Mécanique – chapitre 8

Mécanique du solide

Au programme

Savoirs

- Définition d'un solide ; translation ; rotation autour d'un axe fixe.
- Théorème scalaire du moment cinétique appliqué au solide mobile autour d'un axe fixe, moment d'inertie
- Définir un couple, définir une liaison pivot et justifier le moment qu'elle peut produire.
- Approche énergétique du mouvement d'un solide en rotation autour d'un axe fixe orienté, dans un référentiel galiléen

Savoir-faire

- Différencier un solide d'un système déformable.
- Reconnaître et décrire une translation rectiligne ainsi qu'une translation circulaire.
- Décrire la trajectoire d'un point quelconque du solide et exprimer sa vitesse en fonction de sa distance à l'axe et de la vitesse angulaire.
- Exploiter, pour un solide, la relation entre le moment cinétique scalaire, la vitesse angulaire de rotation et le moment d'inertie fourni.
- Relier qualitativement le moment d'inertie à la répartition des masses.
- Pendule pesant : établir l'équation du mouvement et une intégrale première du mouvement.
- Utiliser l'expression de l'énergie cinétique, l'expression du moment d'inertie étant fournie.
- Établir, dans le cas de la rotation, l'équivalence entre le théorème scalaire du moment cinétique et celui de l'énergie cinétique.

Sommaire

Résultats phares

Liste des définitions

Liste des propriétés

Liste des démonstrations

Liste des applications

Liste des points importants

Liste des erreurs communes

I Système de points matériels

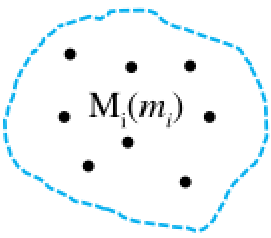
I/A Systèmes discret et continu

Un solide peut être vu comme un ensemble de points matériels auquel on peut appliquer le PFD. On en distingue deux types :

Définition 8.1 : Systèmes discrets vs. continus

Système discret

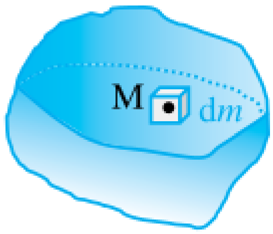
Un ensemble de n points matériels M_i de masses m_i



Système discret

Système continu

Un ensemble d'éléments de volumes $\mathrm{d}V$ de masse $\mathrm{d}m$, de position M.



Système continu

Sauf cas particuliers, on considérera des systèmes **discrets** et fermés (tous les points restent dans le système).

I/B Centre d'inertie

Rappel 8.1 : Centre d'inertie

Le **centre d'inertie** ou **centre de gravité** G d'un ensemble de points matériels M_i de masses m_i telles que $m_{\text{tot}} = \sum_i m_i$ est défini par :

$$\boxed{m_{\text{tot}}\overrightarrow{\mathrm{OG}} = \sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{OM}_i}} \Leftrightarrow \boxed{\sum_i m_i \overrightarrow{\mathrm{GM}_i} = \vec{0}}$$

Il s'agit du barycentre des points du système, pondéré par leur masse.

I/C Mouvements d'un solide indéformable

Définition 8.2 : Solide indéformable

Un solide $\mathcal{S}$ **indéformable** est un ensemble de points tels que la distance entre deux points quelconques soit constante :

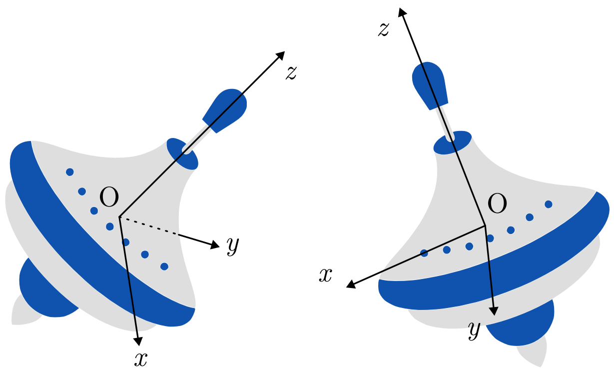
$$\forall(\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in (\text{solide}), \quad \mathrm{M}_1\mathrm{M}_2 = \text{cte}$$

Implication 8.1 : Solide indéformable et repère

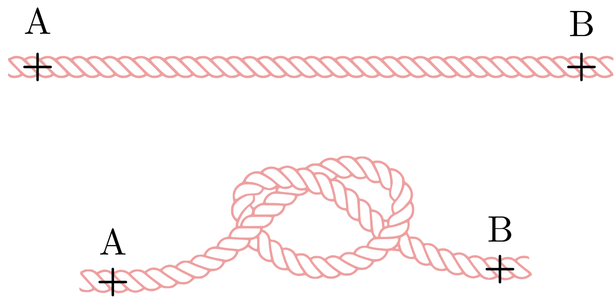
Du fait de ce caractère indéformable, on peut donc associer à un solide **un repère qui lui est propre**. Il suffit de prendre une origine quelconque dans le solide et trois axes pointant vers d'autres points du solide.

Exemple 8.1 : Solides déformables ou non

◇ Une toupie est un solide :



◇ Une corde détendue n'est pas un solide :



Un solide peut avoir un mouvement complexe. Dans le cadre du programme, on se limite à deux situations.

