

Oefeningen Numerieke Wiskunde:

Oefenzitting 2

Tom Sydney Kerckhove
Verbeteringen door Ward Schodts

19 februari 2014

1 Probleem 1

De exponent gaat van -126 tot 127 . Dit betekent dat hier 8 bits voor nodig zijn. Er blijven dus nog $32 - 8 = 23$ bits over voor de mantisse want er is ook nog een tekenbit. Een andere manier om dit resultaat te bekomen is de formule voor de machine precisie te gebruiken.

$$\epsilon_{mach} = \frac{b^{1-p}}{2}$$

Hierin is b de basis en p het aantal juiste cijfers na de komma. Uit deze formule halen we de p .

$$1 - p = \log_b(2\epsilon_{mach})$$

$$p = 1 - \log_2(2 \cdot 2^{-24}) = 24 \text{ (waarvan 1 tekenbit, dus) } p = 23$$

Volgens dezelfde redenering vinden we dat het aantal bits voor het teken, de mantisse en de exponent bij de dubbele-nauwkeurigheidsgetallen.

2 Probleem 2

- We weten dat 1 en 2 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

$$1 = .100 \dots 00 \cdot 2^1$$

$$2 = .100 \dots 00 \cdot 2^2$$

We hebben hier weer een mantisse van 52 cijfers.

Hier zitten dus $2^m - 1 = 2^{52} - 1$ getallen tussen.

- Voor de gemakkelijker bereken we eerst van 7 tot 8, en dan van 8 tot 9. We weten dat 7, 8 en 9 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

$$7 = .11100 \dots 00 \cdot 2^3$$

$$8 = .10000 \dots 00 \cdot 2^4$$

$$9 = .10010 \dots 00 \cdot 2^4$$

Hier zitten dus $2^{50} + 2^{49} - 1$ getallen tussen.

3 Probleem 3

Het laatste zinvolle getal in deze rij is 1000. De overgang van 999 naar 1000 resulteert niet in een fout want 1000 wordt als volgt voorgesteld.

$$0.100 \cdot 10^4$$

Als we hier echter nog 1 bij optellen gebeurt er een absolute afrondingsfout van precies -1 . Vanaf dan is de beschreven rij dus constant (1000).

4 Probleem 4

- – **bepaal_b** We beginnen met $A = 1$, dan vermenigvuldigen we A met 2 tot er een afrondingsfout gebeurd wanneer je $(A + 1) - A = 1$ evalueert. A is nu gelijk aan 2^{10} . Vervolgens initialiseren we i op 1 en hogen i op zolang $(A + i) = A$. i is dus net groot genoeg om A op de volgende afronding te laten stoppen. Dit is wanneer i 6 wordt. b is dus $.103 \cdot 10^4 - .102 \cdot 10^4 = 10$.
- **bepaal_p** We initialiseren p op 1 en z op 10. Nu hogen we p en de exponent van 10^1 op tot $(z + 1) - z = 1$ een afrondingsfout geeft. Dit is wanneer $p = 3$ geldt.

- – **bepaal_b**
Te Bewijzen

Bewijs.

□

bewijs
dit

- **bepaal_p**
Te Bewijzen

Bewijs.

□

bewijs
dit

5 Probleem 5

1.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= fl \left(\frac{x}{fl \left(fl \left(\sqrt{fl(x+1)} \right) + 1 \right)} \right) \\ &= \frac{x(1 + \epsilon_1)}{\left(\left(\sqrt{(x+1)(1 + \epsilon_4)} \right) (1 + \epsilon_3) + 1 \right) (1 + \epsilon_2)} \\ \bar{y} &= y + \sum_{i=1}^4 \epsilon_i \frac{\delta F}{\delta \epsilon_i}(0, 0, 0, 0) \end{aligned}$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{x}{\sqrt{x+1} + 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{-x}{(\sqrt{x+1} + 1)(1 + \epsilon_2)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0, 0) = \frac{-x}{\sqrt{x+1} + 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{((\sqrt{1+x})(1+\epsilon_3)+1)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1+x}+1)^2}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)} \left(\sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)} + 1 \right)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, 0) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{x+1} (\sqrt{x+1} + 1)^2}$$

