Électrocinétique – chapitre 5

Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

Au programme

Savoirs

- ◇ Établir et connaître l'impédance d'une résistance, d'un condensateur, d'une bobine.
- ◇ Oscillateur électrique ou mécanique soumis à une excitation sinusoïdale.

Savoir-faire

- ◇ Remplacer une association série ou parallèle de deux impédances par une impédance équivalente.
- ◇ Utiliser la représentation complexe pour étudier le régime forcé.

Sommaire

Jusque-là en électrocinétique, nous avons étudié la réponse d'un circuit (c'est-à-dire la tension de sortie) de systèmes linéaires soumis à une modification rapide de l'entrée (régime libre et échelon montant) d'une valeur constante à une autre. Nous avons alors observé la présence d'un régime **transitoire** suivi d'un régime **permanent** **constant**. Dans ce chapitre, nous allons voir la réponse d'un circuit à une entrée **sinusoïdale**, qui donnera lieu à un régime transitoire suivi d'un régime **permanent** **sinusoïdal**. D'une manière générale, on se concentre sur la réponse du système une fois le régime permanent établi. On définit donc

Régime sinusoïdal forcé

On appelle **régime sinusoïdal forcé** le régime permanent d'un circuit électrique soumis à une entrée sinusoïdale.

Dans tout le chapitre, on supposera donc que l'entrée est allumée depuis une durée suffisamment longue pour considérer que le régime transitoire est terminé.

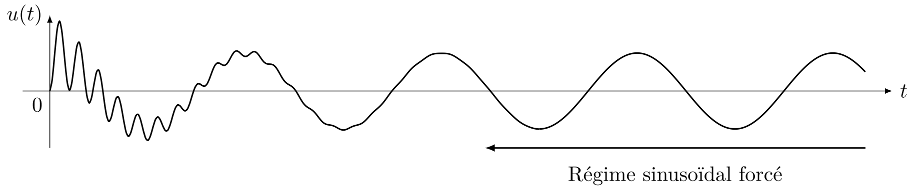


Figure 5.1 – Exemple d'un signal en RSF.

I Circuit RC série en RSF

A Présentation

Soit le circuit RC série, avec $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

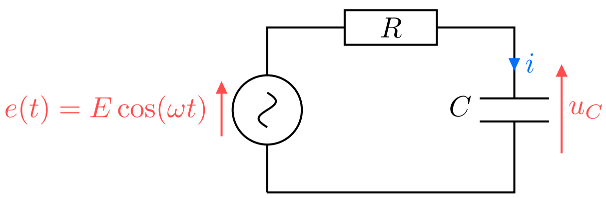


Figure 5.2 – RC en RSF.

On applique la LdM :

$$
\begin{aligned}
u_R + u_C &= e(t) \\
\Leftrightarrow Ri + u_C &= e(t) \\
\Leftrightarrow RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C &= e(t) \\
\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_C = \frac{1}{\tau}E_0\cos(\omega t)}
\end{aligned}
$$

$u_R = Ri$

$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

Forme canonique

avec $\tau = RC$ la constante de temps.

Résoudre cette équation différentielle demande comme précédemment de trouver la solution homogène et la solution particulière. La solution homogène est la solution de

$$\frac{\mathrm{d}u_{C,h}}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u_{C,h} = 0 \Rightarrow u_{C,h}(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)$$

Pour la solution particulière, **on admet** qu'elle est de la forme

$$u_{C,p}(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

ce qui donne une solution générale

$$\boxed{u_C(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) + U\cos(\omega t + \varphi)}$$

Important

K dépend des conditions initiales, mais

$$U \text{ et } \varphi \text{ dépendent du circuit (ici, } R,\ C,\ \omega \text{ et } E_0\text{).}$$

B Réponse d'un système en RSF

En supposant le régime permanent établi (définition du RSF), on a donc :

Forme de la réponse d'un système en RSF

Pour un signal d'entrée

$$e(t) = E_0 \cos(\omega t) \quad (\text{ou} \quad \eta(t) = \eta_0 \cos(\omega t))$$

les différentes tensions et intensités dans le circuit oscilleront **à la même pulsation** ω, et seront de la forme

$$u(t) = U \cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I \cos(\omega t + \varphi_i)$$

où U,I et $\varphi_{u,i}$ sont deux constantes dépendant du système et de l'excitation ω.

L'objectif de ce chapitre est de donc de savoir déterminer U et φ.

C Passage en complexes

Une méthode de résolution est d'introduire la formule $U\cos(\omega t + \varphi)$ dans l'équation différentielle et de rechercher U et φ. Si c'est possible, c'est très calculatoire (cf. cours de maths). L'utilisation des nombres complexes permet de réduire drastiquement cette difficulté.

Méthode

Pour cela, on remplace $u(t)$ et $e(t)$ par leurs formes complexes :

$$\underline{u_C} = \underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{avec} \quad \underline{U} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi} \quad \text{et} \quad \underline{e} = E_0\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

Pour revenir aux valeurs réelles après calcul, on prendra donc

$$U_C = |\underline{U_C}| \quad \text{et} \quad \varphi = \arg(\underline{U_C})$$

Application

Trouver la relation entre l'amplitude complexe $\underline{U_C}$ et les paramètres du circuit.

À partir de l'équation différentielle, on remplace les valeurs réelles par les valeurs complexes, en se rappelant que dériver en complexes revient à multiplier par $\mathrm{j}\omega$:

$$\begin{aligned}
& \tau\dot{\underline{u_C}} + \underline{u_C} = \underline{e} && \underline{u_C} = \underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\
\Leftrightarrow\ & RC\mathrm{j}\omega\underline{U}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} + \underline{U}\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} = E_0\cancel{\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} && \text{On factorise} \\
\Leftrightarrow\ & \underline{U_C}(RC\mathrm{j}\omega + 1) = E_0 && \text{On isole} \\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\underline{U_C} = \frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}}
\end{aligned}$$

Il ne reste plus qu'à prendre le module de $\underline{U_C}$ pour avoir l'amplitude réelle, et l'argument de $\underline{U_C}$ pour avoir la phase à l'origine des temps.

Rappel

Pour cela, on rappelle que pour $\underline{z} \in \mathbb{C}$ tel que $\underline{z} = x + \mathrm{j}y$, on a

$$|\underline{z}| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

De plus, **le module d'un rapport est égal au rapport des modules** : $\forall(\underline{z_1}, \underline{z_2}) \in \mathbb{C}^2$,

$$\left|\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\right| = \frac{|\underline{z_1}|}{|\underline{z_2}|}$$

Application

Déterminer donc la valeur réelle de l'amplitude de la solution en RSF.

Ainsi,

$$U_C = |\underline{U_C}| = \left|\frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\right| = \frac{|E_0|}{|1 + \mathrm{j}RC\omega|}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{U_C = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (RC\omega)^2}}}$$

On fait de même pour la phase, avec pour rappel :

Rappel : pour $\underline{z} \in \mathbb{C}$

$$\tan(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{\mathrm{Re}(\underline{z})} \qquad \cos(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Re}(\underline{z})}{|\underline{z}|}$$

$$\sin(\arg(\underline{z})) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{|\underline{z}|}$$

On rappelle également que $\tan(-x) = -\tan(x)$.

Mais encore, **l'argument d'un rapport est égal à la différence des arguments** : $\forall(\underline{z_1}, \underline{z_2}) \in \mathbb{C}^2$,

$$\boxed{\arg\left(\frac{\underline{z_1}}{\underline{z_2}}\right) = \arg(\underline{z_1}) - \arg(\underline{z_2})}$$

Application

Déterminer la phase à l'origine de la solution du système, sous la forme $\tan(\varphi) = \dots$ puis $\varphi = \dots$. Le passage de l'un à l'autre est-il évident ?

Ainsi,

$$\varphi = \arg\left(\frac{E_0}{1 + \mathrm{j}RC\omega}\right) = \underbrace{\arg(E_0)}_{=0} - \arg(1 + \mathrm{j}RC\omega)$$
$$\Rightarrow \tan(\varphi) = -\tan(\arg(1 + \mathrm{j}RC\omega)) = -\frac{RC\omega}{1}$$

En appliquant arctan(), on obtient

$$\boxed{\varphi = -\arctan(RC\omega)}$$

D'une manière générale, on utilisera l'expression de la tangente d'un argument **avant** de voir si on peut prendre l'arctangente de la tangente.

