---------------------Exercice 1 : 4 points---------------------

Q1-1: (1 points):

Réponse indicielle (échelon unitaire) d'un système de second ordre :

$$G(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{k\omega_0^2}{p^2 + 2m\omega_0 p + \omega_0^2}$$

Q1-2 : (1 points):

Gain k= 2

Instant de premier dépassement T_{pic}= 5.1 seconds

On exprime le dépassement D_1, en pourcentage, du système de la manière suivante :

$$D_1(\%) = 100\frac{y_{\max} - y(\infty)}{y(\infty) - y(0)} = 100\frac{2.5-2}{2-0} = 25\%$$

Q1-3 : (2 points):

Coefficient d'amortissement m:

$$D_1 = k.e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

$$\Rightarrow \frac{D_1}{k} = e^{-\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}}}$$

$$\Rightarrow -\frac{\pi m}{\sqrt{1-m^2}} = \ln\left(\frac{D_1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow -\pi m = \sqrt{1-m^2}\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)$$

$$\Rightarrow (-\pi m)^2 = \left(1-m^2\right)\left(\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)\right)^2 = \left(\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)\right)^2 - m^2\left(\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow m^2\left(\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)\right)^2\right) = \left(\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)\right)^2$$

$$\Rightarrow m^2 = \frac{\left(\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)\right)^2}{\left(\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{D_1}{k}\right)\right)^2\right)} = \frac{\left(\ln\left(\frac{0.25}{2}\right)\right)^2}{\left(\pi^2 + \left(\ln\left(\frac{0.25}{2}\right)\right)^2\right)} = 0.305$$

$$\Rightarrow m = 0.55$$

Pulsation propre non amortie ω_0 :

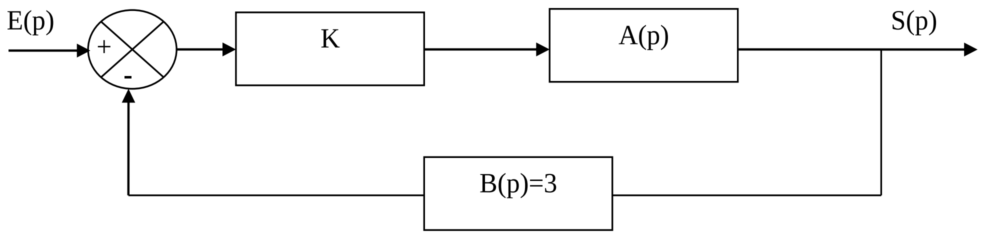
$$T_{pic} = \frac{\pi}{\omega_0 \sqrt{1-m^2}}$$

$$\Rightarrow \ \omega_0 = \frac{\pi}{T_{pic}\sqrt{1-m^2}} = \frac{\pi}{5.1\sqrt{1-0.55}} = 0.92 \ rad / s$$

-----------------------------Exercice 2 : 7 points--------------------------------

Q1 : 1.5 points

Schéma fonctionnel du système asservi :



La fonction de transfert en boucle ouverte est :

$$G(p) = KA(p)B(p) = \frac{24K}{p^2+5p+6} = \frac{24K}{(p+2)(p+3)}.$$

La fonction de transfert en boucle fermée est :

$$H(p) = \frac{KA(p)}{1+KA(p)B(p)} = \frac{8K}{p^2+5p+6+24K}$$

Q2 : 2 points

Pour obtenir une marge de phase égale à 45°, on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \arctan\frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Soit :

$$\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{3\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan\left[\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3}\right] = \tan\frac{3\pi}{4} = -1$$

d'où :

$$\frac{\frac{5\omega_{c0}}{6}}{1-\frac{\omega_{c0}^2}{6}} = -1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0}^2 - 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

Résolvons cette équation :

$$\Delta = b^2 - 4ac = 25 + 24 = 49$$

La seule solution positive est :

$$\omega_{c0} = \frac{5 + \sqrt{9}}{2} = 6 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\sqrt{4 + \omega_{c0}^2}\sqrt{9 + \omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \frac{\sqrt{4 + \omega_{c0}^2}\sqrt{9 + \omega_{c0}^2}}{24} = 1{,}77$$

Q3 : 1.5 points

Pour régler l'erreur de position sur 20 %, une première idée consiste à chercher à augmenter le gain K. On peut alors s'attendre à une chute de la marge de stabilité que l'on corrigera ensuite au moyen d'un correcteur à avance de phase.

