

## Correction du TD

## I Collision entre deux voitures

- 1) Notons  $M_1$  et  $M_2$  les points matériels représentant chacun une des deux voitures. On se limite au mouvement unidimensionnel selon l'axe  $x$  et on notera  $x_1(t)$  et  $x_2(t)$  les positions respectives de  $M_1$  et  $M_2$  selon cet axe. Initialement,  $x_1(t=0) = d = 20\text{ m}$  et  $x_2(t=0) = 0$ .

La voiture  $M_1$  de Xari subit l'accélération (qui est négative donc c'est une décélération) constante  $a_1$ . Ainsi, par intégration successive,

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + \alpha t + \beta$$

Avec  $\alpha$  et  $\beta$  deux constantes d'intégration. En considérant par ailleurs une vitesse initiale  $v_0$  et une position initiale  $d$ , on obtient :

$$x_1(t) = \frac{1}{2}a_1t^2 + v_0t + d$$

Pour le second véhicule, il faut décomposer le mouvement en deux étapes successives :

- ◇ pour  $t \in (0 ; 1)\text{ s}$ ,  $a = 0$ . La position initiale étant par ailleurs nulle et la vitesse initiale étant égale à  $v_0$ , il vient, pour  $t \in (0 ; 1)\text{ s}$  :

$$x_2(t) = v_0t$$

- ◇ pour  $t > 1$ , l'accélération vaut  $a_2$  constante. Notons par ailleurs  $t_2 = 1\text{ s}$ . On a par intégration :

$$v_2(t) = a_2t + \gamma$$

Avec  $\gamma$  une constante à déterminer. Or, par continuité de la vitesse,  $v_2(t=t_2) = v_0$ . Ainsi,

$$v_2(t) = a_2(t - t_2) + v_0$$

Intégrons une nouvelle fois, avec  $\delta$  une nouvelle constante d'intégration :

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0t + \delta$$

En utilisant le fait que  $x(t_2) = v_0t_2$ , il vient finalement

$$x_2(t) = \frac{1}{2}a_2(t - t_2)^2 + v_0t$$

- 2) Il y a contact à l'instant  $t_c$  tel que

$$x_1(t_c) = x_2(t_c)$$

Supposons d'abord le contact sur l'intervalle  $t \in (0 ; 1)\text{ s}$ . Il faut alors résoudre :

$$\begin{aligned} & \frac{1}{2}a_1t_c^2 + v_0t_c + d = v_0t_c \\ \Leftrightarrow & \boxed{t_c = \sqrt{\frac{-2d}{a_1}}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20\text{ m} \\ a_1 = -30,0\text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \end{cases} \\ \text{A.N. : } & \boxed{t_c = 1,41\text{ s} > 1\text{ s}} \end{aligned}$$

Cette solution est donc exclue puisqu'elle n'est pas en accord avec notre hypothèse initiale  $t \in (0 ; 1)\text{ s}$ .

Supposons maintenant  $t_c > 1$  s. Il faut résoudre :

$$\begin{aligned} \frac{1}{2}a_1 t_c^2 + \cancel{v_0 t_c} + d &= \frac{1}{2}a_2(t_c - t_2)^2 + \cancel{v_0 t_c} \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}a_1 t_c^2 + d &= \frac{1}{2}a_2(t_c^2 - 2t_2 t_c + t_2^2) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2}(a_1 - a_2)t_c^2 + a_2 t_2 t_c + d - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 &= 0 \end{aligned}$$

C'est un polynôme de degré 2 dont le discriminant  $\Delta$  est tel que

$$\Delta = (a_2 t_2)^2 - 2(a_1 - a_2) \left( d - \frac{1}{2}a_2 t_2^2 \right) \quad \text{avec} \quad \begin{cases} d = 20 \text{ m} \\ a_1 = -30,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ a_2 = -20,0 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ t_2 = 1 \text{ s} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \Delta = 600 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2}$$

$$\text{D'où } t_{c,\pm} = \frac{-a_2 t_2 \pm \sqrt{\Delta}}{(a_1 - a_2)}$$

$$\Leftrightarrow t_{c,+} = -3,45 \text{ s} \quad \text{ou} \quad t_{c,-} = 1,45 \text{ s}$$

La solution négative étant exclue, on trouve finalement

$$t_c = 1,45 \text{ s} \quad \text{et} \quad x_1(t_c) = 42,5 \text{ m}$$

Il était donc pratiquement impossible que Pierre esquive Xari, étant donné qu'en freinant au plus tôt il n'a eu que 0,45 s avant de rentrer en collision avec lui, laissant peu de marge à un autre temps de réaction et à une autre manœuvre évasive.

