Ondes – chapitre 2

Interférences à deux ondes

Sommaire

Capacités exigibles

- ▢ Interférences entre deux ondes acoustiques, mécaniques ou lumineuses de même fréquence.
- ▢ Différence de chemin optique. Conditions d'interférences constructives ou destructives.
- ▢ Exemple du dispositif des trous d'Young éclairé par une source monochromatique.
- ▢ Exprimer les conditions d'interférences constructives ou destructives.
- ▢ Déterminer l'amplitude de l'onde résultante en un point en fonction du déphasage.
- ▢ Relier le déphasage entre les deux ondes à la différence de chemin optique.
- ▢ Établir l'expression littérale de la différence de chemin optique entre les deux ondes.
- ▢ Exploiter la formule de Fresnel fournie pour décrire la répartition d'intensité lumineuse.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Démonstrations

Applications

Exemples

Points importants

I Introduction

I/A Approximation par une onde plane

Soit une source en un point S, émettant une onde sinusoïdale. En toute généralité, et même sans atténuation, son amplitude dépend du point considéré :

$$s(\overrightarrow{r},t) = A(r)\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_0\right)$$

avec $\overrightarrow{k}$ le vecteur d'onde et $\overrightarrow{r}$ le vecteur position en 3 dimensions. En effet, l'énergie totale d'une perturbation se répartit selon l'espace disponible. On les différencie alors selon les « vagues » qu'elles forment :

Définition ON2.1 : Fronts d'ondes

Si les fronts d'ondes dessinent :

- une **droite**, alors l'onde est **plane** ;
- un **cercle**, alors l'onde est **circulaire** ;
- une **sphère**, alors l'onde est **sphérique**.

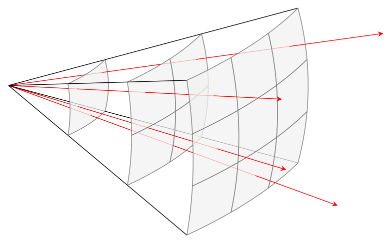


Figure ON2.1 – Front d'onde sphérique.

Pour obtenir de résultats simples, on se limite à des ondes planes avec l'approximation suivante :

Propriété ON2.1 : Approxima° par une onde plane

À des distances de la source S **suffisamment grandes devant la longueur d'onde** λ, on peut approximer la vibration $s(\mathrm{M},t)$ par une **onde plane** :

avec A constante au voisinage de M.

Figure ON2.2 – Approximation par une onde plane

I/B Déphasage

Définition ON2.2 : Phase spatiale et déphasage

Soit deux signaux sinusoïdaux, de **même fréquence**, **longueur d'onde** et **nature**, provenant de 2 sources S_1 et S_2, se superposant en un point M. Avec $n \in [1;2]$:

On introduit alors pour simplifier la **phase spatiale** :

et

Figure ON2.3

Ainsi, le **déphasage** entre s_2 et s_1 se réduit à leur **différence de phase spatiale** :

I/C Valeurs particulières

Rappel ON2.1 : Déphasages particuliers

En phase

Deux signaux sont **en phase** si leur **déphasage est nul** (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = 2p\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.

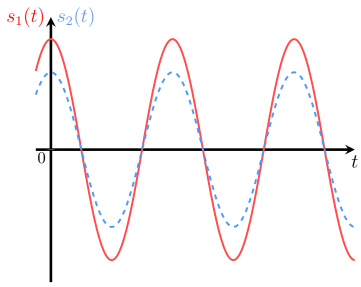


Figure ON2.4 – En phase.

En quadrature

Deux signaux sont en **quadrature phase** si leur déphasage est de $\pm\pi/\mathbf{2}$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = \left(p + \frac{1}{2}\right)\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.

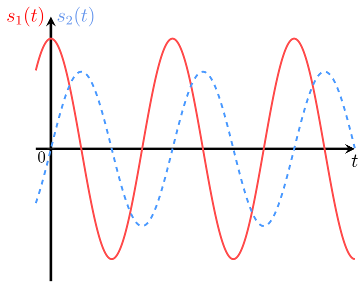


Figure ON2.5 – En quadrature.

En opposition

Deux signaux sont en **opposition de phase** si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo 2π) :

$$\Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi] \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi = (2p+1)\pi} \quad p \in \mathbb{Z}$$

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à la valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.

