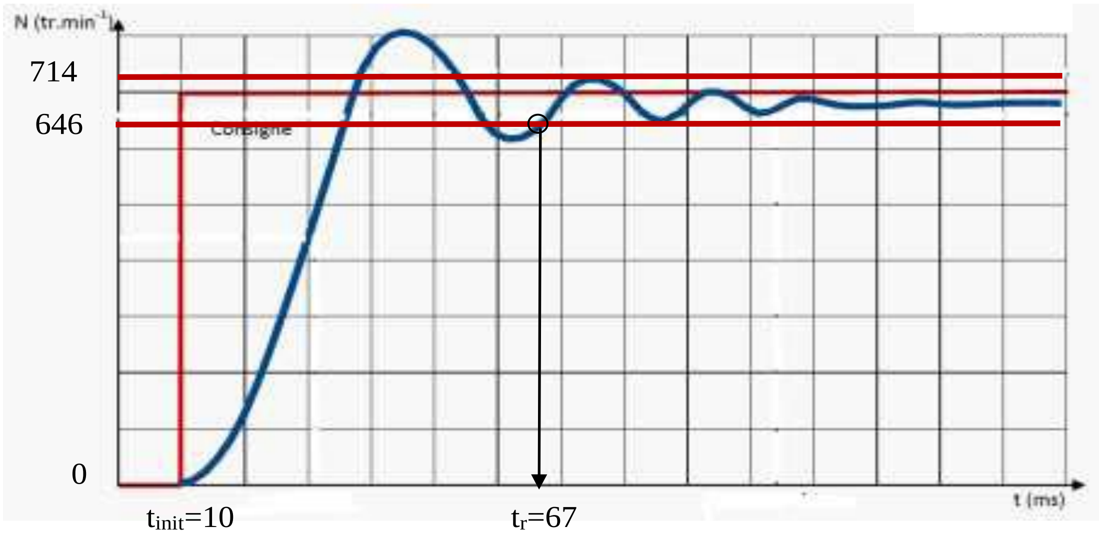
TD n°2 : Correction

Exercice 1



1. La valeur finale S(+∞):

s(+∞)= 680 trs/min

2. Variation finale ΔS(+∞):

Δs(+∞)=s(+∞)-s_0= 680-0=680 trs/min.

3. Temps de réponse à 5%

Temps de réponse à 5% c'est la durée au bout de laquelle la réponse se stabilise à plus ou moins 5% autour de la valeur finale [680×0.95 ; 680×1.05] = [646 ; 714].

$$t_{r5\%} = t_r - t_{init}$$

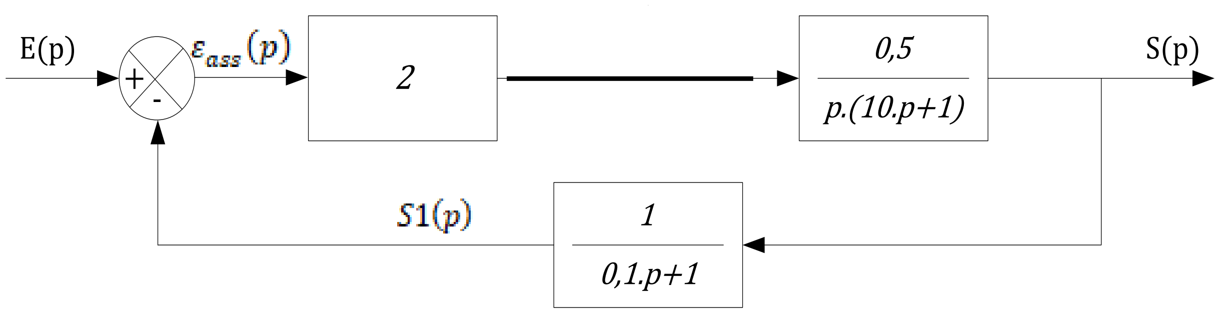
t_{init}=10 ms ; t_r=67 ms

$t_{r5\%}$ =67-10= 57 ms.

Exercice 2

1. Valeur finale de l'erreur statique d'asservissement pour un échelon unitaire

En asservissement, on considère que les perturbations sont nulles (Z(p)=0).
Le schéma bloc devient :



Pour calculer la valeur finale de l'erreur statique d'asservissement, il faut tout d'abord déterminer l'expression de $\varepsilon_{ass}(p)$. Pour cela, nous lisons sur le schéma bloc :

$$\varepsilon_{ass}(p) = E(p) - S1(p) = E(p) - S(p).\frac{1}{1+0.1p}$$

$$avec\ S(p) = \frac{0.5\times 2}{p(1+10p)}\varepsilon_{ass}(p) = \frac{1}{p(1+10p)}\varepsilon_{ass}(p)$$

Alors:

$$\varepsilon_{ass}(p) = E(p) - \frac{1}{p(1+10p)}.\frac{1}{1+0.1p}\varepsilon_{ass}(p)$$

$$\varepsilon_{ass}(p)\left(1 + \frac{1}{p(1+10p)(1+0.1p)}\right) = E(p)$$

$$\varepsilon_{ass}(p)\left(\frac{1 + p(1+10p)(1+0.1p)}{p(1+10p)(1+0.1p)}\right) = E(p)$$

$$\varepsilon_{ass}(p) = \left(\frac{p(1+10p)(1+0.1p)}{1 + p(1+10p)(1+0.1p)}\right)E(p)$$

Dans ce cas $\mathrm{E(p)} = \frac{1}{\mathrm{p}}$: un échelon unitaire.

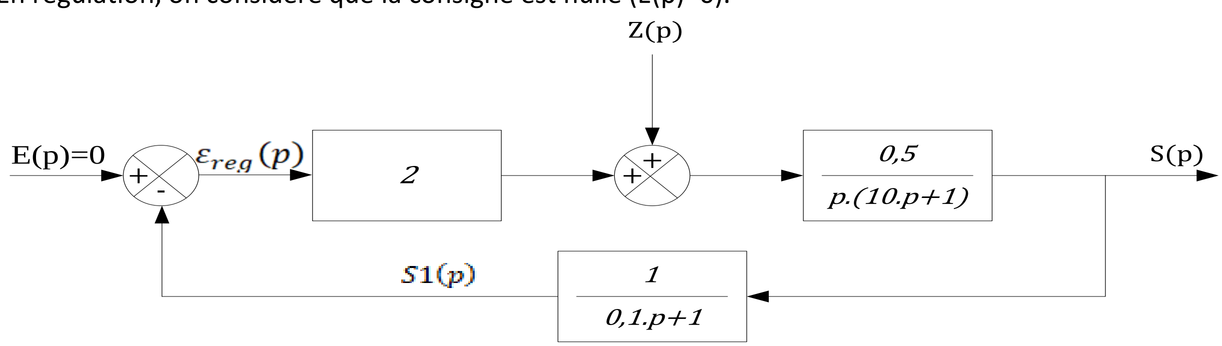
Alors : $$\varepsilon_{ass}(p) = \frac{1}{\mathrm{p}}\left(\frac{p(1+10p)(1+0.1p)}{1+p(1+10p)(1+0.1p)}\right)$$

La valeur finale de l'erreur d'asservissement est donc :

$$\varepsilon_{f,ass} = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon_{ass}(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{1}{\mathrm{p}}\left(\frac{p(1+10p)(1+0.1p)}{1+p(1+10p)(1+0.1p)}\right) = 0$$

2. Valeur finale de l'erreur statique de régulation pour un échelon de 0.2.

En régulation, on considère que la consigne est nulle (E(p)=0).



Pour calculer la valeur finale de l'erreur statique de régulation, il faut tout d'abord déterminer l'expression de $\varepsilon_{reg}(p)$. Pour cela, nous lisons sur le schéma bloc :

$$\varepsilon_{reg}(p) = 0 - S1(p) = -S(p).\frac{1}{1+0.1p}$$

$$avec\ S(p) = \frac{0.5}{p(1+10p)}\left(Z(p) + 2\varepsilon_{\mathrm{reg}}(p)\right) = \frac{0.5}{p(1+10p)}Z(p) + \frac{1}{p(1+10p)}\varepsilon_{\mathrm{reg}}(p)$$

