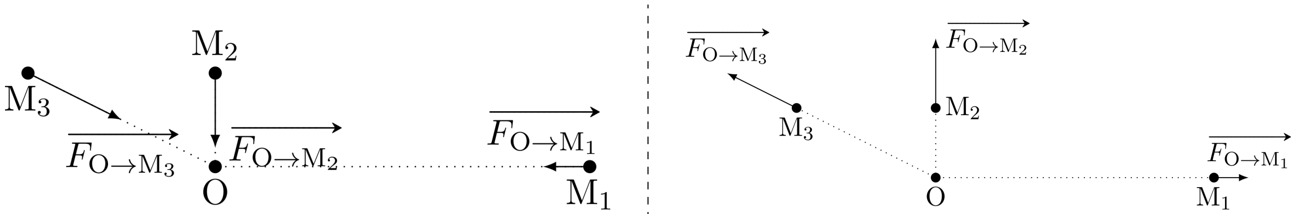
Mouvement à force centrale conservative

I Forces centrales conservatives

A Force centrale

Définition : force centrale

Une force $\vec{F}$ est dite **centrale** s'il existe un point O fixe (dans $\mathcal{R}$) tel que $\vec{F}$ soit colinéaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ pour tout point M ; O est alors appelé **centre de force**. Autrement dit, $\vec{F}$ est centrale si sa direction est toujours celle de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$.

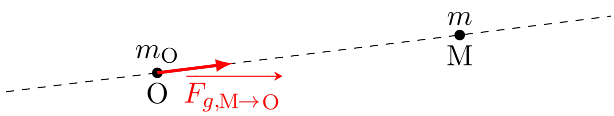


Cas attractif — Cas répulsif

Exemples

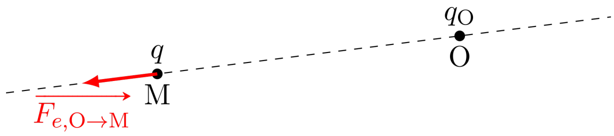
– Force d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = -\mathcal{G}\frac{m_\mathrm{O} m}{r^2}\vec{u_r}$$



– Force couloumbienne :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_\mathrm{O}}{r^2}\vec{u_r}$$



B Force centrale conservative

Plaçons-nous le plan contenant $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ dans un repère polaire centré en O. Par définition d'une force centrale, on a

$$\vec{F} = F(\mathrm{M})\vec{u_r}$$

et par définition d'une force conservative, on a

$$\delta W(\vec{F}) = -\mathrm{d}\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \vec{F}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p$$

ou, de manière équivalente,

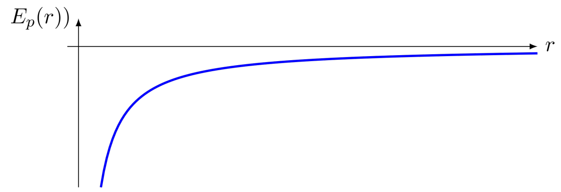
$$\vec{F} = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}\,\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \begin{cases} F(\mathrm{M}) = -\dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \\ 0 = -\dfrac{1}{r}\dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta} \\ 0 = -\dfrac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \end{cases}$$

Ainsi, $\mathcal{E}_p$ ne dépend ni de θ ni de z, donc dépend uniquement de la coordonnée r.

Exemples

– Interaction gravitationnelle :

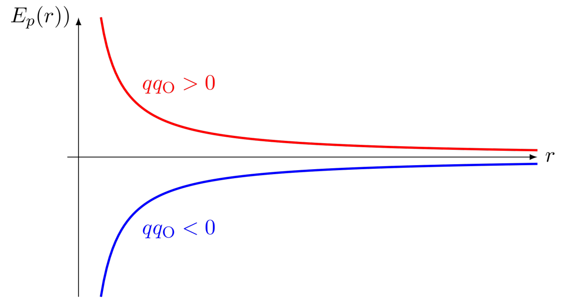
$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} &= -\mathcal{G}\frac{m_\mathrm{O} m}{r^2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_p &= -\mathcal{G}\frac{m_\mathrm{O} m}{r} + K \\ \Leftrightarrow & \boxed{\mathcal{E}_p = -\mathcal{G}\frac{m_\mathrm{O} m}{r}} \end{aligned}$$



en fixant par convention $\mathcal{E}_p(+\infty) = 0$.

– Interaction électrostatique :

$$\begin{aligned} -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} &= \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_\mathrm{O}}{r^2} \\ \Leftrightarrow & \boxed{\mathcal{E}_p(r) = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q q_\mathrm{O}}{r}} \end{aligned}$$



II Quantités conservées

A Conservation du moment cinétique

On considère une force centrale $\vec{F}$ de centre O. Son moment par rapport à O est

$$\vec{\mathcal{M}}_\mathrm{O}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Si M n'est soumis qu'à $\vec{F}$, le théorème du moment cinétique en O appliqué à M donne

$$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_\mathrm{O}(\vec{F}) = \vec{0}$$

Ainsi,

Propriété : conservation du moment cinétique

Pour un point M soumis uniquement à $\vec{F}$ une force centrale, son moment cinétique par rapport au centre de force se conserve :

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}(\mathrm{M}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p} = \overrightarrow{\mathrm{cte}} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_\mathrm{O}(\vec{F}) = \vec{0}}$$

Conséquence : Notons $\vec{\mathcal{L}}_0 = \mathcal{L}_0\vec{u_z}$ le moment cinétique initial, c'est-à-dire

$$\vec{\mathcal{L}}_0 = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) \wedge m\vec{v}(0)$$

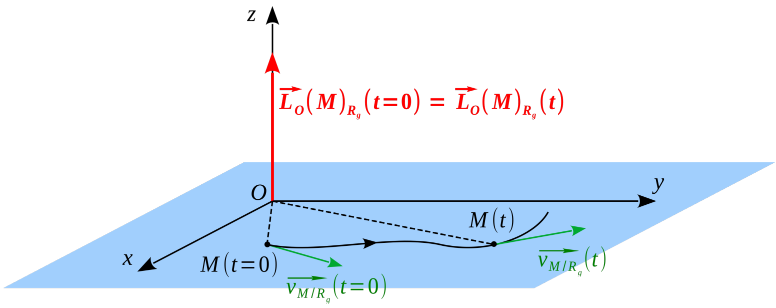
Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ et $\vec{v}(O)$ ne sont pas colinéaires, alors $\vec{u_z}$ définit une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ et $\vec{v}(0)$, ici $\vec{u_z}$. Or, comme $\vec{\mathcal{L}}$ se conserve, on a

$$\vec{\mathcal{L}}(t) = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge m\vec{v}(t) = \mathcal{L}_0\vec{u_z}$$

donc $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{v}$ **restent orthogonaux** à $\vec{u_z}$. Autrement dit, **le mouvement reste dans le plan** $\perp \vec{u_z}$ **passant par O**.

Conséquence de la conservation

La conservation du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ implique que le mouvement **se fait dans le plan défini par** $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ et $\vec{v}(0)$.



Remarque

Si $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0)$ et $\vec{v}(0)$ sont colinéaires, alors $\vec{\mathcal{L}}_0$ est nul, et reste donc nul à tout instant : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\vec{v}$ restent colinéaires, et le mouvement est alors simplement rectiligne.

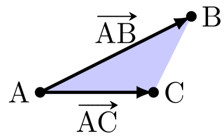
B Loi des aires

II.B.1 Deuxième loi de Kepler

Aire d'un triangle

L'aire d'un triangle ABC peut être calculée à partir de la formule :

$$\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{AB}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{AC}}\right\|$$



Ainsi, en prenant M comme origine du repère et correspondant à A dans la formule proposée, on peut déterminer l'aire dite « balayée » par le point M autour de O pendant un temps dt, tel que le mouvement soit suffisamment court pour décrire le triangle OM(t)M(t + dt) :

$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{O}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)}\right\|$$

Or, par construction on a $\overrightarrow{\mathrm{M}(t)\mathrm{M}(t+\mathrm{d}t)} = \vec{v}\mathrm{d}t$, d'où

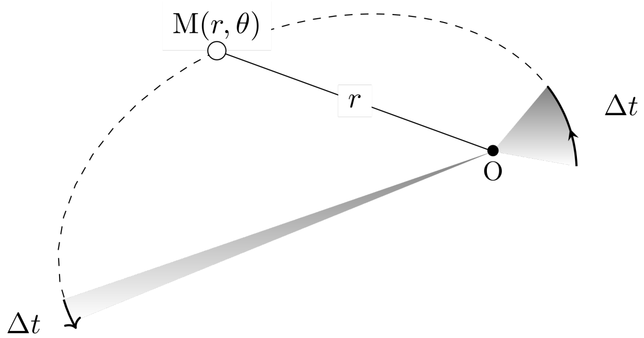
$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\left\|-\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge \vec{v}\right\|\mathrm{d}t$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\left\|\vec{\mathcal{L}}_\mathrm{O}\right\|}{2m} = \mathrm{cte}}$$

ce qui est la deuxième loi de Kepler, dont on rediscutera plus tard :

Deuxième loi de Kepler

Pour un point M soumis uniquement à une force centrale, des aires égales sont balayées pendant un temps égal.



II.B.2 Constante des aires

On se rend alors compte qu'une quantité constante intervient régulièrement dans l'étude des mouvements à force centrale. Reprenons les coordonnées cylindriques centrées sur O, avec $\overrightarrow{u_z} \perp \overrightarrow{\mathcal{L}}_0$ donc perpendiculaire au mouvement. On a

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= r\overrightarrow{u_r} \\ \Rightarrow \overrightarrow{v} &= \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} \\ \Rightarrow \overrightarrow{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}} &= \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\overrightarrow{v} = mr^2\dot{\theta} \end{aligned}$$

Ainsi,

Constante des aires

La **constante des aires** est la grandeur

$$C = r^2\dot{\theta}$$

et est une quantité constante au cours du mouvement. Notamment, $\dot{\theta}$ est de **signe constant**, et la rotation se fait toujours dans le même sens.

C Conservation de l'énergie mécanique

Toujours pour M soumis uniquement à une force centrale conservative. On a

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

et d'après le TEM, $\mathcal{E}_m$ est constante. De plus,

$$\begin{aligned} v^2 &= \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \\ \Rightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_p \end{aligned}$$

et avec $\dot{\theta} = C/r^2$:

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p$$

Définition : énergie potentielle effective

On appelle **énergie potentielle effective** et on note $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ la grandeur

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p}$$

L'énergie potentielle effective permet de se ramener à l'étude d'une seule dimension, ici r la distance au centre de force, plutôt que d'utiliser à la fois r et θ, en considérant $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ comme l'énergie potentielle du système.

III Champs de force newtoniens

A Définition

Définition

Une force centrale est dite **newtonienne** si elle s'exprime sous la forme

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{u_r}}$$

Si $k > 0$, la force est attractive ; si $k < 0$, elle est répulsive.

L'énergie potentielle associée est alors

$$\boxed{\mathcal{E}_p(t) = -\frac{k}{r}}$$

Exemples

- Pour l'interaction gravitationnelle, $k = \mathcal{G}m_O m$;
- Pour l'interaction électrostatique, $k = -q_O q/4\pi\varepsilon_0$.

Ainsi, l'énergie potentielle **effective** pour un système à force centrale conservative newtonienne est

$$\boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}}$$

Nous allons maintenant étudier les différentes trajectoires possibles en fonction de l'énergie mécanique totale et de cette énergie potentielle effective.

B Cas attractif

III.B.1 Étude mathématique

Analysons la fonction $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$:

- ◇ $\lim\limits_{r\to 0} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = +\infty$;
- ◇ $\lim\limits_{r\to +\infty} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = 0$;
- ◇ $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ présente un minimum. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{\mathrm{d}r} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m\left(-2\frac{C^2}{r^3}\right) + \frac{k}{r^2} = 0$$

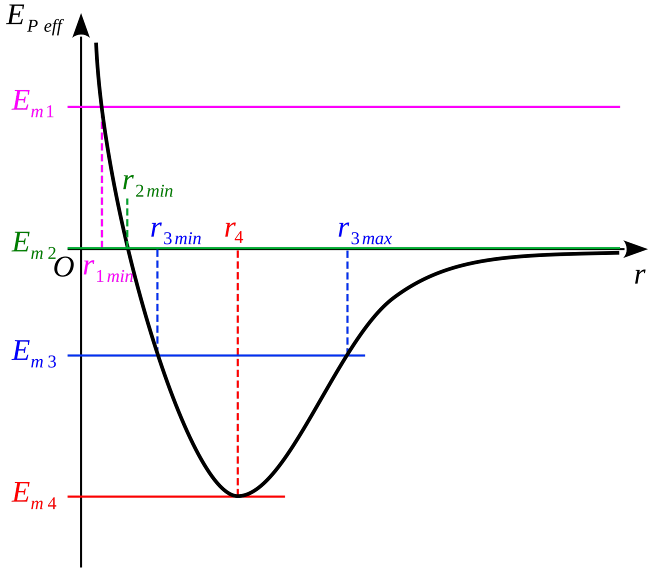
$$\Leftrightarrow -mC^2 + kr = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r_{\min} = \frac{mC^2}{k}}$$

et alors

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{k^2}{2mC^2}$$

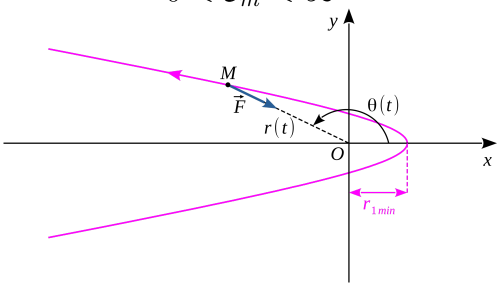
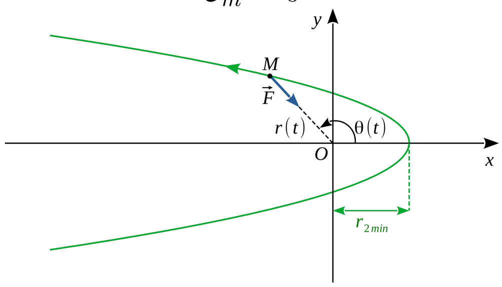
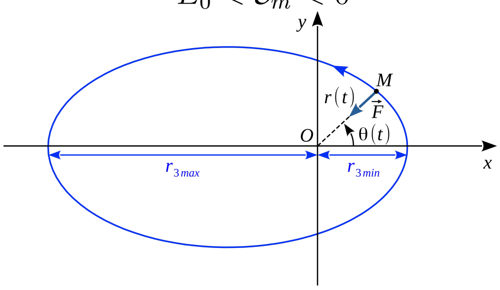
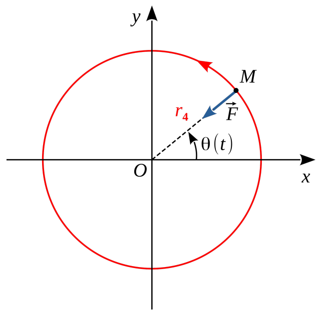
que l'on notera $-U_0$ ou $-E_0$.



III.B.2 Étude des trajectoires

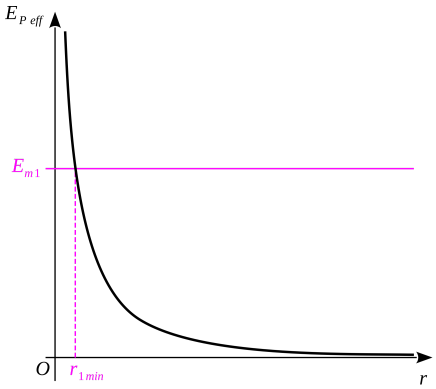
Comme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} < \mathcal{E}_m$. Ainsi, selon la valeur de $\mathcal{E}_m$ par rapport à $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, le système aura différentes trajectoires, toutes ayant O comme foyer ou centre :

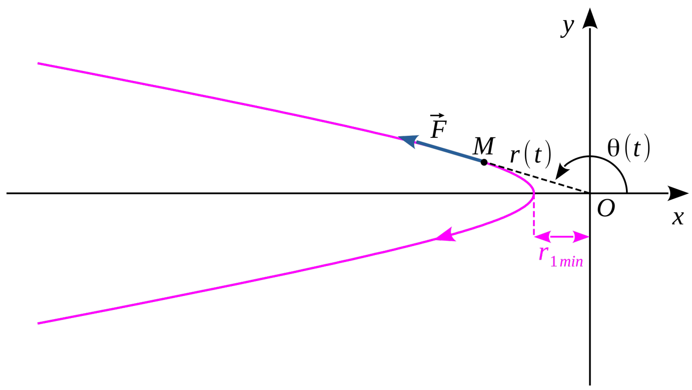
- Pour $\mathcal{E}_m \geq 0$, la trajectoire n'est **pas bornée**, on aura donc un état de **diffusion** avec deux valeurs minimales possibles et deux trajectoires possibles, hyperbolique et parabolique ;
- Pour $\mathcal{E}_m < 0$, la trajectoire **est bornée**, on aura donc un état **lié** avec deux valeurs extrêmes différentes pour la trajectoire elliptique ou une seule, $r_{\min}$, pour la trajectoire circulaire.

Type de mouvement	Caractéristiques	
Diffusion $0 \leq \mathcal{E}_m$	$0 < \mathcal{E}_m < \infty$  Trajectoire **hyperbolique**	$\mathcal{E}_m = 0$  Trajectoire **parabolique**
Lié $\mathcal{E}_m < 0$	$-E_0 < \mathcal{E}_m < 0$  Trajectoire **elliptique**	$\mathcal{E}_m = -E_0$  Trajectoire **circulaire**

C Cas répulsif

Ce cas est bien plus simple : la trajectoire est hyperbolique dans tous les cas.

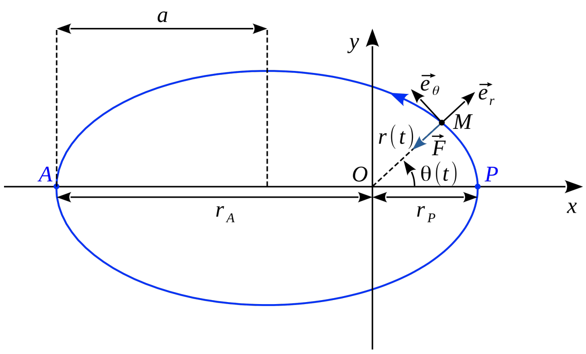




IV Mécanique céleste

A Qu'est-ce qu'une ellipse ?

Définition : ellipse



Analogue au cercle se définissant par l'ensemble des points M à égale distance du centre, une ellipse se définit comme l'ensemble des points M tels que

$$\mathrm{MF} + \mathrm{MF}' = 2a$$

avec F et F' les **foyers** de l'ellipse, et son a demi-grand axe.

Le point le plus proche de O, noté P, s'appelle le **péricentre** [a] ; le point le plus éloigné de O, noté A, s'appelle l'**apocentre** [b]. Les rayons r_P et r_A sont reliés à a tels que

$$\boxed{r_\mathrm{P} + r_\mathrm{A} = 2a}$$

a. Périgée pour la Terre, périhélie pour le Soleil
b. Apogée pour la Terre, aphélie pour le Soleil

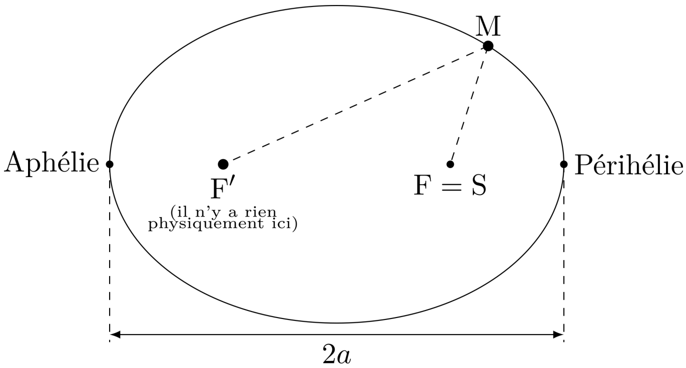
B Lois de Kepler

Les lois de Kepler ont été établies par Johannes Kepler au début du XVII^e siècle (publiées en 1609 et 1619) à partir de relevés expérimentaux effectués par Tycho Brahe à la fin du XVI^e siècle.

La première loi de Kepler précise la nature des trajectoires des planètes.

Première loi de Kepler

Dans le référentiel héliocentrique, les orbites des planètes sont des ellipses dont le centre du Soleil est l'un des foyers.



Nous avons déjà déterminé la deuxième loi de Kepler, conséquence directe de la conservation du moment cinétique.

Deuxième loi de Kepler

Pendant une durée donnée Δt, l'aire $\Delta\mathcal{A}$ balayée par le rayon joignant le centre du Soleil au centre de la planète est constante.

La troisième et dernière loi de Kepler relie le demi-grand axe de l'orbite à sa période :

Troisième loi de Kepler

La période de révolution d'une planète autour du Soleil est reliée au demi-grand axe de son ellipse par :

$$\boxed{\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\text{S}}}}$$

Exemple

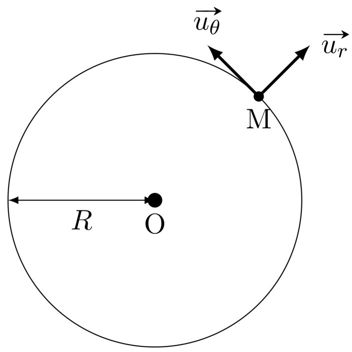
Calculer la période de révolution de Mars autour du Soleil. On donne $a_{\text{Terre}} = 150 \times 10^6\,\text{km}$ et $a_{\text{Mars}} = 228 \times 10^6\,\text{km}$.

$$\frac{{T_{\text{M}}}^2}{{a_{\text{M}}}^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\text{S}}} = \frac{{T_{\text{T}}}^2}{{a_{\text{T}}}^3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_{\text{M}} = T_{\text{T}}\sqrt{\frac{{a_{\text{M}}}^3}{{a_{\text{T}}}^3}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_{\text{T}} = 1\,\text{an} \\ a_{\text{T}} = 150 \times 10^6\,\text{km} \\ a_{\text{M}} = 228 \times 10^6\,\text{km} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{T_{\text{M}} = 1\,\text{an}\,319\,\text{jours}}$$

C Mouvement circulaire



1 Système : {planète} assimilée à un point matériel M de masse m

2 Référentiel : héliocentrique, supposé galiléen.

3 Repère : cylindrique $(\text{O},\vec{u_r},\vec{u_\theta})$ avec O centre du Soleil, R le rayon supposé constant ($\dot{R} = 0$).

4 Repérage :

$$\overrightarrow{\text{OM}} = R\vec{u_r}$$
$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a} = -R\dot{\theta}^2\vec{u_r} + R\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$$

5 Bilan des forces : force gravitationnelle $\vec{F} = -\mathcal{G}\dfrac{mM_S}{R^2}\vec{u_r}$ avec M_S la masse du soleil.

6 PFD :

$$m\vec{a} = \vec{F}$$

7 Équations scalaires :

$$\begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G}\dfrac{mM_S}{R^2}\vec{u_r} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

8 Réponse aux questions : la deuxième équation donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$, et la première donne

$$\boxed{\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}}} \Leftrightarrow \boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}}}$$

Important

Le mouvement <u>circulaire</u> d'un astre autour d'un autre est nécessairement uniforme, et on a

$$\boxed{v_{\text{cercle}} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}}}$$

⚠ Le mouvement elliptique **n'est pas uniforme** ! On trouve de plus $\dot{r}_{\text{P,A}} = 0$ en tant que points extrema de $r(\theta)$, soit **en ces points** uniquement, $\vec{v}_{\text{P,A}} = r\dot{\theta}\vec{u_\theta}$. ⚠

De plus, avec T la période de révolution de l'astre, on a

$$\begin{aligned} \dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T} \\ \Rightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{\mathcal{G}M_S}{R^3} \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}} \end{aligned}$$

Important

La période de révolution du mouvement <u>circulaire</u> d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\boxed{\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}}$$

On admet que **le résultat s'étend à une trajectoire elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a.**

Enfin, avec l'énergie mécanique, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \underbrace{\cancel{\frac{1}{2}m\dot{R}^2}}_{=0} + \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_S}{R} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}m\frac{\mathcal{G}M_S}{R} - \mathcal{G}\frac{mM_S}{R} \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_m = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{2R}} \end{aligned}$$

Important

L'énergie mécanique du mouvement <u>circulaire</u> d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\boxed{\mathcal{E}_{m,\text{cercle}} = -\mathcal{G}\frac{mM_S}{2R}}$$

On admet que **le résultat s'étend à une trajectoire elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a.**

V Satellite en orbite terrestre

On se place ici dans le référentiel géocentrique, afin de traiter le mouvement d'un satellite autour de la Terre.

