

EXERCICE 1 : Étude de la cinétique de l'hydrolyse d'un complexe du fer : (D'après e3a PC 2022) (27 pts)

Q1. Il est préférable de travailler à la longueur d'onde correspondant au maximum d'absorption : On choisira donc $\lambda \approx 520 \text{ nm}$.

Q2. L'acide fort HCl accélère la réaction sans intervenir dans l'équation bilan, c'est donc un catalyseur.

Q3. On nous donne $v = k \cdot [H_2O]^\alpha \cdot [H^+]^\beta \cdot [Fe(Phen)_3]^{2+}]^\gamma$ (1)

Or, il est précisé que $[H^+]_0 = 2 \text{ mol} \cdot L^{-1}$ et que l'eau est le solvant.

De plus, on nous donne : $[Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

Ainsi, $[H_2O]_0 \gg [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0$ et $[H^+]_0 \gg [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0$: Il y a dégénérescence de l'ordre et la vitesse de la réaction peut s'écrire sous la forme :

$$v = k_{app} [Fe(Phen)_3]^{2+}]^\gamma \text{ avec } k_{app} = k[H_2O]^\alpha [H^+]^\beta$$

Q4. D'après la définition de la vitesse, on sait que $v = -\frac{d[Fe(Phen)_3]^{2+}]}{dt} = k_{app} [Fe(Phen)_3]^{2+}]^\gamma$

Supposons que $\gamma = 1$, comme le propose l'énoncé :

Alors on obtient l'équation différentielle d'ordre 1 : $\frac{d[Fe(Phen)_3]^{2+}]}{dt} + k_{app} [Fe(Phen)_3]^{2+}] = 0$.

Alors on sait que la solution est de la forme : $[Fe(Phen)_3]^{2+}] = Cste e^{-k_{app} t}$.

CI : A $t = 0$, $[Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 = [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 = cste = 2,6 \cdot 10^{-4} \text{ mol} \cdot L^{-1}$.

Soit : $[Fe(Phen)_3]^{2+}] = [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0 e^{-k_{app} t}$

Q5. Ou encore : $\ln([Fe(Phen)_3]^{2+}]) = \ln([Fe(Phen)_3]^{2+}]_0) - k_{app} t$.

Il faut encore relier $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$ et absorbance.

Seule l'espèce $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$ absorbe, donc :

Loi de Beer-Lambert : $A = \varepsilon(\lambda) l [Fe(Phen)_3]^{2+}]$ et $A_0 = \varepsilon(\lambda) l [Fe(Phen)_3]^{2+}]_0$

Ainsi l'équation précédente devient : $\ln \frac{A}{\varepsilon(\lambda) l} = \ln \frac{A_0}{\varepsilon(\lambda) l} - k_{app} t$

En simplifiant à gauche et à droite par $-\ln(\varepsilon(\lambda) l)$, il vient : $\ln(A) = \ln(A_0) - k_{app} \times t$;

Où A_0 est l'absorbance de la solution à $t = 0$.

On fait donc la régression linéaire de $\ln(A)$ en fonction du temps t sous la forme : $y = ax + b$.

On obtient : $a = -0,038$ (en laissant le temps t en min)

$$b = 0,024$$

$$\text{Et } r = -0,99924$$

La valeur du coefficient de corrélation $|r| > 0,999$ permet de conclure que les points sont bien alignés ce qui valide que la cinétique est d'ordre 1 par rapport à $[Fe(Phen)_3]^{2+}]$, donc que $\gamma = 1$.

Et par indentification, on obtient $k_{app} = -a = 0,038 \text{ min}^{-1} = \frac{0,038}{60} = 6,3 \cdot 10^{-4} \text{ s}^{-1}$.

Q6. D'après la loi d'Arrhenius : $k_{app} = B e^{-\frac{E_a}{RT}}$ ou $\ln(k_{app}) = \ln(B) - \frac{E_a}{RT}$.

On fait donc la régression linéaire de $\ln(k_{app})$ en fonction de $\frac{1}{T}$ sous la forme : $y = a'x + b'$.

On obtient : $a' = -14974 \approx -1,5 \cdot 10^4$

$$b' = 40,5$$

$$\text{Et } r' = -0,9995.$$

La valeur du coefficient de corrélation $|r| > 0,999$ permet de conclure que les points sont bien alignés, donc que la loi d'Arrhenius est bien vérifiée.

Et par indentification, on obtient $a' = -\frac{E_a}{R}$; soit : $E_a = -R a'$:

AN : $E_a = -8,31 \times (-1,5 \cdot 10^4)$; On obtient donc : $E_a \approx 124,6 \text{ kJ} \cdot \text{mol}^{-1}$.

