

Filtrage linéaire

Sommaire

I Décomposition en série de FOURIER	3
I/A Théorème de FOURIER	3
I/B Analyse spectrale	3
I/C Relation de PARSEVAL	5
II Filtrage	5
II/A Traitement du signal et filtre	5
II/B Fonction de transfert d'un filtre	5
II/C Effet d'un filtre sur un signal périodique	6
III Description d'un filtre	7
III/A Gain et gain en décibels	7
III/B Diagramme de BODE	9
III/C Filtres moyennneurs, dérivateurs et intégrateurs	10
IV Exemples de filtres	11
IV/A RC sur C : passe-bas	11
IV/B RC sur R : passe-haut	14
IV/C RLC sur C : passe-bas ordre 2	16
IV/D RLC sur R : passe-bande	17
IV/E Filtres en cascade	20
V Résumé	21

✂ Capacités exigibles

- ☐ Analyser la décomposition fournie d'un signal périodique en une somme de fonctions sinusoïdales.
- ☐ Interpréter le fait que le carré de la valeur efficace d'un signal périodique est égal à la somme des carrés des valeurs efficaces de ses harmoniques.
- ☐ Utiliser les échelles logarithmiques et interpréter les zones rectilignes des diagrammes de BODE en amplitude d'après l'expression de la fonction de transfert.
- ☐ Choisir un modèle de filtre en fonction d'un cahier des charges.
- ☐ Détecter le caractère non linéaire d'un système par l'apparition de nouvelles fréquences.

- ☐ Tracer le diagramme de BODE (amplitude et phase) associé à une fonction de transfert d'ordre 1.
- ☐ Utiliser une fonction de transfert donnée d'ordre 1 ou 2 (ou ses représentations graphiques) pour étudier la réponse d'un système linéaire à une excitation sinusoïdale, à une somme finie d'excitations sinusoïdales, à un signal périodique.
- ☐ Expliciter les conditions d'utilisation d'un filtre en tant que moyennneur, intégrateur, ou dérivateur.
- ☐ Expliquer l'intérêt, pour garantir leur fonctionnement lors de mises en cascade, de réaliser des filtres de tension de faible impédance de sortie et forte impédance d'entrée.
- ☐ Expliquer la nature du filtrage introduit par un dispositif mécanique (sismomètre, amortisseur, accéléromètre, etc.).

✓ L'essentiel

Définitions

<input type="checkbox"/> E8.1 : Spectre d'un signal	3
<input type="checkbox"/> E8.2 : Filtre	5
<input type="checkbox"/> E8.3 : Fonction de transfert	5
<input type="checkbox"/> E8.4 : Gains	7
<input type="checkbox"/> E8.5 : Échelle logarithmique	7
<input type="checkbox"/> E8.6 : Diagramme de BODE	9
<input type="checkbox"/> E8.7 : Effets des filtres	10

Propriétés

<input type="checkbox"/> E8.1 : Relation de PARSEVAL	5
<input type="checkbox"/> E8.2 : Amplitude vs. gain	8
<input type="checkbox"/> E8.3 : Passe-bas intégrateur	13
<input type="checkbox"/> E8.4 : Passe-haut dérivateur	15

Théorèmes

<input type="checkbox"/> E8.1 : FOURIER	3
---	---

Démonstrations

<input type="checkbox"/> E8.1 : \underline{H} RC sur C	6
<input type="checkbox"/> E8.2 : Amplitude vs. gain	8
<input type="checkbox"/> E8.3 : \underline{H} RC sur R	14
<input type="checkbox"/> E8.4 : \underline{H} RLC sur C	17
<input type="checkbox"/> E8.5 : \underline{H} RLC sur R	18

Applications

<input type="checkbox"/> E8.1 : Gain du filtre RC sur C	8
<input type="checkbox"/> E8.2 : Diagramme asymptotique RC sur C	10

Outils

<input type="checkbox"/> E8.1 : Appliquer un filtre linéaire	6
<input type="checkbox"/> E8.2 : Lire un diagramme de BODE	9
<input type="checkbox"/> E8.3 : Obtention des asymptotes	10
<input type="checkbox"/> E8.4 : Étude d'un filtre	21

Exemples

<input type="checkbox"/> E8.1 : Décomposi° en séries de FOURIER	3
<input type="checkbox"/> E8.2 : Filtre RC	6
<input type="checkbox"/> E8.3 : Filtrage par RC sur C	12
<input type="checkbox"/> E8.4 : Effet d'un intégrateur	13
<input type="checkbox"/> E8.5 : Effet d'un dérivateur	15
<input type="checkbox"/> E8.6 : Effet d'un passe-bande	20

Points importants

<input type="checkbox"/> E8.1 : Généralisation passe-bas ordre 1	12
<input type="checkbox"/> E8.2 : Généralisation passe-haut ordre 1	15
<input type="checkbox"/> E8.3 : Généralisation passe-bas ordre 2	17
<input type="checkbox"/> E8.4 : Généralisation passe-bande ordre 2	19
<input type="checkbox"/> E8.5 : Filtres en cascades	20

Erreurs communes

<input type="checkbox"/> E8.1 : Représentation ouverte	6
<input type="checkbox"/> E8.2 : Filtres en cascades	20

À travers les précédents chapitres, nous avons mis en place des moyens d'étudier l'amplitude d'un signal de sortie (tension u_C , elongation x) en fonction de la pulsation d'un signal d'entrée sinusoïdal. Dans la pratique, les signaux purement sinusoïdaux sont rares et sont en réalité des **signaux composés**, comportant de nombreuses fréquences. La lumière blanche, par exemple, est un signal lumineux composé d'une continuité de longueur d'ondes (allant du violet au rouge dans le visible), qui se **décompose en ses longueurs d'ondes** constitutives sous certaines conditions : chacune de ses couleurs est déviée différemment lors du passage dans un prisme par exemple.

