Zorg dat je na 1 uur minstens 1 vraag opgelost hebt en na 2 uur 2 vragen !

Vraag: 1

We hebben de volgende gegevens van de functie $f(x)$.

- $f[x_0, x_0, x_1, x_1] = 1$
- $f''(x_0) = 0$
- $f''(x_1) = 0$
- $f'(x_0) = 0$
- $f'(x_1) = 0$
- $f(x_0) = 2$
- $x_0 = 0$
- $x_1 = 1$

Kunnen we met behulp van deze gegevens de waarde van de functie bepalen in x_1, d.w.z., $f(x_1)$?

Numerieke Wiskunde: Voorbeeldexamen.

Marc Van Barel

Vraag 1

↳ Gedeelde differenties:

$$f[x_0, x_0, x_1, x_1] = 1$$

$$\lim_{\substack{x_2 \to x_0 \\ x_3 \to x_1}} f[x_2, x_0, x_1, x_3] = 1$$

$$\lim_{x_0 \to x_1} f[x_0, x_1] = \lim_{x_0 \to x_1} \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = f'(x_1)$$

→ Geen veelterm interpolatie → het kan eender welke functie zijn.

$$f[x_2, x_0, x_1, x_3] = \frac{f[x_2, x_0, x_1] - f[x_0, x_1, x_3]}{x_2 - x_3}$$

$$= \frac{\left(\frac{f[x_2, x_0] - f[x_0, x_1]}{x_2 - x_1}\right) - \left(\frac{f[x_0, x_1] - f[x_1, x_3]}{x_0 - x_3}\right)}{x_2 - x_3}$$

$$= \frac{\left(\frac{0 - (2-\alpha)}{-1}\right) - \left(\frac{(2-\alpha) - 0}{-1}\right)}{-1}$$

$$f[x_0, x_1] = \frac{f(x_0) - f(x_1)}{x_0 - x_1} = \frac{2-\alpha}{-1}$$

$$\boxed{\alpha = \frac{3}{2}}$$

Gedeelde Differenties geven enkel info over de waarde van de functie bij welbepaalde x → geen info over soort functie.

Vraag: 2

Bepaal de gewichten $H_{-\frac{1}{2}}$, H_0 en $H_{\frac{1}{2}}$ zodanig dat de kwadratuurformule

$$\int_{a-h}^{a+h} f(x)dx \approx H_{-\frac{1}{2}} f(a - \frac{h}{2}) + H_0 f(a) + H_{\frac{1}{2}} f(a + \frac{h}{2})$$

een zo hoog mogelijke nauwkeurigheidsgraad heeft.
Wat is deze nauwkeurigheidsgraad?

Vraag 2

nauwkeurigheidsgraad $= d$

kwadratuurformule $I_k(f)$

exacte integraal $I(f)$

$\forall p$: p veelterm van graad $\leq d$ $\quad I_k(p) = I_p$

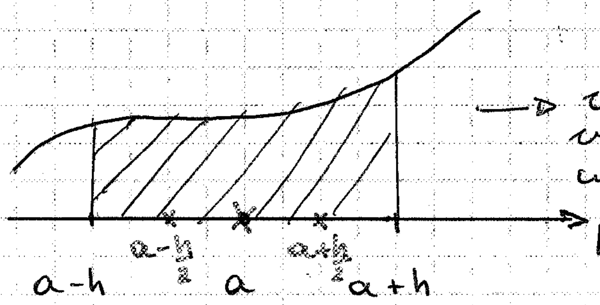
$\exists q$: q graad $d+1$ $\quad I_k(q) \neq I(q)$

basis van alle veeltermen van graad $\leq d$

$$1, x, x^2, \dots, x^d$$

↳ Rekenwerk kan verminderd worden door het kiezen van een andere basis

$$I_k(f) = \alpha f\left(a-\frac{h}{2}\right) + \beta f(a) + \gamma f\left(a+\frac{h}{2}\right) \approx \int_{a-h}^{a+h} f(x)\,dx$$



→ verschuiven van grafiek verandert niets aan de integraal indien het interval mee verschuift wordt.

Opm: nieuwe basis: $1, x-a, (x-a)^2, \dots$

Of

leg a in de oorsprong en neem oorspronkelijke basis

$$I_k(1) = \alpha 1 + \beta 1 + \gamma \cdot 1 = \int_{-h}^{h} 1\,dx = 2h$$

$$I_k(x) = \alpha\left(-\frac{h}{2}\right) + \beta(0) + \gamma\left(\frac{h}{2}\right) = \int_{-h}^{h} x\,dx = \cancel{\frac{2h^2}{2}}\ 0$$

$$I_k(x^2) = \alpha\left(-\frac{h}{2}\right)^2 + \beta(0) + \gamma\left(\frac{h}{2}\right)^2 = \int_{-h}^{h} x^2\,dx = \frac{2h^3}{3}$$

Stelsel oplossen

$\alpha = \gamma$

$\frac{2\alpha}{4} = \frac{2h^{\cancel{3}}}{3} \Rightarrow \alpha = \frac{4h}{3}$

$\beta = \frac{-2h}{3}$

$$I_k(x^3) = \alpha\left(-\frac{h}{2}\right)^3 + \beta 0 + \gamma\left(\frac{h}{2}\right)^3 = 0 = \int_{-h}^{h} x^2\,dx$$

$I_k(x^4) \neq I(x^4) \Rightarrow$ graad $\underline{3}$

Vraag: 3

Zij het iteratieproces $x^{(k+1)} = (x^{(k)} - a)^2 + 1$, $a > 0$ gegeven. Voor welke reëele waarden van a en $x^{(0)}$ is er konvergentie naar een reëele waarde x ? Wanneer treedt er kwadratische konvergentie op ?

Vraag 3

↳ Iteratieve methoden

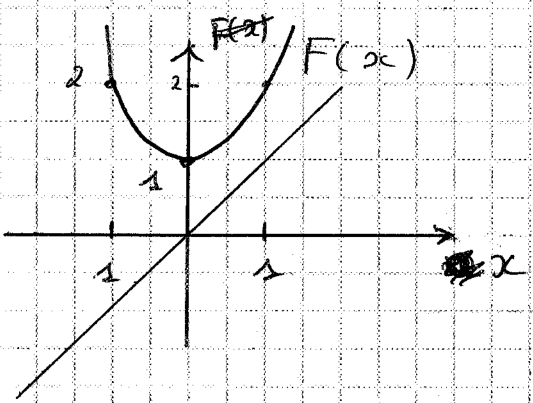
$$x^{(k+1)} = F(x^{(k)})$$ ← grote F!!!

