Oefeningen Numerieke Wiskunde: Oefenzitting 2

Tom Sydney Kerckhove
Verbeteringen door Ward Schodts

19 februari 2014

1 Probleem 1

De exponent gaat van -126 tot 127. Dit betekent dat hier 8 bits voor nodig zijn. Er blijven dus nog $32 - 8 = 23$ bits over voor de mantisse want er is ook nog een tekenbit. Een andere manier om dit resultaat te bekomen is de formule voor de machine precisie te gebruiken.

$$\epsilon_{mach} = \frac{b^{1-p}}{2}$$

Hierin is b de basis en p het aantal juiste cijfers na de komma. Uit deze formule halen we de p.

$$1 - p = \log_b(2\epsilon_{mach})$$

$$p = 1 - \log_2(2 \cdot 2^{-24}) = 24 \text{ (waarvan 1 tekenbit, dus) } p = 23$$

Volgens dezelfde redenering vinden we dat het aantal bits voor het teken, de mantisse en de exponent bij de dubbele-nauwkeurigheidsgetallen.

2 Probleem 2

- We weten dat 1 en 2 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

  $$1 = .100\ldots00 \cdot 2^1$$

  $$2 = .100\ldots00 \cdot 2^2$$

  We hebben hier weer een mantisse van 52 cijfers.
  Hier zitten dus $2^m - 1 = 2^{52} - 1$ getallen tussen.

- Voor de gemakkelijkheid bereken we eerst van 7 tot 8, en dan van 8 tot 9. We weten dat 7, 8 en 9 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

  $$7 = .11100\ldots00 \cdot 2^3$$

  $$8 = .10000\ldots00 \cdot 2^4$$

  $$9 = .10010\ldots00 \cdot 2^4$$

  Hier zitten dus $2^{50} + 2^{49} - 1$ getallen tussen.

3 Probleem 3

Het laatste zinvolle getal in deze rij is 1000. De overgang van 999 naar 1000 resulteert niet in een fout want 1000 wordt als volgt voorgesteld.

$$0.100 \cdot 10^4$$

Als we hier echter nog 1 bij optellen gebeurt er een absolute afrondingsfout van precies -1. Vanaf dan is de beschreven rij dus constant (1000).

4 Probleem 4

- - **bepaal_b** We beginnen met $A = 1$, dan vermenigvuldigen we A met 2 tot er een afrondingsfout gebeurd wanneer je $(A+1) - A = 1$ evalueert. A is nu gelijk aan 2^{10}. Vervolgens initialiseren we i op 1 en hogen i op tot $(A+i) = A$ geen afrondingsfout meer geeft. Dit is wanneer i 6 wordt. b is dus $.103 \cdot 10^4 - .102 \cdot 10^4 = 10$.
  - **bepaal_p** We initialiseren p op 1 en z op 10. Nu hogen we p en de exponent van 10^1 op tot $(z+1) - z = 1$ een afrondingsfout geeft. Dit is wanneer $p = 3$ geldt.
- - **bepaal_b**
    Te Bewijzen

    Bewijs. □ bewijs dit
  - **bepaal_p**
    Te Bewijzen

    Bewijs. □ bewijs dit

5 Probleem 5

1.

$$\overline{y} = fl\left(\frac{x}{fl\left(fl\left(\sqrt{fl\left(x+1\right)}\right)+1\right)}\right)$$

$$= \frac{x(1+\epsilon_1)}{\left(\left(\sqrt{(x+1)\left(1+\epsilon_4\right)}\right)\left(1+\epsilon_3\right)+1\right)\left(1+\epsilon_2\right)}$$

$$\overline{y} = y + \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \frac{\delta F}{\delta \epsilon_i}(0,0,0,0)$$

2. •

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{-x}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)(1+\epsilon_2)^2}$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0,0,0,0) = \frac{-x}{\sqrt{x+1}+1}$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{\left((\sqrt{1+x})(1+\epsilon_3)+1\right)^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,0,0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)}\left(\sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)}+1\right)^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0,0,0,0) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}$$
$$= \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)^3}+4(x+1)+2\sqrt{x+1})}$$

3.
$$\overline{y} \approx y + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_1 + \frac{-x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_2$$
$$+\frac{-x\sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}\epsilon_3 + \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)^3}+4(x+1)+2\sqrt{x+1})}\epsilon_4$$
$$\overline{y} \approx y + y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$
$$\overline{y} - y = y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$

6 Probleem 6

$$y = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

1.
$$\overline{y} = fl\left(\frac{fl(1-fl(\cos(x)))}{fl(x^2)}\right)$$
$$\overline{y} = \frac{(1-(\cos(x))(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)}{(x^2)(1+\epsilon_3)}(1+\epsilon_4)$$

