/45 P1 Le haut-parleur électrostatique

Deux disques conducteurs de même rayon, parallèles, sont écartés d'une faible distance e. L'un d'eux est fixe (la base), l'autre constituant la membrane est mobile en translation selon l'axe Oz.

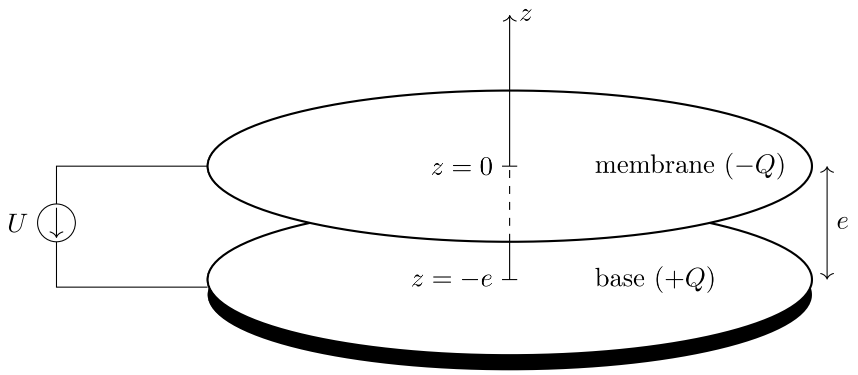

Figure 1 – Schéma du dispositif.

La membrane de surface S est rappelée vers la position $z = 0$ par la force de rappel élastique $\vec{F}_r = -kz\,\vec{u_z}$ (on considère donc $\ell_0 = 0$). L'air séparant les disques est assimilable, du point de vue électrostatique, au vide. Lorsqu'on établit une différence de potentiel (ddp) U entre les disques, il apparait une charge électrique Q sur la base et une charge opposée $-Q$ sur la membrane. Ces charges sont réparties uniformément sur chaque disque. On négligera l'effet du poids.

I/A Force exercée sur la membrane

La base étant assimilable à un plan infini, la charge portée par la base crée un champ électrique

$$\vec{E} = \frac{Q}{2S\varepsilon_0}\,\vec{u_z} \quad \text{pour} \quad z > -e$$

On peut montrer que la capacité du condensateur s'écrit $C = \frac{S\varepsilon_0}{e+z}$. Ainsi la capacité évolue en fonction de la distance $(e + z)$ séparant les deux armatures.

/2 **1** Rappeler la relation liant la tension U, la capacité C et la charge Q portée par les armatures d'un condensateur. En déduire l'expression de la charge Q en fonction de z, U et des constantes du problème.

Réponse

$$Q \overset{1}{=} CU \qquad \text{donc} \qquad \boxed{Q \overset{1}{=} \frac{US\varepsilon_0}{e+z}}$$

◇

/3 **2** Déterminer la force électrique $\vec{F}_e$ subie par la membrane. Est-elle attractive ou répulsive ?

Réponse

$$\vec{F}_e \overset{1}{=} -Q\vec{E} = -\frac{Q^2}{2S\varepsilon_0}\,\vec{u_z} \Leftrightarrow \boxed{\vec{F} \overset{1}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)^2}\,\vec{u_z}}$$

La force est attractive (1) car orientée selon $-\vec{u_z}$.

◇

I/B Étude énergétique

/2 **3** Définir ce qu'est une force conservative et son lien avec l'énergie potentielle associée.

Réponse

Une force est dite conservative si **son travail ne dépend pas du chemin suivi** (1), c'est-à-dire qu'elle dérive d'une énergie potentielle :

$$\boxed{\delta W(\vec{F}_e) \overset{1}{=} -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_p}$$

◇

/6 **4** Établir l'expression de l'énergie potentielle $\mathcal{E}_{p,e}(z)$ électrique. On prendra son origine en $z = 0$.

Réponse

On calcule le travail élémentaire $\delta W(\vec{F}_e) \overset{1}{=} \vec{F}_e \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}}$, avec $d\overrightarrow{\mathrm{OM}} \overset{1}{=} \mathrm{d}x\,\overrightarrow{u_x} + \mathrm{d}y\,\overrightarrow{u_y} + \mathrm{d}z\,\overrightarrow{u_z}$:

$$\delta W(\vec{F}_e) = -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)^2}\,\mathrm{d}z \overset{1}{=} -\,\mathrm{d}\left(-\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)}\right) = -\,\mathrm{d}\mathcal{E}_{p,e}$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{p,e}(z) \overset{1}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z)} + \underbrace{A}_{=\mathrm{cte}} \quad \text{or} \quad \mathcal{E}_{p,e}(0) = 0 \Rightarrow A \overset{1}{=} \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2e}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{E}_{p,e}(z) \overset{1}{=} -\frac{S\varepsilon_0 U^2}{2}\left(\frac{1}{e+z} - \frac{1}{e}\right)}$$

/3 **5** L'énergie mécanique de la membrane est-elle conservée ?

