

Cristallographie et induction – corrigé

E1 Oxyde de zirconium solide

/32

/1 [1] Le modèle des sphères dures consiste à considérer les entités monoatomiques (atomes ou ions) comme des sphères impénétrables et indéformables.

/3 [2] On a 8 atomes aux sommets, et 6 atomes au centre des faces (voir Figure 10.1). Les premiers sont partagés entre huit mailles, les seconds entre 2 mailles, d'où

$$N = 6 \times \frac{1}{2} + 8 \times \frac{1}{8} \Leftrightarrow \boxed{N = 4} \text{ cations par maille}$$

/2 [3] La compacité est le rapport du volume occupé par les entités sur le volume d'une maille. Pour une CFC, elle est de **74%**. C'est la compacité maximale pour une structure de sphères dures identiques. Il reste donc **26% de vide** qui peut être occupé par d'autres entités plus petites.

/3 [4] Dans la CFC, les sites tétraédriques (sites T) sont **au centre des huit cubes d'arête $a/2$** . Il y en a donc **8 par maille** (voir Figure 10.2).

/4 [5] À la limite où l'anion occupe le site T sans déformer la structure de cations, le contact anion-cation se fait sur la grande diagonale du petit cube d'arête $a/2$ (voir Figure 10.3), soit

$$r_+ + r_- \leq \frac{1}{2} \times \frac{a\sqrt{3}}{2} \Leftrightarrow \boxed{r_- \leq \frac{a\sqrt{3}}{4} - r_+}$$

/1 [6] Les sites T appartiennent en propre à la maille, il y a donc autant d'anions que de site, c'est-à-dire **8 anions par maille**.

/2 [7] Il y a donc deux fois plus d'anions O^{2-} que de cations Zr^{4+} . La formule avec les plus petits entiers naturels est donc ZrO_2 .

/2 [8] La coordinence d'une entité est son nombre de plus proches voisins (PPV). Ici, un anion est dans un site T, donc entouré de 4 cations PPV, donc la coordinence des **anions par rapport aux cations est de 4**. Un cation au centre d'une face, lui, est entouré de 8 petits cubes d'arête $a/2$, au centre desquels se trouvent les anions : la coordinence des **cations par rapport aux anions est de 8**.

/3 [9] La masse volumique est le rapport de la masse des entités *en propre* sur le volume de la maille. Ainsi,

$$\rho = \frac{N_{Zr}m_{Zr} + N_Om_O}{a^3} \Leftrightarrow \boxed{\rho = \frac{4M_{Zr} + 8M_O}{N_A a^3}}$$

/2 [10] L'oxygène se trouve toujours sous la forme d'anions O^{2-} . Par neutralité de la structure, on a donc

$$2z + 3 \times (-2) = 0 \Leftrightarrow z = 3$$

d'où la notation Y^{3+} .

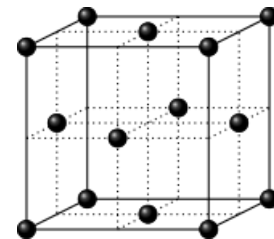


FIGURE 10.1 – Maille d'une CFC.

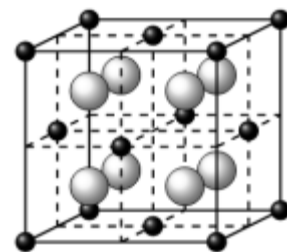


FIGURE 10.2 – Sites T de la structure CFC.

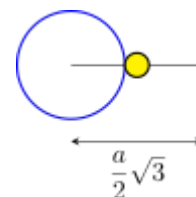


FIGURE 10.3 – Habitabilité d'un site T d'une CFC.

- /1 [11] Si la substitution se fait le plus simplement possible, un cation Zr^{4+} est remplacé par un cation Y^{3+} : tout se passe donc comme si le cristal avait perdu une charge +, et donc qu'il s'est chargé négativement.
- /3 [12] En fonction de x et y , la formule chimique de la structure s'écrit $\text{Zr}_{1-x}\text{Y}_x\text{O}_y$. La neutralité impose

$$4(1-x) + 3x - 2y = 0 \Leftrightarrow y = 2 - \frac{x}{2}$$

Ainsi, au cours du processus de substitution, certains sites tétraédriques de l'alliage se vident de leurs ions O^{2-} pour préserver la neutralité de la structure. On vérifie par ailleurs qu'avec $x = 0$, c'est-à-dire sans dopage, on retrouve bien $y = 2$.

