ON2 - Interférences entre deux ondes de même fréquence

1 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

1.1 Définition

Pour deux signaux sinusoïdaux, $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, le **déphasage** du signal s_2 par rapport au signal s_1 est **la différence de leurs phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

Pour 2 signaux de *même fréquence*, le déphasage est simplement la différence des phases à l'origine $\varphi_2 - \varphi_1$.

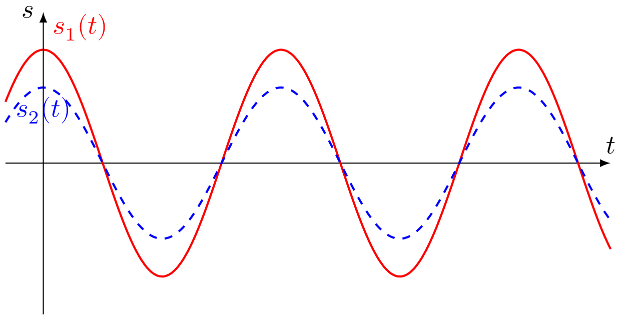
1.2 Valeurs particulières du déphasage

2 Signaux sont en phase si leur déphasage est nul (modulo 2π)

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales au mêmes instants et s'annulent simultanément.

Démonstration : écrire s_2 en fonction de s_1

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .

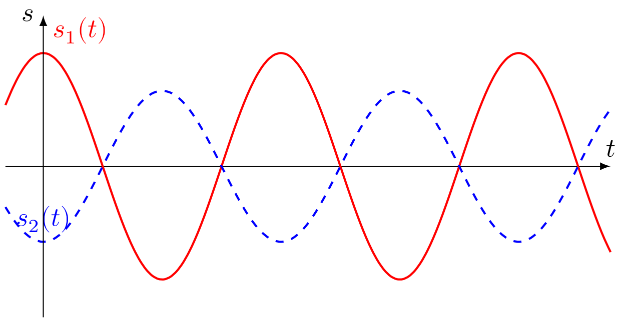


2 Signaux sont en opposition de phase si leur déphasage vaut $\pm\pi$ (modulo 2π)

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximal, l'autre atteint sa valeur minimale.

Démonstration : écrire s_2 en fonction de s_1

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .



1.3 Mesure d'un déphasage

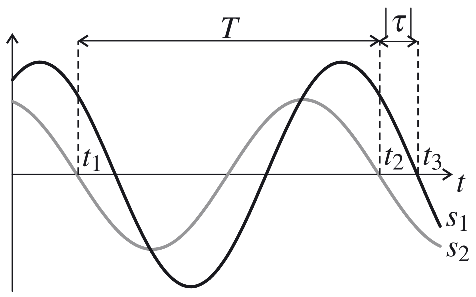
Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$ est lié au *retard temporel* $\tau_{1/2}$ du signal s_1 par rapport à s_2 :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \omega\tau_{1/2}}$$

La valeur du déphasage obtenue par cette méthode est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

- $\Delta\varphi_{2/1} > 0$: s_2 est en avance de phase sur s_1
- $\Delta\varphi_{2/1} < 0$: s_2 est en retard de phase sur s_1

Démonstration : . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .



- t_1 et t_2 : instants consécutifs où s_2 **s'annule avec la même pente**. La période est $T = t_2 - t_1$ puis la pulsation $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(t_2 - t_1)$
- t_3 : instant le plus proche de t_2 où s_1 s'annule **avec la même pente**. Le retard $\tau_{1/2}$ s'exprime $\tau = t_3 - t_2$

$$\Delta\varphi_{2/1} = \omega\tau_{1/2} = 2\pi\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

2 Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

Animation : `https://www.geogebra.org/m/jyh2ZMXJ`

On considère deux signaux sinusoïdaux de même pulsation :

$$s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1) \qquad s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$$

et on cherche à déterminer les caractéristiques du signal «somme» $s = s_1 + s_2$.

2.1 Cas particulier des signaux de même amplitude

On se place dans le cas particulier ou $A_1 = A_2 = A_0$.
Démonstration : grâce à la formule $\cos p + \cos q = 2\cos\frac{p+q}{2}\cos\frac{p-q}{2}$ montrer que :

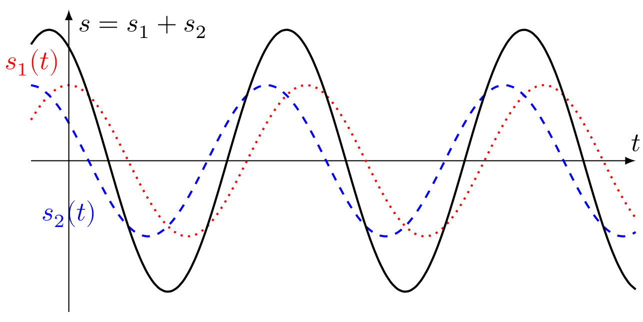
$$s(t) = s_1 + s_2 = A_0\cos(\omega t + \varphi_1) + A_0\cos(\omega t + \varphi_2) = 2A_0\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

avec $\Delta\varphi = \varphi_2 - \varphi_1$ le déphasage entre les deux signaux s_1 et s_2.

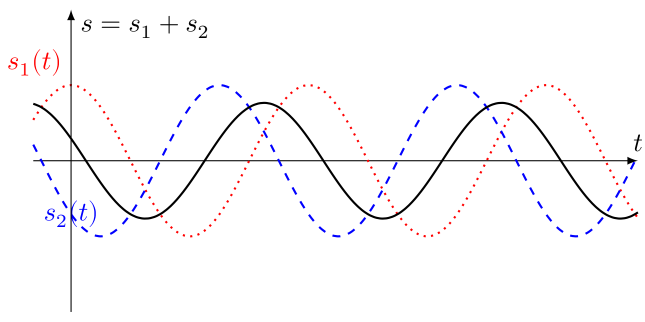
....
....
....
....
....
....

Ainsi, le signal somme de 2 signaux sinusoïdaux de même pulsation ω est :

- sinusoïdal de même pulsation ω que les 2 signaux
- son amplitude $A = 2A_0\cos\left(\frac{\Delta\varphi}{2}\right)$ dépend du déphasage $\Delta\varphi$ entre les deux signaux



Exemple pour un déphasage $\Delta\varphi = \pi/3$ entre s_1 et s_2.



Exemple pour un déphasage $\Delta\varphi = 3\pi/4$ entre s_1 et s_2.

Cas extremes :

- Pour des signaux en phase, l'amplitude du signal somme est maximale

$$\Delta\varphi = 0 \Rightarrow A = 2A_0 = A_{max}$$

- Signaux en opposition de phase, l'amplitude du signal somme est nulle

$$\Delta\varphi = \pm\pi \Rightarrow A = 0$$

2.2 Cas général des signaux d'amplitudes différentes

Par un calcul similaire au précédent (mais plus fastidieux), on montre que

$$s(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2) = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}\cos\left(\omega t + \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right)$$

Démonstration ....
....
....
....
....
....
....
....
....

Ainsi, le signal somme est sinusoïdal de pulsation ω et d'amplitude

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$$

Cas extremes :

- Signaux en phase : $\Delta\varphi = 0 \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2} = A_1 + A_2 = A_{\text{max}}$
- Signaux en opposition de phase $\Delta\varphi = \pm\pi \Rightarrow A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2| = A_{\text{min}}$

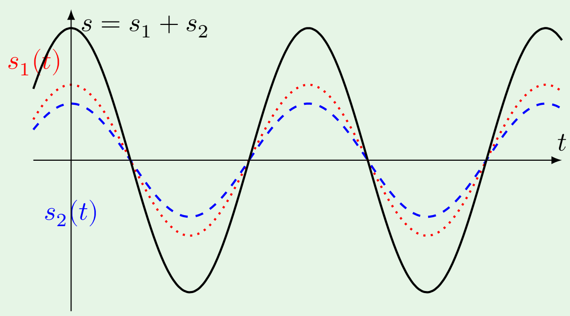
2.3 Bilan

Le signal somme de deux signaux sinusoïdaux, d'amplitudes A_1 et A_2 de même pulsation ω est :

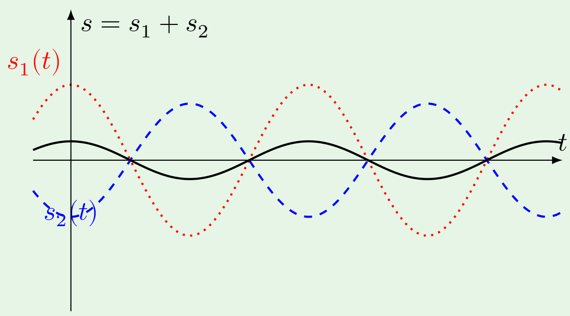
- un signal **sinusoïdal de même pulsation** ω
- *son amplitude A dépend du déphasage $\Delta\varphi$ entre ces 2 signaux*

