Examen final

Consignes :

- Vous disposez de **3 h** pour répondre aux **3** × **4** questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Un formulaire sur les transformées de Fourier et Laplace est fourni en annexe.
- Soyez **clairs** et **précis** et dans vos réponses et **justifications**.
- Et surtout **exprimez-vous** sur les sujets proposés pour démontrer votre compréhension des concepts !

Exercice 1

a) Établir la propriété donnant le comportement de la tranformée de Fourier sous dilatation :

$$\widehat{x(at)} = \tfrac{1}{a}\,\widehat{x}\big(\tfrac{f}{a}\big), \qquad a > 0.$$

$$\begin{aligned}
\widehat{x(at)} &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-2\pi j f t}\,\mathrm{d}t \\
&= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-2\pi j f \frac{u}{a}}\,\frac{\mathrm{d}u}{a} \\
&= \tfrac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-2\pi j \frac{f}{a} u}\,\mathrm{d}u \\
&= \tfrac{1}{a}\,\widehat{x(\tfrac{f}{a})}
\end{aligned}$$

b) Calculer la convolution d'un signal $x(t)$ avec une onde pure de fréquence f_0 :

$$x(t) * e^{2\pi j f_0 t}.$$

Dans le domaine temporel :

$$x(t) * e^{2\pi j f_0 t} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{2\pi j f_0 (t-u)}\,\mathrm{d}u = e^{2\pi j f_0 t}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) e^{-2\pi j f_0 u}\,\mathrm{d}u = e^{2\pi j f_0 t}\cdot \widehat{x}(f_0)$$

Ou dans le domaine fréquentiel :

$$\mathscr{F}(x(t) * e^{2\pi j f_0 t}) = \widehat{x}(f)\cdot\delta(f - f_0) = \widehat{x}(f_0)\cdot\delta(f-f_0)$$

d'où par transformée inverse

$$x(t) * e^{2\pi j f_0 t} = \widehat{x}(f_0)\cdot e^{2\pi j f_0 t}.$$

c) Calculer, pour $T > 0$ et $N \in \mathbb{N}$, la transformée de Fourier de la fonction

$$D_N(t) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \cos(2\pi \tfrac{n}{T} t)$$

et en déduire le sens à donner (en tant que signal) à $\lim\limits_{N\to\infty} D_N$.

Puisque

$$\cos(2\pi f_0 t) = \frac{e^{2\pi j f_0 t} + e^{-2\pi j f_0 t}}{2},$$

on se rappelle que

$$\mathscr{F}(\cos(2\pi f_0 t)) = \frac{\delta(f - f_0) + \delta(f + f_0)}{2}.$$

Par linéarité on a donc

$$\widehat{D_N}(f) = 1 + 2\sum_{n=1}^{N} \frac{\delta(f - \frac{n}{T}) + \delta(f + \frac{n}{T})}{2} = \sum_{n=-N}^{N} \delta(f - \tfrac{n}{T})$$

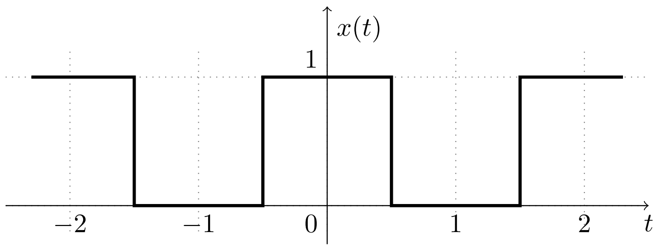
d'où

$$\lim_{N\to\infty} \widehat{D_N}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(f - \tfrac{n}{T}) = Ш_{\frac{1}{T}}(f)$$

et on conclut donc que

$$\lim_{N\to\infty} D_N(t) = T\, Ш_T(f).$$

d) Donner la représentation en série de Fourier du signal 2-périodique $x(t)$ représenté ci-dessous.



Le signal $x(t)$ étant 2-périodique :

$$x(t-2) = x(t)$$

on sait que sa transformée est un spectre de raies :

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \delta(f - \tfrac{n}{2}),$$

d'où par transformée inverse la représentation de $x(t)$ en série de Fourier

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{\pi j n t}.$$

On peut expliciter les coefficients de Fourier c_n par calcul explicite, pour $n \neq 0$ (en calculant à part $c_0 = \frac{1}{2}$)

$$c_n = \frac{1}{2} \int_{-1}^{+1} x(t) e^{\pi j n t} \, \mathrm{d}t = \frac{e^{\pi j n t}}{2\pi j n} \Big|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \frac{1}{\pi n} \sin\big(\frac{n\pi}{2}\big) = \begin{cases} 0 & n \neq 0 \text{ pair} \\ \frac{(-1)^k}{\pi(2k+1)} & n = 2k+1 \text{ impair} \end{cases}$$

