

# Oefeningen Numerieke Wiskunde:

## Oefenzitting 2

Tom Sydney Kerckhove

19 februari 2014

### 1 Probleem 1

De exponent gaat van  $-126$  tot  $127$ . Dit betekent dat hier 8 bits voor nodig zijn. Er blijven dus nog  $32 - 8 = 23$  bits over voor de mantisse want er is ook nog een tekenbit. Een andere manier om dit resultaat te bekomen is de formule voor de machine precisie te gebruiken.

$$\epsilon_{mach} = \frac{b^{1-p}}{2}$$

Hierin is  $b$  de basis en  $p$  het aantal juiste beduidende cijfers. Uit deze formule halen we de  $p$ .

$$p1 - \log_b(2\epsilon_{mach})$$
$$p = 1 - \log_2(2 \cdot 2^{-24}) = 23$$

Volgens dezelfde redenering vinden we dat het aantal bits voor het teken, de mantisse en de exponent bij de dubbele-nauwkeurigheidsges

#### 1.1 Conditie

$$\overline{y_1} = \left( (1 + 2x)(1 + \epsilon_1) - \left( \frac{1}{(1+x)(1+\epsilon_2)} \right) (1 + \epsilon_3) \right) (1 + \epsilon_4)$$

tallen respectievelijk 1, 11 en 52 zijn.

### 2 Probleem 2

- We weten dat 1 en 2 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

$$1 = .100 \dots 00 \cdot 2^1$$

$$2 = .100 \dots 00 \cdot 2^2$$

Hier zitten dus  $2^m - 1 = 2^{52} - 1$  getallen tussen.

- We weten dat 7 en 9 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

$$7 = .11100 \dots 00 \cdot 2^3$$

$$9 = .10010 \dots 00 \cdot 2^4$$

Hier zitten dus  $2^{50} + 2^{49} - 1$  getallen tussen.

### 3 Probleem 3

Het laatste zinvolle getal in deze rij is 1000. De overgang van 999 naar 1000 resulteert niet in een fout want 1000 wordt als volgt voorgesteld.

$$0.100 \cdot 10^4$$

Als we hier echter nog 1 bij optellen gebeurt er een absolute afrondingsfout van precies  $-1$ . Vanaf dan is de beschreven rij dus constant (1000).

### 4 Probleem 4

- – **bepaal\_b** We beginnen met  $A = 1$ , dan vermenigvuldigen we  $A$  met 2 tot er een afrondingsfout gebeurd wanneer je  $(A+1) - A = 1$  evalueert.  $A$  is nu gelijk aan  $2^{10}$ . Vervolgens initialiseren we  $i$  op 1 en hogen  $i$  op tot  $(A + i) = A$  geen afrondingsfout meer geeft. Dit is wanneer  $i$  6 wordt.  $b$  is dus  $.103 \cdot 10^4 - .102 \cdot 10^4 = 10$ .
- **bepaal\_p** We initialiseren  $p$  op 1 en  $z$  op 10. Nu hogen we  $p$  en de exponent van  $10^1$  op tot  $(z + 1) - z = 1$  een afrondingsfout geeft. Dit is wanneer  $p = 3$  geldt.

- – **bepaal\_b**  
**Te Bewijzen**

*Bewijs.* TODO □

- **bepaal\_p**  
**Te Bewijzen**

*Bewijs.* TODO □

## 5 Problem 5

1.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= fl \left( \frac{x}{fl \left( fl \left( \sqrt{fl(x+1)} \right) + 1 \right)} \right) \\ &= \frac{x(1+\epsilon_1)}{\left( \left( \sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)} \right) (1+\epsilon_3) + 1 \right) (1+\epsilon_2)} \\ \bar{y} &= y + \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \frac{\delta F}{\delta \epsilon_i}(0, 0, 0, 0)\end{aligned}$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{-x}{(\sqrt{x+1} + 1)(1+\epsilon_2)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0, 0) = \frac{-x}{\sqrt{x+1} + 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{((\sqrt{1+x})(1+\epsilon_3) + 1)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1+x} + 1)^2}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)} \left( \sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)} + 1 \right)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, 0) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{x+1} (\sqrt{x+1} + 1)^2}$$

$$= \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)}^3 + 4(x+1) + 2\sqrt{x+1})}$$

