Électrocinétique – chapitre 5

Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

Jusque-là en électrocinétique, nous avons étudié la réponse d'un circuit (c'est-à-dire la tension de sortie) de systèmes linéaires soumis à une modification rapide de l'entrée (régime libre et échelon montant) d'une valeur constante à une autre. Nous avons alors observé la présence d'un régime **transitoire** suivi d'un régime **permanent** constant. Dans ce chapitre, nous allons voir la réponse d'un circuit à une entrée **sinusoïdale**, qui donnera lieu à un régime transitoire suivi d'un régime **permanent** sinusoïdal. D'une manière générale, on se concentre sur la réponse du système une fois le régime permanent établi. On définit donc

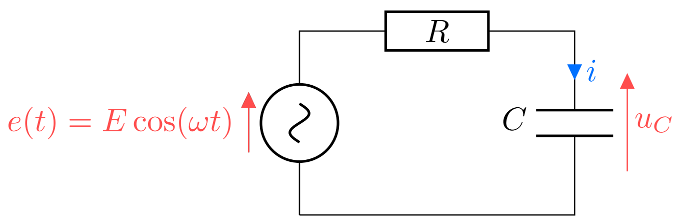
Définition 5.1 : Régime sinusoïdal forcé

On appelle **régime sinusoïdal forcé** le régime permanent d'un circuit électrique soumis à une entrée sinusoïdale. Dans tout le chapitre, on supposera donc que l'entrée est allumées depuis une durée suffisamment longue pour considérer que le régime transitoire est terminé.

I Circuit RC série en RSF

A Présentation

Soit le circuit RC série, avec $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.



On en a maintenant l'habitude, on va appliquer la loi des mailles sur le circuit et utiliser les relations courant-tension en fonction des bonnes conventions :

$$u_C + u_R = e(t) \Leftrightarrow u_C + Ri = e(t) \Leftrightarrow u_C + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = e(t)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{1}{\tau}E_0\cos(\omega t)}$$

avec $\tau = RC$ la constante de temps.

Résoudre cette équation différentielle demande comme précédemment de trouver la solution homogène et la solution particulière. La solution homogène est la solution de

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = 0$$

c'est-à-dire

$$u_{C,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Pour la solution particulière, **on admet** qu'elle est de la forme

$$u_{C,p}(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

ce qui donne une solution générale

$$\boxed{u_C(t) = K \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + U\cos(\omega t + \varphi)}$$

Important 5.1 : Attention

K dépend des conditions initiales, mais

U et φ dépendent du circuit (ici, R, C, ω et E_0).

B Réponse d'un système en RSF

En supposant le régime permanent établi (définition du RSF), on a donc :

Propriété 5.1 : forme de la réponse d'un système en RSF

Pour un signal d'entrée

$$e(t) = E_0\cos(\omega t) \quad (\text{ou} \quad \eta(t) = \eta_0\cos(\omega t))$$

les différentes tensions et intensités dans le circuit oscilleront **à la même pulsation** ω, et seront de la forme

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

où U et $\varphi_{u,i}$ sont deux constantes dépendant du système et de l'excitation ω.

L'objectif de ce chapitre est de donc de savoir déterminer U et φ.

C Passage en complexes

Une méthode de résolution est d'introduire la formule $U\cos(\omega t + \varphi)$ dans l'équation différentielle et de rechercher U et φ. Si c'est possible, c'est très calculatoire (cf. cours de maths). L'utilisation des nombres complexes permet de réduire drastiquement cette difficulté.

Méthode

Pour cela, on remplace $u(t)$ et $e(t)$ par leur forme complexe :

$$\underline{u_C} = \underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{e} = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Pour revenir aux valeurs réelles après calcul, on prendra donc

$$U_C = \left|\underline{U_C}\right| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{U_C})$$

Application

À partir de l'équation différentielle, on remplace les valeurs réelles par les valeurs complexes, en se rappelant que dériver en complexes revient à multiplier par jω :

$$\begin{aligned}
\tau\dot{\underline{u_C}} + \underline{u_C} &= \underline{e}\\
\Leftrightarrow RC\mathrm{j}\omega\underline{U}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} + \underline{u_C} &= E_0\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}\\
\Leftrightarrow \underline{U_C}\left(RC\mathrm{j}\omega + 1\right) &= E_0\\
\Leftrightarrow \boxed{\underline{U_C} = \frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}}
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à prendre le module de $\underline{U_C}$ pour avoir l'amplitude réelle, et l'argument de $\underline{U_C}$ pour avoir la phase à l'origine des temps.

