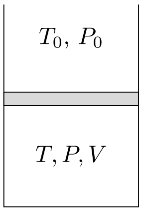
Sujet 1 – corrigé

I Comparaison entre transformations



On considère un système composé d'une quantité de matière n de gaz parfait diatomique enfermée dans une enceinte. Cette enceinte est fermée par un piston de surface S et dont on négligera la masse, pouvant coulisser sans frottement. L'ensemble est situé dans l'atmosphère, dont on note T_0 et P_0 la température et la pression. On note I l'état initial. L'objectif est de comparer deux transformations du système : l'une brutale et l'autre lente.

Commençons par la transformation brutale : on lâche brusquement une masse M sur le piston, qui se stabilise en un état intermédiaire 1.

1) Le meilleur modèle pour la transformation est-il isotherme ou adiabatique ? Peut-on en déduire un résultat sur la température T_1 ?

Réponse

Le système considéré est le gaz et l'enceinte autour. On s'intéresse à une transformation brusque. Le système n'a pas le temps d'échanger de l'énergie sous forme de transfert thermique avec l'extérieur : la transformation peut donc être considérée comme **adiabatique**. En revanche, comprimer un gaz rapidement le rend plus chaud (comme dans une pompe à vélo). La température du gaz va varier, la transformation **ne** sera donc **pas** isotherme.

On ne peut rien dire sur T_1. On peut s'attendre à ce qu'elle soit supérieure à T_0 puisque l'on comprime rapidement le gaz.

◇

2) Déterminer la pression P_1.

Réponse

À l'état 1, le système est à l'équilibre mécanique. La pression qui s'exerce sur le piston est alors la somme de la pression atmosphérique plus celle de la masse posée sur la section S du piston. On en déduit que :

$$\boxed{P_1 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

◇

3) Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chacun des termes $W_{I\to 1}$, $Q_{I\to 1}$ et $\Delta_{I\to 1}U$, et appliquer le premier principe.

Réponse

Puisque cette transformation est considérée comme adiabatique :

$$\boxed{Q_{I\to 1} = 0}$$

La transformation qu'il subit est monobare : tout au long de cette transformation, la pression extérieure est celle exercée par le piston sur le gaz qui est constante (la masse M est déposée en bloc). Ainsi,

$$W_{I\to 1} = -P_{\text{ext}}\Delta V \Leftrightarrow \boxed{W_{I\to 1} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_I)}$$

Comme le gaz est parfait, il suit la première loi de Joule, donc

$$\Delta U_{I\to 1} = C_V \Delta T \Leftrightarrow \boxed{\Delta_{I\to 1}U = \frac{5}{2}nR(T_1 - T_I)}$$

D'après le premier principe appliqué au système pendant la transformation $I \to 1$:

$$\Delta U_{I\to 1} = W_{I\to 1} \Leftrightarrow \boxed{\frac{5}{2}nR(T_1 - T_I) = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_1 - V_0)}$$

◇

4) Exprimer alors T_1 en fonction des pressions P_1,P_0 et la température T_0, et V_1 en fonction des pressions et du volume $V_I = V_0$.

Réponse

La pression P_1 est déjà connue. Pour déterminer la température T_1, on peut remplacer les volumes par $V_i = nRT_i/P_i$ dans l'expression du premier principe. Sachant que l'état initial est un état d'équilibre, on a $T_I = T_0$ et, **sans la masse**, $P_I = P_0$. Ainsi, on trouve

$$\frac{5}{2}nR(T_1 - T_I) = -nRP_1\left(\frac{T_1}{P_1} - \frac{T_I}{P_I}\right) \qquad \text{donc} \qquad \boxed{T_1 = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I}\right)T_I}$$

$$\Leftrightarrow \underbrace{nRT_1}_{P_1V_1} = \frac{2}{7}\left(\frac{5}{2} + \frac{P_1}{P_I}\right)\underbrace{nRT_0}_{P_0V_0} \quad \Leftrightarrow \quad \boxed{V_1 = \frac{2}{7}\left(\frac{5P_0}{2P_1} + 1\right)V_0}$$

◇

On observe qu'en fait l'état 1 n'est pas un réel état d'équilibre : le piston continue de bouger, mais beaucoup plus lentement, jusqu'à atteindre l'état 2 qui est l'état final.

5) Quel phénomène, négligé précédemment, est responsable de cette nouvelle transformation du système ? Comment peut-on qualifier cette transformation ?

Réponse

On a négligé les transfert d'énergie thermique entre le gaz et l'extérieur.

Cette transformation peut alors être qualifiée de **monobare** et **monotherme** (la température et la pression de l'extérieur ne varient pas). On peut aussi considérer que cette transformation est **isobare** car, comme la **transformation est lente**, le système sera à chaque instant à l'équilibre mécanique avec l'extérieur.

◇

6) Déterminer les caractéristiques T_2, P_2, V_2 de l'état 2.

Réponse

Dans l'état final, l'équilibre est complètement atteint : il y a équilibre thermique et mécanique. D'après la question précédente :

$$\boxed{T_2 = T_0} \qquad \text{et} \qquad \boxed{P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

Le volume occupé par le gaz est imposé par la loi du gaz parfait :

$$\boxed{V_2 = \frac{nRT_2}{P_2} = \frac{nRT_0}{P_0 + \frac{Mg}{S}}}$$

◇

7) Déterminer le travail reçu par le système, puis sa variation d'énergie interne au cours de la transformation $1 \to 2$. En déduire le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque.

Réponse

Le travail des forces de pression a cours de $1 \to 2$ se calcule comme précédemment :

$$W_{1\to 2} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_1)$$

et on a $$\Delta U_{1\to 2} = \frac{5}{2} nR(T_2 - T_1)$$

Le transfert thermique reçu s'obtient alors par

$$\begin{aligned} Q_{1\to 2} &= \Delta U_{1\to 2} - W_{1\to 2} \\ &= \underbrace{\frac{5}{2} nR(\underbrace{T_2}_{=T_0} - T_1)}_{=-W_{I\to 1}} + \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_1) \\ \Leftrightarrow & \boxed{Q_{1\to 2} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_0)} \end{aligned}$$

Finalement, le travail total et le transfert thermique total reçus au cours de la transformation brusque valent :

$$W_{\text{tot}} = -\left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_0) \quad \text{et} \quad Q_{\text{tot}} = \left(P_0 + \frac{Mg}{S}\right)(V_2 - V_0)$$

Ainsi, on a évidemment $W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$: en effet, dans l'état I et l'état final 2, le gaz est en équilibre thermique avec l'extérieur à T_0 ; or $\Delta U = C_V \Delta T$ donc $\Delta U = W_{\text{tot}} + Q_{\text{tot}} = 0$!

◇

Comparons maintenant à une transformation lente : la même masse M est lâchée très progressivement sur le piston, par exemple en ajoutant du sable « grain à grain ».

8) Comment qualifie-t-on une telle transformation ? Que peut-on en déduire sur la température du système au cours de la transformation ?

Réponse

On la dit **quasi-statique**. On peut suppose qu'elle laisse largement le temps aux échanges thermiques d'avoir lieu, si bien que l'équilibre thermique est atteint à tout instant. Par conséquent, on peut considérer la transformation **isotherme** : $T = T_0$.

◇

9) Déterminer la pression dans l'état final et en déduire le volume. Commenter.

Réponse

Dans l'état final F, la masse placée sur le piston est exactement la même que dans le cas précédent : on en déduit

$$\boxed{P_F = P_2 = P_0 + \frac{Mg}{S}}$$

et comme par ailleurs $T_F = T_0 = T_2$, avec la loi du gaz parfait on a également $V_F = V_2$. Ainsi, **les états finaux sont les mêmes**. Cela n'a rien d'étonnant : les équilibres thermique et mécanique sont établis dans les 2 états, et les contraintes extérieures (masse M, pression P_0 et température T_0) sont les mêmes.

◇

10) Établir le bilan énergétique de la transformation en explicitant chaque terme.

Réponse

La transformation étant quasi-statique, on a $P = P_{\text{ext}}$, soit

$$W = -\int_{V_i}^{V_f} P_{\text{ext}}\,\mathrm{d}V = -\int_{V_i}^{V_f} P\,\mathrm{d}V$$

$$\Leftrightarrow W = -nRT_0 \int_{V_i}^{V_f} \frac{\mathrm{d}V}{V} \Leftrightarrow \boxed{W = -nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

Par ailleurs, la transformation étant isotherme on a $\Delta U = C_V \Delta T = 0$, et avec le premier principe

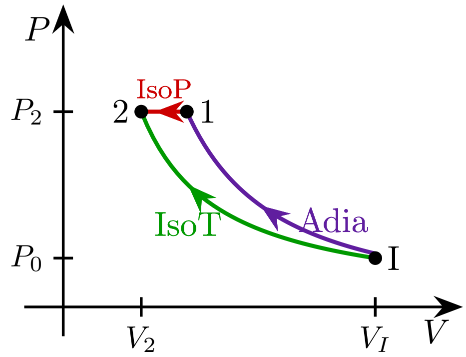
$$\Delta U = W + Q \Leftrightarrow Q = -W \quad \text{soit} \quad \boxed{Q = nRT_0 \ln \frac{V_f}{V_i}}$$

On voit ainsi que les deux transformations ont les mêmes états initial et final, donc la même variation d'énergie interne, alors que les échanges d'énergie ne sont pas les mêmes.

