Inférence et décision

Probabilités et statistiques

hiver 2021

Théorèmes limites

Des vecteurs aux suites aléatoires

La dernière fois: cas des vecteurs aléatoires (X, Y) de dimension 2.

Toute cette discussion s'étend « sans trop de mal » au cas général

$$\mathbf{X} = (X_1, \ldots, X_n)$$

de la dimension n.

Aujourd'hui: *suites* aléatoires

$$\mathbf{X} = (X_n)_{n=1}^{\infty} = (X_1, \ldots, X_n, \ldots)$$

et notamment notion de limite

$$\lim_{n \to \infty} X_n.$$

Limites de variables aléatoires

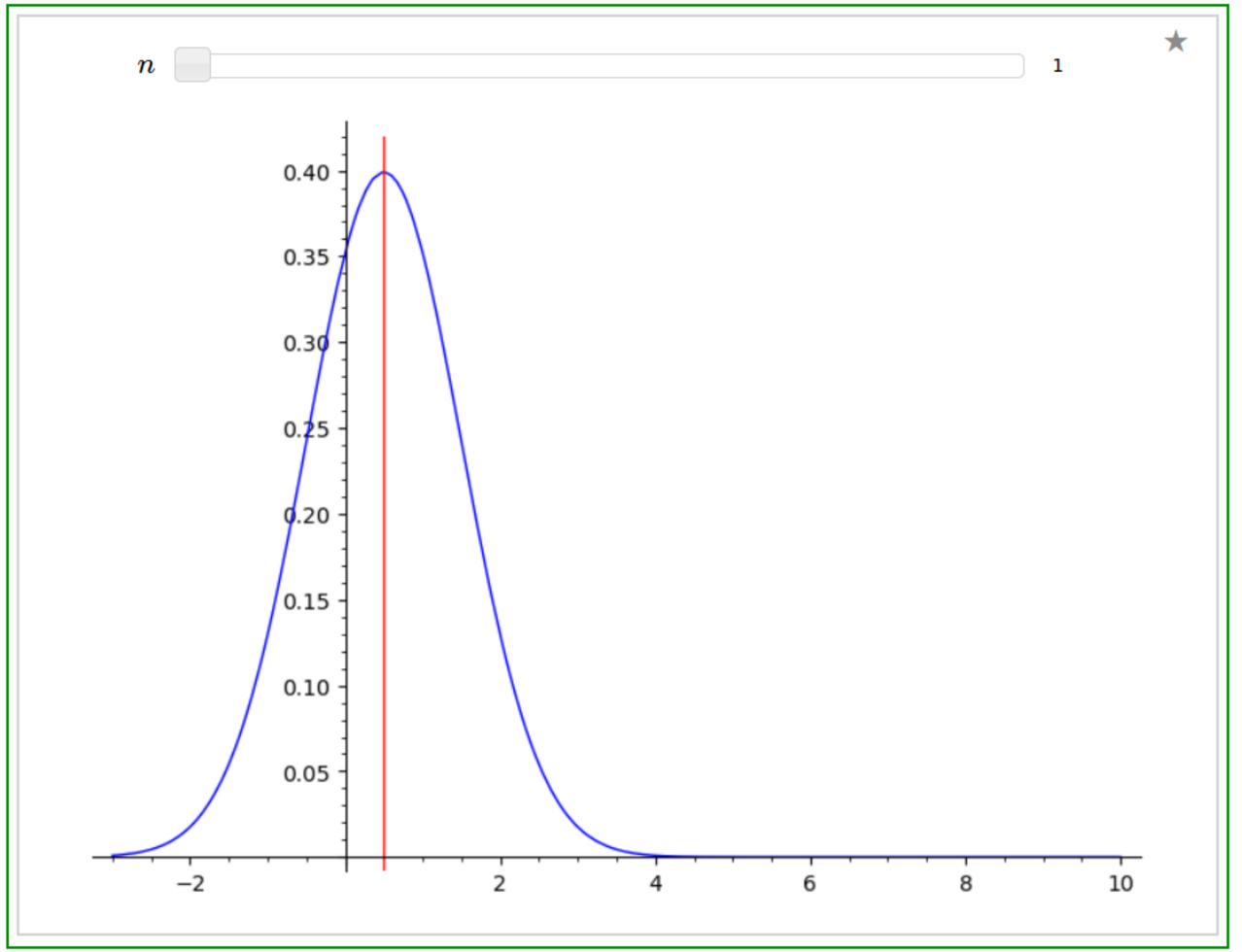
On s'intéresse donc à une suite de variables aléatoires

$$X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$$

indépendantes, identiquement distribuées (i.i.d.)

