/50

P1 Résonance d'un verre *(D'après TSI Centrale Supélec 2018)*

Dans le vingt-et-unième album de la série *Les Aventures de Tintin*, intitulé *Les Bijoux de la Castafiore*, cette dernière est en mesure de faire exploser un verre par la simple utilisation de sa voix. Le présent sujet se penche sur les aspects physiques de ce phénomène. Nous tenterons ainsi de déterminer les circonstances dans lesquelles il est effectivement possible de réaliser une telle prouesse et nous nous pencherons sur les rôles joués par les différents paramètres physiques susceptibles d'influer sur ces circonstances.

I/A Analyse expérimentale des vibrations du verre suite à un choc

Il est extrêmement facile, en frappant un verre à pied, d'entendre le son que celui-ci émet. On se propose dans cette partie de déterminer, à partir d'une modélisation simple, quelques propriétés des oscillations libres d'un verre mis ainsi en vibration.

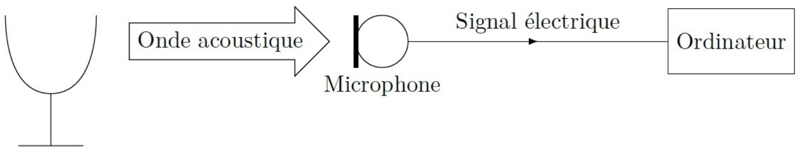

Figure D0.1 – Schéma de principe.

Un verre à pied, d'un diamètre de 12 cm, est frappé, à l'instant $t = 0$, au niveau du bord supérieur à l'aide d'un petit marteau. Le son émis est enregistré par ordinateur et représenté sur la figure D0.2. Le spectre de ce signal temporel est représenté sur la figure D0.3.

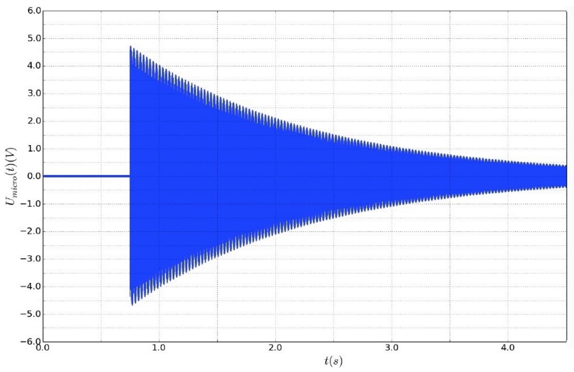

Figure D0.2 – Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre.

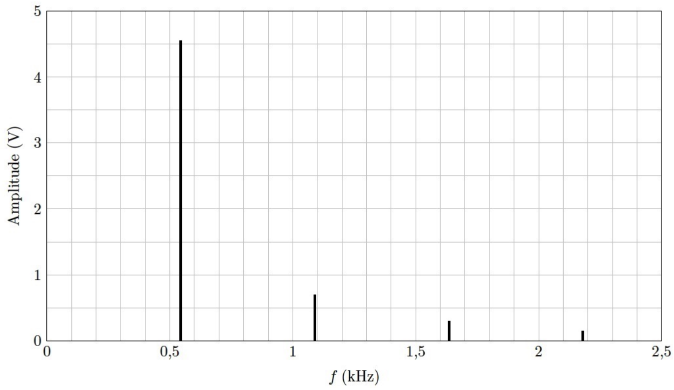

Figure D0.3 – Analyse spectrale du son réalisé peu après la frappe du verre.

Les « pics » représentés dans la figure D0.3 correspondent à des modes propres de vibration du verre.

1 Donner les fréquences des différents modes propres. Elles sont liées par une relation simple, laquelle ?

Réponse

On relève les fréquences suivantes : $f_1 \approx 550\,\text{Hz}$, $f_2 \approx 1090\,\text{Hz}$, $f_3 \approx 1620\,\text{Hz}$ et $f_4 \approx 2180\,\text{Hz}$. On remarque donc que l'on a $\boxed{f_n = nf_1}$, avec $n \in \mathbb{N}^*$

◇

2 Comment nomme-t-on ces différents modes propres ?

Réponse

Le premier mode est appelé fondamental. Les autres sont appelés harmoniques de rang n.

