

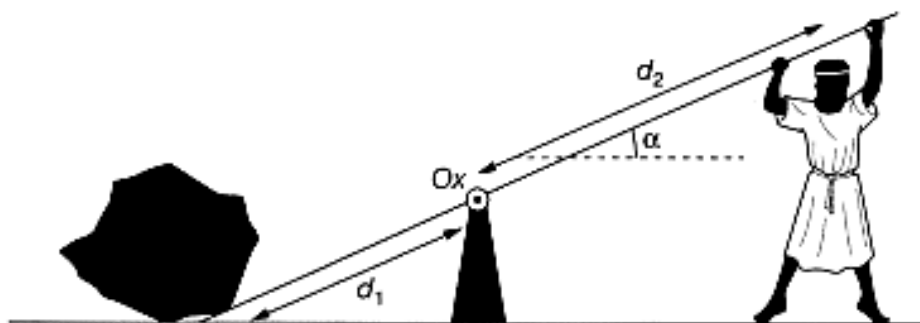
Correction du TD

I Levier

ARCHIMÈDE (240 av. J.-C.) est le premier à établir la théorie physique du levier et de la balance. Il aurait dit¹ :

« Donnez-moi un point fixe et un levier, et le soulèverai la Terre. »

Imaginons une situation pour réaliste où ARCHIMÈDE utilise un levier afin de soulever un rocher de masse $M = 200 \text{ kg}$. Les longueurs sont $d_1 = 50 \text{ cm}$, $d_2 = 1,5 \text{ m}$ et $\alpha = 60^\circ$.



- 1) ARCHIMÈDE se suspend verticalement au levier. Quelle doit être sa masse minimale pour que le rocher se soulève ?

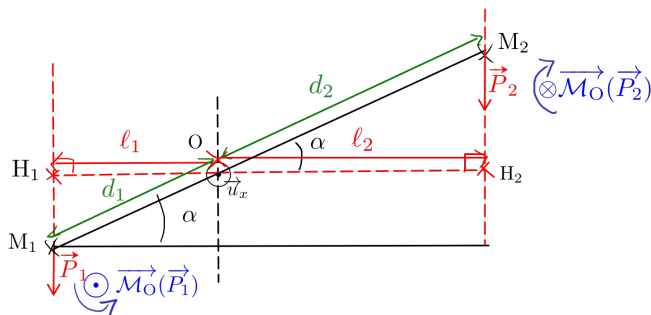
Réponse

On fait un schéma et on détermine les distances des bras de levier pour calculer les moments :

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}_1) = +\ell_1 m_1 g = m_1 d_1 g \cos(\alpha)$$

$$\mathcal{M}_x(\vec{P}_2) = -\ell_2 m_2 g = -m_2 d_2 g \cos(\alpha)$$

Pour avoir rotation, il faut que le moment total soit **négatif** (sens horaire autour de (Ox)), soit



$$\underbrace{g \cos(\alpha)}_{\neq 0} (m_1 d_1 - m_2 d_2) < 0$$

$$\Leftrightarrow m_2 d_2 > m_1 d_1$$

$$\Leftrightarrow \boxed{m_2 > m_1 \frac{d_1}{d_2}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m_1 = 200 \text{ kg} \\ d_1 = 0,50 \text{ m} \\ d_2 = 1,5 \text{ m} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{m_{2,\min} = 67 \text{ kg}}$$

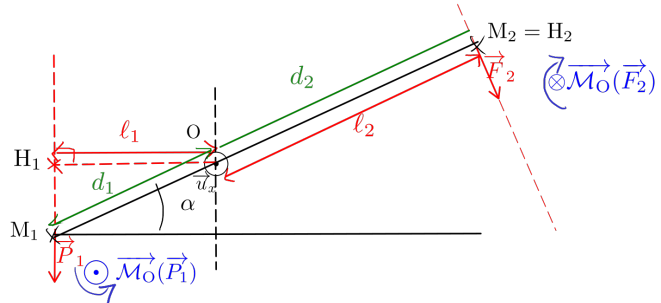
1. Voir https://www.persee.fr/doc/antiq_0770-2817_1955_num_24_1_3257 pour une restitution plus fidèle

- 2) ARCHIMÈDE décide de faire varier la direction de la force qu'il exerce sur le levier sans changer sa norme. Comment doit-il procéder pour être le plus efficace ? Quel est le gain par rapport au cas précédent ?

Réponse

On fait un schéma et on détermine les distances des bras de levier pour calculer les moments :

En modifiant la direction de la force, donc de la droite d'action, la longueur du bras de levier est modifiée : on a, au mieux, $\ell_2 = d_2$, obtenu pour une force perpendiculaire au levier.



$$\begin{aligned} \sum_i \mathcal{M}_x(\vec{F}_i) &< 0 \\ \Leftrightarrow m_1 g d_1 \cos(\alpha) - m_2 g d_2 &< 0 \quad \left. \vphantom{\sum_i \mathcal{M}_x(\vec{F}_i)} \right\} \|\vec{F}_2\| = m_2 g \\ \Leftrightarrow m_2 &> m_1 \frac{d_1}{d_2} \cos(\alpha) \\ \text{A.N. : } m_{2,\min} &= 33 \text{ kg} \end{aligned}$$

Autrement dit, avec $g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$, c'est 330 N de force gagné par rapport à la situation précédente, soit un gain de 50% !



