

TD : moment cinétique et forces centrales

I Gravimètre de HOLWECK-LEJAY

- ◇ **Système** : masse, repérée par $M(m)$.
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen.
- ◇ **Repère** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (voir schéma).

1) ◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= L \vec{u}_r \\ \vec{v} &= L \dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= L \ddot{\theta} \vec{u}_r - L \dot{\theta}^2 \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

◇ **BDF** :

$$\begin{cases} \vec{P} = -mg \vec{u}_x = mg(-\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) \\ \vec{F} \text{ inconnue} \end{cases}$$

◇ **BDM** :

$$\begin{cases} \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P} = mgL \vec{u}_r \wedge (-\cos(\theta) \vec{u}_r + \sin(\theta) \vec{u}_\theta) = mgL \sin(\theta) \vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = -C\theta \vec{u}_z \\ \vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{OM} \wedge m \vec{v} = mL^2 \dot{\theta} \vec{u}_r \wedge \vec{u}_\theta = mL^2 \dot{\theta} \vec{u}_z \end{cases}$$

Ainsi

$$\boxed{\mathcal{M}_z(\vec{P}) = mgL \sin(\theta)} \quad \boxed{\mathcal{M}_z(\vec{F}) = -C\theta} \quad \boxed{\mathcal{L}_z(M) = mL^2 \dot{\theta}}$$

TMC \Rightarrow

$$\frac{d\mathcal{L}_z(M)}{dt} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F})$$

$$\Leftrightarrow mL^2 \ddot{\theta} = mgL \sin(\theta) - C\theta$$

$$\Leftrightarrow \ddot{\theta} + \frac{C}{mL^2} \theta - \frac{g}{L} \sin(\theta) = 0$$

2) Autour de $\theta_{eq} = 0$, $\sin(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$. Ainsi,

$$\ddot{\theta} + \left(\frac{C}{mL^2} - \frac{g}{L} \right) \theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \omega_0^2 \theta = 0}$$

Équation caractéristique :

$$r^2 + \omega_0^2 = 0 \Leftrightarrow r^2 = -\omega_0^2$$

Stable $\Leftrightarrow r \in \mathbb{C} \Rightarrow \omega_0^2 > 0 \Leftrightarrow \boxed{C > mgL}$

Cette équation du second ordre a des solutions stable si et seulement si les racines de l'équation caractéristique sont complexes. En effet, avec $\theta = Ae^{rt}$, des racines réelles donnent des solutions divergentes ; seules les racines complexes donnent des solutions oscillantes en cosinus et sinus.

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) &= \vec{OM} \wedge \vec{F} = -C\theta \vec{u}_z \\ \Leftrightarrow \vec{u}_r \wedge \vec{F} &= -\frac{C}{L} \theta \vec{u}_z \\ \Rightarrow \vec{F} &= -\frac{C}{L} \theta \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

On déduit

$$\delta W(\vec{F}) = -d\mathcal{E}_{p,el}$$

$$\Leftrightarrow \vec{F} \cdot d\vec{OM} = -d\mathcal{E}_{p,el}$$

$$\Leftrightarrow \left(-\frac{C}{L} \theta \vec{u}_\theta \right) \cdot (L d\theta \vec{u}_\theta) = -d\mathcal{E}_{p,el}$$

$$\Leftrightarrow d\mathcal{E}_{p,el} = C\theta d\theta$$

$$\Rightarrow \mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2} C \theta^2 + K$$

On remarque alors que l'énergie potentielle de ce ressort spiral a une expression similaire à celle du ressort linéaire $\mathcal{E}_{p,el} = 1/2 kx^2$

On trouve l'énergie potentielle de pesanteur, en prenant la référence pour $\theta = \frac{\pi}{2}$, $\boxed{\mathcal{E}_{p,p} = mgL \cos(\theta)}$. Ainsi,

$$\begin{aligned}\mathcal{E}_{p,tot} &= mgL \cos(\theta) + \frac{1}{2} C \theta^2 + K \\ \Rightarrow \frac{d\mathcal{E}_{p,tot}}{d\theta} &= -mgL \sin(\theta) + C\theta \\ \Rightarrow \frac{d^2 \mathcal{E}_{p,tot}}{d\theta^2} &= -mgL \cos(\theta) + C \underset{\text{si stable}}{\geq 0} \\ \Rightarrow \frac{d^2 \mathcal{E}_{p,tot}}{d\theta^2} \Big|_{\theta_{eq}=0} &= -mgL + C \\ \Leftrightarrow \boxed{C > mgl} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

