Sujet 1

I Bombe nucléaire

Lorsqu'il est percuté par un neutron, l'uranium ^{235}U peut se décomposer en atomes radioactifs et ré-émettre plusieurs neutrons. Ce mécanisme permet d'envisager l'existence de réactions en chaines (contrôlées dans un réacteur **ou** non contrôlées dans une bombe). Soit $n(M,t)$ le nombre de neutron par unité de volume et j_{th} le vecteur flux de neutrons. n est solution de l'équation de diffusion suivante :

$$\frac{\partial n}{\partial t} = -\mathrm{div}\,\vec{j} + \frac{\nu - 1}{\tau} n$$

ν est un coefficient adimensionné caractérisant le nombre de neutrons efficaces produit par chaque fission, d'où le facteur $\nu - 1$ puisque par ailleurs chaque fission consomme un neutron pour être initiée. On cherche à déterminer la masse du bloc d'uranium pour laquelle la réaction en chaîne peut s'emballer et devenir explosive. On étudie une sphère d'^{235}U de rayon R et suppose que la diffusion des neutrons dans la sphère s'effectue avec un coefficient de diffusion D.

On cherche dans le cas général une solution de la forme $n(r,t) = f(r)g(t)$.

1. Montrer que l'équation proposée peut se réécrire :

$$\frac{1}{g}\frac{\mathrm{d}g}{\mathrm{d}t} = D\frac{\Delta f}{f} - \frac{1-\nu}{\tau}$$

2. En déduire que g est de la forme : $g(t) = g_0 e^{at}$ où g_0 et a sont des constantes qu'on ne demande pas de calculer pour le moment. À quelle condition sur a obtiendra-t-on une réaction en chaine ?

3. Montrez que la fonction $r \to rf(r)$ est solution d'une équation différentielle classique.

4. Dans la sphère, $n(r,t)$ s'annule à tout instant en $r = R$ mais ne s'annule pas à l'intérieur de la sphère. On pose

$$k = \sqrt{\frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right)} \quad \text{avec} \quad \frac{1}{D}\left(\frac{\nu-1}{\tau} - a\right) > 0$$

   Calculer $f(r)$ à une constante multiplicative près notée f_0.

5. Exprimez le rayon minimal R_c tel qu'il puisse y avoir une réaction en chaine, en fonction de ν, D et τ.

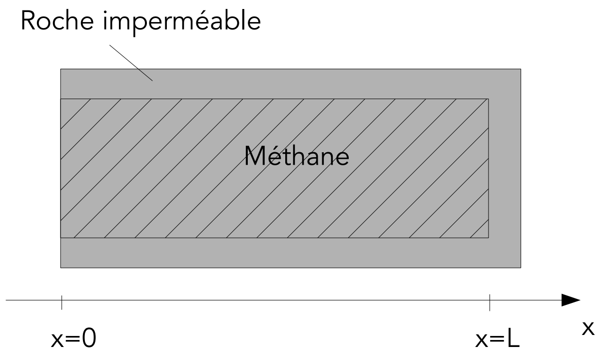
6. On donne pour l'uranium 235 $\rho = 19 \times 10^3\,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$, $\pi^2 D\tau = 2{,}2 \times 10^{-2}\,\mathrm{m^2}$ et $\nu = 2{,}5$. Calculer la valeur du rayon critique R_c ainsi que de la masse critique correspondante.

Pour cette géométrie sphérique, on a $\Delta n = \dfrac{1}{r}\dfrac{\mathrm{d}^2}{\mathrm{d}r^2}(rn)$

Sujet 2

I Diffusion de méthane dans un gisement

On considère un gisement de méthane de volume V cylindrique de section S et de longueur L fermé sur sa surface latérale et à l'une de ses extrémités par de la roche imperméable. Le méthane occupe le volume qV où q est la porosité du milieu. On note $P(x,t)$ la pression du méthane et $\mu(x,t)$ sa masse volumique. La température est constante et uniforme et $P(x=0,t) = P_0$ est constante.



La masse de gaz traversant la surface S d'abscisse x pendant la durée dt est proportionnelle au gradient de pression $\delta m = -kS\dfrac{\partial P}{\partial x}dt$ où k est un coefficient dépendant de la viscosité, de la masse volumique du gaz et de la nature du gisement.

1. Donner la relation entre μ et P.

2. Déterminer, en fonction de q, S, μ et $\mathrm{d}x$, la masse de méthane contenue à la date t dans le volume élémentaire contenu entre x et $x + \mathrm{d}x$. Montrer que la pression vérifie $D\dfrac{\partial^2 P}{\partial x^2} = \dfrac{\partial P}{\partial t}$. Exprimer D en fonction des données.

3. Dans quelle situation trouve-t-on une équation analogue ?

4. Au regard de l'énoncé, que peut-on dire de $\dfrac{\partial P}{\partial x}(L)$

5. On cherche une solution de la forme $P(x,t) = P_0 + P_1 \sin(ax)e^{-\frac{t}{\tau}}$. Déterminer τ. Déterminer les valeurs possibles de a en fonction de L. On prend a égal à sa valeur minimale. Faire l'application numérique pour τ.

6. Déterminer la masse $m(t)$ de méthane contenu dans le gisement à la date t.

Données : $D = 3{,}0 \times 10^{-2}\ \mathrm{U \cdot S \cdot I \cdot}$; $q = 0{,}15$; $L = 5{,}0\,\mathrm{km}$; masse molaire du méthane $16{,}0\,\mathrm{g/mol}$.