◇

11) Représenter alors ces deux transformations dans un diagramme de Watt (P,V), en considérant la transformation $I \to 1$ mécaniquement réversible, et commenter.

Réponse



◇

Sujet 2 – corrigé

I Thermodynamique du corps humain

On assimile le corps humain à cinq cylindres et une sphère composées d'eau :

◇ un cylindre de diamètre $d_T = 30\,\text{cm}$ et de hauteur $h_T = 60\,\text{cm}$ modélisant le tronc,

◇ quatre cylindres de diamètre $d_M = 10\,\text{cm}$ et hauteur $h_M = 80\,\text{cm}$,

◇ une sphère de diamètre $d_{TE} = 15\,\text{cm}$ modélisant la tête.

On considérera que la capacité thermique et la masse volumique du corps est sensiblement égale à celle de l'eau.

I/) 0.1 Données. Pour l'eau : $\rho = 1000\,\text{kg·m}^{-3}$, $c = 4186\,\text{J·K}^{-1}\text{·kg}^{-1}$.

1) Exprimer puis calculer le volume V du corps et sa masse m. Si la masse vous semble étonnante, reprenez vos calculs !

Réponse

Le volume du corps dans cette modélisation est :

$$\boxed{V = \frac{\pi d_T^2 h_T}{4} + \frac{4\pi d_M^2 h_M}{4} + \frac{4\pi d_{TE}^3}{3\times 2^3} = 6{,}9\times 10^{-2}\,\text{m}^3}.$$

Sa masse est :

$$\boxed{m = \rho V = 69\,\text{kg}}.$$

◇

2) Exprimer et calculer la surface totale S du corps humain (on ne prendra en compte que les surfaces latérales des cylindres).

Réponse

La surface du corps humain modélisé par ces cylindres et sphère (en ne gardant que la partie latérale) est :

$$\boxed{S = \pi d_T h_T + 4\pi d_M h_M + 4\pi (d_{TE}/2)^2 = 1{,}6\,\text{m}^2}$$

◇

I/A Maintien de la température

Les mouvements de convection de l'air sur la peau entraînent une perte d'énergie thermique Q_P vers le milieu extérieur. On peut quantifier cette perte par la loi de Newton qui donne la le transfert thermique reçu par un système de température T de la part d'un gaz de température T_e pendant la durée Δt sous la forme :

$$Q_p = h(T_e - T)S\Delta t \quad \text{où} \quad h = 4\,\text{W·m}^{-2}\text{·K}^{-1}.$$

3) On suppose que la température du corps est maintenue à T_0 durant toute une journée : Montrer que $Q_p \approx -1\times 10^7\,\text{J}$ en utilisant des valeurs raisonnables pour T_0 et T_e. Commenter ensuite le signe de Q_p

Réponse

$$Q_P = h(T_e - T)S\Delta t \approx -9{,}4\times 10^6\,\text{J}$$

On obtient $Q_p < 0$ car le corps humain étant plus chaud que le milieu extérieur, c'est ce dernier qui réchauffe l'extérieur. Le transfert reçu est alors négatif.

◇

Pour maintenir cette température constante, le corps puise chaque jour une énergie thermique Q_A dans son alimentation.

4) Déterminer Q_A en fonction de Q_P.

Réponse

Pour que le corps ne perde ni ne gagne d'énergie, il faut que :

$$\boxed{Q_A = -Q_P}.$$

en accord avec le premier principe pour une transformation isotherme.

◇

La calorie est définie comme l'énergie qu'il faut apporter à un gramme d'eau pour élever sa température de 14,5 °C à 15,5 °C.

5) Calculer la valeur de Q_A en kilocalorie (kcal).