EXERCICE 2 : Étude d'un réseau en régime sinusoïdal forcé : (D'après ENAC 2022)

(≈ 32 pts)

Q1. Les impédances \underline{Z}_C , \underline{Z}_L et \underline{Z}_R sont en série.

Un pont diviseur de tension permet d'écrire :

$$\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R + r_L}$$

Soit $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jC(R+r_L)\omega} = \frac{1}{1 - LC\omega_0^2 \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + jC(R+r_L)\frac{\omega}{\omega_0} \frac{\omega_0}{\omega_0}}$

En posant $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$ ou $LC\omega_0^2 = 1$ et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$,

on peut écrire cette expression sous la forme :

$$\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{1}{1 - 1 \times x^2 + jC\omega_0(R+r_L)x}; \text{ Ou encore : } \frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{1}{1 - x^2 + jC\omega_0(R+r_L)x}$$

Par identification avec $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$. On en déduit que $H_0 = 1$.

Réponses A et D.

Q2. Enfin, par identification, on a aussi $C\omega_0(R+r_L) = \frac{1}{Q}$; Soit : $Q = \frac{1}{C\omega_0(R+r_L)} = \frac{L\omega_0}{(R+r_L)} = \frac{1}{(R+r_L)}\sqrt{\frac{L}{C}}$.

Réponse B.

Q3. On se place en $\omega = \omega_0$.

Exprimons \underline{Z}_{eq} équivalent à l'association série de la bobine, du condensateur et de la résistance R .

$$\text{Alors } \underline{Z}_{eq} = R + r_L + jL\omega + \frac{1}{jC\omega} = R + r_L + jL\omega - j\frac{1}{C\omega}$$

Or en $\omega = \omega_0$, comme $LC\omega_0^2 = 1$, il vient que : $L\omega_0 = \frac{1}{C\omega_0}$; Ainsi $jL\omega_0 - j\frac{1}{C\omega_0} = 0$.

Et $\underline{Z}_{eq} = r_L + R$.

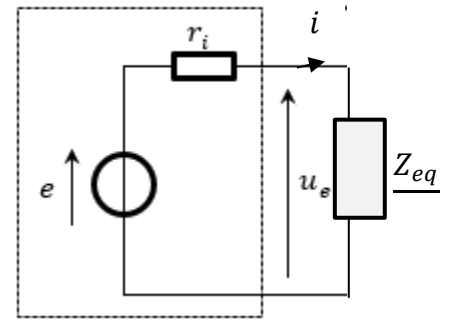
On a alors le circuit équivalent ci-contre :

On remarque que \underline{Z}_{eq} et r_i son en série.

$$\text{Pont diviseur de tension : } \frac{\underline{u}_{e,m}}{e_m} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + r_i}$$

$$\text{Ainsi : } \frac{\underline{u}_{e,m}}{e_m} = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i} \text{ ou } \underline{u}_{e,m} = \frac{R+r_L}{R+r_L+r_i} e_m$$

Réponse C.



Q4. D'après le schéma équivalent ci-dessus : $e_m = (\underline{Z}_{eq} + r_i)\underline{i}_m$.

Avec $\underline{Z}_{eq} = r_L + R$; Or $e_m = e_m$, ainsi : $\underline{i}_m = \frac{e_m}{R+r_L+r_i}$.

D'autre part, en reprenant : $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{x}{Q} - x^2}$ et comme $\omega = \omega_0$ alors $x = 1$.

Ainsi : $\frac{\underline{u}_{C,m}}{\underline{u}_{e,m}} = \frac{H_0}{1 + j\frac{1}{Q} - 1} = -jQH_0$; D'où $\underline{u}_{C,m} = -jQH_0\underline{u}_{e,m}$; enfin $\underline{u}_{e,m} \neq e_m$

Réponses B et C.

Q5. Par définition de l'impédance, $\underline{u}_{L,m} = (jL\omega_0 + r_L)\underline{i}_m = (jL\omega_0 + r_L)\frac{e_m}{R+r_L+r_i} = \left(\frac{r_L}{R+r_L+r_i} + j\frac{L\omega_0}{R+r_L+r_i}\right)e_m$:

Par identification avec $\underline{u}_{L,m} = (a + jb)e_m$: On obtient : $a = \frac{r_L}{R+r_L+r_i}$:

Réponse A.

Q6. On identifie également $b = \frac{L\omega_0}{R+r_L+r_i}$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$; il vient : $L\omega_0 = \sqrt{\frac{L}{C}}$

$$\text{Ainsi : } b = \frac{1}{R+r_L+r_i}\sqrt{\frac{L}{C}}$$

Réponse C.

PROBLEME 1 : Modélisation d'un double vitrage :

(≈ 63 pts)

(D'après EPITA – IPSA MP, PSI, PC 2022).

I – Présentation de l'isolation acoustique :

Q1. Les fréquences audibles sont situées entre **20 Hz et 20 kHz**.

