

Capacités et inductances

I Condensateur idéal

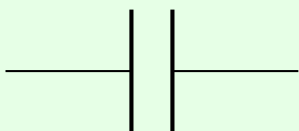
A Présentation

Définition 3.1 : condensateur

Un condensateur est un composant constitué de deux **surfaces conductrices**^a appelées *armatures* et séparées par un **matériau isolant**^b. Son symbole est représenté ci-dessous.

a. Ce sont souvent des plaques, parfois des demi-sphères ou d'autres formes.

b. Par exemple l'air ou du polyéthylène.

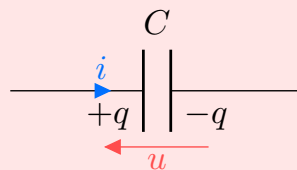


Propriété 3.1 : charge et capacité

Quand un courant traverse le condensateur, des charges s'accumulent sur les plaques : si l'une est chargée q , l'autre est chargée $-q$. La **tension à ses bornes** est **proportionnelle à q** , et on appelle ce coefficient de proportionnalité sa **capacité** notée C . On a donc

$$q = Cu$$

avec C en Farad (F), $C \approx 1 \mu\text{F}$



B Caractéristique d'un condensateur

Propriété 3.2 : relation courant-tension

Pour un condensateur **en convention récepteur**, l'intensité que le traverse s'exprime par

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Démonstration 3.1 : relation courant-tension

Par définition de i et de la charge au borne de C ,

$$i = \frac{dq}{dt}$$

$$i = C \frac{du_C}{dt}$$

Implication 3.1 : continuité

Si u_C présente une variation brusque, alors $\frac{du_C}{dt}$ devrait être infini. Or, comme $i = C \frac{du_C}{dt}$, ceci n'est pas possible puisque ça impliquerait que le courant le soit. Ainsi,

La tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier instantanément, c'est une fonction continue.

Implication 3.2 : régime permanent

En régime permanent (continu), les tensions et courants ne dépendent pas du temps. Alors $i = C \frac{du_C}{dt} = 0$, ainsi

En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et bloque le courant.

C Énergie stockée dans un condensateur

Propriété 3.3 : énergie stockée

L'énergie emmagasinée dans un condensateur de tension u_C est

$$E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C(t)^2$$

Démonstration 3.2 : énergie stockée

En convention récepteur, la puissance reçue est $P_{\text{reçue}} = u_C i = C u_C \frac{du_C}{dt} \triangleq \frac{dE_C}{dt}$.

Or, $\forall f$ fonction dérivable, $f \times f' = \left(\frac{1}{2} f^2\right)'$

$$P_{\text{reçue}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 \right) \Rightarrow E_C(t) = \frac{1}{2} C u_C(t)^2$$

Remarque 3.1 : condensateur récepteur ou générateur

Par l'étude de la relation précédente, si $u_C \nearrow$, alors $\frac{du_C}{dt} > 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} > 0$: ainsi, le condensateur reçoit bien de l'énergie au reste du circuit, et il se **comporte comme récepteur**.

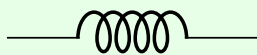
À l'inverse, on lit que si $u_C \searrow$, alors $\frac{du_C}{dt} < 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} < 0$: ainsi, le condensateur cède en réalité de l'énergie au reste du circuit, autrement dit **il peut se comporter comme générateur** !

II Bobine idéale

A Présentation et caractéristique

Définition 3.2 : bobine

Une bobine est constituée de l'enroulement régulier d'une grande longueur d'un fil métallique, recouvert d'une gaine ou d'un vernis isolant. Son symbole est représenté ci-dessous.

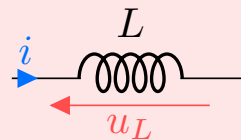


Propriété 3.4 : relation courant-tension

Quand un courant traverse la bobine, une tension apparaît à ses bornes. **En convention récepteur**, celle-ci s'exprime par

$$u_L = L \frac{di}{dt}$$

avec L l'**inductance**, exprimée en Henry (H), $L \approx 10 \text{ mH}$



Implication 3.3 : continuité

Si i présente une variation brusque, alors $\frac{di}{dt}$ devrait être infini. Or, comme $u_L = L \frac{di}{dt}$, ceci n'est pas possible puisque ça impliquerait que la tension le soit. Ainsi,

Le courant i traversant une bobine ne peut pas varier instantanément, c'est une fonction continue.

