

# Optique géométrique

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Toute l'optique.

## Sommaire

<b>E1</b>	Étude de quelques lentilles minces . . . . .	<b>2</b>
<b>E2</b>	Optique d'un périscope . . . . .	<b>3</b>
<b>P1</b>	Formation d'un arc-en-ciel . . . . .	<b>4</b>
<b>P2</b>	Module photographique d'un smartphone . . . . .	<b>6</b>

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

### Malus

- |   |   |
|---|---|
| ◇ A : application numérique mal faite ;   | ◇ Q : question mal ou non indiquée ;            |
| ◇ N : numéro de copie manquant ;          | ◇ C : copie grand carreaux ;                    |
| ◇ P : prénom manquant ;                   | ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;              |
| ◇ E : manque d'encadrement des réponses ; | ◇ H : homogénéité non respectée ;               |
| ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;  | ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;    |
| ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;    | ◇ $\varphi$ : loi physique fondamentale brisée. |

### Exemple application numérique

$$n = \frac{PV}{RT} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p = 1,0 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 1,0 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{mol}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ T = 300 \text{ K} \end{cases}$$

A.N. :  $n = 5,6 \times 10^{-4} \text{ mol}$

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{10^5 \cdot 1}{8,32 \cdot 300} = 0,56$$

## Préliminaire

- 1) Inscrire sur votre copie une remarque **pertinente** issue du devoir de l'année précédente.

### **/32** E1 Étude de quelques lentilles minces

#### **I/A** Lentille convergente de focale donnée

On considère une lentille convergente  $\mathcal{L}$  de centre optique O et de distance focale  $f' = 20$  cm. Elle est utilisée dans les conditions de GAUSS sur un banc d'optique. Elle donne d'un objet A sur l'axe optique une image A' sur l'axe optique.

Pour les trois questions suivantes :

- ◇ Faire un schéma à l'échelle ;
- ◇ Caractériser l'image (virtuelle ou réelle, droite ou renversée, agrandie, de même taille ou rétrécie) ;
- ◇ Déterminer par le calcul la position de l'image ;
- ◇ Calculer le grandissement .

- 1 On considère un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique et placé à 40 cm de la lentille.
- 2 On considère un objet réel AB perpendiculaire à l'axe optique et placé à 10 cm de la lentille.
- 3 On considère un objet virtuel AB perpendiculaire à l'axe optique et placé à 20 cm de la lentille.

#### **I/B** Lentille convergente quelconque

- 4 Dans ce cas, l'image d'un objet réel est-elle toujours réelle ? Toujours virtuelle ? Ou aucune de ces deux affirmations n'est correcte ? Justifier.
- 5 L'image d'un objet virtuel est-elle toujours réelle ? Toujours virtuelle ? Ou aucune de ces deux affirmations n'est correcte ? Justifier.

#### **I/C** Lentille divergente quelconque

- 6 Dans ce cas, l'image d'un objet réel est-elle toujours réelle ? Toujours virtuelle ? Ou aucune de ces deux affirmations n'est correcte ? Justifier.
- 7 L'image d'un objet virtuel est-elle toujours réelle ? Toujours virtuelle ? Ou aucune de ces deux affirmations n'est correcte ? Justifier.

## /35 E2 Optique d'un périscope

L'entrée d'un périscope est constituée de deux miroirs plans  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , circulaires et de centres respectifs  $S_1$  et  $S_2$  (Figure 1.1). Après réflexions réflexions sur  $\mathcal{M}_1$  et  $\mathcal{M}_2$ , la lumière entre dans un système de deux lentilles  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$ , assimilées à des lentilles minces de centres respectifs  $O_1$  et  $O_2$ . Les miroirs sont inclinés d'un angle de  $45^\circ$  par rapport à l'axe optique du système représenté en pointillés.