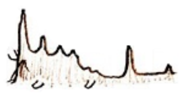
Ou, pour ceux qui n'aiment pas refaire sans cesse les mêmes calculs, on peut exprimer les coefficients en termes de la transformée du motif :

$$c_n = \frac{1}{2} \widehat{m}\big(\frac{n}{2}\big) = \frac{1}{2} \widehat{\Pi_1}\big(\frac{n}{2}\big) = \frac{1}{2} \operatorname{sinc}\big(\frac{n\pi}{2}\big)$$

et on obtient bien le même résultat. Si on veut on peut regrouper les termes dans la série de Fourier :

$$x(t) = \frac{1}{2} + \frac{1}{\pi} \sum_{k=-\infty}^{+\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)} e^{\pi j (2k+1) t} = \frac{1}{2} + \frac{2}{\pi} \sum_{k=0}^{+\infty} \frac{\cos(2k+1)\pi t}{2k+1}$$

(cas particulier de la série du TP4 avec $T = 2$ et $\theta = \frac{1}{2}$).



Exercice 2

a) Par calcul direct, obtenir la transformée de Laplace de $h(t) = H(t) \, e^{-\lambda t}$.

Fastoche :

$$\mathcal{L}(h) = \int_0^{+\infty} e^{-\lambda t} \, e^{-pt} \, \mathrm{d}t = \int_0^{+\infty} e^{-(p+\lambda)t} \, \mathrm{d}t = -\frac{e^{-(p+\lambda)}}{p+\lambda} \Big|_0^{+\infty} = -\Big(0 - \frac{1}{p+\lambda}\Big) = \frac{1}{p+\lambda}$$

à condition que $\mathrm{Re}(p+\lambda) > 0$.

b) Soit $x(t)$ et $y(t)$ deux signaux causaux pour lesquels

$$y'(t) + \lambda \, y(t) = x(t).$$

Expliquer pourquoi on peut alors affirmer que $y(t) = x(t) * h(t)$.

(Tout d'abord on peut se convaincre que les conditions initiales sont cohérentes, la convolution de signaux causaux l'étant également.)

Dans le domaine opérationnel :

$$pY(p) + \lambda Y(p) = X(p)$$

d'où

$$Y(p) = \frac{1}{p+\lambda} \cdot X(p) \sqsubset h(t) * x(t).$$

Dans le domaine temporel : on peut tout d'abord se convaincre que $h(t)$ est solution de l'équation différentielle avec membre de droite $\delta(t)$:

$$h'(t) = H'(t)\, e^{-\lambda t} - \lambda\, H(t)\, e^{-\lambda t} = \delta(t)\, e^{-\lambda t} - \lambda\, H(t)\, e^{-\lambda t} = \delta(t) - \lambda\, h(t)$$

et que, de là

$$(x * h)' + \lambda(x * h) = x * h' + \lambda\, x * h = x * (h' + \lambda h) = x * \delta = x.$$

Dit autrement : l'opérateur qui à x associe y la solution causale de $y' + \lambda y = x$ est un filtre, donc sa sortie sur une entrée x quelconque est la convolution de x avec la réponse impulsionnelle h.

c) En supposant que $\lambda > 0$: montrer que la transformée de Fourier de $h(t) = H(t)\, e^{-\lambda t}$ est de la forme

$$\frac{1}{\lambda + 2\pi j f}$$

puis en déduire la transformée de $e^{-\lambda |t|}$ donnée dans le formulaire.

Pour la première affirmation, soit on refait le calcul de la transformée de Fourier (direct), soit on raisonne sur le fait que si $\lambda > 0$ la transformée de Laplace est définie dans tout le demi-plan complexe droit et on la restreignant à l'axe imaginaire ($p = 2\pi j f$) on obtient directement la transformée de Fourier.

Autre approche : passer l'équation différentielle $h' + \lambda\, h = \delta$ dans le domaine fréquentiel et arriver à la même conclusion.

Ensuite, en remarquant que $e^{-\lambda|t|} = h(t) + h(-t)$ (du moins presque partout) on obtient sa transformée de Fourier

$$\widehat{h}(f) + \widehat{h}(-f) = \frac{1}{\lambda + 2\pi j f} + \frac{1}{\lambda - 2\pi j f} = \frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}.$$

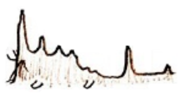
d) Expliquer comment on peut utiliser ce qui précède pour déterminer la transformée de Fourier de $\dfrac{1}{1+t^2}$.

Par transformée de Fourier inverse (toutes les fonctions étant paires), on sait par la question précédente que la transformée de Fourier de

$$\frac{\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 t^2} \quad \text{est} \quad e^{-\lambda |f|}.$$

Il suit que la transformée de Fourier de

$$\frac{1}{1+t^2} = 2\pi \cdot \frac{2\pi}{4\pi^2 + 4\pi^2 t^2} \quad \text{est} \quad 2\pi e^{-2\pi|f|}.$$



Exercice 3

a) Soit $x(t)$ un signal discret, de la forme

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n\, \delta(t - nT).$$

Montrer que $e^{\frac{2\pi j t}{T}} \cdot x(t) = x(t)$ et en déduire que son spectre est $\frac{1}{T}$-périodique.

$$e^{\frac{2\pi j t}{T}} \cdot x(t) = e^{\frac{2\pi j t}{T}} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n\, \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} x_n\, \underbrace{e^{\frac{2\pi j n T}{T}}}_{1}\, \delta(t - nT) = x(t)$$

ce qui, dans le domaine fréquentiel, se traduit par

$$\widehat{x}(f - \tfrac{1}{T}) = \widehat{x}(f).$$

b) Cas particulier : lorsque $x_n = 1$ pour tout n, on obtient le peigne de Dirac $Ш_T$.

