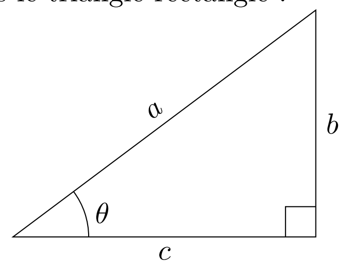
SO 1 — Signal et ondes

1 Rappel mathématique : les fonctions trigonométriques

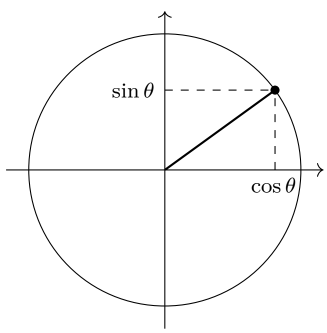
1.1 Relations dans le triangle rectangle

Les fonctions sinus et cosinus sont avant tout des relations dans le triangle rectangle :

$$\cos\theta = \frac{c}{a} = \frac{\text{Adjacent}}{\text{Hypothénuse}}\ ;$$
$$\sin\theta = \frac{b}{a} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Hypothénuse}}\ ;$$
$$\tan\theta = \frac{\sin\theta}{\cos\theta} = \frac{b}{c} = \frac{\text{Opposé}}{\text{Adjacent}}\ .$$



1.2 Le cercle trigonométrique

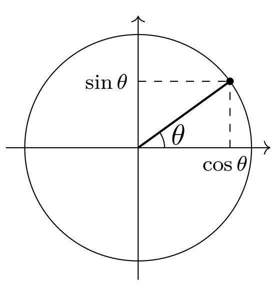


Le cercle trigonométrique a pour rayon 1. Un point situé sur ce cercle permet donc de lire les valeurs du cosinus en abscisse et du sinus en ordonnée.

Sauf mention contraire, les angles s'expriment en radians.

$$\theta_{\text{rad}} = \frac{\pi}{180}\theta_{\text{deg}}$$

Application



À l'aide du cercle trigonométrique, exprimer :

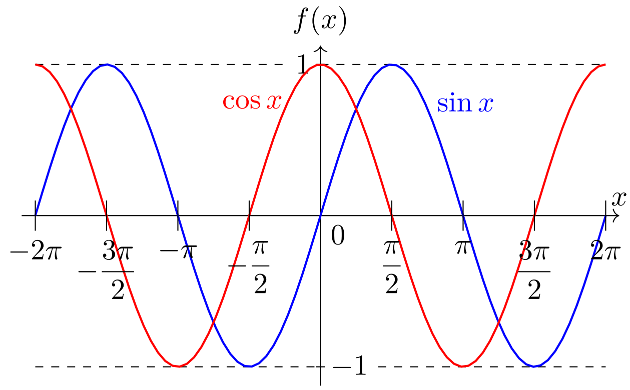
- ▷ $\sin(\pi - \theta) = \sin\theta$
- ▷ $\cos(-\theta) = \cos\theta$
- ▷ $\cos(\pi + \theta) = -\cos\theta$
- ▷ $\sin(\pi/2 - \theta) = \cos\theta$
- ▷ $\cos(\pi/2 - \theta) = \sin\theta$
- ▷ $\cos(\pi/2 + \theta) = -\sin\theta$

Valeurs remarquables

Angle (en radian)	0	$\pi/6$	$\pi/4$	$\pi/3$	$\pi/2$	π	$3\pi/2$
Angle (en degré)	0	30	45	60	90	180	270
$\cos\theta$	1	$\sqrt{3}/2$	$\sqrt{2}/2$	$1/2$	0	-1	0
$\sin\theta$	0	$1/2$	$\sqrt{2}/2$	$\sqrt{3}/2$	1	0	-1
$\tan\theta$	0	$\sqrt{3}/3$	1	$\sqrt{3}$	∞	0	∞

1.3 Graphes

On rappelle le tracé des fonctions sinus et cosinus ci-dessous. Ce tracé est à savoir refaire.



2 Signal

2.1 Définition

Que ce soit dans la vie courante, les exemples de grandeur physique nous fournissant une information ne manquent pas.

Exemple

- Signal sonore : vois, instrument de musique, diapason.
- Signal sismique.
- Signal de température en fonction du temps.
- Signal électrique.

Signal : grandeur physique, mesurable et pouvant varier avec le temps, qui transporte une information.