2.
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1,0,0,0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_1}\frac{1-(\cos(x))(1+\epsilon_1)}{x^2} = -\frac{\cos(x)}{x^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0,\epsilon_2,0,0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_2}\frac{(1-\cos(x))(1+\epsilon_2)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))}{x^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_3}\frac{1-\cos(x)}{(x^2)(1+\epsilon_3)} = \frac{1-\cos(x)}{(x^2)}\frac{-1}{(1+\epsilon_3)^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,0,0) = -\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_4}\frac{(1-\cos(x))(1+\epsilon_4)}{x^2} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

3.

$$\overline{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + \frac{(1-\cos(x))}{x^2}\epsilon_2 - \frac{1-\cos(x)}{x^2}\epsilon_3 + \frac{1-\cos(x)}{x^2}\epsilon_4$$

$$\overline{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4.

$$\overline{y} - y \approx -\frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx -\frac{\cos(x)}{x(1-\cos(x))}\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

7 Probleem 7

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

1.

$$\overline{S} = fl(fl(...fl(fl(fl(fl(a_1 + a_2) + a_3) + a_4)...) + a_n)$$
$$= ((...((((a_1 + a_2)(1+\epsilon_2)) + a_3)(1+\epsilon_3))...) + a_n)(1+\epsilon_n)$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(\epsilon_2, 0, ..., 0) = a_1 + a_2$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0, \epsilon_3, 0, ..., 0) = a_1 + a_2 + a_3$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_i}(0, ..., 0, \epsilon_i, 0, ..., 0) = \sum_{j=1}^{i} a_j$$

2.

$$\overline{S} \approx y + \sum_{k=2}^{n} \epsilon_k \sum_{i=1}^{k} a_i$$

3.

$$\overline{S} - S \approx \sum_{k=2}^{n} \epsilon_k \sum_{i=1}^{k} a_i$$

8 Probleem 8

(a)

$$y = x\sin(x)$$

1.

$$\overline{y} = fl(xfl(\sin(x)))$$

$$\overline{y} = (x\sin(x)(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)$$

2. •

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0) = x\sin(x)$$

- $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,\epsilon_2) = x\sin(x)$$

3. $$\overline{y} \approx y + x\sin(x)\epsilon_1 + x\sin(x)\epsilon_2$$
$$\overline{y} \approx y + y\epsilon_2 + y\epsilon_3$$

4. $$\overline{y} - y = y\epsilon_1 + y\epsilon_2$$
$$\frac{\overline{y} - y}{y} = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

(b)
$$y = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

1. $$\overline{y} = fl\left(\frac{fl(1-fl(\cos(x)))}{fl(\sin(x))}\right)$$
$$\overline{y} = \left(\frac{(1-(\cos(x))(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)}{(\sin(x))(1+\epsilon_3)}\right)(1+\epsilon_4)$$

2. - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1,0,0,0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}\frac{1-\cos(x)(1+\epsilon_1)}{\sin(x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}$$
   - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,\epsilon_2,0,0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}\frac{(1-\cos(x))(1+\epsilon_2)}{\sin(x)} = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$
   - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}\frac{1-\cos(x)}{(\sin(x))(1+\epsilon_3)} = \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)(1+\epsilon_3)^2}$$
   $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,0,0) = \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$$
   - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)(1+\epsilon_4) = \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

3. $$\overline{y} \approx y + \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_1 + \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_2 + \frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}\epsilon_3 + \frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_4$$
$$\overline{y} \approx y + \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4. $$\overline{y} - y \approx \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y} \approx \frac{-\cos(x)}{1-\cos(x)}\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

(c)
$$y = \frac{1-e^{-2x}}{x}$$

1.

$$\overline{y} = fl\left(\frac{fl\left(1 - fl(e^{fl(-2x)})\right)}{x}\right)$$

$$\overline{y} = \left(\frac{\left(1 - ((e^{(-2x)(1+\epsilon_1)})(1+\epsilon_2))\right)(1+\epsilon_3)}{x}\right)(1+\epsilon_4)$$

2. •

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}\frac{1 - e^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x} = \frac{2xe^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x}$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0, 0) = \frac{2xe^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}\frac{1 - (e^{-2x})(1+\epsilon_2)}{x} = \frac{-e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}\frac{(1 - e^{-2x})(1+\epsilon_3)}{x} = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}\left(\frac{1 - e^{-2x}}{x}\right)(1+\epsilon_4) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x} + \frac{-e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

$$\overline{y} \approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x}\epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x}\epsilon_2 + y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4.

$$\overline{y} - y \approx \frac{2xe^{-2x}}{x}\epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x}\epsilon_2 + y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx \frac{2xe^{-2x}}{1 - e^{-2x}}\epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$$

(d)

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

1.

$$\overline{y} = fl\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\overline{y} = \left(((1+x)(1+\epsilon_2))^{\left(\frac{1}{x}\right)(1+\epsilon_1)}\right)(1+\epsilon_3)$$

