Mécanique – chapitre 1

Cinématique du point

La **cinématique** est l'étude du mouvement en soi. On ne s'intéresse pas aux causes qui ont donné naissance au mouvement. Avant toute chose, introduisons le vocabulaire autour de l'objet d'étude.

I Système et point matériel

A Système

Définition

En mécanique, le **système** est l'objet ou groupe d'objets dont on souhaite étudier le mouvement.

La définition du système est primordiale et indispensable pour la mécanique. En effet, l'étude du mouvement sera radicalement différente entre les systèmes {bille} et {bille+Terre}. Il en sera de même en dynamique, où ce sont les forces **extérieures** au système qui entrent en jeu, il faut donc définir l'extérieur.

B Point matériel

Dans la cadre de la mécanique du point, la forme de l'objet importe peu. Ainsi, on choisira de suivre un point caractéristique du système, souvent son centre de gravité. Celui-ci pourra être repéré dans l'espace et le temps par 3+1 coordonnées.

Définition

Le point matériel est le point qui représente l'objet auquel on affecte toute la masse de l'objet considéré. Ce point, appelé souvent M et affecté de la masse m, est le point géométrique que l'on repère dans l'espace pour connaître son mouvement.

II Description et paramétrage du mouvement

A Notion de référentiel et relativité du mouvement

Pour décrire le mouvement d'un objet, on doit :
- dire par rapport à quoi il se déplace : on définit alors une **origine** ;
- dire dans quelle direction il se déplace : on fixe alors un **repère** (système de coordonnées) ;
- dire sur quel intervalle de temps il se déplace : on définit un repère de temps.

Définition

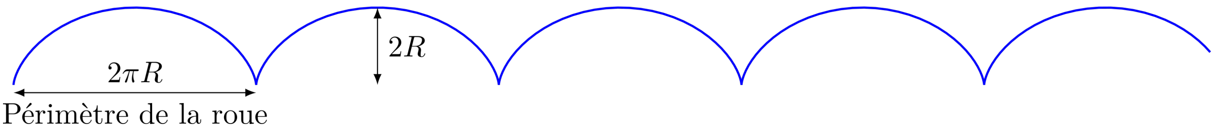
Un **référentiel**, noté $\mathcal{R}$, est une référence permettant de décrire le mouvement d'un objet, constitué par :
- un repère permettant de décrire l'espace ;
- une horloge permettant de mesurer le temps.

Un mouvement est toujours relatif, et **la description d'un mouvement dépend du référentiel**. Ainsi, on notera les grandeurs liées à un référentiel *via* l'indication de celui-ci en indice, précédé d'une barre oblique ou verticale selon la taille de la grandeur :

$$\boxed{\overrightarrow{x}_{/\mathcal{R}}} \quad \text{ou} \quad \boxed{\left.\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{x}}{\mathrm{d}t}\right|_{\mathcal{R}}}$$

Exemple

- Du point de vue de san voisin-e, læ passagær d'un train est immobile. Du point de vue du quai, cælui-ci est en translation.
- Du point de vue d'um cycliste, la valve de la roue est en rotation autour de l'axe de la roue. Selon um passant-e immobile, elle suit un mouvement de cycloïde. Son altitude atteint 0 à chaque tour de roue.



Nous resterons ici en mécanique **classique**, c'est-à-dire que les corps étudiés auront une vitesse très inférieure à celle de la lumière dans le vide. Ce faisant, les mesures de longueurs ou de durées seront **absolues** et indépendantes du référentiel. Ça n'est pas le cas en mécanique *relativiste*.

B Exemples de référentiels

Le mouvement dépendant du référentiel, il faut choisir le référentiel adéquat par rapport au mouvement que l'on souhaite étudier. Souvent, on choisit parmi trois référentiels classiques dit *galiléens* :

- Le référentiel **héliocentrique** est un référentiel dont le centre du repère est situé au centre du **Soleil**, et les trois axes du repère sont dirigés vers **trois étoiles lointaines considérées comme fixes** ; il est utile pour étudier les mouvements des planètes du système solaire.
- Le référentiel **géocentrique** est un référentiel centré au centre de la **Terre**, ses trois axes sont dirigés vers les trois **mêmes étoiles** que celles du référentiel de héliocentrique ; il est utilise pour étudier les mouvements de satellites terrestres par exemple ;
- Les référentiels **terrestres** sont des référentiels liés à des objets fixes à la **surface** de la Terre : lui est souvent associé un repère cartésien. Pour tous les mouvements qui se déroulent à la surface de la Terre, ce référentiel est approprié.

