Formalisme en Mécanique Quantique

I. Opérateur hermitien

On considère un espace vectoriel muni d'un produit scalaire hermitien. Soit A un opérateur agissant sur cet espace. On rappelle qu'en Mécanique Quantique l'état d'un système est un vecteur d'un tel espace et qu'une grandeur mesurable est associée à un opérateur hermitien. On se propose ici de démontrer quelques-unes des principales propriétés mathématiques de ces opérateurs.
On définit l'hermiticité d'un opérateur A par la relation :

$$\forall\ |u\rangle, |v\rangle, \langle u|A|v\rangle = \langle v|A|u\rangle^*$$

1. Montrer que les valeurs propres de A sont réelles. On calculera la quantité $\langle u|A|u\rangle$ pour un ket propre $|u\rangle$ de deux manières différentes.
2. Montrer que deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes sont nécessairement orthogonaux. On pourra calculer $\langle v|A|u\rangle$ et $\langle u|A|v\rangle$ où $|u\rangle$ et $|v\rangle$ sont deux vecteurs propres associés à des valeurs propres différentes.
3. Expliquer en quoi les deux résultats précédents sont importants dans l'interprétation de la mesure en Mécanique Quantique.

II. Opérateurs et transformations unitaires

Un opérateur Û est unitaire s'il vérifie $\widehat{U}^+\widehat{U} = \widehat{U}\widehat{U}^+ = \mathrm{I}$. On définit une transformation unitaire par l'action de Û sur un ket quelconque par : $|\psi'\rangle = \widehat{U}|\psi\rangle$.

1. Montrer qu'une transformation unitaire préserve le produit scalaire.
2. Montrer que deux vecteurs propres d'un opérateur unitaire ayant des valeurs propres différentes sont orthogonaux.
3. Quelles sont les valeurs propres d'un opérateur à la fois unitaires et hermitien ?

III. Projecteurs

On considère une base orthonormée $\{|u_i\rangle\}_{i=1.....N}$ et l'opérateur

$$\widehat{P_q} = \sum_{i=1}^{q} |u_i\rangle\langle u_i| \quad \text{avec q < N}$$

Montrer que $\widehat{P}_q^2 = \widehat{P}_q$ et que $\widehat{P}_q$ projette tout ket sur le sous-espace défini par les vecteurs $\{|u_i\rangle\}_{i=1.....q}$.

IV. Mesure en Mécanique quantique : cas d'un opérateur

On considère un électron appartenant à un système quantique possédant 2 niveaux d'énergie possibles. En physique quantique le système est complètement décrit par un état, lui-même représenté mathématiquement par un vecteur appartenant à l'*espace des états.* Le système évoluant sur ces deux seuls états, l'espace d'états associé est de dimension 2.
Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ une base orthonormée de l'espace des états. Ces vecteurs sont des états propres de l'opérateur énergie H, respectivement associés aux valeurs propres E_1 et E_2. On s'intéresse à la mesure de l'énergie du système pour divers états quantiques.

1. Cas 1 : mesure dans un état propre ou stationnaire

On suppose d'abord que le système occupe l'état $|u_1\rangle$. Quels sont les résultats possibles de la mesure de *H* ? Avec quelles probabilités ?

2. Cas 2 : Mesure dans un état non stationnaire

On considère maintenant que le système est dans l'état $|\psi\rangle = {}^{1}/_{\sqrt{5}}(|u_1\rangle + 2i|u_2\rangle)$.

a. Quels sont les résultats possibles de la mesure de *H* dans l'état $|\psi\rangle$? Avec quelles probabilités ?
b. Dans quel état se trouve le système après la mesure ?
c. On refait la mesure de *H* immédiatement après la première. Quels sont les résultats dans chacun des cas et avec quelles probabilités ?