Mécanique – chapitres 1 et 2

Correction du TD d'entraînement

I Étude d'un volant de badminton

Un volant de badminton a une masse $m = 5{,}0\,\mathrm{g}$. On veut vérifier expérimentalement l'information trouvée sur internet qui précise qu'un volant lâché de très haut atteint une vitesse limite $v_l = 25\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Pour tester cette affirmation, on veut déterminer l'altitude h à laquelle il faut le lâcher (sans vitesse initiale) pour qu'il atteigne cette vitesse limite.

On lâche le volant d'une fenêtre en hauteur et on filme sa chute verticale. On note O le point de départ de la chute, et (Oz) l'axe vertical dirigé vers le bas. Au cours de la chute, on prend en compte une force de frottement due à l'air de la forme $\vec{F} = -\lambda v \vec{v}$ où $\vec{v}$ est le vecteur vitesse du point M, v sa norme et λ un coefficient positif. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

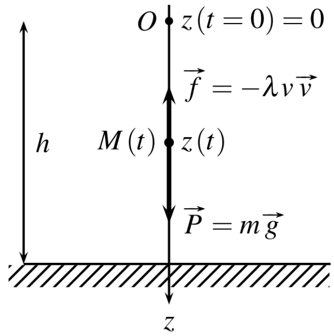
1) Établir l'équation différentielle portant sur la norme du vecteur vitesse $v(t)$.

Réponse

- **Système** : {volant} assimilé à un point matériel M de masse m
- **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
- **Repère** : (O, $\vec{u_z}$) avec O départ de chute, $\vec{u_z}$ vertical *descendant* (voir schéma)
- **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = z(t)\,\vec{u_z}$, $\vec{v}(t) = \dot{z}(t)\,\vec{u_z}$, $\vec{a}(t) = \ddot{z}(t)\,\vec{u_z}$
- **Origine et instant initial** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = z(0)\,\vec{u_z} = \vec{0}$

- **BFD** :

  Poids $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$
  Frottements $\vec{F} = -\lambda v \vec{v} = -\lambda \dot{z}^2\,\vec{u_z}$



- **PFD** :

$$m\vec{a}(t) = \vec{P} + \vec{F} \Leftrightarrow m\ddot{z} = mg - \lambda\dot{z}^2 \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m}\dot{z}^2 = g$$

Ainsi,

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v^2 = g}$$

◇

2) Montrer l'existence d'une vitesse limite v_l et l'exprimer en fonction de λ, m et g.

Réponse

Lorsqu'on lâche M sans vitesse initiale d'une hauteur h, la vitesse est faible au départ et la force principale est le poids, accélérant le mobile vers le bas. Quand la vitesse augmente, les frottements s'intensifient jusqu'à ce qu'ils compensent le poids, donnant $\vec{a} = \vec{0}$: la vitesse n'évolue plus et reste à sa valeur avant compensation, la vitesse limite v_l. v_l étant constante, $\dot{v}_l = 0$, donc l'équation différentielle donne

$$\frac{\lambda}{m}{v_l}^2 = g \Leftrightarrow \boxed{v_l = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}}$$

◇

On note $t^* = t/\tau$, $z^* = z/L$ et $v^* = v/v_l$, avec $\tau = v_l/g$ et $L = v_l\tau$.

3) Montrer que t^*, z^* et v^* sont trois grandeurs sans dimension.

Réponse

v^* est le rapport de deux vitesses, donc est forcément sans dimension. Ensuite,

$$[\tau] = \left[\frac{v_l}{g}\right] = \frac{\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}{\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}} = \mathrm{s}$$
$$[L] = [v_l][\tau] = \mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \times \mathrm{s} = \mathrm{m}$$

donc τ est bien un temps et L une longueur ; ce faisant, t^* et z^* sont évidemment adimensionnées.

