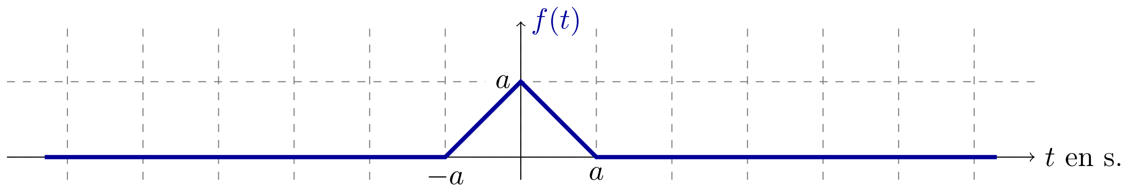
Examen

Consignes :
- Cette épreuve de **3** heures comporte **3** exercices,
- la calculatrice collège est autorisée mais **pas** les documents (voir les formulaires en fin de sujet),
- Il est conseillé de lire le sujet entièrement avant de commencer.
- Comme d'habitude, la qualité de la rédaction (propreté, orthographe, concision, rigueur) sera presque prépondérante dans la notation. Favorisez les explications de raisonnements par rapport aux détails calculatoires.

Exercice 1

Considérons le signal $f(t)$ ci-dessous où a est un paramètre réel positif fixé :

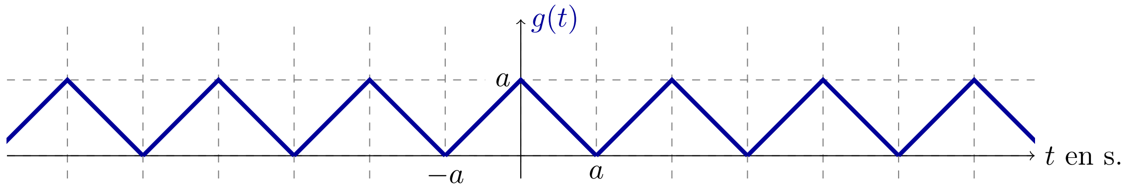


Le but des deux premières questions est d'établir de deux façons — sans intégration par parties — la transformée de Fourier de $f(t)$. Dans la troisième question, on périodisera le signal pour en déduire la série de Fourier, étudiée dans la dernière question.

1. (a) Par un calcul direct, donner $\widehat{f}(0)$;
   en particulier vous vérifierez que $\widehat{f}$ ne présente pas de dirac à la fréquence $\nu = 0$.
   (b) Avec des schémas, dérivez deux fois $f(t)$ par rapport au temps.
   (c) Donner le spectre de $f''(t)$ que l'on mettra sous la forme $\widehat{f''}(\nu) = -4\sin^2(\pi a\nu)$.
   (d) En déduire $\widehat{f}(\nu)$; expliquez ce qu'il pourrait se passer en $\nu = 0$.

2. (a) Calculer la convolution de la porte $\Pi_a(t)$ (largeur a, centrée en $t = 0$) avec elle-même.
   (b) *Via* le formulaire, donner $\widehat{\Pi_a}(\nu)$ et en déduire $\widehat{f}(\nu)$.
   (c) Donner un avantage et un inconvénient de cette méthode par rapport à la précédente.

Les premières questions n'étaient qu'un intermédiaire pour étudier le signal $2a$-périodique suivant :



3. (a) Expliquer comment, du côté temporel, on peut exprimer mathématiquement $g(t)$ en fonction de $f(t)$.

   (b) En déduire une expression du spectre de g que vous mettrez sous la forme

$$\widehat{g}(\nu) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta\left(\nu - \frac{n}{2a}\right)$$

   où vous exprimerez les *coefficients* de Fourier c_n grâce à la *transformée* de Fourier $\widehat{f}$. Une fois n'est pas coutume, vous détaillerez bien ces calculs.

   (c) Montrer que la décomposition en série de Fourier de $g(t)$ est

$$g(t) = \frac{a}{2} + \frac{4a}{\pi^2} \sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} \cos\left(\frac{2p+1}{a}\pi t\right)$$

4. (a) Vérifier la cohérence de cette expression en $t = \frac{a}{2}$.