## II Masse attachée à 2 ressorts

- 1) On étudie ici le point matériel M de masse  $m$ , dans le référentiel du laboratoire supposé galiléen avec le repère  $(O, \vec{u}_z)$ ,  $\vec{u}_z$  vertical ascendant. On repère le point M par son altitude  $OM = z(t)$ . On effectue le **bilan des forces** :

$$\text{Poids} \quad \vec{P} = m\vec{g} = -mg\vec{u}_z$$

$$\text{Ressort 1} \quad \vec{F}_{\text{ressort 1}} = -k(OM - \ell_0)\vec{u}_z = -k(z - \ell_0)\vec{u}_z$$

$$\text{Ressort 2} \quad \vec{F}_{\text{ressort 2}} = +k(O'M - \ell_0)\vec{u}_z = +k(L - z - \ell_0)\vec{u}_z$$

avec le ressort 1 celui d'en-dessous, le ressort 2 celui d'au-dessus. On notera simplement  $\vec{F}_1$  et  $\vec{F}_2$  dans la suite. Avec le PFD, on a

$$\begin{aligned} m\vec{a} &= \vec{P} + \vec{F}_1 + \vec{F}_2 \\ \Leftrightarrow m\ddot{z} &= -mg - k(z - \ell_0) + k(L - z - \ell_0) \\ \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{2k}{m}z &= \frac{k}{m}L - g \end{aligned}$$

À l'équilibre, le ressort ne bouge plus ; on a donc  $\dot{z} = \ddot{z} = 0$ , et on trouve ainsi  $z_{\text{eq}}$  :

$$z_{\text{eq}} = \frac{L}{2} - \frac{mg}{2k}$$

Sans la pesanteur, la masse sera à l'équilibre entre les deux ressorts, en toute logique. La gravité diminue cette altitude. On remarque que cette association de ressort est équivalente à avoir un seul ressort de raideur  $2k$ .



b – On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit  $t_s$  ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = gt_s \sin \alpha \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g \sin \alpha}}$$

On remarque alors que si  $\alpha = 0$ ,  $t_s \rightarrow +\infty$ , ce qui est logique puisque sans frottement la brique ne s'arrêterait jamais. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans  $x(t)$  :

$$x(t_s) = -\frac{1}{2}g \frac{v_0^2}{g^2 \sin^2 \alpha} \sin \alpha + v_0 \frac{v_0}{g \sin \alpha} \Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g \sin \alpha}}$$

2) On suppose ensuite qu'il existe des frottements solides, avec  $f$  le coefficient de frottements solides tel que  $f = 0,20$ .

a – On reprend le même système, mais le bilan des forces change :

◇ **Bilan des forces :**

$$\begin{array}{ll} \text{Poids} & \vec{P} = -mg \cos \alpha \vec{u}_y - mg \sin \alpha \vec{u}_x \\ \text{Réaction} & \vec{R} = R_N \vec{u}_y - R_T \vec{u}_x \end{array}$$

En effet, sur la montée de la brique, sa vitesse est dirigée vers  $+\vec{u}_x$ , donc la force de frottement (qui est une force de freinage et donc opposée à la vitesse) est dirigée vers  $-\vec{u}_x$ . De plus, avec les lois du frottement de COULOMB, sur la montée la brique glisse sur le support, on a donc

$$\boxed{R_T = f R_N}$$

◇ **PFD :**

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = -mg \sin \alpha - f R_N \\ \underbrace{m\ddot{y}}_{=0} = -mg \cos \alpha + R_N \end{cases}$$

Il n'y a pas de mouvement sur  $\vec{u}_y$  étant donné que le mouvement se fait selon  $\vec{u}_x$ ; ainsi  $\boxed{y = \dot{y} = \ddot{y} = 0}$ , et la seconde équation donne

$$R_N = mg \cos \alpha$$

Que l'on réinjecte dans la première :

$$\ddot{x} = -g \sin \alpha - f g \cos \alpha$$

On intègre cette dernière pour avoir l'équation horaire sur  $x(t)$  :

$$\dot{x}(t) = -g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t + v_0 \Rightarrow \boxed{x(t) = -\frac{1}{2}g(\sin \alpha + f \cos \alpha)t^2 + v_0 t}$$

avec les conditions initiales  $\dot{x}(0) = v_0$  et  $x(0) = 0$ . On retrouve le résultat précédent en posant  $f = 0$ .

