

Oscillateur amorti

Sommaire

I Introduction	3
I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC	3
I/B Équation différentielle	4
I/C Équation caractéristique et régimes de solutions	4
II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre	5
II/A Présentation	5
II/B Bilan énergétique	5
II/C Équation différentielle du circuit	6
II/D Résolutions pour chaque cas	6
III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides	12
III/A Présentation	12
III/B Équation différentielle	13
III/C Bilan de puissance	13
III/D Solutions	14
IV Résumé oscillateurs amortis	14

Capacités exigibles

- | | |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques. <input type="checkbox"/> Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques. <input type="checkbox"/> Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité. <input type="checkbox"/> Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité. | <ul style="list-style-type: none"> <input type="checkbox"/> Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation. <input type="checkbox"/> Réaliser un bilan énergétique. <input type="checkbox"/> Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique. <input type="checkbox"/> Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité. |
|---|---|

✓ L'essentiel

📖 Définitions

- ☐ E5.1 : Équation caractéristique amorti . . . 4
- ☐ E5.2 : Circuit RLC libre 5
- ☐ E5.3 : Situation initiale et bilan des forces 12

⚙️ Propriétés

- ☐ E5.1 : Équation différentielle amorti . . . 4
- ☐ E5.2 : Bilan de puissance RLC libre . . . 6
- ☐ E5.3 : Équation différentielle RLC libre . . . 6
- ☐ E5.4 : Solution pseudo-périodique 7
- ☐ E5.5 : Régime transitoire $Q > 1/2$ 8
- ☐ E5.6 : Solution critique 9
- ☐ E5.7 : Régime transitoire critique 10
- ☐ E5.8 : Solution apériodique 11
- ☐ E5.9 : Régime transitoire apériodique . . . 12
- ☐ E5.10 : Équation ressort amorti 13
- ☐ E5.11 : Bilan de puissance ressort 13
- ☐ E5.12 : Solutions ressort 14

» Implications

- ☐ E5.1 : Régimes de solutions 4
- ☐ E5.2 : Résultat à grand Q 8
- ☐ E5.3 : Résultat à faible Q 12

💡 Interprétations

- ☐ E5.1 : Résultat pseudo-périodique 8
- ☐ E5.2 : Espace des phases pseudo-pér. . . . 9
- ☐ E5.3 : Espace des phases critique 10
- ☐ E5.4 : Espace des phases apériodique . . . 11

🔧 Démonstrations

- ☐ E5.1 : Bilan de puissance RLC libre 5
- ☐ E5.2 : Équation différentielle RLC libre . . . 6
- ☐ E5.3 : Solution pseudo-périodique 7
- ☐ E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér. . . . 8
- ☐ E5.5 : Solution critique 9
- ☐ E5.6 : Régime transitoire critique 10
- ☐ E5.7 : Solution apériodique 10
- ☐ E5.8 : Régime transitoire apériodique . . . 11
- ☐ E5.9 : Équation ressort amorti 13
- ☐ E5.10 : \mathcal{P} ressort 13

♥ Points importants

- ☐ E5.1 : Solutions oscillateur amorti 5
 - ☐ E5.2 : Évolution énergétique RLC série . . . 6
 - ☐ E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti 13
 - ☐ E5.4 : Résumé – pas de par cœur ! 14
-

I Introduction

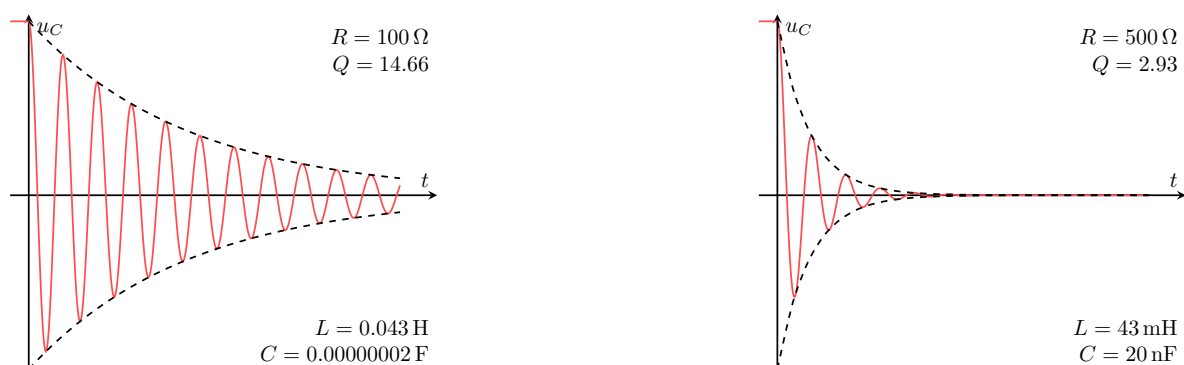
I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC

En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC suivant¹, avec $L = 43 \text{ mH}$ et $C = 20 \text{ nF}$:

FIGURE E1

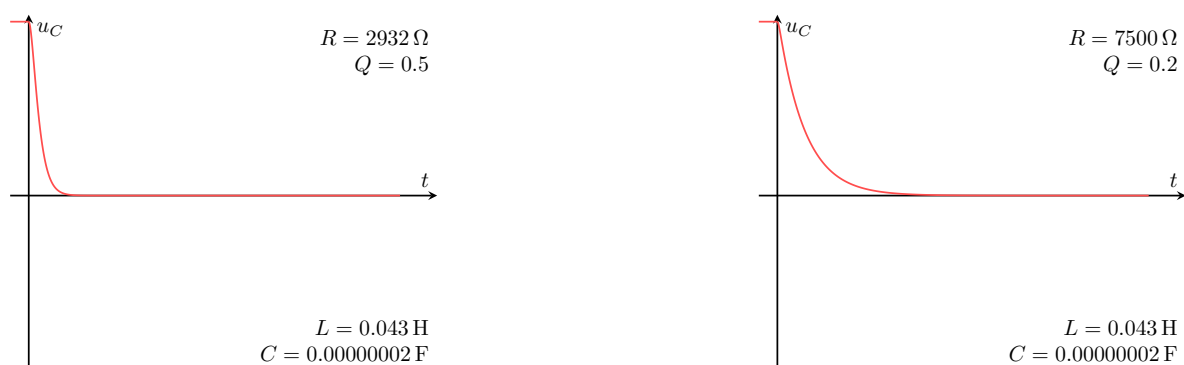
◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**.

On observe une série d'oscillations à la période $T \approx 184 \mu\text{s}$. On observe environ 15 oscillations lorsque $R \approx 100 \Omega$ (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque $R \approx 180 \Omega$, 3 oscillations lorsque $R \approx 500 \Omega$.



◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

Lorsque $R \approx 2,9 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ $250 \mu\text{s}$ (à 95%). Lorsque $R \approx 7,5 \text{ k}\Omega$, on observe un régime transitoire plus long, d'environ $420 \mu\text{s}$.



Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

- 1) **Système oscillant** pour $R < R_c$, de pseudo-période² **supérieure** à T_0 ;
- 2) **Système non-oscillant** pour $R > R_c$: le transitoire **augmente** avec R .

1. <https://tinyurl.com/ypbwcwfs>

2. On parle de *pseudo*-période car le signal est diminué.

I/B Équation différentielle

Propriété E5.1 : Équation différentielle amorti

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur $x(t)$ solution d'une équation différentielle du type :

- 1) x_{eq} la position d'équilibre 2) ω_0 la pulsation **propre** 3) Q le **facteur de qualité**

Remarque E5.1 : Analyse de l'équation

Par lecture de cette équation, Q est **sans dimension** pour qu'on retrouve que ω_0 s'exprime en s^{-1} car $\frac{dx}{dt}$ est de dimension $[x] \cdot \text{s}^{-1}$.

De plus, on remarque que **plus Q est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

I/C Équation caractéristique et régimes de solutions

♥ Définition E5.1 : Équation caractéristique amorti

Pour résoudre une équation différentielle **homogène**, on suppose une solution de la forme $x(t) = A \exp(rt)$ avec $r \in \mathbb{C}$. En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'**équation caractéristique** :

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant Δ est

♥ Implication E5.1 : Régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de r :

$Q > 1/2$:

$Q = 1/2$:

$Q < 1/2$:

Notation E5.1 : \pm et \mp

Il est courant de noter les racines r_{\pm} pour dénoter à la fois r_+ et r_- . Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe \pm , ce qui signifie que r_+ correspond à l'expression avec le $+$, et r_- correspond à l'expression avec le $-$.

Si l'expression contient le signe \mp , c'est l'opposé : r_+ correspond à l'expression avec $-$.

Important E5.1 : Solutions oscillateur amorti

	Racines	Solution
Pseudo-pér.	$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$	$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \times \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$
Critique	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$x(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$
Apériodique	$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$	$x(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$

II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre

II/A Présentation

♥ Définition E5.2 : Circuit RLC libre

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ On suppose le condensateur initialement chargé.
- ◇ À $t = 0$, on coupe le générateur.

FIGURE E2

II/B Bilan énergétique

♥ Démonstration E5.1 : Bilan de puissance RLC libre

On fait un bilan de puissances :

♥ Propriété E5.2 : Bilan de puissance RLC libre

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

$$\text{avec } \mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2.$$

Important E5.2 : Évolution énergétique RLC série

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de u_C , d'où l'amortissement.

