Correction du TD

I Notation complexe

1) Pour passer aux formes complexes, il faut s'assurer que **les grandeurs soient toutes exprimées en cosinus**, puisque c'est bien le cosinus la partie réelle d'une exponentielle complexe. Or, $\sin\theta = \cos(\pi/2 - \theta) = \cos(\theta - \pi/2)$, donc on a :

$$\begin{aligned} &\tau\frac{\mathrm{d}u}{\mathrm{d}t} + u(t) = E_0\cos(\omega t - \pi/2) \\ \Leftrightarrow\ &\tau\frac{\mathrm{d}\underline{u}}{\mathrm{d}t} + \underline{u}(t) = E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \Leftrightarrow\ &(1+\mathrm{j}\omega t)\underline{u} = E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{u} = \frac{E_0\mathrm{e}^{-\mathrm{j}\pi/2}\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{1+\mathrm{j}\omega t}} \end{aligned}$$

grâce au fait qu'en complexes, dériver revient à multiplier par $\mathrm{j}\omega$.

2) Ici, rien de particulier : on souligne x d'abord, puis on dérive en multipliant par $\mathrm{j}\omega$.

$$\begin{aligned} &\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + \omega_0^2 x(t) = KI_m\cos\omega t \\ \Leftrightarrow\ &(\mathrm{j}\omega)^2\underline{x} + 2\lambda\mathrm{j}\omega\underline{x} + {\omega_0}^2\underline{x} = KI_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t} \\ \Leftrightarrow\ &\boxed{\underline{x} = \frac{KI_m\mathrm{e}^{\mathrm{j}\omega t}}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + 2\lambda\mathrm{j}\omega}} \end{aligned}$$

II Filtre de Wien

1) Dans la limite très hautes fréquences, les condensateurs sont équivalents à des fils, donc $\underline{u} = 0$. Dans la limite très basses fréquences, les condensateurs sont cette fois équivalents à des interrupteurs ouverts. Aucun courant ne circule dans les résistances, et on a donc également $\underline{u} = 0$. Selon toute vraisemblance, c'est donc un filtre **passe-bande**.

2) On observe bien une résonance en tension, étant donné qu'on trouve un **maximum de l'amplitude pour** $\omega \neq 0$ **et** $\omega \neq \infty$.

3) On lit $\boxed{\omega_r = 10\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$, et on trouve les pulsations de coupure en traçant une droite horizontale à $H_{m,\max}/\sqrt{2} = 0{,}23$ (avec $H_{m,\max} = 0{,}33$) et en prenant les abscisses des intersections. On trouve alors

$$\boxed{\omega_1 = 2\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega_2 = 20\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}} \quad \text{donc} \quad \boxed{\Delta\omega = 18\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}}$$

En effet, l'axe des abscisses est en échelle logarithmique, il faut donc faire attention à la lecture.

4) Notons $\underline{Z}_{R/\!/C}$ l'impédance et $\underline{Y}_{R/\!/C}$ l'admittance de l'association RC parallèle. En utilisant cette impédance, on reconnaît un pont diviseur de tension :

$$\underline{H} = \frac{\underline{u}}{\underline{e}} = \frac{\underline{Z}_{R/\!/C}}{\underline{Z}_{R/\!/C} + \underline{Z}_R + \underline{Z}_C} \Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1 + (\underline{Z}_R + \underline{Z}_C)\,\underline{Y}_{R/\!/C}}$$

$$\Leftrightarrow \underline{H} = \frac{1}{1+\left(R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\underline{Y}_{R/\!/C}} = \frac{1}{1+\left(R+\dfrac{1}{\mathrm{j}C\omega}\right)\left(\dfrac{1}{R}+\mathrm{j}C\omega\right)}$$

$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{1}{3+\mathrm{j}\left(RC\omega - \dfrac{1}{RC\omega}\right)}}$$

En factorisant par 3 et en utilisant les notations introduites dans l'énoncé, on trouve

$$\underline{H} = \frac{1/3}{1+\dfrac{\mathrm{j}}{3}\left(x-\dfrac{1}{x}\right)} \Leftrightarrow \boxed{\underline{H} = \frac{H_0}{1+\mathrm{j}Q\left(x-\dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} H_0 = 1/3 \\ \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ Q = 1/3 \end{cases}}$$

Ce qui est remarquable avec ce montage, c'est que **le facteur de qualité est de 1/3 peu importe les valeurs de R et C**, tant que ce sont les mêmes R et C en série et en dérivation.

5) Par cette étude, on trouve que $\omega_r = \omega_0 = \frac{1}{RC}$; ainsi, on a simplement

$$\boxed{RC = 0{,}10\,\mathrm{Hz}}$$

III Modélisation d'un haut-parleur

1) **Système** : masse ;

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;

Position de la masse : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur ressort : $\overrightarrow{MA} = \ell\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur à vide : $\overrightarrow{OA} = \ell_0\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur relative :
$(\ell-\ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = \overrightarrow{MO} = -x\,\overrightarrow{u_x}$.

Bilan des forces :

1) Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Force de rappel du ressort $\overrightarrow{F}_{\text{ressort}} = k(\ell-\ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = k\overrightarrow{MO} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -\alpha\overrightarrow{v} = -\alpha\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$;
5) **Force excitatrice** $\overrightarrow{F} = KI_m\cos(\omega t)\,\overrightarrow{u_x}$.

Avec le PFD :

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_{\text{ressort}} + \overrightarrow{f} + \overrightarrow{F}$$

$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -kx - \alpha v + KI_m\cos(\omega t) \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} + \alpha\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} + kx = KI_m\cos(\omega t)}$$

2) Sous forme canonique, cela devient

$$\Leftrightarrow \boxed{\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{KI_m}{m}\cos(\omega t)}$$

$$\text{avec} \quad \boxed{\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}} \quad \text{et} \quad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\alpha}}$$

3) On sait que pour une entrée sinusoïdale, un système aura une solution homogène donnant un régime transitoire et une solution particulière de la forme de l'entrée : en RSF, on étudie le régime permanent où seule la solution particulière est conservée, et on pourra donc écrire $x(t) = X_m \cos(\omega t + \phi)$.

4) En passant en complexes,

$$(\mathrm{j}\omega)^2\underline{X} + \mathrm{j}\omega\frac{\omega_0}{Q}\underline{X} + {\omega_0}^2\underline{X} = \frac{KI_m}{m}$$

$$\Leftrightarrow \underline{X} = \frac{KI_m}{m} \times \frac{1}{{\omega_0}^2 - \omega^2 + \frac{\mathrm{j}}{Q}\omega\omega_0} \Leftrightarrow \boxed{\underline{X} = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{1}{1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2 + \mathrm{j}\frac{\omega}{Q\omega_0}}}$$

5) En réels, on trouve

$$\boxed{X(\omega) = |\underline{X}| = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{1}{\sqrt{\left(1 - \left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2 + \left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}}}$$

Elle est maximale quand le dénominateur est minimal. Après calcul, on trouve

$\mathbf{Q \leq 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega = 0 \quad \text{et} \quad X(0) = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}}$$

$\mathbf{Q > 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}} < \omega_0} \quad \text{et} \quad \boxed{X(\omega_r) = \frac{KI_m}{m{\omega_0}^2}\frac{Q}{\sqrt{1 - \frac{1}{4Q^2}}}}$$

De ce résultat, nous observons qu'il **n'y a pas toujours résonance en élongation**, et que **la résonance est d'autant aiguë que Q est élevé**.

6) Le déplacement est en quadrature de phase si la différence de phase est de $\pm\pi/2$. Sur le graphique de droite, on le trouve à $\omega = 1100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$. Or, c'est à $\omega = \omega_0$ qu'on trouve une quadrature de phase, puisqu'alors $\underline{X}$ est un imaginaire pur. Ainsi,

$$\omega_0 = 1100\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$$

On pourrait déterminer le facteur de qualité en trouvant que le maximum d'amplitude se trouve à $\omega_r = 900\,\mathrm{rad{\cdot}s^{-1}}$.

