Probabilités et statistiques

Énoncé n° `5f517389`

Consignes

- Cette épreuve de **2h** contient **16** questions équipondérées.
- Renseigner vos réponses (courtes) sur le formulaire suivant.
- Documentation, calculatrice, MATLAB, ... **autorisés**.
- Toute communication avec un être vivant sur un des sujets à l'étude toutefois **interdite**.
- Quelques formules et valeurs utiles sont fournies en annexe.
- En cas de problème technique, prière de contacter `gabriel.chenevert@yncrea.fr`.

Exemple

La probabilité d'obtenir un ⚄ lors du lancer d'un dé équilibré est : $\boxed{16{,}67\ \%}$.

L'espérance du nombre de lancers nécessaires avant d'obtenir cette valeur est : $\boxed{6}$.

Question 1

Si X et Y sont deux variables indépendantes avec $X \sim \mathcal{N}(7,3)$ et $Y \sim \mathcal{G}(\frac{1}{4})$, quelle est la variance de $3X-2Y$?

Question 2

La taille X (en cm) des rats domestiques suit approximativement une loi normale de paramètres [1] $\mu = 20$ et $\sigma = 4$. Quelle est la proportion des rats domestiques dont la taille est comprise entre 18 et 27 cm ?

Question 3

On lance une pièce de monnaie de façon répétée jusqu'à ce que l'on obtienne au total, soit 2 fois pile, soit 4 fois face. Quel est l'espérance du nombre de lancers nécessaires ?

Question 4

Un étudiant chargé de lancer 100 fois une pièce de monnaie rapporte qu'il a obtenu exactement 50 fois pile et 50 fois face. S'il a réellement procédé au lancer d'une pièce de monnaie équilibrée, quelle était la probabilité que cela se produise ?

Question 5

Dans ma poche, j'ai 5 pièces de monnaie, dont 4 sont truquées et tombent toujours sur pile. J'en choisis une au hasard et la lance : j'obtiens pile. Quelle est la probabilité qu'il s'agisse d'une pièce truquée ?

Question 6

Si X et Y sont des variables indépendantes $\mathcal{N}(0,1)$, quelle est la loi de $\frac{1}{10}X + \frac{9}{10}Y$?

1. données fictives

Question 7

Si $X_1, \ldots, X_{25}$ sont des variables i.i.d. avec $\mu = -2$ et $\sigma = 3$, quelle est, d'après le théorème central limite, la loi approximative de leur somme $X_1 + \cdots + X_{25}$?

Question 8

Quelle est la probabilité, si on lance 10 fois un dé équilibré, d'obtenir exactement 5 nombres divisibles par 3 ?

Question 9

Quel est l'écart-type d'une variable aléatoire X uniformément distribuée sur $[-2, 10]$?

Question 10

Si $X \sim \mathcal{G}(\frac{1}{2})$ et $Y \sim \mathcal{P}(5)$, quelle est l'espérance de $3X + 2Y$?

Question 11

Que vaut $\mathbb{P}[-1 \leqslant X < 3]$ si X est une variable aléatoire dont la densité est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{16}(4 - |x|) & \text{si } -4 \leqslant x \leqslant 4, \\ 0 & \text{sinon ?} \end{cases}$$

Question 12

Que vaut $\mathbb{P}[1 < X \leqslant 6]$ si X est une variable aléatoire dont la fonction de répartition est donnée par

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & \text{si } x < 0, \\ x^2/64 & \text{si } 0 \leqslant x < 8, \\ 1 & \text{si } x \geqslant 8\,? \end{cases}$$

Quelques lois fréquemment utilisées

- loi binomiale $\mathcal{B}(n,p)$:

$$\mathbb{P}[X=k]=\binom{n}{k}p^k(1-p)^{n-k},\ k=0,1,\ldots,n$$

$$\text{espérance} \quad np, \qquad \text{variance} \quad np(1-p)$$

- loi géométrique $\mathcal{G}(p)$:

$$\mathbb{P}[X=k]=(1-p)^{k-1}p,\ k\geqslant 1$$

$$\text{espérance} \quad \frac{1}{p}, \qquad \text{variance} \quad \frac{1-p}{p^2}$$

- loi de Poisson $\mathcal{P}(\lambda)$:

$$\mathbb{P}[X=k]=\frac{\lambda^k}{k!}e^{-\lambda},\ k\geqslant 0$$

$$\text{espérance} \quad \lambda, \qquad \text{variance} \quad \lambda$$

- loi uniforme $\mathcal{U}([0,1])$:

$$\text{densité} \quad f(x)=1,\ 0\leqslant x\leqslant 1$$

$$\text{espérance} \quad \frac{1}{2}, \qquad \text{variance} \quad \frac{1}{12}$$

- loi exponentielle $\mathcal{E}(\lambda)$:

$$\text{densité} \qquad f(x)=\lambda e^{-\lambda x},\ x\geqslant 0$$

$$\text{espérance} \quad \frac{1}{\lambda}, \qquad \text{variance} \quad \frac{1}{\lambda^2}$$

- loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$:

$$\text{densité} \quad f(x)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}\sigma}e^{-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}}$$

$$\text{espérance} \quad \mu, \qquad \text{variance} \quad \sigma^2$$

Fonction caractéristique

$$\Psi_X(t)=\widehat{f_X}\left(-\frac{t}{2\pi}\right)=\mathbb{E}[e^{jtX}]=\int_{-\infty}^{+\infty}f_X(x)\,e^{jtx}\,\mathrm{d}x=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\mu_n}{n!}(jt)^n=1+j\,\mu_1\,t-\frac{\mu_2}{2}t^2-j\,\frac{\mu_3}{6}t^3+\cdots$$

avec $\mu_n=\mathbb{E}[X^n]$ les moments de la variable aléatoire X

Fonction de répartition d'une loi normale centrée réduite