

Mouvement à force centrale conservative

Au programme

Savoirs

- ◇ Conservation de l'énergie mécanique. Énergie potentielle effective. État lié et état de diffusion.
- ◇ Lois de Kepler.
- ◇ Cas particulier du mouvement circulaire : satellite, planète.
- ◇ Satellites géostationnaire, de localisation et de navigation, météorologique.

Savoir-faire

- ◇ Établir la conservation du moment cinétique à partir du théorème du moment cinétique et les conséquences de cette conservation : mouvement plan, loi des aires.
- ◇ Exprimer l'énergie mécanique d'un système conservatif ponctuel à partir de l'équation du mouvement.
- ◇ Exprimer la conservation de l'énergie mécanique et construire une énergie potentielle effective.
- ◇ Décrire qualitativement le mouvement radial à l'aide de l'énergie potentielle effective.
- ◇ Relier le caractère borné du mouvement radial à la valeur de l'énergie mécanique.
- ◇ Établir quand le mouvement est uniforme et déterminer sa période.
- ◇ Établir la troisième loi de Kepler dans le cas particulier de la trajectoire circulaire. Exploiter sans démonstration sa généralisation au cas d'une trajectoire elliptique.
- ◇ Exprimer l'énergie mécanique pour les mouvements circulaire et elliptique (en fonction du demi-grand axe).
- ◇ Différencier les orbites des satellites terrestres en fonction de leurs missions ; déterminer l'altitude d'un satellite géostationnaire et justifier sa localisation dans le plan équatorial.



Sommaire

I Forces centrales conservatives	3
I/A Force centrale	3
I/B Force centrale conservative	3
II Quantités conservées	4
II/A Conservation du moment cinétique	4
II/B Conservation de l'énergie mécanique	6
III Champs de force newtoniens	7
III/A Cas général	7
III/B Cas attractif	7
III/C Cas répulsif	9
IV Mécanique céleste	9
IV/A Qu'est-ce qu'une ellipse ?	9
IV/B Lois de KEPLER	10
IV/C Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation	10
V Satellite en orbite terrestre	12
V/A Vitesses cosmiques	12
V/B Satellites artificiels	13

Résultats phares



Liste des définitions

Définition 7.1 : Force centrale	3
Définition 7.2 : Force newtonienne	7
Définition 7.3 : Ellipse	9
Définition 7.4 : 1 ^{re} vitesse cosmique	12
Définition 7.5 : 2 ^{de} vitesse cosmique	13
Définition 7.6 : Définition	13
Définition 7.7 : Satellite de positionnement	15
Définition 7.8 : Satellites circumpolaires	15



Liste des propriétés

Propriété 7.1 : Énergie potentielle d'une force centrale conservative	3
Propriété 7.2 : Conservation du moment cinétique	4
Propriété 7.3 : Énergie potentielle effective	6
Propriété 7.4 : 1 ^{re} vitesse cosmique	12
Propriété 7.5 : 2 ^{de} vitesse cosmique	13
Propriété 7.6 : Altitude orbite géostationnaire	15
Loi 7.1 : Lois de KEPLER	10



Liste des corollaires

Corollaire 7.1 : Conservation du moment cinétique : mouvement plan	5
Corollaire 7.2 : Conservation du moment cinétique : loi des aires	5
Corollaire 7.3 : Conservation du moment cinétique : constante des aires	6



Liste des démonstrations

Démonstration 7.1 : Énergie potentielle d'une FCC	3
Démonstration 7.2 : Conservation du moment cinétique	5
Démonstration 7.3 : Conservation du moment cinétique : mouvement plan	5
Démonstration 7.4 : Conservation du moment cinétique : loi des aires	6
Démonstration 7.5 : Conservation du moment cinétique : constante des aires	6
Démonstration 7.6 : Énergie potentielle effective	7
Démonstration 7.7 : Démonstration vitesse circulaire	11
Démonstration 7.8 : Période circulaire	11
Démonstration 7.9 : \mathcal{E}_m circulaire	12
Démonstration 7.10 : Première vitesse cosmique	12
Démonstration 7.11 : Seconde vitesse cosmique	13



Liste des applications

Application 7.1 : Énergies potentielles gravitationnelle et électrostatique	4
Application 7.2 : Troisième loi de KEPLER	10



Liste des points importants

Important 7.1 : Vitesse des orbites circulaires	10
Important 7.2 : Période circulaire	11
Important 7.3 : \mathcal{E}_m circulaire	12



Liste des erreurs communes

Attention 7.1 : Constantes dans les \mathcal{E}_p	4
Attention 7.2 : Vitesse des orbites elliptiques	11
Attention 7.3 : Jours solaire et sidéral	14



I Forces centrales conservatives

I/A Force centrale

Définition 7.1 : Force centrale

Une force \vec{F} est dite **centrale** s'il existe un point O fixe (dans \mathcal{R}) tel que \vec{F} soit colinéaire à \overrightarrow{OM} pour tout point M; O est alors appelé **centre de force**. Autrement dit,

$$\vec{F} \text{ centrale} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} \parallel \overrightarrow{OM}} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = F(M) \vec{u}_r}$$

