Matematyka dla informatyków

Dr hab. inż. Petro Guchek

p.guchek@vizja.pl

Microsoft Teams(czat)

Cel przedmiotu: Zapoznanie studentów z podstawowymi pojęciami, obiektami, strukturami i metodami matematyki do rozwiązywania problemów informatycznych. Nabycie przez studentów umiejętności służących do konstruowania i analizy algorytmów.

Forma zaliczenia:
wykład(30 h) (egzamin) + ćwiczenia(45 h) (2 kolokwia) - (*Stacjonarna*).

wykład(16 h) (egzamin) + ćwiczenia(24 h) (2 kolokwia) - (Nies*tacjonarna*).

Warunkami koniecznymi dla uzyskania pozytywnej oceny z przedmiotu są: zaliczenie ćwiczeń oraz zaliczenie wykładu.

Egzamin w formie testowej – pytania otwarte, zamknięty

((Skala ocen : 2,0 (ndst); 3,0 (dst); 3,5 (dst plus); 4,0 (db); 4,5 (db plus); 5,0 (bdb); 6,0 (cel)))

EGZAMIN jest zaliczony gdy student uzyska wynik: - minimum 50% z możliwych do zdobycia punktów.

EGZAMIN jest zaliczony na ocenę celującą gdy student uzyska wynik: - więcej niż 90% z możliwych do zdobycia punktów oraz przedstawił prezentację na zadany temat.

Ocena	Opis wymagań	Wymagany procent osiągniętych efektów uczenia się dla przedmiotu
celujący (6,0)	Student osiągnął efekty uczenia ilościowo lub jakościowo wykraczające poza zakres przewidziany programem kształcenia dla przedmiotu, w szczególności: posiada wiedzę znacznie przekraczającą zakres określony programem kształcenia dla przedmiotu, samodzielnie określa i rozwiązuje problemy teoretyczne i praktyczne, potrafi wykorzystać wiedzę w nowych sytuacjach problemowych, poprawnie i swobodnie posługuje się terminologią naukową oraz zawodową.	> 90% oraz dodatkowe osiągnięcia wykraczające ilościowo lub jakościowo poza te przewidziane na ocenę bardzo dobrą
bardzo dobry (5,0)	Student opanował pełen zakres wiedzy i umiejętności określony w programie kształcenia dla przedmiotu, samodzielnie rozwiązuje problemy teoretyczne i praktyczne, potrafi wykorzystać wiedzę w nowych sytuacjach problemowych, poprawnie posługuje się terminologią naukową oraz zawodową.	min. 90%
dobry plus (4,5)	Student osiągnął efekty uczenia się powyżej wymagań dla oceny dobrej, ale niewystarczające dla oceny bardzo dobrej.	min. 85%
dobry (4,0)	Student opanował większość wiadomości i umiejętności określonych programem kształcenia dla przedmiotu, rozwiązuje typowe zadania teoretyczne i praktyczne, ujmuje w terminach naukowych i zawodowych podstawowe pojęcia i prawa.	min. 70%
dostateczny plus (3,5)	Student osiągnął efekty uczenia się powyżej wymagań dla oceny dostatecznej, ale niewystarczające dla oceny dobrej.	min. 65%
dostateczny (3,0)	Student opanował podstawowe wiadomości i umiejętności określone programem kształcenia dla przedmiotu, rozwiązuje typowe zadania teoretyczne i praktyczne o średnim stopniu trudności, popełnia niewielkie błędy terminologiczne, a wiadomości przekazuje językiem zbliżonym do potocznego.	min. 50%
niedostateczny (2.0)	Student nie opanował niezbędnego minimum podstawowych wiadomości i umiejętności określonych programem kształcenia dla przedmiotu, nie potrafi rozwiązać zadań o niewielkim stopniu trudności, popełnia rażące błędy terminologiczne, a styl jego wypowiedzi jest nieporadny.	mniej niż 50%

Tematy wykładów

Elementy algebry liniowej

❖Macierze, operacje arytmetyczne na macierzach. Rodzaje macierzy. Wyznaczniki i ich własności. Wyznaczniki drugiego i trzeciego rzędu. Uzupełnienia algebraiczne i minory. Obliczanie wyznaczników drugiego rzędu. Obliczanie wyznaczników trzeciego rzędu metodami trójkątów i rozkładu na elementy kolumnowe (wierszowe). Znajdowanie odwrotności macierzy.

❖Układy równań liniowych i metody ich rozwiązywania. Reguła Kramera. Metoda macierzowa rozwiązywania układów równań liniowych. Metoda Gaussa.

Algebra wektorów

❖Układy współrzędnych na płaszczyźnie i w przestrzeni. Wektory. Operacje liniowe na wektorach. Baza. Znajdowanie współrzędnych wektora w nowej bazie. Rzutowanie wektora na oś. Dzielenie odcinka w określonym stosunku.

❖Iloczyn skalarny dwóch wektorów, jego własności i zastosowania. Iloczyn wektorowy wektorów, jego własności i zastosowania. Iloczyn mieszany wektorów, jego własności i zastosowania.

- Rodzaje równań prostych na płaszczyźnie. Równanie ogólne prostej. Równanie kanoniczne prostej. Równanie prostej w odcinkach na osiach układu współrzędnych. Równanie prostej ze współczynnikiem kątowym. Równanie prostej przechodzącej przez dany punkt w danym kierunku. Równanie prostej przechodzącej przez dwa dane punkty. Względne położenie prostych na płaszczyźnie. Przecięcie dwóch prostych. Kąt między dwiema prostymi. Warunki równoległości i prostopadłości dwóch prostych.