$$= \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)}^3 + 4(x+1) + 2\sqrt{x+1})}$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{y} &\approx y + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_1 + \frac{-x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_2 \\ &+ \frac{-x\sqrt{1+x}}{(\sqrt{1+x}+1)^2}\epsilon_3 + \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)}^3 + 4(x+1) + 2\sqrt{x+1})}\epsilon_4 \end{aligned}$$

$$\bar{y} \approx y + y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$

$$\bar{y} - y = y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$

6 Problem 6

$$y = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left(\frac{fl(1 - fl(\cos(x)))}{fl(x^2)} \right)$$

$$\bar{y} = \frac{(1 - (\cos(x))(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2)}{(x^2)(1 + \epsilon_3)}(1 + \epsilon_4)$$

2.

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_1} \frac{1 - (\cos(x))(1 + \epsilon_1)}{x^2} = -\frac{\cos(x)}{x^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_2} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \epsilon_2)}{x^2} = \frac{(1 - \cos(x))}{x^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_3} \frac{1 - \cos(x)}{(x^2)(1 + \epsilon_3)} = \frac{1 - \cos(x)}{(x^2)} \frac{-1}{(1 + \epsilon_3)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) = -\frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_4} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \epsilon_4)}{x^2} = \frac{1 - \cos(x)}{x^2}$$

3.

$$\bar{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + \frac{(1 - \cos(x))}{x^2}\epsilon_2 - \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\epsilon_3 + \frac{1 - \cos(x)}{x^2}\epsilon_4$$

$$\bar{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4.

$$\bar{y} - y \approx -\frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx -\frac{\cos(x)}{x(1 - \cos(x))}\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

7 Problem 7

$$S = \sum_{i=1}^n a_i$$

1.

$$\bar{S} = fl(fl(...fl(fl(fl(fl(a_1 + a_2) + a_3) + a_4)...)) + a_n)$$

$$= (((...(((a_1 + a_2)(1 + \epsilon_2)) + a_3)(1 + \epsilon_3))...)) + a_n)(1 + \epsilon_n)$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(\epsilon_2, 0, \dots, 0) = a_1 + a_2$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, \epsilon_3, 0, \dots, 0) = a_1 + a_2 + a_3$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_i}(0, \dots, 0, \epsilon_i, 0, \dots, 0) = \sum_{j=1}^i a_j$$

2.

$$\bar{S} \approx y + \sum_{k=2}^n \epsilon_k \sum_{i=1}^k a_i$$

3.

$$\bar{S} - S \approx \sum_{k=2}^n \epsilon_k \sum_{i=1}^k a_i$$

8 Problem 8

(a)

$$y = x \sin(x)$$

1.

$$\bar{y} = fl(x fl(\sin(x)))$$

$$\bar{y} = (x \sin(x)(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2)$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0) = x \sin(x)$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2) = x \sin(x)$$

3.

$$\bar{y} \approx y + x \sin(x) \epsilon_1 + x \sin(x) \epsilon_2$$

$$\bar{y} \approx y + y \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

4.

$$\bar{y} - y = y \epsilon_1 + y \epsilon_2$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} = \epsilon_1 + \epsilon_2$$

(b)

$$y = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left(\frac{fl(1 - fl(\cos(x)))}{fl(\sin(x))} \right)$$

$$\bar{y} = \left(\frac{(1 - (\cos(x))(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_2)}{(\sin(x))(1 + \epsilon_3)} \right) (1 + \epsilon_4)$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \frac{1 - \cos(x)(1 + \epsilon_1)}{\sin(x)} = \frac{-\cos(x)}{\sin(x)}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \frac{(1 - \cos(x))(1 + \epsilon_2)}{\sin(x)} = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} \frac{1 - \cos(x)}{(\sin(x))(1 + \epsilon_3)} = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)(1 + \epsilon_3)^2}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) = \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4} \left(\frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \right) (1 + \epsilon_4) = \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)}$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_1 + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_2 + \frac{\cos(x) - 1}{\sin(x)} \epsilon_3 + \frac{1 - \cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_4$$

$$\bar{y} \approx y + \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_1 + y \epsilon_2 - y \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

4.

$$\bar{y} - y \approx \frac{-\cos(x)}{\sin(x)} \epsilon_1 + y \epsilon_2 - y \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \frac{-\cos(x)}{1 - \cos(x)} \epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

