Oefeningen Numerieke Wiskunde: Oefenzitting 2

Tom Sydney Kerckhove
Verbeteringen door Ward Schodts

19 februari 2014

1 Probleem 1

De exponent gaat van -126 tot 127. Dit betekent dat hier 8 bits voor nodig zijn. Er blijven dus nog $32 - 8 = 23$ bits over voor de mantisse want er is ook nog een tekenbit. Een andere manier om dit resultaat te bekomen is de formule voor de machine precisie te gebruiken.

$$\epsilon_{mach} = \frac{b^{1-p}}{2}$$

Hierin is b de basis en p het aantal juiste cijfers na de komma. Uit deze formule halen we de p.

$$1 - p = \log_b(2\epsilon_{mach})$$

$$p = 1 - \log_2(2 \cdot 2^{-24}) = 24 \text{ (waarvan 1 tekenbit, dus) } p = 23$$

Volgens dezelfde redenering vinden we dat het aantal bits voor het teken, de mantisse en de exponent bij de dubbele-nauwkeurigheidsgetallen.

2 Probleem 2

- We weten dat 1 en 2 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

$$1 = .100\ldots00 \cdot 2^1$$

$$2 = .100\ldots00 \cdot 2^2$$

  We hebben hier weer een mantisse van 52 cijfers.
  Hier zitten dus $2^m - 1 = 2^{52} - 1$ getallen tussen.

- Voor de gemakkelijkheid bereken we eerst van 7 tot 8, en dan van 8 tot 9. We weten dat 7, 8 en 9 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

$$7 = .11100\ldots00 \cdot 2^3$$

$$8 = .10000\ldots00 \cdot 2^4$$

$$9 = .10010\ldots00 \cdot 2^4$$

  Hier zitten dus $2^{50} + 2^{49} - 1$ getallen tussen.

3 Probleem 3

Het laatste zinvolle getal in deze rij is 1000. De overgang van 999 naar 1000 resulteert niet in een fout want 1000 wordt als volgt voorgesteld.

$$0.100 \cdot 10^4$$

Als we hier echter nog 1 bij optellen gebeurt er een absolute afrondingsfout van precies -1. Vanaf dan is de beschreven rij dus constant (1000).

4 Probleem 4

- - **bepaal_b** We beginnen met $A = 1$, dan vermenigvuldigen we A met 2 tot er een afrondingsfout gebeurd wanneer je $(A + 1) - A = 1$ evalueert. A is nu gelijk aan 2^{10}. Vervolgens initialiseren we i op 1 en hogen i op zolang $(A+i) = A$. i is dus net groot genoeg om A op de volgende afronding te laten stoppen. Dit is wanneer i 6 wordt. b is dus $.103 \cdot 10^4 - .102 \cdot 10^4 = 10$.
  - **bepaal_p** We initialiseren p op 1 en z op 10. Nu hogen we p en de exponent van 10^1 op tot $(z + 1) - z = 1$ een afrondingsfout geeft. Dit is wanneer $p = 3$ geldt.
- - **bepaal_b**
    Te Bewijzen

    Bewijs. □ bewijs dit

  - **bepaal_p**
    Te Bewijzen

    Bewijs. □ bewijs dit

5 Probleem 5

1.
$$\overline{y} = fl\left(\frac{x}{fl\left(fl\left(\sqrt{fl\,(x+1)}\right)+1\right)}\right)$$
$$= \frac{x(1+\epsilon_1)}{\left(\left(\sqrt{(x+1)\,(1+\epsilon_4)}\right)(1+\epsilon_3)+1\right)(1+\epsilon_2)}$$
$$\overline{y} = y + \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \frac{\delta F}{\delta \epsilon_i}(0,0,0,0)$$

2. -
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}$$
   -
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{-x}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)(1+\epsilon_2)^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0, 0, 0, 0) = \frac{-x}{\sqrt{x+1}+1}$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{\left((\sqrt{1+x})(1+\epsilon_3)+1\right)^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,0,0) = \frac{-x\sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)}\left(\sqrt{(x+1)(1+\epsilon_4)}+1\right)^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0,0,0,0) = \frac{-x(x+1)}{2\sqrt{x+1}\left(\sqrt{x+1}+1\right)^2}$$
$$= \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)^3}+4(x+1)+2\sqrt{x+1})}$$

