

# Électrocinétique : permanent et ordre 1

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont *interdites*

Au programme

Électrocinétique, résistances et sources, circuits RC et RL

## Sommaire

<b>E1</b>	Circuit de résistances . . . . .	<b>2</b>
<b>P1</b>	Alimentation d'un train . . . . .	<b>3</b>
<b>P2</b>	Étude d'une lampe de secours rechargeable . . . . .	<b>5</b>
<b>P3</b>	Guirlandes électriques . . . . .	<b>7</b>

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

### Malus

- |   |   |
|---|---|
| ◇ A : application numérique mal faite ;   | ◇ Q : question mal ou non indiquée ;            |
| ◇ N : numéro de copie manquant ;          | ◇ C : copie grand carreaux ;                    |
| ◇ P : prénom manquant ;                   | ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;              |
| ◇ E : manque d'encadrement des réponses ; | ◇ H : homogénéité non respectée ;               |
| ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;  | ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;    |
| ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;    | ◇ $\varphi$ : loi physique fondamentale brisée. |

### Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. :  $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

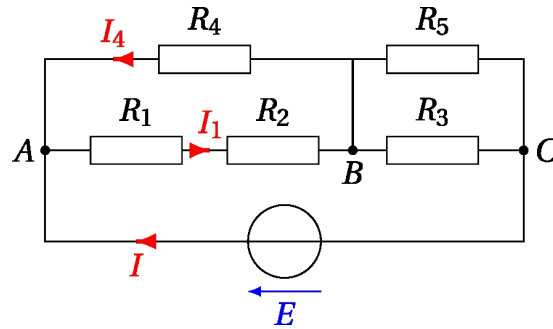
~~$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$~~

## Remarques antérieures

- 1) Inscrire dans le cadre attitré une remarque **pertinente** issue du **DS02** de l'**année précédente**.
- 2) De même avec une remarque pertinente du **DS01** de **cette année**.

### /24 E1 Circuit de résistances

On considère le circuit ci-dessous :



- 1] Comment définit-on des résistances en série ? en parallèle ? Déterminer alors, parmi les 5 résistances du circuit ci-dessus, lesquelles sont en série et en parallèle.
- 2] En considérant que toutes les résistances ont la même valeur  $R$ , exprimer en fonction de  $R$  la résistance équivalente  $R_{AB}$ .
- 3] Exprimer de même les résistances équivalentes  $R_{BC}$  et  $R_{AC}$  en fonction de  $R$ .
- 4] Exprimer les tensions  $u_{AB}$  et  $u_{CB}$  en fonction de  $E$ .
- 5] Exprimer les intensités  $I_1$  et  $I_4$  en fonction de  $I$ .

## /47 P1 Alimentation d'un train

Les trains fonctionnent maintenant quasiment tous avec des motrices équipées de moteurs électriques. On va étudier les problèmes causés par la longue distance des lignes SNCF.

Le courant est transmis à la motrice par la caténaire (ligne haute tension) via le pantographe, puis le retour du courant s'effectue par les rails.

### I/A Alimentation par une seule sous-station

On appelle sous-station le poste d'alimentation EDF délivrant une tension  $E = 1500 \text{ V}$ . Si toute la ligne SNCF était alimentée par une seule sous-station, on pourrait représenter cela par le schéma suivant, avec  $R_c$  la résistance de la caténaire,  $R_r$  celle du rail,  $M$  la motrice et  $E$  la tension d'alimentation.

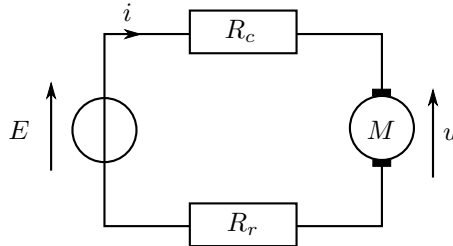


FIGURE 2.1 – Schéma électrique avec une sous-station

La résistance du rail et celle de la caténaire dépendent de la distance entre la motrice et le poste d'alimentation. On peut écrire

$$R_c = \rho_c x \quad ; \quad R_r = \rho_r x$$

avec  $x$  la distance entre la motrice et le poste d'alimentation,  $\rho_c = 30 \mu\Omega \cdot \text{m}^{-1}$  la résistance linéique de la caténaire et  $\rho_r = 20 \mu\Omega \cdot \text{m}^{-1}$  celle du rail.

