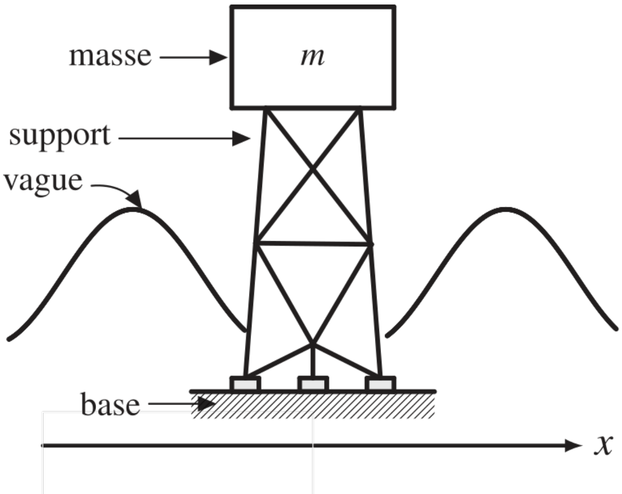
/66 P1 Mouvements d'une plateforme *offshore* *(CCP modélisation 2019)*

On s'intéresse à la résolution d'une équation du mouvement dans une approche classique de la mécanique afin d'étudier le mouvement simplifié d'une plateforme en mer. Le modèle envisagé est un système à un degré de liberté considéré comme un oscillateur harmonique : une masse est reliée à un ressort, avec amortissement.

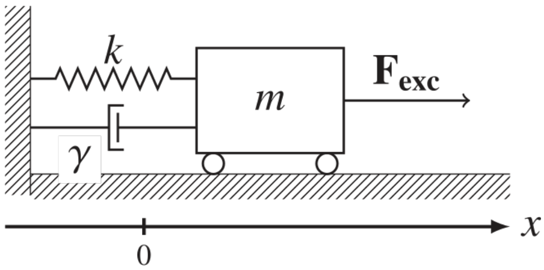
On considère le mouvement d'une plateforme en mer soumise à un courant marin. Sa partie supérieure de masse $m = 110$ tonnes est considérée comme rigide et le mouvement principal de la plateforme a lieu suivant x (cf figure 1(a)).

Afin d'étudier le mouvement de cette plateforme, on la représente par une masse m, liée à un ressort de constante de raideur k et à un amortisseur de constante d'amortissement γ comme schématisé sur la figure 1(b). La masse se déplace selon une seule direction, parallèle à l'axe Ox en fonction du temps t.

Ainsi, les projections sur l'axe Ox de la position, de la vitesse et de l'accélération de la masse en fonction du temps sont notées respectivement $x(t)$, $\dot{x}(t)$ et $\ddot{x}(t)$. Le vecteur unitaire de l'axe Ox est noté $\overrightarrow{u_x}$.



(a)



(b)

La masse se déplace sur la base horizontale sans frottements sur le support. La position d'équilibre de la masse sera choisie à $x = 0$.

La force totale $\overrightarrow{F_{tot}}$ agissant sur la masse correspond à la réaction normale à la base horizontale $\overrightarrow{R_N}$, à la force de frottement $\overrightarrow{F_d} = -\gamma\vec{v}$ où γ est la constante d'amortissement positive, permettant de prendre en compte l'effet de l'eau environnante, à la force de rappel $\overrightarrow{F_k}$ du ressort et au poids $\vec{P}$ de la masse m.

Outils mathématiques

$$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \quad \text{et} \quad \cos^2(\alpha) + \sin^2(\alpha) = 1$$

/8 $\boxed{1}$ Établir entièrement le système d'étude.

Réponse

(1) ◇ Système : la plateforme M de masse m.

(1) ◇ Référentiel d'étude : Référentiel terrestre $\mathcal{R}(O, x, y)$ supposé galiléen.

(1) ◇ Base de projection : Base cartésienne (O, x, y) de vecteurs unitaires $\overrightarrow{u_x}$ et $\overrightarrow{u_y}$. L'origine est prise à la position d'équilibre comme indiqué dans l'énoncé. $\overrightarrow{u_y}$ est orienté vers le haut.

