Algebra a diskrétna matematika

doc. RNDr. Jana Šiagiová, PhD.

Prehľad zo 7. prednášky

Kombinatorika

Kombinatorika sa zaoberá konečnými množinami, ich štruktúrami, usporiadaním, rozkladom na menšie objekty, zobrazeniami medzi nimi, usporiadanými n-ticami, atď.

Tvrdenie 1: Ľubovoľná n-prvková množina má práve 2^n podmnožín.

Odvodenie: Nech $A = \{a_1, a_2, a_3, \dots, a_n\}$.

Každú podmnožinu B množniny A môžme reprezentovať pomocou n-tice 0 a 1, pričom

na i-tej pozícii je $\begin{cases} 1 & \text{ak} \quad a_i \in B \\ 0 & \text{ak} \quad a_i \notin B \end{cases}$

Napr. $B = \{a_1, a_3, a_4\}$ reprezentujeme postupnosťou $(1, 0, 1, 1, 0 \dots, 0)$

Každá podmnožina množiny A má jednoznačnú reprezentáciu pomocou n-tice núl a jednotiek. Celkový počet rôznych n-tíc núl a jednotiek je 2^n, čo je aj hľadaný počet všetkých podmnožín množiny veľkosti n. $\square$

Tvrdenie 2: Každá n-prvková množina má práve 2^{n-1} podmnožín nepárnej veľkosti a 2^{n-1} podmnožín párnej veľkosti.

Odvodenie: Nech A je n-prvková množina a prvok $a \in A$.

Z predchádzajúceho tvrdenia vieme, že počet všetkých podmnožín množiny $A - \{a\}$ je 2^{n-1}.

Vyberme si ľubovoľnú z nich, $B \subseteq A - \{a\}$.

Ak B má nepárny počet prvkov, je to aj želaná podmnožina množiny A s nepárnym počtom prvkov.

Ak B má párny počet prvkov, pridáme k nej prvok a.
Potom $B \cup \{a\} \subseteq A$ a veľkosť $|B \cup \{a\}|$ je nepárna.

Našli sme bijekciu medzi množinou všetkých podmnožín $A - \{a\}$ a množinou všetkých podmnožín A nepárnej veľkosti. Je ich 2^{n-1}.

Doplnok k nim sú všetky podmnožiny párnej veľkosti: $2^n - 2^{n-1} = 2^{n-1}$. $\square$

Variácie k-tej triedy z n prvkov s opakovaním

• všetky možné usporiadané výbery k prvkov z n prvkov, pričom vo výberoch sa prvky *môžu opakovať*

• všetky zobrazenia z k-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny

• počet slov dĺžky k nad abecedou z n písmen

Ich počet je

$$\mathbf{V^*(n,k) = n^k}$$

Na každú "pozíciu" 1, 2, ..., k možno vybrať ktorýkoľvek z n prvkov.

Príklad 1: Koľko rôznych PIN-kódov si môžete zvoliť pre bankovú kartu?

$$V^*(10,4) = 10000$$

Príklad 2: Koľko rôznych kódov dĺžky 5 môžete vytvoriť z písmen A, E, I, O, U, Y?

$$V^*(6,5) = 6^5 = 7776$$

Príklad 3: Koľko existuje rôznych ŠPZ vozidiel ku každému označeniu mesta? (Trojčíslie 000 sa nevyužíva.)

$$(V^*(10,3) - 1) \cdot V^*(26,2) = 999 \cdot 26^2 = 675324$$

Príklad 4: Koľko párnych 5-ciferných čísel môžeme napísať z cifier $0, 1, 2, 3, 4, 5, 6$?

$$6 \cdot 7 \cdot 7 \cdot 4 = 1176$$

Variácie k-tej triedy z n prvkov bez opakovania

- všetky možné usporiadané výbery *navzájom rôznych* k prvkov z n prvkov
- všetky *prosté* zobrazenia z k-prvkovej množiny do n-prvkovej množiny
- počet slov dĺžky k z navzájom rôznych písmen nad abecedou z n písmen

Ich počet je

$$\mathbf{V(n,k) = n(n-1)...(n-(k-1)) = \frac{n!}{(n-k)!}}$$

Na "pozície" 1, 2, ..., k možno postupne vybrať ktorýkoľvek z n prvkov na pozíciu 1, ktorýkoľvek zo zvyšných $n-1$ prvkov na pozíciu 2, atď, až napokon (keď už aj $(k-1)$-vá pozícia je obsadená) ktorýkoľvek zo zvyšných $(n-(k-1))$ prvkov na pozíciu k.