II – Étude du régime forcé d'un double vitrage :

Q2. Il s'agit de la **même baisse que pour le vitrage simple** ; Il y a toujours la **fréquence critique**.

Q3. Force de rappel du ressort sur la masse 2 ou force de Hooke :

$\vec{F} = -k(l(t) - l_0)\vec{e}_x = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$, car $l(t) = x_2 - x_1$ et si $l(t) > l_0$, \vec{F} est orienté vers la gauche.

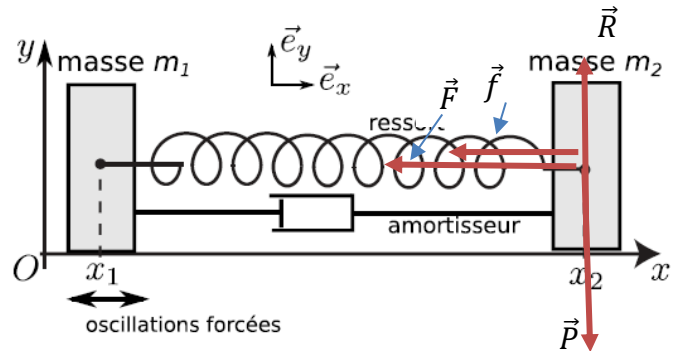
Q4. Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, z)$ supposé galiléen.

Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires \vec{e}_x et \vec{e}_y .

Système : la vitre de masse m_2 .

Bilan des forces :

- Poids : $\vec{P} = m_2 \vec{g} = -m_2 g \vec{e}_y$.
- Réaction du support : $\vec{R} = R \vec{e}_y$; \vec{R} est orthogonale au déplacement car mvt sans frottements sur le support.
- Force de rappel du ressort ou force de Hooke : $\vec{F} = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$.
- Force de frottement fluide (donnée par l'énoncé) : $\vec{f} = -\alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1)\vec{e}_x$



2ème loi de Newton (principe fondamental de la dynamique):

- $\sum \vec{F} = m\vec{a} = m\frac{d\vec{v}}{dt}$, d'où $\vec{P} + \vec{R} + \vec{F} + \vec{f} = m_2 \vec{a}$ avec $\vec{a} = \ddot{x}_2 \vec{e}_x$ car le mvt se fait sur Ox .
- Projétons sur les 2 axes :

$$\text{Sur } \vec{e}_y : R - m_2 g = 0. \quad (2) \quad (\text{pas de mvt sur } Oy).$$

$$\text{Sur } \vec{e}_x : m_2 \ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0) - \alpha(\dot{x}_2 - \dot{x}_1) \quad (1)$$

D'où l'équation différentielle en $x_2(t)$: $m_2 \ddot{x}_2 + \alpha \dot{x}_2 + k x_2 = \alpha \dot{x}_1 + k(x_1 + l_0)$;

Sous forme canonique : $\ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{k}{m_2} x_2(t) = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k l_0}{m_2} + \frac{k x_1}{m_2}$.

Q5. On pose $u_2(t) = x_2(t) - l_0$ alors $\ddot{u}_2 = \ddot{x}_2$ et $\dot{u}_2 = \dot{x}_2$.

L'équation précédente s'écrit alors : $\ddot{x}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_2 + \frac{k}{m_2} (x_2(t) - l_0) = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k x_1}{m_2}$.

D'où l'équation différentielle en $u_2(t)$: $\ddot{u}_2 + \frac{\alpha}{m_2} \dot{u}_2 + \frac{k}{m_2} u_2(t) = \frac{\alpha}{m_2} \dot{x}_1 + \frac{k x_1}{m_2}$.

De la forme : $\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2(t) = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1(t)$

avec $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m_2}}$: **pulsation propre** de l'oscillateur : pulsation des oscillations sans frottement.

Et Q le **facteur de qualité** est tel que : $\frac{\omega_0}{Q} = \frac{\alpha}{m_2}$; D'où $Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} = \frac{m}{\alpha} \sqrt{\frac{k}{m_2}}$; Soit : $Q = \frac{\sqrt{km_2}}{\alpha}$.

Q6. Passage aux complexes : $\ddot{u}_2 + \frac{\omega_0}{Q} \dot{u}_2 + \omega_0^2 u_2 = \frac{\omega_0}{Q} \dot{x}_1 + \omega_0^2 x_1$.

De plus, une dérivation par rapport au temps correspond à une multiplication par $(j\omega)$ et une dérivée seconde à une multiplication par $(-\omega^2)$.

L'équation précédente devient donc : $(-\omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{u}_2 = (j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{x}_1$.

On nous donne : $\underline{u}_2(t) = \underline{U}_0 e^{j\omega t}$ et on pose : $\underline{x}_1 = \underline{X}_1 e^{j\omega t}$.

