

## Correction du DS

## /20 E1 Oscillations d'un métronome

/2 1 Plus  $x$  augmente et plus  $J$  augmente ①, ce qui est normal puisque le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est répartie loin de l'axe. ①

/8 2 ♦ **Système** : {métronome} = {disque+tige+curseur} de moment d'inertie  $J_z$  ;

♦ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen ; ①

♦ **Repère** : cylindrique  $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$  ;

♦ **Repérage** :  $\vec{OC} = \ell \vec{u}_r$  et  $\vec{OA} = -x \vec{u}_r$ . ①

Les actions qui s'exercent sur le métronome sont :

♦ poids du disque  $\vec{P}_C = M\vec{g}$  dont le moment est  $\mathcal{M}_z(\vec{P}_C) = -Mg\ell \sin \theta$  ; ①

♦ poids du curseur  $\vec{P}_A = m\vec{g}$  dont le moment est  $\mathcal{M}_z(\vec{P}_A) = +mgx \sin \theta$  ; ①

♦ liaison pivot parfaite dont le moment par rapport à l'axe  $Oz$  est nul. ①

♦ De plus,  $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = J\dot{\theta}$ . ①

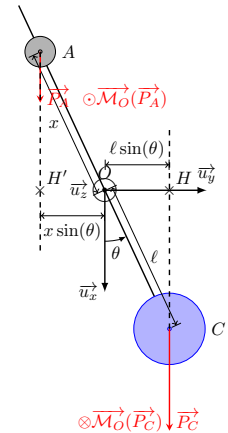


FIGURE 7.1 – Schéma

/2 3 On applique la loi du moment cinétique dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{F}_{\text{ext}}) \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = mgx \sin \theta - Mg\ell \sin \theta \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J} \sin \theta = 0$$

/4 4 Si les oscillations sont petites, alors  $\sin \theta \approx \theta$ , donc on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J} \theta = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0$$

$$\Rightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{Mg\ell - mgx}{J}} \Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{J}{Mg\ell - mgx}} \Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2}{Mg\ell - mgx}}$$

/2 5 Cela correspond à 50 périodes par minute ①, donc

$$T_0 = \frac{60 \text{ s} \cdot \text{min}^{-1}}{50 \text{ périodes} \cdot \text{min}^{-1}} = 1,2 \text{ s} \cdot \text{période}^{-1} \text{ ①}$$

/2 6 Pour augmenter la fréquence, il faut diminuer  $T_0$ , ① donc diminuer son numérateur et augmenter son dénominateur, ce qui revient dans les 2 cas à diminuer  $x$ . ①

## /50 E2 Satellite en orbite terrestre (D'après TSI 2010)

## II/A Etude dynamique

/5 1 Le référentiel géocentrique est lié au repère dont le centre est le centre de masse ① de la Terre et dont les axes pointent vers trois étoiles fixes lointaines. ①

Un référentiel terrestre est lié au repère dont le centre est un point à la surface de la Terre ① et dont les axes sont solidaires à la Terre, donc en rotation par rapport à l'axe des pôles fixe ① dans le référentiel géocentrique.

On étudie le mouvement du satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen. ①

- /4 [2] La force d'interaction gravitationnelle exercée par la Terre sur le satellite est

$$\vec{F} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

où  $\vec{e}_r$  est le vecteur unitaire dirigé du centre de la Terre  $O$  vers le centre du satellite  $M$ .  $\textcircled{1}$

D'après le principe des actions réciproques (troisième loi de NEWTON  $\textcircled{1}$ ), on a :

$$\vec{F}' \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\vec{F} = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

- /7 [3] On se place dans le référentiel géocentrique. La seule force exercée par le satellite est la force  $\vec{F}$ .  $\textcircled{1}$  Elle est centrale de centre  $O$ , ainsi, son moment par rapport à  $O$  est nul :  $\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{OM} \wedge \vec{F} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{0}$ .

