Correction du TD

I Fréquence, longueur d'onde et indice

1) On définit $\lambda_{r,0} = 800\,\mathrm{nm}$ et $\lambda_{b,0} = 400\,\mathrm{nm}$ les longueurs d'ondes dans le vide correspondant au extrémités bleue et rouge du spectre de la lumière visible.

On sait que

$$f = \frac{c}{\lambda_0}$$

On aura donc

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= \frac{c}{\lambda_{b,0}} \\ f_r &= \frac{c}{\lambda_{r,0}} \end{aligned}} \qquad \text{avec} \quad \begin{cases} c = 3{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}} \\ \lambda_{b,0} = 400\,\mathrm{nm} = 4{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \\ \lambda_{r,0} = 800\,\mathrm{nm} = 8{,}00 \times 10^{-7}\,\mathrm{m} \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{\begin{aligned} f_b &= 7{,}50 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} = 750\,\mathrm{THz} \\ f_r &= 3{,}80 \times 10^{14}\,\mathrm{Hz} = 380\,\mathrm{THz} \end{aligned}}$$

2) Dans un milieu TLHI, la longueur d'onde change de valeur selon

$$\lambda = \frac{\lambda_0}{n}$$

Ainsi,

a – dans l'eau d'indice $n_1 = 1{,}33$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\mathrm{eau}} &= 300\,\mathrm{nm} \\ \lambda_{r,\mathrm{eau}} &= 602\,\mathrm{nm} \end{aligned}}$$

b – dans un verre d'indice $n_2 = 1{,}5$,

$$\boxed{\begin{aligned} \lambda_{b,\mathrm{eau}} &= 267\,\mathrm{nm} \\ \lambda_{r,\mathrm{eau}} &= 533\,\mathrm{nm} \end{aligned}}$$

Leur couleur ne change cependant pas puisque **la couleur d'une lumière est définie par sa fréquence/longueur d'onde dans le vide**.

3) Dans un milieu TLHI, la vitesse de la lumière se calcule avec

$$v = \frac{c}{n}$$

Avec $n = 1{,}5$, on a donc

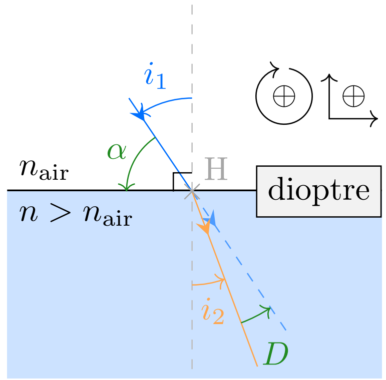
$$\boxed{v = 2{,}00 \times 10^8\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

II Détermination directe de l'indice d'un liquide

Cet exercice est d'une simplicité absolue. Et pourtant...

Données

1) Rayon incident sur un dioptre entre air et milieu d'indice n : angle avec le dioptre de 56° ;
2) Différence d'angle entre rayon incident et réfléchi (« déviation ») de 13,5°.



Résultat attendu

Indice du liquide.

Outils du cours

Loi de Snell-Descartes :

$$\boxed{n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2}$$

avec n_1 l'indice du milieu d'incidence, n_2 celui du milieu de réfraction, i_1 l'angle d'incidence et i_2 l'angle de réfraction.

Application

Un bon schéma fait attentivement est **nécessaire** ici. En effet, les angles donnés ne sont pas ceux qu'on utilise dans la relation de Snell-Descartes.

En appelant α l'angle entre le rayon et le dioptre, on a

$$\alpha + i_1 = 90°$$

donc $\boxed{i_1 = 34°}$. Et en appelant D la déviation entre les deux rayons, on a

$$i_1 = i_2 + D$$

soit $\boxed{i_2 = 20{,}5°}$. On en déduit donc

$$\boxed{n = \frac{\sin i_1}{\sin i_2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} i_1 = 34° \\ i_2 = 20{,}5° \end{cases} \quad \text{soit} \quad \boxed{n = 1.6}$$

III Détecteur de pluie sur un pare-brise

On modélise un pare-brise par une lame de verre à faces parallèles, d'épaisseur $e = 5{,}00\,\text{mm}$, d'indice $n_v = 1{,}5$. Un fin pinceau lumineux issu d'un émetteur situé en E arrive de l'intérieur du verre sur le dioptre verre → air en I avec un angle d'incidence $i = 60{,}0°$.

