Introduction – chapitre 0

Unités et analyse dimensionnelle

En sciences physiques, il faut opérer la distinction entre :

1) **Le phénomène**, du domaine de la sensation (« il fait chaud ») ou de l'observation (« une lumière blanche traversant un prisme sort en arc-en-ciel ») ;
2) **La grandeur physique**, quantité mesurable (directement ou indirectement) et rendant compte du phénomène (par exemple, la température). Elle est représentée par un **symbole** (T dans le même exemple) qui intervient dans les équations mathématiques caractérisant le phénomène physique, et est caractérisée par sa **dimension** traduisant sa nature ;
3) **La valeur** de la grandeur, résultant d'une mesure et associée à une **unité** (K ou °C) ; la valeur change selon l'unité utilisée et contient un certain nombre de **chiffres significatifs**.

Ces notions sont la fondation de tout raisonnement scientifique qui repose sur la précision et l'objectivité.

I Systèmes d'unités

A Grandeurs de base

Les grandeurs physiques sont **reliées** entre elles, soit par des **définitions** (surface d'un carré = carré d'un côté) soit par des **lois** physiques ($U = RI$ en électronique). Par souci de concision, il est pratique de choisir des grandeurs de base à partir desquelles nous exprimerons toutes les autres : en mécanique par exemple, nous utilisons la longueur, la masse et le temps. Ce choix n'est pas unique mais pratique.

À partir de grandeurs de base choisies, nous leur associons donc des unités « de base ». Le bureau international des poids et mesures (BIPM [1]) a défini le **système international (SI)**, et se réuni tous les 4 ans pour discuter de leur définition et de leur choix.

B Définition du SI

Définition 0.1 : Grandeurs, dimensions et unités de base du SI

Grandeur	Dimension	Unité	Symbole de l'unité
Longueur	L	mètre	m
Masse	M	kilogramme	kg
Temps	T	seconde	s
Intensité électrique	I	Ampère [a]	A
Température	Θ	Kelvin [b]	K
Quantité de matière	N	mole	mol
Intensité lumineuse	J [c]	candela	cd

a. Du nom du physicien André-Marie Ampère (XVIII-XIX^e), précurseur de la mathématisation de la physique et créateur du vocabulaire tenant à l'électricité.
b. Du nom du physicien William Thomson (XIX^e), anobli en Lord Kelvin, à l'origine de la thermodynamique.
c. Ne pas confondre avec l'unité des énergies en joules...

1. https://www.bipm.org/fr/measurement-units/

On remarquera que les unités provenant d'un nom propre s'écrivent avec une majuscule, et leur symbole l'est également.

C Grandeurs dérivées

Les grandeurs exprimées à partir des grandeurs de bases *via* des équations physiques sont appelées « grandeurs dérivées ». Leurs dimensions sont écrites sous la forme de produits de puissances des dimensions de base : d'une manière générique, une grandeur G a pour dimension

$$\boxed{[G] = \mathrm{L}^\alpha \mathrm{M}^\beta \mathrm{T}^\gamma \mathrm{I}^\delta \Theta^\epsilon \mathrm{N}^\xi \mathrm{J}^\eta}$$

où les lettres grecques sont les **exposants dimensionnels**, qui peuvent être nuls. S'ils sont tous nuls, la grandeur et dite **adimensionnée**.

Exemple 0.1 : Grandeurs dérivées

Grandeurs dérivées	Symbole	Équation aux dimensions	Unités SI dérivées
Surface	S	$[\mathrm{S}] = \mathrm{L}^2$	m^2
Volume	V	$[\mathrm{V}] = \mathrm{L}^3$	m^3
Angle	α	$[\alpha] = 1$	rad
Vitesse	$\vec{v}$	$[\mathrm{v}] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$	$\mathrm{m{\cdot}s}^{-1}$
Accélération	$\vec{a}$	$[\mathrm{a}] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$	$\mathrm{m{\cdot}s}^{-2}$
Masse volumique	ρ	$[\rho] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}$	$\mathrm{kg{\cdot}m}^{-3}$
Force	$\vec{F}$	$[\mathrm{F}] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$	$\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s}^{-2}$
Charge électrique	q	$[\mathrm{q}] = \mathrm{I} \cdot \mathrm{T}$	A·s
Énergie	E	$[\mathrm{E}] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^2 \cdot \mathrm{T}^{-2}$	$\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s}^{-2}$