(c)

$$y = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left(\frac{fl(1 - fl(e^{fl(-2x)}))}{x} \right)$$

$$\bar{y} = \left(\frac{(1 - ((e^{(-2x)(1+\epsilon_1)})(1 + \epsilon_2))) (1 + \epsilon_3)}{x} \right) (1 + \epsilon_4)$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \frac{1 - e^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x} = \frac{2xe^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0, 0) = \frac{2xe^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \frac{1 - (e^{-2x})(1 + \epsilon_2)}{x} = \frac{-e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} \frac{(1 - e^{-2x})(1 + \epsilon_3)}{x} = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4} \left(\frac{1 - e^{-2x}}{x} \right) (1 + \epsilon_4) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x} + \frac{-e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

$$\bar{y} \approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x} \epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x} \epsilon_2 + y \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

4.

$$\bar{y} - y \approx \frac{2xe^{-2x}}{x} \epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x} \epsilon_2 + y \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \frac{2xe^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{1 - e^{-2x}} \epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$$

(d)

$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left((1 + x)^{\frac{1}{x}} \right)$$

$$\bar{y} = \left(((1 + x)(1 + \epsilon_2))^{\left(\frac{1}{x}\right)(1+\epsilon_1)} \right) (1 + \epsilon_3)$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} (1 + x)^{\left(\frac{1}{x}\right)(1+\epsilon_1)} = \frac{(x + 1)^{\frac{\epsilon_1 + 1}{x}} \ln(x + 1)}{x}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0) = \frac{(x + 1)^{\frac{1}{x}} \ln(x + 1)}{x}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} ((1 + x)(1 + \epsilon_2))^{\frac{1}{x}} = \frac{(1 + x)}{a} ((1 + x)(1 + \epsilon_2))^{\frac{1}{x} - 1}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0) = \frac{(1 + x)}{a} (1 + x)^{\frac{1}{x} - 1} = \frac{(1 + x)^{\frac{1}{x}}}{a}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) (1 + \epsilon_3) = \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right)$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}} \ln(x+1)}{x} \epsilon_1 + \frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{a} \epsilon_2 + \left((1+x)^{\frac{1}{x}} \right) \epsilon_3$$

$$\bar{y} \approx y + \frac{\ln(x+1)}{x} y \epsilon_1 + \frac{1}{a} y \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

4.

$$\bar{y} - y \approx \frac{\ln(x+1)}{x} y \epsilon_1 + \frac{1}{a} y \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \frac{\ln(x+1)}{x} \epsilon_1 + \frac{1}{a} \epsilon_2 + \epsilon_3$$

(e)

$$y = \sqrt{e^x - 1}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left(\sqrt{fl(fl(e^x) - 1)} \right)$$

$$\bar{y} = \left(\sqrt{((e^x)(1 + \epsilon_1) - 1)(1 + \epsilon_2)} \right) (1 + \epsilon_3)$$

2.

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \sqrt{(e^x)(1 + \epsilon_1) - 1} = \frac{e^x}{2\sqrt{(e^x)(1 + \epsilon_1) - 1}}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0) = \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \sqrt{(e^x - 1)(1 + \epsilon_2)} = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{(e^x - 1)(1 + \epsilon_2)}}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0) = \frac{e^x - 1}{2\sqrt{e^x - 1}} = \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} (1 + \epsilon_3) \sqrt{e^x - 1} = \sqrt{e^x - 1}$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{e^x}{2\sqrt{e^x - 1}} \epsilon_1 + \frac{1}{2} \sqrt{e^x - 1} \epsilon_2 + \sqrt{e^x - 1} \epsilon_3$$

$$\bar{y} \approx y + y \frac{e^x}{2e^x - 2} \epsilon_1 + y \frac{1}{2} \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

4.

$$\bar{y} - y \approx y \frac{e^x}{2e^x - 2} \epsilon_1 + y \frac{1}{2} \epsilon_2 + y \epsilon_3$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \frac{e^x}{2e^x - 2} \epsilon_1 + \frac{1}{2} \epsilon_2 + \epsilon_3$$

(f)

$$y = \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

1.

$$\bar{y} = \left(\sin \left(\frac{(1 + \epsilon_1)}{x} \right) \right) (1 + \epsilon_2)$$

$$\bar{y} = \dots$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \sin \left(\frac{(1 + \epsilon_1)}{x} \right) = \frac{1}{x} \cos \left(\frac{(1 + \epsilon_1)}{x} \right)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0) = \frac{1}{x} \cos \left(\frac{1}{x} \right)$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} \left(\sin \left(\frac{1}{x} \right) \right) (1 + \epsilon_2) = \sin \left(\frac{1}{x} \right)$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \frac{1}{x} \cos \left(\frac{1}{x} \right) \epsilon_1 + \sin \left(\frac{1}{x} \right) \epsilon_2$$

$$\bar{y} \approx y + y \frac{1}{x} \cot \left(\frac{1}{x} \right) \epsilon_1 + y \epsilon_2$$

4.

$$\bar{y} - y \approx y \frac{1}{x} \cot \left(\frac{1}{x} \right) \epsilon_1 + y \epsilon_2$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \frac{1}{x} \cot \left(\frac{1}{x} \right) \epsilon_1 + \epsilon_2$$

(g)

$$y = (1 + x^2)^{x^2}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left((fl(1 + fl(x^2)))^{fl(x^2)} \right)$$

$$\bar{y} = \left(((1 + (x^2)(1 + \epsilon_2))(1 + \epsilon_3))^{(x^2)(1 + \epsilon_1)} \right) (1 + \epsilon_4)$$

2. •

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} (1 + x^2)^{(x^2)(1 + \epsilon_1)} = x^2 (x^2 + 1)^{x^2(1 + \epsilon_1)} \ln(x^2 + 1)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, 0, 0, 0) = x^2 (x^2 + 1)^{x^2} \ln(x^2 + 1)$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} (1 + (x^2)(1 + \epsilon_2))^{x^2} = x^4 (1 + (x^2)(1 + \epsilon_2))^{x^2 - 1}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0, 0) = x^4 (1 + x^2)^{x^2 - 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3} ((1 + x^2)(1 + \epsilon_3))^{x^2}$$

$$= (1 + x^2) x^2 ((1 + x^2)(1 + \epsilon_3))^{x^2 - 1}$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_3}(0, 0, 0, 0) = (1 + x^2) x^2 (1 + x^2)^{x^2 - 1}$$

•

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_4} \left((1 + x^2)^{x^2} \right) (1 + \epsilon_4) = (1 + x^2)^{x^2}$$

3.

$$\begin{aligned} \bar{y} &\approx y + x^2(x^2 + 1)^{x^2} \ln(x^2 + 1) \epsilon_1 + x^4(1 + x^2)^{x^2-1} \epsilon_2 \\ &\quad + (1 + x^2)x^2(1 + x^2)^{x^2-1} \epsilon_3 + (1 + x^2)^{x^2} \epsilon_4 \\ y &= (1 + x^2)^{x^2} \end{aligned}$$

$$\bar{y} \approx y + x^2 y \ln(x^2 + 1) \epsilon_1 + \frac{x^4 y}{1 + x^2} \epsilon_2 + y x^2 \epsilon_3 + y \epsilon_4$$

4.

$$\bar{y} - y \approx x^2 y \ln(x^2 + 1) \epsilon_1 + \frac{x^4 y}{1 + x^2} \epsilon_2 + y x^2 \epsilon_3$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx x^2 \ln(x^2 + 1) \epsilon_1 + \frac{x^4}{1 + x^2} \epsilon_2 + x^2 \epsilon_3$$

(h)

$$y = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2x^2}$$

1.

$$\bar{y} = fl \left(\frac{fl \left(fl \left(e^{fl(x^2)} \right) - fl \left(e^{fl(-fl(x^2))} \right) \right)}{fl(2fl(x^2))} \right)$$

$$\bar{y} = \frac{\left(e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{-(x^2)(1+\epsilon_1)(1+\epsilon_2)} \right) (1 + \epsilon_4)}{(2(x^2)(1 + \epsilon_1))(1 + \epsilon_3)} (1 + \epsilon_5)$$

2.

