/38 E1 Optique d'un périscope *(D'après ENAC 2024)*

L'entrée d'un périscope est constituée de deux miroirs plans $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, circulaires et de centres respectifs S_1 et S_2 (Figure 1). Après réflexions réflexions sur $\mathcal{M}_1$ et $\mathcal{M}_2$, la lumière entre dans un système de deux lentilles $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$, assimilées à des lentilles minces de centres respectifs O_1 et O_2. Les miroirs sont inclinés d'un angle de 45° par rapport à l'axe optique du système représenté en pointillés.

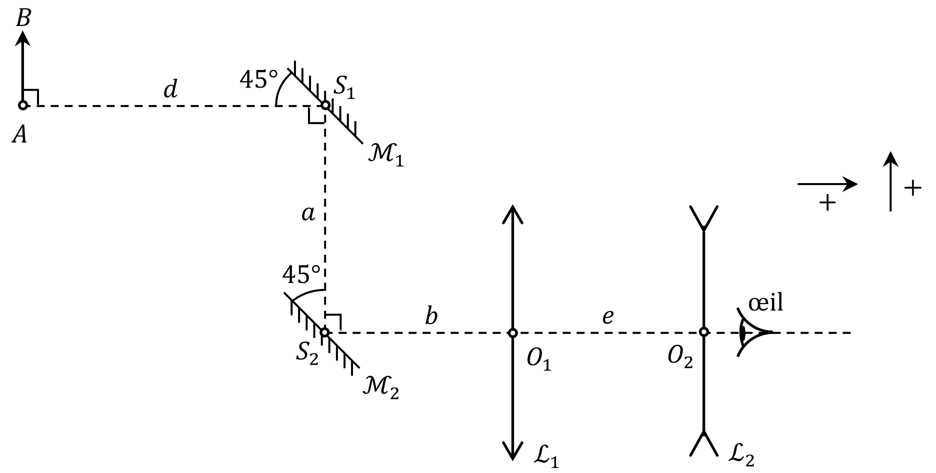

Figure 1 – Schéma du périscope.

L'orientation algébrique de l'axe optique ainsi que celle de l'axe transversal sont indiquées sur la figure. Les distances focales images algébriques de $\mathcal{L}_1$ et $\mathcal{L}_2$ sont respectivement $f_1' = 1{,}0\,\text{m}$ et $f_2' = -0{,}125\,\text{m}$. Un œil emmétrope (sans défaut) est placé juste derrière $\mathcal{L}_2$. Le périscope $\mathcal{S}_p$ est donc l'ensemble catadioptrique $\{\mathcal{M}_1,\mathcal{M}_2,\mathcal{L}_1,\mathcal{L}_2\}$. On observe un objet placé dans un plan transversal, en avant de $\mathcal{S}_p$.

On introduit les distances $a = S_2S_1 > 0$, $b = S_2O_1 > +$, $e = O_1O_2 > 0$ et $d = AS_1 > 0$. Dans tout l'exercice, on admet que les lentilles fonctionnent dans les conditions de Gauss.

/3 $\boxed{1}$ Justifier simplement que le système est équivalent à une observation de AB sur un seul axe optique. Donner alors la distance AO_1 et dessiner le schéma équivalent.

Réponse

Dans cet exercice, les deux miroirs ne font que renvoyer l'objet AB à une distance $AO_1 = a + b + d$ (1) de la lentille 1. En effet, un miroir ne **modifie pas les distances** (1) objet-image mais juste l'angle. En faisant continuer le rayon de S_1 à S_2 par le miroir $\mathcal{M}_1$ (dans le « monde miroir »), on garde le même fonctionnement géométrique, et de même pour $\mathcal{M}_2$. On se retrouve alors avec le simple problème de lunette terrestre suivant :

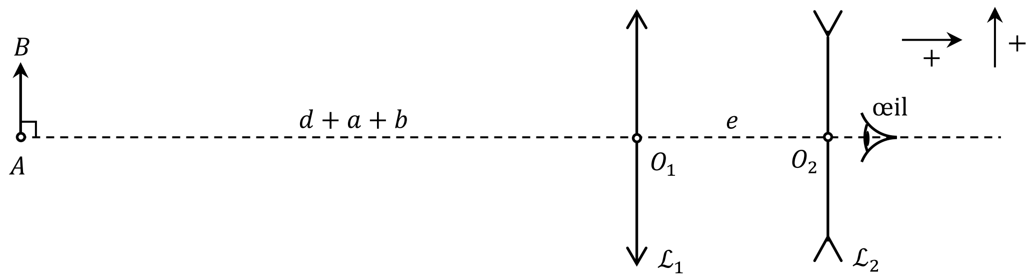

Figure 2 – Schéma simplifié (1)

Pour les questions suivantes, indiquer la ou les bonnes réponses clairement et en toutes lettres (« Réponse X »), en justifiant entièrement votre choix.