Il vient donc : $(\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}) \underline{U}_0 = (j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2) \underline{X}_1$

Q6 (suite). Alors $\underline{H}(j\omega) = \frac{u_2}{x_1} = \frac{U_0}{X_1}$; D'où : $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}}$.

On pose : $x = \frac{\omega}{\omega_0}$; Alors : $\underline{H}(j\omega) = \frac{j\omega \frac{\omega_0}{Q} + \omega_0^2}{\omega_0^2 - \omega^2 + j\omega \frac{\omega_0}{Q}} = \frac{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}{\frac{\omega_0^2}{\omega_0^2} - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + j\frac{\omega}{\omega_0} \frac{1}{Q}}$ en divisant numérateur et dénominateur par ω_0^2 . Ainsi : $\underline{H}(jx) = \frac{1+j\frac{x}{Q}}{1-x^2+j\frac{x}{Q}}$. Par identification, $\sigma = 1$.

Q7. Alors $G(x) = |\underline{H}(jx)| = \frac{\sqrt{1+\frac{x^2}{Q^2}}}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}}}$.

Q8. Au maximum de la courbe, on parle de **phénomène de résonance**.

Q9. D'après l'énoncé, on peut considérer que le numérateur est constant, ainsi on ne s'intéresse qu'au dénominateur.

Ainsi, on pose $D(x) = (1 - x^2)^2 + \frac{x^2}{Q^2}$.

$G(x)$ passe par un max, quand le dénominateur est minimum, donc quand $\frac{dD}{dx} = 0$.

Or $\frac{dD}{dx} = 2(1 - x^2)(-2x) + \frac{2x}{Q^2} = 2x \left[\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2 \right]$.

Alors $\frac{dD}{dx} = 0$ pour $\frac{1}{Q^2} - 2 + 2x_r^2 = 0$; La valeur $x = 0$ correspond à la tangente horizontale en $x = 0$.

Alors $2x_r^2 = 2 - \frac{1}{Q^2}$; Soit $x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} > 0$;

(L'autre valeur de x_r serait négative ce qui est impossible pour un rapport de pulsations).

On remarque ainsi que x_r n'existe que si la quantité sous la racine est positive, donc si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$

Alors $\frac{1}{2Q^2} < 1$; Ou encore : $2Q^2 > 1$; Ainsi $Q > \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0,7$.

Conclusion : Cela correspond bien au graphe de la figure 3 qui présente un **maximum pour $Q = 1,5$ et pour $Q = 5$, mais pas de maximum pour $Q = 0,5$** .

Q10. Si $Q \gg 1$, $x_r \approx 1$ (Cohérent avec le graphe).

III - Détermination plus fine de la fréquence de résonance :

Q11. Pour chaque masse, on a poids et réaction du support qui sont des forces verticales.

A l'horizontal, il reste la force de Hooke pour m_1 :

$\vec{F}_1 = +k(l - l_0)\vec{e}_x$, car qd $l > l_0$, la force est bien vers la droite.

Soit : $\vec{F}_1 = +k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$.

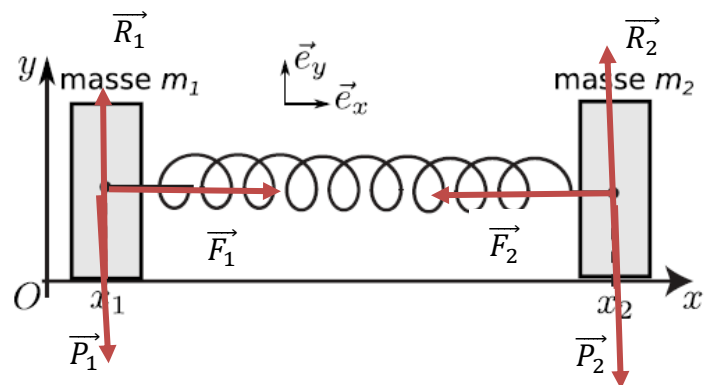
La 2^{ème} loi de Newton (pour m_1) projetée sur \vec{e}_x , conduit à : $m_1\ddot{x}_1 = +k(x_2 - x_1 - l_0)$;

Soit sous forme canonique : $\ddot{x}_1 + \frac{k}{m_1}x_1 = \frac{k}{m_1}x_2 - \frac{k}{m_1}l_0$ (équation (3))

De même sur m_2 : $\vec{F}_2 = -k(l - l_0)\vec{e}_x$, car qd $l > l_0$, la force est bien vers la gauche.

Soit : $\vec{F}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)\vec{e}_x$; Et l'équation du mouvement de m_2 s'écrit :

$m_2\ddot{x}_2 = -k(x_2 - x_1 - l_0)$; Soit sous forme canonique : $\ddot{x}_2 + \frac{k}{m_2}x_2 = \frac{k}{m_2}x_1 + \frac{k}{m_2}l_0$ (équation (4))



Q12. On nous donne : $l(t) = x_2(t) - x_1(t)$.

Alors $\ddot{l} = \ddot{x}_2 - \ddot{x}_1$. En faisant (4) - (3), on obtient : $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + \frac{k}{m_2}x_2 - \frac{k}{m_1}x_1 = \frac{k}{m_2}x_1 - \frac{k}{m_1}x_2 + \frac{k}{m_2}l_0 + \frac{k}{m_1}l_0$

Ainsi : $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + x_2 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) - x_1 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) = l_0 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)$

Ou encore : $\ddot{x}_2 - \ddot{x}_1 + (x_2 - x_1) \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) = l_0 \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)$.

Ainsi, on obtient : $\boxed{\ddot{l} + \left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right) l(t) = kl_0 \left(\frac{1}{m_1} + \frac{1}{m_2} \right)}$.

Par identification avec $\ddot{l} + \omega_0'^2 l(t) = cste$, on obtient : $\boxed{\omega_0' = \sqrt{\left(\frac{k}{m_1} + \frac{k}{m_2} \right)}}$.

Q13. Il faut donc résoudre cette équation différentielle :

La solution est la somme de :

- La solution homogène : $l_h(t) = A \cos(\omega_0' t) + B \sin(\omega_0' t)$.
- La solution particulière constante : $l_p = l_0$.

D'où $l(t) = A \cos(\omega_0' t) + B \sin(\omega_0' t) + l_0$.

1^{ère} CI : A $t = 0$, $l(0) = l_0 - \delta = A + l_0$; Soit : $A = -\delta$.

De plus, $\dot{l}(t) = -A\omega_0' \sin(\omega_0' t) + B\omega_0' \cos(\omega_0' t)$.

2^{me} CI : A $t = 0$, $\dot{l}(0) = 0$ (pas de vitesse initiale).

D'où $B\omega_0' = 0$; Soit : $B = 0$.

Conclusion : $\boxed{l(t) = l_0 - \delta \cos(\omega_0' t)}$.

Q14. On nous donne $f_r = 84 \times \sqrt{\frac{1}{d} \left(\frac{1}{m_1'} + \frac{1}{m_2'} \right)}$

Pour envoyer le pic de résonance vers les basses fréquences, il faut **f_r faible** ;

Donc il faut **augmenter les masses des vitres** (qui se trouvent au dénominateur dans l'expression de f_r).

PROBLEME 2 : Modélisation du comportement thermique d'une habitation : (D'après EPITA -IPSA MP, PSI, PC 2022) (≈ 57 pts)

Q1. On nous donne $T = 24 \text{ h}$; Alors $\omega = \frac{2\pi}{T}$; $\underline{AN} : \omega = \frac{2\pi}{24 \times 3600}$; on obtient : $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$.

Q2. Il faut utiliser les équivalents basse fréquence et haute fréquence des condensateurs :

En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Le circuit devient ci-contre.

Toutes les intensités sont nulles.

Ainsi $\underline{u}_1 = \underline{e}$; Et $\underline{H} = 1$; D'où $\underline{G}_{dB} \xrightarrow[\text{BF}]{} 0$;

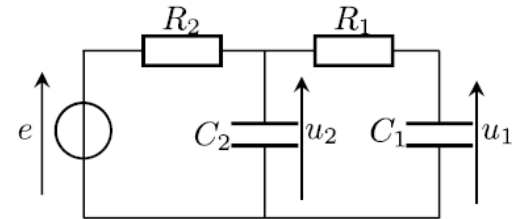
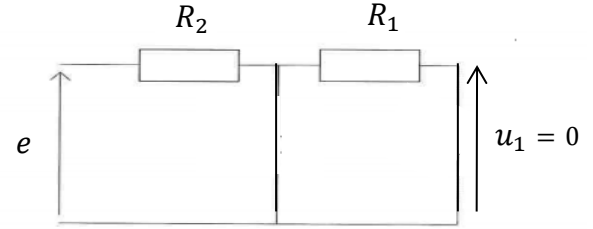
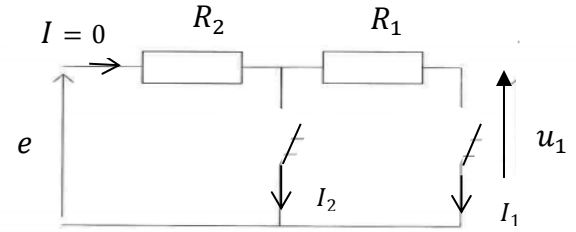
En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre.

