Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont *autorisées*

Au programme

Régimes transitoires d'ordre 2 (mécanique et électricité), transformation et équilibre chimique.

Sommaire

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- A : application numérique mal faite ;
- N : numéro de copie manquant ;
- P : prénom manquant ;
- E : manque d'encadrement des réponses ;
- M : marge non laissée ou trop grande ;
- V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- Q : question mal ou non indiquée ;
- C : copie grand carreaux ;
- U : mauvaise unité (flagrante) ;
- H : homogénéité non respectée ;
- S : chiffres significatifs non cohérents ;
- φ : loi physique fondamentale brisée.

Exemple application numérique

$$\boxed{n = \frac{PV}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1{,}0 \times 10^5\,\mathrm{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}mol^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ T = 300\,\mathrm{K} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{n = 5{,}6 \times 10^{-4}\,\mathrm{mol}}$

$$\cancel{n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8.32 \cdot 300} = 0.56}$$

/30 E1 Pentachlorure de phosphore

Le pentachlorure de phosphore PCl_5 est un composé très toxique, servant de réactif en synthèse organique pour ajouter des atomes de chlore à une chaîne carbonée. Mis en phase gazeuse, il se décompose spontanément en trichlorure de phosphore et en dichlore, donnant naissance à un équilibre en phase gazeuse.

Considérons un réacteur fermé de volume constant $V = 2\,\mathrm{L}$ maintenu à température constante $T = 180\,°\mathrm{C}$. À cette température, la constante thermodynamique de l'équilibre précédemment cité vaut $K° = 8$. On y met $n_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol}$ de PCl_5.

On rappelle que $R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}}$.

/1 1 Exprimer puis calculer la pression initiale dans le réacteur p_0 en fonction des données.

Réponse

On applique la loi des gaz parfaits :

$$\boxed{p_0 = \frac{n_0 RT}{V}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_0 = 0{,}5\,\mathrm{mol} \\ R = 8{,}314\,\mathrm{J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}} \\ T = 453{,}15\,\mathrm{K} \\ V = 2\times 10^{-3}\,\mathrm{m^3} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{p_0 = 9{,}41\times 10^5\,\mathrm{Pa}}$$

/1 2 Écrire l'équation de réaction modélisant le processus dans le réacteur, et dresser le tableau d'avancement correspondant.

Réponse

Équation		$PCl_{5(g)}$	$=\ PCl_{3(g)}$	$+\ Cl_{2(g)}$	$n_{tot,gaz}$
Initial	$\xi = 0$	n_0	0	0	n_0
Interm.	ξ	$n_0 - \xi$	ξ	ξ	$n_0 + \xi$
Final	$\xi_f = \xi_{eq}$	$n_0 - \xi_{eq}$	ξ_{eq}	ξ_{eq}	$n_0 + \xi_{eq}$

/2 3 Exprimer les pressions partielles des gaz en fonction de n_0, ξ et de la pression initiale p_0.

Réponse

On utilise à nouveau l'équation des gaz parfaits, avec $\frac{RT}{V} = \frac{p_0}{n_0}$:

$$\boxed{P_{PCl_5} = \frac{(n_0-\xi)RT}{V} = \frac{(n_0-\xi)p_0}{n_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{PCl_3} = \frac{\xi p_0}{n_0}} \quad \text{et} \quad \boxed{P_{Cl_2} = \frac{\xi p_0}{n_0}}$$

/5 4 Exprimer le coefficient de dissociation à l'équilibre $\alpha = \xi_{eq}/n_0$ en fonction de $K°$, $p°$ et p_0. Faire l'application numérique. Que représente-t-il physiquement ?

Réponse

Loi d'action de masses :

$$K° = \left.\frac{a(PCl_3)a(Cl_2)}{a(PCl_5)}\right|_{eq}$$

Activité d'un gaz

$$\Leftrightarrow K° = \left.\frac{\frac{P_{PCl_3}}{p°}\frac{P_{Cl_2}}{p°}}{\frac{P_{PCl_5}}{p°}}\right|_{eq}$$

Question 2

$$\Leftrightarrow K° = \frac{\xi_{eq}^2}{n_0(n_0-\xi_{eq})}\frac{p_0}{p°}$$

On factorise

$$\Leftrightarrow K° = \underbrace{\frac{\cancel{n_0^2}}{\cancel{n_0^2}}}_{=1}\frac{\left(\frac{\xi_{eq}}{n_0}\right)^2}{1\left(1-\frac{\xi_{eq}}{n_0}\right)}\frac{p_0}{p°}$$

$\alpha = \xi_{eq}/n_0$

$$\Leftrightarrow K° = \frac{\alpha^2}{(1-\alpha)}\frac{p_0}{p°}$$

Ainsi, en isolant :

$$\alpha^2 + \alpha\left(\frac{K°p°}{p_0}\right) - \frac{K°p°}{p_0} = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{K°p°}{p_0}\right)^2 + 4\left(\frac{K°p°}{p_0}\right) > 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\left(\frac{K°p°}{2p_0}\right) + \sqrt{\left(\frac{K°p°}{2p_0}\right)^2 + \left(\frac{K°p°}{p_0}\right)}}$$

$$\Rightarrow \text{A.N. : } \underline{\alpha = 0{,}59}$$

α représente la proportion de réactif ayant effectivement réagit.

/2 [5] Calculer la pression régnant dans le réacteur à l'équilibre.

Réponse

À l'aide du tableau d'avancement, on a $n_{\text{tot, gaz}}$, d'où

$$P_{\text{eq}} = \frac{n_0 + \xi_{\text{eq}}}{n_0} p_0 \Leftrightarrow \boxed{P_{\text{eq}} = (1+\alpha)p_0}$$

$$\text{A.N. : } \underline{P_{\text{eq}} = 15{,}0\,\text{bar}}$$

◇

/30 E2 États finaux variés

On s'intéresse dans un premier temps à une solution aqueuse obtenue à 298 K par un mélange d'acide éthanoïque CH_3COOH (concentration $c_1 = 0{,}10\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ après mélange) et d'ions fluorure F^- (concentration $c_2 = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ après mélange). La réaction (1) susceptible de se produire s'écrit :

$$CH_3COOH\,(aq) + F^-\,(aq) = CH_3COO^-\,(aq) + HF\,(aq) \tag{1}$$

On connaît les constantes d'équilibre à 298 K des réactions suivantes :

$$K_2^\circ = 10^{-4{,}8} \qquad CH_3COOH\,(aq) + H_2O = CH_3COO^-\,(aq) + H_3O^+\,(aq) \tag{2}$$

$$K_3^\circ = 10^{-3{,}2} \qquad HF\,(aq) + H_2O = F^-\,(aq) + H_3O^+\,(aq) \tag{3}$$

/1 [1] Calculer la constante d'équilibre K_1° relative à l'équilibre (1).