3.

$$\begin{aligned}
\bar{y} &\approx y + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_1 + \frac{-x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_2 \\
&+ \frac{-x\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1+x}+1)^2}\epsilon_3 + \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)^3}+4(x+1)+2\sqrt{x+1})}\epsilon_4 \\
\bar{y} &\approx y + y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4 \\
\bar{y} - y &= y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4 \\
\frac{\bar{y} - y}{y} &= \epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4
\end{aligned}$$

## 6 Problem 6

$$y = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

1.

$$\begin{aligned}
\bar{y} &= fl\left(\frac{fl(1 - fl(\cos(x)))}{fl(x^2)}\right) \\
\bar{y} &= \frac{(1 - (\cos(x))(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2)}{(x^2)(1 + \epsilon_3)}(1 + \epsilon_4)
\end{aligned}$$

2.

$$\begin{aligned}
\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) &= \frac{\delta}{\delta \epsilon_1} \frac{1 - (\cos(x))(1 + \epsilon_1)}{x^2} = -\frac{\cos(x)}{x^2} \\
\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) &= \frac{\delta}{\delta \epsilon_2} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \epsilon_2)}{x^2} = \frac{(1 - \cos(x))}{x^2} \\
\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) &= \frac{\delta}{\delta \epsilon_3} \frac{1 - \cos(x)}{(x^2)(1 + \epsilon_3)} = \frac{1 - \cos(x)}{(x^2)} \frac{-1}{(1 + \epsilon_3)^2} \\
\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) &= -\frac{1 - \cos(x)}{x^2} \\
\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) &= \frac{\delta}{\delta \epsilon_4} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \epsilon_4)}{x^2} = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}
\end{aligned}$$

3.

$$\bar{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + \frac{(1 - \cos(x))}{x^2}\epsilon_2 - \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\epsilon_3 + \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\epsilon_4$$

$$\bar{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4.

$$\bar{y} - y \approx -\frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx -\frac{\cos(x)}{x(1 - \cos(x))}\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

## 7 Problem 7

$$S = \sum_{i=1}^n a_i$$

1.

$$\bar{S} = fl(fl(...fl(fl(fl(fl(a_1 + a_2) + a_3) + a_4)...)) + a_n)$$

$$= (((...(((a_1 + a_2)(1 + \epsilon_2)) + a_3)(1 + \epsilon_3))...)) + a_n)(1 + \epsilon_n)$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(\epsilon_2, 0, \dots, 0) = a_1 + a_2$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, \epsilon_3, 0, \dots, 0) = a_1 + a_2 + a_3$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_i}(0, \dots, 0, \epsilon_i, 0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^i a_j$$

2.

$$\bar{S} \approx y + \sum_{k=2}^n \epsilon_k \sum_{i=1}^k a_i$$

3.

$$\bar{S} - S \approx \sum_{k=2}^n \epsilon_k \sum_{i=1}^k a_i$$

## 8 Problem 8

(a)

$$y = x \sin(x)$$

1.

$$\bar{y} = fl(fl(\sin(x)))$$

$$\bar{y} = (x \sin(x)(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2)$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0) = x \sin(x)$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2) = x \sin(x)$$

3.

$$\bar{y} \approx y + x \sin(x) \epsilon_1 + x \sin(x) \epsilon_2$$

$$\bar{y} \approx y + y \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

4.

$$\bar{y} - y = y \epsilon_1 + y \epsilon_2$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

(b)

$$y = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

1.

$$\bar{y} = fl\left(\frac{fl(1 - fl(\cos(x)))}{fl(\sin(x))}\right)$$

$$\bar{y} = \left(\frac{(1 - (\cos(x))(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2)}{(\sin(x))(1 + \epsilon_3)}\right)(1 + \epsilon_4)$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \frac{1 - \cos(x)(1 + \epsilon_1)}{\sin(x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \epsilon_2)}{\sin(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} \frac{1 - \cos(x)}{(\sin(x))(1 + \epsilon_3)} = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)(1 + \epsilon_3)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4} \left( \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \right) (1 + \epsilon_4) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_1 + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_2 + \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} \epsilon_3 + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_4$$

$$\bar{y} \approx y + \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_1 + y \epsilon_2 - y \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

