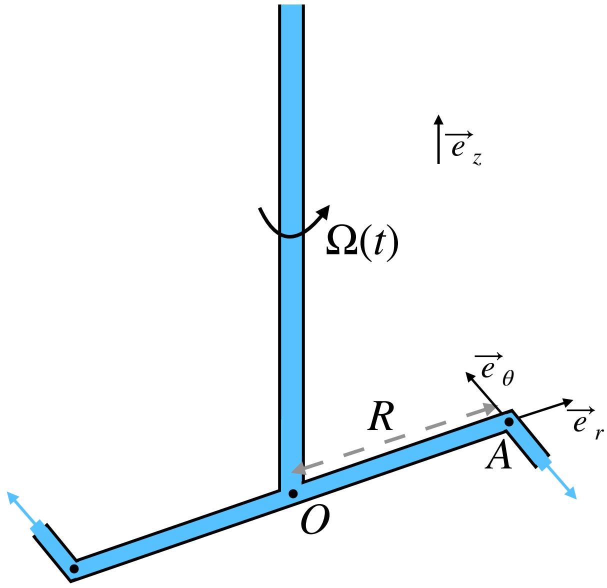
# Sujet 1 – corrigé

## I Tourniquet hydraulique

Un tourniquet hydraulique possède deux bras identiques $OA$ et $OB$ de longueur $R$ et de section $S$. Chaque bras est terminé par un tube de même section $S$ faisant avec le bras un angle $\alpha = \pi/2$, de longueur négligeable devant $R$ . L'eau, supposée incompressible de masse volumique $\mu$, est injectée dans le tourniquet hydraulique par le tube centrale de section $2S$ avec un débit volumique $D_v$ constant.




On note $J$ le moment d'inertie par rapport à l'axe $Oz$ du tourniquet (ce dernier inclut l'eau présente dans le tourniquet) et $\vec{\Omega} = \Omega(t)\vec{e}_z$ son vecteur rotation.

1. Exprimer la vitesse d'éjection du fluide $\vec{u}$ en $A$ dans le référentiel du laboratoire en fonction de $\Omega$, $R$, $D_v$, $S$ et $\vec{e}_\theta$.
   **Réponse :**
   La vitesse d'éjection relative du fluide notée $u'$ est telle que $D_v = 2Su' \Rightarrow u' = D_v/(2S)$. On observe de plus que que $\vec{u} = -u'\vec{e}_\theta + \Omega R\vec{e}_\theta \Rightarrow \vec{u} = (\Omega R - D_v/(2S))\vec{e}_\theta$.

2. A l'aide d'un bilan de moment cinétique, obtenir l'équation suivante

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \mu D_v R\left(R\Omega - \frac{D_v}{2S}\right)$$

   **Réponse :**
   On considère le système fermé comprenant le tourniquet et le fluide en son sein à l'instant $t$ puis, le tourniquet, et le fluide déplacé (dont une partie est sortie) à l'instant $t + dt$. On a alors

$$L_z(t) = J\Omega(t) \tag{20.1}$$
$$L_z(t+dt) = J\Omega(t+dt) + 2dm(R\vec{e}_r \wedge \vec{u}(t+dt)) \cdot (\vec{e}_z) \tag{20.2}$$
$$= J\Omega(t+dt) + 2dmR(\Omega(t+dt)R - D_v/(2S)) - 0 \tag{20.3}$$

   En effet, le fluide déplacé au sein de la colonne centrale n'implique pas de changement de moment cinétique car on a $r = 0$ à cet endroit. Le facteur 2 provient du fait qu'il y a deux branches symétriques.

De plus, on a $dm = \mu D_v/2$ (conservation du débit massique). En combinant ces résultats, on obtient :

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = \lim_{dt\to 0} \frac{L_z(t+dt) - L_z(t)}{dt} = J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}(t) + 2\mu\frac{D_v}{2}R(\Omega(t)R - D_v/(2S)) \tag{20.4}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = J\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}(t) + \mu D_v R\left(\Omega(t)R - \frac{D_v}{2S}\right) \tag{20.5}$$

d'où le résultat.

