Mécanique – chapitres 1 et 2

TD : Dynamique du point

I Collision entre deux voitures

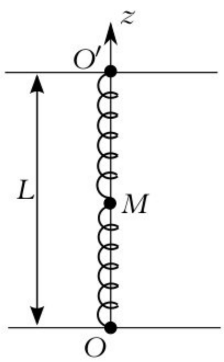
Pendant le GP explorer organisé par Squeezie en octobre 2022, Pierre suit Xari de près en vue de le dépasser. On considère ici que les deux voitures se suivent sur une ligne droite à la vitesse de $v_0 = 30\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$ à une distance $d = 20\,\mathrm{m}$ l'une de l'autre. À la date $t = 0$, la première freine avec une décélération constante $a_1 = -20{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$. Celle qui suit commence son freinage $\tau = 1\,\mathrm{s}$ plus tard (à cause du temps de réaction du conducteur), avec une décélération de $a_2 = -10{,}0\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) En prenant pour origine du repère spatial la position de la seconde voiture à la date $t = 0$, établir les équations horaires du mouvement des deux véhicules.

2) Déterminer la position x_c et la date t_c du contact. Pierre avait-il le temps d'esquiver Xari ?

II Masse attachée à 2 ressorts

On considère un point M de masse m attaché à deux ressorts identiques verticaux, de constante de raideur k et de longueur à vide ℓ_0. Les deux autres extrémités O et O' des ressorts sont fixes et espacées d'une distance L. On définit l'axe (Oz) vertical ascendant.



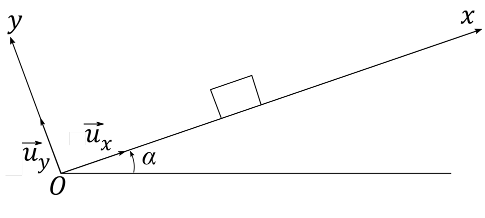
1) Déterminer la position d'équilibre z_{eq} de M.

2) Déterminer l'équation différentielle à laquelle satisfait $z(t)$. On écrira cette équation en fonction de ω_0 à définir et de z_{eq}.

3) On écarte M d'une hauteur a par rapport à sa position d'équilibre, et on le lâche sans vitesse. Déterminer $z(t)$.

III Plan incliné et frottements solides

On considère un plan incliné d'un angle $\alpha = 20°$ par rapport à l'horizontale. Une brique de masse $m = 600\,\mathrm{g}$ est lancée depuis le bas du plan vers le haut, avec une vitesse $v_0 = 2{,}4\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$. Pour étudier le mouvement, on utilise le repère (O,x,y) avec O coïncidant avec la position de départ de la brique. On note g l'accélération de la pesanteur, avec $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.



1) On suppose en premier lieu que le contact entre la brique et le plan incliné se fait sans frottements

   a – Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de sa montée.

b – Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête, ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

2) On suppose ensuite qu'il existe des frottements solides, avec f le coefficient de frottements solides tel que $f = 0{,}20$.

a – Établir l'équation horaire du mouvement de la brique lors de sa montée.

b – Déterminer la date à laquelle la brique s'arrête, ainsi que la distance qu'elle aura parcourue.

3) On suppose finalement que la brique est **posée** sur le plan avec α variable.

a – Quel doit être l'angle α pour que l'objet se mette en mouvement ?

b – Si le plan est en bois et la brique en métal, donner la valeur de cet angle. Même question si la brique est en bois. On donne

$$f_{\text{fer/chêne}} = 0{,}26 \quad \text{et} \quad f_{\text{chêne/chêne}} = 0{,}34$$

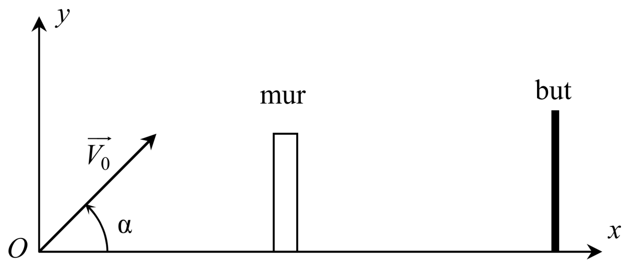
4) Avec $\alpha = 0°$, on souhaite déplacer une armoire de 100 kg en tirant dessus avec la force $\vec{F}$. On donne $f_{\text{armoire/sol}} = 0{,}25$.

a – Déterminer la valeur de $\vec{F}$ pour mettre en mouvement l'armoire.

b – En déduire à quoi sert de mettre des patins en téflon sur les pieds de l'armoire.

IV Coup franc et frottements fluides

On étudie dans le référentiel terrestre galiléen de repère fixe (O,x,y), un coup franc de football tiré à 20 m, face au but de hauteur 2,44 m et dans son plan médian vertical (xOy). L'axe (Oy) est choisi suivant la verticale ascendante.



Le ballon, de masse $m = 430$ g, est assimilé à un point matériel M initialement au sol en O. Le mur, de hauteur 1,90 m, est situé à 9,15 m du ballon. Le ballon est lancé à l'instant $t = 0$ avec une vitesse initiale v_0 de norme $20\,\mathrm{ms^{-1}}$ et formant un angle α de 20° avec l'horizontale. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

a – Établir les équations horaires du mouvement du ballon ainsi que l'équation de la trajectoire.

b – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

c – Le tir est-il cadré ?

2) Il y a en réalité des frottements, modélisés par une force $\vec{F}_f = -h\vec{v}$ avec h une constante positive de valeur $5{,}00 \times 10^{-3}\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$.

a – Déterminer les équations horaires en introduisant la constante $\tau = \frac{m}{h}$.

b – Donner l'équation de la trajectoire.

c – Le ballon passe-t-il au-dessus du mur ?

d – Le tir est-il cadré ?

V Charge soulevée par une grue

Une grue de chantier de hauteur h doit déplacer d'un point à un autre du chantier une charge M de masse m supposée ponctuelle. On appelle A le point d'attache du câble sur le chariot de la grue.

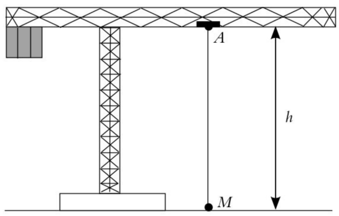


Figure 2.1 – Mouvement vertical

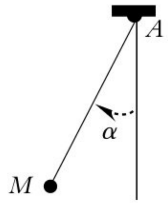


Figure 2.2 – Mouvement horizontal

1) Le point A est à la verticale de M posée sur le sol. Déterminer la tension du câble lorsque M décolle (figure 2.1).

2) L'enrouleur de câble de la grue remonte le câble avec une accélération a_v constante. Déterminer la tension du câble et conclure.

3) La montée de M est stoppée à mi-hauteur mais le chariot A se met en mouvement vers la droite (figure 2.2) avec une accélération a_h constante.

   a – Quelle est l'accélération de M sachant que M est alors immobile par rapport à A ?

   b – Déterminer l'angle α (figure 2.2) que fait le câble avec la verticale en fonction de m, g, a_h ainsi que la tension du câble.

VI Étude d'un volant de badminton

Un volant de badminton a une masse $m = 5{,}0\,\mathrm{g}$. On veut vérifier expérimentalement l'information trouvée sur internet qui précise qu'un volant lâché de très haut atteint une vitesse limite $v_l = 25\,\mathrm{km{\cdot}h^{-1}}$. Pour tester cette affirmation, on veut déterminer l'altitude h à laquelle il faut le lâcher (sans vitesse initiale) pour qu'il atteigne cette vitesse limite.

On lâche le volant d'une fenêtre en hauteur et on filme sa chute verticale. On note O le point de départ de la chute, et (Oz) l'axe vertical dirigé vers le bas. Au cours de la chute, on prend en compte une force de frottement due à l'air de la forme $\overrightarrow{F} = -\lambda v \overrightarrow{v}$ où $\overrightarrow{v}$ est le vecteur vitesse du point M, v sa norme et λ un coefficient positif. On note g l'accélération de la pesanteur et on rappelle que $g = 9{,}81\,\mathrm{m{\cdot}s^{-2}}$.

1) Établir l'équation différentielle portant sur la norme du vecteur vitesse $v(t)$.

2) Montrer l'existence d'une vitesse limite v_l et l'exprimer en fonction de λ, m et g.