La motrice peut être modélisée par un dipôle consommant une puissance constante  $P = 1,5 \text{ MW}$ . On note  $u$  la tension aux bornes de la motrice et  $i$  le courant la traversant.

- 1 Exprimer  $u$  en fonction de  $i$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $E$  et  $x$ . La motrice est un dipôle à caractère récepteur. Définir ce terme.
- 2 Montrer que l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par  $u$  s'écrit

$$u^2 - Eu + (\rho_c + \rho_r)xP = 0 \quad (2.1)$$

- 3 Donner les solutions réelles possibles de cette équation. Par un argument sur l'évolution de  $u$  en fonction de  $x$ , déterminer alors laquelle des deux solutions convient. Donner un encadrement du discriminant  $\Delta$ . En déduire un encadrement de  $u$ .
- 4 Déterminer l'expression  $x_{max}$  de  $x$  telle que  $u$  soit minimale. Exprimer  $u_{min}$  la valeur minimale de  $u$ . Faire les applications numériques.

### I/B Transformation Thévenin/Norton

On veut montrer qu'un générateur de Thévenin de f.e.m.  $e_{th}$  et de résistance  $r_{th}$  est équivalent à un générateur de Norton de c.e.m.  $\eta$  et de résistance  $r_N$ .

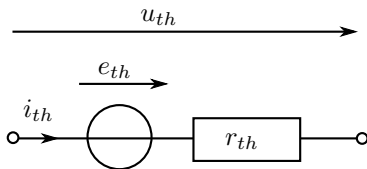


FIGURE 2.2 – Générateur de Thévenin

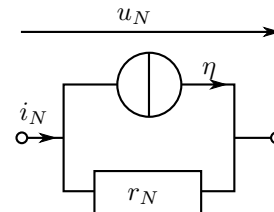


FIGURE 2.3 – Générateur de Norton

- 5 Pour le générateur de Thévenin, établir l'expression de  $u_{th}$  en fonction de  $i_{th}$ ,  $e_{th}$  et  $r_{th}$ . Tracer la caractéristique tension/courant correspondante.
- 6 Pour le générateur de Norton, établir l'expression de  $u_N$  en fonction de  $i_N$ ,  $\eta$  et  $r_N$ . Tracer la caractéristique tension/courant correspondante,  $u_N$  en fonction de  $i_N$ .
- 7 Déterminer les expressions de  $\eta$  et  $r_N$  en fonction de  $e_{th}$  et  $r_{th}$  afin que les deux générateurs soient équivalents.

## I/C Alimentation par plusieurs sous-stations

Afin d'alimenter la motrice sur de longues distances, on répartit des sous-stations tout le long de la ligne SNCF. Les sous-stations sont espacées entre elles d'une distance  $L$ . Le schéma équivalent est le suivant