1) Pour savoir si le pinceau lumineux revient intégralement, il faut savoir s'il y a réflexion totale à l'interface verre→air. Pour cela, on utilise la formule de l'angle limite de réfraction

$$i_{\text{lim}} = \arcsin\left(\frac{n_2}{n_1}\right)$$

Ici, on a

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}}}{n_{\text{verre}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{\text{air}} = 1{,}00 \\ n_{\text{verre}} = 1{,}5 \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{a}} = 41{,}8°}$$

Comme $i = 60{,}0°$, $i > i_{\text{limv}\to\text{a}}$, et on a donc réflexion totale : aucun rayon ne sera réfracté.

Avec la figure ci-après, on a $\tan(i) = \frac{rmED}{2e}$, soit

$$\boxed{\text{ED} = 2e\tan(i)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e = 5{,}00\,\text{mm} \\ i = 60{,}0° \end{cases}$$

L'application numérique donne

$$\boxed{ED = 1{,}7\,\text{cm}}$$

2) Dans le cas où une fine couche d'eau recouvre le verre, on doit calculer le nouvel angle limite de réfraction pour l'interface verre→eau. Comme précédemment, on utilise la formule et on trouve

$$\boxed{i_{\text{lim,v}\to\text{e}} = 62{,}5°} \tag{2.1}$$

Cette fois, l'angle d'incidence $i < i_{\text{lim,v}\to\text{e}}$. On va donc avoir réfraction. On détermine l'angle de réfraction i_2 avec la loi de Snell-Descartes pour la réfraction : $n_2\sin(i_2) = n_1\sin(i_1)$. Dans notre cas, $n_2 = n_{\text{eau}}$, $n_1 = n_{\text{verre}}$ et $i_1 = i$; on aura donc

$$\boxed{i_2 = \arcsin\left(\frac{n_{\text{verre}}\sin(i)}{n_{\text{eau}}}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_{\text{verre}} = 1{,}5 \\ i = 60{,}0° \\ n_{\text{eau}} = 1{,}33 \end{cases}$$

D'où

$$\boxed{i_2 = 77{,}6°}$$

Ce rayon réfracté (en vert sur la figure) va ensuite rencontrer le dioptre eau→air en J, pour lequel l'angle limite de réfraction est

$$\boxed{i_{\text{lim,e}\to\text{a}} = 48{,}8°}$$

Comme $i_2 > i_{\text{lim,e}\to\text{a}}$, on a une nouvelle réflexion totale avec $r = -i_2$, ramenant le pinceau vers le dioptre eau→verre en un point K. Dans cette situation comme la valeur absolue de r est la même que celle de i_2, le principe du retour inverse de la lumière nous permet de déterminer directement que l'angle de réfraction de l'eau vers le verre i_3 a la même valeur absolue que l'angle d'incidence du verre vers l'eau i_1.