◇

4) Montrer que l'équation différentielle portant sur la vitesse peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1$$

Réponse

On réécrit l'équation avec $v = v_l v^*$ et $t = \tau t^*$:

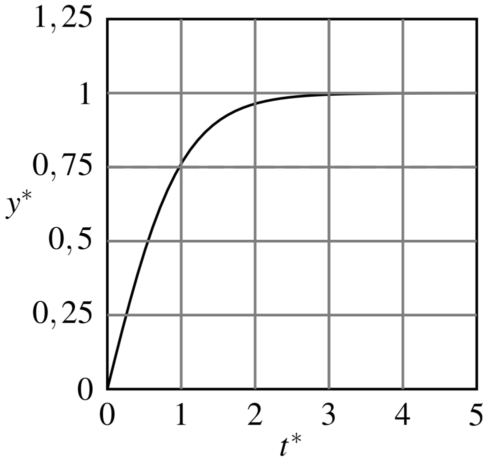
$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\lambda}{m}v = g \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}(v_l v^*)}{\mathrm{d}(\tau t^*)} + \frac{\lambda}{m}(v_l v^*)^2 = g \Leftrightarrow \frac{v_l}{\tau}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\lambda {v_l}^2}{m}(v^*)^2 = g$$

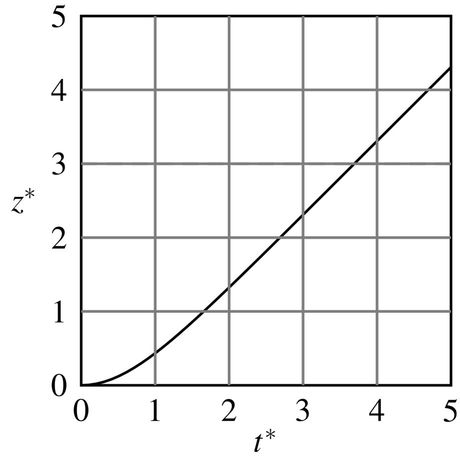
Or,

$$\frac{v_l}{\tau} = g \quad \text{et} \quad \frac{\lambda {v_l}^2}{m} = g \Longrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1}$$

◇

La résolution de l'équation précédente conduit à des solutions dont on donne les représentations graphiques ci-dessous.





5) À l'aide des courbes, décrire les deux phases du mouvement.

Réponse

Ces courbes montrent que la vitesse augmente pendant 2 à 3τ, avant de se stabiliser à v_l. Le mouvement est ensuite rectiligne uniforme, et z est une fonction affine du temps.

◇

6) Déterminer l'altitude minimale h à laquelle il faut lâcher le volant pour que sa vitesse au sol soit supérieure ou égale à 95% de v_l. On exprimera cette altitude en fonction de L. Déterminer également la durée Δt de l'expérience en fonction de τ.

Réponse

Le courbe représentant $v^*(t^*)$ montre que $v^* = 0{,}95$ pour $t^* = 1{,}8$. La durée de l'expérience pour arriver à cette valeur est donc $1{,}8\,\tau$, et la hauteur z^* à ce temps est $z^* = 1{,}2$, ce qui correspond à $z = 1{,}2\,\mathrm{L}$; ainsi

$$\boxed{\Delta t = 1{,}8\,\tau} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 1{,}2\,\mathrm{L}}$$

◇

7) En admettant que la vitesse limite est proche de la valeur trouvée sur internet, calculer numériquement L et τ puis h et Δt.

Réponse

En supposant v_l connue, on a

$$\tau = \frac{v_l}{g} \quad \text{et} \quad L = v_l\tau \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 25\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}} = 7{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\tau = 7{,}1\times 10^{-1}\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 4{,}9\,\mathrm{m}}$$

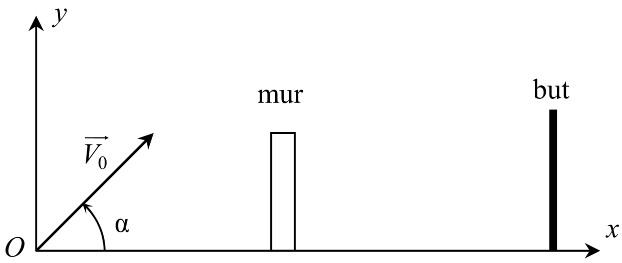
Ainsi,

$$\Delta t = 1{,}8\,\tau \quad \text{et} \quad h = 1{,}2\,\mathrm{L}$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 1{,}3\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 5{,}9\,\mathrm{m}}$$

◇

II Coup franc et frottements fluides



On étudie dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe (O,x,y), un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical (xOy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.

