/23 E1 Oscillations d'un métronome

On étudie un métronome constitué :

- ◇ d'une tige rigide de longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$ de masse négligeable en rotation d'angle θ autour de l'axe Oz ;
- ◇ d'un disque homogène de centre C, tel que OC $= \ell = 2\,\mathrm{cm}$, de rayon $R = 1{,}5\,\mathrm{cm}$ et de masse $M = 200\,\mathrm{g}$;
- ◇ d'un curseur (dimensions négligeables) et de masse $m = 20\,\mathrm{g}$ et pouvant être déplacé sur la tige selon le rythme souhaité. On appelle x la distance du curseur à O, cette distance ne pouvant dépasser 15 cm.

La tige est tenue en O par une liaison pivot supposée parfaite. On associe au bâti fixe le repère orthonormé $(O,\ \overrightarrow{u_x},\ \overrightarrow{u_y},\ \overrightarrow{u_z})$. On donne le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation Oz, orienté selon le vecteur $\overrightarrow{u_z}$:

$$J = mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + M\ell^2$$

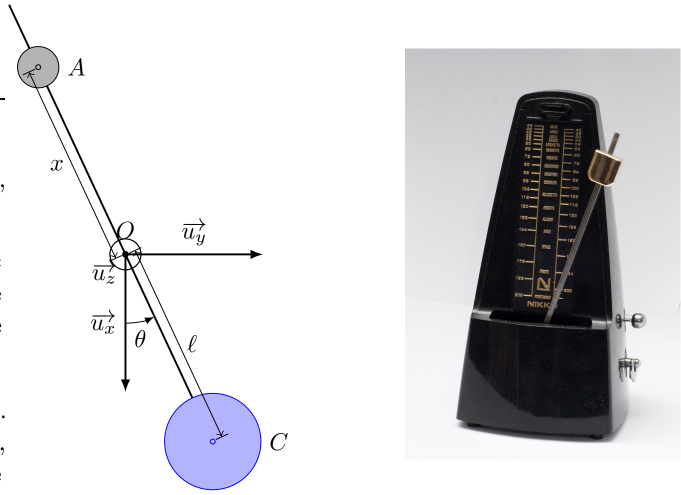

Figure 1 – Schéma du métronome à gauche et photo d'un métronome (d'après wikipedia). Sur la photo, le contrepoids (disque homogène) n'est pas visible, seuls la tige et le curseur le sont.

/2 [1] Commenter et justifier l'influence de x sur la valeur de J.

Réponse

Plus x augmente et plus J augmente (1), ce qui est normal puisque le moment d'inertie est d'autant plus grand que la masse est répartie loin de l'axe. (1)

◇

/8 [2] Établir le système, faire un schéma puis le bilan des forces agissant sur le système et déterminer leurs moments par rapport à l'axe Oz par l'utilisation du **bras de levier**. Donnez l'expression du moment cinétique du système en fonction des données du problème.

Réponse

- ◇ **Système** : {métronome} = {disque+tige+curseur} de moment d'inertie J_z ;
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen ; (1)
- ◇ **Repère** : cylindrique (O, $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_z}$) ;
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OC}} = \ell\,\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{\mathrm{OA}} = -x\,\overrightarrow{u_r}$. (1)

Les actions qui s'exercent sur le métronome sont :

- ◇ poids du disque $\vec{P}_\mathrm{C} = M\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_\mathrm{C}) = -Mg\ell\sin\theta$; (1)
- ◇ poids du curseur $\vec{P}_\mathrm{A} = m\vec{g}$ dont le moment est $\mathcal{M}_z(\vec{P}_\mathrm{A}) = +mgx\sin\theta$; (1)
- ◇ liaison pivot parfaite dont le moment par rapport à l'axe Oz est nul. (1)
- ◇ De plus, $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = J\dot{\theta}$. (1)

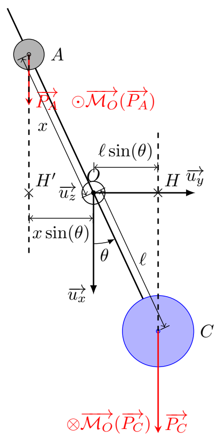

Figure 2 – Schéma (2)

◇

/2 [3] Déterminer l'équation différentielle du mouvement vérifiée par l'angle θ.

Réponse

On applique la loi du moment cinétique dans le référentiel galiléen du laboratoire :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} \mathcal{M}_z(\vec{F}_\mathrm{ext}) \Leftrightarrow J\ddot{\theta} = mgx\sin\theta - Mg\ell\sin\theta \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ddot{\theta} + \frac{Mgl - mgx}{J}\sin\theta \overset{(1)}{=} 0}$$

◇

/4 [4] Dans l'hypothèse des petites oscillations, donner l'équation différentielle puis l'expression de la période propre T_0 des oscillations en fonction de m, M, ℓ, R, x et g

Réponse

Si les oscillations sont petites, alors $\sin\theta \approx \theta$, donc on retrouve l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{Mg\ell - mgx}{J}tp = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2 tp \overset{1}{=} 0}$$

$$\Rightarrow \omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{Mgl - mgx}{J}} \Leftrightarrow T_0 \overset{1}{=} 2\pi\sqrt{\frac{J}{Mgl - mgx}} \Leftrightarrow \boxed{T_0 \overset{1}{=} 2\pi\sqrt{\frac{mx^2 + \frac{2}{5}MR^2 + Ml^2}{Mgl - mgx}}}$$

/2 5 Dans une partition musicale le rythme est donné en battements par minute, c'est à dire le nombre de demis aller-retour du métronome. On a ainsi le mouvement *andante* de 100 battements par minute. À quelle période du métronome correspondent ce mouvement ? Déterminer alors la distance x du curseur correspondant à ce *tempo*.

Réponse

Cela correspond à 50 périodes par minute 1, donc

$$\boxed{T_0 = \frac{60\,\mathrm{s{\cdot}min^{-1}}}{50\,\text{périodes}{\cdot}\mathrm{min^{-1}}} = 1{,}2\,\text{spériode}^{-1} \; 1}$$

Ainsi

6 Dans quel sens faut-il modifier x pour augmenter le nombre de battements par minute pour un mouvement *allegro* de 140 battements par minutes ? Calculer la distance correspondante.

Réponse

Pour augmenter la fréquence, il faut diminuer T_0, donc diminuer son numérateur et augmenter son dénominateur, ce qui revient dans les 2 cas à diminuer x. On trouve