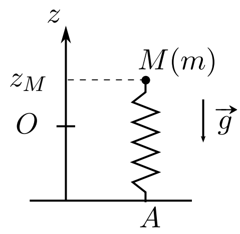
Sujet 1 – corrigé

I Ressort vertical

On considère un ressort vertical de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. L'extrémité inférieure est en contact avec un support horizontal au point A. Une masse m assimilable à un point matériel M est accrochée à l'autre extrémité. La masse a un mouvement rectiligne vertical.
Dans un premier temps, on suppose que le point A est fixe. On définit l'axe vertical ascendant (O,z). On note z_M la coordonnée de la masse. A l'équilibre, $z_M = 0$.



1) Établir l'équation différentielle vérifiée par z_M.

Réponse

On commence par définir les grandeurs d'intérêt. D'après le schéma, $z_M = OM$. Or, on nous dit que $z_M = 0$ à l'équilibre. On note donc $AO = \ell_{\text{eq}}$ la longueur d'équilibre du ressort. Ainsi, la longueur du ressort AM s'exprime comme

$$AM = \ell = \ell_{\text{eq}} + z_M$$

On peut donc faire le **bilan des forces** :

$$\begin{array}{ll} \textbf{Poids} & \vec{P} = -mg\vec{u}_z \\ \textbf{Ressort} & \vec{F}_{\text{ressort}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_z \\ & \vec{F}_{\text{ressort}} = -k(\ell_{\text{eq}} + z_M - \ell_0)\vec{u}_z \end{array}$$

Le **PFD** donne ainsi

$$m\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} = -mg - kz_M - k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$$
$$\Leftrightarrow m\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} + kz_M = k(\ell_0 - \ell_{\text{eq}}) - mg$$

Or, z_M vaut 0 à l'équilibre, donc le terme de droite doit être nul. On détermine donc ℓ_{eq} :

$$k(\ell_0 - \ell_{\text{eq}}) - mg = 0 \Leftrightarrow k(\ell_0 - \ell_{\text{eq}}) = mg \Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 - \frac{m}{k}g}$$

On trouve donc bien

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}z_M = 0}$$

◇

2) On suppose que la masse est lâchée depuis la position $z_M(t=0) = z_0$ et sans vitesse initiale. Exprimer $z_M(t)$ pour $t \geq 0$.

Réponse

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$z_M(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Celle-ci est souvent plus pratique pour trouver les constantes d'intégration. On trouve A avec la première condition initiale : $z_M(0^+) = z_0$. En effet,

$$z_M(0) = A\cos(0) + B\sin(0) = A$$

donc $A = z_0$.

On trouve B avec la seconde condition initiale : $v(0) = 0 = \dfrac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t}(0)$. En effet,

$$\frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t} = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}z_M}{\mathrm{d}t}(0) = B\omega_0$$

Donc $B = 0$ ($\omega_0 \neq 0$). Ainsi,

$$\boxed{z_M(t) = z_0 \cos(\omega_0 t)}$$

◇

3) Exprimer l'énergie potentielle élastique. On prendra l'origine de cette énergie en $z_M = 0$.

Réponse

L'énergie potentielle élastique est, comme toute énergie potentielle, définie à une constante près, servant de référence au calcul. On ajoute donc un terme A à déterminer dans l'expression de $E_{p,el}$ du cours, qu'on trouve en prenant $E_{p,el}(z_M = 0) = 0$ et en utilisant l'expression de ℓ_{eq} trouvée question 1 :

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell_{\text{eq}} + z_M - \ell_0)^2 + A$$
$$z_M = 0 \Leftrightarrow E_{p,el} = 0$$
$$\Leftrightarrow 0 = \frac{1}{2}k(\underbrace{\ell_{\text{eq}} - \ell_0}_{-\frac{m}{k}g})^2 + A \Leftrightarrow A = -\frac{1}{2}k\left(\frac{m}{k}g\right)^2$$

Ainsi,

$$E_{p,el} = \frac{1}{2}k(z_M + \underbrace{\ell_{\text{eq}} - \ell_0}_{-\frac{m}{k}g})^2 - \frac{1}{2}k\left(\frac{m}{k}g\right)^2 \Leftrightarrow E_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(z_M^2 - 2z_M\frac{m}{k}g + \frac{m^2}{k^2}g^2\right) - \frac{1}{2}k\left(\frac{m^2}{k^2}g^2\right)$$
$$\Leftrightarrow \boxed{E_{p,el} = \frac{1}{2}k\left(z_M^2 - 2\frac{mgz_M}{k}\right)}$$

◇

4) Exprimer l'énergie potentielle de pesanteur. On prendra l'origine de cette énergie en $z_M = 0$.