Disons: espérance μ, écart-type σ

$$S_n = \sum_{i=1}^{n} X_i \text{ avec } X_i \sim \mathcal{N}(\tfrac{1}{2}, 1)$$



Help | Powered by SageMath

En général

$$\mathbb{E}[S_n] = \mathbb{E}[X_1] + \cdots + \mathbb{E}[X_n] = n\mu$$

$$\mathrm{Var}(S_n) \overset{\text{ind}}{=} \mathrm{Var}(X_1) + \cdots + \mathrm{Var}(X_n) = n\,\sigma^2$$

$$\Longrightarrow \quad \sigma_{S_n} = \sqrt{n}\,\sigma$$

Moyenne échantillonnale

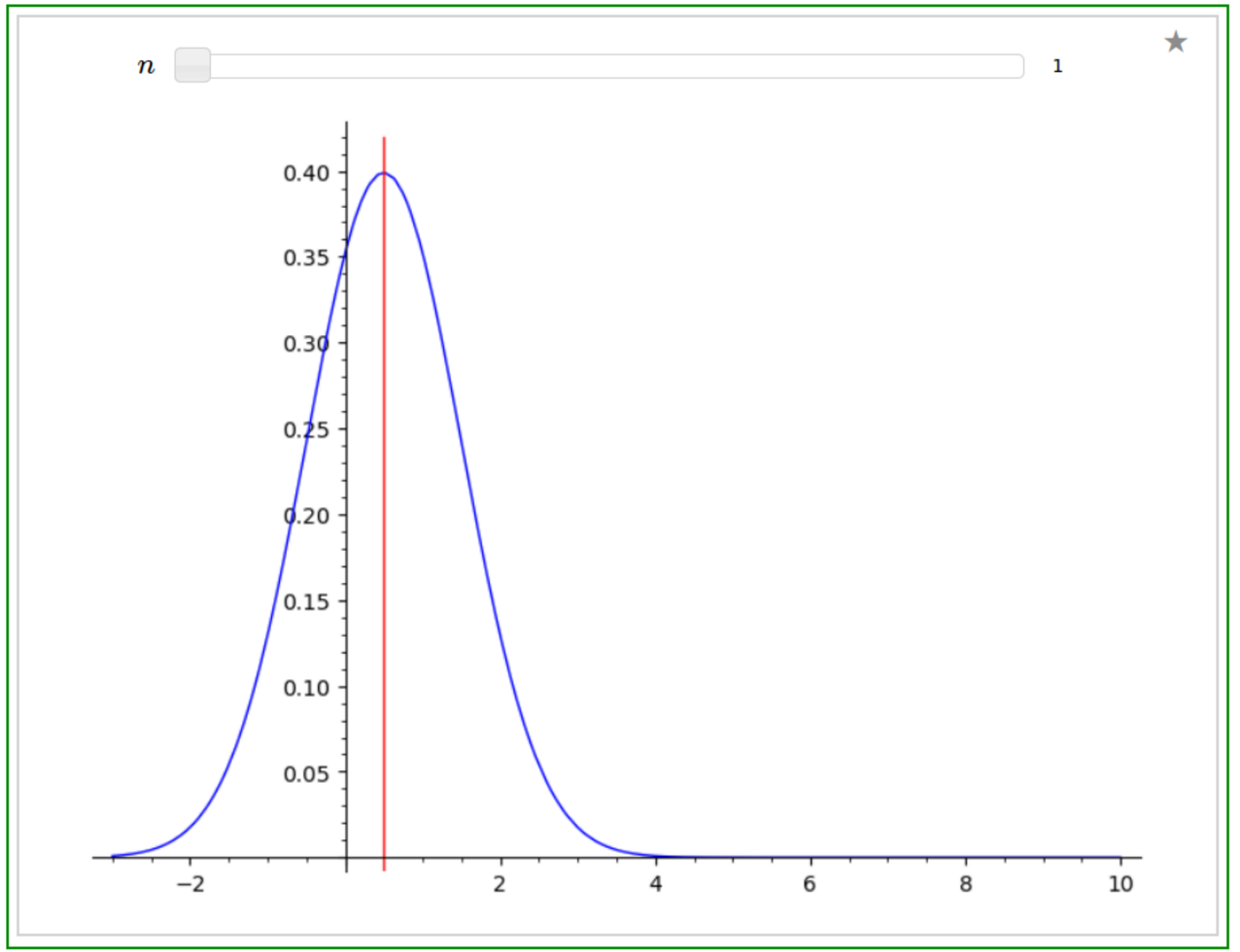
Divisons par n et formons

$$\overline{X}_n := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i = \frac{X_1 + \cdots + X_n}{n}.$$

Alors:

$$\mathbb{E}[\overline{X}_n] = \mu, \qquad \sigma_{\overline{X}_n} = \frac{\sigma}{\sqrt{n}}.$$

$\overline{X}_n$ avec $X_i \sim \mathcal{N}(\frac{1}{2}, 1)$



Help | Powered by SageMath

Loi (faible) des grands nombres

Théorème

Pour tout $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n \to \infty} \mathbb{P}\left[|\overline{X}_n - \mu| \geq \varepsilon \right] = 0.$$

i.e. $\overline{X}_n$ **converge en probabilité** vers μ

Preuve: Inégalité de Bienaymé-Tchebychev appliquée à $\overline{X}_n$

On peut dire plus !

Écrivons

$$\overline{X}_n - \mu = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} X_i - \mu = \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\frac{X_i - \mu}{n}}_{\text{esp. } 0,\ \text{var. } \frac{\sigma^2}{n^2}}$$

$$\Longrightarrow \quad g_{\overline{X}_n - \mu}(t) = \left(1 + \frac{\sigma^2}{2n^2}t^2 + \dots\right)^n$$

$$= 1 + \frac{\sigma^2}{2n}t^2 + \dots$$

$$\longrightarrow 1 \qquad \text{quand} \quad n \to \infty$$

Loi (forte) des grands nombres

D'où:

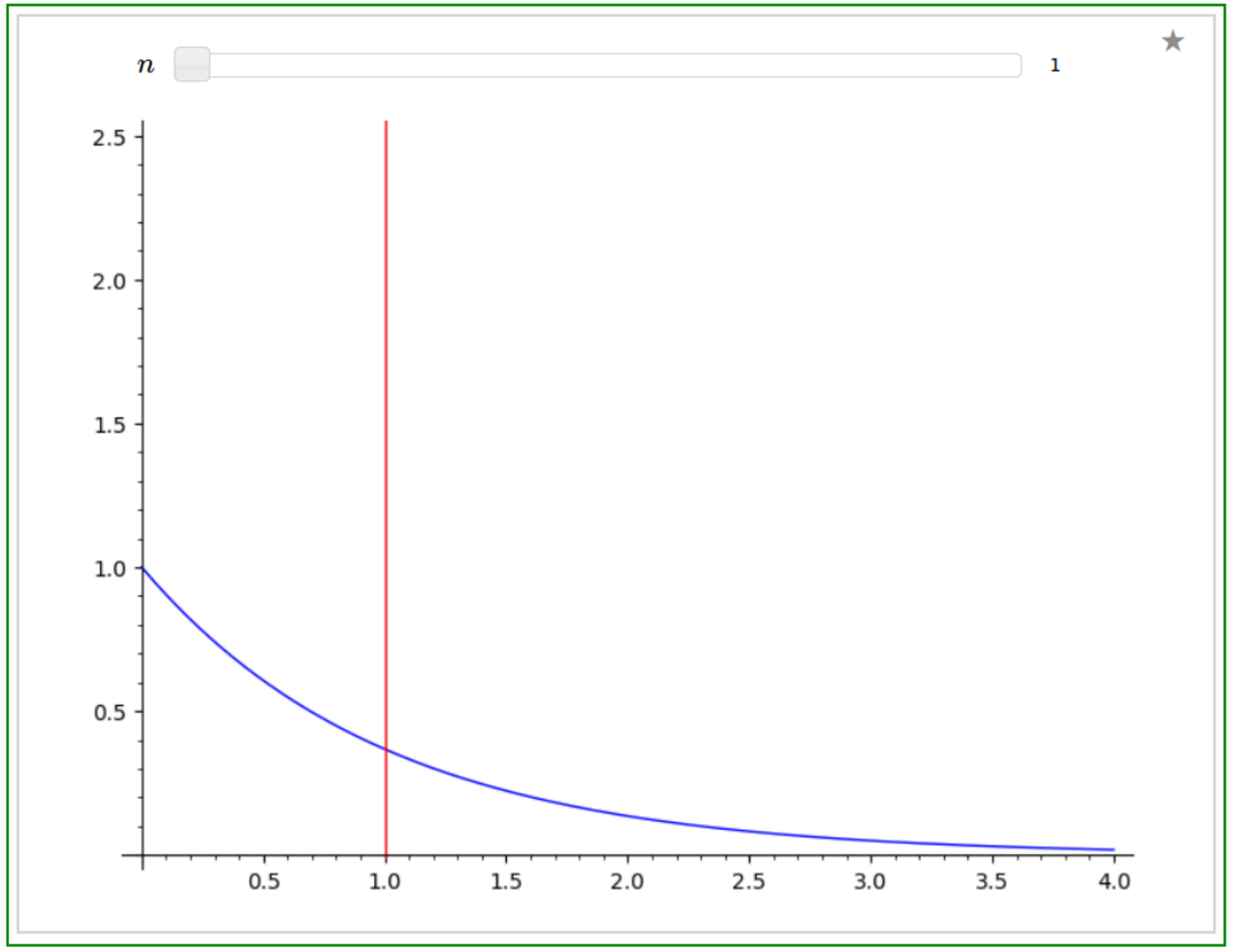
$$\lim_{n\to\infty} g_{\overline{X}_n} = e^{\mu t}$$

Théorème

$$\lim_{n\to\infty} \overline{X}_n = \mu \qquad \text{presque sûrement}$$

Ou encore: $\overline{X}_n$ **converge en loi** vers une variable aléatoire *presque constante* (densité $\delta(x-\mu)$).

$\overline{X}_n$ pour $X_i \sim \mathcal{E}(1)$



Help | Powered by SageMath

On peut dire plus !^{2}

Théorème (théorème central limite, Laplace 1809)

$$\frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}} \text{ converge en loi vers une } \mathcal{N}(0,1) \text{ quand } n \to \infty$$

En d'autres termes, pour n grand, $\overline{X}_n$ suit approximativement une

$$\mathcal{N}\left(\mu, \frac{\sigma^2}{n}\right).$$

Preuve: Si on pose $Z_n = \frac{\overline{X}_n - \mu}{\sigma/\sqrt{n}}$, on peut écrire $Z_n = \sum_{i=1}^{n} Y_i$ avec

$$Y_i = \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{X_i - \mu}{\sigma} \quad \text{espérance } 0, \text{ variance} \frac{1}{n}$$

$$\Longrightarrow \; g_{Y_i}(t) = 1 + \frac{t^2}{2n} + \ldots$$

$$\Longrightarrow \; g_{Z_n}(t) = \left(1 + \frac{t^2}{2n} + \ldots\right)^n \longrightarrow e^{\frac{t^2}{2}} = g_Z(t)$$

la fonction génératrice des moments d'une $Z \sim \mathcal{N}(0,1)$!

Exemple: approximation normale de la binomiale

Pour les $X_i \overset{\text{iid}}{\sim} \mathcal{B}(p)$:

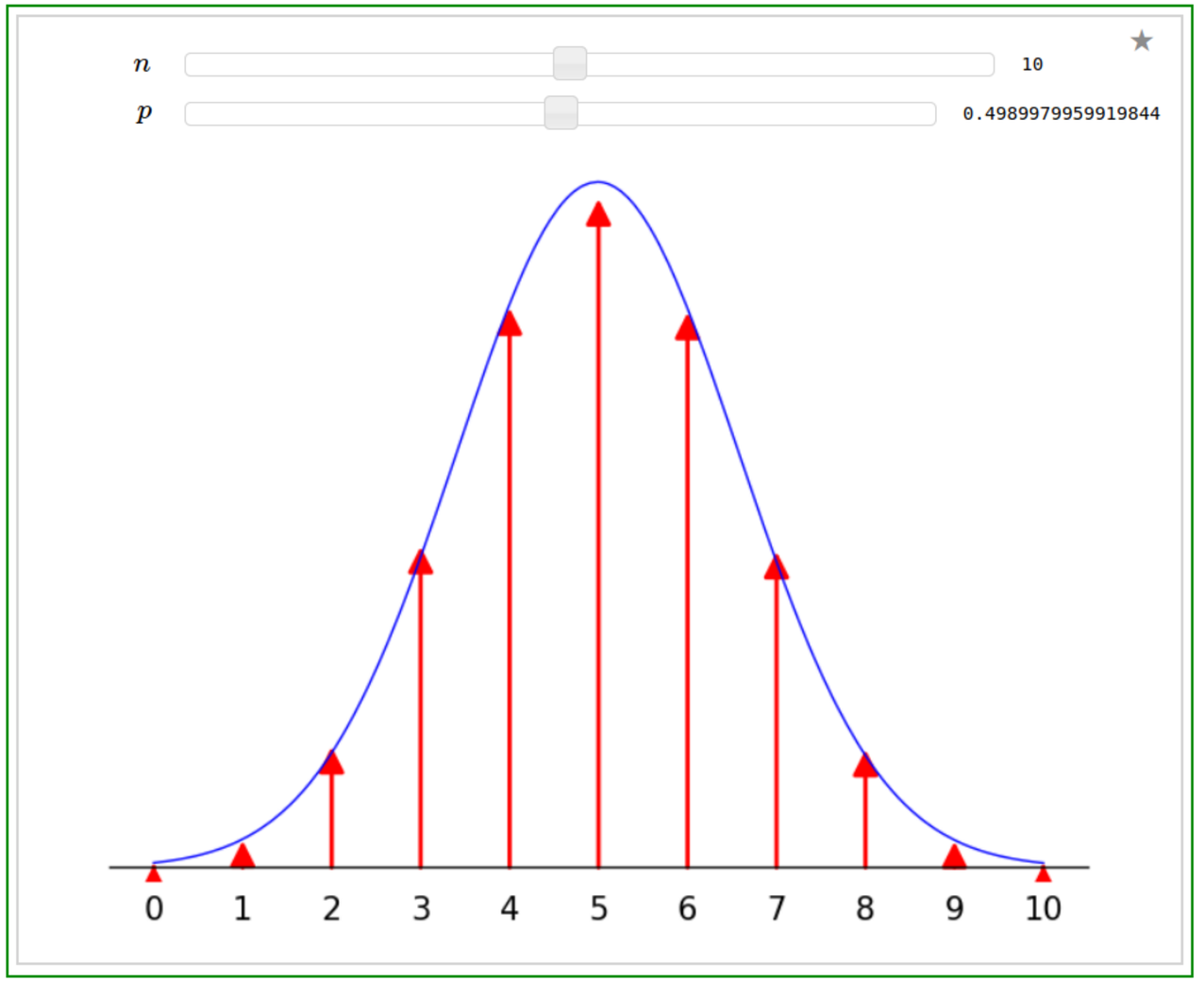
$$\overline{X}_n \rightsquigarrow \mathcal{N}\left(p, \frac{p(1-p)}{n}\right).$$

Donc $\sum_{i=1}^{n} X_i = n\overline{X}_n$, de loi $\mathcal{B}(n,p)$, est approximativement

$$\mathcal{N}\Big(np, np(1-p)\Big)$$

En pratique, approximation satisfaisante dès que $np \geq 10$ et $n(1-p) \geq 10$.

$\mathcal{B}(n,p)$ vs $\mathcal{N}\left(np, np(1-p)\right)$



Help | Powered by SageMath

Exercice

On considère lors de la tranmission de paquets IP par Wi-Fi un taux de perte de 1 % acceptable.

Quelle est la probabilité, lors de la transmission d'un fichier vidéo de 120 Mo,
que 20 paquets ou moins soient perdus ?

