Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 12 (PC): Oplossen van niet-lineaire vergelijkingen

Het Maple bestand voor Probleem 1 en de `.m`-bestanden voor Probleem 4 kan je vinden op Toledo.

Probleem 1. (Convergentiesnelheid m.b.v. Maple) Open het Maple bestand **methods.mws**. De nulpunten van een gegeven functie worden gezocht met de volgende methodes: `bissectie`, `secant`, `newton`, `muller` en `halley`.

Voor alle methodes wordt het verloop van de benadering en van de relatieve fout $\epsilon^{(k)}$ weergegeven. Ook wordt voor elke methode het verloop van $\rho^{(k)} = \epsilon^{(k)}/[\epsilon^{(k-1)}]^p$ weergegeven, waarbij steeds de gekende orde van convergentie p gebruikt wordt die je kan terugvinden in Tabel 2.9 op p. 233 van het handboek.

- Bekijk rustig het Maple-werkblad. Over welke functie gaat het, wat wordt er precies geïmplementeerd, ...?
- Komen de convergentiefactoren en ordes overeen met wat er in de cursus staat?
- Verander de functie in $f(x) = x^2 - 2$, $f(x) = (x - 1.1)^2$ en $f(x) = (x - 1.4)^3$.
- Wat gebeurt er met de convergentiefactoren?
- Welke methodes falen en waarom?
- Verander de functie in $f(x) = \cos(x)$ en bekijk de resultaten van Newton-Raphson. Ga in Maple na wat de orde is. Bewijs dit ook theoretisch.

Herinnering: als je per iteratiestap een constant aantal cijfers wint, dan convergeert de methode lineair. Als het aantal cijfers verdubbelt, dan zegt men dat het algoritme kwadratisch convergeert. Ligt het ertussen, dan spreekt men van een superlineair convergentiegedrag. Het nagaan van de convergentie-orde kan natuurlijk alleen gebeuren indien de getallen met voldoende cijfers worden weergegeven.

Opmerking: als je iets verandert aan het Maple-werkblad, begin dan steeds terug bovenaan met `restart`. Je kan het hele werkblad opnieuw uitvoeren door op **!!!** te drukken.

Probleem 2. (Gulden snede) In deze opgave worden methoden onderzocht om de gulden snede (i.e., $(\sqrt{5}-1)/2$) numeriek te berekenen waarbij enkel gebruik gemaakt wordt van elementaire bewerkingen (optellen en vermenigvuldigen). De gulden snede kan berekend worden als de positieve oplossing van de vergelijking

$$x^2 + x - 1 = 0.$$

Implementeer hiervoor onderstaande substitutieformules:

(a) $x^{(k)} = 1 - \left(x^{(k-1)}\right)^2,$

(b) $x^{(k)} = \dfrac{3\left(x^{(k-1)}\right)^2 - x^{(k-1)} + 1}{4x^{(k-1)}},$

(c) $x^{(k)} = \dfrac{4 - x^{(k-1)}}{4x^{(k-1)} + 3},$

(d) $x^{(k)} = x^{(k-1)} - \dfrac{\left(x^{(k-1)}\right)^2 + x^{(k-1)} - 1}{2x^{(k-1)} + 1}.$

Neem als startwaarde $x^{(0)} = 0.7$.

- Ga telkens na of er convergentie of divergentie optreedt. Komt dit overeen met de theorie?
- Rangschik de formules volgens snelheid van convergentie. Wat zijn de convergentiefactoren? Wat is de convergentie orde?
- Hoe zie je of de convergentie al dan niet monotoon is?

Probleem 3. (Newton-Raphson) De iteratiefunctie voor de methode van Newton-Raphson is

$$F(x) = x - \frac{h(x)}{h'(x)}.$$

Gebruik deze methode om $\sqrt{2}$ te berekenen. Dit kan bv. door de oplossing te zoeken van één van onderstaande vergelijkingen. Ga de convergentie na van elk van die vergelijkingen. Gebruik hiervoor de startwaarde $x^{(0)} = 2$. Herhaal daarna de berekeningen met de startwaarde $x^{(0)} = 6$.

$$\begin{aligned} x^2 - 2 &= 0 \\ 1 - \frac{2}{x^2} &= 0 \\ x - \frac{2}{x} &= 0 \end{aligned}$$

$\sqrt{2}$ voldoet ook aan volgende vergelijking: $x^4 - 4x^2 + 4 = 0$. Bereken deze wortel met behulp van de Newton-Raphson methode en m.b.v. de substitutieformule

$$x^{(k)} = x^{(k-1)} - 2\frac{f\left(x^{(k-1)}\right)}{f'\left(x^{(k-1)}\right)}.$$

Waarom convergeert de tweede methode sneller? Kijk hiervoor naar een oefening van de vorige oefenzitting.

Probleem 4. Bereken met behulp van `secant.m`, `bisect.m`, `dekker.m` en je eigen Newton-Raphson implementatie het nulpunt van $f(x) = \tan(x) - x - 1$ gelegen in het interval $[0, \frac{\pi}{2}]$. Wat is de invloed van de startwaarden op de convergentie van de methode?