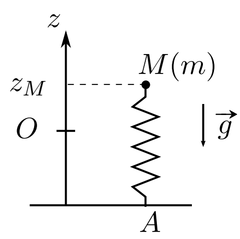
Sujet 1 – corrigé

I Question de cours

Faire l'analogie complète entre les deux systèmes harmoniques LC libre et ressort sans frottement : présentation, conditions initiales, équations différentielles **sans démonstration**, correspondance entre les grandeurs, tracer de la solution **dans l'espace des phases** sans résolution et commenter sur la conservation de l'énergie visible dans le graphique.

II Ressort vertical

On considère un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'extrémité inférieure est en contact avec un support horizontal au point A. Une masse m assimilable à un point matériel M est accrochée à l'autre extrémité. La masse a un mouvement rectiligne vertical.
Dans un premier temps, on suppose que le point A est fixe. On définit l'axe vertical ascendant (O,z). On note z_M la coordonnée de la masse. A l'équilibre, $z_M = 0$.



1. Établir l'équation différentielle vérifiée par z_M.

Réponse :
On commence par définir les grandeurs d'intérêt. D'après le schéma, $z_M = OM$. Or, on nous dit que $z_M = 0$ à l'équilibre. On note donc $AO = \ell_{\text{eq}}$ la longueur d'équilibre du ressort. Ainsi, la longueur du ressort AM s'exprime comme

$$AM = \ell = \ell_{\text{eq}} + z_M$$

On peut donc faire le **bilan des forces** :

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \overrightarrow{P} = -mg\overrightarrow{u}_z \\ \textbf{Ressort} & \overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = -k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u}_z \\ & \overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = -k(\ell_{\text{eq}} + z_M - \ell_0)\overrightarrow{u}_z \end{array}$$

Le **PFD** donne ainsi

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} = -mg - kz_M - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$$
$$\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} + kz_M = k(\ell_0 - \ell_{\text{eq}}) - mg$$

Or, z_M vaut 0 à l'équilibre, donc le terme de droite doit être nul. On détermine donc ℓ_{eq} :

$$k(\ell_0 - \ell_{\text{eq}}) - mg = 0 \Leftrightarrow k(\ell_0 - \ell_{\text{eq}}) = mg \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{m}{k}g}$$

On trouve donc bien

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}z_M = 0}$$

2. On suppose que la masse est lâchée depuis la position $z_M(t = 0) = z_0$ et sans vitesse initiale. Exprimer $z_M(t)$ pour $t \geq 0$.

Réponse :
L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$z_M(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Celle-ci est souvent plus pratique pour trouver les constantes d'intégration. On trouve A avec la première condition initiale : $z_M(0^+) = z_0$. En effet,

$$z_M(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A$$

donc $A = z_0$.

On trouve B avec la seconde condition initiale : $v(0) = 0 = \frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t}(0)$. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t)$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0$$

Donc $B = 0$ ($\omega_0 \neq 0$). Ainsi,

$$\boxed{z_M(t) = z_0\cos(\omega_0 t)}$$

3. Exprimer l'énergie potentielle élastique. On prendra l'origine de cette énergie en $z_M = 0$.

Réponse :
L'énergie potentielle élastique est, comme toute énergie potentielle, définie à une constante près, servant de référence au calcul. On ajoute donc un terme A à déterminer dans l'expression de $E_{p,el}$ du cours, qu'on trouve en prenant $E_{p,el}(z_M = 0) = 0$ et en utilisant l'expression de ℓ_{eq} trouvée question 1 :

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell_{\text{eq}} + z_M - \ell_0)^2 + A$$
$$z_M = 0 \Leftrightarrow E_{p,el} = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}k(\underbrace{\ell_{\text{eq}} - \ell_0}_{-\frac{m}{k}g})^2 + A \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}k\left(\frac{m}{k}g\right)^2$$

Ainsi,

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(z_M + \underbrace{\ell_{\text{eq}} - \ell_0}_{-\frac{m}{k}g})^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{m}{k}g\right)^2 \Leftrightarrow E_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(z_M^2 - 2z_M\frac{m}{k}g + \frac{m^2}{k^2}g^2\right) - \frac{1}{2}k\left(\frac{m^2}{k^2}g^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{E_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(z_M^2 - 2\frac{mgz_M}{k}\right)}$$

4. Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur. On prendra l'origine de cette énergie en $z_M = 0$.