Remarque

Certaines de ces unités dérivées portent des noms usuels : le Newton N ($1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m{\cdot}s^{-2}}$) pour la force, le Coulomb C ($1\,\mathrm{C} = 1\,\mathrm{A{\cdot}s}$) pour la charge électrique, ou l'énergie en Joules [a] J ($1\,\mathrm{J} = 1\,\mathrm{kg{\cdot}m^2{\cdot}s^{-2}}$)

a. Du physicien James JOULE (XIXe), contemporain de KELVIN

D Préfixes multiplicatifs

Suivant la valeur d'une grandeur, il est commode de l'exprimer *via* l'ajout d'un préfixe à l'unité. Ils s'expriment en puissances de 10 et ont également un symbole et un nom :

Sous-multiples			Multiples		
Préfixe	Puissance	Symbole	Préfixe	Puissance	Symbole
yocto	10^{-24}	y	déca	10^1	da
zepto	10^{-21}	z	hecto	10^2	h
atto	10^{-18}	a	kilo	10^3	k
femto	10^{-15}	f	méga	10^6	M
pico	10^{-12}	p	giga	10^9	G
nano	10^{-9}	n	téra	10^{12}	T
micro	10^{-6}	µ	péta	10^{15}	P
milli	10^{-3}	m	exa	10^{18}	E
centi	10^{-2}	c	zetta	10^{21}	Z
déci	10^{-1}	d	yotta	10^{24}	Y

II Analyse dimensionnelle

À l'aide de ces outils, nous pouvons effectuer des actions sur les équations-mêmes pour en extraire les dimensions. Pour qu'une équation mathématique ait un sens physique, elle doit suivre un principe fondamental et naturel : le principe d'homogénéité.

A Homogénéité

Propriété 0.1 : homogénéité

Dans une équation ou dans l'expression d'une loi physique, les deux membres de chaque côté du signe égal doivent être de même nature[a] et avoir la **même dimension**, quel que soit le système d'unités. Une telle formule est alors dite **homogène**.

a. Scalaire, vecteur, matrice, tenseur...

Implication 0.1 : dans la pratique

Nous ne pouvons donc égaliser un vecteur d'un côté avec un scalaire de l'autre, et ne pouvons égaliser, additionner ou soustraire des mètres à des secondes[a], etc.

a. Ou « des patates avec des carottes »... l'appréciation de l'analogie est laissée à votre appréciation.

B Application

Le principe d'homogénéité permet alors une analyse des dimensions des grandeurs mises en jeu dans une loi ou une équation. C'est un outil particulièrement puissant à bien des égards, que nous voyons ci-après.

II.B.1 Rechercher des unités

En connaissant une expression que l'on sait vraie, nous pouvons déduire les unités d'autres grandeurs (cf. les unités usuelles comme le Newton).

Exemple 0.2 : recherche d'unités

La force de rappel élastique exercée par un ressort s'écrit

$$\vec{F}_{\text{el}} = -k(l - l_0)\,\vec{u_x}$$

avec k la constante de raideur du ressort. Quelle est la dimension de k ? Comment exprimer son unité ?

II.B.2 Détecter des erreurs

Par simple analyse dimensionnelle, il est aisé d'affirmer qu'un résultat est nécessairement faux : si les deux parties mises en jeu n'ont pas la même dimension, elle ne peuvent être égales entre elles !

Exemple 0.3 : détecter des erreurs

En résolvant un exercice, vous trouvez l'expression suivante pour l'énergie potentielle d'une masse m accrochée à un ressort vertical de raideur k et sous pesanteur g :

$$E_{\mathrm{p}}(z) = \frac{1}{2}kz^2 + mgz^2$$

avec z la hauteur de la masse. Cette expression est-elle homogène ?

II.B.3 Rechercher des lois physiques

D'autre part, à partir de phénomènes que nous voudrions relier entre eux, il est possible d'établir des lois les reliant entre eux grâce au principe d'homogénéité.

Exemple 0.4 : recherche de loi

Donnez, par analyse dimensionnelle, la période T des oscillations d'un pendule simple.

III Exercices

A Vitesse du son

Donner l'expression de la célérité c du son dans un fluide en fonction de la masse volumique du ρ du fluide et du coefficient d'incompressibilité χ, homogène à l'inverse d'une pression.

B Faire cuire des pâtes

Sur une facture d'électricité, on peut lire sa consommation d'énergie électrique exprimée en kWh (kilowatt-heure).

1) Quelle est l'unité SI associée ? Que vaut 1 kWh dans cette unité SI ?

2) Sachant que la capacité thermique massique[1] de l'eau est $c = 4{,}18\,\mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$ et que le prix du kilowatt-heure est de 0,16 €, évaluer le coût du chauffage électrique permettant de faire passer 1 L d'eau de 20 °C à 100 °C.

3) Si la plaque chauffe avec une puissance de $P = 1200\,\mathrm{W}$, combien de temps faudra-t-il pour chauffer ce litre d'eau ?

C Taylor mieux que James Bond ?

À l'aide d'un film sur bande magnétique et en utilisant l'analyse dimensionnelle, le physicien Geoffrey Taylor a réussi en 1950 à estimer l'énergie E dégagée par une explosion nucléaire, valeur pourtant évidemment classifiée. Le film permet d'avoir accès à l'évolution du rayon $R(t)$ du « nuage » de l'explosion au cours du temps. Nous supposons que les grandeurs influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie E de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air.

1) Quelles sont les dimensions de ces grandeurs ?

2) Chercher une expression de R sous la forme $R = k \times E^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$, avec k une constante adimensionnée.

3) L'analyse du film montre que le rayon augmente au cours du temps comme $t^{2/5}$. Exprimer alors E en fonction de R, ρ et t.

4) En estimant que $R \approx 70\,\mathrm{m}$ après $t = 1\,\mathrm{ms}$, sachant que la masse volumique de l'air vaut $\rho \approx 1{,}0\,\mathrm{kg\cdot m^{-3}}$ et en prenant $K \approx 1$, calculer la valeur de E en joules puis en kilotonnes de TNT (une tonne de TNT libère $4{,}18 \times 10^{9}\,\mathrm{J}$).

IV Correction

A Vitesse du son

Données

c est une vitesse, ρ une masse volumique et χ une grandeur relative à la pression. On nous donne $[\chi] = [P]^{-1}$ avec P une pression.

Résultat attendu

On cherche c en fonction de ρ et χ, soit

$$\boxed{c = \rho^\alpha \chi^\beta}$$

avec α et β à déterminer.

Outil

Une pression est une force surfacique, c'est-à-dire une force répartie sur une surface. On a donc

$$[P] = \frac{[F]}{\mathrm{L}^2}$$

De plus, la force de pesanteur s'exprime $F = mg$, avec g l'accélération de la pesanteur : ainsi,

$$[F] = [m] \cdot [g] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$$

Application

On commence par déterminer la dimension de c. En tant que vitesse, on a

$$[c] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

On exprime ensuite les dimensions de ρ et χ. D'une part,

$$[\rho] = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}$$

D'autre part,

$$[\chi] = \frac{\mathrm{L}^2}{[F]}$$

$$[\chi] = \frac{\mathrm{L}^{\cancel{2}}}{M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2}}$$

$$[\chi] = \mathrm{L} \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2$$

L'expression recherchée revient à résoudre

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1} = (\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-1})^\alpha (\mathrm{L} \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2)^\beta$$

En développant, on trouve un système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta \\ -1 = 2\beta \\ 0 = \alpha - \beta \end{cases} \Longleftrightarrow \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on peut exprimer c tel que

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho\chi}}}$$

B Cuisson des pâtes

1)

Donnée

Consommation électrique en kWh.

Résultat attendu

Unité associée en unités SI et grandeurs usuelles.

Outil

Toute énergie s'exprime en joules (J), et les **puissances** sont des **énergies par unité de temps**. Notamment pour les watts on a $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J\cdot s^{-1}}$.