D'après le théorème du moment cinétique par rapport au point  $O$ , on a

$$\begin{aligned} \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O(M)}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= \vec{0} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_O(M) \stackrel{\textcircled{1}}{=} \text{cte} = \mathcal{L}_0 \vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{OM}(t) \wedge m\vec{v}_M(t) &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{L}_0 \vec{u}_z = \vec{OM}(0) \wedge m\vec{v}_M(0) \end{aligned}$$

avec  $\vec{u}_z$  la direction initiale du moment cinétique. Ainsi, le vecteur  $\vec{OM}$  reste constamment perpendiculaire à un vecteur constant, donc le mouvement est plan et le plan du mouvement passe par le centre de force  $O$ . En l'occurrence, le plan est  $(O, \vec{OM}_0, \vec{v}_0)$ .  $\textcircled{1}$

- /4 [4]

$$\vec{OM} = r \vec{e}_r \quad \vec{v} = r\dot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \vec{a} = -r\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + r\ddot{\theta} \vec{e}_\theta \quad \textcircled{1}$$

D'après le PFD appliqué au satellite dans le référentiel géocentrique supposé galiléen, on a :

$$m\vec{a} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{F} \Rightarrow -mr\dot{\theta}^2 \vec{e}_r + rm\ddot{\theta} \vec{e}_\theta = -\frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \vec{e}_r$$

Sur  $\vec{e}_\theta \Rightarrow$

$$\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$$

donc  $\|\vec{v}\| = |r\dot{\theta}|$  uniforme  $\textcircled{1}$

Sur  $\vec{e}_r \Rightarrow$

$$mr\dot{\theta}^2 = \frac{\mathcal{G}mM_T}{r^2} \Rightarrow r\frac{v^2}{r^2} = \frac{\mathcal{G}M_T}{r^2} \Rightarrow v \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}$$

- /2 [5] On a

$$T \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2\pi r}{v} = \frac{2\pi r}{\sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{r}}} = 2\pi \sqrt{\frac{r^3}{\mathcal{G}M_T}} \Leftrightarrow \frac{T^2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} 4\pi^2}{r^3} = \frac{\mathcal{G}M_T}{\mathcal{G}M_T}$$

ce qui correspond à la traduction mathématique de la troisième loi énoncée par KEPLER.

- /3 [6] On peut, à partir de la trajectoire d'un satellite naturel ou artificiel connaître  $r$  et  $T$ , on en déduit alors  $M_T$  en utilisant la 3ème loi de KEPLER  $\textcircled{1}$ . Mieux, on peut relever  $r$  et  $T$  pour différents satellites, et tracer  $T^2$  en fonction de  $r^3$ . On obtient alors une droite de pente  $\frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_T}$ , ce qui permet d'en déduire  $M_T$  (en supposant  $\mathcal{G}$  connu!).

Pour le cas de la lune :  $T = 28$  jours et  $r = 384 \times 10^6$  m  $\textcircled{1}$ . On en déduit la masse de la Terre :  $M_T = 6,10 \times 10^{24}$  kg.  $\textcircled{1}$

- /3 [7] Si les deux satellites sont à la même distance de la terre, ils ont la même vitesse.  $\textcircled{1}$  Si de plus ils sont dans un même plan, alors ils ont des trajectoires identiques,  $\textcircled{1}$  parcourues à la même vitesse : ils ne peuvent pas se heurter (sauf si leurs vitesses sont opposées).  $\textcircled{1}$

## II/B Étude énergétique

- /4 [8]

$$\delta W \stackrel{\textcircled{1}}{=} \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} \vec{e}_r \cdot (dr \vec{e}_r + r d\theta \vec{e}_\theta + dz \vec{e}_z) = -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r^2} dr = -d \left( \frac{\mathcal{G}M_T m}{r} + C \right)$$