3. Obtenir finalement l'expression de $\Omega(t)$ sachant qu'à l'instant initial, le tourniquet est à l'arret. On utilisera pour cela le théorème scalaire du moment cinétique appliqué au système fermé précédent.

   **Réponse :**
   L'appliquation du TSMC au système fermé dans un référentiel galiléen donne

$$\frac{\mathrm{d}L_z}{\mathrm{d}t} = M_{Oz}(\vec{P}) + M_{Oz}(\vec{R}_n) + M_{Oz}(\text{pression}) = 0$$

   En effet, les forces extérieures agissant sur le tourniquet sont toutes verticales et que le champ de pression est uniforme. On en déduit alors que

$$\frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t}(t) = \mu D_v R\left(\frac{D_v}{2S} - \Omega(t)R\right) \Rightarrow \frac{\mathrm{d}\Omega}{\mathrm{d}t} + \underbrace{\mu D_v R^2}_{1/\tau}\Omega = \mu D_v R\frac{D_v}{2S}$$

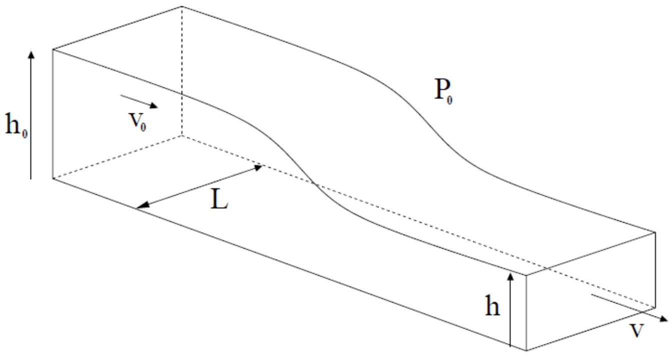
   On obtient une équation différentielle d'ordre 1 que l'on peu aisemment résoudre à l'aide de la C.I. fournie

$$\Omega(t) = \frac{D_v}{2SR}\left(1 - e^{-t/\tau}\right)$$

# Sujet 2 – corrigé

## I Régimes d'écoulement fluvial et torrentiel

Dans cet exercice nous allons étudier l'écoulement d'un fluide parfait incompressible dans le lit d'un cours d'eau de largeur constante $L$. La vitesse est supposée uniforme dans une section du cours d'eau et l'écoulement est supposé stationnaire. En amont (respectivement en aval), l'épaisseur de liquide est $h_0$ et sa vitesse $v_0$ (respectivement $h$ et $v$). L'écoulement est supposé laminaire.




1. Rappeler la relation de Bernoulli et ses conditions d'application.
   **Réponse :**
   Pour un écoulement parfait, stationnaire et incompressible, le long d'une ligne de courant, la relation de Bernoulli s'écrit $P + \rho\frac{v^2}{2} + \rho g z = cte$.

2. En utilisant la relation de Bernoulli le long d'une ligne de courant qui longe la surface libre, exprimer la vitesse $v$ en fonction de $h$, $h_0$ et $v_0$.
   **Réponse :**
   La pression à la surface libre vaut $P_0$. On a donc

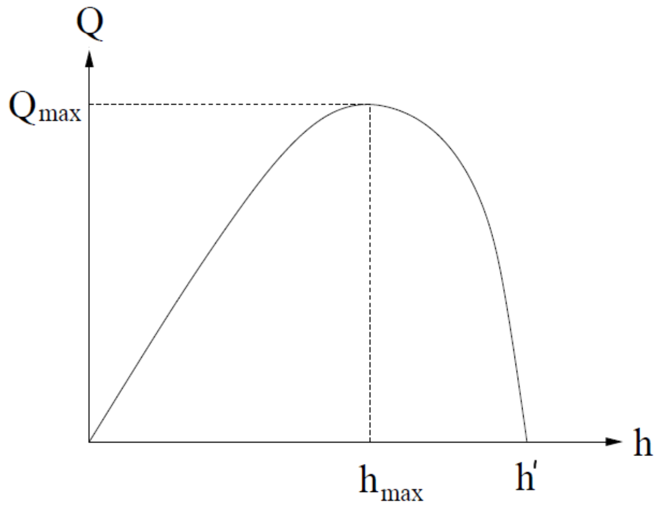
$$\rho\frac{v_0^2}{2} + \rho g h_0 = \rho\frac{v^2}{2} + \rho g h \Rightarrow v = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)}$$