/9 $\boxed{2}$ L'objet AB est placé à grande distance du périscope, suffisamment loin pour que d puisse être considéré infini. On note e_0 la valeur de e permettant à l'œil d'observer AB à travers $\mathcal{S}_p$ sans accommoder. Exprimer e_0 :

A) $e_0 = f_1' - f_2'$ B) $e_0 = f_1'$ C) $e_0 = f_2'$ D) $e_0 = f_1' + f_2'$

Réponse

Réponse D. On représente la situation avec un schéma de principe (1) :

$$
\overline{\mathrm{AB}} \xrightarrow[\mathrm{O}_1]{\mathcal{L}_1} \overline{\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1} \xrightarrow[\mathrm{O}_2]{\mathcal{L}_2} \overline{\mathrm{A'B'}}
$$

$$
-\infty \longrightarrow \mathrm{A}_1 = \mathrm{F}'_1 \qquad \mathrm{A}' = +\infty
$$

$$
\mathrm{A}_1 = \mathrm{F}_2 \longleftarrow \mathrm{A}' = +\infty
$$

En effet, avec AB à l'infini, son image se situe dans le plan focal image π'_1 de $\mathcal{L}_1$, soit $\boxed{\mathrm{A}_1 = \mathrm{F}'_1}$ (1). De plus, un œil emmétrope voit net sans accommoder un objet provenant de l'infini (1), donc l'image finale $\mathrm{A'B'}$ par $\mathcal{S}_p$ doit être à l'infini. Pour cela, l'image intermédiaire doit se situer dans le plan focal objet π_2 de $\mathcal{L}_2$, soit $\boxed{\mathrm{A}_1 = \mathrm{F}_2}$ (1) : c'est un **système afocal** (1) avec $\mathrm{F}'_1 = \mathrm{F}_2$. Ainsi,

$$
\begin{aligned}
& e_0 \overset{(1)}{=} \overline{\mathrm{O}_1\mathrm{O}_2} && \text{On décompose}\\
\Leftrightarrow\ & e_0 = \underbrace{\overline{\mathrm{O}_1\mathrm{F}'_1}}_{=f'_1 (1)} + \underbrace{\overline{\mathrm{F}'_1\mathrm{O}_2}}_{=\overline{\mathrm{F}_2\mathrm{O}_2}} && \overline{\mathrm{F}_2\mathrm{O}_2} = \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{F}'_2}\ (1)\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{e_0 \overset{(1)}{=} f'_1 + f'_2}
\end{aligned}
$$

/9 $\boxed{3}$ L'objet étant encore à l'infini, on règle $\mathcal{S}_p$ de telle sorte que $e = e_0 - \varepsilon$, où $\varepsilon > 0$, $\varepsilon \ll f'_2$ et $\varepsilon \ll f'_1$. Que peut-on affirmer ?

A) L'image de AB par $\mathcal{S}_p$ est réelle.

B) L'image de AB par $\mathcal{S}_p$ est virtuelle.

C) L'œil peut observer une image nette à travers $\mathcal{S}_p$.

D) L'œil ne peut pas observer d'image nette à travers $\mathcal{S}_p$.

