II – Vecteurs aléatoires

Exercice 1

Considérons la fonction de deux variables

$$f(x,y) = \begin{cases} c\cdot(x+2y) & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \text{ et } 0 \leqslant y \leqslant 1, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Quelle doit être la valeur de la constante $c \geqslant 0$ pour que f puisse être interprétée comme la densité de probabilité conjointe d'un couple de variables aléatoires (X, Y) ?

Pour que f soit une fonction positive avec

$$1 = \iint_{\mathbb{R}^2} f(x,y)\,\mathrm{d}A,$$

par un calcul d'intégrale double on trouve (si je ne m'abuse) que $c = \frac{1}{12}$.

b) Que vaut, pour ce couple, $\mathbb{P}[Y < X]$?

On doit évaluer l'intégrale de f sur le domaine $A = \{\,(x,y) \in [0,4]\times[0,1] \mid y \leqslant x\,\}$. Un coup d'œil au domaine nous apprend qu'il sera plus rapide de passer par le complémentaire $B = \{\,(x,y) \in [0,4]\times[0,1] \mid y \geqslant x\,\}$, on évalue donc

$$\mathbb{P}[(X,Y)\in B] = \int_0^1 \int_0^y \frac{x+2y}{12}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{y^2/2+2y^2}{12}\,\mathrm{d}y = \int_0^1 \frac{5y^2}{24}\,\mathrm{d}x = \frac{5}{72}.$$

On trouve donc $\mathbb{P}[(X,Y)\in A] = 1 - \mathbb{P}[(X,Y)\in B] = \frac{67}{72} \approx 93\,\%$.

c) Calculez les densités marginales f_X et f_Y. Les variables X et Y sont-elles indépendantes ? Calculez $\mathrm{Cov}(X,Y)$.

$$f_X(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}y = \begin{cases} (x+1)/12 & \text{si } 0 \leqslant x \leqslant 4 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

$$f_Y(y) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x,y)\,\mathrm{d}x = \begin{cases} 2(y+1)/3 & \text{si } 0 \leqslant y \leqslant 1 \\ 0 & \text{sinon} \end{cases}$$

Les variables ne sont pas indépendantes car $f(x,y) \neq f_X(x)\cdot f_Y(y)$. Pour la covariance :

$$\mathbb{E}[XY] = \iint_{\mathbb{R}^2} xy\,f(x,y)\,\mathrm{d}A = \frac{4}{3}, \qquad \mathbb{E}[X] = \frac{22}{9}, \qquad \mathbb{E}[Y] = \frac{5}{9}$$

$$\Longrightarrow \mathrm{Cov}(X,Y) = \mathbb{E}[XY] - \mathbb{E}[X]\cdot\mathbb{E}[Y] = -\frac{2}{81}$$

Exercice 2

a) Déterminer directement la fonction génératice $g_X(t)$ d'une variable aléatoire $X \sim \mathcal{B}(n,p)$.

$$g_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{k=0}^{n} e^{tk}\binom{n}{k}p^k q^{n-k} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}(pe^t)^k q^{n-k} = (pe^t+q)^n$$

avec $q = 1-p$.

b) Retrouver à l'aide des premiers termes de $g_X(t)$ les valeurs de $\mathbb{E}[X]$, $\mathrm{Var}(X)$.

Le plus simple est d'utiliser le développement en série de e^t pour obtenir les premiers termes du développement de $g_X(t)$ (ou alors dériver deux fois et évaluer en 0) pour identifier le coefficients de

$$g_X(t) = 1 + \mu t + \frac{\mu_2}{2} t^2 + \cdots$$

Dans les deux cas, on trouve

$$\mathbb{E}[X] = \mu = np, \qquad \mu_2 = n(n-1)p^2 + np \quad \Longrightarrow \quad \mathrm{Var}(X) = \mu_2 - \mu^2 = npq.$$

c) Cela est-il compatible avec l'interprétation de X comme somme de n variables indépendantes $\mathcal{B}(p)$?

