Électrocinétique – chapitre 3

Capacités et inductances : circuits du 1$^{\text{er}}$ ordre

Au programme

Savoirs

- ◇ Connaître les relations entre l'intensité et la tension.
- ◇ Citer des ordres de grandeurs des composants R, L, C.
- ◇ Exprimer l'énergie stockée dans un condensateur ou une bobine.
- ◇ Distinguer, sur un relevé expérimental, régime transitoire et régime permanent au cours de l'évolution d'un système du premier ordre soumis à un échelon de tension.
- ◇ Interpréter et utiliser la continuité de la tension aux bornes d'un condensateur ou de l'intensité du courant traversant une bobine.

Savoir-faire

- ◇ Établir l'équation différentielle du premier ordre vérifiée par une grandeur électrique dans un circuit comportant une ou deux mailles.
- ◇ Déterminer la réponse temporelle dans le cas d'un régime libre ou d'un échelon de tension
- ◇ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire.
- ◇ Réaliser un bilan énergétique.

Sommaire

I Condensateur et circuit RC

A Présentation du condensateur

I.A.1 Composition

Après les résistances, les condensateurs sont les composants les plus répandus en électronique. Le condensateur est un composant électronique couramment utilisé dans les circuits les plus divers : microprocesseurs, mémoires, horloges électroniques, émetteurs et récepteurs radio, amplificateurs, etc.

Condensateur

Un condensateur est un composant constitué de deux **surfaces conductrices** [1] appelées *armatures* et séparées par un **matériau isolant** [2]. Son symbole est représenté ci-contre.

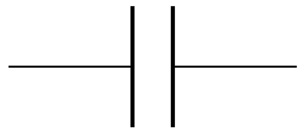

Figure 3.1

I.A.2 Relations fondamentales

Quand un courant traverse le condensateur, des charges s'accumulent sur les plaques : si l'une est chargée q, l'autre est chargée $-q$.

Charge et capacité

La **tension à ses bornes** est **proportionnelle à** q, et on appelle ce coefficient de proportionnalité sa **capacité** notée C. On a donc

$$\boxed{q = Cu}$$

Unité

C en Farad (F)

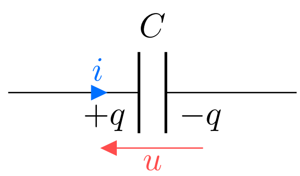

Figure 3.2

Ordre de grandeur

Le Farad est une « grande » unité : on trouvera des valeurs entre le mF (10^{-3} F) et le pF (10^{-12} F) :

- En électronique, on est entre le nF et le µF ;
- En électrotechnique, on est plutôt de l'ordre de 10 mF ;
- Une capacité parasite est autour du pF.

Pour caractériser le fonctionnement d'une capacité, on s'intéresse au lien entre son courant et sa tension, comme on le fait pour une résistance ($U = RI$). On remarque que :

- si $i > 0$, des charges arrivent sur l'armature de gauche, la charge augmente donc la tension aussi ;
- si $i < 0$, des charges repartent, la charge diminue donc la tension aussi ;
- si $i = 0$, aucune charge ne bouge, la quantité de charge sur l'armature de gauche ne varie pas, la tension est constante.

1. Ce sont souvent des plaques, parfois des demi-sphères ou d'autres formes.
2. Par exemple l'air ou du polyéthylène.

Cette relation entre le **signe de** i et la **variation de** u suggère que i est relié à la dérivée de u. On a alors :

Relation courant-tension

Pour un condensateur **en convention récepteur**, l'intensité que le traverse s'exprime par

$$\boxed{i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}}$$

Relation courant-tension

Par définition de i et de la charge,

$$\begin{aligned} i &= \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} \\ i &= C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \end{aligned} \quad q = Cu_C$$

I.A.3 Cas particuliers

Continuité

Si u_C présente une variation brusque, alors $\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$ devrait être infini. Or, comme $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$, ceci n'est pas possible puisque ça impliquerait que le courant le soit. Ainsi,

> La tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur ne peut pas varier instantanément, c'est une fonction continue.

Régime permanent

En régime permanent (continu), les tensions et courants ne dépendent pas du temps. Alors $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = 0$, ainsi

> En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et bloque le courant.

I.A.4 Associations

Association en série

Deux condensateurs C_1 et C_2 en série forment un dipôle équivalent de capacité

$$\boxed{\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$$

On dit qu'**en série, l'inverse des capacités s'ajoutent**.

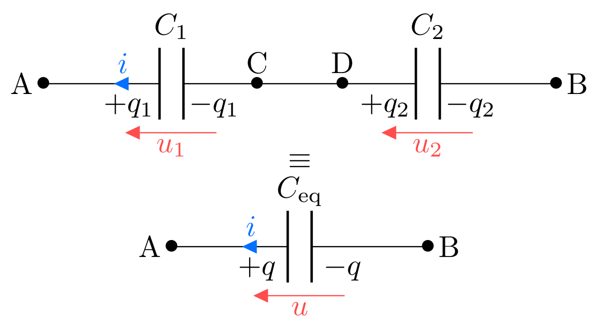

Figure 3.3

Association en série

Entre les deux condensateurs se situe un fil. Or, il n'y a pas de différence de potentiel sur un fil : les deux points C et D sont au même potentiel. On déduit ainsi

$$\begin{aligned} u_{CD} = u_C - u_D = 0 &\Leftrightarrow q_2 - q_1 = 0 \\ &\Leftrightarrow \boxed{q_2 = q_1 = q} \end{aligned}$$

et les condensateurs en série portent la même charge q. Ainsi,

$$\begin{aligned} & u = u_1 + u_2 \\ \Leftrightarrow\ & u = \frac{q}{C_1} + \frac{q}{C_2} \\ \Leftrightarrow\ & u = \left(\frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}\right) q \end{aligned} \quad q = Cu$$

On a bien l'expression d'un unique condensateur de capacité $\boxed{\frac{1}{C_{\mathrm{eq}}} = \frac{1}{C_1} + \frac{1}{C_2}}$

Association en parallèle

Deux condensateurs C_1 et C_2 en dérivation forment un dipôle équivalent de capacité

$$\boxed{C_{\text{eq}} = C_1 + C_2}$$

On dit qu'**en parallèle, les capacités s'ajoutent**.

