Devoir maison 4 – à rendre pour le 27 février

Pendule asymétrique – corrigé

I Pendule asymétrique

Un objet P_1 de masse m est fixé sur une tige, très légère, solidaire d'un cylindre de masse négligeable. Ce cylindre de rayon R (cf schéma ci-contre) peut tourner sans frottement autour de l'axe horizontal. La distance de cet axe au mobile est notée ℓ (cf schéma).

Un fil sans masse et inextensible est entouré autour du cylindre de telle sorte qu'il ne glisse pas. On fixe à l'extrémité du fil un objet P_2 de masse M. Lorsque le cylindre tourne d'un angle θ, P_2 se déplace verticalement de z. Les variables θ et z sont des grandeurs algébriques définies sur la figure ci-contre. Le sens positif de rotation sera pris dans le sens horaire, tel qu'indiqué sur le schéma.

On admet que le système mécanique constitué par l'ensemble des deux masses est conservatif et que son énergie potentielle est la somme des énergies potentielles de pesanteur des deux masses.

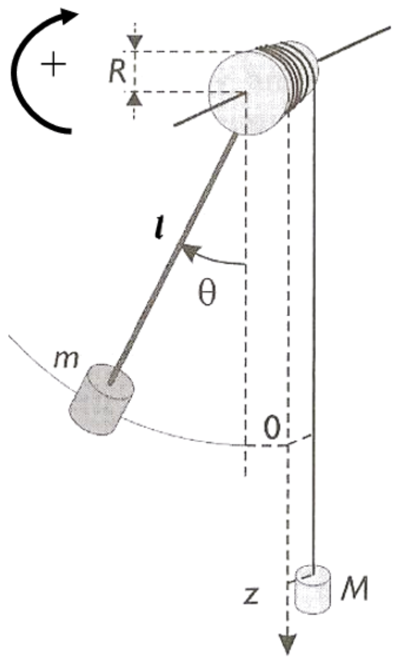


Figure 1.1 – Schéma de la situation.

1. Le fil étant inextensible et les deux masses à la même altitude $z = 0$ lorsque $\theta = 0$, on en déduit que z est lié à θ par une relation de proportionnalité de la forme $z = k\theta$. Identifier la constante k en fonction des données de l'énoncé.

   Réponse :
   Lorsque θ passe de 0 à une valeur positive, M descend de $z > 0$, tel que $z = R\theta$, car le fil est enroulé sur le cylindre de rayon R.

2. En déduire les expressions de chaque énergie cinétique E_{C1} pour P_1, E_{C2} pour P_2, puis l'énergie cinétique E_C du système constitué des deux masses, en fonction de m, M, R, ℓ et de $\mathrm{d}\theta/\mathrm{d}t = \dot{\theta}$.

   Réponse :
   La masse m décrit une trajectoire circulaire de rayon ℓ telle que, en utilisant les coordonnées polaires,

   $$\overrightarrow{OP_1} = \ell\overrightarrow{u_r} \quad \text{alors} \quad \overrightarrow{v_m} = \ell\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$

   Ainsi, $$E_{C1} = \frac{1}{2}m{v_m}^2 \quad \text{d'où} \quad E_{C1} = \frac{1}{2}m\ell^2\dot{\theta}^2$$

   La masse M décrit un mouvement de translation selon (Oz) tel que en utilisant les coordonnées cartésiennes,

   $$\overrightarrow{OP_2} = z\overrightarrow{u_z} \quad \text{avec} \quad z = R\theta$$

   alors $$\overrightarrow{v_M} = \dot{z}\overrightarrow{u_z} = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_z}$$

   Ainsi, $$E_{C2} = \frac{1}{2}Mv_M^2 \quad \text{d'où} \quad E_{C2} = \frac{1}{2}MR\dot{\theta}^2$$

Pour l'ensemble des deux masses, $E_C = E_{C1} + E_{C2}$. Soit

$$\boxed{E_C = \frac{1}{2}(ml^2 + MR^2)\dot{\theta}^2}$$

3. Démontrer, en partant des relations entre force et énergie potentielle, les expressions de chaque énergie potentielle de pesanteur $E_{\mathrm{P}1}$ pour m, $E_{\mathrm{P}2}$ pour M, puis montrer que l'énergie potentielle E_{P} du système constitué des deux masses peut se mettre sous la forme :

$$E_P = -mg\ell\cos(\theta) - MgR\theta + cste$$

Réponse :
On s'intéresse aux énergies potentielles de pesanteur et on sait que

$$\mathrm{d}E_P = -\delta W(\overrightarrow{P})$$

Pour m : $$\mathrm{d}E_{P1} = -\delta W\left(\overrightarrow{P_1}\right) = -\overrightarrow{P_1}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OP_1}$$

avec $$\overrightarrow{P_1} = mg\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} - mg\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta} \quad \text{et} \quad \mathrm{d}\overrightarrow{OP_1} = \ell\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$$

