Oefeningen Numerieke Wiskunde:
Oefenzitting 3

Tom Sydney Kerckhove
Verbeteringen door Ward Schodts

26 februari 2014

1 Bewegende kommavoorstelling

1.1 Probleem 1

$$b = 2 \text{ en } p = 53$$

$$eps = 2.2204e - 16 \;\text{ en } \epsilon_{mach} = 1.1102e - 16$$

Voorbeeld van een afrondingsfout:

$$(1 + 0.70 \cdot eps) - 1 = 2.2204e - 16$$

0.70 voor eps is net groot genoeg om eps naar boven laten af te ronden, vandaar dat eps wordt teruggegeven

1.2 Probleem 2

- Correct:
  0.125, 0.25, 0.5, 1, 2, 8, 1, 10 ,100, 1000.
- Incorrect:
  0.001, 0.01, 0.1

0.1 wordt voorgesteld als

```
+1.1001100110011001100110011001100110011001100110011010 2^01111111011 (2^-4)
```

De fout is dus $fl(0.1) - 0.1$.

```
-0.000000000000000000000000000000000000000000000000000100110011...  2^01111111011 (2^-4)
```

$$\Delta(0.1) = (1.00110011..)_2 \cdot 2^{-56}$$

2 Taylorreeks van e^x

2.1 Probleem 3

(a) De waarde van k verandert niet meer na een bepaalde iteratie omdat de component die nog toegevoegd wordt kleiner is dan voorstelbaar.

(b) Met matlab, zie abs_err en rel_err.

(c) LogLog of Semilogy geeft het mooiste resultaat.

(d) Zie matlab voor illustratie.

2.2 Probleem 4

Voor grote n delen we door een voorgestelde nul in de machine. De benadering convergeert beter, maar is ongeveer even goed.

2.3 Probleem 5

(a) Voor grote x duurt het langer voor x^k kleiner wordt dan $k!$.

(b) Zie matlab voor illustratie.

(c) Ja, de relatieve fout is van de grootteorde 10^{-15}.

(d) De absolute fout is van grootteorde 10^{-7}. Aangezien een de bovengrens voor de som van n getallen deels gegeven wordt door: $\epsilon_{mach} \cdot \sum_i^n a_i$. Bij deze waarden is de grootste waarde van t al reeds 10^8. We weten ook dat de machine precisie gelijk is aan $1.110223024625157e^{-16}$. Dus we zien dat de fout groter wordt als de bovengrens want $10^{-16} \cdot 10^8 = 10^{-8} < 10^{-7}$

2.4 Probleem 6

(a) Zie matlab voor illustratie.

(b) Nee, de relatieve fout is van de grootteorde 10^1.

(c) Ja.

$$\begin{aligned}\overline{S} - S &\approx \sum_{k=2}^{n} \epsilon_k \sum_{i=1}^{k} a_i \\ &= \sum_{k=2}^{n} \epsilon_k \sum_{i=1}^{k} \frac{x^n}{n!}\end{aligned}$$

Zoals we zien is de absolute fout in het begin heel groot omdat het even duur voordat x^n kleiner wordt dan $n!$.

3 Probleem 7

(a)

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x)}{x^2} = \lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{2x0} = \lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)}{2} = \frac{1}{2}$$

(b) Vanaf een bepaalde waarde wordt de benadering terug slechter, en daarna gaat alles naar de maan.

(c) LogLog werkt het best, omdat zowel x als abs_err een logaritmisch verloop hebben.

(d) De absolute fout is:

$$f(x) - \frac{1}{2} = -\frac{1}{2} + frac12 - \frac{x^4}{4!} + \frac{x^6}{6!} - ... =\sim \frac{x^4}{4!}$$

(e) TODO

4 Probleem 8

1. 0.1 wordt naar het volgende getal afgekapt:

   ```
   +0.000110011001100110011001100
   ```

   $$= 0.0999999046325683593 7$$

   De absolute fout is dus de volgende uitdrukking

   ```
   +0.0000000000000000000000000110011001100110011...
   =
   9.536743164617612e-8
   ```

   De relatieve fout is dus de volgende.

