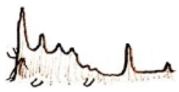
Examen final

Consignes :

- Vous disposez de **2 h** pour répondre aux **3** $\times$ **4** questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Un formulaire sur les transformées de Fourier et Laplace est fourni en annexe.
- Soyez **clairs** et **précis** et dans vos réponses et **justifications**.
- Et surtout **exprimez-vous** sur les sujets proposés pour démontrer votre compréhension des concepts !



Exercice 1

Pour $\lambda > 0$, on considère $x_\lambda(t) = H(t)\, e^{-\lambda t}$.

a) Calculez $x'_\lambda(t)$ (au sens des signaux) et vérifiez que $x_\lambda(t)$ est solution de l'équation différentielle

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = \delta(t).$$

$$x'_\lambda(t) = H'(t)\, e^{-\lambda t} - \lambda\, H(t)\, e^{-\lambda t} = \delta(t)\, e^{-\lambda t} - \lambda\, H(t)\, e^{-\lambda t} = \delta(t) - \lambda\, x_\lambda(t)$$

b) Évaluez, par calcul direct d'intégrale, le produit de convolution $(x_\lambda * x_\mu)(t)$.

(Prenez soin de distinguer les cas $\lambda \neq \mu$ et $\lambda = \mu$).

$$(x_\lambda * x_\mu)(t) = \frac{x_\mu(t) - x_\lambda(t)}{\lambda - \mu} \qquad (\lambda \neq \mu), \qquad\qquad (x_\lambda * x_\lambda)(t) = t\, x_\lambda(t)$$

c) Confirmez votre réponse à la question b) par un calcul dans le domaine de Laplace.

$$X_\lambda(p) = \frac{1}{p+\lambda}, \qquad X_\mu(p) = \frac{1}{p+\mu}$$

$$x_\lambda * x_\mu \sqsupset X_\lambda \cdot X_\mu = \frac{1}{(p+\lambda)(p+\mu)} = \frac{1}{\lambda-\mu}\left(\frac{1}{p+\mu} - \frac{1}{p+\lambda}\right) \quad \checkmark$$

$$x_\lambda * x_\lambda \sqsupset X_\lambda^2 = \frac{1}{(p+\lambda)^2} \qquad \Longrightarrow \qquad x_\lambda * x_\lambda = e^{-\lambda t}\, t\, H(t) = t\, x_\lambda(t)$$

d) Résoudre, par la méthode votre choix, l'équation différentielle avec condition initiale $y(0^-) = 0$:

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = x_\mu(t).$$

Vérifier la cohérence de votre réponse lorsque $\mu \to \lambda$.

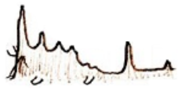
Le plus simple est de considérer le filtre $\mathcal{S} : x(t) \mapsto y(t)$ où $y(t)$ est la solution satisfaisant $y(0^-) = 0$ de l'équation différentielle

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = x(t).$$

On sait que $x_\lambda(t)$ est la réponse impulsionnelle de $\mathcal{S}$ et qu'en général sa sortie est la convolution de l'entrée avec la réponse impulsionnelle ($\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(x * \delta) = x * S(\delta) = x * x_\lambda$) ; donc la solution avec membre de droite x_μ est $x_\lambda * x_\mu$ qu'on a calculé en b) et c).

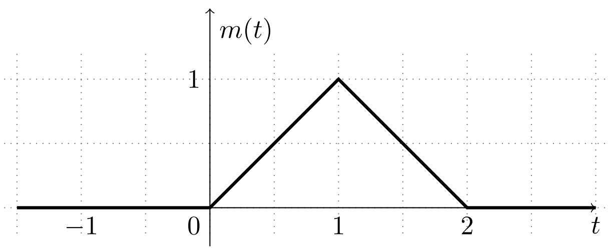
Autres approches possibles : utiliser directement la transformée de Laplace ou résoudre « comme en prépa » avec la solution générale de l'équation homogène + une solution particulière de l'équation avec membre de droite.

