

## Correction du DS

1182

Tout moyen de communication est interdit

Les téléphones portables doivent être éteints et rangés dans les sacs

Les calculatrices sont autorisées

Au programme

Régimes transitoires d'ordre 2 (mécanique et électricité), transformation et équilibre chimique.

## Sommaire

<b>E1</b>	Pentachlorure de phosphore . . . . .	2
<b>E2</b>	États finaux variés . . . . .	3
<b>P1</b>	Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC . . . . .	5
<b>P2</b>	Assemblages de ressorts . . . . .	10

Les différentes questions peuvent être traitées dans l'ordre désiré. **Cependant**, vous indiquerez le numéro correct de chaque question. Vous prendrez soin d'indiquer sur votre copie si vous reprenez une question d'un exercice plus loin dans la copie, sous peine qu'elle ne soit ni vue ni corrigée.

Vous porterez une attention particulière à la **qualité de rédaction**. Vous énoncerez clairement les hypothèses, les lois et théorèmes utilisés. Les relations mathématiques doivent être reliées par des connecteurs logiques.

Vous prendre soin de la **présentation** de votre copie, notamment au niveau de l'écriture, de l'orthographe, des encadrements, de la marge et du cadre laissé pour la note et le commentaire. Vous **encadrerez les expressions littérales**, sans faire apparaître les calculs. Vous ferez apparaître cependant le détail des grandeurs avec leurs unités. Vous **soulignerez les applications numériques**.

Ainsi, l'étudiant-e s'expose aux malus suivants concernant la forme et le fond :

### Malus

- ◇ A : application numérique mal faite ;
- ◇ N : numéro de copie manquant ;
- ◇ P : prénom manquant ;
- ◇ E : manque d'encadrement des réponses ;
- ◇ M : marge non laissée ou trop grande ;
- ◇ V : confusion ou oubli de vecteurs ;
- ◇ Q : question mal ou non indiquée ;
- ◇ C : copie grand carreaux ;
- ◇ U : mauvaise unité (flagrante) ;
- ◇ H : homogénéité non respectée ;
- ◇ S : chiffres significatifs non cohérents ;
- ◇  $\varphi$  : loi physique fondamentale brisée.

## E1 Pentachlorure de phosphore

Le pentachlorure de phosphore  $\text{PCl}_5$  est un composé très toxique, servant de réactif en synthèse organique pour ajouter des atomes de chlore à une chaîne carbonée. Mis en phase gazeuse, il se décompose spontanément en trichlorure de phosphore et en dichlore, donnant naissance à un équilibre en phase gazeuse.

Considérons un réacteur fermé de volume constant  $V = 2 \text{ L}$  maintenu à température constante  $T = 180^\circ\text{C}$ . À cette température, la constante thermodynamique de l'équilibre précédemment cité vaut  $K^\circ = 8$ . On y met  $n_0 = 0,5 \text{ mol}$  de  $\text{PCl}_5$ .

On rappelle que  $R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1}$ .

- 1 Exprimer puis calculer la pression initiale dans le réacteur  $p_0$  en fonction des données.

### Réponse

On applique la loi des gaz parfaits :

$$p_0 = \frac{n_0 RT}{V} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} n_0 = 0,5 \text{ mol} \\ R = 8,314 \text{ J}\cdot\text{K}^{-1}\cdot\text{mol}^{-1} \\ T = 453,15 \text{ K} \\ V = 2 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } p_0 = 9,41 \times 10^5 \text{ Pa}$$

- 2 Écrire l'équation de réaction modélisant le processus dans le réacteur, et dresser le tableau d'avancement correspondant.

### Réponse

Équation		$\text{PCl}_{5(\text{g})}$	$=$	$\text{PCl}_{3(\text{g})}$	$+$	$\text{Cl}_{2(\text{g})}$	$n_{\text{tot,gaz}}$
Initial	$\xi = 0$	$n_0$		0		0	$n_0$
Interm.	$\xi$	$n_0 - \xi$		$\xi$		$\xi$	$n_0 + \xi$
Final	$\xi_f = \xi_{\text{eq}}$	$n_0 - \xi_{\text{eq}}$		$\xi_{\text{eq}}$		$\xi_{\text{eq}}$	$n_0 + \xi_{\text{eq}}$

- 3 Exprimer les pressions partielles des gaz en fonction de  $n_0$ ,  $\xi$  et de la pression initiale  $p_0$ .

### Réponse

On utilise à nouveau l'équation des gaz parfaits, avec  $\frac{RT}{V} \frac{p_0}{n_0}$  :

$$P_{\text{PCl}_5} = \frac{(n_0 - \xi)RT}{V} = \frac{(n_0 - \xi)p_0}{n_0} \quad \text{et} \quad P_{\text{PCl}_3} = \frac{\xi p_0}{n_0} \quad \text{et} \quad P_{\text{Cl}_2} = \frac{\xi p_0}{n_0}$$

- 4 Exprimer le coefficient de dissociation à l'équilibre  $\alpha = \xi_{\text{eq}}/n_0$  en fonction de  $K^\circ$ ,  $p^\circ$  et  $p_0$ . Faire l'application numérique. Que représente-t-il physiquement ?

### Réponse

Loi d'action de masses :

Ainsi, en isolant :

$$\begin{aligned} K^\circ &= \frac{a(\text{PCl}_3)a(\text{Cl}_2)}{a(\text{PCl}_5)} \Big|_{\text{eq}} \\ \Leftrightarrow K^\circ &= \frac{\frac{P_{\text{PCl}_3}}{p^\circ} \frac{P_{\text{Cl}_2}}{p^\circ}}{\frac{P_{\text{PCl}_5}}{p^\circ}} \Big|_{\text{eq}} \\ \Leftrightarrow K^\circ &= \frac{\xi_{\text{eq}}^2}{n_0(n_0 - \xi_{\text{eq}})} \frac{p_0}{p^\circ} \\ \Leftrightarrow K^\circ &= \frac{n_0^2}{n_0^2} \frac{\left(\frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}\right)^2}{1 - \frac{\xi_{\text{eq}}}{n_0}} \frac{p_0}{p^\circ} \\ \Leftrightarrow K^\circ &= \frac{\alpha^2}{(1 - \alpha)} \frac{p_0}{p^\circ} \end{aligned}$$

Activité d'un gaz  
Question 2  
On factorise  
 $\alpha = \xi_{\text{eq}}/n_0$

$$\begin{aligned} \alpha^2 + \alpha \left( \frac{K^\circ p^\circ}{p_0} \right) - \frac{K^\circ p^\circ}{p_0} &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \left( \frac{K^\circ p^\circ}{p_0} \right)^2 + 4 \left( \frac{K^\circ p^\circ}{p_0} \right) > 0 \\ \Leftrightarrow \alpha &= - \left( \frac{K^\circ p^\circ}{2p_0} \right) + \sqrt{\left( \frac{K^\circ p^\circ}{2p_0} \right)^2 + \left( \frac{K^\circ p^\circ}{p_0} \right)} \end{aligned}$$

$$\Rightarrow \text{A.N. : } \alpha = 0,59$$

$\alpha$  représente la proportion de réactif ayant effectivement réagit.

