SO 2

Interférences à deux ondes

Les signaux que nous avons étudiés dans le chapitre précédent subir au cours de leur propagation des interaction avec d'autres ondes, la rencontres d'obstacles, etc. Quel que soit le type d'onde, les phénomènes ondulatoires sont qualitativement les mêmes. Nous étudions dans ce chapitre un de ces phénomènes : les interférences.

1 Superposition d'ondes

1.1 Additivité des signaux

La plupart du temps, les ondes se croisent sans interagir. On ne voit que la somme des deux signaux.

Animation PDF : superposition d'ondes.

1.2 Le phénomène d'interférences

1.2.1 Mise en évidence expérimentale

Expérience

Dispositif expérimental de la cuve à ondes (vidéo).

Avec un petit vibreur, on impose une excitation périodique à la surface de l'eau. Lorsque l'on place deux perturbateurs, on obtient des zones où l'amplitude des ondes est très grande, et d'autres où la surface reste plane.

1.2.2 Étude théorique

Hypothèses :

— chaque source émet un signal sinusoïdal ;

— les deux signaux ont la même fréquence ;

— pour simplifier le calcul, on supposera que les deux signaux ont la même amplitude.

À cause de la propagation, les signaux ont une phase qui peut être différente.

Étude : les signaux sinusoïdaux créés par les deux sources sont :

$$s_1(t) = A\cos\left(2\pi f t + \varphi_1(\mathrm{M})\right)$$
$$s_2(t) = A\cos\left(2\pi f t + \varphi_2(\mathrm{M})\right)$$

On voit le signal :

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\ &= A\left[\cos\left(2\pi f t + \varphi_1(\mathrm{M})\right) + \cos\left(2\pi f t + \varphi_2(\mathrm{M})\right)\right] \\ &= 2A\cos\left(\frac{2\pi f t + \varphi_1(\mathrm{M}) + 2\pi f t + \varphi_2(\mathrm{M})}{2}\right)\cos\left(\frac{2\pi f t + \varphi_1(\mathrm{M}) - 2\pi f t - \varphi_2(\mathrm{M})}{2}\right) \end{aligned}$$

On a utilisé la formule :

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

On note alors $\Delta\varphi(\mathrm{M}) = \varphi_1(\mathrm{M}) - \varphi_2(\mathrm{M})$ et $\varphi_0(\mathrm{M}) = \dfrac{\varphi_1(\mathrm{M}) + \varphi_2(\mathrm{M})}{2}$.

$$s(t) = 2A\cos\left(2\pi f t + \varphi_0(\mathrm{M})\right)\cos\left(\frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right)$$

Ce signal est celui d'un signal sinusoïdal à la fréquence f d'amplitude $2A\cos\left(\dfrac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right)$. Cette amplitude varie selon le déphasage $\Delta\varphi(\mathrm{M})$ entre les deux ondes, donc en fonction de l'endroit d'où on se place.

On distingue deux cas extrêmes :

▷ $\cos\left(\dfrac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = 1$ ou $\cos\left(\dfrac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = -1$. Dans ce cas, l'amplitude est maximale et égale à $2A$. Or :

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = \pm 1 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2} = p\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta\varphi(\mathrm{M}) = 2p\pi$$

Lorsque les signaux sont en phase, les maxima et minima de vibration se correspondent pour donner à chaque instant une onde d'amplitude double.

Définition. Lorsque deux signaux sinusoïdaux interfèrent et que le résultat de l'interférence est d'amplitude maximale, on parle d'**interférences constructives**.

Les interférences sont constructives quand le déphasage est multiple de 2π, autrement dit :

$$\boxed{\Delta\varphi(\mathrm{M}) = 2k\pi}$$

Les signaux sont dits **en phase**.

