Optique – chapitre 3

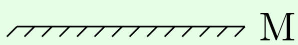
Miroir plan et lentilles minces

I Miroir plan

A Définition

Définition 3.1 : miroir plan

Surface plane totalement réfléchissante. On le schématisme avec le symbole



pour un miroir orienté vers le haut.

Important 3.1 : stigmatisme et aplanétisme des miroirs plans

Le miroir plan est le seul système optique rigoureusement stigmatique et aplanétique.

B Construction de l'image d'un objet réel

On utilise les lois de Snell-Descartes pour la réflexion, en traçant deux rayons partant de l'objet ponctuel.

Exemple 3.1 : image d'un objet réel

Soit A un point objet d'un miroir plan. Les rayons incidents se croisant en A arrivent sur le miroir en I et I'. Par la loi de la réflexion, les rayons émergents sont les rayons réfléchis, avec un angle de réflexion opposé à l'angle d'incidence. On trouve l'image A' en traçant l'intersection des rayons émergents.

Avec la figure ci-contre, on observe

$$\tan(i) = \frac{\overline{HI}}{\overline{HA}} = \frac{\overline{HI}}{-\overline{HA'}}$$

Soit

$$\boxed{\overline{HA'} = -\overline{HA}}$$

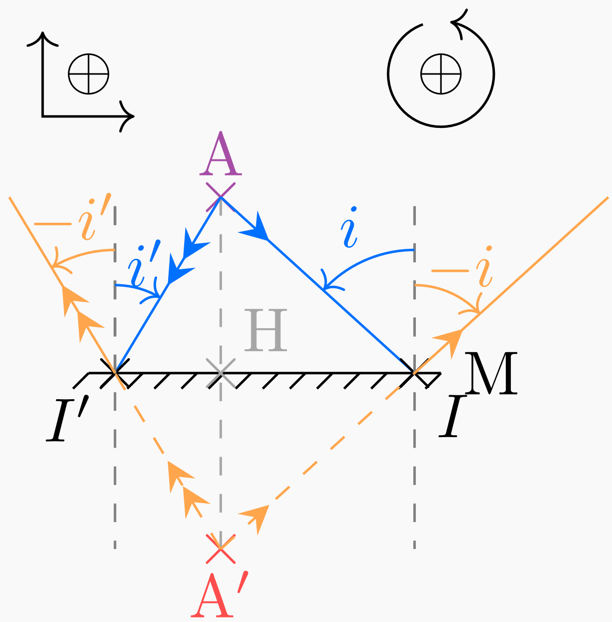


Figure 3.1 – Construction de l'image d'un objet réel par un miroir plan.

C Construction de l'image d'un objet virtuel

Exemple 3.2 : image d'un objet réel

Le principe du retour inverse de la lumière permet de permuter A et A' dans la démonstration précédente. Le schéma est cependant indiqué ci-contre (à compléter).

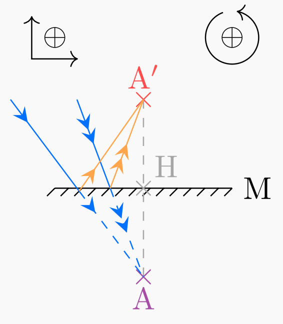


Figure 3.2

D Relation de conjugaison

Définition 3.2 : Relation de conjugaison

Formule mathématique reliant la position d'un objet à celle de son image par un système optique.

Propriété 3.1 : relation de conjugaison d'un miroir plan

L'image A' par un miroir plan est le **symétrique** de l'objet A. Avec H le projeté orthogonal de A sur le miroir plan, on écrit cette conjugaison

$$\boxed{A \xrightarrow[H]{M} A'}$$

et on a

$$\boxed{\overline{HA'} = -\overline{HA}}$$

Remarque 3.1 : réalité et virtualité du miroir plan

Le miroir plan garde la nature d'un faisceau : s'il est divergent en entrée, il est divergent en sortie et inversement. Ainsi, avec la définition du caractère réel et virtuel des objets (2.9), **le miroir plan change la nature de l'objet**.