L'orientation algébrique de l'axe optique ainsi que celle de l'axe transversal sont indiquées sur la figure. Les distances focales images algébriques de  $\mathcal{L}_1$  et  $\mathcal{L}_2$  sont respectivement  $f'_1 = 1,0 \text{ m}$  et  $f'_2 = -0,125 \text{ m}$ . Un œil emmétrope (sans défaut) est placé juste derrière  $\mathcal{L}_2$ . Le périscope  $\mathcal{S}_p$  est donc l'ensemble catadioptrique  $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_1, \mathcal{L}_2\}$ . On observe un objet placé dans un plan transversal, en avant de  $\mathcal{S}_p$ .

On introduit les distances  $a = S_2S_1 > 0$ ,  $b = S_2O_1 > 0$ ,  $e = O_1O_2 > 0$  et  $d = AS_1 > 0$ . Dans tout l'exercice, on admet que les lentilles fonctionnent dans les conditions de GAUSS.

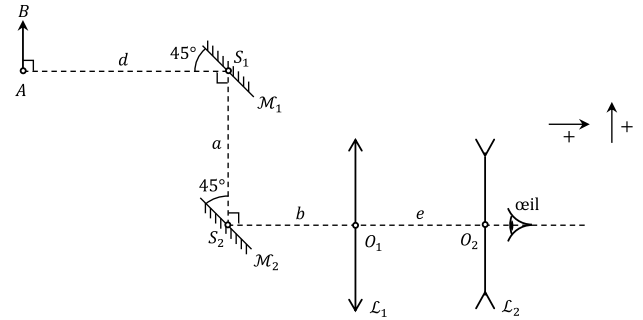


FIGURE 1.1 – Schéma du périscope.

- 1 Justifier simplement que le système est équivalent à une observation de AB sur un seul axe optique. Donner alors la distance  $AO_1$  et dessiner le schéma équivalent.



Pour les questions suivantes, indiquer la ou les bonnes réponses clairement et en toutes lettres (« Réponse X »), en justifiant entièrement votre choix.

- 2 L'objet AB est placé à grande distance du périscope, suffisamment loin pour que  $d$  puisse être considéré infini. On note  $e_0$  la valeur de  $e$  permettant à l'œil d'observer AB à travers  $\mathcal{S}_p$  sans accommoder. Exprimer  $e_0$  :

- A)  $e_0 = f'_1 - f'_2$       B)  $e_0 = f'_1$       C)  $e_0 = f'_2$       D)  $e_0 = f'_1 + f'_2$

- 3 **Question difficile mais indépendante de la suite.** L'objet étant encore à l'infini, on règle  $\mathcal{S}_p$  de telle sorte que  $e = e_0 - \varepsilon$ , où  $\varepsilon > 0$ ,  $\varepsilon \ll |f'_2|$  et  $\varepsilon \ll |f'_1|$ . On donne le développement asymptotique (approximation) suivant :

$$\frac{1}{1+x} \underset{x \ll 1}{\sim} 1 - x$$

Que peut-on affirmer ?

- A) L'image de AB par  $\mathcal{S}_p$  est réelle.      B) L'image de AB par  $\mathcal{S}_p$  est virtuelle.  
C) L'œil peut observer une image nette à travers  $\mathcal{S}_p$ .      D) L'œil ne peut pas observer d'image nette à travers  $\mathcal{S}_p$ .

- 4 L'objet est maintenant placé à distance finie. On note  $A_1B_1$  l'image de AB par le système  $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_1\}$  et  $p'_1 = \overline{O_1A_1}$ . Exprimer  $p'_1$  :

- A)  $p'_1 = \frac{f'_1(a+b+d)}{a+b+d-f'_1}$       B)  $p'_1 = \frac{f'_1(a+b+d)}{a+b+d+f'_1}$       C)  $p'_1 = \frac{f'_1(a+b+e)}{a+b+d+f'_1}$       D)  $p'_1 = \frac{f'_1d}{d-f'_1}$

- 5 Quelle est alors la taille (grandeur algébrique)  $\overline{A_1B_1}$  de cette image intermédiaire ?