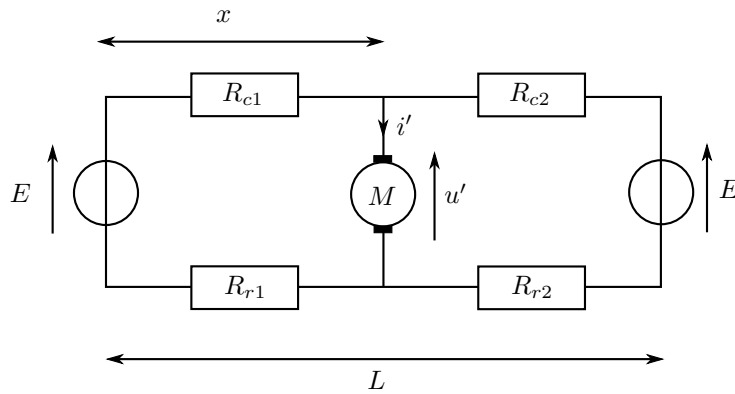


FIGURE 2.4 – Schéma électrique avec deux sous-stations

On note  $x$  la distance entre la sous-station de gauche et la motrice,  $R_{c1}$  la résistance de la caténaire et  $R_{r1}$  celle des rails entre la sous-station de gauche et la motrice,  $R_{c2}$  la résistance de la caténaire et  $R_{r2}$  celle des rails entre la sous-station de droite et la motrice.

On note  $u'$  la tension aux bornes de la motrice et  $i'$  le courant la traversant.

- 8 Exprimer les résistances  $R_{c1}$ ,  $R_{c2}$ ,  $R_{r1}$  et  $R_{r2}$  en fonction de  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $L$  et  $x$ .
- 9 En utilisant les résultats de la question 8, exprimer les courants  $\eta_1$  et  $\eta_2$ , ainsi que les résistances  $R_1$  et  $R_2$  en fonction de  $E$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $x$  et  $L$  pour que le schéma de la figure 2.5 soit équivalent à celui de la figure 2.4.

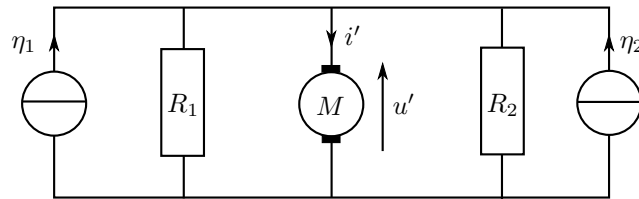


FIGURE 2.5 – Schéma équivalent n°1

- 10 Le schéma précédent est équivalent aux schémas ci-dessous. Donner alors les expressions de  $\eta_3$  et  $R_3$ , puis  $E'$  et  $R_4$  en fonction de  $E$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $x$  et  $L$ .

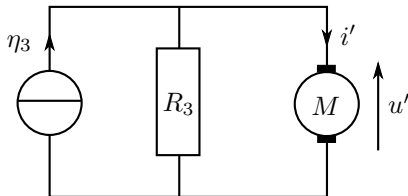


FIGURE 2.6 – Schéma équivalent n°2

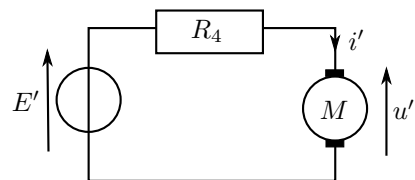


FIGURE 2.7 – Schéma équivalent n°3

- 11 En utilisant l'équation (2.1), exprimer l'équation polynomiale de degré 2 vérifiée par  $u'$  en fonction de  $P$ ,  $\rho_c$ ,  $\rho_r$ ,  $E$ ,  $L$  et  $x$ .
- 12 Quelle est l'équation polynomiale vérifiée par  $x$  pour que  $u'$  soit minimale ?
- 13 Déterminer l'expression de  $L$  telle que  $u'$  soit minimale en  $x = L/2$ . Faire l'application numérique.

## /66 P2 Étude d'une lampe de secours rechargeable

Il est recommandé d'avoir sur soi une lampe pour être vu en cas de détresse ou tout simplement pour se déplacer par nuit noire. Pour ne pas avoir à gérer des piles défaillantes ou des accumulateurs non chargés, une « lampe à secouer » peut s'avérer utile. Un extrait d'une description publicitaire de cet objet est rapporté ci-dessous.

## Extrait d'une publicité pour une lampe à secouer

En secouant la lampe 30 secondes (un peu comme une bombe de peinture), de l'énergie électrique est produite et stockée dans un condensateur. Vous obtenez alors environ 20 minutes d'une lumière produite par une DEL (diode électroluminescente).

Si vous n'utilisez pas toute l'énergie produite, elle restera stockée dans le condensateur pendant plusieurs semaines pour être ensuite immédiatement disponible sur simple pression du bouton marche/arrêt.