Dans le cas $\mu = \lambda$, il y a résonnance : $e^{-\lambda t}$ est déja solution de l'équation homogène et on doit chercher une solution particulière de la forme $t\, e^{-\lambda t}$.



Exercice 2

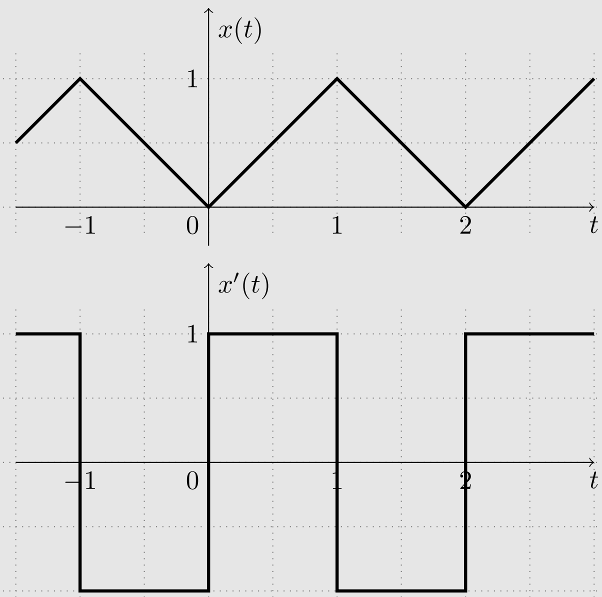
Soit $m(t)$ le signal triangulaire ci-dessous.

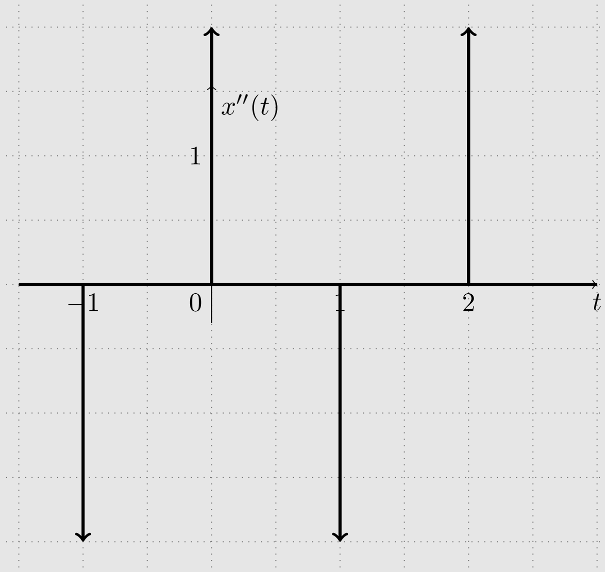


a) Exprimez $m(t)$ comme le produit de convolution de deux portes afin d'obtenir simplement une expression pour sa transformée de Fourier $\widehat{m}(f)$.

$$m(t) = \Pi_1(t - \tfrac{1}{2}) * \Pi_1(t - \tfrac{1}{2}) = (\Pi_1 * \Pi_1)(t-1) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{m}(f) = (e^{-\pi j f}\,\mathrm{sinc}(\pi f))^2 = e^{-2\pi j f}\,\mathrm{sinc}^2(\pi f)$$

b) Soit $x(t) = m(t) * Ш_2(t)$. Représentez graphiquement $x(t)$, $x'(t)$ et $x''(t)$ en portant une attention particulière aux échelles des axes.





c) Obtenir des expressions pour les transformées $\widehat{x}(f)$, $\widehat{x'}(f)$, $\widehat{x''}(f)$.

