2. RACHUNEK MACIERZOWY

Macierzą prostokątną o wymiarze $m \times n$, $m, n \in \mathcal{N}$, nazywamy tablicę, w której znajduje się $m \cdot n$ liczb, ustawionych w m wierszach i n kolumnach w sposób przedstawiony niżej:

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & \cdots & a_{2n} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & \cdots & a_{3n} \\ \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & a_{m3} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Macierz o wymiarze $m \times n$ (czytaj: „em na en”) zapisujemy także:

$[a_{ik}]_{m \times n}$, $[a_{ik}]$, $A_{m \times n}$ lub A

Przykład

Wyznaczyć macierz $A_{2\times3}$ o elementach $a_{ij} = i - j$.

Rozwiązanie

Poszukiwana macierz ma dwa wiersze i trzy kolumny. Mamy kolejno

$a_{11} = 1 - 1 = 0$, $a_{12} = 1 - 2 = -1$, $a_{13} = 1 - 3 = -2$,

$a_{21} = 2 - 1 = 1$, $a_{22} = 2 - 2 = 0$, $a_{23} = 2 - 3 = -1$,

zatem

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -1 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \end{bmatrix}. \blacksquare$$

2.1. SZCZEGÓLNE TYPY MACIERZY

Macierz zerowa, to taka macierz, której elementami są same zera. Na przykład

$$A = \begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix},\ B = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Macierz jest **kwadratowa**, gdy ma tyle samo wierszy ile kolumn. Na przykład

$$A = [6]_{1\times 1},\ B = \begin{bmatrix} 2 & \frac{1}{3} \\ 4 & -5 \end{bmatrix}_{2\times 2},\ C = \begin{bmatrix} 0{,}3 & 8 & -1 \\ 0 & 4 & 2 \\ 0 & 0 & \sqrt{5} \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Elementy a_{ii} macierzy kwadratowej A tworzą tak zwaną **przekątną główną**.

Kwadratowa macierz, która poza przekątną główną posiada same zera nazywa się macierzą **diagonalną**. Na przykład

$$A = [5]_{1\times 1},\ B = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2},\ C = \begin{bmatrix} 7 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -6 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Macierz **jednostkowa**, to taka macierz diagonalna, która na przekątnej głównej posiada same jedynki. Na przykład

$$I_{1\times 1} = [1]_{1\times 1},\ I_{2\times 2} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2},\ I_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}_{3\times 3}.$$

Macierz, która ma tylko jeden wiersz, nazywamy **macierzą wierszową** lub **wektorem wierszowym.**

Przykład

Macierz $\begin{bmatrix} 1 & 4 & 3 \end{bmatrix}$ *ma wymiar 1×3, gdyż ma 1 wiersz i 3 kolumny.*

Macierz, która ma tylko jedną kolumnę, nazywamy **macierzą kolumnową** lub **wektorem kolumnowym.**

Przykład

Macierz $\begin{bmatrix} 4 \\ 1 \\ -3 \end{bmatrix}$ *ma wymiar 3×1, gdyż ma 3 wiersze i 1 kolumnę.*

Dwie macierze, A i B, **są macierzami równymi**, co zapisujemy $A = B$, jeżeli mają ten sam wymiar $m \times n$ i jeżeli $a_{ik} = b_{ik}$ dla $(i, k) \in \{1,2, . . . ,m\} \times \{1,2, . . . ,n\}$.

2.2. DZIAŁANIA NA MACIERZACH

Transpozycją macierzy A, oznaczaną A^T, nazywamy odwzorowanie, w wyniku którego macierz A_{mxn} zostaje przekształcona w macierz $B_{nxm} = A^T$, której elementy spełniają równość $b_{ij} = a_{ji}$ dla $(i, j) \in \{1,2, . . . ,m\} \times \{1,2, . . . ,n\}$.

Przykład: Obliczyć $\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}^T$.

