Ondes – chapitre 2

Interférences à deux ondes

I Rappel : mesure de déphasages

A Définition

Définition : déphasage

Pour deux signaux sinusoïdaux $s_1(t) = A_1 \cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega_2 t + \varphi_2)$, on définit le **déphasage** entre s_2 et s_1 comme étant la **différence de leurs phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega_1 t + \varphi_2) - (\omega_2 t + \varphi_1)$$

Pour de signaux *de même fréquence*, le déphasage est simplement la **différence des phases à l'origine des temps** :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1}$$

B Valeurs particulières

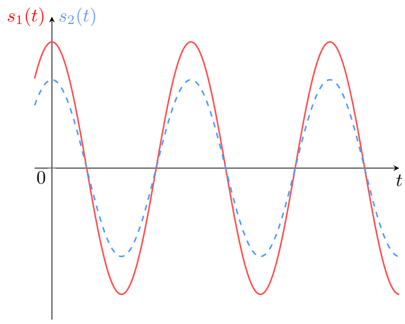
I.B.1 Signaux en phase

Définition

Deux signaux sont en phase si leur déphasage est nul (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi]}$$

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales aux mêmes instants, et s'annulent simultanément.



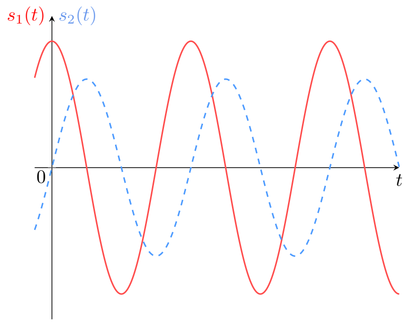
I.B.2 Signaux en quadrature de phase

Définition

Deux signaux sont en quadrature phase si leur déphasage est de $\pm\pi/2$ (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv \pm\frac{\pi}{2} \quad [2\pi]}$$

Quand un signal s'annule, l'autre est à son maximum où à son minimum : c'est la relation entre un cosinus et un sinus.



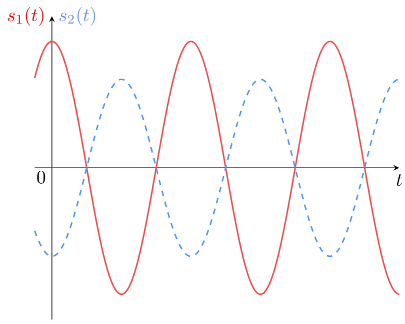
I.B.3 Signaux en opposition de phase

Définition

Deux signaux sont en opposition de phase si leur déphasage est de $\pm\pi$ (modulo 2π) :

$$\boxed{\Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi]}$$

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximale, l'autre est à la valeur minimale, mais ils s'annulent simultanément.



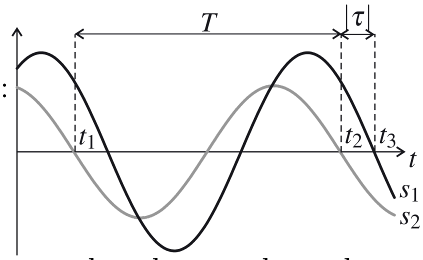
C Lecture d'un déphasage

Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$ est lié au **retard temporel** $\tau_{1/2}$ du signal s_1 par rapport au signal s_2 : on a

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \omega\tau_{1/2}}$$

Dans ce cas, le déphasage obtenu est entre $-\pi$ et $+\pi$. On définit alors :

- $\Delta\varphi_{2/1} > 0 \Rightarrow s_2$ est en avance sur s_1 ;
- $\Delta\varphi_{2/1} < 0 \Rightarrow s_2$ est en retard sur s_1.



Le principe est de mesurer la différence de temps entre les deux moments les plus proches tels que les deux signaux s'annulent **avec la même pente**. Par construction, la pulsation représente une vitesse angulaire, c'est pourquoi on a $\omega = 2\pi/T$ comme $v = d/t$ en mécanique. On trouve donc naturellement la relation entre $\Delta\varphi_{2/1}$ et $\tau_{2/1}$.

II Superposition d'ondes sinusoïdales de mêmes fréquences

A Introduction

La plupart du temps, les ondes se croisent sans interagir particulièrement, et on ne voit que la somme des signaux. Voir l'animation `geogebra`[1]. Étudions mathématiquement ce phénomène en utilisant **deux sources sinusoïdales**.

Hypothèses

- Chaque source émet un signal sinusoïdal ;
- Les deux signaux ont la même fréquence.

On pose donc

$$s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1(\mathrm{M})) \quad \text{et} \quad s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2(\mathrm{M}))$$

les signaux en un point M de l'espace, et on s'intéresse au signal

$$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$

B Signaux de même amplitude

II.B.1 Cas général

Commençons par étudier le cas où $\boxed{A_1 = A_2 = A_0}$

Développement

On a alors

$$\begin{aligned} s(t) &= s_1(t) + s_2(t) \\ &= A_0\left[\cos(\omega t + \varphi_1(\mathrm{M})) + \cos(\omega t + \varphi_2(\mathrm{M}))\right] \\ &= 2A_0\cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1(\mathrm{M}) + \omega t + \varphi_2(\mathrm{M})}{2}\right)\cos\left(\frac{\omega t + \varphi_1(\mathrm{M}) - \omega t - \varphi_2(\mathrm{M})}{2}\right) \end{aligned}$$

Rappel

On a utilisé ici la formule

$$\cos p + \cos q = 2\cos\left(\frac{p+q}{2}\right)\cos\left(\frac{p-q}{2}\right)$$

1. https://www.geogebra.org/m/jyh2ZMXJ

Pour plus de lisibilité, on introduit donc

$$\Delta\varphi(\mathrm{M}) = \varphi_1(\mathrm{M}) - \varphi_2(\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \varphi_0(\mathrm{M}) = \frac{\varphi_1(\mathrm{M}) + \varphi_2(\mathrm{M})}{2}$$

Résultat

Ainsi, $$s(t) = 2A_0 \cos\left(\frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right)\cos(\omega t + \varphi_0(\mathrm{M}))$$

Analyse

Le signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même amplitude A_0 et de même pulsation ω est :

1) Un signal **sinusoïdal** et **de même pulsation** ω ;
2) D'amplitude **dépendante de $\boldsymbol{\Delta}\varphi$(M)**, telle que $A = 2A_0 \cos\dfrac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}$.

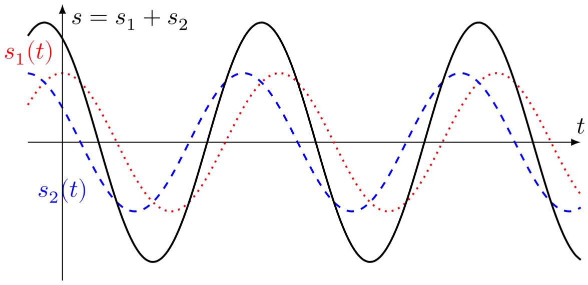


FIGURE 2.1 – Somme avec déphasage $\Delta\varphi = \pi/3$.

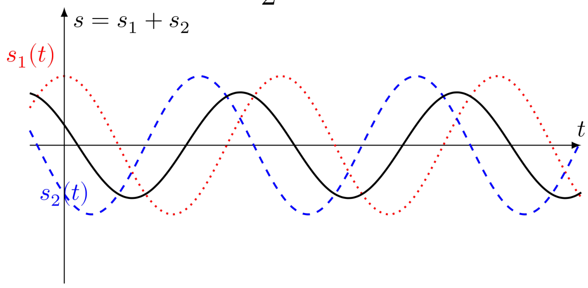


FIGURE 2.2 – Somme avec déphasage $\Delta\varphi = 3\pi/4$.

II.B.2 Cas extrêmes

On distingue deux cas particuliers extrêmes avec cette formule :

▷ $\cos\left(\dfrac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = \pm 1$: dans ce cas **l'amplitude est maximale** et vaut $2A_0$. Or,

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = \pm 1 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2} \equiv 0 \quad [\pi] \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\varphi(\mathrm{M}) = 0 \quad [2\pi]$$

Ce déphasage correspond à des **signaux en phase**. Ainsi, lorsque les signaux sont en phase, les maxima et minima de vibration se correspondent pour donner à chaque instant une amplitude double.

▷ $\cos\left(\dfrac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = 0$: dans ce cas, **l'amplitude est nulle**. Or,

$$\cos\left(\frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2}\right) = 0 \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{\Delta\varphi(\mathrm{M})}{2} = p\pi + \frac{\pi}{2} \quad \Longleftrightarrow \quad \Delta\varphi(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi$$

Ce sont donc des **signaux en opposition de phase**. Ainsi, des signaux en opposition de phase ont leurs minima et maxima qui s'opposent, et l'amplitude résultante est nulle.

Ceci est vérifiable avec l'animation `geogebra`.

C Signaux d'amplitudes différentes

II.C.1 Cas général

On a toujours $$s(t) = s_1(t) + s_2(t)$$ mais $A_1 \neq A_2$.

On note simplement φ_1 et φ_2 dans les calculs pour alléger l'écriture. On peut soit utiliser la trigonométrie classique, soit les complexes :

Rappel

$$\cos(a+b) = \cos a \cos b - \sin a \sin b$$
$$\cos(a-b) = \cos a \cos b + \sin a \sin b$$

$$\cos\theta = \frac{e^{j\theta}+e^{-j\theta}}{2}$$
$$|\underline{z}|^2 = \underline{z} \times \underline{z}^* \quad \text{et} \quad \tan\arg(\underline{z}) = \frac{\mathrm{Im}(\underline{z})}{\mathrm{Re}(\underline{z})}$$

Ce qui donne :

Démonstration

$$\begin{aligned}
& s(t) = A_1\cos(\omega t+\varphi_1) + A_2\cos(\omega t+\varphi_2)\\
\Leftrightarrow\ & s(t) = A_1(\cos\omega t\cos\varphi_1 - \sin\omega t\sin\varphi_1)\\
& \qquad + A_2(\cos\omega t\cos\varphi_2 - \sin\omega t\sin\varphi_2)\\
\Leftrightarrow\ & s(t) = (A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2)\cos\omega t\\
& \qquad - (A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2)\sin\omega t
\end{aligned}$$

Ceci est équivalent à écrire

$$\boxed{s(t) = A\cos(\omega t+\varphi)} \quad \text{car}$$
$$A\cos(\omega t+\varphi) = A\cos\varphi\cos\omega t - A\sin\varphi\sin\omega t$$

On trouve donc

$$\left\{\begin{array}{lcll} A\cos\varphi & = & A_1\cos\varphi_1 + A_2\cos\varphi_2 & (1)\\ A\sin\varphi & = & A_1\sin\varphi_1 + A_2\sin\varphi_2 & (2)\end{array}\right.$$

