Cours Automatique

Régulation
Systèmes linéaires et continus

Department of Smart Systems and Energies

CHAPITRE 5

Analyse des systèmes linéaires types

05

- **Système du premier ordre:**

➢Un système d'entrée u(t) et de sortie s(t) est dit du premier ordre s'il est régi par une équation différentielle du type :

$$T.\frac{ds(t)}{dt} + s(t) = K.e(t)$$

➢Fonction de transfert d'un système du premier ordre après transformation de Laplace est :

$$\mathrm{G}(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{1+Tp}$$

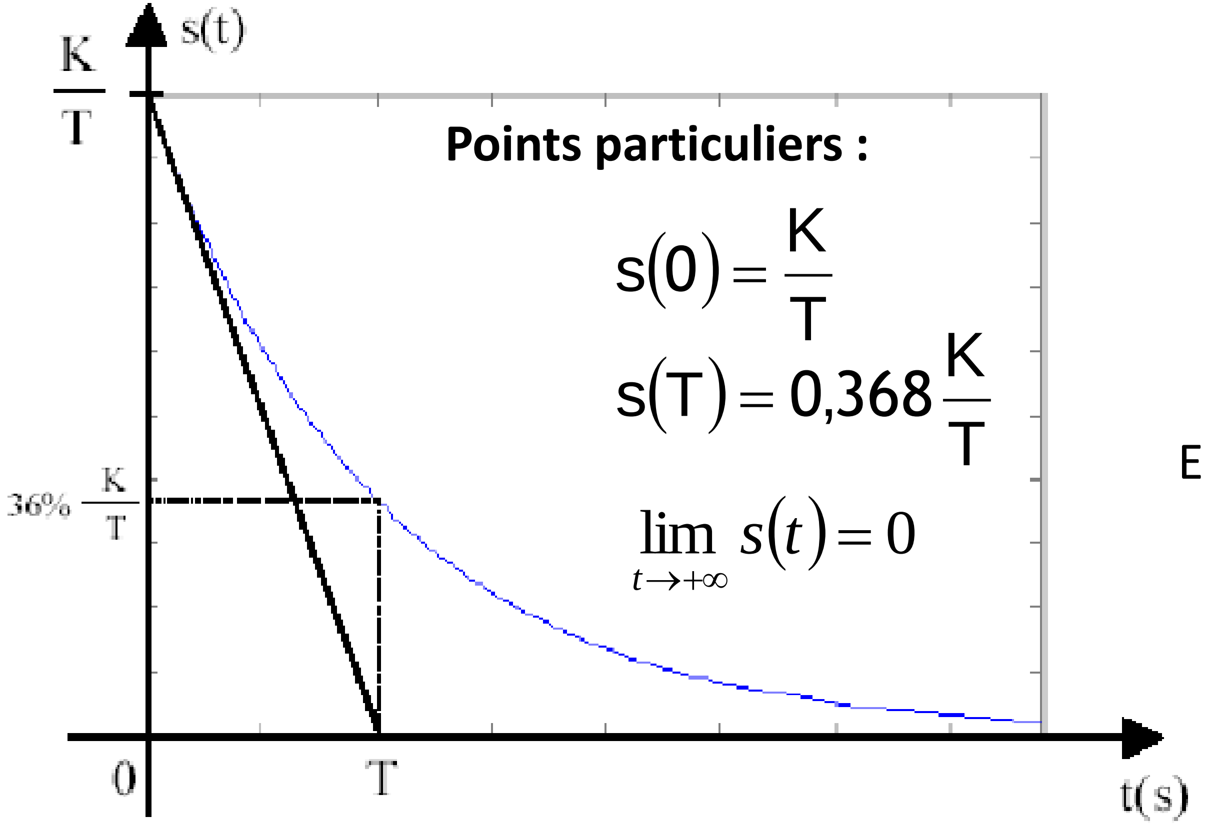
Avec : K = Gain statique du système

T = Constante de temps

$-\frac{1}{T}$: Le pôle de la fonction ou racine du dénominateur

- **Réponses temporelles des systèmes du 1er ordre**
  - ➢Réponse à une impulsion (réponse impulsionnelle)

    En entrée, nous appliquons une impulsion de dirac : E(p)=1



Points particuliers :

$$s(0)=\frac{K}{T}$$

$$s(T)=0{,}368\,\frac{K}{T}$$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t)=0$$

Donc :

$$S(p)=G(p).E(p)=\frac{K}{1+T.p}$$

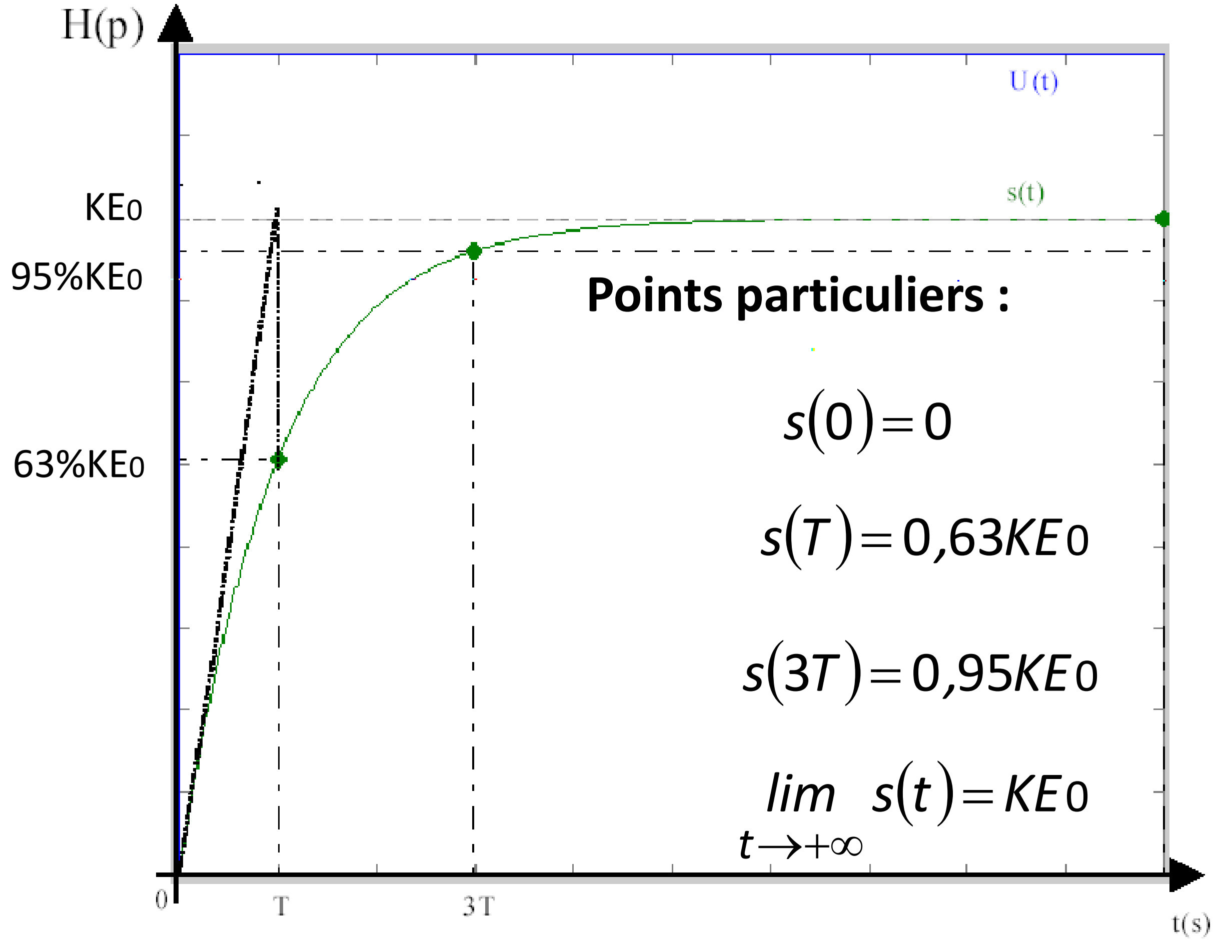
En effectuant la transformée de Laplace inverse, d'où :

$$s(t)=\frac{K}{T}e^{-t/T}$$

T est l'intersection de l'axe des abscisses avec la tangente à la réponse en t=0.

• Réponses temporelles des systèmes du 1er ordre

➢Réponse à un échelon (réponse indicielle) d'amplitude E_0



Points particuliers :

$$s(0)=0$$

$$s(T)=0,63KE0$$

$$s(3T)=0,95KE0$$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t)=KE0$$

$$S(p) = G(p).E(p) \qquad \text{avec } E(p) = \frac{E_0}{p}$$

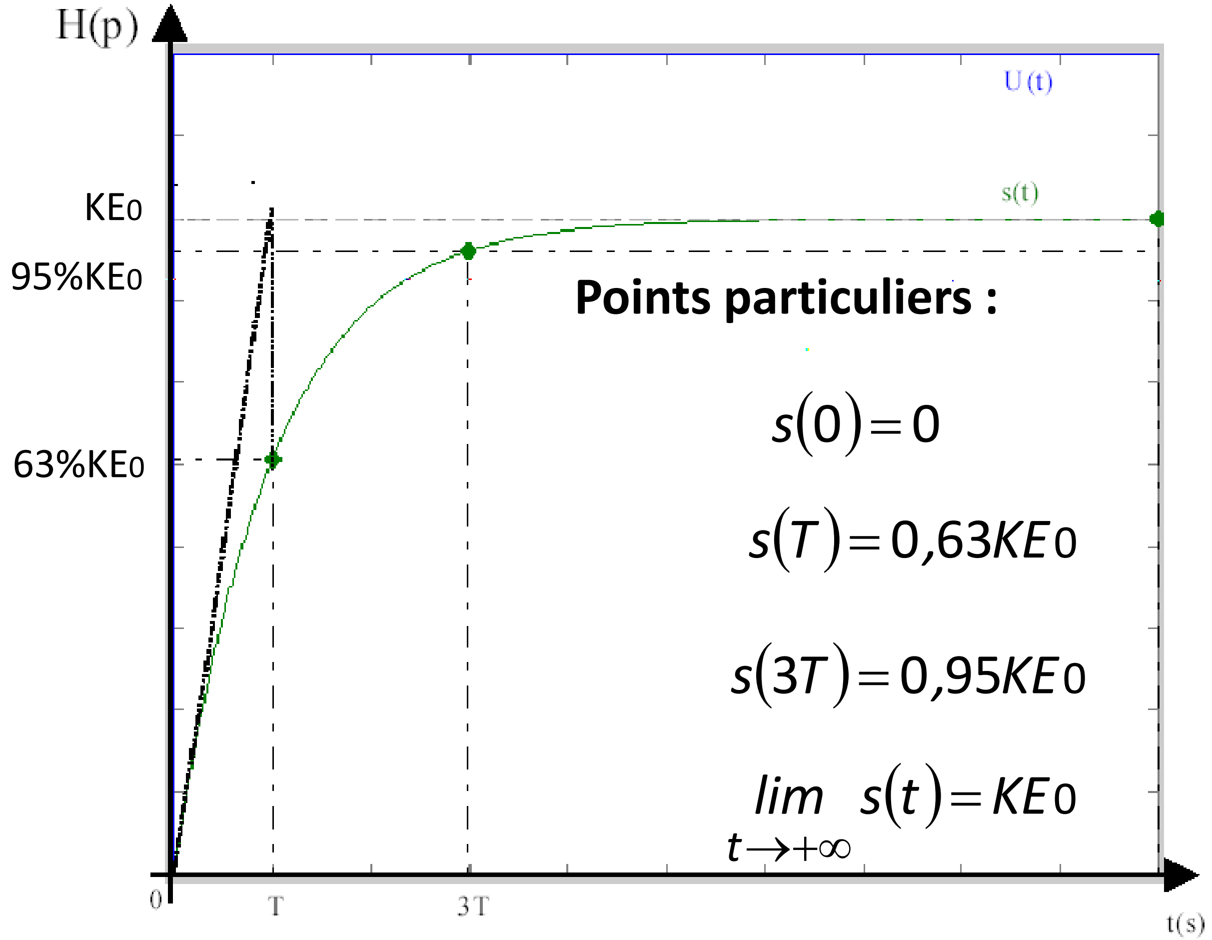
Donc : $$S(p) = \frac{K.E_0}{p(1+T.p)}$$

En effectuant la transformée de Laplace inverse, nous obtenons :

$$s(t) = K.E_0.\left(1 - e^{\frac{-t}{T}}\right)$$

• Réponses temporelles des systèmes du 1er ordre

- Réponse à un échelon (réponse indicielle) d'amplitude E_0



Points particuliers :

$$s(0)=0$$

$$s(T)=0{,}63KE0$$

$$s(3T)=0{,}95KE0$$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t)=KE0$$

La valeur finale de la sortie vaut alors :

$$s_f = \lim_{t\to\infty} K.E_0.\left(1-e^{\frac{-t}{T}}\right) = K.E_0$$

La constante de temps est donnée par :

$$s(T) = K.E_0.\left(1-e^{\frac{-T}{T}}\right) = K.E_0.\left(1-\frac{1}{e}\right) \approx 0.63.K.E_0$$

Le temps de réponse à 5 % (temps au bout duquel le système atteint 95% de sa valeur finale de la sortie) :

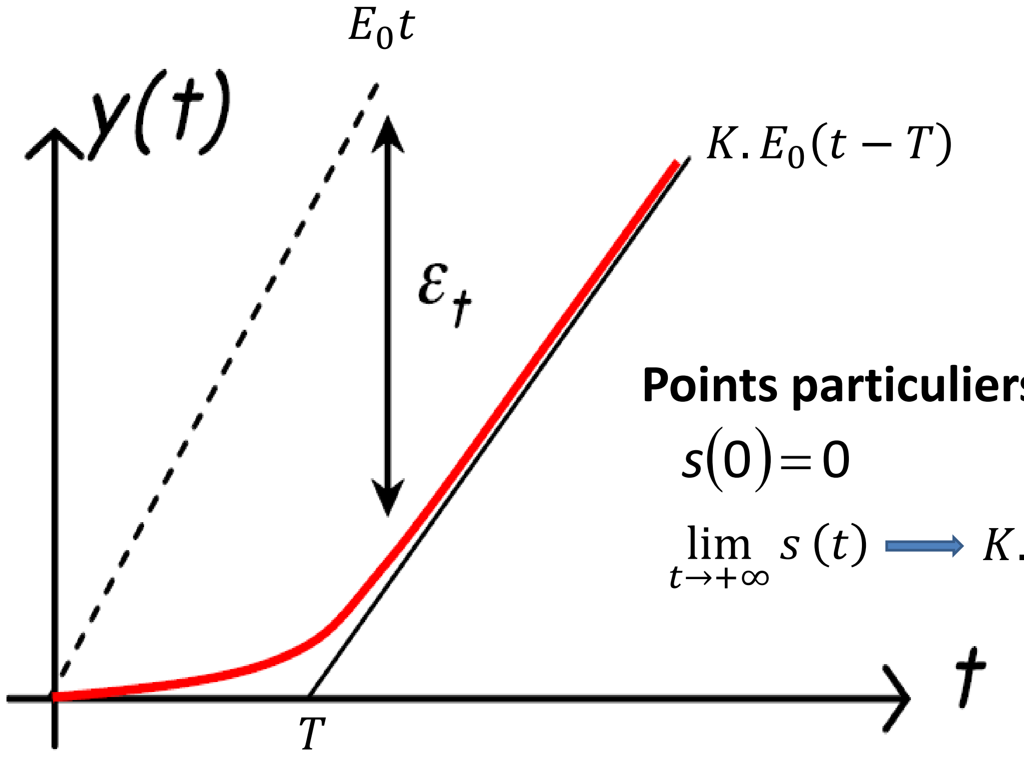
$$0.95.K.E_0 = K.E_0.\left(1-e^{\frac{-t_r}{T}}\right) \text{ d'où } t_r = 3.T$$

• Réponses temporelles des systèmes du 1er ordre

➢Réponse à une rampe de pente E_0

$$S(p) = G(p).E(p) \qquad \text{avec } E(p) = \frac{E_0}{p^2}$$

$$\text{D'où: } S(p) = G(p).E(p) = \frac{KE_0}{p^2.(1+T.p)} = KE_0.\left(\frac{1}{p^2} - \frac{T}{p} + \frac{T}{1+T.p}\right)$$



Points particuliers :

$$s(0) = 0$$

$$\lim_{t\to+\infty} s(t) \Longrightarrow K.E_0(t-T)$$

En effectuant la transformée de Laplace inverse nous obtenons :

$$s(t) = K.E_0\left(t - T + T.e^{\frac{-t}{T}}\right)$$

Pour K = 1, s(t) suit la rampe d'entrée avec un retard T. La différence entre l'entrée et la sortie est appelée erreur de trainage, ε_t, elle vaut $\varepsilon_t = E_0T$.

• Réponses fréquentielles des systèmes du 1^er ordre:

A partir du calcul du gain et de la phase du système du premier ordre, nous allons déterminer les différentes représentations de la réponse harmonique. Nous remplaçons $p => j\omega$.

$$\mathrm{G}(p) = \frac{K}{1+Tp} \qquad \text{D'où} \qquad \mathrm{G}(j\omega) = \frac{K}{1+j\omega T}$$

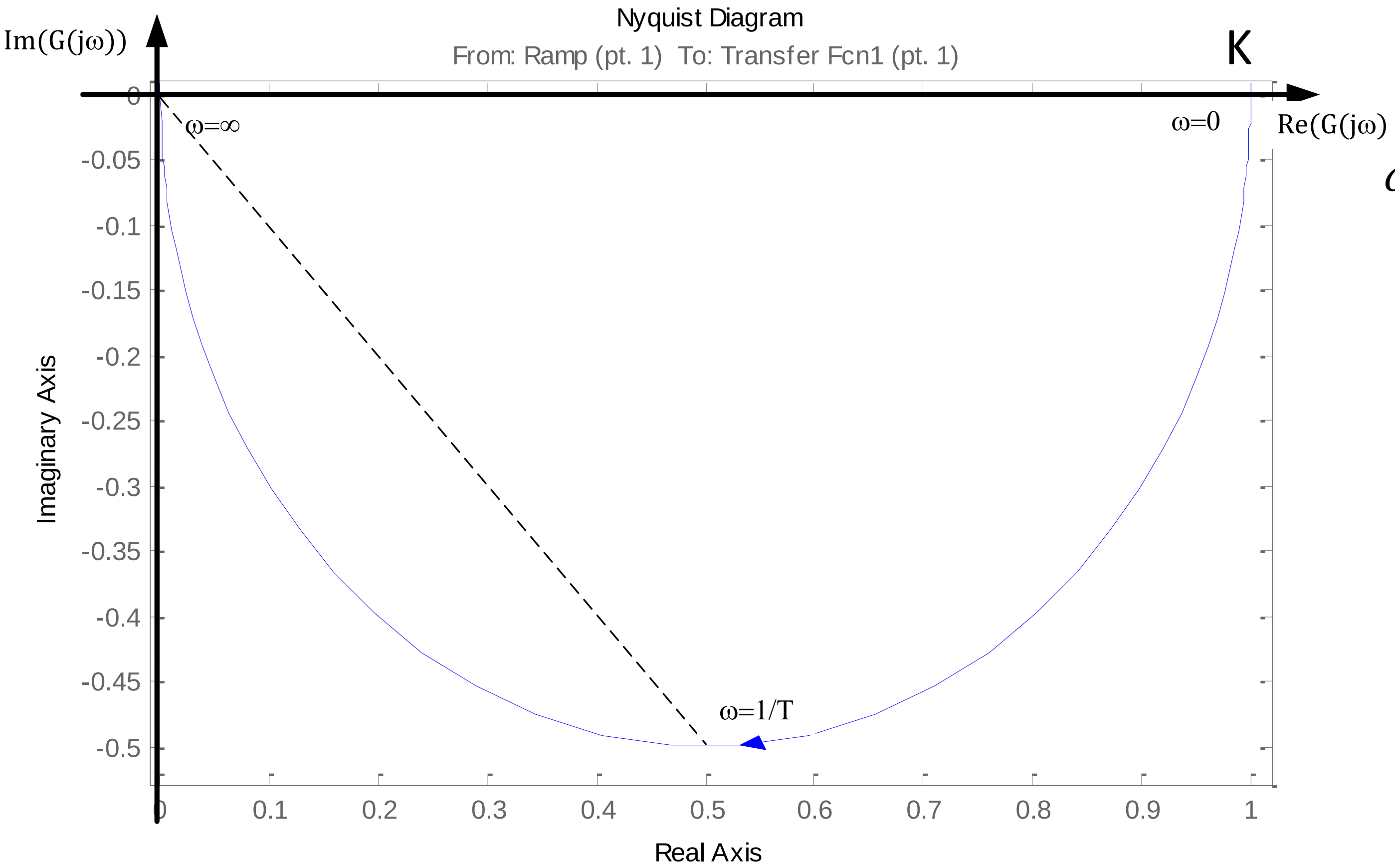
Module $$\mathrm{G}(\omega) = |G(j\omega)| = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

et

Argument $$\varphi_G(\omega) = Arg\big(G(j\omega)\big) = -\arctan(\omega\, T) \quad \text{en radians}$$

ANALYSES DES SYSTEMES LINEAIRES TYPES

- <u>Lieu de Nyquist d'un système du premier ordre</u>:



$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+\omega^2 T^2}}$$

$$\varphi_G(\omega) = -\arctan(\omega T)$$

$$\omega \longrightarrow 0 \quad \begin{cases} G(\omega) = K \\ \varphi_G(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\omega = 1/T \quad \begin{cases} G(\omega) = \dfrac{K}{\sqrt{2}} \\ \varphi_G(\omega) = -45\ deg \end{cases}$$

$$\omega \longrightarrow \infty \quad \begin{cases} G(\omega) = 0 \\ \varphi_G(\omega) \longrightarrow -90\ deg \end{cases}$$

Le lieu de transfert d'un premier ordre est entièrement contenu dans le "premier quadrant" (espace des phases compris entre 0 et -π/2) et est formé d'un demi-cercle.

▪ Lieu de BODE d'un système du premier ordre:

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20.\,log\,|K| - 20.\,log\,\left|\sqrt{1+\omega^2T^2}\right|$$

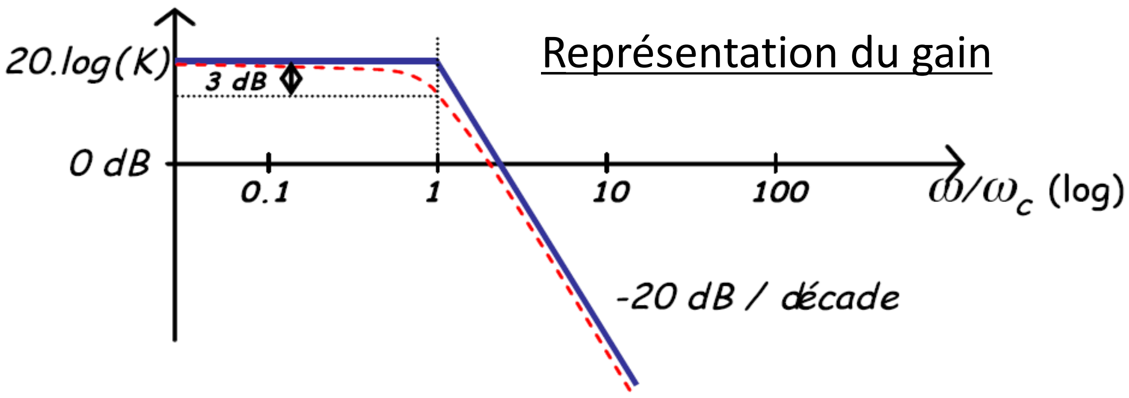
$$\varphi_G(\omega) = Arg\big(G(j\omega)\big) = -\arctan \omega\, T$$

$$\omega \longrightarrow 0 \quad \begin{cases} G(\omega)db = 20.\,log\,|K| \\ \varphi_G(\omega) = 0 \end{cases}$$

$$\begin{matrix} \omega/\omega c = 1 \\ \omega c = 1/T \end{matrix} \quad \begin{cases} G(\omega)db = 20.\,log\,|K| - 3 \\ \varphi_G(\omega) = -45\ deg \end{cases}$$

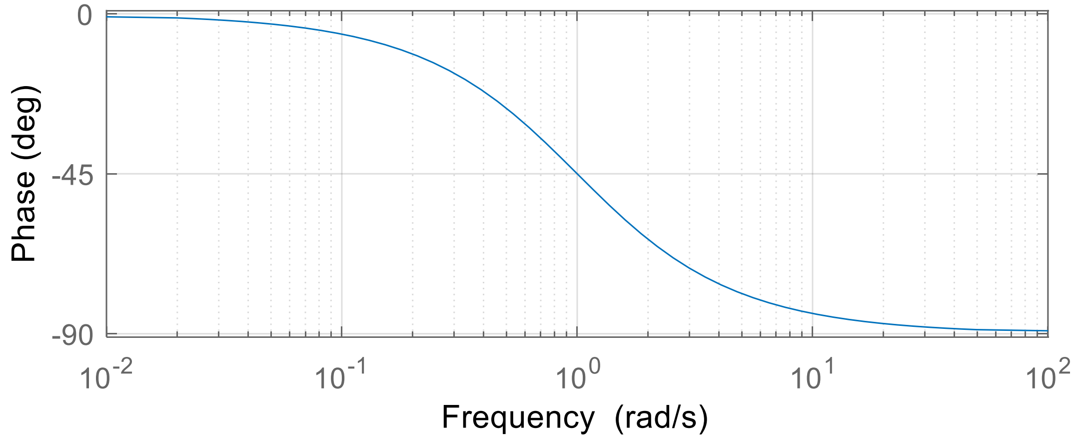
$$\omega \longrightarrow \infty \quad \begin{cases} G(\omega)db = 20.\,log\,|K| - 20.\,log\,|\omega| \\ \varphi_G(\omega) \longrightarrow -90\ deg \end{cases}$$

$|G(j\omega)|_{dB}$



Représentation du gain

Représentation de la phase



- **Lieu de Black** :

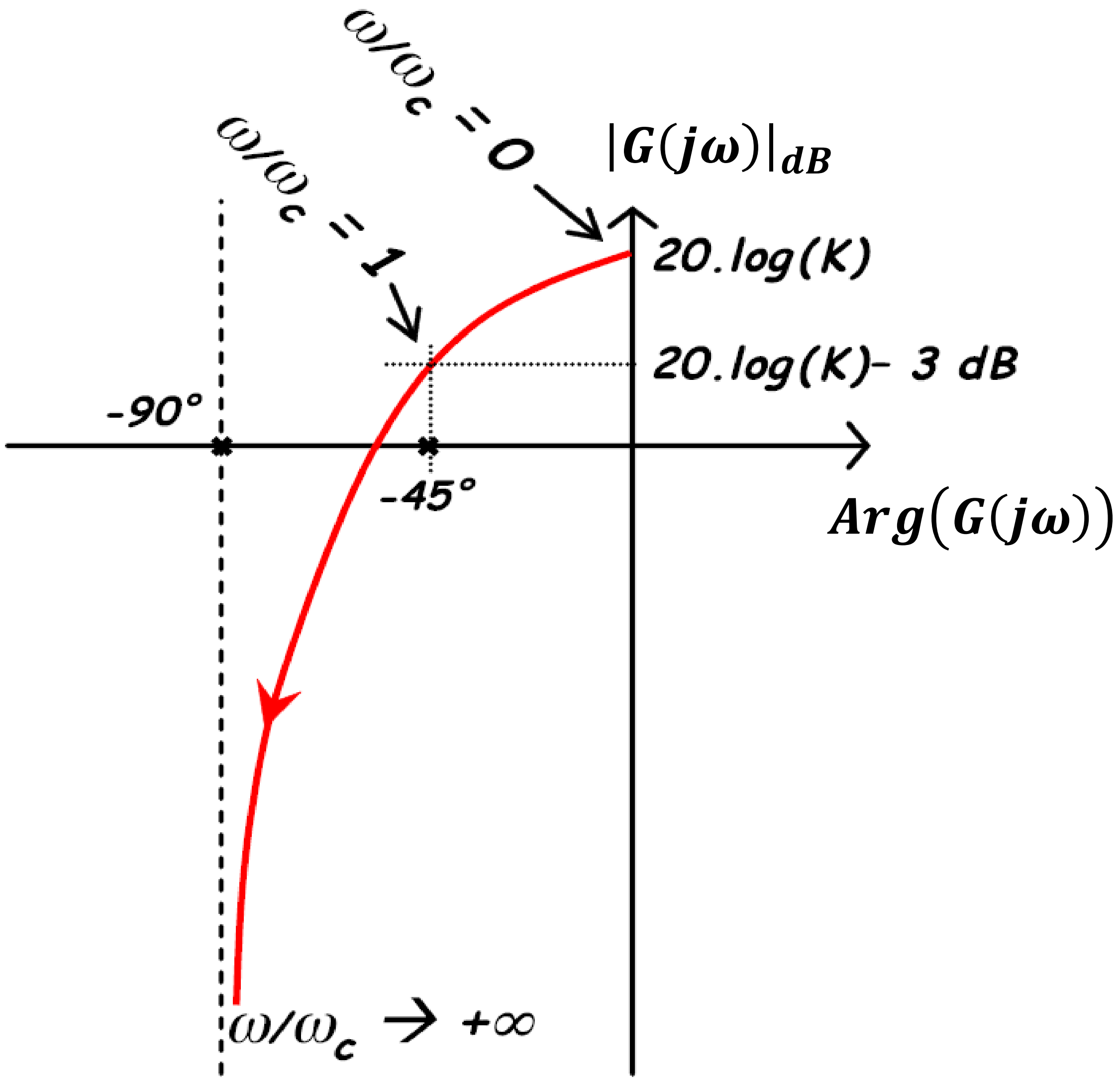
$$|G(j\omega)|_{dB} = 20.\log|K| - 20.\log\left|\sqrt{1+\omega^2T^2}\right|$$

$$\varphi_G(\omega) = Arg\big(G(j\omega)\big) = -\arctan\omega T$$

$\omega \longrightarrow 0$ $\left\{ \begin{array}{l} G(\omega)db = 20.\log|K| \\ \varphi_G(\omega) = 0 \end{array} \right.$

$\omega/\omega c = 1$ $\left\{ \begin{array}{l} G(\omega)db = 20.\log|K| - 3 \\ \varphi_G(\omega) = -45\ deg \end{array} \right.$

$\omega \longrightarrow \infty$ $\left\{ \begin{array}{l} G(\omega)db = 20.\log|K| - 20.\log|\omega| \\ \varphi_G(\omega) \longrightarrow -90\ deg \end{array} \right.$



ANALYSES DES SYSTEMES LINEAIRES TYPES

•Système du 2ème ordre :

Un système d'entrée *e(t)* et de sortie *s(t)* est dit du second ordre s'il est régi par une équation différentielle du type :

$$b_2.\frac{d^2s(t)}{dt^2} + b_1.\frac{ds(t)}{dt} + b_0.s(t) = a_0.e(t)$$

En appliquant la transformée de Laplace, nous obtenons :

$$\frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0}{b_2.p^2 + b_1.p + b_0} = \frac{\frac{a_0}{b_0}}{\frac{b_2}{b_0}.p^2 + \frac{b_1}{b_0}.p + 1}$$

TOUJOURS mettre la fonction de transfert sous la forme généralisée :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{{\omega_0}^2}.p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + 1}$$

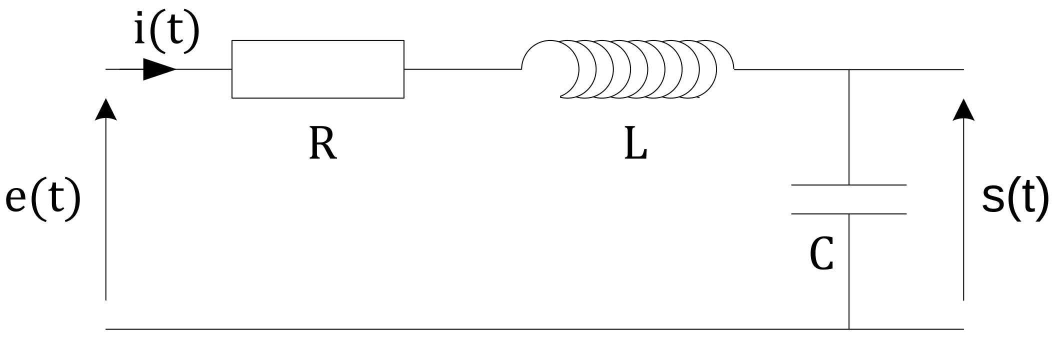
Avec K : Gain statique du système

ξ : facteur d'amortissement

ω_0 : pulsation propre non amortie ou pulsation naturelle

•Système du 2ème ordre :

Exemple :



$$e(t) = R.\mathrm{i(t)} + L\frac{di(t)}{dt} + s(t) \quad \text{et} \quad \mathrm{i(t)} = C\frac{ds(t)}{dt}$$

$$\boldsymbol{e(t) = RC\frac{ds(t)}{dt} + LC\frac{d^2s(t)}{dt^2} + s(t)} \qquad (1)$$

En effectuant la transformée de Laplace à (1), nous obtenons:

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{L.C.p^2 + RL.p + 1}$$

Donc :

$$\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{L.C}} \quad ; \quad \xi = \frac{\mathrm{R}}{2\sqrt{\frac{\mathrm{L}}{\mathrm{C}}}} \quad \text{et} \quad K = 1$$

•Système du 2ème ordre – Réponse indicielle (entrée : échelon amplitude E0)

L'analyse de la réponse à un échelon ($E(p) = \frac{E_0}{p}$) repose sur la valeur de ξ, comme pour l'analyse fréquentielle (que nous verrons par la suite). Il faut donc, dans le cas de la réponse à un échelon, considérer le cas où $\xi > 1$, puis $\xi = 1$ et enfin $\xi < 1$.

La détermination de la réponse est basée sur la résolution du dénominateur de G(p) par le calcul du $\Delta = \frac{4}{{\omega_0}^2}(\xi^2 - 1)$

Pour amortissement ξ > 1:

Nous avons une réponse apériodique (2 pôles réels et 2 constantes de temps). Dans ce cas, la fonction de transfert du deuxième ordre peut se mettre sous la forme :

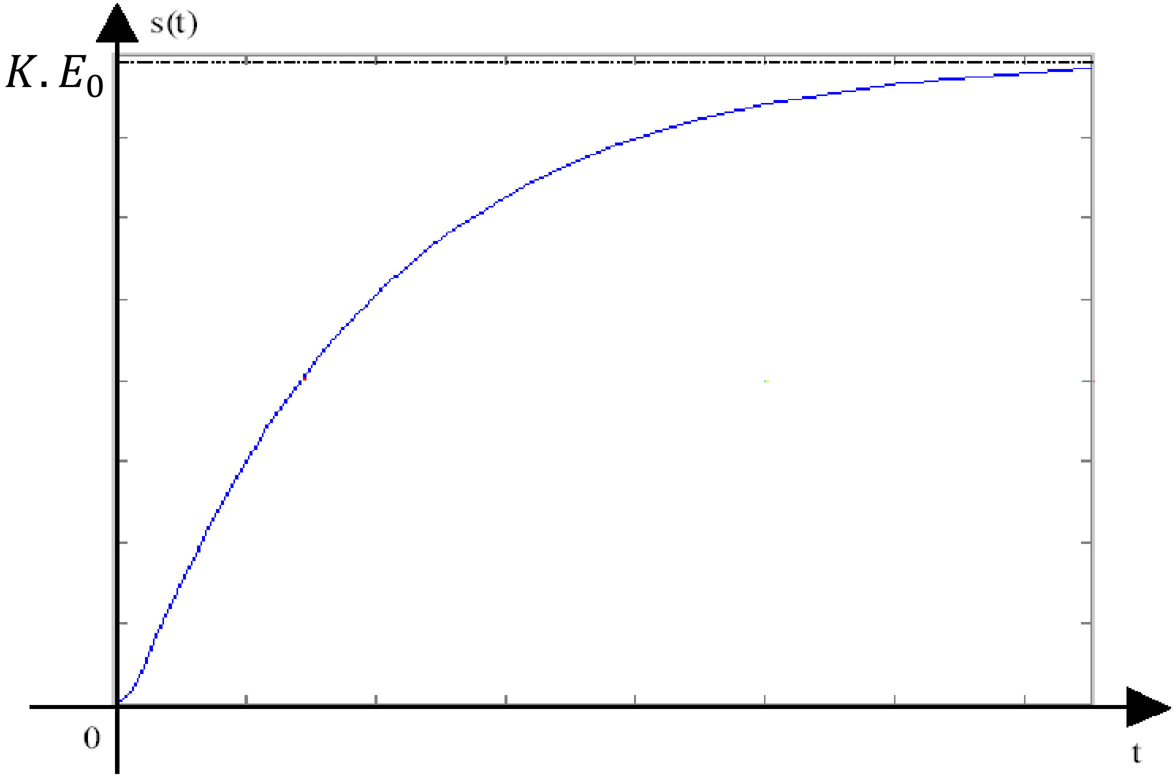
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{{\omega_0}^2}.p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + 1} = \frac{K}{(1 + T_1.p).(1 + T_2.p)}$$

Nous en déduisons, par transformée de Laplace inverse :

$$S(p) = G(p)\,E(p) = G(p)\,\frac{E_0}{p} \xrightarrow{\text{TL-1}} s(t) = K.E_0.\left(1 + \frac{T_1}{T_2 - T_1}.e^{\frac{-t}{T_1}} - \frac{T_2}{T_2 - T_1}.e^{\frac{-t}{T_2}}\right)$$

•Système du 2ème ordre – Réponse indicielle (entrée : échelon amplitude E0) ξ>1

Pour amortissement ξ > 1: Nous obtenons une **réponse apériodique**



Points particuliers :

$s(0) = 0$

$\lim_{t\to+\infty} s(t) = K.E_0$

s(t) possède une tangente horizontale en t=0

•Système du 2ème ordre – Réponse indicielle (entrée : échelon amplitude E0)

Pour amortissement ξ = 1:

Nous obtenons une réponse apériodique critique (1 pôle réel double et 1 constante de temps). Dans ce cas, la fonction de transfert du deuxième ordre peut se mettre sous la forme :

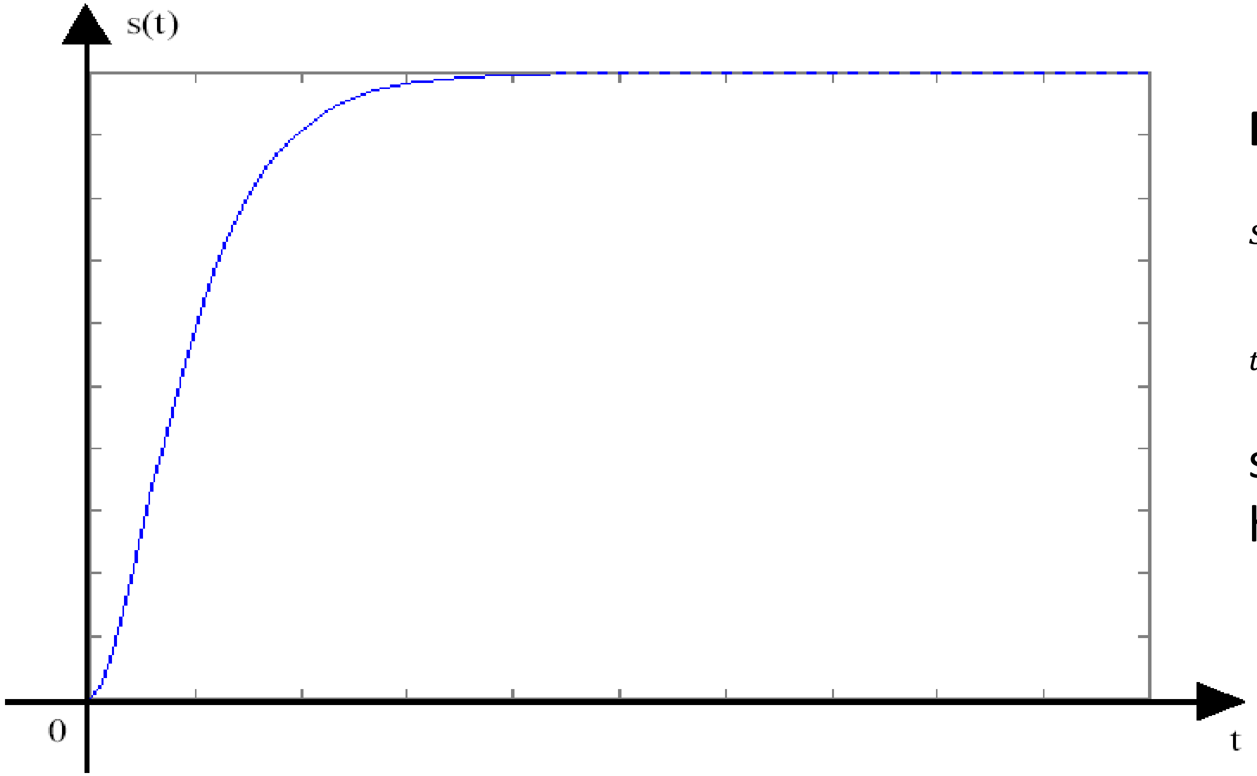
$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{{\omega_0}^2}.p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + 1} = \frac{K}{(1 + T.p)^2}$$

Nous en déduisons, par transformée de Laplace inverse :

$$S(p) = G(p)\,E(p) = G(p)\,\frac{E_0}{p} \xrightarrow{\text{TL-1}} s(t) = K.E_0.\left(1 - \left(1 + \frac{t}{T}\right).e^{-\frac{t}{T}}\right)$$

•Système du 2ème ordre – Réponse indicielle (entrée : échelon amplitude E0)

Pour amortissement $\xi = 1$: Nous obtenons une **réponse apériodique critique**



Points particuliers :

$s(0) = 0$

$\lim_{t \to +\infty} s(t) = K.E_0$

s(t) possède une tangente horizontale en t=0

•Système du 2ème ordre – Réponse indicielle (entrée : échelon amplitude E0)

Pour amortissement ξ < 1 : Nous obtenons une r**éponse oscillatoire amortie**

Dans ce cas, G(p) admet deux pôles complexes conjuguées :

$$p_{1,2} = -\omega_0\xi \pm j\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}$$

Dans ce cas, la fonction de transfert du deuxième ordre peut se mettre sous la forme :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{\frac{1}{\omega_0{}^2}.p^2 + \frac{2\xi}{\omega_0}.p + 1} = \frac{K}{(p-p_1).(p-p_2)}$$

Nous en déduisons, par transformée de Laplace inverse :

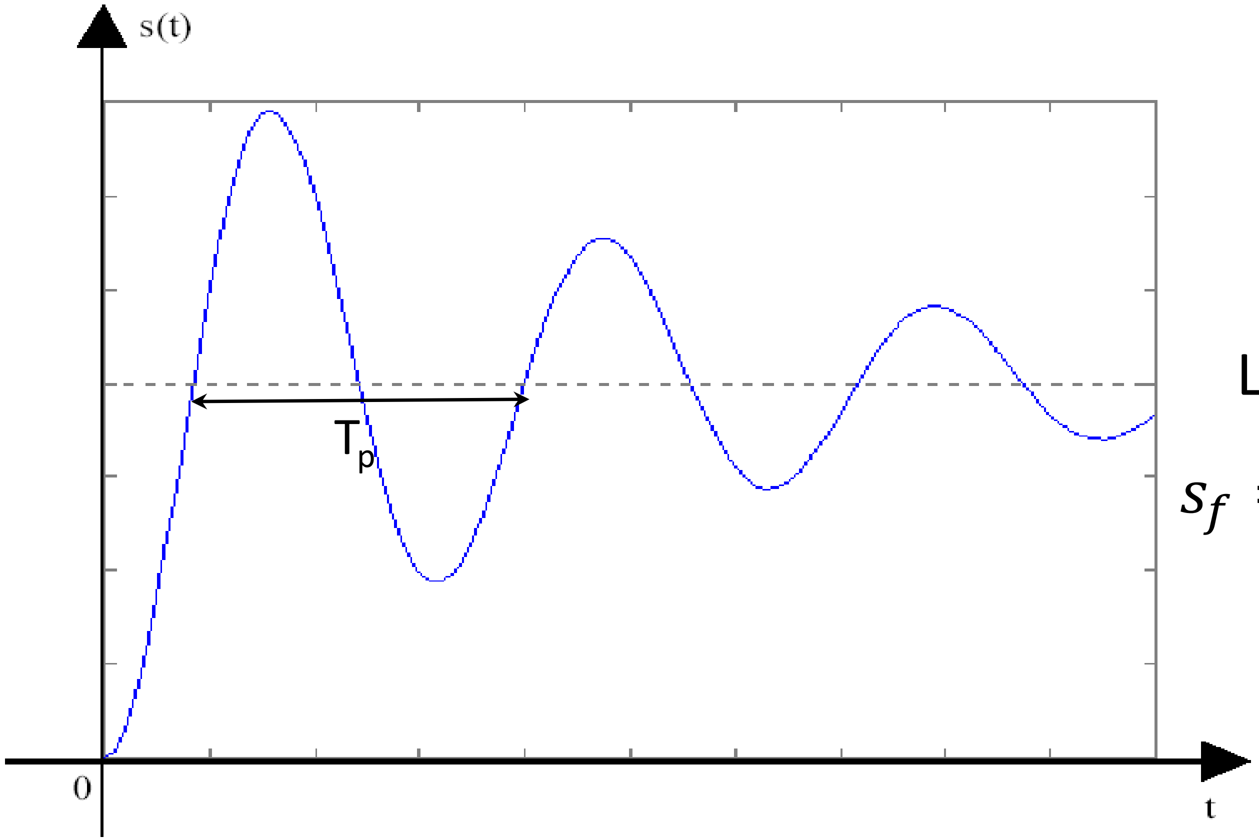
$$S(p) = G(p)\,E(p) = G(p)\,\frac{E_0}{p} \xrightarrow{\text{TL-1}} s(t) = K.E_0.\left(1 - \frac{1}{\sqrt{1-\xi^2}}e^{-\xi\omega_0.t}.\left(sin\left(\omega_0.\sqrt{1-\xi^2}.t+\varphi\right)\right)\right)$$

•Système du 2ème ordre – Réponse indicielle (entrée : échelon amplitude E0)

Pour amortissement ξ < 1 : Nous obtenons une r**éponse oscillatoire amortie**

La réponse indicielle est la superposition d'un régime forcé (*K*) et d'un régime transitoire oscillatoire amortie. La pulsation des oscillations :

$$\omega_p = \omega_0 \sqrt{1-\xi^2}$$

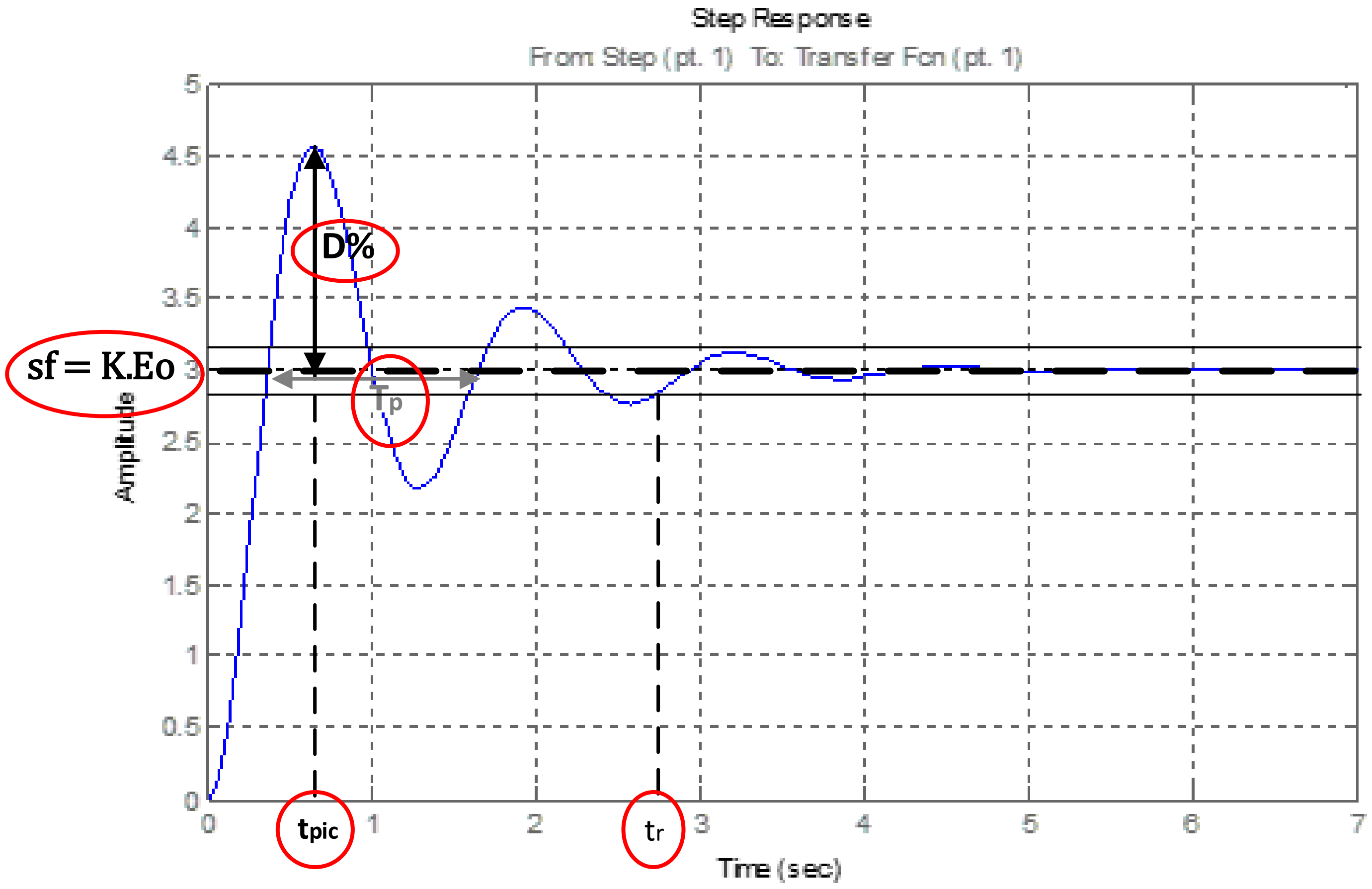


La valeur finale :

$$s_f = \lim_{t\to\infty} s(t) = K.E_0$$

•Système du 2ème ordre – Réponse indicielle (entrée : échelon amplitude E0)

Pour amortissement ξ < 1 : Nous obtenons une **réponse oscillatoire amortie**



$$t_r = \frac{3}{\omega_0 \xi}$$ temps de réponse à 5 %

$$t_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$ temps de pic

$$D_{\%} = 100 e^{-\pi\xi / \sqrt{1-\xi^2}}$$ La valeur du dépassement

$$T_p = \frac{2\pi}{\omega_0 \sqrt{1-\xi^2}}$$ Pseudo-période

- **Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle**

Nous avons par définition la fonction de transfert harmonique :

$$G(j\omega) = \frac{K}{\left(\frac{j\omega}{\omega_0}\right)^2 + 2\frac{\xi}{\omega_0}j\omega + 1} = \frac{K}{1 - \frac{\omega^2}{\omega_0^2} + 2j\xi\frac{\omega}{\omega_0}}$$

Nous pouvons en déduire la valeur du gain et de la phase :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{\left(1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}\right)^2 + \frac{4\xi^2 . \omega^2}{{\omega_0}^2}}}$$

$$\varphi(\omega) = -arctan\left(\frac{\frac{2\xi . \omega}{\omega_0}}{1 - \frac{\omega^2}{{\omega_0}^2}}\right)$$

• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

➢ **Lieu de BODE**

Cas où ξ est supérieur à 1:

Alors, le dénominateur de $G(j\,\omega)$ possède deux racines réelles négatives :

$$\omega_{1,2} = -\omega_0\xi \pm \omega_0.\sqrt{\xi^2 - 1}$$

$$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\left(j\omega + \omega_0\left[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right]\right)\left(j\omega + \omega_0\left[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right]\right)}$$

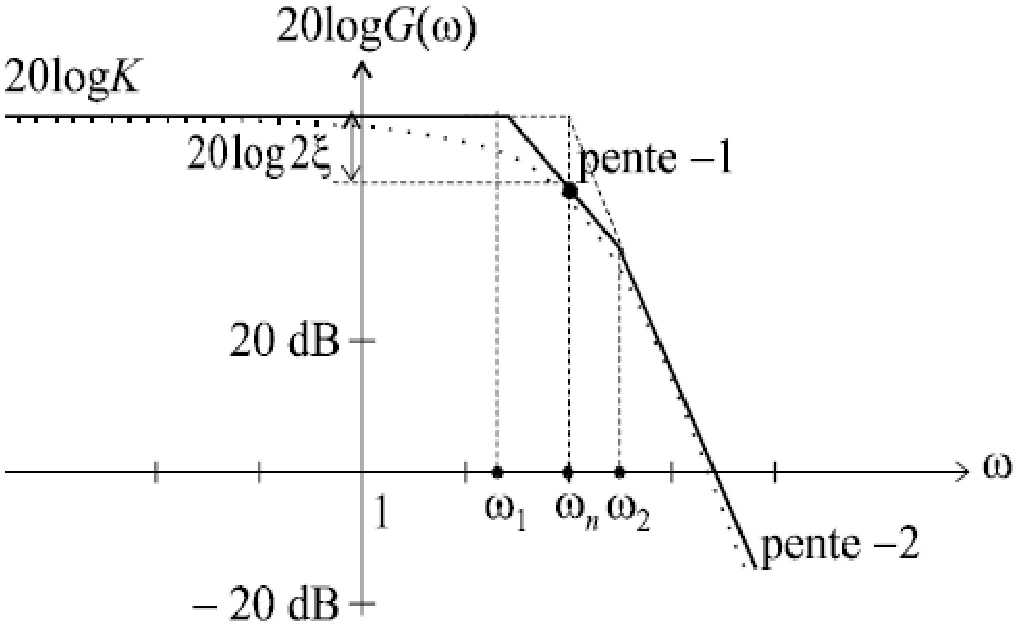
$$\varphi(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{\omega_0\left[\xi - \sqrt{\xi^2 - 1}\right]} - \arctan\frac{\omega}{\omega_0\left[\xi + \sqrt{\xi^2 - 1}\right]}$$

Lorsque $\omega \to 0$; donc $G(\omega) \approx K$. *Alors* $G(\omega)_{db}$ =20log(K)

$\boldsymbol{\varphi(\omega)}$=0

• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

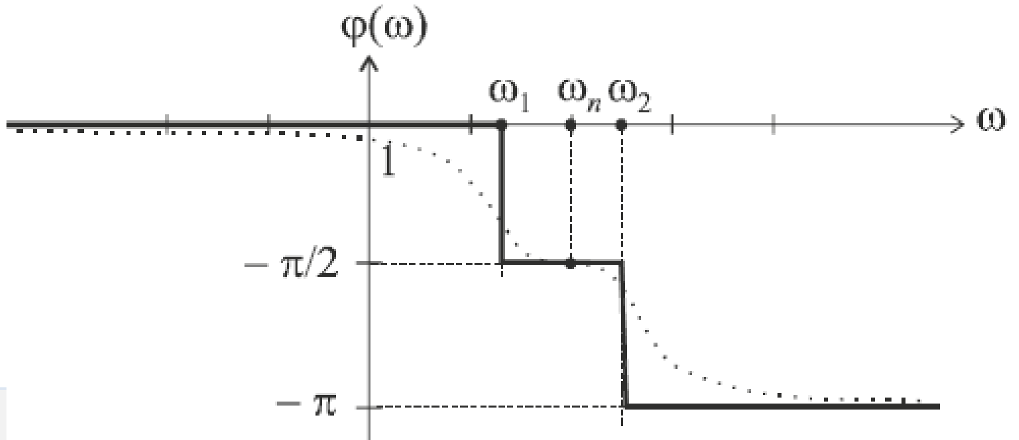
➢ **Lieu de BODE**



Lorsque ω = ω_0

$$G(j\omega) = \frac{K}{2\xi j} \Rightarrow 20\log G(\omega) = 20\log K - 20\log 2\xi$$

$$\varphi(\omega_0) = -\pi/2$$



De même, lorsque ω → +∞, on a :

$$G(p) \approx \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_n^2 K}{p^2}$$

$$G_{dB} \approx 20\log K + 40\log\omega_0 - 40\log\omega$$

$$\varphi(\omega) = -\pi$$

- **Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle**
  - **Lieu de BODE**

