FORMULAIRE

Formules Trigo :

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ (cos(a+b) + cos(a-b))
sin(a).sin(b) = ½ (cos(a-b) – cos(a+b))
cos(a).sin(b) = ½ (sin(a+b) – sin(a-b))
sin(a).cos(b) = ½ (sin(a+b) + sin(a-b))

Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Décomposition en série de Fourier réelle et complexe + Relations entre an, bn et cn

$$x(t) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right) + b_n \sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)$$

avec

$$a_0 = \frac{2}{T}\int_T x(t)dt$$

$$a_n = \frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt$$

$$bn = \frac{2}{T}\int_T x(t)\sin\left(2\pi n \frac{t}{T}\right)dt$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{+2\pi j \frac{n}{T} t}$$

avec

$$c_n = \frac{1}{T}\int_T x(t) e^{-2\pi j \frac{n}{T} t} dt$$

$$c_0 = \frac{a_0}{2}$$

$$c_n = \frac{1}{2}(a_n - jb_n)$$

$$c_{-n} = \frac{1}{2}(a_n + jb_n) = c_n^*$$

Quelques propriétés liées aux séries de Fourier

<u>Dérivation</u> :
Soit x(t) un signal périodique de période T et Xk ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction :

$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \qquad \text{sont :} \qquad \left(2\pi jk\frac{1}{T}\right)^n X_k$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

- Changement d'échelle : $x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$

  $x(kt) \xrightarrow{TF} \frac{1}{|k|}X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$

- Dualité : $x(t) \leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t) \leftrightarrow x(-\upsilon)$

- Dérivation :
  - Par rapport au temps

    $x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$

    $\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j\upsilon)^n X(\upsilon)$

  - Par rapport à la fréquence

    $x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$

    $t^n x(t) \xrightarrow{TF} \frac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n}\frac{1}{(-2\pi j)^n}$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\delta(t-nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty}\frac{1}{T}\delta\left(\upsilon-\frac{n}{T}\right)$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty}\frac{1}{2T}\int_{-T}^{+T} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$\begin{array}{cc} & \text{Colonne numéro } n \\ \begin{array}{l}\text{Ligne}\\ \text{Numéro}\\ k\end{array} & \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix} \end{array}$$

Expression de la fenêtre de Hanning calculée sur N points :

$$h(n) = 0.5\left(1-\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) \qquad \text{avec } n=0,1,\ldots,N-1$$

Expression de la fenêtre de Hamming calculée sur N points :

$$h(n) = 0.54 - 0.46.\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \qquad \text{avec } n=0,1,\ldots,N-1$$

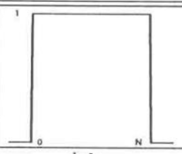
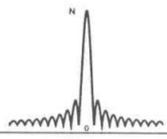
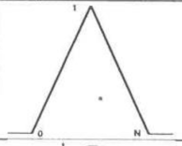
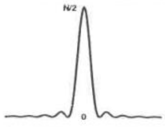
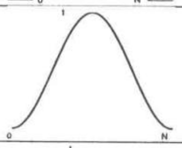
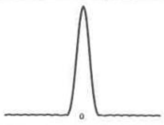
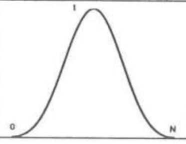
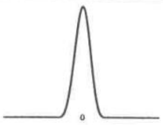
Nom		Représentation temporelle	Représentation fréquentielle	Largeur lob.princ.	Amp. relative $\frac{lob.princ}{lob.sec.}$
Rectangulaire				$\frac{2}{N}$	-13 dB
Triangulaire				$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hamming				$\frac{4}{N}$	-41 dB
Blackman				$\frac{6}{N}$	-57 dB

Table 3 *Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques*