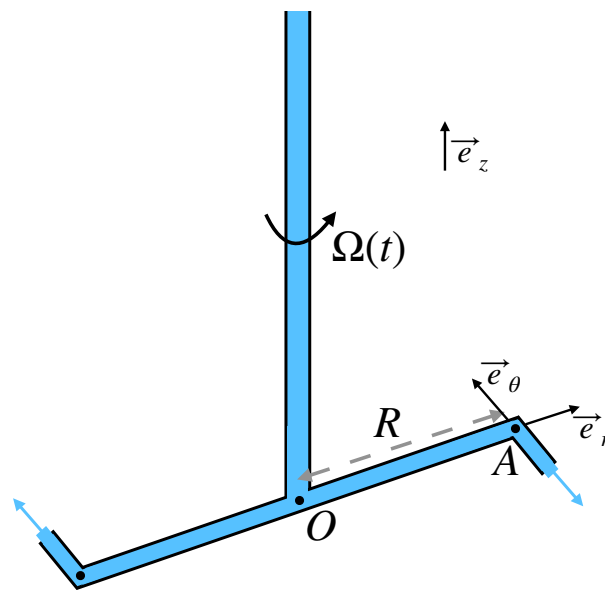


Sujet 1 – corrigé

I Tourniquet hydraulique

Un tourniquet hydraulique possède deux bras identiques OA et OB de longueur R et de section S . Chaque bras est terminé par un tube de même section S faisant avec le bras un angle $\alpha = \pi/2$, de longueur négligeable devant R . L'eau, supposée incompressible de masse volumique μ , est injectée dans le tourniquet hydraulique par le tube centrale de section $2S$ avec un débit volumique D_v constant.



On note J le moment d'inertie par rapport à l'axe Oz du tourniquet (ce dernier inclut l'eau présente dans le tourniquet) et $\vec{\Omega} = \Omega(t)\vec{e}_z$ son vecteur rotation.

1. Exprimer la vitesse d'éjection du fluide \vec{u} en A dans le référentiel du laboratoire en fonction de Ω , R , D_v , S et \vec{e}_θ .

Réponse :

La vitesse d'éjection relative du fluide notée u' est telle que $D_v = 2Su' \Rightarrow u' = D_v/(2S)$. On observe de plus que $\vec{u} = -u'\vec{e}_\theta + \Omega R\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{u} = (\Omega R - D_v/(2S))\vec{e}_\theta$.

2. A l'aide d'un bilan de moment cinétique, obtenir l'équation suivante

$$\frac{dL_z}{dt} = J\frac{d\Omega}{dt} + \mu D_v R \left(R\Omega - \frac{D_v}{2S} \right)$$

Réponse :

On considère le système fermé comprenant le tourniquet et le fluide en son sein à l'instant t puis, le tourniquet, et le fluide déplacé (dont une partie est sortie) à l'instant $t + dt$. On a alors

$$L_z(t) = J\Omega(t) \quad (21.1)$$

$$L_z(t + dt) = J\Omega(t + dt) + 2dm(R\vec{e}_r \wedge \vec{u}(t + dt)) \cdot (\vec{e}_z) \quad (21.2)$$

$$= J\Omega(t + dt) + 2dmR(\Omega(t + dt)R - D_v/(2S)) - 0 \quad (21.3)$$

En effet, le fluide déplacé au sein de la colonne centrale n'implique pas de changement de moment cinétique car on a $r = 0$ à cet endroit. Le facteur 2 provient du fait qu'il y a deux branches symétriques.

De plus, on a $dm = \mu D_v/2$ (conservation du débit massique). En combinant ces résultats, on obtient :

$$\frac{dL_z}{dt} = \lim_{dt \rightarrow 0} \frac{L_z(t+dt) - L_z(t)}{dt} = J \frac{d\Omega}{dt}(t) + 2\mu \frac{D_v}{2} R(\Omega(t)R - D_v/(2S)) \quad (21.4)$$

$$\Rightarrow \frac{dL_z}{dt} = J \frac{d\Omega}{dt}(t) + \mu D_v R \left(\Omega(t)R - \frac{D_v}{2S} \right) \quad (21.5)$$

d'où le résultat.

3. Obtenir finalement l'expression de $\Omega(t)$ sachant qu'à l'instant initial, le tourniquet est à l'arrêt. On utilisera pour cela le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au système fermé précédent.

Réponse :

L'application du TSMC au système fermé dans un référentiel galiléen donne

$$\frac{dL_z}{dt} = M_{Oz}(\vec{P}) + M_{Oz}(\vec{R}_n) + M_{Oz}(\text{pression}) = 0$$

En effet, les forces extérieures agissant sur le tourniquet sont toutes verticales et que le champ de pression est uniforme. On en déduit alors que

$$\frac{d\Omega}{dt}(t) = \mu D_v R \left(\frac{D_v}{2S} - \Omega(t)R \right) \Rightarrow \frac{d\Omega}{dt} + \underbrace{\mu D_v R^2}_{1/\tau} \Omega = \mu D_v R \frac{D_v}{2S}$$

On obtient une équation différentielle d'ordre 1 que l'on peut aisément résoudre à l'aide de la C.I. fournie

$$\Omega(t) = \frac{D_v}{2SR} \left(1 - e^{-t/\tau} \right)$$

Sujet 2 – corrigé

I Fuite dans un réservoir

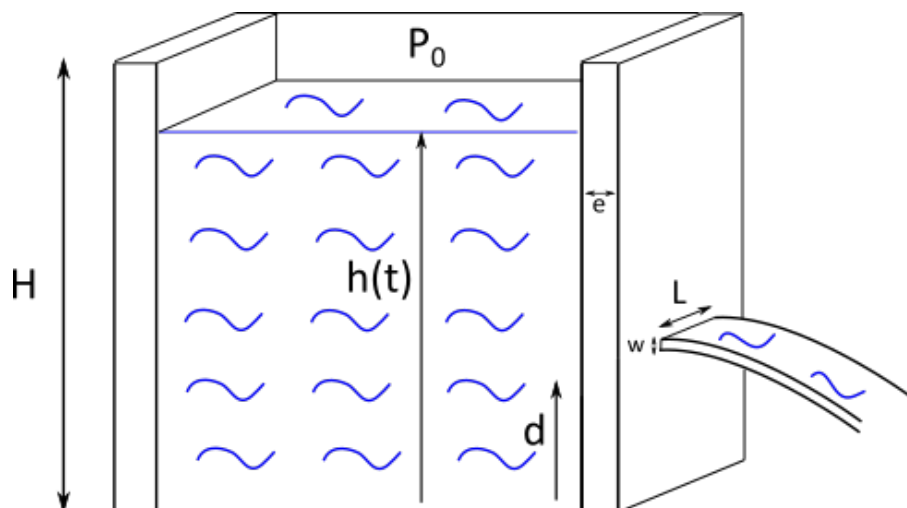
Un réservoir d'eau pour les pompiers en cas de feu de forêt a les dimensions suivantes : Largeur : 4m, Hauteur : 3m, Longueur : 5m. L'épaisseur du mur est $e = 20$ cm.

À 50 cm du sol, il y a une fissure horizontale de longueur $L = 10$ cm dans la paroi et de largeur w . Dans la fissure, l'écoulement suit une loi de Poiseuille telle que le débit volumique vaut $Q = \frac{w^3 \Delta P L}{12 \eta e}$ avec Q le débit volumique, et ΔP la perte de charge.

Le réservoir, initialement rempli totalement, voit sa hauteur d'eau diminuer de 20 cm en 2 mois.

1. Estimer la largeur w de la fissure.

Réponse :



L'écoulement étant très lent, on peut supposer un profil de pression statique dans le réservoir. D'après le principe de la statique des fluides, la pression dans l'eau au niveau de la fissure vaut $P(t) = P_0 + \rho g(h(t) - d)$. On a donc une perte de charge à travers la fissure $\Delta P = \rho g(h(t) - d)$.

Le débit à travers la fissure a donc pour expression $Q(t) = \frac{w^3 L \rho g(h(t) - d)}{12 \eta e}$.

Ce débit peut également s'écrire $Q(t) = -S \dot{h}$, où S est la section du réservoir : $S = 4 \times 5 = 20$ m².

La hauteur $h(t)$ vérifie donc l'équation différentielle

$$-S \dot{h} 12 \eta e = w^3 L \rho g(h(t) - d) \Rightarrow \dot{h} + \frac{w^3 L \rho g}{12 S \eta e} h(t) = \frac{w^3 L \rho g d}{12 S \eta e}$$

$$h(t) = A e^{-t/\tau} + d; \quad h(0) = H = A + d \Rightarrow A = H - d$$

$$h(t) = (H - d) e^{-t/\tau} + d; \quad \text{avec} \quad \tau = \frac{12 S \eta e}{w^3 L \rho g}$$

Le réservoir se vide de $x = 20$ cm en $t_1 = 2$ mois :

$$h(t_1) = H - x = (H - d) e^{-t_1/\tau} + d \Rightarrow (H - d)(1 - e^{-t_1/\tau}) = x \Rightarrow 1 - e^{-t_1/\tau} = \frac{x}{H - d}$$

$$-\frac{t_1}{\tau} = \ln\left(1 - \frac{x}{H-d}\right) \Rightarrow \tau = \frac{-t_1}{\ln\left(1 - \frac{x}{H-d}\right)} = \frac{-2}{\ln\left(1 - \frac{0,20}{3-0,5}\right)} = 24 \text{ mois}$$

Et enfin,

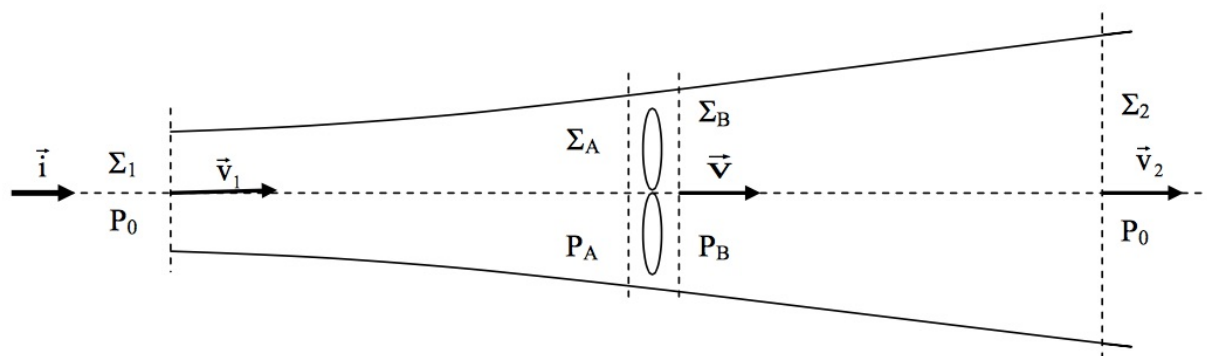
$$\tau = \frac{12S\eta e}{w^3 L \rho g} \Rightarrow w^3 = \frac{12S\eta e}{L \rho g \tau} = \frac{12 \cdot 20 \cdot 10^{-3} \cdot 0,20}{0,10 \cdot 10^3 \cdot 10 \cdot 24 \cdot 30 \cdot 24 \cdot 3600} \Rightarrow \boxed{w = 9 \cdot 10^{-5} \text{ m}}$$

La fissure a donc une largeur d'environ 0,1 mm.

Sujet 3 – corrigé

I Éolienne

On s'intéresse dans cette partie au fonctionnement d'une éolienne constituée d'une hélice à deux pâles et schématisée sur la figure ci-dessous. On représente sur ce schéma un tube de courant.



Pour l'étude, on se place dans le référentiel terrestre supposé galiléen et on néglige la pesanteur. On suppose un régime permanent établi. L'air est considéré comme un fluide parfait et incompressible, de masse volumique ρ et de débit massique D . La figure fait apparaître un tube de courant d'air traversant l'hélice.

La pression à grande distance de l'hélice, à savoir au niveau des surfaces d'entrée Σ_1 et de sortie Σ_2 de sections respectives S_1 et S_2 , est égale à la pression atmosphérique P_0 .

La pression est uniforme sur une section droite du tube de courant. On note P_A et P_B les pressions au niveau des surfaces Σ_A et Σ_B de sections S_A et S_B . On suppose $S_A = S_B = S$ et on admet que $v_A = v_B = v$.

1. Déterminer une relation entre S_1 , S_2 , v_1 et v_2 .

Réponse :

On a par conservation du débit volumique $\vec{S}_1 \cdot \vec{v}_1 = \vec{S}_2 \cdot \vec{v}_2$. Les surfaces de contrôles étant orienté dans le sens du mouvement, on en déduit $S_1 v_1 = S_2 v_2$.

2. Exprimer P_A en fonction de P_0 , ρ , v_1 et v . Idem pour P_B en fonction de P_0, v_2, v et ρ .

Réponse :

On peut appliquer le théorème de Bernoulli le long d'une ligne de courant (la ligne centrale) :

$$P_A + \rho g z_A + \frac{1}{2} \rho v_A^2 = P_1 + \rho g z_1 + \frac{1}{2} \rho v_1^2$$

On sait que $Z_A = Z_1$ d'où l'on déduit :

$$P_A = P_0 + \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v^2)$$

Par le même raisonnement, on trouve $P_0 - P_B = \frac{1}{2} \rho (v^2 - v_2^2) \Rightarrow P_B = P_0 + \frac{1}{2} \rho (v_2^2 - v^2)$

3. Déterminer la force de pression exercée sur l'hélice en fonction de ρ , S , v_1 et v_2 .

Réponse :

Il suffit d'effectuer un bilan de pression entre les deux faces des pales

$$\vec{F} = (P_A S_B - P_B S_B) \vec{i} = (P_A - P_B) S \vec{i} = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v^2 + v^2 - v_2^2) S \vec{i} = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) S \vec{i}$$

4. Montrer à l'aide d'un bilan de quantité de mouvement que $\vec{F} = D(v_1 - v_2)\vec{i}$ où D représente le débit massique d'air. En déduire une relation entre v , v_1 et v_2 .

Réponse :

A l'instant t , on a $\vec{P}(t) = \vec{P}_{int} + dx_1 \rho S_1 v_1 \vec{i}$ puis à l'instant $t' = t + dt$, on a $\vec{P}(t + dt) = \vec{P}_{int} + dx_2 \rho S_2 v_2 \vec{i}$. L'application du PFD à ce système fermé donne :

$$\vec{P}(t + dt) - \vec{P}(t) = \underbrace{-\vec{F} dt}_{\text{- car F exercé sur les pales}} + \underbrace{(P_2 S_2 - P_1 S_1) dt}_{=0} \Rightarrow \left(\frac{dx_2}{dt} \rho S_2 v_2 - \frac{dx_1}{dt} \rho v_1 S_1 \right) \vec{i} = -\vec{F}$$

La résultante des forces de pression est bien nulle car $P = P_0$ uniforme à l'extérieur du tube de courant. Or on a $D = \rho S_1 v_1 = \rho S_2 v_2 = \rho S v$ d'où $\vec{F} = D(v_1 - v_2)\vec{i}$. On peut ensuite comparer les deux expressions pour la force \vec{F} :

$$D(v_2 - v_1) = \frac{1}{2} \rho (v_1^2 - v_2^2) S \Rightarrow \rho S v = \frac{1}{2} \rho (v_1 + v_2) S \Rightarrow v = \frac{v_1 + v_2}{2}$$

5. Exprimer la puissance reçue par l'hélice en fonction de ρ , v_1 , S et du rapport $x = v_2/v_1$ à l'aide d'un bilan d'énergie cinétique. Pour quelle valeur de x cette puissance est-elle maximale ? Exprimer \mathcal{P}_{max} .

Réponse :

Pour un système fermé, on a $\frac{dE_c}{dt} = -P_{fluide \rightarrow hélice}$. Ici, on a $E_c(t + dt) - E_c(t) = \frac{1}{2} \rho v_2^2 dx_2 S_2 - \frac{1}{2} \rho v_1^2 dx_1 S_1$ d'où l'on déduit :

$$P_{fluide \rightarrow hélice} = \frac{1}{2} \rho (S_1 v_1^3 - S_2 v_2^3) = \frac{1}{2} \rho S v (v_1^2 - v_2^2) = \frac{1}{4} \rho S v_1^3 (1 + x)(1 - x^2)$$

Cette puissance est maximale lorsque :

$$\frac{dP}{dx} = 0 \Rightarrow (-2x)(1 + x) + (1 - x^2) = 0 \Rightarrow 1 - x = 2x \Rightarrow x = \frac{1}{3}$$

On en déduit $\mathcal{P}_{max} = \frac{\rho S}{4} v_1^3 \left(\frac{8}{9} \times \frac{4}{3} \right) = \frac{8}{27} \rho S v_1^3$

6. Le rendement théorique est défini par $\eta = \mathcal{P}/\mathcal{P}_c$ où \mathcal{P}_c est la puissance cinétique en entrée de l'hélice. Déterminer η en fonction de x . Calculer \mathcal{P}_{max} et η_{max} . On donne $\rho = 1,3 \text{ kg} \cdot \text{m}^{-3}$, $v_1 = 12 \text{ m/s}$ et $S = 1,4 \text{ m}^2$.