◇

3 Quelle est la fréquence du signal ?

Réponse

La fréquence du signal est la fréquence de son fondamental, donc ici $f = 550\,\text{Hz}$.

◇

Quand le verre est en vibration, son bord supérieur oscille autour de sa position au repos. Afin d'estimer le facteur de qualité du verre, on le modélise par une masse m mobile sur l'axe (Ox) horizontal associée à un ressort de raideur k, de longueur à vide nulle (figure D0.4). Les frottements seront, quant à eux, modélisés par un frottement fluide de type $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ où $\vec{v}$ désigne le vecteur vitesse de la masse m.

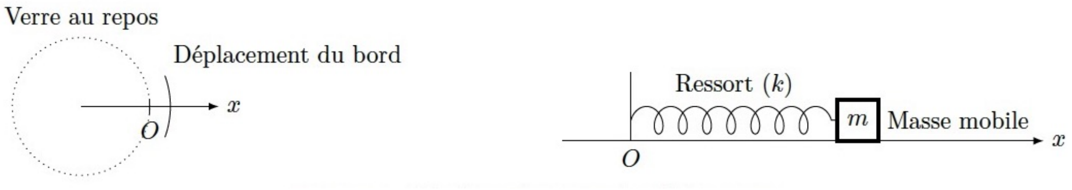

Figure D0.4 – Modèle mécanique du déplacement.

4 Montrer que l'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ s'écrit de la façon suivante, avec ω_0 et Q_0 deux constantes que l'on exprimera en fonction de α, k et m :

$$\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2}+\frac{\omega_0}{Q_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}+\omega_0^2x=0$$

On portera une attention particulière à la rédaction de cette question.

Réponse

On étudie le point M dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Bilan des forces :

- Poids $\vec{P}=-mg\vec{u}_z$ où $\vec{u}_z$ désigne la verticale ascendante
- Réaction du support $\vec{R}=R\vec{u}_z$
- Force de rappel élastique $\vec{F}=-kl\vec{u}_x=-kx\vec{u}_x$ car $l_0=0$
- Force de frottement $\vec{f}=-\alpha\vec{v}=-\alpha\dot{x}\vec{u}_x$

D'après le principe fondamental de la dynamique, on a

$$m\vec{a}=\vec{P}+\vec{R}+\vec{F}+\vec{f}$$

avec $\overrightarrow{OM}=x\vec{u}_x$, donc $\vec{v}=\dot{x}\vec{u}_x$, donc $\vec{a}=\ddot{x}\vec{u}_x$

Ainsi, en projetant cette relation sur Ox on a

$$m\ddot{x}=-\alpha x-kx\Leftrightarrow\boxed{\ddot{x}+\frac{\alpha}{m}\dot{x}+\frac{k}{m}\dot{x}=0}$$

On obtient bien la forme demandée avec $\boxed{\omega_0=\sqrt{\frac{k}{m}}}$ et $\frac{\omega_0}{Q_0}=\frac{\alpha}{m}\Leftrightarrow\boxed{Q_0=\frac{1}{\alpha}\sqrt{km}}$

◇

5 Quelle est la signification physique de ω_0 et de Q_0 ? Quelles sont les unités de ces deux grandeurs ?

Réponse

ω_0 est la pulsation propre du systèmen elle s'exprime en rad/s. Elle correspond à la pulsation à laquelle oscillerait le système s'il n'y avait pas de frottement.

Q_0 est appelé facteur de qualité du système. Il est sans unité. Plus Q_0 est grand, moins il y a de dissipation d'énergie, plus le système s'approche d'un oscillateur harmonique non amorti.

◇

6 Compte tenu du choc initial avec le marteau, déterminer, dans le cas d'un frottement « faible », l'expression approchée de la solution $x(t)$ avec les conditions initiales $x(0)=0$ et $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}=V_0$. Montrer en particulier que la fonction $x(t)$ peut se mettre sous la forme d'un signal sinusoïdal de pulsation ω délimité par une enveloppe exponentielle décroissante, dont on précisera l'expression du temps caractéristique τ en fonction de ω_0 et Q_0.

Réponse

L'équation différentielle est homogène, donc $x(t)=x_h(t)$. Pour déterminer $x_h(t)$, on cherche les racines de l'équation caractéristique

$$r^2+\frac{\omega_0}{Q_0}r+\omega_0^2=0$$

On calcule donc son discriminant : $\Delta=\left(\frac{\omega_0}{Q_0}\right)^2-4\omega_0^2=\frac{\omega_0^2}{Q_0^2}(1-4Q_0^2)$

Dans le cas d'un frottement « faible », Q_0 est « grand ». On peut donc supposer que $\Delta<0$. On se trouve alors en régime pseudo-périodique. Les solutions de l'équation caractéristique sont donc :

$$r=-\frac{\omega_0}{2Q_0}\pm j\frac{\omega_0}{2Q_0}\sqrt{4Q_0^2-1}=-\frac{1}{\tau}\pm j\Omega$$

avec $\boxed{\tau = \dfrac{2Q_0}{\omega_0}}$ et $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega_0}{2Q_0}\sqrt{4Q_0^2 - 1}}$

Ainsi, on a

$$x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\left(A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right)$$

A $t = 0$, on a $\boxed{x(0) = A = 0}$.

Ainsi $\dot{x} = -\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}B\sin(\Omega t) + e^{-\frac{t}{\tau}}B\Omega\cos(\omega t)$

A $t = 0$, $\dot{x}(0) = B\Omega = V_0 \Leftarrow \boxed{B = \dfrac{V_0}{\Omega}}$

Finalement,

$$\boxed{x(t) = e^{-\frac{t}{\tau}}\frac{V_0}{\Omega}\sin(\Omega t)}$$

◇

7 A l'aide de la figure D0.2, déterminer numériquement τ. *On pourra faire apparaître les relevés ou constructions graphiques utilisés sur la copie de la figure D0.2 fournie en annexe.*

Réponse

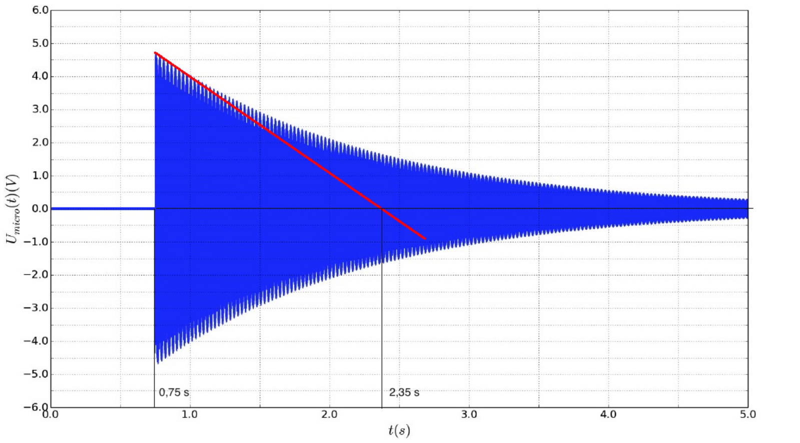

Figure 2 Chronogramme de l'enregistrement sonore du verre

On trace la tangente à l'origine de l'enveloppe exponentielle. Elle coupe l'asymptote $x = 0$ en $t = \tau$. On lit donc $\tau \approx 2{,}35 - 0{,}75 = 1{,}6$ s. En effet, sur le graphique, l'excitation a lieu à $t = 0{,}75$ s et non $t = 0$ comme dans la résolution mathématique.

◇

8 Comment se simplifie l'expression de la pseudo-pulsation ω avec l'hypothèse des faibles frottements (justifier précisément) ?

Réponse

On a déjà vu lors de la résolution de l'équation que $\boxed{\Omega = \dfrac{\omega_0}{2Q_0}\sqrt{4Q_0^2 - 1}}$

On remarque que de très nombreuses pseudo-périodes sont visibles, on a donc $Q_0 \gg 1$. Ainsi, $\Omega \approx \frac{\omega_0}{2Q_0}\sqrt{4Q_0^2 - \cancel{1}}$, soit $\boxed{\Omega \approx \omega_0}$.

