Correction du TD d'application

I Notation complexe

Écrire, sous forme complexe, les équations différentielles suivantes :

1)

$$\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = E_0 \sin\omega t$$

Réponse

Pour passer aux formes complexes, il faut s'assurer que **les grandeurs soient toutes exprimées en cosinus**, puisque c'est bien le cosinus la partie réelle d'une exponentielle complexe. Or, $\sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta - \pi/2)$, donc on a :

$$\begin{aligned} &\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = E_0\cos(\omega t - \pi/2) \\ \Leftrightarrow\ &\tau\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} + \underline{u}(t) = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \Leftrightarrow\ &(1 + \mathrm{j}\omega t)\underline{u} = E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{u} = \frac{E_0 \mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{1 + \mathrm{j}\omega t}} \end{aligned}$$

grâce au fait qu'en complexes, dériver revient à multiplier par $\mathrm{j}\omega$.

◇

2)

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x(t) = F_0\cos\omega t$$

Réponse

Ici, rien de particulier : on souligne x d'abord, puis on dérive en multipliant par $\mathrm{j}\omega$.

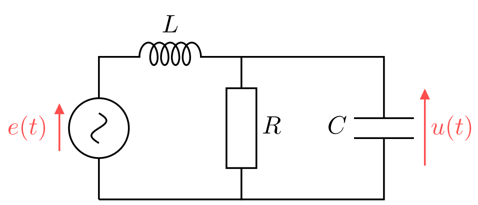
$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x(t) = KI_m\cos\omega t \\ \Leftrightarrow\ &(\mathrm{j}\omega)^2\underline{x} + 2\lambda\mathrm{j}\omega\underline{x} + {\omega_0}^2\underline{x} = KI_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{x} = \frac{KI_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}} \end{aligned}$$

◇

II Condition de résonance

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m. $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du résistor et de la capacité montés en parallèle.

On pose : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.



1) Établir l'expression du signal complexe $\underline{u}$ associé à $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé, en fonction de E_0, x et ξ.

Réponse

Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalent à l'association en parallèle de R et C. On a

$$\underline{Z} = \frac{R/\mathrm{j}C\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

En utilisant un pont diviseur de tension, on trouve

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \mathrm{j}L\omega}\underline{e} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}L\omega/\underline{Z}}\underline{e}$$

$$\Leftrightarrow \underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \mathrm{j}\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}}{1 + 2\mathrm{j}\xi x - x^2}$$

◇

2) Étudier l'existence éventuelle d'une résonance pour la tension $u(t)$.

Réponse

L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{u}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x)^2 + (2\xi x)^2}}$$

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est **non nul** et minimal, c'est-à-dire

$$U(\omega_r) = U_{\max} \Leftrightarrow \left(1 - x^2\right)^2 + (2\xi x)^2 \text{ minimal}$$

Soit $X = x^2$, et $f(X) = (1 - X)^2 + 4\xi^2 X$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

$$f'(X_r) = 0 \Leftrightarrow -2\,(1 - X_r) + 4\xi^2 = 0 \Leftrightarrow X_r - 1 = -2\xi^2 \Leftrightarrow X_r = 1 - 2\xi^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

ce qui n'est défini **que si** $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi,

$\boldsymbol{\xi \geq 1/\sqrt{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = E_0}$$

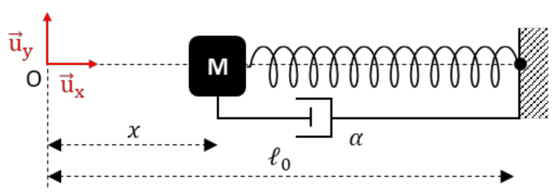
$\boldsymbol{\xi < 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_0}$$

◇

★☆☆ III Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m, se déplaçant horizontalement le long d'un axe (Ox). Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et subit une force de frottement fluide : $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$. Elle est par ailleurs soumise à une force $\vec{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur, qui vaut : $\vec{F}(t) = Ki(t)\vec{u}_x$ où K est une constante. On travaille dans le référentiel du laboratoire $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$. On suppose que le courant est de la forme $i(t) = I_m\cos(\omega t)$.



$m = 10\,\mathrm{g}$, $K = 200\,\mathrm{N{\cdot}A^{-1}}$ et $I_m = 1{,}0\,\mathrm{A}$.

1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position de la masse m.

Réponse

- **Système** : masse ;
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;
- **Position de la masse** : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x}$;
- **Longueur ressort** : $\overrightarrow{MA} = \ell\,\overrightarrow{u_x}$;
- **Longueur à vide** : $\overrightarrow{OA} = \ell_0\,\overrightarrow{u_x}$;
- **Longueur relative** : $(\ell-\ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{MO} = -x\,\overrightarrow{u_x}$.

Bilan des forces :

1) Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = k(\ell-\ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = k\overrightarrow{MO} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$;
5) **Force excitatrice** $\overrightarrow{F} = KI_m\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_x}$.

