20 décembre 2018 **INTRODUCTION À L'INFOGRAPHIE** CIR 3

Consignes :

— Pour la partie 1 (Questions à choix multiple) veuillez ne pas répondre sur le sujet, mais sur la **feuille de réponse prévue à cet effet**. Les questions peuvent présenter une ou plusieurs bonnes réponses. En cas de mauvaise réponse il est attribué une note négative.
— Pour la partie 2 (Application) veuillez répondre sur la feuille.
— Pour cette épreuve de 3 heures aucun document n'est autorisé et la calculatrice collège est tolérée.

BON COURAGE !

****

Partie 1 : QUESTIONS À CHOIX MULTIPLE

1. NURBS signifie et indique ...
   - (1)☐ courbe de Bézier rationnelle.
   - (2)☐ courbe B-spline non uniforme.
   - (3)☐ courbe B-spline fermée.
   - (4)☒ Non Uniform Rational Bézier Spline.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. La paramétrisation ...
   - (1)☐ est unique pour une courbe géométrique.
   - (2)☐ peut changer les tangentes de la courbe.
   - (3)☒ ne modifie pas la longueur d'arc.
   - (4)☐ peut associer à deux valeurs distincts le même point sur la courbe.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Soit une courbe B-spline uniforme de degré 3 contrôlée par les points $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$. Parmi les propositions suivantes, lesquelles sont vraies ?
   - (1)☒ L'ordre de la B-spline est 2.
   - (2)☐ Le vecteur nodale est formé par 8 points.
   - (3)☐ Le vecteur nodale peut être $(-2\ -1.4\ 0\ 0.25\ 1\ 1.5\ 2\ 2)$.
   - (4)☒ Si $\mathbf{p}_0 = \mathbf{p}_4$, la courbe est fermée.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

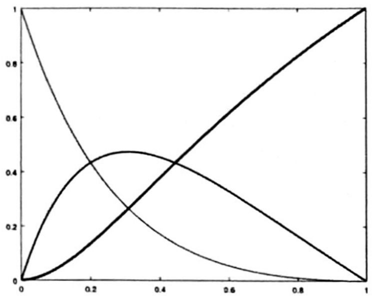
4. Une courbe de Bézier ...
   - (1)☐ est une courbe par morceaux.
   - (2)☒ interpole ses points de contrôle.
   - (3)☐ appartient à un espace vectoriel.
   - (4)☐ peut être au maximum de degré 5.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

5. Parmi les propriétés suivantes la(les) quelle(s) sont vérifiées pour une courbe de Bézier de degré n ?
   - (1)☐ Invariance par transformations affines.
   - (2)☐ La dérivée est une courbe de degré $n-1$.
   - (3)☒ Interpolation de tous les points de contrôle.
   - (4)☐ On peut reproduire des cercles.
   - (5)☐ Le degré du polynôme augmente avec le numéro de points de contrôle.

6. Un polynôme d'interpolation ...
   - (1)☐ est défini par une unique base polynomiale.
   - (2)☐ est unique.
   - (3)☒ est de degré inférieur ou égale n, si on a $n+1$ points.
   - (4)☐ converge toujours aux points d'interpolation.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. Si nous avons 5 point de contrôle, on peut construire une courbe de Bézier :
   - (1)☒ de degré 4.
   - (2)☐ de degré 5.
   - (3)☐ avec un contrôle globale.
   - (4)☐ avec un paramètre $t \in [1, 2]$.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

8. On considère les fonctions de base sur le graphe ci-dessous :



   - (1)☐ Ce ne sont pas des fonctions de base.
   - (2)☐ Ce sont des fonctions de base incomplètes.
   - (3)☒ Ce sont des fonctions de base de degré 2.
   - (4)☐ Ce sont des fonctions de base de degré 3.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

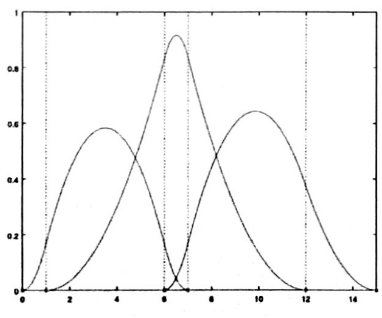
9. Infographie c'est ...
   - (1)☐ le graphisme d'information.
   - (2)☐ infographics en anglais.
   - (3)☒ la création d'images numériques assistées par ordinateur.
   - (4)☐ la modélisation 2D et 3D.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

10. Une courbe B-spline ...
   - (1)☒ a degré fixé par le nombre de points de contrôle.
   - (2)☒ interpole le premier et dernier point de contrôle
   - (3)☐ possède un unique vecteur de nœuds.
   - (4)☐ peut être une courbe d'interpolation.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