Pour $Y \sim \mathcal{B}(p)$, on a $g_Y(t) = pe^t + qe^0$, $\mathbb{E}[Y] = p$, $\mathrm{Var}(Y) = pq$ (cas $n = 1$ ci-dessus). On a bien :

$$g_X(t) = g_Y(t)^n, \qquad \mathbb{E}[X] = n\,\mathbb{E}[Y], \qquad \mathrm{Var}(X) = n\,\mathrm{Var}(Y).$$

Exercice 3

a) Déterminer la fonction génératrice $g_X(t)$ d'une variable aléatoire X suivant une loi $\mathcal{N}(\mu, \sigma^2)$.

Rappel : la densité de X est donnée par

$$f(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2\sigma^2}(x-\mu)^2},$$

d'après le formulaire au verso, sa transformée de Fourier est donc

$$\widehat{f}(\nu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-2\pi i\mu\nu}\, \widehat{e^{-\frac{1}{2\sigma^2}x^2}}(\nu) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}\, e^{-2\pi i\mu\nu}\, \sqrt{2}\sigma\, \sqrt{\pi} e^{-\pi^2(\sqrt{2}\sigma\nu)^2} = e^{-2\pi i\mu\nu}\, e^{-2\pi^2\sigma^2\nu^2},$$

soit, en évaluant celle-ci en $\nu = -\dfrac{t}{2\pi i}$,

$$g_X(t) = e^{\mu t}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2}.$$

b) Soit $Y \sim \mathcal{N}(\lambda, \tau^2)$ une autre v.a. normale que l'on suppose indépendante de X. Démontrer à l'aide des fonctions génératrices que $X + Y$ est également une v.a. normale dont vous préciserez les paramètres.

$$g_{X+Y}(t) = g_X(t) \cdot g_Y(t) = e^{\mu t}\, e^{\frac{1}{2}\sigma^2 t^2} \cdot e^{\lambda t}\, e^{\frac{1}{2}\tau^2 t^2} = e^{(\mu+\lambda)t}\, e^{\frac{1}{2}(\sigma^2+\tau^2)t^2}$$

et on constate qu'il s'agit de la fonction génératrice des moments d'une variable normale de paramètres $\mu + \lambda$, $\sigma^2 + \tau^2$ (on pouvait s'attendre par propriétés générales à obtenir cette espérance et variance, mais on vient d'apprendre que la somme de variables normales indépendantes est encore normale).

Exercice 4

a) Soit $X \sim \mathcal{N}(0, 1)$. Montrer que X^2 suit une loi, appelée *loi du* χ^2, de densité

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{\sqrt{2\pi}} x^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{x}{2}} & x \geqslant 0 \\ 0 & \text{sinon,} \end{cases}$$

et fonction génératrice des moments $g(t) = (1 - 2t)^{-\frac{1}{2}}$. Quelle est son espérance ? Sa variance ?

Densité : puisque X a densité

$$f_X(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2},$$

la fonction de répartition de $Y := X^2$ est donnée, pour $y \geqslant 0$, par

$$F(y) = \mathbb{P}[X^2 \leqslant y] = \mathbb{P}[-\sqrt{y} \leqslant X \leqslant \sqrt{y}] = \int_{-\sqrt{y}}^{\sqrt{y}} \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, e^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} \int_0^{\sqrt{y}} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x$$

ce qui donne, par dérivation,

$$f(y) = \frac{2}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{1}{2}(\sqrt{y})^2} \frac{1}{2\sqrt{y}} = \frac{1}{\sqrt{2\pi}}\, y^{-\frac{1}{2}} e^{-\frac{y}{2}}.$$

Fonction génératrice :

$$g(t) = \mathbb{E}[e^{tX^2}] = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{tx^2} e^{-\frac{1}{2}x^2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{1}{2}(1-2t)x^2}\, \mathrm{d}x.$$

En posant $u = (1-2t)^{\frac{1}{2}}\, x$ (non ambigu pour $|t| < \frac{1}{2}$ ...) on trouve bien le résultat annoncé.

