/33 E1 Chute d'une bille

/2 [1] L'expression de la poussée d'Archimède est :

$$\boxed{\vec{\Pi} \overset{1}{=} -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immerge}}\, \vec{g}} \Rightarrow \boxed{\vec{\Pi} \overset{1}{=} -\frac{4\rho_g \pi R^3}{3}\vec{g}}$$

/4 [2] On propose :

- 1 ◇ Remplir l'éprouvette graduée de glycérine à un volume connu ;
- 1 ◇ Mesurer le poids des masses dans l'air à l'aide du dynamomètre ;
- 1 ◇ Immerger les masses dans l'éprouvette, et relever le volume déplacé ainsi que la force indiquée par le dynamomètre ;
- 1 ◇ Vérifier avec les données que la différence des forces est égale à $\|\vec{\Pi}\|$.

/7 [3] On établit le système d'étude :

- 1 ◇ **Système** : {bille} dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen
- 2 ◇ **Schéma** : cf. Figure 1.
- 1 ◇ **Modélisation** : repère (O, $\vec{u_z}$), repérage : $\overrightarrow{\text{OM}} = z\,\vec{u_z}$, $\vec{v} = \dot{z}\,\vec{u_z}$, $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{u_z}$.
- ◇ **Bilan des forces :**

1 **Poids**	$\vec{P} = mg\,\vec{u_z}$
1 **Poussée d'Archimède**	$\vec{\Pi} = -\frac{4\rho_g\pi R^3}{3} g\,\vec{u_z}$
1 **Frottement fluide**	$\vec{f} = -6\pi\eta R v\,\vec{u_z}$

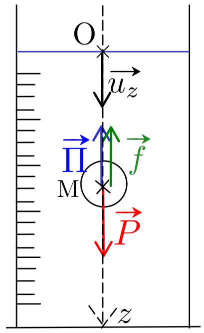

Figure 1 – Schéma

/3 [4] On a :

$$\vec{P} + \vec{\Pi} \overset{1}{=} \left(m - \frac{4\rho_g\pi R^3}{3}\right)\vec{g} \overset{1}{=} m'\vec{g} = \vec{P'}$$

$$\Leftrightarrow m' = m - \frac{4\rho_g\pi R^3}{3} \Leftrightarrow \boxed{m' \overset{1}{=} \frac{4}{3}\pi R^3 (\rho_a - \rho_g)}$$

d'où le résultat.

/6 [5] On applique le PFD à la bille :

$$\begin{aligned}
m\frac{\mathrm{d}\vec{v}}{\mathrm{d}t} &\overset{1}{=} \vec{P} + \vec{\Pi} + \vec{f} \\
\Rightarrow \rho_a \frac{4}{3}\pi R^3 \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} &\overset{1}{=} \rho\frac{4}{3}\pi R^3 g - 6\pi\eta R v \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{9\eta}{2\rho_a R^2}v &\overset{1}{=} \frac{\rho g}{\rho_a} \\
\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} \overset{1}{=} \frac{v_l}{\tau}}
\end{aligned}$$

$\cdot\,\vec{u_z}$

Forme canonique

Constantes

Ainsi, $$\boxed{\tau \overset{1}{=} \frac{2\rho_a R^2}{9\eta}} \quad \text{et} \quad v_l = \frac{\tau\rho g}{\rho_a} \overset{1}{=} \boxed{\frac{2\rho g R^2}{9\eta}}$$

/5 [6] On suppose que le régime permanent est atteint (on vérifiera *a posteriori* cette hypothèse) :

$$\boxed{v_l \overset{1}{=} \frac{\Delta z}{\Delta t}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \Delta z = 40 \times 10^{-2}\,\text{m} \\ \Delta t = 1{,}6\,\text{s} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{v_l \overset{1}{=} 0{,}25\,\text{m·s}^{-1}}$

$$\Rightarrow \boxed{\eta \overset{1}{=} \frac{2\rho g R^2}{9 v_l}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 6{,}640 \times 10^3\,\text{kg·m}^{-3} \\ g = 9{,}8\,\text{m·s}^{-2} \\ R = 5 \times 10^{-3}\,\text{m} \\ v_l = 0{,}25\,\text{m·s}^{-1} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{\eta \overset{1}{=} 1{,}45\,\text{kg·m}^{-1}\text{·s}^{-1} \overset{1}{=} 1{,}45\,\text{Pa·s}}$

/1 $\boxed{7}$ Il faut attendre d'être sûr-e que la bille ait atteint le régime permanent(1).

/3 $\boxed{8}$

$$\boxed{\tau \overset{(1)}{=} \frac{2\rho_a R^2}{9\eta}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho_a = 7900\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \\ R = 5\times10^{-3}\,\mathrm{m} \\ \eta = 1{,}45\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-1}{\cdot}s^{-1}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :}\ \underline{\tau \overset{(1)}{=} 30\times10^{-3}\,\mathrm{s}}$$

L'hypothèse de régime permanent est donc bien validée (1) car $\tau \ll \Delta t$.

/2 $\boxed{9}$ La glycérine est plus visqueuse (1) donc le régime permanent est atteint plus rapidement. Avec de l'eau ($\eta = 10^{-3}\,\mathrm{Pa{\cdot}s}$), il n'est pas sûr que la bille puisse atteindre sa vitesse limite avant la fin de la chute (1).