Correction du TD

I Impédance équivalente

1) On commence par convertir le circuit avec les impédances complexes :

— $\underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{\mathrm{j}C_1\omega}$;
— $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$;
— $\underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{\mathrm{j}C_2\omega}$.

On peut ensuite déterminer l'impédance équivalente à l'association en parallèle de L et C_2. Avec les admittances, on a

$$\underline{Z}_{\text{eq},1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{C_2}} + \frac{1}{\underline{Z}_L}} = \frac{1}{\mathrm{j}C_2\omega + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega}} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-\omega^2 LC_2}$$

Il suffit alors de faire l'association en série de $\underline{Z}_{C_1}$ et de $\underline{Z}_{\text{eq},1}$:

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = \mathrm{j}C_1\omega + \frac{\mathrm{j}L\omega}{1-\omega^2 LC_2}}$$

Il n'est ici pas nécessaire d'aller plus loin dans le calcul.

2) Ici, on utilise que $\underline{Z}_R = R$ et comme précédemment, on effectue l'association en parallèle des R et C de droite avant de faire l'association en série de R et C de gauche avec cette impédance équivalente :

$$\underline{Z}_{\text{eq},1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + \mathrm{j}C\omega} = \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}$$

Et on a donc finalement

$$\boxed{\underline{Z}_{\text{eq}} = R + \frac{1}{\mathrm{j}C\omega} + \frac{R}{1+\mathrm{j}RC\omega}}$$

II Circuit RL série en RSF

1) Pour les comportements limites, on utilise la modélisation d'une bobine à haute et basse fréquence : étant donné que $\underline{Z}_L = \mathrm{j}L\omega$, pour $\omega \to 0$ on a $\underline{Z}_L = 0$, et pour $\omega \to \infty$ on a $\underline{Z}_L \to \infty$. On a donc respectivement un fil et un interrupteur ouvert. En effet, l'impédance étant homogène à une résistance, une impédance nulle est semblable à une résistance nulle (un fil), et une impédance infinie est semblable à une résistance infinie (un interrupteur ouvert).

Or, la tension d'un fil est nul, donc

$$\boxed{u \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0}$$

Le courant ne peut traverser un interrupteur, donc en faisant la loi des mailles dans le circuit équivalent, on a $u_R = Ri = 0$, et forcément

$$\boxed{u \xrightarrow[\omega\to\infty]{} E}$$

2) Pour cela, on utilise la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} E \Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{\mathrm{j}L\omega}{R + \mathrm{j}L\omega} E}$$

3) La phase de $e(t)$ est nulle par construction. On calcule donc la phase de u en prenant l'argument de son amplitude complexe :

$$\arg(\underline{U}) = \arg(\mathrm{j}L\omega E) - \arg(R + \mathrm{j}L\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

où on peut prendre l'arctangente parce que la partie réelle est positive. Ainsi :

a – Signaux en phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = 0 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \longrightarrow \infty}$$

C'est donc mathématiquement possible et physiquement approchable, mais pas rigoureusement.

b – Signaux en opposition de phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \pi \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \longrightarrow -\infty}$$

C'est donc mathématiquement possible, mais **physiquement impossible** : la pulsation est proportionnelle à la fréquence, et une fréquence ne saurait être négative.

c – Signaux en quadrature de phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 0}$$

C'est donc possible à la fois mathématiquement et physiquement, mais cela correspond à un signal d'entrée qui ne varie pas, c'est-à-dire un régime permanent : la sortie n'oscille donc pas non plus, et est simplement nulle. La quadrature de phase n'a donc pas vraiment de sens ici, la sortie est constamment nulle quand l'entrée est à son maximum.

