SUP MPSI 2 CORRIGE du DS DE REVISIONS **du 7 mai 2024.**

EXERCICE : Etude d'une lunette de Galilée : (≈ 36 *pts)*

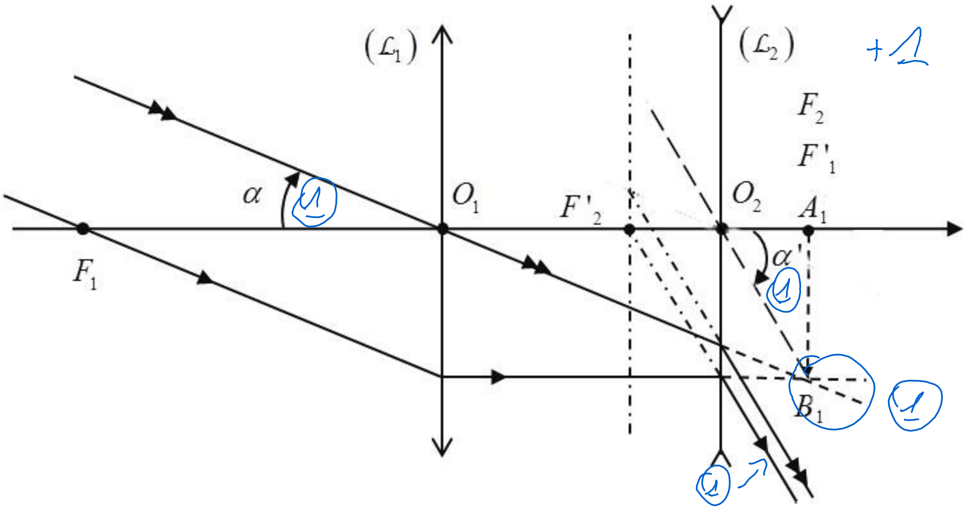
17 **Q1.** Un système afocal est tel que le foyer image de la 1ère lentille soit confondu avec le foyer objet de la 2nde. Alors $\boxed{\boldsymbol{F'_1 = F_2}}$; Soit $\overline{F'_1F_2} = 0$. 1 1
D'après la relation de Chasles, on a : $\overline{O_1O_2} = \overline{O_1F'_1} + \overline{F'_1F_2} + \overline{F_2O_2}$. 1
Or $\overline{O_1F'_1} = f'_1 = \frac{1}{V_1}$ et $\overline{F_2O_2} = \overline{O_2F'_2} = f'_2 = \frac{1}{V_2}$. 1
Il vient donc : $\boxed{\boldsymbol{\overline{O_1O_2} = \frac{1}{V_1} + \frac{1}{V_2}}}$. 1
<u>AN</u> : ATTENTION : La lentille (L_2) est divergente, donc $\boldsymbol{V_2 = -50\ \delta}$. 1
$\overline{O_1O_2} = \frac{1}{1{,}33} + \frac{1}{-50}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\overline{O_1O_2} \approx 0{,}73\ m \approx 73\ cm}}$. 1

18 **Q2.** On cherche la position de l'image de O_1 à travers la lentille (L_2).
Relation de Descartes à (L_2) : $\frac{1}{\overline{O_2O'_1}} - \frac{1}{\overline{O_2O_1}} = \frac{1}{f'_2} = V_2$ 1
Soit $\frac{1}{\overline{O_2O'_1}} = \frac{1}{\overline{O_2O_1}} + V_2 = \frac{1+V_2\overline{O_2O_1}}{\overline{O_2O_1}}$; Ainsi $\boxed{\boldsymbol{\overline{O_2O'_1} = \frac{\overline{O_2O_1}}{1+V_2\overline{O_2O_1}}}}$. 1
<u>AN</u> : $\overline{O_2O'_1} = -0{,}731/(1+50\times 0{,}73)$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\overline{O_2O'_1} \approx -0{,}0195\ m \approx -1{,}95\ cm.}}$ 1
Cette **<u>image est donc virtuelle pour la lentille (L_2)</u>** : On ne **<u>peut donc pas y placer l'œil.</u>** 1 1
- On cherche aussi la dimension de l'image. Formule du grandissement transversal : $G_t = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}$ 2

Ici, il vient : $\frac{D'_1}{D_1} = \left|\frac{\overline{O_2O'_1}}{\overline{O_2O_1}}\right|$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{D'_1 = D_1\left|\frac{\overline{O_2O'_1}}{\overline{O_2O_1}}\right|}}$. 1
<u>AN</u> : $D'_1 = 10\ \frac{1{,}95}{73}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{D'_1 \approx 0{,}27\ cm \approx 2{,}7\ mm.}}$ 1

16 **Q3.a.** Sur le schéma : $\boldsymbol{f'_1 = 75\ cm\ ;\ f'_2 = -2\ cm\ ;\ \overline{O_1O_2} = 73\ cm}$.
Donc le foyer image de (L_1)confondu avec le foyer objet de (L_2) est à droite de (L_2) ; Cohérent puisque (L_2)est divergente.
On notera A_1B_1 l'image intermédiaire à travers (L_1) et $A'B'$ l'image définitive.
Il est judicieux de tracer le rayon initial passant par O_1(avec un angle α) qui n'est pas dévié et son parallèle passant par F_1 qui émerge de (L_1) en étant parallèle à l'axe optique. Et comme il est parallèle à l'axe optique avant (L_2), il sort du système optique en passant par F'_2 (son prolongement).
Par construction de la lunette (objet à l'infini), l'image intermédiaire A_1B_1 se trouve dans le plan focal image de (L_1) et donc aussi dans le plan focal objet de (L_2). On a donc $\boldsymbol{A_1 = F'_1 = F_2}$ **;** Ces 3 points sont confondus.
Et toujours par construction, l'image définitive est à l'infini, donc les rayons émergent parallèles entre eux (avec un angle α').

$$A_\infty B_\infty \xrightarrow{\text{Obj}} \underset{= F'_1 = F_2}{A_1B_1} \xrightarrow{\text{Ocu}} A'_\infty B'_\infty$$ 1



15 **Q3.b.** On cherche l'expression de $G = \frac{\alpha'}{\alpha}$.

Dans l'approximation de Gauss, les angles sont petits, ainsi : 1

$\mathbf{tan(\alpha) \approx \alpha} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{O_1F'_1}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{f'_1} = V_1 \times \overline{A_1B_1}$ 1 $\quad (\alpha < 0 \; et \; \overline{A_1B_1} < 0)$

Et $\mathbf{tan(\alpha') \approx \alpha'} = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{F'_2O_2}} = \frac{\overline{A_1B_1}}{-\overline{O_2F'_2}} = - \frac{\overline{A_1B_1}}{f'_2} = -V_2 \times \overline{A_1B_1}$ 1 $\quad (\alpha' < 0)$

D'où $\boxed{\boldsymbol{G = \frac{\alpha'}{\alpha} = -\frac{f'_1}{f'_2} = -\frac{V_2}{V_1}}}$; 1

<u>AN</u> : $G = -\frac{-50}{1{,}33}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{G \approx 37{,}6}}$ **.** 1

19 **Q4.** Question plus difficile !!

