Khôlles PSI – semaine 9

Sujet 1 – corrigé

I Milieu supraconducteur

Un supraconducteur se modélise comme un milieu dans lequel le champ $\vec{B}$ vérifie l'équation suivante :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{j} = -\frac{ne^2}{m}\vec{B}$$

où $n = 3{,}0 \times 10^{28}\,\mathrm{m^{-3}}$ est la densité volumique électronique, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\mathrm{C}$ la charge élémentaire et $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\mathrm{kg}$ la masse de l'électron.

1) A l'aide des équations locales, trouver une équation aux dérivées partielles satisfaite par $\vec{B}$.
On donne $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\ \overrightarrow{\mathrm{rot}} = \overrightarrow{\mathrm{grad}}\ \mathrm{div} - \vec{\Delta}$.

Réponse

On peut utiliser l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\,\vec{j} + \epsilon_0\mu_0\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\vec{B} = \mu_0\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,j + \epsilon_0\mu_0\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\frac{\partial\vec{E}}{\partial t} \Rightarrow \quad -\Delta\vec{B} + \frac{\mu_0 ne^2}{m}\vec{B} + \frac{1}{c^2}\frac{\partial\vec{B}}{\partial t} = 0$$

En effet, on peut permuter le rotationel et la dérivation par rapport au temps.

◇

2) On se place alors en régime stationnaire dans toute la suite de l'exercice. Que devient l'équation précédente ?

Réponse

On obtient en régime stationnaire :

$$\Delta\vec{B} = \frac{\mu_0 ne^2}{m}\vec{B}$$

◇

3) Le supraconducteur occupe le demi-espace $z \geq 0$. De quelle(s) variable(s) dépend le champ $\vec{B}$?

Réponse

Le problème étant invariant par rapport à r et θ, on a simplement $\vec{B}(r, \theta, z) = \vec{B}(z)$

◇

4) En utilisant une équation locale, montrer que la composante de $\vec{B}$ suivant z (notée B_z) est obligatoirement constante.

Réponse

On a $\mathrm{div}\vec{B} = 0$ soit $\dfrac{\partial\vec{B}\cdot\vec{e}_z}{\partial z} = 0$ donc B_z est bien constant.

◇

5) Résoudre l'équation différentielle satisfaite par B_x, B_y et B_z en fonctions de constantes réelles.

Réponse

On a une équation vectorielle donc on déduit :

$$\Delta B_x = \frac{\mu_0 ne^2}{m}B_x \quad \text{et} \quad \Delta B_y = \frac{\mu_0 ne^2}{m}B_y \quad \text{et} \quad \Delta B_z = \frac{\mu_0 ne^2}{m}B_z \tag{9.1}$$

(9.2)

Pour la suite, on va poser $k^2 = \frac{\mu_0 n e^2}{m}$. La première équation donne $\dfrac{\partial B_x}{\partial z} = k^2 B_x(z)$ Les solutions de cette équations sont $B_x(z) = \alpha e^{-kz} + \beta e^{kz}$.

On trouve de même $B_y(z) = \alpha' e^{-kz} + \beta' e^{kz}$ et au final $B_x(z) = \alpha'' e^{-kz} + \beta'' e^{kz}$

◇

6) A l'extérieur du supraconducteur, le champ magnétique est uniforme et vaut $\overrightarrow{B} = B_0 \overrightarrow{u_x}$. En déduire exactement le champ magnétique dans le supraconducteur.

Réponse

Le champ B_z étant constant, on en déduit $\alpha'' = \beta'' = 0$. Les autres composantes sont continues donc on déduit $\beta' = \beta'' = 0$ (le champ magnétique ne doit pas diverger en $+\infty$ et $\alpha = B_0$; $\alpha' = 0$. On obtient donc dans le milieu supraconducteur :

$$\overrightarrow{B} = B_0 e^{-kz} \overrightarrow{e}_x$$

◇

7) Faire apparaître une longueur caractéristique, l'évaluer et commenter le résultat. On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{H \cdot m^{-1}}$

Réponse

On obtient au final une longueur caractéristique $l = 1/k = \sqrt{\frac{m}{\mu_0 n e^2}} \approx 30\,\mathrm{nm}$ On obtient ainsi une longueur de propagation très faible pour le champ magnétique dans le milieu supra-conducteur.

◇

Sujet 2 – corrigé

I Ligne haute-tension

Une ligne haute tension assimilable à un fil droit infini selon (Oz) transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence $f = 50\,\text{Hz}$ et de valeur efficace $I = 1000\,\text{A}$.
On approche de cette ligne HT une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30\,\text{cm}$ à une distance $d = 2\,\text{cm}$.
Cette bobine d'inductance propre et de résistances négligeables est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace E à ses bornes est supérieure à 1,5 V.
On utilisera les coordonnées cylindriques (r,θ,z) et de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On se trouve ici dans l'ARQS.

1) Donner la définition et la validité de l'ARQS. Justifier ici le choix de l'ARQS. Donner, en la justifiant, l'expression des équations de Maxwell dans l'ARQS.

Réponse

L'ARQS consiste à négliger les phénomènes de propagation dans le circuit, c'est-à-dire que l'on néglige le temps de propagation $\frac{OM}{c}$ devant le temps caractéristique T des variations temporelles des sources. Le critère est donc en fonction de la longueur caractéristique L du circuit:

$$\frac{L}{c} \ll T$$

On a donc:

$$L \ll cT = \frac{c}{f} = \lambda$$

avec λ la longueur d'onde.
AN: $L \ll 3 \times 10^8 \times \frac{1}{50} = 6 \times 10^6\,\text{m}$
Ici, on justifie le fait que le fil est de longueur finie et que l'on néglige les effets de bords pour le calcul du champ magnétique. On garde les propriétés du fil infini pour la géométrie.

Les équations de Maxwell sont les suivantes:

$$div\vec{E} = 0 \qquad div\vec{B} = 0$$

$$\overrightarrow{rot}\vec{E} = -\frac{\partial \vec{B}}{\partial t} \qquad \overrightarrow{rot}\vec{B} = \mu_0 \vec{j}$$

2) Déterminer, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique $\vec{B}(r)$ créé dans tout l'espace par cette ligne HT.

Réponse

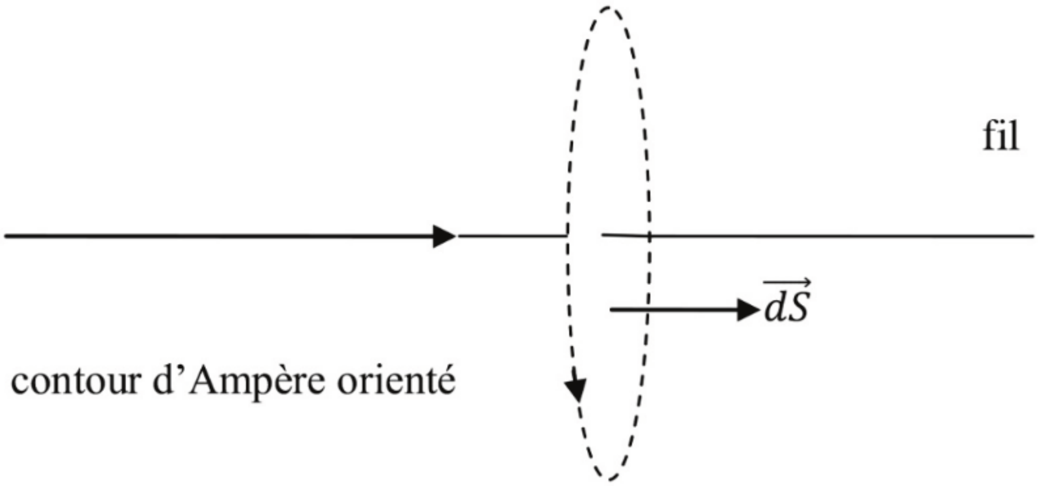
En coordonnées cylindriques, le champ magnétique est de la forme $\vec{B}(r,\theta,z)$. Le problème est invariant par translation le long du fil donc le champ magnétique ne dépend pas de z. Le problème est aussi invariant par rotation autour de l'axe (Oz) donc le champ magnétique ne dépend pas de l'angle θ.

Le plan contenant le fil et le point où l'on calcule le champ magnétique est un plan de symétrie (plan $(O,\vec{e}_r,\vec{e}_z)$) donc le champ est perpendiculaire à ce plan.

On a donc:

$$\vec{B}(r,\theta,z) = B(r)\vec{e}_\theta$$

Les lignes de champ sont donc des cercles.
On a ainsi le schéma suivant:



Remarque: l'orientation du contour d'Ampère et l'orientation du vecteur $\overrightarrow{dS}$ sont liés par la règle de la main droite.