E Grandissement transversal

Propriété 3.2 : γ miroir plan

Le miroir plan a un grandissement transversal

$$\boxed{\gamma = +1}$$

Démonstration 3.1 : γ miroir plan

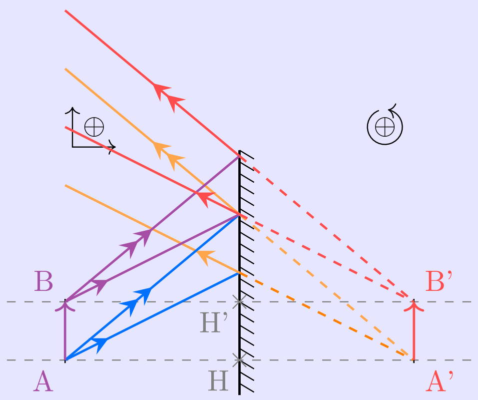


Figure 3.3 – Image d'un objet étendu par un miroir plan.

II Lentilles minces

A Définition

Définition 3.3 : lentilles, minces, convergentes et divergentes

Une lentille est un composant optique **centré** constitué d'un milieu TLHI, délimité par deux dioptres de sommets S_1 et S_2. Elle est dite **mince** si son diamètre est très grand devant son épaisseur.

Une lentille est **convergente** si son **point foyer objet** est **avant sa face d'entrée**.

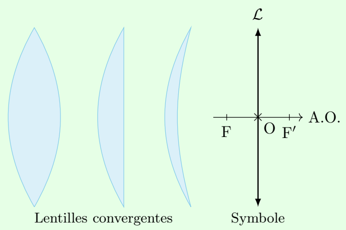


Figure 3.4 – Exemples de lentilles convergentes.

Une lentille est **divergente** si son **point foyer objet** est **après sa face de sortie**.

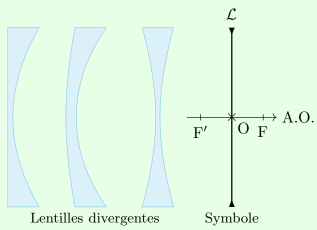


Figure 3.5 – Exemples de lentilles convergentes.

Important 3.2 : stigmatisme et aplanétisme

D'une manière générale, les lentilles minces ne sont ni stigmatiques ni aplanétiques. Nous utiliserons donc toujours les lentilles minces dans les **conditions de Gauss** et les considérerons comme stigmatiques et aplanétiques.

B Caractéristiques

Définition 3.4 : centre optique

On appelle **centre optique** d'une lentille et on le note O le point à l'intersection de l'axe optique et de la lentille.

Propriété 3.3 : centre optique et foyers

Tout rayon passant par le centre optique O d'une lentille mince **n'est pas dévié**, et F' est **symétrique** de F par O.

Définition 3.5 : distance focale image et vergence

On appelle *distance focale image* la distance **algébrique** $\overline{OF'}$; elle est positive pour une lentille convergent, négative pour une lentille divergente. **Elle se note usuellement** f'.

On appelle *vergence* et on note V la grandeur définie par

$$\boxed{V = \frac{1}{\overline{OF'}}}$$

Unités

En tant que distance, $\overline{OF'}$ (ou f') s'exprime en mètres (m).

L'unité de la vergence est le m^{-1}, mais elle s'exprime usuellement en **dioptries** (δ).

C Constructions géométriques d'une lentille mince

II.C.1 Rappel

Rappel 3.1 : foyers d'une lentille

Par définition (voir chapitre 2), le **foyer objet** F donne une **image à l'infini**, et ce **peu importe la nature de la lentille**.

De même, le **foyer image** F' est le point **image** d'un **objet à l'infini**.