$AB \xrightarrow{\text{Obj}} A_2B_2 \xrightarrow{\text{Ocu}} A''B''$ 1

Soit $\overline{A_2B_2}$ l'image de $\overline{AB}$ à travers l'objectif et $\overline{A''B''}$ l'image de $\overline{A_2B_2}$ à travers l'oculaire.

On nous précise que l'œil est à 1,5 cm derrière (L_2) et qu'il voit une image située à d_m = 25 cm.

Alors $\underline{\boldsymbol{\overline{O_2A''} = 1{,}5 - 25 = -23{,}5 \text{ cm.}}}$ 1

<u>Méthode</u> : En appliquant la relation de Descartes à (L_2) , on va obtenir $\overline{O_2A_2}$.

Puis on va utiliser une relation de Chasles pour obtenir $\overline{O_1A_2}$ et enfin une relation de Descartes à (L_1) pour obtenir $\overline{O_1A}$ que l'on cherche.

- Relation de Descartes à (L_2) : $\frac{1}{\overline{O_2A''}} - \frac{1}{\overline{O_2A_2}} = V_2$. 1

Soit $\frac{1}{\overline{O_2A_2}} = \frac{1}{\overline{O_2A''}} - V_2 = \frac{1 - V_2\,\overline{O_2A''}}{\overline{O_2A''}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\overline{O_2A_2} = \frac{\overline{O_2A''}}{1 - V_2\,\overline{O_2A''}}}}$. 1

<u>AN</u> : $\overline{O_2A_2} = \frac{-0{,}235}{1-(-50)\times(-0{,}235)}$. On obtient : $\underline{\boldsymbol{\overline{O_2A_2} \approx +0{,}0219 \text{ m} \approx 2{,}19 \text{ cm}}}$. 1

- Relation de Chasles : $\boxed{\boldsymbol{\overline{O_1A_2} = \overline{O_1O_2} + \overline{O_2A_2}}}$. 1

<u>AN</u> : $\overline{O_1A_2} = 73 + 2{,}19$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\overline{O_1A_2} \approx 75{,}19 \text{ cm}}}$. 1

- Relation de Descartes à (L_1) : $\frac{1}{\overline{O_1A_2}} - \frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{f'_1} = V_1$

Soit : $\frac{1}{\overline{O_1A}} = \frac{1}{\overline{O_1A_2}} - V_1 = \frac{1 - V_1\,\overline{O_1A_2}}{\overline{O_1A_2}}$ et $\boxed{\boldsymbol{\overline{O_1A} = \frac{\overline{O_1A_2}}{1 - V_1\,\overline{O_1A_2}}}}$. 1

<u>AN</u> : $\overline{O_1A} = \frac{0{,}7519}{1 - 1{,}333 \times 0{,}7519}$; On obtient : $\underline{\boldsymbol{\overline{O_1A} \approx \text{- } 329 \text{ m.}}}$ 1

11 **Q5.** L'œil peut donc voir tous les <u>**objets situés entre l'infini et 300 m devant l'objectif**</u> de la lunette.

1

PROBLEME 1 : Filtre linéaire d'ordre 1 et pH-métrie : (≈ ~~64~~ 66 *pts*)

13 **Q1.** Il faut utiliser un **filtre passe-bas de fréquence de coupure f_C faible devant 4 kHz** afin de conserver la composante continue et supprimer le signal sinusoïdal de fréquence 4 kHz.
On choisira, par exemple, $f_C \approx \frac{4000}{10} \approx$ **400 Hz** .

18 **Q2.** Schéma électrique équivalent en BF :

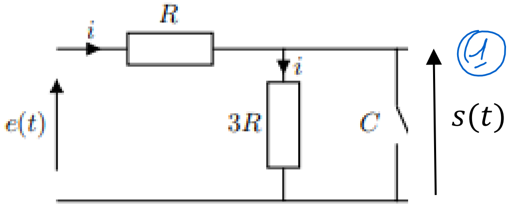
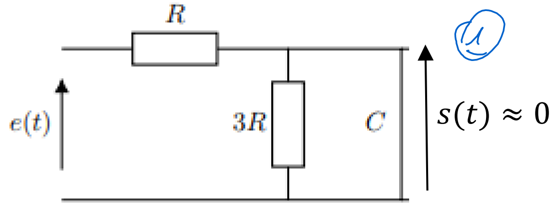


Schéma électrique équivalent en HF :

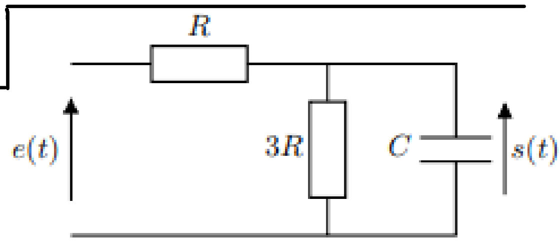


En BF : Les résistances R et $3R$ sont en série :
Pont diviseur de tension : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{3R}{3R+R} = \frac{3}{4} = cste$; $\boldsymbol{G_{dB} \to 20\log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5\ \mathrm{dB} = \mathrm{cste.}}$

En HF : $\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} \approx 0$ et $\boldsymbol{G_{dB} \to -\infty}$.

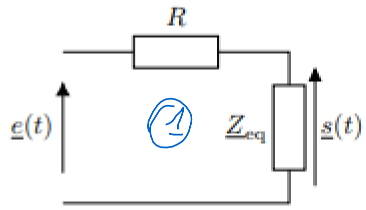
Conclusion : C'est un **filtre passe-bas**.

19 **Q3.** On calcule $\underline{Z_{eq}}$ équivalent à $3R$ et C en parallèle à la sortie :



On a alors : $\underline{Z_{eq}} = \frac{\underline{Z_R}\,\underline{Z_C}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}} = \frac{3R\times\frac{1}{jC\omega}}{3R+\frac{1}{jC\omega}}$; Soit $\boldsymbol{\underline{Z_{eq}} = \frac{3R}{1+j3RC\omega}}$.

Ainsi, $\underline{Z_{eq}}$ est en série avec R : Pont diviseur de tension :



$\underline{H}(j\omega) = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z_{eq}}}{\underline{Z_{eq}}+R} = \frac{\frac{3R}{1+j3RC\omega}}{R+\frac{3R}{1+j3RC\omega}} = \frac{3R}{R+j\,3R^2\,C\omega+3R} = \frac{3}{4+j3RC\omega}$

Soit : $\boxed{\boldsymbol{\underline{H}(j\omega) = \frac{3}{4+j3RC\omega} = \frac{3}{4\left(1+j\frac{3RC\omega}{4}\right)} = \frac{3/4}{1+j\frac{3RC\omega}{4}}}}$

De la forme : $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$ avec $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ si $\boxed{\boldsymbol{H_0 = \frac{3}{4}\ \text{et}\ \omega_0 = \frac{4}{3RC}}}$.