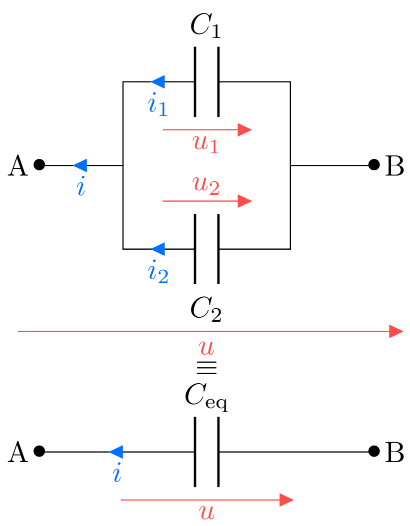

Figure 3.4

Association en parallèle

$$i = i_1 + i_2$$

On utilise ensuite la relation courant-tension :

$$C_{\text{eq}}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

On a bien l'expression d'un unique condensateur de capacité

$$\boxed{C_{\text{eq}} = C_1 + C_2}$$

I.A.5 Condensateur réel

Dans la réalité, un condensateur possède des effets résistifs. Les deux armatures d'un condensateur réel sont séparés par un matériau qui conduit très légèrement le courant. Ainsi, un condensateur réel se modélise par un condensateur idéal en parallèle avec une résistance R_f, nommée résistance de fuite.

L'ordre de grandeur de R_f est de $10^7\,\Omega$

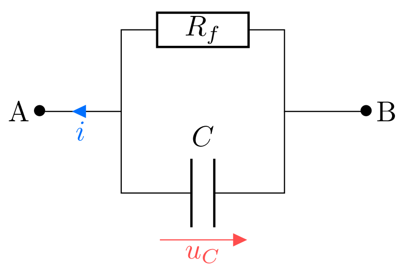

Figure 3.5

I.A.6 Énergie stockée dans un condensateur

En convention récepteur, la puissance **reçue** est

$$\mathcal{P}_C = u_C i$$
$$\Leftrightarrow \mathcal{P}_C = C u_C \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \triangleq \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t} \qquad i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$$

Or, $\forall f$ fonction dérivable, $$\boxed{f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)'}$$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_C = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C{u_C}^2\right) \Rightarrow \mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}Cu_C(t)^2$$

Énergie stockée dans un condensateur

$$\boxed{\mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2} C {u_C}^2(t)}$$

Condensateur récepteur ou générateur

Par l'étude de la relation précédente,

$$u_C \nearrow \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow \mathcal{P}_C > 0$$

ainsi, le condensateur reçoit bien de l'énergie au reste du circuit, et il se **comporte comme récepteur**.

À l'inverse, on lit que

$$u_C \searrow \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow \mathcal{P}_C < 0$$

ainsi, le condensateur cède en réalité de l'énergie au reste du circuit, autrement dit **il peut se comporter comme générateur** !

B Circuit RC série : charge

On appelle **circuit linéaire du premier ordre** un circuit électrique dont l'évolution des grandeurs électriques est régie par des équations différentielles linéaires à coefficients constants et *du premier ordre*. On étudie ici leur réponse à un échelon de tension.

Échelon de tension

Un échelon de tension est montant s'il est de la forme

$$\begin{cases} u(t<0) = 0 \\ u(t \geq 0) = E \end{cases}$$

et descendant si E avant et 0 après.

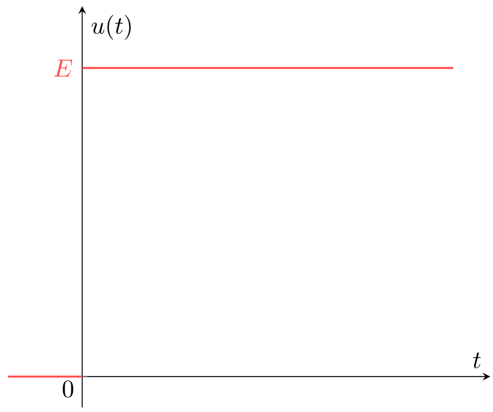

Figure 3.6

I.B.1 Présentation

- Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.
- **On suppose le condensateur initialement déchargé**.
- À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

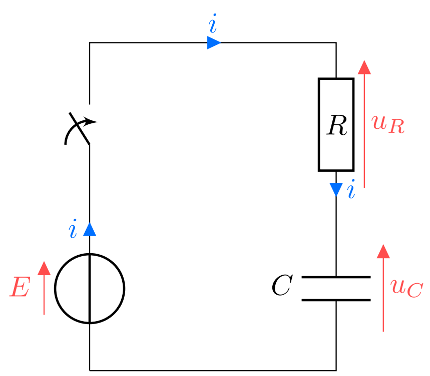

Figure 3.7

I.B.2 Équation différentielle du circuit

On cherche à connaître la tension aux bornes du condensateur à partir du moment où l'on ferme l'interrupteur, soit à $t \geq 0$.

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_R + u_C &= E \\ \Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C &= E \\ \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C &= \frac{E}{RC} \end{aligned}$$

$u_R = Ri$ et $i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

Équation différentielle RC échelon montant

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{E}{\tau}}$$

avec $\boxed{\tau = RC}$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = 0}$$

Dimension de RC

Montrer, par analyse dimensionnelle, que RC est homogène à un temps.

