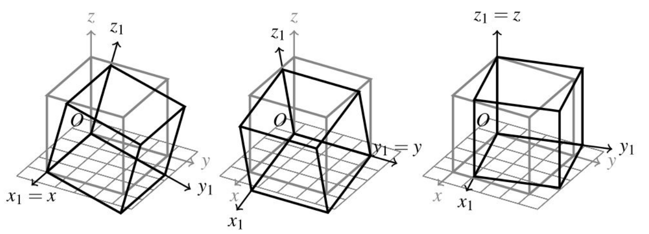
Synthèse chapitre 20 : Solide en rotation autour d'un axe fixe

I. Cinématique du solide

Définition :
Un solide S est un système matériel indéformable, c'est-à-dire que pour tout couple de points (M, N) appartenant au solide S, la distance entre M et N notée $d(M, N)$ est indépendante du temps.

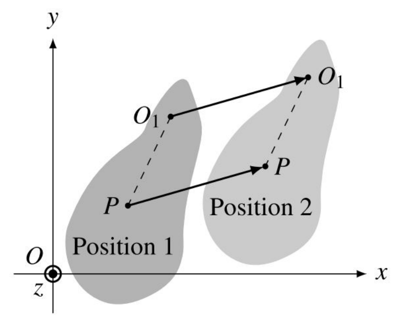
Repérage d'un solide :
Soit S un solide que l'on étudie dans le référentiel $\mathcal{R}$ auquel on associe le repère cartésien (O, x, y, z). On introduit le repère cartésien (O_1, x_1, y_1, z_1) lié au solide. Pour repérer le solide dans l'espace, il nous faut six paramètres :

- 3 paramètres permettant de repérer le point O_1 dans (O, x, y, z)
- 3 paramètres pour décrire les trois degrés de liberté en rotation selon chacun des trois axes (Ox), (Oy) et (Oz).



****

Solide en translation :

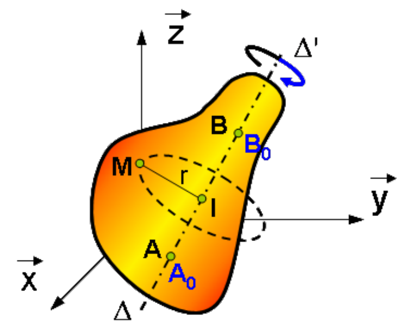


Soit un solide S dont le mouvement est décrit dans un référentiel $\mathcal{R}$. On dit que S est en translation si et seulement si son orientation est conservée au cours du mouvement, soit encore pour tous points O_1 et P de S, le vecteur $\overrightarrow{O_1P}$ reste identique à lui-même durant le mouvement.

Pour un solide en translation, tous les points ont le même mouvement. Cela a donc du sens de parler de déplacement, de vitesse et d'accélération du solide, celle-ci s'identifiant au déplacement, la vitesse et l'accélération de tout point M de S. On se ramène alors à l'étude d'un **point matériel** de masse la masse totale du solide. Il est alors d'usage de choisir le centre d'inertie (barycentre des masses) G pour point matériel d'étude. **Ainsi, étudier un solide en translation pure revient à étudier un point matériel en translation (ce que l'on a déjà fait précédemment)**. On va donc laisser de côté cette partie et s'intéresser plus spécifiquement aux **solides en rotation**.

****

Solide en rotation :



Soit un solide S dont le mouvement est décrit dans un référentiel $\mathcal{R}$. Soit Δ une droite **fixe** dans $\mathcal{R}$. On dit que S est un solide en rotation autour de l'axe fixe Δ si et seulement si tout point M de S décrit un mouvement circulaire d'axe de rotation Δ.

Soit M un point du solide S en rotation autour de l'axe fixe Δ dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Afin de repérer M, notons I la projection orthogonale de M sur Δ et introduisons le repère polaire $(\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_r} = \overrightarrow{IM}/\|\overrightarrow{IM}\|$.

