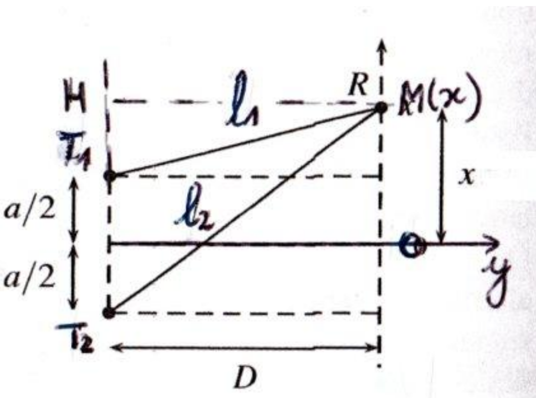
EXERCICE 1 : Mesure de l'épaisseur d'une lame de verre : *(≈ pts)*

Q1. Sans lame de verre :
$\delta = (ST_2M) - (ST_1M) = (ST_2) + (T_2M) - (ST_1) - (T_1M)$.
Or graphiquement, on remarque que : $(ST_2) = (ST_1)$.
Donc $\delta = (T_2M) - (T_1M) = T_2M - T_1M = l_2 - l_1$, car les rayons se propagent dans l'air d'indice pris égal à 1.

- Dans le triangle rectangle (HMT₁), d'après Pythagore on a : $l_1^2 = D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2$;



Donc : $l_1 = \sqrt{D^2 + \left(x - \frac{a}{2}\right)^2} = D\sqrt{1 + \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{D^2}}$;

Or $\frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{D^2} \ll 1$, donc on peut simplifier l'écriture précédente : $\boxed{\boldsymbol{l_1 \approx D\left(1 + \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{2D^2}\right) = D + \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{2D}}}$;

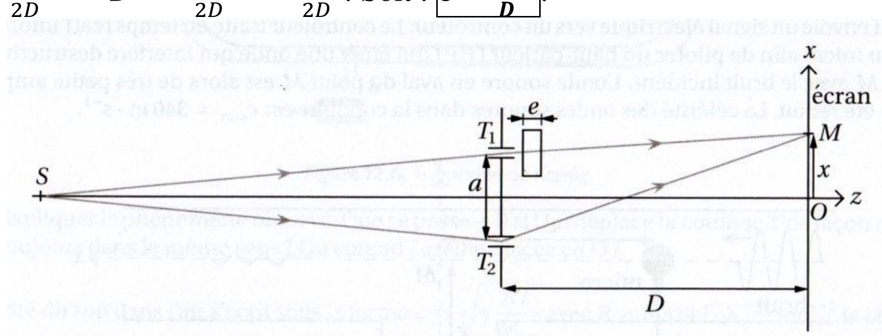
- De même, dans le triangle (HMT₂), on a $l_2^2 = D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2$;

Donc : $l_2 = \sqrt{D^2 + \left(x + \frac{a}{2}\right)^2} = D\sqrt{1 + \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{D^2}}$;

Et pour les mêmes raisons que précédemment, $\boxed{\boldsymbol{l_2 \approx D\left(1 + \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{2D^2}\right) = D + \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{2D}}}$;

Ainsi : $\delta = T_2M - T_1M = l_2 - l_1 \approx D + \frac{\left(x+\frac{a}{2}\right)^2}{2D} - D - \frac{\left(x-\frac{a}{2}\right)^2}{2D} \approx \frac{2xa}{2D}$. Soit : $\boxed{\boldsymbol{\delta = \frac{xa}{D}}}$.

Q2. Avec la lame de verre :
De nouveau : $\delta' = (T_2M) - (T_1M)$.
On a encore $(T_2M) = T_2M = l_2$.
Mais $(T_1M) = T_1M - e + n_v\, e$
$= l_1 + (n_v - 1)e$
car le rayon lumineux parcourt la distance $(T_1M - e)$ dans l'air et la distance e dans le verre d'indice n_v.
Alors :



$\delta' = l_2 - [l_1 + (n_v - 1)e\,] = l_2 - l_1 - (n_v - 1)e$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\delta' = \frac{ax}{D} - (n_v - 1)e}}$.

Q3. On veut $\delta' = 0$. Alors $\frac{a\,x_c}{D} = (n_v - 1)e$. Soit : $\boxed{\boldsymbol{x_c = \frac{De}{a}\,(n_v - 1)}}$.
Quand la lame est absente, $\delta = 0$ en $x = 0$.
Cette frange s'est donc décalée de x_c dans la direction de l'axe Ox.

Q4. D'après la question précédente, $\boxed{\boldsymbol{e = \frac{a\,x_c}{D\,(n_v - 1)}}}$; <u>AN</u> : $e = \frac{100.10^{-6} \times 0{,}285}{1\,(1{,}57 - 1)}$.
On obtient : <u>**e = 5.10^{-5} m = 50 µm**</u>.

Q5. La frange centrale <u>**ne peut pas être distinguée des autres franges brillantes**</u> correspondant elles aussi à des interférences constructives.
La position de la frange centrale n'est donc connue que modulo l'interfrange $i = \frac{\lambda D}{a}$ sur l'écran.

EXERCICE 2 : Jeux sur une piste : *(D'après ENAC 2022)* *(≈ pts)*

Q1. On nous dit que le **mouvement est uniforme** sur tout le trajet, ce qui signifie que la norme v de la vitesse est constante et $v = \frac{d}{t}$.

Connaissant la longueur du trajet, on peut écrire $\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{AB+BC+CD+DE}{v}}}$. AN : $\tau = \frac{425}{25} = \frac{17\times 25}{25}$; On obtient $\boldsymbol{\tau = 17\ \mathrm{s}}$.

Réponse C.

Q2. En utilisant la base de Frenet, on a vu que : $\boldsymbol{\vec{a}(t) = \frac{dv}{dt}\,\vec{T} + \frac{v^2}{R}\,\vec{N}}$.

Or ici, le mouvement est uniforme donc $\frac{dv}{dt} = 0$; Alors $\boldsymbol{a_1 = \|\vec{a}\| = \frac{v^2}{R_1}}$.

D'autre part, on accède au rayon R_1 grâce à la longueur du quart de cercle $BC = \frac{1}{4} 2\pi R_1 = \frac{\pi R_1}{2}$;

Soit : $\boldsymbol{R_1 = \frac{2\,BC}{\pi}}$; D'où $a_1 = \frac{v^2}{\frac{2BC}{\pi}}$; Ou encore : $\boxed{\boldsymbol{a_1 = \frac{\pi\, v^2}{2\,BC}}}$.

AN : $a_1 = \frac{\pi\times 0{,}25^2}{2\times 0{,}50} = \pi \times \left(\frac{1}{4}\right)^2 = \frac{\pi}{16} \approx \frac{3}{15} = \frac{3}{3\times 5} = \frac{1}{5}$; On obtient : $\boldsymbol{a_1 \approx 0{,}2\ \mathrm{m.s^{-2}}}$. **Réponse B.**

Remarque : On aurait aussi pu utiliser les coordonnées polaires :

Pour un mouvement circulaire uniforme on a $v = r\dot{\theta} =$ cste donc l'accélération s'écrit $\vec{a} = -r\dot{\theta}^2\overrightarrow{e_r} = -\frac{v^2}{r}\overrightarrow{e_r}$.

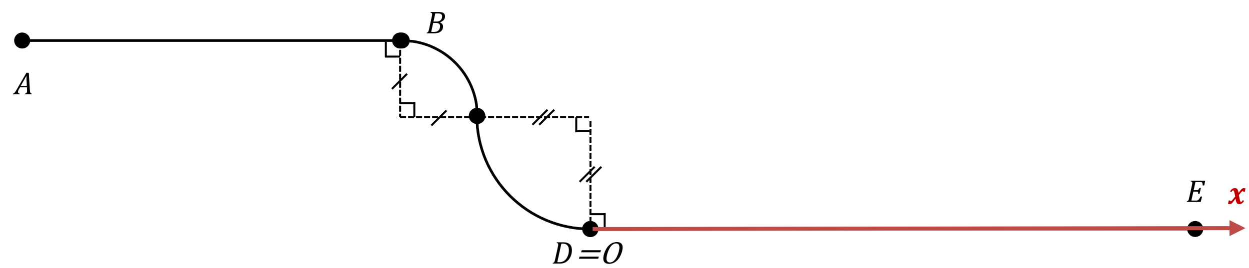
Q3. Avec exactement le même raisonnement on obtient $\boldsymbol{a_2 = \frac{v^2}{R_2} = \frac{v^2}{\frac{2CD}{\pi}} = \frac{\pi\, v^2}{2\,CD}}$, car $\boldsymbol{R_2 = \frac{2\,CD}{\pi}}$

En faisant le rapport des deux expressions, on obtient :

$\frac{a_2}{a_1} = \frac{\pi v^2}{2CD} \times \frac{2BC}{\pi v^2} = \frac{BC}{CD}$, D'où : $\boxed{\boldsymbol{\frac{a_2}{a_1} = \frac{BC}{CD}}}$. AN : $\frac{a_2}{a_1} = \frac{50}{75}$; Ainsi : $\boldsymbol{\frac{a_2}{a_1} = \frac{2}{3}}$ **Réponse C.**

Remarque : Le virage est moins brusque, il est bien normal de trouver une accélération plus faible que de B à C.

Q4.



Posons x_a et x_b les positions respectives des mobiles M_a et M_b sur l'axe DE dont nous prenons l'origine en D, comme indiqué sur le graphe ci-dessus ;

On note $v_a = 0{,}25\ \mathrm{cm.s^{-1}}$ la norme de la vitesse du mobile M_a et $v_b = 0{,}50\ \mathrm{cm.s^{-1}}$ la norme de la vitesse du mobile M_b. On a alors : $\boxed{\boldsymbol{x_a = v_a t \text{ et } x_b = DE - v_b t}}$.

et l'on cherche le temps t_r tel que $\boldsymbol{x_a = x_b}$; D'où $v_a t_r = DE - v_b t_r$; Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{t_r = \frac{DE}{v_a + v_b}}}$;

AN : $t_r = \frac{2}{0{,}25+0{,}50} = \frac{8\times 0{,}25}{3\times 0{,}25} = \frac{8}{3}$; On obtient : $\boldsymbol{t_r \approx 2{,}7\ \mathrm{s}}$. **Réponse B.**

Q5. On a alors : $\boxed{\boldsymbol{d_a = v_a t_r}}$ AN : $d_a \approx 0{,}25 \times \frac{8}{3} = \frac{2}{3}$; On obtient : $\boldsymbol{d_a \approx 0{,}67\ \mathrm{m} = 67\ \mathrm{cm}}$. **Réponse B.**

Q6. Appelons $t_0 = t_r - \frac{1}{5} \approx \frac{8}{3} - \frac{1}{5} \approx \frac{40-3}{15}$; Soit : $\boldsymbol{t_0 \approx \frac{37}{15}\ \mathrm{s}}$.

C'est le temps pour lequel nous souhaitons connaître $\boldsymbol{d = x_b - x_a}$.

Alors : $\boxed{\boldsymbol{d = DE - v_b t_0 - v_a t_0 = DE - (v_b + v_a)t_0}}$.

AN : $d \approx 200 - 75 \times \frac{37}{15} = 200 - 5 \times 15 \times \frac{37}{15} = 200 - 185$; On obtient : $\boldsymbol{d \approx 15\ \mathrm{cm.}}$ **Réponse C**

EXERCICE 3 : Expériences en laboratoire : *(≈ 43 pts)*

I – Expérience N° 1 : Détermination de la masse volumique de l'eau salée : *(D'après CAPES 2022)*

Q1. Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cartésienne : Axe Oz descendant, de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$.
Système : Le cylindre en plomb M de masse m.
Bilan des forces dans le 1er cas : Poids : $\vec{P} = +mg\,\overrightarrow{e_z}$
Tension du fil : $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{e_z}$.
Condition d'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.
En projetant sur Oz, il vient : $mg - T = 0$; Soit $T = mg$.

Bilan des forces dans le 2ème cas : Poids : $\vec{P} = +mg\,\overrightarrow{e_z}$
Tension du fil : $\overrightarrow{T'} = -T'\,\overrightarrow{e_z}$.
Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\pi_A} = -\pi_A\,\overrightarrow{e_z}$.
Condition d'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.
En projetant sur Oz, il vient : $mg - \pi_A - T' = 0$; Soit $\boxed{\boldsymbol{\pi_A = mg - T' = T - T'}}$.

Q2. L'expression de la norme de la Poussée d'Archimède est $\pi_A = \rho_{eau\ salée}\, V_{im}\, g$.

Soit : $\boxed{\boldsymbol{\rho_{eau\ salée} = \frac{\pi_A}{V_{im}\, g} = \frac{T-T'}{V_{im}\, g}}}$; AN : $\rho_{eau\ salée} = \frac{2-1{,}7}{25.10^{-6}\times 9{,}8}$; On obtient : $\boldsymbol{\rho_{eau\ salée} \approx 1200}$ **kg.m^{-3}**.

II – Expérience N° 2 : Détermination du coefficient de viscosité η de l'eau : *(D'après oral CCINP)*

Q3. On s'intéresse dans cette question à une condition d'équilibre, donc pas de force de frottements.
Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cartésienne : Axe Oz descendant, de vecteur unitaire $\overrightarrow{e_z}$.
Système : Bille M de masse m_b.
Bilan des forces :

Poids : $\vec{P} = +m_b\, g\,\overrightarrow{e_z}$
Force de Hooke : $\vec{T} = -k(l_e - l_0)\,\overrightarrow{e_z}$.
Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\pi_A} = -\pi_A\,\overrightarrow{e_z} = -\rho_{eau}\, V_{im}\, g\,\overrightarrow{e_z} = -\rho_{eau}\,\frac{4}{3}\pi b^3\, g\,\overrightarrow{e_z}$.

Condition d'équilibre : $\sum \vec{F} = \vec{0}$.

En projetant sur Oz, il vient : $m_b\, g - k(l_e - l_0) - \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_{eau}\, g = 0$; Soit $\boxed{\boldsymbol{l_e - l_0 = \frac{m_b g}{k} + \frac{4\,\pi b^3 \rho_{eau}\, g}{3\,k}}}$.

Q4. Hors équilibre, nouveau bilan de forces :

Poids : $\vec{P} = +m_b\, g\,\overrightarrow{e_z}$
Force de Hooke : $\vec{T} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_z} = -k(l_e + z - l_0)\overrightarrow{e_z}$.
Poussée d'Archimède : $\overrightarrow{\pi_A} = -\pi_A\,\overrightarrow{e_z} = -\rho_{eau}\, V_{im}\, g\,\overrightarrow{e_z} = -\rho_{eau}\,\frac{4}{3}\pi b^3\, g\,\overrightarrow{e_z}$.
Force de frottements fluides : $\vec{f} = -6\pi\eta b\vec{v} = -6\pi\eta b\,\dot{z}\,\overrightarrow{e_z}$.

2ème loi de Newton à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} + \vec{T} + \overrightarrow{\pi_A} + \vec{f} = m_b\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$.

Projetons sur l'axe Oz : $m_b\, g - k(l_e + z - l_0) - \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_{eau}\, g - 6\pi\eta b\,\dot{z} = m_b\,\ddot{z}$

Or d'après Q3, $-k(l_e - l_0) = -m_b\, g + \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_{eau}\, g$

Dans l'équation précédente, il vient : $m_b\, g - kz - m_b\, g + \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_{eau}\, g - \frac{4}{3}\pi b^3 \rho_{eau}\, g - 6\pi\eta b\,\dot{z} = m_b\,\ddot{z}$

En simplifiant, il vient : $m_b\,\ddot{z} + 6\pi\eta b\,\dot{z} + kz = 0$

Ou encore sous forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\ddot{z} + \frac{6\pi\eta b}{m_b}\,\dot{z} + \frac{k}{m_b}\, z = 0}}$.

En identifiant avec la forme proposée : $\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = 0$, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_b}}\ \text{et}\ \lambda = \frac{3\pi\eta b}{m_b}}}$.

Q5. On obtient des oscillations, si le **régime est pseudopériodique.**

Equation caractéristique : $s^2 + 2\lambda\, s + \omega_0^2 = 0$.

Discriminant : $\Delta = 4\lambda^2 - 4\omega_0^2 = 4(\lambda^2 - \omega_0^2)$.

Pour avoir un régime pseudopériodique, il faut que $\Delta < 0$, donc que $\lambda^2 < \omega_0^2$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\lambda < \omega_0}}$, car toutes ces grandeurs sont positives.

Alors la pseudo-oscillation est $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}$.

Ainsi, la pseudo-période est $\boxed{\boldsymbol{T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2}}}}$.

Q6. Si le mouvement se faisait dans l'air, le bilan des forces serait simplifié : ($\overrightarrow{\pi_A} = \vec{0}$ et $\vec{f} = \vec{0}$).

Poids : $\vec{P} = +m_b\, g\, \overrightarrow{e_z}$

Force de Hooke : $\vec{T} = -k(l - l_0)\overrightarrow{e_z} = -k(l_e + z - l_0)\overrightarrow{e_z}$.

<u>2ème loi de Newton à M</u> : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} + \vec{T} = m_b\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\,\overrightarrow{e_z}$.

Projetons sur l'axe Oz : $m_b\, g - k(l_e + z - l_0) = m_b\, \ddot{z}$.

Et la condition d'équilibre conduirait à : $m_b\, g - k(l_e - l_0) = 0$.

Ce qui permet de simplifier l'équation du mouvement en : $m_b\, \ddot{z} + kz = 0$.

Sous forme canonique, il vient : $\boxed{\boldsymbol{\ddot{z} + \omega_0^2 z = 0 \text{ avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_b}}}}$.

Ainsi la période propre est $\boxed{\boldsymbol{T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{m_b}{k}}}}$.

Q7. D'après Q5, $\frac{1}{T^2} = \frac{\omega_0^2 - \lambda^2}{4\,\pi^2} = \frac{\omega_0^2}{4\,\pi^2} - \frac{\lambda^2}{4\,\pi^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{9\,\pi^2\,\eta^2\, b^2}{4\,\pi^2\, m_b{}^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{9\,\eta^2\, b^2}{4\, m_b{}^2}$

Soit : $\frac{9\,\eta^2\, b^2}{4\, m_b{}^2} = \frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}$; Et $\eta^2 = \frac{4\, m_b{}^2}{9\, b^2}\left(\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}\right)$; Enfin : $\boxed{\boldsymbol{\eta = \frac{2\, m_b}{3\, b}\sqrt{\frac{1}{T_0^2} - \frac{1}{T^2}}}}$.

<u>Protocole</u> :

On mesure la pseudo-période T avec la bille dans l'éprouvette.

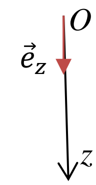
On mesure la période propre T_0 avec la bille dans l'air.

On en déduit la viscosité η avec la formule précédemment établie, en connaissant sa masse m_b et son rayon b.

EXERCICE 4 : Etude de la chute de la grêle : *(D'après ATS 2022)* *(≈ 22 pts)*

I - Chute sans frottement :

Q1. On considère un grêlon de masse m. Dans cette question, il n'est soumis qu'à son poids.

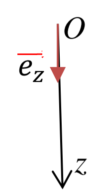


Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cartésienne : Axe Oz vertical descendant.
Système : Grêlon de masse m.
Force : Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$.
PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{e}_z$.