   ```
   9.536743164617612e-7
   ```

2. Vermenigvuldigen we de relatieve fout met 100 uur $(60 * 60 * 100)$, dan krijgen we de fout op de berekende tijd.

   $$0.343$$

3. $$0.343 * 1676 = 574.868m$$

5 Probleem 9

(a) (a) Wortels

$$y = \sqrt[2^{40}]{x}$$

i.

$$\overline{y} = fl\left(\sqrt{...fl\left(\sqrt{fl(\sqrt{x})}\right)...}\right)$$

$$\overline{y} = (1+\epsilon_{40})\sqrt{...(1+\epsilon_2)\sqrt{(1+\epsilon_1)\sqrt{x}}}$$

$$= (1+\epsilon_{40})(1+\epsilon_{39})^{\frac{1}{2}}(1+\epsilon_{38})^{\frac{1}{4}}...(1+\epsilon_2)^{\frac{1}{2^{38}}}(1+\epsilon_1)^{\frac{1}{2^{39}}}\ \sqrt[2^{40}]{x}$$

$$= \sqrt[2^{40}]{x}\prod_{i=1}^{40}(1+\epsilon_i)^{\frac{1}{2^{40-i}}}$$

ii.

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_i}(0,...,\epsilon_i,...,0) = \frac{\delta}{\delta\epsilon_i}\ \sqrt[2^{40}]{x}(1+\epsilon_i)^{\frac{1}{2^{40-i}}} = \sqrt[2^{40}]{x}\frac{(1+\epsilon_i)^{\frac{1}{2^{40-i}}-1}}{2^{40-i}}$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_i}(0,...,0) = \frac{\sqrt[2^{40}]{x}}{2^{40-i}}$$

iii.

$$\overline{y} \approx y + \sum_{i=1}^{40}\frac{\sqrt[2^{40}]{x}}{2^{40-i}}\epsilon_i$$

$$\overline{y} \approx y + \sum_{i=1}^{40}\frac{y}{2^{40-i}}\epsilon_i$$

iv.

$$\overline{y} - y \approx \sum_{i=1}^{40}\frac{y}{2^{40-i}}\epsilon_i$$

$$\frac{\overline{y}-y}{y} \approx \sum_{i=1}^{40}\frac{1}{2^{40-i}}\epsilon_i \leq \left(\frac{2^{40}-1}{2^{40}}+1\right)\epsilon_{mach}$$

(b) Kwadraten

$$y = x^{2^{40}}$$

i.

$$\overline{y} = fl\left(fl\left(fl\left(fl\left(fl\left(x^2\right)^2\right)^2\right)^2\right)\right)$$

$$\overline{y} = (1+\epsilon_{40})\left(...(1+\epsilon_3)\left((1+\epsilon_2)\left((1+\epsilon_1)x^2\right)^2\right)^2...\right)^2$$

$$\overline{y} = x^{2^{40}}\sum_{i=1}^{40}(1+\epsilon_i)^{2^{40-i}}$$

ii.

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_i}(0,...,\epsilon_i,...,0) = \frac{\delta}{\delta\epsilon_i}x^{2^{40}}(1+\epsilon_i)^{2^{40-i}} = x^{2^{40}}2^{40-i}(1+\epsilon_i)^{2^{40-i}-1}$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_i}(0,...,0) = x^{2^{40}}2^{40-i}$$

iii.

$$\overline{y} \approx y + \sum_{i=1}^{40} x^{2^{40}}2^{40-i}\epsilon_i = x^{2^{40}}\sum_{i=1}^{40}2^{40-i}\epsilon_i$$

$$\overline{y} \approx y + y\sum_{i=1}^{40}2^{40-i}\epsilon_i$$

iv.

$$\overline{y} - y \approx y\sum_{i=1}^{40}2^{40-i}\epsilon_i$$

$$\frac{\overline{y}-y}{y} \approx \sum_{i=1}^{40}2^{40-i}\epsilon_i \le (2_{40}-1)\,\epsilon_{mach}$$

We kunnen nu de fout berekenen.

$$y = x \text{ maar } \overline{y} \neq x$$

$$\overline{y} = x\left(1+\sum_{i=1}^{40}\frac{1}{2^{40-i}}\epsilon_i\right)\left(1+\sum_{j=1}^{40}2^{40-j}\epsilon_j\right)$$

(b) FTS

(c)

(d)