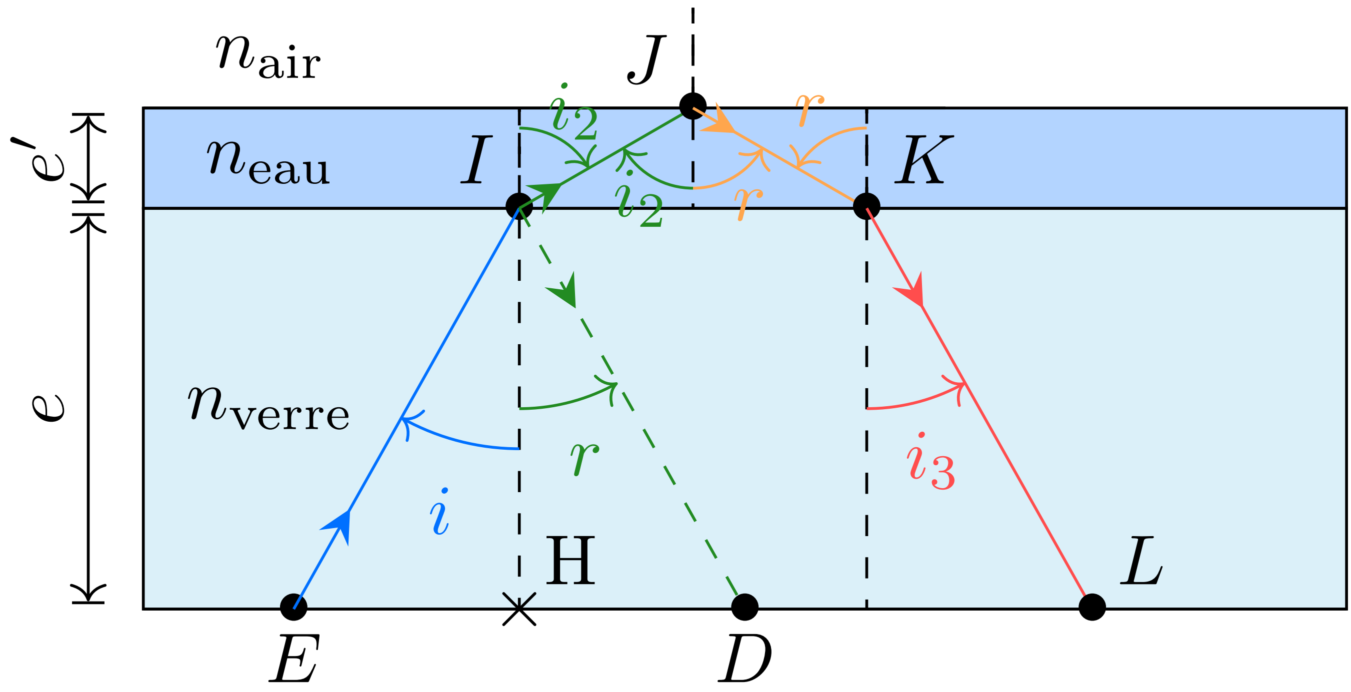
Avec le schéma ci-après, on peut déterminer que DL = IK (l'abscisse supplémentaire du trajet dans l'eau) et utiliser la trigonométrie pour trouver

$$\boxed{\text{IK} = 2e'\tan(i_2)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} e' = 1{,}00\,\text{mm} \\ i_2 = 77{,}6° \end{cases}$$

soit

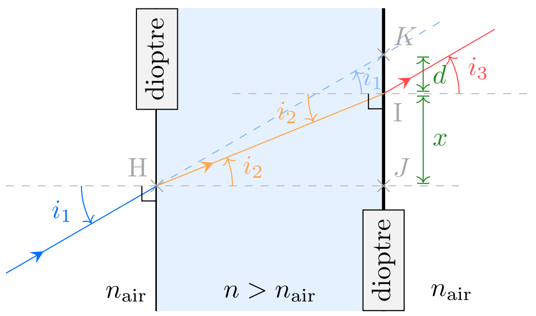
$$\boxed{\text{DL} = 0{,}9\,\text{cm}}$$

Ainsi, le rayon ne tombe plus sur le détecteur mais à côté ; un système de commande relié au détecteur peut alors déclencher les essuie-glaces.



IV Rayon lumineux à travers une vitre

Schéma



Outils

Loi de Snell-Descartes :

$$n_1 \sin i_1 = n_2 \sin i_2$$

Résultat attendu

Le rayon passe deux dioptres de l'air au verre, puis du verre à l'air. On utilise Snell-Descartes pour déterminer la direction du rayon émergent et la comparer à celle du rayon incident.