Réponse :

La puissance cinétique représente l'énergie cinétique entrant dans le système pendant l'instant dt soit $P_c = \frac{1}{2} S \frac{dx}{dt} \rho v_1^2 = \frac{1}{2} \rho S v v_1^2$. On en déduit :

$$\eta = \frac{\mathcal{P}}{P_c} = \frac{v_1(1 - x^2)(1 + x)}{v_1(1 + x)} = 1 - x^2$$

Sujet 4 – corrigé

I Diagramme E-pH du soufre ; utilisation pour un dosage

On donne les potentiels standards E° à 25 °C (à $pH = 0$) :

- O_2 / H_2O : 1,23 V
- I_3^- / I^- : 0,54 V
- IO_3^- / I_3^- : 1,17 V
- $S_4O_6^{2-} / S_2O_3^{2-}$: 0,09 V

De plus, on prendra $RT \ln(10)/F \approx 0,06$ V à 25 °C

A Diagrammes $E - pH$ simplifié du soufre et de l'iode en solution aqueuse

Le diagramme $E - pH$ du soufre est fourni en annexe. On a pris en compte les espèces suivantes $S(s)$, $HSO_4^-(aq)$, $SO_4^{2-}(aq)$, $H_2S(aq)$, $HS^-(aq)$ et $S^{2-}(aq)$. Chaque frontière a été tracée en posant que la concentration de chaque espèce dissoute y est égale à $1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

1. Identifier, sur le graphe en annexe, chacune des espèces représentées par les lettres $A, B, \dots F$. On justifiera les attributions.

Réponse :

On considère les nombres d'oxydations du soufre pour espèces mentionnées. On remarque que NO = VI pour HSO_4^- et SO_4^{2-} , que NO = 0 pour S puis que NO = -II pour les trois espèces restantes. Pour un même pH , les espèces sont placées par NO croissant quand E augmente. De plus, pour un couple acide base X/Y, le domaine de stabilité de la base est à droite et celui de l'acide est à gauche.

On en déduit $A = HSO_4^-$ puis $D = SO_4^{2-}$ pour les espèces les plus oxydées. $B = S$ puis finalement $C = H_2S$, $E = HS^-$ et $F = S^{2-}$ en écrivant équilibrant les demies réactions acide/base.

2. Retrouver la pente théorique de la frontière entre les espèces D et F .

Réponse :

Il convient d'étudier l'équilibre entre les espèces SO_4^{2-} et S^{2-} . On obtient



On en déduit à l'aide de la relation de Nernst

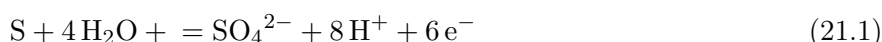
$$E = E^\circ + \frac{0,06}{8} \log \left(\frac{[SO_4^{2-}][H^+]^8}{[S^{2-}]} \right)$$

d'où une pente de $-0,06$ V

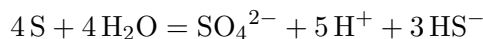
3. On ajoute du soufre dans un bécher contenant de l'eau désaérée, puis on introduit de la soude concentrée jusqu'à ce que le soufre disparaisse. Décrire les phénomènes observés et écrire l'équation de la réaction observée. Comment nomme-t-on une telle réaction ?

Réponse :

La soude va se dissoudre dans le milieu aqueux et contribuer à augmenter assez fortement le pH . Nous allons alors quitter le domaine de stabilité du soufre et les espèces $D = SO_4^{2-}$ et $E = HS^-$ vont apparaître (si le pH n'excède pas 13,5, ce qui est difficile avec de la soude). On note les deux réactions redox faisant intervenir les espèces mentionnées :



Et on les combine pour obtenir au final :

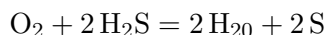


Il s'agit d'une réaction de dismutation car S réagit avec lui même. On aurait aussi pu équilibrer cette réaction avec les ions OH^- au vu de l'ajout de soude.