I/C) 1 Translation

Définition 8.3 : Mouvement de translation

Un solide $\mathcal{S}$ en mouvement est en **translation** si son **orientation est fixe** au cours du mouvement. Ainsi, de manière équivalente :

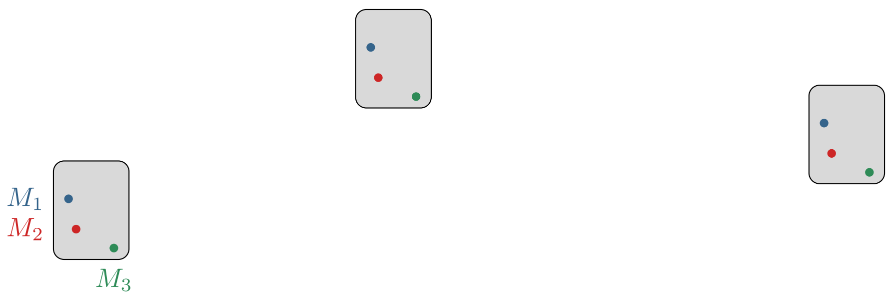
1) $\forall (\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in \mathcal{S}, \quad \overrightarrow{\mathrm{M}_1\mathrm{M}_2} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$;

2) $\forall t, \forall (\mathrm{M}_1,\mathrm{M}_2) \in \mathcal{S}, \quad \vec{v}(\mathrm{M}_1) = \vec{v}(\mathrm{M}_2)$.

Alors, la connaissance du mouvement **d'un point** du solide en translation permet de connaître le mouvement de **tout point** du solide ; on prendra habituellement le **centre d'inertie**.

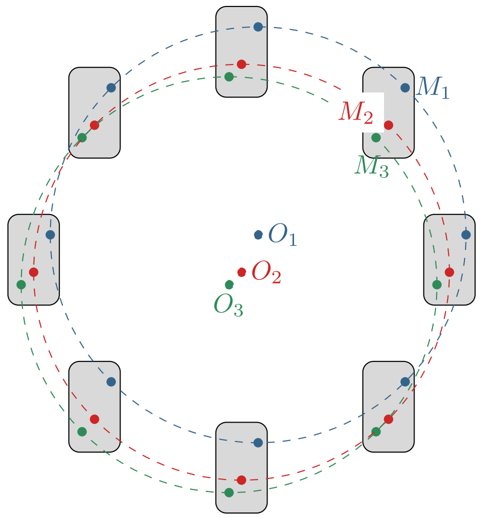
Exemple 8.2 : Mouvements de translation

1) **Translation quelconque** :



2) **Translation rectiligne** : chaque point décrit une droite.

3) **Translation circulaire** : chaque point décrit un arc de cercle.



I/C) 2 Rotation

Définition 8.4 : Mouvement de rotation et vecteur rotation

Un solide est dit en **mouvement de rotation** autour d'un **axe fixe** Δ si la distance de tout point du solide à tout point de l'axe est constante :

$$\forall \mathrm{M} \in \mathcal{S}, \forall A \in \Delta, \quad \|\overrightarrow{\mathrm{AM}}\| = \mathrm{cte}$$

Alors, tous les points ont un **mouvement circulaire** autour de cet axe, avec la **même vitesse angulaire** $\omega(t) = \dot{\theta}(t)$.

On introduit alors le **vecteur rotation** $\vec{\omega}$[1] en rad·s^{-1} tel que

$$\boxed{\vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} = \omega(t)\overrightarrow{u_\Delta}}$$

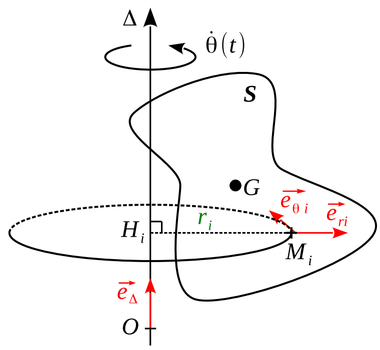


Figure 8.1 – Solide en rotation.

Propriété 8.1 : $\vec{v}_{\mathrm{M}}$ pour $\mathcal{S}_{rot}$

En plaçant un point O sur l'axe de rotation Δ, la vitesse d'un point M du solide est

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}}(t) = \vec{\omega}_{\mathcal{S}/\mathcal{R}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

Démonstration 8.1 : $\vec{v}_{\mathrm{M}}$ pour $\mathcal{S}_{rot}$

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}} = r_{\mathrm{M}}\,\overrightarrow{u_r} + z\,\overrightarrow{u_\Delta}$$

$$\Rightarrow \vec{\omega}_{\mathrm{S}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} = \omega(t)\,\overrightarrow{u_\Delta} \wedge (r_{\mathrm{M}}\,\overrightarrow{u_r} + \cancel{z\,\overrightarrow{u_\Delta}})$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{\omega}_{\mathrm{S}} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}} = r_{\mathrm{M}}\omega(t)\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

■

Remarque 8.1 : Vitesse des points d'un solide en rotation

◇ On retrouve que la vitesse est nulle sur un point de l'axe, puisqu'alors $\overrightarrow{\mathrm{OM}} /\!/ \Delta$ donc le produit vectoriel est nul ;

◇ On retrouve que le déplacement des points se fait perpendiculairement à l'axe de rotation (par construction-même du produit vectoriel) ;

◇ Plus on s'éloigne de l'axe, plus la vitesse des points est élevée.

1. parfois noté $\vec{\Omega}$

Exemple 8.3 : Mouvements de rotation

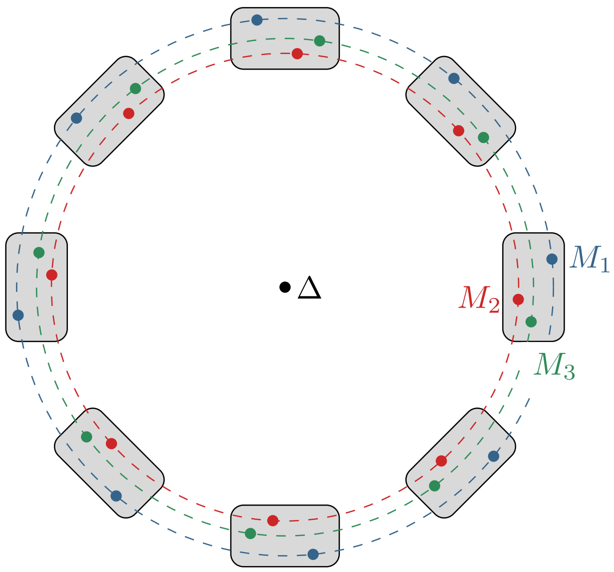


Figure 8.2 – Rotation autour de l'axe Δ fixe

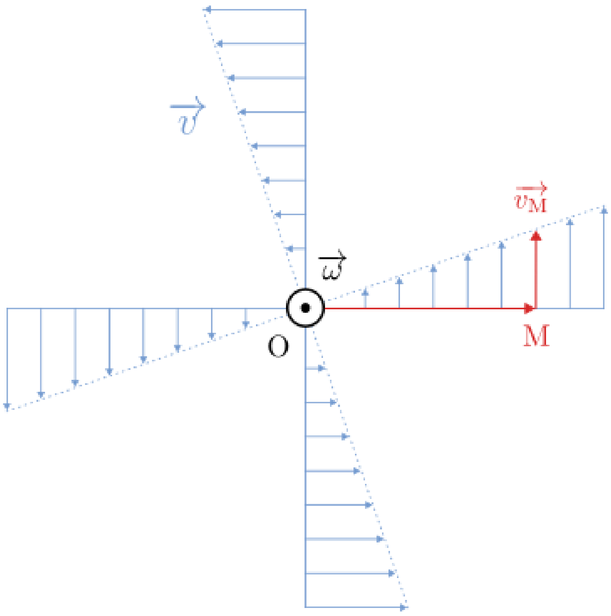
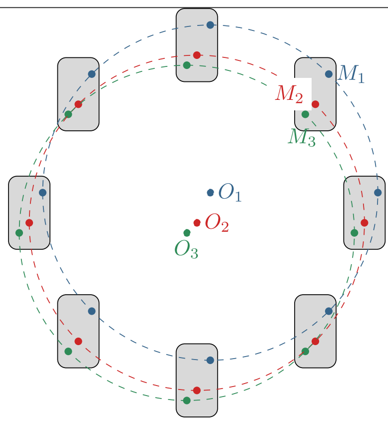
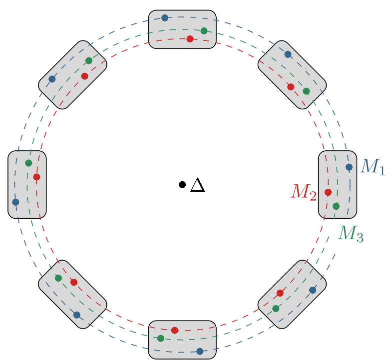


Figure 8.3 – Augmentation de la vitesse avec le rayon.

Attention 8.1 : Ne pas confondre translation circulaire et rotation

	Translation circulaire	Rotation autour d'un axe fixe
Définition	Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même rayon mais de centre différent	Tous les points suivent une trajectoire circulaire de même centre mais de rayon différent.
Schéma		
Photo		

I/C) 3 Combinaison des mouvements

Vitesse des points d'un solide (HP)

Lors d'un mouvement plus complexe combinant translation et rotation, la vitesse d'un point M du solide est donnée par :

$$\boxed{\vec{v}_{\mathrm{M}/\mathcal{R}} = \vec{v}_{\mathrm{O}} + \vec{\omega} \wedge \overrightarrow{\mathrm{OM}}}$$

II Rappel : TRC

II/A Quantité de mouvement d'un ensemble de points

On souhaiterait pouvoir étudier un ensemble de points comme le mouvement d'un point unique, comme le centre d'inertie. Pour cela, il faut étudier la quantité de mouvement d'un ensemble de points.

Définition 8.5 : Quantité de mouvement d'un ensemble de points

Le vecteur quantité de mouvement d'un ensemble $\mathcal{S}$ de points matériels M_i de masses m_i est défini par :

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{p}(\mathrm{M}_i) = \sum_i m_i \vec{v}(\mathrm{M}_i)}$$

Propriété 8.2 : Quantité de mouvement d'un système

La quantité de mouvement d'un ensemble de points est la quantité de mouvement d'un point matériel placé en G et de masse m_{tot} :

$$\boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G})}$$

Tout se passe comme si la masse était concentrée en G.

