Výroková logika [vhodné cvičenie 1.4 (str. 12) –{*}]

A	B	$A \wedge B$	$A \vee B$	$A \Rightarrow B$	$A \Leftrightarrow B$
0	0	0	0	1	1
0	1	0	1	1	0
1	0	0	1	0	0
1	1	1	1	1	1

A	B	A Nor B	A Nand B
0	0	1	1
0	1	0	1
1	0	0	1
1	1	0	0

(a) $A \wedge B$ je iba skrátený zápis formuly $\neg(A \Rightarrow \neg B)$;
(b) $A \vee B$ je skrátený zápis formuly $\neg A \Rightarrow B$;
(c) $A \Leftrightarrow B$ je skrátený zápis $(A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A)$, čiže $\neg((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A))$.

Axiómy [vhodné cvičenie 2.6 (str. 21-22) –{o, p}]

Axiómy. Nech sú A, B a C ľubovoľné formuly. Potom axiómami sú

*A1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

A2: $(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow ((A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow C))$

*A3: $(\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A)$

*Modus ponens

Odvodzovacie pravidlo je jediné a volá sa **modus ponens**. Tvrdí: Z formúl A a $A \Rightarrow B$ odvoď formulu B.

Lemy

Lema 2.1. *Platí* $\vdash A \Rightarrow A$.

*Pravidlo sylogizmu

LEMA 2.2. *Pre ľubovoľné formuly A, B, C platí* **pravidlo sylogizmu**, *teda* $A \Rightarrow B,\ B \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow C$.

*O zámene predpokladov

LEMA 2.3 (**o zámene predpokladov**). *Pre ľubovoľné formuly A, B a C platí* $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$.

*Veta o dedukcii

VETA 2.4 (**o dedukcii**). *Nech sú A a B formuly a nech je T množina formúl. Potom $T \vdash A \Rightarrow B$ práve vtedy, keď $T \cup \{A\} \vdash B$.*

LEMA 2.5. $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow B)$.

LEMA 2.6. $\vdash \neg\neg A \Rightarrow A$.

LEMA 2.7. $\vdash A \Rightarrow \neg\neg A$.

*Vety o obrátenej implikácii

VETA 2.8 (**vety o obrátenej implikácii**). *Platia nasledujúce tvrdenia:*

a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$

b) $\vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$

c) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$

d) $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

LEMA 2.9. $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg(A \Rightarrow B))$.

Veta o neutrálnej formule

VETA 2.10 (**o neutrálnej formule**). *Ak $T \cup \{A\} \vdash B$ a $T \cup \{\neg A\} \vdash B$, tak $T \vdash B$.*

LEMA 2.11. $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash (A \wedge B) \Rightarrow C$.

LEMA 2.12. $(A \wedge B) \Rightarrow C \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$

VETA 2.13. *Nech sú $A_1, A_2, \ldots, A_n$ a B výrokové formuly. Potom tvrdenie $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\} \vdash B$ platí práve vtedy, keď platí $\vdash (A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n) \Rightarrow B$.*

Pravidlo nahradenia ekvivalentných formúl

VETA 2.14 (**pravidlo nahradenia ekvivalentných formúl**). *Nech platí tvrdenie $T \vdash A$ a nech sú formuly P a Q navzájom ekvivalentné. To znamená, že platí $\vdash P \Rightarrow Q$ aj $\vdash Q \Rightarrow P$. Nahraďme niektoré podformuly P v $T \cup \{A\}$ formulou Q a označme modifikovanú množinu predpokladov symbolom T' a modifikovanú formulu A symbolom A'. Potom platí $T' \vdash A'$.*

Sémantické stromy [informatívne]

DNF (vzor)

$(\neg a \wedge b \wedge c) \vee (a \wedge \neg b) \vee (b \wedge c)$

VETA 4.1.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď s ňou ekvivalentná DNF-formula obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď DNF-formula ekvivalentná s $\neg A$ obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď s ňou ekvivalentná DNF-formula obsahuje klauzulu bez dvojice komplementárnych literálov.*

KNF (vzor)

$(a \vee \neg b) \wedge (\neg a \vee b \vee \neg c) \wedge (\neg b \vee c) \wedge (\neg a \vee c)$

VETA 4.2.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď KNF-formula ekvivalentná s $\neg A$ obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď s ňou ekvivalentná KNF-formula obsahuje v každej klauzuli dvojicu komplementárnych literálov.*
(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď KNF-formula ekvivalentná s $\neg A$ obsahuje klauzulu bez dvojice komplementárnych literálov.*

*Prepis formúl

de Morganové pravidlo

$$\neg(A \wedge B) \Leftrightarrow (\neg A \vee \neg B) \qquad \text{a} \qquad \neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B).$$

