

# Oscillateur amorti

## Sommaire

<b>I Introduction</b>	<b>3</b>
I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC	3
I/B Équation différentielle	4
I/C Équation caractéristique et régimes de solutions	4
<b>II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre</b>	<b>5</b>
II/A Présentation	5
II/B Bilan énergétique	5
II/C Équation différentielle du circuit	6
II/D Résolutions pour chaque cas	6
<b>III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides</b>	<b>12</b>
III/A Présentation	12
III/B Équation différentielle	13
III/C Bilan énergétique	13
III/D Solutions	14
<b>IV Résumé oscillateurs amortis</b>	<b>14</b>

## Capacités exigibles

- |   |   |
|---|---|
| <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Analyser, sur des relevés expérimentaux, l'évolution de la forme des régimes transitoires en fonction des paramètres caractéristiques.</li> <li><input type="checkbox"/> Prévoir l'évolution du système à partir de considérations énergétiques.</li> <li><input type="checkbox"/> Écrire sous forme canonique l'équation différentielle afin d'identifier la pulsation propre et le facteur de qualité.</li> <li><input type="checkbox"/> Décrire la nature de la réponse en fonction de la valeur du facteur de qualité.</li> </ul> | <ul style="list-style-type: none"> <li><input type="checkbox"/> Caractériser l'évolution en utilisant les notions d'amplitude, de phase, de période, de fréquence, de pulsation.</li> <li><input type="checkbox"/> Réaliser un bilan énergétique.</li> <li><input type="checkbox"/> Déterminer la réponse détaillée dans le cas d'un régime libre ou d'un système soumis à un échelon en recherchant les racines du polynôme caractéristique.</li> <li><input type="checkbox"/> Déterminer un ordre de grandeur de la durée du régime transitoire selon la valeur du facteur de qualité.</li> </ul> |
|---|---|

---

**✓ L'essentiel**


---

**📖 Définitions**

- ☐ E5.1 : Équation caractéristique amorti . . . 4
- ☐ E5.2 : Circuit RLC libre . . . . . 5
- ☐ E5.3 : Situation initiale et bilan des forces 12

**⚙️ Propriétés**

- ☐ E5.1 : Équation différentielle amorti . . . 4
- ☐ E5.2 : Bilan de puissance RLC libre . . . 6
- ☐ E5.3 : Équation différentielle RLC libre . . . 6
- ☐ E5.4 : Solution pseudo-périodique . . . . 7
- ☐ E5.5 : Régime transitoire  $Q > 1/2$  . . . . 8
- ☐ E5.6 : Solution critique . . . . . 9
- ☐ E5.7 : Régime transitoire critique . . . . 10
- ☐ E5.8 : Solution apériodique . . . . . 11
- ☐ E5.9 : Régime transitoire apériodique . . . 12
- ☐ E5.10 : Équation ressort amorti . . . . . 13
- ☐ E5.11 : Bilan de puissance ressort . . . . 13
- ☐ E5.12 : Solutions ressort . . . . . 14

**» Implications**

- ☐ E5.1 : Régimes de solutions . . . . . 4
- ☐ E5.2 : Résultat à grand  $Q$  . . . . . 8
- ☐ E5.3 : Résultat à faible  $Q$  . . . . . 12

**💡 Interprétations**

- ☐ E5.1 : Résultat pseudo-périodique . . . . 8
- ☐ E5.2 : Espace des phases pseudo-pér. . . . 9
- ☐ E5.3 : Espace des phases critique . . . . 10
- ☐ E5.4 : Espace des phases apériodique . . . 11

**🔧 Démonstrations**

- ☐ E5.1 : Bilan de puissance RLC libre . . . . 5
- ☐ E5.2 : Équation différentielle RLC libre . . . 6
- ☐ E5.3 : Solution pseudo-périodique . . . . 7
- ☐ E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér. . . . 8
- ☐ E5.5 : Solution critique . . . . . 9
- ☐ E5.6 : Régime transitoire critique . . . . 10
- ☐ E5.7 : Solution apériodique . . . . . 10
- ☐ E5.8 : Régime transitoire apériodique . . . 11
- ☐ E5.9 : Équation ressort amorti . . . . . 13
- ☐ E5.10 :  $\mathcal{P}$  ressort . . . . . 13

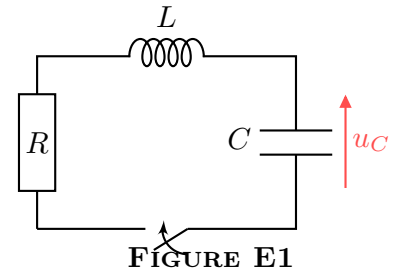
**♥ Points importants**

- ☐ E5.1 : Solutions oscillateur amorti . . . . 5
  - ☐ E5.2 : Évolution énergétique RLC série . . . 6
  - ☐ E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti . . . . 13
  - ☐ E5.4 : Résumé – pas de par cœur ! . . . . 14
-

# I Introduction

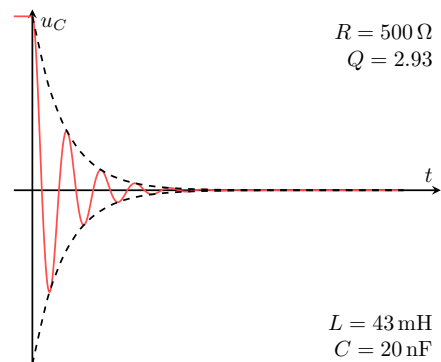
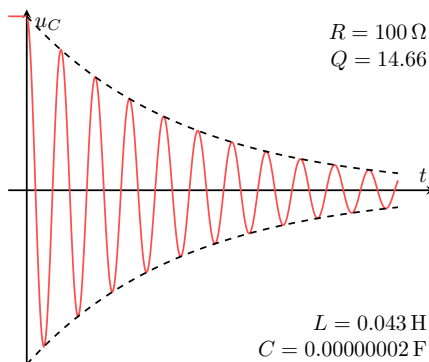
## I/A Évolutions en régime libre, exemple RLC

En reprenant les résultats du LC libre, nous devrions en réalité observer que les oscillations dans le circuit s'atténuent. Soit le circuit RLC suivant<sup>1</sup>, avec  $L = 43 \text{ mH}$  et  $C = 20 \text{ nF}$  :



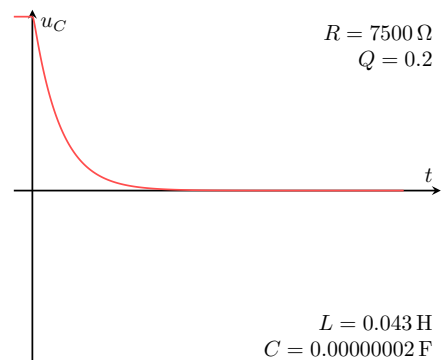
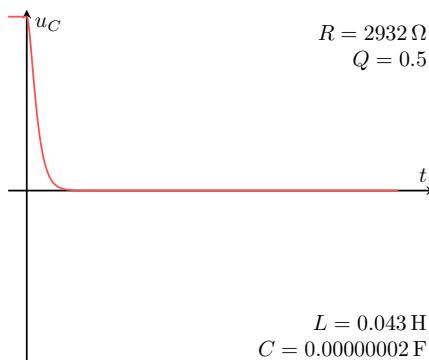
◇ Lorsque la **résistance est petite** : on observe **plusieurs oscillations**.

On observe une série d'oscillations à la période  $T \approx 184 \mu\text{s}$ . On observe environ 15 oscillations lorsque  $R \approx 100 \Omega$  (résistance interne du GBF + de la bobine), 9 oscillations lorsque  $R \approx 180 \Omega$ , 3 oscillations lorsque  $R \approx 500 \Omega$ .



◇ Lorsque la **résistance est plus grande** : les **oscillations disparaissent**.

Lorsque  $R \approx 2,9 \text{ k}\Omega$ , on observe un régime transitoire dont la durée est d'environ  $250 \mu\text{s}$  (à 95%). Lorsque  $R \approx 7,5 \text{ k}\Omega$ , on observe un régime transitoire plus long, d'environ  $420 \mu\text{s}$ .



### Analyse

Lorsque l'on excite le système RLC, le système a deux principales réponses :

- 1) **Système oscillant** pour  $R < R_c$ , de pseudo-période<sup>2</sup> **supérieure** à  $T_0$  ;
- 2) **Système non-oscillant** pour  $R > R_c$  : le transitoire **augmente avec**  $R$ .

1. <https://tinyurl.com/ypbwcwfs>

2. On parle de *pseudo*-période car le signal est diminué.

## I/B Équation différentielle

### Propriété E5.1 : Équation différentielle amorti

Un oscillateur amorti à un degré de liberté est un système dont l'évolution temporelle est décrite par une grandeur  $x(t)$  solution d'une équation différentielle du type :

$$\frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{eq}$$

1)  $x_{eq}$  la position d'équilibre    2)  $\omega_0$  la pulsation **propre**    3)  $Q$  le **facteur de qualité**

### Remarque E5.1 : Analyse de l'équation

Par lecture de cette équation,  $Q$  est **sans dimension** pour qu'on retrouve que  $\omega_0$  s'exprime en  $s^{-1}$  car  $\frac{dx}{dt}$  est de dimension  $[x] \cdot s^{-1}$ .

De plus, on remarque que **plus  $Q$  est élevé**, plus le terme d'ordre 1 est négligeable devant les autres, donc **plus on se rapproche de l'harmonique**. Le **facteur de qualité** traduit donc à quel point le système est **idéal**.

## I/C Équation caractéristique et régimes de solutions

### ♥ Définition E5.1 : Équation caractéristique amorti

Pour résoudre une équation différentielle **homogène**, on suppose une solution de la forme  $x(t) = A \exp(rt)$  avec  $r \in \mathbb{C}$ . En injectant cette expression dans l'équation différentielle, on obtient l'**équation caractéristique** :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 = 0$$

C'est un trinôme du second degré, dont le discriminant  $\Delta$  est

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2)$$

### ♥ Implication E5.1 : Régimes de solutions

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de  $r$  :

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) > 0 \Leftrightarrow 4Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$Q > 1/2$  : régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

$Q = 1/2$  : régime **critique**, racine double réelle ;

$Q < 1/2$  : régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

### Notation E5.1 : $\pm$ et $\mp$

Il est courant de noter les racines  $r_{\pm}$  pour dénoter à la fois  $r_+$  et  $r_-$ . Dans ce cas, l'expression de la racine contient le signe  $\pm$ , ce qui signifie que  $r_+$  correspond à l'expression avec le  $+$ , et  $r_-$  correspond à l'expression avec le  $-$ .

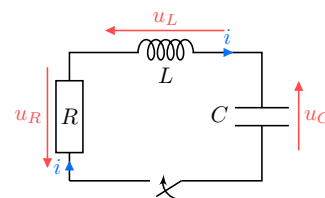
Si l'expression contient le signe  $\mp$ , c'est l'opposé :  $r_+$  correspond à l'expression avec  $-$ .

**Important E5.1 : Solutions oscillateur amorti**

	Racines	Solution
Pseudo-pér.	$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega \quad \text{avec} \quad \Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$	$x(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\text{partie décroissante}} \times \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\text{partie oscillante}}$
Critique	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$x(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$
Apériodique	$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left(-1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2}\right)$	$x(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$

**II Oscillateur amorti électrique : circuit RLC série libre****II/A Présentation****♥ Définition E5.2 : Circuit RLC libre**

- ◇ Il est constitué de l'association en série d'une résistance, d'une bobine et d'un condensateur idéaux.
- ◇ On suppose le condensateur initialement chargé.
- ◇ À  $t = 0$ , on coupe le générateur.

**FIGURE E2****II/B Bilan énergétique****♥ Démonstration E5.1 : Bilan de puissance RLC libre**

On fait un bilan de puissances :

$$\begin{aligned}
 & u_C i + u_L i + u_R i = 0 \\
 \Leftrightarrow & u_C \times C \frac{du_C}{dt} + L \frac{di}{dt} \times i + Ri^2 = 0 \\
 \Leftrightarrow & \frac{d}{dt} \left( \underbrace{\frac{1}{2} C u_C^2}_{\varepsilon_C} + \underbrace{\frac{1}{2} L i^2}_{\varepsilon_L} \right) = -\mathcal{P}_J
 \end{aligned}
 \quad \left. \begin{array}{l} i = C \frac{du_C}{dt}, u_L = L \frac{di}{dt} \text{ et } u_R = Ri \\ \mathcal{P}_J = Ri^2 \text{ et } f \times f' = \left(\frac{1}{2} f^2\right)' \end{array} \right\}$$

### ♥ Propriété E5.2 : Bilan de puissance RLC libre

L'énergie emmagasinée dans le circuit est progressivement dissipée par effet JOULE dû à la résistance :

$$\frac{d\mathcal{E}}{dt} = -\mathcal{P}_J$$

avec  $\mathcal{E} = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_L = \frac{1}{2}Cu_C^2 + \frac{1}{2}Li^2$ .

### Important E5.2 : Évolution énergétique RLC série

On a donc bien une perte d'énergie à cause de la dissipation dans la résistance. Il y aura donc progressivement une perte de la tension de  $u_C$ , d'où l'amortissement.

## II/C Équation différentielle du circuit

### ♥ Démonstration E5.2 : Équation différentielle RLC libre

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &= 0 \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } u_R = Ri \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{forme} \\ \text{canonique} \end{array}$$

On détermine l'expression de  $Q$  par identification :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{Q\sqrt{LC}} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{L}{R\sqrt{LC}} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \text{On isole } Q \\ L = \sqrt{L}^2 \end{array} \right\}$$

### ♥ Propriété E5.3 : Équation différentielle RLC libre

L'équation différentielle de la tension  $u_C(t)$  aux bornes d'un condensateur d'un circuit RLC en régime libre est

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C = 0$$

◇  $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$  la pulsation propre ;

◇  $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$  le facteur de qualité.

Les conditions initiales (continuité de  $u_C$  aux bornes de  $C$  et de  $i$  traversant  $L$ ) sont

$$\begin{aligned} u_C(0^-) &= u_C(0^+) = E \\ i(0^-) &= i(0^+) = 0 \end{aligned}$$

## II/D Résolutions pour chaque cas

II/D) 1 Cas  $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$  : régime pseudo-périodique

### II/D) 1.1 Solution de l'équation

### ♥ Démonstration E5.3 : Solution pseudo-périodique

On part de l'équation caractéristique :

$$r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0 \quad \text{donc} \quad \Delta = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) < 0$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm j\sqrt{-\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{j}{2} \sqrt{\frac{\omega_0^2}{Q^2} (4Q^2 - 1)} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On injecte } \Delta \\ \text{On extrait } \frac{\omega_0}{Q} \\ \text{On définit } \Omega \end{array} \right\}$$

d'où la définition de  $\Omega$  :

