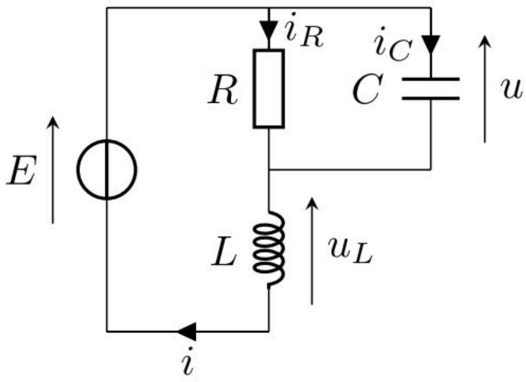
Sujet 1 – corrigé

I Oscillateur amorti RLC

Considérons le circuit représenté ci-contre, où le condensateur est initialement déchargé. Le générateur fournit un échelon de tension, en passant de 0 à E à $t = 0$.



1) Établir l'équation différentielle vérifiée par le courant i.

Réponse

On est en présence d'un circuit à deux mailles. Il faut donc appliquer la loi des nœuds afin d'écrire

$$i = i_R + i_C$$

Utilisons ensuite les lois de comportement pour faire apparaître la tension u commune à R et C :

$$i = \frac{u}{R} + C\dot{u}$$

Exprimons ensuite u en fonction de u_L (c'est une bonne idée car u_L pourra s'exprimer aisément en fonction de i !). Par loi des mailles :

$$i = \frac{E}{R} - \frac{u_L}{R} - C\dot{u}_L$$

Or $u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ $$i = \frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} - LC\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2}$$

2) L'écrire sous forme canonique en introduisant deux grandeurs ω_0 et Q que l'on interprétera.

Réponse

On cherche à l'écrire sous la forme canonique classique

$$\frac{\mathrm{d}^2 i}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 i = {\omega_0}^2 i_\infty$$

L'identification à la forme précédente permet alors d'obtenir :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \quad , \quad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{et} \quad i_\infty = \frac{E}{R}$$

Avec ω_0 la pulsation propre de l'oscillateur, Q le facteur de qualité et i_∞ la valeur prise par i pour $t \to \infty$.

3) Expliquer qualitativement l'expression du facteur de qualité.

Réponse

Contrairement au RLC série, Q est proportionnel à R (et non inversement proportionnel). C'est normal car ici, l'énergie est plus rapidement dissipée si R est faible. Au contraire, si R est élevée ($R \to \infty$), la branche contenant R devient un interrupteur ouvert et le circuit devient équivalent à un oscillateur harmonique type LC série. Q tend alors logiquement vers l'infini.

◇

4) Donner la valeur du courant i et de sa dérivée à l'instant initial.

Réponse

Analysons le régime permanent à $t = 0^-$, où le forçage est nul. Ce régime est continu, donc la bobine y est équivalente à un fil. Ainsi, d'après la loi des mailles,

$$0 = u(0^-) + 0 \quad \text{donc} \quad u(0^-) = 0$$

Par ailleurs, d'après la loi des nœuds,

$$i(0^-) = i_R(0^-) + i_C(0^-) = \frac{u(0^-)}{R} + 0 = 0$$

En effet, $i_C(0^-) = 0$ car le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert en régime permanent. En $t = 0^+$, la continuité de i au travers de la bobine impose :

$$i(0^+) = i(0^-) = 0$$

Afin de trouver la condition sur $\mathrm{d}i/\mathrm{d}t$, il faut déterminer la valeur de $u_L(0^+)$. Comme on cherche une tension, on utilise la loi des mailles à $t = 0^+$

$$E = u(0^+) + u_L(0^+)$$

Or, u étant la tension au borne d'un condensateur, elle est nécessairement continue et égale à sa valeur en 0^- donc $\boxed{u_L(0^+) = E \quad \text{Ainsi} \quad \frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{L}}$

◇

5) En supposant $Q = 2$, donner l'expression de $i(t)$ et tracer son allure.

Réponse

Le courant $i(t)$ s'écrit comme la somme d'une solution particulière de l'équation différentielle complète et d'une solution de l'équation homogène. Comme le forçage (qui se lit dans le second membre) est constant, le régime permanent (qui se lit dans la solution particulière) est constant aussi. La solution particulière est donc telle que

$$0 + 0 + \frac{1}{LC} i_p = \frac{E}{RLC} \quad \text{d'où} \quad i_p = \frac{E}{R}$$

Remarque : La solution i_p déterminée sous forme d'une constante est toujours égale à $i\infty$ identifiée dans la forme canonique.

Pour trouver la solution homogène, écrivons l'équation caractéristique, $$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 = 0$$

De discriminant, avec $Q = 2$ $$\Delta = {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{4} - 4\right) = -\frac{15}{4} {\omega_0}^2 < 0$$

Les racines de l'équation caractéristique sont donc complexes conjuguées,

$$r_{1,2} = -\frac{\omega_0}{4} \pm j\frac{\omega_0}{4}\sqrt{15} \quad \text{noté} \quad r_{1,2} = -\mu \pm j\omega_p$$

où μ est le taux d'amortissement et ω_p la pseudo-pulsation des oscillations. La solution homogène s'écrit alors

$$i_h(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right)$$

Avec A et B deux constantes d'intégration réelles. En sommant solution homogène et particulière, on obtient la solution générale :

$$i(t) = \mathrm{e}^{-\mu t}\left(A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right) + \frac{E}{R}$$

Reste à déterminer les constantes d'intégration A et B en $t = 0^+$

$$i(0^+) = \frac{E}{R} + A = 0 \quad \text{d'où} \quad A = -\frac{E}{R}$$

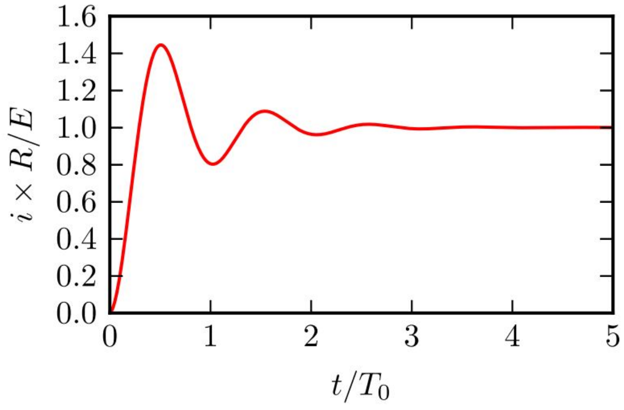
Calculons l'expression de la dérivée

$$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} = \omega_p\left[-A\sin(\omega_p t) + B\cos(\omega_p t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t} - \mu\left[A\cos(\omega_p t) + B\sin(\omega_p t)\right]\mathrm{e}^{-\mu t}$$

Ainsi $$\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}(0^+) = B\omega_p - \mu A = \frac{E}{L} \quad \text{d'où} \quad B = \frac{E}{\omega_p}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)$$

Finalement $$i(t) = \frac{E}{R} - \frac{E}{R}\mathrm{e}^{-\mu t}\left[\cos(\omega_p t) - \frac{R}{\omega_p}\left(\frac{1}{L} - \frac{\mu}{R}\right)\sin(\omega_p t)\right]$$

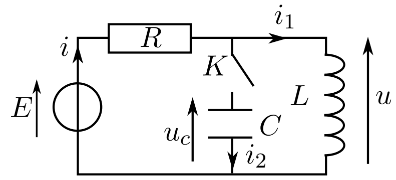
Le tracé « direct » n'est pas possible, il faut donc utiliser les informations à disposition : conditions initiales, qui donne la valeur à $t = 0$ et le signe de la pente de la tangente, régime pseudo-périodique avec environ $Q = 2$ oscillations, et solution particulière qui donne le régime permanent asymptotique. Un exemple de chronogramme acceptable est représenté figure ci(-dessous).



