

SUP MPSI3 Corrigé DS09 02 juin 2023

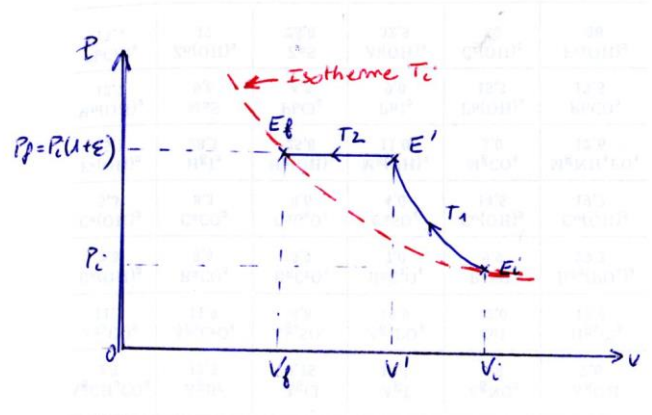
EXERCICE 1 : Étude de transformations thermodynamiques du diazote :

(D'après ENAC 2023)

(≈ 43 pts)

Q1. T1 est une compression adiabatique réversible, donc courbe curviligne bien pentue avec la pression qui augmente et le volume qui diminue entre E_i et E' .

T2 est une transformation isobare à $P_f = P_i(1 + \varepsilon)$ qui amène le diazote dans l'état final tel que sa température soit $T_f = T_i$. E_f est donc situé sur l'isotherme T_i qui est moins pentue que l'adiabatique, ainsi **E_f est à gauche de E'** .



Q2. T1 est une **transformation adiabatique réversible d'un gaz supposé parfait**, on peut appliquer les **lois de Laplace**, en paramètre (P, V) .

Soit $P_i V_i^\gamma = P_f V'^\gamma = P_i(1 + \varepsilon) V'^\gamma$;

Ou encore : $V'^\gamma = \frac{1}{1+\varepsilon} V_i^\gamma$; D'où : $V' = \frac{V_i}{(1+\varepsilon)^{\frac{1}{\gamma}}}$; Ou encore : $V' = V_i(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}}$.

Réponse A.

De l'état initial à l'état final, comme précisé dans Q1), la transformation est isotherme ou au moins monotherme : $T_f = T_i$.

Alors $P_i V_i = nRT_i = nRT_f = P_f V_f = P_i(1 + \varepsilon) V_f$; Soit : $V_f = \frac{P_i}{P_i(1+\varepsilon)} V_i$; Ou encore : $V_f = \frac{V_i}{1+\varepsilon}$ **Réponse D.**

Q3. De nouveau pour T1, on peut appliquer les lois de Laplace, en paramètre (T, P) .

Soit : $T_i P_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T' P_f^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T' (P_i(1 + \varepsilon))^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$; Ainsi : $T' = T_i \frac{P_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}{P_i^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} (1+\varepsilon)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}} = T_i \frac{1}{(1+\varepsilon)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}}$

Ou encore : $T' = T_i(1 + \varepsilon)^{\frac{\gamma-1}{\gamma}} = T_i(1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}}$.

Réponse B.

Q4. T1 est une transformation adiabatique réversible d'un gaz supposé parfait, alors $Q_{E_i E'} = 0$.

D'après le 1^{er} principe de la thermodynamique, on a alors $\Delta U_{E_i E'} = W_{E_i E'} + Q_{E_i E'} = W_{E_i E'}$.

Or pour un gaz parfait : $dU = C_v dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$.

Ainsi : $\Delta U_{E_i E'} = W_{E_i E'} = \frac{nR}{\gamma-1} (T' - T_i) = \frac{nR}{\gamma-1} [T_i(1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} - T_i]$

Ou encore : $W_{E_i E'} = \frac{nRT_i}{\gamma-1} [(1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1] = \frac{P_i V_i}{\gamma-1} [(1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1]$.

Réponse C.

Q5. La transformation T2 est une isobare à $P_f = P_i(1 + \varepsilon) = cste$.

Par définition, $\delta W_P = -P_f dV_{syst}$; Soit : $W_{E' E_f} = -P_f (V_f - V')$.

D'où : $W_{E' E_f} = -P_i(1 + \varepsilon) \left[\frac{V_i}{1+\varepsilon} - V_i(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}} \right] = -P_i V_i \left[1 - (1 + \varepsilon)(1 + \varepsilon)^{-\frac{1}{\gamma}} \right]$

Enfin : $W_{E' E_f} = -P_i V_i (1 - (1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}})$.

Réponse C.

Q6. Puisque le diazote est supposé parfait, $dU = C_v dT = \frac{nR}{\gamma-1} dT$.

Or $T_f = T_i$, alors $dU = 0$ et $\Delta U = 0$.

Réponse A.

D'autre part, d'après le 1^{er} principe de la thermodynamique, on a alors $\Delta U = W + Q = 0$

Donc $Q = -W = -W_{E_i E'} - W_{E' E_f}$.

$$\text{Ainsi, } Q = \frac{P_i V_i}{\gamma-1} \left[1 - (1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] + P_i V_i \left[1 - (1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right]$$

$$\text{D'où : } Q = \frac{P_i V_i}{\gamma-1} \left[1 - (1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} + (\gamma - 1) \left[1 - (1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] \right]$$

$$\text{Alors : } Q = \frac{P_i V_i}{\gamma-1} \left[1 + \gamma - 1 + (1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} (1 - \gamma - 1) \right]$$

$$\text{Enfin : } Q = \frac{P_i V_i}{\gamma-1} \gamma \left[1 - (1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} \right] = -P_i V_i \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[(1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right] .$$

Réponse C.

Q7. Pour $\varepsilon \ll 1$, on utilise le développement limité à l'ordre 1 fourni : $(1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} \approx 1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\gamma}$.

$$\text{On a toujours } Q = -W ; \text{ Or : } W = P_i V_i \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[(1 + \varepsilon)^{1-\frac{1}{\gamma}} - 1 \right]$$

$$\text{Ainsi, } W \approx P_i V_i \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 + \varepsilon - \frac{\varepsilon}{\gamma} - 1 \right] ; \text{ Ou encore : } W \approx P_i V_i \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[\varepsilon - \frac{\varepsilon}{\gamma} \right] \approx P_i V_i \varepsilon \frac{\gamma}{\gamma-1} \left[1 - \frac{1}{\gamma} \right]$$

$$\text{On y est presque : } W \approx P_i V_i \varepsilon \frac{\gamma}{\gamma-1} \frac{\gamma-1}{\gamma} ; \text{ Enfin } W \approx P_i V_i \varepsilon \text{ et ainsi } Q \approx -P_i V_i \varepsilon .$$

Réponses B et D.

EXERCICE 2 : Étude d'un moteur de Stirling :

(≈ 53 pts)

(D'après Centrale Supelec TSI 2022)

A – Description du moteur :

Q1. En diagramme de Watt (P, V), le cycle tourne en sens horaire, c'est donc bien un cycle moteur.

Q2. On estime l'aire du cycle à environ 14 (±1) carreaux, donc le travail fourni par le moteur est $|W_{cycle}| \approx 14 \times 0,1 \cdot 10^{-3} \times 10^5$; On obtient ainsi : $W_{cycle} \approx -140 \text{ J}$. $W_{cycle} < 0$, car c'est un cycle moteur.

B – Modélisation du cycle :

Q3. Le cycle est constitué de 2 isothermes réversibles (morceaux de paraboles) et de 2 isochores (droites verticales) situées en V_1 et V_2 . Allure ci-contre.

Q4. La transformation ($1 \rightarrow 2$) est une **compression isotherme réversible d'un gaz parfait à la température T_1** :

$$\delta W_{12} = -P_{ext} dV_{syst}$$

Or la transformation est supposée réversible,

$$\text{donc : } \delta W_{12} = -P_{syst} dV_{syst} \text{ avec } P_{syst} = \frac{nRT_1}{V}$$

$$D'où : \delta W_{12} = -\frac{nRT_1}{V} dV = -\underbrace{nRT_1}_{\text{cste}} \frac{dV}{V} ;$$

$$\text{Ainsi : } W_{12} = -nRT_1 \ln \frac{V_2}{V_1} = nRT_1 \ln(r) > 0 \text{ avec } r = \frac{V_1}{V_2} > 1$$

Normal que $W_{12} > 0$, car c'est une compression.