5 Calculer la pression régnant dans le réacteur à l'équilibre.

Réponse

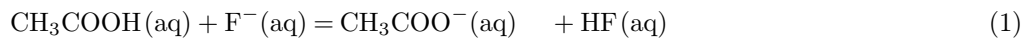
À l'aide du tableau d'avancement, on a  $n_{\text{tot, gaz}}$ , d'où

$$P_{\text{eq}} = \frac{n_0 + \xi_{\text{eq}}}{n_0} p_0 \Leftrightarrow P_{\text{eq}} = (1 + \alpha) p_0$$

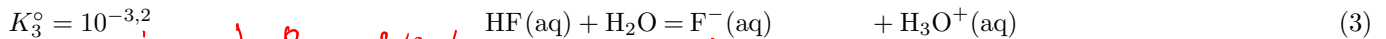
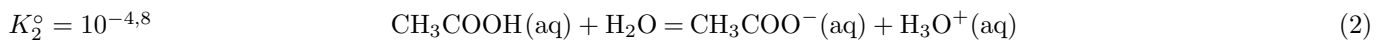
A.N. :  $P_{\text{eq}} = 15,0 \text{ bar}$

## E2 États finaux variés

On s'intéresse dans un premier temps à une solution aqueuse obtenue à 298 K par un mélange d'acide éthanoïque  $\text{CH}_3\text{COOH}$  (concentration  $c_1 = 0,10 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$  après mélange) et d'ions fluorure  $\text{F}^-$  (concentration  $c_2 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$  après mélange). La réaction (1) susceptible de se produire s'écrit :



On connaît les constantes d'équilibre à 298 K des réactions suivantes :



1 Calculer la constante d'équilibre  $K_1^\circ$  relative à l'équilibre (1).

Réponse

On constate que l'équilibre (1) = (2) - (3) donc

$$K_1^\circ = \frac{K_2^\circ}{K_3^\circ} = 10^{-1,6}$$

2 Déterminer l'état d'équilibre de la solution issue du mélange de l'acide éthanoïque et des ions fluorure : exprimer l'équation dont l'avancement est solution, et l'expression littérale de la solution en fonction de  $c_1$ ,  $c_2$  et  $K_1^\circ$ .

Réponse

On dresse le tableau d'avancement en concentration :

Équation		$\text{CH}_3\text{COOH}(\text{aq})$	$+$	$\text{F}^-(\text{aq})$	$\rightarrow$	$\text{CH}_3\text{COO}^-(\text{aq})$	$+$	$\text{HF}(\text{aq})$
Initial	$x = 0$	$c_1$		$c_2$		0		0
Interm.	$x$	$c_1 - x$		$c_2 - x$		$x$		$x$
Final ( $\text{mol}\cdot\text{L}^{-1}$ )	$x_f = x_{\text{eq}}$	$9,0 \times 10^{-2}$		$4,0 \times 10^{-2}$		$9,6 \times 10^{-3}$		$9,6 \times 10^{-3}$

D'après la loi d'action de masse,

$$K_1^\circ = \frac{x_{\text{eq}}^2}{(c_1 - x_{\text{eq}})(c_2 - x_{\text{eq}})} \quad \left. \begin{array}{l} \text{On isole} \\ \Leftrightarrow (c_1 - x_{\text{eq}})(c_2 - x_{\text{eq}})K_1^\circ = x_{\text{eq}}^2 \\ \Leftrightarrow x_{\text{eq}}^2 + (x_{\text{eq}} - c_1)(x_{\text{eq}} - c_2)K_1^\circ = 0 \end{array} \right\} \begin{array}{l} \text{On rassemble} \\ \text{On développe et factorise} \end{array}$$

$$\Leftrightarrow x_{\text{eq}}^2(1 + K_1^\circ) - x_{\text{eq}}(c_1 + c_2)K_1^\circ + c_1c_2K_1^\circ = 0$$

Ainsi, avec  $\Delta$  le discriminant de ce trinôme :

$$\Delta = (c_1 + c_2)^2 (K_1^\circ)^2 - 4(1 + K_1^\circ)c_1c_2K_1^\circ$$

$$\Rightarrow x_{\text{eq},\pm} = \frac{(c_1 + c_2)K_1^\circ \pm \sqrt{(c_1 + c_2)^2 (K_1^\circ)^2 - 4(1 + K_1^\circ)c_1c_2K_1^\circ}}{2(1 + K_1^\circ)}$$

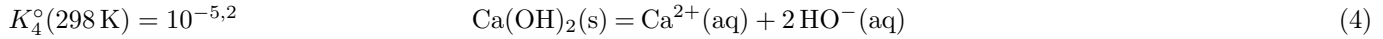
Solutions

Calcul

A.N. :  $x_{\text{eq}} = 9,6 \times 10^{-3} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1}$  avec  $\begin{cases} c_1 = 0,1 \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \\ c_2 = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol}\cdot\text{L}^{-1} \\ K_1^\circ = 10^{-1,6} \end{cases}$

On en déduit les concentrations à l'équilibre indiquées dans le tableau.

On étudie dans la suite de l'exercice quelques constituants du béton. L'hydroxyde de calcium  $\text{Ca(OH)}_2(\text{s})$  confère au béton ses propriétés basiques (au sens de acide ou base). Il se dissout en solution aqueuse selon la réaction (4) :



- 3 On introduit en solution aqueuse un net excès d'hydroxyde de calcium. La phase solide est alors présente en fin d'évolution. Calculer les concentrations de chacun des ions présents à l'équilibre.

### Réponse

On dresse un tableau d'avancement en concentration :

Équation		$\text{Ca(OH)}_2(\text{s}) = \text{Ca}^{2+}(\text{aq}) + 2\text{HO}^-(\text{aq})$		
Initial	$x = 0$	excès	0	0
Interm.	$x$	excès	$x$	$2x$
Final ( $\text{mol} \cdot \text{L}^{-1}$ )	$x_f = x_{\text{eq}}$	excès	$1,2 \times 10^{-2}$	$2,4 \times 10^{-2}$

Par la loi d'action de masse,  $K_4^\circ = x_{\text{eq}} \times (2x_{\text{eq}})^2$  donc  $x_{\text{eq}} = \left(\frac{K_4^\circ}{4}\right)^{1/3}$

A.N. :  $x_{\text{eq}} = 1,2 \times 10^{-2} \text{ mol} \cdot \text{L}^{-1}$

On en déduit les concentrations indiquées dans le tableau.

- 4 On donne la relation  $[\text{H}_3\text{O}^+][\text{HO}^-] = 10^{-14}$ . Sachant que  $\text{pH} = -\log([\text{H}_3\text{O}^+])$ , déterminer le pH de la solution. Le milieu est-il acide, basique ou neutre ?

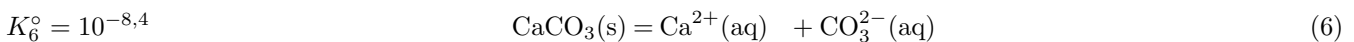
### Réponse

$\text{pH} = 14 + \log[\text{HO}^-] \Rightarrow \text{pH} = 12,4$

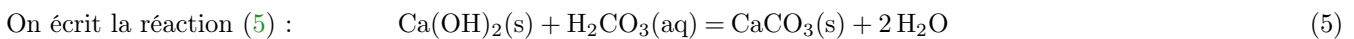
ce qui correspond bien à un milieu basique.

Dans certains cas, la pollution urbaine liée à l'humidité entraîne la dissolution du dioxyde de carbone atmosphérique dans l'eau à l'intérieur du béton (sous forme  $\text{H}_2\text{CO}_3$ ), provoquant la carbonatation du béton (formation de carbonate de calcium  $\text{CaCO}_3(\text{s})$ ) par réaction de l'hydroxyde de calcium  $\text{Ca(OH)}_2(\text{s})$  avec la forme  $\text{H}_2\text{CO}_3(\text{aq})$ .

- 5 Écrire la réaction (5) mise en jeu dans la carbonatation du béton et calculer sa constante d'équilibre  $K_5^\circ$  à 298 K. On donne à 298 K les constantes d'équilibre des réactions suivantes :



### Réponse



On constate que la réaction (5) = (4) - (6) + (8) + (7) - 2(9) donc

$$K_5^\circ = \frac{K_4^\circ K_7^\circ K_8^\circ}{K_6^\circ (K_9^\circ)^2} = 10^{14,5}$$

On étudie désormais la réaction de décomposition du carbonate de calcium  $\text{CaCO}_3(\text{s})$  en oxyde de calcium  $\text{CaO}(\text{s})$  et dioxyde de carbone  $\text{CO}_2(\text{g})$  de constante d'équilibre  $K^\circ = 0,20$  à 1093 K.



Soit un récipient indéformable de volume  $V = 10\text{ L}$ , vidé au préalable de son air, et maintenu à la température constante de 1093 K. On introduit progressivement une quantité de matière  $n$  en carbonate de calcium solide et on mesure la pression  $p$  à l'intérieur de l'enceinte.

- 6 Lorsque l'équilibre est établi, calculer la quantité de matière en dioxyde de carbone  $n(\text{CO}_2)_{\text{eq}}$  dans l'enceinte. On supposera les gaz comme parfaits. On rappelle la constante des gaz parfaits  $R = 8,31 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1}$ .

Réponse

À l'équilibre, d'après la loi d'action de masse,

$$\begin{aligned} K^\circ &= \frac{P(\text{CO}_2)_{\text{eq}}}{P^\circ} \\ \Leftrightarrow K^\circ &= \frac{n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} RT}{VP^\circ} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} P(\text{CO}_2)_{\text{eq}} = \frac{n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} RT}{V} \\ \text{On isole} \end{array} \right\} \quad \Leftrightarrow \boxed{n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} = \frac{K^\circ P^\circ V}{RT}}$$

A.N. :  $n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} = 2,2 \times 10^{-2} \text{ mol}$  avec  $\begin{cases} K^\circ = 0,20 \\ P^\circ = 1 \times 10^5 \text{ Pa} \\ V = 10 \times 10^{-3} \text{ m}^3 \\ R = 8,314 \text{ J} \cdot \text{K}^{-1} \cdot \text{mol}^{-1} \\ T = 1093 \text{ K} \end{cases}$

- 7 On introduit une quantité de matière  $n = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol}$  en carbonate de calcium. Décrire l'état final. On précisera notamment si l'état final est un état d'équilibre.

Réponse

Comme  $n < n(\text{CO}_2)_{\text{eq}}$ , le quotient réactionnel évoluera de sa valeur initiale 0 jusqu'à sa valeur maximale  $Q_{\text{max}}$ , qui sera inférieure à  $K^\circ$ . Ainsi la réaction évoluera dans le sens direct jusqu'à **disparition complète** du carbonate de calcium : c'est une **rupture d'équilibre**.

Les quantités de matière sont :

$$n(\text{CO}_2)_f = n(\text{CaO})_f = n = 1,0 \times 10^{-2} \text{ mol} \quad \text{et} \quad n(\text{CaCO}_3)_f = 0$$

- 8 Reprendre la question précédente dans le cas où  $n = 5,0 \times 10^{-2} \text{ mol}$ .

Réponse

Comme  $n > n(\text{CO}_2)_{\text{eq}}$ , le quotient réactionnel peut augmenter jusqu'à atteindre la constante d'équilibre. L'état final est donc **bien un état d'équilibre** avec

$$\begin{aligned} n(\text{CO}_2)_f &= n(\text{CaO})_f = n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} = 2,2 \times 10^{-2} \text{ mol} \\ n(\text{CaCO}_3)_f &= n - n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} = 2,8 \times 10^{-2} \text{ mol} \end{aligned}$$

- 9 Montrer que la courbe  $p = f(n)$ , avec  $p$  la pression à l'intérieur de l'enceinte, est constituée de deux segments de droites dont on donnera les équations pour  $0 \leq n \leq 0,10 \text{ mol}$ .

Réponse

On utilise les résultats précédents en appliquant l'équation d'état des gaz parfaits :

$$\begin{aligned} \diamond n < n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} &\Rightarrow p = \frac{nRT}{V} \propto n; \\ \diamond n \geq n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} &\Rightarrow p = \frac{n(\text{CO}_2)_{\text{eq}} RT}{V} = \text{cte.} \end{aligned}$$

## P1 Amortissement et facteur de qualité d'un circuit RLC

On considère le circuit RLC série représenté ci-contre. L'interrupteur  $K$  est fermé à un instant  $t = 0$  choisi comme origine des temps. Le condensateur est initialement chargé :  $u(t = 0) = u_0$ .