On obtient A l'amplitude de l'onde somme en prenant $(1)^2+(2)^2$, et $\tan\varphi$ avec $(2)/(1)$:

$$\left\{\begin{array}{l} A^2\underbrace{(\cos^2\varphi+\sin^2\varphi)}_{=1} = {A_1}^2 + {A_2}^2\\ \quad +2A_1A_2\underbrace{(\cos\varphi_1\cos\varphi_2+\sin\varphi_1\sin\varphi_2)}_{=\cos(\varphi_1-\varphi_2)}\\ \tan\varphi = \dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \sqrt{{A_1}^2+{A_2}^2+2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}\\ \varphi & = & \mathrm{atan}\left(\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\right)\end{array}\right.$$

En supposant directement que $s(t) = A\cos(\omega t+\varphi)$ (par linéarité),

$$\begin{aligned}
& \underline{s} = \underline{s_1} + \underline{s_2}\\
\Leftrightarrow\ & Ae^{j\varphi}\cancel{e^{j\omega t}} = A_1e^{j\varphi_1}\cancel{e^{j\omega t}} + A_2e^{j\varphi_2}\cancel{e^{j\omega t}}\\
\Leftrightarrow\ & Ae^{j\varphi} = A_1e^{j\varphi_1} + A_2e^{j\varphi_2}
\end{aligned}$$

D'où $\left\{\begin{array}{lcl} |\underline{A}|^2 & = & (\underline{A_1}+\underline{A_2})(\underline{A_1}^*+\underline{A_2}^*)\\ \arg(\underline{A}) & = & \arg(\underline{A_1}+\underline{A_2})\end{array}\right.$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A^2 & = & (A_1e^{j\varphi_1}+A_2e^{j\varphi_2})\\ & \times & (A_1e^{-j\varphi_1}+A_2e^{-j\varphi_2})\\ \varphi & = & \arg(A_1\cos\varphi_1 + jA_1\sin\varphi_1\\ & & \quad +A_2\cos\varphi_2+jA_2\sin\varphi_2))\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A^2 & = & {A_1}^2\underbrace{e^{j(\varphi_1-\varphi_1)}}_{=1} + {A_2}^2\underbrace{e^{j(\varphi_2-\varphi_2)}}_{=1} +\\ & & +A_1A_2\underbrace{\left(e^{j(\varphi_1-\varphi_2)}+e^{-j(\varphi_1-\varphi_2)}\right)}_{=2\cos\Delta\varphi}\\ \tan\varphi & = & \dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\end{array}\right.$$

$$\Leftrightarrow \left\{\begin{array}{lcl} A & = & \sqrt{{A_1}^2+{A_2}^2+2A_1A_2\cos(\Delta\varphi)}\\ \varphi & = & \mathrm{atan}\left(\dfrac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\right)\end{array}\right.$$

On appelle donc

$$\varphi_0(\mathrm{M}) = \mathrm{atan}\left(\frac{A_1\sin\varphi_1+A_2\sin\varphi_2}{A_1\cos\varphi_1+A_2\cos\varphi_2}\right)$$

et ainsi,

Résultat

$$s(t) = \sqrt{{A_1}^2+{A_2}^2+2A_1A_2\cos(\Delta\varphi(\mathrm{M}))}\cos(\omega t+\varphi_0(\mathrm{M}))$$

Ainsi, même si les amplitudes sont différentes le résultat fondamental reste le même : l'amplitude dépend du déphasage et il y a possibilité d'avoir des interférences constructives et destructives. Les minima et maxima ne sont cependant **plus les mêmes**.

II.C.2 Cas extrêmes

- $\cos\Delta\varphi = 1$: dans ce cas **l'amplitude est maximale** et vaut $\sqrt{{A_1}^2+{A_2}^2+2A_1A_2} = A_1+A_2$. Or,

  $$\cos\Delta\varphi = 1 \iff \Delta\varphi \equiv 0 \quad [2\pi]$$

  Ce déphasage correspond à des **signaux en phase**. Ainsi, lorsque les signaux sont en phase, les maxima et minima de vibration se correspondent pour donner à chaque instant une amplitude égale à la somme des deux.

- ▹ $\cos\Delta\varphi = -1$: dans ce cas **l'amplitude est minimale** et vaut $\sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 - 2A_1A_2} = |A_1 - A_2|$. Or,

$$\cos\Delta\varphi = -1 \iff \Delta\varphi \equiv \pm\pi \quad [2\pi]$$

Ce sont donc des **signaux en opposition de phase**. Ainsi, des signaux en opposition de phase ont leurs minima et maxima qui s'opposent, et l'amplitude résultante est minimale.

Analyse

Le signal somme de deux signaux sinusoïdaux d'amplitudes A_1 et A_2 de même pulsation ω est :

1) Un signal **sinusoïdal** et **de même pulsation** ω ;
2) D'amplitude **dépendante de $\Delta\varphi$**(M), telle que

$$\boxed{A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos(\Delta\varphi(\mathrm{M}))}}$$

- **Maximale** $A_1 + A_2$ pour signaux **en phase** ($\Delta\varphi = 2p\pi$, $p \in \mathbb{Z}$) ;
- **Minimale** $A_1 - A_2$ pour signaux **en opposition de phase** ($\Delta\varphi = (2p+1)\pi$, $p \in \mathbb{Z}$).