- A)  $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1 + a + b + d} \overline{AB}$       B)  $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1 + f} \overline{AB}$   
C)  $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1 - d} \overline{AB}$       D)  $\overline{A_1B_1} = \frac{f'_1}{f'_1 - a - b - d} \overline{AB}$

- 6 L'image  $\overline{A'B'}$  de AB par  $\mathcal{S}_p$  se forme maintenant en avant de  $\mathcal{L}_2$ , à une distance  $\overline{A'O_2} = d_m$ , avec  $d_m = 25 \text{ cm}$ , et telle que  $\overline{A'B'} = 1 \text{ mm}$ .

On note  $\theta > 0$  l'angle sous lequel l'image AB par  $\mathcal{S}_p$  est vue par l'observateur (on rappelle que l'œil est derrière et à proximité immédiate de  $\mathcal{L}_2$ ). Que peut-on affirmer ?

- A)  $\theta \approx 10^{-3} \text{ rad}$       B)  $\theta \approx 4 \times 10^{-3} \text{ rad}$       C) L'image est ponctuelle pour l'œil.      D) L'image est étendue pour l'œil.

- 7 Pour un objet à distance infinie, de quelle distance  $\Delta e > 0$  faut-il déplacer  $\mathcal{L}_2$  depuis la position précédente pour retrouver le réglage initial  $e = e_0$  ?

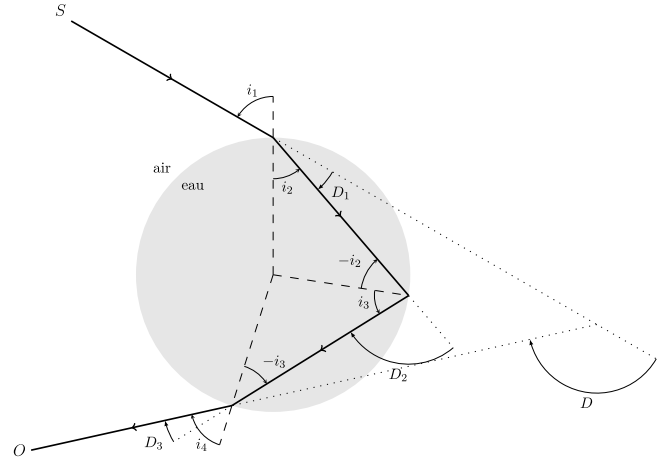
- A)  $\Delta e = 1,0 \text{ mm}$       B)  $\Delta e = 1,25 \text{ cm}$       C)  $\Delta e = 5,0 \text{ cm}$       D)  $\Delta e = 12,5 \text{ cm}$

## /51 P1 Formation d'un arc-en-ciel

Lorsque le beau temps revient juste après une averse, on observe parfois la formation d'un arc-en-ciel à l'horizon. Il s'agit d'un phénomène optique de dispersion de la lumière solaire, qui se réfracte et se réfléchit dans des gouttelettes d'eau en suspension dans l'air. La première théorie permettant d'expliquer ce phénomène a été établie par Descartes en 1637 à l'aide des lois de la réflexion et de la réfraction. Il mit en évidence qu'un-e observateur-ice situé-e au niveau du sol reçoit un faisceau de rayons émergents correspondant au maximum de l'angle de déviation des gouttelettes d'eau. Comme celui-ci dépend de la longueur d'onde des rayons lumineux, on peut ainsi observer la dispersion de la lumière solaire. Dans cette partie, nous allons mettre en évidence les principaux résultats de cette théorie.

On considère un rayon lumineux monochromatique issu du Soleil  $S$ , qui arrive sur une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air sous un angle d'incidence  $i_1$ , comme représenté sur la Figure 1.2. Après une première réfraction, une réflexion et une seconde réfraction, le rayon émerge de la gouttelette sous un angle de réfraction  $i_4$ . Il se dirige alors vers un-e observateur-ice  $O$  situé-e au niveau du sol. On suppose que l'air est un milieu d'indice optique égal à 1, et on note  $n$  l'indice optique de l'eau.