Sujet 2 – corrigé

I Régime transitoire

On considère le circuit ci-contre constitué d'une source idéale de tension continue de force électromotrice E, d'un condensateur de capacité C, d'une bobine d'inductance L, d'une résistance R et d'un interrupteur K. On suppose que l'interrupteur K est ouvert depuis longtemps quand on le ferme à l'instant $t = 0$. On suppose que le condensateur est initialement chargé à la tension $u_c = E$.

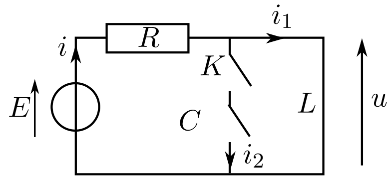


1) Faire le circuit équivalent à l'instant $t = 0^-$. Exprimer $i_1(0^-)$ en fonction de E et R.

Réponse

En régime permanent, le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil. On a alors $i_2(0^-) = 0$, donc $i(0^-) = i_1(0^-)$.

On applique la loi d'Ohm : $\boxed{i_1(0^-) = E/R}$



◇

2) Exprimer $i_1(0^+)$ et $u(0^+)$ en fonction de E et R.

Réponse

Le courant circulant à travers une bobine est continu, donc $\boxed{i_1(0^+) = i_1(0^-) = E/R}$.
La tension aux bornes du condensateur est continue. Or la tension $u(0^+)$ correspond à la tension aux bornes du condensateur.

D'après les conditions initiales, le condensateur est initialement chargé à la tension E, donc $\boxed{u(0^+) = u_c(0^-) = E}$

◇

3) Faire le circuit équivalent quand le régime permanent est atteint pour $t \to +\infty$. En déduire les expressions de $i(+\infty)$ et $i_1(+\infty)$.

Réponse

Le circuit équivalent est le même qu'à la première question, donc $i(+\infty) = i_1(+\infty) = E/R$

◇

4) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $i_1(t)$ pour $t \geq 0$ peut se mettre sous la forme :

$$\frac{d^2 i_1(t)}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{di_1(t)}{dt} + \omega_0^2 i_1(t) = \omega_0^2 A$$

Exprimer ω_0, Q et A en fonction de E, R, L et C.

Réponse

D'après les relations courant/tension des dipôles :

$$i_2 = C\frac{du}{dt} \quad ; \quad u = L\frac{di_1}{dt} \quad ; \quad E - u = Ri$$

D'après la loi des nœuds : $i = i_1 + i_2$

$$\frac{E}{R} - \frac{L}{R}\frac{di_1}{dt} = i_1 + LC\frac{d^2i_1}{dt^2} \quad \Leftrightarrow \quad \frac{d^2i_1}{dt^2} + \frac{1}{RC}\frac{di_1}{dt} + \frac{1}{LC}i_1 = \frac{1}{LC}\cdot\frac{E}{R}$$

$$\boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \qquad Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \qquad A = \frac{E}{R}}$$

◇

5) On suppose que le régime transitoire est de type pseudo-périodique. Donner alors l'inégalité vérifiée par R. On fera intervenir une résistance critique R_c que l'on exprimera en fonction de L et C.

Réponse

La nature du régime transitoire est donnée par le signe du discriminent de l'équation caractéristique associée à l'équation différentielle précédente :

$$r^2 + \frac{1}{RC}r + \frac{1}{LC} = 0 \quad \Rightarrow \quad \Delta = \frac{1}{(RC)^2} - \frac{4}{LC} < 0$$

Il faut que $\Delta < 0$ pour avoir un régime transitoire pseudo-périodique. On en déduit l'inégalité vérifiée par R : $\boxed{R > R_c \quad R_c = \frac{1}{2}\sqrt{\frac{L}{C}}}$

◇

6) Exprimer la pseudo-pulsation ω en fonction de ω_0 et Q.

