V – Transformée de Fourier

Exercice 1

a) Pour $\lambda > 0$, calculer la transformée de Fourier des signaux $x(t) = H(t)\, e^{-\lambda t}$ et $y(t) = e^{-\lambda|t|}$

Par calcul direct :

$$\widehat{x}(f) = \int_0^{\infty} e^{-\lambda t}\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+2\pi \mathrm{i} f)t}\, \mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-(\lambda+2\pi \mathrm{i} f)t}}{-(\lambda+2\pi \mathrm{i} f)}\right]_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda+2\pi \mathrm{i} f}$$

puis

$$y(t) = x(t) + x(-t) \implies \widehat{y}(f) = \widehat{y}(f) + \widehat{y}(-f) = \frac{1}{\lambda+2\pi \mathrm{i} f} + \frac{1}{\lambda-2\pi \mathrm{i} f} = \frac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi f^2}.$$

b) puis en déduire celles de $z(t) = \dfrac{2\lambda}{\lambda^2+4\pi^2 t^2}$ et $w(t) = \dfrac{1}{1+t^2}$.

Par transformée inverse (et le fait que les signaux soient pairs) : comme

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(f)\, e^{2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}f,$$

on a

$$y(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} z(u)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f u}\, \mathrm{d}u = \widehat{z}(f)$$

donc

$$\widehat{z}(f) = y(-f) = y(f) = e^{-\lambda|f|}.$$

Dans le cas particulier $\lambda = 1$, on remarque que $w(t) = \frac{1}{2} z\left(\frac{t}{2\pi}\right)$ ce qui permet d'en déduire aisément

$$\widehat{z}(f) = \frac{1}{2}\widehat{z(2\pi t)} = \pi \widehat{z}(2\pi f) = \pi e^{-2\pi|f|}.$$

Exercice 2

Établir les principales propriétés de la transformée de Fourier par manipulation d'intégrales en exprimant les transformées des signaux suivants en terme de la transformée $\widehat{x}(f)$ de $x(t)$:

a) $x(-t)$

b) $x(at)$, $a > 0$

c) $x(t-a)$

d) $e^{2\pi \mathrm{i} a t}\, x(t)$

e) $x'(t)$

f) $t \cdot x(t)$

a)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(-t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f u}\, \mathrm{d}u = \widehat{x}(-f)$$

b)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(at)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-\frac{2\pi \mathrm{i} f u}{a}}\, \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\,\widehat{x}\Big(\frac{f}{a}\Big)$$

c)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(t-a)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f (u+a)}\, \mathrm{d}u = e^{-2\pi \mathrm{i} f a}\, \widehat{x}(f)$$

d)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} e^{2\pi \mathrm{i} a t}\, x(t)\, e^{-2\pi j f t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} (f-a)}\, \mathrm{d}t = \widehat{x}(f-a)$$

e)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x'(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, x(t)\Big|_{-\infty}^{+\infty} + 2\pi \mathrm{i} f \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = 2\pi \mathrm{i} f\, \widehat{x}(f)$$

f)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} t\, x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\big(x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\big)\, \mathrm{d}t = -\frac{1}{2\pi \mathrm{i}}\, \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}f}\widehat{x}(f)$$

Exercice 3

Quelles sont les propriétés de la transformée $\widehat{x}(f)$ lorsque l'originale $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ est :

(a) à valeurs réelles ? (b) paire ? (c) impaire ?

(a) Commençons par calculer :

$$\widehat{\overline{x}}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)}\, e^{-2\pi j f t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} \overline{x(t)\, e^{+2\pi j f t}}\, \mathrm{d}t = \overline{\widehat{x}(-f)}$$

D'où si $\overline{x} = x$ alors

$$\widehat{x}(f) = \widehat{\overline{x}}(f) = \overline{\widehat{x}(-f)},$$

ou dit autrement

$$\widehat{x}(-f) = \overline{\widehat{x}(f)}.$$

(b) Comme on sait que $\widehat{x(-t)} = \widehat{x}(-f)$, alors x est paire si et seulement si $\widehat{x}$ l'est.

(c) idem

Montrer de plus que la transformée d'une fonction paire peut s'écrire

$$\widehat{x}(f) = 2 \int_{0}^{+\infty} x(t) \cos(2\pi f t)\, \mathrm{d}t$$

et donner une expression similaire dans le cas d'une fonction impaire.

Si x est paire :

$$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, \big(e^{2\pi \mathrm{i} f t} + e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\big)\, \mathrm{d}t = 2 \int_{0}^{+\infty} x(t)\, \cos(2\pi f t)\, \mathrm{d}t$$

Et si x impaire :

$$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, \big(-e^{2\pi \mathrm{i} f t} + e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\big)\, \mathrm{d}t = -2j \int_{0}^{+\infty} x(t)\, \sin(2\pi f t)\, \mathrm{d}t$$

Exercice 4

a) Vérifier que $g(t) := e^{-\alpha t^2}$ (où $\alpha > 0$) est solution de $g' + 2\alpha t\, g = 0$.

