/45 P1 Satellites de télécommunication *(D'après Mines-Ponts MP 2007)*

On se propose d'étudier quelques aspects du fonctionnement de satellites de télécommunication en orbite autour de la Terre. Sauf mention contraire, on considérera que la Terre est une sphère homogène de masse M_T, de rayon R_T et de centre O, immobile dans l'espace, sans rotation propre.

On donne les valeurs numériques suivantes :

$\mathcal{G}$	R_T	M_T
$6{,}67 \times 10^{-11}\,\mathrm{m^3kg^{-1}s^{-2}}$	$6370\,\mathrm{km}$	$5{,}97 \times 10^{24}\,\mathrm{kg}$

Sur la Figure 1, N est le pôle Nord et S le pôle Sud. Satellite P, point Q et ligne des horizons AB. Le plan orbital représenté est dit polaire (la ligne des pôles est N'S').

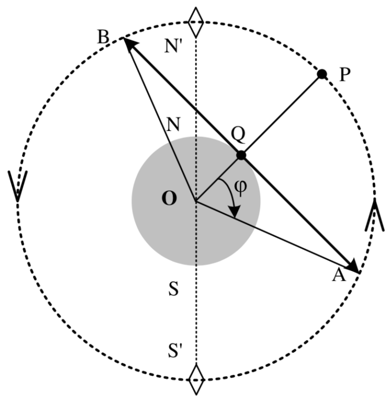

Figure 1 – Schema question 3

I/A Couverture d'un réseau de satellite

/9 1 Un satellite de masse M_S est en orbite circulaire de centre O, à une altitude $h = 800\,\mathrm{km}$. Établir la relation entre la période de révolution T et h. Exprimer de même la relation entre la vitesse $v = \|\vec{v}\|$ et h puis effectuer les applications numériques pour T et v.

Réponse

Dans le référentiel géocentrique considéré comme galiléen (1) on ne prend en compte que la force de gravitation exercée par la Terre $\vec{F} \overset{(1)}{=} -\frac{k}{r^2}\vec{e_r}$ avec $k = \mathcal{G}M_TM_S$. On a de plus $r = R_T + h$. On peut ainsi appliquer le PFD $m\vec{a} = \vec{F}$ au satellite dans le repère polaire O, $\vec{e_r}$, $\vec{e_z}$: (1)

$$\begin{aligned} -M_S r\dot{\theta}^2 &= -\tfrac{k}{r^2} \quad (1) \\ M_S r\ddot{\theta} &= 0 \quad (1) \end{aligned}$$

De la deuxième équation, on obtient $\dot{\theta} = cte \Rightarrow v = r\dot{\theta} = \text{cte}$. (1) On peut ainsi ré-exprimer l'accélération radiale $a_r = -v^2/r$ d'où :

$$M_S\frac{v^2}{r} = \frac{k}{r^2} \Leftrightarrow \boxed{v \overset{(1)}{=} \sqrt{\frac{GM_T}{R_T + h}}}$$

De plus, on sait que $T = \frac{2\pi r}{v} \Rightarrow \boxed{\frac{T^2}{(R_T+h)^3} \overset{(1)}{=} \frac{4\pi^2}{GM_T}}$. On retrouve ainsi la troisième loi de Kepler. Les A.N.s donnent $\underline{T = 6{,}07 \times 10^2\,\mathrm{s}}$ et $\underline{v = 7{,}46\,\mathrm{km{\cdot}s^{-1}}}$. (1)

◇

/2 2 Soient $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{E}_p$ l'énergie cinétique du satellite et son énergie potentielle dans le champ de gravitation de la Terre. Donner sans démonstration l'expression de $\mathcal{E}_p$ puis établir le « théorème du viriel » : $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = 0$.

Réponse

L'énergie potentielle a pour expression $\mathcal{E}_p(r) \overset{(1)}{=} -\frac{k}{r}$. On a $2\mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = M_Sv^2 - \frac{GM_TM_S}{r} = M_S\left(\frac{GM_T}{r} - \frac{GM_T}{r}\right) \overset{(1)}{=} 0$ d'où le résultat.

◇

/5 3 À chaque position P du satellite correspond un point Q sur la Terre à la verticale de ce point. L'ensemble des points Q définit la trace de la trajectoire.

Pour une observatrice située en Q, la durée de visibilité τ d'un satellite est l'intervalle de temps entre son apparition sur l'horizon (point A de la Figure 1) et sa disparition sous l'horizon (point B). Exprimer τ en fonction de φ et T puis montrer que

$$\tau = 2\arccos\frac{R_T}{R_T + h}\,f(h)$$

et donner l'expression de $f(h)$.

Réaliser l'application numérique toujours pour $h = 800\,\mathrm{km}$.

Réponse

Il convient pour cela d'établir l'expression de l'angle φ tel que $\cos(\varphi) = R_T/(R_T+h)$. 1 La vitesse du satellite étant uniforme, on en déduit $\tau \overset{1}{=} \dfrac{2\varphi}{2\pi}T$ soit au final :

$$\boxed{\tau \overset{1}{=} 2\arccos\frac{R_T}{R_T+h}\underbrace{\sqrt{\frac{(R_T+h)^3}{GM_T}}}_{=f(h) \, 1}}$$

L'application numérique donne $\underline{\tau = 9{,}2\times 10^2\,\mathrm{s}}$. 1

◇

/3 4 Calculer T/τ. Pour les besoins de la téléphonie mobile, on place sur des orbites polaires (c'est-à-dire contenues dans un plan méridien terrestre comme sur la figure 1) un ensemble de satellites identiques, appelé « train de satellites ».

Ces satellites sont disposés régulièrement sur leur orbite polaire commune, à l'altitude de 800 km. Calculer le nombre minimal de satellites nécessaires pour former un « train » afin que tous les points au sol, dans le même plan méridien que l'orbite, voient au moins un satellite à tout instant.

Réponse

On a simplement $\dfrac{T}{\tau} = \dfrac{2\pi}{2\varphi} \overset{1}{=} \dfrac{\pi}{\arccos\frac{R_T}{R_T+h}} \overset{1}{\approx} 6{,}6$. Le satellite est ainsi visible pendant 1/6,6 ième de son trajet. Il faudra donc 7 satellites 1 pour garantir la couverture permanente au sol (arrondi au supérieur).

◇

/3 5 Combien d'orbites polaires de ce type faut-il pour couvrir la surface de la Terre, c'est à dire pour que chaque point de la surface terrestre voie au moins un satellite à tout instant ? Combien doit-on disposer de satellites en tout ?

Réponse

D'après la question précédente, il faudrait aussi 7 « trains de satellites » pour couvrir toutes les longitudes. 1 Cependant, un train de satellite couvre « deux côtés » et donc $\lfloor 7/2 \rfloor = 4$ trains suffisent. 1 On aboutit ainsi à un total de $7\times 4 = 28$ satellites. 1

◇

/7 6 La prise en compte de la rotation de la Terre modifie le résultat de la question précédente. Dans cette question, on s'interroge sur la pertinence d'utiliser plutôt un satellite géostationnaire. Calculer la période et l'altitude d'un satellite placé sur orbite géostationnaire. La notion de durée de visibilité garde-t-elle, dans ce cas, un sens ? Quels sont les avantages et les inconvénients d'un satellite géostationnaire comparé au train de la question 4 ?

Réponse

Sur l'orbite géostationnaire, la période de révolution du satellite vaut la période de révolution de la terre $T_T \approx 86\times 10^3\,\mathrm{s}$. 1

On peut utiliser la 3ième loi de Kepler :

$$\frac{T_T^2}{(R_T+h_g)^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \text{soit} \quad \boxed{h_g \overset{1}{=} \left(\frac{GM_T T_T^2}{4\pi^2}\right)^{1/3} - R_T \overset{1}{\approx} 35\,700\,\mathrm{km}}$$

La notion de « visibilité » est à prendre avec prudence : pour un point du globe, le satellite est alors soit visible et la durée de visibilité est infinie, soit invisible. 1 Il ne faut pas utiliser la formule de la question 4 pour la durée de visibilité car on y faisait l'hypothèse d'une Terre immobile (le schéma permettant le calcul de φ est incorrect dans ce cas !!).