Expliciter ce que signifie alors l'écriture $g(t) \cdot Ш_T(t)$ lorsque $g(t)$ est une fonction.

$$g(t) \cdot Ш_T(t) = g(t) \cdot \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t) \cdot \delta(t - nT) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(nT)\, \delta(t - nT)$$

puisque $g(t) \cdot \delta(t - t_0) = g(t_0) \cdot \delta(t - t_0)$; on obtient donc un signal discret correspondant à une version échantillonnée de $g(t)$.

c) Déterminer le spectre $\widehat{x}$ de x lorsque $x_n = (-1)^n$.

Première approche : exprimer $x(t)$ comme

$$x(t) = Ш_{2T}(t) - Ш_{2T}(t - T)$$

pour obtenir

$$\widehat{x}(f) = (1 - e^{-2\pi j f T}) \frac{1}{2T} Ш_{\frac{1}{2T}}(f) = \frac{1}{2T} \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (1 - e^{-\pi j n})\, \delta(f - \tfrac{n}{2T}) = \frac{1}{T} \sum_{n \text{ impair}} \delta(f - \tfrac{n}{2T})$$

Autre approche : si on remarque que $x(t) = e^{\pi j \frac{t}{T}}\, Ш_T(t)$, on peut directement dire que

$$\widehat{x}(f) = \frac{1}{T}\, Ш_{\frac{1}{T}}(f - \tfrac{1}{2T}),$$

ce qui revient au même.

d) Montrer dans ce dernier cas que $x(t) * \mathrm{sinc}(\frac{\pi t}{T}) = \cos(\frac{\pi t}{T})$.

Côté temporel :

$$x(t) * \mathrm{sinc}(\tfrac{\pi t}{T}) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} (-1)^n \,\mathrm{sinc}\, \tfrac{\pi}{T}(t - nT),$$

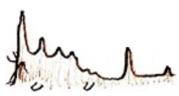
ce qui ne nous aide a priori pas beaucoup.

Par contre du côté fréquentiel :

$$\widehat{x}(f) \cdot T\, \Pi_{\frac{1}{T}}(f) = \left(\delta(f - \frac{1}{2T}) + \delta(f + \frac{1}{2T})\right) \cdot \Pi_{\frac{1}{T}}(f) = \frac{\delta(f - \frac{1}{2T}) + \delta(f + \frac{1}{2T})}{2}$$

d'où $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{T})$ – et non $e^{\frac{\pi t}{T}}$ qui rajoute une partie imaginaire superflue comme annoncé, désolé !

Remarque : ici on remarque que $x(t) = \cos(\frac{\pi t}{T}) \cdot Ш_T(t)$ donc on peut penser à x comme étant une discrétisation d'un cosinus par échantillonnage ; on retrouve la fonction initiale par interpolation de Whittaker à partir des échantillons (voir TP3).

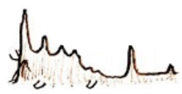


Produit de convolution

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)\, x_2(t - u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t - v)\, x_2(v)\, \mathrm{d}v$$

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\int_0^t x(u)\, \mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$tx(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} X(s)\, \mathrm{d}s$	
$e^{at}x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa}X(p)$	$(a \geqslant 0)$
$x(kt)$	$\dfrac{1}{k} X\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$



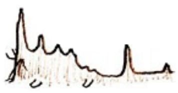
Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pX(p) = x(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pX(p) = x(+\infty)$$

original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} x(t)\, e^{-2\pi jnt/T}\,\mathrm{d}t$$



Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi jft}\,\mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi jft}\,\mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\,\widehat{x_1}(f) + \mu\,\widehat{x_2}(f)$
$x(-t)$ $\overline{x(t)}$	$\widehat{x}(-f)$ $\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$ $e^{2\pi jat}x(t)$	$e^{-2\pi jaf}\widehat{x}(f)$ $\widehat{x}(f-a)$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $-2\pi jt\, x(t)$	$2\pi jf\,\widehat{x}(f)$ $\dfrac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$ $x_1(t)\, x_2(t)$	$\widehat{x_1}(t)\,\widehat{x_2}(t)$ $(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t) = H\big(t+\frac{a}{2}\big) - H\big(t-\frac{a}{2}\big)$ $e^{-\lambda\lvert t\rvert}, \lambda > 0$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi af)$ $\dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(f)$ $\dfrac{1}{T}Ш_{\frac{1}{T}}(f)$