Avec le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_{\text{ressort}} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F}$$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-kx-\alpha v + KI_m\cos(\omega t)\\ -mg+R\end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = KI_m\cos(\omega t)}$$

◇

2) La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

Réponse

Sous forme canonique, cela devient

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{KI_m}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\text{avec}\quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}}\quad\text{et}\quad\boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

◇

3) Justifier qu'en régime permanent : $x(t) = X_m\cos(\omega t + \phi)$

Réponse

On sait que pour une entrée sinusoïdale, un système aura une solution homogène donnant un régime transitoire et une solution particulière de la forme de l'entrée : en RSF, on étudie le régime permanent où seule la solution particulière est conservée, et on pourra donc écrire $x(t) = X_m\cos(\omega t+\phi)$.

◇

4) On pose $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{\mathrm{j}\omega t}$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}$.

Réponse

En passant en complexes,

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X} + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X} + {\omega_0}^2\underline{X} = \frac{KI_m}{m}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{KI_m}{m} \times \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \dfrac{\mathrm{j}}{Q}\omega\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{\underline{X} = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{1}{1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\dfrac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

5) Exprimer $X_m(\omega)$. Existe-t-il toujours une résonance ?

Réponse

En réels, on trouve

$$\boxed{X(\omega) = |\underline{X}| = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\dfrac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\dfrac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Elle est maximale quand le dénominateur est minimal. Après calcul, on trouve

$\mathbf{Q \leq 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

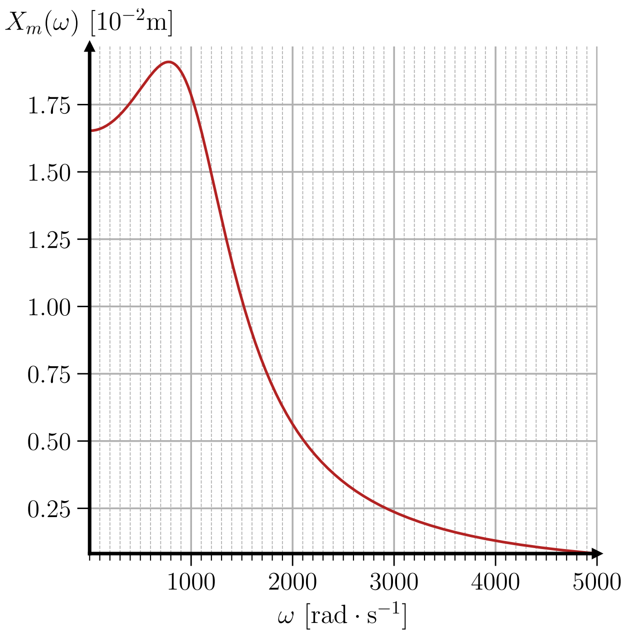
$$\boxed{\omega = 0 \quad \text{et} \quad X(0) = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}}$$

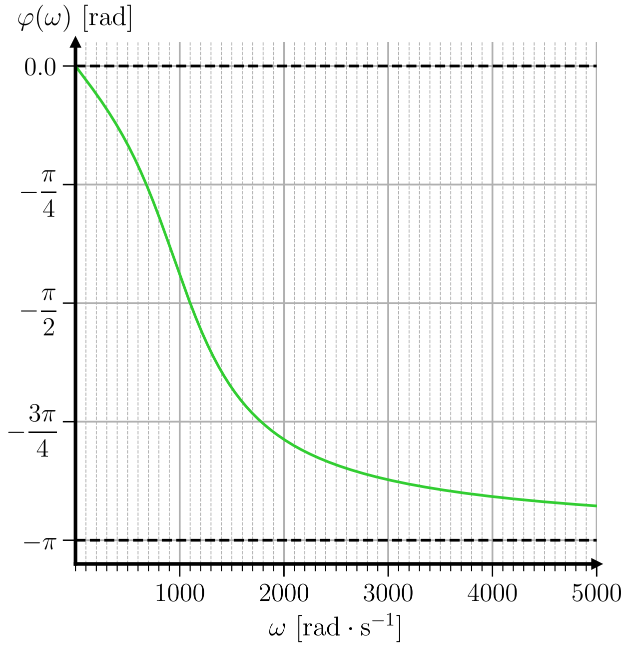
$\mathbf{Q > 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0} \quad \text{et} \quad \boxed{X(\omega_r) = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en élongation**, et que **la résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\varphi(\omega)$.





6) Pour quelle pulsation le déplacement est-il en quadrature de phase avec la force excitatrice ? Déterminer alors graphiquement la pulsation propre ω_0.

Réponse

Le déplacement est en quadrature de phase si la différence de phase est de $\pm\pi/2$. Sur le graphique de droite, on le trouve à $\omega = 1100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Or, c'est à $\omega = \omega_0$ qu'on trouve une quadrature de phase, puisqu'alors $\underline{X}$ est un imaginaire pur. Ainsi,

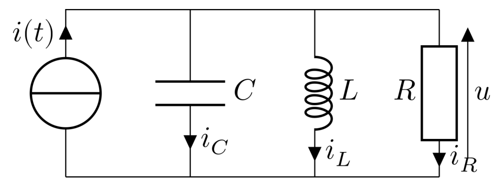
$$\omega_0 = 1100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

On pourrait déterminer le facteur de qualité en trouvant que le maximum d'amplitude se trouve à $\omega_r = 900\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

◇

IV Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.



