

1217

-A -H -V -S

SUP MPSI3 Corrigé DS07 24 mars 2023

EXERCICE 1 : Etude mécanique d'un pédalo :

(D'après banque PT 2022)

(≈ 16 pts)

Q1. Référentiel : Terrestre supposé galiléen. 1

Base de projection cartésienne : Axe Oz vertical descendant. 1

Système : Flotteur de masse $M/2$, car 2 flotteurs pour porter M . 1

Forces : Poids : $\vec{P} = \frac{M}{2} \vec{g} = \frac{M}{2} g \vec{e}_z$. 1

Poussée d'Archimède : $\vec{\pi}_A = -\pi_A \vec{e}_z = -\rho V_{im} g \vec{e}_z$. 1

Condition d'équilibre vertical : $\sum \vec{F} = \vec{0}$ Donc $\vec{P} + \vec{\pi}_A = \vec{0}$. 1

Projetons sur l'axe vertical : On obtient donc : $\frac{M}{2} g - \rho V_{im} g = 0$. 1

Or on pose $\alpha = \frac{V_{im}}{V}$; Alors il vient $\rho \alpha V = \frac{M}{2}$; Soit : $\alpha = \frac{M}{2\rho V}$. 1

AN : $\alpha = \frac{200}{2 \times 1000 \times 0,5} = \frac{200}{1000} = \frac{2}{10}$; On obtient : $\alpha = 20\%$. 1

1,2 CS

Q2. On utilise la notion de bras de levier :

Moment de la force par rapport à Oz : **Sens de rotation positif = sens trigonométrique** car \vec{e}_z est vers nous. 1

Situation (a) : 1

$|\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied})| = d_1 \cdot \|\vec{F}_{pied}\|$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = d$ (ici). 1

De plus \vec{F}_{pied} a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **sens négatif**. 1

D'où : $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied}) = -d F_{pied}$. 1

Situation (b) :

Même raisonnement, mais cette fois la **distance bras de levier est nulle**, car la force passe par l'axe de rotation.

Ainsi, : $\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied}) = 0$. 1

Q3. On sait que pour un solide en rotation, $\vec{P}(\vec{F}_{ext}) = \mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{ext}) \omega$. 1

De plus, en moyenne, $\langle |\mathcal{M}_{Oz}(\vec{F}_{pied})| \rangle = \frac{d F_{pied}}{2}$.

Alors $\langle \vec{P}(\vec{F}_{pied}) \rangle = \frac{d F_{pied} \omega}{2}$. 1

AN : $\langle P(\vec{F}_{pied}) \rangle = \frac{0,2 \times 50 \times 10}{2}$; On obtient : $\langle P(\vec{F}_{pied}) \rangle = 50 \text{ W}$. 1

2CS

EXERCICE 2 : Etude du fonctionnement de deux anémomètres mécaniques : (D'après CCINP PC 2022) (~~42 pts~~)

I - Anémomètre à plaque :

Q1. Une force s'exprime en newtons (N) et une vitesse en m.s^{-1} donc si $F = \mu U^2$ alors μ s'exprime en $\frac{\text{N}}{\text{m}^2 \text{s}^{-2}} = \frac{\text{kg.m.s}^{-2}}{\text{m}^2 \text{s}^{-2}}$; Donc finalement **l'unité SI de μ est le kg.m^{-1}** .

Q2. Référentiel : Terrestre supposé galiléen.

Système : {plaque + tige}

Bilan des forces :

4 actions mécaniques dont on peut calculer les moments grâce à la notion de bras de levier :

Moments scalaires des forces par rapport à Δ :

Sens de rotation positif = sens trigonométrique car \vec{e}_Δ est vers nous.

La réaction du support : \vec{R} passe par l'axe de rotation, son moment est donc nul : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{R}) = 0$.

La liaison pivot est supposée parfaite, donc $\mathcal{M}_\Delta(\text{liaison pivot}) = 0$.

Le poids :

$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{P})| = d_1 \cdot \|\vec{P}\| = mg d_1$ en utilisant le bras de levier avec $d_1 = L \sin(\theta)$.

De plus le poids \vec{P} a tendance à faire tourner la tige dans le sens horaire, donc dans le **sens négatif**.