IV Résonance d'un circuit bouchon

1) On effectue un pont diviseur de tension aux bornes de l'impédance équivalente de L et C, avec $\underline{Y}_{\mathrm{eq}} = \mathrm{j}C\omega + 1/\mathrm{j}L\omega$:

$$\underline{U} = \frac{\underline{Z}_{\mathrm{eq}}}{\underline{Z}_{\mathrm{eq}} + R}E_0 = \frac{1}{1 + R\underline{Y}_{\mathrm{eq}}}E_0 = \frac{E_0}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}$$

en utilisant que $1/\mathrm{j} = -\mathrm{j}$.

2) L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U}| = \frac{E_0}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$$

3) On cherche $Q\omega_0 = \frac{R}{L}$ et $\dfrac{Q}{\omega_0} = RC$; on trouve donc

$$\boxed{Q = R\sqrt{\frac{C}{L}}}$$

4) On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{E_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{E_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) &= -1 \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1\\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 = \frac{\omega\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow \omega^2 - {\omega_0}^2 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega^2 - {\omega_0}^2 = \frac{\omega\omega_0}{Q}\\
\Leftrightarrow &\boxed{\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0}\\
\Rightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q} + 4{\omega_0}^2\\
\Leftrightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 + 4Q^2\right)\\
\Rightarrow \omega_{1,\pm} &= -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 + 4Q^2} \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1 + 4Q^2}\\
\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} &= \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}\right) \quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1 + 4Q^2}\right)
\end{aligned}$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1 - \sqrt{1 + 4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1 - \sqrt{1 + 4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1 + 4Q^2} - 1\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1 + 4Q^2} + 1\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

5) Sur le graphique, on trouve $U_{\max} = 5\,\mathrm{V} = E_0$. On a de plus $f_0 = 22{,}5\,\mathrm{kHz}$ et $\Delta f \approx 3\,\mathrm{kHz}$, d'où $\boxed{Q = \dfrac{f_0}{\Delta f} \approx 7{,}5}$. Avec l'expression de Q, on isole C :

$$Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \Leftrightarrow \boxed{C = \frac{Q^2 L}{R}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} Q = 7{,}5 \\ L = 1\,\mathrm{mH} \\ R = 1\,\mathrm{k\Omega} \end{cases}$$

$$\text{A.N. :} \quad \boxed{C = 5{,}6 \times 10^{-8}\,\mathrm{F}}$$

V Système à deux ressorts

1)

Système : masse ;

Référentiel : $\mathcal{R}_{\text{sol}}(O,x,y,t)$;

Position de la masse : $\overrightarrow{\mathrm{OM}} = x\,\overrightarrow{u_x}$;

Longueur ressort 1 : $x(t) - x_0(t)$;

Longueur ressort 2 : $L - x(t)$.

Bilan des forces :

1) Poids $\overrightarrow{P} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;
2) Réaction du support $\overrightarrow{R} = R\,\overrightarrow{u_y}$;
3) Rappel du ressort 1 $\overrightarrow{F}_1 = -k_1(\ell_1 - \ell_{10})\,\overrightarrow{u_x}$;
4) Rappel du ressort 2 $\overrightarrow{F}_2 = k_2(\ell_2 - \ell_{20})\,\overrightarrow{u_x}$;
5) Force de frottement fluide $\overrightarrow{f} = -h\overrightarrow{v} = -h\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$.

2) Avec le PFD, on trouve

$$m\overrightarrow{a} = \overrightarrow{P} + \overrightarrow{R} + \overrightarrow{F}_1 + \overrightarrow{F}_2 + \overrightarrow{f}$$
$$\Leftrightarrow m\begin{pmatrix} \dfrac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -k_1(\ell_1 - \ell_{10}) + k_2(\ell_2 - \ell_{20}) - hv \\ -mg + R \end{pmatrix}$$

La projection sur $\overrightarrow{u_y}$ montre que la réaction du support compense le poids. Sur l'axe $\overrightarrow{u_x}$ on trouve

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1(\ell_1 - \ell_{10}) + k_2(\ell_2 - \ell_{20})}$$

En développant les longueurs comme indiqué question 1, on a

$$\boxed{m\frac{\mathrm{d}^2 x}{\mathrm{d}t^2} + h\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t} = -k_1(x(t) - x_0(t) - \ell_{10}) + k_2(L - x(t) - \ell_{20})}$$

