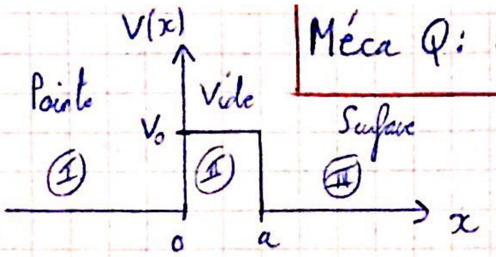
Méca Q : Calcul du coef. de Transmission

⊙ Système :



⊙ Equation de Schrödinger indép. du tps à 1D : $-\frac{\hbar^2}{2m} \cdot \frac{\partial^2 \varphi(x)}{\partial x^2} + V(x).\varphi(x) = E.\varphi(x)$

(I) $\frac{\partial^2 \varphi_P(x)}{\partial x^2} + \left(\frac{2mE}{\hbar^2}\right)^{k^2} \cdot \varphi_P(x) = 0 \xrightarrow{\text{Sol. générale}} \varphi_P(x) = A.\, e^{ikx} + B.\, e^{-ikx}$

(II) $\frac{\partial^2 \varphi_V(x)}{\partial x^2} - \left(\frac{2m(V_0 - E)}{\hbar^2}\right)^{\alpha^2} = 0 \Longrightarrow \varphi_V(x) = C.\, e^{\alpha x} + D.\, e^{-\alpha x}$

(III) $\frac{\partial^2 \varphi_S(x)}{\partial x^2} + k^2 \cdot \varphi_S(x) = 0 \Longrightarrow \varphi_S(x) = E.\, e^{ikx} + F.\, e^{-ikx}$

⚠ Rq : → On choisit de décrire une onde se déplaçant dans le sens des x croissant par la convention suivante sur le signe : e^{-ikx}.

→ Choisir l'autre convention ne change rien ... Tant que l'on est cohérent ^^

→ changer de convention en cours de calcul est suicidaire. Bref, soyez attentif.

⊙ Raccordement : → La fonction d'onde doit être continue.

→ Sa dérivée première également car la dérivée seconde intervient dans l'eq. de Schrödinger

En $x = 0$: (interface (I)/(II))

$$\begin{cases} \varphi_P(0) = \varphi_V(0) \\ \varphi_P'(0) = \varphi_V'(0) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} \boxed{A + B = C + D} \quad (1) \\ ik(A - B) = \alpha.(C - D) \end{cases}$$

$$\hookrightarrow \boxed{A - B = \frac{\alpha}{ik}(C - D)} \quad (2)$$

et

En $x = a$: (interface (II)/(III))

$$\begin{cases} \varphi_V(a) = \varphi_S(a) \\ \varphi_V'(a) = \varphi_S'(a) \end{cases}$$

$$\downarrow$$

$$\begin{cases} C.e^{\alpha a} + D.e^{-\alpha a} = E.e^{ika} + F.e^{-ika} \\ \hookrightarrow \boxed{C.e^{\alpha a} + D.e^{-\alpha a} = F.e^{-ika}} \quad (3) \\ \alpha C e^{\alpha a} - \alpha D e^{-\alpha a} = -ik\, F.e^{-ika} \\ \hookrightarrow \boxed{D.e^{-\alpha a} - C.e^{\alpha a} = \frac{ik}{\alpha} F.e^{-ika}} \quad (4) \end{cases}$$

Rq : Avec la convention e^{-ikx} vers les x croissant, on doit avoir $E = 0$ car il n'y a pas d'onde réfléchie en $+\infty$ (venant de $+\infty$).

Avec l'autre convention on a $F = 0$, pour la même raison.

⊙ Expression du coef. de transmission, T : On cherche à écrire une expression pour T.

On sait que $R+T=1$. Cette relation la conservation de l'énergie. R et T sont donc des coef. en énergie.

L'énergie (comme l'intensité) est une grandeur proportionnelle à l'amplitude au carré du signal. φ étant une fonction complexe, on prendra le module au carré.

T doit correspondre à la "proportion" d'énergie transmise de la région (I) vers la (III).

L'onde | incidente en région | (I) a pour amplitude, B (avec ma convention).
| transmise | (III) , F.

On cherche à construire T, tq $0<T<1$ et $\begin{cases} T=0 \text{ qd } F=0 \\ T=1 \text{ qd } F=B \end{cases}$

$\Rightarrow$ On ne peut donc écrire qu'une seule relation : $\boxed{T=\dfrac{|F|^2}{|B|^2}}$

Rq : i) Avec un raisonnement semblable, on écrirait : $R=\dfrac{|A|^2}{|B|^2}$ pour le coef. de réflexion R.

ii) Avec l'autre convention on a : $T=\dfrac{|E|^2}{|A|^2}$ et $R=\dfrac{|B|^2}{|A|^2}$

⊙ Calcul de T :

Avant de se lancer dans le calcul, on regarde ce qu'on a :

i) équa° (1), (2), (3) et (4) $\Rightarrow$ 4 équations et 5 inconnues. On cherche $T=\dfrac{|F|^2}{|B|^2}$, qui fait intervenir 2 inconnues $\Rightarrow$ C'est jouable !

ii) En faisant des combinaisons "simples" entre les équations, on cherche à établir une stratégie pour mener ce calcul. On voit que : (1) − (2) donne 2B en fonction de C et D

(3) + (4) donne D en fonction de F

(3) − (4) donne C en fonction de F

$\Rightarrow$ On devrait donc pouvoir exprimer 2B en fonction de F, puis $\dfrac{F}{B}$.

$\Rightarrow$ GO !

1-2 : $2B = C + D - \frac{\alpha}{ik}(C-D)$

3+4 : $2D \cdot e^{-\alpha a} = F \cdot \left(1+\frac{ik}{\alpha}\right) \cdot e^{-ika}$

$\hookrightarrow \underline{D = \frac{F}{2} \cdot e^{+\alpha a} \cdot \left(1+\frac{ik}{\alpha}\right) \cdot e^{-ika}}$

3-4 : $2C\, e^{\alpha a} = F \cdot \left(1-\frac{ik}{\alpha}\right) \cdot e^{-ika}$

$\hookrightarrow \underline{C = \frac{F}{2} e^{-\alpha a} \cdot \left(1-\frac{ik}{\alpha}\right) \cdot e^{-ika}}$

On injecte dans 1 - 2

Ce qui donne :

$$2B = \frac{F}{2} e^{-\alpha a}\left(1-\frac{ik}{\alpha}\right) e^{-ika} + \frac{F}{2} e^{+\alpha a}\left(1+\frac{ik}{\alpha}\right) e^{-ika}$$
$$- \frac{\alpha}{ik}\left[\frac{F}{2} e^{-\alpha a}\left(1-\frac{ik}{\alpha}\right) e^{-ika} - \frac{F}{2} e^{\alpha a}\left(1+\frac{ik}{\alpha}\right) e^{-ika}\right]$$

⚠ On factorise par $\frac{F}{2} e^{-ika}$ et on développe $e^{\pm \alpha a}$ sur $\left(1 \pm \frac{ik}{\alpha}\right)$

$$2B = \frac{F}{2} e^{-ika} \cdot \left[e^{-\alpha a} - \frac{ik}{\alpha} e^{-\alpha a} + e^{+\alpha a} + \frac{ik}{\alpha} e^{\alpha a} \right.$$
$$\left. - \frac{\alpha}{ik}\left(e^{-\alpha a} - \frac{ik}{\alpha} e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} - \frac{ik}{\alpha} e^{\alpha a} \right) \right]$$

$e^{-\alpha a} + e^{+\alpha a} = 2\, ch(\alpha a)$; $- \frac{ik}{\alpha} e^{-\alpha a} + \frac{ik}{\alpha} e^{\alpha a} = \frac{ik}{\alpha} \cdot 2 \cdot sh(\alpha a)$

$e^{-\alpha a} - e^{\alpha a} = -2 \cdot sh(\alpha a)$; $- \frac{ik}{\alpha} e^{-\alpha a} - \frac{ik}{\alpha} e^{\alpha a} = -\frac{ik}{\alpha}\, 2\, ch(\alpha a)$

On identifie les fonctions trigo hyperboliques ⇒ Rappel :

$$sh(x) = \frac{e^{x} - e^{-x}}{2}$$
$$ch(x) = \frac{e^{x} + e^{-x}}{2}$$

Rq : $ch^2(x) - sh^2(x) = 1$

$$\frac{B}{F} = \frac{1}{4} \cdot e^{-ika} \cdot \left[2\, ch(\alpha a) + 2\frac{ik}{\alpha}\, sh(\alpha a) - \frac{\alpha}{ik}\left(-2\, sh(\alpha a) - 2\frac{ik}{\alpha}\, ch(\alpha a) \right) \right]$$

On développe le $\frac{1}{4}$ et le $-\frac{\alpha}{ik}$, on regroupe les ch entre eux idem pour les sh puis on prend l'inverse

$$\frac{F}{B} = \frac{e^{+ika}}{ch(\alpha a) + i\left(\frac{k}{\alpha} - \frac{\alpha}{k}\right)\frac{sh(\alpha a)}{2}}$$

On veut $T = \frac{|F|^2}{|B|^2}$ or $\begin{cases} |z|^2 = |a+ib|^2 = a^2+b^2 \\ |z|^2 = |\rho e^{i\theta}|^2 = \rho^2 \end{cases}$

$$T = \frac{1^2}{ch^2(\alpha a) + \left(\frac{k}{\alpha} - \frac{\alpha}{k}\right)^2 \cdot \frac{sh(\alpha a)}{4}}$$

$ch^2 - sh^2 = 1$ ⊕ factorise par sh^2

$$T = \frac{1}{1 + \underbrace{\left[1 + \left(\frac{k}{\alpha} - \frac{\alpha}{k}\right)^2 \frac{1}{4}\right]} sh^2(\alpha a)}$$

$$\hookrightarrow 1 + \left(\frac{k^2}{\alpha^2} - \frac{2k\alpha}{\alpha k} + \frac{\alpha^2}{k^2}\right)\frac{1}{4} = 1 + \frac{k^2}{4\alpha^2} - \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{4k^2}$$

$$= \frac{k^2}{(2\alpha)^2} + \frac{1}{2} + \frac{\alpha^2}{(2k)^2}$$

$$= \left(\frac{k}{2\alpha} + \frac{\alpha}{2k}\right)^2 = \left(\frac{k^2+\alpha^2}{2\alpha k}\right)^2$$

$$\boxed{T = \frac{1}{1 + \left(\frac{k^2+\alpha^2}{2\alpha k}\right)^2 \cdot sh^2(\alpha a)}}$$

Enjoy your new powers!