I – Introduction

Exercice 1

Soit V un espace vectoriel (réel ou complexe) muni d'un produit scalaire (hermitien) $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$ et $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots)$ une famille orthogonale de vecteurs non nuls de V.

a) Soit $\mathbf{x}$ un vecteur de V s'écrivant sous la forme $\mathbf{x} = \sum_i x_i\, \mathbf{e}_i + \mathbf{y}$ où $\mathbf{y}$ est orthogonal à tous les $\mathbf{e}_i$.

En calculant le produit scalaire de $\mathbf{x}$ avec $\mathbf{e}_i$, montrer que $x_i = \dfrac{\langle\, \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{x} \,\rangle}{\|\mathbf{e}_i\|^2}$.

En prenant soin de renommer l'indice muet pour éviter les collisions, on calcule directement :

$$\langle\, \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{e}_i \,|\, \sum_j x_j \mathbf{e}_j \,\rangle = \sum_j x_j \underbrace{\langle\, \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{e}_j \,\rangle}_{0 \text{ si } i \neq j} = x_i\, \|\mathbf{e}_i\|^2$$

d'où l'expression pour x_i en divisant de par et d'autre par $\|\mathbf{e}_i\|^2 \neq 0$.

(Attention à l'ordre dans le produit hermitien qui n'est pas symétrique en général).

b) Que devient cette formule dans le cas particulier où la famille est orthonormée ?

La formule se simplifie en $x_i = \langle\, \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{x} \,\rangle$.

c) Expliquer comment retrouver facilement a) à partir de b).

À partir d'une famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots)$ de vecteurs orthogonaux non nuls, on fabrique aisément une famille orthonormée $(\widetilde{\mathbf{e}}_1, \widetilde{\mathbf{e}}_2, \ldots)$ en posant

$$\widetilde{\mathbf{e}}_i = \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|}.$$

On a alors la décomposition suivante :

$$\mathbf{x} = \sum_i \langle\, \widetilde{\mathbf{e}}_i \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\, \widetilde{\mathbf{e}}_i + \mathbf{y} = \sum_i \langle\, \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\, \frac{\mathbf{e}_i}{\|\mathbf{e}_i\|} + \mathbf{y} = \sum_i \frac{\langle\, \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{x} \,\rangle}{\|\mathbf{e}_i\|^2}\, \mathbf{e}_i + \mathbf{y}$$

et on retrouve bien l'expression du a) pour les coordonnées de $\mathbf{x}$ par rapport à la famille $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots)$.

Exercice 2

On travaille dans $\mathbb{R}^4$ muni du produit scalaire usuel.

a) Quel est l'angle formé par les vecteurs $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ et $\mathbf{v} = (1, 1, 1, 1)$?

$$\cos\theta = \frac{\langle\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \,\rangle}{\|\mathbf{u}\|\, \|\mathbf{v}\|} = \frac{2}{2\sqrt{2}} = \frac{\sqrt{2}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{4}$$

b) Calculer la projection de $\mathbf{w} = (1, 2, 3, 4)$ sur le plan $\mathcal{P}$ engendré par $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$:

- en écrivant $\mathrm{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{w}) = a\, \mathbf{u} + b\, \mathbf{v}$ et résolvant un système d'équations linéaires 2×2 ;

Notons $\mathbf{p} = \mathrm{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{w})$. On sait que $\mathbf{p}$ est caractérisé par le fait que

$$\mathbf{w} - \mathbf{p} \perp \mathcal{P}$$

et donc que le produit scalaire de $\mathbf{w} - \mathbf{p}$ avec $\mathbf{u}$ et $\mathbf{v}$ est nul. En d'autres termes, on doit avoir

$$\begin{cases} \langle\, \mathbf{w} - \mathbf{p} \,|\, \mathbf{u} \,\rangle = 0, \\ \langle\, \mathbf{w} - \mathbf{p} \,|\, \mathbf{v} \,\rangle = 0 \end{cases} \qquad \Longleftrightarrow \qquad \begin{cases} \langle\, \mathbf{p} \,|\, \mathbf{u} \,\rangle = \langle\, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{u} \,\rangle, \\ \langle\, \mathbf{p} \,|\, \mathbf{v} \,\rangle = \langle\, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v} \,\rangle. \end{cases}$$

