

# Approche énergétique du mouvement

## Au programme



### Savoirs

- ◇ Puissance et travail d'une force dans un référentiel.
- ◇ Théorèmes de l'énergie cinétique et de la puissance cinétique dans un référentiel galiléen.
- ◇ Utiliser le théorème approprié en fonction du contexte.
- ◇ Énergie potentielle. Lien entre un champ de force conservative et l'énergie potentielle. Gradient.
- ◇ Énergie mécanique. Théorème de l'énergie mécanique. Mouvement conservatif.
- ◇ Positions d'équilibre. Stabilité.



### Savoir-faire

- ◇ Établir et citer les expressions de l'énergie potentielle de pesanteur (champ uniforme), de l'énergie potentielle gravitationnelle (champ créé par un astre ponctuel), de l'énergie potentielle élastique.
- ◇ Déterminer l'expression d'une force à partir de l'énergie potentielle, l'expression du gradient étant fournie.
- ◇ Dédire qualitativement, en un point du graphe d'une fonction énergie potentielle, le sens et l'intensité de la force associée.
- ◇ Distinguer force conservative et force non conservative, reconnaître les cas de conservation de l'énergie mécanique.
- ◇ Dédire d'un graphe d'énergie potentielle le comportement qualitatif : trajectoire bornée ou non, mouvement périodique, positions de vitesse nulle.
- ◇ Dédire d'un graphe d'énergie potentielle l'existence de positions d'équilibre. Analyser qualitativement la nature, stable ou instable, de ces positions.
- ◇ Établir l'équation différentielle du mouvement au voisinage d'une position d'équilibre.



## Sommaire

<b>I Notions énergétiques</b>	<b>4</b>
I/A Énergie	4
I/B Puissance	4
<b>II Énergie cinétique et travail d'une force constante</b>	<b>4</b>
II/A Énergie cinétique	4
II/B Travail d'une force	5
II/C Exemples de travaux	5
<b>III Puissance et travail élémentaire</b>	<b>7</b>
III/A Travail élémentaire	7
III/B Puissance	8
III/C Théorème de la puissance cinétique	8
III/D Version intégrale : théorème de l'énergie cinétique	9
<b>IV Énergie potentielle</b>	<b>11</b>
IV/A Forces conservatives et non-conservatives	11
IV/B Travail d'une force conservative	11
IV/C Gradient	12
IV/D Lien entre énergie potentielle et force conservative	13
<b>V Énergie mécanique</b>	<b>14</b>
V/A Définition	14
V/B Théorème de l'énergie mécanique	14
V/C Théorème de la puissance mécanique	15
<b>VI Énergie potentielle et équilibres</b>	<b>16</b>
VI/A Notion d'équilibre	16
VI/B Équilibres stables et instables	16
VI/C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable	18
<b>VII Énergie potentielle et trajectoire</b>	<b>18</b>
VII/A Détermination qualitative d'une trajectoire	18
VII/B Cas du pendule simple	19



## Liste des définitions

Définition 4.1 : Énergie . . . . .	4
Définition 4.2 : Puissance en terme d'énergie . . . . .	4
Définition 4.3 : Énergie cinétique . . . . .	4
Définition 4.4 : Travail d'une force constante . . . . .	5
Définition 4.5 : Travail élémentaire . . . . .	7
Définition 4.6 : Puissances d'une force . . . . .	8
Définition 4.7 : Forces conservatives ou non . . . . .	11
Définition 4.8 : Travail d'une force conservative . . . . .	11
Définition 4.9 : Énergie potentielle de pesanteur . . . . .	12
Définition 4.10 : Énergie potentielle élastique . . . . .	12
Définition 4.11 : Gradient (cartésien) . . . . .	12
Définition 4.12 : Opérateur différentiel $d$ . . . . .	13
Définition 4.13 : Énergie mécanique . . . . .	14
Définition 4.14 : Point à l'équilibre . . . . .	16
Définition 4.15 : Équilibres stables et instables . . . . .	16



## Liste des propriétés

Propriété 4.1 : Conservation de l'énergie . . . . .	4
Propriété 4.2 : Travail du poids . . . . .	7
Propriété 4.3 : Travail total et infinitésimal . . . . .	9
Propriété 4.4 : Force conservative et énergie potentielle . . . . .	13
Propriété 4.5 : Équilibre et énergie potentielle . . . . .	16
Propriété 4.6 : Stabilité des positions d'équilibre . . . . .	17



## Liste des démonstrations

Démonstration 4.1 : Théorème de la puissance cinétique . . . . .	8
Démonstration 4.2 : Théorème de l'énergie cinétique . . . . .	10
Démonstration 4.3 : Force conservative et énergie potentielle . . . . .	13
Démonstration 4.4 : Théorème de l'énergie mécanique . . . . .	14
Démonstration 4.5 : Théorème de la puissance mécanique . . . . .	15