$$F(x) = (x-a)^2 + 1$$

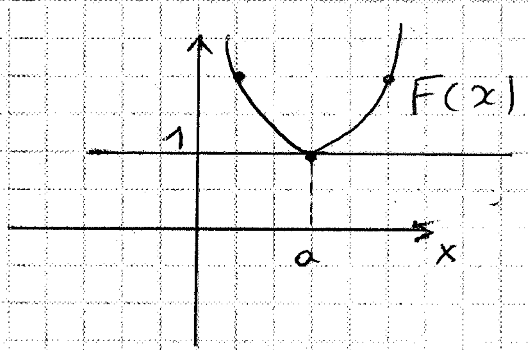
$$a > 0$$

Maak een grafiek van $F(x)$

$\boxed{a = 0} \rightarrow x^2 + 1$



Voor eender welke a



$$X^* = F(X^*)$$

$$X = (x-a)^2 + 1$$

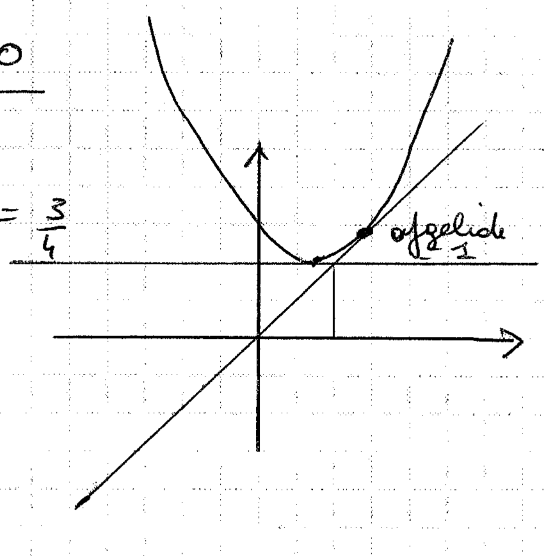
$$X^2 - 2ax - x + 1 + a^2 = 0$$

$$x^2 - (2a+1)x + (1+a^2) = 0$$

$$X^*_{1,2} = \frac{(2a+1) \pm \sqrt{(2a+1)^2 - 4(1+a^2)}}{2}$$

$$= \frac{(2a+1) \pm \sqrt{\underbrace{4a-3}_{\geq 0}}}{2}$$

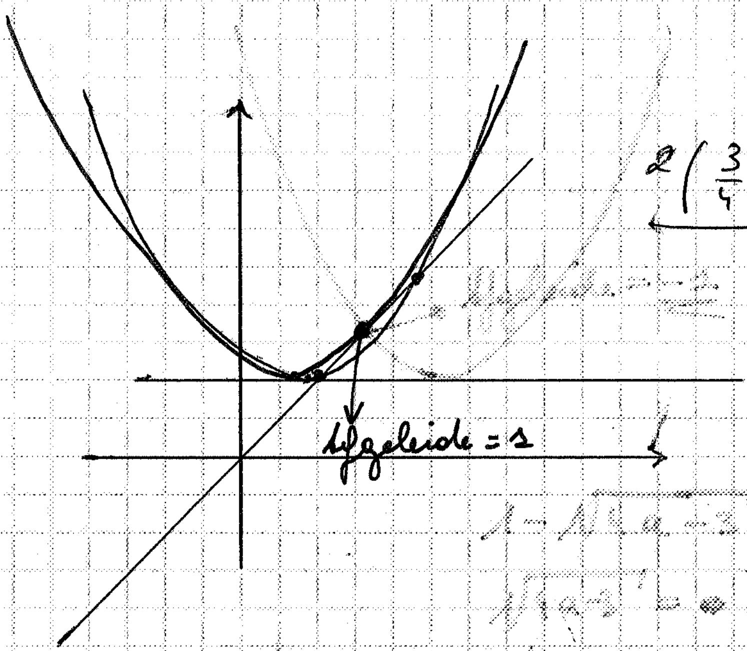
$$4a - 3 \geq 0 \Rightarrow \boxed{a \geq \frac{3}{4}} \rightarrow a = \frac{3}{4}$$

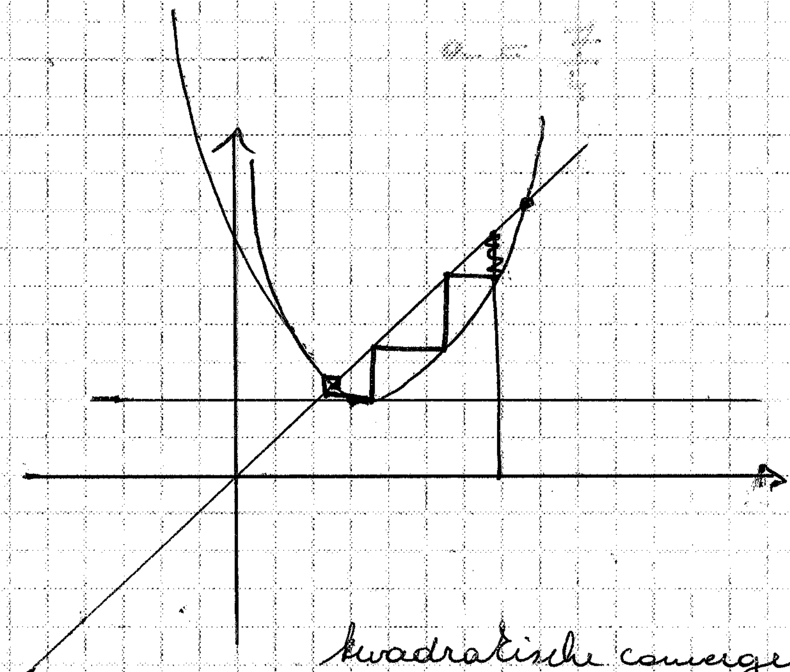


$$F'(x^*_{1,2}) = 1 \pm \sqrt{4a-3}$$

$$F'(x) = 2(x-a)$$

$$\frac{2\left(\frac{3}{4}\right)+\left(\frac{4}{4}\right)}{2}=\frac{5}{4}$$

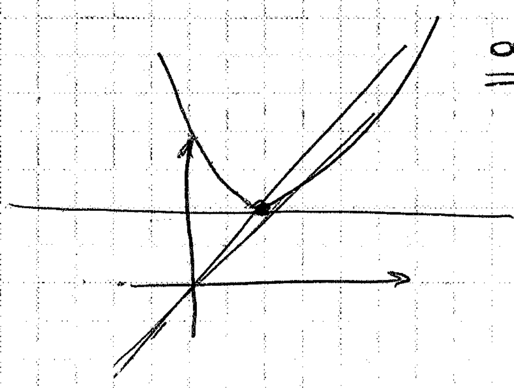




kwadratische convergentie als $\rho=0$!

Convergentiefactor: $\rho = F'(x^*_{1,2}) = 1 \pm \sqrt{4a-3} = 0$

$\underline{\underline{a = 1}}$



Zorg dat je na 1 uur minstens 1 vraag opgelost hebt en na 2 uur 2 vragen !

Vraag: 4

Methode van de machten

(Dit is de afdruk van een Maple Worksheet)

We rekenen met 16 beduidende decimale cijfers.

```
> restart:with(linalg):lp:=16:Digits:=lp;
```

```
Warning, the protected names norm and trace have been redefined and
unprotected
```

$$Digits := 16$$

We beschouwen de matrix A.

```
> A:=array(1..3,1..3,[[9,1,-1],[0,10,-5],[0,0,8]]);
```

$$A := \begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix}$$

Omdat de matrix A bovendriehoeks is, vinden we de eigenwaarden van A op de hoofddiagonaal: 9, 10, 8. De dominante eigenwaarde is dus 10. We gaan deze eigenwaarde proberen te benaderen met behulp van de methode van de machten. We nemen als startvector x0. We zullen K=100 iteraties uitvoeren.

```
> x0:=array(1..3,1..1,[[-1.0],[1.0],[1]]);K:=100;
```

$$x0 := \begin{bmatrix} -1.0 \\ 1.0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

