

ak platí A a $A \Rightarrow B$ platí tiež = odvodzovacie pravidlo

d. cvičenie 22.2.2019

čo treba vedieť naspamäť:

- prepisy spojok:

$$A \wedge B = \neg(A \Rightarrow B)$$

$$A \vee B = \neg A \Rightarrow B$$

$$A \Leftrightarrow B = (A \Rightarrow B) \wedge (B \Rightarrow A) = \neg((A \Rightarrow B) \Rightarrow \neg(B \Rightarrow A))$$

- axiomy:

$$\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A) = A_1$$

$$\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow ((\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow A) = A_3$$

$A_2 \rightarrow$ veta o dedukcii = viem, že platí

- odvodzovacie pravidlá:

modus ponens: ak platí A a platí $A \Rightarrow B$ tak platí aj B

predpoklad \vdash formula: ak platí predpoklad, platí aj formula

\hookrightarrow ak nemám predpoklad = tautológia

$i: x_1 \dots, x_n \vdash A$
 $j: y_1 \dots, y_m \vdash A \Rightarrow B$ } použitie modus ponens

$k: x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m \vdash B$: MP(i,j) = ak spojím predpoklady x a y , platí B
 $\hookrightarrow i, j < k$ (riadky som odvodila predtým)

sylogizmus: $\left. \begin{array}{l} \vdash A \Rightarrow B \\ \vdash B \Rightarrow C \end{array} \right\}$ ak tieto dve platia (dokážem), môžem z toho vyvodiť C
 $\vdash A \Rightarrow C$

$$i: x_1 \dots x_n, \vdash A \Rightarrow B$$

$$j: y_1 \dots y_m, \vdash B \Rightarrow C$$

$$k: x_1 \dots x_n, y_1 \dots y_m \vdash A \Rightarrow C \text{ (Sig(i,j))}$$

veta o dedukcii:

$\vdash A \Rightarrow B$: za predpokladu A platí B

$$i: x_1 \dots x_n \vdash A \Rightarrow B$$

$A \vdash B$: môžem A "hodiť" do predpokladov $j: x_1 \dots x_n, A \vdash B$ (VD(i))

vety o obrátenej implikácii:

a) $\vdash (A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow \neg A)$ z tejto implikácie vyplýva táto (V001)

b) $\vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$

c) $\vdash (\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$

d) $\vdash (\neg A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (B \Rightarrow A)$

} nemôžem zmazať dvojité negácie
ale buď použijem toto

lemy z prednášky:

$\neg \neg A \Rightarrow A$ } alebo to proste urobím

$$\vdash A \Rightarrow \neg \neg A$$

$$\vdash A \Rightarrow A$$

$$\vdash B \Rightarrow (A \vee B) \quad // \text{ zmením spojku}$$

$$\vdash B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) \quad // \text{ týmto riadkom musí skončiť dôkaz}$$

$$\hookrightarrow 1: B \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B) : A_1 \rightarrow A=B \quad B=\neg A \text{ (zamenila som písmená)}$$

veta o zámene predpokladov pomocou vety o dedukcii

\hookrightarrow chceme dôkaz končiaci riadkom: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C)$

pomocný výpočet (odrazu)

$$n: \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash B \Rightarrow (A \Rightarrow C) \text{ VD}$$

(1) $n-1: (A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) \Rightarrow (B \Rightarrow (A \Rightarrow C)) \Rightarrow$ toto by mi nepomôže (slepá ulička)

(2) $n-1: A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B \vdash A \Rightarrow C$ // pridám predpoklad

$n-2: A \Rightarrow (B \Rightarrow C), B, A \vdash C$ // presuním predpoklad

$n-3: A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash B \Rightarrow C$ // presuním predpoklad

n-4: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ // rovnaké implikuje rovnaké

1: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C) \vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$: predpoklad - s riadka predpokladom môžeme začať