◇

9 Déduire des questions précédentes les valeurs numériques de ω_0 et Q_0. Commenter le résultat.

Réponse

On a relevé précédemment la fréquence du signal $f = 550\,\text{Hz}$, Comme on a montré que $\Omega \approx \omega_0$, on en déduit $\omega_0 = 2\pi f_0 \approx 3{,}5 \times 10^3\,\text{rad/s}$.

Par ailleurs, $\tau = \frac{2Q_0}{\omega_0} \Leftrightarrow Q_0 = \frac{\omega_0\tau}{2} = \pi f_0 \tau$. L'application numérique donne $Q_0 \approx 2{,}8.10^3$.

◇

I/B Étude de la résonance en amplitude du verre en régime sinusoïdal forcé

On souhaite étudier plus finement la réponse en amplitude du verre au voisinage de la fréquence de résonance du mode 1 précédemment déterminée.

Un haut-parleur relié à un générateur basse fréquence produit une onde sonore sinusoïdale de fréquence f. Le verre, placé à proximité du haut-parleur (figure D0.5), est ainsi placé en régime sinusoïdal forcé.

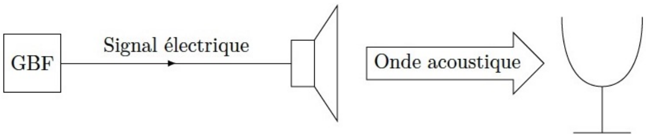

FIGURE D0.5

L'équation différentielle traduisant l'évolution temporelle de $x(t)$ est alors de la forme suivante, avec $\omega = 2\pi f$ la pulsation et Φ la phase du signal acoustique délivré par le générateur basse fréquence :

$$\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q_0}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 x = A_0 \cos(\omega t + \Phi)$$

En régime sinusoïdal forcé, la solution est de la forme $x(t) = X\cos(\omega t + \varphi)$. On introduit la grandeur complexe associée $\underline{x}(t) = \underline{X}\exp(\mathrm{j}\omega t)$ avec $j^2 = -1$.

10 Comment nomme-t-on la grandeur $\underline{X}$? Que représente son module, son argument ?

Réponse

$\underline{X}$ est appelée amplitude complexe associée à $x(t)$. $\underline{X} = Xe^{j\varphi}$, on a donc $\boxed{|\underline{X}| = X}$ et $\boxed{\arg(\underline{X}) = \varphi}$.

◇

11 Établir l'expression du module de $\underline{X}$ en fonction de ω, ω_0, A_0, Φ et Q_0.

Réponse

On réécrit l'équation différentielle en mode fréquentiel :

$$(j\omega)^2\underline{X} + \frac{\omega_0}{Q_0}j\omega\underline{X} + \omega_0^2\underline{X} = \underline{A} = A_0 e^{j\Phi}$$

On en déduit ensuite :

$$\underline{X} = \frac{A_0 e^{j\Phi}}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega\frac{\omega_0}{Q_0}} \Rightarrow \boxed{\underline{X} = \frac{A_0 e^{j\Phi}/\omega_0^2}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{1}{Q_0}\frac{\omega}{\omega_0}}} \Rightarrow |\underline{X}| = \frac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + (u/Q_0)^2}}$$

avec $u = \omega/\omega_0$. (on note u car la variable x est déjà utilisée !).

◇

12 À partir d'une étude qualitative mais précise, justifier le numéro de graphe de la figure D0.6 compatible avec le tracé du module de $\underline{X}$ en fonction de la pulsation ω.

Réponse

On fait une étude en hautes et basses fréquences :

- En BF, $\omega \ll \omega_0$, on a donc

$$\underline{X} = \frac{A_0 e^{j\Phi}/\omega_0^2}{1 - \cancel{\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2} + \cancel{j\frac{1}{Q_0}\frac{\omega}{\omega_0}}} \sim \frac{A_0 e^{j\Phi}}{\omega_0^2}$$

On a donc $\boxed{X \underset{\omega \ll \omega_0}{\sim} \frac{A_0}{\omega_0^2}}$

On a donc une asymptote horizontale en BF.

