Rezolučná metóda

Návody k cvičeniam

Cvičenie 5.2c) Úlohou je rezolučnou metódou zistiť, či je KNF-formula

$$A : (a \vee b \vee c) \wedge (\neg a \vee \neg b) \wedge (\neg b \vee \neg c) \wedge (\neg a \vee \neg c)$$

splniteľná, a ak áno tak nájsť aspoň jeden model. Písmenom T označíme množinu klauzúl skúmanej formuly. V našom prípade máme $T = \{a \vee b \vee c, \neg a \vee \neg b, \neg b \vee \neg c, \neg a \vee \neg c\}$.

(1) Na začiatok si potrebujeme zvoliť jednu z prvotných formúl. Hociktorá voľba je vyhovujúca a eventuálne nás dovedie k riešeniu.[1] Poďme povedzme podľa abecedy a začnime prvotnou formulou a. Na konci tohto kroku nám ostane množina klauzúl $\tilde{T}(a)$, kde sa už a nebude vyskytovať.

Najskôr klauzuly z množiny T rozdelíme na tri množiny: v množine $T_0(a)$ budú tie klauzuly, ktoré neobsahujú a; v množine $T_1(a)$ budú tie klauzuly, ktoré obsahujú a a neobsahujú $\neg a$; v množine $T_2(a)$ budú tie klauzuly, ktoré obsahujú $\neg a$ a neobsahujú a. (Ak by bola v zadaní klauzula, kde sa vyskytuje prvotná formula aj jej negácia, tak takúto klauzulu ignorujeme, lebo je vždy splnená.) Dostávame nasledujúce tri množiny: $T_0(a) = \{\neg b \vee \neg c\}$, $T_1(a) = \{a \vee b \vee c\}$ a $T_2(a) = \{\neg a \vee \neg b, \neg a \vee \neg c\}$.

Ďalej zostrojíme množinu $T_{1,2}(a)$ a to tak, že sa pozrieme na všetky dvojice klauzúl, kde jedna je z $T_1(a)$ a druhá z $T_2(a)$ a spojíme ich do jednej klauzuly, pričom vynecháme a aj $\neg a$. Spojenie $a \vee b \vee c$ a $\neg a \vee \neg b$ nám dá $b \vee c \vee \neg b$ a spojenie $a \vee b \vee c$ a $\neg a \vee \neg c$ nám dá $b \vee c \vee \neg c$. Klauzuly $\neg a \vee \neg b$ a $\neg a \vee \neg c$ nespájame, lebo obe sú z tej istej množiny. Takže dostávame $T_{1,2}(a) = \{b \vee c \vee \neg b, b \vee c \vee \neg c\}$. Všimnime si, že obe klauzuly z množiny $T_{1,2}(a)$ obsahujú prvotnú formulu aj jej negáciu, takže sú vždy splnené a môžeme ich vynechať. Nakoniec zostrojíme množinu $\tilde{T}(a)$ zjednotením množín $T_0(a)$ a $T_{1,2}(a)$. Keďže všetky klauzuly z množiny $T_{1,2}(a)$ sme vynechali, tak $\tilde{T}(a) = T_0(a) = \{\neg b \vee \neg c\}$.

(2) Odteraz už nepracujeme s množinou T, ale s množinou $\tilde{T}(a)$. Zvoľme si prvotnú formulu b. (Prvotná formula a sa v klauzulách v množine $\tilde{T}(a)$ už nevyskytuje, takže si volíme jednu z dvojice b a c.) Potom $T_0(b) = T_1(b) = \emptyset$ a $T_2(b) = \{\neg b \vee \neg c\}$. Keďže $T_1(b)$ je prázdna množina, tak neexistuje taká dvojica klauzúl, kde jedna je z $T_1(b)$ a druhá z $T_2(b)$. Preto $T_{1,2}(b) = \emptyset$, a keďže aj $T_0(b) = \emptyset$, tak $\tilde{T}(b) = \emptyset$.

Keďže sme dostali prázdnu množinu klauzúl, tak A je spniteľná. Poďme spätne nájsť jej model ν:

(3) Ku kroku tri sme v našom postupe nikdy nedospeli, lebo sme dostali prázdnu množinu klauzúl už v kroku (2). To znamená, že klauzula c môže mať ľubovoľné ohodnotenie a stále budeme vedieť zostrojiť model. Povedzme, že $\nu(c) = 1$.

(2) Keďže $T_1(b) = \emptyset$, tak všetky výskyty b sú v množine $T_2(b)$, a teda v tvare $\neg b$. Zvolíme teda $\nu(b) = 0$, lebo potom $\nu(\neg b) = 1$ a všetky klauzuly, kde sa vyskytuje b, budú pravdivé. (Ak by sme mali naopak $T_2(b) = \emptyset$, tak zvolíme $\nu(b) = 1$.)

[1] V niektorých prípadoch si vieme vhodnou voľbou ušetriť trochu času, no zväčša je to skoro úplne jedno.

(1) Na základe toho ako funguje algoritmus platí, že $T_1(a)$ alebo $T_2(a)$ bude určite splnené, bezohľadu na ohodnotenie a. Vidíme, že $T_2(a) = \{\neg a \vee \neg b, \neg a \vee \neg c\}$ nie je nutne vždy splnené kvôli klauzule $\neg a \vee \neg c$. (Zvolili sme si $\nu(c) = 1$, takže $\nu(\neg a \vee \neg c)$ bude nula ak $\nu(a) = 1$). Platí však, že všetky klauzuly v $T_1(a)$ sú vždy pravdivé. Aby teda boli pravdivé aj klauzuly v $T_2(a)$, tak $\nu(a) = 0$.

Získali sme model $(\nu(a), \nu(b), \nu(c)) = (0, 0, 1)$. Tým je úloha dokončená, no pre istotu si môžete v rýchlosti urobiť skúšku správnosti. (Pozrite sa na množinu klauzúl T zo začiatku a overte, že každá platí.) Skúste vyrobiť model aj pre prípad, že na začiatku si zvolíte $\nu(c) = 0$.

Cvičenie 5.2e) V tomto prípade máme $T = \{a \vee b, c \vee d, \neg a \vee \neg c, \neg b \vee \neg d, \neg a \vee \neg d, \neg b \vee \neg c\}$.

(1) Zasa začnime prvotnou formulou a. Potom $T_0(a) = \{c \vee d, \neg b \vee \neg d, \neg b \vee \neg c\}$, $T_1(a) = \{a \vee b\}$ a $T_2(a) = \{\neg a \vee \neg c, \neg a \vee \neg d\}$. Následne dostaneme $T_{1,2}(a) = \{b \vee \neg c, b \vee \neg d\}$ a $\tilde{T}(a) = \{c \vee d, \neg b \vee \neg d, \neg b \vee \neg c, b \vee \neg c, b \vee \neg d\}$.

(2) Pokračujme prvotnou formulou b. Máme $T_0(b) = \{c \vee d\}$, $T_1(b) = \{b \vee \neg c, b \vee \neg d\}$ a $T_2(b) = \{\neg b \vee \neg d, \neg b \vee \neg c\}$. Takže $T_{1,2}(b) = \{\neg c \vee \neg d, \neg c \vee \neg c, \neg d \vee \neg d, \neg d \vee \neg c\}$. Klauzulu $\neg c \vee \neg c$ zjednodušíme na $\neg c$ a $\neg d \vee \neg d$ na $\neg d$. Taktiež vidíme, že klauzulu $\neg c \vee \neg d$ tam máme dvakrát, takže jednu môžeme vynechať. Nakoniec dostávame $\tilde{T}(b) = \{c \vee d, \neg c \vee \neg d, \neg c, \neg d\}$.

(3) Ďalej sa pozrime na c. Máme $T_0(c) = \{\neg d\}$, $T_1(c) = \{c \vee d\}$ a $T_2(c) = \{\neg c \vee \neg d, \neg c\}$. Takže $T_{1,2}(c) = \{d \vee \neg d, d\}$ (prvú klauzulu môžeme vynechať, druhú klauzulu d sme dostali tak, že sme spojili $c \vee d$ a $\neg c$) a $\tilde{T}(c) = \{\neg d, d\}$.

(4) Už máme iba klauzuly s d, takže $T_0(d) = \emptyset$. Ďalej máme $T_1(d) = \{d\}$ a $T_2(d) = \{\neg d\}$. Spojením d a $\neg d$ dostaneme prázdnu formulu, takže $T_{1,2}(d) = \{\boxdot\}$ a $\tilde{T}(d) = \{\boxdot\}$. Keďže sme dostali prázdnu formulu, tak formula nemá model, a teda je kontradikcia.

Opäť si môžeme v hlave spraviť skúšku správnosti. (Priamo do písomky takúto skúšku nepíšte, ale ak stíhate tak si ju spravte, nech viete, že ste sa nepomýlili.) Skúsme si overiť, že formula nemá model. Ak $\nu(a) = 0$, tak kvôli klauzule $a \vee b$ musíme mať $\nu(b) = 1$. Potom kvôli klauzule $\neg b \vee \neg c$ potrebujeme $\nu(c) = 0$. Potom kvôli klauzule $c \vee d$ máme $\nu(d) = 1$. Ale pri týchto ohodnoteniach je klauzula $\neg b \vee \neg d$ nepravdivá. Podobne si skúste overiť, že dostaneme nepravdivú klauzulu aj pre $\nu(a) = 1$. Takto sme si overili, že formula naozaj nemá model.

6 Spínače, hradlá a logické neuróny

Návody k cvičeniam

Cvičenia 6.1, 6.2 a 6.3.

Cieľom oboch cvičení je osvojiť si značenie používané v Booleových algebrách a zopakovať si zostrojovanie formúl v DNF/KNF tvare (disjunktívny a konjuktívny normálny tvar). Značenie v Booleovej algebre sa do značenia z predošlých prednášok prepisuje nasledovne:

$$xy \text{ je to isté ako } x \wedge y,$$
$$x + y \text{ je to isté ako } x \vee y,$$
$$\overline{x} \text{ je to isté ako } \neg x.$$

Keď formulu prevedieme do tvaru, na ktorý sme zvyknutí, tak z nej už ľahko zostrojíme DNF-formulu (resp. KNF-formulu). Spôsob ako to spraviť nie je v zadaní určený, ale odporúčam precvičiť si metódy z 1. aj 4. kapitoly.

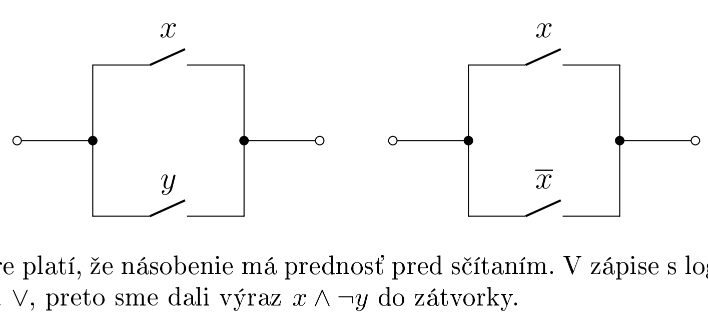
Cvičenie 6.2b) Booleovu funkciu $x\overline{y} + z$ prepíšeme na $(x \wedge \neg y) \vee z$.[1] Vidíme, že táto formula už je v DNF tvare, takže sme hotový.
Skúsme ešte vytvoriť KNF-formulu ekvivalentnú s formulou $F = (x \wedge \neg y) \vee z$. Zvoľme napríklad postup z prvej kapitoly. Negácia formuly F je $\neg F = \neg((x \wedge \neg y) \vee z) = \neg(x \wedge \neg y) \wedge \neg z = (\neg x \vee y) \wedge \neg z$. Túto formulu $\neg F$ teraz potrebujeme zapísať ako KNF-formulu. Pomocou tabuliek zistíme, že $\neg F = (\neg x \vee y) \wedge \neg z = (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$. Keďže prvé dve klauzuly DNF-formuly sa líšia iba v tom, že v jendej je x a v druhej $\neg x$, tak platí $\neg F = (x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z) = (y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)$ (premyslite si prečo). Nakoniec teda dostaneme

$$F = \neg\neg F = \neg\left((y \wedge \neg z) \vee (\neg x \wedge \neg y \wedge \neg z)\right) = (\neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z),$$

takže KNF-formula ekvivalentná s F je $(\neg y \vee z) \wedge (x \vee y \vee z)$.

Cvičenie 6.4.

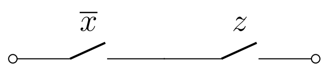
Úlohou je zostrojiť spínacie obvody pre dané funkcie, pokiaľ možno bez použitia spriahnutých spínačov. Dva spínače sú spriahnuté ak v oboch vystupuje rovnaká prvotná formula. (V reči Booleovej algebier je to rovnaký prvok.) Na obrázku dole vľavo je obvod s nespriahnutými spínačmi, na pravo sú spínače spriahnuté.



[1] V Booleovej algebre platí, že násobenie má prednosť pred sčítaním. V zápise s logickými spojkami však $\wedge$ nemá prednosť pred $\vee$, preto sme dali výraz $x \wedge \neg y$ do zátvorky.

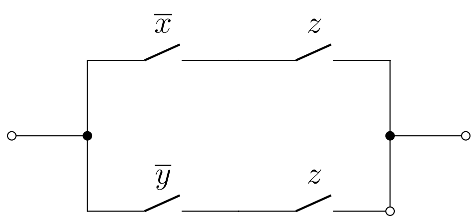
Cvičenia a) a c) sú vcelku priamočiare aj bez použitia spriahnutých spínačov. Prvoplánové riešenie cvičenia b) asi využije spriahnuté spínače, no s trochou snahy by to mohlo ísť aj bez spriahnutých spínačov. Cvičenie d) spravte vpohode aj s použitím spriahnutých spínačov, ak si veríte tak potom skúste aj bez nich (prípadne dokážte, že bez spriahnutých spínačov sa to nedá).

Cvičenie 6.4c) Pozrime sa na funkciu $f(x,y,z) = \overline{(xy)}z$. Pomocou pravidiel Booleovej algebry dostaneme $f(x,y,z) = \overline{(xy)}z = (\overline{x}+\overline{y})z = \overline{x}z + \overline{y}z$. Funkcie $\overline{x}z$ a $\overline{y}z$ pomocou spínačou zapíšeme takto:

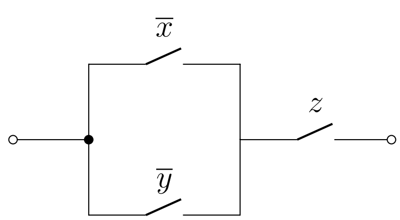


a

Keďže je medzi $\overline{x}z$ a $\overline{y}z$ znamienko $+$, tak tieto dva obvody musíme zapojiť paralelne a dostaneme:



Vidíme, že máme problém, lebo dva spínače sú spriahnuté (horný aj dolný pravý spínač majú z). Keď sa zamyslíme, tak problém vznikol preto, že vo výraze $\overline{x}z + \overline{y}z$ sa prvok z vyskytuje dvakrát. Skúsme teda použiť tvar $(\overline{x}+\overline{y})z$, kde žiaden prvok nie je viac než raz. Sériovo zapojíme obvody zodpovedajúce $(\overline{x}+\overline{y})$ a z a dostaneme:

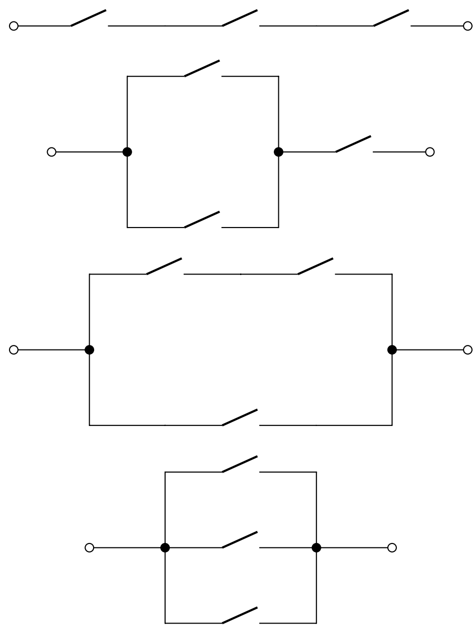


Našli sme riešenie nepoužívajúce spriahnuté spínače.

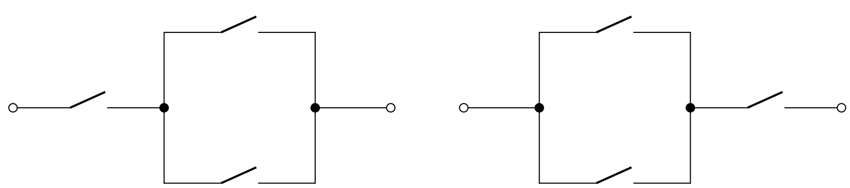
CVIČENIE 6.5.

Hlavný problém s týmto cvičením je ujasniť si, ktoré obvody považujeme za rovnaké. Keďže spínače sú nespriahnuté, tak nezáleží na tom, aké prvky budú pri jednotlivých spínačoch (vždy sa jedná o štyri rôzne prvky). Preto nám stačí kresliť obvody bez prvkov a až keď nájdeme všetky riešenia, tak zostrojíme príslušné funkcie. Zvyšok si objasníme vyriešením jednoduchšej úlohy: Zostrojte všetky možné spínacie siete s troma (nespriahnutými) spínačmi a zistite, aké Booleove funkcie reprezentujú.

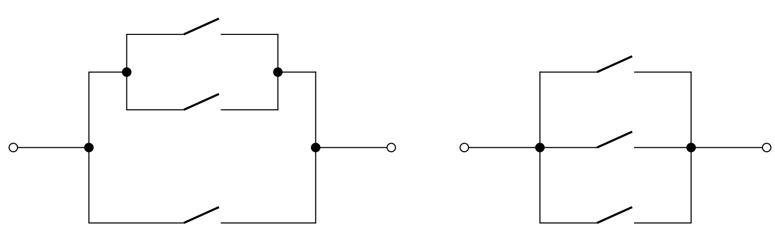
Dokopy máme štyri rôzne siete, také ako na obrázku:



Tieto 4 siete reprezentujú Booleove funkcie abc, $(a+b)c$, $ab+c$ a $a+b+c$. Všetky ostatné obvody považujeme za rovnaké ako jeden zo štyroch nakreslených. Napríklad tieto dva obvody považujeme za rovnaké lebo sú len zrkadlovým obrazom:



Zamyslite sa prečo aj tieto dva obvody považujeme za rovnaké:



Cvičenia 6.6 a 6.7.

V oboch cvičeniach skúste používať hradlá s max. dvoma vstupmi. Odporúčam začat pár úlohami z Cvičenia 6.7, potom spraviť Cvičenie 6.6 a nakoniec dokončiť zvyšok Cvičenia 6.7. Spôsob ako zostrojiť obvod s hriadlami z danej funkcie je veľmi jednoduchý, pozrite si vypracovaný príklad zo skrípt. Našou úlohou však nie je iba zostrojiť takýto obvod, ale aj použiť čo najmenej hradiel. Nemusíte sa trápiť tým, že vždy nájdete úplne optimálne riešenie, ale pokúste sa vždy aspoň trochu znížiť počet použitých hradiel.

Cvičenie 6.7d) Je užitočné vedieť si zrátať počet hradiel skôr než obvod nakreslíme. Nie je to moc zložité, stačí zrátať koľko krát spravíme ktorú operáciu. Pre výraz $x\overline{z}+\overline{y}z+\overline{x}yz$ je to tri krát operácia komplementu (negácie)[2], dva krát operácia sčítania (disjunkcie) a štyri krát operácia násobenia (konjunkcie). Dokopy by sme teda potrebovali $3+2+4=9$ hriadiel. Skúsme toto číslo znížiť. Druhý a tretí sčítanec vieme zjednodušiť pomocou distributívnosti a dostaneme $x\overline{z}+(\overline{y}+\overline{x}y)z$. Počet potrebných negácií a disjunkcií sa nám nezmenil, no ubudla nám jedna konjunckia. Takže sme ušetrili jedno hradlo a stačí nám ich už len 8. Buď sa pokúste toto číslo ešte zlepšiť, alebo prepíšte tento výraz pomocou hriadiel.[3]

Cvičenie 6.6 Na začiatok sa zíde vypísať si všetky možné Booleove funkcie dvoch premenných. Označme si premenné x a y. Každá funkcia $f(x,y)$ týchto dvoch premenných je daná tabuľkou:

x	y	$f(x,y)$
1	1	?
1	0	?
0	1	?
0	0	?

Namiesto každého otázniku môže byť 1 alebo 0, takže dokopy je $2^4=16$ rôznych funkcí dvoch premenných. Spravme si dve z nich:

x	y	$f(x,y)$
1	1	1
1	0	1
0	1	0
0	0	0

Na prvý pohľad môže táto funkcia vyzerať podozrivo, no v skutočnosti ide iba o funkciu $f(x,y)=x$. Obvod vieme teda zostrojiť s nula hriadlami, na vstupe je jediná premenná x a tá je prepojená priamo na výstup. Druhá funkcia:

x	y	$f(x,y)$
1	1	1
1	0	0
0	1	1
0	0	1

Táto funkcia nám dá tri krát 1 a raz 0, takže by sa mala dať napísať v tvare disjunkcie. Jediný prípad, kedy $f(x,y)=0$ je pre $x=1$ a $y=0$, takže $f(x,y)=\neg x\vee y$ (overte si, či to

[2] Všimnite si, že v cvičení 6.7c) je komplement použitý až 6-krát. V skutočnosti však na tieto komplementy stačia iba tri hriadlá, lebo robíme komplement len z troch rôznych prvkov.

[3] Ideálne je začať operáciami, ktoré sa udejú ako prvé. Takže v našom prípade najskôr spraviť hriadlá, ktoré vyrobia negácie prvkov z, y a x, potom dve hradlá konjunkcie pre x a $\overline{z}$, a $\overline{x}$ a y, atď.

ozaj platí). Túto funkciu teda vieme zapísať pomocou dvoch hradiel, negácie a disjunkcie (zostrojenie obvodu je opäť na vás).

Cvičenia 6.8 a 6.9.

Tieto dve cvičenia sú veľmi podobné Cvičeniam 6.6 a 6.7. V Cvičení 6.9 navyše nie je úlohou použiť čo najmenej neurénov, ide iba o zostavenie funkčnej siete. Opäť skúste začať Cvičením 6.9 a až potom sa presunúť na Cvičenie 6.8.

Nezabudnite, že narozdiel od hriadiel môžete smelo používať aj konjukciu/disjunkciu viac než dvoch prvkov a k dispozícii máte aj neurón implikácie. Jediný neurón, ktorý chýba je neurón ekvivalencie. Ten sa dá ľahko vytvoriť ako konjunkcia dvoch neurónov implikácií. Ak chcete využívať iba neuróny negácie, konjunkcie a disjunkcie, tak každú formulu môžete previesť do KNF alebo DNF tvaru.

Spôsob ako zostrojiť neurón je podrobne vypracovaný v príklade v skriptách.

Cvičenie 6.10.

Táto úloha je vcelku náročná a nie je zjavný postup ako jednotlivé vzťahy odvodiť. Nevadí ak sa vám nepodarí odvodiť všetky, ale pokúste sa aspoň niektoré. Tu si názorne odvodíme idempotentnosť:

Začnime výrazom $x+x$ a pokúsme sa ukázať, že je rovný x. Ako upraviť výraz $x+x$ bez toho aby sme ho zmenili? *Zákon jednotky* nám hovorí, že ak hocičo vynásobíme jednotkou, tak dostaneme to isté. Takže platí $x+x=(x+x)\cdot 1$. Vieme toto upraviť ďalej? Jednotka sa dá rozpísať, napríklad podľa zákona nuly, alebo zákona doplnku. Skúsme použiť zákon doplnku, teda $1=x+\overline{x}$. Platí teda $x+x=(x+x)\cdot 1=(x+x)\cdot(x+\overline{x})$. Výraz na ľavo sa podľa distributívnosti rovná $(x+x)\cdot(x+\overline{x})=x+x\overline{x}$. No a podľa zákona doplnku platí $x\overline{x}=0$ a zákon nuly nám dá $x+x\overline{x}=x+0=x$.

V skratke teda máme $x+x=(x+x)\cdot 1=(x+x)\cdot(x+\overline{x})=x+x\overline{x}=x+0=x$, čím sme dokázali prvú časť idempotentnosti. Zvyšok je na vás.

7 Predikátová logika, splniteľnosť

Návody k cvičeniam

Cvičenie 7.1.

Na začiatok je dobré uvedomiť si, že žiadna z úloh nemá iba jedno riešenie. Vždy máme viac možností ako si zvoliť predikáty a konštanty a aj ako to celé zapísať. Taktiež nezabudnite, že konštanty sú formálne definované ako nulárne funkčné symboly (keďže nulárne funkcie majú na vstupe nula premenných, tak vždy vrátia tú istú konštantnú hodnotu).

Pri každej úlohe si najskôr treba zvoliť univerzum. Treba si dať pozor, aby univerzum zahŕňalo všetky prvky, s ktorými chceme pracovať. (Napríklad ak by sme si v úlohe **a)** zvolili ako univerzum množinu všetkých učiteľov, tak by sme nevedli zahrnúť žiakov.) Napríklad v úlohách **a)** až **e)** môžeme zvoliť univerzum ako množinu všetkých ľudí. V niektorých prípadoch bude síce väčšie než treba, ale to nie nutne vadí.

Cvičenie 7.1b) Ako univerzum použijeme množinu všetkých ľudí. Tvrdenie hovorí niečo o rektoroch, takže sa nám asi zíde vedie rozlíšiť, či je daný človek rektor alebo nie. Na toto je úplne vhodný unárny predikát, lebo ten vezme jeden vstup a vráti nám buď 1 alebo 0. Definujme si teda predikát R takto: $R(x) = 1$ ak človek x je rektor, $R(x) = 0$ ak človek x nie je rektor. Naše tvrdenie hovorí niečo o všetkých rektoroch, takže môže začať takto:

$$(\forall x)(R(x) \Rightarrow ???).$$

Toto tvrdenie čítame 'pre každého človeka, ktorý je rektor platí ???', alebo skrátene 'pre každého rektora platí ???'. Potrebujeme ešte dokončiť pravú časť implikácie. Na to použijeme binárny predikát $D(x, y) = xDy$, ktorý dá 1 ak y je dekanom človeka x a 0 ak y nie je dekanom človeka x. Taktiež použijeme binárny predikát rovnosti. Finálne tvrdenie bude vyzerať takto:

$$(\forall x)\,(R(x) \Rightarrow (\exists y)(\exists z)(xDy \;\wedge\; xDz \;\wedge\; \neg(y = z)))\,.$$

Posledná časť zaistí, že sa jedná o dvoch rôznych dekanov. Keďže y ani z nemajú žiadny iný (voľný ani viazaný) výskyt v našej formule, tak $(\exists y)(\exists z)$ môžeme presnúť na začiatok (ale nemusíme, aj predošlé riešenie je správne):

$$(\forall x)(\exists y)(\exists z)\,(R(x) \Rightarrow (xDy \;\wedge\; xDz \;\wedge\; \neg(y = z)))\,.$$

Pozor, poradie kvantifikátorov na začiatku je dôležité. Ak by boli napríklad v poradí $(\exists y)(\exists z)(\forall x)\dots$, tak dostaneme iné tvrdenie, konkrétne: 'existuje dvaja dekani, ktorí sú dekanmi všetkých rektorov'.

Cvičenie 7.1i) Ako univerzum si zvolíme všetky reálne čísla. O unárnej funkcii f chceme povedať, že má globálne maximum v bode a. Zadefinujme si teda a ako konštantu, t.j. nulárny funkčný symbol. Tvrdenie je o maxime, takže sa nám zíde aj binárny predikát nerovnosti $<$. Taktiež použijeme aj predikát rovnosti. Tvrdenie bude vyzerať takto:

$$(\forall x)\,(\neg(f(x) < f(a)) \Rightarrow (x = a))\,.$$

Na prvý pohľad môže byť lákavé napísať iba formulu $(\forall x)\,(f(x) < f(a))$, no takéto riešenie nevyhovuje. Zamyslite sa prečo.

CVIČENIE 7.2.

Oproti Cvičeniu 7.1 máme v tomto cvičení presne povedané, ktoré predikáty môžeme používať. Okrem toho ešte samozrejme môžeme používať konštanty (v tomto prípade sú konštanty konrétne mená vystupujúce v tvrdeniach). Žiadne iné predikáty ani funkcie však nemôžeme používať. Pri každej úlohe odporúčam najskôr tvrdenie sformulovať ústne (iba za použitia vzťahov rodič a manžel) a až potom ho zapísať.

Cvičenie 7.2c) Binárne predikáty RODIČ a MANŽEL budeme označovať R a M. (Značenie xRy znamená, že x je rodič y.) Dvaja ľudia sú bratranci iba vtedy, ak sú obaja muži/chlapci. Preto formulu začneme podformulou MUŽ$(pavol) \wedge$ MUŽ$(jozef)$. Ako teraz vieme povedať, že Pavol a Jozef sú bratranci? O bratrancoch platí, že majú aspoň jedného spoločného starého rodiča. Neplatí to však iba o bratranoch. Za prvé, mohlo by sa stať, že Pavol a Jozef sú teoreticky jedna a tá istá osoba. Keďže však majú iné mená, tak môžme predpokladať, že to tak nie je. Za druhé, môže sa stať, že Pavol a Jozef sú bratia. Ak túto možnosť zvládneme vylúčiť, tak už ostane iba jediná možnosť a to taká, že sú bratranci. Naše tvrdenie teda musí hovoriť, že Pavol a Jozef majú spoločného starého rodiča, no nemajú spoločného rodiča. Zapíšeme to takto:

$$\text{MUŽ}(pavol) \wedge \text{MUŽ}(jozef) \wedge ((\exists x)(\exists y)(\exists z)xRy \wedge xRz \wedge yRpavol \wedge zRjozef)$$
$$\wedge ((\forall x)\neg(xRpavol \wedge xRjozef))$$

Všimnite si, že x sme použili aj v zátvroke, ktorá hovorí, že Jozef a Pavol majú spoločného starého rodiča, a aj v zátvorke, ktorá hovorí, že nemajú spoločného rodiča. V oboch zátvorkách je premenná viazaná, vždy na niečo iné, takže v praxi sa jedná o dve rôzne premenné. Oveľa prehľadnejšie by bolo použiť namiesto x v spodnej zátvorke nové písmenko, no aj tento spôsob je správny.

Cvičenie 7.2d) Táto úloha Cvičenia 7.2 sa podľa mňa nedá vyriešiť bez pridania aspoň jedného nového predikátu. (Všetky ostatné úlohy sa dajú vyriešiť.) Mýlim sa alebo je to naozaj tak? Ak si tiež myslíte, že sa to nedá, tak to skúste aj zdôvodniť/dokázať. Vedeli by ste tvrdenie napísať po pridaní jedného nového predikátu? Aký by bol tento nový predikát a ako by vyzeralo tvrdenie?

CVIČENIE 7.3.

Podobne ako v Cvičení 7.2 si opäť najskôr premyslite ako bude formula vyzerať a až potom ju napíšte. Nezabudnite, že okrem vypísaných funkčných symbolov môžete používať aj predikát rovnosti (narozdiel od predošlého cvičenia). Univerzum sú prirodzené čísla s nulou.

Cvičenie 7.3d) Tvrdenie si môžeme prepísať takto: ak x je prvočíslo a x je párne, tak $x = 2$. Prvú časť, x je prvočíslo, nechám na vás (je to vlastne aj zadanie úlohy **c)**). Číslo x je párne ak je dvojnásobkom nejakého čísla. Takže x je párne ak $(\exists y)$ také, že $x = 2y$. Dvojka nie je konštantou v jazyku elementárnej aritmetiky, no vieme že $2 = S(1) = S(S(0))$. Celé tvrdenie teda vyzerá takto (za 'x je prvočíslo' treba ešte doplniť vaše riešenie predošlej úlohy):

$$((x \text{ je prvočíslo}) \ \wedge \ ((\exists y)\ x = S(S(0)) \cdot y)) \Rightarrow (x = S(S(0))).$$

Cvičenie 7.4.

Toto je veľmi jednoduché cvičenie na precvičenie definície termu (v skriptách na začiatku strany 65). Tu spravíme časť úlohy, konkrétne popíšeme konštrukciu $y \cdot S(0)$, zvyšok je na vás.

Podľa pravidla (T1) vieme, že y aj 0 sú termy jazyka elementárnej aritmetiky (y je premenná, 0 je konštanta). Keďže nasledovník S je unárny funkčný symbol a 0 je term, tak podľa pravidla (T2) je aj $S(0)$ termom jazyka elementárnej aritmetiky. Nakoniec, keďže násobenie $\cdot$ je binárny funkčný symbol a y aj $S(0)$ sú termy, tak aj $\cdot(y, S(0)) = y \cdot S(0)$ je termom jazyka elementárnej aritmetiky.[1]

Cvičenie 7.5.

Ak by sme mali univerzum s troma prvkami, povedzme a, b a c, tak by tabuľka vyzerala takto: My však nevieme ako veľké je univerzum. Môže to byť niekoľko tisíc, niekoľko milí-

$P(x,y)$	a	b	c
a	$P(a,a)$	$P(a,b)$	$P(a,c)$
b	$P(b,a)$	$P(b,b)$	$P(b,c)$
c	$P(c,a)$	$P(c,b)$	$P(c,c)$

onov, možno aj nekonečno. Tabuľku nekonečno krát nekonečno asi nezvládneme nakresliť. Napriek tomu vieme každú z formúl a) až f) intrepretovať pomocou takejto (nevytvorenej tabuľky) opísať. Napríklad formula b) $(\exists x)(\forall y)P(x,y)$ hovorí, že existuje aspoň jedno také x, že $P(x,y) = 1$ pre všetky y. Keďže x zodpovedá riadkom tabuľky, tak to znamená, že existuje riadok v ktorom budú samé jednotky. Ilustrujme si to ešte na našej tabuľke pre univerzum veľkosti 3. Musí existovať také x, povedzme $x = b$, že $P(b,y) = 1$ pre všetky y. V tomto prípade sú všetky y postupne a, b a c. Takže platí $P(b,a) = P(b,b) = P(b,c) = 1$. To znamená, že riadok začínajúci b má v sebe samé jednotky. (Pre $x = a$ alebo $x = c$ funguje rovnaký argument.) Úplne rovnakú úvahu vieme spraviť pre ľubovoľne veľkú tabuľku.

Podobne skúste intrepretovať aj všetky ostatné formuly. Ak sú dve formuly interpretované rovnako (alebo ekivalentne), tak sú aj formuly ekvivalentné.

[1] Zápis $\cdot(a,b)$ sa moc často nepoužíva a ani ho radšej nepoužívajte, nech nepopletiete seba alebo opravujúceho písomky. (Namiesto toho použite $a \cdot b$.) Zahrnul som ho sem len preto, aby bolo jasné, že násobenie reprezentujeme ako funkciu dvoch premenných.

CVIČENIE 7.6.

Najskôr sa pozrime na prvú časť cvičenia. Máme ukázať, že formula je 2-všeobecne platná. Takže máme ukázať, že ak máme 2-prvkový nosič (t.j., k dispozícii máme len 2 prvky), tak je formula vždy pravdivá. Kompletný postup na veľmi podobnú úlohu je v skriptách na strane 70, tu si ukážeme iba ako začať.

Nie je to síce nutné, ale na začiatok si skúsime formulu prečítať a zistiť, či dáva zmysel. Formula hovorí '(ak z a y sú rôzne prvky) a (predikát P je pravdivý pre aspoň jeden prvok z nosiča), tak (predikát P je pravdivý pre z alebo y)'. Na prvý pohľad to ozaj vyzerá, že tvrdenie by malo byť 2-všeobecne platné. Ak sú y a z rôzne a nosič má iba 2 prvky, tak y a z pokryjú všetky prvky nosiča. Nuž a ak je predikát P pravdivý pre niektorý prvok nosiča a z a y pokrývajú celý nosič, tak P musí byť pravdivý pre z a y.