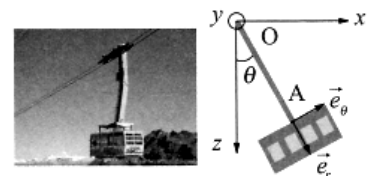
À retenir

- ◇ Dessinez les moments et les bras de levier des forces **et** indiquez la direction de rotation induite par la force.
- ◇ Le moment total est la somme des moments



II Pendule pesant non amorti

Une benne de téléphérique, de masse $M = 2,0 \times 10^3 \text{ kg}$, est accrochée au point A situé à l'extrémité inférieure d'un bras de masse $m = 300 \text{ kg}$ relié à des câbles au point O. On note $d = 4,5 \text{ m}$ la distance entre O et G le centre de gravité de l'ensemble {benne+bras}, situé sur l'axe (OA).



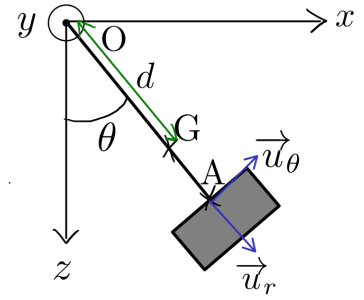
On note J_{tot} le moment d'inertie de l'ensemble par rapport à l'axe de rotation y , et la liaison est supposée parfaite. On effectue un test d'oscillations de la benne, le point O étant maintenant fixe.

- 1) En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer l'équation différentielle vérifiée par θ .

Réponse

- ◇ **Système** : {benne+bras} solide de masse $m_{\text{tot}} = m + M$
- ◇ **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
- ◇ **Repère** : cylindrique $(O, \vec{e}_r, \vec{e}_\theta, \vec{e}_y)$ avec O centre de la liaison pivot.
- ◇ **Repérage** :

$$\begin{cases} \vec{OG} = d \vec{e}_r \\ \vec{v}(G) = d\dot{\theta} \vec{e}_\theta \\ \vec{a}(G) = d\ddot{\theta} \vec{e}_\theta - d\dot{\theta}^2 \vec{e}_r \end{cases}$$



- ◇ **Bilan des forces** :

- ▷ $\vec{P} = m_{\text{tot}}g \vec{e}_y = m_{\text{tot}}g(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{u}_\theta)$
- ▷ $\vec{F} = \vec{0}$ car pivot parfaite

- ◇ **Bilan des moments** :

$$\triangleright \vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = \vec{OG} \wedge \vec{P} = (d \vec{e}_r) \wedge (m_{\text{tot}}g(\cos(\theta) \vec{e}_r - \sin(\theta) \vec{e}_\theta)) \Leftrightarrow \boxed{\vec{\mathcal{M}}_O(\vec{P}) = -m_{\text{tot}}gd \sin(\theta) \vec{e}_y}$$

Par projection, on retrouve le résultat qu'on aurait eu avec le bras de levier :

$$\ell = d \sin(\theta) \quad \text{et} \quad \|\vec{P}\| = m_{\text{tot}}g \quad \Rightarrow \quad \boxed{\mathcal{M}_y(\vec{P}) = -m_{\text{tot}}gd \sin(\theta)}$$

$$\triangleright \mathcal{L}_y(\mathcal{S}) = J_{\text{tot}} \dot{\theta}$$

$$\diamond \text{ TMC : } \frac{d\mathcal{L}_y(\mathcal{S})}{dt} = \mathcal{M}_y(\vec{P}) \Leftrightarrow J_{\text{tot}} \ddot{\theta} = -m_{\text{tot}}gd \sin(\theta) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{m_{\text{tot}}gd}{J_{\text{tot}}} \sin(\theta) = 0}$$

- 2) En déduire la période T des petites oscillations de la benne.

Réponse

Petites oscillations $\Rightarrow \sin(\theta) \underset{\theta \rightarrow 0}{\sim} \theta$, donc oscillateur harmonique :

$$\omega_0 = \sqrt{\frac{m_{\text{tot}}gd}{J_{\text{tot}}}} \Leftrightarrow \boxed{T = 2\pi \sqrt{\frac{J_{\text{tot}}}{m_{\text{tot}}gd}}}$$

- 3) Sachant que la période des petites oscillations est $T = 4,1 \text{ s}$ et que le bras de longueur $L = 3,0 \text{ m}$ a un moment d'inertie $J' = \frac{1}{3}mL^2$ par rapport à l'axe y , calculer le moment d'inertie J de la benne par rapport à y . On rappelle que $g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$ et on indique que dans ce cas, les moments d'inertie se somment.

Réponse

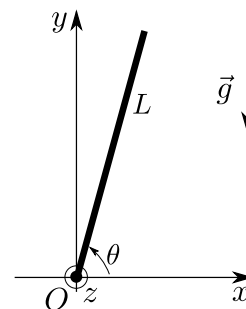
En restant autour du même axe, les moments cinétiques se somment, soit $J_{\text{tot}} = J_{\text{bras}} + J_{\text{benne}}$. On isole J_{tot} :

$$\begin{aligned} J_{\text{tot}} &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}}gd \\ \Leftrightarrow J &= \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}}gd - J' \\ \Leftrightarrow \boxed{J = \frac{T^2}{4\pi^2} m_{\text{tot}}gd - \frac{mL^2}{3}} &\quad \text{avec} \quad \begin{cases} T = 4,1 \text{ s} \\ L = 3,0 \text{ m} \\ d = 4,5 \text{ m} \\ m = 300 \text{ kg} \\ m_{\text{tot}} = 2,3 \times 10^3 \text{ kg} \\ g = 9,81 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases} \\ \text{A.N. : } J &= 4,2 \times 10^4 \text{ kg}\cdot\text{m}^2 \end{aligned}$$

III Chute d'un arbre

On étudie la chute d'un arbre : on souhaite connaître la durée que met l'arbre, une fois tranché à sa base, pour tomber au sol.