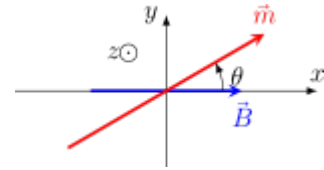
E2 Questions de cours

/36

A Couple sur un aimant

/10

- /2 [1] Voir Figure 10.4. On étudie l'aimant, caractérisé par un moment \vec{m} uniquement, dans un champ magnétique uniforme et stationnaire \vec{B} dans le plan de l'aimant. On utilise le référentiel du laboratoire supposé galiléen, avec une base cartésienne $(\vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$ orthonormée directe. On appelle θ l'angle orienté de \vec{B} à \vec{m} , compté positivement dans le sens direct.

FIGURE 10.4 – Aimant dans \vec{B} .

- /2 [2] On a $\vec{m} = m(\cos \theta \vec{u}_x + \sin \theta \vec{u}_y)$ et $\vec{B} = B_0 \vec{u}_x$

D'où

$$\vec{\mathcal{M}}_z = -mB_0 \sin \theta \vec{u}_z$$

Ce qui fait tourner le système autour de l'axe z .

- /2 [3] On est à l'équilibre si la somme des forces et la somme des moments sont nulles. Avec uniquement le couple magnétique, on a bien une résultante nulle : on a donc équilibre si $\vec{\mathcal{M}}_z = \vec{0}$, soit

$$\sin \theta_{\text{eq}} = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \theta_{\text{eq}} = 0 \quad \text{ou} \quad \theta_{\text{eq}} = \pi$$

- /2 [4] – En $\theta_{\text{eq}} = \pi$, une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens horaire, qui écarte donc l'aimant de sa position d'équilibre : il est **instable**.
- À l'inverse, en $\theta_{\text{eq}} = 0$, une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens direct, le ramenant à sa position d'équilibre : il est **stable**.

B Modération de LENZ

/7

- /1 [1] L'induction modère, par ses conséquences, les causes qui lui a donné naissance.
- /6 [2] Les lignes de champ vont du Nord vers le Sud. On doit déterminer le sens de variation du champ vu par la spire : le champ induit atténue cette variation. On en déduit le signe réel de i par la règle de la main droite.

- A) \vec{B}_{aimant} augmente vers la gauche : \vec{B}_{induit} est vers la droite, donc issu de $i_{\text{ind}} > 0$.

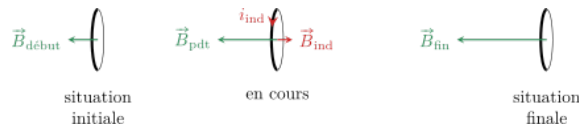


FIGURE 10.5 – Situation 1.

- B) Même situation physique, convention opposée : $i_{\text{ind}} < 0$.
- C) Cette fois \vec{B}_{aimant} augmente vers la droite : \vec{B}_{ind} est vers la gauche. Sens réel du courant opposé : $i_{\text{ind}} < 0$.

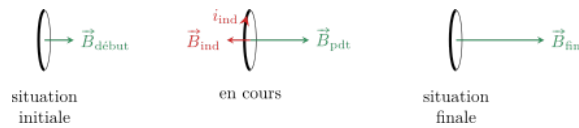


FIGURE 10.6 – Situation 3.

- D) Pareil qu'à la question 2 : $i_{\text{ind}} < 0$.
- E) Pas de mouvement relatif donc pas de variation de champ donc pas d'induction : $i_{\text{ind}} = 0$.
- F) Mouvement relatif amplifié. Ici, le champ **diminue** vers la gauche, donc le champ induit le **renforce** ; ainsi $i_{\text{ind}} < 0$.

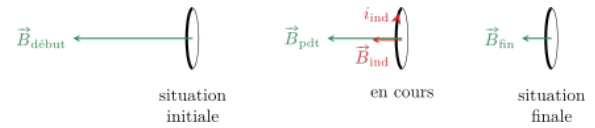


FIGURE 10.7 – Situation 6.

C Loi de FARADAY

/11

- /4 [1] Le champ magnétique est variable, et la surface $S = a^2$ est fixe. Ainsi, le flux est variable. D'après la loi de FARADAY, une f.é.m. induite va apparaître dans le circuit : il y a donc un phénomène d'induction.
- /4 [2] On a alors :

$$\begin{aligned} \phi_S(\vec{B}) &= -Ba^2 \\ &= -B_0 a^2 e^{-t/\tau} \end{aligned} \quad \text{soit} \quad \begin{aligned} e_{\text{ind}} &= -\frac{d\phi}{dt} \\ \Leftrightarrow e_{\text{ind}} &= -\frac{B_0 a^2}{\tau} e^{-t/\tau} < 0 \end{aligned}$$

Or, comme le circuit est fermé, **et que e est en convention générateur**,

$$\begin{aligned} e_{\text{ind}} &= Ri_{\text{ind}} \\ \Leftrightarrow i_{\text{ind}} &= -\frac{B_0 a^2}{T\tau} e^{-t/\tau} < 0 \end{aligned}$$

donc l'intensité est **négative**.

