Sujet 1

I Milieu supraconducteur

Un supraconducteur se modélise comme un milieu dans lequel le champ $\vec{B}$ vérifie l'équation suivante :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{j} = -\frac{ne^2}{m}\vec{B}$$

où $n = 3{,}0 \times 10^{28}\,\text{m}^{-3}$ est la densité volumique électronique, $e = 1{,}6 \times 10^{-19}\,\text{C}$ la charge élémentaire et $m = 9{,}1 \times 10^{-31}\,\text{kg}$ la masse de l'électron.

1) A l'aide des équations locales, trouver une équation aux dérivées partielles satisfaite par $\vec{B}$.
   On donne $\overrightarrow{\text{rot}}\ \overrightarrow{\text{rot}} = \overrightarrow{\text{grad}}\ \text{div} - \vec{\Delta}$.

2) On se place alors en régime stationnaire dans toute la suite de l'exercice. Que devient l'équation précédente ?

3) Le supraconducteur occupe le demi-espace $z \geq 0$. De quelle(s) variable(s) dépend le champ $\vec{B}$?

4) En utilisant une équation locale, montrer que la composante de $\vec{B}$ suivant z (notée B_z) est obligatoirement constante.

5) Résoudre l'équation différentielle satisfaite par B_x, B_y et B_z en fonctions de constantes réelles.

6) A l'extérieur du supraconducteur, le champ magnétique est uniforme et vaut $\vec{B} = B_0\vec{u_x}$. En déduire exactement le champ magnétique dans le supraconducteur.

7) Faire apparaître une longueur caractéristique, l'évaluer et commenter le résultat. On donne $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\text{H} \cdot \text{m}^{-1}$

Sujet 2

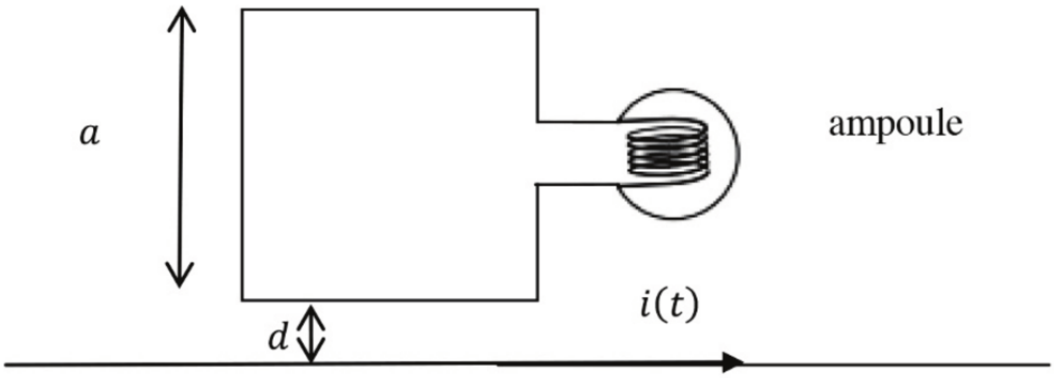
I Ligne haute-tension

Une ligne haute tension assimilable à un fil droit infini selon (Oz) transporte un courant sinusoïdal $i(t)$ de fréquence $f = 50\,\mathrm{Hz}$ et de valeur efficace $I = 1000\,\mathrm{A}$.
On approche de cette ligne HT une bobine plate de N spires carrées de côté $a = 30\,\mathrm{cm}$ à une distance $d = 2\,\mathrm{cm}$.
Cette bobine d'inductance propre et de résistances négligeables est fermée sur une ampoule qui s'éclaire si la tension efficace E à ses bornes est supérieure à $1{,}5\,\mathrm{V}$.
On utilisera les coordonnées cylindriques (r,θ,z) et de base $(\vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_z)$. On se trouve ici dans l'ARQS.

1) Donner la définition et la validité de l'ARQS. Justifier ici le choix de l'ARQS. Donner, en la justifiant, l'expression des équations de Maxwell dans l'ARQS.

2) Déterminer, en coordonnées cylindriques, le champ magnétique $\vec{B}(r)$ créé dans tout l'espace par cette ligne HT.

3) Déterminer le flux magnétique total créé par cette ligne HT à travers la bobine plate.



4) En déduire le nombre de spires N nécessaires pour que l'ampoule puisse s'éclairer. Faire l'application numérique avec $\mu_0 = 4\pi \times 10^{-7}\,\mathrm{SI}$.

5) On assimile maintenant l'ampoule à une résistance $r = 10\,\Omega$ en série avec une inductance propre $L = 10\,\mathrm{mH}$. Calculer alors la valeur efficace I' de $i'(t)$ dans la bobine plate lorsque $E = 1{,}5\,\mathrm{V}$ et le déphasage φ' entre $i'(t)$ et $i(t)$ en régime sinusoïdal forcé. Faire les applications numériques.

Sujet 3

I Électrostatique($\star$)

On définit le potentiel électrostatique dans un cylindre de base S et de hauteur infinie suivant $\vec{e}_x$:

$$V = \begin{cases} V_0 & \text{pour } x \leq 0 \\ V_0 \exp\left\{\left(-\frac{x}{a}\right)\right\} & \text{pour } x \geq 0 \end{cases}$$

On supposera le problème invariant suivant $\vec{e}_y$ et $\vec{e}_z$.

1) Montrer que les équipotentielles sont perpendiculaires au champ électrique.

2) Donner l'expression du champ électrique pour l'ensemble du cylindre.