Réponse

On constate que l'équilibre (1) = (2) − (3) donc

$$\boxed{K_1^\circ = \frac{K_2^\circ}{K_3^\circ} = 10^{-1{,}6}}$$

◇

/4 [2] Déterminer l'état d'équilibre de la solution issue du mélange de l'acide éthanoïque et des ions fluorure : exprimer l'équation dont l'avancement est solution, et l'expression littérale de la solution en fonction de c_1, c_2 et K_1°.

Réponse

On dresse le tableau d'avancement en concentration :

Équation		$CH_3COOH\,(aq)$ +	$F^-\,(aq)$	→ $CH_3COO^-\,(aq)$ +	$HF\,(aq)$
Initial	$x = 0$	c_1	c_2	0	0
Interm.	x	$c_1 - x$	$c_2 - x$	x	x
Final ($\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$)	$x_f = x_{\text{eq}}$	$9{,}0 \times 10^{-2}$	$4{,}0 \times 10^{-2}$	$9{,}6 \times 10^{-3}$	$9{,}6 \times 10^{-3}$

D'après la loi d'action de masse,

$$K_1^\circ = \frac{x_{\text{eq}}^2}{(c_1 - x_{\text{eq}}) \times (c_2 - x_{\text{eq}})}$$

On isole

$$\Leftrightarrow (c_1 - x_{\text{eq}})(c_2 - x_{\text{eq}})K_1^\circ = x_{\text{eq}}^2$$

On rassemble

$$\Leftrightarrow x_{\text{eq}}^2 + (x_{\text{eq}} - c_1)(x_{\text{eq}} - c_2)K_1^\circ = 0$$

On développe et factorise

$$\Leftrightarrow \boxed{x_{\text{eq}}^2(1+K_1^\circ) - x_{\text{eq}}(c_1+c_2)K_1^\circ + c_1c_2K_1^\circ = 0}$$

Ainsi, avec Δ le discriminant de ce trinôme :

$$\Delta = (c_1+c_2)^2 (K_1^\circ)^2 - 4(1+K_1^\circ)c_1c_2K_1^\circ$$

Solutions

$$\Rightarrow \boxed{x_{\text{eq},\pm} = \frac{(c_1+c_2)K_1^\circ \pm \sqrt{(c_1+c_2)^2 (K_1^\circ)^2 - 4(1+K_1^\circ)c_1c_2K_1^\circ}}{2(1+K_1^\circ)}}$$

Calcul

$$\text{A.N. : } \underline{x_{\text{eq}} = 9{,}6 \times 10^{-3}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} c_1 = 0{,}1\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \\ c_2 = 5{,}0 \times 10^{-2}\,\text{mol}\cdot\text{L}^{-1} \\ K_1^\circ = 10^{-1{,}6} \end{cases}$$

On en déduit les concentrations à l'équilibre indiquées dans le tableau.

◇

On étudie dans la suite de l'exercice quelques constituants du béton. L'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2(s)$ confère au béton ses propriétés basiques (au sens de acide ou base). Il se dissout en solution aqueuse selon la réaction (4) :

$$K_4^\circ(298\,K) = 10^{-5,2} \qquad Ca(OH)_2(s) = Ca^{2+}(aq) + 2\,HO^-(aq) \tag{4}$$

/3 [3] On introduit en solution aqueuse un net excès d'hydroxyde de calcium. La phase solide est alors présente en fin d'évolution. Calculer les concentrations de chacun des ions présents à l'équilibre.

Réponse

On dresse un tableau d'avancement en concentration :

Équation		$Ca(OH)_2(s)$ =	$Ca^{2+}(aq)$ +	$2HO^-(aq)$
Initial	$x = 0$	excès	0	0
Interm.	x	excès	x	$2x$
Final ($mol{\cdot}L^{-1}$)	$x_f = x_{eq}$	excès	$1{,}2 \times 10^{-2}$	$2{,}4 \times 10^{-2}$

Par la loi d'action de masse, $K_4^\circ = x_{eq} \times (2x_{eq})^2$ donc $\boxed{x_{eq} = \left(\dfrac{K_4^\circ}{4}\right)^{1/3}}$

A.N. : $\underline{x_{eq} = 1{,}2 \times 10^{-2}\,mol{\cdot}L^{-1}}$

On en déduit les concentrations indiquées dans le tableau.

◇

/1 [4] On donne la relation $[H_3O^+][HO^-] = 10^{-14}$. Sachant que $pH = -\log([H_3O^+])$, déterminer le pH de la solution. Le milieu est-il acide, basique ou neutre ?

Réponse

$$\boxed{pH = 14 + \log[HO^-]} \Rightarrow \underline{pH = 12{,}4}$$

ce qui corrspond bien à un milieu basique.

◇

Dans certains cas, la pollution urbaine liée à l'humidité entraine la dissolution du dioxyde de carbone atmosphérique dans l'eau à l'intérieur du béton (sous forme H_2CO_3), provoquant la carbonatation du béton (formation de carbonate de calcium $CaCO_3(s)$) par réaction de l'hydroxyde de calcium $Ca(OH)_2(s)$ avec la forme $H_2CO_3(aq)$.

/2 [5] Écrire la réaction (5) mise en jeu dans la carbonatation du béton et calculer sa constante d'équilibre K_5° à 298 K. On donne à 298 K les constantes d'équilibre des réactions suivantes :

$$K_6^\circ = 10^{-8,4} \qquad CaCO_3(s) = Ca^{2+}(aq) + CO_3^{2-}(aq) \tag{6}$$
$$K_7^\circ = 10^{-6,4} \qquad H_2CO_3(aq) + H_2O = HCO_3^-(aq) + H_3O^+(aq) \tag{7}$$
$$K_8^\circ = 10^{-10,3} \qquad HCO_3^-(aq) + H_2O = CO_3^{2-}(aq) + H_3O^+(aq) \tag{8}$$
$$K_9^\circ = 10^{-14} \qquad 2\,H_2O = HO^-(aq) + H_3O^+(aq) \tag{9}$$

Réponse

On écrit la réaction (5) :
$$Ca(OH)_2(s) + H_2CO_3(aq) = CaCO_3(s) + 2\,H_2O \tag{5}$$

On constate que la réaction (5) = (4) − (6) + (8) + (7) − 2(9) donc

$$\boxed{K_5^\circ = \frac{K_4^\circ K_7^\circ K_8^\circ}{K_6^\circ (K_9^\circ)^2} = 10^{14,5}}$$

◇

On étudie désormais la réaction de décomposition du carconate de calcium $CaCO_3(s)$ en oxyde de calcium $CaO(s)$ et dioxyde de carbone $CO_2(g)$ de constante d'équilibre $K^\circ = 0{,}20$ à 1093 K.

$$CaCO_3(s) = CaO(s) + CO_2(g)$$

Soit un récipient indéformable de volume $V = 10\,L$, vidé au préalable de son air, et maintenu à la température constante de 1093 K. On introduit progressivement une quantité de matière n en carbonate de calcium solide et on mesure la pression p à l'intérieur de l'enceinte.

/2 6 Lorsque l'équilibre est établi, calculer la quantité de matière en dioxyde de carbone $n(CO_2)_{eq}$ dans l'enceinte. On supposera les gaz comme parfaits. On rappelle la constante des gaz parfaits $R = 8{,}31\,J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1}$.

Réponse

À l'équilibre, d'après la loi d'action de masse,

$$K^\circ = \frac{P(CO_2)_{eq}}{P^\circ}$$

$P(CO_2)_{eq} = \dfrac{n(CO_2)_{eq}RT}{V}$

$$\Leftrightarrow K^\circ = \frac{n(CO_2)_{eq}RT}{VP^\circ}$$

On isole

$$\Leftrightarrow \boxed{n(CO_2)_{eq} = \frac{K^\circ P^\circ V}{RT}}$$

$$\text{A.N. : } \underline{n(CO_2)_{eq} = 2{,}2\times10^{-2}\,mol} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K^\circ = 0{,}20 \\ P^\circ = 1\times10^5\,Pa \\ V = 10\times10^{-3}\,m^3 \\ R = 8{,}314\,J{\cdot}K^{-1}{\cdot}mol^{-1} \\ T = 1093\,K \end{cases}$$

◇

/2 7 On introduit une quantité de matière $n = 1{,}0\times10^{-2}$ mol en carbonate de calcium. Décrire l'état final. On précisera notamment si l'état final est un état d'équilibre.

Réponse

Comme $n < n(CO_2)_{eq}$, le quotient réactionnel évoluera de sa valeur initiale 0 jusqu'à sa valeur maximale Q_{max}, qui sera inférieure à K°. Ainsi la réaction évoluera dans le sens direct jusqu'à **disparition complète** du carbonate de calcium : c'est une **rupture d'équilibre**.

Les quantités de matière sont :

$$\underline{n(CO_2)_f = n(CaO)_f = n = 1{,}0\times10^{-2}\,mol} \quad \text{et} \quad \underline{n(CaCO_3)_f = 0}$$

◇

/2 8 Reprendre la question précédente dans le cas où $n = 5{,}0\times10^{-2}$ mol.

Réponse

Comme $n > n(CO_2)_{eq}$, le quotient réactionnel peut augmenter jusqu'à atteindre la constante d'équilibre. L'état final est donc **bien un état d'équilibre** avec

$$\boxed{n(CO_2)_f = n(CaO)_f = n(CO_2)_{eq} = 2{,}2\times10^{-2}\,mol}$$

$$\boxed{n(CaCO_3)_f = n - n(CO_2)_{eq} = 2{,}8\times10^{-2}\,mol}$$

◇

/1 9 Montrer que la courbe $p = f(n)$, avec p la pression à l'intérieur de l'enceinte, est constituée de deux segments de droites dont on donnera les équations pour $0 \leq n \leq 0{,}10$ mol.

Réponse

On utilise les résultats précédents en appliquant l'équation d'état des gaz parfaits :

◇ $n < n(CO_2)_{eq} \Rightarrow p = \dfrac{nRT}{V} \propto n$;

◇ $n \geq n(CO_2)_{eq} \Rightarrow p = \dfrac{n(CO_2)_{eq}RT}{V} = \text{cte}$.

◇

/49 P1 Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC

On considère le circuit RLC série représenté ci-contre. L'interrupteur K est fermé à un instant $t = 0$ choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé : $u(t = 0) = u_0$.

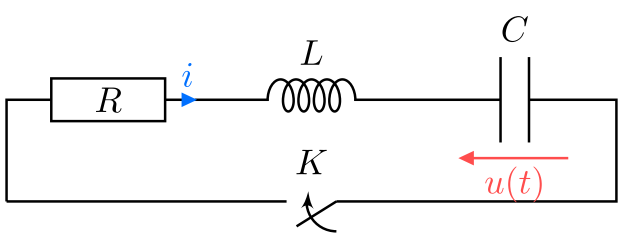


Figure 3.1 – Circuit.

$\boxed{1}$ Établir l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ pour $t \geq 0$. La mettre sous la forme

$$\frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = 0$$

et donner les expressions de ω_0 et Q en fonction de R, L et C.

Réponse

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned}
& u_L + u_R + u_C = 0 && \text{avec } u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_R = Ri\\
\Leftrightarrow\ & L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = 0 && i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = 0 && \text{forme canonique}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = 0
\end{aligned} \tag{3.1}$$

On détermine l'expression de Q par identification :

$$\begin{aligned}
& \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L} && \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{Q\sqrt{LC}} = \frac{R}{L} && \text{On isole } Q\\
\Leftrightarrow\ & Q = \frac{L}{R\sqrt{LC}} && L = \sqrt{L}^2\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}
\end{aligned}$$

$\boxed{2}$ Montrer que le système répond différemment selon la valeur de Q. Nommer chaque régime possible, sans chercher à donner les formes de solutions correspondantes.

Réponse

Avec l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 = 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right)$$

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r, doubles réelles, simple réelle ou doubles complexes. On a en effet, avec $Q > 0$,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \cancel{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2}}\left(1 - 4Q^2\right) > 0 \Leftrightarrow 4Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$\mathbf{Q > 1/2}$: régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

$\mathbf{Q = 1/2}$: régime **critique**, racine double réelle ;

$\mathbf{Q < 1/2}$: régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

On suppose $Q > 1/2$ dans la suite.

$\boxed{3}$ Définir la pseudo-pulsation Ω des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q. Définir aussi le temps caractéristique τ d'amortissement exponentiel des oscillations libres en fonction de ω_0 et Q.

Réponse

$$\begin{aligned}
& r_\pm = \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2} && \text{On injecte } \Delta\\
\Leftrightarrow\ & r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\mathrm{j}}{2}\sqrt{\frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(4Q^2 - 1\right)} && \text{On extrait } \tfrac{\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow\ & r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1} && \text{On définit } \Omega\\
\Leftrightarrow\ & r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega
\end{aligned}$$

d'où la définition de Ω :

$$\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

On remarque donc qu'on peut assimiler le terme à l'intérieur de l'exponentielle comme l'inverse d'un temps, c'est-à-dire qu'on définit τ comme la partie réelle des racines :

$$\boxed{\tau = \frac{2Q}{\omega_0}}$$

4 Établir l'expression de $u(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction de u_0, ω_0, Q et Ω, compte tenu des conditions initiales que vous expliciterez et justifierez.

Réponse

On a donc

$$u(t) = \mathrm{e}^{-t/\tau}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

- On trouve A avec la première condition initiale (condensateur initialement chargé et tension condensateur continue) :

$$u(0) = u_0 = 1\left[A\cdot 1 + B\cdot 0\right] = A \quad\Rightarrow\quad \boxed{A = u_0}$$

- On trouve B avec la seconde CI (il n'y a pas de courant avant la fermeture de K et courant continu dans la bobine) :

$$\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} = -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\times\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}u_0}$$

Ainsi,

$$\boxed{u(t) = u_0\mathrm{e}^{-t/\tau}\left[\cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega}\sin(\Omega t)\right]}$$

On souhaite visualiser la tension $u(t)$ sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance $R_0 = 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$ et d'une capacité $C_0 = 11\,\mathrm{pF}$.

5 Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par $u(t)$ devient :

$$L(C + C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0$$

Réponse

On commence par représenter le circuit en ajoutant en parallèle de C la résistance R_0 et la capacité C_0.

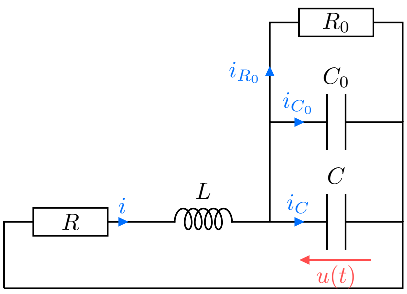


Figure 3.2 – Circuit avec oscilloscope.

Loi des nœuds :

$$i = i_{R_0} + i_{C_0} + i_C \qquad i_C = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\ i_{C_0} = C_0\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t},\ i_{R_0} = \frac{u}{R_0}$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{u}{R_0} + (C + C_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

Dans la loi des mailles,

$$u_L + u_R + u = 0 \qquad u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t},\ u_R = Ri$$

$$\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u = 0 \qquad i = \frac{u}{R_0} + (C + C_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{R_0}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + L(C + C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{R_0}u + R(C + C_0)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u = 0$$

On factorise

$$\Leftrightarrow \boxed{L(C + C_0)\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_0} + RC + RC_0\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(1 + \frac{R}{R_0}\right)u = 0}$$

6 Quelles relations qualitatives doivent vérifier R, L, C, R_0 et C_0 pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées ? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de R, L et C utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

Réponse

Pour que l'oscilloscope ait le moins d'influence possible sur les oscillations, il faut que les coefficients de l'équation différentielle précédente diffèrent le moins possible de ceux de l'équation différentielle (3.1) :

- $C \gg C_0$; les capacités utilisées en T.P. sont de l'ordre du nF ou du µF. Comme $C_0 = 11\,\mathrm{pF}$, cette condition est bien vérifiée ;
- $R \ll R_0$; les résistances utilisées en T.P. sont de l'ordre du kΩ. Comme $R_0 = 1{,}0\,\mathrm{M\Omega}$, cette condition est bien vérifiée ;

◇ $\frac{L}{R_0} \ll RC$ soit $R_0 \gg \frac{L}{RC} \approx 10^4\,\Omega$; cette condition est bien vérifiée.

◇

7 On définit le décrément logarithmique comme étant la quantité $d_m = \ln \dfrac{u(t)}{u(t+mT)}$ où $T = 2\pi/\omega$ et m est un entier strictement positif. Exprimer d_m en fonction de m et de Q.

Réponse

En remarquant que $\cos\left(\Omega(t+T)\right) = \cos\left(\Omega t + 2\pi\right) = \cos\left(\Omega t\right)$, on montre facilement que $d_m = \ln\left(\exp\left\{\frac{\Omega_0 m T}{2Q}\right\}\right)$. On obtient donc : $d_m = \dfrac{\omega_0 m T}{2Q}$. En remplaçant T par $\frac{2\pi}{\Omega}$ où $\Omega = \frac{\omega_0}{Q}\sqrt{4Q^2-1}$, il vient :

$$\boxed{d_m = \frac{2\pi m}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

◇

8 On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur basses fréquences délivrant une tension créneau. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ? Justifier à l'aide d'un schéma.

Réponse

Pour observer les oscillations il faut que la demi-période du signal délivré par le G.B.F. soit égale à quelques τ.

◇

9 La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure 3.3. Estimer le facteur de qualité Q du circuit.

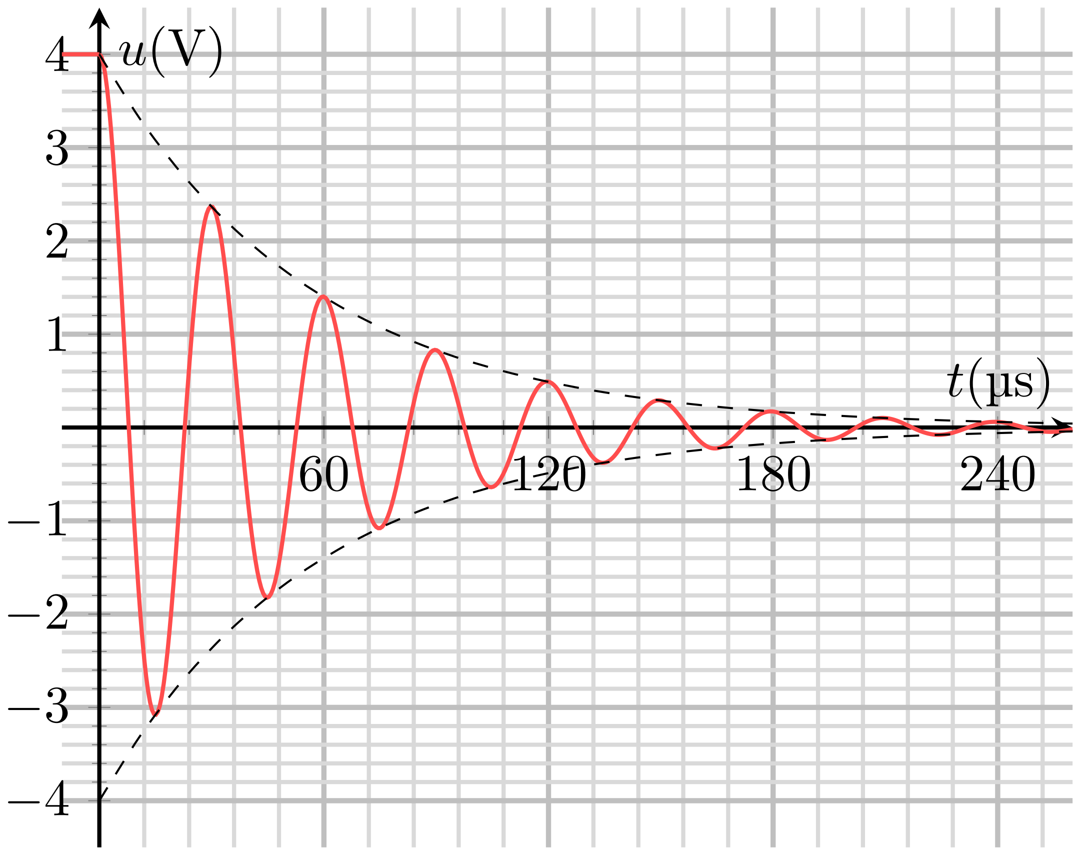


Figure 3.3 – Signal obtenu.

Réponse

On lit graphiquement $u(0) = 4{,}0$V et $u(2T) = 1{,}4$V. On peut alors calculer $d_2 = \ln \dfrac{u(0)}{u(2T)}$.

Comme $d_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$, on en déduit : $\boxed{Q = \sqrt{\dfrac{1}{4} + 4\left(\dfrac{\pi}{d_2}\right)^2}}$. Application numérique : $\underline{Q = 6{,}0}$

◇

On suppose $Q \gg 1$: la dissipation d'énergie par effet Joule est traitée comme une perturbation par rapport au cas du circuit non dissipatif ($R = 0$). On prendra alors $\Omega \approx \omega_0$. On rappelle par ailleurs le développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$\mathrm{e}^x \underset{x\to 0}{\sim} 1 + x$$

10 Dans le cas où $R = 0$, établir l'expression de la valeur moyenne temporelle $\langle \mathcal{E} \rangle$ de l'énergie électromagnétique stockée dans le circuit.

Réponse

Dans le cas où $R = 0$, le circuit est non dissipatif donc l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine reste constante. On l'évalue facilement en $t = 0$:

$$\mathcal{E}(t=0) = \frac{Cu_0^2}{2} \Rightarrow \boxed{\langle \mathcal{E} \rangle = \frac{Cu_0^2}{2}}$$

◇

11 Dans le cas où $R \neq 0$, montrer qu'au premier ordre en $1/Q$, l'énergie $\mathcal{E}_J$ dissipée par effet Joule dans le circuit RLC, pendant une pseudo-période, vérifie la relation :

$$\mathcal{E}_J = \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle$$

Réponse

Il faut évaluer l'énergie emmagasinée par le condensateur et la bobine à l'instant t :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2}$$

Pour $Q \gg 1$, on a $\Omega \approx \omega_0$, l'expression de $u(t)$ devient :

$$\begin{aligned}
& u(t) = u_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega} \sin(\omega t) \right) && \Omega \approx \omega_0 \\
\Leftrightarrow\ & u(t) \approx u_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \left(\cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q} \sin(\omega_0 t) \right) && Q \gg 1 \Leftrightarrow \tfrac{1}{Q} \approx 0 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{u(t) \approx u_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t)} && i(t) = C\tfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \\
\Rightarrow\ & i(t) = -Cu_0 \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}} \left(\omega_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\tau} \cos(\omega_0 t) \right) && \tfrac{1}{\tau} = \tfrac{\omega_0}{2Q} \ll \omega_0 \\
\Rightarrow\ & \boxed{i(t) \approx -Cu_0\omega_0 \sin(\omega_0 t) \mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}}
\end{aligned}$$

or

$$\begin{aligned}
& \mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2} && \text{On injecte} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} Cu_0^2 \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}}}
\end{aligned}$$

En une pseudo-période T, l'énergie décroît de la quantité :

$$\begin{aligned}
& \Delta_T \mathcal{E} = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T) \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T \mathcal{E} = \frac{1}{2} Cu_0^2 \mathrm{e}^{-\frac{2t}{\tau}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2T}{\tau}} \right) && \tau = \tfrac{2Q}{\omega_0} \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T \mathcal{E} = \frac{1}{2} Cu_0^2 \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 T}{Q}} \right) && \Omega \approx \omega_0 \text{ et } \Omega T = 2\pi \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T \mathcal{E} = \frac{1}{2} Cu_0^2 \mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \left(1 - \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{Q}} \right) && \mathrm{e}^{-\frac{2\pi}{Q}} \underset{Q\to\infty}{\sim} 1 - \tfrac{2\pi}{Q} \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T \mathcal{E} \underset{Q\to\infty}{\sim} \frac{1}{2} Cu_0^2 \underbrace{\mathrm{e}^{-\frac{\omega_0 t}{Q}}}_{\approx 1} \left(\cancel{1} - \left(\cancel{1} - \frac{2\pi}{Q} \right) \right) && \text{On simplifie} \\
\Leftrightarrow\ & \Delta_T \mathcal{E} \underset{Q\to\infty}{\sim} \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle
\end{aligned}$$

Or, l'énergie dissipée par effet Joule en une pseudo-période correspond à l'énergie perdue par L et C pendant cette durée donc $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t+T)$. Ainsi,

$$\boxed{\mathcal{E}_J \approx \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle}$$

◇

/49 P2 Assemblages de ressorts

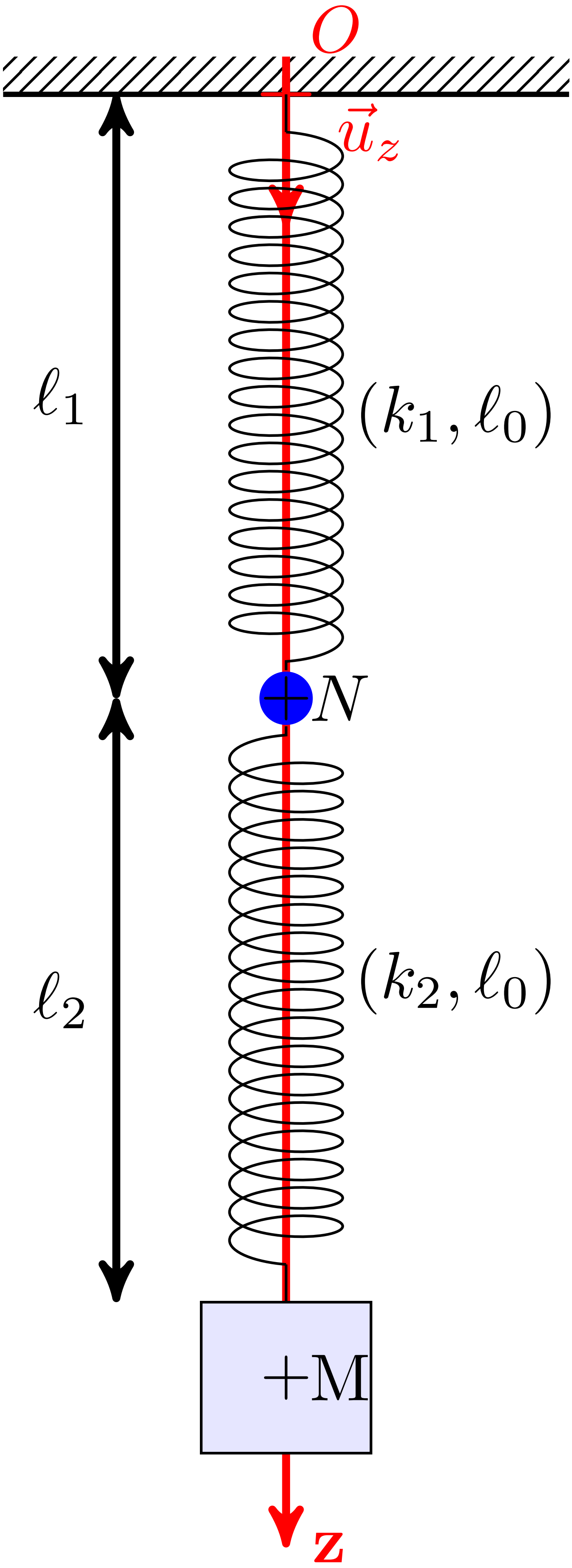
Pour un TIPE, un étudiant a besoin d'un ressort de raideur $15\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. Malheureusement, le laboratoire du lycée ne possède que des ressorts de raideur $k_1 = 10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$ et $k_2 = 20\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}$. En revanche, tous les ressorts ont la même longueur à vide $l_0 = 10\,\mathrm{cm}$.

