Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 5 (PC): Afrondings- en benaderingsfouten

1 Numerieke differentiatie: benaderingsfouten en afrondingsfouten

Een differentiequotiënt is een eenvoudige benadering voor de afgeleide $f'(x)$ van een functie $f(x)$. In de volgende oefeningen maken we een Matlab script waarin we de afgeleide van de functie $f(x) = 5e^x$ in $x = 0$ benaderen met volgende differentieformules

$$y_1 = \frac{f(x+h) - f(x)}{h}, \tag{1}$$

$$y_2 = \frac{f(x+h) - f(x-h)}{2h}. \tag{2}$$

We zullen beide formules evalueren voor steeds kleiner wordende waarden van h

```
n = -1:-0.1:-15
h = 10.^n
```

Maak een script `numdiff.m` waarin je de volgende opdrachten uitvoert.

Probleem 1. Reken beide formules uit voor de gegeven waarden van h.

(a) Bereken de relatieve fout, waarbij je vergelijkt met de exacte waarde van $f'(0)$.

(b) Bekijk de fout in de Command Window met `format long`. Wat valt je op? Wat is het maximum aantal juiste beduidende decimale cijfers dat je bekomt voor elke formule?

(c) Plot de fout voor beide formules in dezelfde figuur, in functie van de waarde van h of in functie van de waarde van de exponent n. Gebruik een geschikte schaal voor de assen.

(d) Welke componenten van de fout (benadering, afronding, etc.) neem je waar?

Probleem 2. (Orde van de benaderingsfout) Een benadering $g(h;x)$ voor $f'(x)$ is van orde k als

$$f'(x) = g(h;x) + O(h^k), \quad \text{voor} \quad h \to 0. \tag{3}$$

Dit betekent dat de absolute fout van de benadering afneemt zoals h^k wanneer $h \to 0$.

(a) Lees van de grafiek de orde van beide benaderingen af.

(b) Plot in dezelfde figuur de grafiek van h^k met een streepjeslijn (`'--'`), met k de orde van elke benadering.

(c) Geef een wiskundig bewijs van je observaties, gebruik makende van een Taylorreeksontwikkeling. (Hint: schrijf voor (2) een ontwikkeling voor $f(x+h)$ en $f(x-h)$.)

Probleem 3. (Afrondingsfouten) In de vorige oefenzitting heb je aangetoond dat voor formule (1), de relatieve fout op het berekende resultaat $\bar{y}_1$ door afrondingsfouten zich gedraagt als

$$\left| \frac{\bar{y}_1 - y_1}{y_1} \right| \leq \mathcal{O}(\frac{1}{h})\, \epsilon_{mach} \tag{4}$$

(a) Plot in dezelfde figuur de grafiek van $h^{-1}\epsilon_{mach}$ met een streepjeslijn.

(b) Toon aan dat ook voor formule (2), de relatieve fout door afrondingsfouten zich gedraagt als (4).

(c) Wat weet je nu over de differentieformules? Kan je deze gebruiken om de afgeleide van een functie te benaderen tot op machineprecisie? Welke formule zou je verkiezen?

2 Conditie en stabiliteit van de kwadratische vergelijking

Voor het uitwerken van deze opgaven heb je de '.m'-bestanden nodig die je kan vinden op Toledo.

Probleem 4. (Vierkantsvergelijking) Gebruik het bestand `vierkant.m` om de wortels van een vierkantsvergelijking te berekenen. Ga na hoe beide algoritmes de wortels berekenen en pas die dan toe op

$$x^2 - bx + 2 = 0,$$

voor $b = 10^7$, 10^8, 10^9. Verklaar de verschillen. Welk algoritme is het nauwkeurigst?

Probleem 5. (Wortel van een complex getal) Maak gebruik van `vierkant.m` om de vierkantswortel $x + iy$ van een complex getal $a + ib$ te berekenen. Hint: $a + ib = (x + iy)^2$ en stel reële en imaginaire delen gelijk aan mekaar.

Schrijf hiervoor een functie `[x1,y1,x2,y2] = cwortel(a,b)` waarbij de output overeenkomt met de verschillende versies van `vierkant.m`. Bereken nu de vierkantswortel van $2 - 3i$, $-2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{-3}i$ en $2 \cdot 10^3 - 3 \cdot 10^{-3}i$ en vergelijk het resultaat van beide versies met de output van het Matlab commando `sqrt`. (Noot: de output van `sqrt` heeft altijd een positief reëel deel.) Voor welk getal en voor welke versie krijg je een grote relatieve fout en waarom enkel voor dit getal?

Probleem 6. (Conditieonderzoek: dubbel nulpunt) Beschouw het probleem van het zoeken van de nulpunten van de vierkantsvergelijking

$$x^2 - 2x + t = 0.$$

Onderzoek de conditie m.b.t. fouten op de parameter t. Gebruik `vierkant.m` om voor $t \approx 1$ de nulpunten te berekenen en deze te vergelijken met de nulpunten wanneer je een kleine perturbatie op t aanbrengt. Neem bv. $t_1 = 1 - 1 \cdot 10^{-10}$ en $t_2 = t_1 + 1 \cdot 10^{-14}$. Verklaar de relatieve fouten op de berekende nulpunten. Maak ook een grafiek van het (relatief) conditiegetal en van de nulpunten voor $t \in [0, 1]$. Verklaar de resultaten.