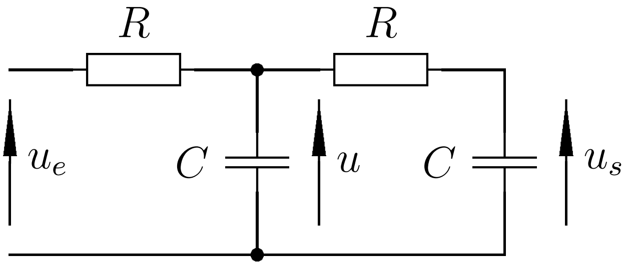
Sujet 1 – corrigé

I Filtre RC du second ordre

On considère le filtre de la figure ci-dessous avec $u_e(t) = E\cos(\omega t)$



1) Prévoir le comportement asymptotique du filtre.

Réponse

En BF, on a les condensateurs qui se comportent comme un interrupteur ouvert donc d'après la loi des nœuds, on a $\underline{u}_s = \underline{u}_e$. En HF, le condensateur se comporte comme un fil donc $\underline{u}_s = 0$. On en déduit qu'il s'agit d'un filtre type passe bas.

◇

2) Déterminez sa fonction de transfert $\underline{H}(\omega) = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{\underline{U_s}}{\underline{U}}.\frac{\underline{U}}{\underline{U_e}}$ sous la forme :

$$\underline{H}(\omega) = \frac{G_0}{1 - x^2 + jx/Q}$$

On identifiera nottament la pulsation propre ω_0 tel que $x = \omega/\omega_0$ et Q

Réponse

On a dans un premier de temps (pont diviseur de tension) :

$$\frac{\underline{U_s}}{\underline{U}} = \frac{1}{1 + jRC\omega}$$

De même, en réunissant les deux dipôles de droite en //, on a

$$\frac{\underline{U}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 + R/Z_{eq}} = \frac{1}{1 + R \times \left(jC\omega + \frac{jC\omega}{1+jRC\omega}\right)}$$

On combine ces deux résultats :

$$\frac{\underline{U_s}}{\underline{U_e}} = \frac{1}{1 + jRC\omega} \times \frac{1}{1 + R \times \left(jC\omega + \frac{jC\omega}{1+jRC\omega}\right)} = \frac{1}{1 + jRc\omega + jRC\omega + jRc\omega - (Rc\omega)^2} \tag{13.1}$$

$$= \frac{1}{1 + j3RC\omega - (RC\omega)^2} \tag{13.2}$$

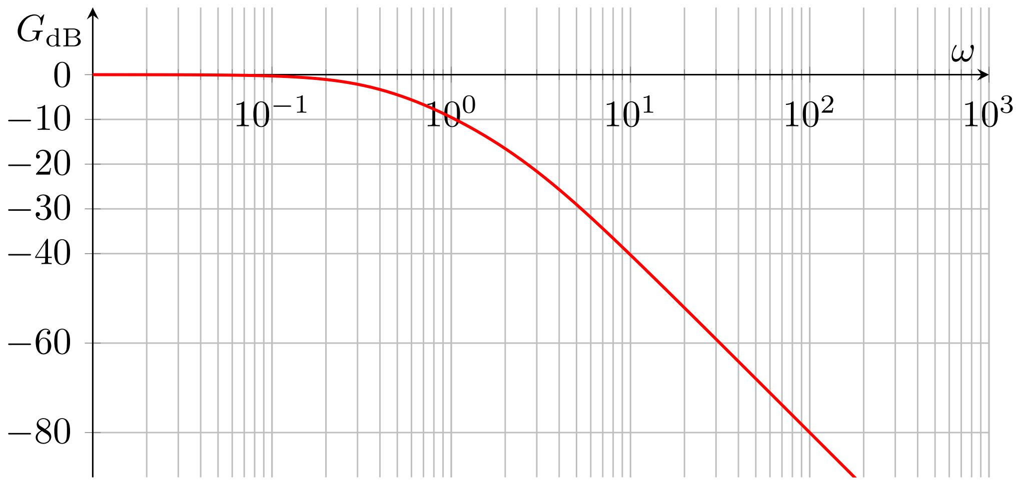
On obtient par identification $\omega_0 = 1/(RC)$ et $Q = 1/3$