b – On trouve le temps d'arrêt quand la vitesse est nulle. Soit  $t_s$  ce temps d'arrêt :

$$\dot{x}(t_s) = 0 \Leftrightarrow v_0 = gt_s(\sin \alpha + f \cos \alpha) \Leftrightarrow \boxed{t_s = \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}}$$

Ce temps est plus **court** que sans frottements. On obtient la distance d'arrêt en injectant ce temps dans  $x(t)$  :

$$\begin{aligned} x(t_s) &= -\frac{1}{2} \cancel{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} \frac{v_0^2}{(\cancel{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)})^2} + v_0 \frac{v_0}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)} \\ &\Leftrightarrow \boxed{x(t_s) = \frac{1}{2} \frac{v_0^2}{g(\sin \alpha + f \cos \alpha)}} \end{aligned}$$

3) On suppose finalement que la brique est **posée** sur le plan avec  $\alpha$  variable.

a – Cette fois, la brique est initialement à l'arrêt, soit  $\vec{a}(0) = \vec{0}$ , et la brique ne glisse pas donc  $R_T < fR_N$ . On aura mouvement quand il y aura glissement, c'est-à-dire quand  $R_T = fR_N$ . On reprend donc le système précédent avec  $\vec{a} = \vec{0}$  :

$$\underbrace{m\vec{a}}_{=\vec{0}} = \vec{P} + \vec{R} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg \sin \alpha - fR_N \\ 0 = -mg \cos \alpha + R_N \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \sin \alpha = f \cos \alpha \\ R_N = mg \cos \alpha \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow f = \tan \alpha \Leftrightarrow \boxed{\alpha = \text{atan}(f)}$$

b – On trouve

$$\boxed{\alpha_{\text{fer/chêne}} = 14^\circ}$$

et

$$\boxed{\alpha_{\text{chêne/chêne}} = 19^\circ}$$

4) Avec  $\alpha = 0^\circ$ , on souhaite déplacer une armoire de 100 kg en tirant dessus avec la force  $\vec{F}$ . On donne  $f_{\text{armoire/sol}} = 0,25$ .

a –  $\diamond$  **Système** : {armoire}

$\diamond$  **Référentiel** : (O,  $\vec{u}_x$ ,  $\vec{u}_y$ ) avec  $\vec{u}_y$  vertical ascendant

$\diamond$  **Repère** : On suppose la force de traction dirigée vers  $+\vec{u}_x$ , et donc la vitesse de l'armoire selon  $+\vec{u}_x$

$\diamond$  **Repérage** :  $\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{u}_x$ ,  $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$ ,  $\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x$

$\diamond$  **Bilan des forces** :

<b>Poids</b>	$\vec{P} = m\vec{g} = -mg \vec{u}_y$
<b>Réaction normale</b>	$\vec{R}_N = R_N \vec{u}_y$
<b>Réaction tangentielle</b>	$\vec{R}_T = -R_T \vec{u}_x$
<b>Traction</b>	$\vec{F} = F \vec{u}_x$

À la limite du glissement, on a  $R_T = fR_N$ .

$\diamond$  **PDF** : quand le mouvement est lancé, l'accélération est nulle.

$$\underbrace{m\vec{a}}_{=0} = \vec{P} + \vec{R}_N + \vec{R}_T + \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} 0 = -mg + R_N \\ 0 = F - fR_N \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} R_N = mg \\ \boxed{F = fmg} \end{cases} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 100 \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-2} \\ f = 0,25 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{F = 250 \text{ N}} \Leftrightarrow \boxed{\frac{F}{g} = 25 \text{ kg}}$$

Ainsi, il suffit de fournir une force égale à un quart du poids.

b – Mettre des patins permet de diminuer le coefficient de frottement, et donc de diminuer la force de traction nécessaire pour déplacer le meuble.

