Correction du TD

I Glissade d'un pingouin sur un igloo

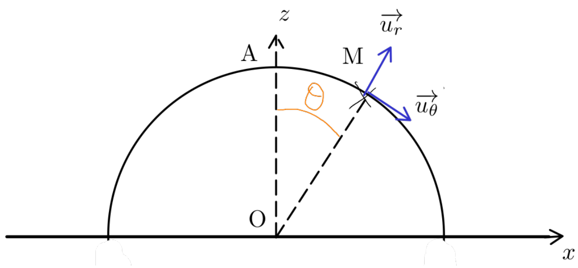
1) ◇ **Système :** {pingouin}

◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{sol}}$ supposé galiléen

◇ **Repère :** (O, $\vec{u_r}$, $\vec{u_\theta}$) avec $\vec{u_\theta}$ **dans le sens de** θ

◇ **Repérage :**

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = R\,\vec{u_r}$$
$$\vec{v}(t) = R\dot{\theta}\,\vec{u_\theta}$$
$$\vec{a}(t) = R\ddot{\theta}\,\vec{u_\theta} - R\dot{\theta}^2\,\vec{u_r}$$



◇ **Origine et instant initial :**

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \overrightarrow{\mathrm{OA}} \Rightarrow \theta(0) = 0$$
$$\vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{\theta}(0) = 0$$

◇ **BDF :**

Poids $\vec{P} = mg(-\cos\theta\,\vec{u_r} + \sin\theta\,\vec{u_\theta})$

Réaction $\vec{R} = R_N\,\vec{u_r}$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{pmatrix} -mR\dot{\theta}^2 \\ mR\ddot{\theta} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -mg\cos\theta + R_N \\ mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg\cos\theta - mR\dot{\theta}^2 & (3.1) \\ \ddot{\theta} = \dfrac{g}{R}\sin\theta & (3.2) \end{cases}}$$

L'équation du mouvement est celle qui donne l'équation d'oscillateur harmonique aux petits angles, et qu'on a déjà utilisée en cours sur le pendule, et linéaire en θ : l'équation (3.2). L'équation (3.1) contient l'information sur le contact à l'igloo.

2) En prenant (3.2)$\times\dot{\theta}$, on a

$$\ddot{\theta}\dot{\theta} = \frac{g}{R}\dot{\theta}\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}\dot{\theta}^2\right) = \frac{g}{R}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(-\cos\theta)$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}\dot{\theta}^2}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t = \frac{g}{R}\int_{t=0}^{t}\frac{\mathrm{d}(-\cos\theta)}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$$
$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}\left[\dot{\theta}^2\right]_{t=0}^{t} = \frac{g}{R}\left[-\cos\theta\right]_{t=0}^{t}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\dot{\theta}^2 = \frac{2g}{R}(1-\cos\theta)}$$

■

3) En reprenant (3.1), on peut remplacer $\dot{\theta}^2$:

$$\begin{aligned} R_N &= mg\cos\theta - m\cancel{R}\frac{2g}{\cancel{R}}(1-\cos\theta) \\ \Leftrightarrow &\boxed{R_N = mg(3\cos\theta - 2)} \end{aligned}$$

4) La condition de support d'un solide est $R_N > 0$: le pingouin décolle du support si la force de réaction est nulle, soit $R_N = 0$. Or,

$$\begin{aligned} R_N &= 0 \\ \Leftrightarrow 3\cos\theta - 2 &= 0 \\ \Leftrightarrow &\boxed{\theta = \arccos\left(\frac{2}{3}\right)} \end{aligned}$$

Une application numérique donne $\boxed{\theta = 48{,}2°}$.

II Course de F1

1) La voiture A d'Alonso entame son virage dès qu'elle passe par l'axe Δ, et parcourt un demi-cercle de longueur

$$\boxed{D_A = \pi R_A = 283\,\mathrm{m}}$$

En revanche, la voiture B de Button continue en ligne droite sur une distance $R_A - R_B$ avant d'entamer son virage, et parcourt de nouveau la même distance en ligne droite avant la sortie du virage. Ainsi,

$$\boxed{D_B = 2(R_1 - R_2) + \pi R_B = 266\,\mathrm{m}}$$

La voiture B parcourt moins de distance que la voiture A, mais **il est impossible d'en conclure quoi que ce soit** puisqu'on ne sait pas si les deux trajectoires sont parcourues à la même vitesse.

2) Lorsqu'elles sont sur la partie circulaire de leur trajectoire, parcourue à vitesse constante (en norme), l'accélération (en norme) des voitures vaut

$$a = \frac{v^2}{R} = 0{,}8g$$

puisque les pilotes prennent tous les risques. Ainsi,

$$\boxed{v_A = \sqrt{aR_A} = 26{,}6\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{v_B = \sqrt{aR_B} = 24{,}3\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}}$$

3) Calculons le temps mis par chacun des pilotes pour passer le virage. On sait que

$$\Delta t = \frac{D}{v}$$

d'où les résultats

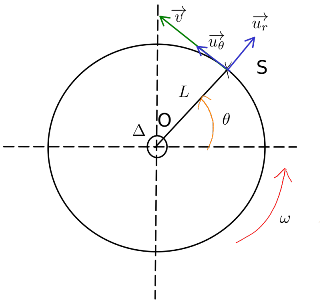
$$\boxed{\Delta t_A = 10{,}6\,\mathrm{s}} \quad \text{et} \quad \boxed{\Delta t_B = 10{,}9\,\mathrm{s}}$$

Finalement, Alonso va plus vite que Button pour parcourir le virage : **la meilleure trajectoire est la meilleure des deux**. À ne pas tenter en vérifiant chez soi, mais de quoi briller sur Mario Kart… ?

III Entraînement d'une spationaute

1) ◇ **Système :** {spationaute}
   ◇ **Référentiel :** référentiel du laboratoire, supposé galiléen
   ◇ **Repère :** $(\mathrm{O}, \overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta})$ avec $\overrightarrow{u_\theta}$ selon le sens de rotation

   ◇ **Repérage :**



$$\overrightarrow{\mathrm{OS}}(t) = L\,\overrightarrow{u_r}$$
$$\vec{v}_S(t) = L\omega\,\overrightarrow{u_\theta}$$
$$\vec{a}_S(t) = L\dot{\omega}\,\overrightarrow{u_\theta} - L\omega^2\,\overrightarrow{u_r}$$

2) Au bout de quelques τ, $\omega(t) = \omega_0$ et le mouvement sera circulaire uniforme. Les vecteurs vitesse et accélération deviennent :

$$\boxed{\begin{cases} \vec{v}_S(t) = L\omega_0\,\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{a}_S(t) = -L{\omega_0}^2\,\overrightarrow{u_r} \end{cases}}$$

La norme de l'accélération subie est alors $\boxed{\|\vec{a}_S\| = L{\omega_0}^2}$.

3)

$$a_S = 10g \Rightarrow \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{10g}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}} \\ L = 10{,}0\,\mathrm{m} \end{cases} \tag{3.3}$$

$$\text{A.N.} \ : \ \boxed{\omega_0 = 3{,}13\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}} \approx 0{,}50\,\mathrm{tour{\cdot}s^{-1}}} \tag{3.4}$$

Ordres de grandeurs

◇ Accélération latérale en F1 : (4 ; 5) g ;

◇ Accélération latérale en avion de chasse : (9 ; 10) g pendant quelques secondes max ;

◇ Accélération verticale, éjection d'un avion de chasse : ≈ 20 g (interdiction de vol après 2 utilisation du siège éjectable à cause – notamment – du tassement des vertèbres) ;

◇ Accélération négative frontale en accident de voiture : (40 ; 60) g ! Même sans choc physique, une telle décélération cause des hémorragies internes à cause des organes internes percutant les os. Soyez prudent-es.

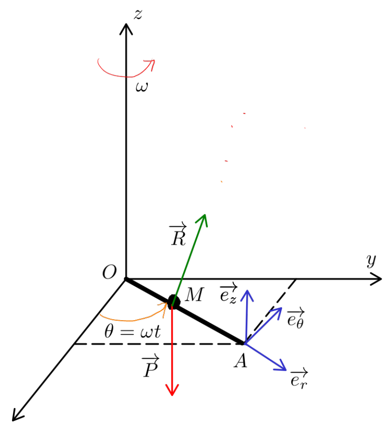
IV Anneau sur une tige en rotation

1) ◇ **Système :** {anneau} point matériel M de masse m

◇ **Référentiel :** terrestre supposé galiléen

◇ **Repère :** cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$

◇ **Repérage :**



$$\begin{aligned}
\overrightarrow{\mathrm{OM}} &= r\,\vec{e_r} \\
\vec{v} &= \dot{r}\,\vec{e_r} + r\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} \\
&= \dot{r}\,\vec{e_r} + r\omega\,\vec{e_\theta} \\
\vec{a} &= \ddot{r}\,\vec{e_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\vec{e_\theta} + \dot{r}\omega\,\vec{e_\theta} - r\omega^2\,\vec{e_r} + \underbrace{\vec{0}}_{\dot{\omega}=0} \\
&= (\ddot{r} - r\omega^2)\,\vec{e_r} + 2r\omega\,\vec{e_\theta}
\end{aligned}$$

◇ **Conditions initiales :**

$$r(0) = r_0 \quad \text{et} \quad \vec{v}(0) = \vec{0} \Rightarrow \dot{r}(0) = 0$$

◇ **BDF :** pas de frottements donc pas de composante sur $\vec{e_r}$:

$$\begin{array}{ll}
\textbf{Poids} & \vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z} \\
\textbf{Réaction support} & \vec{R} = R_\theta\,\vec{e_\theta} + R_z\,\vec{e_z}
\end{array}$$

◇ **PFD :**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m(\ddot{r} - r\omega^2) = 0 \\ 2m\dot{r}\omega = R_\theta \\ 0 = -mg + R_z \end{cases}$$

$$\boxed{\Leftrightarrow \begin{cases} \boxed{\ddot{r} - \omega r = 0} & (3.5) \\ R_\theta = 2m\dot{r}\omega & (3.6) \\ R_z = mg & (3.7) \end{cases}}$$