2. •

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)(1+\epsilon_1)} = \frac{(x+1)^{\frac{\epsilon_1+1}{x}} ln(x+1)}{x}$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}} ln(x+1)}{x}$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}((1+x)(1+\epsilon_2))^{\frac{1}{x}} = \frac{(1+x)}{a}((1+x)(1+\epsilon_2))^{\frac{1}{x}-1}$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0) = \frac{(1+x)}{a}(1+x)^{\frac{1}{x}-1} = \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{a}$$

- $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,\epsilon_3)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)(1+\epsilon_3)=\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

3. $$\overline{y}\approx y+\frac{(x+1)^{\frac{1}{x}}ln(x+1)}{x}\epsilon_1+\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{a}\epsilon_2+\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\epsilon_3$$
$$\overline{y}\approx y+\frac{ln(x+1)}{x}y\epsilon_1+\frac{1}{a}y\epsilon_2+y\epsilon_3$$

4. $$\overline{y}-y\approx\frac{ln(x+1)}{x}y\epsilon_1+\frac{1}{a}y\epsilon_2+y\epsilon_3$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y}\approx\frac{ln(x+1)}{x}\epsilon_1+\frac{1}{a}\epsilon_2+\epsilon_3$$

(e)
$$y=\sqrt{e^x-1}$$

1. $$\overline{y}=fl\left(\sqrt{fl(fl(e^x)-1)}\right)$$
$$\overline{y}=\left(\sqrt{((e^x)(1+\epsilon_1)-1)(1+\epsilon_2)}\right)(1+\epsilon_3)$$

2. - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1,0,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}\sqrt{(e^x)(1+\epsilon_1)-1}=\frac{e^x}{2\sqrt{(e^x)(1+\epsilon_1)-1}}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(0,0,0)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$
   - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,\epsilon_2,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}\sqrt{(e^x-1)(1+\epsilon_2)}=\frac{e^x-1}{2\sqrt{(e^x-1)(1+\epsilon_2)}}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,0,0)=\frac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}$$
   - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,\epsilon_3)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(1+\epsilon_3)\sqrt{e^x-1}=\sqrt{e^x-1}$$

3. $$\overline{y}\approx y+\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\epsilon_1+\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}\epsilon_2+\sqrt{e^x-1}\epsilon_3$$
$$\overline{y}\approx y++y\frac{e^x}{2e^x-2}\epsilon_1+y\frac{1}{2}\epsilon_2+y\epsilon_3$$

4. $$\overline{y}-y\approx y\frac{e^x}{2e^x-2}\epsilon_1+y\frac{1}{2}\epsilon_2+y\epsilon_3$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y}\approx\frac{e^x}{2e^x-2}\epsilon_1+\frac{1}{2}\epsilon_2+\epsilon_3$$

(f)
$$y=\sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.

$$\overline{y} = \left(\sin\left(\frac{(1+\epsilon_1)}{x}\right)\right)(1+\epsilon_2)$$

$$\overline{y} = ...$$

2. •

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1} \sin\left(\frac{(1+\epsilon_1)}{x}\right) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{(1+\epsilon_1)}{x}\right)$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(0,0) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)(1+\epsilon_2) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_2$$

$$\overline{y} \approx y + y\frac{1}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + y\epsilon_2$$

4.

$$\overline{y} - y \approx y\frac{1}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + y\epsilon_2$$

$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx \frac{1}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + \epsilon_2$$

(g)

$$y = (1+x^2)^{x^2}$$

1.

$$\overline{y} = fl\left(\left(fl(1+fl(x^2))\right)^{fl(x^2)}\right)$$

$$\overline{y} = \left(\left((1+(x^2)(1+\epsilon_2))(1+\epsilon_3)\right)^{(x^2)(1+\epsilon_1)}\right)(1+\epsilon_4)$$

2. •

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(1+x^2)^{(x^2)(1+\epsilon_1)} = x^2(x^2+1)^{x^2(1+\epsilon_1)} ln(x^2+1)$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(0,0,0,0) = x^2(x^2+1)^{x^2} ln(x^2+1)$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(1+(x^2)(1+\epsilon_2))^{x^2} = x^4(1+(x^2)(1+\epsilon_2))^{x^2-1}$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0,0,0,0) = x^4(1+x^2)^{x^2-1}$$

•

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}((1+x^2)(1+\epsilon_3))^{x^2}$$

$$= (1+x^2)x^2((1+x^2)(1+\epsilon_3))^{x^2-1}$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,0,0) = (1+x^2)x^2(1+x^2)^{x^2-1}$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}\left((1+x^2)^{x^2}\right)(1+\epsilon_4) = (1+x^2)^{x^2}$$