Pour une zone donnée de la Terre, il suffit de disposer d'un seul 1 satellite au lieu d'une bonne quarantaine. Mais il est beaucoup plus éloigné, ce qui pose des problèmes de perte de transmission. 1

Il faut aussi remarquer que les Pôles et les régions qui les entourent ne voient pas les satellites géostationnaires. 1

◇

I/B Influence des frottements aérodynamiques

7 La Terre est entourée d'une atmosphère qui s'oppose au mouvement du satellite. La force de frottement $\vec{F}_a$ créée par l'atmosphère est proportionnelle au carré de la vitesse v du satellite et elle s'exprime par $\vec{F}_a = -\alpha M_S v\vec{v}$, où α a une valeur positive, constante dans cette question. Déterminer la dimension de α puis appliquer ensuite le théorème

de la puissance mécanique en supposant que le théorème du Viriel établi à la question 2 reste valable en présence de $\vec{F}_a$. En déduire finalement que :

$$\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h} \tag{1}$$

Réponse

On a $\dim F = \mathrm{M.L.T}^{-2} = \dim \alpha M.L^2.T^{-2}$. On en déduit par identification que $\boxed{\dim\alpha = \mathrm{L}^{-1}}$.

Le TPM appliqué au satellite donne :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c+\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t} = -\alpha M_S v^3 = \frac{1}{2}\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}t}$$

De plus, $v^2 = 2\mathcal{E}_C/M_S = -\mathcal{E}_P/M_S = GM_T/(R_T+h)$. On en déduit en combinant ces résultats que :

$$-\alpha M_S \frac{GM_T}{R_T+h}^{3/2} = \dot{h}\frac{GM_S M_T}{2(R_T+h)^2} \Rightarrow \frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} = -2\alpha\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h}$$

◇

8 Un satellite placé sur une orbite d'altitude 800 km subit une diminution d'altitude d'environ 1 m par révolution ; sa vitesse est, en norme, très peu affectée au bout d'une révolution. En déduire une estimation au premier ordre de α (ne pas s'étonner de la petitesse extrême du résultat !). Calculer, avec la même approximation, ce qu'il advient de l'altitude au bout de 10 ans de fonctionnement du satellite. Comparer à la solution exacte de l'équation (1) (obtenue par intégration de cette équation). Le fait d'avoir une augmentation de la vitesse en présence d'une force opposée au mouvement est-il paradoxal ?

Réponse

Entre le début et la fin de la révolution, R_T+h n'a quasiment pas varié et on peut supposer ce terme constant (on note alors h_0 l'altitude initiale du satellite) :

$$\Delta h = -2\alpha\underbrace{\Delta t}_{=T}\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0} \Rightarrow \alpha = -\frac{\Delta h}{2T\sqrt{GM_T}\sqrt{R_T+h_0}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\alpha = -\frac{\Delta h}{4\pi(R_T+h_0)^2} \approx 1{,}53\times10^{-15}\,\mathrm{m}^{-1}}$$

En dix années, on a effectué $n = \frac{\Delta T}{T} = 10\frac{T_T}{T} \approx 52000$ orbites donc au premier ordre (en supposant Δh identique à chaque période), on a $\Delta h \approx -52\,\mathrm{km}$.

Une résolution exacte de l'équation (à l'aide de la méthode de séparation des variables) :

$$\frac{dh}{\sqrt{R_T+h}} = -2\alpha\sqrt{GM_T}dt \Rightarrow 2(\sqrt{R_T+h_1}-\sqrt{R_T+h_0}) = -2\alpha\sqrt{GM_T}\Delta T$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta h = h_1-h_0 = \left(\sqrt{R_T+h_0}-\alpha\sqrt{GM_T}\Delta T\right)^2 - R_T - h_0 \approx -51{,}3\,\mathrm{km}}$$

Ce résultat est très proche de celui obtenu à l'aide de l'approximation. Il peut sembler surprenant qu'une force qui s'oppose au mouvement se concrétise par une augmentation de vitesse : le freinage d'une voiture (force aérodynamique par exemple) réduit sa vitesse. Mais c'est sans compter sur l'énergie potentielle : à une orbite plus basse correspond une vitesse plus élevée.

