

Oscillateurs harmonique et amorti

Dans le chapitre précédent, nous avons vu des systèmes qui présentent un régime transitoire caractérisé par des exponentielles croissantes ou décroissantes. En combinant deux de ces composants, on trouve alors des régimes transitoires caractérisés par une combinaison d'exponentielles, exprimée sous la forme de fonctions sinusoïdales. Regardons un exemple.

I Introduction harmonique

A Signal sinusoïdal

Définition 4.1 : signal sinusoïdal

Un signal sinusoïdal est un signal de la forme

$$s(t) = A \cos(\omega t + \varphi)$$

A est l'*amplitude*, telle que

$$A = \frac{s_{\max} - s_{\min}}{2}$$

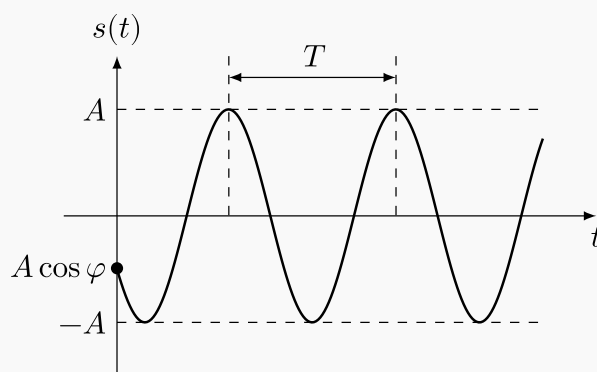
$\omega t + \varphi$ est la *phase instantanée* du signal, avec

$$\begin{array}{ccc} & \omega t + \varphi & \\ \swarrow & & \nwarrow \\ \text{pulsation} & & \text{phase initiale} \end{array}$$

Unités

La phase s'exprime en **radians** ; la pulsation en **rad s⁻¹**.

Exemple 4.1 : graphique



La pulsation représente la vitesse avec de variation de la phase, et s'exprime en rad s^{-1} . Pour une variation de 2π effectuée à la période T , on définit

$$\omega = 2\pi/T = 2\pi f$$

B Équation différentielle oscillateur harmonique

Propriété 4.1 : équation différentielle

Un oscillateur harmonique à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

Avec x_{eq} la position d'équilibre du système et ω_0 la pulsation **propre**.

Propriété 4.2 : solutions

La forme générale des solutions d'un oscillateur harmonique s'écrit de manière équivalente

$$\begin{aligned} x(t) &= A' \cos(\omega_0 t + \varphi) + x_{\text{eq}} \\ x(t) &= A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t) + x_{\text{eq}} \end{aligned}$$

avec A' , A , B des *constantes d'intégration*.

C Changement de variable : de général à homogène

Remarque 4.1 : changement de variable

Au cours du chapitre précédent, nous avons vu la méthode pour résoudre des équations différentielles du premier ordre. Nous avons pu remarquer que les équations différentielles entre les échelons montants et descendants étaient en tout point similaires si ce n'est pour la présence ou non d'un second membre, impliquant la recherche d'une solution particulière ou non. Le changement de variable permet d'éviter de chercher une solution particulière constante.

Propriété 4.3 : changement de variable

Si $x(t)$ est solution de

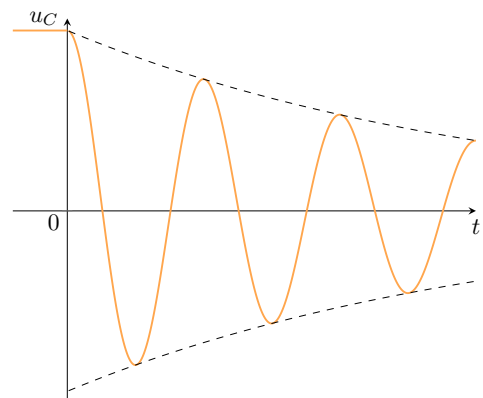
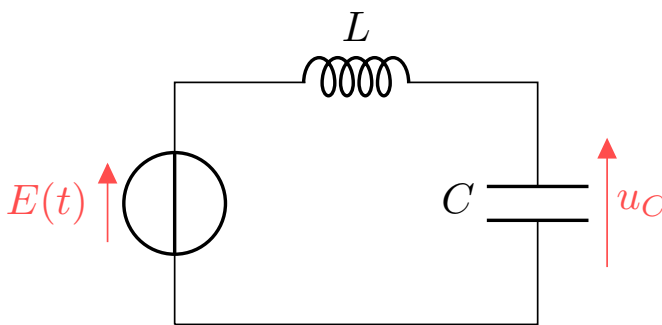
$$\frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

alors $y(t) = x(t) - x_{\text{eq}}$ est solution de

$$\frac{d^2y}{dt^2} + \omega_0^2 y = 0$$

D Exemple expérimental : l'oscillateur LC

Soit le circuit suivant sous un échelon de tension descendant. On observe la tension $u_C(t)$ avec un oscilloscope dont la courbe est représentée à droite.



On remarque que la tension aux bornes du condensateur réalise des oscillations sinusoïdales amorties. En fonction des valeurs des caractéristiques des composants, on trouve :

- Pour $C_1 = 80 \text{ nF}$ et $L_1 = 43 \text{ mH}$, une période de $T_1 = 364 \text{ }\mu\text{s}$;
- Pour $C_2 = 80 \text{ nF}$ et $L_2 = 43 \text{ mH}$, une période de $T_2 = 184 \text{ }\mu\text{s}$;

Analyse

Lorsque l'on excite le système LC, la tension aux bornes du condensateur oscille de façon régulière et sinusoïdale, avec une période qui ne dépend pas de l'amplitude de l'excitation mais des caractéristiques de l'oscillateur (capacité du condensateur et inductance de la bobine).

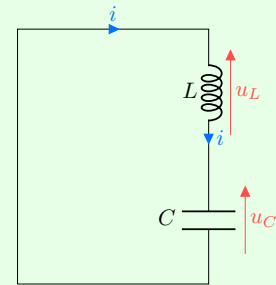
C'est ce que nous allons maintenant démontrer analytiquement.

II Oscillateur harmonique électrique : circuit LC régime libre

A Présentation

Définition 4.2 : situation initiale

Le montage est représenté ci-contre. Il est constitué de l'association en série d'une bobine et d'un condensateur idéaux. **On suppose le condensateur initialement chargé :** $u_C(0^-) = E$ et $i(0^-) = 0$ (condensateur chargé \equiv interrupteur ouvert).



B Équation différentielle du circuit

Propriété 4.4 : équation diff. RC

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur dans un circuit LC en décharge est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0$$

avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ la pulsation propre.

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

Démonstration 4.1 : équation diff. RC

Avec la loi des mailles,

$$u_L + u_C = 0$$

Ensuite, **en convention récepteur** on a :

$$u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } i = C \frac{du_C}{dt}$$

$$\begin{aligned} L \frac{di}{dt} + u_C &= 0 \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + u_C = 0 \\ &\Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{1}{LC} u_C = 0 \end{aligned}$$

D'où le résultat. L assure $i(0^+) = 0$ et C assure $u_C(0^+) = E$ par continuité.

Remarque 4.2 : Unité de ω_0

On peut vérifier à cette étape que ω_0 est bien homogène à l'inverse d'un temps. Pour ça, deux manières :

Par analyse dimensionnelle directe. Sachant que RC et L/R sont des temps (cf. chapitre précédent) :

$$w_0^2 = \frac{1}{LC} = \frac{R}{\cancel{L}RC} = \underbrace{\left[\frac{L}{R} \right]^{-1}}_{s^{-1}} \times \underbrace{[RC]^{-1}}_{s^{-1}}$$

Et on a bien ω_0^2 en s^{-2} , et donc ω_0 en s^{-1} , les radians n'ayant pas de dimension.

Par analyse dimensionnelle indirecte. En effet, l'équation différentielle est forcément une équation homogène. Aisi

$$\left[\frac{d^2 u_C}{dt^2} \right] = \frac{[u_C]}{[dt]^2} = \frac{V}{s^2}$$

et l'autre terme doit avoir la même unité :

$$[w_0^2 u_C] = [w_0]^2 \times [u_C] = V s^{-2}$$

On en déduit que ω_0^2 est de dimension s^{-2} , d'où la dimension de ω_0 .

