

---

## Skúšková vzorová písomka – UMZI

---

1. (Množiny alebo logika)

a) Zistite, či nasledujúca výroková forma je tautológia a nájdite jej negáciu

$$\left[ (p \vee q) \Rightarrow r \right] \Leftrightarrow \left[ \bar{r} \Rightarrow (\bar{q} \wedge \bar{p}) \right]$$

b) Nech  $A = \{x \in \mathbb{Z} : x \equiv 0 \pmod{3}\}$ ,  $B = \{x \in \mathbb{Z} : -3 < x \leq 5\}$ ,

$$C = \{-3, -2, -1, 0, 1, 3, 5, 7, 9\}.$$

Nájdite prvky množín a zakreslite ich do Vennových diagramov

- $[(A \cup B) \cap C] \cap (C \cup B)$
- $A \div (C \cap B)$
- $[(A \cup B) \cap C] \cup [(C \cup B) \cap A]$

2. (Matematická indukcia) Dokážte, že pre každé prirodzené číslo  $n$  platí

$$\frac{1}{3 \cdot 7} + \frac{1}{7 \cdot 11} + \frac{1}{11 \cdot 15} + \dots + \frac{1}{(4n-1)(4n+3)} = \frac{n}{3(4n+3)}$$

3. (Kombinatorika) Riešte rovnicu / nerovnicu s kombinačnými číslami / faktoriálmi

$$\frac{(x-1)!}{24(x-5)!} - \frac{(x-1)!}{6(x-4)!} - \frac{5(x-2)!}{4(x-4)!} < 0$$

4. (Binomická veta) Zisti, ktorý člen binomického rozvoja  $\left( \frac{3}{4} \sqrt[3]{a^2} + \frac{2}{3} \sqrt{a} \right)^{12}$  obsahuje mocninu  $a^7$ .

5. (Číselné sústavy)

a) Preveďte z číselnej sústavy do číselnej sústavy  $(127E)_{16} = (?)_3$

b) Vynásobte v binárnom kóde a urobte skúšku správnosti v desiatkovej sústave

$$(101101101)_2 \cdot (10100101)_2$$

c) Odčítajte v doplnkovom binárnom kóde  $52 - 73$ .

d) BONUS: Vydeľte v binárnom kóde

$$(100101100)_2 : (10101)_2$$

6. (Postupnosti) Vyšetrite, či postupnosť je ohraničená a monotónna (rastúca / klesajúca) a napíšte jej rekurentné vyjadrenie

$$\left\{ \frac{2n}{n+1} + \frac{n+1}{3n} \right\}_{n=1}^{\infty}$$

7. (Aritmetická a geometrická postupnosť) Určte  $a_1$  a  $q$  geometrickej postupnosti, ak platí

$$a_1 + a_4 = 18 \quad \text{a} \quad a_2 + a_3 = 12.$$

8. (Geometrický rad) – 2 možnosti

a) Overte, že nasledujúci rad je geometrický a ak je to možné vypočítajte jeho súčet

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{2n+1}{n^2(n+1)^2}$$

b) Vypočítajte rovnicu / nerovnicu

$$3 + \frac{3}{x+2} + \frac{3}{(x+2)^2} + \frac{3}{(x+2)^3} + \dots = -2$$

9. Vypočítaj limitu postupnosti (jedna bude určite e-čková)

a)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{1}{\sqrt{4n+5} - 2\sqrt{n}}$

b)  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{2n+4}{2n+1} \right)^{4n-3}$

c) BONUS  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left( \frac{1}{n^2} + \frac{2}{n^2} + \dots + \frac{n}{n^2} \right)$

10. Dané sú body  $A = [0, 1]$ ,  $B = [1, 2]$ ,  $C = [3, 5]$

a) Dokáž, že body  $A, B, C$  tvoria trojuholník (že neležia na jednej priamke)

b) Vypočítaj veľkosť uhla  $\alpha$  (obvyklé značenie trojuholníka)

c) Vypočítaj dĺžku ťažnice na stranu  $a$

d) Vypočítaj obvod a obsah trojuholníka  $\Delta ABC$

11. Vyrieš sústavu rovníc

$$-x_1 + 2x_2 - 4x_3 = -27$$

$$+4x_1 + x_3 = 1$$

$$+x_1 - 3x_2 + x_3 = 16$$

BONUS (vyrieš ju aspoň dvoma rôznymi technikami)