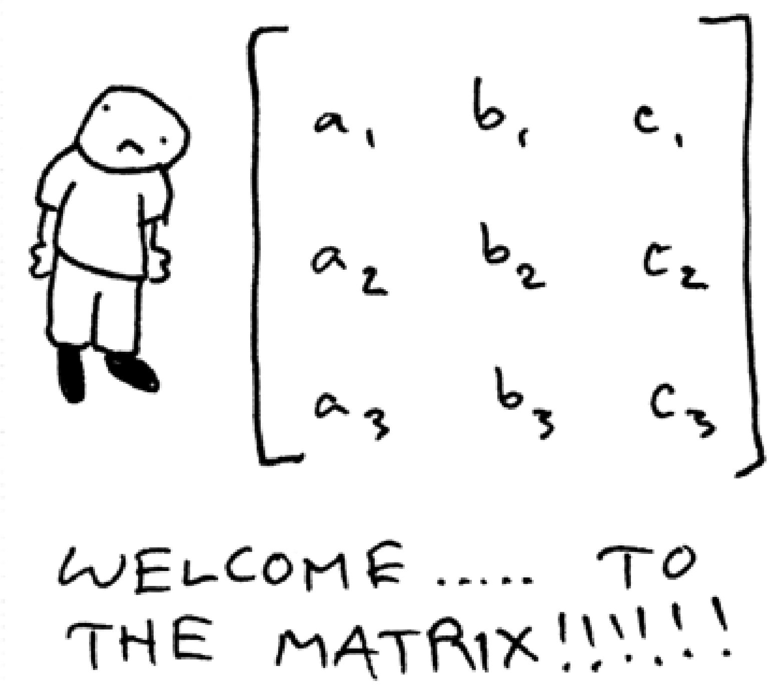
Chapitre VII

Rappels d'algèbre linéaire



Mécanique Quantique
2021-2022 – Semestre 5 – JUNIA ISEN Lille

David Mele
david.mele@junia.com

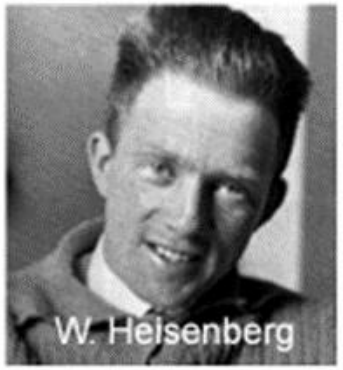
Le but de ce cours

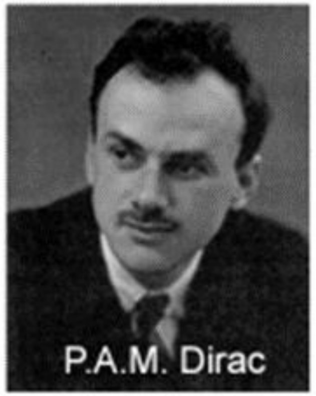
Dégager la structure géométrique de la théorie ondulatoire

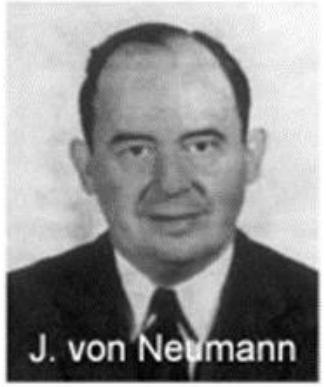
Remplacer l'évolution de fonctions d'onde complexes par des transformation de vecteurs

En déduire une formulation de la mécanique quantique valable pour n'importe quel objet, et pas seulement pour une particule ponctuelle

Formalisme adapté à la fois aux espaces de dimensions infinie (espace des fonctions, position, impulsion…) et aux espaces de dimensions finie (polarisation du photon par ex.).