Cas où ξ =1

Lorsque $\omega \to 0$; donc $G(\omega) \approx K$. *Alors* $G(\omega)_{db}$ =20log(K)

$$\varphi(\omega)=0$$

Lorsque $\omega = \omega_0$

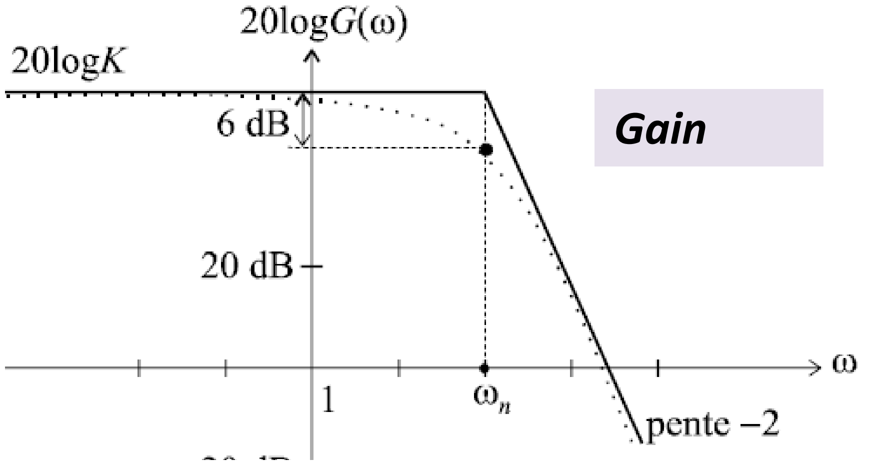
$$G_{dB}(\omega_n) = 20\log K - 20\log 2 = 20\log K - 6\text{ dB}$$

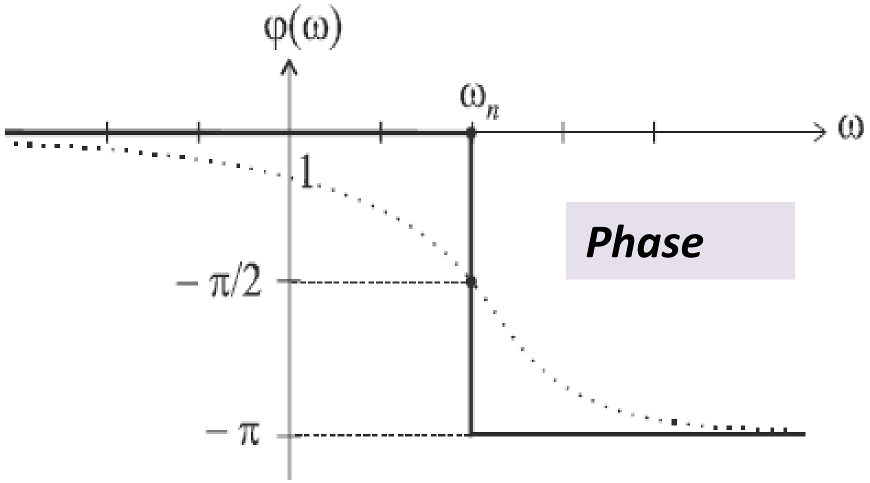
$$\varphi(\omega_n) = -\pi/2$$

De même, lorsque $\omega \to +\infty$, on a :

$$G(p) \approx \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_0^2}} = \frac{\omega_n^2 K}{p^2}$$

$$G_{dB} \approx 20\log K + 40\log\omega_0 - 40\log\omega \qquad \varphi(\omega) = -\pi$$





• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

➢ Lieu de BODE

Cas où ξ est inférieur à 1:

La fonction de transfert possède dans ce cas deux pôles complexes conjugués :

$$p_1 = -\omega_n \left[\xi - j\sqrt{(1-\xi^2)}\right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n \left[\xi + j\sqrt{(1-\xi^2)}\right]$$

On a toujours : $$G(p) = \frac{K\omega_n^2}{(p-p_1)(p-p_2)}$$

Pour le moment, les deux directions asymptotiques sont respectivement pour $\boldsymbol{\omega} \to 0$ et pour $\boldsymbol{\omega} \to +\infty$:

Nous savons également que : $$G_{\mathrm{dB}}(\omega_n) = 20\log K - 20\log 2\xi$$

Cette expression laisse supposer que le gain, à la pulsation ω_n, peut être supérieur à **20logK**, puisque **20log(2ξ)** peut être négatif. Nous pouvons alors facilement imaginer le phénomène qui est susceptible de se produire : lorsque ω varie de 0 à $+\infty$,le gain peut croître de **20logK** à une valeur maximale, puis décroître en rejoignant son asymptote de pente d'ordre −2.

• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

➢ Lieu de BODE

Cas où ξ est inférieur à 1:

Nous allons donc étudier ce phénomène, appelé phénomène de résonance, en déterminant la condition d'apparition de ce phénomène, la pulsation ω_r pour laquelle le gain est maximal, ainsi que la valeur G_{max} de ce gain maximum.

Soit : $$p_1 = -\omega_n\left[\xi - j\sqrt{(1-\xi^2)}\right] \quad \text{et} \quad p_2 = -\omega_n\left[\xi + j\sqrt{(1-\xi^2)}\right]$$

On a : $$G(j\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\left(j\omega + \omega_n\left[\xi - j\sqrt{1-\xi^2}\right]\right)\left(j\omega + \omega_n\left[\xi + j\sqrt{1-\xi^2}\right]\right)}$$

d'où : $$G(\omega) = \frac{K\omega_n^2}{\sqrt{\left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega - \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]\left[\omega_n^2\xi^2 + \left(\omega + \omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]}}$$

- **Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle**

➢ **Lieu de BODE**

Cas où ξ est inférieur à 1:

Cette expression est maximale lorsque son dénominateur est minimal, autrement dit lorsque :

$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\omega}\left(\left[\omega_n^2\xi^2+\left(\omega-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]\left[\omega_n^2\xi^2+\left(\omega+\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]\right)=0$$

Soit:

$$2\left(\omega+\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)\left[\omega_n^2\xi^2+\left(\omega-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]$$
$$+2\left(\omega-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)\left[\omega_n^2\xi^2+\left(\omega+\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]=0$$

$$\omega\left[2\omega_n^2\xi^2+\left(\omega-\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2+\left(\omega+\omega_n\sqrt{1-\xi^2}\right)^2-4\omega_n^2\left(1-\xi^2\right)\right]=0$$

$$\omega_n^2\xi^2+\omega^2+\omega_n^2\left(1-\xi^2\right)-2\omega_n^2\left(1-\xi^2\right)=0$$

$$\omega^2=\omega_n^2\left(1-2\xi^2\right)$$

• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

➢ **Lieu de BODE**

Cas où ξ est inférieur à 1:

Cette égalité n'est possible que si $1 - 2\xi^2 > 0$, autrement dit lorsque :

$$\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$$

$G(\omega)$ est donc maximal pour :

$$\omega = \omega_r = \omega_n\sqrt{1 - 2\xi^2}$$

Remplaçons ω par ω_r dans l'expression de $G(\omega)$:

$$G_{\max} = \frac{K}{\sqrt{\left[\xi^2 + \left(\sqrt{1-2\xi^2} - \sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]\left[\xi^2 + \left(\sqrt{1-2\xi^2} + \sqrt{1-\xi^2}\right)^2\right]}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{\left[1 - \xi^2 - \sqrt{(1-2\xi^2)(1-\xi^2)}\right]\left[1 - \xi^2 + \sqrt{(1-2\xi^2)(1-\xi^2)}\right]}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{(1-\xi^2)^2 - (1-2\xi^2)(1-\xi^2)}}$$

$$G_{\max} = \frac{K}{2\sqrt{(1-\xi^2)(1-\xi^2-1+2\xi^2)}} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

En résumée, si $\xi < \frac{\sqrt{2}}{2}$, il existe une pulsation de résonance $\omega_r = \omega_n\sqrt{1-2\xi^2}$ pour la quelle le gain présente un maximum $G_{max} = \frac{K}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$

- **Système du $2^{ème}$ ordre – Réponse fréquentielle**

➢ **Lieu de BODE**

Cas où ξ est inférieur à 1:

On définit alors le coefficient ou facteur de résonance *Q* (ou de surtension) par le rapport du gain maximal sur le gain à l'origine :

$$Q = \frac{G_{\max}}{K} = \frac{1}{2\xi\sqrt{1-\xi^2}}$$

Plus la valeur du coefficient d'amortissement ξ est proche de 0, plus la pulsation de résonance se rapproche de ω_n et plus le gain maximal est élevé:

$$\xi = 0$$

$$\omega_r = \omega_n \text{ et } G_{\max} \to +\infty$$

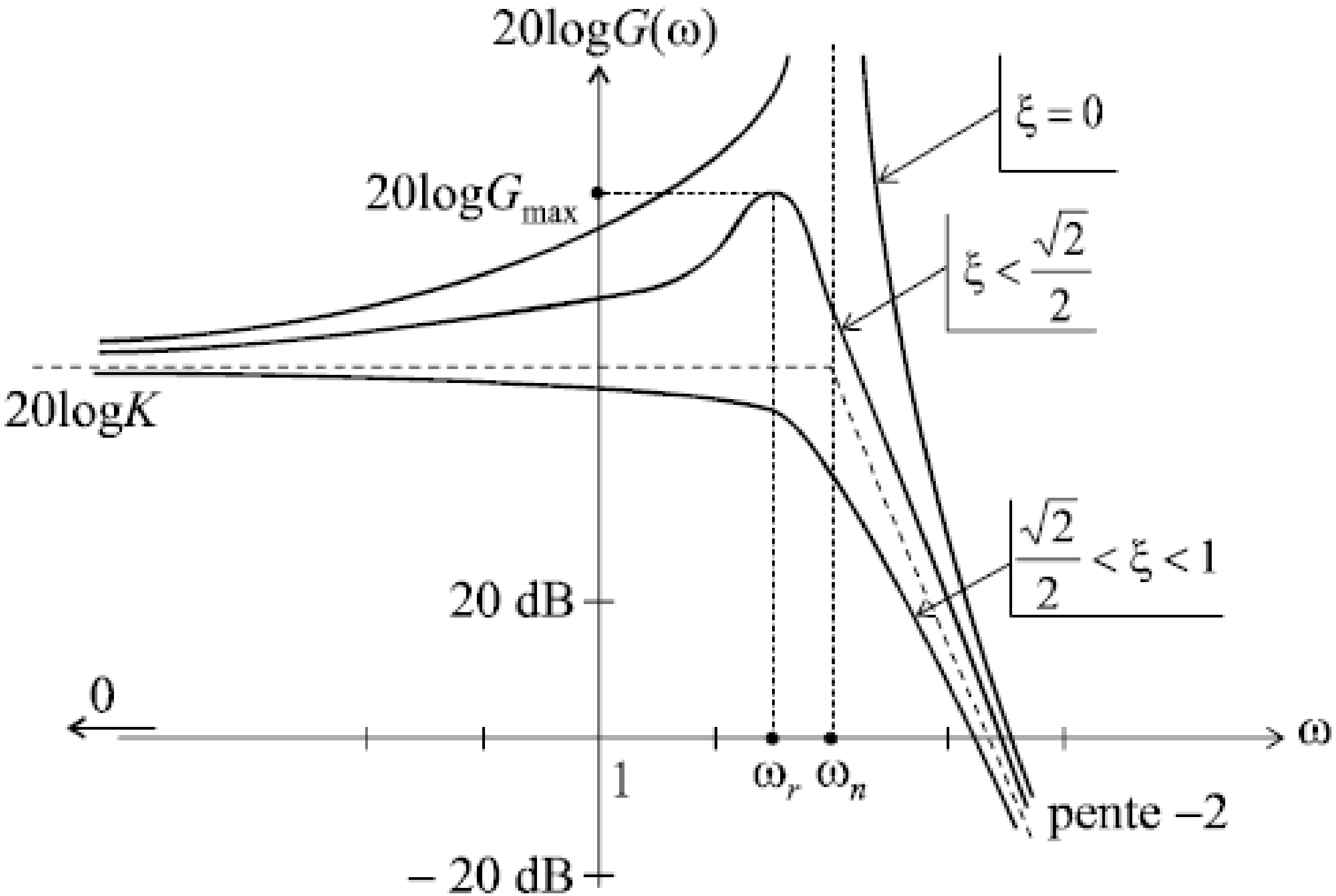
Si $\frac{\sqrt{2}}{2} < \xi < 1$ le phénomène de résonance n'existe pas; la courbe de gain est strictement décroissante et reste constamment sous ses asymptotes.

• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

➢ Lieu de BODE

Cas où ξ est inférieur à 1:

Diagramme de Bode résume les différentes situations ainsi mises en vidence.



• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

En développant le gain, nous obtenons deux cas possibles :

- $2.\xi^2 - 1 \geq 0$ d'où $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $2.\xi^2 - 1 < 0$ d'où $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$:

ω	0		$+\infty$
$G(\omega)$	K	$\searrow$	0
$\varphi(\omega)$	0	$\searrow$	$-\pi$

• Système du 2ème ordre – Réponse fréquentielle

En développant le gain, nous obtenons deux cas possibles :

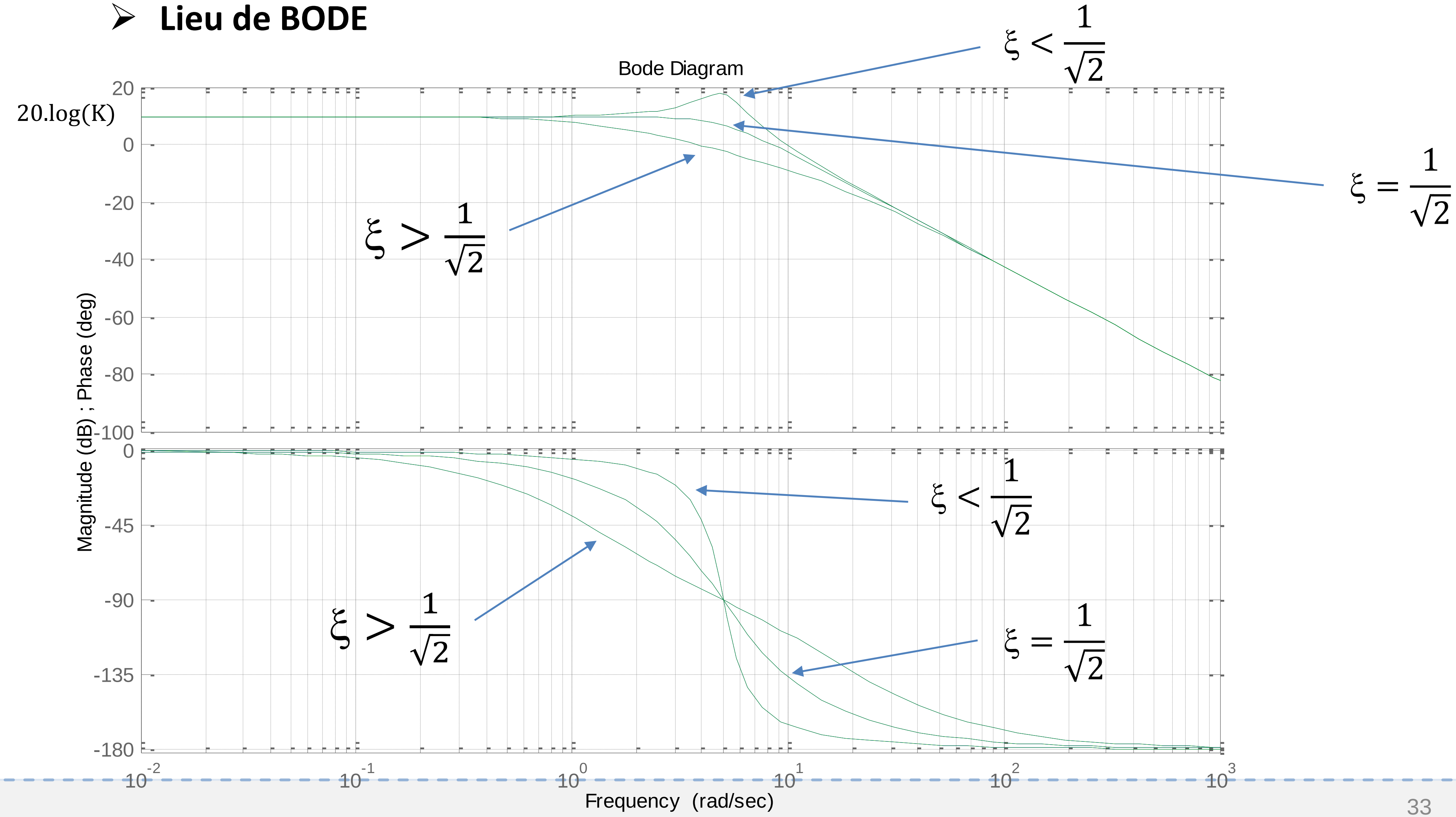
- $2.\xi^2 - 1 \geq 0$ d'où $\xi \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$
- $2.\xi^2 - 1 < 0$ d'où $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$

Si $\xi < \frac{1}{\sqrt{2}}$:

ω	0		$\omega_0.\sqrt{1-2.\xi^2}$		$+\infty$
$G(\omega)$	K	$\nearrow$	$\frac{K}{2.\xi.\sqrt{1-\xi^2}}$	$\searrow$	0
$\varphi(\omega)$	0		$\searrow$		$-\pi$

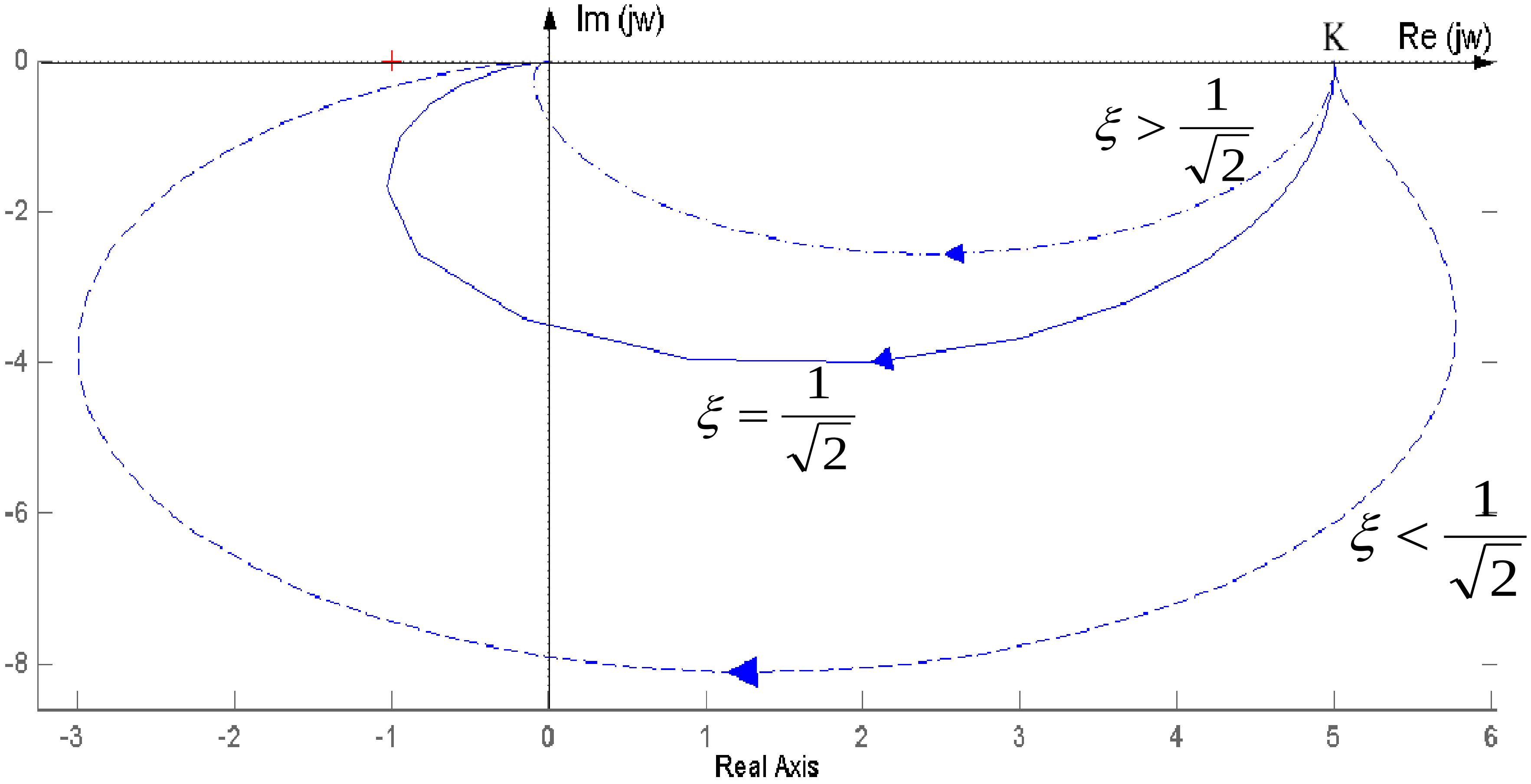
- **Système du 2ème ordre –** Réponse fréquentielle

