Kombinatorika

- **pracujeme so všetkými prvkami?**
  - nie, s výberom → **záleží na poradí?**
    - nie → **vracajú sa prvky po výbere?**
      - áno → kombinácie s opakovaním
      - nie → kombinácie bez opakovania
    - áno → **vracajú sa prvky po výbere?**
      - áno → variácie s opakovaním
      - nie → variácie bez opakovania
  - áno → **záleží na poradí?**
    - nie → nezmysel
    - áno → **všetky prvky množiny sú unikatné?**
      - nie → permutácie s opakovaním
      - áno → permutácie bez opakovania

kombinácie s opakovaním	kombinácie bez opakovania	variácie s opakovaním	variácie bez opakovania	permutácie s opakovaním	permutácie bez opakovania
$C'_k(n) = \binom{n+k-1}{k}$	$C_k(n) = \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}$	$V'_k(n) = n^k$	$V_k(n) = \frac{n!}{(n-k)!}$	$P'_{k_1,k_2,\ldots,k_r}(n) = \frac{n!}{k_1!\cdot k_2!\cdot\ldots\cdot k_r!}$	$P(n) = n!$
priklady					
- spôsoby rozdať 32 kariet 4 hračom (ak môžeme dať napr. 32 karty jednému a nič ostatným) - 5 druhov zmrzlín, kúpiť 15 porcií -rôzne súčiny 2 činiteľov z 5 čísel	- 6 bodov, 3 neležia na 1 priamke, koľko usečiek dostaneme pospajaním C(2,6) -9 bodov na kružnici, koľko dostaneme trojuholn. C(3,9) -20 prikladov z aritm + 30 z geom., zoradiť po 3 aritm + 2 geom. C(3,20)*C(2,30)	- päťciferné čísla z 6 cifier, môžu sa opakovať - 3 lístky z 5, vracajú sa do vrecka - súcasne hodiť x hracie kocky = 6^x - koľko znakov z 1 až 4 signálov môže obsahovať Morseova abeceda V´(1,2)+V´(2,2)+V´(3,2)+V´(4,2)	- päťciferné čísla z 6 cifier, nemôžu sa opakovať - 3 lístky z 5, nevracajú sa do vrecka - 8 ľudí si posiela pohľadnice = 8! / 6! - z koľkych prvkov sa dá vytvoriť 240 variácii 2. triedy	- kolko slov zo slova matematika/ okolo(písmena sa opakujú) -rozostaviť 3 zelené, 2 červ. a 2 modre predmety $P'_{3,2,2}(7) = \frac{7!}{3!\cdot 2!\cdot 2!}$	- päťciferné čísla z 5 cifier, nemôžu sa opakovať -usporiadať na poličke 4 cz a 3 sk knihy, aby najprv boli cz P(4)*P(3) -postaviť do radu n ľudí -usporiadať ABCDE aby A bolo 1. a E - posledné (menia sa len BCD) P(3)

Kombinačné čísla

$$\binom{n}{k} = \binom{n}{n-k}, \qquad \binom{n}{k} = \frac{n!}{(n-k)!\cdot k!}.$$

$$\binom{n}{1} = n,$$

$$\binom{n}{0} = 1, \quad \text{odkiaľ dostávame ďalšie dva vzťahy } \binom{n}{n} = 1 \text{ a } \binom{0}{0} = 1,$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k+1} = \binom{n+1}{k+1}$$

$$\binom{n}{k} + \binom{n}{k-1} = \binom{n+1}{k}$$

Pascalov trojuholník

n = 0	1
n = 1	1 1
n = 2	1 2 1
n = 3	1 3 3 1
n = 4	1 4 6 4 1
n = 5	1 5 10 10 5 1
n = 6	1 6 15 20 15 6 1
n = 7	1 7 21 35 35 21 7 1
n = 8	1 8 28 56 70 56 28 8 1
n = 9	1 9 36 84 126 126 84 36 9 1
n = 10	1 10 45 120 210 252 210 120 45 10 1