***H_0* est la fonction de transfert statique et *ω_0* la pulsation propre**.
C'est un **filtre passe bas du 1^er^ ordre**.

14 **Q4.** Par définition, $\boxed{\boldsymbol{G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}}}$.

Et $\varphi(x) = \arg\left(\underline{H}(jx)\right) = \arg(num) - \arg(den) = 0 - arctan(x)$; Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{\varphi(x) = -arctan(x)}}$.

18 **Q5.** La pulsation de coupure ω_C est définie par $\boxed{\boldsymbol{G(\omega_C) = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}}}$.

Or $G(x) = \frac{H_0}{\sqrt{1+x^2}}$; Ainsi G est max pour $x = 0$ et $\boldsymbol{G_{max} = H_0 = \frac{3}{4}}$.

Ainsi, $G(x_C) = \frac{H_0}{\sqrt{2}} = \frac{H_0}{\sqrt{1+x_C^2}}$; Il vient donc : $\boldsymbol{x_C = 1} = \frac{\omega_C}{\omega_0}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\omega_C = \omega_0 = \frac{4}{3RC}}}$ et $\boxed{\boldsymbol{f_C = \frac{\omega_C}{2\pi} = \frac{2}{3\,\pi\,RC}}}$.

AN : $f_C = \frac{2}{3\pi\times5,3.10^3\times1,0.10^{-7}}$. On obtient : $\boldsymbol{f_C \approx 400\ \mathrm{Hz.}}$

On a bien **f_C dix fois plus faible que la fréquence du signal parasite que l'on veut éliminer**, ce qui parait tout à fait satisfaisant.

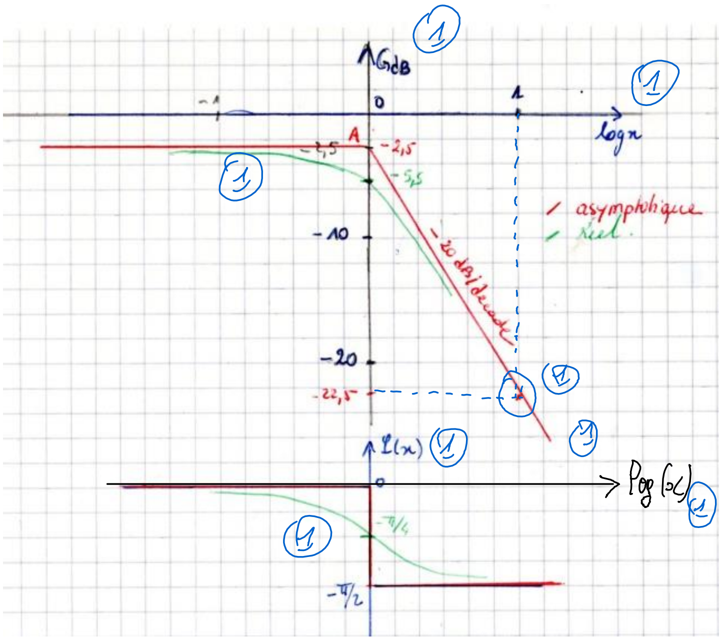
16 **Q6.** Etude asymptotique de $\underline{H}(jx) = \frac{H_0}{1+jx}$.

- En BF : Si $\omega \ll \omega_0$ ou si $x \ll 1$: $\underline{H} \sim H_0 = \frac{3}{4}$

  Donc $G_{dB} \to 20\log(H_0) = 20\log\left(\frac{3}{4}\right) \approx -2,5\ dB$;
  Asymptote horizontale en BF.
  Et $\boldsymbol{\varphi \to 0}$.

- En HF : Si $\omega \gg \omega_0$ ou $x \gg 1$: $\underline{H} \sim \frac{H_0}{jx} \sim -j\frac{H_0}{x}$

  Donc $G_{dB} \rightarrow 20\log(H_0) - 20\log(x)$:
  Asymptote oblique de pente – 20 dB par décade en HF.
  Et $\varphi \rightarrow -\frac{\pi}{2}$.



Intersection des asymptotes en A tel que :
$20\log(H_0) - 20\log(x_A) = 20\log(H_0)$;
Soit $\mathbf{\log(x_A) = 0}$
et pour $\boldsymbol{G_{dB}(A) = 20\log(H_0) \approx -2,5}$ **dB.**
Ainsi les coordonnées du point d'intersection des asymptotes : $\boxed{\mathbf{A\ (0;\ -2,5)}}$.
D'où le diagramme de Bode asymptotique ci-contre.

Ce filtre présente **un caractère pseudo-intégrateur en haute fréquences**, car il présente un asymptote oblique de **pente -20 dB/ décade**.

/5 **Q7.** Diagramme réel : En $x = 1$ ou $\log(x) = 0$:
$\underline{H}(jx = 1) = \frac{H_0}{1+j}$ et $G(1) = \frac{H_0}{\sqrt{2}}$

Donc
$G_{dB}(1) = 20\log(H_0) - 20\log(\sqrt{2}) = -2,5 - 3$.
Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{G_{dB}(\log(x) = 0) = -5,5}}$ ***et*** **Et** $\boxed{\boldsymbol{\varphi(\log(x) = 0) = -\frac{\pi}{4}}}$.
D'où le diagramme de Bode réel ajouté sur le diagramme asymptotique. +1 +1

/13 **Q8. -** En ce qui concerne la composante continue :
On se place en basses fréquences : $\underline{H} \sim H_0 = \frac{S_0}{U_0} = \frac{3}{4}$; Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{S_0 = \frac{3}{4}U_0}}$.

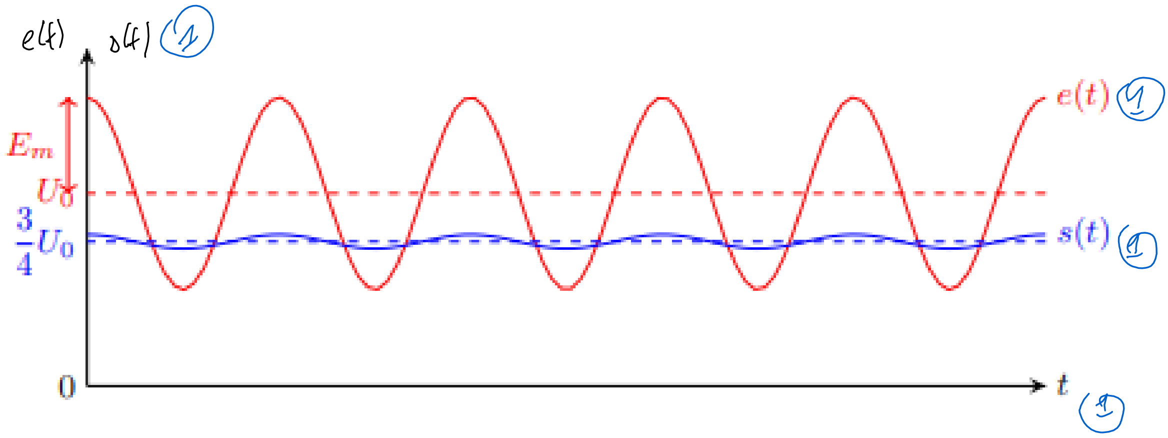
- A la fréquence de 4 kHz : $f = 10\, f_C$, Soit : $x = \frac{\omega}{\omega_0} = \frac{\omega}{\omega_C} = 10$ et $\log(x) = 1$.

