Mécanique – chapitre 2

Dynamique du point

I Introduction

Dans ce chapitre nous nous intéressons à étudier les causes de la mise en mouvement d'un corps, représenté par un point matériel, et les mouvements qui en découlent.

A Inertie et quantité de mouvement

Mettre en mouvement un corps revient à en modifier la vitesse. Il est cependant plus facile de mettre en mouvement (ou arrêter le mouvement) certains corps par rapport à d'autres. Ce phénomène s'appelle l'inertie, et est proportionnel à la masse d'un corps.

Définition

La résistance d'un corps matériel de masse m à varier de vitesse est appelée **inertie**, quantifié par la **masse** et le **vecteur quantité de mouvement** du point matériel M du corps :

$$\boxed{\overrightarrow{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) = m\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}$$

avec $\overrightarrow{v}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})$ le vecteur vitesse du point M dans le référentiel $\mathcal{R}$.

Il est en effet plus difficile de déplacer une voiture à l'arrêt qu'un caddie à l'arrêt, et inversement il est plus difficile d'arrêter une voiture qu'un caddie. Dans l'analogie électromécanique, c'est l'inductance L qui s'oppose à la variation du courant quand m s'oppose à la variation de la vitesse.

B Forces fondamentales

Les causes du mouvement d'un corps sont appelées **forces**.

Définition

Les **forces** caractérisent les actions mécaniques sur un point matériel M. Ce sont des **vecteurs** et elles sont indépendantes du référentiel.

L'unité d'une force est le Newton, noté N, tel que :

$$\boxed{1\,\mathrm{N} = 1\,\mathrm{kg\,m\,s^{-2}}}$$

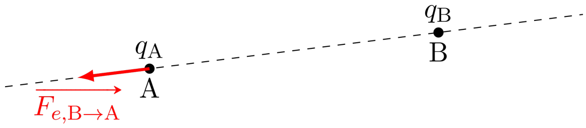
Il existe quatre de ces forces que l'on caractérisent de « fondamentales », qui permettent de classer les interactions physiques entre les systèmes :

- **L'interaction faible** : elle intervient au niveau des **nucléons**, est de *faible intensité* et de très courte portée ($\approx 10^{-18}$ m) ;
- **L'interaction forte** : responsable de la cohésion des **noyaux atomiques**, et permet aux protons de rester dans le noyau malgré la répulsion électromagnétique due à leurs charges électriques identiques. Elle est de *très forte intensité* mais sur une très courte portée ($\approx 10^{-14}$ m).
- **L'interaction électromagnétique** : elle intervient entre les **particules chargées**, avec une *forte intensité* et à longue portée. Les particules de même signe se repoussent, tandis que celles de signes opposées s'attirent, et est responsable de la **cohésion des matériaux** et de leurs propriétés mécaniques (dureté, viscosité, propriétés chimiques. . .).

Propriété

La force d'interaction électrostatique subie par une particule de charge q_A de la part d'une charge q_B est :

$$\vec{F}_{e,\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q_A q_B}{\mathrm{BA}^2}\vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{\mathrm{BA}}$$



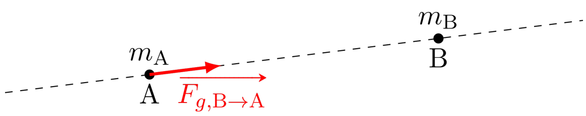
$\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de B vers A.

– **L'interaction gravitationnelle** : elle intervient entre les **particules massives** et est à *faible intensité* mais à très longue portée. La masse étant une grandeur positive, toutes les massives s'attirent entre elles. Elle prédomine à l'échelle astronomique et à l'origine du poids, et indirectement de la poussée d'ARCHIMÈDE.

Propriété

La force d'interaction gravitationnelle subie par une masse m_A de la part d'une masse m_B est :

$$\vec{F}_{g,\mathrm{B}\to\mathrm{A}} = -\mathcal{G}\frac{m_A m_B}{\mathrm{BA}^2}\vec{u} \quad \text{avec} \quad \vec{u} = \frac{\overrightarrow{\mathrm{BA}}}{\mathrm{BA}}$$



$\vec{u}$ est un vecteur unitaire dirigé de B vers A.

II Les trois lois de NEWTON (1687)

A Principe d'inertie

Première loi de NEWTON : principe d'inertie

Il existe des référentiels appelés **référentiels galiléens** dans lesquels un point matériel M soumis à **aucune action mécanique** est
- soit **au repos** ;
- soit en **translation rectiligne uniforme**.

