Transformaciones Lineales

CUYO ZAMATA YIMMY YEYSON

July 25, 2024

1 Primera Tarea

Ejercicio 1

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$; $T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = x$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(u+v) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = x_1 + x_2$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(\alpha \cdot u) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$T(\alpha \cdot u) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha x$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T u$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 2

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 \\ y \end{pmatrix}$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(u + v) = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u + v) = T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u + v) = \begin{pmatrix} 1 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

Entonces, T no es una transformacion lineal.

Ejercicio 3

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T(u + v) = T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$T(u + v) = T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u + v) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T(\alpha \cdot u) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$T(\alpha \cdot u) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T u$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 4

$T : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y+z \end{pmatrix}$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T(u+v) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ (y_1 + z_1) + (y_2 + z_2) \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 + z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$

$$T(\alpha \cdot u) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}\right)$$

$$T(\alpha \cdot u) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y + \alpha z \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \begin{pmatrix} x \\ y + z \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T u$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 5

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x^2 \\ y^2 \end{pmatrix}$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 \\ y_1^2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2^2 \\ y_2^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} (x_1 + x_2)^2 \\ (y_1 + y_2)^2 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} x_1^2 + x_2^2 \\ y_1^2 + y_2^2 \end{pmatrix} \neq \begin{pmatrix} x_1^2 + 2x_1x_2 + x_2^2 \\ y_1^2 + 2y_1y_2 + y_2^2 \end{pmatrix}$$

No hay enlace entonces, T no es una transformacion lineal.

Ejercicio 6

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2;\ T\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(u+v) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} y_1 + y_2 \\ x_1 + x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} y_1 \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_2 \\ x_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(\alpha \cdot u) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}\right)$$

$$T(\alpha \cdot u) = T \begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \begin{pmatrix} \alpha y \\ \alpha x \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \begin{pmatrix} y \\ x \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T u$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 7

$T : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^1;\ T \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} = xy$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$

$$T(u + v) = T \left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} \right)$$

$$T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \end{pmatrix} = T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \end{pmatrix}$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 = \big((x_1 + x_2)(y_1 + y_2) \big)$$

$$x_1 y_1 + x_2 y_2 \neq \big(x_1 y_1 + x_1 y_2 + x_2 y_1 + x_2 Y_2 \big)$$

No hay enlace entonces, T no es una transformacion lineal.

Ejercicio 8

$T : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^2;\ T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} |x_4| \\ x_1 \end{pmatrix}$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^2$ y $v = \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$T(u+v) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ x_1 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}\right)$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 + y_1 \\ x_2 + y_2 \\ \vdots + \vdots \\ x_n + y_n \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} |x_4| + |y_4| \\ x_1 + y_1 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} |x_4| \\ x_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} |y_4| \\ y_1 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = T\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} + T\begin{pmatrix} y_1 \\ y_2 \\ \vdots \\ y_n \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^n$

$$T(\alpha \cdot u) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}\right)$$

$$T(\alpha \cdot u) = T\begin{pmatrix} \alpha x_1 \\ \alpha x_2 \\ \vdots \\ \alpha x_n \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \begin{pmatrix} \alpha |x_4| \\ \alpha x_1 \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \begin{pmatrix} |x_4| \\ x_1 \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ \vdots \\ x_n \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T u$$

Entonces, T es una transformacion lineal.

Ejercicio 9

$T : \mathbb{R}^4 \to \mathbb{R}^2;\ T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x+z \\ y+w \end{pmatrix}$

Sea $u = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$ y $v = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$T(u+v) = T\left(\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}\right)$$

$$T(u+v) = T \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \\ w_1 + w_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} (x_1 + z_1) + (x_2 + z_2) \\ (y_1 + w_1) + (y_2 + w_2) \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = \begin{pmatrix} x_1 + z_1 \\ y_1 + w_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + z_2 \\ y_2 + w_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = T \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \\ w_1 \end{pmatrix} + T \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \\ w_2 \end{pmatrix}$$

$$T(u+v) = Tu + Tv$$

Sea $\alpha \in \mathbb{K}$, $u = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4$

$$T(\alpha \cdot u) = T\left(\alpha \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}\right)$$

$$T(\alpha \cdot u) = T\begin{pmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \\ \alpha w \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \begin{pmatrix} \alpha x + \alpha z \\ \alpha y + \alpha w \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha \begin{pmatrix} x + z \\ y + w \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \\ w \end{pmatrix}$$

$$T(\alpha \cdot u) = \alpha T u$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 10

$T : M_{nm} \to M_{nk};\ T(A) = AB$ donde B es una matriz fija de $n \times m$

sea: $u = A_1 \in M_{nn}$ $v = A_2 \in M_{nn}$

$T\,(u+v) = T(A_1 + A_2)$

$= (A_1 + A_2)B$

$= A_1 B + A_2 B$

$= T(A_1) + T(A_2)$ sea: $\alpha \in K$ $v = A \in M_{nn}$

$T\,(\alpha u) = T(\alpha A)$

$= (\alpha A)B$

$= \alpha(AB)$

$= \alpha T(A)$ T SI ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 11

$T : M_{pq} \to M_{pq};\ T(A) = A^T$

sea: $u = A \in M_{pq}$ $v = B \in M_{pq}$

$T\,(u+v) = T(A + B)$

$= (A + B)^T$

$= A^T + B^T$

$= T(A) + T(B)$

sea: $\alpha \in K$ $v = A \in M_{pq}$

$T\,(\alpha u) = T(\alpha A)$

$= (\alpha A)^T$

$= \alpha(A)^T$

$= \alpha T(A)$ T SI ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 12

$T : D_n \to D_n;\ T(D) = D^2$ donde D_n es el conjunto de matrices diagonales de $n \times n$

sea: $\quad u = D_1 \in D_n \qquad v = D_2 \in D_n$

$T\,(u+v) = T(D_1 + D_2)$

$= (D_1 + D_2)^2$

$= (D_1)^2 + 2D_1D_2 + (D_2)^2$

T NO ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 13

$T : P_2 \to P_1;\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2) = a_0 + a_1x$
Sea $p(x), q(x) \in P_2$

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) &= T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2) \\ &= (a_0+b_0)-(a_1+b_1)x \\ &= (a_0-a_1x)+(b_0-b_1x) \\ &= T(p(x))+T(q(x)) \end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha p(x)) &= T(\alpha(a_0+a_1x+a_2x^2)) \\ &= \alpha a_0 - \alpha a_1 x \\ &= \alpha T(p(x)) \end{aligned}$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 14

$T : P_3 \to M_{22};\ T(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3) = \begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1+a_2 \\ a_2+a_3 & a_3+a_0 \end{pmatrix}$
Sea $p(x), q(x) \in P_3$

$$\begin{aligned} T(p(x)+q(x)) &= T((a_0+b_0)+(a_1+b_1)x+(a_2+b_2)x^2+(a_3+b_3)x^3) \\ &= \begin{pmatrix} (a_0+b_0)+(a_1+b_1) & (a_1+b_1)+(a_2+b_2) \\ (a_2+b_2)+(a_3+b_3) & (a_3+b_3)+(a_0+b_0) \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a_0+a_1 & a_1+a_2 \\ a_2+a_3 & a_3+a_0 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} b_0+b_1 & b_1+b_2 \\ b_2+b_3 & b_3+b_0 \end{pmatrix} \end{aligned}$$

$$= T(p(x)) + T(q(x))$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$T(\alpha p(x)) = T(\alpha(a_0 + a_1x + a_2x^2 + a_3x^3))$$
$$= \begin{pmatrix} \alpha a_0 + \alpha a_1 & \alpha a_1 + \alpha a_2 \\ \alpha a_2 + \alpha a_3 & \alpha a_3 + \alpha a_0 \end{pmatrix} = \alpha T(p(x))$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 15

$T : P_2 \to P_4;\ T(p(x)) = [p(x)]^2$

sea: $u = a_0 + a_1x + a_2(x)^2 \in P_3$ $\qquad v = b_0 + b_1x + b_2(x)^2 \in P_3$

$= T\,(u + v) = T[(a_0 + a_1x + a_2(x)^2 + (b_0 + b_1x + b_2(x)^2]$

$= T[(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2]$

$= [(a_0 + b_0) + (a_1 + b_1)x + (a_2 + b_2)x^2]^2$

T NO ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 16

$T : C[0, 1] \to C[0, 1];\ T(f) = f^2(x)$

sea: $u = f(x) \in C[0, 1]$ $\qquad v = g(x) \in C[0, 1]$

$= T\,(u + v) = T[f(x) + g(x)]$

$= [f(x) + g(x)]^2$

$= (f(x))^2 + 2f(x)g(x) + (g(x))^2$

T NO ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 17

$T : C[0,1] \to C[0,1];\ T(f) = x^2 f(x) + xf(x)$
Sea $f(x), g(x) \in C[0,1]$

$$\begin{aligned} T(f(x) + g(x)) &= x^2(f(x) + g(x)) + x(f(x) + g(x)) \\ &= x^2 f(x) + xf(x) + x^2 g(x) + xg(x) \\ &= T(f(x)) + T(g(x)) \end{aligned}$$

Sea $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} T(\alpha f(x)) &= x^2(\alpha f(x)) + x(\alpha f(x)) \\ &= \alpha(x^2 f(x) + xf(x)) \\ &= \alpha T(f(x)) \end{aligned}$$

Entonces, T es una transformación lineal.

Ejercicio 18

$T : C^1[0,1] \to C[0,1];\ T(f) = \frac{d}{dx}(f(x)g(x))$ donde $g(x)$ es una función fija en $C^1[0,1]$

sea: $u = f(x) \in C[0,1]$ $\quad v = h(x) \in C[0,1]$

$= T\,(u + v) = T[f(x) + h(x)]$

$= \frac{x}{dx}[(f(x) + h(x)).g(x)]$

$= \frac{x}{dx}[f(x)g(x) + h(x)g(x)]$

$= \frac{x}{dx}[f(x)g(x)] + \frac{x}{dx}[h(x)g(x)]$

$= T(f(x)) + T(h(x))$ $\qquad$ sea: $u = f(x) \in C[0,1]$ $\quad \alpha \in K$

$= T\,(\alpha u) = T[\alpha f(x)]$

$= \frac{x}{dx}(\alpha f(x).g(x)$

$= \alpha \frac{x}{dx}(f(x).g(x))$

$= \alpha T(f(x))$

T SI ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 19

$T : C[0,1] \to \mathbb{R};\ T(f) = f\left(\frac{1}{2}\right)$

sea: $\quad u = f \in C[0,1] \qquad v = g \in C[0,1]$

$= T\,(u+v) = T[f+g]$

$= \frac{1}{2}[f+g]$

$= \frac{1}{2}f + \frac{1}{2}g$

$= T(f) + T(g)$

sea: $\quad u = f \in C[0,1] \qquad \alpha \in K$

$= T\,(\alpha u) = T[\alpha f]$

$= \frac{1}{2}(\alpha f$

$= \alpha\frac{1}{2}f$

$= \alpha T(f)$

T SI ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 20

$T : M_{hn} \to \mathbb{R};\ T(A) = \det A$

sea: $\quad u = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} \in M_{22} \qquad v = \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \in C[0,1]$

$= T\,(u+v) = T[\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}]$

$= T\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= det\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$

$= 1$

T NO ES UNA TRANSFORMACION LINEAL

Ejercicio 21

Sea T una transformación lineal de $\mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ tal que $T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ y $T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$.

Encuentre:

a) $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$

b) $T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$

Solución:

a) $T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$:

Usando la linealidad de T:

$$T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = T\left(2\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = 2T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 4T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = 2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 4\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$2\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix}$$

$$4\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-16\\0\\20\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\\6\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-16\\0\\20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2-16\\4+0\\6+20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-14\\4\\26\end{pmatrix}$$

b) $T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix}$:

Usando la linealidad de T:

$$T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = T\left(-3\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}\right) = -3T\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix} + 7T\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = -3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} + 7\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix}$$

$$-3\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\-9\end{pmatrix}$$

$$7\begin{pmatrix}-4\\0\\5\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-28\\0\\35\end{pmatrix}$$

$$T\begin{pmatrix}-3\\7\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3\\-6\\-9\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-28\\0\\35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-3-28\\-6+0\\-9+35\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-31\\-6\\26\end{pmatrix}$$

Ejercicio 22

Sea $A_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\operatorname{sen}\theta & 0\\ \operatorname{sen}\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$. Describa geométricamente la transformación lineal $\mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}^3$ dada por $Tx = A_\theta x$.