Implication 3.4 : régime permanent

En régime permanent (continu), les tensions et courants ne dépendent pas du temps. Alors $u_L = L \frac{di}{dt} = 0$, ainsi

En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et la tension à ses bornes est nulle

B Énergie stockée dans une bobine

Propriété 3.5 : énergie stockée

L'énergie emmagasinée dans une bobine traversée par l'intensité i est

$$E_L(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2$$

Démonstration 3.3 : énergie stockée

En convention récepteur, la puissance reçue est $P_{\text{reçue}} = u_L i = L \frac{di}{dt} i \triangleq \frac{dE_L}{dt}$. Or,

$\forall f$ fonction dérivable, $f \times f' = \left(\frac{1}{2} f^2\right)'$

$$P_{\text{reçue}} = \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} Li^2 \right) \Rightarrow E_L(t) = \frac{1}{2} Li(t)^2$$

Remarque 3.2 : bobine réceptrice ou génératrice

Par l'étude de la relation précédente, si $i \nearrow$, alors $\frac{di}{dt} > 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} > 0$: ainsi, la bobine reçoit bien de l'énergie au reste du circuit, et elle se **comporte comme un récepteur**.

À l'inverse, on lit que si $i \searrow$, alors $\frac{di}{dt} < 0 \Rightarrow P_{\text{reçue}} < 0$: ainsi, la bobine cède en réalité de l'énergie au reste du circuit, autrement dit **elle peut se comporter comme un générateur** !

III Circuit RC série : charge

Définition 3.3 : circuits du premier ordre

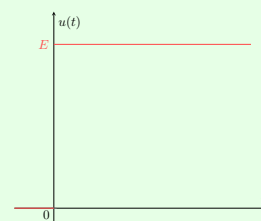
On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

Définition 3.4 : échelon de tension

Un échelon de tension est montant s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t < 0) = 0 \\ u(t \geq 0) = E \end{cases}$$

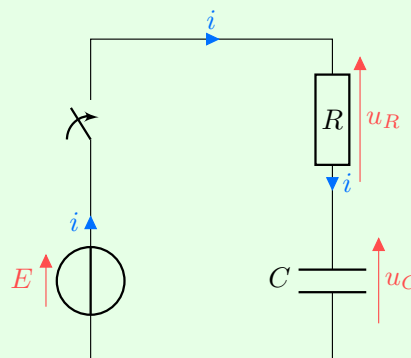
et descendant si E avant et 0 après.



A Présentation

Définition 3.5 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal. **On suppose le condensateur initialement déchargé.** À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.



B Équation différentielle du circuit

Propriété 3.6 : équation diff. RC

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension E s'écrit

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau}$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0$$

Démonstration 3.4 : équation diff. RC

Avec la loi des mailles,

$$u_R + u_C = E \quad (1)$$

On utilise la loi d'Ohm et la caractéristique du condensateur : $u_R = Ri$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = E \\ &\Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = \frac{E}{\tau} \end{aligned}$$

C Résolution de l'équation différentielle

Propriété 3.7 : solution de l'équation différentielle RC

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumise à un échelon de tension E avec $u_C(0) = 0$ est

$$u_C(t) = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

Important 3.1 : résolution équation différentielle coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant, de la forme $\frac{dy}{dt} + \frac{1}{\tau} y = k$:

- 1) On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
- 2) On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.
- 3) On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y(t) = \lambda$.
- 4) On écrit la **solution générale**, somme de la solution particulière et de la forme générale.
- 5) On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

Démonstration 3.5 : solution RC série

- 1) L'équation homogène est :

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

- 2) La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$u_C(t) = K \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$$

- 3) Une solution particulière avec $u_C(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Donc $u_C(t) = E$ est **une** solution de l'équation différentielle.

