19 novembre 2013

Mathématiques
Transformation de Laplace

3e année

Consignes :
- Cette épreuve d'**une** heure comporte **14** questions.
- La calculatrice non-programmable est tolérée,
- **mais pas** les documents puisqu'un formulaire se trouve en dernière page.
- Vous ne rendrez que la grille cochée sur laquelle doit au moins apparaître votre **nom**, votre **prénom** et les coches correspondantes à votre **login** (p5xxxx).

---

1. Quelle est la définition de la transformée de Laplace d'une fonction $f(t)$?
   $\mathscr{L}(f(t)) = F(p) = \ldots$

   (1)☐ $\displaystyle \frac{1}{2j\pi}\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ (2)☐ $\displaystyle 2j\pi\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$ (3)■ $\displaystyle \int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$
   (4)☐ $\displaystyle 2j\pi\int_{0^-}^{+\infty} f(t)e^{pt}\,\mathrm{d}t$ (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Quelle est l'image de Laplace de la fonction

   $$f(t) := 1 - t\cos(t)\ ?$$

   (1)☐ $\frac{1}{p} + \frac{p}{p^2+1}$ (2)■ $\frac{1}{p} - \frac{p^2-1}{(p^2+1)^2}$ (3)☐ $\frac{1}{p} - \frac{2p}{(p^2+1)^2}$ (4)☐ $\frac{1}{p} + \frac{p}{(p^2+1)^2}$
   (5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

3. Quelle est l'image de Laplace de la fonction suivante ?

   $$f(t) := (1 - e^{-3t})\cos(4t)$$

   (1)■ $\frac{p}{p^2+16} - \frac{p+3}{p^2+6p+25}$ (2)☐ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3}\right)\frac{p}{p^2+16}$ (3)☐ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-3}\right)\frac{p}{p^2+16}$
   (4)☐ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p+3}\right)\frac{4}{p^2+16}$ (5)☐ $\left(\frac{1}{p} - \frac{1}{p-3}\right)\frac{4}{p^2+16}$

4. Déterminer le signal $s(t)$ dont la transformée de Laplace est

   $$S(p) := \frac{3}{(p+4)^3}$$

   $\forall t \geqslant 0$, $s(t) = \ldots$

   (1)■ $\frac{3}{2}\,t^2\,e^{-4t}$ (2)☐ $3\,t^2\,e^{-4t}$
   (3)☐ $\frac{3}{2}\,t^3\,e^{-3t}$ (4)☐ $3\,t^3\,e^{-3t}$ (5)☐ $(3t^2+3t+3)\,e^{-4t}$

5. Même question avec

   $$T(p) := \frac{1}{p^2(p+1)} \quad \text{que l'on décomposera en} \quad \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\gamma}{p+1}$$

   (α, β, γ étant trois constantes à déterminer).

   (1)☐ $1 + t + e^{-t}$ (2)☐ $1 + t + e^{t}$ (3)■ $-1 + t + e^{-t}$
   (4)☐ $-1 + t + e^{t}$ (5)☐ $-1 + t - e^{t}$

6. Même question avec

$$U(p) := \frac{p+3}{p^2+6p+25}$$

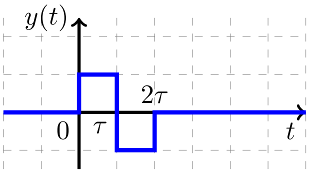
(1)□ $\cos(6t)\,e^{-25t} + 3\sin(6t)\,e^{-25t}$ (2)□ $\cos(25t)\,e^{-6t} + \frac{3}{25}\sin(25t)\,e^{-6t}$

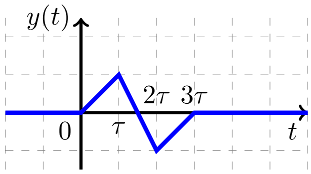
(3)□ $\cos(4t)\,e^{-3t} + 3\sin(4t)\,e^{-3t}$ (4)□ $\cos(4t)\,e^{-3t} + \frac{3}{4}\sin(4t)\,e^{-3t}$

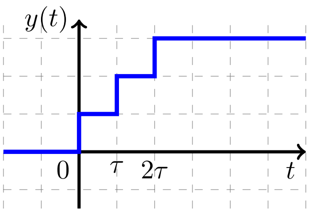
(5)■ $\cos(4t)\,e^{-3t}$

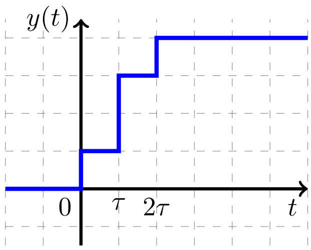
7. En développant le carré, reconnaître le signal dont la transformée de Laplace est

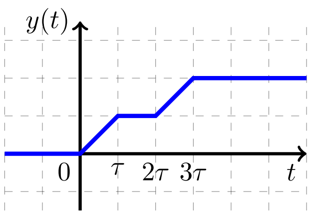
$$\frac{(1-e^{-\tau p})^2}{p}.$$

(1)■


(2)□


(3)□


(4)□


(5)□


Les 3 questions suivantes concernent l'équation différentielle suivante, associée à un filtre excité par une sinusoïde de pulsation $6\,\mathrm{rad.s^{-1}}$:

$$y' + 6y = \sin(6t), \quad \text{avec conditions initiales} \quad y(0) = 0$$

8. L'équation caractéristique de cette équation différentielle est...

(1)□ $Y = \frac{6}{p^2+6} \cdot \frac{1}{p+6}$ (2)□ $\frac{1}{p+6} = 0$ (3)□ $p+6 = \frac{6}{p^2+36}$ (4)■ $p+6=0$ (5)□ $\frac{6}{p^2+36}$

9. La fonction de transfert du filtre est...

(1)□ $Y = \frac{6}{p^2+36} \cdot \frac{1}{p+6}$ (2)■ $\frac{1}{p+6}$ (3)□ $\frac{6}{p^2+6}$ (4)□ $p+6$ (5)□ $\frac{6}{p^2+36}$

10. Peut-on dire qu'il y a résonnance ?

(1)□ oui (2)■ non

11. Voici une équation différentielle :

$$y' + 6y = 0, \quad \text{avec conditions initiales} \quad y(0) = 0$$

Quelle est sa solution $y(t)$?

(1) ☐ e^{-6t} (2) ☐ e^{6t} (3) ☐ $\frac{1}{p+6}$ (4) ■ 0

(5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

12. Voici une autre équation différentielle :

$$y' + 6y = 0, \quad \text{avec conditions initiales} \quad y(0) = 2$$

Quelle est sa solution $y(t)$?

(1) ☐ e^{-6t} (2) ☐ e^{6t} (3) ☐ $\frac{1}{p+6}$ (4) ☐ 0

(5) ■ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

13. Voici une équation différentielle :

$$y'' + 5y' + 6y = 2e^{-2t} - e^{-t}, \quad \text{avec conditions initiales} \quad y(0) = 0, \quad y'(0) = 0.$$

Quelle est l'image de Laplace de la solution y ?

(1) ☐ $\frac{p(p^2+5p+6)}{(p+1)(p+2)}$ (2) ☐ $\frac{(p+1)(p+2)}{p(p^2+5p+6)}$ (3) ☐ $\frac{1}{p^2+5p+6} \cdot \frac{p}{(p-1)(p-2)}$

(4) ■ $\frac{1}{p^2+5p+6} \cdot \frac{p}{(p+1)(p+2)}$ (5) ☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

14. Le signal ayant pour transformée de Laplace $\dfrac{(1 + 3e^{-2p})}{p}$ converge vers une valeur finie en $+\infty$. Laquelle ?

(1) ☐ -6 (2) ☐ 0 (3) ☐ 1 (4) ☐ 3 (5) ■ 4

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$	
$\displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{F(p)}{p}$	
$tf(t)$	$-F'(p)$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} F(s)\,\mathrm{d}s$	
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$f(t-a)$	$e^{-pa} F(p)$	$(a \geqslant 0)$
$f(kt)$	$\dfrac{1}{k} F\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pF(p) = f(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pF(p) = f(+\infty)$$

original causal $f(t)$	image $F(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	