Contrôle de connaissances 10

Électrocinétique en RSF

/5 **1** Sous quelle forme mathématique s'exprime le signal d'un système en RSF ? Présenter alors le passage en complexes et l'intérêt de cette forme pour la dérivation et l'intégration.

$$y(t) \overset{(1)}{=} Y_0 \cos(\omega t + \varphi)$$

$$\Leftrightarrow \underline{y}(t) \overset{(1)}{=} Y_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t+\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{y}(t) \overset{(1)}{=} \underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\underline{Y} = Y_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}$$

$$\frac{\mathrm{d}\underline{y}}{\mathrm{d}t} = \frac{\mathrm{d}\underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{d}t} = \mathrm{j}\omega \cdot \underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\underline{y}}{\mathrm{d}t} \overset{(1)}{=} \mathrm{j}\omega \underline{y}(t)}$$

$$\int \underline{y}(t)\mathrm{d}t = \int \underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}\mathrm{d}t = \frac{\underline{Y}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{\mathrm{j}\omega} \Leftrightarrow \boxed{\int \underline{y}(t)\mathrm{d}t \overset{(1)}{=} \frac{\underline{y}(t)}{\mathrm{j}\omega}}$$

/6 **2** Après avoir fait les schémas correspondant, démontrer la relation du pont diviseur de tension pour deux impédances $\underline{Z}_1$ et $\underline{Z}_2$ en série d'une part, et la relation du pont diviseur de courant pour deux impédances en parallèle d'autre part.

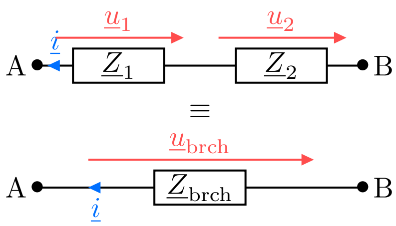

Fig. 10.1 – Association série (1)

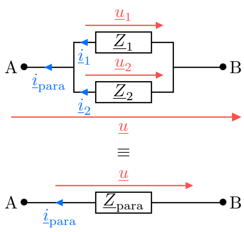

Fig. 10.2 – Association parallèle (1)

$$\underline{I} \overset{(1)}{=} \frac{\underline{U}_{\text{brch}}}{\underline{Z}_{\text{brch}}} = \frac{\underline{U}_k}{\underline{Z}_k} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_k \overset{(1)}{=} \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{brch}}}\underline{U}_{\text{brch}}}$$

$$\underline{U} \overset{(1)}{=} \underline{Z}_{\text{para}}\underline{I}_{\text{para}} = \underline{Z}_1\underline{I}_1 \Leftrightarrow \boxed{\underline{I}_k \overset{(1)}{=} \frac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_k}\underline{I}_{\text{para}}}$$

/9 **3** On étudie un circuit RLC série, soumis à une tension sinusoïdale $e(t) = E_0\cos(\omega t)$. **Représenter le circuit** en complexes, puis déterminer l'**amplitude complexe** $\underline{I}$ et la mettre sous la forme $\underline{I} = \frac{E_0/R}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\frac{1}{x}\right)}$, où $x = \omega/\omega_0$ est la pulsation réduite, et ω_0 et Q des constantes **à identifier** et exprimer en fonction de R, L et C. Donner son **amplitude réelle**. Déterminer sa **pulsation de résonance**.

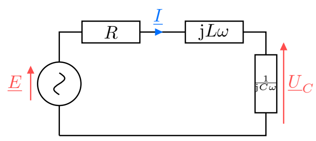

Fig. 10.3 – Circuit RLC (1)

$$E_0 \overset{(1)}{=} \left(R + \mathrm{j}L\omega + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{I}$$

Isole $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$

$$\Leftrightarrow \underline{I} = \frac{E_0}{R + \mathrm{j}\left(L\omega - \dfrac{1}{C\omega}\right)}$$

Forme canonique

$$\Leftrightarrow \underline{I} \overset{(1)}{=} \frac{E_0/R}{1 + \mathrm{j}\left(\underbrace{\dfrac{L}{R}}_{=\frac{Q}{\omega_0}\ (1)}\omega - \underbrace{\dfrac{1}{RC}}_{=Q\omega_0}\dfrac{1}{\omega}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\frac{1}{RC}}{\frac{L}{R}} = \frac{Q\omega_0}{\frac{Q}{\omega_0}} \quad (1) \quad \text{et} \quad \frac{L}{R} \times \frac{1}{RC} = Q^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad (1)\ \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

$$\Rightarrow \boxed{\underline{I} = \frac{E_0/R}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \frac{1}{x}\right)}} \quad (1)\ \text{et} \quad \boxed{I = \frac{E_0/R}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}}$$

$$\Rightarrow I(x_r) \overset{(1)}{=} I_{\max} \Leftrightarrow 1 + Q^2\underbrace{\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2}_{\geq 0} \quad \text{minimal}$$

$$\Leftrightarrow Q^2\left(x_r - \frac{1}{x_r}\right)^2 = 0 \Leftrightarrow x_r = \frac{1}{x_r}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_r = 1} \quad \text{ou} \quad \boxed{\omega_r = \omega_0} \quad (1)$$