Attention

Ça peut être une réponse acceptable dans certaines conditions, mais bien souvent on souhaite exprimer la phase directement. Dans ce cas, il faut faire attention au fait que

$$\arctan(\tan(\theta)) = \theta \Leftrightarrow \theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$$

Une manière de s'assurer de l'appartenance de θ à cet intervalle, il suffit de regarder la **partie réelle** de l'argument, ou bien son cosinus : s'il est positif, alors on a en effet $\theta \in \left]-\frac{\pi}{2}\,;\frac{\pi}{2}\right[$. Ici,

$$\cos(\arg(\varphi)) = \frac{\mathrm{Re}(\arg(\varphi))}{|\underline{z}|} = \frac{1}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}} > 0$$

donc on peut bien dire que $\arctan\tan(\varphi) = \varphi$.

Si ça n'est pas le cas, il faut ajouter ou soustraire π à l'argument.

Résultat

La solution particulière est

$$\boxed{u_C(t) = U_C\cos(\omega t + \varphi)}$$

avec

$$\boxed{U_C = \frac{E_0}{\sqrt{1+(RC\omega)^2}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi = -\arctan(RC\omega)}$$

Comme on l'a vu, le signal de sortie sera à la même pulsation que le signal d'entrée, mais par cet exemple du circuit RC on note que la phase et l'amplitude **dépendent de la pulsation**.

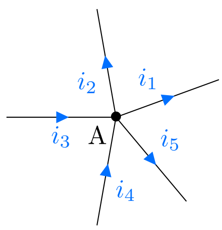
II Circuits électriques en RSF

Comme au début de l'année, nous nous plaçons toujours dans l'Approximation des Régimes Quasi-Stationnaires (ARQS), c'est-à-dire que pour un circuit de taille L alimenté par une source sinusoïdale de fréquence f, on doit avoir $\boxed{Lf \ll c}$ avec c la célérité de la lumière/des ondes électromagnétiques.

A Lois de l'électrocinétique

II.A.1 Loi des nœuds en RSF

Soit un nœud où se rejoignent 5 branches. Dans l'ARQS, nous avions la relation ci-contre. En RSF, les intensités sont sinusoïdales **et de même pulsation** ω : on aurait donc



$$\Rightarrow \begin{cases} & i_1 + i_2 + i_5 = i_3 + i_4 \\ \Longleftrightarrow & i_1 + i_2 - i_3 - i_4 + i_5 = 0 \end{cases}$$

FIGURE 5.3 – Loi des nœuds

$$i_1(t) = I_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad i_2(t) = I_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \ldots$$

Propriété

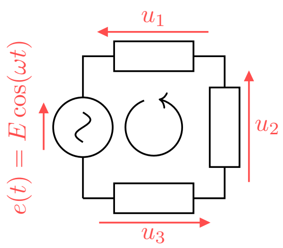
Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{i_1} + \underline{i_2} + \underline{i_5} = \underline{i_3} + \underline{i_4} \Leftrightarrow \boxed{\underline{I_1} + \underline{I_2} + \underline{I_5} = \underline{I_3} + \underline{I_4}}$$
$$\text{avec} \quad \underline{i_k} = I_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{I_k} = I_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$$

On a donc bien la même relation avec les grandeurs complexes et leurs amplitudes complexes.

II.A.2 Loi des mailles

Soit une maille avec des dipôles quelconques, alimentée par une tension sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Dans l'ARQS, nous avions la relation ci-contre. En RSF, les tensions sont sinusoïdales **et de même pulsation** ω : on aurait donc



$$\Rightarrow \begin{cases} u_3 + u_2 + u_1 - e = 0 \\ \Longleftrightarrow e = u_1 + u_2 + u_3 \end{cases}$$

FIGURE 5.4 – Loi des mailles.

$$u_1(t) = U_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad \text{et} \quad u_2(t) = U_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \text{et} \quad \ldots$$

Propriété

Ainsi, en passant en complexes, on aura

$$\underline{e} = \underline{u_1} + \underline{u_2} + \underline{u_3} \Leftrightarrow \boxed{\underline{E} = \underline{U_1} + \underline{U_2} + \underline{U_3}}$$
$$\text{avec} \quad \underline{u_k} = U_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k} \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{U_k} = U_k \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_k}$$

On a donc bien la même relation avec les grandeurs complexes et leurs amplitudes complexes.