- /1 [3] En effet, le champ magnétique induit réel doit s'opposer à la diminution du champ extérieur \vec{B} , en créant un champ magnétique positif selon \vec{u}_z : le sens réel du courant donné par la main droite est l'opposé de celui représenté.
- /2 [4] On peut faire varier la surface. Les rails de LAPLACE générateurs sont un exemple. L'expérience de TP avec le galvanomètre en est un autre.

D Inductance propre

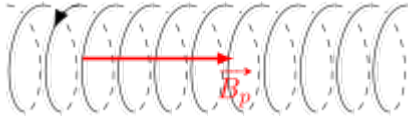
/8

- /1 [1] Le flux propre, noté ϕ_P d'un circuit est le flux de son propre champ magnétique à travers sa surface.
- /1 [2] L'auto-inductance est le facteur de proportionnalité entre le flux propre et le courant à l'origine de son champ propre :

$$\phi_P(t) = Li(t)$$

/6 3

Le champ propre dans un solénoïde est



$$\vec{B}_p(t) = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{u}_z$$

 i et \vec{B}_p respectent la règle de la main droite.**FIGURE 10.8** – Champ propre d'un solénoïde.Pour N spires :

$$\phi_p = N \times \vec{B}_p \cdot \vec{S}$$

Or, \vec{B}_p et \vec{S} sont tous deux orientés à partir de i selon la règle de la main droite, donc

$$\vec{S} = S \vec{u}_z \quad \text{et} \quad \vec{B}_p = \mu_0 \frac{N}{\ell} i(t) \vec{u}_z$$

$$\Leftrightarrow \phi_p = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S i(t)$$

On a démontré que le flux magnétique propre et l'intensité étaient proportionnels, et que la constante de proportionnalité était positive. On identifie simplement :

$$L = \mu_0 \frac{N^2}{\ell} S$$

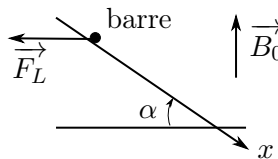
D'où par application numérique

$$L \approx 35 \text{ mH}$$

E3 | Rails de LAPLACE inclinés

/17

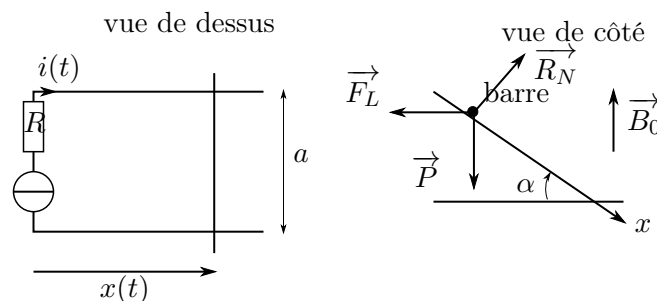
- /4 1 Par définition, $d\vec{F}_L = i d\vec{\ell} \wedge \vec{B}_0$. Cette force est orthogonale à la barre et à \vec{B}_0 . Elle est donc horizontale, orientée vers la gauche : **réponse C)**



- /3 2 Par définition de la puissance d'une force $\mathcal{P}_L = \vec{F}_L \cdot \vec{v}$. Or $\vec{v} = \dot{x} \vec{e}_x$.

Donc $\mathcal{P}_L = (\vec{F}_L \cdot \vec{e}_x) \dot{x}$, avec $\vec{F}_L = -i B_0 a \vec{n}$ et \vec{n} le vecteur unitaire associé à l'axe horizontal vers la droite.On en déduit $\mathcal{P}_L = -B_0 i a \cos(\alpha) \dot{x}$: **réponse C)**

- /4 3 On étudie la barre en translation selon \vec{e}_x , dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

La barre est soumise au poids, à la résultante des forces de Laplace et aux 2 réactions au niveau des rails (forces orthogonales à \vec{e}_x en l'absence de frottement de glissement).

On applique le PFD projeté selon \vec{e}_x pour obtenir la **réponse A)** :

$$m\ddot{x} = mg \sin(\alpha) - B_0 i a \cos(\alpha)$$

/6 **4** On utilise l'expression de $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

Par intégration avec la CI $\dot{x}(t=0) = 0$:

$$\dot{x}(t) = g \sin(\alpha) t - \frac{B_0 I_0 a \cos(\alpha)}{m\omega} \sin(\omega t)$$

On intègre encore une fois avec la CI $x(t=0) = x_0$ pour obtenir la **réponse D)** :

$$x(t) = \frac{g \sin(\alpha)}{2} t^2 + \frac{B_0 I_0 a \cos(\alpha)}{m\omega^2} (\cos(\omega t) - 1) + x_0$$