III Exploitation d'un oscillogramme en RSF

1) On lit l'amplitude de $e(t)$ à son maximum pour avoir $\boxed{E_m = 10\,\mathrm{V}}$. On lit l'amplitude de $u(t)$ à son maximum pour avoir $\boxed{U_m = 6\,\mathrm{V}}$. Pour la phase **à l'origine des temps**, on regarde le signal à $t = 0$: on lit $u(0) = U_m \cos(\varphi) = -3\,\mathrm{V}$, soit

$$\boxed{\cos(\varphi) = \frac{u(0)}{U_m}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} u(0) & = & -3\,\mathrm{V} \\ U_m & = & 6\,\mathrm{V} \end{array} \right.$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\varphi = \frac{2\pi}{3}\mathrm{rad}}$$

2) On utilise un pont diviseur de tension pour avoir l'amplitude complexe :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_R + \underline{Z}_C + \underline{Z}_L} E_m = \frac{1}{\frac{\underline{Z}_R}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_L} + \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L}} E_m \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \frac{1}{\mathrm{j}^2\omega^2 CL}} E_m$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{1}{1 - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{\omega^2 LC}} E_m}$$

On peut en vérifier l'homogénéité en se souvenant des résultats des chapitres précédents :

$${\omega_0}^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc} \quad \omega^2 LC \text{ adimensionné} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = \tau^{-1} \quad \text{donc} \quad \frac{R}{L\omega} \text{ adimensionné}$$

D'une manière générale, on exprimera les résultats de la sorte, avec une fraction dont le numérateur est homogène à la quantité exprimée alors que le dénominateur est adimensionné.

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module de cette expression :

$$U_m = |\underline{U}| \Leftrightarrow \boxed{U_m = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}}$$

On trouve la phase en en prenant l'argument :

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \underbrace{\cancel{\arg(E)}}_{=0} - \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - \mathrm{j}\frac{R}{L\omega}\right)$$

$$\Leftrightarrow \tan(\varphi) = -\left(-\frac{R}{L\omega} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2}}\right) = \frac{R}{L\omega - \frac{1}{C\omega}} \Leftrightarrow \boxed{\tan(\varphi) = \frac{RC\omega}{LC\omega^2 - 1}}$$

Ici, il n'est pas évident de prendre l'arctangente de la tangente : la partie réelle de l'argument calculé n'est pas forcément positif (il l'est si $\omega^2 > \frac{1}{LC}$).

3) Il paraît évidemment plus simple de calculer L à partir de la phase, sachant qu'on a déterminé φ à la première question :

$$LC\omega^2 - 1 = \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 + \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{R}{\omega\tan(\varphi)}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{rcl} C & = & 0{,}10\,\mu\mathrm{F} \\ \omega & = & 2\pi f \\ f & = & 1{,}2 \times 10^3\,\mathrm{Hz} \\ R & = & 1\,\mathrm{k}\Omega \\ \varphi & = & \frac{2\pi}{3}\mathrm{rad} \end{array} \right.$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{L = 9{,}9 \times 10^{-2}\,\mathrm{H}}$$

IV Comportement d'un circuit à haute et basse fréquences

1) On utilise la relation pour passer des réels aux complexes, pour avoir

$$\boxed{\underline{e}(t) = E_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{u}(t) = U_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}(\omega t + \varphi)}}$$

Pour avoir les amplitudes complexes, on sépare le terme en ωt du terme de phase : on trouve donc

$$\boxed{\underline{E} = E_m} \quad \text{et} \quad \boxed{\underline{U} = U_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\varphi}}$$

2) S'il n'y avait pas la capacité, on pourrait facilement utiliser un pont diviseur de tension pour exprimer $\underline{u}$ en fonction de $\underline{e}$, $\underline{Z}_R$ et $\underline{Z}_L$. Pour se ramener à la situation du pont diviseur de tension, on détermine donc une première impédance équivalente issue de l'association en parallèle de L et C, après les avoir converties en complexes.

On peut déterminer $\underline{Z}_{\text{eq},1}$ avec les admittances $\underline{Y}_L = 1/\text{j}L\omega$ et $\underline{Y}_C = \text{j}C\omega$, et utiliser le pont diviseur de tension directement avec l'amplitude complexe : $\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\text{eq},1}}{\underline{Z}_{\text{eq},1}+\underline{Z}_R}\underline{E}_m$. Ainsi,

$$\underline{U} = \frac{\dfrac{1}{\cancel{\dfrac{1}{\text{j}L\omega} + \text{j}C\omega}}}{\dfrac{1}{\cancel{\dfrac{1}{\text{j}L\omega} + \text{j}C\omega}} + R(\ldots)} E_0 \times \frac{\text{j}C\omega + \dfrac{1}{\text{j}L\omega}}{\text{j}C\omega + \dfrac{1}{\text{j}L\omega}} \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \text{j}RC\omega + \dfrac{R}{\text{j}L\omega}} E_0$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{U} = \frac{E_0}{1 + \text{j}\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)}}$$

où on a simplifié la fraction en multipliant par le terme orange d'abord, puis en utilisant que $1/\text{j} = -\text{j}$.