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

◇ On trouve  $A$  avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = 1 [A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \quad \Rightarrow \quad \boxed{A = E}$$

◇ On trouve  $B$  avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)] \\ \Rightarrow \left(\frac{du_C}{dt}\right)_0 &= -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0 \Leftrightarrow \boxed{B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}E = \frac{E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}} \end{aligned}$$

### ♥ Propriété E5.4 : Solution pseudo-périodique

Pour un facteur de qualité  $Q > 1/2$ ,  $u_C$  s'exprime par

$$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times \left[\cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\Omega t)\right]$$

avec  $\Omega = \frac{\sqrt{-\Delta}}{2} \Leftrightarrow \boxed{\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}}$

La période des oscillations est alors

$$T = \frac{2\pi}{\Omega} = \frac{2\pi}{\omega_0} \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \Leftrightarrow \boxed{T = T_0 \frac{2Q}{\sqrt{4Q^2 - 1}} > T_0}$$

Les enveloppes sont

$$y(t) = \pm E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$$

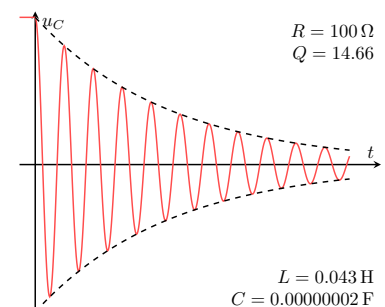


FIGURE E3



### ♥ Interprétation E5.1 : Résultat pseudo-périodique

La solution du polynôme caractéristique s'écrit donc comme la **somme de la solution d'ordre 1 et de la solution d'ordre 2 harmonique** :

$$r_{\pm} = \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\equiv -\frac{1}{\tau}} \pm \underbrace{j\Omega}_{\equiv j\omega} \quad \text{soit} \quad r_{\pm} = r_{\text{ordre 1}} + r_{\text{ordre 2 harmonique}}$$

Ceci n'est pas très étonnant puisque l'EDLHC d'ordre 2 amortie est la somme d'une EDLHC d'ordre 2 harmonique et d'une EDLHC d'ordre 1.

Avec les propriétés de l'exponentielle ( $e^{a+b} = e^a e^b$ ), il est donc naturel que la solution amortie soit le **produit** des solutions d'ordre 1 et d'ordre 2 :

$$y_h(t) = \underbrace{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}_{\equiv e^{-t/\tau}} \underbrace{[A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]}_{\equiv A \cos(\omega_0 t) + B \sin(\omega_0 t)} \quad \text{soit} \quad y_h(t) = y_{h,\text{ordre 1}} \times y_{h,\text{ordre 2 harmonique}}$$

## II/D) 1.2 Régime transitoire

### ♥ Démonstration E5.4 : Régime transitoire pseudo-pér.

L'amplitude varie selon  $E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)$ ; on définit donc  $t_{95}$  tel que

$$\begin{aligned} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t_{95}\right) &= 0.05 \\ \Leftrightarrow -\frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(0.05) \\ \Leftrightarrow \frac{\omega_0}{2Q}t_{95} &= \ln(20) \\ \Leftrightarrow t_{95} &= 2 \ln(20) \frac{Q}{\omega_0} \approx \frac{2\pi}{\omega_0} Q \end{aligned}$$

$\ln(\cdot)$   
 $0.05 = 1/20$  et  $\ln(a^b) = b \ln a$   
 On isole et  $2 \ln 20 \approx 2\pi$

### ♥ Propriété E5.5 : Régime transitoire $Q > 1/2$

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de  $t_{95}$  tel que

$$t_{95} \approx QT_0 \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

### Implication E5.2 : Résultat à grand $Q$

Avec ces résultats on remarque en effet que quand  $Q \rightarrow \infty$ , on a à la fois

$$\Omega \approx \omega_0 \quad \text{donc} \quad T \approx T_0$$

Mais aussi

$$\frac{d^2 u_C}{dt^2} + \omega_0^2 u_C = 0 \quad \text{donc} \quad u_C(t) = E \cos(\omega_0 t)$$

On retrouve toutes les caractéristiques de la situation harmonique.





### Interprétation E5.2 : Espace des phases pseudo-pér.

Contrairement à la situation harmonique, le tracé de la solution dans l'espace  $(u_C, i)$  n'est **pas symétrique par inversion du temps** : la dissipation par effet JOULE diminue l'énergie du système, et la **tension diminue progressivement**.

On observera donc une **spirale décroissante** avec beaucoup d'oscillations quand les amortissements ne sont pas trop élevés, et de moins en moins quand  $Q$  diminue.