  - **Lieu de BODE**

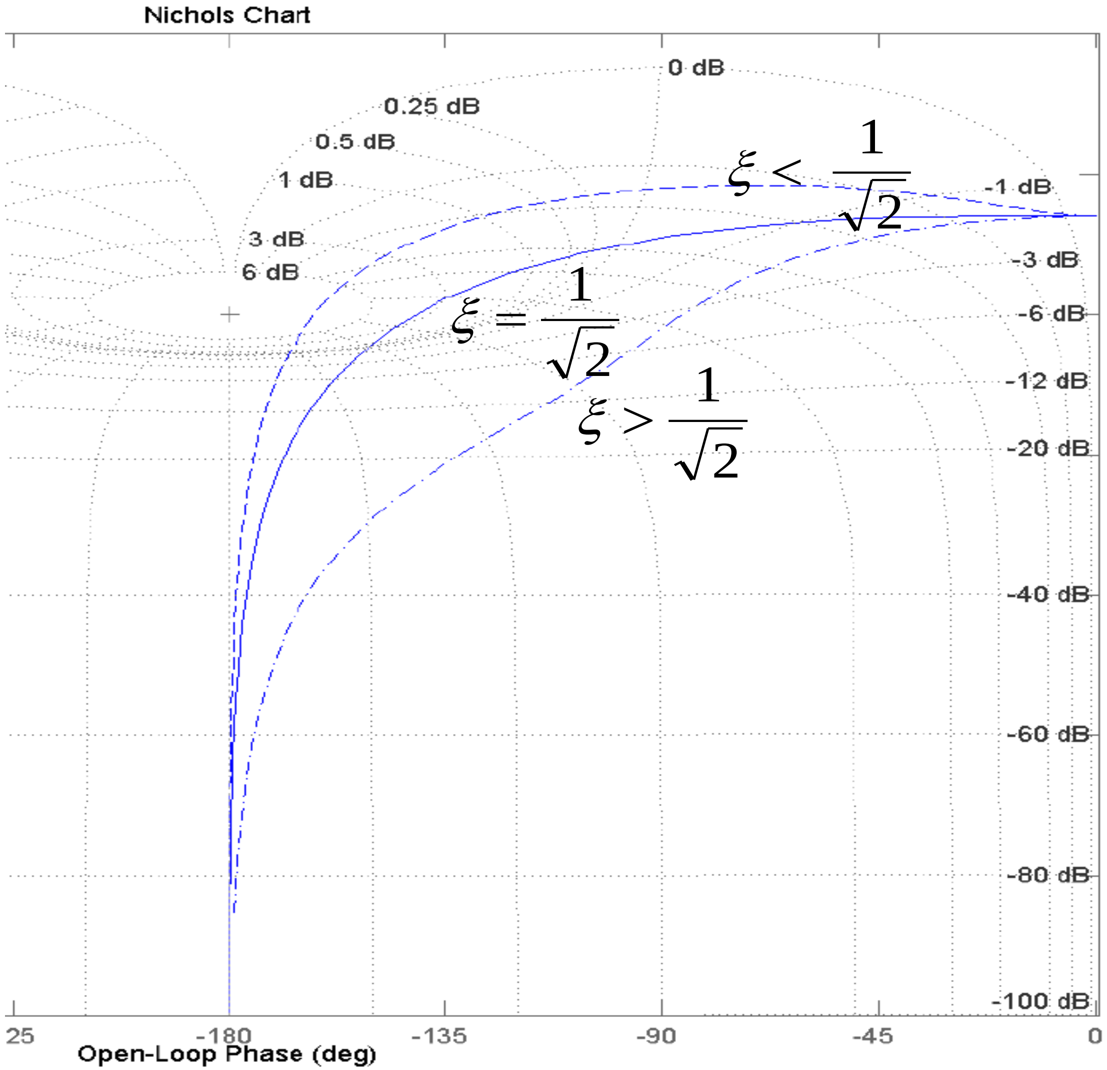


- **Système du 2ème ordre –** Réponse fréquentielle

  - **Lieu de Nyquist**



➢Lieu de Black – Systèmes du 2ème ordre



CHAPITRE 6

Stabilité des systèmes asservis

06

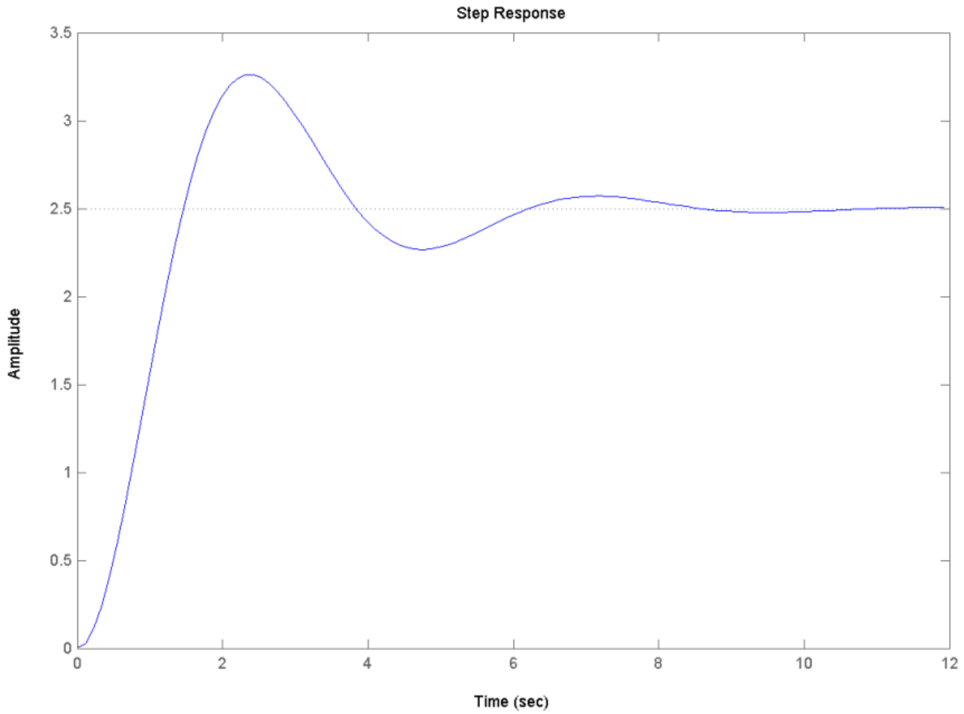
STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

- La stabilité est la première propriété exigée pour les systèmes asservis (boucle fermée) !

- Un système instable est inutilisable…

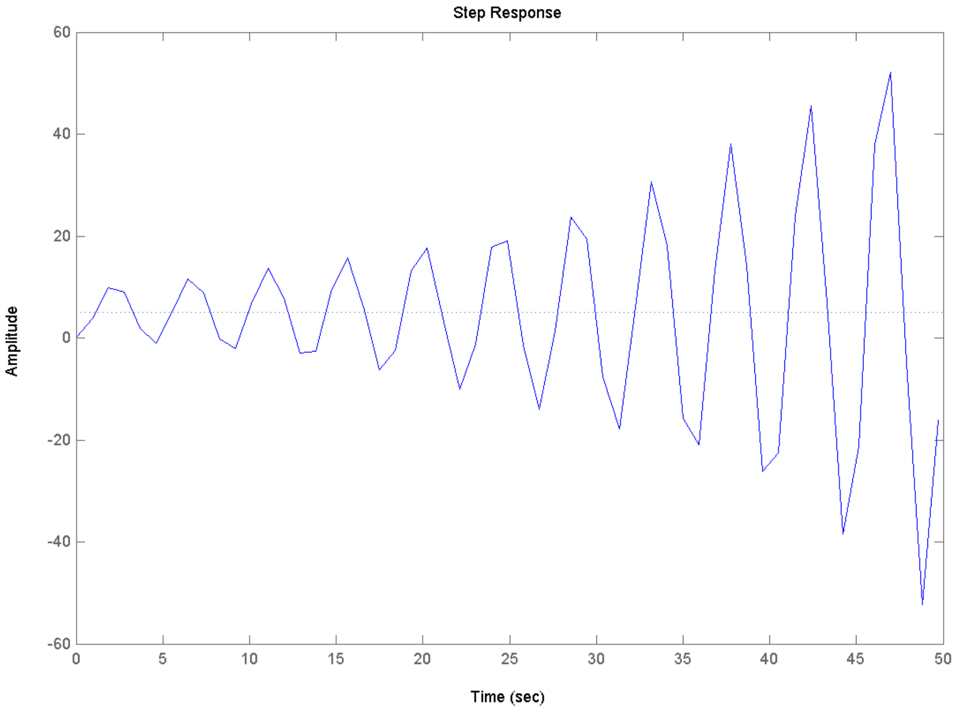
- Définition 1 : un système asservi est stable si on lui applique une entrée limitée, sa sortie est limitée.
- Définition 2 : un système asservi est stable s'il revient à un état permanent après une perturbation.
- Définition 3 : un système asservi est stable si sa réponse impulsionnelle tend vers une constante pour t = infini.

STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS



Système stable

Système instable



- **Conditions générales de stabilité :**

METHODE DES PÔLES

LA STABILITE D'UN SYSTEME DEPEND DE LA NATURE DES POLES DE LA FONCTION DE TRANSFERT EN **BOUCLE FERMEE**

Un système linéaire G(p) est de la forme :

$$G(p) = \frac{\sum_{j=0}^{m} b_j . p^j}{\sum_{i=0}^{n} a_i . p^i}$$

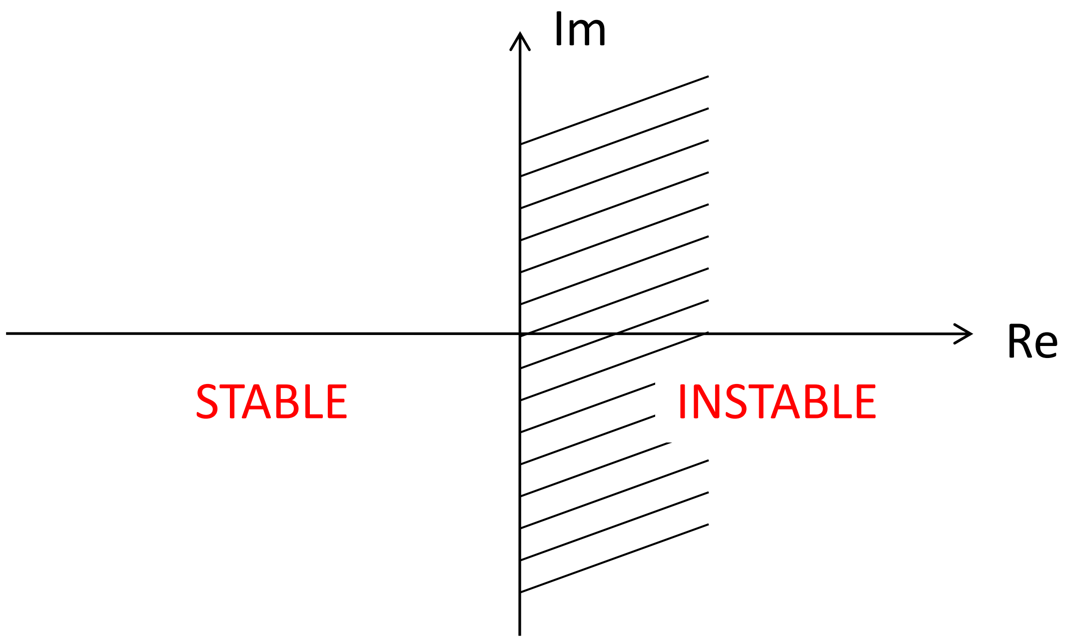
Nous calculons la fonction de transfert du système en boucle fermée que nous mettons sous la forme :

$$\frac{N(p)}{D(p)} = \sum_{i=1}^{n} \frac{A_i}{(p - p_i)}$$

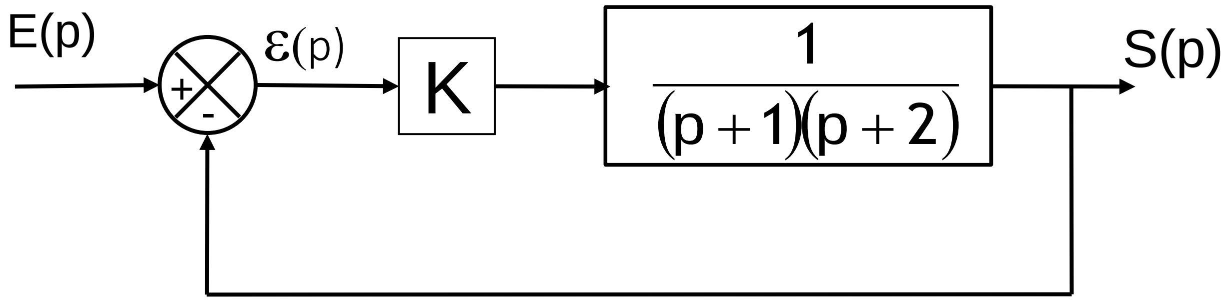
Pôles de G(p)

- **Conditions générales de stabilité :**

Un système en **boucle fermée** de fonction de transfert de la forme $\frac{N(p)}{D(p)}$ est stable si tous les pôles de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative



- *<u>Exercice C-11 </u>: Soit le système suivant (K>0)*



Etudier la stabilité de ce système en fonction de K par la méthode des pôles.

- Critère de ROUTH-HURWITZ

Il n’est pas toujours facile de déterminer explicitement ces racines, surtout lorsque l’ordre est élevé.

Le critère de Routh permet de connaître les conditions de la stabilité (ou non) d’un système sans connaître les valeurs des pôles.

- **Énoncé du critère :** Pour l'énoncé de ce critère, la fonction $G(p) = \frac{N(p)}{D(p)}$ correspond à la fonction de transfert en <u>boucle fermée</u> de notre système.
  - D(p) est le dénominateur de la fonction de transfert en BF.

Nous avons : $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$

  - Les conditions **nécessaires** pour Routh sont :
    - Tous les a_i existent ($\neq 0$)
    - Tous les a_i sont de même signe

- Si les conditions nécessaires ne sont pas réunies le **système est instable**

- Si les conditions nécessaires sont réunies,

Nous pouvons alors écrire le tableau de Routh pour déterminer les conditions ***nécessaires et suffisantes à la stabilité du système.***

- Cette méthode comprend 3 étapes :

A partir de l'écriture de $D(p) = a_n p^n + a_{n-1} p^{n-1} + \ldots + a_1 p + a_0$,

Nous écrivons le tableau à deux lignes suivants :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

$$
\begin{array}{lllll}
a_n & a_{n-2} & a_{n-4} & a_{n-6} & \dots \\
a_{n-1} & a_{n-3} & a_{n-5} & a_{n-7} & \dots \\
A_1 & & & &
\end{array}
$$

$$A_1 = \frac{a_{n-1}.a_{n-2} - a_n.a_{n-3}}{a_{n-1}}$$

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
A_1	A_2			

$$A_2 = \frac{a_{n-1}.a_{n-4} - a_n.a_{n-5}}{a_{n-1}}$$

STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
A_1	A_2	A_3		

$$A_3 = \frac{a_{n-1}.a_{n-6} - a_n.a_{n-7}}{a_{n-1}}$$

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
A_1	A_2	A_3	…	
B_1				

$$B_1 = \frac{A_1.a_{n-3} - a_{n-1}.A_2}{A_1}$$

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
A_1	A_2	A_3	…	
B_1	B_2			

$$B_2 = \frac{A_1.a_{n-5} - a_{n-1}.A_3}{A_1}$$

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
A_1	A_2	A_3	…	
B_1	B_2			
C_1				

$$C_1 = \frac{B_1.A_2 - A_1.B_2}{B_1}$$

- A partir du tableau, nous déduisons le nouveau tableau de Routh de la manière suivante :

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
A_1	A_2	A_3	…	
B_1	B_2			
C_1				
0				

Jusqu'à l'obtention d'un 0 sur la première colonne!

STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

Nous examinons dans un dernier temps la première colonne qui va nous permettre de conclure sur la stabilité du système.

a_n	a_{n-2}	a_{n-4}	a_{n-6}	…
a_{n-1}	a_{n-3}	a_{n-5}	a_{n-7}	…
A_1	A_2	A_3	…	
B_1	B_2			
C_1				
0				

Les conditions nécessaires et suffisantes pour la stabilité du système sont données par l'analyse de la première colonne : le **système est stable** si et seulement si tous les éléments de la première colonne sont de même signe.

Le nombre de changement de signe dans cette première colonne donne le nombre de pôles à partie réelle positive.

- *Exercice C-12 :*

Soit G(p) la fonction de transfert d'un système en boucle fermée.

