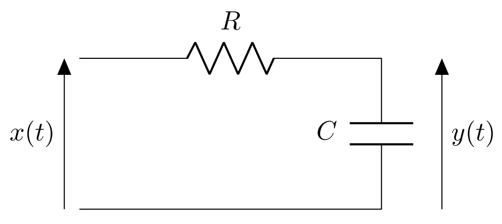
# III – Laplace et Dirac

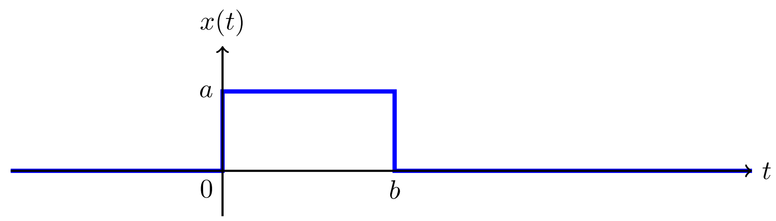



Dans un circuit $RC$ simple, la tension $y(t)$ aux bornes du condensateur est reliée à la tension d'entrée $x(t)$ par l'équation différentielle

$$\tau \frac{\mathrm{d}y}{\mathrm{d}t} + y(t) = x(t) \qquad \text{où} \qquad \tau = RC.$$

Pour ne pas alourdir les calculs, nous allons ici supposer (quitte à ajuster l'unité de temps) que $\tau = 1$.

Nous allons charger le condensateur en appliquant une différence de potentiel $a$ pendant un laps de temps $b$ avant de le laisser se décharger.




**Exercice 1**

a) Résoudre « à la main » l'équation différentielle pour obtenir la tension de sortie $y(t)$ correspondant à cette entrée (porter une attention particulière aux conditions initiales sur chaque intervalle).

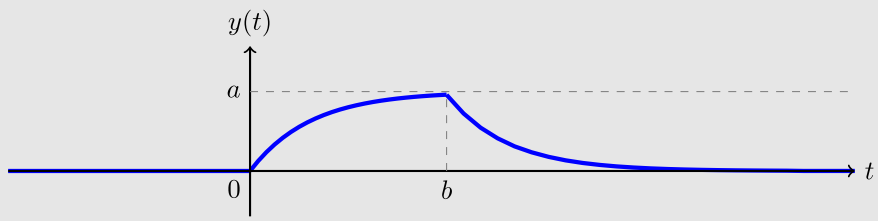
Sur chacun des intervalles $]-\infty, 0[$, $]0, b[$ et $]b, +\infty[$ nous avons une équation différentielle de la forme

$$y'(t) + y(t) = c$$

pour laquelle la solution générale est de la forme $y(t) = A\, e^{-t} + c$.

En imposant les conditions initiales :

- $y(-\infty) = 0$ on trouve $y(t) = 0$ sur $]-\infty, 0[$ ;
- $y(0) = 0$ on trouve $y(t) = a(1 - e^{-t})$ sur $]0, b[$ ;
- $y(b) = a(1 - e^{-b})$ on trouve $y(t) = a(e^{b} - 1)e^{-t}$ sur $]b, +\infty[$.



b) Résoudre cette fois-ci l'équation en utilisant la transformée de Laplace et discuter de la cohérence de votre réponse avec la précédente.

En écrivant
$$x(t) = a(H(t) - H(t-b))$$
on trouve avec Laplace
$$X(p) = a\left(\frac{1}{p} - \frac{e^{-bp}}{p}\right) = \frac{a(1-e^{-bp})}{p}.$$
L'équation elle-même devient
$$pY(p) + Y(p) = X(p),$$
d'où on trouve
$$Y(p) = \frac{X(p)}{p+1} = \frac{a(1-e^{-bp})}{p(p+1)} = a(1-e^{-bp})\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+1}\right).$$
En raisonnant par propriétés on trouve donc
$$y(t) = \underbrace{z(t)}_{\text{charge}} - \underbrace{z(t-b)}_{\text{décharge}} \qquad \text{avec} \qquad z(t) = a(1-e^{-t})H(t).$$

**Exercice 2**

Notons $y_\varepsilon(t)$ la sortie correspondant à l'entrée $x_\varepsilon(t)$ obtenue avec $a = \dfrac{1}{\varepsilon}$, $b = \varepsilon$ (aire normalisée à 1).

a) Calculer la limite $y_0(t) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} y_\varepsilon(t)$. Déterminer l'entrée $x_0(t) := \lim\limits_{\varepsilon\to 0} x_\varepsilon(t)$ correspondante en dérivant $y_0(t)$.

Calcul de $y_0$ : on peut raisonner dans le domaine temporel ou opérationnel.

En temporel : $y_\varepsilon(t) = \frac{1}{\varepsilon}(e^\varepsilon - 1)e^{-t}$ sur $[\varepsilon, +\infty[$, on trouve donc à la limite
$$y_0(t) = L \cdot H(t)\, e^{-t} \qquad \text{avec} \qquad L = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{e^\varepsilon - 1}{\varepsilon} = 1.$$
En opérationnel : $Y_\varepsilon(t) = \dfrac{(1-e^{-\varepsilon p})}{p\varepsilon} \cdot \dfrac{1}{p+1} \longrightarrow \dfrac{1}{p+1}$ ce qui correspond bien à $y_0(t) = H(t)\, e^{-t}$.

En dérivant formellement $y_0(t) = H(t)\, e^{-t}$ à l'aide de la règle de Leibniz (ou par morceaux en faisant attention à la discontinuité), on trouve
$$y_0'(t) = H'(t)\, e^{-t} - H(t)\, e^{-t} = \delta(t)\, e^{-t} - H(t)\, e^{-t} = \delta(t) - y_0(t)$$
donc $y_0$ satisfait à l'équation différentielle
$$y_0' + y_0 = \delta.$$
Cela signifie donc que l'entrée $x_0(t)$ est une impulsion de Dirac $\delta$ ; on appelle $y_0$ la *réponse impulsionnelle.*

b) Vérifier (par calcul direct ou transformée de Laplace) que $y_\varepsilon(t) = y_0(t) * x_\varepsilon(t)$.

On pourrait vérifier cela par calcul direct d'intégrales (possible mais déconseillé) ou par propriétés de $*$ en décomposant $x_\varepsilon(t)$ en combinaison d'échelons.

Mais avec Laplace ça tient en une ligne :
$$Y_\varepsilon(p) = \frac{(1-e^{-\varepsilon p})}{\varepsilon\, p(p+1)} = \underbrace{\frac{1}{p+1}}_{Y_0(p)} \cdot \underbrace{\frac{(1-e^{-\varepsilon p})}{\varepsilon\, p}}_{X_\varepsilon(p)}.$$

c) De façon plus générale : se convaincre que la sortie $y(t)$ correspondant à une entrée causale $x(t)$ quelconque est donnée par le produit de convolution
$$y(t) = y_0(t) * x(t).$$

L'équation

$$y'(t) + y(t) = x(t)$$

devient dans le domaine opérationnel (avec conditions initiales nulles)

$$pY(p) + Y(p) = X(p)$$

ce qui donne

$$Y(p) = \frac{X(p)}{p+1} = Y_0(p) \cdot X(p).$$

Dans le domaine opérationnelle, la transformée de la sortie est obtenue en multipliant celle de l'entrée par la *fonction de transfert* $Y_0(p)$. Par transformée de Laplace inverse, cela signfie bien que la tension de sortie $y(t)$ est obtenue en convoluant l'entrée $x(t)$ par la réponse impulsionnelle $y_0(t)$.

**Exercice 3**

a) Simplifier l'expression suivante : $\big(\delta(t) + 2\,\delta(t-\pi) + \delta'(t)\big) * \big(\sin(t) + t^2 + H(t)\big)$.

$$\sin t + t^2 + H(t) - 2\sin t + 2(t-\pi)^2 + 2H(t-\pi) + \cos t + 2t + \delta(t)$$

b) En dérivant formellement le produit $x(t) \cdot \delta(t)$, donner une formule pour simplifier $x(t) \cdot \delta'(t)$.

$$(x \cdot \delta)' = x' \cdot \delta + x \cdot \delta' = x'(0) \cdot \delta + x \cdot \delta',$$

d'où

$$x(t) \cdot \delta'(t) = x(0)\,\delta'(t) - x'(0)\,\delta(t).$$

c) Le produit de convolution est-il associatif *en général* ? Comparer, par exemple,

$$(H * \delta') * 1 \qquad \text{et} \qquad H * (\delta' * 1).$$

Non (ça prendrait des conditions de décroissance rapide pour ça), en l'occurence ici :

$$(H * \delta') * 1 = \delta * 1 = 1, \qquad H * (\delta' * 1) = H * 0 = 0.$$