Réponse

$$1\,\mathrm{cal} = c \times 1\,\mathrm{K} \times 1\,\mathrm{g} = 4{,}186\,\mathrm{J}$$

On a donc :

$$\boxed{Q_A = \frac{1 \times 10^7\,\mathrm{J}}{4{,}186\,\mathrm{J/cal}} = 2400\,\mathrm{kcal}}.$$

◇

I/B Science et investigation

La police scientifique utilise la température $T(t)$ d'un corps à l'instant t où il est découvert pour déterminer la durée qui s'est écoulée depuis le décès. À partir du moment où l'organisme cesse de fonctionner, l'apport d'énergie Q_A est nul. La température $T(t)$ du corps décroît donc sous l'effet des pertes Q_P.

6) Montrer que l'équation différentielle vérifiée par $T(t)$ s'exprime selon

$$\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{mc}T(t) = \frac{hS}{mc}T_e.$$

On pourra pour cela faire étudier une transformation du corps humain sur une durée infinitésimale dt durant lequel T varie de $\mathrm{d}T$.

Réponse

La variation d'énergie interne est (calcul direct) :

$$\mathrm{d}U = U(t+\mathrm{d}t) - U(t) = cm(T(t+\mathrm{d}t) - T(t)) = cm\mathrm{d}T,$$

puisque on considère que le corps est entièrement composé d'eau qui est une phase condensée. Le volume de ce corps ne varie pas donc le travail des forces de pression est nulle. De même, il ne bouge pas dans le référentiel terrestre donc ses énergies cinétique et potentielle macroscopiques ne varient pas :

$$\delta W = 0 \quad ; \quad \mathrm{d}E_c = 0 \quad ; \quad \mathrm{d}E_p = 0.$$

En revanche, le système reçoit un transfert thermique (négatif) :

$$\delta Q = h(T_e - T(t))S\mathrm{d}t.$$

Le premier principe de la thermodynamique est appliqué pendant la durée dt indique :

$$\mathrm{d}U + \mathrm{d}E_c + \mathrm{d}E_p = \delta Q + \delta W \quad \Rightarrow \quad cm\mathrm{d}T = h(T_e - T(t))S\mathrm{d}t.$$

On obtient alors l'équation différentielle suivante :

$$cm\frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} = hS(T_e - T(t)) \quad \Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}T}{\mathrm{d}t} + \frac{hS}{cm}T(t) = \frac{hS}{cm}T_e.$$

On reconnaît une équation différentielle du premier ordre à coefficients constants et avec un second membre.

◇

7) La résoudre, tracer T en fonction de t et calculer la valeur numérique de la constante de temps τ de ce phénomène.

Réponse

La condition initiale est $T(0) = T_0 = 37\,°\mathrm{C}$. La solution de cette équation différentielle est alors :

$$\boxed{T(t) = T_0 + (T_e - T_0)\left(1 - \exp\left(\frac{-t}{\tau}\right)\right)}.$$

Il s'agit d'une exponentielle décroissante partant de T_0 et ayant une asymptote horizontale à la température T_e. Le temps caractéristique est :

$$\boxed{\tau = \frac{cm}{hS} = 44\,000\,\mathrm{s} = 12{,}3\,\mathrm{h}}.$$

Cette méthode est donc efficace pour des crimes qui ont été commis quelques heures (voire 1 jour) avant l'arrivée de la police.

Sujet 3 – corrigé

I Calorimétrie (⋆⋆)

L'énergie interne des phases condensées (solides et liquides) ne dépend quasiment que de la température ; la détermination de leur capacité calorifique est donc essentielle. On utilise pour ce faire des récipients calorifugés type vases Dewar constitués d'une double paroi de verre contenant du vide et dont la face intérieure est recouverte d'une pellicule argentée.

1) Les parois du récipient sont alors athermanes : justifiez cette propriété vis-à-vis de la constitution du récipient. On rappelle cela signifie que la paroi empêche les transferts thermiques entre l'intérieur et l'extérieur du vase Dewar.

Réponse

Le vide entre les 2 parois en verre permet d'éviter les transferts thermique par conduction (le vide est un très mauvais conducteur thermique) et par convection (s'il n'y a pas de milieu matériel, il ne peut pas y avoir de convection). La pellicule argentée permet de réfléchir la lumière et donc d'éviter les transferts thermiques par rayonnement.

◇

I/A Méthode des mélanges

On considère un calorimètre contenant une masse m_1 d'eau à la température T_1 (Figure 1). La capacité thermique massique de l'eau c_e est connue. À l'instant initial, on plonge dans le calorimètre un corps (ou un liquide) de masse m_2, porté à la température T_2, dont on souhaite connaître la capacité thermique massique c. À l'équilibre la température finale est T_f. Le système considéré est l'ensemble {eau + corps}.