L'étudiant décide alors d'assembler les ressorts pour obtenir la raideur qu'il souhaite. Il hésite cependant sur la manière de les assembler entre un assemblage en série ou en parallèle, voir figure ci-dessous :

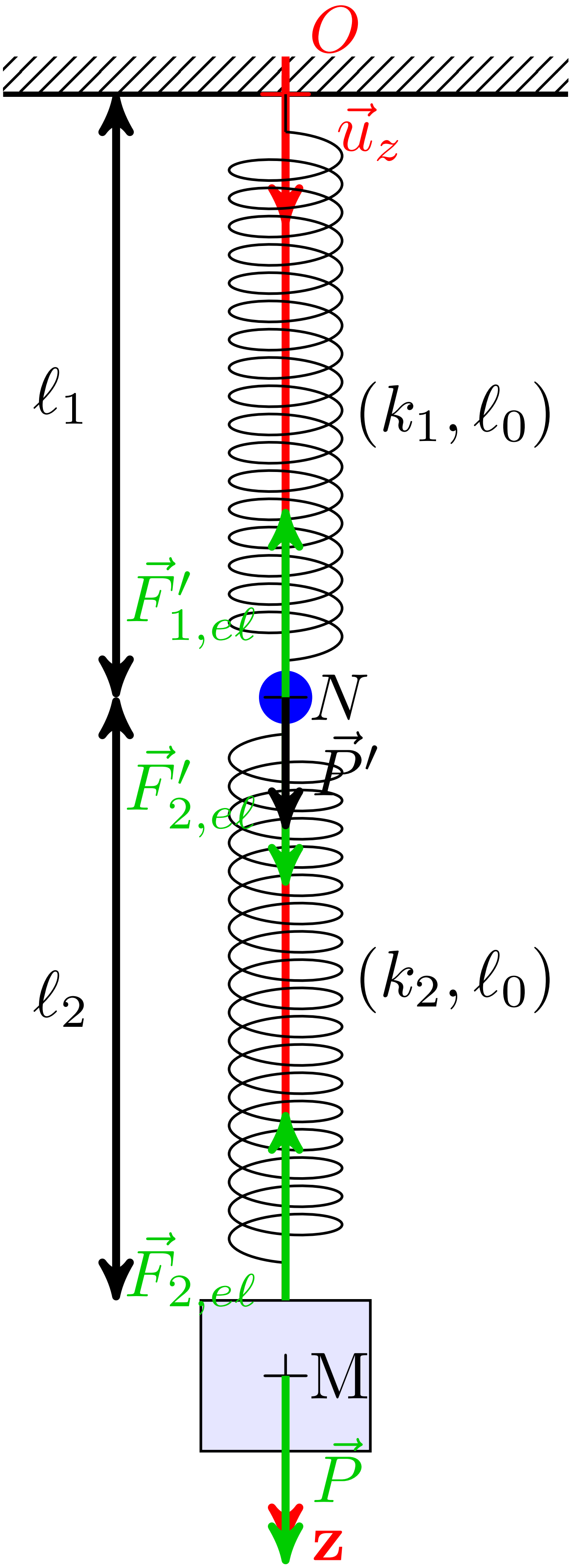
Assemblage en série :