Application

En H : $\sin i_1 = n \sin i_2$

$\Leftrightarrow i_2 = \arcsin(\sin(i_1)/n) = 28°$;

Dedans : i_2 aux deux dioptres ;

En I : $\sin i_3 = n \sin i_2$;

D'où : $\cancel{n_1} \sin i_3 = \cancel{n_1} \sin i_1$

Ainsi,

$\boxed{i_3 = i_1}$

(retour inverse)

3) Comme les dioptres sont parallèles, leurs normales le sont aussi. Ainsi, les rayons émergent et incident sont parallèles.

4) $\tan(i_2) = \dfrac{\text{IJ}}{\text{HJ}} = \dfrac{x}{a}$ et $\tan(i_1) = \dfrac{x+d}{a}$, d'où $\dfrac{d}{a} = \tan(i_1) - \dfrac{x}{a} = \tan(i_1) - \tan(i_2)$, soit

$$\boxed{d = a(\tan(i_1) - \tan(i_2))} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 5{,}0\,\text{mm} \\ i_1 = 45° \\ i_2 = 28° \end{cases}$$

C'est-à-dire

$$\boxed{d = 2{,}3\,\text{mm}}$$

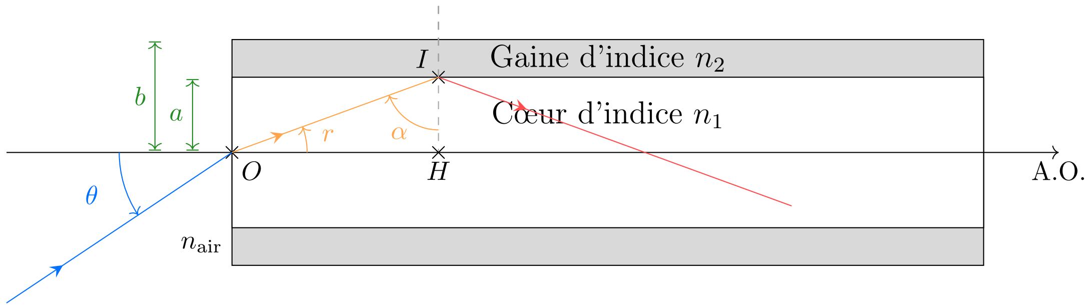


Figure 2.1 – Schéma d'une fibre optique à saut d'indice.

V Fibre optique à saut d'indice

1) En O : $\sin(\theta) = n_1 \sin(r) \Leftrightarrow \boxed{\sin(r) = \dfrac{\sin(\theta)}{n_1}}$;

OIH : $\alpha = \dfrac{\pi}{2} - r$;

En I : On veut $\sin(\alpha) \geq \dfrac{n_2}{n_1}$;

$\alpha \to r$: $\sin(\alpha) = \sin(\pi/2 - r) = \cos(r)$

$$\boxed{\sin(\alpha) \geq \frac{n_2}{n_1} \Leftrightarrow \cos(r) \geq \frac{n_2}{n_1}}$$

$\cos(r) \to \sin(r)$: $\cos^2(r) = 1 - \sin^2(r)$;

$r \to \theta$: $\sin^2(r) = \dfrac{\sin^2(\theta)}{{n_1}^2}$;

Combinaison : ${n_1}^2 - \sin^2(\theta) \geq {n_2}^2$;

Conclusion : $\boxed{\theta \leq \arcsin\left(\sqrt{{n_1}^2 - {n_2}^2}\right)}$

C'est ce qu'on appelle le **cône d'acceptance**.

2) Soit L la longueur de la fibre optique. Un rayon entre dans la fibre avec un angle d'incidence θ variable, compris entre 0 et θ_{lim}.