Réponse

Par définition $\Delta = -4\omega^2$.

$$\Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} - 4\omega_0^2 = -4\omega_0^2\left(1 - \frac{1}{4Q^2}\right) \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$$

◇

7) Donner l'expression de $i_1(t)$ pour $t \geq 0$ en fonction de E, R, L, C, ω et t.

Réponse

En régime pseudo-périodique, la solution de l'équation différentielle est de la forme $i_1(t) = e^{-t/(2RC)}\left(B\cos(\omega t) + D\sin\right.$ $\frac{E}{R}$, avec E/R la solution particulière.

On utilise les conditions initiales pour déterminer les constantes B et D :

$$i_1(0) = \frac{E}{R} = B + \frac{E}{R} \quad \Leftrightarrow \quad B = 0$$

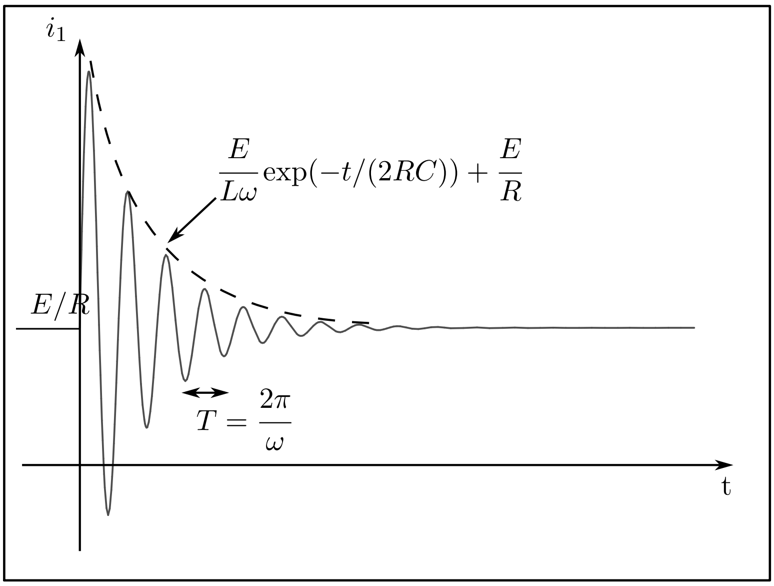
$$\frac{di_1}{dt}(0) = \frac{u(0)}{L} = \frac{E}{L} = D\omega \quad \Leftrightarrow \quad D = \frac{E}{L\omega}$$

$$\boxed{i_1(t) = \frac{E}{L\omega}e^{-t/(2RC)}\sin(\omega t) + \frac{E}{R}}$$

◇

8) Tracer l'évolution de i_1 en fonction du temps.

Réponse



◇

9) Exprimer la variation d'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_L$ par la bobine entre l'instant initial $t = 0$ et le régime permanent correspondant à $t \to +\infty$. Commenter ce résultat.

Réponse

$\Delta\mathcal{E}_L = \mathcal{E}_L(+\infty) - \mathcal{E}_L(0) = \frac{1}{2}L(i_1^2(+\infty) - i_1^2(0)) = 0$

Au cours du temps, la bobine passe d'un caractère récepteur à un caractère générateur. L'énergie totale emmagasinée est alors nulle.

◇

10) Exprimer la variation d'énergie emmagasinée $\mathcal{E}_C$ par le condensateur entre l'instant initial $t = 0$ et le régime permanent correspondant à $t \to +\infty$. Commenter ce résultat.

Réponse

$$\Delta\mathcal{E}_C = \mathcal{E}_C(+\infty) - \mathcal{E}_C(0) = \frac{1}{2}C(u^2(+\infty) - u^2(0)) = -\frac{1}{2}CE^2$$

Au global, le condensateur fournit de l'énergie. Il restitue son énergie initiale au cours du temps.

◇

11) Exprimer la puissance reçue $\mathcal{P}_R$ par la résistance R en régime permanent.

Réponse

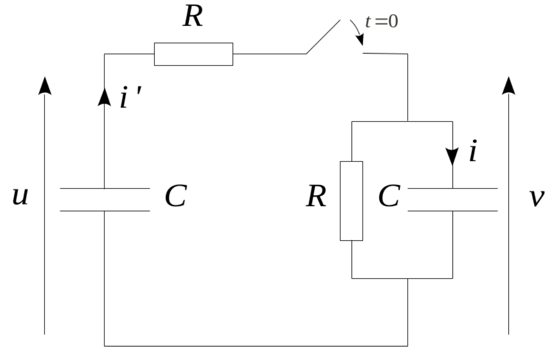
$\mathcal{P}_R = Ri^2(+\infty) = \frac{E^2}{R}$

◇

Sujet 3 – corrigé

On réalise le montage suivant. On ferme l'interrupteur à l'instant $t = 0$, C traversé par i' étant initialement chargé et C traversé par i étant initialement déchargé.

On pose $\tau = RC$. Données : $R = 10\,\mathrm{k\Omega}$ et $C = 0{,}1\,\mathrm{\mu F}$.



1) À partir de considérations physiques, préciser les valeurs de la tension v lorsque $t = 0$ et $t = \infty$.

Réponse

Le condensateur de tension v est indiqué être initialement déchargé, on a donc $v(0^-) = 0$. Comme un condensateur est de tension continue, on a donc $\boxed{v(0^+) = 0}$. De plus, à $t \longrightarrow \infty$, les deux condensateurs seront forcément déchargés à cause des résistances dissipant l'énergie, il ne peut y avoir conservation : il seront donc équivalent à des interrupteurs ouverts, et on aura donc notamment $\boxed{v(\infty) = 0}$.

◇

2) Établir l'équation différentielle du second ordre dont la tension v est solution.

Réponse

Avec une loi des mailles, on a

$$u = v + Ri'$$

Or, la RCT du condensateur de gauche **en convention générateur** est

$$i' = -C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Rightarrow i' = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}i'}{\mathrm{d}t}$$

On a donc une équation avec $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$. On cherche donc à exprimer i' en fonction de v, ce que l'on fait avec la loi des nœuds et les RCT du condensateur de droite $i = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$ et de la résistance $R(i' - i) = v$:

$$i' = i + \frac{v}{R} \Leftrightarrow i' = C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} \tag{7.1}$$

En combinant les deux, on a

$$C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R}\right) \Leftrightarrow C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{R} = -C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} - RC^2\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} - C\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{(RC)^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2v}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{\tau}\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau^2} = 0}$$

◇

3) En déduire l'expression de $v(t)$ sans chercher à déterminer les constantes d'intégration.

Réponse

On écrit l'équation caractéristique de discriminant Δ :

$$r^2 + \frac{3}{\tau}r + \frac{1}{\tau^2} = 0 \Rightarrow \Delta = \frac{9}{\tau^2} - \frac{4}{\tau^2} = \frac{5}{\tau^2} > 0$$

$$\Longrightarrow r_\pm = -\frac{3}{2\tau} \pm \frac{\sqrt{5}}{2\tau} < 0$$

On a donc un régime apériodique, dont les solutions générales sont

$$\boxed{v(t) = A\mathrm{e}^{r_+ t} + B\mathrm{e}^{r_- t}}$$

4) Donner l'allure du graphe correspondant à $v(t)$.

Réponse

Le condensateur est initialement chargé. Soit E sa tension initiale. On utilise l'équation 7.1 pour trouver que $\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{i'(0)}{C}$, sachant qu'à $t = 0$ le circuit est équivalent à un circuit RC en décharge et qu'on a donc $i'(0) = E/R$. On trouve ainsi

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} = \frac{E}{\tau}}$$

En finissant la détermination des constantes d'intégration, on trouve

$$\boxed{v(t) = \frac{E}{\tau(r_+ - r_-)}\left[\mathrm{e}^{r_+ t} - \mathrm{e}^{r_- t}\right]}$$