TD : Automatique

Exercice 1: Mise en équation d'un système électrique du second ordre

On considère le montage électrique représenté sur la figure 1. On injecte dans ce système un signal d'entrée $e(t)$ correspondant à un échelon de tension de 0 à 5 V.

1- Déterminer l'équation différentielle qui lie $e(t)$ à la tension de sortie $s(t)$.

2- En déduire la fonction de transfert du système.

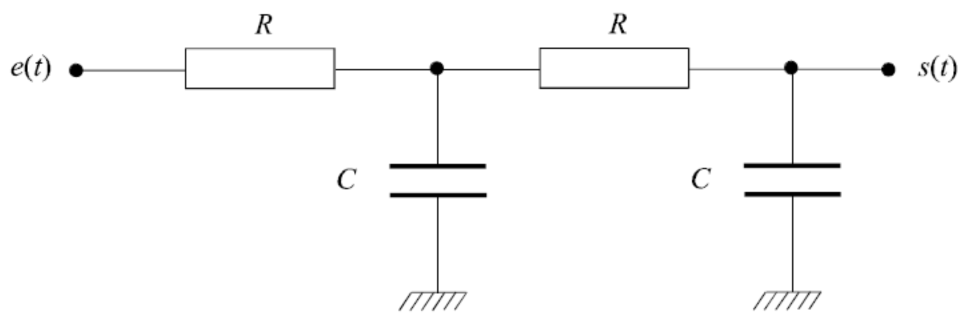


Figure 1. Circuit électrique du second ordre.

Correction :

1-

Appelons A le point commun aux deux résistances et $v_A(t)$ la tension en ce point. Nommons les courants dans les différentes branches du circuit (figure 2) et appliquons la loi des noeuds au point A :

$$\frac{e - v_A}{R} = C\frac{\mathrm{d}v_A}{\mathrm{d}t} + \frac{v_A - s}{R}$$

Par ailleurs, le courant $i_1(t)$ circulant dans le second condensateur, on peut écrire :

$$C\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \frac{v_A - s}{R}$$

Tirons de cette équation l'expression de la tension $v_A(t)$ et remplaçons celle-ci dans la première équation :

$$v_A = RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} + s(t)$$

$$e - RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} - s(t) = R^2C^2\frac{\mathrm{d}^2s}{\mathrm{d}t^2} + 2RC\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}$$

On obtient ainsi l'équation différentielle qui lie s(t) à e(t) :

$$R^2C^2\frac{d^2s}{dt^2} + 3RC\frac{ds}{dt} + s(t) = e(t)$$

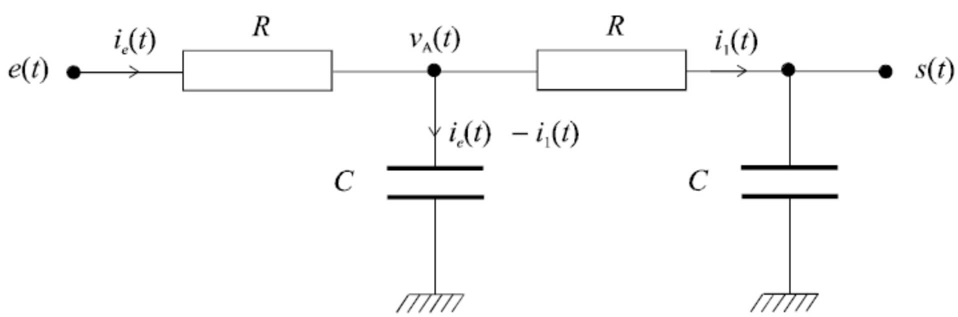


Figure 2. Étude du circuit électrique.

2- La fonction de transfert est donc :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{R^2C^2p^2 + 3RCp + 1}$$

<u>Exercice 2 :</u> Réglage du gain statique d'un système du premier ordre

On considère un système de fonction de transfert G(p) avec :

$$G(p) = \frac{K}{1+Tp} \text{ avec } T = 0{,}1 \text{ s}$$

1- Calculer l'expression précise de la pulsation de coupure à 0 dB définie par :

$$G(\omega_{c0}) = 1$$

2- Montrer que si K>>1, on a :

$$\omega_{c0} \approx \frac{K}{T}$$

3- Calculer la valeur du gain K qui permet d'obtenir une pulsation ω_{c0} = 10 rad/s.

<u>Correction :</u>

1-

Le gain fréquentiel du système a pour expression :

$$G(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1+0{,}01\omega^2}}$$

La pulsation de coupure à 0 dB peut être aisément calculée :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{K}{\sqrt{1+0{,}01\omega_{c0}^2}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0} = 10\sqrt{K^2-1}$$

2-

Si K>>1, on a :

$$\omega_{c0} = 10\sqrt{K^2 - 1} \approx 10K = \frac{K}{T}$$

3-

Pour obtenir une pulsation ω_{c0} = 10 rad/s, on doit avoir :

$$10\sqrt{K^2 - 1} = 10 \quad \Rightarrow \quad K = \sqrt{2}$$

<u>Exercice 3 :</u> Réponse d'un système du second ordre à une rampe en régime critique

On considère un système de fonction de transfert G(p) à l'entrée duquel on injecte une rampe unitaire : e(t) = v(t) = t pour t > 0.

On donne :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2\xi p}{\omega_n} + 1} \text{ avec } \xi = 1$$

Calculer l'expression du signal de sortie s(t) et tracer son graphe.

<u>Correction :</u>

La fonction de transfert du système a pour expression :

$$G(p) = \frac{K}{\frac{p^2}{\omega_n^2} + \frac{2p}{\omega_n} + 1}$$

avec E(p) $=\frac{1}{p^2}$, on a :

$$S(p) = \frac{K}{p^2\left(\frac{p}{\omega_n} + 1\right)^2} = \frac{K\omega_n^2}{p^2\,(p + \omega_n)^2}$$

Cette transformée de Laplace n'apparaît pas dans la tables de la transformée de Laplace. En revanche, on y trouve :

$$X(p) = \frac{K\omega_n^2}{p\,(p + \omega_n)^2} = K\frac{\omega_n^2}{p\,(p + \omega_n)^2} \quad \Rightarrow \quad x(t) = K - K\,(1 + \omega_n t)\,\mathrm{e}^{-\omega_n t}$$

Comme S(p) $=\frac{X(p)}{p}$, on a :

$$s(t) = \int x(t)\,\mathrm{d}t$$

soit :

$$s(t) = \int K\,\mathrm{d}t - \int K\,\mathrm{e}^{-\omega_n t}\,\mathrm{d}t - \int K\omega_n t\,\mathrm{e}^{-\omega_n t}\,\mathrm{d}t$$

Intégrons :

$$s(t) = Kt + \frac{K}{\omega_n}\,\mathrm{e}^{-\omega_n t} - \frac{K}{\omega_n}\left[1 - (1+\omega_n t)\,\mathrm{e}^{-\omega_n t}\right] + \mathrm{C^{te}}$$

d'où :

$$s(t) = Kt\left(1 + \mathrm{e}^{-\omega_n t}\right) + \frac{2K}{\omega_n}\,\mathrm{e}^{-\omega_n t} - \frac{K}{\omega_n} + \mathrm{C^{te}}$$

En considérant que s(0) = 0, on a :

$$s(0) = \frac{K}{\omega_n} + \mathrm{C^{te}} = 0 \quad \Rightarrow \quad \mathrm{C^{te}} = -\frac{K}{\omega_n}$$

Au final, on a donc :

$$s(t) = Kt\left(1 + \mathrm{e}^{-\omega_n t}\right) + \frac{2K}{\omega_n}\,\mathrm{e}^{-\omega_n t} - \frac{2K}{\omega_n}$$

ou encore :

$$s(t) = \left[Kt - \frac{2K}{\omega_n}\right] + \left[Kt + \frac{2K}{\omega_n}\right]\mathrm{e}^{-\omega_n t}$$

Cette expression fait apparaître que le graphe de s(t) possède une asymptote d'équation $y(t) = Kt - \frac{2K}{\omega_n}$ lorsque t $\rightarrow +\infty$. La courbe reste toujours au-dessus de son asymptote étant donné que s(t) − y(t) est toujours positif. Pour tracer la courbe avec plus de précision, il est possible d'invoquer sa dérivée, que l'on connaît déjà :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = x(t) = K - K\,\mathrm{e}^{-\omega_n t} - K\omega_n t\,\mathrm{e}^{-\omega_n t}$$

On remarque notamment que :

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t}(0) = 0$$

Le graphe de s(t) est présenté sur la figure 3.

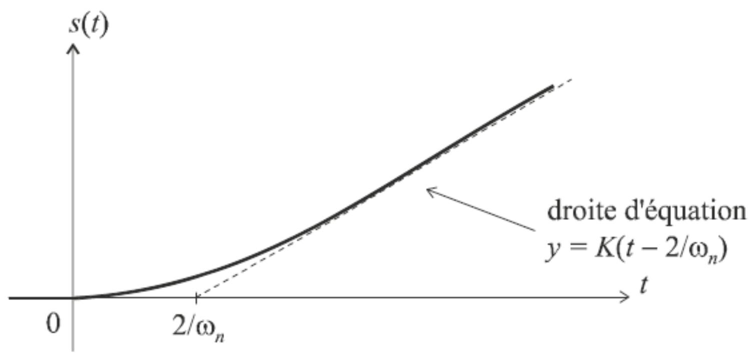


Figure 3. Réponse d'un système du second ordre à une rampe en régime critique.

Exercice 4 : Diagramme de Bode

On considère un système de fonction de transfert en boucle ouverte :

$$FTBO(p) = \frac{20}{(1+0.2\,p)(1+10\,p)}$$

1. Tracer le diagramme de Bode du de la FTBO en précisant les pulsations de cassure.

2. Déterminer si la pulsation de coupure à 0dB de la FTBO se situe avant 0.1 rad/s, après 5 rad/s ou entre ces deux pulsations.

