Induction – chapitre 2

# Actions mécaniques du champ magnétique

« *Sire, je n'avais pas besoin de cette hypothèse.* »

Pierre-Simon Laplace à Napoléon, *circa* 1800

## Sommaire



## Capacités exigibles

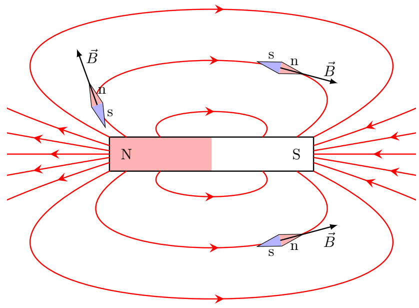
- ☐ Différencier le champ magnétique extérieur subi du champ magnétique propre créé par le courant filiforme
- ☐ Établir et citer l'expression de la résultante des forces de Laplace dans le cas d'une barre conductrice placée dans un champ magnétique extérieur uniforme et stationnaire.
- ☐ Exprimer la puissance des forces de Laplace.
- ☐ Établir et exploiter l'expression du moment du couple subi en fonction du champ magnétique extérieur et du moment magnétique.
- ☐ Exprimer la puissance des actions mécaniques de Laplace.

## L'essentiel

# I La force de LAPLACE

## I/A Observations expérimentales

### I/A) 1 Aimant




Pour introduire la notion d'aimant et définir la boussole, nous avons dit qu'une petite aiguille aimantée s'alignait sur la direction du champ magnétique. Il y a donc une action mécanique entre aimant et champ.

### I/A) 2 Rails de LAPLACE

Une autre manifestation remarquable est celle des **rails de LAPLACE**. Soit l'expérience représentée ci-contre ; on utilise un **aimant en U** pour créer un champ magnétique uniforme sur une assez grande partie d'un barreau métallique mobile, posé sur un bout de **circuit électrique**. Le **barreau** permet de **fermer le circuit**.

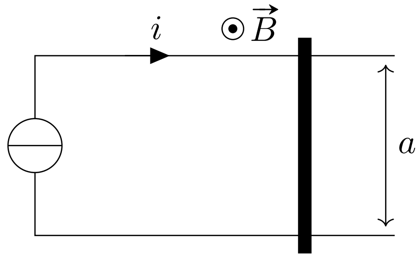



**FIGURE 2.1** – Rails de LAPLACE.

**Observations**

- ◇ Lorsqu'on allume le courant, le barreau se met en mouvement **vers la gauche**.
- ◇ En inversant l'aimant **ou** en inversant le sens du courant, le mouvement a lieu **dans l'autre sens**.
- ◇ En mettant $\vec{B}$ dans le sens de la tige mobile, il n'y a pas de mouvement.

Ces observations suggèrent l'existence d'une **force** dépendant du **courant** et du **champ magnétique**, ainsi que de la **direction** du barreau.

## I/B Densité linéique de la force de LAPLACE

**Propriété 2.1 : Force de LAPLACE infinitésimale**

Un élément de fil électrique de longueur $\mathrm{d}\ell$ parcouru par un courant et plongé dans un champ magnétique $\vec{B}$ subit la force de LAPLACE :

$$\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \vec{B}}$$

avec $\overrightarrow{\mathrm{d}\ell}$ orienté **dans le sens du courant**.

On sait déjà qu'un **électron unique** en mouvement dans un champ subit la force de **LORENTZ**. Quand on s'intéresse à un grand ensemble d'électrons, dans une **portion de conducteur**, celui-ci subit la force de **LAPLACE**. Démontrons cette expression.

### Démonstration 2.1 : Force infinitésimale de LAPLACE

**Hypothèses de calcul**

- on suppose que les électrons sont animés d'une même vitesse $\overrightarrow{v} = v\,\overrightarrow{u_x}$, où $\overrightarrow{u_x}$ désigne la direction du fil[1] ;
- le nombre d'électrons par unité de volume $n$ (en $\mathrm{m}^{-3}$) est homogène ;
- on considère un fil de section $S$ constante.