L'orientation des différents angles à chaque interface est définie sur la Figure 1.2, et on définit positivement les angles orientés dans le sens trigonométrique.



**FIGURE 1.2** – Trajet d'un rayon lumineux dans une gouttelette d'eau sphérique en suspension dans l'air.

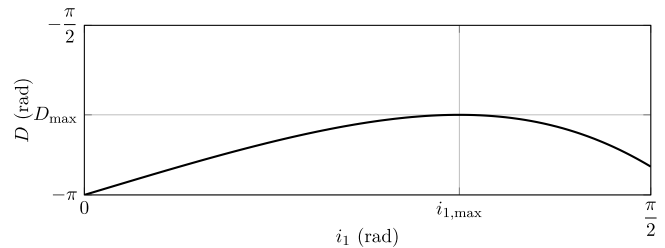
- 1 Exprimer les angles de déviation  $D_1$ ,  $D_2$  et  $D_3$  à chaque interface et en fonction de  $i_1$ ,  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$ , en tenant compte de l'orientation de ces angles.
- 2 À l'aide des lois de SNELL-DESCARTES, exprimer les angles  $i_2$ ,  $i_3$  et  $i_4$  en fonction de  $i_1$  et  $n$ .
- 3 En déduire que l'angle de déviation totale  $D$  peut s'exprimer :

$$D = 4 \arcsin\left(\frac{\sin(i_1)}{n}\right) - 2i_1 - \pi$$

On représente l'évolution de  $D$  en fonction de  $i_1$  sur la Figure 1.3, en prenant  $n = 1,33$  pour l'indice optique de l'eau. L'angle de déviation présente un maximum  $D_{\max}$  pour un certain angle d'indidence  $i_{1,\max}$  qui correspond au faisceau de rayons émergents reçu par l'observateur-ice.

On rappelle que la dérivée de la fonction trigonométrique  $f(x) = \arcsin(x)$  s'exprime :

$$\frac{df}{dx} = \frac{1}{\sqrt{1-x^2}}$$



**FIGURE 1.3** – Évolution de l'angle de déviation  $D$  en fonction de l'angle d'incidence  $i_1$ .

- 4 Montrer que l'angle d'incidence  $i_{1,\max}$  vérifie l'équation suivante :

$$\sin(i_{1,\max}) = \sqrt{\frac{4-n^2}{3}}$$

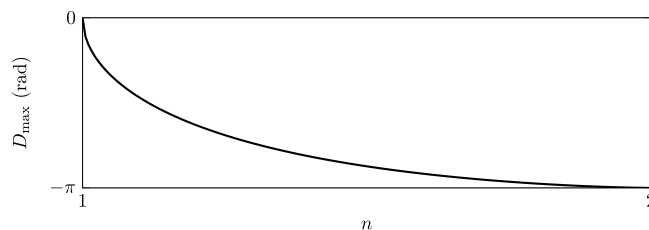
- 5 En déduire l'expression du maximum  $D_{\max}$  en fonction de  $n$ .

On représente l'évolution de  $D_{\max}$  en fonction de  $n$  sur la Figure 1.4, pour  $1 \leq n \leq 2$ .

L'eau étant un milieu dispersif, son indice optique  $n$  dépend de la longueur d'onde  $\lambda$  du rayon lumineux considéré. En 1836, CAUCHY établit que l'indice optique d'un tel milieu peut s'exprimer sous la forme :

$$n(\lambda) = A + \frac{B}{\lambda^2}$$

avec  $A$  et  $B$  des constantes positives, caractéristiques du milieu.