Ainsi, le travail élémentaire de la force  $\vec{F}$  peut se mettre sous la forme  $-d\mathcal{E}_p$ , donc elle est conservative et dérive de l'énergie  $\mathcal{E}_p(r) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\mathcal{G}M_T m}{r} + C$ . En choisissant  $\mathcal{E}_p(+\infty) \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0$ , on a  $C = 0$ , et on en déduit

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r} \quad \text{avec} \quad k \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{G}M_T m$$

/10 [9]

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \stackrel{\text{TEM}}{=} 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \quad (1)$$

$$\text{Or} \quad \vec{OM} = r \vec{e}_r \Rightarrow \vec{v} = \dot{r} \vec{e}_r + r \dot{\theta} \vec{e}_\theta$$

$$\Rightarrow v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2} m r^2 \dot{\theta}^2}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}} - \frac{k}{r}$$

$$\text{or} \quad \dot{\theta} = C/r^2 \quad \text{d'où}$$

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}$$

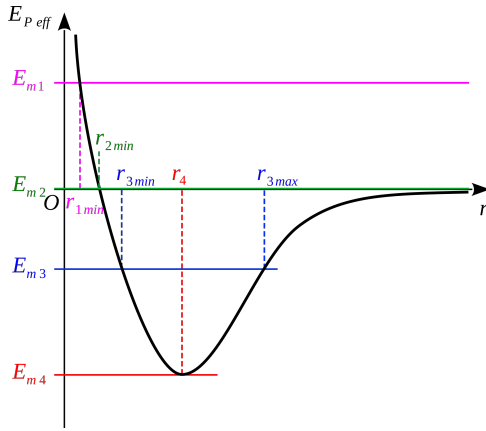


FIGURE 7.2 – Graphique de  $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$  (2)

On en déduit donc : (2)

- ◇ Si  $\mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,4}$ , aucun mouvement n'est possible
- ◇ Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,4}$ , alors  $r = r_4$  est constant : la trajectoire est circulaire (état lié)
- ◇ Si  $\mathcal{E}_{m,4} < \mathcal{E}_m < \mathcal{E}_{m,2} = 0$ ,  $r$  est compris entre 2 valeurs  $r_{3,\text{min}}$  et  $r_{3,\text{max}}$  : mouvement elliptique (état lié)
- ◇ Si  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{m,2} = 0$ , le satellite peut partir à l'infini mais sa vitesse à l'infini est nulle : le mouvement est parabolique (état de diffusion)
- ◇ Si  $\mathcal{E}_m > 0$  : le mouvement est hyperbolique (état de diffusion)

$$\diamond \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2}, \text{ et tend donc vers } \infty. \quad (1)$$

$$\diamond \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) \underset{r \rightarrow +\infty}{\sim} -\frac{k}{r}, \text{ et tend donc vers } 0^- \text{ (donc par valeurs négatives)}. \quad (1)$$

$$\diamond \text{ De plus, } \mathcal{E}_m = \text{cte} = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) > \mathcal{E}_{p,\text{eff}}, \text{ donc les régions accessibles sont celles pour lesquelles } \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) < \mathcal{E}_m. \quad (1)$$

/5 [10]

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m v^2 - \frac{\mathcal{G} M_T m}{r_c}$$

$$\text{Or, } v = \sqrt{\frac{\mathcal{G} M_T}{r_c}} \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2} \frac{\mathcal{G} M_T m}{r_c} - \frac{\mathcal{G} M_T m}{r_c} \Leftrightarrow \mathcal{E}_m \stackrel{(1)}{=} -\frac{1}{2} \frac{\mathcal{G} M_T m}{r_c}$$