Toto samozrejme nie je formálny dôkaz. Na ten si potrebujeme zostrojiť podobnú tabuľku ako v príklad v skriptách. Nazvyme si prvky v nosiči a a b. Vo formule je jedna viazaná premenná x, tá nás pri ohodnoteniach nezaujíma, no premenné y aj z majú voľný výskyt. Máme 4 možné ohodnotenia týchto formúl:

- ◇ $e(y) = a$ a $e(z) = a$,
- ◇ $e(y) = a$ a $e(z) = b$,
- ◇ $e(y) = b$ a $e(z) = a$,
- ◇ $e(y) = b$ a $e(z) = b$.

Taktiež máme 4 možnosti ako vyzerá predikát P. Buď je pravdivý pre a aj b, alebo iba pre a, alebo iba pre b, alebo je vždy nepravdivý.

Dokopy máme teda 16 možností, pre každú z nich musíme overiť, či je formula pravdivá. Tu si spravíme jednu z možností, zvyšné sú na vás. (Najprehľadnejšie to bude cez tabuľku.) Spravme si možnosť, keď $e(y) = a$, $e(z) = b$ a $P(a) = P(b) = 1$. Potom $\neg(z = y) = \neg(a = b) = \neg(0) = 1$. Ďalej $(\exists x)P(x) = 1$ lebo pre $x = a$ aj $x = b$ dostaneme $P(x) = 1$. Nakoniec $P(z) \lor P(y) = 1 \lor 1 = 1$. Takže celá formula nám dá $(1 \land 1) \Rightarrow 1 = 1$.

Druhá časť úlohy je ukázať, že formula nie je 3-všeobecne platná. Teoriticky by sme opäť mohli spraviť tabuľku. Tu však už máme 9 možných ohodnotení y a z a 8 možných realizácií predikátu P. Dokopy by mala teda tabuľka 72 riadkov. Jednoduchšie bude nájsť jeden protipríklad. (Na dokázanie, že je formula platná potrebujeme ukázať, že je platná vždy. No na dokázanie toho, že nie je platná, stačí jediný protipríklad.) Môžete ho skúsiť nájsť náhodne náhodným dopĺňaním za $e(y), e(z)$ a výberom P. Jednoduchšie ale asi bude prečítať si čo formula hovorí a zamyslieť sa kedy nebude pravdivá.

CVIČENIE 7.7.

Skúste sa inšpirovať formulou v Cvičení 7.6. Možno sa dá šikovne zovšeobecniť. Ak sa vám nedarí, tak skúste úlohu vyriešiť pre $k = 4$. (Pre $k = 3$ už riešenie poznámez predošlého cvičenia.) Potom pre $k = 5$, potom $k = 6$, a tak ďalej až kým neprídete na to ako vašu formulu zovšeobecniť pre ľubovoľné k.

V zápise asi budete musieť použiť tri bodky, napríklad niečo na štýl:

$$P(x_1) \land P(x_2) \land P(x_3) \land \ldots \land P(x_k).$$

Netreba sa toho báť a je to úplne v poriadku zápis.

Cvičenie 7.8.

Pri tejto úlohe treba byť trochu kreatívny. Zadanie je vám po prerátaní predošlých cvičení určite jasné, takže úlohu nechávam na vás. (V tejto úlohe sa nedá moc dobre poradiť bez prezradenia pointy celého riešenia.)

Cvičenia 7.9 a 7.10.

Obe tieto cvičenia nie sú príliš náročné čo sa týka postupu, no je náročné pochopiť ako to vlastne celé funguje a aké kroky sú povolené. Poriadne si prečítajte učebnicu od strany 67 až po definíciu k-všeobecnej platnej formuly na strane 70. Dôležité sú hlavne dôkazy Lemy 7.3 a 7.4, no na ich pochopenie treba vedieť definície. Až potom sa skúste pustiť do cvičení.

Cvičenie 7.9c)

Formula je logicky pravdivá ak je splnané v ľubovoľnej realizácii $\mathcal{M}$. (Definícia na strane 69.) Formula je splnená v realizácii $\mathcal{M}$ ak je pravdivá pri ľubovoľnom ohodnotení e. (Definícia na strane 68.) Ohodnotenie e je funkcia, ktorá každej premennej v našej formule priradí nejaký prvok univerza (nosiča). Nech teda $\mathcal{M}$ je ľubovoľná realizácia a e nech je ľubovoľné ohodnotenie.

Ak by platilo $\mathcal{M} \not\models ((\exists x)(A \Rightarrow B))\,[e]$[2], tak máme nulu na začiatku implikácie, a teda $\mathcal{M} \models ((\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B))\,[e]$, čo chceme dokázať. Predpokladajme teda $\mathcal{M} \models ((\exists x)(A \Rightarrow B))[e]$. Podobne môžeme predpokladať $\mathcal{M} \models ((\forall x)A)\,[e]$ (zamyslite sa prečo).

Keďže $\mathcal{M} \models ((\exists x)(A \Rightarrow B))[e]$ tak existuje také m z univerza (nosiča), že po doplnení za x bude $A \Rightarrow B$ platiť. To zapíšeme takto:

$$\mathcal{M} \models (A \Rightarrow B)[e(x/m)]. \tag{1}$$

Pod $e(x/m)$ rozumieme ľubovoľné ohodnotenie s jedinou podmienkou, a to takou že $e(x) = m$. Ďalej, keďže $\mathcal{M} \models ((\forall x)A)\,[e]$, tak A je pravdivé nech za x dosadíme hocičo. Takže bude pravdivé aj pre $e(x) = m$, čiže

$$\mathcal{M} \models A[e(x/m)]. \tag{2}$$

Potom modus ponens formúl (1) a (2) dáva $\mathcal{M} \models B[e(x/m)]$. Takže existuje také m, že B platí pre $e(x) = m$. Teda $\mathcal{M} \models ((\exists x)B)[e]$. To znamená, že platí

$$\mathcal{M} \models ((\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B))\,[e].$$

Predpokladali sme, že $\mathcal{M}$ aj e sú ľubovoľné, takže platí

$$\models (\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow (\exists x)B).$$

[2] Tento zápis čítame takto: formula $(\exists x)(A \Rightarrow B)$ nie je pravdivá v realizácii $\mathcal{M}$ pri ohodnotení e.

8 Predikátová logika, dokazovanie

Návody k cvičeniam

Cvičenia 8.1, 8.2 a 8.3.

Štyri rôzne úlohy sú podrobne prerátané v skriptách (strany 77 až 82), takže tu dnes nebudú prerátané niektoré z cvičení. Namiesto toho si povieme nejaké základné veci, na ktoré sa sústrediť pri rátaní.

Sémantické stromy pre výrokovú logiku sa objavili už v 4. cvičení. Ak ste tak ešte neurobili, tak si prerátajte cvičenia k tejto kapitole. (Na dokumentovom servri sa zatiaľ ešte dajú stiahnuť prerátané cvičenia, ale možno budúci týždeň už zmiznú).

Ak chceme o tvrdení zistiť či je logicky pravdivé pomocou sémantickeho stromu, tak je postup nasledovný: Najskôr celé tvrdenie znegujeme, potom vytvoríme sémantický strom pre toto znegované tvrdenie a ukážeme, že všetky jeho vetvy sú uzavreté. (V praxi ukazujeme, že negácia nášho tvrdenie je kontradikcia, takže tvrdenie je pravdivé.) Pri duálnych sémantických stromoch tvrdenie nenegujeme, ale rovno vytvoríme duálny sémantický strom. Ak má všetky vetvy uzavreté, tak je tvrdenie pravdivé. Vždy myslite na to či používate sémantický alebo duálny sémantický strom, keďže sa vyrábajú podľa odlišných pravidiel.

Oproti sémantickým stromom zo 4. kapitoly nám pribudli kvantifikátory. Pravidlá ako ich rozpisovať sú jednoduché. Ak máme tvrdenie $(\forall x)P(x)$, tak ho rozpíšeme ako $P(t)$ pre sém. stromy, resp. $P(c)$ pre duálne sém. stromy. Obdobne $(\exists x)P(x)$ bude $P(c)$ pre sém. stromy a $P(t)$ pre duálne sém. stromy. Písmeno t tu vyjadruje ľubovoľnú premennú, takže $P(t)$ hovorí, že P je pravdivé pre ľubovoľný prvok. Naopak c vyjadruje jednu konkrétnu konštantu, takže $P(c)$ znamená, že existuje nejaká taká konštanta c, pre ktorú je P pravdivé. Ak máme kvantifikátor pred formulou, napríklad $(\forall x)A$, tak toto prepíšeme ako $A_x[t]$ pre sém. stromy a $A_x[c]$ pre duálne sém. stromy.

Často sa nám stane, že kvantifikátorov budeme mať viac. Pozrime sa napríklad na tvrdenie $(\exists x)A \wedge (\exists y)P(y)$. Ak by sme toto rozpísali ako $A_x[c] \wedge P(c)$, tak vlastne hovoríme, že existuje taký prvok c, pre ktorý platí P a aj A ak za x dosadíme c. To však nemusí byť pravda, pôvodné tvrdenie vraví iba to, že pre nejaký prvok platí P a za x vieme dosadiť taký prvok, že platí A. Tvrdenie však nehovorí nič o tom, že by tieto dva prvky mali byť rovnaké. Preto správny zápis je $A_x[c] \wedge P(c')$. Naopak, ak máme napríklad tvrdenie $(\forall x)(P(x) \vee Q(x))$, tak sa kvantifikátor vzťahuje na oba predikáty, takže dostaneme $P(t) \vee Q(t)$.

Keď už máme hotový (duálny) sémantický strom, tak potrebujeme o každej vetve zistiť, či je uzavretá. (Vo všetkých troch cvičeniach ukazujeme, že je tvrdenie logicky pravdivé, takže všetky vetvy majú byť uzavreté. Ak nie sú tak sme spravili chybu.) Tento proces je zväčša jednoduchý. Pozrieme sa postupne na všetky predikáty a podformuly, ktoré sa vo vetve vyskytli. Povedzme, že tam postupne máme $\neg P(t)$, $Q(c)$, $B_x[t']$, $\neg Q(c')$, $A_x[t^*]$, $\neg B_x[c^*]$. Predikát P je tu iba raz, takže nevedie k žiadnemu sporu. Podobne je to s formulou A. Predikát Q tu máme síce dvakrát, no $Q(c)$ vraví, že Q je spnené pre konrétny prvok c, zatiaľ čo $\neg Q(c')$ hovorí, že Q neplatí pre prvok c'. Keďže c a c' nemusia byť rovnaké, tak žiadny spor nedostaneme.[1] Ostali nám $B_x[t']$ a $\neg B_x[c^*]$. To znamená, že B je pravdivé nech za x dosadíme hocičo, no zároveň ak za x dosadíme c^*, tak B neplatí. Toto je nemožné, takže sme dospeli k sporu, a vetva musí byť uzavretá.