A Vitesses cosmiques

V.A.1 Première vitesse cosmique

Définition : première vitesse cosmique

La première vitesse cosmique, ou vitesse de **satellisation minimale**, est la vitesse minimale à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** autour de la Terre.

Première vitesse cosmique

Sur Terre, on trouve

$$\boxed{v_c \approx \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}}} \approx 8\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

Démonstration : première vitesse cosmique

Pour satelliser un corps, il faut faire varier son énergie mécanique d'un état où il est au sol à un état où il est en orbite. La plus petite énergie mécanique pour cela est celle que l'on vient de déterminer dans l'étude de la trajectoire circulaire. Ainsi, à partir de l'énergie mécanique d'un objet lancé au niveau du sol, on a

$$\mathcal{E}_{m,\mathrm{sol}} = \frac{1}{2}mv^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\mathrm{cercle}} = -\mathcal{G}\frac{mM_{\mathrm{T}}}{2R_{\mathrm{T}}}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m{v_c}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}} = -\mathcal{G}\frac{mM_{\mathrm{T}}}{2R_{\mathrm{T}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}}}} \qquad \blacksquare$$

Pour des altitudes plus élevées, il faut davantage de vitesse.

V.A.2 Seconde vitesse cosmique

Définition : seconde vitesse cosmique

La seconde vitesse cosmique, ou vitesse de libération et notée v_{lib}, correspond à la vitesse minimale à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir **l'éloigner définitivement** de la Terre.

Seconde vitesse cosmique

Pour la Terre, on trouve

$$\boxed{v_{\mathrm{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}}} = \sqrt{2}v_c = 11\,\mathrm{km}\cdot\mathrm{s}^{-1}}$$

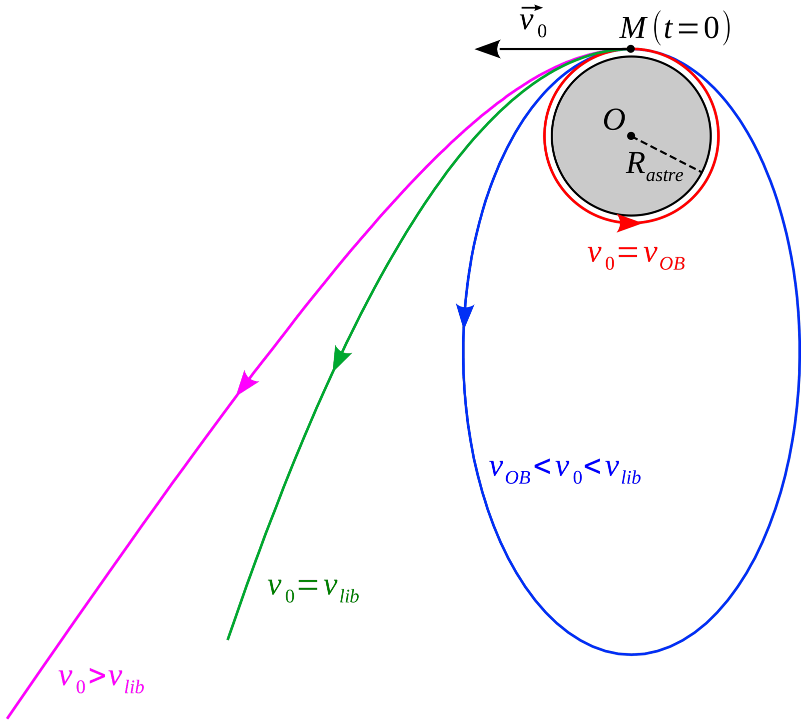
Démonstration : seconde vitesse cosmique

Pour éloigner définitivement un objet de la Terre, il faut que sa trajectoire soit parabolique, donc que **son énergie mécanique soit nulle**. Ceci correspond à

$$\frac{1}{2}m{v_{\mathrm{lib}}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}} = 0$$

$$\Leftrightarrow v_{\mathrm{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_{\mathrm{T}}}{R_{\mathrm{T}}}} \qquad \blacksquare$$