11. L'algorithme de De Casteljau ...
   - (1)☐ permet de tracer une courbe d'interpolation.
   - (2)☒ permet de tracer la courbe de B-spline.
   - (3)☐ se base sur le calcul de fonctions de base.
   - (4)☒ est récursif et linéaire.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Le vecteur de nœuds ...
   - (1)☐ influence les fonctions B-splines.
   - (2)☐ peut être nul.
   - (3)☐ permet à la courbe d'avoir des discontinuités.
   - (4)☐ est formé par $n + k + 1$ éléments si la courbe B-spline est d'ordre k et on a $n + 1$ points de contrôle.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

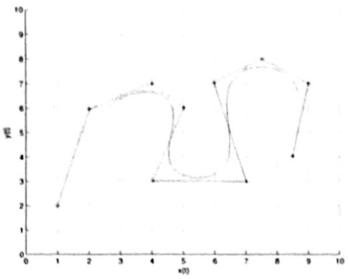
13. On considère le graphe ci-dessous :



   - (1)☐ Ce sont des fonctions de base incomplètes.
   - (2)☐ Ce ne sont pas de fonctions de base
   - (3)☐ L'ordre est égal à 3.
   - (4)☐ Le vecteur de nœuds est uniforme.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Soit une courbe B-spline de degré 3 contrôlée par les points $\mathbf{p}_0$, $\mathbf{p}_1$, $\mathbf{p}_2$, $\mathbf{p}_3$, $\mathbf{p}_4$. La courbe passera par le point $\mathbf{p}_4$ si :
   - (1)☐ le vecteur nodale est (0 0 1 1 1 2 2 3 3).
   - (2)☐ le vecteur nodal est (0 1 2 3 4 4 4 4).
   - (3)☐ $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3 = \mathbf{p}_4$
   - (4)☐ $\mathbf{p}_2 = \mathbf{p}_3$
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

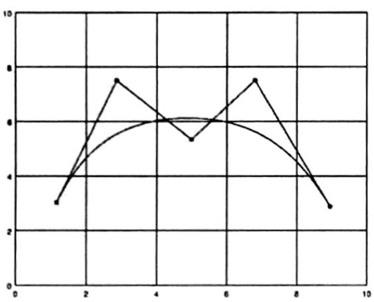
15. On considère la courbe sur le graphe ci-dessous :



   - (1)☐ C'est une courbe de Bézier.
   - (2)☒ Elle est dans l'enveloppe convexe.
   - (3)☐ Elle a degré 9.
   - (4)☐ Elle peut avoir ordre 2.
   - (5)☒ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

16. Les polynômes de Bernstein ...
   - (1)☐ sont toujours 3.
   - (2)☐ peuvent prendre la valeur 0.
   - (3)☐ sont symétriques : $B_i^n(t) = B_{n-i}^n(1-t)$
   - (4)☒ permettent l'interpolation du premier et dernier point de contrôle.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

17. On considère la courbe sur le graphe ci-dessous :



   - (1)☐ Ce n'est pas une courbe de Bézier.
   - (2)☐ Elle sort de l'enveloppe convexe.
   - (3)☐ Elle respecte la propriété de variation diminishing.
   - (4)☐ La courbe a le même nombre d'inflexion du polygone de contrôle.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

18. Si on a k nœuds multiples aux extrémités du vecteur, la courbe B-spline d'ordre k peut :
   - (1)☐ être une courbe de Bézier.
   - (2)☒ perdre k degré de continuité.
   - (3)☐ interpoler le premier et dernier point de contrôle.
   - (4)☐ rester dans l'enveloppe convexe.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

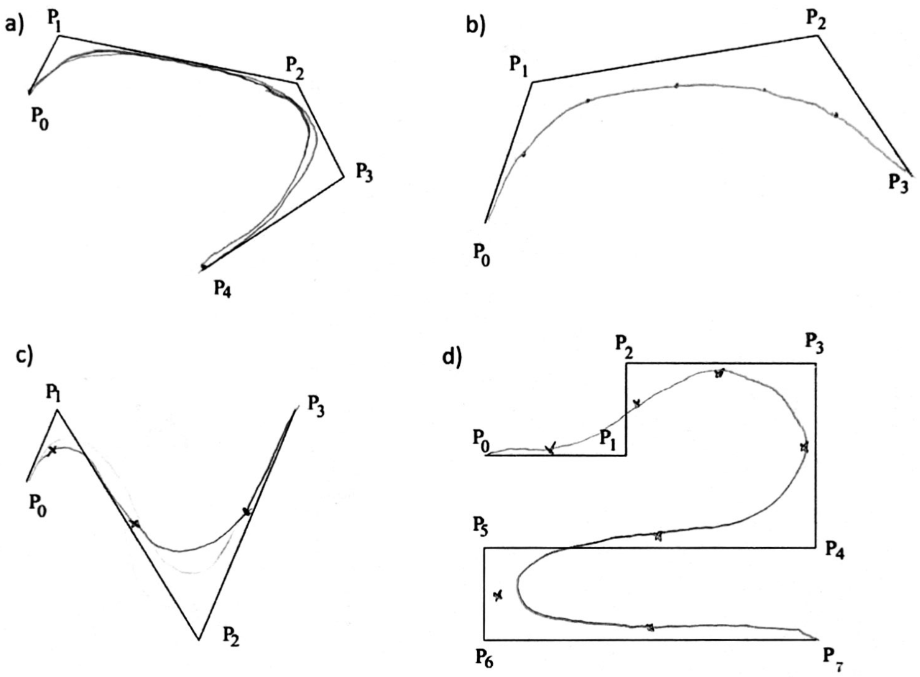
19. Parmi les propriétés suivantes la(les) quelle(s) sont toujours vérifiées pour une courbe B-spline ?
   - (1)☐ Invariance par transformations affines.
   - (2)☒ Elle reste dans l'enveloppe convexe
   - (3)☐ Interpolation du premier et dernier point de contrôle.
   - (4)☐ On peut reproduire des cercles.
   - (5)☒ Le degré du polynôme augmente avec le numéro de points de contrôle.

