B) 3 Lecture

Pour lire le signal de sortie d'un filtre, il suffit de repérer le **gain** et la **phase** de la fonction de transfert **pour chaque fréquence** de la décomposition. Si $e(t) = E\cos(\omega t)$, la sortie sera

$$s(t) = |\underline{H}(\omega)| \times E\cos(\omega t + \varphi(\omega))$$

On trouve le déphasage par lecture directe, et on trouve le gain à partir du gain en décibel en inversant la formule :

$$G_{\mathrm{dB}}(\omega) = 20\log|\underline{H}(\omega)| \Leftrightarrow |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_{\mathrm{dB}}(\omega)/20}$$

Exemple 7.2 : Filtrage par RC sur C

En reprenant la Figure 7.5, on ajoute le filtre RC en passe-bas. Pour garder les basses fréquences, on choisit une fréquence de coupure f_c à 10 Hz. Avec $R = 1000\,\Omega$ cela impose $C = 1{,}6 \times 10^{-5}$ F ($\omega_c = \frac{1}{RC}$). On obtient la figure suivante :

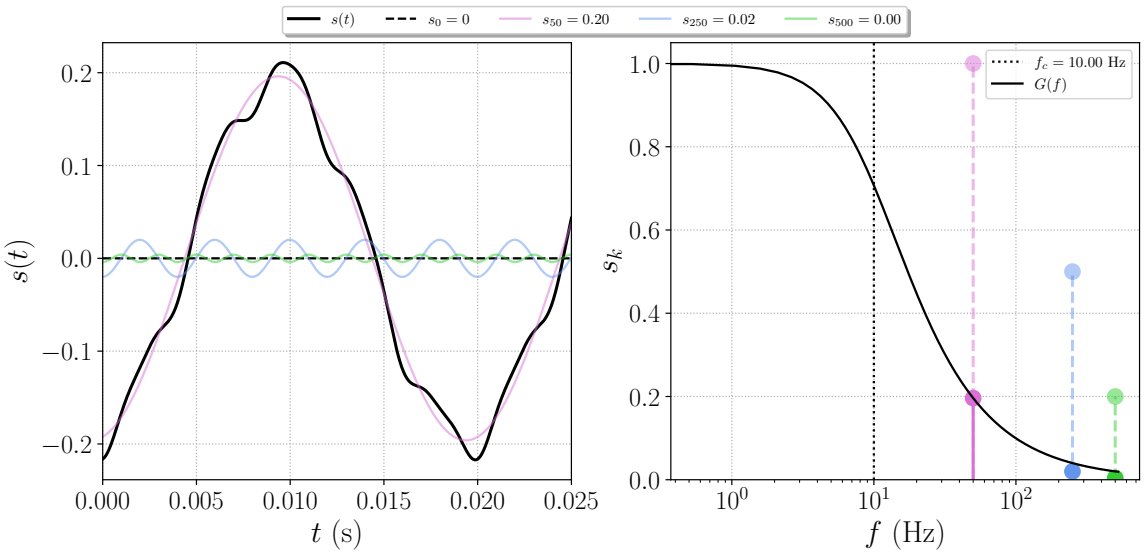


Figure 7.13 – Signal somme de 50, 250 et 500 Hz

IV/C Filtres moyenneurs, dérivateurs et intégrateurs

Pour un même filtre, le traitement qu'il réalise dépend du signal d'entrée et de ses composantes : un passe-bas utilisé sur un signal avec de très basses fréquences ne le modifie pas, alors qu'utilisé sur un signal composé de très hautes fréquences, il n'en garde que la moyenne. On distingue alors 3 effets selon les conditions d'utilisations :

Définition 7.9 : Effets des filtres

Un filtre peut, **selon la plage de fréquences du signal d'entrée**, se comporter avec les effets suivants :

◇ **Moyenneur** : Sortie proportionnelle à la moyenne de l'entrée,

$$\boxed{s(t) = C\,\langle e(t)\rangle}$$

En pratique, c'est un **passe-bas** pour lequel $\omega_c \ll \omega_e$: toutes les harmoniques sauf la composante continue sont atténuées.

◇ **Intégrateur** : Sortie proportionnelle à la primitive de l'entrée,

$$\boxed{s(t) = C\int e(t)dt} \Leftrightarrow \underline{S} = \frac{C}{\mathrm{j}\omega}\underline{E} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = \frac{C}{\mathrm{j}\omega}}$$

Correspond à une pente de $-20\,\mathrm{dB/decade}$ gain. Par exemple, le passe-bas d'ordre 1 pour $\omega \gtrsim 3\omega_c$ est un intégrateur [5].

◇ **Dérivateur** : Sortie proportionnelle à la dérivée de l'entrée,

$$\boxed{s(t) = C\frac{\mathrm{d}e}{\mathrm{d}t}} \Leftrightarrow \underline{S} = C\mathrm{j}\omega\underline{E} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H}(\mathrm{j}\omega) = C\times\mathrm{j}\omega}$$

Correspond à une pente de $+20\,\mathrm{dB/decade}$ en gain. Ça sera le cas d'un passe-haut d'ordre 1, pour $\omega \lesssim 0{,}3\omega_c$

V Exemples de filtres d'ordre 1

V/A RC sur C : passe-bas

V/A) 1 Schéma

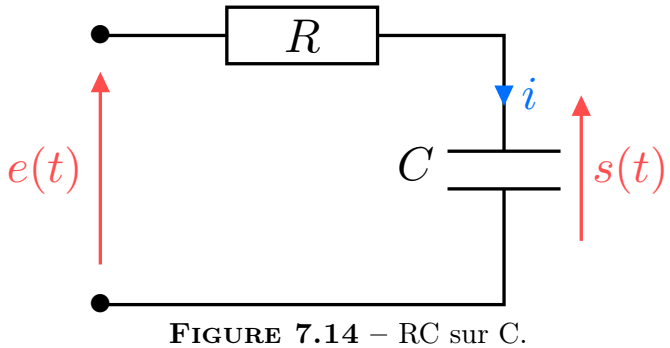


Figure 7.14 – RC sur C.