La notion de signal dépend de l'observateur : les ondes radio peuvent parasiter un circuit électronique, mais sont le signal pour celui qui veut l'écouter.

2.2 Le signal sinusoïdal

Expérience

Observation à l'oscilloscope du son d'un diapason enregistré avec un microphone. Le signal mesuré est sinusoïdal.

Le son est une phénomène vibratoire, c'est-à-dire un phénomène qui se reproduit identique à lui même à intervalle de temps régulier.

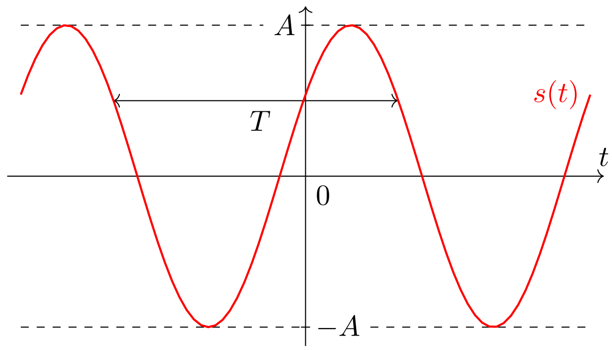
- **Période :** Durée entre deux phénomènes identiques consécutifs. On la note T et son unité est la seconde.
- **Fréquence :** Nombre de périodes par seconde. On la note f et elle s'exprime en Hz ($1\ \text{Hz} = 1\ \text{s}^{-1}$). La période et la fréquence sont liées par la relation :

$$f = \frac{1}{T}$$

Un diapason est un instrument qui émet une note pure, c'est-à-dire que le signal sonore émis est sinusoïdal de fréquence f bien déterminée. Le signal émis est donc de la forme :

$$s(t) = A \times \cos(\omega t + \varphi)$$

- **Les valeurs maximales de** $s(t)$ sont A et $-A$, la fonction cosinus oscillant entre -1 et 1.
- **Période :**
$$T = \frac{2\pi}{\omega}$$
car cos est périodique de période 2π.
- $s(0) = A \times \cos(\varphi)$.



Chaque note correspond à une fréquence donnée. Par exemple, le La$_3$ a une fréquence de 440 Hz.

Bilan.
- A est nommée amplitude du signal sinusoïdal ;
- ω est nommée pulsation du signal. Son unité est le $\mathrm{rad} \cdot \mathrm{s}^{-1}$. Elle est reliée à sa période par
$$T = \frac{2\pi}{\omega} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = \frac{2\pi}{T}$$
On définit aussi la fréquence du signal, dont l'unité est la s^{-1} ou le hertz (Hz)
$$f = \frac{1}{T} = \frac{\omega}{2\pi} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \omega = 2\pi f$$
- φ représente la phase a l'origine (sa valeur est liée au choix de l'origine des temps)

2.3 Spectre d'un signal

Le diapason produit des notes pures, mais ce n'est pas le cas de tous les instruments, et encore moins de tous les sons. Le son produit par une guitare ou un piano est périodique, mais il n'est pas sinusoïdal.

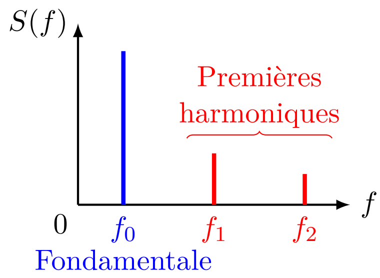
Théorème de Fourier. Tout signal physique périodique peut s'écrire comme une somme de signaux sinusoïdaux.

Exemple

> On peut voir plusieurs exemples de spectres de notes d'instruments de musique ici : `http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/son/analyseur.php`

Ainsi, si l'on sait travailler sur un signal sinusoïdal, on peut étudier quasiment tous les signaux car, à l'aide de ce théorème, on peut décomposer n'importe quel signal en sommes de signaux que l'on traite indépendamment les uns des autres.

Définition. Pour un signal physique donné, l'ensemble des composantes sinusoïdales d'un signal ainsi que leur amplitude constituent son **spectre en fréquence**.
Pour un signal périodique, la première fréquence s'appelle la fréquence **fondamentale** et les suivantes sont les **harmoniques**. Les fréquences des harmoniques sont des multiples de la fréquence fondamentale.



3 Ondes progressive unidimensionnelle

3.1 Définition et exemples

Définition. Une **perturbation** est une modification locale et temporaire des propriétés d'un milieu.

Exemple

- — Jet d'un caillou dans un lac.
- — Séisme.
- — Marée à l'entrée d'un canal.
- — Déplacement de la membrane d'un haut-parleur.

Une fois la perturbation créée, elle se propage dans le milieu de proche en proche : chaque point va subir des modifications temporaires similaires à celle de la source. Après le passage de cette perturbation, chaque point retrouve sa position initiale.

Définition. On appelle **onde** la propagation d'une perturbation, dans un milieu matériel ou dans le vide.

Exemple

- ▷ Lorsqu'un ébranlement est produit à une extrémité d'une corde tendue, les positions des différents points sont modifiées. Une fois l'onde passée, les points retrouvent leur position initiale.
- ▷ Si l'on jette un caillou dans un lac, il se forme des rides qui s'éloignent progressivement du point d'impact, mais il n'y a pas de mouvement d'ensemble du fluide.
- ▷ Lorsque la membrane d'un haut-parleur se déplace, elle provoque une brève compression-dilatation de l'air qui la touche. Cette propagation se déplace ensuite dans l'air : ce sont les ondes sonores. Elles peuvent aussi se déplacer dans les liquides et dans les solides.

Certaines ondes ont besoin d'un milieu matériel pour se propager : ce sont les ondes mécaniques. Les ondes sismiques, les ondes dans la corde ou les ondes sonores en sont des exemples. Certaines ondes peuvent se propager dans le vide, comme les ondes électromagnétiques. Les infrarouges, la lumière visible ou les micro-ondes sont des exemples d'ondes électromagnétiques.

Définition. Une onde est dite **progressive** si sa propagation ne se fait que dans un seul sens depuis sa source. À un instant ultérieur, **on retrouve la perturbation à l'identique plus loin.**

3.2 Onde progressive à une dimension

Définition. Une onde mécanique progressive à une dimension est :

- ▷ une onde qui se propage dans un milieu matériel à une dimension ;
- ▷ ou une onde qui se propage dans un milieu matériel à deux ou trois dimensions, avec une direction de propagation unique.

Exemple

1D onde le long d'une corde, mascaret dans un canal, compression le long d'un ressort ;

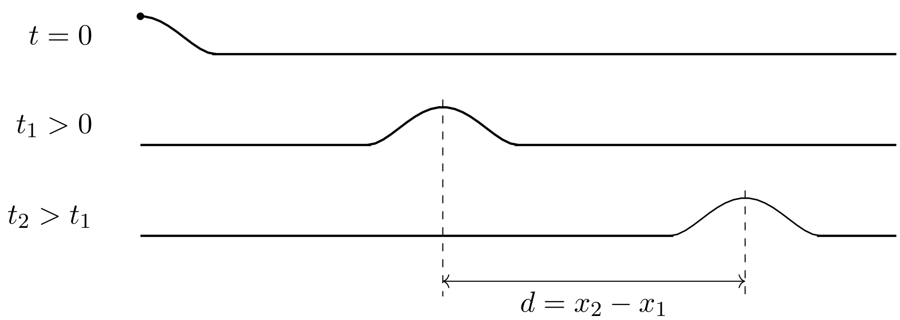
2D vagues sur l'eau ;

3D son, lumière.

3.3 Représentation spatiale et célérité des ondes

On représente l'état de la perturbation à un instant donné au cours de sa propagation. Par exemple, une photographie est une représentation spatiale : à un instant donné, on observe la disposition des choses.

Définition. Dans une représentation spatiale, on regarde à un temps fixé la perturbation dans tout l'espace.



Célérité des ondes Lorsqu'une onde se propage, on peut définir une vitesse de propagation de la perturbation. Pour la distinguer de la vitesse d'un point matériel, on emploi plutôt le terme célérité. Par convention, celle-ci est toujours positive.

Définition. La célérité c d'une onde est le quotient de la distance d parcourue par la perturbation, sur l'intervalle de temps Δt que dure ce parcours :

$$c = \frac{d}{\Delta t}$$

Sur le schéma ci-dessus :

$$c = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

En première approximation, la célérité ne dépend pas des caractéristiques de la perturbation, mais seulement de la nature et des propriétés du milieu de propagation.