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** autour de la Terre, à un rayon  $R_T$  : (1)

$$\mathcal{E}_{m,\text{sol}} \stackrel{(1)}{=} \frac{1}{2} m v_c^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{R_T} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{cercle}} \stackrel{(1)}{=} -\mathcal{G} \frac{m M_T}{2 R_T}$$

$$\text{Or système conservatif après le lancer} \Rightarrow \frac{1}{2} m v_c^2 - \mathcal{G} \frac{m M_T}{R_T} = -\mathcal{G} \frac{m M_T}{2 R_T}$$

$$\Leftrightarrow v_c \stackrel{(1)}{=} \sqrt{\frac{\mathcal{G} m_T}{R_T}}$$

/32×1,5

## P1 Rotation d'un œuf dur (D'après TPC CCP 2018)

/2 [1] Comme  $b > a$ , on a  $J_H > J_V$ . (1) En effet, la masse est globalement répartie plus loin de l'axe de rotation, (1) donc le moment d'inertie est plus grand.

/2 [2] Dans les deux cas,  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \frac{1}{2} J \Omega^2 + m g z_G$ , (1) on a donc

$$\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2} J_H \Omega^2 + m g a \quad (1) \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m_V} = \frac{1}{2} J_V \Omega^2 + m g b$$

/3 [3] On cherche la condition sur  $\Omega$  pour avoir  $\mathcal{E}_{m_V} \stackrel{(1)}{<} \mathcal{E}_{m_H}$ , ce qui équivaut à :

$$\frac{1}{2} J_V \Omega^2 + m g b < \frac{1}{2} J_H \Omega^2 + m g a \Leftrightarrow 2 m g (b - a) < (J_H - J_V) \Omega^2$$

$$\Leftrightarrow 2mg(b-a) \stackrel{\textcircled{1}}{<} \frac{m}{5} \underbrace{(b^2 - a^2)}_{(a-b)(a+b)} \Omega^2 \Leftrightarrow \Omega > \boxed{\Omega_c \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{\frac{10g}{a+b}}}$$

/2 [4] L'application numérique donne  $\Omega_c = 45 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1} \textcircled{1}$ , soit environ 7 tour/s. Cette valeur est du bon ordre de grandeur puisqu'on nous parle dans le document d'une vitesse de rotation d'une dizaine de tours par seconde.  $\textcircled{1}$

/3 [5] À l'état initial, on a

$$\mathcal{E}_{m_H} = \frac{1}{2} J_H \Omega_0^2 + mga \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{10} (a^2 + b^2) (\Omega_c + \varepsilon)^2 + mga$$

soit au premier ordre en  $\varepsilon$  (DL1) :

$$\boxed{\mathcal{E}_{m_H} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{10} (a^2 + b^2) (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon) + mga} \quad \text{et} \quad \boxed{\mathcal{E}_{m_V} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} a^2 (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon r) + mgb}$$

/7 [6]

$$\mathcal{E}_{m_H} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{E}_{m_V} \Rightarrow \frac{m}{5} a^2 (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon r) + mgb = \frac{m}{10} (a^2 + b^2) (\Omega_c^2 + 2\Omega_c \varepsilon) + mga \quad (1)$$

$$\text{Or, [3]} \Rightarrow \frac{m}{5} a^2 \Omega_c^2 + mgb \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{10} (a^2 + b^2) \Omega_c^2 + mga \quad (2)$$

$$\Rightarrow \frac{m}{10} (a^2 + b^2) 2\Omega_c \varepsilon \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} a^2 2\Omega_c r \varepsilon \quad (3) = (1) - (2)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{r \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{a^2 + b^2}{2a^2}}$$

$b > a$  donc  $r > 1$  donc  $\Omega_f > \Omega_0$ .  $\textcircled{1}$  Lors de son redressement, la vitesse de rotation de l'oeuf augmente.