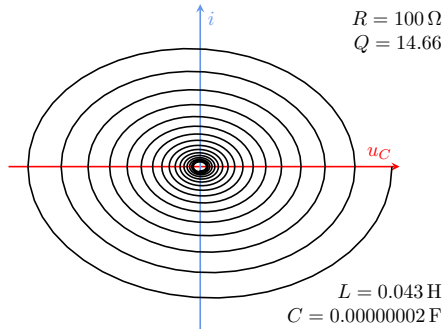


FIGURE E4 – Faible amortissement

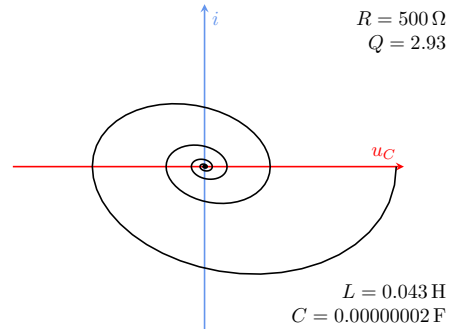


FIGURE E5 – Moyen amortissement

II/D) 2 Cas  $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$  : régime critique

#### II/D) 2.1 Solution de l'équation

#### ♥ Démonstration E5.5 : Solution critique

La seule racine de l'équation caractéristique est double, et vaut

$$r = -\omega_0 \quad \text{soit} \quad u_C(t) = (At + B) \exp(-\omega_0 t)$$

◇ On trouve  $B$  avec la première condition initiale :

$$u_C(0) = E = (A \cdot 0 + B) \cdot 1 = B \quad \Rightarrow \quad \boxed{B = E}$$

◇ On trouve  $A$  avec la seconde CI :

$$\begin{aligned} \frac{du_C}{dt} &= (A) \exp(-\omega_0 t) + (At + E)(-\omega_0) \exp(-\omega_0 t) \\ \Rightarrow \left( \frac{du_C}{dt} \right)_0 &= A - \omega_0 E = 0 \Leftrightarrow \boxed{A = \omega_0 E} \end{aligned}$$

#### ♥ Propriété E5.6 : Solution critique

Pour un facteur de qualité  $Q = 1/2$ ,  $u_C$  s'exprime par

$$\boxed{u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)}$$

et on n'observe **pas une oscillation**.

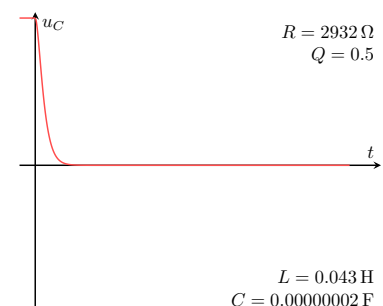


FIGURE E6



### Interprétation E5.3 : Espace des phases critique

Au facteur de qualité critique, l'amortissement est suffisamment important pour empêcher  $u_C$  de passer sous 0.

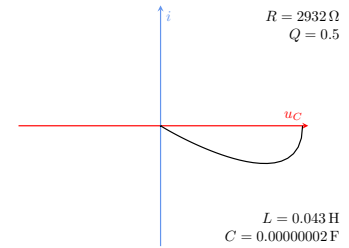


FIGURE E7

## II/D) 2.2 Régime transitoire

### ♥ Démonstration E5.6 : Régime transitoire critique

En négligeant le terme linéaire en  $t$  devant la décroissance exponentielle, on a

$$\exp(-\omega_0 t_{95}) = 0,05 \Leftrightarrow t_{95} = \frac{\ln(20)}{\omega_0} \approx \frac{\pi}{\omega_0}$$

### ♥ Propriété E5.7 : Régime transitoire critique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de  $t_{95}$  tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

### II/D) 3 Cas $\Delta > 0$ : régime apériodique

## II/D) 3.1 Solution de l'équation

### ♥ Démonstration E5.7 : Solution apériodique

Les racines de l'équation caractéristique sont réelles, et on a

$$\begin{aligned} r_{\pm} &= \frac{-\frac{\omega_0}{Q} \pm \sqrt{\Delta}}{2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \\ \Leftrightarrow r_{\pm} &= \frac{\omega_0}{2Q} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right) \end{aligned}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u_C(t) = A \exp(r_+ t) + B \exp(r_- t)$$

◇ Avec la première CI :

$$u_C(0) = E = A + B$$

◇ Avec la seconde CI :

$$\left( \frac{du_C}{dt} \right)_0 = Ar_+ + Br_- = 0 \Leftrightarrow B = -\frac{Ar_+}{r_-}$$

En combinant, on trouve

$$A = -\frac{Er_-}{r_+ - r_-} \quad \text{et} \quad B = \frac{Er_+}{r_+ - r_-}$$

Or,

$$\begin{aligned} r_+ - r_- &= \frac{\omega_0}{2Q} \left( -1 + 1 + 2\sqrt{1 - 4Q^2} \right) \\ \Leftrightarrow r_+ - r_- &= \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{1 - 4Q^2} \end{aligned}$$

### ♥ Propriété E5.8 : Solution apériodique

Pour un facteur de qualité  $Q < 1/2$ ,  $u_C$  s'exprime par

$$u_C(t) = \frac{QE}{\omega_0 \sqrt{1 - 4Q^2}} (r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$$

et on n'observe **pas une oscillation**. Le régime transitoire est *plus long* que pour  $Q = 1/2$ .

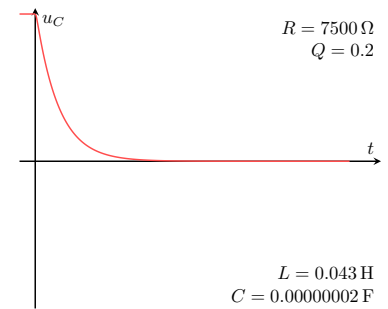


FIGURE E8

### Interprétation E5.4 : Espace des phases apériodique

Pendant le régime apériodique, l'amortissement est suffisamment important pour non seulement empêcher  $u_C$  d'osciller, mais également pour **ralentir sa diminution** vers 0. Son trajet se fait donc à une vitesse plus faible, c'est-à-dire  $\frac{du_C}{dt}$  plus petit donc  $i$  plus petit.

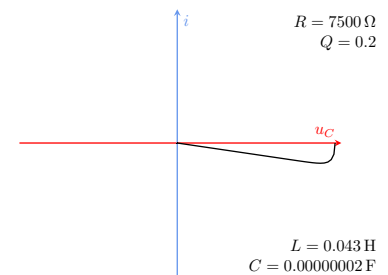


FIGURE E9

## II/D) 3.2 Régime transitoire

### ♥ Démonstration E5.8 : Régime transitoire apériodique

La décroissance sera guidée par l'exponentielle la « **moins décroissante** ». On cherche donc à savoir laquelle, on compare donc  $r_-$  et  $r_+$ .

On remarque d'abord que les deux racines sont négatives (d'où la décroissance exponentielle) :

$$\begin{aligned} r_+ < 0 &\Leftrightarrow \underbrace{-\frac{\omega_0}{2Q}}_{\omega_0 \text{ et } Q > 0} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \underset{>}{\leq} 0 \\ &\Leftrightarrow 1 - \sqrt{1 - 4Q^2} > 0 \\ &\Leftrightarrow \sqrt{1 - 4Q^2} < 1^2 \\ &\Leftrightarrow 4Q^2 > 0 \end{aligned}$$

Or,

$$\begin{aligned} r_- < r_+ &\Leftrightarrow |r_-| > |r_+| \quad \begin{array}{c} \textcircled{|\cdot|} \\ \textcircled{(\cdot)^{-1}} \end{array} \\ &\Leftrightarrow \left|\frac{1}{r_-}\right| < \left|\frac{1}{r_+}\right| \quad \begin{array}{c} \textcircled{(\cdot)^{-1}} \\ \tau = |1/r| \end{array} \\ &\Leftrightarrow \tau_- < \tau_+ \end{aligned}$$

ce qui est vrai.

On estime alors la durée du régime transitoire à  $\boxed{\ln(20)/|r_+|}$ .

Pour  $Q \ll 1$ , on utilise  $\boxed{\sqrt{1+x} \underset{x \ll 1}{\sim} 1 + x/2}$  pour simplifier  $r_+$  :

$$\begin{aligned} r_+ &= -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \sqrt{1 - 4Q^2}\right) \\ &\Rightarrow r_+ \underset{Q \ll 1}{\sim} -\frac{\omega_0}{2Q} \left(1 - \left(1 - \frac{4Q^2}{2}\right)\right) \\ &\Leftrightarrow r_+ \underset{Q \ll 1}{\sim} -Q\omega_0 \end{aligned}$$

Avec  $\ln(20) \approx \pi$  :

$$\boxed{t_{95} \approx \frac{\pi}{Q\omega_0}} \quad \text{soit} \quad \boxed{t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}}$$

### ♥ Propriété E5.9 : Régime transitoire apériodique

Le temps de réponse à 95% est atteint à partir de  $t_{95}$  tel que

$$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q} \quad \text{avec} \quad T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$$

### Implication E5.3 : Résultat à faible $Q$

Quand  $Q \rightarrow 0$ , on peut négliger le terme d'ordre 2 dans l'équation différentielle :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} \frac{du_C}{dt} + \omega_0^2 u_C &= R \sqrt{\frac{C}{L}} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{\sqrt{LC}} u_C \\ &= \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} u_C = \left[ \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{RC} u_C \right] \end{aligned}$$

d'où la décroissance exponentielle. D'autre part, les valeurs de  $r_{\pm}$  tendent vers la même valeur  $r = -\frac{\omega_0}{2Q}$  : en supposant la solution comme la somme des deux racines, on aurait une décroissance :

$$r = -\frac{\omega_0}{Q} = -\frac{1}{\sqrt{LC}} R \sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow r = -R \sqrt{\frac{C}{L^3}}$$

soit une décroissance exponentielle avec un temps caractéristique  $\tau = \frac{L}{R}$ .

## III Exemple amorti mécanique : ressort + frottements fluides

### III/A Présentation

#### ♥ Définition E5.3 : Situation initiale et bilan des forces

- ◇ **Système** : {point M} de masse  $m$
- ◇ **Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}$  supposé galiléen
- ◇ **Repère** :  $(O', \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  (voir schéma)
- ◇ **Repérage** :

$$\vec{OM} = (\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x ; \vec{v} = \dot{\ell}(t) \vec{u}_x ; \vec{a} = \ddot{\ell}(t) \vec{u}_x$$

- ◇ **Position initiale** :  $OM(0) = L_0 > 0$
- ◇ **Vitesse initiale** :  $\vec{v}(0) = \vec{0}$

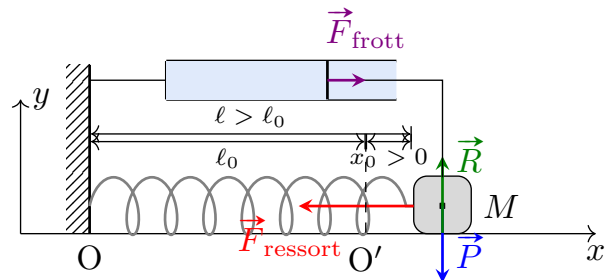


FIGURE E10

- ◇ **Bilan des forces** :

<b>Poids</b>	$\vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$
<b>Réaction support</b>	$\vec{R} = R \vec{u}_y$
<b>Force rappel</b>	$\vec{F} = -k(\ell(t) - \ell_0) \vec{u}_x$
<b>Force frottement</b>	$\vec{F}_{\text{frott}} = -\alpha \vec{v}$

## III/B Équation différentielle

## ♥ Démonstration E5.9 : Équation ressort amorti

Avec le PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$$

$$\Leftrightarrow m \begin{pmatrix} \frac{d^2x}{dt^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k(\ell(t) - \ell_0) - \alpha v \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

Sur l'axe  $\vec{u}_x$  on trouve donc

$$m \frac{d^2\ell}{dt^2} + \alpha \frac{d\ell}{dt} + k\ell(t) = k\ell_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\alpha}{m} \frac{d\ell}{dt} + \frac{k}{m}\ell(t) = \frac{k}{m}\ell_0$$

On identifie  $\omega_0$  et  $Q$  :

$$\omega_0^2 = \frac{k}{m} \Leftrightarrow \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

$$\text{et } \frac{\alpha}{m} = \frac{\omega_0}{Q} \Leftrightarrow Q = \frac{m\omega_0}{\alpha} \Leftrightarrow Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}$$

## ♥ Propriété E5.10 : Équation ressort amorti

La position  $x$  de la masse et la longueur  $\ell$  du ressort sont régies par :

$$\frac{d^2\ell}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{d\ell}{dt} + \omega_0^2 \ell(t) = \omega_0^2 \ell_0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d^2x}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{dx}{dt} + \omega_0^2 x(t) = 0$$

$$\diamond \omega_0 = \frac{k}{m} \text{ la pulsation propre ;}$$

$$\diamond Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha} \text{ le facteur de qualité.}$$

$\ell_0$  **reste** donc la longueur d'équilibre du système.

## Important E5.3 : Analogie RLC-ressort amorti

Ici aussi, les deux systèmes sont **régis par la même équation différentielle**. On observe une **oscillation amortie** du ressort autour d'une position d'équilibre, ici  $x_{\text{eq}} = 0 \Leftrightarrow \ell_{\text{eq}} = \ell_0$ .

Ici, c'est le coefficient de frottements  $\alpha$  qui dissipe : on l'associe à  $R$ .

Méca  $\longleftrightarrow$  Élec

$$x \longleftrightarrow q$$

$$v \longleftrightarrow i$$

$$m \longleftrightarrow L$$

$$k \longleftrightarrow C^{-1}$$

$$\sqrt{\frac{k}{m}} \longleftrightarrow \frac{1}{\sqrt{LC}}$$

$$\alpha \longleftrightarrow R$$

## III/C Bilan énergétique

Propriété E5.11 :  $\mathcal{P}$  ressort

Dans le système masse-ressort horizontal avec frottements fluides, l'énergie mécanique diminue progressivement proportionnellement au coefficient de friction  $\alpha$  :

$$\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = -\alpha v^2$$

Démonstration E5.10 :  $\mathcal{P}$  ressort

À partir du PFD  $\times v$  :

$$m \frac{d^2x}{dt^2} \frac{dx}{dt} + \alpha \frac{dx}{dt} \frac{dx}{dt} + kx \frac{dx}{dt} = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{d}{dt} \left( \frac{1}{2} m \left( \frac{dx}{dt} \right)^2 + \frac{1}{2} kx^2 \right) = -\alpha v^2$$

On a bien  $\mathcal{E}_m = \mathcal{E}_C + \mathcal{E}_{p,\text{el}}$  qui diminue.