<u>Príklad 5</u>: Koľko rôznych 5-písmenových slov sa dá zostaviť z písmen slova VYHRAŤ, ak sa žiadne neopakuje?

$$V(6,4) = 6 \cdot 5 \cdot 4 \cdot 3 \cdot 2 = 720$$

<u>Príklad 6</u>: Koľko rôznych umiestnení na prvých troch miestach je možných v súťaži s 10 účastníkmi?

$$V(10,3) = 10 \cdot 9 \cdot 8 = 720$$

<u>Príklad 7</u>: Koľko je rôznych 4-ciferných párnych čísel, v ktorých sú všetky cifry rôzne?

$$8 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 4 + 9 \cdot 8 \cdot 7 \cdot 1 = 2296$$

Permutácia n prvkov

- *variácia* n-tej triedy z n prvkov bez opakovania
- ľubovoľná *bijekcia* n-prvkovej množiny
- počet slov dĺžky n z navzájom rôznych písmen nad abecedou z n písmen

Ich počet je

$$\mathbf{P(n) = V(n,n) = n! = \prod_{i=1}^{n} i}$$

Príklad 8: Koľko rôznych slov dĺžky 6 je možné vytvoriť z písmen slova PIATOK?

$$6! = 720$$

Príklad 9: Koľkými rôznymi spôsobmi je možné usadiť do radu 10 ľudí?

$$10! = 3628800$$

Príklad 10: Aký je počet variácií k-tej triedy z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ bez opakovania a permutácii z množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$ takých, že 1 a 2 nie sú vedľa seba?

$$V(n, k) - 2(k - 1)V(n - 2, k - 2);$$

pre permutácie $k = n$:

$$P(n) - 2(n - 1)P(n - 2) = n! - 2(n - 1)(n - 2)! = (n - 2)(n - 1)!$$

Príklad 11: Aký je počet podmnožín množiny $\{1, 2, \ldots, n\}$, ktoré obsahujú len nepárne čísla $\leq n$?

$$2^{\lceil \frac{n}{2} \rceil} - 1$$

Príklad 12: Koľkými spôsobmi je možné rozdeliť množinu $\{1, 2, \ldots, n\}$ na 2 disjunktné podmnožiny, ak nezáleží na poradí podmnožín?

$$2^{n-1}$$

Príklad 13: Pre n=5 jedna možná premutácia je

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 1 & 5 & 2 & 4 \end{pmatrix}$$

$$p(1) = 3,\ p(2) = 1,\ p(3) = 5,\ p(4) = 2,\ p(5) = 4$$

Kratší zápis pomocou *cyklu*: $p = (13542)$

Príklad 14: Pomocou cyklov zapíšte permutáciu

$$p = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 7 & 1 & 6 & 8 & 9 & 4 & 2 & 3 & 5 \end{pmatrix} = (172)(3648)(59)$$

Identická permutácia – $id = (1)(2)(3)\cdot(n)$.

Skladanie permutácií vykonávame *zľava doprava*.

Príklad 15: Zložte dané permutácie

$(12)(34) \circ (13)(24) = (14)(23)$

$(13)(24) \circ (12)(34) = (14)(23)$

$(134)(258) \circ (2456)(78) = (135784)(26)$

$(2456)(78) \circ (134)(258) = (134872)(56)$

Vo všeobecnosti je skladanie permutácií nekomutatívne, ale máme výnimky.