Binomická veta

$$(a+b)^n = \binom{n}{0}a^n b^0 + \binom{n}{1}a^{n-1}b^1 + \binom{n}{2}a^{n-2}b^2 + \binom{n}{3}a^{n-3}b^3 + \ldots + \binom{n}{n}a^0 b^n$$

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}a^{n-k}b^k \qquad a,b \in R;\ n,k \in N$$

- určiť štvrtý člen rozvoja $\binom{n}{3}a^{n-3}b^3$
- KTORÝ ČLEN MNOHOČLENA $\left(3x^2 - \frac{1}{x}\right)^{10}$ OBSAHUJE x^8 ?

$\binom{10}{k}(3x^2)^{10-k}\cdot\left(-\frac{1}{x}\right)^k \rightarrow$ všeobecný člen

$3^{10-k}\cdot x^{2.(10-k)}\cdot(-1)^k\cdot x^{(-k)}$

$x^{2.(10-k)}\cdot x^{(-k)} = x^8$ exponenty sa sčítajú

$2.(10-k) + (-k) = 8$

$20 - 2k - k = 8$

$20 - 3k = 8$

$12 = 3k$

$\boxed{k = 4}$

číselné sústavy

10 => 2

$120_{10} = 64+32+16+8 =$
$= 1\cdot2^6+1\cdot2^5+1\cdot2^4+1\cdot2^3+0\cdot2^2+0\cdot2^1+0\cdot2^0 =$
$= 1111000_2$

$55_{10} = 32+16+4+2+1 =$
$= 1\cdot2^5+1\cdot2^4+0\cdot2^3+1\cdot2^2+1\cdot2^1+1\cdot2^0 =$
$= 110111_2$

2 => 10

$01100010_2 = (2^0\times0)+(2^1\times1)+(2^2\times0)+(2^3\times0)+(2^4\times0)+(2^5\times1)+(2^6\times1)+(2^7\times0) = 2^1+2^5+2^6 = 98_{10}$

$010000_2 = (2^0\times0)+(2^1\times0)+(2^2\times0)+(2^3\times0)+(2^4\times1)+(2^5\times0) = 2^4 = 16_{10}$

$010001010_2 = (2^0\times0)+(2^1\times1)+(2^2\times0)+(2^3\times1)+(2^4\times0)+(2^5\times0)+(2^6\times0)+(2^7\times1)+(2^8\times0) = 2^1+2^3+2^7 = 138_{10}$