Distributívny zákon

$$(A \wedge (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \vee (A \wedge C)) \qquad \text{a} \qquad (A \vee (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \wedge (A \vee C)).$$

Komutativita

$$(A \wedge B) \Leftrightarrow (B \wedge A) \qquad \text{a} \qquad (A \vee B) \Leftrightarrow (B \vee A)$$

Asociativita

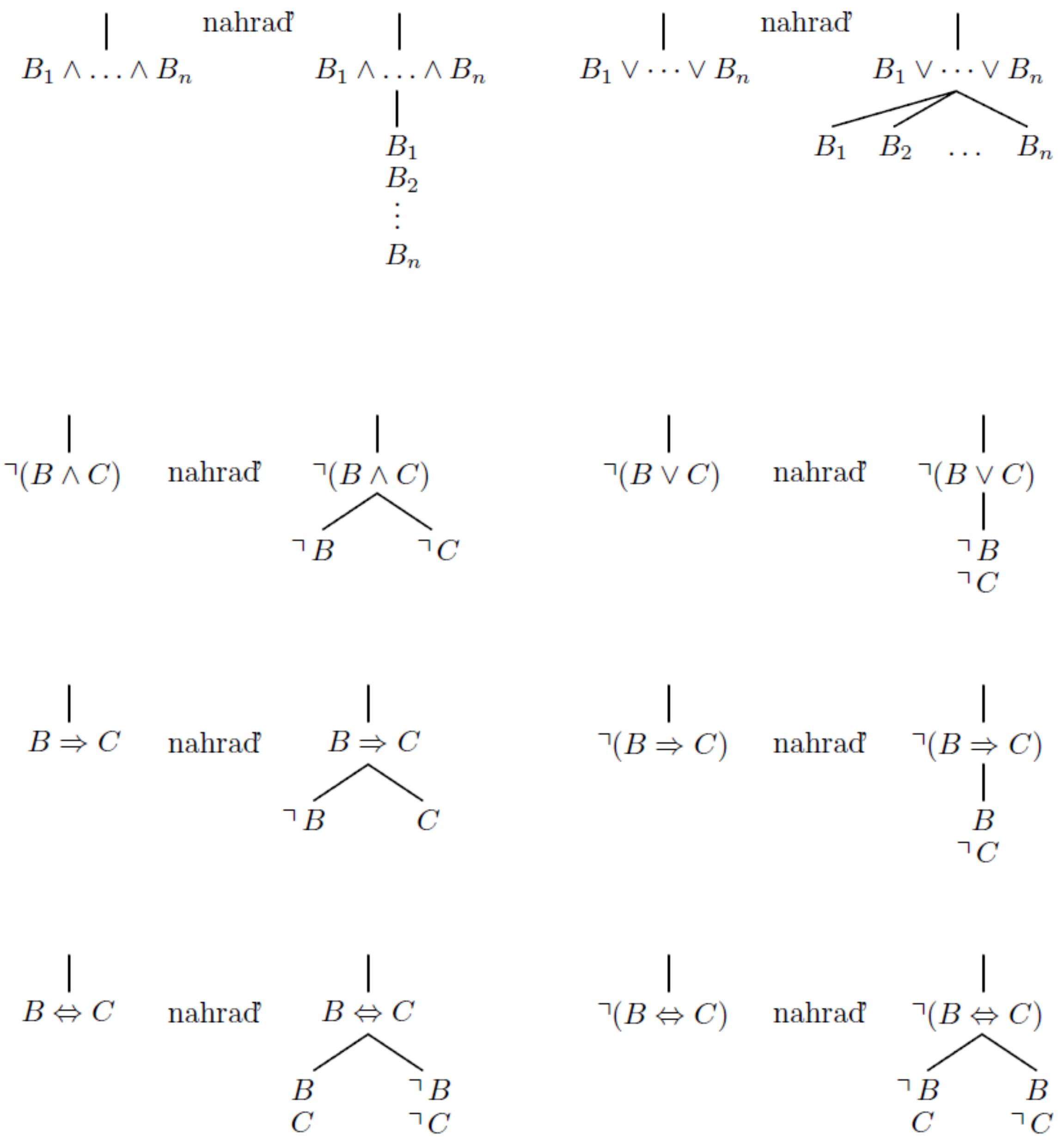
$$(A \wedge (B \wedge C)) \Leftrightarrow ((A \wedge B) \wedge C) \qquad \text{a} \qquad (A \vee (B \vee C)) \Leftrightarrow ((A \vee B) \vee C)$$

Ekvivalencia

$$\neg\neg A \Leftrightarrow A \,, \qquad (A \wedge A) \Leftrightarrow A \qquad \text{a} \qquad (A \vee A) \Leftrightarrow A.$$

Zápis sémantických stromov

Zjednodušené sémantické stromy



Veta 4.3.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre A uzavreté.*

(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.*

(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď je aspoň jedna vetva sémantického stromu pre A otvorená.*

Duálne sémantické stromy !!! ZMENA ZÁPISU !!!

$$\begin{array}{c} | \\ B \wedge C \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ B \wedge C \\ \diagup \quad \diagdown \\ B \qquad\quad C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \wedge C) \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \wedge C) \\ | \\ \neg B \\ \neg C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ B \vee C \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ B \vee C \\ | \\ B \\ C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \vee C) \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \vee C) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \neg B \qquad\quad \neg C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ B \Rightarrow C \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ B \Rightarrow C \\ | \\ \neg B \\ C \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \Rightarrow C) \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \Rightarrow C) \\ \diagup \quad \diagdown \\ B \qquad\quad \neg C \end{array}$$

$$\begin{array}{c} | \\ B \Leftrightarrow C \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ B \Leftrightarrow C \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{c} \neg B \\ C \end{array} \qquad\quad \begin{array}{c} B \\ \neg C \end{array} \end{array} \qquad\qquad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \Leftrightarrow C) \end{array} \quad \text{nahraď} \quad \begin{array}{c} | \\ \neg(B \Leftrightarrow C) \\ \diagup \quad \diagdown \\ \begin{array}{c} B \\ C \end{array} \qquad\quad \begin{array}{c} \neg B \\ \neg C \end{array} \end{array}$$

VETA 4.5.

(1) *Formula A je kontradikciou práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.*
(2) *Formula A je tautológiou práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre A uzavreté.*
(3) *Formula A je splniteľná práve vtedy, keď je aspoň jedna vetva duálneho sémantického stromu pre $\neg A$ otvorená.*

(4) *Množina formúl $\{A_1, A_2, \ldots, A_n\}$ je splniteľná práve vtedy, keď je aspoň jedna vetva duálneho sémantického stromu pre $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n)$ otvorená.*
(5) *$A_1, A_2, \ldots, A_n \models B$ práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre $\neg(A_1 \wedge A_2 \wedge \ldots \wedge A_n \wedge \neg B)$ uzavreté.*
(6) *Formuly A a B sú ekvivalentné práve vtedy, keď sú všetky vetvy duálneho sémantického stromu pre $A \Leftrightarrow B$ uzavreté.*

Rezolučná metóda [vhodné cvičenie 5.2 (str. 50)]

Metóda rezolventy

VETA 5.1 (**metóda rezolventy**). *Nech sú C_1 a C_2 klauzuly KNF-formuly, pričom C_1 je $C_1' \vee l$ a C_2 je $C_2' \vee \neg l$. Potom*

$$\models \ ((C_1' \vee l) \wedge (C_2' \vee \neg l)) \Rightarrow (C_1' \vee C_2').$$

ALGORITMUS 5.1. Nech je T množina klauzúl KNF-formuly A a nech je p prvotná formula, ktorá sa vyskytuje v A. Rozdelíme si množinu T na tri podmnožiny $T_0(p)$, $T_1(p)$ a $T_2(p)$:

$T_0(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré neobsahujú p.
$T_1(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré obsahujú literál p.
$T_2(p)$ pozostáva z tých klauzúl T, ktoré obsahujú literál $\neg p$.

Zostrojíme množinu $T_{1,2}(p)$, ktorá obsahuje všetky možné rezolventy množiny T vzhľadom na p. To znamená, že $T_{1,2}$ obsahuje rezolventy C_1 a C_2 pre každé C_1 z $T_1(p)$ a C_2 z $T_2(p)$.

Položíme $\tilde{T}(p) = T_0(p) \cup T_{1,2}(p)$, čím sme ukončili jednu iteráciu algoritmu. V ďalšom pokračujeme s novou množinou $T := \tilde{T}(p)$.

Sekventy [vhodné cvičenie 9.6 [str. 92] -{q, r}]

Odvodzovacie pravidlá Gentzenovskej výrokovej logiky

Axióma

$$\frac{}{A \vdash A}\ (\mathrm{I})$$

Pravidlo Cut

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma, A \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash \Delta, \Pi}\ (\mathrm{Cut})$$

Ľavé logické pravidlá

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \mathrm{L}_1)$$

$$\frac{\Gamma, B \vdash \Delta}{\Gamma, A \wedge B \vdash \Delta}\ (\wedge \mathrm{L}_2)$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta \qquad \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A \vee B \vdash \Delta, \Pi}\ (\vee \mathrm{L})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma, B \vdash \Pi}{\Gamma, \Sigma, A \Rightarrow B \vdash \Delta, \Pi}\ (\Rightarrow \mathrm{L})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma, \neg A \vdash \Delta}\ (\neg \mathrm{L})$$

