MPSI3 – 22 novembre 2024 – Devoir surveillé 3

Correction du DS

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont *autorisées*

Au programme

Oscillateurs harmonique et amortis (mécanique et électricité), transformation et équilibre chimique.

Sommaire

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇ φ : loi physique fondamentale brisée.

Attention

Au moins un exercice de transformation de la matière et un exercice d'oscillateurs doivent être traités !

/31 E1 Synthèse de l'ammoniac *(CCP TSI 2013)*

L'ammoniac $NH_3(g)$ est un intermédiaire important dans l'industrie chimique qui l'utilise comme précurseur pour la production d'engrais, d'explosifs et de polymères.

En 2010, sa production mondiale était d'environ 130 millions de tonnes. La production de telles quantités de ce gaz a été rendue possible par l'apparition du procédé HaberBosch qui permet la synthèse de l'ammoniac à partir du diazote, présent en abondance dans l'atmosphère, et du dihydrogène, obtenu par reformage du méthane à la vapeur d'eau, selon la réaction :

$$N_{2(g)} + 3\,H_{2(g)} = 2\,NH_{3(g)} \qquad K^\circ(723\,\text{K}) = 2{,}8 \times 10^{-5}$$

Cette transformation chimique étant lente, on utilise un catalyseur à base de fer pour l'accélérer.

Les réactifs de la synthèse, diazote et dihydrogène, sont introduits en proportions stœchiométriques dans le réacteur qui est maintenu, tout au long de la synthèse, à une pression totale $P = 300P^\circ$ et à une température T de 723 K.

On notera n_0 la quantité de matière initiale de diazote introduit dans le réacteur.

/5 **1** Réaliser un tableau d'avancement pour les lignes initiales et intermédiaires. Laissez la ligne équilibre vide pour la compléter après.

Réponse

On dresse le tableau d'avancement :

Équation	1+1	$N_{2(g)}$	+ $3H_{2(g)}$ =	$2NH_{3(g)}$	$n_{\text{tot,gaz}}$ 1	
Initial	$\xi = 0$	n_0	$3n_0$	0	$4n_0$	1
Interm.	ξ	$n_0 - \xi$	$3n_0 - 3\xi$	2ξ	$4n_0 - 2\xi$	1
Équilib.	ξ	$n_0(1-\rho)$	$3n_0(1-\rho)$	$2\rho n_0$	$2n_0(2-\rho)$	+1 Q2

◇

/4 **2** Rappeler la définition du rendement. Exprimer le rendement à l'équilibre ρ de la synthèse en fonction de n_0 et ξ_{eq}. En déduire les expressions des quantités de matière en fonction de n_0 et ρ en complétant le tableau précédent.

Réponse

On cherche $\xi_{\max}$: les réactifs étant introduits dans les proportions stœchiométriques, on trouve $\xi_{\max}$ à partir de l'un des deux réactifs :

$$n_0 - \xi_{\max} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi_{\max} \overset{1}{=} n_0}$$

Ainsi,

$$\rho \overset{1}{=} \frac{\xi_{\text{eq}}}{\xi_{\max}} \Leftrightarrow \boxed{\rho \overset{1}{=} \frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}}$$

d'où la dernière ligne du tableau précédent.

◇

/5 **3** Donner la définition du quotient réactionnel pour cette équation. Relier alors la constante d'équilibre K° aux pressions partielles à l'équilibre des différents constituants du système et à la pression standard P°, d'abord, puis aux quantités de matière à l'équilibre des différents constituants du système, à la quantité de matière totale à l'équilibre n_{tot}, à la pression totale P et à la pression standard P°.

Réponse

$$Q_r \overset{1}{=} \frac{a(NH_3)^2}{a(N_2)a(H_2)^3}$$

$$K^\circ \overset{1}{=} Q_{r,\text{eq}}$$

$$\Rightarrow K^\circ \overset{1}{=} \frac{a(NH_3)^2_{\text{eq}}}{a(N_2)_{\text{eq}}a(H_2)^3_{\text{eq}}}$$

$$a(X_{(g)}) \overset{1}{=} \frac{P_X}{P^\circ}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K^\circ \overset{1}{=} \frac{P(NH_3)^2_{\text{eq}}(P^\circ)^2}{P(N_2)_{\text{eq}}P(H_2)^3_{\text{eq}}}}$$

Loi de Dalton :

$$P(NH_3)_{\text{eq}} \overset{1}{=} \frac{n(NH_3)_{\text{eq}}}{n_{\text{tot}}} \times P$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K^\circ \overset{1}{=} \frac{n(NH_3)^2_{\text{eq}}n^2_{\text{tot}}}{n(N_2)_{\text{eq}}n(H_2)^3_{\text{eq}}} \times \left(\frac{P^\circ}{P}\right)^2}$$

◇

/2 4 En déduire alors la relation entre $K°$, ρ, P et $P°$.

Réponse

On injecte les expressions des quantités de matière à l'équilibre :

$$K° \overset{1}{=} \frac{(2n_0\rho)^2\,(2n_0(2-\rho))^2}{n_0(1-\rho)\times(3n_0(1-\rho))^3} \times \left(\frac{P°}{P}\right)^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K° \overset{1}{=} \frac{16\rho^2(2-\rho)^2}{27(1-\rho)^4} \times \left(\frac{P°}{P}\right)^2}$$

/10 5 Montrer que ρ est solution d'un polynôme de degré 2, de la forme

$$C\rho^2 - 2C\rho + C - 4 = 0$$

avec C une constante à exprimer en fonction de $K°$ **uniquement**. Donner alors l'expression analytique de ρ en fonction de C. Application numérique.

Réponse

$$K° = \frac{16\rho^2(2-\rho)^2}{27(1-\rho)^4} \times \left(\frac{P°}{P}\right)^2$$

$\sqrt{(\cdot)}$

$$\Leftrightarrow \sqrt{K°} \overset{1}{=} \frac{4\rho(2-\rho)}{3\sqrt{3}(1-\rho)^2}\,\underbrace{\frac{P°}{P}}_{=1/300}$$

On rassemble

$$\Leftrightarrow 300\sqrt{K°}\cdot 3\sqrt{3}(1-\rho)^2 \overset{1}{=} 4\rho(2-\rho)$$

On développe

$$\Leftrightarrow 900\sqrt{3K°}(1-2\rho+\rho^2) \overset{1}{=} 8\rho - 4\rho^2$$

On factorise

$$\Leftrightarrow \rho^2(900\sqrt{3K°}+4) - 2\rho(900\sqrt{3K°}+4) + 900\sqrt{3K°} \overset{1}{=} 0$$

On identifie

$$\Leftrightarrow \boxed{C\rho^2 - 2C\rho + C - 4 = 0} \quad \text{avec} \quad \boxed{C \overset{1}{=} 900\sqrt{3K°}+4}$$

$$\Rightarrow \Delta = 4C^2 - 4C(C-4)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\Delta \overset{1}{=} 16C}$$

soit $\rho_\pm \overset{1}{=} \dfrac{2C \pm 4\sqrt{C}}{2C}$

$$\Leftrightarrow \boxed{\rho_\pm \overset{1}{=} 1 \pm \frac{2}{\sqrt{C}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 900\sqrt{3K°}+4 \\ K° = 2{,}8\times10^{-5} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{\rho_+ = 1{,}57}$ $\overset{1}{\text{ou}}$ $\underline{\rho_- = 0{,}43}$

Le rendement ne pouvant être supérieur à 1, on obtient alors $\boxed{\rho = 0{,}43}$ 1

/3 6 Partant d'un état d'équilibre, on diminue la pression totale P à température constante. Comment évolue le rendement ρ ?