Ainsi, il vient $\mathrm{d}E_{P1} = [-mg\cos(\theta)\,\overrightarrow{u_r} + mg\sin(\theta)\,\overrightarrow{u_\theta}]\cdot\ell\mathrm{d}\theta\overrightarrow{u_\theta}$ soit $\mathrm{d}E_{P1} = mgl\sin(\theta)\,\mathrm{d}\theta$

D'où : $$\boxed{E_{P1} = -mg\ell\cos(\theta) + cste1}$$

Pour M : $dE_{P2} = -\delta W\left(\overrightarrow{P_2}\right) = -\overrightarrow{P_2}\cdot\mathrm{d}\overrightarrow{OP_2}$ avec $\overrightarrow{P_2} = Mg\overrightarrow{u_z}$ et $\mathrm{d}\overrightarrow{OP_2} = \mathrm{d}z\overrightarrow{u_z}$

Ainsi, il vient : $\mathrm{d}E_{P2} = -Mg\mathrm{d}z$ d'où $E_{P2} = -Mgz + cste2 = -MgR\theta + cste2$

Pour l'ensemble des deux masses, on a donc bien :

$$\boxed{E_P = -mg\ell\cos(\theta) - MgR\theta + cste}$$

4. Etudier les positions d'équilibre éventuelles du système. Montrer que si la masse M dépasse une valeur M_0, il n'y a plus de position d'équilibre. Donner l'expression de M_0 en fonction de m, ℓ et R.

Réponse :
Les positions d'équilibre sont telles que $$\frac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}\theta} = 0$$

Calculons $\dfrac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}\theta}$: $$\frac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}\theta} = mg\ell\sin(\theta) - MgR$$

Ainsi $\dfrac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}\theta} = 0$ pour θ_{eq} tel que : $$ml\sin(\theta_{eq}) = MR$$

Soit : $\sin(\theta_{eq}) = \dfrac{MR}{m\ell}$. Or $\sin(\theta_{eq}) < 1$. On en déduit donc que θ_{eq} n'existe que si $MR < m\ell$. Donc il existe des positions d'équilibre uniquement si

$$\boxed{M < \frac{m\ell}{R} = M_0}$$

5. En déduire que si $M < M_0$, il existe deux positions d'équilibre θ_{eq1} et θ_{eq2} telle que

$$\theta_{eq2} = \pi - \theta_{eq1}$$

Préciser où sont situées ces positions d'équilibre sur un cercle trigonométrique.

Réponse :
$\sin(\theta_{eq}) = \dfrac{MR}{m\ell}$ possède deux solutions :

- $\theta_{eq1} = \sin^{-1}\left(\dfrac{MR}{ml}\right) \in \left[0; \dfrac{\pi}{2}\right]$ (1er quart de cercle trigo)
- $\theta_{eq2} = \pi - \theta_{eq1} \in \left[\dfrac{\pi}{2}; \pi\right]$ (2ème quart de cercle trigo).

6. Discuter de la stabilité des positions d'équilibre, en notant θ_{eq1} la position d'équilibre stable.

Réponse :
Il faut étudier les stabilités, donc étudier les signe des dérivées seconde $\dfrac{\mathrm{d}^2 E_P}{\mathrm{d}\theta^2}$ en θ_{eq1} et θ_{eq2}. Or,

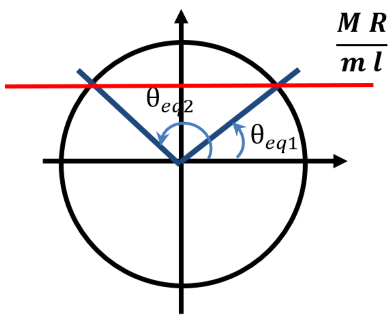
$$\frac{\mathrm{d}^2 E_P}{\mathrm{d}\theta^2} = mg\ell\cos(\theta)$$

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_P}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{eq1}} = mg\ell\cos(\theta_{eq1}) > 0 \quad \text{car} \quad \theta_{eq1} \in \left[0; \frac{\pi}{2}\right]$$

Ainsi θ_{eq1} est une position d'équilibre stable.

$$\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_P}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{eq2}} = mg\ell\cos(\theta_{eq2}) < 0 \quad \text{car} \quad \theta_{eq2} \in \left[\frac{\pi}{2}; \pi\right]$$

Ainsi θ_{eq2} est une position d'équilibre instable.



7. Au voisinage de ces positions d'équilibres, on peut approximer $E_P(\theta)$ par

$$E_P(\theta) \sim E_0 + C(\theta - \theta_{eq})^2$$

Justifier cette approximation et expliciter les constantes C_1 correspondant à θ_{eq1} et C_2 correspondant à θ_{eq2} en fonction de m, g, ℓ, M et M_0. Vérifier que $C_2 = -C_1$.

Réponse :
Au voisinage de chaque position d'équilibre, on peut faire un développement de Taylor de E_P :

$$E_P(\theta) \sim E_P(\theta_{eq}) + (\theta - \theta_{eq})\left(\frac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_{eq}} + \frac{1}{2}(\theta - \theta_{eq})^2\left(\frac{\mathrm{d}^2 E_P}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{eq}}$$

Or $\left(\dfrac{\mathrm{d}E_P}{\mathrm{d}\theta}\right)_{\theta_{eq}} = 0$ car c'est une position d'équilibre et $\left(\dfrac{\mathrm{d}^2E_P}{\mathrm{d}\theta^2}\right)_{\theta_{eq}} = mg\ell\cos\left(\theta_{eq}\right)$.

Ainsi : $$E_P\left(\theta\right) \sim E_P\left(\theta_{eq}\right) + \frac{1}{2}mg\ell\cos\left(\theta_{eq}\right)\left(\theta-\theta_{eq}\right)^2$$

Par identification avec l'expression fournie dans l'énoncé, il vient :

$$C_1 = \frac{1}{2}mg\ell\cos\left(\theta_{eq1}\right)$$

Il faut supprimer $\cos\left(\theta_{eq1}\right)$. On sait que $\sin\left(\theta_{eq1}\right) = \dfrac{MR}{m\ell}$.

Ainsi, $$C_1 = \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\sin^2\left(\theta_{eq1}\right)} = \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\frac{M^2R^2}{m^2\ell^2}}$$

Soit $$\boxed{C_1 = \frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\frac{M^2}{{M_0}^2}}}$$

Et d'autre part $$C_2 = \frac{1}{2}mg\ell\cos\left(\theta_{eq2}\right) = -\frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\sin^2\left(\theta_{eq2}\right)} = -\frac{1}{2}mg\ell\sqrt{1-\frac{M^2R^2}{m^2l^2}}$$

Soit $$\boxed{C_2 = -\frac{1}{2}mgl\sqrt{1-\frac{M^2}{{M_0}^2}}}$$

On a donc bien $$C_2 = -C_1$$

8. En déduire l'équation du mouvement en gardant le cas général avec C.

Réponse :
Il faut exprimer E_m, puis utiliser le théorème de la puissance mécanique qui, pour un système conservatif, s'écrit

$$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = P\left(\vec{F}_{\text{Non cons}}\right) = 0$$

D'après l'énoncé, $$E_P\left(\theta\right) \sim E_0 + C\left(\theta-\theta_{eq}\right)^2$$

De plus, d'après Q2, $$E_C = \frac{1}{2}(m\ell^2+MR^2)\dot{\theta}^2$$

D'où $$\boxed{E_m = E_C + E_P = E_0 + C\left(\theta-\theta_{eq}\right)^2 + \frac{1}{2}(m\ell^2+MR^2)\dot{\theta}^2}$$

Alors $$\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 2C\left(\theta-\theta_{eq}\right)\dot{\theta} + \left(m\ell^2+MR^2\right)\dot{\theta}\ddot{\theta}$$

Ainsi : $$\boxed{\frac{\mathrm{d}E_m}{\mathrm{d}t} = 0 \quad \text{pour} \quad \dot{\theta}\left[2C\left(\theta-\theta_{eq}\right) + \left(m\ell^2+MR^2\right)\ddot{\theta}\right] = 0}$$

Or $\dot{\theta}$ non toujours nul, car il y a mouvement. Il faut donc que

$$\left(m\ell^2+MR^2\right)\ddot{\theta} + 2C\left(\theta-\theta_{eq}\right) = 0$$

Sous forme canonique, il vient : $\ddot{\theta} + \dfrac{2C}{m\ell^2 + MR^2}\left(\theta - \theta_{eq}\right) = 0$

Ou encore : $\boxed{\ddot{\theta} + \dfrac{2C}{m\ell^2 + MR^2}\theta = \dfrac{2C}{m\ell^2 + MR^2}\theta_{eq}}$

9. Discuter du caractère borné ou non des solutions selon que la position angulaire initiale θ_0 est voisine de θ_{eq1} : position d'équilibre stable qui correspond à $C_1 > 0$ ou de θ_{eq2} : position d'équilibre instable correspondant à $C_2 < 0$. On s'aidera de la forme des solutions de l'équation différentielle du mouvement.