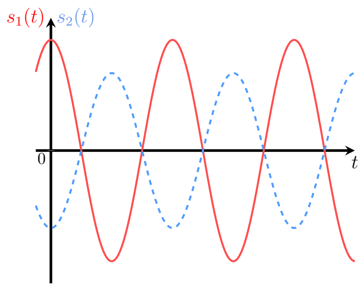


Figure ON2.6 – En opposition.

I/D Déphasage et différence de marche

I/D) 1 Présentation

Comme les fréquences sont les mêmes, le déphasage se réexprime par une différence de distances.

Propriété ON2.2 : Déphasage et différence de marche

On a alors avec $k = \dfrac{2\pi}{\lambda}$

Différence de marche

Déphasage à l'origine

Interprétation ON2.1 : Différence de marche

ΔL traduit la distance supplémentaire que doit parcourir une onde par rapport à une autre pour arriver au même point M. Comme elles vont à la même vitesse c (même nature, même fréquence), cette distance supplémentaire introduit un retard de l'une par rapport à l'autre, c'est-à-dire un déphasage.

Démonstration ON2.1 : Différence de marche

I/D) 2 Valeurs particulières

Propriété ON2.3 : ΔL particuliers

Pour des sources de même phase à l'origine, on a $\Delta\varphi_0 = 0$. Les déphasages particuliers se réécrivent alors en termes de différence de marche, avec $p \in \mathbb{Z}$:

Type	**En phase**	**En quadrature**	**En opposition**
$\Delta L(\mathrm{M})$			

Démonstration ON2.2 : ΔL particuliers

On part du lien entre $\Delta\varphi$ et ΔL, avec $\Delta\varphi_0 = 0$, et de la définition du vecteur d'onde :

Comme $p \in \mathbb{Z}$, $-p \in \mathbb{Z}$, donc le signe $-$ importe peu. Ainsi,

◇ **En phase** :

◇ **En quadrature** :

◇ **En opposition** :

Tout fonctionne comme si on remplaçait 2π par λ.

II Superposition d'ondes sinusoïdales de mêmes fréquences

II/A Présentation

La plupart du temps, les ondes se croisent sans interagir particulièrement, et on ne voit que la somme des signaux. Voir l'animation `geogebra`[1].

1. https://www.geogebra.org/m/jyh2ZMXJ

Exemple ON2.1 : Superpositions sur une corde

$t = 0$

$t = \Delta t$

$t = 2\Delta t$

FIGURE ON2.7 – Mêmes amplitudes.

$t = 0$

$t = \Delta t$

$t = 2\Delta t$

FIGURE ON2.8 – Amplitudes opposées.

Étudions mathématiquement ce phénomène en utilisant **deux sources sinusoïdales**.

Définition ON2.3 : Hypothèses

Chaque source émet une OPPS[2] **de même fréquence** et **même nature** depuis les points S_1 et S_2 :

et

et on s'intéresse à leur somme $s(M, t) = s_1(M, t) + s_2(M, t)$ en un point M de l'espace.

FIGURE ON2.9 – Schéma.

II/B Signaux de même amplitude : $A_1 = A_2 = A_0$

II/B) 1 Cas général

Outils ON2.1 : Somme de cosinus

On remplace la somme par un produit grâce à la relation

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)$$

Démonstration ON2.3 : Signal somme même amplitude

2. Onde Plane Progressive Sinusoïdale

Propriété ON2.4 : Signal somme même amplitude

Ainsi, avec

II/B) 2 Cas extrêmes

Propriété ON2.5 : Cas extrêmes même amplitude

L'amplitude de $s(\mathrm{M},t)$ est **maximale** pour des signaux **en phase** et **minimale** pour des signaux en **opposition de phase**, avec :

En phase

En opposition

Démonstration ON2.4 : Cas extrêmes même amplitude

Amplitude maximale

$A(\mathrm{M})$ est maximale pour

$\Rightarrow$ $p \in \mathbb{Z}$

Ce déphasage correspond à des **signaux en phase**. Lorsque les signaux sont en phase, les maxima et minima de vibration se correspondent et donnent à chaque instant une amplitude double.

Amplitude minimale

$A(\mathrm{M})$ est minimale pour

$\Rightarrow$ $p \in \mathbb{Z}$

Ce sont donc des **signaux en opposition de phase**. Lorsque les signaux sont en opposition de phase, les maxima et minima de vibration s'opposent, et l'amplitude résultante est nulle.