Pravé logické pravidlá

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee \mathrm{R}_1)$$

$$\frac{\Gamma \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \vee B, \Delta}\ (\vee \mathrm{R}_2)$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, \Delta \qquad \Sigma \vdash B, \Pi}{\Gamma, \Sigma \vdash A \wedge B, \Delta, \Pi}\ (\wedge \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash B, \Delta}{\Gamma \vdash A \Rightarrow B, \Delta}\ (\Rightarrow \mathrm{R})$$

$$\frac{\Gamma, A \vdash \Delta}{\Gamma \vdash \neg A, \Delta}\ (\neg \mathrm{R})$$

Ľavé štrukturálne pravidlá

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathrm{WL})$$

$$\frac{\Gamma, A, A \vdash \Delta}{\Gamma, A \vdash \Delta}\ (\mathrm{CL})$$

$$\frac{\Gamma, A, B, \Sigma \vdash \Delta}{\Gamma, B, A, \Sigma \vdash \Delta}\ (\mathrm{PL})$$

Pravé štrukturálne pravidlá

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\mathrm{WR})$$

$$\frac{\Gamma \vdash A, A, \Delta}{\Gamma \vdash A, \Delta}\ (\mathrm{CR})$$

$$\frac{\Gamma \vdash \Delta, A, B, \Pi}{\Gamma \vdash \Delta, B, A, \Pi}\ (\mathrm{PR})$$

Modálna logika [vhodné cvičenie 10.3 (str. 102)]

A : *Zajtra určite prídem.*

B : *Možno zajtra prídem.*

Tieto výroky sú odlišné, no vo výrokovej ani v predikátovej logike nevieme zachytiť rozdiel medzi nimi. Na zachytenie štruktúry týchto výrokov potrebujeme zaviesť *modálne unárne spojky*, povedzme $\Box$ a $\Diamond$. Spojku $\Box$ budeme čítať „určite" a spojku $\Diamond$ budeme čítať „možno". Potom ak p bude výrok „zajtra prídem", tak môžeme písať

$$A: \quad \Box p \qquad \text{a} \qquad B: \quad \Diamond p.$$

Modálne sémantické stromy

Ako v Kapitole 4, ak sa vo vetve sémantického stromu vyskytne tvrdenie aj jeho negácia, tak príslušnú vetvu už nemusíme ďalej rozvíjať. Takáto vetva je **uzavretá** a označujeme ju symbolom $\times$. Vetva je **otvorená** ak v nej nie je dvojica tvrdení, ktoré by boli v spore. Otvorenú vetvu označujeme symbolom $\bigcirc$. Avšak podobne ako v Kapitole 7, pri formulách modálnej logiky musíme byť oveľa opatrnejší ako pri formulách výrokovej logiky. Platí nasledujúca analógia Vety 4.3 (2).

VETA 9.1. *Formula modálnej logiky A je tautológia práve vtedy, keď sú všetky vetvy sémantického stromu pre $\neg A$ uzavreté.*

Pre sémantické stromy budeme okrem pravidiel zobrazených na Obrázkoch 1, 3 a 4 používať pravidlá pre modálne spojky $\Box$ a $\Diamond$, pozri Obrázok 34. Tieto pravidlá plynú zo skutočnosti, že

$$
\begin{array}{llll}
\min\limits_{w' \in \Gamma(w)} \{\overline{\nu}_{w'}(A)\} = 1 & \text{práve vtedy keď} & \overline{\nu}_{w'}(A) = 1 & \text{pre každé } w' \in \Gamma(w) \\
\max\limits_{w' \in \Gamma(w)} \{\overline{\nu}_{w'}(A)\} = 1 & \text{práve vtedy keď} & \overline{\nu}_{w'}(A) = 1 & \text{pre nejaké } w' \in \Gamma(w),
\end{array}
$$

pričom z nedostatku miesta budeme namiesto slovného vyjadrenia „pre každé“, respektíve „pre nejaké“, používať značku $\forall$, respektíve $\exists$.

Tak ako máme uvedené na Obrázku 34, v prípade modálnej logiky budeme pred formulu písať značku $\models$ a meno sveta, v ktorom má byť daná formula splnená.

$$
\begin{array}{c}
| \\
w \models \Box B
\end{array}
\quad \text{nahraď} \quad
\begin{array}{l}
\quad | \\
w \models \Box B \\
\quad | \\
w' \models B \;\; \forall w' \in \Gamma(w)
\end{array}
\qquad\qquad
\begin{array}{c}
| \\
w \models \Diamond B
\end{array}
\quad \text{nahraď} \quad
\begin{array}{l}
\quad | \\
w \models \Diamond B \\
\quad | \\
w' \models B \;\; \exists w' \in \Gamma(w)
\end{array}
$$