Descripción Geométrica:

La matriz A_θ representa una transformación en $\mathbb{R}^3$. En particular:

si:

$$A_\theta = \begin{pmatrix}\cos\theta & -\sin\theta & 0\\ \sin\theta & \cos\theta & 0\\ 0 & 0 & 1\end{pmatrix}$$

1. vector $e_1 = (1, 0, 0)$

$$T = \begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix}; A_\theta(T) = A_\theta\begin{pmatrix}1\\0\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta(1) & -\sin\theta(0) & 0(0)\\ \sin\theta(1) & \cos\theta(0) & 0(0)\\ 0(1) & 0(0) & 1(0)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix}\cos\theta\\ \sin\theta\\ 0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta, & \sin\theta, & 0\end{pmatrix}$$

2. vector $e_2 = (0, 1, 0)$

$$T = \begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix}; A_\theta(T) = A_\theta\begin{pmatrix}0\\1\\0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cos\theta(0) & -\sin\theta(1) & 0(0)\\ \sin\theta(0) & \cos\theta(1) & 0(0)\\ 0(1) & 0(1) & 1(0)\end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -\sin\theta, & \cos\theta, & 0 \end{pmatrix}$$

3. vector $e_3 = (0, 0, 1)$

$$T = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} ; A_\theta(T) = A_\theta \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta(0) & -\sin\theta(0) & 0(1) \\ \sin\theta(0) & \cos\theta(0) & 0(1) \\ 0(1) & 0(0) & 1(1) \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0, & 0, & 1 \end{pmatrix}$$

La matriz A_θ rota los vectores en el plano xy por un angulo θ en sentido antihorario.
v=(x,y,z) en $\mathbb{R}^3$

$$T \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = A_\theta \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \cos\theta & -\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & \cos\theta & 0 \\ 0(1) & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} x\cos\theta - y\sin\theta \\ x\sin\theta + y\cos\theta \\ z \end{pmatrix}$$

Conclusión:
La transformación lineal $T(x) = A_\theta x$ representa una rotación en el plano xy por un ángulo θ alrededor del eje z, manteniendo la componente z constante.

Ejercicio 23

Suponga que en un espacio vectorial real V, T satisface $T(x+y) = Tx - Ty$ y $T(\alpha x) = \alpha Tx$ para $\alpha \geq 0$. Demuestre que T es lineal.
Demostración:
1. Aditividad:
Queremos verificar que $T(x+y) = Tx + Ty$.
Usamos la propiedad dada $T(x+y) = Tx - Ty$:

$$T(x+y) = Tx - Ty$$

$$T(x+y) = Tx + Ty$$

Entonces:

$$Tx - Ty = Tx + Ty$$

$$Tx - Ty - Tx = Tx + Ty - Tx$$

$$-Ty = Ty$$

$$0 = 2Ty$$

Esto implica que:

$$Ty = 0 \text{ para cualquier } y \in V$$

Entonces:

$$T(x + y) = Tx - Ty = Tx - 0 = Tx$$

2. Homogeneidad:
Queremos demostrar que $T(\alpha x) = \alpha Tx$ para cualquier $\alpha \in \mathbb{R}$.
Dado que $T(\alpha x) = \alpha Tx$ se cumple para $\alpha \geq 0$ y la aditividad demuestra que T es el operador nulo, esto se cumple también para $\alpha < 0$.
Conclusión:
Hemos demostrado que T es lineal si y solo si T es el operador nulo, dado que T cumple con la homogeneidad para $\alpha \geq 0$ y $T(x + y) = Tx$ implica que T es el operador nulo.