\underline{u}_1 est la tension aux bornes d'un fil ;

Ainsi $\underline{u}_1 = 0$; Et $\underline{H} = 0$. D'où $\underline{G}_{dB} \xrightarrow[\text{HF}]{} -\infty$;

L'allure globale sera donc
D'où un **filtre passe bas attendu**.



Q3. R_1 et C_1 sont en série. Cette association est en parallèle sur C_2 .

D'où : $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_{C2}(\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1})}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{C2} + \underline{Z}_{R1}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}(\frac{1}{jC_1\omega} + R_1)}{\frac{1}{jC_1\omega} + \frac{1}{jC_2\omega} + R_1} = \frac{\frac{1}{jC_1\omega} + R_1}{1 + \frac{C_2}{C_1} + jR_1C_2\omega}$;

Ou encore : $\underline{Z}_{eq} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{jC_1\omega + jC_2\omega - R_1C_1C_2\omega^2} = \frac{1 + jR_1C_1\omega}{j\omega(C_1 + C_2) - R_1C_1C_2\omega^2}$.

Q4. Pour deux impédances \underline{Z}_1 et \underline{Z}_2 en dérivation.

Alors $\underline{Z}_{eq} = \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}$; Et si $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$, alors $\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2 \approx \underline{Z}_1$.

D'où $\underline{Z}_{eq} \approx \frac{\underline{Z}_1 \times \underline{Z}_2}{\underline{Z}_1}$; Ainsi $\underline{Z}_{eq} \approx \underline{Z}_2$.

Autre méthode : Pour une association parallèle, on a : $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \frac{1}{\underline{Z}_1} + \frac{1}{\underline{Z}_2}$.

Or si $|\underline{Z}_1| \gg |\underline{Z}_2|$, alors $\frac{1}{\underline{Z}_1} \ll \frac{1}{\underline{Z}_2}$; Ainsi $\frac{1}{\underline{Z}_{eq}} \approx \frac{1}{\underline{Z}_2}$; Et $\underline{Z}_{eq} \approx \underline{Z}_2$.

Q5. On nous donne $\underline{Z}_{eq} \approx \frac{1}{jC_2\omega}$. On cherche $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}}$;

A la sortie, R_1 et C_1 sont en série. On peut utiliser un pont diviseur de tensions :

$\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{\underline{Z}_{C1}}{\underline{Z}_{C1} + \underline{Z}_{R1}} = \frac{\frac{1}{jC_1\omega}}{R_1 + \frac{1}{jC_1\omega}}$; Soit $\frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega}$.

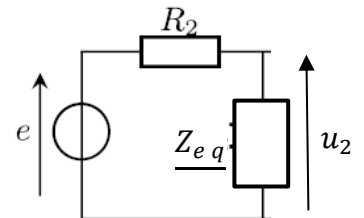
Puis, on utilise $\underline{Z}_{eq} : \underline{Z}_{eq}$ est en série avec R_2 . On peut utiliser un pont diviseur

de tensions : $\frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{eq}}{\underline{Z}_{eq} + \underline{Z}_{R2}} = \frac{\frac{1}{jC_2\omega}}{R_2 + \frac{1}{jC_2\omega}}$; Soit $\frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Enfin, $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{u}_2} \times \frac{\underline{u}_2}{\underline{e}} = \frac{1}{1 + jR_1C_1\omega} \times \frac{1}{1 + jR_2C_2\omega}$.

Soit : $\underline{H} = \frac{\underline{u}_1}{\underline{e}} = \frac{1}{(1 + jR_1C_1\omega)(1 + jR_2C_2\omega)} = \frac{1}{1 + j(R_1C_1 + R_2C_2)\omega - R_1C_1R_2C_2\omega^2}$

De la forme : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{(1 + j\frac{\omega}{\omega_1})(1 + j\frac{\omega}{\omega_2})}$ avec $\omega_1 = \frac{1}{R_1C_1}$ et $\omega_2 = \frac{1}{R_2C_2}$



Q6. Étude asymptotique : $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2} + j \left(\frac{\omega}{\omega_1} + \frac{\omega}{\omega_2} \right)}$.

✓ En BF : Si $\omega \ll \omega_i$: $\underline{H} \sim 1$
 Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(1) = 0$
Asymptote horizontale en 0 en BF.
 Et $\varphi \rightarrow 0$.

✓ En HF : Si $\omega \gg \omega_i$: $\underline{H} \sim -\frac{1}{\frac{\omega^2}{\omega_1 \omega_2}} \sim -\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2}$ et $G \sim \frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2}$
 Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{\omega_1 \omega_2}{\omega^2}\right) = 20 \log(\omega_1 \omega_2) - 40 \log \omega$
Asymptote oblique de pente - 40 dB par décade en HF.
 Et $\varphi \rightarrow \pi$ ou $-\pi$; Or $\sin \varphi = -\frac{(R_1 C_1 + R_2 C_2) \omega}{|Den|} < 0$ donc $\varphi \rightarrow -\pi$.