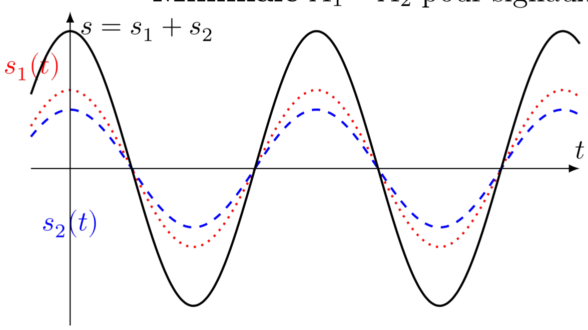


Figure 2.3 – Signaux en phase.

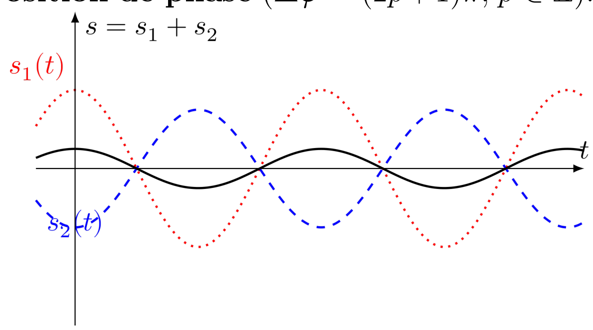


Figure 2.4 – Signaux en opposition.

D Bilan

Bilan

Lorsque deux ondes **de même fréquence** et de **même nature** se superposent en M :

L'amplitude de la somme est **maximale** si les signaux sont **en phase** :

$$\boxed{\Delta\varphi(\mathrm{M}) = \varphi_2(\mathrm{M}) - \varphi_1(\mathrm{M}) = 2p\pi}$$

On parle d'**interférences constructives**.

L'amplitude de la somme est **minimale** si les signaux sont **en opposition de phase** :

$$\boxed{\Delta\varphi(\mathrm{M}) = \varphi_2(\mathrm{M}) - \varphi_1(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi}$$

On parle d'**interférences destructives**.

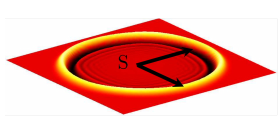
$p \in \mathbb{Z}$ est appelé l'**ordre d'interférence**.

III Approximation par une onde plane

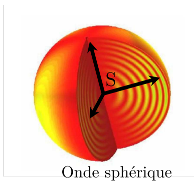
A Sources ponctuelles

D'une manière générale, une source ponctuelle émet une onde dans tout l'espace disponible :

- Si c'est une **droite**, alors l'onde est **plane** ;
- Si c'est un **plan**, alors l'onde est **circulaire** ;
- Si c'est un **volume**, alors l'onde est **sphérique**.



Onde circulaire



Onde sphérique

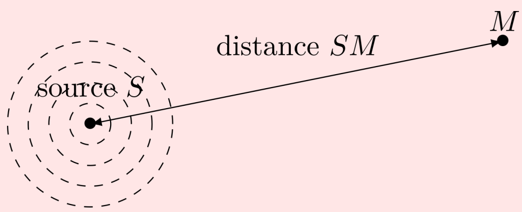
Pour que l'étude précédente fonctionne, il faut que les signaux soient de la même forme mathématique. On utilise pour cela l'approximation suivante :

Approximation par une onde plane

À des distances de la source suffisamment grandes devant la longueur d'onde λ, on peut approximer la vibration $s(\mathrm{M},t)$ en un point M d'une onde circulaire ou sphérique par une onde place, telle que

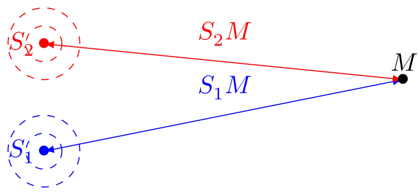
$$\boxed{s(\mathrm{M},t) = A\cos(\omega t - k\mathrm{SM} + \varphi_S)}$$

avec A constante au voisinage de M et φ_S la phase à l'origine des temps de la source.



B Déphasage et différence de marche

Supposons deux sources S_1 et S_2 émettant chacune une onde sphérique sinusoïdale **à la même pulsation** et de **même longueur d'onde**. Suffisamment loin de la source, elles peuvent se mettre sous la forme :



$$s_1(\mathrm{M},t) = A_1\cos(\omega t - k\mathrm{S}_1\mathrm{M} + \varphi_{01}) \quad \text{et} \quad s_2(\mathrm{M},t) = A_2\cos(\omega t - k\mathrm{S}_2\mathrm{M} + \varphi_{02})$$

On aura donc

$$\varphi_1(\mathrm{M}) = -k\mathrm{S}_1\mathrm{M} + \varphi_{01} \quad \text{et} \quad \varphi_2(\mathrm{M}) = -k\mathrm{S}_1\mathrm{M} + \varphi_{02}$$

Le déphasage au point M est donc

$$\Delta\varphi_{1/2}(\mathrm{M}) = \varphi_1(\mathrm{M}) - \varphi_2(\mathrm{M}) = -k(\mathrm{S}_1\mathrm{M} - \mathrm{S}_2\mathrm{M}) + \varphi_{01} - \varphi_{02}$$

Déphasage et différence de marche

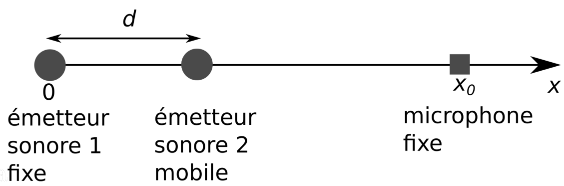
Le déphasage entre 2 ondes se superposant en M est

$$\boxed{\Delta\varphi_{1/2}(\mathrm{M}) = -k\Delta L_{1/2}(\mathrm{M}) + \Delta\varphi_0}$$

– $\Delta L_{1/2}(\mathrm{M}) = \mathrm{S}_1\mathrm{M} - \mathrm{S}_2\mathrm{M}$ est la **différence de marche** au point M. C'est la distance supplémentaire que doit parcourir l'onde 1 par rapport à l'onde 2 pour qu'elle atteigne M.
– $\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}$ est la **différence de phase à l'origine entre les sources**. Si elles sont identiques, on aura simplement $\Delta\varphi_0 = 0$.

