CSI3/U3/CIR3

12 mai 2016

Sans Document, Avec Calculatrice
Durée 3H

PARTIEL
ANALYSE DES SIGNAUX ET DES IMAGES

<u>Les réponses seront clairement rédigées et il sera tenu compte de la rédaction.</u>
<u>Les résultats seront justifiés et encadrés.</u>

Exercice 1

Un ingénieur spécialisé en traitement du signal souhaite stocker sur un disque dur un enregistrement de 2 secondes d'un signal audio x(t) constitué de la somme de deux sinus :

- L'un est de fréquence 510 Hz, et d'amplitude comprise entre 1V et 5V
- L'autre est de fréquence 1200Hz et d'amplitude comprise entre 0V et 1V

Il constate donc sans autre analyse que l'amplitude est bornée par 1V et 6V.

1. Pour réaliser cette opération de numérisation, il utilise un convertisseur analogique-numérique dont il doit régler la fréquence d'échantillonnage et le type de quantification.

   Aidez-le à réaliser ce paramétrage correctement sachant qu'on lui a imposé quelques contraintes :
   - une erreur de quantification maximale en valeur absolue de 0,2V est autorisée.
   - les valeurs quantifiées ne pourront être codées sur plus de 4 bits.
   - Il y a très peu de place sur le disque dur pour stocker cet enregistrement.

   Vous donnerez donc les paramètres nécessaires à cette numérisation en **<u>justifiant</u>** tous vos calculs et résultats. L'ingénieur suivra vos conseils et choisira les valeurs minimales que vous lui donnerez.

2. Un autre ingénieur prend possession du disque dur ci-dessus et souhaite identifier le signal audio qui y est stocké. Pour cela il va réaliser une analyse fréquentielle grâce à un Transformée de Fourier Discrète (TFD) avec une résolution fréquentielle souhaitée de 5 Hz.
   a. Donner l'expression et représenter la Transformée de Fourier (en module et en phase) de x(t)
   b. Représenter la Transformée de Fourier (en module) de x(t) après échantillonnage. Expliquer votre résultat.
   c. Avec les informations provenant de la question 1, comment l'ingénieur doit-il faire pour obtenir précisément cette résolution fréquentielle ?

d. Représenter précisément la TFD (en module, avec une abscisse graduée en Hz et en nombre d'échantillons). Expliquer votre résultat.

3. En réalité le premier ingénieur s'est trompé dans ses manipulations lors de la numérisation et n'a enregistré que 150ms de signal audio tout en suivant malgré tout vos conseils.
   a. Quelles sont les conséquences pour l'ingénieur qui prend possession du disque dur et souhaite faire une analyse à partir de la TFD ? vous justifierez vos arguments.
   b. Donner l'allure grossière de la TFD en module.

Exercice 2

On considère le signal cosinusoïdal suivant :

$$x(t) = 2\cos(4\pi t)$$

On échantillonne ce signal avec une fréquence d'échantillonnage de 6 Hz à partir de t = 0 s.

1. Calculer la valeur des trois premiers échantillons temporels
2. On souhaite calculer la TFD sur trois points. Ecrire la matrice de TFD permettant de calculer les échantillons spectraux de x.
3. En quelles fréquences sera évaluée la TFD ?
4. Calculer alors les échantillons spectraux.
5. Tracer le spectre d'amplitude et de phase pour $\upsilon \in [-12Hz;12Hz]$
6. Indiquer quelle est la partie utile de ce spectre et conclure sur la pertinence des choix faits pour calculer cette TFD

FORMULAIRE

Formules Trigo :

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ (cos(a+b) + cos(a-b))
sin(a).sin(b) = ½ (cos(a-b) – cos(a+b))
cos(a).sin(b) = ½ (sin(a+b) – sin(a-b))
sin(a).cos(b) = ½ (sin(a+b) + sin(a-b))

Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)

$$y(t)=\int_{-\infty}^{+\infty}x(u)h(t-u)du=\int_{-\infty}^{+\infty}x(t-u)h(u)du$$

