

Correction TD (T3) Premier principe : bilans d'énergie

3. Calorimétrie

1.

Le système est constitué de toute l'eau (soit 200 g) et de l'intérieur du calorimètre. Le premier principe de la thermodynamique appliqué pour ce système entre les instants initial et final donne à pression constante (le seul travail étant celui des forces de pression) :

$$\Delta H = Q = 0$$

en considérant la transformation comme adiabatique.

On évalue la variation d'enthalpie en séparant les contributions des différentes parties du système :

$$\Delta H = \underbrace{m c (T_f - T_0)}_{\text{eau initialement froide}} + \underbrace{m c (T_f - T_1)}_{\text{eau initialement chaude}} + \underbrace{C (T_f - T_0)}_{\text{intérieur du calorimètre}} = 0$$

on déduit :

$$C = m c \left(\frac{T_1 - T_f}{T_f - T_0} - 1 \right) = 226 \text{ J.K}^{-1}.$$

Par définition, $C = m' c$, soit $m' = 54 \text{ g}$ d'eau.

Si on attend longtemps, des échanges thermiques ont lieu entre l'intérieur et l'extérieur du calorimètre. Le système n'est donc plus isolé et sa température se rapproche de la température ambiante T_0 .

2. Le système est l'eau, l'intérieur du calorimètre, le morceau de fer et la résistance. Le premier principe de la thermodynamique s'écrit à pression constante :

$$\Delta H = W_{\text{autre que pression}} + Q = W_{\text{générateur}}$$

car le générateur fournit un travail électrique à la résistance :

$$W_{\text{générateur}} = \mathcal{P} \tau.$$

Or, la variation d'enthalpie du système s'écrit :

$$\Delta H = \underbrace{m c (T'_f - T_0)}_{\text{eau}} + \underbrace{m_f c_f (T'_f - T_0)}_{\text{fer}} + \underbrace{C (T'_f - T_0)}_{\text{intérieur du calorimètre}}.$$

On déduit :

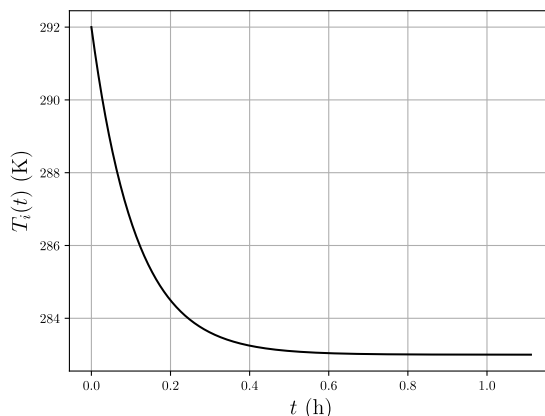
$$c_f = \frac{1}{m_f} \left(\frac{\mathcal{P} \tau}{T'_f - T_0} - m c - C \right) = 467 \text{ J.K}^{-1}.\text{kg}^{-1}.$$

On vérifie que cette valeur est bien inférieure à celle de l'eau liquide.

4. Chauffage d'une véranda

1. Nous utilisons l'équation d'état des gaz parfait pour calculer $n_{ic} = \frac{P_0 V}{RT_{i,c}} = 1,9 \cdot 10^3$ mol, nombre de moles d'air dans la véranda à la température de confort. Nous en déduisons la capacité thermique de l'air contenu dans la véranda $C_V = n_{i,c} \frac{5R}{2} = 39 \text{ kJ} \cdot \text{K}^{-1}$.
2. En régime permanent, la puissance de chauffe compense exactement les pertes : $\mathcal{P}_c = (g_p S' + g_v S)(T_{i,c} - T_e) = 8,6 \cdot 10^2 \text{ W}$.
3. a. Le volume de la véranda est invariable. Nous appliquons le premier principe de la thermodynamique à l'air de la véranda entre les instants infiniment proches t et $t+dt$: $dU = \delta Q$ avec $dU = C_V dT_i$ et $\delta Q = -(\mathcal{P}_v + \mathcal{P}_p)dt$. $T_i(t)$ obéit à l'équation différentielle :

$$\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{\tau} = \frac{T_e}{\tau}$$
 où $\tau = \frac{C_V}{g_p S' + g_v S} = 4,0 \cdot 10^2 \text{ s}$.
 b. La condition initiale étant $T_i(0) = T_{i,c}$, la solution de l'équation différentielle s'écrit $T_i(t) = T_e + (T_{i,c} - T_e) \exp(-t/\tau)$. Le graphe de $T_i(t)$ est proposé sur la figure ci-contre.



On voit que la température de la véranda sera quasi égale à la température extérieure lorsque Thierry reviendra de son rendez-vous.

4. Nous appliquons à nouveau le premier principe de la thermodynamique sous forme différentielle en ajoutant le terme de chauffage. L'équation différentielle vérifiée par $T_i(t)$ devient $\frac{dT_i}{dt} + \frac{T_i}{\tau} = \frac{T_e}{\tau} + \frac{\mathcal{P}_{c,m}}{C_V}$. Nous prenons comme instant initial l'instant où le chauffage est remis en marche en supposant que $T_i(0) = T_e$. La solution de l'équation s'écrit $T_i(t) = T_e + \frac{\mathcal{P}_{c,m}}{g_p S' + g_v S} (1 - \exp(-t/\tau))$. La température de confort sera rétablie à l'instant t_2 tel que $T_i(t_2) = T_{i,c}$.
 Nous obtenons finalement $t_2 = \tau \ln \left(\frac{\mathcal{P}_{c,m}}{\mathcal{P}_{c,m} - \mathcal{P}_c} \right) = 2,3 \cdot 10^2 \text{ s}$.

5. Détente d'un gaz parfait monoatomique

1. $U_1 = \frac{3}{2} n R T_1 = \frac{3}{2} \frac{m}{M} R T_1$
2. $\gamma = \frac{C_P}{C_V} = \frac{C_V + nR}{C_V} = \frac{\frac{3}{2} nR + nR}{\frac{3}{2} nR} = \frac{5}{3} \simeq 1,67$

2 a) Dressons un tableau des grandeurs relatives au système étudié :

État initial	$P_1 = ?$	$T_1 = 600 \text{ K}$	$V_1 = 0,100 \text{ m}^3$
État final	$P_2 = ?$	$T_1 = 600 \text{ K}$	$V_2 = 0,250 \text{ m}^3$

Déterminons P grâce à la loi des gaz parfaits

$$P = \frac{mRT}{MV}$$

$$P_1 = 62,3 \text{ bar} \quad \text{et} \quad P_2 = 24,9 \text{ bar}$$

b) La transformation est isotherme et quasistatique donc

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} P_{ext} dV = - \int_{V_1}^{V_2} P dV$$

$$W_{12} = - \int_{V_1}^{V_2} \frac{mRT_0}{M} \frac{dV}{V} = - \frac{mRT_0}{M} \ln \frac{V_2}{V_1}$$

Application numérique :

$$W_{12} = -5,7 \cdot 10^5 \text{ J}$$

3 a) La transformation du gaz parfait étant adiabatique réversible on peut appliquer les lois de Laplace

d'où $T_3 = T_1 \left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1}$

Application numérique :

$$T_3 = 326 \text{ K}$$

b) L'étape (32) étant isochore, le travail W_{32} est nul, l'étape (13) étant adiabatique, le premier principe donne $\Delta U_{13} = W_{13}$

$$W_{132} = W_{13} + W_{32}$$

d'où $W_{132} = W_{13} = \Delta U_{13} = \frac{mR}{M(\gamma-1)} (T_3 - T_1)$

soit $W_{132} = \frac{mR}{M(\gamma-1)} T_1 \left(\left(\frac{V_1}{V_2} \right)^{\gamma-1} - 1 \right)$

Application numérique :

$$W_{132} = -4,3 \cdot 10^5 \text{ J}$$

6. Chauffage d'un gaz par effet Joule

1. Le compartiment (1) reçoit de l'énergie thermique produite par la résistance (effet Joule) donc il ne subit pas une transformation adiabatique, la loi de Laplace ne peut s'appliquer.