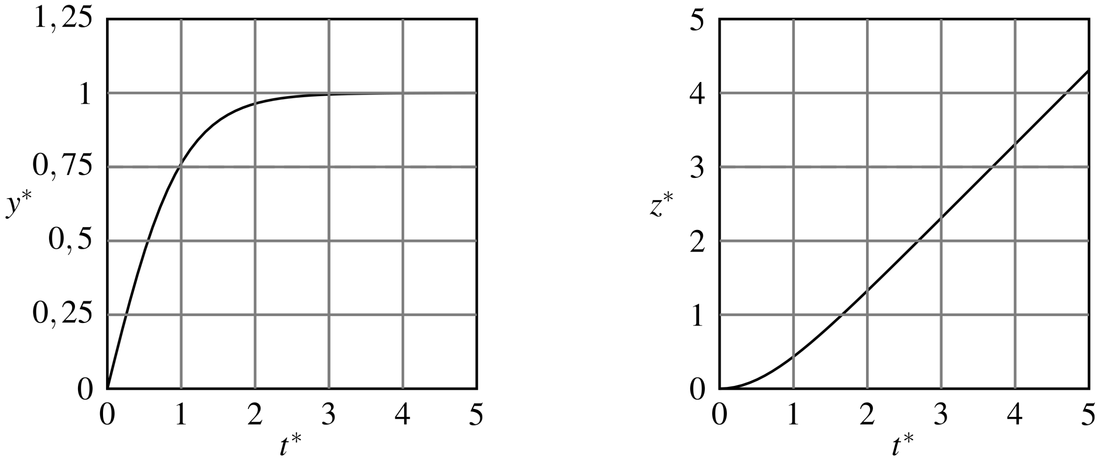
   On note $t^* = t/\tau$, $z^* = z/L$ et $v^* = v/v_l$, avec $\tau = v_l/g$ et $L = v_l\tau$.

3) Montrer que t^*, z^* et v^* sont trois grandeurs sans dimension.

4) Montrer que l'équation différentielle portant sur la vitesse peut se mettre sous la forme :

$$\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1$$

La résolution de l'équation précédente conduit à des solutions dont on donne les représentations graphiques ci-dessous.



5) À l'aide des courbes, décrire les deux phases du mouvement.

6) Déterminer l'altitude minimale h à laquelle il faut lâcher le volant pour que sa vitesse au sol soit supérieure ou égale à 95% de v_l. On exprimera cette altitude en fonction de L. Déterminer également la durée Δt de l'expérience en fonction de τ.

7) En admettant que la vitesse limite est proche de la valeur trouvée sur internet, calculer numériquement L et τ puis h et Δt.

VII Étude d'une skieuse

On étudie le mouvement d'une skieuse descendant une piste selon la ligne de plus grande pente, faisant un angle α avec l'horizontale. L'air exerce une force de frottements supposée de la forme $\overrightarrow{F} = -\lambda \overrightarrow{v}$ avec λ un coefficient positif et $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse du skieur.

On note $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$ les composantes tangentielle et normale de la force de frottements exercée par la neige, et f le coefficient de frottements solides tel que $\|\overrightarrow{T}\| = f\|\overrightarrow{N}\|$.

On choisit comme origine de l'axe $(\mathrm{O}x)$ de la ligne le plus grande pente la position initiale de la skieuse, supposée partir à l'instant initiale avec une vitesse négligeable. On note $(\mathrm{O}y)$ l'axe normal à la piste en O et dirigée vers le haut.

1) Calculer $\overrightarrow{T}$ et $\overrightarrow{N}$.

2) Calculer la vitesse $\overrightarrow{v}(t)$ et la position $x(t)$ de la skieuse à chaque instant t.

3) Montrer que la skieuse atteint une vitesse limite $\overrightarrow{v}_l$ et exprimer $\overrightarrow{v}(t)$ et $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ en fonction de $\overrightarrow{v}_l$.

4) Calculer $v_l = \|\overrightarrow{v}_l\|$ pour $\lambda = 1\,\mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}$, $f = 0{,}9$, $g = 10\,\mathrm{m{\cdot}s^{-1}}$, $m = 65\,\mathrm{kg}$ et $\alpha = 45°$.

5) Calculer littéralement et numériquement la date t_1 où la skieuse a une vitesse égale à $v_l/2$.

6) À la date t_1, la skieuse chute. On néglige alors la résistance de l'air et on considère que le coefficient de frottements sur le sol est multiplié par 10. Calculer la distance parcourue par la skieuse avant qu'elle ne s'arrête.