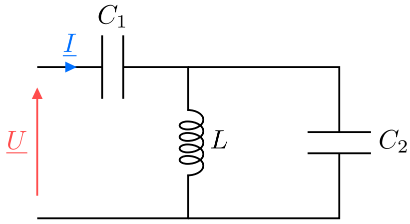
Correction du TD d'application

I Impédance équivalente

Déterminer l'impédance complexe équivalente de chacun des dipôles ci-dessous en RSF.

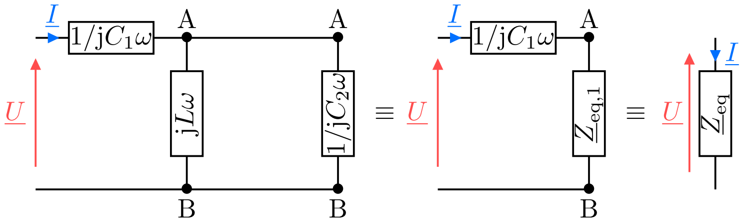
1)



Réponse

On commence par convertir le circuit avec les impédances complexes :

- $\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{jC_1\omega}$;
- $\underline{Z}_L = jL\omega$;
- $\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{jC_2\omega}$.



On peut ensuite déterminer l'impédance équivalente à l'association en parallèle de L et C_2. Avec les admittances, on a

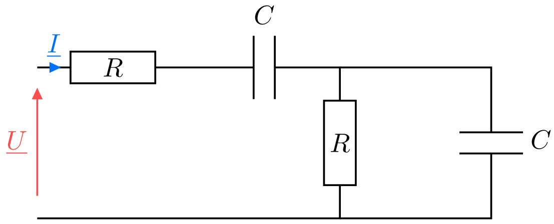
$$\underline{Y}_{eq,1} = \underline{Y}_{C_2} + \underline{Y}_L \Leftrightarrow \underline{Z}_{eq,1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{C_2}} + \frac{1}{\underline{Z}_L}} = \frac{1}{jC_2\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jL\omega}{1-\omega^2 LC_2}$$

Il suffit alors de faire l'association en série de $\underline{Z}_{C_1}$ et de $\underline{Z}_{eq,1}$:

$$\boxed{\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{jL\omega}{1-\omega^2 LC_2}}$$

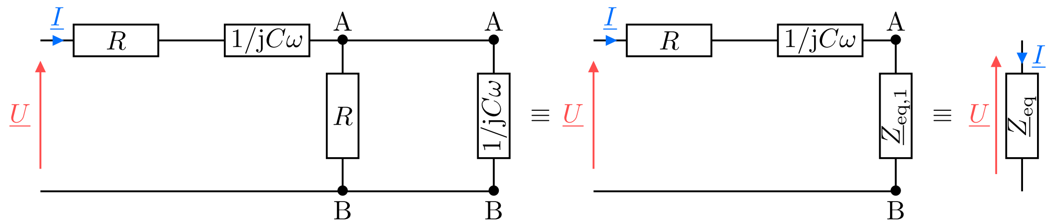
Il n'est ici pas nécessaire d'aller plus loin dans le calcul.

2)



Réponse

Ici, on utilise que $\underline{Z}_R = R$ et comme précédemment, on effectue l'association en parallèle des R et C de droite avant de faire l'association en série de R et C de gauche avec cette impédance équivalente :



$$\underline{Z}_{\text{eq, }1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

Et on a donc finalement

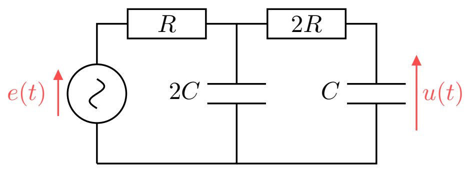
$$\boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}}$$

◇

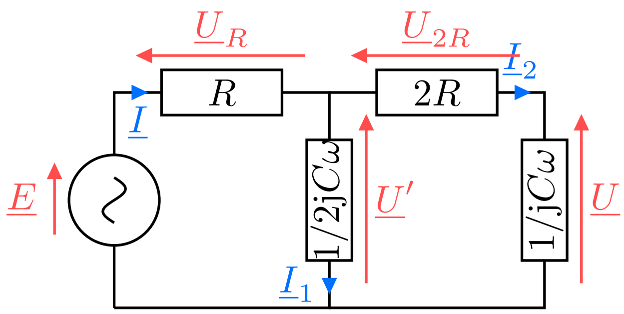
☆★☆ II Obtention d'une équation différentielle