3) On trouve l'amplitude réelle en prenant le module de l'amplitude complexe, et la phase en en prenant l'argument :

$$U_m = |\underline{U}| \Leftrightarrow \boxed{U_m = \frac{E_m}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}}$$

$$\varphi = \underbrace{\cancel{\arg(E_m)}}_{=0} - \arg\left(1 + \text{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)\right) \Leftrightarrow \tan\varphi = -\frac{RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}}{1}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\varphi = \arctan\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

4) À très haute fréquence, i.e. $\omega \to \infty$, le dénominateur de l'amplitude réelle tend vers l'infini à cause du terme $RC\omega$, donc l'amplitude vers 0 ; c'est la même chose à très basse fréquence, i.e. $\omega \to 0^+$: le dénominateur tend vers l'infini et l'amplitude vers 0, mais cette fois à cause du terme en $\dfrac{R}{L\omega}$. On a donc

$$\boxed{U_m \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0} \quad \text{et} \quad \boxed{U_m \xrightarrow[\omega\to 0^+]{} 0}$$

On pouvait prévoir ces résultats par l'étude directe du montage et des impédances en jeu : en effet,

$$\underline{Z}_C = \frac{1}{\text{j}C\omega} \Rightarrow |\underline{Z}_C| \xrightarrow[\omega\to 0]{} \infty \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_C| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0$$
$$\underline{Z}_L = \text{j}L\omega \Rightarrow |\underline{Z}_L| \xrightarrow[\omega\to 0]{} 0 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}_L| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} \infty$$

Dans les deux cas, le circuit équivalent est l'association en série d'une résistance avec une association en parallèle d'un interrupteur ouvert et d'un fil, c'est-à-dire un fil : or, la tension d'un fil est nulle.

V Dipôle inconnu

1) On trouve les amplitudes par lecture graphique des maxima :

$$\boxed{V_m = 3{,}5\,\text{V}} \quad \text{et} \quad \boxed{U_m = 5\,\text{V}}$$

On fait de même pour trouver la période $T = 6{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{s}$, et on en déduit la pulsation :

$$\boxed{\omega = \frac{2\pi}{T} = 100\,\mathrm{rad\,s^{-1}}}$$

2) La tension v est en *avance* sur u, puisque quand v s'annule en descendant u s'annule aussi en descendant un peu plus tard que v. On peut aussi voir qu'à $t = 0$, u est à son maximum alors que v y est déjà passé et est en train de diminuer. Par définition du déphasage, on a donc $\boxed{\Delta\varphi_{v/u} > 0}$.

Or, $\Delta\varphi_{v/u} = \varphi_v - \varphi_u$ et $u(t) = U_m \cos(\omega t)$ donc $\varphi_u = 0$. On trouve donc $\boxed{\phi > 0}$.

On a deux manières de mesurer le déphasage :

— par définition, la pulsation est une vitesse angulaire, donc une durée se convertit en phase en la multipliant par ω. On peut donc déterminer le **déphasage** en mesurant le **retard temporel** entre les deux signaux **quand ils s'annulent avec la même pente**. Soit Δt cet écart : on mesure

$$\Delta t = 0{,}75 \times 10^{-2}\,\mathrm{s} \Leftrightarrow \Delta\varphi_{v/u} = \phi = \omega \Delta t \Leftrightarrow \boxed{\phi = 0{,}75\,\mathrm{rad} \approx \frac{\pi}{4}\mathrm{rad}}$$

— On peut également mesurer $v(0) = V_m \cos(\phi)$ et avoir

$$\cos(\phi) = \frac{v(0)}{V_m} \Leftrightarrow \boxed{\phi = \arccos\left(\frac{v(0)}{V_m}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v(0) & = & 2{,}5\,\mathrm{V} \\ V_m & = & 3{,}5\,\mathrm{V} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{\phi \approx 0{,}77\,\mathrm{rad}}$$