Le théorème d'Ampère donne:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \mu_0 I_{\text{enl}}$$

Comme le champ magnétique est selon $\vec{e}_\theta$, il est donc colinéaire à $\vec{d\ell}$. On a donc:

$$\oint \vec{B} \cdot \vec{d\ell} = \oint B.d\ell = B \oint d\ell = B2\pi r$$

Comme le courant $i(t)$ est dans le même sens que $\overrightarrow{dS}$, le courant enlacé est égal à $I_{\text{enl}} = i(t)$. On trouve donc:

$$B2\pi r = \mu_0 i(t)$$

$$B = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}$$

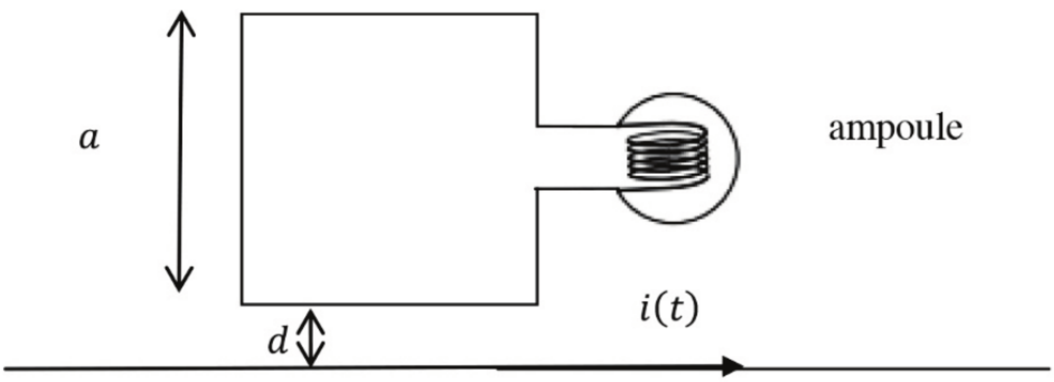
Le champ magnétique vaut:

$$\vec{B}(r,\theta,z) = \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r}\vec{e}_\theta$$

Remarque: on retrouve bien le champ créé par un fil infini. Penser à vérifier l'homogénéité.

◇

3) Déterminer le flux magnétique total créé par cette ligne HT à travers la bobine plate.

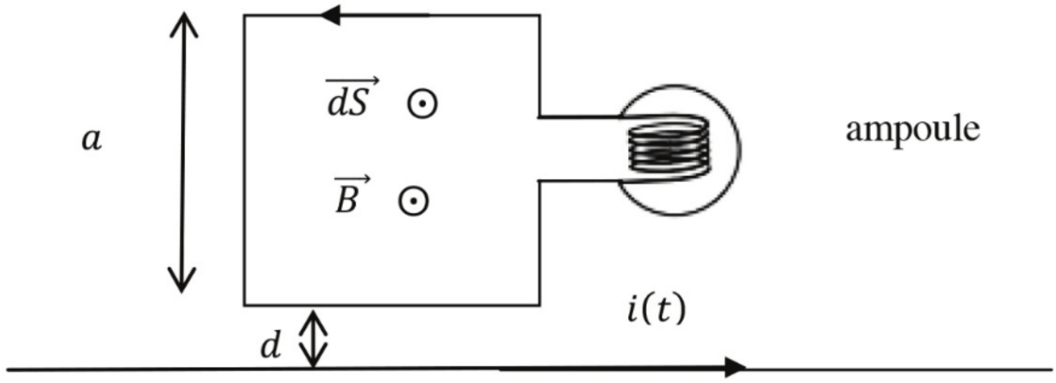


Réponse

Pour calculer le flux à travers le circuit, on utilise l'expression du flux qui est:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS}$$

Il faut donc orienter le circuit. Pour cela, il est nécessaire et obligatoire de faire un schéma:



Remarque: l'orientation du circuit est arbitraire. Celle de la surface est liée à l'orientation du contour par la règle du tire-bouchon ou main droite.

On a donc:

$$\Phi = \iint \vec{B} \cdot \overrightarrow{dS} = \iint B.dS$$

On prend pour élément de surface élémentaire un rectangle de hauteur a et d'épaisseur dr. On a donc pour une spire:

$$\Phi = \int_d^{d+a} \frac{\mu_0 i(t)}{2\pi r} a \, dr = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \int_d^{d+a} \frac{dr}{r}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \left[\ln(r)\right]_d^{d+a}$$

$$\Phi = \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Pour N spires, on obtient donc le flux magnétique suivant:

$$\Phi = N \frac{\mu_0 i(t) a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right)$$

Remarque: Penser à multiplier le flux par le nombre de spires.