4.

$$\bar{y} - y \approx \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_1 + y \epsilon_2 - y \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \frac{-\cos(x)}{1 - \cos(x)} \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

(c)

$$y = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left( \frac{fl(1 - fl(e^{fl(-2x)}))}{x} \right)$$

$$\bar{y} = \left( \frac{(1 - ((e^{(-2x)(1+\epsilon_1)})(1 + \epsilon_2))) (1 + \epsilon_3)}{x} \right) (1 + \epsilon_4)$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \frac{1 - e^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x} = \frac{2xe^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0, 0) = \frac{2xe^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \frac{1 - (e^{-2x})(1 + \epsilon_2)}{x} = \frac{-e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} \frac{(1 - e^{-2x})(1 + \epsilon_3)}{x} = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4} \left( \frac{1 - e^{-2x}}{x} \right) (1 + \epsilon_4) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{y} &\approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x} + \frac{-e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x} \\ \bar{y} &\approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x} \epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x} \epsilon_2 + y\epsilon_3 + y\epsilon_4 \end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned} \bar{y} - y &\approx \frac{2xe^{-2x}}{x} \epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x} \epsilon_2 + y\epsilon_3 + y\epsilon_4 \\ \frac{\bar{y} - y}{y} &\approx \frac{2xe^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4 \end{aligned}$$

(d)

$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

1.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= fl \left( (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right) \\ \bar{y} &= \left( ((1 + x)(1 + \epsilon_2))^{\left(\frac{1}{x}\right)(1 + \epsilon_1)} \right) (1 + \epsilon_3) \end{aligned}$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)(1 + \epsilon_1)} = \frac{(x + 1)^{\frac{\epsilon_1 + 1}{x}} \ln(x + 1)}{x}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0) = \frac{(x + 1)^{\frac{1}{x}} \ln(x + 1)}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} ((1 + x)(1 + \epsilon_2))^{\frac{1}{x}} = \frac{(1 + x)}{a} ((1 + x)(1 + \epsilon_2))^{\frac{1}{x} - 1}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0) = \frac{(1 + x)}{a} (1 + x)^{\frac{1}{x} - 1} = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}{a}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} \left( (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right) (1 + \epsilon_3) = \left( (1 + x)^{\frac{1}{x}} \right)$$



3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}} \ln(x+1)}{x} \epsilon_1 + \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{a} \epsilon_2 + \left( (1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \epsilon_3$$

$$\bar{y} \approx y + \frac{\ln(x+1)}{x} y \epsilon_1 + \frac{1}{a} y \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

4.

$$\bar{y} - y \approx \frac{\ln(x+1)}{x} y \epsilon_1 + \frac{1}{a} y \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \frac{\ln(x+1)}{x} \epsilon_1 + \frac{1}{a} \epsilon_2 + \epsilon_3$$

(e)

$$y = \sqrt{e^x - 1}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left( \sqrt{fl(fl(e^x) - 1)} \right)$$

$$\bar{y} = \left( \sqrt{((e^x)(1 + \epsilon_1) - 1)(1 + \epsilon_2)} \right) (1 + \epsilon_3)$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \sqrt{(e^x)(1 + \epsilon_1) - 1} = \frac{e^x}{2\sqrt{(e^x)(1 + \epsilon_1) - 1}}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \sqrt{(e^x - 1)(1 + \epsilon_2)} = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{(e^x - 1)(1 + \epsilon_2)}}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} (1 + \epsilon_3) \sqrt{e^x - 1} = \sqrt{e^x - 1}$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1} \epsilon_2 + \sqrt{e^x - 1} \epsilon_3$$

$$\bar{y} \approx y + y \frac{e^x}{2e^x - 2} \epsilon_1 + y \frac{1}{2} \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

4.

$$\begin{aligned}\bar{y} - y &\approx y \frac{e^x}{2e^x - 2} \epsilon_1 + y \frac{1}{2} \epsilon_2 + y \epsilon_3 \\ \frac{\bar{y} - y}{y} &\approx \frac{e^x}{2e^x - 2} \epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 + \epsilon_3\end{aligned}$$

(f)

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= \left(\sin\left(\frac{(1 + \epsilon_1)}{x}\right)\right) (1 + \epsilon_2) \\ \bar{y} &= \dots\end{aligned}$$

2.