L'objectif de ce chapitre est d'étudier des signaux composés, qu'on décomposera en **somme de signaux sinusoïdaux**, et leur traitement par des systèmes traitant différemment ces longueurs d'ondes – qu'on appelle des filtres. Ils sont au cœur de toutes les innovations technologiques du XX^e et XXI^e siècles, qui reposent entièrement sur le traitement du signal. Cela s'applique aux transferts de données, à la création et diffusion de musique, et même à la couleur bleue du ciel.

Pour une introduction visuelle et des analyses de qualité, je vous recommande les vidéos de 3BLUE1BROWN portant sur le sujet^{1,2}. Pour une approche un peu plus historique et concernant l'importance de l'algorithme informatique basé sur ce théorème, je vous recommande la vidéo de VERITASIAM³.

1. Mais qu'est-ce que la Transformée de Fourier ? Une introduction visuelle.

2. Mais qu'est-ce qu'une série de Fourier ? Du transfert thermique à des dessins avec des cercles.

3. The Remarkable Story Behind The Most Important Algorithm Of All Time

I Décomposition en série de FOURIER

Le traitement de signal composé a pu émerger grâce à un des théorèmes les plus importants de la physique dans sa totalité, le théorème de FOURIER.

I/A Théorème de FOURIER

♥ Théorème E8.1 : FOURIER

Tout signal périodique se décompose comme une somme, éventuellement infinie, de fonctions sinusoïdales. Ainsi, un signal périodique composé $s(t)$ de pulsation ω s'écrit

$$s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} s_n(t) \Leftrightarrow s(t) = S_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$$

Avec S_0 la valeur moyenne (composante continue), et les S_n et φ_n des caractéristiques du signal. Les amplitudes S_n constituent le **spectre** du signal.

I/B Analyse spectrale

Définition E8.1 : Spectre d'un signal

Le **spectre** d'un signal représente l'amplitude des différentes composantes sinusoïdales le constituant en fonction de leurs **fréquences**. Il donne les fréquences et les importances relatives des sinus.

- ◇ La première composante sinusoïdale, $S_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$, s'appelle le **fondamental**. Il donne sa **fréquence au signal entier**.
- ◇ Le signal $S_n \cos(n\omega t + \varphi_n)$ est appelé **harmonique de rang n**. Sa pulsation est un **multiple** du fondamental.

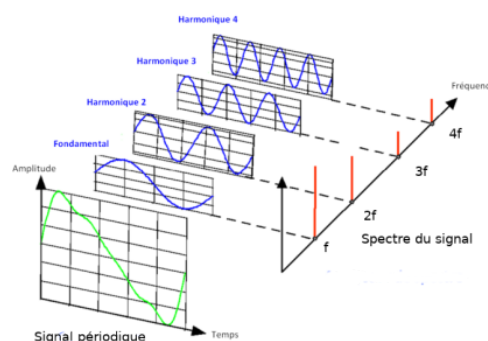


FIGURE E8.1 – Décomposition de FOURIER d'un signal composé⁴.

