

Étude du pendule simple

I Objectifs

- Étudier le mouvement du pendule simple, par acquisition informatisée grâce à l'interface Sysam.
- Interroger la conservation de l'énergie mécanique.
- Mise en évidence de l'approximation de l'énergie potentielle par un puits de potentiel harmonique.
- Vérifier l'isochronisme des petites oscillations.

II S'approprier

Pour GALILÉE, la période des oscillations d'un pendule simple devait être indépendante de l'amplitude des dites oscillations. Dans ses *Dialogues* (1632), il écrit : « Chacune de ces oscillations se fait dans des temps égaux, tant celle de 90° , que celle de 50° , ou de 20° , de 10° , de 4° . »

26 ans plus tard, HUYGENS affine ce propos dans *Horlogium Oscillatorium* en notant que « seules les oscillations de **faible amplitude** doivent être considérées comme isochrones, c'est-à-dire avoir une période indépendante de l'amplitude. »

III Analyser

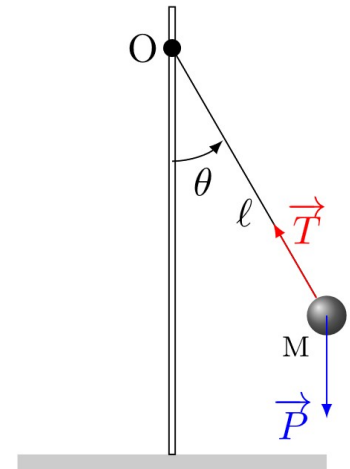
Soit une masse $m = 190 \text{ g}$ attachée à l'extrémité d'une tige en fibre de carbone (de faible masse, pouvant être considérée négligeable devant celle de m) de longueur $\ell = 45 \text{ cm}$ constante. Initialement, la masse m est lâchée d'un angle θ_0 sans vitesse initiale. On prend $g = 9,8 \text{ m s}^{-2}$.

- ① Montrer que l'énergie cinétique peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_c = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}^2$$

- ② En prenant l'origine des énergies potentielles en $\theta = 0$, montrer que l'énergie potentielle totale du système peut s'écrire sous la forme :

$$\mathcal{E}_{p,p} = mg\ell(1 - \cos \theta)$$




IV Réaliser

Important


Attention, la tige du pendule est en fibre de carbone et est TRES FRAGILE ; Ne pas serrer la vis de la masse trop fort sur la tige.

A Réglages

- 1) Ouvrir le logiciel Latispro.
- 2) Régler les paramètres d'acquisition :  200 points de mesure ; choisir un temps total d'acquisition permettant d'avoir quelques oscillations visibles.
- 3) Quelle doit alors être la fréquence d'échantillonnage de l'acquisition ?

- 4) Faire le zéro de l'oscillateur en appuyant sur le petit bouton à l'extrémité du fil noir près de la poulie, lorsque celui-ci est en position verticale.

B Acquisition et enregistrement

- 1) Écarter le pendule d'un angle de 20° à 30° environ.
 2) Lancer l'acquisition : 

V Valider

A Exploitation de l'enregistrement

V.A.1 Visualisation des angles, vitesses et accélérations en fonction du temps

- 1) En utilisant la feuille de calcul, créer une nouvelle variable, notée *angle*, correspondant à l'angle exprimé en radians.
- 2) Visualiser *angle* en fonction du temps ; ajuster l'échelle grâce au calibrage (en cliquant droit).
- 3) Créer les variables *deriv_Pendule* (dérivée première) et *dderiv_Pendule* (dérivée seconde), en utilisant les fonctions traitements → calculs spécifiques → dérivée et dérivée seconde.
- 4) À partir des variables *deriv_Pendule* et *dderiv_Pendule* (exprimées en degrés), introduire les variables *deriv_angle* et *dderiv_angle* exprimées en radians.
- 5) Afficher simultanément les trois courbes obtenues et les lisser en utilisant les fonctions traitements → calculs spécifiques → lissage.
- 4 Imprimer vos courbes.
- 5 Déterminer et commenter les déphasages entre les différentes courbes. Justifier mathématiquement ces déphasages.