C Vecteur, base de projection et repère

Pour décrire le mouvement d'un point dans l'espace, il est nécessaire d'utiliser des vecteurs.

Définition

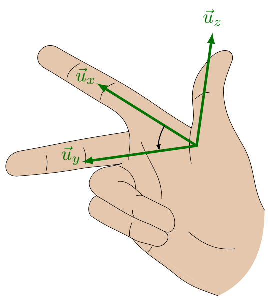
Un vecteur est un objet mathématique qui se dénote avec une flèche vers la droite au-dessus d'une lettre : $\overrightarrow{\cdot}$, et ayant :

- Un **point d'application** ;
- Une **direction** ;
- Un **sens** ;
- Une distance appelée **norme**, notée $\left\|\overrightarrow{\cdot}\right\|$.

Une égalité de vecteurs donne **trois** égalités de scalaires, pour chaque direction de l'espace.

On utilise pour ça une **base orthonormée directe**, constituée de 3 vecteurs :

- **Ortho** : les trois vecteurs de la base sont orthogonaux entre eux ;
- **Normée** : la norme des trois vecteurs de la base est égale à 1. On dit qu'ils sont *unitaires* ;
- **Directe** : respecte la règle de la maint droite (chaque vecteur est égal au produit vectoriel des deux précédents)

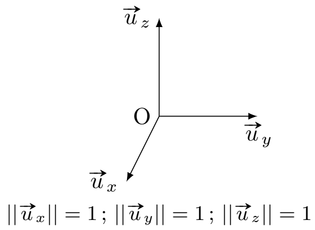


Les vecteurs de base n'ont **pas d'unité**. Ils définissent les trois directions dans lesquelles le point M pourrait se mouvoir. Pour que le repérage dans l'espace du point M soit optimal, on ajoute une origine O à la base : l'ensemble d'une **base** et d'une **origine** constituent un **repère**. Le plus simple est le repère cartésien :

Définition

Le repère cartésien est constitué d'une origine O autour de laquelle sont définis trois vecteurs $\overrightarrow{u_x}$, $\overrightarrow{u_y}$ et $\overrightarrow{u_z}$ de **direction constante dans le temps**. On trouve parfois la notation $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$, $\vec{e}_z$.

Jusqu'à notifié autrement, ce sera notre repère de prédilection.



III Position, vitesse et accélération

A Position

III.A.1 Définition

Définition

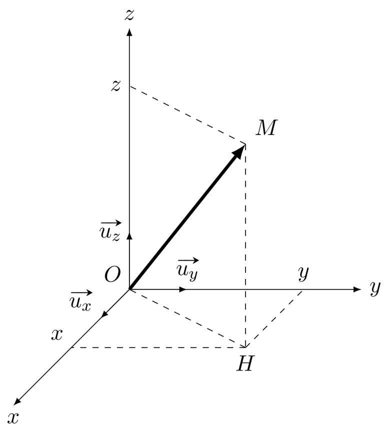
Le vecteur position noté $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$ est le vecteur qui permet de repérer un point M d'un système dans l'espace et le temps par rapport à l'origine O d'un repère. **Il est homogène à une distance**.

En coordonnées cartésiennes, la position d'un point M par rapport à l'origine O s'écrit :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_y}$$

et sa **norme** se calcule avec :

$$\mathrm{OM} = \left\|\overrightarrow{\mathrm{OM}}\right\| = \sqrt{x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2}$$



III.A.2 Déplacement élémentaire

Définition

Le **déplacement élémentaire** est le déplacement infiniment petit du point M pendant un temps infinitésimal dt :

$$\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t + \mathrm{d}t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}} = \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}}$$

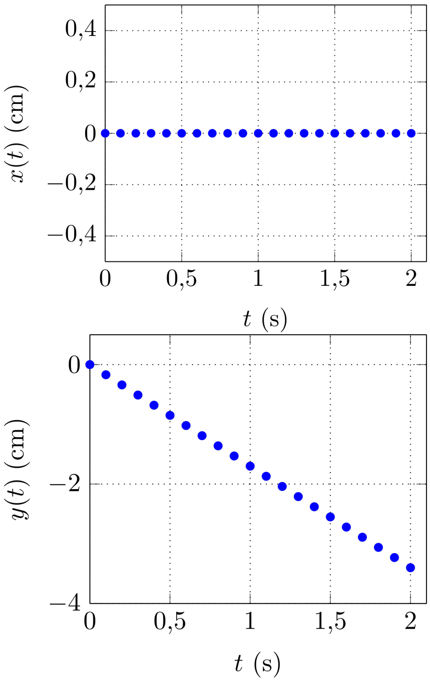
III.A.3 Équations horaires et trajectoire

Déf.

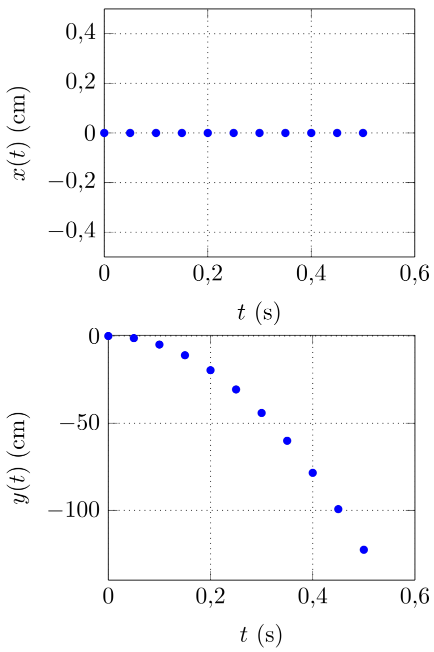
Les **équations horaires** du mouvement sont les fonctions $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$ exprimées **explicitement** en fonction du temps t.

En TP, on pourra étudier l'évolution de $x(t)$ et $y(t)$ dans différents cas :

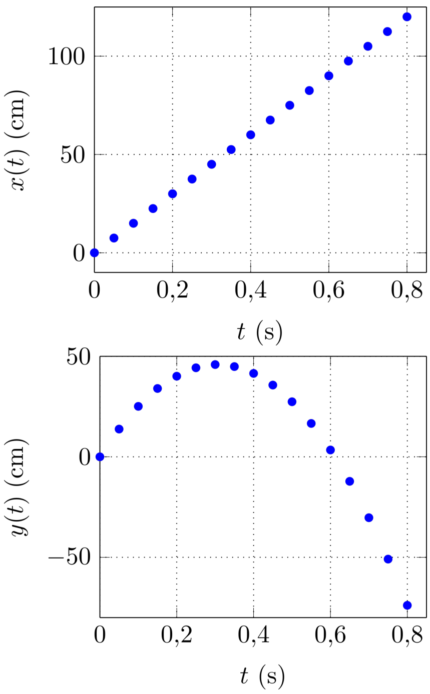
– chute dans le glycérol :



– chute libre sans vitesse initiale :

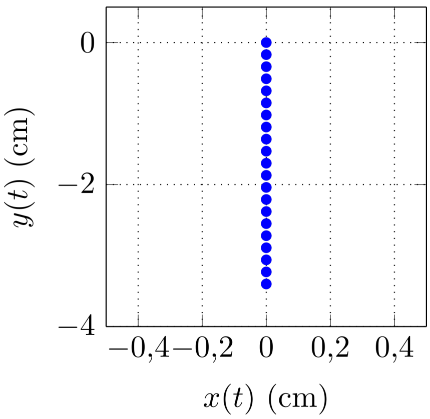


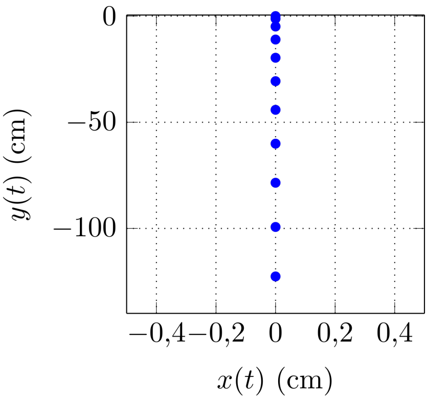
– chute libre avec vitesse initiale :

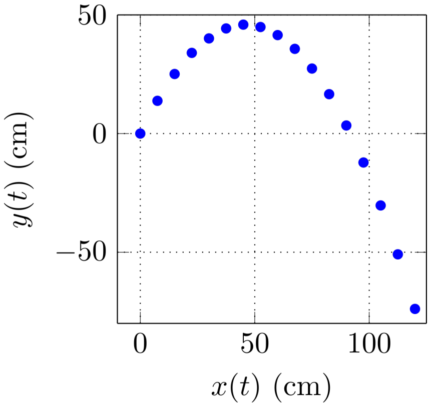


Déf. La **trajectoire** est l'ensemble des positions successives du point M au cours du temps. C'est le « dessin » fait par le mobile au cours du temps.

Sur les exemples précédents, la trajectoire est la courbe $y(x)$ car le mouvement est plan. C'est une droite dans les deux premiers cas, et une parabole dans le dernier.







B Vitesse

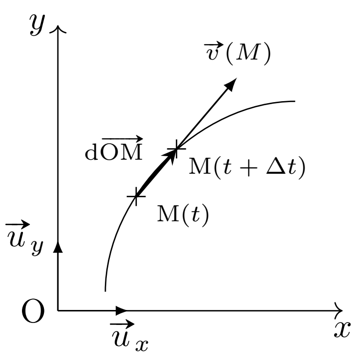
Définitions

On définit la **vitesse** comme le **taux d'accroissement** du vecteur position :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t+\Delta t) - \overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\Delta t}} \qquad \text{donc} \qquad [\vec{v}] = \mathrm{m\,s^{-1}}$$

Si on effectue des mesures très rapprochées, c'est-à-dire $\Delta t \to 0$, on définit alors la vitesse *instantanée* comme étant la *dérivée* du vecteur position :

$$\boxed{\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t}}$$



Ainsi, si le vecteur position est

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z}$$

alors

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}(x(t)\overrightarrow{u_x} + y(t)\overrightarrow{u_y} + z(t)\overrightarrow{u_z})$$

Or, **en coordonnées cartésiennes**, les vecteurs de base ne varient pas avec le temps : il ne changent pas de direction et restent unitaires. On peut donc les considérer comme des constantes multiplicatives, et ainsi

$$\vec{v}(t) = \frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_x} + \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_y} + \frac{\mathrm{d}z}{\mathrm{d}t}\overrightarrow{u_z}$$

Pour alléger l'écriture, on introduit une notation :

Notation

En mécanique, les dérivées **par rapport au temps** se notent avec un point sur la fonction :

$$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = \dot{x}(t)$$

Ainsi, on trouve

$$\boxed{\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \dot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \dot{z}(t)\overrightarrow{u_z}}$$

Exemple

En reprenant les exemples précédents :

- Pour la chute dans le glycérol, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y} = \text{cte}$. Ainsi, $\vec{v}$ est constant, et dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\dot{x} = 0$ et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable, dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\dot{x} = \text{cte}$ et $\dot{y}$ diminue linéairement : le vecteur vitesse est variable et change de direction.

Selon le contexte, on fera particulièrement attention à ne pas confondre le mot « vitesse » avec le **vecteur** ou avec sa **norme**. Une vitesse, en norme, ne saurait être négative ; un vecteur vitesse peut être négatif.

C Accélération

L'accélération est la grandeur physique qui mesure la variation de la vitesse.

Définitions

On définit l'**accélération** comme le **taux d'accroissement** du vecteur vitesse :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\vec{v}(t+\Delta t) - \vec{v}(t)}{\Delta t}} \qquad \text{donc} \qquad [\vec{a}] = \mathrm{m\,s^{-2}}$$

Si on effectue des mesures très rapprochées, c'est-à-dire $\Delta t \to 0$, on définit alors l'accélération *instantanée* comme étant la *dérivée* du vecteur vitesse, et dérivée seconde de la position :

$$\boxed{\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}\vec{v}(t)}{\mathrm{d}t}} \qquad \text{et} \qquad \boxed{\vec{a}(t) = \frac{\mathrm{d}^2\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t)}{\mathrm{d}t^2}}$$

Par distribution de l'opérateur $\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}$, on obtient

$$\boxed{\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}}$$

Exemple

En reprenant les exemples précédents :
- Pour la chute dans le glycérol, $\ddot{x}$ et $\ddot{y}$ sont nuls : le vecteur accélération est nul.
- Pour la chute libre sans vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.
- Pour la chute libre avec vitesse initiale, $\ddot{x} = 0$ et $\ddot{y}$ est constant : le vecteur accélération est constant, dirigé vers le bas.

Une accélération peut être négative ou nulle :
- En physique l'accélération est liée à la **variation du vecteur vitesse**, souvent différent de l'utilisation courante de ce mot.
- Pour que l'accélération soit nulle, il faut que toutes les composantes de la vitesse ne varient pas. Un mouvement peut être à vitesse constante en norme, mais d'accélération non nulle.

IV Exemples de mouvements

A Rappel mathématique

Rappel

- Si $\dot{x}(t) = 0$, alors $x(t) = x_0$ avec $x_0 = \text{cte}$.
- Si $\dot{x}(t) = v_0$, alors $x(t) = v_0 t + x_0$ avec $x_0 = \text{cte}$.
- Si $\dot{x}(t) = a_0 t$, alors $x(t) = \dfrac{1}{2} a_0 t^2 + x_0$ avec $x_0 = \text{cte}$.

B Mouvement rectiligne uniforme

Déf.

Un mouvement est dit *rectiligne uniforme* si le vecteur vitesse est constant.

Par exemple,

$$\vec{v} = v_0 \overrightarrow{u_x}$$

donne un mouvement rectiligne uniforme. C'est le cas de la chute dans le glycérol. Dans ce cas,

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = 0 \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

avec x_0, y_0 et z_0 des constantes que l'on peut calculer à l'aide des conditions initiales.

C Mouvement rectiligne uniformément accéléré

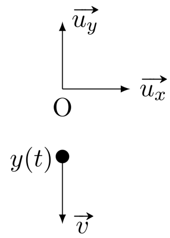
Déf.

Un mouvement est dit rectiligne *uniformément accéléré* si le vecteur **accélération** est constant et que le mouvement s'effectue en ligne droite.

Par exemple,

$$\vec{a} = -g \overrightarrow{u_y}$$

avec des conditions initiales nulles donne un mouvement rectiligne uniformément accéléré. C'est le cas de la chute libre sans vitesse initiale. Contextualisons l'étude :



- **Système** : point matériel.
- **Référentiel** : celui du laboratoire.
- **Repère** : cartésien avec $\overrightarrow{u_y}$ verticale ascendante.
- **Origine des temps** : le moment où la balle est lâchée, tel que $\vec{v}(0) = \vec{0}$.
- **Origine du repère** : O tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$.

Par définition,

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}(t)\overrightarrow{u_y} + \ddot{z}(t)\overrightarrow{u_z}$$

Soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x,0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y,0} \\ \dot{z}(t) = v_{z,0} \end{cases}$$

Or,

$$\vec{v}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} = 0 \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} = 0 \\ \dot{z}(0) = v_{z,0} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = 0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Seulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x(0) = y_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \\ z(0) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = 0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

Ce sont les équations horaires du mouvement, décrivant une droite dans l'espace.

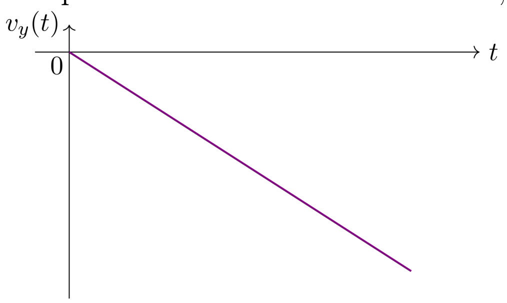


FIGURE 1.1 – Évolution de v_y avec le temps.

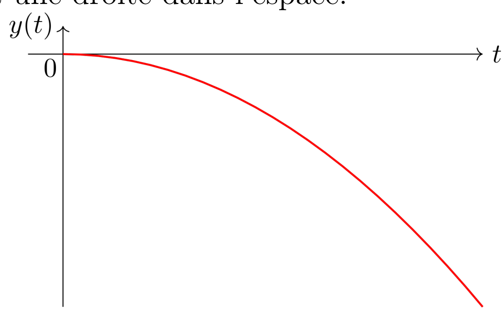
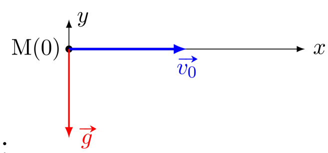


FIGURE 1.2 – Évolution de y avec le temps.