$$\delta Q_{12} ?$$

$$\text{On a un gaz parfait, donc } dU = n C_{Vm} dT = n \frac{R}{\gamma-1} dT ;$$

$$\text{Or ici, } T = \text{cste, donc } dT = 0 \text{ et } dU = 0, \text{ ainsi : } \Delta U_{12} = 0.$$

D'après le premier principe de la thermodynamique :

$$\Delta U_{12} = W_{12} + Q_{12} = 0.$$

$$\text{Donc : } Q_{12} = -W_{12} = -nRT_1 \ln(r) < 0$$

Q5. La transformation ($2 \rightarrow 3$) est un échauffement isochore de la température T_1 à la température T_3 :

$$\text{Alors : } \delta W_{23} = -P_{ext} dV_{syst} = 0 \quad \text{Donc : } W_{23} = 0.$$

$$\text{D'après le premier principe de la thermodynamique : } \Delta U_{23} = Q_{23} = n \frac{R}{\gamma-1} (T_3 - T_1) > 0.$$

Q6. De même qu'en Q4, pour la transformation ($3 \rightarrow 4$) qui est une transformation isotherme réversible à la température T_3 , on obtient : $W_{34} = -nRT_3 \ln \frac{V_1}{V_2} = -nRT_3 \ln(r) < 0$

$$\text{Et } Q_{34} = -W_{34} = +nRT_3 \ln(r) > 0$$

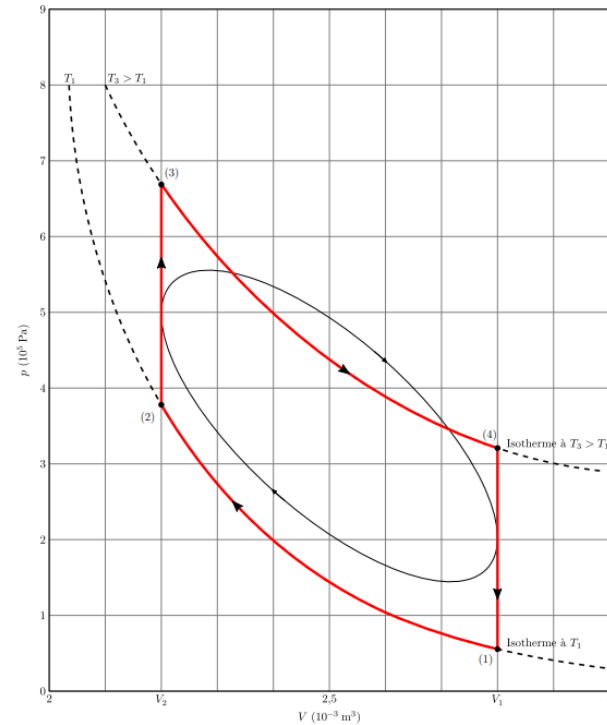
Q7. De même qu'en Q5, pour la transformation ($4 \rightarrow 1$) qui est un refroidissement isochore de la température T_3 à la température T_1 , on obtient : $\Delta U_{41} = Q_{41} = n \frac{R}{\gamma-1} (T_1 - T_3) < 0$

C – Rendement du moteur :

Q8. Le rendement est défini par : $\eta = \frac{\text{ce que ça rapporte en énergie}}{\text{ce que ça coûte en énergie}} = \frac{W_{cycle}}{Q_{>0}}$ car c'est un moteur.

$$\text{Or } W_{cycle} < 0, \text{ ainsi } \eta = -\frac{W_{cycle}}{Q_{>0}} = -\frac{W_{12}+W_{34}}{Q_{23}+Q_{34}} = -\frac{nRT_1 \ln(r) - nRT_3 \ln(r)}{-\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_1) + nRT_3 \ln(r)} ; \text{ D'où : } \eta = \frac{nR \ln(r) (T_3 - T_1)}{\frac{nR}{\gamma-1}(T_3 - T_1) + nRT_3 \ln(r)}$$

$$\text{Q9. Le rendement de Carnot est défini par } \eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{T_1}{T_3} = \frac{T_3 - T_1}{T_3}.$$



Q10. Puisque la chaleur Q_{23} provient d'une récupération en interne, ce n'est pas une chaleur dépensée par la source chaude, par conséquent on ne doit pas la prendre en compte dans le calcul du rendement.