En écrivant $\mathbf{p} = a\,\mathbf{u} + b\,\mathbf{v}$, cela devient

$$\begin{cases} a \quad \|\mathbf{u}\|^2 \; + b\,\langle\, \mathbf{v} \,|\, \mathbf{u} \,\rangle = \langle\, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{u} \,\rangle \\ a\,\langle\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \,\rangle + b \quad \|\mathbf{v}\|^2 \; = \langle\, \mathbf{w} \,|\, \mathbf{v} \,\rangle \end{cases} \qquad \text{soit} \qquad \begin{cases} 2a + 2b = 4 \\ 2a + 4b = 10 \end{cases}$$

ce qui donne (avec Cramer ou autre)

$$a = -1, \qquad b = 3 \qquad \text{donc} \qquad \mathbf{p} = -\mathbf{u} + 3\mathbf{v} = (2, 3, 2, 3).$$

NB : on peut vérifier que $\mathbf{w} - \mathbf{p} = (-1, -1, 1, 1)$ est bel et bien orthogonal à la fois à $\mathbf{u}$ et à $\mathbf{v}$.

- en fabriquant une base orthogonale de $\mathcal{P}$ et utilisant la formule de projection orthogonale.

On peut obtenir une base orthogonale de $\mathcal{P}$ en considérant par exemple $\mathbf{u} = (1, 0, 1, 0)$ et

$$\mathbf{v}' = \mathbf{v} - \frac{\langle\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \,\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} = \mathbf{v} - \mathbf{u} = (0, 1, 0, 1).$$

On peut alors calculer la projection à l'aide de la formule de projection sur par rapport à une base orthogonale (voir exercice 1) :

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{w}) = \frac{\langle\, \mathbf{u} \,|\, \mathbf{w} \,\rangle}{\|\mathbf{u}\|^2}\,\mathbf{u} + \frac{\langle\, \mathbf{v}' \,|\, \mathbf{w} \,\rangle}{\|\mathbf{v}'\|^2}\,\mathbf{v}' = 2\,\mathbf{u} + 3\,\mathbf{v}' = (2, 3, 2, 3).$$

NB : Inutile de se forcer à travailler avec une base orthonormée, ça ne simplifie pas vraiment les calculs.

Exercice 3

Soient $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$ et $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$ deux vecteurs dans $\mathbb{R}^n$. En supposant que les x_i ne sont pas tous égaux, montrer que les coefficients a et b qui minimisent la quantité

$$\Delta(a, b) = \|\mathbf{y} - a\,\mathbf{x} - b\,\mathbf{1}\|^2 \qquad \text{où} \qquad \mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$$

sont donnés par

$$a = \frac{n(\sum x_i y_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_i y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2}$$

a) en interprétant la question comme un problème de projection orthogonale sur le plan engendré par $\mathbf{x}$ et $\mathbf{1}$;

Comme base orthogonale de $\mathcal{U} = \mathrm{Vect}(\mathbf{1}, \mathbf{x})$, on peut prendre $\mathbf{1}$ et

$$\mathbf{2} := \mathbf{x} - \frac{\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2}\,\mathbf{1}$$

donc

$$\mathrm{proj}_{\mathcal{U}}(\mathbf{y}) = \frac{\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2}\,\mathbf{1} + \frac{\langle\, \mathbf{2} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{2}\|^2}\,\mathbf{2} = \frac{\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2}\,\mathbf{1} + \frac{\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle - \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{2}\|^2}\left(\mathbf{x} - \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\,\mathbf{1}\right).$$

Or

$$\|\mathbf{2}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{2}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle^2 + \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^4}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle^2\,\|\mathbf{1}\|^2 = \|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle^2.$$

En identifiant les coefficients devant $\mathbf{x}$ et $\mathbf{1}$ dans cette expression, on trouve donc bien

$$a = \frac{\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle - \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle^2} = \frac{\|\mathbf{1}\|^2 \langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle - \langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 - \langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle^2} \qquad \text{et}$$

$$b = \frac{\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2} - \frac{\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\frac{\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2} - \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{x}\|^2 - \frac{1}{\|\mathbf{1}\|^2}\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle^2} = \frac{\|\mathbf{x}\|^2 \langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle - \langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle}{\|\mathbf{1}\|^2 \|\mathbf{x}\|^2 - \langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle^2}$$

après simplification, qui sont exactement les expressions annoncées.

b) en déterminant les points critiques de la fonction de 2 variables $\Delta(a, b)$.