Väčšinou je vyhodnocovanie formúl jednoduché, no treba si dávať pozor. Ako sme videli v príklade na strane 81 (obrázok k príkladu je na strane 82), niekedy vie každá vetva osobitne vyzerať ako uzavretá, no v skutočnosti nemôžu byť obe uzavreté naraz. Tento problém môže nastať vtedy, ak máme v rôznych vetvách rovnaké písmeno. Napríklad ak máme v sémantickom strome výraz $(\forall x)P(x)\vee\neg Q(x)$, tak dostaneme najskôr $P(t)\vee\neg Q(t)$, a potom dve vetvy, jednu s $P(t)$ a druhú s $\neg Q(t)$. Povedzme, že už skorej v strome sa nám vyskytlo $\neg P(c)$ a $Q(c')$. Máme teda dve vetvy, v jednej je $\neg P(c)$, $Q(c')$ a $P(t)$ v druhej je $\neg P(c)$, $Q(c')$ a $\neg Q(t)$. Ak sa pozrieme či už na prvú alebo na druhú vetvu samostatne, tak ľahko zistíme, že je daná vetva uzavretá. Treba však byť opatrný, lebo v oboch vetvách máme rovnakú premenú t. Pozrime sa najskôr na prvú vetvu. Vieme, že $P(c) = 0$. No teoreticky môže platiť, že $P(x) = 1$ pre všetky ostatné x z univeraza. V prvej vetve teda s určitosťou dostaneme spor iba ak $t = c$. Podobne, v druhej vetve dostaneme s určitosťou spor iba ak $t = c'$. Keďže c a c' majú rôzne mená, tak nemusia byť rovnaké. Predpokladajme teda, že $c \neq c'$. Písmeno t reprezentuje ľubovoľný prvok z univerza. Na to aby sme ukázali, že obe vetvy sú uzavreté nám teda stačí nájsť jedno také t, pre ktoré sú obe vetvy v spore. To však nie je vo všeobecnosti možné, lebo na to by sme potrebovali nájsť také t, ktoré sa rovná c aj c', čo sa nie vždy dá, lebo c a c' môžu byť rôzne. (Všetko toto je trochu iným spôsobom vysvetlené aj v skriptách, aj v súhrne prednášky od prednášajúceho na dokumentovom serveri. Ak ste z tohto zmätení, tak si to prečítajte a vypočujte.)
V praxi, ak nemáte rôzne vetvy s rovnakým písmenkom, tak nemusíte nič riešiť. Ak také vetvy máte, tak najskôr skontrolujte, či ste omylom neoznačili rovnako dve veci, ktoré mali byť označené rôzne. Ak ani to nepomôže, tak sa treba zamyslieť.

Nezabudnite, že Cvičenie 8.1 je na sémantické stromy, Cvičenie 8.2 na duálne sémantické stromy, Cvičenie 8.3 je vaša voľba.

Cvičenie 8.4.

Jedná sa o to isté ako v predošlých cvičeniach, jediný rozdiel je, že zisťujeme pravdivosť. Takže ak sú niektoré vetvy otvorené, tak tvrdenie nie je logicky pravdivé. Odporúčam sa pred samotným riešením zamyslieť nad každým z tvrdení a zistiť, či je pravdivé, ešte pred riešením. Napríklad tvrdenie a) hovorí, že ak je pre každé x pravdivé $P(x)$ alebo $Q(x)$, tak aspoň pre nejaké x musia byť pravdivé obe. Už na prvý pohľad to znie podozrivo, tu je konkrétny protipríklad: Univerzum sú prirodzené čísla, $P(x) = 1$ pre párne čísla, $Q(x) = 1$ pre nepárne čísla. Potom tvrdenie hovorí: Ak je každé prirodzené číslo párne alebo nepárne, tak existuje číslo, ktoré je párne aj nepárne. Skúste vymyslieť aj iný protipríklad. (Napr. existuje protipríklad, kde má nosič iba dva prvky.)

[1] Ak by sme však mali $Q(c)$ a $\neg Q(c)$, tak spor dostávame, lebo v tomto prípade sa musí jednať o ten istý prvok c.

Cvičenie 8.5.

Rozdiel medzi týmto a predošlými cvičeniami je ten, že x nie je voľná v B. V praxi to znamená, že namiesto toho aby sme napísali $B_x[t]$ alebo $B_x[c]$, napíšeme jednoducho B. (Pre A sa pravidlá nemenia, stále píšeme $A_x[t]$ a $A_x[c]$.) Vetvy, kde sa vyskytne B vyhodnocujeme tak, že B a $\neg B$ vedie k sporu, takže tak ako v 4. kapitole. (Ak je vo vetve aj A, tak to vyhodnocujeme normálne ako v predošlých cvičeniach.) Toto je všetko čo treba k riešeniu úloh. V zvyšku textu si vysvetlíme, aká je za týmto intuícia.

Predstavme si nejaké tvrdenie, ktoré má iba viazanú premenú. Napríklad 'existuje pes, ktorý sa volá Nero'. Teraz sa pozrime na tvrdenie 'pre každého psa platí, že existuje pes, ktorý sa volá Nero'. Ako vidíme, tak všeobecný kvantifikátor 'pre každého psa' vôbec neovplyvňuje pravidvosť tvrdenia, a to preto, že sa nijako neviaže na tvrdenie. (Napríklad tvrdenia 'pes sa volá Nero' a 'pre každého psa platí, že (pes) sa volá Nero' sa už líšia, lebo tento krát sa kvantifikátor viaže na voľnú premennú pes.) Rovnaké je to s neviazaným existenčným kvantifikátorom. Z tohto dôvodou teda môžeme písať B namiesto $B_x[t]$ aj $B_x[c]$. Ekvivalentne sa na to môžme pozrieť takto: $B_x[c]$ hovorí, že namiesto každého voľného výskytu x v B napíš c. Ale x nemá v B žiadny voľný výskyt. Takže vlastne neprepíšeme nič a dostaneme rovno B.

Cvičenie 8.6.

V tomto cvičení treba najskôr vytovriť duálny sémantický strom. (Mali by ste dostať len jednu vetvu). Ďalej je asi jednoduchšie najskôr ukázať, že formula nie je 3-všeobecne platná. Zoberte si nejaký trojprvkový nosič, povedzme u, v a w a ukážte, že viete ohodnotiť voľné premenné y a z a všetky c tak, aby ste nedostali spor. To, že je formula 2-všeobecne platná ukážete tak, že nájdete spor ak môžete používať iba 2 premenné.

9 Sekventový kalkulus

Návody k cvičeniam

Cvičenia 9.1 až 9.7.

Tieto cvičenia sú veľmi podobné cvičeniam z kapitoly 2. Spoločné majú to, že si treba prerátať viacero úloh a získať intuíciu a cvik v tom, ako pri riešení postupovať. Na druhej strane sú však úlohy z tejto kapitoly výrazne jednoduchšie, pretože veľmi často je jasné ako pri dokazovaní postupovať. Tu si vzorovo prerátame zopár úloh, ďalšie odvodenia sa dajú nájsť v skriptách. Skôr než sa pustíme do konkrétnych úloh, vypíšeme si zopár všeobecných pokynov, ktorými sa skoro vždy oplatí riadiť:

- ◇ Dokazujeme od spodu, t.j. začneme sekventom, ktorý chceme dokázať, a potom spätne aplikujeme pravidlá (zo spodu nahor), až kým nedostaneme axiómu/axiómy. Nezabúdajte, že axióma je jediná, a to $A \vdash A$ (za A môže byť doplnená ľubovoľná formula). Formálny zápis potom spravíme od konca, takže axiómy idú na vrch a na konci dostaneme dokazovaný sekvent.
- ◇ Po každom spätnom použití pravidla overíme, či je sekvent stále pravdivý. Napríklad ak chceme dokázať, že platí $A, B \vdash A \wedge B$ a použijeme spätne pravidlo (WL), tak dostaneme $A \vdash A \wedge B$. Ale z tvrdenia A nevyplýva tvrdenie $A \wedge B$, takže tento krok nechceme spraviť.
- ◇ Ak máme na pravo implikáciu, tak ju postupne presuňme pravidlom (PR) na začiatok a použime pravidlo (⇒R). (S pravidlom (⇒L) treba byť opatrnejší. Ak máme na ľavo implikáciu, tak sa zväčša zíde, no treba dobre premyslieť ako ho použiť.)
- ◇ Ak máme negáciu pred zloženou formulou, tak ju presuňme pravidlom (PR), resp. (PL), a následne použime (¬R), resp. (¬L).
- ◇ Ak máme disjunkciu na ľavo alebo konjunkciu na pravo, tak sa pravdepodobne bude dať použiť pravidlo (∨L), resp. (∧R). Treba byť opatrný, aby oba sekventy, čo dostaneme, boli pravdivé.

Cvičenie 9.1a) Chceme odvodiť $\vdash A \Rightarrow (B \Rightarrow A)$. Máme implikáciu na pravej strane, takže použijeme (⇒R) a dostaneme $A \vdash B \Rightarrow A$. Opäť máme implikáciu na pravej strane, takže opäť použijeme (⇒R) a dostaneme $A, B \vdash A$. Tento sekvent už vyzerá tak, že úplne zjavne platí. (Z A a B vyplýva A.) Formálne však potrebujeme dojsť k axióme. Na to nám stačí odstrániť B z ľavej strany, čo dokáže pravidlo (WL). Dostaneme $A \vdash A$ a sme hotoví. Teraz už len formálny zápis, kde začneme od axiómy:

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{A \ \vdash \ A}{A, B \ \vdash \ A}\,(\mathrm{WL})}{A \ \vdash \ B \Rightarrow A}\,(\Rightarrow\mathrm{R})}{\vdash \ A \Rightarrow (B \Rightarrow A)}\,(\Rightarrow\mathrm{R})$$

Cvičenie 9.6j) Chceme odvodiť $\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$. Na pravej strane je implikácia, takže použijeme (⇒R) a dostaneme $\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$. Na ľavej strane máme negáciu zloženej formuly, takže použijeme (¬L) a dostaneme $\vdash A \wedge B, \neg A \vee \neg B$. Teraz máme na pravo konjunkciu, takže sa pokúsime využiť ($\wedge$R). Ak by sme ho použili rovno, tak dostaneme dva sekventy: $\vdash A, \neg A \vee \neg B$ a $\vdash B$. Zatiaľ čo prvý sekvent platí (zamyslite sa prečo), druhý zjavne neplatí. Aj pri ňom by sa nám zišlo mať jedno $\neg A \vee \neg B$. Preto skôr než použijeme ($\wedge$R) ešte 'rozdvojíme' $\neg A \vee \neg B$ na pravej strane pomocou pravidla (CR). Nezabudnime, že treba pár krát použiť aj (PR). Eventuálne dostaneme $\vdash A \wedge B, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B$ a použitím pravidla ($\wedge$R) dostaneme $\vdash A, \neg A \vee \neg B$ a $\vdash B, \neg A \vee \neg B$. Odvoďme povedzme prvý z týchto dvoch sekventov (odvodenie pre druhý bude veľmi podobné). Vyzerá, že $\neg B$ už moc nepotrebujeme, takže sa ho zbavme pomocou ($\vee$R1). Konkrétne, najskôr pomocou (PR) dostaneme $\vdash \neg A \vee \neg B, A$, a potom pomocou ($\vee$R1) získame $\vdash \neg A, A$. Nakoniec použitím ($\neg$ R) dostaneme axiómu $A \vdash A$. Formálny zápis je takýto:

$$
\begin{prooftree}
\AxiomC{$A \vdash A$}
\RightLabel{($\neg$ R)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A, A$}
\RightLabel{($\vee$R1)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \vee \neg B, A$}
\RightLabel{(PR)}
\UnaryInfC{$\vdash A, \neg A \vee \neg B$}
\AxiomC{$B \vdash B$}
\RightLabel{($\neg$ R)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg B, B$}
\RightLabel{($\vee$R2)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \vee \neg B, B$}
\RightLabel{(PR)}
\UnaryInfC{$\vdash B, \neg A \vee \neg B$}
\RightLabel{($\wedge$R)}
\BinaryInfC{$\vdash A \wedge B, \neg A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B$}
\RightLabel{(PR)(PR)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \vee \neg B, \neg A \vee \neg B, A \wedge B$}
\RightLabel{(CR)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg A \vee \neg B, A \wedge B$}
\RightLabel{(PR)}
\UnaryInfC{$\vdash A \wedge B, \neg A \vee \neg B$}
\RightLabel{($\neg$L)}
\UnaryInfC{$\neg(A \wedge B) \vdash \neg A \vee \neg B$}
\RightLabel{($\Rightarrow$R)}
\UnaryInfC{$\vdash \neg(A \wedge B) \Rightarrow (\neg A \vee \neg B)$}
\end{prooftree}
$$

Cvičenia 9.8 až 9.10.