Exemple 3.3 : foyers des lentilles

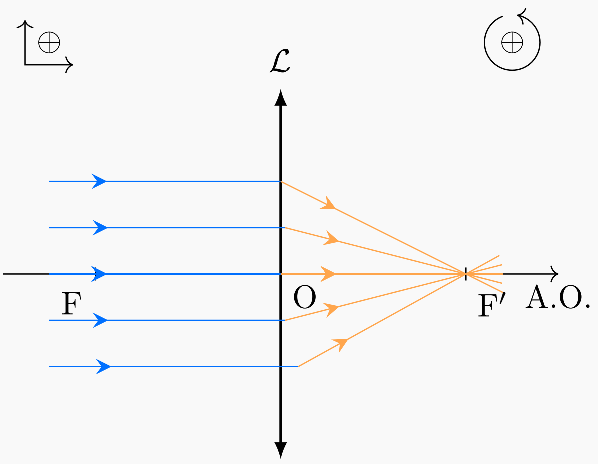


Figure 3.6 – Foyer image convergent

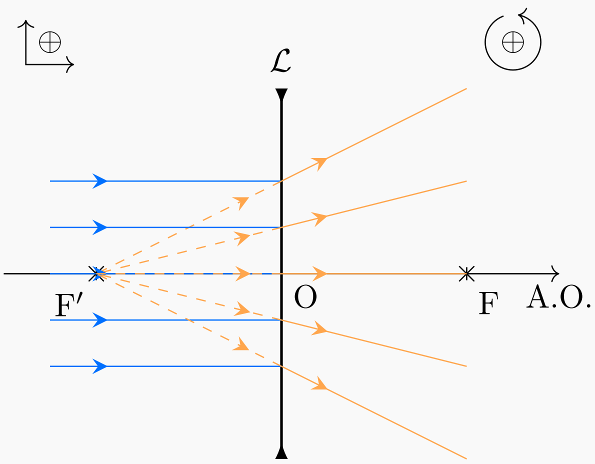


Figure 3.7 – Foyer image divergent

II.C.2 Règles primaires

Important 3.3 : règles primaires

Avec la propriété des foyers principaux, on a donc 3 points d'intérêts pour construire les rayons émergents d'une lentille mince :

1) Tout rayon incident passant par O n'est pas dévié ;
2) Tout rayon incident parallèle à l'axe optique émerge en passant par F'.
3) Tout rayon incident passant par F émerge parallèle à l'axe optique ;