Méthode 1

On a $[RC] = \Omega{\cdot}\mathrm{F}$. Or,

$$\begin{aligned} [q] = [Cu] &\Leftrightarrow \mathrm{C} = \mathrm{F}{\cdot}\mathrm{V} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{C}{\cdot}\mathrm{V}^{-1} \\ &\Leftrightarrow \mathrm{F} = \mathrm{A}{\cdot}\mathrm{s}{\cdot}\mathrm{V}^{-1} \end{aligned}$$

de plus,

$$\begin{aligned} [u] = [Ri] &\Leftrightarrow \mathrm{V} = \Omega{\cdot}\mathrm{A} \\ &\Leftrightarrow \Omega = \mathrm{V}{\cdot}\mathrm{A}^{-1} \end{aligned}$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} & [RC] = \Omega{\cdot}\mathrm{F} \\ \Leftrightarrow & [RC] = \mathrm{V}{\cdot}\mathrm{A}^{-1}{\cdot}\mathrm{A}{\cdot}\mathrm{s}{\cdot}\mathrm{V}^{-1} \\ \Leftrightarrow & \boxed{[RC] = \mathrm{s}} \end{aligned}$$

■

Méthode 2

Une équation physique étant homogène, comme

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{RC} = \frac{E}{RC}$$

alors

$$\begin{aligned} \left[\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right] &= \left[\frac{u_C}{RC}\right] \\ \Leftrightarrow \frac{[u_C]}{[t]} &= \frac{[u_C]}{[RC]} \\ \Leftrightarrow & \boxed{[RC] = [t]} \end{aligned}$$

■

I.B.3 Résolution de l'équation différentielle

Résolution équation différentielle coefficients constants

Pour résoudre une équation différentielle linéaire à coefficients constants et second membre constant, de la forme $\frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}y} + \frac{1}{\tau}y = k$:

1. On écrit l'**équation homogène** associée à l'équation différentielle obtenue.
2. On écrit la **forme générale de la solution de l'équation homogène**.
3. On recherche une **solution particulière constante de l'équation générale**, de la forme $y(t) = \lambda$.
4. On écrit la **solution générale**, somme de la solution particulière et de la forme générale.
5. On détermine la constante à l'aide des **conditions initiales**.

Solution RC série montant

1. L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0$$

2. La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$u_C(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

3. Une solution particulière avec $u_C(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{E}{\tau}$$

Donc $u_C(t) = E$ est **une** solution de l'équation différentielle.

4. La solution générale est donc

$$u_C(t) = E + K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

5. Les conditions initiales donnent ici

$$u_C(t=0) = 0 \qquad \text{et} \qquad u_C(0) = K + E \Rightarrow K = -E$$

Solution de l'équation différentielle RC montant

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC soumis à un échelon de tension E avec $u_C(0) = 0$ est

$$\boxed{u_C(t) = E\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

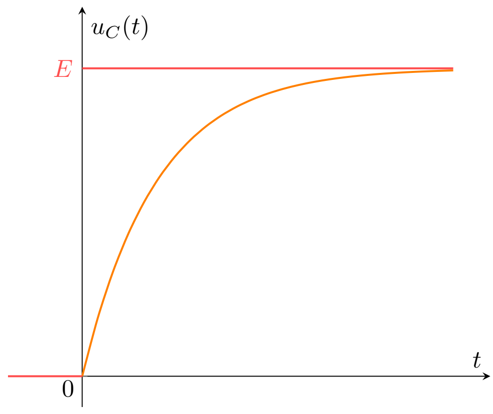

Figure 3.8

I.B.4 Constante de temps, régime transitoire

Quand $t \to +\infty$, $u_C(t) = E$. On est alors en **régime permanent** : $u_C(t)$ ne varie plus. La vitesse à laquelle ce régime est atteint dépend de la valeur de τ la constante de temps. On détaille ici comment la déterminer :

Détermination τ

Avec la courbe $u_C(t)$, on remarque que :

1) $u_C(\tau) = E\left(1 - e^{-1}\right) \approx 0{,}632 \times E$

   Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $u_C(\tau) = 0{,}632 \times E$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) + \underbrace{\frac{u_C(0)}{\tau}}_{=0} = \frac{E}{\tau}$$

   La tangente à la courbe en 0, de pente $\frac{E}{\tau}$ coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

Constante de temps

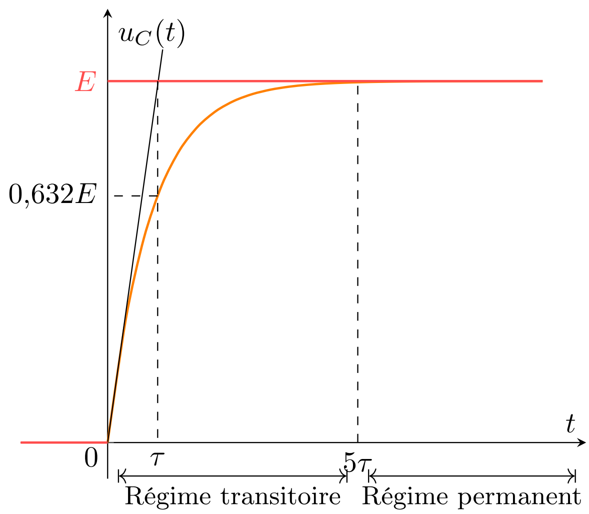

Figure 3.9

On distingue alors deux zones sur la courbe, approximativement séparées : le régime *transitoire* et le régime *permanent*. On cherche à trouver au bout de combien de temps on peut considérer le régime permanent atteint.

Pour cela, on se fixe un **seuil arbitraire** à partir duquel on considère le régime permanent atteint. Dans ce cours, on prendra 99%. On cherche donc t_{99} tel que $u(t_{99}) = 0{,}99E$:

$$
\begin{aligned}
u_C(t_{99}) &= 0{,}99E \\
\Leftrightarrow E\left(1-\exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right)\right) &= 0{,}99E \\
\Leftrightarrow 1-\exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0{,}99 \\
\Leftrightarrow \exp\left(-\frac{t_{99}}{\tau}\right) &= 0{,}01 \\
\Leftrightarrow -\frac{t_{99}}{\tau} &= \ln(0{,}01) = -\ln(100) \\
\Leftrightarrow \boxed{t_{99} = \tau\ln(100)}
\end{aligned}
$$

on utilise la solution de u_C

$\div E$

on isole l'exp

$\ln(\,)$

on isole t_{99}

Temps de réponse

Ainsi, $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$

I.B.5 Évolution de l'intensité

Qu'advient-il de l'intensité dans un circuit RC ? On peut le déterminer de deux manières :

1) Avec la caractéristique de C :

$$
\begin{aligned}
i(t) &= C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow i(t) &= CE\left(0-\left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) \\
\Leftrightarrow & \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}
$$

$u_C(t) = E(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$

$\tau = RC \Leftrightarrow C/\tau = 1/R$

2) Avec la loi des mailles :

$$
\begin{aligned}
Ri &= E - u_C \\
\Leftrightarrow Ri(t) &= \cancel{E} - \cancel{E} + E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
\Leftrightarrow & \boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}
$$

$u_C(t) = E(1-\mathrm{e}^{-t/\tau})$

$\div R$

Intensité RC charge

L'intensité dans un circuit RC en charge s'exprime par

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

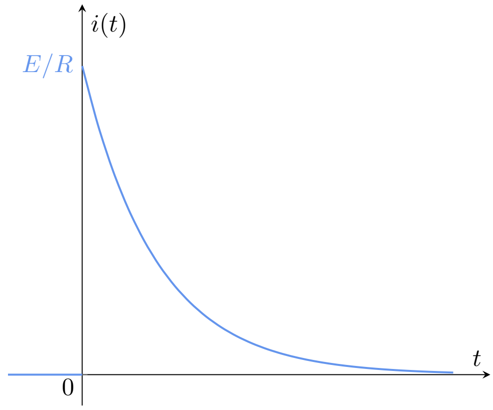

Figure 3.10

I.B.6 Bilan de puissance

En électrocinétique, les puissances sont le produit d'une tension et d'une intensité. Or, par construction la loi des mailles est une relation entre les tensions du circuit. Si on veut effectuer un bilan de puissance, on retiendra :

Bilan de puissance en élec

On effectue un bilan de puissance en écrivant la loi des mailles multipliée par i.

$$\begin{aligned}
u_C + Ri &= E \qquad \times i\\
\Leftrightarrow u_C\, i + Ri^2 &= Ei \qquad \text{RCT pour C : } i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\
\Leftrightarrow u_C\, C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + Ri^2 &= Ei \qquad f \times f' = \left(\tfrac{1}{2}f^2\right)'\\
\Leftrightarrow \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}C{u_C}^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} &= \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G}
\end{aligned}$$

Bilan de puissances

Dans un circuit RC en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_C + \mathcal{P}_J}$$

$\mathcal{P}_G = Ei$: la puissance fournie par le générateur ;

$\mathcal{P}_C = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_C}{\mathrm{d}t}$: la puissance reçue par le condensateur ;

$\mathcal{P}_J = Ri^2$: la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.

I.B.7 Bilan d'énergie

On peut étudier énergétiquement cette évolution en intégrant la puissance délivrée sur le temps d'utilisation. En effet, comme vu précédemment, $i(t)$ tend vers 0 en $+\infty$, donc la puissance finale sera nulle et l'énergie finie.

L'énergie fournie par le générateur sur toute la charge est

$$\begin{aligned}
\mathcal{E}_G &= \int_0^{+\infty} \mathcal{P}_G \mathrm{d}t \\
&\overset{\mathcal{P}_G = Ei}{=} \int_0^{+\infty} E i(t) \mathrm{d}t \\
&\overset{i(t) = E/R \mathrm{e}^{-t/\tau}}{=} \frac{E^2}{R} \left[-\tau \exp\left(-\frac{t}{\tau} \right) \right]_0^{+\infty} \\
&= \frac{E^2}{R} \left(-\tau \underbrace{\exp\left(-\frac{\infty}{\tau} \right)}_{=0} - \left(-\tau \underbrace{\exp(0)}_{=1} \right) \right) \\
\Leftrightarrow \mathcal{E}_G &= \tau \frac{E^2}{R} \\
\overset{\tau = RC}{\Leftrightarrow} & \boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}
\end{aligned}$$

Or, l'énergie stockée dans le condensateur (propriété I.A.6) est

$$\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C E^2$$

ainsi

$$\mathcal{E}_J = \frac{1}{2} C E^2$$

Bilan d'énergie

Pendant la totalité de la charge, l'énergie du générateur est

$$\boxed{\mathcal{E}_G = CE^2}$$

Elle se répartit équitablement entre le condensateur et la résistance :

$$\boxed{\mathcal{E}_C = \frac{1}{2} C E^2 = \mathcal{E}_J}$$

C Circuit RC série : décharge

I.C.1 Présentation

◇ Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et un condensateur idéal.

◇ **On suppose le condensateur initialement chargé** : $u_C(0^-) = E$.

◇ À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

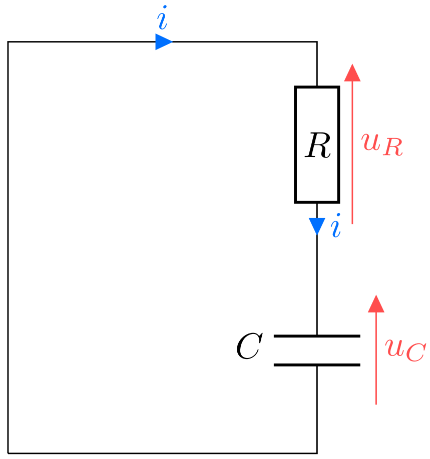

Figure 3.11

I.C.2 Équation différentielle du circuit

Équa. diff. RC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RC en décharge

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0}$$

avec $\boxed{\tau = RC}$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$\boxed{u_C(0^-) = u_C(0^+) = E}$$

Équa. diff. RC libre

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} & u_R + u_C = 0 \quad \left.\right) \; u_R = Ri \text{ et } i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\ \Leftrightarrow\ & RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{RC}u_C = 0 \end{aligned}$$

I.C.3 Résolution de l'équation différentielle

Solution équa. diff. RC libre

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit RC en décharge avec $u_C(0) = E$ est

$$\boxed{u_C(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Solution équa. diff. RC libre

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale :

$u_C(0) = E$ et $u_C(0) = K \Rightarrow K = E$

I.C.4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

Détermination τ

1) $u_C(\tau) = Ee^{-1} \approx 0{,}368 \times E$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $u_C(\tau) = 0{,}368 \times E$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\overbrace{u_C(0)}^{=E}}{RC} = 0$$

La tangente à la courbe en 0, de pente $-E/\tau$ coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

Constante de temps

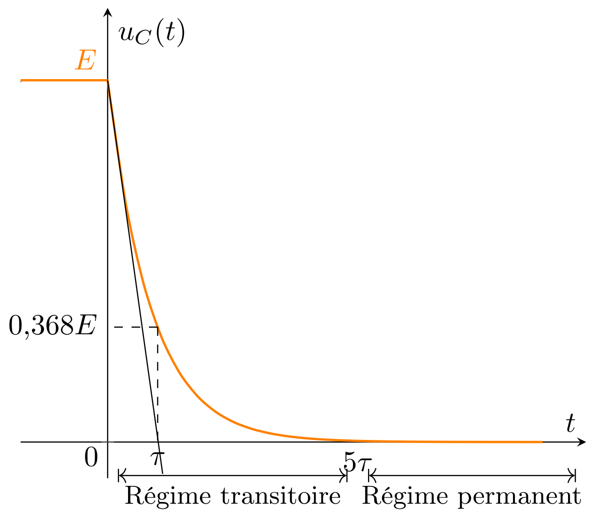

Figure 3.12

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $u_C(t_{99}) = 0{,}01E$, on trouve $t_{99} = 4{,}6\tau$.

Temps de réponse

Ainsi, $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$

I.C.5 Évolution de l'intensité

1) Avec la caractéristique de C :

$$\begin{aligned}
& i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} && u_C(t) = E\mathrm{e}^{-t/\tau} \\
\Rightarrow\ & i(t) = -\frac{CE}{\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) && \tau = RC \Leftrightarrow C/\tau = 1/R \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}$$

2) Avec la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
& Ri = -u_C && u_C(t) = E\mathrm{e}^{-t/\tau} \\
\Leftrightarrow\ & Ri(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) && \div R \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}$$

Intensité RC décharge

L'intensité dans un circuit RC en décharge s'exprime par

$$\boxed{i(t) = -\frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

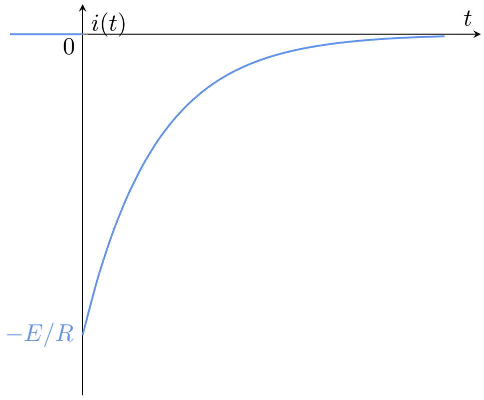

FIGURE 3.13

D Méthode pour les circuits à plusieurs mailles

En général, les circuits étudiés sont constitués de plus d'une maille. Pour les résoudre, on procède comme suit :

Méthode avec plusieurs mailles

1. Écrire les différentes lois du circuit (LdN, LdM, LdΩ, RCT...) ;
2. Écrire les lois des mailles ;
3. Isoler la grandeur dont on veut l'équation différentielle en éliminant les autres ;
4. mettre l'équation sous forme canonique :

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t} + \frac{f}{\tau} = \frac{F}{\tau}$$

   et identifier F et τ ;
5. Établir les conditions initiales avec l'énoncé et la continuité de la tension pour C ;
6. Résoudre l'équation différentielle.

II Bobine et circuit RL

A Présentation de la bobine

II.A.1 Composition

Les bobines sont fréquemment utilisées dans les applications électrotechniques (moteurs électriques, transformateurs). Comme elles sont lourdes et encombrantes, elles sont plus rares en électronique.

Bobine

Une bobine est constituée de l'enroulement régulier d'une grande longueur d'un fil métallique, recouvert d'une gaine ou d'un vernis isolant. Son symbole est représenté ci-contre.

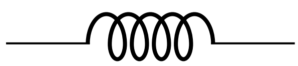

FIGURE 3.14

II.A.2 Relation courant-tension

Relation courant-tension

Quand un courant traverse la bobine, une tension apparaît à ses bornes. **En convention récepteur**, celle-ci s'exprime par

$$\boxed{u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}}$$

on appelle L l'**inductance** de la bobine.

Unité

L en Henry (H)

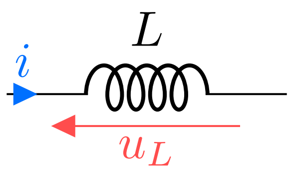

Figure 3.15

Ordre de grandeur

Le Henry est également un peu grande comme unité : on trouvera des valeurs entre le H et le µH (10^{-6} H).

II.A.3 Cas particuliers

Continuité

Si i présente une variation brusque, alors $\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ devrait être infini. Or, comme $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$, ceci n'est pas possible puisque ça impliquerait que la tension le soit. Ainsi,

> Le courant i traversant une bobine ne peut pas varier instantanément, c'est une fonction continue.

Régime permanent

En régime permanent (continu), les tensions et courants ne dépendent pas du temps. Alors $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = 0$, ainsi

> En régime permanent, la bobine se comporte comme un fil et la tension à ses bornes est nulle

II.A.4 Associations

Association en série

Deux bobines L_1 et L_2 en série forment un dipôle équivalent d'inductance

$$\boxed{L_{\mathrm{eq}} = L_1 + L_2}$$

On dit qu'**en série, les inductances s'ajoutent**.

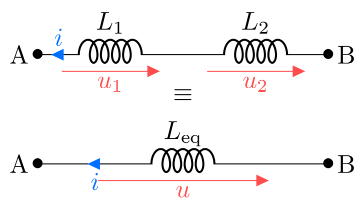

Figure 3.16

Association en série

$$u = u_1 + u_2$$
$$\Leftrightarrow L_{\mathrm{eq}}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = L_1\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + L_2\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

On a bien l'expression d'une unique bobines d'inductance $\boxed{L_{\mathrm{eq}} = L_1 + L_2}$

Association en parallèle

Deux bobines L_1 et L_2 en dérivation forment un dipôle équivalent d'inductance

$$\boxed{\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

On dit qu'**en parallèle, l'inverse des inductances s'ajoutent**.

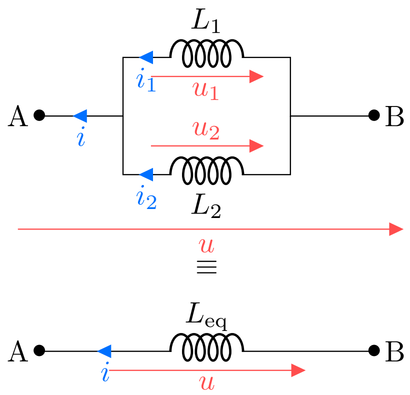

Figure 3.17

Association en parallèle

$$\begin{aligned} & i = i_1 + i_2 \\ \Rightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} \quad \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\,) \\ \Leftrightarrow\ & \frac{u}{L_{\text{eq}}} = \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2} \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

On a bien l'expression d'une unique bobine d'inductance

$$\boxed{\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}}$$

II.A.5 Bobine réelle

Dans la réalité, le fil de cuivre enroulé possède une résistance non nulle. Une bobine réelle se modélise donc par l'association en série d'une bobine idéale et d'une résistance électrique r.

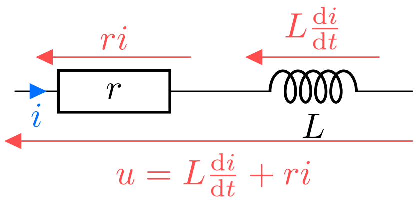

Figure 3.18

II.A.6 Énergie stockée dans une bobine

En convention récepteur, la puissance **reçue** est

$$\begin{aligned} & \mathcal{P}_L = u_L i \\ \Leftrightarrow\ & \mathcal{P}_L = Li\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \triangleq \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t} \quad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \end{aligned}$$

Or, $\forall f$ fonction dérivable, $\boxed{f \times f' = \left(\frac{1}{2}f^2\right)'}$

Ainsi,

$$\mathcal{P}_L = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right) \Rightarrow \mathcal{E}_C(t) = \frac{1}{2}Li(t)^2$$

Énergie stockée dans une bobine

$$\boxed{\mathcal{E}_L(t) = \frac{1}{2}Li^2(t)}$$

Bobine réceptrice ou génératrice

Par l'étude de la relation précédente,

$$i \nearrow \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0 \Rightarrow \mathcal{P}_L > 0$$

ainsi, la bobine reçoit bien de l'énergie au reste du circuit, et elle se **comporte comme un récepteur**.

À l'inverse, on lit que

$$i \searrow \quad \Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} < 0 \Rightarrow \mathcal{P}_L < 0$$

ainsi, la bobine cède en réalité de l'énergie au reste du circuit, autrement dit **il peut se comporter comme un générateur** !

B Circuit RL série : échelon montant

II.B.1 Présentation

- Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale.
- **On suppose l'interrupteur initialement ouvert**.
- À $t = 0$, on ferme l'interrupteur.

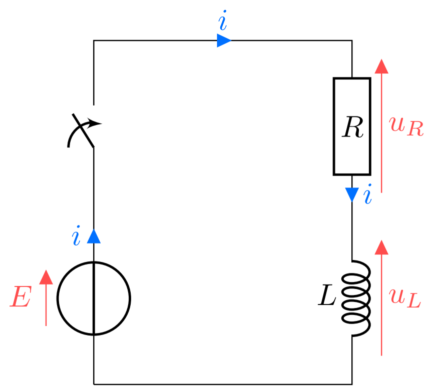

FIGURE 3.19

II.B.2 Équation différentielle du circuit

On cherche à connaître la tension aux bornes du condensateur à partir du moment où l'on ferme l'interrupteur, soit à $t \geq 0$.

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} & u_L + u_R = E \\ \Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = E \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L}i = \frac{E}{L} \end{aligned}$$

$u_R = Ri$ et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

Équation différentielle RL échelon montant

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'une bobine dans un circuit RL avec un échelon de tension montant E s'écrit

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}}$$

avec $\boxed{\tau = L/R}$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients et second membre constants, de condition initiale

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = 0}$$

Unité de L/R

On peut de même démontrer l'unité de L/R par analyse dimensionnelle.

II.B.3 Résolution de l'équation différentielle

Solution RL série montant

1 L'équation homogène est :

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}i = 0$$

2 La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$i(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

3 Une solution particulière avec $i(t) = \lambda$ donne

$$0 + \frac{\lambda}{\tau} = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}$$

Donc $i(t) = \frac{E}{R}$ est **une** solution de l'équation différentielle.

4 La solution générale est donc

$$i(t) = \frac{E}{R} + K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

5 Les conditions initiales donnent ici

$$i(t=0) = 0 \qquad \text{et} \qquad i(0) = K + \frac{E}{R} \Rightarrow K = -\frac{E}{R}$$

Solution de l'équation différentielle RL montant

La solution de l'équation différentielle du courant $i(t)$ d'un circuit RL soumis à un échelon de tension E avec $i(0) = 0$ est

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)}$$

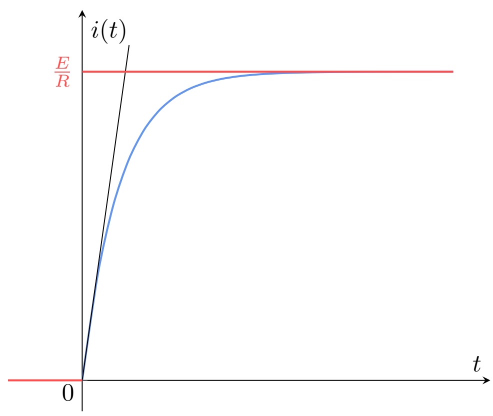

FIGURE 3.20

II.B.4 Constante de temps, régime transitoire

Détermination τ

Avec la courbe $i(t)$, on remarque que :

1) $i(\tau) = \frac{E}{R}(1 - e^{-1}) \approx 0{,}632 \times E$

Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $i(\tau) = 0{,}632 \times \frac{E}{R}$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) + \underbrace{\frac{i(0)}{\tau}}_{=0} = \frac{1}{\tau}\frac{E}{R}$$

La tangente à la courbe en 0, de pente $\frac{E}{R\tau}$ coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

Constante de temps

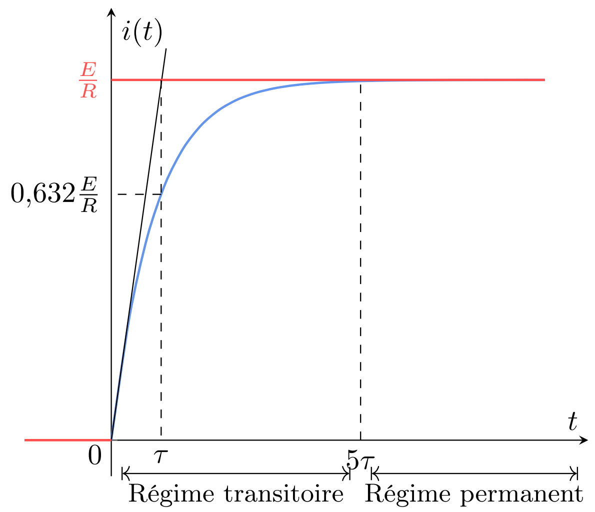

Figure 3.21

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0{,}99\frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4{,}6\tau$.

Temps de réponse

Ainsi, $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$

II.B.5 Évolution de la tension

1) Avec la caractéristique de L :

$$\begin{aligned}
& u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} && i(t) = \tfrac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \\
\Rightarrow\ & u_L(t) = \frac{LE}{R}\left(0 - \left(-\frac{1}{\tau}\right)\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right) && \tau = L/R \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}$$

2) Avec la loi des mailles :

$$\begin{aligned}
& u_L = E - Ri && i(t) = \tfrac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \\
\Leftrightarrow\ & u_L(t) = E - R\frac{E}{R}(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}) \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}$$

Tension RL charge

La tension dans un circuit RL en charge s'exprime par

$$\boxed{u_L(t) = E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

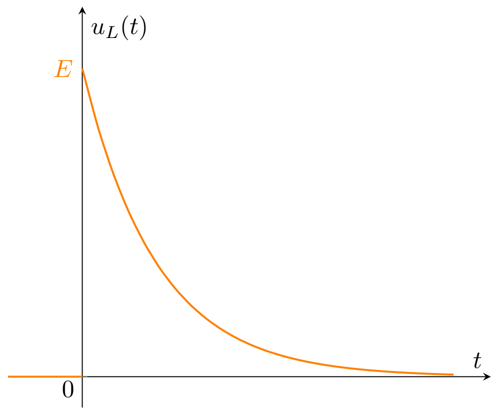

Figure 3.22

II.B.6 Bilan de puissance

$$\begin{aligned}
& u_L + Ri = E && \times i \\
\Leftrightarrow\ & u_L\, i + Ri^2 = Ei && \text{RCT pour L : } u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & i\, L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri^2 = Ei && f \times f' = \left(\tfrac{1}{2}f^2\right)' \\
\Leftrightarrow\ & \underbrace{\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}Li^2\right)}_{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}} + \underbrace{Ri^2}_{\mathcal{P}_J} = \underbrace{Ei}_{\mathcal{P}_G}
\end{aligned}$$

Bilan de puissances

Dans un circuit RL en charge, on a le bilan de puissances

$$\boxed{\mathcal{P}_G = \mathcal{P}_L + \mathcal{P}_J}$$

$\mathcal{P}_G = Ei$: la puissance fournie par le générateur ;

$\mathcal{P}_L = \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_L}{\mathrm{d}t}$: la puissance reçue par le condensateur ;

$\mathcal{P}_J = Ri^2$: la puissance dissipée par effet Joule dans la résistance.