Kombinácie k-tej triedy z n prvkov

• všetky možné *neusporiadané* výbery *navzájom rôznych* k prvkov z n prvkov

• všetky možné k-prvkové *podmnožiny* n-prvkovej množiny

Ich počet dostaneme z variácií k-tej triedy bez opakovania vydelením $k!$, čo je počet všetkých usporiadaní konkrétnej variácie, t.j.

počet kombinácií k-tej triedy z n prvkov je

$$\mathbf{C(n,k) = \frac{n(n-1)...(n-(k-1))}{k!} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = \binom{n}{k}}$$

Vlastnosť 1:

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}$$

Vlastnosť 2 (Pascalova rovnosť):

$$\binom{n-1}{k-1} + \binom{n-1}{k} = \binom{n}{k}$$

Odvodenie: Pravá strana je počet k-prvkových podmnožín n-prvkovej množiny A. Zvoľme si $a \in A$. Podmnožiny množiny A si rozdeľme podľa toho, či obsahujú a alebo nie.

Každá k-prvková podmnožina množiny A neobsahujúca a je zároveň aj k-prvková podmnožina množiny $A - \{a\}$. Všetkých takých podmnožín je $\binom{n-1}{k}$.

Ak B je nejaká k-prvková podmnožina A obsahujúca a, môžeme jej bijektívne priradiť $(k-1)$-prvkovú podmnožinu množiny $B - \{a\}$.

Ich počet je $\binom{n-1}{k-1}$. Sčítaním týchto dvoch kombinačných čísel dostaneme dokazovanú rovnosť.

$\square$

Pascalov trojuholník

$$
\begin{array}{ccccccccccccccccccccc}
&&&&&&&&&&1&&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&&1&&1&&&&&&&&&\\
&&&&&&&&1&&2&&1&&&&&&&&\\
&&&&&&&1&&3&&3&&1&&&&&&&\\
&&&&&&1&&4&&6&&4&&1&&&&&&\\
&&&&&1&&5&&10&&10&&5&&1&&&&&\\
&&&&1&&6&&15&&20&&15&&6&&1&&&&\\
&&&1&&7&&21&&35&&35&&21&&7&&1&&&\\
&&1&&8&&28&&56&&70&&56&&28&&8&&1&&\\
&1&&9&&36&&84&&126&&126&&84&&36&&9&&1&\\
1&&10&&45&&120&&210&&252&&210&&120&&45&&10&&1\\
\iddots&&&&&&&&&&\vdots&&&&&&&&&&\ddots
\end{array}
$$

Vlastnosť 3 (Binomická veta):

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

Vlastnosť 4:

$$(x+1)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k$$

<u>Odvodenie:</u> Matematickou indukciou vzhľadom na n.

1. Vzťah platí pre $n = 0$.

2. Predoklajme, že tvrdenie je splnená pre nejaké $n \geq 0$. Našou úlohou teraz je, dokázať, že rovnica platí aj pre $n+1$.

$$(x+1)^{(n+1)} = (x+1)(x+1)^n = (1+x)\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^{(k+1)} =$$

$$= \binom{n}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=0}^{n-1} \binom{n}{k} x^{(k+1)} + \binom{n}{n} x^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k} x^k + \sum_{k=1}^{n} \binom{n}{k-1} x^k + x^{n+1} =$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{n} \left(\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} \right) x^k + x^{n+1} =$$

$$= \binom{n+1}{0} x^0 + \sum_{k=1}^{n} \binom{n+1}{k} x^k + \binom{n+1}{n+1} x^{n+1} = \sum_{k=0}^{n+1} \binom{n+1}{k} x^k$$

$\square$

Vlastnosť 5:

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = \binom{n}{0} + \binom{n}{1} + \ldots + \binom{n}{n-1} + \binom{n}{n} = 2^n$$

Vlastnosť 6:

$$\sum_{j=0}^{r} \binom{m}{j} \binom{n}{r-j} = \binom{m+n}{r}$$

Vlastnosť 7:

$$\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j}^2 = \binom{2n}{n}$$