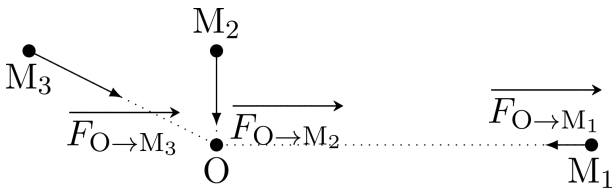


FIGURE 7.1 – Cas attractif

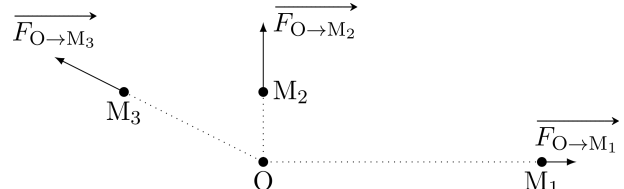


FIGURE 7.2 – Cas répulsif

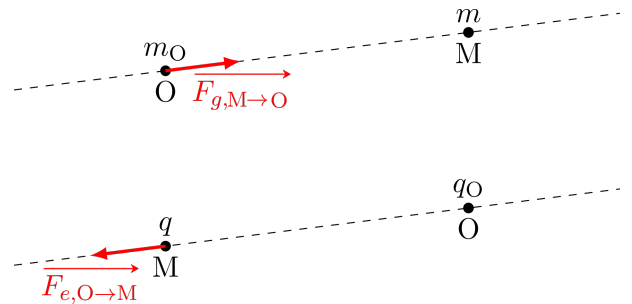
Exemple 7.1 : Forces centrales

◇ Force d'attraction gravitationnelle :

$$\vec{F}_g = -G \frac{m_O m}{r^2} \vec{u}_r$$

◇ Force coulombienne :

$$\vec{F}_e = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{q q_O}{r^2} \vec{u}_r$$



I/B Force centrale conservative

Rappel 7.1 : Force (centrale) conservative

Une force (centrale) est **conservative** si elle **dérive d'une énergie potentielle**.

Propriété 7.1 : Énergie potentielle d'une force centrale conservative

Dans le cas d'une force centrale conservative, en coordonnées cylindriques¹ son énergie potentielle ne dépend **que de la distance** r :

$$\mathcal{E}_{p, \text{centrale}}(r, \theta, \varphi)$$

Démonstration 7.1 : Énergie potentielle d'une FCC

Plaçons-nous dans le plan contenant \overrightarrow{OM} dans un repère polaire centré en O.

Force centrale $\Rightarrow \vec{F} = F(M) \vec{u}_r$

Conservative $\Rightarrow \delta W(\vec{F}) = -d\mathcal{E}_p \Leftrightarrow \vec{F} \cdot d\overrightarrow{OM} = -d\mathcal{E}_p$

1. Cylindriques ou sphériques

On a alors deux méthodes :

Définition de $d\vec{OM}$

$$\begin{aligned} \vec{F} \cdot d\vec{OM} &= F(M) \vec{u}_r \cdot (dr \vec{u}_r + r d\theta \vec{u}_\theta + dz \vec{u}_z) \\ \Leftrightarrow F(M) dr &= -d\mathcal{E}_p \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{E}_p}{dr} = -F(M)} \end{aligned}$$

Diagram illustrating the unit vectors $\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z$ and their dot products: $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_r = 1$, $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_\theta = 0$, and $\vec{u}_r \cdot \vec{u}_z = 0$.

Utilisation du gradient

$$\vec{F} = -\vec{\text{grad}} \mathcal{E}_p \Leftrightarrow \begin{pmatrix} F(M) \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial r} \\ -\frac{1}{r} \frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial \theta} \\ -\frac{\partial \mathcal{E}_p}{\partial z} \end{pmatrix}$$

Ainsi, \mathcal{E}_p ne dépend ni de θ ni de z , donc dépend uniquement de la coordonnée r . ■

Attention 7.1 : Constantes dans les \mathcal{E}_p

Les énergies potentielles sont toujours définies à une constante près, qu'il convient de déterminer !

Application 7.1 : Énergies potentielles gravitationnelle et électrostatique

◇ Interaction gravitationnelle :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,g}}{\partial r} &= \mathcal{G} \frac{m_O m}{r^2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,g} &= -\mathcal{G} \frac{m_O m}{r} + K \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,g} = -\mathcal{G} \frac{m_O m}{r}} \end{aligned}$$

en fixant par convention $\mathcal{E}_p(+\infty) = 0$.

◇ Interaction électrostatique :

$$\begin{aligned} \frac{\partial \mathcal{E}_{p,e}}{\partial r} &= -\frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_O}{r^2} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,e}(r) &= \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_O}{r} + K \\ \Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e}(r) = \frac{1}{4\pi\epsilon_0} \frac{qq_O}{r}} \end{aligned}$$

avec la même convention.

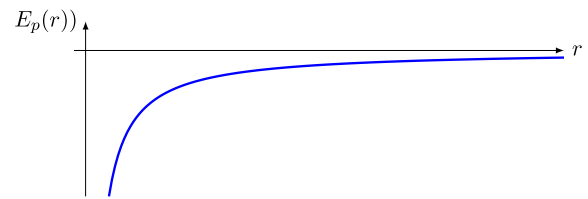


FIGURE 7.3 – $\mathcal{E}_{p,g}(r)$

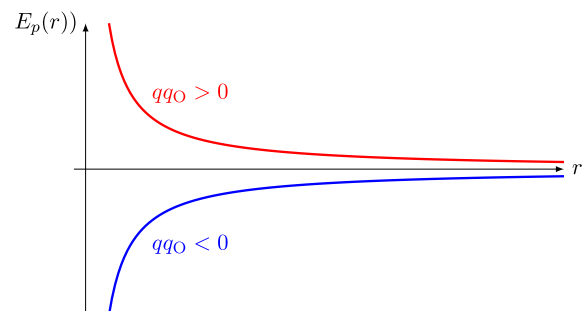


FIGURE 7.4 – $\mathcal{E}_{p,e}(r)$

II Quantités conservées

II/A Conservation du moment cinétique

Propriété 7.2 : Conservation du moment cinétique

Pour un point M soumis uniquement à \vec{F} une force centrale, son moment cinétique par rapport au centre de force se conserve :

$$\vec{\mathcal{L}}_O(M) = \vec{OM} \wedge \vec{p} = \text{cte} \Leftrightarrow \frac{d\vec{\mathcal{L}}_O}{dt} = \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \vec{0}$$

Démonstration 7.2 : Conservation du moment cinétique

On considère une force centrale \vec{F} de centre O. Son moment par rapport à O est

$$\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \vec{0}$$

Si M n'est soumis qu'à \vec{F} , le théorème du moment cinétique en O appliqué à M donne bien le résultat. ■

II/A) 1 Conséquence : mouvement plan

Corollaire 7.1 : Conservation du moment cinétique : mouvement plan

La conservation du moment cinétique d'un point matériel M par rapport à un point O fixe dans \mathcal{R} implique que le mouvement se fait dans le plan défini par $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$.