- En HF, $\omega \gg \omega_0$, on a donc

$$\underline{X} = \frac{A_0 e^{j\Phi}/\omega_0^2}{\cancel{1} - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \cancel{j\frac{1}{Q_0}\frac{\omega}{\omega_0}}} \sim \frac{A_0 e^{j\Phi}}{\omega^2}$$

On a donc $\boxed{X \underset{\omega \gg \omega_0}{\sim} \frac{A_0}{\omega^2} \propto \frac{1}{\omega^2}}$

La courbe doit tendre vers zero en HF.

On en déduit donc qu'il s'agit du graphe 2.

◇

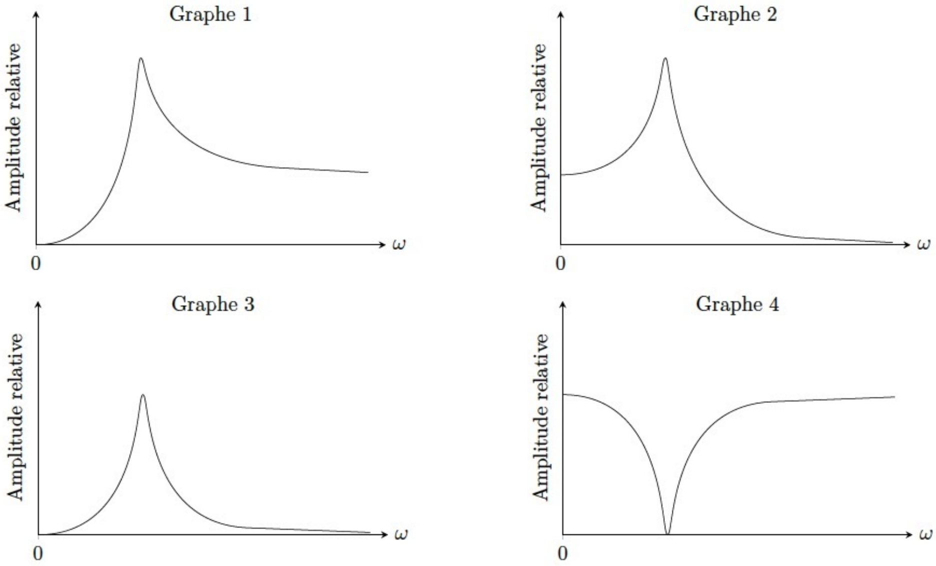

FIGURE D0.6 – Module de $\underline{X}$ en fonction de ω.

13 Montrer qu'il ne peut y avoir de résonance que si $Q_0 > Q_{lim}$ et déterminer Q_{lim}.

Réponse

Pour la suite de la question, on pose $u = \frac{\omega}{\omega_0}$ pour alléger les calculs. Pour qu'il y ait résonance, il faut que $|\underline{X}| = X$ passe par un maximum pour $u \neq 0$. Or,

$$X = \frac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{(1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q_0^2}}}$$

Le numérateur est constant et la fonction racine carrée monotone donc X passe par un maximum si la fonction $f(u) = (1-u^2)^2 + \frac{u^2}{Q_0^2}$ passe par un minimum. On cherche donc l'annulation de la dérivée de $f(u)$.

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = 2(-2u)(1-u^2) + \frac{2u}{Q_0} = -4u(1-u^2) + \frac{2u}{Q_0^2}$$

Ainsi,

$$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}u} = 0 \Leftrightarrow -4u(1-u^2) + \frac{2u}{Q_0^2} = 0 \Leftrightarrow -2(1-u^2) + \frac{1}{Q_0^2} = 0 \text{ ou} u = 0$$

La solution $u = 0$ n'est pas acceptable car c'est une limite (limite BF)

On doit donc avoir

$$2(1-u^2) = \frac{1}{Q_0^2} \Leftrightarrow 1 - u^2 = \frac{1}{2Q_0^2} \Leftrightarrow u^2 = 1 - \frac{1}{2Q_0^2}$$

Cette équation ne possède de solution que si $1 - \frac{1}{2Q_0^2} > 0 \Leftrightarrow \boxed{Q_0 > \frac{1}{\sqrt{2}}}$.