Le rayon le plus rapide parcourt la distance L à la vitesse c/n_1, soit

$$\boxed{T_1 = \frac{n_1 L}{c}}$$

Le rayon le plus lent arrive avec l'incidence θ_{lim}. Il parcourt l'hypothénuse du triangle, soit $L/\sin(\alpha_{\text{lim}})$, au lieu de parcourir L. Ainsi,

$$T_2 = \frac{n_1 L}{c \sin(\alpha_{\text{lim}})}$$

Or, d'après la question 1, $\sin(\alpha_{\text{lim}}) = \frac{n_2}{n_1}$. Ainsi,

$$\boxed{T_2 = \frac{{n_1}^2 L}{c n_2}}$$

L'écart de temps à la réception est $\Delta T = T_1 - T_2$, soit

$$\boxed{\Delta T = \frac{n_1 L}{c}\left(1 - \frac{n_1}{n_2}\right)}$$

C'est ce qu'on appelle la **dispersion intermodale**.

3) Les impulsions en entrée vont être étalées de la durée ΔT. En les supposant très courtes, il faudra quand même ΔT pour pouvoir les séparer, donc le débit sera inférieur à $1/\Delta T$. Pour $L = 100\,\text{km}$, $n_1 = 1{,}500$ et $n_2 = 1{,}498$, on obtient $\Delta T \approx 1\,\mu\text{s}$, soit un débit maximal de $1\,\text{Mb/s}$, ce qui est bien inférieur à ce que proposent les fournisseurs d'accès à internet. Ainsi, en pratique on n'utilise pas de fibre optique à saut d'indice pour cette raison.

VI Mirages

1) a – À chaque interface, $n_k \sin(i_k) = n_{k-1} \sin(i_{k-1})$; notamment, avec $k = 2$, on a $n_2 \sin(i_2) = n_1 \sin(i_1)$. Ainsi, tous les $n_k \sin(i_k)$ sont égaux.

b – Voir figure ci-après.

À chaque « dioptre », on a $\sin(i_{\text{lim,k}}) = \frac{n_{k-1}}{n_k}$. Sa valeur maximale est à $k = 2$: $\sin(i_{\text{lim,2}}) = \frac{n_1}{n_2}$. Comme $n_k \sin(i_k)$ est constant et que n_k diminue, on sait que i_k augmente : ainsi, si l'angle d'incidence i_N est suffisamment grand, il y aura un i_k supérieur à $i_{\text{lim,2}}$ et donc réflexion totale.

c – Voir figure.

d – Alors qu'on devrait voir le sable, les rayons venant du haut des collines sont déviés vers le haut : on a l'impression de voir à travers la dune.

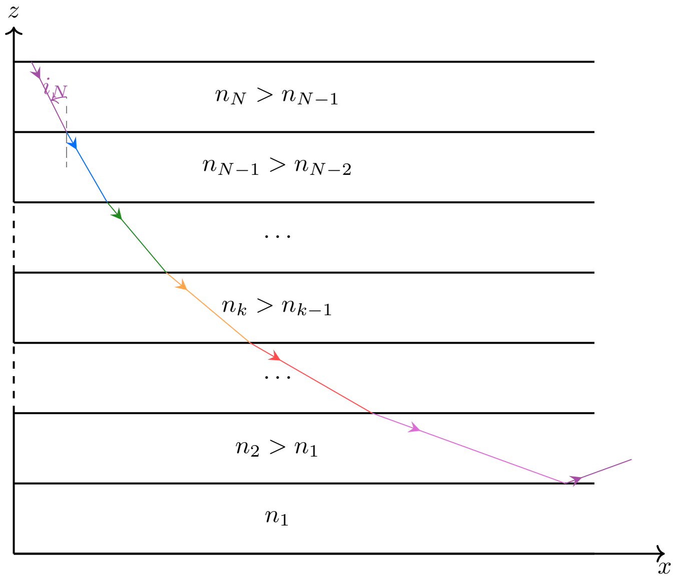


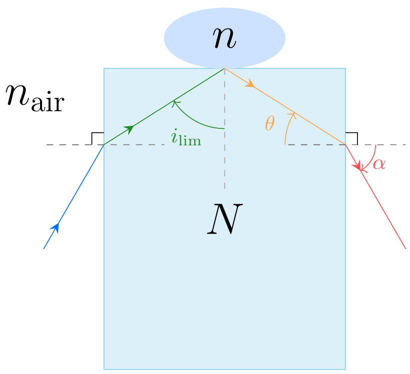
FIGURE 2.2 – Rayons d'un mirage chaud

2) Cette fois ce sont les rayons dirigés vers le haut d'un objet lointain qui sont déviés vers le bas : on a l'impression de voir des objets au-dessus du niveau de la mer. Schéma non fourni.

