Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 17 (PC): Het berekenen van eigenwaarden

In de oefenzitting ga je m.b.v. Matlab verschillende methodes voor het berekenen van de eigenwaarden van een matrix uitproberen op een voorbeeld. Het relevante deel van de cursus is Hoofdstuk 6 van Deel 2: 'Het berekenen van eigenwaarden'. Je past ook de methode van Jacobi uit Hoofdstuk 4 van Deel 2 toe op een stelsel van lineaire vergelijkingen en je onderzoekt het verband tussen de convergentie van deze methode en de methode van de machten voor eigenwaarden.

Voor het uitwerken van de opgaven gebruik je `.m`-bestanden die je kan vinden op Toledo.

Theorie

Berekenen van eigenwaarden Een willekeurige startvector $X^{(0)}$ is te schrijven als een lineaire combinatie van de eigenvectoren $\{V_k\}_{k=1}^n$ van een matrix A die van eenvoudige structuur is. Er geldt dan dat

$$A^k X^{(0)} = \lambda_1^k \left(\alpha_1 V_1 + \alpha_2 \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k V_2 + \ldots + \alpha_n \left(\frac{\lambda_n}{\lambda_1}\right)^k V_n \right).$$

We nemen aan dat

$$|\lambda_1| > |\lambda_2| \geq |\lambda_3| \geq \cdots \geq |\lambda_n|.$$

Bij de methode van de machten zal hierdoor de benadering van de eigenvector convergeren naar V_1 en men kan aantonen dat de convergentiefactor gelijk is aan $\rho = \lambda_2/\lambda_1$. Dit is ook de convergentiefactor voor de opeenvolgende benaderingen van de eigenwaarde λ_1.

Bij de methode van de inverse machten met verschuiving σ past men de methode van de machten toe op de matrix $(\sigma I - A)^{-1}$. Deze matrix heeft dezelfde eigenvectoren als de matrix A en heeft eigenwaarden $1/(\sigma - \lambda_i),\ i = 1, \ldots, n$. Hoe beter σ een goede benadering is van een bepaalde eigenwaarde, des te sneller de convergentie.

Indien men bij de methode van de inverse machten de verschuiving adaptief maakt, en voor σ steeds de nieuwe benadering van de eigenwaarde neemt, dan wordt de convergentie zelfs kwadratisch.

Iteratief oplossen van stelsels lineaire vergelijkingen Voor de methoden van Jacobi en Gauss-Seidel voor het oplossen van een stelsel $AX = B$ geldt er dat

$$E^{(k)} = GE^{(k-1)}, \qquad \text{met} \quad \begin{cases} G = -D^{-1}(U + L) & \text{voor Jacobi} \\ G = -(L + D)^{-1}U & \text{voor Gauss-Seidel} \end{cases}$$

met $E^{(k)} = X^{(k)} - X^*$ de k-de iteratiefout. Indien we $E^{(0)}$ schrijven als een linaire combinatie van de eigenvectoren $\{V_k\}_{k=1}^n$ van G, dan krijgen we

$$E^{(k)} = G^k E^{(0)} = \alpha_1 \lambda_1^k V_1 + \alpha_2 \lambda_2^k V_2 + \ldots + \alpha_n \lambda_n^k V_n.$$

Hieruit ziet men dat als $\alpha_1 \neq 0$ de fout afneemt zoals $\mathcal{O}(\lambda_1^k)$, en dat de convergentiefactor in modulus gelijk is aan de spectraalradius $\rho(G) = \max_i (|\lambda_i(G)|)$.

