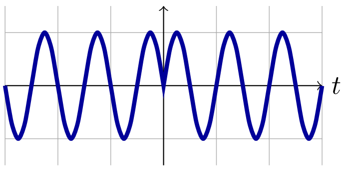
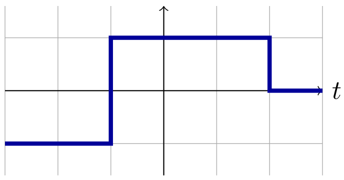
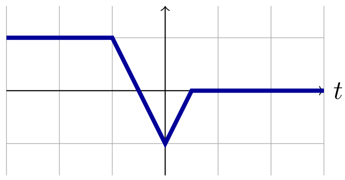
III – Signaux et convolution

Exercice 1

Donner une expression synthétique pour chacun des signaux suivants (carreaux-unités) :

a) 

b) 

c) 

Plusieurs réponses possibles, par exemple :

a) $\mathrm{sg}(t)\sin(2\pi t)$

b) $-1 + 2H(t+1) - H(t-2)$ ou $-H(-t-1) + \Pi_{\frac{3}{2}}(t - \frac{1}{2})$

c) $1 - 2(t+1)H(t+1) + 4\,tH(t) - 2(t-\frac{1}{2})H(t-\frac{1}{2})$ ou $H(-t-1) - (2t+1)\Pi_1(t+\frac{1}{2}) + (2t-1)\Pi_{\frac{1}{2}}(t-\frac{1}{4})$

Exercice 2

Évaluer et représenter graphiquement les produits de convolution suivants :

En évaluant directement les intégrales dans la définition de la convolution, on trouve :

a) $H(t) * H(t)$, où H est l'échelon unité,

Une rampe infinie $tH(t) = \begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant 0 \\ t & \text{si } t \geqslant 0 \end{cases}$

b) $H(t) * \Pi_a(t)$, où $\Pi_a(t)$ désigne une porte unité de largeur $a \geqslant 0$,

une rampe finie $\begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -\frac{a}{2} \\ t + \frac{a}{2} & \text{si } -\frac{a}{2} \leqslant t \leqslant \frac{a}{2} \\ a & \text{si } t \geqslant \frac{a}{2} \end{cases}$

c) $\Pi_a(t) * \Pi_b(t)$ pour $a \geqslant b \geqslant 0$,

un trapèze $\begin{cases} 0 & \text{si } t \leqslant -\frac{a+b}{2} \\ t + \frac{a+b}{2} & \text{si } -\frac{a+b}{2} \leqslant t \leqslant -\frac{a-b}{2} \\ b & \text{si } -\frac{a-b}{2} \leqslant t \leqslant \frac{a-b}{2} \\ -t + \frac{a+b}{2} & \text{si } \frac{a-b}{2} \leqslant t \leqslant \frac{a+b}{2} \\ 0 & \text{si } t \geqslant \frac{a+b}{2} \end{cases}$

d) $\sin(t) * \Pi_a(t)$ (que dire lorsque $a \underset{2\pi}{\equiv} 0$?),

$\cos(t-\frac{a}{2}) - \cos(t+\frac{a}{2}) = \sin t \cdot \sin\frac{a}{2}$, identiquement nulle lorsque $a \underset{2\pi}{\equiv} 0$

e) $e^{-at}H(t) * e^{-bt}H(t)$.

$H(t)\dfrac{e^{-at}-e^{-bt}}{b-a}$ si $b \neq a$, $H(t)\, t\, e^{-at}$ si $a = b$

Exercice 3

En supposant que les fonctions impliquées satisfont toutes les hypothèses techniques nécessaires (qu'il faudrait préciser si l'on voulait être rigoureux), établir les propriétés suivantes du produit de convolution.

a) Retard :

$$x(t-t_0) * y(t) = (x*y)(t-t_0) = x(t) * y(t-t_0).$$

Pour les signaux $z(t) := x(t-t_0)$ et $y(t)$, on a

$$(z*y)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u-t_0)\, y(t-u)\,\mathrm{d}t = \int_{\infty}^{+\infty} x(v)\, y(t-t_0-v)\,\mathrm{d}t = (x*y)(t-t_0)$$

en faisant dans l'intégrale le changement de variables $v := u - t_0$, ce qui montre la première égalité. La deuxième s'établit de la même façon (ou en utilisant la commutativité du produit de convolution).

b) Dérivée :

$$x' * y = (x*y)' = x * y'.$$

$$(x*y)'(t) = \frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y'(t-u)\,\mathrm{d}t = (x*y')(t)$$

en dérivant à travers l'intégrale, ce qui établit la deuxième égalité.

c) Intégrale totale :

$$\int_{-\infty}^{\infty} (x*y)(t)\,\mathrm{d}t = \left(\int_{-\infty}^{\infty} x(t)\,\mathrm{d}t\right)\left(\int_{-\infty}^{\infty} y(t)\,\mathrm{d}t\right).$$

En posant $v = t - u$ (changement de variables de déterminant 1 dans l'intégrale double) + Fubini :

$$A(x*y) = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty}\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(v)\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = A(x)\cdot A(y)$$

Exercice 4

En supposant, bien entendu, que $x * y$ existe, montrer que

a) Si x et y sont de même parité, alors $x * y$ est pair ;

Soit $\varepsilon = \pm 1$ pour lequel on a $x(-t) = \varepsilon\, x(t)$ et $y(-t) = \varepsilon\, y(t)$. Alors

$$\begin{aligned}(x*y)(-t) &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(-t-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\,\varepsilon\, y(t+u)\,\mathrm{d}u \\ &= \int_{-\infty}^{+\infty} x(-u)\, y(t+u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x(v)\, y(t-v)\,\mathrm{d}v = (x*y)(t).\end{aligned}$$

b) si x et y sont de parités contraires, $x * y$ est impair.

