Angles et Triangles

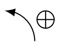
Les rappels de géométrie plane dans cette fiche constitue uniquement le *minimum vital* pour pouvoir aborder des exercices de physique-chimie. On se limite ici principalement aux angles et aux longueur des cotés des triangles. Par exemple, les notions de médianes, médiatrices, hauteurs et bissectrices ne seront pas abordées alors qu'elle nous serviront au cours de l'année pour résoudre certains problèmes.

1 Angles

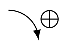
1.1 Angles orientés et angles géométriques

Orienter le plan consiste à choisir un sens de rotation dans le plan appelé *sens positif*. Deux possibilités :

- Sens trigonométrique (anti-horaire)

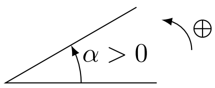


- Sens horaire («des aiguilles d'une montre»)

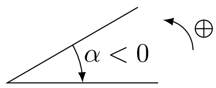


Angle orienté : réel positif ou négatif, son signe dépendant de son orientation représentée par une *flèche courbe*

- Si la flèche est dans le sens positif, l'angle est positif



- Si la flèche est dans le sens contraire du sens positif, l'angle est négatif



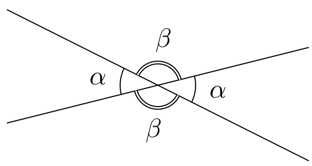
Angle géométrique : réel *positif* représenté par une courbe *sans flèche* (pas d'orientation).

1.2 Cas d'égalité de deux angles géométriques

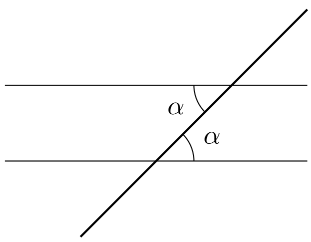
Il faut savoir reconnaître les situations décrites ci-dessous, très courantes en exercices, pour se rendre compte *rapidement* de l'égalité de deux angles géométriques.

Angles opposés par le sommet : deux angles

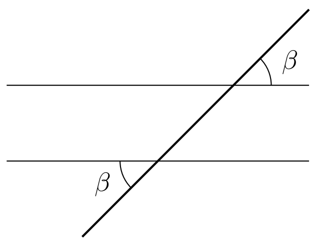
- de même sommet ;
- les côtés de l'un sont les prolongements des côtés de l'autre.



Angles alternes-internes : Deux angles alternes-internes [1] formés par deux droites *parallèles* et une sécante sont *égaux.*

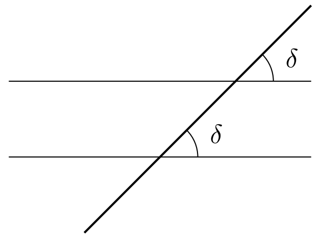


Angles alternes-externes : Deux angles alternes-externe [2] formés par deux droites *parallèles* et une sécante sont *égaux.*

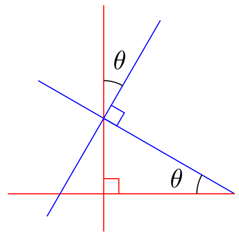


1. de par et d'autre de la sécantes et *à l'intérieur* de la bande formée par les deux droites
2. de par et d'autre de la sécantes et *à l'extérieur* de la bande formée par les deux droites

Angles correspondants : Deux angles correspondants[3] formés par deux droites *parallèles* et une sécante sont *égaux*.

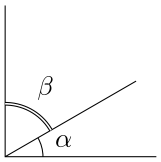


Angles entre perpendiculaires : deux angles formés par des droites *perpendiculaires deux à deux* sont *égaux*



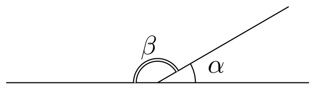
1.3 Angles complémentaires et angles supplémentaires

- Deux angles sont *complémentaires* si leur somme est égal à $\frac{\pi}{2}$ radians (90°)



$$\boxed{\alpha + \beta = \frac{\pi}{2}}$$

- Deux angles sont *supplémentaires* si leur somme est égal à π radians (180°)



$$\boxed{\alpha + \beta = \pi}$$

1.4 Approximation des «petits» angles

Pour un angle «petit» (i.e. $\alpha \ll 1$ rad), on peut faire les approximations suivantes :

$$\boxed{\alpha \ll 1 \text{ rad} \quad \Rightarrow \quad \sin\alpha \simeq \tan\alpha \simeq \alpha \quad \text{et} \quad \cos\alpha \simeq 1}$$

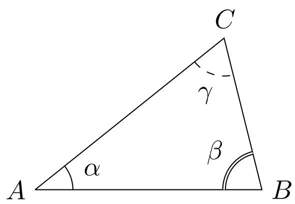
Ces approximations sont basées sur la notion de *développement limité* qui sera abordée dans le cours de maths.

2 Triangles

2.1 Somme des angles d'un triangle quelconque

La somme des angles d'un triangle est égal à π radians (180°)

$$\boxed{\alpha + \beta + \gamma = \pi}$$

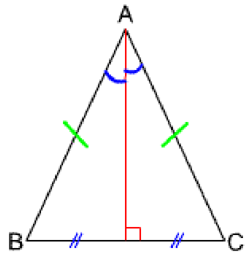


3. Ils sont situés du *même côté de la sécante*, l'un est à l'intérieur de la bande formée par les deux droites, l'autre est à l'extérieur

2.2 Triangles isocèles

Soit un triangle ABC. On dit que ABC est isocèle en A si les cotés AB et AC sont de même longueur. Conséquences :

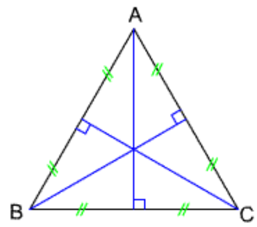
- Les angles $\widehat{ABC}$ et $\widehat{ACB}$ sont égaux
- La médiatrice du segment $[BC]$ est aussi la hauteur et la médiane issue de A, ainsi que la bissectrice de l'angle



2.3 Triangles équilatéraux

Un triangle équilatéral a se trois cotés de même longueur. Conséquences :

- Les angles du triangle valent tous $\dfrac{\pi}{3}$ radians (60°).
- Les médiatrices sont aussi médianes, hauteurs et bissectrices.

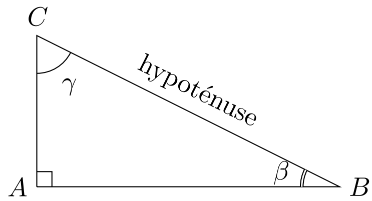


2.4 Triangles rectangles

Un triangle est rectangle si il comporte un *angle droit*.

Soit un triangle ABC. On dit que ABC est rectangle en A si l'angle droit du triangle est de sommet A. Conséquences :

- le coté $[BC]$, opposé à l'angle droit est appelé *hypoténuse* (coté le plus long).
- les angles non droits sont complémentaires : $\widehat{ABC} + \widehat{ACB} = \beta + \gamma = \dfrac{\pi}{2}$



2.4.1 Théorème de Pythagore

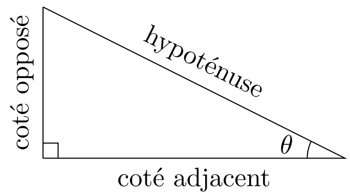
Dans un triangle rectangle, le carré de l'hypoténuse est égal à la somme des carrées des deux autres cotés.

$$\boxed{(\text{hypoténuse})^2 = (\text{autre coté } 1)^2 + (\text{autre coté } 2)^2}$$

2.4.2 Trigonométrie

$$\boxed{\cos\theta = \frac{\text{coté adjacent}}{\text{hypoténuse}}} \qquad \boxed{\sin\theta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{hypoténuse}}}$$

$$\boxed{\tan\theta = \frac{\text{coté opposé}}{\text{coté adjacent}} = \frac{\sin\theta}{\cos\theta}}$$



3 Théorème de Thalès

Deux triangles ayant deux cotés parallèles et un sommet en commun sont semblables, i.e. leurs cotés sont proportionnels deux à deux

Exemple : soit deux triangles ABC et CDE telles que $(AB)\ //\ (DE)$. Il existe deux configurations possibles, dessinées sur la figure ci-contre.

D'après le théorème de Thalès, on a la relation suivante entre les longueurs des cotés :

$$\boxed{\frac{CD}{CA} = \frac{CE}{CB} = \frac{DE}{AB}}$$