Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 14 (PC): Iteratieve methoden voor het oplossen van stelsels

Voor het uitwerken van de opgaven moet je de `.m`-bestanden gebruiken die je kan vinden op Toledo.

1 Lineaire stelsels

Stel dat de matrix A wordt opgedeeld in zijn diagonaal D en de overblijvende benedendriehoek L en de bovendriehoek U

$$A = U + D + L.$$

Dan kan de Jacobi methode in matrix notatie geschreven worden als

$$Dx^{(k+1)} = b - (L + U)x^{(k)}$$

en de Gauss-Seidel methode als

$$Dx^{(k+1)} = b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}.$$

Indien $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ de k-de iteratiefout is, dan geldt er dat

$$e^{(k)} = Ge^{(k-1)}, \qquad \text{met} \quad \begin{cases} G = -D^{-1}(U + L) & \text{voor Jacobi} \\ G = -(L + D)^{-1}U & \text{voor Gauss-Seidel.} \end{cases}$$

De spectraalradius van de matrix G is gedefinieerd als $\rho(G) = \max\limits_i(|\lambda_i(G)|)$.

Probleem 1. (Jacobi vs Gauss-Seidel) Gebruik de methodes van Jacobi en Gauss-Seidel, geïmplementeerd in resp. `jacobi.m` en `gs.m`, om het volgende stelsel op te lossen. Gebruik als startwaarde $x_1 = x_2 = x_3 = 1$ en doe 20 iteraties. De gegeven MATLAB functies berekenen de fout t.o.v. een referentie oplossing, die je kan berekenen met `\`.

$$\begin{cases} 4x_1 - x_2 = 1 \\ -x_1 + 4x_2 - x_3 = 0 \\ - x_2 + 4x_3 = 1 \end{cases}$$

(a) Maak in één figuur voor elke methode een grafiek van de fout en voorzie een legende.

(b) Bereken voor elke methode met MATLAB een schatting van de convergentiefactor.

(c) Bereken voor elke methode de spectraalradius m.b.v het commando `eig`. Wat besluit je?

2 Niet-lineaire stelsels

Probleem 2. (Newton-Raphson) In deze oefening implementeer je de methode van Newton-Raphson en pas je deze toe op de volgende stelsels niet-lineaire vergelijkingen:

$$\begin{cases} x^2 + x - y^2 - 1 = & 0 \\ y - \sin(x^2) = & 0 \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 + 4y^2 - 16 = 0 \\ xy^2 - x - 4 = 0 \end{cases}$$

(a) Vul de functie `newton.m` aan zodat deze werkt zoals aangegeven in de commentaar.

(b) Bestudeer het script `oef2.m` en voer het uit om te zien of je functie werkt.

(c) Vul de anonieme functies voor `F` en `J` aan voor het tweede stelsel.

(d) Experimenteer met verschillende startwaarden en met de parameters `tol` en `Kmax`.

(e) Ga voor beide stelsels en de verschillende oplossingen na of de Jacobiaan regulier of singulier is.

Probleem 3. (Vereenvoudigde Newton-Raphson) In deze oefening pas je de methode van vereenvoudigde Newton-Raphson toe op het volgende stelsel:

$$\begin{cases} y - \sin(\pi x) = 0 \\ (x-1)^2 + (y-1)^2 = \dfrac{1}{3} \end{cases}$$

Bestudeer het script `oef3.m`.

(a) Voer het script verschillende keren uit met telkens een andere startwaarde. Naar welke oplossing kan de totale stapmethode convergeren mits een goede startwaarde?

(b) Vul het script aan zodat ook de enkelvoudige stapmethode uitgevoerd wordt. Naar welke oplossing kan deze methode convergeren?

(c) Bepaal voor elke methode de convergentie orde en de convergentiefactor.

(d) Pas de anonieme functies `vNRx` en `vNRy` aan zodat nu x berekend wordt uit de tweede vergelijking en y uit de eerste. Naar welke oplossing is er nu convergentie?

Probleem 4. (Complexe nulpunten - I) Gebruikt de methode van Newton-Raphson om de complexe nulpunten van onderstaande vergelijkingen te vinden. Beschouw een complex getal $z = x + iy$ als twee variabelen en genereer telkens een stelsel.

(a) $2z^2 + z + 1 = 0$

(b) $z - e^z = 0$

Probleem 5. (Complexe nulpunten - II) Wanneer de complexe functie $f:\ \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ analytisch is, zal de iteratieformule

$$z^{(k+1)} = z^{(k)} - \frac{f(z^{(k)})}{f'(z^{(k)})}, \quad z^{(0)} \in \mathbb{C} \tag{1}$$

dezelfde eigenschappen behouden als de Newton-Raphson formule voor reële nulpunten. Formule (1) kan direct geïmplementeerd worden omdat Matlab rekent met complexe getallen. Zoek de complexe wortels van de functies uit de vorige opgave met behulp van deze methode. Merk wel dat je daarbij alleen naar een complex nulpunt kan convergeren indien de startwaarde complex is. Bewijs m.b.v. de Cauchy-Riemann voorwaarden dat beide methoden in feite identiek zijn.