Transformations

V – Transformée de Fourier

G. Chênevert

23 novembre 2021

JUNIA ISEN

Au menu aujourd'hui

De Laplace à Fourier

De C. Fourier à T. Fourier

Transformée de Fourier

Rappel : transformée de Laplace

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \qquad \longleftrightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma - \mathrm{i}\infty}^{\sigma + \mathrm{i}\infty} X(p)\, e^{+pt}\, \mathrm{d}p$$

Outil parfaitement adapté à

- la résolution mécanique d'ÉDO linéaires à coefficients constants
- l'étude de la stabilité à long terme d'un système (position des pôles)

Le problème avec Laplace

$$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t \qquad \longleftrightarrow \qquad x(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{\sigma - \mathrm{i}\infty}^{\sigma + \mathrm{i}\infty} X(p)\, e^{+pt}\, \mathrm{d}p$$

On peut par contre déplorer

- le fait de privilégier des conditions initiales nulles (même si on se débrouille)
- l'asymétrie apparente entre les domaines : $t \in \mathbb{R}$ *vs* $p \in \mathbb{C}$
- et *surtout* le fait qu'on ne peut travailler sans perte qu'avec des fonctions causales.

Remarque

On peut tenter de régler ce dernier problème en travaillant plutôt avec la **transformée de Laplace bilatère** : $X(p) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\, \mathrm{d}t$

qui coïncide avec la transformée usuelle lorsque le signal est de la forme $H(t) \cdot x(t)$.

(En fait : c'est techniquement ce qu'on a fait à chaque fois qu'il y avait ambiguité en 0)

Mais ça ne règle pas fondamentalement le problème...

Exemple

Transformée bilatère de $t \mapsto 1$???

Exponentielles complexes

$$p = \sigma + \mathrm{i}\,\omega \in \mathbb{C}$$

$$e^{pt} = e^{\sigma t}\big(\cos(\omega t) + \mathrm{i}\sin(\omega t)\big)$$

amortissement et pulsation

période $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ fréquence $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega}{2\pi}$

Analyse fréquentielle

Pour étudier le contenu fréquentiel d'un signal, il faudrait n'utiliser que des valeurs de p de la forme

$$p = \mathrm{i}\,\omega = 2\pi \mathrm{i} f.$$

Transformée de Laplace inverse (avec $\sigma = 0$) :

$$x(t) = \frac{1}{2\pi \mathrm{i}} \int_{-\mathrm{i}\infty}^{+\mathrm{i}\infty} X(p)\, e^{pt}\, \mathrm{d}p = \int_{-2\pi\mathrm{i}\infty}^{+2\pi\mathrm{i}\infty} X(2\pi\mathrm{i}f)\, e^{2\pi\mathrm{i}ft} \frac{\mathrm{d}p}{2\pi\mathrm{i}}$$

$$= \int_{-\infty}^{+\infty} X(2\pi\mathrm{i}f)\, e^{2\pi\mathrm{i}ft}\, \mathrm{d}f$$

Symétrie parfaite

On voit donc que si l'on pose

$$\widehat{x}(f) := X(2\pi \mathrm{i} f) = \int_{-\infty}^{\infty} x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t$$

on aura

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{+2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}f.$$

La variable du coté transformé s'interprète comme une fréquence $f \in \mathbb{R}$.

Au menu aujourd'hui

De Laplace à Fourier

De C. Fourier à T. Fourier

Transformée de Fourier

Autre point de vue

On se rappelle que si $x(t)$ est un signal T-périodique, on a une représentation

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{\frac{2\pi i n t}{T}} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{2\pi i f_n t}$$

avec

$$c_n = \frac{\langle \mathbf{e}_n \,|\, x \rangle}{\|\mathbf{e}_n\|^2} = \frac{1}{T} \int_{-\frac{T}{2}}^{+\frac{T}{2}} x(t) \, e^{-2\pi i f_n t} \, \mathrm{d}t$$

Passage au cas non-périodique

Si $x(t)$ est un signal quelconque, on peut toujours le périodiser « de force » :

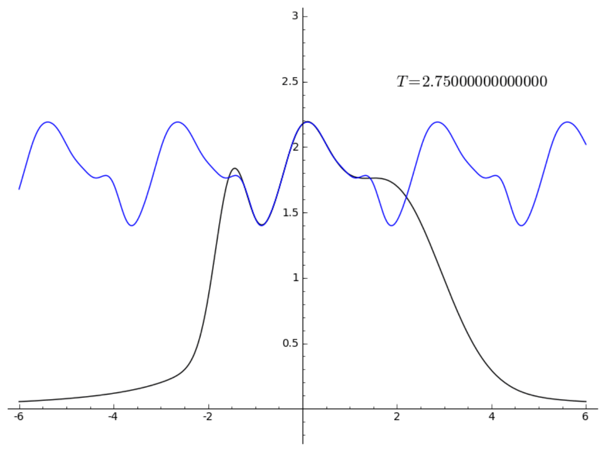
en considérant $x_T(t)$ le signal T-périodique coïncidant avec $x(t)$ sur $[-\frac{T}{2}, \frac{T}{2}]$.

$$x_T(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_{n,T}\, e^{2\pi i f_n t} = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \underbrace{T\, c_{n,T}}\, e^{2\pi i f_n t} \Delta f$$

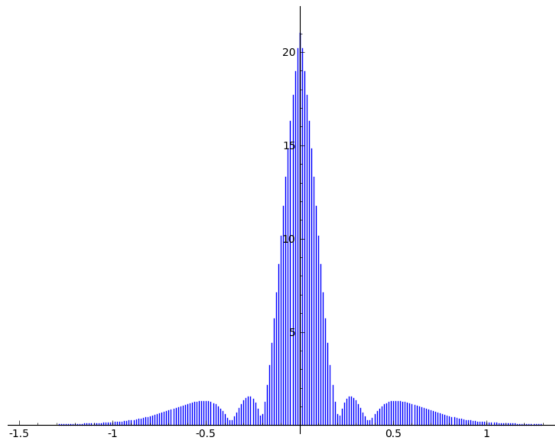
$$x(t) = \lim_{T\to\infty} x_T(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi i f t}\, \mathrm{d}f$$

$$\text{avec} \quad \widehat{x}(f) = \lim_{T\to\infty} T\, c_{n,T} = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t.$$

Exemple : bosses (point de vue temporel)

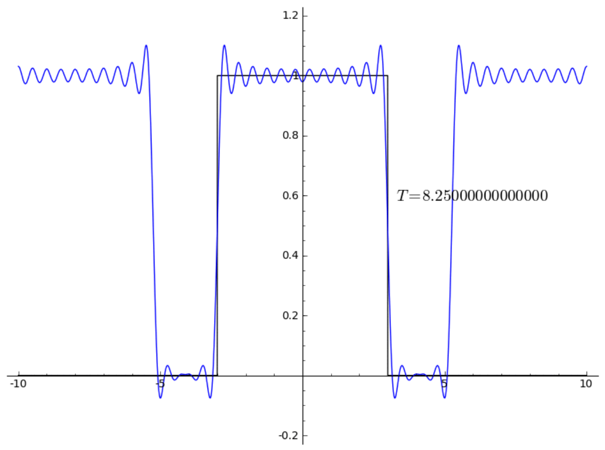


Exemple : bosses (point de vue fréquentiel)

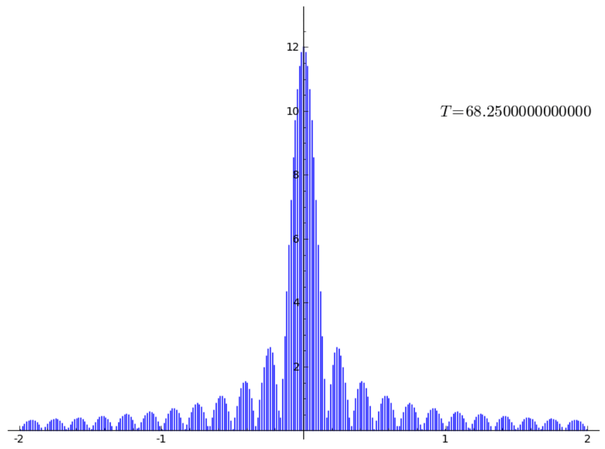


$T = 80$

Exemple : porte (point de vue temporel)