Pareil en rajoutant un signe $-$ de temps en temps

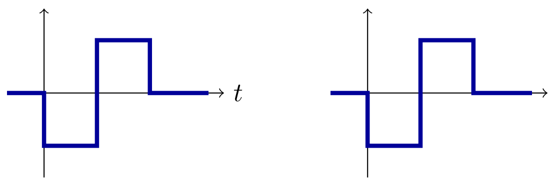
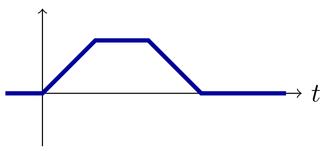
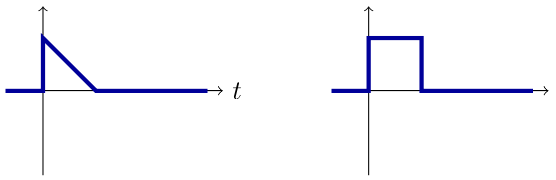
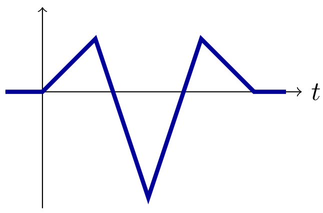
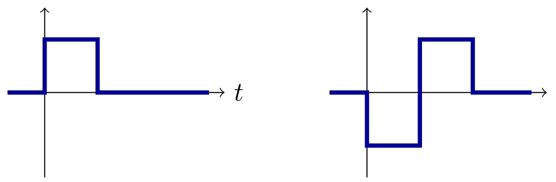
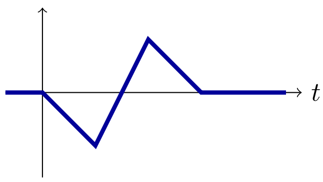
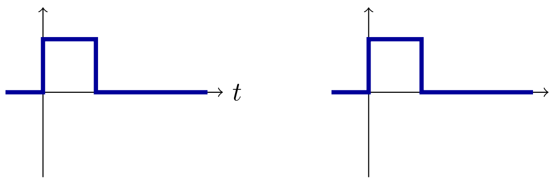
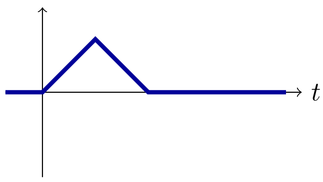
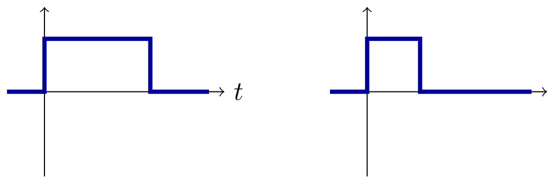
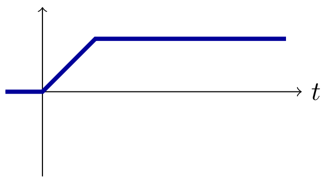
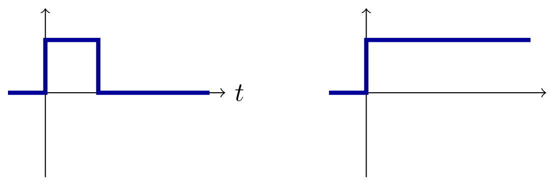
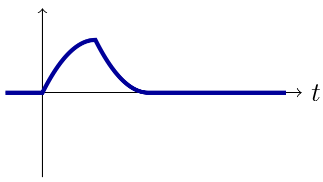
c) Que dire de $x * y$ si x ou y est périodique ?

Si x est T-périodique (c'est pareil si c'est y), $x * y$ l'est aussi car :

$$(x * y) \text{ retardée de } T = (x \text{ retardée de } T) * y = x * y.$$

Exercice 5

Dans la colonne de gauche, vous avez des paires de signaux : $x(t)$ et $y(t)$ numérotés de **a** à **f**. À droite, vous trouvez leur produit de convolution : $(x * y)(t)$, dans le désordre, numérotés de **1** à **6**.

Signaux x et y	Convolution $x * y$
figure **a** 	produit **1** 
figure **b** 	produit **2** 
figure **c** 	produit **3** 
figure **d** 	produit **4** 
figure **e** 	produit **5** 
figure **f** 	produit **6** 

Repérer le maximum d'indices afin d'associer chacune des paires de signaux (x, y) à son produit de convolution $x * y$. Justifiez vos choix et expliquer pourquoi l'on observe tel ou tel phénomène.

On remarque (vérifie) que tous ces signaux causaux donnent des convolutions causales.

Les figures a, c, 2 et 3 sont les seules à faire apparaître des valeurs négatives.

On associe…		car
a	2	seule figure où il y a 6 cas à étudier ; la figure 2 est celle qui a le plus large support
b	6	seul signal qui ne soit pas de degré 1 par morceaux
c	3	seule figure prenant des valeurs négatives ayant 5 cas à étudier ; y étant la différence de 2 portes, $x * y$ est donc la différence de 2 triangles.
d	4	cas particulier de l'exercice 2 avec deux portes de même largeur ; résultat qui a le plus petit support
e	1	cas particulier de l'exercice 2, résultat toujours positif, avec 5 cas à étudier ; présente un plateau quand le support de y est $\subset$ support de x
f	5	seul support non borné ; convoluer avec Heaviside revient à primitiver (Cf cours) ; seule figure où il n'y a que 3 cas à étudier