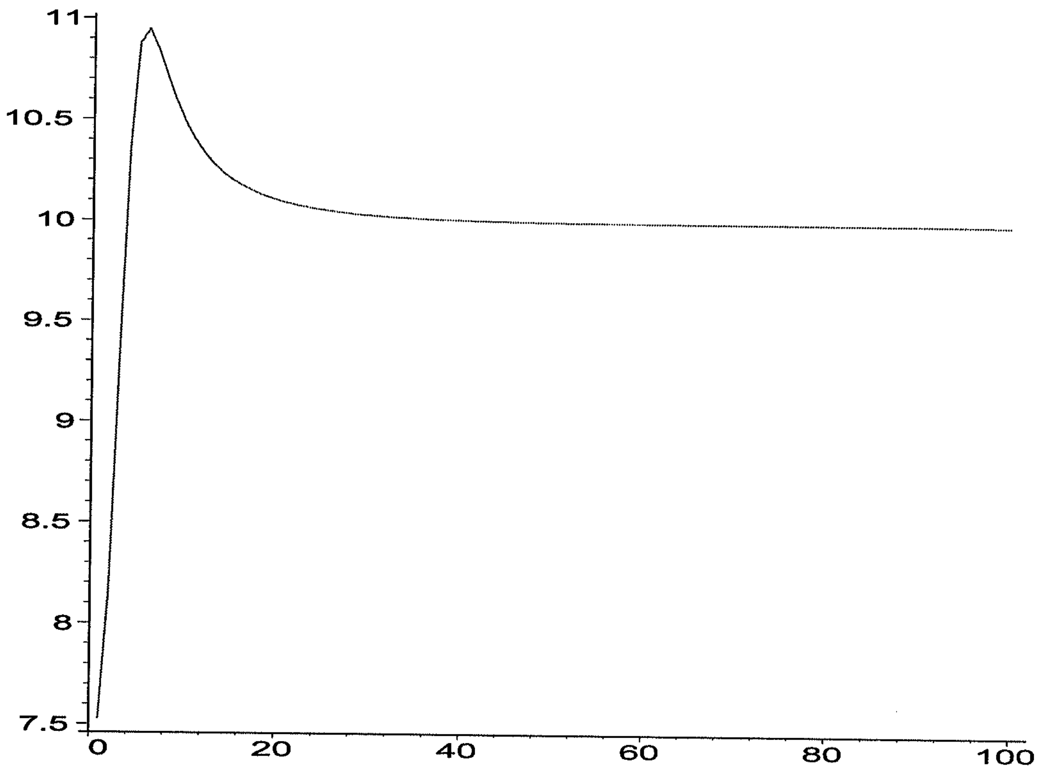
$$K := 100$$

We voeren de methode van de machten met normalisatie uit.

```
> Y:=x0/norm(x0,2):
> muvec:=array(1..K):
> for i from 1 to K do
> Z:=evalm(A&*Y):
> mu:=norm(Z,2);
> Y:=Z/mu:
> muvec[i]:=[i,mu]:
> od:
```

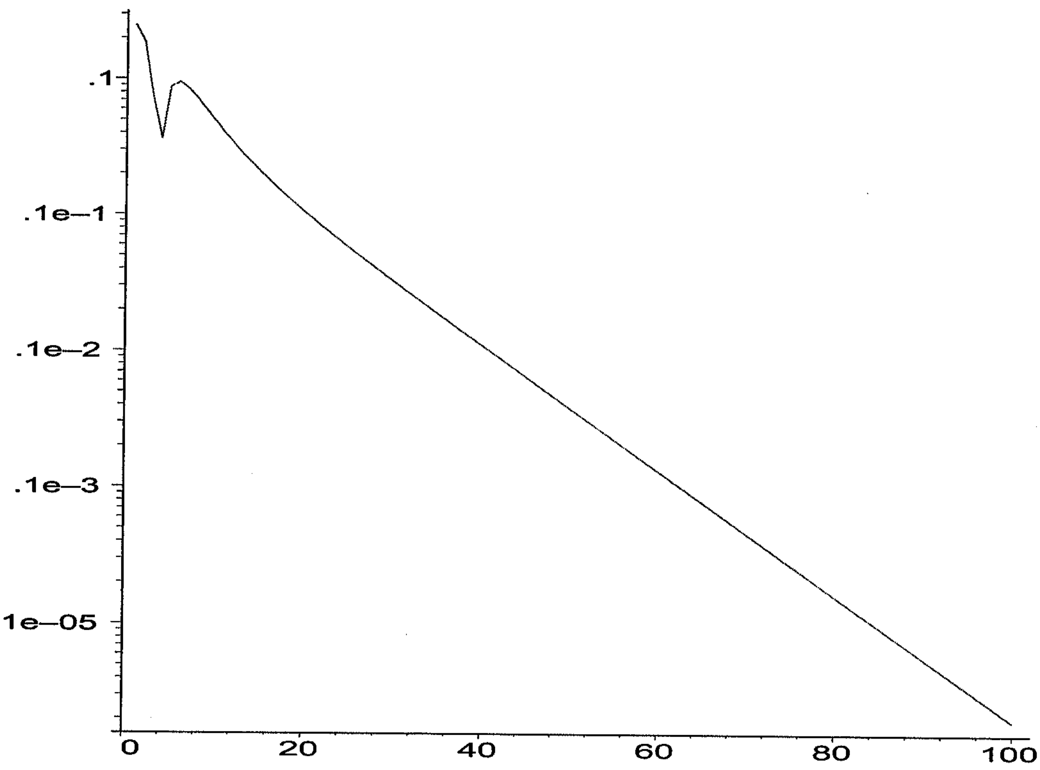
In elke iteratiestap werd er een waarde van mu berekend. Deze waarde wordt hieronder geplot.

```
> with(plots):plot(muvec,thickness=2);
```