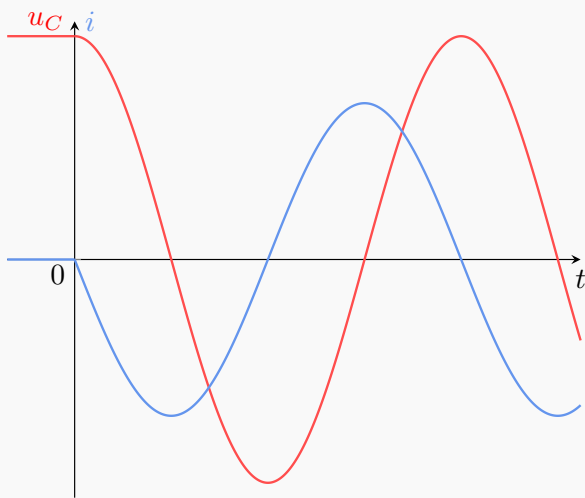
C Résolution de l'équation différentielle et graphique

Propriété 4.5 : solution de l'équation différentielle RC

La solution de l'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ d'un circuit LC en décharge avec $u_C(0) = E$ et l'intensité en découplant sont

$$\begin{aligned} u_C(t) &= E \cos(\omega_0 t) \\ i(t) &= -CE\omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Graphique



Démonstration 4.2 : solution RC série

L'équation étant déjà homogène, on écrit la forme générale :

$$u_C(t) = A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)$$

Celle-ci est souvent plus pratique pour trouver les constantes d'intégration. On trouve A avec la première condition initiale : $u_C(0^+) = E$. En effet,

$$u_C(0) = A \cos(0) + B \sin(0) = A$$

donc $A = E$.

On trouve B avec la seconde condition initiale : $i(0^+) = 0 = C \frac{du_C}{dt}$. En effet,

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \frac{du_C}{dt}(0) &= B\omega_0 \end{aligned}$$

Donc $B = 0$ ($\omega_0 \neq 0$). On obtient ensuite i avec la relation courant-tension.

D Bilan énergétique

Propriété 4.6 : bilan d'énergie

L'énergie emmagasinée dans le circuit est

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2$$

Elle est conservée à chaque instant et résulte de l'échange périodique d'énergie entre le condensateur et la bobine.

Démonstration 4.3 : bilan d'énergie

On fait un bilan de puissances avec la loi des mailles multipliée par i :

$$\begin{aligned} u_C i + u_L i &= 0 \\ \Leftrightarrow u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2} C u_C^2 + \frac{1}{2} L i^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

On identifie l'intérieur de la parenthèse à l'énergie du système (car par définition $\mathcal{P} = \frac{d\mathcal{E}}{dt}$) pour avoir la propriété.

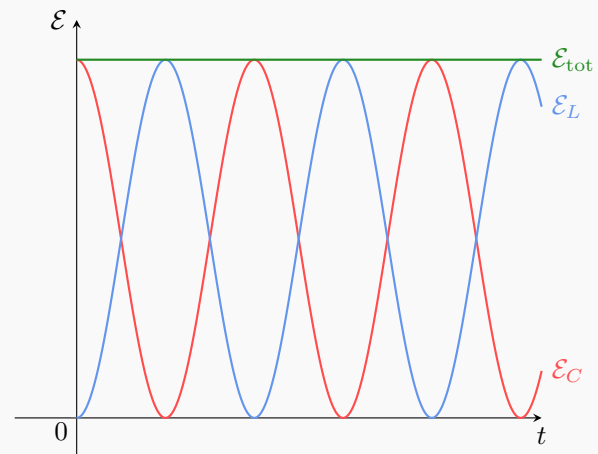
Implication 4.1 : vérification

On vérifie avec les expressions analytiques trouvées, sachant que $\omega_0^2 = (LC)^{-2}$:

$$\begin{aligned}\frac{1}{2}Cu_C^2 &= \frac{1}{2}CE^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ \frac{1}{2}Li^2 &= \frac{1}{2}\underbrace{LC^2\omega_0^2}_{=C} E^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \mathcal{E} &= \frac{1}{2}CE^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t))\end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{E} = \frac{1}{2}CE^2 = \text{cste}$$

Graphique**Important 4.1 : résultat**

On retrouve bien des oscillations de la tension aux bornes de u_C comme dans l'approche expérimentale, avec une période $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{LC}$ qui augmente avec L et C . Cependant, **nous n'avons pas d'amortissement ici** ! En effet les composants utilisés ici sont idéaux, et conservent totalement l'énergie, il n'y a pas de raison d'en perdre. Il y a eu une simplification que l'on effectue souvent en mécanique : **on a négligé les effets dissipatifs**. Regardons comment ça se traduit pour un exemple mécanique.

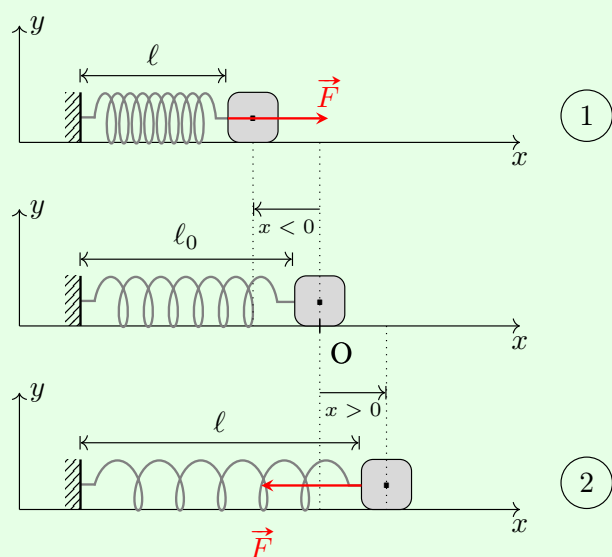
III Exemple harmonique mécanique : ressort horizontal libre**A Introduction****Définition 4.3 : force de rappel d'un ressort**

Soit le système masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le ressort se déforme sous l'effet d'une contrainte en stockant l'énergie donnée, qu'il libère en reprenant sa forme quand la contrainte s'arrête. On définit la force de rappel du ressort par :

$$\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x$$

avec

- $k > 0$ la **constante de raideur** en N m^{-1} ($[\vec{F}] = [k][\ell]$) ;
- ℓ_0 sa **longueur à vide** ;
- \vec{u}_x un vecteur unitaire ($\|\vec{u}_x\| = 1$) dirigé selon l'axe x



Si $\ell > \ell_0$, on a bien une force dirigée selon $-\vec{u}_x$, (situation (2)), sinon dirigée selon $+\vec{u}_x$.

B Présentation

Définition 4.4 : situation initiale et bilan des forces

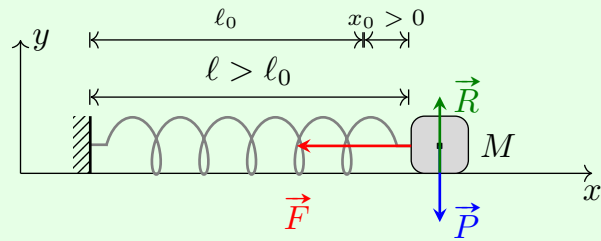
Système : point matériel M de masse m relié à un ressort horizontal **idéal et sans frottements**.

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O, x, y, t)$;

Soit $x = \ell - \ell_0$ la position de la masse

Conditions initiales :

- 1) À $t = 0$ la masse est à la position $x_0 > 0$;
- 2) À $t = 0$ sa vitesse est $v_0 = 0$.



Bilan des forces :

- 1) Poids $\vec{P} = -mg\vec{u}_y$;
- 2) Réaction du support $\vec{R} = R\vec{u}_y$;
- 3) Force de rappel du ressort $\vec{F} = -kx\vec{u}_x$

C Équation différentielle et solution

Propriété 4.7 : équation et solution

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2x}{dt^2} + \omega_0^2 x &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \omega_0^2 \ell &= \omega_0^2 \ell_0 \end{aligned}$$

Avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$. ℓ_0 est donc la longueur d'équilibre du système.

