TD : oscillateurs en RSF

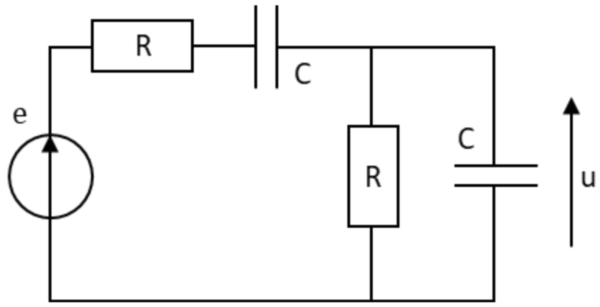
I Notation complexe

Écrire, sous forme complexe, les équations différentielles suivantes :

$$\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}+u(t)=E_0\sin\omega t \qquad\qquad \ddot{x}+2\lambda\dot{x}+\omega_0^2x(t)=F_0\cos\omega t$$

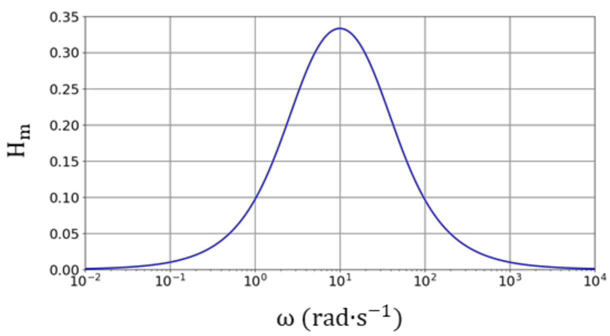
II Filtre de Wien

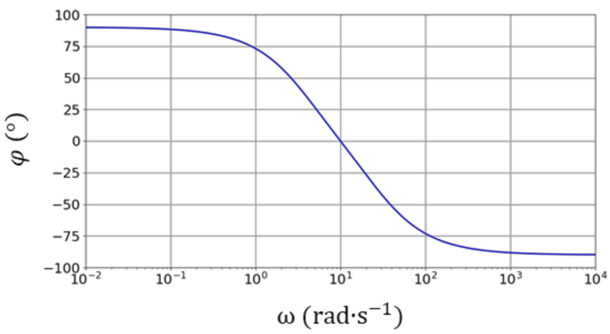
On considère le circuit ci-contre avec $e(t)=E_m\cos(\omega t)$. On note $u(t)=U_m\cos(\omega t+\varphi)$ et on pose $H_m=U_m/E_m$.



1) Déterminer les valeurs limites de $u(t)$ à basse et haute fréquences.

Les courbes représentatives de $H_m(\omega)$ et $\varphi(\omega)$ sont fournies par les figures ci-dessous.





2) Observe-t-on un phénomène de résonance en tension ? Justifier.

3) Déterminer graphiquement la pulsation de résonance, les pulsations de coupure et la bande passante du filtre.

4) Après avoir associé certaines impédances entre elles, établir l'expression de $\underline{H}=\underline{u}/\underline{e}$. La mettre sous la forme :

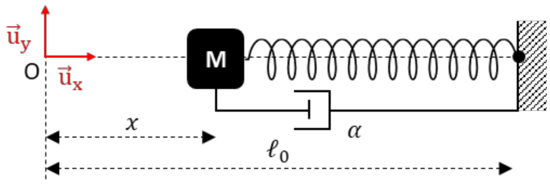
$$\underline{H}=\frac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} \qquad \text{avec} \qquad x=\frac{\omega}{\omega_0}$$

avec H_0, ω_0 et Q des constantes à exprimer en fonction (éventuellement) de R et C.

5) Déterminer graphiquement la valeur du produit RC.

III Modélisation d'un haut-parleur

On modélise la partie mécanique d'un haut-parleur comme une masse m, se déplaçant horizontalement le long d'un axe (Ox). Cette masse est reliée à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k et subit une force de frottement fluide : $\overrightarrow{f} = -\alpha \overrightarrow{v}$. Elle est par ailleurs soumise à une force $\overrightarrow{F}(t)$, imposée par le courant $i(t)$ entrant dans le haut-parleur, qui vaut : $\overrightarrow{F}(t) = Ki(t)\overrightarrow{u}_x$ où K est une constante. On travaille dans le référentiel du laboratoire $(O, \overrightarrow{u}_x, \overrightarrow{u}_y)$. On suppose que le courant est de la forme $i(t) = I_m \cos(\omega t)$.



Données

$m = 10\,\mathrm{g}$, $K = 200\,\mathrm{N\,A^{-1}}$ et $I_m = 1{,}0\,\mathrm{A}$.

1) Écrire l'équation différentielle vérifiée par $x(t)$, la position de la masse m.

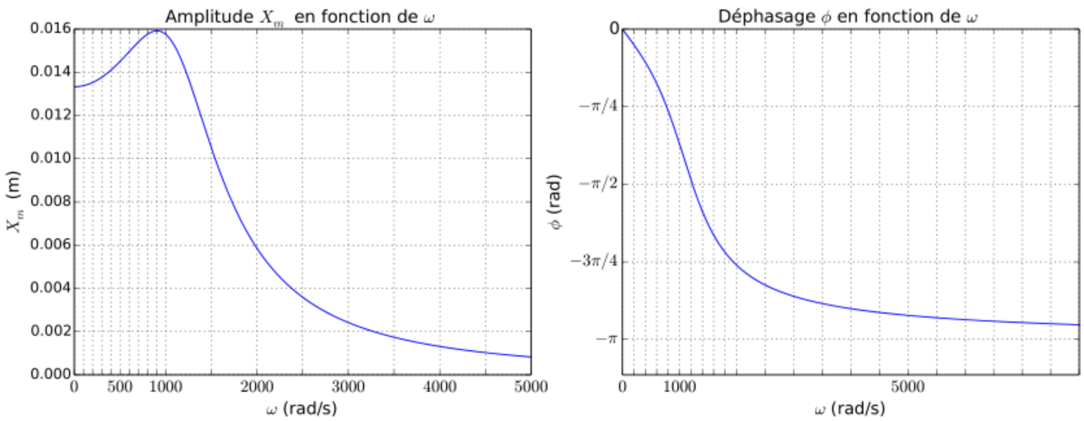
2) La mettre sous forme canonique et identifier les expressions de la pulsation propre ω_0 et du facteur de qualité Q.

3) Justifier qu'en régime permanent : $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$

4) On pose $\underline{x}(t) = \underline{X}e^{j\omega t}$. Déterminer l'expression de l'amplitude complexe $\underline{X}$.

5) Exprimer $X_m(\omega)$. Existe-t-il toujours une résonance ?

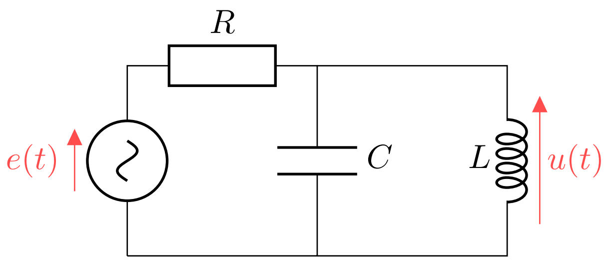
On a tracé ci-dessous les courbes de $X_m(\omega)$ et de $\phi(\omega)$. L'axe des abscisses est en échelle logarithmique.



6) Pour quelle pulsation le déplacement est-il en quadrature de phase avec la force excitatrice ? Déterminer alors graphiquement la pulsation propre ω_0.

IV Résonance d'un circuit bouchon

On considère le circuit RLC représenté ci-contre, composé d'un résistor, de résistance R, d'une bobine idéale d'inductance L, d'un condensateur idéal, de capacité C, alimenté par une source idéale de tension, de f.e.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On se place en régime sinusoïdal forcé.