Démonstration 8.2 : $\vec{p}_{\mathcal{S}}$

$$m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G}) = m_{\text{tot}} \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OG}}}{\mathrm{d}t} = \underbrace{\sum_i m_i \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{OM}_i}}{\mathrm{d}t}}_{\vec{p}(\mathcal{S})} \Leftrightarrow \boxed{\vec{p}(\mathcal{S}) = m_{\text{tot}} \vec{v}(\mathrm{G})} \qquad \blacksquare$$

II/B Forces intérieures et extérieures

Si on peut étudier la cinématique d'un corps par l'étude de son centre de gravité, comment les forces interviennent-elles sur cet ensemble de points ? Les forces s'appliquant aux points M_i de $\mathcal{S}$ se rangent en deux catégories :

1) Les forces intérieures $\vec{F}_{\text{int}\to\mathrm{M}_i}$ exercées par les autres points M_j du système, avec $j \neq i$;
2) Les forces extérieures $\vec{F}_{\text{ext}\to\mathrm{M}_i}$ exercées par une origine externe au système.

Les forces intérieures ont cependant une propriété remarquable :

Propriété 8.3 : Résultante des forces intérieures

La résultante $\vec{F}_{\text{int}}$ des forces intérieures d'un système est toujours nulle.

Démonstration 8.3 : Résultante des forces intérieures

La résultante des forces intérieures exercées sur M_i s'écrit

$$\vec{F}_{\text{int}\to i} = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

Ainsi la résultante des forces intérieures au système s'écrit

$$\vec{F}_{\text{int}} = \sum_{i} \vec{F}_{\text{int}\to i} = \sum_{i}\sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i}$$

Or, d'après la troisième loi de NEWTON, $\forall i \neq j, \quad \vec{F}_{j\to i} = -\vec{F}_{i\to j}$; ainsi, les termes de la somme précédente s'annulent deux à deux, et on a bien

$$\boxed{\vec{F}_{\text{int}} = \sum_{i} \vec{F}_{\text{int}\to i} = \vec{0}}$$

■

Rien de remarquable ne se produit pour les forces extérieures, et on aura simplement

$$\boxed{\vec{F}_{\text{ext}} = \sum_{i} \vec{F}_{\text{ext}\to i}}$$

II/C Théorème de la résultante cinétique

Théorème 8.1 : de la résultante cinétique

Le PFD pour un M s'applique à $\mathcal{S}$ en prenant pour point matériel le **centre d'inertie** G affecté de la **masse totale** m_{tot} du système, en ne considérant que les **forces extérieures** s'appliquant à l'ensemble :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}}$$

Preuve 8.1 : TRC

$$\begin{aligned}\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} &= \sum_i \frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i)}{\mathrm{d}t} \\ &= \underbrace{\sum_i \vec{F}_{\text{int}\to i}}_{=\vec{0} \text{ par 3}^{\text{e}} \text{ loi}} + \underbrace{\sum_i \vec{F}_{\text{ext}\to i}}_{=\vec{F}_{\text{ext}} \text{ par déf.}}\end{aligned}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}\vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = m_{\text{tot}}\frac{\mathrm{d}\vec{v}(\mathrm{G})}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}}$$

■

Attention 8.2 : Utilisation du TRC

Ce théorème ne contient que l'**information du centre d'inertie** ; il ne suffit pas à décrire tout le système, notamment les rotations pures !

III Moments pour un système de points

III/A Moment cinétique et moment d'inertie

Définition 8.6 : $\vec{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$

Par rapport à un point O fixe dans $\mathcal{R}$ référentiel d'étude :

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathcal{S}) = \sum_i \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}(\mathrm{M}_i) = \sum_i \overrightarrow{\mathrm{OM}}_i \wedge \vec{p}_{/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i)}$$

Propriété 8.4 : $\vec{\mathcal{L}}(\mathcal{S})$ et J_Δ

Le moment cinétique d'un solide en rotation est proportionnel à la vitesse angulaire $\vec{\omega} = \omega(t)\,\vec{u_\Delta}$:

$$\boxed{\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}} = J_\Delta \vec{\omega} \Leftrightarrow \mathcal{L}_\Delta = J_\Delta \omega}$$

avec J_Δ le moment d'inertie.

Démonstration 8.4 : Moment d'inertie d'un solide

Pour un solide en rotation autour de l'axe z, on aura

Discret

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i) = (\overrightarrow{\mathrm{OM}}_i \wedge m_i \vec{v}_i) \cdot \vec{u_z}\\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i) = (r_i\,\vec{u_r}) \wedge (m_i r_i \dot{\theta}_i\,\vec{u_\theta}) \cdot \vec{u_z}\\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i) = m_i {r_i}^2 \underbrace{\dot{\theta}_i}_{=\omega\ \forall i}\ \underbrace{\vec{u_r} \wedge \vec{u_\theta}}_{=\vec{u_z}} \cdot \vec{u_z} = m_i {r_i}^2 \omega
\end{aligned}$$

Or $\quad \mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = \sum_i \mathcal{L}_z(\mathrm{M}_i)$

$$\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{L}_z(\mathcal{S}) = \underbrace{\left(\sum_i m_i {r_i}^2\right)}_{=J_z} \omega}$$