La réalité est évidemment plus complexe que ça, étant donné les frottements, la non-galiléanité des référentiels, la prise en compte de la masse de carburant nécessaire, etc…



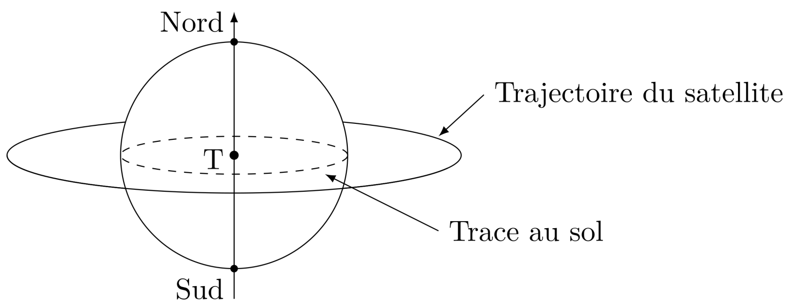
B Satellite géostationnaires

Définition

Un satellite géostationnaire est un satellite qui **reste constamment au-dessus d'un même point** de la surface terrestre ; il apparaît donc immobile pour um observataire terrestre.

Un tel système doit respecter trois conditions :

1) Le plan de l'orbite doit être le plan de l'équateur.



En effet, par principe de force centrale conservative, le mouvement est un plan passant par T le centre de la Terre. Mais comme la Terre est en rotation autour de l'axe de ses pôles, le seul plan contenant le centre de la Terre et permettant de rester immobile par rapport à sa surface est celui contenant l'équateur.

2) Le mouvement doit être synchrone avec la rotation de la Terre sur elle-même. En effet d'après la raison précédente, même sur le plan de l'équateur il faut avoir la même vitesse angulaire ω, telle que

$$\boxed{\omega_{\text{sat}} = \dot{\theta} = \omega_{\text{T}} = \frac{2\pi}{T_{\text{jour}}}}$$

⚠ Attention cependant :

Remarque

Il existe deux durées qui peuvent s'appeler « jour » :

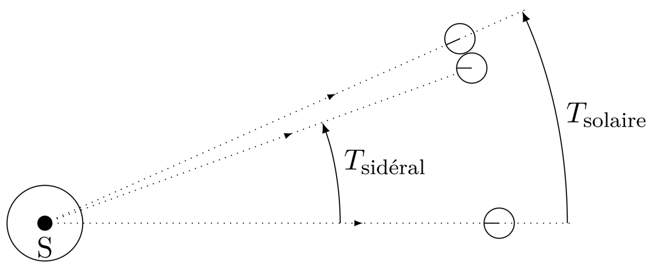
– le **jour sidéral**, que l'on croît à tord être celui qu'on emploie au quotidien, et qui correspond à la durée nécessaire pour que la Terre effectue une rotation complète sur elle-même ; on a

$$T_{\text{sidéral}} = 23\,\text{h}\,56\,\text{min}\,4\,\text{s}$$

– le **jour solaire** est l'intervalle de temps séparant deux passages du Soleil au zénith d'un point donné de la Terre, i.e. le temps qui sépare deux « midis » sur Terre ; on a

$$T_{\text{solaire}} = 24\,\text{h}$$

Ces deux notions diffèrent légèrement à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil.



On trouve alors

$$\omega = 7{,}2921 \times 10^{-5}\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}$$

3) Le mouvement doit être circulaire. En effet, $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. Or, $\dot{\theta}$ est fixe d'après ce qui précède : ainsi, r est fixé. On peut obtenir sa valeur avec la troisième loi de Kepler :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_{\text{T}}} \qquad \Longrightarrow \qquad \boxed{R = \left(\frac{\mathcal{G}M_{\text{T}}T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3}}$$

Il n'y a donc **qu'une seule altitude** pour les satellites géostationnaires, i.e. $R = 42{,}2 \times 10^6\,\text{m}$ soit $h = 35\,800\,\text{km}$.

À cette altitude, on trouve $v = R\dot{\theta} = 3{,}07\,\text{km}\cdot\text{s}^{-1}$.