**Expression de l'intensité du courant**

L'intensité représente le **flux de charge par seconde**. Pour la relier à notre fil, on doit s'intéresser à une **section imaginaire** et **compter le nombre d'électrons qui y passent** par seconde.

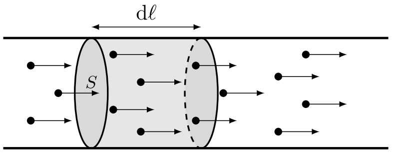



**FIGURE 2.2** – Schéma fil.

Pendant un intervalle d$t$, les électrons situés dans un cylindre de longueur $v\,\mathrm{d}t$ en amont de $S$ vont passer à travers la section $S$ : $v\,\mathrm{d}t$ correspond à la distance parcourue par les électrons pendant cet intervalle. Ceux qui sont plus loin ne la traversent pas. Dans ce cylindre, il y a $\mathrm{d}N = n \times Sv\,\mathrm{d}t$ électrons, soit une charge $\mathrm{d}q = -e\,\mathrm{d}N = -neSv\,\mathrm{d}t$.

D'où l'intensité du courant :

$$\boxed{i = \frac{\mathrm{d}q}{\mathrm{d}t} = -neSv}$$

**Expression de la force subie par une section de fil**

Considérons petit volume de longueur d$\ell$ de fil :

- Dans ce volume, il y a $\boxed{n \times S\,\mathrm{d}\ell}$ électrons.
- Chaque électron subit $\boxed{\overrightarrow{F_{\text{LORENTZ}}} = -e\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B}}$.

La force subie par la section de fil est donc

$$\begin{aligned}
&\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}} = -neS\,\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{v} \wedge \overrightarrow{B} \\
\Leftrightarrow\ &\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}} = -neSv(\mathrm{d}\ell\,\overrightarrow{u_x}) \wedge \overrightarrow{B} \\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\mathrm{d}\overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}} = i\overrightarrow{\mathrm{d}\ell} \wedge \overrightarrow{B}}
\end{aligned}$$

■

## I/C Expression intégrale de la force de LAPLACE

### Propriété 2.2 : Force de LAPLACE

La force de LAPLACE qui s'exerce sur une barre conductrice AC traversée par un courant $i$ et placée dans un champ magnétique **uniforme** et **stationnaire** $\overrightarrow{B}$ s'applique **en son milieu** et vaut :

$$\boxed{\overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}} = i\overrightarrow{L} \wedge \overrightarrow{B}}$$

où $i$ est orienté **selon le sens du vecteur** $\overrightarrow{L}$.

1. Cette hypothèse a pour but de simplifier le calcul : dans la situation réelle, $v$ représente la vitesse **moyenne** des électrons.

**Démonstration 2.2 : Force de LAPLACE**

Si le champ magnétique est homogène sur un fil rectiligne AC, alors on **intègre** sur la longueur :

$$\overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}} = \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{B}} i\mathrm{d}\vec{\ell} \wedge \vec{B}$$

$$\Leftrightarrow \overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}} = i \left( \int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \mathrm{d}\vec{\ell} \right) \wedge \vec{B}$$

Avec $\int_{\mathrm{A}}^{\mathrm{C}} \mathrm{d}\vec{\ell} = \overrightarrow{\mathrm{AC}} = \vec{L}$, on a ainsi

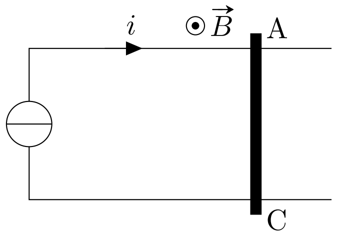
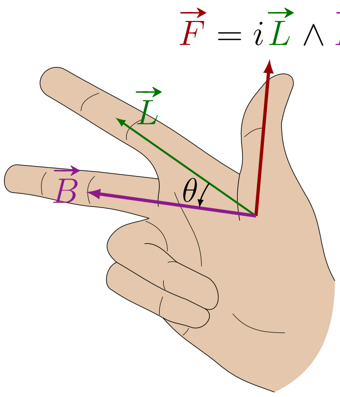



**FIGURE 2.3** – Schéma rails.

**Remarque 2.1 : Force de LAPLACE**

1) On peut orienter la force selon la règle de la main droite, version « trois doigts » :
   - ◇ la force sur le pouce (« le pouce pousse ») ;
   - ◇ l'**in**tensité sur l'**in**dex ;
   - ◇ le champ **ma**gnétique sur le **ma**jeur.




