# Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 13: Iteratieve methoden voor het oplossen van stelsels

## 1 Niet-lineaire stelsels

**Probleem 1.** Pas Algoritme 2.5 voor Newton-Raphson van één niet-lineaire vergelijking aan voor stelsels van niet-lineaire vergelijkingen. Veronderstel dat de functie $f(x)$ en de Jacobiaan van deze functie $J(x)$ gegeven zijn, zodat je deze in het algoritme kunt evalueren. Welke fouten zou je kunnen gebruiken voor het stopcriterium? Schrijf naast het algoritme de dimensies van alle variabelen, bvb. scalar, $n \times 1$ vector, $n \times n$ matrix, enz.

**Probleem 2.** Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} x^2 + x - y^2 - 1 & = & 0 \\ y - \sin(x^2) & = & 0 \end{cases}$$

(a) Bereken de Jacobiaan van dit stelsel.

(b) Het algoritme uit Probleem 1 wordt uitgevoerd met verschillende startwaarden. Het resultaat van de iteraties wordt grafisch weergegeven in Figuur 1 evanals de 2-norm van de relatieve fout van de iteratiepunten van een convergerende rij punten. Deze relatieve fout wordt berekend t.o.v. een referentie oplossing berekend in hogere precisie. Tabel 1 toont de iteratiepunten van deze rij. Wat is de orde van convergentie? Wat is de convergentiefactor? Hoe zie je dit aan de iteratiepunten in Tabel 1?

(c) Leid uit de Jacobiaan die je in (a) berekend hebt, de orde van convergentie af. (Hint: bekijk Opmerking 3 op p. 262 van het handboek.)

(d) Wat kan je in het algemeen afleiden uit de figuur omtrent de keuze van de startwaarde van de Newton Raphson methode voor stelsels niet-lineaire vergelijkingen?

**Probleem 3.** Beschouw het stelsel

$$x^2 + 4y^2 - 16 = 0$$
$$xy^2 - x - 4 = 0$$

met als oplossingen $(2, \pm\sqrt{3})$ en $(-4, 0)$.

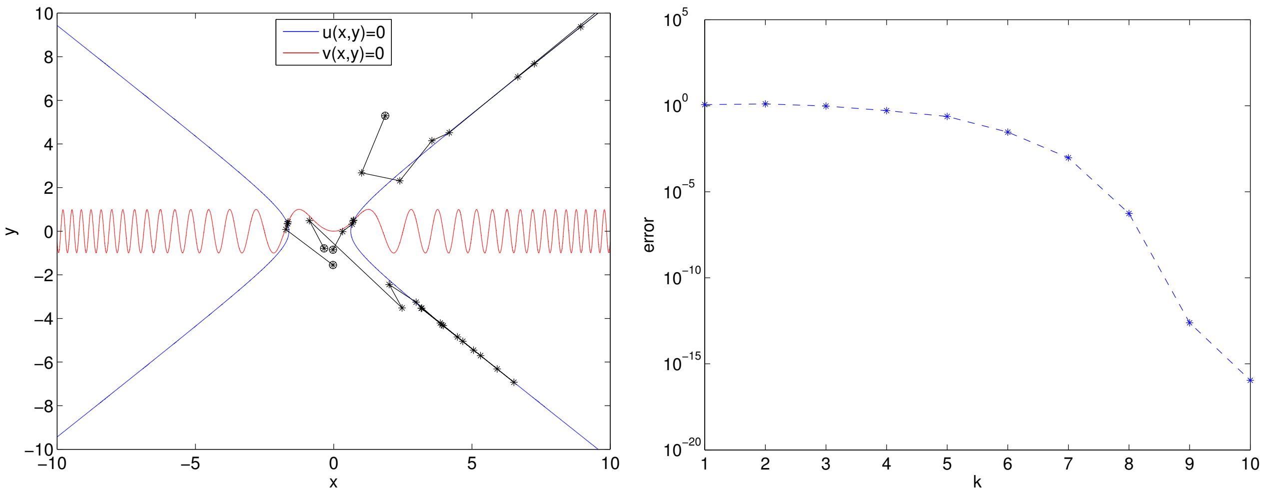
(a) Bereken de Jacobiaan van dit stelsel.

(b) Het algoritme uit Probleem 1 wordt uitgevoerd met de startwaarde $(4, 4)$. Het resultaat van de iteraties wordt grafisch weergegeven in Figuur 2 evanals de 2-norm van de relatieve fout van de iteratiepunten (t.o.v. een referentie oplossing berekend in hogere precisie). Tabel 2 toont de iteratiepunten van deze rij. Wat is de orde van convergentie? Wat is de convergentiefactor? Hoe zie je dit aan de iteratiepunten in Tabel 2?