A cette fréquence, $G_{dB}(1) = -22,5$ dB $= 20\log(G)$; D'où $\log(G) = -\frac{22,5}{20}$ et $G = \frac{S_m}{E_m} = 10^{-1,03}$

D'où $\boxed{\boldsymbol{S_m \approx 0,09\, E_m \approx \frac{E_m}{10}}}$: **L'amplitude du signal parasite est atténuée d'un facteur 10.**

Et $\varphi_s = \Phi(x) + \varphi_e$ où $\Phi(x)$ est le déphasage lié au filtre. Or en $\log(x) = 1$, $\boxed{\boldsymbol{\Phi \approx -1,5}\ \textbf{rad}}$
Alors $\boxed{\boldsymbol{\varphi_s \approx \varphi_e - 1,5}\ \textbf{rad.}}$

Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{s(t) = \frac{3}{4}U_0 + \frac{E_m}{10}\cos(\omega t + \varphi_e - 1,5)}}$.
D'où l'allure ci-dessous :



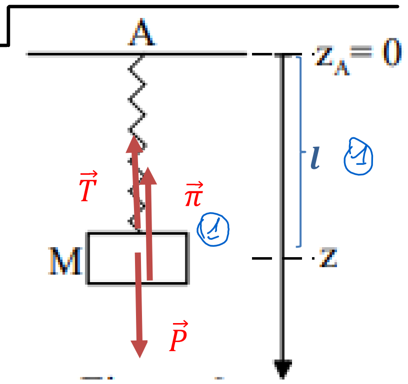
On a bien atténué le signal parasite.

PROBLEME 2 : Production de vagues dans une piscine : (≈ ~~66~~ 73 pts)

(D'après ENSTIM)

I – Etude de l'équilibre :

Q1. Expression de la poussée d'Archimède : $\boxed{\vec{\pi} = -\rho_{eau}\, V\, \vec{g} = -\rho_{eau} V g\, \vec{u_z}}$.



Q2. Référentiel terrestre $\Re$ supposé galiléen.
Base de projection cartésienne. L'axe Oz est orienté vers le bas.
Système : La masse M.
Bilan des actions mécaniques extérieures :

- Le poids : $\vec{P} = M\vec{g} = +Mg\vec{u_z}$
- La poussée d'Archimède : $\vec{\pi} = -\rho_{eau} V g\, \vec{u_z}$.
- La force de Hooke dirigée vers le haut : $\vec{T} = -k\,(l - l_0)\vec{u_z} = -k\,(z - l_0)\vec{u_z}$
  Car $z = l$

Condition d'équilibre : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = \vec{0}$; Soit : $\vec{T} + \vec{\pi} + \vec{T} = \vec{0}$.
Projetons sur l'axe (Oz) : $Mg - \rho_{eau} V g - k\,(z_{eq} - l_0) = 0$
Ou encore, avec $z_{eq} = h$, il vient : $k\,(h - l_0) = Mg - \rho_{eau} V g$
Il faut supprimer $M = \rho\, V$; D'où : $h - l_0 = \frac{\rho - \rho_{eau}}{k}\, V g$; Ou encore : $\boxed{h = l_0 + \frac{Vg}{k}\,(\rho - \rho_{eau})}$.

II – Mouvement sans frottement :

Q3. Equation différentielle du mouvement : 2ème loi de Newton : $\sum \overrightarrow{F_{ext}} = M\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{u_z}$
En projetant sur l'axe (Oz), il vient : $Mg - \rho_{eau} V g - k\,(z - l_0) = M\ddot{z}$
Ou encore : $M\ddot{z} + kz = \underbrace{Mg - \rho_{eau} V g + k l_0 - kh}_{=0 \text{ (d'après Q2)}} + kh$

En simplifiant, il vient : $M\ddot{z} + kz = kh$ et sous forme canonique, on obtient : $\boxed{\ddot{z} + \frac{k}{M}\, z = \frac{k}{M}\, h}$.

On pose alors $\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{M}}}$ la pulsation propre, il vient : $\boxed{\ddot{z} + \omega_0{}^2\, z = \omega_0{}^2\, h}$.

La **pulsation propre** de cet oscillateur ne dépend **que de ses caractéristiques intrinsèques k et M.**
Par contre, c'est la **position d'équilibre h** (autour de laquelle la masse oscille) qui **dépend la poussée d'Archimède.**

III – Mouvement avec frottements visqueux exercés par l'eau :

Q4. On refait une 2ème loi de newton, en ajoutant le force de frottement visqueux : $\vec{F_v} = -\alpha\, \frac{d\,l}{dt} = -\alpha\, \dot{z}\, \vec{u_z}$
Il vient : $Mg - \rho_{eau} V g - k\,(z - l_0) - \alpha\,\dot{z} = M\ddot{z}$
Soit : $M\ddot{z} + \alpha\,\dot{z} + kz = \underbrace{Mg - \rho_{eau} V g + k l_0 - kh}_{=0 \text{ (d'après Q2)}} + kh$

En simplifiant et en mettant sous forme canonique, il vient : $\boxed{\ddot{z} + \frac{\alpha}{M}\,\dot{z} + \omega_0{}^2\, z = \omega_0{}^2\, h}$
Par identification avec $\ddot{z} + \lambda\,\dot{z} + \omega_0{}^2 z = \omega_0{}^2 h$, il vient : $\boxed{\lambda = \frac{\alpha}{M}}$.

Q5. Il faut résoudre l'équation précédente, dans le cas d'un amortissement faible, donc lorsque α reste petit.
Solution homogène :

- Equation caractéristique : $s^2 + \lambda s + \omega_0{}^2 = 0$
- Discriminant : $\Delta = \lambda^2 - 4\,\omega_0{}^2 < 0$ si amortissement faible ; Donc régime pseudo-périodique.
- Solutions de l'équation caractéristique : $s_{1,2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i\,\frac{\sqrt{4\,\omega_0{}^2 - \lambda^2}}{2} = -\frac{\lambda}{2} \pm i\,\Omega$
  avec Ω la pseudo pulsation .
- Les solutions de l'équation homogène s'écrivent alors : $z_h(t) = e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,[A\cos(\Omega\, t) + B\sin(\Omega\, t)]$

Solution particulière constante : $z_P = h$.
Solution générale :

$\boxed{z(t) = h + e^{-\frac{\lambda}{2}t}\,[A\cos(\Omega\, t) + B\sin(\Omega\, t)]}$.