En dérivant $\Delta(a, b) = \|\mathbf{y} - a\,\mathbf{x} - b\,\mathbf{1}\|^2$ avec les règles usuelles, on trouve

$$\frac{\partial \Delta}{\partial a} = 2\,\langle\, \mathbf{y} - a\,\mathbf{x} - b\,\mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle$$

$$\frac{\partial \Delta}{\partial b} = 2\,\langle\, \mathbf{y} - a\,\mathbf{x} - b\,\mathbf{1} \,|\, \mathbf{1} \,\rangle$$

donc le(s) point(s) critique(s) (a, b) de cette fonction solutionne(nt)

$$\begin{cases} a \quad \|\mathbf{x}\|^2 \ + b\,\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle = \langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle \\ a\,\langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle + b \quad \|\mathbf{1}\|^2 \ = \langle\, \mathbf{1} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle. \end{cases}$$

Les formules de Cramer nous redonnent alors les expressions ci-dessus (ici cette méthode est plus rapide).

NB : il s'agit exactement du même système d'équations que celui obtenu à l'aide de la condition d'orthogonalité de la projection dans l'exercice précédent.

Exercice 4

Considérons l'espace vectoriel $V = \mathcal{C}([0, 2\pi], \mathbb{C})$ des fonctions continues $[0, 2\pi] \to \mathbb{C}$.

a) Vérifier que la formule suivante définit un produit hermitien sur V :

$$\langle\, x \,|\, y \,\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

- linéarité en la seconde variable :

$$\langle\, x \,|\, ay+bz \,\rangle = \int_0^{2\pi} \overline{x(t)}\,(ay(t)+bz(t))\, \mathrm{d}t = a\int_0^{2\pi} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t + b\int_0^{2\pi} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t = a\langle\, x \,|\, y \,\rangle + b\langle\, x \,|\, z \,\rangle$$

- conjugué :

$$\overline{\langle\, x \,|\, y \,\rangle} = \overline{\int_0^{2\pi} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t} = \int_0^{2\pi} x(t)\, \overline{y(t)}\, \mathrm{d}t = \langle\, y \,|\, x \,\rangle$$

- positivité :

$$\langle\, x \,|\, x \,\rangle = \int_0^{2\pi} |x(t)|^2\, \mathrm{d}t \geqslant 0$$

car l'intégrale d'une fonction positive est positive

- définitude : si $\displaystyle\int_0^{2\pi} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t = 0$ pour une fonction continue x sur $[0, 2\pi]$ alors on peut affirmer que $x(t) = 0$ pour tout $t \in [0, 2\pi]$.

  En effet : sinon il y aurait une valeur $t_0 \in [0, 2\pi]$ pour laquelle $x(t_0) \neq 0$. Par continuité, on peut trouver un voisinage $[a, b]$ de t_0 dans $[0, 2\pi]$, sur lequel on a, par exemple

  $$|x(t)| \geqslant \frac{1}{2}|x(t_0)| \qquad \text{pour tout } t \in [a, b].$$

  On aurait alors

  $$\langle\, x \mid x \,\rangle = \int_0^{2\pi} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \geqslant \int_a^b |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t \geqslant \frac{(b-a)|x(t_0)|}{2} > 0,$$

  contradiction.

b) Vérifier que les fonctions $x(t) = 1$, $y(t) = \sin t$ et $z(t) = \cos t$ sont deux à deux orthogonales.

Orthogonalité :

- $\langle\, x \mid y \,\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t \,\mathrm{d}t = 0$
- $\langle\, x \mid z \,\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos t \,\mathrm{d}t = 0$
- $\langle\, y \mid z \,\rangle = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin t \cos t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{\sin 2t}{2} \,\mathrm{d}t = 0$

Forment-elles une famille orthonormée ?

Non :

- $\|x\|^2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \mathrm{d}t = 2\pi$
- $\|y\|^2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \sin^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1 - \cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t = \pi$
- $\|z\|^2 = \displaystyle\int_0^{2\pi} \cos^2 t \,\mathrm{d}t = \int_0^{2\pi} \frac{1 + \cos 2t}{2} \,\mathrm{d}t = \pi$

donc si on voulait une famille orthonormée, il faudrait prendre

$$\frac{1}{\sqrt{2\pi}}, \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \sin t \quad \text{et} \quad \frac{1}{\sqrt{\pi}} \cos t.$$