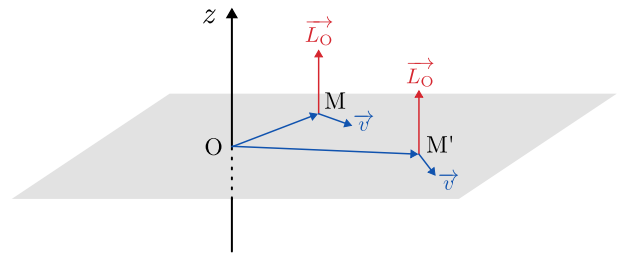


FIGURE 7.5 – $\vec{\mathcal{L}}_O = \text{cte} \Rightarrow$ mouvement plan

Démonstration 7.3 : Conservation du moment cinétique : mouvement plan

Soit \vec{u}_z la direction initiale du moment cinétique, c'est-à-dire

$$\vec{\mathcal{L}}(0) = \overrightarrow{OM}(0) \wedge m \vec{v}(0) = \mathcal{L}_0 \vec{u}_z$$

\vec{u}_z définit donc une direction perpendiculaire à $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$. Or, comme $\vec{\mathcal{L}}$ se conserve, on a

$$\vec{\mathcal{L}}(t) = \vec{\mathcal{L}}(0) \Leftrightarrow \overrightarrow{OM}(t) \wedge m \vec{v}(t) = \mathcal{L}_0 \vec{u}_z$$

donc \overrightarrow{OM} et \vec{v} restent orthogonaux à \vec{u}_z . Autrement dit, le mouvement reste dans le plan \perp à \vec{u}_z passant par O. ■

Remarque 7.1 : Nullité du moment cinétique

Si $\overrightarrow{OM}(0)$ et $\vec{v}(0)$ sont colinéaires, alors $\vec{\mathcal{L}}(0)$ est nul, et reste donc nul à tout instant : \overrightarrow{OM} et \vec{v} restent colinéaires, et le mouvement est alors simplement rectiligne.

II/A) 2 Conséquence : loi des aires

Corollaire 7.2 : Conservation du moment cinétique : loi des aires

L'aire balayée $d\mathcal{A}$ par le vecteur \overrightarrow{OM} en un temps dt est constante ; autrement dit

Pour un point M soumis uniquement à une force centrale, des aires égales sont balayées pendant un temps égal.

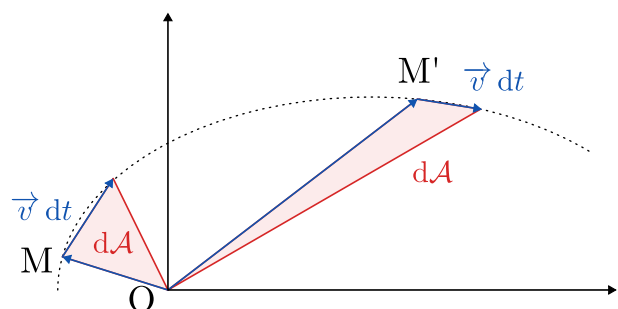


FIGURE 7.6 – Loi des aires.

En effet, avec un schéma on peut la relier au moment cinétique :

Démonstration 7.4 : Conservation du moment cinétique : loi des aires

La norme du moment cinétique quantifie l'aire balayée $d\mathcal{A}$ pendant un temps dt :

$$\begin{aligned} d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge \vec{v} dt\| \\ \Leftrightarrow d\mathcal{A} &= \frac{1}{2} \|\vec{OM} \wedge m \vec{v}\| \frac{dt}{m} \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{2m} = \text{cte}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

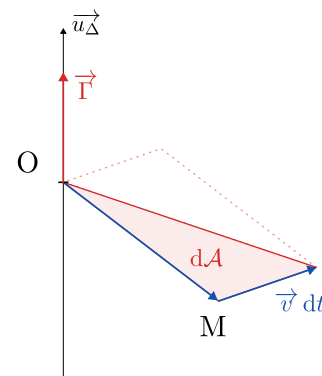


FIGURE 7.7 – Moment cinétique et aire balayée.

II/A) 3 Conséquence : constante des aires

Corollaire 7.3 : Conservation du moment cinétique : constante des aires

On appelle **constante des aires** la grandeur conservée

$$\boxed{C = r^2 \dot{\theta}} \Leftrightarrow \frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}$$

Elle est donc constante au cours du mouvement, i.e. $\dot{\theta}$ est de **signe constant** et la rotation ne s'inverse jamais.

Démonstration 7.5 : Conservation du moment cinétique : constante des aires

Le mouvement étant plan, on peut se placer en coordonnées polaires :

$$\begin{cases} \vec{OM} = r \vec{u}_r \\ \vec{v} = \dot{r} \vec{u}_r + r\omega \vec{u}_\theta \end{cases} \Rightarrow \vec{\mathcal{L}}_O = (r \vec{u}_r) \wedge m(\dot{r} \vec{u}_r + r\dot{\theta} \vec{u}_\theta) = mr^2 \dot{\theta} \vec{u}_z$$

Or $\|\vec{\mathcal{L}}_O\| = m \underbrace{r^2 \dot{\theta}}_{=C} = \text{cte}$

$$\Leftrightarrow \boxed{C = \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{m}}$$

De plus

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{A}}{dt} &= \frac{\|\vec{\mathcal{L}}_O\|}{2m} \\ \Leftrightarrow \boxed{\frac{d\mathcal{A}}{dt} = \frac{C}{2}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

II/B Conservation de l'énergie mécanique

Propriété 7.3 : Énergie potentielle effective

L'énergie mécanique d'un point matériel M soumis à une force centrale conservative est constante, et peut se mettre sous la forme

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2} m \dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = \text{cte} \quad \text{avec} \quad \boxed{\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2} m \frac{C^2}{r^2} + \mathcal{E}_p(r)}$$



Démonstration 7.6 : Énergie potentielle effective

Toujours pour M soumis uniquement à une force centrale conservative,

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} \stackrel{\text{TEM}}{=} 0 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_m = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p$$

$$\text{Or } v^2 = \dot{r}^2 + (r\dot{\theta})^2 \Rightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 + \mathcal{E}_p$$

$$\text{or } \dot{\theta} = C/r^2 \text{ d'où}$$

$$\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \underbrace{\frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2}}_{\mathcal{E}_{p,\text{eff}}} + \mathcal{E}_p \quad \blacksquare$$



Interprétation 7.1 : Énergie potentielle effective

L'énergie potentielle effective permet de se ramener à l'étude d'une seule dimension, ici r la distance au centre de force, plutôt que d'utiliser à la fois r et θ , en considérant $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ comme l'énergie potentielle du système et $\frac{1}{2}m\dot{r}^2$ son énergie cinétique.

III Champs de force newtoniens

III/A Cas général



Définition 7.2 : Force newtonienne

Force centrale est dite **newtonienne** :

$$\vec{F} = -\frac{k}{r^2} \vec{u}_r$$

L'énergie potentielle associée est alors

$$\mathcal{E}_p(r) = -\frac{k}{r}$$

On observe alors

◇ $k > 0 \Rightarrow$ force attractive ;

◇ $k < 0 \Rightarrow$ force répulsive.

et l'énergie potentielle effective est

$$\mathcal{E}_{p,\text{eff}} = \frac{1}{2}m\frac{C^2}{r^2} - \frac{k}{r}$$



Exemple 7.2 : Cas classiques

- ◇ Pour l'interaction gravitationnelle, $k = \mathcal{G}m_{\text{O}}m$;
- ◇ Pour l'interaction électrostatique, $k = -q_{\text{O}}q/4\pi\epsilon_0$.

Nous allons maintenant étudier les différentes trajectoires possibles en fonction de l'énergie mécanique totale et de cette énergie potentielle effective.

III/B Cas attractif

III/B) 1 Étude mathématique

Analysons la fonction $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$:

- ◇ $\lim_{r \rightarrow 0} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = +\infty$;
- ◇ $\lim_{r \rightarrow +\infty} \mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r) = 0$;
- ◇ $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ présente un minimum.

En effet,

$$\frac{d\mathcal{E}_{p,\text{eff}}}{dr} \Big|_{r_{\min}} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{2}m \left(-2 \frac{C^2}{r_{\min}^3} \right) + \frac{k}{r_{\min}^2} = 0$$

$$\Leftrightarrow -mC^2 + kr_{\min} = 0$$

$$\Leftrightarrow r_{\min} = \frac{mC^2}{k}$$

Ainsi $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r_{\min}) = -\frac{k^2}{2mC^2} = -\mathcal{E}_0$

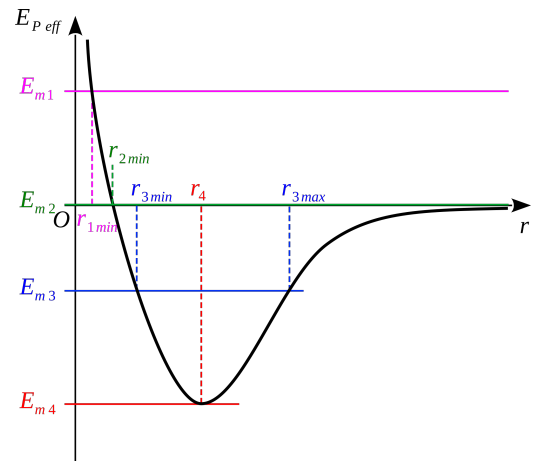


FIGURE 7.8 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas attractifs.

III/B) 2 Étude des trajectoires

Comme $\mathcal{E}_m = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \mathcal{E}_{p,\text{eff}}$, on a forcément $\mathcal{E}_{p,\text{eff}} < \mathcal{E}_m$. Ainsi, selon la valeur de \mathcal{E}_m par rapport à $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}(r)$, le système aura différentes trajectoires, toutes ayant O comme foyer ou centre :

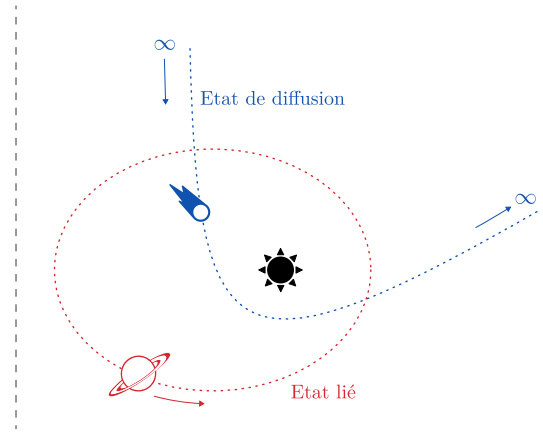
- ◇ $\mathcal{E}_m \geq 0$: la trajectoire n'est **pas bornée**, on aura donc un état de **diffusion** avec deux valeurs minimales possibles et deux trajectoires possibles, hyperbolique et parabolique ;
- ◇ $\mathcal{E}_m < 0$: la trajectoire **est bornée**, on aura donc un état **lié** avec deux valeurs extrêmes différentes pour la trajectoire elliptique ou une seule, r_{\min} , pour la trajectoire circulaire.