Exemple E8.1 : Décomposi° en séries de FOURIER

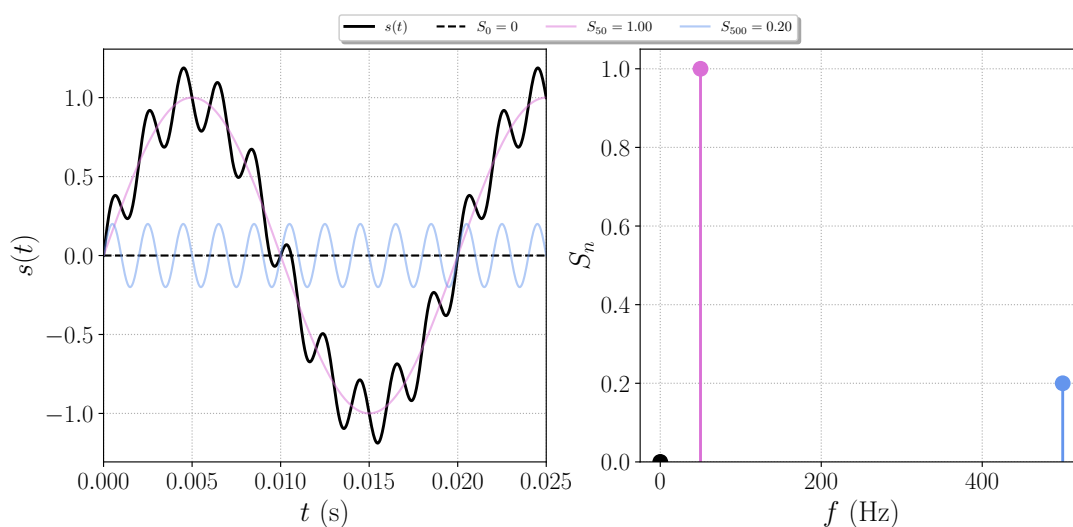
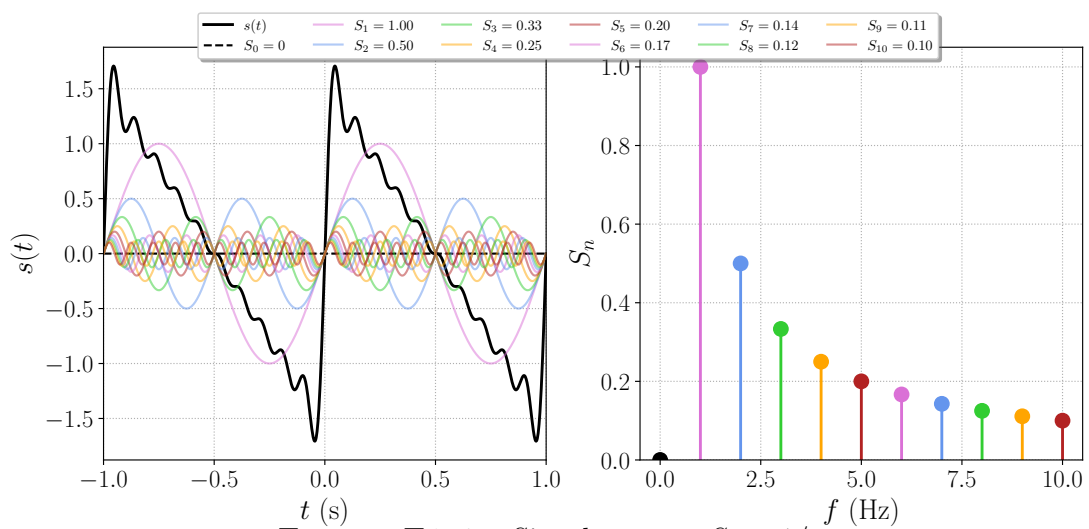
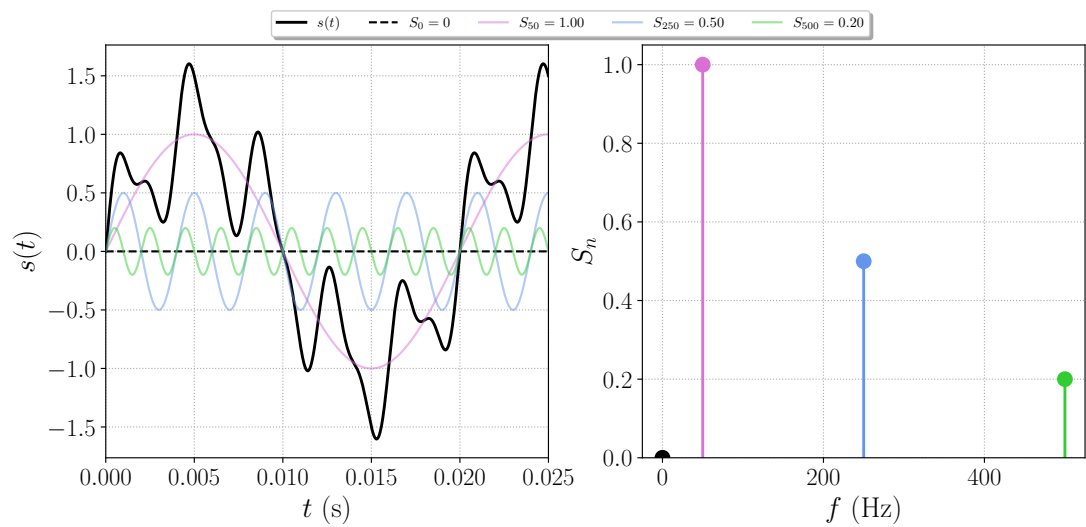
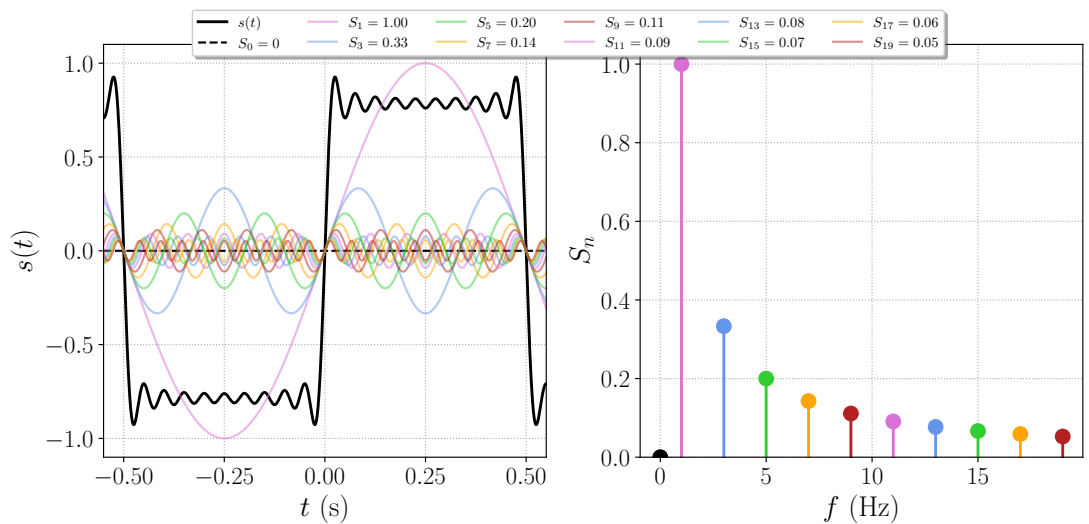


