Examen final

Consignes :

- Vous disposez de **2 h** pour répondre aux **4 × 3** questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable **autorisée**, voire conseillée.
- Un **aide-mémoire** comportant certains faits à (ne pas) connaître est fourni en annexe.
- Soyez **précis** et **détaillé** dans vos réponses et justifications ; **exprimez**-vous !

Exercice 1

a) Soit X une variable aléatoire continue, presque sûrement positive. Par intégration par parties, montrer que

$$\int_0^\infty \mathbb{P}[X > x]\,\mathrm{d}x = \mathbb{E}[X].$$

b) Soit $(X_n)_{n=1}^\infty$ une suite de variables aléatoires i.i.d. uniformément dans l'ensemble $\{1, 2, \ldots, d\}$ et N la variable aléatoire correspondant au rang de la première répétition :

$$N = \min\{n \mid \exists_{k<n}\ X_k = X_n\}.$$

Montrer que la fonction de répartition de N s'écrit :

$$F_N(n) = 1 - \prod_{k<n}\left(1 - \frac{k}{d}\right) \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

c) En utilisant l'approximation $F_N(n) \approx 1 - e^{-\frac{n^2}{2d}}$ (que l'on admettra), déterminer la médiane de N et la comparer avec son espérance calculée à l'aide de a).

Exercice 2

Antoine (nom fictif) part à la chasse aux Pokémons et aimerait bien en dénicher un, dit *chromatique*, dont les couleurs sont inhabituelles. Apparemment, la probabilité lors d'une rencontre de tomber sur un Pokémon chromatique est constante et vaut $p = 1/8192$.

binomiale

a) Soit N le nombre de rencontres nécessaires avant d'observer pour la première fois un Pokémon chromatique. Que vaut $\mathbb{P}[N = n]$ en termes de p et $q := 1 - p$?

Exprimer la densité de probabilité de N sous forme de somme pondérée de diracs.

b) Quel est le nombre n_0 de rencontres à effectuer pour garantir que $\mathbb{P}[N \leqslant n_0] \geqslant 99\%$?

c) Montrer que la fonction génératrice des moments de N s'écrit

$$g_N(t) = \frac{p}{e^{-t} - q}$$

et utiliser cela pour confirmer l'espérance obtenue à la question b).

Exercice 3

a) Soit X une variable aléatoire et $Y := aX + b$ avec $a > 0$ et $b \in \mathbb{R}$. Exprimer la densité de probabilité de Y en terme de celle de X.

b) Considérons le couple aléatoire (X, Y) dont la densité de probabilité conjointe est donnée par

$$f(x, y) = \frac{e^{-\frac{\pi}{2}y}}{1 + x^2} \qquad (x, y \geqslant 0).$$

Déterminer les densités marginales f_X et f_Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ?

c) Le New-Yorkais saoûl est finalement rentré chez lui et cherche maintenant à ouvrir la porte de son appartement mais ses clés sont tombées par terre dans le noir. La batterie de son téléphone portable étant épuisée, il ne dispose plus que d'allumettes pour s'éclairer. À chaque allumette il a une chance sur 3 de retrouver ses clés ; une fois ses clés en main, s'éclairant d'une allumette il a une chance sur 4 de trouver la bonne clé mais également une chance sur 4 d'échapper ses clés à nouveau.

En moyenne, combien d'allumettes seront consummées avant qu'il ne parvienne à ouvrir la porte ?

Exercice 4

Michonne a accès à une variable aléatoire U uniformément distribuée dans un intervalle $[0, m]$, mais ne connaît pas la valeur de m. Pour l'estimer à partir d'un échantillon de valeurs de taille n, elle propose d'utiliser la quantité (aléatoire) $M = \max(U_1, \ldots, U_n)$.

a) Montrer que la fonction de répartition de M est donnée par

$$F(x) = \left(\frac{x}{m}\right)^n \qquad (0 \leqslant x \leqslant m)$$

et en déduire sa densité de probabilité.

b) Montrer que M est un estimateur biaisé de m ($\mathbb{E}[M] \to m$ quand $n \to \infty$ mais $\mathbb{E}[M] \neq m$) et indiquer comment en déduire un estimateur non biaisé.

c) Pour $0 \leqslant \alpha \leqslant 1$, posons $c_\alpha = \sqrt[n]{\frac{\alpha}{2}}$ et $d_\alpha = \sqrt[n]{1 - \frac{\alpha}{2}}$. Expliquer pourquoi

$$I_\alpha := \left[\frac{M}{c_\alpha}, \frac{M}{d_\alpha}\right]$$

est un intervalle de confiance de niveau $1 - \alpha$ pour m.

Statistiques

$$\mathbb{E}[X] = \int_{-\infty}^{\infty} x\, f_X(x)\, \mathrm{d}x, \qquad \mathrm{Cov}(X, Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\,\mathbb{E}[Y], \qquad \mathrm{Var}(X) = \mathrm{Cov}(X, X)$$

Fonction génératrice

$$g_X(t) = \widehat{f_X}\left(-\frac{t}{2\pi j}\right) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \int_{-\infty}^{+\infty} f_X(x)\, e^{tx}\, \mathrm{d}x = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\mu_n}{n!} t^n = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2} t^2 + \frac{\mu_3}{6} t^3 + \cdots$$

avec $\mu_n = \mathbb{E}[X^n]$ les moments de la variable aléatoire X et f_X sa densité

Quelques lois fréquemment utilisées

- loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\mathbb{P}[X=k] = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \quad (k = 0, 1, \ldots, n)$$

espérance np, variance $np(1-p)$

fonction génératrice $(1-p+pe^t)^n$

- loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}[X=k] = \frac{\lambda^k}{k!} e^{-\lambda} \quad k \geqslant 0$$

espérance λ, variance λ

fonction génératrice $e^{\lambda(e^t-1)}$

- loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$:

densité $f(x) = 1 \quad (0 \leqslant x \leqslant 1)$

espérance $\frac{1}{2}$, variance $\frac{1}{12}$

fonction génératrice $\frac{1}{2} e^t \operatorname{sinc}\left(\frac{t}{2}\right)$

- loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$:

densité $f(x) = \lambda e^{-\lambda x} \quad (x \geqslant 0)$

espérance $\frac{1}{\lambda}$, variance $\frac{1}{\lambda^2}$

fonction génératrice $\frac{\lambda}{\lambda - t}$

- loi normale $\mathcal{N}(\mu, \sigma)$:

densité $f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma} e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$

espérance μ, variance σ^2

fonction génératrice $e^{\mu t} e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}$

Fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite