Elementy algebry liniowej

1. Znajdowanie odwrotności macierzy.
2. Układy równań liniowych i metody ich rozwiązywania.
3. Reguła Cramera.
4. Metoda macierzowa rozwiązywania układów równań liniowych.
5. Metoda Gaussa.

- **Znajdowanie odwrotności macierzy**

Macierz odwrotna

Jeśli macierz kwadratowa $\boldsymbol{A}$ jest nieosobliwa, to możemy otrzymać macierz do niej odwrotną $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Zachodzi zatem zależność:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

Oznaczmy: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Element macierzy odwrotnej c_{ij} obliczamy w następujący sposób:

$$c_{ij} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(-1)^{i+j}\left|M_{ij}^{\mathrm{T}}\right|$$

gdzie $\left|M_{ij}^{\mathrm{T}}\right|$ jest minorem otrzymywanym z macierzy $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

Właściwości macierzy odwrotnych

1. Jeśli $\det \boldsymbol{A} = 0$ czyli macierz jest osobliwa, to macierz odwrotna $\boldsymbol{A}^{-1}$ nie istnieje.
2. $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}$
3. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$
4. $\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$
5. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$

Macierz odwrotna

Przykład:

Obliczyć macierz odwrotną do danej macierzy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det \boldsymbol{A} = 2$$

$$c_{11} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(-1)^2 \left| M_{11}^{\mathrm{T}} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$(\dots)$

$$c_{33} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(-1)^6 \left| M_{33}^{\mathrm{T}} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 4.0 \\ 1.0 & -1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 2.0 & -6.5 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$$

Układy równań

- Każdy liniowy układ równań możemy zapisać w postaci

$$\begin{cases} a_{11}x_1 + a_{12}x_2 + \cdots + a_{1n}x_n = b_1 \\ a_{21}x_1 + a_{22}x_2 + \cdots + a_{2n}x_n = b_2 \\ \ldots \\ a_{m1}x_1 + a_{m2}x_2 + \cdots + a_{mn}x_n = b_m \end{cases}$$

$$A \cdot \mathbf{x} = \mathbf{b}$$

gdzie A jest $m \times n$ macierzą współczynników a_{ij}, $\mathbf{b}$ prawa strona i $\mathbf{x}$ wektor niewiadomych x_k.

Ropwiązania $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$

Układ równań może mieć

1. dokładnie jedno rozwiązanie lub
2. nieskończenie wiele rozwiązań lub
3. brak rozwiązań.

W 1 układ równań nazywamy **oznaczonym**, w 2 **nieoznaczonym**, a w 3 **sprzecznym**.

n równań, n niewiadomych

W przypadku gdy $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ma n równań i n niewiadomych,

- jeśli $\det A \neq 0$ układ ma jedno rozwiązanie.
- jesli $\det A = 0$ ma wiele rozwiązań lub nie ma rozwiązania.

Jak znaleźć rozwiązanie $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$?

1. Przypadek pierwszy : dokładnie jedno rozwiązanie

Metoda mecierzowa z wykorzystaniem macierzy odwrotnej

Jeżeli A jest macierzą kwadratowa i niech $\det A \neq 0$, wtedy istnieje A^{-1},

$$\mathbf{x} = A^{-1}\mathbf{b}$$

Cramer

Niech $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ ma n równań i n niewiadomych oraz $\det A \neq 0$. Rozwiązania

$$x_1 = \frac{|A_1|}{|A|},\ x_2 = \frac{|A_2|}{|A|}, \ldots, x_n = \frac{|A_n|}{|A|}.$$

Eliminacja Gaussa

- Elimację Gaussa można zastosować w każdym przypadku (jedno rozwiązanie, wiele rozwiązań, nieskończenie wiele rozwiązań).
- Eliminację Gaussa można zastosować dla każdego wymiaru , na przykład m równań i n niewiadomych, dla każdego m i n.