V.A.2 Propriété de l'énergie mécanique

- 6 Proposer une exploitation graphique permettant de visualiser graphiquement et simultanément la conservation de l'énergie mécanique ainsi que les échanges énergétiques entre énergie cinétique et énergie potentielle. Vous représenterez sur un même graphique $\mathcal{E}_p(t)$, $\mathcal{E}_c(t)$ et $\mathcal{E}_m(t)$.
- 7 Imprimer les courbes et les commenter.

V.A.3 Approximation harmonique autour de la position d'équilibre

- 8 Proposer une exploitation permettant de vérifier la parabolisation (énergie potentielle est équivalente à un polynôme d'ordre 2 en θ) de l'énergie potentielle autour de la position d'équilibre. Vous tracerez pour cela $\mathcal{E}_p(\theta)$.

Vous pourrez ensuite faire une modélisation à partir d'un modèle parabolique (pour une fois qu'on vous autorise à modéliser par autre chose qu'une droite...). Vérifier visuellement que le modèle est compatible avec les données expérimentales.

- 9 Imprimer et commenter. Faire le développement limité autour de $\theta = 0$ (position d'équilibre) de l'expression de l'énergie potentielle précédemment obtenue pour comparer.

B Amplitude et (non-)isochronisme des oscillations

V.B.1 Protocole expérimental

- 10 Proposer puis réaliser un protocole expérimental qui permettrait de lever la contradiction historique présentée dans la partie S'approprier sans dépasser un angle initial de 60° environ (on pourra utiliser l'icône : Outils → mesures automatiques).

- 11 Présenter vos mesures sous forme d'un tableau $T_{\text{exp}} = f(\theta_0)$ et d'une courbe expérimentale que vous imprimerez et commenterez. Conclure quant à l'isochronisme (ou non) des oscillations.
- 12 En déduire la valeur de T_{iso} en tenant compte de vos différents mesurages **dans le cas où il y a isochronisme**.

V.B.2 Résolution numérique

L'objectif de cette résolution numérique est de résoudre l'équation différentielle non linéarisée et donc non analytique :

$$\ddot{\theta} + \omega_0^2 \sin(\theta) = 0$$

- 1) Dans un premier temps, vous allez compléter le script suivant sur **Capytale** à ce lien : <https://capytale2.ac-paris.fr/web/c/eb53-1348043>. Il devra permettre de résoudre, pour une condition initiale θ_0 donnée, l'équation différentielle ci-dessus à l'aide du schéma numérique python `solve_ivp`. Pour ce faire, vous devrez importer `scipy.integrate` au début de votre script avec

```
from scipy.integrate import solve_ivp
```

On prendra une période propre $T_0 = 1$ (par choix arbitraire).

Pour vous aider, consulter la page suivante : <https://tinyurl.com/pythonsolveivp>.

- 2) Le script précédent sera ensuite amélioré afin de résoudre l'équation différentielle pour un ensemble de solutions initiales comprises entre $\theta_0 \approx 0$ et $\theta_0 = \pi/2$. Vous trouverez la fréquence de chaque solution grâce à une fonction `freqfinder` déjà créée l'occasion ; elle réalise la transformée de Fourier numérique de la solution temporelle (à l'aide de `numpy.fft`) afin d'en déduire le spectre puis la fréquence du pic spectral. Il vous faudra modifier la période propre par la valeur expérimentale T_{iso} .
- 13 Expliquer sur **Capytale** (avec une cellule en `markdown`) en une dizaine de lignes les principales étapes de ce script.
- 14 Construire, grâce à ce script, le graphe permettant d'obtenir la période T_{simu} en fonction de l'amplitude initiale θ_0 .
- 15 Commenter l'influence des variables `duree` et `nb_point_temporel`. Faites des essais pour constater leur influence.
- 16 Superposer à ce premier graphe vos résultats expérimentaux obtenus précédemment ($T_{\text{exp}} = f(\theta_0)$). Enregistrer votre travail sur **Capytale** et imprimer la courbe obtenue.
- 17 Les résultats numériques et expérimentaux sont-ils en accord ? Conclure.