3) Quel est l'état de surface du plan $x = 0$, on donne:

$$\sigma = \epsilon_0 \left[\vec{E}(x = 0^+) - \vec{E}(x = 0^-)\right] . \vec{e}_x$$

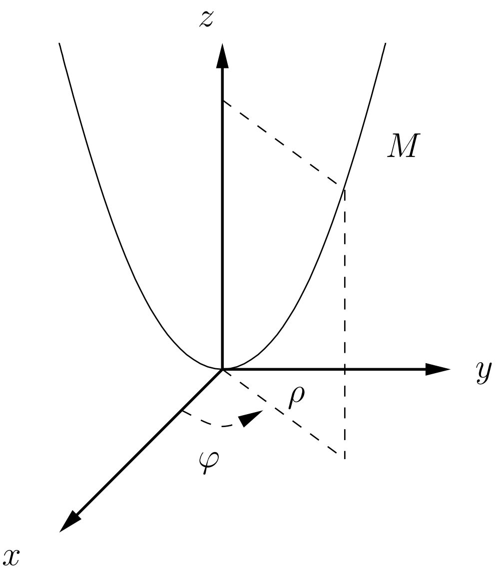
4) Donner l'expression de la densité volumique de charge locale dans le cylindre.

5) Quelle est la charge totale dans le cylindre?

Sujet 4

I Énergie potentielle effective

On désire étudier les mouvements possibles d'un point matériel M, de masse m, sous l'action du champ de pesanteur $\vec{g}$, à l'intérieur d'une cavité fixe que l'on suppose solidaire d'un référentiel terrestre $\mathcal{R}$ supposé galiléen lié au repère cartésien $(O,\ \vec{e}_x,\ \vec{e}_y,\ \vec{e}_z)$. La surface extérieure de cette cavité est un paraboloïde de révolution P, d'axe vertical ascendant Oz, dont l'équation en coordonnées cylindriques $(\rho,\ \varphi,\ z)$ est $\rho^2 - bz = 0$ avec $b > 0$.



Cette surface étant parfaitement lisse, le point matériel M glisse sans frottement sur P. Compte tenu de la symétrie du problème, on utilisera les coordonnées cylindriques de M, la base de projection étant $(\vec{e}_\rho,\ \vec{e}_\varphi,\ \vec{e}_z)$. On suppose la liaison unilatérale, c'est-à-dire que les coordonnées ρ et z de M satisfont à l'inégalité $z \geq \rho^2/b$.

1) Exprimer la vitesse $\vec{v}$ du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ dans la base cylindrique.

2) Exprimer l'accélération $\vec{a}$ du point M par rapport au référentiel $\mathcal{R}$ sous la forme $\vec{a} = a_\rho \vec{e}_\rho + a_\varphi \vec{e}_\varphi + a_z \vec{e}_z$. Prouver que a_φ vérifie $a_\varphi = \dfrac{1}{\rho}\dfrac{\mathrm{d}(\rho^2\dot{\varphi})}{\mathrm{d}t}$.

3) La réaction exercée par P sur le point M est contenue dans le plan $(O,\vec{e}_\rho,\vec{e}_z)$. Prouver qu'au cours du mouvement $\rho^2\dot{\varphi}$ est constant.Cette constante du mouvement sera dorénavant notée C.

4) Quelle est, en fonction des coordonnées et de leurs dérivées, l'expression de l'énergie cinétique $\mathcal{E}_k$ de la particule M dans $\mathcal{R}$?

5) Exprimer l'énergie potentielle de la particule M. L'origine O du repère sera prise comme origine de l'énergie potentielle.

6) Que peut-on dire de l'énergie mécanique de la particule M ?

7) Déduire de ce qui précède que l'énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ s'écrit sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{\rho}^2 G(\rho) + \mathcal{E}_{eff}(\rho)$$

où $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$ est une énergie potentielle "effective". Expliciter $G(\rho)$ et $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$.

8) Représenter avec soin le graphe $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$. Montrer que $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$ passe par un minimum pour une valeur ρ_m de ρ que l'on exprimera en fonction de C, m, b et g, intensité du champ de pesanteur. Quelle est la dimension du paramètre b et de la constante du mouvement C ? Prouver que l'expression précédente de ρ_m est homogène.

9) Discuter, à l'aide du graphe $\mathcal{E}_{eff}(\rho)$, la nature du mouvement de M. En déduire que la trajectoire de M sur P est nécessairement tracée sur une région de P limitée par deux cercles définis à l'aide des constantes du mouvement et des données du problème. On se contentera d'indiquer quelle équation il conviendrait de résoudre pour déterminer ces deux cercles.

10) À quelle condition sur C la trajectoire de M sur P est-elle une parabole méridienne ?

11) Une petite perturbation écarte légèrement la coordonnée ρ de la valeur ρ_m pour laquelle $\mathcal{E}_{eff}$ est minimale.Montrer que $r = \rho - \rho_m$ oscille avec une période T dont on donnera l'expression en fonction de b, g et ρ_m.

Sujet 5

I Enroulement d'un fil

On considère deux clous plantés l'un au-dessus de l'autre écartés d'une distance d. Un pendule de masse m attaché à un fil de masse négligeable de longueur ℓ est accroché au clou supérieur.
On lâche initialement le fil à l'horizontale avec un vitesse v_0. On néglige tout frottement lors de la chute et on suppose qu'aucun échange énergétique n'a lieu lors du contact entre le fil et le second clou.

1) Discuter de la possibilité que le fil s'enroule autour du second clou selon v_0 , d et ℓ.