Rappel

Pour cela, on rappelle que pour $\underline{z} \in \mathbb{C}$ tel que $\underline{z} = x + \mathrm{j}y$, on a

$$|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

Notamment, le module d'un nombre réel pur est égal à sa valeur absolue, et celui d'un nombre complexe pur à la valeur absolue de sa partie imaginaire.

De plus, **le module d'un rapport est égal au rapport des modules** : $\forall(\underline{z_1}, \underline{z_2}) \in \mathbb{C}^2$,

$$\left|\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\right| = \frac{|\underline{z_1}|}{|\underline{z_2}|}$$

Application

Ainsi,

$$U_C = |\underline{U_C}| = \left|\frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\right| = \frac{|E_0|}{|1 + \mathrm{j}RC\omega|}$$

Résultat

$$\Leftrightarrow \boxed{U_C = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}}$$

On fait de même pour la phase, avec pour rappel :

Rappel

Pour $\underline{z} \in \mathbb{C}$,

$$\tan(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{\mathrm{Re}(\underline{z})} \qquad \cos(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Re}(\underline{z})}{|\underline{z}|} \qquad \sin(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{|\underline{z}|}$$

On aura notamment que l'argument d'un nombre réel positif est donc 0. On rappelle également que $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Mais encore, **l'argument d'un rapport est égal à la différence des arguments** : $\forall(\underline{z_1}, \underline{z_2}) \in \mathbb{C}^2$,

$$\arg\left(\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\right) = \arg(\underline{z_1}) - \arg(\underline{z_2})$$

Application

Ainsi,

$$\varphi = \arg\left(\frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\right) = \underbrace{\arg(E_0)}_{=0} - \arg(1 + \mathrm{j}RC\omega)$$

D'une manière générale, on utilisera l'expression de la tangente d'un argument **avant** de voir si on peut prendre l'arctangente de la tangente.

$$\tan(\varphi) = -\tan(\arg(1 + \mathrm{j}RC\omega)) = -\frac{RC\omega}{1}$$

Attention

Ça peut être une réponse acceptable dans certaines conditions, mais bien souvent on souhaite exprimer la phase directement. Dans ce cas, il faut faire attention au fait que

$$\arctan(\tan(\theta)) = \theta \Leftrightarrow \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

Une manière de s'assurer de l'appartenance de θ à cet intervalle, il suffit de regarder le cosinus de θ : s'il est positif, alors on a en effet $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Ici,

$$\cos(\arg(\varphi)) = \frac{\mathrm{Re}(\arg(\varphi))}{|\underline{z}|} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} > 0$$

donc on peut bien dire que $\arctan\tan(\varphi) = \varphi$.

On remarquera que dès que la partie réelle d'un argument est positif, alors on peut sans problème prendre l'arctangente de la tangente de l'argument.

Résultat

Ainsi, on a finalement

$$\boxed{\varphi = -\arctan(RC\omega)}$$

et la solution particulière est

$$\boxed{u_C(t) = U_C\cos(\omega t + \varphi)}$$

avec

$$\boxed{U_C = \frac{E_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = -\arctan(RC\omega)}$$

Remarque : dépendance en ω

Comme on l'a vu, le signal de sortie sera à la même pulsation que le signal d'entrée, mais par cet exemple du circuit RC on note que la phase et l'amplitude **dépendent de la pulsation**.

Transition

À partir de cet exemple, est-ce qu'on peut étendre l'utilisation des complexes pour le RSF aux lois de bases de l'électrocinétique ?

II Circuits électriques en RSF

Comme au début de l'année, nous nous plaçons toujours dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), c'est-à-dire que pour un circuit de taille L alimenté par une source sinusoïdale de fréquence f, on doit avoir

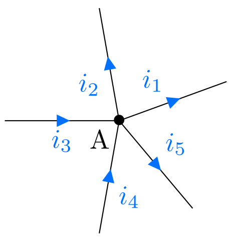
$$\boxed{Lf \ll c}$$

avec c la célérité de la lumière/des ondes électromagnétiques.