16 => 2

$62_{16} = 0110\ 0010_2$

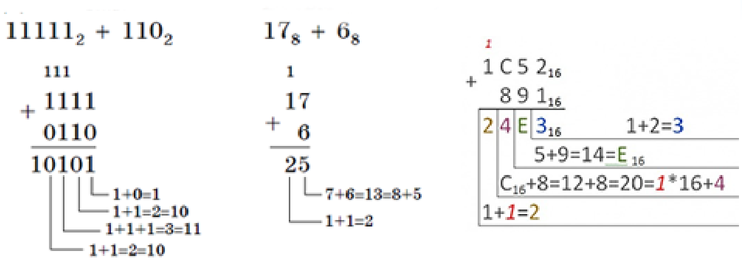
$FB_{16} = 1111\ 1011_2$

$10_{16} = 0001\ 0000_2$

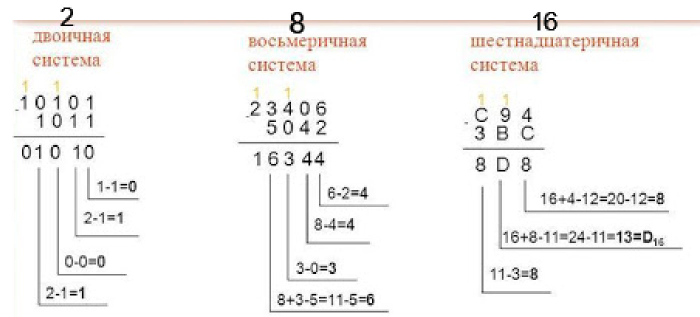
$8A_{16} = 1000\ 1010_2$

10 Десятичное число	2 Двоичное число	8 Восьмеричное число	16 Шестнадцатеричное число
0	0	0	0
1	1	1	1
2	10	2	2
3	11	3	3
4	100	4	4
5	101	5	5
6	110	6	6
7	111	7	7
8	1000	10	8
9	1001	11	9
10	1010	12	A
11	1011	13	B
12	1100	14	C
13	1101	15	D
14	1110	16	E
15	1111	17	F

Sčítanie



Odčítanie



Postupnosti

Postupnosť je rastúca ak $a_n < a_{n+1}$

klesajúca $a_n > a_{n+1}$

konštantná $a_n = a_{n+1}$

Rekurentný tvar

$\left\{\frac{3}{n}\right\}_{n=1}^{\infty}$ $\quad a_1 = \frac{3}{1} = 3$

$a_n = \frac{3}{n}$

$a_{n+1} = \frac{3}{n+1}$

ODČÍTANÍM

$$a_{n+1} - a_n = \frac{3}{n+1} - \frac{3}{n} = \frac{3n - 3\cdot(n+1)}{(n+1)\cdot n} =$$

$$= \frac{3n - 3n - 3}{n\cdot(n+1)} = \frac{-3}{n\cdot(n+1)}$$

$$a_{n+1} - a_n = \frac{-3}{n\cdot(n+1)}$$

$$a_{n+1} = a_n - \frac{3}{n\cdot(n+1)}$$

DELENÍM: $\quad a_1 = \frac{3}{1} = 3$

$a_n = \frac{3}{n}$

$a_{n+1} = \frac{3}{n+1}$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{\frac{3}{n+1}}{\frac{3}{n}} = \frac{3\cdot n}{3\cdot(n+1)} = \frac{n}{n+1}$$

$$\frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{n}{n+1}$$

$$a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+1}$$

POZOR! SPRÁVNA ODPOVEĎ

$$\boxed{\begin{gathered} a_1 = 3 \\ a_{n+1} = a_n \cdot \frac{n}{n+1} \end{gathered}}$$

Aritmetická postupnosť

$$a_{n+1} = a_n + d$$

Formula n-tého člena

$$a_n = a_1 + (n-1)d$$

$$a_n = a_k + (n-k)d$$

$$a_n = \frac{a_{n-k} + a_{n+k}}{2}$$

Sučet prvých n členov

$$S_n = \frac{2a_1 + (n-1)d}{2}\cdot n$$

$$S_n = \frac{a_1 + a_n}{2}\cdot n$$

diferencia

$$d = a_{n+1} - a_n$$

Geometrická postupnosť

$$b_{n+1} = b_n \quad q,$$

kde $q \neq 0$ − kvocient

Formula n-tého člena

$$b_n = b_1 \cdot q^{n-1} \qquad \frac{b_n}{b_{n-1}} = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

$$b_n = b_k \cdot q^{n-k} \qquad b_{11} = b_4 q^7$$

$$b_n^2 = b_{n-k}\cdot b_{n+k} \qquad |b_n| = \sqrt{b_{n-1}b_{n+1}} \qquad |b_7| = \sqrt{b_6 b_8}$$

Sučet prvých n členov

$$S_n = b_1\frac{1-q^n}{1-q} = b_1\frac{q^n-1}{q-1}, \; q \neq 1$$

kvocient

$$q = \frac{b_{n+1}}{b_n}$$

Сумма бесконечно убывающей геометрической прогресии:

$$S = \frac{b_1}{1-q}, \quad |q| < 1$$