Exemple 3.4 : cas simple

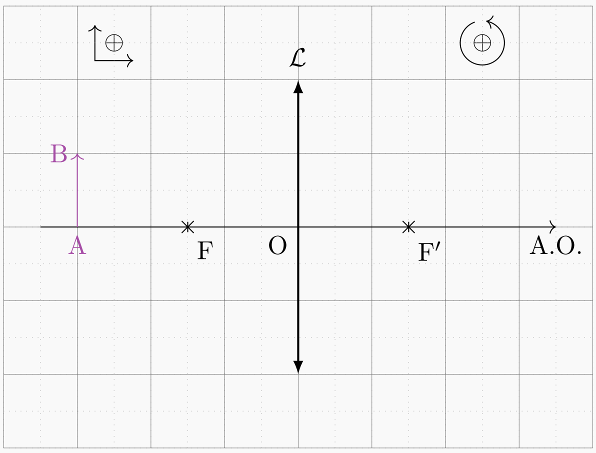


Figure 3.8 – Utilisation des règles primaires

Important 3.1 : exemples de situations à compléter

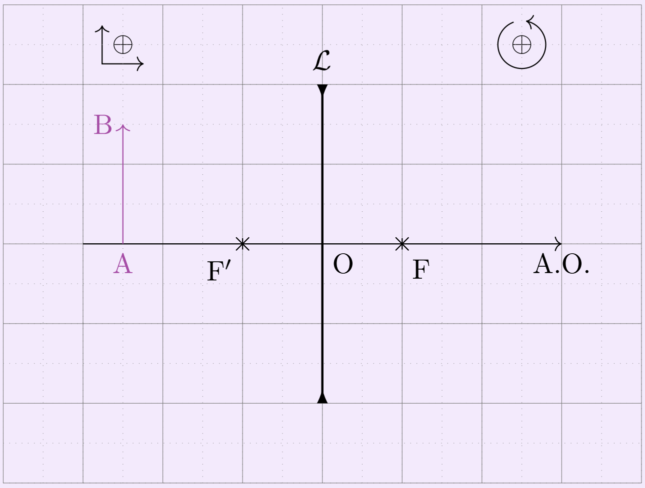


Figure 3.9 – Divergente simple

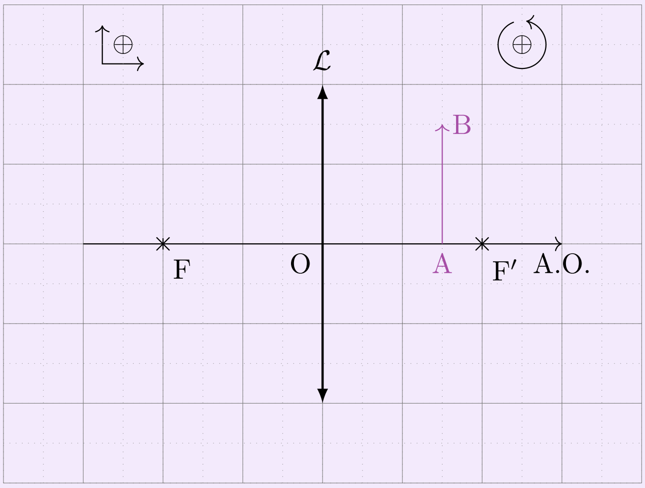


Figure 3.10 – Convergente après

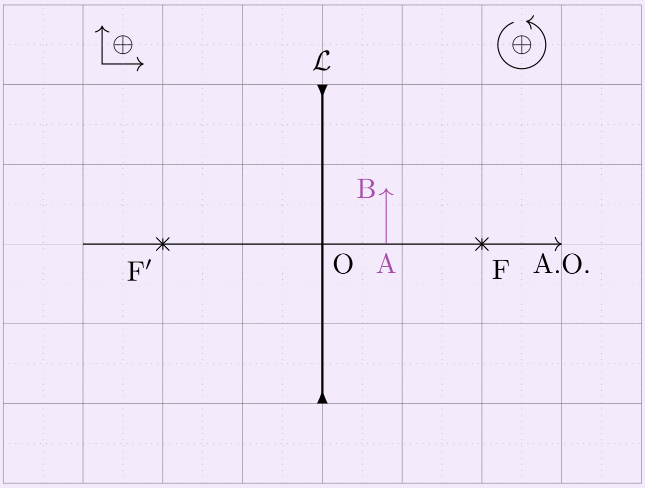


Figure 3.11 – Divergente après

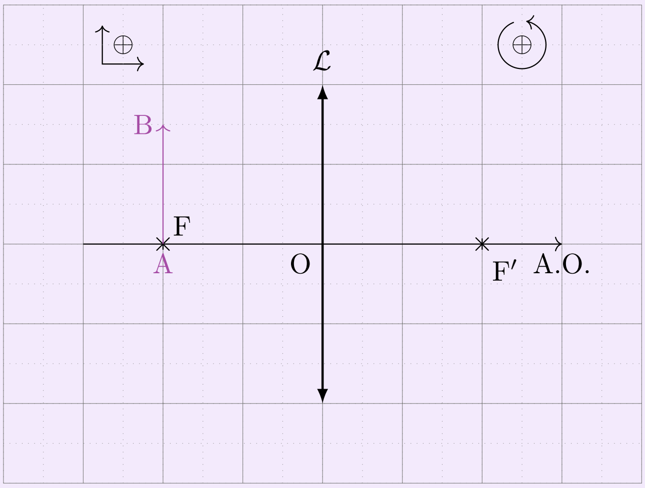


Figure 3.12 – Convergente F

II.C.3 Règles secondaires

Important 3.4 : règles secondaires

Avec la propriété des foyers secondaires, on a deux règles de construction supplémentaires :

4) Deux rayons incidents parallèles entre eux émergent en se croisant dans le plan focal image ;

5) Deux rayons incidents se croisant dans le plan focal objet émergent parallèles entre eux.