B Impédance et admittance complexes d'un dipôle passif

II.B.1 Définition

En complexes, pour chaque dipôle on aura

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \quad \text{et} \quad i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$
$$\Longrightarrow \quad \underline{u}(t) = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_u)} = U\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_u}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{U}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \quad \text{et} \quad \underline{i}(t) = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_i)} = I\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_i}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} = \underline{I}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$$

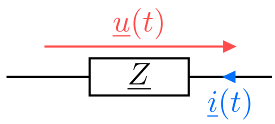
Ainsi, on peut aisément exprimer une relation courant-tension pour un dipôle complexe, sous la forme classique $U = RI$ mais en complexes. On peut tout à fait calculer $\frac{\underline{u}}{\underline{i}}$ pour avoir une proportionnalité entre les deux : on appelle cette constante l'**impédance**, notée $\underline{Z}$, et on a donc la **loi d'Ohm complexe** :

Définition : impédance

Loi d'Ohm complexe

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\,\underline{i}(t) \Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}}$$

$\Rightarrow \underline{Z}$ homogène à une résistance



convention récepteur

FIGURE 5.5 – Représentation d'une impédance complexe

En tant que complexe, on peut prendre son module et son argument :

- Son module $Z = |\underline{Z}|$ est égal au rapport de l'amplitude de u sur celle de i :

$$\boxed{|\underline{Z}| = \frac{|\underline{u}|||\underline{i}}{=}\frac{U}{I}}$$

- Son argument $\arg(\underline{Z})$ est égal à la différence de phase entre $\underline{u}$ et $\underline{i}$ (aussi appelée **déphasage**, voir Section ultérieure) :

$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \varphi_u - \varphi_i}$$

Définition : admittance

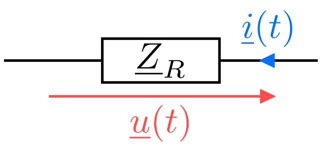
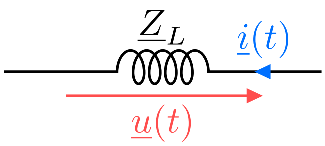
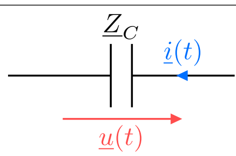
Assez naturellement, comme on avait la conductance égale à l'inverse d'une résistance, on peut définir l'inverse d'une impédance : c'est l'**admittance complexe** $\underline{Y}$:

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}} \Rightarrow \underline{I} = \underline{Y} \times \underline{U}}$$

II.B.2 Impédances de bases

Pour trouver les impédances des dipôles de base, on utilise leurs relations courant-tension qu'on convertit en complexes, **en se souvenant de dériver en complexes équivaut à multiplier par** jω.

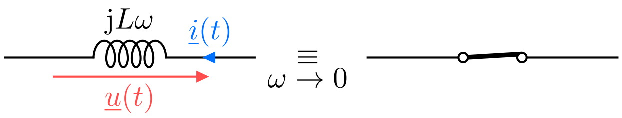
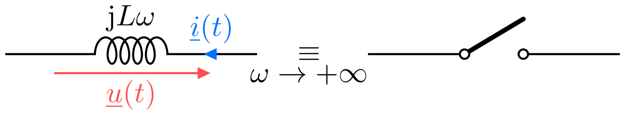
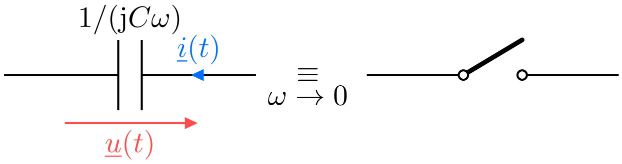
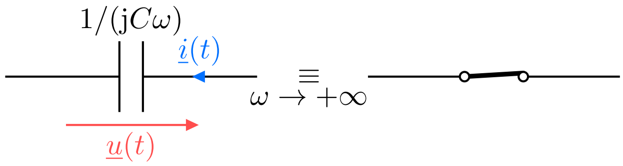
Définition : impédances des dipôles de base

	Résistance	Inductance	Capacité
Schéma	 **FIGURE 5.6** – $\underline{Z}_R$	 **FIGURE 5.7** – $\underline{Z}_L$	 **FIGURE 5.8** – $\underline{Z}_C$
Démonstration	$u(t) = Ri(t)$ $\Leftrightarrow \underline{u}(t) = R\underline{i}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_R = R}$	$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $\Leftrightarrow \underline{u}(t) = \mathrm{j}L\omega\underline{i}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega}$	$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$ $\Leftrightarrow \underline{i}(t) = C\mathrm{j}\omega t\underline{u}(t)$ $\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{\mathrm{j}C\omega}}$