   (b) Montrer que

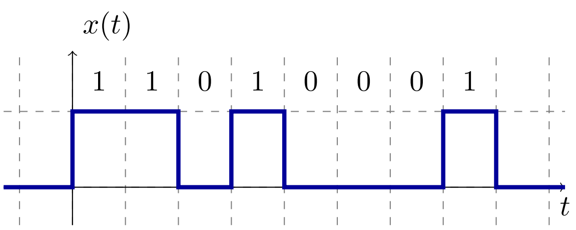
$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^2} = \frac{\pi^2}{8}.$$

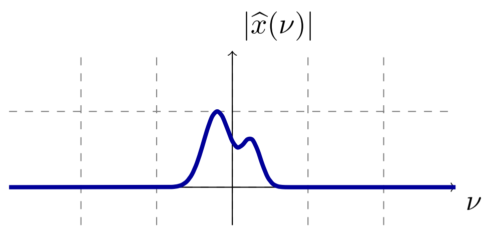
   (c) Avec le théorème de Parseval, démontrer que

$$\sum_{p=0}^{+\infty} \frac{1}{(2p+1)^4} = \frac{\pi^4}{96}.$$

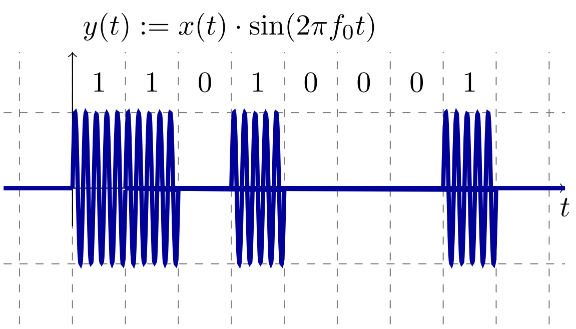
Exercice 2

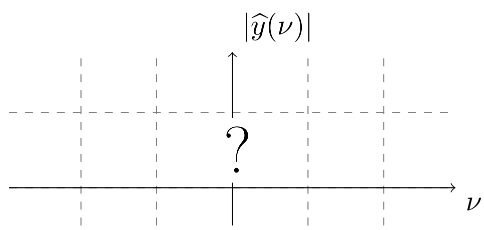
Voici un signal créneau $x(t)$ portant une information binaire et son spectre d'amplitude supposé connu :





Que devient qualitativement le spectre si on multiplie le créneau par une sinusoïde de fréquence f_0 ?