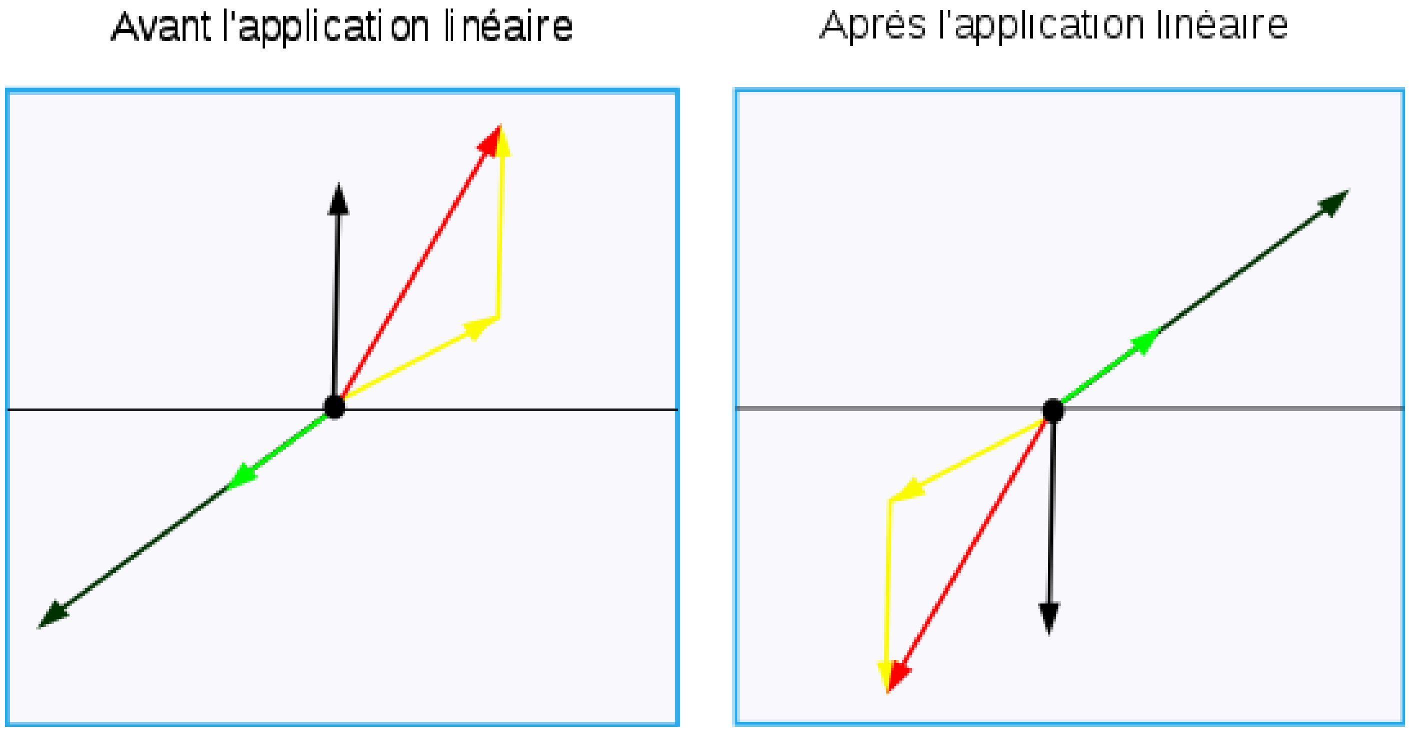
VII.1 Rappels d’algèbre linéaire

A – Applications linéaires

Une application linéaire est une application qui transforme les vecteurs tout en en conservant :

- les propriétés d'addition des vecteurs
- les rapports de colinéarité entre vecteurs

Exemple:



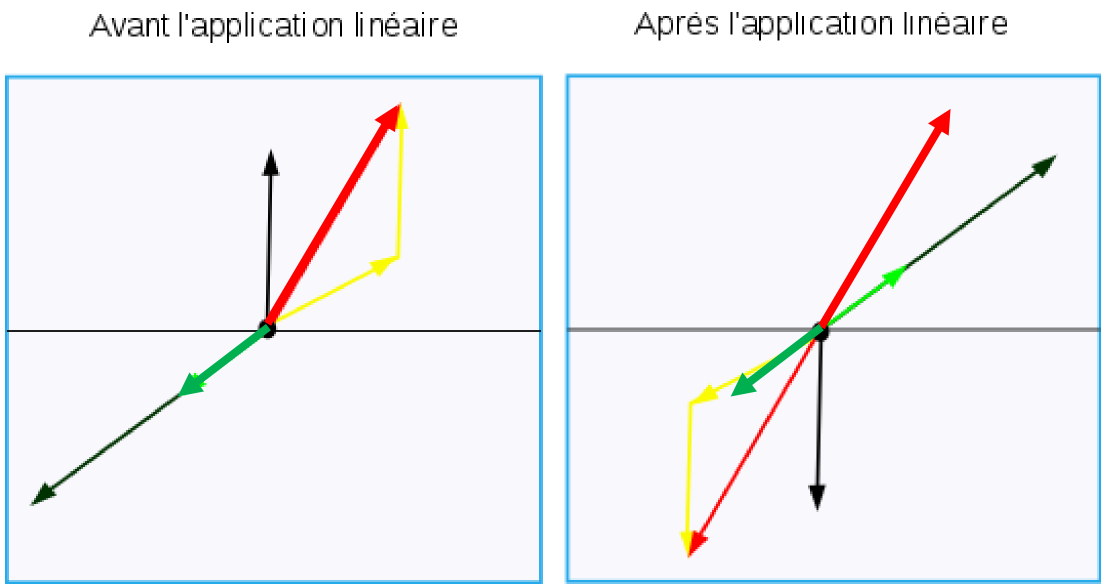
- Le vecteur rouge est la somme des deux vecteurs jaunes avant et après transformation
- De même le vecteur noir est le triple du vecteur vert avant et après la transformation

→ C’est donc bien une application linéaire

VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

B – Vecteur propres et valeurs propres (avec les mains)

- Un vecteur est dit vecteur propre par une application linéaire s'il est non nul et **si l'application ne fait que modifier sa taille sans changer sa direction** (mais il peut changer de sens!).
- Une valeur propre associée à un vecteur propre est le **facteur de modification de taille**, c'est-à-dire le nombre (positif ou négatif) par lequel il faut multiplier le vecteur pour obtenir son image.
- Un **espace propre** associé à une valeur propre est l'ensemble des vecteurs propres qui ont une même valeur propre et le vecteur nul. Ils subissent tous la multiplication par le même facteur.



Exemple:

- Les vecteurs rouges et vert sont bien des vecteurs propres car ils ne changent pas de direction.
- Les valeurs propres associé aux vecteurs propres rouges est vert sont -1
- Ces deux vecteurs propres forment un espace propres