II/C Équation différentielle du circuit

♥ Démonstration E5.2 : Équation différentielle RLC libre

Avec la loi des mailles,

On détermine l'expression de Q par identification :

♥ Propriété E5.3 : Équation différentielle RLC libre

L'équation différentielle de la tension $u_C(t)$ aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC en régime libre est

Les conditions initiales (continuité de u_C aux bornes de C et de i traversant L) sont

◇

◇

II/D Résolutions pour chaque cas

II/D) 1 Cas $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$: régime pseudo-périodique

II/D) 1.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.3 : Solution pseudo-périodique

On part de l'équation caractéristique :

donc

Ainsi,

d'où la définition de Ω :

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

◇ On trouve A avec la première condition initiale :

◇ On trouve B avec la seconde CI :

♥ Propriété E5.4 : Solution pseudo-périodique

Pour un facteur de qualité $Q > 1/2$, u_C s'exprime par

avec
$$\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \Leftrightarrow \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

La période des oscillations est alors

Les enveloppes sont

$$y(t) = \pm E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

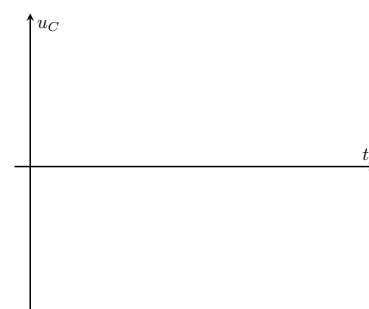


FIGURE E3



♥ Interprétation E5.1 : Résultat pseudo-périodique

La solution du polynôme caractéristique s'écrit donc comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution d'ordre 2 harmonique** :

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1.

Avec les propriétés de l'exponentielle ($e^{a+b} = e^a e^b$), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2 :

II/D) 1.2 Régime transitoire

♥ Démonstration E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér.

L'enveloppe est $E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) = E \exp(-t/\tau)$; d'où t_{95} tel que $u_C(t_{95}) = 0,05E$, soit

■

♥ Propriété E5.5 : Régime transitoire $Q > 1/2$

Le temps de réponse à 95% est atteint à :

Ainsi, Q correspond au nombre d'oscillations observées.

Implication E5.2 : Résultat à grand Q

Avec ces résultats on remarque en effet que quand $Q \rightarrow \infty$, on a à la fois

$$\boxed{\Omega \approx \omega_0} \quad \text{donc} \quad \boxed{T \approx T_0}$$

Mais aussi

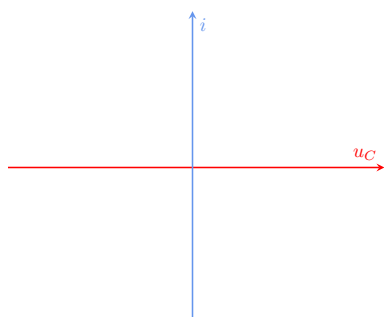
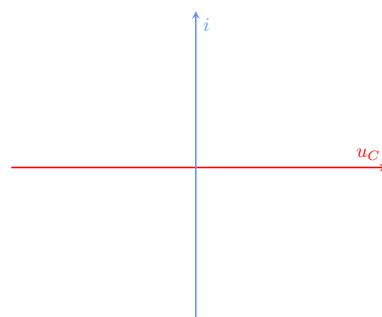
$$\boxed{\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0} \quad \text{donc} \quad \boxed{u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)}$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.


Interprétation E5.2 : Espace des phases pseudo-pér.

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace (u_C, i) n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**.

On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand Q diminue.


FIGURE E4 – Faible amortissement

FIGURE E5 – Moyen amortissement

II/D) 2 Cas $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$: régime critique

II/D) 2.1 Solution de l'équation
♥ Démonstration E5.5 : Solution critique

La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut

soit

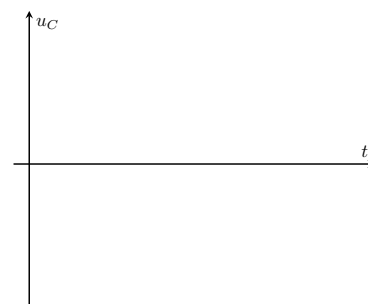
◇ On trouve B avec la première condition initiale :

◇ On trouve A avec la seconde CI :

♥ Propriété E5.6 : Solution critique

Pour un facteur de qualité $Q = 1/2$, u_C s'exprime par

et on n'observe **pas une oscillation**.


FIGURE E6



Interprétation E5.3 : Espace des phases critique

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher u_C de passer sous 0.

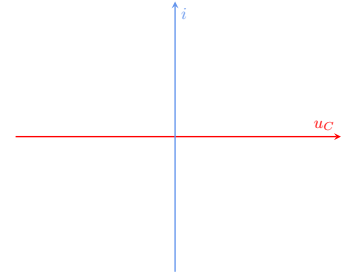


FIGURE E7

II/D) 2.2 Régime transitoire

♥ Démonstration E5.6 : Régime transitoire critique

En négligeant le terme linéaire en t devant la décroissance exponentielle, on a

♥ Propriété E5.7 : Régime transitoire critique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

C'est le **régime le plus court sans dépassement.**

II/D) 3 Cas $\Delta > 0$: régime apériodique

II/D) 3.1 Solution de l'équation

♥ Démonstration E5.7 : Solution apériodique

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

◇ Avec la seconde CI :

En combinant, on trouve

et

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

Or,

◇ Avec la première CI :

♥ Propriété E5.8 : Solution apériodique

Pour un facteur de qualité $Q < 1/2$, u_C s'exprime par

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour $Q = 1/2$.

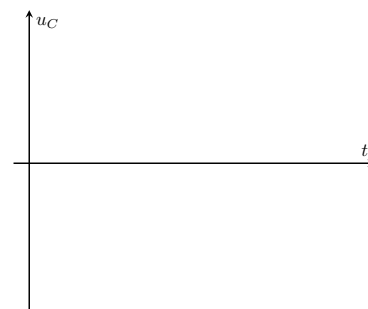


FIGURE E8

Interprétation E5.4 : Espace des phases apériodique

Pendant le régime apériodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher u_C d'osciller, mais également pour **ralentir sa diminution** vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire $\frac{du_C}{dt}$ plus petit donc i plus petit.

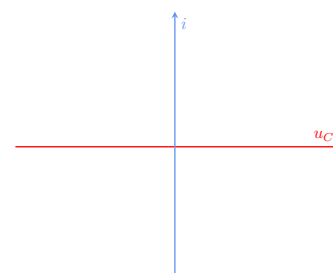


FIGURE E9

II/D) 3.2 Régime transitoire

♥ Démonstration E5.8 : Régime transitoire apériodique

La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « **moins décroissante** ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc r_- et r_+ .

On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle) :

Or,

ce qui est vrai.

On estime alors la durée du régime transitoire à $t_{95} = \tau_+ \ln(20)$.

Pour $Q \ll 1$, on utilise $\sqrt{1+x} \underset{x \ll 1}{\sim} 1 + x/2$ pour simplifier r_+ :

Avec $\ln(20) \approx \pi$:

♥ Propriété E5.9 : Régime transitoire apériodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de t_{95} tel que

Implication E5.3 : Résultat à faible Q

Quand $Q \rightarrow 0$, on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\sqrt{LC}} u_C \\ &= \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} u_C = \left[\frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C \right] \end{aligned}$$

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de r_{\pm} tendent vers la même valeur $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$: en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance :

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R \sqrt{\frac{C}{L^2 C}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique $\tau = \frac{L}{R}$.

III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

III/A Présentation

♥ Définition E5.3 : Situation initiale et bilan des forces

- ◇ Système :
- ◇ Référentiel :
- ◇ Repère :
- ◇ Repérage :

FIGURE E10

- ◇ Bilan des forces :

- ◇ Position initiale :
- ◇ Vitesse initiale :

III/B Équation différentielle

♥ Démonstration E5.9 : Équation ressort amorti

Avec le PFD :

On identifie ω_0 et Q :

Sur l'axe \vec{u}_x on trouve donc

♥ Propriété E5.10 : Équation ressort amorti

La position x de la masse et la longueur ℓ du ressort sont régies par :

$$\begin{aligned} \frac{d^2 \ell}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\ell}{dt} + \omega_0^2 \ell(t) &= \omega_0^2 \ell_0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) &= 0 \end{aligned}$$

◇

◇

ℓ_0 **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

Important E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici $x_{eq} = 0 \Leftrightarrow \ell_{eq} = \ell_0$.

Ici, c'est le coefficient de frottements α qui dissipe : on l'associe à R .

Méca \longleftrightarrow Élec

\longleftrightarrow

\longleftrightarrow

\longleftrightarrow

\longleftrightarrow

\longleftrightarrow

\longleftrightarrow

\longleftrightarrow

III/C Bilan de puissance

Propriété E5.11 : \mathcal{P} ressort

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionnellement au coefficient de friction α :

donc

Démonstration E5.10 : \mathcal{P} ressort

À partir du PFD $\times v$:

III/D

Solutions

Propriété E5.12 : Solutions ressort

On a les mêmes solutions en changeant u_C par x et E par x_0

IV

Résumé oscillateurs amortis

Important E5.4 : Résumé – pas de par cœur !

Pseudo-périodique $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	Critique $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$	Apériodique $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$
$r_{\pm} =$ $\Omega =$	$r =$	$r_{\pm} =$
$u_C(t) =$	$u_C(t) =$	$u_C(t) =$
$t_{95} \approx$	$t_{95} \approx$	$t_{95} \approx$