Rozwiązanie $A\mathbf{x} = \mathbf{b}$ używając eliminacji Gaussa

1. Zapisz

$$[A \,|\, \mathbf{b}]$$

2. Skorzystaj z przekształceń elmentarnych

$$[A \,|\, \mathbf{b}] \quad \xrightarrow[operacje]{elementarne} \quad [R_n \,|\, \mathbf{c}]$$

3. Napisz rozwiązań

Przykłady

Rozwiąż układ równań metodą Cramera

$$\begin{cases} x - y + 2z = -1 \\ x + y - z = 3 \\ 2x + y + 2z = 4 \end{cases}$$

$$\det\begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \\ 2 & 1 & 2 \end{bmatrix} = 2+2+2-(4+(-1)+(-2)) = 6-1 = 5 \neq 0 \qquad W = 5$$

$$\begin{matrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 1 & -1 \end{matrix}$$

$$W_x = \begin{vmatrix} -1 & -1 & 2 \\ 3 & 1 & -1 \\ 4 & 1 & 2 \end{vmatrix} = -2+6+4-(8+(-6)+1) = 8-3 = 5$$

$$x = \frac{W_x}{W} = \frac{5}{5} = 1$$

$$y = \frac{W_y}{W} = \frac{10}{5} = 2$$

$$z = \frac{W_z}{W} = \frac{0}{5} = 0$$

$$W_y = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 2 \\ 1 & 3 & -1 \\ 2 & 4 & 2 \end{vmatrix} = 6+8+2-(12+(-2)+(-4)) = 16-6 = 10$$

$$W_z = \begin{vmatrix} 1 & -1 & -1 \\ 1 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \end{vmatrix} = 4+(-1)+(-6)-(-2+(-4)+3) = -3-(-3) = 0$$

Przykład

Rozwiąż układ równań:

$$\begin{cases} x_1 + 2x_2 - x_3 = 2 \\ 2x_1 + 3x_2 + x_3 = 11 \\ -x_1 + 4x_2 + 2x_3 = 13 \end{cases}$$

Rozw. Należy policzyć cztery wyznaczniki macierzy stopnia 3.

$$\det A = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 3 & 1 \\ -1 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19, \quad \det A_1 = \det \begin{bmatrix} 2 & 2 & -1 \\ 11 & 3 & 1 \\ 13 & 4 & 2 \end{bmatrix} = -19$$

$$\det A_2 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 11 & 1 \\ -1 & 13 & 2 \end{bmatrix} = -38, \quad \det A_3 = \det \begin{bmatrix} 1 & 2 & 2 \\ 2 & 3 & 11 \\ -1 & 4 & 13 \end{bmatrix} = -57.$$

Zatem

$$x_1 = \frac{\det A_1}{\det A} = \frac{-19}{-19} = 1, \quad x_2 = \frac{\det A_2}{\det A} = \frac{-38}{-19} = 2, \quad x_3 = \frac{\det A_3}{\det A} = \frac{-57}{-19} = 3.$$

$$x + y + z = 3$$
$$x + 2y + 3z = 0$$
$$x + 3y + 4z = -2$$

$$\left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 1 & 2 & 3 & 0 \\ 1 & 3 & 4 & -2 \end{array}\right] \sim \begin{array}{c} \\ w_2 - w_1 \\ w_3 - w_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 1 & 1 & 3 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 2 & 3 & -5 \end{array}\right] \sim$$

$$\begin{array}{c} v_1 - w_2 \\ \sim \\ w_3 - 2w_1 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & -1 & 1 \end{array}\right] \sim \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & -1 & 6 \\ 0 & 1 & 2 & -3 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right] \begin{array}{c} w_1 + w_3 \\ \sim \\ w_2 - 2w_3 \end{array} \left[\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right]$$

$$-5 - 2(-3) = -5 + 6 = 1$$

$$-3 - 2(-1) = -3 + 2 = -1$$

$$x = 5$$
$$y = -1$$
$$z = -1$$

Dziękuję i zapraszam do rozwiązania zadań oraz wypowiedzi na forum