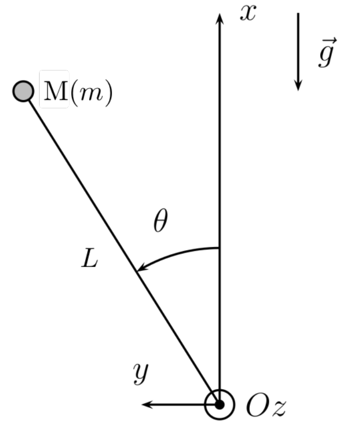
Mécanique – chapitres 6 et 7

TD : moment cinétique et forces centrales

I Gravimètre de Holweck-Lejay

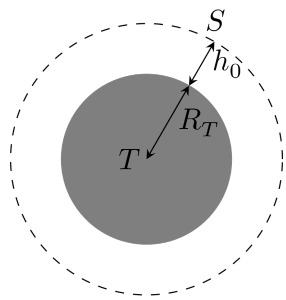
Une masse ponctuelle m est placée à l'extrémité M d'une tige de masse négligeable et de longueur $L = \mathrm{OM}$, articulée en O et mobile dans un plan vertical. Un ressort « spirale » (non représenté sur la figure) exerce sur M, via la tige, un couple de rappel (notion abordée au chapitre 8) équivalent à un moment de force dont la projection sur (Oz) est $\mathcal{M}_z = -C\theta$ avec $C > 0$.



1) Déterminer, par l'application du théorème du moment cinétique par rapport à l'axe (Oz), l'équation différentielle vérifiée par θ.
2) À l'aide d'un développement de Taylor autour de $\theta = 0$, déterminer la condition sur C pour que $\theta = 0$ soit une position d'équilibre stable.
3) Retrouver ce résultat en établissant l'énergie potentielle du ressort spiral puis en étudiant la stabilité par une approche énergétique.
4) À partir de l'équation différentielle simplifiée à la question 2, calculer la période T des petites oscillations autour de $\theta = 0$.
5) En posant $g_0 = C/mL$, déduire des résultats précédents une méthode de mesure de g.

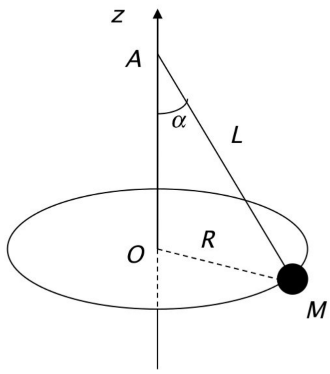
II Frottements d'un satellite

Un satellite S de masse m décrit une trajectoire circulaire uniforme d'altitude h_0 autour de la Terre de masse m_T et de rayon R_T, dans le référentiel géocentrique.



1) Exprimer la norme v de son vecteur vitesse et son énergie mécanique $\mathcal{E}_m$ en fonction de $\mathcal{G}$, m_T, m, R_T et h_0. On pourra localement introduire $R = R_T + h_0$.
2) Le satellite étant sur une orbite basse, il subit de la part des hautes couches de l'atmosphère une force de frottements qui modifie son altitude h. Cependant, **on considère que la trajectoire sur un tour reste quasi-circulaire** ; ainsi les expressions précédentes restent valables en remplaçant h_0 par $h(t)$.
   a – Le travail des forces de frottements est-il moteur ou résistant ? En déduire le signe de $\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_m}{\mathrm{d}t}$.
   b – Comment évolue le rayon de l'orbite du satellite au cours du temps ? Tracer l'allure de sa trajectoire.
   c – En déduire le sens de variation de la vitesse. Commenter.

III Pendule conique



Dans un champ uniforme de pesanteur $\vec{g}$ vertical et vers le bas, un point matériel M de masse m tourne à la vitesse angulaire ω constante autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$, dirigé vers le haut, et décrit ainsi un cercle de centre O et de rayon R. M est suspendue à un fil inextensible de longueur L et de masse négligeable, fixé en un point A de $(\mathrm{O}z)$. L'angle α de $(\mathrm{O}z)$ avec AM est constant.