2) Cette expression permet d'obtenir la dimension de $B$ en fonction des dimensions fondamentales :

$$B = \frac{F}{\ell i} \Leftrightarrow [B] = \frac{\mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}}{\mathrm{L} \cdot \mathrm{I}} = \mathrm{M} \cdot \mathrm{T}^{-2} \cdot \mathrm{I}^{-1}$$

3) L'ordre de grandeur de cette force pour un fil de 5 cm dans un champ de 0,1 T parcouru par une intensité de 1 A est :

$$\boxed{\|\overrightarrow{F_{\text{LAPLACE}}}\| = i\ell B = 5\,\mathrm{mN}}$$

**Implication 2.1 : Puissance de la force de LAPLACE**

La puissance de la force de LAPLACE correspondante est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{L,v} = \left(i\vec{L} \wedge \vec{B}\right) \cdot \vec{v}}$$

Ainsi, alors que la force de magnétique de LORENTZ était de puissance nulle sur **1 électron**, ça n'est pas le cas de la force de LAPLACE qui s'applique sur un solide conducteur : dans ce cas, **un champ magnétique peut accélérer le système**.

# II Le couple des actions de LAPLACE

## II/A Spire rectangulaire plongée dans un champ constant

**Propriété 2.3 : Couple de LAPLACE**

Un **circuit ou un aimant** de moment magnétique $\vec{\mu}$ plongé dans un champ **uniforme** et **stationnaire** $\vec{B}$ subit un **couple magnétique**, issu du moment des forces de LAPLACE par rapport à un axe $\vec{u_z}$ tel que :

$$\boxed{\vec{\Gamma}_{\text{Lap}} = \vec{\mu} \wedge \vec{B}}$$

On commence par un cas particulier : une spire rectangulaire dans un champ constant. Vérifions l'expression.

## Démonstration 2.3 : Couple de LAPLACE

**Modélisation**

- On considère un cadre rectangulaire AECD parcouru par un courant $i$. Ce cadre peut tourner autour de l'axe $(\mathrm{O}z)$.
- On impose un champ magnétique uniforme $\vec{B} = B\,\vec{u_x}$. On note $\theta$ l'angle entre $\vec{B}$ et la normale au cadre, orientée **dans le sens de** $i$. On note cette normale $\vec{n}$.

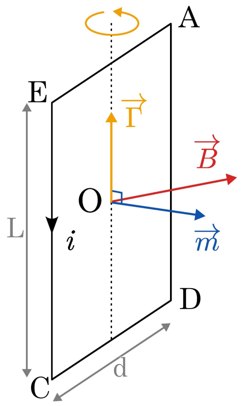



**FIGURE 2.4** – Schéma simple.

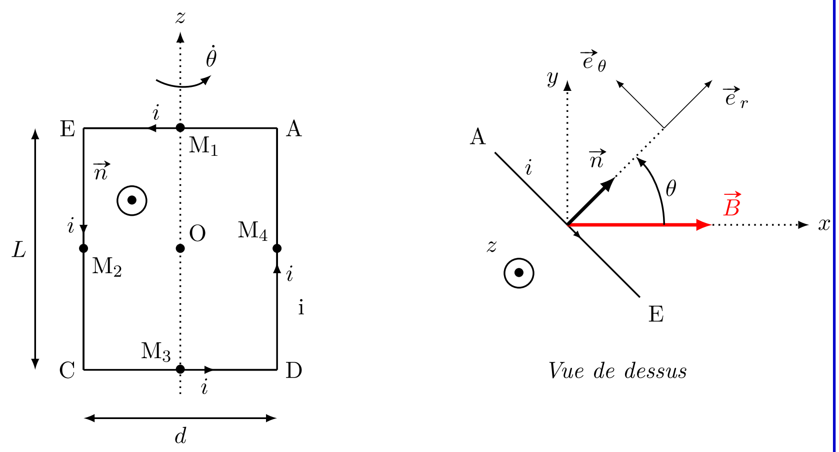



**FIGURE 2.5** – Schéma étendu.

**Résultante des forces**

Il s'agit d'additionner les différentes forces de LAPLACE subies par chacun des côtés de la spire rectangulaire [a] :

$$\sum \overrightarrow{F_{\text{Lap}}} = i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{EC}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{CD}} \wedge \vec{B} + i\overrightarrow{\text{DA}} \wedge \vec{B} = i\big(\underbrace{\overrightarrow{\text{AE}} + \overrightarrow{\text{EC}} + \overrightarrow{\text{CD}} + \overrightarrow{\text{DA}}}_{=\vec{0}}\big) \wedge \vec{B} = \vec{0}$$

**Moment des forces**

- **AE** :

**Force**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}} &= i\overrightarrow{\text{AE}} \wedge \vec{B}\\ &= i(-d\cos\theta\,\vec{u_y} + d\sin\theta\,\vec{u_x}) \wedge \vec{B}\\ &= idB\cos\theta\,\vec{u_z}\end{aligned}$$

**Moment**

Elle s'applique en $\mathrm{M}_1 \in (\mathrm{O}z)$, soit

$$\boxed{\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}}\right) = \overrightarrow{\mathrm{OM}_1} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Lap,AE}}} = \vec{0}}$$

- **EC** :

**Force**

$$\begin{aligned}\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}} &= i\overrightarrow{\text{EC}} \wedge \vec{B}\\ &= i(-L\,\vec{u_z}) \wedge B\,\vec{u_x}\\ &= -iLB\,\vec{u_y}\end{aligned}$$

**Moment**

Elle s'applique en $\mathrm{M}_2$, soit

$$\begin{aligned}\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}\right) &= \overrightarrow{\mathrm{OM}_2} \wedge \overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}\\ &= \left(-\frac{d}{2}\cos\theta\,\vec{u_y} + \frac{d}{2}\sin\theta\,\vec{u_x}\right) \wedge -iLB\,\vec{u_y}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}\left(\overrightarrow{F_{\text{Lap,EC}}}\right) = -iLB\frac{d}{2}\sin\theta\,\vec{u_z}$$

◇ **CD** : La force agissant sur le côté $\overrightarrow{\mathrm{CD}}$ s'applique en $\mathrm{M}_3$, qui est sur l'axe de rotation, donc immédiatement :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}\left(\overrightarrow{F_{\mathrm{Lap,CD}}}\right)=\vec{0}}$$

◇ **DA** : De manière analogue au côté $\overrightarrow{\mathrm{EC}}$ (on vérifie avec la règle de la main droite) :

**Force**

$$\overrightarrow{F_{\mathrm{Lap,DA}}}=iLB\,\overrightarrow{u_y}$$

**Moment**

Elle s'applique en $\mathrm{M}_4$, soit

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}\left(\overrightarrow{F_{\mathrm{Lap,DA}}}\right)=-iLB\frac{d}{2}\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}}$$

**Couple des forces**

En sommant tous ces moments, on trouve donc :

$$\overrightarrow{\Gamma}_{\mathrm{Lap}}=\sum_i\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}\left(\overrightarrow{F_{\mathrm{Lap},i}}\right)$$
$$\Leftrightarrow\boxed{\overrightarrow{\Gamma}_{\mathrm{Lap}}=-idLB\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}}$$

Avec le moment magnétique de la spire $\vec{\mu}=iS\vec{n}$, on trouve :

$$\begin{aligned}\vec{\mu}\wedge\vec{B}&=iS(\cos\theta\,\overrightarrow{u_x}+\sin\theta\,\overrightarrow{u_y}\wedge B\,\overrightarrow{u_x})\\&=-iSB\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}\\&=-iLdB\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}\end{aligned}$$ ■

**Implication 2.2 : Puissance du couple de Laplace**

La puissance du couple de Laplace correspondante est :

$$\boxed{\mathcal{P}_{L,\omega}=\overrightarrow{\Gamma}_L\cdot\vec{\omega}}$$

avec $\vec{\omega}$ la vitesse angulaire de rotation.

