

La longueur de ce sujet est volontairement trop long

(au DS vous n'aurez que 2 ou 3 exercices de ce type)

Exercice 1

1) On considère un puits quantique asymétrique de largeur a et hauteur V_0 ($V_0 > 0$) défini par :

$$V(x) = 0 \text{ pour } 0 \leq x \leq a \text{ (région I)}$$

$$V(x) = V_0 \text{ pour } x > a \text{ (région II)}$$

$$V(x) \rightarrow +\infty \text{ pour } x < 0.$$

a) Donner l'équation de Schrödinger dans les régions I et II. Donner les solutions générales pour la fonction d'onde $\psi(x)$ d'énergie E comprise entre 0 et V_0 .

On pose $\alpha^2 = 2m(V_0 - E)/\hbar^2$ et $k^2 = 2mE/\hbar^2$.

On pose $X = ka$ et $Y = \alpha a$. Montrer que $X^2 + Y^2 = R^2$ où R ne dépend que de V_0 , a , m et \hbar .

b) Ecrire les conditions de continuité et en déduire une relation entre k , a , et α . Montrer que cette relation peut s'écrire comme $Y = C X \cotg(X)$ où C est une constante qu'on précisera.

c) On cherche à résoudre cette équation par une méthode graphique. Tracer les équations obtenues en a) et b) dans le plan XY (pour $0 \leq ka \leq 3\pi$ et $\alpha a > 0$). Où se trouvent les solutions sur le graphe ? En déduire qu'il n'y a qu'un nombre fini de solutions correspondant à des états liés du puits. Y-a-t-il toujours des solutions ?

d) Que deviennent ces solutions quand $V_0 \rightarrow \infty$? Quelles sont les énergies permises ?

Exercice 2

- 1) On envoie des rayons X de longueur d'onde $\lambda = 2 \text{ \AA}$ à travers un film polycristallin de silicium (distance inter-atomique 2.35 \AA) et d'épaisseur $1.5 \mu\text{m}$. On obtient une figure d'interférences formée d'anneaux. Pour produire la même figure d'anneaux avec des électrons, quelle devrait être l'énergie cinétique des électrons ?
- 2) Une lumière bleue monochromatique de longueur d'onde 400 nm projetée sur un métal conduit à l'émission de photoélectrons. L'énergie potentielle pour annuler la vitesse des électrons est égale à 1 eV . Quel est le travail de sortie du métal ?
- 3) On considère un faisceau d'électrons accélérés sous une tension V , projeté sur une cible métallique. Les électrons cèdent toute leur énergie cinétique lors de la collision avec le métal, produisant ainsi des rayons X de longueur d'onde 0.03 nm . Quelle est l'énergie cinétique des électrons ? Quelle est la tension d'accélération V ?

Rappel :

$$e = 1.6 \cdot 10^{-19} \text{ C}$$

$$\hbar = 6.62 \cdot 10^{-34} \text{ Js}$$

$$m = 9.1 \cdot 10^{-31} \text{ kg (masse de l'électron)}$$

$$c = 3 \cdot 10^8 \text{ m/s (vitesse de la lumière)}$$

Valeurs attendues

1) $E_{\text{cin}} = 6,02 \cdot 10^{-18} \text{ J} = 37.6 \text{ eV}$

2) $W = 2,1 \text{ eV}$ (le travail de sortie pour des métaux ordinaires sera toujours compris entre 2 et 6 eV)

3) $E_{\text{cin}} = 41375 \text{ eV}$ donc $V = 41375 \text{ V}$

Dualité onde-corpuscule

- 1) On souhaite réaliser une expérience d'effet photo-électrique avec un métal dont le travail de sortie vaut 2 eV et un faisceau lumineux de longueur d'onde λ . Donner une condition sur λ pour observer un tel effet?
- 2) On souhaite observer de la diffraction sur un cristal dont la distance inter-atomique vaut 0.91 Å. On emploie d'abord des photons. Quelle devrait être leur longueur d'onde pour observer un maximum de diffraction pour un angle de 60°?
- 3) La physique quantique nous apprend qu'il est possible de reproduire cette expérience de diffraction avec des particules. Quelle devrait être l'énergie cinétique de neutrons diffractant selon le même angle ?

Constantes physiques : Constante de Planck $h = 6.628 \cdot 10^{-34}$ J.s
Vitesse de la lumière $c = 3 \cdot 10^8$ m/s
Masse du neutron $m = 1.67 \cdot 10^{-27}$ kg
Charge électrique élémentaire $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C

Valeurs attendues 1) $\lambda = 0.62 \mu\text{m}$

2) $\lambda = 1,576 \text{ Å}$

3) $E_{\text{cin}} = 5,5 \cdot 10^{-21} \text{ J} = 0,0345 \text{ eV}$

Quantification d'énergie : un étudiant quantique dans une salle de cours ?

On se propose d'examiner la possibilité de reproduire des effets de quantification d'énergie non pas avec un électron dans une boîte mais avec un étudiant dans une salle de cours.

Formellement les deux problèmes sont identiques, on considère donc une particule de masse m , libre de toute interaction avec pour seule contrainte de rester enfermée dans une zone de l'espace de dimension L . Pour la simplicité de la résolution on suppose l'espace unidimensionnel.

- 1) Ecrire l'équation de Schrödinger vérifiée par les états stationnaires en énergie
- 2) Donner la forme générale des solutions stationnaires
- 3) En appliquant les conditions aux limites, donner l'expression des énergies permises.
- 4) Calculer la valeur numérique du premier niveau d'énergie en eV avec les hypothèses suivantes : $m = 60$ kg, $L = 10$ m ($h = 6.628 \cdot 10^{-34}$ J.s, $e = 1.6 \cdot 10^{-19}$ C)
- 5) Pensez-vous qu'un régime alimentaire ou un changement de salle permettrait de voir des effets quantiques ?
- 6) Justifier ce résultat à l'aide de la dualité onde/corpuscule

Valeurs attendues

4) $E_1 = 9,14 \cdot 10^{-72} \text{ J} = 5,71 \cdot 10^{-53} \text{ eV}$, valeur extrêmement petite !

6) si vous calculez la longueur d'onde de l'étudiant : $\lambda = 10^{-35} \text{ m}$ ce qui est extrêmement négligeable par rapport à la taille de la pièce