Type de mouvement	Caractéristiques	
Diffusion $0 \leq \mathcal{E}_m$	$0 < \mathcal{E}_m < \infty$ Trajectoire hyperbolique	$\mathcal{E}_m = 0$ Trajectoire parabolique
Lié $\mathcal{E}_m < 0$	$-\mathcal{E}_0 < \mathcal{E}_m < 0$ Trajectoire elliptique	$\mathcal{E}_m = -\mathcal{E}_0$ Trajectoire circulaire



Exemple 7.3 : État lié, état de diffusion

- ◇ Les planètes du système solaire restent confinées près du Soleil, ce sont donc des états liés.
- ◇ Un état de diffusion correspond par exemple au cas d'un comète arrivant vers le Soleil, atteignant une distance minimale avant de retourner à l'infini.



III/C Cas répulsif

Ce cas est bien plus simple : la trajectoire est hyperbolique dans tous les cas.

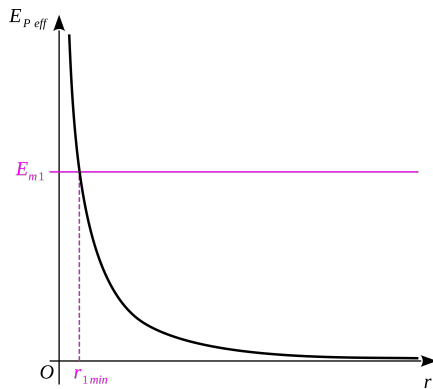


FIGURE 7.9 – $\mathcal{E}_{p,\text{eff}}$ cas répulsifs.

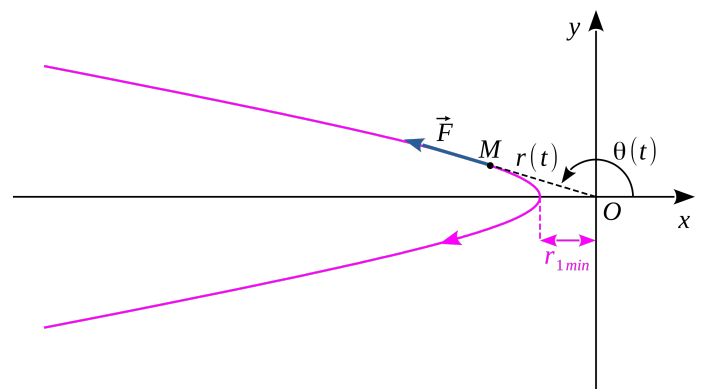


FIGURE 7.10 – Trajectoire cas répulsifs.

IV Mécanique céleste

IV/A Qu'est-ce qu'une ellipse ?

Définition 7.3 : Ellipse

Une ellipse se définit comme l'ensemble des points M tels que

$$MF + MF' = 2a$$

avec F et F' les **foyers** de l'ellipse, et son a demi-grand axe.

Le point le plus proche s'appelle le **péricentre**² P, et le plus éloigné s'appelle l'**apocentre**³, A.

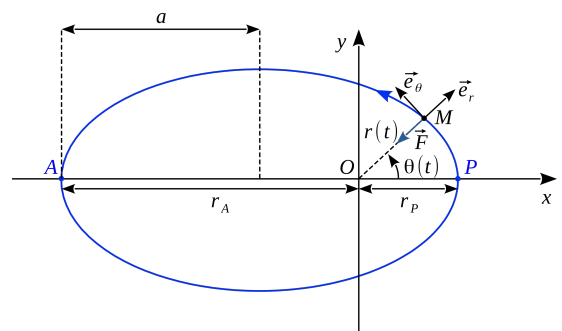


FIGURE 7.11 – Ellipse et paramètres

- ◇ Les rayons r_P et r_A sont reliés à a tels que $r_P + r_A = 2a$;

- ◇ Par construction, P et A sont à des extremum de rayon, soit $\dot{r}_{P|A} = 0 \Leftrightarrow \vec{v}_{P|A} = r_{P|A} \dot{\theta} \vec{e}_\theta$

2. Périgée pour la Terre, périhélie pour le Soleil

3. Apogée pour la Terre, aphélie pour le Soleil

IV/B Lois de KEPLER

Les lois de KEPLER ont été établies par Johannes KEPLER au début du XVII^e siècle (publiées en 1609 et 1619) à partir de relevés expérimentaux effectués par Tycho BRAHE à la fin du XVI^e siècle.