1) Exprimer l'amplitude complexe $\underline{U}$ de $u(t)$ en fonction de E_0, R, L, C et ω.

2) Établir qu'il existe un phénomène de résonance pour la tension $u(t)$. Préciser la pulsation ω_0 à laquelle ce phénomène se produit et la valeur de l'amplitude réelle de $u(t)$ à cette pulsation.

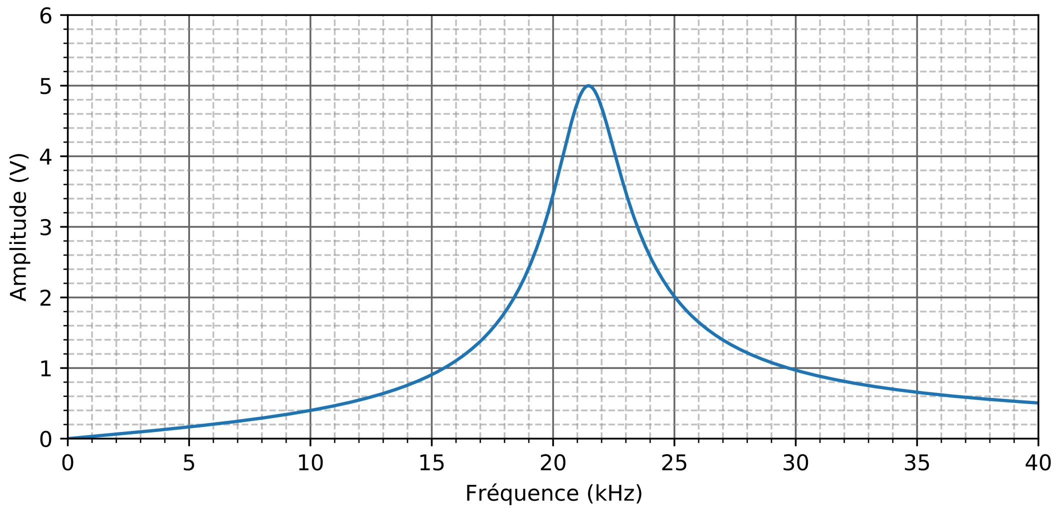
3) Mettre l'amplitude réelle U de $u(t)$ sous la forme :

$$U = \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}$$

avec Q un facteur sans dimension à exprimer en fonction de R,L et C.

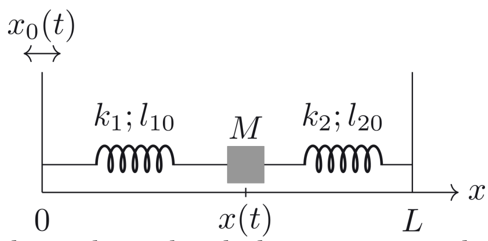
4) Exprimer la bande passante $\Delta\omega$ de cette résonance en fonction de Q et ω_0.

5) En déduire les valeurs numériques de C et E_0 à l'aide du graphe ci-dessous représentant l'amplitude réelle de $u(t)$ en fonction de la fréquence $f = \omega/2\pi$, sachant que $L = 1\,\text{mH}$ et $R = 1\,\text{k}\Omega$.



V Système à deux ressorts

Un point matériel M, de masse m, peut se déplacer sur une tige *horizontale* parallèle à l'axe Ox au sein d'un fluide visqueux qui exerce sur lui la force de frottement $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v}$ avec $\overrightarrow{v}$ le vecteur vitesse de M dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}$ du laboratoire. Les frottements entre M et l'axe horizontal sont négligeables. On repère M par son abscisse $x(t)$.



M est relié à deux parois verticales par deux ressorts de raideurs k_1 et k_2, de longueurs à vide ℓ_{10} et ℓ_{20}. Celle de droite est immobile en $x = L$, celle de gauche, d'abscisse $x_0(t)$, est animée d'un mouvement d'équation horaire $x_0(t) = X_{0m}\cos(\omega t)$. On supposera que $L = \ell_{10} + \ell_{20}$.

1) Identifier les différentes forces s'exerçant sur M.

2) Déterminer la position d'équilibre x_{eq} de M lorsque la paroi de gauche est immobile en $x = 0$.

3) On introduit $X = x - x_{\text{eq}}$. Établir l'équation différentielle vérifiée par X lorsque la paroi bouge.

Pour étudier le régime sinusoïdal forcé, on introduit les grandeurs complexes $\underline{x}_0(t) = X_{0m}\exp(\mathrm{j}\omega t)$, $\underline{X}(t) = X_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \varphi))$ et $\underline{v}(t) = V_m\exp(\mathrm{j}(\omega t + \phi))$ associées à $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t) = \dot{X}(t)$.

4) Définir les amplitudes complexes $\underline{X}_0$, $\underline{X}$ et $\underline{V}$ de $x_0(t)$, $X(t)$ et $v(t)$.

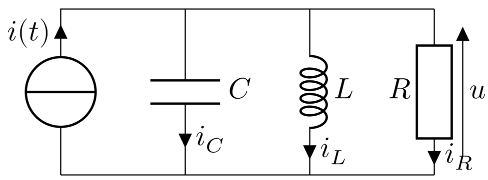
5) En exprimant ω_0, Q et α en fonction des données du problème, établir la relation :

$$\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + \mathrm{j}Q\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{X}_0$$

6) Mettre en évidence l'existence d'une résonance de vitesse.

VI Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

L'antenne d'un émetteur radio peut être modélisée par un circuit électrique équivalent composé de l'association en parallèle d'une résistance R, d'une bobine d'inductance L et d'un condensateur de capacité C.



L'antenne est alimentée par une source idéale de courant dont l'intensité caractéristique varie de manière sinusoïdale dans le temps : $i(t) = I_0 \cos(\omega t)$.

On s'intéresse à la manière dont l'amplitude de la tension $u(t)$ aux bornes de l'antenne, qui correspond au signal envoyé, dépend de ω.

1) Déterminer l'impédance complexe de l'association des dipôles R,L et C.

2) En déduire l'amplitude complexe $\underline{U}$ de la tension u en fonction de ω, I_0, R, L et C.

3) Pour quelle pulsation l'amplitude réelle U de u prend-elle sa valeur maximale notée $U_{\max}$? Conclure sur la fréquence à utiliser.

4) Représenter le graphe donnant U en fonction de la pulsation réduite $x = \omega/\omega_0$ avec $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$.

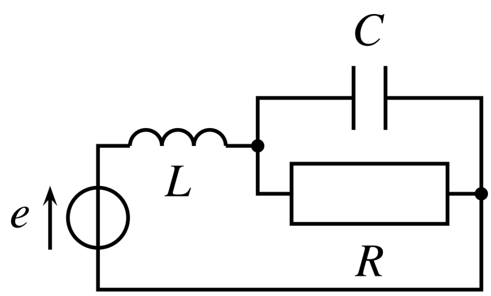
5) Exprimer la largeur de la bande passante $\Delta\omega$.

6) On se place dans le cas $R = 7\,\Omega$, $L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{H}$ et $C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,\mathrm{F}$. Calculer la valeur de l'acuité $A_c = \omega_0/\Delta\omega$ de la résonance. Interpréter sa dépendance en R.

VII Condition de résonance

Le circuit ci-contre est alimenté par une source de tension sinusoïdale de f.é.m. $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$. On s'intéresse à la tension $u(t)$ aux bornes du résistor et de la capacité montés en parallèle.

On pose : $\omega_0 = \dfrac{1}{\sqrt{LC}}$, $\xi = \dfrac{R}{2}\sqrt{\dfrac{C}{L}}$ et $x = \dfrac{\omega}{\omega_0}$.



1) Établir l'expression du signal complexe $\underline{u}$ associé à $u(t)$ en régime sinusoïdal forcé, en fonction de E_0, x et ξ.

2) Étudier l'existence éventuelle d'une résonance pour la tension $u(t)$.