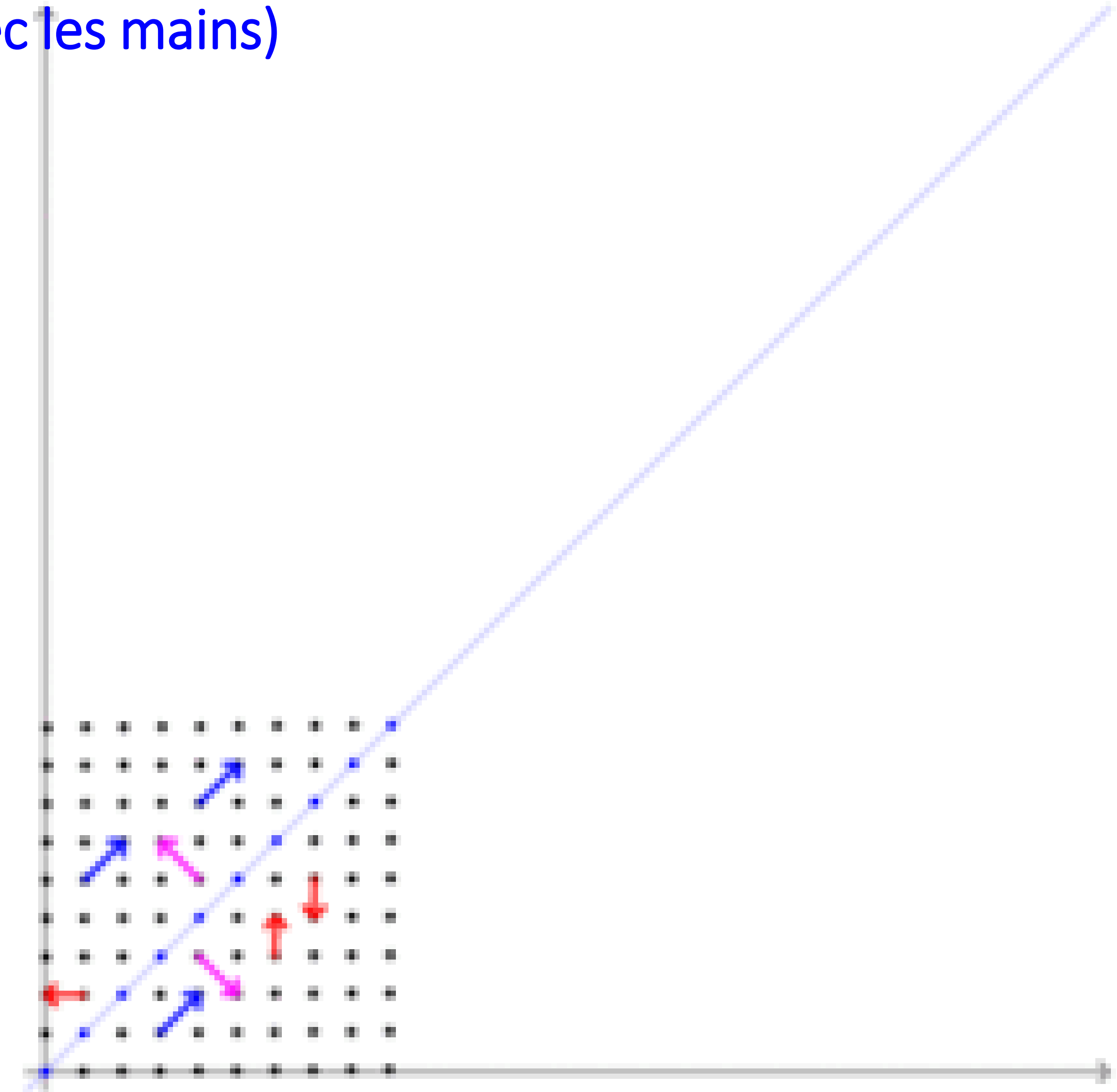
VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

B – Vecteur propres et valeurs propres (avec les mains)

Cette transformation linéaires a **deux directions propres** :

- Elle multiplie par 3 les vecteurs colinéaires en bleu
- Elle multiplie par 1 ceux colinéaires en rose
- Elle modifie la direction des autres vecteurs rouges

→ Les vecteurs bleus et roses sont donc des vecteurs propres de cette transformation linéaire et respectivement associées au valeurs propres 3 et 1



Voir Gif sur https://fr.wikipedia.org/wiki/Valeur_propre_(synthèse)

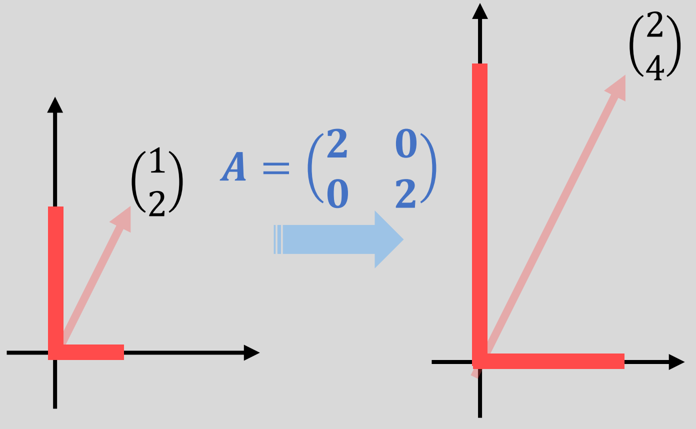
VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