Sujet 3

I Ailette de refroidissement

On considère une barre de cuivre cylindrique de rayon $a = 5\,\mathrm{mm}$, et de longueur L jouant le rôle d'une ailette de refroidissement.
En $x = 0$, la barre de cuivre est en contact avec un milieu à la température $T_0 = 330\,\mathrm{K}$. Tout le reste de la tige est en contact avec l'air ambiant de température uniforme $T_e = 300\,\mathrm{K}$. On appelle $\lambda = 400\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-1}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ la conductivité thermique du cuivre et $h = 12\,\mathrm{W}\cdot\mathrm{m}^{-2}\cdot\mathrm{K}^{-1}$ le coefficient de transfert conducto-convectif entre la barre de cuivre et l'air. On se place en régime stationnaire. On pose $\delta = \sqrt{\dfrac{\lambda a}{2h}}$
On considère dans un premier temps la barre quasi-infinie.

1. Dessinez un schéma correspondant à la situation et dans lequel une tranche d'épaisseur dx sera mise en valeur. Quelle est la section de cette tranche ? Et sa surface latérale ?

2. Établissez l'équation différentielle vérifiée par la température $T(x)$ dans la barre en régime permanent.

3. La résoudre en tenant compte de deux conditions aux limites qu'on précisera.

4. Calculez δ. Que représente cette grandeur ?

5. On considère maintenant la tige de longueur $L = 20\,\mathrm{cm}$. Peut-on toujours la considérer infinie ? Pourquoi ?

6. En déduire le nouveau jeu de conditions limites permettant de résoudre le problème.

Sujet 4

I Téléobjectif d'appareil photographique

Modélisons un téléobjectif d'appareil photo par une association de lentilles suivie d'un capteur CCD de taille $15{,}8 \times 23{,}6\text{mm}^2$. La lentille d'entrée est convergente, de vergence $5{,}0\,\delta$. Une seconde lentille est présente entre la lentille d'entrée et le capteur, à 15,5 cm de la lentille d'entrée. Elle est divergente, de vergence $-20\,\delta$. La distance entre la lentille d'entrée de l'objectif et le capteur, notée habituellement Δ, est appelée encombrement du téléobjectif. Cet appareil est utilisé pour photographier un chamois de hauteur 80 cm au garot situé à 150 m du photographe.

1. En l'absence de la lentille divergente, quelle serait la taille de l'image du chamois sur le capteur? Commenter.

2. Quelle est en fait la taille de l'image formée par le système composé ?

3. Quel est alors l'encombrement du téléobjectif?

4. Quelle serait la distance focale d'une lentille convergente qui donnerait à elle seule une image de la même dimension que la précédente? En déduire ce que vaudrait l'encombrement du téléobjectif dans ce cas.

Sujet 5

I Lunette astronomique

On considère une lunette astronomique formée d'un objectif constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_1' = \overline{O_1F_1'}$ et d'un oculaire constitué d'une lentille mince convergente de distance focale $f_2' = \overline{O_2F_2'}$. Ces deux lentilles ont même axe optique Δ. On rappelle qu'un œil normal voit un objet sans accommoder quand celui-ci est placé à l'infini. On souhaite observer la planète Mars, qui est vue à l'œil nu sous un diamètre apparent 2α, symétriquement par rapport à l'axe optique de la lunette.
Pour voir la planète nette à travers la lunette, on forme un système afocal.

1. Définir un système afocal. Que cela implique-t-il pour les positions des lentilles ?

2. On note α l'angle sous lequel est vu le bord extrême de la planète Mars. Cet objet est supposé être à l'infini. Dans le cas où $f_1' = 5f_2'$, faire une construction graphique. On placera $\overline{A'B'}$ l'image intermédiaire sur ce schéma.

   On note α' l'angle orienté que forment les rayons émergents extrêmes en sortie de la lunette par rapport à l'axe optique.

   Placer l'angle α' sur la figure précédente. L'image est-elle droite ou renversée ?

3. La lunette est caractérisée par son grossissement $G = \alpha'/\alpha$. Exprimer G en fonction de f_1' et de f_2'. Commenter son signe. On rappelle que les lentilles sont utilisées dans les conditions de Gauss.

On veut augmenter le grossissement de cette lunette et redresser l'image. Pour cela, on interpose entre L_1 et L_2 une lentille convergente L_3 de distance focale $f_3' = \overline{O_3F_3'}$. L'oculaire L_2 est déplacé pour avoir de la planète une image nette à l'infini à travers le nouvel ensemble optique.

4. Quel couple de points doit conjuguer L_3 pour qu'il en soit ainsi ?

5. On appelle γ_3, le grandissement de la lentille L_3. En déduire $\overline{O_3F_1'}$ en fonction de f_3' et γ_3.

6. Faire un tracé de rayons de cette situation. On appellera $\overline{A'B'}$ la première image intermédiaire et $\overline{A''B''}$ la seconde image intermédiaire. Déterminer graphiquement ces images intermédiaires, ainsi que les positions des foyers objet F_3 et image F_3' de la lentille L_3.

7. En déduire le nouveau grossissement G' en fonction de γ_3, f_1' et f_2'. On notera α'' l'angle sous lequel est vue l'image finale que l'on placera sur la figure précédente.