## IV Coup franc et frottements fluides

1) Dans un premier temps, on néglige totalement les frottements de l'air.

a –  $\diamond$  **Système** : {ballon}

$\diamond$  **Référentiel** : terrestre galiléen

- ◇ **Repère** : cartésien  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$ ,  $\vec{u}_y$  vertical ascendant,  $\vec{u}_x$  vers le but
- ◇ **Repérage** :  $\vec{OM} = x(t) \vec{u}_x + y(t) \vec{u}_y$ ,  $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x + \dot{y}(t) \vec{u}_y$ ,  $\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x + \ddot{y}(t) \vec{u}_y$
- ◇ **Origine et instant initial** :  $\vec{OM}(0) = \vec{0}$
- ◇ **Vitesse initiale** :  $\vec{v}(0) = v_0 \cos \alpha \vec{u}_x + v_0 \sin \alpha \vec{u}_y$
- ◇ **BDF** :

$$\text{Poids } \vec{P} = m \vec{g} = -mg \vec{u}_y$$

- ◇ **PFD** :

$$m \vec{a} = -mg \vec{u}_y \Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = -g \end{cases} \quad (2.1)$$

Ainsi,

$$(2.1) \Rightarrow \begin{cases} \dot{x} = v_0 \cos \alpha \\ \dot{y} = -gt + v_0 \sin \alpha \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} x(t) = v_0 t \cos \alpha \\ y(t) = -\frac{1}{2}gt^2 + v_0 t \sin \alpha \end{cases} \quad (2.2)$$

étant donné les conditions initiales. On trouve la trajectoire en isolant  $t(x)$  pour avoir  $y(x)$  :

$$(2.2) \Rightarrow \begin{cases} t(x) = \frac{x}{v_0 \cos \alpha} \\ y(x) = -\frac{g}{2v_0^2 \cos^2 \alpha} x^2 + x \tan \alpha \end{cases}$$

- b – Le ballon passe au-dessus du mur si  $y(x_{\text{mur}}) \geq h_{\text{mur}}$  avec  $h_{\text{mur}}$  la hauteur du mur et  $x_{\text{mur}}$  sa position horizontale. Avec une application numérique, on obtient

$$y(x_{\text{mur}}) = 2,17 \text{ m} > h_{\text{mur}} = 1,90 \text{ m}$$

donc le ballon passé bien au-dessus du mur.

- c – Le tir est cadré si  $y(x_{\text{but}}) \leq h_{\text{but}}$ . Or,

$$y(x_{\text{but}}) = 1,73 \text{ m}$$

donc le tir est bien cadré.

- 2) Il y a en réalité des frottements, modélisés par une force  $\vec{F}_f = -h \vec{v}$  avec  $h$  une constante positive de valeur  $5,00 \times 10^{-3} \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1}$ .

- a – Avec le même système, seul le bilan des forces est modifié (et donc le PFD) :

- ◇ **BDF** :

$$\begin{aligned} \text{Poids} \quad \vec{P} &= -mg \vec{u}_y \\ \text{Frottements} \quad \vec{F} &= -h \vec{v} = -h \dot{x} \vec{u}_x - h \dot{y} \vec{u}_y \end{aligned}$$

- ◇ **PFD** :

$$\begin{aligned} m \vec{a} &= -mg \vec{u}_y - h \dot{x} \vec{u}_x - h \dot{y} \vec{u}_y \\ \Leftrightarrow \begin{cases} m \ddot{x} = -h \dot{x} \\ m \ddot{y} = -mg - h \dot{y} \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} \ddot{x} + \frac{h}{m} \dot{x} = 0 \\ \ddot{y} + \frac{h}{m} \dot{y} = -g \end{cases} \\ \Leftrightarrow \begin{cases} \dot{v}_x + \frac{v_x}{\tau} = 0 \\ \dot{v}_y + \frac{v_y}{\tau} = -g \end{cases} &\Leftrightarrow \begin{cases} v_x(t) = Ae^{-t/\tau} \\ v_y(t) = -g\tau + Be^{-t/\tau} \end{cases} \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \text{Or, } \begin{cases} v_x(0) = v_0 \cos \alpha \\ v_y(0) = v_0 \sin \alpha \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} A = v_0 \cos \alpha \\ B = v_0 \sin \alpha + g\tau \end{cases} \\ \text{donc } \begin{cases} v_x(t) = v_0 \cos \alpha e^{-t/\tau} \\ v_y(t) = (v_0 \sin \alpha + g\tau) e^{-t/\tau} - g\tau \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} x(t) = -v_0 \tau \cos \alpha e^{-t/\tau} + C \\ y(t) = -(v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2) e^{-t/\tau} - g\tau t + D \end{cases} \\ \text{or } \begin{cases} x(0) = 0 \\ y(0) = 0 \end{cases} &\Rightarrow \begin{cases} C = v_0 \tau \cos \alpha \\ D = -(v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2) \end{cases} \end{aligned}$$

Finalement,

$$\begin{cases} x(t) = v_0 \tau \cos \alpha (1 - e^{-t/\tau}) \\ y(t) = (v_0 \tau \sin \alpha + g\tau^2) (1 - e^{-t/\tau}) - g\tau t \end{cases} \quad (2.3)$$

$$(2.4)$$

b – On isole  $t(x)$  de (2.3) pour l'injecter dans (2.4) :

$$\begin{cases} t(x) = -\tau \ln \left( 1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \\ y(x) = \left( \tan \alpha + \frac{g\tau}{v_0 \cos \alpha} \right) x + g\tau^2 \ln \left( 1 - \frac{x}{v_0 \tau \cos \alpha} \right) \end{cases}$$

c – On calcule :

$$y(x_{\text{mur}}) = 2,17 \text{ m}$$

donc le ballon passe au-dessus du mur.

d – On calcule :

$$y(x_{\text{but}}) \approx 1,73 \text{ m}$$

donc le tir est bien cadré. On constate que les frottements n'ont eu que peu d'influence sur ce mouvement ; il n'est en effet pas très rapide, donc la force de frottements est restée assez faible.

## V Charge soulevée par une grue

1) ♦ **Système** : {masse  $m$ } repérée par son centre d'inertie  $M$ .

♦ **Référentiel** : relié au sol, galiléen.

♦ **Coordonnées** : cartésiennes,  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y, \vec{u}_z)$  avec  $\vec{u}_z$  vertical ascendant,  $O$  au pieds de la grue.

♦ **BDF** : avant qu'elle ne décolle, il y a la réaction du sol ; on s'intéresse au décollage, donc au moment où elle s'annule. On aura donc

$$\begin{aligned} \text{Poids } \vec{P} &= m \vec{g} = -mg \vec{u}_z \\ \text{Tension } \vec{T} &= T \vec{u}_z \end{aligned}$$

♦ **PFD** : au moment où la masse décolle, son accélération est positive et selon  $\vec{u}_z$ , soit  $\vec{a} = \ddot{z} \vec{u}_z$  ; en supposant un décollage en douceur,  $\ddot{z} \approx 0$ , soit

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{T} \Leftrightarrow 0 = -mg + T \Leftrightarrow \boxed{T = mg}$$

On a donc la tension égale au poids.

2) Dans ce cas, on a explicitement

$$\boxed{T = m(a_v + g)}$$

La tension est supérieure au poids, et fonction affine de  $a_v$  : si l'accélération est trop forte, le câble peut rompre.

- 3) La montée de M est stoppée à mi-hauteur mais le chariot A se met en mouvement vers la droite (figure ??) avec une accélération  $a_h$  constante.

a – L'accélération de M est  $\vec{a}_M = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2}$ . Or,  $\vec{OM} = \vec{OA} + \vec{AM}$  avec  $\vec{AM}$  constant : ainsi

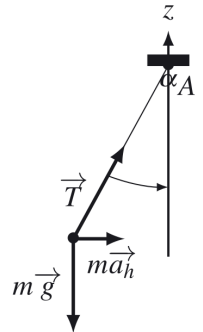
$$\vec{a}_M = \frac{d^2 \vec{OM}}{dt^2} = \frac{d^2 \vec{OA}}{dt^2} = \vec{a}_h$$

On a alors le PFD :

$$m \vec{a}_h = m \vec{g} + \vec{T} \Leftrightarrow m a_h \vec{u}_x = -mg \vec{u}_z + T \cos \alpha \vec{u}_z + T \sin \alpha \vec{u}_x$$

b –

Ainsi, 
$$\begin{cases} m a_h = T \sin \alpha \\ mg = T \cos \alpha \end{cases} \Leftrightarrow \begin{cases} \tan \alpha = \frac{a_h}{g} \\ T = m \sqrt{a_h^2 + g^2} \end{cases}$$



## VI Étude d'un volant de badminton

- 1) ♦ **Système** : {volant} assimilé à un point matériel M de masse  $m$

♦ **Référentiel** : terrestre supposé galiléen

♦ **Repère** :  $(O, \vec{u}_z)$  avec O départ de chute,  $\vec{u}_z$  vertical *descendant* (voir schéma)

♦ **Repérage** :  $\vec{OM} = z(t) \vec{u}_z$ ,  $\vec{v} = \dot{z}(t) \vec{u}_z$ ,  $\vec{a} = \ddot{z}(t) \vec{u}_z$

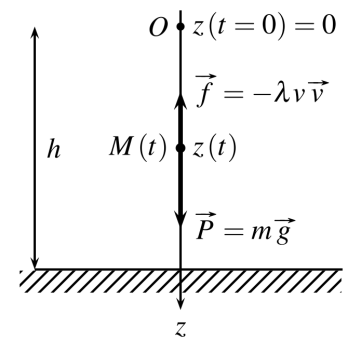
♦ **Origine et instant initial** :  $\vec{OM}(0) = z(0) \vec{u}_z = \vec{0}$

♦ **BFD** :

**Poids**  $\vec{P} = m \vec{g} = mg \vec{u}_z$   
**Frottements**  $\vec{F} = -\lambda v \vec{v} = -\lambda \dot{z} \vec{u}_z$

♦ **PFD** :

$$m \vec{a} = \vec{P} + \vec{F} \Leftrightarrow m \ddot{z} = mg - \lambda \dot{z} \Leftrightarrow \ddot{z} + \frac{\lambda}{m} \dot{z} = g$$



Ainsi,

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v^2 = g$$

- 2) Lorsqu'on lâche M sans vitesse initiale d'une hauteur  $h$ , la vitesse est faible au départ et la force principale est le poids, accélérant le mobile vers le bas. Quand la vitesse augmente, les frottements s'intensifient jusqu'à ce qu'ils compensent le poids, donnant  $\vec{a} = \vec{0}$  : la vitesse n'évolue plus et reste à sa valeur avant compensation, la vitesse limite  $v_l$ .  $v_l$  étant constante,  $\dot{v}_l = 0$ , donc l'équation différentielle donne

$$\frac{\lambda}{m} v_l^2 = g \Leftrightarrow v_l = \sqrt{\frac{mg}{\lambda}}$$



3)  $v^*$  est le rapport de deux vitesses, donc est forcément sans dimension. Ensuite,

$$[\tau] = \left[ \frac{v_l}{g} \right] = \frac{\text{m} \cdot \text{s}^{-1}}{\text{m} \cdot \text{s}^{-2}} = \text{s}$$

$$[L] = [v_l][\tau] = \text{m} \cdot \text{s}^{-1} \times \text{s} = \text{m}$$

donc  $\tau$  est bien un temps et  $L$  une longueur ; ce faisant,  $t^*$  et  $z^*$  sont évidemment adimensionnées.

4) On réécrit l'équation avec  $v = v_l v^*$  et  $t = \tau t^*$  :

$$\frac{dv}{dt} + \frac{\lambda}{m} v = g \Leftrightarrow \frac{d(v_l v^*)}{d(\tau t^*)} + \frac{\lambda}{m} (v_l v^*)^2 = g \Leftrightarrow \frac{v_l}{\tau} \frac{dv^*}{dt^*} + \frac{\lambda v_l^2}{m} (v^*)^2 = g$$

Or,

$$\frac{v_l}{\tau} = g \quad \text{et} \quad \frac{\lambda v_l^2}{m} = g \Rightarrow \boxed{\frac{dv^*}{dt^*} + (v^*)^2 = 1}$$

5) Ces courbes montrent que la vitesse augmente pendant 2 à  $3\tau$ , avant de se stabiliser à  $v_l$ . Le mouvement est ensuite rectiligne uniforme, et  $z$  est une fonction affine du temps.