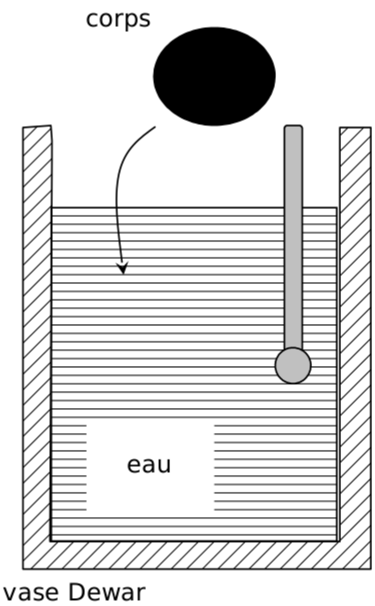


Figure 1

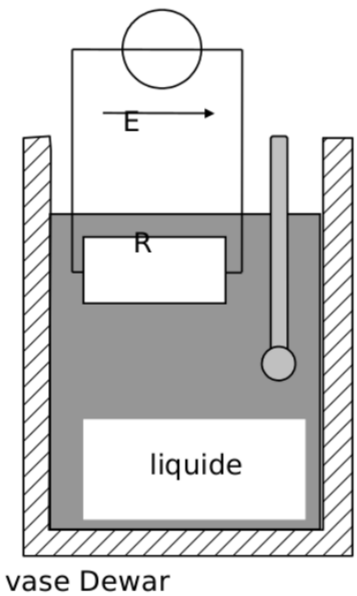


Figure 2

2) Décrire l'état initial et l'état final du système.

Réponse

Le système considéré est l'ensemble { eau + corps }. Durant tout l'exercice, les systèmes thermodynamiques sont à la pression ambiante et leur volumes ne varient pas. De plus, le système est fermé, donc la quantité de matière ne varie pas non plus. L'état initial n'est pas un état d'équilibre thermodynamique :

◇ corps : T_2

◇ eau : T_1,

contrairement à l'état final où l'eau et le corps sont à température T_f (à cause de la condition d'équilibre thermique).

◇

3) Exprimer ΔU, ΔE_c, W et Q et en déduire l'expression de c.

Réponse

D'après la propriété d'extensivité (d'additivité) de l'énergie interne et de l'énergie cinétique :

$$\Delta U = \Delta U_{\text{corps}} + \Delta U_{\text{eau}} \qquad ; \qquad \Delta E_c = \Delta E_{c,\text{corps}} + \Delta E_{c,\text{eau}}.$$

L'eau et le corps sont des phases condensées indilatables et incompressibles dont la capacité thermique ne dépend pas de la température, donc :

$$\Delta U_{\text{corps}} = cm_2(T_2 - T_f) \qquad ; \qquad \Delta U_{\text{eau}} = c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f).$$

On suppose que le corps ne possède pas de vitesse initiale et que l'eau n'est pas mise en mouvement par la transformation (dans le référentiel du laboratoire), donc :

$$\Delta E_{c,\text{corps}} = 0 \qquad ; \qquad \Delta E_{c,\text{eau}} = 0.$$

Finalement :

$$\boxed{\Delta U = cm_2(T_2 - T_f) + c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f)} \qquad ; \qquad \boxed{\Delta Ec = 0}.$$

Le volume du système ne varie pas, la transformation est donc isochore. On en déduit que le travail des forces de pression est nul :

$$\boxed{W = 0}.$$

Les parois du vase Dewar étant athermanes, la transformation est adiabatique. Ainsi :

$$\boxed{Q = 0}.$$

On peut alors appliquer le 1er principe de la thermodynamique au système { eau + corps } lors de cette transformation :

$$\Delta U + \Delta Ec = W + Q \quad \Rightarrow \quad cm_2(T_2 - T_f) + c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f) = 0$$

Finalement :

$$\boxed{c = \frac{-c_{\text{eau}}m_1(T_1 - T_f)}{m_2(T_2 - T_f)}}.$$

◇

4) Effectuer l'application numérique sachant que pour du cuivre : $m_2 = 200\,\text{g}$, $T_2 = 100\,°\text{C}$, $m_1 = 1\,\text{kg}$, $T_1 = 20\,°\text{C}$, $T_f = 21{,}5\,°\text{C}$, $c_{\text{eau}} = 4{,}18\,\text{kJ}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}$.

Réponse

En ne gardant qu'un chiffre significatif (car la donnée la moins précise n'en a qu'un seul) :

$$\boxed{c = 400\,\text{J}\cdot\text{kg}^{-1}\cdot\text{K}^{-1}}.$$

◇

I/B Méthode électrique

La détermination de la capacité thermique c (supposée indépendante de la température) d'un liquide peut se faire à l'aide de l'effet Joule. Une résistance de valeur R soumise à une tension de valeur efficace E est plongée dans une masse m_3 du liquide à étudier. À l'instant initial le liquide est à la température T_3 , après une durée Δt de chauffage, le liquide est à la température T_f. Le système considéré est uniquement le {liquide}.

5) Décrire l'état initial et l'état final du système.

Réponse

Le système étudié est maintenant le liquide uniquement. Comme dans la partie précédente, son volume, sa pression et sa quantité de matière ne varient pas au cours de la transformation. Ses états initial et final sont alors caractérisés par sa température :

- ◇ état initial : T_3,
- ◇ état final : T_f.

◇

6) Exprimer ΔU, ΔE_c, W et Q durant la transformation et en déduire l'expression de c en fonction des données.

Réponse

Le système est une phase condensée dont la capacité thermique est indépendante de la température, donc :

$$\boxed{\Delta U = m_3 c(T_3 - T_i)}.$$

Aussi bien à l'état initial qu'à l'état final, le liquide est globalement au repos dans le référentiel du laboratoire donc son énergie cinétique macroscopique ne varie pas lors de la transformation (et elle est même nulle tout le temps) :

$$\boxed{\Delta E_c = 0}.$$

La transformation est isochore, donc :

$$\boxed{W = 0}.$$

Enfin, le liquide reçoit un transfert thermique de la part de la résistance. La puissance instantanée dissipée par effet Joule par celle-ci est :

$$P = EI = RI^2 = \frac{E^2}{R}.$$

Le transfert thermique reçu par le liquide est alors :

$$\boxed{Q = \frac{E^2}{R}\Delta t}.$$

I/B) 0.1 Remarque. Comme attendu, le transfert thermique reçu par le fluide est positif : le liquide reçoit effectivement de l'énergie donné par la résistance.

On applique alors le 1^{er} principe de la thermodynamique sur le système d'étude (le liquide) lors de cette transformation :

$$\Delta U + \Delta Ec = W + Q \quad \Rightarrow \quad m_3 c(T_3 - T_i) = \frac{E^2}{R}\Delta t \quad \Rightarrow \quad \boxed{c = \frac{E^2 \Delta t}{R m_3 (T_3 - T_i)}}.$$

◇

On utilise une résistance de $50\,\Omega$ alimentée par une tension de $20\,\mathrm{V}$.

7) Quelle est la puissance électrique dissipée par effet Joule ?

Réponse

$$\boxed{P = \frac{E^2}{R} = 8\,\mathrm{W}}.$$

◇

Après 10 minutes de chauffage, on mesure une élévation de température de 5K dans les 200g d'huile introduits dans le calorimètre.

8) En déduire la capacité calorifique de l'huile étudiée.

Réponse

On peut alors effectuer l'application numérique (attention aux unités) :

$$\boxed{c = 4{,}8\,\mathrm{kJ/(kg{\cdot}K)}}.$$

◇

9) Si l'on prend en compte le fait que le vase Dewar, le thermomètre et l'agitateur voient également leur énergie interne augmenter lors des mesures précédentes, comment faut-il modifier les relations obtenues pour en tenir compte ? On notera C_M leur capacité calorifique.

Réponse

Il faut alors rajouter dans l'expression de l'énergie interne la quantité : $C_M \Delta T$. Par exemple la réponse à la question 6)) devient :

$$\boxed{\Delta U = c m_2 (T_2 - T_f) + c_{\text{eau}} m_1 (T_1 - T_f) + C_M (T_1 - T_f)}.$$