(1) ◇ Repérage : $\overrightarrow{\mathrm{OM}}(t) = x(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\vec{v}(t) = \dot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$; $\vec{a}(t) = \ddot{x}(t)\,\overrightarrow{u_x}$.

◇ Bilan des forces :

(1) 1) Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\overrightarrow{u_y}$;

(1) 2) Réaction du support : $\overrightarrow{R_N} = R_N\,\overrightarrow{u_y}$;

(1) 3) Force de rappel du ressort : $\vec{F} = -k(\ell - \ell_0)\,\overrightarrow{u_x} = -kx\,\overrightarrow{u_x}$, car $\ell = \ell_0 + x$;

(1) 4) Force de frottement $\overrightarrow{F_d} = -\gamma\vec{v} = -\gamma\dot{x}\,\overrightarrow{u_x}$

◇

/5 $\boxed{2}$ Déterminer l'équation différentielle du mouvement de la masse m. La mettre sous la forme :

$$\ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0 \tag{1}$$

On exprimera ω_0 et ξ en fonction de k, m et γ. On rappelle que $\xi = Q/2$.

Réponse

Principe fondamental de la dynamique $\quad \sum \vec{F} \overset{1}{=} m\vec{a} = m\dfrac{d\vec{v}}{dt}$

$$\Leftrightarrow \vec{P} + \vec{R_N} + \vec{F} + \vec{F_d} = m\vec{a}$$

Sur $\overrightarrow{u_x}$ $\quad m\ddot{x} + kx + \gamma\dot{x} \overset{1}{=} 0$

Forme canonique $\quad \ddot{x} + \dfrac{\gamma}{m}\dot{x} + \dfrac{k}{m} \overset{1}{=} 0$

Soit $\quad \ddot{x} + 2\xi\omega_0\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

avec $\quad \omega_0 \overset{1}{=} \sqrt{\dfrac{k}{m}} \quad$ et $\quad 2\xi\omega_0 a = \dfrac{\gamma}{m}$

Ainsi, $\quad \xi = \dfrac{\gamma}{2m\omega_0} = \dfrac{\gamma}{2m}\sqrt{\dfrac{m}{k}} \Leftrightarrow \boxed{\xi \overset{1}{=} \dfrac{\gamma}{2}\sqrt{\dfrac{1}{mk}}}$

◇

/7 $\boxed{3}$ Dans le cas où $\xi < 1$, justifier que $x(t)$ peut prendre la forme suivante :

$$x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

où Ω est la pseudo-pulsation que l'on exprimera en fonction de ω_0 et ξ.

Réponse

On injecte la forme générique $x(t) = K\mathrm{e}^{rt}$ 1 pour trouver l'équation caractéristique :

$$r^2 + 2\xi\omega_0\, r + {\omega_0}^2 \overset{1}{=} 0$$

Discriminant : $\quad \Delta = 4\xi^2\,{\omega_0}^2 - 4{\omega_0}^2 \overset{1}{=} 4{\omega_0}^2(\xi^2 - 1)$

Or, $\xi < 1$, donc $\Delta < 0$ 1; ainsi

$$r_{1,2} \overset{1}{=} \frac{-2\xi\omega_0 \pm \mathrm{j}\sqrt{-\Delta}}{2}$$

$$\Leftrightarrow r_{1,2} = -\omega_0\xi \pm \mathrm{j}\underbrace{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}_{=\Omega\,1}$$

En réinjectant dans la forme générique, on trouve donc une exponentielle réelle décroissante multipliée à une exponentielle complexe oscillante, qu'on écrit

$$x(t) \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}[A\cos\Omega t + B\sin(\Omega t)]$$

◇

/4 $\boxed{4}$ En remarquant qu'à $t = 0$, $x(0) = x_0$ et $\dot{x}(0) = v_0$, déterminer les expressions des deux coefficients réels A et B en fonction de x_0, v_0, ξ, ω_0 et Ω.

