CSI3/CIR3/CNB3 avril 2021
Sans Document
Avec Calculatrice

Devoir Surveillé
Analyse des Signaux et des Images

Les réponses seront expliquées, justifiées et correctement rédigées

Evaluation des connaissances

1. Expliquer le phénomène « Moiré » que l'on peut constater sur certaines images numériques

2. Comment obtenir très simplement la composante continue d'un signal x(t) à partir de sa transformée de Fourier ?

3. A quoi sert la quantification d'un signal ?

Exercice 1

Soit le signal : $x(t) = \begin{cases} A\cos(2\pi f_0 t) & si \quad |t| \leq 2ms \\ 0 & si \quad |t| > 2ms \end{cases}$

Avec A = 1 Volt et f_0 = 1kHz

1. Représenter x(t)

2. Proposer une nouvelle écriture pour le signal x(t) qui utilisera une fonction p(t) de type « porte » que l'on définira.

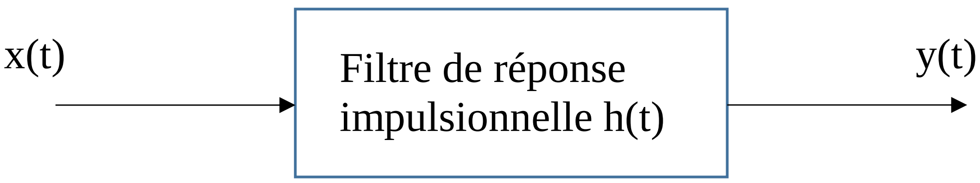
3. De cette nouvelle écriture, déduire X(f) la transformée de Fourier de x(t).

4. Représenter alors le spectre d'amplitude

Exercice 2

On considère un filtre de réponse impulsionnelle $h(t) = \begin{cases} 1 & si \quad 0 \leq t \leq 1ms \\ 0 & ailleurs \end{cases}$

En entrée duquel on place un signal $x(t) = \cos(2\pi f_1 t)$ avec f_1= 2 kHz



1. Calculer la réponse en fréquence du filtre (c'est-à-dire la transformée de Fourier de h(t)) et représenter son spectre d'amplitude.

2. Déterminer le signal y(t) en sortie du filtre. Différentes méthodes de calculs sont possibles.

FORMULAIRE

Formules Trigo:

cos(a+b) = cos(a).cos(b) – sin(a).sin(b)
cos(a-b) = cos(a).cos(b) + sin(a).sin(b)
sin(a+b) = sin(a).cos(b) + sin(b).cos(a)
sin(a-b) = sin(a).cos(b) – sin(b).cos(a)

cos(a).cos(b) = ½ (cos(a+b) + cos(a-b))
sin(a).sin(b) = ½ (cos(a-b) – cos(a+b))
cos(a).sin(b) = ½ (sin(a+b) – sin(a-b))
sin(a).cos(b) = ½ (sin(a+b) + sin(a-b))

Définition de la convolution y(t)=x(t)*h(t)

$$y(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)h(t-u)du = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t-u)h(u)du$$

Quelques propriétés de la Transformée de Fourier :

- Changement d'échelle : $\mathrm{x}(\mathrm{t}) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \mathrm{X}(\upsilon)$ $\quad \mathrm{x}(\mathrm{kt}) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \dfrac{1}{|\mathrm{k}|}\mathrm{X}\left(\dfrac{\upsilon}{\mathrm{k}}\right)$

- Dualité : $\mathrm{x}(\mathrm{t}) \leftrightarrow \mathrm{X}(\upsilon)$ alors $\mathrm{X}(\mathrm{t}) \leftrightarrow \mathrm{x}(-\upsilon)$

- Dérivation :
  - Par rapport au temps

    $\mathrm{x}(\mathrm{t}) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \mathrm{X}(\upsilon)$

    $\dfrac{\mathrm{d}^n \mathrm{x}(\mathrm{t})}{\mathrm{dt}^n} \xrightarrow{\mathrm{TF}} (2\pi \mathrm{j}\upsilon)^n \mathrm{X}(\upsilon)$

  - Par rapport à la fréquence

    $\mathrm{x}(\mathrm{t}) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \mathrm{X}(\upsilon)$

    $\mathrm{t}^n \mathrm{x}(\mathrm{t}) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \dfrac{\mathrm{d}^n \mathrm{X}(\upsilon)}{\mathrm{d}\upsilon^n} \dfrac{1}{(-2\pi \mathrm{j})^n}$

Théorème de Plancherel

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}) * \mathrm{y}(\mathrm{t}) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \mathrm{X}(\upsilon).\mathrm{Y}(\upsilon)$$

$$\mathrm{x}(\mathrm{t}).\mathrm{y}(\mathrm{t}) \xrightarrow{\mathrm{TF}} \mathrm{X}(\upsilon) * \mathrm{Y}(\upsilon)$$

Transformée de Fourier d'un peigne de Dirac

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \delta(t - nT) \quad \rightarrow \quad X(\upsilon) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T} \delta\left(\upsilon - \frac{n}{T}\right)$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie finie

$$C_{xy}(\tau) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Définition de l'intercorrélation pour x(t) et y(t) d 'énergie infinie et de puissance finie

$$C_{xy}(\tau) = \lim_{T\to+\infty} \frac{1}{2T} \int_{-T}^{+T} x(t)y^*(t-\tau)dt$$

Définition de la Transformée de Fourier Discrète (TFD) :

$$X(\nu = \frac{k}{NT_e}) = \sum_{n=0}^{N-1} x(n)e^{-\frac{2j\pi nk}{N}} \equiv X(k) \qquad k \in \{0,1,\ldots,N-1\}$$

Périodique de période N en k donc de période ν_e en ν

Expression matricielle de la TFD :

$$
\begin{array}{ccccc}
 & & & \text{Colonne numéro } n & \\
\text{Ligne Numéro } k & \begin{bmatrix} X(0) \\ X(1) \\ \vdots \\ X(N-2) \\ X(N-1) \end{bmatrix} & = & \begin{bmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 & 1 \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ \vdots & \vdots & e^{-\frac{2i\pi nk}{N}} & \vdots & \vdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \\ 1 & \cdots & \cdots & \cdots & \cdots \end{bmatrix} & \begin{bmatrix} x(0) \\ x(1) \\ \vdots \\ x(N-2) \\ x(N-1) \end{bmatrix}
\end{array}
$$