## Liste des outils

Outils 4.1 : Calculer un travail . . . . .	5
Outils 4.2 : Quand appliquer le TPC ? . . . . .	9
Outils 4.3 : TEC ou PFD ? . . . . .	11
Outils 4.4 : Système conservatif et TEM . . . . .	15



## Liste des applications

Application 4.1 : Travail des frottements solides . . . . .	6
Application 4.2 : Travail du poids . . . . .	6
Application 4.3 : Travail des frottements fluides . . . . .	7
Application 4.4 : Puissance du poids en pente . . . . .	8
Application 4.5 : Conséquence énergétique des frottements . . . . .	9
Application 4.6 : Pendule <i>via</i> TPC . . . . .	9
Application 4.7 : Vitesse maximale en skis . . . . .	10
Application 4.8 : Calcul de dérivées partielles . . . . .	13
Application 4.9 : TEM appliqué au ski . . . . .	15
Application 4.10 : Équilibre d'un ressort par énergie potentielle . . . . .	17



## Liste des points importants

Important 4.1 : Vocabulaire et conséquence du travail . . . . .	5
Important 4.2 : Travail et chemin . . . . .	7
Important 4.3 : Trajectoire et énergie potentielle . . . . .	18



## Liste des erreurs communes

Attention 4.1 : Puissance d'une force . . . . .	4
Attention 4.2 : Notations $\delta$ vs. $d$ . . . . .	7
Attention 4.3 : Gradient et systèmes de coordonnées . . . . .	13

# I Notions énergétiques

## I/A Énergie

L'énergie est un concept physique très puissant et présent dans tout les domaines de la physique mais qu'il est difficile de définir simplement. En voici une première définition qualitative :

### Définition 4.1 : Énergie

L'énergie d'un système est sa capacité à agir sur lui-même ou d'autres systèmes.

Unité : le **Joule** (J)

Ainsi, le mouvement d'un corps, les échanges de chaleur, les courants électriques et tous les phénomènes physiques résultent d'échanges d'énergie. Elle respecte une propriété principale, fondamentale de l'approche du monde qui nous entoure :

### Propriété 4.1 : Conservation de l'énergie

L'énergie est une grandeur conservative. Elle ne peut être créée ou détruite. Elle ne peut que changer de forme et/ou passer d'un système à un autre.

Ces notions seront retravaillées en thermodynamique.

## I/B Puissance

Une énergie totale peut varier différemment selon les conditions du système, et notamment varier plus ou moins vite. Cette variation est une information caractéristique de l'évolution d'un système : une voiture qui freine pour diminuer son énergie cinétique peut le faire lentement ou rapidement et donnerons des ressentis physiques très différents. On définit pour ça la puissance d'un système :

### Définition 4.2 : Puissance en terme d'énergie

La **puissance**  $\mathcal{P}$  d'un système traduit la **variation temporelle** de son énergie  $\mathcal{E}$ , et on a

$$\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$$

L'unité d'une puissance est donc homogène à des  $\text{J}\cdot\text{s}^{-1}$ , et se compte couramment en **Watts** (W). On a

$$1 \text{ W} = 1 \text{ J}\cdot\text{s}^{-1}$$

### Attention 4.1 : Puissance d'une force

Pratique pour retrouver son unité, cette expression est cependant peu utilisée ; en effet, lors de l'étude mécanique d'un corps, on connaît moins facilement son énergie que sa vitesse ou les forces qui s'y appliquent. On verra la Définition 4.6 qui est plus utile.

# II Énergie cinétique et travail d'une force constante

## II/A Énergie cinétique

### Définition 4.3 : Énergie cinétique

L'énergie cinétique d'un point M de masse  $m$  et de vitesse  $v_{\mathcal{R}}(\text{M})$  est :

L'unité d'une énergie est en **joules** (J), et dépend du référentiel.

## II/B Travail d'une force

À quelle condition une force appliquée à un objet fait-elle varier son énergie cinétique ?

- ◇ Quand un objet est jeté vers le haut, le poids le ralentit, donc fait diminuer son énergie cinétique.
- ◇ Quand un objet tombe, le poids l'accélère et fait donc augmenter son énergie cinétique.
- ◇ Lorsqu'un objet est posé sur un support, la réaction normale ne fait pas varier son énergie cinétique.
- ◇ Lorsqu'un objet freine sur un support horizontal, la réaction normale ne cause pas la variation de son énergie cinétique (c'est la réaction tangentielle qui le freine).