Rozwiązanie

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 5 \\ 3 & 4 & 6 \end{bmatrix}_{2\times 3}^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 4 \\ 5 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 2}. \ \blacksquare$$

Własności transpozycji:

$$(A^T = B) \Rightarrow (A = B^T)$$
$$(A^T)^T = A$$

Mnożenie macierzy przez liczbę polega na pomnożeniu każdego elementu macierzy przez tę liczbę, czyli $c[a_{ij}] = [ca_{ij}]$.

Przykład

Obliczyć $3\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

$$3\begin{bmatrix} 1 & 4 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ -2 & 5 & 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3\cdot 1 & 3\cdot 4 & 3\cdot 0 \\ 3\cdot 0 & 3\cdot(-1) & 3\cdot 3 \\ 3\cdot(-2) & 3\cdot 5 & 3\cdot 2 \end{bmatrix}_{3\times 3} = \begin{bmatrix} 3 & 12 & 0 \\ 0 & -3 & 9 \\ -6 & 15 & 6 \end{bmatrix}_{3\times 3}. \ \blacksquare$$

Dodawanie dwóch macierzy określone jest tylko dla macierzy **tego samego wymiaru**. Polega ono na dodaniu odpowiadających sobie elementów, czyli

$$[\boldsymbol{a_{ij}}]_{mxn} + [\boldsymbol{b_{ij}}]_{mxn} = [\boldsymbol{a_{ij}} + \boldsymbol{b_{ij}}]_{mxn}$$

Własności dodawania macierzy

1) $A + B = B + A$ – przemienność,

2) $(A + B) + C = A + (B + C)$ – łączność,

3) **elementem neutralnym** dodawania macierzy jest macierz zerowa odpowiedniego wymiaru.

Przykład

Obliczyć

a) $\begin{bmatrix} 5 & 1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 1 & -6 \\ 3 & 2 & 4 \end{bmatrix}$, b) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 6 \\ 4 & 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$,

c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$.

Rozwiązanie

a) działanie jest niewykonalne, gdyż macierze mają różne wymiary.

b) $\begin{bmatrix} 2 & -7 \\ -3 & 6 \\ 4 & 0{,}5 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -4 & 4 \\ 5 & -6 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2-4 & -7+4 \\ -3+5 & 6-6 \\ 4+1 & 0{,}5+3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & -3 \\ 2 & 0 \\ 5 & 3{,}5 \end{bmatrix}$.

c) $\begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4+0 & 2+0 \\ 1+0 & 2+0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 2 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$. ■

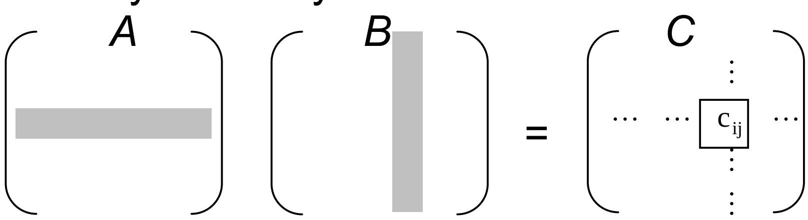
Niech A będzie macierzą wierszową $1 \times n$ o elementach $\boldsymbol{a}_{ik}$, zaś B – macierzą kolumnową $n \times 1$ o elementach b_{ik}. Iloczynem tych macierzy A i B, oznaczanym AB, jest liczba rzeczywista wyliczana w następujący sposób:

$$AB = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_{11} \\ b_{12} \\ \vdots \\ b_{1n} \end{bmatrix} =$$

$$= a_{11}b_{11} + a_{12}\,b_{12} + \ldots + a_{1n}\,b_{1n}$$

Iloczyn macierzy $A{\cdot}B$ jest określony tylko wtedy, gdy macierz A ma tyle kolumn ile macierz B ma wierszy.

Niech A będzie macierzą $m \times p$, a B – macierzą $p \times n$. **Iloczyn** macierzy A i B, oznaczany AB, jest macierzą C o wymiarze $m \times n$, której ij-ty element c_{ij} jest iloczynem skalarnym i-tego wiersza macierzy A i j-tej kolumny macierzy B:



i-ty wiersz *j*-ta kolumna element *ij*-ty

Zapisując pokazane działanie w języku algebry powiemy, że iloczyn $C = AB$ jest określony wzorem

$$c_{ij} = a_{i1}b_{1j} + a_{i2}b_{2j} + \ldots + a_{ip}b_{pj} = \sum_{k=1}^{p} a_{ik}b_{kj}$$

gdzie $i = 1,2,\ldots,m$ oraz $j = 1,2,\ldots,n$.

Własności mnożenia macierzy:

1. $A\,(BC) = (AB)\,C$ (łączność mnożenia)
2. $A\,(B+C) = AB + AC$ (rozdzielność mnożenia lewo-stronnego względem dodawania)
3. $(A+B)\,C = AC + BC$ (rozdzielność mnożenia prawo-stronnego względem dodawania)
4. $A_{mn}\mathbf{I}_n = \mathbf{I}_m A_{mn} = A_{mn}$ (istnienie lewo- i prawo-stronnego elementu neutralnego mnożenia).

Macierz $\mathbf{I}_n$ jest macierzą kwadratową $n \times n$, nazywaną macierzą jednostkową. Ma ona postać:

$$\boldsymbol{I}_n = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 0 \\ \cdots & \cdots & \cdots & 1 & & & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & \ddots & & \cdots & \cdots \\ \cdots & \cdots & \cdots & & & \ddots & \cdots & \cdots \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & \cdots & \cdots & \cdots & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Mnożenie macierzy **nie jest działaniem przemiennym**!

Przykład

Obliczyć $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0{,}2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}$:

$$\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0{,}2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} 4\cdot(-1)+0\cdot 1+6\cdot 3 & 4\cdot 0+0\cdot 2+6\cdot 5 \\ 2\cdot(-1)+(-1)\cdot 1+0{,}2\cdot 3 & 2\cdot 0+(-1)\cdot 2+0{,}2\cdot 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 & 30 \\ -2{,}4 & -1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$$

Obliczyć a) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 6 \\ 2 & -1 & 0{,}2 \end{bmatrix}_{2\times 3} \cdot \begin{bmatrix} 8 & -3 \\ 11 & 2 \end{bmatrix}_{2\times 2}$,

b) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2}$.

Rozwiązanie

a) Działanie jest niewykonalne, gdyż pierwsza macierz ma trzy kolumny a druga dwa wiersze.

b)

$$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2} \cdot \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}_{2\times 2} =$$

$$= \begin{bmatrix} (-1)\cdot 1 + 0\cdot 0 & (-1)\cdot 0 + 0\cdot 1 \\ 1\cdot 1 + 2\cdot 0 & 1\cdot 0 + 2\cdot 1 \\ 3\cdot 1 + 5\cdot 0 & 3\cdot 0 + 5\cdot 1 \end{bmatrix}_{3\times 2} = \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 1 & 2 \\ 3 & 5 \end{bmatrix}_{3\times 2}. \blacksquare$$

Symbolem, wygodnym do zwartego zapisywania macierzy diagonalnych, skalarnych, a także jednostkowych, jest **delta Kroneckera.**

Deltę Kroneckera definiujemy następująco:

$$\delta_{ij} = \begin{cases} 1 \text{ gdy } i = j \\ 0 \text{ gdy } i \neq j \end{cases}, \quad i, j = 1,2, \ldots ,n.$$

2.3. WYZNACZNIK MACIERZY

Wyznacznikiem macierzy kwadratowej $A = [a_{ij}]$ nazywamy liczbę oznaczaną *det A* lub $|A|$, która jest określona następująco:

$$\det A = \begin{cases} a_{11}\,, & \text{gdy macierz } A \text{ jest stopnia} \quad n = 1 \\ \sum\limits_{j=1}^{n} (-1)^{1+j} a_{1j} \det A_{1j}\,, & \text{gdy macierz } A \text{ jest stopnia} \quad n \geq 2 \end{cases}$$

gdzie A_{ij} oznacza macierz otrzymaną z macierzy *A* przez skreślenie *i*-tego wiersza i *j*-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy kwadratowej *A* zapisuje się przy pomocy symboli podobnych do zapisu macierzy. Oto zestawienie dwóch najczęściej spotykanych sposobów zapisu obu tych wielkości matematycznych:

Macierze kwadratowe:	Wyznaczniki:
$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$	$\lvert A \rvert = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix}$
$\mathbf{A} = [\mathbf{a}_{ik}]$	$\lvert \mathbf{A} \rvert = \boldsymbol{det}\ [\mathbf{a}_{ik}] = \boldsymbol{det\ A}$

Reguły obliczania wyznaczników stopnia drugiego i trzeciego:

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22} - a_{21}a_{12}$$

$$\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{21}a_{32}a_{13} + a_{12}a_{23}a_{31} - a_{13}a_{22}a_{31} - a_{12}a_{21}a_{33} - a_{11}a_{23}a_{32}$$

Reguła Sarrusa (pokazać na wykładzie) - sposób obliczania nią wyznacznika nie przenosi się na wyznaczniki wyższych stopni.

Prawdziwe są wzory (tw. Laplace'a):

$$|A| = a_{i1}|A_{i1}| + a_{i2}|A_{i2}| + \ldots + a_{in}|A_{in}| \qquad i = 1, 2, \ldots, n$$

$$|A| = a_{1j}|A_{1j}| + a_{2j}|A_{2j}| + \ldots + a_{nj}|A_{nj}| \qquad j = 1, 2, \ldots, n$$

których prawe strony nazywamy odpowiednio rozwinięciem wyznacznika według *i*-tego wiersza oraz *j*-tej kolumny.

Przykłady

1. Obliczyć wyznacznik

$$\begin{vmatrix} 70 & 150 \\ 450 & 250 \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie

Korzystając z własności, wyłączamy przed wyznacznik: czynnik 10 z pierwszego wiersza i czynnik 50 z drugiego, a następnie czynnik 5 z drugiej kolumny:

$$\begin{vmatrix} 70 & 150 \\ 450 & 250 \end{vmatrix} = 10 \cdot 50 \begin{vmatrix} 7 & 15 \\ 9 & 5 \end{vmatrix} = 500 \cdot 5 \begin{vmatrix} 7 & 3 \\ 9 & 1 \end{vmatrix} = 2500(7-27) = -50000 \quad \blacksquare$$

2. Rozwiązać równanie

$$\begin{vmatrix} 3 & 5^x & -5^x \\ 2 & -1 & 3 \\ 5^x+1 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0$$

Rozwiązanie

Rozwijamy wyznacznik metodą np. Sarrusa. Otrzymujemy równanie

$$2 \cdot (5^x)^2 - 2 \cdot 5^x - 12 = 0$$

Dzieląc stronami przez 2 i wprowadzając pomocniczą niewiadomą $y = 5^x$, dostajemy

$$y^2 - y - 6 = 0,$$

skąd łatwo wyliczyć, że $y = -2$ lub $y = 3$. Wracając do niewiadomej *x* otrzymujemy

$5^x = -2$ lub $5^x = 3$

Pierwsze z powyższych równań nie posiada pierwiastków, zaś rozwiązaniem drugiego jest $x = \log_5 3$. ■

Własności wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej jest równy wyznacznikowi macierzy względem niej transponowanej.
2. Jeżeli wszystkie elementy wiersza (kolumny) wyznacznika pomnożymy przez liczbę, to wartość wyznacznika zostanie pomnożona przez tę liczbę.
3. Jeżeli wiersz (kolumna) wyznacznika jest kombinacją liniową innych wierszy (kolumn), to wyznacznik jest równy zeru.
4. Jeżeli do wiersza (kolumny) wyznacznika dodamy kombinację liniową innych wierszy (kolumn), to wartość wyznacznika nie zmieni się.