L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.

1) Déterminer l'impédance complexe de l'association des dipôles R,L et C.

Réponse

Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalente à cette association, et $\underline{Y}$ son admittance. On a

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{\mathrm{j}L\omega + R + (\mathrm{j}C\omega)R(\mathrm{j}L\omega)}{\mathrm{j}RL\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}}$$

◇

2) En déduire l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension u en fonction de ω, I_0, R, L et C.

Réponse

On a $\dfrac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}} = \underline{Z}$ par définition de l'impédance, soit $\underline{U_0} = \underline{Z}\underline{I_0} = \underline{Z}I_0$ (étant donné que l'intensité n'a pas de phase à l'origine). Ainsi

$$\underline{U_0} = \frac{I_0\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}$$

On rend cette équation plus lisible en mettant le dénominateur sous une forme adimensionnée en divisant par $\mathrm{j}L\omega$, ce qui donne

$$\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}}$$

◇

3) Pour quelle pulsation l'amplitude réelle U de u prend-elle sa valeur maximale notée $U_{\max}$? Conclure sur la fréquence à utiliser.

Réponse

L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U}_0| = \frac{RI_0}{\sqrt{1+\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$$

◇

4) Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

Réponse

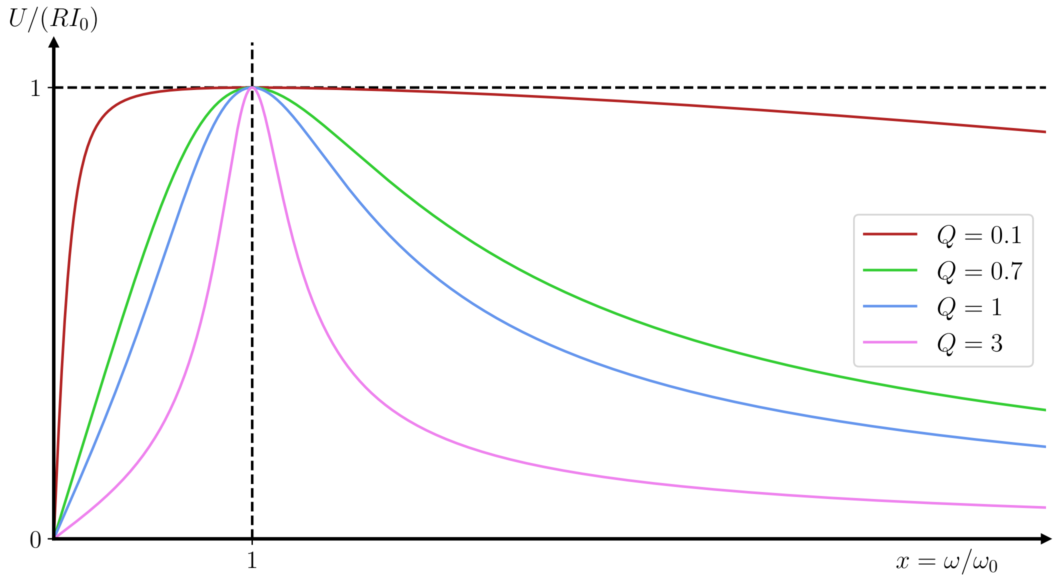
On cherche à faire apparaître ω_0 dans l'écriture de U :

$$RC\omega - \frac{R}{L\omega} = R\omega\frac{C\sqrt{L}}{\sqrt{L}} - \frac{R}{\omega}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}L} \qquad = R\omega\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\omega_0} - \frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{C}{L}}\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

En nommant $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, on obtient finalement

$$\boxed{\underline{U}_0 = \frac{RI_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{soit} \quad \boxed{U = \frac{RI_0}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\dfrac{1}{x}\right)^2}}}$$

On trace pour différentes valeurs de Q, et on obtient :



◇

5) Exprimer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$.

Réponse

On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = -1 \quad &\text{et} \quad Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 = -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad &\text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \omega^2 - {\omega_0}^2 = -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad &\text{et} \quad \omega^2 - {\omega_0}^2 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \boxed{\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0} \quad &\text{et} \quad \boxed{\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0}
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q} + 4{\omega_0}^2$$

$$\Leftrightarrow \Delta = \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 + 4Q^2\right)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \quad &\text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \\
\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right) \quad &\text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right)
\end{aligned}$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1 - \sqrt{1+4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1 - \sqrt{1+4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} - 1\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} + 1\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

◇

6) On se place dans le cas $R = 7\,\Omega$, $L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\text{H}$ et $C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,\text{F}$. Calculer la valeur de l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.

Réponse

$\omega_0/\Delta\omega$ est directement Q, donc on a

$$A_c = Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 7\,\Omega \\ L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\text{H} \\ C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,\text{F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{A_c = 5{,}2}$$

L'acuité augmente avec la résistance : c'est normal puisque la résistance est en parallèle du circuit, donc une absence de résistance signifie ici R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

◇