C – Vision matricielle d'une transformation linéaire

En principe, on est capable d'associer une matrice à chacune de ces applications ou transformations linéaires

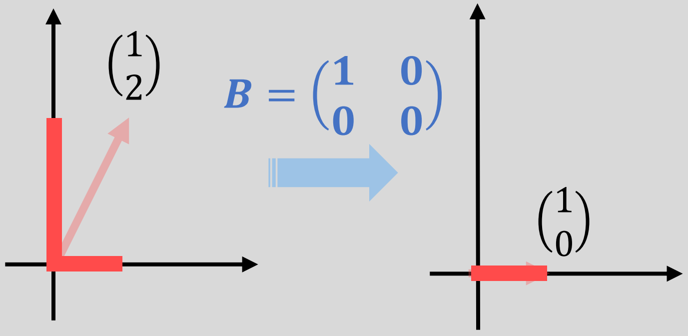
Agir, transformer ou faire un truc avec un vecteur $\longrightarrow$ Matrice

Matrice $\longrightarrow$ Agir, transformer ou faire un truc avec un vecteur



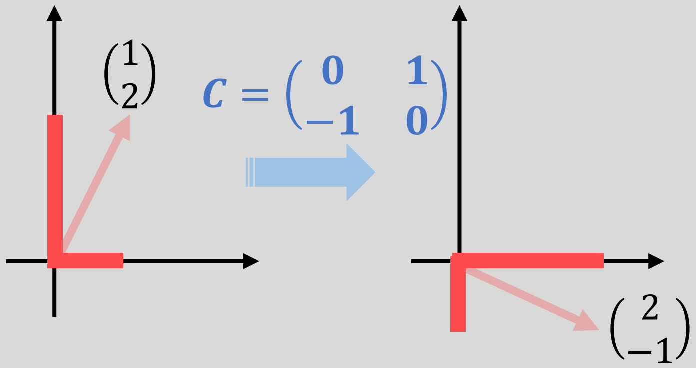
La lettre L est dilatée par un facteur 2. On appelle cette application **l'homothétie vectorielle de rapport 2**

$$\begin{pmatrix}2 & 0\\ 0 & 2\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\4\end{pmatrix}$$



La lettre L est ratatinée sur l'axe horizontal. On appelle cette transformation la **projection sur l'axe horizontal.**

$$\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$$



Le L a tourné de 90° dans le sens des aiguilles d'une montre. **Rotation de $-\pi/2$.**

$$\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\-1\end{pmatrix}$$

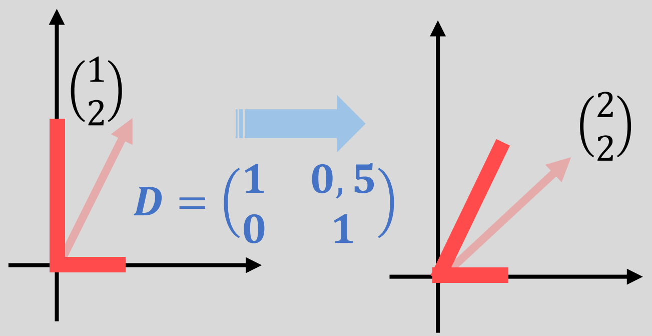
VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

C – Vision matricielle d'une transformation linéaire

En principe, on est capable d'associer une **matrice** à chacune de ces applications ou transformations linéaires

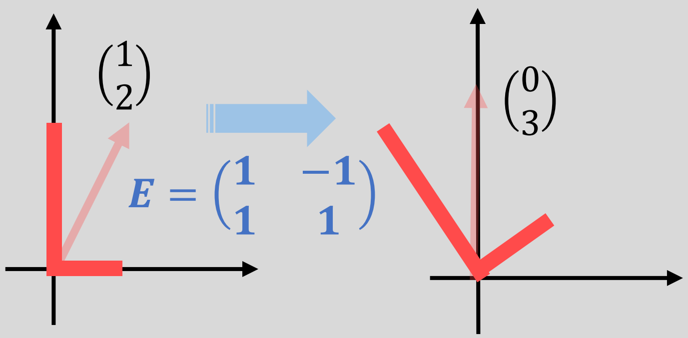
Agir, transformer ou faire un truc avec un vecteur ⇄ Matrice

Voir module de Transformations



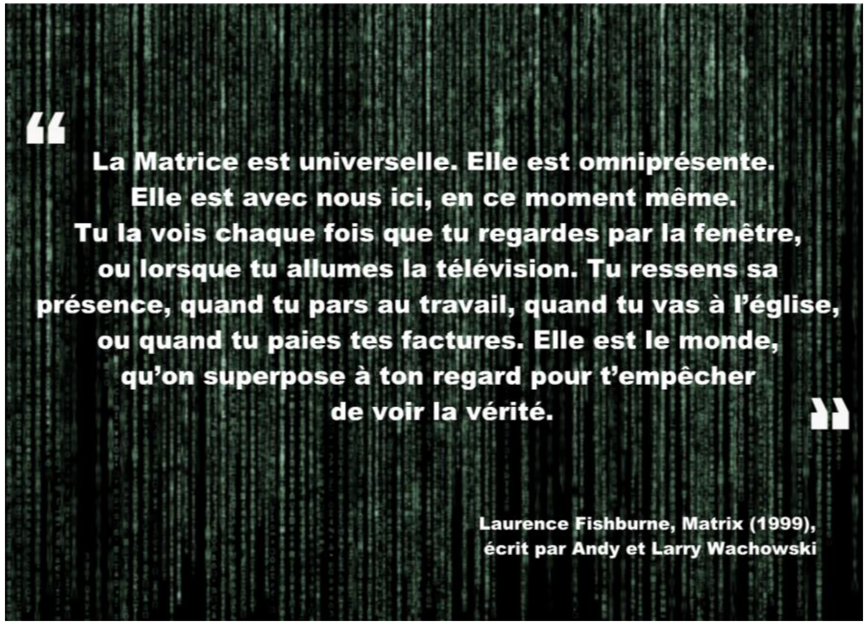
La lettre devient L en italique. Cette transformation est appelée en maths une transvection horizontale. En sciences de l'ingénieur, on parle plutôt d'un **cisaillement horizontal.**

$$\begin{pmatrix}1 & 0,5\\0 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times 1+0,5\times 2\\0\times 1+1\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$$



Le L a tournée de 45∘ dans le sens trigonométrique, mais en plus a été dilaté d'un rapport de √2. Il s'agit d'une **rotation composée par une homothétie vectorielle**

$$\begin{pmatrix}1 & -1\\1 & 1\end{pmatrix}\begin{pmatrix}1\\2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1\times 1-1\times 1\\1\times 1+1\times 2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}0\\3\end{pmatrix}$$



VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

D – Vecteur propres et valeurs propres (avec la tête)

On a vu qu'une transformation linéaire agit comme multiplication par un scalaire **λ** sur la droite définit par certains vecteurs. Et on a vu que de tels vecteurs sont dit **vecteurs propres** pour la transformation de **valeur propre λ.**

Mais comment trouver les vecteurs et valeurs propres d'une transformation linéaires?

