Oefeningen Numerieke Wiskunde: Oefenzitting 2

Tom Sydney Kerckhove

23 februari 2014

1 Probleem 1

De exponent gaat van -126 tot 127. Dit betekent dat hier 8 bits voor nodig zijn. Er blijven dus nog $32 - 8 = 23$ bits over voor de mantisse want er is ook nog een tekenbit. Een andere manier om dit resultaat te bekomen is de formule voor de machine precisie te gebruiken.

$$\epsilon_{mach} = \frac{b^{1-p}}{2}$$

Hierin is b de basis en p het aantal juiste beduidende cijfers. Uit deze formule halen we de p.

$$p1 - \log_b(2\epsilon_{mach})$$

$$p = 1 - \log_2(2 \cdot 2^{-24}) = 23$$

Volgens dezelfde redenering vinden we dat het aantal bits voor het teken, de mantisse en de exponent bij de dubbele-nauwkeurigheidsgetallen respectievelijk 1, 11 en 52 zijn.

2 Probleem 2

- We weten dat 1 en 2 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

  $$1 = .100\ldots00 \cdot 2^1$$

  $$2 = .100\ldots00 \cdot 2^2$$

  Hier zitten dus $2^m - 1 = 2^{52} - 1$ getallen tussen.

- We weten dat 7 en 9 respectievelijk als volgt voorgesteld worden.

$$7 = .11100\ldots00 \cdot 2^3$$

$$9 = .10010\ldots00 \cdot 2^4$$

  Hier zitten dus $2^{50} + 2^{49} - 1$ getallen tussen.

3 Probleem 3

Het laatste zinvolle getal in deze rij is 1000. De overgang van 999 naar 1000 resulteert niet in een fout want 1000 wordt als volgt voorgesteld.

$$0.100 \cdot 10^4$$

Als we hier echter nog 1 bij optellen gebeurt er een absolute afrondingsfout van precies -1. Vanaf dan is de beschreven rij dus constant (1000).

4 Probleem 4

- - **bepaal_b** We beginnen met $A = 1$, dan vermenigvuldigen we A met 2 tot er een afrondingsfout gebeurd wanneer je $(A+1)-A = 1$ evalueert. A is nu gelijk aan 2^{10}. Vervolgens initialiseren we i op 1 en hogen i op tot $(A + i) = A$ geen afrondingsfout meer geeft. Dit is wanneer i 6 wordt. b is dus $.103 \cdot 10^4 - .102 \cdot 10^4 = 10$.
  - **bepaal_p** We initialiseren p op 1 en z op 10. Nu hogen we p en de exponent van 10^1 op tot $(z + 1) - z = 1$ een afrondingsfout geeft. Dit is wanneer $p = 3$ geldt.

- - **bepaal_b**
    Te Bewijzen

    Bewijs. TODO □

  - **bepaal_p**
    Te Bewijzen

    Bewijs. TODO □

5 Probleem 5

$$\overline{y} = fl\left(\frac{x}{fl\left(fl\left(\sqrt{fl\left(x+1\right)}\right)+1\right)}\right)$$

$$= \frac{x(1+\epsilon_1)}{\left(\left(\sqrt{(x+1)\left(1+\epsilon_4\right)}\right)\left(1+\epsilon_3\right)+1\right)\left(1+\epsilon_2\right)}$$

$$\overline{y} = F(0,0,0,0) + \sum_{i=1}^{4} \epsilon_i \frac{\delta F}{\delta \epsilon_i}(0,0,0,0)$$

$$\frac{\delta F}{\delta \epsilon_1}(\epsilon_1,0,0,0) = \frac{x\epsilon_1}{\sqrt{x+1}+1}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \epsilon_2}(0,\epsilon_2,0,0) = \frac{-x}{\left(\sqrt{x+1}+1\right)\left(1+\epsilon_2\right)^2}$$

$$\frac{\delta F}{\delta \epsilon_3}(0,0,\epsilon_3,0)...$$

TODO
Oplossing:

$$\frac{\overline{y}-y}{y} \approx -\frac{1}{2}\frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_1 - \frac{\sqrt{1+x}}{\sqrt{1+x}+1}\epsilon_2 - \epsilon_3 + \epsilon_4$$

6 Probleem 6

$$\overline{y} = fl\left(\frac{fl\left(1-fl(\cos(x))\right)}{fl(x^2)}\right)$$

$$= \left(\frac{\left(1-(\cos(x)(1+\epsilon_3))\right)\left(1+\epsilon_2\right)}{(x^2)(1+\epsilon_4)}\right)(1+\epsilon_1)$$

TODO

7 Probleem 7

$$\overline{S} = fl(fl(...fl(fl(fl(fl(a_1+a_2)+a_3)+a_4)...)+a_n)$$

$$= ((...((((a_1+a_2)(1+\epsilon_2))+a_3)(1+\epsilon_3))...)+a_n)(1+\epsilon_n)$$

$$\overline{S} - S = \sum_{i=1}^{n} a_i - ((...((((a_1+a_2)(1+\epsilon_2))+a_3)(1+\epsilon_3))...)+a_n)(1+\epsilon_n)$$