Contrôle de connaissances 20

Forces centrales et solides

/7 1 Soit un point M soumis à une unique force centrale $\vec{F}$. Démontrer que son moment cinétique se conserve, justifier que son mouvement est plan et démontrer la loi des aires à l'aide d'un schéma. Pas besoin d'introduire la constante des aires.

Force centrale $\Leftrightarrow \vec{F} /\!/ \overrightarrow{\mathrm{OM}} \Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F} = \vec{0}$

TMC : $\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \vec{0}} \Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}(0) = \mathcal{L}_0\,\vec{u_z} = \vec{\mathcal{L}}(t)$

Ainsi, $\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) \wedge m\vec{v}(t) = \mathcal{L}_0\,\vec{u_z}}$ $\forall t$

Pendant une durée $\mathrm{d}t$, le point M balaye une aire $\mathrm{d}\mathcal{A}$

$$\mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{v}\,\mathrm{d}t\| \Leftrightarrow \mathrm{d}\mathcal{A} = \frac{1}{2}\|\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge m\vec{v}\|\frac{\mathrm{d}t}{m}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{A}}{\mathrm{d}t} = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}\|}{2m} = \mathrm{cte}}$$

■

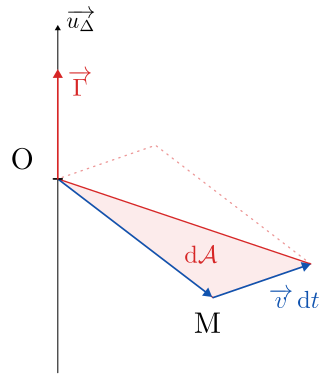

Figure 20.1 – Moment cinétique et aire balayée

/4 2 Compléter le tableau de comparaison suivant :

Tableau 20.1 – Analogie mécanique du point et solide en rotation

	Inertie	Déplac$^{\text{t}}$	Quantité	Causes	Évolu°	$\mathcal{E}_c$	$\mathcal{P}$
Point	m	$\vec{v}$	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{F}$	$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{ext}}$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\vec{F}\cdot\vec{v}$
Solide	J_Δ	$\vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{L}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{p} = J_\Delta\vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}$	$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O,ext}}$	$\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$	$\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{\omega}$

/10 3 Compléter le schéma du pendule pesant avec les forces et leurs moments, calculés **par le bras de levier**. On suppose la liaison pivot parfaite. Trouver alors l'équation du mouvement par application du **TMC scalaire d'abord** puis **TPC ensuite**.

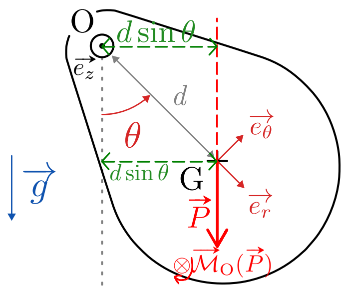

Figure 20.2 – Pendule pesant

1 **Système** : {pendule} solide indéformable de masse m

2 **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.

3 **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ avec O centre de la liaison pivot.

4 **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = d\,\vec{e_r}$

5 **Bilan des actions** :

Origine	Force	Moment
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$	$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd\sin(\theta)$
Pivot parfaite	$\vec{0}$	$\vec{\Gamma} = \vec{0}$

6 **TMC** : $\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = J_z\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_z}\sin(\theta) = 0}$

7 **TPC** : on calcule $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{P}$:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{P}) = \mathcal{M}_z(\vec{P})\omega \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{P}) \Leftrightarrow J_z\dot{\omega}\cancel{\omega} = -mgd\sin(\theta)\cancel{\omega} \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_z}\sin(\theta) = 0}$$