

# TD C7 - Oscillateurs linéaires en régime sinusoïdal forcé

## Capacités exigibles

- Manipuler des signaux complexes en régime sinusoïdal forcé : tous les exercices !
- Exploiter des courbes d'amplitude et de phase en fonction de la fréquence d'excitation : exercices 2, 3, 4.
- Déterminer l'impédance équivalente d'un circuit en régime sinusoïdal forcé : exercices 4, 6.
- Relier l'acuité d'une résonance au facteur de qualité : exercices 4, 6.

## 1 Notation complexe

Écrire, sous forme complexe, les équations différentielles suivantes :

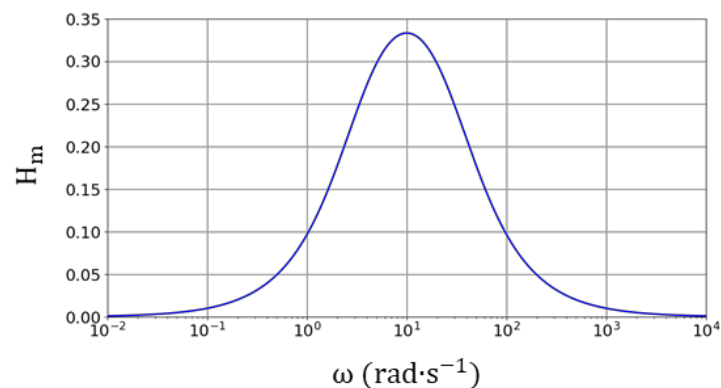
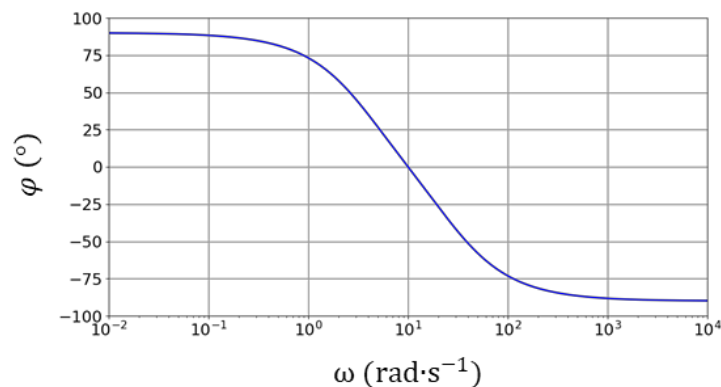
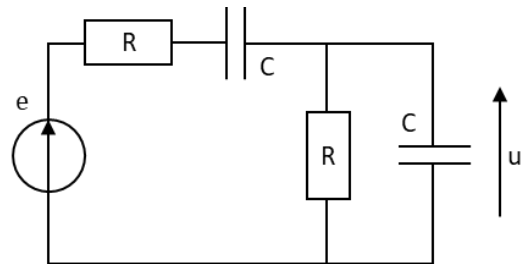
$$\tau \frac{du}{dt} + u(t) = E_0 \sin \omega t \qquad \ddot{x} + 2\lambda \dot{x} + \omega_0^2 x(t) = F_0 \cos \omega t$$

## 2 Filtre de Wien

On considère le circuit ci-contre avec  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$ .  
On note  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$  et on pose  $H_m = U_m/E_m$ .

1. Déterminer les valeurs limites de  $u(t)$  à basse et haute fréquences.

Les courbes représentatives de  $H_m(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$  sont fournies par les figures ci-dessous.



2. Observe-t-on un phénomène de résonance en tension ? Justifier.
3. Déterminer graphiquement la pulsation de résonance, les pulsations de coupure et la bande passante du filtre.
4. Après avoir associé certaines impédances entre elles, établir l'expression de  $\underline{H} = \underline{u}/\underline{e}$ . La mettre sous la forme :

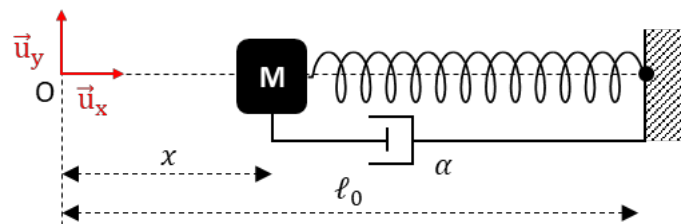
$$\underline{H} = \frac{H_0}{1 + jQ \left( x - \frac{1}{x} \right)} \quad \text{avec } x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

avec  $H_0, \omega_0$  et  $Q$  des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de  $R$  et  $C$ .