On obtient les premiers termes du développement limité de $g(t)$ à l'aide la formule binomiale généralisée :

$$g(t) = 1 + t + \frac{3}{2}\, t^2 + \cdots$$

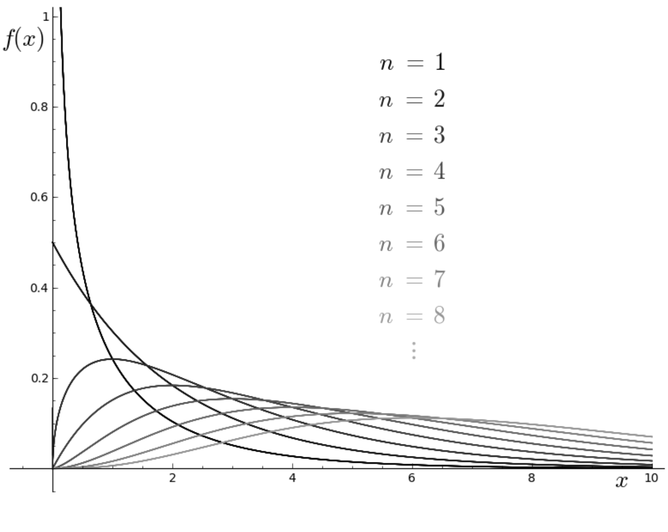
d'où on tire $\mu = 1$, $\mu_2 = 3$, $\mathrm{Var}(Y) = \mu_2 - \mu^2 = 2$.

b) Montrer que la somme des carrés de n variables aléatoires $X_1, \ldots, X_n$ *indépendantes* distribuées selon une $\mathcal{N}(0,1)$ suit une loi de fonction génératrice $(1-2t)^{-\frac{n}{2}}$, appelée *loi du* χ^2 *à* n *degrés de liberté.*

En posant $Y_i := X_i^2$, on a

$$g_{Y_1+\cdots+Y_n}(t) \overset{\text{ind}}{=} g_{Y_1}(t) \cdots g_{Y_n}(t) = g(t)^n.$$

Espérance : n, variance : $2n$.



Transformation de Fourier

$f(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\, e^{+2\pi \mathrm{i} \nu x}\, \mathrm{d}\nu$	$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(x)\, e^{-2\pi \mathrm{i} \nu x}\, \mathrm{d}x$
$\lambda\, f_1(x) + \mu\, f_2(x)$	$\lambda\, \widehat{f_1}(\nu) + \mu\, \widehat{f_2}(\nu)$
$f(ax)$	$\frac{1}{\lvert a \rvert} \widehat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right)$
$f(-x)$	$\widehat{f}(-\nu)$
$\overline{f(x)}$	$\overline{\widehat{f}(-\nu)}$
$f(x-a)$	$e^{-2\pi \mathrm{i} a \nu}\, \widehat{f}(\nu)$
$e^{2\pi \mathrm{i} a x} f(x)$	$\widehat{f}(\nu - a)$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}x}$	$2\pi \mathrm{i} \nu \widehat{f}(\nu)$
$-2\pi \mathrm{i} x f(x)$	$\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\nu}$
$(f_1 * f_2)(x)$	$\widehat{f_1}(\nu)\, \widehat{f_2}(\nu)$
$f_1(x)\, f_2(x)$	$(\widehat{f_1} * \widehat{f_2})(\nu)$
$\Pi_a(x)$	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a \nu)$
$H(x) e^{-\lambda x},\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0$	$\frac{1}{\lambda + 2\pi \mathrm{i} \nu}$
$\frac{1}{1+x^2}$	$\pi e^{-2\pi \lvert \nu \rvert}$
e^{-x^2}	$\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 \nu^2}$
$\delta(x)$	1
1	$\delta(\nu)$
$Ш_a(x),\ a > 0$	$\frac{1}{a} Ш_{\frac{1}{a}}(\nu)$