Correction du TD

I Vitesse du son

Données

c est une vitesse, ρ une masse volumique et χ une grandeur relative à la pression. On nous donne $\dim \chi = \dim P^{-1}$ avec P une pression.

Résultat attendu

On cherche c en fonction de ρ et χ, soit

$$\boxed{c = \rho^\alpha \chi^\beta}$$

avec α et β à déterminer.

Outil

Une pression est une force surfacique, c'est-à-dire une force répartie sur une surface. On a donc

$$\dim P = \frac{\dim F}{\mathrm{L}^2}$$

De plus, la force de pesanteur s'exprime $F = mg$, avec g l'accélération de la pesanteur : ainsi,

$$\dim F = \dim m \cdot \dim g = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-2}$$

Application

On commence par déterminer la dimension de c. En tant que vitesse, on a

$$\dim c = \mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1}$$

On exprime ensuite les dimensions de ρ et χ. D'une part,

$$\dim \rho = \mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-3}$$

D'autre part,

$$\begin{aligned} \dim \chi &= \frac{\mathrm{L}^2}{\dim F} \\ \Leftrightarrow \dim \chi &= \frac{\mathrm{L}^{\cancel{2}}}{\mathrm{M} \cdot \cancel{\mathrm{L}} \cdot \mathrm{T}^{-2}} \\ \Leftrightarrow \dim \chi &= \mathrm{L} \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2 \end{aligned}$$

L'expression recherchée revient à résoudre

$$\mathrm{L} \cdot \mathrm{T}^{-1} = (\mathrm{M} \cdot \mathrm{L}^{-1})^\alpha (\mathrm{L} \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \mathrm{T}^2)^\beta$$

En développant, on trouve un système de 3 équations à 2 inconnues :

$$\left\{ \begin{aligned} 1 &= -3\alpha + \beta \\ -1 &= 2\beta \\ 0 &= \alpha - \beta \end{aligned} \right. \iff \left\{ \begin{aligned} \beta &= -\tfrac{1}{2} \\ \alpha &= -\tfrac{1}{2} \end{aligned} \right.$$

Ainsi, on peut exprimer c tel que

$$\boxed{c = \frac{1}{\sqrt{\rho \chi}}}$$

II Faire cuire des pâtes

1)

Donnée

Consommation électrique en kWh.

Résultat attendu

Unité associée en unités SI.

Outil

Toute énergie s'exprime en joules (J), et les **puissances** sont des **énergies par unité de temps**. Notamment pour les watts on a $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}}$.

Application

On a directement

$$1\,\mathrm{kWh} = 1 \times 10^3\,\mathrm{J{\cdot}s^{-1}{\cdot}h}$$

Avec l'évidence que $1\,\mathrm{h} = 3600\,\mathrm{s}$, finalement

$$1\,\mathrm{kWh} = 3{,}6 \times 10^6\,\mathrm{J}$$

2)

Données

Notre objet d'étude est l'eau. On a :

- $V_{\mathrm{eau}} = 1\,\mathrm{L}$;
- $T_{\mathrm{i}} = 20\,°\mathrm{C}$;
- $T_{\mathrm{f}} = 100\,°\mathrm{C}$;
- $c = 4{,}18\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}K^{-1}}$

De plus, on nous donne

- $1\,\mathrm{kWh} = 1\,€$.

Résultat attendu

On cherche à monter 1 L d'eau de 20 à 100 °C et d'en calculer le coût en euros.

Outil

On doit donc trouver le coût en énergie et le convertir en euro. On cherche pour ça une loi reliant l'énergie consommée avec les données du problème, sachant que **pour l'eau**, $1\,\mathrm{L} = 1\,\mathrm{kg}$.

Application

L'énergie à apporter Q se déduit de la dimension de la capacité thermique massique : $\dim c = \dim Q \cdot \mathrm{M}^{-1} \cdot \Theta^{-1}$. En appelant m la masse du volume d'eau, par cette analyse dimensionnelle on a

$$\boxed{Q = mc\Delta T}$$

On a donc

$$Q = 3{,}3 \times 10^5\,\mathrm{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 1\,\mathrm{kg} \\ c = 4{,}18\,\mathrm{J{\cdot}g^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ \Leftrightarrow c = 4{,}18 \times 10^3\,\mathrm{J{\cdot}kg^{-1}{\cdot}K^{-1}} \\ \Delta T = 80\,\mathrm{K} \end{cases}$$

et pour utiliser le coût en euros, on la converti en kWh :

$$\underline{Q = 9{,}3 \times 10^{-2}\,\mathrm{kWh} = 1{,}5 \times 10^{-2}\,€}$$

3)

Données

On utilise une plaque chauffante de puissance $P = 1200\,\mathrm{W}$.

Résultat attendu

On cherche la durée que cette plaque prendrait pour transférer l'énergie calculée précédemment.

Outil

Une puissance est une énergie par unité de temps, et $1\,\mathrm{W} = 1\,\mathrm{Js}^{-1}$.

Application

On en déduit

$$P = \frac{Q}{\Delta t} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 3{,}3 \times 10^5\,\mathrm{J} \\ P = 1200\,\mathrm{J}\cdot\mathrm{s}^{-1} \end{cases}$$

$$\text{d'où} \quad \boxed{\Delta t = \frac{Q}{P} = \underline{2{,}8 \times 10^2\,\mathrm{s}}}$$

III TAYLOR mieux que James BOND ?

1) On a directement $\boxed{\dim R = \mathrm{L}}$, $\boxed{\dim t = \mathrm{T}}$, $\boxed{\dim \rho = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}}$ et $\boxed{\dim E = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}}$.

2)

Données

On nous donne la formule $R = k \times E^\alpha t^\beta \rho^\gamma$ et que $\dim k = 1$.

Résultat attendu

On cherche α, β et γ tels que $R = k \times E^\alpha t^\beta \rho^\gamma$

Outils

- $\dim E = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^2\cdot\mathrm{T}^{-2}$;
- $\dim t = \mathrm{T}$;
- $\dim \rho = \mathrm{M}\cdot\mathrm{L}^{-3}$.

Application

$\dim R = L$, donc on a

$$L = \left(M\cdot L^2\cdot T^{-2}\right)^\alpha T^\beta \left(M\cdot L^{-3}\right)^\gamma$$

Soit

$$\begin{cases} 1 = 2\alpha - 3\gamma \\ 0 = -2\alpha + \beta \\ 0 = \alpha + \gamma \end{cases} \iff \begin{cases} \alpha = -\gamma \\ \alpha = \beta/2 \\ \alpha = 1/5 \end{cases}$$

Ainsi,

$$\begin{cases} \alpha = 1/5 \\ \gamma = -1/5 \\ \beta = 2/5 \end{cases}$$

Soit

$$R = K \times E^{1/5} t^{2/5} \rho^{-1/5}$$

3) On isole simplement en mettant la relation à la puissance 5 : $\boxed{E = K^{-5} R^5 t^{-2} \rho}$.

4) On fait une simple application numérique :

$$E = 1{,}7 \times 10^{15}\,\mathrm{J} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} K = 1 \\ R = 70\,\mathrm{m} \\ t = 1 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ \rho = 1{,}0\,\mathrm{kg}\cdot\mathrm{m}^{-3} \end{cases}$$

En équivalent tonne de TNT, on trouve :

$$\underline{E = 4{,}1 \times 10^2\,\mathrm{kT\ de\ TNT}}$$