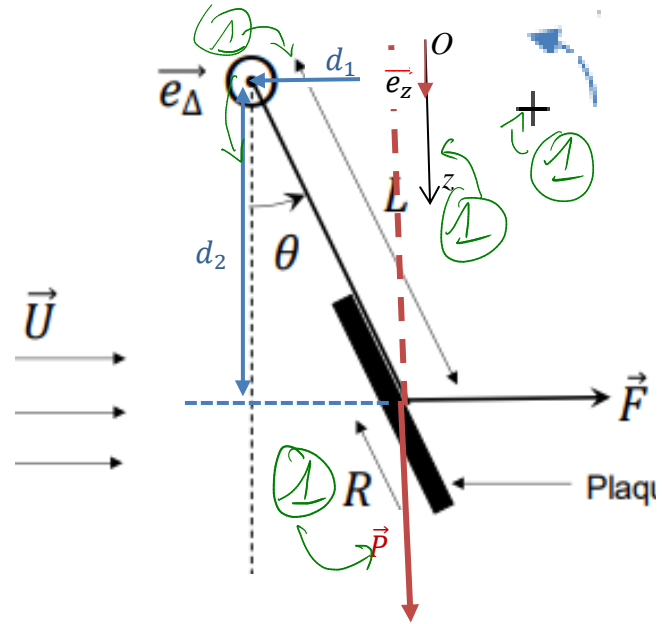
D'où : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = -mgL \sin(\theta)$.

La force aérodynamique \vec{F} :

$|\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})| = d_2 \cdot \|\vec{F}\| = \mu U^2 d_2$ en utilisant le bras de levier avec $d_2 = L \cos(\theta)$.

De plus le poids \vec{P} a tendance à faire tourner la tige dans le sens trigonométrique, donc dans le **sens positif**.

D'où : $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) = \mu U^2 L \cos(\theta)$.



Q3. Condition d'équilibre : $\sum \mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{ext}) = 0$.

D'où : $\mu U^2 L \cos(\theta_{eq}) - mgL \sin(\theta_{eq}) = 0$; Ou encore : $U^2 = \frac{mg \sin(\theta_{eq})}{\mu \cos(\theta_{eq})}$; Ainsi $U = \sqrt{\frac{mg}{\mu} \tan(\theta_{eq})}$.

AN : $U = \sqrt{\frac{0,03 \times 9,81}{0,01} \tan(8^\circ)} = \sqrt{3 \times 9,81 \times \tan(8)}$; On obtient : $U \approx 2 \text{ m.s}^{-1}$.

1,2 CS

II - Anémomètre à coupelles :

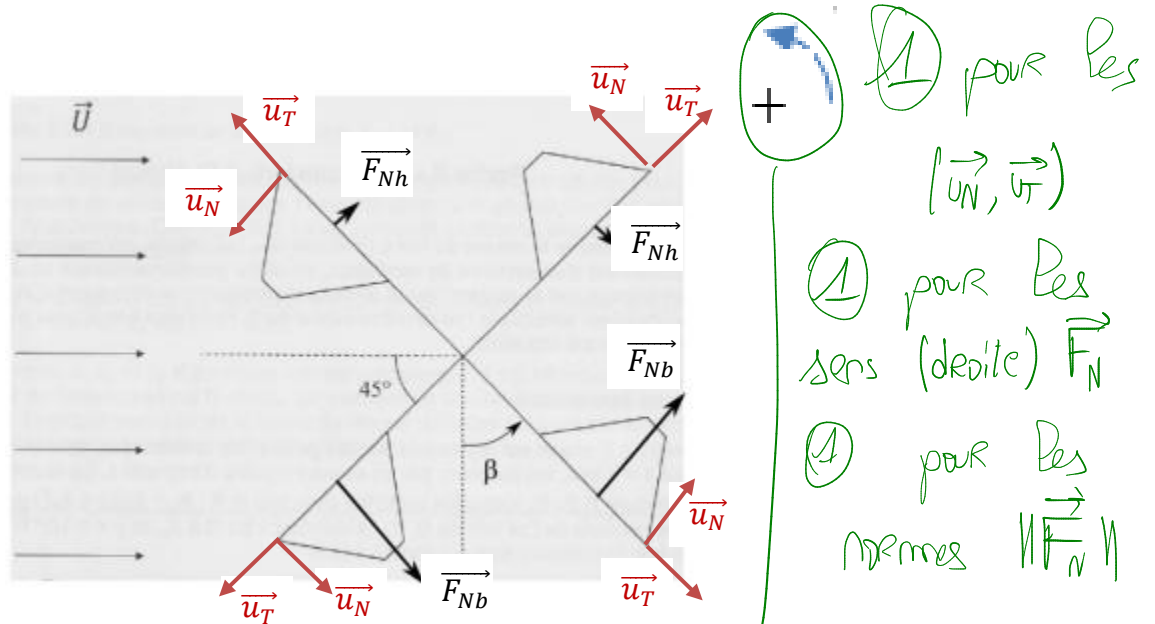
18 Q4. On nous donne : $\vec{F}_N = \frac{1}{2} \rho_{air} \mathcal{A} C_N U^2 \vec{u}_N$ et $\|\vec{F}_N(-\beta)\| = \|\vec{F}_N(\beta)\|$.