Od teraz používame sekventový kalkulus na predikátovú logiku. Pribudnú nám štyri nové odvodzovacie pravidlá: ($\forall$L), ($\exists$R), ($\exists$L) a ($\forall$R). Všetky tieto pravidlá v praxi spravia to isté (v smere zdola nahor): zoberieme ľubovoľnú formulu A s kvantifikátorom pred ňou a nahradíme premennú v kvantifikátore ľubovoľnou premennou. Takže napríklad z $(\forall x)A$ dostaneme napríklad $A_x[z]$, z $(\exists y)P(x,y)$ dostaneme $P(x,z)$. (V oboch prípadoch sme si zvolili z ako doplnenú premennú.) Jediné obmedzenie máme pri použití ($\exists$L) a ($\forall$R), a to také, že premenná, ktorú dopĺňame sa nesmie volať ako žiadna z premenných, ktoré sa pri odvodzovaní už vyskytli (t.j. nižšie pri formálnom zápise). Demonštrujme si to na nasledujúcej úlohe.

Cvičenie 9.8a) Chceme odvodiť $\vdash (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)$. Máme implikáciu na pravo, takže použijeme pravidlo ($\forall$R) a dostaneme $(\forall x)P(x) \vdash (\forall y)P(y)$. Skúsme ďalej použiť pravidlo ($\forall$L). Pre toto pravidlo nemáme žiadne obmedzenia, takže ho môžme použiť a dostaneme $P(z) \vdash (\forall y)P(y)$. Teraz by sme chceli použiť na pravú stranu pravidlo ($\forall$R), aby sme tam tiež dostali $P(z)$ a tým pádom axiómu $P(z) \vdash P(z)$. To však nejde, lebo premenná z sa už vyskytla skorej v našom odvodení, takže pri pravidle ($\forall$R) ju nemožno použiť. Teoreticky môžme použiť novú premennú, povedzme w, ale potom dostaneme $P(z) \vdash P(w)$, čo nie je axióma. Čo s tým?

Riešenie je jednoduché, prehoďme poradie v akom použijeme ($\forall$L) a ($\forall$R). Začneme ($\forall$R), takže v našom odvodení ešte nebude použité z a dostaneme $(\forall x)P(x) \vdash P(z)$. Pravidlo

(∀L) (narozdiel od pravidla (∀R)) nemá obmedzenie na to, akú premennú môžme doplniť, takže môžeme doplniť z a dostaneme axiómu $P(z) \vdash P(z)$. Tu je formálny zápis.

$$\cfrac{\cfrac{\cfrac{P(z) \ \vdash \ P(z)}{(\forall x)P(x) \ \vdash \ P(z)}\,(\forall\mathrm{L})}{(\forall x)P(x) \ \vdash \ (\forall y)P(y)}\,(\forall\mathrm{R})}{\vdash \ (\forall x)P(x) \Rightarrow (\forall y)P(y)}\,(\Rightarrow\mathrm{R})$$

Cvičenia 9.8, 9.10 a 9.11 sú všetky podobné v tom, že treba najskôr použiť pravidlá (∃L) a (∀R), kým sa dá, a až potom pridať pravidlá (∀L) a (∃R). Taktiež si ešte pri formálnom zápise skontrolujte, či naozaj vždy pri použití (∃L) a (∀R) nie je doplnená premenná použitá už niekde nižšie. (To, že je použitá vyššie nevadí.)

Cvičenie 9.10 je vpodstate to isté ako Cvičenie 9.9, len namiesto predikátov máme formuly, takže namiesto $P(z)$ píšeme $A_x[z]$. Úlohy sú v tomto cvičení iba dve, takže nechávam obe na vás.

Cvičenie 9.11.

Toto cvičenie je veľmi podobné Cvičeniu 9.10. Jediný rozdiel je v tom, že x nemá voľný výskyt v B, takže namiesto $B_x[t]$ napíšeme jednoducho B. (Podrobné vysvetlenie prečo to tak je nájdete k návodom ku kapitole 8, konkrétne pokyny k Cvičeniu 8.5).

Cvičenie 9.11a) Chceme odvodiť $\vdash (\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow B)$. Máme implikáciu na pravo, takže použijeme pravidlo (⇒R) a dostaneme $(\exists x)(A \Rightarrow B) \vdash (\forall x)A \Rightarrow B$. Stále máme implikáciu na pravo, takže opäť použijeme (⇒R) a dostanme $(\exists x)(A \Rightarrow B), (\forall x)A \vdash B$. Na ľavo máme jeden existenčný a jeden všeobecný kvantifikátor. Ako sme si hovorili, (∃L) chceme použiť skorej ako (∀L). Najskôr teda musíme pomocou (PL) prehodiť naše dva predpoklady, a následne použijeme (∃L). Prehodením dostaneme $(\forall x)A, (\exists x)(A \Rightarrow B) \vdash B$ a použitie (∃L) nám dá $(\forall x)A, A_x[z] \Rightarrow B_x[z] \vdash B$. Navyše, keďže x nemá voľný výskyt v B, tak dostaneme $(\forall x)A, A_x[z] \Rightarrow B \vdash B$. Teraz chceme použiť (∀L), takže najskôr prehodíme predpoklady pomocou (PL), potom použijeme (∀L) a eventuálne dostaneme $A_x[z] \Rightarrow B, A_x[z] \vdash B$. (Pravidlo (∀L) nemá obmedzenia, takže sme mohli doplniť už použitú premennú z). Teraz už nemáme žiadne kvantifikátory a úlohu ľahko dokončíme.

Na ľavo máme implikáciu, takže chceme šikovne využiť pravidlo (⇒L). Najskôr teda musíme použiť pravidlo (PL) a dostaneme $A_x[z], A_x[z] \Rightarrow B \vdash B$. Následne nám (⇒L) dá dve axiómy, $A_x[z] \vdash A_x[z]$ a $B \vdash B$, takže sme hotový. Pri formálnom zápise spravíme drobnú zmenu, aby sme si ušetrili pár riadkov. Všimnete si akú?

$$\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{\dfrac{A_x[z] \;\vdash\; A_x[z]}{(\forall x)A \;\vdash\; A_x[z]}\,(\forall\ \mathrm{L}) \qquad B \;\vdash\; B}{(\forall x)A, A_x[z] \Rightarrow B \;\vdash\; B}\,(\Rightarrow\ \mathrm{L})}{(\forall x)A, (\exists x)(A \Rightarrow B) \;\vdash\; B}\,(\exists \mathrm{L})}{(\exists x)(A \Rightarrow B), (\forall x)A \;\vdash\; B}\,(\mathrm{PL})}{(\exists x)(A \Rightarrow B) \;\vdash\; (\forall x)A \Rightarrow B}\,(\Rightarrow \mathrm{R})}{\vdash\; (\exists x)(A \Rightarrow B) \Rightarrow ((\forall x)A \Rightarrow B)}\,(\Rightarrow \mathrm{R})$$

10 Modálna logika

Návody k cvičeniam

Cvičenia 10.1 a 10.2.

Obe cvičenia si prejdeme pre model $\mathcal{M}_2$. Formula $\Box A$ platí vo svete w práve vtedy, keď A platí vo všetkých svetoch dostupných z w. Svet w' je dostupný z w ak vedie šípka z w do w'. Formula $\Diamond A$ platí vo svete w práve vtedy, keď platí v aspoň jednom svete dostupnom z w.

Ako vidno z definícií symbolov $\Box$ a $\Diamond$, pri vyhodnocovaní hrá dôležitú rolu, ktoré svety sú dostupné z daných svetov. Vypíšme si to postupne pre všetky svety:

$$\Gamma(w_1) : w_1 \text{ a } w_2$$
$$\Sigma(w_2) : w_1,\ w_2 \text{ a } w_3$$
$$\Sigma(w_3) : w_3$$

Teraz už máme všetko potrebné k vytvoreniu tabuľky pravdivostných hodnôt pre model $\mathcal{M}_2$ ako na strane 96.

Cvičenie 10.1 Prvotná formula p je podľa zadania pravdivá vo svetoch w_1 a w_3 a nepravdivá vo svete w_2. Prvotná formula q je pravdivá vo svetoch w_1 a w_2 a nepravdivá vo svete w_3. Zatiaľ teda máme:

formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0

Pozrime sa teraz na pravidovsť formúl $\Box p$ a $\Diamond p$ vo svete w_1. Svety dostupné z w_1 sú w_1 a w_2. Formula p je síce pravdivá vo svete w_1, ale nie vo svete w_2. Takže podľa definície je $\Box p$ vo w_1 nepravidvé (lebo p neplatí vo všetkých dostupných svetoch), zatiaľčo $\Diamond p$ je vo w_1 pravdivé (lebo p platí v aspoň jednom dostupnom svete). Podobne vieme vyhodnotiť $\Box q$, $\Diamond q$, $\Box\neg p$, $\Diamond\neg p$, $\Box\neg q$ a $\Diamond\neg q$. Dostaneme:

formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Diamond p$	**1**	**1**	**1**
$\Box q$	1	0	0
$\Diamond q$	1	1	0
$\Box\neg p$	0	0	0
$\Diamond\neg p$	1	1	0
$\Box\neg q$	0	0	1
$\Diamond\neg q$	0	1	1

Teraz ešte potrebujeme zistiť pravdivosti $\Box\Box p$, $\Diamond\Box p$, $\Box\Diamond p$ a $\Diamond\Diamond p$. Pozrime sa napríklad na $\Box\Diamond p$ vo svete w_2. Z tohto svetu sú dostupné všetky tri svety w_1, w_2 a w_3. Formula $\Box\Diamond p$ je vlastne formula $\Box(\Diamond p)$, prípadne sa na to môžeme pozerať ako na $\Box A$ kde $A = \Diamond p$. Formula

$\Box\Diamond p$ je teda pravdivá vo w_2, ak je formula $\Diamond p$ pravdivá vo všetkých svetoch dostupných z w_2. Keďže to platí ($\Diamond p$ platí vo w_1, w_2 aj w_3), tak $\Box\Diamond p$ je pravdivé v svete w_2.

Toto vysvetlenie je trochu zdĺhavé, ale v skutočnosti sa stačí pozrieť na správny riadok tabuľky (ten, kde je $\Diamond p$), pozrieť sa na všetky okienka v tomto riadku zodpovedajúce dostupným svetom (v našom prípade všetky) a skontrolovať, či sú všade jednotky (sú).

Podobne vieme dokončiť celú tabuľku:

formula	w_1	w_2	w_3
p	1	0	1
q	1	1	0
$\Box p$	0	0	1
$\Diamond p$	**1**	**1**	**1**
$\Box q$	1	0	0
$\Diamond q$	1	1	0
$\Box\neg p$	0	0	0
$\Diamond\neg p$	1	1	0
$\Box\neg q$	0	0	1
$\Diamond\neg q$	0	1	1
$\Box\Box p$	0	0	1
$\Diamond\Box p$	0	1	1
$\Box\Diamond p$	1	1	1
$\Diamond\Diamond p$	1	1	1

Všimnite si, že vo svete w_3 sú všetky možné formuly s p (ale bez negácie) pravdivé. Zamyslite sa prečo.

Cvičenie 10.2 Pozrime sa na to, ktoré z axióm AM2, AM3, AM4 a AM5 sú pravdivé pre model $\mathcal{M}_2$. Axióma AM2 hovorí, že ak je formula pravdivá pre všetky svety dostupné z nejakého sveta w, tak je dostupná pre aspoň jeden svet dostupný z w. To vcelku dáva zmysel (ak pre všetky, tak pre aspoň jednu). Kedy sa stane, že takáto vec neplatí? Jedine ak máme svet, z ktorého nie je dostupný žiadny svet. Tým pádom ľubovoľná formula A platí vo všetkých (nula) dostupných svetoch, ale zároveň nenájdeme aspoň jeden dostupný svet, kde by platila. V našom prípade je z každého sveta dostupný aspoň jeden svet, takže AM2 platí.

Axióma AM3 hovorí, že ak platí A vo všetkých svetoch dostupných z w, tak platí aj vo w samotnom. V našom modeli platí, že každý svet je dostupný sám zo seba. Takže ak v ľubovoľnom zo svetov platí $\Box A$, tak v ňom platí aj A. Tým pádom pre náš model platí aj AM3. Symbolicky by sme to vedeli zapísať takto: Vieme, že $\forall w$ platí $w \in \Gamma(w)$. Ak $w \models \Box A$, tak $w_1 \models A$ pre $\forall w_1 \in \Gamma(w)$. No a keďže $w \in \Gamma(w)$, tak $w \models A$.