3.
$$\overline{y} \approx y + \frac{x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_1 + \frac{-x}{\sqrt{x+1}+1}\epsilon_2$$
$$+\frac{-x\sqrt{1+x}}{\left(\sqrt{1+x}+1\right)^2}\epsilon_3 + \frac{-x(x+1)}{(2\sqrt{(x+1)^3}+4(x+1)+2\sqrt{x+1})}\epsilon_4$$
$$\overline{y} \approx y + y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$
$$\overline{y} - y = y\epsilon_1 - y\epsilon_2 + y\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - y\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y} = \epsilon_1 - \epsilon_2 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_3 - \frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_4$$

6 Probleem 6

$$y = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

1.
$$\overline{y} = fl\left(\frac{fl(1-fl(\cos(x)))}{fl(x^2)}\right)$$
$$\overline{y} = \frac{(1-(\cos(x))(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)}{(x^2)(1+\epsilon_3)}(1+\epsilon_4)$$

2.
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1,0,0,0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_1}\frac{1-(\cos(x))(1+\epsilon_1)}{x^2} = -\frac{\cos(x)}{x^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(0,\epsilon_2,0,0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_2}\frac{(1-\cos(x))(1+\epsilon_2)}{x^2} = \frac{(1-\cos(x))}{x^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_3}\frac{1-\cos(x)}{(x^2)(1+\epsilon_3)} = \frac{1-\cos(x)}{(x^2)}\frac{-1}{(1+\epsilon_3)^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0,0,0,0) = -\frac{1-\cos(x)}{x^2}$$
$$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4) = \frac{\delta}{\delta \epsilon_4}\frac{(1-\cos(x))(1+\epsilon_4)}{x^2} = \frac{1-\cos(x)}{x^2}$$

3.

$$\overline{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + \frac{(1-\cos(x))}{x^2}\epsilon_2 - \frac{1-\cos(x)}{x^2}\epsilon_3 + \frac{1-\cos(x)}{x^2}\epsilon_4$$

$$\overline{y} \approx y - \frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4.

$$\overline{y} - y \approx -\frac{\cos(x)}{x^2}\epsilon_1 + y\epsilon_2 - y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx -\frac{\cos(x)}{x(1-\cos(x))}\epsilon_1 + \epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

Indien x naar nul nadert wordt de factor bij ϵ_1 zodanig groot dat we te maken hebben met een grote absolute en relatieve fout.

7 Probleem 7

$$S = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

1.

$$\overline{S} = fl(fl(...fl(fl(fl(fl(a_1 + a_2) + a_3) + a_4)...) + a_n)$$
$$= ((...((((a_1 + a_2)(1+\epsilon_2)) + a_3)(1+\epsilon_3))...) + a_n)(1+\epsilon_n)$$

- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_2}(\epsilon_2, 0, ..., 0) = a_1 + a_2$$
- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_3}(0, \epsilon_3, 0, ..., 0) = a_1 + a_2 + a_3$$
- $$\frac{\delta \overline{y}}{\delta \epsilon_i}(0, ..., 0, \epsilon_i, 0, ..., 0) = \sum_{j=1}^{i} a_j$$

2.

$$\overline{S} \approx y + \sum_{k=2}^{n} \epsilon_k \sum_{i=1}^{k} a_i$$

3.

$$\overline{S} - S \approx \sum_{k=2}^{n} \epsilon_k \sum_{i=1}^{k} a_i$$

8 Probleem 8

(a)

$$y = x\sin(x)$$

1.

$$\overline{y} = fl(x fl(\sin(x)))$$

$$\overline{y} = (x\sin(x)(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)$$

2. •
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1,0)=x\sin(x)$$
•
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,\epsilon_2)=x\sin(x)$$

3.
$$\overline{y}\approx y+x\sin(x)\epsilon_1+x\sin(x)\epsilon_2$$
$$\overline{y}\approx y+y\epsilon_2+y\epsilon_3$$

4.
$$\overline{y}-y=y\epsilon_1+y\epsilon_2$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y}=\epsilon_1+\epsilon_2$$

(b)
$$y=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

1.
$$\overline{y}=fl\left(\frac{fl(1-fl(\cos(x)))}{fl(\sin(x))}\right)$$
$$\overline{y}=\left(\frac{(1-(\cos(x))(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)}{(\sin(x))(1+\epsilon_3)}\right)(1+\epsilon_4)$$

2. •
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1,0,0,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}\frac{1-\cos(x)(1+\epsilon_1)}{\sin(x)}=\frac{-\cos(x)}{\sin(x)}$$
•
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,\epsilon_2,0,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}\frac{(1-\cos(x))(1+\epsilon_2)}{\sin(x)}=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$
•
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}\frac{1-\cos(x)}{(\sin(x))(1+\epsilon_3)}=\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)(1+\epsilon_3)^2}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,0,0)=\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}$$
•
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}\left(\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\right)(1+\epsilon_4)=\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}$$

