

Algebra a diskrétna matematika

Úlohy na precvičenie

4. týždeň

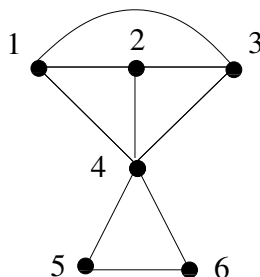
Označenie: K_n je úplný graf rádu n , $K_{m,n}$ je úplný bipartitný graf rádu $m+n$, C_n a P_n je kružnica a cesta rádu n (t.j. na n vrcholech). Pod grafom rozumieme obyčajný graf bez slučiek a násobných hrán.

Úloha 1. Zostrojte graf, ktorý je daný nasledujúcou maticou susednosti.

$$\begin{pmatrix} 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

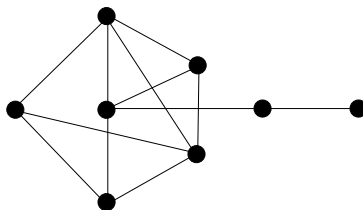
Aký je priemer, najväčší stupeň a obvod tohto grafu? Dokázali by ste odpovede na predchádzajúcu otázku zistiť priamo iba z matice?

Úloha 2. Pre daný graf nájdite maticu susednosti A . Čo reprezentuje matica A^2 ?



Úloha 3. Určte počet všetkých navzájom neizomorfných grafov na 4 a taktiež na 5 vrcholech. Koľko z nich je súvislých v každom prípade?

Úloha 4. Pre graf z obrázka určte priemer, najväčší stupeň a obvod. Jedná sa o rovinný graf? Je niektorý z grafov K_3 , K_4 alebo K_5 jeho podgrafom?



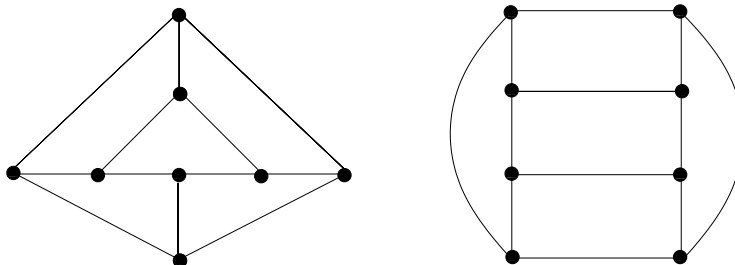
Úloha 5. Zostrojte graf, ktorý má

(a) 7 vrcholov, priemer 2 a obvod 4;

(b) 7 vrcholov, stupne vrcholov 3 alebo 4 a obsahuje K_4 ako svoj podgraf.

Sú grafy z oboch prípadov izomorfné? Ak áno, nájdite izomorfizmus. V prípade negatívnej odpovede porovnajte ich priemer, stupne, obvod.

Úloha 6. Obrázok znázorňuje dva izomorfné grafy. Nájdite príslušný izomorfizmus. Jedná sa o bipartitný graf?



Úloha 7. Koľko kružníc obsahujú grafy K_4 ; K_5 ; $K_{3,3}$; $K_{3,4}$?

Úloha 8. Aké sú rôzne dĺžky kružníc v Petersenovom grafe? Koľko päťuholíkov obsahuje?

Úloha 9. Pokúste sa o rôzne “čo najsymetrickejšie” zovšeobecnenia Petersenovho grafu, aby výsledný graf bol pravidelný stupňa 3.

Úloha 10. Nájdite všetky samokomplementárne grafy na 3, 4, 5 a 6 vrchoch.

Úloha 11. Ukážte, že ak existuje samokomplementárny graf na n vrchoch, tak n dáva po delení 4 zvyšok 0 alebo 1.

Úloha 12. Nájdite aspoň jeden samokomplementárny graf na 8 a 9 vrchoch.

Úloha 13. Určte množinu všetkých vzdialeností v grafoch C_n , K_n , $K_{m,n}$, P_n .

Úloha 14. Pokúste sa zostrojiť pravidelný graf stupňa 3 a obvodu 6 na čo najmenšom počte vrcholov.

Úloha 15. Laplaceova matica grafu je matica $D - A$, kde A je matica susednosti grafu a D je diagonálna matica pozostávajúca zo stupňov vrcholov. Ukážte, že $\det(D - A) = 0$.

Úloha 16. Nech M je matica susednosti Petersenovho grafu. Ukážte, že $M^2 + M - 2I = J$, kde J je matica pozostávajúca zo samých jednotiek.

Úloha 17. Ukážte, že pre rovinný graf s n vrcholmi, h hranami, o oblastami a c komponentami súvislosti platí $n - h + o = 1 + c$.

Úloha 18. Použitím Eulerovho vzorca ukážte nerovinnosť grafu $K_{3,3}$ a Petersenovho grafu.

Úloha 19. Ukážte, že v každom grafe s aspoň dvoma vrcholmi musia existovať 2 vrcholy rovnakého stupňa.

Úloha 20.* Odvodte horný odhad pre najväčší počet vrcholov grafu

- (a) priemeru 2 a maximálneho stupňa d ,
- (b) priemeru k a maximálneho stupňa d .