Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 11: substitutiemethodes en Newton-Raphson

1 Theorie

We benaderen de wortels van de niet-lineaire vergelijking $f(x) = 0$ m.b.v. substitutiemethodes. Een substitutiemethode zet de vergelijking $f(x) = 0$ om in een vast punt vergelijking $x = F(x)$. De iteratieformule ziet er dan uit als

$$x^{(k+1)} = F\left(x^{(k)}\right). \tag{1}$$

Een punt x^* dat voldoet aan $x^* = F(x^*)$ heet een vaste punt van F.

Consistentie

Door het gebruik van een substitutiemethode kunnen er nulpunten verdwenen of bijgevoegd zijn. In dit verband worden de volgende begrippen gedefinieerd:

(i) $F(x)$ is **consistent** met de vergelijking $f(x) = 0$ als alle nulpunten van $f(x)$ ook vaste punten van $F(x)$ zijn $\longrightarrow \quad f(x) = 0 \Longrightarrow F(x) = x$

(ii) $F(x)$ is **reciprook consistent** met de vergelijking $f(x) = 0$ als alle vaste punten van $F(x)$ ook nulpunten van $f(x)$ zijn $\longrightarrow \quad f(x) = 0 \Longleftarrow F(x) = x$

(iii) $F(x)$ is **volledig consistent** als $F(x)$ consistent en reciprook consistent is $\longrightarrow \quad f(x) = 0 \Longleftrightarrow F(x) = x.$

Convergentie

Voor een differentieerbare $F(x)$ geldt **Stelling 14.2**: het iteratieproces (1) convergeert naar een vast punt x^* van $F(x)$ indien $|F'(x)| \leqslant M < 1$ in een bepaald interval rond $x^{(0)}$ en x^*. Het teken van $F'(x)$ bepaalt of de convergentie monotoon zal verlopen (+) of volgens een vierkante spiraal (−).

Zij $\{x^{(k)}\}_0^\infty$ een rij van getallen die convergeert naar x^* . De fout van de k-de benadering is $\varepsilon^{(k)} = x^{(k)} - x^*$. Zij

$$\rho^{(k)} = \frac{x^{(k)} - x^*}{x^{(k-1)} - x^*} = \frac{\varepsilon^{(k)}}{\varepsilon^{(k-1)}}. \tag{2}$$

Op voorwaarde dat de limiet bestaat noemen we $\rho = \lim_{k\to\infty} \rho^{(k)}$ de **convergentiefactor** van het benaderingsproces. Voor differentieerbare $F(x)$ met vast punt x^* en iteratieproces (1) is de convergentiefactor gelijk aan $\rho = F'(x^*)$ (zie **Stelling 15.2**).

Voor convergentie moet $|\rho| < 1$. Hoe kleiner $|\rho|$ is, des te sneller de convergentie. Als $\rho = 0$, dan kan men convergentiesnelheden vergelijken door de convergentieorde te definiëren. De **orde van convergentie** van het benaderingsproces is het getal p, $1 \leq p \in \mathbb{R}$, zodat[1]

$$\varepsilon^{(k+1)} = O([\varepsilon^{(k)}]^p) \quad \text{en} \quad \varepsilon^{(k+1)} \neq o([\varepsilon^{(k)}]^p). \tag{3}$$

Dit getal p bepaalt ergens een grens. Zij

$$\lambda(n) = \lim_{k\to\infty} \frac{\varepsilon^{(k+1)}}{[\varepsilon^{(k)}]^n},$$

dan geldt er

$$\lambda(n) = \begin{cases} 0 & n < p \\ \rho_p & n = p \\ \infty & n > p \end{cases} \tag{4}$$

met $0 \leq \rho_p \leq \infty$.

Als de orde 1 is, dan is ρ_1 de convergentiefactor zoals wij hem hierboven gedefinieerd hebben. De orde van een substitutiemethode is altijd een natuurlijk getal. Om de orde van een substitutiemethode te bepalen, kan je **Stelling 15.3** gebruiken. We noemen een benaderingsproces van orde 1 lineair, een benaderingsproces van orde 2 kwadratisch en een benaderingsproces van orde 3 kubisch.

De methode van Newton-Raphson is een substitutiemethode met

$$F(x) = x - \frac{f(x)}{f'(x)},$$

zoals uitgelegd in Sectie 6. In Sectie 14.4 wordt de consistentie en convergentie van deze methode nagegaan.

2 Oefeningen

Probleem 1. Bewijs vergelijking (4).

Probleem 2. Beschouw de volgende substitutiemethodes voor de wortel van $f(x) = x + \log(x) = 0$.

(a) $x^{(k)} = -\log(x^{(k-1)})$

(b) $x^{(k)} = e^{-x^{(k-1)}}$

Ga voor beide methodes de consistentie en de convergentie na. Schets $F(x)$ en geef grafisch de convergentie weer voor de startwaarde $x^{(0)} = 0.9$. (De wortel is $x^* = 0.56714$.)

[1] Zie de Appendix van Hoofdstuk 2 van Deel 1 van het handboek voor de definities van *grote O* en *kleine O*.

Probleem 3. ($\sqrt{a}$ m.b.v. Newton-Raphson) Pas Newton-Raphson toe op de vergelijking $f(x) = 1 - \dfrac{a}{x^2}$.

(a) Onderzoek de consistentie.

(b) Onderzoek de convergentie. Wat is de orde?

(c) Schets $F(x)$.

(d) Voor welke startwaarden is er convergentie?

Probleem 4. Als x^* een m-voudige wortel is van $f(x) = 0$, dan geldt voor de Newton-Raphson methode dat ze lineair is als $m > 1$ en minstens kwadratisch als $m = 1$. Toon aan dat de volgende aangepaste methode minstens van tweede orde is

$$F(x) = x - m\frac{f(x)}{f'(x)},$$

als m de multipliciteit is van de wortel x^* van $f(x) = 0$. Maak gebruik van de afleiding in het handboek bij de gevalstudie van de methode van Newton-Raphson (Sectie 14.4) om niet al het rekenwerk opnieuw te moeten doen.
(Denkvraagje: Als deze methode hogere orde heeft dan NR, waarom wordt ze dan niet verkozen boven NR?)

Probleem 5. Beschouw de volgende substitutiemethodes voor de wortel van $f(x) = x + \log(x) = 0$.

(a) $x^{(k)} = \dfrac{x^{(k-1)} + e^{-x^{(k-1)}}}{2}$

(b) $x^{(k)} = \sqrt{-x^{(k-1)} \log(x^{(k-1)})}$

Ga voor beide methodes de consistentie en de convergentie na. Schets $F(x)$ en geef grafisch de convergentie weer voor de startwaarde $x^{(0)} = 0.9$. (De wortel is $x^* = 0.56714$.)

Probleem 6. ($\sqrt{a}$ m.b.v. Newton-Raphson) Pas Newton-Raphson toe op de vergelijking $f(x) = x - \dfrac{a}{x}$.

(a) Onderzoek de consistentie.

(b) Onderzoek de convergentie. Wat is de orde?

(c) Schets $F(x)$.

(d) Voor welke startwaarden is er convergentie?