5. Déterminer graphiquement la valeur du produit  $RC$ .

### 3 Modélisation d'un haut-parleur

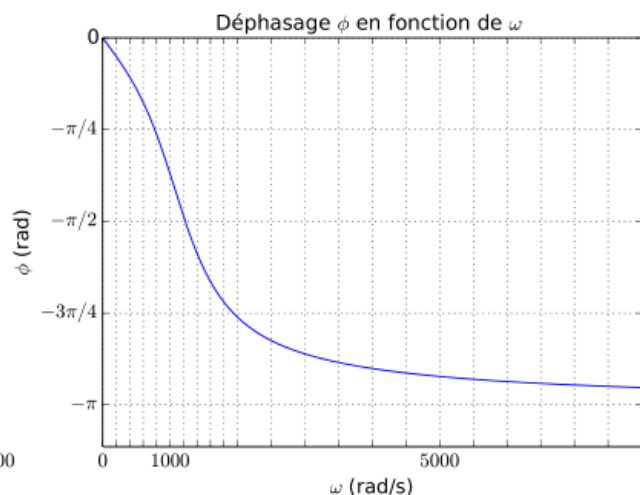
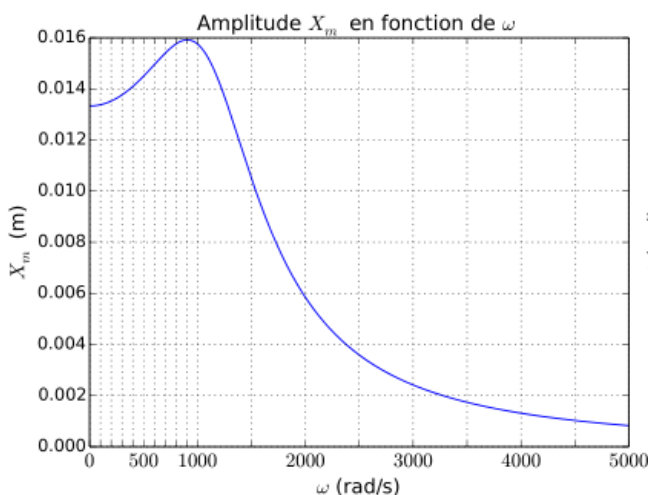
On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse  $m$ , se déplaçant horizontalement le long d'un axe  $(Ox)$ . Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide  $\ell_0$  et de raideur  $k$  et subit une force de frottement fluide :  $\vec{f} = -\alpha \vec{v}$ . Elle est par ailleurs soumise à une force  $\vec{F}(t)$ , imposée par le courant  $i(t)$  entrant dans le haut-parleur, qui vaut :  $\vec{F}(t) = Ki(t)\vec{u}_x$  où  $K$  est une constante. On travaille dans le référentiel du laboratoire  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ . On suppose que le courant est de la forme  $i(t) = I_m \cos(\omega t)$ .



Données :  $m = 10 \text{ g}$ ,  $K = 200 \text{ N.A}^{-1}$  et  $I_m = 1,0 \text{ A}$ .

1. Écrire l'équation différentielle vérifiée par  $x(t)$ , la position de la masse  $m$ .
2. La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre  $\omega_0$  et du facteur de qualité  $Q$ .
3. Justifier qu'en régime permanent :  $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$
4. On pose  $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{i\omega t}$ . Déterminer l'expression de l'amplitude complexe  $\underline{X}$ .
5. Exprimer  $X_m(\omega)$ . Existe-t-il toujours une résonance ?

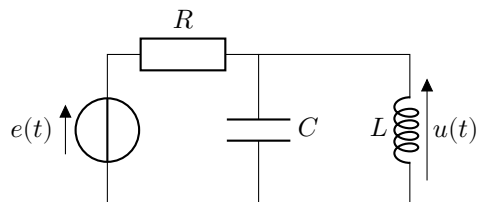
On a tracé ci-dessous les courbes de  $X_m(\omega)$  et de  $\phi(\omega)$ . L'axe des abscisses est en échelle logarithmique.



