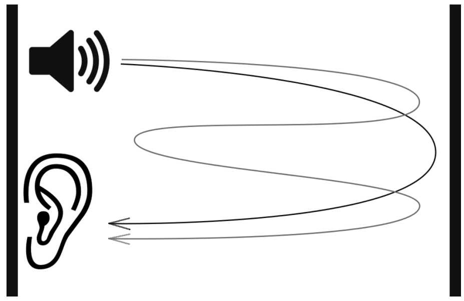
15 décembre 2014

Corrigé + barème

A. Annulation d'échos

Une modélisation simple du problème des échos multiples consiste à dire que le signal émis : $x(t)$ est reçu plusieurs fois avec une atténuation $\alpha \in]0\,;1[$ et un retard $\tau > 0$ identiques à chaque rebond :



Le signal reçu s'apparente donc à

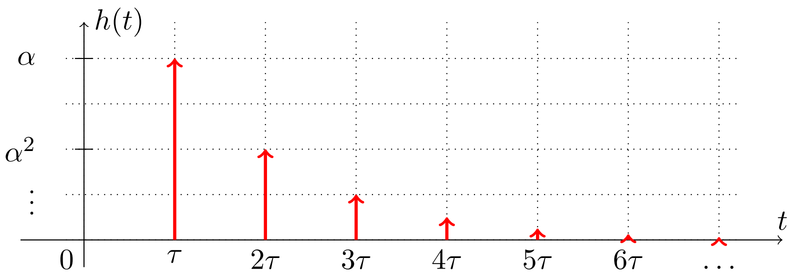
$$\begin{aligned} y(t) &= \alpha x(t-\tau) + \alpha^2 x(t-2\tau) + \alpha^3 x(t-3\tau) + \dots \\ &= \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n x(t-n\tau). \end{aligned}$$

α et τ sont identifiés au préalable et sont donc supposés connus. Le but de cet exercice est d'étudier comment filtrer y pour retrouver un signal sans écho et sans atténuation, c'est-à-dire, retrouver $x(t-\tau)$.

1. (a) On note $h(t)$ la réponse impulsionnelle, obtenue lorsque $x(t) = \delta(t)$ (éclatement d'un ballon ?). Dessiner son graphe.

$$h = \sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n \delta(t-n\tau) \ :$$

/1



(b) Quel lien y a-t-il entre h, x et y ?

/1 $y = x * h$.

(c) Qu'obtient-on en convoluant $h(t)$ trouvée précédemment par $f(t) := \frac{1}{\alpha}\delta(t) - \delta(t-\tau)$?

Après simplifications (qui peuvent être faites au brouillon)

/1

$$\Big(\alpha\delta(t-\tau) + \alpha^2\delta(t-2\tau) + \alpha^3\delta(t-3\tau) + \dots\Big) * \left(\frac{1}{\alpha}\delta(t) - \delta(t-\tau)\right) = \delta(t-\tau)$$

$h * f = \delta(t-\tau)$: on ne peut pas annuler le retard τ, mais on peut annuler l'écho !

(d) Donner alors une expression simplifiée de $y * f$ en faisant apparaître x.

/1

$$\begin{aligned}\text{Comme} \quad y &= x * h \\ y * f &= x * (h * f) \\ y * f(t) &= x(t-\tau).\end{aligned}$$

2. (a) Donner une expression de $\widehat{y}(\nu)$ faisant apparaître $\widehat{x}(\nu)$ en prenant soin de remplacer la somme de la série géométrique par son écriture habituelle condensée.

/1

$$\begin{aligned}\widehat{y}(\nu) &= \underbrace{\sum_{n=1}^{+\infty} \alpha^n e^{-2j\pi\nu n\tau}}_{\text{géométrique, raison}\neq 1} \widehat{x}(\nu) \\ &= \frac{\alpha e^{-2j\pi\nu\tau}}{1-\alpha e^{-2j\pi\nu\tau}} \widehat{x}(\nu).\end{aligned}$$

(b) Calculer la transformée de Fourier du filtre $f(t)$ défini ci-dessus.

/1

$$\widehat{f}(\nu) = \frac{1}{\alpha} - e^{-2j\pi\nu\tau} = \frac{1-\alpha e^{-2j\pi\nu\tau}}{\alpha}.$$

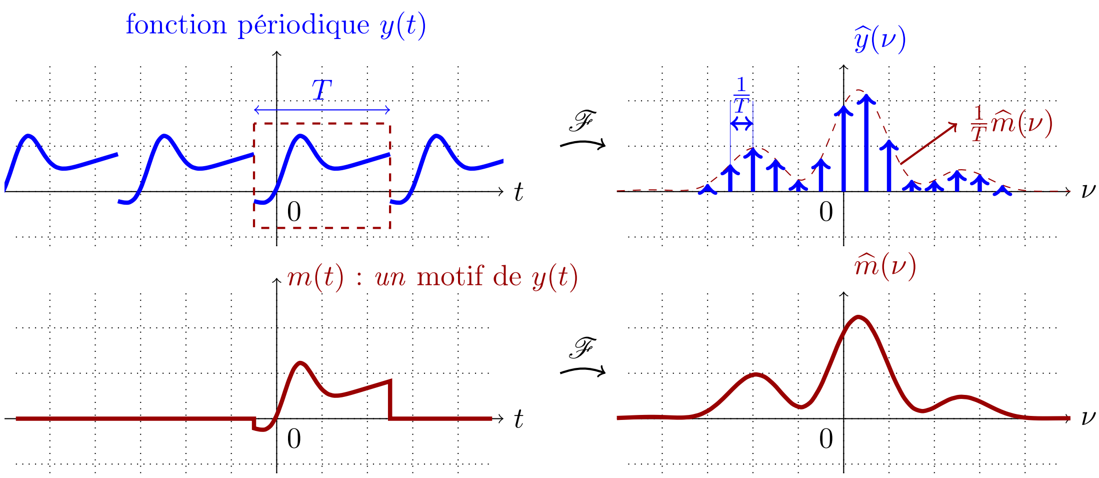
(c) Donner alors $\widehat{y * f}$ et retrouver le résultat de $y * f$.

/1

$$\begin{aligned}\widehat{y * f} &= \widehat{y} \times \widehat{f} = e^{-2j\pi\nu\tau} \cdot \widehat{x}(\nu) \\ y * f &= x(t-\tau).\end{aligned}$$

B. Séries ou transformation ?

Une fonction $y(t)$ est T-périodique. On note c_n ses coefficients de Fourier et $m(t)$ l'un des motifs de y :



3. (a) Donner une expression de $y(t)$ faisant apparaître $m(t)$.

/0.5 $y(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} m(t-nT) = m * \text{III}_T.$

(b) En déduire une expression de $\widehat{y}(\nu)$.

/0.5 $\widehat{y}(\nu) = \widehat{m}(\nu) \times \frac{1}{T}\text{III}_{\frac{1}{T}}.$

4. (a) A-t-on, pour tout $t \in \mathbb{R}$, la convergence $y(t) = \lim_{N\to\infty} \sum_{n=-N}^{N} c_n \cdot e^{jn\frac{2\pi}{T}t}$? Justifier et discuter.

D'après le théorème de Dirichlet, il y a bien convergence de la série vers $y(t)$ en tout point t où y est continue. S'il y a une discontinuité (de première espèce) en t_0, alors la série converge

/1 vers la valeur moyenne : $\frac{y(t_0^-)+y(t_0^+)}{2}$.

(b) Re-démontrer la relation essentielle liant séries et transformées de Fourier :

$$\boxed{\forall n \in \mathbb{Z}, \quad c_n = \frac{1}{T}\widehat{m}\left(\frac{n}{T}\right)}$$

Il y a deux façon de le retrouver.

- Soit on continue le raisonnement précédent :

$$\begin{aligned}
\widehat{y}(\nu) &= \widehat{m}(\nu) \times \frac{1}{T}\text{III}_{\frac{1}{T}} \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\widehat{m}(\nu)\delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right) \\
&= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} \frac{1}{T}\widehat{m}\left(\frac{n}{T}\right)\delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right).
\end{aligned}$$

/1 Or

$$\begin{aligned}
y(t) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot e^{jn\frac{2\pi}{T}t} \\
\widehat{y}(\nu) &= \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \cdot \delta\left(\nu - \frac{n}{T}\right)
\end{aligned}$$

Donc par identification, on a le résultat encadré.

