Contrôle de connaissances 4

Électrocinétique : premier ordre et harmonique

/5 1 On suppose le circuit LC série suivant, en régime libre. On suppose le condensateur initialement chargé à la tension E, et on ferme l'interupteur à $t = 0$. Déterminer l'équation différentielle sous forme canonique de u_C pour $t \geq 0$, donner les conditions initiales et comment les déterminer, et résoudre l'équation différentielle pour trouver $u_C(t)$ **et** $i(t)$.

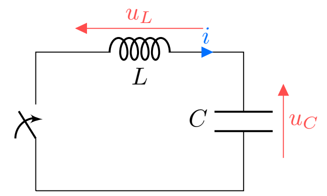

Figure 4.1

Avec la loi des mailles,

$$
\begin{aligned}
& u_L + u_C = 0 && u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \text{ et } i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & LC\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + u_C = 0 && \text{forme canonique} \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{LC}u_C = 0
\end{aligned}
$$

L'équation homogène est, avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + {\omega_0}^2 u_C = 0}$$

La forme générale de la solution pour cette équation est :

$$u_C(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

On trouve A avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = \boxed{A = E}$$

On trouve B avec la seconde condition initiale :

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0\sin(\omega_0 t) + B\omega_0\cos(\omega_0 t) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0$$

$$\text{et} \quad i(0) = 0 = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}(0) = CB\omega_0 \quad \Rightarrow \boxed{B = 0}$$

D'où

$$\boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)}$$

On obtient ensuite i avec la relation courant-tension :

$$\boxed{i(t) = C\frac{\mathrm{d}u_c}{\mathrm{d}t} = -CE\omega_0\sin(\omega_0 t)}$$

/3 2 Faire un bilan d'énergie pour le circuit LC libre, et montrer que l'énergie est conservée à chaque instant. Tracer $\mathcal{E}_C$, $\mathcal{E}_L$ et $\mathcal{E}_{\text{tot}}$.

On fait un bilan de puissances avec la loi des mailles multipliée par i :

$$
\begin{aligned}
& u_C i + u_L i = 0 && i = C\tfrac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \text{ et } u_L = L\tfrac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \\
\Leftrightarrow\ & u_C \times C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \times i = 0 && f \times f' = \left(\tfrac{1}{2}f^2\right)' \\
\Leftrightarrow\ & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\Big(\underbrace{\frac{1}{2}C{u_C}^2}_{=\mathcal{E}_C} + \underbrace{\frac{1}{2}Li^2}_{=\mathcal{E}_L}\Big) = 0 && \mathcal{E}_{\text{tot}} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{\text{tot}}}{\mathrm{d}t} = 0}
\end{aligned}
$$

L'énergie totale est bien conservée.

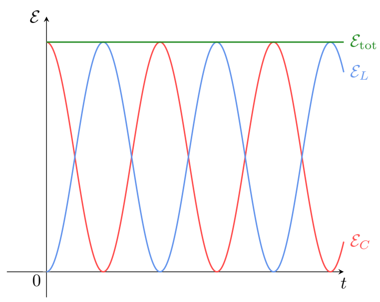

Figure 4.2

/2 3 Tracer les solutions $u_C(t)$ et $i(t)$ dans l'**espace des phases** (axe $x = u_C(t)$, axe $y = i(t)$), et **indiquer le sens de parcours**. Expliquer succinctement pourquoi on obtient cette forme.

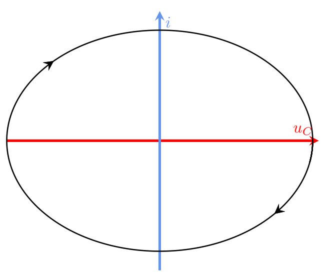

Figure 4.3

On obtient une ellipse étant donné que $u_C(t) \propto \cos(\omega_0 t)$ et que $i(t) \propto \sin(\omega_0 t)$ Par construction, cela correspond à tracer un cercle déformé puisque $\cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$.