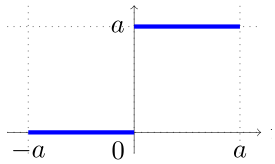
II – Séries de Fourier

Exercice 1

a) Par calcul direct, déterminez les coefficients de Fourier du signal périodique $x(t)$ ayant comme motif :



b) Que peut-on dire sur la convergence ponctuelle de la série obtenue en a) ? Précisez notamment les valeurs aux multiples entiers de a.

c) Exprimer l'énergie totale de x de deux manières différentes (identité de Parseval). Qu'est-ce que cela nous apprend sur la somme des séries

$$1+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{5^2}+\frac{1}{7^2}+\cdots \qquad \text{et} \qquad 1+\frac{1}{2^2}+\frac{1}{3^2}+\frac{1}{4^2}+\cdots \ ?$$

Exercice 2

Considérons l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muni du produit hermitien

$$\langle x \,|\, y\rangle = \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

a) Calculer explicitement les produits scalaires $\langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_n\rangle$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ et en déduire

$$\langle \mathbf{c}_m \,|\, \mathbf{c}_n\rangle\,, \qquad \langle \mathbf{c}_m \,|\, \mathbf{s}_n\rangle\,, \qquad \langle \mathbf{s}_m \,|\, \mathbf{s}_n\rangle \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

b) Exprimer les coefficients de Fourier c_n en termes des a_n, b_n, et vice-versa.

c) Comment se reflète dans les coefficients de Fourier d'une fonction x le fait qu'elle soit :

i) paire ? ii) impaire ? iii) réelle ? iv) imaginaire ?

Exercice 3 (phénomène de Gibbs)

a) Obtenir la série de Fourier de $z(t) = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sg}(t)$ sur $[-\pi, \pi]$.

b) Soit S_N la somme des N premiers termes non nuls dans la série de Fourier de z. Montrer que sa dérivée peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\sin(2Nt)}{2\sin t}$$

et utiliser ceci pour étudier les variations de S_N sur $[0, \pi]$.

c) Soit $t_N > 0$ la position du premier maximum local de S_N à droite de l'origine. En reconnaissant une somme de Riemann, établir que

$$S_N(t_N) \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\, \mathrm{d}u \quad \text{quand} \quad N \to \infty.$$

d) Montrer que cette valeur limite est strictement plus grande que $\pi/4 = z(0^+)$, et estimer numériquement le pourcentage de surévaluation que commettent les grandes sommes partielles de la série de Fourier de f au voisinage de 0^+, i.e. le ratio limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N(t_N)}{\pi/4}.$$