En déduire une équation différentielle vérifiée par $\widehat{g}$ puis que $\widehat{g}(f) = \sqrt{\frac{\pi}{\alpha}}\, e^{-\frac{\pi^2 f^2}{\alpha}}$.

Effectivement

$$g'(t) = -2\alpha t\, e^{-\alpha t^2} = -2\alpha t\, g(t).$$

En prenant la transformée de l'équation différentielle :

$$2\pi j f\, \widehat{g} + 2\alpha\, \widehat{t \cdot g} = 0$$

$$2\pi j f\, \widehat{g} + \frac{2\alpha}{-2\pi j}\, \widehat{g}' = 0$$

$$\widehat{g}' + 2\,\frac{\pi^2}{\alpha}\, \widehat{g} = 0,$$

qui est une équation différentielle de même forme avec paramètre $\frac{\pi^2}{\alpha}$, donc de solution générale

$$\widehat{g}(f) = A\, e^{-\frac{\pi^2}{\alpha} f^2}.$$

Puis on peut déterminer la valeur de la constante A avec l'interprétation de $\widehat{g}(0)$ comme aire totale sous la courbe de g (pour $\alpha = 1$ on se rappelle que l'on obtient $\sqrt{\pi}$ puis on applique un facteur d'échelle).

b) Que remarquez-vous lorsque $\alpha = \pi$?

$$\widehat{g}(f) = e^{-\pi f^2} = g(f) :$$

g est sa propre transformée de Fourier !

c) Définissons, pour $\mu \in \mathbb{R}$ et $\sigma > 0$, la gaussienne normalisée de paramètres μ et σ par

$$g_{\mu,\sigma}(t) := \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2}.$$

Calculer la transformée de Fourier de $g_{\mu,\sigma}$ et en déduire le fait que la convolution de deux gaussiennes normalisées est encore une gaussienne normalisée (dont vous préciserez les paramètres).

Remarquons tout d'abord que $g_{\mu,\sigma}$ est la translation par μ de $g_{0,\sigma}(t) = e^{-\frac{t^2}{2\sigma^2}}$, cas $\alpha = \frac{1}{2\sigma^2}$ de la fonction ci-dessus qui est d'aire

$$\sqrt{\frac{\pi}{\alpha}} = \sqrt{2\pi}\sigma,$$

donc normalisée de façon à avoir aire 1.

Donc

$$\widehat{g_{\mu,\sigma}}(f) = e^{-2\pi j \mu f}\, \widehat{g_{0,\sigma}}(f) = e^{-2\pi j \mu f} \cdot e^{-2\pi^2 \sigma^2 f^2}.$$

Pour faire le produit de convolution de $g_{\mu,\sigma}$ et $g_{\nu,\rho}$ on peut donc multiplier les transformées :

$$e^{-2\pi j(\mu+\nu) f} \cdot e^{-2\pi^2(\sigma^2+\rho^2) f^2},$$

qui la transformée d'une gaussienne normalisée de paramètres $\mu + \nu$ et $\sqrt{\sigma^2 + \rho^2}$.

d) Déterminer $\lim\limits_{\sigma\to\infty} g_{\mu,\sigma}$ et $\lim\limits_{\sigma\to 0} g_{\mu,\sigma}$.

Pour la première : en premnant la limite, on voit directement que $g_{\mu,\infty} = 0$, ce qui est cohérent avec la formule de convolution

$$\underbrace{g_{\mu,\infty}}_{0} * g_{\nu,\rho} = \underbrace{g_{\mu+\nu,\infty}}_{0}.$$

Pour la seconde : en prenant la limite dans la transformée de $g_{\mu,\sigma}$, on trouve

$$\widehat{g_{\mu,0}} = e^{-2\pi j \mu f} \qquad \text{donc} \qquad g_{\mu,0}(t) = \delta(t-\mu).$$

Cela est tout à fait cohérent avec le passage à la limite dans la formule de convolution

$$g_{\mu,0} * g_{\nu,\rho} = g_{\mu+\nu,\rho}.$$

En particulier,

$$g_{0,0} = \delta.$$

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi i f t}\, \mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\, \widehat{x_1}(f) + \mu\, \widehat{x_2}(f)$
$x(at)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \widehat{x}\left(\frac{f}{a}\right)$
$x(-t)$ $\overline{x(t)}$	$\widehat{x}(-f)$ $\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$ $e^{2\pi i a t} x(t)$	$e^{-2\pi i a f} \widehat{x}(f)$ $\widehat{x}(f-a)$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $-2\pi i\, t x(t)$	$2\pi i f \widehat{x}(f)$ $\frac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$ $x_1(t)\, x_2(t)$	$\widehat{x_1}(f)\, \widehat{x_2}(f)$ $(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t)$ $H(t)\, e^{-\lambda t},\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0$ $\frac{1}{1+t^2}$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a f)$ $\frac{1}{\lambda + 2\pi i f}$ $\pi e^{-2\pi \lvert f \rvert}$ $\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(f)$ $\frac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f)$

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)\, y(u)\, \mathrm{d}u$$