Bilan de puissance RL charge

Ici la puissance en régime permanent n'est pas nulle : un courant circule toujours dans la résistance qui dissipe RI^2. On ne peut intégrer à l'infini.

C Circuit RL série : décharge

II.C.1 Présentation

- Il est constitué d'un générateur idéal de tension en série avec une résistance et une bobine idéale.
- **On suppose le courant initialement établi** : $i(0^-) = \frac{E}{R}$.
- À $t = 0$, on coupe le générateur.

On dit que le système est **en régime libre** et soumis à un **échelon de tension descendant**.

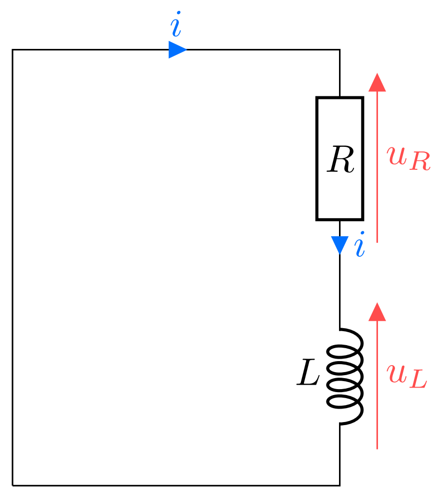

Figure 3.23

II.C.2 Équation différentielle du circuit

Équa. diff. RL libre

L'équation différentielle du courant $i(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit RL en décharge

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau} i = 0}$$

avec $\boxed{\tau = L/R}$ la constante de temps.

C'est une équation différentielle linéaire du premier ordre à coefficients constants sans second membre, de condition initiale

$$\boxed{i(0^-) = i(0^+) = \frac{E}{R}}$$

Équa. diff. RL libre

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} & u_R + u_L = 0 \\ \Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri = 0 \\ \Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{R}{L} i = 0 \end{aligned}$$

$u_R = Ri$
et $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$

II.C.3 Résolution de l'équation différentielle

Solution équa. diff. RL libre

La solution de l'équation différentielle de la tension $i(t)$ d'un circuit RL en décharge avec $i(0) = \frac{E}{R}$ est

$$\boxed{i(t) = \frac{E}{R}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

Solution équa. diff. RL libre

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$i(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

et on trouve K avec la condition initiale :

$$i(0) = \frac{E}{R} \qquad \text{et} \qquad i(0) = K \Rightarrow K = \frac{E}{R}$$

II.C.4 Représentation graphique, constante de temps et transitoire

Détermination τ

1) $i(\tau) = \frac{E}{R}e^{-1} \approx 0{,}368 \times \frac{E}{R}$

   Donc on trouve τ en lisant l'abscisse telle que $i(\tau) = 0{,}368 \times \frac{E}{R}$.

2) En $t = 0$, l'équation différentielle donne

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0) + \frac{\overbrace{i(0)}^{=E/R}}{\tau} = 0$$

La tangente à la courbe en 0, de pente $\frac{-E}{R\tau}$ coupe donc l'asymptote en $t = \tau$.

Constante de temps

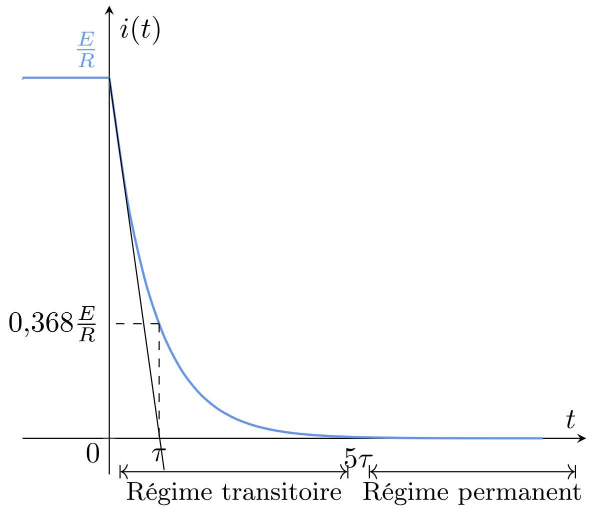

Figure 3.24

Comme précédemment, avec t_{99} tel que $i(t_{99}) = 0{,}01\frac{E}{R}$, on trouve $t_{99} = 4{,}6\tau$.

Temps de réponse

Ainsi, $\boxed{\text{le temps de réponse à 99\% est à } 4{,}6\tau}$

II.C.5 Évolution de la tension

1) Avec la caractéristique de L :

$$
\begin{aligned}
& u_L(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow\ & u_L(t) = -\frac{LE}{R\tau}\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u_L(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}
$$

$i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$

$\tau = L/R$

2) Avec la loi des mailles :

$$
\begin{aligned}
& u_L = -Ri \\
\Leftrightarrow\ & u_L(t) = -R\frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u_L(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}
\end{aligned}
$$

$i(t) = \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-t/\tau}$

Tension RL décharge

La tension dans un circuit RL en décharge s'exprime par

$$\boxed{u_L(t) = -E\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)}$$

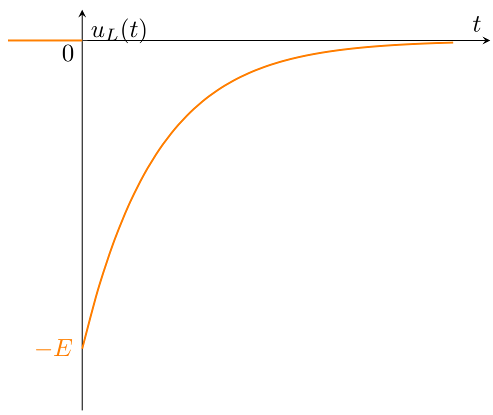

Figure 3.25