3. On pose $h' = h_0 + \frac{v_0^2}{2g}$. Donner une interprétation énergétique de la grandeur $\rho g h'$ et des deux termes qui la composent.
   **Réponse :**
   $\rho g h' = \rho g h_0 + \frac{1}{2}\rho_0 v_0^2$, il s'agit de la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle volumique, donc c'est ll'énergie mécanique volumique. Elle se conserve le long du fleuve d'après la relation de Bernoulli.

4. Exprimer le débit volumique $Q$ en fonction de $h$, $h'$, $g$, et $L$.
   **Réponse :**

$$Q = vhL = \sqrt{v_0^2 + 2g(h_0 - h)}hL = \sqrt{v_0^2 + 2gh_0 - 2gh}hL = \sqrt{2g(h' - h)}hL$$

La figure ci-desous donne l'allure de la courbe $Q(h)$ pour $L$ et $h'$ donnés.



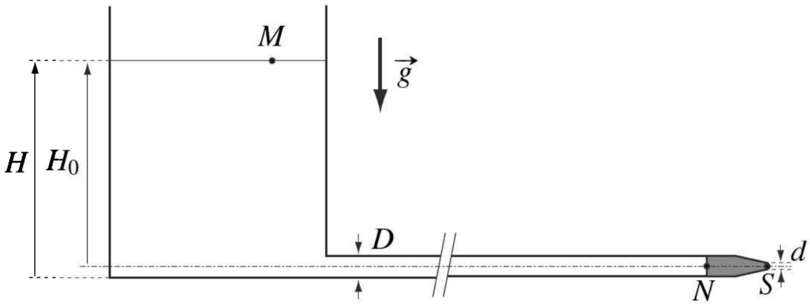

5. Montrer graphiquement que pour un débit donné, il existe deux régimes d'écoulements. Ces régimes sont appelés fluvial et torrentiel. Les identifier sur le graphique.
   **Réponse :**
   Si on trace une droite horizontale $Q = cte$, il y a deux valeurs de $h$ qui correspondent. L'une est inférieure à $h_{max}$, elle est associée a une petite énergie potentielle et donc à une grande énergie cinétique : c'est le régime torrentiel. L'autre est supérieure à $h_{max}$, elle est associée a plus de hauteur d'eau et moins de vitesse d'écoulement, c'est le régime fluvial.

6. Le cours d'eau passe entre les piles d'un pont, ce qui a pour effet de diminuer sa largeur $L$. Comment l'épaisseur de l'écoulement varie-t'elle entre les piles du pont ?
   **Réponse :**
   Sous l'effet du rétrécissement latéral, la vitesse de l'écoulement augmente, et donc $h$ diminue. Il y a donc un passage du régime fluvial au régime torrentiel.

# Sujet 3 – corrigé

## I Force sur l'embout d'un tuyau

Un réservoir cylindrique de rayon $R$ contient de l'eau sur une hauteur $H$, l'eau étant considérée comme un fluide parfait, incompressible, de masse volumique $\rho$ constante. Ce récipient est situé dans le champ de pesanteur $\overrightarrow{g}$ supposé uniforme. Ce réservoir sert à alimenter une lance d'arrosage de section circulaire de diamètre $D$ dont l'axe de l'ajutage formant l'embout du tuyau se trouve à une distance constante $H_0 = H - \frac{D}{2}$ de la surface libre du réservoir. L'ajutage de sortie est de section circulaire de diamètre $d \ll R$ qu'il est possible de faire varier en vissant ou en devissant l'embout. La hauteur $H$ d'eau dans le réservoir est maintenue constante par une alimentation non représentée sur la figure.




On appelle:

- $v(N) = V$ la vitesse de l'eau dans le tuyau,
- $v(S) = u$ la vitesse de l'eau dans la section de sortie,
- $\lambda$ le rapport $\frac{d}{D}$,

et on admet que la répartition des vitesses est uniforme dans une section droite.