Réponse

La membrane, étudiée dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen, est soumise :

- (1) à la force de rappel élastique qui est une force conservative,
- (1) à la force électrique qui est une force conservative.

Donc le système est conservatif (1).

/2 **6** Exprimer l'énergie potentielle totale du système $\mathcal{E}_p(z)$. On rappelle que l'origine de l'énergie potentielle est prise en $z = 0$.

Réponse

C'est la somme (1) de l'énergie potentielle élastique $\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}$ et de l'énergie potentielle électrique. Comme l'énergie potentielle est nulle en $z = 0$, on en déduit que la constante de $\mathcal{E}_{p,\mathrm{el}}$ est nulle, et ainsi :

$$\boxed{\mathcal{E}_p(z) \overset{1}{=} \frac{1}{2}kz^2 - \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2}\left(\frac{1}{e+z} - \frac{1}{e}\right)}$$

/3 **7** Expliquer en quoi l'étude de $\mathcal{E}_p(z)$ permet de prévoir l'ensemble des valeurs possibles de z.

Réponse

Le système est un système conservatif à un degré de liberté, donc $\mathcal{E}_m \overset{1}{=} \mathcal{E}_c(z) + \mathcal{E}_p(z) \overset{1}{=} \mathrm{cte}$. Or $\mathcal{E}_c \geq 0$, d'où les valeurs possibles de z vérifient

$$\boxed{\mathcal{E}_p(z) \overset{1}{\leq} \mathcal{E}_m}$$

/3 **8** Montrer que les positions d'équilibre possibles z_0 vérifient $z_0(e+z_0)^2 = A$. Donner l'expression de A.

Réponse

Les positions d'équilibre z_0 vérifient

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z}(z_0) \overset{1}{=} 0 \Leftrightarrow kz_0 + \frac{S\varepsilon_0 U^2}{2(e+z_0)^2} = 0 \Leftrightarrow \boxed{z_0(e+z_0)^2 \overset{1}{=} -\frac{S\varepsilon_0}{2k}U^2} \quad \text{avec} \quad \boxed{A \overset{1}{=} -\frac{S\varepsilon_0}{2k}U^2}$$

/6 **9** On étudie la fonction $f(z) = z(e+z)^2$ pour $z \in [-e{,}0]$. Montrer qu'elle admet un minimum une valeur z_m à déterminer. Préciser la valeur de f en ce minimum. En déduire la valeur maximale U_m de U pour qu'il y ait deux positions d'équilibre z_1 et z_2 telles que $-e < z_1 < z_2 < 0$.

Réponse

Valeurs extrêmes :

- $f(-e) = 0$
- $f(0) = 0$

Étude de la dérivée :

- $f'(z) = (e+z)^2 + 2z(e+z) = (e+z)(3z+e)$
- $f'(z) = 0$ si $z = -e$ ou $z = -e/3$
- en $z = -e$: maximum local de $f(z)$
- en $z = -e/3$: minimum de $f(z)$

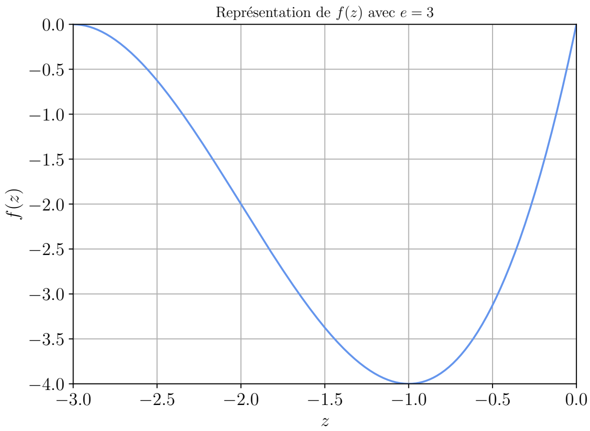

Figure 2 – Représentation de $f(z)$.

La fonction f admet un minimum en $\boxed{z_m = -e/3}$, alors $\boxed{f(z_m) = -4e^3/27}$.

On en déduit que pour $z \in [-e,0]$, $f(z) \in [-4e^3/27,0]$. Il faut donc que $A \in [-4e^3/27,0]$:

$$-4e^3/27 \leq -\frac{S\varepsilon_0}{2k}U^2 \leq 0 \quad \text{donc} \quad \boxed{U \leq \sqrt{\frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}} = U_m}$$

◇

/1 10 Que valent z_1 et z_2 pour $U = U_m$?

Réponse

D'après la réponse à la question précédente, $\boxed{z_1 = z_2 = -e/3}$.

◇

/4 11 Montrer que la position d'équilibre stable vérifie $z_0 > -e/3$.

Réponse

On étudie le signe de la dérivée seconde de l'énergie potentielle en z_0 :

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2} = k - \frac{S\varepsilon_0 U^2}{(e+z)^3} = k\left(1 - \frac{S\varepsilon_0 U^2}{k(e+z)^3}\right)$$

Or la position d'équilibre vérifie $\frac{S\varepsilon_0 U^2}{k} = -2z_0(e+z_0)^2$, donc

$$\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2}(z_0) = k\left(1 + \frac{2z_0}{e+z_0}\right)$$

Si la position d'équilibre z_0 est stable, alors $\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2}(z_0) > 0$, soit

$$1 + \frac{2z_0}{e+z_0} > 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{z_0 > -e/3}$$

◇

/3 12 *Application numérique.* On prend $z_0 = -e/100$ pour la position d'équilibre stable, $e = 3\,\mathrm{mm}$, $S = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$, $k = 1000\,\mathrm{N\cdot m^{-1}}$ et $\varepsilon_0 = 8{,}85 \times 10^{-12}\,\mathrm{F\cdot m^{-1}}$. Déterminer U et U_m.

Réponse

$$\boxed{U = \sqrt{-z_0(e+z_0)^2 \cdot \frac{2k}{S\varepsilon_0}}} \Leftrightarrow \underline{U = 1{,}1\,\mathrm{kV}} \qquad \text{et} \qquad U_m = \sqrt{\frac{8ke^3}{27\varepsilon_0 S}} \Leftrightarrow \underline{U_m = 4{,}3\,\mathrm{kV}}$$

◇

I/C Dynamique

On étudie les petits mouvements de la membrane au voisinage de la position d'équilibre stable $z_0 = -e/100$ et on pose $z(t) = z_0 + \xi(t)$ avec $|\xi(t)| \ll e + z_0$.

/4 13 Écrire l'équation différentielle vérifiée par $\xi(t)$. Définir la pulsation propre en fonction de k, m, e et z_0.

Réponse

On applique la loi de la quantité de mouvement à la membrane, projetée selon $\overrightarrow{u_z}$: $m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = F(z) = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z}$, (ou la conservation de l'énergie mécanique).

On effectue un développement limité 1 autour de z_0 : $m\frac{\mathrm{d}^2 z}{\mathrm{d}t^2} = -\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z}(z_0) - (z - z_0)\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2}(z_0)$

Or $\ddot{z} \overset{1}{=} \ddot{\xi}$, donc $\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{1}{m}\frac{\mathrm{d}^2\mathcal{E}_p}{\mathrm{d}z^2}(z_0)\xi = 0$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2\xi}{\mathrm{d}t^2} + \frac{k}{m}\left(1 + \frac{2z_0}{e + z_0}\right)\xi \overset{1}{=} 0}$$

On pose donc la pulsation propre

$$\boxed{\omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{k}{m}\left(1 + \frac{2z_0}{e + z_0}\right)}}$$

/3 14 La membrane est une feuille d'aluminium d'épaisseur $a = 20\,\mathrm{mm}$, d'aire $S = 0{,}05\,\mathrm{m}^2$ et de masse volumique $\rho = 2{,}7 \times 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}}$. Calculer la période propre T_0 du système.

Réponse

$$\omega_0 \overset{1}{=} \frac{2\pi}{T_0}$$

$$\Leftrightarrow T_0 = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}\left(\frac{e + z_0}{e + 3z_0}\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{T_0 \overset{1}{=} 2\pi\sqrt{\frac{\rho a S}{k}\left(\frac{e + z_0}{e + 3z_0}\right)}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{T_0 \overset{1}{=} 10{,}4\,\mathrm{ms}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \rho = 2{,}7 \times 10^3\,\mathrm{kg{\cdot}m^{-3}} \\ a = 20 \times 10^{-6}\,\mathrm{m} \\ S = 5 \times 10^{-2}\,\mathrm{m}^2 \\ k = 1000\,\mathrm{N{\cdot}m^{-1}} \\ e = 3 \times 10^{-3}\,\mathrm{m} \\ z_0 = -\frac{e}{100} = -3 \times 10^{-5}\,\mathrm{m} \end{cases}$$