D Mouvement courbe uniformément accéléré

En reprenant la même situation que ci-dessus mais avec des conditions initiales non nulles, on trouvera un mouvement courbe. Prenons



$$\vec{v}(0) = v_0\overrightarrow{u_x}$$

avec $v_0 \neq 0$. On garde $\vec{a} = -g\overrightarrow{u_y}$, le même repère et la même origine : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = 0$. Par définition,

$$\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\vec{u_x} + \ddot{y}(t)\vec{u_y} + \ddot{z}(t)\vec{u_z}$$

Soit

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \\ \ddot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} \dot{x}(t) = v_{x,0} \\ \dot{y}(t) = -gt + v_{y,0} \\ \dot{z}(t) = v_{z,0} \end{cases}$$

Or,

$$\vec{v}(0) = v_0\vec{u_x} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_{x,0} = v_0 \\ \dot{y}(0) = v_{y,0} = 0 \\ \dot{z}(0) = v_{z,0} = 0 \end{cases}$$

Ainsi

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \\ \dot{y}(t) = -gt \\ \dot{z}(t) = 0 \end{cases} \Longrightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t + x_0 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + y_0 \\ z(t) = z_0 \end{cases}$$

Seulement,

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0} \quad \text{donc} \quad \begin{cases} x(0) = y_0 = 0 \\ y(0) = y_0 = 0 \\ z(0) = z_0 = 0 \end{cases}$$

Autrement dit,

$$\boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 \\ z(t) = 0 \end{cases}}$$

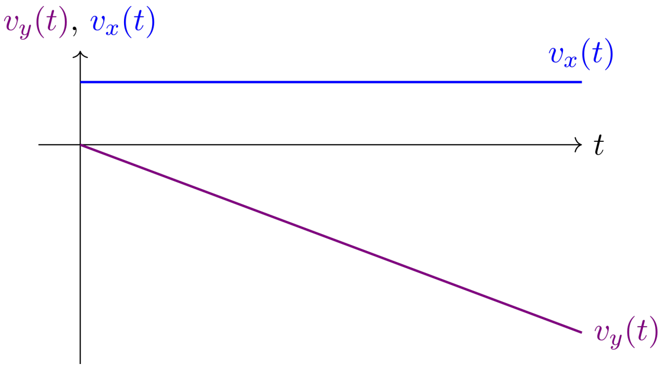


FIGURE 1.3 – Évolution des vitesses avec le temps.

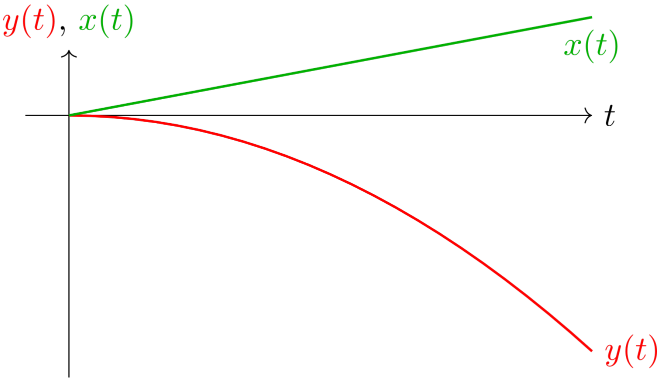
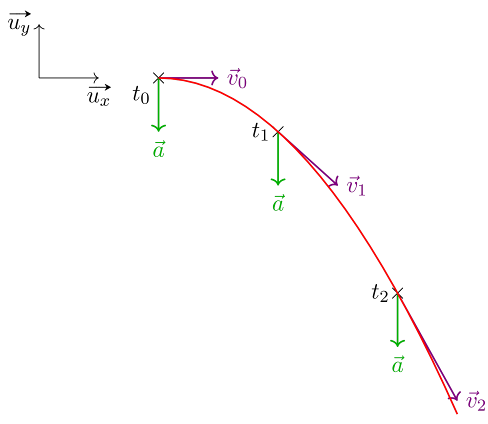


FIGURE 1.4 – Évolution des positions avec le temps.

Pour obtenir la trajectoire, on veut déterminer la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy. Pour cela, exprimons t en fonction de x et remplaçons t dans l'expression de y :



$$t = \frac{x}{v_0}$$

$$\Rightarrow y(x) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{x}{v_0}\right)^2 \Leftrightarrow \boxed{y(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2}x^2}$$

La trajectoire obtenue est alors une parabole.