(NB : taille maximale d'un paquet IPv4 = 65 535 octets)

Estimation paramétrique

Estimation paramétrique

Une fois (sup)posé le type de modèle (loi) pour une variable qui nous intéresse, reste à déterminer « expérimentalement » les valeurs des paramètres qui y figurent

Exemples:

- p pour une $\mathcal{B}(p)$
- μ et σ pour une $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$
- λ pour une $\mathcal{E}(\lambda)$

$\vdots$

Dé croche

Soit p la probabilité d'obtenir un 6 sur mon dé croche.

Pour l'*estimer*, les ISEN62 ont gracieusement tiré un n-échantillon

$$(X_1, X_2, \ldots, X_n)$$

avec $n \approx 200$ et $X_i \sim \mathcal{B}(p)$ i.i.d.

La loi des grands nombres nous dit que la valeur observée de

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)$$

devrait être raisonnablement proche de p.

Résultats expérimentaux

```
1  data = [17 40 44 47 29 42];
2
3  n = sum(data)
4
5  xbar = data(6)/n
```

Évaluer

Et alors ?

Si on recommençait aujourd'hui, on aurait une valeur différente.

Comment conclure quoi que ce soit en présence de hasard ?

Reste que pour l'instant, c'est notre meilleure *estimation* de p.

Ceci dit...

Si $X_i \sim \mathcal{B}(p)$, alors $\sum X_i \sim \mathcal{B}(n,p)$

espérance np, variance $np(1-p)$

$$\Longrightarrow \quad \overline{X}_n = \frac{1}{n}\sum X_i$$

espérance p, variance $\frac{p(1-p)}{n}$

approximativement $\mathcal{N}\left(p, \underbrace{\frac{p(1-p)}{n}}_{\sigma_n^2}\right)$ par TCL

Par exemple, on sait que $\overline{X}_n$ a 95 % de chances de tomber dans l'intervalle

$$\left[p - 2\,\sigma_n,\, p + 2\,\sigma_n\right].$$

En d'autres termes,

$$0{,}95 = \mathbb{P}[p - 2\,\sigma_n \leq \overline{X}_n \leq p + 2\,\sigma_n]$$

$$= \mathbb{P}[\overline{X}_n - 2\,\sigma_n \leq p \leq \overline{X}_n + 2\,\sigma_n]$$

En d'autres termes, l'**intervalle aléatoire**

$$\left[\overline{X}_n - 2\,\sigma_n,\, \overline{X}_n + 2\,\sigma_n\right]$$

a 95 % de chances de contenir p !

Formalisons

Définition

Un **estimateur** est une variable aléatoire Θ_n dérivée d'un échantillon i.i.d. $(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ servant à estimer un paramètre θ de la loi des X_i.

Cet estimateur est dit **convergent** si

$$\lim_{n\to\infty} \Theta_n = \theta \quad (\text{presque sûrement}).$$

Il est **sans biais** si

$$\mathbb{E}[\Theta_n] = \theta \quad \text{pour tout } n.$$

Exemple vu et revu

$$\overline{X}_n = \frac{1}{n}\left(X_1 + X_2 + \cdots + X_n\right)$$

est un estimateur de μ

- sans biais (propriétés de $\mathbb{E}$)
- convergent (loi des grands nombres).

Intervalle de confiance pour l'espérance

Pour n assez grand, on peut considérer que $\overline{X}_n \sim \mathcal{N}(\mu, \frac{\sigma^2}{n})$.

Si z_α désigne un nombre pour lequel

$$\mathbb{P}[-z_\alpha \leq Z \leq z_\alpha] = 1 - \alpha \quad \text{pour } Z \sim \mathcal{N}(0,1)$$

alors

$$\boxed{I_\alpha = \left[\overline{X}_n - z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}, \overline{X}_n + z_\alpha \frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right]}$$

est un **intervalle de confiance de niveau** $1 - \alpha$ pour μ

Exercice

Donner un intervalle de confiance au seuil $1 - \alpha = 95\%$ pour la probabilité p d'obtenir un 6 sur le dé croche.

