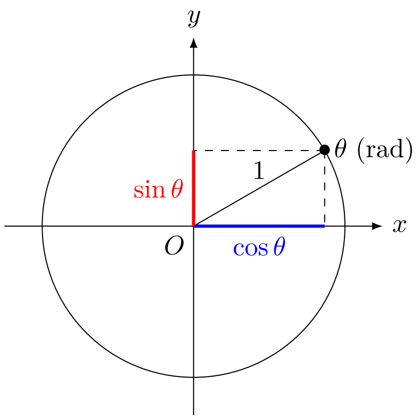
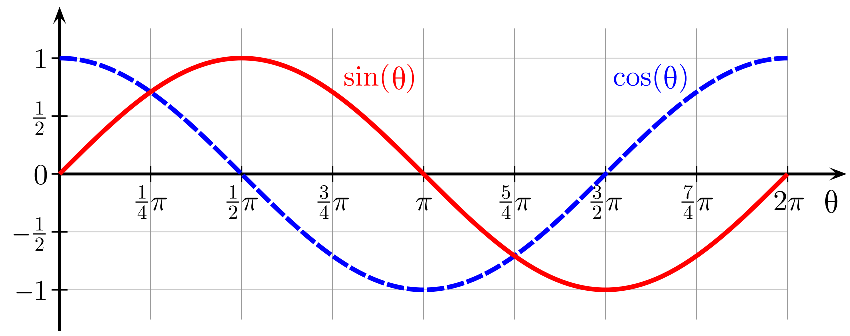
Fonctions Sinus et Cosinus

1 Définitions à partir du cercle trigonométrique

Le cercle trigonométrique est le cercle de centre l'origine O et de rayon unité.

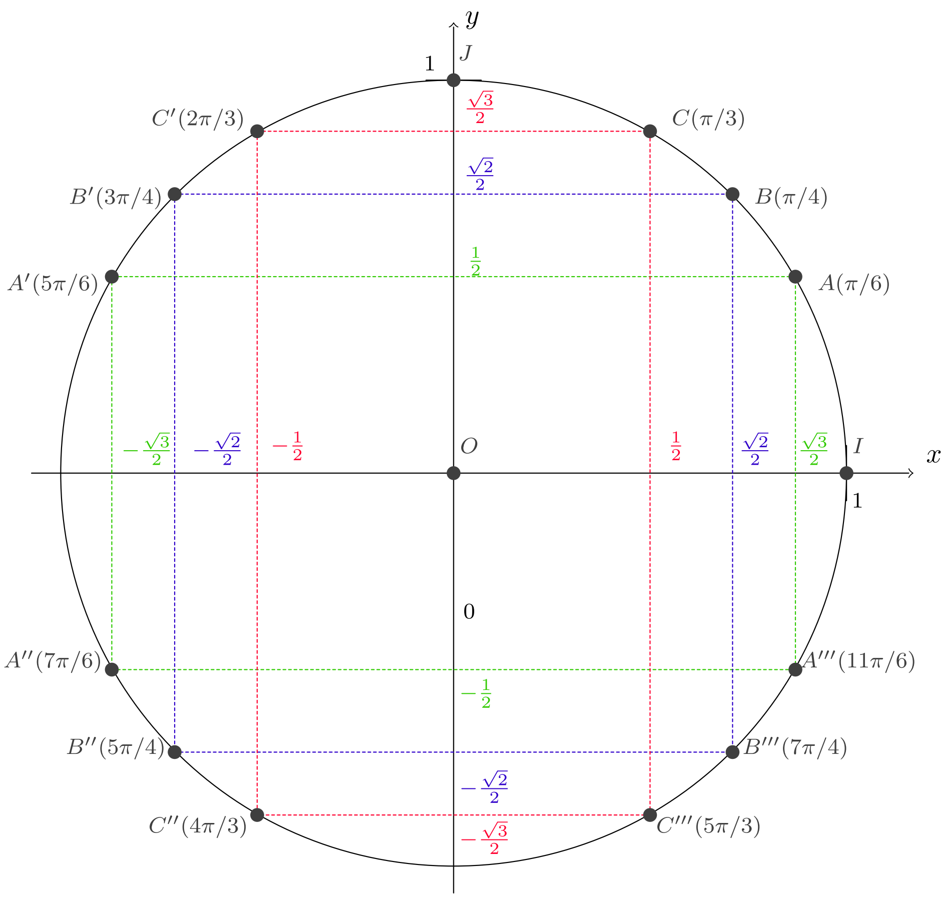
- $\cos\theta$ est l'abscisse du point représentatif de l'angle θ sur le cercle trigonométrique.
- $\sin\theta$ est l'ordonnée du point représentatif de l'angle θ sur le cercle trigonométrique