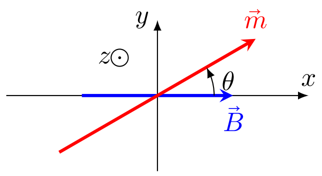
Pour un circuit de vitesse de translation $\vec{v}$ et de vitesse angulaire $\vec{\omega}$, on aura

$$\boxed{\mathcal{P}_L=\overrightarrow{F}_L\cdot\vec{v}+\overrightarrow{\Gamma}_L\cdot\vec{\omega}}$$

## II/B Effet sur un aimant

Par analogie avec la spire, on peut dire qu'un moment magnétique soumis à un champ magnétique génère un couple de forces, de couple résultant :

$$\overrightarrow{\Gamma}_L=\vec{m}\wedge\vec{B}$$




**Application 2.1 : Oscillations d'un aimant**

1) Exprimer le couple de Laplace subit par $\vec{m}$ en fonction de $\theta$.

2) En déduire les positions d'équilibre de $\vec{m}$.

3) En étudiant dans quel sens le couple de Laplace tend à faire tourner $\vec{m}$ en cas de petites

*a.* Tant que le champ magnétique est homogène, alors peu importe le circuit fermé, on aura $\oint_{\mathcal{C}} i\,\mathrm{d}\vec{\ell}\wedge\vec{B}=i\left(\oint_{\mathcal{C}}\mathrm{d}\vec{\ell}\right)\wedge\vec{B}=\vec{0}$

perturbations, déterminer la stabilité des deux positions d'équilibre.

1) On a

$$\vec{m} = m\,(\cos\theta\,\vec{u_x} + \sin\theta\,\vec{u_y})$$
$$\text{et} \quad \vec{B} = B_0\,\vec{u_x}$$

D'où

$$\boxed{\vec{\Gamma} = -mB_0\sin\theta\,\vec{u_z}}$$

Ce qui fait tourner le système autour de l'axe $z$.

2) On est à l'équilibre si la somme des forces et la somme des moments sont nulles. Avec uniquement le couple magnétique, on a bien une résultante nulle : on a donc équilibre si $\vec{\Gamma} = \vec{0}$, soit

$$\sin\theta_{\mathrm{eq}} = 0 \Leftrightarrow \begin{cases} \theta_{\mathrm{eq}} = 0 & \text{ou} \\ \theta_{\mathrm{eq}} = \pi \end{cases}$$

3) ◇ En $\theta_{\mathrm{eq}} = \pi$, une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens horaire, qui écarte donc l'aimant de sa position d'équilibre : il est **instable**.

◇ À l'inverse, en $\theta_{\mathrm{eq}} = 0$, une petite déviation vers le haut donne un mouvement de rotation dans le sens direct, le ramenant à sa position d'équilibre : il est **stable**.

La dynamique de la rotation de l'aimant est alors équivalente à celle du pendule pesant ! En effet, en appliquant le théorème du moment cinétique à l'aimant :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = J\ddot{\theta} = \sum \mathcal{M}_z$$

avec $J$ le moment d'inertie par rapport à l'axe de rotation. Or, d'après ce qui précède,

$$\sum \mathcal{M}_z = -mB\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow J\ddot{\theta} = -mB\sin\theta$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mB}{J}\sin\theta = 0}$$

qui est bien l'équation du pendule.

**Important 2.1 : Action d'un champ sur un aimant**

Du fait des petites vibrations (qui rendent la position $\theta = \pi$ non durable) et des frottements qui arrêtent sa course, **un aimant tend à s'aligner sur le champ magnétique**, et ce d'autant plus vite que le champ $\vec{B}$ est intense.

En effet, au voisinage de la position d'équilibre, on a $\sin\theta \sim \theta$, d'où

$$\ddot{\theta} + \frac{mB}{J}\theta = 0$$

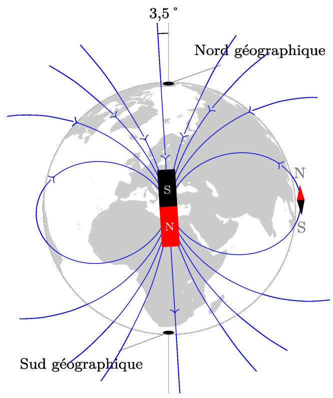
qui est l'équation d'un **oscillateur harmonique**, de période propre :

$$T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{J}{mB}}$$

## II/C Boussole sur Terre

On peut donc pleinement expliquer l'alignement d'une boussole à la surface de la Terre, toujours en modélisant son champ magnétique par un aimant : l'aiguille aimantée de moment magnétique $\vec{\mu}$ s'oriente spontanément sur le champ magnétique terrestre.

On notera bien que dans ce cas, la boussole pointe bien vers le Nord géographique, mais qu'il correspond au pôle Sud magnétique de l'aimant par lequel on représente la Terre [2].




## II/D Effet moteur d'un champ magnétique tournant

Si un aimant a tendance à s'orienter sur un champ magnétique, on peut utiliser ce couple pour forcer la rotation continue d'un aimant grâce à un **champ tournant** : c'est le principe du **moteur synchrone**.

**Définition 2.1 : Champ magnétique tournant**

Un champ tournant est un champ de **norme constante**, mais dont la **direction tourne** à vitesse angulaire constante.

Par le couple de Laplace, un **aimant** soumis à ce champ tournera en régime stationnaire à la **même vitesse** angulaire $\omega$.

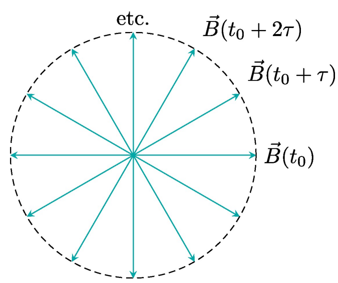



**Figure 2.6 –** Champ magnétique tournant.

Pour réaliser un champ tournant, on peut utiliser deux bobines identiques, de courants déphasés de $\pi/2$ :

$$\begin{aligned} & i_1(t) = I_0\cos\omega t \\ \text{et} \qquad & i_2(t) = I_0\cos\omega t - \pi/2 = I_0\sin\omega t \end{aligned}$$

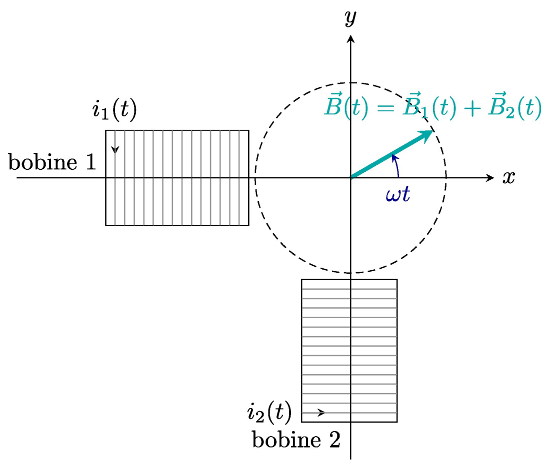
Ainsi, proche de l'axe des bobines on aura des champs

$$\overrightarrow{B_1}(t) = kI_0\cos\omega t\ \overrightarrow{u_x} \qquad \text{et} \qquad \overrightarrow{B_2}(t) = kI_0\sin\omega t\ \overrightarrow{u_y}$$

Soit, par somme :

$$\boxed{\vec{B} = kI_0(\cos\omega t\,\overrightarrow{u_x} + \sin\omega t\,\overrightarrow{u_y}) = kI_0\,\overrightarrow{u_r}}$$

qui est bien un champ tournant.




Il est également possible de faire un champ tournant à l'aide de trois bobines, décalées de $2\pi/3$ : c'est ce qu'on appelle un courant **triphasé**, et c'est ce qui est utilisé dans le transport d'électricité de manière industrielle.

2. Le Nord magnétique reste au Nord ! On parle ici du pôle sud **de l'aimant**.