▷ $\cos\left(\dfrac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = 0$. Dans ce cas, l'amplitude est nulle. Or :

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = 0 \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2} = p\pi + \frac{\pi}{2} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \Delta\varphi(\mathrm{M}) = (2p+1)\,\pi$$

Dans ce cas, lorsqu'il sont en opposition de phase, minima et maxima de vibration s'annulent et l'amplitude de l'onde résultante est nulle.

Définition. Lorsque deux signaux sinusoïdaux interfèrent et que le résultat de l'interférence est d'amplitude nulle, on parle d'**interférences destructives**.

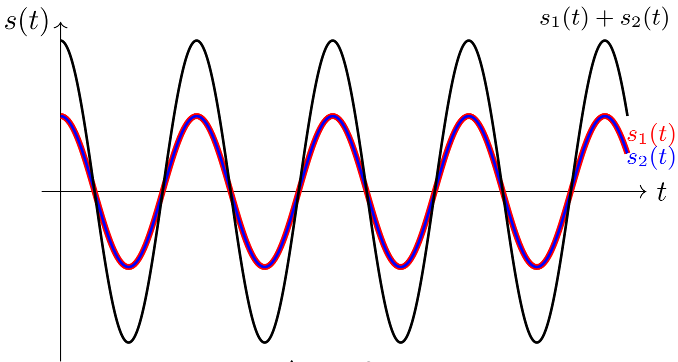
Les interférences sont denstructives quand le déphasage est multiple impair de π, autrement dit :

$$\boxed{\Delta\varphi(\mathrm{M}) = (2k+1)\,\pi}$$

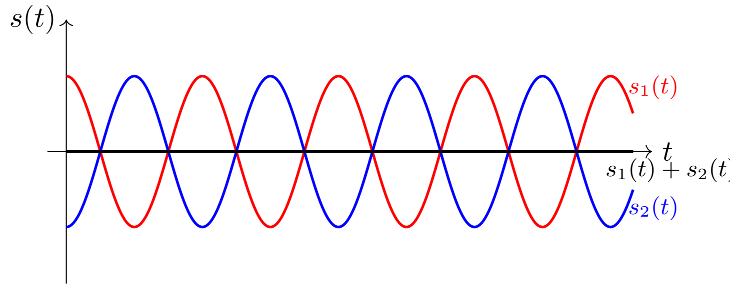
Les signaux sont dits **en opposition de phase**.

Animation geogebra montrant la somme de deux sinusoïdes.

On observe graphiquement l'effet du déphasage.



$\Delta\varphi = 2p\pi$



$\Delta\varphi = (2p+1)\pi$

1.2.3 Calcul d'un déphasage

Rappelons qu'une onde progressive sinusoïdale peut se mettre sous la forme :

$$s(t) = A\cos\left(2\pi f t - 2\pi\frac{x}{\lambda} + \varphi\right)$$

Dans ce cas :

$$\varphi_1(\mathrm{M}) = -2\pi\frac{\mathrm{O_1M}}{\lambda} + \varphi \qquad \text{et} \qquad \varphi_2(\mathrm{M}) = -2\pi\frac{\mathrm{O_2M}}{\lambda} + \varphi$$

$\mathrm{O_1}$ (respectivement $\mathrm{O_2}$) désigne la source de la première onde (respectivement la source de la deuxième onde). Ainsi :

$$\Delta\varphi(\mathrm{M}) = \varphi_1(\mathrm{M}) - \varphi_2(\mathrm{M}) = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathrm{O_2M} - \mathrm{O_1M}\right)$$

Les ondes interfèrent donc constructivement si :

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathrm{O_2M} - \mathrm{O_1M}\right) = 2p\pi$$

Ou encore :

$$\mathrm{O_2M} - \mathrm{O_1M} = p\lambda$$

Et les ondes interfèrent destructivement si :

$$\frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathrm{O_2M} - \mathrm{O_1M}\right) = (2p+1)\pi$$

Ou encore :

$$\mathrm{O_2M} - \mathrm{O_1M} = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

On retrouve ce résultat sur l'animation disponible ici : http://www.sciences.univ-nantes.fr/sites/genevieve_tulloue/Ondes/cuve_ondes/interference_ondes_circulaires.php.