Beschrijving van de Matlab-bestanden

- `[x, mu] = machten(A, x0, N)` past de methode van de machten met scalering toe op de matrix `A` met `x0` als startvector en `N` het aantal iteraties. Als output krijg je de benaderde eigenvector `x` en de opeenvolgende benaderingen `mu` van de overeeenkomstige eigenwaarde.
- `[x,mu] = invmachten(A, x0, sigma, N)` past de methode van de inverse machten met verschuiving `sigma` toe op de matrix `A` met `x0` als startvector en `N` het aantal iteraties. Dit komt overeen met het toepassen van de methode van de machten op $(\sigma I - A)^{-1}$. Hoe beter de schatting σ voor een bepaalde eigenwaarde, hoe sneller de methode zal convergeren. Als output krijg je de benaderde eigenvector `x` en de opeenvolgende benaderingen `mu` van de overeeenkomstige eigenwaarde.
- `[x,mu] = invmachten_adaptief(A, x0, sigma, N)` past de methode van de inverse machten met adaptieve verschuiving toe op de matrix `A` met `x0` als startvector en `N` het aantal iteraties. Als output krijg je de benaderde eigenvector `x` en de opeenvolgende benaderingen `mu` van de overeeenkomstige eigenwaarde.
- `fout = jacobi(A, b, x0, xe, n)` past de methode van Jacobi toe voor het iteratief oplossen van een stelsel $Ax = b$ met startvector `x0`, exacte oplossing `xe` en aantal iteraties `n` . Als output krijg je de normsgewijze relatieve fout van de verschillende iteraties, berekend t.o.v. de exacte oplossing `xe`.

Oefeningen

Probleem 1. (Methode van de machten) Pas de methode van de machten toe om de dominante eigenwaarde te berekenen van onderstaande matrices A en B. Gebruik hierbij als startvector `x0` achtereenvolgens $[1\ 0\ 0]^T$ en $[1\ 1\ 1]^T$.

$$A = \begin{pmatrix} 102 & -201 & 100 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -1 & 4 & 0 \\ -2 & 5 & 0 \\ 0 & 1 & 2 \end{pmatrix}.$$

(a) Plot telkens de relatieve fouten (vergelijk met de output van `eig`).

(b) Indien je convergentie hebt, bereken dan numeriek een schatting voor de convergentiefactor en vergelijk deze waarde met de theoretische convergentiefactor.

(c) Verklaar eventueel onverwacht numeriek gedrag.

Probleem 2. (Methode van de inverse machten) Gebruik `invmachten.m` om van bovenstaande matrix B met startvector `x0` $= [1\ 0\ 0]^T$ sneller de eigenwaarden te vinden door aan `sigma` een benadering van de gezochte eigenwaarde toe te kennen. Gebruik de waarden 2.8, 2.9 en 2.99 voor `sigma`.

(a) Plot de fouten in één figuur samen met de fout voor de methode van de machten.

(b) Bepaal de theoretische convergentiefactoren ρ en voeg de grafieken van ρ^k toe aan je figuur.

Probleem 3. (Gevoeligheid voor initiële condities bij Jacobi) Doe dertig Jacobi-iteraties om het volgende stelsel op te lossen:

$$\left\{\begin{array}{rcrcrcr} 3x_1 & - & 2x_2 & + & 2x_3 & = & 3 \\ -2x_1 & + & 3x_2 & - & 2x_3 & = & -1 \\ 2x_1 & - & 2x_2 & + & 3x_3 & = & 3 \end{array}\right.$$

Neem als startwaarden $\begin{bmatrix} 3 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ en $\begin{bmatrix} 3.0001 & 2 & 0 \end{bmatrix}^T$ en plot de fouten. Verklaar wat er gebeurt:

(a) Bereken de iteratiematrix G en bereken de eigenwaarden en eigenvectoren.

(b) Wat is de spectraalradius $\rho(G)$? Wat besluit je over de convergentie?

(c) Bepaal de initiële foutvector $E^{(0)}$. Verklaar nu in detail het convergentiegedrag dat je bekomt. (Hint: maak gebruik van de eigenvectoren van G.)

Probleem 4. (Methode van de inverse machten met adaptieve verschuiving) Pas `invmachten_adaptief` toe op de matrix B met startvector `x0` $= [\,1\ 0\ 0\,]^T$, $N = 10$ en een eerste schatting voor `sigma` gelijk aan 2.8.

(a) Bereken en plot de relatieve fout. Bekijk ook de uitvoer `mu` en de fout in de Command Window. Welke nauwkeurigheid bereik je?

(b) Wat is de orde van convergentie?

(c) Verklaar waarom je vanaf een bepaalde iteratie enkel nog `NaN` waarden krijgt.

(d) Probeer ook eens waarden voor `sigma` die dichter bij de andere eigenwaarden van B liggen.