On travaille dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen. On utilisera le repère de la base cylindrique tel que $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = R\overrightarrow{u_r}$.

1) Exprimer le moment cinétique de M par rapport à A en fonction de m, M, ω et α.
2) Appliquer le TMC pour déduire $\cos\alpha$ en fonction de g, L et ω.
3) Retrouver ce résultat à partir du PFD.

IV Comète de Halley

La comète de Halley est la plus connue. La première mention de son observation date de 611 av. J.-C. en Chine, et on la retrouve tout au long de l'Antiquité et du Moyen Âge, évidemment sans savoir qu'il s'agit d'une seule comète. Cette découverte a été formalisée en 1705 par Edmond Halley, qui publia un livre avançant que les observations en 1531, 1607 et 1682 concernaient en fait la même comète. Son prochain passage est prévu en 2061. On sait aujourd'hui que la comète de Halley suit une trajectoire elliptique de période de révolution autour du Soleil 76 ans, sa distance minimale au Soleil étant de $d_{\min} = 0{,}59\,\mathrm{UA}$.

Données

- Masse solaire $m_S = 2{,}0 \times 10^{30}\,\mathrm{kg}$.
- UA signifie « unité astronomique », et correspond à la distance moyenne entre la Terre et le Soleil. $1\,\mathrm{UA} = 1{,}5 \times 10^{11}\,\mathrm{m}$.

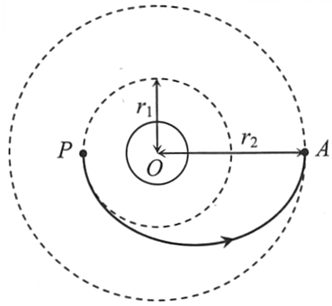
1) Faire un schéma de la trajectoire de la comète en faisant aussi apparaître la position du Soleil et $d_{\min}$.
2) Déduire de la troisième loi de Kepler la plus grande distance de la comète au Soleil.
3) Une conique est décrite par une équation polaire de la forme

$$r(\theta) = \frac{p}{1 - e\cos\theta}$$

où l'origine du repérage polaire est prise sur un des foyers de la conique. Déterminer le paramètre p et l'excentricité e de la trajectoire de la comète de Halley.

V Changement d'orbite

Un satellite artificiel assimilé à un point matériel M de masse m_s trouve sur une orbite circulaire provisoire de rayon $r_1 = 7500\,\text{km}$ autour de la Terre. On souhaite le faire passer sur son orbite définitive de rayon $r_2 = 42\,200\,\text{km}$ (orbite géostationnaire). Pour cela, on le fait d'abord passer sur une orbite de transfert elliptique dont le périgée P est à la distance r_1 et l'apogée A à la distance r_2 du centre O de la Terre. Dès que le satellite arrive en A, on le fait passer sur l'orbite circulaire de rayon r_2. Ces deux changements d'orbite sont obtenus par allumage d'un moteur placé sur le satellite : ce processus est très bref (par rapport aux périodes orbitales), donc on considérera que la vitesse passe instantanément de v_1 à v_{e1} en P, puis de v_{e2} à v_2 en A (sans changer de direction dans les deux cas).



Données

$M_{\text{Terre}} = 5{,}97 \times 10^{24}\,\text{kg}$; $\mathcal{G} = 6{,}67 \times 10^{-11}\,\text{SI}$.

1) Calculer la vitesse v_1.
2) Donner l'expression de l'énergie mécanique du satellite sur chacune des trois orbites, en fonction de r_1 et r_2.
3) Calculer la vitesse v_{e1} après le premier transfert, et la variation $\Delta v_P = v_{e1} - v_1$. Calculer également le travail W_P fourni par le moteur au satellite en ce point.
4) Déterminer une relation entre v_{e1}, v_{e2}, r_1 et r_2. Calculer v_{e2}.
5) Calculer la variation de vitesse $\Delta v_A = v_2 - v_{e2}$ lors du second transfert, ainsi que le travail W_A fourni par le moteur au satellite.