Polarisation des photons

Exercice 1 : projecteurs

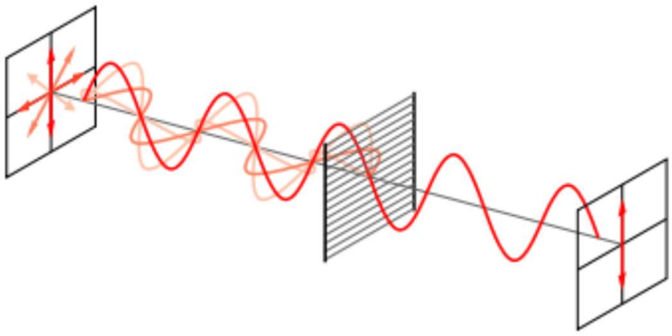
On considère une base orthonormée $\{|u_i\}_{i=1\ldots N}$ et l'opérateur

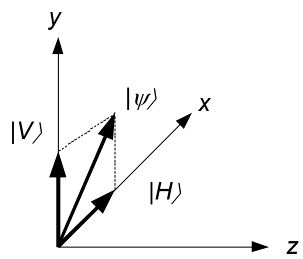
$$P_q = \sum_{i=1}^{q} |u_i >< u_i| \quad \text{avec } q < N$$

1) Montrer que $P_q^2 = P_q$ et que P_q projette tout ket de l'espace sur le sous-espace défini par les vecteurs de base $\{|u_i\}_{i=1\ldots q}$.
2) Dans le cas d'un espace de dimension 2 rapporté à une base $\{|u_1 >, |u_2 >\}$, écrire la matrice des projecteurs P_{u1} et P_{u2} projetant un vecteur $|\psi >$ quelconque de l'espace sur $|u_1 >$ ou $|u_2 >$. Ces opérateurs sont-ils hermitiques ?

Exercice 2 : Mesure de polarisation des photons

On rappelle que les photons correspondent à des quanta du champ électromagnétique. Dans une onde électromagnétique, le champ électrique est perpendiculaire à la direction de propagation et donc peut se représenter dans un plan à deux dimensions. On appelle polarisation la direction du champ dans ce plan.





La mesure de la polarisation se fait au moyen d'une grille métallique (voir figure). La grille ne laisse passer que les ondes dont la polarisation est perpendiculaire à la grille. La mesure de la polarisation correspond donc à une projection suivant un axe du plan.

En mécanique quantique, la polarisation est donnée par un vecteur normé dans un espace à deux dimensions dont les vecteurs de base sont $|V\rangle = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ pour la polarisation **V**erticale et $|H\rangle = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \end{pmatrix}$ pour la polarisation **H**orizontale.

On définit dans cette base les opérateurs de projection :

$$\hat{P}_H = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \text{ et } \hat{P}_V = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$$

1) L'opérateur de polarisation est défini par $\hat{E} = \hat{P}_H - \hat{P}_V$. Quels sont les vecteurs propres et valeurs propres de cet opérateur ?

2) On suppose que le photon est dans l'état normé $|\psi\rangle = \begin{pmatrix}\cos\alpha \\ \sin\alpha\end{pmatrix}$. On fait une mesure de la polarisation $\hat{E}$. Quels sont les résultats de mesure et avec quelle probabilité ? Quel est l'état du photon après mesure ?

3) Calculer l'action de $\hat{P}_H$, $\hat{P}_V$ et $\hat{E}$ sur $|\psi\rangle$. En déduire les valeurs moyennes $\langle\hat{E}\rangle = \langle\psi|\hat{E}|\psi\rangle$ et $\langle\hat{E}^2\rangle = \langle\psi|\hat{E}^2|\psi\rangle$. En déduire l'écart quadratique moyen $\sqrt{\langle\hat{E}^2\rangle - \langle\hat{E}\rangle^2}$. Pour quel angle □ cette quantité devient-elle maximale/minimale ? Pourquoi ?

Si la grille de mesure de la polarisation est tournée d'un angle θ, on peut définir deux vecteurs de base $|H'\rangle = \begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et $|V'\rangle = \begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$. On définit dans la base $|H\rangle, |V\rangle$ les opérateurs de projection sur $|H'\rangle, |V'\rangle$:

$$\hat{P}_{H'} = \begin{pmatrix}\cos^2\theta & \cos\theta\sin\theta \\ \cos\theta\sin\theta & \sin^2\theta\end{pmatrix} \text{ et } \hat{P}_{V'} = \begin{pmatrix}\sin^2\theta & -\cos\theta\sin\theta \\ -\cos\theta\sin\theta & \cos^2\theta\end{pmatrix}$$

4) Le nouvel opérateur de polarisation est défini par $\widehat{E'} = \hat{P}_{H'} - \hat{P}_{V'}$. Ecrire la matrice de $\widehat{E'}$. Montrer que $|H'\rangle$ et $|V'\rangle$ sont les vecteurs propres de $\widehat{E'}$. Pour quelles valeurs propres ?

5) On fait une mesure de la polarisation $\widehat{E'}$ sur l'état $|\psi\rangle$. Quels sont les résultats de mesure et avec quelle probabilité ? Quel est l'état du photon après mesure ?

6) Calculer le commutateur $[\widehat{E'}, \hat{E}]$. Pour quelle valeur de l'angle θ les opérateurs polarisation commutent-ils ? Donner une interprétation intuitive de ce résultat.