- 4) La solution générale est donc

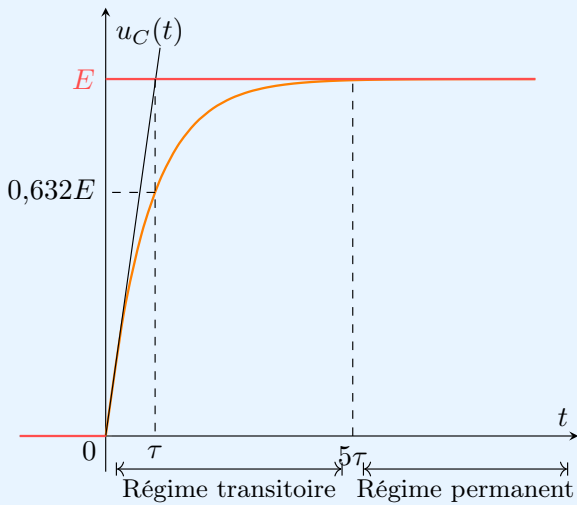
$$u_C(t) = E + K \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right)$$

- 5) Les conditions initiales donnent ici, $u_C(t=0) = 0$. Or, $u_C(0) = K + E$, donc $K = -E$; ainsi

$$u_C(t) = E \left(1 - \exp \left(-\frac{t}{\tau} \right) \right)$$

D Représentation graphique et constante de temps

Implication 3.5 : constante de temps



Définition 3.6 : régime permanent

Le régime permanent est atteint quand $u_C(t)$ est suffisamment proche de l'asymptote.

Exemple 3.1 : détermination τ

Avec la courbe $u_C(t)$, on remarque que :

- 1) $u_C(\tau) = E(1 - e^{-1}) \approx 0,632 \times E$;
- 2) La tangente à la courbe en 0, de pente $\frac{du}{dt}(0) = \frac{E}{\tau}$, coupe l'asymptote en $t = \tau$.

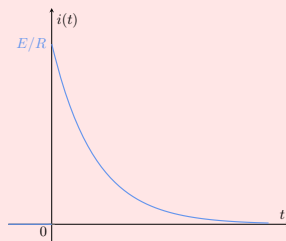
De plus, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0,99E$, on trouve $t_{99} = \tau \ln(100)$; ainsi le temps de réponse à 99% est à $4,6\tau$.

E Évolution de l'intensité

Propriété 3.8 : intensité RC charge

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



Démonstration 3.6 : intensité RC charge

2 méthodes :

- 1) Avec la caractéristique de C

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow i(t) = CE \left(0 - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

et $C/\tau = 1/R$.

- 2) Avec la loi des mailles $Ri = E - u_C$. On isole i en divisant par R .

F Bilan de puissance

Propriété 3.9 : bilan de puissances

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$P_G = P_C + P_J$$

avec P_G la puissance fournie par le générateur, $P_C = \frac{dE_C}{dt}$ la puissance reçue par le condensateur et P_J la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.

Démonstration 3.7 : bilan de puissances

Pour obtenir des puissances, on écrit la loi des mailles et on multiplie par i . Ici, $E = u_C + Ri$ multiplié par i donne $Ei = u_C i + Ri^2$. On a bien

$$P_G = Ei, \quad P_C = \frac{dE_C}{dt}, \quad P_J = Ri^2$$

G Bilan d'énergie

Propriété 3.10 : bilan d'énergie

Pendant la totalité de la charge

$$E_G = CE^2$$

se répartie équitablement entre le condensateur et la résistance :

$$E_C = \frac{1}{2}CE^2 = E_J$$

Démonstration 3.8 : bilan d'énergie

L'énergie fournie par le générateur sur toute la charge est

$$E_G = \int_0^{+\infty} P_G dt = \frac{E^2}{R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right]_0^{+\infty}$$

$$E_G = \tau \frac{E^2}{R} = CE^2$$

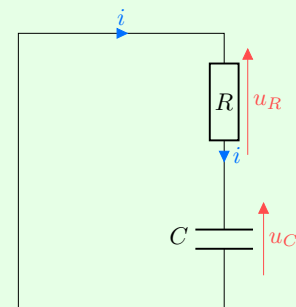
Et celle par le générateur est $E_C = \frac{1}{2}CE^2$ (propriété 3.3) ; forcément $E_J = \frac{1}{2}CE^2$.