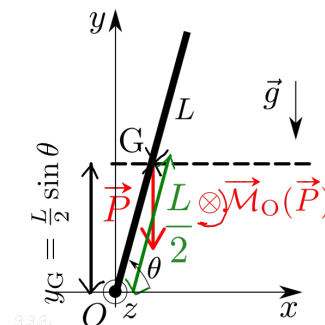
On modélise la situation par une tige homogène de hauteur $L = 10\text{ m}$ et de masse m , reliée au sol par une liaison pivot parfaite et qui part d'un angle initial $\theta_0 = 1,5\text{ rad}$ avec une vitesse initiale nulle. On donne le moment d'inertie par rapport à Oz : $J_z = \frac{1}{3}mL^2$.



- 1) Donner les expressions des énergies cinétique et potentielle de pesanteur de l'arbre.

Réponse

$$\begin{aligned} \mathcal{E}_c &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{E}_{p,p} = mgy_G + 0 \\ \text{Or } y_G &= \frac{L}{2}\sin(\theta) \Rightarrow \mathcal{E}_{p,p} = \frac{mgL}{2}\sin(\theta) \\ \Rightarrow \mathcal{E}_m &= \frac{1}{2}J\dot{\theta}^2 + \frac{mgL}{2}\sin(\theta) \end{aligned} \quad (8.1)$$



- 2) Justifier que l'énergie mécanique est constante au cours du mouvement. Exprimer cette constante en utilisant les conditions initiales.

Réponse

Le système n'est soumis qu'à son poids, conservatif, et à l'action de la liaison pivot, supposée parfaite donc sans frottement. Le système est donc conservatif, et par TPM on a $\frac{d\mathcal{E}_m}{dt} = 0$.

On a donc $\mathcal{E}_m(t) = \mathcal{E}_m(0)$, or $\mathcal{E}_c(0) = 0$ et $\mathcal{E}_{p,p}(0) = \frac{mgL}{2}\sin(\theta_0)$, soit

$$\mathcal{E}_m = \frac{mgL}{2}\sin(\theta_0) \quad (8.2)$$



- 3) En déduire la relation $\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L}}(\sin\theta_0 - \sin\theta)$

Réponse

$$\begin{aligned} (8.1) &= (8.2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}J\left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{mgL}{2}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Leftrightarrow \left(\frac{d\theta}{dt}\right)^2 &= \frac{3mgL}{mL^2}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= \pm\sqrt{\frac{3g}{L}}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \end{aligned}$$

Or, de toute évidence θ **diminue** puisque l'arbre tombe ($\mathcal{M}_z(\vec{P}) < 0$), soit

$$\frac{d\theta}{dt} = -\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}$$

■



4) Retrouver ce résultat par le TMC.

Réponse

Avec le bras de levier, on a $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -\frac{mgL}{2} \cos(\theta)$. Ainsi, avec le TMC,

$$\begin{aligned} \frac{d\mathcal{L}_z}{dt} &= \mathcal{M}_z(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow J\ddot{\theta} &= -\frac{mgL}{2} \cos(\theta) \\ \Leftrightarrow J\ddot{\theta}\dot{\theta} &= -\frac{mgL}{2} \cos(\theta)\dot{\theta} \\ \Rightarrow J \int_{t=0}^t \frac{d}{dt} \left[\frac{1}{2} \dot{\theta}^2 \right] dt &= -\frac{mgL}{2} \int_{t=0}^t \cos(\theta) \frac{d\theta}{dt} dt \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) - \underbrace{\dot{\theta}^2(0)}_{=0} &= -\frac{mgL}{2J} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= -\frac{3mgL}{mL^2} (\sin(\theta) - \sin(\theta_0)) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2(t) &= \frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta)) \\ \Rightarrow \frac{d\theta}{dt} &= -\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))} \end{aligned}$$

Diagramme de dérivation :

- $\times \dot{\theta}$
- $\int (\cdot) dt$
- $\int \cos(\theta) d\theta = \int d[\sin(\theta)]$
- $J = \frac{mL^2}{3}$
- On prend l'opposé
- $\frac{d\theta}{dt} < 0$

■

On retiendra ici deux choses :



À retenir

- ◇ Penser à multiplier par $\dot{\theta}$ pour facilement intégrer les relations avec $\ddot{\theta}$ et des fonctions transcendantes (cos, sin...)
- ◇ Attention en prenant la racine carré d'une fonction : toujours écrire les deux valeurs possibles et vérifier la faisabilité physiquement.



5) Pour exprimer la durée T de la chute, isoler dt dans l'expression précédente puis l'intégrer entre $\theta = \theta_0$ et $\theta = 0$. Faire l'application numérique, sachant que $\int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin \theta_0 - \sin \theta}} \approx 5,44$ pour $\theta_0 = 1,5$ rad.

Réponse

On inverse pour avoir

$$dt = \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L} (\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}}$$

Or, quand $t|_0^{t_f}$, on a $\theta|_{\theta_0}^{\theta_f=0}$. Ainsi,

$$\int_0^{t_f} dt = \int_{\theta_0}^0 \frac{-d\theta}{\sqrt{\frac{3g}{L}(\sin(\theta_0) - \sin(\theta))}}$$

$$\Leftrightarrow t_f - 0 = \sqrt{\frac{L}{3g}} \int_0^{\theta_0} \frac{d\theta}{\sqrt{\sin(\theta_0) - \sin(\theta)}}$$

On inverse les bornes avec –

A.N. : $\underline{t_f = 3,2 \text{ s}}$

6) *Bonus* Écrire un script Python permettant de calculer numériquement l'intégrale précédente.

