Sujet 1 – corrigé

I Corde de Melde : superposition d'ondes

On considère une corde de Melde de longueur L. On interprète la vibration de la corde de la manière suivante : le vibreur émet une onde qui se propage en direction de la poulie où elle est réfléchie ; cette onde réfléchie se propage en direction du vibreur où elle est elle-même réfléchie ; l'onde réfléchie se propage en direction de la poulie où elle se réfléchit, et ainsi de suite. L'axe (Ox) est parallèle à la corde au repos ; le vibreur est en $x = 0$ et la poulie en $x = L$. Le vibreur émet une onde $s_0(x,t)$ telle que

$$s_0(0,t) = a_0 cos(\omega t)$$

La célérité des ondes sur la corde est c et on note $k = \omega/c$. On fait les hypothèses simplificatrices suivantes :

- lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur la poulie en $x = L$, l'onde réfléchie s_r vérifie :

$$s_r(L,t) = -r\, s_i(L,t)$$

  où r est un coefficient compris entre 0 et 1 ;

- lorsqu'une onde incidente s_i arrive sur le vibreur en $x = 0$, l'onde réfléchie s'_r vérifie :

$$s'_r(0,t) = -r' s'_i(0,t)$$

  où r' est un coefficient compris entre 0 et 1.

1) Exprimer l'onde $s_0(x,t)$.

Réponse

L'onde s_0 se propage dans le sens de (Ox) avec la célérité c donc :

$$s_(x,t) = s_0(0,t - x/c) = a_0 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{x}{c}\right)\right\} = a_0 \cos(\omega t - kx)$$

◇

2) Exprimer l'onde $s_1(x,t)$ qui apparaît par réflexion de l'onde s_0 sur la poulie, puis l'onde $s_2(x,t)$ qui apparaît par réflexion de s_1 sur le vibreur, puis l'onde $s_3(x,t)$ qui apparaît par réflexion de s_2 sur la poulie.

Réponse

L'onde s_1 provient de l'onde s_0 par réflexion sur la poulie donc :

$$s_1(L,t) = -rs_0(L,t) = -ra_0 \cos(\omega t - kL)$$

De plus, s_1 se propage dans le sens inverse de (Ox) avec la célérité c, donc

$$s_1(x,t) = s_1\left(L,t - \frac{L-x}{c}\right) = -ra_0 \cos\left\{\omega\left(t - \frac{L-x}{c}\right) - kL\right\} = -ra_0 \cos(\omega t + kx - 2kL)$$

De manière analogue, $$s_2(0,t) = -r' s_1(0,t) = -rr' a_0 \cos(\omega t - 2kL)$$

D'où $$s_2(x,t) = s_2(0,t - x/c) = rr' a_0 \cos(\omega t - kx - 2kL)$$

Enfin $$s_3(L,t) = -rs_2(L,t) = -r^2 r' a_0 \cos(\omega t - 3kL)$$

Soit, $$s_3(x,t) = s_3\left(L,t - \frac{L-x}{c}\right) = -r^2 r' a_0 \cos(\omega t + kx - 4kL)$$

◇

3) À quelle condition les ondes s_0 et s_2 sont-elles en phase en tout point ? Que constate-t-on alors pour les ondes s_1 et s_2 ? La condition précédente est supposée réalisée dans la suite.

Réponse

La phase initiale de s_0 au point d'abscisse x est égale à $-kx$; la phase initiale de s_2 au même point est égale à $-kx - 2kL$. Les deux ondes sont en phase en tout point à condition que :

$$2kL = 2n\pi$$

où n est un entier. Si cette condition est vérifiée, les ondes s_1 et s_3 sont elles aussi en phase en tout point.

