

$\vdash = F$: dokázateľné = tautológia

3. cvičenie: 1.3. 2019

a) $A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$ (je tautologický dôsledok)

predpoklady \hookrightarrow je tautológia ak platia predpoklady (overijem tabuľkou)

3.5 a)

$$((A \Rightarrow B) \vee C) \Rightarrow ((A \wedge D) \Leftrightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \vee C) : A_1 =$$

korektné obrátenie implikácie:
celá implikácia + modus ponens
vornútri zátvorky (vooi + sylogizmus)
pridanie „zbytočného predpokladu“

Finta: chceme dokázať $\vdash A \Rightarrow C$
- dokážem toto: $\vdash A \Rightarrow B$
 $\vdash B \Rightarrow C$
 \hookrightarrow spravím syl(2,3) a dostanem 1

2.6 g) druhý dôkaz:

$$\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B) \text{ // prepis}$$

$$\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$$

pomocou finty:

$$\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B \text{ (vooi } \neg), \text{ medzikrok: } \neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) A_1$$

$$\vdash B \Leftrightarrow (\neg A \Rightarrow B) A_1$$

korektné odstraňovanie $\neg \neg$:

$$\vdash \neg \neg A \Rightarrow A \quad | \quad 2 \times \text{obrátenie}$$

$$\vdash A \Rightarrow \neg \neg A \quad | \quad \text{implikácie}$$

$$1. \vdash \neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) : A_1$$

$$2. \vdash (\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B : \text{vooi} \leftarrow \text{princíp je ten, že toto tam musí byť napísané}$$

$$3. \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B : \text{MP}(1,2)$$

$$4. \vdash B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) : A_1$$

$$5. \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) : \text{syl}(3,4)$$

Dokáž $\vdash \neg \neg A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

$$1. \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A) : A_1$$

$$2. \vdash \neg \neg A \Rightarrow A \text{ lema z prednášky}$$

$$3. \neg \neg A \Rightarrow (B \Rightarrow A) \text{ syl}(2,1)$$

Dokáž: $(A \Rightarrow x) \Rightarrow y \vdash (\neg \neg A \Rightarrow x) \Rightarrow y$

$$1. (A \Rightarrow x) \Rightarrow y : \text{predpoklad}$$

$$2. (\neg \neg A \Rightarrow x) \Rightarrow y$$

$$3. \vdash (\neg x \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow x) \text{ vooi}$$

$$4. (A \Rightarrow x) \Rightarrow y \vdash (\neg x \Rightarrow \neg A) \Rightarrow y \text{ syl}(3,2)$$

$$5. \vdash (\neg \neg A \Rightarrow x) \Rightarrow (\neg x \Rightarrow \neg A) \text{ vooi}$$

$$6. (A \Rightarrow x) \Rightarrow y \vdash (\neg \neg A \Rightarrow x) \Rightarrow y \text{ syl}(5,4)$$

2.6. a)

dokáž $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$

$$\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow B)$$

$$\neg A \Rightarrow B \vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow B \text{ /VD}$$

$$\neg A \Rightarrow B, A \Rightarrow B \vdash B \text{ /VD}$$

$$A \Rightarrow B \vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow B \text{ /VD}$$

$$A \Rightarrow B \vdash (\neg B \Rightarrow A) = B \text{ /vooi}$$

$$\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B) \text{ /VD}$$

$$\vdash (\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow ((\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow B) \text{ /obr. i}$$

\hookrightarrow axiomat. 3

dokazy s využitím A_3

2.5 c) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A) \text{ /VD}$

$$\neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow A \text{ /VD}$$

$$\neg A \Rightarrow B, \neg B \vdash A \text{ /VD}$$

$$\neg B \vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \text{ /VD}$$

$$1. \vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A) A_3$$

$$2. \vdash \neg B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow \neg B) A_1$$

$$3. \neg B \vdash \neg A \Rightarrow \neg B \text{ /VD}(2)$$

$$4. \neg B \vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A \text{ (MP } 3,1)$$

1. napíšem celú A_3 : $\vdash (\neg \square \Rightarrow \neg \square) \Rightarrow (\neg \square \Rightarrow \square) \Rightarrow \square$