**FIGURE 1.4** – Évolution du maximum  $D_{\max}$  en fonction de l'indice optique  $n$ .

- 6] Comment évolue le maximum  $D_{\max}$  lorsque la longueur d'onde  $\lambda$  augmente ? Justifier votre raisonnement.
- 7] Rappeler l'intervalle de longueur d'onde constituant le spectre visible.
- 8] Lorsque l'observateur-ice  $O$  situé-e au niveau du sol regarde l'arc-en-ciel, aperçoit-il l'anneau rouge situé au-dessus ou en-dessous de l'anneau violet ? Justifier votre raisonnement. Un schéma est attendu.

Lorsque les conditions d'observation sont excellentes, il est possible d'apercevoir un second arc-en-ciel dans le ciel, situé au-dessus de l'arc-en-ciel précédemment étudié. Il est même possible d'observer, dans de très rares occasions, un troisième arc-en-ciel qui s'ajoute aux deux précédents.

- 9] En considérant toujours des gouttelettes d'eau sphériques en suspension dans l'air, expliquer l'origine de ces différents arc-en-ciel. Un schéma simple est attendu pour au moins une de ces situation.

## /75 P2 Module photographique d'un smartphone

En 1973, Martin Cooper invente, avec son équipe, le premier téléphone cellulaire. Depuis, l'usage du téléphone portable n'a cessé de croître, ce qui en fait l'un des biens de consommation les plus répandus de la planète.



### Appareil photographique d'un téléphone portable

Résolution du capteur	$4000 \times 3000$ pixels
Nombre d'ouverture	$N = 2,2$
Diagonale du capteur	$d = 1/3$ de pouce
Indice de réfraction de l'air	$n_{\text{air}} = 1,00$
Indice de réfraction de la lentille	$n = 1,52$
Rayon de courbure de la lentille	$R = 4,0$ mm
Diamètre réel la lentille	$\Phi = 5,0$ mm
Distance focale effective de l'objectif	$f' = 9,0$ mm

### Propriétés de l'œil humain

Distance normale d'observation d'un téléphone portable	30 cm
Pouvoir de résolution d'un oeil « normal »	$\alpha = 3,0 \times 10^{-4}$ rad

### Conversion

$$1 \text{ pouce} = 25,4 \text{ mm}$$

### Estimation d'une incertitude-type composée

Si la grandeur  $y$  calculée est un produit ou un quotient du type  $y = x_1 x_2$  ou  $y = x_1/x_2$ , alors l'incertitude-type sur  $y$ , notée  $u(y)$  est reliée à l'incertitude-type sur chacun des facteurs par

$$\left(\frac{u(y)}{y}\right)^2 = \left(\frac{u(x_1)}{x_1}\right)^2 + \left(\frac{u(x_2)}{x_2}\right)^2$$

Les trois parties sont indépendantes.

## II/A Étude du capteur de l'appareil photographique

On considère dans un premier temps les paramètres géométriques du capteur principal, afin de vérifier si le phénomène de diffraction dégrade ou non l'image formée sur le capteur. Tous les pixels considérés sont carrés de côté  $a$ .

- À partir des données du téléphone portable fournies, déterminer la longueur  $L$  et la largeur  $l$  ( $L > l$ ) du capteur de ce téléphone. En déduire la taille  $a$  d'un pixel du capteur.

Le nombre d'ouverture  $N$  de l'appareil photographique est défini par la formule ci-après, où  $D$  est le diamètre de l'ouverture et  $f'$  la distance focale de l'objectif,

$$N = \frac{f'}{D}$$

On souhaite estimer la taille caractéristique de la tache de diffraction visible sur le capteur. Pour cela on considère que l'objectif est éclairé par un « point unique »  $A$  situé à l'infini. Les rayons issus de  $A$  sont diffractés par le diaphragme de diamètre  $D$ . Les rayons extrêmes après diffraction sont caractérisés par l'angle  $\theta$ .