A Lois de l'électrocinétique

II.A.1 Loi des nœuds en RSF

Soit un nœud où se rejoignent 5 branches. Dans l'ARQS, nous avions la relation ci-contre. En RSF, les intensités sont sinusoïdales **et de même pulsation** ω : on aurait donc



$$\Rightarrow \begin{cases} i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4 \\ \Longleftrightarrow i_1 + i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0 \end{cases}$$

$$i_1(t) = I_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \ldots$$

Propriété

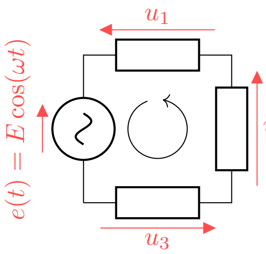
Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{i_1} + \underline{i_2} + \underline{i_5} = \underline{i_3} + \underline{i_4} \Leftrightarrow \boxed{\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_5} = \underline{I_3} + \underline{I_4}}$$
$$\text{avec} \quad \underline{i_k} = I_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{I_k} = I_k e^{j\varphi_k}$$

On a donc bien la même relation avec les grandeurs complexes et leurs amplitudes complexes.

II.A.2 Loi des mailles

Soit une maille avec des dipôles quelconques, alimentée par une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Dans l'ARQS, nous avions la relation ci-contre. En RSF, les tensions sont sinusoïdales **et de même pulsation** ω : on aurait donc



$$\Rightarrow \begin{cases} u_3 + u_2 + u_1 - e = 0 \\ \Longleftrightarrow e = u_1 + u_2 + u_3 \end{cases}$$

$$u_1(t) = U_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \dots$$

Propriété

Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{e} = \underline{u_1} + \underline{u_2} + \underline{u_3} \Leftrightarrow \boxed{\underline{E} = \underline{U_1} + \underline{U_2} + \underline{U_3}}$$
$$\text{avec} \quad \underline{u_k} = U_k e^{j\varphi_k} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{U_k} = U_k e^{j\varphi_k}$$

On a donc bien la même relation avec les grandeurs complexes et leurs amplitudes complexes.

B Impédance et admittance complexes d'un dipôle passif

II.B.1 Définition

En complexes, pour chaque dipôle on aura

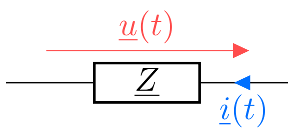
$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$\Longrightarrow \underline{u}(t) = U e^{j(\omega t + \varphi_u)} = U e^{j\varphi_u} e^{j\omega t} = \underline{U} e^{j\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = I e^{j(\omega t + \varphi_i)} = I e^{j\varphi_i} e^{j\omega t} = \underline{I} e^{j\omega t}$$

Ainsi, on peut aisément exprimer une relation courant-tension pour un dipôle complexe, sous la forme classique $U = RI$ mais en complexes : en effet, on peut tout à fait calculer $\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ pour avoir une proportionnalité entre les deux : on appelle cette constante l'**impédance**, notée $\underline{Z}$, et on a donc la **loi d'Ohm complexe** :

Définition

Loi d'Ohm complexe

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t) \Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}}$$
$$\Rightarrow \underline{Z} \quad \text{homogène à une résistance}$$



convention récepteur

En tant que complexe, on peut prendre son module est son argument :

– Son module $Z = |\underline{Z}|$ est égal au rapport de l'amplitude de u sur celle de i :

$$\boxed{|\underline{Z}| = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{i}|} = \frac{U}{I}}$$

– Son argument $\arg(\underline{Z})$ est égal à la différence de phase entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ (aussi appelée **déphasage**, voir Section ultérieure) :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \varphi_u - \varphi_i}$$