Etudiez la stabilité de ce système :

$$G(p) = \frac{p+1}{p^5 + 4.p^4 + 3.p^3 + 2.p^2 + p + 2}$$

STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

$$G(p) = \frac{p+1}{p^5 + 4.p^4 + 3.p^3 + 2.p^2 + p + 2}$$

1	3	1	0
4	2	2	0
$\frac{5}{2}$	$\frac{1}{2}$	0	0
$\frac{6}{5}$	2	0	
$\frac{11}{3}$	0		
2	0		
0			

Tous les éléments de la première colonne sont de même signe

=> Système stable

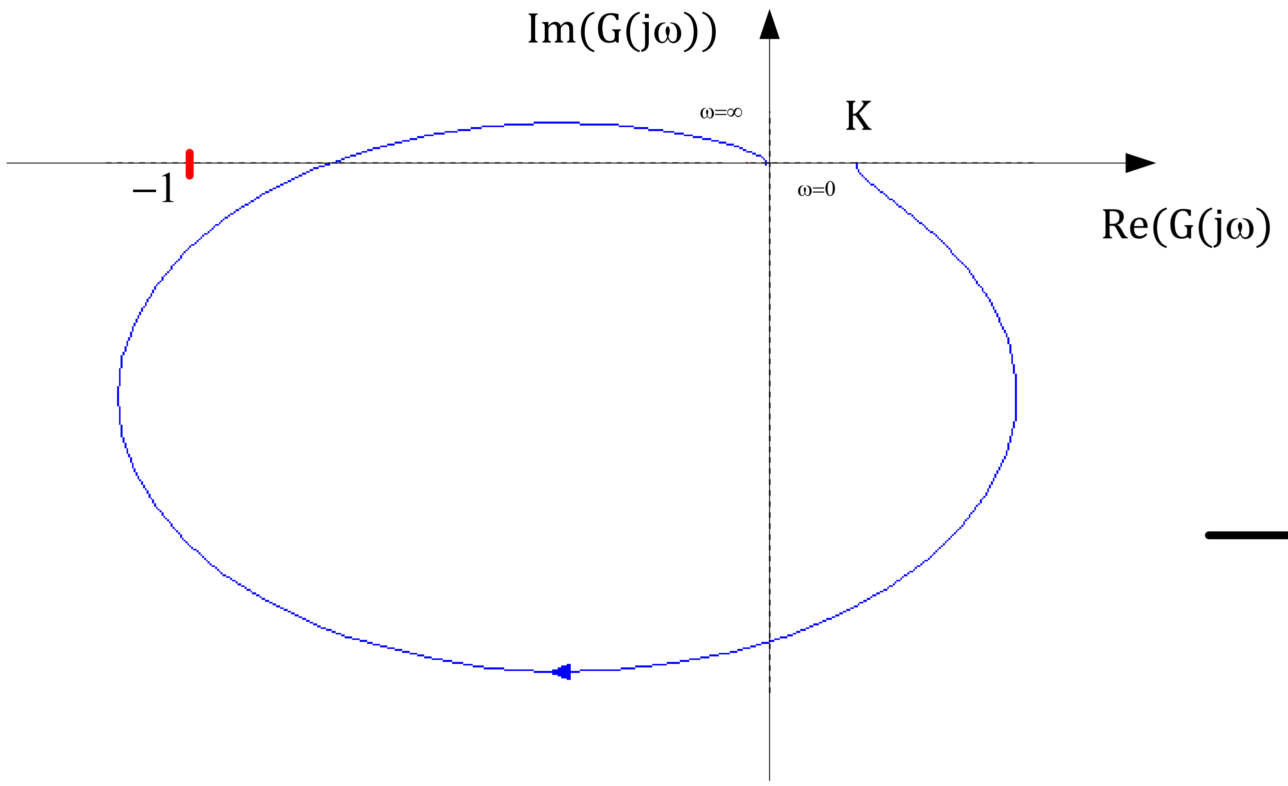
- Critère de Nyquist ou critère du revers

Ce critère est une méthode graphique pour l'analyse de la stabilité d'un système asservi. Il ne s'applique que pour les systèmes asservis (SA) à **retour unitaire**.

Le critère conclut à la stabilité du système en boucle fermée par examen du lieu de Nyquist en boucle ouverte.

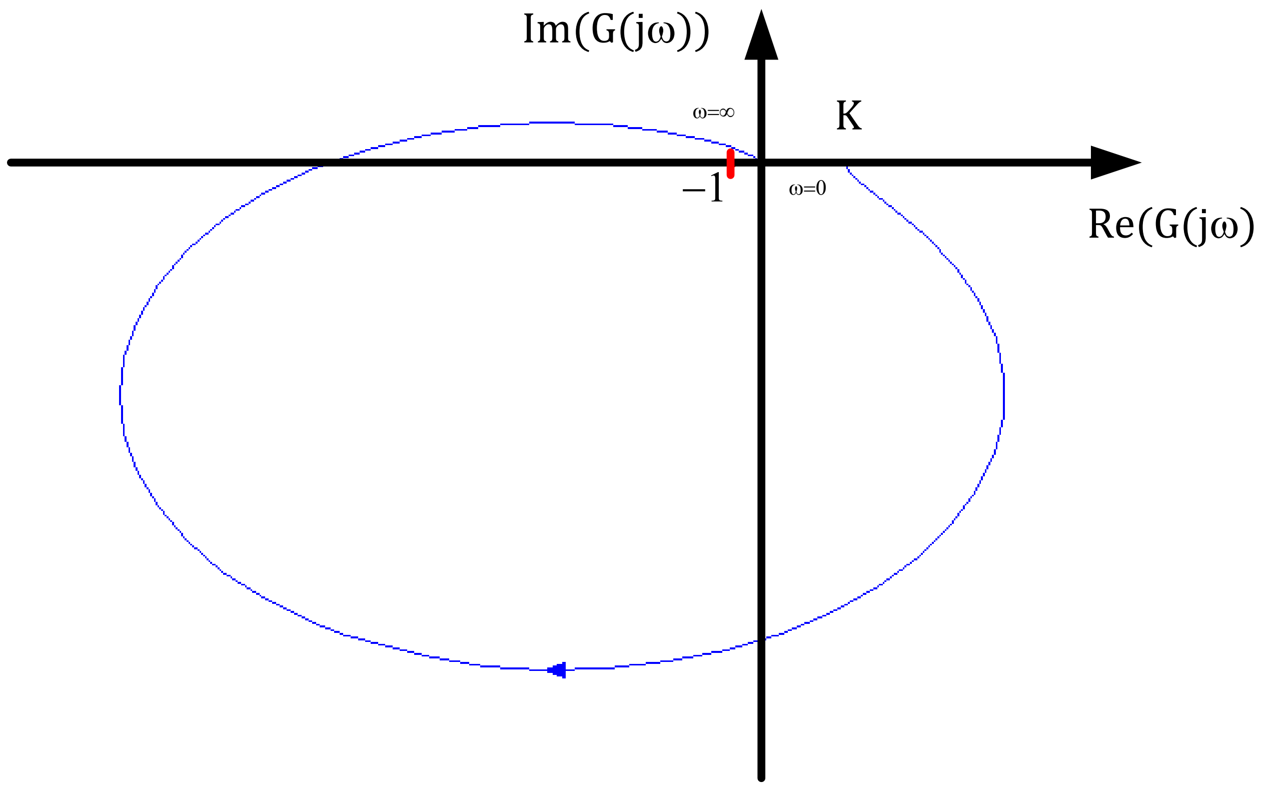
Un système asservi linéaire est stable si, en décrivant le lieu de transfert de Nyquist en BO dans le sens des fréquences croissantes, nous laissons le point dit « critique » (-1,0) à gauche.

En effet, il a été démontré que si nous laissons le point $(-1, 0)$ à gauche, les pôles de $G(p)$ sont à partie réelle négative, il y a donc stabilité.



Système stable

Système Instable



Etudier la stabilité par analyse fréquentielle (d'un système asservi à retour unitaire)

$\Updownarrow$

Etudier le module de la fonction de transfert en boucle ouverte à la pulsation ω_π

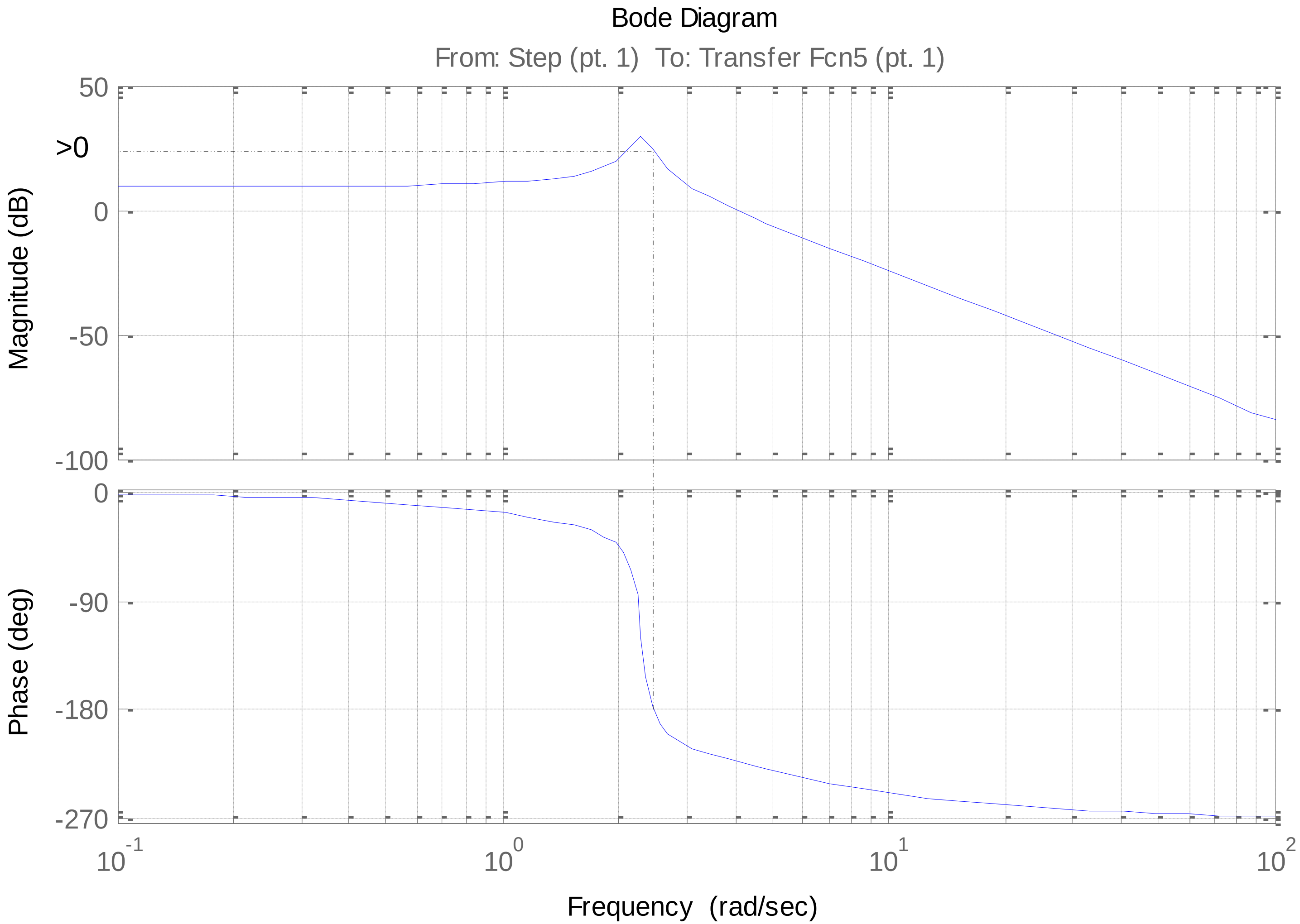
Système stable ssi $H_{BO}(\omega_\pi) \leq 1$

avec ω_π tel que $\varphi_{H_{BO}}(\omega_\pi) = -\pi$

Application au plan de Bode

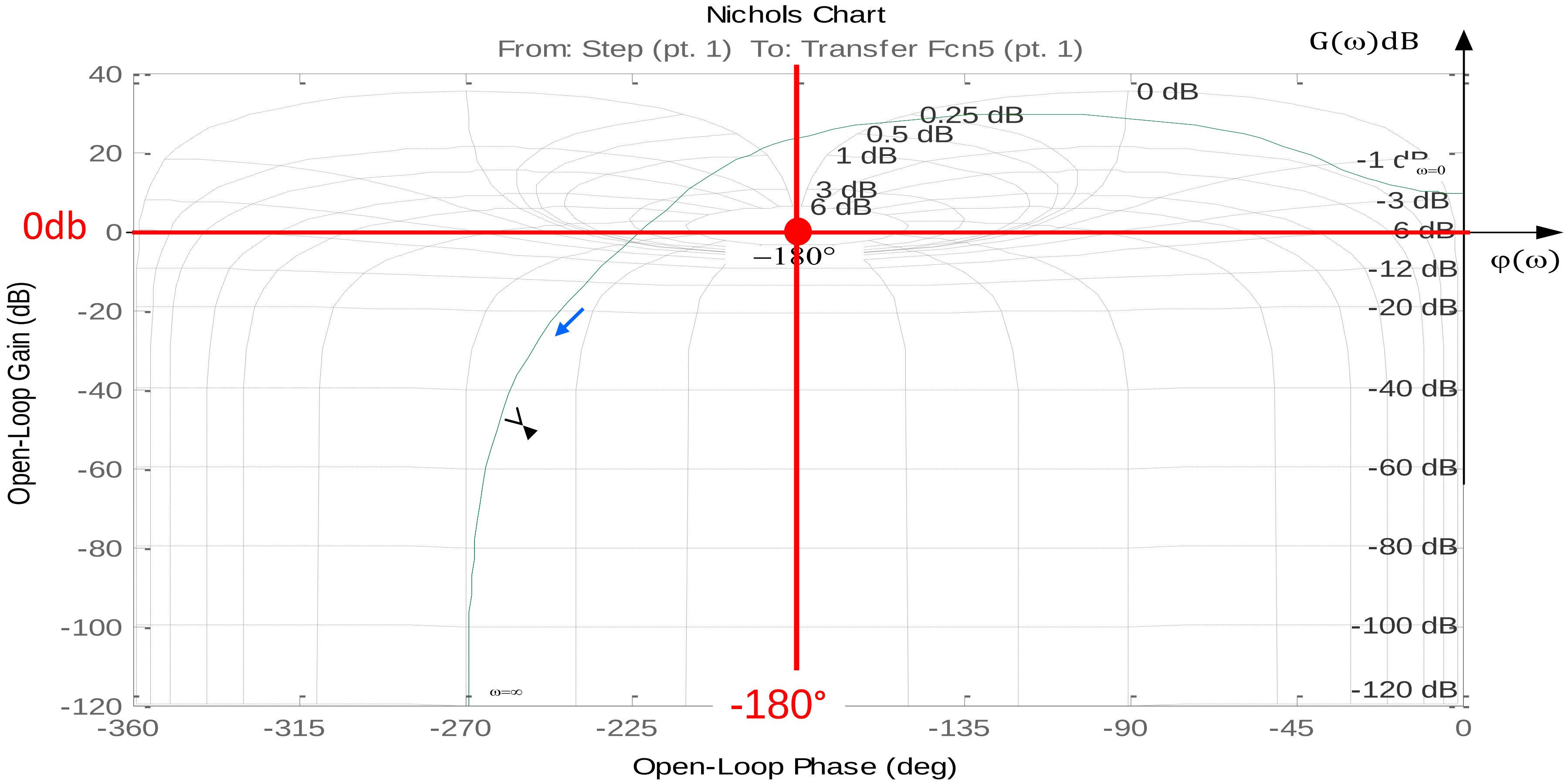
Si dans le plan de Nyquist le point critique est $(-1,0)$, il correspond à $G(\omega) = 1$ et $\varphi(\omega) = -180°$. Cela nous donne pour : $G(\omega)_{dB} = 20.log(1) = 0_{dB}$

Le système sera donc stable si, pour la pulsation ω_{π} (qui correspond à $\varphi(\omega) = -180°$), la courbe d'amplitude passe en dessous du niveau 0 dB.



STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

- <u>Application au diagramme de Black :</u> un système sera stable si, en décrivant le lieu de transfert de Black <u>en BO dans le sens des fréquences croissantes</u>, nous laissons le point critique (0 dB, –180°) à **GAUCHE**.



- Marges de stabilité

La stabilité mathématique n’est pas synonyme de bon comportement

Il faut que la stabilité soit «suffisante»

Un système sera d’autant plus stable que son lieu en boucle ouverte sera éloigné du point critique

Si des perturbations ou une déviance (vieillissement par exemple) du comportement apparaissent, une augmentation de la phase ou du gain peut entraîner le système en instabilité

- Marges de stabilité et robustesse :

➢ **LA MARGE DE GAIN** : c'est le gain minimum qu'il faut ajouter pour rendre le système instable, c'est à dire pour passer au point [-1,0]. La marge de gain nous montre de quelle valeur nous pouvons augmenter le gain du système asservi en boucle ouverte pour atteindre la limite de stabilité. La marge de gain est une garantie que la stabilité persistera malgré des variations imprévues du gain en B.O. Nous exprimerons la marge de gain en décibels.

$$Mg = -20 * \log(H_{BO}(\omega_\pi)) \text{ avec la pulsation } \omega_\pi \text{ telle que } \varphi_{H_{BO}}(\omega_\pi) = -\pi$$

➢ **LA MARGE DE PHASE :** c'est la phase minimale que nous pouvons ajouter pour passer au point critique. La marge de phase est une garantie que la stabilité persistera malgré l'existence de retards parasites dont nous n'avons pas tenu compte dans le réglage de l'asservissement. Nous exprimerons la marge de phase en degrés.

$$M\varphi = 180° + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1) \text{ avec la pulsation } \omega_1 \text{ telle que } H_{BO}(\omega_1) = 1$$

- Marges de stabilité et robustesse :

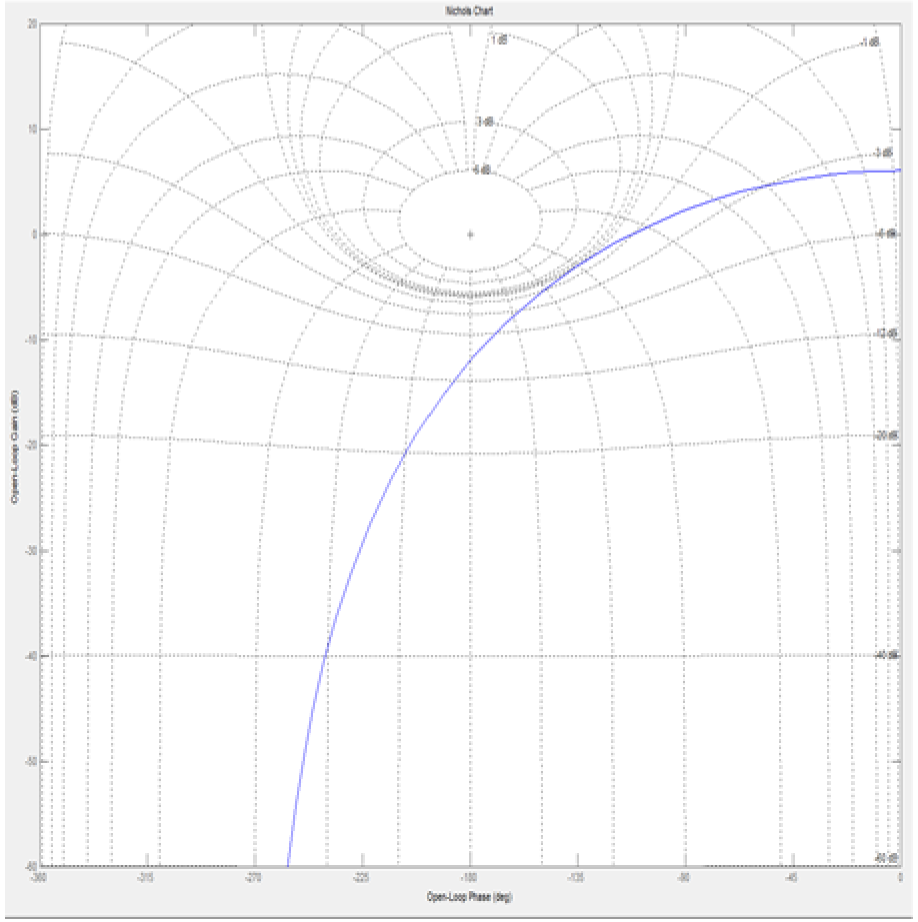
  - La robustesse d'un système bouclé est la capacité de celui-ci de rester stable (voir de conserver des performances suffisantes) en présence d'erreurs ou de perturbations.
  - Un système peut être stable d'un point de vue "critères de stabilité" mais pas suffisamment stable pour être robuste.