À l'équilibre les dérivées de x sont nulles, d'où

$$0 = -k_1(x(t) - x_0(t) - \ell_{10}) + k_2(L - x(t) - \ell_{20})$$

Ainsi, avec $x_{0,\text{eq}}(t) = 0$ et $L = \ell_{10} + \ell_{20}$ (d'après l'énoncé) puis $x(t) = x_{\text{eq}}$ (par définition), on a

$$0 = -k_1(x_{\text{eq}} - 0 - \ell_{10}) + k_2(\ell_{10} + \cancel{\ell_{20}} - x_{\text{eq}} - \cancel{\ell_{20}})$$
$$\Leftrightarrow (k_1 + k_2)(\ell_{10} - x_{\text{eq}}) = 0$$

Comme $k_1 + k_2 > 0$, on trouve

$$\boxed{x_{\text{eq}} = \ell_{10}}$$

3) Cette fois-ci, on garde $x_0(t)$ dans l'équation. Il vient alors

$$m\ddot{x} + h\dot{x} + (k_1 + k_2)(x - x_{\text{eq}}) = k_1 x_0(t)$$

et en effectuant le changement de variable $X = x - x_{\text{eq}}$, on trouve l'équation habituelle

$$\boxed{m\ddot{X} + h\dot{X} + kX = KX_{0m}\cos(\omega t)}$$

avec $k = k_1 + k_2$.

4) On a simplement $\underline{X}_0 = X_{0m}$, $\underline{X} = X_m e^{j\phi}$ et $\underline{V} = V_m e^{j\phi}$.

5) En utilisant l'équation différentielle mais en complexes et sous forme canonique, on trouve

$$(j\omega)^2\underline{X} + j\omega\frac{h}{m}\underline{X} + \frac{k}{m}\underline{X} = \frac{k_1}{m}X_{0m} \Leftrightarrow \underline{X} = \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + j\omega\dfrac{h}{m}}$$

Étant donné que $V = \frac{dX}{dt}$, $\underline{V} = j\omega\underline{X}$, soit

$$\begin{aligned}
\underline{V} &= \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{j\omega}{\dfrac{k}{m} - \omega^2 + j\omega\dfrac{h}{m}} \\
\Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1 X_{0m}}{m} \times \frac{1}{\dfrac{h}{m} - j\dfrac{k}{m\omega} + j\omega} \\
\Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1}{h - j\dfrac{k}{\omega} + jm\omega}X_{0m} \\
\Leftrightarrow \underline{V} &= \frac{k_1/h}{1 + j\left(\dfrac{m\omega}{h} - \dfrac{k}{h\omega}\right)}\underline{X}_0
\end{aligned}$$

Avec $Q\omega_0 = \frac{k}{h}$ et $\frac{Q}{\omega_0} = \frac{m}{h}$, on trouve bien

$$\boxed{\underline{V} = \frac{\alpha}{1 + jQ\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)}\underline{X}_0} \quad \text{avec} \quad \boxed{\begin{cases} \alpha = \dfrac{k_1}{h} \\ \omega_0 = \sqrt{\dfrac{k}{m}} \\ Q = \dfrac{\sqrt{km}}{h} \end{cases}}$$

6) L'amplitude réelle de la vitesse donne

$$V_m(\omega) = \frac{\alpha}{\sqrt{1 + Q^2\left(\dfrac{\omega}{\omega_0} - \dfrac{\omega_0}{\omega}\right)^2}}X_{0m}$$

qui est maximale pour $\omega = \omega_0$. On observe donc bien une résonance en vitesse pour cette pulsation, avec $V_{\max} = \alpha X_{0m}$.