- L'autre piste est de revenir à la définition de c_n et d'y reconnaître la transformée d'un motif :

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} y(t) \cdot e^{-2j\pi\frac{n}{T}t}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{T}\widehat{m}\left(\frac{n}{T}\right).$$

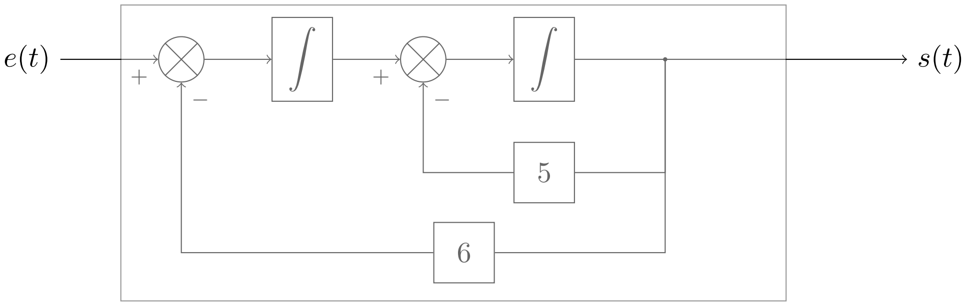
5. Tracer l'allure du spectre de $y(t)$ en utilisant celui de $m(t)$.

/1 Voir schéma.

C. Laplace

Le système ci-dessous voit sa sortie liée à son entrée par la relation

$$s'' + 5s' + 6s = e$$



6. (a) Quelle est la transformée de Laplace de l'entrée $e(t) := 2e^{-2t} - e^{-t}$?

/1 D'après le formulaire, on trouve : $E(p) = \frac{2}{p+2} - \frac{1}{p+1} = \frac{p}{(p+1)(p+2)}$.

(b) Quelle est la transformée de Laplace de la sortie correspondante (décomposez-la en éléments simples). Vous supposerez les conditions initiales nulles.

Étant données les conditions initiales nulles, on a

$$\mathscr{L}(s) = S(p) \qquad \mathscr{L}(s') = pS(p) \qquad \mathscr{L}(s'') = p^2 S(p)$$

L'équation différentielle permet alors d'écrire

$$\begin{aligned}
\underbrace{(p^2 + 5p + 6)}_{(p+2)(p+3)} S(p) &= E(p) \\
S(p) &= \frac{E(p)}{(p+2)(p+3)} = \frac{p}{(p+1)(p+2)^2(p+3)} \\
&= \frac{-\frac{1}{2}}{p+1} + \frac{-1}{p+2} + \frac{2}{(p+2)^2} + \frac{\frac{3}{2}}{p+3} \\
&= \frac{a}{p+1} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{(p+2)^2} + \frac{d}{p+3}.
\end{aligned}$$

/1 pour $S(p)$

/1 pour décomposition

(c) Retrouver alors le signal temporel de sortie : $s(t)$ pour cette entrée. Si vous n'avez pas les coefficients de la décomposition en éléments simples, prenez la décomposition théorique.

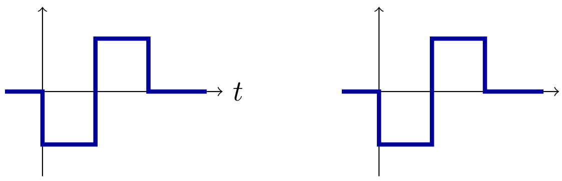
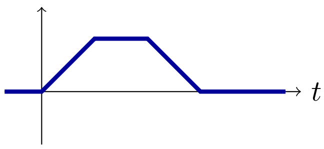
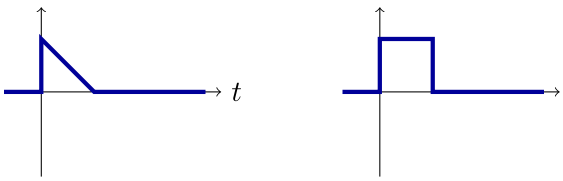
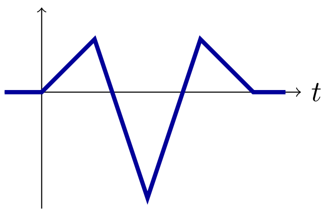
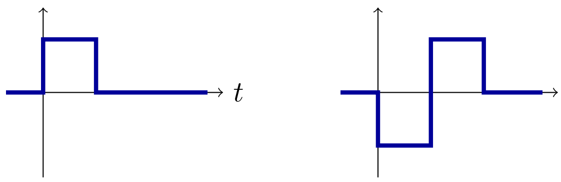
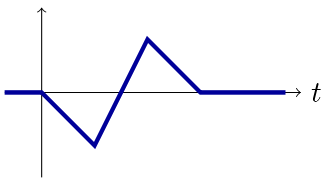
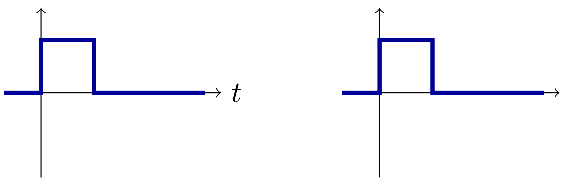
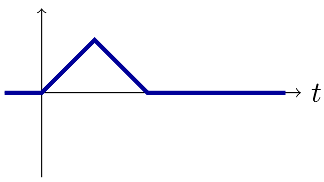
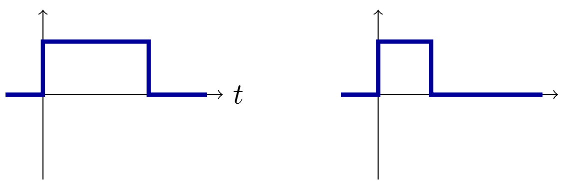
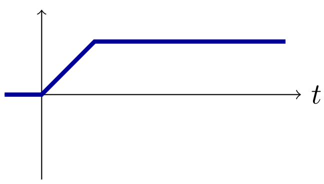
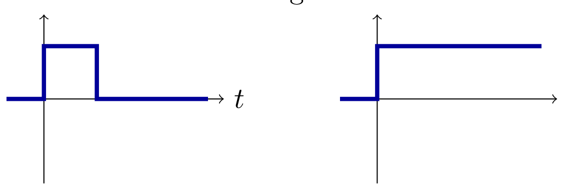
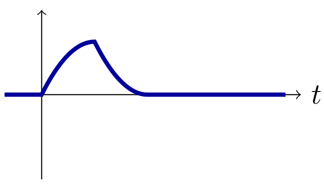
On en déduit

$$\begin{aligned}
s(t) &= ae^{-t} + be^{-2t} + cte^{-2t} + de^{-3t} \\
&= -\frac{1}{2}e^{-t} - e^{-2t} + 2te^{-2t} + \frac{3}{2}e^{-3t}.
\end{aligned}$$

/1 (pour l'une des formes)

D. Produits de convolution

Dans la colonne de gauche, vous avez des paires de signaux : $x(t)$ et $h(t)$ numérotés de **a** à **f**. À droite, vous trouvez leur produit de convolution : $(x * h)(t)$, dans le désordre, numérotés de **1** à **6**.

Signaux x et h	convolution $x * h$
figure **a** 	produit **1** 
figure **b** 	produit **2** 
figure **c** 	produit **3** 
figure **d** 	produit **4** 
figure **e** 	produit **5** 
figure **f** 	produit **6** 

Repérer le maximum d'indices afin d'

7. Associer chacune des paires de signaux (x, h) à son produit de convolution $x * h$. Justifiez vos choix et expliquer pourquoi l'on observe tel ou tel phénomène.

On remarque (vérifie) que tous ces signaux causaux donnent des convolutions causales.
Les figures a, c, 2 et 3 sont les seules à faire apparaître des valeurs négatives.

On associe…		car
a	2	seule figure où il y a 6 cas à étudier ; la figure 2 est celle qui a le plus large support
b	6	seul signal qui ne soit pas de degré 1 par morceaux
c	3	seule figure prenant des valeurs négatives ayant 5 cas à étudier ; h étant la différence de 2 portes, $x * h$ est donc la différence de 2 triangles.
d	4	vue en TD, cas particulier de e-1 avec deux portes de même largeur ; résultat qui a le plus petit support
e	1	vue en TD, résultat toujours positif, avec 5 cas à étudier ; présente un plateau quand le support de h est $\subset$ support de x
f	5	seul support non borné ; convoluer avec Heavisde revient à primitiver (Cf cours) ; seule figure où il n'y a que 3 cas à étudier

Tout autre forme de renseignements pertinents ou de justification par des schémas sont les bienvenus et pourront être valorisés.

Mettre 0.5 point pour chaque bonne association et 0.5 point par justification convaincante.

L'ensemble du barême permet d'obtenir 21 points, ce qui laisse donc une question en bonus et fait une note globale sur 20.