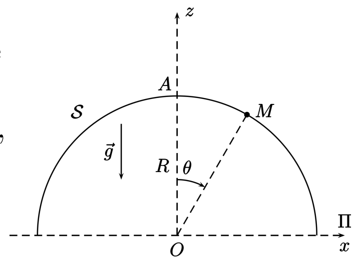
Mécanique – chapitre 3

Correction du TD d'entraînement

I Glissade d'un pingouin sur un igloo

Un pingouin, assimilable à un point matériel M de masse m décide de faire du toboggan. Il s'élance sans vitesse initiale du sommet A d'un igloo voisin, assimilable à une demi sphère S de rayon R et de centre O, posée sur un plan horizontal Π. On considère que le glissement s'effectue sans frottement dans le plan vertical (xOz).

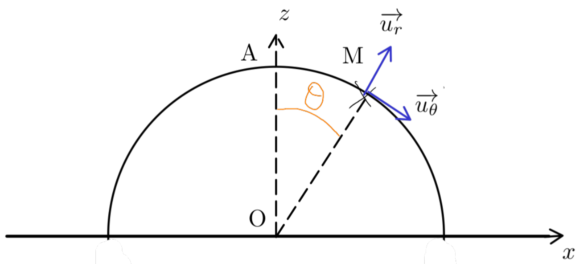


1) Appliquer le PFD au pingouin pour en déduire deux équations différentielles portant sur l'angle θ. Identifier l'équation du mouvement qui permet de déterminer $\theta(t)$. Quelle information l'autre information contient-elle ?

Réponse

- **Système** : {pingouin}
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- **Repère** : $(\text{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ **dans le sens de** θ
- **Repérage** :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(t) = R\overrightarrow{u_r}$$
$$\overrightarrow{v}(t) = R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\overrightarrow{a}(t) = R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}$$



- **Origine et instant initial** :

$$\overrightarrow{\text{OM}}(0) = \overrightarrow{\text{OA}} \Rightarrow \theta(0) = 0$$
$$\overrightarrow{v}(0) = \overrightarrow{0} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0$$

- **BDF** :

$$\textbf{Poids} \quad \overrightarrow{P} = mg(-\cos\theta\overrightarrow{u_r} + \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})$$
$$\textbf{Réaction} \quad \overrightarrow{R} = R_N\overrightarrow{u_r}$$

- **PFD** :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\cos\theta + R_N \\ mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 & (3.1) \\ \ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\sin\theta & (3.2) \end{cases}}$$

L'équation du mouvement est celle qui donne l'équation d'oscillateur harmonique aux petits angles, et qu'on a déjà utilisée en cours sur le pendule, et linéaire en θ : l'équation (3.2). L'équation (3.1) contient l'information sur le contact à l'igloo.

◇

2) En multipliant l'équation du mouvement par $\dot{\theta}$ et en intégrant sur t, montrer que

$$\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)$$

Réponse

En prenant (3.2)$\times\dot{\theta}$, on a

$$\begin{aligned}
\ddot{\theta}\dot{\theta} &= \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta \\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) &= \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos\theta) \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t &= \frac{g}{R}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t \\
\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\right]_{t=0}^{t} &= \frac{g}{R}\left[-\cos\theta\right]_{t=0}^{t} \\
\Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}
\end{aligned}$$

■

◇

3) En déduire la norme de la force de réaction de l'igloo.

Réponse

En reprenant (3.1), on peut remplacer $\dot{\theta}^2$:

$$\begin{aligned}
R_N &= mg\cos\theta - m\cancel{R}\frac{2g}{\cancel{R}}(1-\cos\theta) \\
\Leftrightarrow \boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)}
\end{aligned}$$

◇

4) Le pingouin décolle-t-il du toit de l'igloo avant d'atteindre le sol ? Si oui, pour quel angle ?