II/B) 3 Conclusion

Important ON2.1 : Analyse même amplitude

Le signal somme de deux OPPS de **même amplitude** A_0 et **même pulsation** ω est :

1) Un signal **sinusoïdal** et **de même pulsation** ω ;
2) D'amplitude **dépendante de M**, et
   - ◇ **Maximale** $A_{\max} = 2A_0$ pour signaux **en phase** ($\Delta\varphi_{2/1} = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$) ;
   - ◇ **Minimale** $A_{\min} = 0$ pour signaux **en opposition de phase** ($\Delta\varphi_{2/1} = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$).

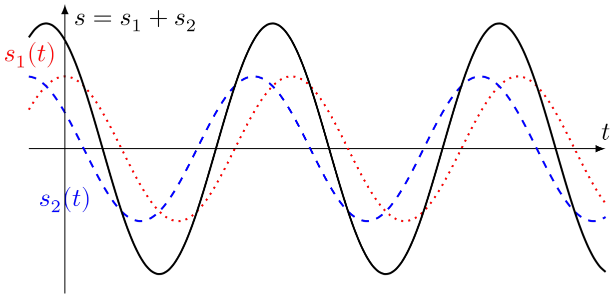


FIGURE ON2.10 –
Somme avec déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \pi/3$.

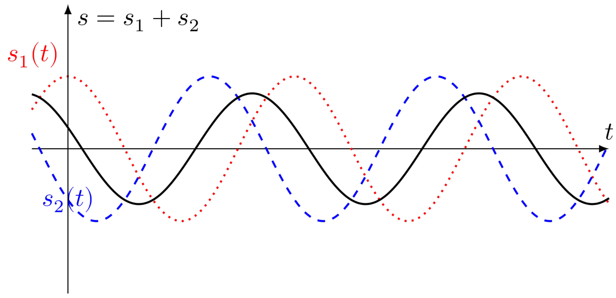


FIGURE ON2.11 –
Somme avec déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = 3\pi/4$.

II/C Signaux d'amplitudes différentes : $A_1 \neq A_2$

II/C) 1 Cas général

On peut soit utiliser la trigonométrie classique, soit les complexes :

Outils ON2.2 : Trigonométrie

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta} + e^{-j\theta}}{2}$$

$$|\underline{z}|^2 = \underline{z} \cdot \underline{z}^* \quad \text{et} \quad \tan(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{\mathrm{Re}(\underline{z})}$$

Propriété ON2.6 : Signal somme amplitudes $\neq$

Ainsi, avec

Démonstration ON2.5 : Signal somme amplitudes $\neq$

En réels

En complexes

En supposant directement que $s(\mathrm{M},t) = A(\mathrm{M})\cos(\omega t + \varphi(\mathrm{M}))$ (par linéarité),

Dans tous les cas, on trouve $\begin{cases} A(\mathrm{M}) = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos\big(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\big)} \\ \varphi(\mathrm{M}) = \arctan\left(\dfrac{A_1\sin\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\sin\varphi_2(\mathrm{M})}{A_1\cos\varphi_1(\mathrm{M}) + A_2\cos\varphi_2(\mathrm{M})}\right) \end{cases}$

II/C) 2 Cas extrêmes

Propriété ON2.7 : Cas extrêmes amplitudes $\neq$

L'amplitude de $s(\mathrm{M},t)$ est **maximale** pour des signaux **en phase** et **minimale** pour des signaux en **opposition de phase**, avec :

En phase

En opposition

Démonstration ON2.6 : Cas extrêmes amplitudes $\neq$

Amplitude maximale

Max pour

$\Rightarrow$ $p \in \mathbb{Z}$

Amplitude minimale

Min pour

$\Rightarrow$ $\qquad p \in \mathbb{Z}$

II/C) 3 Conclusion

Important ON2.2 : Analyse amplitudes différentes

Le signal somme de deux OPPS d'amplitudes A_1 et A_2 de même pulsation ω est :

1) Un signal **sinusoïdal** et **de même pulsation** ω ;
2) D'amplitude **dépendante de M**, et

◇ **Maximale** $A_{\max} = A_1 + A_2$ pour signaux **en phase** ($\Delta\varphi_{2/1} = 2p\pi$) ;

◇ **Minimale** $A_{\min} = |A_1 - A_2|$ pour signaux **en opposition de phase** ($\Delta\varphi_{2/1} = (2p+1)\pi$).

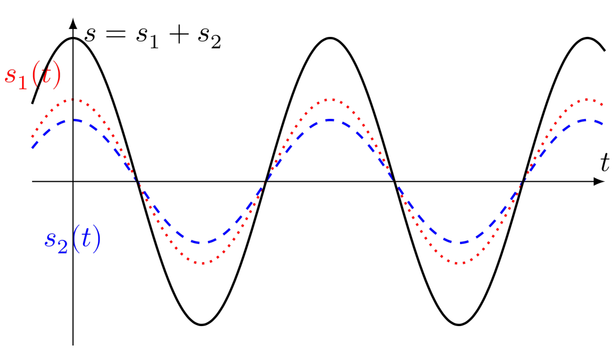


FIGURE ON2.12 – Signaux en phase.

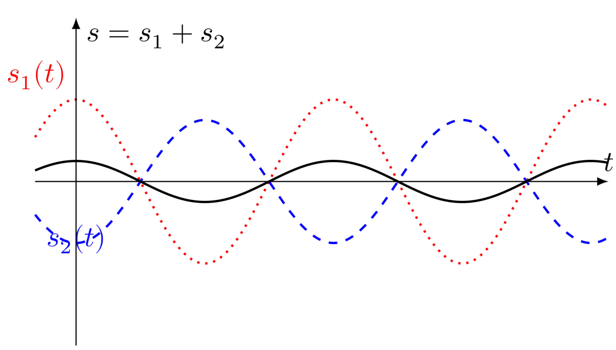


FIGURE ON2.13 – Signaux en opposition.

II/D Bilan

Important ON2.3 : Interférences (pour $\Delta\varphi_0 = 0$)

Pour deux OPPS **de même fréquence**, **nature** et **phase à l'origine*** se superposant en M :

L'amplitude de la somme est **maximale** si les signaux sont **en phase** :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = 2p\pi} \overset{*}{\Leftrightarrow} \boxed{\Delta L_{2/1}(\mathrm{M}) = p\lambda}$$

On parle d'**interférences constructives**.

L'amplitude de la somme est **minimale** si les signaux sont **en opposition de phase** :

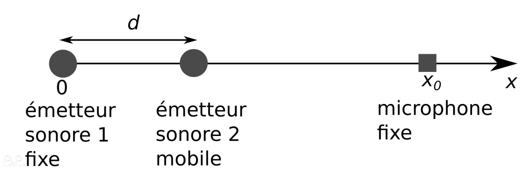
$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi} \overset{*}{\Leftrightarrow} \boxed{\Delta L_{2/1}(\mathrm{M}) = (2p+1)\frac{\lambda}{2}}$$

On parle d'**interférences destructives**.

$p \in \mathbb{Z}$ est appelé l'**ordre d'interférence** [a].

Application ON2.1 : Interférences sonores

Soient 2 émetteurs sonores envoyant une onde progressive sinusoïdale de même fréquence, même amplitude et **même phase à l'origine**. Le premier est fixé à l'origine du repère, l'émetteur 2 est mobile et à une distance d du premier, et un microphone est placé à une distance fixe x_0 de l'émetteur 1 et est aligné avec les deux émetteurs.



a. Pour une animation et visualisation dans le plan, voir ce site.

On néglige l'influence de l'émetteur 2 sur l'émetteur 1 et toute atténuation.

1. Lorsque $d = 0$, qu'enregistre-t-on au niveau du microphone ?

2. On part de $d = 0$ et on augmente d jusqu'à ce que le signal enregistré soit nul. Ceci se produit pour $d = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. Expliquer cette extinction.

3. En déduire la longueur d'onde du son émis.

4. Pour $d = 12{,}0\,\mathrm{cm}$, quelle sera l'amplitude du signal enregistré ?

III Interférences lumineuses

III/A Cohérence d'ondes lumineuses

Définition ON2.4 : Cohérence entre sources

La plupart des sources lumineuses ont une phase à l'origine qui **n'est pas constante**, mais prend une valeur aléatoire au bout d'un certain temps généralement très court : on dit qu'elles envoient des **trains d'ondes**. On définit ainsi :

◇ **Temps de cohérence** :

◇ **Longueur de cohérence** :

Propriété ON2.8 : Condition d'interférence

Pour interférer, **deux sources doivent être cohérentes**, c'est-à-dire avoir $\Delta\varphi_0 = \text{cte}$; ceci n'est en général pas réalisable par manque de contrôle sur cette variation de phase à l'origine, et les interférences lumineuses se font donc **avec une unique source**, donnant forcément des ondes cohérentes.

Exemple ON2.2 : Cohérence

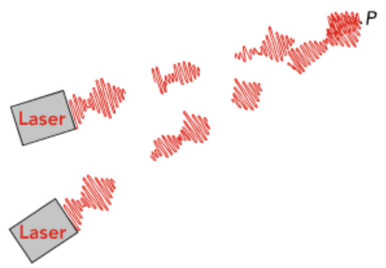


Tableau ON2.1 – Temps et longueurs de cohérence

Source	τ_c (s)	L_c (m)
Lumière du Soleil	2×10^{-15}	6×10^{-7}
Ampoule	3×10^{-14}	1×10^{-5}
Raie rouge hydrogène	1×10^{-11}	4×10^{-3}
Laser hélium-néon	1×10^{-9}	3×10^{-1}

III/B Intensité lumineuse

Propriété ON2.9 : Intensité lumineuse

En général

L'intensité lumineuse est reliée à son signal par :

OPPS

Pour une OPPS :

Démonstration ON2.7 : Intensité lumineuse OPPS

La période (temporelle) typique d'une onde lumineuse est de l'ordre de 10^{-15} s, ou ≈ 1 fs : c'est une échelle de temps infinitésimale **bien inférieure au temps de détection** de n'importe quel capteur optique : l'œil humain a un temps de réponse $\approx 10^{-1}$ s, un capteur CCD $\approx 10^{-6}$ s.

Ainsi, un récepteur optique n'est sensible **qu'à l'énergie moyenne du signal**. Cette énergie est proportionnelle au carré de la grandeur $s(\mathrm{M},t)$ propagée par l'onde (ici électromagnétique), d'où l'expression précédente.

Pour une OPPS (monochromatique), on a donc

cohérent avec sa représentation temporelle. On le démontre aussi par intégration (cf. Ap.E6.3).

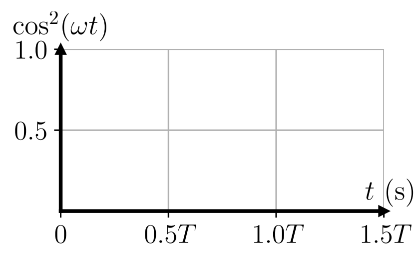


Figure ON2.14 – $\cos^2(\omega t)$ et sa moyenne.

III/C Formule de Fresnel

Propriété ON2.10 : Formule de Fresnel

L'intensité lumineuse $I(\mathrm{M})$ résultant de l'interférence de 2 ondes monochromatiques en un point M de l'espace s'écrit :

ou

si $A_1 = A_2 = A_0$, c'est-à-dire $I_1 = I_2 = I_0$. On trouve alors

En phase

En opposition

Démonstration ON2.8 : Formule de Fresnel

Soient 2 ondes lumineuses **cohérentes** et de même pulsation, d'amplitudes A_1 et A_2, interférant en un point M. On a vu que le signal somme $s(\mathrm{M},t) = s_1(\mathrm{M},t) + s_2(\mathrm{M},t)$ avait une amplitude

$$A(\mathrm{M}) = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})}$$

On trouve donc l'intensité $I(\mathrm{M})$ en en prenant le carré et en multipliant par $\frac{1}{2}K$:

III/D Chemin optique et déphasage

La propagation des ondes lumineuses se fait dans des milieux avec des indices optiques n qui peuvent être différents, et donc avec des vitesses $v = c/n$ différentes. Pour continuer à travailler comme on le fait, il faut cependant que la vitesse des signaux soient les mêmes (même fréquence et même longueur d'onde). On définit ainsi le **chemin optique** :

Définition ON2.5 : Chemin optique

Le trajet d'un rayon lumineux dans un milieu d'indice n entre les points A et B s'écrit (AB) :

Démonstration ON2.9 : Chemin optique et $\delta_{2/1}(\mathrm{M})$

Propriété ON2.11 : Différence de chemin optique

Le déphasage entre 2 ondes *lumineuses*, de même longueur d'onde λ_0 dans le vide, se superposant en M est

avec

Différence de chemin

Déphasage à l'origine

IV Expérience des trous d'Young

IV/A Introduction

La nature de la lumière a été sujet à de grands débats durant de nombreux siècles, entre vision corpusculaire et ondulatoire. C'est en 1802 que l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférences lumineuses [3]. Une version moderne de cette expérience consiste à pointer un unique laser de longueur d'onde λ_0 sur deux fentes fines horizontales et parallèles : ces fentes diffractent la lumière est se comportent **comme deux sources cohérentes**.

Définition ON2.6 : Description du résultat

La zone de l'espace où les faisceaux se superposent est appelé **champ d'interférences**. Sur un écran, on observe alors des variations d'intensité lumineuse :

- ◇ au milieu des zones claires (**maximum** local d'intensité) on a des **interférences constructives** ;
- ◇ au milieu des zones sombres (**minimum** local d'intensité) on a des **interférences destructives**.

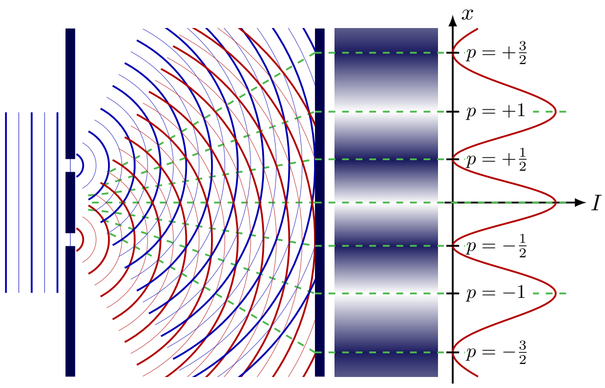


Figure ON2.15 – Figure d'interférence.

On appelle **interfrange** et on le note i la **distance** séparant **deux milieux de franges** brillantes (ou sombres) consécutives.

IV/B Présentation

Définition ON2.7 : Présentation trous d'Young

Soit S une source lumineuse ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde λ_0, éclairant deux fentes fines horizontales et parallèles F_1 et F_2 distantes de $2a$, avec O au milieu. S est situé sur un axe optique perpendiculaire à un écran placé à une distance D très supérieure à a (pour l'approximation en ondes planes). Le milieu de propagation est l'air, d'indice optique $n = 1$.

3. Voir la vidéo La plus belle expérience de la Physique

FIGURE ON2.16 – Schéma des trous d'YOUNG

On se limite au tracé de 2 rayons qui interfèrent au point $\mathrm{M}(x)$, passant chacun par une des fentes (voir Figure ON2.16). On a alors successivement :

Interprétation ON2.2 : Expérience des trous d'YOUNG

- **Diffraction** :

- **Interférences** : avec la formule de FRESNEL pour des intensités égales,

$$I(\mathrm{M}) = 2I_0\left(1+\cos\big(\Delta\varphi_{2/1}(\mathrm{M})\big)\right)$$

  - **Constructives** :

  - **Destructives** :

IV/C Résolution

Propriété ON2.12 : Intensité et interfrange

Pour $I_1 = I_2 = I_0$, on obtient

décrivant des franges, espacées de

FIGURE ON2.17 – Franges avec atténuation.

Démonstration ON2.10 : Intensité et interfrange

Intensité

On cherche donc à exprimer F_1M et F_2M. Pour cela, on place les points H_1 et H_2 projetés orthogonaux de F_1 et F_2 sur l'écran, créant ainsi deux triangles rectangles : F_1H_1M et F_2H_2M.

et

et

et

Or, $\sqrt{1+\varepsilon} \underset{\varepsilon\to 0}{\sim} 1 + \frac{\varepsilon}{2}$; comme $D \gg (x\ ;\ a) \Rightarrow \frac{x \pm a}{D} \ll 1$, alors avec $\varepsilon = \left(\frac{x \pm a}{D}\right)^2$ on a :

et

et

Ainsi,

Soit

Interfrange

◇ **Interférences constructives** :

◇ **Interférences destructives** :

◇ **Interfrange** :

Exemple ON2.3 : Interfrange

Avec deux fentes séparées de 0,20 mm, $\lambda_0 = 632\,\mathrm{nm}$ et $D = 1{,}0\,\mathrm{m}$, on trouve [4]

4. Voir une autre animation ici.