$$\begin{aligned}
\widehat{x}(f) &= \widehat{\text{Ш}_2}(f)\cdot\widehat{m}(f) = \tfrac{1}{2}\,\text{Ш}_{\frac{1}{2}}(f)\cdot e^{-2\pi jf}\cdot \operatorname{sinc}^2(\pi f) = \frac{1}{2}\sum_{n=-\infty}^{+\infty} e^{-\pi jn}\,\operatorname{sinc}^2(\tfrac{\pi n}{2})\,\delta(f-\tfrac{n}{2})\\
&= \frac{1}{2}\,\delta(f) + \frac{1}{2}\sum_{n \text{ impair}} (-1)^n \frac{1}{(\frac{\pi n}{2})^2}\,\delta(f-\tfrac{n}{2}) = \frac{1}{2}\,\delta(f) - \frac{2}{\pi^2}\sum_{n\text{ impair}} \frac{1}{n^2}\,\delta(f-\tfrac{n}{2})\\
\widehat{x'}(f) &= 2\pi jf\,\widehat{x}(f) = -\frac{2j}{\pi}\sum_{n\text{ impair}}\frac{1}{n}\,\delta(f-\tfrac{n}{2})\\
\widehat{x''}(f) &= 2\pi jf\,\widehat{x'}(f) = 2\sum_{n\text{ impair}}\delta(f-\tfrac{n}{2}) = 2\,\text{Ш}_1(f-\tfrac{1}{2})
\end{aligned}$$

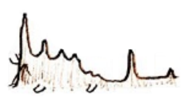
d) Déterminez la transformée du signal $z(t) = e^{\pi jt}\cdot \text{Ш}_1(t)$ et vérifiez la cohérence avec votre réponse à la question précédente.

$$\widehat{z}(f) = \widehat{\text{Ш}_1}(f-\tfrac{1}{2}) = \text{Ш}_1(f-\tfrac{1}{2})$$

Par ailleurs

$$z(t) = \sum_n e^{\pi jn}\,\delta(t-n) = \sum_n (-1)^n\,\delta(t-n) = \frac{1}{2}\,x''(t)$$

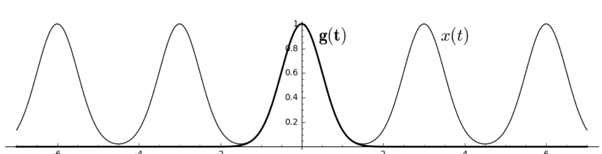
il est donc cohérent de trouver $\widehat{z} = \frac{1}{2}\,\widehat{x''}$.



Exercice 3

Soit $x(t)$ le signal périodique ci-dessous, obtenu en superposant des impulsions gaussiennes $g(t) = e^{-t^2}$ à toutes les $T = 3$ secondes :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t-3n).$$



a) En utilisant la périodicité de $x(t)$, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{x}(f)$ satisfait l'équation

$$e^{6\pi j f}\,\widehat{x}(f) = \widehat{x}(f)$$

et expliquer pourquoi cela implique que $\widehat{x}(f)$ est un spectre de raies espacées de $\frac{1}{3}$ Hz.

Par construction, x est 3-périodique on a donc

$$x(t+3) = x(t).$$

En prenant la transformée de Fourier des deux côtés, on a

$$e^{6\pi j f}\,\widehat{x}(f) = \widehat{x}(f)$$

soit

$$(1 - e^{6\pi j f})\,\widehat{x}(f) = 0.$$

Par propriété générale, on sait que cela implique que $\widehat{x}(f)$ est nulle sauf peut-être des Diracs aux zéros de $1 - e^{6\pi j f}$:

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\delta(f - \tfrac{n}{3}).$$

b) En partant de la conclusion de a), montrer que $x(t)$ admet une représentation en série de Fourier de la forme

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(e^{\frac{2\pi j t}{3}})^n.$$