Avec nos données

```
1  data = [17 40 44 47 29 42];
2
3  n = sum(data);
4
5  xbar = data(6)/n;
6
7  s = sqrt(xbar*(1-xbar)/n);
8
9  [xbar - 2*s, xbar + 2*s]
```

Évaluer

```
ans =

 0.138573 0.244989
```

Help | Powered by SageMath

Intervalle contenant la vraie valeur p « 19 fois sur 20 »

Et la variance ?

$$S_n^2 := \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n}\left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

Semble une bonne idée.

Il est bien convergent vers σ^2.

Petit problème: les n termes ne sont pas indépendants...

Proposition

$$\mathbb{E}[S_n^2] = \frac{n-1}{n}\sigma^2$$

Estimateur non biaisé de la variance

Vaut mieux donc préférer à S_n^2 la variation suivante:

$$\widetilde{S_n^2} := \frac{n}{n-1} S_n^2 = \frac{1}{n-1} \sum_{i=1}^{n} \left(X_i - \overline{X}_n\right)^2$$

qui a $\mathbb{E}[\widetilde{S_n^2}] = \sigma^2$.

Fait: si $X_i \sim \mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$,

$$\frac{\widetilde{S_n^2}}{\sigma^2/(n-1)} \sim \chi^2_{n-1} \quad \text{loi du } \chi^2 \text{ (voir TD)}$$

En pratique

Notre intervalle de confiance pour μ

$$I_\alpha = \left[\overline{X}_n - z_\alpha\,\sigma,\ \overline{X}_n + z_\alpha\,\sigma\right]$$

supposait σ connu, dans les faits on doit l'estimer...

Pour un « grand » échantillon ($n > 30$):

ça ne pose pas de problème de remplacer σ par $\widetilde{S_n}$.

(Pour un petit, on doit utiliser plutôt les quantiles d'une loi de Student)

Test d'hypothèse

Dans la vraie vie

On se pose des questions sur un modèle probabiliste pour prendre des décisions:

- ce dé est-il équilibré ?
- ce courriel est-il indésirable ?
- ce médicament est-il efficace ?
- cette machine est-elle déréglée ?
- ce candidat sera-t-il élu ?
- que faire face à ce risque ?
- combien rapportera ce placement ?
- cette mesure a-t-elle été efficace ?

⋮

Test d'hypothèse

Principe général: on tente d'*invalider* un modèle grâce à des observations.

- H_0: **hypothèse nulle** décrivant un modèle probabiliste prédictif
- H_1: **hypothèse alternative**

Si les observations effectuées sont *trop* improbables sous l'hypothèse H_0,

on rejette cette hypothèse en faveur de H_1.

La déviation observée à H_0 est alors dite **statistiquement significative**.

Exemple: lancer de pièce

- H_0: la pièce est équilibrée
- H_1: pile est favorisé

Soit X le nombre de P en 10 lancers.

On juge qu'une observation avec $\mathbb{P} \leq 5\,\%$ remettrait en cause H_0.

Or, sous H_0, $X \sim \mathcal{B}(10, \frac{1}{2})$ et

$$\mathbb{P}[X \geq 9 \,|\, H_0] = \frac{10+1}{2^{10}} \approx 1{,}07\,\%$$

Si on observe $X \geq 9$, on pourra donc rejeter H_0 au seuil de signification $\alpha = 5\,\%$

Fonctionnement

- On choisit un **seuil de signification** α (souvent 5 % ou 1 %)
- On sélectionne une statistique T dont on connait la loi *sous* H_0
- On calcule la probabilité p que T prenne, *sous* H_0,
  une valeur aussi extrême que celle observée
- Si $p < \alpha$, on rejette H_0 en faveur de H_1 :
  la différence observée est **statistiquement significative**
- Si $p \geq \alpha$, on juge que les données ne sont pas
  suffisantes pour remettre en cause H_0 (status quo)

Attention

Il faut choisir le seuil de signification α **avant** de voir les données !

Et se méfier de la prolifération de tests...

Deux sortes d'erreurs possibles:

- rejeter H_0 alors qu'elle est vraie: se produit avec probabilité α prescrite
- accepter H_0 alors que H_1 est vraie: se produit avec une probabilité β

On appelle aussi $1 - \beta$ la **puissance** du test