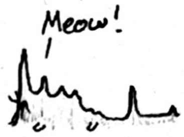
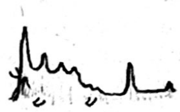
Seconde session



Consignes :

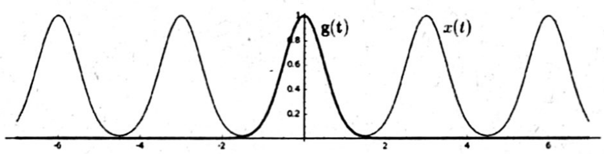
- Vous disposez de **3 h** pour répondre aux **3** $\times$ **4** questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Un formulaire sur les transformées de Fourier et Laplace est fourni en annexe.
- Soyez **clairs** et **précis** et dans vos réponses et **justifications**.
- Et surtout **exprimez-vous** sur les sujets proposés pour démontrer votre compréhension des concepts !



Exercice 1

Soit $x(t)$ le signal périodique ci-dessous, obtenu en superposant des impulsions gaussiennes $g(t) = e^{-t^2}$ à toutes les $T = 3$ secondes :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} g(t - 3n).$$



a) En utilisant la périodicité de $x(t)$, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{x}(f)$ satisfait l'équation

$$e^{6\pi j f}\,\widehat{x}(f) = \widehat{x}(f)$$

et expliquer pourquoi cela implique que $\widehat{x}(f)$ est un spectre de raies espacées de $\frac{1}{3}$ Hz.

b) En partant de la conclusion de a), montrer que $x(t)$ admet une représentation en série de Fourier de la forme

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,(e^{\frac{2\pi j t}{3}})^n.$$

c) Exprimer $x(t)$ sous forme de produit de convolution de $g(t)$ avec un peigne de Dirac et obtenir ainsi une autre expression de $\widehat{x}(f)$. En déduire que

$$c_n = \frac{1}{3}\,\widehat{g}\left(\frac{n}{3}\right).$$

d) À l'aide de tout ce qui précède, obtenir une expression de $x(t)$ sous la forme

$$x(t) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \cos\left(\frac{2\pi n t}{3}\right)$$

en précisant les valeurs des coefficients a_n.

Exercice 2

Considérons, pour $\omega > 0$, le système dont la sortie $y(t)$ et l'entrée $x(t)$ sont liées par l'équation différentielle :

$$y''(t) + \omega^2 y(t) = x(t).$$

a) Si $x(t)$ est un signal de classe $\mathcal{C}^1$, rappeler comment on peut simplifier l'expression $x(t) \cdot \delta(t)$ et, en dérivant formellement le produit, établir l'identité

$$x(t) \cdot \delta'(t) = x(0) \cdot \delta'(t) - x'(0) \cdot \delta(t).$$

b) Quelle était l'entrée du système si la sortie correspondante est

$$y(t) = H(t) \cdot \big(\alpha \cos(\omega t) + \beta \sin(\omega t)\big) \ ?$$

c) Expliquer pourquoi, dans le cas général, on sait qu'on peut écrire la sortie comme

$$y(t) = h(t) * x(t)$$

où $h(t)$ est un signal que vous préciserez.

d) Calculer, par la méthode de votre choix, le produit de convolution

$$H(t) \sin t \, * \, H(t)\, e^{-t}.$$

Exercice 3

a) En utilisant la définition de la transformée de Fourier, établir la propriété exprimant la transformée de $\overline{x(t)}$ en fonction de $\widehat{x}$.

b) Déduire l'identité de Parseval de la formule de Plancherel en appliquant celle-ci à une paire de signaux x et y bien choisis.

c) Étant donnée une fonction y, expliquer et expliciter la signification de chacune des expressions suivantes :

$$Ш_1 \cdot y, \qquad Ш_1 * y, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Ш_1(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

d) Si y et $\widehat{y}$ sont des fonctions, donner une démonstration simple (une ligne !) du fait que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{y}(n)$$

et utiliser cela pour en déduire la somme de la série

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^2+1}.$$

Produit de convolution

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)\, x_2(t-u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-v)\, x_2(v)\, \mathrm{d}v$$

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\displaystyle\int_0^t x(u)\, \mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$tx(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} X(s)\, \mathrm{d}s$	
$e^{at}x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa}X(p)$	$(a \geqslant 0)$
$x(kt)$	$\dfrac{1}{k} X\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pX(p) = x(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pX(p) = x(+\infty)$$

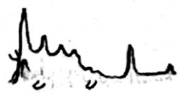
original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi j f t}\, \mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi j f t}\, \mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\, \widehat{x_1}(f) + \mu\, \widehat{x_2}(f)$
$x(-t)$	$\widehat{x}(-f)$
$\overline{x(t)}$	$\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$	$e^{-2\pi j a f}\widehat{x}(f)$
$e^{2\pi j a t}x(t)$	$\widehat{x}(f-a)$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$	$2\pi j f\, \widehat{x}(f)$
$-2\pi j t\, x(t)$	$\frac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$	$\widehat{x_1}(t)\, \widehat{x_2}(t)$
$x_1(t)\, x_2(t)$	$(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t) = H\big(t + \frac{a}{2}\big) - H\big(t - \frac{a}{2}\big)$	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a f)$
$e^{-\lambda\|t\|}, \lambda > 0$	$\frac{2\lambda}{\lambda^2 + 4\pi^2 f^2}$
e^{-t^2}	$\sqrt{\pi}e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(f)$
$\text{Ш}_T(t)$	$\frac{1}{T}\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f)$

Formule de Plancherel

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(u)\, y(u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v)\, \widehat{y}(v)\, \mathrm{d}v$$



Identité de Parseval

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{x}(f)|^2\, \mathrm{d}f$$

La promo 63, tous des ingrats.