Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 4: Conditie en stabiliteit

Het doel van deze oefenzitting is het onderzoeken van de conditie van een probleem en de stabiliteit van een algoritme. Het bestreken deel van de cursus is *Hoofdstuk 2, Foutenanalyse.*

1 Theorie

1.1 Conditie van een probleem

De conditie van een probleem geeft aan hoe gevoelig de oplossing van het probleem is voor fouten op de gegevens.

Indien het probleem erin bestaat $y = f(x)$ te evalueren voor een gegeven x, dan is

$$\Delta_c y \approx f'(x)\Delta x.$$

De absolute waarde van $f'(x)$ is dus een maat voor de conditie van het probleem met betrekking tot de absolute fout. De conditie met betrekking tot de relatieve fout volgt uit de formule

$$\delta_c y \approx \frac{f'(x)x}{f(x)}\,\delta x. \tag{1}$$

Wij zullen vooral aandacht hechten aan deze laatste betrekking, omdat de relatieve fout meer zegt over de nauwkeurigheid van het resultaat (aantal juiste beduidende cijfers). Merk op dat voor dit probleem, de uitdrukkingen overeenkomen met het absoluut en relatief conditiegetal, respectievelijk:

$$\kappa_A = |f'(x)| \qquad \text{en} \qquad \kappa_R = \left|\frac{f'(x)x}{f(x)}\right|.$$

Indien het probleem erin bestaat een functie $y = f(x_1, \ldots, x_n)$ van meerdere veranderlijken te evalueren, dan is

$$\Delta_c y \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\partial f}{\partial x_i}(x_1, \ldots, x_n)\Delta x_i$$

$$\delta_c y = \frac{\Delta_c y}{y} \approx \sum_{i=1}^{n} \frac{\frac{\partial f}{\partial x_i} \cdot x_i}{f}\delta x_i$$

De conditie van dit probleem kan je dus nagaan door de uitdrukkingen voor δx_i uit te werken en na te gaan waar deze groot worden.

1.2 Stabiliteit van een algoritme

Om een numeriek probleem op te lossen gebruiken we een algoritme. De stabiliteit van een algoritme zegt iets over de (relatieve) fout op het eindresultaat veroorzaakt door de voortplanting van afrondingsfouten. We kunnen de stabiliteit van een algoritme dus nagaan d.m.v. een foutenanalyse zoals in de vorige oefenzitting. Herinner dat we bij een foutenanalyse reeds veronderstelden dat de gegevens machinegetallen zijn en dus exact kunnen worden voorgesteld. De reden is dat bij een stabiliteitsonderzoek enkel afrondingsfouten in rekening worden gebracht die gemaakt worden bij bewerkingen van het algoritme en **niet** de fouten op de gegevens. (Als je de fouten op de gegevens ook in rekening brengt, dan onderzoek je eigenlijk ook de conditie.)

We berekenen dus $\bar{y}$ m.b.v. een foutenanalyse zoals in de vorige oefenzitting en kijken naar de relatieve fout

$$\delta_s y = \frac{\bar{y} - y}{y}.$$

Deze relatieve fout vergelijken we met de waarde van $\delta_c y$ voor $|\delta x| \approx \epsilon_{mach}$. We maken voor deze oefenzitting een onderscheid tussen de volgende drie gevallen:

1. $|\delta_s y|$ is groot en $|\delta_c y|$ is klein (goede conditie): het algoritme is **onstabiel**.

2. $|\delta_s y|$ is groot en $|\delta_c y|$ is ongeveer even groot (slechte conditie): het algoritme is **zwak stabiel**.

3. $|\delta_s y|$ is klein: het algoritme is **voorwaarts stabiel**.

Opmerkingen:

1. **(Definitie zwak stabiel)** Een algoritme is zwak stabiel als

$$\frac{|\delta_s y|}{|\delta_c y|} \lesssim 1,$$

   waarbij $|\delta x| \approx \epsilon_{mach}$ in (1), dus als $|\delta_s y|$ kleiner dan of ongeveer gelijk is aan $|\delta_c y(\epsilon_{mach})|$. Merk op dat voor een voorwaarts stabiel algoritme $|\delta_s y|$ klein is, en er steeds aan deze voorwaarde voldaan is. Voorwaartse stabiliteit impliceert dus zwakke stabiliteit.

2. Merk op dat we dus twee gevallen onderscheiden wanneer $|\delta_s y|$ groot is en dat dit afhangt van de conditie van het probleem.

2 Een voorbeeld.

Onderzoek de conditie van het volgende probleem: gegeven x, evalueer

$$y = f(x) = \sqrt{1+x} - 1 = \frac{x}{\sqrt{1+x}+1},$$

en onderzoek de stabiliteit van de volgende algoritmen:

$$\begin{aligned}\bar{y}_1 = \bar{f}_1(x) &= fl\left(fl(\sqrt{fl(1+x)}) - 1\right),\\ \bar{y}_2 = \bar{f}_2(x) &= fl\left(\frac{x}{fl\left(fl(\sqrt{fl(1+x)}) + 1\right)}\right).\end{aligned}$$

- **Conditie**

$$\begin{aligned}\Delta_c y &\approx f'(x)\Delta x = \frac{1}{2\sqrt{1+x}}\Delta x\\ \delta_c y &\approx \frac{f'(x)x}{f(x)}\delta x = \frac{\sqrt{1+x}+1}{2\sqrt{1+x}}\delta x.\end{aligned}$$

  De conditie (m.b.t. de relatieve fout) is slecht als x in de buurt komt van -1 en goed voor andere waarden van x, ook voor zeer grote positieve of negatieve waarden.[1]

- **Stabiliteit** In de vorige oefenzitting zagen we dat het aandeel van de relatieve fout op het resultaat, veroorzaakt door algoritme $\bar{f}_1$, gelijk is aan

$$\delta_s y_1 \approx \frac{\sqrt{1+x}}{2(\sqrt{1+x}-1)}\epsilon_1 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}\epsilon_2 + \epsilon_3.$$

  met $|\epsilon_i| \leq \epsilon_{mach}$. $|\delta_s y_1|$ kan dus groot zijn wanneer x in de buurt ligt van 0. We besluiten hieruit het volgende:

  - Het algoritme $\bar{f}_1$ is onstabiel voor $x \approx 0$, want daar is het probleem goed geconditioneerd, maar kan $|\delta_s y_1|$ zeer groot worden.
  - Het algoritme is voorwaarts stabiel voor andere waarden van x. Dus ook voor $x \approx -1$ waar de conditie van het probleem slecht is!

  Voor $\bar{f}_2$ was het resultaat van de foutenanalyse in de vorige oefenzitting

$$|\delta_s y_2| \leq \frac{7}{2}\epsilon_{mach}$$

  en bijgevolg is algoritme $\bar{f}_2$ voorwaarts stabiel voor alle waarden van x. Dit is een voorbeeld van een stabiel algoritme en een onstabiel algoritme voor hetzelfde probleem.

[1] Conditie en stabiliteit moeten ook nagegaan worden voor $|x| \to \infty$.

3 Opgaven

Probleem 1. Onderzoek de conditie van de evaluatie van de functie

$$f(x) = 1 + 2x - \frac{1}{1+x} = \frac{(3+2x)x}{1+x}$$

en onderzoek de stabiliteit van de volgende algoritmen om de functie $f(x)$ te evalueren, waarbij je rekening houdt met het feit dat je machine met basis 2 werkt (i.e. $fl(2x) = 2x$):

eval1 $<$in: x; uit: $y>$
1. $y \leftarrow 2 * x$
2. $y \leftarrow 1 + y$
3. $z \leftarrow 1 + x$
4. $z \leftarrow \frac{1}{z}$
5. $y \leftarrow y - z$

eval2 $<$in: x; uit: $y>$
1. $y \leftarrow 2 * x$
2. $y \leftarrow 3 + y$
3. $y \leftarrow y * x$
4. $z \leftarrow 1 + x$
5. $y \leftarrow \frac{y}{z}$

Probleem 2. Onderzoek de conditie van het onderstaande probleem en de stabiliteit van het bijhorende algoritme.