6. Pour quelle pulsation le déplacement est-il en quadrature de phase avec la force excitatrice ? Déterminer alors graphiquement la pulsation propre  $\omega_0$ .

### 4 Résonance d'un circuit bouchon

On considère le circuit  $RLC$  représenté ci-contre, composé d'un résistor, de résistance  $R$ , d'une bobine idéale d'inductance  $L$ , d'un condensateur idéal, de capacité  $C$ , alimenté par une source idéale de tension, de f.e.m.  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . On se place en régime sinusoïdal forcé.

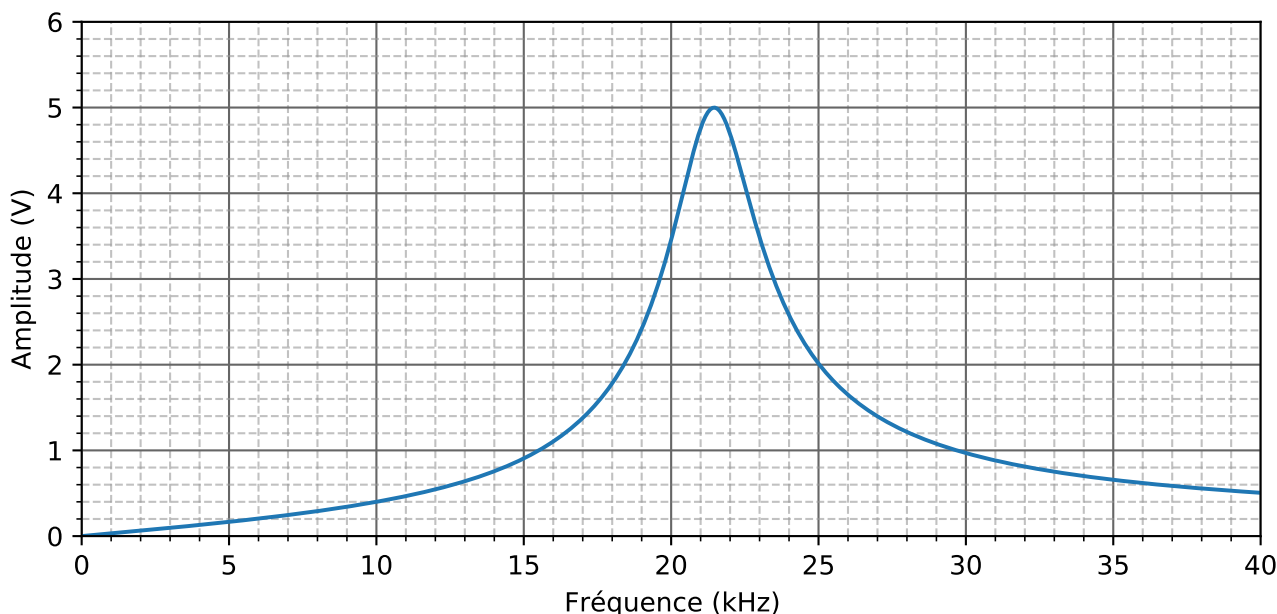


1. Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{U}$  de  $u(t)$  en fonction de  $E_0, R, L, C$  et  $\omega$ .
2. Établir qu'il existe un phénomène de résonance pour la tension  $u(t)$ . Préciser la pulsation  $\omega_0$  à laquelle ce phénomène se produit et la valeur de l'amplitude réelle de  $u(t)$  à cette pulsation.
3. Mettre l'amplitude réelle  $U$  de  $u(t)$  sous la forme :

$$U = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2 \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)^2}}$$

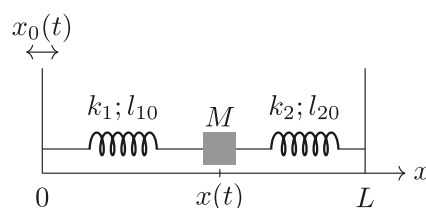
avec  $Q$  un facteur sans dimension à exprimer en fonction de  $R, L$  et  $C$ .

4. Exprimer la bande passante  $\Delta\omega$  de cette résonance en fonction de  $Q$  et  $\omega_0$ .
5. En déduire les valeurs numériques de  $C$  et  $E_0$  à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'amplitude réelle de  $u(t)$  en fonction de la fréquence  $f = \omega/2\pi$ , sachant que  $L = 1$  mH et  $R = 1$  k $\Omega$ .