1': $A \Rightarrow (B \Rightarrow C)$ len iný zápis toho istého

2: $A \Rightarrow (B \Rightarrow C), A \vdash (B \Rightarrow C)$ VD:1

∴ prepíšem podľa poradia odzadu

2.6 d) $\vdash A \Rightarrow (A \vee B)$ // prepíšem \vee

$\vdash A \Rightarrow \neg A \Rightarrow B$ ← týmto skončím

pomocný výpočet:

n: $\vdash A \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ // obrátim druhú imp

n-1: $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ A_1

toto očividne len tak nemôžeme
= -20% lebo sme to neodvodili

⇒ pravidlo nahradenia ekv. formul
môžem za menší počet bodov
použiť pri otočení implikácie a
pri dvojitej negácii

e) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow B$ // nahradím

$\vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$

pomocný výpočet:

n: $\vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$

n-1: $\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) =$

n-1: $\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) : A_1$

f) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow A$ // nahradzavm

n: $\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$ // obrátim 1.

n-1: $\vdash (B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A$ // obrátim 2.

n-2: $\vdash \neg A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A) \vdash (A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$

n-2: $\neg A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$

obrátim v opačnom poradí

1: $\vdash \neg A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A) : A_1$
2: $\vdash (B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$ $\vee\vee I_5$

3: $\vdash \neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) : \text{syl}(1,2)$

4: $\vdash (\neg A \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A)$ $\vee\vee I_C$

5: $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A : \text{MP}(3,4)$

g) $\vdash (A \wedge B) \Rightarrow (A \vee B)$ // prepis

n: $\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ VD

n-1: $\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash A \Rightarrow B$ VD

n-2: $\neg(A \Rightarrow \neg B), \neg A \Rightarrow B$ VD

n-3: $\neg A \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$ // obr. imp

n-4: $\neg A \vdash \neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$

A_1

ak potrebujem obrátiť implikáciu
vezmem \bullet z n-1 \Rightarrow \bullet z n+1
ak mi to sedí do niektorého
pravidla $\vee\vee I$ som v suchu

1: $\vdash A \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A) : A_1$
2: $\vdash (\neg B \Rightarrow A) \Rightarrow (\neg A \Rightarrow B)$ $\vee\vee I$
3: $\vdash A \Rightarrow (A \Rightarrow B) : \text{syl}(1,2)$

môžem dať $\vee\vee I$ lebo som len dosadila
nenahradila

1: $\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) : A_1$

2: $(\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B)$ $\vee\vee I_C$

3: $\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B : \text{MP}(1,2)$

1: $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)$

2: $(\neg A \Rightarrow (B \Rightarrow \neg A)) \Rightarrow (\neg(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow \neg A)$

3: $\vdash \neg(B \Rightarrow \neg A) \Rightarrow A : \text{MP}(1,2)$

4: \vdash ??? viacero medzikrokov

5: $\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow A$

ak mám \neg pred zátvorkou,
vždy ide posledne

1: $\vdash \neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B) : A_1$

2: $\neg A, \neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)$? môžem

3: $\vdash (\neg B \Rightarrow (A \Rightarrow \neg B)) \Rightarrow (\neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B)$ $\vee\vee I$

4: $\neg A \vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow B$ $\text{MP}(2,3)$

5: $\neg A, \neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash B$ $\text{VD}(4)$

6: $\neg(A \Rightarrow \neg B) \vdash A \Rightarrow B$ $\text{VD}(5)$

7: $\vdash \neg(A \Rightarrow \neg B) \Rightarrow (A \Rightarrow B)$ $\text{VD}(6)$

1: $\vdash A$ (to už mám)
2: $\vdash A \Rightarrow (X \Rightarrow A)$ A_1
3: $\vdash X \Rightarrow A : \text{MP}(1,2)$
4: $\lambda \vdash A$ $\text{VD}(3)$

$A \Rightarrow \bullet$ $\vdash A$
 $\vdash A$
 $\vdash A$
1 nemôže implikovať
vač 0