4) On reprend les résultats précédents :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{C - mgL}{mL^2}} \Leftrightarrow \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{C - mgL}}$$

5) Il est logique de poser $g_0 = C/mL$, par analyse dimensionnelle de ω_0^2 . En remplaçant dans T_0 :

$$T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{mL^2}{mL(g_0 - g)}}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = 2\pi \sqrt{\frac{L}{g_0 - g}}$$

On retrouve une expression proche de celle du pendule simple ($T_0 = \sqrt{\ell/g}$).

Ainsi, en réglant $g_0 = C/mL$ à une valeur connue, si $g_0 > g$ on obtient des oscillations dont la période est directement reliée à $g_0 - g$. On pourrait penser à mesurer g en réglant g_0 pour n'avoir aucune oscillation, mais la mesure de période est plus simple.

On remarque cependant que quand $g > g_0$, d'après la question 1) on n'aura pas de solution stable mais des solutions en exponentielles divergentes, ce qui est une limite de cet outil.

II Pendule conique

1) \diamond **Système** : masse, repérée par $M(m)$.

\diamond **Référentiel** : terrestre supposé galiléen.

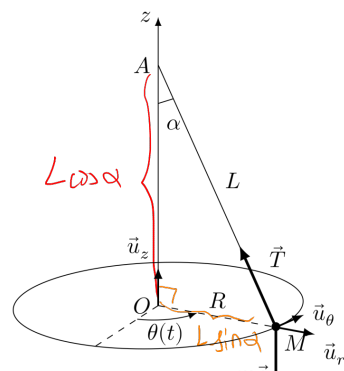
\diamond **Repère** : cylindrique $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ (voir schéma).

\diamond **Repérage** : $\vec{OM} = R\vec{u}_r = L\sin(\alpha)\vec{u}_r$

$$\vec{v} = R\dot{\theta}\vec{u}_\theta = L\omega\sin(\alpha)\vec{u}_\theta$$

$$\vec{a} = R\ddot{\theta}\vec{u}_r = -L\omega^2\sin(\alpha)\vec{u}_r$$

2) **Moment cinétique** : Attention, on veut calculer le moment **par rapport à A**. Ainsi,



$$\vec{\mathcal{L}}_A = \vec{AM} \wedge \vec{p}(M) = (\vec{AO} + \vec{OM}) \wedge m\vec{v}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A = (-L\cos(\alpha)\vec{u}_z + L\sin(\alpha)\vec{u}_r) \wedge (mL\omega\sin(\alpha)\vec{u}_\theta)$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A(M) = -mL^2\omega\sin(\alpha)\cos(\alpha)(-\vec{u}_r) + mL^2\omega\sin^2(\alpha)\vec{u}_z$$

$\left. \begin{array}{l} \vec{AM} = -L\cos(\alpha)\vec{u}_z \\ \text{On distribue} \end{array} \right\}$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{L}}_A(M) = mL^2\omega(\sin^2(\alpha)\vec{u}_z + \sin(\alpha)\cos(\alpha)\vec{u}_r)$$

3) \diamond **BDF** :

$$\left\{ \begin{array}{l} \vec{P} = -mg\vec{u}_z \\ \vec{T} = -T\frac{\vec{AM}}{\|\vec{AM}\|} \quad \text{ou} \quad \vec{T} = T(\cos(\alpha)\vec{u}_z - \sin(\alpha)\vec{u}_r) \quad \text{mais inutile} \end{array} \right.$$

\diamond **BDM** : $\left\{ \begin{array}{l} \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = \vec{AM} \wedge \vec{P} = L(\sin(\alpha)\vec{u}_r - \cos(\alpha)\vec{u}_z) \wedge (-mg\vec{u}_z) \Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P}) = +mgL\sin(\alpha)\vec{u}_\theta \\ \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{T}) = \vec{AM} \wedge \vec{T} = \vec{0} \end{array} \right.$