3.
$$\overline{y}\approx y+\frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_1+\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_2+\frac{\cos(x)-1}{\sin(x)}\epsilon_3+\frac{1-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_4$$
$$\overline{y}\approx y+\frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_1+y\epsilon_2-y\epsilon_3+y\epsilon_4$$

4.
$$\overline{y}-y\approx\frac{-\cos(x)}{\sin(x)}\epsilon_1+y\epsilon_2-y\epsilon_3+y\epsilon_4$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y}\approx\frac{-\cos(x)}{1-\cos(x)}\epsilon_1+\epsilon_2-\epsilon_3+\epsilon_4$$

(c)

$$y = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

1.

$$\overline{y} = fl\left(\frac{fl\left(1 - fl(e^{fl(-2x)})\right)}{x}\right)$$

$$\overline{y} = \left(\frac{\left(1 - ((e^{(-2x)(1+\epsilon_1)})(1+\epsilon_2))\right)(1+\epsilon_3)}{x}\right)(1+\epsilon_4)$$

2. •

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}\frac{1 - e^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x} = \frac{2xe^{(-2x)(1+\epsilon_1)}}{x}$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(0, 0, 0, 0) = \frac{2xe^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}\frac{1 - (e^{-2x})(1+\epsilon_2)}{x} = \frac{-e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0, 0, \epsilon_3, 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}\frac{(1 - e^{-2x})(1+\epsilon_3)}{x} = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

•

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}(0, 0, 0, \epsilon_4) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}\left(\frac{1 - e^{-2x}}{x}\right)(1+\epsilon_4) = \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x} + \frac{-e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x} + \frac{1 - e^{-2x}}{x}$$

$$\overline{y} \approx y + \frac{2xe^{-2x}}{x}\epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x}\epsilon_2 + y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4.

$$\overline{y} - y \approx \frac{2xe^{-2x}}{x}\epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{x}\epsilon_2 + y\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx \frac{2xe^{-2x}}{1 - e^{-2x}}\epsilon_1 + \frac{-e^{-2x}}{1 - e^{-2x}}\epsilon_2 + \epsilon_3 + \epsilon_4$$

(d)

$$y = (1+x)^{\frac{1}{x}}$$

1.

$$\overline{y} = fl\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

$$\overline{y} = \left(((1+x)(1+\epsilon_2))^{\left(\frac{1}{x}\right)(1+\epsilon_1)}\right)(1+\epsilon_3)$$

2. •

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(1+x)^{\left(\frac{1}{x}\right)(1+\epsilon_1)} = \frac{(x+1)^{\frac{\epsilon_1+1}{x}}ln(x+1)}{x}$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(0, 0, 0) = \frac{(x+1)^{\frac{1}{x}}ln(x+1)}{x}$$

- $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,\epsilon_2,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}((1+x)(1+\epsilon_2))^{\frac{1}{x}}=\frac{(1+x)}{a}((1+x)(1+\epsilon_2))^{\frac{1}{x}-1}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,0,0)=\frac{(1+x)}{a}(1+x)^{\frac{1}{x}-1}=\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{a}$$
- $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,\epsilon_3)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)(1+\epsilon_3)=\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)$$

3. $$\overline{y}\approx y+\frac{(x+1)^{\frac{1}{x}}ln(x+1)}{x}\epsilon_1+\frac{(1+x)^{\frac{1}{x}}}{a}\epsilon_2+\left((1+x)^{\frac{1}{x}}\right)\epsilon_3$$
$$\overline{y}\approx y+\frac{ln(x+1)}{x}y\epsilon_1+\frac{1}{a}y\epsilon_2+y\epsilon_3$$

4. $$\overline{y}-y\approx\frac{ln(x+1)}{x}y\epsilon_1+\frac{1}{a}y\epsilon_2+y\epsilon_3$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y}\approx\frac{ln(x+1)}{x}\epsilon_1+\frac{1}{a}\epsilon_2+\epsilon_3$$

(e)
$$y=\sqrt{e^x-1}$$

1. $$\overline{y}=fl\left(\sqrt{fl(fl(e^x)-1)}\right)$$
$$\overline{y}=\left(\sqrt{((e^x)(1+\epsilon_1)-1)(1+\epsilon_2)}\right)(1+\epsilon_3)$$

2. - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1,0,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}\sqrt{(e^x)(1+\epsilon_1)-1}=\frac{e^x}{2\sqrt{(e^x)(1+\epsilon_1)-1}}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(0,0,0)=\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}$$
   - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,\epsilon_2,0)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}\sqrt{(e^x-1)(1+\epsilon_2)}=\frac{e^x-1}{2\sqrt{(e^x-1)(1+\epsilon_2)}}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,0,0)=\frac{e^x-1}{2\sqrt{e^x-1}}=\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}$$
   - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,\epsilon_3)=\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(1+\epsilon_3)\sqrt{e^x-1}=\sqrt{e^x-1}$$

3. $$\overline{y}\approx y+\frac{e^x}{2\sqrt{e^x-1}}\epsilon_1+\frac{1}{2}\sqrt{e^x-1}\epsilon_2+\sqrt{e^x-1}\epsilon_3$$
$$\overline{y}\approx y++y\frac{e^x}{2e^x-2}\epsilon_1+y\frac{1}{2}\epsilon_2+y\epsilon_3$$

4. $$\overline{y}-y\approx y\frac{e^x}{2e^x-2}\epsilon_1+y\frac{1}{2}\epsilon_2+y\epsilon_3$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y}\approx\frac{e^x}{2e^x-2}\epsilon_1+\frac{1}{2}\epsilon_2+\epsilon_3$$

(f)

$$y = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

1.

$$\overline{y} = \left(\sin\left(\frac{(1+\epsilon_1)}{x}\right)\right)(1+\epsilon_2)$$
$$\overline{y} = ...$$

2. •

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1, 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}\sin\left(\frac{(1+\epsilon_1)}{x}\right) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{(1+\epsilon_1)}{x}\right)$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(0,0) = \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$

•

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0, \epsilon_2) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}\left(\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right)(1+\epsilon_2) = \sin\left(\frac{1}{x}\right)$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \frac{1}{x}\cos\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + \sin\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_2$$
$$\overline{y} \approx y + y\frac{1}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + y\epsilon_2$$

4.

$$\overline{y} - y \approx y\frac{1}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + y\epsilon_2$$
$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx \frac{1}{x}\cot\left(\frac{1}{x}\right)\epsilon_1 + \epsilon_2$$

(g)

$$y = (1+x^2)^{x^2}$$

1.

$$\overline{y} = fl\left(\left(fl(1+fl(x^2))\right)^{fl(x^2)}\right)$$
$$\overline{y} = \left(\left((1+(x^2)(1+\epsilon_2))(1+\epsilon_3)\right)^{(x^2)(1+\epsilon_1)}\right)(1+\epsilon_4)$$

2. •

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0, 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(1+x^2)^{(x^2)(1+\epsilon_1)} = x^2(x^2+1)^{x^2(1+\epsilon_1)}ln(x^2+1)$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(0,0,0,0) = x^2(x^2+1)^{x^2}ln(x^2+1)$$

•

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0, \epsilon_2, 0, 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(1+(x^2)(1+\epsilon_2))^{x^2} = x^4(1+(x^2)(1+\epsilon_2))^{x^2-1}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0,0,0,0) = x^4(1+x^2)^{x^2-1}$$

- $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}((1+x^2)(1+\epsilon_3))^{x^2}$$
$$= (1+x^2)x^2((1+x^2)(1+\epsilon_3))^{x^2-1}$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_3}(0,0,0,0) = (1+x^2)x^2(1+x^2)^{x^2-1}$$
- $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}(0,0,0,\epsilon_4) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_4}\left((1+x^2)^{x^2}\right)(1+\epsilon_4) = (1+x^2)^{x^2}$$

3.
$$\overline{y} \approx y + x^2(x^2+1)^{x^2}ln(x^2+1)\epsilon_1 + x^4(1+x^2)^{x^2-1}\epsilon_2$$
$$+(1+x^2)x^2(1+x^2)^{x^2-1}\epsilon_3 + (1+x^2)^{x^2}\epsilon_4$$
$$y = (1+x^2)^{x^2}$$
$$\overline{y} \approx y + x^2yln(x^2+1)\epsilon_1 + \frac{x^4y}{1+x^2}\epsilon_2 + yx^2\epsilon_3 + y\epsilon_4$$

4.
$$\overline{y} - y \approx x^2yln(x^2+1)\epsilon_1 + \frac{x^4y}{1+x^2}\epsilon_2 + yx^2\epsilon_3$$
$$\frac{\overline{y}-y}{y} \approx x^2ln(x^2+1)\epsilon_1 + \frac{x^4}{1+x^2}\epsilon_2 + x^2\epsilon_3$$

(h)
$$y = \frac{e^{x^2} - e^{-x^2}}{2x^2}$$

1.
$$\overline{y} = fl\left(\frac{fl\left(fl\left(e^{fl(x^2)}\right) - fl\left(e^{fl(-fl(x^2))}\right)\right)}{fl(2fl(x^2))}\right)$$
$$\overline{y} = \frac{\left(e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{(-(x^2)(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_2)}\right)(1+\epsilon_4)}{(2(x^2)(1+\epsilon_1))(1+\epsilon_3)}(1+\epsilon_5)$$

2. - $$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1,0,0,0,0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}\frac{e^{(x^2)(1+\epsilon_1)} - e^{-(x^2)(1+\epsilon_1)}}{2(x^2)(1+\epsilon_1)}$$
$$= \frac{e^{-x^2(\epsilon_1+1)}\left(x^2(\epsilon_1+1)\left(e^{2x^2(\epsilon_1+1)}+1\right)\right) - e^{2x^2(\epsilon_1+1)} + 1}{2x^2(\epsilon_1+1)^2}$$
AWW HELL NAW

9 Probleem 9

- Product

$$y = \prod_{i=1}^{n}$$

1.

$$\overline{y} = fl(fl(...fl(fl(fl(a_1a_2)a_3)a_4)...a_{n-1})a_n)$$
$$\overline{y} = ((...((a_1a_2)(1+\epsilon_2)a_3)(1+\epsilon_3)...a_{n-1})(1+\epsilon_{n-1})a_n)(1+\epsilon_n)$$
$$= \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)\left(\prod_{i=2}^{n}(1+\epsilon_i)\right)$$

2. –

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(\epsilon_1, 0, ..., 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1+\epsilon_1)$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_1}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

–

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0, \epsilon_2, ..., 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1+\epsilon_2)$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_2}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

–

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_j}(0, ..., \epsilon_j, ..., 0) = \frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_j} = \left(\prod_{i=1}^{n} a_i\right)(1+\epsilon_j)$$
$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_j}(0, ..., 0) = \prod_{i=1}^{n} a_i$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j \prod_{i=1}^{n} a_i$$
$$\overline{y} \approx y + \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y$$

4.

$$\overline{y} - y \approx \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j y$$
$$\frac{\overline{y} - y}{y} \approx \sum_{j=1}^{n} \epsilon_j$$

- Scalair Product

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i b_i$$

1.

$$\overline{y} = fl(fl(...fl(fl(fl(a_1b_1) + fl(a_2b_2)) + fl(a_3 + b_3))...) + fl(a_nb_n))$$

$$\overline{y} = (((a_1b_1(1 + \epsilon_{1.}) + a_2b_2(1 + \epsilon_{2.}))(1 + \epsilon_{2+}) + a_3b_3(1 + \epsilon_{3.})(1 + \epsilon_{3+})...)(1 + \epsilon_{n+})$$

2. –

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{1.}}(0, ..., \epsilon_{1.}, ..., 0) = a_1b_1$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{2.}}(0, ..., \epsilon_{2.}, ..., 0) = a_2b_2$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{i.}}(0, ..., \epsilon_{i.}, ..., 0) = a_ib_i$$

–

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{2+}}(0, ..., \epsilon_{2+}, ..., 0) = a_1b_1 + a_2b_2$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{3+}}(0, ..., \epsilon_{3+}, ..., 0) = a_1b_1 + a_2b_2 + a_3b_3$$

$$\frac{\delta\overline{y}}{\delta\epsilon_{i+}}(0, ..., \epsilon_{i+}, ..., 0) = \sum_{j=1}^{i} a_jb_j$$

3.

$$\overline{y} \approx y + \sum_{i=1}^{n} a_ib_i\epsilon_{i.} + \sum_{i=2}^{n} \epsilon_{i+} \sum_{j=1}^{i} a_jb_j$$

10 Probleem 10

$$y = \sum_{i=1}^{n} a_i$$

Bewijs. Bewijs door volledige inductie op n
Voor $n = 1$ is de stelling triviaal.
Stel dat de stelling klopt voor een bepaalde $n = k$, dan bewijzen we nu dat de stelling geldt voor $n = k + 1$.

1.

$$\overline{y} = fl\left(fl\left(fl\left(...\right) + fl\left(...\right)\right) + fl\left(fl\left(...\right) + fl\left(...\right)\right)\right)$$

LOLNOPE

□

11 Probleem 11

Een vermenigvuldiging met 2 geeft bijna geen fout in een computer. Een vermenigvuldiging met 10 daarentegen geeft wel degelijk een fout zoals we zien in de tweede grafiek. De machine werkt duidelijk met basis 2. De machine werkt met ongeveer 8 beduidende cijfers.

Todo list