### Interprétation 4.1 : Travail d'une force

**Le travail est une grandeur physique construite pour rendre compte de l'effet d'une force sur son énergie cinétique.**

- ◇ En l'absence de déplacement, le travail doit être nul.
- ◇ Si la force est perpendiculaire au déplacement, le travail doit être nul.
- ◇ Si la force est dans le sens du déplacement, le travail doit être positif et maximal.
- ◇ Si la force est dans le sens opposé au déplacement, le travail doit être négatif (et minimale).

### Définition 4.4 : Travail d'une force constante

Le travail  $W_{AB}$  d'une force **constante**  $\vec{F}$  sur un chemin  $AB$  est

**Unité**

où «  $\cdot$  » désigne le produit scalaire entre deux vecteurs.

### Important 4.1 : Vocabulaire et conséquence du travail

- ◇
- ◇

## II/C Exemples de travaux

### Outils 4.1 : Calculer un travail

On peut calculer un travail avec deux formes mathématiques équivalentes :

- ◇ En utilisant une base de projection, *par exemple* cartésienne, on décompose la force et le déplacement :

On a alors

◇ En utilisant une autre définition du produit scalaire :

avec  $\alpha$  l'angle entre les vecteurs.



#### Application 4.1 : Travail des frottements solides

On a vu en TD qu'un objet, de vitesse initiale  $v_0 \vec{u}_x$ , soumis à une force de frottements solides sur un support horizontal subissait, lors de son mouvement avec glissement,

et parcourait pendant la phase de freinage la distance

- 1 Calculer le travail de la force de frottements sur cette distance. Est-il moteur ou résistant ?
- 2 Que vaut  $\mathcal{E}_{c,0}$  l'énergie cinétique initiale ?  $\mathcal{E}_{c,\infty}$  est l'énergie cinétique finale ? Que peut-on en conclure ?

1

2



#### Application 4.2 : Travail du poids

Calculer le travail du poids lors d'un déplacement avec changement d'altitude.

**FIGURE 4.1** – Schéma

**Propriété 4.2 : Travail du poids**

Le travail du poids entre un point A et un point B est :

**Application 4.3 : Travail des frottements fluides**

On considère une voiture allant d'un point A à un point B, éloignés de 100 km, avec une vitesse constante. La force de frottement exercée par l'air est

$$\vec{F} = -\frac{1}{2}\rho S c_x v \vec{v}$$

Déterminer son travail, et faire l'application numérique pour  $v = 50 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$  puis  $80 \text{ km}\cdot\text{h}^{-1}$ . On donne  $S = 3,07 \text{ m}^2$ ,  $c_x = 0,33$ ,  $\rho = 1,3 \text{ kg}\cdot\text{m}^{-3}$ .

FIGURE 4.2 – Schéma

Ainsi, dans certains cas le travail ne dépend pas que du point de départ et d'arrivée, mais peut dépendre de la **façon** d'y aller (vitesse, chemin suivi...). En réalité,

**Important 4.2 : Travail et chemin**

De façon générale, le travail dépend du chemin suivi.

## III Puissance et travail élémentaire

### III/A Travail élémentaire

**Définition 4.5 : Travail élémentaire**

Le travail élémentaire  $\delta W$  d'une force  $\vec{F}$  sur un déplacement infinitésimal  $d\vec{OM}$  est :

**Attention 4.2 : Notations  $\delta$  vs.  $d$** 

$\delta \Rightarrow$  grandeur totale dépend *a priori* du chemin et de la vitesse.  $d \Rightarrow$  grandeur dépend uniquement du point de départ et du point d'arrivée; or  $W$  défini sur une **distance**, pas ~~en un point~~ :

et

mais il est absurde d'écrire

### III/B Puissance

Si la puissance est en effet la dérivée d'une énergie par rapport au temps, on peut l'exprimer comme étant la rapidité avec laquelle un travail (homogène à une énergie) peut être effectué.

#### Définition 4.6 : Puissances d'une force

Moyenne

Instantanée

Unité

Les **watts** (W).  
Elle dépend du référentiel.

#### Application 4.4 : Puissance du poids en pente

Exprimer la puissance du poids lors d'une descente à vélo d'une pente d'angle  $\alpha$ .

Dans la base  $(\vec{u}_X, \vec{u}_Y)$  :

FIGURE 4.3 – Schéma

Ainsi, dans le référentiel de la route :

#### Implication 4.1 : Puissance d'une force perpendiculaire

Par conséquence du produit scalaire, **toute force perpendiculaire au mouvement a un travail nul et une puissance nulle.**

### III/C Théorème de la puissance cinétique

#### Démonstration 4.1 : Théorème de la puissance cinétique

Deux méthodes possibles pour la démonstration :

Bilan de puissance

Définition de  $\mathcal{E}_c$





### Théorème 4.1 : de la puissance cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la variation instantanée de l'énergie cinétique d'un point matériel M est égale à la somme des puissances de forces qui s'exercent sur ce point :



### Application 4.5 : Conséquence énergétique des frottements

Justifier que les frottements conduisent à une baisse de l'énergie cinétique.