\diamond **TMC** :

$$\frac{d\vec{\mathcal{L}}_A(M)}{dt} = \sum_i \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_A(\vec{P})$$

$$\Leftrightarrow mL^2\omega \left(\sin^2(\alpha) \underbrace{\frac{d\vec{u}_z}{dt}}_{=0} + \sin(\alpha)\cos(\alpha) \underbrace{\frac{d\vec{u}_r}{dt}}_{=\omega\vec{u}_\theta} \right) = mgL\sin(\alpha)\vec{u}_\theta$$

$$\Rightarrow mL^2\omega^2\sin(\alpha)\cos(\alpha) = mgL\sin(\alpha)$$

$$\Leftrightarrow \cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}$$

4)

PFD :

$$\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F}_i$$

$$\Leftrightarrow -mL\omega^2 \sin(\alpha) \vec{u}_r = -mg \vec{u}_z + T(\cos(\alpha) \vec{u}_z - \sin(\alpha) \vec{u}_r)$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2 \sin(\alpha) & -T \sin(\alpha) \\ 0 & = -mg + T \cos(\alpha) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T & mL\omega^2 \\ T & = \frac{mg}{\cos(\alpha)} \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\cos(\alpha) = \frac{g}{L\omega^2}} \quad \blacksquare$$

III Frottements d'un satellite

1)

- 1) **Système** : {satellite} point matériel M de masse m
- 2) **Référentiel** : géocentrique, supposé galiléen.
- 3) **Repère** : polaire $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ avec O centre du Soleil, R le rayon supposé constant ($\dot{R} = 0$).
- 4) **Repérage** :

$$\begin{aligned} \overrightarrow{OM} &= (R_T + h_0) \vec{u}_r = R \vec{u}_r \\ \vec{v} &= R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \Rightarrow v = |R\dot{\theta}| \\ \vec{a} &= -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta \end{aligned}$$

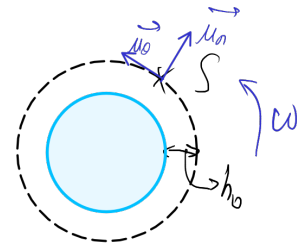


FIGURE 1 –
Orbite circulaire.

- 5) **Bilan des forces** : $\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R^2} \vec{u}_r \Rightarrow \mathcal{E}_p = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R}$.

- 6) **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{F}_g \Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{R^2} \vec{u}_r \Leftrightarrow \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_T}{R^3}} & (7.1) \\ mR\ddot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \dot{\theta} = \text{cte} & (7.2) \end{cases}$$

(7.1) donne alors

$$\boxed{v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R_T + h_0}}} \quad \blacksquare \quad (7.3)$$

Enfin, avec (7.3) et l'énergie mécanique, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m R^2 \dot{\theta}^2 - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2} m \frac{\mathcal{G}M_S}{R} - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \quad \left. \vphantom{\mathcal{E}_m} \right\} R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= -\frac{1}{2} \mathcal{G} \frac{mM_S}{R_T + h_0} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

- 2) Le satellite étant sur une orbite basse, il subit de la part des hautes couches de l'atmosphère une force de frottements qui modifie son altitude h . Cependant, **on considère que la trajectoire sur un tour reste quasi-circulaire**; ainsi les expressions précédentes restent valables en remplaçant h_0 par $h(t)$.

a – Les forces de frottements sont toujours résistantes. En effet,

$$\vec{F}_f = -\alpha \vec{v} \quad \text{donc} \quad \mathcal{P}(\vec{F}_f) = -\alpha v^2 < 0$$

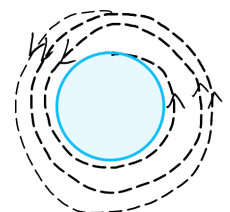
D'où par TPM

$$\boxed{\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = \mathcal{P}(\vec{F}_f) < 0}$$

$r(t)$ diminue forcément, puisque

$$\text{b –} \quad \mathcal{E}_m = -\frac{k}{R_T + h(t)} \searrow \quad \text{quand} \quad h \searrow$$

Attention, $\mathcal{E}_m < 0$ donc $|\mathcal{E}_m| \nearrow$ quand $h \searrow$ mais on a bien $\mathcal{E}_m \searrow$.



