Électrocinétique – chapitre 5

Oscillateur amorti

Sommaire

Capacités exigibles

- ☐ Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.
- ☐ Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.
- ☐ Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.
- ☐ Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.
- ☐ Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.
- ☐ Réaliser un bilan énergétique.
- ☐ Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.
- ☐ Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.

L'essentiel

Définitions

Propriétés

Implications

Interprétations

Démonstrations

Points importants

I Introduction

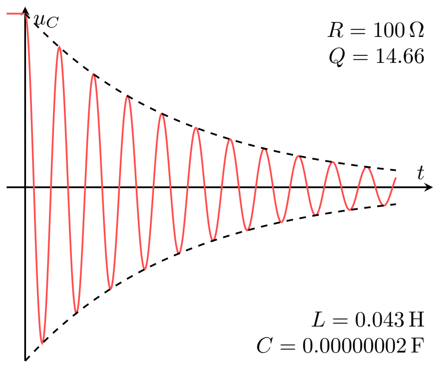
I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC

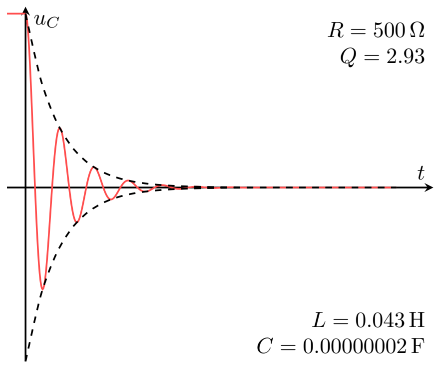
En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC suivant [1], avec $L = 43\,\mathrm{mH}$ et $C = 20\,\mathrm{nF}$:

Figure 5.1

◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**.

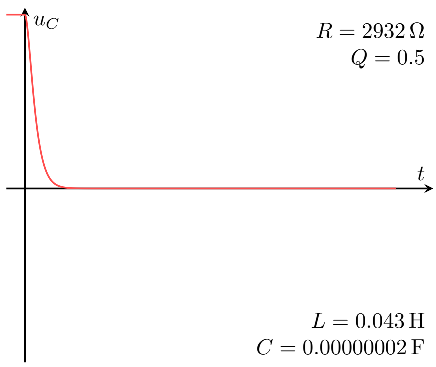
On observe une série d'oscillations à la période $T \approx 184\,\mathrm{\mu s}$. On observe environ 15 oscillations lorsque $R \approx 100\,\Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180\,\Omega$, 3 oscillations lorsque $R \approx 500\,\Omega$.

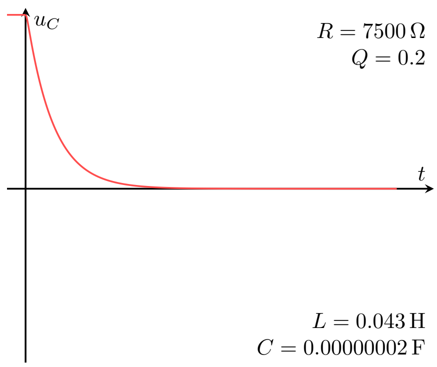




◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

Lorsque $R \approx 2{,}9\,\mathrm{k\Omega}$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250\,\mathrm{\mu s}$ (à 95%). Lorsque $R \approx 7{,}5\,\mathrm{k\Omega}$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $420\,\mathrm{\mu s}$.





Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

1) **Système oscillant**pour $R < R_c$, de pseudo-période [2] **supérieure à** T_0 ;
2) **Système non-oscillant**pour $R > R_c$: le transitoire **augmente avec** R.

1. https://tinyurl.com/ypbwcwfs
2. On parle de *pseudo*-période car le signal est diminué.

I/B Équation différentielle

Propriété E5.1 : Équation différentielle amorti

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'un équation différentielle du type :

1) x_{eq} la position d'équilibre 2) ω_0 la pulsation **propre** 3) Q le **facteur de qualité**

Remarque E5.1 : Analyse de l'équation

Par lecture de cette équation, Q est **sans dimension** pour qu'on retrouve que ω_0 s'exprime en s^{-1} car $\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ est de dimension $[x] \cdot \mathrm{s}^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus Q est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

I/C Équation caractéristique et régimes de solutions

♥ Définition E5.1 : Équation caractéristique amorti

Pour résoudre une équation différentielle **homogène**, on suppose une solution de la forme $x(t) = A\exp(rt)$ avec $r \in \mathbb{C}$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'**équation caractéristique** :

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant Δ est

♥ Implication E5.1 : Régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r :

Q $>$ 1/2 :

Q $=$ 1/2 :

Q $<$ 1/2 :

Notation E5.1 : $\pm$ et $\mp$

Il est courant de noter les racines $r_\pm$ pour dénoter à la fois r_+ et r_-. Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe $\pm$, ce qui signifie que r_+ correspond à l'expression avec le $+$, et r_- correspond à l'expression avec le $-$.

Si l'expression contient le signe $\mp$, c'est l'opposé : r_+ correspond à l'expression avec $-$.

Important E5.1 : Solutions oscillateur amorti

	Racines	Solution
Pseudo-pér.	$r_\pm = -\dfrac{\omega_0}{2Q} \pm \mathrm{j}\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \dfrac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2-1}$	$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\dfrac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \times \underbrace{[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$
Critique	$r = -\dfrac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$x(t) = (At+B)\exp(-\omega_0 t)$
Apériodique	$r_\pm = \dfrac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1-4Q^2}\right)$	$x(t) = A\exp(r_+ t) + B\exp(r_- t)$

II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

II/A Présentation

Définition E5.2 : Circuit RLC libre

- Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- **On suppose le condensateur initialement chargé**.
- À $t=0$, on coupe le générateur.

Figure 5.2

II/B Bilan énergétique

Démonstration E5.1 : Bilan de puissance RLC libre

On fait un bilan de puissances :

Propriété E5.2 : Bilan de puissance RLC libre

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

avec $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}C{u_C}^2 + \frac{1}{2}Li^2$.

Important E5.2 : Évolution énergétique RLC série

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C, d'où l'amortissement.

II/C Équation différentielle du circuit

Démonstration E5.2 : Équation différentielle RLC libre

Avec la loi des mailles,

On détermine l'expression de Q par identification :

Propriété E5.3 : Équation différentielle RLC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC en régime libre est

◇

◇

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

II/D Résolutions pour chaque cas

II/D) 1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

II/D) 1.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.3 : Solution pseudo-périodique

On part de l'équation caractéristique :

donc

Ainsi,

d'où la définition de Ω : $$\boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

◇ On trouve B avec la seconde CI :

♥ Propriété E5.4 : Solution pseudo-périodique

Pour un facteur de qualité $Q > 1/2$, u_C s'exprime par

avec $$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

La période des oscillations est alors

Les enveloppes sont

$$y(t) = \pm E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

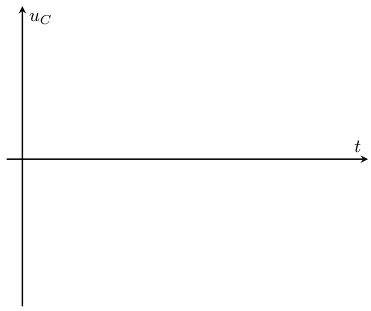


Figure 5.3

Interprétation E5.1 : Résultat pseudo-périodique

La solution du polynôme caractéristique s'écrit donc comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution d'ordre 2 harmonique** :

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1.

Avec les propriétés de l'exponentielle ($e^{a+b} = e^a e^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2 :

II/D) 1.2 Régime transitoire

Démonstration E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér.

L'amplitude varie selon $E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$; on définit donc t_{95} tel que

Propriété E5.5 : Régime transitoire $Q > 1/2$

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

Implication E5.2 : Résultat à grand Q

Avec ces résultats on remarque en effet que quand $Q \to \infty$, on a à la fois

$$\boxed{\Omega \approx \omega_0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T \approx T_0}$$

Mais aussi

$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + {\omega_0}^2 u_C = 0} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{u_C(t) = E\cos(\omega_0 t)}$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.

Interprétation E5.2 : Espace des phases pseudo-pér.

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C,i) n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**.

On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue.

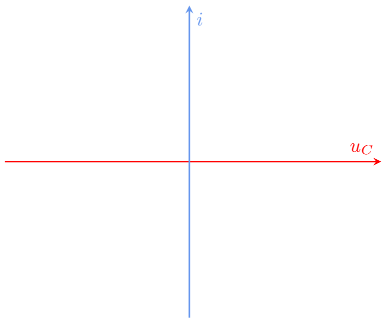


FIGURE 5.4 – Faible amortissement

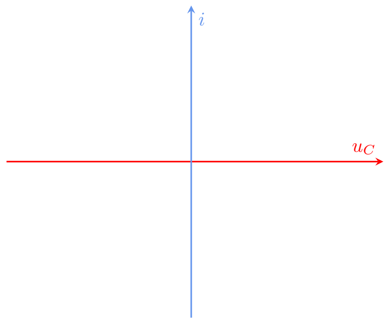


FIGURE 5.5 – Moyen amortissement

II/D) 2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

II/D) 2.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.5 : Solution critique

La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut

soit

◇ On trouve B avec la première condition initiale :

◇ On trouve A avec la seconde CI :

Propriété E5.6 : Solution critique

Pour un facteur de qualité $Q = 1/2$, u_C s'exprime par

et on n'observe **pas une oscillation**.

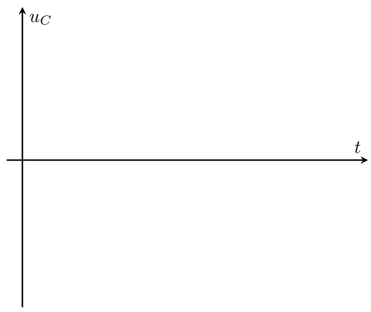


FIGURE 5.6

Interprétation E5.3 : Espace des phases critique

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.

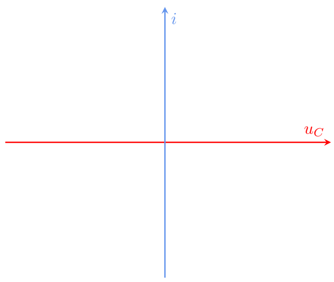


Figure 5.7

II/D) 2.2 Régime transitoire

Démonstration E5.6 : Régime transitoire critique

En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance exponentielle, on a

Propriété E5.7 : Régime transitoire critique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

II/D) 3 Cas $\Delta > 0$: régime apériodique

II/D) 3.1 Solution de l'équation

Démonstration E5.7 : Solution apériodique

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

◇ Avec la première CI :

◇ Avec la seconde CI :

En combinant, on trouve

et

Or,

Propriété E5.8 : Solution apériodique

Pour un facteur de qualité $Q < 1/2$, u_C s'exprime par

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour $Q = 1/2$.

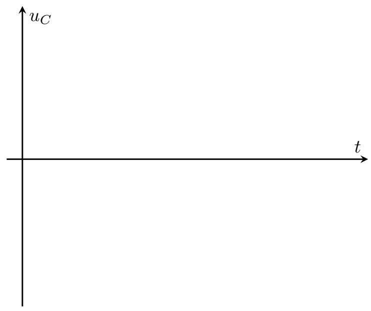


FIGURE 5.8

Interprétation E5.4 : Espace des phases apériodique

Pendant le régime apériodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher u_C d'osciller, mais également pour **ralentir sa diminution** vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire $\frac{du_C}{dt}$ plus petit donc i plus petit.

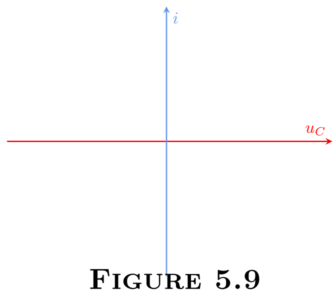


FIGURE 5.9

II/D) 3.2 Régime transitoire

Démonstration E5.8 : Régime transitoire apériodique

La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « **moins décroissante** ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc r_- et r_+.

On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle) :

ce qui est vrai.

Or,

On estime alors la durée du régime transitoire à $\boxed{\ln(20)/|r_+|}$.

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{x \ll 1}{\sim} 1 + x/2}$ pour simplifier r_+ :

Avec $\ln(20) \approx \pi$:

Propriété E5.9 : Régime transitoire apériodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

Implication E5.3 : Résultat à faible Q

Quand $Q \longrightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle :

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de $r_{\pm}$ tendent vers la même valeur $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$: en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance :

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R\sqrt{\frac{\cancel{C}}{L^2\cancel{C}}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$.

III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

III/A Présentation

Définition E5.3 : Situation initiale et bilan des forces

- **Système** :
- **Référentiel** :
- **Repère** :
- **Repérage** :
- **Position initiale** :
- **Vitesse initiale** :

FIGURE 5.10

- **Bilan des forces :**

III/B Équation différentielle

Démonstration E5.9 : Équation ressort amorti

Avec le PFD :

Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve donc

On identifie ω_0 et Q :

Propriété E5.10 : Équation ressort amorti

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\boxed{\begin{aligned} &\frac{\mathrm{d}^2\ell}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2\ell(t) = {\omega_0}^2\ell_0 \\ \Leftrightarrow\ &\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2x(t) = 0 \end{aligned}}$$

◇

◇

ℓ_0 **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

Important E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x_{\mathrm{eq}} = 0 \Leftrightarrow \ell_{\mathrm{eq}} = \ell_0$.

Ici, c'est le coefficient de frottements α qui dissipe : on l'associe à R.

Méca$\longleftrightarrow$Élec
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$
$\longleftrightarrow$

III/C Bilan énergétique

Propriété E5.11 : $\mathcal{P}$ ressort

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionellement au coefficient de friction α :

Démonstration E5.10 : $\mathcal{P}$ ressort

À partir du PFD $\times v$:

On a bien $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}$ qui diminue.

III/D Solutions

Propriété E5.12 : Solutions ressort

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par x_0

III/E Résumé oscillateurs amortis

Important E5.4 : Résumé – pas de par cœur !

Pseudo-périodique	**Critique**	**Apériodique**
$\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	$\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$	$\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$
$r_{\pm} =$ $\Omega =$	$r =$	$r_{\pm} =$
$u_C(t) =$	$u_C(t) =$	$u_C(t) =$
$t_{95} \approx$	$t_{95} \approx$	$t_{95} \approx$