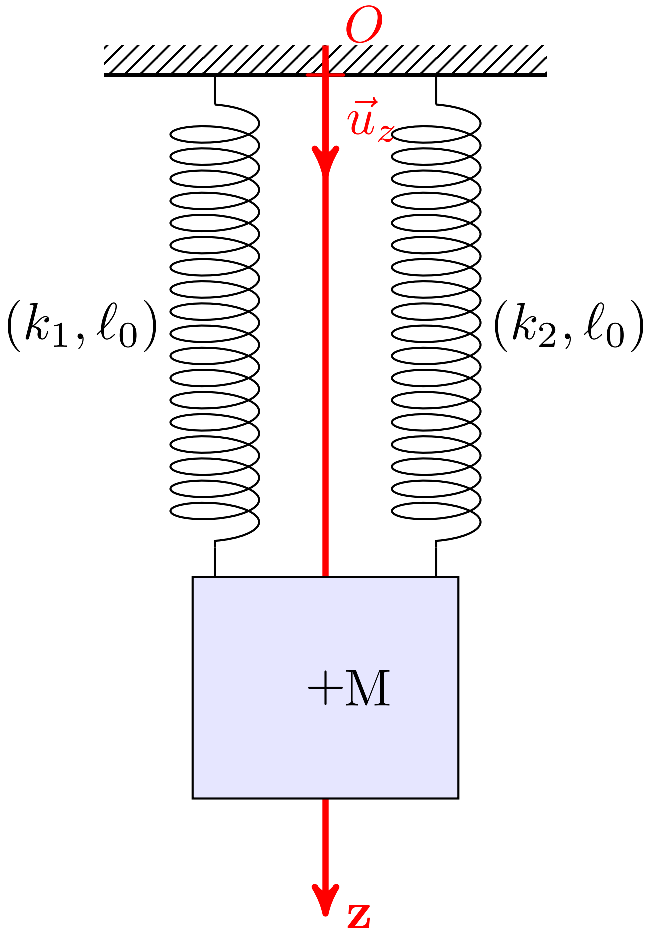
0.450.45

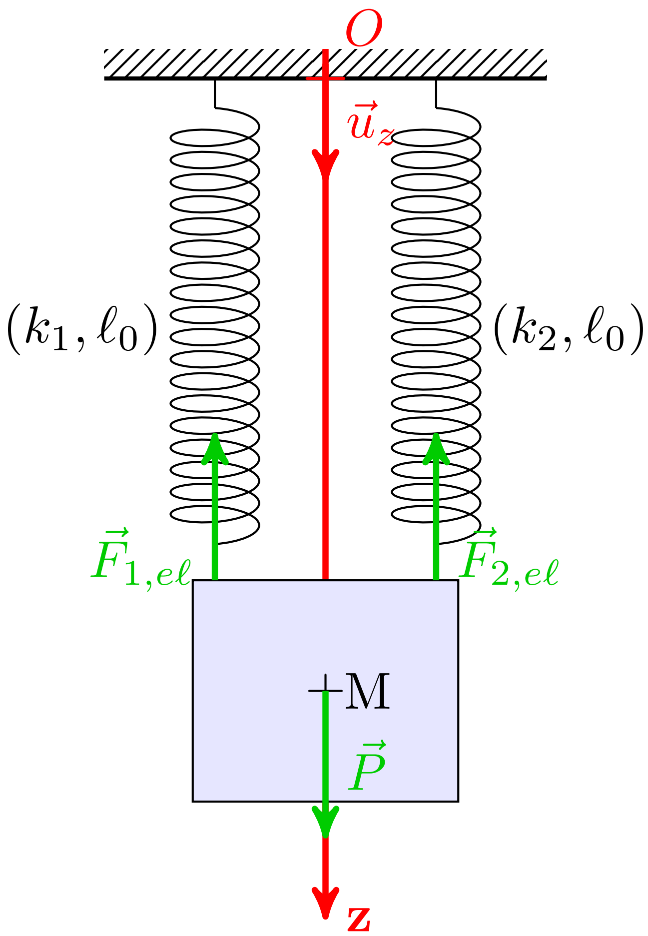
Assemblage en parallèle :



O
$\vec{u}_z$
ℓ_1
(k_1, ℓ_0)
N
ℓ_2
(k_2, ℓ_0)
+M
z


O
$\vec{u}_z$
ℓ_1
(k_1, ℓ_0)
$\vec{F}'_{1,e\ell}$
N
$\vec{P}'$
$\vec{F}'_{2,e\ell}$
ℓ_2
(k_2, ℓ_0)
$\vec{F}_{2,e\ell}$
M
$\vec{P}$
z





L'étudiant décide alors de mener une étude des deux assemblages pour voir comment ils se comportent. Il dispose d'une masse $m = 100\,\mathrm{g}$ repérée par le point M. Pour la lisibilité des schémas, la masse sera représentée comme un rectangle mais elle sera tout de même considérée comme un point matériel. Dans tout le problème le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire qui sera supposé galiléen. Les ressorts seront supposés de masses négligeables.

A Assemblage en série

Dans ce montage, le premier ressort est accroché au niveau du support fixe en un point noté O. Le second ressort est accroché au premier en un point N. Pour mener l'étude, on considèrera que le point N possède une masse m'. On note Oz la verticale descendante, dirigée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_z$, orienté vers le bas.

1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point M, les représenter sur un schéma et les exprimer en fonction des paramètres du problème.

Réponse

Deux forces agissent sur le point M : la force de rappel élastique $\vec{F}_{2,el}$ exercée par le ressort 2 et le poids $\vec{P}$. Elles sont dessinées sur le schéma. On a :

$$\boxed{\vec{F}_{2,el} = -k_2(l_2 - l_0)\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z}$$

En effet, si on suppose que le ressort est étiré, il exerce sur la masse une force vers le haut, donc selon $-\vec{u}_z$. Or dans ce cas, $\Delta l_2 = l_2 - l_0 > 0$ et l'expression précédente avec le signe moins fournit bien une force orientée selon $-\vec{u}_z$.

◇

2 En déduire l'expression de la longueur à l'équilibre $l_{2,eq}$ du ressort 2 (celui placé en bas) en fonction des paramètres du problème.

Réponse

À l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées à la masse est nulle :

$$\vec{F}_{2,el} + \vec{P} = \vec{0} \Leftrightarrow -k_2(l_{2,eq} - l_0)\vec{u}_z + mg\vec{u}_z = \vec{0} \Leftrightarrow -k_2(l_{2,eq} - l_0) + mg = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{l_{2,eq} = l_0 + \frac{mg}{k_2}}$$

◇

3 Calculer numériquement $l_{2,eq}$.

Réponse

$$l_{2,eq} = 10\,\text{cm} + \frac{0{,}100\,\text{kg} \times 10\,\text{m}{\cdot}\text{s}^{-2}}{20\,\text{N}{\cdot}\text{m}^{-1}} = 10\,\text{cm} + 5{,}0\,\text{cm} = \boxed{15\,\text{cm} = l_{2,eq}}$$

◇

4 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point N, les représenter sur un schéma et les exprimer en fonction des paramètres du problème.

Réponse

Trois forces agissent sur le point N : la force de rappel élastique $\vec{F}'_{2,el}$ exercée par le ressort 2, la force de rappel élastique $\vec{F}'_{1,el}$ exercée par le ressort 1 et le poids $\vec{P}'$. Elles sont dessinées sur le schéma. On a :

$$\boxed{\vec{F}'_{2,el} = k_2(l_2 - l_0)\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{F}'_{1,el} = -k_1(l_1 - l_0)\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{P}' = m'\vec{g} = m'g\vec{u}_z}$$

En effet, si on suppose que le ressort 2 est étiré, il exerce sur la masse une force vers le bas, donc selon $+\vec{u}_z$. Or dans ce cas, $\Delta l_2 = l_2 - l_0 > 0$ et l'expression précédente avec le signe plus fournit bien une force orientée selon $+\vec{u}_z$. La justification du signe de la force $\vec{F}'_{1,el}$ est identique à celle de la question **??**.

◇

5 En déduire que la longueur à l'équilibre $l_{1,eq}$ du ressort 1 (celui placé en haut) est donnée par :

$$l_{1,eq} = l_0 + \frac{(m + m')g}{k_1}$$

Réponse

À l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées à la masse est nulle :

$$\vec{F}'_{1,el} + \vec{F}'_{2,el} + \vec{P}' = \vec{0} \Leftrightarrow -k_1(l_{1,eq} - l_0)\vec{u}_z + k_2(l_{2,eq} - l_0)\vec{u}_z + m'g\vec{u}_z = \vec{0}$$

$$\Leftrightarrow -k_1(l_{1,eq} - l_0) + k_2(l_{2,eq} - l_0) + m'g = 0$$

$$\Leftrightarrow k_1(l_{1,eq} - l_0) = k_2(l_{2,eq} - l_0) + m'g$$

$$\Leftrightarrow l_{1,eq} = l_0 + \frac{k_2(l_{2,eq} - l_0) + m'g}{k_1}$$

Or d'après la question **??** on sait que $k_2(l_{2,eq} - l_0) = mg$, d'où $\boxed{l_{1,eq} = l_0 + \frac{(m+m')g}{k_1}}$

◇

6 Commenter la formule précédente.

Réponse

Du point de vue du ressort 1, tout se passe comme si on avait accroché une masse de valeur $m + m'$. En effet, pour le ressort, que cette masse soit d'un seul tenant ou constituée de deux masses (et un ressort de masse nulle) ne change rien.

◇

7 Déterminer l'expression de l'altitude z_{eq} du point M. Simplifier la formule dans le cas où le point N possède une masse nulle ($m' = 0$).

