IV – Transformée de Fourier

A) Explorateur de spectres

Il existe un algorithme très efficace [1] permettant de calculer une version *discrète* de la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$.

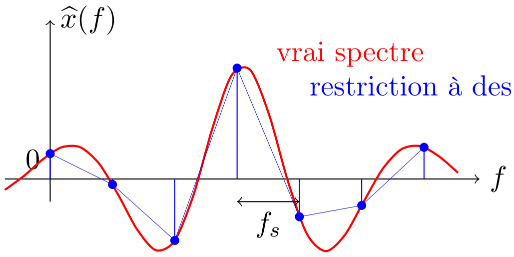
Il y a *a priori* quatre sources de désagrément lorsqu'on se tourne vers un calcul numérique d'une transformée de Fourier (qui n'en seront que trois *a posteriori*) :

1. les données temporelles d'entrée sont discrétisées dans le temps : nous n'avons que des échantillons régulièrement espacés (nous noterons T_e la période d'échantillonnage et $f_e := \frac{1}{T_e}$) ;

2. les données sont numérisées dans un format informatique imparfait induisant des erreurs d'arrondis ;

3. il n'est pas possible de faire une acquisition du signal de $t = -\infty$ à $t = +\infty$; s'il y a N échantillons, la longueur T de la période d'écoute vaut $N \cdot T_e$;

4. si l'on veut garder un format numérique (contrairement au calcul formel) il était préférable de représenter $\widehat{x}(f)$ en certains échantillons fréquentiels : raies spectrales régulièrement espacées de f_s (appelée résolution spectrale). On perd l'information des valeurs du spectre entre deux échantillons fréquentiels.



Nous allons pour l'instant négliger ces problèmes en n'utilisant que des valeurs de f_e et f_s suffisamment petites (et N suffisamment grand). Mais bien comprendre les artefacts introduits lorsque l'on passe de la transformée de Fourier des signaux continus (« la théorie ») à la transformée discrète des signaux échantillonnés (« la pratique ») est un sujet important en traitement de signal.

Qu'il suffise ici de dire qu'il est naturel de prendre une résolution spectrale correspondant à la durée de l'échantillon :

$$f_s = \frac{1}{T} = \frac{1}{N \cdot T_e} = \frac{f_e}{N},$$

de sorte que que l'on ait du côté fréquentiel une subdivision de l'intervalle $[0, f_e]$:

$$f_e = N f_s.$$

1. *Fast Fourier Transform* : en $\Theta(N \log N)$ pour être précis

Ainsi, le résultat de la fonction MATLAB `fft(x)` est une liste de N coefficients X_n représentant $\widehat{x}(nf_s)$ entre 0 et f_e.

Afin de tracer un spectre entre $-\frac{f_e}{2}$ et $\frac{f_e}{2}$ dans lequel f_s réapparaît, vous utiliserez la fonction fournie :

`[X,f] = didacticfft(x,t)`.

Elle utilise en entrée, en plus du signal `x`, le tableau d'instants `t` ; et renvoie `X` : l'approximation numérique de la transformée de Fourier de `x`, ainsi que `f` : le tableau des positions fréquentielles des raies de `X`.

1. Exécutez le fichier `examples` qui permet de construire six signaux ; observez-les bien, puis observez attentivement leurs spectres d'amplitudes.

   Tirez le maximum de conclusions que vous transcrirez dans votre journal de bord (notamment l'adéquation avec ce que prédit la théorie pour les signaux connus), testez d'autres signaux, d'autres valeurs de `N`, `tE` ou de `f0`.

B) Interpolation

Dans les applications (notamment logicielles), il est extrêmement fréquent que l'on manipule, non pas un signal continu $x(t)$, mais plutôt sa discrétisation

$$x_n := x(nT_s), \qquad n = 0, \ldots, N-1.$$

Une fois ce signal échantillonné manipulé de façon appropriée, il est alors souvent nécessaire de regénérer un signal continu (par exemple pour le transmettre sur un canal de communication physique, qui est *in fine* analogique).

La question est alors : *comment reconstituer (fidèlement) un signal temporel à partir de ses échantillons* ?

Le problème ne semble pas, de prime abord, bien compliqué et on pourrait se contenter d'une reconstitution constante par morceaux, qui « collera » d'autant mieux au signal initial que T_s est petit.