FIGURE E8.2 – Signal somme de 50 et 500 Hz

4. Pour un approche ludique, essayer ce site : [Composeur de séries de FOURIER](#)

FIGURE E8.4 – Signal rampe : $S_n = 1/n$ FIGURE E8.5 – Signal créneau : $S_{2n+1} = 1/(2n+1)$ 

Interprétation E8.1 : Hautes et basses fréquences

- ◇ Les **basses fréquences** « codent » les **variations lentes** d'un signal ;
- ◇ les **hautes fréquences** « codent » les **variations brusques** d'un signal.

I/C Relation de PARSEVAL

Si l'on peut décomposer tout signal en somme de sinus, et que l'énergie moyenne d'une fonction sinusoïdale est $\langle s^2(t) \rangle$, alors on peut espérer que l'énergie de tout le signal est la somme des fréquences individuelles le composant. C'est en effet le cas :

Propriété E8.1 : Relation de PARSEVAL

$$\langle s^2(t) \rangle = s_{\text{eff}}^2 = S_0^2 + \frac{1}{2} \sum_{n=1}^{+\infty} S_n^2$$

Ainsi, l'énergie portée par un signal se répartit dans ses harmoniques, et ce de façon indépendante.

II Filtrage linéaire

II/A Traitement du signal et filtre

Le but du **traitement du signal** est d'**extraire l'information utile** d'un signal issu d'un capteur où de multiples signaux se superposent au signal utile : bruits électromagnétiques, autres informations, etc.

- ◇ Pour recevoir la radio, on doit sélectionner le signal autour d'une bande de fréquence précise et éliminer le reste ;
- ◇ Pour isoler une voix dans un morceau de musique, c'est le même principe.

♥ Définition E8.2 : Filtre

Système qui **traite un signal** sur un **critère fréquentiel**. On le représente par un **quadripôle** dans les schémas électrique, avec $e(t)$ l'entrée et $s(t)$ la sortie. On en distingue 3 types principaux :

- ◇ **Passe-bas** : ne laisse passer que les basses fréquences ;
- ◇ **Passe-haut** : ne laisse passer que les hautes fréquences ;
- ◇ **Passe-bande** : ne laisse passer qu'une bande de fréquences.

Il est dit **linéaire** si la sortie est de même(s) fréquence(s) que l'entrée (i.e., l'équation différentielle derrière son action est une EDL).

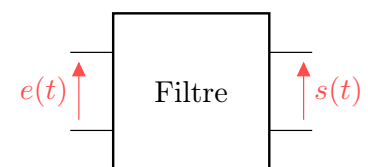


FIGURE E8.6 – Filtre.

II/B Fonction de transfert d'un filtre

La grandeur caractérisant l'action d'un filtre est sa **fonction de transfert** :

♥ Définition E8.3 : Fonction de transfert

Soit \underline{E} l'amplitude complexe d'un signal d'entrée et \underline{S} celle d'un signal de sortie associé. Alors,

$$\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{S}(\omega)}{\underline{E}} \Leftrightarrow \underline{S}(\omega) = \underline{H}(\omega)\underline{E} \Leftrightarrow \begin{cases} S(\omega) = |\underline{H}(\omega)\underline{E}| = E \cdot |\underline{H}(\omega)| \\ \varphi_s(\omega) = \arg(\underline{H}(\omega)\underline{E}) = \varphi_e + \arg(\underline{H}(\omega)) \end{cases}$$

Exemple E8.2 : Filtre RC

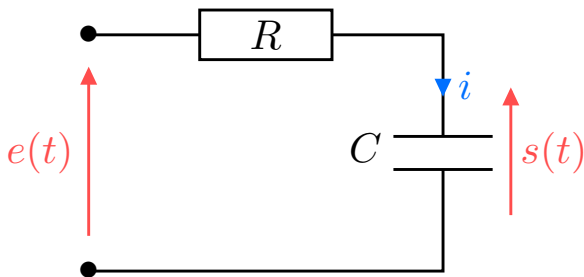


FIGURE E8.7 – Filtre RC.