- Krzywe drugiego rzędu. Równania kanoniczne okręgu, elipsy, hiperboli i paraboli. Równania krzywych drugiego rzędu z przesuniętym środkiem. Redukcja ogólnego równania prostej drugiego rzędu do postaci kanonicznej.

- ❖Płaszczyzny w przestrzeni. Równanie wektorowe, równanie ogólne płaszczyzny, równanie płaszczyzny przechodzącej przez trzy punkty, równanie płaszczyzny w odcinkach, które odcina na osiach współrzędnych. Szczególne przypadki położenia płaszczyzn. Kąt między dwiema płaszczyznami. Warunki równoległości i prostopadłości dwóch płaszczyzn. Prosta w przestrzeni. Rodzaje równań prostej w przestrzeni. Względne położenie prostej i płaszczyzny, dwóch prostych. Kąt między prostą a płaszczyzną.

- ❖Powierzchnie drugiego rzędu. Równania ogólne elipsoidy, kuli, hiperboloidy. Powierzchnie obrotowe.

- ❖Podstawy i zastosowania rachunku tensorowego. Tensor drugiego rzędu.

❖Granice ciągów liczbowych i funkcji. Nieskończony ciąg liczbowy. Granica ciągu liczbowego. Ciągi nieskończenie małe i nieskończenie duże. Granica funkcji. Twierdzenie o jednoznaczności granicy. Metody obliczania granic funkcji. Twierdzenie o granicach. Rodzaje niepewności. Metody ujawniania niepewności. Pierwsza i druga ważna granica. Porównywanie wartości nieskończenie małych.

❖Ciągłość funkcji. Klasyfikacja punktów nieciągłości funkcji. Wykresy funkcji w pobliżu punktów nieciągłości.

Rachunek różniczkowy funkcji jednej zmiennej

❖Pochodna funkcji. Definicja pochodnej funkcji, jej znaczenie geometryczne i fizyczne. Zasady różniczkowania. Różniczkowanie podstawowych funkcji elementarnych. Różniczkowanie funkcji złożonej. Różniczkowanie funkcji określonych parametrycznie i niejawnie. Pochodna funkcji wykładniczej. Różniczkowanie logarytmów.

❖Różniczka funkcji i jej znaczenie geometryczne. Twierdzenia dotyczące różniczki. Zastosowanie różniczki w obliczeniach przybliżonych. Twierdzenia o funkcjach różniczkowalnych. Twierdzenie Rolla. Twierdzenie Lagrange'a. Twierdzenie Cauchy'ego. Reguła Lopitala. Obliczanie granic za pomocą reguły Lopitala.

❖Zastosowanie rachunku różniczkowego do badania funkcji. Warunki monotoniczności funkcji. Ekstremum funkcji. Warunki konieczne i wystarczające dla ekstremum. Znajdowanie największych i najmniejszych wartości. Wypukłość i wklęsłość funkcji. Punkty przegięcia. Ogólny schemat badania funkcji i konstrukcji jej wykresu. Asymptoty wykresu funkcji.

Całka nieoznaczona

❖Pierwotna funkcja i jej własności. Całka nieoznaczona i jej własności. Tabela całek nieoznaczonych. Metoda zastępowania zmiennej. Całkowanie przez części. Rodzaje całek obliczanych metodą całkowania przez części. Całki zawierające w mianowniku trójmian kwadratowy.

❖Całkowanie ułamków zwykłych. Rodzaje ułamków zwykłych i ich całkowanie. Całkowanie ułamkowych funkcji wymiernych. Rozkład ułamka właściwego na ułamki elementarne lub najprostsze. Metody znajdowania niepewnych współczynników w rozkładzie ułamka wymiernego na ułamki elementarne.

❖Całkowanie wyrażeń zawierających funkcje trygonometryczne. Uniwersalne podstawienie trygonometryczne. Całkowanie funkcji niewymiernych. Podstawienia trygonometryczne. Podstawienie uniwersalne w całkowaniu funkcji niewymiernych. Pojęcie całek, które "nie są brane„ .

Całka oznaczona

❖Całka oznaczona. Problemy prowadzące do pojęcia całki oznaczonej. Definicja, interpretacja i własności całki oznaczonej. Pochodna całki oznaczonej ze zmienną górną granicą. Wzór Newtona-Leibniza. Metody obliczania całki oznaczonej. Zamiana zmiennej i całkowanie przez części w całce oznaczonej.

❖Całki niewłaściwe. Obliczanie całek niewłaściwych pierwszego rodzaju. Znaki porównania całek niewłaściwych pierwszego rodzaju. Całki niewłaściwe drugiego rodzaju funkcji nieograniczonych.

❖Zastosowanie całki oznaczonej. Obliczanie pól figur płaskich ograniczonych krzywymi określonymi w kartezjańskim układzie współrzędnych, parametrycznym i biegunowym układzie współrzędnych. Obliczanie długości łuku krzywej zdefiniowanej jednoznacznie, parametrycznie i w biegunowym układzie współrzędnych. Obliczanie objętości brył obrotowych. Znajdowanie pola powierzchni bryły obrotowej.

Szeregi

❖Szereg liczbowy. Definicja szeregu. Klasyfikacja szeregów. Zbieżność szeregu i jego suma częściowa. Progresja geometryczna. Własności szeregów liczbowych. Warunek konieczny zbieżności szeregu. Szereg harmoniczny i jego rozbieżność. Wystarczający kryterium rozbieżności szeregu.