Ainsi, tout référentiel en translation rectiligne uniforme par rapport à un référentiel galiléen est galiléen. Ils n'existent rigoureusement aucun référentiel galiléen, mais on peut en considérer certains comme *approximativement* galiléens lorsqu'on étudie le problème sur une durée assez courte. En reprenant les exemples du chapitre précédent :

– Le référentiel **héliocentrique** est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif du Soleil dans la galaxie, soit plusieurs **millions d'années** ;
– Le référentiel **géocentrique** est supposé galiléen si le mouvement étudié est plus court qu'un trajet significatif de la Terre autour du Soleil, soit **une année** ;
– Les référentiels **terrestres** sont supposés galiléens si le mouvement étudié est plus court qu'une rotation significative de la Terre, soit **une journée**.

B Principe fondamental de la dynamique

C'est une des lois les plus importantes de la physique, permettant de relier le mouvement cinématique (dérivée de la vitesse) d'un corps en fonction de ses causes (les forces extérieures).

Deuxième loi de Newton : principe fondamental de la dynamique

Dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$, la dérivée temporelle du vecteur quantité de mouvement $\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})$ d'un point matériel M de masse m est égale à la somme des forces extérieures agissant sur le système $\vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}}$$

Lorsque la masse est constante, on a $\forall t\ \ \vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) = m\vec{v}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})$, ainsi

$$\boxed{m\vec{a}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}) = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}\to\mathrm{M}}}$$

avec $\vec{a}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M})$ le vecteur accélération du point M.

Remarque

Certains mouvements ne peuvent donc pas être traités avec cette dernière formulation s'ils s'accompagnent d'une variation de masse :

- Le mouvement d'une fusée qui brûle son carburant puis abandonne ses réservoirs ;
- Le mouvement d'une goutte d'eau qui s'évapore lors de sa chute.

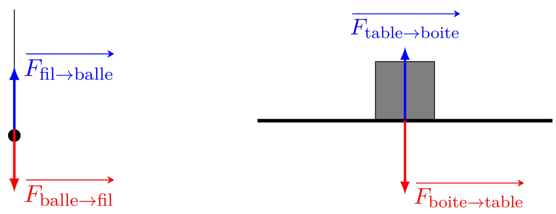
Dans ces cas-là, on utilise la première formulation.

C Loi des actions réciproques

Troisième loi de Newton : loi des actions réciproques

Pour deux points M_1 et M_2 en interaction, la force exercée par le point 1 sur le point 2 est égale à l'opposé de la force exercée par le point 2 sur le point 1 :

$$\boxed{\vec{F}_{1\to2} = -\vec{F}_{2\to1}}$$



III Ensembles de points

Aucun système n'est rigoureusement ponctuel, mais sous certaines conditions il est possible d'étudier le mouvement d'un corps en tant que point matériel de manière rigoureuse. Établissons ce comportement.

A Centre d'inertie

Définition

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité** G d'un ensemble de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\boxed{\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \frac{1}{\sum_i m_i}\sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

Le centre d'inertie correspond au centre d'équilibre gravitationnel d'un ensemble de point. Ainsi, pour mettre une règle en équilibre horizontalement il faut la reposer en son milieu. Un marteau, en revanche, a son centre d'inertie bien plus proche de la masse que du milieu.

Il existe une autre formulation à cette définition. En effet,

$$\begin{aligned}\sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{OG}} &= \sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}\\ \Leftrightarrow \vec{0} &= \sum_i m_i\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}\right)\end{aligned}$$

Or, comme $\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}-\overrightarrow{\mathrm{OG}}=\overrightarrow{\mathrm{GO}}+\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}=\overrightarrow{\mathrm{GM_i}}$, on pourra également retenir :

$$\boxed{\sum_i m_i\overrightarrow{\mathrm{GM}_i}=\vec{0}}$$

Exemple

Soient 2 masses m placées en A et en B.

On a : $m\overrightarrow{\mathrm{GA}}+m\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{0}\Leftrightarrow\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{0}$ car $m\neq 0$

Or, $\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, donc

$$\begin{aligned}2\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \vec{0}\\ \Leftrightarrow 2\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \Leftrightarrow &\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{2}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\end{aligned}$$

Avec $3m$ en A et m en B :

Cette fois, $3m\overrightarrow{\mathrm{GA}}+m\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{0}\Leftrightarrow 3\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}=\vec{0}$ car $m\neq 0$

Or, $3\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GB}}=3\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}}$, donc

$$\begin{aligned}4\overrightarrow{\mathrm{GA}}+\overrightarrow{\mathrm{AB}} &= \vec{0}\\ \Leftrightarrow 4\overrightarrow{\mathrm{AG}} &= \overrightarrow{\mathrm{AB}}\\ \Leftrightarrow &\boxed{\overrightarrow{\mathrm{AG}}=\frac{1}{4}\overrightarrow{\mathrm{AB}}}\end{aligned}$$

Cette définition peut être étendue aux solides qui peuvent être vus comme un ensemble infini de points infiniment proches. Dans ce cas, la somme discrète devient une intégrale.

