

# Détente d'un gaz parfait – corrigé

On étudie différentes transformations de  $n$  moles d'un gaz parfait.

On notera  $P$  la pression du gaz,  $V$  son volume et  $T$  sa température.

On notera  $R$  la constante des gaz parfaits.

Soient  $C_{v,m}$  la capacité thermique molaire à volume constant du gaz, et  $C_{p,m}$  celle à pression constante du gaz.

On note  $\gamma = C_{p,m}/C_{v,m}$  le rapport des capacités thermiques molaires à pression constante et à volume constant.

## I Préliminaires

- Donner l'équation d'état du gaz parfait. Préciser, pour chacune des grandeurs utilisées dans cette équation, l'unité qui lui correspond dans le système international.

**Réponse :**

$PV = nRT$ , avec  $P$  en pascal (Pa),  $V$  en  $m^3$ ,  $n$  en mole,  $R$  en  $J \cdot mol^{-1} \cdot K^{-1}$  et  $T$  en K.

- Donner la relation de Mayer qui relie les capacités thermiques molaires  $C_{p,m}$  et  $C_{v,m}$  et la constante des gaz parfaits  $R$ . Dédurre de la relation de Mayer et de la définition du coefficient  $\gamma$  la relation entre  $C_{v,m}$ ,  $R$  et  $\gamma$ , d'une part, et entre  $C_{p,m}$ ,  $R$  et  $\gamma$ , d'autre part.

**Réponse :**

D'après la relation de Mayer  $C_{p,m} - C_{v,m} = R$ .

On en déduit  $C_{v,m} = \frac{R}{\gamma - 1}$  et  $C_{p,m} = \frac{R\gamma}{\gamma - 1}$ .

- Énoncer les deux premiers principes de la thermodynamique.

**Réponse :**

Pour un système fermé, n'ayant pas de variation d'énergie potentielle macroscopique, d'après le premier principe la variation d'énergie interne  $\Delta U$  plus celle d'énergie cinétique macroscopique entre deux états d'équilibre thermodynamique est égale au travail reçu  $W$  et au transfert thermique reçu  $Q$  au cours de la transformation :

$$\Delta U + \Delta E_{c,macro} = W + Q$$

D'après le second principe, pour un système fermé, il existe une fonction d'état  $S$  appelée entropie dont la variation entre deux états d'équilibre est égale à l'entropie d'échange  $S_{ech}$  plus l'entropie créée  $S_c$  au cours de la transformation

$$\Delta S = S_{ech} + S_c \quad \text{avec} \quad S_{ech} = \sum_i \frac{Q_i}{T_i}$$

Le système n'échangeant de l'énergie thermique  $Q_i$  qu'avec des thermostats de température  $T_i$ .

L'entropie créée  $S_c > 0$  si la transformation est irréversible,  $S_c = 0$  si la transformation est réversible.

## II Détente isotherme

On enferme le gaz dans une enceinte diathermane (permettant les échanges thermiques) dont une paroi horizontale (piston), de masse négligeable, est mobile verticalement sans frottement (figure 1.1).

La température  $T_1$  du milieu extérieur est constante. L'extérieur se comporte comme un thermostat.

A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression  $P_1$ , un volume  $V_1$  et une température  $T_1$  et la paroi est bloquée.

On débloque la paroi et on la déplace de manière mécaniquement réversible jusqu'à une position, telle que le volume  $V'_1$  offert au gaz soit  $V'_1 = 2V_1$ , et on la bloque à nouveau.