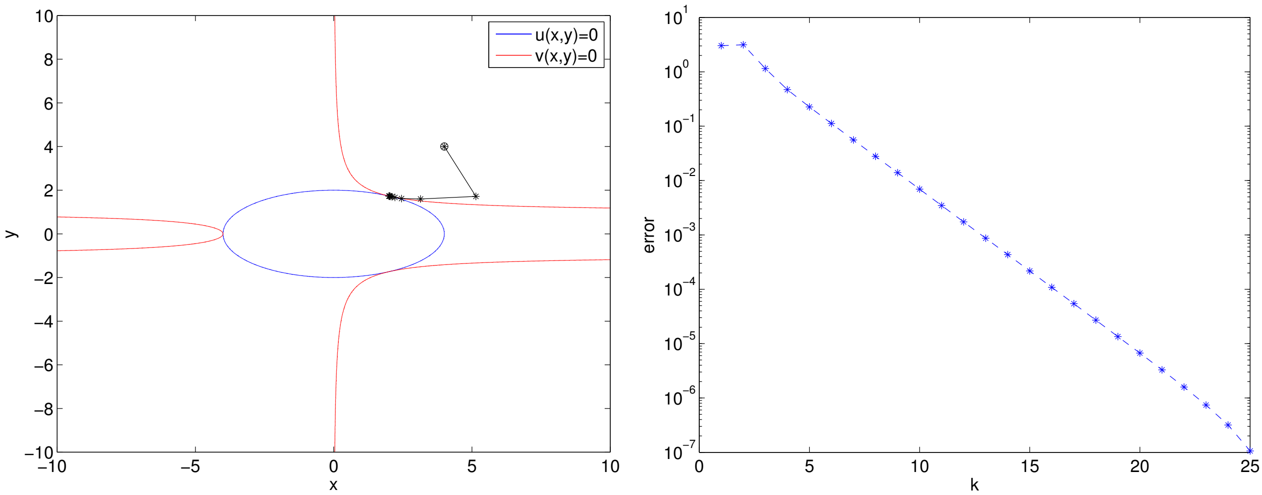
(c) Evalueer de Jacobiaan in het nulpunt waarnaar de methode convergeert. Wat kan je zeggen over de Jacobiaan en wat is het verband met de convergentie-orde? Hoe zie je dit ook aan de grafiek van de twee krommen?

| $k$ | $x^{(k)}$ | $y^{(k)}$ |
|---|---|---|
| 1 | 7.6036866359446620e-01 | 1.6666666666666643e+00 |
| 2 | 1.5111331325429989e+00 | 1.5026360900263263e+00 |
| 3 | 1.2321741830888697e+00 | 1.3078763881079765e+00 |
| 4 | 9.6062004482353225e-01 | 9.6347404648365309e-01 |
| 5 | 5.5959998404791311e-01 | 3.3224417286278374e-01 |
| 6 | 7.1655089903159652e-01 | 4.7517566358048569e-01 |
| 7 | 7.2537904572941048e-01 | 5.0220141452690092e-01 |
| 8 | 7.2595044187617486e-01 | 5.0294603478122302e-01 |
| 9 | 7.2595072614305434e-01 | 5.0294650106230854e-01 |
| 10 | 7.2595072614319200e-01 | 5.0294650106250838e-01 |

Tabel 1: Newton Raphson Probleem 2




Figuur 1: Newton Raphson Probleem 2




Figuur 2: Newton Raphson Probleem 3

| $k$ | $x^{(k)}$ | $y^{(k)}$ |
|---|---|---|
| 1 | 4.0000000000000000e+00 | 4.0000000000000000e+00 |
| 2 | 5.1428571428571423e+00 | 1.7142857142857144e+00 |
| 3 | 3.1423404804959958e+00 | 1.5956255920089555e+00 |
| 4 | 2.4552290895289555e+00 | 1.6159850096045763e+00 |
| 5 | 2.2168012409335196e+00 | 1.6699002600533723e+00 |
| 6 | 2.1075302011977848e+00 | 1.7010390282638144e+00 |
| 7 | 2.0535903269181404e+00 | 1.7165840255422320e+00 |
| 8 | 2.0267536289666963e+00 | 1.7243281169512277e+00 |
| 9 | 2.0133666713454845e+00 | 1.7281922334432744e+00 |
| 10 | 2.0066808291350657e+00 | 1.7301222247238226e+00 |
| 11 | 2.0033397915418467e+00 | 1.7310866935943789e+00 |
| 12 | 2.0016697404625843e+00 | 1.7315687951157588e+00 |
| 13 | 2.0008348314600086e+00 | 1.7318098124972439e+00 |
| 14 | 2.0004174060442890e+00 | 1.7319303128244170e+00 |
| 15 | 2.0002087006023777e+00 | 1.7319905608945905e+00 |
| 16 | 2.0001043496969459e+00 | 1.7320206844060908e+00 |
| 17 | 2.0000521746952660e+00 | 1.7320357460317017e+00 |
| 18 | 2.0000260873057409e+00 | 1.7320432768123817e+00 |
| 19 | 2.0000130436481811e+00 | 1.7320470421919831e+00 |
| 20 | 2.0000065218042851e+00 | 1.7320489248861475e+00 |
| 21 | 2.0000032608742067e+00 | 1.7320498662355768e+00 |
| 22 | 2.0000016304864339e+00 | 1.7320503368879867e+00 |
| 23 | 2.0000008153854134e+00 | 1.7320505721873833e+00 |
| 24 | 2.0000004072705941e+00 | 1.7320506899999837e+00 |
| 25 | 2.0000002037286335e+00 | 1.7320507487574865e+00 |
| 26 | 2.0000001027308829e+00 | 1.7320507779130259e+00 |

