# Automatique

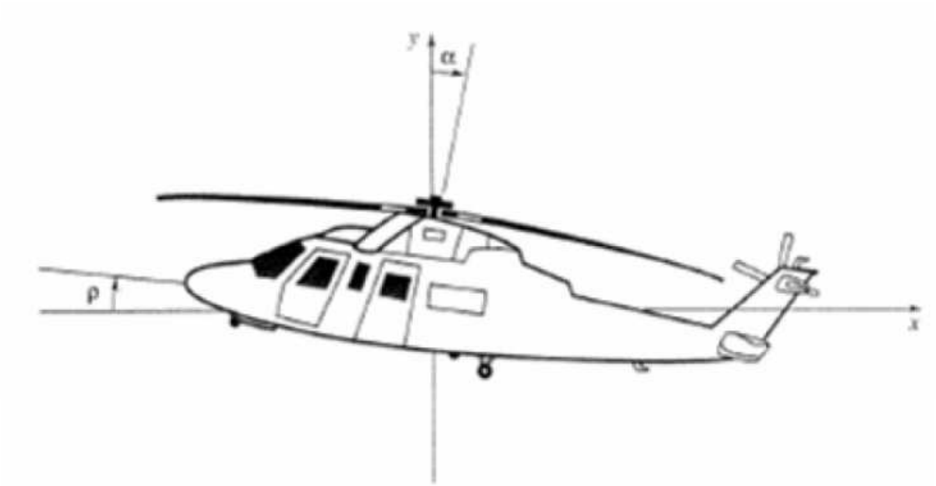
***Exercice 1 (1.5 points)***

L'angle de tangage $\rho$(t) d'un hélicoptère (voir figure ci-dessous) peut être commandé par l'angle $\alpha$(t) de la pale du rotor. La dynamique du système peut être décrite par les équations différentielles suivantes :

$$\begin{cases} \dfrac{d^2\rho(t)}{dt^2} = -0.65\dfrac{d\rho(t)}{dt} - 0.02\dfrac{dx(t)}{dt} + 5.4\alpha(t) \\ \dfrac{d^2x(t)}{dt^2} = -1.57\dfrac{d\rho(t)}{dt} - 0.03\dfrac{dx(t)}{dt} + 9.8\big(\rho(t) + \alpha(t)\big) \end{cases}$$

où x(t) représente la position horizontale.

Déterminer une représentation d'état du système.



***Exercice 2 (2 points)***

Soit le système linéaire décrit par l'équation d'état suivante :

$$\dot{x} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ -3 & -2 \end{bmatrix} x$$
$$y = \begin{bmatrix} 1 & 0 \end{bmatrix} x$$

Trouver la variation temporelle de l'état $x(t) = \begin{bmatrix} x_1(t) \\ x_2(t) \end{bmatrix}$, si la condition initiale est

$\begin{bmatrix} x_1(0) \\ x_2(0) \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$.

***Exercice 3 (3.5 points)***

Un navire de 100m de longueur en mouvement latérale avec une vitesse constante de 10m/s est décrit par les équations d'état suivantes :

$$\begin{bmatrix} \dot{\beta} \\ \dot{r} \\ \dot{\varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -0.1 & -0.3 & 0 \\ -0.04 & -0.27 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \beta \\ r \\ \varphi \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0.01 \\ -0.01 \\ 0 \end{bmatrix} \delta$$

où $\varphi$ est l'angle de direction du navire.

En utilisant le retour d'état complet, $\delta = -k_1\beta - k_2 r - k_3\varphi$, déterminer les éléments de la matrice de gain K=[$k_1$  $k_2$  $k_3$] permettant de placer les pôles en boucle fermée à -0.2, $-0.2 \pm 0.2j$.

# FORMULAIRE

**Laplace inverse de quelques fonctions de base**

$$L^{-1}[1] = \delta(t)\,,\ \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{p}}\right] = \mathrm{u}(\mathrm{t})\,,\ \mathrm{L}^{-1}\left[\frac{1}{\mathrm{p}^2}\right] = \mathrm{t}$$

$$L^{-1}\left[\frac{1}{p+a}\right] = e^{-at}\,,\ L^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)^2}\right] = te^{-at}\ ,\ L^{-1}\left[\frac{1}{(p+a)^3}\right] = \frac{t^2}{2}e^{-at}$$

$$L^{-1}\left[\frac{a}{p(p+a)}\right] = 1 - e^{-at}\,,\ L^{-1}\left[\frac{\omega}{p^2+\omega^2}\right] = \sin\omega t\,,\ L^{-1}\left[\frac{p}{p^2+\omega^2}\right] = \cos\omega t$$

$$L^{-1}\left[\frac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\cos\omega t\,,\ L^{-1}\left[\frac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}\right] = e^{-at}\sin\omega t$$

si $t \geq 0$, 0 sinon.

**Passage de l'équation d'état à la fonction de transfert**

$$H(s) = C(sI - A)^{-1}B + D$$

**Forme compagne horizontale : matrice de passage**

$$M = [A^{n-1}B + A^{n-2}Ba_{n-1} + \dots + ABa_2 + Ba_1 \quad \dots \quad A^2B + ABa_{n-1} + Ba_{n-2} \quad AB + Ba_{n-1} \quad B]$$

**Résolution de l'équation d'état**

$$x(t) = e^{A(t-t_0)}x(t_0) + \int_{t_0}^{t} e^{A(t-\tau)}Bu(\tau)d\tau$$