2 - À l'équilibre mécanique, la pression est la même de chaque côté donc

$$P_2^F = P_F$$

Le gaz du compartiment de droite subit une transformation quasistatique et adiabatique, la loi de Laplace permet d'écrire

$$V_2^F = V_0 \left(\frac{P_0}{P_F} \right)^{1/\gamma} \quad \text{et} \quad T_2^F = T_0 \left(\frac{P_0}{P_F} \right)^{(1-\gamma)/\gamma}$$

3 - Par conservation du volume, on a

$$2V_0 = V_1^F + V_2^F$$

d'où

$$V_1^F = V_0 \left(2 - \left(\frac{P_0}{P_F} \right)^{1/\gamma} \right)$$

La loi des gaz parfaits permet de conclure

$$T_1^F = \frac{P_F V_1^F}{nR} = \frac{P_0 V_0}{nR} \frac{P_F}{P_0} \left(2 - \left(\frac{P_0}{P_F} \right)^{1/\gamma} \right)$$

d'où

$$T_1^F = T_0 \frac{P_F}{P_0} \left(2 - \left(\frac{P_0}{P_F} \right)^{1/\gamma} \right)$$

7. Chauffage d'un gaz par effet Joule (bis)

a) L'équilibre mécanique du piston impose $P_2 = 2P_0$ (égalité des pressions de part et d'autre). Vu que des échanges thermiques sont possibles, le compartiment de droite est en équilibre thermique avec l'air ambiant, d'où $T_2 = T_0$. L'équation des gaz parfaits permet de conclure $V_2 = V_0/2$.

b) Le volume final du compartiment de gauche est donc $V_1 = 2V_0 - \frac{V_0}{2} = \frac{3V_0}{2}$. L'équation des gaz parfaits donne alors :

$$T_1 = \frac{P_1 V_1}{nR} = \frac{2P_0 \frac{3}{2} V_0}{nR} = 3T_0 = 900 \text{ K}.$$

c) On peut penser qu'elle est isotherme (lente et contact avec un thermostat : l'air ambiant).

d) Le compartiment de droite a reçu un travail dû aux forces de pression du compartiment 1. Vu la réversibilité mécanique,

$$W_2 = - \int P dV = - nRT_0 \int \frac{dV}{V} = - nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i} \\ = nRT_0 \ln 2 = P_0 V_0 \ln 2.$$

Ce travail de compression est bien positif.

Le compartiment de gauche reçoit un travail mécanique égal à l'opposé de W_2 (les pressions de part et d'autre de la membrane sont égales à chaque instant) ainsi qu'un travail électrique du générateur, soit :

$$W_1 = -P_0 V_0 \ln 2 + RI^2 \tau.$$

e) Le premier principe de la thermodynamique appliqué au gaz contenu dans le compartiment de gauche s'écrit :

$$\Delta U = W_1 + Q_1 = W_1$$

vu que les parois sont athermanes. Or, pour un gaz parfait,

$$\Delta U = n \frac{R}{\gamma - 1} \Delta T = \frac{1}{\gamma - 1} \left(2P_0 \frac{3}{2} V_0 - P_0 V_0 \right) \\ = \frac{2P_0 V_0}{\gamma - 1}.$$

$$\text{Au final, } \tau = \frac{P_0 V_0}{RI^2} \left(\frac{2}{\gamma - 1} + \ln 2 \right) = 570 \text{ s}.$$

8. Transformations polytropiques

1. Le calcul du travail pour une transformation polytropique mécaniquement réversible a été calculé au chapitre 23, page 807 : $W = \frac{1}{k-1} (P_1 V_1 - P_0 V_0) = \frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0)$.

2. En appliquant le premier principe on en déduit :

$$Q = \Delta U + \Delta E_c - W = nC_V (T_1 - T_0) + 0 - \frac{nR}{k-1} (T_1 - T_0) = nR \left(\frac{1}{\gamma-1} - \frac{1}{k-1} \right) (T_1 - T_0),$$

$$\text{donc : } C = \frac{(k-\gamma)nR}{(\gamma-1)(k-1)}.$$

3. C est homogène à une capacité thermique.

4. Pour $k = \gamma$, $C = 0$, ce qui signifie qu'il n'y a pas d'échange thermique : la transformation est adiabatique.

Pour $k = 0$, la loi polytropique s'écrit $P = \text{constante}$ et $C = \frac{\gamma nR}{\gamma-1} = C_P$, ce qui est cohérent.

Pour k infini, la loi polytropique s'écrit $P^{\frac{1}{k}} V = V = \text{constante}$ et $C = \frac{nR}{\gamma-1} = C_V$, ce qui est bien cohérent.

Pour $k = 1$, la loi polytropique s'écrit $PV = \text{constante}$ soit $T = \text{constante}$, c'est une transformation isotherme. La formule donne C tendant vers l'infini ce qui signifie que le système peut emmagasiner tout transfert thermique sans variation de température.