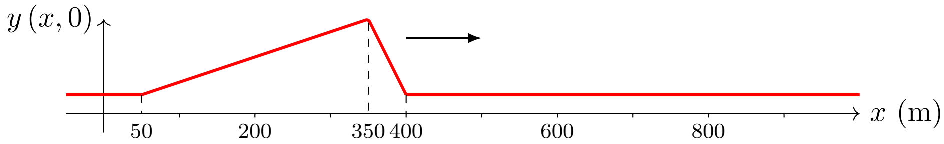
Signal	Célérité
ondes électromagnétiques dans le vide	3×10^8 m · s^{-1} (vitesse de la lumière)
son dans l'air à 20 ° C sous 1 bar	≈ 340 m · s^{-1}
son dans les métaux	quelques km · s^{-1}
son dans l'eau	1,5 m · s^{-1}

Table 1 – Quelques ordres de grandeurs de célérités à connaître.

Application

Un mascaret est une vague solitaire remontant un fleuve au voisinage de son estuaire, et provoqué par une interaction entre son écoulement et la marée montante. On considère ici un mascaret qui se déplace à la vitesse $c = 18$ km/h le long d'un fleuve rectiligne, et on définit un axe $(\mathrm{O}x)$ dans la direction et le sens de sa propagation.

A l'instant $t = 0$, le profil de niveau de l'eau du fleuve a l'allure suivante :



Faire un schéma du profil du niveau du fleuve à $\tau = 1$ min en supposant que l'onde se propage sans déformation.

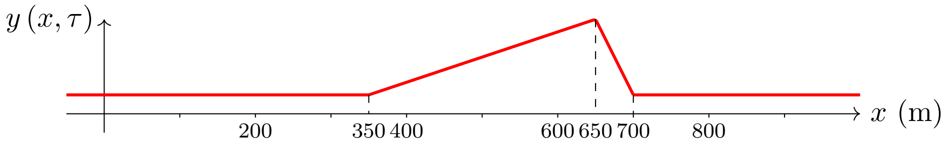
La queue de la vague est à $x_{q,0} = 50$ m. À $\tau = 1$ min, elle est en $x_{q,1}$. Par définition de la célérité :

$$\frac{x_{q,1} - x_{q,0}}{\tau - 0} = c$$

Soit :

$$x_{q,1} = x_{q,0} + c\tau = 350 \text{ m}$$

On procède de même pour repérer le haut de la vague et sa tête. L'ensemble de la vague s'est simplement déplacé de $c\tau = 300$ m vers la droite.



3.4 Représentation temporelle et retard

Définition. Dans une représentation temporelle, on regarde à un endroit fixé la perturbation sur toute sa durée.

Retard On crée à l'instant $t = 0$ une déformation à un endroit M. Cette perturbation se propage le long de la corde avec une célérité c. Elle parvient en un point M′, situé à une distance D de M à :

$$t_1 = \frac{\mathrm{MM'}}{c}$$

Définition. La grandeur τ est le retard du point M′ par rapport au point M :

$$\tau = \frac{\mathrm{MM'}}{v}$$

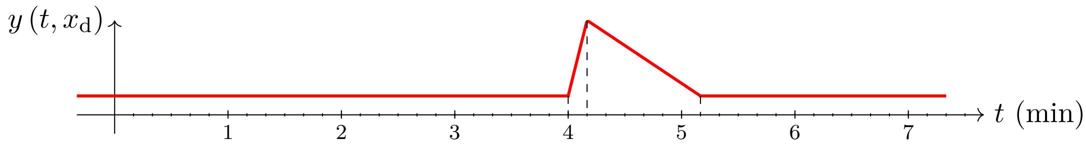
Application

On reprend l'exemple de la vague précédente.

1. À quel instant la vague va arriver au point d'abscisse $x_1 = 2{,}2$ km ?

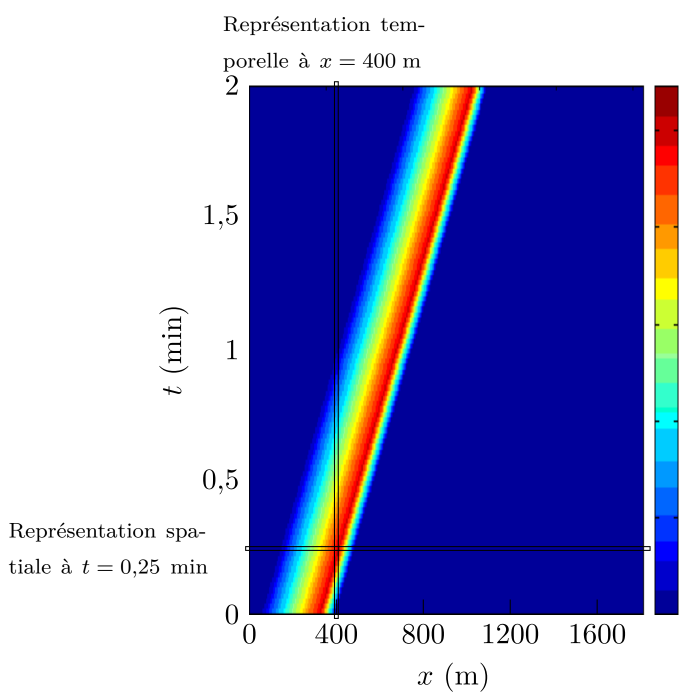
   À $t = 0$, la tête de la vague est à $x_0 = 400$ m. Elle arrive en x_1 avec un retard :

$$t = \frac{x_1 - x_0}{c} = 6 \text{ min}$$

2. Un détecteur fixe, enregistrant la hauteur du fleuve en fonction du temps, est placé à l'abscisse $x_\mathrm{d} = 1{,}6$ km. Dessiner l'allure des variations $y(x_\mathrm{d}, t)$ en fonction du temps à cette abscisse.
   La tête de la vague arrive avec un retard :
   $$\tau_\text{tête} = \frac{x_\mathrm{d} - x_{t,0}}{c} = \frac{1{,}6 - 0{,}4}{0{,}3} = 4 \ \text{min}$$
   Le haut de la vague arrive avec un retard :
   $$\tau_\text{haut} = \frac{x_\mathrm{h} - x_{h,0}}{c} = \frac{1{,}6 - 0{,}35}{0{,}3} = 4 \ \text{min} \ 10 \text{ s}$$
   La fin de la vague arrive avec un retard :
   $$\tau_\text{fin} = \frac{x_\mathrm{f} - x_{f,0}}{c} = \frac{1{,}6 - 0{,}05}{0{,}3} = 5 \ \text{min} \ 10 \text{ s}$$
   

3.5 Lien entre les représentations

Nous avons vu deux représentations graphiques : une selon l'espace x, une selon le temps t. En réalité, le signal de l'onde est une fonction de **deux** variables. Pour obtenir une représentation, on fixe une des deux variables.



En réalité, l'onde peut s'exprimer comme une fonction de deux variables :

$$y(x, t)$$

3.6 Expression mathématique de l'onde

Partant de la représentation spatiale : L'onde observée à $t = 0$ se déplace vers la droite. À t, elle décalée vers la droite de $\delta = ct$. La valeur de $y(x,t)$ en x à l'instant t était en $x - ct$ à l'instant $t = 0$. Soit :

$$y\,(x,t) = y\,(x - ct, 0)$$

On note $f(x) = y\,(x,0)$. C'est la représentation spatiale de l'onde à $t = 0$. On a :

$$\boxed{y\,(x,t) = f\,(x - ct)}$$

Partant de la représentation temporelle : Lorsqu'une onde se propage sans atténuation ni déformation, les valeurs observées en $x = 0$ au cours du temps sont aussi observées en $x > 0$ mais avec un retard $\tau = \dfrac{x}{c}$ lié à la propagation. La valeur de $y(x,t)$ en x à l'instant t était en $x = 0$ plus tôt : à l'instant $t - x/c$. Soit :

$$y\,(x,t) = y\left(0, t - \frac{x}{c}\right)$$

La fonction $y\,(0,t)$ est la hauteur de la corde en $x = 0$ à l'instant t : c'est la perturbation imposée par la source. On la note $g(t)$. Ainsi :

$$\boxed{y\,(x,t) = g\left(t - \frac{x}{c}\right)}$$

Représentation temporelle La représentation temporelle en x_0 est le graphique de la fonction $t \longrightarrow y\,(x_0,t)$, soit :

$$t \longrightarrow f(x_0 - ct) = g\left(t - \frac{x_0}{c}\right)$$

Représentation spatiale La représentation spatiale est le graphique de la fonction $x \longrightarrow y\,(x,t_0)$, soit :

$$x \longrightarrow f(x - ct_0) = g\left(t_0 - \frac{x}{c}\right)$$

Remarque. Si l'onde se propage vers la gauche, le raisonnement est le même avec $x + ct$ et $t + x/c$ au lieu de $x - ct$ et $t - x/c$.