Dans le cas où  $a = b$ , c'est-à-dire dans le cas d'un oeuf sphérique, on retrouve  $r = 1$   $\textcircled{1}$  puisque le système reste inchangé (dans ce cas, on ne peut même plus parler de redressement), donc sa vitesse de rotation ne varie pas.  $\textcircled{1}$

/4 [7]

$$\boxed{\mathcal{L}_H = J_H \Omega_0 = \frac{m}{5} (a^2 + b^2) (\Omega_c + \varepsilon)} \quad \stackrel{\textcircled{1}}{\text{et}} \quad \boxed{\mathcal{L}_V = J_V \Omega_f = \frac{2m}{5} a^2 (\Omega_c + r\varepsilon)}$$

$$\Rightarrow \Delta \mathcal{L} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} (a^2 - b^2) \Omega_c + \frac{m}{5} (2a^2 r - a^2 - b^2) \varepsilon$$

$$r = \frac{a^2 + b^2}{2a^2} \Rightarrow$$

$$\boxed{\Delta \mathcal{L} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} (a^2 - b^2) \Omega_c < 0}$$

Le moment cinétique de l'oeuf a diminué lors de son redressement.  $\textcircled{1}$

/5 [8] D'après le théorème du moment cinétique, on peut écrire  $\frac{d\mathcal{L}}{dt} = \Gamma_z$ .  $\textcircled{1}$  En supposant que le redressement est de courte durée, on peut approcher  $\frac{d\mathcal{L}}{dt}$  par  $\frac{\Delta \mathcal{L}}{\Delta t}$ , on a donc

$$\Gamma_z = \frac{m}{5} (a^2 - b^2 - 2) \frac{\Omega_c}{\Delta t} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{m}{5} (a^2 - b^2 - 2) \frac{\Omega_c^2}{\Omega_c \Delta t}$$

On injecte l'expression de  $\Omega_c$  obtenue à la question [3] :

$$\boxed{\Gamma_z = \frac{m}{5} (a^2 - b^2) \frac{10g}{(a+b)\Omega_c \Delta t} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \frac{2mg(a-b)}{\Omega_c \Delta t}}$$

Ce couple est négatif,  $\textcircled{1}$  ce qui est cohérent avec le fait que le moment cinétique de l'oeuf ait diminué pendant le redressement.  $\textcircled{1}$

/4 [9] Le poids et la réaction normale ne peuvent  $\textcircled{1}$  pas être responsable d'un tel couple car ces deux forces sont parallèles à l'axe de rotation, donc leur moment par rapport à cet axe est nul  $\textcircled{1}$ . Ce couple peut éventuellement provenir des frottements,  $\textcircled{1}$  car on nous dit dans le document qu'il faut que la surface ne soit « pas trop lisse ». Cependant, cela contredit l'hypothèse de l'énergie mécanique constante.  $\textcircled{1}$

**/64 P2 Satellites de télécommunication (D'après Mines-Ponts MP 2007)****II/A Couverture d'un réseau de satellite**

- /9 [1] Dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen ① on ne prend en compte que la force de gravitation exercée par la Terre  $\vec{F} = -\frac{k}{r^2}\vec{e}_r$  avec  $k = \mathcal{G}M_T M_S$ . On a de plus  $r = R_T + h$ . On peut ainsi appliquer le PFD  $m\vec{a} = \vec{F}$  au satellite dans le repère polaire  $O, \vec{e}_r, \vec{e}_z$  : ①

$$\begin{aligned} -M_S r \dot{\theta}^2 &= -\frac{k}{r^2} & \text{①} \\ M_S r \ddot{\theta} &= 0 & \text{①} \end{aligned}$$

De la deuxième équation, on obtient  $\dot{\theta} = cte \Rightarrow v = r\dot{\theta} = cte$ . ① On peut ainsi ré-exprimer l'accélération radiale  $a_r = -v^2/r$  d'où :

$$M_S \frac{v^2}{r} = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}} \quad \text{①}$$

De plus, on sait que  $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \frac{T^2}{(R_T + h)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T}$ . On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler. Les A.N.s donnent  $T = 6,07 \times 10^2 \text{ s}$  et  $v = 7,46 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$ . ①

- /2 [2] L'énergie potentielle a pour expression  $\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r}$ . On a  $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = M_S v^2 - \frac{GM_T M_S}{r} = M_S \left( \frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T}{r} \right) = 0$  d'où le résultat.