Loi 7.1 : Lois de KEPLER

- 1) **Loi des orbites** : les planètes ont des trajectoires elliptiques dont le Soleil occupe un des foyers ;
- 2) **Loi des aires** : pendant une durée donnée Δt , l'aire $\Delta \mathcal{A}$ balayée par une planète est constante.
- 3) **Loi des périodes** : La période de révolution d'une planète autour du Soleil est reliée au demi-grand axe de son ellipse par :

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{cte}^4$$

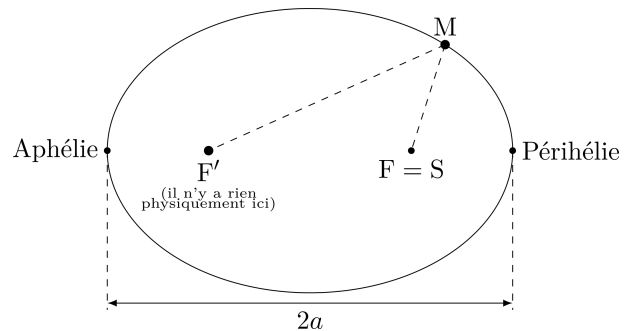


FIGURE 7.12 – 1^{re} loi de KEPLER

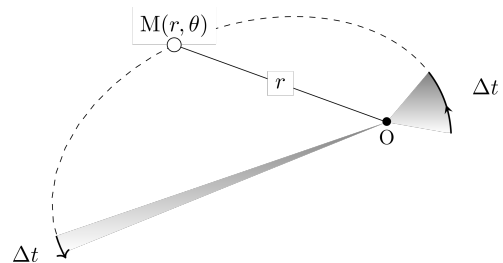


FIGURE 7.13 – 2^e loi de KEPLER

Application 7.2 : Troisième loi de KEPLER

Calculer la période de révolution de Mars autour du Soleil. On donne $a_{\text{Terre}} = 150 \times 10^6 \text{ km}$ et $a_{\text{Mars}} = 228 \times 10^6 \text{ km}$.

$$\frac{T_M^2}{a_M^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S} = \frac{T_T^2}{a_T^3}$$

$$\Leftrightarrow T_M = T_T \sqrt{\frac{a_M^3}{a_T^3}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} T_T = 1 \text{ an} \\ a_T = 150 \times 10^6 \text{ km} \\ a_M = 228 \times 10^6 \text{ km} \end{cases}$$

A.N. : $T_M = 1 \text{ an } 319 \text{ jours}$

IV/C Cas particulier du mouvement circulaire et généralisation

IV/C) 1 Vitesse uniforme

Important 7.1 : Vitesse des orbites circulaires

Le mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre est nécessairement uniforme, et on a

$$v_{\text{cercle}} = \sqrt{\frac{GM_S}{R}}$$

4. Plus précisément, $\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$

Démonstration 7.7 : Démonstration vitesse circulaire

- 1 **Système** : {planète} point matériel M de masse m
- 2 **Référentiel** : héliocentrique, supposé galiléen.
- 3 **Repère** : polaire $(O, \vec{u}_r, \vec{u}_\theta)$ avec O centre du Soleil, R le rayon supposé constant ($\dot{R} = 0$).

- 4 **Repérage** :

$$\begin{aligned}\vec{OM} &= R \vec{u}_r \\ \vec{v} &= R\dot{\theta} \vec{u}_\theta \\ \vec{a} &= -R\dot{\theta}^2 \vec{u}_r + R\ddot{\theta} \vec{u}_\theta\end{aligned}$$

- 5 **Bilan des forces** : $\vec{F}_g = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{R^2} \vec{u}_r$ avec M_S la masse du soleil.

- 5 **PFD** :

$$m\vec{a} = \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} -mR\dot{\theta}^2 = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{R^2} \\ mR\ddot{\theta} = 0 \end{cases} \quad (7.1)$$

$$(7.2)$$

- 6 **Vitesse du mouvement circulaire** : l'équation (7.2) donne $\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \dot{\theta} = \text{cte}$, et (7.1) donne

$$\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}} \Leftrightarrow v = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \quad \blacksquare \quad (7.3)$$

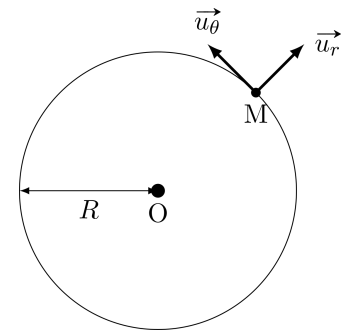


FIGURE 7.14 – Orbite circulaire.

Attention 7.2 : Vitesse des orbites elliptiques

Le mouvement elliptique n'est pas uniforme !

IV/C) 2 Période

Important 7.2 : Période circulaire

La période de révolution du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S}$$

On admet que le résultat s'étend à une trajectoire elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a .

Démonstration 7.8 : Période circulaire

En effet, avec (7.3) et T la période de révolution de l'astre, on a

$$\begin{aligned}\dot{\theta} &= \frac{2\pi}{T} \\ \Leftrightarrow \frac{4\pi^2}{T^2} &= \frac{\mathcal{G}M_S}{R^3} \quad \left. \vphantom{\frac{4\pi^2}{T^2}} \right) \dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R^3}} \\ \Leftrightarrow \frac{T^2}{R^3} &= \frac{4\pi^2}{\mathcal{G}M_S} \quad \blacksquare\end{aligned}$$

IV/C) 3 Énergie mécanique

Important 7.3 : \mathcal{E}_m circulaire

L'énergie mécanique du mouvement circulaire d'un astre autour d'un autre vérifie

$$\mathcal{E}_{m,\text{cercle}} = -\mathcal{G} \frac{mM_S}{2R}$$

On admet que le résultat s'étend à une trajectoire elliptique en remplaçant le rayon R par le demi-grand axe a .

Démonstration 7.9 : \mathcal{E}_m circulaire

Enfin, avec (7.3) et l'énergie mécanique, on a

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}mR^2\dot{\theta}^2 - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}m \frac{\mathcal{G}M_S}{R} - \mathcal{G} \frac{mM_S}{R} \quad \left. \vphantom{\mathcal{E}_m} \right\} R\dot{\theta} = \sqrt{\frac{\mathcal{G}M_S}{R}} \\ \Leftrightarrow \mathcal{E}_m &= -\mathcal{G} \frac{mM_S}{2R} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

V Satellite en orbite terrestre

On se place ici dans le référentiel géocentrique, afin de traiter le mouvement d'un satellite autour de la Terre.