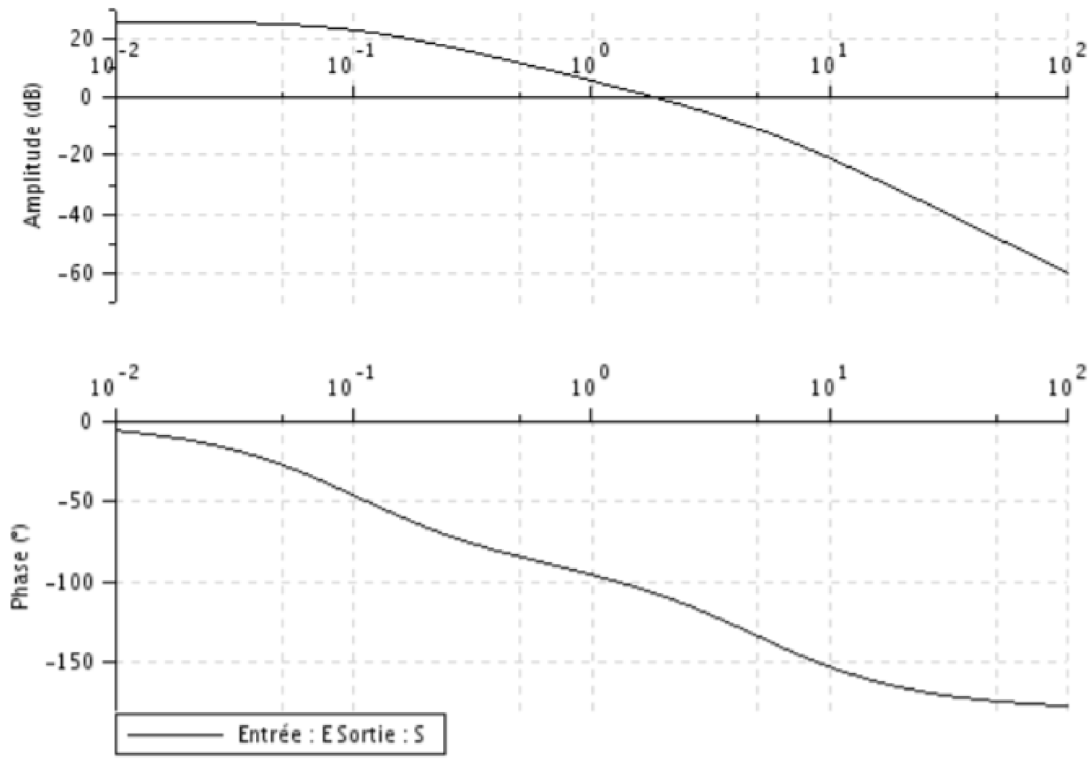
3. En assimilant la courbe réelle des gains à son diagramme asymptotique, déterminer cette pulsation de coupure à 0dB : ω_{0dB} . En déduire une valeur approximative de la marge de phase.

4. On veut augmenter la bande passante tout en conservant une marge de phase de 45°. Sachant que les deux pulsations de cassures sont éloignées, déterminer la pulsation pour laquelle la marge de phase vaut 45°.

5. En déduire la valeur d'un correcteur proportionnel qui permettrait d'obtenir cette marge de phase.

Correction :

1- Le diagramme de Bode est la superposition de deux premiers ordres de pulsations de cassure 0.1 rad/s et 5 rad/s. Le gain à basse fréquence vaut 20log 20=26 dB .



2- Pour ω=0.1rad /s :

$$|FTBO(j\omega)|=\frac{20}{\sqrt{2}}=14>1$$ (valeur du diagramme asymptotique)

Pour ω=5 rad/s ,

$$|FTBO(j\omega)|=\frac{20}{\sqrt{2*10*5}}=0.3<1$$ (valeur du diagramme asymptotique).

La pulsation de coupure se situe donc entre les deux pulsations de cassure

3. L'équation de l'asymptote entre les deux pulsations de cassure s'écrit

$$GdB=20\log\left|\frac{20}{10\,j\omega}\right|$$

GdB=0 si le contenu du log vaut 1, soit ω=2rad /s . Vu que les deux pulsations de cassures sont éloignées, la phase à cette pulsation vaudra environ 90° soit une marge de phase de l'ordre de 90°. Le système est très stable.

4. En considérant que le premier “premier ordre” a totalement convergé en ω=5 rad/s (pulsation de cassure du second “premier ordre”), la phase y vaut -135°, et la marge de phase est donc satisfaite à cette pulsation de cassure.

5. On a déjà calculé la valeur du diagramme asymptotique de la FTBO en ω=5rad/s , qui vaut 0.3, soit -11 dB. La courbe réelle est 3dB sous la valeur asymptotique à la pulsation de cassure, soit -14dB. Il faut remonter la courbe de gain de façon à ce que le gain soit nul à cette pulsation, c'est-à-dire remonter de 14dB, d'où K_P=5 .