Définition

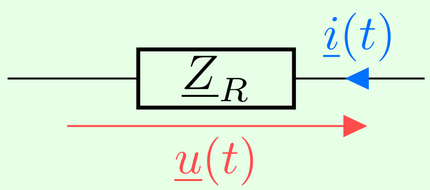
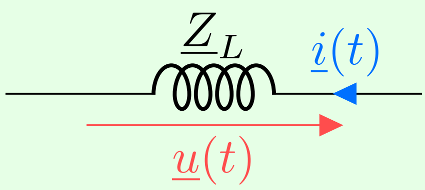
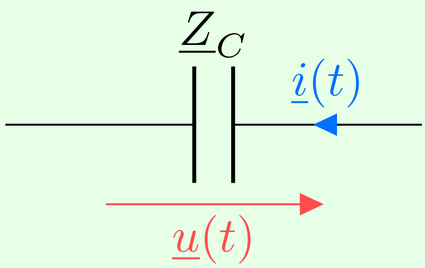
Assez naturellement, comme on avait la conductance égale à l'inverse d'une résistance, on peut définir l'inverse d'une impédance : c'est l'**admittance complexe** $\underline{Y}$:

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \Rightarrow \underline{I} = \underline{Y} \times \underline{U}}$$

II.B.2 Impédances de bases

Pour trouver les impédances des dipôles de base, on utilise leurs relations courant-tension qu'on convertit en complexes, **en se souvenant de dériver en complexes équivaut à multiplier par** jω.

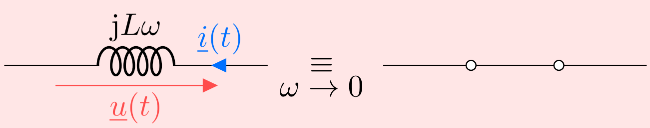
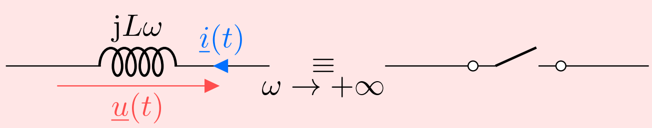
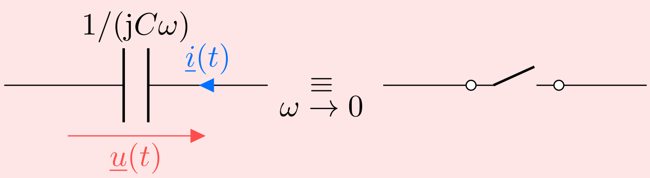
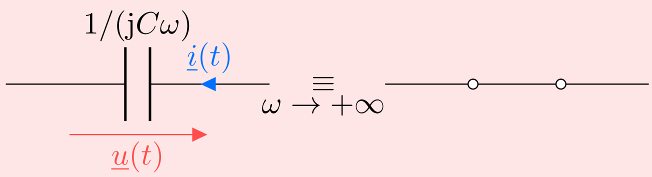
Définition : impédances des dipôles de base

Résistance	Inductance	Capacité
		
$u(t) = Ri(t)$ $\Leftrightarrow \underline{u}(t) = R\underline{i}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_R = R}$	$u(t) = L\dfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $\Leftrightarrow \underline{u}(t) = \mathrm{j}L\omega\underline{i}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega}$	$i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $\Leftrightarrow \underline{i}(t) = C\mathrm{j}\omega t\underline{u}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_C = \dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

II.B.3 Comportements limites

Ainsi, la résistance ne change pas d'expression entre les réels et les complexes, alors que les bobines et condensateurs ont des caractéristiques complexes différentes. En plus de ça, leurs impédances **dépendent** de ω : on peut notamment étudier deux cas limites, quand $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$:

Propriété

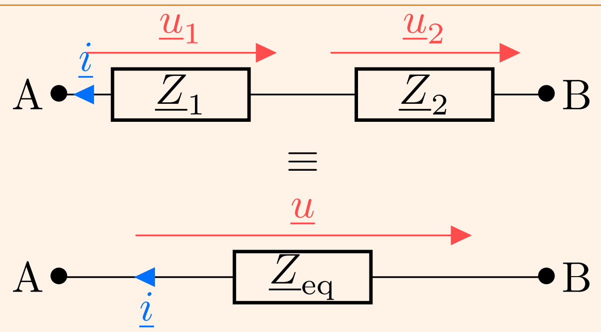
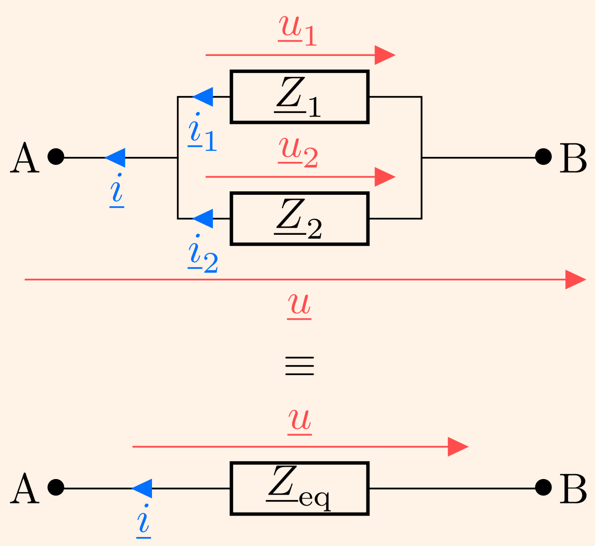
$\omega \to 0$	$\omega \to +\infty$
$\lvert\underline{Z}_L\rvert = L\omega \underset{\omega\to 0}{\to} 0$ 	$\lvert\underline{Z}_L\rvert = L\omega \underset{\omega\to +\infty}{\to} +\infty$ 
$\lvert\underline{Z}_C\rvert = 1/(C\omega) \underset{\omega\to 0}{\to} +\infty$ 	$\lvert\underline{Z}_C\rvert = 1/(C\omega) \underset{\omega\to +\infty}{\to} 0$ 

En effet, l'impédance étant homogène à une résistance, on peut rendre équivalent le fait d'avoir une impédance infinie et d'avoir une « résistance » infinie, c'est-à-dire un interrupteur ouvert, qui ne laisse pas passer le courant. À l'inverse, une résistance nulle laisse passer le courant sans résistance, comme un fil.

C Associations d'impédances et ponts diviseurs

Enfin, comme la relation courant-tension avec l'impédance complexe est analogue à celle d'une résistance, on peut facilement démontrer que les associations d'impédances suivent les associations de résistances, et qu'on peut donc appliquer les ponts diviseurs de tension et de courant comme si on n'avait que des résistances.

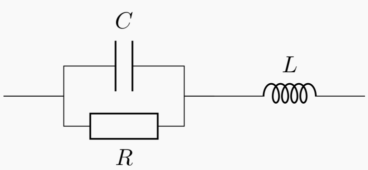
Associations d'impédances

	Schéma	Relations
En série		– **Impédance équivalente** : $\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ – **Diviseur de tension** : $\underline{u}_k = \dfrac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{branche}}}\underline{u}$
En parallèle		– **Dipôle équivalent** : $\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2 \Leftrightarrow \dfrac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{eq}} = \dfrac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}$ – **Diviseur de courant** : $\underline{i}_k = \dfrac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{\text{para}}}\underline{i} \Leftrightarrow \underline{i}_k = \dfrac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_k}\underline{i} \Leftrightarrow \underline{i}_{\boxed{1}} = \dfrac{\underline{Z}_{\boxed{2}}}{\underline{Z}_1+\underline{Z}_2}\underline{i}$

D Exercices bilan

Association d'impédances

Quelle est l'impédance de l'association suivante ?

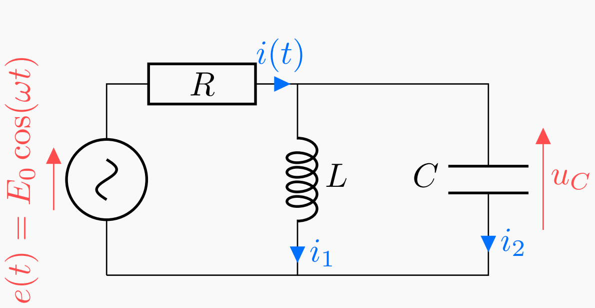


L'association en parallèle donne $\frac{\underline{Z}_C\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_R}$, et on ajoute $\underline{Z}_L$ à celle-ci :