We zien dat deze waarde naar 10 konvergeert. In de hiernavolgende grafiek plotten we de relatieve fout.

```
> relerr:=array(1..K):
> for i from 1 to K do
> relerr[i]:=[i,abs(muvec[i][2]-10.0)/10.0];
> od:
> logplot(relerr,thickness=2);
```



Verklaar de grafieken die hierboven gegenereerd werden. Wat is de orde van konvergentie en wat is de konvergentiefactor?

Wat zou er gebeuren als we in de methode hierboven geen normalisatie zouden gebruiken?

Vraag 4

De fout daalt superlineair
$\leftarrow$ lineaire convergentie

$$A = \begin{bmatrix} 9 & 1 & -1 \\ 0 & 10 & -5 \\ 0 & 0 & 8 \end{bmatrix} \qquad X_0 = \begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda_1 = 10 \qquad \lambda_2 = 9 \qquad \lambda_3 = 8$$

$$(A - \lambda I)X = 0$$

$\underline{\lambda_1 = 10}$

$$\begin{bmatrix} -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & -5 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \cancel{-1}\ x_1 \\ \cancel{1}\ x_2 \\ \cancel{-1}\ x_3 \end{bmatrix} = 0 \Rightarrow x_3 = 0$$

$$x_1 = x_2$$
$$x_1 = 1$$
$$x_2 = 1$$

$$E_1 = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_2 = 9}$

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & -5 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \qquad \begin{aligned} x_3 &= 0 \\ x_2 &= 0 \\ x_1 &= 1 \end{aligned}$$

$$E_2 = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$\underline{\lambda_3 = 8}$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -5 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} \Rightarrow \cancel{x_1 = 1} \quad E_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$\cancel{x_3 = 1 \Rightarrow x_2 = \frac{5}{2}}$$
$$\cancel{x_1 = \frac{7}{2}} \quad \cancel{\Rightarrow E_3 = \begin{bmatrix} 7 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}} \quad E_3 = \begin{bmatrix} -3 \\ 5 \\ 2 \end{bmatrix}$$

$$x_k = A^k x_0$$

$$x_0 = \alpha_1 E_1 + \alpha_2 E_2 + \alpha_3 E_3$$

$$\boxed{\alpha_1 = -\frac{3}{2}}$$

$$\alpha_2 = 2$$

$$\alpha_3 = \frac{1}{2}$$

$$x_k = A^k x_0 = \alpha_1 \lambda_1^k E_1 + \alpha_2 \lambda_2^k E_2 + \alpha_3 \lambda_3^k E_3$$

$$= \lambda_1^k \Big(\underbrace{\alpha_1 E_1}_{\text{Dominant}} + \left(\frac{\lambda_2}{\lambda_1}\right)^k \alpha_2 E_2 + \left(\frac{\lambda_3}{\lambda_1}\right)^k \alpha_3 E_3 \Big)$$

Convergentiefactor $= \frac{9}{10} = \frac{\lambda_2}{\lambda_1}$

it 40 $= 10^{-3}$

it 100 $= 2 \cdot 10^{-6}$

$$\rho^{60} = \frac{2 \cdot 10^{-6}}{2 \cdot 10^{-3}} \approx 0,906$$

Wat zonder normalisatie?

Overloop: vector groeien als 10^k groeit!

Op examen mogelijk niet generiek gedraagt.

$\boxed{\alpha_1 = 0}$ controleren