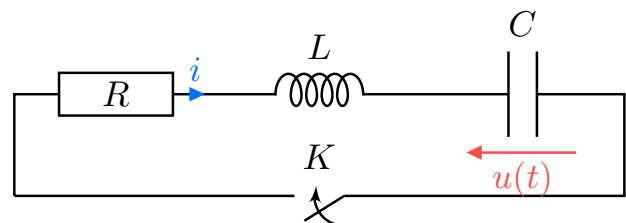


FIGURE 3.1 – Circuit.

1 Établir l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$  pour  $t \geq 0$ . La mettre sous la forme

$$\frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{\omega_0}{Q} \frac{du}{dt} + \omega_0^2 u = 0$$

et donner les expressions de  $\omega_0$  et  $Q$  en fonction de  $R$ ,  $L$  et  $C$ .

Réponse

Avec la loi des mailles,

$$\begin{aligned} u_L + u_R + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} + RC \frac{du_C}{dt} + u_C &= 0 \\ \Leftrightarrow \frac{d^2 u_C}{dt^2} + \frac{R}{L} \frac{du_C}{dt} + \frac{1}{LC} u_C &= 0 \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} u_L = L \frac{di}{dt} \\ \text{et } u_R = Ri \\ i = C \frac{du_C}{dt} \end{array} \right. \quad \begin{array}{l} \text{forme} \\ \text{canonique} \end{array} \quad (3.1)$$

On détermine l'expression de  $Q$  par identification :

$$\begin{aligned} \frac{\omega_0}{Q} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{Q\sqrt{LC}} &= \frac{R}{L} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{L}{R\sqrt{LC}} \\ \Leftrightarrow Q &= \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}} \end{aligned} \quad \left\{ \begin{array}{l} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ \text{On isole } Q \\ L = \sqrt{L^2} \end{array} \right.$$

2 Montrer que le système répond différemment selon la valeur de  $Q$ . Nommer chaque régime possible, sans chercher à donner les formes de solutions correspondantes.

Réponse

Avec l'équation caractéristique :

$$\begin{aligned} r^2 + \frac{\omega_0}{Q} r + \omega_0^2 &= 0 \\ \Rightarrow \Delta &= \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 = \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) \end{aligned}$$

Selon la valeur du discriminant, on aura différentes valeurs de  $r$ , doubles réelles, simple réelle ou doubles complexes. On a en effet, avec  $Q > 0$ ,

$$\Delta > 0 \Leftrightarrow \frac{\omega_0^2}{Q^2} (1 - 4Q^2) > 0 \Leftrightarrow 4Q^2 < 1 \Leftrightarrow Q < \frac{1}{2}$$

$Q > 1/2$  : régime **pseudo-périodique**, racines complexes et oscillations décroissantes ;

$Q = 1/2$  : régime **critique**, racine double réelle ;

$Q < 1/2$  : régime **apériodique**, racines réelles et décroissance exponentielle sans oscillation.

On suppose  $Q > 1/2$  dans la suite.

3 Définir la pseudo-pulsation  $\Omega$  des oscillations libres en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ . Définir aussi le temps caractéristique  $\tau$  d'amortissement exponentiel des oscillations libres en fonction de  $\omega_0$  et  $Q$ .

Réponse

d'où la définition de  $\Omega$  :

$$\Omega = \frac{\omega_0}{2Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$$

Ensuite, avec la forme générale de la solution on a

$$u(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q} t\right) [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

On remarque donc qu'on peut assimiler le terme à l'intérieur de l'exponentielle comme l'inverse d'un temps, c'est-à-dire qu'on définit  $\tau$  comme la partie réelle des racines :

$$\tau = \frac{2Q}{\omega_0}$$

- 4 Établir l'expression de  $u(t)$  pour  $t \geq 0$  en fonction de  $u_0$ ,  $\omega_0$ ,  $Q$  et  $\omega$ , compte tenu des conditions initiales que vous explicitez et justifiez.

### Réponse

On a donc

$$u(t) = e^{-t/\tau} [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)]$$

On trouve  $A$  avec la première condition initiale (condensateur initialement chargé et tension condensateur continue) :

$$u(0) = u_0 = 1 [A \cdot 1 + B \cdot 0] = A \Rightarrow A = u_0$$

On trouve  $B$  avec la seconde CI (il n'y a pas de courant avant la fermeture de  $K$  et courant continu dans la bobine) :

$$\frac{du}{dt} = -\frac{\omega_0}{2Q} \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) \times [A \cos(\Omega t) + B \sin(\Omega t)] + \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right) [-A\Omega \sin(\Omega t) + B\Omega \cos(\Omega t)]$$

$$\Rightarrow \frac{du}{dt}(0) = -\frac{\omega_0}{2Q}A + \Omega B = 0$$

$$\Leftrightarrow B = \frac{\omega_0}{2Q\Omega}u_0$$

Ainsi,

$$u(t) = u_0 e^{-t/\tau} \left[ \cos(\Omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\Omega} \sin(\Omega t) \right]$$



On souhaite visualiser la tension  $u(t)$  sur l'écran d'un oscilloscope dont l'entrée est modélisée par l'association en parallèle d'une résistance  $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$  et d'une capacité  $C_0 = 11 \text{ pF}$ .

- 5 Montrer que si l'on tient compte de l'oscilloscope, l'équation différentielle vérifiée par  $u(t)$  devient :

$$L(C + C_0) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{L}{R_0} + RC + RC_0 \right) \frac{du}{dt} + \left( 1 + \frac{R}{R_0} \right) u = 0$$

### Réponse

On commence par représenter le circuit en ajoutant en parallèle de  $C$  la résistance  $R_0$  et la capacité  $C_0$ .

Loi des nœuds :

$$i = i_{R_0} + i_{C_0} + i_C$$

$$\Leftrightarrow i = \frac{u}{R_0} + (C + C_0) \frac{du}{dt}$$

Dans la loi des mailles,

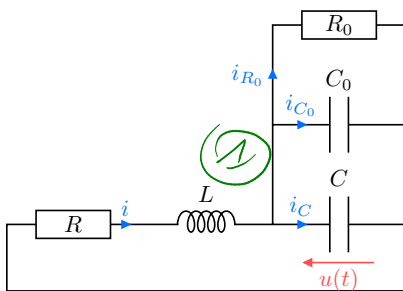
$$u_L + u_R + u = 0$$

$$\Leftrightarrow L \frac{di}{dt} + Ri + u = 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{L}{R_0} \frac{du}{dt} + L(C + C_0) \frac{d^2 u}{dt^2} + \frac{R}{R_0} u + R(C + C_0) \frac{du}{dt} + u = 0$$

$$\Leftrightarrow L(C + C_0) \frac{d^2 u}{dt^2} + \left( \frac{L}{R_0} + RC + RC_0 \right) \frac{du}{dt} + \left( 1 + \frac{R}{R_0} \right) u = 0$$

FIGURE 3.2 – Circuit avec oscilloscope.