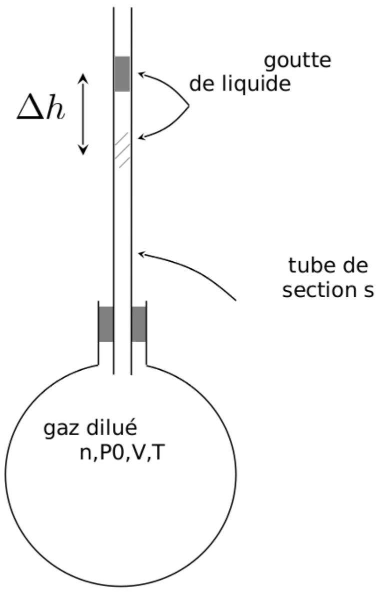
De même, la réponse à la question 6) devient :

$$\boxed{\Delta U = m_3 c (T_3 - T_i) + C_M (T_3 - T_f)}.$$

◇

Sujet 4 – corrigé

I Thermometre à gaz ($\star$)



On peut mesurer la température à l'aide d'un gaz sous basse pression P_0 qui se comporte alors comme un gaz parfait. On mesure dans le dispositif ci-contre, appelé thermomètre à gaz, la variation de hauteur Δh d'une goutte de liquide dans le tube de section s lorsque la température varie.

1) Décrire le système thermodynamique étudié à l'équilibre. Préciser en particulier ce que l'on sait de la pression et de la température.

Réponse

Le système étudié est le volume de gaz contenu dans l'enceinte, délimité par la verrerie et la surface de la goutte de liquide. Sa quantité de matière est fixée mais son volume peut varier. Il est à l'équilibre thermique, donc sa température est égale à celle de la température extérieur. Il est à l'équilibre mécanique, donc sa pression est égale à la pression qui s'exerce sur lui, c'est-à-dire la pression atmosphérique plus la pression due au poids de la goutte – cette pression reste donc constante. Finalement :

$$T = T_{\text{ext}}; \quad n = \text{cst}; \quad P = P_0 + \frac{mg}{s}; \quad V \text{est donné par la loi des gaz parfaits.}$$

◇

2) Exprimer la variation de volume ΔV en fonction de s et Δh.

Réponse

Quand la goutte se déplace d'une hauteur Δh, le volume varie de ΔV tel que :

$$\Delta V = s\Delta h.$$

◇

3) Exprimer la relation entre ΔT et Δh.

Réponse

D'après la loi des gaz parfaits, quand le gaz est à l'équilibre thermodynamique, on peut affirmer que :

$$T = \frac{PV}{nR} = cst \times V,$$

puisque P, n et R sont constantes lors de cette expérience. Puisque T et V sont proportionnels, alors ils ont des variations proportionnelles (en cas de doute, il convient de différentier l'équation) :

$$\boxed{\Delta T = \frac{P}{nR} \times \Delta V = \frac{sP}{nR} \times \Delta h}.$$

◇

4) À 300K, la goutte est à l'équilibre et la pression dans l'enceinte est 1,00bar. Calculer n sachant que $V = 50{,}0\text{mL}$.

Réponse

D'après la loi des gaz parfaits (attention aux unités !) :

$$n = \frac{PV}{RT} = \frac{1{,}00.10^5 \times 50{,}0.10^{-6}}{8{,}314 \times 300} = \boxed{2.10^{-3}\text{mol}}.$$

◇

5) Calculer le diamètre du tube pour que la goutte monte de 1m lorsque T augmente de 100K.

Réponse

On utilise la relation obtenue à la question 3 :

$$s = \frac{nR\Delta T}{P\Delta h} = \frac{2.10^{-3} \times 8{,}314 \times 100}{1{,}00.10^5 \times 1} = 1{,}66.10^{-5}\text{m}^2 = \boxed{16{,}6\text{mm}^2}.$$

◇

Sujet 5 – corrigé

I Équation de gaz parfait et interprétation microscopique

Considérons un système de N particules identiques de masse m contenue dans un volume V. Ce gaz théorique suit le modèle du gaz parfait.

1) Rappeler les hypothèses du gaz parfait.

Réponse

Un gaz parfait est un ensemble de particules (atomes ou molécules) qui n'interagissent pas entre elles mais qui interagissent avec la paroi qui délimite le volume dans lequel se trouve le gaz.

◇

2) Justifier qu'entre deux chocs, on peut considérer les vecteurs vitesses des particules comme constants.

Réponse

Entre 2 chocs, les particules ne sont soumises à aucune force (car il n'y a pas d'interactions entre particules), donc, d'après la loi de l'inertie, leurs vecteurs vitesse sont constants (le référentiel d'étude étant supposé galiléen).