1) En utilisant les lois de KIRCHHOFF en complexes, montrer que la tension $u(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$4\tau^2 \frac{\mathrm{d}^2 u}{\mathrm{d}t^2} + 5\tau \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = e(t) \qquad \text{avec} \qquad \tau = RC$$



Réponse



On nomme les tensions et intensités dans le circuit, et on utilise la loi des nœuds et la loi d'OHM généralisée :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R}\underline{U}_R &= \frac{1}{\underline{Z}_{2C}}\underline{U}' + \frac{1}{\underline{Z}_C}\underline{U} \\ \Leftrightarrow \underline{U}_R &= 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}' + \mathrm{j}RC\omega\underline{U} \end{aligned} \tag{6.1}$$

On utilise ensuite la loi des mailles à droite et à gauche, donnant respectivement :

$$\underline{U}' = \underline{U} + 2R\underline{I}_2 = \underline{U} + 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U} \qquad \text{et} \qquad \underline{U}_R = \underline{E} - \underline{U}' = \underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}RC\omega\underline{U}$$

On regroupe les équations dans (6.1) et on introduit $\tau = RC$:

$$\begin{aligned} \underline{E} - \underline{U} - 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} &= \mathrm{j}\omega\tau\left(\underline{U} + 2\mathrm{j}\omega\tau\underline{U}\right) + \mathrm{j}\omega\tau\underline{U} \\ \Leftrightarrow \underline{E} &= \underline{U} + 5\mathrm{j}\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(\mathrm{j}\omega)^2\underline{U} \end{aligned}$$

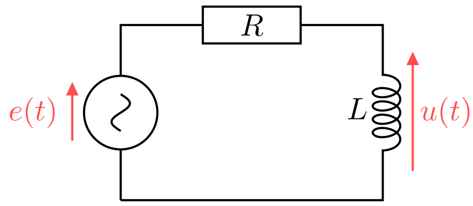
En identifiant les puissances de $\mathrm{j}\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on a donc bien

$$\boxed{e(t) = u(t) + 5\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + 4\tau^2\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}}$$

◇

III Circuit RL série en RSF

On considère le circuit ci-contre en régime sinusoïdal forcé, où la source de tension impose $e(t) = E\cos(\omega t)$ avec $E > 0$.

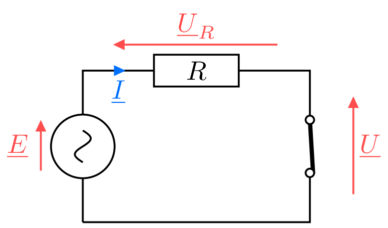


1) Déterminer l'amplitude de u à « très haute » ($\omega \to \infty$) et « très basse » ($\omega \to 0$) fréquence.

Réponse

Pour les comportements limites, on utilise la modélisation d'une bobine à haute et basse fréquence : étant donné que $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$, pour $\omega \to 0$ on a $\underline{Z}_L = 0$, et pour $\omega \to \infty$ on a $\underline{Z}_L \to \infty$. On a donc respectivement un fil et un interrupteur ouvert. En effet, l'impédance étant homogène à une résistance, une impédance nulle est semblable à une résistance nulle (un fil), et une impédance infinie est semblable à une résistance infinie (un interrupteur ouvert).

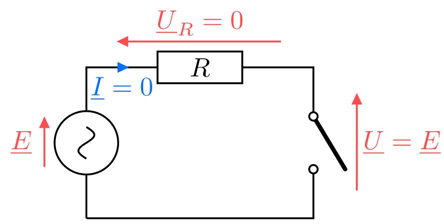
$\boxed{\omega \to 0}$



Or, la tension d'un fil est nul, donc

$$\boxed{u \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0}$$

$\boxed{\omega \to \infty}$

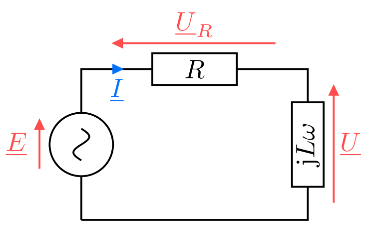


Le courant ne peut traverser un interrupteur, donc en faisant la loi des mailles dans le circuit équivalent, on a $u_R = Ri = 0$, et forcément

$$\boxed{u \xrightarrow[\omega\to \infty]{} E}$$

2) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ en fonction de E, R, L et ω.

Réponse



Pour cela, on utilise la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R}\underline{E} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega}\underline{E}}$$

3) Les tensions e et u peuvent-elles être en phase ? En opposition de phase ? En quadrature de phase ? Préciser le cas échéant pour quelle(s) pulsation(s).

