Odvodenie bijektívneho zobrazenia $\varphi: \mathbb{N} \times \mathbb{Z} \to \mathbb{N}$

	-2	-1	0	1	2	
$15 \xleftarrow{+7}$ …	$8 \xleftarrow{+5}$ $(0, -2)$	$3 \xleftarrow{+3}$ $(0, -1)$	$0 \xrightarrow{+\boxed{1}}$ $(0, 0)$	$1 \xrightarrow{+3}$ $(0, 1)$	$4 \xrightarrow{+5}$ $(0, 2)$	9 …
	14 …	7 $(1, -1)$	$\xleftarrow{+5} 2 \xrightarrow{+\boxed{3}}$ $(1, 0)$	5 $(1, 1)$	10 …	
	…	13 $(2, -1)$	6 $(2, 0)$	11 $(2, 1)$	…	
			12			

$\vdots$

(m, n)

$\downarrow$ „nultý" stĺpec $\qquad\qquad \to t_n \to$

$t_m \downarrow$

$0 \xrightarrow{+2} 2 \xrightarrow{+4} 6 \xrightarrow{+6} 12$

t_n v 1. riadku: $\boxed{1} + (n-1)\cdot 2$

$\boxed{3} + (n-1)\cdot 2$

$\vdots$

$\boxed{t_m + 1} + (n-1)\cdot 2$

Na získanie hodnôt v „nultom" stĺpci pripočítavame členy postupnosti $2, 4, \dots, \underbrace{2+(m-1)\cdot 2}_{t_m}$

čiže k 0 sa pripočíta $S_m = \frac{m}{2}\left(2 + 2+(m-1)\cdot 2\right) = \boxed{m(m+1)}$

Smerom napravo $(n>0)$ pripočítavame S_n začínajúc od $\underbrace{2+(m-1)\cdot 2 + 1}_{= 2m+1}$

$$S_n = \frac{n}{2}\left(2m+1 + 2m+1 + (n-1)\cdot 2\right) = \boxed{n(2m+n)}$$

Smerom naľavo $(n<0)$ k S_m pripočítavame aritmetickú postupnosť začínajúcu od $3 + (m+1-1)\cdot 2 = 2m+3$

Počet pripočítaných členov je $|n|$

Pripočítané číslo je $S_n = \frac{|n|}{2}\left(2m+3 + (2m+3) + (|n|-1)\cdot 2\right) =$

$$\boxed{|n|(2m+|n|+2)}$$

φ smerom napravo $(n > 0)$:

$$\varphi(m,n) = \underbrace{m(m+1)}_{\text{posun smerom dole na želané } m} + \underbrace{n(2m+n)}_{\text{posun doprava}} = m^2 + m + 2mn + n^2 = (m+n)^2 + m$$

φ smerom naľavo $(n < 0)$:

$$\varphi(m,n) = m(m+1) + |n|(2m + |n| + 2) =$$
$$= m^2 + m + 2m|n| + n^2 + 2|n| =$$
$$= (m+|n|)^2 + m + 2|n|$$

čiže $\varphi : N \times Z \to N$

$$\varphi(m,n) = \begin{cases} (m+n)^2 + m & \text{pre } n \geq 0 \\ (m+|n|)^2 + m + 2|n| & \text{pre } n < 0 \end{cases}$$

φ je bijekcia, vyplýva to z tabuľky očíslovania