Le ballon, de masse $m = 430\,\mathrm{g}$, est assimilé à un point matériel M initialement au sol en O. Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 de norme $20\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

a – Établir les équations horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

Réponse

- ◇ **Système** : {ballon}
- ◇ **Référentiel** : terrestre galiléen
- ◇ **Repère** : cartésien $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$, $\overrightarrow{u_y}$ vertical ascendant, $\overrightarrow{u_x}$ vers le but
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x} + y(t)\,\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y}$, $\overrightarrow{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\,\overrightarrow{u_y}$
- ◇ **Origine et instant initial** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{0}$
- ◇ **Vitesse initiale** : $\overrightarrow{v}(0) = v_0\cos\alpha\,\overrightarrow{u_x} + v_0\sin\alpha\,\overrightarrow{u_y}$

◇ **BDF** :

$$\textbf{Poids } \overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$$

◇ **PFD** :

$$\cancel{m}\overrightarrow{a} = -\cancel{m}g\,\overrightarrow{u_y} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \tag{2.1}$$

Ainsi,

$$(2.1) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} \boxed{\begin{aligned} x(t) &= v_0 t \cos\alpha \\ y(t) &= -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{aligned}} \end{cases} \tag{2.2}$$

étant donné les conditions initiales. On trouve la trajectoire en isolant $t(x)$ pour avoir $y(x)$:

$$(2.2) \Rightarrow \begin{cases} t(x) = \dfrac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ \boxed{y(x) = -\dfrac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha} \end{cases}$$

◇

b – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

Réponse

Le ballon passe au-dessus du mur si $y(x_{\text{mur}}) \geq h_{\text{mur}}$ avec h_{mur} la hauteur du mur et x_{mur} sa position horizontale. Avec une application numérique, on obtient

$$y(x_{\text{mur}}) = 2{,}17\,\text{m} > h_{\text{mur}} = 1{,}90\,\text{m}$$

donc le ballon passe bien au-dessus du mur.

◇

c – Le tir est-il cadré ?

Réponse

Le tir est cadré si $y(x_{\text{but}}) \leq h_{\text{but}}$. Or,

$$y(x_{\text{but}}) = 1{,}73\,\text{m}$$

donc le tir est bien cadré.

◇

2) Il y a en réalité des frottements, modélisés par une force $\overrightarrow{F_f} = -\alpha\overrightarrow{v}(t)$ avec $\alpha = 5{,}00 \times 10^{-3}\,\text{kg}{\cdot}\text{s}^{-1}$.

a – Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{\alpha}$.

Réponse

Avec le même système, seul le bilan des forces est modifié (et donc le PFD) :

◇ **BDF** :

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y} \\ \textbf{Frottements} & \overrightarrow{F} = -\alpha\overrightarrow{v}(t) = -\alpha\dot{x}\,\overrightarrow{u_x} - \alpha\dot{y}\,\overrightarrow{u_y} \end{array}$$

◇ **PFD** :$m\overrightarrow{a} = -mg\,\overrightarrow{u_y} - \alpha\dot{x}\,\overrightarrow{u_x} - \alpha\dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg - \alpha\dot{y} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \dfrac{\alpha}{m}\dot{y} = -g \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v_x} + \dfrac{v_x}{\tau} = 0 \\ \dot{v_y} + \dfrac{v_y}{\tau} = -g \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ v_y(t) = -g\tau + B\mathrm{e}^{-t/\tau} \end{cases}$$

$$\text{Or,} \quad \begin{cases} v_x(0) = v_0\cos\alpha \\ v_y(0) = v_0\sin\alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A = v_0\cos\alpha \\ B = v_0\sin\alpha + g\tau \end{cases}$$

$$\text{donc} \quad \begin{cases} v_x(t) = v_0\cos\alpha\mathrm{e}^{-t/\tau} \\ v_y(t) = (v_0\sin\alpha + g\tau)\,\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = -v_0\tau\cos\alpha\mathrm{e}^{-t/\tau} + C \\ y(t) = -\left(v_0\tau\sin\alpha + g\tau^2\right)\mathrm{e}^{-t/\tau} - g\tau t + D \end{cases}$$

$$\text{or} \quad \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} C = v_0\tau\cos\alpha \\ D = +\left(v_0\tau\sin\alpha + g\tau^2\right) \end{cases}$$

Finalement,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0\tau\cos\alpha\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) & (2.3) \\ y(t) = \left(v_0\tau\sin\alpha + g\tau^2\right)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right) - g\tau t & (2.4) \end{cases}}$$

◇

b – Donner l'équation de la trajectoire.