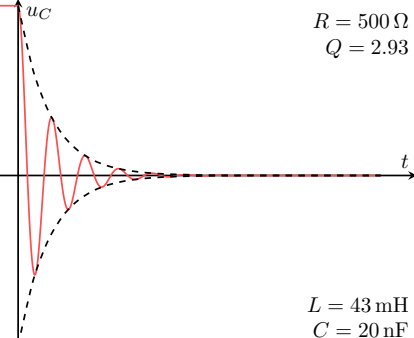
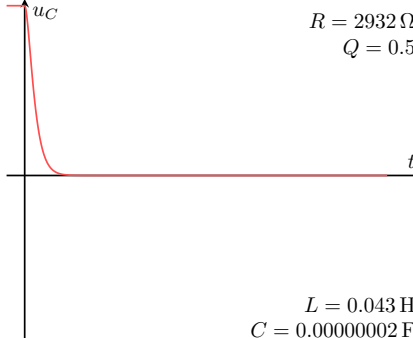
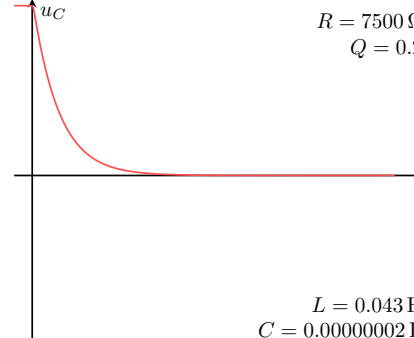
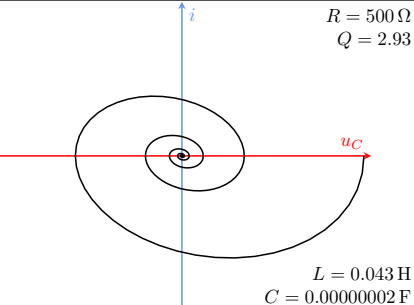
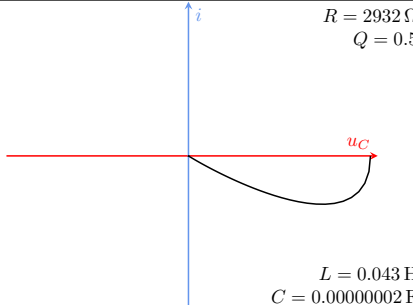
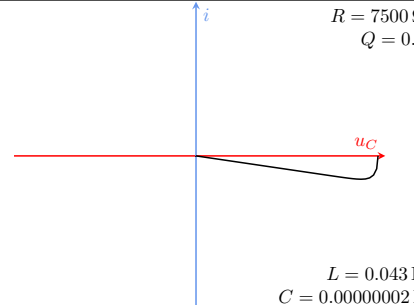
# III/D Solutions

## Propriété E5.12 : Solutions ressort

On a les mêmes solutions en changeant  $u_C$  par  $x$  et  $E$  par  $x_0$

## IV Résumé oscillateurs amortis

### Important E5.4 : Résumé – pas de par cœur !

Pseudo-périodique $\Delta < 0 \Leftrightarrow Q > 1/2$	Critique $\Delta = 0 \Leftrightarrow Q = 1/2$	Apériodique $\Delta > 0 \Leftrightarrow Q < 1/2$
$r_{\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm j\Omega$ $\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$	$r = -\frac{\omega_0}{2Q} = -\omega_0$	$r_{\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \left( -1 \pm \sqrt{1 - 4Q^2} \right)$
$u_C(t) = E \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times$ $\left[ \cos(\Omega t) + \frac{1}{\sqrt{4Q^2 - 1}} \sin(\Omega t) \right]$	$u_C(t) = E(\omega_0 t + 1) \exp(-\omega_0 t)$	$u_C(t) = \frac{E}{r_+ - r_-} \times$ $(r_+ \exp(r_- t) - r_- \exp(r_+ t))$
$t_{95} \approx QT_0$	$t_{95} \approx \frac{T_0}{2}$	$t_{95} \approx \frac{T_0}{2Q}$
 <p> <math>R = 500 \Omega</math>  <math>Q = 2.93</math>  <math>L = 43 \text{ mH}</math>  <math>C = 20 \text{ nF}</math> </p>	 <p> <math>R = 2932 \Omega</math>  <math>Q = 0.5</math>  <math>L = 0.043 \text{ H}</math>  <math>C = 0.00000002 \text{ F}</math> </p>	 <p> <math>R = 7500 \Omega</math>  <math>Q = 0.2</math>  <math>L = 0.043 \text{ H}</math>  <math>C = 0.00000002 \text{ F}</math> </p>
 <p> <math>R = 500 \Omega</math>  <math>Q = 2.93</math>  <math>L = 0.043 \text{ H}</math>  <math>C = 0.00000002 \text{ F}</math> </p>	 <p> <math>R = 2932 \Omega</math>  <math>Q = 0.5</math>  <math>L = 0.043 \text{ H}</math>  <math>C = 0.00000002 \text{ F}</math> </p>	 <p> <math>R = 7500 \Omega</math>  <math>Q = 0.2</math>  <math>L = 0.043 \text{ H}</math>  <math>C = 0.00000002 \text{ F}</math> </p>