## 5 Système à deux ressorts

Un point matériel  $M$ , de masse  $m$ , peut se déplacer sur une tige *horizontale* parallèle à l'axe  $Ox$  au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement  $\vec{f} = -h\vec{v}$  avec  $\vec{v}$  le vecteur vitesse de  $M$  dans le référentiel galiléen  $\mathcal{R}$  du laboratoire. Les frottements entre  $M$  et l'axe horizontal sont négligeables. On repère  $M$  par son abscisse  $x(t)$ .



$M$  est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs  $k_1$  et  $k_2$ , de longueurs à vide  $l_{10}$  et  $l_{20}$ . Celle de droite est immobile en  $x = L$ , celle de gauche, d'abscisse  $x_0(t)$ , est animée d'un mouvement d'équation horaire  $x_0(t) = X_{0m} \cos(\omega t)$ . On supposera que  $L = l_{10} + l_{20}$ .

1. Identifier les différentes forces s'exerçant sur  $M$ .
2. Déterminer la position d'équilibre  $x_{eq}$  de  $M$  lorsque la paroi de gauche est immobile en  $x = 0$ .
3. On introduit  $X = x - x_{eq}$ . Établir l'équation différentielle vérifiée par  $X$  lorsque la paroi bouge. Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes  $\underline{x}_0(t) = X_{0m} \exp(j\omega t)$ ,  $X(t) = X_m \exp(j(\omega t + \varphi))$  et  $v(t) = V_m \exp(j(\omega t + \phi))$  associées à  $x_0(t)$ ,  $X(t)$  et  $v(t) = \dot{X}(t)$ .
4. Définir les amplitudes complexes  $\underline{X}_0$ ,  $\underline{X}$  et  $\underline{V}$  de  $x_0(t)$ ,  $X(t)$  et  $v(t)$ .
5. En exprimant  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $\alpha$  en fonction des données du problème, établir la relation :

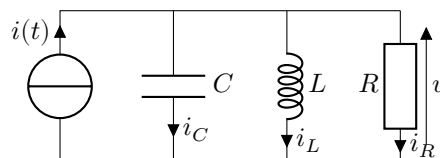
$$\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + jQ \left( \frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega} \right)} \underline{X}_0$$

6. Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

## 6 Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance  $R$ , d'une bobine d'inductance  $L$  et d'un condensateur de capacité  $C$ .

L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps :  $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$ .



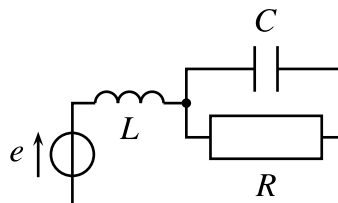
On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension  $u(t)$  aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de  $\omega$ .

1. Déterminer l'impédance complexe de l'association des dipôles  $R, L$  et  $C$ .
2. En déduire l'amplitude complexe  $\underline{U}$  de la tension  $u$  en fonction de  $\omega, I_0, R, L$  et  $C$ .
3. Pour quelle pulsation l'amplitude réelle  $U$  de  $u$  prend-elle sa valeur maximale notée  $U_{\max}$  ? Conclure sur la fréquence à utiliser.
4. Représenter le graphe donnant  $U$  en fonction de la pulsation réduite  $x = \omega/\omega_0$  avec  $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ .
5. Exprimer la largeur de la bande passante  $\Delta\omega$ .
6. On se place dans le cas  $R = 37 \, \Omega$ ,  $L = 1,2 \times 10^{-8} \, \text{H}$  et  $C = 2,3 \times 10^{-10} \, \text{F}$ . Calculer la valeur de l'acuité  $A_c = \omega_0/\Delta\omega$  de la résonance. Interpréter sa dépendance en  $R$ .

## 7 Condition de résonance

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m.  $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ . On s'intéresse à la tension  $u(t)$  aux bornes du résistor et de la capacité montés en parallèle.

On pose :  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ,  $\xi = \frac{R}{2} \sqrt{\frac{C}{L}}$  et  $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ .



1. Établir l'expression du signal complexe  $\underline{u}$  associé à  $u(t)$  en régime sinusoïdal forcé, en fonction de  $E_0$ ,  $x$  et  $\xi$ .
2. Étudier l'existence éventuelle d'une résonance pour la tension  $u(t)$ .