On part d'une situation où on suppose que le condensateur vient d'être chargé et que la tension à ses bornes est  $U_0 = 3,3 \text{ V}$ . On cesse alors d'agiter la lampe et donc de recharger le condensateur.

Tout d'abord, on étudie la décharge de ce condensateur de capacité  $C = 10 \text{ F}$  (« supercondensateur ») dans un conducteur ohmique de résistance  $R$  pouvant modéliser une lampe à incandescence. Le circuit étudié est donc représenté par le schéma de la figure 2.8. La partie de circuit utile lors de la phase de charge du condensateur n'est pas représentée.

À l'instant initial  $t = 0 \text{ s}$ , on ferme l'interrupteur  $K$  et la décharge commence.

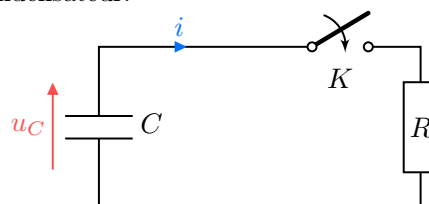


FIGURE 2.8 – Circuit électrique équivalent lors de la phase de décharge du condensateur

- 1 Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u_c(t)$  pendant la décharge en faisant apparaître une constante de temps  $\tau$  dont on donnera l'expression. Puis déterminer l'expression littérale de la solution de cette équation différentielle.
- 2 Si l'on considère que la décharge s'effectue en 20 minutes (comme précisé dans le document fourni), déterminer la valeur de la résistance  $R$  du conducteur ohmique qu'il faut alors associer au condensateur de capacité  $C = 10 \text{ F}$ .

Certains modèles électriques plus élaborés du « supercondensateur » utilisé ici permettent de traduire, plus fidèlement à la réalité, son comportement réel dans un circuit. Un des modèles possibles fait apparaître, autour de la capacité  $C$ , une résistance  $R_f$  en parallèle et une résistance série  $R_s$  conformément au schéma de la figure 2.9.

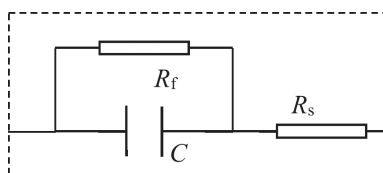


FIGURE 2.9 – Modèle plus fidèle à la réalité pour le « supercondensateur »

- 3 Pour quelles valeurs limites de  $R_s$  et  $R_f$  retrouve-t-on le modèle simple ( $C$  seul) du « supercondensateur » ?

Pour la suite des questions, on revient au modèle simple ( $C$  seul) pour le condensateur, toujours initialement chargé sous une tension  $U_0 = 3,3 \text{ V}$ .

On remplace maintenant le conducteur ohmique de résistance  $R$  par une DEL dont les caractéristiques sont les suivantes (Figure 2.10 et Tableau 2.1) :

TABLEAU 2.1 – Electrical & Optical Characteristics

Parameter	Symbol	Condition	Min.	Typ.	Max.	Unit
Luminous Flux	$\Phi_V$	$i = 200 \text{ mA}$	6	8.5	—	lm
Forward Voltage	$u_d$	$i = 200 \text{ mA}$	—	2.5	2.8	V
D.C. Forward Current Max	$i_M$	—	—	—	250	mA
Peak Wavelength	$\lambda_p$	$i = 200 \text{ mA}$	—	635	—	nm
Dominant Wavelength	$\lambda_d$	$i = 200 \text{ mA}$	—	624	—	nm
Reverse Current	$i_r$	$u_r = 5 \text{ V}$	—	—	50	$\mu\text{A}$
Viewing angle	$2\Phi_{1/2}$	$i = 200 \text{ mA}$	—	120	—	deg
Spectrum Line Halfwidth	$\Delta\lambda$	$i = 200 \text{ mA}$	—	20	—	nm

Pour cette diode, on appelle tension seuil, notée  $U_S$  la tension minimale au-delà de laquelle la diode devient passante. On convient alors que la diode électroluminescente cesse d'émettre suffisamment de lumière dès que  $u_d < U_S + 0,1 \text{ V}$ .