Réponse

La condition de support d'un solide est $R_N > 0$: le pingouin décolle du support si la force de réaction est nulle, soit $R_N = 0$. Or,

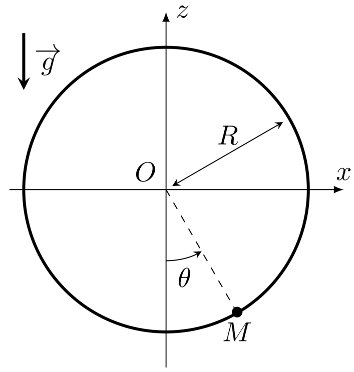
$$\begin{aligned}
R_N &= 0 \\
\Leftrightarrow 3\cos\theta - 2 &= 0 \\
\Leftrightarrow \boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)}
\end{aligned}$$

Une application numérique donne $\boxed{\theta = 48{,}2°}$.

◇

II Oscillations d'un anneau sur un cerceau

Un cerceau de centre O et de rayon R est maintenu dans un plan vertical, et un anneau de masse m assimilé à un point matériel M peut glisser sans frottements le long de ce cerceau.



1) Qu'est-ce que l'hypothèse « sans frottements » implique pour la réaction du cerceau sur l'anneau ?

Réponse

L'hypothèse « sans frottements » signifie que la réaction du cerceau est uniquement normale : il n'y a pas de composante tangentielle.

◇

2) Écrire le PFD appliqué à l'anneau et le projeter dans une base adaptée.

Réponse

- ◇ **Système** : {anneau}
- ◇ **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(\mathrm{O},\overrightarrow{u_r},\overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ dans le sens de θ
- ◇ **Repérage** :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) &= R\overrightarrow{u_r}\\ \vec{v}(t) &= R\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta}\\ \vec{a}(t) &= R\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r}\end{aligned}$$

- ◇ **BDF** :

$$\begin{array}{ll}\textbf{Poids} & \vec{P} = mg(\cos\theta\overrightarrow{u_r} - \sin\theta\overrightarrow{u_\theta})\\ \textbf{Réaction} & \vec{R} = -R_N\overrightarrow{u_r}\end{array}$$

- ◇ **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix}-mR\dot{\theta}^2\\ mR\ddot{\theta}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}mg\cos\theta - R_N\\ -mg\sin\theta\end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases}mg\cos\theta + mR\dot{\theta}^2 = R_N\\ mR\ddot{\theta} + mg\sin\theta = 0\end{cases}} \tag{3.3}$$

◇

3) En déduire l'équation différentielle régissant le mouvement.

Réponse

Avec (3.3), en la mettant sous forme canonique :

$$\ddot{\theta} + \frac{g}{R}\sin\theta = 0 \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\sin\theta = 0} \tag{3.4}$$

avec

$$\boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{R}}}$$

◇

On se place dans l'approximation des petits angles ($|\theta| < \theta_0 = 20°$). Initialement, l'anneau est situé à la verticale en-dessous de O et il est lancé vers la droite, avec une vitesse initiale de norme v_0.

4) En déduire l'équation horaire du mouvement.

Réponse

On a donc

$$\boxed{\theta(0) = 0} \qquad \text{et} \qquad \vec{v}(0) = v_0\overrightarrow{u_\theta} = R\dot{\theta}(0)\overrightarrow{u_\theta} \Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R}}$$

L'équation (3.4) se simplifie avec $\sin\theta \approx \theta$, pour donner

$$\boxed{\ddot{\theta} + {\omega_0}^2\theta = 0}$$
$$\Rightarrow \theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

Et avec les CI,

$$\theta(0) = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = 0}$$
$$\dot{\theta}(0) = \frac{v_0}{R} \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{v_0}{R\omega_0}}$$
$$\Rightarrow \boxed{\theta(t) = \frac{v_0}{R\omega_0}\sin(\omega_0 t)}$$

◇

5) À quelle condition sur v_0 l'approximation des petits angles est-elle vérifiée ?