4 Ondes progressives sinusoïdale

4.1 Définition

Définition. Une onde progressive est sinusoïdale si la source impose une perturbation sinusoïdale au milieu.

Si on relie un haut-parleur à un GBF délivrant une tension sinusoïdale, on observe le mouvement périodique dont est animé la membrane de l'air, qui génère une perturbation périodique de l'air.

L'exemple du diapason étudié au 2.2 est également une onde progressive sinusoïdale : lorsque l'on frappe le diapason, celui-ci vibre a une fréquence bien déterminée, qui se propage ensuite dans l'air pour parvenir à nos oreilles.

4.2 Double périodicité spatiale et temporelle

Observations sur l'animation

- ▷ Lorsque l'on impose une excitation sinusoïdale, la représentation spatiale est aussi sinusoïdale.
- ▷ À célérité constante, lorsque la fréquence de l'excitation augmente (la période diminue), la période spatiale diminue.
- ▷ À fréquence de l'excitation constante, si on augmente la célérité, la période spatiale diminue.

Périodicité temporelle Si la perturbation créée en S est sinusoïdale avec une période T, alors l'onde en M l'est également (il n'y a qu'un retard entre les deux dû à la propagation).

Périodicité spatiale Au moment de l'émission du deuxième maximum, le premier maximum a déjà parcouru une distance cT. L'écart entre deux maximum successifs est la période spatiale soit :

$$\lambda = cT$$

Bilan. Une onde progressive sinusoïdale présente à la fois une périodicité spatiale et une périodicité temporelle. La période temporelle T et la période spatiale, nommée longueur d'onde et notée λ sont reliées par la relation

$$\lambda = cT = \frac{c}{f}$$

c désigne la célérité de l'onde.

4.3 Expression mathématique de l'onde progressive sinusoïdale

Par définition, la perturbation $g(t)$ imposée en $x = 0$ est un signal sinusoïdal :

$$g(t) = A\cos(\omega t + \varphi)$$

Donc :

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega\left(t - \frac{x}{c}\right) + \varphi\right)$$

$$s(x,t) = A\cos\left(\omega t - \frac{\omega}{c}x + \varphi\right)$$

On note $k = \dfrac{\omega}{c}$: c'est le vecteur d'onde.

L'expression générale d'une onde progressive sinusoïdale se propageant sans déformation ni atténuation est :

$$\begin{aligned} s(x,t) &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \\ &= A \times \cos(\omega t - kx + \varphi) \end{aligned}$$

Remarque. On peut vérifier la double périodicité (T et λ). Par exemple :

$$\begin{aligned} s(x+\lambda,t) &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x+\lambda}{\lambda} + \varphi\right) \\ &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi\frac{\lambda}{\lambda} + \varphi\right) \\ &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} - 2\pi + \varphi\right) \\ &= A \times \cos\left(2\pi\frac{t}{T} - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right) \\ &= s(x,t) \end{aligned}$$

4.4 Vitesse de phase

On considère une onde progressive sinusoïdale. La **phase** de l'onde est le terme $\omega t - kx + \varphi$.

On se demande à quelle moment t_2 le signal mesuré en x_2 aura la même phase que le signal mesuré en x_1 à l'instant t_1. L'intervalle

$$\frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

décrit cette vitesse de propagation de la phase. On l'appelle simplement **vitesse de phase** et on la note v_φ.

Résolution : Cela correspond à :

$$\omega t_2 - kx_2 + \varphi = \omega t_1 - kx_1 + \varphi$$

Soit :

$$\omega (t_2 - t_1) = k (x_2 - x_1)$$

$$\boxed{v_\varphi = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1} = \frac{\omega}{k}}$$

5 Milieux dispersifs

Définition. Un milieu est dit dispersif si la célérité c dépend de la fréquence ou de la longueur d'onde. Si c'est le cas, les différentes composantes spectrales d'un signal ne vont pas à la même vitesse et donc le signal peut se déformer lors de la propagation.

Exemple

▷ Propagation non-dispersive :

— Propagation des ondes acoustiques dans un fluide. La célérité est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\rho_0 \chi_0}}$$

où ρ_0 est la masse volumique du fluide au repos et χ_0 sa compressibilité.