Projetons sur l'axe vertical : On obtient donc : $\ddot{z} = g$.
On prend une primitive, alors $v(t) = \dot{z}(t) = gt + cste\ 1$.
Or à $t = 0$, on suppose que la vitesse initiale est nulle. Alors $cste\ 1 = 0$. Et $\boldsymbol{v(t) = gt}$ (équation (1)).
Nouvelle primitive : $z(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2 + cste\ 2$.
Or à $t = 0$, on suppose que $z = 0$. D'où $cste\ 2 = 0$ et $\boldsymbol{z(t) = \frac{1}{2}\, g\, t^2}$ (équation (2)).
On nous demande $v(z)$. D'après (2), $t = \sqrt{\frac{2z}{g}}$, puis en remplaçant dans (1), il vient : $v(z) = g\sqrt{\frac{2z}{g}}$.
Soit : $\boxed{\boldsymbol{v(z) = \sqrt{2gz}}}$.
AN : Après une chute de 1 km : $v(1000\ m) = \sqrt{2 \times 9{,}8 \times 1000}$;
On obtient **$v(1000\ m) \approx$ 140 m.s^{-1} ≈ 500 km.h^{-1}.**
L'énoncé dit que leur vitesse au sol avoisine les 100 km.h^{-1}.
Cela n'est pas cohérent avec la modélisation. **Il n'est pas raisonnable de négliger les frottements**.

II - Chute avec frottements quadratiques :

Q2. On ajoute la force de frottement de l'air sur le grêlon de la forme : $\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z$.



Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cartésienne : Axe Oz vertical descendant.
Système : Balle M de masse m.
Forces : Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\vec{e}_z$.
Force de frottement : $\vec{f} = -\alpha v^2 \vec{e}_z$.
PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{z}\,\vec{e}_z = \dot{v}\,\vec{e}_z$.

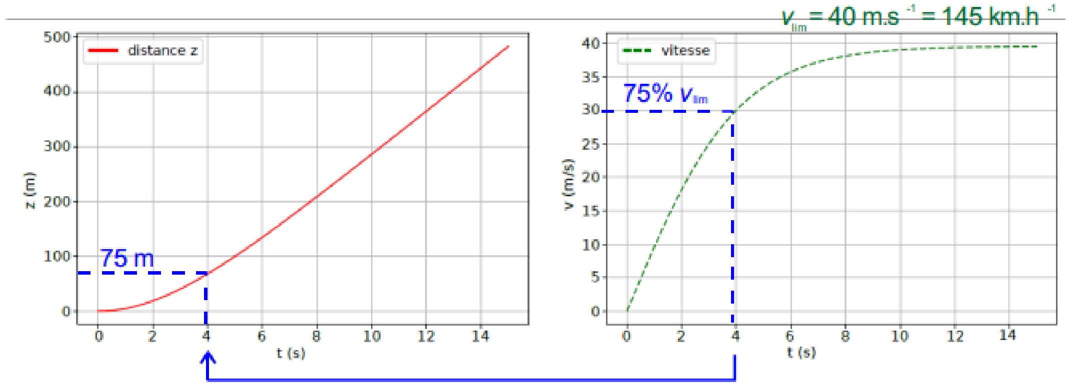
Projetons sur l'axe vertical : On obtient donc : $m\,\dot{v} = mg - \alpha v^2$
Ou encore (sous forme canonique : $\boxed{\boldsymbol{\dot{v} + \frac{\alpha}{m} v^2 = g}}$.

Q3. On cherche uniquement la vitesse limite : $v_{lim} = cste$ donc $\frac{dv_{lim}}{dt} = 0$ et $\boxed{\boldsymbol{v_{lim} = \sqrt{\frac{mg}{\alpha}}}}$.

Q4. On s'intéresse à un grêlon sphérique de 8 cm de diamètre. Donc $R = 4$ cm.
$m = \rho_{eau} V_{sphère} = \rho_{eau} \frac{4}{3} \pi R^3$ et $\alpha = \frac{1}{2}\rho_{air}\pi R^2 C$,
D'où $v_{lim} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3\, \rho_{eau}\, g}{\frac{1}{2}\rho_{air}\pi R^2 C,}} = \sqrt{\frac{8R\rho_{eau}\, g}{3\,\rho_{air} C}}$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{v_{lim} = \sqrt{\frac{8R\rho_{eau}\, g}{3\,\rho_{air} C}}}}$.
AN : $v_{lim} = \sqrt{\frac{8\times0{,}04\times1000\times9{,}8}{3\times1{,}2\times0{,}5}}$. On obtient **$v_{lim} \approx$ 42 m.s^{-1} ≈ 150 km.h^{-1}.**
La vitesse limite de ce modèle est mieux que dans le modèle sans frottement mais **elle reste surestimée.**

Q5. On lit $v_{lim} \approx 40$ m.s^{-1}. Donc 75% $v_{lim} = 30$ m.s^{-1}. On en déduit le temps sur le graphe 2, puis l'altitude sur le graphe 1.

Il faut donc environ **75 m de chute** au grêlon pour obtenir 75 % de sa vitesse limite.



EXERCICE 5 : Mouvement pendulaire d'un sac de sable : *(D'après G2E 2022)* *(≈ 25 pts)*

I - Cinématique du point :

Q1. On sait que $\boxed{\overrightarrow{OM} = \ell(t)\ \overrightarrow{e_r}}$ avec $\ell(t) = \ell_0 + kt$

- Alors $\overrightarrow{v_M} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\ell(t)}{dt}\overrightarrow{e_r} + \ell(t)\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt}$; Or $\frac{d\ell(t)}{dt} = k$ et $\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} = \dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta}$.

D'où : $\boxed{\overrightarrow{v_M} = k\,\overrightarrow{e_r} + \ell(t)\,\dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta}}$.