Application

On a directement

$1\,\mathrm{kWh} = 1\times10^{3}\,\mathrm{J\cdot s^{-1}\cdot h}$

Avec l'évidence que $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$, finalement

$$\boxed{1\,\mathrm{kWh} = 3{,}6\times10^{6}\,\mathrm{J}}$$

2)

Données

Notre objet d'étude est l'eau. On a :

- $V_{\mathrm{eau}} = 1\,\mathrm{L}$;
- $T_{\mathrm{i}} = 20\,\mathrm{°C}$;
- $T_{\mathrm{f}} = 100\,\mathrm{°C}$;
- $c = 4{,}18\,\mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$

De plus, on nous donne

- $1\,\mathrm{kWh} = 1\,€$.

Résultat attendu

On cherche à monter 1 L d'eau de 20 à 100 °C et d'en calculer le coût en euros.

Outil

On doit donc trouver le coût en énergie et le convertir en euro. On cherche pour ça une loi reliant l'énergie consommée avec les données du problème, sachant que **pour l'eau**, $1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{kg}$.

Application

L'énergie à apporter Q se déduit de la dimension de la capacité thermique massique : $[c] = [Q]\cdot\mathrm{M}^{-1}\cdot\Theta^{-1}$. En appelant m la masse du volume d'eau, par cette analyse dimensionnelle on a

$$\boxed{Q = mc\Delta T}$$

On a donc

$$Q = 3{,}3\times10^{5}\,\mathrm{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 1\,\mathrm{kg} \\ c = 4{,}18\,\mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}} \\ c = 4{,}18\times10^{3}\,\mathrm{J\cdot kg^{-1}\cdot K^{-1}} \\ \Delta T = 80\,\mathrm{K} \end{cases}$$

et pour utiliser le coût en euros, on la converti en kWh :

$$Q = 9{,}3\times10^{-2}\,\mathrm{kWh} = 1{,}5\times10^{-2}\,€$$

3)

Données

On utilise une plaque chauffante de puissance $P = 1200\,\mathrm{W}$.

Résultat attendu

On cherche la durée que cette plaque prendrait pour transférer l'énergie calculée précédemment.

Outil

Une puissance est une énergie par unité de temps, et $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$.

Application

On en déduit

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{d'où} \quad \boxed{\Delta t = \frac{Q}{P} = 280\,\mathrm{s}}$$

avec

$$\begin{cases} Q = 3{,}3 \times 10^5\,\mathrm{J} \\ P = 1200\,\mathrm{J \cdot s^{-1}} \end{cases}$$

C Taylor meilleur que James Bond ?

1) On a directement $\boxed{[R] = \mathrm{L}}$, $\boxed{[t] = \mathrm{T}}$, $\boxed{[\rho] = \mathrm{M \cdot L^{-3}}}$ et $\boxed{[E] = \mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}}$.

2)

Données

On nous donne la formule $R = k \times E^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$ et que $[k] = 1$.

Résultat attendu

On cherche α, β et γ tels que $R = k \times E^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$

Outils

- $[E] = \mathrm{M \cdot L^2 \cdot T^{-2}}$;
- $[t] = \mathrm{T}$;
- $[\rho] = \mathrm{M \cdot L^{-3}}$.

Application

$[R] = L$, donc on a

$$L = \left(M \cdot L^2 \cdot T^{-2}\right)^{\alpha} T^{\beta} \left(M \cdot L^{-3}\right)^{\gamma}$$

Soit

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 3\gamma \\ 0 = -2\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \alpha = \beta/2 \\ \alpha = 1/5 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \gamma = -1/5 \\ \beta = 2/5 \end{cases}$$

Soit

$$R = K \times E^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$$

3) On isole simplement en mettant la relation à la puissance 5 : $\boxed{E = K^{-5} R^5 t^{-2} \rho}$.

4) On fait une simple application numérique :

$$E = 1{,}7 \times 10^{15}\,\mathrm{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = 1 \\ R = 70\,\mathrm{m} \\ t = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ \rho = 1{,}0\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}} \end{cases}$$

En équivalent tonne de TNT, on trouve :

$$\boxed{E = 40\,\mathrm{kT\ de\ TNT}}$$