$\Rightarrow$



### Application 4.6 : Pendule *via* TPC

Établir l'équation différentielle du pendule.

Le mouvement étant circulaire,  $\vec{v} = \ell \dot{\theta} \vec{u}_\theta$  et on a

$\Rightarrow$

De plus,  $\vec{v} \perp \vec{T}$  et l'angle entre  $\vec{v}$  et  $\vec{P}$  est  $\pi/2 + \theta$  :

et

FIGURE 4.4 – Pendule TPC  $\Rightarrow$



### Outils 4.2 : Quand appliquer le TPC ?

- ◇ Si le mouvement est **selon une seule coordonnée** ( $x, y$  ou  $z$  en cartésiennes,  $\theta$  en coordonnées cylindriques), il sera pertinent d'utiliser le TPC.
- ◇ Sinon (chute libre avec angle par exemple), on revient au PFD qui contient toute l'information.

## III/D Version intégrale : théorème de l'énergie cinétique



### Propriété 4.3 : Travail total et infinitésimal

Le travail d'une force sur un chemin AB se déduit du travail infinitésimal par :

III/D) 1 Exemples

#### Travail du poids

On a

et

D'où  $\Rightarrow$

et ainsi, on retrouve le résultat précédent :

### Travail de la force de HOOKE

On a  $\dots$  et  $\dots$

D'où  $\dots$

$\Rightarrow$

$\Leftrightarrow$

### III/D) 2 Théorème de l'énergie cinétique

Si la puissance donne la variation instantanée de l'énergie cinétique, alors sa variation totale sur un interval quelconque s'obtient par **intégration** :

#### Démonstration 4.2 : Théorème de l'énergie cinétique

$$\begin{array}{rcl}
 & & = \\
 \Leftrightarrow & & = \quad = \\
 \Rightarrow & & = \quad = \\
 \Leftrightarrow & & = \quad =
 \end{array}
 \begin{array}{l}
 \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right\} \text{Séparation des variables} \\
 \left. \begin{array}{l} \int(\cdot) \\ \text{et } \int \Sigma = \Sigma f \end{array} \right\} \\
 \left. \begin{array}{l} \\ \end{array} \right\} \text{Infinitésimal à total} \quad \blacksquare
 \end{array}$$

#### Théorème 4.2 : de l'énergie cinétique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , un point matériel M de masse  $m$ , d'énergie cinétique  $\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}$  et subissant les forces extérieures  $\vec{F}_i$  sur la distance AB vérifie

#### Application 4.7 : Vitesse maximale en skis

Déterminer la vitesse d'une skieuse en bas d'une piste de  $h = 5$  m de dénivelé partant avec une vitesse nulle, si on néglige les frottements.

◇

◇

◇

Ainsi, avec le TEC entre le haut et le base de la piste, on a

### Outils 4.3 : TEC ou PFD ?

- ◇ Si l'on veut connaître seulement une vitesse/une distance à la fin d'un processus (chute, descente, freinage, etc.), les méthodes énergétiques sont souvent plus simples et plus rapides.
- ◇ Si on cherche les équations horaires/un temps/une trajectoire, il faut appliquer le PFD.

Dans tous les cas, ça donne le même résultat !

## IV Énergie potentielle

### IV/A Forces conservatives et non-conservatives

Comme on l'a vu, le travail **peut** dépendre du chemin suivi. Dans le cas du poids ou de la force de rappel, nous voyons que le travail ne dépend cependant que des coordonnées des points de départ et d'arrivée ; ce sont des forces particulières à cet égard, d'où la définition :

#### Définition 4.7 : Forces conservatives ou non

Une force est dite **conservative** si son travail de A à B ne dépend pas du chemin suivi ou de la vitesse, mais uniquement des **positions A et B**. Elle est non-conservative dans le cas contraire.

#### Exemple 4.1 : Exemples

Forces conservatives :

- ◇
- ◇
- ◇
- ◇

Forces non-conservatives :

- ◇
- ◇

**Tous les frottements sont non-conservatifs**, puisqu'en faisant un détour pour aller de A à B, les frottements s'exerceront plus longtemps et donc la valeur du travail effectué sera plus élevé.