Ce dernier s'exprime alors ainsi : $\eta' = -\frac{W_{12}+W_{34}}{Q_{34}} = \frac{nR \ln(r) (T_3-T_1)}{nRT_3 \ln(r)}$; Qui se simplifie en $\boxed{\eta' = \frac{T_3-T_1}{T_3} = \eta_c}$.

Le **rendement du cycle idéal est donc égal au rendement de Carnot.**

Q11. Avec les données numériques, on obtient pour l'efficacité de Carnot :

$$\eta_c = 1 - \frac{T_F}{T_C} = 1 - \frac{T_1}{T_3} ; \text{AN : } \eta_c = 1 - \frac{273+60}{273+640} ; \text{On obtient : } \underline{\eta_c \approx 0,635 = 63,5 \%}.$$

De plus, l'efficacité du moteur vaut 40 % de l'efficacité de Carnot.

$$\text{Ainsi } \eta = 0,40 \times \eta_c ; \text{AN : } \eta = 0,40 \times 0,635 ; \text{On obtient } \underline{\eta \approx 0,254 = 25,4 \%}.$$

Enfin, $\eta = \left| \frac{W}{Q_C} \right| = \left| \frac{P_e}{P_{Th}} \right|$, car la conversion du travail mécanique en travail électrique est supposée parfaite.

$$\text{Ainsi } \boxed{P_{Th} = \frac{|P_e|}{\eta}}. \text{AN : } P_{Th} = \frac{180}{0,254} ; \text{On obtient : } \underline{P_{Th} \approx 710 \text{ W}}.$$

La puissance thermique fournie par la source chaude au moteur de Stirling est donc d'environ 710 W.

EXERCICE 3 : Transformation d'une quantité d'eau :

(≈ 50 pts)

(D'après ENAC)

Q1. Zone (1) : Etat liquide.

Le point **B** est le point critique ;

Réponses B et D.

Q2. Supposons que le système soit entièrement sous forme de vapeur :

Déterminons alors la pression du système : $P_i V = n R T_1$; Soit : $P_i = \frac{n R T_1}{V}$;

AN : $P_i = \frac{0,1 \times 8,314 \times 373}{4 \cdot 10^{-3}}$; On obtient $P_i = 77\,500 \text{ Pa} < P_s(T_1)$: L'hypothèse est confirmée. **Réponse B.**

Q3. L'énoncé laisse penser qu'il y a un équilibre liquide-vapeur, mais dans quelles proportions ?

On a alors $P_f V = n_g R T_2$; Avec $P_f = P_s(T_2)$ puisque c'est un mélange ;

On garde V car les hypothèses précisent que le volume du liquide est négligeable devant le volume de vapeur.

Alors : $n_g = \frac{P_s(T_2) V}{R T_2}$ et $x_V = \frac{n_g}{n}$; Soit : $x_V = \frac{P_s(T_2) V}{n R T_2}$;

AN : $x_V = \frac{0,5 \cdot 10^5 \times 4 \cdot 10^{-3}}{0,1 \times 8,314 \times 353}$; On trouve $x_V = 68 \%$.

Réponse B.

Remarque : Si on fait l'hypothèse que dans l'état final, l'eau est sous forme de vapeur uniquement, calculons $P = P_f$:

$P_f = \frac{n R T_2}{V}$; AN : $P_f = \frac{0,1 \times 8,314 \times 353}{4 \cdot 10^{-3}}$;

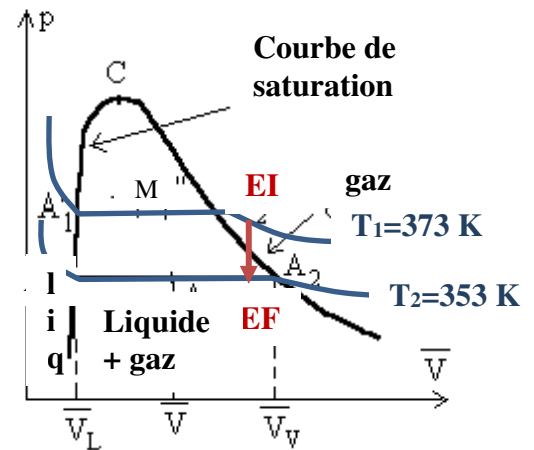
On trouve $P_f = 73\,400 \text{ Pa} = 0,73 \text{ bar} > P_s(T_2)$:

L'hypothèse est fausse.

