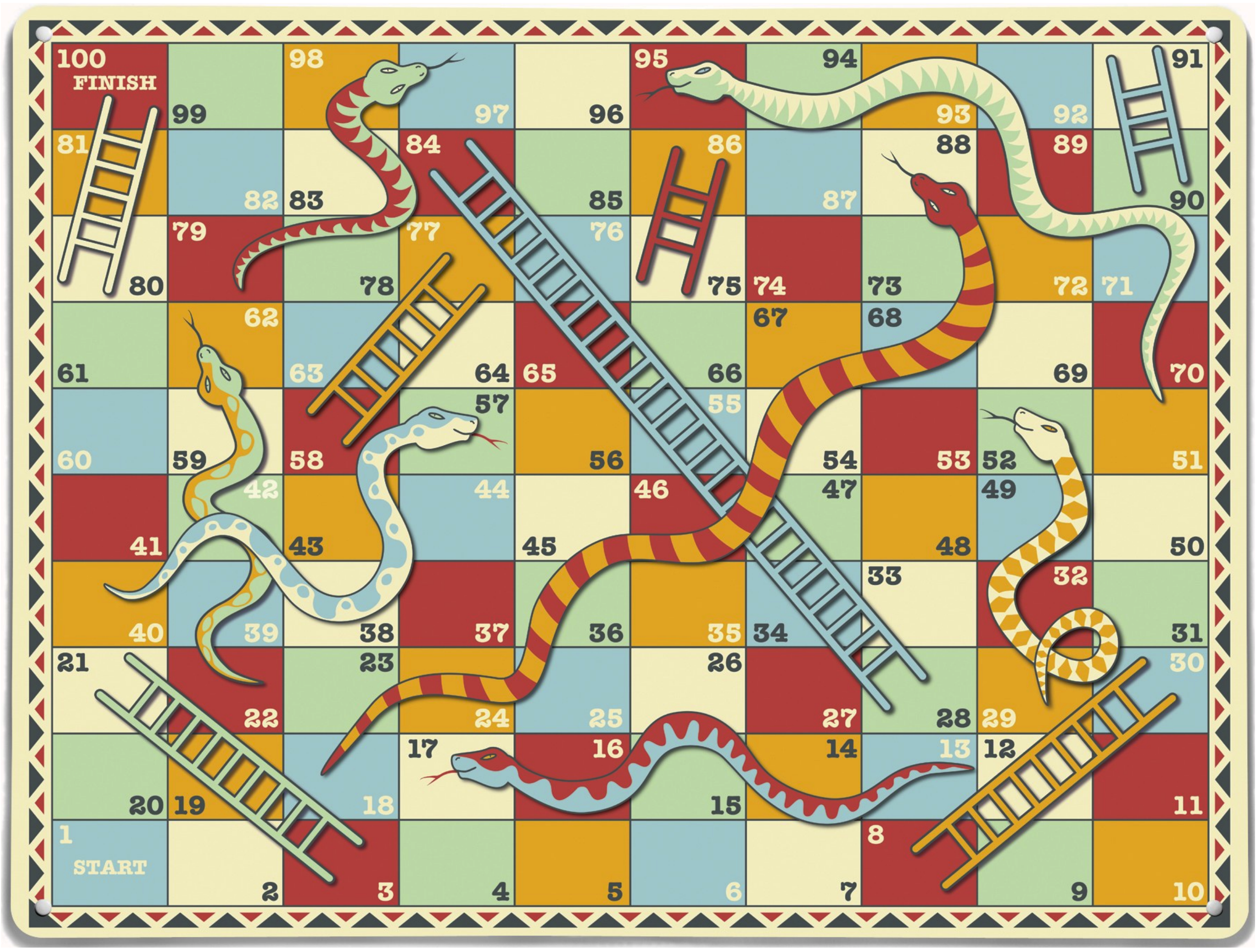
JUNIA ISEN — mars 2022

# IV – Processus aléatoires

## A – Serpents et échelles

Le déplacement d'un pion dans un jeu de serpents et échelles est une chaîne de Markov dont les états correspondent aux différentes cases du tableau de jeu. En effet, lorsque le pion se situe en $i \in [\![1, 100]\!]$, la probabilité $p_{ij}$ qu'il se retrouve en $j$ après le lancer du dé est constante dans le temps (indépendante du nombre de coups déjà joués). Le fichier `snakes.mat` contient la matrice carrée $A = (p_{ji})$ de taille $100 \times 100$ des probabilités de transition pour le tableau de jeu suivant :




a) Chargez cette matrice en mémoire avec `load snakes.mat` et vérifiez en observant quelques coefficients que vous comprenez comment elle est construite. Par exemple, à quoi correspond `A(91,87)` ?

Vérifiez également que la somme des probabilités sortantes de chaque case est bien égale à 1 en évaluant le produit matriciel suivant :

```
ones(1,100) * A
```

$A$ est ce que l'on appelle une *matrice stochastique* (matrice représentant les probabilités de transitions dans une chaîne de Markov – attention, certaines références, notamment celle-ci, utilisent la transposée de notre matrice de sorte que ce sont les lignes, et non les colonnes, qui somment à 1).

Connaissant la probabilité $v_i(n)$ que le pion se trouve en $i$ à un instant $t = n$, on obtient les probabilités correspondant à chaque case à l'instant suivant par une multiplication matricielle :

$$\vec{v}(n+1) = A\,\vec{v}(n) \qquad \text{où} \qquad \vec{v} = (v_1, \ldots, v_{100}).$$

b) En commençant à la première case :

```
v = zeros(100,1); v(1) = 1;
```

observez l'évolution d'une partie en évaluant plusieurs fois successivement les commandes

```
v = A * v; bar(v)
```

Que remarquez-vous lorsque le nombre d'itérations est grand ? Observe-t-on le même phénomène si l'on part avec un autre vecteur de probabilités initial $\vec{v}(0)$ ?

Soit $X_i$ la variable aléatoire représentant le nombre de coups nécessaires pour se rendre à la case 100 en partant de la case $i$ à un certain instant – et intéressons-nous à sa loi, dont on sait qu'elle ne dépend pas de cet instant.

Puisque $p_{i,100}$ correspond à la probabilité d'une transition $100 \leftarrow i$, on remarque que l'entrée $(100, i)$ de $A$ représente la probabilité que $X_i = 1$. De façon générale, on peut se convaincre que l'entrée $(100, i)$ de $A^n$ est la probabilité de se retrouver en 100 après $n$ lancers, c'est-à-dire que $X_i \leqslant n$. On obtient donc les premières valeurs de la fonction de répartition de $X_1$ avec le code suivant :

```
N = 200; i = 1;
cumul = zeros(N,1);
cur = eye(100);

for n = 1:N
  cur = cur * A;
  cumul(n) = cur(100,i);
end
```

c) Observez `plot(cumul)` pour $X_1$ et discutez de la cohérence avec les résultats obtenus à la question précédente. Combien de temps doit-on prévoir pour une partie si on veut être sûr à 95 % d'avoir le temps de la terminer ? Et à 99 % ?

Calculez également à partir de `cumul` la distribution de probabilités

$$\texttt{prob}(n) = \mathbb{P}[X_1 = n] = \texttt{cumul}(n) - \texttt{cumul}(n-1)$$

que vous pourrez également observer, et profitez-en pour calculer l'espérance de la durée d'une partie avec `sum((1:N)' .* prob)` en prenant une valeur de `N` suffisamment grande pour que cette valeur se stabilise.

On peut confirmer ce résultat par un calcul matriciel. En effet, on sait que pour tout $i \neq 100$ on a

$$\mathbb{E}[X_i] = 1 + \sum_j p_{ij}\,\mathbb{E}[X_j];$$

le vecteur-ligne $\mathbb{E}[\vec{X}]$ satisfait donc

$$\mathbb{E}[\vec{X}] = \vec{u} + \mathbb{E}[\vec{X}]A \qquad \text{avec} \quad \vec{u} = (\underbrace{1, \ldots, 1}_{99}, 0),$$

soit

$$\mathbb{E}[\vec{X}]\,(I-A) = \vec{u}.$$

d) Résoudre cette équation pour `e` $= \mathbb{E}[\vec{X}]$ en écrivant formellement

$$\mathbb{E}[\vec{X}] = \vec{u}\,\frac{1}{I-A} \;= \sum_{n=0}^{\infty} \vec{u}\,A^n$$

et en tronquant après un nombre fini de termes. Retrouvez-vous l'espérance calculée à la question précédente ? Autre approche : retrouver encore une fois le résultat en calculant `u / (eye(100) - A)`.

## B – Un signal aléatoire périodique

Pour illustrer la notion de fonction d'autocovariance, travaillons avec un signal aléatoire 1-périodique de moyenne nulle, écrit sous forme de somme de sinusoïdes déphasées :

$$X(t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n t + \Phi_n),$$

où les coefficients $A_n$ et les déphasages $\Phi_n$ sont des variables aléatoires. Nous allons suppposer que les $\Phi_n$ sont indépendants et uniformément distribués dans l'intervalle $[0, 2\pi]$, et les $A_n$ également indépendants avec

$$A_n \;\sim\; \mathcal{N}\Big(0, \frac{1}{n^2}\Big).$$

```
p = 3;    % nombre de périodes observées
m = 500;  % nombre d'échantillons temporels
N = 200;  % nombre de termes dans la série de Fourier

t = 0:p/m:p;
x = zeros(1,m+1);
a = zeros(1,N);

for n=1:N
  a(n) = normrnd(0,1/n);
  phi = unifrnd(0,2*pi);
  x = x + a(n)*cos(2*pi*n*t + phi);
end

plot(t,x)
```

On peut étudier, pour chaque réalisation de ce signal, la *fonction d'autocovariance temporelle*

$$C_X(t) := \int_0^1 X(s)X(s+t)\,\mathrm{d}s$$

qui s'écrit ici (n'est-ce pas ?)

$$C_X(t) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty} A_n^2\,\cos(2\pi n t).$$

```
c = zeros(1,m+1);

for n=1:N
  c = c + .5 * a(n)^2 * cos(2*pi*n*t);
end

plot(t,c)
```

Cette fonction est elle-même aléatoire (changeant à chaque réalisation), c'est pourquoi on préfère travailler avec son espérance, qui est une fonction déterministe :

$$r_X(t) = \mathbb{E}[C_X(t)] = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\mathbb{E}[A_n^2]\,\cos(2\pi nt) = \frac{1}{2}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\,\cos(2\pi nt)$$

Observez différentes réalisations de $X(t)$ et $C_X(t)$ en temporel et fréquentiel ainsi que la façon dont les réalisations de $C_X(t)$ se comparent à $r_X(t)$. Comment s'interprète la périodicité de la fonction d'autocovariance ? En quelles valeurs celle-ci est-elle maximale ?