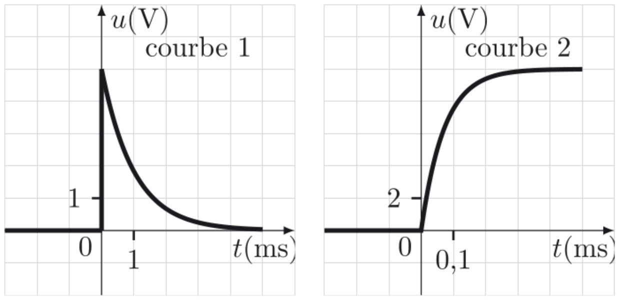
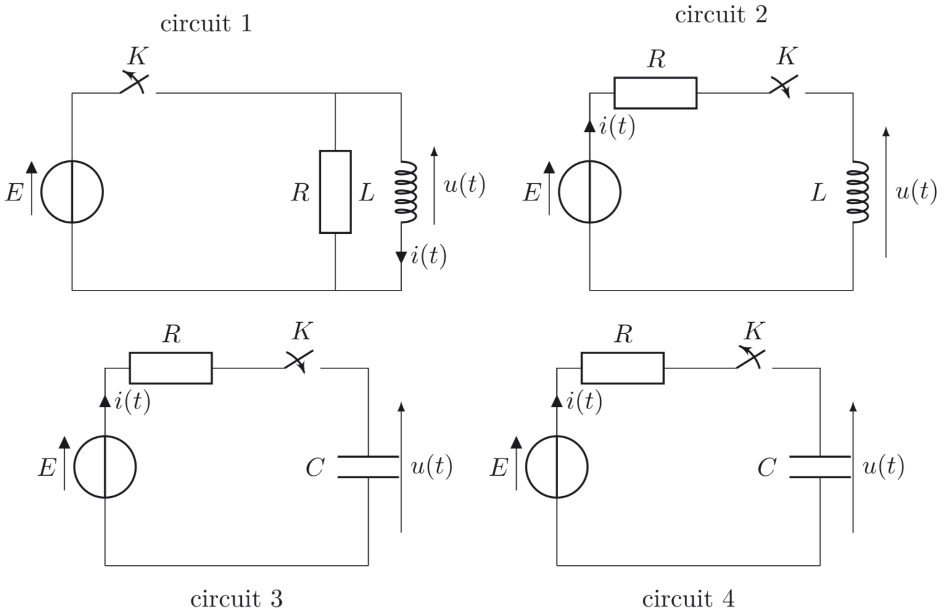
Correction du TD d'application

☆ I Quelle courbe pour quel circuit ?

Um étudiantx distrait, mais surtout maladroitx, rentrant d'une séance de travaux pratiques sur l'observation de régimes transitoires sur les circuits du premier ordre, fait tomber toutes ses notes qui s'éparpillent. En les rangeant, iel retrouve alors 2 courbes expérimentales, tracées en utilisant une résistance $R = 1\,\text{k}\Omega$, mais iel ne sait plus à quel montage les attribuer.





1) Associer chaque courbe avec l'un des 4 montages ci-dessus, et calculer les valeurs de E et L ou C utilisées. Tous les interrupteurs s'ouvrent ou se ferment à $t = 0$.

Réponse

- Pour la courbe 1 : on observe une diminution exponentielle de la **tension** et une **discontinuité** de cette dernière en $t = 0$. Or, les condensateurs ont une tension continue à leurs bornes, cette courbe ne peut donc **pas** être issue d'un circuit avec un **condensateur** : ni le 3, ni le 4.

  Ensuite, comme c'est forcément une bobine, on observe que $u = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} > 0$, autrement dit l'intensité monte dans le circuit. Le circuit 1 s'ouvre à $t = 0$, donc l'intensité devrait y baisser : finalement il ne nous reste que le **circuit 2**.

  Dans ce circuit, la constante de temps est connue (cf. cours) et vaut $\tau = L/R$. On la détermine avec l'intersection entre la tangente en $t = 0$ et l'asymptote $u = 0$, où en trouvant l'instant où u et son asymptote ont un écart relatif de 37%, c'est-à-dire ici quand $u(\tau) = 1{,}8\,\text{V}$. On trouve dans tous les cas $\boxed{\tau = 1{,}0\,\text{ms}}$, soit $\boxed{L = 1{,}0\,\text{H}}$.
- Pour la courbe 2 : on observe une augmentation exponentielle de la tension et un continuité de cette dernière en $t = 0$. On peut donc affirmer que u est la tension aux bornes d'un ondensateur, et que ce dernier se charge : on y associe donc le **circuit 3**.

L'asymptote quand $t \to \infty$ est $u = E$, puisqu'alors $i = 0$ (comportement condensateur RP) et donc toute la tension du générateur se retrouve aux bornes de C (et pas de R car $i = 0$) ; ainsi, $\boxed{E = 10\,\mathrm{V}}$, et $u(\tau) = 6{,}3\,\mathrm{V}$ ou la tangente en 0 donnent $\boxed{\tau = 0{,}070\,\mathrm{ms}}$; comme ici $\tau = RC$, on trouve $\boxed{C = 7{,}0 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}}$.

II Associations en parallèle

On s'intéresse aux deux circuits ci-après, pour lesquels on ferme l'interrupteur K à $t = 0$. Les deux condensateurs sont initialement déchargés.

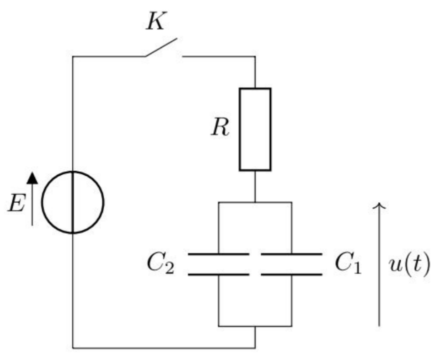


Figure 3.1 – 1er montage.

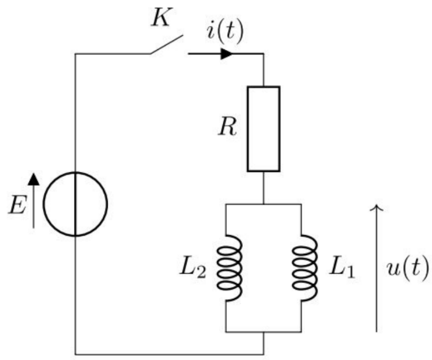


Figure 3.2 – 2d montage.

1) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ pour le premier montage.

Réponse

Avec la loi des mailles et d'Ohm, puis la loi des nœuds :

$$E = Ri + u \tag{1}$$

$$i = i_1 + i_2$$

RCT pour C

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = C_1\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + C_2\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$$

$$\text{Dans (1) : } \boxed{E = R(C_1 + C_2)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u}$$

2) À partir de cette équation, retrouver le composant équivalent aux deux condensateurs en parallèle.

Réponse

On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne un condensateur équivalent de capacité

$$C_{\mathrm{eq}} = C_1 + C_2$$

3) Déterminer l'équation différentielle satisfaite par $u(t)$ pour le second montage.

Réponse

$$
\begin{aligned}
\text{Loi des mailles et loi d'Ohm : } E &= Ri + u & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)\\
\Leftrightarrow 0 &= R\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} & (1)\\
\text{Loi des nœuds : } i &= i_1 + i_2 & \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(\cdot)\\
\Rightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{\mathrm{d}i_1}{\mathrm{d}t} + \frac{\mathrm{d}i_2}{\mathrm{d}t} & \text{RCT pour L}\\
\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} &= \frac{u}{L_1} + \frac{u}{L_2}\\
\text{Dans (1) : } & \boxed{0 = R\left(\frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}\right)u + \frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}}
\end{aligned}
$$

◇

4) À partir de cette équation, retrouver un composant équivalent aux deux bobines en parallèle.

Réponse

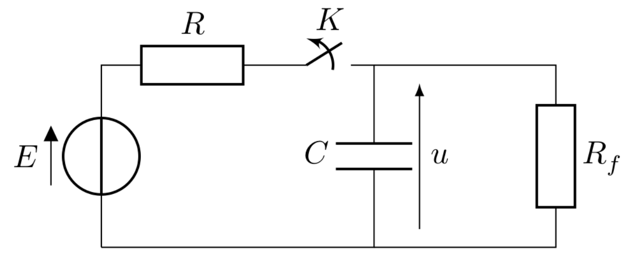
On constate qu'électriquement, l'association en parallèle donne une bobine équivalente d'inductance

$$\frac{1}{L_{\text{eq}}} = \frac{1}{L_1} + \frac{1}{L_2}$$

◇

☆ III Résistance de fuite d'un condensateur

Un condensateur non idéal peut être modélisé par une capacité C associée en parallèle avec une résistance R_f appelée résistance de fuite. Ce condensateur est complètement chargé sous une tension $E > 0$. Une fois le régime permanent atteint, la mesure, à l'aide d'un voltmètre parfait (résistance d'entrée infinie), de la tension u aux bornes du condensateur est égale à E.



À $t = 0$, on ouvre le circuit. Au bout d'un temps $T > 0$, la valeur mesurée de u est $E' < E$.

1) Comment peut-on expliquer ces observations ?

Réponse

En ouvrant le circuit, sans la résistance de fuite on s'attend à ce que le condensateur reste chargé, comme une pile. Or dans ce circuit, en ouvrant l'interrupteur la capacité C est reliée à la résistance R_f dans laquelle elle se décharge donc, ce qui explique la diminution de la tension.

◇

2) Donner l'expression de R_f en fonction de C, E, E' et T. Faire l'application numérique pour $C = 100\,\mathrm{pF}$, $T = 2\,\mathrm{min}$, $E = 10\,\mathrm{V}$ et $E' = 1\,\mathrm{V}$.

Réponse

On a la situation de décharge du cours, où l'équation différentielle sur u est

$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{u_C}{R_f C} = 0$$

Sachant que $u_C(t = 0) = E$, la solution s'écrit

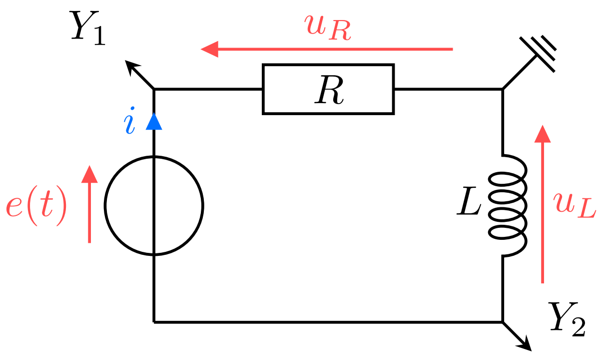
$$\boxed{u_C(t) = E\exp\left(-\frac{t}{R_f C}\right)}$$

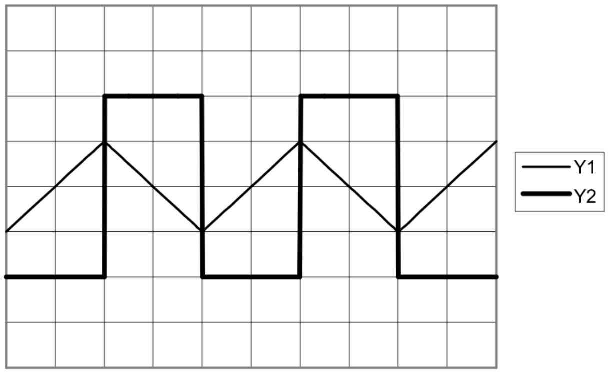
Pour que $u_C(T) = E'$, il faut donc $\exp\left(-\frac{T}{R_f C}\right) = \frac{E'}{E}$, et finalement

$$\boxed{R_f = \frac{T}{C \ln \frac{E}{E'}}} \qquad \text{donc} \qquad \boxed{R_f \approx 5{,}0 \times 10^{11}\,\Omega}$$

IV Circuit RL et oscilloscope

On considère le circuit ci-dessous constitué d'un générateur basse fréquence (GBF), d'une résistance de valeur R, d'une bobine d'inductance L (sa résistance de valeur r est négligeable dans ce circuit). Un oscilloscope est branché sur ce circuit. Le GBF délivre une tension périodique triangulaire. On obtient sur l'oscilloscope les courbes suivantes :





Données :

a) $R = 10\text{k}\Omega$ b) Voie 1 : 2 V/div c) Voie 2 : 50 mV/div d) Base de temps : 1 ms/div

1) Le branchement de la voie 1 relève la tension du point Y_1 jusqu'à la masse, et celui de la voie 2 du point Y_2 jusqu'à la masse. D'après les branchements figurant sur le schéma, quelles sont alors les grandeurs physiques qui sont visualisées sur l'écran de l'oscilloscope ?

Réponse

a) Voie 1 : u_R b) Voie 2 : $-u_L$

---

2) Vérifier que la forme de la tension u_L aux bornes de la bobine correspond bien à $L\frac{di}{dt}$.

Réponse

D'après la loi d'Ohm : $i(t) = \frac{u_R}{R}$. La courbe Y_1 est donc une image de l'intensité dans le circuit. Or, cette courbe est formée de morceaux de droites successivement croissantes et décroissantes. Sur chaque portion, la dérivée de la courbe est constante : sur les portions décroissantes, la pente est négative, et inversement.

Ainsi, la courbe de la voie Y_2 correspond bien à l'**opposé de la dérivée de la courbe de la voie** Y_1.