4. On laisse, à l'air libre, pendant plusieurs heures, une solution de H_2S . On constate alors la présence d'un trouble jaunâtre. Proposer une interprétation.

Réponse :

On peut superposer le diagramme $E - pH$ de l'eau à celui du soufre (principalement le couple $\text{O}_2 / \text{H}_2\text{O}$ dont le potentiel standard est rappelé et pour lequel la pente vaut $-0,06\text{ V}$. On observe alors que O_2 et H_2S ont des domaines disjoint et vont alors réagir complètement (la réaction peut être lente !) selon la réaction



Ainsi, le soufre (solide) va troubler la solution.

On remarque de plus que le diagramme $E - pH$ de l'iode est tracé et superposé à celui du soufre. Il n'y a donc aucun tracé à effectuer ici.

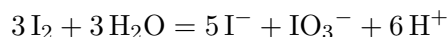
B Titrage des ions sulfure

On cherche à déterminer la concentration des ions sulfure dans une solution de sodium Na_2S . On lit le mode opératoire suivant :

- **étape 1** Dans 20,0 mL d'une solution de diiode à $0,10\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$, on ajoute 20 mL d'hydroxyde de sodium (soude) à $2\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. La coloration initiale jaunâtre disparaît.
 - **étape 2** on introduit 20,0 mL de la solution de sulfure de sodium Na_2S à titrer (de concentration approximative $1 \times 10^{-2}\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$). On chauffe légèrement pendant 10 min, tout en agitant.
 - **étape 3** après avoir refroidi, on acidifie la solution par addition d'acide sulfurique dilué et la solution se colorise (jaune brun)
 - **étape 4** on effectue le titrage par une solution de thiosulfate de sodium $2\text{Na}^+, \text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ à $0,10\text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$. Le volume versé à l'équivalence, lorsque la couleur jaunâtre disparaît à nouveau, est de 22,4 mL.
5. Interpréter le mode opératoire à l'aide des diagrammes $E - pH$ et indiquer les réactions mises en jeu au cours des différentes étapes de ce protocole en précisant les équation-bilans.

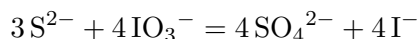
Réponse :

- étape 1: Lors de l'ajout de soude, I_2 va se décomposer en IO_3^- et en I^- selon la réaction



Cette réaction est totale et le réactif limitant est le diiode I_2 .

- étape 2: L'espèce à titrer (sulfure de sodium) va réagir avec IO_3^- car leurs domaines sont disjoints selon la réaction totale



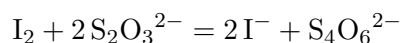
Cette fois si le réactif limitant est l'ion soufre.

- étape 3: La solution se recolorise car I_2 réapparaît (médiatisation) selon :



Cette réaction est encore une fois totale. Les deux réactifs sont issus de la dismutation de I_2 à la première étape. Or on observe que la deuxième étape a consommé des ions IO_3^- . Cette dernière espèce est donc limitante ici.

- étape 4 : les ions $\text{S}_2\text{O}_3^{2-}$ réagissent avec le diiode selon la réaction encore une fois totale (domaines disjoints) :



Cette fois, le réactif limitant est I_2 .

6. En déduire la concentration de la solution d'ions sulfure.

Réponse :

On observe en combinant les étapes que

$$n(\text{S}_2^{2-}) = \frac{1}{4} (n(\text{I}_{2,\text{intro}}) - n(\text{I}_{2,\text{dose}}))$$

De plus, $n(\text{I}_{2,\text{dose}}) = 1,1 \times 10^{-3} \text{ mol}$ (réaction de titrage) puis $n(\text{I}_{2,\text{intro}}) = 2,0 \times 10^{-3} \text{ mol}$. On en déduit que

$$n(\text{S}_2^{2-}) = 0,225 \text{ mol} \Rightarrow C = \frac{n(\text{S}_2^{2-})}{V(\text{S}_2^{2-})} \approx 1,1 \times 10^{-2} \text{ mol/L}$$

Cette valeur est proche de celle indiquée par l'énoncé, ce qui est rassurant.