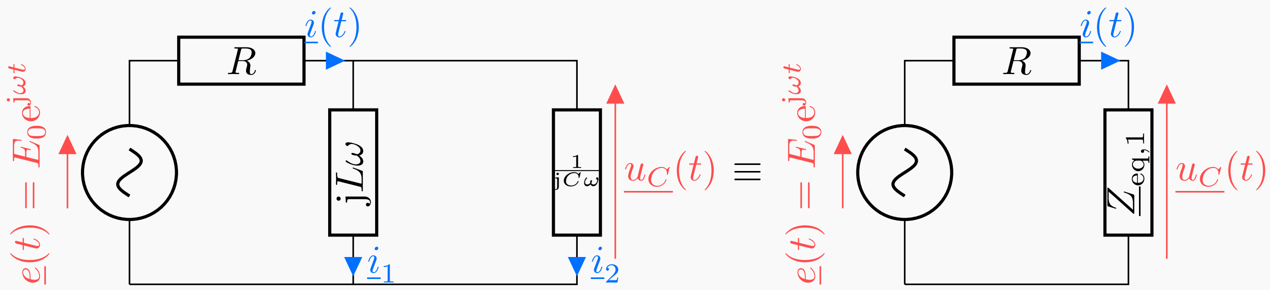
$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\times R}{\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}+R} + \mathrm{j}L\omega \Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega} + \mathrm{j}L\omega}$$

Détermination de constantes

Soit le circuit suivant, avec une entrée sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}_C$ associée à la tension u_C en fonction de R, L, C et ω.



S'il n'y avait pas l'inductance, on pourrait facilement utiliser un pont diviseur de tension pour exprimer $\underline{u}_C$ en fonction de $\underline{e}$, $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_C$. Pour se ramener à la situation du pont diviseur de tension, on détermine donc une première impédance équivalente issue de l'association en parallèle de L et C, après les avoir converties en complexes :



On peut déterminer $\underline{Z}_{\mathrm{eq},1}$ avec les admittances $\underline{Y}_L = 1/\mathrm{j}L\omega$ et $\underline{Y}_C = \mathrm{j}C\omega$, et utiliser le pont diviseur de tension directement avec l'amplitude complexe : $\underline{U}_C = \frac{\underline{Z}_{\mathrm{eq},1}}{\underline{Z}_{\mathrm{eq},1}+\underline{Z}_R}E_0$. Ainsi,

$$\underline{U}_C = \frac{\dfrac{1}{\cancel{\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega}}}{\dfrac{1}{\cancel{\dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega}} + R(\dots)} E_0 \times \frac{\mathrm{j}C\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}}{\mathrm{j}C\omega + \dfrac{1}{\mathrm{j}L\omega}} \Leftrightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{1 + \mathrm{j}RC\omega + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega}} E_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_C = \frac{E_0}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)}}$$

où on a simplifié la fraction en multipliant par le terme orange d'abord, puis en utilisant que $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$.

E Résumé

Résumé méthode

Un système soumis à une excitation sinusoïdale du type $e(t) = E_O\cos(\omega t)$ se comporte de la manière suivante :

- Après un court régime transitoire (solution homogène), les signaux de sortie seront eux aussi sinusoïdaux et **à la même pulsation**, de la forme $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi_X)$: le RSF correspond à l'étude de ces fonctions (solutions particulières) dont l'amplitude X et la phase φ_X sont définies **par le système** (et non pas des conditions initiales).

– Pour trouver ces valeurs, on définit :

- l'entrée complexe : $\underline{e}(t) = E e^{j\omega t}$
- les signaux de sortie complexes : $\underline{x}(t) = X e^{j(\omega t + \varphi_X)}$;
- les amplitudes complexes $\underline{X} = X e^{j\varphi_X}$, telles que $\underline{x}(t) = \underline{X} e^{j\omega t}$;
- On retrouve les grandeurs réelles en en prenant le module et la phase :

$$\boxed{X = |\underline{X}|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_X = \arg(\underline{X})}$$

III Mesure de déphasages

A Définition

Définition : déphasage

Pour deux signaux sinusoïdaux $s_1(t) = S_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, on définit le **déphasage** entre s_2 et s_1 comme étant la **différence de leurs phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega_1 t + \varphi_2) - (\omega_2 t + \varphi_1)$$

Pour de signaux *de même fréquence*, le déphasage est simplement la **différence des phases à l'origine des temps** :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1}$$

Étant donné que les sorties en RSF ont la même pulsation que l'entrée, on ne s'intéressera qu'à des signaux de même pulsation/fréquence.