Exemple 3.5 : cas simple

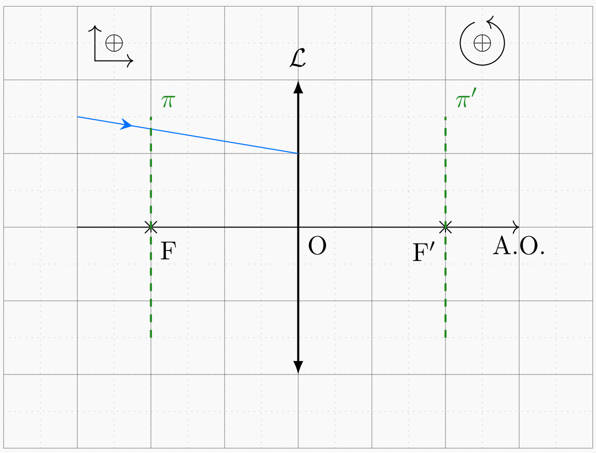


Figure 3.13 – Utilisation des règles secondaires

D Corrigé des tracés

Exemple 3.6 : Cas simple

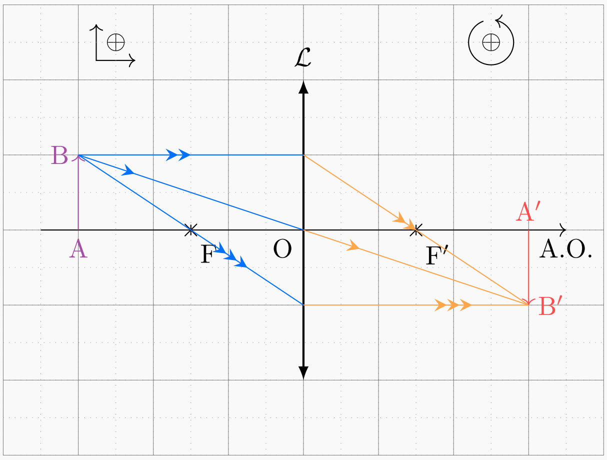


Figure 3.14 – Utilisation des règles primaires

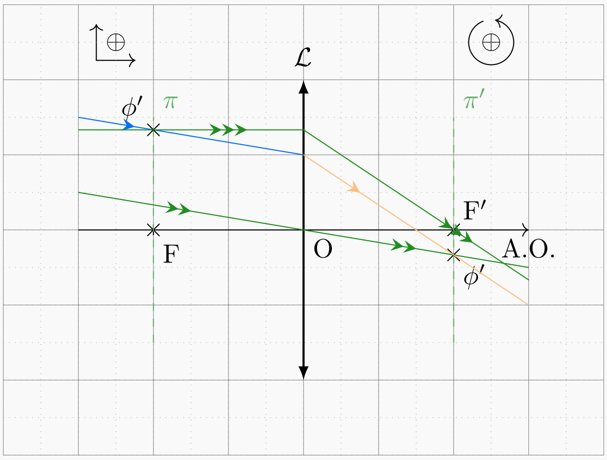


Figure 3.15 – Utilisation des règles secondaires

Important 3.2 : exemples de situations à compléter

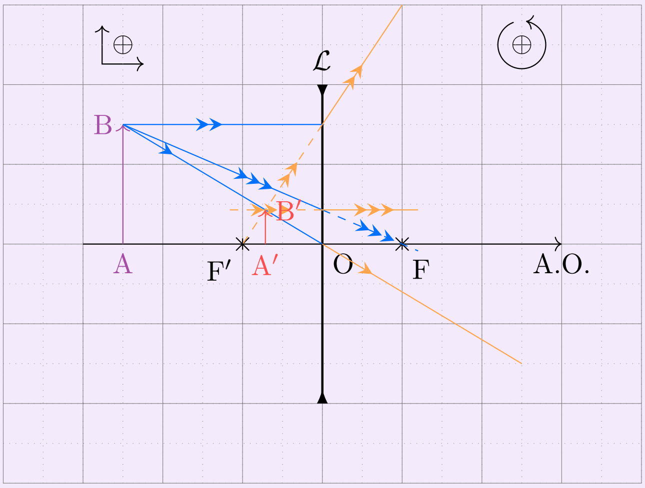


Figure 3.16 – Divergente simple

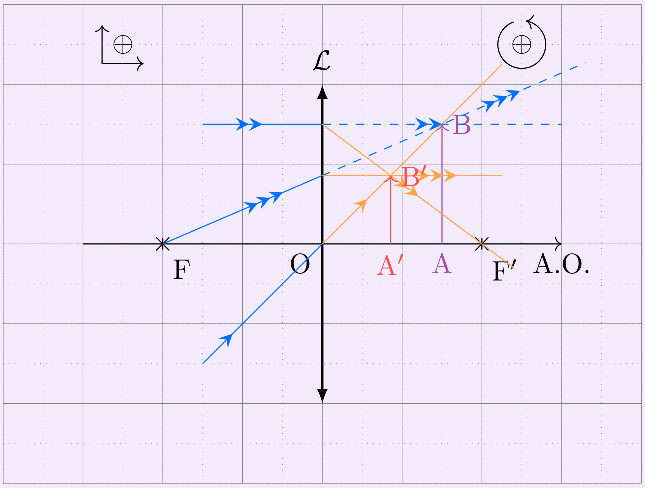


Figure 3.17 – Convergente après

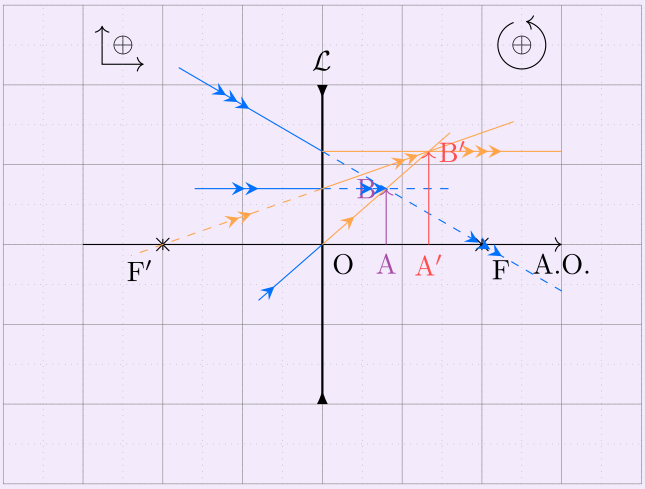


Figure 3.18 – Divergente après

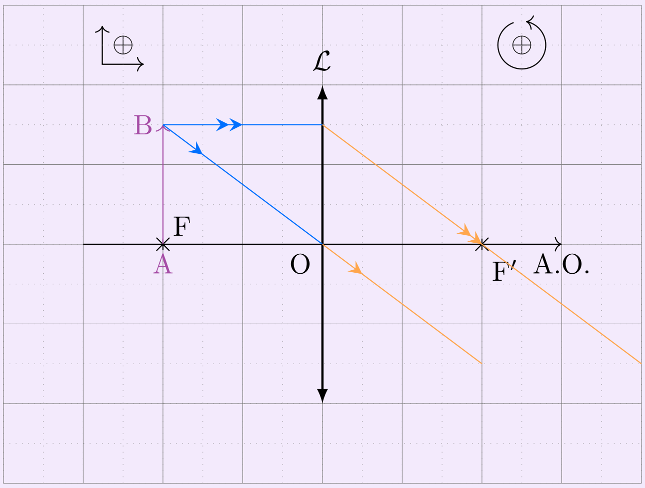


Figure 3.19 – Convergente F

E Relations de conjugaisons

Propriété 3.4 : relations de conjugaison

Soit $\mathcal{L}$ une lentille de centre optique O et de foyers F et F', réalisant l'image A' d'un objet A. On écrit

$$\boxed{A \xrightarrow[O]{\mathcal{L}} A'}$$

et on a

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}}$$

Relation de conjugaison de Descartes, avec origine au centre.

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{OF'} \times \overline{OF} &= \overline{F'A'}\,\overline{FA} \\ \Leftrightarrow -f'^2 &= \overline{F'A'}\,\overline{FA} \end{aligned}}$$