— Propagation des ondes électromagnétiques dans le vide :

$$c = 299\,792\,458\ \mathrm{m \cdot s^{-1}}$$

c'est une constante de la physique

▷ Propagation dispersive :

— Propagation des ondes à la surface de l'eau. On a :

$$\omega^2 = gk \quad \text{soit} \quad v_\varphi = \sqrt{\frac{g}{k}}$$

Elle dépend de k donc de la longueur d'onde.

— Propagation des ondes électromagnétiques dans le verre :

$$v_\varphi = \frac{c}{n(\lambda)}$$

où $n(\lambda) = A + B/\lambda^2$. La dispersion du verre permet la décomposition du spectre par un prisme.

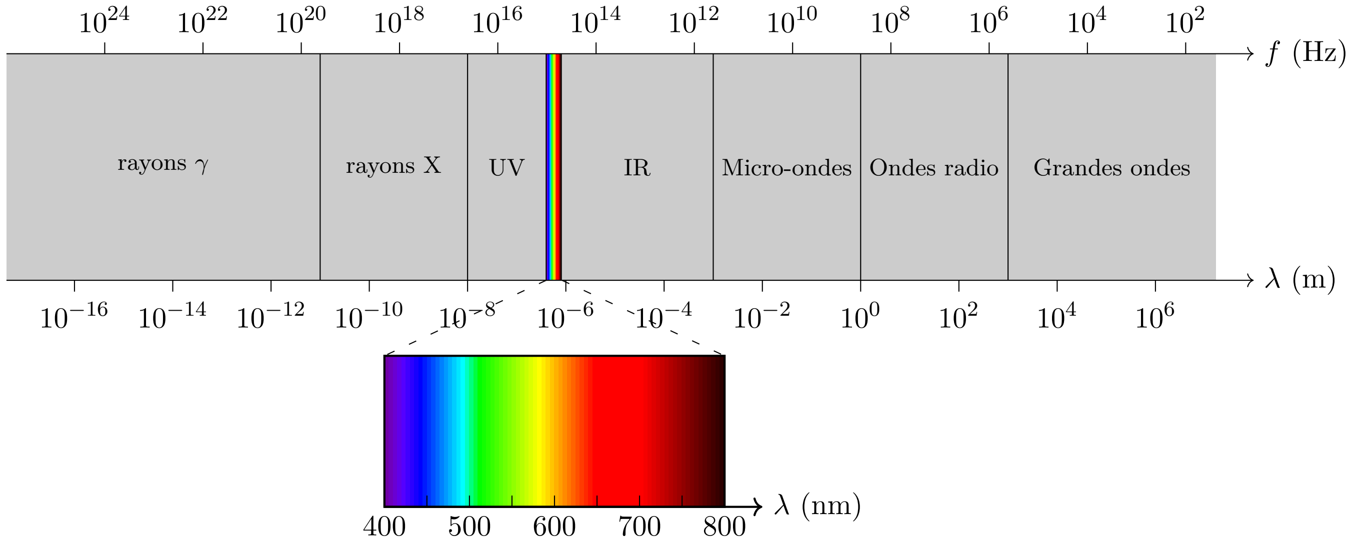
6 Transmission d'un signal physique par une onde

6.1 Les signaux acoustiques

Les signaux acoustiques se propagent par une modification locale de la pression et de la vitesse locale du milieu. Il se propagent dans l'air ($\approx 340\,\mathrm{m \cdot s^{-1}}$ à 20 $^\circ$C sous 1 bar) et dans les solides ou les liquides. Les fréquences audibles sont situées entre 20 Hz (grave) et 20 kHz (aigu) mais ces valeurs varient selon les individus.

6.2 Les signaux électromagnétiques

Les signaux électromagnétiques se propagent par une modification locale du champ électromagnétique $(\vec{E}, \vec{B})$. Ils se propagent dans le vide ($c \approx 3 \times 10^8 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$) et dans certains milieux transparents pour certaines fréquences, par exemple dans l'eau à $\approx 2{,}25 \times 10^8 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et dans les verres entre $1{,}7 \times 10^8 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$ et $2{,}2 \times 10^8 \mathrm{m \cdot s^{-1}}$.



6.3 Les signaux électriques

Ils se propagent dans les conducteurs électriques (métaux notamment) et correspondent à une modification locale du courant I et de la tension U.