- /5 [3] Il convient pour cela d'établir l'expression de l'angle  $\varphi$  tel que  $\cos(\varphi) = R_T/(R_T + h)$ . ① La vitesse du satellite étant uniforme, on en déduit  $\tau = \frac{2\varphi}{2\pi} T$  soit au final :

$$\tau = 2 \arccos \frac{R_T}{R_T + h} \sqrt{\frac{(R_T + h)^3}{GM_T}} = f(h) \quad \text{①}$$

L'application numérique donne  $\tau = 9,2 \times 10^2 \text{ s}$ . ①

- /3 [4] On a simplement  $\frac{T}{\tau} = \frac{2\pi}{2\varphi} = \frac{\pi}{\arccos \frac{R_T}{R_T + h}} \approx 6,6$ . Le satellite est ainsi visible pendant 1/6,6 ième de son trajet. Il faudra donc 7 satellites ① pour garantir la couverture permanente au sol (arrondi au supérieur).

- /3 [5] D'après la question précédente, il faudrait aussi 7 « trains de satellites » pour couvrir toutes les longitudes. ① Cependant, un train de satellite couvre « deux côtés » et donc  $\lceil 7/2 \rceil = 4$  trains suffisent. ① On aboutit ainsi à un total de  $7 \times 4 = 28$  satellites. ①

- /7 [6] Sur l'orbite géostationnaire, la période de révolution du satellite est celle de la terre  $T_T \approx 86 \times 10^3 \text{ s}$ . ① On peut utiliser la 3ième loi de KEPLER :

$$\frac{T_T^2}{(R_T + h_g)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{soit} \quad h_g = \left( \frac{GM_T T_T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3} - R_T \approx 35\,700 \text{ km} \quad \text{①}$$

La notion de « visibilité » est à prendre avec prudence : pour un point du globe, le satellite est alors soit visible et la durée de visibilité est infinie, soit invisible. ① Il ne faut pas utiliser la formule de la question [4] pour la durée de visibilité car on y faisait l'hypothèse d'une Terre immobile (le schéma permettant le calcul de  $\varphi$  est incorrect dans ce cas!!).

Pour une zone donnée de la Terre, il suffit de disposer d'un seul ① satellite au lieu d'une bonne quarantaine. Mais il est beaucoup plus éloigné, ce qui pose des problèmes de perte de transmission. ①

Il faut aussi remarquer que les Pôles et les régions qui les entourent ne voient pas les satellites géostationnaires. ①

## II/B Influence des frottements aérodynamiques

- /5 [7] On a  $\dim F = \text{M.L.T}^{-2} \Leftrightarrow \dim(\alpha) \cdot \text{M.L}^2 \cdot \text{T}^{-2}$ . On en déduit par identification que  $\boxed{\dim \alpha = \text{L}^{-1}}$ . ①

Le TPM appliqué au satellite donne :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \mathcal{P}(\vec{F}_a) \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\alpha M_S v^3 = \frac{1}{2} \frac{d\mathcal{E}_p}{dt}$$

De plus,  $v^2 = 2\mathcal{E}_C/M_S \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\mathcal{E}_P/M_S = GM_T/(R_T + h)$ . On en déduit en combinant ces résultats que :

$$-\alpha M_S \frac{GM_T}{R_T + h}^{3/2} = \dot{h} \frac{GM_S M_T}{2(R_T + h)^2} \Leftrightarrow \frac{dh}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2\alpha \sqrt{GM_T} \sqrt{R_T + h}$$