❖Wystarczające kryteria zbieżności znanych szeregów. Kryterium d'Alemberta. Kryterium Cauchy'ego. Kryterium porównawcze. Szeregi bezwzględnie i warunkowo zbieżne. Szeregi naprzemienne. Kryterium Leibniza zbieżności szeregów naprzemiennych.

❖Szeregi funkcyjne. Zbieżność, zbieżność bezwzględna, obszar zbieżności. Zbieżność równomierna szeregu funkcyjnego. Kryterium Weierstrassa. Szeregi potęgowe. Przedział i promień zbieżności szeregu potęgowego. Własności szeregów potęgowych.

Szeregi

❖Szeregi Taylora i MacLaurina. Standardowe rozwinięcia funkcji elementarnych. Zastosowanie szeregów potęgowych do znajdowania wartości i granic funkcji, całkowania funkcji.

❖Szeregi Fouriera. Funkcje okresowe i ich własności. Trygonometryczne szeregi Fouriera. Współczynnik Fouriera. Szeregi Fouriera dla funkcji parzystych i nieparzystych. Rozwinięcie funkcji okresowych o dowolnym okresie w szereg Fouriera.

Literatura

1.J. Gawinecki Matematyka dla informatyków, Tom 1, 2. BEL Studio Sp. z o.o., Warszawa 2021.
2. K. Kuratowski, Rachunek różniczkowy i całkowy. Funkcje jednej zmiennej, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa 2008.
3. A. Sołtysiak, Analiza matematyczna, Część I i II, Wydawnictwo Naukowe UAM, Poznań 2009.
4. W. Krysicki, L. Włodarski, Analiza matematyczna w zadaniach, część 1 i 2, Wydawnictwo Naukowe PWN, Warszawa, 2003.
5. J. Banaś, S. Wędrychowicz, Zbiór zadań z analizy matematycznej, WNT, Warszawa 2006.
6. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, Algebra i geometria analityczna. Definicje, twierdzenia, wzory, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2020.
7. T. Jurlewicz, Z. Skoczylas, Algebra i geometria analityczna. Przykłady i zadania, Oficyna Wydawnicza GiS, Wrocław, 2020.

Elementy algebry liniowej

1. Macierze, operacje arytmetyczne na macierzach.
2. Rodzaje macierzy. Wyznaczniki i ich własności.
3. Wyznaczniki drugiego i trzeciego rzędu.
4. Uzupełnienia algebraiczne i minory.
5. Obliczanie wyznaczników drugiego rzędu.
6. Obliczanie wyznaczników trzeciego rzędu metodami trójkątów i rozkładu na elementy kolumnowe (wierszowe).
7. Znajdowanie odwrotności macierzy.

- **Definicja macierzy**

Czym jest macierz?
Definicja

Macierzą $\boldsymbol{A}$ nazywamy funkcję dwóch zmiennych,
która parze (i, j) przyporządkowuje dokładnie jeden element a_{ij},
przy czym $i = 1, 2, \ldots, m$, natomiast $j = 1, 2, \ldots, n$.
Tworzy się w ten sposób zbiór $m \cdot n$ elementów umieszczonych w tablicy o m wierszach i n kolumnach.

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1j} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2j} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \cdots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ij} & \cdots & a_{in} \\ \vdots & \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mj} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Ogólnie dany element macierzy a_{ij} może być np. liczbą rzeczywistą, liczbą zespoloną, operatorem (np. różniczkowania, całkowania), wielomianem lub wektorem.

Czym jest macierz?

Inny zapis

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]\text{, gdzie: } i = 1, 2, \ldots, m,\ j = 1, 2, \ldots, n$$

$$\boldsymbol{A} = [a_{ij}]_{[m \times n]} = \mathbf{A}_{[m \times n]}$$

$[m \times n]$ - wymiary macierzy (liczba wierszy, liczba kolumn)
i - indeks numeracji wierszy
j - indeks numeracji kolumn

Dalsze rozważania ograniczymy wyłącznie do macierzy rzeczywistych, tzn. dla których element a_{ij} jest liczbą rzeczywistą.

Macierz kwadratowa, diagonalna, jednostkowa

Jeśli $m \neq n$ to macierz $\boldsymbol{A}$ nazywamy prostokątną.
Jeśli $m = n = N$ to macierz $\boldsymbol{A}$ nazywamy kwadratową (stopnia N).

Przekątna główna macierzy kwadratowej $\mathbf{A}_{[n\times n]}$ składa się z elementów a_{ii}, gdzie $i = 1, 2, \ldots, n$. Macierz kwadratowa $\mathbf{A}_{[n\times n]}$, w której wszystkie elementy poza przekątną główną są zerowe, nazywa się macierzą diagonalną (oznaczoną $\boldsymbol{D}$).

Jeśli wszystkie elementy macierzy diagonalnej mają wartość 1, to taka macierz stanowi macierz jednostkową (oznaczoną $\boldsymbol{I}$).

$$\mathbf{D}_{[n\times n]} = \begin{bmatrix} a_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & a_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix} \qquad \mathbf{I}_{[n\times n]} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & \cdots & 0 \\ 0 & 1 & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & 1 \end{bmatrix}$$

$$\boldsymbol{D} = \mathrm{diag}(a_{ii}) \qquad \boldsymbol{I} = [\delta_{ij}]_{[n\times n]}\,, \quad \text{gdzie } \delta_{ij} = \begin{cases} 0 & \text{dla} \quad i \neq j \\ 1 & \text{dla} \quad i = j \end{cases}$$

δ_{ij} – symbol Kroneckera

Macierz transponowana

Macierz $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ jest transponowana względem macierzy $\boldsymbol{A}$, jeśli $a_{ij} = a_{ji}^{\mathrm{T}}$ (wiersze zamieniamy z kolumnami).