### IV/B Travail d'une force conservative

Dans le cas d'une force conservative, on remarque qu'on peut donc légitimement l'écrire avec une forme différentielle d plutôt qu'avec  $\delta$ , définissant l'**énergie potentielle** d'une force :

#### Définition 4.8 : Travail d'une force conservative

À une force **conservative**  $\vec{F}_{\text{cons}}$  s'associe une énergie **potentielle**  $\mathcal{E}_p$  telle que :



### Exemple 4.2 : Exemples

◇ **Énergie potentielle de pesanteur** : on a démontré que

$$\delta W(\vec{P}) = -mg \, dz \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{P}) = -mg(z_B - z_A)$$



#### Définition 4.9 : Énergie potentielle de pesanteur

L'énergie potentielle de pesanteur s'exprime

avec  $z_{\text{ref}}$  l'altitude de référence

◇ **Énergie potentielle élastique** : on a démontré que

$$\delta W(\vec{F}_r) = -k(x - \ell_0) \, dx \Leftrightarrow W_{AB}(\vec{F}_r) = -\frac{1}{2}k((x_B - \ell_0)^2 - (x_A - \ell_0)^2)$$



#### Définition 4.10 : Énergie potentielle élastique

L'énergie potentielle élastique d'un ressort s'exprime

avec  $\ell$  la longueur du ressort et  $\ell_0$  sa longueur à vide.

## IV/C Gradient

Pour exprimer une force conservative  $\vec{F}_{\text{cons}}$  associée à une énergie potentielle  $\mathcal{E}_p(M)$  connue, on utilise l'opérateur **gradient** :

#### Définition 4.11 : Gradient (cartésien)

L'opérateur **gradient**, noté  $\vec{\text{grad}}$  ou parfois  $\vec{\nabla}$ <sup>1</sup>, appliqué à une fonction **scalaire**  $f(x, y, z)$ , donne :

$$\Leftrightarrow$$

avec  $\frac{\partial}{\partial x}$  la **dérivée partielle** ( $\partial$  se lit « d rond ») de  $f$  par rapport à la variable  $x$ , les autres variables étant constantes.

Le vecteur gradient indique la direction de la **plus forte augmentation** et est perpendiculaire aux lignes de niveau (i.e. courbes telles que  $f(x, y, z) = \text{cte}$ ).

1. notation interdite au concours, mais vous le verrez plus tard, très utile pour retenir les formules...

**Attention 4.3 : Gradient et systèmes de coordonnées**

L'opérateur gradient dépend des coordonnées. Notamment, en coordonnées cylindriques, on a

$$\vec{\text{grad}} f(r, \theta, z) = \frac{\partial f}{\partial r} \vec{u}_r + \frac{1}{r} \frac{\partial f}{\partial \theta} \vec{u}_\theta + \frac{\partial f}{\partial z} \vec{u}_z \Leftrightarrow \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} f(r, \theta, z) = \begin{pmatrix} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial r} \\ \frac{1}{r} \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial \theta} \\ \frac{\partial f(r, \theta, z)}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Les formules de gradient ne sont pas à connaître, et seront extensivement revues et justifiées en deuxième année.

**Application 4.8 : Calcul de dérivées partielles**

Soit  $f(x, y, z) = xy^2$ . Déterminer les dérivées partielles de  $f$ .

**IV/D Lien entre énergie potentielle et force conservative**

Cet opérateur permet alors de définir la différentielle d'une fonction de manière univoque :

**Définition 4.12 : Opérateur différentiel d**

La **différentielle** d'une fonction **scalaire**  $f$  est

Et on obtient :

**Propriété 4.4 : Force conservative et énergie potentielle**

Une force **conservative**  $\vec{F}_{\text{cons}}$  dérive d'une **énergie potentielle**  $\mathcal{E}_p$  selon la relation :

avec  $\mathcal{E}_p$  définie donc à une constante près.

**Démonstration 4.3 : Force conservative et énergie potentielle**

On a

$\Leftrightarrow$

$\Leftrightarrow$

**Exemple 4.3 : Exemples**

◇ **Énergie potentielle de pesanteur** :  $\vec{P} = -mg \vec{u}_z$ , soit

Ainsi,  $\mathcal{E}_{p,p}$  ne dépend ni de  $x$ , ni de  $y$ , et peut s'écrire comme

◇ **Énergie potentielle élastique** :  $\vec{F}_r = -k(x - \ell_0) \vec{u}_x$ , soit

Ainsi,  $\mathcal{E}_{p,el}$  ne dépend ni de  $y$ , ni de  $z$ , et peut s'écrire comme

## V Énergie mécanique

### V/A Définition

#### Démonstration 4.4 : Théorème de l'énergie mécanique

L'écriture du travail des forces conservatives comme la variation d'énergies potentielles permet d'écrire :

$$\begin{array}{lcl}
 \text{TEC :} & = & \\
 \Leftrightarrow & = & \left. \begin{array}{l} \vec{F}_n = \vec{F}_{\text{cons},j} + \vec{F}_{\text{NC},i} \\ \sum_j \Delta \mathcal{E}_{p,j} = \Delta \mathcal{E}_{p,\text{tot}} \end{array} \right\} \\
 \Leftrightarrow & = & \blacksquare
 \end{array}$$

TDM3 – application avec  $\vec{F}_{\text{NC},i}$  les forces non-conservatives. Ainsi :

#### Définition 4.13 : Énergie mécanique

L'énergie mécanique  $\mathcal{E}_m$  d'un point matériel en mouvement dans un référentiel  $\mathcal{R}$  est la somme de son énergie cinétique et des énergies potentielles des forces conservatives s'appliquant sur ce point :

Les énergies potentielles étant définies à une constante près, l'énergie mécanique l'est également.

