Oscillateurs et transformation de la matière

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont *autorisées*

Au programme

Oscillateurs harmonique et amortis (mécanique et électricité), transformation et équilibre chimique.

Sommaire

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- A : application numérique mal faite ;
- N : numéro de copie manquant ;
- P : prénom manquant ;
- E : manque d'encadrement des réponses ;
- M : marge non laissée ou trop grande ;
- V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- Q : question mal ou non indiquée ;
- C : copie grand carreaux ;
- U : mauvaise unité (flagrante) ;
- H : homogénéité non respectée ;
- S : chiffres significatifs non cohérents ;
- φ : loi physique fondamentale brisée.

Attention

Au moins un exercice de transformation de la matière et un exercice d'oscillateurs doivent être traités !

Remarques antérieures

1) Inscrire dans le cadre attitré une remarque **pertinente** issue du **DS03** de l'**année précédente**.

2) De même avec une remarque pertinente du **DS02** de **cette année**.

/31 E1 Synthèse de l'ammoniac

L'ammoniac $NH_3(g)$ est un intermédiaire important dans l'industrie chimique qui l'utilise comme précurseur pour la production d'engrais, d'explosifs et de polymères.

En 2010, sa production mondiale était d'environ 130 millions de tonnes. La production de telles quantités de ce gaz a été rendue possible par l'apparition du procédé HaberBosch qui permet la synthèse de l'ammoniac à partir du diazote, présent en abondance dans l'atmosphère, et du dihydrogène, obtenu par reformage du méthane à la vapeur d'eau, selon la réaction :

$$\mathrm{N_{2(g)}} + 3\,\mathrm{H_{2(g)}} = 2\,\mathrm{NH_{3(g)}} \qquad K^\circ(723\,\mathrm{K}) = 2{,}8 \times 10^{-5}$$

Cette transformation chimique étant lente, on utilise un catalyseur à base de fer pour l'accélérer.

Les réactifs de la synthèse, diazote et dihydrogène, sont introduits en proportions stœchiométriques dans le réacteur qui est maintenu, tout au long de la synthèse, à une pression totale $P = 300P^\circ$ et à une température T de 723 K.

On notera n_0 la quantité de matière initiale de diazote introduit dans le réacteur.

1 Réaliser un tableau d'avancement pour les lignes initiales et intermédiaires. Laissez la ligne équilibre vide pour la compléter après.

2 Rappeler la définition du rendement. Exprimer le rendement à l'équilibre ρ de la synthèse en fonction de n_0 et ξ_{eq}. En déduire les expressions des quantités de matière en fonction de n_0 et ρ en complétant le tableau précédent.

3 Donner la définition du quotient réactionnel pour cette équation. Relier alors la constante d'équilibre K° aux pressions partielles à l'équilibre des différents constituants du système et à la pression standard P°.

4 Relier la constante d'équilibre K° aux quantités de matière à l'équilibre des différents constituants du système, à la quantité de matière totale à l'équilibre n_{tot}, à la pression totale P et à la pression standard P°.

5 En déduire alors la relation entre K°, ρ, P et P°.

6 Montrer que ρ est solution d'un polynôme de degré 2, de la forme

$$C\rho^2 - 2C\rho + C - 4 = 0$$

avec C une constante à exprimer en fonction de K° **uniquement**. Donner alors l'expression analytique de ρ en fonction de C. Application numérique.

7 Partant d'un état d'équilibre, on diminue la pression totale P à température constante. Comment évolue le rendement ρ ?

/38

E2 Réaction du dibromure de cuivre

On considère la dismutation du dibromure de cuivre selon l'équation :

$$2\,\mathrm{CuBr_{2(s)}} = 2\,\mathrm{CuBr_{(s)}} + \mathrm{Br_{2(g)}}$$

Cet équilibre se déroule dans un réacteur de volume constant $V = 1{,}0\,\mathrm{L}$. On mesure la pression à l'équilibre dans le réacteur, P_{eq}, en fonction de la température T. Dans les cas d'un excès de $CuBr_2$, les résultats sont compilés dans le tableau suivant :

Tableau 3.1 – Pression d'équilibre de la dismutation du dibromure de cuivre

T (K)	473	488	503	523
P_{eq} (mbar)	52,6	54,2	140,8	321,1

1 Exprimer puis calculer la valeur de la constante d'équilibre à la température $T = 200\,°\mathrm{C}$.

On introduit une quantité de matière $n_1 = 2{,}00 \times 10^{-3}$ mol de $CuBr_2$ dans le réacteur. La température est supposée constante à 200 °C.

2 Déterminer la composition et la pression à l'état final. Comment s'appelle cet état final ?

3 Préciser l'évolution du système précédent pour les trois modifications suivantes :

a – Ajout de $CuBr_2$ à T et P constantes.

b – Ajout de CuBr à T et P constantes.

c – Ajout de Br_2 à T et P constantes.

On considère maintenant une quantité de matière initiale de $CuBr_2$ $n_2 = 1{,}00\times10^{-2}$ mol dans les mêmes conditions.

4 Déterminer la composition et la pression à l'état final. Comment s'appelle cet état final ?

5 Préciser l'évolution du système précédent pour les trois modifications suivantes :

a – Ajout de $CuBr_2$ à T et P constantes.

b – Ajout de CuBr à T et P constantes.

c – Ajout de Br_2 à T et P constantes.

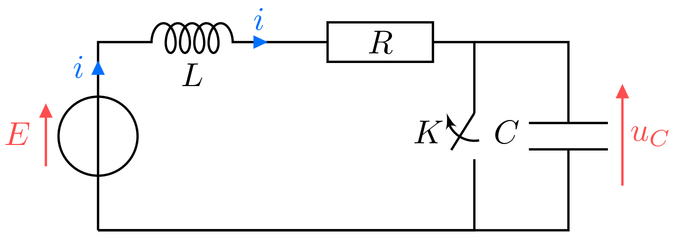
6 On souhaite maintenant déterminer l'influence du volume du réacteur sur la pression mesurée à l'état final P_f, à température constante et à partir d'un état initial contenant n_0 moles de $CuBr_2$.

Tracer le graphique $P_f = f(V)$ et préciser les coordonnées du point remarquable.

/29 E3 RLC échelon montant

Indiquer la ou les bonnes réponses en justifiant tout votre raisonnement.

On considère un circuit RLC série, alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice E constante comme schématisé ci-contre. Le condensateur peut être court-circuité lorsque l'interrupteur K est fermé. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la bobine et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur C.



Le condensateur est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue, pour que le régime permanent soit établi. À l'instant pris comme origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

1 Que valent l'intensité $i\left(0^+\right)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$, succédant immédiatement à l'ouverture de l'interrupteur K ? Justifier tout votre raisonnement.

A $i\left(0^+\right) = 0$ B $i\left(0^+\right) = \frac{E}{R}$ C $u_C\left(0^+\right) = 0$ D $u_C\left(0^+\right) = E$

2 Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$. On la mettra sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u_C(t) = \alpha$$

Exprimer ω_0 et Q.

A $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ B $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ C $Q = R\sqrt{\frac{L}{C}}$ D $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

3 Exprimer α.

A $\alpha = 0$ B $\alpha = E$ C $\alpha = QE$ D $\alpha = {\omega_0}^2\, E$

4 Que peut-on affirmer concernant le facteur de qualité ?

A La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 2$.
B La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 1/2$.
C Plus la valeur de l'inductance est élevée, plus le facteur de qualité est faible.
D Plus la valeur de la capacité est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

Dans la suite, on considère que la bobine possède une inductance $L = 50\,\mathrm{mH}$ et que la capacité du condensateur vaut $C = 20\,\mu\mathrm{F}$. On souhaite obtenir un facteur de qualité $Q = 10$.

5 Calculer la valeur à donner à la résistance R du résistor.

A $R = 0{,}002\,\Omega$ B $R = 0{,}02\,\Omega$ C $R = 5\,\Omega$ D $R = 500\,\Omega$

On admet alors que la tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\left[A\cos\left(\Omega t\right) + B\sin\left(\Omega t\right)\right] + u_{C,p}$$

6 Exprimer τ en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

A $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$ B $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ C $\tau = \frac{\omega_0}{Q}$ D $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$

7 Exprimer la pseudo-pulsation Ω en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

A $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ B $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ C $\Omega = \omega_0\left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$ D $\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$

8 Exprimer $u_{C,p}$ en fonction de E. Justifier tout votre raisonnement.

A $u_{C,p} = E$ B $u_{C,p} = 0$ C $u_{C,p} = {\omega_0}^2 E$ D $u_{C,p} = 2E$

9 Exprimer A. Justifier tout votre raisonnement.

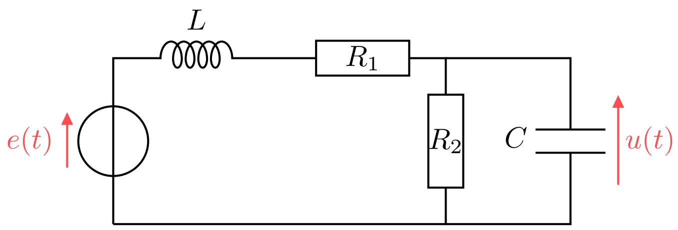
A $A = E$ B $A = -E$ C $A = 0$ D $A = E/2$

10 Exprimer B. Justifier tout votre raisonnement.

A $B = \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)$ B $B = \frac{E}{RC\omega_a}$ C $B = 0$ D $B = \frac{E}{\tau\omega_a}$

/60 P1 Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\begin{cases} e(t<0)=0 \\ e(t\geq 0)=E \end{cases}$ dans le circuit ci-dessous.



1 Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

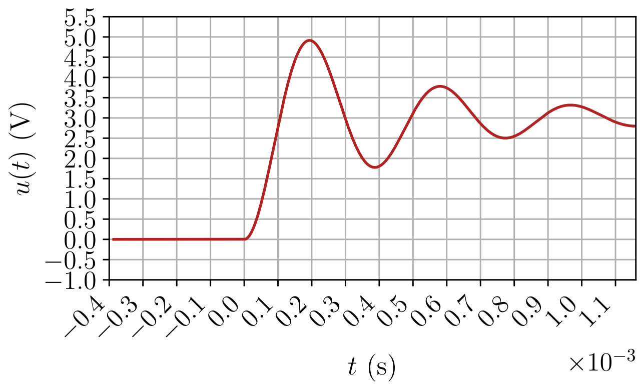
2 Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2}+2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+{\omega_0}^2u={\omega_0}^2u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

3 Exprimer la forme générale de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ, de la pulsation et de deux constantes d'intégration qu'on ne cherche pas à déterminer pour le moment.

4 Justifier entièrement les conditions initiales. Deux schémas sont attendus.

5 Déterminer alors l'expression complète de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ et Ω.

On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.



6 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique de la pseudo-période T.

7 Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique du décrément logarithmique

$$\boxed{\delta=\frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t)-u_\infty}{u(t+nT)-u_\infty}\right)}$$

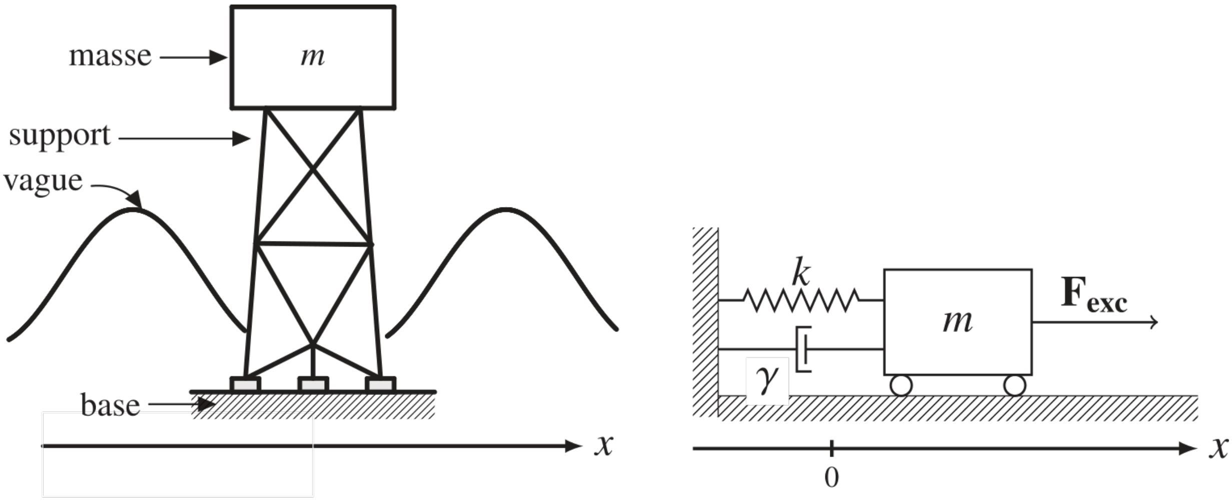
8 Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

9 Sachant que $R_1=1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2=50\,\mathrm{k\Omega}$ et $L=500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

/52 P2 Mouvements d'une plateforme *offshore*

On s'intéresse à la résolution d'une équation du mouvement dans une approche classique de la mécanique afin d'étudier le mouvement simplifié d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un système à un degré de liberté considéré comme un oscillateur harmonique : une masse est reliée à un ressort, avec amortissement.

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (cf figure 1(a)).



(a) (b)

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ comme schématisé sur la figure 1(b). La masse se déplace selon une seule direction, parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t.

Ainsi, les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. Le vecteur unitaire de l'axe Ox est noté $\overrightarrow{u_x}$.

La masse se déplace sur la base horizontale sans frottements sur le support. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$.

La force totale $\overrightarrow{F_{tot}}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale à la base horizontale $\overrightarrow{R_N}$, à la force de frottement $\overrightarrow{F_d} = -\gamma\overrightarrow{v}$ où γ est la constante d'amortissement positive, permettant de prendre en compte l'effet de l'eau environnante, à la force de rappel $\overrightarrow{F_k}$ du ressort et au poids $\overrightarrow{P}$ de la masse m.

Outils mathématiques

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

1 Établir entièrement le système d'étude.

2 Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m. La mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{3.1}$$

On exprimera ω_0 et ξ en fonction de k, m et γ. On rappelle que $\xi = Q/2$.

3 Dans le cas où $\xi < 1$, justifier que $x\,(t)$ peut prendre la forme suivante :

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

où Ω est la pseudo-pulsation que l'on exprimera en fonction de ω_0 et ξ.

4 En remarquant qu'à $t = 0$, $x\,(0) = x_0$ et $\dot{x}\,(0) = v_0$, déterminer les expressions des deux coefficients réels A et B en fonction de x_0, v_0, ξ, ω_0 et Ω.

5 Montrer que l'on peut aussi obtenir une forme de la solution du type :

$$x(t) = X_m\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi) \tag{3.2}$$

On exprimera X_m et φ en fonction de A et B. Quelques outils mathématiques sont donnés en début de cet exercice.

6 Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $X_m e^{-\xi\omega_0 t}$, x_0 et $T = 2\pi/\Omega$ la pseudo-période.

7 Justifier qualitativement que l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?

8 On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = T$, où T est la période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (3.2) et en considérant que $\xi \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx 2\pi\xi$$

9 Toujours dans le cas où $\xi \ll 1$, le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en figure 2 ci-dessous. En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure 2, déterminer les valeurs numériques de k, ξ et γ (avec leurs unités). Comment ce tracé serait-il modifié si ξ augmentait (un rapide graphique peut permettre d'être plus explicite) ?

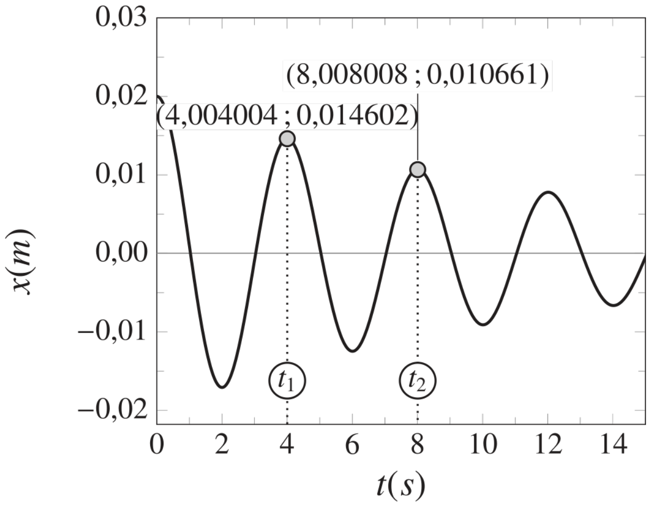


Figure 3.1 – Déplacement horizontal de la plateforme dans le temps.