Réponse

On obtient bien $t_f = 3,17 \text{ s}$ avec :

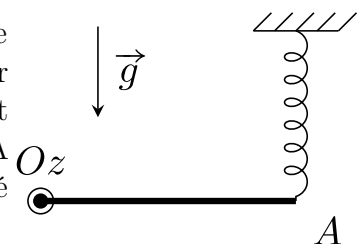
```

1  from scipy.integrate import quad # Module d'intégration "quad"
2  import numpy as np
3
4  # Intervalle d'intégration
5  theta_0 = 1.5 # rad
6  theta_f = 0   # rad
7
8  # Constantes
9  L = 10          # m
10 g = 9.81        # m.s^-2
11 K = np.sqrt(L/(3*g)) # s
12
13 # Fonction à intégrer
14 def function(theta):
15     return K/(np.sqrt(np.sin(theta_0) - np.sin(theta)))
16
17 # Calcul de l'intégrale
18 res, err = quad(function, theta_f, theta_0)
19
20 # Affichage du résultat
21 print(f"Résultat de l'intégrale = {res:.2f} ± {err:.2f}")

```

IV Barre fixée à ses extrémités

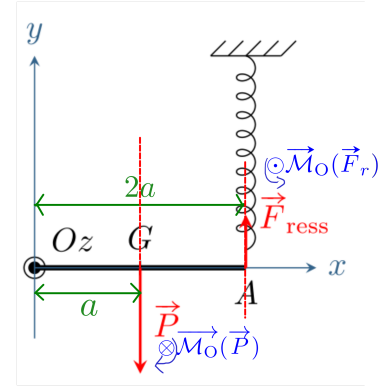
Considérons le système mécanique représenté ci-contre, constitué d'une barre homogène de masse m , de longueur $OA = 2a$, libre de tourner sans frottement autour de l'axe Oz (liaison parfaite). Son moment d'inertie par rapport à cet axe vaut $J_z = \frac{4}{3}ma^2$. Elle est attachée en A à un ressort de longueur à vide ℓ_0 et de raideur k . L'autre extrémité du ressort est fixe.



- À l'équilibre, la barre est horizontale et le ressort vertical. En déduire la longueur du ressort à l'équilibre en fonction de k , ℓ_0 , m et g .

Réponse

- ◇ **Système** : {barre}
- ◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen
- ◇ **Repère** : $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$
- ◇ **Repérage** : $\overrightarrow{OG} = a \vec{u}_x$ et $\overrightarrow{OA} = 2a \vec{u}_x$
- ◇ **BdF** : à l'équilibre, le ressort est vertical, soit
 - ▷ $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$;
 - ▷ $\vec{F}_r = k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \vec{u}_y$.
 - ▷ $\vec{F}_f = \vec{0}$ pas de frottements



- ◇ **BdM** : avec les bras de levier, qui se confondent ici avec les distances des points d'application puisque les droites d'actions sont perpendiculaires à l'objet, on trouve
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \times mg$ (sens horaire) ;
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \times k(\ell_{\text{eq}} - \ell_0)$.
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_f) = 0$ pivot parfaite.
- ◇ **TMC** : à l'équilibre, pas de rotation donc

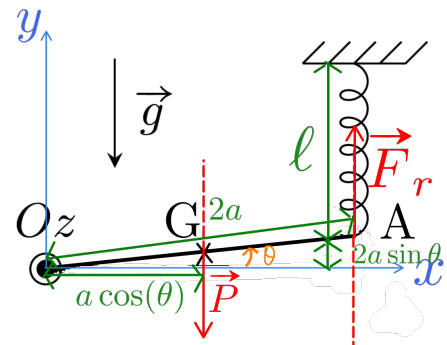
$$\mathcal{M}_z(\vec{P}) + \mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad -mga + 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = 0 \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\ell_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{2k}}$$



- 2) La barre est légèrement écartée de sa position d'équilibre, puis lâchée sans vitesse initiale. Déterminer la période des petites oscillations. Comme les angles sont très petits, on peut considérer que le point A se déplace verticalement.

Réponse

Avec un angle, les droites d'actions ne sont plus perpendiculaires à la barre donc les bras de levier ne se confondent plus avec les distances des points d'application. Il faut refaire un schéma et recalculer les moments :



- ◇ **BdM** :
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -a \cos(\theta) \times mg$;
 - ▷ $\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell - \ell_0)$
 Or, ℓ n'est plus ℓ_{eq} puisqu'on n'est plus à l'équilibre. On trouve $\ell = \ell_{\text{eq}} - 2a \sin(\theta)$, soit finalement

$$\mathcal{M}_z(\vec{F}_r) = +2a \cos(\theta) \times k(\ell_{\text{eq}} - 2a \sin(\theta) - \ell_0)$$

$$\triangleright \mathcal{L}_z = J_z \dot{\theta}$$

- ◇ **TMC** :

$$\begin{aligned}
\frac{d\mathcal{L}_z}{dt} &= \sum_i \mathcal{M}_z(\vec{F}_i) \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -a \cos(\theta) \times mg + 2a \cos(\theta) \times k(\ell_{\text{eq}} - 2a \sin(\theta) - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} \cos(\theta) \approx 1 \\ \sin(\theta) \approx \theta \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga + 2ak(\ell_{\text{eq}} - 2a\theta - \ell_0) \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga - 4ak\theta + 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) \quad \left. \begin{array}{l} 2ak(\ell_{\text{eq}} - \ell_0) = mga \\ J_z = \frac{4}{3}ma^2 \end{array} \right\} \\
\Leftrightarrow J_z \ddot{\theta} &= -mga + mga - 4ak\theta \\
\Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{3k}{m}\theta &= 0 \\
\Rightarrow T_0 &= 2\pi\sqrt{\frac{k}{3}}
\end{aligned}$$

■

V Choc de deux chariots

Deux masses m_1 et m_2 sont montées sur un banc horizontal à coussins d'air, de sorte qu'on peut négliger tout frottements. On les projette l'une contre l'autre avec des vitesses initiales $\vec{v}_1 = v_1 \vec{u}_x$ et $\vec{v}_2 = \vec{0}$ (m_2 initialement à l'arrêt).



