Interrogation

Consignes :

- Vous disposez d'**une heure** pour répondre aux trois questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Soyez **concis** et **précis** dans vos réponses et **justifications**.

Pierre-Simon de LAPLACE

Exercice 1

Calculer la transformée de Laplace $X(p)$ du signal défini par $x(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 \leqslant t \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$

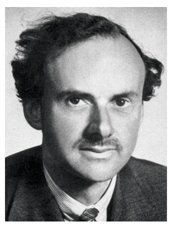
Approche par intégration directe :

$$X(p) = \int_0^{\infty} x(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \int_0^1 e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left[\frac{e^{-pt}}{-p}\right]_0^1 = \frac{1-e^{-p}}{p}.$$

Approche par propriétés : on peut écrire $x(t) = H(t) - H(t-1)$, de sorte que, d'après la règle sur les retards :

$$X(p) = \mathcal{L}(H(t)) - \mathcal{L}(H(t-1)) = \mathcal{L}(H)(p) - e^{-pt}\mathcal{L}(H)(p) = \frac{1}{p} - e^{-p}\frac{1}{p}.$$

Bien sûr on obtient la même réponse !

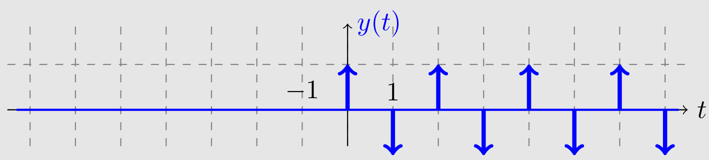


Paul DIRAC

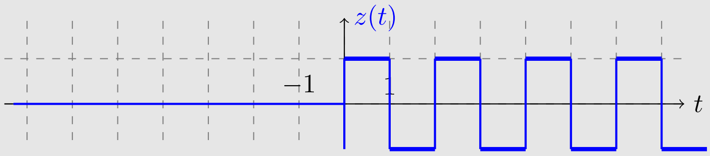
Exercice 2

Posons $y(t) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \delta(t-n)$ où $\delta(t)$ représente l'impulsion de Dirac en $t=0$ et $z(t) = (x * y)(t)$.

Représenter graphiquement $y(t)$ et $z(t)$ puis déterminer la transformée de Laplace de $z(t)$.



et puisque $z(t) = x(t) * y(t) = \sum_n (-1)^n \delta(t-n) * x(t) = \sum_n (-1)^n x(t-n)$:



Puisque $z = x * y$, on sait que $Z(p) = X(p) \cdot Y(p)$, donc il suffit de calculer $Y(p)$:

$$Y(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \mathcal{L}(\delta(t-n))(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n e^{-pn} \mathcal{L}(\delta)(p) = \sum_{n=0}^{\infty} (-e^{-p})^n = \frac{1}{1+e^{-p}}$$

en sommant la série géométrique ; on trouve donc d'après la première question

$$Z(p) = \frac{1}{p} \cdot \frac{1-e^{-p}}{1+e^{-p}}$$

(le lecteur averti pourra reconnaître une tangente hyperbolique...)

Joseph Fourier

Exercice 3

Calculer les coefficients de Fourier c_n du signal $x(t)$ de la question 1 sur l'intervalle $[0,2]$ et représenter graphiquement la somme $s(t)$ de la série de Fourier ainsi obtenue en précisant les valeurs de $s(n)$, $n \in \mathbb{Z}$.

Par intégration directe :

$$c_n = \frac{1}{2} \int_0^2 x(t)\, e^{-\pi j n t}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2} \int_0^1 e^{-\pi j n t}\, \mathrm{d}t.$$

On distingue deux cas : pour $n = 0$ on trouve $c_0 = \frac{1}{2} \int_0^1 \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$ (ce dont on peut se convaincre géométriquement), alors que pour $n \neq 0$ on a

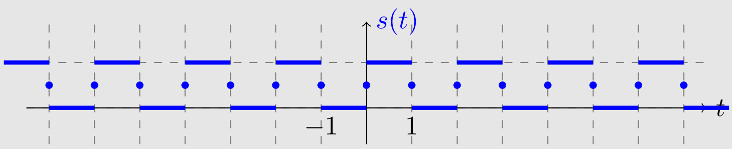
$$c_n = \frac{1}{2} \left[\frac{e^{-\pi j n t}}{-\pi j n} \right]_0^1 = \frac{1}{2} \cdot \frac{(-1)^n - 1}{-\pi j n} = \frac{1-(-1)^n}{2\pi j n} = \begin{cases} 1/\pi j n & n \text{ impair;} \\ 0 & n \text{ pair.} \end{cases}$$

La série de Fourier associée

$$s(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n e^{\pi j n t} = \sum_{k=-\infty}^{\infty} \frac{1}{\pi j (2k+1)} e^{\pi j (2k+1) t}$$

est la T-périodisation de $x(t)$ dont les valeurs aux entiers sont donnés d'après le théorème de Dirichlet par

$$s(n) = \frac{s(n^+) + s(n^-)}{2} = \frac{0+1}{2} = \frac{1}{2}.$$



Convolution

$$(x * y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-v)\, y(v)\,\mathrm{d}v$$

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \int_{0}^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$t\,x(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} X(s)\,\mathrm{d}s$	
$e^{at}x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa}X(p)$	$(a \geqslant 0)$

original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Séries de Fourier

Pour un signal T-périodique : $x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{2\pi jnt/T}$ avec $c_n = \dfrac{1}{T}\int_a^{a+T} x(t)\, e^{-2\pi jnt/T}\,\mathrm{d}t$