6) La courbe représentant  $v^*(t^*)$  montre que  $v^* = 0,95$  pour  $t^* = 1,8$ . La durée de l'expérience pour arriver à cette valeur est donc  $1,8\tau$ , et la hauteur  $z^*$  à ce temps est  $z^* = 1,2$ , ce qui correspond à  $z = 1,2L$  ; ainsi

$$\boxed{\Delta t = 1,8\tau} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 1,2L}$$

7) En supposant  $v_l$  connue, on a

$$\tau = \frac{v_l}{g} \quad \text{et} \quad L = v_l \tau \quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 25 \text{ km} \cdot \text{h}^{-1} = 7,0 \text{ m} \cdot \text{s}^{-1} \\ g = 9,81 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{\tau = 7,1 \times 10^{-1} \text{ s}} \quad \text{et} \quad \boxed{L = 4,9 \text{ m}}$$

Ainsi,

$$\Delta t = 1,8\tau \quad \text{et} \quad h = 1,2L$$

$$\Rightarrow \boxed{\Delta t = 1,3 \text{ s}} \quad \text{et} \quad \boxed{h = 5,9 \text{ m}}$$

## VII Étude d'une skieuse

1)  $\diamond$  **Système** : {skieuse} assimilée à son centre de gravité

$\diamond$  **Référentiel** :  $\mathcal{R}_{\text{sol}}$  supposé galiléen

$\diamond$  **Repère** :  $(O, \vec{u}_x, \vec{u}_y)$  (voir schéma)

$\diamond$  **Repérage** :  $\overrightarrow{OM} = x(t) \vec{u}_x$  ;  $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$  ;  $\vec{a} = \ddot{x}(t) \vec{u}_x$ .

$\diamond$  **Origine et instant initial** :  $\overrightarrow{OM}(0) = \vec{0}$

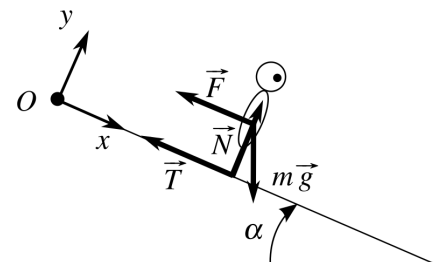
$\diamond$  **Vitesse initiale** :  $\vec{v}(0) = \vec{0}$

$\diamond$  **BDF** :

<b>Poids</b>	$m \vec{g} = mg(\sin \alpha \vec{u}_x - \cos \alpha \vec{u}_y)$
<b>Réaction normale</b>	$\vec{N} = N \vec{u}_y$
<b>Réaction tangentielle</b>	$\vec{T} = -T \vec{u}_x = -fN \vec{u}_x$
<b>Frottements</b>	$\vec{F} = -\lambda \vec{v} = -\lambda \dot{x} \vec{u}_x$

Comme la skieuse glisse sur la piste, avec les lois du frottement de COULOMB, on a

$$T = fN$$



◇ PFD :

$$m\vec{a} = \vec{P} + \vec{N} + \vec{T} + \vec{F} \Leftrightarrow \begin{cases} m\ddot{x} = mg \sin \alpha - fN - \lambda \dot{x} \\ m\ddot{y} = -mg \cos \alpha + N \end{cases}$$

Ainsi, comme il n'y a pas de mouvement sur  $\vec{u}_y$ ,  $\ddot{y} = 0$  et

$$\boxed{N = mg \cos \alpha} \Rightarrow \boxed{T = fN = fmg \cos \alpha}$$

2) On réutilise la première équation en y injectant l'expression de  $T$  pour avoir :

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Avec  $\vec{v} = \dot{x}(t) \vec{u}_x$ , on obtient une équation différentielle sur  $v(t)$  que l'on résout en posant  $\tau = m/\lambda$  avec la solution homogène  $Ae^{-t/\tau}$  et la solution particulière  $v_p$  :

$$\dot{v}(t) + \frac{v}{\tau} = g(\sin \alpha - f \cos \alpha) \Rightarrow v = Ae^{-t/\tau} + v_p$$

et on trouve  $v_p$  directement en remarquant que, par construction,  $\dot{v}_p = 0$  donc  $v_p = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha)$ . En combinant on peut utiliser la condition initiale sur la vitesse :

$$v(t) = Ae^{-t/\tau} + g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha)$$

Or,

$$\left. \begin{aligned} v(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= A + g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) \\ \Leftrightarrow A &= -g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{v(t) = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (1 - e^{-t/\tau})}$$

On trouve la position  $x(t)$  en intégrant  $v(t)$  :

$$x(t) = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (t + \tau e^{-t/\tau}) + B$$