### V/B Théorème de l'énergie mécanique

#### Théorème 4.3 : de l'énergie mécanique

Dans un référentiel galiléen  $\mathcal{R}$ , la variation d'énergie mécanique d'un point matériel entre deux points de sa trajectoire est égale à la somme des travaux des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :

Ce n'est qu'une reformulation du TEC, en séparant forces conservatives et non-conservatives, et en exprimant le travail des forces conservatives comme un énergie potentielle.



### Application 4.9 : TEM appliqué au ski

Exprimer l'énergie mécanique d'une skieuse en haut et en bas d'une piste de ski, et retrouver sa vitesse.

L'énergie mécanique en haut de la piste est

Et en bas de la piste :

Sans frottements, on a juste  $W_{AB}(\vec{N}) = 0 = \Delta_{AB}\mathcal{E}_m$ , donc



### Outils 4.4 : Système conservatif et TEM

Ainsi, pour traiter un problème où l'énergie mécanique se conserve :

- 1) Calculer l'énergie mécanique à l'instant initial, puis à un instant quelconque en fonction de sa vitesse et/ou de sa position ;
- 2) Comme l'énergie mécanique se conserve,  $\sum_i W_{AB}(\vec{F}_{NC,i}) = 0$ , et on conclut donc en utilisant  $\mathcal{E}_m(A) = \mathcal{E}_m(B)$ .

V/C

### Théorème de la puissance mécanique



#### Théorème 4.4 : de la puissance mécanique

Dans un référentiel galiléen, la dérivée temporelle de l'énergie mécanique d'un point matériel est égale à la somme des puissances des forces **non conservatives** qui s'exercent sur ce point :



#### Démonstration 4.5 : Théorème de la puissance mécanique

Différentes démonstrations sont ici aussi possibles, selon le point de départ. Par exemple avec un bilan de puissance :

$$\begin{array}{rcl}
 \text{PFD :} & = & \\
 \Leftrightarrow & = & \text{PFD} \cdot \vec{v} \\
 \Leftrightarrow & = & \text{Définition} \\
 & & \text{et } \vec{F}_{\text{cons}} = -\overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_p \\
 \Leftrightarrow & = & \mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2 \\
 & & \text{et } \vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} \\
 \Leftrightarrow & = & \overrightarrow{\text{grad}} \mathcal{E}_{p,j} \cdot d\overrightarrow{OM} = d\mathcal{E}_{p,j} \\
 \Leftrightarrow & = & \blacksquare
 \end{array}$$

## VI Énergie potentielle et équilibres

L'énergie potentielle permet de d'étudier les caractéristiques d'équilibre d'un système. Pour étudier cela, on suppose :

- ◇ Un point matériel soumis uniquement à des forces conservatives ou de puissance nulle (**système conservatif**), en notant  $\mathcal{E}_p$  l'énergie potentielle totale et  $\vec{F} = \sum_i \vec{F}_{\text{cons},i}$  la somme des forces conservatives.
- ◇ On considère un mouvement à **1 degré de liberté**, noté  $x$  ( $x$  peut être une longueur mais aussi un angle, dans le cas du pendule par exemple).

### VI/A Notion d'équilibre

#### Définition 4.14 : Point à l'équilibre

Ainsi, d'après le PFD, cela se traduit par une somme des forces nulles :

Or,  $\vec{F}$  conservative donc

- ◇ Si le degré de liberté  $x$  est une longueur, on aura
- ◇ Si le degré de liberté  $x$  est un angle  $\theta$ , on aura

Ainsi, et

#### Propriété 4.5 : Équilibre et énergie potentielle

Les points d'équilibre d'un système conservatif à un degré de liberté correspondent à un point stationnaire de l'énergie potentielle :

où  $\cdot \Big|_{x_0}$  signifie «  $\cdot$  évalué en  $x_0$  »

### VI/B Équilibres stables et instables

#### Définition 4.15 : Équilibres stables et instables

Soit un point matériel sur une position d'équilibre. En l'écartant un peu de cette position :

- ◇ s'il **revient** vers sa position d'équilibre, on dit que l'équilibre est **stable** ;
- ◇ s'il **s'écarte** définitivement de cette position, on dit qu'il est **instable**.