2. spravím dôkaz

$$n: \vdash \neg \square \Rightarrow \neg \square$$

3. spravím MP(n,1)

$$5: \neg B, \neg A \Rightarrow B \vdash A \text{ /VD}(4)$$

$$6: \neg A \Rightarrow B \vdash \neg B \Rightarrow A \text{ /VD}(5)$$

$$7: \vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A) \text{ /VD}(6)$$

režazce na seba navazujúcich implikácií

$$A \Rightarrow B \quad B \Rightarrow C \quad C \Rightarrow D \dots$$

$$1: A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$$

$$2: C \Rightarrow D \text{ predpoklad}$$

$$3: A \Rightarrow B, B \Rightarrow C, C \Rightarrow D \vdash A \Rightarrow D \text{ -- Syl(1,2)}$$

$$A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$$

$$1: A \text{ -- predpoklad}$$

$$2: A \Rightarrow B \text{ -- predpoklad}$$

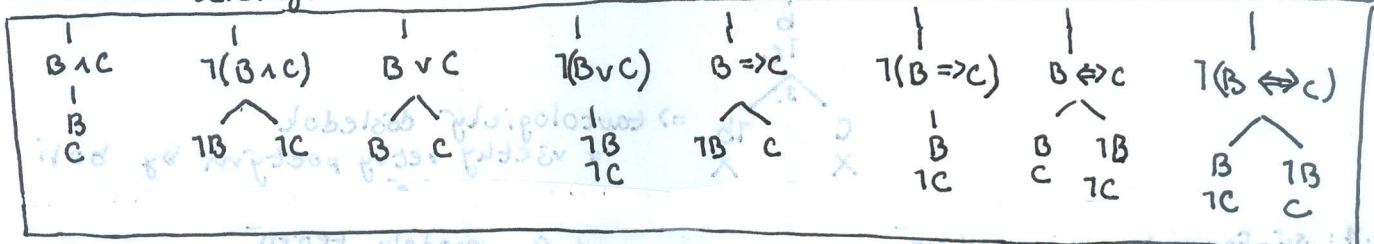
$$3: A, A \Rightarrow B \vdash B \text{ -- MP(1,2)}$$

$$4: B \Rightarrow C \text{ -- predpoklad}$$

$$5: A, A \Rightarrow B, B \Rightarrow C \vdash C$$

4. cvičenie: 8.3.2019

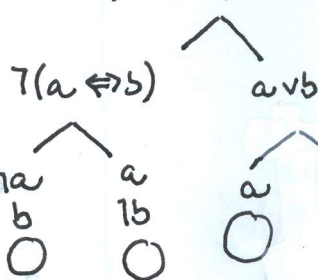
sémantické stromy:



4.2: DNF Formuly:

$$a) (a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (a \vee b)$$

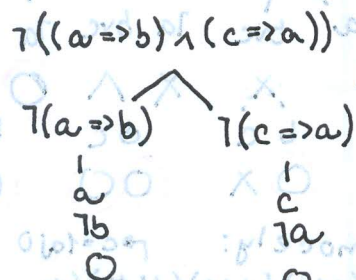
$$(a \Leftrightarrow b) \Rightarrow (a \vee b)$$



DNF Formuly:

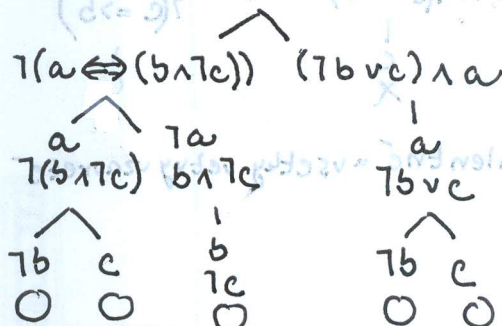
$$(\neg a \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee a \vee b$$

$$b) \neg((a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow a))$$



$$DNF: (a \wedge \neg b) \vee (c \wedge \neg a)$$

$$c) (a \Leftrightarrow (b \wedge \neg c)) \Rightarrow ((\neg b \vee c) \wedge a)$$

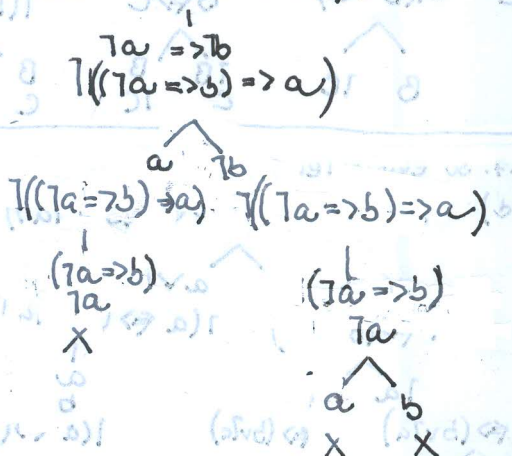


$$DNF: (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c) \vee (\neg a \wedge \neg c \wedge b) \vee (a \wedge \neg b) \vee (a \wedge c)$$

opakuj sa

4.3 je to tautológia?

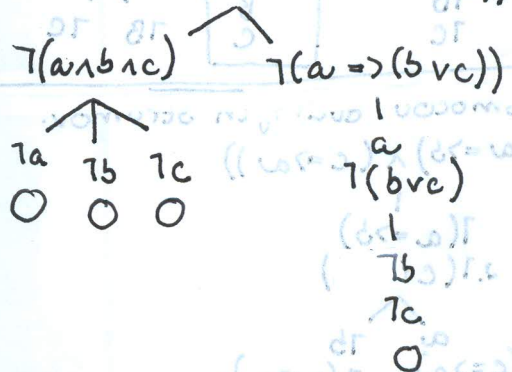
$$A3: \neg((\neg a \Rightarrow b) \Rightarrow ((\neg a \Rightarrow b) \Rightarrow a))$$



↳ všetky vetvy sú uzavreté
= tautológia

4.5 je splniteľná?

$$d) (a \wedge b \wedge c) \Rightarrow \neg(a \Rightarrow (b \vee c))$$



↳ aspoň jedna otvorená vetva
= splniteľná

1.6: je A tautologickým dôsledkom?

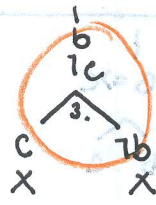
b) $M = \{a \Rightarrow b, a \Rightarrow \neg c, c \vee \neg b\}$; A: $b \Rightarrow c$

konjunkcia + konjunkcia negovaná

$$(a \Rightarrow b) \wedge (a \Rightarrow \neg c) \wedge (c \vee \neg b) \wedge \neg(b \Rightarrow c)$$

1. $a \Rightarrow b$
2. $a \Rightarrow \neg c$
3. $c \vee \neg b$
- $\neg(b \Rightarrow c)$

\Rightarrow musím dokázať, že všetky sú uzavreté = nikdy nenabíja ne prípad 1 \Rightarrow 0



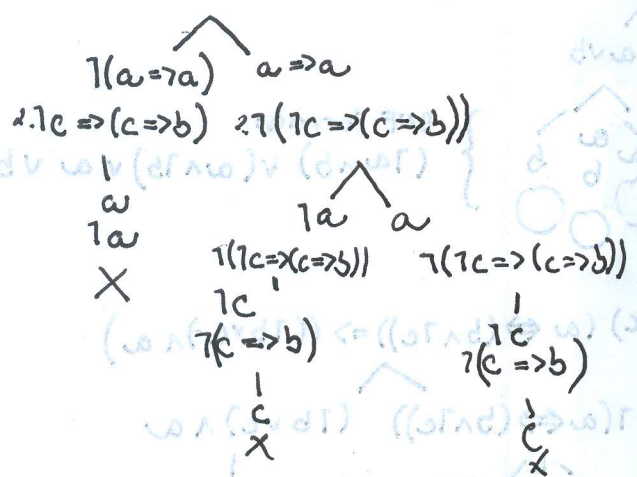
\Rightarrow tautologický dôsledok = všetky vetvy podtypy by boli uzavreté

4.4: sú formuly ekvivalentné

c) $a \Rightarrow a$ $\neg c \Rightarrow (c \Rightarrow b)$

robím strom pre formulu:

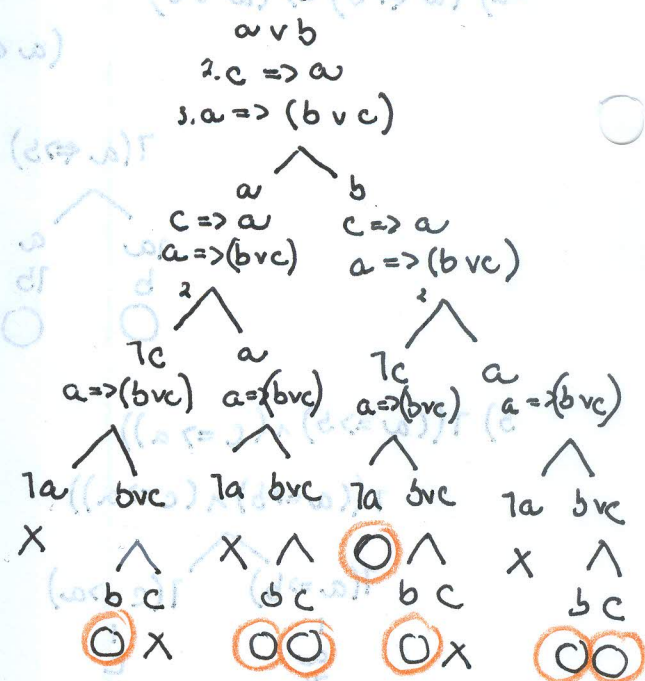
$$\neg(a \Rightarrow a) \Leftrightarrow (\neg c \Rightarrow (c \Rightarrow b))$$



sú ekvivalentné = všetky vetvy uzavreté

4.4. modely teórie

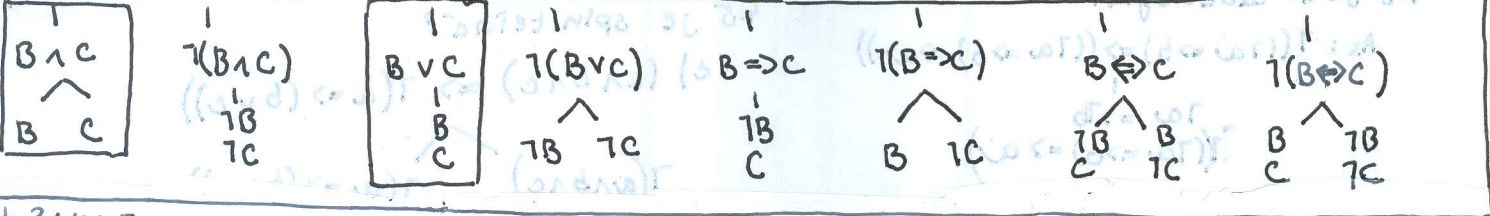
e) $(a \vee b) \wedge (c \Rightarrow a) \wedge (a \Rightarrow (b \vee c))$



modely: $\neg c = 1a \vee 0$
(1#1)(#10)(11#)

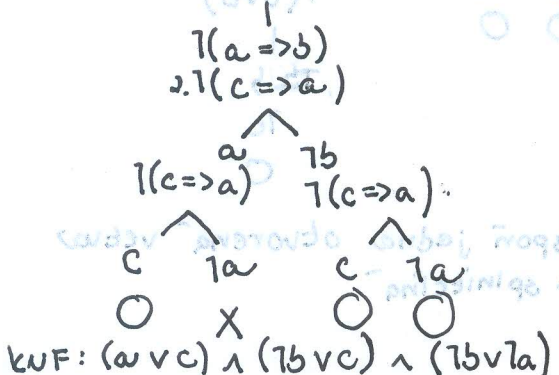
vypisujem z otvorených vetiev

duálne sémantické stromy: kedy je formula nespĺnená: robím KNF



4.3: KNF pomocou duálnych stromov:

$$\neg((a \Rightarrow b) \wedge (c \Rightarrow a))$$



KNF: $(a \vee c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg b \vee \neg a)$

4.4. sú ekvivalentné?

d) $((a \vee b) \Leftrightarrow (a \Leftrightarrow (b \vee \neg a)))$

