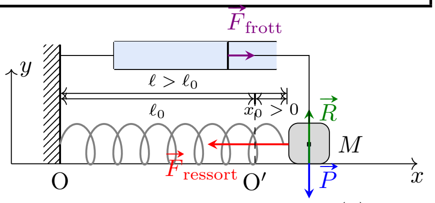
Électrocinétique : ressort amorti

/24 [1] On suppose le système mécanique suivant, constitué du point M de masse m accroché à un ressort idéal (k,ℓ_0) mais subissant des frottements fluides. On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen, avec le repère (O, $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$). On suppose le ressort initialement étiré tel que $\ell(0) = L_0 > \ell_0$, lâché sans vitesse initiale.



Effectuer un **bilan des forces** puis déterminer l'**équation différentielle sous forme canonique** de $\ell(\mathbf{t})$ pour $t \geq 0$, et la réécrire en effectuant un **changement de variable**. Déterminer les **expressions de ω_0** et **Q**, puis **résoudre** l'équation différentielle sur le **changement de variable** pour un régime **pseudo-périodique**. On appelle $x_0 = L_0 - \ell_0$. Exprimer la **période T des oscillations amorties** en fonction de Q et de la **période $\mathbf{T_0}$** des oscillations harmoniques, donner *sans démonstration* l'**approximation de $\mathbf{t_{95}}$** et **tracer la solution**, avec $\mathbf{Q \approx 3}$.

◇ **Bilan des forces :**

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction normale	$\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$
Force de rappel	$\overrightarrow{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$
Force de frottement	$\overrightarrow{F}_f = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x}$

Avec le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_r + \overrightarrow{F}_f$$
$$\overset{\text{Dvlp}^{\text{t}}}{\Leftrightarrow} m\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k(\ell(t)-\ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\\ -mg + R\end{pmatrix}$$

Donc sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + k\ell = k\ell_0$$
$$\overset{\div m}{\Leftrightarrow} \frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\ell(t) = {\omega_0}^2\ell_0$$
$$\overset{x(t) = \ell(t) - \ell_0}{\Leftrightarrow} \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2x(t) = 0}$$

On identifie ω_0 et Q :

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

et $$\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

Avec $x(t) = K\mathrm{e}^{rt}$, on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0 \Rightarrow \boxed{\Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right) < 0}$$

$$\Rightarrow r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On injecte Δ et extrait $\frac{\omega_0}{Q}$

$$\Leftrightarrow r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$

$$\Leftrightarrow r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$x(0) = L_0 - \ell_0 = 1\left[A \cdot 1 + B \cdot 0\right] = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = x_0}$$

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}x_0 = \frac{x_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

Ainsi, on trouve bien

$$\boxed{x(t) = x_0\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin(\Omega t)\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{T = \frac{2\pi}{\Omega} = T_0\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{t_{95} \approx QT_0}$$

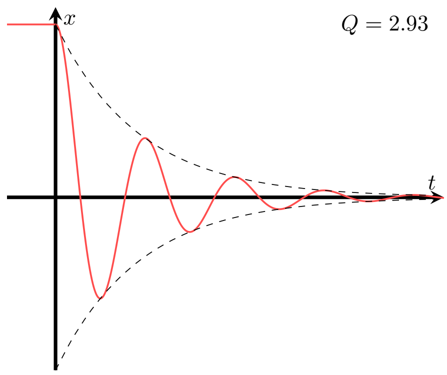


Fig. 6.1 – Tracé solution $Q \approx 3$.