

Algebra a diskrétna matematika

Príklady na precvičenie

3. týždeň

1. Daný je štvoruholník $(1, 1), (2, 1), (1, 2), (2, 2)$.

a) Aké budú jeho súradnice po otočení o 60° okolo bodu $(0, 0)$?

b) Určte, ako sa zmení obsah štvoruholníka a kam sa zobrazí, ak použijeme transformáciu reprezentovanú maticou

$$T = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$$

2. Akou maticou je možné reprezentovať symetriu roviny podľa osi x ?

3. Vypočítajte dané determinanty.

$$|A| = \begin{vmatrix} 7 & -4 \\ 6 & -5 \end{vmatrix} \quad |B| = \begin{vmatrix} 4 + \sqrt{5} & 2 - \sqrt{7} \\ 2 + \sqrt{7} & 4 - \sqrt{5} \end{vmatrix} \quad |C| = \begin{vmatrix} \frac{1}{a-b} & \frac{1}{a+b} \\ b & a \end{vmatrix}$$

$$|D| = \begin{vmatrix} 3 & -1 & 5 \\ 6 & 1 & 4 \\ 0 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad |E| = \begin{vmatrix} 7 & -2 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \end{vmatrix} \quad |F| = \begin{vmatrix} 1 & 4 & 5 \\ 3 & 2 & 4 \\ 5 & 3 & 1 \end{vmatrix} \quad |G| = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ -1 & 2 & -1 \\ 3 & -1 & 3 \end{vmatrix}$$

4. Bez vypočítania ukážte, že sa uvedené dvojice determinantov navzájom rovnajú.

$$\text{a) } \begin{vmatrix} 7 & 2 & -3 \\ 5 & -1 & 8 \\ -4 & 5 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{vmatrix} 7 & 2 & -5 \\ 5 & -1 & 9 \\ -4 & 5 & -4 \end{vmatrix}$$

$$\text{b) } \begin{vmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 6 & 15 & -4 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix} \quad \text{a} \quad \begin{vmatrix} -1 & -3 & 9 \\ 2 & 1 & -6 \\ 2 & 7 & 1 \end{vmatrix}$$

5. Bez výpočtu zdôvodnite, že $\det(H) = 0$.

$$H = \begin{pmatrix} 13 & 4 & 7 & -2 \\ 12 & 6 & 0 & -3 \\ 11 & 0 & 8 & 0 \\ 10 & -8 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

6. Predpokladajme, že $\det(K) = -4$, pričom

$$K = \begin{pmatrix} k & \ell & m \\ n & o & p \\ q & r & s \end{pmatrix}$$

Vypočítajte:

a) $\det(3K)$

b) $\det(2K^{-1})$

c) $\det((2K)^{-1})$

d) $\begin{vmatrix} k & q & n \\ \ell & r & o \\ m & s & p \end{vmatrix}$

e) $\begin{vmatrix} 4k & 4\ell & 4m \\ 3n - 5q & 3o - 5r & 3p - 5s \\ -q & -r & -s \end{vmatrix}$

7. Vypočítajte dané determinanty.

$$|L| = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \\ 1 & 3 & 6 & 9 \\ 1 & 4 & 9 & 15 \end{vmatrix} \quad |M| = \begin{vmatrix} -5 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & -4 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & 1 & -2 \end{vmatrix} \quad |N| = \begin{vmatrix} 0 & 1 & 1 & 1 \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & 1 & \frac{1}{2} \\ \frac{1}{4} & -\frac{1}{4} & 1 & 0 \\ \frac{1}{8} & -\frac{1}{8} & 0 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|P| = \begin{vmatrix} 3 & 5 & 1 & 2 \\ 1 & 4 & -2 & 1 \\ 4 & 7 & 0 & 0 \\ 3 & 9 & 0 & 0 \end{vmatrix} \quad |Q| = \begin{vmatrix} 3 & 0 & 1 & 2 & 4 \\ 0 & 1 & 2 & 4 & 3 \\ 1 & 2 & 4 & 3 & 0 \\ 2 & 4 & 3 & 0 & 1 \\ 4 & 3 & 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} \quad |R| = \begin{vmatrix} 0 & -2 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 0 & -2 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 0 & -2 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 0 & -2 \\ 1 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|S| = \begin{vmatrix} 0 & 10 & 0 & 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -9 & 0 & 0 \\ 0 & 3 & 0 & 0 & 5 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 2 & 0 & 3 \\ 7 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 1 & 0 \end{vmatrix} \quad |T| = \begin{vmatrix} 5 & 1 & 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 5 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 & 5 \end{vmatrix}$$

8. Vypočítajte obsah trojuholníka určeného bodmi

a) $(6, 0), (3, 1), (-1, -2)$

b) $(1, 9), (-2, 3), (4, -3)$

9. Vypočítajte objem štvorstena určeného bodmi $(1, -1, 2), (4, 0, 2), (-1, -1, -2), (5, 3, 4)$.

10. Pomocou adjungovanej matice nájdite k daným maticiam inverzné matice.

$$U = \begin{pmatrix} 4 & 2 & 1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & -1 \end{pmatrix} \quad V = \begin{pmatrix} 3 & -2 & 0 \\ 1 & 0 & 2 \\ -1 & 4 & 3 \end{pmatrix} \quad W = \begin{pmatrix} \cos \alpha & \sin \alpha & 0 \\ -\sin \alpha & \cos \alpha & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

11. Pomocou Cramerovho pravidla riešte dané systémy lineárnych rovníc.

a) $3x + 2y + 6z = 8$

$$-x \quad \quad + \quad z = 0$$

$$6x + \quad y - 2z = 12$$

b) $4x - 3y + 5z = 4$

$$-2x + \quad y + 2z = 4$$

$$8x - 5y - 3z = -8$$

c) $-2x + \quad y + 3z = -2$

$$8x - 8y + 9z = 9$$

$$2x - 2y + 3z = 3$$

d) $-4x - 4y + 3z + \quad t = 2$

$$3x + 4y + 3z + 2t = 10$$

$$7x + 8y - 3z - \quad t = 1$$

$$2x + 3y + \quad z \quad \quad = 2$$