Réponse

La phase de $e(t)$ est nulle par construction. On calcule donc la phase de u en prenant l'argument de son amplitude complexe :

$$\arg(\underline{U}) = \arg(\mathrm{j}L\omega E) - \arg(\underbrace{R}_{\mathrm{Re}>0} + \mathrm{j}L\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

où on peut prendre l'arctangente parce que la partie réelle est positive. Ainsi :

1) Signaux en phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = 0 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \longrightarrow \infty}$$

C'est donc mathématiquement possible et physiquement approchable, mais pas rigoureusement.

2) Signaux en opposition de phase

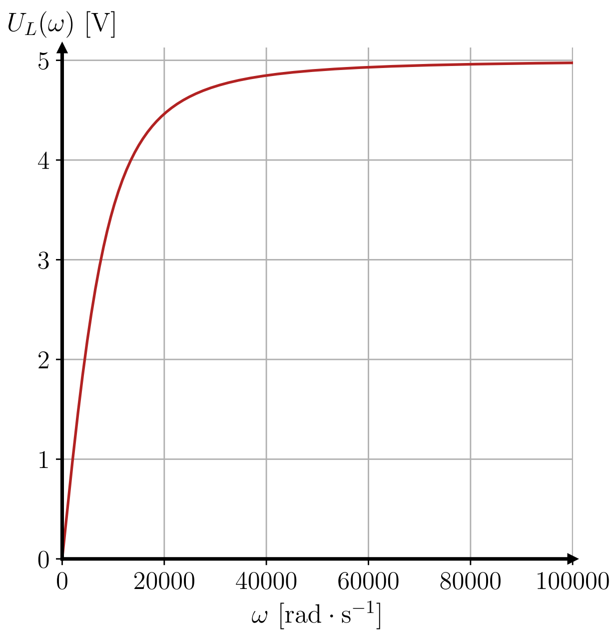
$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \pi \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \longrightarrow -\infty}$$

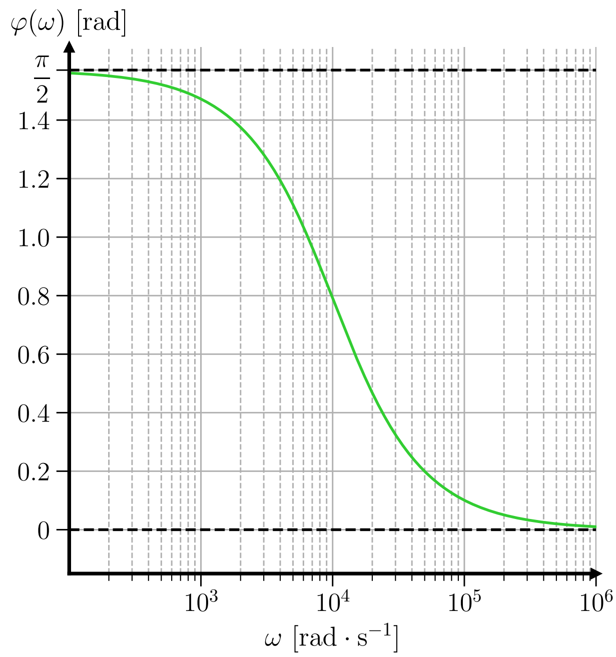
C'est donc mathématiquement possible, mais **physiquement impossible** : la pulsation est proportionnelle à la fréquence, et une fréquence ne saurait être négative.

3) Signaux en quadrature de phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 0}$$

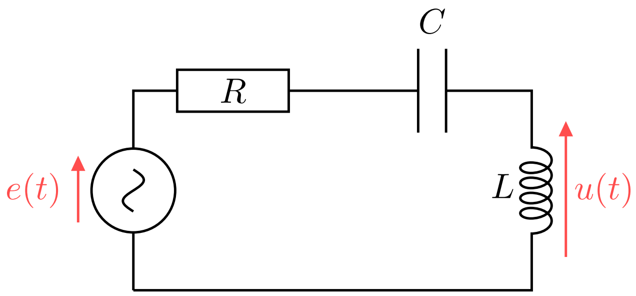
C'est donc possible à la fois mathématiquement et physiquement, mais cela correspond à un signal d'entrée qui ne varie pas, c'est-à-dire un régime permanent : la sortie n'oscille donc pas non plus, et est simplement nulle. La quadrature de phase n'a donc pas vraiment de sens ici, la sortie est constamment nulle quand l'entrée est à son maximum.

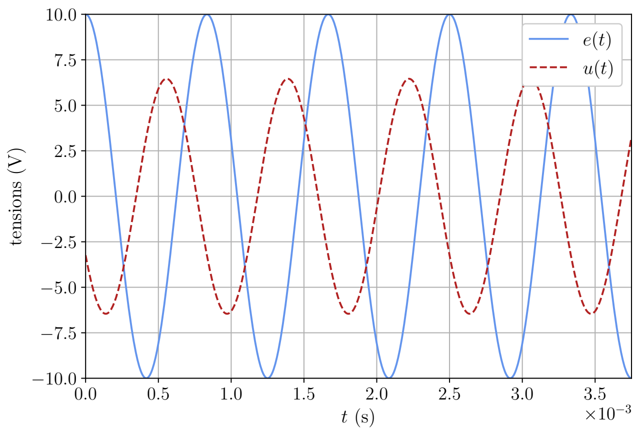




☆☆ IV Exploitation d'un oscillogramme en RSF

On considère le circuit ci-dessous. On pose $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$. La figure ci-dessous représente un oscillogramme réalisé à la fréquence $f = 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{Hz}$, avec $R = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}10\,\mathrm{\mu F}$.





1) Déduire de cet oscillogramme les valeurs expérimentales de E_m, U_m et φ.

Réponse

On lit l'amplitude de $e(t)$ à son maximum pour avoir $\boxed{E_m = 10\,\mathrm{V}}$. On lit l'amplitude de $u(t)$ à son maximum pour avoir $\boxed{U_m = 6\,\mathrm{V}}$. Pour la phase **à l'origine des temps**, on regarde le signal à $t = 0$: on lit $u(0) = U_m \cos(\varphi) = -3\,\mathrm{V}$, soit

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{u(0)}{U_m}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(0) = -3\,\mathrm{V} \\ U_m = 6\,\mathrm{V} \end{cases}$$

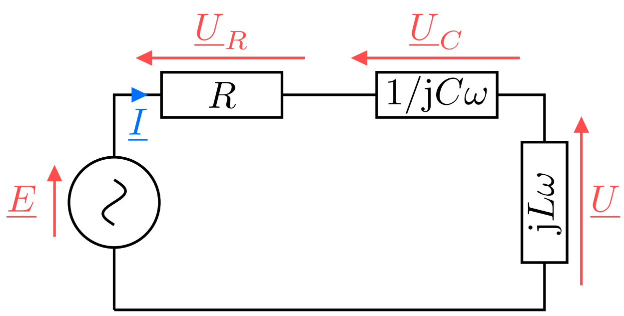
$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{3}\mathrm{rad}}$$

◇

2) Exprimer U_m et φ en fonction des composants du circuit et de la pulsation ω. Donner l'intervalle d'existence de φ et ses limites. Tracer alors l'allure des deux graphiques $U_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$.

Réponse

On utilise un pont diviseur de tension pour avoir l'amplitude complexe :



$$\underline{U} = \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_R} + \underline{Z_C} + \underline{Z_L}} E_m \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{\frac{\underline{Z_R}}{\underline{Z_L}} + \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_L}} + \frac{\underline{Z_L}}{\underline{Z_L}}} E_m$$

$$\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{\mathrm{j}^2\omega^2 CL}} E_m$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{\omega^2 LC}} E_m}$$

On peut en vérifier l'homogénéité en se souvenant des résultats des chapitres précédents :

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc} \quad \omega^2 LC \text{ adimensionné} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = \tau^{-1} \quad \text{donc} \quad \frac{R}{L\omega} \text{ adimensionné}$$

D'une manière générale, on exprimera les résultats de la sorte, avec une fraction dont le numérateur est homogène à la quantité exprimée alors que le dénominateur est adimensionné.