- Préciser où doit être placé le capteur pour former l'image de  $A$ , puis compléter la figure 1.7 du document réponse en traçant les rayons émergents de la lentille issus des deux rayons incidents déjà tracés. Placer le rayon  $R_{\text{diff}}$  de la tache centrale de diffraction perçue sur le capteur.
- Après avoir justifié la longueur d'onde lumineuse choisie, déterminer  $R_{\text{diff}}$ . Commenter.
- Proposer une justification du choix de l'entreprise de configurer par défaut la prise d'image en full HD ( $1920 \times 1080$  pixels) au lieu de la résolution 4K ( $3840 \times 2160$  pixels).

## II/B Étude des aberrations géométriques dues à la lentille de l'appareil photographique

La lentille de forme plano-convexe est constituée de silice fondue associée à du quartz. On peut la modéliser comme une demi-boule de rayon  $R = 4,0 \text{ mm}$  et d'indice de réfraction  $n = 1,52$ , plongée dans l'air dont l'indice de réfraction est pris égal à 1. Un faisceau lumineux cylindrique, de rayon  $r_m < R$ , arrive sous incidence normale sur la face plane de cette lentille. On note  $C$  l'intersection de la face plane de la demi-boule avec l'axe optique ( $Ox$ ) et  $S$  l'intersection de la face hémisphérique avec ce même axe. On s'intéresse au rayon lumineux incident qui arrive parallèle à l'axe optique et à une distance  $r$  de cet axe.

### II/B) 1 Condition de traversée de la lentille

- 5 Compléter sur la figure 1.8 du document réponse le trajet de ce rayon lumineux lors de son passage à travers la lentille.

- ◇ On notera  $I$  le point d'incidence sur le dioptre verre-air et  $J$  son projeté orthogonal sur l'axe  $x$ .
- ◇ On notera  $i$  l'angle d'incidence **orienté** sur le dioptre verre-air et  $t$  l'angle de réfraction correspondant.

Déterminer l'expression de  $r_0$ , valeur limite du rayon du faisceau à respecter si l'on souhaite que tous les rayons incidents émergent de la lentille. Calculer numériquement la valeur de  $r_0$ . En réalité, le constructeur a choisi un diamètre de la lentille  $\Phi = 5,0 \text{ mm}$ . Justifier ce choix.

### II/B) 2 Étude des rayons proches de l'axe optique

- 6 On note  $A'$  la position de l'intersection du rayon incident avec l'axe optique après son passage au travers de la lentille. Le placer sur le schéma annexe, puis montrer que la distance algébrique  $\overline{CA'}$  vérifie

$$\overline{CA'} = R \cos i + \frac{R \sin i}{\tan(t - i)}$$

- 7 En déduire, en fonction de  $R$  et  $n$ , l'expression de la limite  $\overline{CF'}$  de  $\overline{CA'}$  lorsque la distance  $r$  tend vers 0. Calculer numériquement  $\overline{CF'}$ .
- 8 Dans quelles conditions peut-on considérer que le point  $F'$  est stigmatiquement conjugué d'un point source situé à l'infini sur l'axe? Comment peut-on nommer le point  $F'$ ?

### II/B) 3 Étude de l'aberration sphérique de la lentille

Le capteur de l'appareil photographique est placé dans le plan focal image de la lentille (figure 1.5). On s'intéresse à présent au rayon lumineux qui arrive parallèle à l'axe optique à la distance  $r < r_0$  de l'axe (question 5).