Tabel 2: Newton Raphson Probleem 3

# 2 Lineaire stelsels

**Probleem 4.** Beschouw het stelsel

$$\begin{cases} 2x_1 - x_2 & = & 1 \\ -x_1 + 2x_2 & = & 2 \end{cases}$$

Illustreer voor dit stelsel grafisch de methodes van Jacobi en Gauss-Seidel met de startvector

$$x^{(0)} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}.$$

Teken hiervoor de twee rechten van het stelsel en bepaal grafisch de iteratiepunten $x^{(1)}$, $x^{(2)}$ ... Convergeren de methoden?

**Probleem 5.** Stel dat de matrix $A$ wordt opgedeeld in zijn diagonaal $D$ en de overblijvende benedendriehoek $L$ en de bovendriehoek $U$

$$A = U + D + L.$$

Dan kan de Jacobi methode in matrix notatie geschreven worden als

$$Dx^{(k+1)} = b - (L+U)x^{(k)}$$

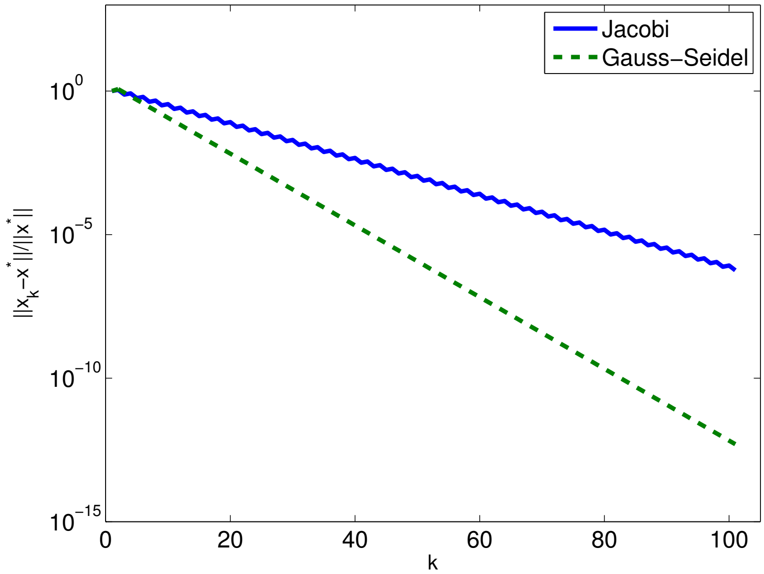
en de Gauss-Seidel methode als

$$Dx^{(k+1)} = b - Lx^{(k+1)} - Ux^{(k)}.$$

Toon aan dat dit overeenkomt met de formules in Algoritmes 4.1 en 4.2.

**Probleem 6.** Stel $e^{(k)} = x^{(k)} - x^*$ de $k$-de iteratiefout, bewijs dan dat

$$e^{(k)} = Ge^{(k-1)}, \qquad \text{met} \quad \begin{cases} G = -D^{-1}(U+L) & \text{voor Jacobi} \\ G = -(L+D)^{-1}U & \text{voor Gauss-Seidel} \end{cases}$$




Figuur 3: Jacobi en Gauss-Seidel, Probleem 8

**Probleem 7.** De spectraalradius van een matrix $A$ wordt gedefinieerd als $\rho(A) = \max_i(|\lambda_i(A)|)$. Voor de convergentie van de methodes van Jacobi en Gauss-Seidel bestaan de volgende voorwaarden:

- $\|G\| < 1$ (voldoende voorwaarde voor convergentie),
- $\rho(G) < 1$ (nodige en voldoende voorwaarde voor convergentie).

Ga de convergentie van Jacobi en Gauss-Seidel na voor het stelsel uit Probleem 4 door $\|G\|_\infty$ en $\rho(G)$ te berekenen.

**Probleem 8.** Beschouw het stelsel

$$\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ 1 & 2 \end{bmatrix} x = \begin{bmatrix} 100 \\ 101 \end{bmatrix}.$$

Bereken opnieuw $\|G\|_\infty$ en $\rho(G)$ voor beide methodes. Wat besluit je over de convergentie? In Figuur 3 wordt de relatieve fout getoond voor beide methodes. Wat zijn de convergentiefactoren? Wat valt er je op?