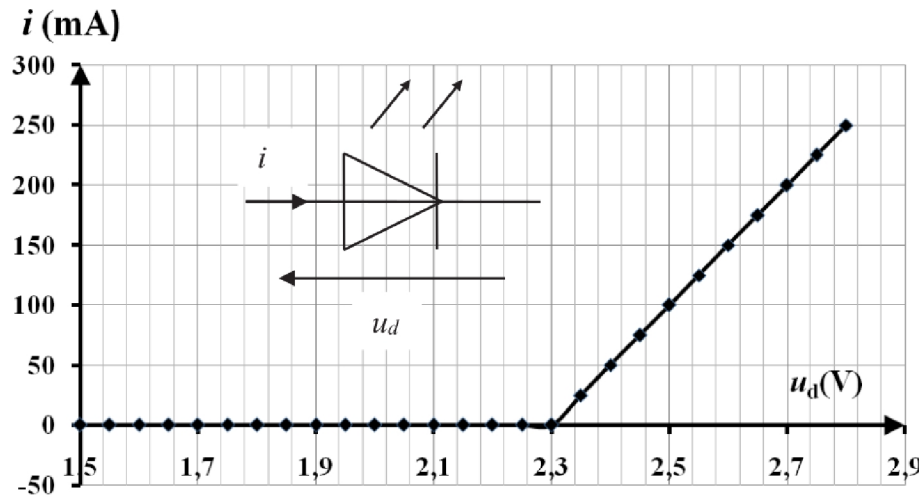


FIGURE 2.10 – Caractéristique  $i = f(u_d)$  et symbole pour la diode électroluminescente DEL.

- 4 Par quel dipôle peut-on modéliser la DEL lorsqu'elle est bloquée ( $u_d < 2,3$  V) ? D'autre part, lorsqu'elle est passante ( $u_d > 2,3$  V), déterminer l'équation de la caractéristique  $i(u_d)$  en donnant les valeurs numériques. Proposer alors un modèle électrique équivalent sous forme d'un générateur de THÉVENIN. On fera le schéma électrique correspondant en précisant bien les sens de l'intensité de la tension  $u_d$ .
- 5 Faire le schéma électrique de la DEL modélisée et insérée dans le circuit précédent. Puis, montrer que la nouvelle équation différentielle régissant l'évolution de  $u_c(t)$  lorsque le condensateur se décharge dans la diode électroluminescente est  $\frac{du_c}{dt} + \frac{u_c(t)}{\tau'} = \frac{U_S}{\tau'}$ . Préciser l'expression de  $\tau'$ .
- 6 Déterminer la solution  $u_c(t)$  de cette nouvelle équation différentielle, avec les mêmes conditions initiales que précédemment, puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants du graphe (valeur et tangente à l'origine ainsi qu'une asymptote éventuelle).
- 7 Déterminer l'expression littérale de  $i(t)$ , puis représenter graphiquement l'allure de son évolution en fonction du temps, en mettant en évidence les points importants.
- 8 À l'aide des caractéristiques techniques fournies dans le Tableau 2.1, indiquer si le fonctionnement correct de la DEL est garanti sans dommage. Proposer une solution pour éventuellement remédier au problème rencontré.
- 9 Prévoir, sans la mise en œuvre de la solution précédente, la durée approximative d'éclairage de cette lampe notée  $T$  (on rappelle que  $\ln(10) \approx 2,3$ ). Conclure.
- 10 Exprimer, en fonction de  $U_0$  et de  $U_f = U_S + 0,1$  V, le pourcentage d'énergie restante dans le condensateur lorsque la DEL cesse d'émettre de la lumière par rapport à l'énergie initiale accumulée (on ne cherche pas à la calculer, mais on estime ici ce pourcentage à environ 50 %).

