Domáca úloha číslo 09 – postupnosti a limita postupnosti

Dôležité limity – naspamäť.

$$\lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{a}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n}=1 \qquad \lim_{n\to\infty}\sqrt[n]{n!}=\infty \qquad \lim_{n\to\infty}\frac{n!}{n^n}=0$$

$$\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{1!}+\frac{1}{2!}+\ldots+\frac{1}{n!}\right)=e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)=e \qquad \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{b}{n}\right)=e^b$$

$$\lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{e}-1\right)=1 \qquad \lim_{n\to\infty} n\left(\sqrt[n]{a}-1\right)=\ln a$$

1. Napíšte päť prvých členov postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$. Nakreslite graf prvých pár členov postupnosti a vyslovte hypotézu o ohraničenosti a monotónnosti postupnosti $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$, ak pre všetky $n \in N$ platí

   a) $a_n=\frac{n-1}{n+1}$

   b) $a_n=\frac{n+3}{2n-1}$

   c) $a_n=\frac{n^2+n}{n^2+1}$

   d) $a_n=\frac{n^2}{n+1}$

   e) $a_n=n^2-1$

   f) $a_n=n^2-n$

   g) $a_n=\frac{1}{n^2+1}$

   h) $a_n=(-n)^{n-2}$

   i) $a_n=\frac{n+(-1)^n}{n-(-1)}$

   j) $a_n=\frac{n}{n+1}-\frac{n+1}{n}$

   k) $a_n=\frac{n^4-n+1}{n^4+1}$

   l) $a_n=n^{n-2}$

2. Priamo z definície limity ukážte, že platí

   a) $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}=0$

   b) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{n+1}=1$

   c) $\lim_{n\to\infty}\frac{2n}{n+4}=2$

   d) $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{3n-4}=\frac{1}{3}$

3. Ukážte, že daná postupnosť nemá limitu

   a) $\left\{(-1)^n\,.\,n\right\}_{n=1}^{\infty}$

   b) $\left\{(-1)^n\,.\,2\right\}_{n=1}^{\infty}$

   c) $\{1-\cos n\pi\}_{n=1}^{\infty}$

   d) $\left\{\sin^2\left(\frac{\pi\ n}{4}\right)\right\}_{n=1}^{\infty}$

   e)

V nasledujúcich úlohách nájdite limitu postupnosti

4.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^2-3n+4}{4n^2+n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n^3-n}{6n^3+2n^2+n-1}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2n^3+n}{n^4-3n^2}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)^3}{1-2n^2}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{4n+1}{n}+\dfrac{2n^2+1}{n^2+1}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\sqrt[3]{n^7-1}+\sqrt[4]{n^3+1}}{\sqrt[5]{n^2+4}+\sqrt{n^3}}$

5.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{2n+1}-\sqrt{2n}\right)$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n+3}-\sqrt{2n}\right)$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{18n-8}-\sqrt{11n+5}\right)$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+1}-\sqrt{n}\right)$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(n-\sqrt{n^2+n}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\sqrt{n^2+3n}-n\right)$

g) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{4n+5}-2\sqrt{n}}$

h) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}}-n$

6.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{5-n^3}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+5+8+11+\ldots+(3n-1)}{\sqrt{9n^4+1}}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1+3+5+\ldots+(2n-1)}{-3n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2+4+6+\ldots+2n}{5n^2-1}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1+2+3+\ldots+n}{n+2}-\dfrac{n}{2}\right)$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{1}{n^2}+\dfrac{2}{n^2}+\ldots+\dfrac{n}{n^2}\right)$

7.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{n!}{n!+2(n+1)!}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+3)!}{(n+2)!-(n+1)!}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(n+21)!+(n+20)!}{(n+21)!(n+20)!}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2(n-1)!+n!+(n+1)!}{(n-1)!+n!}$

8.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{1}{1-2^n}$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{(-2)^{n+1}}{1+(-2)^n}$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{2^n+3}{1-4.2^n}$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{4^{n+1}+2^n}{4^{n-1}-2^{n+1}}$

9.

a) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{1}{3n}\right)^n$

b) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(1+\dfrac{2}{n}\right)^n$

c) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+3}{n+2}\right)^n$

d) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{n+5}{n+3}\right)^{1-3n}$

e) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2+n}{n-1}\right)^{3n+2}$

f) $\lim\limits_{n\to\infty}\left(\dfrac{2n+4}{2n+1}\right)^{4n-3}$