Exemple : porte (point de vue fréquentiel)



Au menu aujourd'hui

De Laplace à Fourier

De C. Fourier à T. Fourier

Transformée de Fourier

Transformée de Fourier

Définition

La **transformée de Fourier** d'un signal $x(t)$ est définie par

$$\widehat{x}(f) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi \mathrm{i} f t}\, \mathrm{d}t.$$

On y pense comme le « produit scalaire » (hermitien) entre

$$x(t) \qquad \text{et} \qquad e^{2\pi \mathrm{i} f t}$$

représentant la proportion de l'onde pure $\widetilde{\mathbf{e}}_f(t) = e^{2\pi \mathrm{i} f t}$ présente dans $x(t)$.

Remarques

- *Si* $x(t)$ est causal *et* stable quand $t \to +\infty$, on peut y penser comme

$$\widehat{x}(f) = X(2\pi i f) \qquad X(p) = \widehat{x}\left(\frac{p}{2\pi i}\right)$$

mais en général les deux transformées auront des champs d'application différents.

- On trouve dans la littérature plusieurs définitions de la transformée de Fourier :
  - en fréquence (f, ξ ou ν) ou en pulsation (ω),
  - avec facteur de normalisation : 1, $\dfrac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ou $\dfrac{1}{2\pi}$;

  l'important est de comprendre la philosophie – et de savoir mettre les bonnes constantes au bon endroit pour une convention donnée.

Remarques

$$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$$

- $\widehat{x}(0)$ représente l'aire totale sous la courbe $A(x)$

  $\widehat{x}(f)$ « l'aire » totale sous la courbe « tordue » par $e^{-2\pi i f t}$

  Si cette aire diverge il est possible que $\widehat{x}(f)$ ne soit pas une fonction !

- Le signal $\widehat{x}(f)$ est en général à valeurs complexes : **spectre** de x.

  Il est souvent plus aisé de se représenter $|\widehat{x}(f)|$ (*spectre d'amplitude*)

  mais on perd alors l'information sur la phase.

Exemple : transformée d'une porte

Prenons une porte de largeur 1 : $\Pi(t) = \Pi_1(t)$

$$\widehat{\Pi}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} \Pi(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$$

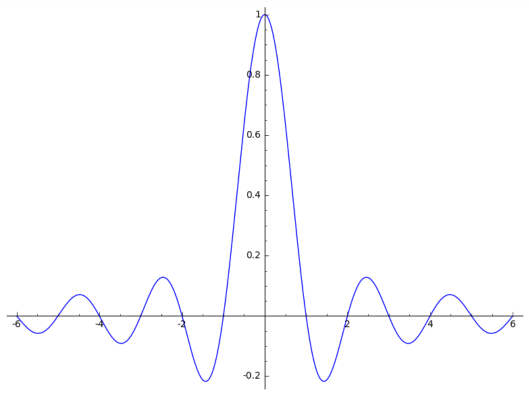
$$= \int_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$$

$$= \left. \frac{e^{-2\pi i f t}}{-2\pi i f} \right|_{-\frac{1}{2}}^{+\frac{1}{2}} = \frac{e^{-\pi i f} - e^{\pi i f}}{-2\pi i f}$$

$$= \frac{1}{\pi f} \cdot \frac{e^{\pi i f} - e^{-\pi i f}}{2i} = \frac{\sin(\pi f)}{\pi f}$$