Réponse :
$E_{p,p} = mgz_M$

5. Montrer que l'énergie mécanique est conservée.

Réponse :

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{z}_M)^2 + \frac{1}{2}k(z_M^2 - 2mgz_M/k) + mgz_M = \frac{1}{2}m(\dot{z}_M)^2 + \frac{1}{2}kz_M^2 = kz_0^2/2$$

On suppose désormais que le ressort est posé sur le sol et non fixé

6. Quelle est la condition sur z_0 pour que le ressort ne décolle pas du support.

Réponse :
On étudie cette fois le système **entier** masse + ressort, dont le centre de masse se situe en M. On repère donc le système par son altitude z_M. C'est ce système entier qui subit la réaction du support. Les forces **extérieures** sont donc le **poids** et la **réaction** du support : la force du ressort est une force interne qui n'apparaît pas dans le bilan des forces extérieures.

Le PFD donne donc

$$m\ddot{z}_M = -mg + R$$

Ici, il faut réussir à traduire « le ressort ne décolle pas du support ». Mathématiquement, ça veut dire que le support exerce toujours une force sur le système, c'est-à-dire

$$\boxed{R > 0} \Leftrightarrow m\ddot{z}_M + mg > 0$$

On développe et on utilise l'expression de z_M donnée plus tôt :

$$\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} = -z_0{\omega_0}^2\cos(\omega_0 t)$$
$$\Rightarrow m\ddot{z}_M + mg > 0 \Leftrightarrow -z_0{\omega_0}^2 \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{=1 \text{ au maximum}} > -g \Leftrightarrow z_0\frac{k}{m} < g$$
$$\Leftrightarrow \boxed{z_0 < \frac{mg}{k}}$$

Sujet 2 – corrigé

I Question de cours

Faire un bilan d'énergie pour le circuit LC libre, démontrer la conservation de l'énergie totale, tracer la forme du graphique, et faire un bilan d'énergie pour le ressort horizontal sans frottement, démontrer la conservation de l'énergie mécanique, tracer le graphique correspondant.

II Vibration d'une molécule

La fréquence de vibration de la molécule de chlorure d'hydrogène HCl est $f = 8{,}5 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz}$. On donne les masse atomiques molaires : $M_\mathrm{H} = 1{,}0\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$ et $M_\mathrm{Cl} = 35{,}5\,\mathrm{g\,mol^{-1}}$, ainsi que le nombre d'Avogadro : $N_A = 6{,}02 \times 10^{23}\ \mathrm{mol^{-1}}$.
On modélise la molécule par un atome d'hydrogène mobile relié à un atome de chlore fixe par un "ressort" de raideur k.

Données numériques. $(1{,}7\pi)^2/6{,}02 \approx 4{,}738065$, $\sqrt{\frac{6{,}63\times6{,}02\times10}{34\pi^2}} \approx 1{,}09060$ et $2\pi \times 8{,}5 \times 1{,}09 \approx 58{,}2136997$.

1. Justifier l'hypothèse d'un atome de chlore fixe.

   Réponse :
   La masse de l'atome de chlore est beaucoup plus grande que celle d'un atome d'hydrogène.

2. Exprimer puis calculer k.

   Réponse :
   La fréquence d'oscillation d'un oscillateur harmonique est :

$$f = \frac{1}{2\pi}\sqrt{\frac{k}{m_\mathrm{H}}} \qquad ; \qquad m_\mathrm{H} = \frac{M_\mathrm{H}}{N_A},$$

   donc

$$\boxed{k = (2\pi f)^2 \times \frac{M_\mathrm{H}}{N_A}} = \frac{(1{,}7\pi)^2}{6{,}02} \times 10^{28-3-23} = \boxed{4{,}7 \times 10^2\,\mathrm{N\,m^{-1}}}$$

On admet que l'énergie mécanique de la molécule est égale à $\frac{1}{2}hf$ où $h = 6{,}63 \times 10^{-34}\,\mathrm{J\,s}$ est la constante de Planck.

3. Calculer l'amplitude du mouvement de l'atome d'hydrogène.

   Réponse :
   On sait que :

$$E = \frac{1}{2}kA^2 \quad \Rightarrow \quad \frac{1}{2}hf = \frac{1}{2}(2\pi f)^2 \times \frac{M_\mathrm{H}}{N_A}A^2,$$

   et alors :

$$\boxed{A = \sqrt{\frac{hN_A}{4\pi^2 M_\mathrm{H} f}}} = \sqrt{\frac{6{,}63 \times 6{,}02}{4\pi^2 8{,}5}} \times 10^{(23-34+3-13)/2} = \boxed{1{,}09 \times 10^{-11}\,\mathrm{m}},$$

   ce qui est plus petit que la taille typique d'un atome (tout va bien).