Alors :

$$\varepsilon_{reg}(p) = -\frac{1}{1+0.1p}\left(\frac{0.5}{p(1+10p)}Z(p) + \frac{1}{p(1+10p)}\varepsilon_{\mathrm{reg}}(p)\right)$$

$$\varepsilon_{reg}(p) = -\frac{0.5}{p(1+10p)(1+0.1p)}Z(p) - \frac{1}{p(1+10p)(1+0.1p)}\varepsilon_{\mathrm{reg}}(p)$$

$$\varepsilon_{reg}(p)\left(1+\frac{1}{p(1+10p)(1+0.1p)}\right) = -\frac{0.5}{p(1+10p)(1+0.1p)}Z(p)$$

$$\varepsilon_{reg}(p)\left(\frac{p(1+10p)(1+0.1p)+1}{p(1+10p)(1+0.1p)}\right) = -\frac{0.5}{p(1+10p)(1+0.1p)}Z(p)$$

$$\varepsilon_{reg}(p)(p(1+10p)(1+0.1p)+1) = -0.5 \times Z(p)$$

$$\varepsilon_{reg}(p) = -\frac{0.5}{p(1+10p)(1+0.1p)+1} \times Z(p)$$

Dans ce cas $\mathrm{Z(p)} = \frac{0.2}{\mathrm{p}}$: un échelon de 0.2

Alors : $$\varepsilon_{reg}(p) = -\frac{0.2}{\mathrm{p}}\frac{0.5}{p(1+10p)(1+0.1p)+1}$$

La valeur finale de l'erreur de régulation est donc :

$$\varepsilon_{f,reg} = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon_{reg}(p) = \lim_{p\to 0} p \times \frac{0.2}{\mathrm{p}} \times \frac{-0.5}{p(1+10p)(1+0.1p)+1} = -0.1$$

Exercice 3

1- Fonction de transfert en BO $H_{BO}(p)$.

On commence par la transformée de Laplace de l'équation différentielle, on obtient :

$$L\left(\frac{d^3s(t)}{dt^3}\right) = L\left(R.u(t) - 3.s(t) - 2.\frac{ds(t)}{dt} - \frac{d^2s(t)}{dt^2}\right)$$

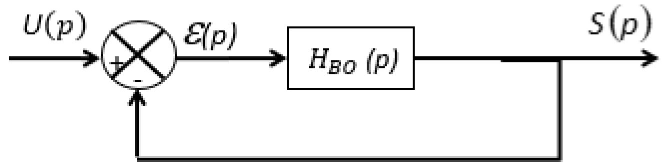
$$p^3S(p) = R.U(p) - 3.S(p) - 2.pS(p) - p^2S(p)$$

$$S(p)(p^3 + p^2 + 2.p + 3) = R.U(p)$$

Alors la fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$H_{BO}(p) = \frac{S(p)}{U(p)} = \frac{R}{p^3 + p^2 + 2.p + 3}$$

2- La fonction de transfert en boucle fermée avec un retour unitaire



$$H_{BF}(p) = \frac{H_{BO}(p)}{1 + H_{BO}(p)} = \frac{\frac{R}{p^3 + p^2 + 2.p + 3}}{1 + \frac{R}{p^3 + p^2 + 2.p + 3}} = \frac{R}{p^3 + p^2 + 2.p + 3 + R}$$

3- Calcul de la valeur finale de l'erreur statique en fonction de R pour un échelon unitaire.

Nous appliquons le théorème de la valeur finale :

$$\varepsilon_f = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p)$$

Pour calculer la valeur finale de l'erreur statique, il faut tout d'abord déterminer l'expression de $\varepsilon(p)$.

$$\varepsilon(p) = U(p) - S(p) \text{ avec } S(p) = H_{BO}(p).\varepsilon(p)$$

$$\varepsilon(p) = \frac{1}{1 + H_{BO}(p)} U(p)$$

U(p) est un échelon unitaire : $U(p) = \frac{1}{p}$

La valeur finale de l'erreur statique est donc :

$$\varepsilon_f = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{1}{1 + H_{BO}(p)} U(p) = \lim_{p\to 0} p.\frac{1}{p}.\frac{p^3 + p^2 + 2.p + 3}{p^3 + p^2 + 2.p + 3 + R} = \frac{3}{3 + R}$$

4- Calcul de R pour une valeur finale de l'erreur de 5%.

$$\varepsilon_f = \frac{3}{3 + R} = 5\% = 0.05$$

Alors :

$$(3 + R) \times 0.05 = 3$$

$$R = \frac{3}{0.05} - 3 = 60 - 3 = 57$$