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module de cette expression :

$$U_m = |\underline{U}| \Leftrightarrow \boxed{U_m = \frac{E}{\sqrt{\left(1-\frac{1}{LC\omega^2}\right)^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}}$$

On trouve la phase en en prenant l'argument :

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \underbrace{\cancel{\arg(E)}}_{=0} - \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}\right) = -\psi$$

Ici, il n'est pas évident de prendre l'arctangente de la tangente : la partie réelle de l'argument calculé n'est pas forcément positif (il l'est si $\omega^2 > \frac{1}{LC}$). Pour faciliter l'étude de l'argument, notons $\psi = \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}\right)$. On alors :

$\boxed{\omega \to 0}$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\psi) \to -\infty < 0 \\ \mathrm{Im}(\psi) \to -\infty < 0 \end{cases} \Rightarrow \psi \in \left[-\pi\,;-\frac{\pi}{2}\right]$$

$\boxed{\omega \to \infty}$

$$\begin{cases} \mathrm{Re}(\psi) \to 1 > 0 \\ \mathrm{Im}(\psi) \to 0 \end{cases} \Rightarrow \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right]$$

On détermine les valeurs limites en étudiant $\tan(\psi)$:

$$\tan(\psi) = -\frac{R}{L\omega} \times \frac{1}{1-\frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{RC\omega}{1-LC\omega^2}$$

$\boxed{\omega \to 0}$

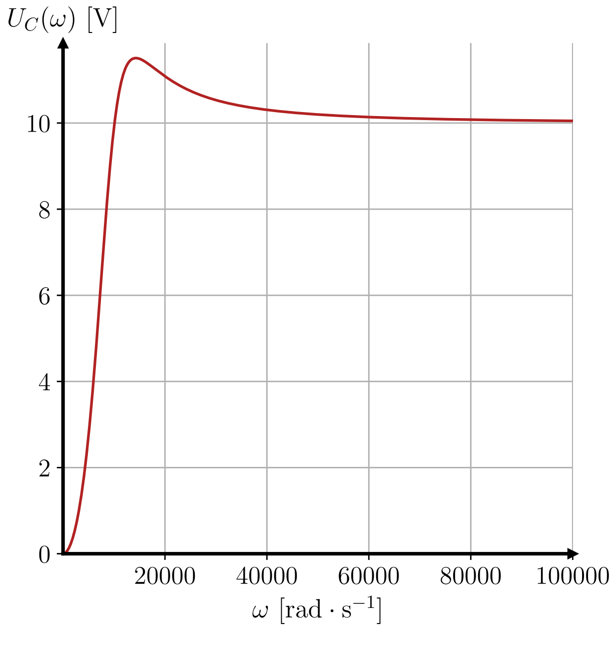
$$\tan(\psi) \xrightarrow[\omega\to0]{} 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi \xrightarrow[\omega\to0]{} -\pi}$$

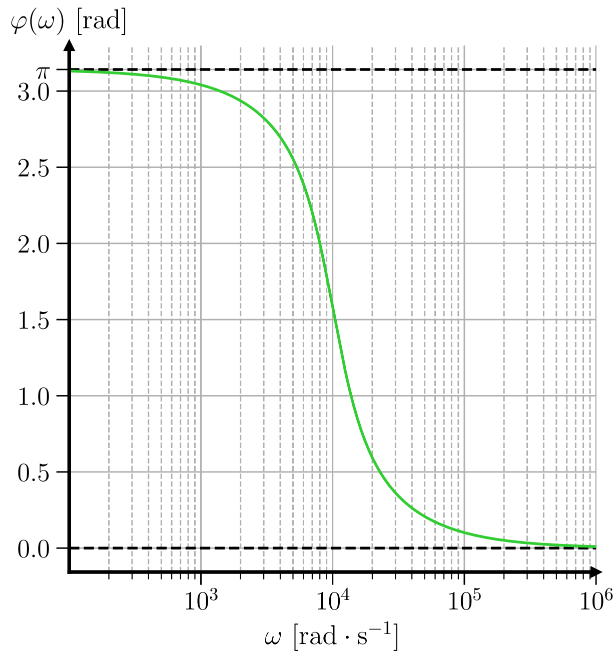
$\boxed{\omega \to \infty}$

$$\tan(\psi) \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0}$$

Ainsi, on a les résultats opposés pour $\varphi = -\psi$:

$$\boxed{\varphi \in \,]0\,;\pi[} \quad \text{avec} \quad \boxed{\varphi \xrightarrow[\omega\to0]{} \pi} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0}$$





3) En déduire la valeur numérique de l'inductance L de la bobine.

Réponse

Il paraît évidemment plus simple de calculer L à partir de la phase, sachant qu'on a déterminé φ à la première question :

$$LC\omega^2 - 1 = \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 + \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{R}{\omega\tan(\varphi)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 0{,}10\,\mu\text{F} \\ \omega = 2\pi f \\ f = 1{,}2 \times 10^3\,\text{Hz} \\ R = 1\,\text{k}\Omega \\ \varphi = \frac{2\pi}{3}\text{rad} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{L = 9{,}9 \times 10^{-2}\,\text{H}}$$

◇