- 6 Quelles relations qualitatives doivent vérifier  $R$ ,  $L$ ,  $C$ ,  $R_0$  et  $C_0$  pour que la mise en place de l'oscilloscope ait une influence négligeable sur les oscillations étudiées? Vérifier qu'avec les valeurs usuelles de  $R$ ,  $L$  et  $C$  utilisées en travaux pratiques ces relations sont vérifiées.

### Réponse

Pour que l'oscilloscope ait le moins d'influence possible sur les oscillations, il faut que les coefficients de l'équation différentielle précédente diffèrent le moins possible de ceux de l'équation différentielle (3.1) :

- $C \gg C_0$  ; les capacités utilisées en T.P. sont de l'ordre du  $\mu\text{F}$  ou du  $\mu\text{F}$ . Comme  $C_0 = 11 \text{ pF}$ , cette condition est bien vérifiée ;
- $R \ll R_0$  ; les résistances utilisées en T.P. sont de l'ordre du  $\text{k}\Omega$ . Comme  $R_0 = 1,0 \text{ M}\Omega$ , cette condition est bien vérifiée ;

①  $\diamond \frac{L}{R_0} \ll RC$  soit  $R_0 \gg \frac{L}{RC} \approx 10^4 \Omega$ ; cette condition est bien vérifiée.

④ 7 On définit le décrement logarithmique comme étant la quantité  $d_m = \ln \frac{u(t)}{u(t+mT)}$  où  $T = 2\pi/\omega$  et  $m$  est un entier strictement positif. Exprimer  $d_m$  en fonction de  $m$  et de  $Q$ .

Réponse

En remarquant que  $\cos(\Omega(t+T)) = \cos(\Omega t + 2\pi) = \cos(\Omega t)$ , on montre facilement que  $d_m = \ln \left( \exp \left\{ \frac{\Omega_0 m T}{2Q} \right\} \right)$ . On obtient donc :  $d_m = \frac{\omega_0 m T}{2Q}$ . En remplaçant  $T$  par  $\frac{2\pi}{\Omega}$  où  $\Omega = \frac{\omega_0}{Q} \sqrt{4Q^2 - 1}$ , il vient :

$$d_m = \frac{2\pi m}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$$

② 8 On réalise un montage expérimental où le circuit RLC est excité par un générateur basses fréquences délivrant une tension crête à crête. Comment faut-il choisir le signal délivré par le générateur pour observer les oscillations libres du circuit ? Justifier à l'aide d'un schéma.

Réponse

Pour observer les oscillations il faut que la demi-période du signal délivré par le G.B.F. soit égale à quelques  $\tau$ .

②

+ 1 schéma !

③ 9 La tension aux bornes du condensateur est enregistrée grâce à un logiciel d'acquisition. Le signal obtenu est représenté sur la figure 3.3. Estimer le facteur de qualité  $Q$  du circuit.

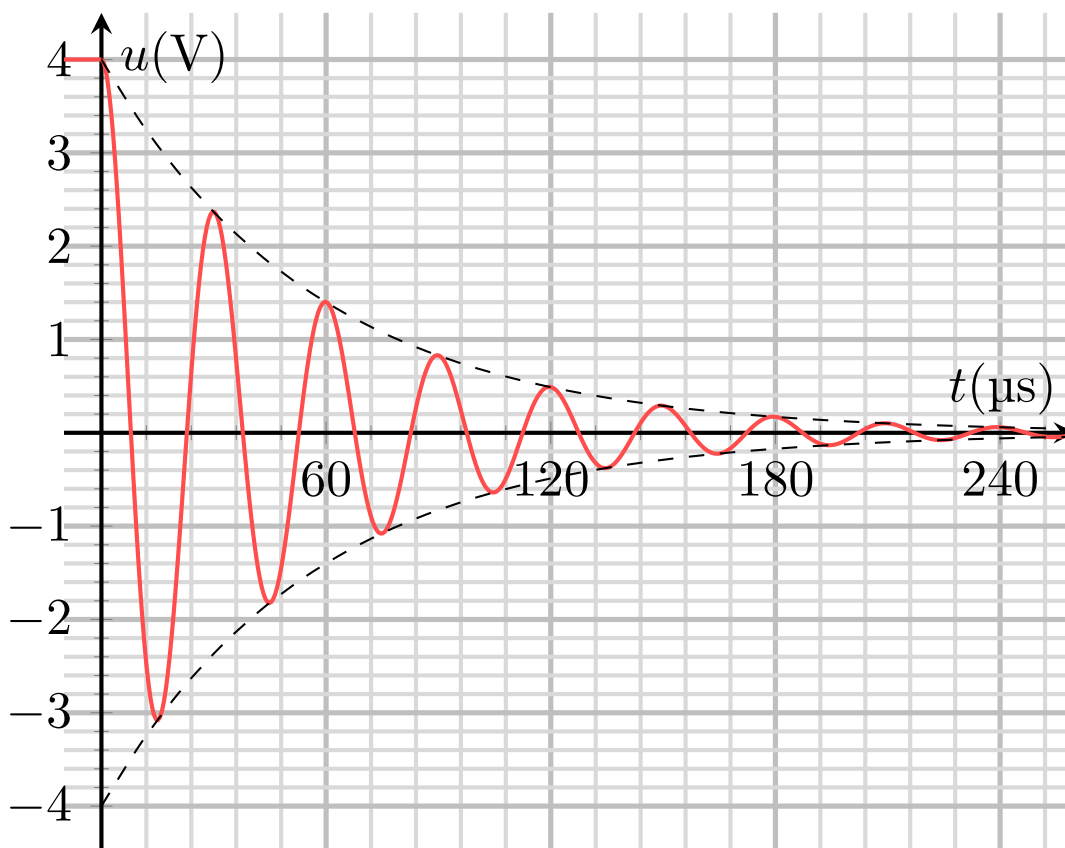


FIGURE 3.3 – Signal obtenu.

Réponse

On lit graphiquement  $u(0) = 4,0V$  et  $u(2T) = 1,4V$ . On peut alors calculer  $d_2 = \ln \frac{u(0)}{u(2T)}$ .