◇

4) Justifier l'expression suivante de l'onde totale existant sur la corde :

$$s(x,t) = a_0 \left\{1 + rr' + (rr')^2 + \ldots + (rr')^n + \ldots\right\} \cos(\omega t - kx) - r\, a_0 \left\{1 + rr' + (rr')^2 + \ldots + (rr')^n + \ldots\right\} \cos(\omega t + kx)$$

Réponse

Par réflexion continuelle sur les extrémités de la corde, il existe une infinité d'ondes se propageant dans les deux sens. Par ailleurs, les ondes se propageant dans un sens donné sont toutes en phase.

◇

5) En quels points de la corde l'amplitude de la vibration est-elle maximale ? Exprimer l'amplitude maximale A_{max} en fonction de a, r et r'. On rappelle la formule :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (rr')^n = \frac{1}{1 - rr'}$$

Réponse

On peut réécrire $s(x,t)$ en utilisant la formule de sommation fournie :

$$s(x,t) = \frac{a_0}{1 - rr'} \cos(\omega t - kx) - \frac{r a_0}{1 - rr'} \cos(\omega t + kx)$$

L'amplitude est maximale en un point où les deux ondes sont en interférence constructive, c'est-à-dire aux points tels que $kx = -kx + \pi + 2p\pi$ (attention au signe - devant le second cosinus qui introduit un déphasage de π) où p est un entier soit :

$$x = \frac{(2p+1)\pi}{2k} = \frac{2p+1}{2n} L$$

L'entier p est compris entre 0 et $n - 1$ puisque x est compris entre 0 et L. La valeur minimale de l'amplitude est :

$$A_{\text{min}} = \frac{a_0}{1 - rr'} - \frac{r a_0}{1 - rr'} = a_0 \frac{1 - r}{1 - rr'}$$

◇

6) En quels points l'amplitude est-elle minimale ? Exprimer l'amplitude minimale A_{min}.

Réponse

L'amplitude est minimale en un point où les deux ondes sont en interférence destructrice, c'est-à-dire aux points tels que $kx = -kx + 2p\pi$ où p est un entier soit :

$$x = \frac{p\pi}{k} = \frac{p}{n} L$$

L'entier p est compris entre 0 et n puisque x est compris entre 0 et L. La valeur minimale de l'amplitude est :

$$A_{\min} = \frac{a_0}{1 - rr'} - \frac{ra_0}{1 - rr'} = a_0 \frac{1 - r}{1 - rr'}$$

---

7) Expérimentalement on trouve $\quad \dfrac{A_{\min}}{a_0} \approx 1 \quad \text{et} \quad \dfrac{A_{\max}}{a_0} \approx 10$

Déterminer r et r'.

Réponse

On a $\quad \dfrac{1 - r}{1 + rr'} \approx 1 \quad \text{et} \quad \dfrac{1 + r}{1 + rr'} \approx 1$

Il s'agit de résoudre un système de deux équations à deux inconnues. Il vient, après calcul,

$$r \approx 0{,}8 \quad \text{et} \quad r' \approx 1$$

Sujet 2 – corrigé

I Interféromètre de Mach-Zender

On considère une lame semi-réfléchissante non équilibrée qui divise un faisceau incident de puissance $\mathcal{P}$ en un faisceau réfléchi de puissance $\mathcal{P}_r = R\mathcal{P}$ et un faisceau transmis de puissance