20. Une courbe de Bézier rationnelle ...
   - (1)☐ ajoute un degré à la courbe de Bézier.
   - (2)☐ introduit un paramètre de forme.
   - (3)☐ est une courbe de Bézier classique si tous les poids ont valeur 0.
   - (4)☒ change les polynômes de Bernstein.
   - (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

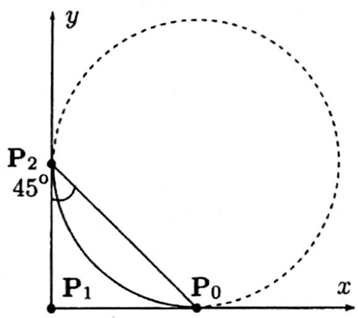
Exercice 1. Soit $\mathbf{P}(t) = \left(\dfrac{1-t^2}{1+t^2}, \dfrac{2t}{1+t^2}\right)$ avec $t \in [0,1]$ une courbe de Bézier rationnelle avec $\omega_0 = \omega_1 = 1$ et $\omega_2 = 2$.

Trouver ses points de contrôle.

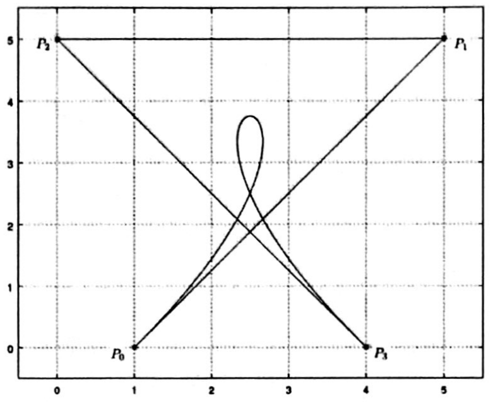
Exercice 2. En vous aidant d'un algorithme, pour lequel vous donnerez le nom, tracer l'allure générale et donner le degré de la courbe de Bézier passant par les points de contrôle donnés dans les cas suivants :



Exercice 3. Donner l'expression de la courbe B-spline rationnelle représentée sur la figure ci-dessous.
Elle est de degré 2 avec vecteur des nœuds $t = [0,0,0,1,1,1]$ et ses points de contrôle sont $\mathbf{p}_0 = (1,0)r$, $\mathbf{p}_1 = (0,0)$ et $\mathbf{p}_2 = (0,1)r$, avec r le rayon du cercle.



Exercice 4. La figure ci-dessous représente une B-spline cubique uniforme avec son polygone de contrôle.



1. Quelles propriétés possèdent les courbes B-spline ? Expliquez l'origine de ces propriétés.
2. Donner un vecteur de nœuds pour cette courbe B-spline.
3. On transforme la courbe B-spline en une NURBS en affectant un poids ω_i à chaque point de contrôle P_i. Dessiner l'allure de la NURBS si
$$\omega_0 = \omega_1 = \omega_3 = 1 \text{ et } \omega_2 = 3$$
4. Dessiner l'allure de la NURBS si
$$\omega_0 = \omega_3 = 3 \text{ et } \omega_1 = \omega_2 = 1$$
5. Comment on retrouve les courbes de Bézier et les courbes B-splines à partir de NURBS ? Quel type de courbes les NURBS nous permettent de dessiner ?

FORMULAIRE

- Polynômes de Bernstein (de degré n) :

$$B_i^n(t) = \binom{n}{i} \; t^i \; (1-t)^{n-i}, \quad i = 0, \dots, n; \;\; t \in [0,1]$$

- Polynômes de Bernstein rationnels (de degré n) :

$$R_i^n(t) = \frac{\omega_i \; B_i^n(t)}{\sum_{j=0}^{n} \omega_j \; B_j^n(t)}, \quad t \in [0,1], \; \omega_i \in \mathbb{R}$$

- Fonctions B-splines :

$$N_i^m(t) = \frac{t - t_i}{t_{i+m} - t_i} N_i^{m-1}(t) + \frac{t_{i+m+1} - t}{t_{i+m+1} - t_{i+1}} N_{i+1}^{m-1}(t)$$

avec
$$N_i^0(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } t_i \leqslant t < t_{i+1} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

La promo 63, tous des ingrats.