1 QR Factorisatie

1.1 Householder Transformatie

Gegeven een matrix A :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

Om nullen te maken in de eerste kolom vanaf de tweede rij, selecteer de kolomvector waar de nullen moeten komen. Als er nullen moeten komen vanaf de i+1'de rij, behoudt dan de elementen uit de kolomvector vanaf het i-de element (alle elementen die nul moeten worden en het element erboven). Noem deze vector x :

$$x = \begin{pmatrix} a_{11} \\ a_{21} \\ a_{31} \end{pmatrix}$$

Bereken v (is later nodig), $sgn(x_1)$ is hier de sign-functie van het eerste element uit x, in ons geval is die a_{11}

$$\mathbf{v} = \mathbf{x} + sgn(x_i)||x||.e_i$$

Hiermee berekenen we P_1

$$P_1 = I - \frac{2vv^T}{v^Tv}$$

Deze P_1 heeft als eigenschap dat $P_1x = (sgn(x_1)||x||, 0, ..., 0)^T$

Dus in ons voorbeeld wordt $\mathbf{P}x = (sgn(a_{11})||x||, 0, ..., 0)^T$

P_1A levert een nieuwe matrix op waarbij de gewenste elementen nul zijn :

$$P_1A = \begin{pmatrix} sgn(a_{11})||x|| & * & * \\ 0 & b_{22} & b_{23} \\ 0 & b_{32} & b_{33} \end{pmatrix}$$

Hierbij zijn de * nieuwe waarden, maar onbelangrijk, en de b_{ij} nieuwe waarden die nog gebruikt worden.

Om in de volgende kolom nullen te creëren doen we hetzelfde, maar x is hier kleiner :

$$x = \begin{pmatrix} b_{22} \\ b_{32} \end{pmatrix}$$

We bereken v exact zoals hiervoor, en P_2' zoals P_1.
Stel we bekomen P_2' :

$$P_2' = \begin{pmatrix} p_{22} & p_{23} \\ p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Om nu de benodigde P_2 te bekomen moet P_2' de juiste dimensie krijgen, die gebeurt als volgt :

$$P_2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & p_{22} & p_{23} \\ 0 & p_{32} & p_{33} \end{pmatrix}$$

Vermenigvuldigen we nu P_1A met P_2 dan bekomen we de gewenste bovendriehoeksmatrix :

$$P_2P_1A = \begin{pmatrix} sgn(a_{11})||x_1|| & * & * \\ 0 & sgn(b_{22})||x_2|| & * \\ 0 & 0 & c_{33} \end{pmatrix}$$

Stellen we nu :

$$Q^T = P_2P_1$$

Dan (De P's zijn symmetrisch):

$$Q = P_1P_2$$

Dan krijgen we de QR factorisatie van A als volgt :

$$R = P_2P_1A = Q^TA$$

$$QR = A$$

Deze procedure is volledig uitbreidbaar voor grotere (of kleinere) dimensies van A.