Réponse :

- En $\theta_{eq} = \theta_{eq1}$, $C = C_1 > 0$. L'équation différentielle est alors de la forme

$$\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = \text{Cste} \quad \text{avec} \quad {\omega_0}^2 = \frac{2C_1}{m\ell^2 + MR^2}$$

Alors $$\theta\left(t\right) = A\cos\left(\omega_0 t\right) + B\sin\left(\omega_0 t\right) + \text{Cste}$$

Cette solution sinusoïdale est **bornée**.

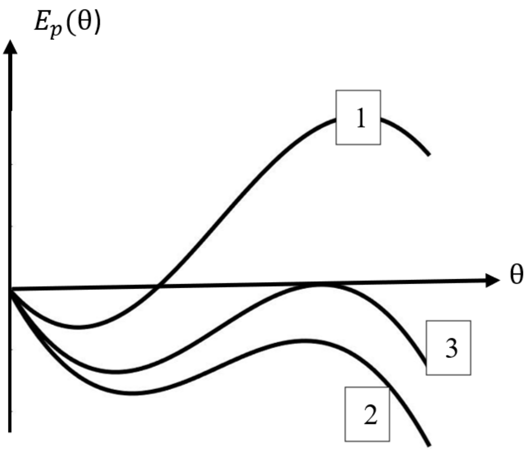
- En $\theta_{eq} = \theta_{eq2}$, $C = C_2 < 0$. L'équation différentielle est alors de la forme

$$\ddot{\theta} - \omega_0^2\theta = \text{Cste} \quad \text{avec} \quad \omega_0^2 = \frac{2C_1}{m\ell^2 + MR^2}$$

Alors $$\theta\left(t\right) = Ae^{\omega_0 t} + Be^{-\omega_0 t} + \text{Cste}$$

Cette solution exponentielle diverge lorsque le temps tend vers l'infini, elle n'est donc **pas bornée**.

Le système est placé dans la position initiale $\theta = 0$. Les masses sont lâchées sans vitesse initiale. On prend $\ell = 50\,\text{cm}$, $R = 5\,\text{cm}$, $m = 100\,\text{g}$ et trois valeurs différentes de la masse M. La figure ci-dessous représente l'énergie potentielle du système en fonction de l'angle θ pour les trois valeurs de la masse M.



10. Peut-on savoir si les valeurs de M sont inférieures, supérieures ou égales à M_0 ?

Réponse :
Les 3 courbes présentent deux tangentes horizontales, correspondant aux deux positions d'équilibres stable et instable.

- θ_{eq1} : Stable ; Forme cuvette
- θ_{eq2} : Instable ; Forme barrière.

Ainsi les deux positions d'équilibres existent pour les trois courbes, on a donc $M_i < M_0$ pour les trois courbes.

11. Que vaut l'énergie mécanique du système ? La tracer sur le graphe de $E_P(\theta)$, que vous reproduirez sommairement.

Réponse :
On a vu que le système était conservatif, donc $E_m = \text{Cste}$. Or à $t = 0$, on lit $E_P(\theta = 0) = 0$ et il est précisé dans l'énoncé que la vitesse initiale est nulle, donc $E_C(t = 0) = 0$. Ainsi

$$\boxed{E_m(t) = E_m(t = 0) = E_C(0) + E_P(0) = 0}$$

12. En fonction des valeurs de M (correspondant respectivement à chacune des trois courbes), préciser la nature du mouvement : état lié ou de diffusion.

Réponse :
L'énergie potentielle est maximale en θ_{eq2}, c'est donc aussi la position pour laquelle l'énergie cinétique est minimale, puisque l'énergie mécanique se conserve.

- Courbe 1 : $E_P(\theta_{eq2}) > 0$ Donc $E_P(\theta_{eq2}) > E_m$. Il y a donc un domaine interdit et la barrière de potentiel ne peut pas être franchie. Le système est confiné : Mouvement oscillatoire périodique ; Etat lié.
- Courbe 2 : $E_P(\theta_{eq2}) < 0$ Donc $E_C > 0$ en θ_{eq2}. Etat de diffusion (car non borné).
- Courbe 3 : $E_P(\theta_{eq2}) = 0$. Cas limite pour lequel l'énergie cinétique s'annule en θ_{eq2}. C'est le régime qui sépare état lié et de diffusion.