VII Réfractomètre de PULRICH

1) $\sin(i_{\text{lim,N}\to\text{n}}) = \dfrac{n}{N}$ d'une part. D'autre part, $N \sin(\theta) = \sin\alpha$, mais on a aussi $\theta = \pi/2 - i_{\text{lim}}$: on a donc $\sin\theta = \cos i_{\text{lim}} = \sqrt{1 - \left(\dfrac{n}{N}\right)^2}$. Ainsi, $\sin^2\alpha = N^2 \left(1 - \dfrac{n^2}{N^2}\right)$; autrement dit,

$$\boxed{n = \sqrt{N^2 - \sin^2\alpha}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} N = 1{,}622 \\ \alpha = 60° \end{cases}$$



2) Application numérique :

$$\boxed{n = 1{,}376}$$

VIII Incidence de Brewster

Les rayons réfléchis et réfractés sont perpendiculaires si $r + i = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow r = \frac{\pi}{2} - i$. En venant de l'air, on a $\sin i = n \sin r$, soit $\sin i = n \cos i$; autrement dit

$$\boxed{\tan i = n}$$

IX Réfraction et dispersion

La lumière blanche est constituée d'une superposition de longueurs d'onde dans le vide entre $(400 ; 800)\,\mathrm{nm}$. Quand ce faisceau arrive sur le dioptre et passe dans le milieu, l'indice de réfraction, qu'on utilise dans la relation de Snell-Descartes, change selon la longueur d'onde dans le vide. Pour une même valeur de i incident on aura donc deux valeurs extrêmes de r réfracté, que l'on nomme r_b et r_r pour « bleu » et « rouge », selon :

$$\boxed{\begin{aligned} n_{\text{air}} \sin(i) &= n_b \sin(r_b) \\ n_{\text{air}} \sin(i) &= n_r \sin(r_r) \end{aligned}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} r_b &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}} \sin(i)}{n_b}\right) \\ r_r &= \arcsin\left(\frac{n_{\text{air}} \sin(i)}{n_r}\right) \end{aligned}}$$

Comme $\lambda_{0,b} < \lambda_{0,r}$, $\underbrace{n(\lambda_{0,b})}_{n_b} > \underbrace{n(\lambda_{0,r})}_{n_r}$ et forcément $r_b < r_r$. On calcule :

$$\boxed{\begin{aligned} n_b &= 1{,}53 \\ n_r &= 1{,}51 \end{aligned}} \quad \Longleftrightarrow \quad \boxed{\begin{aligned} r_b &= 24{,}8° \\ r_r &= 25{,}2° \end{aligned}}$$

L'écart angulaire est donc

$$\boxed{\theta = r_r - r_b = 0{,}35°}$$

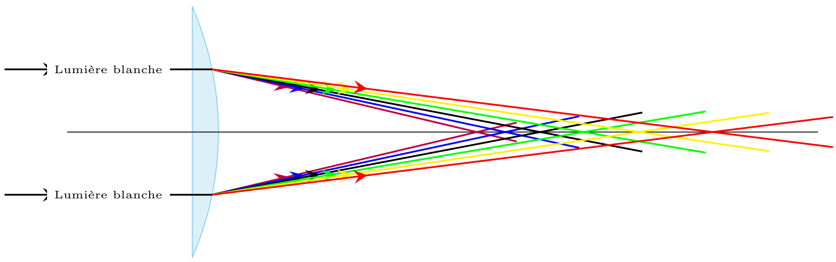


Figure 2.3 – Exemple (exagéré) de dispersion (aberration chromatique).