V/A Vitesses cosmiques

V/A) 1 Première vitesse cosmique

Définition 7.4 : 1^{re} vitesse cosmique

La première vitesse cosmique, ou *vitesse de satellisation minimale*, est la **vitesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir le placer en orbite **circulaire** autour de la Terre.

Propriété 7.4 : 1^{re} vitesse cosmique

Sur Terre, on trouve

$$v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T}} \approx 8 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$$

Démonstration 7.10 : Première vitesse cosmique

Pour satelliser un corps, il faut faire varier son **énergie mécanique** d'un état partant **du sol jusqu'en orbite**. La plus petite énergie mécanique pour cela est celle que l'on vient de déterminer dans l'étude de la trajectoire circulaire. Ainsi, à partir de l'énergie mécanique d'un objet lancé au niveau du sol, on a

$$\mathcal{E}_{m,\text{sol}} = \frac{1}{2}mv_c^2 - \mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T} \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{m,\text{cercle}} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2R_T}$$

$$\text{Or système conservatif} \Rightarrow \frac{1}{2}mv_c^2 - \mathcal{G} \frac{mM_T}{R_T} = -\mathcal{G} \frac{mM_T}{2R_T}$$

$$\Leftrightarrow v_c = \sqrt{\frac{\mathcal{G}m_T}{R_T}} \quad \blacksquare$$

Pour des altitudes plus élevées, il faut davantage de vitesse.

V/A) 2

 Seconde vitesse cosmique
Définition 7.5 : 2^{de} vitesse cosmique

La seconde vitesse cosmique, ou *vitesse de libération* et notée v_{lib} , correspond à la **vi-tesse minimale** à fournir à un objet situé sur Terre pour pouvoir **l'éloigner définitivement** de la Terre.

Propriété 7.5 : 2^{de} vitesse cosmique

Pour la Terre, on trouve

$$v_{\text{lib}} = \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}} = \sqrt{2}v_c = 11 \text{ km}\cdot\text{s}^{-1}$$

**Démonstration 7.11 : Seconde vitesse cosmique**

Pour éloigner définitivement un objet de la Terre, il faut que sa trajectoire soit à minimum parabolique, donc que **son énergie mécanique soit nulle**. Ceci correspond à

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}mv_{\text{lib}}^2 - \mathcal{G}\frac{mM_{\text{T}}}{R_{\text{T}}} &= 0 \\ \Leftrightarrow v_{\text{lib}} &= \sqrt{\frac{2\mathcal{G}m_{\text{T}}}{R_{\text{T}}}} \end{aligned}$$

■

La réalité est évidemment plus complexe que ça, étant donné les frottements, la non-galiléianité des référentiels, la prise en compte de la masse de carburant nécessaire, etc...

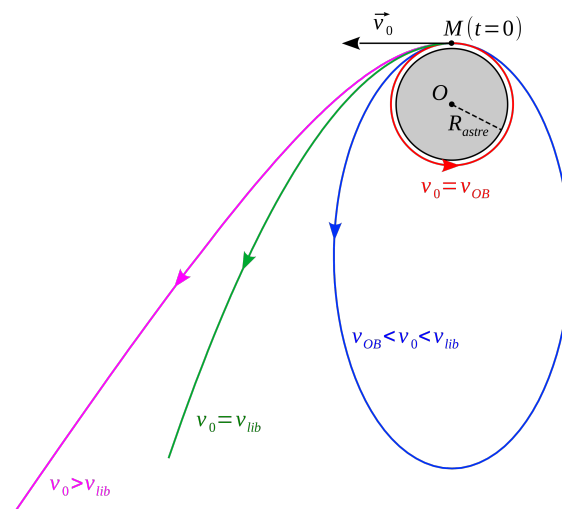


FIGURE 7.15 – Représentation des trajectoires possible pour un astre autour d'un autre en fonction des vitesses. Le code couleur correspond à celui de la Section III/B) 2– Étude des trajectoires.

V/B

Satellites artificiels

V/B) 1

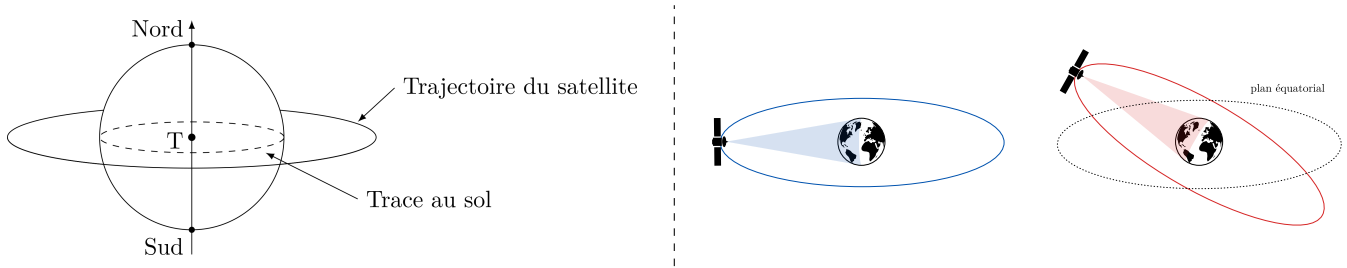
 Satellite géostationnaires
Définition 7.6 : Définition

Un satellite géostationnaire est un satellite qui **reste constamment au-dessus d'un même point** de la surface terrestre; il apparaît donc immobile pour un observateur terrestre.