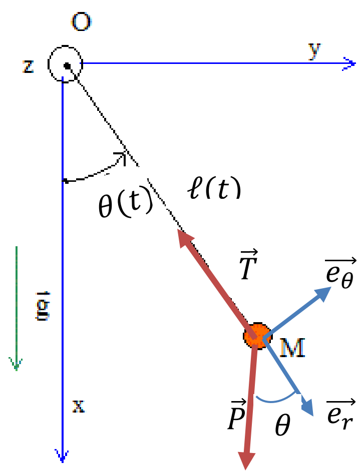
- Enfin : $\vec{a}(t) = \frac{d\vec{v}}{dt}(t) = k\,\frac{d\overrightarrow{e_r}}{dt} + \frac{d\ell(t)}{dt}\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} + \ell(t)\ \ddot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} + \ell(t)\ \dot{\theta}\ \frac{d\overrightarrow{e_\theta}}{dt}$.

D'où : $\vec{a}(t) = k\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} + k\ \dot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} + \ell(t)\ \ddot{\theta}\ \overrightarrow{e_\theta} - \ell(t)\ \dot{\theta}^2\ \overrightarrow{e_r}$.

Ou encore $\boxed{: \vec{a}(t) = -\ell(t)\ \dot{\theta}^2\ \overrightarrow{e_r} + \left[2\ k\ \dot{\theta} + \ell(t)\ \ddot{\theta}\ \right]\ \overrightarrow{e_\theta}}$.

- k s'exprime en m.s^{-1} ; Cette constante est donc **homogène à une vitesse.**

II - Dynamique du point :



Q2. Les vecteurs polaires $\overrightarrow{e_r}$ et $\overrightarrow{e_\theta}$ ont été schématisés.
Les deux forces qui agissent en M sont le poids et la tension du fil.

- La tension **:** $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{e_r}$.
- Le poids : $\vec{P} = m\,\vec{g} = +mg\cos(\theta)\ \overrightarrow{e_r} - mg\sin(\theta)\ \overrightarrow{e_\theta}$.

Q3. Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection polaire : $(\overrightarrow{e_r}\ ,\ \overrightarrow{e_\theta})$
Système : Le point matériel M de masse m.
Bilan des forces : Poids : $+mg\cos(\theta)\ \overrightarrow{e_r} - mg\sin(\theta)\ \overrightarrow{e_\theta}$.
Tension du fil : $\vec{T} = -T\,\overrightarrow{e_r}$.

2ème loi de Newton à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} + \vec{T} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = -\ell(t)\ \dot{\theta}^2\ \overrightarrow{e_r} + \left[2\ k\ \dot{\theta} + \ell(t)\ \ddot{\theta}\ \right]\ \overrightarrow{e_\theta}$ (cf Q1).

Projetons sur l'axe de la tension : $\overrightarrow{e_r}$: On obtient donc :
$mg\cos\theta - T = -m\,\ell(t)\ \dot{\theta}^2$ Soit : $\boxed{T = m\,l(t)\ \dot{\theta}^2 + mg\cos\theta}$.

Q4. Pour obtenir l'équation différentielle du mouvement du sac, il faut projeter la 2ème loi de Newton sur $\overrightarrow{e_\theta}$:
Il vient : $-mg\sin\theta + 0 = m\left[2\ k\ \dot{\theta} + \ell(t)\ \ddot{\theta}\ \right]$. D'où : $m\ \ell(t)\ \ddot{\theta} + 2\ m\ k\ \dot{\theta} + mg\sin\theta = 0$
Dans le cadre des petits angles : $\sin(\theta) \approx \theta$
Et sous forme canonique, il vient : $\boxed{\ddot{\theta} + \frac{2k}{\ell(t)}\dot{\theta} + \frac{g}{\ell(t)}\theta = 0}$; CQFT

Q5. A $t = 0s$, on nous donne $\theta_0 = 15°$, $\ell_0 = 20$ m et on lit : $\dot{\theta}(0) = 0$, car la courbe $\theta(t)$ présente une tangente horizontale en 0. Alors à $t = 0s$, on a : $T = m\ \ell_0\ \dot{\theta}(0)^2 + mg\cos(\theta_0)$.
AN : $T = 0 + 200 \times 9{,}8\ \times \cos(15°)$; On obtient : **$T \approx 1,9.10^3$ N.**

Q6. A partir de $t = 20$ s, **les coefficients devant θ et $\dot{\theta}$ deviennent négatifs**, car $\ell(t) < 0$, ce qui explique que la solution diverge.

PROBLEME : Etude du mouvement d'une bille dans un tube horizontal en rotation uniforme : *(≈ 47 pts)*

Préliminaire :

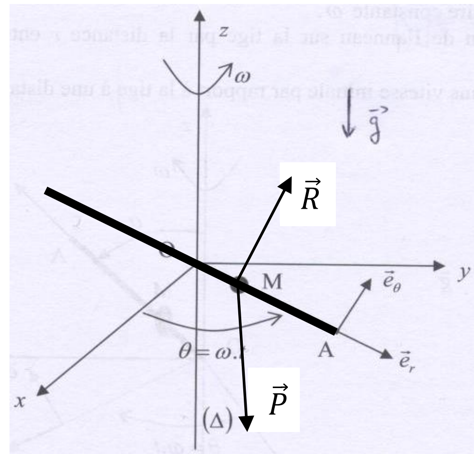
Q1. On nous donne $\vec{r} = \overrightarrow{OP} = r\,\overrightarrow{u_r}$.