1) Dans cette partie, on suppose qu'après le choc les masses restent solidaires.

a – Quelle est la vitesse commune des deux masses après le choc ?

Réponse

◇ **Système** : {2 chariots} considérés chacun comme un point matériel

◇ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

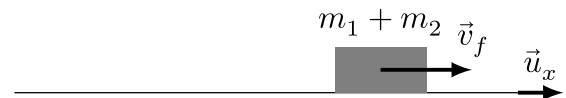
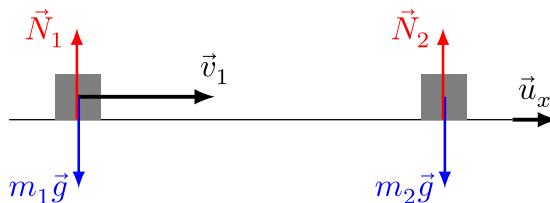
◇ **Base** : (\vec{u}_x, \vec{u}_z) avec \vec{u}_z vertical ascendant

◇ **BdF** :

▷ $\vec{P}_1 = -m_1 g \vec{u}_z$ et $\vec{N}_1 \vec{u}_z$ pour le premier

▷ $\vec{P}_2 = -m_2 g \vec{u}_z$ et $\vec{N}_2 \vec{u}_z$ pour le second

▷ Aucune force de frottements, donc système pseudo-isolé ($\sum_i \vec{F}_i = \vec{0}$)



Ainsi, $\frac{d\vec{p}_{\text{tot}}}{dt} = \vec{0}$ soit $\vec{p}_{\text{tot}} = \text{cte.}$ Ainsi,

$$m_1 \vec{v}_1 + m_2 \vec{v}_2 = (m_1 + m_2) \vec{v}_f \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{\vec{v}_f = \frac{m_1}{m_1 + m_2} v_1 \vec{u}_x}$$

b – Quel est le travail des actions intérieures lors du choc ? Commenter le signe du résultat.

Réponse

On utilise le TEC :

$$\Delta \mathcal{E}_c = W_{\text{int}} + \underbrace{W_{\text{ext}}}_{=0} \Leftrightarrow W_{\text{int}} = \mathcal{E}_f - \mathcal{E}_i = \frac{1}{2}(m_1 + m_2)v_f^2 - \frac{1}{2}m_1v_1^2$$

$$\Leftrightarrow \boxed{W_{\text{int}} = -\frac{m_1m_2}{2(m_1 + m_2)}v_1^2 < 0}$$

Le travail des forces intérieures est donc **négatif**, ce qui est cohérent avec le fait que le système perd de l'énergie cinétique, transformée en énergie thermique lors du choc.



2) On considère dans cette partie que le choc est élastique, c'est-à-dire que l'énergie cinétique de l'ensemble des deux masses est conservée au cours du choc et qu'elles ne sont plus solidaires après.

a – Montrer que les vitesses v'_1 et v'_2 après le choc s'expriment :

$$v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \quad \text{et} \quad v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1$$

Réponse

On a toujours un système pseudo-isolé :



On a donc la conservation de la quantité de mouvement totale, ainsi que l'énergie cinétique totale ; ainsi entre les deux situations :

$$\begin{cases} m_1v_1 = m_1v'_1 + m_2v'_2 \\ \frac{1}{2}m_1v_1^2 = \frac{1}{2}m_1v'^2_1 + \frac{1}{2}m_2v'^2_2 \end{cases} \Leftrightarrow \boxed{\begin{cases} v'_1 = \frac{m_1 - m_2}{m_1 + m_2}v_1 \\ v'_2 = \frac{2m_1}{m_1 + m_2}v_1 \end{cases}}$$



b – Que se passe-t-il si $m_2 \gg m_1$?

Réponse

Si $m_2 \gg m_1$, alors $v'_1 \rightarrow -v_1$ et $v'_2 \rightarrow 0$. La masse m_1 rebondit sur la masse m_2 , qui elle reste immobile. C'est la situation du lancer d'une balle rebondissante sur un mur.



c – À quelle condition sur m_1 et m_2 est-il possible de réaliser un « carreau », i.e. échanger lors du choc les vitesses des deux masses, comme à la pétanque ?

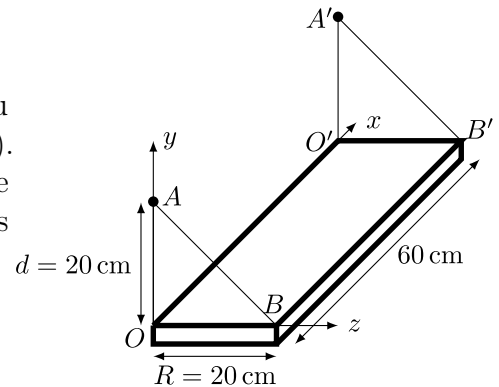
Réponse

Pour faire un carreau, on veut $v'_1 = 0 \Rightarrow \boxed{m_1 = m_2}$, et on aura bien $v'_2 = v_1$.