Dans ce repère, le point M est repéré par (r, θ). Le solide étant indéformable, r est une constante. Dans ce cadre, la vitesse en coordonnées polaire est réduite à

$$\boxed{\overrightarrow{v}(M) = r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}}$$

Avec $\dot{\theta} = \Omega$ la vitesse de rotation (en rad.s^{-1}) du solide autour de son axe et r la distance du point M à l'axe de rotation Δ.

Remarque 1 : L'axe de rotation n'est pas nécessairement situé à l'intérieur du solide.

Remarque 2 : Les points du solide situés sur l'axe de rotation sont au repos.

Remarque 3 : Le déplacement angulaire θ, la vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et l'accélération angulaire $\ddot{\theta}$ sont identiques pour **TOUS** les points du solide. Cela a donc du sens de parler de rotation du solide.

Remarque 4 : Dans ce cours, on étudiera **uniquement des rotations pures** : jamais de mouvement composition d'une rotation et d'une translation.

II. Solide en rotation autour d'un axe fixe orienté

Moment cinétique d'un système de N points matériels

Soit un solide S constitué de N points matériels M_i de masse m_i. On suppose que le solide S est en rotation pure à la vitesse angulaire $\dot{\theta} = \omega$ autour de l'axe fixe orienté $\Delta = (O, \overrightarrow{u_\delta})$ dans le référentiel d'étude $\mathscr{R}$. On montre alors que

$$\boxed{\mathcal{L}_{\Delta,\mathscr{R}}(S) = J_\Delta(S)\dot{\theta}}$$

On introduit alors le moment d'inertie $J_\Delta(S)$ (en kg.m^2) du solide S par rapport à l'axe Δ :

$$\boxed{J_\Delta(S) = \sum_{i=1}^{N} m_i {r_i}^2}$$

avec r_i la distance du point M_i à l'axe Δ.

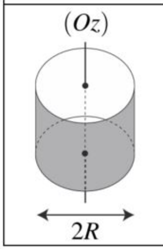
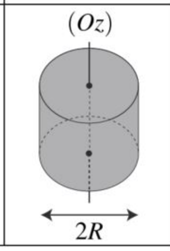
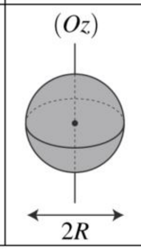
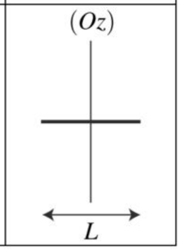
* * * * * * * * * * * * * * * *

Généralisation à un solide quelconque :

Dans le cas d'un solide à répartition de masse quelconque, tout ce qui a été dit précédemment reste valable et on a toujours :

$$\boxed{\mathcal{L}_{\Delta,\mathscr{R}}(S) = J_\Delta(S)\dot{\theta}}$$

En revanche, l'expression du moment d'inertie $J_\Delta(S)$ fait alors intervenir une intégrale plutôt qu'une somme afin de tenir compte de la répartition continue de masse (et non discrète comme dans le cas d'un ensemble de N points matériels). La détermination de $J_\Delta(S)$ n'est pas au programme et l'énoncé fournira son expression. A titre d'exemple, le tableau suivant donne l'expression de $J_\Delta(S)$ pour quelques répartitions de masse.

cylindre vide de rayon R	cylindre plein de rayon R	boule de rayon R	barre de longueur L
mR^2	$\frac{1}{2}mR^2$	$\frac{2}{5}mR^2$	$\frac{1}{12}mL^2$
			

* * * * * * * * * * * * * * * *

TMC atour d'un axe pour un solide S :

Soit S un solide en **ROTATION PURE** autour d'un axe **FIXE** orienté ans un référentiel **GALILEEN**. $\left\{\overrightarrow{F_1}, ..., \overrightarrow{F_N}\right\}$ les forces extérieures agissant sur S. Le TMC scalaire s'écrit alors :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\mathcal{L}_{\Delta,\mathscr{R}}(S)\right) = \mathcal{M}_\Delta\left(\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i}\right)$$

Soit encore $\boxed{J_\Delta(S)\ddot{\theta} = \mathcal{M}_\Delta\left(\sum_{i=1}^{N}\overrightarrow{F_i}\right)}$