◇

Nous allons démontrer la relation donnée en cours entre la pression au sein du gaz et la vitesse quadratique des particules. Nous ajouterons à notre modèle les hypothèses simplificatrices suivantes :

- ◇ les particules possèdent toutes la même norme de vitesse u (on parle de distribution homocinétique),
- ◇ elles ne se déplacent que selon trois directions : $\vec{e}_x$, $\vec{e}_y$ ou $\vec{e}_z$ (cela signifie qu'aucune n'a un vecteur vitesse qui n'est pas colinéaire à un vecteur de la base),
- ◇ il y a une répartition égale des particules dans chaque direction et sens de l'espace : autant de particules ont un vecteur vitesse dirigé suivant $\pm\vec{e}_x$, $\pm\vec{e}_y$ ou $\pm\vec{e}_z$.

On considère un cylindre d'axe Ox et on cherche la pression provoqué par les chocs des particules sur la paroi avant d'axe Ox. On appelle S la surface de cette paroi.

3) Justifier que le nombre de particules allant dans vers cette paroi à l'instant t est $N/6$.

Réponse

Les particules se déplacent uniquement selon 3 directions de l'espace et selon 2 sens possible pour chaque direction. Une particule peut donc se déplacer uniquement selon 6 possibilités. Puisqu'il n'y a pas de direction ni de sens privilégié, il y a $N/6$ particules qui se déplacent selon chaque couple direction $\oplus$ sens.

◇

4) On considère la portion de cylindre de base S de hauteur $u\,\mathrm{d}t$. Pourquoi seules les particules contenues dans ce cylindre à l'instant t frapperont la paroi entre t et $t+\mathrm{d}t$?

Réponse

La quantité udt est la distance parcourue par une particule de vitesse v pendant une durée $\mathrm{d}t$. Les particules qui ne sont pas comprises dans le cylindre de hauteur udt sont donc trop loin pour venir taper la paroi entre t et $t+\mathrm{d}t$.

◇

5) Soit dN le nombre de particules dans ce petit cylindre. Exprimer dN en fonction de u, N, S, V et $\mathrm{d}t$.

Réponse

On suppose que le gaz est homogène, donc le nombre de particule par unité de volume est le même partout.

On en déduit alors que le nombre de particules comprises dans ce cylindre divisé par le volume du cylindre est égal au nombre de particule total divisé par le volume total :

$$\frac{dN}{Su\mathrm{d}t} = \frac{N}{V} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{dN = \frac{NSu\mathrm{d}t}{V}}.$$

◇

6) Exprimer la variation de la quantité de mouvement d'une particule au cours du choc.

Réponse

Avant le choc, une particule possède une quantité de mouvement :

$$\vec{p}_{\text{avant}} = mu\vec{e}_x.$$

Après le choc avec la paroi, elle se déplace dans la même direction mais dans l'autre sens, donc sa quantité de mouvement est :

$$\vec{p}_{\text{apres}} = -mu\vec{e}_x.$$

La variation de quantité de mouvement est alors :

$$\boxed{\delta\vec{p}_{\text{1particule}} = \vec{p}_{\text{apres}} - \vec{p}_{\text{avant}} = -2mu\vec{e}_x}.$$

◇

7) Quelle est la force totale exercée par les particules pendant dt sur la paroi S ?

Réponse

Pendant une durée dt, la variation de quantité de mouvement des particules qui effectuent un choc contre la paroi est (seule 1/6 des particules se déplace dans le bon sens et vont effectuer un choc) :

$$d\vec{p} = \frac{dN}{6}\delta\vec{p}_{\text{1particule}} = \frac{-2mNSu^2\mathrm{d}t}{V}\vec{e}_x \qquad \Rightarrow \qquad \frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{-2mNSu^2}{V}\vec{e}_x.$$

En utilisant la loi de la quantité de mouvement sur la paroi et la loi des actions réciproques, on en déduit que la force exercée par les particules sur la paroi est :

$$\vec{F} = -\frac{d\vec{p}}{\mathrm{d}t} = \frac{2mNSu^2}{6V}\vec{e}_x$$

◇

8) En déduire l'expression de la pression du gaz en fonction de u^2, N, m et V ainsi que la loi des gaz parfaits.

Réponse

La pression est alors :

$$\boxed{P = \frac{F}{S} = \frac{mNu^2}{3V}}.$$

d'après le cours et le théorème d'équipartition de l'énergie :

$$u^2 = \frac{3RT}{M} \qquad \Rightarrow \qquad \boxed{P = \frac{mNRT}{MV} = \frac{nRT}{V}}.$$

On retrouve donc l'équation d'état des gaz parfaits à partir de considérations microscopiques.

◇