II.B.3 Comportements limites

Ainsi, la résistance ne change pas d'expression entre les réels et les complexes, alors que les bobines et condensateurs ont des caractéristiques complexes différentes. En plus de ça, leurs impédances **dépendent** de ω : on peut notamment étudier deux cas limites, quand $\omega \to 0$ et $\omega \to +\infty$:

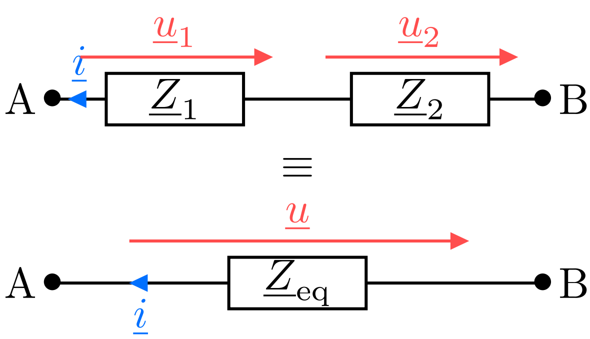
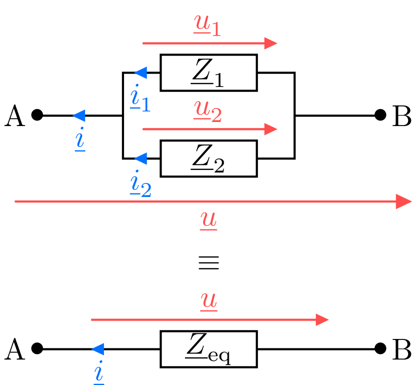
Propriété

	$\omega \to 0$	$\omega \to +\infty$
Bobine	$\lvert \underline{Z}_L \rvert = L\omega \underset{\omega\to 0}{\to} 0$ 	$\lvert \underline{Z}_L \rvert = L\omega \underset{\omega\to +\infty}{\to} +\infty$ 
Condensateur	$\lvert \underline{Z}_C \rvert = 1/(C\omega) \underset{\omega\to 0}{\to} +\infty$ 	$\lvert \underline{Z}_C \rvert = 1/(C\omega) \underset{\omega\to +\infty}{\to} 0$ 

C Associations d'impédances et ponts diviseurs

Enfin, comme la relation courant-tension avec l'impédance complexe est analogue à celle d'une résistance, on peut facilement démontrer que les associations d'impédances suivent les associations de résistances, et qu'on peut donc appliquer les ponts diviseurs de tension et de courant comme si on n'avait que des résistances.

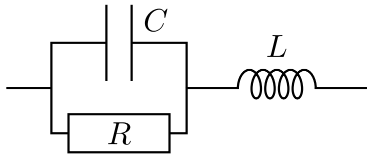
Associations d'impédances

	Schéma	Relations
En série		◇ **Impédance équivalente** : $$\underline{Z}_{\text{eq}} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$$ ◇ **Diviseur de tension** : $$\underline{u}_k = \frac{\underline{Z}_k}{\underline{Z}_{\text{branche}}}\underline{u}$$
En parallèle		◇ **Dipôle équivalent** : $$\underline{Y}_{\text{eq}} = \underline{Y}_1 + \underline{Y}_2$$ $$\Leftrightarrow \frac{1}{\underline{Z}_{\text{eq}}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2} \Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\underline{Z}_1\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$$ ◇ **Diviseur de courant** : $$\underline{i}_k = \frac{\underline{Y}_k}{\underline{Y}_{\text{para}}}\underline{i} \Leftrightarrow \underline{i}_k = \frac{\underline{Z}_{\text{para}}}{\underline{Z}_k}\underline{i}$$

D Exercices bilan

Association d'impédances

Quelle est l'impédance de l'association suivante ?

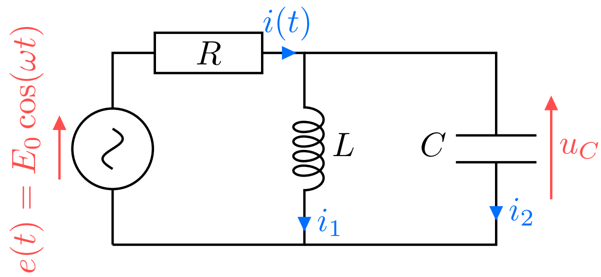


L'association en parallèle donne $\frac{\underline{Z}_C\underline{Z}_R}{\underline{Z}_C+\underline{Z}_R}$, et on ajoute $\underline{Z}_L$ à celle-ci :

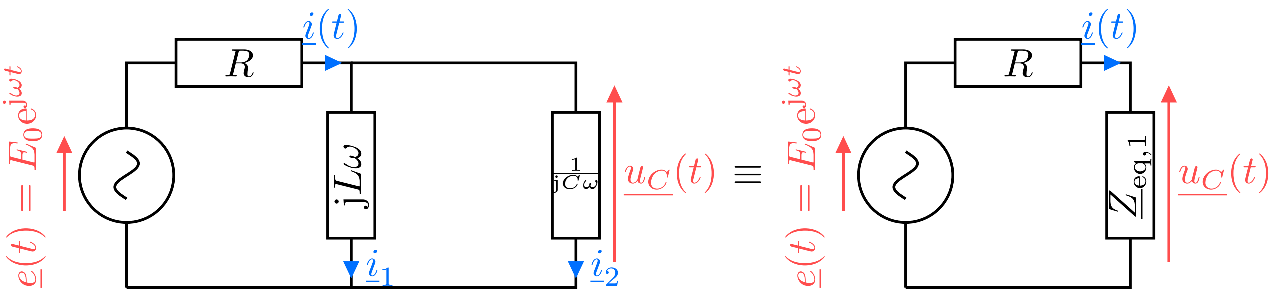
$$\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{\frac{1}{\text{j}C\omega}\times R}{\frac{1}{\text{j}C\omega}+R} + \text{j}L\omega \Leftrightarrow \boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = \frac{R}{1+\text{j}RC\omega}+\text{j}L\omega}$$

Détermination de constantes

Soit le circuit suivant, avec une entrée sinusoïdale $e(t) = E\cos(\omega t)$. Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}_C$ associée à la tension u_C en fonction de R, L, C et ω.



S'il n'y avait pas l'inductance, on pourrait facilement utiliser un pont diviseur de tension pour exprimer $\underline{u}_C$ en fonction de $\underline{e}$, $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_C$. Pour se ramener à la situation du pont diviseur de tension, on détermine donc une première impédance équivalente issue de l'association en parallèle de L et C, après les avoir converties en complexes :



On peut déterminer $\underline{Z}_{\text{eq},1}$ avec les admittances $\underline{Y}_L = 1/\text{j}L\omega$ et $\underline{Y}_C = \text{j}C\omega$, et utiliser le pont diviseur de tension directement avec l'amplitude complexe : $\underline{U}_C = \frac{\underline{Z}_{\text{eq},1}}{\underline{Z}_{\text{eq},1}+\underline{Z}_R}E_0$. Ainsi,

$$\underline{U}_C = \frac{\frac{1}{\cancel{\frac{1}{\text{j}L\omega}+\text{j}C\omega}}}{\frac{1}{\cancel{\frac{1}{\text{j}L\omega}+\text{j}C\omega}}+R(\dots)}E_0 \times \frac{\text{j}C\omega+\frac{1}{\text{j}L\omega}}{\text{j}C\omega+\frac{1}{\text{j}L\omega}} \Leftrightarrow \underline{U}_C = \frac{1}{1+\text{j}RC\omega+\frac{R}{\text{j}L\omega}}E_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U}_C = \frac{E_0}{1+\text{j}\left(RC\omega-\frac{R}{L\omega}\right)}}$$

où on a simplifié la fraction en multipliant par le terme orange d'abord, puis en utilisant que $1/\text{j} = -\text{j}$.

E Résumé

Résumé méthode

Un système soumis à une excitation sinusoïdale du type $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$ se comporte de la manière suivante :

- On observe un court régime transitoire dû à la solution homogène de l'ED ($A\mathrm{e}^{-t/\tau}$ pour ordre 1, pseudo-périodique ou apériodique pour l'ordre 2) ;
- Après ce régime, on obtient la solution particulière :

$$x(t) = X \cos(\omega t + \varphi_X)$$

  avec ω la **pulsation d'entrée**, X et φ_X définies **par le système** (et non pas des conditions initiales).
- Pour trouver ces valeurs, on définit :
  - l'entrée complexe : $\underline{e}(t) = E_0 \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$
  - les signaux de sortie complexes : $\underline{x}(t) = X\mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi_X)}$;
  - les amplitudes complexes : $\underline{X} = X\mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi_X} \Rightarrow \underline{x}(t) = \underline{X}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}$;
  - On retrouve les grandeurs réelles en en prenant le module et la phase :

$$\boxed{X = |\underline{X}|} \quad \text{et} \quad \boxed{\varphi_X = \arg(\underline{X})}$$

III Mesure de déphasages

A Définition

Définition : déphasage

Pour deux signaux sinusoïdaux **de mêmes fréquences** $s_1(t) = S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = S_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$, on définit le **déphasage** entre s_2 et s_1 comme étant la **différence de leurs phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1) \Leftrightarrow \boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1}$$

B Lecture d'un déphasage

Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$ est lié au **retard temporel** $\Delta t_{2/1} = t_2 - t_1$ du signal s_2 par rapport au signal s_1 : on a

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = -\omega \Delta t_{2/1}}$$

Dans ce cas, le déphasage obtenu est entre $-\pi$ et $+\pi$. On définit :

- $\Delta\varphi_{2/1} > 0 \Rightarrow s_2$ est en avance sur s_1 ;
- $\Delta\varphi_{2/1} < 0 \Rightarrow s_2$ est en retard sur s_1.

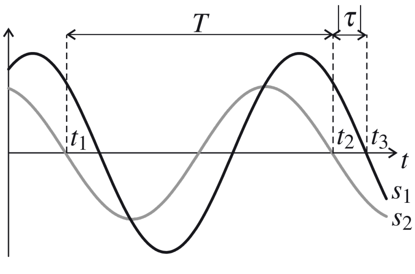


FIGURE 5.9 – Déphasage

Le principe est de mesurer la différence de temps entre les deux moments les plus proches tels que les deux signaux s'annulent **avec la même pente**.

C Valeurs particulières

Signaux en phase

Deux signaux sont **en phase** si leur **déphasage est nul** (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi]}$$

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.

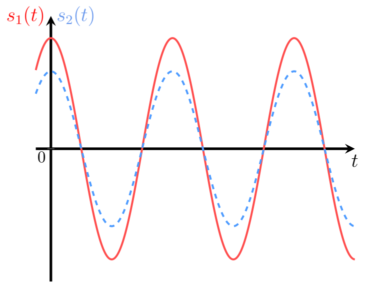


FIGURE 5.10 – En phase.

Signaux en quadrature de phase

Deux signaux sont en **quadrature phase** si leur déphasage est de $\pm\pi/\mathbf{2}$ (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]}$$

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.

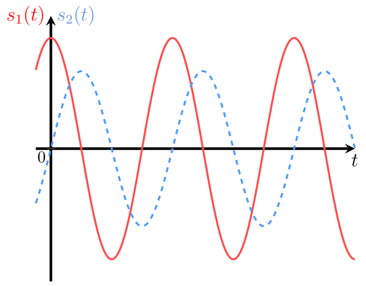


FIGURE 5.11 – En quadrature.

Signaux en opposition de phase

Deux signaux sont en **opposition de phase** si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi]}$$

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à la valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.

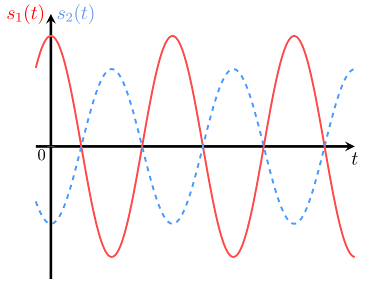


FIGURE 5.12 – En opposition.

D Déphasage des impédances

Pour un dipôle de tension $\underline{U}$ traversé par une intensité $\underline{I}$, on définit $\underline{Z} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}}$, et on a donc $\arg(\underline{Z}) = \arg(\underline{U}) - \arg(\underline{I})$. Ainsi, la phase d'une impédance représente le déphasage entre la tension et le courant. Pour les différents dipôles classiques, on trouve :

- $\arg(\underline{Z}_R) = 0 \Rightarrow$ signaux en phase ;
- $\arg(\underline{Z}_L) = \arg(\mathrm{j}L\omega) = \pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en avance sur $\underline{i}$;
- $\arg(\underline{Z}_C) = \arg(1/\mathrm{j}C\omega) = -\pi/2 \Rightarrow$ signaux en quadrature de phase, avec $\underline{u}$ en retard sur $\underline{i}$.