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}}$$

  - **Amplitude maximale** $A_1 + A_2$ quand les signaux sont **en phase** ($\Delta\varphi = 0 + 2p\pi$)
  - **Amplitude minimale** $|A_1 - A_2|$ quand les signaux sont **en opposition de phase** ($\Delta\varphi = \pi + 2p\pi$)



s_1 et s_2 en phase



s_1 et s_2 en opposition de phase

Exercice : déterminer l'amplitude du signal somme des 2 tensions suivantes :

$$u_1(t) = U_0\cos(\omega t - \pi/2) \qquad u_2(t) = 3U_0\cos(\omega t + \pi/2)$$

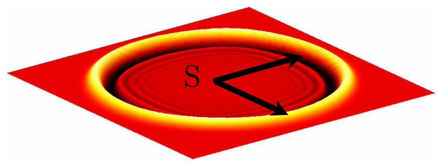
avec $U_0 = 1$ V .

3 Interférences de deux ondes

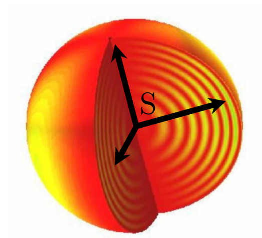
3.1 Ondes émises par une source ponctuelle

Lorsqu'une source *ponctuelle* S émet une onde, celle-ci ne se propage pas que dans une seule direction (Ox), mais bien dans tous l'espace disponible :

- Une onde se propageant *dans un plan à partir de d'une source ponctuelle* S est appelée onde *circulaire*
- Une onde se propageant *dans l'espace à partir de d'une source ponctuelle* S est appelée onde *sphérique*



Onde circulaire



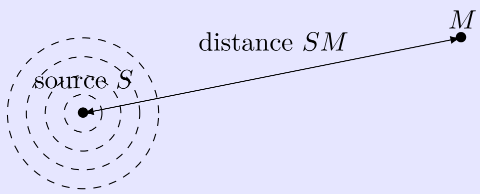
Onde sphérique

Approximation par une onde plane

A des distances de la source S grandes devant la longueur d'onde λ, on peut approximer la vibration $s(M,t)$ en un point M d'une onde circulaire ou sphérique par l'expression

$$s(M,t) = A\cos(\omega t - kSM + \varphi_S)$$

svec l'amplitude A qui reste constante au voisinage de M.



Exercice : Exprimer la phase à l'origine $t = 0$ de la vibration $s(M,t) = A\cos(\omega t - kSM + \varphi_S)$

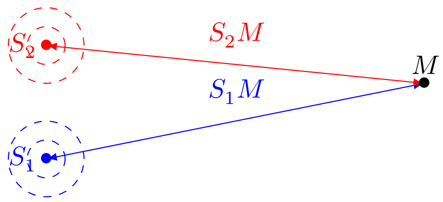
3.2 Interférences constructives et destructives

Annimations :

- `https://www.geogebra.org/m/fJXvq9kz`
- `https://phet.colorado.edu/sims/html/wave-interference/latest/wave-interference_fr.html`

Rappel (principe de superposition) : Dans un milieu linéaire, lorsque deux ondes de même nature parviennent en un point M, leurs **vibrations s'additionnent, on dit qu'elles interfèrent :**

$$\boxed{s(M,t) = s_1(M,t) + s_2(M,t)}$$



Conditions d'interférences

Lorsque deux ondes, *de même fréquence et de même nature*, se superposent au même point M :

si les **2 ondes sont en phase** au point M, l'onde résultante de la superposition a une **amplitude maximale**. On parle d'**interférences constructives**.

$$\boxed{\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = 2p\pi}$$

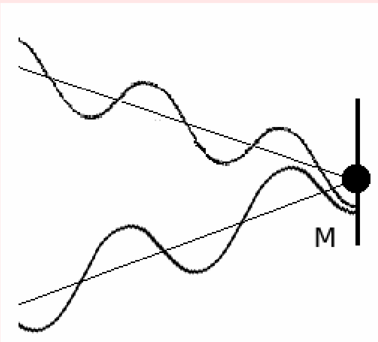


Figure 1 – Interférences constructives

si les **2 ondes sont en opposition de phase** au point M, l'onde résultante de la superposition a une **amplitude minimale** (parfois nulle). On parle d'**interférences destructives**.