Réponse

En diminuant P, on augmente le quotient réactionnel 1 par rapport à une situation d'équilibre où $Q = K°$. La température étant constante, la constante d'équilibre reste la même 1. Donc $Q > K°$, donc la réaction évolue dans le sens indirect ce qui a pour effet de diminuer le rendement. 1

/38 E2 Réaction du dibromure de cuivre

On considère la dismutation du dibromure de cuivre selon l'équation :

$$2\,CuBr_{2(s)} = 2\,CuBr_{(s)} + Br_{2(g)}$$

Cet équilibre se déroule dans un réacteur de volume constant $V = 1{,}0\,L$. On mesure la pression à l'équilibre dans le réacteur, P_{eq}, en fonction de la température T. Dans les cas d'un excès de $CuBr_2$, les résultats sont compilés dans le tableau suivant :

Tableau 3.1 – Pression d'équilibre de la dismutation du dibromure de cuivre

T (K)	473	488	503	523
P_{eq} (mbar)	52,6	54,2	140,8	321,1

/4 1 Exprimer puis calculer la valeur de la constante d'équilibre à la température $T = 200\,°\text{C}$.

Réponse

Il est indiqué que les mesures sont effectuées avec un excès de $CuBr_2$, qui est donc encore présent à la fin de la réaction. Il s'agit donc d'un état d'équilibre, et on donc appliquer la loi d'action des masses :

$$K° \overset{1}{=} Q_{r,\text{eq}}$$
$$\Leftrightarrow K° \overset{1}{=} \frac{a_{\text{BR}_2,\text{eq}} \cdot a^2_{\text{CuBr,eq}}}{a_{\text{CuBr}_2,\text{eq}}}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{K° \overset{1}{=} \frac{p_{\text{Br}_2,\text{eq}}}{p°}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} p_{\text{Br}_2,\text{eq}} = 52{,}6 \times 10^{-3}\,\text{bar} \\ p° = 1\,\text{bar} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{K° \overset{1}{=} 52{,}6 \times 10^{-3}}$

◇

On introduit une quantité de matière $n_1 = 2{,}00 \times 10^{-3}$ mol de $CuBr_2$ dans le réacteur. La température est supposée constante à 200 °C.

/13 2 Déterminer la composition et la pression à l'état final. Comment s'appelle cet état final ?

Réponse

On suppose un état d'équilibre. La pression finale vaut alors 52,6 mbar d'après le tableau de valeurs. On peut en déduire la quantité de dibrome formé, et donc l'avancement grâce à un tableau :

Équation 1+1		$2CuBr_{2(s)}$ =	$2CuBr_{(s)}$ +	$Br_{2(g)}$	
Initial	$\xi = 0$	n_1	0	0	1
Final	ξ_f	$n_1 - 2\xi_f$	$2\xi_f$	ξ_f	1
Final (mmol)	$\xi_f = \xi_{\max}$	0	2,00	1,00	1

Ainsi, on trouve

$$n_{\text{Br}_2,eq} = \boxed{\xi_{\text{eq}} \overset{1}{=} \frac{P_{\text{eq}}V}{RT}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} P_{\text{eq}} = 52{,}6 \times 10^2\,\text{Pa} \\ V = 1{,}0 \times 10^{-3}\,\text{m}^3 \\ R = 8{,}314\,\text{J·K}^{-1}\text{·mol}^{-1} \\ T = 473\,\text{K} \end{cases}$$

A.N. : $\underline{\xi_{\text{eq}} \overset{1}{=} 1{,}34\,\text{mmol}}$

Or, on trouve facilement l'avancement maximal :

$$n_1 - 2\xi_{\max} = 0 \Leftrightarrow \boxed{\xi_{\max} \overset{1}{=} \frac{n_1}{2}} \Rightarrow \underline{\xi_{\max} \overset{1}{=} 1{,}00\,\text{mmol}} < \xi_{\text{eq}}$$

Ainsi, $\boxed{\xi_f \overset{1}{=} \xi_{\max}}$ **rupture d'équilibre** 1

On complète alors la dernière ligne du tableau. Quant à la pression, on la calcule avec la quantité de dibrome à l'état final, $n_{\text{Br}_2,f} = 1{,}00$ mmol :

$$\boxed{P_f \overset{1}{=} \frac{n_{\text{Br}_2,f}RT}{V}} \Rightarrow \underline{P_f \overset{1}{=} 3{,}9 \times 10^{-2}\,\text{bar}}$$

◇

3 Préciser l'évolution du système précédent pour les trois modifications suivantes :

/2 a – Ajout de $CuBr_2$ à T et P constantes.

Réponse

Le système était en rupture d'équilibre. L'ajout de réactif va donc entraîner l'évolution en sens direct 1, et selon la quantité ajoutée le système peut aboutir à une nouvelle rupture d'équilibre ou à un état d'équilibre. 1

◇

/1 b – Ajout de CuBr à T et P constantes.

Réponse

Le système est en rupture d'équilibre car le réactif est limitant. Ajouter un produit ne change rien. 1

◇

/1 c – Ajout de Br_2 à T et P constantes.

Réponse

Le système est en rupture d'équilibre car le réactif est limitant. Ajouter un produit ne change rien. 1

◇

On considère maintenant une quantité de matière initiale de $CuBr_2$ $n_2 = 1{,}00 \times 10^{-2}\,\mathrm{mol}$ dans les mêmes conditions.

/6 4 Déterminer la composition et la pression à l'état final. Comment s'appelle cet état final ?

Réponse

De la même manière que précédemment, on a ξ_{eq} inchangé 1, seulement on trouve $\xi_{\max} \overset{1}{=} 5{,}00\,\mathrm{mmol} > \xi_{\mathrm{eq}}$; ainsi $\xi_f = \xi_{\mathrm{eq}}$ 1, on atteint donc un **état d'équilibre** 1 et on peut compléter le tableau d'avancement :

Équation		$2CuBr_{2(s)}$	$=$ $2CuBr_{(s)}$	$+$ $Br_{2(g)}$
Initial	$\xi = 0$	n_2	0	0
Final (mmol)	$\xi_f = \xi_{\mathrm{eq}}$	7,32	2,68	1,34

1

On a alors $$\boxed{P_f = P_{\mathrm{eq}}} \Rightarrow \underline{P_f \overset{1}{=} 52{,}6\,\mathrm{mbar}}$$

◇

5 Préciser l'évolution du système précédent pour les trois modifications suivantes :

/1 a – Ajout de $CuBr_2$ à T et P constantes.

Réponse

Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant solide ne modifie pas le quotient de réaction. Il n'y a donc pas d'évolution. 1

◇

/1 b – Ajout de CuBr à T et P constantes.

Réponse

Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant solide ne modifie pas le quotient de réaction. Il n'y a donc pas d'évolution. 1

◇

/2 c – Ajout de Br_2 à T et P constantes.

Réponse

Le système est à l'équilibre, et l'ajout d'un constituant gazeux augmente le quotient de réaction 1. Celui-ci devient donc plus grand que la constante d'équilibre, et il y a alors **évolution en sens indirect**. 1

◇

/7 6 On souhaite maintenant déterminer l'influence du volume du réacteur sur la pression mesurée à l'état final P_f, à température constante et à partir d'un état initial contenant n_0 moles de $CuBr_2$.

Tracer le graphique $P_f = f(V)$ et préciser les coordonnées du point remarquable.

Réponse

Pour un excès de $CuBr_2$, l'état final sera un état d'équilibre donc la pression sera constante, avec

$$P_f = K^\circ P^\circ \qquad 1$$

En revanche, si $CuBr_2$ est en défaut, il y a rupture d'équilibre, et on aura

$$n_{Br_2,f} = \xi_{\max} \overset{1}{=} \frac{n_0}{2} \Rightarrow P_f \overset{1}{=} \frac{n_0 RT}{2V}$$

La limite de défaut/excès de $CuBr_2$ est trouvée lorsque la quantité introduite permet tout juste d'atteindre l'état d'équilibre tout en ayant donc la pression maximale ; soit V_{lim} le volume limite, on a alors

$$\frac{n_0 RT}{2V_{\mathrm{lim}}} \overset{1}{=} K^\circ P^\circ \Leftrightarrow \boxed{V_{\mathrm{lim}} \overset{1}{=} \frac{n_0 RT}{2K^\circ P^\circ}}$$

D'où le graphique :

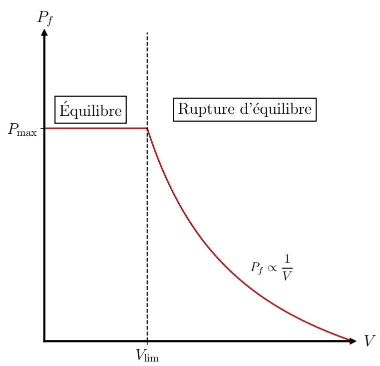


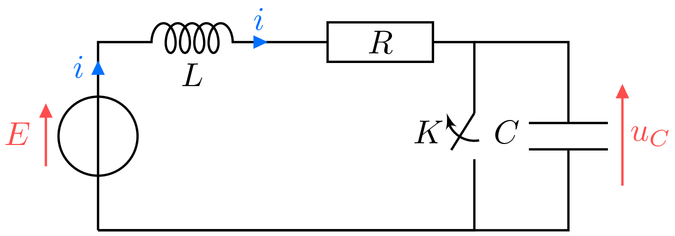
Figure 3.1 – Tracé $P_f = f(V)$. 1 + 1

◇

/29 E3 RLC échelon montant

Indiquer la ou les bonnes réponses en justifiant tout votre raisonnement.

On considère un circuit RLC série, alimenté par une source idéale de tension de force électromotrice E constante comme schématisé ci-contre. Le condensateur peut être court-circuité lorsque l'interrupteur K est fermé. On note $i(t)$ l'intensité du courant qui traverse la bobine et $u_C(t)$ la tension aux bornes du condensateur C.



Le condensateur est mis en court-circuit par un interrupteur K depuis une durée suffisamment longue, pour que le régime permanent soit établi. À l'instant pris comme origine des temps, on ouvre l'interrupteur K.

/5 **1** Que valent l'intensité $i\,(0^+)$ et la tension $u_C(0^+)$ à l'instant $t = 0^+$, succédant immédiatement à l'ouverture de l'interrupteur K ? Justifier tout votre raisonnement.

A $i\,(0^+) = 0$ B $i\,(0^+) = \frac{E}{R}$ C $u_C\,(0^+) = 0$ D $u_C\,(0^+) = E$

Réponse

Intéressons-nous d'abord au circuit à $t < 0$. L'interrupteur est alors fermé si bien que u_C est une tension aux bornes d'un fil donc

$$u_C\left(t = 0^-\right) = 0 \text{ (1)}$$

De plus, le condensateur assure la continuité de la tension à ses bornes, donc

$$u_C\left(t = 0^+\right) = u_C\left(t = 0^-\right) = 0 \text{ (1)}$$

Par ailleurs en régime permanent constant, on sait que la bobine est équivalente à un interrupteur fermé (un fil) (1). Si bien que le circuit est alors équivalent à uniquement la résistance R en série avec la source idéale de fem E. Ainsi avec une loi des mailles et loi d'Ohm :

$$i\left(t = 0^-\right) = E/R \text{ (1)}$$

De plus, la bobine assure la continuité de l'intensité qui la traverse, donc

$$i\left(t = 0^+\right) = i\left(t = 0^-\right) = \frac{E}{R} \text{ (1)}$$

Réponses B et C.

/6 **2** Établir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$ pour $t > 0$. On la mettra sous forme canonique en introduisant la pulsation propre ω_0 et le facteur de qualité Q :

$$\frac{\mathrm{d}^2 u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{\omega_0}{Q}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u_C(t) = \alpha$$

Exprimer ω_0 et Q.

A $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ B $\omega_0 = \frac{1}{LC}$ C $Q = R\sqrt{\frac{L}{C}}$ D $Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$

Réponse

On se place après l'ouverture de l'interrupteur ($t > 0$). On a alors un circuit RLC série pour lequel on cherche à établir l'équation différentielle du second ordre sur la variable $u_C(t)$. Appliquons la loi des mailles en notant u_R et u_L les tensions respectivement aux bornes du résistor et de la bobine.

$$u_L + u_R = u_C = E$$
$$\Leftrightarrow L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + Ri + u_C = E$$
$$\Leftrightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + RC\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + u_C = E$$
$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u_C}{\mathrm{d}t^2} + \frac{R}{L}\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{LC}u_C = \frac{E}{LC}$$

$u_L = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t}$ et $u_R = Ri$

$i = C\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}$

forme canonique

Par identification, on a alors :

$$\omega_0{}^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \boxed{\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}} \quad \text{et} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{R}{L}$$

$$\Leftrightarrow Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{L}{R}\frac{1}{\sqrt{LC}} \Leftrightarrow \boxed{Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}}$$

Réponses $\boxed{\text{A}}$ et $\boxed{\text{D}}$.