VI Résonance d'intensité dans un circuit RLC parallèle

1) Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalente à cette association, et $\underline{Y}$ son admittance. On a

$$\underline{Y} = \frac{1}{R} + \frac{1}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}C\omega = \frac{\mathrm{j}L\omega + R + (\mathrm{j}C\omega)R(\mathrm{j}L\omega)}{\mathrm{j}RL\omega}$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\underline{Z} = \frac{\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}}$$

2) On a $\dfrac{\underline{U_0}}{\underline{I_0}} = \underline{Z}$ par définition de l'impédance, soit $\underline{U_0} = \underline{ZI_0} = \underline{Z}I_0$ (étant donné que l'intensité n'a pas de phase à l'origine). Ainsi

$$\underline{U_0} = \frac{I_0\mathrm{j}RL\omega}{\mathrm{j}L\omega + R - RLC\omega^2}$$

On rend cette équation plus lisible en mettant le dénominateur sous une forme adimensionnée en divisant par $\mathrm{j}L\omega$, ce qui donne

$$\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + \dfrac{R}{\mathrm{j}L\omega} + \mathrm{j}RC\omega} \Leftrightarrow \boxed{\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}\left(RC\omega - \frac{R}{L\omega}\right)}}$$

3) L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{U_0}| = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + \left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right)^2}}$$

Cette tension réelle est maximale si le dénominateur est minimal, donc si $\left(RC\omega - \dfrac{R}{L\omega}\right) = 0$: cela implique qu'il y a résonance si $\boxed{\omega = \omega_0 = 1/\sqrt{LC}}$. On trouve alors

$$\boxed{U(\omega_0) = U_{\max} = E_0}$$

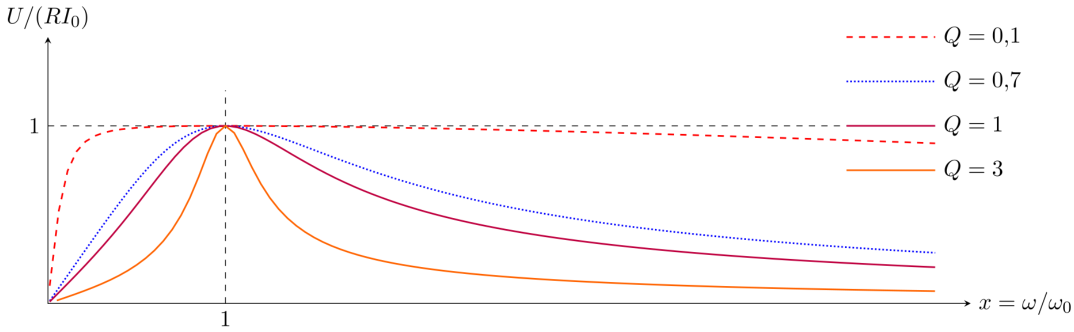
4) On cherche à faire apparaître ω_0 dans l'écriture de U :

$$RC\omega - \frac{R}{L\omega} = R\omega\frac{C\sqrt{L}}{\sqrt{L}} - \frac{R}{\omega}\frac{\sqrt{C}}{\sqrt{C}L} \qquad = R\omega\sqrt{\frac{C}{L}}\frac{1}{\omega_0} - \frac{R}{\omega}\sqrt{\frac{C}{L}}\omega_0 = R\sqrt{\frac{C}{L}}\left(x - \frac{1}{x}\right)$$

En nommant $Q = R\sqrt{\dfrac{C}{L}}$, on obtient finalement

$$\boxed{\underline{U_0} = \frac{RI_0}{1 + \mathrm{j}Q\left(x - \dfrac{1}{x}\right)}} \quad \text{soit} \quad \boxed{U = \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \dfrac{1}{x}\right)^2}}}$$

On trace pour différentes valeurs de Q, et on obtient :



5) On cherche donc les pulsations de coupure telles que $U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}}$, soit

$$U(\omega) = \frac{U_{\max}}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \frac{RI_0}{\sqrt{1 + Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2}} = \frac{RI_0}{\sqrt{2}} \Leftrightarrow \boxed{Q^2\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right)^2 = 1}$$

