# Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 9 (PC): Splines

Op Toledo vind je de benodigde MATLAB bestanden. Maak voor deze oefenzitting een script `oef9.m` waarin je alle code van de verschillende oefeningen bundelt. Dit is handig als je nadien oplossingen wil vergelijken. Maak eventueel verschillende secties in je script met `%%`.

## 1 Splinefunctie in de klassieke basis

Gegeven zijn de reële knooppunten $a = t_0 < t_1 < \ldots < t_n = b$. Een kubische splinefunctie $s(x)$ (of een splinefunctie van graad 3) is een functie die:

- in elk deelinterval $[t_j, t_{j+1})$ gelijk is aan een veelterm $p_j(x)$ van graad 3;
- in elk knooppunt $t_j$ continu is in zijn $0^e$, $1^e$ en $2^e$ afgeleide.

Een eenvoudige manier om een splinefunctie te definiëren is d.m.v. de veeltermcoëfficiënten in de klassieke basis $\{1,\, x,\, x^2,\, x^3\}$ in elk deeltinterval:

$$s(x) = p_j(x) = a_j x^3 + b_j x^2 + c_j x + d_j, \quad x \in [t_j, t_{j+1}), \quad j = 0, \ldots, n-1. \tag{1}$$

Om te kunnen spreken van een splinefunctie moeten deze coëfficiënten voldoen aan de continuïteitsvoorwaarden:

$$\begin{aligned} p_{j-1}(t_j) &= p_j(t_j) \\ p'_{j-1}(t_j) &= p'_j(t_j) \\ p''_{j-1}(t_j) &= p''_j(t_j) \end{aligned} \qquad \text{voor } \ j = 1, \ldots, n-1 \tag{2}$$

Als we de coëfficiënten voorstellen in de kolomvector

$$c = [a_0\ \ b_0\ \ c_0\ \ d_0\ \ a_1\ \ b_1\ \ c_1\ \ d_1\ \ \cdots\ \ a_{n-1}\ \ b_{n-1}\ \ c_{n-1}\ \ d_{n-1}]^T\,, \tag{3}$$

dan kunnen we de voorwaarden (2) schrijven als een stelsel

$$Ac = 0.$$

**Probleem 1.**

(a) Schrijf de voorwaarden (2) uit in functie van de veeltermcoëfficiënten.

(b) Bestudeer de functie `splinematrix.m`. Controleer dat elke rij van de output matrix $A$ in het stelsel $Ac = 0$ overeenkomt met een continuïteitsvoorwaarde.

(c) Voer de functie uit voor `t=linspace(-1,1,10)`, en bekijk de matrix $A$ met het commando `spy`.

(d) Bereken met `size` de dimensies van $A$ en met `rank` de rang. Controleer dat de dimensie van de nulruimte van $A$ gelijk is aan $n + 3$. Merk op dat de rang gelijk is aan het aantal rijen, want de continuïteitsvoorwaarden zijn lineair onafhankelijk.

Dit toont aan dat voor $n+1$ knooppunten, de dimensie van de ruimte van kubische splinefuncties gelijk is aan $n + 3$. Als we dus nog $n + 3$ voorwaarden opleggen, dan bekomen we een unieke splinefunctie. Indien we een interpolatieprobleem oplossen, dan krijgen we de volgende $n + 1$ interpolatievoorwaarden:

$$s(t_j) = f_j, \qquad j = 0, \ldots, n. \tag{4}$$

Deze worden aangevuld met nog twee voorwaarden, bijvoorbeeld de natuurlijke voorwaarden:

$$s''(t_0) = 0, \qquad s''(t_n) = 0. \tag{5}$$

**Probleem 2.**

(a) Schrijf de interpolatievoorwaarden en de natuurlijke voorwaarden uit in functie van de veeltermcoëfficiënten.

(b) Bestudeer de functie `splinestelsel.m` met als output een matrix `A` en een vector `b`. Controleer dat elke rij van het stelsel $Ac = b$ overeenkomt met een continuïteitsvoorwaarde, een interpolatievoorwaarde of een natuurlijke voorwaarde.

(c) Voer de functie uit voor `t=linspace(-1,1,10)` en `f=@exp`, en bekijk opnieuw de matrix $A$ met het commando `spy`.

**Probleem 3.**

(a) Schrijf een functie met signatuur

```
y = evalspline(t, c, x)
```

die gegeven de knooppunten `t` en de veeltermcoëfficiënten `c` zoals in (3), de splinefunctie evalueert in de punten van de vector `x`. (Hint: gebruik `polyval` voor het evalueren van de veeltermen.)