- Les vecteurs \vec{u}_N et \vec{u}_T ont été schématisés ci-dessous sur chaque coupelle comme demandé.
- Pour les deux coupelles du bas, on est à $\beta = \pm 45^\circ$.

D'après le graphe du document 2, C_N est alors **positif et élevé**, donc la **force \vec{F}_{Nh} est importante et vers la droite** (selon $+\vec{u}_N$).

- Pour les 2 coupelles du haut, on est à $\beta = \pm 135^\circ$.

D'après le graphe du document 2, C_N est alors **négatif et faible**, donc la force \vec{F}_{Nb} est faible, mais toujours **vers la droite**, (selon $-\vec{u}_N$) ce qui est naturel compte tenu du sens de l'écoulement.



15 Q5. Les deux forces agissant dans le sens d'une augmentation de β sont plus importantes que celles en sens inverse.

Les bras de levier étant équivalents, le **moment global est donc positif par rapport à l'axe de rotation**, donc d'après le théorème du moment cinétique : $J_\Delta \frac{d\omega}{dt} = J_\Delta \ddot{\beta} = \sum M_\Delta(\vec{F}_{ext})$

L'anémomètre va tourner dans le **sens direct ou trigonométrique**.

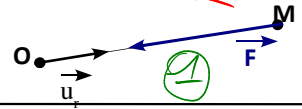
12 Q6. Le moment de la force \vec{F}_T est nul par rapport à l'axe de rotation, car **sa droite d'action coupe l'axe** de rotation, le **bras de levier est donc nul**.

4 Q7. On appelle **couple**, un système de forces dont la **résultante est nulle** (somme vectorielle), mais dont le **moment résultant des forces par rapport à un axe est non nul**. Ici, **ce n'est pas le cas** : les différentes forces poussent vers la droite sur le schéma, donc **la résultante est non nulle**. Cependant, elles sont compensées par la liaison pivot qui retient la structure, donc cet effet est sans importance.

12 Q8. Il existe sans doute des frottements solides dans la **liaison pivot qui n'est pas parfaite**.

EXERCICE 3 : Particule soumise à un champ électrostatique radial : (≈ 40 pts)

Q1. La particule est soumise à la force électrique $\vec{F} = q \vec{E} = -qE_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u}_r$.
Schéma ci-contre. La **force est attractive**, la particule est attirée par le point O.



Q2. Pour montrer que le mouvement est plan, on applique le théorème du moment cinétique en O à la particule : $\frac{d\vec{L}_O}{dt} = \vec{M}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = r \vec{u}_r \wedge (-E_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^n \vec{u}_r) = \vec{0}$;

On en déduit que \vec{L}_O est constant, tel que : $\vec{L}_O = \vec{L}_O(t=0) = \vec{OM}_0 \wedge m \vec{v}_0$;

À $t=0$, \vec{OM}_0 et \vec{v}_0 sont dans le plan $\pi(O, \vec{u}_x; \vec{u}_y)$, donc $\vec{L}_O = L_O \vec{u}_z$;

Calculons $\vec{OM} \cdot \vec{L}_O$: $\vec{OM} \cdot \vec{L}_O = \vec{OM} \cdot (\vec{OM} \wedge m \vec{v}) = 0$;

(1)

Donc $\vec{OM} \perp \vec{L}_O$ à chaque instant.

Donc à tout moment, $\vec{OM} \perp \vec{u}_z$: Le **mouvement est plan dans le plan $\pi(O, \vec{u}_x; \vec{u}_y)$** .