Réponse

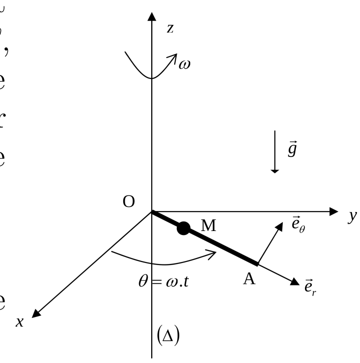
La valeur maximale de $|\theta(t)|$ est $v_0/(R\omega_0)$, quand le sinus vaut ± 1. Pour avoir des petits angles, il faut que l'angle maximal ne dépasse pas θ_0, soit

$$\frac{v_0}{R\omega_0} < \theta_0 \Leftrightarrow v_0 < \theta_0 R\sqrt{\frac{g}{R}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{v_0 < \theta_0\sqrt{Rg}}$$

◇

☆☆ III Anneau sur une tige en rotation

On considère un petit anneau M de masse m considéré comme ponctuel, soumis à la pesanteur et susceptible de se déplacer sans frottement le long d'une tige OA horizontale dans le plan (xOy), de longueur ℓ, effectuant des mouvements de rotation caractérisés par une vitesse angulaire ω constante autour d'un axe fixe vertical Δ passant par son extrémité O. Le référentiel lié au laboratoire est considéré comme galiléen. On considère :



◇ le repère cartésien (O,$\overrightarrow{e_x}$,$\overrightarrow{e_y}$,$\overrightarrow{e_z}$) fixe dans le référentiel du laboratoire et associé aux axes x, y et z ;

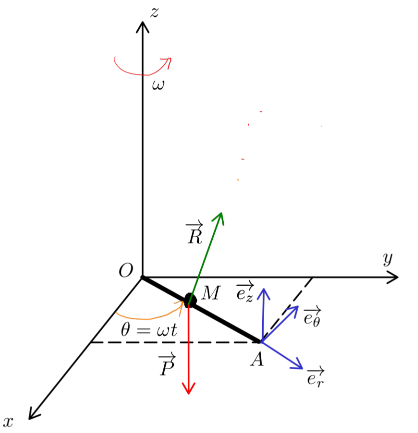
◇ la base cylindrique locale ($\overrightarrow{e_r}$,$\overrightarrow{e_\theta}$,$\overrightarrow{e_z}$) associée au point M.

L'anneau est libéré sans vitesse initiale par rapport à la tige, à une distance r_0 du point O (avec $r_0 < \ell$). On repère la position de l'anneau sur la tige par la distance $r = $ OM entre le point O et l'anneau M.

1) Faire un bilan des forces agissant sur l'anneau en les projetant dans la base $(\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$. En appliquant le principe fondamental de la dynamique, établir l'équation différentielle vérifiée par $r(t)$.

Réponse

- ◇ **Système** : {anneau} point matériel M de masse m
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
- ◇ **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O},\vec{e_r},\vec{e_\theta},\vec{e_z})$
- ◇ **Repérage** :



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= r\vec{e_r}\\
\vec{v} &= \dot{r}\vec{e_r} + r\dot{\theta}\vec{e_\theta}\\
&= \dot{r}\vec{e_r} + r\omega\vec{e_\theta}\\
\vec{a} &= \ddot{r}\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\vec{e_\theta} + \dot{r}\omega\vec{e_\theta} - r\omega^2\vec{e_r} + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0}\\
&= (\ddot{r} - r\omega^2)\vec{e_r} + 2r\omega\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

- ◇ **Conditions initiales** :

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0$$

- ◇ **BDF** : pas de frottements donc pas de composante sur $\vec{e_r}$:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Poids} & \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{e_z}\\
\textbf{Réaction support} & \vec{R} = R_\theta\vec{e_\theta} + R_z\vec{e_z}
\end{array}$$

- ◇ **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0\\ 2m\dot{r}\omega = R_\theta\\ 0 = -mg + R_z\end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{r} - \omega r = 0} & (3.5)\\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega & (3.6)\\ R_z = mg & (3.7)\end{cases}}$$

◇

2) Intégrer cette équation différentielle en prenant en compte les conditions initiales définies précédemment, et déterminer la solution $r(t)$ en fonction de r_0, ω et t.

Réponse

On résout (3.5) avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}
\ddot{r} - \omega^2 r &= 0\\
\Rightarrow s^2 - \omega^2 &= 0\\
\Leftrightarrow s^2 &= \omega^2\\
\Leftrightarrow &\boxed{s = \pm\omega}
\end{aligned}$$

On a donc des solutions de la forme

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Or, avec les CI

$$: \begin{aligned} r(0) &= r_0\\ \Leftrightarrow &\boxed{r_0 = A + B}\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}&\dot{r}(0) = 0\\ \Leftrightarrow\ & 0 = A\omega - B\omega\\ \Leftrightarrow\ & \boxed{A = B}\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}} \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = r_0 \operatorname{ch}(\omega t)}$$

◇

3) Exprimer les composantes de la réaction $\vec{R}$ de la tige sur M dans la base $(\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ en fonction de m, g, $\dot{r}$ et ω.