Ejercicio 24

Si T es una transformación lineal de V en W, demuestre que $T(x - y) = Tx - Ty$.
Demostración:
1. Aditividad:
Usamos la propiedad dada $T(x + y) = Tx + Ty$:

$$T(x - y) = Tx - Ty$$

$$T(x + (-y)) = Tx + T(-y)$$

$$T(x + (-1)y) = Tx + T(-1)y$$

$$T(x + (-y)) = T(x) + (-T(y))$$

2. Homogeneidad:
Usando la propiedad dada $T(\alpha x) = \alpha Tx$ para $\alpha \geq 0$:

$$T(\alpha x) = \alpha Tx$$

Cumple con la propiedad de homogeneidad.
Conclusión:
Por lo tanto, T es una transformación lineal.

Ejercicio 25

Sea V un espacio con producto interno y sea $\mathbf{u}$ fijo. Suponga que $T : V \to \mathbb{R}$ está definido por $Tv = \langle v, \mathbf{u} \rangle$. Demuestre que T es lineal.
Demostración:
1. Aditividad:
Queremos mostrar que $T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$.
Para $v_1, v_2 \in V$,

$$T(v_1 + v_2) = \langle v_1 + v_2, \mathbf{u} \rangle$$

$$\langle v_1 + v_2, \mathbf{u} \rangle = \langle v_1, \mathbf{u} \rangle + \langle v_2, \mathbf{u} \rangle$$

$$T(v_1 + v_2) = \langle v_1, \mathbf{u} \rangle + \langle v_2, \mathbf{u} \rangle$$

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$$

2. Homogeneidad:
Queremos mostrar que $T(\alpha v) = \alpha Tv$.
Para $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha v) = \langle \alpha v, \mathbf{u} \rangle$$

$$\langle \alpha v, \mathbf{u} \rangle = \alpha \langle v, \mathbf{u} \rangle$$

$$T(\alpha v) = \alpha \langle v, \mathbf{u} \rangle$$

$$T(\alpha v) = \alpha Tv$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.

Ejercicio 26

Sea V un espacio con producto interno e H un subespacio de dimensión finita H. Sea $\{\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots, \mathbf{u}_k\}$ una base para H. Demuestre que $T : V \to H$ definido para $Tv = (\langle v, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle v, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$ es una transformación lineal.
Demostración:
1. Aditividad:
Queremos mostrar que $T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$.
Para $v_1, v_2 \in V$,

$$T(v_1 + v_2) = \langle v_1 + v_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle v_1 + v_2, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

$$\langle v_1 + v_2, \mathbf{u}_i \rangle = \langle v_1, \mathbf{u}_i \rangle + \langle v_2, \mathbf{u}_i \rangle$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces,

$$T(v_1 + v_2) = (\langle v_1, \mathbf{u}_1 \rangle + \langle v_2, \mathbf{u}_1 \rangle)\mathbf{u}_1 + \cdots + (\langle v_1, \mathbf{u}_k \rangle + \langle v_2, \mathbf{u}_k \rangle)\mathbf{u}_k$$

$$T(v_1 + v_2) = \langle v_1, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle v_1, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k + \langle v_2, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle v_2, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

$$T(v_1 + v_2) = Tv_1 + Tv_2$$

2. Homogeneidad:
Queremos mostrar que $T(\alpha v) = \alpha T v$.
Para $v \in V$ y $\alpha \in \mathbb{R}$,

$$T(\alpha v) = \langle \alpha v, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle \alpha v, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

$$\langle \alpha v, \mathbf{u}_i \rangle = \alpha \langle v, \mathbf{u}_i \rangle$$

para $i = 1, 2, \ldots, k$, entonces,

$$T(\alpha v) = \alpha \langle v, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \alpha \langle v, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k$$

$$T(\alpha v) = \alpha(\langle v, \mathbf{u}_1 \rangle \mathbf{u}_1 + \cdots + \langle v, \mathbf{u}_k \rangle \mathbf{u}_k)$$

$$T(\alpha v) = \alpha T v$$

Por lo tanto, T es una transformación lineal.