•

$$\begin{aligned}\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0) &= \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \sin\left(\frac{(1 + \epsilon_1)}{x}\right) = \frac{1}{x} \cos\left(\frac{(1 + \epsilon_1)}{x}\right) \\ \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0) &= \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right)\end{aligned}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) (1 + \epsilon_2) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.

$$\begin{aligned}\bar{y} &\approx y + \frac{1}{x} \cos\left(\frac{1}{x}\right) \epsilon_1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right) \epsilon_2 \\ \bar{y} &\approx y + y \frac{1}{x} \cot\left(\frac{1}{x}\right) \epsilon_1 + y \epsilon_2\end{aligned}$$

4.

$$\begin{aligned}\bar{y} - y &\approx y \frac{1}{x} \cot\left(\frac{1}{x}\right) \epsilon_1 + y \epsilon_2 \\ \frac{\bar{y} - y}{y} &\approx \frac{1}{x} \cot\left(\frac{1}{x}\right) \epsilon_1 + \epsilon_2\end{aligned}$$

(g)

$$y = (1 + x^2)^{x^2}$$

1.

$$\begin{aligned}\bar{y} &= fl\left(\left(fl(1 + fl(x^2))\right)^{fl(x^2)}\right) \\ \bar{y} &= \left(\left((1 + (x^2)(1 + \epsilon_2))(1 + \epsilon_3)\right)^{(x^2)(1 + \epsilon_1)}\right) (1 + \epsilon_4)\end{aligned}$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(1+x^2)^{(x^2)(1+\epsilon_1)} = x^2(x^2+1)^{x^2(1+\epsilon_1)} \ln(x^2+1)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0, 0) = x^2(x^2+1)^{x^2} \ln(x^2+1)$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(1+(x^2)(1+\epsilon_2))^{x^2} = x^4(1+(x^2)(1+\epsilon_2))^{x^2-1}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0, 0) = x^4(1+x^2)^{x^2-1}$$

•

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) &= \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}((1+x^2)(1+\epsilon_3))^{x^2} \\ &= (1+x^2)x^2((1+x^2)(1+\epsilon_3))^{x^2-1} \end{aligned}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) = (1+x^2)x^2(1+x^2)^{x^2-1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4} \left( (1+x^2)^{x^2} \right) (1+\epsilon_4) = (1+x^2)^{x^2}$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{y} &\approx y + x^2(x^2+1)^{x^2} \ln(x^2+1) \epsilon_1 + x^4(1+x^2)^{x^2-1} \epsilon_2 \\ &\quad + (1+x^2)x^2(1+x^2)^{x^2-1} \epsilon_3 + (1+x^2)^{x^2} \epsilon_4 \\ y &= (1+x^2)^{x^2} \end{aligned}$$

$$\bar{y} \approx y + x^2 y \ln(x^2+1) \epsilon_1 + \frac{x^4 y}{1+x^2} \epsilon_2 + y x^2 \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

4.

$$\bar{y} - y \approx x^2 y \ln(x^2+1) \epsilon_1 + \frac{x^4 y}{1+x^2} \epsilon_2 + y x^2 \epsilon_3$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx x^2 \ln(x^2+1) \epsilon_1 + \frac{x^4}{1+x^2} \epsilon_2 + x^2 \epsilon_3$$