$$\mathbf{A}_{[m\times n]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1} & a_{m2} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}_{[n\times m]} = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} & \cdots & a_{m1} \\ a_{12} & a_{22} & \cdots & a_{m2} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{1n} & a_{2n} & \cdots & a_{mn} \end{bmatrix}$$

Właściwości macierzy transponowanej:

1. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}$
2. $(\alpha \boldsymbol{A})^{\mathrm{T}} = \alpha \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, α – liczba rzeczywista
3. $(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} + \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}$
4. $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{\mathrm{T}} = \boldsymbol{B}^{\mathrm{T}}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$

Macierz symetryczna i antysymetryczna

Jeśli dla macierzy kwadratowej $\mathbf{A}_{[n \times n]}$ zachodzi związek $\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ to macierz $\boldsymbol{A}$ jest symetryczna.

Jeśli dla macierzy kwadratowej $\mathbf{A}_{[n \times n]}$ zachodzi związek $\boldsymbol{A} = -\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ to macierz $\boldsymbol{A}$ jest antysymetryczna (skośnie symetryczna).

Przykład:

$$\begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 \\ 3 & -1 & 1 \\ 2 & 1 & 5 \end{bmatrix} \qquad \begin{bmatrix} 0 & -4 & 2 \\ 4 & 0 & -5 \\ -2 & 5 & 0 \end{bmatrix}$$

Macierz symetryczna i antysymetryczna.

Jeśli $\boldsymbol{A}$ jest macierzą kwadratową to:

1. $\boldsymbol{A} + \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ jest macierzą symetryczną,
2. $\boldsymbol{A} - \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$ jest macierzą antysymetryczną.

Jeśli $\boldsymbol{A}$ jest dowolną macierzą prostokątną i $\boldsymbol{S} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$, to $\boldsymbol{S}$ jest macierzą symetryczną.

Macierz trójkątna

Macierzą trójkątną nazywamy macierz o postaci:

$$\boldsymbol{L} = \begin{bmatrix} l_{11} & 0 & \cdots & 0 \\ l_{21} & l_{22} & \cdots & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ l_{n1} & l_{n2} & \cdots & l_{nn} \end{bmatrix} \qquad \boldsymbol{U} = \begin{bmatrix} u_{11} & u_{21} & \cdots & u_{1n} \\ 0 & u_{22} & \cdots & u_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ 0 & 0 & \cdots & u_{nn} \end{bmatrix}$$

$\boldsymbol{L}$ jest macierzą dolnotrójkątną (trójkątną lewą).
$\boldsymbol{U}$ jest macierzą górnotrójkątną (trójkątną prawą).

Suma, iloczyn i odwrotność macierzy dolnotrójkątnych (górnotrójkątnych) tworzy ponownie macierz dolnotrójkątną (górnotrójkątną).

Wystarczy, gdy wszystkie elementy przekątnej głównej macierzy trójkątnej są różne od 0 – wówczas macierz ta jest nieosobliwa.

Równość, dodawanie, odejmowanie macierzy

Dwie macierze $\mathbf{A}_{[m\times n]}$ i $\mathbf{B}_{[m\times n]}$ są równe, jeśli odpowiednie elementy są sobie równe, tzn. $a_{ij}=b_{ij}$ dla $i=1,2,\ldots,m$ i $j=1,2,\ldots,n$.

Sumą lub różnicą dwóch macierzy $\mathbf{A}_{[m\times n]}$ i $\mathbf{B}_{[m\times n]}$ nazywamy macierz $\mathbf{C}_{[m\times n]}$, gdzie $c_{ij}=a_{ij}\pm b_{ij}$:

$$\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B}=$$

$$\begin{bmatrix} c_{11} & c_{12} & \cdots & c_{1n} \\ c_{21} & c_{22} & \cdots & c_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ c_{m1} & c_{m2} & \cdots & c_{mn} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11}\pm b_{11} & a_{12}\pm b_{12} & \cdots & a_{1n}\pm b_{1n} \\ a_{21}\pm b_{21} & a_{22}\pm b_{22} & \cdots & a_{2n}\pm b_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{m1}\pm b_{m1} & a_{m2}\pm b_{m2} & \cdots & a_{mn}\pm b_{mn} \end{bmatrix}$$

1. Przemienność dodawania: $\boldsymbol{A}+\boldsymbol{B}=\boldsymbol{B}+\boldsymbol{A}$.
2. Łączność dodawania i odejmowania: $(\boldsymbol{A}\pm\boldsymbol{B})\pm\boldsymbol{C}=\boldsymbol{A}\pm(\boldsymbol{B}\pm\boldsymbol{C})$.
3. $\boldsymbol{A}+\mathbf{0}=\boldsymbol{A}$.

Mnożenie macierzy przez liczbę

Iloczyn ($\alpha \boldsymbol{A}$ lub $\boldsymbol{A}\alpha$) macierzy $\boldsymbol{A}$ i liczby α tworzy macierz:

$$\alpha \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}\alpha = [\alpha a_{ij}] = \begin{bmatrix} \alpha a_{11} & \alpha a_{12} & \cdots & \alpha a_{1n} \\ \alpha a_{21} & \alpha a_{22} & \cdots & \alpha a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha a_{m1} & \alpha a_{m2} & \cdots & \alpha a_{mn} \end{bmatrix}$$

1. $1 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$
2. $0 \cdot \boldsymbol{A} = \boldsymbol{0}$
3. $\alpha(\beta \boldsymbol{A}) = (\alpha\beta)\boldsymbol{A}$
4. $(\alpha + \beta)\boldsymbol{A} = \alpha \boldsymbol{A} + \beta \boldsymbol{A}$
5. $\alpha(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) = \alpha \boldsymbol{A} + \alpha \boldsymbol{B}$

Mnożenie macierzy przez macierz

Iloczyn dwóch macierzy $\mathbf{A}_{[m\times n]}$ i $\mathbf{B}_{[n\times p]}$ tworzy macierz $\mathbf{C}_{[m\times p]}$, gdzie:

$$c_{ik} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}\, b_{jk} \quad \text{dla} \quad i = 1, 2, \ldots, m \quad \text{i} \quad k = 1, 2, \ldots, p\,.$$

$$\mathbf{C}_{[m\times p]} = \mathbf{A}_{[m\times n]} \cdot \mathbf{B}_{[n\times p]}$$

Przykład:

$$\begin{bmatrix} -1 & 4 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & -3 & 0 \\ -1 & 0 & 0 & 5 \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} 2 & -1 \\ 1 & 3 \\ -2 & 0 \\ 0 & -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2 & 21 \\ 10 & 5 \\ -2 & -19 \end{bmatrix}$$

$$c_{11} = \sum_{j=1}^{4} a_{1j}\, b_{j1} = a_{11}\, b_{11} + a_{12}\, b_{21} + a_{13}\, b_{31} + a_{14}\, b_{41}$$
$$= (-1)\cdot 2 + 4 \cdot 1 + 2 \cdot (-2) + (-2) \cdot 0 = -2$$

$(\ldots)$

$$c_{32} = \sum_{j=1}^{4} a_{3j}\, b_{j2} = a_{31}\, b_{12} + a_{32}\, b_{22} + a_{33}\, b_{32} + a_{34}\, b_{42}$$
$$= (-1)\cdot(-1) + 0 \cdot 3 + 0 \cdot 0 + 5 \cdot (-4) = -19$$

Właściwości mnożenia macierzy

1. Mnożenie $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B}$ może być wykonalne, natomiast mnożenie $\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$ może być niewykonalne. Liczba kolumn pierwszej macierzy musi się zgadzać z liczbą wierszy drugiej macierzy, tak aby zapewnić prawidłowe sumowanie iloczynów.
2. Dla macierzy kwadratowych także zazwyczaj zachodzi $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} \neq \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{A}$.
3. Mnożenie macierzy jest łączne: $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,(\boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C})$.
4. Mnożenie macierzy jest rozdzielne względem dodawania i odejmowania:
   $(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B})\,\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C} \pm \boldsymbol{B}\,\boldsymbol{C} \qquad \boldsymbol{C}(\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{B}) = \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{A} \pm \boldsymbol{C}\,\boldsymbol{B}$.
5. Jeśli $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$, to nie oznacza, że koniecznie $\boldsymbol{A} = \mathbf{0}$ lub $\boldsymbol{B} = \mathbf{0}$.
6. Jeśli $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B} = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{C}$, to $\boldsymbol{B}$ nie zawsze jest równe $\boldsymbol{C}$, nawet gdy $\boldsymbol{A} \neq \mathbf{0}$.
7. $\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{I} = \boldsymbol{I}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{A}$

Potęgowanie macierzy

Dla macierzy $\boldsymbol{A}$ obowiązują następujące reguły potęgowania:

$\boldsymbol{A}^0 = \boldsymbol{I} \qquad \boldsymbol{A}^1 = \boldsymbol{A}$

$\boldsymbol{A}^2 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A} \qquad \boldsymbol{A}^3 = \boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}$

itd.

Właściwości potęgowania macierzy:

1. $\boldsymbol{A}^k\,\boldsymbol{A}^p = \boldsymbol{A}^{k+p}$
2. $(\boldsymbol{A}^k)^p = \boldsymbol{A}^{k\,p}$

Wyznacznik macierzy

Każdej macierzy kwadratowej $\boldsymbol{A}$ możemy przypisać wartość liczbową D, nazywaną wyznacznikiem macierzy $\boldsymbol{A}$ stopnia N i oznaczoną jako $\det \boldsymbol{A}$.

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{vmatrix} = D$$

W literaturze można spotkać także oznaczenia:

$$\det(\boldsymbol{A}) = |A| = |a_{ij}| = \det |a_{ij}|$$

Znane są różne sposoby obliczania wartości wyznacznika.

det jest skrótem francuskiego słowa *determinant* czyli wyznacznik.

Wyznacznik macierzy

Rozwinięcie Laplace'a

Wyznacznik macierzy A jest równy sumie iloczynów elementów dowolnie wybranego wiersza (kolumny) przez ich dopełnienia algebraiczne

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{j=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad \text{rozwinięcie względem } i - \text{tego wiersza}$$

$$\det \boldsymbol{A} = \sum_{i=1}^{n} a_{ij} \cdot A_{ij} \quad \text{rozwinięcie względem } j - \text{tej kolumny}$$

gdzie: a_{ij} – element w i-tym wierszu i j-tej kolumnie, A_{ij} – dopełnienie algebraiczne elementu a_{ij}.

Dopełnienie algebraiczne A_{ij} elementu a_{ij} macierzy $\boldsymbol{A}$ stanowi minor $|M_{ij}|$ pomnożony przez $(-1)^{i+j}$.

Minorem $|M_{ij}|$ macierzy $\boldsymbol{A}$ przynależnym elementowi a_{ij} nazywamy wyznacznik macierzy powstałej z macierzy $\boldsymbol{A}$ przez skreślenie i-tego wiersza oraz j-tej kolumny.