IV Circuit RC série : décharge

A Présentation

Définition 3.7 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué de l'association en série avec une résistance et un condensateur idéal. **On suppose le condensateur initialement chargé** : $u_C(0^-) = E$. On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**



B Équation différentielle du circuit

Propriété 3.11 : équation diff. RC

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC en décharge

$$\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$u_C(0^-) = u_C(0^+) = E$$

Démonstration 3.9 : équation diff. RC

Avec la loi des mailles,

$$u_R + u_C = 0$$

On utilise la loi d'Ohm et la caractéristique du condensateur : $u_R = Ri$ et $i = C \frac{du_C}{dt}$

$$Ri + u_C = 0$$

$$\Leftrightarrow RC \frac{du_C}{dt} + u_C = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\tau} u_C = 0$$

C Résolution de l'équation différentielle

Propriété 3.12 : solution de l'équation différentielle RC

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC en décharge avec $u_C(0) = E$ est

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Démonstration 3.10 : solution RC série

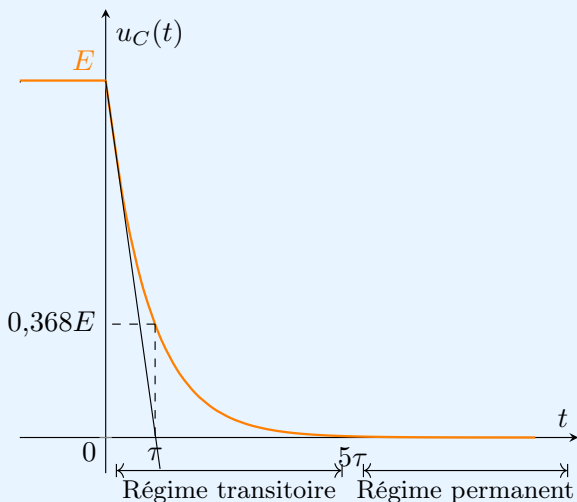
L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale : $u_C(t=0) = E$. Or, $u_C(0) = K$, donc $K = E$, d'où la réponse demandée.

D Représentation graphique et constante de temps

Implication 3.6 : constante de temps



Exemple 3.2 : détermination τ

Avec la courbe $u_C(t)$, on remarque que :

- 1) $u_C(\tau) = Ee^{-1} \approx 0,368 \times E$;
- 2) La tangente à la courbe en 0, de pente $-\frac{E}{\tau}$, coupe l'asymptote en $t = \tau$.

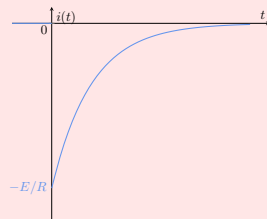
Comme précédemment, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0,01$, on trouve $t_{99} = 4,6\tau$.

E Évolution de l'intensité

Propriété 3.13 : intensité RC charge

L'intensité dans un circuit RC en décharge s'exprime par

$$i(t) = -\frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



Démonstration 3.11 : intensité RC charge

2 méthodes :

- 1) Avec la caractéristique de C

$$i(t) = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\Rightarrow i(t) = -\frac{CE}{\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et $C/\tau = 1/R$.

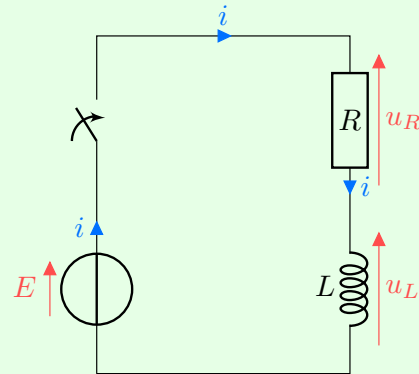
- 2) Avec la loi des mailles $Ri = -u_C$. On isole i en divisant par R .

V Circuit RL série : échelon montant

A Présentation

Définition 3.8 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale. À $t = 0$, on ferme l'interrupteur et le circuit est donc soumis à un échelon de tension montant.