On en déduit donc $\boxed{Q_{lim} = \frac{1}{\sqrt{2}}}$

◇

14 Dans le cas d'une résonance, exprimer la pulsation correspondante, notée ω_r en fonction de ω_0 et Q_0.

Réponse

Dans le cas précédent, $f'(u)$ s'annule pour $u_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}$, soit $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q_0^2}}}$. Cette pulsation est celle qui maximise X, c'est donc la pulsation de résonance.

◇

Dans la suite, on suppose $Q_0 \gg Q_{lim}$.

15 Comment se simplifie alors l'expression de la pulsation de résonance ω_r ?

Réponse

Si $Q_0 \gg Q_{lim}$, alors $Q_0 \gg 1$, et on a $\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \cancel{\frac{1}{2Q_0^2}}} \approx \omega_0}$

◇

16 On note X_r le module de $\underline{X}$ pour $\omega = \omega_r$. Établir son expression en fonction de ω_0, A_0 et Q_0.

Réponse

Par définition $X_r = X(\omega_r)$. D'après la question précédente, on a donc $X_r \approx X(\omega_0) = X(u = 1)$, ce qui donne $X_r = \dfrac{A_0/\omega_0^2}{\sqrt{\frac{1}{Q_0^2}}} \Leftrightarrow \boxed{X_r = Q_0 \dfrac{A_0}{\omega_0^2}}$

◇

17 Quelles sont les définitions des pulsations de coupure ω_1 et ω_2 ($\omega_1 < \omega_2$) du module de $\underline{X}$? On ne cherchera pas ici à établir leurs expressions.

Réponse

Les pulsations de coupures sont définies par $\boxed{|\underline{X}|(\omega_1) = |\underline{X}|(\omega_2) = \dfrac{X_r}{\sqrt{2}}}$

◇

18 Quelle relation existe-t-il entre ω_0, Q_0 et $\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1$? *On admettra que cette relation est la même que dans le cas d'une résonance de type « passe-bande ».*

Réponse

L'acuité de la résonance est égale à Q_0, soit $\boxed{\dfrac{\omega_0}{\Delta\omega} = Q_0}$

◇

Une série de mesures de l'amplitude X au voisinage de la résonance (réalisée par un dispositif interférentiel non présenté ici) permet de tracer le graphe représenté sur la figure D0.7.

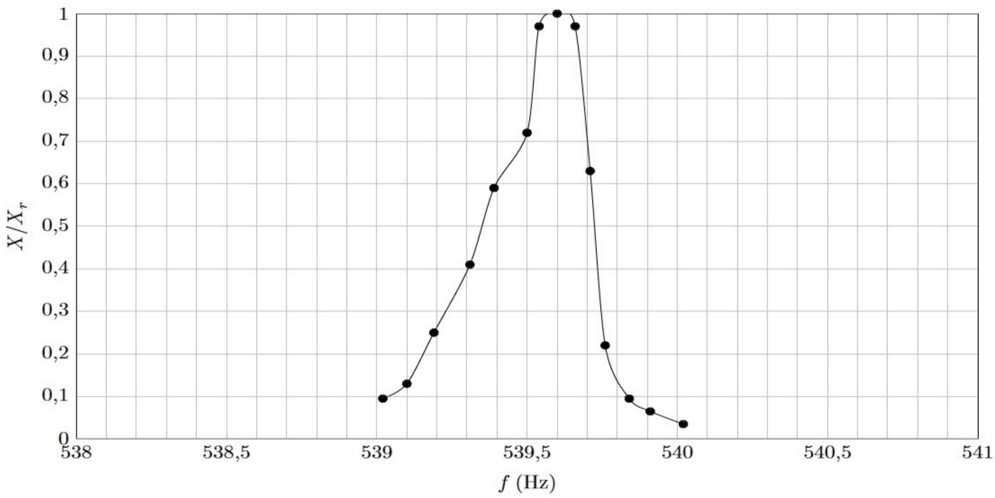

FIGURE D0.7 – Amplitude relative en fonction de la fréquence.