Réponse

De plus, les conditions initiales sont, à $t = 0$, $x(0) = x_0$, donc $A = x_0$. 1 Calculons de plus la dérivée :

$$\dot{x}(t) \overset{1}{=} \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,[-A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)] - \xi\omega_0\mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\,[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$$

Or $\dot{x}(0) = v_0$ soit $\quad B\Omega - \xi\omega_0 A \overset{1}{=} v_0 \Leftrightarrow B = \dfrac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\Omega} \Leftrightarrow \boxed{B \overset{1}{=} \dfrac{v_0 + \xi\omega_0 x_0}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}}}$

◇

/7 [5] Montrer que l'on peut aussi obtenir une forme de la solution du type :

$$x(t) = X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t} \cos(\Omega t + \varphi) \tag{2}$$

On exprimera X_m et φ en fonction de A et B. Quelques outils mathématiques sont donnés en début de cet exercice.

Réponse

On nous donne $$x(t) = X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t} \cos(\Omega t + \varphi)$$
et $$\cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)$$
soit $$x(t) \overset{①}{=} X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t} [\cos(\Omega t)\cos(\varphi) - \sin(\Omega t)\sin(\varphi)]$$

Par identification avec $x(t) = \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}[A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)]$, il vient

$$X_m \cos(\varphi) \overset{①}{=} A \quad \text{et} \quad -X_m \sin(\varphi) \overset{①}{=} B$$

Ainsi $$\tan(\varphi) \overset{①}{=} -\frac{B}{A} \quad \text{et} \quad A^2 + B^2 = X_m^2(\cos^2(\varphi) + \sin^2(\varphi)) \overset{①}{=} X_m^2$$

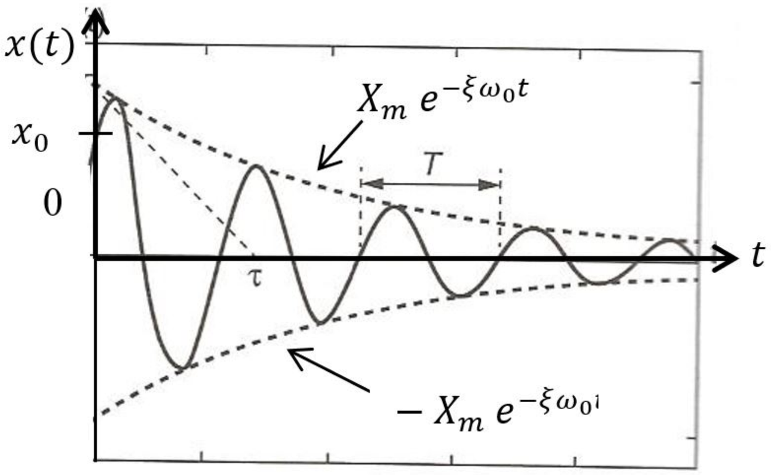
D'où $$\boxed{\varphi \overset{①}{=} -\arctan\left(\frac{B}{A}\right)} \quad \text{et} \quad \boxed{X_m \overset{①}{=} \sqrt{A^2 + B^2}}$$

◇

/4 [6] Représenter qualitativement $x(t)$ en fonction de t et indiquer sur le tracé $X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}$, x_0 et $T = 2\pi/\Omega$ la pseudo-période.

Réponse

Allure du graphe ci-contre :



◇

/1 [7] Justifier qualitativement que l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t. À quoi cela est-il dû ?

Réponse

À cause des frottements, l'énergie mécanique $\mathcal{E}(t)$ est une fonction décroissante de t.

◇

/6 [8] On envisage deux temps successifs t_1 et t_2 pour lesquels les déplacements sont x_1 et x_2, tels que $t_2 > t_1$ et $t_2 - t_1 = T$, où T est la période des oscillations amorties. En utilisant l'équation (2) et en considérant que $\xi \ll 1$, montrer que :

$$\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \approx 2\pi\xi$$

Réponse

Cela fait penser au décrément logarithmique :

$$\delta = \ln\frac{x(t)}{x(t+T)} = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{①}{=} \ln\left(\frac{X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0 t}\cos(\Omega t + \varphi)}{X_m \mathrm{e}^{-\xi\omega_0(t+T)}\cos(\Omega(T+t) + \varphi)}\right) \overset{①}{=} \ln\left(\mathrm{e}^{\xi\omega_0 T}\right)$$

car cosinus est une fonction périodique de période T. Soit :

$$\delta = \ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{1}{=} \xi\omega_0 T = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\Omega} = \xi\omega_0 \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-\xi^2}} \Leftrightarrow \boxed{\delta \overset{1}{=} \xi \frac{2\pi}{\sqrt{1-\xi^2}}}$$

Or par hypothèse, $\xi \ll 1$, donc $1-\xi^2 \approx 1$ 1 ; alors

$$\boxed{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right) \overset{1}{\approx} 2\pi\xi}$$

/10 $\boxed{9}$ Toujours dans le cas où $\xi \ll 1$, le relevé du déplacement horizontal de la plateforme en fonction du temps est représenté en figure 2 ci-dessous. En utilisant les deux points qui sont indiqués sur la figure 2, déterminer les valeurs numériques de k, ξ et γ (avec leurs unités). Comment ce tracé serait-il modifié si ξ augmentait (un rapide graphique peut permettre d'être plus explicite) ?

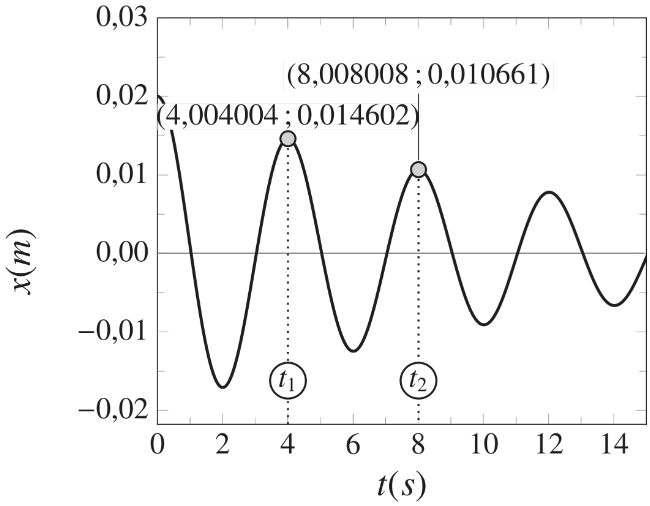


FIGURE 1 – Déplacement horizontal de la plateforme dans le temps.

Réponse

On lit $x_1 = 0{,}014\,602$ m et $t_1 = 4{,}004\,004$ s, puis $x_2 = 0{,}010\,661$ m et $t_2 = 8{,}008\,008$ s. D'après l'énoncé, on a $T = t_2 - t_1$ et comme $\xi \ll 1$ alors

$$\omega_0 \overset{1}{\approx} \Omega \overset{1}{=} \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{t_2 - t_1}$$

car $\Omega = \omega_0\sqrt{1-\xi^2}$. De plus, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ donc

$$\boxed{k = m\omega_0^2 \overset{1}{=} m\frac{4\pi^2}{(t_2-t_1)^2}} \Rightarrow \underline{k \overset{1}{=} 2{,}71 \times 10^5\ \mathrm{N{\cdot}m^{-1}}}$$

et

$$\boxed{\xi \overset{1}{=} \frac{\ln\left(\frac{x_1}{x_2}\right)}{2\pi}} \Rightarrow \underline{\xi \overset{1}{=} 5{,}01 \times 10^{-2}}$$

On trouve en effet comme attendu $\xi \ll 1$: c'est cohérent.

Enfin, d'après Q1,

$$\xi = \frac{\gamma}{2}\sqrt{\frac{1}{mk}}$$

soit

$$\boxed{\gamma \overset{1}{=} 2\xi\sqrt{mk}} \Rightarrow \underline{\gamma \overset{1}{=} 1{,}73 \times 10^4\ \mathrm{kg{\cdot}s^{-1}}}$$

Si ξ augmentait, l'amortissement augmenterait, la décroissance exponentielle serait plus rapide, on verrait moins d'oscillations 1 ; la pseudo-pulsation Ω diminuerait et la pseudo-période $T = 2\pi/\Omega$ augmenterait. 1