VI Étagère murale

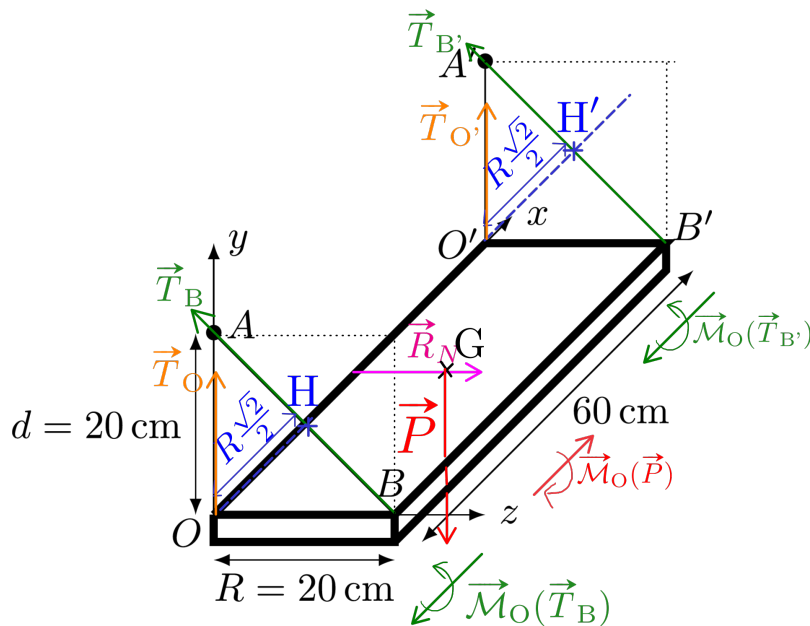
Une étagère est suspendue par quatre câbles métalliques et fixée au mur uniquement par deux pattes de fixation murale (en A et A'). La planche est en bois, de masse $m = 1,0 \text{ kg}$, de centre de masse G situé à la distance $R/2$ de l'axe $\Delta = (OO')$ et nous négligerons la masse des câbles.



- 1) Exprimer les 4 forces de tension des câbles en fonction de normes arbitraires, la force de réaction \vec{R}_N du mur sur la planche lorsque l'étagère est posée et en équilibre ainsi que le poids de l'étagère. \vec{R}_N est supposée normale au mur. Calculer les valeurs numériques des normes des forces à l'aide de l'équilibre.

Réponse

On fait un schéma :



◇ Bdf :

- ▷ En B et B', les tensions des câbles obliques sont portées par les vecteurs \vec{BA} et $\vec{B'A'}$. Elles ont la même norme T_1 par symétrie, et on peut déduire les angles $\widehat{OBA} = 45^\circ = \widehat{O'B'A'}$ puisque les triangles sont isocèles et rectangles. Ainsi, avec $\cos(45^\circ) = \frac{\sqrt{2}}{2} = \sin(45^\circ)$, on trouve

$$\vec{T}_B = \frac{\sqrt{2}}{2} T_1 (\vec{u}_y - \vec{u}_z) = \vec{T}_{B'}$$

- ▷ En O et O', les tensions sont égales et verticales, soit

$$\vec{T}_O = T_2 \vec{u}_y = \vec{T}_{O'}$$

- ▷ De plus, la réaction du mur est $\vec{R}_N = R_N \vec{u}_z$.

▷ Enfin, le poids s'exprime $\vec{P} = -mg \vec{u}_y$

◇ **BdM** :

▷ le moment des tensions en B et B' se trouvent par le bras de levier. Avec H le projeté orthogonal de O sur AB, on trouve $OH = R\frac{\sqrt{2}}{2}$ (OBA triangle rectangle isocèle, OH moitié de la diagonale et diagonale d'un carré de côté $a = a\sqrt{2}$). Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) &= 2 \times \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B) = \underbrace{-2}_{\text{sens direct}} OH \|\vec{T}_B\| \Leftrightarrow \mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = \underbrace{-2R\frac{\sqrt{2}}{2}}_{\text{OH}} \underbrace{T_1}_{\|\vec{T}_B\|} \\ &\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{M}_\Delta(\vec{T}_B + \vec{T}_{B'}) = -RT_1\sqrt{2}} \end{aligned}$$

▷ Les moments des tensions \vec{T}_O et $\vec{T}_{O'}$ ainsi que la réaction du support \vec{R}_N sont tous nuls, puisque leurs droites d'actions passent par l'axe Δ .

▷ Finalement, à l'équilibre la droite d'action du poids est à une distance $R/2$ de l'axe de rotation, et comme le poids fait tourner l'étagère dans le sens horaire, on a

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2}$$

◇ **PFD** : à l'équilibre, la somme des forces est nulle, soit

$$\begin{cases} T_1\sqrt{2} + 2T_2 = mg & \text{sur } \vec{u}_y \\ T_1\sqrt{2} = R_N & \text{sur } \vec{u}_z \end{cases}$$

◇ **TMC** : à l'équilibre, il n'y a pas de rotation donc la somme des moments est nulle :

$$RT_1\sqrt{2} = \frac{mgR}{2}$$

◇ **Ccl** : on trouve

$$\boxed{T_1 = \frac{mg}{2\sqrt{2}}} \Rightarrow \underline{T_1 = 3,5 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{R_N = \frac{mg}{2}} \Rightarrow \underline{R_N = 4,9 \text{ N}} \quad ; \quad \boxed{T_2 = \frac{mg}{4}} \Rightarrow \underline{T_2 = 2,5 \text{ N}}$$



2) On imagine que les 2 câbles fixés en B et B' se rompent en même temps. La planche n'est alors retenue que par les câbles OA et OA', et elle tourne donc autour de l'axe $\Delta = (OO')$. Nous négligerons son épaisseur et admettrons que son moment d'inertie par rapport à l'axe Δ vaut $J_\Delta = mR^2$. Montrer qu'alors :

$$\dot{\theta}^2 = \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta)$$

En déduire la vitesse angulaire de la planche lorsqu'elle percute le mur.

Réponse

On reconnaît l'énergie cinétique dans la partie gauche de l'équation proposée. Il serait donc logique de partir du TEC. On sait que la puissance d'une force de rotation est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F})\omega$, donc le travail élémentaire associé est $\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}) d\theta$. Or, les tensions en B et B' n'existent plus et les moments des tensions en O et de la réaction normale sont toujours nuls : il ne reste que le moment du poids.