On donne le développement asymptotique (approximation) suivant :

$$
\frac{1}{1+x} \underset{x \ll 1}{\sim} 1 - x
$$

Réponse

Réponses B et C. AB étant encore à l'infini, on a toujours $\mathrm{A}_1\mathrm{B}_1$ située en F'_1. La relation de conjugaison de la seconde lentille donne :

$$
\begin{aligned}
& \frac{1}{f'_2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{F}'_1}} && \text{On développe } \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{F}'_1}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{f'_2} \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'}} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{O}_1} + f'_1} && \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{O}_1} = \varepsilon - e_0\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{f'_2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'}} - \frac{1}{\varepsilon - (\cancel{f'_1} + f'_2) + \cancel{f'_1}} && \text{On change le } - \text{ en } +\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{f'_2} \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'}} + \frac{1}{f'_2 - \varepsilon} && \text{On fait apparaître } \varepsilon/f'_2 \text{ pour le développement}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{f'_2} \overset{(1)}{=} \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'}} + \frac{1}{f'_2\left(1 - \frac{\varepsilon}{f'_2}\right)} && \text{On isole } \overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'} \text{ et on développe}\\
\Leftrightarrow\ & \frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'}} \underset{(1)}{\overset{(1)}{\approx}} \frac{1}{f'_2} - \frac{1}{f'_2}\left(1 + \frac{\varepsilon}{f'_2}\right) && \text{On simplifie}\\
\Leftrightarrow\ & \boxed{\frac{1}{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'}} \overset{(1)}{\approx} -\frac{\varepsilon}{f'^2_2}}
\end{aligned}
$$

Ainsi, $\boxed{\overline{\mathrm{O}_2\mathrm{A}'} < 0}$ (1), donc l'image se forme **avant** $\mathcal{L}_2$: elle est **virtuelle**. (1)

De plus, la distance $\mathrm{O}_2\mathrm{A}$ sera suffisamment grande pour être vue par l'œil **en accommodant**. (1)

/3 **4** L'objet est maintenant placé à distance finie. On note A_1B_1 l'image de AB par le système $\{\mathcal{M}_1, \mathcal{M}_2, \mathcal{L}_1\}$ et $p_1' = \overline{O_1A_1}$. Exprimer p_1' :

A) $p_1' = \dfrac{f_1'(a+b+d)}{a+b+d-f_1'}$ B) $p_1' = \dfrac{f_1'(a+b+d)}{a+b+d+f_1'}$ C) $p_1' = \dfrac{f_1'(a+b+e)}{a+b+d+f_1'}$ D) $p_1' = \dfrac{f_1'd}{d-f_1'}$

Réponse

Réponse A. Grâce au schéma de la Question 1, la relation de conjugaison pour $\mathcal{L}_1$ donne

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f_1'} &\overset{①}{=} \frac{1}{p_1'} - \frac{1}{-(d+a+b)} && \text{On isole } p_1' \\
\Leftrightarrow \frac{1}{p_1'} &= \frac{1}{f_1'} - \frac{1}{d+a+b} && \text{On met sur même dénominateur} \\
\Leftrightarrow \frac{1}{p_1'} &\overset{①}{=} \frac{d+a+b-f_1'}{f_1'(d+a+b)} && \text{On inverse} \\
\Leftrightarrow &\boxed{p_1' \overset{①}{=} \frac{f_1'(d+a+b)}{d+a+b-f_1'}}
\end{aligned}$$

◇

/3 **5** Quelle est alors la taille (grandeur algébrique) $\overline{A_1B_1}$ de cette image intermédiaire ?

A) $\overline{A_1B_1} = \dfrac{f_1'}{f_1'+a+b+d}\overline{AB}$ B) $\overline{A_1B_1} = \dfrac{f_1'}{f_1'+f}\overline{AB}$

C) $\overline{A_1B_1} = \dfrac{f_1'}{f_1'-d}\overline{AB}$ D) $\overline{A_1B_1} = \dfrac{f_1'}{f_1'-a-b-d}\overline{AB}$

Réponse

Réponse A. Avec le grandissement, on a

$$\begin{aligned}
\gamma = \frac{\overline{A_1B_1}}{\overline{AB}} &\overset{①}{=} \frac{\overline{O_1A_1}}{\overline{O_1A}} && \text{On remplace par les distances} \\
\Leftrightarrow \overline{A_1B_1} &\overset{①}{=} \frac{p_1'}{-(a+b+d)}\overline{AB} && p_1' = \tfrac{f_1'(d+a+b)}{d+a+b-f_1'} \\
\Leftrightarrow \overline{A_1B_1} &= \frac{-f_1'}{a+b+d-f_1'}\overline{AB} && \text{On réarrange} \\
\Leftrightarrow &\boxed{\overline{A_1B_1} \overset{①}{=} \frac{f_1'}{f_1'-a-b-d}\overline{AB}}
\end{aligned}$$

◇

/4 **6** L'image $\overline{A'B'}$ de AB par $\mathcal{S}_p$ se forme maintenant en avant de $\mathcal{L}_2$, à une distance $\overline{A'O_2} = d_m$, avec $d_m = 25\,\text{cm}$, et telle que $\overline{A'B'} = 1\,\text{mm}$.

On note $\theta > 0$ l'angle sous lequel l'image AB par $\mathcal{S}_p$ est vue par l'observataire (on rappelle que l'œil est derrière et à proximité immédiate de $\mathcal{L}_2$). Que peut-on affirmer ?

A) $\theta \approx 10^{-3}\,\text{rad}$ B) $\theta \approx 4 \times 10^{-3}\,\text{rad}$ C) L'image est ponctuelle pour l'œil. D) L'image est étendue pour l'œil.

Réponse

Réponses B et D. L'angle θ sous lequel est vu A'B' est tel que, en utilisant l'approximation des petits angles (le système est dans les conditions de Gauss ①) :

$$\tan(\theta) \approx \theta \overset{①}{=} \frac{\overline{A'B'}}{d_m} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} \overline{A'B'} = 1\,\text{mm} \\ d_m = 250\,\text{mm} \end{cases}$$

$$\text{A.N. : } \underline{\theta \overset{①}{\approx} 4 \times 10^{-3}\,\text{rad}}$$

Ceci est plus de dix fois plus grand que le pouvoir de résolution de l'œil $\theta_{\min} = 3 \times 10^{-4}\,\text{rad}$ ①. Ainsi l'image est étendue.

◇

/4 7 Pour un objet à distance infinie, de quelle distance $\Delta e > 0$ faut-il déplacer $\mathcal{L}_2$ depuis la position précédente pour retrouver le réglage initial $e = e_0$?

A) $\Delta e = 1{,}0\,\mathrm{mm}$ B) $\Delta e = 1{,}25\,\mathrm{cm}$ C) $\Delta e = 5{,}0\,\mathrm{cm}$ D) $\Delta e = 12{,}5\,\mathrm{cm}$

Réponse

Réponse D. L'image intermédiaire revient en F_1'. Depuis la situation précédente où $\overline{\mathrm{O_2A'}} = -d_m$, on a $e = e_0 + \Delta e$ avec Δe à trouver. Ainsi, avec 3 chiffres significatifs pour répondre à la question,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{f_2'} &\overset{1}{=} \frac{1}{-d_m} - \frac{1}{\overline{\mathrm{O_2F_1'}}} && \overline{\mathrm{O_2F_1'}} = \overline{\mathrm{O_2O_1}} + \overline{\mathrm{O_1F_1'}}\\
\Leftrightarrow \frac{1}{f_2'} &= -\frac{1}{d_m} - \frac{1}{-(e_0 + \Delta e) + f_1'} && e_0 = f_1' + f_2'\\
\Leftrightarrow \frac{1}{f_2'} &= -\frac{1}{d_m} - \frac{1}{-(\cancel{f_1'} + f_2' + \Delta e) + \cancel{f_1'}} && \text{On isole } \Delta e\\
\Leftrightarrow \frac{1}{f_2' + \Delta e} &\overset{1}{=} \frac{1}{f_2'} + \frac{1}{d_m} && \text{Même dénominateur}\\
\Leftrightarrow \frac{1}{f_2' + \Delta e} &= \frac{d_m + f_2'}{f_2' d_m} && \text{On inverse, isole, puis même dénominateur}\\
\Leftrightarrow \Delta e &= \frac{f_2' d_m}{d_m + f_2'} - f_2' \times \frac{d_m + f_2'}{d_m + f_2'}\\
\Leftrightarrow &\boxed{\Delta e \overset{1}{=} \frac{-f_2'^2}{d_m + f_2'}} \quad \text{avec} \quad \begin{cases} f_2' = -0{,}125\,\mathrm{m} \\ d_m = 25 \times 10^{-2}\,\mathrm{m} \end{cases}
\end{aligned}$$

A.N. : $\underline{\Delta e \overset{1}{=} 1{,}25 \times 10^{-1}\,\mathrm{m}}$