B Équation différentielle du circuit

Propriété 3.14 : équation diff. RL

L'équation différentielle de l'intensité $i(t)$ traversant la bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension E s'écrit

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{R\tau}$$

avec $\tau = L/R$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$i(0^-) = i(0^+) = 0$$

Démonstration 3.12 : équation diff. RL

Avec la loi des mailles,

$$u_L + u_R = E \quad (1)$$

On utilise la loi d'Ohm et la caractéristique de la bobine : $u_R = Ri$ et $u_L = L \frac{di}{dt}$

$$\begin{aligned} (1) &\Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri = E \\ &\Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = \frac{E}{R\tau} \end{aligned}$$

C Résolution de l'équation différentielle

Propriété 3.15 : solution de l'équation différentielle RL

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(0) = 0$ est

$$i(t) = \frac{E}{R} \left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

Démonstration 3.13 : solution RC série

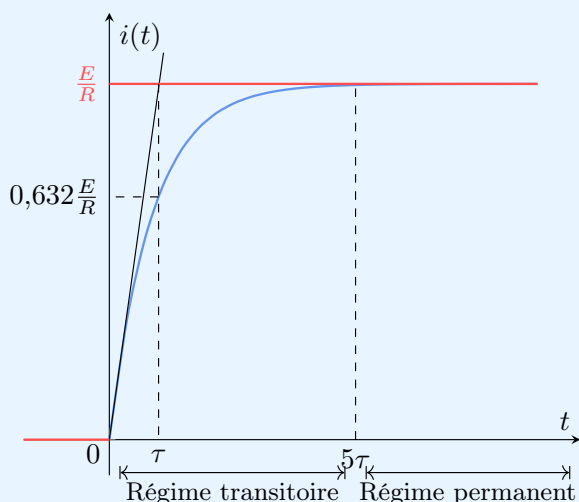
L'équation homogène $\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0$ a pour forme générale de solution $i(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$.

$$i(t) = \lambda \Leftrightarrow 0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{R\tau}, \text{ soit } \lambda = \frac{E}{R}.$$

Ainsi, la solution générale est $i(t) = \frac{E}{R} + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$. Avec $i(0) = 0$, on trouve $K = -E/R$, d'où finalement la solution.

D Représentation graphique et constante de temps

Implication 3.7 : constante de temps



Définition 3.9 : régime permanent

Le régime permanent est atteint quand $i(t)$ est suffisamment proche de l'asymptote.

Exemple 3.3 : détermination τ

Avec la courbe $i(t)$, on remarque que :

- 1) $i(\tau) = \frac{E}{R} (1 - e^{-1}) \approx 0,632 \times \frac{E}{R}$;
- 2) La tangente à la courbe en 0, de pente $\frac{E}{R\tau}$ coupe l'asymptote en $t = \tau$.

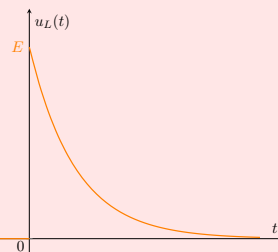
De plus, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0,99 \frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = \tau \ln(100)$; ainsi le temps de réponse à 99% est à $4,6\tau$.

E Évolution de la tension

Propriété 3.16 : tension RL

La tension dans un circuit RL s'exprime par

$$u_L(t) = E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



Démonstration 3.14 : intensité RC charge

2 méthodes :

- 1) Avec la caractéristique de L

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = \frac{LE}{R} \left(0 - \left(-\frac{1}{\tau} \right) \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \right)$$

et $\tau = L/R$.

- 2) Avec la loi des mailles $u_L = E - Ri$.

F Bilan de puissance

Propriété 3.17 : bilan de puissances

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$P_G = P_L + P_J$$

avec P_G la puissance fournie par le générateur, $P_L = \frac{dE_L}{dt}$ la puissance reçue par le condensateur et P_J la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.