Wyznacznik macierzy
Rozwinięcie Laplace'a

Przykład:

Obliczyć wyznacznik macierzy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

Korzystając z rozwinięcia 3-go wiersza:

$$\det \boldsymbol{A} = \begin{vmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{vmatrix} = a_{31} \cdot A_{31} + a_{32} \cdot A_{32} + a_{33} \cdot A_{33} =$$

$$a_{31} \cdot (-1)^{(3+1)} \cdot |M_{31}| + a_{32} \cdot (-1)^{(3+2)} \cdot |M_{32}| + a_{33} \cdot (-1)^{(3+3)} \cdot |M_{33}| =$$

$$1 \cdot (-1)^{(3+1)} \cdot \begin{vmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 2 \end{vmatrix} + (-1) \cdot (-1)^{(3+2)} \cdot \begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 4 & 2 \end{vmatrix} = 8 - 6 = 2$$

Wyznacznik macierzy

Reguła Sarrusa dla macierzy stopnia 3

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array}\right.$$

$\det \boldsymbol{A} =$

$$a_{11}\, a_{22}\, a_{33} + a_{12}\, a_{23}\, a_{31} + a_{13}\, a_{21}\, a_{32} - a_{31}\, a_{22}\, a_{13} - a_{32}\, a_{23}\, a_{11} - a_{33}\, a_{21}\, a_{32}$$

Powyższa reguła wykorzystuje definicję permutacyjną wyznacznika, ale ma zastosowanie tylko dla macierzy stopnia 3.

Jeśli obliczamy wyznacznik macierzy stopnia wyższego niż 3, to można wykorzystać rozwinięcie Laplace'a i własności wyznaczników, a po sprowadzeniu ich do stopnia 3 – zastosować regułę Sarrusa.

Wyznacznik macierzy stopnia wyższego niż 3 można obliczyć także przy pomocy eliminacji Gaussa.

Wyznacznik macierzy

Reguła Sarrusa dla macierzy stopnia 3

Przykład:

Obliczyć wyznacznik macierzy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left|\begin{array}{ccc|cc} 1 & 3 & 2 & 1 & 3 \\ 4 & -1 & 2 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & 0 & 1 & -1 \end{array}\right. =$$

$$1 \cdot (-1) \cdot 0 + 3 \cdot 2 \cdot 1 + 2 \cdot 4 \cdot (-1) - 1 \cdot (-1) \cdot 2 - (-1) \cdot 2 \cdot 1 - 0 \cdot 4 \cdot 3$$

$$= 0 + 6 - 8 + 2 + 2 + 0 = 2$$

Właściwości wyznaczników

1. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej kolumnę (wiersz) złożoną z samych zer jest równy 0.
2. Wyznacznik macierzy kwadratowej zmieni znak, jeżeli przedstawimy między sobą dwie kolumny (dwa wiersze).
3. Wyznacznik macierzy kwadratowej mającej dwie jednakowe lub proporcjonalne kolumny (dwa wiersze) jest równy 0.
4. Jeżeli wszystkie elementy pewnej kolumny (pewnego wiersza) macierzy kwadratowej zawierają wspólny czynnik, to czynnik ten można wyłączyć przed wyznacznik tej macierzy.
5. Wyznacznik macierzy nie zmieni się, jeżeli do elementów dowolnej kolumny (wiersza) dodamy odpowiadające im elementy innej kolumny (innego wiersza) tej macierzy pomnożone przez dowolną liczbę.
6. Wyznaczniki macierzy kwadratowej i jej transpozycji są równe.
7. Jeżeli $\det \boldsymbol{A} = 0$, to macierz jest osobliwa.
8. Jeżeli macierz $\boldsymbol{A}$ jest trójkątna, to $\det \boldsymbol{A} = a_{11}a_{22}\dots a_{nn}$.

Właściwości wyznaczników

9. $\det \boldsymbol{A} = \det(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}})$
10. $\det(\boldsymbol{AB}) = \det \boldsymbol{A} \det \boldsymbol{B}$ (twierdzenie Cauchy'ego)
11. $\det(\boldsymbol{A} + \boldsymbol{B}) \neq \det \boldsymbol{A} + \det \boldsymbol{B}$
12. $\det(\boldsymbol{A}^{-1}) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$

Wyznacznik macierzy stopnia 4

Przykład:

$$\begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 1 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{w. } 1 + \text{w. } 4} \begin{vmatrix} 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 3 & 1 & 2 \\ 4 & -5 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$(-1)\cdot(-1)^{1+2}\cdot \begin{vmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -2 & -1 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(-2) k. } 2 + \text{k. } 3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 4 & -1 & 4 \\ 1 & -2 & 3 \end{vmatrix} \xrightarrow{\text{(-1) k. } 1 + \text{k. } 3}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 2 \end{vmatrix} \xrightarrow{2 \text{ w. } 1 + \text{w. } 3} \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 4 & -1 & 0 \\ 3 & 0 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow$$

$$3 \cdot (-1)^{3+1} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 \\ -1 & 0 \end{vmatrix} \longrightarrow -3$$

Macierz odwrotna

Jeśli macierz kwadratowa $\boldsymbol{A}$ jest nieosobliwa, to możemy otrzymać macierz do niej odwrotną $\boldsymbol{A}^{-1}$.

Zachodzi zatem zależność:

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{A}^{-1} = \boldsymbol{A}^{-1}\,\boldsymbol{A} = \boldsymbol{I}$$

Oznaczmy: $\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1}$.

Element macierzy odwrotnej c_{ij} obliczamy w następujący sposób:

$$c_{ij} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}}(-1)^{i+j}\left|M_{ij}^{\mathrm{T}}\right|$$

gdzie $\left|M_{ij}^{\mathrm{T}}\right|$ jest minorem otrzymywanym z macierzy $\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}$.

Właściwości macierzy odwrotnych

1. Jeśli $\det \boldsymbol{A} = 0$ czyli macierz jest osobliwa, to macierz odwrotna $\boldsymbol{A}^{-1}$ nie istnieje.
2. $(\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{B})^{-1} = \boldsymbol{B}^{-1}\,\boldsymbol{A}^{-1}$
3. $\left(\boldsymbol{A}^{\mathrm{T}}\right)^{-1} = \left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{\mathrm{T}}$
4. $\det\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right) = (\det \boldsymbol{A})^{-1}$
5. $\left(\boldsymbol{A}^{-1}\right)^{-1} = \boldsymbol{A}$

Macierz odwrotna

Przykład:

Obliczyć macierz odwrotną do danej macierzy $\boldsymbol{A}$:

$$\boldsymbol{A} = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 4 & -1 & 2 \\ 1 & -1 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A}^{\mathrm{T}} = \begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & -1 & -1 \\ 2 & 2 & 0 \end{bmatrix} \longrightarrow \det \boldsymbol{A} = 2$$

$$c_{11} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} (-1)^2 \left| M_{11}^{\mathrm{T}} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 0 \end{vmatrix} = 1$$

$$(\dots)$$

$$c_{33} = \frac{1}{\det \boldsymbol{A}} (-1)^6 \left| M_{33}^{\mathrm{T}} \right| = \frac{1}{2} \begin{vmatrix} 1 & 4 \\ 3 & -1 \end{vmatrix} = -\frac{13}{2}$$

$$\boldsymbol{C} = \boldsymbol{A}^{-1} = \begin{bmatrix} 1.0 & -1.0 & 4.0 \\ 1.0 & -1.0 & 3.0 \\ 1.5 & 2.0 & -6.5 \end{bmatrix} \longrightarrow \boldsymbol{A} \cdot \boldsymbol{C} = \boldsymbol{I}$$

Przykłady

$$\mathbf{A} + \mathbf{B} = [a_{ij} + b_{ij}].$$

Example:

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 2 & 2 & -3 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 & 4 & -1 \\ 1 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 4 & -2 \\ 3 & -1 & -3 \\ 2 & 5 & 2 \end{bmatrix}$$

$$\underset{3\times 2}{A} \times \underset{2\times 2}{B} = \underset{3\times 2}{AB}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1\times 7 + 2\times 9 & 1\times 8 + 2\times 10 \\ 3\times 7 + 4\times 9 & 3\times 8 + 4\times 10 \\ 5\times 7 + 6\times 9 & 5\times 8 + 6\times 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 + 18 = 25 & 8 + 20 = 28 \\ 21 + 36 = 57 & 24 + 40 = 64 \\ 35 + 54 = 89 & 40 + 60 = 100 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{vmatrix}$$

$$\underset{3 \times \mathbf{2}}{A} \quad \times \quad \underset{\mathbf{2} \times \mathbf{2}}{B} \quad = \quad \underset{\mathbf{3} \times \mathbf{2}}{AB}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 9 & 1 \times 8 + 2 \times 10 \\ 3 \times 7 + 4 \times 9 & 3 \times 8 + 4 \times 10 \\ 5 \times 7 + 6 \times 9 & 5 \times 8 + 6 \times 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 + 18 = 25 & 8 + 20 = 28 \\ 21 + 36 = 57 & 24 + 40 = 64 \\ 35 + 54 = 89 & 40 + 60 = 100 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{vmatrix}$$

A		B		AB
3 x 2	x	2 x 2	=	3 x 2

$$
\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 9 & 1 \times 8 + 2 \times 10 \\ 3 \times 7 + 4 \times 9 & 3 \times 8 + 4 \times 10 \\ 5 \times 7 + 6 \times 9 & 5 \times 8 + 6 \times 10 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 7 + 18 = 25 & 8 + 20 = 28 \\ 21 + 36 = 57 & 24 + 40 = 64 \\ 35 + 54 = 89 & 40 + 60 = 100 \end{vmatrix}
$$

$$
= \begin{vmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{vmatrix}
$$

A		B		AB
3 x 2	x	2 x 2	=	3 x 2

$$\begin{vmatrix}1 & 2\\ 3 & 4\\ 5 & 6\end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix}7 & 8\\ 9 & 10\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1 \times 7 + 2 \times 9 & 1 \times 8 + 2 \times 10\\ 3 \times 7 + 4 \times 9 & 3 \times 8 + 4 \times 10\\ 5 \times 7 + 6 \times 9 & 5 \times 8 + 6 \times 10\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}7 + 18 = 25 & 8 + 20 = 28\\ 21 + 36 = 57 & 24 + 40 = 64\\ 35 + 54 = 89 & 40 + 60 = 100\end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix}25 & 28\\ 57 & 64\\ 89 & 100\end{vmatrix}$$