Q3. Coordonnées polaires :

Q4. Il faut exprimer le moment cinétique :

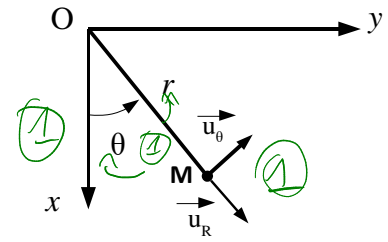
$$\vec{OM} = r \vec{u}_r \text{ et } \vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta$$

$$\text{Alors : } \vec{L}_O = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r \dot{\theta} \vec{u}_\theta)$$

$$\text{Ainsi : } \vec{L}_O = m r^2 \dot{\theta} \vec{k} = m C \vec{k} = \text{cste}$$

Par identification : $C = r^2 \dot{\theta}$: **Constante des Aires**.

$$\vec{k} = \vec{u}_z$$



On se place dans le cas où $n=2$ et v_0 quelconque :

Q5. $dE_P = \delta W(\vec{F}) = -\vec{F} \cdot d\vec{OM} = -F \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta) = -F dr$;

$$\text{Ainsi : } dE_P = qE_0 \left(\frac{r_0}{r}\right)^2 dr ; \text{ Et : } E_P(r) = -qE_0 \frac{r_0^2}{r} + \text{cste} ;$$

Et si on considère que l'énergie potentielle est nulle lorsque $r \rightarrow \infty$, alors $E_P(r) = -qE_0 \frac{r_0^2}{r}$;

$$E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v^2 - qE_0 \frac{r_0^2}{r}$$

Pour obtenir $E_{Peff}(r)$, il faut exprimer la vitesse en coordonnées polaires et éliminer θ grâce à la constante des aires. On obtient donc : $E_m = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - qE_0 \frac{r_0^2}{r} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - qE_0 \frac{r_0^2}{r}$;

$$\text{On isole } \frac{1}{2} m \dot{r}^2 \text{ et on obtient : } E_{Peff}(r) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - qE_0 \frac{r_0^2}{r}$$

Q6. Il faut tracer l'allure de $E_{Peff}(r)$:

$$\lim_{r \rightarrow 0} E_{Peff} = +\infty \text{ et } \lim_{r \rightarrow +\infty} E_{Peff} = 0 ;$$

$$\frac{dE_{Peff}}{dr} = -m \frac{C^2}{r^3} + qE_0 \frac{r_0^2}{r^2} ;$$

$E_{Peff}(r)$ est min pour r_m tel que $\frac{dE_{Peff}}{dr} = 0$, dc pour

$$r_m = \frac{m C^2}{q E_0 r_0^2} > 0 \text{ et } E_{Peff}(r_m) = -\frac{q^2 r_0^2 E_0^2}{2 m C^2} < 0$$

Discussion : $E_m \geq E_{Peff}$ à chaque instant car $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$

1^{er} cas : $E_m = E_1$: Alors $r \geq r_1$: **Etat de diffusion**.

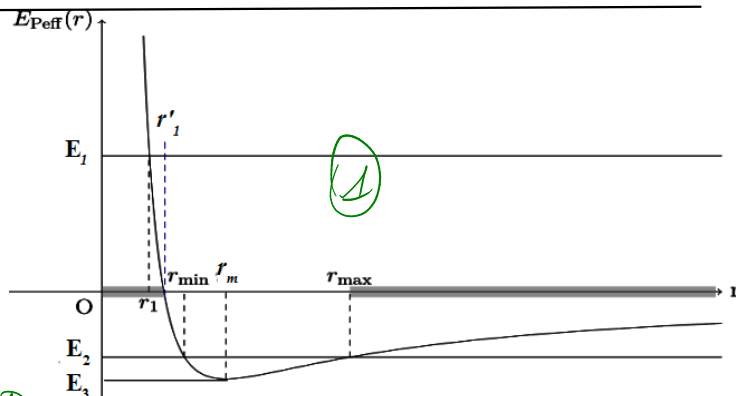
La trajectoire est une **branche d'hyperbole**.

2^{ème} cas : $E_m = 0$: Alors $r \geq r'_1$: **Etat de diffusion**. La trajectoire est une branche de parabole.

3^{ème} cas : $E_m = E_3$: Alors $r = r_m = \text{cste}$: **Etat lié**.

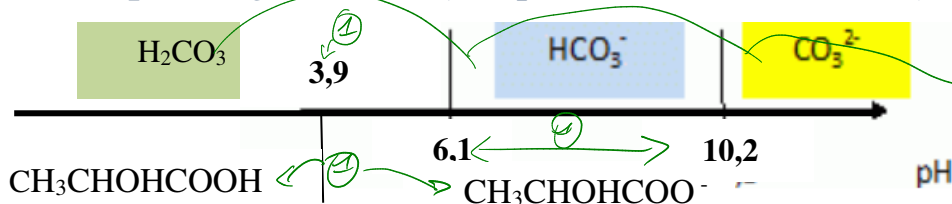
La trajectoire est **circulaire** de centre O et de rayon $r_0 = r_m = \frac{m C^2}{q E_0 r_0^2}$.

4^{ème} cas : $E_m = E_2 < 0$: Alors $r_{\min} \leq r \leq r_{\max}$: **Etat lié**. La trajectoire est une **ellipse** dont O est un foyer.



EXERCICE 4 : Le pH sanguin : (D'après Centrale PSI 2009) (≈ 33 pts)

Q1. DP :



Q2. D'après le DP, à pH = 7,40, $[CO_3^{2-}]$ est négligeable.

On sait que $[H_2CO_3]_{eq} + [HCO_3^-]_{eq} = C_0$

D'autre part : $pH = pK_A + \log \frac{[A^-]_{eq}}{[HA]_{eq}}$; Soit : $pH = pK_{A1} + \log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}$;

D'où : $\log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}} = pH - pK_{A1}$; En substituant, il vient : $\log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0 - [HCO_3^-]_{eq}} = pH - pK_{A1}$.

Ainsi : $\frac{[HCO_3^-]_{eq}}{C_0 - [HCO_3^-]_{eq}} = 10^{pH - pK_{A1}}$; Puis $[HCO_3^-]_{eq} = (C_0 - [HCO_3^-]_{eq}) 10^{pH - pK_{A1}}$;

$[HCO_3^-]_{eq} \{1 + 10^{(pH - pK_{A1})}\} = C_0 10^{(pH - pK_{A1})}$ et enfin : $[HCO_3^-]_{eq} = \frac{C_0 10^{(pH - pK_{A1})}}{1 + 10^{(pH - pK_{A1})}}$;

AN : $[HCO_3^-]_{eq} = \frac{0,028 \times 10^{(7,4 - 6,1)}}{1 + 10^{(7,4 - 6,1)}}$; On trouve : $[HCO_3^-]_{eq} = 0,0267 \text{ mol.L}^{-1} = 2,67 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$.

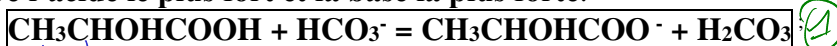
Et $[H_2CO_3]_{eq} = C_0 - [HCO_3^-]_{eq}$; AN : $[H_2CO_3]_{eq} = 0,028 - 0,0267$;

On trouve : $[H_2CO_3]_{eq} = 1,34 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Q3.a. D'après le DP, à pH = 7,4, c'est $[HCO_3^-]_{eq}$ est l'espèce majoritaire.

De plus, $CH_3CHOHCOOH$ et HCO_3^- ont des DP disjoints ; Donc réaction selon la règle du gamma.

Ou faire la réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte.



$$K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} [H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq} [HCO_3^-]_{eq}} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} [H_3O^+]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq}} \times \frac{[H_2CO_3]_{eq}}{[HCO_3^-]_{eq} [H_3O^+]_{eq}}$$

Ainsi $K_{eq} = \frac{K_{A3}}{K_{A1}} = 10^{pK_{A1} - pK_{A3}}$; AN : $K_{eq} = 10^{6,1 - 3,9}$;

On trouve : $K_{eq} = 10^{2,2}$; La réaction n'est ni totale, ni négligeable.

Q3.b. Tableau d'avancement :

$$[CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{n}{V} ; \text{AN : } [CH_3CHOHCOOH]_0 = \frac{3 \cdot 10^{-4}}{0,1} = 3 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1} = C_3.$$

	$CH_3CHOHCOOH$	+ HCO_3^-	=	$CH_3CHOHCOO^-$	+ H_2CO_3
EI	C_3	C_1			C_2
EE	$C_3 - x$	$C_1 - x$		x	$C_2 + x$

Alors $K_{eq} = \frac{[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} [H_2CO_3]_{eq}}{[CH_3CHOHCOOH]_{eq} [HCO_3^-]_{eq}} = \frac{x(C_2 + x)}{(C_3 - x)(C_1 - x)}$; Soit : $K_{eq}(C_3 - x)(C_1 - x) = x(C_2 + x)$;

Ou encore : $x^2(1 - K_{eq}) + x(C_2 + K_{eq}C_1 + K_{eq}C_3) - K_{eq}C_1C_3 = 0$

Résolution du polynôme du 2nd degré : On trouve $\Delta \approx 14,433$;

$x_1 \approx 0,027 > C_3$ donc impossible ou $x_2 \approx 2,98 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$.

Ainsi : $[CH_3CHOHCOO^-]_{eq} = x = 2,98 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; $[H_2CO_3]_{eq} = C_2 + x = 4,38 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$;

$[CH_3CHOHCOOH]_{eq} = C_3 - x = 2,00 \cdot 10^{-3} \text{ mol.L}^{-1}$; $[HCO_3^-]_{eq} = C_1 - x = 2,40 \cdot 10^{-2} \text{ mol.L}^{-1}$;

Enfin $pH = pK_{A1} + \log \frac{[HCO_3^-]_{eq}}{[H_2CO_3]_{eq}}$; Ainsi $pH = 6,1 + \log \frac{2,40 \cdot 10^{-2}}{4,38 \cdot 10^{-3}}$; On trouve $pH \approx 6,8$.

Le sang est donc légèrement plus acide qu'en temps normal.

Q3.c. La respiration permet l'expiration de CO_2 et donc de H_2CO_3 , ce qui permet au pH de ne pas diminuer malgré la production d'acide lactique.

PROBLEME : Etude du mouvement d'un satellite de télédétection terrestre :
(D'après ATS 2014) (≈ 80 pts)

I - Préliminaires :

Q1. On a : $\vec{OM} = r \vec{u}_r$ et $\vec{v}_M = \frac{d\vec{OM}}{dt} = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$

Q2. On sait que $\vec{F}(r) = \text{grad}(\text{Ep}) = \frac{d\text{Ep}(r)}{dr} \vec{u}_r$.
Ainsi : $F(r) = -\frac{d\text{Ep}(r)}{dr} = -\frac{d\left(-m g_0 \frac{R_T^2}{r}\right)}{dr} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$; D'où $\vec{F} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;
C'est donc une **force attractive**, car selon $(-\vec{u}_r)$.

Q3. \vec{L}_0 est le **vecteur moment cinétique du point M par rapport à O**.

$\vec{L}_0 = \vec{OM} \wedge m \vec{v}_M = r \vec{u}_r \wedge m (\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta)$; Ainsi : $\vec{L}_0 = m r^2 \dot{\theta} \vec{k}$;

Donc : $|\vec{L}_0| = m r^2 |\dot{\theta}|$;

Système : le satellite en M ;

Référentiel géocentrique considéré comme galiléen.

Seule force \vec{F} ; Son moment par rapport à O : $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$, car vecteurs colinéaires.

Théorème du moment cinétique par rapport à O fixe : $\frac{d\vec{L}_0}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$; Soit $\vec{L}_0 = \text{cste}$;

II - Mise en orbite circulaire du satellite :

Q4. Trajectoire circulaire de rayon r , donc $\dot{r} = 0$; Alors $\vec{v}_M = r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Ou encore : $\vec{v}_M = v \vec{u}_\theta$.

Et $\vec{a}_M = \frac{d\vec{v}_M}{dt} = \frac{dv}{dt} \vec{u}_\theta - v \dot{\theta} \vec{u}_r$; Ou encore : $\vec{a}_M = -\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta$;

On retrouve l'expression de l'accélération dans la base de Frenet.

Q5. Seule force $\vec{F} = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$; PFD : $\vec{F} = m \vec{a}_M$; Ainsi : $m \left(-\frac{v^2}{r} \vec{u}_r + \dot{v} \vec{u}_\theta \right) = -m g_0 \frac{R_T^2}{r^2} \vec{u}_r$;

En projetant sur les 2 axes, il vient : $\dot{v} = 0$; Ainsi : $v = \text{cste}$; Le **mouvement est donc uniforme** ;

$\frac{v^2}{r} = g_0 \frac{R_T^2}{r^2}$; Soit : $v^2 = g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

Q6. $E_C = \frac{1}{2} m v^2$; Ainsi : $E_C = \frac{m g_0 R_T^2}{2r}$;

$E_m = E_C + E_P = \frac{m g_0 R_T^2}{2r} - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$; Ainsi : $E_m = -\frac{m g_0 R_T^2}{2r} = -E_C$; $E_m < 0$ normal car **c'est un état lié**.