/1 $\boxed{3}$ Exprimer α.

$\boxed{\text{A}}$ $\alpha = 0$ $\boxed{\text{B}}$ $\alpha = E$ $\boxed{\text{C}}$ $\alpha = QE$ $\boxed{\text{D}}$ $\alpha = \omega_0{}^2 E$

Réponse

En poursuivant l'identification : $\boxed{\alpha = \frac{E}{LC} = \omega_0{}^2 E}$ Réponse $\boxed{\text{D}}$

/1 $\boxed{4}$ Que peut-on affirmer concernant le facteur de qualité ?

$\boxed{\text{A}}$ La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 2$.

$\boxed{\text{B}}$ La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque $Q = 1/2$.

$\boxed{\text{C}}$ Plus la valeur de l'inductance est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

$\boxed{\text{D}}$ Plus la valeur de la capacité est élevée, plus le facteur de qualité est faible.

Réponse

La durée du régime transitoire est la plus brève lorsque le système a une évolution pseudo-périodique avec un très faible dépassement, soit pour un $Q > 1/2$ (précisément, c'est pour $Q = 0{,}72$). Aucune des deux premières réponses A ou B n'est juste. Notons en revanche que pour $Q = 1/2$, on a le transitoire le plus bref sans dépassement. Par ailleurs, le facteur de qualité s'écrivant

$$Q = \frac{1}{R}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Une inductance élevée induira un facteur de qualité grand tandis qu'une capacité élevée conduira à un facteur de qualité petit. 1 Réponse $\boxed{\text{D}}$.

Dans la suite, on considère que la bobine possède une inductance $L = 50\,\mathrm{mH}$ et que la capacité du condensateur vaut $C = 20\,\mu\mathrm{F}$. On souhaite obtenir un facteur de qualité $Q = 10$.

/2 $\boxed{5}$ Calculer la valeur à donner à la résistance R du résistor.

$\boxed{\text{A}}$ $R = 0{,}002\,\Omega$ $\boxed{\text{B}}$ $R = 0{,}02\,\Omega$ $\boxed{\text{C}}$ $R = 5\,\Omega$ $\boxed{\text{D}}$ $R = 500\,\Omega$

Réponse

On cherche la valeur de R pour obtenir $Q = 10$ à L et C fixé. On isole alors R dans l'expression de Q :

$$\boxed{R = \frac{1}{Q}\sqrt{\frac{L}{C}}} \Rightarrow \underline{R = 5\,\Omega}$$

Réponse $\boxed{\text{C}}$.

On admet alors que la tension aux bornes du condensateur évolue selon :

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)] + u_{C,p}$$

/6 $\boxed{6}$ Exprimer τ en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $\tau = \frac{\omega_0}{2Q}$ $\boxed{\text{B}}$ $\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$ $\boxed{\text{C}}$ $\tau = \frac{\omega_0}{Q}$ $\boxed{\text{D}}$ $\tau = \frac{Q}{\omega_0}$

Réponse

Le polynôme caractéristique associé à l'équation différentielle canonique s'écrit :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + {\omega_0}^2 \overset{1}{=} 0$$

$$\Rightarrow \Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4{\omega_0}^2 \overset{1}{=} {\omega_0}^2 \left(\frac{1}{Q^2} - 4\right) \overset{1}{<} 0$$

car $Q = 10 > \dfrac{1}{2}$

$$\Rightarrow r_\pm \overset{1}{=} -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$$

Que l'on identifie en cohérence avec $u_C(t)$:

$$r_\pm \overset{1}{=} -\frac{1}{\tau} \pm j\Omega \Leftrightarrow \boxed{\tau \overset{1}{=} \frac{2Q}{\omega_0}}$$

Réponse $\boxed{\text{B}}$.

/1 $\boxed{7}$ Exprimer la pseudo-pulsation Ω en fonction de ω_0 et Q. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $\Omega = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}$ $\boxed{\text{B}}$ $\Omega = \omega_0\sqrt{\frac{1}{4Q^2} - 1}$ $\boxed{\text{C}}$ $\Omega = \omega_0\left(1 + \frac{1}{4Q^2}\right)^{1/2}$ $\boxed{\text{D}}$ $\Omega = \frac{\omega_0}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}$

Réponse

De même, par identification, $\Omega = \dfrac{\sqrt{-\Delta}}{2} \overset{1}{=} \omega_0\sqrt{1 - \dfrac{1}{4Q^2}}$ Réponse $\boxed{\text{A}}$.

/1 $\boxed{8}$ Exprimer $u_{C,p}$ en fonction de E. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $u_{C,p} = E$ $\boxed{\text{B}}$ $u_{C,p} = 0$ $\boxed{\text{C}}$ $u_{C,p} = {\omega_0}^2 E$ $\boxed{\text{D}}$ $u_{C,p} = 2E$

Réponse

$u_{C,p}$ est la solution particulière de l'équation différentielle. On peut la chercher sous la forme d'une constante. Soit, en l'injectant dans l'équation différentielle :

$$\underbrace{\frac{\mathrm{d}^2 u_{C,p}}{\mathrm{d}t^2}}_{=0} + \frac{\omega_0}{Q}\underbrace{\frac{\mathrm{d}u_{C,p}}{\mathrm{d}t}}_{=0} + {\omega_0}^2 u_{C,p}(t) = {\omega_0}^2 E \Leftrightarrow \boxed{u_{C,p} \overset{1}{=} E}$$

Réponse $\boxed{\text{A}}$

/1 $\boxed{9}$ Exprimer A. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $A = E$ $\boxed{\text{B}}$ $A = -E$ $\boxed{\text{C}}$ $A = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $A = E/2$

Réponse

Exprimons la constante d'intégration A à l'aide des conditions initiales déterminées à la question $\boxed{1}$:

$$u_C(t = 0^+) = 0 = \exp(-0/\tau)\left[A\cos(0) + B\sin(0)\right] + E \Leftrightarrow \boxed{A \overset{1}{=} -E}$$

Réponse $\boxed{\text{B}}$.

/5 $\boxed{10}$ Exprimer B. Justifier tout votre raisonnement.

$\boxed{\text{A}}$ $B = \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)$ $\boxed{\text{B}}$ $B = \frac{E}{RC\omega_a}$ $\boxed{\text{C}}$ $B = 0$ $\boxed{\text{D}}$ $B = \frac{E}{\tau\omega_a}$

Réponse

D'après $\boxed{1}$, on a aussi $i(t = 0^+) = E/R$. Or, la loi courant tension aux bornes du condensateur permet d'écrire que :

$$\left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} = \frac{i(t = 0^+)}{C} \overset{1}{=} \frac{E}{RC}$$

Or,
$$\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t} \overset{1}{=} -\frac{1}{\tau}\mathrm{e}^{-\frac{t}{\tau}}\left[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)\right] + \Omega \times \mathrm{e}^{\frac{t}{\tau}}\left[-A\sin(\Omega t) + B\cos(\Omega t)\right]$$

$$\Rightarrow \left.\frac{\mathrm{d}u_C}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+} \overset{1}{=} -\frac{A}{\tau} + \Omega B = \frac{E}{RC}$$

$$\Leftrightarrow \Omega B = \frac{E}{RC} + \frac{A}{\tau}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{B \overset{1}{=} \frac{E}{\Omega}\left(\frac{1}{RC} - \frac{1}{\tau}\right)}$$

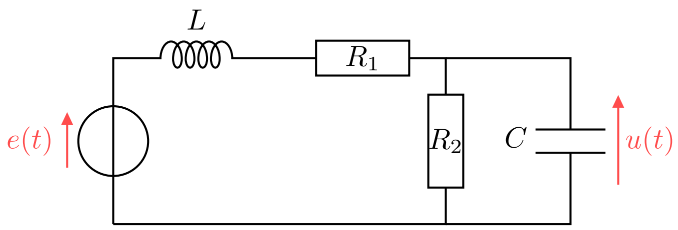
$A = -E$
Réponse A

De plus, $\tau = \dfrac{2Q}{\omega_0} = \dfrac{2}{R}\sqrt{\dfrac{L}{R}} \times \sqrt{LC} \Leftrightarrow \boxed{\tau \overset{1}{=} \dfrac{2L}{R}}$

Donc τ ne s'exprime pas en fonction de R et C uniquement. Ainsi, la réponse B est fausse. De même, RC ne peut pas s'exprimer simplement en fonction de τ donc la réponse D est fausse.

/60 P1 Décrément logarithmique électrique

On étudie la réponse $u(t)$ à un échelon de tension $e(t)$ tel que $\begin{cases} e(t<0)=0 \\ e(t\geq 0)=E \end{cases}$ dans le circuit ci-dessous.



/4 **1** Déterminer la valeur u_∞ vers laquelle tend $u(t)$ lorsque $t \longrightarrow \infty$.

Réponse

R_2 et C sont en parallèle, donc $u(t)$ est à la fois la tension aux bornes de C et de R_2.

De plus, à $t \longrightarrow \infty$, la bobine se comporte comme un fil et le condensateur comme un interrupteur ouvert. Le circuit est donc équivalent à un diviseur de tension ① avec R_1 et R_2 en série alimentées par la tension $e(t)$, et on a donc

$$\boxed{u(\infty) \overset{①}{=} u_\infty = \frac{R_2}{R_1+R_2}E}$$

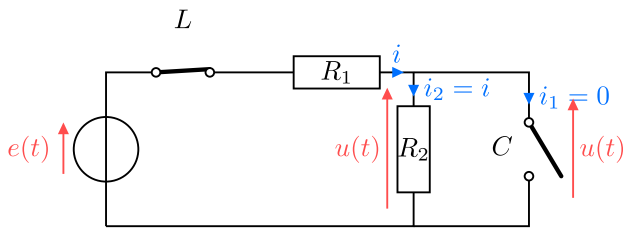


Figure 3.2 – Schéma équivalent. ①+①

/8 **2** Montrer que $\dfrac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2 u = {\omega_0}^2 u_\infty$. Exprimer λ et ω_0 en fonction de L, C, R_1 et R_2.

Réponse

Avec une loi des mailles et les relations courant-tension :

$$u + L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} + R_1 i \overset{①}{=} E \quad ①$$

On combine :

$$\Rightarrow u + L\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}\right) + R_1C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1\frac{u}{R_2} = E$$

$$\Leftrightarrow u + LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \frac{L}{R_2}\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + R_1C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{R_1}{R_2}u = E$$

$$\Leftrightarrow LC\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{L}{R_2} + R_1C\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1}{R_2} + \cancel{1}_{\frac{R_2}{R_2}}\right)u \overset{①}{=} E$$

Avec la loi des nœuds :

$$i \overset{①}{=} i_1 + i_2 \overset{①}{=} C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{u}{R_2}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + \left(\frac{1}{R_2C} + \frac{R_1}{L}\right)\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} = \frac{E}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u}{LC} \overset{①}{=} \left(\frac{R_1+R_2}{R_2}\right)\frac{u_\infty}{LC}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}^2u}{\mathrm{d}t^2} + 2\lambda\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + {\omega_0}^2u = {\omega_0}^2u_\infty}$$

avec $\boxed{\omega_0 \overset{①}{=} \sqrt{\dfrac{1}{LC}\left(\dfrac{R_1+R_2}{R_2}\right)}}$ et $\boxed{\lambda \overset{①}{=} \dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{R_2C} + \dfrac{R_1}{L}\right)}$

/10 **3** En supposant un régime pseudo-périodique, exprimer la forme générale de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ, de la pulsation et de deux constantes d'intégration qu'on ne cherche pas à déterminer pour le moment.

Réponse

Pour la solution de l'équation homogène, on injecte $u_h(t) = Ke^{rt}$ ① la forme générique pour obtenir l'équation caractéristique. On en cherche alors les racines grâce au discriminant Δ :

$$r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 \overset{①}{=} 0 \Rightarrow \Delta \overset{①}{=} 4(\lambda^2 - {\omega_0}^2)$$

On sait que $\Delta < 0$ (1) puisqu'on observe des oscillations amorties. On aura donc

$$r_\pm \overset{1}{=} -\frac{\cancel{2}\lambda}{\cancel{2}} \pm \mathrm{j}\frac{1}{\cancel{2}}\sqrt{\cancel{4}({\omega_0}^2-\lambda^2)} \Leftrightarrow \boxed{r_\pm \overset{1}{=} -\lambda \pm \mathrm{j}\Omega} \quad \text{avec} \quad \boxed{\Omega \overset{1}{=} \sqrt{{\omega_0}^2-\lambda^2}}$$

La solution particulière étant visiblement $u_p = u_\infty$ (1), on aura la forme générale

$$u(t) \overset{1}{=} u_h(t) + up \Leftrightarrow \boxed{u(t) \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\cos\Omega t + B\sin\Omega t\right) + u_\infty}$$

/9 4 Justifier entièrement les conditions initiales. Deux schémas sont attendus.

Réponse

En $t = 0^-$

Or, avant l'échelon montant, le générateur est éteint depuis longtemps. Ainsi, le condensateur est déchargé, et $\boxed{u(0^-) = 0}$ (1), et aucun courant ne circule dans le circuit, donc $\boxed{i(0^-) = 0}$ (1).

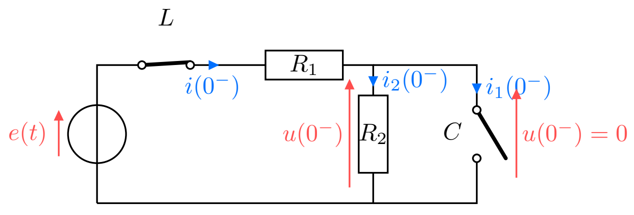


Figure 3.3 – Schéma en $t = 0^-$. (1)

En $t = 0^+$

Or, par continuité de l'intensité traversant une bobine et de la tension aux bornes d'un condensateur (1), lors de l'échelon de tension on garde $\boxed{i(0^+) = i(0^-) = 0}$ et $\boxed{u(0^+) = u(0^-) = 0}$ (1).

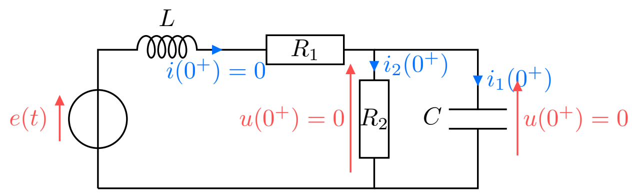


Figure 3.4 – Schéma en $t = 0^+$. (1)

Ainsi, avec une loi des nœuds, on a $i(0^+) = i_1(0^+) + i_2(0^+)$ (1). Seulement, comme $i_2(0^+)$ est le courant passant dans la résistance R_2 de tension $u(0^+) = 0$, on a $i_2(0^+) = u(0^+)/R = 0$ (1), soit avec la loi des nœuds, $\boxed{i_1(0^+) = 0 \overset{1}{=} C\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_{0^+}}$.

/3 5 Déterminer alors l'expression complète de $u(t)$ en fonction de u_∞, λ et Ω.

Réponse

Première condition

$$u(0) = 0 \Leftrightarrow A + u_\infty = 0 \Leftrightarrow \boxed{A \overset{1}{=} -u_\infty}$$

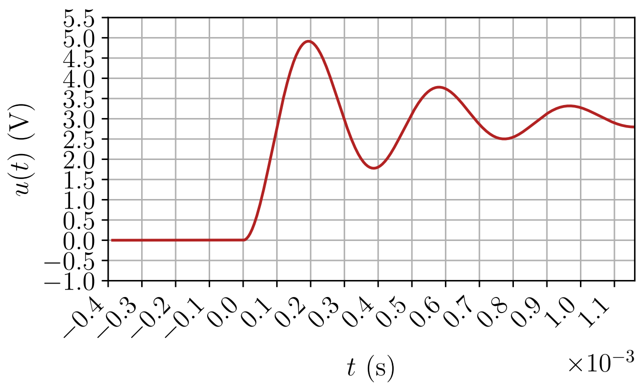
Seconde condition

$$\left.\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}\right|_0 = 0 \Leftrightarrow -\lambda A + B\Omega = 0 \Leftrightarrow \boxed{B \overset{1}{=} \frac{-\lambda u_\infty}{\Omega}}$$

Finalement,

$$\boxed{u(t) \overset{1}{=} u_\infty\left(1 - \mathrm{e}^{-\lambda t}\left(\cos(\Omega t) + \frac{\lambda}{\Omega}\sin(\Omega t)\right)\right)}$$

On observe à l'oscilloscope la courbe $u(t)$ ci-contre.



/4 [6] Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique de la pseudo-période T.

Réponse

On lit l'abscisse du premier et du troisième maximum, qu'on appelle t_1 et t_3 respectivement. On a alors

$$2T = t_3 - t_1 \Leftrightarrow \boxed{T \overset{①}{=} \frac{t_3 - t_1}{2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} t_3 \overset{①}{=} 0{,}95 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \\ t_1 \overset{①}{=} 0{,}19 \times 10^{-3}\,\mathrm{s} \end{cases} \quad \text{A.N.} : \underline{T \overset{①}{=} 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s}}$$

◇

/4 [7] Déterminer, en détaillant vos points de mesures, la valeur numérique du décrément logarithmique

$$\boxed{\delta = \frac{1}{n}\ln\left(\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty}\right)}$$

Réponse

On calcule δ avec deux pseudo-périodes ici. On lit la valeur de tension aux premier et troisième pics, à t_1 et t_3 respectivement, ainsi que ce qui semble être la valeur limite u_∞ :

$$\boxed{\delta = \frac{1}{2}\ln\left(\frac{u(t_1) - u_\infty}{u(t_3) - u_\infty}\right)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(t_1) \overset{①}{=} 4{,}9\,\mathrm{V} \\ u(t_3) \overset{①}{=} 3{,}3\,\mathrm{V} \\ u_\infty \overset{①}{=} 3{,}0\,\mathrm{V} \end{cases} \quad \text{A.N.} : \underline{\delta \overset{①}{=} 0{,}92}$$

◇

/5 [8] Déterminer la relation entre δ, λ et T. En déduire la valeur numérique de λ.

Réponse

Avec l'expression de $u(t)$, on peut développer le dénominateur de δ :

$$u(t+nT) - u_\infty \overset{①}{=} \mathrm{e}^{-\lambda nT} \times \underbrace{\mathrm{e}^{-\lambda t}\left(A\underbrace{\cos(\Omega t + n\Omega t)}_{=\cos \Omega t} + B\underbrace{\sin(\Omega t + n\Omega t)}_{=\sin \Omega t}\right)}_{u(t)-u_\infty ①}$$

Ainsi,

$$\frac{u(t) - u_\infty}{u(t+nT) - u_\infty} \overset{①}{=} \mathrm{e}^{+\lambda nT} \Rightarrow \delta = \frac{1}{n}\ln\left(\mathrm{e}^{\lambda nT}\right)$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta = \lambda T \Leftrightarrow \lambda \overset{①}{=} \frac{\delta}{T}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \delta = 0{,}92 \\ T = 3{,}8 \times 10^{-4}\,\mathrm{s} \end{cases} \quad \text{A.N.} : \underline{\lambda \overset{①}{=} 2{,}3 \times 10^{3}\,\mathrm{s}^{-1}}$$

◇

/2 [9] Sachant que $R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega}$, $R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega}$ et $L = 500\,\mathrm{mH}$, déterminer la valeur de C.