Système ROBUSTE

SI

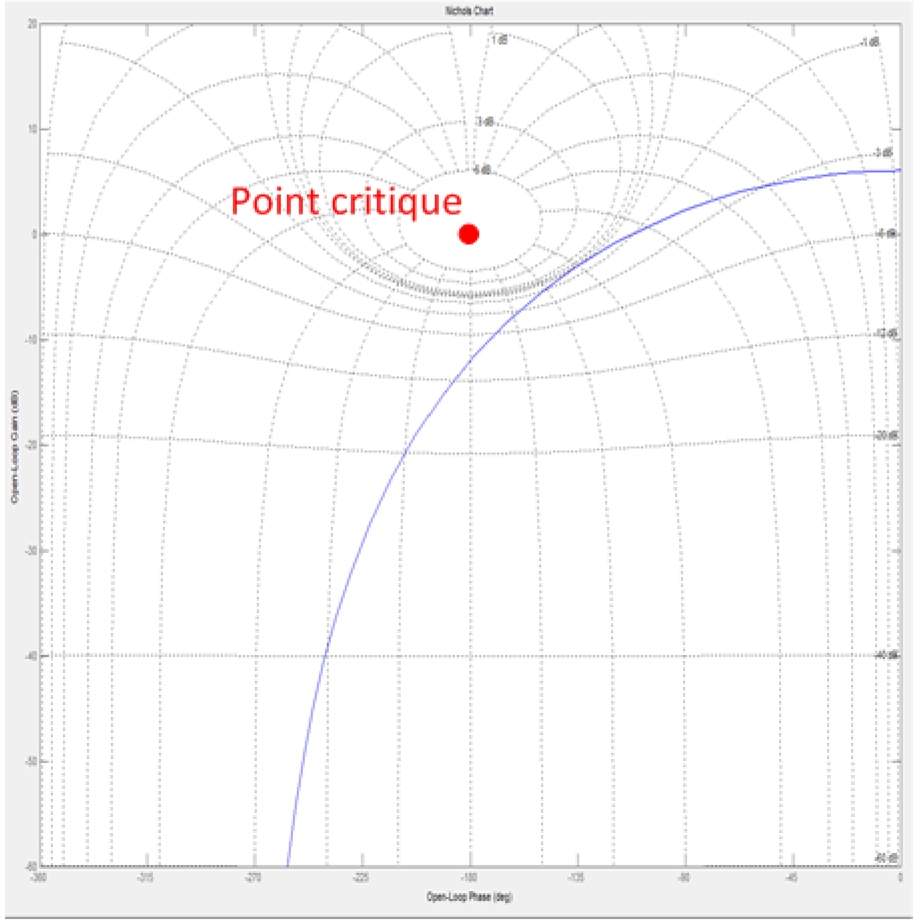
La marge de gain $\geq$ 10db
ET
La marge de phase $\geq$ 45°

- Mesures de ces marges : <u>**LIEU DE BLACK**</u>



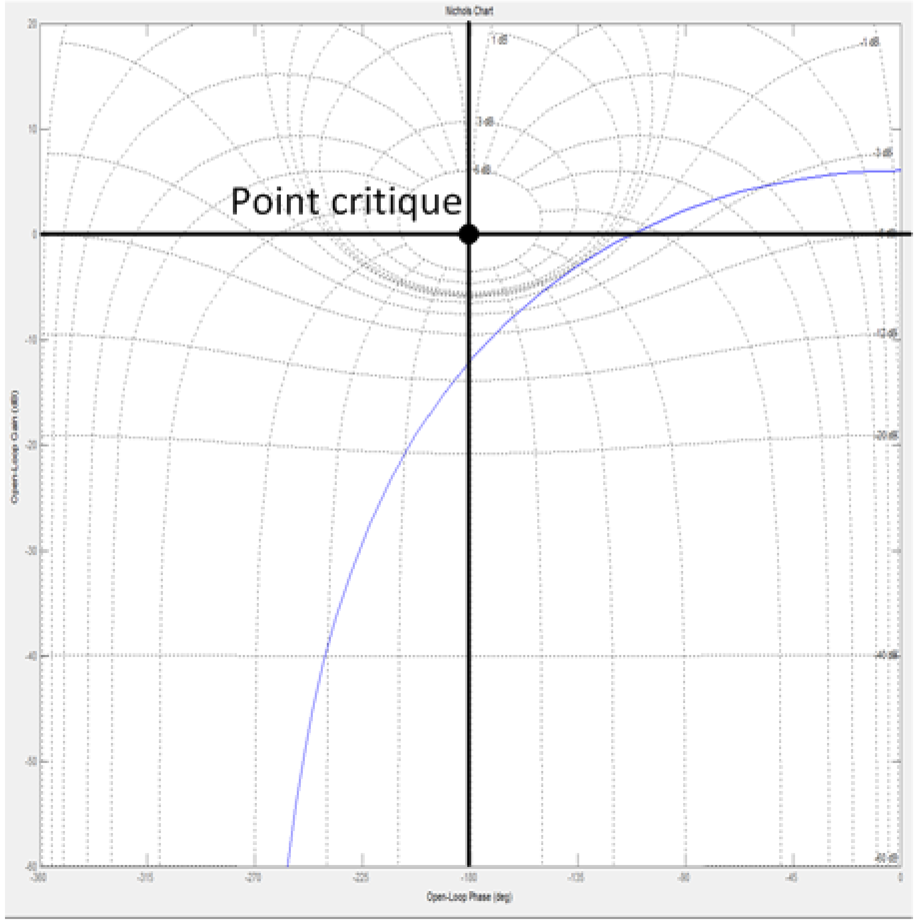
STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

- Mesures de ces marges : <u>**LIEU DE BLACK**</u>



STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

- Mesures de ces marges : <u>**LIEU DE BLACK**</u>

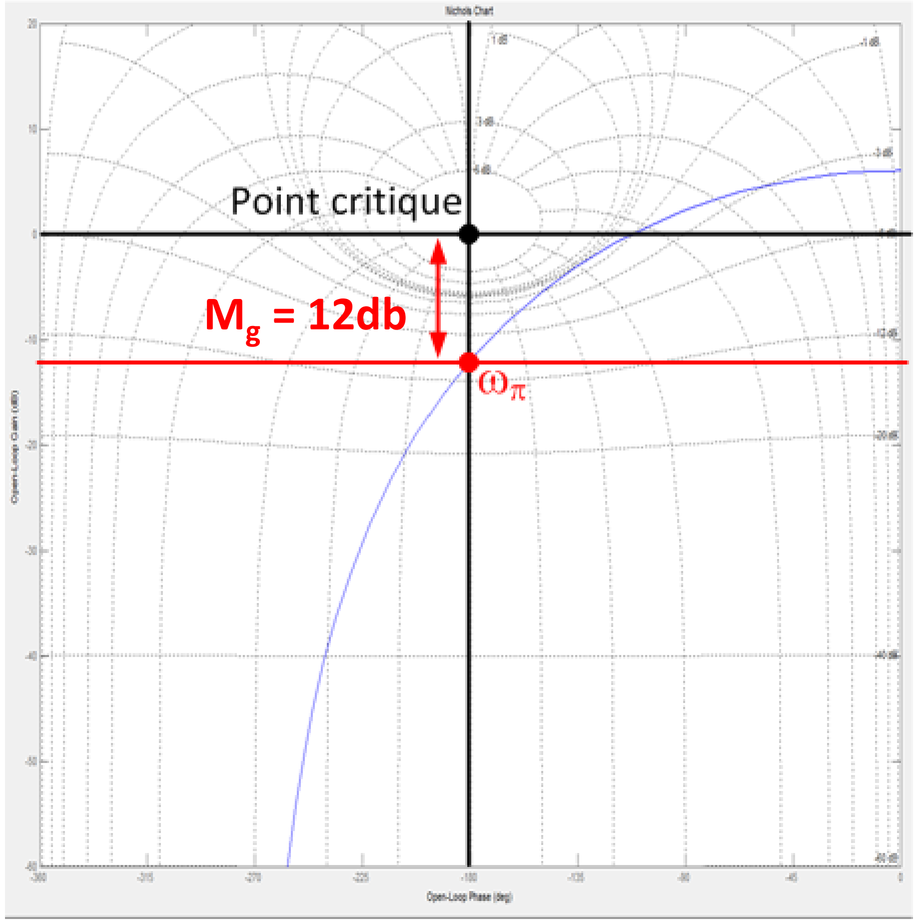


- Mesures de ces marges : **LIEU DE BLACK**

  - **Marge de gain :**
    Elle se calcule quand la phase de la fonction de transfert en BO vaut $-\pi$ (-180°)

    $M_g = -20 \log H_{bo}(\omega_\pi)$

    $\varphi(\omega_\pi) = -\pi \Rightarrow \omega_\pi$

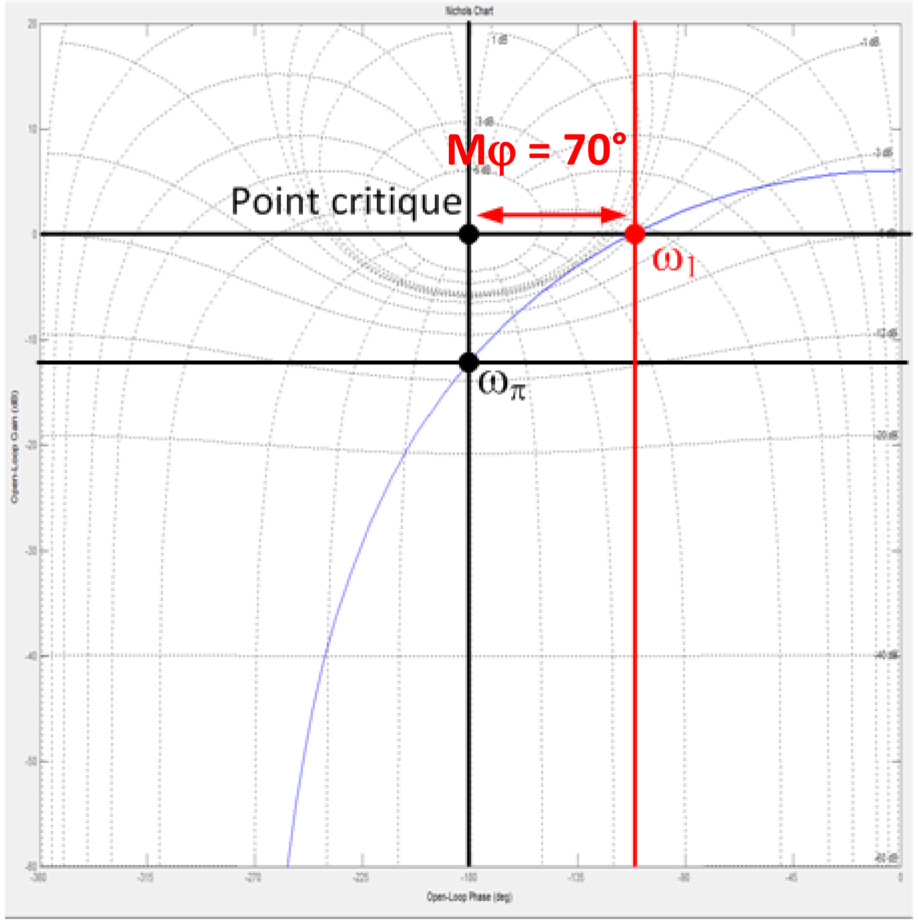


- Mesures de ces marges : **LIEU DE BLACK**

- **Marge de phase :**
  Elle se calcule quand le module de la fonction de transfert en BO vaut 1 ou 0db.

$$M_{\varphi} = 180° + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1)$$

$H_{bo}(\omega_1) = 1 \Rightarrow \omega_1$

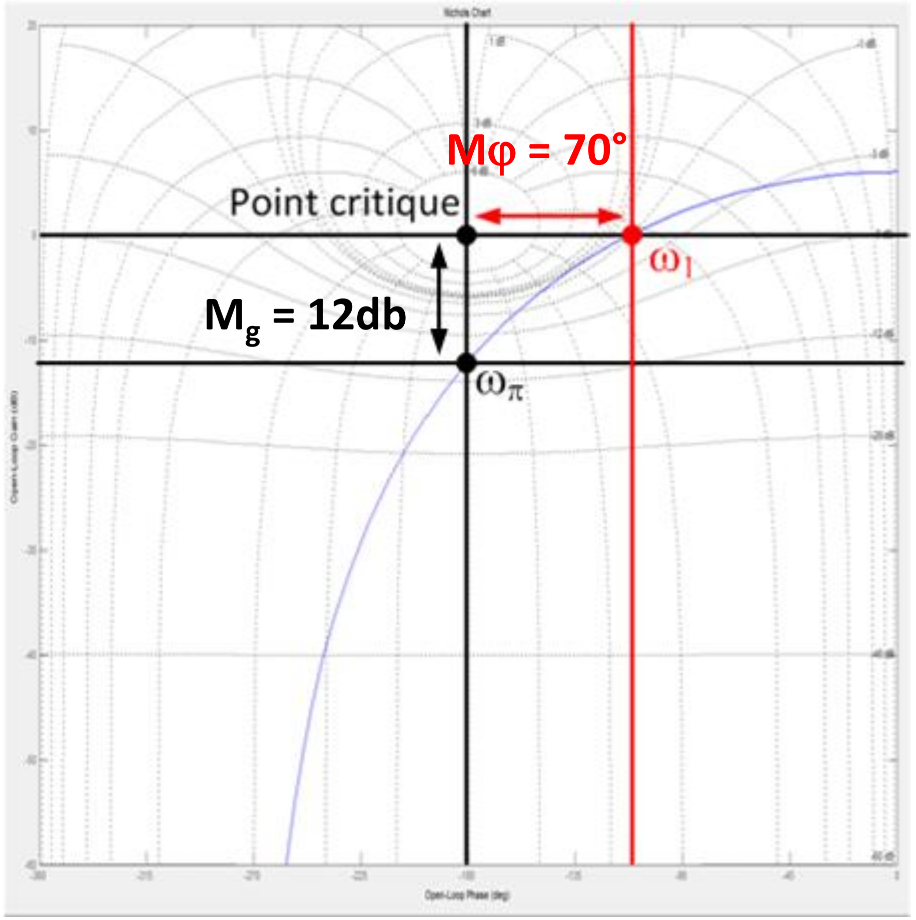


STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

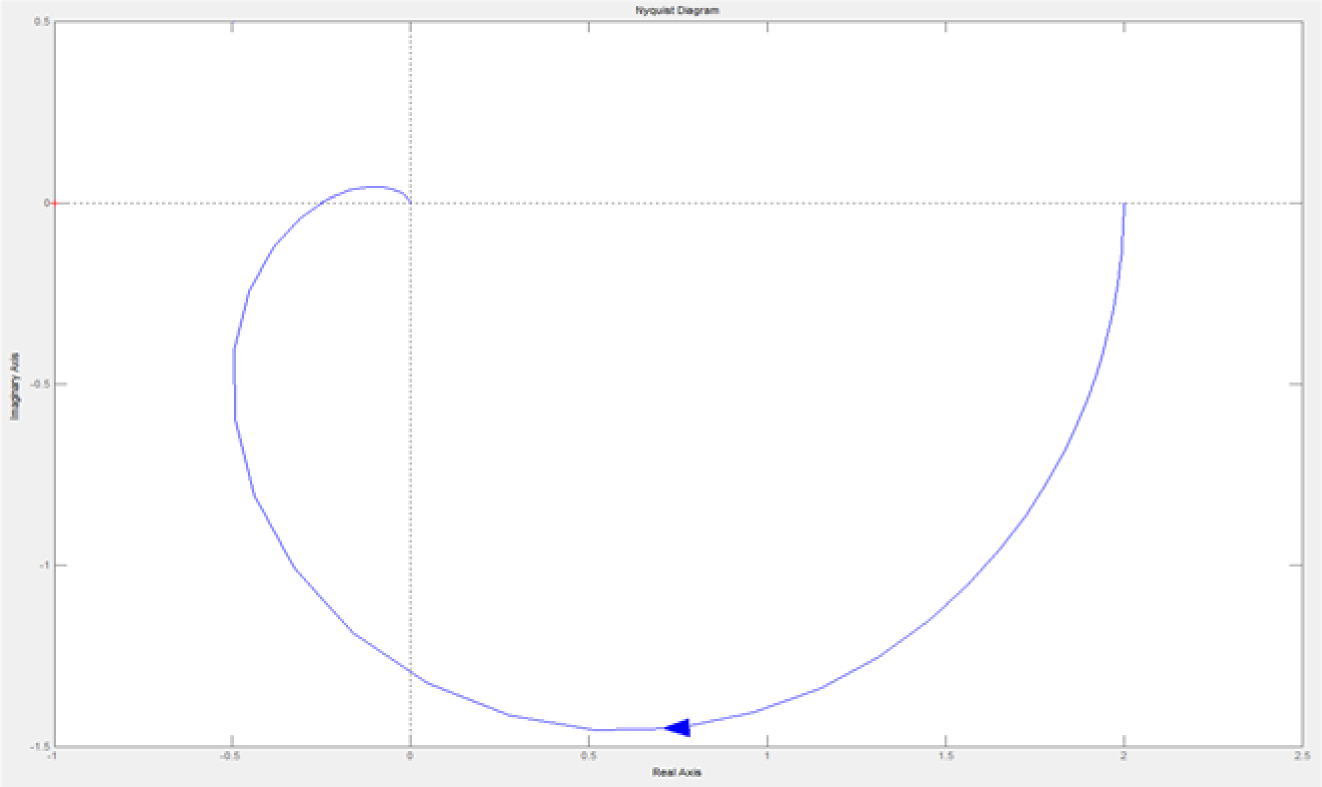
- Mesures de ces marges : **<u>LIEU DE BLACK</u>**