Réponse

On isole $t(x)$ de (2.3) pour l'injecter dans (2.4) :

$$\boxed{\begin{cases} t(x) = -\tau\ln\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau\cos\alpha}\right) \\ y(x) = \left(\tan\alpha + \dfrac{g\tau}{v_0\cos\alpha}\right)x + g\tau^2\ln\left(1 - \dfrac{x}{v_0\tau\cos\alpha}\right) \end{cases}}$$

◇

c – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

Réponse

On calcule :

$$y(x_{\text{mur}}) = 2{,}16\,\text{m}$$

donc le ballon passe au-dessus du mur.

◇

d – Le tir est-il cadré ?

Réponse

On calcule :

$$y(x_{\text{but}}) \approx 1{,}68\,\text{m}$$

donc le tir est bien cadré. On constate que les frottements n'ont eu que peu d'influence sur ce mouvement ; il n'est en effet pas très rapide, donc la force de frottements est restée assez faible.

◇

III Étude d'une skieuse

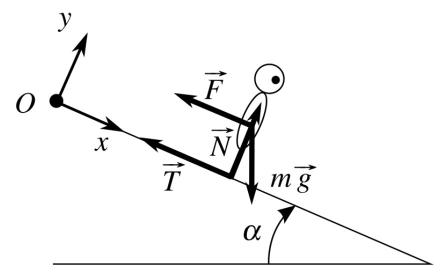
On étudie le mouvement d'une skieuse descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottements supposée de la forme $\vec{F} = -\lambda\vec{v}$ avec λ un coefficient positif et $\vec{v}$ le vecteur vitesse du skieur.

On note $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottements exercée par la neige, et f le coefficient de frottements solides tel que $\|\overrightarrow{T}\| = f\|\overrightarrow{N}\|$.

On choisit comme origine de l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la ligne le plus grande pente la position initiale de la skieuse, supposée partir à l'instant initiale avec une vitesse négligeable. On note $(\mathrm{O}y)$ l'axe normal à la piste en O et dirigée vers le haut.

1) Calculer $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.

Réponse



◇ **Système** : {skieuse} assimilée à son centre de gravité

◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

◇ **Repère** : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$ (voir schéma)

◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\overrightarrow{v} = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\overrightarrow{a} = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$.

◇ **Origine et instant initial** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{0}$

◇ **Vitesse initiale** : $\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0}$

◇ **BDF** :

Poids	$m\overrightarrow{g} = mg(\sin\alpha\,\overrightarrow{u_x} - \cos\alpha\,\overrightarrow{u_y})$
Réaction normale	$\overrightarrow{N} = N\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction tangentielle	$\overrightarrow{T} = -T\,\overrightarrow{u_x} = -fN\,\overrightarrow{u_x}$
Frottements	$\overrightarrow{F} = -\lambda\overrightarrow{v} = -\lambda\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$

Comme la skieuse glisse sur la piste, avec les lois du frottement de COULOMB, on a

$$T = fN$$

◇ **PFD** :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} + \overrightarrow{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mg\sin\alpha - fN - \lambda\dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg\cos\alpha + N \end{cases}$$

Ainsi, comme il n'y a pas de mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$, $\ddot{y} = 0$ et

$$\boxed{N = mg\cos\alpha} \Rightarrow \boxed{T = fN = fmg\cos\alpha}$$

◇

2) Calculer la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et la position $x(t)$ de la skieuse à chaque instant t.

Réponse

On réutilise la première équation en y injectant l'expression de T pour avoir :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Avec $\overrightarrow{v} = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$, on obtient une équation différentielle sur $v(t)$ que l'on résout en posant $\tau = m/\lambda$ avec la solution homogène $A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ et la solution particulière v_p :

$$\dot{v}(t) + \frac{v}{\tau} = g(\sin\alpha - f\cos\alpha) \Rightarrow v = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + v_p$$

et on trouve v_p directement en remarquant que, par construction, $\dot{v}_p = 0$ donc $v_p = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)$. En combinant on peut utiliser la condition initiale sur la vitesse :

$$v(t) = A\mathrm{e}^{-t/\tau} + g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)$$

Or,

$$\left.\begin{aligned} & v(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = A + g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha) \\ \Leftrightarrow\ & A = -g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{v(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)}$$

On trouve la position $x(t)$ en intégrant $v(t)$:

$$x(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(t + \tau\mathrm{e}^{-t/\tau}\right) + B$$

Or,

$$\left.\begin{aligned} & x(0) = 0 \\ \Leftrightarrow\ & 0 = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,(0 + \tau) + B \\ \Leftrightarrow\ & B = -g\tau^2(\sin\alpha - f\cos\alpha) \end{aligned}\right\} \quad \Rightarrow \quad \boxed{x(t) = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\left(t + \tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\right)}$$

◇

3) Montrer que la skieuse atteint une vitesse limite $\overrightarrow{v}_l$ et exprimer $\overrightarrow{v}(t)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ en fonction de $\overrightarrow{v}_l$.