Réponse

On reprend (3.6) et (3.7) avec $\dot{r} = \omega r_0 \operatorname{sh}(\omega t)$:

$$\boxed{\vec{R} = 2mr_0\omega^2 \operatorname{sh}(\omega t)\vec{e_\theta} + mg\vec{e_z}}$$

◇

4) Déduire de la question 2 le temps τ que va mettre l'anneau pour quitter la tige. On exprimera τ en fonction de r_0, ℓ et ω.

Réponse

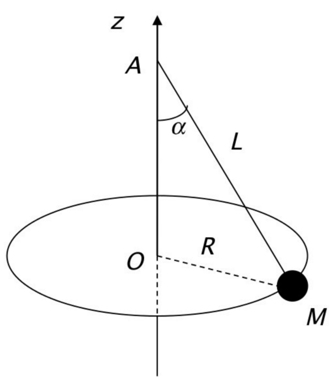
L'anneau quitte la tige en τ quand $r(\tau) = \ell$, soit

$$\begin{aligned}&\ell = r_0 \operatorname{ch}(\omega t)\\ \Leftrightarrow\ & \boxed{\tau = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}(\omega t)}\end{aligned}$$

◇

☆★☆ IV Pendule conique

Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe (Oz) dirigé vers le haut en décrivant un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendu à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de (Oz). L'angle α de (Oz) avec AM est constant.



1) Quel système de coordonnées utiliser ?

Réponse

On utilisera un repère cylindrique pour étudier la rotation.

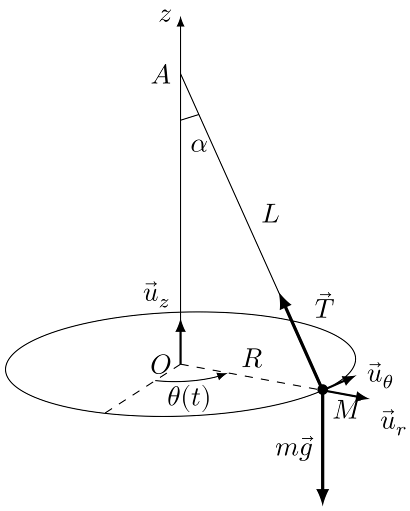
◇

2) Effectuer un bilan des forces s'appliquant à la masse et les écrire dans la base choisie.

Réponse

- **Système** : {M} masse m
- **Référentiel** : $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

◇ **Repère** : $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}, \overrightarrow{u_z})$ (voir schéma)



◇ **Repérage** : $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= R\overrightarrow{u_r} = L\sin\alpha\overrightarrow{u_r} \\
\vec{v}_{\mathrm{M}} &= L\dot{\theta}\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta} \\
&= L\omega\sin\alpha\overrightarrow{u_\theta} \\
\vec{a}_{\mathrm{M}} &= -L\omega^2\sin\alpha\overrightarrow{u_r}
\end{aligned}$$

◇ **BDF** :

Poids $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
Tension $\vec{T} = T(-\sin\alpha\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\overrightarrow{u_z})$

◇

3) Appliquer le PFD puis exprimer $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω. En déduire que la vitesse angulaire doit forcément être supérieure à une vitesse angulaire limite ω_{lim} pour qu'un tel mouvement puisse être possible.

Réponse

On applique le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2\cancel{\sin\alpha} = -T\cancel{\sin\alpha} \\ 0 = T\cos\alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos\alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{lim}}}$$

◇

4) Que dire du cas où ω devient très grande ?

Réponse

Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$, alors $\cos\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega\gg\omega_{\text{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

◇

5) Application numérique : calculer α pour $L = 20\,\text{cm}$ et $\omega = 3\,\text{tours}\cdot\text{s}^{-1}$.

Réponse

On trouve $\boxed{\cos\alpha = 0{,}138 \Leftrightarrow \alpha = 82°}$

◇