Électrocinétique – chapitre 5

Oscillateur amorti

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- ▢ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- ▢ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- ▢ Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- ▢ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- ▢ Réaliser un bilan énergétique.
- ▢ Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- ▢ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Implications

Interprétations

Démonstrations

Points importants

I Introduction

I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC

En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC suivant [1], avec $L = 43\,\mathrm{mH}$ et $C = 20\,\mathrm{nF}$:

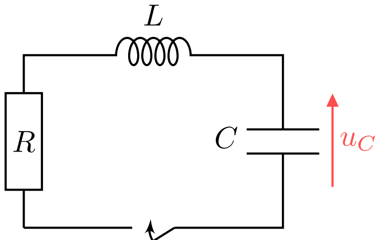
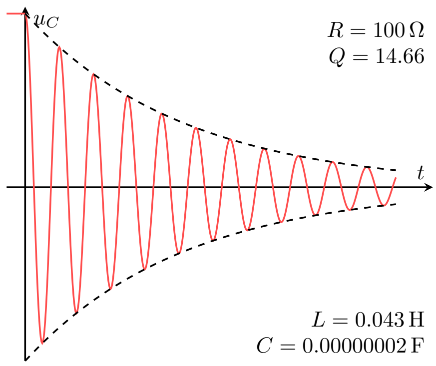
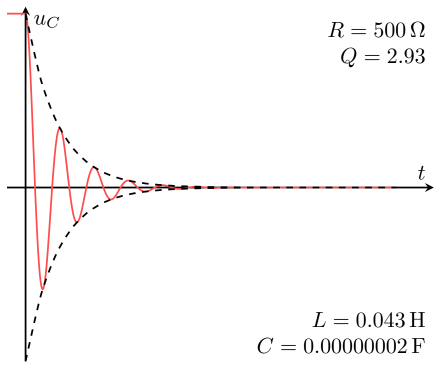


Figure 5.1

◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**.

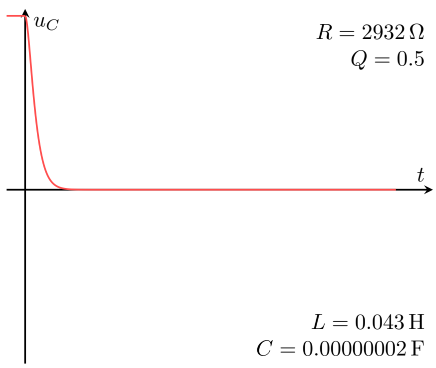
On observe une série d'oscillations à la période $T \approx 184\,\mathrm{\mu s}$. On observe environ 15 oscillations lorsque $R \approx 100\,\Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180\,\Omega$, 3 oscillations lorsque $R \approx 500\,\Omega$.

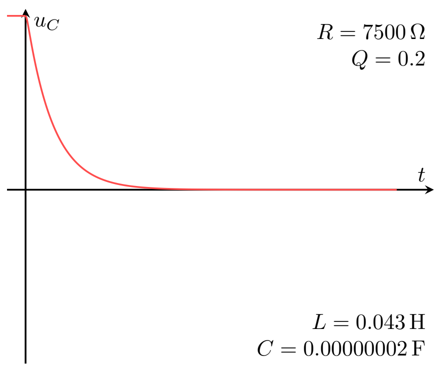




◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

Lorsque $R \approx 2{,}9\,\mathrm{k\Omega}$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250\,\mathrm{\mu s}$ (à 95%). Lorsque $R \approx 7{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $420\,\mathrm{\mu s}$.





Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

1) **Système oscillant**pour $R < R_c$, de pseudo-période [2] **supérieure à** T_0 ;
2) **Système non-oscillant**pour $R > R_c$: le transitoire **augmente avec** R.

1. https://tinyurl.com/ypbwcwfs
2. On parle de *pseudo*-période car le signal est diminué.