Mission typique : obtenir des images fixes de la Terre avec une vue éloignée (à des fins météorologiques par exemple).

Un tel système doit respecter trois conditions :

- 1) Le plan de l'orbite doit être le plan de l'équateur.



En effet, par principe de force centrale conservative, le mouvement est un plan passant par T le centre de la Terre. Mais comme la Terre est en rotation autour de l'axe de ses pôles, le seul plan contenant le centre de la Terre et permettant de rester immobile par rapport à sa surface est celui contenant l'équateur.

- 2) **Le mouvement doit être synchrone avec la rotation de la Terre sur elle-même.** En effet d'après la raison précédente, même sur le plan de l'équateur il faut avoir la même vitesse angulaire ω , telle que

$$\omega_{\text{sat}} = \dot{\theta} = \omega_T = \frac{2\pi}{T_{\text{jour}}}$$

Attention 7.3 : Jours solaire et sidéral

Il existe deux durées qui peuvent s'appeler « jour » :

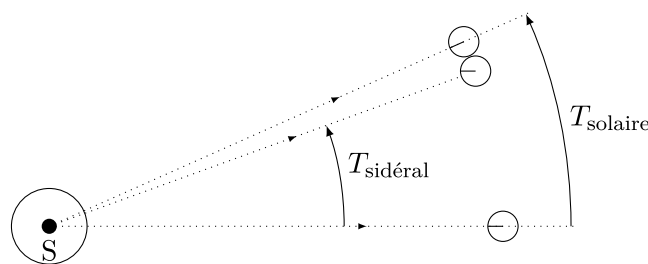
- le **jour sidéral**, que l'on croit à tort être celui qu'on emploie au quotidien, et qui correspond à la durée nécessaire pour que la Terre effectue une **rotation complète sur elle-même** ; on a

$$T_{\text{sidéral}} = 23 \text{ h } 56 \text{ min } 4 \text{ s}$$

- le **jour solaire** est l'intervalle de temps séparant deux **passages du Soleil au zénith** d'un point donné de la Terre, i.e. le temps qui sépare deux « midis » sur Terre ; on a

$$T_{\text{solaire}} = 24 \text{ h}$$

Ces deux notions diffèrent légèrement à cause de la révolution de la Terre autour du Soleil.



On trouve alors

$$\omega = 7,29 \times 10^{-5} \text{ rad} \cdot \text{s}^{-1}$$

- 3) **Le mouvement doit être circulaire.** En effet, $C = r^2\dot{\theta}$ est constante. Or, $\dot{\theta}$ est fixe d'après ce qui précède : ainsi, r est fixé. On peut obtenir sa valeur avec la troisième loi de KEPLER :

$$\frac{T^2}{R^3} = \frac{4\pi^2}{GM_T} \quad \Rightarrow \quad R = \left(\frac{GM_T T^2}{4\pi^2} \right)^{1/3}$$

Il n'y a donc **qu'une seule altitude** pour les satellites géostationnaires, i.e. $R = 42,2 \times 10^6 \text{ m}$ soit $h = 35\,800 \text{ km}$. À cette altitude, on trouve $v = R\dot{\theta} = 3,07 \text{ km} \cdot \text{s}^{-1}$.

Propriété 7.6 : Altitude orbite géostationnaire

Les orbites des satellites géostationnaires sont incluses dans le **plan équatorial**, à une distance au sol $h = R - R_T$ telle que

$$h = 36\,000 \text{ km}$$

V/B) 2 Satellite de positionnement

Définition 7.7 : Satellite de positionnement

Les satellites de positionnement fonctionnent par flotte de 20 à 30. Ils sont répartis dans quelques plans orbitaux (3 ou 6), de sorte qu'un point de la surface terrestre, puisse toujours en voir au moins 3 dans le ciel.

- ◇ **Orbites** : $h \approx 20\,000 \text{ km}$
- ◇ **Mission** : GPS

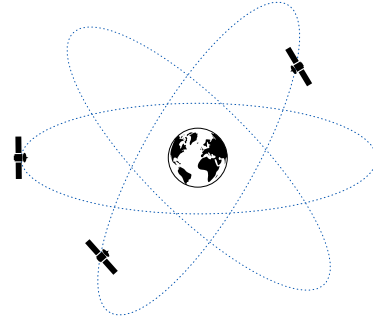


FIGURE 7.16 – Satellites de positionnement.

V/B) 3 Satellite circumpolaires

Définition 7.8 : Satellites circumpolaires

Ces satellites oscillent entre les pôles Nord et Sud, et ont une période d'environ 1h à 2h afin de balayer de nombreuses zones de la surface terrestre en un jour.

- ◇ **Orbites** : perpendiculaires au plan équatorial, ces orbites sont basses (environ 700 km de haut).
- ◇ **Mission** : cartographier la surface terrestre de plus proche que ne pourrait le faire un satellite géostationnaire.

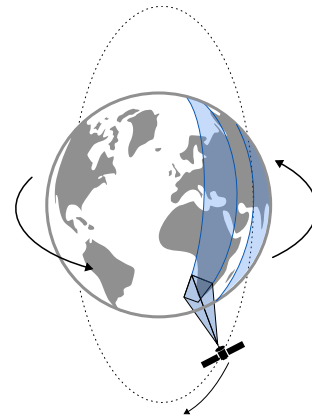


FIGURE 7.17 – Satellites circumpolaires

Remarque 7.2 : Sites internet

- ◇ **Géostationnaires** : <https://www.ssec.wisc.edu/data/geo/>
- ◇ **Circumpolaires** :
 - ▷ <https://earthnow.usgs.gov/observer/>
 - ▷ <https://worldview.earthdata.nasa.gov>
- ◇ **Planétarium** : <https://stellarium-web.org/>