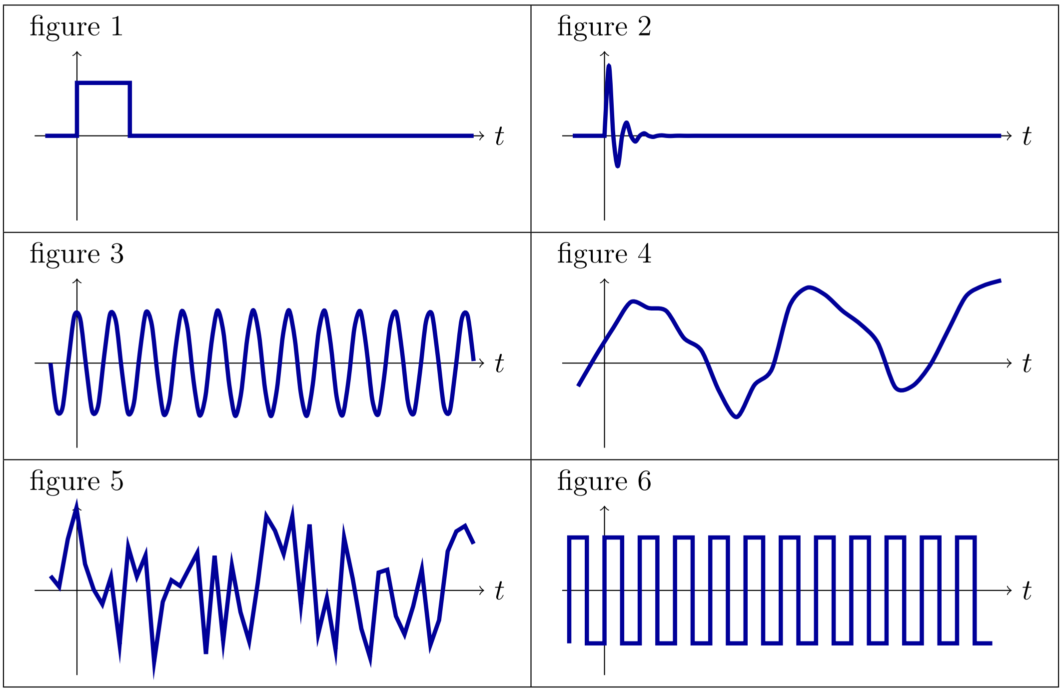




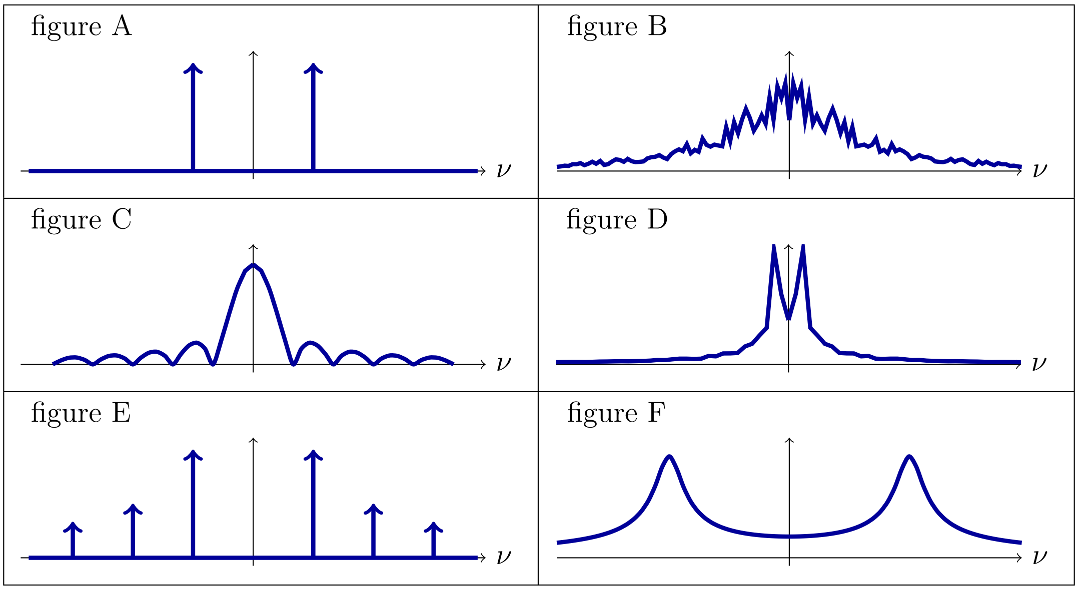
Il est attendu un schéma qualitatif *soigné* du spectre d'amplitude justifié par un raisonnement rédigé et accompagné d'un calcul exprimant $\widehat{y}(\nu)$ grâce à $\widehat{x}(\nu)$.

Exercice 3

Voici des signaux temporels avec des échelles de temps identiques :



Et voici leurs spectres d'amplitude présentés, dans le désordre, avec une échelle de fréquences identique :



Associer chacun des signaux temporels à son spectre et expliquer les raisons de vos choix. Expliquer aussi pourquoi l'on observe tel ou tel phénomène.

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$	
$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{F(p)}{p}$	
$tf(t)$	$-F'(p)$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(s)\,\mathrm{d}s$	
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$f(t-a)$	$e^{-pa}F(p)$	$(a \geqslant 0)$
$f(kt)$	$\dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pF(p) = f(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pF(p) = f(+\infty)$$

original causal $f(t)$	image $F(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\, e^{2j\pi\nu t}\, \mathrm{d}\nu$	$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2j\pi\nu t}\, \mathrm{d}t$
$f(at)$ $f(-t)$	$\frac{1}{\|a\|}\widehat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$ $\widehat{f}(-\nu)$
$f(t-a)$ $e^{2j\pi at}f(t)$	$e^{-2j\pi a\nu}\widehat{f}(\nu)$ $\widehat{f}(\nu-a)$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ $-2j\pi t f(t)$	$2j\pi\nu\widehat{f}(\nu)$ $\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\nu}$
$(f_1 * f_2)(t)$ $f_1(t)\, f_2(t)$	$\widehat{f_1}(\nu)\, \widehat{f_2}(\nu)$ $(\widehat{f_1} * \widehat{f_2})(\nu)$
$\Pi_a(t)$ $H(t)e^{-\lambda t},\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0$ $\frac{1}{1+t^2}$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a\nu)$ $\frac{1}{\lambda + 2j\pi\nu}$ $\pi e^{-2\pi\|\nu\|}$ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$
$\delta(t)$ 1 $\text{Ш}_T(t)$	1 $\delta(\nu)$ $\frac{1}{T}\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(\nu)$

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\, \mathrm{d}y$$