Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 16 (PC): Nulpunten van een veelterm

1 Theorie

Stel

$$p(x) = \sum_{i=0}^{n} a_i x^{n-i}, \quad p(c) = 0, \tag{1}$$

$$\bar{p}(x) = \sum_{i=0}^{n} \bar{a}_i x^{n-i}, \quad \bar{p}(\bar{c}) = 0, \tag{2}$$

$$\bar{c} = c + \Delta c, \quad \bar{a}_i = a_i + \Delta a_i, \quad \bar{p}(x) = p(x) + \Delta p(x), \tag{3}$$

$$\Delta p(x) = \sum_{i=0}^{n} \Delta a_i x^{n-i}. \tag{4}$$

Dus, c is een nulpunt van een veelterm $p(x)$ en $\bar{c}$ is een nulpunt van een geperturbeerde velteerm $\bar{p}(x)$.

Probleem 1. (Conditie van een enkelvoudig nulpunt) Stel dat c een enkelvoudig nulpunt van $p(x)$ is. Bewijs (door verwaarlozen van tweede-orde-termen):

$$\Delta c \approx \frac{-\sum_{i=0}^{n} \Delta a_i c^{n-i}}{p'(c)} = -\frac{\Delta p(c)}{p'(c)}. \tag{5}$$

Waarom geldt deze formule niet meer voor meervoudige nulpunten?

Probleem 2. (Conditie van een meervoudig nulpunt) Stel dat c een nulpunt is van $p(x)$ met meervoudigheid m. Bewijs dat

$$\Delta c \approx \left(\frac{-\sum_{i=0}^{n} \Delta a_i c^{n-i} m!}{p^{(m)}(c)} \right)^{1/m} = \left(-\frac{\Delta p(c) \cdot m!}{p^{(m)}(c)} \right)^{1/m}. \tag{6}$$

Stel dat $|\Delta a_i| < \varepsilon$. Dan zal

$$|\Delta c| \leq \left(\frac{\varepsilon m!}{|p^{(m)}(c)|} \sum_{i=0}^{n} |c|^{n-i} \right)^{1/m}. \tag{7}$$

Wat kun je uit (6) en (7) halen i.v.m. de conditie?

2 Praktijk

Gebruik het commando `roots` om de wortels van een veelterm te berekenen. Het commando `poly` berekent de coëfficiënten van de veelterm met gegeven wortels.

Probleem 3. Beschouw de veelterm in x met parameter t

$$p(x) = x^2 - 2x + t.$$

1. Zij $t = -3$. Breng een fout $\Delta t = 10^{-6}$ aan op t een controleer de foutenschatter (5) voor de wortel $c = 3$.

2. Zij $t = 1$. De veelterm heeft nu een dubbele wortel $c = 1$. Observeer dat de wortel nu veel gevoeliger is voor een fout op t en controleer de foutenschatter (6).

Probleem 4. Construeer een veelterm met een zesvoudig nulpunt $c = 2$ en bereken numeriek zijn wortels.

- Hoe nauwkeurig zijn ze? Teken de berekende nulpunten in het complexe vlak (gebruik hiervoor de commando's `real` en `imag`).

- Bereken de voorwaartse fout en de achterwaarts fout op de berekende nulpunten. (Hint: de achterwaartse fout is een fout op de coëfficiënten van de veelterm, zodat de nulpunten van de geperturbeerde veelterm de berekende nulpunten zijn.)

- Ga de geldigheid van formule (6) na m.b.v. `polyval`.

Probleem 5. (Veelterm van Wilkinson) De veelterm van Wilkinson is gekend als

$$p(x) = (x-1)(x-2)\dots(x-20) = x^{20} - 210x^{19} + \dots + 20!.$$

Construeer deze veelterm met het commando `poly(1:20)`. Bereken de nulpunten.

- Bereken de voorwaartse fout voor alle nulpunten en plot deze fout in functie van de nulpunten (met een gepaste schaal op de assen).

- Bereken ook de achterwaartse fout(veelterm) en plot deze fout.

- Ga formule (5) na voor alle nulpunten. Bereken hiervoor voor ieder nulpunt de teller en de noemer van (5). Voor welke nulpunten is de fout het grootst? Verklaar.

De Wilkinson veelterm is dus (zeer) slecht geconditioneerd voor het berekenen van sommige nulpunten. Merk op dat dit allemaal enkelvoudige nulpunten zijn.

Probleem 6*. (Eigenwaarden - I) Een primitieve methode voor het berekenen van alle eigenwaarden van een matrix A bestaat uit het berekenen van alle nulpunten van de karakteristieke vergelijking $\det(\lambda I - A) = 0$.

Construeer een diagonaalmatrix met de getallen $1, 2, \ldots, 20$ op de diagonaal (`A = diag(1:20)`). Bereken met het commando `roots(poly(A))` de wortels van de karakteristieke vergelijking daarvan. Hoe nauwkeurig zijn de resultaten?

Nochtans is het probleem goed geconditioneerd. Ga dit na door de eigenwaarden te berekenen van de geperturbeerde matrix `B = A + 1.0e-10 * rand(20)` met het stabiele Matlab-commando `eig(B)`.

Waaraan zijn de fouten te wijten als je weet dat zowel `poly` als `roots` afzonderlijk stabiel zijn?

Probleem 7*. (Eigenwaarden - II) Men kan het probleem van het berekenen van alle wortels van een veelterm omzetten tot het berekenen van alle eigenwaarden van een matrix, waarvoor stabiele algoritmen bestaan. Stel $p(x) = x^n + a_1 x^{n-1} + \ldots + a_n$ met nulpunten $\alpha_1,\ \alpha_2, \ldots,\ \alpha_n$. Beschouw de companion-matrix C_p van de veelterm $p(x)$:

$$C_p = \begin{pmatrix} -a_1 & -a_2 & \ldots & -a_{n-1} & -a_n \\ 1 & 0 & \ldots & 0 & 0 \\ 0 & 1 & & 0 & 0 \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \vdots \\ 0 & 0 & \ldots & 1 & 0 \end{pmatrix}.$$

1. Bewijs dat de nulpunten van de veelterm $p(x)$ de eigenwaarden zijn van C_p.
2. Wat zijn de bijhorende eigenvectoren? $(C_p X_i = \alpha_i X_i)$

Probleem 8*. (Deflatie) Men noemt het wegdelen van reeds gevonden nulpunten een *deflatie*. Construeer een veelterm met nulpunten $x = 1, x = 10, x = 100, x = 1000, x = 10000$ en $x = 100000$. Bereken hiervan de nulpunten. Deel vervolgens met de routine `horner.m` het grootste berekende nulpunt weg. Herhaal dit tot je enkel het kleinste nulpunt overhoudt. Doe nu hetzelfde maar deel de nulpunten weg van klein naar groot. Welke resultaten bekom je? Waarom? Is deflatie een stabiele methode?