/71

## P3 Guirlandes électriques

Dans ce problème, on cherche à optimiser l'alimentation électrique d'un système comportant deux guirlande électriques  $G_1$  et  $G_2$ , chacune étant modélisée par un conducteur ohmique de résistance identique  $R_1 = R_2 = R$ .

La première guirlande est dédiée à un fonctionnement continu. La seconde est associée avec un interrupteur  $S$  en série qui bascule de manière périodique afin de produire un clignotement.

On supposera dans ce problème que la puissance lumineuse fournie par ces guirlandes est proportionnelle à la puissance électrique qu'elles reçoivent.

### III/A Système de base

On considère dans un premier temps le circuit ci-contre alimenté par un générateur réel de f.e.m.  $E$  et de résistance interne  $r$ . **Les expressions demandées ne feront intervenir que  $E, r$  et  $R$ .**

On considère que l'interrupteur  $S$  est ouvert (Figure 2.11).

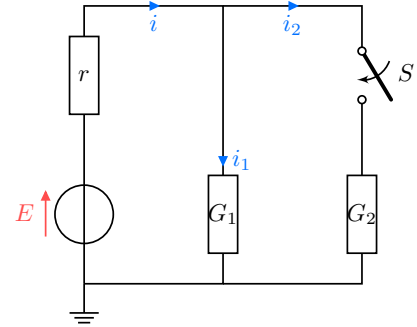


FIGURE 2.11

- 1 Quelle est la puissance reçue  $\mathcal{P}_{2,o}$  par la seconde guirlande  $G_2$  ?
- 2 Établir l'expression du courant  $i_o$  passant à travers le générateur. En déduire que la puissance électrique  $\mathcal{P}_{1,o}$  reçue par la guirlande  $G_1$  s'exprime :

$$\mathcal{P}_{1,o} = R \left( \frac{E}{r + R} \right)^2$$

On considère désormais que l'interrupteur  $S$  est fermé.

- 3 Établir l'expression du courant  $i_f$  passant à travers le générateur.
- 4 À l'aide d'un pont diviseur de courant, déterminer les expressions de  $i_{1,f}$  et  $i_{2,f}$ .
- 5 En déduire que les puissances  $\mathcal{P}_{1,f}$  et  $\mathcal{P}_{2,f}$  reçues par les deux guirlandes s'expriment :

$$\mathcal{P}_{1,f} = \mathcal{P}_{2,f} = R \left( \frac{E}{2r + R} \right)^2$$

Comparaisons des 2 situations.

- 6 La puissance reçue par la première guirlande est-elle identique dans les deux situations étudiées ( $S$  ouvert et fermé) ? Sachant qu'elle ne doit pas clignoter, est-ce un problème ? Expliquer.
- 7 Comment doit-on choisir  $r$  par rapport à  $R$  pour limiter le problème ? Cette condition est-elle vérifiée pour  $r = R = 1 \Omega$  ?

### III/B Système amélioré

On considère maintenant le circuit ci-dessous afin de limiter la variation de puissance électrique reçue par la première guirlande, donc la variation du courant  $i_1$ .

Une bobine d'inductance  $L$  a donc été ajoutée en série avec la première guirlande. L'interrupteur  $S$  est ouvert de manière périodique pour  $t \in [0; \frac{T}{2}[$  et fermé pour  $t \in [\frac{T}{2}; T[$ .

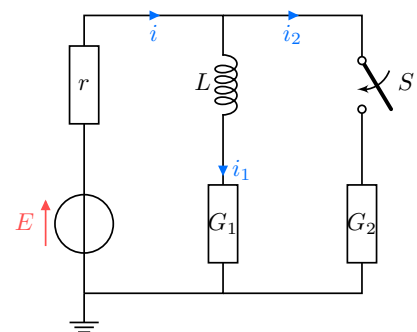


FIGURE 2.12

- 8 En régime stationnaire (permanent continu), donner le schéma équivalent du nouveau montage.

On se place juste avant la fermeture de l'interrupteur, c'est-à-dire en  $t = \frac{T}{2}^-$ , et on admet que le régime stationnaire a été atteint.