◇

9 En réalité, les frottements dépendent de la densité de l'atmosphère et donc de l'altitude. Dans un certain domaine d'altitudes, α varie selon la loi $\alpha(h) = \dfrac{\gamma}{h^\beta}$, où γ et β sont positifs. Le même satellite que celui de la question 8 (perdant 1 mètre par révolution pour $h \approx 800\,\mathrm{km}$) perd, à l'altitude de 400 km, 2 mètres par révolution. Calculer γ et β.

Réponse

On observe que $\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t} \propto \alpha(h)$, car les autres facteurs varient peu. On en déduit ainsi que :

$$\frac{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}}{\frac{\mathrm{d}h}{\mathrm{d}t}} = \frac{h_{bas}}{h_{haut}}^{\beta} = \frac{1/T_T}{2/T'_T} \Rightarrow \beta = \frac{\log(T'_T/(2T_T))}{\log(h_{bas}/h_{haut})}$$

avec T'_T la période de révolution à 400 km d'altitude telle que $T'_T/T = \frac{R_T+h_{bas}}{R_T+h_{haut}}^{3/2} \approx 0{,}917$. On en déduit au final $\beta \approx 1{,}13$ puis $\gamma = h_{haut}^\beta \times \alpha(h_{haut}) \approx 7{,}2\times10^{-9}$ SI. En pratique, la valeur de γ est très sensible aux différents arrondis réalisés pour obtenir β et seuls son ordre de grandeur à du sens.

◇

I/C Stabilisation de l'orientation d'un satellite par gradient de gravité

La méthode de stabilisation d'attitude par gradient de gravité a été mise en œuvre pour les satellites artificiels afin qu'ils présentent vers la Terre toujours le même côté. Elle ne requiert aucune ressource d'énergie embarquée. Le principe de cette méthode a été établi par Lagrange, au XVIIème, afin d'expliquer pourquoi la Lune présente toujours la même face vers la Terre.

Modèle : le satellite est constitué de deux points matériels M_1 et M_2 de masses identiques $m = \frac{1}{2}M_S$ reliés par une tige rigide de masse nulle et de longueur $2l$.

Le centre de masse S du satellite décrit autour de la Terre une orbite circulaire uniforme de rayon $r_0 = R_T + h$ avec $l \ll r_0$. Le référentiel géocentrique (R) lié au repère $(Oxyz)$ est supposé galiléen.

On appelle θ l'angle de $\overrightarrow{\mathrm{M_1M_2}}$ avec l'axe Ox' de (R'). On cherche à déterminer les éventuelles positions d'équilibre du satellite et leur stabilité. On suppose qu'il n'y a pas de frottements dans toute cette subsection.

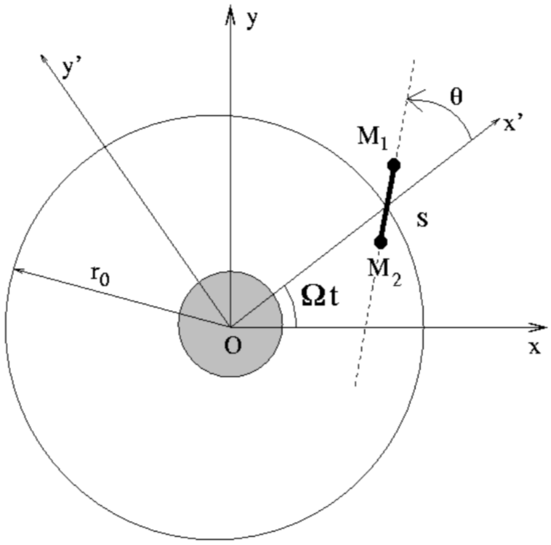

Figure 2 – Le satellite composé des points M_1 et M_2 reliés par une tige de longueur $2l$.

10 Exprimer les distances $r_1 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM_1}}\|$ et $r_2 = \|\overrightarrow{\mathrm{OM_2}}\|$ en fonction de r_0, l et θ

Réponse

On a $\overrightarrow{\mathrm{OM_1}} = \overrightarrow{\mathrm{OS}} + \overrightarrow{\mathrm{SM_1}} \Rightarrow r_1 = \sqrt{r_0^2 + l^2 + 2r_0 l\cos(\theta)}$. De même, on trouve $r_2 = \sqrt{r_0^2 + l^2 - 2r_0 l\cos(\theta)}$

