Contrôle de connaissances 4

Électrocinétique : condensateurs et bobines

/5 **1** On suppose le circuit RC série suivant, en échelon de tension montant. On suppose le condensateur initialement déchargé, et on ferme l'interupteur à $t = 0$. Déterminer l'équation différentielle sous forme canonique de u_C pour $t \geq 0$, donner la condition initiale et comment la déterminer, et résoudre l'équation différentielle.

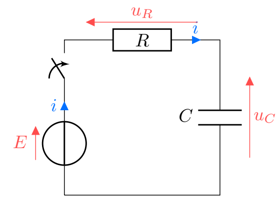

Figure 4.1

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= E && \Big) \; u_R = Ri \text{ et } i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C &= E && \Big) \; \tau = RC \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C &= \frac{E}{\tau} \end{aligned}$$

L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}u_{C,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0$$

La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$u_{C,h}(t) = A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Une solution particulière avec $u_{C,p}(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Donc $u_{C,p}(t) = E$ est **une** solution de l'équation différentielle. La solution générale est donc

$$u_C(t) = E + A\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

La condition initiale est, par continuité de $u_C(t)$,

$$u_C(t=0) = 0 \qquad \text{et} \qquad u_C(0) = A + E \Rightarrow A = -E$$

Ainsi,

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

/5 **2** Démontrer, à l'aide d'un schéma, l'association série de deux condensateurs, ainsi que l'association parallèle de deux bobines.

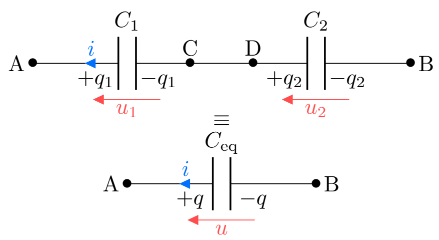

Figure 4.2 – C en série

Les deux points C et D sont au même potentiel. On déduit ainsi

$$\begin{aligned} u_{CD} = u_C - u_D = 0 &\Leftrightarrow q_2 - q_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{q_2 = q_1 = q} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} u &= u_1 + u_2 && \Big) \; q = Cu \\ \Leftrightarrow u &= \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \\ \Leftrightarrow u &= \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right)q \end{aligned}$$

On a bien l'expression d'un unique condensateur de capacité $\boxed{\frac{1}{C_{\text{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

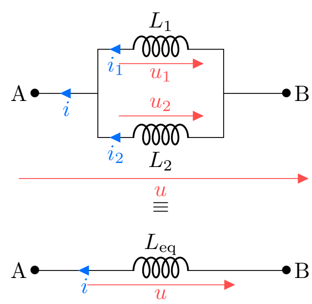

Figure 4.3 – L en parallèle

$$\begin{aligned} i &= i_1 + i_2 && \Big) \; \tfrac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,) \\ \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} && \Big) \; u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow \frac{u}{L_{\text{eq}}} &= \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} \end{aligned}$$

On a bien l'expression d'une unique bobine d'inductance

$$\boxed{\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$