Réponse

On sait que λ s'exprime en fonction de C, on l'isole donc de son expression :

$$2\lambda = \frac{1}{R_2 C} + \frac{R_1}{L} \Leftrightarrow R_2 C = \frac{1}{2\lambda - \frac{R_1}{L}}$$

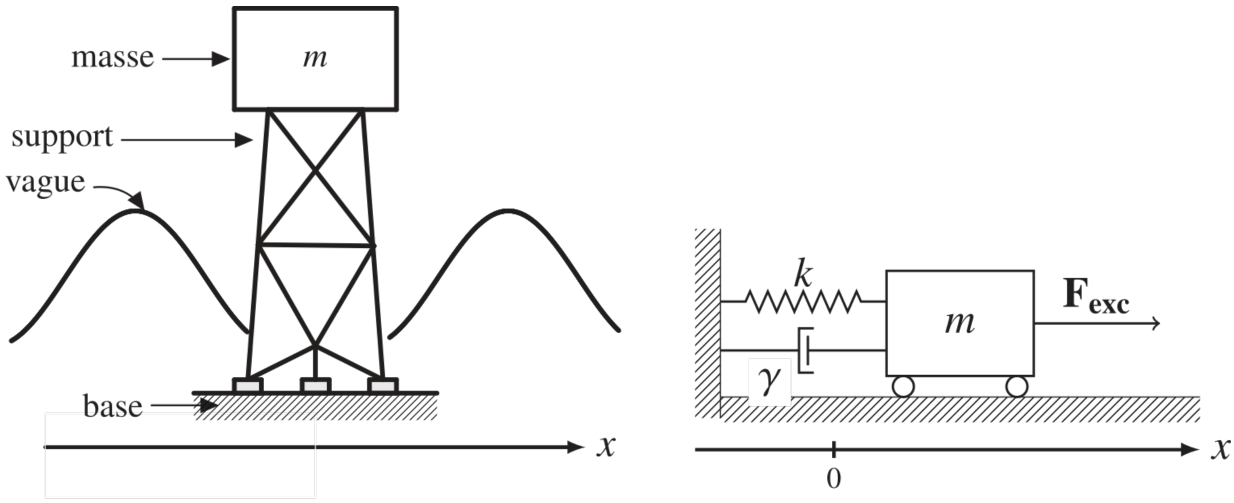
$$\Leftrightarrow \boxed{C \overset{①}{=} \frac{1}{2R_2\lambda - \frac{R_1 R_2}{L}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R_1 = 1{,}0\,\mathrm{k\Omega} \\ R_2 = 50\,\mathrm{k\Omega} \\ L = 500\,\mathrm{mH} \\ \lambda = 2{,}3 \times 10^{3}\,\mathrm{s}^{-1} \end{cases} \quad \text{A.N.} : \underline{C \overset{①}{=} 7{,}6\,\mathrm{nF}}$$

◇

/52 P2 Mouvements d'une plateforme *offshore* *(CCP modélisation 2019)*

On s'intéresse à la résolution d'une équation du mouvement dans une approche classique de la mécanique afin d'étudier le mouvement simplifié d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un système à un degré de liberté considéré comme un oscillateur harmonique : une masse est reliée à un ressort, avec amortissement.

On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (cf figure 1(a)).



(a) (b)

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ comme schématisé sur la figure 1(b). La masse se déplace selon une seule direction, parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t.

Ainsi, les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. Le vecteur unitaire de l'axe Ox est noté $\overrightarrow{u_x}$.

La masse se déplace sur la base horizontale sans frottements sur le support. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$.

La force totale $\overrightarrow{F_{tot}}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale à la base horizontale $\overrightarrow{R_N}$, à la force de frottement $\overrightarrow{F_d} = -\gamma\overrightarrow{v}$ où γ est la constante d'amortissement positive, permettant de prendre en compte l'effet de l'eau environnante, à la force de rappel $\overrightarrow{F_k}$ du ressort et au poids $\overrightarrow{P}$ de la masse m.

Outils mathématiques

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

/8 $\boxed{1}$ Établir entièrement le système d'étude.

Réponse

- 1 ◇ Système : la plateforme M de masse m.
- 1 ◇ Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, y)$ supposé galiléen.
- 1 ◇ Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. L'origine est prise à la position d'équilibre comme indiqué dans l'énoncé. $\overrightarrow{u_y}$ est orienté vers le haut.
- 1 ◇ Repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\overrightarrow{v}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\overrightarrow{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$.
- ◇ Bilan des forces :
  - 1 1) Poids : $\overrightarrow{P} = m\overrightarrow{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
  - 1 2) Réaction du support : $\overrightarrow{R_N} = R_N\,\overrightarrow{u_y}$;
  - 1 3) Force de rappel du ressort : $\overrightarrow{F} = -k\,(\ell - \ell_0)\;\overrightarrow{u_x} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$, car $\ell = \ell_0 + x$;
  - 1 4) Force de frottement $\overrightarrow{F_d} = -\gamma\overrightarrow{v} = -\gamma\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$

◇

/5 $\boxed{2}$ Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m. La mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{3.1}$$

On exprimera ω_0 et ξ en fonction de k, m et γ. On rappelle que $\xi = Q/2$.

Réponse

$$\sum \vec{F} \overset{1}{=} m\vec{a}$$
$$\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F} + \vec{F_d} = m\vec{a}$$
Sur $\vec{u_x}$
$$\Leftrightarrow m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} \overset{1}{=} 0$$
Forme canonique
$$\Leftrightarrow \ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m} \overset{1}{=} 0$$

$$\Rightarrow \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$$
$$\text{avec} \quad \omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\frac{k}{m}} \quad \text{et} \quad 2\xi\omega_0 a = \frac{\gamma}{m}$$
$$\Rightarrow \xi = \frac{\gamma}{2m\omega_0} = \frac{\gamma}{2m}\sqrt{\frac{m}{k}} \Leftrightarrow \boxed{\xi \overset{1}{=} \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{mk}}}$$

/7 3 Dans le cas où $\xi < 1$, justifier que $x(t)$ peut prendre la forme suivante :

$$x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

où Ω est la pseudo-pulsation que l'on exprimera en fonction de ω_0 et ξ.

Réponse

On injecte la forme générique $x(t) = Ke^{rt}$ 1 pour trouver l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi\omega_0 r + {\omega_0}^2 \overset{1}{=} 0$$
$$\Rightarrow \Delta = 4\xi^2{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 \overset{1}{=} 4{\omega_0}^2(\xi^2 - 1)$$

Or, $\xi < 1$, donc $\Delta < 0$ 1 ; ainsi

$$r_{1,2} \overset{1}{=} \frac{-2\xi\omega_0 \pm j\sqrt{-\Delta}}{2}$$
$$\Leftrightarrow r_{1,2} = -\omega_0\xi \pm j\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}_{=\Omega\ 1}$$

En réinjectant dans la forme générique, on trouve donc une exponentielle réelle décroissante multipliée à une exponentielle complexe oscillante, qu'on écrit

$$x(t) \overset{1}{=} e^{-\xi\omega_0 t}[A\cos\Omega t + B\sin(\Omega t)]$$

/4 4 En remarquant qu'à $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, déterminer les expressions des deux coefficients réels A et B en fonction de x_0, v_0, ξ, ω_0 et Ω.

Réponse

De plus, les conditions initiales sont, à $t = 0$, $x(0) = x_0$, donc $A = x_0$. 1 Calculons de plus la dérivée :

$$\dot{x}(t) \overset{1}{=} e^{-\xi\omega_0 t}[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)] - \xi\omega_0 e^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

Or $\dot{x}(0) = v_0$ soit
$$B\Omega - \xi\omega_0 A \overset{1}{=} v_0 \Leftrightarrow B = \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\Omega} \Leftrightarrow \boxed{B \overset{1}{=} \frac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$$

/7 5 Montrer que l'on peut aussi obtenir une forme de la solution du type :

$$x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi) \tag{3.2}$$

On exprimera X_m et φ en fonction de A et B. Quelques outils mathématiques sont donnés en début de cet exercice.

Réponse

On nous donne $\quad x(t) = X_m e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi)$

et $\quad \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$

soit $\quad x(t) \overset{1}{=} X_m e^{-\xi\omega_0 t}[\cos(\Omega t)\cos(\varphi) - \sin(\Omega t)\sin(\varphi)]$

Par identification avec $x(t) = e^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$, il vient

$$X_m\cos(\varphi) \overset{1}{=} A \quad \text{et} \quad -X_m\sin(\varphi) \overset{1}{=} B$$

Ainsi $\tan(\varphi) \overset{①}{=} -\dfrac{B}{A}$ et $A^2 + B^2 = X_m^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \overset{①}{=} X_m^2$

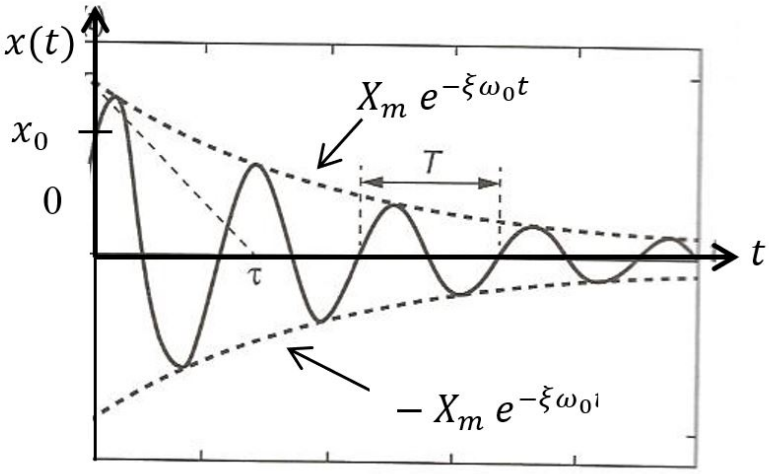
D'où $\boxed{\varphi \overset{①}{=} -\arctan\left(\dfrac{B}{A}\right)}$ et $\boxed{X_m \overset{①}{=} \sqrt{A^2 + B^2}}$

◇

/4 6 Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $X_m e^{-\xi\omega_0 t}$, x_0 et $T = 2\pi/\Omega$ la pseudo-période.

Réponse

Allure du graphe ci-contre :



◇

/1 7 Justifier qualitativement que l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?

Réponse

À cause des frottements, l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t.

◇

/6 8 On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = T$, où T est la période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (3.2) et en considérant que $\xi \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx 2\pi\xi$$

Réponse

Cela fait penser au décrément logarithmique :

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{①}{=} \ln\left(\frac{X_m e^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi)}{X_m e^{-\xi\omega_0 (t+T)}\cos(\Omega(T+t) + \varphi)}\right) \overset{①}{=} \ln\left(e^{\xi\omega_0 T}\right)$$

car cosinus est une fonction périodique de période T. Soit :

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{①}{=} \xi\omega_0 T = \xi\omega_0\frac{2\pi}{\Omega} = \xi\omega_0\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \boxed{\delta \overset{①}{=} \xi\frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Or par hypothèse, $\xi \ll 1$, donc $1 - \xi^2 \approx 1$ ①; alors

$$\boxed{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{①}{\approx} 2\pi\xi}$$

◇

/10 $\boxed{9}$ Toujours dans le cas où $\xi \ll 1$, le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en figure 2 ci-dessous. En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure 2, déterminer les valeurs numériques de k, ξ et γ (avec leurs unités). Comment ce tracé serait-il modifié si ξ augmentait (un rapide graphique peut permettre d'être plus explicite) ?

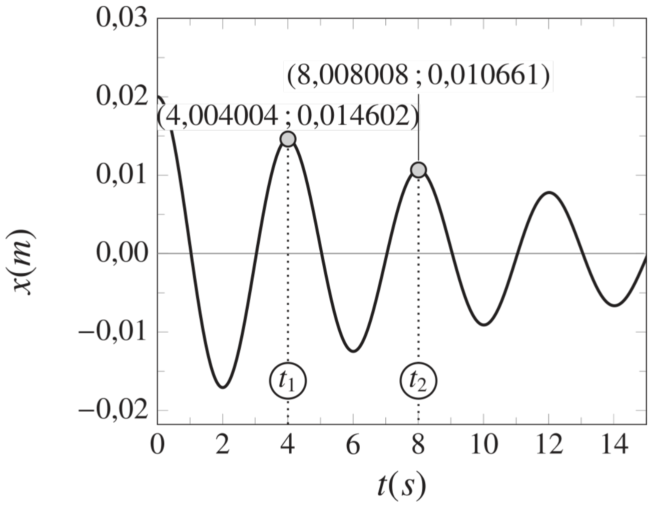


Figure 3.5 – Déplacement horizontal de la plateforme dans le temps.

Réponse

On lit $x_1 = 0{,}014\,602$ m et $t_1 = 4{,}004\,004$ s, puis $x_2 = 0{,}010\,661$ m et $t_2 = 8{,}008\,008$ s. D'après l'énoncé, on a $T = t_2 - t_1$ et comme $\xi \ll 1$ alors

$$\omega_0 \overset{1}{\approx} \Omega \overset{1}{=} \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

car $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. De plus, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc

$$\boxed{k = m\omega_0^2 \overset{1}{=} m\frac{4\pi^2}{(t_2-t_1)^2}} \Rightarrow \underline{k \overset{1}{=} 2{,}71 \times 10^5 \text{ N·m}^{-1}}$$

et

$$\boxed{\xi \overset{1}{=} \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{2\pi}} \Rightarrow \underline{\xi \overset{1}{=} 5{,}01 \times 10^{-2}}$$

On trouve en effet comme attendu $\xi \ll 1$: c'est cohérent.

Enfin, d'après Q1, $$\xi = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{mk}}$$

soit $$\boxed{\gamma \overset{1}{=} 2\xi\sqrt{mk}} \Rightarrow \underline{\gamma \overset{1}{=} 1{,}73 \times 10^4 \text{ kg·s}^{-1}}$$

Si ξ augmentait, l'amortissement augmenterait, la décroissance exponentielle serait plus rapide, on verrait moins d'oscillations 1 ; la pseudo-pulsation Ω diminuerait et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ augmenterait. 1