5. On se rappelle du TP7.

V/A) 2 Prévision comportement

On peut détecter dès cette écriture la nature du filtre en prévoyant son comportement à hautes et basses fréquences, grâce aux comportements limites des impédances utilisées :

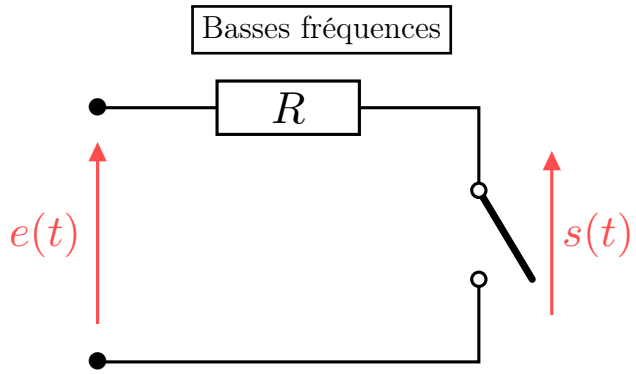


Figure 7.15 – RC sur C en BF

On en déduit :

$$\text{Circuit ouvert} \Rightarrow i(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{s(t) = e(t)}$$
$$\Rightarrow H(0) = 1 \Leftrightarrow G(0) = 0$$
$$\text{et} \quad \Delta\varphi_{s/e}(0) = 0$$

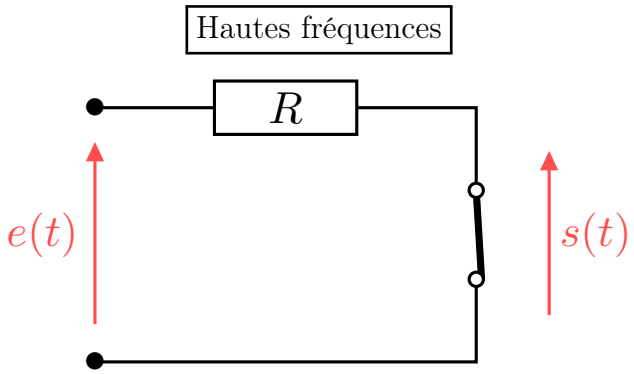


Figure 7.16 – RC sur C en HF

On en déduit :

$$\text{Tension d'un fil} \Rightarrow \boxed{s(t) = 0}$$
$$\Rightarrow H(x) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow G(x) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} -\infty$$

V/A) 3 Fonction de transfert, généralisation

On a trouvé la fonction de transfert plus tôt. On généralise :

Important 7.2 : Généralisation passe-bas ordre 1

La forme canonique d'un filtre passe-bas du premier ordre est

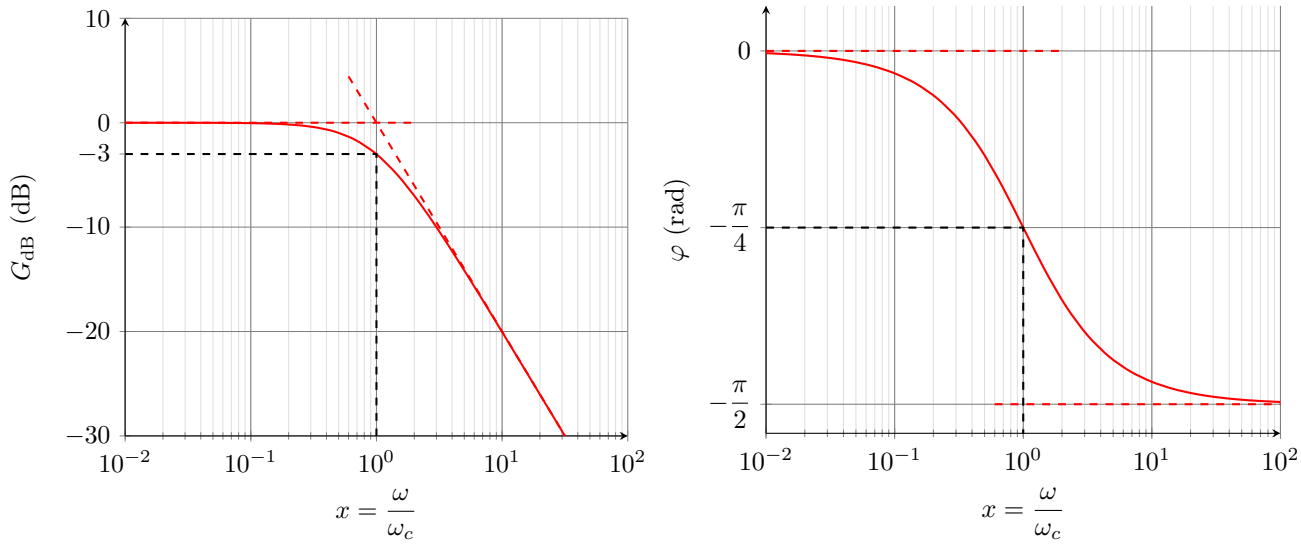
$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}x}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et} \quad H_0 = \text{cte}$$

V/A) 4 Diagramme de Bode

On rappelle les diagrammes de Bode, avec :

Tableau 7.1 – Étude RC sur C.

	$\forall x$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\dfrac{1}{1+\mathrm{j}x}$	1	$\dfrac{1}{\mathrm{j}x}$
$G_{\text{dB}} = 20\log\lvert\underline{H}\rvert$	$-10\log\left(1+x^2\right)$	0	$-20\log(x)$
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$	$-\arctan(x)$	0	$-\dfrac{\pi}{2}$



(a) Gain **(b)** Phase

Figure 7.17 – Diagramme de Bode du filtre RC sur C.

V/A) 5 Comportement intégrateur à HF

En hautes fréquences, la fonction de transfert est celle d'un intégrateur :

$$\underline{H}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\omega_c}{\mathrm{j}\omega} \Leftrightarrow \boxed{\underline{S} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\omega_c}{\mathrm{j}\omega}\underline{E}}$$

Par exemple, sur un signal créneau, on obtient la figure suivante :

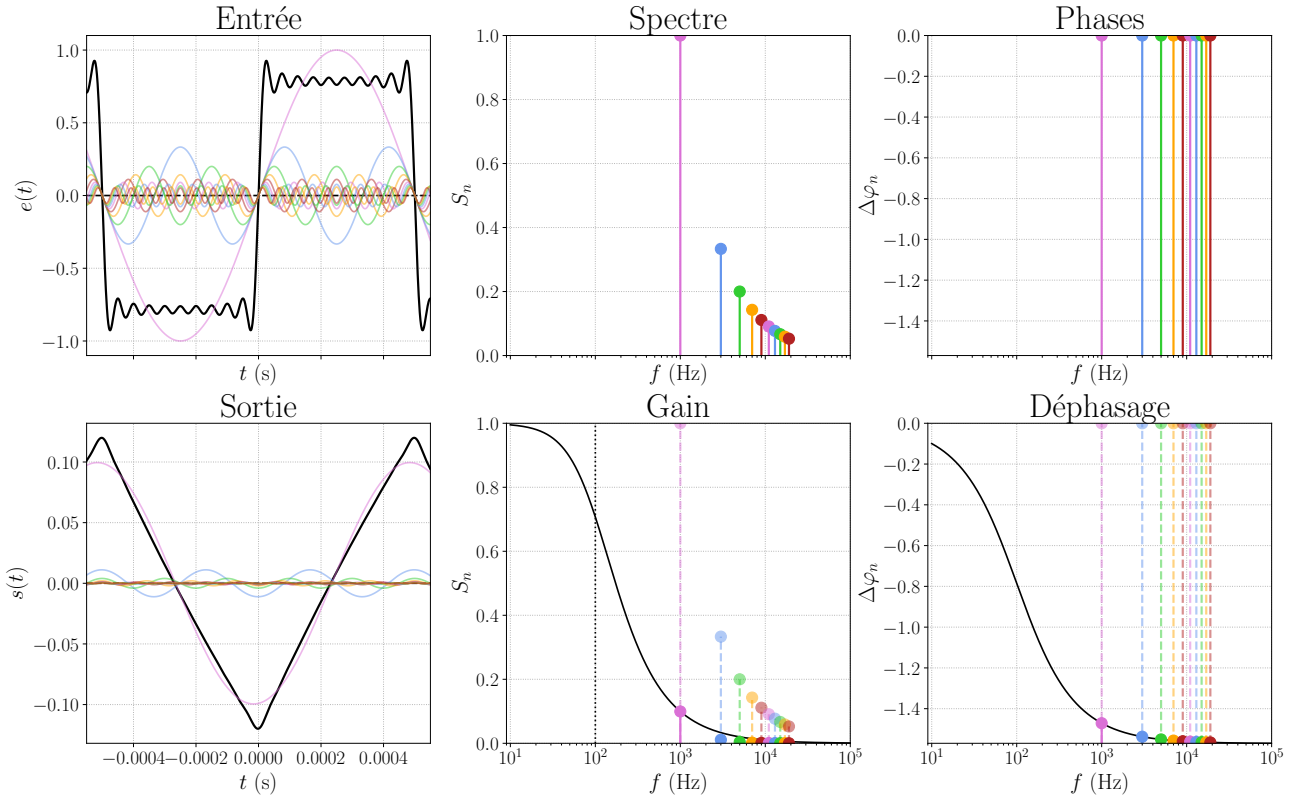


Figure 7.18 – Filtrage d'un signal créneau de $f_e = 1\,\text{kHz}$ par un passe-bas de $f_c = 100\,\text{Hz}$.

V/B RC sur R : passe-haut

V/B) 1 Schéma

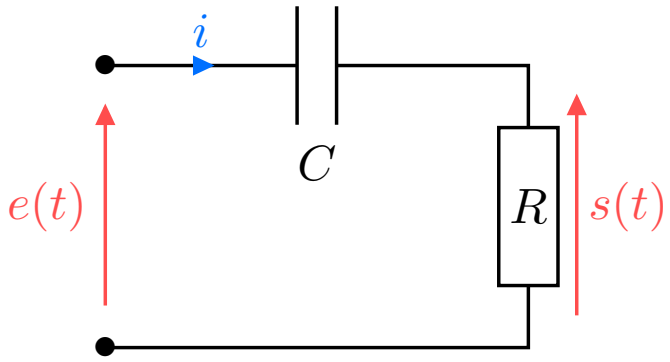


Figure 7.19 – RC sur R.

V/B) 2 Prévision comportement

On peut détecter dès cette écriture la nature du filtre en prévoyant son comportement à hautes et basses fréquences, grâce aux comportements limites des impédances utilisées :

Basses fréquences

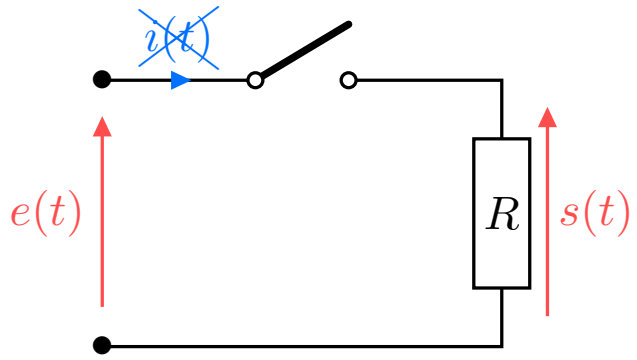


Figure 7.20 – RC sur R en BF

On en déduit :

$$\text{Circuit ouvert} \Rightarrow i(t) = 0 \Rightarrow \boxed{s(t) = 0}$$
$$\Rightarrow H(x) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0 \Leftrightarrow G(x) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} -\infty$$

Hautes fréquences

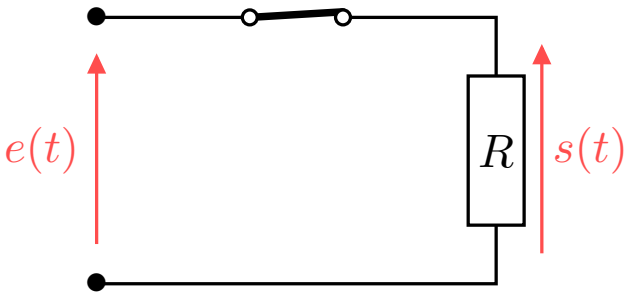


Figure 7.21 – RC sur R en HF

On en déduit :

$$\text{LdM} \Rightarrow \boxed{s(t) = e(t)}$$
$$\Rightarrow H(0) = 1 \Leftrightarrow G(0) = 0$$
$$\text{et} \quad \Delta\varphi_{s/e}(0) = 0$$

C'est donc bien un **passe-haut**.