Relation de conjugaison de Newton, avec origine aux foyers

F Grandissement transversal

Corollaire 3.1 : γ lentille mince

À partir de la définition du grandissement transversal $\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}}$, on peut définir

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}}}$$

$$\boxed{\gamma = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}}}$$

G Complément : démonstrations des relations

Démonstration 3.2 : relations de conjugaison et grandissement

Soit $\mathcal{L}$ telle que $AB \xrightarrow[O]{\mathcal{L}} A'B'$. On a la figure ci-contre.
Pour trouver la relation de conjugaison, nous utilisons les triangles OAB et $OA'B'$ pour lesquels nous utilisons le théorème de Thalès. Nous avons directement la formule du grandissement de Descartes :

$$\boxed{\frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{OA'}}{\overline{OA}} = \gamma}$$

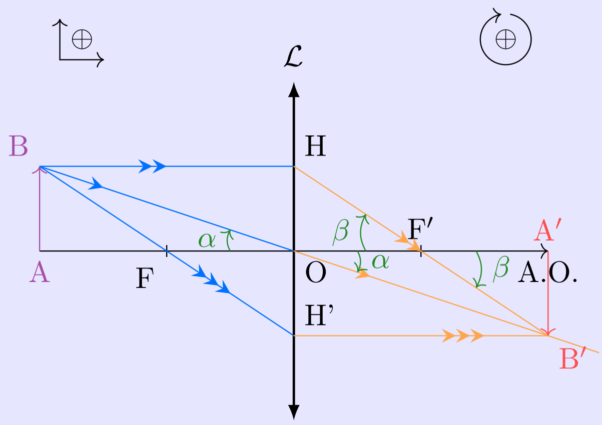


Figure 3.20 – Schéma de notations

Nous définissons ensuite le point H projeté orthogonal de B sur la lentille, et le point H' projeté orthogonal de B' sur la lentille.

En utilisant le théorème de Thalès dans les triangles $F'OH$ et $F'A'B'$ et en remarquant que $\overline{OH} = \overline{AB}$, on a cette fois

$$\frac{\overline{A'B'}}{\overline{OH}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{F'A'}}{\overline{F'O}} \Leftrightarrow \boxed{\gamma = -\frac{\overline{F'A'}}{\overline{OF'}}}$$

Et en utilisant les triangles FAB et FOH'

$$\frac{\overline{OH'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{A'B'}}{\overline{AB}} = \frac{\overline{FO}}{\overline{FA}} \Leftrightarrow \boxed{\gamma = -\frac{\overline{OF}}{\overline{FA}}}$$

En les combinant on obtient élémentairement

$$\boxed{\begin{aligned} \overline{OF'} \times \overline{OF} &= \overline{F'A'}\,\overline{FA} \\ \Leftrightarrow -f'^2 &= \overline{F'A'}\,\overline{FA} \end{aligned}}$$

En y injectant les décompositions

$$\overline{F'A'} = \overline{F'O} + \overline{OA'} \quad \text{et} \quad \overline{FA} = \overline{FO} + \overline{OA}$$

et après développement, on obtient

$$\overline{OF'}\,\overline{OA'} - \overline{OF'}\,\overline{OA} + \overline{OA}\,\overline{OA'} = 0 \iff \boxed{\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}}$$

par division par $\overline{OF'}\,\overline{OA}\,\overline{OA'}$.

III Quelques applications

A Condition de netteté

Soit $AB \xrightarrow[O]{\mathcal{L}} A'B'$ avec $\mathcal{L}$ convergente projetant sur un écran. On appelle x la distance $\left|\overline{OA}\right|$ et D la distance fixe AA'. Quelle est la contrainte sur le choix de lentille pour que $A'B'$ soit nette ?

Données

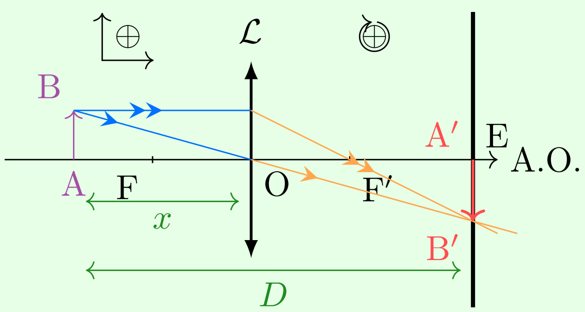


Figure 3.21 – Schéma de situation

Résultat attendu

L'image est nette si la lentille forme l'image sur l'écran. Avec D fixe, on cherche une équation avec x.

Outils

Relation de Descartes

$$\boxed{\frac{1}{\overline{OF'}} = \frac{1}{\overline{OA'}} - \frac{1}{\overline{OA}}}$$

et $\overline{OA} = -x$, $\overline{OA'} = D - x$.

Application

Avec les notations de l'énoncé, la relation de Descartes devient

$$\begin{aligned} \frac{1}{f'} &= \frac{1}{D-x} - \frac{1}{-x} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{f'} &= \frac{x+D-x}{x(D-x)} \\ \Leftrightarrow f' &= \frac{x(D-x)}{D} \\ \Leftrightarrow 0 &= x^2 - xD + f'D \end{aligned}$$

Ce trinôme du second degré a pour discriminant $\Delta = D^2 - 4f'D = D(D-4f')$. x étant une distance physique, on cherche $\Delta \geq 0$.

- $\Delta = 0$ si $D = 4f'$, et alors

$$\boxed{x = \frac{D}{2}}$$

- $\Delta > 0$ si $D > 4f'$, et alors

$$\boxed{x_{\pm} = \frac{D \pm \sqrt{D(D-4f')}}{2}}$$

Ainsi, la zone de netteté de l'image se situe entre x_+ et x_-, et a donc une largeur $d = x_+ - x_- = \sqrt{D(D-4f')}$.

B Champ de vision à travers un miroir plan

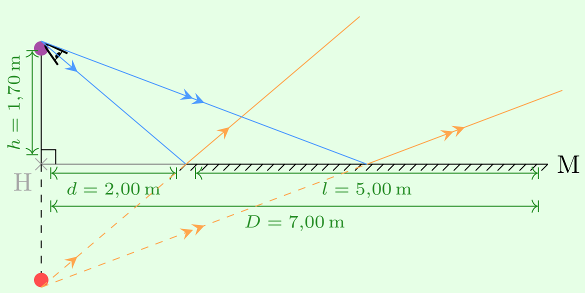
Une personne dont les yeux se situent à $h = 1{,}70\,\text{m}$ du sol observe une mare gelée (équivalente à un miroir plan) de largeur $l = 5{,}00\,\text{m}$ et située à $d = 2{,}00\,\text{m}$ d'elle.

1) Peut-elle voir sa propre image ? Quelle est la nature de l'image ?

2) Quelle est la hauteur maximale H d'un arbre situé de l'autre côté de la mare (en bordure de mare) qu'elle peut voir par réflexion dans la mare ? On notera $D = l + d$.

III.B.1 Propre image

Schéma



Outil

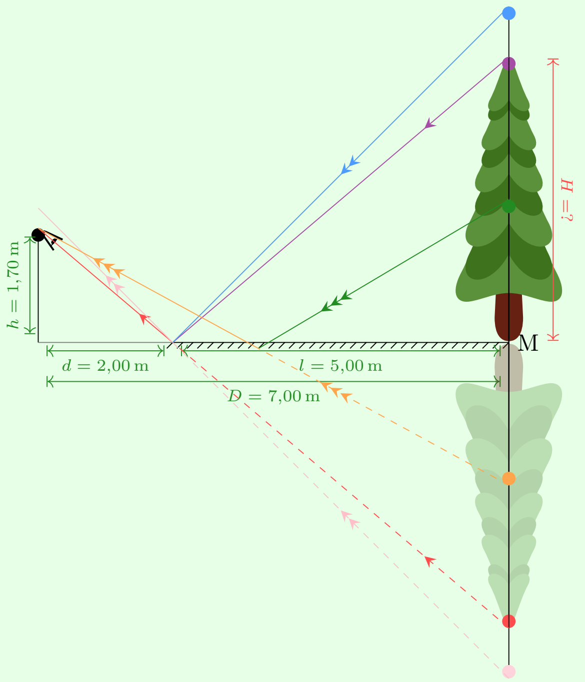
Pour voir une image, il faut qu'un rayon partant de l'image puisse arriver jusqu'à l'œil de l'observataire. Étant donné qu'on travaille avec un miroir, l'image de l'observataire est son symétrique par le plan du miroir (même si le miroir ne s'étend pas jusque-là !).

Application

On voit vite qu'il n'est pas possible qu'un rayon issu de l'image (en rouge) atteigne l'œil (en violet). On comprend par le tracé des rayons réfléchis que seul l'autre côté du lac sera visible.

III.B.2 Image arbre

Schéma



Outil

Ici aussi, l'idée est de trouver l'image de l'arbre, et de voir la condition limite pour la taille visible.

Application

Un schéma avec l'image de l'arbre nous permet de voir que le point le plus haut qu'on peut voir par réflexion sur le lac est quand on regarde proche de nous : si on regarde plus loin, on voit en effet plus vers le bas de l'arbre (rayon vert incident, rayon orange émergent). Un arbre qui est trop grand ne sera pas visible en regardant ce point-là (rayon bleu incident, rose émergent). On s'intéresse donc à la construction géométrique formée par le rayon violet incident, rouge émergent, qui nous permet d'appliquer le théorème de Thalès : $\dfrac{H}{l} = \dfrac{h}{d}$, soit

$$\boxed{H = \frac{l \times h}{d}} \quad \text{avec} \quad \left\{ \begin{array}{lcl} l & = & 5{,}00\,\mathrm{m} \\ h & = & 1{,}70\,\mathrm{m} \\ d & = & 2{,}00\,\mathrm{m} \end{array} \right.$$

D'où

$$\boxed{H = 4{,}25\,\mathrm{m}}$$