3. Obliczyć wyznacznik

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Rozwiązanie

Korzystając z własności wyznaczników, odejmiemy od pierwszego wiersza podwojony wiersz trzeci, by otrzymać trzy zera w trzeciej kolumnie a następnie rozwiniemy wyznacznik względem trzeciej kolumny:

$$W = \begin{vmatrix} 3 & 1 & 4 & 5 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -7 & -3 & 0 & -9 \\ 3 & 0 & 0 & 2 \\ 5 & 2 & 2 & 7 \\ 2 & 0 & 0 & 3 \end{vmatrix} = 2 \cdot (-1)^{3+3} \begin{vmatrix} -7 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix}$$

Rozwijamy otrzymany wyznacznik (stopnia trzeciego) względem drugiej kolumny

$$\begin{vmatrix} -7 & -3 & -9 \\ 3 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 3 \end{vmatrix} = -3 \cdot (-1)^{1+2} \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ 2 & 3 \end{vmatrix} = 3 \cdot (9-4) = 15$$

Ostatecznie $W = 2 \cdot 15 = 30$ ■

Usuwając z macierzy danego wyznacznika pewną liczbę wierszy i taką samą liczbę kolumn, zachowując przy tym kolejność pozostałych wierszy i kolumn, otrzymuje się macierz kwadratową niższego stopnia. Wyznacznik tak otrzymanej macierzy nazywany jest **podwyznacznikiem** wyznacznika macierzy wyjściowej.

Minorem wyznacznika, przynależnym do elementu a_{ik} macierzy tego wyznacznika, nazywamy ten podwyznacznik, który otrzymamy usuwając z macierzy rozważanego wyznacznika wiersz i kolumnę, na przecięciu których znajduje się element a_{ik}. Minor ten oznaczamy symbolem M_{ik}.

Wartość wyznacznika dzieli macierze kwadratowe na macierze **osobliwe** (ich wyznacznik jest równy zeru) i **nieosobliwe** (wyznacznik różny od zera).

W wielu przypadkach macierzy prostokątnych postępuje się w ten sposób, że przez skreślenie niektórych wierszy lub kolumn tworzy się (mówimy: **wyjmuje się**) z nich macierze kwadratowe. Nazywa się je **podmacierzami** danej macierzy. Wyznaczniki tych podmacierzy nazywa się **minorami** danej macierzy.

Rzędem macierzy A o wymiarze $m \times n$ nazywamy:

1) liczbę $R(A)$ równą najwyższemu ze stopni jej różnych od zera minorów, gdy macierz jest niezerowa;

2) liczbę zero, gdy macierz jest zerowa (gdy wszystkie jej elementy są równe zeru).

Rząd macierzy A spełnia następującą nierówność:

$$o \leq R\,(A) \leq min\,(m, n)$$

2.4. MACIERZ ODWROTNA

Macierzą odwrotną macierzy **nieosobliwej** *A* nazywamy macierz A^{-1} taką, że $AA^{-1} = A^{-1}A = I$, gdzie *I* oznacza macierz jednostkową odpowiedniego wymiaru.

Jeżeli macierz $A = [a_{ij}]$ jest nieosobliwa, to

$$A^{-1} = \frac{1}{\det A} A^{D} \quad ,$$

gdzie $A^{D} = \left[(-1)^{i+j} \det M_{ij}\right]^{T} = \left[A_{ij}\right]^{T}$ nazywamy macierzą dołączoną, zaś podwyznaczniki $A_{ij} = (-1)^{i+j} \det M_{ij}$ nazywamy dopełnieniami algebraicznymi elementów a_{ij} .

Przykład:

$$A = \begin{bmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & 5 \end{bmatrix}$$ *Znaleźć* A^{-1}

Rozwiązanie

a) $$\det A = \begin{vmatrix} 3 & -2 & 7 \\ 4 & -3 & 9 \\ 3 & -1 & 5 \end{vmatrix} = 3$$

$$A_{11}=\begin{vmatrix}-3 & 9\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-6\;,\quad A_{12}=\begin{vmatrix}4 & 9\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-7\;,\quad A_{13}=\begin{vmatrix}4 & -3\\ 3 & -1\end{vmatrix}=5$$

$$A_{21}=\begin{vmatrix}-2 & 7\\ -1 & 5\end{vmatrix}=-3\;,\quad A_{22}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 3 & 5\end{vmatrix}=-6\;,\quad M_{23}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 3 & -1\end{vmatrix}=3$$

$$A_{31}=\begin{vmatrix}-2 & 7\\ -3 & 9\end{vmatrix}=3\;,\quad A_{32}=\begin{vmatrix}3 & 7\\ 4 & 9\end{vmatrix}=-1\;,\quad A_{33}=\begin{vmatrix}3 & -2\\ 4 & -3\end{vmatrix}=-1$$

$$A^{-1}=\frac{1}{3}\begin{bmatrix}-6 & 7 & 5\\ 3 & -6 & -3\\ 3 & 1 & -1\end{bmatrix}^{\mathrm{T}}=\begin{bmatrix}-2 & 1 & 1\\ \frac{7}{3} & -2 & \frac{1}{3}\\ \frac{5}{3} & -1 & -\frac{1}{3}\end{bmatrix}$$

Zadania

2.1. Napisać w postaci jawnej macierz o wymiarach $m\times n$, której elementami są liczby a_{ij}

a) $m = 2$, $n = 2$ $a_{ij} = i + j$,

b) $m = 3$, $n = 2$ $a_{ij} = 2i - 3j$,

c) $m = 3$, $n = 4$ $a_{ij}=\begin{cases} i & gdy\ \ i>j\\ j & gdy\ \ i=j\\ i+j & gdy\ \ i<j\end{cases}$.

2.2. Dane są macierze: $A = \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 0 & -3 \\ 5 & 2 \\ 0{,}4 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ -3 & 4 & -6 \end{bmatrix}$.

Określić wymiar każdej macierzy a następnie obliczyć jeśli to możliwe:

a) transpozycję każdej macierzy, b) $2A$, c) $-4C$, d) $A + B$, e) $B^T - C$, f) $2B - 4C^T$.

2.3. Kiedy $A^T = A$?

2.4. Określić, w którym przypadku mnożenie macierzy jest wykonalne

a) $A_{3x4}B_{3x4}$, b) $A_{2x3}B_{3x5}$, c) $A_{3x8}B_{8x3}$.

2.5. Co można powiedzieć o wymiarze macierzy A, jeśli wiadomo., że wykonalny jest iloczyn AA?

2.6. Dane są macierze $A = \begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$, $B = \begin{bmatrix} 3 & 0 & -4 \\ 6 & 0{,}5 & 1 \end{bmatrix}$,

$C = \begin{bmatrix} 5 & 0 \\ 7 & 2 \\ -1 & 6 \end{bmatrix}$, $D = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 \\ 2 & 5 & -3 \\ 3 & 6 & -1 \end{bmatrix}$. Obliczyć a) AB , b) BA,

c) AC d) BC , e) C^TB^T , f) BD g) C^TD , h) $(B+C^T)D$, i) $A^2 - I$, gdzie I-macierz jednostkowa.

2.7. Dana jest macierz $X = \begin{bmatrix} 1 & -2 & 1 \\ 2 & 3 & 2 \\ -1 & 0 & 3 \\ 4 & 5 & 4 \end{bmatrix}$. Obliczyć

a) X^TX

b) XI oraz IX, gdzie I – macierz jednostkowa odpowiedniego wymiaru.

2.8. Rozwiązać równanie macierzowe (o ile rozwiązanie istnieje)

a) $-3X + \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = 2X - \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ 2 & -2 \end{bmatrix}$,

b) $X^T + \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0{,}4 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 & 3 \\ 1 & 0{,}4 & -4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} -1 & 5 & 0 \\ 2 & 4 & 3 \\ 1 & 0 & -2 \end{bmatrix}$,

c) $-2X^T + \begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 3 & -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 & 5 \\ 1 & 4 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & 21 & 7 \\ -6 & 11 & 0 \end{bmatrix}^T$,

d) $4X + \begin{bmatrix} 0 & 3 \\ 12 & 6 \end{bmatrix} = X^T$.

2.9. Rozwiązać układ równań macierzowych (o ile rozwiązanie istnieje)

a) $\begin{cases} X - Y = \begin{bmatrix} 0,2 & 6 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -0,5 & 2 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix}^T \end{cases}$,

b) $\begin{cases} X - Y = \begin{bmatrix} 0,2 & 6 & 0 \\ 3 & -5 & 2 \end{bmatrix} \\ 2X + 3Y^T = \begin{bmatrix} 0 & 4 \\ -0,5 & 2 \\ 1 & 0,6 \end{bmatrix}^T \end{cases}$.

2.10. Obliczyć następujące wyznaczniki stopnia drugiego:

a) $\begin{vmatrix} 8 & -2 \\ 5 & -3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} 1440 & 240 \\ 77 & 11 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 21 & 20 \\ 17 & 16 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} 3 & 2 \\ \log 8 & \log 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} \cos^2 x & -\sin x \\ \cos x & \operatorname{tg} x \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} a^m + a^n & 1 \\ a^{m-n} - 1 & a^{-n} \end{vmatrix}$

2.12. Metodą Sarrusa rozwinąć wyznaczniki:

a) $\begin{vmatrix} 4 & -5 & 1 \\ 0 & 2 & 6 \\ 3 & -1 & 10 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -5 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 3 \\ -3 & 7 & -4 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 8 & -2 & -3 \\ 1 & -2 & -5 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix}$ d) $\begin{vmatrix} x & z & y \\ z & y & x \\ y & x & z \end{vmatrix}$

2.13. Rozwiązać równania:

a) $\begin{vmatrix} 0 & x-5 & 2 \\ 4 & -1 & x+1 \\ -2 & 3 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 7 & x \\ x & 3 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} x & -1 & x \\ 2 & x & 5 \\ 0 & x & x \end{vmatrix} = 0$ c) $\begin{vmatrix} 2^x & 1 & -1 \\ -4 & -3 & 2^x \\ 2 & 3 & -1 \end{vmatrix} = 0$

2.14. Rozwiązać nierówności:

a) $\begin{vmatrix} 1 & x+2 & x \\ 3 & x-1 & 3 \\ 1 & 2 & 2 \end{vmatrix} < 0$ b) $\begin{vmatrix} 0 & x+1 & -1 \\ 1 & -3 & x \\ 2 & 0 & 2 \end{vmatrix} > 0$ c) $\begin{vmatrix} 1/x & 0 & -1 \\ 3x & -1 & 1 \\ 0 & -3 & 4 \end{vmatrix} \geq 0$

2.15. Nie rozwijając wyznaczników wykazać, że dla dowolnych wartości *a*, *b*, *c* i *d* zachodzą równości:

a) $\begin{vmatrix} ab & a & b \\ ac & b & c \\ ad & c & d \end{vmatrix} = 0$ b) $\begin{vmatrix} a-b & a+b & a \\ b-c & b+c & b \\ c-a & c+a & c \end{vmatrix} = 0$

2.16. Napisać rozwinięcie Laplace'a podanego wyznacznika względem wskazanego wiersza lub kolumny:

a) $\begin{vmatrix} -6 & 1 & 3 & 0 \\ 1 & -2 & 4 & -4 \\ 3 & -1 & 7 & 11 \\ 0 & 2 & 2 & 5 \end{vmatrix}$; wzgl. 3-go wiersza b) $\begin{vmatrix} 10 & 1 & 0 & -4 \\ -3 & 6 & 7 & 1 \\ 4 & 3 & 3 & 5 \\ 8 & -2 & 4 & 3 \end{vmatrix}$; wzgl. 1-szej kolumny