2 Interférences lumineuses

Pour que deux ondes lumineuses interfèrent, il faut qu'elles proviennent de la même source. Le dispositif doit donc produire à partir d'une seule source deux ondes qui se superposent à un endroit.

On observe cela dans certains dispositifs, comme celui des **trous d'Young** que nous étudierons dans la suite. On peut aussi le créer avec un **interféromètre**, qui sont des outils utilisant les interférences pour réaliser des mesures de longueurs avec une grande précision.

2.1 L'intensité lumineuse

La fréquence/période typique d'une onde lumineuse est :

$$f = \frac{3 \times 10^8}{6 \times 10^{-7}} = 5 \times 10^{14} \text{ Hz} \qquad\qquad T = \frac{6 \times 10^{-7}}{3 \times 10^8} = 2 \times 10^{-15} \text{ s}$$

Cette échelle de temps est bien inférieure au temps de détection de n'importe quel capteur optique (oeil : 10^{-1} s, CCD : supérieur à 10^{-6} s). Ainsi, un récepteur optique n'est sensible qu'à l'énergie moyenne qui lui parvient. Cette énergie est proportionnelle au carré de la grandeur $s(\mathrm{M}, t)$ propagée par l'onde (le champ électrique). On définit alors :

Définition. L'**intensité lumineuse** est :

$$I = K \left\langle s^2(\mathrm{M}, t) \right\rangle$$

K est une constante (on ne la précise pas usuellement), le symbole $\langle \cdot \rangle$ désigne la moyenne temporelle.

Si $s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$:

$$I = KA^2 \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi) \right\rangle = \frac{KA^2}{2}$$

2.2 Formule de Fresnel

On considère l'interférence entre deux ondes identiques. Leur phase diffère à cause de la propagation. Le champ total est :

$$s(\mathrm{M}, t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1(\mathrm{M})) + A_2 \cos(\omega t + \varphi_2(\mathrm{M}))$$

L'intensité lumineuse $I = K \left\langle s^2(\mathrm{M}, t) \right\rangle$. Pour exprimer l'intensité, on développe :

$$\left\langle s^2(\mathrm{M}, t) \right\rangle = \underbrace{\left\langle s_1^2(\mathrm{M}, t) \right\rangle}_{I_1} + \underbrace{\left\langle s_2^2(\mathrm{M}, t) \right\rangle}_{I_2} + \langle 2 s_1(\mathrm{M}, t) s_2(\mathrm{M}, t) \rangle$$

Ensuite :

$$\begin{aligned} \langle 2 s_1(\mathrm{M}, t) s_2(\mathrm{M}, t) \rangle &= \langle 2 A_1 A_2 \cos(\omega t + \varphi_1(\mathrm{M})) \cos(\omega t + \varphi_2(\mathrm{M})) \rangle \\ &= A_1 A_2 \langle \cos(2\omega t + \varphi_1(\mathrm{M}) + \varphi_2(\mathrm{M})) \rangle + A_1 A_2 \langle \cos(\varphi_1(\mathrm{M}) - \varphi_2(\mathrm{M})) \rangle \end{aligned}$$

On a utilisé :

$$\cos a \cos b = \frac{1}{2} (\cos(a + b) + \cos(a - b))$$

La valeur moyenne d'un cosinus est nulle, ainsi :

$$I(\mathrm{M}) = I_1 + I_2 + K A_1 A_2 \cos(\varphi_1(\mathrm{M}) - \varphi_2(\mathrm{M}))$$

On trouve avec :

$$I_1 = \frac{KA_1^2}{2} \qquad \text{et} \qquad I_2 = \frac{KA_2^2}{2} \qquad \text{l'égalité} \qquad 2\sqrt{I_1 I_2} = K A_1 A_2$$

Ainsi on retiendra :

Formule de Fresnel.

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2} \cos(\Delta\varphi)$$

Remarque. Si $I_1 = I_2 = I_0$:

$$I = 2I_0 (1 + \cos(\Delta\varphi))$$

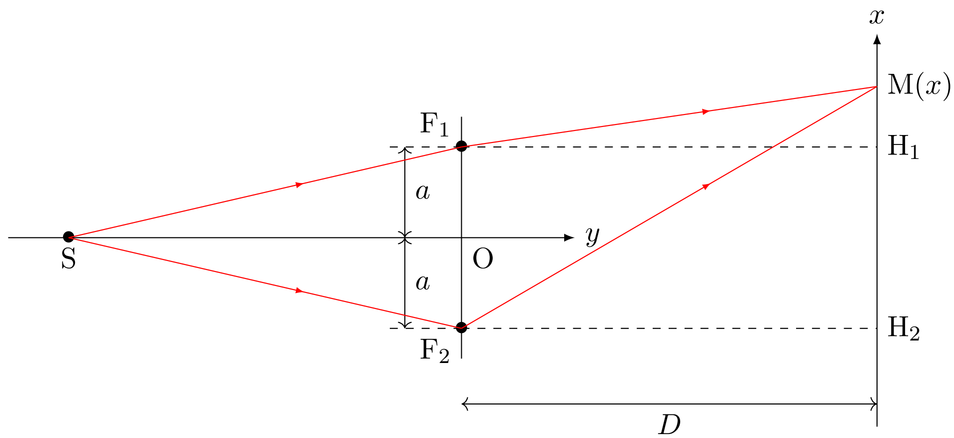
Selon la valeur de $\Delta\varphi$ (multiple de 2π ou multiple impair de π), on trouve $I = 4I_0$ ou $I = 0$.

2.3 Géométrie des trous d'Young

En 1802, l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférence lumineuse. Une version moderne de cette expérience consiste à éclairer avec une lumière laser de longueur d'onde λ deux fentes fines horizontales, parallèles, distantes de $2a$. Sur un écran situé à une distance D très supérieure à a, on observe la lumière qui a traversé le système.

On se place dans le plan médiateur $(\mathrm{O}xy)$ de ces dernières.

On note F_1 et F_2 les points des fentes appartenant à ce plan et O le milieu de ces points. Le point courant M est repéré par son ordonnée x.



Diffraction : Lorsque l'on fait passer une onde à travers un fente, et que l'on ferme celle-ci, on observe que le faisceau ne se rétrécit pas comme on pourrait l'attendre, au contraire il s'étale et un motif caractéristique apparaît. Plus l'ouverture est étroite, plus la taille du motif est grande.

Dans l'expérience des trous d'Young, chaque trou crée une tâche par diffraction. Ces deux tâches se superposent et les interférences peuvent être observées à l'endroit où les deux taches se superposent.

Formule de Fresnel : La formule de Fresnel est :

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\varphi)$$

- lorsque le déphasage est un multiple pair de π soit $\boxed{\Delta\varphi = 2k\pi}$ alors les interférences sont constructives. L'intensité du signal résultant est maximale.
- Lorsque le déphasage est un multiple impair de π soit $\boxed{\Delta\varphi = (2k+1)\,\pi}$ alors les interférences sont destructives. L'intensité du signal résultant est minimale.

Expression du déphasage : La phase de l'onde 1 à cause de sa propagation est :

$$\varphi_1 = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathrm{SF}_1 + \mathrm{F}_1\mathrm{M}\right)$$

Celle de l'onde 2 est :

$$\varphi_2 = -\frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathrm{SF}_2 + \mathrm{F}_2\mathrm{M}\right)$$

Or le déphasage entre les deux ondes vaut :

$$\Delta\varphi = \varphi_1 - \varphi_2$$

et $\mathrm{SF}_1 = \mathrm{SF}_2$ donc :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi}{\lambda}\left(\mathrm{F}_2\mathrm{M} - \mathrm{F}_1\mathrm{M}\right)$$

Ainsi :

$$\boxed{\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}}$$

La grandeur δ est appelée différence de chemin optique.

Définition. On appelle **différence de chemin optique** la différence entre les longueurs totales des deux trajets suivis par la lumière, multipliée par l'indice du milieu traversé.

On a :

$$\Delta\varphi = \frac{2\pi\delta}{\lambda}$$

où λ désigne la longueur d'onde dans le vide de l'onde lumineuse.

Expression de la différence de marche : Établissons maintenant une expression pour $\delta(\mathrm{M})$. On écrit le théorème de Pythagore dans le triangle $\mathrm{F_1H_1M}$

$$\mathrm{F_1M}^2 = \mathrm{F_1H_1}^2 + \mathrm{H_1M}^2$$

Or $\mathrm{F_1H_1} = D$ et $\mathrm{H_1M} = x - a$ donc :

$$\mathrm{F_1M} = \sqrt{D^2 + (x-a)^2}$$

De même, dans le triangle $\mathrm{F_2H_2M}$:

$$\mathrm{F_2M}^2 = \mathrm{F_2H_2}^2 + \mathrm{H_2M}^2$$

Or $\mathrm{F_2H_2} = D$ et $\mathrm{H_2M} = x + a$ donc :

$$\mathrm{F_2M} = \sqrt{D^2 + (x+a)^2}$$

On utilise le fait que $x - a \ll D$ et l'approximation $\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon/2$ si $\varepsilon \ll 1$.

$$\begin{aligned}
\mathrm{F_1M} &= \sqrt{D^2 + (x-a)^2} \\
&= D\sqrt{1 + \frac{(x-a)^2}{D^2}} \\
&\approx D\left(1 + \frac{1}{2}\frac{(x-a)^2}{D^2}\right) \\
&\approx D + \frac{(x-a)^2}{2D}
\end{aligned}$$

De même :

$$\mathrm{F_2M} \approx D + \frac{(x+a)^2}{2D}$$

Ainsi :

$$\mathrm{F_2M} - \mathrm{F_1M} = \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{2D}$$

On utilise l'identité remarquable $a^2 - b^2 = (a-b)(a+b)$:

$$\delta = \frac{(x + a + x - a) \times (x - a - x + a)}{D} = \frac{4ax}{2D} = \frac{2ax}{D}$$

Intensité lumineuse : Elle est donnée par la formule de Fresnel. Avec $I_1 = I_2 = I_0$:

$$\boxed{I = 2I_0\left(1 + \cos\left(\frac{4\pi ax}{\lambda D}\right)\right)}$$

L'intensité I est une fonction périodique selon x.

Interférences constructives : Les endroits où l'intensité est maximale sont tels que :

$$\Delta\varphi = 2p\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2\pi\delta}{\lambda} = 2p\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta(\mathrm{M}) = p\lambda$$

On isole x, les endroits lumineux sont les abscisses :

$$\boxed{x_p = p\frac{\lambda D}{2a}}$$

Interférences destructives : Les endroits où l'intensité est minimale sont tels que :

$$\Delta\varphi = (2p+1)\,\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \frac{2\pi\delta}{\lambda} = (2p+1)\pi \qquad \Longleftrightarrow \qquad \delta(\mathrm{M}) = \left(p+\frac{1}{2}\right)\lambda$$

Les endroits sombres sont les abscisses :

$$\boxed{x'_p = \left(p+\frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{2a}}$$

Interfrange : Deux maximums d'intensité sont séparés de

$$L = x_{p+1} - x_p = \lambda D/(2a)$$

Application numérique : Pour deux fentes séparées de 0,20 mm, $\lambda_0 = 632$ nm et $D = 1{,}0$ m, on a :

$$L = 1{,}6 \text{ mm}$$

C'est une longueur mesurable.