On ne cherche pas A et B d'après l'énoncé.

→ TSTS

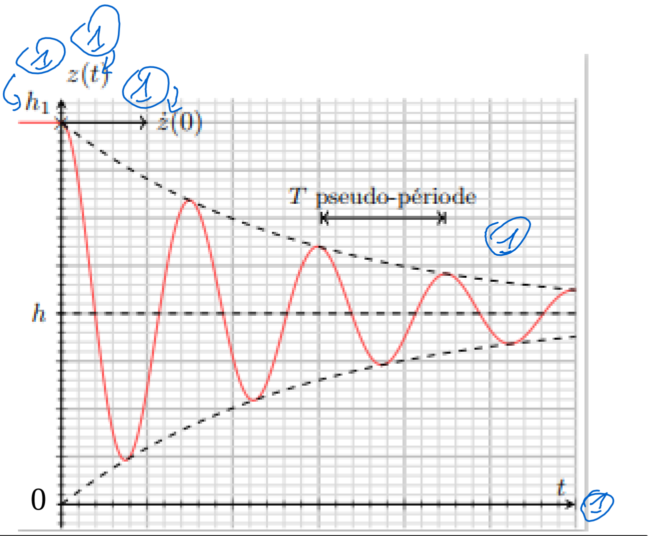
Allure de la courbe :

A $t = 0$, $\boldsymbol{z(0) = h_1} > h$

et $\boldsymbol{\dot{z}(0) = 0}$, donc tangente horizontale en 0.

De plus, $\boldsymbol{\lim\limits_{t \to \infty} z(t) = h} < h_1$.

Et entre temps, oscillations amorties avec décroissance exponentielle de l'amplitude.



IV – Cas du régime sinusoïdal forcé :

19 **Q6.** On a maintenant : $z_A(t) = z_{Am}\cos(\omega t)$,

donc $\boldsymbol{l = z - z_A}$ **et** $\boldsymbol{\frac{dl}{dt}} = \boldsymbol{\dot{z} - \dot{z}_A}$

Ce qui modifie la force de Hooke : $\vec{T} = -k\,(l - l_0)\overrightarrow{u_z} = -k\,(z - z_A - l_0)\overrightarrow{u_z}$.

Et la force de frottement fluide : $\overrightarrow{F_v} = -\alpha\,\frac{dl}{dt}\,\overrightarrow{u_z} = -\alpha(\,\dot{z} - \dot{z}_A)\,\overrightarrow{u_z}$

La 2ème loi de Newton devient donc : $Mg - \rho_{eau}Vg - k\,(z - z_A - l_0) - \alpha(\,\dot{z} - \dot{z}_A) = M\ddot{z}$

Qui se simplifie en : $M\ddot{z} + \alpha(\,\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - z_A) = \underbrace{\boldsymbol{Mg - \rho_{eau}Vg + kl_0 - kh}}_{=0} + kh$ (d'après Q2)

Ou encore : $M\ddot{z} + \alpha(\,\dot{z} - \dot{z}_A) + k(z - h - z_A) = 0$.

On pose : $Z(t) = z(t) - h$; Soit $\dot{Z} = \dot{z}$ et $\ddot{Z} = \ddot{z}$

L'équation différentielle devient : $M\,\ddot{Z} + \alpha\,\dot{Z} + kZ(t) = \alpha\,\dot{z}_A + k\,z_A(t)$.

Sour forme canonique, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\ddot{Z} + \frac{\alpha}{M}\,\dot{Z} + \frac{k}{M}Z = \frac{\alpha}{M}\,\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t)}}$.

Par identification avec $\ddot{Z} + \lambda\,\dot{Z} + {\omega_0}^2 Z = F(t)$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{F(t) = \frac{\alpha}{M}\,\dot{z}_A + \frac{k}{M}z_A(t)}.}$

17 **Q7**. Passage aux notations complexes :

On nous donne $F(t) = \omega^2\,z_{Am}\,\cos(\omega t)$. Alors $\underline{F} = \omega^2\,z_{Am}\,e^{i\omega t}$.

On introduit $\underline{Z_{com}}(i\omega) = \underline{Z}(i\omega)\,e^{i\omega t}$ la grandeur complexe associée à $Z(t)$

et $\underline{Z}(i\omega)$ l'amplitude complexe telle que $\underline{Z}(i\omega) = Z(\omega)\,e^{i\omega t}$

On reprend l'équation différentielle précédente, en la passant en complexes :

$\ddot{\underline{Z_{com}}} + \lambda\,\dot{\underline{Z_{com}}} + {\omega_0}^2\underline{Z_{com}} = \underline{F}$; Soit : $-\omega^2\,\underline{Z_{com}} + i\omega\,\lambda\,\underline{Z_{com}} + {\omega_0}^2\underline{Z_{com}} = \underline{F}$

Avec $\tau = \frac{M}{\alpha} = \frac{1}{\lambda}$, il vient : $\underline{Z_{com}}\,\left({\omega_0}^2 - \omega^2 + i\,\frac{\omega}{\tau}\right) = \underline{F} = \omega^2\,z_{Am}\,e^{i\omega t}$.

D'où : $\underline{Z_{com}} = \frac{\omega^2\,z_{Am}\,e^{i\omega t}}{\left({\omega_0}^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}\right)}$ et $\underline{Z}(i\omega) = \frac{\omega^2\,z_{Am}}{\left({\omega_0}^2 - \omega^2 + i\frac{\omega}{\tau}\right)} = \frac{z_{Am}}{\frac{{\omega_0}^2}{\omega^2} - 1 + i\,\frac{1}{\omega\tau}}$;

Ainsi, avec la pulsation réduite $x = \frac{\omega}{\omega_0}$: $\boxed{\boldsymbol{\underline{Z}(ix) = \frac{z_{Am}}{\frac{1}{x^2} - 1 + i\,\frac{1}{x\,\omega_0\,\tau}}}}$

Enfin $\boxed{\boldsymbol{Z(x) = |\underline{Z}(ix)| = \frac{z_{Am}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\,\omega_0\,\tau)^2}}}}}$.

10 **Q8.** On veut $Z(x) > z_{Am}$, soit $\frac{Z(x)}{z_{Am}} > 1$; ou encore : $\frac{\boldsymbol{1}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\,\omega_0\,\tau)^2}}} > \boldsymbol{1}$; Soit : $\sqrt{(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\,\omega_0\,\tau)^2}} < 1$

On a donc : $(\frac{1}{x^2} - 1)^2 + \frac{1}{(x\,\omega_0\,\tau)^2} < 1$; On développe : $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + 1 + \frac{1}{x^2\,{\omega_0}^2\,\tau^2} - 1 < 0$.