Donc $\vec{v} = \dot{r}\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\omega\,\overrightarrow{u_\theta}$

Ainsi $\vec{a} = \frac{d\,\vec{v}}{dt} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} + \dot{r}\omega\,\overrightarrow{u_\theta} + r\omega\,\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt}$, car ω = cste. On rappelle que $\frac{d\overrightarrow{u_r}}{dt} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$ et $\frac{d\overrightarrow{u_\theta}}{dt} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$

Soit : $\boxed{\boldsymbol{\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r)\,\overrightarrow{u_r} + 2\,\dot{r}\omega\,\overrightarrow{u_\theta}}}$;

I - Le mouvement de la bille a lieu sans frottement :



Q2. Référentiel : Terrestre supposé galiléen.
Base de projection cylindrique : $(\overrightarrow{u_r}\,;\,\overrightarrow{u_\theta}\,;\,\overrightarrow{u_z})$
Système : La bille P de masse m.
Bilan des forces :
- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{e_z}$.
- Réaction du support : $\vec{R} = R_1\overrightarrow{u_r} + R_2\overrightarrow{u_\theta} + R_3\overrightarrow{u_z}$,

Or mvt sans frottement sur le support, donc $\boldsymbol{R_1 = 0}$ et $\boldsymbol{\vec{R} = R_2\overrightarrow{u_\theta} + R_3\overrightarrow{u_z}}$

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} + \vec{R} = m\vec{a}$

avec $\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r)\,\overrightarrow{u_r} + 2\,\dot{r}\omega\,\overrightarrow{u_\theta}$.

Projetons sur les 3 axes : On obtient donc :

$$\begin{cases} 0 = m(\ddot{r} - \omega^2 r) \\ R_2 = 2m\dot{r}\omega \\ -mg + R_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Soit :} \quad \begin{cases} \boxed{\boldsymbol{\ddot{r} - \omega^2 r = 0}} : (1) \\ R_2 = 2m\dot{r}\omega \quad (2) \\ R_3 = mg \quad (3) \end{cases}$$

(1) : **Equation différentielle du mouvement.**

Q3. On veut résoudre : $\ddot{r} - \omega^2 r = 0$.

Equation caractéristique : $s^2 - \omega^2 = 0$; Soit : $s^2 = \omega^2$; D'où : $\boldsymbol{s = \pm\omega}$;

Ainsi les solutions de l'équation différentielle sont de la forme : $\boldsymbol{r(t) = A\,e^{\omega t} + B\,e^{-\omega t}}$;

1ère CI : A t = 0, $r(0) = \boxed{\boldsymbol{r_0 = A + B}}$

Et $\dot{r}(t) = A\omega e^{\omega t} - B\omega\,e^{-\omega t}$;

2ème CI : A t = 0, $\dot{r}(0) = 0$; Donc : $0 = A\omega - B\omega$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{A = B}}$.

Conclusion : $\boxed{\boldsymbol{A = B = \frac{r_0}{2}}}$; Et $\boxed{\boldsymbol{r(t) = \frac{r_0}{2}\,(e^{\omega t} + e^{-\omega t}) = r_0 ch\,\omega t}}$;

Q4. L'énoncé donne : $\vec{R} = R_1\overrightarrow{u_r} + R_2\overrightarrow{u_\theta} + R_3\overrightarrow{u_z}$ mais on a vu que $R_1 = 0$ donc $\vec{R} = R_2\overrightarrow{u_\theta} + R_3\overrightarrow{u_z}$.

De plus, d'après Q2, on a vu que : $R_2 = 2m\dot{r}\omega$ et $R_3 = mg$ (cf (2) et (3)).

Ainsi : $\boxed{\boldsymbol{\vec{R} = 2m\dot{r}\omega\,\overrightarrow{u_\theta} + mg\,\overrightarrow{u_z}}}$;

Ou encore avec $\dot{r} = \omega r_0\,sh(\omega t)$; Soit : $\boxed{\boldsymbol{\vec{R} = 2mr_0\omega^2\,sh(\omega t)\,\overrightarrow{u_\theta} + mg\,\overrightarrow{u_z}}}$.

Q5. La bille quitte le tube à l'instant t = τ, lorsque $r = L$.

