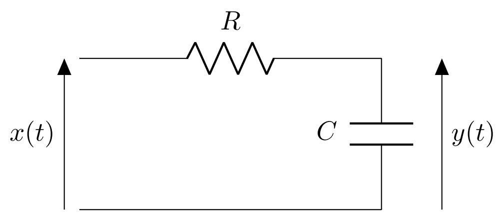
IV – Laplace et Dirac

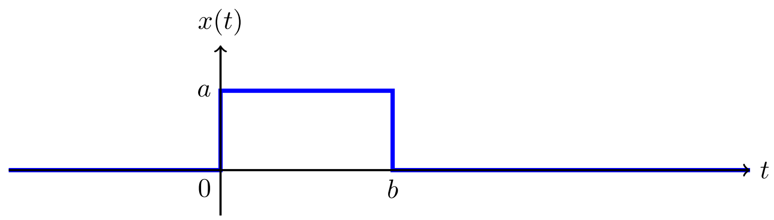


Dans un circuit RC simple, la tension $y(t)$ aux bornes du condensateur est reliée à la tension d'entrée $x(t)$ par l'équation différentielle

$$\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t) \qquad \text{où} \qquad \tau = RC.$$

Pour ne pas alourdir les calculs, nous allons ici supposer (quitte à ajuster l'unité de temps) que $\tau = 1$.

Nous allons charger le condensateur en appliquant une différence de potentiel a pendant un laps de temps b avant de le laisser se décharger.



Exercice 1

a) Résoudre « à la main » l'équation différentielle pour obtenir la tension de sortie $y(t)$ correspondant à cette entrée (porter une attention particulière aux conditions initiales sur chaque intervalle).

b) Résoudre cette fois-ci l'équation en utilisant la transformée de Laplace et discuter de la cohérence de votre réponse avec la précédente.

Exercice 2

Notons $y_\varepsilon(t)$ la sortie correspondant à l'entrée $x_\varepsilon(t)$ obtenue avec $a = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $b = \varepsilon$ (aire normalisée à 1).

a) Calculer la limite $y_0(t) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} y_\varepsilon(t)$. Déterminer l'entrée $x_0(t) := \lim\limits_{\varepsilon \to 0} x_\varepsilon(t)$ correspondante en dérivant $y_0(t)$.

b) Vérifier (par calcul direct ou transformée de Laplace) que $y_\varepsilon(t) = y_0(t) * x_\varepsilon(t)$.

c) De façon plus générale : se convaincre que la sortie $y(t)$ correspondant à une entrée causale $x(t)$ quelconque est donnée par le produit de convolution

$$y(t) = y_0(t) * x(t).$$

Exercice 3

a) Simplifier l'expression suivante : $\big(\delta(t) + 2\,\delta(t-\pi) + \delta'(t)\big) * \big(\sin(t) + t^2 + H(t)\big)$.

b) En dérivant formellement le produit $x(t) \cdot \delta(t)$, donner une formule pour simplifier $x(t) \cdot \delta'(t)$.

c) Le produit de convolution est-il associatif *en général* ? Comparer, par exemple,

$$(H * \delta') * 1 \qquad \text{et} \qquad H * (\delta' * 1).$$