Autre méthode : $\underline{H}(j\omega) = \underline{H}_1 \times \underline{H}_2$ avec $\underline{H}_1 = \frac{1}{(1+j\omega/\omega_1)}$ et $\underline{H}_2 = \frac{1}{(1+j\omega/\omega_2)}$.

Pour \underline{H}_1 et \underline{H}_2 , on reconnaît des fonctions de transfert de filtres passe-bas d'ordre 1.

Ainsi : $G(\omega) = G_1 G_2$; Donc $G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB}$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

Étude asymptotique de $\underline{H}_1(j\omega) = \frac{1}{1+j\frac{\omega}{\omega_1}}$: On reconnaît la fonction de transfert d'un filtre passe bas du 1^{er} ordre.

✓ En BF : Si $\omega \ll \omega_1$: $\underline{H}_1 \sim 1$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Donc } G_{1dB} \rightarrow 20 \log(1) = 0. \\ \text{Asymptote horizontale en BF.} \\ \text{Et } \varphi_1 \rightarrow 0. \end{array} \right.$

✓ En HF : Si $\omega \gg \omega_1$: $\underline{H}_1 \sim \frac{1}{j\frac{\omega}{\omega_1}} \sim -j \frac{\omega_1}{\omega}$ $\left\{ \begin{array}{l} \text{Donc } G_{1dB} \rightarrow 20 \log\left(\frac{\omega_1}{\omega}\right) = 20 \log(\omega_1) - 20 \log(\omega) : \\ \text{Asymptote oblique de pente - 20 dB par décade en HF.} \\ \text{Et } \varphi_1 \rightarrow -\frac{\pi}{2}. \end{array} \right.$

De même pour \underline{H}_2 ; En comme $G_{dB} = G_{1dB} + G_{2dB}$ et $\varphi = \varphi_1 + \varphi_2$

On retrouve bien les mêmes conclusions que par l'autre méthode.

Q7. $G_{dB} = 20 \log(|\underline{H}|) = 20 \log \left(\frac{1}{\sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_1}\right)^2} \sqrt{1 + \left(\frac{\omega}{\omega_2}\right)^2}} \right)$.

Q8. On nous précise que :

- Dans le cas d'une isolation par l'intérieur : $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$ et $\omega_2 \rightarrow \infty$.

Alors $\underline{H}(j\omega) \approx \underline{H}_1$ et $G_{dB} \approx G_{1dB}$: Pulsation de coupure en $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-6} \text{ rad.s}^{-1}$. ($G_{dB \text{ max}} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$).

Cela correspond donc au tracé en **trait plein**.

- Dans le cas d'une isolation par l'extérieur : $\omega_1 \rightarrow \infty$ et $\omega_2 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$. Même raisonnement.

Alors $\underline{H}(j\omega) \approx \underline{H}_2$ et $G_{dB} \approx G_{2dB}$: Pulsation de coupure en $\omega_1 = 2,5 \cdot 10^{-7} \text{ rad.s}^{-1}$. ($G_{dB \text{ max}} - 3 \text{ dB} = -3 \text{ dB}$).

Cela correspond donc au tracé en **traits pointillés**.

Q9. On considère le diagramme de Bode en trait plein.

On nous donne $E_0 = 10 \text{ V}$. On cherche U_1 à la pulsation $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$ (comme vu en Q1).

Graphiquement, on lit que pour $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, alors $G_{dB}(\text{trait plein}) = -30 \text{ dB} = 20 \log(G(x))$

Soit $\log(G(x)) = -\frac{30}{20} = -\frac{3}{2}$ et $G(x) = 10^{-\frac{3}{2}} \approx 0,032 = \frac{U_1}{E_0}$; Ainsi $U_1 \approx 0,032 E_0$.

AN : $U_1 \approx 0,32 \text{ V}$.

Q10. De même avec le diagramme de Bode en traits pointillés.

Graphiquement, on lit que pour $\omega \approx 7,3 \cdot 10^{-5} \text{ rad.s}^{-1}$, alors $G_{dB}(\text{traits pointillés}) = -50 \text{ dB} = 20 \log(G(x))$

Soit $\log(G(x)) = -\frac{50}{20} = -\frac{5}{2}$ et $G(x) = 10^{-\frac{5}{2}} \approx 0,0032 = \frac{U_1}{E_0}$; Ainsi $U_1 \approx 0,0032 E_0$.

AN : $U_1 \approx 0,032 \text{ V}$.

Conclusion : Comme la tension $u_1(t)$ représente l'évolution de la température intérieure, on cherche à ce qu'elle varie le moins possible. Ainsi, **mieux vaut une isolation par l'extérieur.**

Q11. Puisque $\varphi_1 = -\frac{\pi}{2}$ à cette fréquence, **$u_1(t)$ est en retard par rapport à $e(t)$** , d'un quart de période,

En effet : $T \leftrightarrow 2\pi$

Et $t_0 \leftrightarrow \frac{\pi}{2}$; D'où $t_0 = \frac{T \times \frac{\pi}{2}}{2\pi}$. on obtient $\boxed{t_0 = \frac{T}{4}}$.

Or $T = 24 \text{ h}$ donc **$t_0 = 6 \text{ h}$** .

PROBLEME 3 : Traitement d'un signal :

(≈ 30 pts)

(D'après Centrale- Supélec MP 2022)

Q1. D'après l'énoncé, on souhaite un filtre qui coupe les fréquences supérieures à 1 Hz, il faut donc un filtre passe bas.

Filtre A :

En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

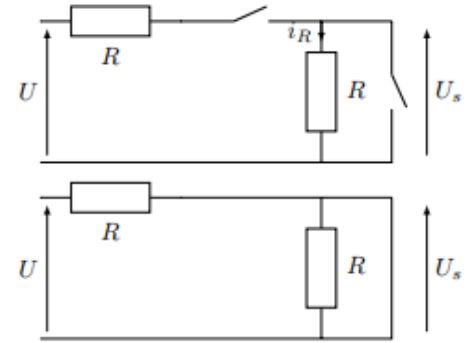
Le circuit devient ci-contre. $i_R = 0$; Alors $\underline{U_S} \approx 0$;

Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{BF} -\infty}$.

En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre. Alors $\underline{U_S} \approx 0$; Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{HF} -\infty}$.

Conclusion : Le filtre A est un filtre passe-bande.



Filtre B :

En BF, le condensateur est équivalent à un interrupteur ouvert.

Le circuit devient ci-contre. $i = 0$; Alors $\underline{U_S} \approx \underline{U}$;

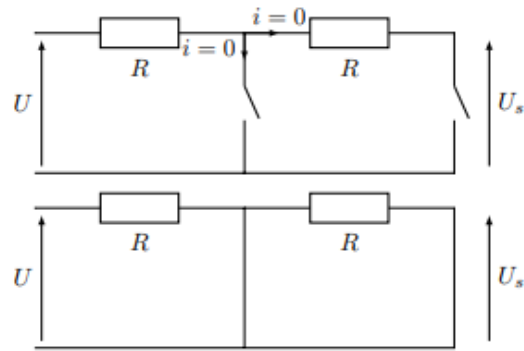
Ainsi $\underline{H} \approx 1$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{BF} 0}$.

En HF, le condensateur est équivalent à un interrupteur fermé.

Le circuit devient ci-contre. Alors $\underline{U_S} \approx 0$; Ainsi $\underline{H} \approx 0$ et $\boxed{G_{dB} \xrightarrow{HF} -\infty}$.

Conclusion : Le filtre B est un filtre passe-bas.

On choisit donc le filtre B.



Q2. On nous donne $\underline{H}(j\omega) = \frac{1}{1+3jRC\omega-R^2C^2\omega^2}$;

On veut couper des fréquences supérieures à 1 Hz.

Il faudrait donc un point d'intersection des asymptotes à une fréquence $f_0 \approx 0,1 \text{ Hz}$ (1 décade avant).

En posant $x = RC \omega$; Alors on obtient : $\boxed{\underline{H}(jx) = \frac{1}{1-x^2+3jx}}$

Etude asymptotique :

✓ BF : Si $x \ll 1$: $\underline{H} \sim 1$

Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(1) = 0$

Asymptote horizontale en 0 en BF.

✓ HF : Si $x \gg 1$: $\underline{H} \sim -\frac{1}{x^2}$ et $G \sim \frac{1}{x^2}$

Donc $G_{dB} \rightarrow 20 \log(\frac{1}{x^2}) = -40 \log x$

Asymptote oblique de pente - 40 dB par décade en HF.

✓ Intersection des asymptotes :

Pour $0 = -40 \log x$; Soit $\log(x) = 0$ et $x = 1$.

✓ D'où l'allure du diagramme de Bode asymptotique ci-contre.

Conclusion : Il faudrait donc $x_0 = RC \omega_0 = 1$;

Soit : $\omega_0 = \frac{1}{RC} = 2\pi f_0$; D'où : $\boxed{RC = \frac{1}{2\pi f_0}}$.

AN : $RC = \frac{1}{2\pi \times 0,1}$; on obtient : $\boxed{RC \approx 1,6 \text{ s}}$.

Avec les ordres de grandeurs usuels, on pourrait choisir

$C = 1 \mu\text{F}$ et $R = 1,6 \text{ M}\Omega$.

