Inter-

Consignes :

- Vous disposez d'**une heure** pour répondre aux trois questions reliées suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Soyez **concis** et **précis** dans vos réponses et **justifications**.

Exercice 1

Énoncé

Soit $f(t) = H(t) \cdot e^{-t}$ une exponentielle décroissante causale et $e(t)$ le signal temporel défini par

$$e(t) = \begin{cases} \frac{1}{\varepsilon} & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant \varepsilon, \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

pour un certain $\varepsilon > 0$. Évaluez le produit de convolution $(e * f)(t)$ en utilisant directement la définition.

D'après la définition de la convolution, on peut évaluer le produit à l'instant t comme

$$(e * f)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} e(u) f(t-u)\,\mathrm{d}u \qquad \text{ou} \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} e(t-u) f(u)\,\mathrm{d}u$$

(principe RTMI). Les deux expressions peuvent être utilisées pour évaluer le produit, choisissez votre préférée ; personnellement ce serait ici la première. En y remplaçant $e(u)$ par son expression, on a

$$(e * f)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} f(t-u)\,\mathrm{d}u.$$

La fonction $f(t-u)$ étant nulle sauf pour $u \leqslant t$, on distingue trois cas selon la position relative des intervalles $[0, \varepsilon]$ et $]-\infty, t]$:

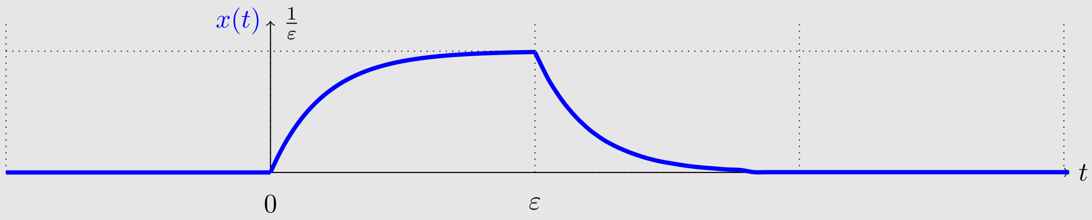
- si $t \leqslant 0$: les supports sont disjoints, on a $(e * f)(t) = 0$ (on obtient donc un signal causal) ;
- si $0 \leqslant t \leqslant \varepsilon$: on a

$$(e * f)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^t e^{-(t-u)}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-t}}{\varepsilon} \cdot e^u \Big|_0^t = \frac{e^{-t}}{\varepsilon}(e^t - 1) = \frac{1 - e^{-t}}{\varepsilon};$$

- finalement, si $t \geqslant \varepsilon$ on trouve

$$(e * f)(t) = \frac{1}{\varepsilon} \int_0^{\varepsilon} e^{-(t-u)}\,\mathrm{d}u = \frac{e^{-t}}{\varepsilon} \cdot e^u \Big|_0^{\varepsilon} = e^{-t} \cdot \frac{e^{\varepsilon} - 1}{\varepsilon}.$$

Dans tous les cas, on trouve l'allure suivante pour le produit de convolution :



Exercice 2

<u>Énoncé</u>

Résoudre à l'aide la transformée de Laplace, l'équation différentielle avec conditions initiales :

$$y'(t) + y(t) = e(t), \qquad y(0) = 0.$$

Si on prend la transformée de part et d'autre de l'égalité, on obtient dans le domaine de Laplace :

$$pY(p) + Y(p) = E(p), \qquad \text{d'où} \qquad Y(p) = \frac{E(p)}{1+p},$$

où $E(p)$ est la transformée de $e(t)$. Explicitons celle-ci : puisque

$$e(t) = \frac{1}{\varepsilon}(H(t) - H(t-\varepsilon)),$$

on trouve d'après le formulaire

$$E(p) = \frac{1}{\varepsilon}\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-\varepsilon p}}{p}\right) = \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p}.$$

Pour expliciter $Y(p)$ on utilise alors la décomposition en éléments simples

$$\frac{1}{p(p+1)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$$

pour obtenir

$$Y(p) = \frac{E(p)}{1+p} = \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p(p+1)} = \frac{1-e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon}\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$

Par transformée inverse, si on note $z(t) = H(t)(1-e^{-t})$ (le signal dont la transformée est $\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}$), on trouve

$$y(t) = \frac{1}{\varepsilon}(z(t) - z(t-\varepsilon)).$$

Note : en regardant bien la valeur de cette fonction sur les trois intervalles $]-\infty, 0]$, $[0, \varepsilon]$ et $[\varepsilon, +\infty[$, on constate qu'il s'agit de nulle autre que la convolution $e * f$ de la première question.

Exercice 3

Énoncé

Vérifier que la fonction f de la question 1 satisfait l'équation différentielle :

$$f'(t) + f(t) = \delta(t).$$

Comment exprimer alors la solution y de la question 2 en fonction de e et f ? Et que se passe-t-il lorsque $\varepsilon \to 0$?

Puisque $f(t) = e^{-t}H(t)$, on a par la formule de dérivée d'un produit

$$f'(t) = e^{-t}H'(t) - e^{-t}H(t) = e^{-t}\delta(t) - e^{-t}H(t) = \delta(t) - f(t),$$

donc effectivement $f' + f = \delta$.

On peut donc affirmer que f est la réponse impulsionnelle du filtre qui, lorsqu'un signal $x(t)$ est soumis en entrée, renvoie la solution $y(t)$ de l'équation différentielle $y' + y = x$. Or c'est un fait général que la sortie d'un tel filtre est obtenue en convoluant l'entrée avec la réponse impulsionnelle :

$$y = x * f.$$

Dans l'exercice 2, on a $x = e$, et donc bien

$$y = e * f.$$

Dit autrement : sachant que

$$Y(p) = E(p) \cdot \frac{1}{1+p} = E(p) \cdot F(p),$$

on a par transformée inverse $y = e * f$ puisque Laplace transforme convolution en multiplication.

Pour la limite quand $\varepsilon \to 0$, on peut la chose de plusieurs points de vue (bien sûr compatibles !).

- Dans le domaine temporel, on remarque que $e(t) \to \delta(t)$ quand $\varepsilon \to 0$ (support tendant vers $\{0\}$, aire sous la courbe normalisée à 1), et d'ailleurs la fonction $y(t)$ de la question 2 tend bien vers $e^{-t}H(t)$, que l'on a vu être la réponse impulsionnelle ;
- Dans le domaine opérationnel, la règle de l'Hospital (ou un développement limité) nous renseigne sur le fait que

  $$E(p) = \frac{1 - e^{-\varepsilon p}}{\varepsilon p} \longrightarrow 1 \qquad \text{quand} \qquad \varepsilon \to 0,$$

  de sorte que

  $$Y(p) = \frac{E(p)}{1+p} \longrightarrow \frac{1}{1+p}$$

  et on retrouve encore à la limite la réponse impulsionnelle $f(t) = e^{-t}H(t)$.

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t) e^{-pt}\,\mathrm{d}t$	
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$	
$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{F(p)}{p}$	
$tf(t)$	$-F'(p)$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbf{N})$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(s)\,\mathrm{d}s$	
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$	$(a \in \mathbf{C})$
$f(t-a)$	$e^{-pa} F(p)$	$(a \geqslant 0)$
$f(kt)$	$\dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pF(p) = f(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pF(p) = f(+\infty)$$

original causal $f(t)$	image $F(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbf{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\,\mathrm{d}y$$