Or, avec un angle θ , le bras de levier diminue et on trouve $\mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta)$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \Delta \mathcal{E}_c &= W(\vec{P}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 &= \int_0^\theta \frac{mgR}{2} \cos(\theta) d\theta \quad \left\{ \begin{array}{l} \mathcal{E}_{c,\text{rot}} = \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 \\ \mathcal{M}_\Delta(\vec{P}) = \frac{mgR}{2} \cos(\theta) \\ \int_0^\theta \cos(\theta) d\theta = [\sin(\theta)]_0^\theta \\ \sin(0) = 0 \end{array} \right. \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} J_\Delta \dot{\theta}^2 &= \frac{mgR}{2} \sin(\theta) \\ \Leftrightarrow \dot{\theta}^2 &= \frac{mgR}{J_\Delta} \sin(\theta) \end{aligned}$$



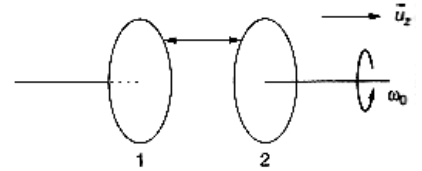
Quand l'étagère touche le mur, $\theta = \frac{\pi}{2}$, d'où

$$\dot{\theta}_f = \sqrt{\frac{3g}{R}} \Leftrightarrow \dot{\theta}_f = 12 \text{ rad}\cdot\text{s}^{-1}$$



VII Entraînement par frottements

On considère le système de deux disques en rotation, de moments d'inertie J_1 et J_2 par rapport à l'axe horizontal orienté par \vec{u}_z . Ils sont tous les deux en liaison pivot parfaite. Le second disque a une vitesse angulaire ω_0 , alors que le premier est initialement immobile. On translate lentement les disques le long de l'axe jusqu'à ce qu'ils rentrent en contact. Il n'y a plus de frottement après la mise en contact.



- 1) À quelle condition sur les vitesses angulaires n'y a-t-il plus de frottements ? Déterminer alors les vitesses angulaires finales de deux disques par application du TMC sur le système total.

Réponse

Il n'y a plus de frottements si les deux disques vont à la même vitesse angulaire. Or, le moment cinétique **total** se conserve puisque $\mathcal{M}_z(\vec{P}_1) = \mathcal{M}_z(\vec{P}_2) = 0$ (forces passent par l'axe de rotation) et les liaisons pivot sont supposées parfaites ; ainsi $\frac{d\mathcal{L}_z(\mathcal{S})}{dt} = 0$ soit $\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = \text{cte}$.

En prenant une situation avant contact et à la fin du contact, on obtient

$$\begin{aligned} 0 + J_2\omega_0 &= J_1\omega_{1,f} + J_2\omega_{2,f} \\ \Leftrightarrow \omega_f &= \frac{J_2}{J_1 + J_2}\omega_0 \end{aligned} \quad \left. \vphantom{\begin{aligned} 0 + J_2\omega_0 &= J_1\omega_{1,f} + J_2\omega_{2,f} \\ \Leftrightarrow \omega_f &= \frac{J_2}{J_1 + J_2}\omega_0 \end{aligned}} \right\} \omega_{1,f} = \omega_{2,f} = \omega_f$$

Ce résultat ne dépend aucunement du type de frottements ; seule la durée du régime transitoire est impactée par l'expression des frottements.



- 2) Faire un bilan d'énergie pour chaque disque séparément.

Réponse

Avec l'énergie potentielle de pesanteur prise à 0, on a :

- 1) $\Delta\mathcal{E}_{m,1} = \Delta\mathcal{E}_{c,1} = \frac{1}{2}J_1\omega_f^2 - 0$ soit

$$\Delta\mathcal{E}_{m,1} = \frac{1}{2}J_1 \left(\frac{J_2}{J_1 + J_2} \right)^2 \omega_0^2 > 0$$

Le disque 1 gagne donc de l'énergie cinétique grâce aux frottements avec le second disque.

- 2) Pour le second,

$$\begin{aligned} \Delta\mathcal{E}_{m,2} &= \Delta\mathcal{E}_{c,2} = \frac{1}{2}J_2\omega_f^2 - \frac{1}{2}J_2\omega_0^2 \\ \text{Soit } \Delta\mathcal{E}_{m,2} &= \frac{1}{2}J_2 \left(\left(\frac{J_2}{J_1 + J_2} \right)^2 - 1 \right) \omega_0^2 < 0 \end{aligned}$$

Évidemment, le second **perd** de l'énergie : il l'a cédée au premier et perdu une partie par frottements.

- 3) Faire le même bilan pour le système total.

Réponse

On somme les résultats précédents :

$$\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_m &= \Delta\mathcal{E}_{m,1} + \Delta\mathcal{E}_{m,2} \\ &= \frac{1}{2}(J_1 + J_2) \frac{J_2^2}{(J_1 + J_2)^2} \omega_0^2 - \frac{1}{2} J_2 \omega_0^2 \\ \Leftrightarrow \Delta\mathcal{E}_m &= -\frac{1}{2} \frac{J_1 J_2}{J_1 + J_2} \omega_0^2 < 0\end{aligned}$$

- 4) Commenter les résultats.

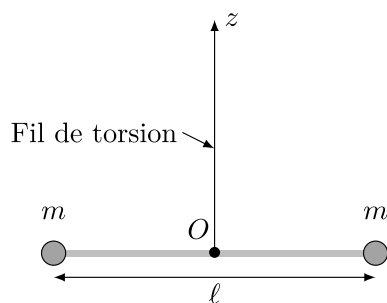
Réponse

À cause des frottements, l'énergie mécanique totale diminue. En revanche, l'énergie mécanique d'un sous-système peut augmenter ou diminuer.