V/B) 3 Fonction de transfert, généralisation

Pour trouver la fonction de transfert, on transforme le circuit en complexes et on applique un pont diviseur de tension :

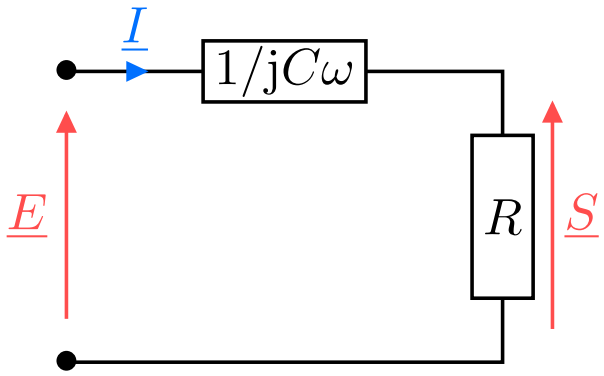


Figure 7.22 – RC en complexes.

Pont diviseur :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + 1/\mathrm{j}C\omega}\underline{E}$$

$$\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\underline{E} \qquad \times \frac{\mathrm{j}C\omega}{\mathrm{j}C\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{\mathrm{j}RC\omega}{1 + \mathrm{j}RC\omega} = \frac{\mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}{1 + \mathrm{j}\frac{\omega}{\omega_c}}} \qquad \underline{H} = \underline{S}/\underline{E}$$

avec $\omega_c = \frac{1}{RC}$ la pulsation de coupure.

Important 7.3 : Généralisation passe-haut ordre 1

La forme canonique d'un filtre passe-haut du premier ordre est

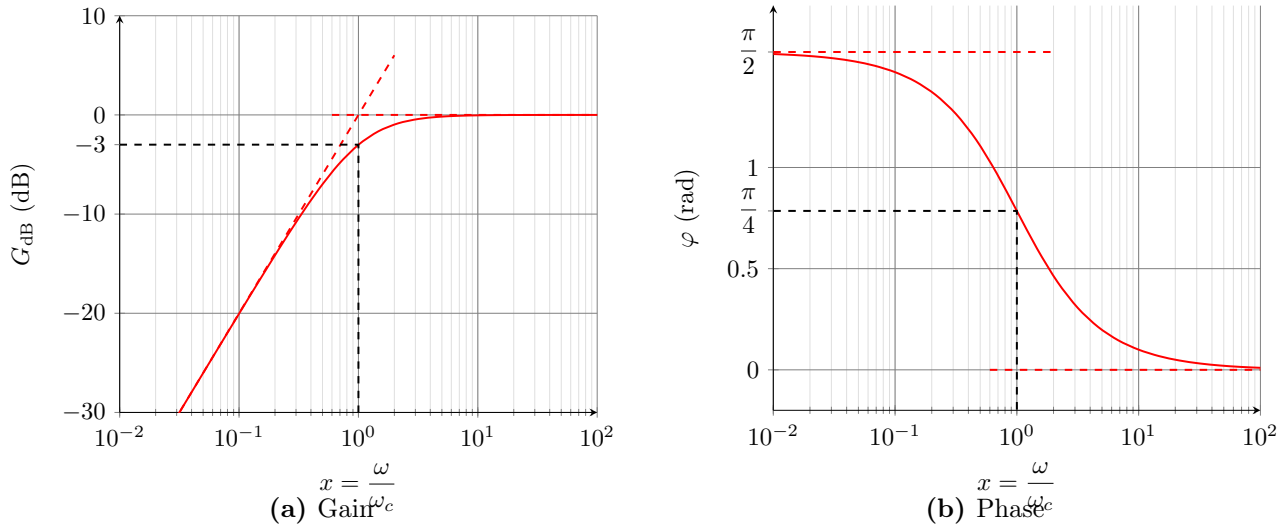
$$\boxed{\underline{H}(x) = H_0 \frac{\mathrm{j}x}{1 + \mathrm{j}x}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_c} \quad \text{et} \quad H_0 = \text{cte}$$

V/B) 4 Diagramme de Bode

On trace les diagrammes de Bode, avec :

Tableau 7.2 – Étude RC sur R.

	$\forall x$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$\underline{H} = \frac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\frac{\mathrm{j}x}{1+\mathrm{j}x}$	$\mathrm{j}x$	1
$G_{\text{dB}} = 20\log\lvert\underline{H}\rvert$	$20\log\left(\frac{x}{\sqrt{1+x^2}}\right)$	$20\log x$	0
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$	$\frac{\pi}{2} - \arctan(x)$	$\frac{\pi}{2}$	0



(a) Gain **(b)** Phase

Figure 7.23 – Diagramme de Bode du filtre RC sur R.

V/B) 5 Comportement dérivateur à BF

En basses fréquences, la fonction de transfert est celle d'un dérivateur :

$$\underline{H}(\omega) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c} \Leftrightarrow \boxed{\underline{S} \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \frac{\mathrm{j}\omega}{\omega_c}\underline{E}}$$

Par exemple, sur un signal triangle, on obtient la figure suivante : C'est bien un dérivateur.

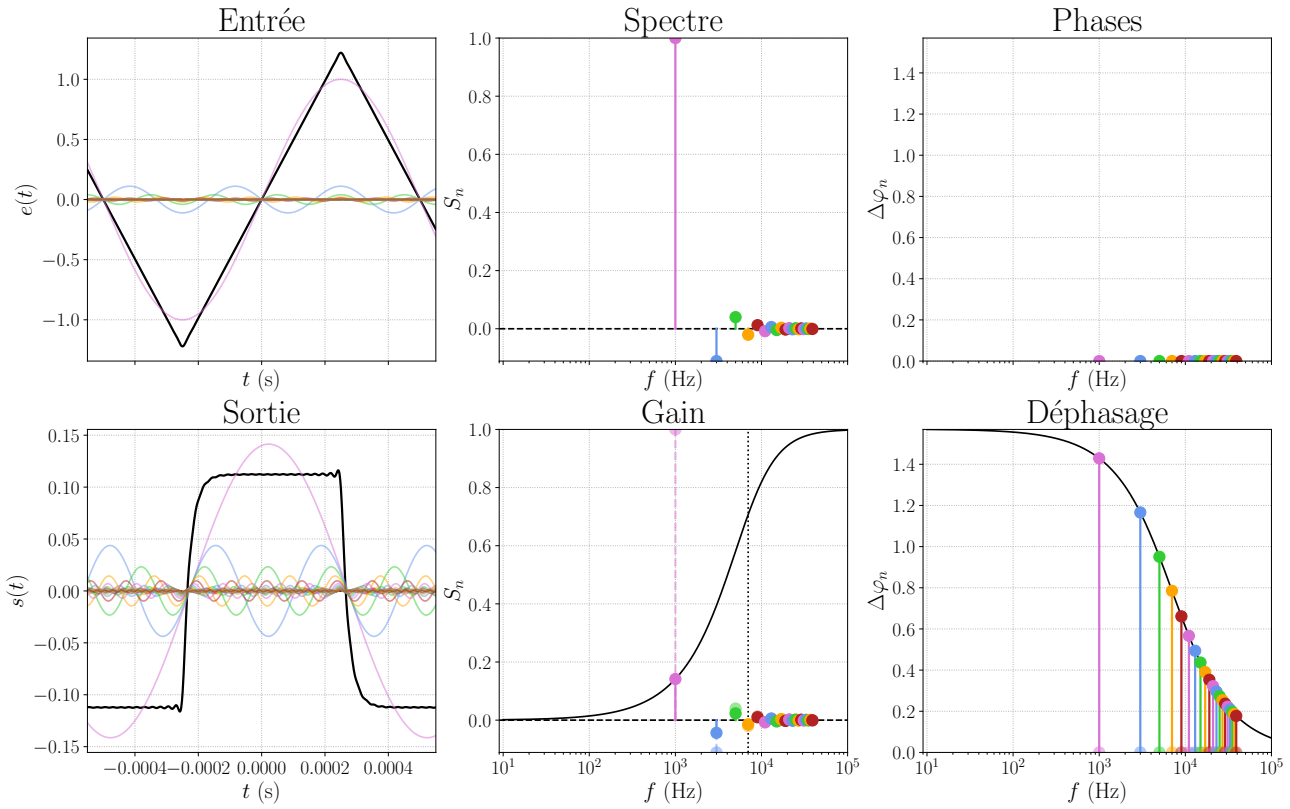


Figure 7.24 – Filtrage d'un signal triangle de $f_e = 1\,\mathrm{kHz}$ par un passe-haut de $f_c = 7000\,\mathrm{Hz}$.

VI Exemples de filtres d'ordre 2

VI/A RLC sur C : passe-bas ordre 2

VI/A) 1 Schéma

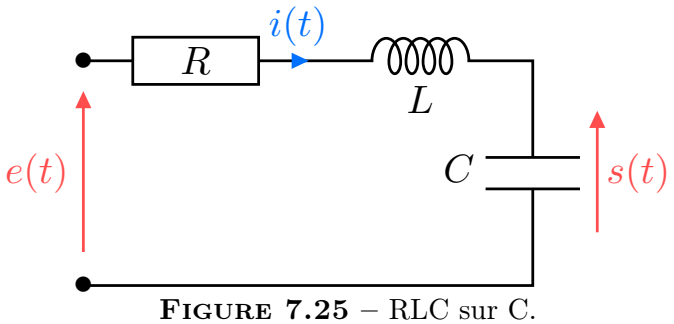


Figure 7.25 – RLC sur C.

VI/A) 2 Prévision comportement

On peut détecter dès cette écriture la nature du filtre en prévoyant son comportement à hautes et basses fréquences, grâce aux comportements limites des impédances utilisées :

Basses fréquences

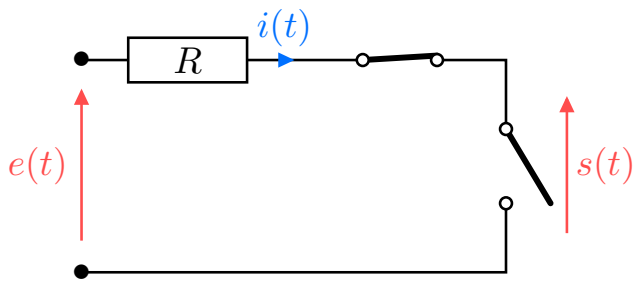


Figure 7.26 – RLC sur C en BF

On en déduit :

$$\text{Circuit ouvert} \Rightarrow i(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{s(t) = e(t)}$$
$$\Rightarrow H(0) = 1 \Leftrightarrow G(0) = 0$$
$$\text{et} \quad \Delta\varphi_{s/e}(0) = 0$$

Hautes fréquences

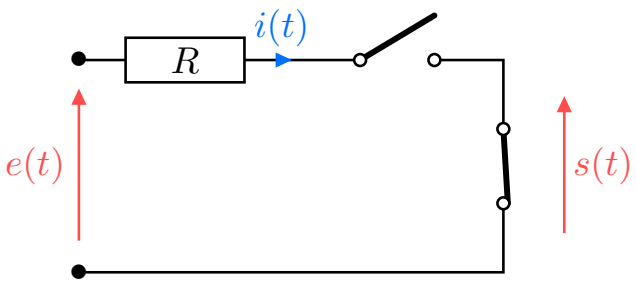


Figure 7.27 – RLC sur C en HF

On en déduit :

$$\text{Tension d'un fil} \Rightarrow \boxed{s(t) = 0}$$
$$\Rightarrow H(x) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow G(x) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} -\infty$$

C'est donc bien un **passe-bas**.

VI/A) 3 Fonction de transfert, généralisation

Pour trouver la fonction de transfert, on transforme le circuit en complexes et on applique un pont diviseur de tension :

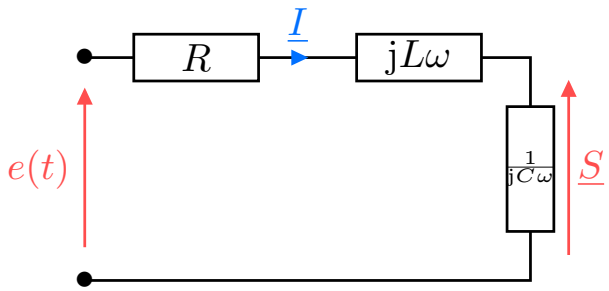


Figure 7.28 – RLC en complexes.

Pont diviseur :

$$\underline{S} = \frac{1/\mathrm{j}C\omega}{R + \mathrm{j}L\omega + 1/\mathrm{j}C\omega}\underline{E} \quad \left(\times \frac{\mathrm{j}C\omega}{\mathrm{j}C\omega}\right)$$
$$\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega - LCw^2}\underline{E} \quad \left(\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation de coupure et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

Important 7.4 : Généralisation passe-bas ordre 2

La forme canonique d'un filtre passe-bas du second ordre est

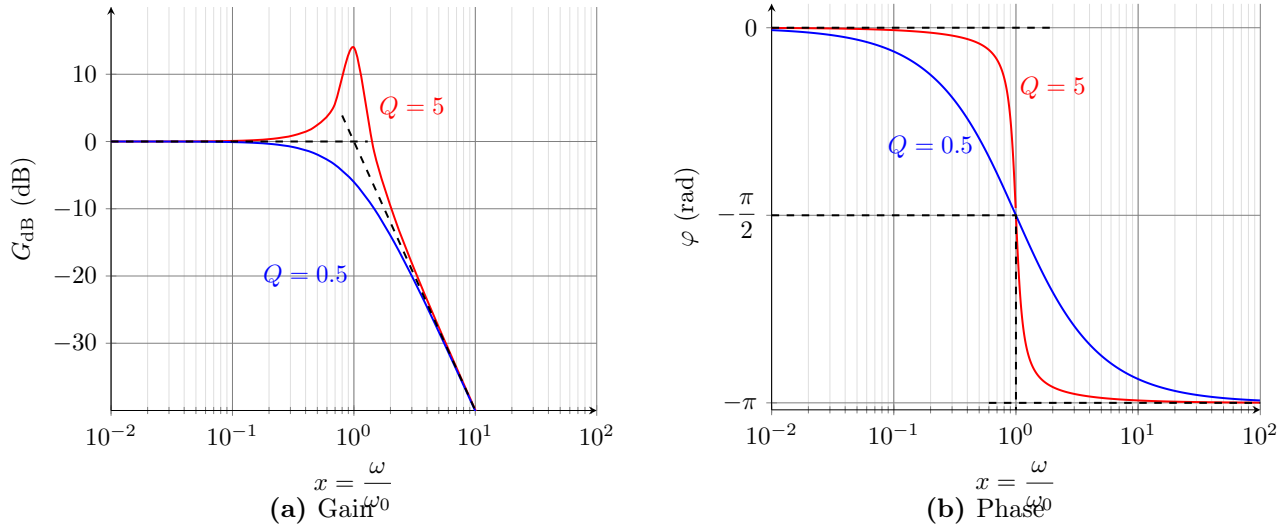
$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad H_0 = \text{cte} \quad \text{et} \quad Q \text{ facteur de qualité}$$

VI/A) 4 Diagramme de Bode

On trace les diagrammes de Bode, avec :

Tableau 7.3 – Étude RLC sur C.

	$\forall x$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\dfrac{1}{1 - x^2 + \mathrm{j}\frac{x}{Q}}$	1	$-\dfrac{1}{x^2}$
$G_{\mathrm{dB}} = 20\log\lvert\underline{H}\rvert$	$-10\log\left(\left(1-x^2\right)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2\right)$	0	$-40\log x$
$\tan(\arg(\underline{H}))$	$-\dfrac{x/Q}{1-x^2}$	0	0
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$	$---$	0	$-\pi$



(a) Gain **(b)** Phase

Figure 7.29 – Diagramme de Bode du filtre RLC sur C.

On observe donc une pente de $-\mathbf{40\,dB/décade}$ en atténuation à grandes fréquences : ce filtre sera meilleur en moyenneur.

VI/B RLC sur R : passe-bande

VI/B) 1 Schéma

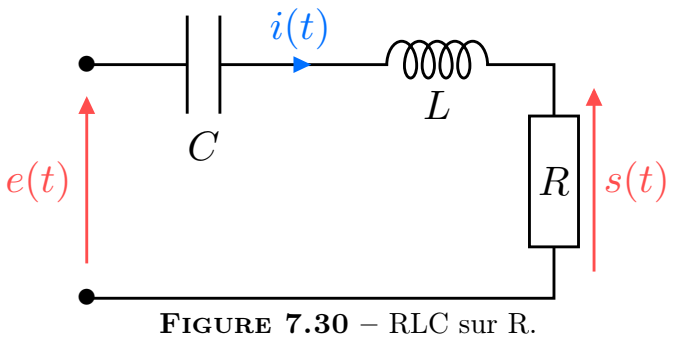


Figure 7.30 – RLC sur R.

VI/B) 2 Prévision comportement

On peut détecter dès cette écriture la nature du filtre en prévoyant son comportement à hautes et basses fréquences, grâce aux comportements limites des impédances utilisées :

Basses fréquences

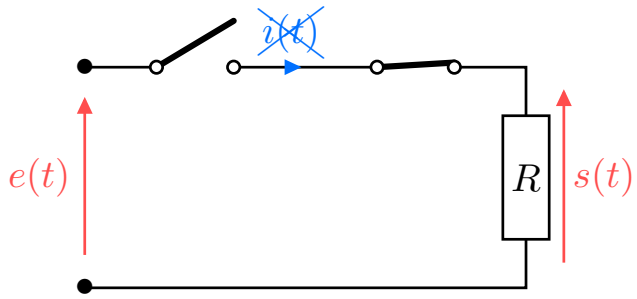


Figure 7.31 – RLC sur R en BF

On en déduit :

$$\text{Circuit ouvert} \Rightarrow i(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{s(t) = 0}$$
$$\Rightarrow H(x) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0 \Leftrightarrow G(x) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} -\infty$$

Hautes fréquences

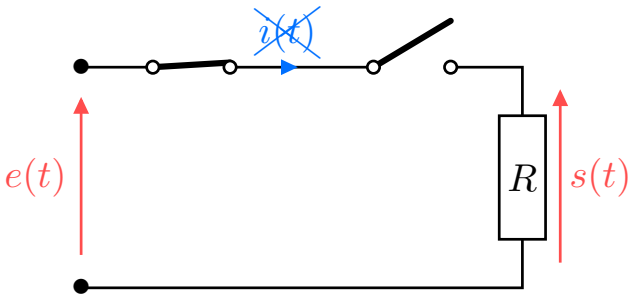


Figure 7.32 – RLC sur R en HF

On en déduit :

$$\text{Circuit ouvert} \Rightarrow i(t) = 0 \Leftrightarrow \boxed{s(t) = 0}$$
$$\Rightarrow H(x) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} 0 \Leftrightarrow G(x) \xrightarrow[\omega \to \infty]{} -\infty$$

C'est donc bien un **passe-bande**.

VI/B) 3 Fonction de transfert, généralisation

Pour trouver la fonction de transfert, on transforme le circuit en complexes et on applique un pont diviseur de tension :

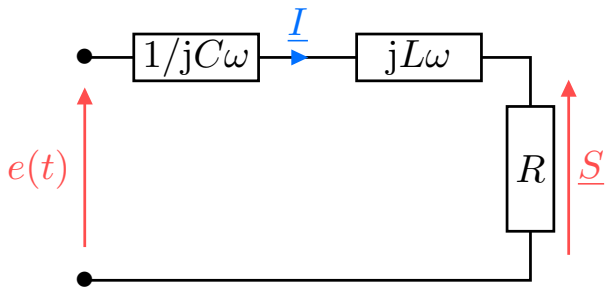


Figure 7.33 – RLC en complexes.

Pont diviseur :

$$\underline{S} = \frac{R}{R + \mathrm{j}L\omega + 1/\mathrm{j}C\omega}\underline{E} \quad \left(\times \frac{1/R}{1/R}\right)$$
$$\Leftrightarrow \underline{S} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}\frac{L}{R}\omega - \mathrm{j}\frac{1}{RC\omega}}\underline{E}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad \left(\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}\right)$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation de coupure et $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$ le facteur de qualité.

Important 7.5 : Généralisation passe-bande ordre 2

La forme canonique d'un filtre passe-bande du second ordre est

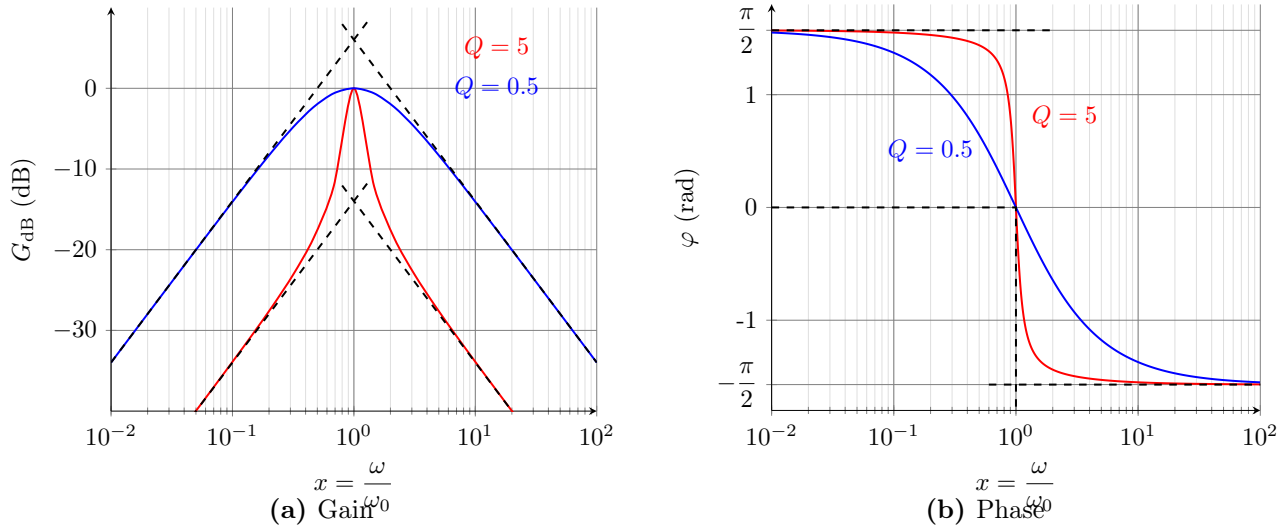
$$\boxed{\underline{H}(x) = \frac{H_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0} \quad \text{et} \quad H_0 = \text{cte} \quad \text{et} \quad Q \text{ facteur de qualité}$$

VI/B) 4 Diagramme de Bode

On trace les diagrammes de Bode, avec les informations du Tableau 7.4. On observe, sur la Figure 7.34a, une pente de **20 dB/décade** en atténuation à basses fréquences, et **−20 dB/décade** à hautes fréquences : ce filtre permettra d'isoler des fréquences dans un signal. Par exemple, sur un signal créneau, on obtient la Figure 7.35.

Tableau 7.4 – Étude RLC sur R.

	$\forall x$	$x \to 0$	$x \to \infty$
$\underline{H} = \dfrac{\underline{S}}{\underline{E}}$	$\dfrac{1}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)}$	$\mathrm{j}\dfrac{x}{Q}$	$-\mathrm{j}\dfrac{1}{xQ}$
$G_{\text{dB}} = 20\log\lvert\underline{H}\rvert$	$-10\log\left(1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2\right)$	$20\log\left(\dfrac{x}{Q}\right)$	$-20\log(Qx)$
$\Delta\varphi_{s/e} = \arg(\underline{H})$	$-\arctan\left(Q\left(x-\frac{1}{x}\right)\right)$	$+\dfrac{\pi}{2}$	$-\dfrac{\pi}{2}$



(a) Gain **(b)** Phase

Figure 7.34 – Diagramme de Bode du filtre RLC sur R.