$$\mathcal{P}_t = T\mathcal{P} \quad \text{avec} \quad R + T = 1$$

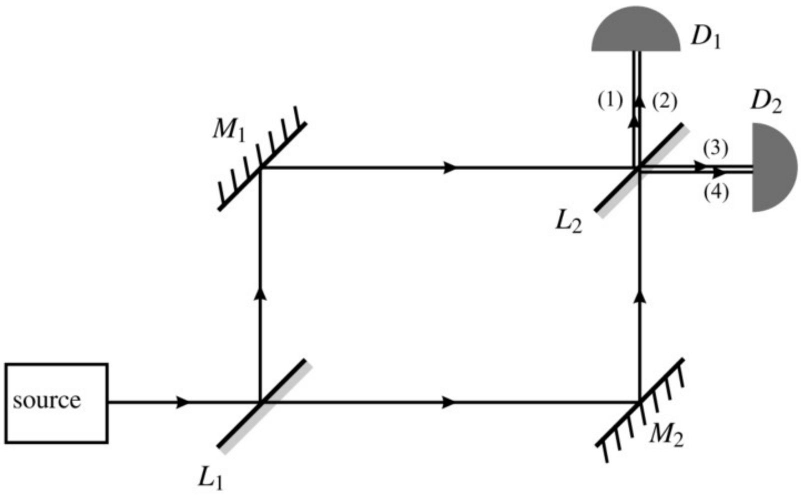
1) Traduire ces renseignements en termes de probabilité de réflexion et de transmission du photon.

Réponse

La répartition de puissance entre partie transmise et réfléchie est identique à la répartition de photons et donc à leur probabilité individuelle à être transmis ou réfléchi. Un photon arrivant sur la lame est donc aléatoirement transmis ou réfléchi. La probabilité qu'il soit réfléchi est R, la probabilité qu'il soit transmis est $T = 1 - R$. Elle ne sont pas égales *a priori*.

◇

On réalise un interféromètre de Mach-Zender avec deux lames semi-réfléchissantes de ce type. La puissance du faisceau entrant dans l'interféromètre est $\mathcal{P}_0$.



2) Quelles sont les puissances des quatre faisceaux sortant de l'interféromètre ? Vérifier que la puissance totale est conservée.

Réponse

- Le faisceau (1) se réfléchit sur L_1 et sur L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_1 = R^2\mathcal{P}_0$.
- Le faisceau (2) est transmis par L_1 et par L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_2 = T^2\mathcal{P}_0$.
- Le faisceau (3) se réfléchit sur L_1 et est transmis par L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_3 = TR\mathcal{P}_0$.
- Le faisceau (4) est transmis par L_1 et se réfléchit sur L_2, sa puissance est : $\mathcal{P}_4 = RT\mathcal{P}_0$.

On retrouve alors bien

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 + \mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 = (R^2 + T^2 + 2RT)\mathcal{P}_0 = (R + T)^2\mathcal{P}_0 = \mathcal{P}_0$$

◇

3) Quelle serait, dans une image corpusculaire, les puissances reçues par les détecteurs D_1 et D_2 ? Expérimentalement la puissance reçue par D_2 est nulle. Expliquer l'échec du modèle corspusculaire à prévoir cette observation.

Réponse

Dans une image corpusculaire, les photons reçus par D_1 sont ceux du faisceau (1) auxquels s'ajoutent ceux du faisceau (2) donc la puissance reçue par D_1 est :

$$\mathcal{P}_1 + \mathcal{P}_2 = (R^2 + T^2)\mathcal{P}_0$$

De même la puissance reçue par D_2 est :

$$\mathcal{P}_3 + \mathcal{P}_4 = 2RT\,\mathcal{P}_0$$

Ce n'est pas ce que donne l'expérience parce que les corpuscules doivent, dans l'interféromètre être appréhendé comme **des ondes de matière qui interfèrent**.

◇

4) Dans l'image ondulatoire, en appelant A_0 l'amplitude de l'onde entrant dans l'appareil, écrire les amplitudes des quatre ondes sortant de l'interféromètre.

Réponse

La puissance lumineuse est proportionnelle au carré du signal (l'onde lumineuse). Ainsi, en prenant la racine carré des relations précédentes, il vient

$$A_1 = RA_0 \quad , \quad A_2 = TA_0 \quad \text{et} \quad A_3 = A_4 = \sqrt{RT}A_0$$

◇

5) L'appareil est réglé de manière à ce que les deux trajets de la lumière soient géométriquement rigoureusement identiques. On admet que le faisceau qui se réfléchit sur l'arrière de L_2 subit un déphasage de π, ce qui n'arrive pas au faisceau se réfléchissant sur l'avant de cette lame. Quelles sont les amplitudes des ondes reçues par chacun des détecteurs ? En déduire les puissances qu'ils reçoivent en fonction de la puissance $\mathcal{P}_0$ entrant dans l'appareil. Conclure.

Réponse

Les ondes (1) et (2) arrivant sur D_1 sont en phase (elles ont suivi des chemins de longueurs strictement égales et ont été réfléchies sur les même faces des lames). Elles ont donc une interférence constructrice et l'amplitude de l'onde résultante reçue par D_1 est :

$$A_{D1} = A_1 + A_2 = (R + T)A_0 = A_0$$

Les ondes (3) et (4) arrivant sur D_2 sont en opposition de phase (elles ont suivi des chemins de longueurs strictement égales mais se sont réfléchies sur des faces différentes des lames). Elles sont donc en interférence destructrive et l'amplitude de l'onde résultante reçue par D_2 est :

$$A_{D2} = A_3 - A_4 = 0$$

Ainsi le détecteur $D1$ reçoit l'intégralité de la puissance $\mathcal{P}_0$ et le détecteur $D2$ reçoit une puissance nulle. Ces résultats sont indépendants de R et T.

◇

6) On fait varier le déphasage φ (déphasage du seulement à la propagation) entre les deux ondes arrivant sur le détecteur D_1. Exprimer les puissances reçues par chacun des détecteurs en fonction de $\mathcal{P}_0$, R, T, φ. Comparer le cas où les lames sont parfaitement équilibrées ($R = T = 1/2$) et le cas où elles ne le sont pas.

Réponse

On applique la formule des interférences (revoir les cours de mécanique ondulatoire) avec un déphasage φ entre les ondes (1) et (2) :

$$A_{D1}{}^2 = A_1{}^2 + A_2{}^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi) = A_0{}^2\left\{R^2 + T^2 + 2RT\cos(\varphi)\right\}$$

La puissance reçue par D_1 est donc :

$$\mathcal{P}_{D1} = \mathcal{P}_0\left\{R^2 + T^2 + 2RT\cos(\varphi)\right\}$$

On applique la formule des interférences avec un déphasage $\varphi + \pi$ entre les ondes (3) et (4) :

$$A_{D2}{}^2 = A_3{}^2 + A_4{}^2 + 2A_3A_4\cos(\varphi+\pi) = 2RTA_0{}^2\left\{1 - \cos(\varphi)\right\}$$

La puissance reçue par D_2 est ainsi :

$$\mathcal{P}_{D2} = 2RT\mathcal{P}_0\left\{1 - \cos(\varphi)\right\}$$

Dans le cas où les lames sont parfaitement équilibrées ($R = T = 1/2$) on a :

$$\mathcal{P}_{D1} = \frac{\mathcal{P}_0}{2}(1 + \cos\varphi) \quad \text{et} \quad \mathcal{P}_{D2} = \frac{\mathcal{P}_0}{2}(1 - \cos\varphi)$$

Si la lame n'est pas équilibrée :

- L'amplitude d'oscillation des puissances est plus faible car $2RT = 2R(1-R) \leq 1/2$ (le montrer par étude de fonction sur l'intervalle [0,1]) ;
- La puissance arrivant sur D_1 ne s'annule jamais.

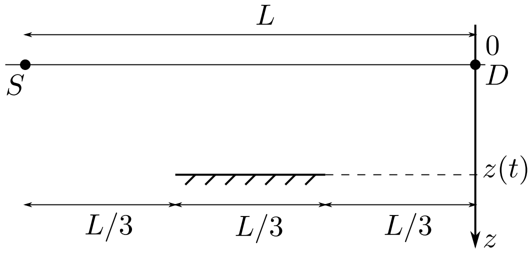
Sujet 3 – corrigé

I Miroir de Lloyd

On dispose une source ponctuelle S monochromatique de longueur d'onde $\lambda = 650\,\mathrm{nm}$ à une distance horizontale $L = 45\,\mathrm{cm}$ d'un détecteur D. Initialement, un miroir de longueur $L/3$ positionné à égale distance de S et D se trouve en $z = 0$ (même côte que S et D). On lâche le miroir à $t = 0$ sans vitesse initiale. Il ne subit que les effets de la pesanteur.