Démonstration 3.15 : bilan de puissances

Pour obtenir des puissances, on écrit la loi des mailles et on multiplie par i . Ici, $E = u_L + Ri$ multiplié par i donne $Ei = u_L i + Ri^2$. On a bien (cf. énergie stockée)

$$P_G = Ei, \quad P_L = \frac{dE_L}{dt}, \quad P_J = Ri^2$$

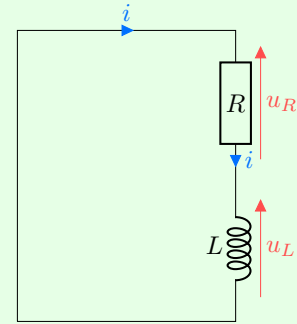
Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe RI^2 . On ne peut intégrer à l'infini.

VI Circuit RL série : décharge

A Présentation

Définition 3.10 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué de l'association en série avec une résistance et une bobine idéale. À $t = 0$ on coupe la tension E présente initialement, et le circuit est donc soumis à un échelon de tension descendant, et donc en régime libre.



B Équation différentielle du circuit

Propriété 3.18 : équation diff. RL libre

L'équation différentielle de l'intensité $i(t)$ traversant une bobine dans un circuit RL en décharge est

$$\frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i = 0$$

avec $\tau = L/R$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{R}$$

Démonstration 3.16 : équation diff. RC

Avec la loi des mailles,

$$u_L + u_R = 0$$

On utilise la loi d'Ohm et la caractéristique de la bobine : $u_R = Ri$ et $u_L = L \frac{di}{dt}$

$$\begin{aligned} \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{di}{dt} + \frac{1}{\tau}i &= 0 \end{aligned}$$

C Résolution de l'équation différentielle

Propriété 3.19 : solution de l'équation différentielle RL

La solution de l'équation différentielle de la tension $i(t)$ d'un circuit RL en décharge avec $i(0) = \frac{E}{R}$ est

$$i(t) = \frac{E}{R} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Démonstration 3.17 : solution RC série

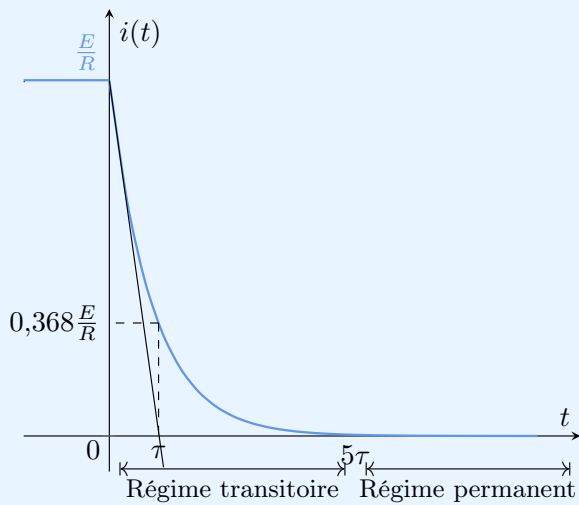
L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$i(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale : $i(t = 0) = \frac{E}{R}$. Or, $i(0) = K$, donc $K = \frac{E}{R}$, d'où la réponse demandée.

D Représentation graphique et constante de temps

Implication 3.8 : constante de temps



Exemple 3.4 : détermination τ

Avec la courbe $i(t)$, on remarque que :

- 1) $i(\tau) = \frac{E}{R}e^{-1} \approx 0,368 \times \frac{E}{R}$;
- 2) La tangente à la courbe en 0, de pente $-\frac{E}{R\tau}$, coupe l'asymptote en $t = \tau$.

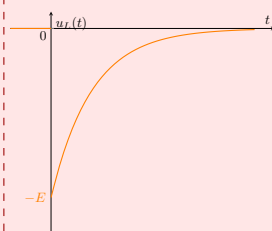
Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0,01$, on trouve $t_{99} = 4,6\tau$.

E Évolution de la tension

Propriété 3.20 : tension RL libre

La tension dans un circuit RL libre s'exprime par

$$u_L(t) = -E \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$



Démonstration 3.18 : tension RL libre

2 méthodes :

- 1) Avec la caractéristique de L

$$u_L(t) = L \frac{di}{dt}$$

$$\Rightarrow u_L(t) = -\frac{LE}{R\tau} \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et $\tau = L/R$.

- 2) Avec la loi des mailles $u_L = -Ri$.