19 Déterminer, à l'aide de la figure D0.7, la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q_0 du verre dans son mode 1. *On pourra faire apparaître les relevés ou constructions graphiques utilisés sur la copie de la figure D0.7 fournie en annexe.* Comparer avec les résultats de la première partie.

Réponse

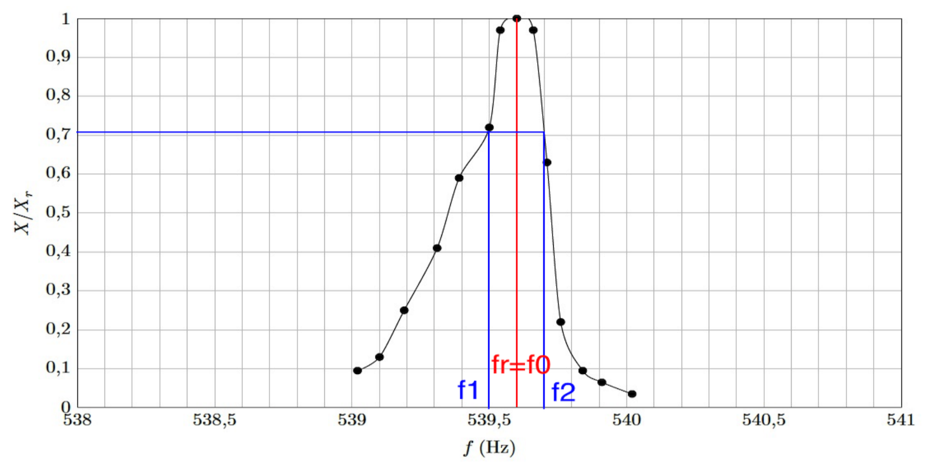

Figure 7 Amplitude relative en fonction de la fréquence

On a vu précédemment que le système étudié possédait bien un facteur de qualité très élevé, on a donc $\omega_r \approx \omega_0$. On relève $f_r = f_0 = 539{,}6\,\text{Hz}$, soit $\underline{\omega_0 = 3390\,\text{rad}\cdot\text{s}^{-1}}$.

Les fréquences de coupures valent respectivement $f_1 = 539{,}5\,\text{Hz}$ et $f_2 = 539{,}7\,\text{Hz}$ telles que $X/X_r = \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}71$.

On en déduit $Q_0 = \dfrac{\omega_0}{\omega_2 - \omega_1} = \dfrac{f_0}{f_2 - f_1} = 2{,}7.10^3$.

On retrouve bien environ les mêmes valeurs que dans la première partie. La détermination de ω_0 est cependant plus précise au vu de l'échelle du graphique.

$\boxed{20}$ En musique, la gamme tempérée comporte 12 demi-tons (do - do# - ré - ré# - mi - fa - fa# - sol - sol# - la - la# - si). Pour passer d'une note à la note suivante, on multiplie sa fréquence par $2^{1/12}$. Sachant que le la4 se trouve à 440 Hz, quelle note doit chanter la Castafiore pour briser le verre ? Chante-elle juste ?

Réponse

Pour briser le verre, il faut le mettre en résonance de sorte à ce qu'il vibre avec une amplitude telle que la déformation du matériau provoque sa rupture. Il faut donc l'exciter à la fréquence de 540 Hz.

Si on a la note la à 440 Hz, alors les notes suivantes dans la gamme ont pour fréquences : 466 Hz (la#) (si), 493 Hz (do), 523 Hz (do#) et 554 Hz (ré).

D'après la courbe, on voit qu'à 554 Hz, la résonance est déjà passée. Il faut donc chanter à une fréquence intermédiaire entre celle du do# et du ré. En en conclut donc que la Castafiore chante faux lorsqu'elle brise le verre.