$$\boxed{\Delta\varphi(M) = \varphi_2(M) - \varphi_1(M) = \pi + 2p\pi}$$

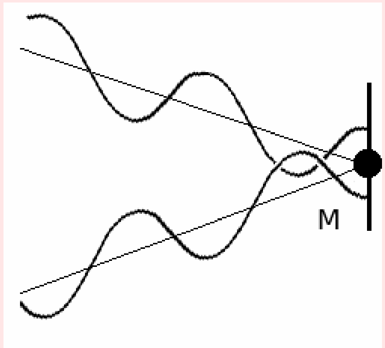
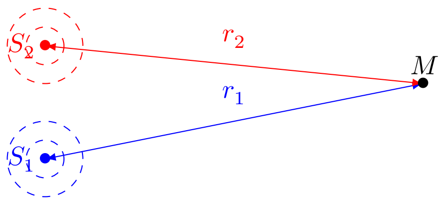


Figure 2 – Interférences destructives

Dans ces 2 expressions, p est un entier relatif appelé *ordre d'interférence*.

3.3 Déphasage et différence de marche

On considère deux sources S_1 et S_2 qui émettent chacun une onde sphérique **de même pulsation** ω. Nous cherchons à déterminer ce qu'il se passe quand les deux ondes vont se superposer en un point M de l'espace situé loin de S_1 et S_2. On note les distances $r_1 = S_1M$ et $r_2 = S_2M$.



1. Exprimer les vibrations $s_1(M,t)$ et $s_2(M,t)$ de chaque onde en fonction de r_1, r_2 et des phases à l'origine φ_{01} et φ_{02} au niveau des sources S_1 et S_2.

   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

2. En déduire le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ *au point* M de l'onde 2 par rapport à l'onde 1.

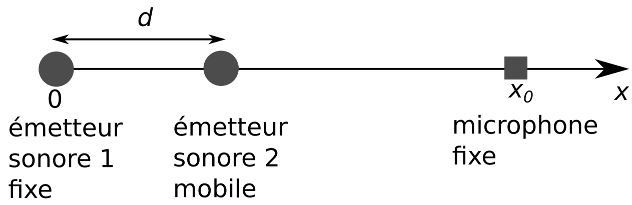
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....
   ....

Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ d'une onde 2 par rapport à une onde 1 se superposant toutes les 2 au point M s'exprime :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda}\Delta L_{2/1}(M) + \Delta\varphi_0}$$

- $\Delta L_{2/1}(M) = S_2M - S_1M$ est nommée la **différence de marche au point** M. Elle correspond à la distance supplémentaire parcourue par l'onde 2 par rapport à l'onde 1 pour atteindre le point M depuis sa source.
- $\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ la **différence de phase à l'origine entre les deux sources**. Si les deux sources sont identiques, ce que l'on va souvent considérer, on aura alors tout simplement $\Delta\varphi_0 = 0$.

Exercice 1 : On suppose que l'émetteur 2 est suffisamment petit pour ne pas avoir d'influence sur le signal émis par l'émetteur 1. Chaque émetteur envoie une onde progressive sinusoïdale de mêmes fréquence et amplitude, et de phase à l'origine nulle. On néglige tout atténuation sur la distance d si bien que l'amplitude de chaque onde est identique au niveau du microphone en x_0.



1. Lorsque $d = 0$, qu'enregistre-t-on au niveau du microphone ?
2. On part de $d = 0$, et on augmente d jusqu'à ce que le signal enregistré soit nul. Ceci se produit pour $d = 6,0$ cm. Expliquer pourquoi il y a cette extinction.
3. En déduire la longueur d'onde du son émis.
4. Pour $d = 12,0$ cm, quelle sera l'amplitude du signal enregistré ?