La réflexion sur le miroir métallique s'accompagne d'un retard de phase égale à π.

L'indice optique de l'air est supposé égal à 1.

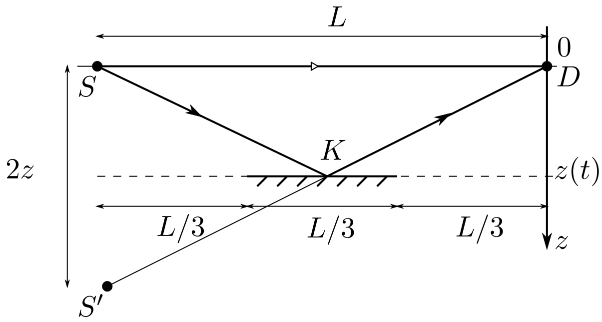


On donne dans le tableau ci-dessous l'instant t_k auquel est mesuré le $k^{\text{ième}}$ maximum d'intensité par le détecteur D.

indice k	1	2	3	4	5	6	7	8	9
t_k (ms)	7,42	9,77	11,11	12,08	12,86	13,53	14,10	14,62	15,00

1) Pour une position $z(t)$ du miroir, représenter les deux rayons qui interfèrent au niveau du détecteur D.

Réponse



2) Déterminer l'expression de la différence de marche δ_D entre ces deux ondes au point D. Pour cela, il pourra être utile de faire apparaitre une source fictive S' image de S par le miroir. Simplifier cette expression dans le cas où $L \gg z(t)$. On rappelle qu'au premier ordre en $\epsilon \ll 1$, $\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \epsilon/2$.

Réponse

$$\begin{aligned}\delta_D &= S'D + \lambda/2 - SD = \sqrt{L^2 + (2z)^2} + \lambda/2 - L \\ &= L\left(\sqrt{1 + (2z/L)^2} - 1\right) + \lambda/2 \\ &\approx \frac{2z^2}{L} + \lambda/2\end{aligned}$$

3) En déduire l'expression de l'intensité en D en fonction du temps. On rappelle la formule de Fresnel

$$I = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos(\Delta\phi)$$

Réponse

En étudiant le mouvement du miroir soumis à l'accélération $\vec{a} = g\,\vec{e}_z$,

$$z(t) = \frac{1}{2}gt^2$$

En notant $I_1 = I_2 = I_0$, l'intensité des deux ondes, on a

$$\begin{aligned} I_D &= 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{2\pi}{\lambda}\times\frac{2z^2}{L}+\pi\right)\right) \\ &= 2I_0\left(1+\cos\left(\frac{\pi g^2 t^4}{\lambda L}+\pi\right)\right) \end{aligned}$$

◇

4) Quelle est l'intensité reçue en D à $t = 0$?

Réponse

$I_D(t=0) = 0$: intéreférences destructives liées au déphasage de π ajouté par la réflexion.

◇

5) Déterminer l'expression de l'instant t_k auquel est observé le $k^{\text{ième}}$ maximum d'intensité en D.

Réponse

On résout $I_D(t_k) = 4I_0$, soit $\dfrac{\pi g^2 t_k^4}{\lambda L} = (2k-1)\pi$:

$$\boxed{t_k = \left(\frac{(2k-1)\lambda L}{g^2}\right)^{1/4}}$$

◇

6) Á l'aide d'une régression linéaire, déterminer la valeur de g.

Réponse

On trace t_k^4 en fonction de k, et on trouve $g = 9{,}81\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$.

◇