B Quantité de mouvement d'un ensemble de points

On souhaiterait pouvoir étudier un ensemble de points comme le mouvement d'un point unique, comme le centre d'inertie. Pour cela, il faut étudier la quantité de mouvement d'un ensemble de points.

Définition

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_i m_i \vec{v}(\mathrm{M}_i)}$$

Pour que les choses soient simples, il faudrait donc que $\vec{p}(\mathcal{S})$ soit relié au centre d'inertie. Or,

$$\vec{v}(\mathrm{G}) = \frac{\mathrm{dOG}}{\mathrm{d}t} = \frac{1}{\sum_i m_i} \underbrace{\sum_i m_i \frac{\mathrm{dOM}_i}{\mathrm{d}t}}_{\vec{p}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\mathrm{tot}} \vec{v}(\mathrm{G})}$$

La quantité de mouvement d'un ensemble de points est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} : tout se passe comme si la masse était concentrée en G.

C Théorème de la résultante cinétique

Si on peut étudier la cinématique d'un corps par l'étude de son centre de gravité, comment les forces interviennent-elles sur cet ensemble de points ? Considérons pour simplifier un système de deux points M_1 et M_2 de masses m_1 et m_2 en mouvement dans un référentiel galiléen. On peut appliquer le principe fondamental de la dynamique à chacun d'entre eux :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathrm{M}_1)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_1} + \vec{F}_{\mathrm{ext} \to \mathrm{M}_1}$$

avec deux types de forces : les forces intérieures du système, ici celles exercées par M_2 sur M_1, et les forces extérieures, c'est-à-dire toutes les autres. En faisant de même pour M_2 :

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathrm{M}_2)}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2} + \vec{F}_{\mathrm{ext} \to \mathrm{M}_2}$$

Ainsi, avec la définition de la quantité de mouvement d'un ensemble de points,

$$\frac{\mathrm{d}\vec{p}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\vec{F}_{\mathrm{M}_1 \to \mathrm{M}_2} + \vec{F}_{\mathrm{M}_2 \to \mathrm{M}_1}}_{=\vec{0} \text{ d'après la 3ème loi}} + \vec{F}_{\mathrm{ext} \to \mathrm{M}_1} + \vec{F}_{\mathrm{ext} \to \mathrm{M}_2}$$

Théorème de la résultante cinétique

Le principe fondamental de la dynamique pour un point matériel s'applique à un ensemble de point en prenant pour point matériel le centre d'inertie G affecté de la masse totale m_{tot} du système, en ne considérant que les forces extérieurs s'appliquant à l'ensemble :

$$\boxed{m_{\mathrm{tot}} \frac{\mathrm{d}\vec{v}(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \sum \vec{F}_{\mathrm{ext}}}$$

Le mouvement du centre de gravité n'est affecté que par les forces extérieures au système. Ainsi, dans la suite, on étudiera le mouvement du centre de gravité, de masse m_{tot}, soumis aux forces extérieures au système.

IV Méthode générale de résolution en mécanique

1. **De quoi parle-t-on ?** Quel est l'objet en mouvement, dans quel référentiel étudie-t-on le mouvement ?
2. **Schéma.** Faire un schéma du problème dans une situation quelconque.
3. **Modélisation.** Donner le repère, les origines spatiale et temporelle, les représenter sur le schéma et *définir les notations* nécessaires.
4. **Bilan des forces.** Faire le bilan des forces, les exprimer dans le repère choisi et les représenter sur le schéma.
5. **Deuxième loi de Newton.** Appliquer le PFD au système.
6. **Équations scalaires.** Donner les trois équations $\ddot{x}$, $\ddot{y}$ et $\ddot{z}$.
7. **Répondre aux questions.** Le plus souvent, obtenir les équations horaires $x(t)$, $y(t)$ et $z(t)$.

Transition

Avec ces outils, voyons maintenant quelques forces et situations usuelles que l'on rencontrera en dynamique.

V Le poids

A Définition

Définition

Dû à l'attraction gravitationnelle de la Terre, un corps de masse m à sa surface subit une force que l'on appelle le **poids**, telle que :

$$\boxed{\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}}$$

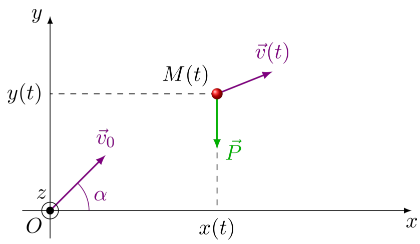
avec $\overrightarrow{g}$ le vecteur **accélération de la pesanteur**, de norme $g = \|\overrightarrow{g}\| = 9{,}81\,\mathrm{m\,s^{-2}}$ et dirigé verticalement vers le sol. Par définition de l'interaction gravitationnelle, on a

$$\overrightarrow{g} = -\mathcal{G}\frac{m_T}{{R_T}^2}\overrightarrow{u_z}$$

avec m_T et R_T la masse et le rayon de la Terre, $\mathcal{G}$ la constante gravitationnelle, et $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant.

B La chute libre

Déf. Un système en chute libre pure ne subit que l'action de son poids.



1. **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une balle lancée avec un vecteur vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ dans le référentiel du laboratoire.
2. **Schéma**.
3. **Modélisation**.
   - On suit la trajectoire du centre d'inertie de la balle par le point matériel M de masse m.
   - Repère : y verticale ascendantes, x direction du lancer, z tel que $(\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z})$ soit une base orthonormée directe (BOND).

- Instant initial : moment où la balle est lancée.
- Origine spatiale : position de la balle à l'instant initial ($\overrightarrow{\mathrm{OM}}(0) = \vec{0}$).
- On note α l'angle du vecteur $\vec{v_0}$ avec l'axe horizontal et v_0 sa norme, tel que

$$\vec{v}(0) = v_0 \cos\alpha \vec{u_x} + v_0 \sin\alpha \vec{u_y}$$

$\boxed{4}$ **Bilan des forces.** Ici, seul le poids s'applique :

$$\textbf{Poids } \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u_y}$$

$\boxed{5}$ **PFD.**

$$m\vec{a} = \vec{P}$$

$\boxed{6}$ **Équations scalaires.** On projette sur les axes :

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = 0 \\ m\ddot{x}(t) = -mg \\ m\ddot{x}(t) = 0 \end{cases}$$

On s'intéresse au mouvement plan donc pas à la coordonnée z. Aussi, la masse n'étant pas nulle, elle se simplifie dans les équations et on a

$$\begin{cases} \ddot{x}(t) = 0 \\ \ddot{y}(t) = -g \end{cases}$$

On remarque que l'accélération ne dépend pas de la masse.

> Lors d'une chute libre sans frottements, la masse du corps en chute n'intervient pas. Cela signifie en particulier que, dans le vide, tous les corps chutent à la même vitesse.[a]
>
> a. https://www.youtube.com/watch?v=E43-CfukEgs

$\boxed{7}$ **Répondre aux questions.** On intègre l'accélération pour obtenir la vitesse :

$$\begin{cases} \dot{x}(t) = K_1 \\ \dot{y}(t) = -gt + K_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} \dot{x}(0) = v_0 \cos\alpha = K_1 \\ \dot{y}(0) = v_0 \sin\alpha = K_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} \dot{x}(t) = v_0 \cos\alpha \\ \dot{y}(t) = -gt + v_0 \sin\alpha \end{cases}}$$

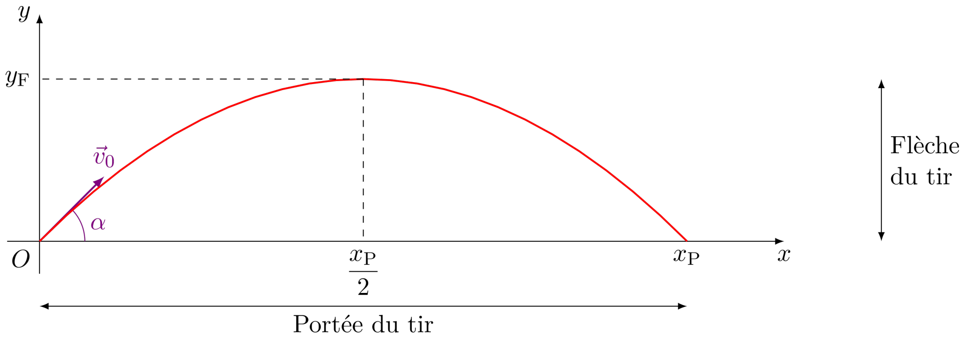
De même pour les équations horaires du mouvement :

$$\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha + C_1 \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha + C_2 \end{cases} \quad \text{or} \quad \begin{cases} x(0) = 0 = C_1 \\ y(0) = 0 = C_2 \end{cases} \Rightarrow \boxed{\begin{cases} x(t) = v_0 t \cos\alpha \\ y(t) = -\dfrac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin\alpha \end{cases}}$$

Si on cherche la trajectoire, il s'agit alors d'obtenir la courbe $y(x)$ décrite dans le plan xy, c'est-à-dire éliminer le temps t. À partir de l'équation horaire sur $\vec{u_x}$, on a

$$\begin{aligned} t &= \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ \Rightarrow y(x) &= -\frac{1}{2}g\frac{x^2}{{v_0}^2 \cos^2\alpha} + v_0 \sin\alpha \frac{x}{v_0 \cos\alpha} \\ \Leftrightarrow & \boxed{y(x) = -\frac{g}{2{v_0}^2 \cos^2\alpha}x^2 + x\tan\alpha} \end{aligned}$$

C'est une parabole :



On peut en définir deux caractéristiques principales, la **porté** et la **flèche**.

Définition : portée d'un tir

La **portée** d'un tir est la distance **horizontale** entre l'origine du tir et l'endroit où retombe le tir.

Autrement dit, on trouve x_P tel que :

$$y(x_P) = 0$$
$$\Leftrightarrow x_P \left(-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha} x_P + \tan\alpha \right) = 0$$

On cherche $x_P \neq 0$ (origine du tir), d'où

$$-\frac{g}{2{v_0}^2\cos^2\alpha} x_P + \tan\alpha = 0$$
$$\Leftrightarrow x_P = \frac{2{v_0}^2\cos^2\alpha}{g}\tan\alpha = \frac{2{v_0}^2\cos^{\cancel{2}}\alpha}{g}\frac{\sin\alpha}{\cancel{\cos\alpha}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{x_P = \frac{{v_0}^2}{g} \times 2\sin\alpha\cos\alpha = \frac{{v_0}^2}{g}\sin(2\alpha)}$$

Ainsi, <u>pour un tir à altitude nulle</u>, la portée est maximale si $\sin(2\alpha) = 1$, soit $\boxed{\alpha = \pi/4}$.

Définition : flèche d'un tir

La **flèche** d'un tir est la **hauteur maximale** atteinte par le projectile.

On trouve y_F quand la vitesse **verticale** s'annule, $\dot{y} = 0$; ainsi

$$-gt_F + v_0\sin\alpha = 0 \Leftrightarrow t_F = \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$
$$\Rightarrow y_F = y(t_F) = -\frac{1}{2}g\left(\frac{v_0\sin\alpha}{g}\right)^2 + v_0\sin\alpha \times \frac{v_0\sin\alpha}{g}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{y_F = \frac{{v_0}^2}{2g}\sin^2\alpha}$$

Le maximum se trouve en $\alpha = \pi/2$.

Exercice

Pour quel angle le temps de vol est-il le plus grand ?

Le temps de vol correspond au temps pour lequel le projectile retombe au sol, c'est-à-dire $t(x_P)$.

Ainsi, $$t_{\max} = t(x_P) \Leftrightarrow t_{\max} = \frac{\frac{{v_0}^{\cancel{2}}}{g} \times 2\sin\alpha\cancel{\cos\alpha}}{\cancel{v_0}\cancel{\cos\alpha}} \Leftrightarrow \boxed{t_{\max} = 2\frac{v_0}{g}\sin\alpha}$$

Le temps de vol est donc maximal pour $\alpha = \pi/2$.

VI Poussée d'ARCHIMÈDE

Définition

Lorsqu'un objet est dans un fluide, il subit une force nommée **poussée d'ARCHIMÈDE** et égale à l'opposé du poids du fluide déplacé. Elle est parfois notée $\vec{\Pi}$ ou $\vec{F}_A$, et on a :

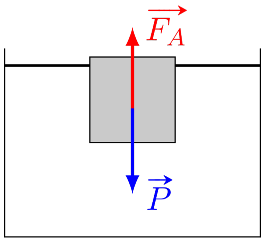
$$\boxed{\vec{F}_A = -\rho_{\text{fluide}} V_{\text{immergé}}\, \vec{g}}$$

avec ρ_{fluide} la masse volumique du fluide et $V_{\text{immergé}}$ le volume de l'objet qui est dans le fluide.

Exercice

Quelle est la proportion immergée d'un glaçon ? On donne $\rho_{\text{eau}} = 1{,}00 \times 10^3\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$ et $\rho_{\text{glace}} = 9{,}17 \times 10^2\,\mathrm{kg\,m^{-3}}$.

On suppose un glaçon immobile partiellement plongé dans de l'eau à la surface de la Terre.



Ce glaçon subit son poids et la poussée d'ARCHIMÈDE, et a une accélération nulle car immobile, donc avec le PFD :

$$\vec{0} = \vec{F}_A + \vec{P}$$

Or,

$$\vec{P} = m\vec{g} = \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}}\, \vec{g} \quad \text{et} \quad \vec{F}_A = -\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}}\, \vec{g}$$

D'où

$$-\rho_{\text{eau}} V_{\text{immergé}} \cancel{\vec{g}} + \rho_{\text{glace}} V_{\text{glaçon}} \cancel{\vec{g}}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{V_{\text{immergé}}}{V_{\text{glaçon}}} = \frac{\rho_{\text{glace}}}{\rho_{\text{eau}}} = 91{,}7\,\%}$$

On observe également qu'un objet **plus dense** que le fluide aura une proportion immergée > 1 : il ne sera donc pas à l'équilibre mécanique et coulera.

VII Frottements fluides

A Force de frottement fluide

Définition

Un objet en mouvement dans un fluide subit une force de frottements dite fluide $\vec{F}_f$ qui est une force de freinage, donc opposée à la direction de la vitesse $\vec{v}$. Selon la norme de la vitesse, on a :

– Pour les **faibles vitesses**, elle est **proportionnelle** à v :

$$\boxed{\vec{F}_f = -\alpha \vec{v}}$$

– Pour les **vitesses élevées**, elle est **quadratique** avec v :

$$\boxed{\vec{F}_f = -\beta v \vec{v}}$$

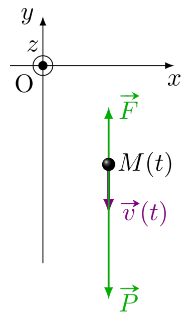
Remarque

En pratique, on verra souvent

$$\beta = \frac{1}{2}\rho_{\text{fluide}} S c_x$$

avec ρ_{fluide} la masse volumique du fluide, S la surface frontale (« l'ombre » que fait l'objet sur un flux), et c_x un coefficient sans dimension dépendant surtout de la forme de l'objet.

B Chute libre sans vitesse initiale avec frottements linéaires



1 **De quoi parle-t-on ?** Le mouvement d'une bille lâchée dans une éprouvette d'huile dans le référentiel de la salle de TP.

2 **Schéma**.

3 **Modélisation.**
- On repère la bille par la position de son centre d'inertie M.
- Repère : y est la verticale ascendante, x et z sont deux vecteurs horizontaux tels que $\overrightarrow{u_x}, \overrightarrow{u_y}, \overrightarrow{u_z}$ soit une base orthonormale directe (BOND).
- Instant initial : le moment où la bille entre dans le glycérol.
- Origine : la position de la bille à son entrée dans le glycérol.
- On néglige pour simplifier la poussée d'**Archimède**.
- On note m sa masse, α le coefficient de frottement et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur.

4 **Bilan des forces.**

Poids	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg\overrightarrow{u_y}$
Frottements fluide	$\vec{F}_f = -\alpha\vec{v} = -\alpha\dot{y}\overrightarrow{u_y}$

5 **PFD.**

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

6 **Équations scalaires**.

$$\begin{cases} m\ddot{x}(t) = -\alpha\dot{x} \\ m\ddot{y}(t) = -\alpha\dot{y} - mg \\ m\ddot{z}(t) = -\alpha\dot{z} \end{cases}$$

7 **Répondre aux questions.** On obtient ici trois équations différentielles sur la vitesse ($v_x = \dot{x}$, $v_y = \dot{y}$ et $v_z = \dot{z}$), mais en absence de vitesse initiale sur v_x et v_z, il n'y aura pas de mouvement sur ces coordonnées : on s'intéresse donc à l'équation différentielle sur v_y que l'on appelle simplement v, avec $\tau = m/\alpha$:

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\alpha}{m}v = -g} \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{v}{\tau} = -g$$

Une résolution complète demande de discerner solution homogène et particulière puis d'utiliser les conditions initiales, pour trouver

$$v(t) = g\tau\left(\mathrm{e}^{-t/\tau} - 1\right)$$

On peut développer une autre approche générique pour obtenir des grandeurs typiques d'un système à partir de l'équation différentielle qui régit son fonctionnement : l'**adimensionnement**.

On définit $v^* = v/V$, $t^* = t/T$ avec V et T des constantes à définir. On peut donc réécrire

$$\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\alpha}{m}Vv^* = -g$$

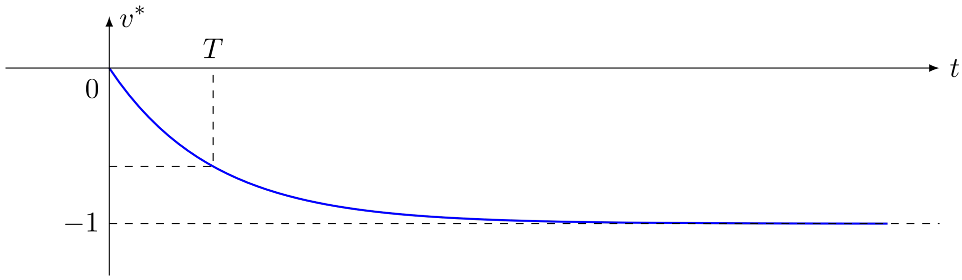
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\alpha T}{m} v^* = -\frac{gT}{V}$$

On choisit alors T et V de façon à écrire

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + v^* = -1}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{T = \frac{m}{\alpha}} \quad \text{et} \quad \boxed{V = gT = \frac{gm}{\alpha}}$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle adimensionnée donne T grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse, et V est la vitesse atteinte en régime permanent.



L'écriture sous forme adimensionnée permet de ramener la résolution de l'équation à un problème uniquement mathématique, débarrassé des constantes physiques et permettant de voir rapidement le fonctionnement d'un système même quand on ne sait pas résoudre l'équation.

C Chute libre sans vitesse initiale avec frottements quadratiques

Pour une chute libre dans l'air, la vitesse d'un corps va pouvoir être suffisamment élevée pour que les frottements soient quadratiques en la vitesse. On choisit ici $\overrightarrow{u_y}$ vers le bas, tel que $v = \dot{y} = 0$. Ainsi, une chute totalement verticale donne

$$\overrightarrow{F}_f = -\beta \dot{y}^2 \overrightarrow{u_y}$$

Toujours en négligeant la poussée d'Archimède, on a

$$\frac{\mathrm{d}v}{\mathrm{d}t} + \frac{\beta}{m} v^2 = g$$

La résolutions analytique exacte de cette équation sort du cadre du programme ; on peut en revanche l'adimensionner pour trouver ses grandeurs typiques.

On définit $v^* = v/V$, $t^* = t/T$ avec V et T des constantes à définir. On peut donc réécrire

$$\frac{V}{T}\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m} V^2 (v^*)^2 = g$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + \frac{\beta}{m} VT (v^*)^2 = \frac{gT}{V}$$

On choisit alors T et V de façon à écrire

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}v^*}{\mathrm{d}t^*} + (v^*)^2 = 1}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{T = \sqrt{\frac{m}{\beta g}}} \quad \text{et} \quad \boxed{V = gT = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$$

Dans ces conditions, l'équation différentielle adimensionnée donne T grandeur typique du temps d'évolution de la vitesse, et V est la vitesse atteinte en régime permanent.

Avec pour un-e humain-e en chute libre sans parachute, on a $\beta \approx 0{,}25\,\mathrm{kg\,m^{-1}}$, soit

$$\boxed{v_{\text{lim}} = 60\,\mathrm{m\,s^{-1}} \approx 200\,\mathrm{km\,h^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{T \approx 6\,\mathrm{s}}$$

VIII Force de frottements solides

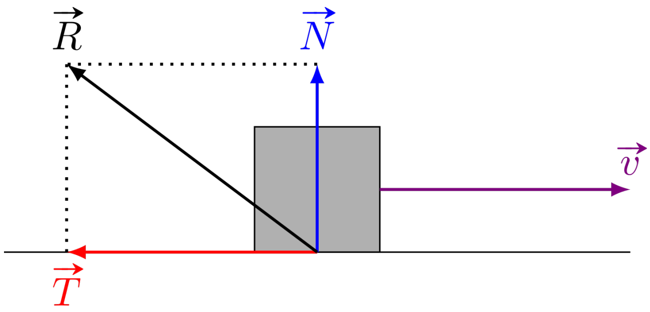
A Réaction d'un support

Définition : réaction d'un support

La force exercée par un support sur un objet posé à sa surface est appelée **réaction** et est notée $\overrightarrow{R}$. Elle se décompose en deux forces :

$$\overrightarrow{R} = \overrightarrow{N} + \overrightarrow{T} \quad \text{ou} \quad \overrightarrow{R} = \overrightarrow{R}_N + \overrightarrow{R}_T$$

- $\overrightarrow{N}$ (ou $\overrightarrow{R}_N$) est la force de réaction **normale** ($\perp$) au support ;
- $\overrightarrow{T}$ (ou $\overrightarrow{R}_T$) est la force de réaction **tangentielle** ($/\!/$) au support, **opposée** à la vitesse.



La **condition de support** est $\left\|\overrightarrow{N}\right\| > 0$.

B Lois de Coulomb

Les relations entre les **normes** des forces $\overrightarrow{N}$ et $\overrightarrow{T}$ sont appelées **lois du frottement de Coulomb**.

Lois du frottement de Coulomb

- Un solide **glissant** sur une surface donne

$$\left\|\overrightarrow{T}\right\| = f\left\|\overrightarrow{N}\right\|$$

- Un solide **ne glissant pas** sur une surface donne

$$\left\|\overrightarrow{T}\right\| < f\left\|\overrightarrow{N}\right\|$$

avec f le coefficient de frottements solides. C'est un nombre sans dimension, souvent inférieur à 1 et qui dépend de l'**état** de la surface (humide, graissée) mais **pas de son aire**.

De manière plus particulière, on définit f_d le coefficient de frottements dynamiques (glissement) et f_s le coefficient de frottement statique (pas glissement), avec $f_d < f_s$; dans ce cas, $f = f_d$.

Remarque

L'absence de frottements solides implique $f = 0$, donc $T = 0$, mais **la force normale n'est jamais nulle**.

IX Tension d'un fil

Définition

Un point matériel M accroché à un fil tendu subit de la part de ce fil une force appelée **tension du fil** et notée $\vec{T}$ telle que

$$\boxed{\vec{T} = \left\|\vec{T}\right\| \vec{u}_{\mathrm{M}\to\mathrm{fil}}}$$

avec $\vec{u}_{\mathrm{M}\to\mathrm{fil}}$ un vecteur unitaire dirigé du point M vers le fil et $\left\|\vec{T}\right\|$ la norme de la tension du fil. La **condition de tension** du fil est $\left\|\vec{T}\right\| > 0$.

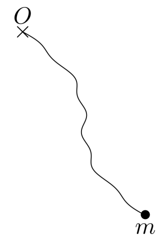


FIGURE 2.1 – Fil détendu : pas de force.

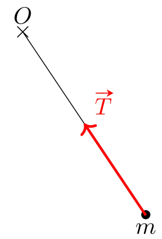


FIGURE 2.2 – Fil tendu : force vers O.

X Force de rappel d'un ressort

A Force de rappel élastique

Définition : force de rappel d'un ressort

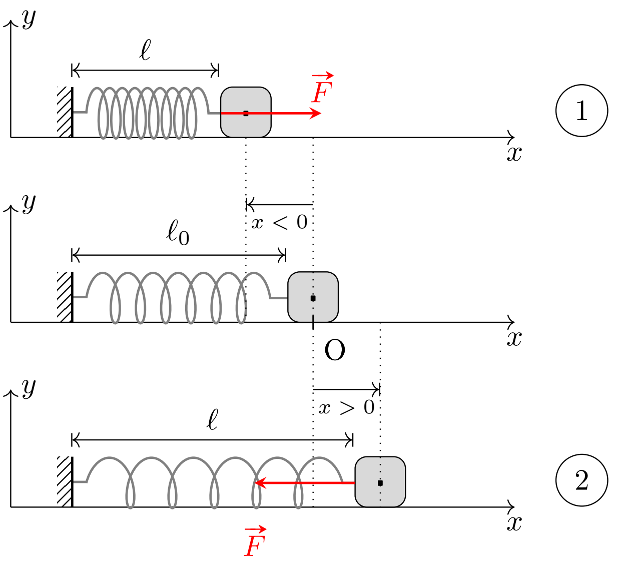
Soit le système masse-ressort horizontal représenté ci-contre. Le ressort se déforme sous l'effet d'une contrainte en stockant l'énergie donnée, qu'il libère en reprenant sa forme quand la contrainte s'arrête. On définit la force de rappel du ressort par :

$$\boxed{\vec{F}_{\text{rappel}} = -k(\ell - \ell_0)\vec{u}_x}$$

avec

- $k > 0$ la **constante de raideur** en $\mathrm{N\,m^{-1}}$ ($[\vec{F}] = [k][\ell]$) ;
- ℓ_0 sa **longueur à vide** ;
- $\vec{u}_x$ un vecteur unitaire ($\|\vec{u}_x\| = 1$) dirigé selon l'axe x

Elle est aussi appelée **force de HOOKE**.

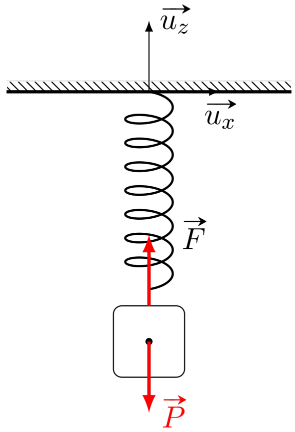


Si $\ell > \ell_0$, on a bien une force dirigée selon $-\vec{u}_x$, (situation 2), sinon dirigée selon $+\vec{u}_x$.

Attention

Le signe de la force donnée dépend du schéma : de façon générale, il faut regarder le sens dans lequel s'exerce la force si on étire le ressort ($(\ell - \ell_0) > 0$) et placer le signe en conséquence.

B Position d'équilibre verticale



Un ressort horizontal sans action mécanique aura une longueur d'équilibre égale à sa longueur à vide. En revanche, un ressort vertical se voit étiré dû au poids : comment s'exprime cette longueur d'équilibre ?

On étudie le système {masse} accrochée à un ressort et représentée par le point M de masse m dans le référentiel galiléen $\mathcal{R}(O,\overrightarrow{u_x},\overrightarrow{u_z})$ avec $\overrightarrow{u_z}$ vertical ascendant et O à la jonction ressort-support.

Bilan des forces :

Poids	$\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\overrightarrow{u_z}$
Force Hooke	$k(\ell - \ell_0)\overrightarrow{u_z}$

À l'équilibre, $\overrightarrow{a} = \overrightarrow{0}$ donc

$$0 = -mg + k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \Leftrightarrow k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mg$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k}}$$

Ainsi, on retrouve bien
- Plus la force exercée sur le ressort est élevée, plus le ressort est étiré ;
- Plus le ressort est raide ($k \nearrow$), moins il est étiré.

C Oscillateur harmonique mécanique