On prend la racine carrée de cette équation, **en prenant les deux solutions possibles** :

$$\begin{aligned}
Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) &= -1 \quad \text{et} \quad Q\left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) = 1 \\
\Leftrightarrow \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \left(\frac{\omega}{\omega_0} - \frac{\omega_0}{\omega}\right) \times \omega\omega_0 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow \omega^2 - {\omega_0}^2 &= -\frac{\omega\omega_0}{Q} \quad \text{et} \quad \omega^2 - {\omega_0}^2 = \frac{\omega\omega_0}{Q} \\
\Leftrightarrow &\boxed{\omega^2 + \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0} \quad \text{et} \quad \boxed{\omega^2 - \frac{\omega_0}{Q}\omega - {\omega_0}^2 = 0} \\
\Rightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q} + 4{\omega_0}^2 \\
\Leftrightarrow \Delta &= \frac{{\omega_0}^2}{Q^2}\left(1 + 4Q^2\right) \\
\Rightarrow \omega_{1,\pm} = -\frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} &\quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q} \pm \frac{\omega_0}{2Q}\sqrt{1+4Q^2} \\
\Leftrightarrow \omega_{1,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(-1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right) &\quad \text{et} \quad \omega_{2,\pm} = \frac{\omega_0}{2Q}\left(1 \pm \sqrt{1+4Q^2}\right)
\end{aligned}$$

De ces quatre racines, seules deux sont positives : la solution avec $-1-\sqrt{1+4Q^2}$ est évidemment négative, et celle avec $1-\sqrt{1+4Q^2}$ également. Ainsi, il ne nous reste que

$$\omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} - 1\right) \quad \text{et} \quad \omega_1 = \frac{\omega_0}{2Q}\left(\sqrt{1+4Q^2} + 1\right)$$

Il ne reste qu'à calculer la différence pour avoir la bande passante :

$$\boxed{\Delta\omega = \omega_2 - \omega_1 = \frac{\omega_0}{Q}}$$

6) $\omega_0/\Delta\omega$ est directement Q, donc on a

$$A_c = Q = R\sqrt{\frac{C}{L}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} R = 7\,\Omega \\ L = 1{,}2 \times 10^{-8}\,\mathrm{H} \\ C = 2{,}3 \times 10^{-10}\,\mathrm{F} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \boxed{A_c = 5{,}2}$$

L'acuité augmente avec la résistance : c'est normal puisque la résistance est en parallèle du circuit, donc une absence de résistance signifie ici R infinie (pour qu'aucun courant ne la traverse).

VII Condition de résonance

1) Soit $\underline{Z}$ l'impédance équivalent à l'association en parallèle de R et C. On a

$$\underline{Z} = \frac{R/\mathrm{j}C\omega}{R + 1/\mathrm{j}C\omega} = \frac{R}{1 + \mathrm{j}RC\omega}$$

En utilisant un pont diviseur de tension, on trouve

$$\underline{u} = \frac{\underline{Z}}{\underline{Z} + \mathrm{j}L\omega}\underline{e} = \frac{1}{1 + \mathrm{j}L\omega/\underline{Z}}\underline{e}$$
$$\Leftrightarrow \underline{u} = \frac{\underline{e}}{1 + \mathrm{j}\frac{L\omega}{R} - LC\omega^2} = \frac{\underline{e}}{1 + 2\mathrm{j}\xi x - x^2}$$

2) L'amplitude réelle est

$$U = |\underline{u}| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x)^2 + (2\xi x)^2}}$$

On trouve le maximum de cette amplitude quand le dénominateur est **non nul** et minimal, c'est-à-dire

$$U(\omega_r) = U_{\max} \Leftrightarrow \left(1 - x^2\right)^2 + (2\xi x)^2 \text{ minimal}$$

Soit $X = x^2$, et $f(X) = (1-X)^2 + 4\xi^2 X$, la fonction que l'on cherche à minimiser : on cherche donc quand est-ce que sa dérivée est nulle, c'est-à-dire

$$f'(X_r) = 0 \Leftrightarrow -2\,(1 - X_r) + 4\xi^2 = 0 \Leftrightarrow X_r - 1 = -2\xi^2 \Leftrightarrow X_r = 1 - 2\xi^2$$
$$\Leftrightarrow \boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2}}$$

ce qui n'est défini **que si** $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$. Ainsi,

$\boldsymbol{\xi \geq 1/\sqrt{2}}$: **pas de résonance**, l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega = 0 \quad \text{et} \quad U(0) = E_0}$$

$\boldsymbol{\xi < 1/\sqrt{2}}$: l'amplitude est maximale pour

$$\boxed{\omega_r = \omega_0\sqrt{1 - 2\xi^2} < \omega_0}$$