3. $$\overline{y} \approx y + x^2(x^2+1)^{x^2} ln(x^2+1)\epsilon_1 + x^4(1+x^2)^{x^2-1}\epsilon_2$$
$$+(1+x^2)x^2(1+x^2)^{x^2-1}\epsilon_3 + (1+x^2)^{x^2}\epsilon_4$$
$$y = (1+x^2)^{x^2}$$
$$\overline{y} \approx y + x^2 y ln(x^2+1)\epsilon_1 + \frac{x^4 y}{1+x^2}\epsilon_2 + yx^2\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4. $$\overline{y} - y \approx x^2 y ln(x^2+1)\epsilon_1 + \frac{x^4 y}{1+x^2}\epsilon_2 + yx^2\epsilon_3$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y} \approx x^2 ln(x^2+1)\epsilon_1 + \frac{x^4}{1+x^2}\epsilon_2 + x^2\epsilon_3$$

(h)

$$y = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2x^2}$$

1. $$\overline{y} = fl\left(\frac{fl\left(fl\left(e^{fl(x^2)}\right) - fl\left(e^{fl(-fl(x^2))}\right)\right)}{fl(2fl(x^2))}\right)$$
$$\overline{y} = \frac{\left(e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{(-(x^2)(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)}\right)(1+\epsilon_4)}{(2(x^2)(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_3)}(1+\epsilon_5)$$

2. - $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1,0,0,0,0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}\frac{e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{-(x^2)(1+\epsilon_1)}}{2(x^2)(1+\epsilon_1)}$$
$$= \frac{e^{-x^2(\epsilon_1+1)}\left(x^2(\epsilon_1+1)\left(e^{2x^2(\epsilon_1+1)}+1\right)\right) - e^{2x^2(\epsilon_1+1)} + 1}{2x^2(\epsilon_1+1)^2}$$

   AWW HELL NAW

9 Probleem 9

- Product

$$y = \prod_{i=1}^{n}$$

1. $$\overline{y} = fl(fl(...fl(fl(fl(a_1a_2)a_3)a_4)...a_{n-1})a_n)$$
$$\overline{y} = ((...((a_1a_2)(1+\epsilon_2)a_3)(1+\epsilon_3)...a_{n-1})(1+\epsilon_{n-1})a_n)(1+\epsilon_n)$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=2}^{n}(1+\epsilon_i)\right)$$

2. –

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, ..., 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1 + \epsilon_1)$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

–

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, ..., 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1 + \epsilon_2)$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

–

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_j}(0, ..., \epsilon_j, ..., 0) = \frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_j} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1 + \epsilon_j)$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_j}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \prod_{i=1}^{n} a_i$$

$$\overline{y} \approx y + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y$$

4.

$$\overline{y} - y \approx \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y$$

$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j$$

- Scalair Product

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

1.

$$\overline{y} = fl(fl(...fl(fl(fl(a_1b_1) + fl(a_2b_2)) + fl(a_3 + b_3))...) + fl(a_nb_n))$$

$$\overline{y} = (((a_1b_1(1 + \epsilon_{1.}) + a_2b_2(1 + \epsilon_{2.}))(1 + \epsilon_{2+}) + a_3b_3(1 + \epsilon_{3.})(1 + \epsilon_{3+})...)(1 + \epsilon_{n+})$$

2. –

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_{1.}}(0, ..., \epsilon_{1.}, ..., 0) = a_1b_1$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_{2.}}(0, ..., \epsilon_{2.}, ..., 0) = a_2b_2$$

$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_{i.}}(0, ..., \epsilon_{i.}, ..., 0) = a_ib_i$$

–

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{2+}}(0, ..., \epsilon_{2+}, ..., 0) = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{3+}}(0, ..., \epsilon_{3+}, ..., 0) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{i+}}(0, ..., \epsilon_{i+}, ..., 0) = \sum_{j=1}^{i} a_jb_j$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\epsilon_{i.} + \sum_{i=2}^{n} \epsilon_{i+} \sum_{j=1}^{i} a_jb_j$$

10 Probleem 10

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Bewijs. Bewijs door volledige inductie op n
Voor $n = 1$ is de stelling triviaal.
Stel dat de stelling klopt voor een bepaalde $n = k$, dan bewijzen we nu dat de stelling geldt voor $n = k + 1$.

1.

$$\overline{y} = fl\left(fl\left(fl\left(...\right) + fl\left(...\right)\right) + fl\left(fl\left(...\right) + fl\left(...\right)\right)\right)$$

LOLNOPE

□

11 Probleem 11

Een vermenigvuldiging met 2 geeft bijna geen fout in een computer. Een vermenigvuldiging met 10 daarentegen geeft wel degelijk een fout zoals we zien in de tweede grafiek. De machine werkt duidelijk met basis 2. De machine werkt met ongeveer 8 beduidende cijfers.

Todo list