FIGURE 4.5 – Équilibre stable

FIGURE 4.6 – Équilibre instable



Pour étudier ces situations mathématiquement, on peut développer l'expression de la somme  $\vec{F}$  au voisinage d'un point d'équilibre  $x_{\text{eq}}$  quelconque :

$$\begin{aligned} &= \\ \Leftrightarrow &= \\ \Leftrightarrow &= \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \\ \\ \end{array} \right) \begin{array}{l} F = -\frac{d\varepsilon_p}{dx} \\ F(x_{\text{eq}}) = 0 = \left. \frac{d\varepsilon_p}{dx} \right|_{x_{\text{eq}}} \end{array}$$

◇ Si c'est un équilibre **stable**, la force doit **ramener** le point  $x$  vers sa position d'équilibre :

et si  $(x - x_{\text{eq}}) < 0$ , alors  $F$  doit être  $> 0$ , mais la conclusion est la même.

◇ Si c'est un équilibre **instable**, la force doit **l'écartier** de la position d'équilibre :

et si  $(x - x_{\text{eq}}) < 0$ , alors  $F$  doit être  $< 0$ , mais la conclusion est la même.

Le raisonnement se propage dans toutes les directions, on peut donc utiliser le cas général à trois dimensions :

#### Propriété 4.6 : Stabilité des positions d'équilibre

Une position d'équilibre est :

**Stable si**

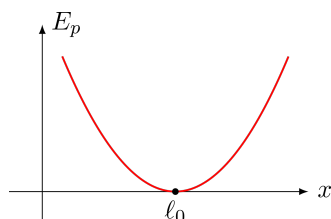
**Instable si**

**FIGURE 4.7** – Équilibre stable

**FIGURE 4.8** – Équilibre instable

#### Application 4.10 : Équilibre d'un ressort par énergie potentielle

Trouver la position d'équilibre d'un ressort. Est-elle stable ou instable ?



## VI/C Étude générale au voisinage d'un point d'équilibre stable

En faisant un développement limité de l'énergie potentielle d'un système autour d'une position d'équilibre stable, on a

Et si l'énergie mécanique se conserve, on a  $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$  donc

On retrouve ! Le mobile oscille autour de la position d'équilibre à la pulsation  $\omega_0 = \sqrt{k/m}$  avec  $k = \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}}$ .

Ce qui est phénoménal, c'est que **la seule supposition est que le système soit conservatif**. Ceci explique l'abondance des systèmes harmoniques dans la nature.



### Remarque 4.1 : Étude mouvement équilibre instable

Si l'équilibre est instable :  $k = - \left. \frac{\partial^2 \mathcal{E}_p}{\partial x^2} \right|_{x_{eq}} > 0$

d'où par le même raisonnement,  $\ddot{x} - \frac{k}{m}(x - x_{eq}) = 0$

de solution  $x - x_{eq} = Ae^{\omega_0 t} + B^{-\omega_0 t}$

Si  $x(0) = x_0$  et  $v(0) = 0$  :  $x - x_{eq} = x_0 \operatorname{ch}(\omega_0 t)$

donc proche d'un point d'équilibre instable, le mobile **s'écarte exponentiellement** de cette position.

## VII Énergie potentielle et trajectoire

### VII/A Détermination qualitative d'une trajectoire

Pour un point matériel soumis seulement à des forces conservatives (ou ne travaillant pas), il est possible de prévoir les zones accessibles au mobile ainsi que l'aspect de la trajectoire en étudiant l'énergie potentielle. En effet,

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p \geq \mathcal{E}_p$$

puisque l'énergie cinétique est positive. Ainsi :

#### Important 4.3 : Trajectoire et énergie potentielle

Dans un diagramme d'énergie potentielle selon  $x$  :

- ◇
- ◇
- ◇

**État lié**

La particule reste dans une zone bornée de l'espace et le mobile effectue des aller-retours périodiques autour de la position d'équilibre.

**FIGURE 4.9** – État lié**État de diffusion**

La particule aura tendance à partir vers  $x = +\infty$  sans jamais revenir : son mouvement n'est pas borné dans l'espace.

**FIGURE 4.10** – État de diffusion

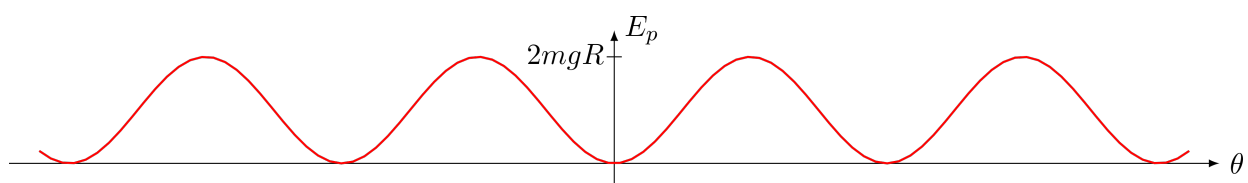
Certains corps célestes sont dans des états liés, comme la Terre et le Soleil, d'autres dans des états de diffusion : ils passent brièvement dans le système solaire avant de le quitter définitivement. C'est le cas de la comète d'AREND-ROLAND, passée à proximité de la Terre en 1956 mais qui ne devrait jamais revenir.