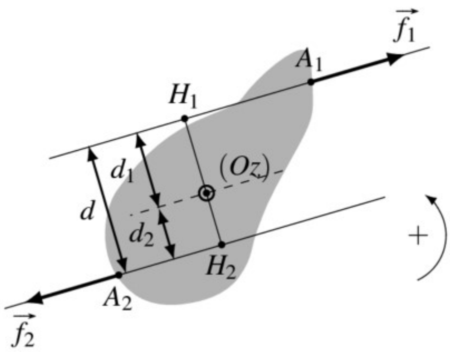
III. Moments de type couple

Deux forces $\overrightarrow{F_1}$ et $\overrightarrow{F_2}$ s'appliquant respectivement aux points A_1 et A_2 de forces résultantes nulles (c'est-à-dire tel que $\overrightarrow{F_1} + \overrightarrow{F_1} = \overrightarrow{0}$) exercent sur le solide un moment appelé **couple**.

Ces forces sont de normes identiques (notons la F), le moment résultant (donc le couple) par rapport à un axe Δ vaut, en norme,

$$\|\mathcal{M}_\Delta\| = Fd_1 + Fd_2 = F(d_1 + d_2)$$

Avec d_1 et d_2 les bras de levier respectifs associés à chacune des deux forces. Le signe du couple se détermine comme usuellement en regardant dans quel sens le couple de forces « fait tourner » le solide.



Remarque 1 : Il est remarquable de constater que la valeur du couple ne dépend pas de la position choisie de l'axe de rotation comme on peut le comprendre sur la figure suivante où l'on constate que le bras de levier total est indépendant de la position de l'axe (voir figure).

Remarque 2 : La force résultante étant nulle, de telles forces peuvent uniquement mettre en rotation le solide, mais ne peuvent pas induire la translation de son barycentre.

Remarque 3 : Dans ce cas, le moment résultant est souvent notée Γ :

$$\mathcal{M}_\Delta = \Gamma$$

IV. Approche énergétique du mouvement des solides

Energie cinétique d'un solide en translation pure :
Soit S un solide de masse totale m_T en translation pure dans le référentiel $\mathscr{R}$ à la vitesse $\overrightarrow{v_G}$, G étant le barycentre de S. On a alors

$$\boxed{E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} m_\mathrm{T} {v_G}^2}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

Energie cinétique d'un solide en rotation pure :
Soit S un solide en rotation pure autour d'un axe fixe orienté Δ dans le référentiel $\mathscr{R}$. En notant $\dot\theta = \omega$ sa vitesse angulaire et $J_\Delta(S)$ son moment d'inertie, il vient

$$\boxed{E_\mathrm{c} = \frac{1}{2} J_\Delta(S) \omega^2}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

Puissance d'une action mécanique sur un solide en translation pure :
Soit S un solide en translation pure dans le référentiel $\mathscr{R}$ à la vitesse $\overrightarrow{v_G}$, G étant le barycentre de S. Soit $\overrightarrow{F}$ une force s'appliquant en un point quelconque du solide (non nécessairement G), alors

$$\boxed{\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = \overrightarrow{F} \cdot \overrightarrow{v_G}}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

Puissance d'une action mécanique sur un solide en translation pure :
Soit S un solide en rotation pure à la vitesse angulaire $\dot\theta = \omega$ autour d'un axe fixe orienté Δ dans le référentiel $\mathscr{R}$. Soit $\overrightarrow{F}$ une action mécaniqe s'exerçant sur S résultant en un moment de force $\mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})$. On a alors

$$\boxed{\mathscr{P}(\overrightarrow{F}) = \mathcal{M}_\Delta(\overrightarrow{F})\, \omega}$$

* * * * * * * * * * * * * * * *

Théorème de la puissance cinétique :
Soit S un solide en mouvement dans un référentiel $\mathscr{R}$ **galiléen** et soumis aux actions mécaniques extérieures $\left\{\overrightarrow{F_1}, ..., \overrightarrow{F_N}\right\}$. Le TPC se généralise (que le solide soit en translation ou en rotation) selon

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_\mathrm{c}}{\mathrm{d}t} = \mathscr{P}\left(\sum_{i=1}^{n} \overrightarrow{F_i}\right)}$$