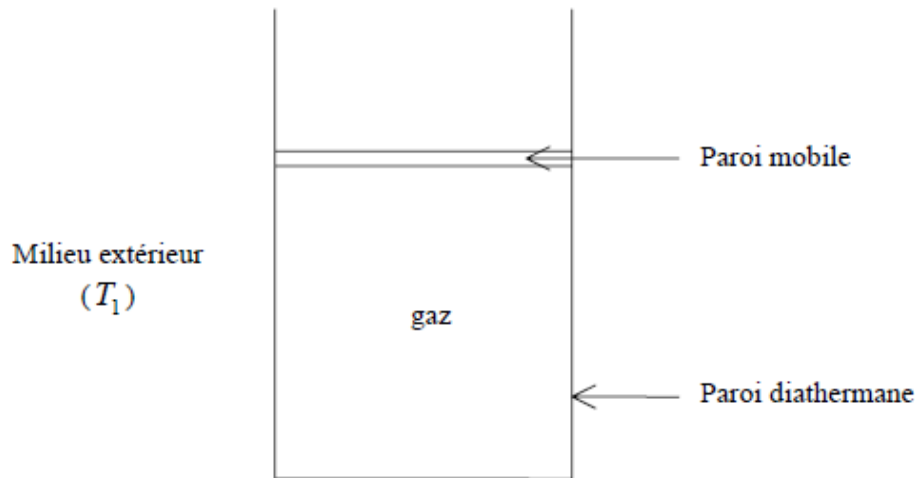


Figure 1.1: Détente isotherme

4. Déterminer la pression  $P'_1$  du gaz dans l'état final en fonction de  $P_1$ .

**Réponse :**

Le système étudié est le gaz parfait. Il subit une détente isotherme à la température  $T_1$ .

$$\{P_1, V_1, T_1\} \xrightarrow{T_e = T_1 = \text{cste}} \{P'_1, V'_1 = 2V_1, T_1\}$$

On applique l'équation d'état des gaz parfaits dans l'état initial et dans l'état final :

- EI :  $P_1 V_1 = nRT_1$
- EF :  $2P'_1 V_1 = nRT_1$

On en déduit  $\boxed{P'_1 = \frac{P_1}{2}}$

5. Déterminer l'expression du travail  $W_1$  mis en jeu par le gaz au cours de cette transformation en fonction de  $n$ ,  $R$  et  $T_1$ . Commenter le signe de  $W_1$ .

**Réponse :**

La transformation est mécaniquement réversible, donc  $P_e = P$ .

De plus le système est un gaz parfait isotherme, donc  $P = \frac{nRT_1}{V}$ .

On en déduit le travail :

$$W_1 = - \int P_e dV = -nRT_1 \int_{V_1}^{2V_1} \frac{dV}{V} \Rightarrow \boxed{W_1 = -nRT_1 \ln(2) < 0}$$

On constate que  $W_1 < 0$ , ce qui est cohérent avec une détente. Le système fournit du travail au piston.

6. Calculer la variation d'énergie interne  $\Delta U_1$  du gaz au cours de cette transformation. En déduire le transfert thermique  $Q_1$  reçu par le gaz en fonction de  $n$ ,  $R$  et  $T_1$ .

**Réponse :**

Pour un gaz parfait  $\Delta U_1 = C_v \Delta T$ . Or ici le gaz parfait subit une transformation isotherme, donc  $\Delta T = 0$ , donc  $\Delta U_1 = 0$ .

On applique le premier principe. Dans le cas présent, l'énergie cinétique macroscopique est nulle et le seul travail reçu est celui des forces de pression, donc

$$\Delta U_1 = Q_1 + W_1 \Rightarrow Q_1 = -W_1 = nRT_1 \ln(2)$$

7. Déduire de la question précédente l'expression  $S_{1,ech}$  de la variation d'entropie d'échange en fonction de  $n$  et  $R$ .

**Réponse :**

Le système échange de l'énergie thermique avec un thermostat, donc

$$S_{1,ech} = \frac{Q_1}{T_1} = nR \ln(2)$$

8. Déterminer l'entropie créée  $S_{1,c}$  au cours de la transformation. Commenter.

**Réponse :**

On utilise l'expression de l'entropie du gaz parfait  $S_m(T, V) = C_{v,m} \ln(T) + R \ln(V) + cste$ , on en déduit la variation d'entropie au cours de la transformation  $\Delta S_1 = nR \ln(2)$ .

On applique le second principe :  $\Delta S_1 = S_{1,ech} + S_{1,c}$ .

On en déduit  $S_{1,c} = \Delta S_1 - S_{1,ech} = 0$ .

La transformation est donc réversible. Cela était prévisible car elle est mécaniquement réversible sans cause d'irréversibilité.

