# Correction du TP

# I Analyser

## I/A À excitation nulle

/5 (1) ◇ **Système** : {masse} assimilée à un point matériel M de masse $m$.

◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen.

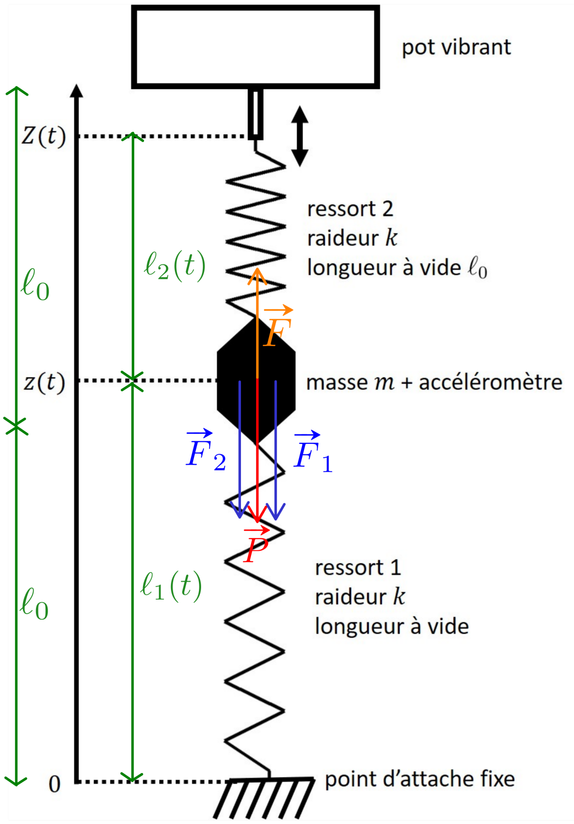
◇ **Repère** : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_z})$ vertical ascendant.

◇ **Repérage** :

$$\begin{cases} \overrightarrow{\mathrm{OM}} = z(t)\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{v} = \dot{z}(t)\,\overrightarrow{u_z} \\ \overrightarrow{a} = \ddot{z}(t)\,\overrightarrow{u_z} \end{cases}$$

De plus, à excitation nulle on trouve

$$\ell_1(t) = z(t) \quad \text{et} \quad \ell_2(t) = Z(t) - z(t) = h - z(t)$$




◇ **BdF** :

▷ $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$

▷ $\overrightarrow{F}_{r,1} = -k\,(\ell_1(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z} = -k\,(z(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z}$

▷ $\overrightarrow{F}_{r,2} = +k\,(\ell_2(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z} = +k\,(h - z(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_z}$

▷ $\overrightarrow{F} = -\alpha\,\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{z}(t)\,\overrightarrow{u_z}$

◇ **PFD** : à l'équilibre,

$$\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0} = \sum_i \overrightarrow{F}_i$$

On projette

$$\Leftrightarrow 0 = -mg - k\,(z_{\mathrm{eq}} - \cancel{\ell_0}) + k\,(h - z_{\mathrm{eq}} - \cancel{\ell_0}) \underbrace{-\alpha\dot{z}_{\mathrm{eq}}}_{=0}$$

On isole

$$\Leftrightarrow 2kz_{\mathrm{eq}} = kh - mg$$

$$\Leftrightarrow \boxed{z_{\mathrm{eq}} = \frac{h}{2} - \frac{mg}{2k}}$$

■

/3 (2) On reprend le PFD précédent mais $\forall t$, en remarquant que $\ddot{\ell} = \ddot{z}$ et $\dot{\ell} = \dot{z}$ :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \sum_i \vec{F}_i \\ \Leftrightarrow m\ddot{z}(t) &= -mg - k\left(z(t) - \cancel{\ell_0}\right) + k\left(h - z(t) - \cancel{\ell_0}\right) - \alpha\dot{z}(t) \\ \Leftrightarrow \ddot{z}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) + \underbrace{\frac{2k}{m}}_{={\omega_0}^2} z(t) &= \underbrace{-g + \frac{k}{m}h}_{={\omega_0}^2 z_{\text{eq}}} \\ \Leftrightarrow \ddot{z}(t) + \frac{\alpha}{m}\dot{z}(t) + {\omega_0}^2\left(z(t) - z_{\text{eq}}\right) &= 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\ell} + \frac{\omega_0}{Q} + {\omega_0}^2\ell = 0} \end{aligned}$$

$\blacksquare$

On trouve ainsi $\omega_0$ la pulsation propre et $Q$ le facteur de qualité tels que :

$${\omega_0}^2 = \frac{2k}{m} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{2k}{m}}} \quad [\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}] \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\sqrt{2km}}{\alpha}} \quad \text{sans unité}$$

/1 (3) Par identification avec le résultat pour un unique ressort, on trouve

$$\boxed{k' = 2k} \quad \text{et} \quad \boxed{\ell_0' = \frac{h}{2}}$$

## I/B En régime sinusoïdal forcé

/2 (4) On trouve les courbes suivantes pour la tension/élongation et l'intensité/vitesse (par analogie au RLC série) :

**Élongation**

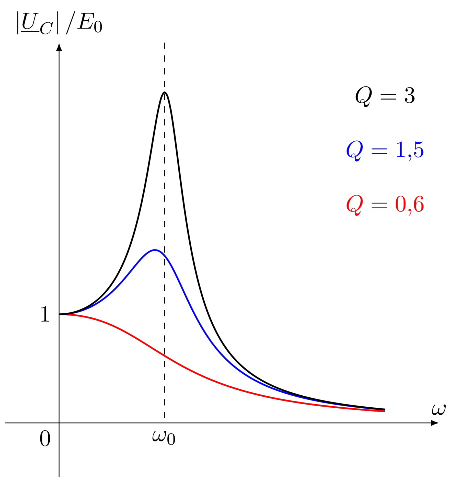



**Figure 20.1** – Résonance en élongation
Filtre passe-bas

**Vitesse**

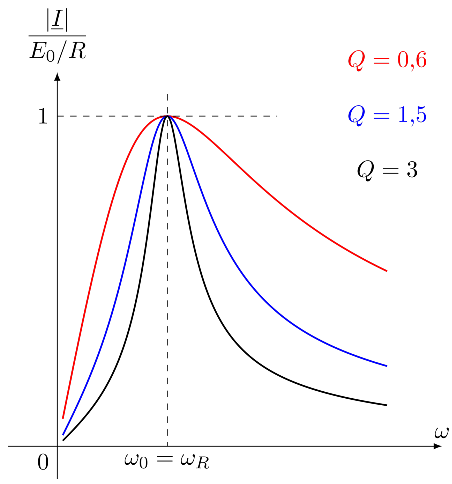



**Figure 20.2** – Résonance en vitesse
Filtre passe-bande

/1 (5) En RSF, on aura $\ell(t) = L\cos(\omega t + \varphi)$, d'où

$$v_z(t) = -L\omega\sin(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{V = L\omega}$$
$$a_z(t) = -L\omega^2\cos(\omega t + \varphi) \Rightarrow \boxed{A = L\omega^2}$$

/1 (6) C'est l'acuité de la résonance :

$$\boxed{\Delta\omega = \frac{\omega_0}{Q}} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{\omega_0}{\Delta\omega}}$$

# IV Valider et conclure

## IV/A Traitement des données

/1 [1] Voir solution à https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/0c79-2069265.

Elles ont en effet l'allure attendue : l'élongation est non-nulle pour $\omega \to 0$ alors que la vitesse tend vers 0, elles passent par un maximum à la pulsation estimée à l'œil et tendent vers 0 pour $\omega \to \infty$.

Théoriquement, les résonances ne se font pas à la même pulsation : $\omega_r$ pour l'élongation est **plus faible** que $\omega_0$ la pulsation de résonance pour la vitesse. Ici, on ne perçoit pas de différence notable. On peut déjà en conclure que le facteur de qualité est relativement élevé.

/.5 [2] On pointe le maximum des lissages et on trouve $\omega_0 \approx 45\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

/.5 [3] On trouve les valeurs pour lesquelles $V(\omega_c) = \frac{V_{\max}}{\sqrt{2}}$, et on trouve

$$\Delta\omega_0 \approx 5\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \quad \Rightarrow \quad \boxed{Q \approx 9}$$

/1 [4] On tombe sur un résultat cohérent avec nos observations :

- Le facteur de qualité est supérieur à $1/\sqrt{2}$ puisqu'il y a résonance ;
- Le facteur de qualité est élevé puisque l'élongation maximale à la résonance est bien plus grande que l'excitation du pot vibrant, qui ne bouge que de quelques millimètres ;
- Le facteur de qualité est de l'ordre de la dizaine puisqu'en éteignant le pot vibrant en pleine résonance, on obtient une dizaine d'oscillations pendant l'amortissement.

## IV/B Ajustement des données

/2 [5] Les résultats sont proches, mais le passage par la minimisation donne de meilleurs résultats, notamment pour les parties de hautes variations où il peut manquer des points de mesure. Souvent, on obtient un facteur de qualité plus grand avec l'ajustement que le lissage si on manque de points autour de la résonance.

Ajuster un modèle à des données permet de sonder la vraisemblance des mesures et une comparaison fidèle et honnête avec les incertitudes, tout en permettant des calculs de paramètres automatiques et bien plus précis. On pose le cadre mathématique et physique du réel dans le calcul informatique. Notamment, ici on peut tracer l'ajustement pour des valeurs de $\omega$ en-dehors des données testées (voir correction : tracé avec `wfit` allant jusqu'à 0).

En revanche, il faut avoir une formule analytique pour cette approche (d'autres méthodes récentes dépassent ce problème avec le *machine learning*, mais le résultat est alors souvent une boîte noire), et notamment décider du nombre de paramètres libres (théorie incomplète, frottements quadratiques et non linéaires...) et éviter l'*overfitting*[1].

En général, pour une expérience dont la théorie est connue et maîtrisée comme c'est le cas ici, **l'ajustement est toujours meilleur**. On préfèrera un lissage lorsque le jeu de donnée de résulte pas de mécanismes descriptibles analytiquement (en sociologie statistique notamment, selon les études).

1. « Surapprentissage » en français. Voir ce lien : https://www.jedha.co/formation-ia/overfitting

## IV/C Comparaison à la théorie

$\boxed{6}$ Le plus simple :

- Mesurer $\ell_0$ la longueur à vide d'un ressort **à l'horizontale** ;
- L'accrocher verticalement à un support ;
- Prendre une masse connue et l'accrocher à la partie basse dudit ressort ;
- Attendre l'équilibre si nécessaire, puis mesurer la longueur à l'équilibre. On obtient $k$ avec la relation $\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k} \Leftrightarrow k = \frac{mg}{\ell_{\text{eq}} - \ell_0}$.

On pourrait aussi utiliser les résultats obtenus en faisant osciller une masse en mesurant la période de l'élongation, mais cela dépendra de la valeur de $\alpha$ ou de $Q$ ($T_{\text{amorti}} > T_0$ à cause des frottements). On préfèrera donc un protocole indépendant, i.e. le premier.

$\boxed{7}$ Non corrigé.