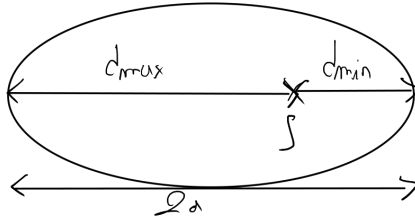
c –

$$v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}mM_T}{R_T + h(t)}} \quad \text{donc} \quad \boxed{v \nearrow \text{ quand } h \searrow}$$

Peu intuitif *a priori* car les frottements sont censés réduire la vitesse, mais en réalité les frottements réduisent surtout l'énergie totale d'un corps. À la surface de la Terre sur un sol plat, les frottements ne font que perdre de l'énergie cinétique, mais ici réduire l'énergie mécanique réduit le rayon, et la vitesse doit augmenter en vertu de la 3^e loi de KEPLER.

IV Comète de HALLEY

1)



2) On trouve vite

$$d_{\max} + d_{\min} = 2a \Leftrightarrow d_{\max} = 2a - d_{\min}$$

Deux méthodes pour les unités :

Tout en SI

$$\text{Or, } \frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S} \Leftrightarrow a_H = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{4\pi^2} T_H^2}$$

avec $\begin{cases} \mathcal{G} = 6,67 \times 10^{-11} \text{ SI} \\ M_S = 2,0 \times 10^{30} \text{ kg} \\ T_H = 76 \text{ ans} = 2,40 \times 10^{10} \text{ s} \end{cases}$

A.N. : $\underline{a_H = 2,69 \times 10^{12} \text{ m} = 17,9 \text{ UA}}$

En unités astronomiques

$$\frac{T_H^2}{a_H^3} = \frac{T_T^2}{a_T^3} \Leftrightarrow a_H = a_T \left(\frac{T_H}{T_T} \right)^{\frac{3}{2}}$$

A.N. : $\underline{a_H = 17,9 \text{ UA}}$ avec $\begin{cases} T_H = 76 \text{ ans} \\ a_T = 1 \text{ UA} \\ T_T = 1 \text{ an} \end{cases}$

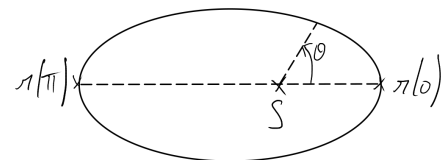
Dans tous les cas,

$$d_{\max} = 2a - d_{\min} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} a = 17,9 \text{ UA} \\ d_{\min} = 0,59 \text{ UA} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{d_{\max} = 35,3 \text{ UA}}$$

On décrit d_{\min} et d_{\max} avec $r(\theta)$ grâce à un schéma :

$$3) \quad \begin{cases} d_{\min} = r(0) = \frac{p}{1-e} \\ d_{\max} = r(\pi) = \frac{p}{1+e} \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} 1-e = r(0) = \frac{p}{d_{\min}} \\ 1+e = r(\pi) = \frac{p}{d_{\max}} \end{cases} \quad (1) \quad (2)$$

(1) + (2) \Rightarrow

$$1 - e + 1 + e = p \left(\frac{1}{d_{\min}} + \frac{1}{d_{\max}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2 = p \left(\frac{d_{\max} + d_{\min}}{d_{\min} d_{\max}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{p = 2 \frac{d_{\min} d_{\max}}{d_{\min} + d_{\max}}}$$

(2) - (1) \Rightarrow

$$1 + e - (1 - e) = p \left(\frac{1}{d_{\max}} - \frac{1}{d_{\min}} \right)$$

$$\Leftrightarrow 2e = 2 \frac{d_{\min} - d_{\max}}{d_{\min} + d_{\max}} \left(\frac{d_{\min} - d_{\max}}{d_{\min} d_{\max}} \right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{e = \frac{d_{\min} - d_{\max}}{d_{\min} + d_{\max}}}$$