Algebra a diskrétna matematika
Prehľad z 3. týždňa
Transformácie roviny pomocou matíc, determinanty, Cramerovo pravidlo

Pomocou matíc reprezentujeme transformácie v n-rozmerných priestoroch. Ak matica S je maticou súradníc bodov, ktoré zobrazujeme transformáciou pomocou matice T, tak maticu súradníc zobrazených bodov N zvyčajne vypočítame z rovnice

$$T \cdot S = N$$

Špeciálnym prípadom sú transformácie roviny. Medzi ne patria napríklad posunutie, škálovanie alebo otočenie (a iné).

Posunutie roviny
Body $(x_1, y_1), (x_2, y_2), \ldots (x_n, y_n)$ posunieme o vektor (a, b). Súradnice zobrazených bodov $(x'_1, y'_1), (x'_2, y'_2) \ldots (x'_n, y'_n)$ je možné získať dvomi spôsobmi:

$$\begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} a & a & \ldots & a \\ b & b & \ldots & b \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \end{pmatrix}$$

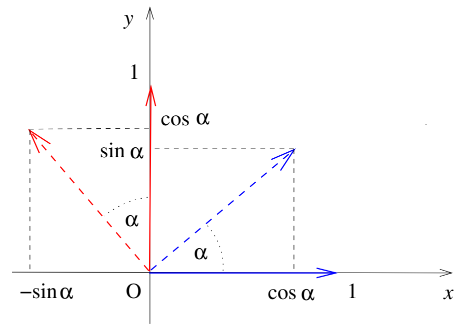
alebo

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & a \\ 0 & 1 & b \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \\ 1 & 1 & \ldots & 1 \end{pmatrix}$$

Škálovanie v smere súradnicových osí so stredom v $(0, 0)$
Ak škálovanie v smere x-ovej osi zmeníme faktorom c a v smere oxi y faktorom d, tak nové súradnice dostaneme z rovnice

$$\begin{pmatrix} c & 0 \\ 0 & d \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} x_1 & x_2 & \ldots & x_n \\ y_1 & y_2 & \ldots & y_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x'_1 & x'_2 & \ldots & x'_n \\ y'_1 & y'_2 & \ldots & y'_n \end{pmatrix}$$

Otočenie roviny o uhol α okolo bodu $(0,0)$.



$$(1,0) \longrightarrow (\cos\alpha, \sin\alpha) \qquad (0,1) \longrightarrow (-\sin\alpha, \cos\alpha)$$

Matica otočenia o uhol α

$$O_\alpha = \begin{pmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{pmatrix}$$

Determinant štvorcovej matice M, označovaný ako $|M|$ alebo $\det(M)$, je funkcia, ktorá matici M priradí reálne číslo, pričom platia nasledovné axiómy:

A1: Ak matica N vznikne z matice M **výmenou poradia** dvoch riadkov (stĺpcov), tak $|N| = -|M|$.

A2: Ak matica N vznikne z matice M **vynásobením** niektorého riadku (stĺpca) konštantou k, tak $|N| = k|M|$.

A3: Ak matica N vznikne z matice M **pripočítaním násobku** jedného riadku (stĺpca) k inému riadku (stĺpcu), tak $|N| = |M|$.

A4: Pre **jednotkovú** maticu platí $|I| = 1$.

Takto definovaný determinant je určený **jednoznačne**.

Z definície determinantu sa dajú odvodiť ďalšie vlastnosti:

V1: Ak sa v matici nachádza **nulový riadok** (stĺpec), tak jej determinant je **nulový**.

V2: Ak sa v matici nachádzajú dva **rovnaké riadky** (stĺpce), tak jej determinant je **nulový**.

V3: Determinant hornej (dolnej) **trojuholníkovej** matice sa rovná **súčinu prvkov na hlavnej diagonále**.

V4: Determinant **transponovanej** matice sa rovná determinantu **pôvodnej** matice, tj. $|A| = |A^T|$.

V5: Pre ľubovoľné dve štvorcové matice rovnakého typu platí, že determinant súčinu matíc je súčin ich determinantov, t. j.