Comme  $d_2 = \frac{4\pi}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$ , on en déduit :  $Q = \sqrt{\frac{1}{4} + 4 \left( \frac{\pi}{d_2} \right)^2}$ . Application numérique :  $Q = 6,0$



On suppose  $Q \gg 1$  : la dissipation d'énergie par effet Joule est traitée comme une perturbation par rapport au cas du circuit non dissipatif ( $R = 0$ ). On prendra alors  $\omega \approx \omega_0$ . On rappelle par ailleurs le développement limité de l'exponentielle en 0 :

$$e^x \underset{x \rightarrow 0}{\sim} 1 + x$$

- 10 Dans le cas où  $R = 0$ , établir l'expression de la valeur moyenne temporelle  $\langle \mathcal{E} \rangle$  de l'énergie électromagnétique stockée dans le circuit.

### Réponse

Dans le cas où  $R = 0$ , le circuit est non dissipatif donc l'énergie emmagasinée dans le condensateur et la bobine reste constante. On l'évalue facilement en  $t = 0$  :

$$\mathcal{E}(t = 0) = \frac{Cu_0^2}{2} \Rightarrow \langle \mathcal{E} \rangle = \frac{Cu_0^2}{2}$$

- 11 Dans le cas où  $R \neq 0$ , montrer qu'au premier ordre en  $1/Q$ , l'énergie  $\mathcal{E}_J$  dissipée par effet JOULE dans le circuit RLC, pendant une pseudo-période, vérifie la relation :

$$\mathcal{E}_J = \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle$$

### Réponse

Il faut évaluer l'énergie emmagasinée par le condensateur et la bobine à l'instant  $t$  :

$$\mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2}$$

Pour  $Q \gg 1$ , on a  $\Omega \approx \omega_0$ , l'expression de  $u(t)$  devient :

$$\begin{aligned} u(t) &= u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos(\omega t) + \frac{\omega_0}{2Q\omega} \sin(\omega t) \right) \\ \Leftrightarrow u(t) &\approx u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \cos(\omega_0 t) + \frac{1}{2Q} \sin(\omega_0 t) \right) \\ \Leftrightarrow u(t) &\approx u_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \cos(\omega_0 t) \\ \Rightarrow i(t) &= -Cu_0 e^{-\frac{t}{\tau}} \left( \omega_0 \sin(\omega_0 t) + \frac{1}{\tau} \cos(\omega_0 t) \right) \\ \Rightarrow i(t) &\approx -Cu_0 \omega_0 \sin(\omega_0 t) e^{-\frac{t}{\tau}} \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \Omega \approx \omega_0 \\ Q \gg 1 \Leftrightarrow \frac{1}{Q} \approx 0 \\ i(t) = C \frac{du}{dt} \\ \frac{1}{\tau} = \frac{\omega_0}{2Q} \ll \omega_0 \end{array} \right\}$$

or  $\mathcal{E}(t) = \frac{Cu^2(t)}{2} + \frac{Li^2(t)}{2}$  On injecte

$$\Leftrightarrow \mathcal{E}(t) = \frac{1}{2} Cu_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}}$$

En une pseudo-période  $T$ , l'énergie décroît de la quantité :

$$\begin{aligned} \Delta_T \mathcal{E} &= \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t + T) \\ \Leftrightarrow \Delta_T \mathcal{E} &= \frac{1}{2} Cu_0^2 e^{-\frac{2t}{\tau}} \left( 1 - e^{-\frac{2T}{\tau}} \right) \\ \Leftrightarrow \Delta_T \mathcal{E} &= \frac{1}{2} Cu_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{\omega_0 T}{Q}} \right) \\ \Leftrightarrow \Delta_T \mathcal{E} &= \frac{1}{2} Cu_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \left( 1 - e^{-\frac{2\pi}{Q}} \right) \\ \Leftrightarrow \Delta_T \mathcal{E} &\underset{Q \rightarrow \infty}{\sim} \frac{1}{2} Cu_0^2 e^{-\frac{\omega_0 t}{Q}} \left( 1 - \left( 1 - \frac{2\pi}{Q} \right) \right) \\ \Leftrightarrow \Delta_T \mathcal{E} &\underset{Q \rightarrow \infty}{\sim} \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle \end{aligned} \quad \left. \begin{array}{l} \tau = \frac{2Q}{\omega_0} \\ \Omega \approx \omega_0 \text{ et } \Omega T = 2\pi \\ e^{-\frac{2\pi}{Q}} \underset{Q \rightarrow \infty}{\sim} 1 - \frac{2\pi}{Q} \\ \text{On simplifie} \end{array} \right\}$$

Or, l'énergie dissipée par effet JOULE en une pseudo-période correspond à l'énergie perdue par  $L$  et  $C$  pendant cette durée donc  $\mathcal{E}_J = \mathcal{E}(t) - \mathcal{E}(t + T)$ . Ainsi,

$$\mathcal{E}_J \approx \frac{2\pi}{Q} \langle \mathcal{E} \rangle$$

## P2 Assemblages de ressorts

Pour un TIPE, un-e étudiant-e a besoin d'un ressort de raideur  $15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Malheureusement, le laboratoire du lycée ne possède que des ressorts de raideur  $k_1 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et  $k_2 = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . En revanche, tous les ressorts ont la même longueur à vide  $\ell_0 = 10 \text{ cm}$ .

L'étudiant-e décide alors d'assembler les ressorts pour obtenir la raideur qu'il souhaite. Il hésite cependant sur la manière de les assembler entre un assemblage en série ou en parallèle, voir Figures 3.4 et 3.5 ci-contre.

L'étudiant-e décide alors de mener une étude des deux assemblages pour voir comment ils se comportent. Il dispose d'une masse  $m = 100 \text{ g}$  repérée par le point  $M$ . Pour la lisibilité des schémas, la masse sera représentée comme un rectangle mais elle sera tout de même considérée comme un point matériel. Dans tout le problème le référentiel d'étude est le référentiel du laboratoire qui sera supposé galiléen. Les ressorts seront supposés de masses négligeables.

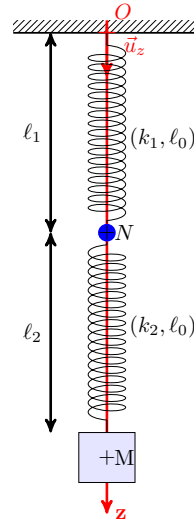


FIGURE 3.4 – Assemblages en série

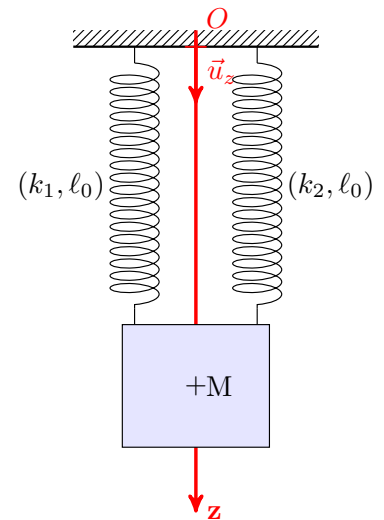


FIGURE 3.5 – Assemblages en parallèle

### A Assemblage en série

Dans ce montage, le premier ressort est accroché au niveau du support fixe en un point noté  $O$ . Le second ressort est accroché au premier en un point  $N$ . Pour mener l'étude, on considèrera que le point  $N$  possède une masse  $m'$ . On note  $Oz$  la verticale descendante, dirigée par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ , orienté vers le bas (cf. Figure 3.4).

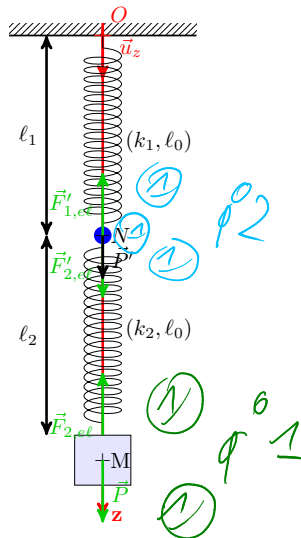


FIGURE 3.6 – Assemblages en série

- 1 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point  $M$ , les représenter sur un schéma et les exprimer en fonction des paramètres du problème. ~~Vous prendrez soin de détailler extensivement le cadre mécanique nécessaire à cette étude.~~

#### Réponse

◇ BDF :

Poids  $\vec{P} = mg \vec{u}_z$

Ressort 2  $\vec{F}_{2, \text{el}} = -k_2(\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_z$

En effet, si on suppose que le ressort est étiré, il exerce sur la masse une force vers le haut, donc selon  $-\vec{u}_z$ . Or dans ce cas,  $\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_0 > 0$  et l'expression précédente avec le signe moins fournit bien une force orientée selon  $-\vec{u}_z$ . Voir Figure 3.6

- 2 En déduire l'expression de la longueur à l'équilibre  $\ell_{2,eq}$  du ressort 2 (celui placé en bas) en fonction des paramètres du problème. Faire l'application numérique.

## Réponse

À l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées à la masse est nulle :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}_{2,el} + \vec{P} &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow -k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) \vec{u}_z + mg \vec{u}_z &= \vec{0} \\
 \Leftrightarrow -k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + mg &= 0 \\
 \Leftrightarrow \ell_{2,eq} &= \ell_0 + \frac{mg}{k_2} \\
 \text{A.N. : } \ell_{2,eq} &= 15 \text{ cm}
 \end{aligned}$$

On remplace  
 On multiplie par  $\cdot \vec{u}_z$   
 On isole  
 Calcul

- 3 Faire le bilan des forces s'exerçant sur le point  $N$ , les représenter sur le même schéma et les exprimer en fonction des paramètres du problème.

## Réponse

◇ BDF :

**Poids**  $\vec{P} = m'g \vec{u}_z$   
**Ressort 2**  $\vec{F}_{2,el} = k_2(\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_z$   
**Ressort 1**  $\vec{F}_{1,el} = -k_1(\ell_1 - \ell_0) \vec{u}_z$

En effet, si on suppose que le ressort 2 est étiré, il exerce sur la masse une force vers le bas, donc selon  $+\vec{u}_z$ . Or dans ce cas,  $\Delta\ell_2 = \ell_2 - \ell_0 > 0$  et l'expression précédente avec le signe plus fournit bien une force orientée selon  $+\vec{u}_z$ . La justification du signe de la force  $\vec{F}'_{1,el}$  est identique à celle de la question 1.

- 4 En déduire que la longueur à l'équilibre  $\ell_{1,eq}$  du ressort 1 (celui placé en haut) est donnée par :

$$\ell_{1,eq} = \ell_0 + \frac{(m + m')g}{k_1}$$

## Réponse

À l'équilibre, la somme des forces extérieures appliquées à la masse est nulle :

$$\begin{aligned}
 \vec{F}'_{1,el} + \vec{F}'_{2,el} + \vec{P}' &= \vec{0} \Leftrightarrow -k_1(\ell_{1,eq} - \ell_0) \vec{u}_z + k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) \vec{u}_z + m'g \vec{u}_z = \vec{0} \\
 \Leftrightarrow -k_1(\ell_{1,eq} - \ell_0) + k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + m'g &= 0 \\
 \Leftrightarrow k_1(\ell_{1,eq} - \ell_0) &= k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + m'g \\
 \Leftrightarrow \ell_{1,eq} &= \ell_0 + \frac{k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) + m'g}{k_1} \\
 \Leftrightarrow \ell_{1,eq} &= \ell_0 + \frac{(m + m')g}{k_1}
 \end{aligned}$$

2  $\Rightarrow k_2(\ell_{2,eq} - \ell_0) = mg$

- 5 Commenter la formule précédente.

## Réponse

Du point de vue du ressort 1, tout se passe comme si on avait accroché une masse de valeur  $m + m'$ . En effet, pour le ressort, que cette masse soit d'un seul tenant ou constituée de deux masses (et un ressort de masse nulle) ne change rien.

- 6 Déterminer l'expression de l'altitude  $z_{eq}$  du point  $M$ . Simplifier la formule dans le cas où le point  $N$  possède une masse nulle ( $m' = 0$ ).

## Réponse

Dans la configuration établie par l'énoncé, on a  $z = \ell_1 + \ell_2$ . À l'équilibre, on a alors :

$$z_{eq} = \ell_{1,eq} + \ell_{2,eq} = \ell_0 + \frac{(m + m')g}{k_1} + \ell_0 + \frac{mg}{k_2} \quad \text{soit} \quad z_{eq} = 2\ell_0 + \frac{(m + m')g}{k_1} + \frac{mg}{k_2}$$

En tenant compte d'une masse nulle pour le point  $N$ , on obtient :

$$z_{eq} = 2\ell_0 + \left( \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \right) mg$$

- 3 7 Par analogie avec le résultat que vous obtiendriez si la masse  $m$  n'était accrochée qu'à un seul ressort de raideur  $K$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , déterminer les caractéristiques ( $K$  et  $\ell_0$ ) de ce ressort équivalent aux deux ressorts accrochés en série.

**Réponse**

Le cas d'un seul ressort vertical donne :

$$z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{1}{K}mg \quad (1)$$

En identifiant les deux formules terme à terme, on a :

$$\boxed{\ell_0 = 2\ell_0} \quad \text{et} \quad \frac{1}{K} = \frac{1}{k_1} + \frac{1}{k_2} \quad \text{soit} \quad \boxed{K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}} \quad (1)$$

- 2 8 Montrer que cet assemblage ne peut pas satisfaire l'étudiant-e pour son TIPE.

**Réponse**

On calcule  $K$  avec les valeurs fournies :  $K = 6,7 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . C'est trop faible.

### B Assemblage en parallèle

Dans ce montage, les deux ressorts sont accrochés au même support fixe et à la masse  $m$ . On note toujours  $Oz$  la verticale descendante, dirigée par le vecteur unitaire  $\vec{u}_z$ , orienté vers le bas (cf. Figure 3.5).

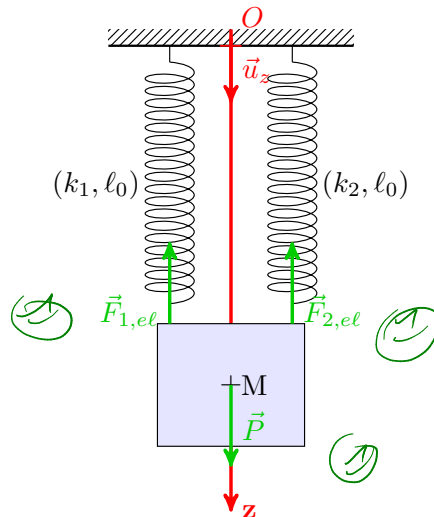


FIGURE 3.7 – Assemblages en parallèle

- 7 9 Expliciter le lien entre  $\ell_1$ ,  $\ell_2$  et  $z$ , puis faire le bilan des forces qui s'exercent sur le point  $M$  et les représenter sur un schéma.

**Réponse**

◇ BDF :

Poids  $\vec{P} = mg \vec{u}_z \quad (1)$   
 Ressort 1  $\vec{F}_{1, \text{el}} = -k_1(\ell - \ell_0) \vec{u}_z \quad (1)$   
 Ressort 2  $\vec{F}_{2, \text{el}} = -k_2(\ell - \ell_0) \vec{u}_z \quad (1)$

On a tenu compte du fait qu'ici  $\ell_2 = \ell_1 = \ell$  et on a mis le signe des forces en accord avec ce qui a déjà été établi précédemment.

- 40 10 Établir l'équation du mouvement du point  $M$  et la mettre sous forme canonique.

*Vous prenez somme de ...*

## Réponse

② **Système** : {point M} de masse  $m$

② **Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{lab}}$  supposé galiléen

② **Repère** :  $(O, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_z$  vers le bas

② **Repérage** :

$$\vec{OM}(t) = z \vec{u}_z$$

$$\vec{v}(t) = \dot{z} \vec{u}_z$$

$$\vec{a}(t) = \ddot{z} \vec{u}_z$$

On pose  $\omega_0 = \sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}$  et  $z_{\text{eq}} = \ell_0 + \frac{mg}{k_1 + k_2}$  :

◇ BDF :

~~Poids  $\vec{P} = mg \vec{u}_z$~~   
~~Ressort 2  $\vec{F}_{2, \text{el}} = -k_2(\ell_2 - \ell_0) \vec{u}_z$~~

◇ PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}_{1, \text{el}} + \vec{F}_{2, \text{el}}$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{z} = -k_1(z - \ell_0) - k_2(z - \ell_0) + mg$$

$$\Leftrightarrow m\ddot{z} + (k_1 + k_2)z = (k_1 + k_2)\ell_0 + mg$$

$$\Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{k_1 + k_2}{m}z = \frac{k_1 + k_2}{m}\left(\ell_0 + \frac{mg}{k_1 + k_2}\right)$$

② }  $\cdot \vec{u}_z$  et  $\ell = z$   
 ② } On simplifie  
 ② } Forme canonique

$$\ddot{z} + \omega_0^2 z = \omega_0^2 z_{\text{eq}}$$

- ② 11 Par analogie avec l'équation différentielle obtenue si la masse n'était accrochée qu'à un seul ressort de raideur  $K$  et de longueur à vide  $\ell_0$ , déterminer les caractéristiques ( $K$  et  $\ell_0$ ) de ce ressort équivalent aux deux ressorts accrochés en parallèle.

## Réponse

On a déjà traité le cas d'un seul ressort dans la première partie du sujet. On constate qu'on a ici exactement la même équation que pour un seul ressort avec  $\ell_0 = \ell_0$  et  $K = k_1 + k_2$ .

- ② 12 Montrer que cet assemblage ne peut pas satisfaire l'étudiant-e pour son TIPE.

## Réponse

Avec cet assemblage, l'étudiant-e obtient un système équivalent à un ressort de raideur  $K = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ , soit une raideur deux fois trop élevée.

## C Assemblage complexe

- ② 13 Déterminer un assemblage équivalent à un ressort ayant la raideur souhaité par l'étudiant-e. *Faire un schéma.*

## Réponse

- ◇ l'assemblage en série donne ici une raideur deux fois trop élevée ;  
 ◇ l'assemblage en parallèle peut permettre de diviser par deux la raideur.

En effet, dans la formule obtenue pour l'assemblage en série, on avait  $K = \frac{k_1 k_2}{k_1 + k_2}$ . Avec  $k_1 = k_2$ , cette formule devient  $K = \frac{k_1^2}{2k_1} = \frac{k_1}{2}$ . Un assemblage série de deux ressorts identiques permet bien de diviser par deux la raideur.

On peut donc envisager le montage suivant : on fabrique deux assemblages en parallèle identiques, chacun avec un ressort de raideur  $k_1 = 10 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  et un ressort de raideur  $k_2 = 20 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ . Ces assemblages sont chacun équivalent à un ressort de raideur  $k_3 = 30 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$  d'après les résultats précédents.

On assemble ces deux ressorts équivalents identiques en série et on divise alors par deux la raideur  $k_3$ . La raideur équivalente totale  $k_4$  est alors bien de la valeur recherchée ( $15 \text{ N} \cdot \text{m}^{-1}$ ).

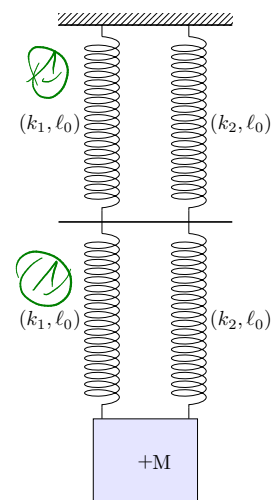


FIGURE 3.8 — Assemblage complexe.