Oefeningen Numerieke Wiskunde

Oefenzitting 6: Veelterminterpolatie en numerieke integratie

Het doel van deze oefenzitting is de theorie en de algoritmische aspecten van veelterm-interpolatie en de theorie over numerieke integratie inoefenen. Het bestreken deel van de cursus is *Hoofdstuk 4 - Veelterminterpolatie* en *Hoofdstuk 6 - Numerieke integratie*.

1 Veelterminterpolatie

Theorie

Gegeven een tabel $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^n$, met $x_i \neq x_j$ als $i \neq j$. De **unieke** interpolerende veelterm van graad n kan op verschillende manieren geschreven worden. In de Lagrange-basis wordt ze geschreven als

$$y_n(x) = l_0(x)f_0 + l_1(x)f_1 + \ldots + l_n(x)f_n,$$

waarbij

$$l_i(x) = \frac{\prod_{k=0,k\neq i}^n (x - x_k)}{\prod_{k=0,k\neq i}^n (x_i - x_k)}$$

de i-de Lagrangeveelterm van graad n is. In de Newton-basis krijgen we

$$y_n(x) = b_0 + b_1(x - x_0) + \ldots + b_n(x - x_0)(x - x_1)\ldots(x - x_{n-1}),$$

waarbij

$$b_i = f[x_0, x_1, \ldots, x_i]$$

de gedeelde differentie is van orde n. In de klassieke basis krijgen we

$$y_n(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$$

waarbij de coëfficiënten de oplossing zijn van het Vandermonde stelsel

$$\begin{bmatrix} 1 & x_0 & \cdots & x_0^n \\ 1 & x_1 & \cdots & x_1^n \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ 1 & x_n & \cdots & x_n^n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a_0 \\ a_1 \\ \vdots \\ a_n \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} f_0 \\ f_1 \\ \vdots \\ f_n \end{bmatrix}.$$

Opgaven

Probleem 1. Beschouw de 2^e-graadsveelterm $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$.

(a) Bereken de interpolerende veelterm $y_1(x)$ in de punten $\{-1, 1\}$ met de methode van Lagrange en met de methode van Newton.

(b) Stel het Vandermonde stelsel op en ga na dat je oplossing hieraan voldoet.

(c) Bereken de interpolatiefout $E_1(x)$ met formule (4.10) uit het handboek en maak een grafiek van deze fout. Hoe gedraagt de fout zich buiten het interval $[-1, 1]$?

Probleem 2. Beschouw dezelfde 2^e-graadsveelterm $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ en herhaal Probleem 1 met de interpolatiepunten $\{-1, 0, 1\}$ waarbij je voor de methode van Newton de twee soorten tabellen van gedeelde differenties opstelt. Wat is de waarde van $E_2(x)$? Verklaar.

Probleem 3. Beschouw dezelfde 2^e-graadsveelterm $f(x) = 2x^2 + 4x - 5$ en herhaal Probleem 1 met de interpolatiepunten $\{-1, 0, 0.5, 1\}$. Gebruik enkel de methode van Newton en stel de twee soorten tabellen van gedeelde differenties op, waarbij je de tabellen uit Probleem 2 hergebruikt. Verklaar je resultaat.

Probleem 4. Bewijs

1.
$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) = 1, \quad \forall x.$$

2.
$$\sum_{i=0}^{n} l_i(x) {x_i}^k = x^k, \quad k \leqslant n.$$

Probleem 5. Bewijs

$$y_n(x) = y_{n-1}(x) + (f_n - y_{n-1}(x_n))l_n(x).$$

(Hint: controleer of er aan de interpolatievoorwaarden voldaan is.)

Probleem 6*. Hieronder staat een tabel met gedeelde differenties van een veelterm $f(x)$ van de derde graad, cfr. Tabel 4.1 in het handboek. Eén van de functiewaarden is echter verkeerd. Welke functiewaarde? Wat is de absolute fout op deze functiewaarde?
(Hint: Gedeelde differenties zijn lineair in de functiewaarden f_i. Waarom? Het effect van een fout op een functiewaarde kan dus apart onderzocht worden. Stel een tabel op waarbij $f_k = \epsilon$ en alle andere functiewaarden gelijk zijn aan 0.)

x_i	f_i			
0.00	0.8622			
		0.1127		
1.00	0.9749		3.0705	
		4.1044		0.5377
1.30	2.2062		3.8770	
		6.0429		0.5377
1.50	3.4148		4.1996	
		7.3028		0.5377
1.60	4.1450		4.3878	
		7.9609		123.9377
1.65	4.5431		29.1753	
		10.8785		-246.2623
1.70	5.0870		-20.0771	
		7.8669		123.9377
1.80	5.8737		10.9073	
		10.0484		-20.0290
1.90	6.8785		4.8986	
		11.0281		0.5377
2.00	7.9814		5.1137	
		12.5622		
2.20	10.4938			

Probleem 7*. Bewijs dat $l_i(x)$ ook kan geschreven worden als

$$l_i(x) = \frac{\pi(x)}{\pi'(x_i)(x - x_i)}$$

met $\pi(x) = (x - x_0)(x - x_1)\dots(x - x_n)$.

Probleem 8*. (Interpolatie volgens Neville)

1. Bewijs dat
$$y_{012} = \frac{x - x_2}{x_0 - x_2} y_{01}(x) + \frac{x - x_0}{x_2 - x_0} y_{12}(x).$$
de interpolerende veelterm is in de punten $\{(x_i, f_i)\}_{i=0}^{2}$.

2. Bewijs de algemene formule:
$$y_{i,\dots,j}(x) = \frac{x - x_i}{x_j - x_i} y_{i+1,\dots,j}(x) + \frac{x - x_j}{x_i - x_j} y_{i,\dots,j-1}(x).$$

3. Bereken het aantal bewerkingen in het algoritme van Neville.

4. Hoe zou je het aantal bewerkingen kunnen verminderen en hoeveel bewerkingen moet je dan minder doen?

   (Hint: Ga eens na welke bewerkingen meer dan één keer worden gedaan en hoe je dit kan vermijden.)

2 Numerieke integratie

Theorie

De bepaalde integraal van een functie f over een interval $[a, b]$ wordt benaderd door een **kwadratuurformule**. Dit is een gewogen som van de functiewaarden

$$\int_a^b f(x)dx \approx H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + \cdots + H_n f(x_n). \tag{1}$$

De punten x_k worden de abscissen van de kwadratuurformule genoemd en de coëfficiënten H_k de gewichten.

De kwadratuurformule wordt **interpolerend** genoemd indien aan de volgende, onderling equivalente voorwaarden voldaan is:

1. Voor elke functie f geldt

$$H_0 f(x_0) + H_1 f(x_1) + \cdots + H_n f(x_n) = \int_a^b y_n(x)dx \tag{2}$$

   waarbij $y_n(x)$ de interpolerende veelterm van graad $\leq n$ voorstelt door de punten $(x_k, f(x_k))$, $k = 0, 1, \ldots, n$.

2. Voor elke veelterm p van graad $\leq n$ geldt

$$H_0 p(x_0) + H_1 p(x_1) + \cdots + H_n p(x_n) = \int_a^b p(x)dx. \tag{3}$$

3. De gewichten van de kwadratuurformule zijn gelijk aan de integralen van de Lagrangeveeltermen

$$H_k = \int_a^b l_k(x)dx \quad k = 0, 1, \ldots, n. \tag{4}$$

We zeggen dat de **nauwkeurigheidsgraad** van de kwadratuurformule (1) gelijk is aan d indien

$$H_0 p(x_0) + H_1 p(x_1) + \cdots + H_n p(x_n) = \int_a^b p(x)dx, \tag{5}$$

voor elke veelterm p van graad $\leq d$ en indien er een veelterm van graad $d+1$ bestaat waarvoor deze gelijkheid niet meer geldt. Vermits elke veelterm kan geschreven worden als een lineaire combinatie van de eentermen $1, x, x^2, \ldots$, komt dit neer op de voorwaarden

$$\begin{aligned}
H_0 + H_1 + \cdots + H_n &= \int_a^b dx \\
H_0 x_0 + H_1 x_1 + \cdots + H_n x_n &= \int_a^b x dx \\
&\cdots \\
H_0 x_0^d + H_1 x_1^d + \cdots + H_n x_n^d &= \int_a^b x^d dx \\
H_0 x_0^{d+1} + H_1 x_1^{d+1} + \cdots + H_n x_n^{d+1} &\neq \int_a^b x^{d+1} dx
\end{aligned}$$

Opgaven

Probleem 9. Toon de onderlinge equivalentie aan van de 3 voorwaarden opdat een kwadratuurformule interpolerend zou zijn. (Hint: 1. $\Rightarrow$ 2. $\Rightarrow$ 3. $\Rightarrow$ 1.).

Probleem 10. Bepaal de gewichten van de kwadratuurformule

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx H_0 f(-\frac{1}{2}) + H_1 f(\frac{1}{2})$$

zo dat haar nauwkeurigheidsgraad zo hoog mogelijk is.
Hoe hoog is de nauwkeurigheidsgraad? Is de kwadratuurformule interpolerend?

Probleem 11. Bepaal de gewichten $H_{-\frac{1}{2}}, H_0$ en $H_{\frac{1}{2}}$ zodanig dat de kwadratuurformule

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx \approx H_{-\frac{1}{2}} f(a - \frac{h}{2}) + H_0 f(a) + H_{\frac{1}{2}} f(a + \frac{h}{2})$$

een zo hoog mogelijke nauwkeurigheidsgraad heeft. Hoe hoog is de nauwkeurigheidsgraad?

Probleem 12*. Bepaal de gewichten van de kwadratuurformule

$$\int_{-1}^{1} f(x)dx \approx H_{-1} f(-1) + H_0 f(0) + H_1 f(1) + H'_{-1} f'(-1) + H'_1 f'(1)$$

zodat deze een zo hoog mogelijke nauwkeurigheidsgraad heeft. Hoe hoog is de nauwkeurigheidsgraad?