Ou encore : $\frac{1}{x^4} - \frac{2}{x^2} + \frac{1}{x^2\,{\omega_0}^2\,\tau^2} < 0$.

Multiplions par x^4, il vient : $1 - 2\,x^2 + \frac{x^2}{{\omega_0}^2\,\tau^2} < 0$; Soit $x^2\left(-\frac{1}{{\omega_0}^2\,\tau^2} + 2\right) > 1$.

Ou encore $\boxed{\boldsymbol{x > \frac{1}{\sqrt{2 - \frac{1}{{\omega_0}^2\,\tau^2}}}}}$;

TSTP

Or $\omega = x\,\omega_0$; 1

Il faut donc que $\boxed{\boldsymbol{\omega > \frac{\omega_0}{\sqrt{2-\frac{1}{\omega_0^2\,\tau^2}}} = \frac{\omega_0\,\omega_0\tau}{\sqrt{2\,\omega_0^2\,\tau^2-1}} = \frac{\omega_0^2\,\tau}{\sqrt{2\,\omega_0^2\,\tau^2-1}} = \omega_{lim}}}$

On remarque que ω_{lim} n'existe que si $2\,\omega_0^2\,\tau^2 - 1 > 0$; Donc que si $\boldsymbol{\omega_0^2\,\tau^2 > \frac{1}{2}}$. 1

Or $\tau = \frac{M}{\alpha}$ et $\omega_0^2 = \frac{k}{M}$; Ainsi ω_{lim} n'existe que si $\frac{k}{M}\,\frac{M^2}{\alpha^2} > \frac{1}{2}$; Donc pour $\boxed{\boldsymbol{M > \frac{\alpha^2}{2k}}}$. 1

Cette condition revient à avoir un **<u>facteur de qualité suffisamment grand</u>** pour que la condition de résonance soit respectée. 1

---

18 **Q9.** On a vu que $Z(x) = \left|\underline{Z}(ix)\right| = \frac{z_{Am}}{\sqrt{(\frac{1}{x^2}-1)^2+\frac{1}{(x\,\omega_0\,\tau)^2}}}$.

Le numérateur est constant, ainsi Z est maximum si $\boldsymbol{(\frac{1}{x^2}-1)^2 + \frac{1}{(x\,\omega_0\,\tau)^2}}$ **est minimum**. 1

Posons $f(x) = (\frac{1}{x^2}-1)^2 + \frac{1}{(x\,\omega_0\,\tau)^2}$. 1

Alors $\frac{df(x)}{dx} = 0$ ssi $2(\frac{1}{x^2}-1)\left(\frac{-2}{x^3}\right) - \frac{2}{\omega_0^2\,\tau^2\,x^3} = 0$; Soit $\left(\frac{-2}{x^3}\right)\left[2\left(\frac{1}{x^2}-1\right)+\frac{1}{\omega_0^2\,\tau^2}\right] = 0$ 1

Il vient : $2\left(\frac{1}{x_r^2}-1\right)+\frac{1}{\omega_0^2\,\tau^2} = 0$; 1 D'où : $\frac{1}{x_r^2} - 1 = -\frac{1}{2\,\omega_0^2\,\tau^2}$; ou $\frac{1}{x_r^2} = 1 - \frac{1}{2\,\omega_0^2\,\tau^2} = \frac{2\,\omega_0^2\,\tau^2-1}{2\,\omega_0^2\,\tau^2}$ 1

Enfin : $\boxed{\boldsymbol{x_r = \sqrt{\frac{2\,\omega_0^2\,\tau^2}{2\,\omega_0^2\,\tau^2-1}} = \frac{1}{\sqrt{1-\frac{1}{2\,\omega_0^2\,\tau^2}}} = \frac{\omega_0\,\tau\sqrt{2}}{\sqrt{2\,\omega_0^2\,\tau^2-1}}}}$. 1

Et $\boxed{\boldsymbol{\omega_r = \omega_0 x_r = \frac{\omega_0^2\,\tau\sqrt{2}}{\sqrt{2\,\omega_0^2\,\tau^2-1}} = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{2\,\omega_0^2\,\tau^2}}}}}$ 1 : **<u>Pulsation de résonance.</u>**

Et le phénomène est appelé **<u>phénomène de résonance.</u>** 1

PROBLEME 3 : Autour de l'aluminium : *(D'après CCP TSI)* *(≈ ~~76~~ 84 pts)*

I - Propriétés de l'atome d'aluminium :

16 **Q1.** Le numéro atomique d'un élément est le **nombre de protons** du noyau atomique (et nombre d'électrons de l'atome neutre).

- Z = 13 : Soit 2+8+3 : Dans la classification périodique, il sera donc situé sur la **3ème période** et **1er élément du groupe p**, soit dans le **groupe 13**. Il a donc **3 électrons de valence** ($3s^2\ 3p^1$).

Son schéma de Lewis est : $\boxed{\mid \boldsymbol{Al}^{\bullet}}$

L'ion le plus probable a la configuration du **gaz rare le plus proche**, celle où toutes les couches sont occupées. Il aura donc tendance à perdre ses 3 électrons de valence et donner **l'ion Al^{3+}**.

II – L'aluminium comme source d'énergie :

15 **Q2.** A l'**anode**, il se produit une **oxydation du réducteur**, d'où le sens de la réaction :

$$\boldsymbol{Al_{(s)} + 3\ HO^-_{(aq)} = Al\,(OH)_{3\,(s)} + 3\ e^-} \qquad (\times\ 4)$$

- A la **cathode**, il se produit une **réduction de l'oxydant** :

$$\boldsymbol{O_{2(g)} + 2\ H_2O_{(l)} +\ 4\ e^- =\ 4\ \ HO^-_{(aq)}} \qquad (\times\ 3)$$

- Pour obtenir l'équation bilan, il faut équilibrer le nombre d'électrons échangés, on obtient donc :

$\boxed{\boldsymbol{4\ Al_{(s)} + 3\ O_{2(g)} + 6\ \ H_2O_{(l)} = 4\ Al\,(OH)_{3\,(s)}}}$. Tout est équilibré.

19 **Q3.** $\boxed{\boldsymbol{K° = \frac{(P°)^3}{(P(O_2)^3_{eq}} = \frac{1}{(P(O_2))^3_{eq}}}}$;

- ½ équation redox : $Al\,(OH)_{3\,(s)} + 3\ e^- = Al_{(s)} + 3\ HO^-_{(aq)}$

  Relation de Nernst : $E_a = E°_a + \frac{0{,}06}{3}\log\frac{1}{[HO^-]^3}$;

- ½ équation redox : $O_{2(g)} + 2\ H_2O_{(l)} +\ 4\ e^- =\ 4\ \ HO^-_{(aq)}$

  Relation de Nernst : $E_c = E°_c + \frac{0{,}06}{4}\log\frac{P(O_2)}{[HO^-]^4}$;

- A l'équilibre, les potentiels redox sont égaux, soit : $E_{a\ eq} = E_{c\ eq}$;
- D'où : $E°_a + \frac{0{,}06}{3}\log\frac{1}{[HO^-]^3_{eq}} = E°_c + \frac{0{,}06}{4}\log\frac{P(O_2)_{eq}}{[HO^-]^4_{eq}}$;
- **Multiplions par 12 :** $12\ E°_a + 0{,}06\log\frac{1}{[HO^-]^{12}_{eq}} = 12\ E°_c + 0{,}06\log\frac{(P(O_2))^3_{eq}}{[HO^-]^{12}_{eq}}$;

Soit : $0{,}06\log K° = 12(E°_c - E°_a)$; Soit $\boxed{\boldsymbol{K° = 10^{\frac{12(E°_c - E°_a)}{0{,}06}}}}$; AN : $\boldsymbol{K°}$ **=10 ^{538}** > 10^3 : **Réaction totale**.

