

Oefeningen Numerieke Wiskunde: Oefenzitting 3

Tom Sydney Kerckhove
Verbeteringen door Ward Schodts

26 februari 2014

1 Bewegende kommavoorstelling

1.1 Problem 1

$$b = 2 \text{ en } p = 53$$

$$eps = 2.2204e - 16 \text{ en } \epsilon_{mach} = 1.1102e - 16$$

Voorbeeld van een afrondingsfout:

$$(1 + 0.70 \cdot eps) - 1 = 2.2204e - 16$$

0.70 voor eps is net groot genoeg om eps naar boven laten af te ronden, vandaar dat eps wordt teruggegeven

1.2 Problem 2

- Correct:
0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 8, 1, 10 ,100, 1000.
- Incorrect:
0.001, 0.01, 0.1

0.1 wordt voorgesteld als

[illegible]

De fout is dus $fl(0.1) = 0.1$.

$$-0.\underbrace{000}_{\text{leading zeros}}100110011\dots \quad 2^{\circ}01111111011 \quad (2^{-4})$$

$$\Delta(0.1) = (1.00110011..)_2 \cdot 2^{-56}$$

2 Probleem 3

- (a) De waarde van k verandert niet meer na een bepaalde iteratie omdat de component die nog toegevoegd wordt kleiner is dan voorstelbaar.
- (b) Met matlab, zie *abs_err* en *rel_err*.
- (c) LogLog of Semilogy geeft het mooiste resultaat.
- (d) Zie matlab voor illustratie.

3 Probleem 4

Voor grote n delen we door een voorgestelde nul in de machine. De benadering convergeert beter, maar is ongeveer even goed.

4 Probleem 5

- (a) Voor grote x duurt het langer voor x^k kleiner wordt dan $k!$.
- (b) Zie matlab voor illustratie.
- (c) Ja, de relatieve fout is van de grootteorde 10^{-15} .

5 Probleem 6

- (a) Zie matlab voor illustratie.
- (b) Nee, de relatieve fout is van de grootteorde 10^{-10} .
- (c) Ja.

$$\begin{aligned}\bar{S} - S &\approx \sum_{k=2}^n \epsilon_k \sum_{i=1}^k a_i \\ &= \sum_{k=2}^n \epsilon_k \sum_{i=1}^k \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

Zoals we zien is de absolute fout in het begin heel groot omdat het even duur voordat x^n kleiner wordt dan $n!$.

6 Problem 7

(a)

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x)}{x^2} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x)}{2x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) Vanaf een bepaalde waarde wordt de benadering terug slechter, en daarna gaat alles naar de maan.

(c) LogLog werkt het best, omdat zowel x als abs_err een logaritmisch verloop hebben.

(d) De absolute fout is:

$$f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + \frac{x^2}{2!} - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - \dots \approx \frac{x^4}{4!}$$

(e) TODO

7 Problem 8

1. 0.1 wordt naar het volgende getal afgekapt:

```
+0.00011001100110011001100
```

$$= 0.09999990463256835937$$

De absolute fout is dus de volgende uitdrukking

[illegible]
$$=$$

9.536743164617612e-8

De relatieve fout is dus de volgende.

9.536743164617612e-7

2. Vermenigvuldigen we de relatieve fout met 100 uur ($60 * 60 * 100$), dan krijgen we de fout op de berekende tijd.

0.343

3.

$$0.343 * 1676 = 574.868m$$

8 Problem 9

(a) (a) Wortels

$$y = {}^{2^{40}}\sqrt{x}$$

i.

$$\bar{y} = fl \left(\sqrt{\dots fl \left(\sqrt{fl(\sqrt{x})} \right) \dots} \right)$$

$$\bar{y} = (1 + \epsilon_{40}) \sqrt{\dots (1 + \epsilon_2) \sqrt{(1 + \epsilon_1) \sqrt{x}}}$$

$$= (1 + \epsilon_{40})(1 + \epsilon_{39})^{\frac{1}{2}}(1 + \epsilon_{38})^{\frac{1}{4}} \dots (1 + \epsilon_2)^{\frac{1}{2^{38}}} (1 + \epsilon_1)^{\frac{1}{2^{39}}} {}^{2^{40}}\sqrt{x}$$

$$= {}^{2^{40}}\sqrt{x} \prod_{i=1}^{40} (1 + \epsilon_i)^{\frac{1}{2^{40-i}}}$$

ii.

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_i}(0, \dots, \epsilon_i, \dots, 0) = \frac{\delta}{{\delta \epsilon_i}} {}^{2^{40}}\sqrt{x} (1 + \epsilon_i)^{\frac{1}{2^{40-i}}} = {}^{2^{40}}\sqrt{x} \frac{(1 + \epsilon_i)^{\frac{1}{2^{40-i}} - 1}}{2^{40-i}}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_i}(0, \dots, 0) = \frac{{}^{2^{40}}\sqrt{x}}{2^{40-i}}$$

iii.

$$\bar{y} \approx y + \sum_{i=1}^{40} \frac{{}^{2^{40}}\sqrt{x}}{2^{40-i}} \epsilon_i$$

$$\bar{y} \approx y + \sum_{i=1}^{40} \frac{y}{2^{40-i}} \epsilon_i$$

iv.

$$\bar{y} - y \approx \sum_{i=1}^{40} \frac{y}{2^{40-i}} \epsilon_i$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \sum_{i=1}^{40} \frac{1}{2^{40-i}} \epsilon_i \leq \left(\frac{2^{40} - 1}{2^{40}} + 1 \right) \epsilon_{mach}$$

(b) Kwadraten

$$y = x^{2^{40}}$$

i.

$$\bar{y} = fl \left(fl \left(fl \left(fl \left(fl (x^2)^2 \right)^2 \right)^2 \right)^2 \right)$$

$$\bar{y} = (1 + \epsilon_{40}) \left(\dots (1 + \epsilon_3) \left((1 + \epsilon_2) \left((1 + \epsilon_1) x^2 \right)^2 \right)^2 \dots \right)^2$$

$$\bar{y} = x^{2^{40}} \sum_{i=1}^{40} (1 + \epsilon_i)^{2^{40-i}}$$

ii.

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_i}(0, \dots, \epsilon_i, \dots, 0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_i} x^{2^{40}} (1 + \epsilon_i)^{2^{40-i}} = x^{2^{40}} 2^{40-i} (1 + \epsilon_i)^{2^{40-i}-1}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_i}(0, \dots, 0) = x^{2^{40}} 2^{40-i}$$

iii.

$$\bar{y} \approx y + \sum_{i=1}^{40} x^{2^{40}} 2^{40-i} \epsilon_i = x^{2^{40}} \sum_{i=1}^{40} 2^{40-i} \epsilon_i$$

$$\bar{y} \approx y + y \sum_{i=1}^{40} 2^{40-i} \epsilon_i$$

iv.

$$\bar{y} - y \approx y \sum_{i=1}^{40} 2^{40-i} \epsilon_i$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \sum_{i=1}^{40} 2^{40-i} \epsilon_i \leq (2_{40} - 1) \epsilon_{mach}$$

We kunnen nu de fout berekenen.

$$y = x \text{ maar } \bar{y} \neq x$$

$$\bar{y} = x \left(1 + \sum_{i=1}^{40} \frac{1}{2^{40-i}} \epsilon_i \right) \left(1 + \sum_{j=1}^{40} 2^{40-j} \epsilon_j \right)$$

(b) FTS

(c)

(d)