I/B Équation différentielle

Propriété E5.1 : Équation différentielle amorti

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'un équation différentielle du type :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_{\mathrm{eq}}}$$

1) x_{eq} la position d'équilibre 2) ω_0 la pulsation **propre** 3) Q le **facteur de qualité**

Remarque E5.1 : Analyse de l'équation

Par lecture de cette équation, Q est **sans dimension** pour qu'on retrouve que ω_0 s'exprime en s^{-1} car $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est de dimension $[x] \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus Q est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

I/C Équation caractéristique et régimes de solutions

♥ Définition E5.1 : Équation caractéristique amorti

Pour résoudre une équation différentielle **homogène**, on suppose une solution de la forme $x(t) = A\exp(rt)$ avec $r \in \mathbb{C}$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'**équation caractéristique** :

$$\boxed{r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0}$$

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant Δ est

$$\boxed{\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)}$$

♥ Implication E5.1 : Régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \cancel{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2}}\left(1 - 4Q^2\right) > 0 \Leftrightarrow 4Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$\mathbf{Q > 1/2}$: régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

$\mathbf{Q = 1/2}$: régime **critique**, racine double réelle ;

$\mathbf{Q < 1/2}$: régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

Notation E5.1 : $\pm$ et $\mp$

Il est courant de noter les racines $r_\pm$ pour dénoter à la fois r_+ et r_-. Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe $\pm$, ce qui signifie que r_+ correspond à l'expression avec le $+$, et r_- correspond à l'expression avec le $-$.

Si l'expression contient le signe $\mp$, c'est l'opposé : r_+ correspond à l'expression avec $-$.

Important E5.1 : Solutions oscillateur amorti

	Racines	Solution
Pseudo-pér.	$r_\pm = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$	$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \times \underbrace{[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$
Critique	$r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$x(t) = (At+B)\exp(-\omega_0 t)$
Apériodique	$r_\pm = \dfrac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)$	$x(t) = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t)$

II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

II/A Présentation

Définition E5.2 : Circuit RLC libre

- Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- **On suppose le condensateur initialement chargé**.
- À $t=0$, on coupe le générateur.

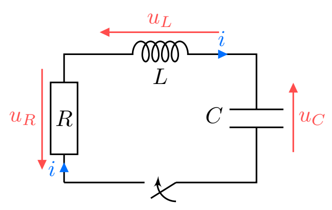


Figure 5.2

II/B Bilan énergétique

Démonstration E5.1 : Bilan de puissance RLC libre

On fait un bilan de puissances :

$$
\begin{aligned}
& u_C i + u_L i + u_R i = 0 \\
\Leftrightarrow\ & u_C \times C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i + Ri^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}C{u_C}^2}_{\mathcal{E}_C} + \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{\mathcal{E}_L}\Big) = -\mathcal{P}_J
\end{aligned}
$$

$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_R = Ri$

$\mathcal{P}_J = Ri^2$ et $f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)'$

Propriété E5.2 : Bilan de puissance RLC libre

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}}{\mathrm{d}t} = -\mathcal{P}_J}$$

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}C{u_C}^2 + \frac{1}{2}Li^2$.

Important E5.2 : Évolution énergétique RLC série

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C, d'où l'amortissement.

II/C Équation différentielle du circuit

Démonstration E5.2 : Équation différentielle RLC libre

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned}
& u_L + u_R + u_C = 0 && u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_R = Ri \\
\Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0 && i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 && \text{forme canonique} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0
\end{aligned}$$

On détermine l'expression de Q par identification :

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} && \omega_0 = \tfrac{1}{\sqrt{LC}} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{Q\sqrt{LC}} = \frac{R}{L} && \text{On isole } Q \\
\Leftrightarrow\ & Q = \frac{L}{R\sqrt{LC}} && L = \sqrt{L}^2 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}
\end{aligned}$$

Propriété E5.3 : Équation différentielle RLC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC en régime libre est

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u_C = 0}$$

- $\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}$ la pulsation propre ;
- $\boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$ le facteur de qualité.

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

$$\boxed{\begin{aligned} u_C(0^-) = u_C(0^+) = E \\ i(0^-) = i(0^+) = 0 \end{aligned}}$$

II/D Résolutions pour chaque cas

II/D) 1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

II/D) 1.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.3 : Solution pseudo-périodique

On part de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right) < 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned}
r_\pm &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2} && \text{On injecte } \Delta\\
\Leftrightarrow r_\pm &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(4Q^2 - 1\right)} && \text{On extrait } \tfrac{\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow r_\pm &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1} && \text{On définit } \Omega\\
\Leftrightarrow r_\pm &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega
\end{aligned}$$

d'où la définition de Ω : $$\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = 1\left[A \cdot 1 + B \cdot 0\right] = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = E}$$

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}E = \frac{E}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

Propriété E5.4 : Solution pseudo-périodique

Pour un facteur de qualité $Q > 1/2$, u_C s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\Omega t)\right]}$$

avec $$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}}$$

La période des oscillations est alors

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0}\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}} \Leftrightarrow \boxed{T = T_0\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2-1}} > T_0}$$

Les enveloppes sont

$$y(t) = \pm E\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

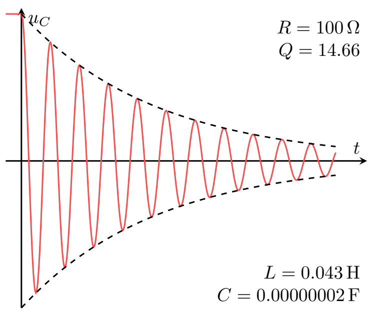


FIGURE 5.3

Interprétation E5.1 : Résultat pseudo-périodique

La solution du polynôme caractéristique s'écrit donc comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution d'ordre 2 harmonique** :

$$r_\pm = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\equiv -\frac{1}{\tau}} \pm \underbrace{\mathrm{j}\Omega}_{\equiv \mathrm{j}\omega} \quad \text{soit} \quad \boxed{r_\pm = r_{\text{ordre 1}} + r_{\text{ordre 2 harmonique}}}$$

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1.

Avec les propriétés de l'exponentielle ($\mathrm{e}^{a+b} = \mathrm{e}^a\mathrm{e}^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$y_h(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\equiv \mathrm{e}^{-t/\tau}} \underbrace{[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]}_{\equiv A\cos(\omega_0 t)+B\sin(\omega_0 t)} \quad \text{soit} \quad \boxed{y_h(t) = y_{h,\text{ordre 1}} \times y_{h,\text{ordre 2 harmonique}}}$$

II/D) 1.2 Régime transitoire

Démonstration E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér.

L'amplitude varie selon $E\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$; on définit donc t_{95} tel que

$$\begin{aligned}
\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t_{95}\right) &= 0.05 \\
\xrightarrow{\ln(\cdot)} \Leftrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(0.05) \\
\Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(20) && 0.05 = 1/20 \text{ et } \ln(a^b) = b\ln a \\
\Leftrightarrow t_{95} &= 2\ln(20)\frac{Q}{\omega_0} \approx \frac{2\pi}{\omega_0}Q && \text{On isole et } 2\ln 20 \approx 2\pi
\end{aligned}$$

Propriété E5.5 : Régime transitoire $Q > 1/2$

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$\boxed{t_{95} \approx QT_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Implication E5.2 : Résultat à grand Q

Avec ces résultats on remarque en effet que quand $Q \to \infty$, on a à la fois

$$\boxed{\Omega \approx \omega_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{T \approx T_0}$$

Mais aussi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C = 0} \quad \text{donc} \quad \boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)}$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.

Interprétation E5.2 : Espace des phases pseudo-pér.

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C, i) n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**.

On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue.

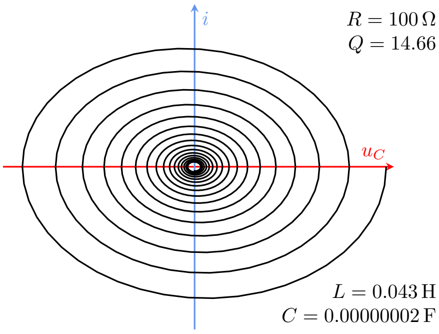


FIGURE 5.4 – Faible amortissement

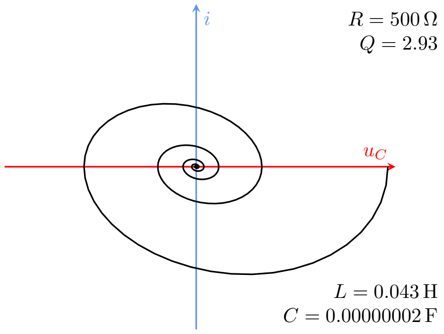


FIGURE 5.5 – Moyen amortissement

II/D) 2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

II/D) 2.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.5 : Solution critique

La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut

$$r = -\omega_0 \quad \text{soit} \quad u_C(t) = (At + B)\exp(-\omega_0 t)$$

◇ On trouve B avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = (A \cdot 0 + B) \cdot 1 = B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = E}$$

◇ On trouve A avec la seconde CI :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = (A)\exp(-\omega_0 t) + (At + E)(-\omega_0)\exp(-\omega_0 t)$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = A - \omega_0 E = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = \omega_0 E}$$

Propriété E5.6 : Solution critique

Pour un facteur de qualité $Q = 1/2$, u_C s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E(\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)}$$

et on n'observe **pas une oscillation**.

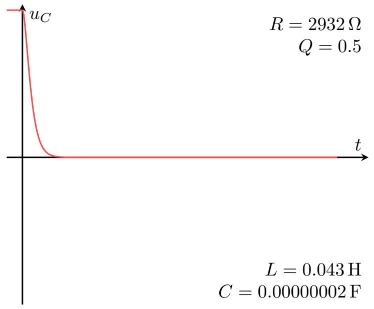


FIGURE 5.6

Interprétation E5.3 : Espace des phases critique

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.

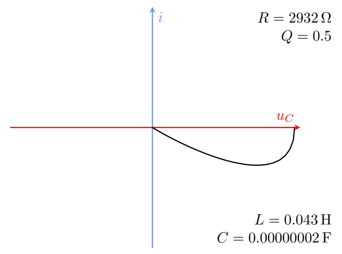


FIGURE 5.7

II/D) 2.2 Régime transitoire

Démonstration E5.6 : Régime transitoire critique

En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance exponentielle, on a

$$\exp(-\omega_0 t_{95}) = 0{,}05 \Leftrightarrow t_{95} = \frac{\ln(20)}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{\omega_0}$$

Propriété E5.7 : Régime transitoire critique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$\boxed{t_{95} \approx \frac{T_0}{2}} \quad \text{avec} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

II/D) 3 Cas $\Delta > 0$: régime apériodique

II/D) 3.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.7 : Solution apériodique

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

$$r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2}$$
$$\Leftrightarrow r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1-4Q^2}$$
$$\Leftrightarrow r_\pm = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t)$$

◇ Avec la première CI :

$$u_C(0) = E = A + B$$

◇ Avec la seconde CI :

$$\left(\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right)_0 = Ar_+ + Br_- = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{Ar_+}{r_-}$$

En combinant, on trouve

$$\boxed{A = -\frac{Er_-}{r_+ - r_-}} \quad \text{et} \quad \boxed{B = \frac{Er_+}{r_+ - r_-}}$$

Or,

$$r_+ - r_- = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\cancel{-1}\cancel{+1} + 2\sqrt{1-4Q^2}\right)$$
$$\Leftrightarrow r_+ - r_- = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{1-4Q^2}$$

Propriété E5.8 : Solution apériodique

Pour un facteur de qualité $Q < 1/2$, u_C s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = \frac{QE}{\omega_0\sqrt{1-4Q^2}}\left(r_+\exp(r_-t) - r_-\exp(r_+t)\right)}$$

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour $Q = 1/2$.

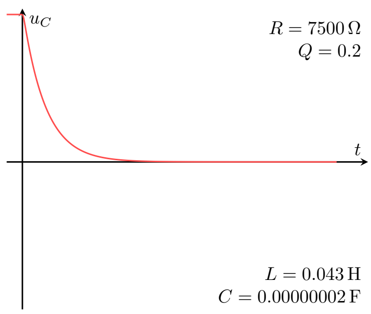


FIGURE 5.8

Interprétation E5.4 : Espace des phases apériodique

Pendant le régime apériodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher u_C d'osciller, mais également pour **ralentir sa diminution** vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ plus petit donc i plus petit.

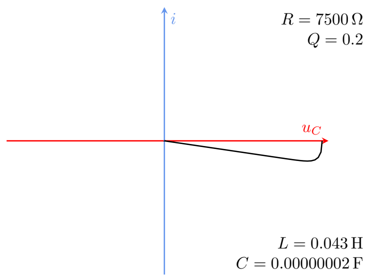


FIGURE 5.9

II/D) 3.2 Régime transitoire

Démonstration E5.8 : Régime transitoire apériodique

La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « **moins décroissante** ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc r_- et r_+.

On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle) :

$$\begin{aligned}
r_+ < 0 &\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\cancel{\omega_0}}{2Q}}_{\omega_0 \text{ et } Q>0}\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right) \underset{>}{\cancel{<}} 0 \\
&\Leftrightarrow 1-\sqrt{1-4Q^2} > 0 \\
&\Leftrightarrow \sqrt{1-4Q^2}^2 < 1^2 \\
&\Leftrightarrow 4Q^2 > 0
\end{aligned}$$

ce qui est vrai.

Or,

$$\begin{aligned}
& r_- < r_+ \\
\Leftrightarrow\ & |r_-| > |r_+| \quad |\cdot| \\
\Leftrightarrow\ & \left|\frac{1}{r_-}\right| < \left|\frac{1}{r_+}\right| \quad (\cdot)^{-1} \\
\Leftrightarrow\ & \tau_- < \tau_+ \quad \tau = |1/r|
\end{aligned}$$

On estime alors la durée du régime transitoire à $\boxed{\ln(20)/|r_+|}$.

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{x\ll 1}{\sim} 1 + x/2}$ pour simplifier r_+ :

$$\begin{aligned}
& r_+ = -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\sqrt{1-4Q^2}\right) \\
\Rightarrow\ & r_+ \underset{Q\ll 1}{\sim} -\frac{\omega_0}{2Q}\left(1-\left(1-\frac{4Q^2}{2}\right)\right) \\
\Leftrightarrow\ & r_+ \underset{Q\ll 1}{\sim} -Q\omega_0
\end{aligned}$$

Avec $\ln(20) \approx \pi$: $\boxed{t_{95} \approx \frac{\pi}{Q\omega_0}}$ soit $\boxed{t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}}$

Propriété E5.9 : Régime transitoire apériodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

$$\boxed{t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}} \quad \text{avec} \quad \boxed{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}}$$

Implication E5.3 : Résultat à faible Q

Quand $Q \longrightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle :

$$\frac{\cancel{\omega_0}}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \omega_0^{\cancel{2}} u_C = R\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\sqrt{LC}}u_C$$
$$= \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{R}\sqrt{\frac{\cancel{L}}{\cancel{L}C^2}}u_C = \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C}$$

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de $r_\pm$ tendent vers la même valeur $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$: en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance :

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}}R\sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R\sqrt{\frac{\cancel{C}}{L^2\cancel{C}}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$.

III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

III/A Présentation

Définition E5.3 : Situation initiale et bilan des forces

- **Système** : {point M} de masse m
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- **Repère** : $(\mathrm{O}', \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ (voir schéma)
- **Repérage** :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = (\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}\ ;\ \vec{v} = \dot{\ell}(t)\,\overrightarrow{u_x}\ ;\ \vec{a} = \ddot{\ell}(t)\,\overrightarrow{u_x}$$

- **Position initiale** : $\mathrm{OM}(0) = L_0 > 0$
- **Vitesse initiale** : $\vec{v}(0) = \vec{0}$

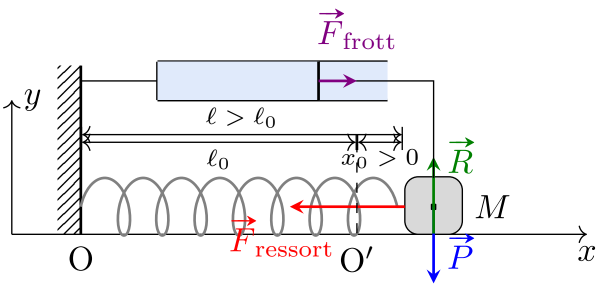


FIGURE 5.10

- **Bilan des forces :**

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction support	$\vec{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$
Force rappel	$\vec{F} = -kx(t)\,\overrightarrow{u_x}$
Force frottement	$\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha\vec{v}$

III/B Équation différentielle

Démonstration E5.9 : Équation ressort amorti

Avec le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$
$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k(\ell(t)-\ell_0)-\alpha v\\ -mg+R\end{pmatrix}$$

Sur l'axe $\vec{u_x}$ on trouve donc

$$m\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + k\ell(t) = k\ell_0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\alpha}{m}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + \frac{k}{m}\ell(t) = \frac{k}{m}\ell_0 \quad \div m$$

On identifie ω_0 et Q :

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

$$\text{et} \quad \frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

Propriété E5.10 : Équation ressort amorti

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\boxed{\begin{aligned}&\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\ell(t) = {\omega_0}^2\ell_0\\ \Leftrightarrow &\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2x(t) = 0\end{aligned}}$$

- $\boxed{\omega_0 = \frac{k}{m}}$ la pulsation propre ;
- $\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$ le facteur de qualité.

ℓ_0 **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

Important E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \ell_{\text{eq}} = \ell_0$.

Ici, c'est le coefficient de frottements α qui dissipe : on l'associe à R.

Méca	⟷	Élec
x	$\longleftrightarrow$	q
v	$\longleftrightarrow$	i
m	$\longleftrightarrow$	L
k	$\longleftrightarrow$	C^{-1}
$\sqrt{\frac{k}{m}}$	$\longleftrightarrow$	$\frac{1}{\sqrt{LC}}$
α	$\longleftrightarrow$	R

III/C Bilan énergétique

Propriété E5.11 : $\mathcal{P}$ ressort

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionellement au coefficient de friction α :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = -\alpha v^2}$$

Démonstration E5.10 : $\mathcal{P}$ ressort

À partir du PFD $\times v$:

$$m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = 0$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2 + \frac{1}{2}kx^2\right) = -\alpha v^2$$

On a bien $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{p,\text{el}}$ qui diminue.

III/D Solutions

Propriété E5.12 : Solutions ressort

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par x_0

III/E Résumé oscillateurs amortis

Important E5.4 : Résumé – pas de par cœur !

Pseudo-périodique	**Critique**	**Apériodique**
$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$
$r_\pm = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega$ $\Omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$	$r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$r_\pm = \dfrac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)$
$u_C(t) = E\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right) \times$ $\left[\cos(\Omega t) + \dfrac{1}{\sqrt{4Q^2-1}}\sin(\Omega t)\right]$	$u_C(t) = E(\omega_0 t + 1)\exp(-\omega_0 t)$	$u_C(t) = \dfrac{E}{r_+ - r_-} \times$ $\big(r_+\exp(r_- t) - r_-\exp(r_+ t)\big)$
$t_{95} \approx QT_0$	$t_{95} \approx \dfrac{T_0}{2}$	$t_{95} \approx \dfrac{T_0}{2Q}$