Réponse

Dans la configuration établie par l'énoncé, on a $z = l_1 + l_2$. À l'équilibre, on a alors :

$$z_{eq} = l_{1,eq} + l_{2,eq} = l_0 + \frac{(m+m')g}{k_1} + l_0 + \frac{mg}{k_2} qsoit \boxed{z_{eq} = 2l_0 + \frac{(m+m')g}{k_1} + \frac{mg}{k_2}}$$

En tenant compte d'une masse nulle pour le point N, on obtient :

$$\boxed{z_{eq} = 2l_0 + \left(\frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2}\right) mg}$$

◇

8 Par analogie au résultat que vous obtiendriez si la masse m n'était accrochée qu'à un seul ressort de raideur K et de longueur à vide L_0, déterminer les caractéristiques (K et L_0) de ce ressort équivalent aux deux ressorts accrochés en série.

Réponse

Le cas d'un seul ressort vertical est connu. On peut montrer que :

$$z_{eq} = L_0 + \frac{1}{K} mg$$

En identifiant les deux formules terme à terme, on a : $\boxed{L_0 = 2l_0}$ et $\frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} = \frac{k_1 + k_2}{k_1 k_2}$, soit $\boxed{K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}}$

◇

9 Montrer que cet assemblage ne peut pas satisfaire l'étudiant pour son TIPE.

Réponse

On calcule K avec les valeurs fournies : $K = \frac{10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \times 20\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}{10\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} + 20\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}}} = 20/3\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} = \boxed{6{,}7\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} = K}$.

C'est trop faible.

◇

B Assemblage en parallèle

Dans ce montage, les deux ressorts sont accrochés au même support fixe et à la masse m. On note toujours Oz la verticale descendante, dirigée par le vecteur unitaire $\overrightarrow{u}_z$, orienté vers le bas.

10 Faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point M et les représenter sur un schéma.

Réponse

Trois forces agissent sur le point M : la force de rappel élastique $\vec{F}_{1,el}$ exercée par le ressort 1, la force de rappel élastique $\vec{F}_{2,el}$ exercée par le ressort 2 et le poids $\vec{P}$. Elles sont dessinées sur le schéma. On a :

$$\boxed{\vec{F}_{1,el} = -k_1(l - l_0)\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{F}_{2,el} = -k_2(l_2 - l_0)\vec{u}_z} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{u}_z}$$

On a tenu compte du fait qu'ici $l_2 = l_1 = l$ et on a mis le signe des forces en accord avec ce qui a déjà été établi précédemment.

◇

11 Établir l'équation du mouvement du point M et la mettre sous forme canonique.

Réponse

Le système étudié est la masse m et l'étude se fait dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On applique la loi de la quantité de mouvement compte tenu du bilan des forces établi précédemment : $m\vec{a} = \vec{F}_{1,el} + \vec{F}_{2,el} + \vec{P} \Leftrightarrow m\ddot{z}\vec{u}_z = -k_1(l-l_0)\vec{u}_z - k_2(l-l_0)\vec{u}_z + mg\vec{u}_z \Leftrightarrow m\ddot{z} = -k_1(l-l_0) - k_2(l-l_0) + mg$.

Le lien entre l et z est simple compte tenu du choix de l'origine imposée par le sujet : $l = z$. On obtient donc l'équation différentielle en z : $m\ddot{z} = -k_1(z-l_0) - k_2(z-l_0) + mg \Leftrightarrow m\ddot{z} + (k_1+k_2)z = (k_1+k_2)l_0 + mg \Leftrightarrow$ $\boxed{\ddot{z} + \frac{k_1+k_2}{m}z = \frac{k_1+k_2}{m}\left(l_0 + \frac{mg}{k_1+k_2}\right)}$

On pose $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1+k_2}{m}}}$ et $\boxed{\alpha = l_0 + \frac{g}{\omega_0^2} = l_0 + \frac{mg}{k_1+k_2}}$ et avec ces notations, on a :

$$\boxed{\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2\alpha} \qquad (3.1)$$

12 Par analogie avec l'équation différentielle obtenue si la masse n'était accrochée qu'à un seul ressort de raideur K et de longueur à vide L_0, déterminer les caractéristiques (K et L_0) de ce ressort équivalent aux deux ressorts accrochés en parallèle.

Réponse

On a déjà traité le cas d'un seul ressort dans la première partie du sujet. On constate qu'on a ici exactement la même équation que pour un seul ressort avec $\boxed{L_0 = l_0}$ et $\boxed{K = k_1 + k_2}$.

13 Montrer que cet assemblage ne peut pas satisfaire l'étudiant pour son TIPE.

Réponse

Avec cet assemblage, l'étudiant obtient un système équivalent à un ressort de raideur $\boxed{K = 30\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}}$, soit une raideur deux fois trop élevée.

C Assemblage complexe

14 Déterminer un assemblage équivalent à un ressort ayant la raideur souhaité par l'étudiant.

Réponse

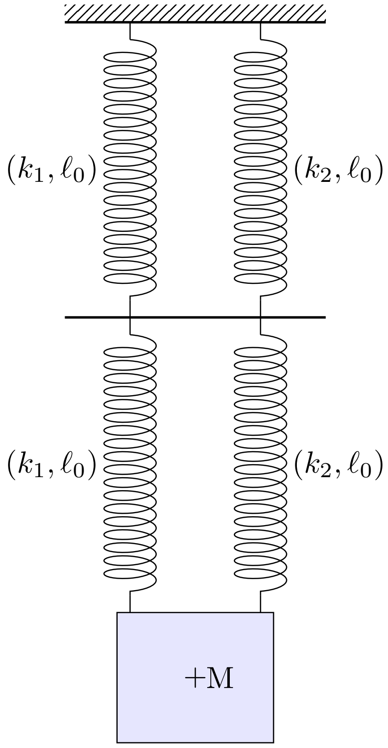
On peut remarquer deux choses :

- l'assemblage en série donne ici une raideur deux fois trop élevée ;
- l'assemblage en parallèle peut permettre de diviser par deux la raideur.

En effet, dans la formule obtenue pour l'assemblage en série, on avait $K = \frac{k_1k_2}{k_1+k_2}$. Avec $k_1 = k_2$, cette formule devient $K = \frac{k_1^2}{2k_1} = \frac{k_1}{2}$. Un assemblage série de deux ressorts identiques permet bien de diviser par deux la raideur.

On peut donc envisager le montage suivant : on fabrique deux assemblages en parallèle identiques, chacun avec un ressort de raideur $k_1 = 10\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et un ressort de raideur $k_2 = 20\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$. Ces assemblages sont chacun équivalent à un ressort de raideur $k_3 = 30\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ d'après les résultats précédents.

On assemble ces deux ressorts équivalents identiques en série et on divise alors par deux la raideur k_3. La raideur équivalente totale k_4 est alors bien de la valeur recherchée ($15\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$).


(k_1, ℓ_0)
(k_2, ℓ_0)
(k_1, ℓ_0)
(k_2, ℓ_0)
+M