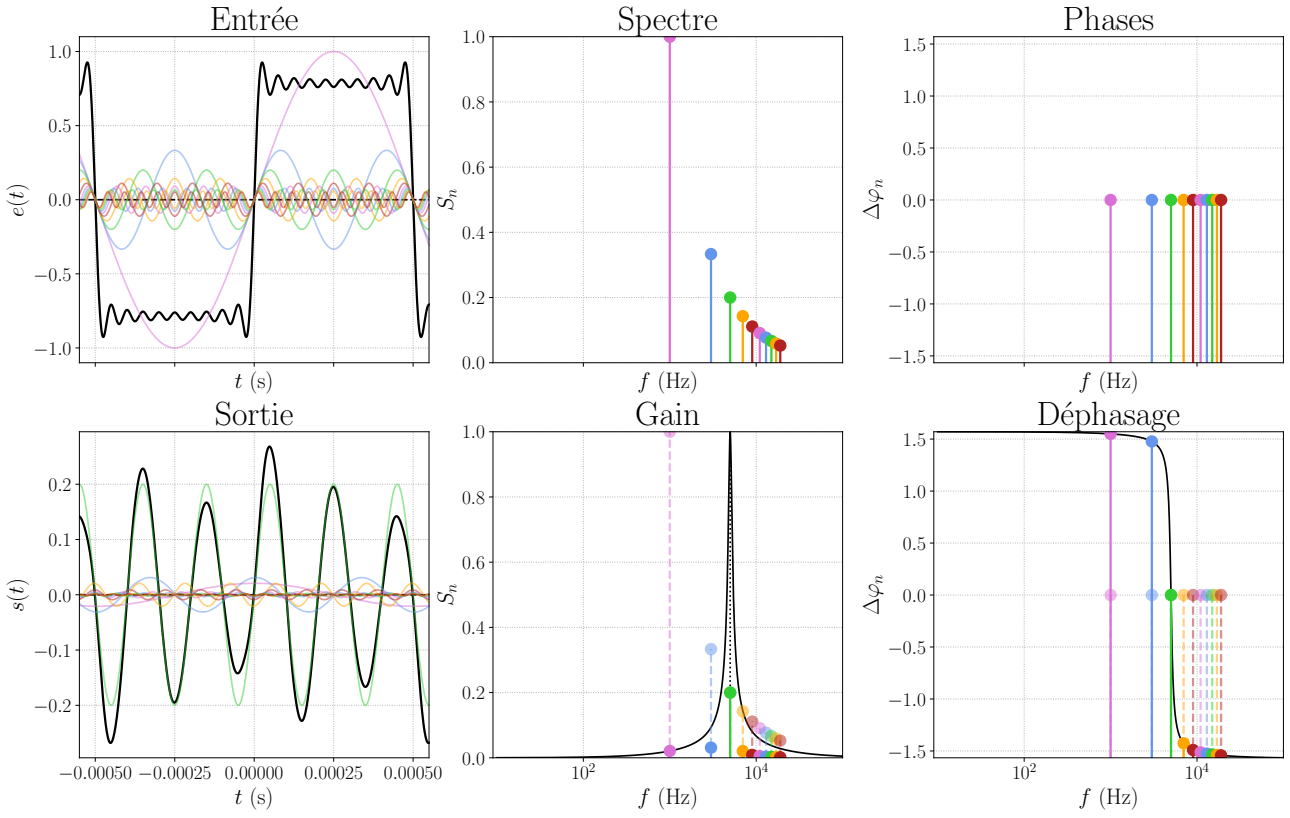


Figure 7.35 – Filtrage d'un signal créneau de $f_e = 1\,\text{kHz}$ par un passe-bande de $f_c = 5000\,\text{Hz}$.

VII Résumé

Outils 7.2 : Étude d'un filtre

1) On fait l'étude à basses et hautes fréquences ;
2) On écrit le circuit avec les amplitudes complexes et les impédances des composants ;
3) On fait un pont diviseur ;
4) On calcule l'amplitude complexe puis on en déduit la fonction de transfert ;
5) On calcule le gain en décibels et la phase ;
6) On fait l'étude asymptotique ;
7) On trace le diagramme de Bode.

Ensuite, pour connaître le signal de sortie d'un signal d'entrée, on le décompose en série de Fourier et on applique la fonction de transfert complexe à chacune des composantes pour reconstituer le signal de sortie :

$$e(t) = \left\{ \begin{array}{ccc} E_0 & \to \boxed{\underline{H}(0\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_0 \\ + & & + \\ E_1 \sin(\omega_e t + \varphi_1) & \to \boxed{\underline{H}(1\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_1 \sin(\omega_e t + \psi_1) \\ + & & + \\ E_2 \sin(\omega_e t + \varphi_2) & \to \boxed{\underline{H}(2\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_2 \sin(\omega_e t + \psi_2) \\ \vdots & & \vdots \\ E_n \sin(\omega_e t + \varphi_n) & \to \boxed{\underline{H}(n\mathrm{j}\omega_e)} \to & S_n \sin(\omega_e t + \psi_n) \end{array} \right\} = s(t)$$

VIII Filtres en cascade

On appelle « mettre en cascade » le fait d'utiliser la sortie d'un filtre comme l'entrée d'un nouveau. Par exemple, avec deux RC : On pourrait s'attendre à ce que la fonction de transfert soit

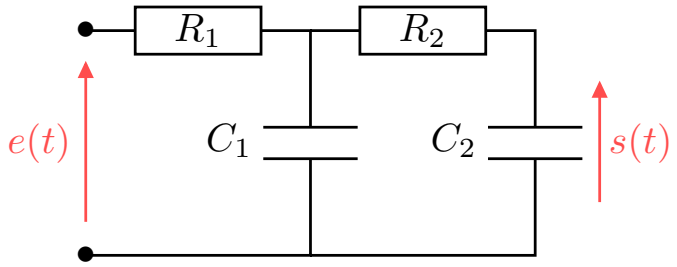


Figure 7.36 – RC en cascade

$$\underline{H} = \underline{H}_1\underline{H}_2 = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega}\frac{1}{1+\mathrm{j}R_2C_2\omega}$$

Cependant, le calcul de la fonction de transfert donne

$$\underline{H} = \frac{1}{1+\mathrm{j}R_1C_1\omega+\mathrm{j}R_2C_2\omega+\boxed{\mathrm{j}R_1C_2\omega}+(\mathrm{j}\omega)^2R_1C_1R_2C_2}$$

Filtres en cascades

Lorsque l'on place des filtres en cascade, la fonction de transfert totale n'est pas le produit des fonctions de transfert de chaque étage.

Pour appliquer le pont diviseur de tension sur le premier RC, il faut que le condensateur C_1 et la résistance R_1 soient parcourus par le même courant, que le courant partant dans la deuxième branche soit très faible devant le courant de la première. Cela revient à ce que l'impédance du condensateur soit très faible devant celle de l'ensemble R_2C_2.

Filtres en cascades

Pour que l'on puisse faire le produit des fonctions de transfert, il faut que l'impédance de sortie du premier filtre soit faible devant l'impédance d'entrée du second, de sorte à négliger le courant dévié par le second étage.

En pratique, on emploie souvent des montages utilisant des amplificateurs opérationnels qui ont une très grande impédance d'entrée. On peut par exemple intercaler un montage suiveur entre les deux filtres RC.