$|M \cdot N| = |M| \cdot |N|$

Upozornenie: Determinant súčtu matíc sa nerovná súčtu determinantov!

$|M + N| \neq |M| + |N|$

Vzorce na výpočet determinantov rádu $1, 2, 3$:

$$|A_{1\times 1}| = |a_{11}| = a_{11}$$

$$|A_{2\times 2}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

$$|A_{3\times 3}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32}$$
$$-a_{13}a_{22}a_{31} - a_{11}a_{23}a_{32} - a_{12}a_{21}a_{33}$$

Sarrusovo pravidlo na výpočet determinantu matice $A_{3\times 3}$:

$$\begin{array}{ccc:cc}
+ & + & + & & \\
a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\
a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\
a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \\
- & - & - & &
\end{array}$$

Aplikácie determinantov v geometrii

Obsah trojuholníka určeného bodmi (x_1, y_1), (x_2, y_2), (x_3, y_3) je

$$S = \pm\frac{1}{2}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 \\ y_1 & y_2 & y_3 \\ 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Objem štvorstena určeného bodmi (x_1, y_1, z_1), (x_2, y_2, z_2), (x_3, y_3, z_3), (x_4, y_4, z_4):

$$V = \pm\frac{1}{6}\begin{vmatrix} x_1 & x_2 & x_3 & x_4 \\ y_1 & y_2 & y_3 & y_4 \\ z_1 & z_2 & z_3 & z_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}$$

Rozvoj determinantu podľa riadku alebo stĺpca

Výrazom A_{ij} označujeme maticu typu $(n-1)\times(n-1)$, ktorú dostaneme z matice $A_{n\times n}$ vynechaním i-teho riadka a j-teho stĺpca.

Determinant matice A môžeme potom vypočítať aj pomocou

- rozvoja podľa i-teho riadku

$$|A| = (-1)^{i+1}a_{i1}|A_{i1}| + (-1)^{i+2}a_{i2}|A_{i2}| + \cdots + (-1)^{i+n}a_{in}|A_{in}|$$

- rozvoja podľa j-teho stĺpca

$$|A| = (-1)^{1+j}a_{1j}|A_{1j}| + (-1)^{2+j}a_{2j}|A_{2j}| + \cdots + (-1)^{n+j}a_{nj}|A_{nj}|$$

Determinant a inverzná matica

Štvorcovú maticu A nazývame **regulárnou**, ak $|A| \neq 0$.

K štvorcovej matici A existuje inverzná matica práve vtedy, keď $|A| \neq 0$.

Ak matica A je regulárna, tak

$$|A^{-1}| = \frac{1}{|A|}$$

Ak $|A| = 0$, maticu A nazývame **singulárnou.**

K singulárnej matici neexistuje inverzná matica.

Výpočet inverznej matice pomocou determinantu

Ak A je regulárna matica rádu n a A_{ij} vznikne z A vynechaním i-teho riadku a j-teho stĺpca, potom pre **inverznú** maticu platí

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}(b_{ij})_{n\times n}, \text{ kde } \quad b_{ij} = (-1)^{i+j}|A_{ji}|$$

Matica $(b_{ij})_{n\times n}$ sa nazýva **adjungovaná** a označuje sa $\mathrm{adj}(A)$;

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\mathrm{adj}(A)$$

$$\text{Ak} \quad A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}, \text{ tak } \quad A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{pmatrix} a_{22} & -a_{12} \\ -a_{21} & a_{11} \end{pmatrix}$$

Cramerovo pravidlo

Ak $AX = B$ je systém pozostávajúci z n lineárnych rovníc o n neznámych taký, že $|A| \neq 0$, potom systém má jediné riešenie.

Toto riešenie má tvar

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots,\ x_n = \frac{|A_n|}{|A|},$$

pričom maticu A_i získame z matice A náhradou i-teho stĺpca stĺpcom pravých strán $B = \begin{pmatrix} b_1 \\ b_2 \\ \vdots \\ b_n \end{pmatrix}$.