(h)

$$y = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2x^2}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left( \frac{fl \left( fl \left( e^{fl(x^2)} \right) - fl \left( e^{fl(-fl(x^2))} \right) \right)}{fl(2fl(x^2))} \right)$$

$$\bar{y} = \frac{\left( e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{-(x^2)(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)} \right) (1 + \epsilon_4)}{(2(x^2)(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_3)} (1 + \epsilon_5)$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \frac{e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{-(x^2)(1+\epsilon_1)}}{2(x^2)(1 + \epsilon_1)}$$

$$= \frac{e^{-x^2(\epsilon_1+1)} \left( x^2(\epsilon_1 + 1) \left( e^{2x^2(\epsilon_1+1)} + 1 \right) \right) - e^{2x^2(\epsilon_1+1)} + 1}{2x^2(\epsilon_1 + 1)^2}$$

AWW HELL NAW

## 9 Problem 9

• Product

$$y = \prod_{i=1}^n$$

1.

$$\bar{y} = fl(fl(...fl(fl(fl(a_1 a_2) a_3) a_4) ... a_{n-1}) a_n)$$

$$\bar{y} = ((...((a_1 a_2)(1 + \epsilon_2) a_3)(1 + \epsilon_3) ... a_{n-1})(1 + \epsilon_{n-1}) a_n)(1 + \epsilon_n)$$

$$= \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) \left( \prod_{i=2}^n (1 + \epsilon_i) \right)$$

2. —

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, ..., 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + \epsilon_1)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^n a_i$$

—

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, ..., 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + \epsilon_2)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^n a_i$$

—

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_j}(0, \dots, \epsilon_j, \dots, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_j} = \left( \prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + \epsilon_j)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_j}(0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^n a_i$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \sum_{j=1}^n \epsilon_j \prod_{i=1}^n a_i$$

$$\bar{y} \approx y + \sum_{j=1}^n \epsilon_j y$$

4.

$$\bar{y} - y \approx \sum_{j=1}^n \epsilon_j y$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \sum_{j=1}^n \epsilon_j$$

- Scalair Product  
TODO

$$y = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

1.

$$\bar{y} = fl(fl(\dots fl(fl(fl(a_1 b_1) + fl(a_2 b_2)) + fl(a_3 + b_3)) \dots) + fl(a_n b_n))$$

$$\bar{y} = (((a_1 b_1 (1 + \epsilon_1) + a_2 b_2 (1 + \epsilon_2)) (1 + \epsilon_{2+}) + a_3 b_3 (1 + \epsilon_3) (1 + \epsilon_{3+}) \dots) (1 + \epsilon_{n+}))$$

2. —

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{1.}}(0, \dots, \epsilon_{1.}, \dots, 0) = a_1 b_1$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{2.}}(0, \dots, \epsilon_{2.}, \dots, 0) = a_2 b_2$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{i.}}(0, \dots, \epsilon_{i.}, \dots, 0) = a_i b_i$$

—

$$\begin{aligned}\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{2+}}(0, \dots, \epsilon_{2+}, \dots, 0) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 \\ \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{3+}}(0, \dots, \epsilon_{3+}, \dots, 0) &= a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3 \\ \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{i+}}(0, \dots, \epsilon_{i+}, \dots, 0) &= \sum_{j=1}^i a_j b_j\end{aligned}$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \sum_{i=1}^n a_i b_i \epsilon_i + \sum_{i=2}^n \epsilon_{i+} \sum_{j=1}^i a_j b_j$$

## 10 Probleem 10

$$y = \sum_{i=1}^n a_i$$

*Bewijs.* Bewijs door volledige inductie op  $n$

Voor  $n = 1$  is de stelling triviaal.

Stel dat de stelling klopt voor een bepaalde  $n = k$ , dan bewijzen we nu dat de stelling geldt voor  $n = k + 1$ .

1.

$$\bar{y} = fl(fl(fl(\dots) + fl(\dots)) + fl(fl(\dots) + fl(\dots)))$$

LOLNOPE

□

## 11 Probleem 11

Een vermenigvuldiging met 2 geeft bijna geen fout in een computer. Een vermenigvuldiging met 10 daarentegen geeft wel degelijk een fout zoals we zien in de tweede grafiek. De machine werkt duidelijk met basis 2. De machine werkt met ongeveer 8 beduidende cijfers.