Examen final

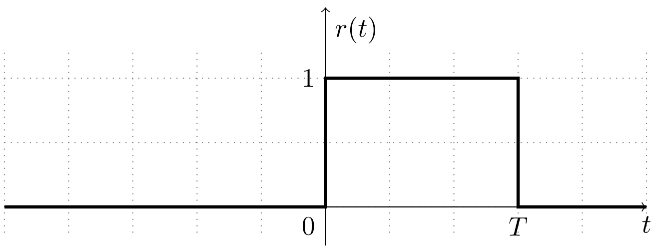
Consignes :

- Vous disposez de **3 h** pour répondre aux **3 × 6** questions (reliées) suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Un formulaire sur les transformées de Fourier et Laplace est fourni en annexe.
- Soyez **clairs** et **précis** et dans vos réponses et **justifications**.
- Et surtout **exprimez-vous** sur les sujets proposés pour démontrer votre compréhension des concepts !

*

Exercice 1

Pour $T > 0$, considérons le signal rectangulaire suivant :



a) Calculer directement (en utilisant la définition) la transformée de Fourier $\widehat{r}(f)$ de $r(t)$.

$$\widehat{r}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} r(t)\, e^{-2\pi jft}\, \mathrm{d}t = \int_0^T e^{-2\pi jft}\, \mathrm{d}t \left\{ \begin{array}{l} \overset{f\neq 0}{=} \left. \dfrac{e^{-2\pi jft}}{-2\pi jf} \right|_0^T = \dfrac{1 - e^{-2\pi jfT}}{2\pi jf} \\ \overset{f=0}{=} \displaystyle\int_0^T \mathrm{d}t = T \end{array} \right\} = Te^{-\pi jfT}\, \mathrm{sinc}(\pi fT).$$

b) Confirmez le résultat obtenu en a) en utilisant les propriétés du formulaire.

L'approche la plus naturelle est d'écrire $r(t) = \Pi_T(t - \frac{T}{2})$ (porte de largeur T retardée de $\frac{T}{2}$), de sorte que

$$\widehat{r}(f) = e^{-2\pi j \frac{T}{2} f}\, \widehat{\Pi_T}(f) = e^{-\pi jfT}\, T\, \mathrm{sinc}(\pi Tf),$$

ce qui est bien cohérent avec le calcul précédent.

c) Démontrez que la transformée d'un signal impair est impaire : si $\forall_t\ x(-t) = -x(t)$ alors $\forall_f\ \widehat{x}(-f) = -\widehat{x}(f)$.

Si on fait le changement de variables $u = -t$ dans la définition de la transformée :

$$\widehat{x}(-f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi j(-f)t}\, \mathrm{d}t = \int_{+\infty}^{-\infty} x(-u)\, e^{-2\pi jfu}(-\,\mathrm{d}u) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(-u)\, e^{-2\pi jfu}\, \mathrm{d}u.$$

En utilisant l'hypothèse que $x(-u) = -x(u)$, on reconnaît bien dans le membre de droite $-\widehat{x}(f)$.

d) Soit $\mathrm{sg}(t)$ la fonction « signe » définie par $\mathrm{sg}(t) = \begin{cases} +1 & \text{si } t > 0, \\ 0 & \text{si } t = 0, \\ -1 & \text{si } t < 0. \end{cases}$

En considérant sa dérivée $\mathrm{sg}'(t) = 2\,\delta(t)$, montrer que sa transformée est de la forme

$$\widehat{\mathrm{sg}}(f) = \frac{1}{\pi j f} + A\,\delta(f)$$

et expliquer à l'aide de c) que forcément $A = 0$.

En prenant la transformée de part et d'autre de l'identité $\mathrm{sg}'(t) = 2\,\delta(t)$:

$$2\pi j f\,\widehat{\mathrm{sg}}(f) = 2\widehat{\delta}(f) = 2$$

de sorte que l'on trouve

$$\widehat{\mathrm{sg}}(f) = \frac{1}{\pi j f} + A\,\delta(f),$$

où A est une constante (*a priori* complexe) à déterminer.