- /8 [8] Entre le début et la fin de la révolution,  $R_T + h$  n'a quasiment pas varié et on peut supposer ce terme constant (on note alors  $h_0$  l'altitude initiale du satellite) :

$$\begin{aligned} \Delta h \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2\alpha \underbrace{\Delta t}_{=T} \sqrt{GM_T} \sqrt{R_T + h_0} &\Rightarrow \alpha = -\frac{\Delta h}{2T \sqrt{GM_T} \sqrt{R_T + h_0}} \\ \Leftrightarrow \alpha &\stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{\Delta h}{4\pi(R_T + h_0)^2} \approx 1,53 \times 10^{-15} \text{ m}^{-1} \end{aligned}$$

En dix années, on a effectué  $n = \frac{\Delta T}{T} = 10 \frac{T_T}{T} \approx 52000$  orbites donc au premier ordre (en supposant  $\Delta h$  identique à chaque période), on a  $\Delta h \approx -52 \text{ km}$ . ①

Une résolution exacte de l'équation (à l'aide de la méthode de séparation des variables ①) :

$$\begin{aligned} \frac{dh}{\sqrt{R_T + h}} &= -2\alpha \sqrt{GM_T} dt \Leftrightarrow 2(\sqrt{R_T + h_1} - \sqrt{R_T + h_0}) \stackrel{\textcircled{1}}{=} -2\alpha \sqrt{GM_T} \Delta T \\ \Rightarrow \Delta h = h_1 - h_0 &\stackrel{\textcircled{1}}{=} \left( \sqrt{R_T + h_0} - \alpha \sqrt{GM_T} \Delta T \right)^2 - R_T - h_0 \approx -51,3 \text{ km} \quad \textcircled{1} \end{aligned}$$

Ce résultat est très proche de celui obtenu à l'aide de l'approximation. Il peut sembler surprenant qu'une force qui s'oppose au mouvement se concrétise par une augmentation de vitesse : le freinage d'une voiture (force aérodynamique par exemple) réduit sa vitesse. Mais c'est sans compter sur l'énergie potentielle : à une orbite plus basse correspond une vitesse plus élevée. ①

- /7 [9] L'énoncé nous donne que  $\Delta h_{\text{haut}} = \frac{1}{2} \Delta h_{\text{bas}}$ . ① De plus, on observe que  $\frac{dh}{dt} \propto \alpha(h)$ , ① car les autres facteurs varient peu (question ??). On en déduit ainsi que :

$$\frac{\frac{dh}{dt}(h = h_{\text{haut}})}{\frac{dh}{dt}(h = h_{\text{bas}})} \stackrel{\textcircled{1}}{\approx} \frac{\frac{\Delta h_{\text{haut}}}{T_T}}{\frac{\Delta h_{\text{bas}}}{T_T}} \Leftrightarrow \left( \frac{h_{\text{bas}}}{h_{\text{haut}}} \right)^\beta = \frac{1/T_T}{2/T_T'} \Leftrightarrow \boxed{\beta = \frac{\log(T_T'/(2T_T))}{\log(h_{\text{bas}}/h_{\text{haut}})}} \quad \textcircled{1}$$

avec  $T_T'$  la période de révolution à 400 km d'altitude telle que, d'après ??,  $T_T'/T = \frac{R_T + h_{\text{bas}}}{R_T + h_{\text{haut}}}^{3/2} \approx 0,917$ . ① On en déduit au final  $\beta \approx 1,13$  ① puis  $\gamma = h_{\text{haut}}^\beta \times \alpha(h_{\text{haut}}) \approx 7,2 \times 10^{-9} \text{ SI}$ . ① En pratique, la valeur de  $\gamma$  est très sensible aux différents arrondis réalisés pour obtenir  $\beta$ , et seul son ordre de grandeur à du sens.