Par exemple : considérons sur l'intervalle $[0,10]$ le signal

$$x(t) = \cos(t) + \sin(5t)\,e^{-\frac{1}{10}t^2} + 0{,}6\cos(6t)\,e^{-\frac{1}{5}(t-6)^2}$$

et stockons dans `samples` sa version échantillonnée sur un certain nombre N de points.

```
tmin = 0; tmax = 10;
Nmax = 2^15;                    % inner precision, should be large compared to N
t = linspace(tmin,tmax,Nmax);

x = cos(t) + sin(5*t).*exp(-t.^2/10) + .6*cos(6*t).*exp(-(t-6).^2/5);

N = 2^4;                        % number of sample points, divisor of Nmax
samples = x(1:Nmax/N:Nmax);
```

On peut fabriquer une approximation constante par morceaux de $x(t)$ à l'aide de portes de largeur T_s dont l'amplitude sera donnée par nos échantillons. Vous devrez préalablement définir une porte unitaire dans un fichier `P.m`.

```
Ts = (tmax - tmin)/N;          % sample period
fs = 1/Ts;                     % sample frequency

xrec = zeros(1,Nmax);

for i = 1:N
    xrec = xrec + samples(i) * P(fs*t - i + 1);  % where P is the unit window function
end
```

2. Porter sur un même graphe le signal initial `x` et sa version reconstituée `xrec`. À partir de quelle valeur de N l'approximation vous semble-t-elle raisonnable ?

Ceci dit : dans bien des applications, nous ne sommes pas tant intéressés à bien approximer les *valeurs* du signal initial, mais plutôt de bien reconstituer son *spectre* (par exemple en traitement audio : c'est ce que nos oreilles entendent).

3. Reprendre la question précédente du point de vue fréquentiel. Pour quelle valeur de N la différence de spectre entre `x` et `xrec` commence-t-elle à s'atténuer ? Sauriez-vous expliquer ce qui se passe ?

Si on met les choses en équations, la reconstitution considérée ci-dessus est de la forme

$$x_{\text{rec}}(t) = \sum_n x_n \, \Pi_{T_s}(t - nT_s) = \sum_n x_n \, \Pi_1(f_s t - n).$$

Il est possible que de meilleurs résultats puissent être obtenus en utilisant comme fonctions de base pour notre reconstitution autre chose que des portes. La *formule d'interpolation de Whittaker* nous propose d'utiliser plutôt des sinus cardinaux :

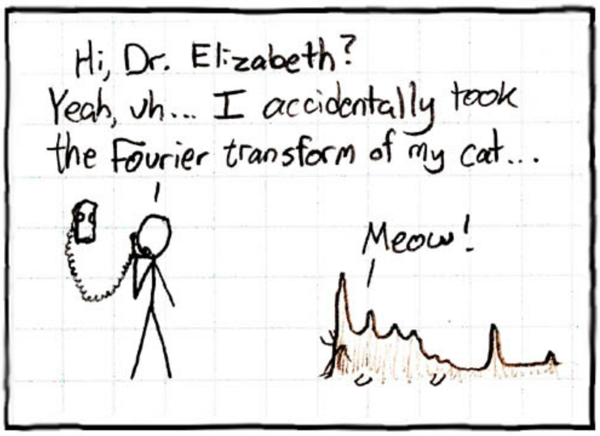
$$x_{\text{sinc}}(t) := \sum_n x_n \, \widetilde{\text{sinc}}(f_s t - n),$$

où $\widetilde{\text{sinc}}$ est la fonction sinus cardinal normalisée pour avoir ses zéros aux valeurs entières de son argument :

$$\widetilde{\text{sinc}}(x) := \text{sinc}(\pi x) = \begin{cases} \dfrac{\sin(\pi x)}{\pi x} & x \neq 0, \\ 1 & x = 0; \end{cases}$$

c'est cette version normalisée que l'on retrouve dans MATLAB sous l'appellation `sinc`.

4. Discuter de la qualité de la reconstitution x_{sinc} obtenue ainsi pour différentes valeurs de N, en prenant bien soin d'observer ce qui se passe à la fois du point de vue temporel et fréquentiel.



https://xkcd.com/26