Or,

$$\left. \begin{aligned} x(0) &= 0 \\ \Leftrightarrow 0 &= g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (0 + \tau) + B \\ \Leftrightarrow B &= -g\tau^2(\sin \alpha - f \cos \alpha) \end{aligned} \right\} \Rightarrow \boxed{x(t) = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) (t + \tau (e^{-t/\tau} - 1))}$$

3) La vitesse limite est la solution particulière  $v_p$  :

$$\boxed{\vec{v}_l = g\tau(\sin \alpha - f \cos \alpha) \vec{u}_x}$$

En effet, la présence de la force de frottements fluides dont la norme augmente avec la vitesse fait que la vitesse ne peut pas augmenter indéfiniment. La skieuse atteint une vitesse limite lorsque les frottement compensent la force motrice du mouvement. Ainsi,

$$\boxed{\vec{v}(t) = v_l (1 - e^{-t/\tau}) \vec{u}_x} \quad \text{et} \quad \boxed{\vec{\text{OM}}(t) = v_l (t + \tau (e^{-t/\tau} - 1)) \vec{u}_x}$$

4)

$$\boxed{v_l = \frac{mg}{\lambda}(\sin \alpha - f \cos \alpha)} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} m = 65 \text{ kg} \\ g = 10 \text{ m} \cdot \text{s}^{-2} \\ \lambda = 1 \text{ kg} \cdot \text{s}^{-1} \\ \alpha = 45^\circ \\ f = 0,9 \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{v_l = 46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1}}$$

On remarque que la vitesse limite est une fonction affine du poids. Ainsi, le manque de représentation des femmes dans les sports d'hiver, souvent justifié par une moins bonne performance pure, est biaisé par la répartition moyenne de leurs tailles (et donc de leurs poids) plus faible que la répartition moyenne des tailles (et donc poids) des hommes, rendant pour certains leurs records moins impressionnants.

5)

$$\begin{aligned} v(t_1) &= \frac{v_l}{2} \\ \Leftrightarrow \frac{v_l}{2} &= v_l(1 - e^{-t_1/\tau}) \\ \Leftrightarrow \frac{1}{2} &= 1 - e^{-t_1/\tau} \\ \Leftrightarrow e^{-t_1/\tau} &= \frac{1}{2} \\ \Leftrightarrow \boxed{t_1 = \tau \ln 2} &\quad \text{avec} \quad \tau = \frac{m}{\lambda} \quad \text{et} \quad \begin{cases} m = 65 \text{ kg} \\ \lambda = 1 \text{ kg}\cdot\text{s}^{-1} \end{cases} \\ \text{A.N. : } &\boxed{t_1 = 45 \text{ s}} \end{aligned}$$

- 6) En tombant à  $t = t_1$ , la skieuse a pour vitesse  $v_l/2$ . L'équation du mouvement sur  $\vec{u}_y$  ne change pas de forme, mais on multiplie  $f$  par 10, donc  $T = 10fmg$ . Ainsi, en posant  $t' = t - t_1$ , en projection sur  $\vec{u}_x$  et en négligeant  $\lambda$ ,

$$\ddot{x}(t') = g(\sin \alpha - 10f \cos \alpha) \Rightarrow \dot{x}(t') = gt'(\sin \alpha - 10f \cos \alpha) + v_l/2$$

On trouve le temps d'arrêt  $t'_a$  quand  $\dot{x}(t'_a) = 0$ , soit

$$t'_a = \frac{-v_l}{2g(\sin \alpha - 10f \cos \alpha)}$$

et la distance d'arrêt depuis le point de chute en intégrant  $\dot{x}(t')$  puis en prenant  $x(t'_a)$  :

$$\begin{aligned} x(t') &= \frac{1}{2}gt'^2(\sin \alpha - 10f \cos \alpha) + \frac{v_l t'}{2} \\ \Leftrightarrow \boxed{x(t'_a) = -\frac{v_l^2}{8g(\sin \alpha - 10f \cos \alpha)}} &\quad \text{avec} \quad \begin{cases} v_l = 46 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ g = 10 \text{ m}\cdot\text{s}^{-1} \\ \alpha = 45^\circ \\ f = 0,9 \end{cases} \\ \text{A.N. : } &\boxed{x(t'_a) = 4,7 \text{ m}} \end{aligned}$$