$\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ \cos^2(\theta)+\sin^2(\theta)=1}$ $\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ -1\leq\cos\theta\leq 1}$ $\boxed{\forall\theta\in\mathbb{R},\ -1\leq\sin\theta\leq 1}$

2 Valeurs remarquables



Annimation bilan : https://phet.colorado.edu/sims/html/trig-tour/latest/trig-tour_fr.html

3 Formulaire

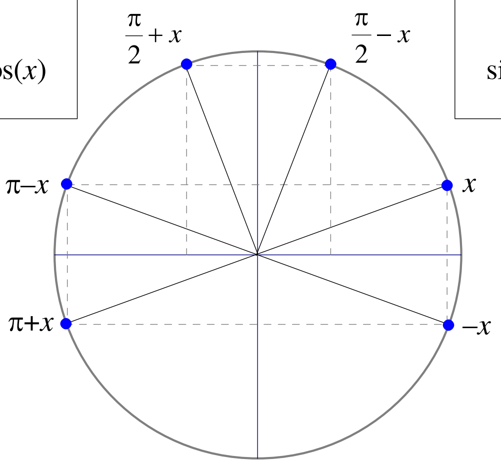
3.1 Angles associés

Une lecture *efficace* du cercle trigonométrique permet de retrouver les relations suivantes :

$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=-\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}+x\right)=\cos(x)\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\sin(x)\\ \sin\left(\frac{\pi}{2}-x\right)=\cos(x)\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(\pi-x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi-x)=\sin(x)\end{gathered}}$$



$$\boxed{\begin{gathered}\cos(\pi+x)=-\cos(x)\\ \sin(\pi+x)=-\sin(x)\end{gathered}}$$

$$\boxed{\begin{gathered}\cos(-x)=\cos(x)\\ \sin(-x)=-\sin(x)\end{gathered}}$$

Exercice : En dessinant un cercle trigonométrique, résoudre dans $\mathbb{R}$ les équations suivantes :

$$\sin x = 0 \qquad\qquad \sin(2x) = 1$$

3.2 Dérivées

$$\boxed{(\cos x)' = -\sin x} \qquad \boxed{(\sin x)' = \cos x}$$

Exercice : déterminer les dérivées des fonctions $f : x \mapsto \cos(3x)$ et $g : x \mapsto \sin\left(\frac{x}{a}\right)$ avec $a \in \mathbb{R}^*$.

3.3 Intégrales

$$\boxed{\int_a^b \cos x \mathrm{d}x = [\sin x]_a^b = \sin b - \sin a} \qquad \boxed{\int_a^b \sin x \mathrm{d}x = [-\cos x]_a^b = -\cos b + \cos a}$$

On rappel aussi que l'intégrale est linéaire :

$$\int_a^b f(x) + g(x)\mathrm{d}x = \int_a^b f(x)\mathrm{d}x + \int_a^b g(x)\mathrm{d}x$$

Exercice : calculer les intégrales suivantes $I = \int_0^{\pi} \sin(5t + \pi/4)\mathrm{d}t$ et $J = \int_0^{\pi/2} \cos\left(\frac{x}{2}\right)\mathrm{d}x$

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

3.4 Formules d'addition

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)$$
$$\cos(a-b) = \cos(a)\cos(b) + \sin(a)\sin(b) \quad \sin(a-b) = \sin(a)\cos(b) - \cos(a)\sin(b)$$

3.5 Formules de linéarisation (utiles pour intégrer)

On peut démontrer à partir des formules d'addition dans le cas particulier où $b = a$ les 2 formules suivantes :

$$\cos^2(a) = \frac{1+\cos(2a)}{2} \quad \sin^2(a) = \frac{1-\cos(2a)}{2}$$

On peut aussi démontrer les formules suivantes, toujours à partir des formules d'addition :

$$\cos(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) + \cos(a+b)\right]$$
$$\sin(a)\sin(b) = \frac{1}{2}\left[\cos(a-b) - \cos(a+b)\right]$$
$$\sin(a)\cos(b) = \frac{1}{2}\left[\sin(a-b) + \sin(a+b)\right]$$

Exercice : calculer l'intégrale $I = \int_0^{\pi} \sin^2(4x)\mathrm{d}x$

. . . .

. . . .

. . . .

3.6 Formules de factorisation

$$\cos(p) + \cos(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right) \qquad \sin(p) + \sin(q) = 2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$
$$\cos(p) - \cos(q) = -2\sin\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right) \quad \sin(p) - \sin(q) = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\sin\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

Exercice : Exprimer $\cos(\omega t) + \cos(\omega t + \varphi)$ sous la forme d'un produit de 2 cosinus

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .