Examen final

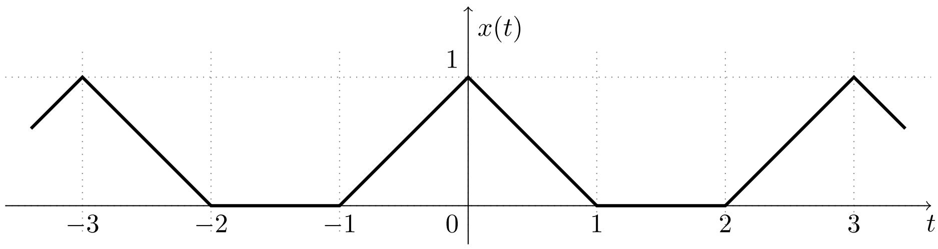
Consignes :

- Vous disposez de **3 h** pour répondre aux **3** × **4** questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Un formulaire sur les transformées de Fourier et Laplace est fourni en annexe.
- Soyez **clairs** et **précis** et dans vos réponses et **justifications**.
- Et surtout **exprimez-vous** sur les sujets proposés pour démontrer votre compréhension des concepts !

Exercice 1

a) À partir de la définition de la convolution, calculer explicitement la convolution $m(t) = \Pi_1(t) * \Pi_1(t)$ de deux portes centrées de largeur 1.

b) On considère le signal périodique $x(t)$ suivant. Représenter graphiquement $x'(t)$ et $x''(t)$ en portant une attention particulière aux échelles des axes.

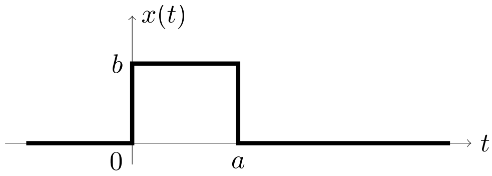


c) En utilisant directement leur définition, calculer les coefficients de Fourier c_n du signal $x(t)$ de la question précédente.

d) Vérifier votre réponse à la question précédente en déterminant tout d'abord la transformée de Fourier d'un motif puis en évaluant celle-ci aux fréquences appropriées.

Exercice 2

a) On applique pendant une durée $a > 0$ une différence de tension $b > 0$ aux bornes d'un condensateur. Exprimer cette tension $x(t)$ en termes d'échelons d'Heaviside et de retards.



b) La charge $y(t)$ du condensateur est reliée à $x(t)$ par l'équation différentielle

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = x(t)$$

où $\lambda > 0$. Résoudre cette équation pour $y(t)$ à l'aide de la transformée de Laplace et représenter la solution. Que se passe-t-il dans le cas particulier $b = 1/a$ lorsque $a \to 0$?

c) Soit $h(t) := H(t)\, e^{-\lambda t}$. Vérifier que $h(t)$ est solution de l'équation différentielle $y'(t) + \lambda\, y(t) = \delta(t)$.

d) Expliquer comment, de tout ce qui précède, on peut déduire que $y(t) = x(t) * h(t)$ et vérifier que cela est cohérent avec vos remarques à la question b).

Exercice 3

a) À partir de la définition de la transformée de Fourier, (ré)établir la formule pour la transformée d'une porte $\Pi_a(t)$ de largeur $a > 0$.

b) Expliquer comment on peut en déduire la transformée d'un sinus cardinal : $\widehat{\mathrm{sinc}}(f) = \pi\, \Pi_{\frac{1}{\pi}}(f)$.

c) On considère le signal temporel $x(t) = \displaystyle\sum_{n=-\infty}^{\infty} \mathrm{sinc}(t - n\pi)$. Vérifier qu'on a $x(k\pi) = 1$ pour tout $k \in \mathbb{Z}$.

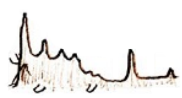
d) Exprimer le signal $x(t)$ de la question précédente comme la convolution d'un sinus cardinal avec un signal $y(t)$ que vous préciserez ; en déduire $\widehat{x}(f)$ puis une expression simple pour $x(t)$.

Produit de convolution

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)\, x_2(t-u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-v)\, x_2(v)\, \mathrm{d}v$$

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\displaystyle\int_0^t x(u)\, \mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$tx(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} X(s)\, \mathrm{d}s$	
$e^{at}x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa}X(p)$	$(a \geqslant 0)$
$x(kt)$	$\dfrac{1}{k} X\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$



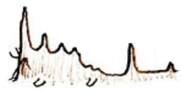
Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pX(p) = x(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pX(p) = x(+\infty)$$

original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} x(t)\, e^{-2\pi jnt/T}\, \mathrm{d}t$$



Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi jft}\, \mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi jft}\, \mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\, \widehat{x_1}(f) + \mu\, \widehat{x_2}(f)$
$x(-t)$ $\overline{x(t)}$	$\widehat{x}(-f)$ $\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$ $e^{2\pi jat} x(t)$	$e^{-2\pi jaf}\, \widehat{x}(f)$ $\widehat{x}(f-a)$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $-2\pi jt\, x(t)$	$2\pi jf\, \widehat{x}(f)$ $\frac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$ $x_1(t)\, x_2(t)$	$\widehat{x_1}(t)\, \widehat{x_2}(t)$ $(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t) = H\big(t + \frac{a}{2}\big) - H\big(t - \frac{a}{2}\big)$ $e^{-\lambda\|t\|}, \lambda > 0$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a f)$ $\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$ $\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(f)$ $\frac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f)$