3) a – On nous donne $v(t)$ donc $\underline{V} = V_m \mathrm{e}^{\mathrm{j}\phi}$, et on nous défini $\underline{Z}$ son impédance. Pour faire le lien entre les deux, on utilise la définition de l'impédance complexe pour un dipôle de tension $\underline{U}$ et traversé par un courant $\underline{I}$ *via* loi **loi d'Ohm généralisée** :

$$\boxed{\underline{V} = \underline{Z}\,\underline{I}}$$

Il faudrait donc pouvoir connaître $\underline{I}$. Heureusement, la loi d'Ohm généralisée fonction évidemment avec les résistances, et comme il n'y a qu'une seule intensité qui traverse la maille, on peut utiliser

$$\boxed{\underline{U} = R\underline{I} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U}}{R}}$$

Ainsi,

$$Z = |\underline{Z}| = \sqrt{X^2 + Y^2} \quad \text{et} \quad Z = |\underline{Z}| = \left|\frac{\underline{V}}{\underline{I}}\right| = \left|R\frac{\underline{V}}{\underline{U}}\right|$$

$$\Leftrightarrow \boxed{X^2 + Y^2 = R^2 \frac{{V_m}^2}{{U_m}^2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} V_m & = & 3{,}5\,\mathrm{V} \\ U_m & = & 5\,\mathrm{V} \\ R & = & 100\,\Omega \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{X^2 + Y^2 = 4900\,\Omega^2}$$

L'autre équation permettant de résoudre ce système est bien évidemment la phase (question 1 puis question 2) :

$$\tan(\arg(\underline{Z})) = \frac{Y}{X} \quad \text{et} \quad \tan(\arg(\underline{Z})) = \tan\left(\arg(\underline{V}) - \underbrace{\cancel{\arg(\underline{U})}}_{=0}\right) = \tan(\phi)$$

$$\Leftrightarrow \frac{Y}{X} = \tan\phi \quad \text{avec} \quad \phi = \frac{\pi}{4}\text{rad} \quad \text{soit} \quad \boxed{\frac{Y}{X} = 1}$$

On combine les deux équations pour trouver

$$Y = X \quad \text{et} \quad 2X^2 = 3900\,\Omega^2$$
$$\text{A.N.} \;:\; \boxed{X = Y = 49\,\Omega}$$

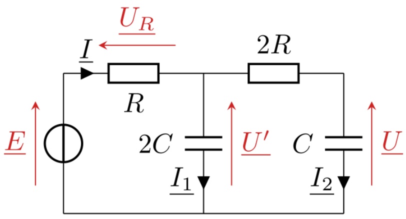
b – La partie réelle est non nulle, donc on a au moins une résistance de $49\,\Omega$, et la partie imaginaire est positive : ça ne peut qu'être une inductance car $1/\text{j}C\omega = -\text{j}/C\omega$ et la partie imaginaire est donc négative. C'est donc **l'association en série d'une résistance** r **et d'une inductance** L. On trouve la valeur de L en calculant $L\omega = Y = 49\,\Omega$.

$$\boxed{r = 49\,\Omega} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 0{,}49\,\text{H}}$$

VI Obtention d'une équation différentielle

On nomme les tensions et intensités dans le circuit, et on utilise la loi des nœuds et la loi d'Ohm généralisée :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I_1} + \underline{I_2} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R}\underline{U_R} &= \frac{1}{\underline{Z_{2C}}}\underline{U'} + \frac{1}{\underline{Z_C}}\underline{U} \\ \Leftrightarrow \underline{U_R} &= 2\text{j}RC\omega\underline{U'} + \text{j}RC\omega\underline{U} \end{aligned} \tag{5.1}$$



On utilise ensuite la loi des mailles à droite et à gauche, donnant respectivement :

$$\underline{U'} = \underline{U} + 2R\underline{I_2} = \underline{U} + 2\text{j}RC\omega\underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{U_R} = \underline{E} - \underline{U'} = \underline{E} - \underline{U} - 2\text{j}RC\omega\underline{U}$$

On regroupe les équations dans 5.1 et on introduit $\tau = RC$:

$$\underline{E} - \underline{U} - 2\text{j}\omega\tau\underline{U} = \text{j}\omega\tau\left(\underline{U} + 2\text{j}\omega\tau\underline{U}\right) + \text{j}\omega\tau\underline{U}$$
$$\Leftrightarrow \underline{E} = \underline{U} + 5\text{j}\omega\tau\underline{U} + 4\tau^2(\text{j}\omega)^2\underline{U}$$

En identifiant les puissances de $\text{j}\omega$ à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on a donc bien

$$\boxed{e = u + 5\tau\frac{\text{d}u}{\text{d}t} + 4\tau^2\frac{\text{d}^2u}{\text{d}t^2}}$$

VII Déphasage, pulsation et impédance

Pour exprimer simplement i, il nous faut une seule maille avec une seule impédance équivalente $\underline{Z}_{\text{eq}}$: de cette manière, la loi des mailles nous donnera $\underline{E} = \underline{Z}_{\text{eq}}\underline{I}$ et on pourra facilement déterminer le déphasage entre i et e.

On calcule l'impédance équivalente de l'association en série de R_2 et L :

$$\underline{Z}_{\text{eq},1} = R_2 + \text{j}L\omega$$

Cette association est en parallèle avec C :

$$\underline{Z}_{\text{eq},2} = \frac{\underline{Z}_C \times \underline{Z}_{\text{eq},1}}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_{\text{eq},1}} = \frac{\dfrac{1}{\text{j}C\omega}(R_2 + \text{j}L\omega)}{\dfrac{1}{\text{j}C\omega} + R_2 + \text{j}L\omega}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z}_{\text{eq},2} = \frac{R_2 + \text{j}L\omega}{1 + \text{j}R_2C\omega - LC\omega^2}$$

On a donc comme prévu avec la loi des mailles :

$$\boxed{\underline{I} = \frac{\underline{E}}{R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}}}$$

L'intensité est en phase avec la tension si $\arg(R_1 + \underline{Z}_{\text{eq},2}) = 0$, c'est-à-dire si

$$\begin{aligned}
\arg\left(R_1 + \frac{R_2 + \text{j}L\omega}{1 + \text{j}R_2C\omega - LC\omega^2}\right) &= 0\\
\Leftrightarrow \arg\left(\frac{R_1 + \text{j}R_1R_2C\omega - LCR_1\omega^2 + R_2 + \text{j}L\omega}{1 + \text{j}R_2C\omega - LC\omega^2}\right) &= 0\\
\Leftrightarrow \arg\big((R_1 + R_2 - LCR_1\omega^2) + \text{j}(R_1R_2C\omega + L\omega)\big) &= \arg\big((1 - LC\omega^2) + \text{j}R_2C\omega\big)\\
\Leftrightarrow \tan\Big(\arg\big((R_1 + R_2 - LCR_1\omega^2) + \text{j}(R_1R_2C\omega + L\omega)\big)\Big) &= \tan\Big(\arg\big((1 - LC\omega^2) + \text{j}R_2C\omega\big)\Big)\\
\Leftrightarrow \frac{R_1R_2C\omega + L\omega}{R_1 + R_2 - LCR_1\omega^2} &= \frac{R_2C\omega}{1 - LC\omega}\\
\Leftrightarrow \frac{R_1 + \dfrac{L\cancel{\omega}}{R_2C\cancel{\omega}}}{R_1 + R_2 - LCR_1\omega^2} &= \frac{1}{1 - LC\omega^2}\\
\Leftrightarrow \left(R_1 + \frac{L}{R_2C}\right)\big(1 - LC\omega^2\big) &= R_1 + R_2 - LCR_1\omega^2\\
\Leftrightarrow \cancel{R_1} - \cancel{LCR_1\omega^2} + \frac{L}{R_2C} - \frac{L^2\omega^2}{R_2} &= \cancel{R_1} + R_2 - \cancel{LCR_1\omega^2}\\
\Leftrightarrow L &= {R_2}^2C + L^2C\omega^2\\
\Leftrightarrow \omega^2 &= \frac{1}{LC} - \frac{{R_2}^2}{L^2}\\
\Leftrightarrow & \boxed{\omega^2 = \frac{1}{LC}\left(1 - \frac{{R_2}^2C}{L}\right)}
\end{aligned}$$

VIII Oscillateur à quartz

1) On calcule l'association en série de C et L d'abord, puis on fait l'association en parallèle de ce dipôle avec C_0 :

$$\underline{Z}_{\text{eq},1} = \frac{1}{\text{j}C\omega} + \text{j}L\omega$$

D'où

$$\begin{aligned}
\underline{Z} &= \frac{1}{\underline{Y}_{C_0} + \underline{Y}_{\text{eq},1}}\\
\Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{1}{\text{j}C_0\omega + \dfrac{1}{\frac{1}{\text{j}C\omega} + \text{j}L\omega}} \times \frac{\frac{1}{\text{j}C\omega} + \text{j}L\omega}{\frac{1}{\text{j}C\omega} + \text{j}L\omega}\\
\Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{\frac{1}{\text{j}C\omega} + \text{j}L\omega}{1 + \frac{C_0}{C} - LC_0\omega^2} \times \frac{\text{j}C\omega}{\text{j}C\omega}\\
\Leftrightarrow \underline{Z} &= \frac{1 - LC\omega^2}{\text{j}C\omega + \text{j}C_0\omega - \text{j}LCC_0\omega^3}
\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \underline{Z} = -\mathrm{j}\frac{1-LC\omega^2}{(C+C_0)\omega - LCC_0\omega^3}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z} = \mathrm{j}\frac{LC\omega^2-1}{\omega\left((C+C_0)-LCC_0\omega^2\right)}}$$

2) L'impédance est nulle si le numérateur est nul, c'est-à-dire

$$\boxed{\underline{Z} = 0 \Leftrightarrow \omega = \omega_0 = \sqrt{\frac{1}{LC}}}$$

À cette pulsation, assimilable à la pulsation propre d'un circuit RLC série, le dipôle est donc équivalent à un fil. On retrouvera ce résultat en étudiant la résonance dans le chapitre suivant.

L'impédance est infinie si le dénominateur est nul, c'est-à-dire

$$\boxed{|\underline{Z}| \to \infty \Leftrightarrow \omega = \omega_0' = \sqrt{\frac{C+C_0}{LCC_0}}}$$

Cette pulsation serait la pulsation propre d'une bobine L et d'un condensateur de capacité $C_{\mathrm{eq}} = \frac{CC_0}{C+C_0}$, autrement dit l'association en série d'un condensateur C et d'un autre condensateur C_0 (les inverses des capacités s'ajoutent en série).

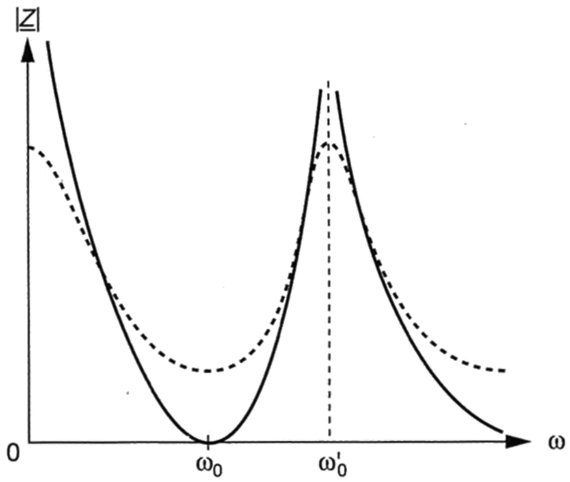
À cette pulsation (dite « de résonance », cf. chapitre suivant), la bobine et les condensateurs se chargent et déchargent alternativement, l'énergie arrivant dans le dipôle est piégée et n'a pas transmise au reste du circuit, comme le fait un interrupteur ouvert.

3)

On regarde les cas limites à très haute et très basse fréquence :

$$|\underline{Z}| \xrightarrow[\omega\to\infty]{} 0 \quad \text{et} \quad |\underline{Z}| \xrightarrow[\omega\to 0^+]{} \infty$$

En effet, à $\omega \to 0$, les condensateurs sont des interrupteurs ouverts donc l'impédance totale est celle d'un interrupteur ouvert. À l'inverse, à $\omega \to \infty$, les condensateurs sont des fils donc l'impédance totale est celle d'un fil : 0.



4) Les résistances évitent les infinités par dissipation, mais également les valeurs nulles : on se retrouve avec la courbe en pointillés sur la figure précédente.