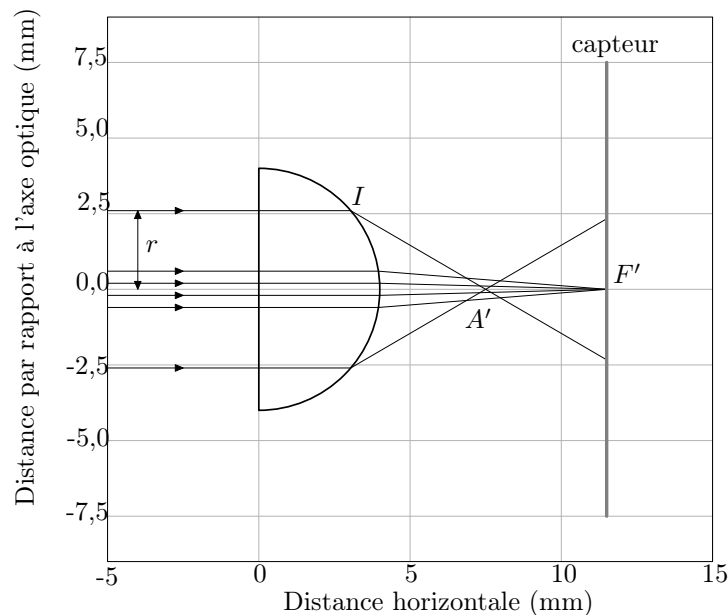


FIGURE 1.5 – Aberration sphérique

- 9 On définit la distance TSA (*transversal spherical aberration*) comme la distance entre  $F'$  et le point où le rayon émergent extrême correspondant à  $r = r_0$  rencontre le capteur. Faire un schéma en faisant apparaître la distance TSA. On notera  $i_0$  l'angle d'incidence au niveau du dioptre sphérique verre-air.
- 10 Montrer que la distance TSA peut se mettre sous la forme

$$TSA = \frac{r_0}{\sin^2 i_0} \left( \frac{\overline{CF'}}{R} \cos i_0 - 1 \right)$$

- 11 Exprimer alors la distance TSA en fonction de  $R$  et  $n$ . Faire l'application numérique. Comparer la distance TSA à la taille de la tache de diffraction obtenue en question 3 et à la dimension d'un pixel. Conclure sur l'adéquation de cette lentille au téléphone portable considéré.

## II/C

### Estimation de la taille d'un pixel de l'écran d'un smartphone

Depuis l'apparition des premiers smartphones, la qualité des écrans a fait des progrès considérables. Un célèbre constructeur de téléphones affirme que « la densité de pixels des écrans est si élevée qu'à l'oeil nu et à une distance normale, il est impossible de discerner les pixels individuels ».

L'objectif de cette partie est de vérifier si l'écran de l'objet d'étude vérifie ou non ce critère.

- 12 Montrer qu'il existe une taille de pixel maximale pour satisfaire à la description précédente. Calculer sa valeur numérique.
- 13 Estimer la dimension  $a$  d'un pixel de l'écran présenté dans la figure 1.6, ainsi que l'incertitude  $u(a)$  de cette mesure, et conclure sur la véracité du propos du constructeur.

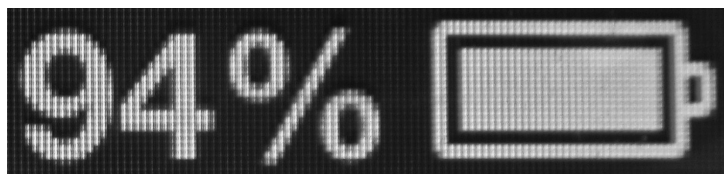


FIGURE 1.6 – Écran de téléphone, grossit 10 fois (source wikimediacommons)



Nom :

Prénom :

## Annexe : problème 2

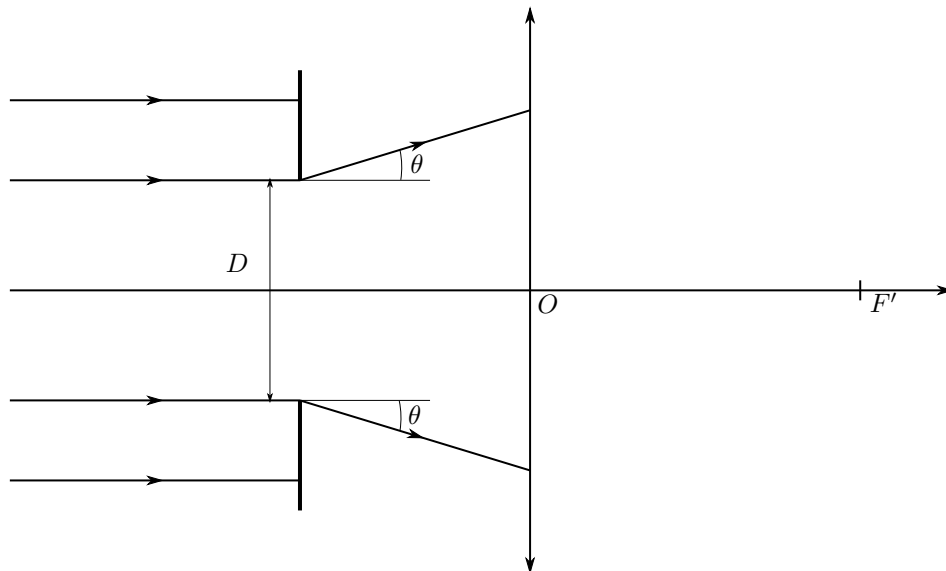


FIGURE 1.7 – Tracé de rayons lors de la diffraction par le diaphragme d'ouverture  $D$ .

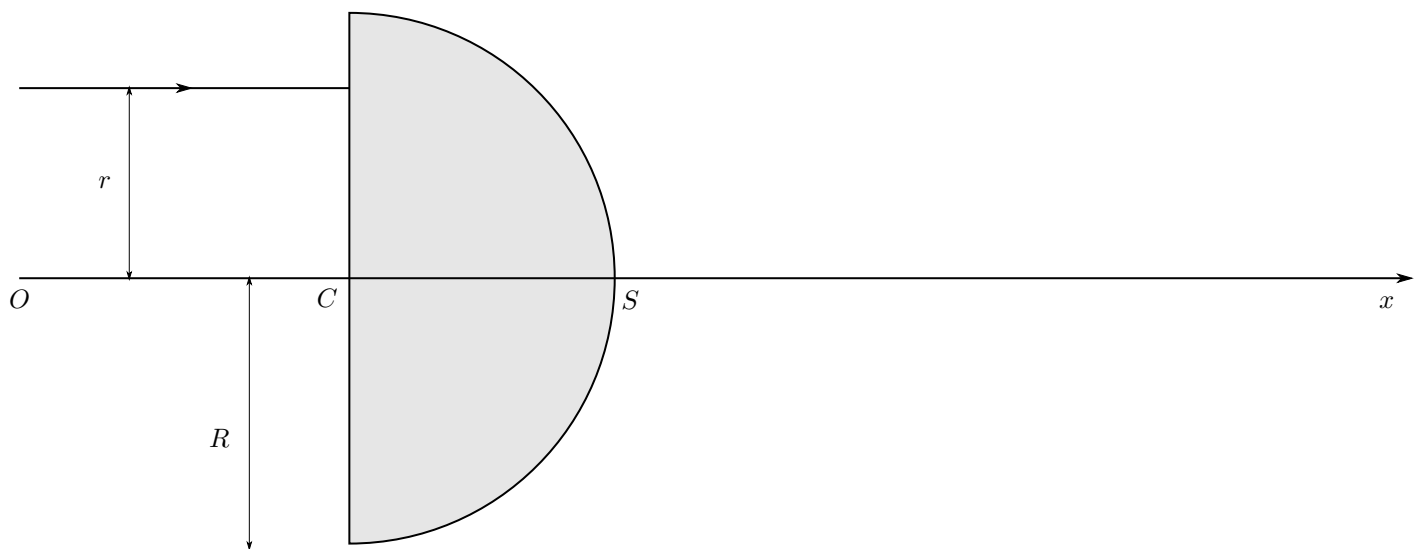


FIGURE 1.8 – Modèle de la lentille demi-boule.

Copie /