Q4. Diagramme de Clapeyron :

La transformation est une isochore : **Droite verticale.**

On passe d'une **phase gazeuse pure** (à droite de la courbe de saturation) à un **mélange liquide/vapeur** avec beaucoup de vapeur (sous la courbe de saturation).



Q5. H est une fonction d'état, on peut choisir les états

intermédiaires qui nous arrangent en fonction des données de l'énoncé :

EI : Gaz pur	→	EI ₁ : vapeur sèche	→	EI ₂ : Mélange liquide/vap	→	EF : Mélange
T ₁ = 373 K		T ₁ = 373 K		à T ₁ : 32 % de liq		liquide/vap à T ₂
P ₁ = 0,77 bar	ΔH_1	P = P _s (T ₁)	ΔH_2	et 68 % de vapeur	ΔH_3	

De EI à EI₁ : Transformation isotherme d'un GP : $\Delta H_1 = n C_{pm} \Delta T$; $\Delta H_1 = 0$;

De EI₁ à EI₂ : Liquéfaction partielle à T₁ : $\Delta H_2 = -n_{liq} \Delta H_{vap} = -n x_{liq} \Delta H_{vap}$;

Ou encore : $\Delta H_2 = -n (1 - x_V) \Delta H_{vap}$; Enfin : $\Delta H_2 = n (x_V - 1) \Delta H_{vap}$;

De EI₂ à EF : Changement de température de gaz : ΔH_3 et changement de température du liquide ΔH_4 ;

Avec $\Delta H_3 = n_g C_{pm} \Delta T$; Soit : $\Delta H_3 = n x_V \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1)$.

Et : $\Delta H_4 = n_{liq} C_L \Delta T = n x_{liq} C_L \Delta T$; Soit : $\Delta H_4 = n (1 - x_V) C_L (T_2 - T_1)$;

Enfin : $\Delta H = \Delta H_1 + \Delta H_2 + \Delta H_3 + \Delta H_4$;

D'où : $\Delta H = n (x_V - 1) \Delta H_{vap} + n x_V \frac{\gamma R}{\gamma - 1} (T_2 - T_1) + n (1 - x_V) C_L (T_2 - T_1)$

Réponse B.

Q6. Globalement, la transformation est isochore donc $\mathbf{W} = \mathbf{0}$, car $\delta W = -P_{ext} dV$

Or d'après le 1^{er} principe de la thermodynamique : $dU = \delta W + \delta Q$; Ainsi : $\boxed{Q = \Delta U}$;

De plus, par définition, $H = U + PV$, donc $dH = dU + PdV + VdP$.

Transformation isochore, ainsi : $dH = dU + VdP$ et après intégration, $\Delta H = \Delta U + V \Delta P$

D'où : $Q = \Delta U = \Delta H - V \Delta P = \Delta H - V (P_S(T_2) - P_i)$;

Ou encore : $Q = \Delta U = \Delta H - V [P_S(T_2) - \frac{n R T_1}{V}]$;

Enfin : $\boxed{Q = \Delta U = \Delta H - V P_S(T_2) + nRT_1}$;

AN : $\Delta H = 0,1(0,68 - 1) 41\,400 + 0,068 \frac{1,4 \times 8,341}{0,4} (353 - 373) + 0,1(1 - 0,68) 75,2 (353 - 373)$

On obtient : $\Delta H = -1412 \text{ J}$;

Et $Q = \Delta U = \Delta H - V P_S(T_2) + nRT_1 = -1412 - 0,004 \times 5.10^4 + 0,1 \times 8,314 \times 373$.

On trouve : $\boxed{Q = \Delta U = -1302 \text{ J}}$.

Réponse A.

Q7. D'après l'énoncé, on attend l'équilibre thermique après avoir baissé la température du thermostat, ce qui sous-entend que la transformation précédente a été **brutale**, donc irréversible. Donc $S_{tot}^p > 0$.

