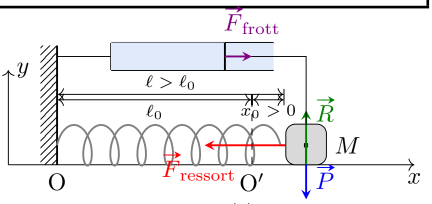
Contrôle de connaissances 6

Électrocinétique : ressort amorti

/24 1 On suppose le système mécanique suivant, constitué du point M de masse m accroché à un ressort idéal (k,ℓ_0) mais subissant des frottements fluides. On travaille dans le référentiel $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen, avec le repère $(\text{O}, \overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y})$. On suppose le ressort initialement étiré tel que $\ell(0) = L_0 > \ell_0$, lâché sans vitesse initiale.



Effectuer un bilan des forces puis déterminer l'équation différentielle sous forme canonique de $\ell(t)$ pour $t \geq 0$, et **la réécrire en effectuant un changement de variable**. Déterminer les expressions de ω_0 et Q, puis résoudre l'équation différentielle sur le changement de variable pour un régime **pseudo-périodique**. On appelle $x_0 = L_0 - \ell_0$.

Exprimer la période T des oscillations amorties en fonction de la période T_0 des oscillations harmoniques, donner *sans démonstration* l'approximation de t_{95} et **tracer la solution**, avec $Q \approx 3$.

◇ **Bilan des forces :** 1 + 1

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$
Réaction normale	$\vec{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$
Force de rappel	$\vec{F}_r = -k(\ell(t) - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x}$
Force de frottement	$\vec{F}_f = -\alpha\vec{v} = -\alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\,\overrightarrow{u_x}$

Avec le PFD :

$$m\vec{a} \overset{1}{=} \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}_r + \vec{F}_f$$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix}\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2}\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-k(\ell(t)-\ell_0) - \alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t}\\ -mg + R\end{pmatrix} \quad \text{Dvlp}^{\text{t}}$$

Donc sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$

$$m\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + k\ell \overset{1}{=} k\ell_0$$

$$\div m$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\ell(t) \overset{1}{=} {\omega_0}^2\ell_0$$

$$x(t) \overset{1}{=} \ell(t) - \ell_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 x(t) = 0}$$

On identifie ω_0 et Q :

$${\omega_0}^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{k}{m}}}$$

et $$\frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow \boxed{Q \overset{1}{=} \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

Avec $x(t) \overset{1}{=} K\mathrm{e}^{rt}$, on obtient l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + {\omega_0}^2 \overset{1}{=} 0 \Rightarrow \boxed{\Delta \overset{1}{=} \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 - 4Q^2\right) < 0}$$

$$\Rightarrow r_\pm \overset{1}{=} \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2}$$

On injecte Δ et extrait $\frac{\omega_0}{Q}$

$$\Leftrightarrow r_\pm = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\Omega \overset{1}{=} \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}$$

$$\Leftrightarrow r_\pm \overset{1}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$x(t) \overset{1}{=} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right]$$

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

$$x(0) = L_0 - \ell_0 = 1\left[A\cdot 1 + B\cdot 0\right] = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A \overset{1}{=} x_0}$$

◇ On trouve B avec la seconde CI :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} -\frac{\omega_0}{2Q}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)_0 = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = v_0 = 0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B \overset{1}{=} \frac{\omega_0}{2Q\Omega}x_0 = \frac{x_0}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

Ainsi, on trouve bien

$$\boxed{x(t) \overset{1}{=} x_0\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}}\sin(\Omega t)\right]}$$

$$\Rightarrow \boxed{T \overset{1}{=} \frac{2\pi}{\Omega} \overset{1}{=} T_0\frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{t_{95} \overset{1}{\approx} QT_0}$$

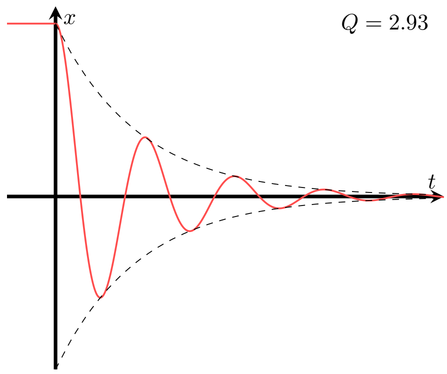


Fig. 6.1 – Tracé solution $Q \approx 3$. 1+1