Axióma AM4 by sme asi tiež zvládli nejako sformulovať, no už by to bolo vcelku náročné. Vieme však, že ak by platila, tak by v našom modeli platila logika $S4$ (viac o tomto v skriptách na stranách 96 a 97). To by znamenalo, že binárna relácia dostupnosti by mala byť tranzitívna. To však neplatí, lebo z w_1 vieme ísť do w_2 a z w_2 do w_3, ale z w_1 do w_3 nie. Takže axióma AM4 neplatí. Druhá možnosť ako to ukázať je nájsť protipríklad. (Pozrite sa napríklad na $\Box q$ a $\Box\Box q$. Nájdete taký svet, kde $\Box q$ platí ale $\Box\Box q$ nie?)

Na axiómu AM5 nemôže použiť rovnakú fintu ako na AM4. Keďže v našej logike neplatí $AM4$, tak sa nejedná o $S4$ ani $S5$. Potrebujeme teda nájsť protipríklad. Pozrite sa napríklad na $\Diamond q$ a $\Box\Diamond q$.

Cvičenia 10.3 a 10.4.

Nezabudnite, že celý čas predpokladáme, že sme v logike T. (Spomenuté v skriptách v strede strany 97.) To znamená, že pre každý svet w predpokladáme, že w je dostupný z w, teda $w \in \Gamma(w)$. Podstatná vec, ktorú môže vďaka tomuto predpokladať je, že pre každý svet w platí $\Gamma(w) \neq \emptyset$.

Okrem bežných pravidiel budeme na sémantické stromy používať tri nové. Prvé je také, že pod $w \models \Box B$ napíšeme $w' \models B \;\; \forall w' \in \Gamma(w)$. Druhé pravidlo hovorí, že namiesto $w \models \Diamond B$ napíšeme $w' \models B \;\; \exists w' \in \Gamma(w)$. Posledné pravidlo je dualita (D), ktorou vieme prehadzovať negáciu so symbolmy $\Box$ a $\Diamond$. Konkrétne funguje tak, že $\neg\Box$ prepíšeme na $\Diamond\neg$ a $\neg\Diamond$ prepíšeme na $\Box\neg$.

Cvičenie 10.3a) Chceme dokázať, že $(\Box A \wedge \Diamond B) \Rightarrow \Diamond(A \wedge B)$ je tautológia. Takže chceme ukázať, že negácia tejto formuly je pre každý svet w kontradikcia. Takže v sémantickom strome pre negáciu majú byť všetky vetvy uzavreté. Začiatok je jednoduchý, rozpíšeme negáciu implikácie:

$$\begin{array}{lc} & w \models \neg((\Box A \wedge \Diamond B) \Rightarrow \Diamond(A \wedge B)) \\ & | \\ (1) & w \models \Box A \wedge \Diamond B \\ (2) & w \models \neg\Diamond(A \wedge B) \end{array}$$

Teraz si môžeme vybrať, či budeme pokračovať formulou (1) alebo (2). Mohli by sme si vybrať náhodne, no skúsme si výberom ušetriť čas. Formulu (2) bude mať eventuálne tvar disjunkcie (zamyslite sa prečo), a preto nám vytvorí dve vetvy. Následne by sme veľa vecí písali zbytočne dvojmo. Začnime teda formulou (1) a použime pravidlo na konjunkciu:

$$\begin{array}{lcl} & w \models \neg((\Box A \wedge \Diamond B) \Rightarrow \Diamond(A \wedge B)) & \\ & | & \\ (1) & w \models \Box A \wedge \Diamond B & \\ (2) & w \models \neg\Diamond(A \wedge B) & \\ & | & (1) \\ (3) & w \models \Box A & \\ & w \models \Diamond B & \end{array}$$

Dostali sme dve formuly, na ktoré ľahko aplikujeme dve nové pravidlá:

$$
\begin{array}{lcl}
 & w \models \neg((\Box A \wedge \Diamond B) \Rightarrow \Diamond(A \wedge B)) & \\
 & | & \\
(1) & w \models \Box A \wedge \Diamond B & \\
(2) & w \models \neg\Diamond(A \wedge B) & \\
 & | & (1) \\
(3) & w \models \Box A & \\
 & w \models \Diamond B & \\
 & | & \\
 & w_1 \models B \quad \exists w_1 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (3) \\
 & w_2 \models A \quad \forall w_2 \in \Gamma(w) &
\end{array}
$$

Teraz sa môžeme vrátiť k formule (2). Najskôr použijeme dualitu (D) aby sme sa zbavili negácie pred modálnou spojkou, a potom de Morganove pravidlá, aby sme sa zbavili negácie pred zátvorkou. Takto dostaneme formulu, na ktorú vieme použiť nové pravidlo. Nakoniec sa nám táto formula ešte rozvetví:

$$
\begin{array}{lcl}
 & w \models \neg((\Box A \wedge \Diamond B) \Rightarrow \Diamond(A \wedge B)) & \\
 & | & \\
(1) & w \models \Box A \wedge \Diamond B & \\
(2) & w \models \neg\Diamond(A \wedge B) & \\
 & | & (1) \\
(3) & w \models \Box A & \\
 & w \models \Diamond B & \\
 & | & \\
 & w_1 \models B \quad \exists w_1 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (3) \\
 & w_2 \models A \quad \forall w_2 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (2)(\mathrm{D}) \\
 & w \models \Box\neg(A \wedge B) & \\
 & | & \\
 & w \models \Box(\neg A \vee \neg B) & \\
 & | & \\
 & w_3 \models \neg A \vee \neg B \quad \forall w_3 \in \Gamma(w) & \\
 & \begin{array}{cc} w_3 \models \neg A & w_3 \models \neg B \\ \otimes & \otimes \end{array} &
\end{array}
$$

Poďme ukázať, že obe vevty sú súčastne uzavreté. (Pozoro, nestačí to ukázať pre každú vetvu osve, ako sme videli v 8. kapitole, to nutne neznamená, že je tvrdenie kontradikcia.) Svety w_1, w_2 aj w_3 sú z tej istej množiny $\Gamma(w)$. Pozrime sa na druhú vetvu. Pre každé $w_3 \in \Gamma(w)$ platí, že $w_3 \models \neg B$. No zároveň pre nejaké konkrétne $w_1 \in \Gamma(w)$ platí $w_1 \models B$.

Tu teda dostávame spor pre $w_3 = w_1$. Druhá vetva je teda uzavretá, ale od teraz musíme predpokladať, že $w_3 = w_1$. Z posledného riadku prvej vetvy teda vieme, že $w_1 \models \neg A$. Na druhej strane však vieme, že $w_2 \models A$ pre všetky $w_2 \in \Gamma(w)$, takže aj pre w_1. (Tu je podstatné, že w_2 sme nijako neobmedzili pri uzatváraní druhej vetvy). Takže $w_1 \models \neg A$ a $w_1 \models A$, čo je spor. Takže obe vetvy sú uzavreté, negácia pôvodného tvrdenia je preto kontradikcia a pôvodné tvrdenie je tautológia.

Cvičenie 10.3f) Chceme dokázať, že tvrdenie $(\Box(A \Rightarrow B) \wedge \Diamond A) \Rightarrow \Diamond B$ je tautológia. Najskôr vytvoríme sémantický strom pre negáciu tohto tvrdenia:

$$
\begin{array}{lcr}
 & w \models \neg((\Box(A \Rightarrow B) \wedge \Diamond A) \Rightarrow \Diamond B) & \\
 & | & \\
(1) & w \models (\Box(A \Rightarrow B) \wedge \Diamond A & \\
 & w \models \neg\Diamond B & \\
 & | & (D) \\
 & w \models \Box\neg B & \\
 & | & \\
 & w_1 \models \neg B \quad \forall w_1 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (1) \\
(2) & w \models \Box(A \Rightarrow B) & \\
 & w \models \Diamond A & \\
 & | & \\
 & w_2 \models A \quad \exists w_2 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (2) \\
 & w_3 \models A \Rightarrow B \quad \forall w_3 \in \Gamma(w) & \\
 & \otimes &
\end{array}
$$

Teraz máme len jednu vetvu, skúsme ukázať, že je uzavretá. Plán je nejaký takýto: vidíme tam nejaké A, nejakú implikáciu $A \Rightarrow B$ a nakoniec $\neg B$, takže by sme asi chceli dospieť k tomu, že v nejakom svete platí B aj $\neg B$.

Vieme, že pre konkrétne w_2 z množiny $\Gamma(w)$ platí $w_2 \models A$. Vo všetkých svetoch z tejto množiny $\Gamma(w)$ platí $A \Rightarrow B$, takže konkrétne to platí aj pre w_2, čiže $w_2 \models A \Rightarrow B$. Modus ponens na $w_2 \models A$ a $w_2 \models A \Rightarrow B$ nám dáva $w_2 \models B$. No na druhej strane pre všetky w_1 z množiny $\Gamma(w)$ platí $\neg B$, takže pre w_2 platí aj $w_2 \models \neg B$. Vo w_2 teda platí B aj $\neg B$, čo je spor a vetva je uzavretá.

Cvičenie 10.4e) Chceme ukázať, že tvrdenie $\Box(A \vee B) \Rightarrow (\Box A \vee \Box B)$ nie je tautológia a nájsť protipríklad. Opäť začenem tým, že zostrojíme sémantický strom pre negáciu:

$$
\begin{array}{lcl}
 & w \models \neg(\Box(A \vee B) \Rightarrow (\Box A \vee \Box B)) & \\
 & | & \\
(1) & w \models \Box(A \vee B) & \\
 & w \models \neg(\Box A \vee \Box B) & \\
 & | & \\
 & w \models \neg\Box A \wedge \neg\Box B & \\
 & | & (D) \\
 & w \models \Diamond\neg A \wedge \Diamond\neg B & \\
 & | & \\
(2) & w \models \Diamond\neg A & \\
 & w \models \Diamond\neg B & \\
 & | & \\
 & w_1 \models \neg B \quad \exists w_1 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (2) \\
 & w_2 \models \neg A \quad \exists w_2 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (1) \\
 & w_3 \models A \vee B \quad \forall w_3 \in \Gamma(w) & \\
 & \swarrow \qquad \searrow & \\
 & w_3 \models A \qquad w_3 \models B & \\
 & \otimes \qquad\qquad\qquad &
\end{array}
$$

Prvú vetvu ľahko uzavrieme. Pre nejaké w_2 z množiny $\Gamma(w)$ platí, že $w_2 \models \neg A$, ale zároveň A platí v každom svete z množiny $\Gamma(w)$, takže $w_2 \models A$. Dostávame teda spor, ale musí platiť $w_2 = w_3$. Druhá vetva ale potom môžeme byť otvorená, stačí, že $w_1 \neq w_2$. Poďme zostrojiť protipríklad.

Z vyhodnotenie vidíme, že nám stačí mať pre nejaký svet w množinu $\Gamma(w)$ veľkosti aspoň 2 (aby sme v nej našli dva rôzne svety w_1 a w_2). Zoberme teda model, kde sú dokopy dva svety w_1 a w_2 a všetko je dostupné zo všadiaľ. Teda napríklad $\Gamma(w_1) = \{w_1, w_2\}$. Nech A aj B sú prvotné formuly. Potom chceme aby $\nu(A) = 0$ vo svete w_2 a $\nu(B) = 0$ vo svete w_1. Zároveň však pre každý svet má platiť $A \vee B$ (predposledný riadok stromu), takže $\nu(A) = 1$ vo svete w_1 a $\nu(B) = 1$ vo svete w_2. Teraz už ľahko overíme, že pravdivostná hodnota tvrdenia $\Box(A \vee B) \Rightarrow (\Box A \vee \Box B)$ vo svete w_1 je 0, takže toto tvrdenie nie je tautológia.

Cvičenia 10.5. Toto cvičenie je trochu náročnejšie, najskôr si poriadne prerátajte Cvičenia 10.1 až 10.4 a ak ešte budete mať chuť a eneriu, tak skúste aj toto cvičenie.Tu sa čiastočne pozrieme na prvú z úloh.