L'ensemble est enfermé dans des parois calorifugées, donc $S_{tot}^e = 0$;

Or $\Delta S_{tot} = \Delta S_{univ} = S_{tot}^p + S_{tot}^e = S_{tot}^p > 0$;

Conclusion : L'entropie de l'univers a augmenté.

Réponse A.

EXERCICE 4 : Étude d'une pompe à chaleur :

(≈ 56 pts)

(D'après G2E 2022)

Q1. La pression de vapeur saturante est la pression du gaz lorsqu'il en équilibre avec le liquide.

Q2. Entre les points A et B, l'ammoniac est gazeux (gaz parfait) et il subit une transformation adiabatique réversible. On peut lui appliquer les Lois de Laplace en paramètre (T ; P) : $TP^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = cste$

D'où : $T_A P_A^{\frac{1-\gamma}{\gamma}} = T_B P_B^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$; Soit $T_B = T_A \left(\frac{P_A}{P_B}\right)^{\frac{1-\gamma}{\gamma}}$.

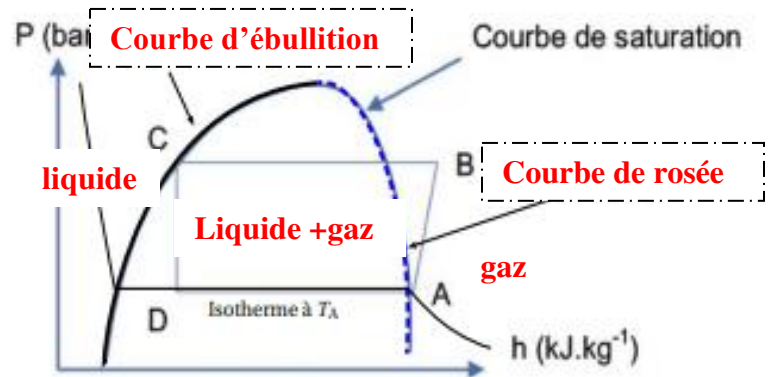
AN : $T_B = 268 \left(\frac{3,5}{15}\right)^{\frac{1-1,33}{1,33}}$; On obtient : $T_B \approx 385 \text{ K}$; Soit $\theta_B \approx 112 \text{ °C}$.

Q3. Les courbes de rosée et d'ébullition ont été notées sur le schéma ci-contre.

Concernant les états physiques du fluide, ils sont aussi indiqués sur le schéma :

- Sous la courbe de saturation, il y a des mélanges diphasés, liquide-gaz.
- A gauche de la courbe d'ébullition, le domaine liquide pur.
- A droite de la courbe de rosée, le domaine vapeur pur.

Au cours d'un changement d'état réversible, T et P restent fixées. Les isothermes forment donc un palier horizontal sous la courbe de saturation, ce qui implique : $\theta_D = \theta_A = -5 \text{ °C}$.



Q4. ΔE_c et ΔE_p sont négligeables d'après l'énoncé, ainsi, pour des systèmes ouverts, le 1^{er} principe industriel se simplifie en $\Delta H = W_{\text{autre}} + Q$ où H est l'enthalpie du fluide, W_{autre} est le travail autre que celui des forces de pression et Q le transfert thermique qui a lieu au niveau du système.

Et pour une masse unité, il vient : $\Delta h = w_{\text{autre}} + q$.

Q5. Dans le compresseur : Transformation AB : $\Delta h_{\text{comp}} = h_B - h_A$.

AN : $\Delta h_{\text{comp}} = 1980 - 1760$; On obtient : $\Delta h_{\text{comp}} = 220 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

■ Dans le radiateur : Transformation BC : $\Delta h_{\text{rad}} = h_C - h_B$.

AN : $\Delta h_{\text{rad}} = 660 - 1980$; On obtient : $\Delta h_{\text{rad}} = -1320 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

■ Dans le détendeur : Transformation CD : $\Delta h_{\text{dét}} = h_D - h_C$.

Il est précisé que cette détente est isenthalpique, ainsi $h_D = h_C$. AN : On obtient : $\Delta h_{\text{dét}} = 0$.

■ Dans l'évaporateur : Transformation DA : $\Delta h_{\text{évap}} = h_A - h_D = h_A - h_C$.