◇

4) En déduire le nombre de spires N nécessaires pour que l'ampoule puisse s'éclairer. Faire l'application numérique avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}$ SI.

Réponse

On a donc un circuit placé dans un champ magnétique variable créé par le fil. Le circuit fermé est donc le siège d'un phénomène d'induction électromagnétique et la fém induite est donnée par la loi de Faraday:

$$e = -\frac{\mathrm{d}\Phi}{\mathrm{d}t}$$

On obtient en dérivant l'intensité par rapport au temps:

$$e = -N \frac{\mu_0 a}{2\pi} \ln\left(\frac{d+a}{d}\right) \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$$

L'expression du courant est donc:

$$i(t) = I_{\text{eff}}\sqrt{2}\cos(2\pi f t)$$

La dérivée est donc égale à:

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = -2\pi f I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

La fém induite est donc égale à:

$$e = N\frac{\mu_0 a}{2\pi}\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)2\pi f I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

$$e = N\mu_0 a\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)f I_{\text{eff}}\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

Pour que la lampe s'allume, il faut comme l'indique l'énoncé que l'amplitude efficace de la fém soit supérieure à la tension efficace soit:

$$N\mu_0 a\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)f I_{\text{eff}} > E$$

Soit un nombre de spires:

$$N > \frac{E}{\mu_0 a\ln\left(\frac{d+a}{d}\right)f I_{\text{eff}}}$$

AN: $N > 28{,}7$

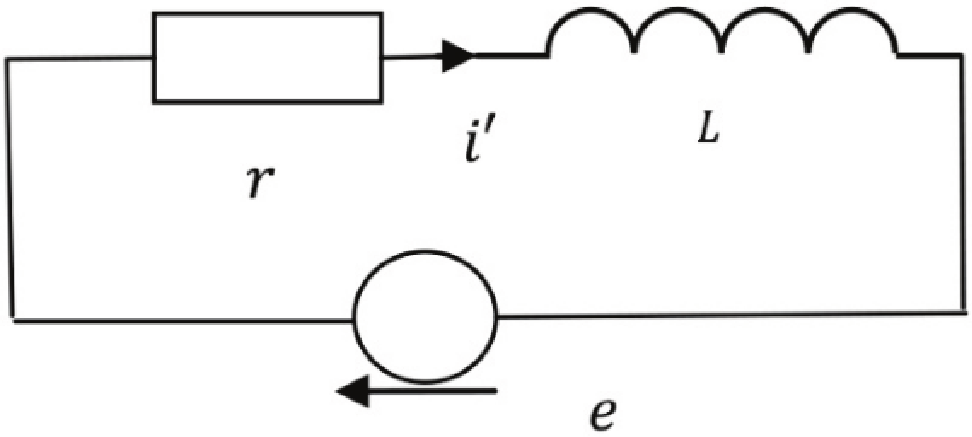
Il faut donc au minimum 29 spires afin que la lampe puisse s'allumer.

---

5) On assimile maintenant l'ampoule à une résistance $r = 10\,\Omega$ en série avec une inductance propre $L = 10\,\text{mH}$. Calculer alors la valeur efficace I' de $i'(t)$ dans la bobine plate lorsque $E = 1{,}5\,\text{V}$ et le déphasage φ' entre $i'(t)$ et $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé. Faire les applications numériques.

Réponse

Le circuit est donc maintenant équivalent à un circuit RL. On a donc le schéma suivant:



On a donc l'équation de maille qui est:

$$e = ri' + L\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{soit } L\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t} + ri' = E\sqrt{2}\sin(2\pi f t)$$

On passe en notations complexes en prenant la partie imaginaire. On a donc en posant $\omega = 2\pi f$:

$$(jL\omega + r)\underline{i'} = E\sqrt{2}e^{j\omega t}$$

$$\underline{i'} = \frac{E\sqrt{2}e^{j\omega t}}{r + jL\omega}$$

Le courant efficace est donc égal à:

$$I' = \frac{E}{\sqrt{r^2 + (L\omega)^2}}$$

Le déphasage vaut:

$$\tan \Phi' = -\frac{L\omega}{r}$$

AN: $I' = 0{,}14\,\mathrm{A}$ et $\Phi' = -0{,}3\,\mathrm{rad}$

Sujet 3 – corrigé

I Électrostatique($\star$)

On définit le potentiel électrostatique dans un cylindre de base S et de hauteur infinie suivant $\vec{e}_x$:

$$V = \begin{cases} V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ V_0 \exp\left\{\left(-\frac{x}{a}\right)\right\} & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

On supposera le problème invariant suivant $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$.