La position x et la vitesse v ont pour expression

$$\begin{aligned} x(t) &= x_0 \cos(\omega_0 t) \\ v(t) &= -x_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) \end{aligned}$$

Démonstration 4.4 : équation différentielle

La deuxième loi de NEWTON, aussi appelée **principe fondamental de la dynamique** (PFD) donne :

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{R} + \vec{F} \\ \Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} &= \begin{pmatrix} -kx \\ -mg + R \end{pmatrix} \end{aligned}$$

Sur l'axe \vec{u}_x on trouve bien $m\frac{d^2x}{dt^2} + kx = 0$, d'où l'équation différentielle. La projection sur \vec{u}_y montre que la réaction du support compense le poids.

On a la même démonstration que précédemment.

Remarque 4.3 : analogie LC-ressort

Alors qu'on parlait d'un système *a priori* totalement différent, on remarque que la physique des deux systèmes sont rigoureusement équivalentes puisque **régies par la même équation différentielle**. On observe une oscillation du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x = 0 \Leftrightarrow \ell = \ell_0$.

On peut donc associer u_C à x et i à v , étant donné que pour un condensateur $i = C\frac{du_C}{dt}$ et que $v = \frac{dx}{dt}$. Ainsi, **les échanges énergétiques sont les mêmes** entre l'énergie emmagasinée dans la déformation du ressort et l'énergie cinétique de la masse comme on va le voir juste après.

D Bilan énergétique

Définition 4.5 : énergies potentielle élastique et mécanique

Le ressort emmagasine une énergie *potentielle* lors de sa déformation, telle que

$$\mathcal{E}_{p,el} = \frac{1}{2}k(\ell - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}kx^2$$

On définit alors l'énergie mécanique totale \mathcal{E}_m du système par

$$\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

avec, évidemment, $\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}mv^2$.

Propriété 4.8 : conservation énergie

Dans le système masse-ressort horizontal sans frottements, l'énergie mécanique est conservée.

Démonstration 4.5 : conservation énergie

À partir de l'équation différentielle on multiplie par $\frac{dx}{dt}$ et on utilise que $ff' = (\frac{1}{2}f^2)'$ pour f une fonction :

$$\begin{aligned} m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left(\frac{1}{2}m \left(\frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2}kx^2 \right) &= 0 \end{aligned}$$

On a bien $\frac{1}{2}mv^2 + \frac{1}{2}kx^2 = \mathcal{E}_m$ conservé.

Implication 4.2 : vérification

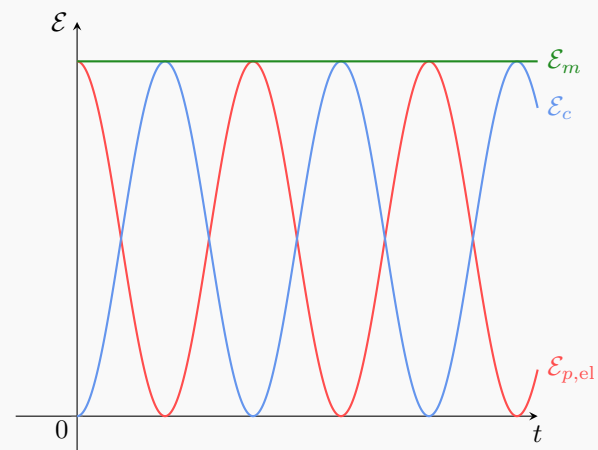
On vérifie avec les expressions analytiques trouvées, sachant que $\omega_0^2 = \frac{k}{m}$:

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}kx^2 &= \frac{1}{2}kx_0^2 \cos^2(\omega_0 t) \\ \frac{1}{2}mv^2 &= \frac{1}{2} \underbrace{m\omega_0^2}_{=k} x_0^2 \sin^2(\omega_0 t) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}kx_0^2 (\cos^2(\omega_0 t) + \sin^2(\omega_0 t)) \end{aligned}$$

Soit

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}kx_0^2 = \text{cste}$$

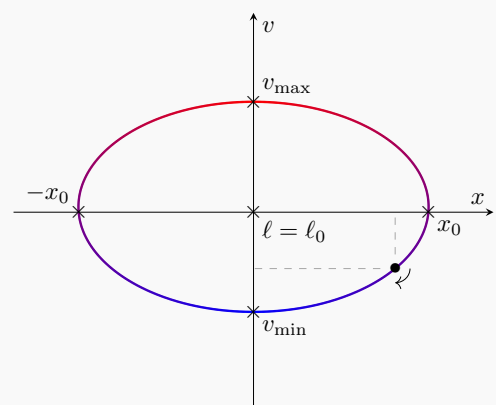
Graphique



E Analyse correspondance

Visualisation

Il est utile d'observer la physique des systèmes oscillants non pas dans un espace (grandeur, temps) mais dans un espace (**grandeur, dérivée**), qui permet plus rapidement de sonder son évolution. Par exemple, le ressort lâché à x_0 et $v_0 = 0$ voit sa position diminuer et sa vitesse augmenter (algébriquement) jusqu'à ce qu'il passe par sa position d'équilibre ($x = 0$) avec une vitesse extrême v_{\min} , avant de se comprimer en perdant de sa vitesse. Comme il n'y a **pas de perte dans cette étape**, elle se répète **symétriquement** en revenant à son point de départ.



En réalité, frottements existent, ou résistance existe : amortissement.

IV Complément : circuit LC montant

A Présentation

B Équation différentielle

C Solution et représentation

D Changement de variable : de générale à homogène

LC série montant. Équation différentielle avec $\omega_0^2 E$. $x = x - E$ fonctionne. ATTENTION : CI différentes ! $u_C(t=0) = 0$ et $i(t=0) = 0$. $A = -E$, $B = 0$, $u_C = E - E \cos(\omega_0 t)$. Graphique.

E Intérêt oscillateur harmonique

Le principal intérêt de l'observation régulière d'une oscillation est la mesure du temps. Une excitation quelconque (comme un échelon) produit un phénomène se reproduisant à intervalle régulier et fait alors apparaître un étalon temporel. Ce principe est utilisé :

- dans les horloges mécaniques à balancier : on exploite le mouvement régulier du pendule ;
- dans les horloges à ressort : la période est liée au rapport de l'inertie et de la raideur du système ;
- dans les horloges électroniques : un cristal de quartz dont la fréquence d'oscillation est précisément connue (en général une puissance de 2 en Hz) ;
- dans les horloges atomiques : on utilise la régularité des oscillations des ondes électromagnétiques absorbées par un atome. L'actuelle définition de la seconde est basée sur le fonctionnement d'une horloge atomique.

V Introduction amorti

A Équation différentielle

Propriété 4.9 : équation différentielle

Équilibre x_{eq}

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

Avec ω_0 la pulsation **propre**, et Q facteur de qualité.

B Évolutions en régime libre, exemple RLC

En réalité, nous observons que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Plus quantitativement :

- Lorsque la résistance est petite : on observe plusieurs oscillations. Nous avons câblé un circuit avec $L = 43 \text{ mH}$ et $C = 20 \text{ nF}$. On observe une série d'oscillations à la période $T = 186 \text{ }\mu\text{s}$. On observe environ 25 oscillations lorsque $R \approx 60 \text{ }\Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180 \text{ }\Omega$, 3 oscillations lorsque $R \approx 780 \text{ }\Omega$.
- Lorsque la résistance est plus grande : les oscillations disparaissent. Lorsque $R \approx 2,8 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250 \text{ }\mu\text{s}$ (à 95%). Lorsque $R \approx 10,8 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $900 \text{ }\mu\text{s}$.

VI Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

A Présentation

B Bilan énergétique

C Équation différentielle

D Solutions

VI.D.1 Conditions initiales

VI.D.2 Équation caractéristique

VI.D.3 Cas $\Delta < 0$: régime pseudo-périodique

VI.D.4 Cas $\Delta = 0$: régime critique

VI.D.5 Cas $\Delta > 0$: régime aperiodique