Formalisme de la Mécanique quantique

Exercice 1 : Oscillateur harmonique

Oscillateur harmonique en mécanique classique

Nous considérons un système modèle d'une particule de masse m se déplaçant suivant un axe x. Son énergie potentielle est $V(x)=\frac{1}{2}kx^2$, ce qui correspond à une force de rappel $f=-kx$ par rapport à l'origine. En mécanique classique, ce modèle décrit de nombreux systèmes physiques, le plus simple étant une masse attachée à un point fixe par un ressort de raideur k et se déplaçant sans frottement. La dynamique de ce système est celle d'un oscillateur de pulsation $\omega=\sqrt{\frac{k}{m}}$. La particule oscille autour de l'origine, sa position étant de la forme $x(t)=x_0\cos(\omega t+\eta)$. L'amplitude d'oscillation x_0 peut prendre une valeur quelconque fixée par les conditions initiales, de même que l'énergie (cinétique + potentielle) qui est une constante du système.

Oscillateur harmonique en mécanique quantique

En mécanique quantique, ce modèle s'applique également à de très nombreux problèmes. L'équation de Schrödinger de l'oscillateur harmonique peut être résolue exactement. On montre que les énergies propres sont quantifiées, de la forme $E_n=\left(n+\frac{1}{2}\right)\hbar\omega$ où n est un entier positif ou nul. Ainsi le photon correspond à un quantum de champ électromagnétique d'énergie $\hbar\omega$ (dualité onde-corpuscule). De même, on associe au quantum de vibration d'un solide cristallin une (quasi-)particule, le phonon. La description quantique d'un oscillateur harmonique a joué un rôle central dans l'histoire de la physique et est au cœur de ses théories les plus récentes (électrodynamique quantique…).

Dans la suite, nous ne chercherons pas à résoudre complètement ce problème mais à utiliser les notations et relations proposées.

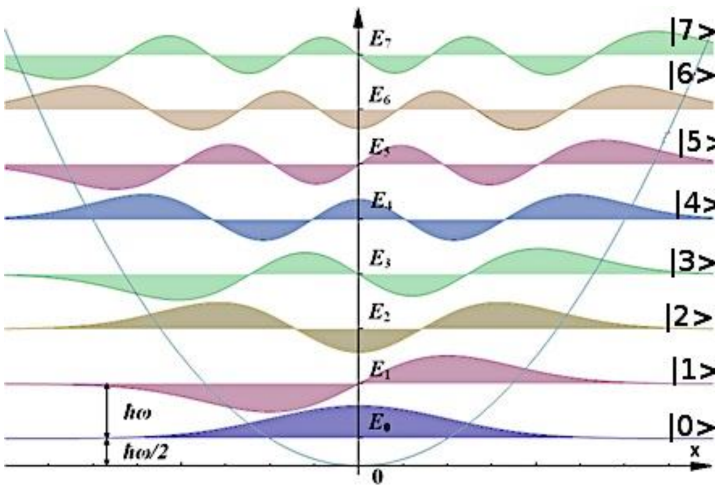

Figure 1 : Etats stationnaires |n> et énergies E_n correspondantes rapportées à l'énergie potentielle (courbe bleue) en fonction de la position x de la particule.

1) Considérant que la particule quantique de masse m est soumise à l'énergie potentielle $V(x) = \frac{1}{2}m\omega^2x^2$, écrire l' Hamiltonien H du système.

On pose :

$$a^+ = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x - ip)$$

$$a = \frac{1}{\sqrt{2m\hbar\omega}}(m\omega x + ip)$$

Ces opérateurs sont dits respectivement *de création et d'annihilation* de quantum d'énergie. L'Hamiltonien H s'écrit :

$$H = \hbar\,\omega\left(a^+a + \frac{1}{2}\right)$$

2) On note $|n\rangle$ les vecteurs propres orthonormés de H pour les valeurs propres respectives $E_n = \hbar\,\omega\left(n + \frac{1}{2}\right)$ où n sont les entiers successifs (voir figure 1). L'action des opérateurs a^+ et a est telle que :

$$a^+|n >= C_{n+1}|n + 1 >$$

$$a|n >= C_n|n - 1 >$$

a) Calculer l'action de a^+a sur |n > et |n +1> en utilisant l'expression de H. En déduire les valeurs de C_{n+1} et C_n.

b) On rappelle que l'opérateur $p = -i\hbar\frac{d}{dx}$ à une dimension. Calculer le commutateur $[x, p]$. En déduire le commutateur $[a\,, a^+]$.

3) Ecrire la matrice de a^+ et a dans la base {|0>, |1>, |2>, |3> …}. En déduire que ces opérateurs ne sont pas des observables.

4) En utilisant a^+ et a, calculer les valeurs moyennes $<x>$, $<x^2>$, $<p>$ et $<p^2>$ dans l'état |n>. Vérifier la relation d'incertitude de Heisenberg sur les opérateurs x et p dans le cas de l'oscillateur harmonique. On rappelle que l'incertitude sur la mesure d'un opérateur A dans l'état |n > est donnée par l'écart quadratique moyen :

$$\Delta A = \sqrt{\langle A^2\rangle_n - \langle A\rangle_n^2} \qquad \text{et} \qquad \langle A\rangle_n = \frac{\langle n|A|n\rangle}{\langle n|n\rangle}$$

5) Calculer la valeur moyenne de l'énergie cinétique et l'énergie potentielle dans l'état |n> de l'oscillateur harmonique.