■

Continu (HP)

$$\begin{aligned}
&\mathcal{L}_z = \int_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} (\overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \mathrm{d}m\,\vec{v}_{\mathrm{M}})\,\vec{u_z}\\
\Leftrightarrow\ &\mathcal{L}_z = \int_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} \underbrace{\left(r\,\vec{u_r} \wedge r\omega\,\vec{u_\theta}\right)}_{\vec{u_r}\wedge\vec{u_\theta}=\vec{u_z}} \vec{u_z}\,\mathrm{d}m\\
\Leftrightarrow\ &\boxed{\mathcal{L}_z = \underbrace{\left(\int_{\mathrm{M}\in\mathcal{S}} r^2\,\mathrm{d}m\right)}_{J_z}\omega}
\end{aligned}$$

■

Interprétation 8.1 : Correspondance quantité de mouvement et quantité de rotation

Le moment d'inertie caractérise **l'inertie de rotation**, c'est-à-dire la facilité avec laquelle la rotation d'un solide s'établit ou s'arrête ; il est analogue à la **masse** pour la translation, qui caractérise l'inertie d'un corps à être mis en mouvement. On peut en effet associer

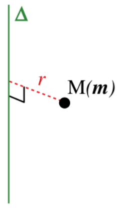
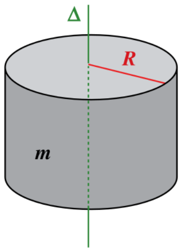
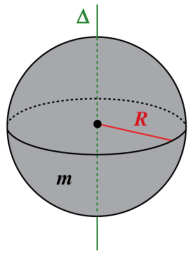
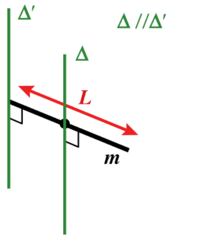
$$\vec{p} = m\vec{v} \qquad \text{et} \qquad \vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}} = m\vec{\omega}$$

et tous les théorèmes en découlant par ailleurs.

Important 8.1 : Analyse du moment d'inertie

Plus la masse d'un solide est excentrée, plus le moment d'inertie est grand et plus il est difficile de le mettre en rotation.

Exemple 8.4 : Moments d'inertie divers

	Point	Cylindre	Sphère	Tige
Schéma				
J_Δ	$J_\Delta = mr^2$	$J_{\Delta,\text{plein}} = \frac{1}{2}mR^2$ $J_{\Delta,\text{creux}} = mR^2$	$J_{\Delta,\text{plein}} = \frac{2}{5}mR^2$ $J_{\Delta,\text{creux}} = \frac{2}{3}mR^2$	$J_{\Delta,\text{centre}} = \frac{1}{12}mL^2$ $J_{\Delta',\text{bout}} = \frac{1}{3}mR^2$

Remarque 8.2 : Moments d'inertie d'un solide

Le moment d'inertie d'un solide **dépend de l'axe** de rotation choisi ! Un objet peut avoir des J_Δ différents selon l'axe Δ autour duquel il tourne.

Par exemple, le moment d'inertie d'un téléphone est plus grand pour une rotation à plat, cf. Figure 8.4

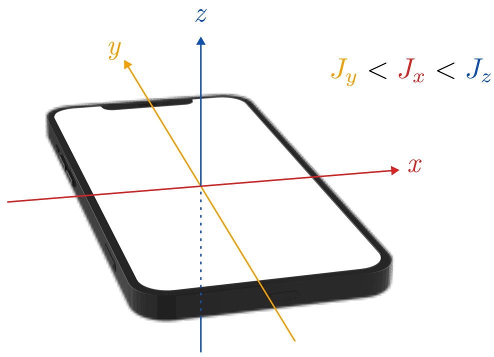


Figure 8.4 – J_Δ d'un téléphone selon l'axe de rotation.

III/B Moments de forces

III/B) 1 Moment intérieur

Au sein du solide, les points M_j avec $j \neq i$ exercent des forces sur M_i. Le moment résultant de ces actions s'exprime :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O,int}\to i} = \sum_{j\neq i} \overrightarrow{\text{OM}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i}$$

Seulement, on a la propriété suivante :

Propriété 8.5 : Moment des forces intérieures

Le moment des actions intérieures d'un système est toujours nul.

Démonstration 8.5 : Moment des forces intérieures

Le moment total est la somme de tous les moments :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{int}} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\text{O,int}\to i} = \sum_i \sum_{j\neq i} \overrightarrow{\text{OM}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i}$$

Or, en étudiant deux à deux les termes de la somme et en utilisant la 3[e] loi de Newton ($\overrightarrow{F}_{j\to i} = -\overrightarrow{F}_{i\to j}$), on a :

$$\overrightarrow{\mathrm{OM}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} + \overrightarrow{\mathrm{OM}_j} \wedge \underbrace{\overrightarrow{F}_{i\to j}}_{=-\overrightarrow{F}_{j\to i}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} + \underbrace{\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{O}}}_{=-\overrightarrow{\mathrm{OM}_j}} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} = \overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i} \wedge \overrightarrow{F}_{j\to i} = \overrightarrow{0}$$

étant donné que **les forces de contact sont centrales**. Ainsi, tous les termes s'annulent 2 à 2, d'où