B Valeurs particulières

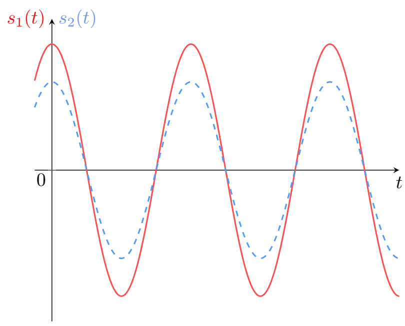
III.B.1 Signaux en phase

Définition

Deux signaux sont en phase si leur déphasage est nul (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi]}$$

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.



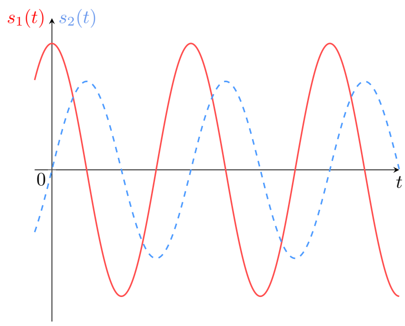
III.B.2 Signaux en quadrature de phase

Définition

Deux signaux sont en quadrature phase si leur déphasage est de $\pm\pi/2$ (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]}$$

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.



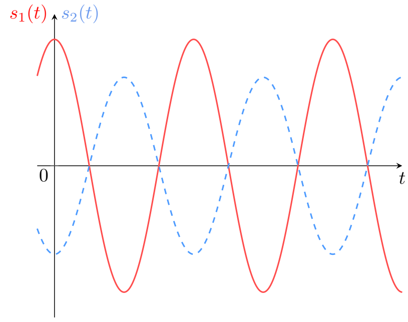
III.B.3 Signaux en opposition de phase

Définition

Deux signaux sont en phase si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi]}$$

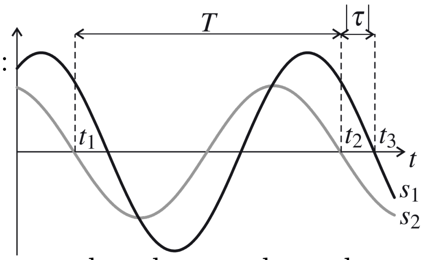
Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à la valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.



C Lecture d'un déphasage

Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$ est lié au **retard temporel** $\tau_{1/2}$ du signal s_1 par rapport au signal s_2 : on a

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \omega\tau_{1/2}}$$



Dans ce cas, le déphasage obtenu est entre $-\pi$ et $+\pi$. On définit alors :

- $\Delta\varphi_{2/1} > 0 \Rightarrow s_2$ est en avance sur s_1 ;
- $\Delta\varphi_{2/1} < 0 \Rightarrow s_2$ est en retard sur s_1.

Le principe est de mesurer la différence de temps entre les deux moments les plus proches tels que les deux signaux s'annulent **avec la même pente**. Par construction, la pulsation représente une vitesse angulaire, c'est pourquoi on a $\omega = 2\pi/T$ comme $v = d/t$ en mécanique. On trouve donc naturellement la relation entre $\Delta\varphi_{2/1}$ et $\tau_{2/1}$.

D Déphasage des impédances

Pour un dipôle de tension $\underline{U}$ traversé par une intensité $\underline{I}$, on définit $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$, et on a donc $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$. Ainsi, la phase d'une impédance représente le déphasage entre la tension et le courant. Pour les différents dipôles classiques, on trouve :

- $\arg(\underline{Z}_R) = 0 \Rightarrow$ signaux en phase ;
- $\arg(\underline{Z}_L) = \arg(\mathrm{j}L\omega) = \pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en avance sur $\underline{i}$;
- $\arg(\underline{Z}_C) = \arg(1/\mathrm{j}C\omega) = -\pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en retard sur $\underline{i}$;