4. Calculer sa vitesse maximale.

Réponse :
La vitesse d'un oscillateur harmonique est :

$$v(t) = 2\pi A f \cos(2\pi f t + \varphi).$$

La vitesse maximale est donc :

$$\boxed{v_{\mathrm{max}} = 2\pi A f} = 2\pi \times 1{,}09 \times 10^{-11}\,\mathrm{m} \times 8{,}5 \times 10^{13}\,\mathrm{Hz} = 5{,}8 \times 10^{3}\,\mathrm{m\,s^{-1}}.$$

Sujet 3 – corrigé

I Question de cours

Présenter le circuit RLC libre (schéma et conditions initiales), donner et **démontrer** l'équation différentielle sur u_C sous forme canonique **qu'on ne cherchera pas à résoudre**, vérifier son homogénéité, présenter les graphiques des solutions selon les valeurs de Q dans l'espace temporel **et** dans l'espace des phases (u_C, i) en donnant un approximation de la durée du régime transitoire à 95%.

II Énergie de l'oscillateur harmonique

L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique s'écrit :

$$E_m = \frac{1}{2}m\omega_0^2 x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{dx}{dt}\right)^2.$$

On suppose qu'il n'y a aucun phénomène dissipatif : l'énergie mécanique est donc constante.

Formules trigonométriques. $\cos^2\alpha = \frac{1}{2}(1+\cos(2\alpha))$ et $\sin^2\alpha = \frac{1}{2}(1-\cos(2\alpha))$

1. En utilisant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.

   Réponse :
   Puisque l'énergie mécanique est constante, il suffit de la dériver par rapport au temps :

   $$\frac{dE_m}{dt} = 0 = m\omega_0^2 x\dot{x} + m\dot{x}\ddot{x} \quad \Rightarrow \quad \omega_0^2 x + \ddot{x} = 0.$$

2. On suppose que $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de m, ω_0, A et $\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)$. Vérifier que l'énergie mécanique est bien constante.

   Réponse :
   On trouve :

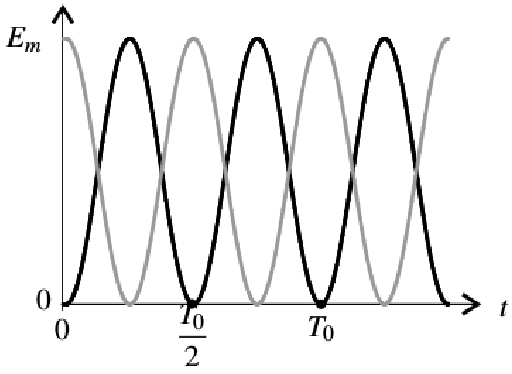
   $$E_c(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left(1-\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right) \quad ; \quad E_p(t) = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}\left(1+\cos(2\omega_0 t + 2\varphi)\right).$$

   L'énergie mécanique est bien constante :

   $$E_m = E_p + E_c = \frac{m\omega_0^2 A^2}{4}.$$

3. Tracer sur un même graphe les courbes donnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction du temps. Quelle est la fréquence de variation de ces énergies ?

   Réponse :
   Les énergies oscillent avec une pulsation de $2\omega_0$, donc une fréquence de ω_0/π.


E_m
0
0
$\frac{T_0}{2}$
T_0
t

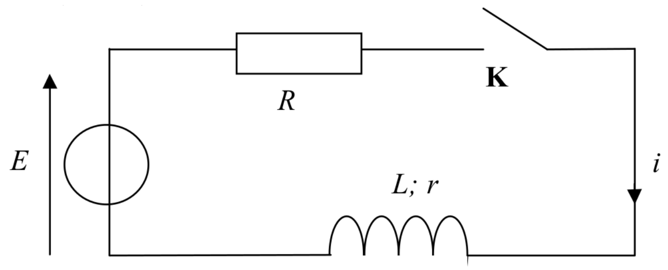
Sujet 4 – corrigé

I Question de cours

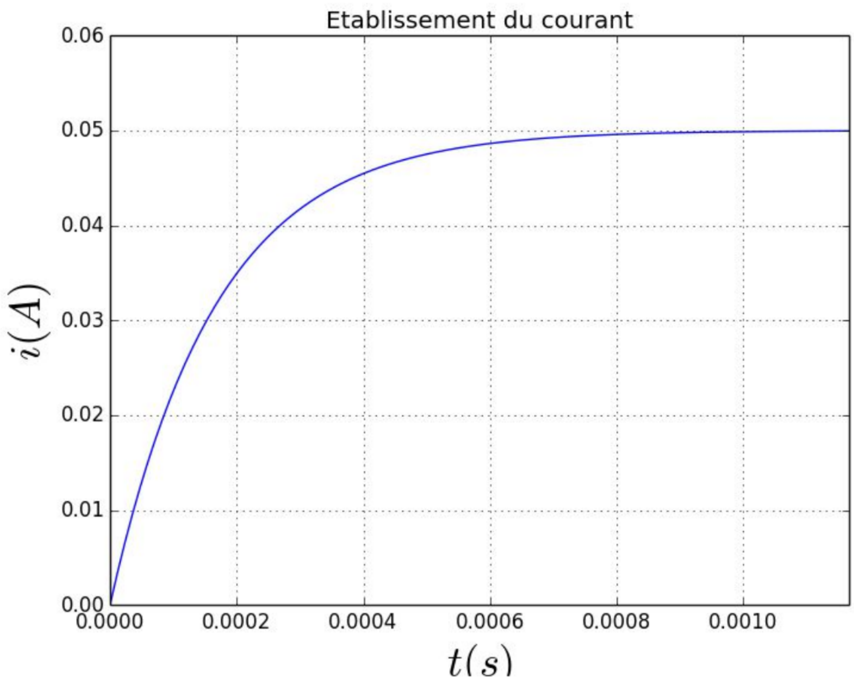
Présenter le circuit LC libre (schéma et conditions initiales), donner et **démontrer** l'équation différentielle sur u_C, vérifier son homogénéité, donner et **démontrer** la solution et la tracer en espace temporel **et** dans l'espace des phases (u_C, i).