•

$$\begin{aligned} \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0, 0) &= \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} \frac{e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{-(x^2)(1+\epsilon_1)}}{2(x^2)(1 + \epsilon_1)} \\ &= \frac{e^{-x^2(\epsilon_1+1)} \left(x^2(\epsilon_1 + 1) \left(e^{2x^2(\epsilon_1+1)} + 1 \right) \right) - e^{2x^2(\epsilon_1+1)} + 1}{2x^2(\epsilon_1 + 1)^2} \end{aligned}$$

AWW HELL NAW

9 Problem 9

• Product

$$y = \prod_{i=1}^n$$

1.

$$\begin{aligned} \bar{y} &= fl(fl(...fl(fl(fl(a_1 a_2) a_3) a_4) ... a_{n-1}) a_n) \\ \bar{y} &= ((...((a_1 a_2)(1 + \epsilon_2) a_3)(1 + \epsilon_3) ... a_{n-1})(1 + \epsilon_{n-1}) a_n)(1 + \epsilon_n) \\ &= \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) \left(\prod_{i=2}^n (1 + \epsilon_i) \right) \end{aligned}$$

2. —

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, \dots, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + \epsilon_1)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_1}(0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^n a_i$$

—

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, \dots, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + \epsilon_2)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^n a_i$$

—

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_j}(0, \dots, \epsilon_j, \dots, 0) = \frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_j} = \left(\prod_{i=1}^n a_i \right) (1 + \epsilon_j)$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_j}(0, \dots, 0) = \prod_{i=1}^n a_i$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \sum_{j=1}^n \epsilon_j \prod_{i=1}^n a_i$$

$$\bar{y} \approx y + \sum_{j=1}^n \epsilon_j y$$

4.

$$\bar{y} - y \approx \sum_{j=1}^n \epsilon_j y$$

$$\frac{\bar{y} - y}{y} \approx \sum_{j=1}^n \epsilon_j$$

• Scalair Product

$$y = \sum_{i=1}^n a_i b_i$$

1.

$$\bar{y} = fl(fl(\dots fl(fl(fl(a_1 b_1) + fl(a_2 b_2)) + fl(a_3 + b_3)) \dots) + fl(a_n b_n))$$

$$\bar{y} = (((a_1 b_1(1 + \epsilon_{1.}) + a_2 b_2(1 + \epsilon_{2.}))(1 + \epsilon_{2+}) + a_3 b_3(1 + \epsilon_{3.})(1 + \epsilon_{3+}) \dots)(1 + \epsilon_{n+})$$

2. —

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{1.}}(0, \dots, \epsilon_{1.}, \dots, 0) = a_1 b_1$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{2.}}(0, \dots, \epsilon_{2.}, \dots, 0) = a_2 b_2$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{i.}}(0, \dots, \epsilon_{i.}, \dots, 0) = a_i b_i$$

—

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{2+}}(0, \dots, \epsilon_{2+}, \dots, 0) = a_1 b_1 + a_2 b_2$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{3+}}(0, \dots, \epsilon_{3+}, \dots, 0) = a_1 b_1 + a_2 b_2 + a_3 b_3$$

$$\frac{\delta \bar{y}}{\delta \epsilon_{i+}}(0, \dots, \epsilon_{i+}, \dots, 0) = \sum_{j=1}^i a_j b_j$$

3.

$$\bar{y} \approx y + \sum_{i=1}^n a_i b_i \epsilon_i + \sum_{i=2}^n \epsilon_{i+} \sum_{j=1}^i a_j b_j$$

10 Probleem 10

$$y = \sum_{i=1}^n a_i$$

Bewijs. Bewijs door volledige inductie op n

Voor $n = 1$ is de stelling triviaal.

Stel dat de stelling klopt voor een bepaalde $n = k$, dan bewijzen we nu dat de stelling geldt voor $n = k + 1$.

1.

$$\bar{y} = fl(fl(fl(\dots) + fl(\dots)) + fl(fl(\dots) + fl(\dots)))$$

LOLNOPE

□

11 Probleem 11

Een vermenigvuldiging met 2 geeft bijna geen fout in een computer. Een vermenigvuldiging met 10 daarentegen geeft wel degelijk een fout zoals we zien in de tweede grafiek. De machine werkt duidelijk met basis 2. De machine werkt met ongeveer 8 beduidende cijfers.

Todo list

bewijs dit	2
bewijs dit	2