1) Montrer que les équipotentielles sont perpendiculaires au champ électrique.

Réponse

Soit O un point fixe et M un point quelconque pour lequel est défini le potentiel $V(M)$. Par définition, les points M' sur la surface équipotentielle vérifient $V(M') = C^{te}$ donc,

$$dV(M') = 0$$

or par définition du gradient:

$$dV(M') = \overrightarrow{grad}V(M').d\overrightarrow{OM'}$$

et par définition du champ électrique $\vec{E}(M') = -\overrightarrow{grad}V(M')$:

$$dV = -\vec{E}(M') \cdot d\overrightarrow{OM'} = 0$$

Donc le champ $\vec{E}(M')$ est perpendiculaire au vecteur $d\overrightarrow{OM'}$ or les points M' appartiennent à l'équipotentielle $V(M')$ donc le champ $\vec{E}(M')$ est perpendiculaire à la surface équipotentielle en M'

◇

2) Donner l'expression du champ électrique pour l'ensemble du cylindre.

Réponse

Par définition $\vec{E} = -\overrightarrow{grad}V$ donc

$$\text{Pour } x < 0 : \vec{E} = \vec{0}$$

$$\text{Pour } x > 0 : \vec{E} = \frac{V_0}{a} \exp\left\{\left(-\frac{x}{a}\right)\right\} \vec{e}_x$$

Le champ est discontinu en $x = 0$ alors que le potentiel est continu.

◇

3) Quel est l'état de surface du plan $x = 0$, on donne:

$$\sigma = \epsilon_0 \left[\vec{E}(x = 0^+) - \vec{E}(x = 0^-)\right] . \vec{e}_x$$

Réponse

$\vec{E}(x = 0^+) = \frac{V_0}{a} \vec{e}_x$ et $E(x = 0^-) = 0\vec{e}_x$ donc

$$\boxed{\sigma = \frac{\epsilon_0 V_0}{a}}$$

◇

4) Donner l'expression de la densité volumique de charge locale dans le cylindre.

Réponse

Par définition, $div\vec{E} = \frac{\rho}{\epsilon_0}$ donc

$$\text{Pour } x < 0 : \rho = 0$$

$$\text{Pour } x > 0 : \rho = -\frac{\epsilon_0 V_0}{a^2} \exp\left\{\left(-\frac{x}{a}\right)\right\} = -\frac{\sigma}{a} \exp\left\{\left(-\frac{x}{a}\right)\right\}$$

◇

5) Quelle est la charge totale dans le cylindre?

Réponse

On détermine la charge totale en somme la charge due aux charges surfacique et volumique:

$$Q_{\text{totale}} = \iint \sigma dS + \iiint \rho dxdydz = \sigma S - \frac{\sigma}{a} S \int_{0^+}^{+\infty} \exp\left(-\frac{x}{a}\right) dx$$

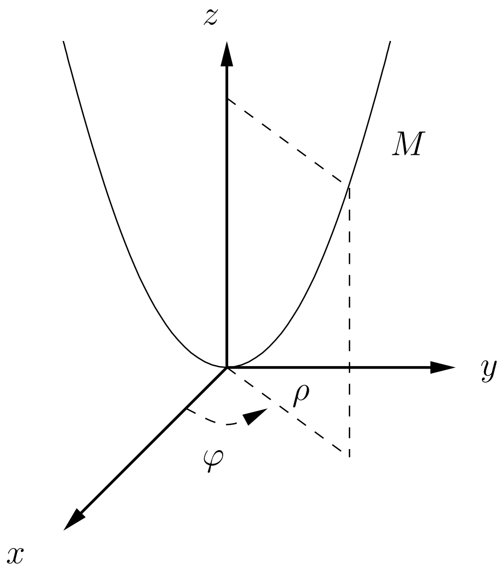
$$\boxed{Q_{\text{totale}} = \sigma S - \sigma S = 0}$$

◇

Sujet 4 – corrigé

I Énergie potentielle effective

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur $\vec{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen lié au repère cartésien $(O,\ \vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z)$. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution P, d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ z)$ est $\rho^2 - bz = 0$ avec $b > 0$.



Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur P. Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z)$. On suppose la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées ρ et z de M satisfont à l'inégalité $z \geq \rho^2/b$.

1) Exprimer la vitesse $\vec{v}$ du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ dans la base cylindrique.

Réponse

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\rho}\vec{e}_\rho + \rho\dot{\phi}\vec{e}_\phi + \dot{z}\vec{e}_z}$$

◇

2) Exprimer l'accélération $\vec{a}$ du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ sous la forme $\vec{a} = a_\rho\vec{e}_\rho + a_\varphi\vec{e}_\varphi + a_z\vec{e}_z$. Prouver que a_φ vérifie $a_\varphi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}(\rho^2\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t}$.

Réponse

$$\boxed{\vec{a} = (\ddot{\rho} - \rho\dot{\phi}^2)\vec{e}_\rho + (2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi})\vec{e}_\phi + \ddot{z}\vec{e}_z}$$

$$\frac{1}{\rho}\frac{d(\rho^2\dot{\phi})}{dt} = \frac{1}{\rho}(2\rho\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho^2\ddot{\phi}) = 2\dot{\rho}\dot{\phi} + \rho\ddot{\phi} = a_\phi$$

◇

3) La réaction exercée par P sur le point M est contenue dans le plan $(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_z)$. Prouver qu'au cours du mouvement $\rho^2\dot{\varphi}$ est constant.Cette constante du mouvement sera dorénavant notée C.

Réponse

- Système : point matériel M de masse m
- Référentiel : lié à la cavité $(Oxyz)$, supposé galiléen
- Forces : le poids $\vec{P}$ et la réaction $\vec{R}$

D'après le principe fondamental de la dynamique projeté dans la base cylindrique :

$$m \begin{pmatrix} a_\rho \\ a_\phi \\ a_z \end{pmatrix} = mg \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} R_\rho \\ 0 \\ R_z \end{pmatrix}$$

L'équation selon $\vec{e}_\phi$ donne : $a_\phi = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\rho^2 \dot{\phi} = C}$

4) Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de la particule M dans $\mathcal{R}$?

Réponse

Définition de l'énergie cinétique : $\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m v^2$

$$v^2 = \dot{\rho}^2 + \rho^2 \dot{\phi}^2 + \dot{z}^2 = \dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{\rho^2} + \dot{z}^2 \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{E}_k = \frac{1}{2} m \left(\dot{\rho}^2 + \frac{C^2}{\rho^2} + \frac{4\dot{\rho}^2 \rho^2}{b^2} \right)}$$

5) Exprimer l'énergie potentielle de la particule M. L'origine O du repère sera prise comme origine de l'énergie potentielle.

Réponse

Axe vertical ascendant : $\mathcal{E}_p = mgz + cte$

La constante est nulle car l'origine est prise en $z = 0$: $\boxed{\mathcal{E}_p = mg \frac{\rho^2}{b}}$

6) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la particule M ?

Réponse

Le système est soumis dans le référentiel galiléen au poids qui est une force conservative et à la réaction $\vec{R}$ qui est une force non-conservative mais qui ne travaille pas en l'absence de frottement. Donc l'énergie mécanique est conservée.

7) Déduire de ce qui précède que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{\rho}^2 G(\rho) + \mathcal{E}_{eff}(\rho)$$

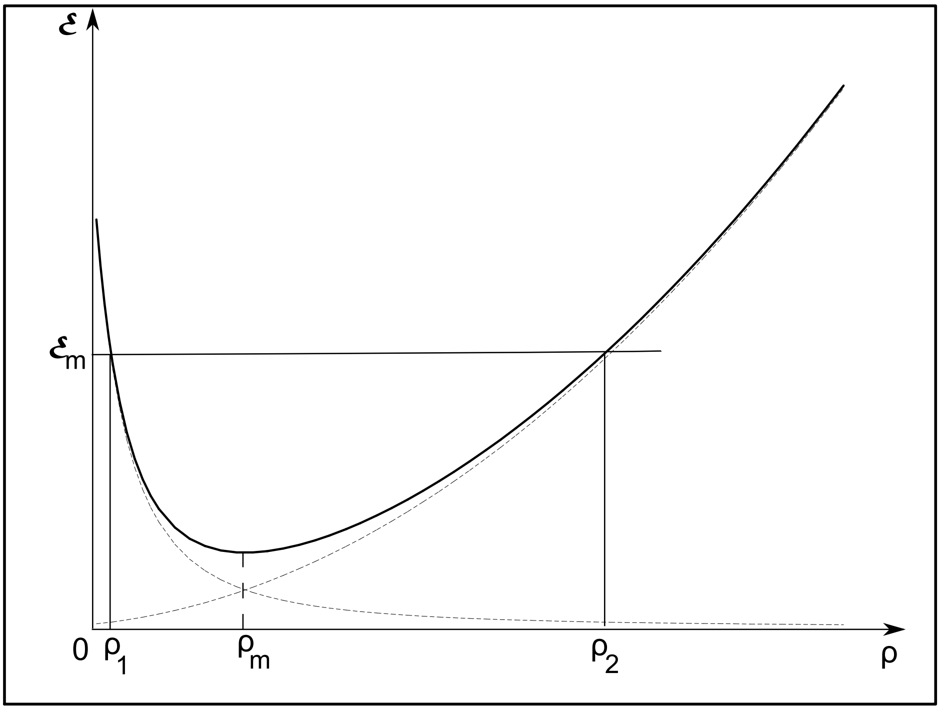
où $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$ est une énergie potentielle "effective". Expliciter $G(\rho)$ et $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$.

Réponse

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_p + \mathcal{E}_c \quad ; \quad \boxed{G(\rho) = 1 + \frac{4\rho^2}{b^2}} \quad ; \quad \boxed{\mathcal{E}_{eff}(\rho) = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{\rho^2} + mg \frac{\rho^2}{b}}$$

8) Représenter avec soin le graphe $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$. Montrer que $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$ passe par un minimum pour une valeur ρ_m de ρ que l'on exprimera en fonction de C, m, b et g, intensité du champ de pesanteur. Quelle est la dimension du paramètre b et de la constante du mouvement C ? Prouver que l'expression précédente de ρ_m est homogène.

Réponse



Si $\rho \to 0$, $\lim_{\rho\to 0} \mathcal{E}_{eff} = \lim_{\rho\to 0} \dfrac{mC^2}{2\rho^2} = \infty$

Si $\rho \to \infty$, $\lim_{\rho\to \infty} \mathcal{E}_{eff} = \lim_{\rho\to \infty} \dfrac{mg\rho^2}{b} = \infty$

Recherche du minimum : $\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{eff}}{\mathrm{d}\rho}(\rho_m) = 0$

$$\boxed{\rho_m = \left(\frac{C^2 b}{2g}\right)^{1/4}}$$

Analyse dimensionnelle :

$$[b] = L \qquad [C] = L^2 \cdot T^{-1}$$

$$[\rho_m] = \left(\frac{L^4 \cdot T^{-2} \cdot L}{L \cdot T^{-2}}\right)^{1/4} = L$$

◇

9) Discuter, à l'aide du graphe $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$, la nature du mouvement de M. En déduire que la trajectoire de M sur P est nécessairement tracée sur une région de P limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

Réponse

D'après l'expression de l'énergie mécanique,

$$\boxed{\mathcal{E}_m \geq \mathcal{E}_{eff}(\rho)}$$

car le terme cinétique est toujours positif ou nul. Pour une énergie mécanique fixée, ρ oscille entre deux rayons ρ_1 et ρ_2 déterminés par l'égalité suivante :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_{eff}(\rho)$$

◇

10) À quelle condition sur C la trajectoire de M sur P est-elle une parabole méridienne ?

Réponse

Une parabole méridienne implique que le mouvement est plan, donc que $\phi = cte$, soit $C = 0$.

◇

11) Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée ρ de la valeur ρ_m pour laquelle $\mathcal{E}_{eff}$ est minimale.Montrer que $r = \rho - \rho_m$ oscille avec une période T dont on donnera l'expression en fonction de b, g et ρ_m.

Réponse

DL de l'énergie potentielle effective autour de ρ_m :

$$\mathcal{E}_{eff} = \mathcal{E}_{eff}(\rho_m) + \frac{r^2}{2}\frac{d^2\mathcal{E}_{eff}}{d\rho^2}\bigg|_{\rho_m} \quad \text{avec} \quad \frac{d^2\mathcal{E}_{eff}}{d\rho^2}\bigg|_{\rho_m} = \frac{8mg}{b}$$

On développe l'expression de $G(\rho)$ autour de ρ_m (l'ordre zéro suffit) :

$$G(\rho) = G(\rho_m) = 1 + 4\frac{\rho_m^2}{b^2}$$

De plus, on a $\ddot{\rho} = \ddot{r}$. L'énergie mécanique s'exprime alors autour de ρ_m :

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2\left(1 + 4\frac{\rho_m^2}{b^2}\right) + \mathcal{E}_{eff}(\rho_m) + \frac{8mg}{b}\frac{r^2}{2}$$