### III Détente de Joule Gay-Lussac

On considère un cylindre indéformable à parois athermanes (ne permettant pas les échanges thermiques) divisé intérieurement en deux compartiments de volumes identiques par une paroi de volume négligeable. Les  $n$  moles de gaz parfait se trouvent dans le compartiment 1, le compartiment 2 étant vide (figure 1.2).

A l'état initial le gaz est caractérisé par une pression  $P_2$ , une température  $T_2$  et occupe un volume  $V_2$ .

On ôte alors la séparation et le gaz parfait occupe la totalité du cylindre. L'enlèvement de la séparation se fait sans travail.

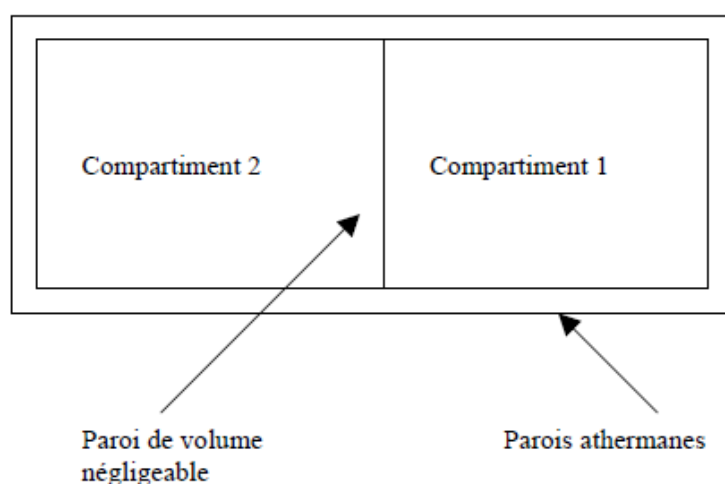


Figure 1.2: Détente de Joule Gay-Lussac

9. En appliquant le premier principe de la thermodynamique, déterminer la variation d'énergie interne  $\Delta U_2$  du gaz au cours de cette transformation. En déduire la température  $T'_2$  puis la pression  $P'_2$  dans l'état final d'équilibre.

**Réponse :**

Le système constitué des deux compartiments est isolé donc  $\Delta U_2(\Sigma_{tot}) = 0$ .

Or ce système total est composé de  $n$  mole de gaz, donc la variation d'énergie interne correspond à celle des  $n$  moles de gaz. D'où  $\Delta U_2 = 0$ .

Comme le gaz est supposé parfait,  $\Delta U_2 = C_v(T'_2 - T_2)$ . On en déduit  $T'_2 = T_2$ .

Ainsi le gaz ne subit pas de variation de température entre l'état initial et l'état final :

$$\{T_2, P_2, V_2\} \longrightarrow \{T_2, P'_2, 2V_2\}$$

On applique l'équation d'état des gaz parfaits dans chaque équilibre :

$$P_2 V_2 = nRT_2 \quad ; \quad 2P'_2 V_2 = nRT_2$$

On en déduit  $P'_2 = P_2/2$ .

10. Déterminer la variation d'entropie  $\Delta S_2$  pour cette transformation.

**Réponse :**

On retrouve  $\Delta S_2 = nR \ln(2)$ .

L'entropie est une fonction d'état qui ne dépend que des variables d'état à l'équilibre et non de la transformation envisagée entre les deux mêmes états d'équilibre.

11. Que vaut la variation d'entropie d'échange  $S_{2,ech}$  pour cette transformation ?

**Réponse :**

Le système total constitué des 2 compartiments subit une transformation adiabatique, donc  $S_{tot,ech} = 0$ .

Or  $S$  est une grandeur extensive, donc c'est aussi l'entropie d'échange des  $n$  moles de gaz. Donc  $S_{2,ech} = 0$ .

12. En déduire l'expression de l'entropie créée  $S_{2,c}$  au cours de cette transformation. Commenter.

**Réponse :**

On applique le second principe, et on obtient  $S_{2,c} = \Delta S_2 - S_{2,ech} = nR \ln(2) > 0$ .

On en déduit que la transformation est irréversible. Ceci est dû à l'existence d'un gradient de particules initialement (i.e. gradient de pression).