

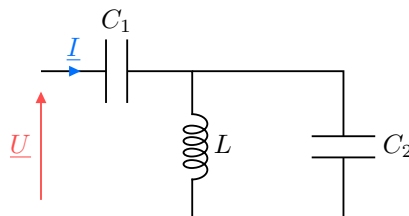
# Correction du TD d'application



## I Impédance équivalente

Déterminer l'impédance complexe équivalente de chacun des dipôles ci-dessous en RSF.

1)



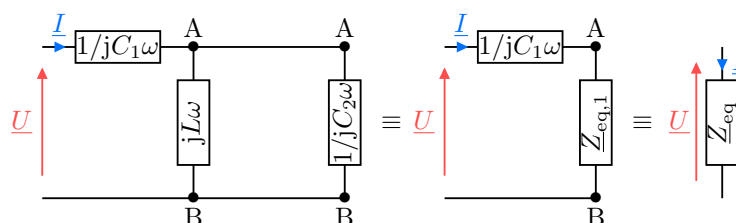
### Réponse

On commence par convertir le circuit avec les impédances complexes :

$$\diamond \underline{Z}_{C_1} = \frac{1}{jC_1\omega} ;$$

$$\diamond \underline{Z}_L = jL\omega ;$$

$$\diamond \underline{Z}_{C_2} = \frac{1}{jC_2\omega} .$$



On peut ensuite déterminer l'impédance équivalente à l'association en parallèle de  $L$  et  $C_2$ . Avec les admittances, on a

$$\underline{Y}_{eq,1} = \underline{Y}_{C_2} + \underline{Y}_L \Leftrightarrow \underline{Z}_{eq,1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_{C_2}} + \frac{1}{\underline{Z}_L}} = \frac{1}{jC_2\omega + \frac{1}{jL\omega}} = \frac{jL\omega}{1 - \omega^2 LC_2}$$

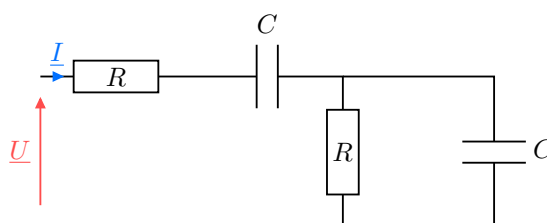
Il suffit alors de faire l'association en série de  $\underline{Z}_{C_1}$  et de  $\underline{Z}_{eq,1}$  :

$$\underline{Z}_{eq} = \frac{1}{jC_1\omega} + \frac{jL\omega}{1 - \omega^2 LC_2}$$

Il n'est ici pas nécessaire d'aller plus loin dans le calcul.

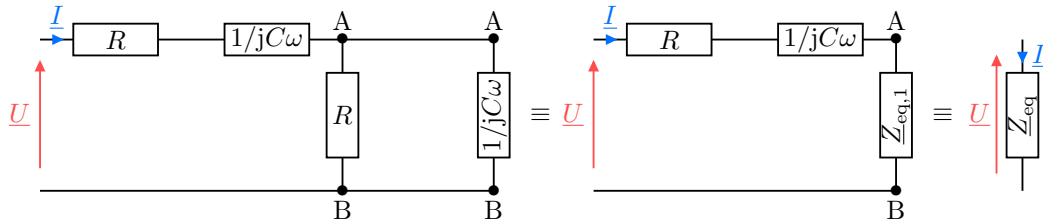


2)



### Réponse

Ici, on utilise que  $\underline{Z}_R = R$  et comme précédemment, on effectue l'association en parallèle des  $R$  et  $C$  de droite avant de faire l'association en série de  $R$  et  $C$  de gauche avec cette impédance équivalente :



$$\underline{Z}_{eq,1} = \frac{1}{\frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_C}} = \frac{1}{\frac{1}{R} + jC\omega} = \frac{R}{1 + jRC\omega}$$

Et on a donc finalement

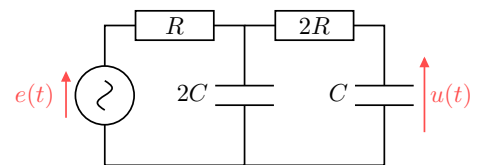
$$\underline{Z}_{eq} = R + \frac{1}{jC\omega} + \frac{R}{1 + jRC\omega}$$



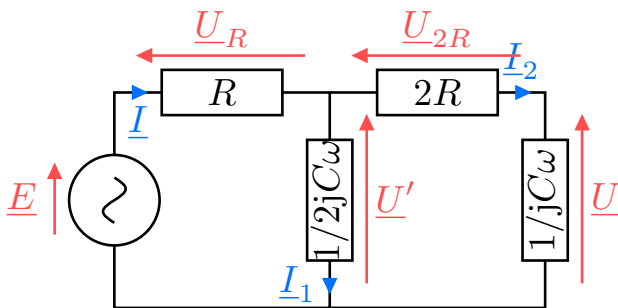
## II Obtention d'une équation différentielle

- 1) En utilisant les lois de KIRCHHOFF en complexes, montrer que la tension  $u(t)$  est solution de l'équation différentielle

$$4\tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2} + 5\tau \frac{du}{dt} + u(t) = e(t) \quad \text{avec} \quad \tau = RC$$



Réponse



On nomme les tensions et intensités dans le circuit, et on utilise la loi des nœuds et la loi d'OHM généralisée :

$$\begin{aligned} \underline{I} &= \underline{I}_1 + \underline{I}_2 \\ \Leftrightarrow \frac{1}{R} \underline{U}_R &= \frac{1}{\underline{Z}_{2C}} \underline{U}' + \frac{1}{\underline{Z}_C} \underline{U} \\ \Leftrightarrow \underline{U}_R &= 2jRC\omega \underline{U}' + jRC\omega \underline{U} \end{aligned} \quad (6.1)$$

On utilise ensuite la loi des mailles à droite et à gauche, donnant respectivement :

$$\underline{U}' = \underline{U} + 2R\underline{I}_2 = \underline{U} + 2jRC\omega \underline{U} \quad \text{et} \quad \underline{U}_R = \underline{E} - \underline{U}' = \underline{E} - \underline{U} - 2jRC\omega \underline{U}$$

On regroupe les équations dans (6.1) et on introduit  $\tau = RC$  :

$$\begin{aligned} \underline{E} - \underline{U} - 2j\omega\tau \underline{U} &= j\omega\tau (\underline{U} + 2j\omega\tau \underline{U}) + j\omega\tau \underline{U} \\ \Leftrightarrow \underline{E} &= \underline{U} + 5j\omega\tau \underline{U} + 4\tau^2(j\omega)^2 \underline{U} \end{aligned}$$

En identifiant les puissances de  $j\omega$  à l'ordre des dérivées pour retourner dans le domaine des représentations réelles, on a donc bien

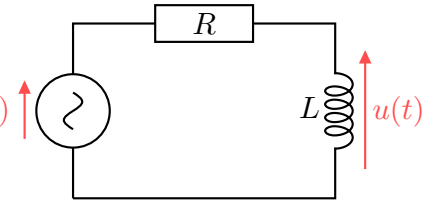
$$e(t) = u(t) + 5\tau \frac{du}{dt} + 4\tau^2 \frac{d^2 u}{dt^2}$$





### III Circuit RL série en RSF

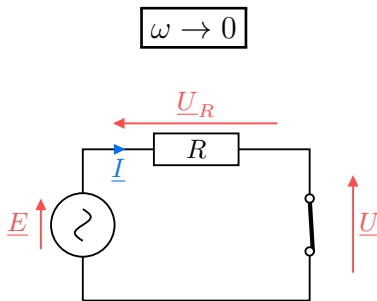
On considère le circuit ci-contre en régime sinusoïdal forcé, où la source de tension impose  $e(t) = E \cos(\omega t)$  avec  $E > 0$ .



- 1) Déterminer l'amplitude de  $u$  à « très haute » ( $\omega \rightarrow \infty$ ) et « très basse » ( $\omega \rightarrow 0$ ) fréquence.

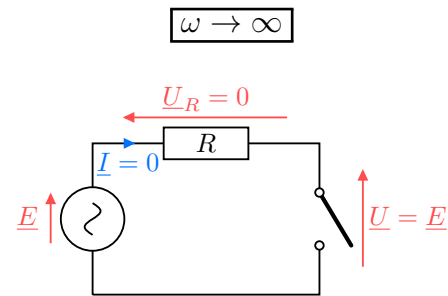
#### Réponse

Pour les comportements limites, on utilise la modélisation d'une bobine à haute et basse fréquence : étant donné que  $\underline{Z}_L = jL\omega$ , pour  $\omega \rightarrow 0$  on a  $\underline{Z}_L = 0$ , et pour  $\omega \rightarrow \infty$  on a  $\underline{Z}_L \rightarrow \infty$ . On a donc respectivement un fil et un interrupteur ouvert. En effet, l'impédance étant homogène à une résistance, une impédance nulle est semblable à une résistance nulle (un fil), et une impédance infinie est semblable à une résistance infinie (un interrupteur ouvert).



Or, la tension d'un fil est nul, donc

$$\underline{u} \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0$$

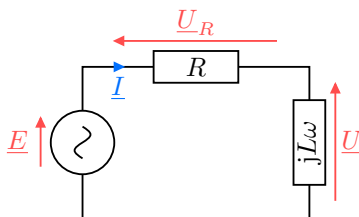


Le courant ne peut traverser un interrupteur, donc en faisant la loi des mailles dans le circuit équivalent, on a  $u_R = Ri = 0$ , et forcément

$$\underline{u} \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} E$$

- 2) Exprimer l'amplitude complexe  $\underline{U}$  de  $u(t)$  en fonction de  $E$ ,  $R$ ,  $L$  et  $\omega$ .

#### Réponse



Pour cela, on utilise la relation du pont diviseur de tension :

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_L}{\underline{Z}_L + \underline{Z}_R} E \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{jL\omega}{R + jL\omega} E$$

- 3) Les tensions  $e$  et  $u$  peuvent-elles être en phase ? En opposition de phase ? En quadrature de phase ? Préciser le cas échéant pour quelle(s) pulsation(s).

#### Réponse

La phase de  $e(t)$  est nulle par construction. On calcule donc la phase de  $u$  en prenant l'argument de son amplitude complexe :

$$\arg(\underline{U}) = \arg(jL\omega E) - \arg(\underline{R} + jL\omega) = \frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right)$$

$\text{Re} > 0$

où on peut prendre l'arctangente parce que la partie réelle est positive. Ainsi :

## 1) Signaux en phase

$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = 0 \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \rightarrow \infty}$$

C'est donc mathématiquement possible et physiquement approchable, mais pas rigoureusement.

## 2) Signaux en opposition de phase

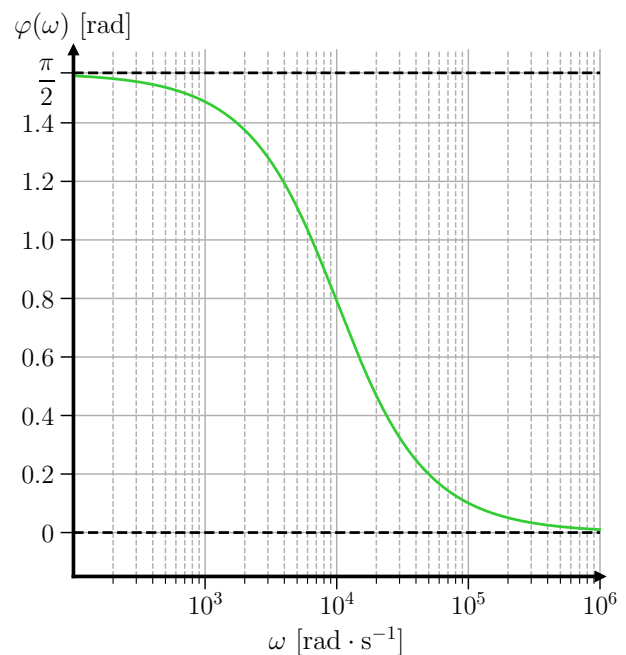
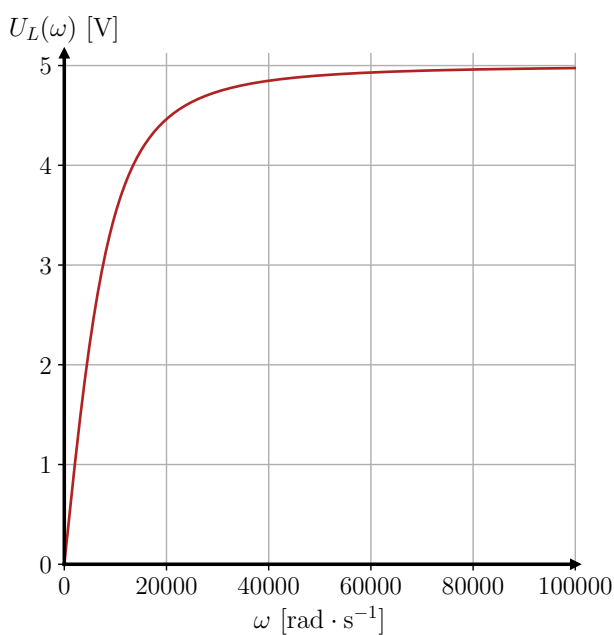
$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \pi \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = -\frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \boxed{\omega \rightarrow -\infty}$$

C'est donc mathématiquement possible, mais **physiquement impossible** : la pulsation est proportionnelle à la fréquence, et une fréquence ne saurait être négative.

## 3) Signaux en quadrature de phase

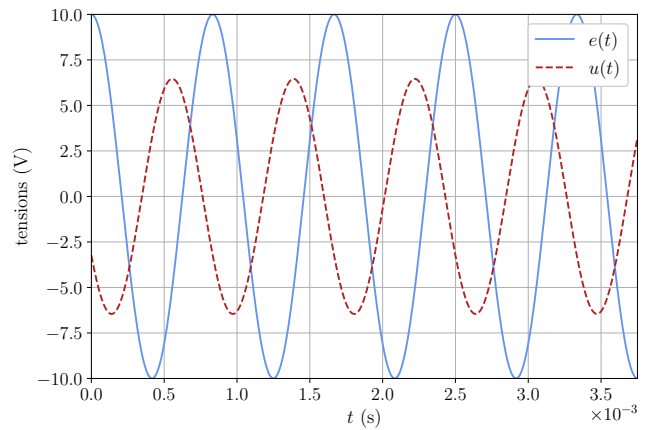
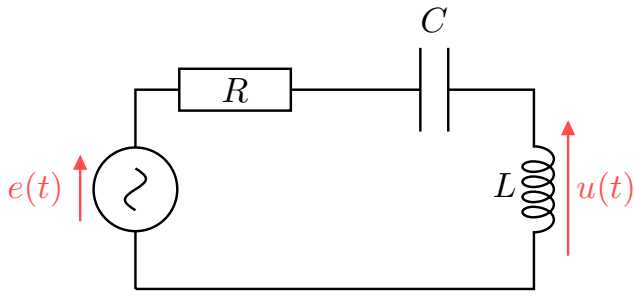
$$\Leftrightarrow \arg(\underline{U}) = \frac{\pi}{2} \Leftrightarrow \arctan\left(\frac{L\omega}{R}\right) = 0 \Leftrightarrow \boxed{\omega = 0}$$

C'est donc possible à la fois mathématiquement et physiquement, mais cela correspond à un signal d'entrée qui ne varie pas, c'est-à-dire un régime permanent : la sortie n'oscille donc pas non plus, et est simplement nulle. La quadrature de phase n'a donc pas vraiment de sens ici, la sortie est constamment nulle quand l'entrée est à son maximum.



## IV Exploitation d'un oscillogramme en RSF

On considère le circuit ci-dessous. On pose  $e(t) = E_m \cos(\omega t)$  et  $u(t) = U_m \cos(\omega t + \varphi)$ . La figure ci-dessous représente un oscillogramme réalisé à la fréquence  $f = 1,2 \times 10^3 \text{ Hz}$ , avec  $R = 1,0 \text{ k}\Omega$  et  $C = 0,10 \text{ }\mu\text{F}$ .



- 1) Dédurre de cet oscillogramme les valeurs expérimentales de  $E_m$ ,  $U_m$  et  $\varphi$ .

### Réponse

On lit l'amplitude de  $e(t)$  à son maximum pour avoir  $E_m = 10 \text{ V}$ . On lit l'amplitude de  $u(t)$  à son maximum pour avoir  $U_m = 6 \text{ V}$ . Pour la phase à l'origine des temps, on regarde le signal à  $t = 0$  : on lit  $u(0) = U_m \cos(\varphi) = -3 \text{ V}$ , soit

$$\cos(\varphi) = \frac{u(0)}{U_m} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} u(0) = -3 \text{ V} \\ U_m = 6 \text{ V} \end{cases}$$

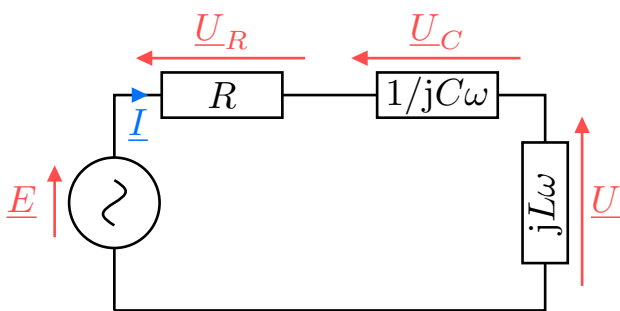
$$\text{A.N. : } \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad}$$



- 2) Exprimer  $U_m$  et  $\varphi$  en fonction des composants du circuit et de la pulsation  $\omega$ . Donner l'intervalle d'existence de  $\varphi$  et ses limites. Tracer alors l'allure des deux graphiques  $U_m(\omega)$  et  $\varphi(\omega)$ .

### Réponse

On utilise un pont diviseur de tension pour avoir l'amplitude complexe :



$$\begin{aligned} \underline{U} &= \frac{Z_L}{Z_R + Z_C + Z_L} E_m \Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{\frac{Z_R}{Z_L} + \frac{Z_C}{Z_L} + \frac{Z_L}{Z_L}} E_m \\ &\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 + \frac{R}{jL\omega} + \frac{1}{j^2\omega^2 CL}} E_m \\ &\Leftrightarrow \underline{U} = \frac{1}{1 - j\frac{R}{L\omega} - \frac{1}{\omega^2 LC}} E_m \end{aligned}$$

On peut en vérifier l'homogénéité en se souvenant des résultats des chapitres précédents :

$$\omega_0^2 = \frac{1}{LC} \quad \text{donc} \quad \omega^2 LC \text{ adimensionné} \quad \text{et} \quad \frac{R}{L} = \tau^{-1} \quad \text{donc} \quad \frac{R}{L\omega} \text{ adimensionné}$$

D'une manière générale, on exprimera les résultats de la sorte, avec une fraction dont le numérateur est homogène à la quantité exprimée alors que le dénominateur est adimensionné.

On trouve l'amplitude réelle en prenant le module de cette expression :

$$U_m = |\underline{U}| \Leftrightarrow U_m = \frac{E}{\sqrt{\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2}\right)^2 + \frac{R^2}{L^2\omega^2}}}$$

On trouve la phase en en prenant l'argument :

$$\varphi = \arg(\underline{U}) = \underbrace{\arg(\underline{E})}_{=0} - \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}\right) = -\psi$$

Ici, il n'est pas évident de prendre l'arctangente de la tangente : la partie réelle de l'argument calculé n'est pas forcément positif (il l'est si  $\omega^2 > \frac{1}{LC}$ ). Pour faciliter l'étude de l'argument, notons  $\psi = \arg\left(1 - \frac{1}{LC\omega^2} - j\frac{R}{L\omega}\right)$ . On alors :

$$\boxed{\omega \rightarrow 0}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\psi) \rightarrow -\infty < 0 \\ \operatorname{Im}(\psi) \rightarrow -\infty < 0 \end{cases} \Rightarrow \psi \in \left[-\pi; -\frac{\pi}{2}\right]$$

$$\boxed{\omega \rightarrow \infty}$$

$$\begin{cases} \operatorname{Re}(\psi) \rightarrow 1 > 0 \\ \operatorname{Im}(\psi) \rightarrow 0 \end{cases} \Rightarrow \psi \in \left[-\frac{\pi}{2}; \frac{\pi}{2}\right]$$

On détermine les valeurs limites en étudiant  $\tan(\psi)$  :

$$\tan(\psi) = -\frac{R}{L\omega} \times \frac{1}{1 - \frac{1}{LC\omega^2}} = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$$

$$\boxed{\omega \rightarrow 0}$$

$$\tan(\psi) \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} -\pi}$$

$$\boxed{\omega \rightarrow \infty}$$

$$\tan(\psi) \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0 \Leftrightarrow \boxed{\psi \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0}$$

Ainsi, on a les résultats opposés pour  $\varphi = -\psi$  :

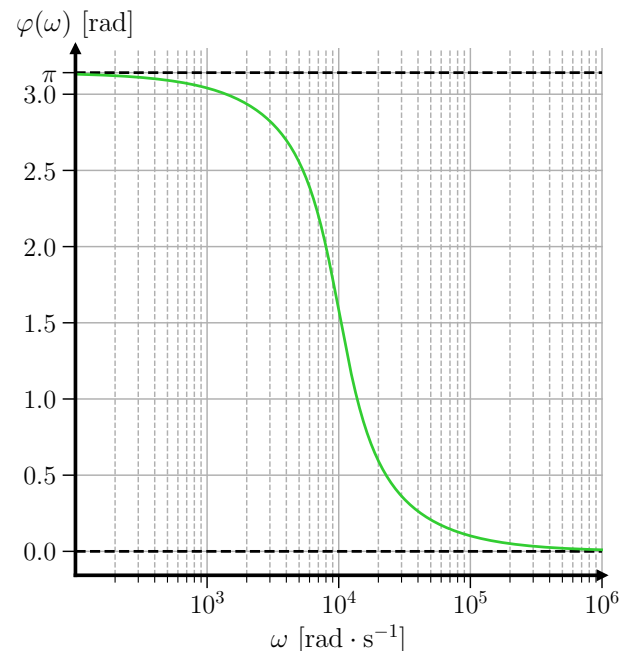
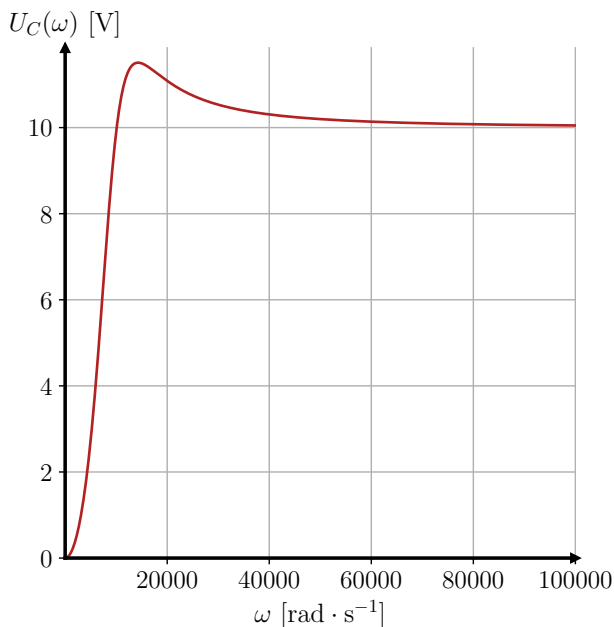
$$\boxed{\varphi \in ]0; \pi[}$$

avec

$$\boxed{\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow 0} \pi}$$

et

$$\boxed{\varphi \xrightarrow{\omega \rightarrow \infty} 0}$$



3) En déduire la valeur numérique de l'inductance  $L$  de la bobine.

### Réponse

Il paraît évidemment plus simple de calculer  $L$  à partir de la phase, sachant qu'on a déterminé  $\varphi$  à

la première question :

$$LC\omega^2 - 1 = \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)} \Leftrightarrow LC\omega^2 = 1 + \frac{RC\omega}{\tan(\varphi)}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{L = \frac{1}{C\omega^2} + \frac{R}{\omega \tan(\varphi)}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} C = 0,10 \mu\text{F} \\ \omega = 2\pi f \\ f = 1,2 \times 10^3 \text{ Hz} \\ R = 1 \text{ k}\Omega \\ \varphi = \frac{2\pi}{3} \text{ rad} \end{cases}$$
$$\text{A.N. : } \boxed{L = 9,9 \times 10^{-2} \text{ H}}$$