Soit une transformation linéaire définit par une matrice $\boldsymbol{A}$ qui agit sur un vecteur $\boldsymbol{u}$

Une application linéaire aux valeurs propres **λ** est donc définie comme:

Valeurs propres
(facteur multiplicateur de la transformation)

Matrice identité

Matrice associé à la transformation linéaire (=opérateur)

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{u}$$

Vecteur sur lequel agit la transformation

$$\boldsymbol{A}\,\boldsymbol{u} - \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I}\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

$$\boxed{(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\,\boldsymbol{I})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}}$$

VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

D – Vecteur propres et valeurs propres (avec la tête)

Soit une transformation linéaire définit par une matrice 2x2 $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix}$ qui agit sur un vecteur 2D $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

Une application linéaire aux valeurs propres **λ** est donc définie comme:

$$(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\,\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$$

$$\left(\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{pmatrix}\right)\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \boldsymbol{0}$$

$$\begin{pmatrix} \boldsymbol{a} - \lambda & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} - \lambda \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{0} \\ \boldsymbol{0} \end{pmatrix}$$

Système de deux équations à résoudre

$$\begin{cases} (a - \lambda)\, x + b\, y = 0 \\ c\, x + (d - \lambda)\, y = 0 \end{cases}$$

Pour trouver les solutions autre que $\begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$, il faut trouver les valeurs λ tel que le **déterminant de cette matrice soit égal à 0**

$$\boxed{det(\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda I})\boldsymbol{u} = \begin{vmatrix} \boldsymbol{a} - \lambda & \boldsymbol{b} \\ \boldsymbol{c} & \boldsymbol{d} - \lambda \end{vmatrix} = 0}$$

$$(a - \lambda)(d - \lambda) - bc = 0$$

$$\lambda^2 - (a + d)\lambda + (ad - bc) = 0$$

Les solutions sont: $(\lambda - \lambda_1)(\lambda - \lambda_2) = 0$

Valeurs propres

VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

D – Vecteur propres et valeurs propres (avec la tête)

Exemple

Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ qui agit sur un vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

Pour trouver les valeurs propres λ de cette application linéaire il faut que le **déterminant de cette matrice soit égal à 0:**

$$\boldsymbol{det}(\,\boldsymbol{A} - \boldsymbol{\lambda}\boldsymbol{I}\,)\,\boldsymbol{u} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad \begin{vmatrix} \mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} - \boldsymbol{\lambda} \end{vmatrix} = \mathbf{0}$$

$$\Rightarrow \quad (\mathbf{1} - \boldsymbol{\lambda})(\mathbf{-1} - \boldsymbol{\lambda}) - \mathbf{3} = \mathbf{0}$$

On trouve comme solutions des valeurs propres $\boxed{\lambda_{1,2} = \pm\mathbf{2}}$

Il ne reste plus qu'à déterminer les vecteurs propres associées à ces valeurs propres

VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

D – Vecteur propres et valeurs propres (avec la tête)

Exemple

Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ qui agit sur un vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

Via $det(\,A\ -\ \lambda\, I\,)\,u = 0$, on a trouvé deux solutions valeurs propres $\lambda = \pm 2$

Pour $\boldsymbol{\lambda_1 = 2}$

Je réécris la matrice avec une des solutions trouvées:

$$\begin{pmatrix} 1 - 2 & 1 \\ 3 & -1 - 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 3 & -3 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

J'ai donc un système de deux équations identiques $\begin{cases} -x + y = 0 \\ 3x - 3y = 0 \end{cases}$

Dont la solution est : $x = y$

On peut donc prendre comme vecteur propre : $\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$

Pour $\boldsymbol{\lambda_2 = -2}$

De même:

$$\begin{pmatrix} 1 + 2 & 1 \\ 3 & -1 + 2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 3 & 1 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \mathrm{x} \\ \mathrm{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

J'ai donc un système de deux équations identiques $\begin{cases} 3x + y = 0 \\ 3x + y = 0 \end{cases}$

Dont la solution est : $y = -3x$

On peut donc prendre comme vecteur propre : $\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{-3} \end{pmatrix}$

VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

D – Vecteur propres et valeurs propres (avec la tête)

Exemple

Soit $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ qui agit sur un vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

Cette transformation linéaire admet deux valeurs propres agissant sur deux vecteurs propres qui satisfont:

$$\boldsymbol{A\, u_n = \lambda_n u_n}$$

$$\overset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \overset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} 2 \\ 2 \end{pmatrix} = \overset{\lambda_2}{2} \overset{u_1}{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}$$

$$\underset{A}{\begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 3 & -1 \end{pmatrix}} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}} = \begin{pmatrix} -2 \\ 6 \end{pmatrix} = \underset{\lambda_2}{-2} \underset{u_2}{\begin{pmatrix} 1 \\ -3 \end{pmatrix}}$$

VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

E – Diagonalisation

Sur l'exemple précédent

On vient de montrer que l'application linéaire $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & -\mathbf{1} \end{pmatrix}$ qui agit sur un vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

Admet deux **valeurs propres:** $\boldsymbol{\lambda_1} = \mathbf{2}$ et $\boldsymbol{\lambda_2} = -\mathbf{2}$

Ainsi que les deux **vecteurs propres:** $\boldsymbol{u_1} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ \mathbf{1} \end{pmatrix}$ et $\boldsymbol{u_2} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} \\ -\mathbf{3} \end{pmatrix}$

On peut introduire une $\boldsymbol{P}$ **la matrice dit de passage** ayant les **vecteurs propres comme colonnes** : $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & -\mathbf{3} \end{pmatrix}$

Alors « *P* **diagonalise** *A* », par un simple calcul : $\boldsymbol{P^{-1}AP}$ (que je détaillerai après) et qui fera apparaitre les valeurs propres sur la diagonale de la matrice dans le même ordre que nous avons placé les colonnes propres pour former *P*.

$$\boldsymbol{P^{-1}AP} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & -\mathbf{2} \end{pmatrix}$$

Valeurs propres

VII.1 Rappels d'algèbre linéaire

E – Diagonalisation

Sur l'exemple précédent

On vient de définir l'application linéaire: $\boldsymbol{A} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}$ qui agit sur un vecteur $\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix}$

Ainsi qu'une ***P* de passage** : $\boldsymbol{P} = \begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix}$ via les vecteurs propres

Pour trouver $\boldsymbol{P^{-1}}$ il faut inverser $\boldsymbol{P}$ tel que $\boldsymbol{P}\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix}$ pour obtenir un nouveau système $\begin{cases} 1x + 1y = x' \\ 1x - 3y = y' \end{cases}$

Si je résous ce système $\begin{pmatrix} \boldsymbol{x} \\ \boldsymbol{y} \end{pmatrix} = \mathbf{P^{-1}} \begin{pmatrix} \boldsymbol{x'} \\ \boldsymbol{y'} \end{pmatrix}$, j'obtiens $\begin{cases} x = \frac{3}{4}x' + \frac{1}{4}y' \\ y = \frac{1}{4}x' - \frac{1}{4}y' \end{cases}$ qui me donne la nouvelle matrice $\boldsymbol{P^{-1}} = \begin{pmatrix} \frac{\mathbf{3}}{\mathbf{4}} & \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \\ \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} & -\frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}} \end{pmatrix}$

La matrice *A* peut s'écrire sous forme d'une matrice diagonalisée *M* tel que : $\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P^{-1}AP}$ et le calcul nous redonne bien les valeurs propres sur la diagonale.

$$\boldsymbol{M} = \boldsymbol{P^{-1}AP} = \frac{\mathbf{1}}{\mathbf{4}}\begin{pmatrix} \mathbf{3} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{3} & \mathbf{-1} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \mathbf{1} & \mathbf{1} \\ \mathbf{1} & \mathbf{-3} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mathbf{2} & \mathbf{0} \\ \mathbf{0} & \mathbf{-2} \end{pmatrix}$$

Valeurs propres