Attention E8.1 : Représentation ouverte

On n'indique pas le reste du circuit, mais **un filtre s'insère dans un circuit** :

- ◇ $e(t)$ peut venir d'un générateur, d'un amplificateur, etc.
- ◇ $s(t)$ peut aller vers un appareil de mesure, un haut-parleur, etc.

♥ Démonstration E8.1 : \underline{H} RC sur C

Pour trouver la fonction de transfert, on transforme le circuit en complexes et on applique un pont diviseur de tension :

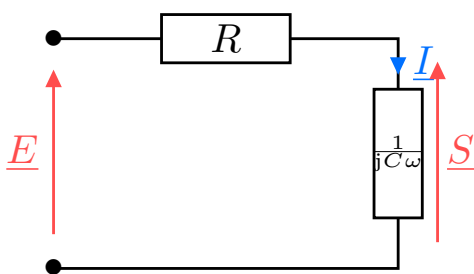


FIGURE E8.8 – RC en complexes.

$$\begin{aligned}
 \underline{S} &= \frac{1/jC\omega}{R + 1/jC\omega} \underline{E} \\
 \Leftrightarrow \underline{S} &= \frac{1}{1 + jRC\omega} \underline{E} \\
 \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\frac{\omega}{\omega_c}} \\
 \Leftrightarrow \underline{H} &= \frac{1}{1 + jx}
 \end{aligned}$$

$\times \frac{jC\omega}{jC\omega}$
 $\frac{\underline{H} = \underline{S}/\underline{E}}{\omega_c = 1/RC}$
 $x = \omega/\omega_c$

♥ Notation E8.1 : Pulsation(s) réduite

Pour alléger les notations, et se ramener à des grandeurs centrées autour de l'unité, il est commode d'introduire les **pulsations réduite** :

$$x = \frac{\omega}{\omega_{\text{ref}}} \quad \text{avec} \quad \omega_{\text{ref}} = \omega_c \quad \text{ou} \quad \omega_{\text{ref}} = \omega_0 \quad \text{selon le contexte}$$

II/C Effet d'un filtre sur un signal périodique

Pour un signal périodique, décomposable en signaux sinusoïdaux, on procède par superposition :

♥ Outils E8.1 : Appliquer un filtre linéaire

- 1) On **décompose le signal d'entrée** en sinusoïdes, avec ω_e la pulsation d'entrée du fondamental et $\omega_n = n\omega_e$ les pulsations des harmoniques :

$$e(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} e_n(t) = E_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} E_n \sin(n\omega_e t + \varphi_n)$$

- 2) On applique la **fonction de transfert à chaque entrée** pour obtenir la sortie correspondante :

$$s_n(t) = S_n \sin(n\omega_e t + \psi_n) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} S_n = |\underline{H}(n\omega_e) \underline{E}_n| \\ \psi_n = \arg(\underline{H}(n\omega_e) \underline{E}_n) \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} S_n = E_n \cdot |\underline{H}(n\omega_e)| \\ \psi_n = \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega_e)) \end{cases}$$

- 3) On recombine le signal de sortie en **sommant les sorties obtenues** :

$$e(t) = \sum_{n=0}^{+\infty} e_n(t) = \left\{ \begin{array}{l} E_0 \quad \rightarrow \quad \underline{H}(0 \cdot \omega_e) \rightarrow S_0 \\ + \\ E_1 \sin(\omega_e t + \varphi_1) \rightarrow \underline{H}(1 \cdot \omega_e) \rightarrow S_1 \sin(\omega_e t + \psi_1) \\ + \\ E_2 \sin(2\omega_e t + \varphi_2) \rightarrow \underline{H}(2 \cdot \omega_e) \rightarrow S_2 \sin(2\omega_e t + \psi_2) \\ \vdots \\ E_n \sin(n\omega_e t + \varphi_n) \rightarrow \underline{H}(n \cdot \omega_e) \rightarrow S_n \sin(n\omega_e t + \psi_n) \end{array} \right\} = \sum_{n=0}^{+\infty} s_n(t) = s(t)$$

III Description d'un filtre

III/A Gain et gain en décibels

♥ Définition E8.4 : Gains

1) Le **gain** traduit l'effet du filtre sur l'amplitude d'un signal ; on a

$$G(x) = |\underline{H}(x)| = \frac{S_n(x)}{E_n} \quad \text{unité} \quad \text{aucune}$$

◇ $G(x) = 1 \Rightarrow S_n(x) = E_n$: composante de sortie **conservée** à cette fréquence.

◇ $G(x) > 1 \Rightarrow S_n(x) > E_n$: composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.

◇ $G(x) < 1 \Rightarrow S_n(x) < E_n$: composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

2) Le **gain en décibel** traduit le même effet, mais terme d'**énergie** et en échelle logarithmique :

$$\begin{aligned} G_B(x) = \log(|\underline{H}(x)|^2) &\Rightarrow G_{dB}(x) = 10 \log(|\underline{H}(x)|^2) \\ &\Leftrightarrow G_{dB}(x) = 20 \log |\underline{H}(x)| \end{aligned} \quad \begin{array}{c} \text{Unité} \quad \text{dB} \end{array}$$

◇ $G_{dB}(x) = 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |\underline{H}(x)| = 1$: composante de sortie **conservée** à cette fréquence.

◇ $G_{dB}(x) > 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |\underline{H}(x)| > 1$: composante de sortie **amplifiée** à cette fréquence.

◇ $G_{dB}(x) < 0 \text{ dB} \Leftrightarrow |\underline{H}(x)| < 1$: composante de sortie **atténuée** à cette fréquence.

Définition E8.5 : Échelle logarithmique

Les échelles logarithmiques sont utiles pour visualiser des données sur de grands intervalles.



FIGURE E8.9 – Exemple d'échelle logarithmique

À l'inverse d'une échelle linéaire, ici les incréments sont des **puissances de 10**. Le passage d'une puissance de 10 à la suivante s'appelle une **décade**.

Rappel E8.1 : Logarithme décimal

Le logarithme décimal est la fonction inverse de la fonction $f : x \mapsto 10^x$. Ainsi,

$$\log(10^1) = 1 \quad ; \quad \log(10^0) = 0 \quad ; \quad \log(10^{-1}) = -1$$

♥ Propriété E8.2 : Amplitude vs. gain

- 1) Lorsque l'amplitude est divisée par 10, le gain en décibels diminue de 20 dB ;
- 2) La bande passante est l'ensemble des pulsations telles que $G_{dB}(\omega) \geq G_{dB, \max} - 3 \text{ dB}$:

$$\text{bande passante} \triangleq \{\omega \mid G_{dB}(\omega) \geq G_{dB, \max} - 3 \text{ dB}\}$$

♥ Démonstration E8.2 : Amplitude vs. gain

$$\begin{aligned} 1) \quad & |\underline{H}(\omega_2)| = \frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10} \\ & \Leftrightarrow 20 \log(|\underline{H}(\omega_2)|) = 20 \log\left(\frac{|\underline{H}(\omega_1)|}{10}\right) \\ & \Leftrightarrow 20 \log(|\underline{H}(\omega_2)|) = 20 \log(|\underline{H}(\omega_1)|) - 20 \log(10) \\ & \Leftrightarrow G_{dB}(\omega_2) = G_{dB}(\omega_1) - 20 \text{ dB} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & |\underline{H}(\omega)| \geq \frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}} \\ & \Leftrightarrow 20 \log(|\underline{H}(\omega)|) \geq 20 \log\left(\frac{|\underline{H}|_{\max}}{\sqrt{2}}\right) \\ & \Leftrightarrow G_{dB}(\omega) \geq \underbrace{20 \log(|\underline{H}|_{\max})}_{= G_{dB, \max}} - \underbrace{20 \log(\sqrt{2})}_{\approx 3 \text{ dB}} \quad \blacksquare \end{aligned}$$

♥ Application E8.1 : Gain du filtre RC sur C

On rappelle la fonction de transfert du filtre RC sur C : $\underline{H}(x) = \frac{1}{1+jx}$.

- 1) Déterminer son gain. Quel est son maximum ?
- 2) En déduire son gain en décibels. Quel est son maximum ?
- 3) Déterminer sa bande passante à l'aide du gain.
- 4) Déterminer sa phase. Donner ses limites pour $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$.

$$1) \quad \boxed{G(x) = |\underline{H}| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}} \quad \text{et} \quad \underline{G_{\max} = G(0) = 1}$$

$$\begin{aligned} 2) \quad & G_{dB}(x) = 20 \log(\sqrt{1+x^2}^{-1}) = 20 \log(1+x^2)^{-1/2} \\ & \Leftrightarrow G_{dB}(x) = \frac{20}{-2} \log(1+x^2) \Leftrightarrow \boxed{G_{dB}(x) = -10 \log(1+x^2)} \quad \left. \vphantom{\frac{20}{-2}} \right) \log(a^b) = b \log a \\ & \Rightarrow \text{A.N. : } \underline{G_{dB, \max} = 0} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 3) \quad & G(x) \geq \frac{G_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{1}{\sqrt{1+x^2}} \geq \frac{1}{\sqrt{2}} \\ & \Leftrightarrow \boxed{x \leq 1 \Leftrightarrow \omega \leq \omega_c} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 4) \quad & \varphi(x) = \arg(\underline{H}(x)) = -\arg\left(\frac{1}{\underset{\text{Re}>0}} + jx\right) \Leftrightarrow \boxed{\varphi(x) = -\arctan(x)} \\ & \Rightarrow \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow 0} 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \xrightarrow{x \rightarrow \infty} -\frac{\pi}{2} \end{aligned}$$



♥ Interprétation E8.2 : Pulsation de coupure

Ainsi, on appelle ω_c la pulsation de **coupure** puisque $\forall \omega > \omega_c$, le signal est atténué, c'est-à-dire « coupé » du spectre d'entrée. Cela diffère donc bien de la pulsation propre ω_0 d'un système oscillant qui correspond à sa pulsation naturelle d'oscillation.

III/B Diagramme de BODE

III/B) 1 Définition

♥ Définition E8.6 : Diagramme de BODE

Le(s) diagramme(s) de BODE est un outil permettant de visualiser *et quantifier* l'effet d'un filtre sur une fréquence d'entrée. On représente pour cela :

- ◇ **gain en décibels** $G_{dB}(x) = 20 \log |\underline{H}(x)|$;
- ◇ et sa **phase** $\varphi(x) = \arg(\underline{H}(x))$.

On les trace en fonction de la pulsation (réduite ou non) ou de la fréquence, et **en échelle logarithmique**.

Par exemple, pour le RC sur C :

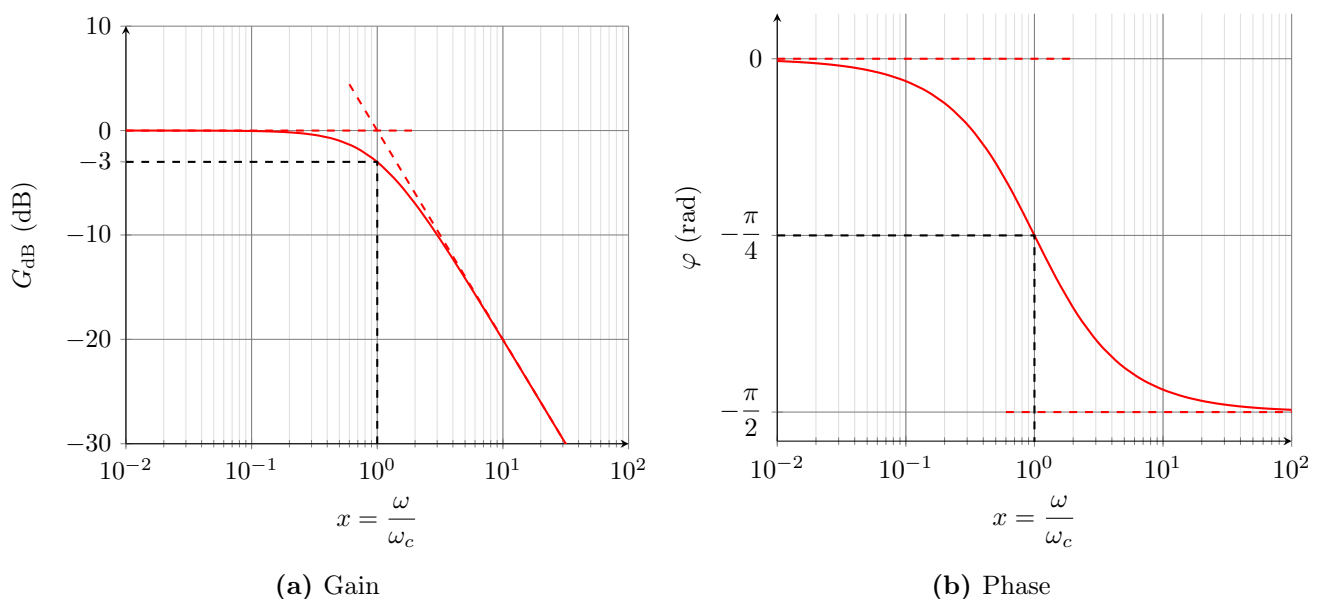


FIGURE E8.10 – Diagramme de BODE du filtre RC sur C.

C'est donc un passé-bas !

III/B) 2 Lecture

♥ Outils E8.2 : Lire un diagramme de BODE

Pour lire le signal de sortie d'un filtre, il suffit de repérer le **gain** et la **phase** de la fonction de transfert **pour chaque fréquence** de la décomposition : pour $e_n(t) = E_n \cos(n\omega_e t + \varphi_n)$, la sortie sera

$$s_n(t) = |\underline{H}(n\omega_e)| E_n \cos(\omega t + \varphi_n + \arg(\underline{H}(n\omega_e)))$$

On trouve le déphasage par lecture directe, et on trouve le gain à partir du gain en décibel en

inversant la formule :

$$G_{\text{dB}}(\omega) = 20 \log |\underline{H}(\omega)| \Leftrightarrow |\underline{H}(\omega)| = 10^{G_{\text{dB}}(\omega)/20}$$

III/B) 3 Asymptotes

♥ Outils E8.3 : Obtention des asymptotes

Pour trouver les asymptotes :

- 1) On simplifie $\underline{H}(x)$ pour $x \rightarrow 0$ et $x \rightarrow \infty$, en ne gardant **que le terme prépondérant** au numérateur et au dénominateur ;
- 2) On calcule G_{dB} et φ avec ces limites asymptotiques ;
- 3) On trace les droites obtenues en les faisant se rejoindre.

♥ Application E8.2 : Diagramme asymptotique RC sur C

Déterminer les droites asymptotiques du diagramme de BODE de RC sur C. Vérifier la cohérence avec les asymptotes de la Figure E8.10. Indiquer le point d'intersection des asymptotes en gain.

$$1) \quad \underline{H}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \frac{1}{1+0} = 1 \quad \text{et} \quad \underline{H}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{jx}$$

2) ◇ Pour le gain :

▷ **Asymptotes :**

$$G_{\text{dB}}(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 20 \log(1) = 0 \quad \text{et} \quad G_{\text{dB}}(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} 20 \log \left| \frac{1}{jx} \right| = -20 \log x$$

Ainsi, à hautes fréquences, **le gain diminue de 20 dB par décade** : si ω est multiplié par 10, le gain en décibel baisse de 20 dB (i.e. l'amplitude est divisée par 10).

▷ **Intersection :**

$$G_{\text{dB}}(x \rightarrow 0) = G_{\text{dB}}(x \rightarrow \infty) \Leftrightarrow -20 \log x_{\text{its}} = 0 \\ \Leftrightarrow \boxed{x_{\text{its}} = 1} \quad \text{et} \quad \boxed{G_{\text{dB}}(x_{\text{its}}) = 0}$$

◇ Pour la phase :

$$\varphi(x) \underset{x \rightarrow 0}{\sim} \arg(1) = 0 \quad \text{et} \quad \varphi(x) \underset{x \rightarrow \infty}{\sim} \arg\left(\frac{1}{jx}\right) = -\frac{\pi}{2}$$

III/C Filtres moyennateurs, dérivateurs et intégrateurs

♥ Définition E8.7 : Effets des filtres

Un filtre peut, selon la plage de fréquences du signal d'entrée, se comporter avec les effets suivants :

◇ **Moyenueur** : Sortie proportionnelle à la moyenne de l'entrée,

$$\boxed{s(t) = K \langle e(t) \rangle}$$

En pratique, c'est un **passe-bas** pour lequel $\omega_c \ll \omega_e$: toutes les harmoniques sauf la composante continue sont atténuées.

◇ **Intégrateur** : Sortie proportionnelle à la primitive de l'entrée,

$$s(t) = K \int e(t) dt \Leftrightarrow \underline{S} = \frac{K}{j\omega} \underline{E} \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = \frac{K}{j\omega}$$

Correspond à une pente de -20 dB/decade gain. Par exemple, le passe-bas d'ordre 1 pour $\omega \gtrsim 3\omega_c$ est un intégrateur.

◇ **Dérivateur** : Sortie proportionnelle à la dérivée de l'entrée,

$$s(t) = K \frac{de}{dt} \Leftrightarrow \underline{S} = K j\omega \underline{E} \Leftrightarrow \underline{H}(j\omega) = K \cdot j\omega$$

Correspond à une pente de $+20$ dB/decade en gain. Ça sera le cas d'un passe-haut d'ordre 1, pour $\omega \lesssim 0,3\omega_c$

IV Exemples de filtres

IV/A RC sur C : passe-bas

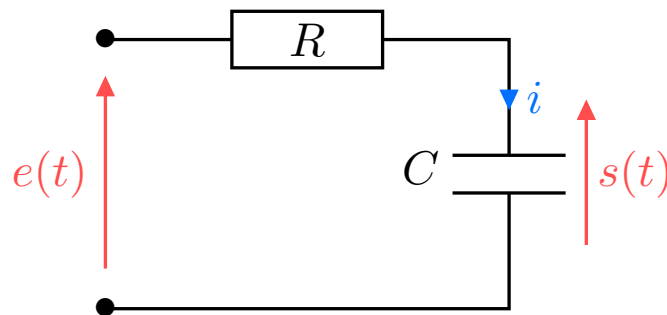


FIGURE E8.11 – RC sur C.

IV/A) 1 Prévision comportement

Basses fréquences

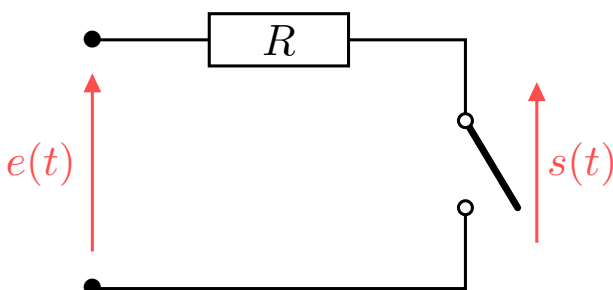


FIGURE E8.12 – RC sur C en BF

$$\begin{aligned} \text{Circuit ouvert} &\Rightarrow i(t) = 0 \Leftrightarrow s(t) = e(t) \\ \Rightarrow H(0) = 1 &\Leftrightarrow G_{\text{dB}}(0) = 0 \quad \text{et} \quad \Delta\varphi_{s/e}(0) = 0 \end{aligned}$$

Hautes fréquences

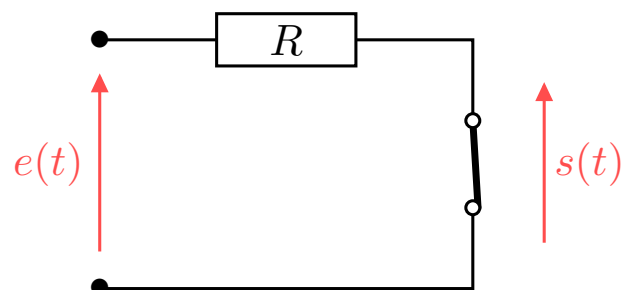


FIGURE E8.13 – RC sur C en HF

$$\begin{aligned} \text{Tension d'un fil} &\Rightarrow s(t) = 0 \\ \Rightarrow H(x) &\xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow G_{\text{dB}}(x) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} -\infty \end{aligned}$$