Soit : $L = r_0 ch\,(\omega\tau)$; Ou encore : $\boxed{\boldsymbol{\tau = \frac{1}{\omega}\,argch\,\frac{L}{r_0}}}$;

AN : $\tau = \frac{1}{2}\,argch\left(\frac{0{,}1}{0{,}01}\right) = \frac{1}{2}\,argch\left(\frac{1}{0{,}1}\right) = \frac{1}{2}\,argch(10)$; On obtient : **$\boldsymbol{\tau = 1{,}5}$ s.**

II - Le mouvement de la bille est soumis à une force de frottement solide telle que $R_1 = -\mu\, R_3$:

Q6. On reprend la projection du principe fondamental de la dynamique avec $R_1 = -\mu\, R_3$:

$$\begin{cases} R_1 = m(\ddot{r} - \omega^2 r) \\ R_2 = 2m\dot{r}\omega \\ -mg + R_3 = 0 \end{cases} \quad \text{Soit :} \quad \begin{array}{l} m(\ddot{r} - \omega^2 r) = -\mu\, R_3 : (1) \\ R_2 = 2m\dot{r}\omega \quad (2) \\ R_3 = mg \quad (3) \end{array}$$

Et comme $R_3 = mg$, il vient pour (1) : $\boxed{\ddot{r} - \omega^2 r = -\mu\, g}$; (CQFT) ; **Equation différentielle du mouvement.**

Q7. On nous aide : On multiplie par $\dot{r}$: $\ddot{r}\,\dot{r} - \omega^2 r\,\dot{r} = -\mu\, g\,\dot{r}$

Prenons une primitive du temps : $\frac{1}{2}\,\dot{r}^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2\, r^2 = -\mu\, g\, r + cste$.

Or à t = 0, $r(0) = 0$ et $\dot{r}(0) = v_0$, il vient donc : $\frac{1}{2}\, v_0{}^2 - 0 = 0 + cste$. Ainsi, $cste = \frac{1}{2}\, v_0{}^2$

D'où : $\frac{1}{2}\, \dot{r}^2 - \frac{1}{2}\,\omega^2\, r^2 = -\mu\, g\, r + \frac{1}{2}\, v_0{}^2$; Ou encore **:** $\boxed{\dot{r}^2 = \omega^2\, r^2 - 2\,\mu\, g\, r + v_0{}^2}$.

Q8. On nous indique que $v = \dot{r} = 0$ quand $r = r_1$.

Alors, il vient : $0 = \omega^2 r_1{}^2 - 2\mu g r_1 + v_0{}^2$; Soit : $2\mu g r_1 = \omega^2 r_1{}^2 + v_0{}^2$ et $\boxed{\mu = \frac{\omega^2 r_1{}^2 + v_0{}^2}{2g\, r_1}}$.

AN : Au bout du tube, $r_1 = L$: D'où $\mu = \frac{2^2 0{,}1^2 + 0{,}5^2}{2\times 9{,}81\times 0{,}1}$; on obtient **$\mu \approx 0{,}15$ (sans unité).**

III – le tube étant rempli d'un liquide, le mouvement de la bille est maintenant soumis à une force de frottement fluide de la forme : $\vec{f} = -\,6\pi\eta\, b\, \dot{r}\, \vec{u_r}$:

Q9. Nouveau bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{e_z}$.
- Réaction du support : $\vec{R} = R_1\vec{u_r} + R_2\vec{u_\theta} + R_3\vec{u_z}$,
- Or mvt sans frottement sur le support, donc $R_1 = 0$ et $\vec{R} = R_2\vec{u_\theta} + R_3\vec{u_z}$
- Force de frottement fluide : $\vec{f} = -\,6\pi\eta\, b\, \dot{r}\,\vec{u_r}$

PFD à M : $\sum \vec{F} = m\vec{a}$ Donc $\vec{P} + \vec{R} + \vec{f} = m\vec{a}$ avec $\vec{a} = (\ddot{r} - \omega^2 r)\,\vec{u_r} + 2\,\dot{r}\omega\,\vec{u_\theta}$.

Projetons sur l'axe du mouvement : On obtient donc :

$-\,6\pi\eta\, b\, \dot{r} = m(\ddot{r} - \omega^2 r)$ $\boxed{\ddot{r} + \frac{6\pi\eta\, b}{m}\dot{r} - \omega^2 r = 0}$: (1) **Equation différentielle du mouvement.**

Q10. On néglige la dérivée seconde $\frac{d^2 r}{dt^2}$.

Q10.a. C'est le cas **si la force de frottements fluides est importante devant $m\ddot{r}$** .

L'équation différentielle devient alors : $\frac{6\pi\eta\, b}{m}\dot{r} - \omega^2 r = 0$

Sous forme canonique, il vient : $\boxed{\dot{r} - \frac{m\omega^2}{6\pi\eta\, b} r = 0}$:

Equation différentielle du 1er ordre à coefficients constants avec 2nd membre nul.

Alors la solution est de la forme : $r(t) = A\, e^{\frac{m\omega^2}{6\pi\eta\, b}t}$.

CI, à t = 0, $r(0) = r_0 = A$; D'où : $\boxed{r(t) = r_0\, e^{\frac{m\omega^2}{6\pi\eta\, b}t}}$.

Q10.b. La bille arrive à l'extrémité du tube **lorsque $r = L$, alors $t = t_0$.**

Ainsi, $\ln\left(\frac{L}{r_0}\right) = \frac{m\omega^2}{6\pi\eta\, b}\, t_0$; D'où : $\boxed{t_0 = \frac{6\pi\eta\, b}{m\omega^2}\ln\left(\frac{L}{r_0}\right)}$.