AN : $\Delta h_{\text{évap}} = 1760 - 660$; On obtient : $\Delta h_{\text{évap}} = 110 \text{ kJ.kg}^{-1}$.

Q6. La puissance de chauffage se retrouve au niveau de la source chaude, soit lors de la transformation BC.

Alors $q_{\text{ch}} = q_{\text{BC}}$.

Or d'après le 1^{er} principe industriel, $\Delta h_{\text{rad}} = w_{\text{autre}} + q_{\text{ch}}$.

Mais $w_{\text{autre}} = 0$ dans le radiateur (Pas de parties mobiles). Ainsi $\Delta h_{\text{rad}} = h_C - h_B = q_{\text{ch}} = q_{\text{BC}}$

Enfin, $D_m |h_C - h_B| = D_m |q_{\text{BC}}| = \mathcal{P}_{\text{th}}$; Soit : $D_m = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{|h_C - h_B|} = \frac{\mathcal{P}_{\text{th}}}{|\Delta h_{\text{rad}}|}$.

AN : $D_m = \frac{10}{1320}$; On obtient $D_m \approx 7,6 \cdot 10^{-3} \text{ kg.s}^{-1} \approx 7,6 \text{ g.s}^{-1}$.

Q7. Le travail mécanique n'est reçu qu'au niveau du compresseur, donc $w_{\text{méca}} = w_{\text{comp}}$.

Or dans le compresseur, la transformation est adiabatique et réversible, donc le 1^{er} principe industriel s'écrit :

$\Delta h_{\text{comp}} = w_{\text{comp}} + q_{\text{AB}}$; Mais $q_{\text{AB}} = 0$; Il vient : $\Delta h_{\text{comp}} = w_{\text{comp}}$.

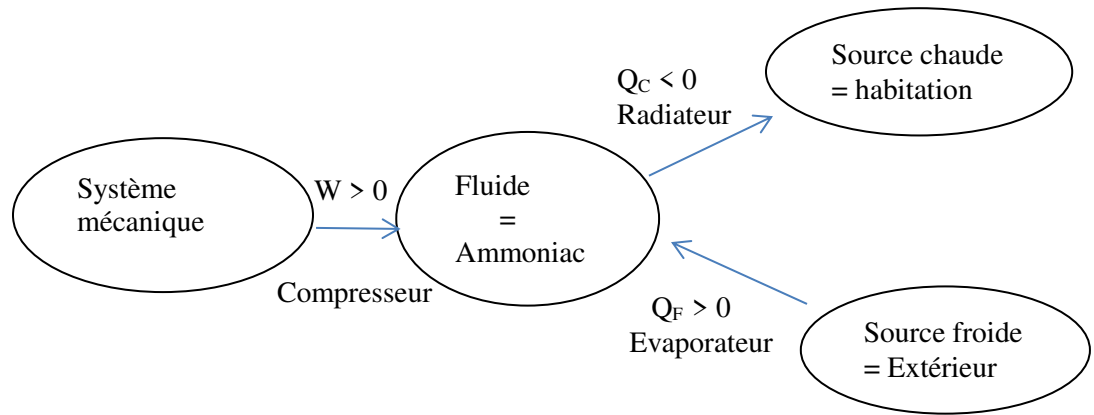
Alors $\mathcal{P}_m = \frac{\delta w_{\text{comp}}}{dt} = D_m w_{\text{comp}}$; Ou encore : $\mathcal{P}_m = D_m \Delta h_{\text{comp}} = D_m (h_B - h_A)$.

AN : $\mathcal{P}_m = 7,6 \cdot 10^{-3} \times 220$; On obtient : $\mathcal{P}_m \approx 1700 \text{ W} \approx 1,7 \text{ kW}$.

Q8. Schéma de principe :
Ci-contre.

Pour une PAC, on a vu que :

$$\boxed{W > 0, Q_C < 0 \text{ et } Q_F > 0.}$$



Q9. Par définition de l'efficacité : $\eta_P = \frac{\text{grandeur utile}}{\text{grandeur dépensée}} = \frac{|Q_C|}{W}$.

Or on a vu que : $W > 0$ donc $|W| = W$; Et $Q_C < 0$ donc : $|Q_C| = -Q_C$.

