Oefeningen Numerieke Wiskunde

Foutenanalyse: twee verschillende aanpakken

Bij het doen van een formele foutenanalyse kan je twee methodes volgen om een eerste orde benadering te bekomen van de fout. Bij de eerste methode ga je waar nodig de stelling van Taylor in 1 veranderlijke toepassen om zo in een aantal stappen een eerste orde benadering te bekomen. Bij de tweede methode bereken je de eerste orde benadering in één keer via een Taylor benadering in meer veranderlijken.

Beide methoden geven hetzelfde resultaat. Welke methode het makkelijkst is, hangt af van probleem tot probleem en is ook afhankelijk van je persoonlijke voorkeur.

1 Voorbeeld

Als voorbeeld voeren we een foutenanalyse uit voor de berekening van

$$y = \sqrt{1+x} - 1,$$

waarbij men de berekeningen uitvoert volgens de uitdrukking hierboven. Men veronderstelt dat x exact voorgesteld kan worden op de machine.

De berekende waarde voor y is dan

$$\bar{y} = fl\left(fl(\sqrt{fl(1+x)}) - 1\right) = \left((\sqrt{(1+x)(1+\epsilon_1)})(1+\epsilon_2) - 1\right)(1+\epsilon_3) \tag{1}$$

Hierbij stellen $\epsilon_i,\ i = 1, 2, 3$, de relatieve fouten voor die gemaakt worden bij afronding na iedere bewerking. We weten dat

$$|\epsilon_i| \leq \epsilon_{mach},\ i = 1, 2, 3.$$

2 Methode I

We herschrijven $\bar{y}$ als $\bar{y} \approx y(1+\delta)$ door in (1) gebruik te maken van de Taylor reeks rond nul

$$f(\epsilon) = f(0) + f'(0)\epsilon + f''(0)\frac{\epsilon^2}{2} + \dots$$

en hogere orde termen te verwaarlozen. Bv.

$$\sqrt{1+\epsilon} \approx 1 + \frac{1}{2}\epsilon,$$

waarbij we veronderstellen dat ϵ klein genoeg is.

We krijgen dus

$$\begin{aligned}
\bar{y} &\approx \left((\sqrt{1+x})(1 + \frac{1}{2}\epsilon_1 + \epsilon_2) - 1\right)(1+\epsilon_3) \\
&= \left(y + (\sqrt{1+x})(\frac{1}{2}\epsilon_1 + \epsilon_2)\right)(1+\epsilon_3) \\
&\approx y\left(1 + \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}-1}(\frac{1}{2}\epsilon_1 + \epsilon_2) + \epsilon_3\right),
\end{aligned}$$

waarbij we steeds de tweede orde termen verwaarloosd hebben.

3 Methode II

We interpreteren, in de uitdrukking voor $\bar{y}$, x als een parameter en $\epsilon_i,\ i = 1, 2, 3$, als variabelen,

$$\bar{y} = F(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3).$$

Vermits de ϵ_i zeer klein zijn, laat $F(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3)$ zich goed benaderen door de Taylorontwikkeling rond $(0, 0, 0)$ afgebroken na de lineaire termen

$$\bar{y} = F(\epsilon_1, \epsilon_2, \epsilon_3) \approx F(0, 0, 0) + \epsilon_1 \frac{\partial F}{\partial \epsilon_1}(0, 0, 0) + \epsilon_2 \frac{\partial F}{\partial \epsilon_2}(0, 0, 0) + \epsilon_3 \frac{\partial F}{\partial \epsilon_3}(0, 0, 0).$$

De constante term $F(0, 0, 0)$ in de lineaire benadering is de exacte waarde y. Voor de berekening van de partiële afgeleiden gaan we als volgt te werk

$$\begin{aligned} F(\epsilon_1, 0, 0) &= \sqrt{(1 + x)(1 + \epsilon_1)} - 1 = \sqrt{1 + x}(1 + \epsilon_1)^{\frac{1}{2}} - 1 \\ \frac{\partial F}{\partial \epsilon_1}(\epsilon_1, 0, 0) &= \sqrt{1 + x}\frac{1}{2}(1 + \epsilon_1)^{-\frac{1}{2}} \\ \frac{\partial F}{\partial \epsilon_1}(0, 0, 0) &= \frac{1}{2}\sqrt{1 + x} \end{aligned}$$

Na uitwerking van de andere partiële afgeleiden vinden we de lineaire benadering voor $\bar{y}$ en een benaderende formule voor de absolute en de relatieve fout

$$\begin{aligned} \bar{y} &\approx y + \frac{1}{2}\sqrt{1 + x}\,\epsilon_1 + \sqrt{1 + x}\,\epsilon_2 + y\epsilon_3 \\ \bar{y} - y &\approx \frac{1}{2}\sqrt{1 + x}\,\epsilon_1 + \sqrt{1 + x}\,\epsilon_2 + y\epsilon_3 \\ \frac{\bar{y} - y}{y} &\approx \frac{\sqrt{1 + x}}{2(\sqrt{1 + x} - 1)}\epsilon_1 + \frac{\sqrt{1 + x}}{\sqrt{1 + x} - 1}\epsilon_2 + \epsilon_3. \end{aligned}$$

We krijgen uiteraard hetzelfde resultaat als met Methode I.

4 Oefeningen

Probeer beide methodes eens uit voor de volgende berekeningen:

1.
$$y = \sqrt{e^x - 1}$$

2.
$$y = (1 + x)^{\frac{1}{x}}$$

3.
$$y = (1 + x^2)^{x^2}$$