Exercice

Soient 2 émetteurs sonores envoyant une onde progressive sinusoïdale de même fréquence, amplitude et phase à l'origine. Le premier est fixé à l'origine du repère, l'émetteur 2 est mobile et à une distance d du premier, et un microphone est placé à une distance fixe x_0 de l'émetteur 1 et est aligné avec les deux émetteurs. On néglige l'influence de l'émetteur 2 sur l'émetteur 1 et toute atténuation.



1. Lorsque $d = 0$, qu'enregistre-t-on au niveau du microphone ?
2. On part de $d = 0$ et on augmente d jusqu'à ce que le signal enregistré soit nul. Ceci se produit pour $d = 6{,}0\,\mathrm{cm}$. Expliquer cette extinction.

$\boxed{3}$ En déduire la longueur d'onde du son émis.
$\boxed{4}$ Pour $d = 12{,}0\,\mathrm{cm}$, quelle sera l'amplitude du signal enregistré ?

$\boxed{1}$ Si $d = 0$, alors la différence de marche $\Delta L_{1/2}(x_0) = 0$; de plus, comme les phases à l'origine des temps de chaque source est la même, on a $\Delta\varphi_0 = 0$: ainsi, on a

$$\boxed{\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = 0}$$

Autrement dit, les signaux sont en phase. Comme ils ont la même amplitude, au microphone on enregistre un signal de la fréquence d'émission, avec une amplitude double de celle d'un émetteur.

$\boxed{2}$ On a toujours $\Delta\varphi_0 = 0$, donc $\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = -k\Delta L_{1/2}(x_0)$. En augmentant la distance entre les sources, on augmente le déphasage (en valeur absolue), en mettant la source 1 en retard par rapport à la 2. Ainsi, il y a une valeur de différence de marche telle que $\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = -\pi$, c'est-à-dire que les signaux seront en opposition de phase et s'annuleront.

$\boxed{3}$

$$\begin{aligned}
\Delta L_{1/2}(x_0) &= \mathrm{S_1M} - \mathrm{S_2M} \\
&= d \\
\Leftrightarrow \Delta\varphi_{1/2}(x_0) &= -k\Delta L_{1/2} \\
&= -kd \\
\Leftrightarrow -\pi &= -\frac{2\pi}{\lambda}d \\
\Leftrightarrow &\boxed{\lambda = 2d} \quad \text{avec} \quad \left\{ d = 6{,}0\,\mathrm{cm} \right. \\
\text{A.N. :} \quad &\boxed{\lambda = 12{,}0\,\mathrm{cm}}
\end{aligned}$$

Les émetteurs émettent dans les micro-ondes.

$\boxed{4}$ Si on double la distance, alors on aura $\Delta\varphi_{1/2}(x_0) = -2kd = -2\pi$: ceci est congru à 0 modulo 2π, donc les signaux seront de nouveau en phase, et on récupère le signal trouvé question $\boxed{1}$.

Pour une animation et visualisation dans le plan, voir ce site[2].

2. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/cuve_ondes/interference_ondes_circulaires.php

IV Interférences lumineuses

A Cohérence d'ondes lumineuses

La plupart des sources lumineuses ont une phase à l'origine qui n'est pas constante, mais prend une valeur aléatoire au bout d'un certain temps généralement très court : on dit qu'elles envoient des **trains d'ondes**.

On appelle cette durée le **temps de cohérence** et on la note τ_c ; il correspond à la durée sur laquelle l'onde émise par une source a une phase à l'origine des temps constante, c'est-à-dire $\varphi_0 = \text{cte}$. Après τ_c, le prochain train d'onde émis par la source a une autre valeur de phase à l'origine des temps.

On peut également parler de **longueur de cohérence** $L_c = c\tau_c$: c'est la distance sur laquelle un train d'onde est cohérent, c'est-à-dire avec une unique phase à l'origine.

Pour interférer, **deux sources doivent être cohérentes**, c'est-à-dire avoir $\Delta\varphi_0 = \text{cte}$; ceci n'est en général pas réalisable par manque de contrôle sur cette variation de phase à l'origine, et les interférences lumineuses se font donc **avec une unique source**, donnant forcément des ondes cohérentes.

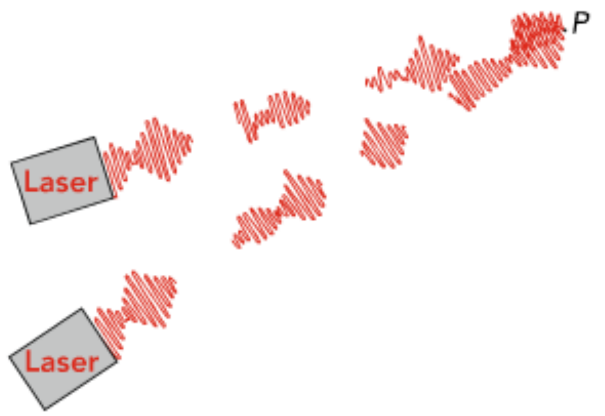


Tableau 2.1 – Temps et longueurs de cohérence

Source	τ_c (s)	L_c (m)
Lumière du Soleil	2×10^{-15}	6×10^{-7}
Ampoule	3×10^{-14}	1×10^{-5}
Raie rouge hydrogène	1×10^{-11}	4×10^{-3}
Laser hélium-néon	1×10^{-9}	3×10^{-1}

B Intensité lumineuse

La période (temporelle) typique d'une onde lumineuse est de l'ordre de 10^{-15} s, ou ≈ 1 fs : c'est une échelle de temps infinitésimale bien inférieure au temps de détection de n'importe quel capteur optique : l'œil humain a un temps de réponse $\approx 10^{-1}$ s, un capteur CCD $\approx 10^{-6}$ s. Ainsi, un récepteur optique n'est sensible **qu'à l'énergie moyenne du signal**. Cette énergie est proportionnelle au carré de la grandeur $s(\mathrm{M},t)$ propagée par l'onde (ici électromagnétique), et on définit donc

Définition

L'intensité d'un signal est reliée à l'amplitude de l'onde *via* la relation

$$\boxed{I = K \left\langle s^2(\mathrm{M},t) \right\rangle}$$

avec K une constante et $\langle\cdot\rangle$ la moyenne temporelle.

Ainsi, pour une onde monochromatique $s(\mathrm{M},t) = A\cos(\omega t + \varphi(\mathrm{M}))$, on aura

$$I = KA^2 \left\langle \cos^2(\omega t + \varphi(\mathrm{M})) \right\rangle = \frac{1}{2}KA^2$$

L'intensité lumineuse d'une onde monochromatique est proportionnelle au carré de son amplitude.

C Formule de Fresnel

Soient 2 ondes lumineuses cohérentes et de même pulsation, d'amplitudes A_1 et A_2, interférant en un point M. On a vu que le signal somme $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$ avait une amplitude

$$A = \sqrt{{A_1}^2 + {A_2}^2 + 2A_1A_2\cos\Delta\varphi(\mathrm{M})}$$

On trouve donc l'intensité $I(\mathrm{M})$ en en prenant le carré et en multipliant par $\frac{1}{2}K$:

$$I(\mathrm{M}) = \frac{1}{2}KA^2 = \frac{1}{2}K{A_1}^2 + \frac{1}{2}K{A_2}^2 + 2\frac{1}{2}KA_1A_2\cos\Delta\varphi(\mathrm{M})$$

$$\text{avec} \quad I_1 = \frac{1}{2}K{A_1}^2 \quad \text{et} \quad I_2 = \frac{1}{2}K{A_2}^2 \quad \text{on trouve} \quad \sqrt{I_1I_2} = \frac{1}{2}KA_1A_2$$

Ainsi, on a :

Formule de Fresnel

L'intensité lumineuse $I(\mathrm{M})$ résultant de l'interférence de 2 ondes monochromatiques en un point M de l'espace s'écrit [a] :

$$\boxed{I(\mathrm{M}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1I_2}\cos\Delta\varphi(\mathrm{M})}$$

Si $A_1 = A_2 = A_0$, c'est-à-dire $I_1 = I_2 = I_0$, alors

$$\boxed{I(\mathrm{M}) = 2I_0(1 + \cos\Delta\varphi(\mathrm{M}))}$$

Ainsi, selon la valeur de $\Delta\varphi(\mathrm{M})$ ($2p\pi$ ou $(2p+1)\pi$), on trouve $I(\mathrm{M}) = 4I_0$ ou $I(\mathrm{M}) = 0$.

a. cette formule sera fournie dans les énoncés

D Chemin optique

La propagation des ondes lumineuses se fait dans des milieux avec des indices optiques n qui peuvent être différents, et donc avec des vitesses $v = c/n$ différentes. Ainsi, pour les interférences optiques, le déphasage prend en compte le ou les indice(s) rencontré(s) :

Déphasage et différence de chemin optique

Le déphasage entre 2 ondes *lumineuses* sur superposant en M est

$$\boxed{\Delta\varphi_{1/2}(\mathrm{M}) = -k_0\delta_{1/2}(\mathrm{M}) + \Delta\varphi_0}$$

- $\delta_{1/2}(\mathrm{M}) = n_1\mathrm{S_1M} - n_2\mathrm{S_2M}$ est la **différence de chemin optique** au point M.
- $k_0 = \dfrac{2\pi}{\lambda_0}$ est le **vecteur d'onde dans le vide** correspondant à la **longueur d'onde dans le vide** des ondes.
- $\Delta\varphi_0 = \varphi_{01} - \varphi_{02}$ est la **différence de phase à l'origine entre les sources**.

Démonstration

En effet, si l'onde 1 parcourt la distance $\mathrm{S_1M}$ dans le milieu n_1, elle le fait à la vitesse $v_1 = c/n_1$. Pour considérer qu'elle va à la vitesse $c = n_1v_1$, il faut multiplier la distance par n_1 :

$$n_1\mathrm{S_1M} = n_1v_1t \Leftrightarrow n_1\mathrm{S_1M} = ct$$

Tout se passe comme si **l'onde allait à la vitesse c mais parcourait une distance n_i fois plus grande**.

V Expérience des trous d'Young

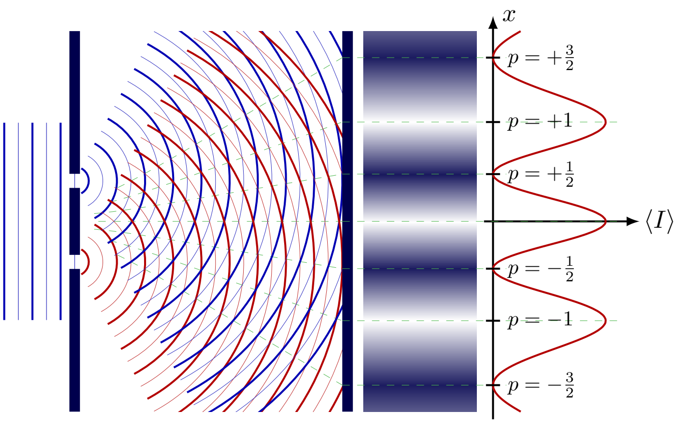
A Introduction

La nature de la lumière a été sujet à de grands débats durant de nombreux siècles, entre vision corpusculaire et ondulatoire. C'est en 1802 que l'expérience dite des « trous d'Young » a permis de confirmer la nature ondulatoire de la lumière en réalisant une figure d'interférences lumineuses.

En effet, pour obtenir 2 sources lumineuses cohérentes il faut créer deux sources secondaires provenant d'une **source unique** et qui ait un temps de cohérence suffisamment grand. Une version moderne de cette expérience consiste à pointer un unique laser de longueur d'onde λ sur deux fentes fines horizontales et parallèles : ces fentes diffractent la lumière est se comportent **comme deux sources cohérentes**.

La zone de l'espace où les faisceaux se superposent est appelé **champ d'interférences**. Sur un écran, on observe alors la figure ci-contre, avec des variations d'intensité lumineuse :

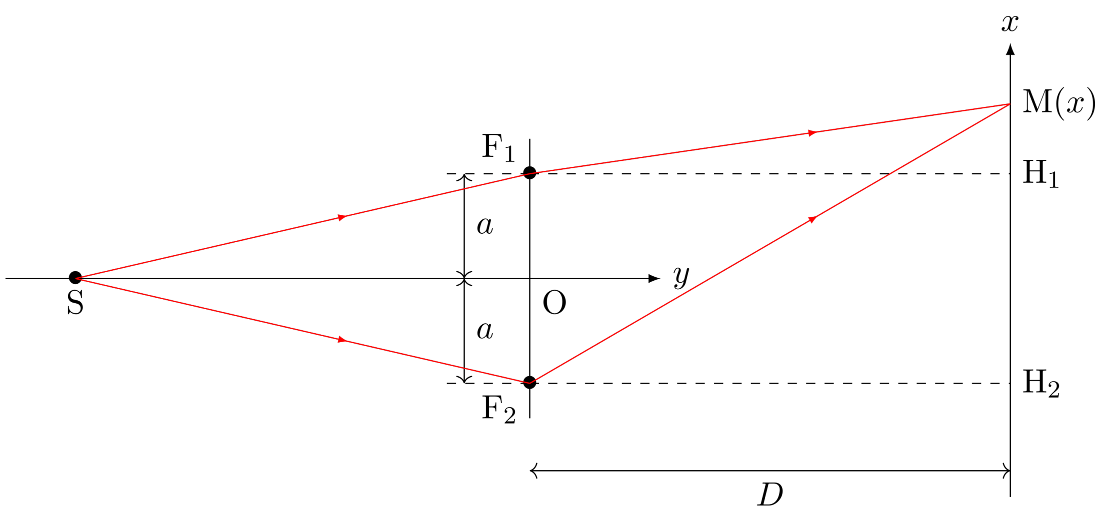
- au milieu des zones claires (**maximum** local d'intensité) on a des **interférences constructives** ;
- au milieu des zones sombres (**minimum** local d'intensité) on a des **interférences destructives**.



On appelle **interfrange** et on le note i la *distance* séparant deux milieux de franges brillantes (ou sombres) consécutives.

B Présentation

Soit S une source lumineuse ponctuelle, monochromatique de longueur d'onde λ, éclairant deux fentes fines horizontales et parallèles F_1 et F_2 distantes de $2a$, avec O au milieu. S est situé sur un axe optique perpendiculaire à un écran placé à une distance D très supérieure à a (pour l'approximation en ondes planes). Le milieu de propagation est l'air, d'indice optique $n = 1$.



On se limite au tracé de 2 rayons qui interfèrent au point $\mathrm{M}(x)$, passant chacun par une des fentes. On a alors successivement :

- **Diffraction** : les ondes passant par une fente sont en général simplement coupées, mais quand l'ouverture est de l'ordre de la longueur d'onde, on observe que le faisceau s'étale avec un motif caractéristique. Plus l'ouverture est étroite, plus la taille du motif est grande. Dans cette expérience, chaque trou créé une tâche de diffraction, et ces deux tâches se superposent sur l'écran en créant des interférences observables.
- **Interférence** : avec la formule de FRESNEL

$$I(\mathrm{M}) = I_1 + I_2 + 2\sqrt{I_1 I_2}\cos\Delta\varphi(\mathrm{M})$$

  - Lorsque le déphasage est un multiple pair de π, soit $\boxed{\Delta\varphi = 2p\pi}$, les interférences sont constructives.
  - Lorsque le déphasage est un multiple impair de π, soit $\boxed{\Delta\varphi = (2p+1)\pi}$, les interférences sont destructives.

On va donc déterminer le déphasage puis la différence de chemin de ces rayons, pour finalement déterminer l'interfrange i.

C Détermination de l'interfrange

V.C.1 Calcul du déphasage

Les phases des ondes 1 et 2 dues à leur propagation sont

$$\varphi_1(\mathrm{M}) = -k_0(\mathrm{SF}_1 + \mathrm{F}_1\mathrm{M}) \quad \text{et} \quad \varphi_2(\mathrm{M}) = -k_0(\mathrm{SF}_2 + \mathrm{F}_2\mathrm{M})$$

Or, $\mathrm{SF}_1 = \mathrm{SF}_2$, donc

$$\begin{aligned} \Delta\varphi_{1/2}(\mathrm{M}) &= \varphi_1(\mathrm{M}) - \varphi_2(\mathrm{M}) = k_0(\mathrm{F}_2\mathrm{M} - \mathrm{F}_1\mathrm{M}) \\ \Leftrightarrow &\boxed{\Delta\varphi_{1/2}(\mathrm{M}) = k_0\delta_{2/1}(\mathrm{M})} \end{aligned}$$

V.C.2 Calcul de la différence de chemin optique

On cherche à exprimer $\mathrm{F}_1\mathrm{M}$ et $\mathrm{F}_2\mathrm{M}$ en fonction des grandeurs du problème. Pour cela, on place les points H_1 et H_2 projetés orthogonaux de F_1 et F_2 sur l'écran, créant ainsi deux triangles rectangles : $\mathrm{F}_1\mathrm{H}_1\mathrm{M}$ et $\mathrm{F}_2\mathrm{H}_2\mathrm{M}$. Ainsi,

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1\mathrm{M}^2 &= \mathrm{F}_1\mathrm{H}_1{}^2 + \mathrm{H}_1\mathrm{M}^2 \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2\mathrm{M}^2 = \mathrm{F}_2\mathrm{H}_2{}^2 + \mathrm{H}_2\mathrm{M}^2 \\ \Rightarrow \mathrm{F}_1\mathrm{M} &= \sqrt{D^2 + (x-a)^2} \quad \text{et} \quad \mathrm{F}_2\mathrm{M} = \sqrt{D^2 + (x+a)^2} \end{aligned}$$

Avec $x \pm a \ll D$, on peut utiliser le développement limité

$$\sqrt{1+\varepsilon} = 1 + \varepsilon/2 + o(\varepsilon)$$

Ainsi

$$\begin{aligned} \mathrm{F}_1\mathrm{M} &= D\sqrt{1 + \left(\frac{x-a}{D}\right)^2} \\ &\approx D\left(1 + \frac{1}{2}\left(\frac{x-a}{D}\right)^2\right) \\ &= D + \frac{(x-a)^2}{2D} \\ \text{et} \quad \mathrm{F}_2\mathrm{M} &= D + \frac{(x+a)^2}{2D} \end{aligned}$$

D'où

$$\mathrm{F}_2\mathrm{M} - \mathrm{F}_1\mathrm{M} = \frac{(x+a)^2 - (x-a)^2}{2D}$$

$$\Leftrightarrow \delta_{2/1}(\mathrm{M}) = \frac{(x + \cancel{a} + x - \cancel{a}) \times (\cancel{x} + a - (\cancel{x} - a))}{2D}$$

$$\Leftrightarrow \delta_{2/1}(\mathrm{M}) = \frac{4ax}{2D}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\delta_{2/1}(\mathrm{M}) = \frac{2ax}{D}}$$

V.C.3 Intensité lumineuse et interfrange

Avec la formule de FRESNEL avec $I_1 = I_2 = I_0$, on a

$$\boxed{I(\mathrm{M}) = 2I_0 \left(1 + \cos \frac{4\pi ax}{\lambda D}\right)}$$

Et ainsi, l'intensité est une fonction périodique selon x.

– **Interférences constructives** : les endroits où l'intensité est maximale sont tels que

$$\Delta\varphi(\mathrm{M}) = 2p\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi\delta(\mathrm{M})}{\lambda} = 2p\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(\mathrm{M}) = p\lambda$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x_p = p\frac{\lambda D}{2a}}$$

– **Interférences destructives** : les endroits où l'intensité est minimale sont tels que

$$\Delta\varphi(\mathrm{M}) = (2p+1)\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \frac{2\pi\delta(\mathrm{M})}{\lambda} = (2p+1)\pi \quad \Longleftrightarrow \quad \delta(\mathrm{M}) = \left(p + \frac{1}{2}\right)\lambda$$

$$\Leftrightarrow \boxed{x'_p = \left(p + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda D}{2a}}$$

Ainsi, deux extrema d'intensité sont séparés de

$$i = x_{p+1} - x_p \Leftrightarrow \boxed{i = \frac{\lambda D}{2a}}$$

Avec deux fentes séparées de 0,20 mm, $\lambda = 632\,\mathrm{nm}$ et $D = 1{,}0\,\mathrm{m}$, on trouve

$$\boxed{i = 1{,}6\,\mathrm{mm}}$$

Une autre animation est disponible en ligne[3].

3. https://phyanim.sciences.univ-nantes.fr/Ondes/lumiere/interference_lumiere.php