Réponse

La vitesse limite est la solution particulière v_p :

$$\boxed{\overrightarrow{v}_l = g\tau(\sin\alpha - f\cos\alpha)\,\overrightarrow{u_x}}$$

En effet, la présence de la force de frottements fluides dont la norme augmente avec la vitesse fait que la vitesse ne peut pas augmenter indéfiniment. La skieuse atteint une vitesse limite lorsque les frottement compensent la force motrice du mouvement. Ainsi,

$$\boxed{\overrightarrow{v}(t) = v_l\left(1 - \mathrm{e}^{-t/\tau}\right)\,\overrightarrow{u_x}} \quad \text{et} \quad \boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = v_l\left(t + \tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)\right)\,\overrightarrow{u_x}}$$

◇

4) Calculer $v_l = \|\overrightarrow{v}_l\|$ pour $\lambda = 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, $f = 0{,}9$, $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $m = 65\,\mathrm{kg}$ et $\alpha = 45°$.

Réponse

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\lambda}(\sin\alpha - f\cos\alpha)} \quad \text{avec} \quad \left\{\begin{aligned} m &= 65\,\mathrm{kg} \\ g &= 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ \lambda &= 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}} \\ \alpha &= 45° \\ f &= 0{,}9 \end{aligned}\right.$$

$$\text{A.N.} \ : \ \boxed{v_l = 46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

On remarque que la vitesse limite est une fonction affine du poids. Ainsi, le manque de représentation des femmes dans les sports d'hiver, souvent justifié par une moins bonne performance pure, est biaisé par la répartition moyenne de leurs tailles (et donc de leurs poids) plus faible que la répartition moyenne des tailles (et donc poids) des hommes, rendant pour certains leurs records moins impressionnants.

◇

5) Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où la skieuse a une vitesse égale à $v_l/2$.

Réponse

$$\begin{aligned}
v(t_1) &= \frac{v_l}{2} \\
\Leftrightarrow \frac{\cancel{v_l}}{2} &= \cancel{v_l}(1 - \mathrm{e}^{-t_l/\tau}) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 1 - \mathrm{e}^{-t_1/\tau} \\
\Leftrightarrow \mathrm{e}^{-t_1/\tau} &= \frac{1}{2} \\
\Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln 2} \quad &\text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m = 65\,\mathrm{kg} \\ \lambda = 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}} \end{cases} \\
\text{A.N. :} \ &\boxed{t_1 = 45\,\mathrm{s}}
\end{aligned}$$

◇

6) À la date t_1, la skieuse chute. On néglige alors la résistance de l'air et on considère que le coefficient de frottements sur le sol est multiplié par 10. Calculer la distance parcourue par la skieuse avant qu'elle ne s'arrête.

Réponse

En tombant à $t = t_1$, la skieuse a pour vitesse $v_l/2$. L'équation du mouvement sur $\overrightarrow{u_y}$ ne change pas de forme, mais on multiplie f par 10, donc $T = 10fmg$. Ainsi, en posant $t' = t - t_1$, en projection sur $\overrightarrow{u_x}$ et en négligeant λ,

$$\ddot{x}(t') = g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) \Rightarrow \dot{x}(t') = gt'(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) + v_l/2$$

On trouve le temps d'arrêt t'_a quand $\dot{x}(t'_a) = 0$, soit

$$t'_a = \frac{-v_l}{2g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha)}$$

et la distance d'arrêt depuis le point de chute en intégrant $\dot{x}(t')$ puis en prenant $x(t'_a)$:

$$\begin{aligned}
x(t') &= \frac{1}{2}gt'^2(\sin\alpha - 10f\cos\alpha) + \frac{v_l t'}{2} \\
\Leftrightarrow &\boxed{x(t'_a) = -\frac{{v_l}^2}{8g(\sin\alpha - 10f\cos\alpha)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 46\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ \alpha = 45° \\ f = 0{,}9 \end{cases} \\
\text{A.N. :} \ &\boxed{x(t'_a) = 4{,}7\,\mathrm{m}}
\end{aligned}$$

◇