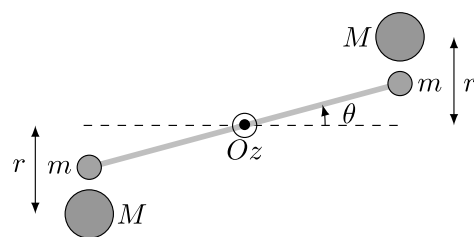
VIII Expérience de CAVENDISH

L'expérience réalisée par CAVENDISH en 1789 a permis à ce dernier d'obtenir une valeur remarquable de la constante de gravitation universelle, \mathcal{G} . Le dispositif est constitué de deux petites sphères, de masse $m = 0,72$ kg, fixées aux extrémités d'une tige de masse négligeable, rigide, et longueur $\ell = 180$ cm et suspendue horizontalement, en son milieu, à un fil de torsion vertical et très fin de constante de torsion C : si la tige tourne d'un angle θ par rapport à sa position d'équilibre $\theta = 0$, le fil exerce ainsi le couple de rappel $\vec{\Gamma} = -C\theta \vec{u}_z$ sur la tige.

Deux boules de plomb de masse $M = 160$ kg sont fixées, l'une derrière une petite sphère et l'autre devant l'autre petite sphère, à une distance $r = 20$ cm définie sur le schéma ci-dessous. Les deux forces d'attraction gravitationnelle produisent un couple qui fait tourner la tige d'un angle θ par rapport à sa position au repos. Les deux petites sphères se rapprochent ainsi des boules de plomb jusqu'à ce que la torsion du fil s'équilibre avec le couple gravitationnel.



Vue de face du pendule



Vue de dessus avec les boules de plomb

- 1) Nous cherchons dans un premier temps à déterminer la constante de torsion C du pendule en faisant osciller celui-ci. Les boules en plomb ne sont pas encore présentes.

a – Montrer à l'aide du TMC que l'oscillateur est harmonique, de pulsation propre $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.

Réponse

Soit $\Delta = (Oz)$ l'axe vertical ascendant. Chacune des deux sphères étant en mouvement de rotation de rayon $\ell/2$ autour de Δ à la même vitesse angulaire $\dot{\theta}$ et la masse de la tige étant négligée, le moment cinétique total de l'ensemble {tige+deux sphères} par rapport à Δ est $\mathcal{L}_\Delta = \frac{m\ell^2}{2} \dot{\theta}$.

Ce système est soumis à l'action de son poids et de la tension du fil, dont les moments par rapport à Δ sont nuls, et au couple de torsion $\vec{\Gamma} = -C\theta \vec{u}_z$.

L'application du TMC scalaire conduit donc à

$$\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{2C}{m\ell^2}\theta = 0}$$

C'est bien un oscillateur harmonique de pulsation $\omega_0 = \sqrt{\frac{2C}{m\ell^2}}$.



b – La mesure de la période T_0 des oscillations donne $T_0 = 7,0$ min. En déduire la valeur de C .

Réponse

$$\boxed{C = \frac{2\pi^2 m\ell^2}{T_0^2}} \Rightarrow C = 2,6 \times 10^{-4} \text{ N}\cdot\text{m}\cdot\text{rad}^{-1}$$



2) Les boules étant placées, déterminer l'expression de la déviation angulaire θ par rapport à la position d'équilibre. On tiendra compte du fait que θ est extrêmement faible pour évaluer le couple exercé par les deux boules de plomb.

Réponse

On se place dans le système de coordonnées polaires, de base associée $(\vec{u}_r, \vec{u}_\theta, \vec{u}_z)$ pour chacune des deux sphères, et on estime que la distance entre une des sphères et la boule correspondante est

$$r - \frac{\ell}{2} \sin(\theta) \approx r - \frac{\ell}{2} \theta$$

On néglige aussi l'action de la boule la plus éloignée. On suppose de plus que la force de gravitation exercée par la boule sur la sphère est portée par \vec{u}_θ , et on utilise le développement limité $(1 - x)^{-2} \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + 2x$:

$$\vec{F}_g = \mathcal{G} \frac{mM}{\left(r - \frac{\ell}{2}\theta\right)^2} \vec{u}_\theta \approx \frac{\mathcal{G}mM}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right) \vec{u}_\theta$$

Le moment de cette force par rapport à Δ est ainsi, avec d du bras de levier égal à $\ell/2$:

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_g) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{2r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

On en déduit que le moment total des deux forces gravitationnelles est le double de ce moment unique :

$$\mathcal{M}_\Delta(\vec{F}_{g,\text{tot}}) = \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

Ainsi, avec le TMC :

$$\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\theta_{\text{eq}} = \frac{\mathcal{G}mM\ell r}{Cr^3 - \mathcal{G}mM\ell_2}} \quad \left. \vphantom{\frac{m\ell^2}{2}\ddot{\theta} = -C\theta + \frac{\mathcal{G}mM\ell}{r^2} \left(1 + \frac{\ell}{r}\theta\right)} \right\} \text{Équilibre}$$



- 3) La valeur obtenue par CAVENDISH à l'aide de ce dispositif et $\mathcal{G} = 6,75 \times 10^{-11} \text{ N}\cdot\text{m}^2\cdot\text{kg}^{-2}$. En déduire la déviation angulaire et commenter.

Réponse

$$\underline{\theta_{\text{eq}} = 1,4 \times 10^{-3} \text{ rad}}$$

Ainsi, CAVENDISH avait donc développé une méthode de mesure d'angle avec une précision inférieure au milliradian !

Pour une vidéo sur le sujet, voir notamment celle de Steve MOULD : https://youtu.be/70-_GBymrck?si=6iBDUeYnSixdLS3c