15 **Q4.** Calcul du nbre de moles initiales d'Al : $\boxed{\boldsymbol{n(Al)_{init} = \frac{m}{M(Al)}}}$; AN : $n(Al)_{init} = \frac{25}{27}$; **$\boldsymbol{n(Al)_{init}}$ = 0,93 mol.**

Tableau d'avancement :

	$4\ Al_{(s)}$ +	$3\ O_{2(g)}$ +	$6\ H_2O_{(l)}$ =	$4\ Al\,(OH)_{3\,(s)}$
EI	$n(Al)_{init}$ =0,93	excès	excès	
EF	$\boldsymbol{0{,}93 - 4\ \xi_{max}}$	excès	excès	$\boldsymbol{4\ \xi_{max}}$

La réaction étant totale, on a disparition du réactif limitant :

Soit : 0,93 – 4 ξ_{max} = 0 ; Soit : $\xi_{max} = \frac{0{,}93}{4}$; **$\boldsymbol{\xi_{max}}$ = 0,23 mol.**

17 **Q5.** On sait que : $Q = I\ \Delta t$; Donc : Durée de fonctionnement : $\boxed{\boldsymbol{\Delta t = \frac{Q}{I}}}$;

AN : $\Delta t = \frac{2{,}1.10^5}{6{,}5}$; On obtient **$\boldsymbol{\Delta t}$ ≈ 3,2.10⁴ s ≈ 9h**.

- Pourcentage d'aluminium consommé :

  ✓ Quantité d'électricité ayant circulé : $Q = n_{e^-}\ F = 3 \times n_{Al\ consommé} \times F$; Soit $\boxed{\boldsymbol{n_{Al,consommé} = \frac{Q}{3F}}}$;

AN : $n_{Al\ consommé}\ \frac{2{,}1.10^5}{3\times 96500}$; Soit **$\boldsymbol{n_{Al\ consommé}}$ = 0,73 mol.**

  ✓ $n_{Al\ restant}$ = 0,93 – 0,73 = 0,20 mol. Soit en pourcentage : p = $\frac{0{,}20}{0{,}93} \times 100$;

D'où le pourcentage d'aluminium non consommé : **p = 21,5%** ;

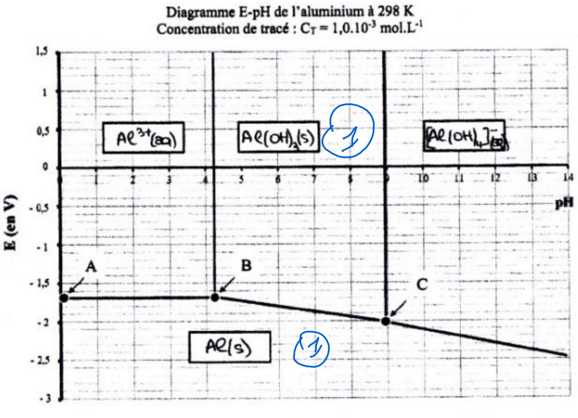
III – Présence d'aluminium (III) dans un vaccin :

18 **Q6.** Diagramme potentiel-pH de l'élément aluminium :

espèce	degré d'oxydation de Al	espèce	degré d'oxydation de Al
$Al_{(s)}$	**0**	$Al\,(OH)_{3\,(s)}$	**+ III**
$Al^{3+}{}_{(aq)}$	**+ III**	$Al\,(OH)_4{}^-{}_{(aq)}$	**+ III**

- De bas en haut du diagramme, les espèces sont placées par ordre croissant de nombre d'oxydation.

D'autre part, l'espèce la plus acide ($Al^{3+}{}_{(aq)}$) est majoritaire à bas pH et l'espèce la plus basique ($Al\,(OH)_4{}^-{}_{(aq)}$) est majoritaire à haut pH. D'où les identifications ci-contre.
Remarque : on aurait aussi pu faire un diagramme primitif.



Coordonnées des points : A : (0,0 ; - 1,72) B : (4,3 ; - 1,72) C : (9,0 ; - 2,05)

15 **Q7.** Couple $Al^{3+}{}_{(aq)}/Al_{(s)}$:

- ½ équation redox : $Al^{3+}{}_{(aq)} + 3\,e^- = Al_{(s)}$

Relation de Nernst :
$E(Al^{3+}{}_{(aq)}/Al_{(s)}) = E°_1 + 0{,}02\log([Al^{3+}])$;
Sur la frontière entre Al^{3+} et $Al_{(s)}$, le solide est présent à l'état de trace et $[Al^{3+}] = C_T$. Soit $E_{1\,Front} = E°_1 + 0{,}02\log(C_T)$
On donne $\boldsymbol{E_{1\,Front}}$ **= - 1,72 V.** Donc $\boxed{\boldsymbol{E°_1 = E_{1\,Front} - 0{,}02\log(C_T)}}$.
AN : $E°_1$ = -1,72 + 0,02 × 3 ; $\boldsymbol{E°_1}$ **= - 1,66 V** ; (valeur déjà donnée dans le sujet).

13 **Q8.** On sait que pour un couple acido-basique : $H_2CO_{3(aq)}\,/HCO_3^-{}_{(aq)}$:
On a la relation : $\boxed{\boldsymbol{pH = pKa + \log\left(\frac{[HCO_3^-]}{[H_2CO_3]}\right)}}$; AN : $pH = 6{,}2 + \log\left(\frac{0{,}027}{0{,}0014}\right)$; On obtient : $\boldsymbol{pH \approx 7{,}5}$.

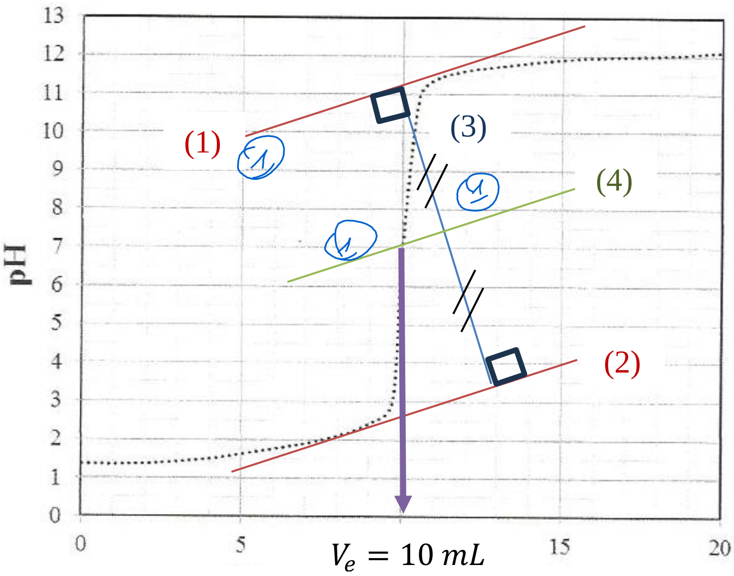
- A un tel pH, d'après le diagramme $E - pH$, **$\boldsymbol{Al\,(OH)_{3\,(s)}}$ est l'espèce majoritaire** de Al (III).

Titrage de l'aluminium (III) :

Titrage 1 : Titrage d'une solution d'acide chlorhydrique { $H_3O^+{}_{(aq)}$; $Cl^-{}_{(aq)}$ }.

14 **Q9.** Réaction du dosage acide fort / base forte : $\boxed{\boldsymbol{H_3O^+{}_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} = 2\,H_2O_{(l)}}}$: $\boxed{\boldsymbol{K = \frac{1}{Ke}}}$;
AN : $\boldsymbol{K = 10^{14}}$; **Réaction totale.**

17 **Q10.** On utilise la méthode des tangentes :
On trace une 1ère droite tangente à la courbure après l'équivalence (droite 1).
On trace une 2nde droite tangente à la courbure avant l'équivalence et parallèle à la droite 1 (droite 2).
A l'aide d'une équerre, on trace une droite perpendiculaire aux deux autres (droite 3).
On tracer ensuite une droite parallèle et à égale distance des droites 1 et 2 (droite 4).
Le point d'intersection avec la courbe du pH donne le **volume équivalent.**
On lit $\boldsymbol{V_e}$ **= 10,0 mL**.



- A l'équivalence : les **réactifs sont versés dans les proportions stœchiométriques**.

Donc : $n(H_3O^+)_0 = n(HO^-)_{eq}$; Soit : $C_1V_0 = C\,V_e$; Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{C_1 = \frac{C\,V_e}{V_0}}}$;
AN : $C_1 = \frac{0{,}1\times10}{20}$; On obtient : $\boldsymbol{C_1 = 5{,}0.10^{-2}}$ **mol.L^{-1}.**

Q11. L'indicateur coloré doit avoir une **zone de virage comprenant le pH à l'équivalence (7 ici)**. Le **BBT** convient donc ; on observera le passage **du jaune** (milieu acide avant l'équivalence) **au bleu** (milieu basique lorsque l'ion hydroxyde est en excès).

Titrage 2 : Titrage d'une solution acidifiée d'ions Al $^{3+}{}_{(aq)}$.

Q12. 1ère réaction : $\boxed{\boldsymbol{H_3O^+{}_{(aq)} + HO^-{}_{(aq)} = 2\,H_2O_{(l)}}}$; $\boldsymbol{V_{e1}}$ **= 10 mL** ;

2ème réaction : $\boxed{\boldsymbol{Al^{3+}{}_{(aq)} + 3HO^-{}_{(aq)} = Al\,(OH)_{3\,(s)}}}$; $\boldsymbol{V_{e2}}$ **= 25 mL**.

- Le premier saut de pH correspond au volume déterminé à la **question 10**, lors du titrage des 20 mL d'acide chlorhydrique { $H_3O^+{}_{(aq)}\ ;\ Cl^-{}_{(aq)}$ } ;

Ou bien 1ère **réaction entre l'acide le plus fort et la base la plus forte, soit $\boldsymbol{HCl}$**.

Q13. Volume ayant réagi avec $Al^{3+}{}_{(aq)}$: $\boxed{\boldsymbol{V_{A1} = V_{e2} - V_{e1}}}$; AN : $V_{A1} = 15$ mL.

Attention aux coefficients stœchiométriques de la 2ème réaction :

Pour ce volume, on a $n(Al^{3+})_0 = \frac{n(HO^-)_{eq}}{3}$; Soit : $C_2V_0 = \frac{C\,V_{A1}}{3}$; Ainsi **:** $\boxed{\boldsymbol{C_2 = \frac{C\,V_{A1}}{3\,V_0}}}$;

AN : $C_2 = \frac{0{,}1\times15}{3\times20}$; On obtient : $\boldsymbol{C_2 = 2,5.10^{-2}}$ **mol.L^{-1}.**

- Et la masse ayant servi : $m = n(Al^{3+}) \times M(AlCl_3, 6H_2O)$.

Soit : $\boxed{\boldsymbol{m = C_2V_0 \times M(AlCl_3, 6H_2O)}}$.

avec $M(AlCl_3, 6H_2O) = 27 + 3 \times 35{,}5 + 6 \times 18$; Soit $\boldsymbol{M(AlCl_3, 6H_2O)}$ **= 241,5 g.mol^{-1}.**

AN : $m = 2{,}5.10^{-2} \times 20.10^{-3} \times 241{,}5$; On obtient : $\boldsymbol{m \approx 121}$ **mg.**

Exploitation du point anguleux :

Q14. Attention au sens de la réaction : Sens de la dissolution du précipité :

$\boxed{\boldsymbol{Al\,(OH)_{3\,(s)} = Al^{3+}{}_{(aq)} + 3HO^-{}_{(aq)}}}$; $\boldsymbol{K = Ks}$.

Q15. En D, $\boldsymbol{pH = 3{,}9}$ **; Soit** $\boxed{\boldsymbol{[HO^-] = \frac{K_e}{10^{-pH(D)}}}}$; AN : $[HO^-] = \frac{10^{-14}}{10^{-3{,}9}}$

On obtient **:** $\boldsymbol{[HO^-] = 7,9.10^{-11}}$ **mol.L^{-1}.**

Q16. Au point D, les ions Al^{3+} n'ont pas encore réagi.

Donc en solution, on a : $\boxed{\boldsymbol{[Al^{3+}] = \frac{C_2\,V_0}{V_0+V_D}}}$.

AN : $[Al^{3+}] = \frac{2{,}5.10^{-2}\times20}{20+10}$; On obtient : $\boldsymbol{[Al^{3+}] \approx 1,7.10^{-2}}$ **mol.L^{-1}.**

- Et par definition, $\boxed{\boldsymbol{Ks = [Al^{3+}]\,[HO^-]^3}}$.

AN : $Ks = 1{,}7.10^{-2} \times (7{,}9.10^{-11})^3$; On obtient : $\boldsymbol{Ks \approx 8,4.10^{-33}}$ ($pKs \approx 32{,}1$)