A		B		AB
3×2	$\times$	2×2	$=$	3×2

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 9 & 1 \times 8 + 2 \times 10 \\ 3 \times 7 + 4 \times 9 & 3 \times 8 + 4 \times 10 \\ 5 \times 7 + 6 \times 9 & 5 \times 8 + 6 \times 10 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 + 18 = 25 & 8 + 20 = 28 \\ 21 + 36 = 57 & 24 + 40 = 64 \\ 35 + 54 = 89 & 40 + 60 = 100 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & 100 \end{vmatrix}$$

$$\begin{array}{ccccc} A & & B & & AB \\ 3 \times 2 & \times & 2 \times 2 & = & 3 \times 2 \end{array}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} \bullet \begin{vmatrix} 7 & 8 \\ 9 & 10 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 \times 7 + 2 \times 9 & 1 \times 8 + 2 \times 10 \\ 3 \times 7 + 4 \times 9 & 3 \times 8 + 4 \times 10 \\ 5 \times 7 + 6 \times 9 & \boxed{5 \times 8 + 6 \times 10} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 7 + 18 = 25 & 8 + 20 = 28 \\ 21 + 36 = 57 & 24 + 40 = 64 \\ 35 + 54 = 89 & \boxed{40 + 60 = 100} \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 25 & 28 \\ 57 & 64 \\ 89 & \boxed{100} \end{vmatrix}$$

$$A_{3 \times 2} \times B_{2 \times 2} = AB_{3 \times 2}$$

$$\begin{vmatrix} -2 & 3 \\ 1 & -4 \\ 6 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} -1 & 3 \\ -2 & 4 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 \times -1 + 3 \times -2 & -2 \times 3 + 3 \times 4 \\ 1 \times -1 + -4 \times -2 & 1 \times 3 + -4 \times 4 \\ 6 \times -1 + 0 \times -2 & 6 \times 3 + 0 \times 4 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 + -6 = -4 & -6 + 12 = 6 \\ -1 + 8 = 7 & 3 - 16 = -13 \\ -6 + 0 = -6 & 18 + 0 = 18 \end{vmatrix}$$

$$= \begin{vmatrix} -4 & 6 \\ 7 & -13 \\ -6 & 18 \end{vmatrix}$$

$$\det \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} a & b \\ c & d \end{vmatrix} = ad - bc$$

Example 1

$$\det \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 3 \\ 2 & 5 \end{vmatrix} = 1 \bullet 5 - 2 \bullet 3 = 5 - 6 = -1$$

$$\det\begin{vmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} a & b & c & a & b \\ d & e & f & d & e \\ g & h & i & g & h \end{array}\right| = (aei + bfg + cdh) - (gec + hfa + idb)$$

Example 1

$$\det\begin{vmatrix} 2 & -1 & 3 \\ -2 & 0 & f \\ 1 & 2 & 4 \end{vmatrix} = \left|\begin{array}{ccc|cc} 2 & -1 & 3 & 2 & -1 \\ -2 & 0 & f & -2 & 0 \\ 1 & 2 & 4 & 1 & 2 \end{array}\right| = (0 + -1 + -12) - (0 + 4 + 8) = -13 - 12$$

$$= -25$$

- Znajdowania macierzy odwrotnej przez dopełnienie algebraiczne.

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{ad-bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$|A| = ad-bc$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-15+8}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{1}{|A|}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$|B| = -7$$

$$\begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{7} - \frac{8}{7} & -\frac{20}{7} + \frac{20}{7} \\ \frac{6}{7} - \frac{6}{7} & -\frac{8}{7} + \frac{15}{7} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix} 3 & -4 \\ 2 & -5 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{1}{-15+8} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix}$$

$$B^{-1} = -\frac{1}{7} \begin{bmatrix} -5 & 4 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{5}{7} & -\frac{4}{7} \\ \frac{2}{7} & -\frac{3}{7} \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} = \frac{1}{\det A} \begin{bmatrix} (A^P)_{11} & (A^P)_{21} \\ (A^P)_{12} & (A^P)_{22} \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{3 \cdot 2 - (-7) \cdot 5} \begin{bmatrix} 2 & (-1)(5) \\ (-1)(-7) & 3 \end{bmatrix} =$$

$$= \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix}$$

$$\frac{1}{41} \begin{bmatrix} 3 & 5 \\ -7 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 & -5 \\ 7 & 3 \end{bmatrix} = \frac{1}{41} \begin{bmatrix} 41, & 0 \\ 0 & 41 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

- Znajdowania macierzy odwrotnej przez redukcję wierszową.

$$A=\begin{bmatrix}1 & -1 & -1\\ -1 & 2 & 3\\ 1 & 1 & 4\end{bmatrix}$$

$$[A \mid \mathbb{1}] \rightsquigarrow [\mathbb{1} \mid A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ -1 & 2 & 3 & 0 & 1 & 0\\ 1 & 1 & 4 & 0 & 0 & 1\end{array}\right] \underset{\substack{w_2 \to w_2+w_1\\ w_3 \to w_3-w_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & -1 & -1 & 1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 2 & 5 & -1 & 0 & 1\end{array}\right] \sim$$

$$\underset{\substack{w_1 \to w_1+w_2\\ w_3 \to w_3-2w_1}}{\sim} \left[\begin{array}{ccc|ccc}1 & 0 & 1 & 2 & 1 & 0\\ 0 & 1 & 2 & 1 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1 & -3 & -2 & 1\end{array}\right] \underset{\substack{w_1 \to w_1-w_3\\ w_2 \to w_2-2w_3}}{\sim} \left[\begin{array}{c|c}\underbrace{\begin{matrix}1 & 0 & 0\\ 0 & 1 & 0\\ 0 & 0 & 1\end{matrix}}_{\mathbb{1}} & \underbrace{\begin{matrix}5 & 3 & -1\\ 7 & 5 & -2\\ -3 & -2 & 1\end{matrix}}_{A^{-1}}\end{array}\right]$$

Dziękuję i zapraszam do rozwiązania zadań oraz wypowiedzi na forum