Décomposition en série de Fourier réelle et complexe + Relations entre an, bn et cn

$$x(t)=\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}a_n\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)+b_n\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)$$

avec

$$a_0=\frac{2}{T}\int_T x(t)dt$$

$$a_n=\frac{2}{T}\int_T x(t)\cos\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)dt$$

$$bn=\frac{2}{T}\int_T x(t)\sin\left(2\pi n\frac{t}{T}\right)dt$$

$$x(t)=\sum_{n=-\infty}^{+\infty}c_n e^{+2\pi j\frac{n}{T}t}$$

avec

$$c_n=\frac{1}{T}\int_T x(t)e^{-2\pi j\frac{n}{T}t}dt$$

$$c_0=\frac{a_0}{2}$$

$$c_n=\frac{1}{2}(a_n-jb_n)$$

$$c_{-n}=\frac{1}{2}(a_n+jb_n)=c_n^*$$

Quelques propriétés liées aux séries de Fourier

<u>Dérivation</u> :

Soit x(t) un signal périodique de période T et Xk ses coefficients de décomposition en série de Fourier complexe alors les coefficients de décomposition en série de Fourier complexe de la fonction :

$\frac{d^n x(t)}{dt^n}$ sont : $\left(2\pi jk\frac{1}{T}\right)^n X_k$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

- Changement d'échelle : $x(t)\xrightarrow{TF}X(\upsilon)$

  $x(kt)\xrightarrow{TF}\frac{1}{|k|}X\left(\frac{\upsilon}{k}\right)$

- Dualité : $x(t)\leftrightarrow X(\upsilon)$ alors $X(t)\leftrightarrow x(-\upsilon)$

- Dérivation :
  - Par rapport au temps

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
$$\frac{d^n x(t)}{dt^n} \xrightarrow{TF} (2\pi j\upsilon)^n X(\upsilon)$$

  - Par rapport à la fréquence

$$x(t) \xrightarrow{TF} X(\upsilon)$$
$$t^n x(t) \xrightarrow{TF} \frac{d^n X(\upsilon)}{d\upsilon^n} \frac{1}{(-2\pi j)^n}$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\upsilon - \frac{n}{T}\right)$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T \to +\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t) y^*(t - \tau) dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X\left(\nu = \frac{k}{NT_e}\right) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n) e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$\begin{array}{ll}
 & \hphantom{\begin{bmatrix} X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \end{bmatrix}} \text{Colonne numéro } n \\
\text{Ligne Numéro } k & \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}
\end{array}$$

Expression de la fenêtre de Hanning calculée sur N points :

$$h(n) = 0.5\left(1 - \cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right)\right) \qquad \text{avec } n=0,1,\ldots,N-1$$

Expression de la fenêtre de Hamming calculée sur N points :

$$h(n) = 0.54 - 0.46.\cos\left(\frac{2\pi n}{N}\right) \qquad \text{avec } n=0,1,\ldots,N-1$$

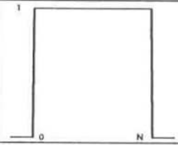
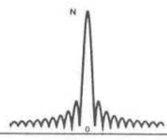
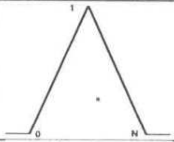
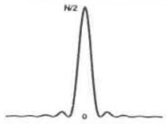
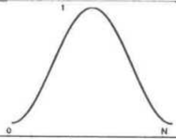
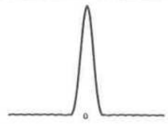
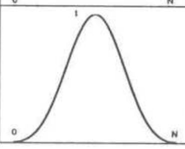
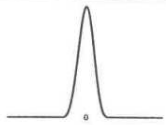
Nom		Représentation temporelle	Représentation fréquentielle	Largeur lob.princ.	Amp. relative $\frac{lob.princ}{lob.sec.}$
Rectangulaire				$\frac{2}{N}$	-13 dB
Triangulaire				$\frac{4}{N}$	-25 dB
Hamming				$\frac{4}{N}$	-41 dB
Blackman				$\frac{6}{N}$	-57 dB

Table 3 *Différents types de fenêtres et leurs caractéristiques*