Contrôle de connaissances 5

Électrocinétique : premier ordre et harmonique

/13 1 On suppose le circuit LC série suivant, en régime libre. On suppose le condensateur initialement chargé à la tension E, et on ferme l'interupteur à $t = 0$. Déterminer l'équation différentielle sous forme canonique de u_C pour $t \geq 0$, donner les conditions initiales et comment les déterminer, et résoudre l'équation différentielle pour trouver $u_C(t)$ **et** $i(t)$.

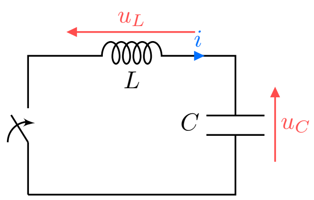

Fig. 5.1

$$\begin{aligned} & u_L + u_C = 0 \\ \Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C = 0 \end{aligned}$$

$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

forme canonique et $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

On injecte la forme générique de solution :

$$u_C(t) = K\mathrm{e}^{rt} \Rightarrow r^2 \times \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} + {\omega_0}^2 \cancel{K\mathrm{e}^{rt}} = 0 \Leftrightarrow r_\pm = \pm \mathrm{j}\omega_0$$

D'où la forme générale :

$$u_C(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Or, $u_C(0^-) = E = u_C(0^+)$ et $i(0^-) = 0 = i(0^+)$ par continuité de $u_C(t)$ aux bornes de C et de $i(t)$ traversant la bobine .

On trouve A avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = A\cos(0) + B\sin(0) \Leftrightarrow \boxed{A = E}$$

On trouve B avec la seconde condition initiale :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = B\omega_0$$

$$\text{et} \quad i(0) = 0 = C\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = CB\omega_0 \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

D'où

$$\boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)}$$

On obtient ensuite i avec la relation courant-tension :

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -CE\omega_0\sin(\omega_0 t)}$$

/7 2 Faire un bilan de puissance pour le circuit LC libre, et montrer que l'énergie totale est conservée à chaque instant. Tracer $\mathcal{E}_C$, $\mathcal{E}_L$ et $\mathcal{E}_{\text{tot}}$.

$$\begin{aligned} & u_C i + u_L i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & u_C \times C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}C{u_C}^2}_{=\mathcal{E}_C} + \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{=\mathcal{E}_L}\Big) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0} \end{aligned}$$

$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

$f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)'$

$\mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L$

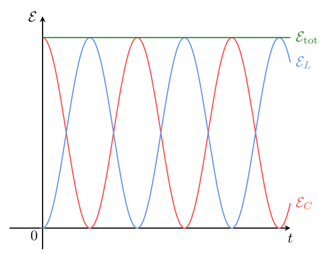

Fig. 5.2 – +

/+2 3 Explain the PELTIER effect in your own words.

At the junction between two different metals, electrons can gain or lose heat because of the increased or reduced electrical potential energy levels between them. Thus, applying a current creates a difference in temperature between the metals.