(a) $y = x \sin(x)$

eval $<$in: x; uit: $y>$
1. $y \leftarrow \sin(x)$
2. $y \leftarrow x * y$

(b) $y = \sqrt{a} - \sqrt{b}$

eval1 $<$in: a, b; uit: $f>$
1. $f \leftarrow \sqrt{a} - \sqrt{b}$

eval2 $<$in: a, b; uit: $f>$
1. $f \leftarrow \dfrac{a-b}{\sqrt{a}+\sqrt{b}}$

Probleem 3. Stel dat het evalueren van $g(x)$ goed geconditioneerd is en dat je een stabiel algoritme $\bar{g}(x)$ hebt ter evaluatie. Dit betekent dat

$$g(x(1+\delta x)) = g(x)(1+C_1\delta x)$$

met C_1 een niet al te grote constante, en dat

$$\bar{g}(x) = g(x)(1+C_2\epsilon)$$

met $|\epsilon| \leq \epsilon_{mach}$ en C_2 een niet al te grote constante. Indien $|\delta x| \leq \epsilon_{mach}$, dan

$$\bar{g}(x+\delta x) = g(x)(1+C\epsilon')$$

met $|\epsilon'| \leq \epsilon_{mach}$ en C een niet al te grote constante

Toon aan dat $g'(x)$ benaderen met de volgende formule geen nauwkeurig resultaat geeft:

$$y = \frac{\bar{g}(x+h) - \bar{g}(x)}{h}$$

(Theoretisch wordt y een betere benadering naarmate $h \to 0$.) Doe hiervoor een foutenanalyse. Toon aan dat

$$\left|\frac{\bar{y}-y}{y}\right| \leq \mathcal{O}(\frac{1}{h})\,\epsilon_{mach}$$

onder de voorwaarde dat g continu afleidbaar is in een omgeving van x.

Probleem 4. Onderzoek de conditie van de wortels van de kwadratische vergelijking in x

$$x^2 - 2x + t = 0$$

met betrekking tot fouten op de coëfficiënt t indien t in de buurt van 1 ligt (bv. $t = 1 - \epsilon$). Illustreer grafisch. Wat verwacht je in het algemeen over de conditie van een meervoudige wortel van een veelterm?

Probleem 5. Onderzoek de conditie van het onderstaande probleem en de stabiliteit van de bijhorende algoritmen.

(a) $y = (1+x)^2 - 1 = (2+x)x$

eval1 <in: x; uit: y >
1. $y \leftarrow 1 + x$
2. $y \leftarrow y^2$
3. $y \leftarrow y - 1$

eval2 <in: x; uit: y >
1. $y \leftarrow 2 + x$
2. $y \leftarrow y * x$

(b) $y = \dfrac{1}{e^x - 1} - \dfrac{1}{e^x + 1} = \dfrac{2}{e^{2x} - 1}$

eval1 <in: x; uit: y >
1. $z \leftarrow \exp(x)$
2. $v \leftarrow z - 1$
3. $v \leftarrow 1/v$
4. $w \leftarrow z + 1$
5. $w \leftarrow 1/w$
6. $y \leftarrow v - w$

eval2 <in: x; uit: y >
1. $y \leftarrow 2 * x$
2. $y \leftarrow \exp(y)$
3. $y \leftarrow y - 1$
4. $y \leftarrow 1/y$
5. $y \leftarrow 2 * y$