◇

On rappelle le développement limité à l'ordre 2 suivant :

$$\frac{1}{\sqrt{1+x}} = 1 - \frac{1}{2}x + \frac{3}{8}x^2 + o(x)$$

De plus, on admet que l'énergie cinétique $\mathcal{E}_c$ du satellite s'exprime selon $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}M_s l^2\dot{\theta}^2$

11 Montrer que l'énergie mécanique du système s'écrit en procédant aux approximations qui s'imposent $(l \ll r_0)$:

$$\mathcal{E}_m \approx -\frac{GM_TM_S}{r_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l}{r_0}^2(3\cos^2(\theta) - 1)\right) + \frac{1}{2}M_S l^2\dot{\theta}^2$$

Réponse

On commence par s'intéresser aux termes d'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,i} = -k/r_i$ avec $k = GM_Tm$. On obtient ainsi en posant $\varepsilon = l/r_0$:

$$\mathcal{E}_{p,12} = -\frac{k}{r_{12}} = -\frac{k}{\sqrt{r_0^2 + l^2 \pm 2r_0 l\cos(\theta)}} = -\frac{k}{r_0}\frac{1}{\sqrt{1 + \varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\cos(\theta)}} \tag{2}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,12} = -\frac{k}{r_0}\left(1 - \frac{1}{2}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\cos(\theta)) + \frac{3}{8}(\varepsilon^2 \pm 2\varepsilon\cos(\theta))^2\right) + o(\varepsilon^2) \tag{3}$$

On peut maintenant ajouter les deux termes d'énergies potentielles (avec encore un terme quadratique à développer puis simplifier à droite du terme d'énergie potentielle) :

$$\mathcal{E}_{p,1} + \mathcal{E}_{p,2} = -\frac{k}{r_0}\left(2 - \varepsilon^2 + 3\varepsilon^2\cos^2(\theta)\right) + o(\varepsilon^2)$$

On combine ensuite ce terme avec l'expression de l'énergie cinétique obtenue à la question précédente :

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = -\frac{GM_TM_S}{r_0}\left(1 + \frac{1}{2}\frac{l}{r_0}^2\left(3\cos^2(\theta) - 1\right)\right) + \frac{1}{2}M_S(l\dot{\theta})^2$$

car $m = M_S/2$, d'où le résultat !

◇

12 En déduire l'équation du mouvement. Indiquer les positions d'équilibre et préciser, pour celle(s) qui sont stable(s), la pulsation des petites oscillations autour de ces dernières. Conclure.

Réponse

On applique le TPM dans le référentiel géocentrique au satellite qui n'est soumis à aucune force non conservative. On en déduit :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t} = 0 \Rightarrow -\frac{GM_T}{r_0}\frac{l}{r_0}^{2} 3\cos(\theta)(-\sin(\theta))\dot{\theta} + l^2\dot{\theta}\ddot{\theta} = 0$$
$$\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3GM_T}{2r_0^3}\sin(2\theta) = 0 \Rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + 3\Omega^2\frac{\sin(2\theta)}{2} = 0}$$

On est à l'équilibre lorsque $\ddot{\theta} = 0$ soit ici pour $\theta = p\frac{\pi}{2}$, $p \in \mathbb{N}$.

- Pour $\theta = 0 + x$ avec $x << 1$, on a comme équation du mouvement $\ddot{x} + 3\Omega^2 x = 0$ qui est l'équation de l'oscillateur harmonique donc la position d'équilibre est stable et la pulsation des petites oscillations vaut $\omega_0 = \Omega\sqrt{3}$
- Pour $\theta = \pi/2 + x$, on a maintenant $\ddot{x} - \omega_0^2 x$. Cette position d'équilibre n'est pas stable.
- Pour $\theta = \pi + x$, on a $\ddot{x} + \omega_0^2 x = 0$ et on retrouve la même équation que pour la première position d'équilibre. Cette position d'équilibre est donc aussi stable et de pulsation ω_0
- Pour $\theta = 3\pi/2 + x$, on obtient au final $\ddot{x} - \omega_0^2 x$: équilibre instable.

Ainsi, seules les positions verticale (à l'endroit ou à l'envers) sont stables. En cas de léger décalage, le satellite va donc osciller autour de la position d'équilibre verticale et donc toujours présenter le même côté vers la Terre.