Correction du TD



Vitesse du son

1) Donner l'expression de la célérité c du son dans un fluide en fonction de la masse volumique du ρ du fluide et du coefficient d'incompressibilité χ , homogène à l'inverse d'une pression.

- Réponse -



Données

c est une vitesse, ρ une masse volumique et χ une grandeur relative à la pression. On nous donne dim $\chi = \dim P^{-1}$ avec P une pression.



Résultat attendu

On cherche c en fonction de ρ et χ , soit

$$c = \rho^{\alpha} \chi^{\beta}$$

avec α et β à déterminer.



Outil

Une pression est une force surfacique, c'est-à-dire une force répartie sur une surface. On a

$$\dim P = \frac{\dim F}{L^2}$$

De plus, la force de pesanteur s'exprime F = mg, avec g l'accélération de la pesanteur : ainsi,

$$\dim F = \dim m \cdot \dim g = M \cdot L \cdot T^{-2}$$



Application

On commence par déterminer la dimension de c. En tant que vitesse, on a

$$\dim c = L \cdot T^{-1}$$

On exprime ensuite les dimensions de ρ et χ . D'une part,

$$\dim \rho = M \cdot L^{-3}$$

D'autre part,

$$\dim \chi = \frac{L^2}{\dim F}$$

$$\Leftrightarrow \dim \chi = \frac{L^2}{M \cdot \cancel{L} \cdot T^{-2}}$$

$$\Leftrightarrow \dim \chi = L \cdot M^{-1} \cdot T^2$$

L'expression recherchée revient à résoudre

$$\mathbf{L} \cdot \mathbf{T}^{-1} = (\mathbf{M} \cdot \mathbf{L}^{-1})^{\alpha} (\mathbf{L} \cdot \mathbf{M}^{-1} \cdot \mathbf{T}^{2})^{\beta}$$

En développant, on trouve un système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\begin{cases} 1 = -3\alpha + \beta \\ -1 = 2\beta \\ 0 = \alpha - \beta \end{cases} \iff \begin{cases} \beta = -\frac{1}{2} \\ \alpha = -\frac{1}{2} \end{cases}$$

Ainsi, on peut exprimer c tel que

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}}$$



II | Faire cuire des pâtes

Sur une facture d'électricité, on peut lire sa consommation d'énergie électrique exprimée en kWh (kilowatt-heure).

1) Quelle est l'unité SI associée? Que vaut 1 kWh dans cette unité SI?

- Réponse ·



Donnée

Consommation électrique en kWh.

Résultat attendu

Unité associée en unités SI.





Outil

Toute énergie s'exprime en joules (J), et les **puissances** sont des **énergies par unité de temps**. Notamment pour les watts on a $1 \text{ W} = 1 \text{ J} \cdot \text{s}^{-1}$.



Application

On a directement

$$1 \,\mathrm{kWh} = 1 \times 10^3 \,\mathrm{J \cdot s^{-1} \cdot h}$$

Avec l'évidence que 1 h = 3600 s, finalement

$$1 \text{ kWh} = 3.6 \times 10^6 \text{ J}$$



2) Sachant que la capacité thermique massique de l'eau est $c=4.18\,\mathrm{J\cdot g^{-1}\cdot K^{-1}}$ et que le prix du kilowatt-heure est de 0.16 €, évaluer le coût du chauffage électrique permettant de faire passer 1 L d'eau de $20\,\mathrm{^{\circ}C}$ à $100\,\mathrm{^{\circ}C}$.





Données

Notre objet d'étude est l'eau. On a :

- $\diamond V_{\rm eau} = 1 \, {\rm L};$
- $\Leftrightarrow T_{\rm i} = 20\,^{\circ}{\rm C};$
- $\Rightarrow T_{\rm f} = 100 \,^{\circ} \text{C};$
- $\diamond c = 4.18 \,\mathrm{J} \cdot \mathrm{g}^{-1} \cdot \mathrm{K}^{-1}$

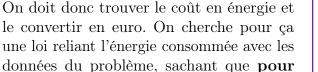
De plus, on nous donne

 $\Diamond 1 \text{ kWh} = 1 \in$.

Résultat attendu

On cherche à monter 1L d'eau de 20 à 100 °C et d'en calculer le coût en euros.





 $\mathbf{l'eau}, \, 1\, \mathbf{L} = \mathbf{1}\, \mathbf{kg}.$





Application

L'énergie à apporter Q se déduit de la dimension de la capacité thermique massique : dim $c = \dim Q \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \Theta^{-1}$. En appelant m la masse du volume d'eau, par cette analyse dimensionnelle on a

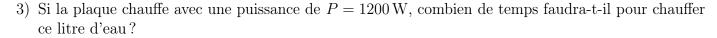
$$Q = mc\Delta T$$

On a donc

$$Q = 3.3 \times 10^{5} \,\text{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 1 \,\text{kg} \\ c = 4.18 \,\text{J} \cdot \text{g}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \Leftrightarrow c = 4.18 \times 10^{3} \,\text{J} \cdot \text{kg}^{-1} \cdot \text{K}^{-1} \\ \Delta T = 80 \,\text{K} \end{cases}$$

et pour utiliser le coût en euros, on la converti en kWh:

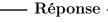
$$Q = 9.3 \times 10^{-2} \,\mathrm{kWh} = 1.5 \times 10^{-2} \,\mathrm{\xi}$$





Données

On utilise une plaque chauffante de puissance $P = 1200 \,\mathrm{W}$.



On cherche la durée que cette plaque prendrait pour transférer l'énergie calculée précédemment.



Outil

Une puissance est une énergie par unité de temps, et $1 \,\mathrm{W} = 1 \,\mathrm{J} \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

Application

Résultat attendu

On en déduit

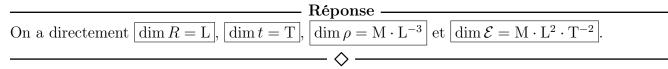
$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 3.3 \times 10^5 \,\text{J} \\ P = 1200 \,\text{J} \cdot \text{s}^{-1} \end{cases}$$
d'où
$$\Delta t = \frac{Q}{P} = \underline{2.8 \times 10^2 \,\text{s}}$$



III TAYLOR meilleur que James Bond?

À l'aide d'un film sur bande magnétique et en utilisant l'analyse dimensionnelle, le physicien Geoffrey Taylor a réussi en 1950 à estimer l'énergie $\mathcal E$ dégagée par l'explosion nucléaire du test Trinity de 1945, valeur pourtant évidemment classifiée. Le film permet d'avoir accès à l'évolution du rayon R(t) du « nuage » de l'explosion au cours du temps. Nous supposons que les grandeurs influant sur ce rayon sont le temps t, l'énergie $\mathcal E$ de l'explosion et la masse volumique ρ de l'air.

1) Quelles sont les dimensions de ces grandeurs?



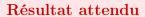
2) Chercher une expression de R sous la forme $R=k\times\mathcal{E}^{\alpha}t^{\beta}\rho^{\gamma}$, avec k une constante adimensionnée.

——— Réponse –



Données

On nous donne la formule $R = k \times \mathcal{E}^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$ et que $\dim k = 1$.



On cherche α , β et γ tels que $R = k \times \mathcal{E}^{\alpha} t^{\beta} \rho^{\gamma}$





Outils

$$\Leftrightarrow \dim \mathcal{E} = M \cdot L^2 \cdot T^{-2}; \qquad \Leftrightarrow \dim t = T;$$

$$ightarrow \dim t = T$$
:



Application



3) L'analyse du film montre que le rayon augmente au cours du temps comme $t^{2/5}$. Exprimer alors $\mathcal E$ en fonction de R, ρ et t.

Réponse -On isole simplement en mettant la relation à la puissance 5 : $\mathcal{E} = k^{-5}R^5t^{-2}\rho$.

4) En estimant que $R \approx 70\,\mathrm{m}$ après $t = 5\,\mathrm{ms}$, sachant que la masse volumique de l'air vaut $\rho \approx$ $1.2 \,\mathrm{kg \cdot m^{-3}}$ et en prenant $k \approx 1$, calculer la valeur de \mathcal{E} en joules puis en kilotonnes de TNT (une tonne de TNT libère $4.18 \times 10^9 \,\mathrm{J}$).

– Réponse -

On fait une simple application numérique :

$$\mathcal{E} = 8.0 \times 10^{13} \,\text{J}$$
 avec
$$\begin{cases} k = 1 \\ R = 70 \,\text{m} \\ t = 5 \times 10^{-3} \,\text{s} \\ \rho = 1.2 \,\text{kg} \cdot \text{m}^{-3} \end{cases}$$

En équivalent tonne de TNT, on trouve :

 $\mathcal{E} = 19 \,\mathrm{kT} \,\mathrm{de} \,\mathrm{TNT}$



Remarque

En réalité, l'explosion aura été estimée à [21; 24] kT de TNT des années plus tard, connaissant la composition de la bombe. Cependant, l'analyse dimensionnelle marche très bien, même si le $k \approx 1$ n'était pas évident. Voir le billet de blog de Science Étonnante joint à sa vidéo sur l'analyse dimensionnelle – que je vous recommande aussi.