- 9 Déterminer la valeur de  $i_1\left(\frac{T}{2}^-\right)$ . En déduire la valeur de  $i_1\left(\frac{T}{2}^+\right)$ .

- 10 Déterminer les valeurs de  $i_2\left(\frac{T}{2}^-\right)$  et  $i_2\left(\frac{T}{2}^+\right)$ .

On considère l'intervalle  $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ , lorsque l'interrupteur est ouvert.

- 11 Établir l'équation différentielle dont  $i_1$  est solution sur l'intervalle  $\left[0; \frac{T}{2}\right]$ . On fera apparaître un temps caractéristique  $\tau_o$  en fonction de  $L$ ,  $r$  et  $R$ .

On s'intéresse maintenant à l'intervalle  $\left[\frac{T}{2}; T\right]$ , lorsque l'interrupteur est fermé.

- 12 Montrer que  $i_1$  est solution de l'équation différentielle suivante :

$$\frac{di_1}{dt} + \frac{i_1}{\tau_f} = \frac{E}{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)} \quad \text{avec} \quad \tau_f = \frac{L\left(1 + \frac{r}{R}\right)}{2r + R}$$

- 13 Donner la forme **générale**  $i_1(t)$  de la solution de cette équation différentielle.

- 14 Montrer alors, par calcul de la constante d'intégration, que  $i_1(t)$  s'écrit

$$i_1(t) = \frac{E}{(r + R)(2r + R)} \left( re^{\left(\frac{T}{2} - t\right)/\tau_f} + r + R \right)$$

On étudie expérimentalement les variations du courant  $i_1(t)$  en mesurant la tension aux bornes de la guirlande  $G_1$  à l'aide d'un oscilloscope et on obtient le résultat suivant (Figure 2.13) pour deux valeurs différentes de l'inductance  $L$ . La résistance  $R$  vaut  $2\Omega$  et la résistance  $r$  vaut  $1\Omega$ .

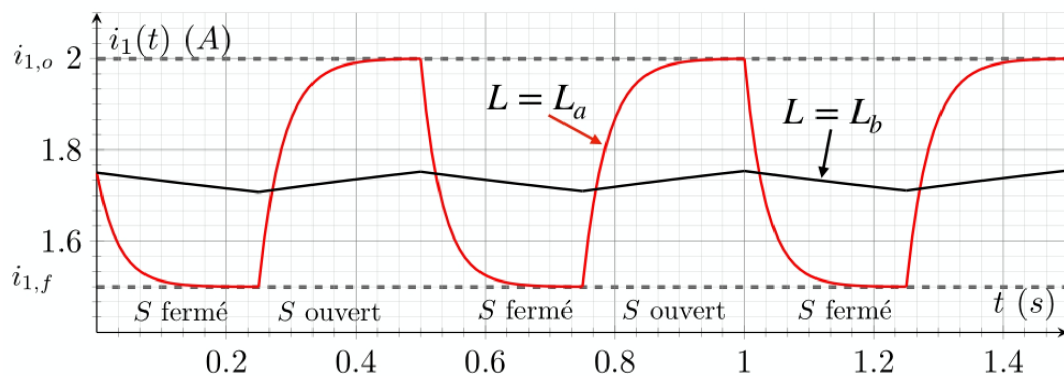


FIGURE 2.13

- 15 Parmi les deux bobines d'inductance  $L_a$  et  $L_b$ , laquelle permet d'atteindre le régime stationnaire mentionné dans les questions 8 à 10 ?
- 16 Retrouver, par lecture graphique, la valeur de  $L_a$ . Reproduire sommairement sur votre copie la Figure ?? et indiquer la construction à effectuer.
- 17 Justifiez que  $L_b \gg L_a$ , sans chercher à déterminer sa valeur.
- 18 Quelle est la valeur de l'inductance à retenir parmi  $L_a$  et  $L_b$  pour minimiser les variations de puissance reçue par la première guirlande ?