Mais la fonction signe étant impaire, on sait que sa transformée doit l'être également, de sorte que :

$$\frac{1}{-\pi j f} + A\,\delta(f) = -\left(\frac{1}{\pi j f} + A\,\delta(f)\right)$$

d'où on tire $2A\,\delta(f) = 0$, soit $A = 0$.

e) En exprimant l'échelon d'Heaviside $H(t)$ en fonction de $\mathrm{sg}(t)$, en déduire $\widehat{H}(f)$ et utiliser l'écriture

$$r(t) = \big(\delta(t) - \delta(t-T)\big) * H(t)$$

pour confirmer encore une fois votre formule pour $\widehat{r}(f)$.

Puisque l'échelon peut s'exprimer $H(t) = \frac{1}{2}(1 + \mathrm{sg}(t))$, on trouve à l'aide de la question précédente

$$\widehat{H}(f) = \frac{1}{2}\left(\widehat{1}(f) + \widehat{\mathrm{sg}}(f)\right) = \frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{\pi j f}\right).$$

Grâce à la formule proposée pour $r(t)$ on trouve donc

$$\widehat{r}(f) = \big(1 - e^{-2\pi T f}\big)\widehat{H}(f) = \big(1 - e^{-2\pi T f}\big)\frac{1}{2}\left(\delta(f) + \frac{1}{\pi j f}\right) = \frac{1}{2}\left(\underbrace{(1 - e^{0})}_{0}\delta(f) + \frac{(1 - e^{-2\pi T f})}{\pi j f}\right),$$

ce qui nous donne pour la troisième fois la même chose.

f) Que dire que la limite de $\dfrac{r(t)}{T}$ lorsque $T \to 0$? (interprétations temporelle et fréquentielle)

Côté temporel : $\frac{r(t)}{T}$ est une porte d'aire 1 supportée sur $[0, T]$; à la limite, quand $T \to 0$, on obtient un signal supporté sur $\{0\}$ et d'aire 1, soit $\delta(t)$.

Côté fréquentiel : la transformée de $\frac{r(t)}{T}$ est $e^{-\pi T f}\,\mathrm{sinc}(\pi T f)$; quand $T \to 0$ on obtient $e^0\,\mathrm{sinc}\,0 = 1$, qui est bien la transformée de $\delta(t)$.

$*$

Exercice 2

Un bloqueur d'ordre 0 est un filtre dont la sortie $y(t)$ est reliée à l'entrée $x(t)$ par la formule

$$y(t) = \int_{t-T}^{t} x(u)\,\mathrm{d}u.$$

a) Calculer la réponse impulsionnelle de ce filtre et montrer que $y(t) = r(t) * x(t)$.

La réponse impulsionnelle est la sortie $y(t)$ obtenue lorsque l'on met en entrée $x(t) = \delta(t)$. Soit, ici :

$$\int_{t-T}^{t} x(u)\,\mathrm{d}u = \int_{t-T}^{t} \delta(u)\,\mathrm{d}u = \left\{\begin{matrix} 1 & \text{si } t-T<0<t \\ 0 & \text{sinon} \end{matrix}\right\} = r(t).$$

Puisque le bloqueur est un filtre linéaire invariant, on sait qu'en général sa sortie est obtenue en convoluant l'entrée avec la réponse impulsionnelle :

$$y(t) = r(t) * x(t).$$

b) Déterminer la fonction de transfert $R(p)$ du filtre dans le domaine de Laplace et vérifier que le théorème de la valeur initiale est satisfait pour celle-ci.

En d'autres termes, calculer la transformée de Laplace de $r(t) = H(t) - H(t-T)$. On a, d'après le formulaire :

$$R(p) = \frac{1}{p} - e^{-pT}\frac{1}{p} = \frac{1-e^{-pT}}{p}.$$

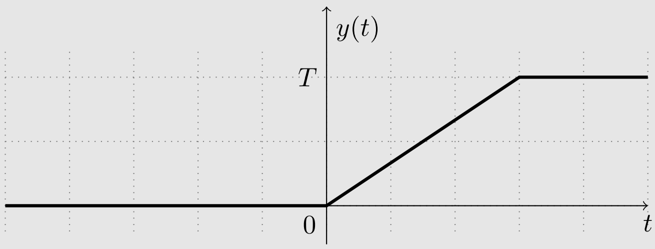
Théorème de la valeur initiale :

$$\lim_{p\to\infty} pR(p) = \lim_{p\to\infty}(1-e^{-pT}) = 1 - 0 = 1 = r(0^+) \checkmark$$

c) Calculer et représenter graphiquement la sortie de ce filtre lorsque l'entrée $x(t)$ est l'échelon $H(t)$.

Si $x(t) = H(t)$, on aura $y(t) = r(t) * H(t)$, la primitive de $r(t)$ s'annulant en $-\infty$: c'est-à-dire la fonction

$$y(t) = \begin{cases} 0 & t < 0, \\ t & 0 \leqslant t \leqslant T, \\ T & t > T. \end{cases}$$

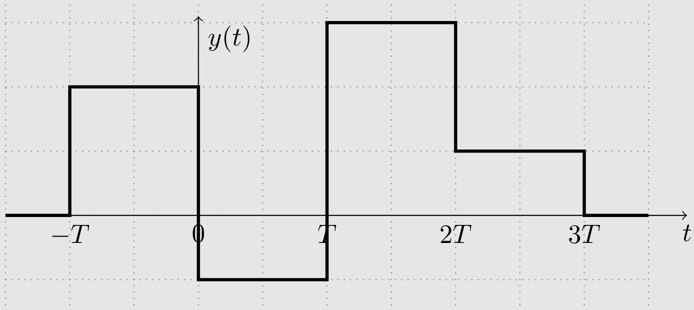


d) Déterminer et représenter graphiquement la sortie du filtre si on met en entrée

$$x(t) = 2\,\delta(t+T) - \delta(t) + 3\,\delta(t-T) + \delta(t-2T).$$

Par superposition linéaire + propriété des retards, on a

$$y(t) = 2\,r(t+T) - r(t) + 3\,r(t-T) + r(t-2T).$$



e) Si l'entrée $x(t)$ est T-périodique, alors $y(t)$ est constant. Expliquer ce fait dans le domaine fréquentiel en utilisant a) et la transformée de Fourier de $r(t)$ déterminée dans l'exercice 1.

On sait que $y(t) = r(t) * x(t)$, de sorte que

$$\widehat{y}(f) = \widehat{r}(f)\,\widehat{x}(f) = T\,e^{-\pi j f T}\ \mathrm{sinc}(\pi f T)\,\widehat{x}(f).$$

Or, si $x(t)$ est T-périodique, on sait que $\widehat{x}(f)$ est un spectre de raies d'amplitudes c_n situées au fréquences f_n multiples de $f_1 = 1/T$. En toutes ces fréquences, le sinus cardinal $\mathrm{sinc}(\pi f T)$ s'annule sauf pour $n = 0$: on trouve donc

$$\widehat{y}(f) = T c_0\,\delta(f).$$

On conclut donc que $y(t)$ est constante et vaut $T c_0 = \displaystyle\int_0^T x(t)\,\mathrm{d}t$, l'aire totale sous une période de $x(t)$.

(Bien sûr on aurait aussi pu donner une explication dans le domaine temporel : si $x(t)$ est T-périodique, l'intégrale de $x(t)$ sur n'importe quel intervalle de longueur T donne la même chose.)

f) Soit $c(t) = \cos^2\left(\dfrac{\pi t}{2T}\right)$. Représenter sur un même graphe :

- $c(t)$, sa version échantillonnée $x(t)$ à la fréquence $f_e = \dfrac{1}{T}$ et la sortie $y(t)$ du bloqueur d'une part ;
- ainsi que les spectres $\widehat{c}(f)$, $\widehat{x}(f)$, $\widehat{y}(f)$ d'autre part.

$$c(t) = \cos^2\left(\frac{\pi t}{2T}\right) = \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cos\left(\frac{\pi t}{T}\right).$$

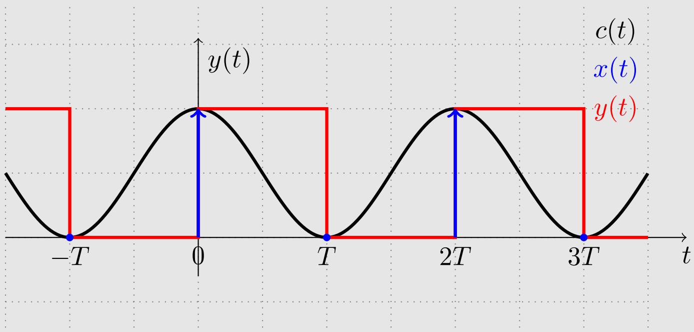
Version échantillonnée :

$$x(t) = c(t)\cdot \mathrm{III}_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c(nT)\,\delta(t-nT) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \cos^2\left(\frac{n\pi}{2}\right)\delta(t-nT) = \mathrm{III}_{2T}(t)$$

réponse du bloqueur :

$$y(t) = x(t) * r(t) = \mathrm{III}_{2T}(t) * r(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} r(t-2nT)$$

une onde carrée de période $2T$.



Spectres :

$$\widehat{c}(f) = \tfrac{1}{2}\delta(f) + \tfrac{1}{4}\delta(f - \tfrac{1}{2T}) + \tfrac{1}{4}\delta(f + \tfrac{1}{2T})$$

$$\widehat{x}(f) = \widehat{c}(f) * \tfrac{1}{T}\mathrm{III}_{\frac{1}{T}}(f) = \tfrac{1}{2T}\mathrm{III}_{\frac{1}{2T}}(f)$$

$$\widehat{y}(f) = \widehat{x}(f)\cdot\widehat{r}(f) = \tfrac{1}{2T}\mathrm{III}_{\frac{1}{2T}}(f)\cdot T e^{-\pi j f T}\,\mathrm{sinc}(\pi f T) = \tfrac{1}{2}\delta(f) - \tfrac{j}{4\pi}\sum_{n\ \text{impair}} \tfrac{1}{n}\,\delta(f - \tfrac{n}{2T})$$

$*$

Exercice 3

Soit $y(t)$ la somme de la série de Fourier de $r(t)$ calculée sur l'intervalle $[0,\, S]$ avec $S > T$.

a) Donner (sans calcul) la valeur en chaque point de $y(t)$.

D'après le théorème de convergence ponctuelle de Dirichlet, $y(t)$ est la S-périodisation de $r(t)$ avec interpolation par valeur moyenne à chaque discontinuité : si $t = nS + s$ avec $n \in \mathbb{Z}$ et $0 \leqslant s < S$, on a

$$y(t) = \begin{cases} 1/2 & s = 0, \\ 1 & 0 < s < T, \\ 1/2 & s = T, \\ 0 & T < s < S. \end{cases}$$

b) Expliquer pourquoi on peut écrire $y(t) = r(t) * Ш_S(t)$.

La S-périodisation de $r(t)$ est

$$\cdots + r(t+S) + r(t) + r(t-S) + r(t-2S) + \cdots = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r(t-nS) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} r(t) * \delta(t-nS) = r(t) * \underbrace{\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nS)}_{Ш_S(t)}.$$

À part pour l'interpolation par valeur moyenne, il s'agit exactement du signal $y(t)$ de la question précédente ; or on considère deux signaux égaux presque partout comme étant équivalents, de sorte qu'effectivement on peut écrire

$$y(t) = r(t) * Ш_S(t).$$

c) Déduire aisément de la formule précédente une expression de $\widehat{y}(f)$ ainsi que les coefficients de Fourier de y.

$$\widehat{y}(f) = \widehat{Ш_S}(f) \cdot \widehat{r}(f) = \tfrac{1}{S} Ш_{\frac{1}{S}}(f) \cdot T e^{-\pi j f T} \operatorname{sinc}(\pi f T) = \tfrac{T}{S} \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(f - \tfrac{n}{S}) e^{-\pi j n \frac{T}{S}} \operatorname{sinc}(\pi n \tfrac{T}{S})$$

Cela nous donne donc les coefficients de Fourier de $y(t)$:

$$c_n = \tfrac{T}{S}\, e^{-\pi j n \frac{T}{S}} \operatorname{sinc}(\pi n \tfrac{T}{S}).$$

d) Que dire de la limite $\dfrac{y(t)}{T}$ quand $T \to 0$, S fixé ? (interprétations temporelle et fréquentielle)

Point de vue temporel : $r(t)$ étant une porte de largeur T et hauteur 1, $\frac{r(t)}{T}$ est une porte d'aire 1 qui tend vers $\delta(t)$ quand $T \to 0$. Sa S-périodisation $\frac{y(t)}{T}$ tend donc vers $Ш_S(t)$ quand $T \to 0$.

Point de vue temporel : quand $T \to 0$, les coefficients de Fourier $\frac{c_n}{T}$ de $\frac{y(t)}{T}$ tendent tous vers

$$\tfrac{1}{S}\, e^0 \operatorname{sinc} 0 = \frac{1}{S}, \qquad \text{donc} \quad \tfrac{1}{T}\widehat{y}(f) \to \tfrac{1}{S} Ш_{\frac{1}{S}}(f) \quad \text{ce qui est cohérent.}$$

e) Dans le cas particulier $S = 2T$, vérifiez la cohérence de votre réponse en c) avec celle de la question 2 f).

Oui ! Alors $\operatorname{sinc}(\frac{\pi n T}{S}) = \operatorname{sinc}(\frac{n\pi}{2})$ s'annule pour toutes les valeurs de n paires non nulles, donc ne survivent que les coefficients de Fourier c_0 et c_n pour n impair.

f) En l'exprimant comme $\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right) \cdot Ш_T(t)$, calculer la transformée de Fourier de

$$\sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \, \delta(t - nT).$$

Effectivement : $(-1)^n = \cos(n\pi)$ est la valeur de $\cos\left(\dfrac{\pi t}{T}\right)$ en $t = nT$, d'où

$$x(t) := \sum_{n\in\mathbb{Z}} (-1)^n \, \delta(t-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \delta(t-nT) = \cos\left(\frac{\pi t}{T}\right) \cdot Ш_T(t),$$

$$\widehat{x}(f) = \frac{1}{2}\left(\delta(f + \tfrac{1}{2T}) + \delta(f - \tfrac{1}{2T})\right) * Ш_{\frac{1}{T}} = \frac{1}{T} \sum_{n \text{ impair}} \delta(f - \frac{n}{2T})$$

$*$

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \displaystyle\int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\displaystyle\int_0^t x(u)\, \mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$tx(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} X(s)\, \mathrm{d}s$	
$e^{at}x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa}X(p)$	$(a \geqslant 0)$
$x(kt)$	$\dfrac{1}{k}X\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pX(p) = x(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pX(p) = x(+\infty)$$

original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Produit de convolution

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)\, x_2(t-u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-v)\, x_2(v)\, \mathrm{d}v$$

Coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} x(t)\, e^{-2\pi j n t/T}\, \mathrm{d}t$$

$$\ast$$

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi j f t}\, \mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi j f t}\, \mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\, \widehat{x_1}(f) + \mu\, \widehat{x_2}(f)$
$x(-t)$ $\overline{x(t)}$	$\widehat{x}(-f)$ $\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$ $e^{2\pi j a t} x(t)$	$e^{-2\pi j a f}\, \widehat{x}(f)$ $\widehat{x}(f-a)$
$\dfrac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $-2\pi j t\, x(t)$	$2\pi j f\, \widehat{x}(f)$ $\dfrac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$ $x_1(t)\, x_2(t)$	$\widehat{x_1}(t)\, \widehat{x_2}(t)$ $(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t) = H\big(t + \frac{a}{2}\big) - H\big(t - \frac{a}{2}\big)$ $\dfrac{1}{1+t^2}$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a f)$ $\pi e^{-2\pi\|f\|}$ $\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(f)$ $\dfrac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f)$