## II/C Stabilisation de l'orientation d'un satellite par gradient de gravité

- /2 [10] On a  $\overrightarrow{\text{OM}_1} \stackrel{\textcircled{1}}{=} \overrightarrow{\text{OS}} + \overrightarrow{\text{SM}_1} \Leftrightarrow r_1 = \sqrt{r_0^2 + \ell^2 + 2r_0\ell \cos(\theta)}$ . De même, on trouve  $r_2 \stackrel{\textcircled{1}}{=} \sqrt{r_0^2 + \ell^2 - 2r_0\ell \cos(\theta)}$

- /5 [11] On commence par s'intéresser aux termes d'énergie potentielle  $\mathcal{E}_{p,i} = -k/r_i$  avec  $k = GM_T m$ . On obtient ainsi en posant  $\varepsilon = \ell/r_0$  :

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_{p,12} &= -\frac{k}{r_{12}} = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2 + \ell^2 \pm 2r_0\ell \cos(\theta)}} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{k}{r_0} \frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \pm 2\varepsilon \cos(\theta)}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,12} &\stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{k}{r_0} \left( 1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon \cos(\theta)) + \frac{3}{8}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon \cos(\theta))^2 \right) + o(\varepsilon^2) \end{aligned}$$

On peut maintenant ajouter les deux termes d'énergies potentielles (avec encore un terme quadratique à développer puis simplifier à droite du terme d'énergie potentielle) :

$$\mathcal{E}_{p,1} + \mathcal{E}_{p,2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{k}{r_0} (2 - \varepsilon^2 + 3\varepsilon^2 \cos^2(\theta)) + o(\varepsilon^2)$$

On combine ensuite ce terme avec l'expression de l'énergie cinétique donnée dans l'énoncé :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \Leftrightarrow \mathcal{E}_m \stackrel{\textcircled{1}}{=} -\frac{GM_T M_S}{r_0} \left( 1 + \frac{1}{2} \frac{\ell^2}{r_0^2} (3 \cos^2(\theta) - 1) \right) + \frac{1}{2} M_S (\ell \dot{\theta})^2$$

car  $m = M_S/2$ , d'où le résultat !

/8 12 On applique le TPM dans le référentiel géocentrique au satellite qui n'est soumis à aucune force non conservative :

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 &\Leftrightarrow -\frac{GM_T}{r_0} \frac{\ell^2}{r_0} 3 \cos(\theta) (-\sin(\theta)) \dot{\theta} + \ell^2 \ddot{\theta} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \\ &\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{3GM_T}{2r_0^3} \sin(2\theta) = 0 \Leftrightarrow \ddot{\theta} + 3\Omega^2 \frac{\sin(2\theta)}{2} \stackrel{\textcircled{1}}{=} 0 \end{aligned}$$

On est à l'équilibre lorsque  $\ddot{\theta} = 0$  soit ici pour  $\theta = p\frac{\pi}{2}$ ,  $p \in \mathbb{N}$ . ①

- ①  $\diamond$  Pour  $\theta = 0 + x$  avec  $x \ll 1$ , on a comme équation du mouvement  $\ddot{x} + 3\Omega^2 x = 0$  qui est l'équation de l'oscillateur harmonique donc la position d'équilibre est stable et la pulsation des petites oscillations vaut  $\omega_0 = \Omega\sqrt{3}$
- ①  $\diamond$  Pour  $\theta = \pi/2 + x$ , on a maintenant  $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$ . Cette position d'équilibre n'est pas stable.
- ①  $\diamond$  Pour  $\theta = \pi + x$ , on a  $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$  et on retrouve la même équation que pour la première position d'équilibre. Cette position d'équilibre est donc aussi stable et de pulsation  $\omega_0$
- ①  $\diamond$  Pour  $\theta = 3\pi/2 + x$ , on obtient au final  $\ddot{x} - \omega_0^2 x = 0$  : équilibre instable.

Ainsi, seules les positions verticale (à l'endroit ou à l'envers) sont stables. ① En cas de léger décalage, le satellite va donc osciller autour de la position d'équilibre verticale et donc toujours présenter le même côté vers la Terre. ①