MPSI3 – 24 novembre 2023 – Devoir surveillé 3

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit
Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs
Les calculatrices sont *autorisées*

Au programme

Régimes transitoires d'ordre 2 (mécanique et électricité), transformation et équilibre chimique.

Sommaire

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- A : application numérique mal faite ;
- N : numéro de copie manquant ;
- P : prénom manquant ;
- E : manque d'encadrement des réponses ;
- M : marge non laissée ou trop grande ;
- V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- Q : question mal ou non indiquée ;
- C : copie grand carreaux ;
- U : mauvaise unité (flagrante) ;
- H : homogénéité non respectée ;
- S : chiffres significatifs non cohérents ;
- φ : loi physique fondamentale brisée.

Exemple application numérique

$$\boxed{n = \frac{PV}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1{,}0 \times 10^{5}\,\mathrm{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ T = 300\,\mathrm{K} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n = 5{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}}$

$$\xcancel{n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8.32 \cdot 300} = 0.56}$$

/30 E1 Pentachlorure de phosphore

Le pentachlorure de phosphore PCl_5 est un composé très toxique, servant de réactif en synthèse organique pour ajouter des atomes de chlore à une chaîne carbonée. Mis en phase gazeuse, il se décompose spontanément en trichlorure de phosphore et en dichlore, donnant naissance à un équilibre en phase gazeuse.

Considérons un réacteur fermé de volume constant $V = 2\,\mathrm{L}$ maintenu à température constante $T = 180\,°\mathrm{C}$. À cette température, la constante thermodynamique de l'équilibre précédemment cité vaut $K° = 8$. On y met $n_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol}$ de PCl_5.

On rappelle que $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$.

/1 1) Exprimer puis calculer la pression initiale dans le réacteur p_0 en fonction des données.

Réponse

On applique la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{p_0 = \frac{n_0 RT}{V}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}} \\ T = 453{,}15\,\mathrm{K} \\ V = 2\times10^{-3}\,\mathrm{m^3} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{p_0 = 9{,}41\times10^5\,\mathrm{Pa}}$

◇

/1 2) Écrire l'équation de réaction modélisant le processus dans le réacteur, et dresser le tableau d'avancement correspondant.

Réponse

Équation		$PCl_{5(g)}$	$=$ $PCl_{3(g)}$	$+$ $Cl_{2(g)}$	$n_{\text{tot,gaz}}$
Initial	$\xi = 0$	n_0	0	0	n_0
Interm.	ξ	$n_0 - \xi$	ξ	ξ	$n_0 + \xi$
Final	$\xi_f = \xi_{\text{eq}}$	$n_0 - \xi_{\text{eq}}$	ξ_{eq}	ξ_{eq}	$n_0 + \xi_{\text{eq}}$

◇

/2 3) Exprimer les pressions partielles des gaz en fonction de n_0, ξ et de la pression initiale p_0.

Réponse

On utilise à nouveau l'équation des gaz parfaits, avec $\frac{RT}{V} = \frac{p_0}{n_0}$:

$$\boxed{P_{PCl_5} = \frac{(n_0-\xi)RT}{V} = \frac{(n_0-\xi)p_0}{n_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{PCl_3} = \frac{\xi p_0}{n_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{Cl_2} = \frac{\xi p_0}{n_0}}$$

◇

/5 4) Exprimer le coefficient de dissociation à l'équilibre $\alpha = \xi_{\text{eq}}/n_0$ en fonction de $K°$, $p°$ et p_0. Faire l'application numérique. Que représente-t-il physiquement ?

Réponse

Loi d'action de masses :

$$K° = \left.\frac{a(PCl_3)a(Cl_2)}{a(PCl_5)}\right|_{\text{eq}}$$

Activité d'un gaz

$$\Leftrightarrow K° = \left.\frac{\frac{P_{PCl_3}}{p°}\frac{P_{Cl_2}}{p°}}{\frac{P_{PCl_5}}{p°}}\right|_{\text{eq}}$$

Question 2

$$\Leftrightarrow K° = \frac{\xi_{\text{eq}}^2}{n_0(n_0-\xi_{\text{eq}})}\frac{p_0}{p°}$$

On factorise

$$\Leftrightarrow K° = \underbrace{\frac{\cancel{n_0^2}}{\cancel{n_0^2}}}_{=1}\frac{\left(\frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}\right)^2}{1\left(1-\frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}\right)}\frac{p_0}{p°}$$

$\alpha = \xi_{\text{eq}}/n_0$

$$\Leftrightarrow K° = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}\frac{p_0}{p°}$$

Ainsi, en isolant :

$$\alpha^2 + \alpha\left(\frac{K°p°}{p_0}\right) - \frac{K°p°}{p_0} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{K°p°}{p_0}\right)^2 + 4\left(\frac{K°p°}{p_0}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\left(\frac{K°p°}{2p_0}\right) + \sqrt{\left(\frac{K°p°}{2p_0}\right)^2 + \left(\frac{K°p°}{p_0}\right)}}$$

$\Rightarrow$ A.N. : $\underline{\alpha = 0{,}59}$

α représente la proportion de réactif ayant effectivement réagit.

◇

/2 5) Calculer la pression régnant dans le réacteur à l'équilibre.

Réponse

À l'aide du tableau d'avancement, on a $n_{\text{tot, gaz}}$, d'où

$$P_{\text{eq}} = \frac{n_0 + \xi_{\text{eq}}}{n_0} p_0 \Leftrightarrow \boxed{P_{\text{eq}} = (1+\alpha) p_0}$$
$$\text{A.N. : } \underline{P_{\text{eq}} = 15{,}0\,\text{bar}}$$

◇

/30 E2 États finaux variés

On s'intéresse dans un premier temps à une solution aqueuse obtenue à 298 K par un mélange d'acide éthanoïque CH_3COOH (concentration $c_1 = 0{,}10\,\text{mol}{\cdot}\text{L}^{-1}$ après mélange) et d'ions fluorure F^- (concentration $c_2 = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}{\cdot}\text{L}^{-1}$ après mélange). La réaction (1) susceptible de se produire s'écrit :

$$CH_3COOH\,(aq) + F^-\,(aq) = CH_3COO^-\,(aq) + HF\,(aq) \tag{1}$$

On connaît les constantes d'équilibre à 298 K des réactions suivantes :

$$K_2^\circ = 10^{-4{,}8} \qquad CH_3COOH\,(aq) + H_2O = CH_3COO^-\,(aq) + H_3O^+\,(aq) \tag{2}$$
$$K_3^\circ = 10^{-3{,}2} \qquad HF\,(aq) + H_2O = F^-\,(aq) + H_3O^+\,(aq) \tag{3}$$

/1 1) Calculer la constante d'équilibre K_1° relative à l'équilibre (1).

Réponse

On constate que l'équilibre (1) = (2) − (3) donc

$$\boxed{K_1^\circ = \frac{K_2^\circ}{K_3^\circ} = 10^{-1{,}6}}$$

◇

/4 2) Déterminer l'état d'équilibre de la solution issue du mélange de l'acide éthanoïque et des ions fluorure : exprimer l'équation dont l'avancement est solution, et l'expression littérale de la solution en fonction de c_1, c_2 et K_1°.

Réponse

On dresse le tableau d'avancement en concentration :

Équation		$CH_3COOH\,(aq)$ +	$F^-\,(aq)$	→ $CH_3COO^-\,(aq)$ +	$HF\,(aq)$
Initial	$x = 0$	c_1	c_2	0	0
Interm.	x	$c_1 - x$	$c_2 - x$	x	x
Final ($\text{mol}{\cdot}\text{L}^{-1}$)	$x_f = x_{\text{eq}}$	$9{,}0 \times 10^{-2}$	$4{,}0 \times 10^{-2}$	$9{,}6 \times 10^{-3}$	$9{,}6 \times 10^{-3}$

D'après la loi d'action de masse,

$$\begin{aligned}
K_1^\circ &= \frac{x_{\text{eq}}^2}{(c_1 - x_{\text{eq}}) \times (c_2 - x_{\text{eq}})} && \text{On isole}\\
\Leftrightarrow (c_1 - x_{\text{eq}})(c_2 - x_{\text{eq}}) K_1^\circ &= x_{\text{eq}}^2 && \text{On rassemble}\\
\Leftrightarrow x_{\text{eq}}^2 + (x_{\text{eq}} - c_1)(x_{\text{eq}} - c_2) K_1^\circ &= 0 && \text{On développe et factorise}\\
\Leftrightarrow &\boxed{x_{\text{eq}}^2 (1 + K_1^\circ) - x_{\text{eq}}(c_1 + c_2) K_1^\circ + c_1 c_2 K_1^\circ = 0}
\end{aligned}$$

Ainsi, avec Δ le discriminant de ce trinôme :

$$\Delta = (c_1 + c_2)^2 (K_1^\circ)^2 - 4(1 + K_1^\circ) c_1 c_2 K_1^\circ$$

Solutions

$$\Rightarrow \boxed{x_{\text{eq},\pm} = \frac{(c_1 + c_2) K_1^\circ \pm \sqrt{(c_1 + c_2)^2 (K_1^\circ)^2 - 4(1 + K_1^\circ) c_1 c_2 K_1^\circ}}{2(1 + K_1^\circ)}}$$

Calcul

$$\text{A.N. : } \underline{x_{\text{eq}} = 9{,}6 \times 10^{-3}\,\text{mol}{\cdot}\text{L}^{-1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_1 = 0{,}1\,\text{mol}{\cdot}\text{L}^{-1} \\ c_2 = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}{\cdot}\text{L}^{-1} \\ K_1^\circ = 10^{-1{,}6} \end{cases}$$

On en déduit les concentrations à l'équilibre indiquées dans le tableau.

◇

On étudie dans la suite de l'exercice quelques constituants du béton. L'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2(s)$ confère au béton ses propriétés basiques (au sens de acide ou base). Il se dissout en solution aqueuse selon la réaction (4) :

$$K_4^\circ(298\,\text{K}) = 10^{-5,2} \qquad Ca(OH)_2(s) = Ca^{2+}(aq) + 2\,HO^-(aq) \tag{4}$$

/3 3) On introduit en solution aqueuse un net excès d'hydroxyde de calcium. La phase solide est alors présente en fin d'évolution. Calculer les concentrations de chacun des ions présents à l'équilibre.

Réponse

On dresse un tableau d'avancement en concentration :

Équation		$Ca(OH)_2(s)$ =	$Ca^{2+}(aq)$ +	$2HO^-(aq)$
Initial	$x = 0$	excès	0	0
Interm.	x	excès	x	$2x$
Final (mol·L^{-1})	$x_f = x_{eq}$	excès	$1{,}2 \times 10^{-2}$	$2{,}4 \times 10^{-2}$

Par la loi d'action de masse, $K_4^\circ = x_{eq} \times (2x_{eq})^2$ donc $\boxed{x_{eq} = \left(\dfrac{K_4^\circ}{4}\right)^{1/3}}$

A.N. : $\underline{x_{eq} = 1{,}2 \times 10^{-2}\,\text{mol·L}^{-1}}$

On en déduit les concentrations indiquées dans le tableau.

◇

/1 4) On donne la relation $[H_3O^+][HO^-] = 10^{-14}$. Sachant que $pH = -\log([H_3O^+])$, déterminer le pH de la solution. Le milieu est-il acide, basique ou neutre ?

Réponse

$$\boxed{pH = 14 + \log[HO^-]} \Rightarrow \underline{pH = 12{,}4}$$

ce qui corrspond bien à un milieu basique.

◇

Dans certains cas, la pollution urbaine liée à l'humidité entraine la dissolution du dioxyde de carbone atmosphérique dans l'eau à l'intérieur du béton (sous forme H_2CO_3), provoquant la carbonatation du béton (formation de carbonate de calcium $CaCO_3(s)$) par réaction de l'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2(s)$ avec la forme $H_2CO_3(aq)$.

/2 5) Écrire la réaction (5) mise en jeu dans la carbonatation du béton et calculer sa constante d'équilibre K_5° à 298 K. On donne à 298 K les constantes d'équilibre des réactions suivantes :

$$K_6^\circ = 10^{-8,4} \qquad CaCO_3(s) = Ca^{2+}(aq) + CO_3^{2-}(aq) \tag{6}$$
$$K_7^\circ = 10^{-6,4} \qquad H_2CO_3(aq) + H_2O = HCO_3^-(aq) + H_3O^+(aq) \tag{7}$$
$$K_8^\circ = 10^{-10,3} \qquad HCO_3^-(aq) + H_2O = CO_3^{2-}(aq) + H_3O^+(aq) \tag{8}$$
$$K_9^\circ = 10^{-14} \qquad 2\,H_2O = HO^-(aq) + H_3O^+(aq) \tag{9}$$

Réponse

On écrit la réaction (5) : $$Ca(OH)_2(s) + H_2CO_3(aq) = CaCO_3(s) + 2\,H_2O \tag{5}$$

On constate que la réaction (5) = (4) − (6) + (8) + (7) − 2(9) donc

$$\boxed{K_5^\circ = \frac{K_4^\circ K_7^\circ K_8^\circ}{K_6^\circ (K_9^\circ)^2} = 10^{14,5}}$$

◇

On étudie désormais la réaction de décomposition du carconate de calcium $CaCO_3(s)$ en oxyde de calcium $CaO\,(s)$ et dioxyde de carbone $CO_2(g)$ de constante d'équilibre $K^\circ = 0{,}20$ à 1093 K.

$$CaCO_3(s) = CaO\,(s) + CO_2(g)$$

Soit un récipient indéformable de volume $V = 10\,\text{L}$, vidé au préalable de son air, et maintenu à la température constante de 1093 K. On introduit progressivement une quantité de matière n en carbonate de calcium solide et on mesure la pression p à l'intérieur de l'enceinte.

/2 6) Lorsque l'équilibre est établi, calculer la quantité de matière en dioxyde de carbone $n(CO_2)_{eq}$ dans l'enceinte. On supposera les gaz comme parfaits. On rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$.

Réponse

À l'équilibre, d'après la loi d'action de masse,

$$K° = \frac{P(CO_2)_{eq}}{P°} \quad\Big)\ P(CO_2)_{eq} = \frac{n(CO_2)_{eq}RT}{V}$$
$$\Leftrightarrow K° = \frac{n(CO_2)_{eq}RT}{VP°} \quad\Big)\ \text{On isole}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{n(CO_2)_{eq} = \frac{K°P°V}{RT}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{n(CO_2)_{eq} = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K° = 0{,}20 \\ P° = 1 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V = 10 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}} \\ T = 1093\,\mathrm{K} \end{cases}$$

◇

/2 7) On introduit une quantité de matière $n = 1{,}0 \times 10^{-2}$ mol en carbonate de calcium. Décrire l'état final. On précisera notamment si l'état final est un état d'équilibre.

Réponse

Comme $n < n(CO_2)_{eq}$, le quotient réactionnel évoluera de sa valeur initiale 0 jusqu'à sa valeur maximale Q_{max}, qui sera inférieure à $K°$. Ainsi la réaction évoluera dans le sens direct jusqu'à **disparition complète** du carbonate de calcium : c'est une **rupture d'équilibre**.

Les quantités de matière sont :

$$\underline{n(CO_2)_f = n(CaO)_f = n = 1{,}0 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}} \quad \text{et} \quad \underline{n(CaCO_3)_f = 0}$$

◇

/2 8) Reprendre la question précédente dans le cas où $n = 5{,}0 \times 10^{-2}$ mol.

Réponse

Comme $n > n(CO_2)_{eq}$, le quotient réactionnel peut augmenter jusqu'à atteindre la constante d'équilibre. L'état final est donc **bien un état d'équilibre** avec

$$\boxed{n(CO_2)_f = n(CaO)_f = n(CO_2)_{eq} = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}}$$
$$\boxed{n(CaCO_3)_f = n - n(CO_2)_{eq} = 2{,}8 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}}$$

◇

/1 9) Montrer que la courbe $p = f(n)$, avec p la pression à l'intérieur de l'enceinte, est constituée de deux segments de droites dont on donnera les équations pour $0 \leq n \leq 0{,}10$ mol.

Réponse

On utilise les résultats précédents en appliquant l'équation d'état des gaz parfaits :

◇ $n < n(CO_2)_{eq} \Rightarrow p = \dfrac{nRT}{V} \propto n$;

◇ $n \geq n(CO_2)_{eq} \Rightarrow p = \dfrac{n(CO_2)_{eq}RT}{V} = \text{cte}$.

◇

/49 P1 Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC

On considère le circuit RLC série représenté ci-dessous. L'interrupteur K est fermé à un instant $t = 0$ choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0) = u_0$.

1) Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geq 0$. La mettre sous la forme

$$\frac{d^2u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{du}{dt} + {\omega_0}^2 u = 0$$

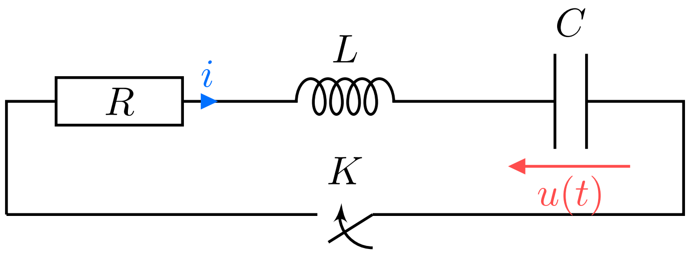

Figure 3.1 – Circuit.

et donner les expressions de ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

Réponse

Pour $t \geq 0$, l'interrupteur K est fermé.

Loi des mailles :

$$u + u_R + u_L = 0$$

Relations pour les composants (convention récepteur) :

$u_R = Ri\,;\qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,;\qquad i = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$

En utilisant les relations précédentes et en remplaçant dans la loi des mailles :

$$LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0 \tag{3.1}$$

Posons $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$ et $Q = \dfrac{1}{R}\sqrt{\dfrac{L}{C}}$, nous obtenons :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u = 0}$$

- Si $Q > \frac{1}{2}$, le régime est *pseudo-périodique*,
- si $Q < \frac{1}{2}$ le régime est *apériodique*,
- si $Q = \frac{1}{2}$ le régime est *critique*.

◇

2) Montrer que le système répond différemment selon la valeur de Q. Nommer chaque régime possible, sans chercher à donner les formes de solutions correspondantes.

Réponse

solu

◇

On suppose $Q > 1/2$ dans la suite.

3) a – Définir la pseudo-pulsation Ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q. Définir aussi le temps caractéristique d'amortissement des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q.

Réponse

Les résultats ont été obtenus en cours (écrire l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle puis chercher les solutions complexes conjugués) :

$$\boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}} \qquad \boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

◇

b – Établir l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$, compte tenu des conditions initiales que vous expliciterez et justifierez.

Réponse

Comme $Q > 1/2$, le régime est pseudo-périodique et $u(t)$ est de la forme $u(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\omega t) + B\sin(\omega t)\right)$ avec ω la pseudo-pulsation.

A et B sont des constantes à déterminer à l'aide des conditions initiales.

D'après l'énoncé, le condensateur est initialement chargé sous la tension $u(t = 0^-) = u_0 = u(t = 0^+)$ donc $A = u_0$. (Pas de discontinuité de tension aux bornes du condensateur).

Aucun courant ne circulait dans le circuit pour $t < 0$ (interrupteur K ouvert). Comme il n'y a pas de discontinuité du courant traversant la bobine, on en déduit $i(0^+) = i(0^-) = 0$. Ainsi : $\mathrm{d}u/\mathrm{d}t\ 0^+ = 0$ d'où $B = \dfrac{\omega_0 u_0}{2Q\omega}$.

◇

On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $R_0 = 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$ et d'une capacité $C_0 = 11\,\mathrm{pF}$.

4) a – Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :

$$L(C + C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0$$

Réponse

On commence par représenter le circuit en ajoutant en parallèle de C la résistance R_0 et la capacité C_0.

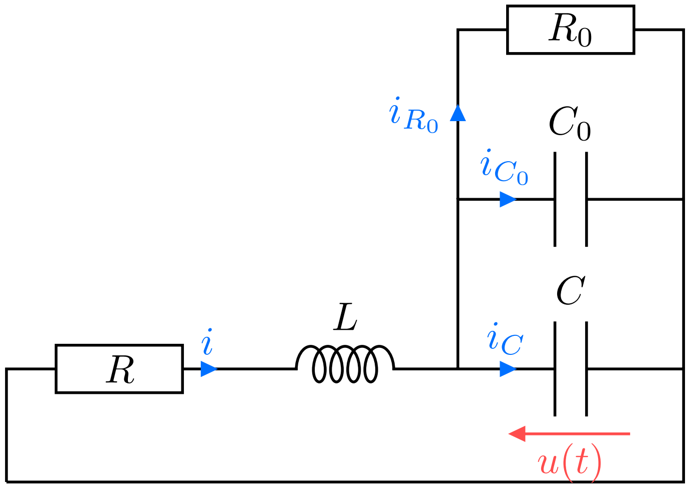

Figure 3.2 – Circuit avec oscilloscope.

Loi des noeuds : $i = i_{R0} + i_{C0} + i_C$
Relations pour les composants (convention récepteur) :
$u_R = Ri\,;\quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}\,;\quad i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,;\quad i_{C0} = C_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\,;\quad u = R_0 i_{R0}$
Remplaçons i_C, i_{C0} et i_{R0} dans la loi des noeuds, nous obtenons : $i = \frac{u}{R_0} + (C + C_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$.
Loi des mailles :

$$u + u_R + u_L = 0 \qquad \text{soit} \quad u + Ri + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$$

En remplaçant i, nous obtenons bien :

$$L(C + C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0$$

◇

b – Quelles relations qualitatives doivent vérifier R, L, C, R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R, L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

Réponse

Pour que l'oscilloscope ait le moins d'influence possible sur les oscillations, il faut que les coefficients de l'équation différentielle précédente diffèrent le moins possible de ceux de l'équation différentielle (3.1) :

- ◇ $C >> C_0$; les capacités utilisées en T.P. sont de l'ordre du nF ou du µF. Comme $C_0 = 11\,\mathrm{pF}$, cette condition est bien vérifiée ;
- ◇ $R << R_0$; les résistances utilisées en T.P sont de l'ordre du kΩ. Comme $R_0 = 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$, cette condition est bien vérifiée ;
- ◇ $\frac{L}{R_0} << RC$ soit $R_0 >> \frac{L}{RC} \approx \frac{10^{-2}}{10^3.10^{-9}} = 10^4\omega$; cette condition est bien vérifiée.

◇

c – On définit le décrément logarithmique comme étant la quantité $d_m = \ln\dfrac{u(t)}{u(t + mT)}$ où $T = 2\pi/\omega$ et m est un entier strictement positif. Exprimer d_m en fonction de m et de Q.

Réponse

En remarquant que $\cos(\omega(t + T)) = \cos(\omega t + 2\pi) = \cos(\omega t)$, on montre facilement que $d_m = \ln\left(\exp\left\{\frac{\omega_0 mT}{2Q}\right\}\right)$.

On obtient donc : $d_m = \dfrac{\omega_0 m T}{2Q}$. En remplaçant T par $\frac{2\pi}{\omega}$ où $\omega = \omega_0\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}$, il vient :

$$\boxed{d_m = \frac{2\pi m}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

d – On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur BF. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ? La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure ci-dessous. Estimer le facteur de qualité Q du circuit.

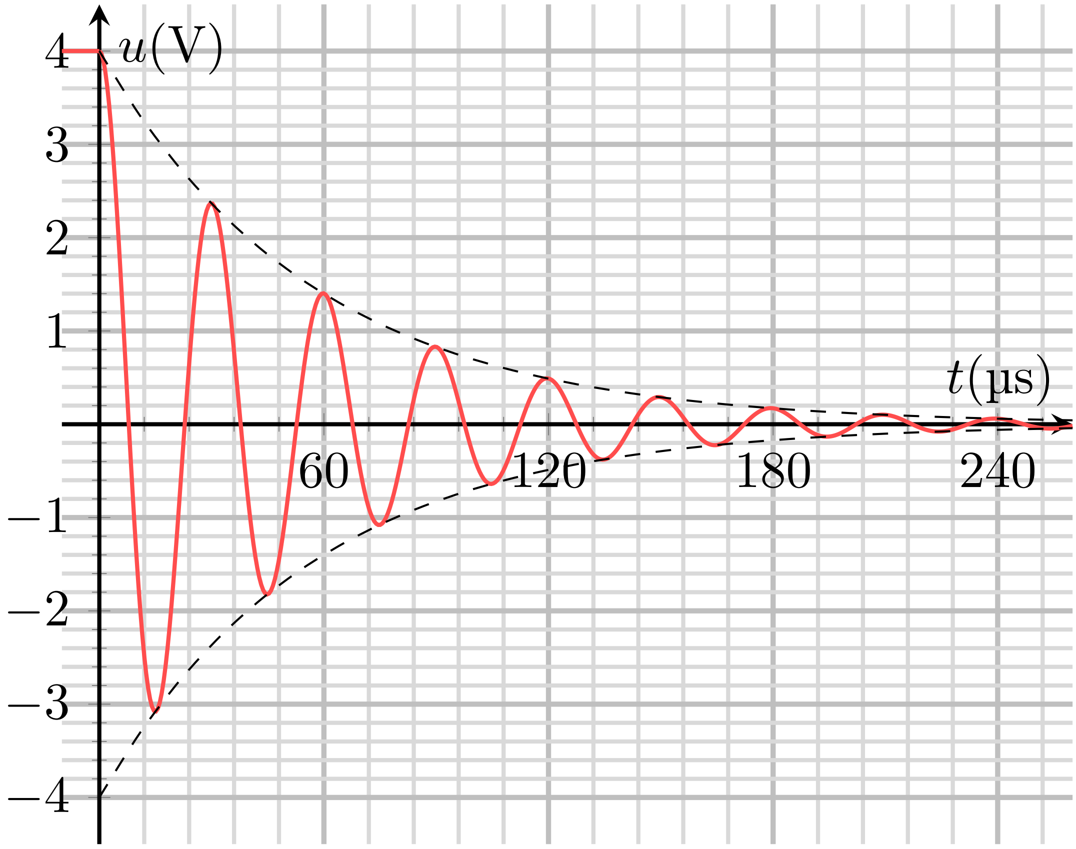

Figure 3.3 – Signal obtenu.

Réponse

Pour observer les oscillations il faut que la demi-période du signal délivré par le G.B.F. soit égale à quelques τ.

On lit graphiquement $u(0) = 4{,}0$V et $u(2T) = 1{,}4$V. On peut alors calculer $d_2 = \ln \dfrac{u(0)}{u(2T)}$.

Comme $d_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$, on en déduit : $\boxed{Q = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 4\left(\dfrac{\pi}{d_2}\right)^2}}$. Application numérique : $\underline{Q = 6{,}0}$

On suppose $Q \gg 1$: la dissipation d'énergie par effet Joule est traitée comme une perturbation par rapport au cas du circuit non dissipatif ($R = 0$).

5) a – Dans le cas où $R = 0$, établir l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{E} \rangle$ de l'énergie électromagnétique stockée dans le circuit.

Réponse

Dans le cas où $R = 0$, le circuit est non dissipatif donc l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine reste constante.

Évaluons l'énergie initiale (pas de courant dans la bobine) : $\mathcal{E}(t=0) = \frac{Cu_0^2}{2}$.

Ainsi : $\boxed{< \mathcal{E} >= \dfrac{Cu_0^2}{2}}$

b – Dans le cas où $R \neq 0$, montrer qu'au premier ordre en $1/Q$, l'énergie W_J dissipée par effet Joule dans le circuit RLC, pendant une pseudo-période, vérifie la relation :

$$W_J = \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle$$

Réponse

Il faut évaluer l'énergie emmagasinée par le condensateur et la bobine à l'instant t :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2}$$

Pour $Q >> 1$, on a $\omega \approx \omega_0$, l'expression de $u(t)$ devient :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega} \sin(\omega t) \right) \\ &\approx u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q} \sin(\omega_0 t) \right) \\ u(t) &\approx u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) \end{aligned}$$

On calcule alors : $i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$:

$$\begin{aligned} i(t) &= -Cu_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left(\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\tau} \cos(\omega_0 t) \right) \\ i(t) &\approx -Cu_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned}$$

En effet, $\frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} << \omega_0$ pour $Q >> 1$.
On calcule alors $\mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2}$, il vient :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} C u_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

En une pseudo-période T, l'énergie décroît de la quantité :

$$\mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T) = \frac{1}{2} C u_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \left(1 - e^{-\frac{2T}{\tau}}\right)$$

On a $e^{-\frac{2T}{\tau}} = e^{-\frac{\omega_0 T}{Q}} \approx e^{-\frac{2\pi}{Q}}$ (car $\omega \approx \omega_0$).
Pour $Q >> 1$, avec un développement limité à l'ordre 1, on a : $1 - e^{-\frac{2\pi}{Q}} \approx 1 - 1 + \frac{2\pi}{Q}$.
L'énergie dissipée par effet Joule en une pseudo-période correspond à l'énergie perdue par L et C pendant cette durée donc $W_J = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)$.
Nous obtenons bien :

$$\boxed{W_J \approx \frac{2\pi < \mathcal{E} >}{Q}}$$

/30 P2 Modélisation des mouvements d'une plateforme offshore

On s'intéresse à la résolution d'une équation du mouvement dans une approche classique de la mécanique afin d'étudier le mouvement simplifié d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un système à un degré de liberté considéré comme un oscillateur harmonique : une masse est reliée à un ressort, avec amortissement.

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (cf figure 1(a)). Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ comme schématisé sur la figure 1(b). La masse se déplace selon une seule direction, parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t. Ainsi, les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. Le vecteur unitaire de l'axe Ox est noté $\vec{i}$.

La masse se déplace sur la base horizontale sans frottements sur le support. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$.

La force totale $\vec{F_{tot}}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale à la base horizontale $\vec{R_N}$, à la force de frottement $\vec{F_d} = -\gamma\vec{v}$ où γ est la constante d'amortissement positive, permettant de prendre en compte l'effet de l'eau environnante, à la force de rappel $\vec{F_k}$ du ressort et au poids $\vec{P}$ de la masse m.

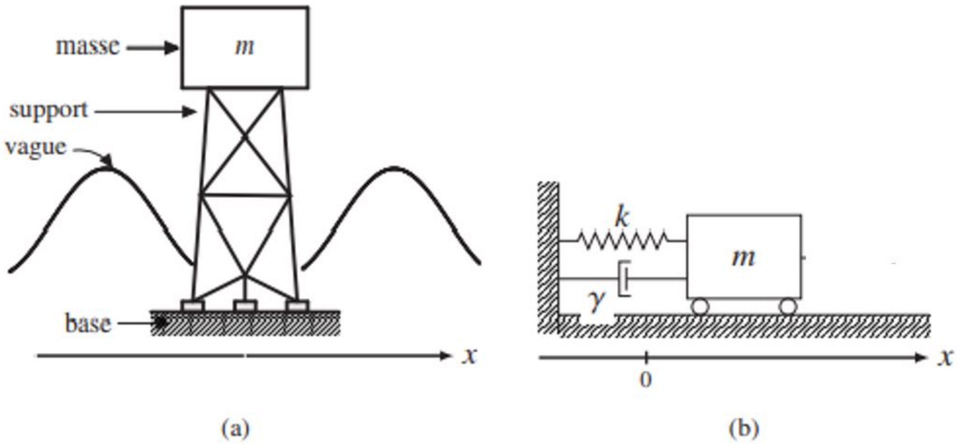

Figure 1 – (a) Plateforme en mer soumise aux vagues marines,
(b) système modèle : masse (m), ressort (k), amortisseur (γ) .

1) Etablir l'équation différentielle du mouvement de la masse m et la mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \qquad \text{(équation 1)}$$

On exprimera ω_0 et ξ en fonction de k, m et γ. On rappelle que $\xi = Q/2$.

Réponse

- Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, y)$ supposé galiléen.
- Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires $\vec{i}$ et $\vec{j}$. L'origine est prise à la position d'équilibre comme indiqué dans l'énoncé. $\vec{j}$ est orienté vers le haut.
- Système : la plateforme M de masse m.
- Bilan des forces :
  1) Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{j}$.
  2) Réaction du support : $\vec{R_N} = R_N\vec{j}$; R est orthogonale au déplacement car mouvement sans frottements.
  3) Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k\,(l - l_o)\,\vec{i} = -kx\vec{i}$, car $\ell = \ell_0 + x$.
  4) Force de frottement $\vec{F_d} = -\gamma\vec{v} = -\gamma\dot{x}\vec{i}$.

2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique) :

$$\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\varphi d\vec{v}dt$$

d'où

$$\vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F} + \vec{F_d} = m\vec{a}$$

avec $\vec{a} = \ddot{x}\vec{i}$ car le mouvement se fait sur Ox. Projetons sur les 2 axes.

Sur $\vec{i}$

$$m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} = 0 \qquad \text{(équation du mouvement)}$$

Sur $\vec{j}$:

$$R_N - mg = 0 \qquad \text{(pas de mouvement sur } Oy\text{)}$$

Reprenons la première équation en la mettant sous forme canonique, il vient :

$$\ddot{x} + \varphi\gamma m\dot{x} + \varphi k m x = 0$$

De la forme

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

avec

$$\omega_0 = \sqrt{\varphi k m} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 = \varphi\gamma m$$

Soit

$$\xi = \varphi\gamma 2m\omega_0 = \varphi\gamma 2m\sqrt{\varphi m k} = \varphi\gamma 2\sqrt{\varphi 1 m k}$$

2) Dans le cas où $\xi < 1$, justifier que $x(t)$ peut prendre la forme suivante :

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] \qquad \text{(équation 2)}$$

où Ω est la pseudo-pulsation que l'on exprimera en fonction de ω_0 et ξ. De plus, en remarquant qu'à $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, déterminer les expressions des deux coefficients réels A et B en fonction de x_0, v_0 , ξ , ω_0 et Ω

Réponse

Solution de cette équation différentielle d'ordre 2 :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$

Equation caractéristique associée : $$r^2 + 2\xi\omega_0\, r + {\omega_0}^2 = 0$$

Discriminant : $$\Delta = 4\xi^2\, {\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 = 4{\omega_0}^2(\xi^2 - 1)$$

Ici, $\xi < 1$, donc $\Delta < 0$; C'est un régime pseudo-périodique. Les solutions de l'équation caractéristique sont alors :

$$r_{1,2} = \varphi{-}2\xi\omega_0 \pm i\sqrt{-\Delta}2 = -\omega_0\left(\xi \pm i\sqrt{1-\xi 2}\right)$$

On pose $\alpha = \varphi{-}b2a = -\xi\omega_0$ et $\Omega = \varphi\sqrt{-\Delta}2a = \omega_0\,\sqrt{1-\xi^2}$ la pseudo–pulsation. Alors

$$x(t) = \exp\{(\alpha t)\}\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

Soit $$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[A\cos\Omega t + B\sin(\Omega t)]$$

De plus, les conditions initiales sont, à $t = 0$, $x(0) = x_0$, donc $A = x_0$. Calculons de plus la dérivée

$$\dot{x}(t) = [-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)]\exp\{(\alpha t)\} + \alpha\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]\exp(\alpha t)$$

Nouvelle condition initiale : $$\dot{x}(0) = v_0$$

Donc $$B\Omega + \alpha A = v_0$$

Soit $$B = \varphi v_0 - \alpha A\Omega = \varphi v_0 + \xi\omega_0 x_0\Omega = \varphi v_0 + \xi\omega_0 x_0\omega_0\sqrt{1-\xi^2}$$

◇

3) Montrer que l'on peut aussi obtenir une forme de la solution du type :

$$x(t) = X_m\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega \mathrm{t} + \varphi) \qquad \text{(équation 3)}$$

On exprimera X_m et φ en fonction de A et B. Quelques outils mathématiques sont donnés en fin de cet exercice.

Réponse

On nous donne $$x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi)$$

Et $$cos\,(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$

Soit $$x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t}\,[\cos(\Omega t)\cos(\varphi) - \sin(\Omega t)\sin(\varphi)]$$

Par identification avec $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[Acos\Omega t + Bsin(\Omega t)]$, il vient

$$X_m\cos(\varphi) = A \quad \text{et} \quad -X_m\sin(\varphi) = B$$

Ainsi $$\tan(\varphi) = -\varphi BA \quad \text{et} \quad A^2 + B^2 = X_m^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) = X_m^2$$

D'où $$\varphi = -\arctan(\varphi BA) \quad \text{et} \quad X_m = \sqrt{A^2 + B^2}$$

◇

4) Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $X_m e^{-\xi\omega_0 t}$, x_0 et $T = 2\pi/\Omega$ la pseudo-période.

Réponse

Allure du graphe ci-contre :

◇

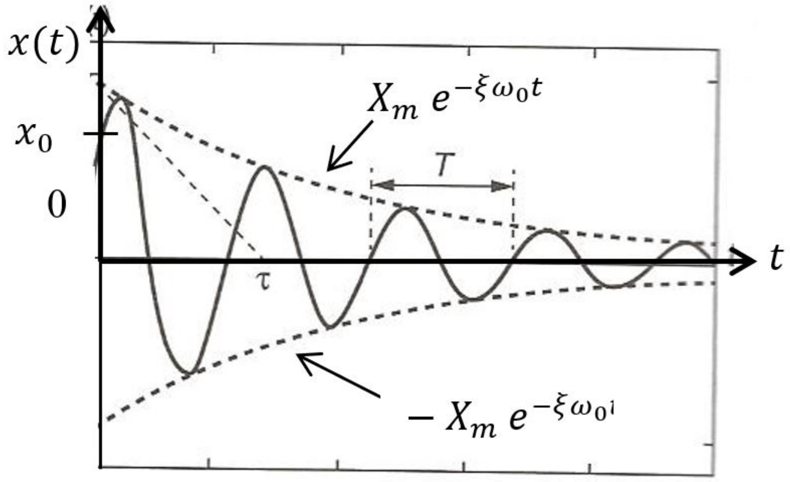

Figure 3.4 – Allure du graphe. On note la dérivée non nulle en 0.

5) Justifier qualitativement que l'énergie mécanique $E(t)$ est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?

Réponse

A cause des frottements, l'énergie mécanique $E(t)$ est une fonction décroissante de t.

◇

6) On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = T$, où T est la période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (3) et en considérant que $\xi \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\varphi x_1 x_2\right) \approx 2\pi\xi$$

Réponse

Cela fait penser au décrément logarithmique :

$$\delta = \ln \varphi x\left(t\right) x\left(t+T\right) = \ln\left(\varphi x_1 x_2\right) = \ln \varphi X_m e^{\alpha t}\cos\left(\Omega t + \varphi\right) X_m e^{\alpha(t+T)}\cos\left(\Omega(T+t)+\varphi\right) = \ln\left(e^{-\alpha T}\right)$$

car cosinus est une fonction périodique de période T. Soit :

$$\delta = \ln\left(\varphi x_1 x_2\right) = -\alpha T = \xi\omega_0 T = \xi\omega_0\varphi 2\pi\Omega = \xi\omega_0\varphi 2\pi\omega_0\sqrt{1-\xi^2} = \xi\varphi 2\pi\sqrt{1-\xi^2}$$

Or par hypothèse, $\xi \ll 1$, donc $1 - \xi^2 \approx 1$; Alors

$$\ln\left(\varphi x_1 x_2\right) \approx 2\pi\xi$$

◇

7) Toujours dans le cas où $\xi \ll 1$, le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en figure 2 ci-dessous. En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure 2, déterminer les valeurs numériques de k, ξ et γ (avec leurs unités). Comment ce tracé serait-il modifié si ξ augmentait (un rapide graphique peut permettre d'être plus explicite) ?

Réponse

On lit $x_1 = 0{,}014\,602\,\mathrm{m}$ et $t_1 = 4{,}004\,004\,\mathrm{s}$, puis $x_2 = 0{,}010\,661\,\mathrm{m}$ et $t_2 = 8{,}008\,008\,\mathrm{s}$. D'après l'énoncé, on a $T = t_2 - t_1$ et comme $\xi \ll 1$ alors

$$\omega_0 \approx \Omega = \varphi 2\pi T = \varphi 2\pi t_2 - t_1$$

car $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. De plus, $\omega_0 = \sqrt{\varphi k m}$

Donc $k = m\omega_0^2 = m\varphi 4\pi^2 \left(t_2 - t_1\right)^2 = 110.10^3\varphi 4\pi^2 \left(8{,}008008 - 4{,}00400\right)^2 = 2{,}71 \times 10^5\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$

D'autre part d'après Q6,

$\ln\left(\varphi x_1 x_2\right) = 2\pi\xi$ Soit $\xi = \varphi\ln\left(\varphi x_1 x_2\right) 2\pi = \varphi\ln\left(\varphi 0{,}0146020{,}010661\right)2\pi = 5{,}01 \times 10^{-2}$

Remarque : on trouve en effet comme attendu $\xi \ll 1$. C'est cohérent.

Enfin, d'après Q1, $\xi = \varphi\gamma 2\sqrt{\varphi 1 m k}$

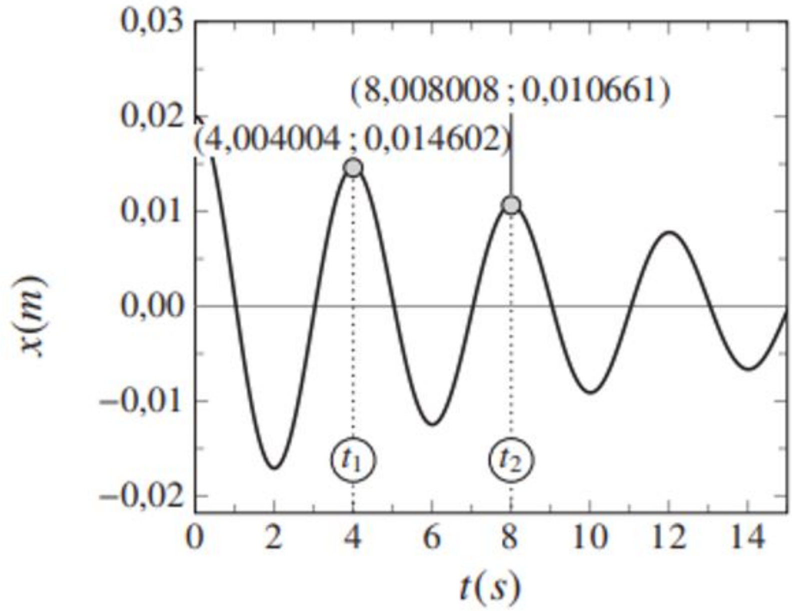

FIGURE 3.5 – Relevé du déplacement horizontal x (en m) de la plateforme de masse $m = 110$ tonnes en fonction du temps t (en s). Les deux temps t_1 et t_2 mentionnés en question Q6 sont indiqués.

Soit $$\gamma = 2\xi\sqrt{mk} = 2 \times 5.01.10^{-2}\sqrt{110.10^3 \times 2{,}71.10^5} = 1{,}73 \times 10^4\,\mathrm{N{\cdot}s{\cdot}m^{-1}}.$$

Si ξ augmentait, l'amortissement augmenterait, la décroissance exponentielle serait plus rapide, on verrait moins d'oscillations et la pseudo-pulsation Ω diminuerait et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ augmenterait.

Outils mathématiques :

$$cos\,(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad cos^2(\alpha) + sin^2(\alpha) = 1$$