En prenant la transformée inverse de

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\delta(f - \tfrac{n}{3})$$

on a

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,e^{2\pi j \frac{n}{3} t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(e^{\frac{2\pi j}{3} t})^n$$

c) Exprimer $x(t)$ sous forme de produit de convolution de $g(t)$ avec un peigne de Dirac et obtenir ainsi une autre expression de $\widehat{x}(f)$. En déduire que

$$c_n = \frac{1}{3}\,\widehat{g}\left(\frac{n}{3}\right).$$

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t-3n) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} g(t) * \delta(t-3n) = g(t) * \text{Ш}_3(t)$$

$$\Longrightarrow\ \widehat{x}(f) = \widehat{g}(f)\cdot\tfrac{1}{3}\,\text{Ш}_{\frac{1}{3}}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \tfrac{1}{3}\,\widehat{g}(\tfrac{n}{3})\,\delta(f - \tfrac{n}{3})$$

En comparant ceci avec a), on trouve bien $c_n = \frac{1}{3}\,\widehat{g}(\frac{n}{3})$.

d) À l'aide de tout ce qui précède, obtenir une expression de $x(t)$ sous la forme

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{3}\right)$$

en précisant les valeurs des coefficients a_n.

Avec $g(t) = e^{-t^2}$, d'après le formulaire on a $\widehat{g}(f) = \sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$ donc d'après c)

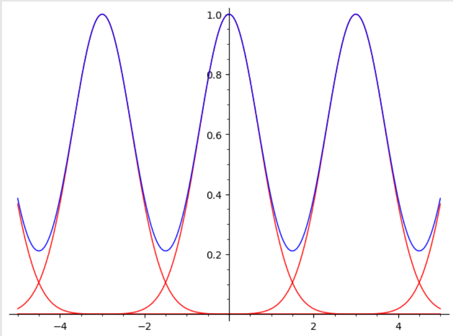
$$c_n = \frac{\sqrt{\pi}}{3} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{9}}.$$

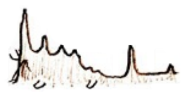
On remarque que la dépendance en n est paire ($c_{-n} = c_n$) de sorte que pour $n \neq 0$ on peut grouper les coefficients deux à deux dans la série de Fourier :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{\frac{2\pi j n t}{3}} = c_0 + 2 \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(\frac{2\pi n t}{3}).$$

On a donc

$$a_0 = \frac{\sqrt{\pi}}{3}, \qquad a_n = \frac{2\sqrt{\pi}}{3} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{9}} \quad (n \geqslant 1).$$





Produit de convolution

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)\, x_2(t-u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-v)\, x_2(v)\, \mathrm{d}v$$

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\displaystyle\int_0^t x(u)\, \mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$tx(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} X(s)\, \mathrm{d}s$	
$e^{at}x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa}X(p)$	$(a \geqslant 0)$
$x(kt)$	$\dfrac{1}{k} X\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

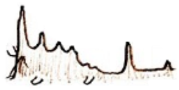
Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pX(p) = x(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pX(p) = x(+\infty)$$

original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} x(t)\, e^{-2\pi jnt/T}\,\mathrm{d}t$$



Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi jft}\,\mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi jft}\,\mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\, \widehat{x_1}(f) + \mu\, \widehat{x_2}(f)$
$x(-t)$ $\overline{x(t)}$	$\widehat{x}(-f)$ $\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$ $e^{2\pi jat}x(t)$	$e^{-2\pi jaf}\widehat{x}(f)$ $\widehat{x}(f-a)$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $-2\pi jt\, x(t)$	$2\pi jf\, \widehat{x}(f)$ $\dfrac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$ $x_1(t)\, x_2(t)$	$\widehat{x_1}(t)\, \widehat{x_2}(t)$ $(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t) = H\big(t + \frac{a}{2}\big) - H\big(t - \frac{a}{2}\big)$ $e^{-\lambda\lvert t\rvert}, \lambda > 0$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi af)$ $\dfrac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(f)$ $\dfrac{1}{T}Ш_{\frac{1}{T}}(f)$