On a :

$$H(p) = \frac{KA(p)}{1 + KA(p)B(p)} = \frac{8K}{p^2 + 5p + 6 + 24K}$$

d'où :

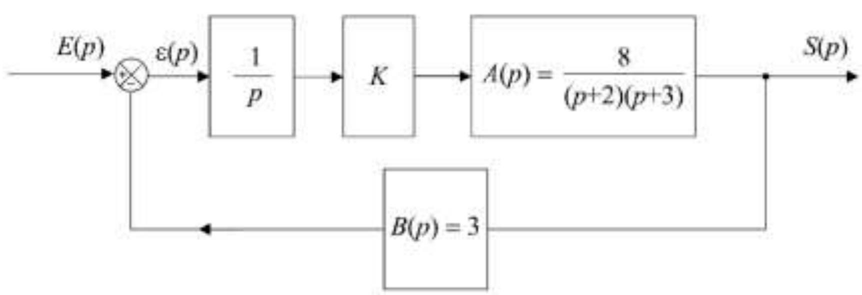
$$\varepsilon_p = \lim_{p \to 0} [1 - H(p)]$$

$$\varepsilon_p = \left[1 - \frac{8K}{6 + 24K}\right] = 20 \ \% \quad \Rightarrow \quad 0{,}48 + 11{,}2K = 0$$

Aucune valeur positive de K ne permet donc d'obtenir la précision voulue. Donc un correcteur à avance de phase n'est pas faisable pour garantir une erreur de position inférieure à 20 %.

Q4 : 2 points

Il est donc nécessaire d'introduire un correcteur intégral dans la chaîne directe, seul moyen de garantir une erreur de position inférieure à 20 %. La nouvelle boucle de régulation est présentée sur la figure suivante.



On a maintenant :

$$G(p) = \frac{24K}{p\,(p+2)\,(p+3)}$$

Pour obtenir une marge de phase égale à 45°, on doit avoir :

$$\Delta\varphi = \pi - \frac{\pi}{2} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{2} - \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

soit :

$$\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3} = \frac{\pi}{4}$$

Calculons la tangente des deux membres de l'expression :

$$\tan\left[\arctan\frac{\omega_{c0}}{2} + \arctan\frac{\omega_{c0}}{3}\right] = \tan\frac{\pi}{4} = 1$$

d'où :

$$\frac{\dfrac{5\omega_{c0}}{6}}{1 - \dfrac{\omega_{c0}^2}{6}} = 1 \quad \Rightarrow \quad \omega_{c0}^2 + 5\omega_{c0} - 6 = 0$$

La seule solution positive est évidente :

$$\omega_{c0} = 1 \text{ rad/s}$$

Par définition :

$$G(\omega_{c0}) = \frac{24K}{\omega_{c0}\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}} = 1$$

Par conséquent :

$$K = \frac{\omega_{c0}\sqrt{4+\omega_{c0}^2}\sqrt{9+\omega_{c0}^2}}{24} = 0{,}3$$

Pour conclure, le correcteur qui permet d'obtenir à la fois une marge de phase de 45° et une erreur de position inférieure à 20 % (elle est même nulle) est :

$$C(p) = \frac{0{,}3}{p}$$

--------------------------Exercice 3 : (9 points)-----------------

Modélisation:

Q1- 1 points

$$800\frac{d\theta(t)}{dt} + 4\theta(t) = 8u(t) + 0,4d(t)$$

Transformée de Laplace:

$$\begin{aligned}
&800\,p.\theta(p) + 4.\theta(p) = 8U(p) + 0.4D(p)\\
&\theta(p)\left(800\,p + 4\right) = 8U(p) + 0.4D(p)\\
&\theta(p) = \frac{8}{800\,p+4}U(p) + \frac{0.4}{800\,p+4}D(p)\\
&\qquad = G(p)U(p) + G_D(p)D(p)
\end{aligned}$$

Q2- 1 points

$$G(p)=\frac{8}{800p+4}=\frac{8}{4(200p+1)}=\frac{2}{200p+1}$$

$$G_D(p)=\frac{0.4}{800p+4}==\frac{0.4}{4(200p+1)}=\frac{0.1}{200p+1}$$

Donc :

Pour G(p) : le gain statique K=2, constante de temps T=200 ;

Pour G_D(p) : le gain statique K_D=0.1, constante de temps T_D=200 ;

Q3- 1.5 points

En l'absence de perturbation :

$$\theta(p)=\frac{2}{200p+1}U(p)=\frac{2}{p(200p+1)}$$ avec U(p)=1/p un échelon unitaire

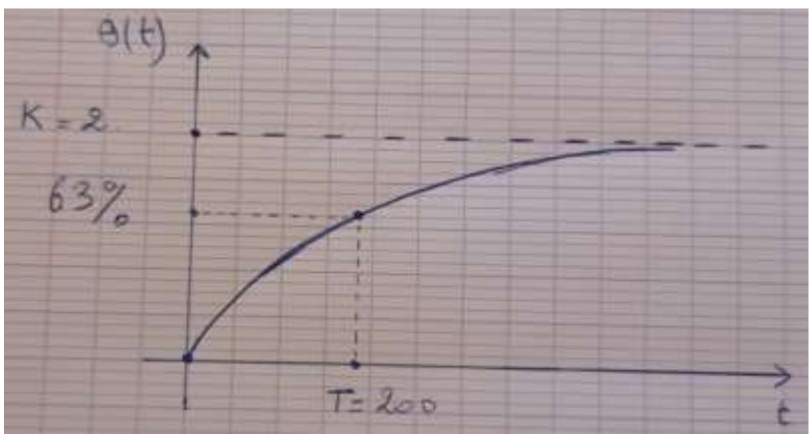
Par la transformée de Laplace inverse :

$$\theta(t)=2\left(1-e^{-\frac{t}{200}}\right)u(t)$$

Pour t=0 : $\theta(t)=0$

Pour $t=\infty$: $\theta(t)=K=2$

Pour t=T=200s : $\theta(200)=2\left(1-e^{-1}\right)=2\left(1-\frac{1}{e^{1}}\right)=2(1-0.37)=2(0.63)=2\times 63\%$



<u>Performances de l'asservissement de température par correction PI</u>

Q4- 1 points

$$FTBO(p)=C(p)G(p)=K_p\frac{1+T_i p}{T_i p}.\frac{K}{1+Tp}=\frac{K_p K(1+T_i p)}{T_i p(1+Tp)}$$

Q5- 1 points

$$FTBF(p)=\frac{C(p)G(p)}{1+C(p)G(p)}=\frac{\frac{K_pK(1+T_ip)}{T_ip(1+Tp)}}{1+\frac{K_pK(1+T_ip)}{T_ip(1+Tp)}}=\frac{\frac{K_pK(1+T_ip)}{T_ip(1+Tp)}}{\frac{T_ip(1+Tp)}{T_ip(1+Tp)}+\frac{K_pK(1+T_ip)}{T_ip(1+Tp)}}$$

$$=\frac{K_pK(1+T_ip)}{T_ip(1+Tp)+K_pK(1+T_ip)}$$

Pour $T_i = T$:

$$FTBF(p)==\frac{K_pK(1+Tp)}{Tp(1+Tp)+K_pK(1+Tp)}=\frac{K_pK}{K_pK+T.p}$$

Donc : $T_i = T$ conduit à une fonction de transfert en boucle fermée FTBF(p) du 1er ordre.

Q6- 1 points

Par l'application de critère de Routh :

P^1	T
P^0	$K_p.K$

Le système est stable lorsque $K_p>0$.

Q7- 1.5 points

- **Rapidité du système sans correction :**

Pour un système de premier ordre, la rapidité est définie par le temps de réponse du système. On choisit très souvent d'utiliser la notion de temps de réponse à 5% près, ce qui revient à dire que le temps de réponse est l'instant à partir duquel la sortie à atteint sa valeur finale à ±5% près.

$$\theta(t_m)=2\left(1-e^{-\frac{t_m}{200}}\right)u(t)=2\times 95\%$$

$$1-e^{-\frac{t_m}{200}}=0.95$$

$$e^{-\frac{t_m}{200}}=0.05$$

$$-t_m=200\ln(0.05)$$

$$t_m=3\times T=600s$$

- **Avec correcteur :**

$$FTBF(p)=\frac{1}{1+\frac{T}{K_pK}.p}=\frac{1}{1+T_c.p}$$

$$t_{mc} = 3\times T_c = \frac{1}{3} t_m$$

$$\Rightarrow \quad 3\frac{T}{K_p K} = \frac{1}{3} t_m$$

$$\Rightarrow \quad 9T = K_p K.t_m$$

$$\Rightarrow \quad K_p = \frac{9T}{K.t_m} = \frac{9\times 200}{2\times 600} = \frac{3}{2}$$

Q8- 1 points

Calcul de l'erreur statique :

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\left[1 - FTBF(p)\right]$$

$$1 - FTBF(p) = 1 - \frac{K_p K}{K_p K + T.p}$$

$$= \frac{K_p K + T.p}{K_p K + T.p} - \frac{K_p K}{K_p K + T.p} = \frac{K_p K + T.p - K_p K}{K_p K + T.p}$$

$$= \frac{T.p}{K_p K + T.p}$$

Alors :

$$\varepsilon_p = \lim_{p\to 0}\left[\frac{T.p}{K_p K + T.p}\right] = 0$$