M_g= 12db **ET** M_φ=70°

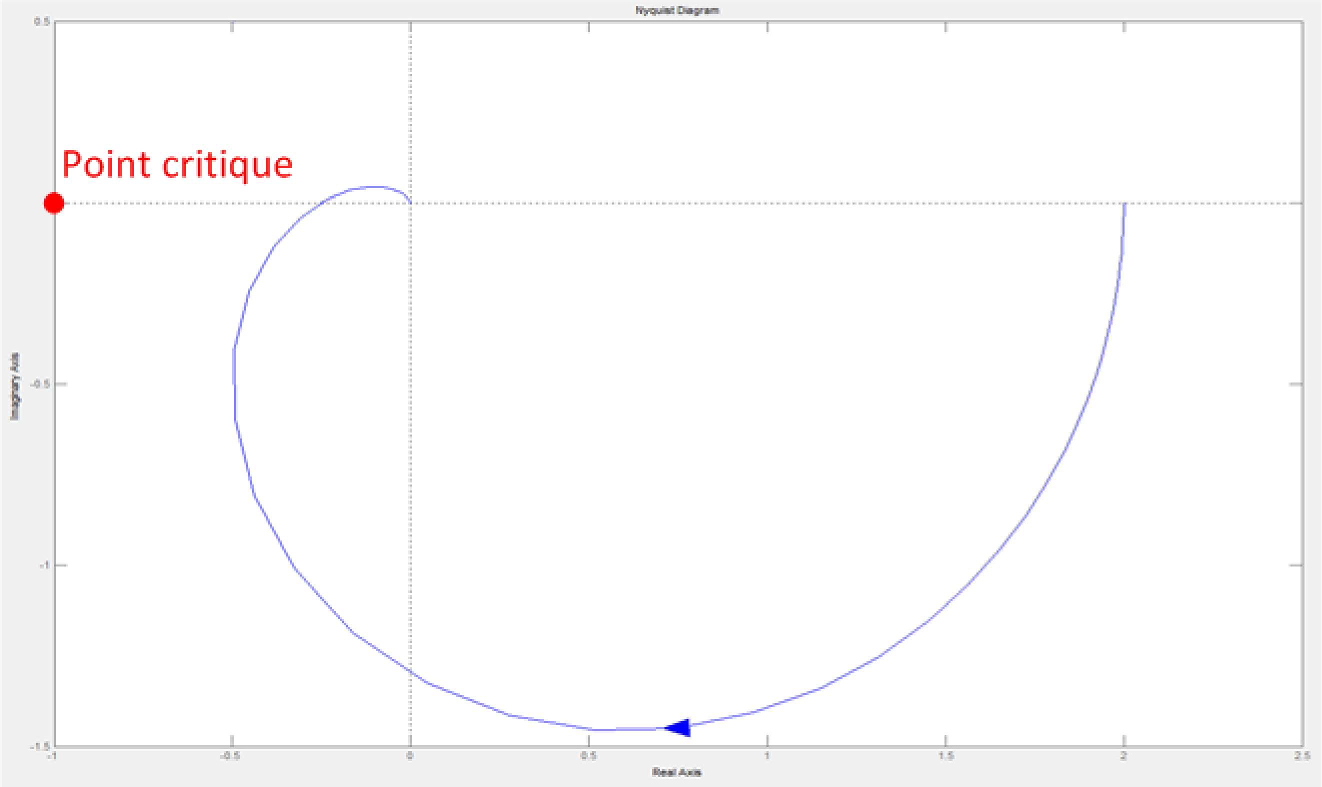
⇒ **Système robuste**



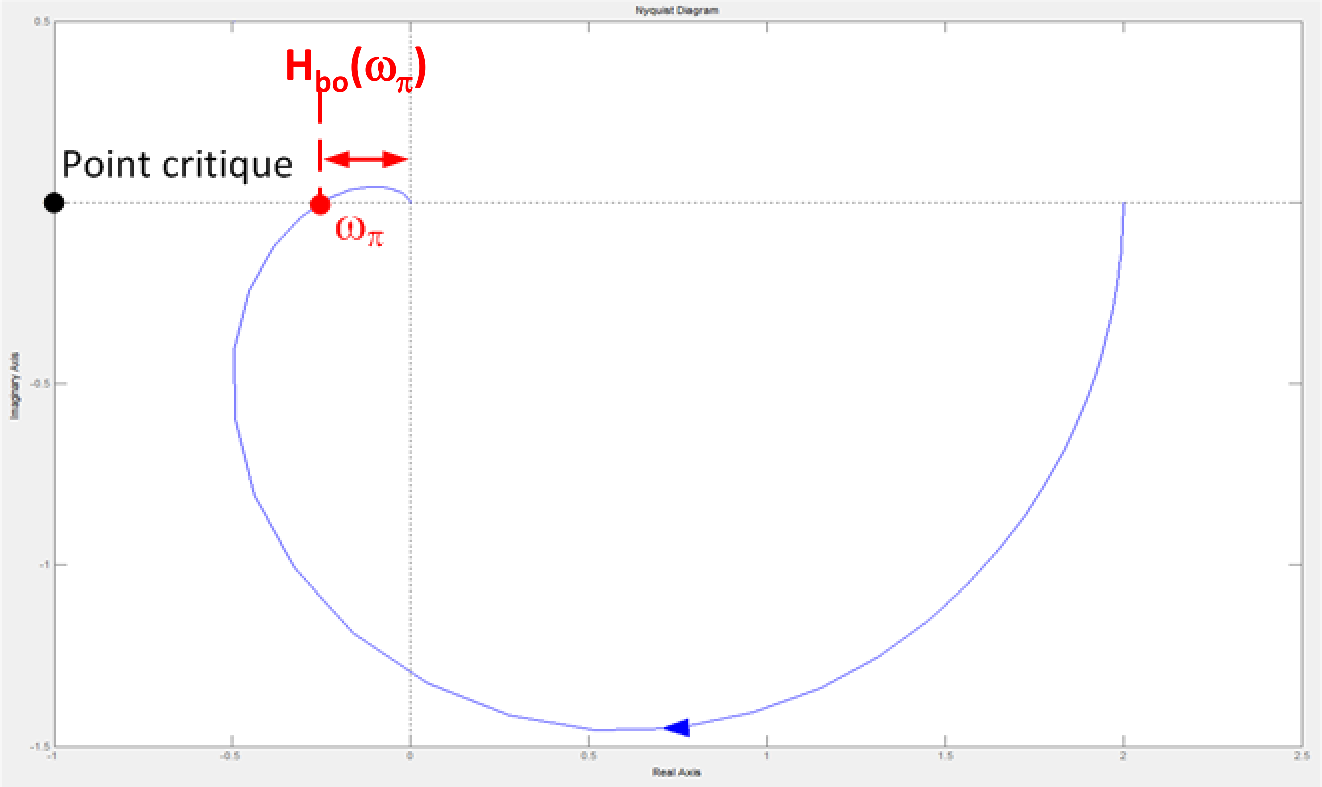
- Mesures de ces marges : **<u>LIEU DE NYQUIST</u>**



- Mesures de ces marges : **LIEU DE NYQUIST**



- Mesures de ces marges : **LIEU DE NYQUIST**

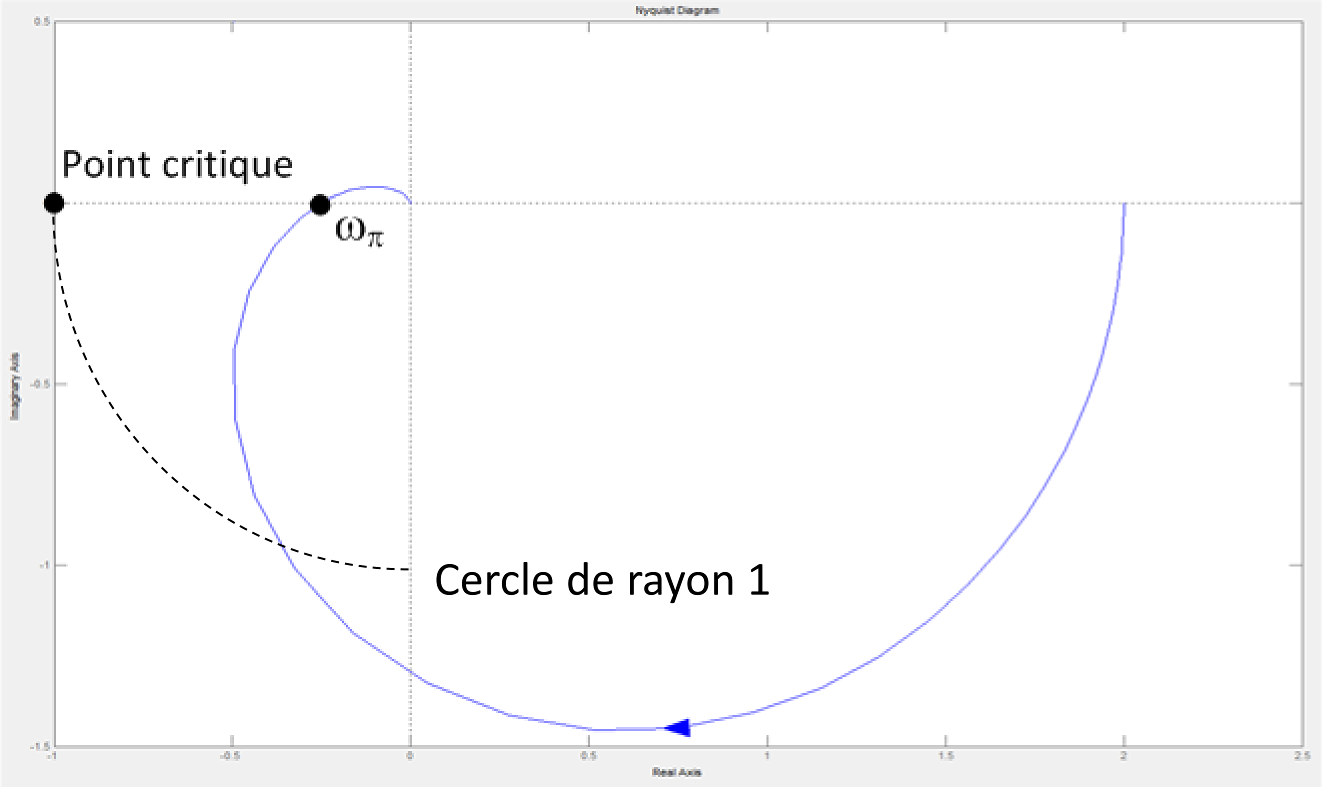


Marge de gain :

Elle se calcule quand la phase de la fonction de transfert en BO vaut $-\pi$ (-180°) :

$$M_g = -20 \log (H_{bo}(\omega_\pi))$$

- Mesures de ces marges : **LIEU DE NYQUIST**

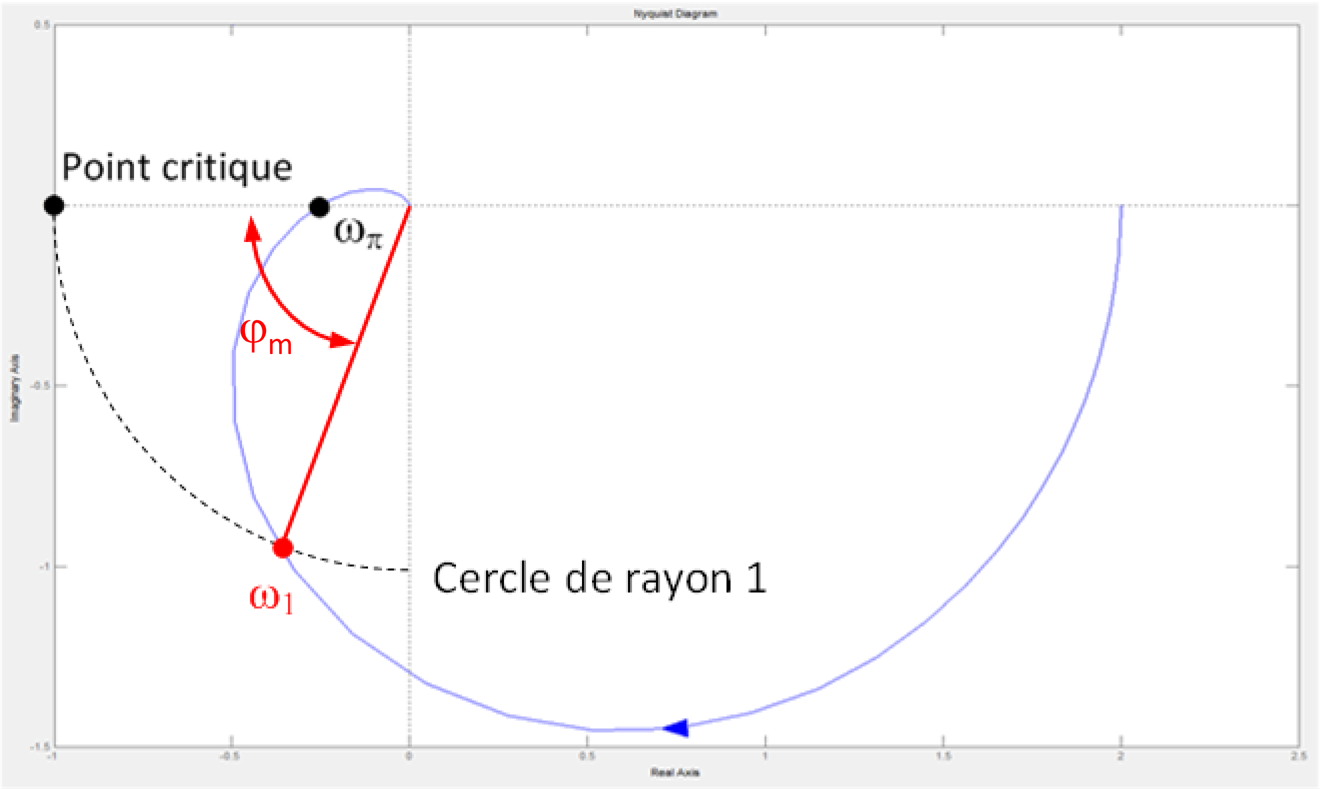


Marge de phase :

Elle se calcule quand le module de la fonction de transfert en BO vaut 1 ou 0db :

$$M_\varphi = 180° + \varphi_{H_{BO}}(\omega_1)$$

- Mesures de ces marges : **LIEU DE NYQUIST**

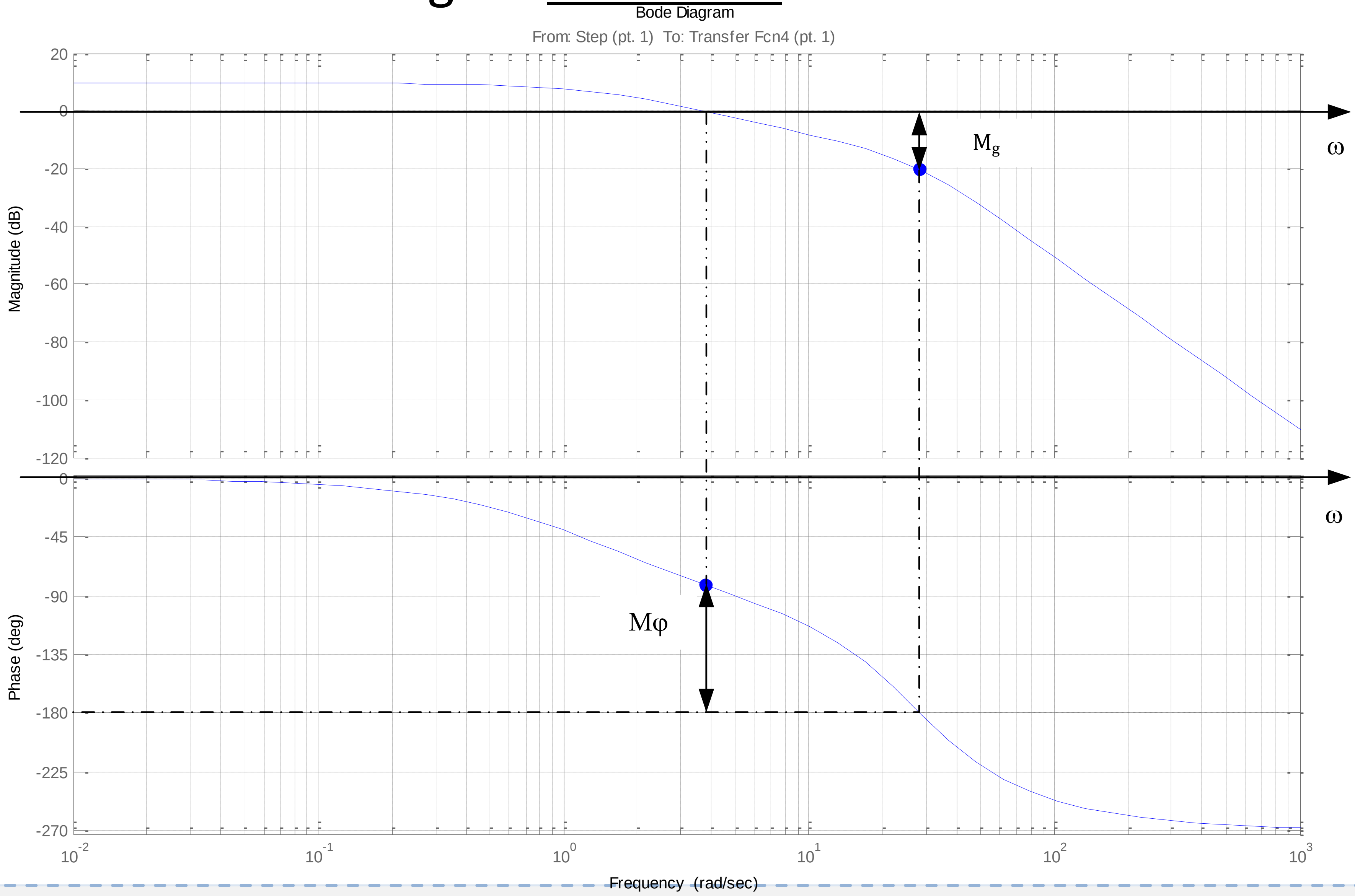


Marge de phase :

Elle se calcule quand le module de la fonction de transfert en BO vaut 1 ou 0db :

STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

- Mesures de ces marges : **<u>LIEU DE BODE</u>**

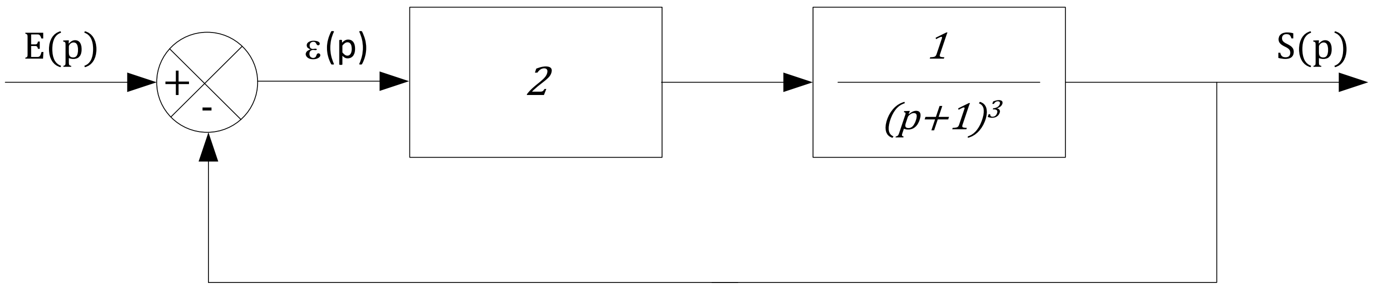


Marge de gain :
Elle se calcule quand la phase de la fonction de transfert en BO
vaut $-\pi$ (-180°)

Marge de phase :
Elle se calcule quand le module de la fonction de transfert en BO vaut 0db

- ***Exercice C-13*** *:*

Calculer la marge de gain et de phase pour le système suivant :



STABILITÉ DES SYSTÈMES ASSERVIS

Merci pour votre attention

Questions