Cvičenie 10.5a) Potrebujeme najskôr zostrojiť sémantický strom pre negáciu tvrdenia $\Box A \Rightarrow \Box\Box A$:

$$
\begin{array}{lcr}
 & w \models \neg(\Box A \Rightarrow \Box\Box A) & \\
 & | & \\
(1) & w \models \Box A & \\
(2) & w \models \neg\Box\Box A & \\
 & | & (1)\\
 & w_1 \models A \quad \forall w_1 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (2)(D)\\
 & w \models \Diamond\neg\Box A & \\
 & | & (D)\\
 & w \models \Diamond\Diamond\neg A & \\
 & | & \\
 & w_2 \models \Diamond\neg A \quad \exists w_2 \in \Gamma(w) &
\end{array}
$$

Ešte nie sme hotový, lebo jednu modálnu spojku $\Diamond$ máme stále vo formule. Pri použití pravidla na jej zbavenie musíme dávať pozor, že tento raz na začiatku už nemáme $w \models$, ale je tam $w_2 \models$. Všimnete si, čo to zmení?

$$
\begin{array}{lcr}
 & w \models \neg(\Box A \Rightarrow \Box\Box A) & \\
 & | & \\
(1) & w \models \Box A & \\
(2) & w \models \neg\Box\Box A & \\
 & | & (1)\\
 & w_1 \models A \quad \forall w_1 \in \Gamma(w) & \\
 & | & (2)(D)\\
 & w \models \Diamond\neg\Box A & \\
 & | & (D)\\
 & w \models \Diamond\Diamond\neg A & \\
 & | & \\
 & w_2 \models \Diamond\neg A \quad \exists w_2 \in \Gamma(w) & \\
 & | & \\
 & w_3 \models \neg A \quad \exists w_3 \in \Gamma(w_2) &
\end{array}
$$

Čo vieme povedať o svete w_3? Vieme, že w_2 je dostupný z w a w_3 je dostupný z w_2. Takže w_3 je svet na dva kroky dostupný z w. Ak by existoval čo by len jeden svet w_3 na dva kroky dostupný z w, ktorý však nie je priamo dostupný z w, tak dostaneme protipríklad a otvorenú vetvu. (Vo všetkých svetoch dostupných z w platí A, w_2 je svet dostupný z w, z ktorého je dostupný w_3, vo w_3 platí $\neg A$). Ak teda chceme dostať uzavretú vetvu, tak v našom modely musí pre každý svet platiť, že svet dostupný na dva kroky je vždy dostupný aj priamo. Táto vlastnosť je vskutočnosti ekvivalentná jednej z vlasnotsí v definícii na strane 96. Skúste vymyslieť ktorej.

11 Viachodnotová logika

Návody k cvičeniam

Cvičenie 11.1. Toto cvičenie je jednoduché, stačí si len správne pamätať ako sa vyhodnocujú logické spojky v trojhodnotovej logike. Jedna možnosť je zapamätať si tabuľky na strane 103. Druhá možnosť je zapamätať si definície na strane 105. Definície sú rovnaké aj pre viachodnotvú logiku a fuzzy logiku. Pre trojhodnotovú logiku fungujú v praxi takto:

- $\neg$ negáciu ohodnotenia 0 a 1 poznáme, ohodnotenie 1/2 sa negáciou nezmení
- $\wedge$ konjunkcia nám dá minimum ohodnotení
- $\vee$ disjunkcia nám dá maximum ohodnotení
- $\Rightarrow$ ak je ohodnotenie naľavo menšie alebo rovné tomu napravo, tak ohodnotenie implikácie je 1; ak je ohodnotenie naľavo o 1/2 väčšie, tak dostaneme 1/2; ak je ohodnotenie naľavo o 1 väčšie, tak dostaneme 0
- $\Leftrightarrow$ ak sú ohodnotenia rovnaké, dostaneme 1, ak sa líšia o 1/2, dostaneme 1/2, ak sa líšia o 1, dostaneme 0

V tomto cvičení zisťujeme pravdivosť pomocou tabuliek. Keďže prvotná formula môže nadobúdať tri rôzne hodnoty, tak počet riadkov v tabuľke bude 3 pre jednu prvotnú formulu (cvičenia a) až c)), $3^2 = 9$ pre dve prvotné formuly (cvičenia d) až s)) a $3^3 = 27$ pre tri prvotné formuly (cvičenie t)).

Cvičenie 11.1f) V tejto úlohe máme dve prvotné formuly, takže potrebujeme dokopy 9 riadkov na ohodnotenia. Máme dokázať, že formula $(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$ je tautológia, takže v poslednom stĺpci by sme mali dostať samé jednotky.

A	B	$\neg A$	$\neg B$	$\neg A \Rightarrow B$	$\neg B \Rightarrow A$	$(\neg A \Rightarrow B) \Rightarrow (\neg B \Rightarrow A)$
1	1	0	0	1	1	1
1	1/2	0	1/2	1	1	1
1	0	0	1	1	1	1
1/2	1	1/2	0	1	1	1
1/2	1/2	1/2	1/2	1	1	1
1/2	0	1/2	1	1/2	1/2	1
0	1	1	0	1	1	1
0	1/2	1	1/2	1/2	1/2	1
0	0	1	1	0	0	1

Cvičenie 11.2. V tomto cvičení nepíšeme pravdivostnú tabuľku, ale snažíme sa šikovne ušetriť čas.

Cvičenie 11.2b) Chceme ukázať, že $F = ((A \wedge B) \Rightarrow C) \Rightarrow (A \Rightarrow (B \Rightarrow C))$ je tautológia. Najskôr si všimnime, že ak $\overline{\nu}(B \Rightarrow C) = 1$, tak aj $\overline{\nu}(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) = 1$ a aj $\overline{\nu}(F) = 1$. Ak $\nu(C) = 1$, tak $\overline{\nu}(B \Rightarrow C) = 1$ a $\overline{\nu}(F) = 1$. Podobne ak $\nu(B) = 0$. Ak $\nu(A) = 1$, tak o $\overline{\nu}(B \Rightarrow C)$ síce nič nevieme, ale $\overline{\nu}(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) = 1$ a $\overline{\nu}(F) = 1$. Ak teda $\nu(C) = 1$, $\nu(B) = 0$ alebo $\nu(A) = 0$, tak určite $\overline{\nu}(F) = 1$.

Čo ak $\nu(C) = 1/2$? Ak aj $\nu(B) = 1/2$, tak $\overline{\nu}(B \Rightarrow C) = 1$ a $\overline{\nu}(F) = 1$. Ak $\nu(B) = 1$, tak $\overline{\nu}(B \Rightarrow C) = 1/2$. Obdobne, ak $\nu(A) = 1/2$, tak $\overline{\nu}(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) = 1$ a $\overline{\nu}(F) = 1$. Čo ak $\nu(A) = 1$? Potom už máme všetky ohodnotenia a ľahko zistíme, že $\overline{\nu}((A \wedge B) \Rightarrow C) = 1/2$ a aj $\overline{\nu}(A \Rightarrow (B \Rightarrow C)) = 1/2$, takže $\overline{\nu}(F) = 1$.

Čo ak $\nu(C) = 0$? Už skorej sme zistili, že ak $\nu(B) = 0$ alebo $\nu(A) = 0$, tak $\overline{\nu}(F) = 1$. Takže sa nám stačí pozrieť na štyri prípady: $\nu(A) = 1$ a $\nu(B) = 1$, $\nu(A) = 1$ a $\nu(B) = 1/2$, $\nu(A) = 1/2$ a $\nu(B) = 1$, $\nu(A) = 1/2$ a $\nu(B) = 1/2$. (V každom prípade máme $\nu(C) = 0$.) Pre každý z týchto prípadov treba ešte ukázať, že ohodnotenie F bude 1. To už nechám na vás.

Cvičenie 11.3. Na tomto cvičení si môžete precvičiť metódy z Cvičení 11.1 a 11.2. Nie všetko musia byť tautológie, myslite na to. V niektorých úlohach je formula zjavne nepravdivá a na zostrojenie protipríkladu ani nepotrebujete použiť ohodnotenie 1/2. (Napríklad formula v cvičení a) môže znieť takto: Ak prší, tak ak je utorok tak neprší. To nemá moc potenciál na tautológiu.)

Cvičenie 11.4. Dokážeme si jedno z de Morganových pravidiel, druhé je na vás. Použijeme definíciu zo strany 105. Chceme ukázať, že $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ je tautológia. Aby boli tvrdenia naľavo a napravo podľa definície ekvivalentné, musia mať rovnaké ohodnotenie pre ľubovoľné ohodnotenie formúl A a B. Pre jednoduchosť budeme namiesto $\overline{\nu}(A)$ písať a a namiesto $\overline{\nu}(B)$ písať b. Potom platí $\overline{\nu}(\neg(A \vee B)) = 1 - \overline{\nu}(A \vee B) = 1 - \max(a, b)$. Taktiež máme $\overline{\nu}(\neg A \wedge \neg B) = \min(\overline{\nu}(\neg A), \overline{\nu}(\neg B)) = \min(1 - a, 1 - b)$.

Chceme teda zistiť, či $1 - \max(a, b) = \min(1 - a, 1 - b)$. Momentálne nevieme koľko presne je $\max(a, b)$ (a podobne ani $\min(1 - a, 1 - b)$), lebo nevieme, ktorá z hodnôt a a b je väčšia. Pozrime sa na dva prípady: $a \leq b$ a $a > b$. (Teoreticky by sme mohli mať prípady až tri, a to $a < b$, $a = b$ a $a > b$, ale ako uvidíme, prvý a druhý prípad vieme skombinovať).

Ak $a \leq b$, tak $\max(a, b) = b$, takže $\overline{\nu}(\neg(A \vee B)) = 1 - b$. Zároveň platí, že $1 - a \geq 1 - b$, takže $\overline{\nu}(\neg A \wedge \neg B) = \min(1 - a, 1 - b) = 1 - b$. Takže $\overline{\nu}(\neg(A \vee B)) = 1 - b = \overline{\nu}(\neg A \wedge \neg B)$, z čoho vyplýva $\overline{\nu}(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)) = 1$.

Ak $a > b$, tak dostaneme $\overline{\nu}(\neg(A \vee B)) = 1 - \max(a, b) = 1 - a$ a $\overline{\nu}(\neg A \wedge \neg B) = \min(1 - a, 1 - b) = 1 - a$, čiže opäť $\overline{\nu}(\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)) = 1$.

Žiadna iná možnosť nemôže nastať (buď je a menšie alebo rovné b, alebo je väčšie), takže $\neg(A \vee B) \Leftrightarrow (\neg A \wedge \neg B)$ je tautológia. Všimnite si, že jediné čo sme využili boli definície logických spojok. Keďže tieto sú rovnaké aj pre fuzzy logiku, tak týmto sme dokázali, že de Morganove pravidlá platia aj vo fuzzy logike.

Cvičenie 11.5 a 11.6. Podobne ako v Cvičení 11.4 môžeme rovno dokazovať platnosť tvrdení v n-hodnotovej aj fuzzy logike. Opäť si treba všetko rozpísať pomocou maxím a miním a pozrieť sa na všetky možnosti. Ak máme iba jednu formulu, tak možnosť je len jedna:

Cvičenie 11.1a)

$$\overline{\nu}(A \Rightarrow A) = \min(1, 1 - (a - a)) = \min(1, 1 - 0) = \min(1, 1) = 1$$

Ak máme dve formuly, tak možnosti sú dve:

Cvičenie 11.1h)

$a \leq b$:

$\overline{\nu}(B \Rightarrow (A \vee B)) = \min(1, 1 - (b - \overline{\nu}(A \vee B))) = \min(1, 1 - (b - \max(a, b))) = \min(1, 1 - (b - b)) = 1$

$b \leq a$:

$$\overline{\nu}(B \Rightarrow (A \vee B)) = \min(1, 1 - (b - \max(a, b))) = \min(1, 1 - (b - a)))$$

Keďže $b \leq a$, tak $b - a \leq 0$ a $1 - (b - a) \geq 1$, takže $\min(1, 1 - (b - a)) = 1$.

Ak máme tri formuly, tak možností je šesť. Ak sa na to cítite, môžete skúsiť dokázať niektorú z tautológií z Cvičenia 11.2.