**VII/B Cas du pendule simple**

On reprend le pendule simple, que l'on suppose attaché avec une tige **rigide** (pour éviter les décrochages). On souhaiterait déterminer ses positions d'équilibre et étudier ses trajectoires possibles. Le système étant conservatif ( $\vec{P}$  conservatif et  $\vec{T} \perp \vec{v}$ ), déterminons l'expression de l'énergie potentielle en fonction de l'angle.

L'altitude est :

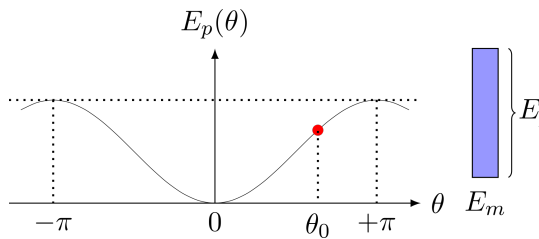
donc l'énergie potentielle est



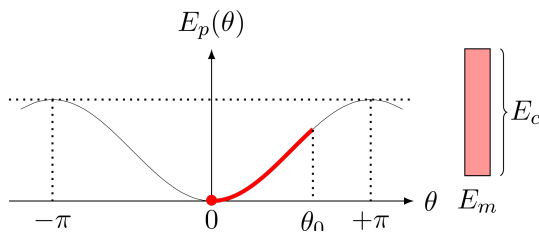
Les positions d'équilibre stables sont donc celles dans les « creux », soit  $\theta = 2p\pi$  avec  $p \in \mathbb{Z}$ , et les instables sur les « collines », soit  $\theta = (2p + 1)\pi$ . On distingue alors deux cas :

**VII/B) 1** Cas  $\mathcal{E}_m < 2mg\ell$ 

Si l'énergie mécanique totale est inférieure à l'énergie potentielle maximale, on se situera dans un état lié, « coincé » dans un creux. On observera donc une oscillation autour du point d'équilibre le plus proche, et on a vu que cette oscillation était sinusoïdale aux très petits angles ( $|\theta| < 20^\circ$ ).



**FIGURE 4.11** – État initial  $\theta = \theta_0$  : toute l'énergie est sous forme d'énergie potentielle, et l'énergie est nulle.

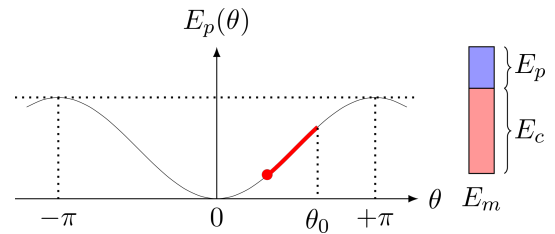


**FIGURE 4.13** – La masse a perdu toute son énergie potentielle : son énergie cinétique et donc sa vitesse sont maximales.

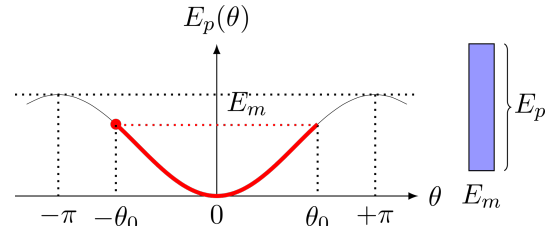
**VII/B) 2** Cas  $\mathcal{E}_m > 2mgl$

Si l'énergie mécanique totale est supérieure à l'énergie potentielle maximale, ça veut dire qu'il y a un excédent d'énergie cinétique. Ainsi, le pendule tourne autour de l'axe de rotation, et lorsqu'il arrive en  $\theta = \pi$  l'énergie potentielle est maximale mais l'énergie cinétique n'est pas nulle : il continue sa rotation, sans oscillation. La vitesse n'est cependant pas constante, elle est plus faible en haut qu'en bas du mouvement (par conservation de l'énergie mécanique).

Une animation est disponible en ligne<sup>2</sup>.



**FIGURE 4.12** – La masse perd de l'énergie potentielle tout en restant sur la courbe. L'énergie mécanique étant conservée, elle gagne de l'énergie cinétique et donc de la vitesse.



**FIGURE 4.14** – La masse a perdu toute son énergie cinétique et a maximisé son énergie potentielle. Elle a atteint l'angle maximale  $-\theta_0$ , et repart dans l'autre sens.

2. [https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/tension\\_pendule.php](https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Meca/Oscillateurs/tension_pendule.php)