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O,int}} = \overrightarrow{0}}$$

■

Rien de remarquable ne se produit pour les moments extérieurs, et on aura simplement

$$\boxed{\overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O,ext}} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}}_{\mathrm{O,ext}\to i}}$$

III/B) 2 Autres moments

Définition 8.7 : Couple et liaison pivot

Couple

Un **couple**, souvent noté $\overrightarrow{\Gamma}$, est une action dont la **force résultante est nulle** mais dont le **moment résultant n'est pas nul**. Ainsi, un couple *modifie la rotation sans affecter la translation.*

Liaison pivot

Une **liaison pivot** modélise le contact d'une **rotation guidée** : elle restreint le mouvement du solide à la seule rotation autour de l'axe de la liaison, et on lui associe un couple.

On dit qu'une liaison pivot est **parfaite** si son **couple est nul**.

Exemple 8.5 : couples et pivots

Couples

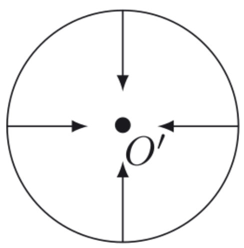


Figure 8.5 – Couple nul

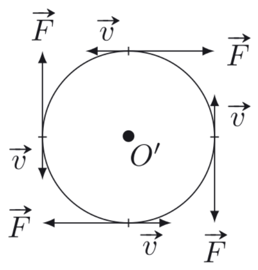
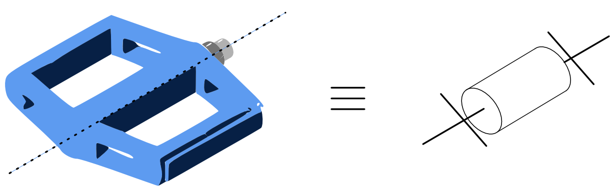


Figure 8.6 – Couple non nul

Pivot

Une pédale de vélo est fixée par une liaison pivot au pédalier :



Le second cas de la Figure 8.6 présente une situation typique de frottement par rotation, comme celle de la pointe d'une toupie sur le sol ou de la pédale de vélo, causant des frottements qui ralentissent sa rotation. On peut modéliser leur action par un couple de moment :

$$\boxed{\overrightarrow{\Gamma}_{\mathrm{frott}} = -\alpha\overrightarrow{\omega}}$$

III/C Théorème du moment cinétique

Théorème 8.2 : moment cinétique pour un solide

Pour un solide $\mathcal{S}$ de masse m soumis à des forces extérieures $\vec{F}_i$ dans un référentiel $\mathcal{R}$ supposé galiléen, O un point **fixe** et Δ un axe orienté **fixe** dans $\mathcal{R}$, on a

TMC vectoriel	TMC scalaire
$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O,ext}}}$	$\boxed{\dfrac{\mathrm{d}\mathcal{L}_{\Delta/\mathcal{R}}(\mathcal{S})}{\mathrm{d}t} = \mathcal{M}_{\Delta,\mathrm{ext}}}$

Preuve 8.2 : TMC solide

On applique le TMC à chaque point matériel M_i du système et on somme.

Application 8.1 : Pendule pesant par TMC

Un pendule pesant est un objet pouvant osciller **sans frottement** autour d'un axe z. On note :

- J_z son moment d'inertie par rapport à cet axe ;
- θ l'angle entre la verticale et son centre de gravité G et d la distance entre la liaison pivot et G

Trouver l'équation du mouvement.

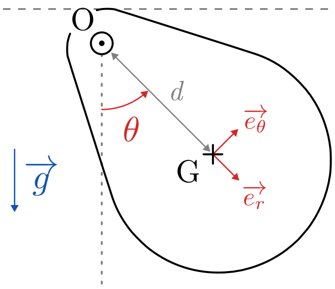


Figure 8.7 – Pendule pesant

1. **Système** : {pendule} solide indéformable de masse m
2. **Référentiel** : terrestre, supposé galiléen.
3. **Repère** : cylindrique $(\mathrm{O}, \vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z})$ avec O centre de la liaison pivot.
4. **Repérage** : $\overrightarrow{\mathrm{OG}} = d\,\vec{u_r}$
5. **Bilan des actions** :

Origine	Force	Moment
Poids	$\vec{P} = m\vec{g}$	$\mathcal{M}_z(\vec{P}) = -mgd\sin(\theta)$
Pivot parfaite	$\vec{0}$	$\vec{\Gamma} = \vec{0}$

6. **TMC** :

$$\frac{\mathrm{d}\mathcal{L}_z}{\mathrm{d}t} = J_z\ddot{\theta} = \mathcal{M}_z(\vec{P}) \Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgd}{J_z}\sin(\theta) = 0}$$

IV Énergétique des systèmes de points

On l'a vu dans les chapitres précédents, différentes approches sont possibles en mécanique selon le résultat désiré. Si le PFD permet d'avoir l'information dynamique sur le centre d'inertie, on cherche à établir les résultats de l'approche énergétique aux solides. Commençons par le plus simple :

IV/A Énergie cinétique

IV/A) 1 Quelconque

Définition 8.8 : Énergie cinétique d'un système de points

Comme pour la masse ou la quantité de mouvement, l'énergie cinétique d'un solide est la **somme des énergies cinétiques de chaque point le constituant** :

$$\boxed{\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathcal{S}) = \sum_i \mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}(\mathrm{M}_i) = \sum_i \frac{1}{2} m_i {v_{i/\mathcal{R}}}^2}$$

IV/A) 2 Rotation pure

Pour un système en rotation pure, cette expression se simplifie et on a

Propriété 8.6 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})$ en rotation

L'énergie cinétique d'un solide en rotation à la vitesse angulaire ω autour de l'axe Δ est

$$\boxed{\mathcal{E}_{c,\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} J_\Delta \omega^2}$$

Démonstration 8.6 : $\mathcal{E}_c(\mathcal{S})$ en rotation

En rotation, $v_i = r_i \omega$, d'où

$$\mathcal{E}_{c,\mathrm{rot}} = \sum_i \frac{1}{2} m_i {r_i}^2 \omega^2$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_{c,\mathrm{rot}} = \frac{1}{2} \underbrace{\left(\sum_i m_i {r_i}^2 \right)}_{J_z} \omega$$

IV/B Puissances

IV/B) 1 Quelconque

Pour pouvoir appliquer les théorèmes énergétiques, il faut détailler les puissances des forces s'appliquant au solide, et notamment les forces intérieures. Les points M_j avec $j \neq i$ exercent des forces sur M_i. La puissance de ces actions s'exprime :

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}\to i} = \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \cdot \vec{v}_i$$

Seulement, on a la propriété suivante :

Propriété 8.7 : Puissance des forces intérieures

La puissance des forces intérieures est nulle <u>pour un système indéformable</u>.

Démonstration 8.7 : Puissance des forces intérieures

En effet, la puissance de toutes les forces intérieures s'exprime

$$\mathcal{P}_{\mathrm{int}} = \sum_i \mathcal{P}_{\mathrm{int}\to i} = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \cdot \vec{v}_i = \sum_i \sum_{j\neq i} \vec{F}_{j\to i} \cdot \frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}{\mathrm{d}t}$$

Or, pour un solide en translation, $\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i} = \overrightarrow{\mathrm{cte}}$ par construction. Ça pourrait ne pas être le cas pour un solide en rotation, puisque le vecteur n'est pas fixe. On peut pour cela étudier précisément la puissance entre M_i et M_j : on a, dans la base cylindrique $(\mathrm{M}_j, \vec{u}_{r,j\to i}, \vec{u}_{\theta,j\to i}, \vec{u}_{z,j\to i})$:

$$\begin{aligned}
\vec{F}_{j\to i} &= F_{j\to i}\,\vec{u}_{r,j\to i} \qquad \text{force centrale due au contact} \\
\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}{\mathrm{d}t} &= \dot{r}_{i,j}\,\vec{u}_{r,j\to i} + r_{i,j}\dot{\theta}_{i,j}\,\vec{u}_{\theta,j\to i} + \dot{z}_{i,j}\,\vec{u}_{z,j\to i} \\
\Leftrightarrow \vec{F}_{j\to i}\cdot\frac{\mathrm{d}\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}}{\mathrm{d}t} &= F_{j\to i}\,\underbrace{\dot{r}_{i,j}}_{=0 \text{ car indéformable}} \\
\Leftrightarrow \boxed{\mathcal{P}_{\text{int}} = 0}
\end{aligned}$$

On dérive $\overrightarrow{\mathrm{M}_j\mathrm{M}_i}$

On multiplie

■

Rien de remarquable ne se produit pour les puissances extérieures, et on aura simplement

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{ext}} = \sum_i \mathcal{P}_{\text{ext}\to i}}$$

IV/B) 2 Rotation pure

Propriété 8.8 : $\mathcal{P}(\vec{F})$ en rotation

Soit une force $\vec{F}$ appliquée en un point du solide en rotation autour de l'axe z fixe, à la vitesse angulaire $\omega = \dot{\theta}$ dans le référentiel $\mathcal{R}$. Soit $\vec{F}_{/\!/}$ selon $\pm\vec{u_z}$ et $\vec{F}_\perp$ perpendiculaire à $\vec{u_z}$. La **puissance de cette force** est

$$\boxed{\mathcal{P}_{\text{rot}}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})\cdot\vec{\omega} = \mathcal{M}_\Delta\omega(t)}$$

Démonstration 8.8 : $\mathcal{P}(\vec{F})$ en rotation

Par définition, $\vec{\omega} = \omega\,\vec{u_z}$, d'où

$$\begin{aligned}
\vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) &= \left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\vec{F}_\perp\right) + \overbrace{\left(\overrightarrow{\mathrm{OM}}\wedge\vec{F}_{/\!/}\right)}^{\vec{u_r}\wedge\vec{u_z}=\vec{u_\theta}} \\
\Leftrightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F}) &= (r_i\,\vec{u_r}\wedge(F_r\,\vec{u_r} + F_\theta\,\vec{u_\theta})) + r_iF_{/\!/}\,\vec{u_\theta} \\
\Rightarrow \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O}}(\vec{F})\cdot\vec{\omega} &= r_iF_\theta\omega + 0 \\
\text{Or,}\quad \mathcal{P}(\vec{F}) &= \vec{F}\cdot\vec{v} \\
\Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) &= (F_r\,\vec{u_r} + F_\theta\,\vec{u_\theta})\cdot r_i\omega\,\vec{u_\theta} \\
\Leftrightarrow \mathcal{P}(\vec{F}) &= F_\theta r_i\omega \\
\Leftrightarrow &\boxed{\mathcal{P}(\vec{F}) = \vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{\omega} = \mathcal{M}_\Delta\omega}
\end{aligned}$$

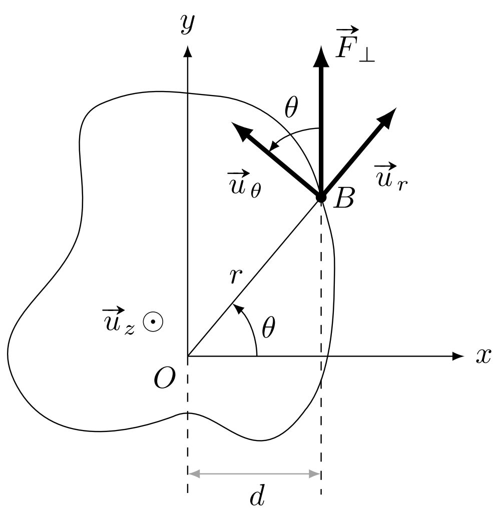


FIGURE 8.8 – Calcul de $\mathcal{P}_{\text{rot}}$

IV/C Théorèmes

On retrouve ainsi les théorèmes utilisés pour le point, en prenant alors en compte les forces intérieures :

Théorème 8.3 : Énergétique pour le solide

Pour un système $\mathcal{S}$ **déformable ou non** dans un référentiel galiléen $\mathcal{R}$:

TEC, TPC	TEM, TPM
$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}} &= W_{\text{ext}/\mathcal{R}} + W_{\text{int}/\mathcal{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{c/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} &= \mathcal{P}_{\text{ext}/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{\text{int}/\mathcal{R}}\end{aligned}}$	$\boxed{\begin{aligned}\Delta\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}} &= W_{\text{ext,NC}/\mathcal{R}} + W_{\text{int,NC}/\mathcal{R}}\\ \frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_{m/\mathcal{R}}}{\mathrm{d}t} &= \mathcal{P}_{\text{ext,NC}/\mathcal{R}} + \mathcal{P}_{\text{int,NC}/\mathcal{R}}\end{aligned}}$

Les grandeurs intérieures sont nulles pour un système indéformable.

Preuve 8.3 : Énergétique pour le solide

Il suffit d'appliquer le TPC ou TPM à chaque point matériel M_i du système et de sommer.

Application 8.2 : Pendule pesant par TPC

Retrouver l'équation différentielle du pendule pesant par approche énergétique.

On part des résultats précédents (Application 8.1) et on calcule $\mathcal{E}_c$ et $\mathcal{P}(\vec{P})$:

$$\mathcal{E}_c = \frac{1}{2}J_z\omega^2 \quad \text{et} \quad \mathcal{P}(\vec{P}) = \mathcal{M}_z(\vec{P})\omega$$

Or, TPC $\Rightarrow$ $$\frac{\mathrm{d}\mathcal{E}_c}{\mathrm{d}t} = \mathcal{P}(\vec{P}) \Leftrightarrow J_z\dot{\omega}\cancel{\omega} = -mgd\sin(\theta)\cancel{\omega}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{mgl}{J_z}\sin(\theta) = 0}$$

■

Définition 8.9 : Intégrale première du mouvement

Une intégrale première du mouvement est une équation de conservation [2] faisant intervenir une coordonnée du mouvement et sa première dérivée.

Exemple 8.6 : Intégrale première du mouvement

Avec l'équation du mouvement du pendule pesant, on obtient une intégrale première du mouvement en **multipliant par** $\dot{\theta}$ et **en intégrant**. On retrouvera l'énergie mécanique constante :

$$J_z\ddot{\theta} \times \dot{\theta} + mgd\sin(\theta) \times \dot{\theta} = 0 \Leftrightarrow \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\left(\frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2 - mgd\cos(\theta)\right) = 0$$

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}_m = \frac{1}{2}J_z\dot{\theta}^2 - mgd\cos(\theta) = \mathcal{E}_c + \mathcal{E}_p = \text{cte}$$

Important 8.2 : Analogie point/solide <u>en rotation</u>

	Inertie	Déplacement	Quantité	Causes	Évolution	$\mathcal{E}_c$	$\mathcal{P}$
Point	m	$\vec{v}$	$\vec{p} = m\vec{v}$	$\vec{F}$	$\frac{\mathrm{d}\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \vec{F}_{\text{ext}}$	$\frac{1}{2}mv^2$	$\vec{F}\cdot\vec{v}$
Solide	J_Δ	$\vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{L}} = J_\Delta\vec{\omega}$	$\vec{\mathcal{M}} = \overrightarrow{\mathrm{OM}} \wedge \vec{F}$	$\frac{\mathrm{d}\vec{\mathcal{L}}_{\mathrm{O}}}{\mathrm{d}t} = \vec{\mathcal{M}}_{\mathrm{O,ext}}$	$\frac{1}{2}J_\Delta\omega^2$	$\vec{\mathcal{M}}\cdot\vec{\omega}$

2. Souvent celle de l'énergie mécanique