$E_m(r_b) = -\frac{4 \cdot 10^3 \times 10 \times (6,4 \cdot 10^6)^2}{2 \times 8 \cdot 10^6}$; On trouve : $E_m(r_b) \approx -1 \cdot 10^{11} \text{ J}$;

$E_m(r_h) = -\frac{4 \cdot 10^3 \times 10 \times (6,4 \cdot 10^6)^2}{2 \times 40 \cdot 10^6}$; On trouve : $E_m(r_h) \approx -2 \cdot 10^{10} \text{ J}$;

III - Étude énergétique du satellite :

Q7. Le système n'est soumis qu'à **une force conservative**, donc son E_m est **constante**.

De plus, dans le cas d'une trajectoire quelconque, on a : $\vec{v}_M = \dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta$; Donc : $v_M^2 = \dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2$.

Alors : $E_m = E_C + E_P = \frac{1}{2} m v_M^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r} = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2) - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

Ou encore : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2 - m g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

De plus, on a vu au 3) que : $L_0 = |\vec{L}_0| = m r^2 |\dot{\theta}|$; Donc : $\dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m^2 r^4}$ et $m r^2 \dot{\theta}^2 = \frac{L_0^2}{m r^2}$.

Ainsi : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$. Alors $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $E_{P,eff}(r) = \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$

Q8. On a : $E_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + E_{P,eff}(r)$ avec $\frac{1}{2} m \dot{r}^2 \geq 0$.

Donc à chaque instant, on doit avoir : $E_m \geq E_{P,eff}(r)$;

Q8 (suite)

Pour la trajectoire elliptique, il faut un **domaine de variation de r qui soit borné**, donc il faut un **état lié**,

$E_{m2} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r_{min} \leq r \leq r_{max}$;

Pour la trajectoire hyperbolique, il faut un **domaine de variation de r qui soit non borné**, donc il faut un

état de diffusion $E_{m1} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r \geq r'_{min}$;

Pour la trajectoire circulaire, il faut que **r soit constant**, donc qu'il ne puisse prendre qu'une seule valeur.

$E_{min} \geq E_{P,eff}(r)$ impose $r = cste$.

IV - Mise en orbite haute du satellite :

16 Q9. En A ou en P, $\overrightarrow{OA} \perp \overrightarrow{v_A}$, donc la composante en $\overrightarrow{u_r}$ est nulle, ainsi $\dot{r} = 0$;

Ou encore, en ces points, r est max donc $\dot{r} = 0$;

D'autre part, d'après les propriétés de l'ellipse, on a : $r_h + r_b = 2a$;

18 Q10. D'après la question Q7),

on sait que $E_{m,t} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

Or en A et en P, $\dot{r} = 0$, donc en ces points $E_{m,t} = 0 + \frac{L_0^2}{2mr^2} - g_0 m \frac{R_T^2}{r}$;

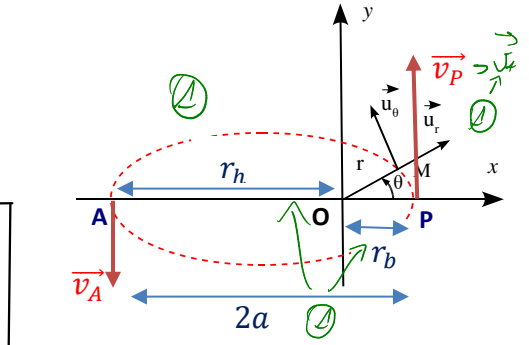
D'où : $r^2 E_{m,t} = \frac{L_0^2}{2m} - g_0 m r \frac{R_T^2}{r}$; Ou encore : $r^2 + \frac{g_0 m r R_T^2}{E_{m,t}} - \frac{L_0^2}{2mE_{m,t}} = 0$;

Par identification, il vient : $\alpha = \frac{g_0 m R_T^2}{E_{m,t}}$ et $\beta = -\frac{L_0^2}{2mE_{m,t}}$;

Pour trouver l'expression de $E_{m,t}$, il faut résoudre le polynôme du second degré trouvé précédemment.

On a $r^2 + \alpha r + \beta = 0$; $\Delta = \alpha^2 - 4\beta$; $r_{h,b} = -\frac{\alpha}{2} \pm \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$; Ainsi : $r_h + r_b = 2a = -\alpha$;

D'où : $2a = -\frac{g_0 m R_T^2}{E_{m,t}}$ et $E_{m,t} = -\frac{m g_0 R_T^2}{2a}$; CQFT.



2 Q11. Au début du transfert, le satellite est en $r_b = 8000 \text{ km}$ sur l'ellipse de transfert.

Par lecture graphique, on obtient $E_{m, \text{ellipse}} \approx -35 \text{ GJ}$ (courbe du milieu).

2 Q12. De même, on lit pour l'orbite basse, on lit : $E_{m,b} \approx -100 \text{ GJ}$ (courbe du bas).

Et pour l'orbite haute : $E_{m,h} \approx -20 \text{ GJ}$ (courbe du haut).

Rq : On retrouve les ordres de grandeurs de la question 7.

12 Q13. En P, le satellite passe de l'orbite circulaire basse : ($E_{m,b} \approx -100 \text{ GJ}$) à l'ellipse de transfert ($E_{m, \text{ellipse}} \approx -35 \text{ GJ}$), il faut donc lui fournir $\Delta E_{mp} = 65 \text{ GJ}$.

Grâce aux dimensions des grandeurs fournies, on en déduit $m_c = \frac{65 \cdot 10^9}{50 \cdot 10^6} = \frac{65000}{50}$; Soit : $m_c = 1300 \text{ kg}$.

13 Q14. Les ergols utilisés dans la fusée Ariane sont **l'oxygène et l'hydrogène liquide**.

L'orbite géostationnaire est **l'orbite circulaire dans le plan équatorial située à 36 000 km d'altitude**. Sa particularité est d'avoir une période de rotation synchrone avec la terre, soit 24h. Le satellite apparaît alors immobile pour l'observateur terrestre.

V- Chute du satellite :

14 Q15. L'énoncé nous donne la solution des questions Q5) et Q6) pour v^2 et E_m .

Sur l'orbite circulaire, on a démontré à la question Q5) que le mouvement était uniforme.

Alors $v = \frac{\text{dist}}{\text{temps}} = \frac{2\pi r}{T}$ (pour un tour) ; Soit : $v^2 = \frac{4\pi^2 r^2}{T^2} = g_0 \frac{R_T^2}{r}$, d'après l'énoncé.

Donc : $\frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{g_0 R_T^2}$; On retrouve la **3ème loi de Kepler**.

17 Q16. Théorème de la puissance mécanique : Pour un système **non conservatif** (ce qui est le cas ici), car il y a des frottements, $\frac{dE_m}{dt} = P(\vec{f}_{nc}) = \vec{f}_{nc} \cdot \vec{v}$; Ainsi ici, $\frac{dE_m}{dt} = -k v^2 = -k g_0 \frac{R_T^2}{r}$;

Or d'après l'énoncé, $E_m(t) = -\frac{m g_0 R_T^2}{2r(t)}$; Donc $\frac{dE_m}{dt} = \frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r}$

Ainsi : $\frac{m g_0 R_T^2}{2r^2(t)} \times \dot{r} = -k g_0 \frac{R_T^2}{r}$; D'où : $\dot{r} + \frac{2k}{m} r(t) = 0$; Par identification, on a $\tau = \frac{m}{2k}$;

Unité de τ : $[\tau] = \frac{kg}{[k]} = \frac{kg}{N.s.m^{-1}} = \frac{kg}{kg.m.s^{-2}.s.m^{-1}} = s$; τ est bien homogène à un temps.

Car $\vec{f} = -k \vec{v}$.

15 Q17. Solution de l'équation différentielle linéaire du 1^{er} ordre, à coefficients constants : $r(t) = A e^{-t/\tau}$;

Or CI : A $t = 0$, $r(0) = r_0 = A$; Donc : $r(t) = r_0 e^{-t/\tau}$;

Remarque : En toute rigueur, $r > R_T$ car le satellite ne peut pas pénétrer dans la terre. De plus, la valeur de k n'est pas constante : $k(r)$.

En effet, le frottement atmosphérique dépend de la densité de l'air donc de l'altitude.