2.17. Obliczyć następujące wyznaczniki

a) $\begin{vmatrix} 1 & 1 & -5 & 3 \\ 3 & 4 & 0 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 2 & 2 & 0 & -1 \end{vmatrix}$ b) $\begin{vmatrix} -5 & 4 & -5 & 2 \\ -1 & -4 & 3 & -2 \\ 2 & 3 & -1 & 1 \\ -2 & 4 & -1 & 0 \end{vmatrix}$ c) $\begin{vmatrix} 24 & 8 & 16 & 32 \\ 2 & 4 & -3 & 0 \\ -2 & 0 & 5 & -1 \\ 4 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$

d) $\begin{vmatrix} -5 & 0 & 0 & 0 \\ 12 & 3 & 0 & 0 \\ 4 & 1 & 1 & 0 \\ 8 & -8 & 5 & 4 \end{vmatrix}$ e) $\begin{vmatrix} 3 & 7 & 2 & 5 \\ 0 & 1 & 4 & 4 \\ -3 & 1 & 2 & -1 \\ 6 & 4 & -5 & 1 \end{vmatrix}$ f) $\begin{vmatrix} 20 & 10 & 1 & 2 \\ 30 & 20 & 1 & 1 \\ 20 & 30 & 2 & 1 \\ 10 & 10 & 1 & 2 \end{vmatrix}$

2.18. Wykazać, że wyznacznik macierzy trójkątnej $A = [a_{ij}]$ jest równy iloczynowi elementów głównej przekątnej, tzn., że jeśli $a_{ij} = 0$ dla *i* > *j* (ewentualnie $a_{ij} = 0$ dla *i* < *j*), to $\det A = a_{11}\, a_{22} \cdots a_{nn}$.

2.19. Napisać wyznacznik stopnia czwartego, którego wartość jest równa zeru i w którym żadne dwa wiersze ani żadne dwie kolumny nie są proporcjonalne.

2.20. Napisać wyznacznik stopnia trzeciego $\det\,[a_{ij}]$, którego wartość wynosi a) 18 b) –50 c) 1200 d) 0 i taki, że $a_{ij} \neq 0$.

2.21. Wyznaczyć wartość parametru *t*, dla której następująca macierz jest osobliwa:

a) $\begin{bmatrix} t & 1 & 3 \\ -4 & -2 & 0 \\ 2t & 3 & 4 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 1 & t+1 & t \\ 1 & t+2 & t \\ 1 & t+3 & t \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} t & t^2 & t \\ 5 & 3 & 1 \\ t^2 & t & t^2 \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} t^4 & 2 & -2 \\ -1 & 2 & 4 \\ t^2 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

2.22. Znaleźć macierze odwrotne do danych:

a) $\begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -4 & -3 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 3 & a \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$ c) $\begin{bmatrix} \cos\alpha & -\sin\alpha \\ \sin\alpha & \cos\alpha \end{bmatrix}$ d) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -1 & 2 & 0 \\ 3 & 0 & 3 \end{bmatrix}$

e) $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ -2 & -1 & 0 \\ 1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ f) $\begin{bmatrix} -3 & 2 & -1 \\ -5 & 4 & 3 \\ 0 & 1 & 5 \end{bmatrix}$ g) $\begin{bmatrix} 4 & 0 & 1 \\ 5 & -2 & 3 \\ 5 & 2 & 0 \end{bmatrix}$ h) $\begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$

2.23. Wyznaczyć macierz *X* z równania

a) $\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 3 & -2 \end{bmatrix} X = \begin{bmatrix} 4 \\ -6 \end{bmatrix}$ b) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} X^{-1} = \begin{bmatrix} 3 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$ c) $X \begin{bmatrix} -5 & -4 \\ 3 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & -2 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

d) $\begin{bmatrix} 5 & 3 \\ 6 & 4 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 7 & 4 \\ 5 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 & 2 \\ 10 & 2 \end{bmatrix}$ e) $\begin{bmatrix} -1 & -5 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} X \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 13 & -7 \\ -7 & 7 \end{bmatrix}$

f) $X\begin{bmatrix} 0.01 & 0.02 & 0.04 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0.5 & 10 & 1 \\ -1 & 5 & 7 \end{bmatrix}$