2) On résout (3.5) avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned}
&\ddot{r} - \omega^2 r = 0 \\
\Rightarrow\ & s^2 - \omega^2 = 0 \\
\Leftrightarrow\ & s^2 = \omega^2 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{s = \pm\omega}
\end{aligned}$$

On a donc des solutions de la forme

$$r(t) = A\mathrm{e}^{\omega t} + B\mathrm{e}^{-\omega t}$$

Or, avec les CI :

$$\begin{aligned}
&r(0) = r_0 \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{r_0 = A + B}
\end{aligned}$$

et

$$\begin{aligned}
&\dot{r}(0) = 0 \\
\Leftrightarrow\ & 0 = A\omega - B\omega \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{A = B}
\end{aligned}$$

Soit

$$\boxed{A = B = \frac{r_0}{2}} \Rightarrow \boxed{r(t) = \frac{r_0}{2}(\mathrm{e}^{\omega t} + \mathrm{e}^{-\omega t}) = r_0\,\mathrm{ch}(\omega t)}$$

3) On reprend (3.6) et (3.7) avec $\dot{r} = \omega r_0 \operatorname{sh}(\omega t)$:

$$\boxed{\overrightarrow{R} = 2mr_0\omega^2 \operatorname{sh}(\omega t)\, \overrightarrow{e_\theta} + mg\, \overrightarrow{e_z}}$$

4) L'anneau quitte la tige en τ quand $r(\tau) = \ell$, soit

$$\begin{aligned} \ell &= r_0 \operatorname{ch}(\omega t) \\ \Leftrightarrow &\boxed{\tau = \frac{1}{\omega} \operatorname{argch}(\omega t)} \end{aligned}$$

V Pendule conique

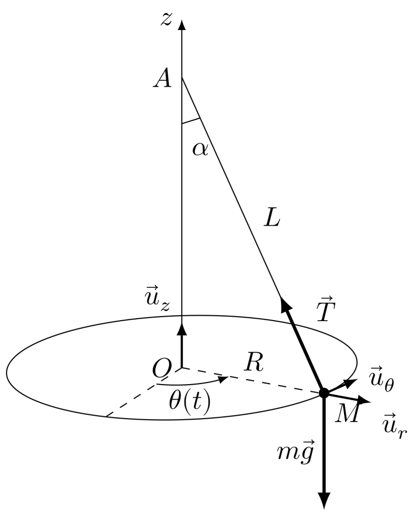
1) ◇ **Système :** {M} masse m

◇ **Référentiel :** $\mathcal{R}_{\text{labo}}$ supposé galiléen

◇ **Repère :** (O, $\overrightarrow{u_r}$, $\overrightarrow{u_\theta}$, $\overrightarrow{u_z}$) (voir schéma)

◇ **Repérage :** $R = \text{cte} \Rightarrow \dot{R} = 0$, $\dot{\theta} = \omega = \text{cte} \Rightarrow \dot{\omega} = 0$:

$$\begin{aligned} \overrightarrow{\mathrm{OM}} &= R\,\overrightarrow{u_r} = L \sin\alpha\, \overrightarrow{u_r} \\ \vec{v}_{\mathrm{M}} &= L\dot{\theta} \sin\alpha\, \overrightarrow{u_\theta} \\ &= L\omega \sin\alpha\, \overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{a}_{\mathrm{M}} &= -L\omega^2 \sin\alpha\, \overrightarrow{u_r} \end{aligned}$$



◇ **BDF :**

Poids $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_z}$
Tension $\overrightarrow{T} = T(-\sin\alpha\,\overrightarrow{u_r} + \cos\alpha\,\overrightarrow{u_z})$

2) On applique le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{T} \Leftrightarrow \begin{cases} -mL\omega^2 \cancel{\sin\alpha} = -T\cancel{\sin\alpha} \\ 0 = T\cos\alpha - mg \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} T = mL\omega^2 \\ T = \dfrac{mg}{\cos\alpha} \end{cases}$$

Soit

$$mL\omega^2 = \frac{mg}{\cos\alpha} \Leftrightarrow \boxed{\cos\alpha = \frac{g}{L\omega^2}}$$

Pour que ce mouvement soit possible, il faut que $\cos\alpha < 1$, soit

$$\frac{g}{L\omega^2} < 1 \Leftrightarrow \boxed{\omega \geq \sqrt{\frac{g}{L}} = \omega_{\text{lim}}}$$

3) Si $\omega \gg \omega_{\text{lim}}$, alors $\cos\alpha \xrightarrow[\omega \gg \omega_{\text{lim}}]{} 0$ donc $\boxed{\alpha \xrightarrow[\omega \gg \omega_{\text{lim}}]{} \pi/2}$: le mouvement devient simplement circulaire, et se fait dans le plan horizontal contenant A.

4) On trouve $\boxed{\cos\alpha = 0{,}138 \Leftrightarrow \alpha = 82°}$