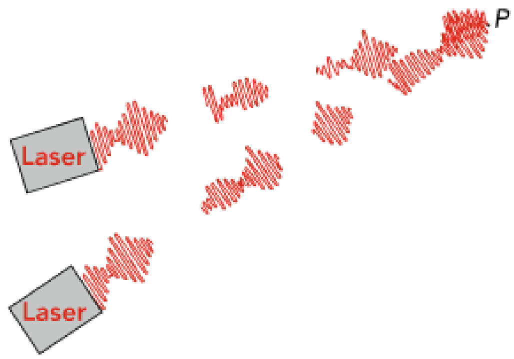
4 Interférences lumineuses : exemple des trous de Young

4.1 Cohérence d'ondes lumineuses

Des interférences lumineuses ne peuvent pas être observées si la lumière provient de sources indépendantes, même si ces sources émettent des ondes de même fréquence.

En effet, la lumière étant émise par trains d'ondes de courtes durées, les ondes ne conservent pas le même déphasage à l'origine $\Delta\varphi_0$ La figure d'interférences n'est alors pas stable.

Des ondes issues d'une même source sont qualifiées de **cohérentes**.



4.2 Formule de Fresnel

La période des ondes lumineuse étant extrêmement faible ($T \sim 10^{-15}$ s) devant les temps de réponse des capteurs optiques (œil, récepteur électronique), ces derniers ne **mesure que la valeur moyenne du signal reçu**.

Un capteur optique placé au point M mesure l'**intensité lumineuse**, grandeur est proportionnelle au carré de valeur moyenne de la vibration $s(M,t)$ de l'onde lumineuse en M :

$$I(M) = K\langle s(M,t)\rangle^2 \qquad \text{avec } K \text{ une constante}$$

Dans le cas d'une onde monochromatique $s(M,t) = A(M)\cos(\omega t + \varphi(M))$, l'intensité lumineuse est :

$$I(M) = \frac{1}{2}KA^2(M)$$

Démonstration : ....
....
....
....
....
....

L'intensité lumineuse d'une onde monochromatique est proportionnelle au carré de son amplitude.

On considère 2 ondes lumineuses cohérentes, d'amplitude A_1 et A_2, interférant en un point M. L'onde résultante possède une amplitude A :

$$A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi}$$

on élève l'expression de A au carrée et on multiplie le tout par $\frac{1}{2}K$

$$\frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}KA_1^2 + \frac{1}{2}KA_2^2 + 2\frac{1}{2}KA_1A_2\cos\Delta\varphi$$

Ce qui fait apparaître la formule de Fresnel reliant l'intensité I de l'onde résultante aux intensités I_1 et I_2 des deux ondes qui interfèrent et à leur déphasage $\Delta\varphi$:

$$\boxed{I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi}$$

La formule de Fresnel n'est pas à retenir : elle sera fournie dans les énoncés.

4.3 Chemin optique

En optique, la propagation des ondes lumineuses dans un milieu d'indice n se fait à la vitesse $v = c/n$. Il s'ensuit que la formulation du déphasage entre deux ondes lumineuses doit prendre en compte l'indice optique n du milieu.

Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1}$ d'une onde *lumineuse* 2 par rapport à une onde 1 se superposant toutes les 2 au point M s'exprime :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(M) = -\frac{2\pi}{\lambda_0}\delta_{2/1}(M) + \Delta\varphi_0}$$

- $\delta_{2/1}(M) = n_{S_2M}S_2M - n_{S_1M}S_1M$ est nommée la **différence de chemin au point** M.
- λ_0 est la longueur d'onde *dans le vide* des ondes.
- $\Delta\varphi_0 = \varphi_{02} - \varphi_{01}$ la **différence de phase à l'origine entre les deux sources**. Si les deux sources sont identiques, ce que l'on va souvent considérer, on aura alors tout simplement $\Delta\varphi_0 = 0$.

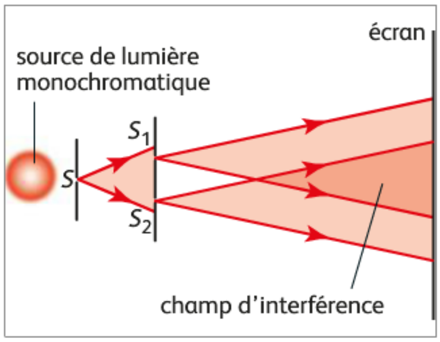
Démonstration : ....
....
....
....
....
....
....

4.4 Expérience des trous de Young

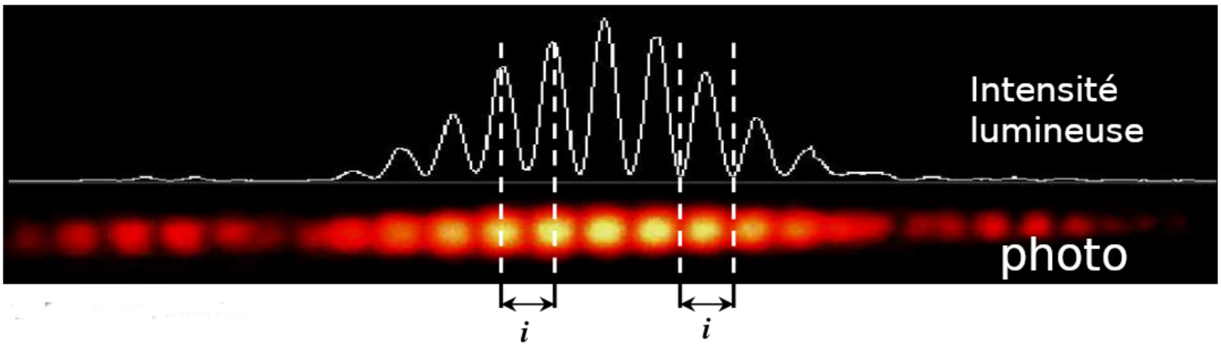
Pour obtenir 2 sources lumineuse cohérentes, il faut éclairer deux sources secondaires avec de la lumière venant d'une **source unique**.

On utilise souvent le dispositif des trous de Young. Le premier trou S diffracte la lumière, ce qui éclaire deux trous S_1 et S_2. Ces trous diffractent la lumière et se comportent comme **deux sources cohérentes**.

La zone où les deux faisceaux se superposent est appelée champ d'interférence. sur l'écran, on observe la figure ci-dessous où l'on reconnaît un motif de diffraction, lui-même découpé en une série régulière de zones sombres et de zones lumineuses.



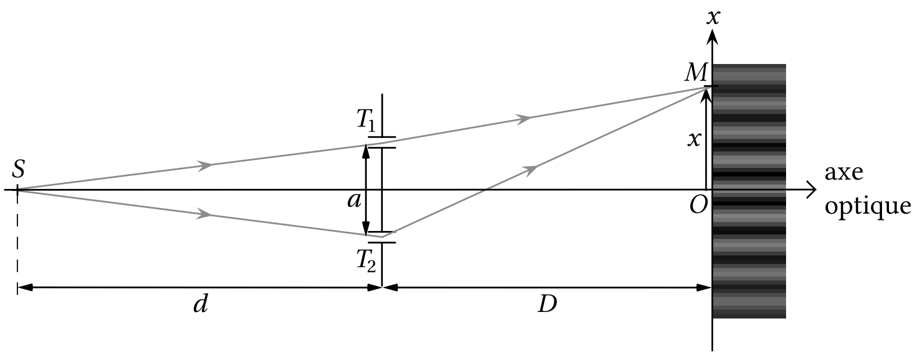
14 *Dispositif des fentes d'Young.*



- Au milieu d'une zone lumineuse (**maximum** local d'intensité), les interférences sont **constructives**
- Au milieu d'une zone sombre (**minimum** local d'intensité), les interférences sont **destructives**

L'interfrange i est la *distance* séparant deux milieux de franges brillantes (ou sombres) consécutives

On considère une source lumineuse ponctuelle S, monochromatique de longueur d'onde λ, éclairant 2 trous T_1 et T_2. S est situé sur un axe optique passant par un axe optique perpendiculaire à un écran placé à une distance D des trous. Le milieu du segment $[T_1T_2]$ est sur l'axe optique. Le milieu est l'air d'indice optique $n = 1$.



On se limite au tracé des 2 rayons qui interférerons au point M de l'écran, l'un passant par T_1, l'autre par T_2.

1. Exprimer la différence de chemin optique $\delta(M)$ entre les 2 rayons se superposant en M.

....
....
....
....
....

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

2. Sachant que $a \ll D$ et $x \ll D$, simplifier l'expression de $\delta(M)$ à l'aide de l'approximation $\sqrt{1+\varepsilon} \simeq 1 + \varepsilon/2$ pour $|\varepsilon| \ll 1$.

....
....
....
....
....
....
....
....
....
....

1. En déduire l'expression de l'interfrange : $i \simeq \dfrac{\lambda_0 D}{a}$

....
....
....
....
....