II Charge d'une bobine

On considère une bobine d'inductance L et de résistance r selon le schéma ci-après.



L'ordinateur nous permet de suivre l'évolution de l'intensité i du courant en fonction du temps. On donne $R = 50\Omega$ et $E = 3{,}0\text{V}$.



1. Reproduire le schéma du montage et indiquer où doivent être branchées la masse M et les voies d'entrées de la carte d'acquisition pour étudier les variations de l'intensité dans le circuit.

   Réponse :
   Pour mesurer l'intensité dans le circuit, on va mesurer la tension aux borne de la résistance qui est, d'après la loi d'Ohm, une image de l'intensité (à un facteur R près).

Si la carte d'acquisition fonctionne avec une masse flottante, il suffit de prendre la tension aux bornes de la résistance.

Si la masse n'est pas flottante, alors la masse de la carte est la même que celle du générateur. Il faut alors soit inverser la résistance et la bobine dans le circuit et mesurer alors une image de $-i(t)$, soit mesurer l'opposé de la tension aux bornes de la bobine et celle aux borne du générateur et faire calculer la somme des 2.

2. Écrire l'équation différentielle vérifiée par $i(t)$.

Réponse :
En fléchant la résistance et la bobine en convention récepteurs, la loi des mailles donne :

$$E = u_R + u_L = Ri + ri + L\frac{di}{dt}.$$

L'équation différentielle vérifiée par l'intensité est alors :

$$(R + r)i + L\frac{di}{dt} = E.$$

3. Exprimer l'intensité $i(t)$ en fonction des données.

Réponse :
L'intensité est de la forme :

$$i(t) = \frac{E}{R + r} + Ae^{-t/\tau}$$

où $\tau = \frac{L}{R+r}$. À l'instant initial et par continuité de l'intensité à travers la bobine : $i(t = 0) = 0$, donc $A = \frac{-E}{R+r}$. L'intensité est alors :

$$i(t) = \frac{E}{R + r}\left(1 - Ae^{-t/\tau}\right)$$

4. Soit I l'intensité du courant électrique qui traverse le circuit en régime permanent. Donner sa valeur numérique et en déduire la résistance r de la bobine.

Réponse :
En régime permanent, $\frac{di}{dt} = 0$, donc d'après la loi des mailles : $E = (R + r)I$, c'est-à-dire

$$I = \frac{E}{R + r}$$

D'après la courbe, $I = 0{,}05\text{A}$, d'où :

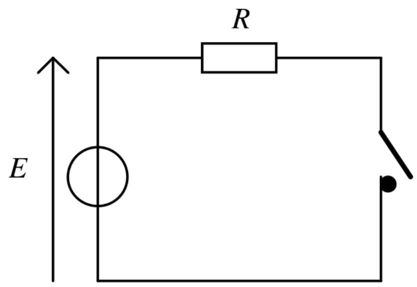
$$r = \frac{E}{I} - R = 10\Omega.$$

5. Déterminer, à partir de la courbe expérimentale, la valeur de l'inductance L de la bobine.

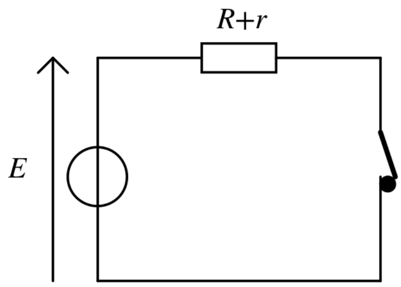
Réponse :
D'après la courbe, le temps caractéristique est $\tau = 1{,}7.10^{-4}\text{s}$. Or $L = \tau(R + r)$. On trouve alors $L = 0{,}96\text{H}$.

6. Faire les schémas équivalents du circuit à $t = 0^+$ et lorsque t tend vers l'infini.

Réponse :



t = 0+



t infini