(b) Stel het stelsel $Ac = b$ op voor `t=-1:0.25:1` en $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$. Bereken de coëfficiënten van de splinefunctie met `c = A\b`. Plot $f(x)$ en de splinefunctie voor $x = [-1, 1]$ samen in een figuur.

## 2 Splinefunctie met B-splines

In wat volgt stellen we een kubische splinefunctie voor als een lineaire combinatie van $n+3$ genormaliseerde B-splines

$$s(x) = \sum_{j=-3}^{n-1} c_j N_{j,3}(x). \tag{6}$$

Vanaf nu laten we het subscript van de graad weg: $N_j(x) := N_{j,3}(x)$.

De genormaliseerde B-splines $N_j(x)$ zijn lineair onafhankelijk en voldoen aan de continuïteitsvoorwaarden (2). Ze vormen bijgevolg een basis voor de ruimte van kubische splinefuncties. Hierdoor hoeven er slechts $n+3$ coëfficiënten bepaald te worden op basis van de interpolatievoorwaarden (4) en nog twee bijkomende voorwaarden. Met de natuurlijke voorwaarden (5) bekomen we het volgende stelsel:

$$\begin{bmatrix} N''_{-3}(t_0) & N''_{-2}(t_0) & N''_{-1}(t_0) & & & \\ N_{-3}(t_0) & N_{-2}(t_0) & N_{-1}(t_0) & & & \\ & N_{-2}(t_1) & N_{-1}(t_1) & N_0(t_1) & & \\ & \ddots & \ddots & \ddots & & \\ & & N_{n-3}(t_n) & N_{n-2}(t_n) & N_{n-1}(t_n) & \\ & & N''_{n-3}(t_n) & N''_{n-2}(t_n) & N''_{n-1}(t_n) & \end{bmatrix} \begin{bmatrix} c_{-3} \\ c_{-2} \\ c_{-1} \\ \vdots \\ c_{n-2} \\ c_{n-1} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \\ 0 \end{bmatrix}$$

Met de knooppunten $a = t_0, t_1, \ldots, t_n = b$ kunnen we maar $n-3$ B-splines construeren. Om aan een volledige basis van $n+3$ B-splines te komen, moeten we nog 6 knooppunten toevoegen als volgt:

$$t_{-3},\ t_{-2},\ t_{-1},\ t_0,\ \ldots, t_n,\ t_{n+1},\ t_{n+2},\ t_{n+3}$$

De functie `y = evalBspline( t, c, x )` evalueert de splinefunctie (6) met coëfficiënten `c` en knooppunten `t` in een vector met punten `x`. Hierbij is het van belang dat als $n+7$ de lengte is van `t`, dat $n+3$ de lengte is van `c`. Probeer bijvoorbeeld eens

```
t = -3:8;
N = length(t);
c = rand(1,N-4);
x = linspace(-5,10,1000);
figure
plot(x,evalBspline(t,c,x))
```

**Probleem 4.** Neem knooppunten `t=-3:8`. Maak een figuur waarin je enkele B-splines $N_j(x)$ plot in het interval $[-3, 8]$. Begin bijvoorbeeld met $N_{-3}(x)$. (Hint: je kan de coëfficiënten `c` bekomen als een kolom uit de eenheidsmatrix die je bekomt met het commando `eye`.) Merk op dat deze B-splines een basis vormen voor kubische splinefuncties in het interval $[0, 5]$!

**Probleem 5.** Ga voor knooppunten `t=-3:8` na wat de waarde is van $N_j(x)$, $j = -3, -2, \ldots, 4$ in de knooppunten $t_{-3}, t_{-2}, \ldots, t_8$.

**Probleem 6.** De waarden uit Probleem 5 zijn altijd hetzelfde voor equidistante knooppunten.

(a) Bestudeer de functie `Bsplinestelsel.m` met als output een matrix `A` en een vector `b`. Controleer dat elke rij van het stelsel $Ac = b$ overeenkomt met ofwel een interpolatievoorwaarde, ofwel een natuurlijke voorwaarde.

(b) Voer de functie uit voor `t = -1.75:0.25:1.75` en `f` een function handle voor $f(x) = 1/(1 + 25x^2)$, en bekijk de matrix $A$ met het commando `spy`.

(c) Bereken de coëfficiënten van de splinefunctie als `c = A\b`. Plot $f(x)$ en de splinefunctie voor $x = [-1, 1]$ samen in een figuur.

(d) Ga na dat je dezelfde splinefunctie bekomen bent als in Probleem 3 (b). Je kan bijvoorbeeld beide splinefuncties evalueren in dezelfde punten `x` en dan kijken naar de norm het verschil met `norm`.