L'énergie mécanique est conservée, donc sa dérivée par rapport à t est nulle. On trouve alors l'équation d'un oscillateur harmonique :

$$\ddot{r} + \omega^2 r = 0 \qquad \boxed{\omega^2 = \frac{8g}{b}\frac{1}{1 + 4\rho_m^2/b^2}}$$

On en déduit la période T des oscillations :

$$\boxed{T = \pi\sqrt{\frac{b}{2g}\left(1 + 4\frac{\rho_m^2}{b^2}\right)}}$$

◇

Sujet 5 – corrigé

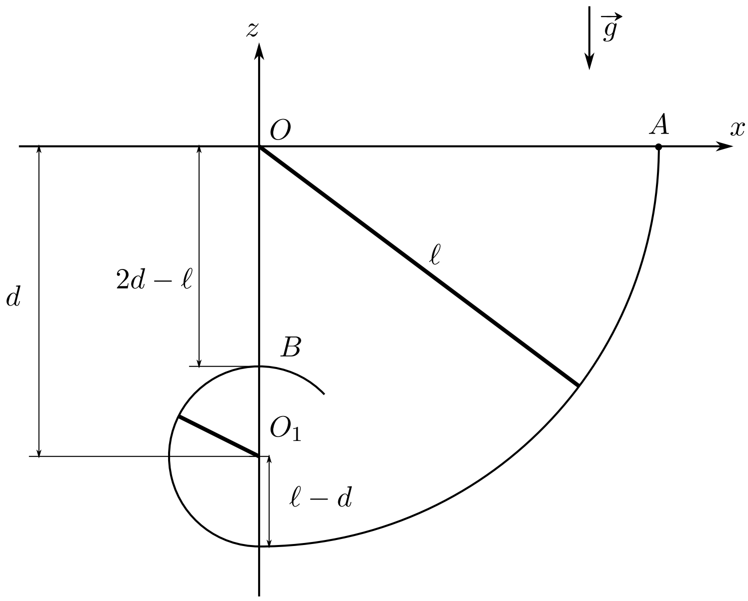
I Enroulement d'un fil

On considère deux clous plantés l'un au-dessus de l'autre écartés d'une distance d. Un pendule de masse m attaché à un fil de masse négligeable de longueur ℓ est accroché au clou supérieur.
On lâche initialement le fil à l'horizontale avec un vitesse v_0. On néglige tout frottement lors de la chute et on suppose qu'aucun échange énergétique n'a lieu lors du contact entre le fil et le second clou.

1) Discuter de la possibilité que le fil s'enroule autour du second clou selon v_0 , d et ℓ.

Réponse

Il y a deux trajectoires circulaires, la première de centre O et de rayon ℓ, la seconde de centre O_1 et de rayon $\ell - d$.



Les contraintes géométriques imposent :

$$\ell > d \quad \text{et} \quad \ell - d < d \quad \text{soit} \quad \boxed{d < \ell < 2d}$$

La masse m accrcochée au fil est soumise, dans le référentiel terrestre supposé galiléen,

- à son poids qui est une force conservative ;
- à la tension du fil $\overrightarrow{N}$ sui ne travaille pas.

Le fil s'enroule autour du clou si en D, $N_D = \overrightarrow{N} \cdot \vec{e}_z < 0$.

PFD en D projeté selon $\vec{e}_z$

$$-m\frac{v_D^2}{\ell - d} = -N_D - mg \quad \text{soit} \quad \boxed{N_D = m\left(\frac{v_D^2}{\ell - d} - g\right)}$$

Déterminons la vitesse en D grâce à l'énergie mécanique. Le système étant conservatif, $E_m(A) = E_m(D)$:

$$\frac{1}{2}mv_0^2 = \frac{1}{2}mv_D^2 - mg(2d - \ell) \quad \text{soit} \quad \boxed{v_D^2 = v_0^2 + 2g\,(2d - \ell)}$$

On injecte dans l'expression de N_D et on obtient

$$\boxed{N_D = \frac{m}{\ell - d}\left[v_0^2 + g\,(5d - 3\ell)\right]}$$

Le fil s'enroule si $N_D > 0$.

Comme géométriquement $d < \ell < 2d$, soit $3d < 3\ell < 6d$, alors $5d - 3\ell$ peut être négatif.

- Si $5d > 3\ell$, alors quelle que soit la valeur de v_0, le fil s'enroule.
- Si non, il faut que

$$\boxed{v_0 > \sqrt{g(3\ell - 5d)}}$$