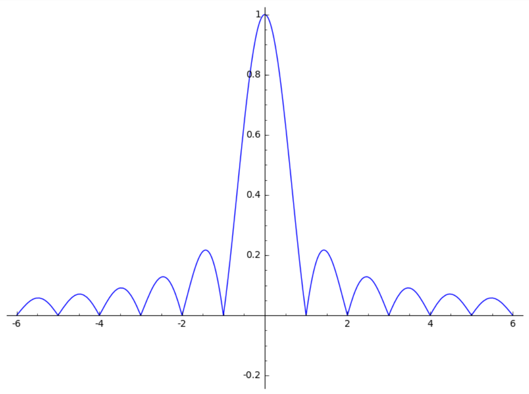
Exemple : transformée d'une porte

$$\widehat{\Pi}(f) = \mathrm{sinc}(\pi f) \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{sinc}(x) := \frac{\sin x}{x}$$



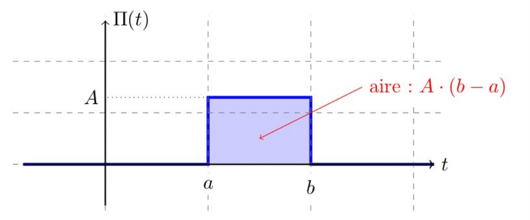
Exemple : transformée d'une porte

Spectre d'amplitude : $|\widehat{\Pi}(f)| = |\,\mathrm{sinc}(\pi f)|$



Transformée d'une porte : cas général

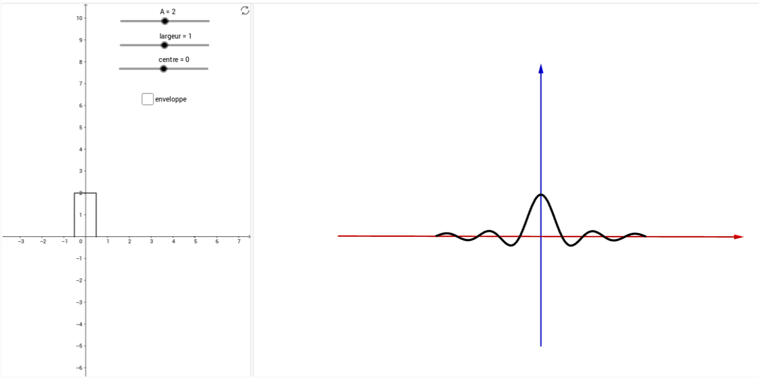
Si on prend pour Π une porte supportée sur $[a, b]$ de hauteur A



retardée de $\frac{a+b}{2}$ de $A \cdot \Pi_{b-a}(t)$, alors on trouve (exercice !)

$$\widehat{\Pi}(f) = \underbrace{A(b-a)}_{\text{aire}} \ \operatorname{sinc}(\pi f \underbrace{(b-a)}_{\text{largeur}}) \ \underbrace{e^{-2\pi i f \frac{a+b}{2}}}_{\text{facteur de phase}}$$

Transformée d'une porte : cas général



Appliquette

Transformée des fonctions

Théorème

Si $x(t)$ est une fonction intégrable :

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|\, dt < +\infty$$

alors sa transformée de Fourier

$$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, dt$$

est une fonction. Si de plus celle-ci est intégrable, alors on a presque partout :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{+2\pi i f t}\, df.$$

Philosophie pragmatique

$$\begin{cases} \widehat{x}(f) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t & \text{(TF directe)} \\[2ex] x(t) = \displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{+2\pi i f t}\, \mathrm{d}f & \text{(TF inverse)} \end{cases}$$

Nous allons toujours travailler avec des signaux qui peuvent être vus comme limites de fonctions intégrables : ces deux formules seront donc toujours vraies *si on les interprète de façon appropriée*.

Par exemple : aux discontinuités d'une fonction $\mathcal{C}^1_{\mathrm{mcx}}$,

$$\int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{+2\pi i f t}\, \mathrm{d}f = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2} \qquad \text{(formule de Dirichlet).}$$

Résumé

On a introduit la transformée de Fourier d'un signal $x(t)$

$$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$$

qui peut être vue comme

- une version continue des coefficients de Fourier obtenue en prenant $T \to +\infty$;
- un cas particulier de Laplace $\widehat{x}(f) = X(2\pi i f)$ quand cela a du sens.

Formule de transformée inverse :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{+2\pi i f t}\, \mathrm{d}f.$$

La prochaine fois

On refait la synthèse et le ménage dans tout ça !