◇

3) Tracez le diagramme de Bode du filtre

Réponse

$Q = 1/3 < 1/\sqrt{2}$ donc il n'y a pas de pic (pas de résonance). On obtient alors le diag. de Bode en gain suivant :



Avec une pente de -40dB/dec en HF

◇

4) Obtenir à partir des résultats précédents l'équation différentielle dont u_s est solution.

Réponse

On a

$$\underline{u}_s \left(1 + \left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + j\frac{\omega}{\omega_0 Q}\right) = \underline{u}_s \tag{13.3}$$

$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \omega_0^2 u_s = \omega_0^2 u_e \tag{13.4}$$

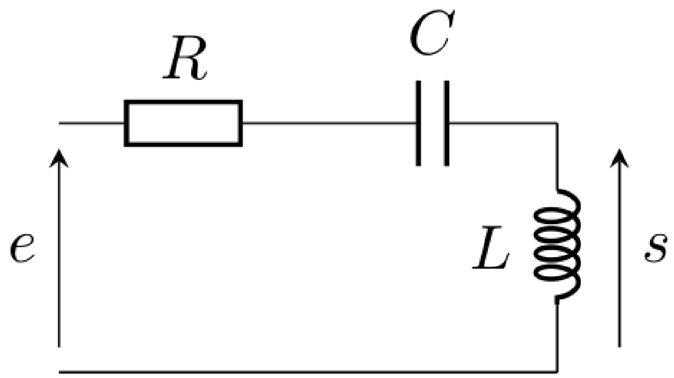
$$\Rightarrow \frac{\mathrm{d}^2 u_s}{\mathrm{d}t^2} + \frac{3}{RC}\frac{\mathrm{d}u_s}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{(RC)^2}u_s = \frac{1}{(RC)^2}u_e \tag{13.5}$$

◇

Sujet 2 – corrigé

I Filtre passe-haut d'ordre 2

On considère le filtre suivant :



1) Justifier que ce filtre est un filtre passe-haut.

Réponse

On regarde le comportement du filtre à haute et à basse fréquences :

- $\omega \to 0$: le condensateur se comporte comme un interrupteur ouvert et la bobine comme un fil : $s = 0$.
- $\omega \to \infty$: le condensateur se comporte comme un fil et la bobine comme un interrupteur ouvert : $s = e$.

Le circuit se comporte donc comme un filtre passe-haut.

◇

2) Déterminer sa fonction de transfert et l'écrire sous la forme :

$$\underline{H} = \frac{jQx}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)} \quad \text{avec} \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}.$$

On donnera l'expression de la pulsation caractéristique ω_0 et celle du facteur de qualitéQ.

Réponse

En utilisant la loi du pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{s}}{\underline{e}} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}} = \frac{j\frac{L\omega}{R}}{1 + j\left(\frac{L}{R}\omega - \frac{1}{RC\omega}\right)}.$$

On a donc :

$$\frac{L}{R} = \frac{Q}{\omega_0} \qquad ; \qquad \frac{1}{RC} = Q\omega_0$$

En multipliant et divisant ces équations entre elles, on trouve :

$$\boxed{Q = \sqrt{\frac{L}{R^2C}}} \qquad ; \qquad \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}}.$$

◇

3) Déterminer la pente des asymptotes du diagramme de Bode en gain. Tracer qualitativement son allure en supposant que le facteur de qualité est tel que le circuit n'est pas résonant.

Réponse

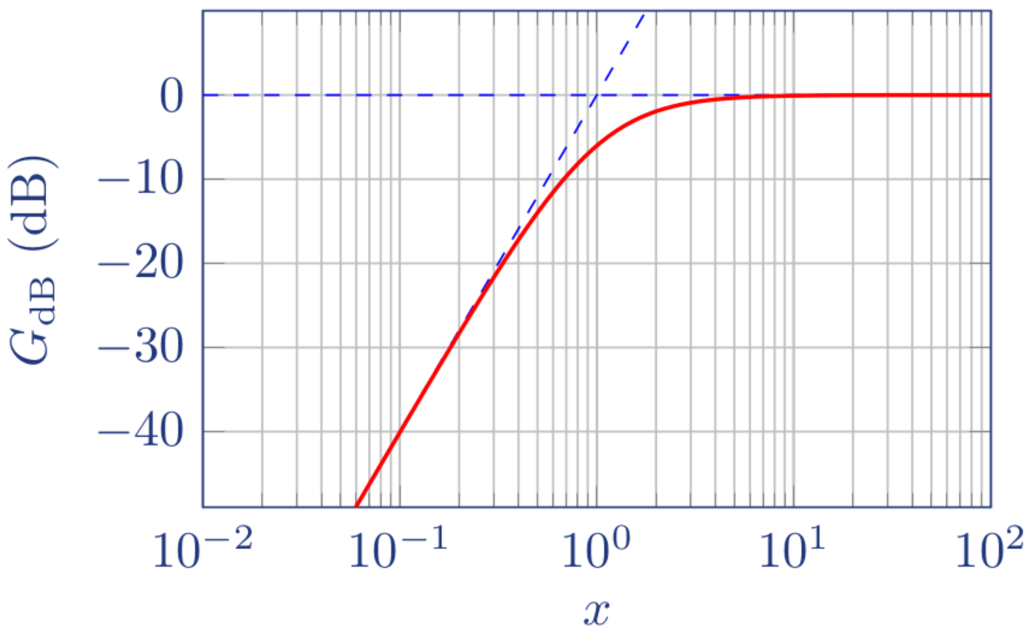
On regarde la limite de la fonction de transfert à basse et à haute fréquences :

$$\underline{H}(x \to 0) = \frac{jQx}{-\frac{jQ}{x}} = -x^2 \qquad ; \qquad \underline{H}(x \to \infty) = \frac{jQx}{jQx} = 1.$$

Les gains en décibel $G_{\mathrm{dB}} = 20 \log |\underline{H}|$ sont :

$$G_{\mathrm{dB}}(x \to 0) = 20 \log |x^2| = \boxed{40 \log x} \qquad ; \qquad G_{\mathrm{dB}}(x \to \infty) = 20 \log 1 = \boxed{0}.$$

Le diagramme de Bode en gain asymptotique est alors :



4) Tracer qualitativement l'allure du diagramme de Bode en phase en supposant toujours que le facteur de qualité est tel que le circuit n'est pas résonant.

Réponse

Les phases $\varphi = \arg \underline{H}$ asymptotique sont :

$$\boxed{\varphi(x \to 0) = \pi} \qquad ; \qquad \boxed{\varphi(x \to 1) = \frac{\pi}{2}} \qquad ; \qquad \boxed{\varphi(x \to \infty) = 0}.$$

5) Ce filtre peut-il avoir un comportement dérivateur ? intégrateur ?

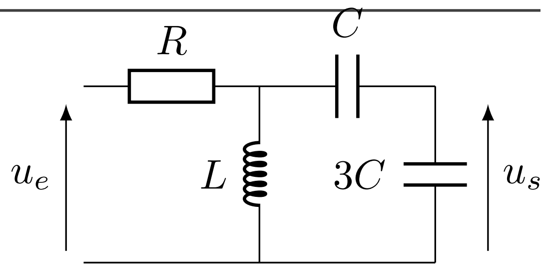
Réponse

Pour qu'un filtre possède un caractère dérivateur ou intégrateur, il faut qu'il possède une pente ±20dB/dec, ce qui n'est jamais le cas ici. Ce filtre n'a donc un comportement ni dérivateur ni intégrateur.

Sujet 3 – corrigé

I Filtre de Colpitts

On considère le filtre suivant comportant deux condensateurs de capacités C et $3C$, un résistor de résistance R et une bobine d'inductance L.
Il est utilisé en régime sinusoïdal forcé et en sortie ouverte (rien n'est branché entre les bornes de la sortie).



1) Etudiez qualitativement le comportement de ce quadripôle en haute fréquence puis en basse fréquence. De quel type de filtre s'agit-il ?

Réponse

Comportement asymptotique du filtre : on représente le circuit équivalent en basses fréquences (ci-dessous à gauche) puis en hautes fréquences (ci-dessous à droite).

- En BF, la branche contenant les condensateurs est court circuitée, la tension de sortie $u_s = 0$, le gain en tension est $G = 0$.
- En HF, la tension de sortie est prise aux bornes d l'équivalent d'un interrupteur fermé, $u_s = 0$, le gain en tension est $G = 0$.

Le gain en tension étant nul en BF et en HF, il doit s'agir d'un filtre passe bande.

◇

2) On peut montrer que la fonction de transfert de ce filtre peur se mettre sous la forme

$$\underline{H} = \frac{A}{1 + jQ(x - \frac{1}{x})}$$

Précisez le nom et la signification de $x = \frac{\omega}{\omega_0}$, ω_0, Q et A.

Réponse

Dans l'expression de la fonction de transfert,

- $x = \frac{\omega}{\omega_0}$ est la pulsation réduite, sans dimension.
- ω_0 est la pulsation propre et ici la pulsation de résonance du filtre. Sa dimension est T^{-1} ("temps moins un").
- Q est le facteur de qualité; ou facteur de surtension du filtre, sans dimension. Le filtre est plus sélectif quand Q augmente.
- A est le gain maximum atteint, lorsque $x = 1$. Il est sans dimension.

◇

3) Les diagrammes de Bode de ce quadripôle ont été relevés pour $Q = 10$. Justifier l'allure des parties rectilignes de ces diagrammes. Déterminez graphiquement la valeur de A, de la fréquence f_0 pour laquelle $x = 1$ et de la bande passante du filtre.

Réponse

Pour justifier le pente des parties rectilignes du diagramme de Bode, on peut déterminer les valeurs asymptotiques de $\underline{H}$.

- En BF,
$$x \ll 1 \Rightarrow 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right) \simeq -\frac{jQ}{x} \Rightarrow \underline{H} \simeq \frac{jAx}{Q}$$
$\Rightarrow G_{dB} \simeq 20\log A - 20\log Q + 20\log x$: portion de droite de pente 20 dB / décade et coupant l'axe des ordonnées en $\simeq 20\log\frac{A}{Q}$ et $\varphi \simeq 90°$
- En HF,
$$x \gg 1 \Rightarrow 1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right) \simeq jQx \Rightarrow \underline{H} \simeq -\frac{jA}{Qx}$$
$\Rightarrow G_{dB} \simeq 20\log A - 20\log Q - 20\log x$: portion de droite de pente -20 dB / décade et coupant l'axe des ordonnées en $\simeq 20\log\frac{A}{Q}$ et $\varphi \simeq -90°$

Graphiquement on lit $f_0 = 1{,}0 \times 10^3\,\text{Hz}$ et on a alors $\underline{H} = A \Rightarrow G_{dB} = 20\log A \simeq -12$ dB.

On en déduit $\log A \simeq -\frac{12}{20} = -0{,}6 \Rightarrow A \simeq 10^{-0{,}6} \simeq 0{,}25$.

Dans le cas d'un filtre passe bande du second ordre, on peut utiliser la relation $\Delta f = \frac{f_0}{Q} = \frac{10^3}{10} = 100\,\text{Hz}$ ici. La bande passante est donc $950\,\text{Hz} \leq f \leq 1050\,\text{Hz}$.