Ainsi : $\eta_P = -\frac{Q_C}{W} = \frac{P_{th}}{P_m}$. AN : $\eta_P = \frac{10}{1,7}$; On obtient $\eta_P \approx 5,9$ ou **6**.

Q10. Système = Agent de transformation.

On s'intéresse à une variation sur un cycle.

Alors : $\Delta S_{cycle} = S_{échange} + S_{créé} = \frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} + S_{créé}$, car les tuyaux contenant le fluide et au contact avec le thermostat sont à la température T_C et T_F .

Comme l'entropie est une fonction d'état, sa variation pour un cycle est nulle ; Soit : $\Delta S_{cycle} = 0$.

Or on a vu que : $S_{créé} \geq 0$, donc : $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$: **Inégalité de Clausius.**

Q11. D'après le 1^{er} principe de la thermodynamique, appliqué à l'agent de transformation sur un cycle :

$$\Delta U_{cycle} = W + Q_C + Q_F = 0 \text{ Donc : } -W = Q_C + Q_F.$$

$$\text{Ainsi : } \eta_P = \frac{Q_C}{Q_C + Q_F} = \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}}.$$

De plus, d'après l'inégalité de Clausius : $\frac{Q_C}{T_C} + \frac{Q_F}{T_F} \leq 0$ Donc : $\frac{Q_F}{T_F} \leq -\frac{Q_C}{T_C}$ Et : $\frac{Q_F}{Q_C} \geq -\frac{T_F}{T_C}$

$$\text{Donc : } 1 + \frac{Q_F}{Q_C} \geq 1 - \frac{T_F}{T_C}; \text{ Et : } \frac{1}{1 + \frac{Q_F}{Q_C}} \leq \frac{1}{1 - \frac{T_F}{T_C}}; \text{ D'où : } \boxed{\eta_P \leq \frac{T_C}{T_C - T_F} = \eta_{P_{max}}}.$$

$$\text{AN : } \eta_{P_{max}} = \frac{273+38}{38-(-5)} = \frac{311}{43}; \text{ On obtient : } \eta_{P_{max}} \approx 7,2.$$

Conclusion : L'efficacité réelle est bien inférieure à cette valeur.

EXERCICE 5 : Question ouverte : Coût de chauffage d'une piscine : (≈ 15 pts)

On estime la taille d'une piscine olympique à $50 \text{ m} \times 25 \text{ m} \times 2 \text{ m}$ ce qui fait un volume de $V \approx 2500 \text{ m}^3$. La masse volumique de l'eau est $\mu = 1000 \text{ kg/m}^3$.

Dans la piscine, on aura donc une masse d'eau $m_e \approx 2,5 \times 10^6 \text{ kg}$.

La capacité thermique de l'eau est de $c_e \approx 4,2 \times 10^3 \text{ J kg}^{-1} \text{ K}^{-1}$.

Il faudra donc une énergie $E = m_e c_e \Delta T$ avec $\Delta T = 7^\circ\text{C} = 7 \text{ K}$.

$$\text{Soit } E = 2,5 \times 10^6 \times 4,2 \times 10^3 \times 7; \text{ On obtient : } \underline{E \approx 74 \cdot 10^9 \approx 7,4 \cdot 10^{10} \text{ J} = 7,4 \cdot 10^{10} \text{ W.s.}}$$

Il faut alors convertir les Joules en Wh.

Les Joules correspondent à des Wh et $1 \text{ Wh} = 3600 \text{ Ws} = 3600 \text{ J}$.

$$\text{Soit } E' = \frac{E}{3600}; \text{ AN : } E' = \frac{7,4 \cdot 10^{10}}{3600}; \text{ On obtient : } \underline{E' \approx 2 \cdot 10^7 \text{ Wh} = 2 \cdot 10^4 \text{ kWh.}}$$

Le prix moyen du kWh d'électricité étant de l'ordre de $0,20 \text{ €}$, on a : $0,20 \text{ €} \leftrightarrow 1 \text{ kWh}$
 $P \leftrightarrow 2 \cdot 10^4 \text{ kWh}$

Soit $P \approx 0,20 \times 2 \cdot 10^4$; Soit **$P \approx 4000 \text{ euros}$** .

On trouve ainsi un tarif d'**environ 4000 €** pour augmenter la température d'une piscine olympique de 7°C .