Contrôle de connaissances 15

Dynamique du point et mouvements courbes

/3 **1** Énoncer les trois lois de NEWTON. On travaille avec un système ouvert.

a – $\exists\mathcal{R}$ galiléens : $(\forall \mathrm{M} \mid \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\mathrm{M}} = \overrightarrow{0})$, M est soit au repos, soit en translation rectiligne uniforme ;

b – $\frac{\mathrm{d}\,\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}\to\mathrm{M}}$;

c – $\forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2), \overrightarrow{F}_{1\to 2} = -\overrightarrow{F}_{2\to 1}$.

/7 **2** Établir la longueur d'équilibre d'un ressort vertical. Porter une attention particulière à l'établissement du système d'étude.

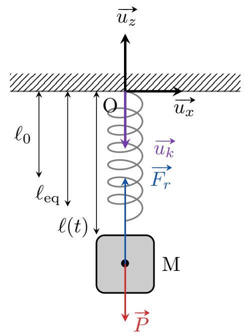

FIG. C15.1

1 **Système** : {masse} M (m) dans $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen.

2 **Schéma** : cf. Figure 15.1.

3 **Modélisation** : repère $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_z})$, repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = -\ell\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{v} = -\dot{\ell}\overrightarrow{u_z}$, $\overrightarrow{a} = -\ddot{\ell}\overrightarrow{u_z}$.

4 **BdF** :

Poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$

Force HOOKE $\overrightarrow{F} = k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$

5 **PFD à l'équilibre** :

$$\overrightarrow{0} = \sum \overrightarrow{F}_{\text{ext}} \Leftrightarrow 0 = -mg + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$$

$$\Leftrightarrow k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mg \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

/8 **3** Représenter sur un schéma les coordonnées cylindriques. Détaillez les projections de $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sur la base cartésienne, donner l'expression de $\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$ sans démonstration, et **démontrer les expressions** de $\overrightarrow{v}$ et $\overrightarrow{a}$ sans démontrer les expressions de $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t}$ et $\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t}$.

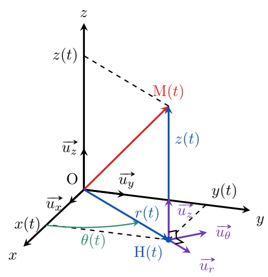

FIG. C15.2 – Cylindriques

$$\overrightarrow{u_r} = \cos(\theta)\overrightarrow{u_x} + \sin(\theta)\overrightarrow{u_y} \quad \text{et} \quad \overrightarrow{u_r} = -\sin(\theta)\overrightarrow{u_x} + \cos(\theta)\overrightarrow{u_y}$$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = r(t)\overrightarrow{u_r} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}r\,\overrightarrow{u_r} + r\,\mathrm{d}\theta\,\overrightarrow{u_\theta} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}}{\mathrm{d}t} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{a}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + \dot{z}\overrightarrow{u_z}\right) \Leftrightarrow \overrightarrow{a}(t) = \ddot{r}\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_r}}{\mathrm{d}t} + \dot{r}\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{u_\theta}}{\mathrm{d}t} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\overrightarrow{a}(t) = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} + \ddot{z}\overrightarrow{u_z}}$$

/4 **4** Effectuez le bilan des forces et appliquer le PFD grâce à la question précédente, que vous simplifierez dans les conditions de l'exercice. Sous quelle condition l'une des 2 équations différentielles obtenues est celle d'un oscillateur harmonique ?

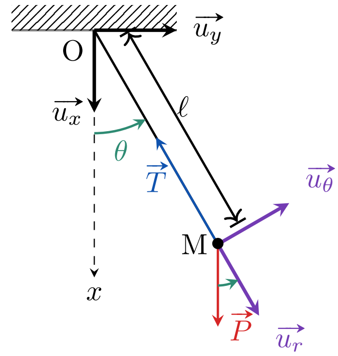

FIG. C15.3 – Schéma

Poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$

Tension $\overrightarrow{T} = -T\overrightarrow{u_r}$

Or,
$$m\overrightarrow{a} = m(-\ell\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + \ell\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}) = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} mg\cos\theta + m\ell\dot{\theta}^2 = T \\ m\ell\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0 \end{cases}} \tag{15.1}$$

L'équation (15.1) est l'équation d'un oscillateur harmonique pour des petits angles $(\sin(\theta) \underset{\theta\to 0}{\sim} \theta)$.