Réponse

$E_{p,p} = mgz_M$

◇

5) Montrer que l'énergie mécanique est conservée.

Réponse

$$E_m = \frac{1}{2}m(\dot{z}_M)^2 + \frac{1}{2}k(z_M^2 - 2mgz_M/k) + mgz_M = \frac{1}{2}m(\dot{z}_M)^2 + \frac{1}{2}kz_M^2 = kz_0^2/2$$

◇

On suppose désormais que le ressort est posé sur le sol et non fixé

6) Quelle est la condition sur z_0 pour que le ressort ne décolle pas du support.

Réponse

On étudie cette fois le système **entier** masse + ressort, dont le centre de masse se situe en M. On repère donc le système par son altitude z_M. C'est ce système entier qui subit la réaction du support. Les forces **extérieures** sont donc le **poids** et la **réaction** du support : la force du ressort est une force interne qui n'apparaît pas dans le bilan des forces extérieures.

Le PFD donne donc

$$m\ddot{z}_M = -mg + R$$

Ici, il faut réussir à traduire « le ressort ne décolle pas du support ». Mathématiquement, ça veut dire que le support exerce toujours une force sur le système, c'est-à-dire

$$\boxed{R > 0} \Leftrightarrow m\ddot{z}_M + mg > 0$$

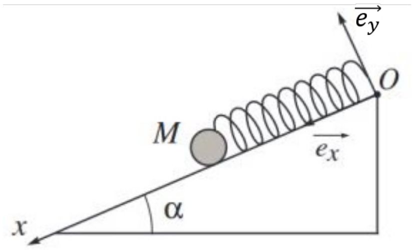
On développe et on utilise l'expression de z_M donnée plus tôt :

$$\begin{aligned}
\frac{\mathrm{d}^2 z_M}{\mathrm{d}t^2} &= -z_0{\omega_0}^2 \cos(\omega_0 t) \\
\Rightarrow m\ddot{z}_M + mg > 0 \Leftrightarrow -z_0{\omega_0}^2 & \underbrace{\cos(\omega_0 t)}_{=1 \text{ au maximum}} > -g \Leftrightarrow z_0 \frac{k}{m} < g \\
&\Leftrightarrow \boxed{z_0 < \frac{mg}{k}}
\end{aligned}$$

Sujet 2 – corrigé

I Masse attachée à un ressort sur un plan incliné

Soit un ressort de raideur k et de longueur à vide ℓ_0, dont les extrémités sont reliées respectivement à un point fixe O d'un plan incliné et à un point matériel M de masse m. On pose $\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{e_x}$ et on supposera qu'il n'y a pas de frottements de glissement au contact du plan incliné.



1) Justifier le choix d'une base cartésienne dont l'un des axes est suivant le plan incliné.

Réponse

On fait le choix de repère afin de limiter le nombre de degrés de liberté permettant de paramétriser la position du point matériel. Ici, le mouvement se faisant le long du plan incliné, il aurait fallu deux degrés de liberté si on avait choisi un repère avec $\overrightarrow{e_y}$ vertical. Il est donc plus pertinent de choisir un repère tel que l'axe x fait un angle α avec l'horizontal.

◇

2) Déterminer l'abscisse $x = x_e$ à l'équilibre.

Réponse

Appliquons le principe fondamental de la dynamique au point matériel M de masse m dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. Les forces suivantes s'appliquent

- le poids $\overrightarrow{P} = mg(\sin\alpha\,\overrightarrow{e_x} - \cos\alpha\,\overrightarrow{e_y})$
- la réaction support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{e_y}$
- la force de rappel élastique : $\overrightarrow{F} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x} = -k(x - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x}$

Le PFD s'écrit, en projection selon $\overrightarrow{e_x}$ afin de se débarrasser de la force inconnue $\overrightarrow{R}$:

$$m\ddot{x} = -k(x - \ell_0) + mg\sin\alpha$$

La position d'équilibre est à rechercher à accélération nulle, soit

$$0 = -k(x_e - \ell_0) + mg\sin\alpha \quad \text{d'où} \quad \boxed{x_e = \ell_0 + \frac{mg}{k}\sin\alpha}$$

◇

3) A partir de la position d'équilibre, M est déplacé de D et relâché sans vitesse initiale. Exprimer x en fonction de t.

Réponse

Reprenons le PFD projeté sur $\overrightarrow{e_x}$ obtenu à la question précédente. Il est possible de mettre cette équation différentielle du second ordre sous forme canonique en introduisant $\omega_0 = \sqrt{k/m}$. Il vient alors

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = {\omega_0}^2 x_e$$

C'est une équation type oscillateur harmonique. x_e étant une solution particulière évidente, il vient

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) + x_e$$

Avec A et B deux constantes d'intégration. Par ailleurs, les conditions initiales sont :

$$x(t=0) = x_e + D \quad \text{et} \quad \dot{x}(t=0) = 0$$

Avec la première CI $$A + x_e = x_e + D \quad \text{d'où} \quad A = D$$

Avec la seconde CI $$B\omega_0 = 0 \quad \text{d'où} \quad B = 0$$

Finalement $$\boxed{x(t) = x_e + D\cos(\omega_0 t)}$$

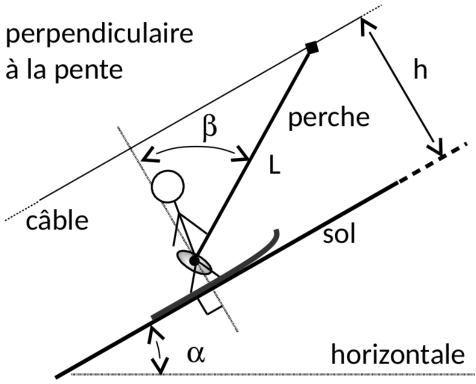
Sujet 3 – corrigé

I Quelques notions de ski ($\star$)

A Leçon n° 1 : le remonte-pente

On considère une skieuse de masse m remontant une pente d'angle α à l'aide d'un téléski. Celui-ci est constitué de perches de longueur L accrochées à un câble parallèle au sol situé à une hauteur h.

On néglige les frottements de la neige sur les skis.



1) Quelles sont les trois forces que subit la skieuse ?

Réponse

Les 3 forces sont :

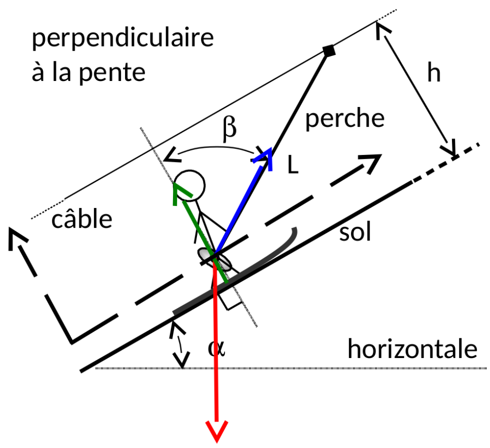
- tension de la perche $\vec{F}$,
- réaction normale du sol $\vec{R}_N$ (il n'y a pas de frottement donc la réaction est uniquement normale),
- poids de la skieuse $\vec{P}$.

◇

2) Que sait-on sur chacune d'elles a priori ?

Réponse

On connaît leurs direction et leur sens. On ne connaît que la norme du poids ($P = mg$).



◇

On considère une skieuse de 50kg sur une pente de 15% (c'est-à-dire que la skieuse s'élève de 15 m lorsqu'elle parcourt horizontalement 100 m). La force exercée par la perche sur la skieuse sera supposée fixée et égale à $F = 100$N.

3) Existe-t-il un angle limite β_l pour lequel le contact entre les skis et le sol serait rompu ?

Réponse

Le contact entre la skieuse et le sol sera rompu lorsque $R_N = 0$. On cherche donc à calculer R_N et voir s'il existe une valeur de β telle que $R_N = 0$.

On applique alors la loi de la quantité de mouvement au skieur dans le référentiel de la montagne (galiléen) et on la projette selon l'axe orthogonal à la pente. La projection de l'accélération est alors nulle car la skieuse se déplace perpendiculairement à cet axe.

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha \quad \Rightarrow \quad R_N = mg\cos\alpha - F\cos\beta.$$

$$R_N > 0 \quad \Rightarrow \quad mg\cos\alpha > F\cos\beta \quad \Rightarrow \quad \cos\beta < \frac{mg\cos\alpha}{F}.$$

On peut calculer l'angle α puisque la pente est de 15% :

$$\alpha = \arctan\left(\frac{15}{100}\right) = 8{,}5°.$$

On en déduit que :

$$\frac{mg\cos\alpha}{F} = \frac{50 \times 9{,}8 \times \cos(8{,}5°)}{100} \approx 5.$$

Finalement, quelque soit β,

$$\cos\beta < 5 \quad \Rightarrow \quad R_N > 0,$$

donc il n'existe pas d'angle limite : la skieuse touche toujours le sol.

◇

On suppose maintenant que sa trajectoire est rectiligne et sa vitesse constante.

4) Quelle relation les 3 forces que subit la skieuse doivent-elles vérifier ?

Réponse

Si la trajectoire de la skieuse est rectiligne uniforme, alors d'après la loi de l'inertie :

$$\boxed{\vec{F} + \vec{R}_N + \vec{P} = \vec{0}}.$$

◇

On note β l'angle que forme la perche du téléski avec la perpendiculaire à la pente.

5) Représenter les trois forces sur une même figure en repérant bien les angles α et β.

Réponse

cf question 2

◇

6) En déduire une relation entre m, g, α, β et F (la norme de la force exercée par la perche).

Réponse

On a déjà projeté cette relation sur l'axe orthogonal à la pente :

$$0 = R_N + F\cos\beta - mg\cos\alpha.$$

On peut également la projeter sur l'axe de la pente :

$$0 = 0 + F\sin\beta - mg\sin\alpha \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sin\beta}}.$$

◇

7) En négligeant la distance entre la rondelle et le sol, exprimer F en fonction m, g, α, h et L. Comment varie F avec α et h ? Commenter.

Réponse

Dans cette hypothèse :

$$\cos\beta = \frac{h}{L} \quad \Rightarrow \quad \sin\beta = \sqrt{1-\left(\frac{h}{L}\right)^2}.$$

Finalement :

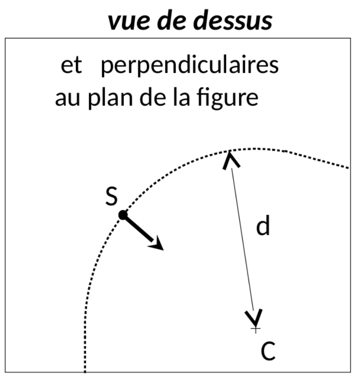
$$\boxed{F = \frac{mg\sin\alpha}{\sqrt{1-\left(\frac{h}{L}\right)^2}}}.$$

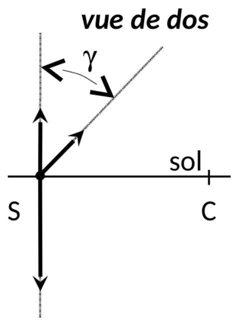
La norme de la force F augmente alors lorsque α augmente ou lorsque h augmente. On a donc tout intérêt à positionner le câble de traction horizontal le plus bas possible (en évitant bien entendu qu'il touche la tête des usagers et usagères).

◇

B Leçon n° 2 : le virage

La skieuse est toujours sur le remonte pente et aborde une zone horizontale où sa trajectoire est un cercle de centre C et de rayon d. Sa célérité est toujours constante. On suppose pour les questions suivantes que la perche est contenue dans le plan formé par la droite SC et la verticale.





8) Que peut-on dire de son accélération ?

Réponse

Le mouvement de la skieuse est circulaire uniforme donc son accélération est radiale et orientée vers l'intérieur du cercle (centripète) :

$$\vec{a} = \frac{-v^2}{d}\vec{e}_r \qquad \text{avec} \qquad \vec{e}_r = \frac{\overrightarrow{CS}}{||CS||}.$$

◇

On a représenté ci-dessus différentes vues de la situation où la skieuse est modélisée par un point matériel S posé sur le sol. On néglige les frottements, on note $\vec{F}$ la force exercée par la perche du téléski et γ l'angle qu'elle forme avec la verticale.

9) Déterminer $F = ||\vec{F}||$ en fonction de m, $v = ||\vec{v}||$ la célérité, d et γ.

Réponse

On applique la loi de la quantité de mouvement à la skieuse dans le référentiel galiléen de la montagne. On projette cette équation sur le vecteur $\vec{e}_r$:

$$ma = -F\sin\gamma \quad \Rightarrow \quad \boxed{F = \frac{mv^2}{d\sin\gamma}}.$$

◇

10) En déduire $R = ||\overrightarrow{R}||$ en fonction de toutes les autres données.

Réponse

On projette alors l'équation de la loi de la quantité de mouvement sur l'axe vertical ascendant perpendiculaire à $\overrightarrow{e}_r$. La projection de l'accélération y est nulle :

$$0 = -mg + R + F\cos\gamma$$

On combine cette équation avec celle de la question précédente :

$$\boxed{R = mg - \frac{mv^2}{d\tan\gamma}}.$$

◇

11) Comment évolue R lorsque la célérité augmente ?

Réponse

On voit que R augmente lorsque v diminue.

◇

12) En pratique la perche n'est pas rigoureusement orthogonale à la trajectoire mais est également dirigée vers l'avant. Expliquer pourquoi.

Réponse

En réalité il existe des frottements colinéaires à la vitesse, mais de sens opposé. Si le mouvement est uniforme, une composante de la force exercée par la perche doit compenser ces frottements

◇