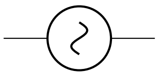
C6 - Circuits électriques en régime sinusoïdal forcé

Dance ce chapitre on considère des circuits est alimentée par une source de tension (ou de courant) délirant une tension (ou un courant) sinusoïdal de la forme :

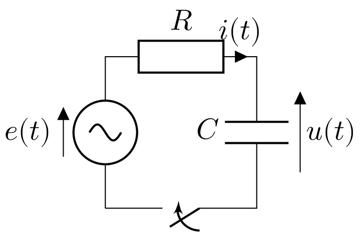
$$e(t) = E\cos\omega t \qquad (\text{ou } \eta(t) = \eta_0\cos\omega t)$$

Ces sources sont parfois représenter avec le symbole



1 Exemple du circuit RC série

1.1 Mise en équation



À l'instant initial $t = 0$, l'interrupteur est fermé. $u(0) = U_0 > 0$.

- Source sinusoïdale : $e(t) = E_0\cos\omega t$
- Condensateur idéal : $i(t) = C\dfrac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t}$
- Loi d'Ohm : $u_R(t) = Ri(t)$

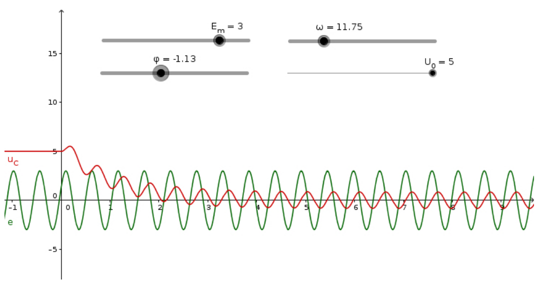
La loi des mailles donne :

$$e = u_R + u \Rightarrow \boxed{\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + \frac{1}{\tau}u = \frac{E_0}{\tau}\cos(\omega t)} \qquad \tau = RC$$

1.2 Régime transitoire et régime sinusoïdal forcé

La solution s'écrit $u(t) = u_H(t) + u_P(t)$ avec

- $u_H(t)$ sol de l'eq homogène : correspond au régime libre de l'oscillateur. Dans tout les cas :
$$\boxed{u_H(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} 0}$$
- $u_P(t)$ une solution particulière de l'équation complète. Le second membre étant sinusoïdal, $x_P(t)$ est **sinusoïdale et de même pulsation que l'excitation mais peut être déphasé**
$$\boxed{u_P(t) = U\cos(\omega t + \varphi)}$$



Utiliser animation geogebra

Donc il y a deux phase dans l'évolution du signal $u(t)$.

1. Tant que u_H et u_P sont du même ordre de grandeur, le signal $x(t)$ peut avoir des formes très variées, on est en régime transitoire
2. Au bout d'un certain temps ($t > 5\tau$), $|u_H| \ll |u_P|$ donc $u(t) \simeq u_P(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$, on est en régime permanent sinusoïdal que l'on appelle **régime sinusoïdal forcé**.

1.3 Détermination d'une solution particulière sinusoïdale

Forme : la solution particulière d'une équation différentielle linéaire est *de même nature* que le second membre. Donc

$$u_P(t) = U\cos(\omega t + \varphi)$$

avec X et φ à déterminer. **Calculs lourds !** Il y a une autre méthode utilisant les nombres complexes.

Méthode complexe : On remplace $u(t)$ et $e(t)$ par leurs notations complexes $\underline{u} = \underline{U}e^{j\omega t}$ et $\underline{e} = E_0 e^{j\omega t}$, on détermine $\underline{u}$ et on obtient u_P en prenant la partie réelle.

$$\dot{\underline{u}} + \frac{1}{\tau}\underline{x} = \underline{e} \quad \Rightarrow \quad \left(j\omega + \frac{1}{\tau}\right)\underline{U}e^{j\omega t} = \frac{1}{\tau}E_0 e^{j\omega t}$$

Une exponentielle n'étant jamais nulle, on obtient :

$$\underline{U} = Ue^{j\varphi} = \frac{E_0}{1 + j\tau\omega}$$

On détermine alors l'amplitude réelle :

$$\boxed{U = |\underline{U}| = \frac{|E_0|}{|1 + j\tau\omega|} = \frac{E_0}{\sqrt{1 + (\tau\omega)^2}}}$$

Puis la phase :

$$\varphi = \arg\left(\frac{E_0}{1 + j\tau\omega}\right) = \arg(E_0) - \arg(1 + j\tau\omega) = -\arg(1 + j\tau\omega) = -\psi$$

On exprime la tangente :

$$\tan\varphi = -\tan\psi = -\frac{\tau\omega}{1} = -\tau\omega$$

La plupart du temps, l'expression de la tangente suffit. Si on veut aller jusqu'à la phase, il faut faire attention au fait que : $\arctan(\tan\theta) = \theta$ ssi $\theta \in]-\pi/2; \pi/2[$

$$\cos\psi = \frac{1}{\sqrt{1 + \omega^2\tau^2}} > 0 \quad \Rightarrow \quad \psi \in]-\pi/2; \pi/2[\quad \Rightarrow \quad \boxed{\varphi = -\arctan(\omega\tau)}$$

Au final la solution particulière est :

$$\boxed{u_P(t) = U(\omega)\cos(\omega t + \varphi(\omega))}$$

Remarque : en régime permanent le système oscille à la même pulsation ω que l'excitation mais *l'amplitude et la phase à l'origine des oscillations dépendent de* ω.

2 Circuits électriques en régimes sinusoïdal forcé

2.1 Contexte

Régime sinusoïdal forcé (RSF)

1. Le circuit est alimentée par une source de tension (ou de courant) délirant une tension (ou un courant) sinusoïdal de la forme :

$$e(t) = E\cos\omega t \qquad (\text{ou } \eta(t) = \eta_0 \cos\omega t)$$

2. Le régime transitoire est achevé, et que donc *toutes grandeurs électriques du circuit varient sinusoïdalement à la même pulsation que la source.*

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

3. Pour faciliter les calculs, on utilisera les notation complexes :

$$\underline{u}(t) = Ue^{j(\omega t+\varphi_u)} = Ue^{j\varphi_u}e^{j\omega t} = \underline{U}e^{j\omega t} \qquad \underline{i}(t) = Ie^{j(\omega t+\varphi_i)} = Ie^{j\varphi_i}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t}$$

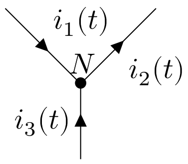
ARQS (voir chapitre C1) : on se place dans l'ARQS sachant que un circuit de taille L et alimenté par uns source sinusoïdale de fréquence f vérifie l'ARQS ssi :

$$\boxed{L \ll cT = \frac{c}{f}}$$

2.2 Lois de l'électrocinétique en RSF

2.2.1 Loi des nœuds

Exemple : soit N un nœud ou se rejoignent trois branches



Dans l'ARQS : $i_1(t) + i_3(t) = i_2(t)$
On est en RSF, donc les 3 intensités sont sinusoïdales et de même pulsation :

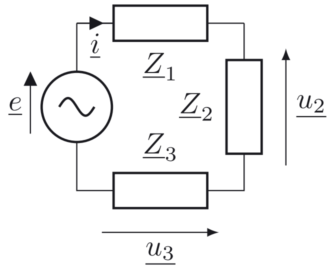
$$i_1(t) = I_1\cos(\omega t + \varphi_1) \quad i_2(t) = I_2\cos(\omega t + \varphi_2) \quad \dots$$

d'où en passant aux notations complexes

$$\underline{i}_1(t) + \underline{i}_3(t) = \underline{i}_2(t) \Rightarrow \boxed{\underline{I}_1 + \underline{I}_3 = \underline{I}_2}$$

2.2.2 Loi des mailles

- Loi des mailles



Grandeurs complexes :
$\underline{e} = \underline{u}_1 + \underline{u}_2 + \underline{u}_3$
Amplitudes complexes :
$\underline{E} = \underline{U}_1 + \underline{U}_2 + \underline{U}_3$

Bilan

Tant que l'ARQS reste valable (les signaux sinusoïdaux ne doivent pas varier "trop rapidement"), les lois de l'électrocinétique en RSF s'exprime de la même manière qu'en régime continue en remplaçant les amplitudes réelles par les amplitudes complexes.

2.3 Impédance et admittance complexes d'un dipôle passif

En RSF à la pulsation ω, imposée par le source d'alimentation, la tension u aux bornes d'un dipôle et l'intensité i le traversant s'écrivent :

$$u(t) = U\cos(\omega t + \varphi_u) \qquad i(t) = I\cos(\omega t + \varphi_i)$$

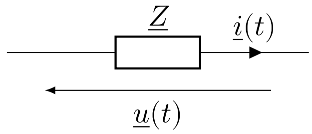
soit en notation complexe :

$$\underline{u}(t) = Ue^{j(\omega t+\varphi_u)} = Ue^{j\varphi_u}e^{j\omega t} = \underline{U}e^{j\omega t} \qquad \underline{i}(t) = Ie^{j(\omega t+\varphi_i)} = Ie^{j\varphi_i}e^{j\omega t} = \underline{I}e^{j\omega t}$$

on obtient une relation de proportionnalité complexe entre les notations complexes :

$$\underline{u}(t) = \underline{Z}\ \underline{i}(t)$$

Convention récepteur



Soit pour les amplitudes complexes :

$\boxed{\underline{U} = \underline{Z} \times \underline{I}}$ (loi d'Ohm complexe)

- Le module $Z = |\underline{Z}|$ de l'impédance est égal au rapport de l'amplitude U de $u(t)$ et de l'amplitude I de $i(t)$:

$$\boxed{|\underline{Z}| = \frac{|\underline{u}|}{|\underline{i}|} = \frac{U}{I}}$$

- L'argument de l'impédance est égal au déphasage de $u(t)$ par rapport à $i(t)$:

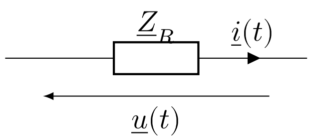
$$\boxed{\arg(\underline{Z}) = \arg\left(\frac{\underline{u}}{\underline{i}}\right) = \varphi_u - \varphi_i}$$

Admittance complexe : inverse de l'impédance complexe

$$\boxed{\underline{Y} = \frac{1}{\underline{Z}}} \quad \Rightarrow \quad \underline{I} = \underline{Y} \times \underline{U}$$

2.4 Impédances des dipôles de base

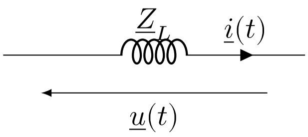
2.4.1 Résistor de résistance R



$$u(t) = Ri(t) \Rightarrow \underline{u}(t) = R\underline{i}(t) \Rightarrow \boxed{\underline{Z}_R = R}$$

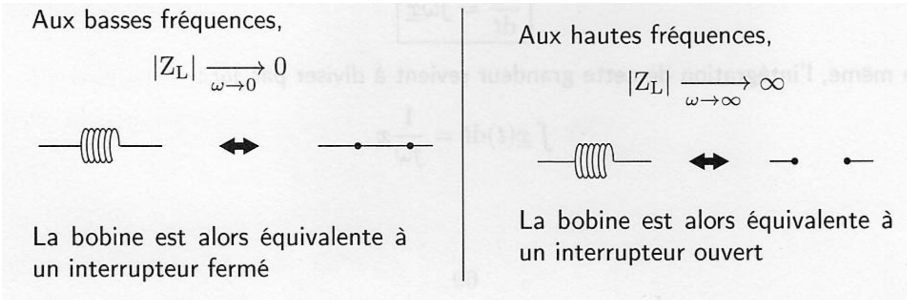
On remarque qu'une résistance n'introduit pas de déphasage entre $u(t)$ et $i(t)$

2.4.2 Bobine idéale d'inductance L

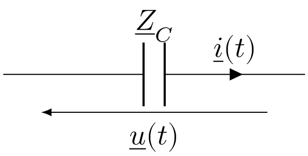


$$u(t) = L\frac{\mathrm{d}i}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \underline{u}(t) = jL\omega\underline{i}(t) \Rightarrow \boxed{\underline{Z}_L = jL\omega}$$

$\arg(\underline{Z}_L) = \pi/2$ u et i sont en quadrature de phase avec u en avance sur i.

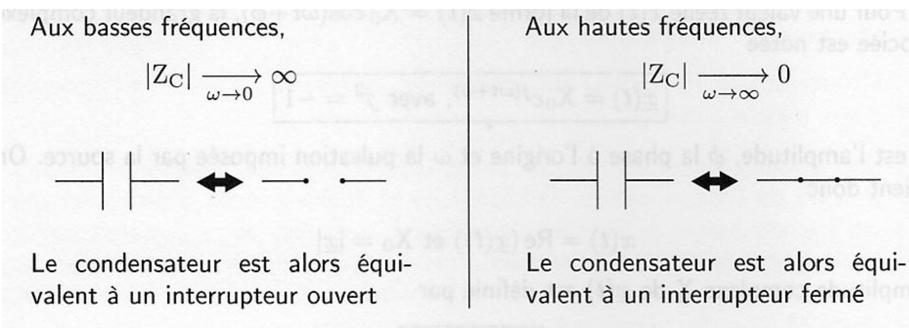


2.4.3 Condensateur idéal de capacité C



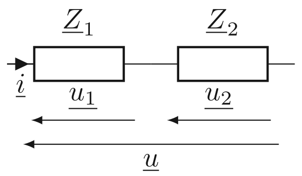
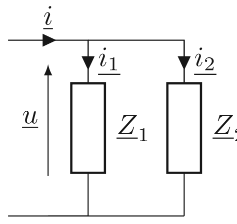
$$i(t) = C\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} \Rightarrow \underline{i}(t) = jC\omega\underline{u}(t) \Rightarrow \boxed{\underline{Z}_C = \frac{1}{jC\omega}}$$

$\arg(\underline{Z}_L) = -\pi/2$ $u$et i sont en quadrature de phase avec u en retard sur i.

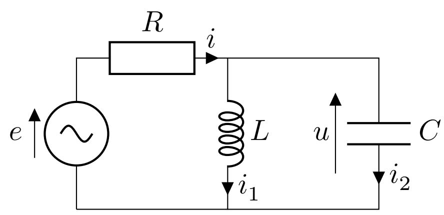


2.5 Associations d'impédances complexes en RSF

EN RSF, la relation entre tension et intensité $\underline{u} = \underline{Z}\ \underline{i}$ *complexes* est analogue à celle d'une résistance $u = Ri$, donc on obtient des lois d'associations des impédances analogues à celles des résistances.

Association série et diviseur de tension		Impédance équivalente : $\underline{Z}_{eq} = \underline{Z}_1 + \underline{Z}_2$ Diviseur de tension : $\underline{u}_2 = \dfrac{\underline{Z}_2}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\underline{u}$
Association parallèle et diviseur de courant		Impédance équivalente : $\dfrac{1}{\underline{Z}_{eq}} = \dfrac{1}{\underline{Z}_1} + \dfrac{1}{\underline{Z}_2}$ Diviseur de courant : $\underline{i}_2 = \dfrac{\underline{Y}_2}{\underline{Y}_1 + \underline{Y}_2}\underline{i} = \dfrac{1/\underline{Z}_2}{1/\underline{Z}_1 + 1/\underline{Z}_2}\underline{i} = \dfrac{\underline{Z}_1}{\underline{Z}_1 + \underline{Z}_2}\ \underline{i}$

Exo bilan : on se place en RSF imposé par $e(t) = E\cos(\omega t)$. Exprimer l'amplitude complexe$\underline{U}$ associée à la tension u en fonction de R, L, C et ω.



3 Impédance, amplitude et déphasage

3.1 Déphasage entre deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

Pour deux signaux sinusoïdaux, $s_1(t) = A_1\cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2\cos(\omega t + \varphi_2)$, le **déphasage** du signal s_2 par rapport au signal s_1 est **la différence de leurs phases instantanées** :

$$\Delta\varphi_{2/1} = (\omega t + \varphi_2) - (\omega t + \varphi_1)$$

Pour 2 signaux de *même fréquence*, le déphasage est simplement la différence des phases à l'origine $\varphi_2 - \varphi_1$.

3.1.1 Valeurs particulières du déphasage

2 Signaux sont en phase si leur déphasage est nul (modulo 2π)

Les signaux passent par leurs valeurs maximales et minimales au mêmes instants et s'annulent simultanément.

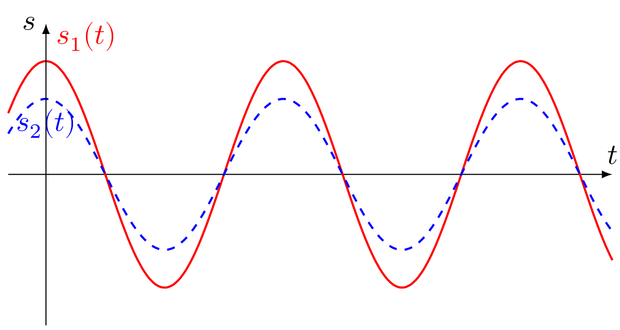
Démonstration : écrire s_2 en fonction de s_1

. . . .

. . . .

. . . .

. . . .

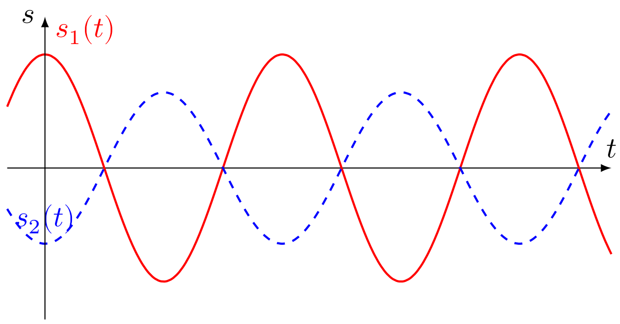


2 Signaux sont en opposition de phase si leur déphasage vaut $\pm\pi$ (modulo 2π)

Lorsqu'un signal passe par sa valeur maximal, l'autre atteint sa valeur minimale.

Démonstration : écrire s_2 en fonction de s_1

. . . .
. . . .
. . . .
. . . .



3.1.2 Mesure d'un déphasage

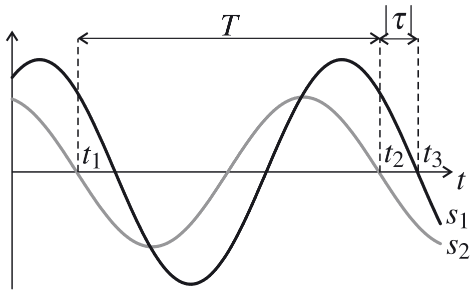
Le déphasage $\Delta\varphi_{2/1} = \varphi_2 - \varphi_1$ est lié au *retard temporel* $\tau_{1/2}$ du signal s_1 par rapport à s_2 :

$$\boxed{\Delta\varphi_{2/1} = \omega\tau_{1/2}}$$

La valeur du déphasage obtenue par cette méthode est comprise entre $-\pi$ et $+\pi$.

- $\Delta\varphi_{2/1} > 0$: s_2 est en avance de phase sur s_1
- $\Delta\varphi_{2/1} < 0$: s_2 est en retard de phase sur s_1

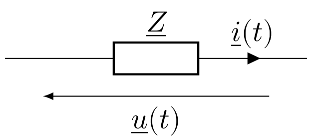
Démonstration : . . . .
. . . .
. . . .
. . . .
. . . .



- t_1 et t_2 : instants consécutifs où s_2 **s'annule avec la même pente**. La période est $T = t_2 - t_1$ puis la pulsation $\omega = 2\pi/T = 2\pi/(t_2 - t_1)$
- t_3 : instant le plus proche de t_2 où s_1 s'annule **avec la même pente**. Le retard $\tau_{1/2}$ s'exprime $\tau = t_3 - t_2$

$$\Delta\varphi_{2/1} = \omega\tau_{1/2} = 2\pi\frac{t_3 - t_2}{t_2 - t_1}$$

3.2 Mesure expérimentale d'une impédance complexe



L'impédance complexe peut s'écrire comme tout complexe sous la forme :

$$\underline{Z} = Ze^{j\psi} = \frac{\underline{U}}{\underline{I}} = \frac{U}{I}e^{j(\varphi_u - \varphi_i)}$$

- $Z = |\underline{Z}| = \dfrac{U}{I}$ est l'impédance réelle (on parle souvent d'impédance à la fois pour Z et $\underline{Z}$,il faut faire attention au contexte !).
- $\psi = \arg(\underline{Z}) = \varphi_u - \varphi_i$. L'argument de l'impédance complexe donne le déphasage de la tension par rapport à l'intensité *en convention récepteur !*