1. Par application, soigneusement justifiée, du théorème de Bernouilli entre les points $M$ et $S$, exprimer la vitesse $V$ en fonction de $g, H_0$ et $\lambda$.
   **Réponse :**
   Le fluid est parfait, homogène, incompressible et en écoulement stationnaire. Nous pouvons donc appliquer Bernoulli le long de la ligne de courant de $M$ à $S$.

$$P(M) + \frac{1}{2}\rho v(M)^2 + \rho g z_M = P(S) + \frac{1}{2}\rho u^2 + \rho g z_S$$

   Or $P(M) = P(S) = P_0$ et par conservation du débit volumique (écoulement stationnaire et fluide homogène)

$$\pi R^2 v_M = \pi \frac{d^2}{4} u$$

   or $d \ll R$ donc $u \gg v_M$ soit

$$\boxed{u = \sqrt{2gH_0}}$$

   Par conservation du débit volumique entre $N$ et $S$,

$$\pi \frac{D^2}{4} V = \pi \frac{d^2}{4} u$$

   soit

$$\boxed{V = \lambda^2 \sqrt{2gH_0}}$$

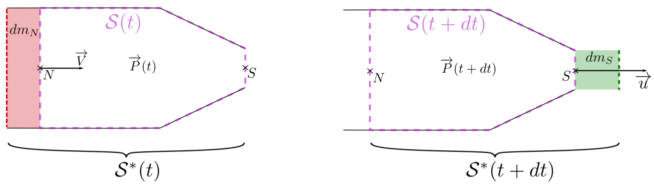
2. En appliquant le théorème de Bernouilli entre les points $N$ et $S$, établir l'expression de la pression $P(N)$ au point $N$ en fonction de $\rho, H_0, g, \lambda$ et de la pression atmosphérique $p_0$.
**Réponse :**
On applique maintenant Bernoulli le long de la ligne de courant de $N$ à $S$.

$$P(N) + \frac{1}{2}\rho v_N^2 + \rho g z_N = P(S) + \frac{1}{2}\rho v_S^2 + \rho g z_S$$

or $z_N = z_S$, $P_S = P_0$:

$$\boxed{P(N) = P_0 + \rho g H_0 \left(1 - \lambda^4\right)}$$

3. Par un bilan de quantité de mouvement sur un système soigneusement défini, déterminer la résultante $\vec{F}$ des efforts exercés par le fluide sur le pas de vis de fixation de l'embout sur le tuyau. On négligera les efforts dus à la pesanteur.
**Réponse :**
Soit le système fermé $\Sigma^*$ situé à l'instant $t$ entre les plans $N$ et $S$ et à $t + dt$ entre les plans $N'$ et $S'$.




$$\vec{p^*}(t+dt) = \vec{p}(t+dt) + dm_S \vec{u}$$

$$\vec{p^*}(t) = \vec{p}(t) + dm_N \vec{V}$$

PFD appliqué à $\Sigma^*$ dans $\mathcal{R}$ galiléen:

$$\vec{p^*}(t+dt) - \vec{p^*}(t) = \vec{p}(t+dt) - \vec{p}(t) + dm_S\vec{u} - dm_N\vec{V} = \sum_i \vec{F}_i dt$$

Or on est en régime stationnaire donc $\vec{p}(t+dt) = \vec{p}(t)$ et $dm_S = dm_N$:

$$\frac{dm}{dt}\left(\vec{u} - \vec{V}\right) = P_N S_N \vec{e}_x - P_0 S_S \vec{e}_x + \vec{F}_{embout/eau}$$

en négligeant le poids. On en déduit $\vec{F} = \vec{F}_{eau/embout} = -\vec{F}_{embout/eau}$:

$$\boxed{\vec{F} = D_m\left(\vec{V} - \vec{u}\right) + \left(P_0 + \rho g H_0\left(1-\lambda^4\right)\right)\frac{\pi D^2}{4}\vec{e}_x - P_0\frac{\pi d^2}{4}\vec{e}_x}$$

4. Exprimer le module $F$ de $\vec{F}$ en fonction de $\mu, g, H, D, \lambda$ et $p_0$. Préciser la direction et le sens de $\vec{F}$. Application numérique: calculer $F$ pour $H_0 = 5{,}0\,\mathrm{m}$, $d = 5{,}0\,\mathrm{mm}$, $D = 3{,}0\,\mathrm{cm}$, $g = 9{,}8\,\mathrm{m\cdot s^{-2}}$ et $p_0 = 1{,}0\,\mathrm{bar}$.
**Réponse :**

$$\vec{F} = \left[\left(P_0 + \rho g H_0\left(1-\lambda^4\right)\right)\frac{\pi D^2}{4} - P_0\frac{\pi d^2}{4} - D_m\sqrt{2gH_0}\left(1-\lambda^2\right) - P_0\frac{\pi d^2}{4}\right]\vec{e}_x$$

soit après simplification

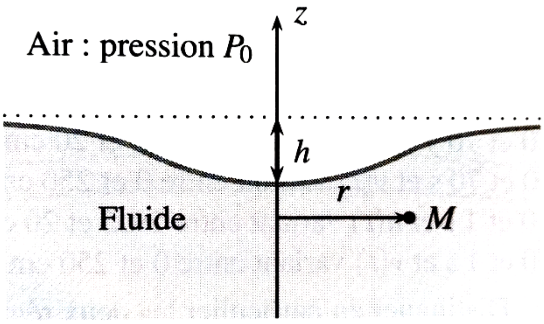
$$\Leftrightarrow \boxed{\vec{F} = \left(P_0 + \rho g H_0\left(1-\lambda^2\right)\right)\frac{\pi D^2}{4}\left(1-\lambda^2\right)\vec{e}_x}$$

AN: $F = 101\,\mathrm{N}$

# Sujet 4 – corrigé

## I Tourbillon de Rankine (⋆⋆⋆)

On considère un fluide en écoulement parfait, stationnaire, homogène et incompressible pour lequel le champ des vitesses $\overrightarrow{v} = v(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$ et caractérisé par la donnée du vecteur tourbillon: $\overrightarrow{\omega} = \frac{1}{2}\overrightarrow{rot}\,\overrightarrow{v} = \omega_0\overrightarrow{e_z}$, pour $r \leq a$ et $\overrightarrow{\omega} = \overrightarrow{0}$ pour $r > a$, en coordonnées cylindriques.




1. En utilisant théorème de Green-Stokes déterminer l'expression du champ de vitesse dans tout le fluide à partir du calcul de sa circulation.
   **Réponse :**
   D'après le théorème de Green-Stokes
   $$\oint \overrightarrow{v}.d\overrightarrow{\ell} = \iint \overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}.d\overrightarrow{S} = \iint 2\overrightarrow{\omega}.d\overrightarrow{S}$$
   le champ de vitesse $\overrightarrow{v} = v(r,z)\overrightarrow{e}_\theta$, en intégrant le long d'un cercle de rayon $r$ à $z = Cte$, on a:
   $$\oint \overrightarrow{v}(r,z).d\overrightarrow{\ell} = \oint v(r,z).d\ell = v\int_0^{2\pi} rd\theta = 2\pi rv$$
   Pour le contour choisi, on aura:
   - Pour $r \leq a$:
   $$\iint 2\overrightarrow{\omega}.d\overrightarrow{S} = 2\omega_0 \times \pi r^2$$
   - Pour $r > a$:
   $$\iint 2\overrightarrow{\omega}.d\overrightarrow{S} = 2\omega_0 \times \pi a^2$$

   On a donc:
   - Pour $r \leq a$: $\boxed{v = r\omega_0}$
   - Pour $r > a$: $\boxed{v = \dfrac{\omega_0 a^2}{r}}$

2. À l'aide de l'équation d'Euler, déterminer le champ de pression au sein du fluide. Que peut-il se produire sur l'axe si la rotation est trop importante ?
   **Réponse :**
   $$\rho\frac{D\overrightarrow{v}}{Dt} = -\overrightarrow{grad}P + \rho\overrightarrow{g}$$
   On est en régime stationnaire donc
   $$\rho.\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right) + \rho\left(\overrightarrow{rot}\overrightarrow{v}\right) \wedge \overrightarrow{v} = -\overrightarrow{grad}P + \rho\overrightarrow{g}$$

$$\Leftrightarrow \rho.\overrightarrow{grad}\left(\frac{v^2}{2}\right)+2\rho\vec{\omega}\wedge\vec{v}+\overrightarrow{grad}P+\rho\vec{g}=\vec{0}$$

soit en projection

$$\begin{cases} \vec{e}_r : & \dfrac{\partial}{\partial r}\left(P+\rho g z+\rho\dfrac{v^2}{2}\right)=2\rho\omega v \\ \vec{e}_z : & \dfrac{\partial}{\partial z}\left(P+\rho g z+\rho\dfrac{v^2}{2}\right)=0 \end{cases}$$

Pour $r \leq a$: $v=r\omega_0$

$$\frac{\partial P}{\partial r}+\frac{\partial}{\partial r}\left(\rho\frac{\omega_0^2 r^2}{2}\right)=2\rho\omega^2 r$$

soit

$$\frac{\partial P}{\partial r}=\rho\omega_0^2 r$$

Par intégration:

$$P(r,z)=\rho\omega_0^2\frac{r^2}{2}+f(z)$$

Or en $r=0$, $P(0,z)=P_0-\rho g(z+h)$ d'après la loi de la statique des fluides donc

$$\boxed{P(r,z)=P_0+\rho\omega_0^2\frac{r^2}{2}-\rho g(z+h)}$$

Pour $r>a$: $v=\frac{\omega_0 a^2}{r}$ et $\omega=0$

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P+\rho g z+\rho\frac{\omega_0^2 a^4}{2r^2}\right)=0$$

soit

$$\frac{\partial}{\partial r}\left(P+\frac{\rho\omega_0^2 a^4}{2r^2}\right)=0$$

Par intégration:

$$P(r,z)=-\frac{\rho\omega_0^2 a^4}{2r^2}+f(z)$$

Or en $r\to\infty$, $P(\infty,z)=P_0-\rho g z$ d'après la loi de la statique des fluides donc

$$\boxed{P(r,z)=P_0-\frac{\rho\omega_0^2 a^4}{2r^2}-\rho g z}$$

Si la rotation est trop importante; $P$ peut atteindre la pression de vapeur saturante et l'eau se vaporiser: c'est la cavitation.

3. En déduire l'équation de la surface libre ainsi que la profondeur $h$ du tourbillon.
**Réponse :**
Par continuité de la pression en $r=a$:

$$P_0-\frac{\rho\omega_0^2 a^2}{2}-\rho g z=P_0+\rho\omega_0^2\frac{a^2}{2}-\rho g(z+h)$$

soit

$$\boxed{h=\frac{\omega_0^2 a^2}{g}}$$

On trouve l'équation de la surface libre sachant que $P(r,z)=P_0$:

- $r\leq a$:

$$\boxed{z(r)=\frac{\omega_0^2 a^2}{g}\left(\frac{r^2}{2a^2}-1\right)}$$

- $r > a$:

$$\boxed{z(r) = -\frac{\omega_0^2 a^2}{g} \times \frac{a^2}{2r^2}}$$

4. En prenant ce modèle pour une trombe de rayon $a = 30m$, évaluer la force maximale d'arrachement sur un toit circulaire de rayon égal à $10m$. On supposera un vent de vitesse maximale égale à $100km.h^{-1}$.

**Réponse :**
La dépression $\Delta P = P(r,z) - P_0 = \rho\omega_0^2\frac{r^2}{2} - \rho g(z+h)$ est maximale en $z = -h$, soit

$$\boxed{\Delta P_{max} = \rho\omega_0^2\frac{r^2}{2}}$$

Si on suppose que cette dépression s'applique à tout le toit:

$$F = \iint \Delta P_{max} dS = \int_0^R \rho\omega_0^2\frac{r^2}{2}(2\pi r dr) = \boxed{\frac{\pi}{4}\rho\omega_0^2 R^4}$$

Pour $r = a$, $v_{max} = \omega a$ donc $\omega_{max} = \frac{v_{max}}{a} = 0{,}92\,\mathrm{rad}\cdot\mathrm{s}^{-1}$ soit une force $F = 6700\,\mathrm{N}$.