I – Variables aléatoires

Exercice 1

La *loi exponentielle* $\mathcal{E}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ est celle d'une variable aléatoire X dont la densité est donnée par

$$f_X(x) = \begin{cases} c\, e^{-\lambda x} & \text{si } x \geqslant 0, \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Déterminer la bonne valeur pour la constante de normalisation c.

Puisque $\displaystyle\int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x = \frac{1}{\lambda}$, on doit prendre $c = \lambda$ pour normaliser l'aire sous la courbe à 1.

b) Quelle est l'espérance de X ? son mode ? sa médiane ?

$$\mathbb{E}[X] = \lambda \int_0^\infty x e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}x \overset{\text{IPP}}{=} \int_0^\infty e^{-\lambda x}\,\mathrm{d}t = \frac{1}{\lambda}$$

Mode en $x = 0$, là où f_X atteint son maximum. Pour la médiane, on calcule la fonction de répartition

$$F_X(x) = \int_{-\infty}^x f_X(x)\,\mathrm{d}x = H(x)\cdot(1 - e^{-\lambda x})$$

et on trouve $F_X(m) = \frac{1}{2} \iff m = \frac{\ln 2}{\lambda}$.

c) Montrer que la fonction génératrice des moments de X est donnée par

$$g_X(x) = \frac{\lambda}{\lambda - x}$$

et utiliser cela pour retrouver aisément $\mathbb{E}[X]$ et $\mathrm{Var}(X)$.

Calcul direct de $\mathbb{E}[e^{tX}]$; ou alors on ressort un formulaire de transformées de Fourier du premier semestre, on trouve

$$f_X(x) = \lambda\, H(x)\, e^{-\lambda x} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{f_X}(f) = \frac{\lambda}{\lambda + 2\pi \mathrm{i} f}$$

d'où, en posant $t = -2\pi\mathrm{i}f$,

$$g_X(t) = \frac{\lambda}{\lambda - t} = \frac{1}{1 - \frac{t}{\lambda}}.$$

En développant cela comme la somme d'une série géométrique, on a

$$g_X(t) = 1 + \frac{t}{\lambda} + \frac{t^2}{\lambda^2} + \cdots$$

ce qui nous donne, par comparaison avec

$$g_X(t) = 1 + \mu_1 t + \frac{\mu_2}{2} t^2 + \cdots + \frac{\mu_n}{n!} t^n + \cdots$$

les valeurs de $\mu_1 = \frac{1}{\lambda}$ et $\mu_2 = \frac{2}{\lambda^2}$, d'où

$$\mathbb{E}[X] = \mu_1 = \frac{1}{\lambda}, \quad \mathrm{Var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2 = \frac{1}{\lambda^2}.$$

Exercice 2

La *loi de Poisson* $\mathcal{P}(\lambda)$ de paramètre $\lambda > 0$ est celle d'une variable aléatoire X sur $\mathbb{N}$ pour laquelle

$$\mathbb{P}[X = n] = c\,\frac{\lambda^n}{n!} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

a) Quelle est la valeur appropriée pour la constante c ? Vérifier que $\mathbb{E}[X] = \lambda$.

Avec $1 = \sum_{n=0}^{\infty} \mathbb{P}[X = n]$, on trouve, grâce au développement en série entière de l'exponentielle, que $c = e^{-\lambda}$.

b) Calculer la fonction génératrice des moments de X et l'utiliser pour en déduire $\mathrm{Var}(X)$.

$$g_X(t) = \mathbb{E}[e^{tX}] = \sum_{n=0}^{\infty} e^{nt} \cdot e^{-\lambda}\frac{\lambda^n}{n!} = e^{-\lambda}\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(\lambda e^t)^n}{n!} = e^{-\lambda}\cdot e^{\lambda e^t} = e^{\lambda(e^t-1)}.$$

En développant à l'ordre 2 :

$$e^t - 1 = t + \frac{t^2}{2} + \cdots$$

on trouve

$$g_X(t) = 1 + \lambda\Big(t + \frac{t^2}{2} + \cdots\Big) + \frac{\lambda^2}{2}\big(t + \cdots\big)^2 = 1 + \lambda t + \frac{\lambda + \lambda^2}{2}t^2 + \cdots$$

ce qui donne bien

$$\mathbb{E}[X] = \mu_1 = \lambda, \qquad \mathbb{E}[X^2] = \mu_2 = \lambda + \lambda^2$$

et donc

$$\mathrm{Var}(X) = \mu_2 - \mu_1^2 = \lambda.$$

c) Supposons que le nombre de personnes appelant le centre d'assistance d'un opérateur téléphonique à chaque minute suive une loi de Poisson de moyenne 3. Quelle est la probabilité que 5 appels ou plus surviennent au cours de la même minute ?

$$\mathbb{P}[N \geqslant 5] = 1 - \mathbb{P}[N \leqslant 4] = 1 - \sum_{n=0}^{4} e^{-3}\frac{3^n}{n!} = 1 - e^{-3}\left(1 + 3 + \frac{9}{2} + \frac{27}{6} + \frac{81}{24}\right) \approx 18{,}5\%$$

Exercice 3

Soit X une variable aléatoire suivant une loi $\mathcal{N}(0,1)$ et $Y := X^2 - 2$.

Que vaut $\mathbb{P}[Y < 0]$? $\mathbb{P}[Y = 3]$? $\mathbb{P}[1 \leqslant Y \leqslant 4]$? $\mathbb{P}[Y \geqslant 2]$?

Si on appelle F la fonction de répartition de X dont le graphe est donné au verso, on a

$$\mathbb{P}[Y < 0] = \mathbb{P}[-\sqrt{2} < X < \sqrt{2}] = F(\sqrt{2}) - F(-\sqrt{2}) \approx 84{,}3\%$$

$$\mathbb{P}[Y = 3] = \mathbb{P}[X = \pm\sqrt{5}] = 0$$

$$\mathbb{P}[1 \leqslant Y \leqslant 4] = \mathbb{P}[\sqrt{3} \leqslant |X| \leqslant \sqrt{6}] = 2\big(F(\sqrt{6}) - F(\sqrt{3})\big) \approx 6{,}96\%$$

$$\mathbb{P}[Y \geqslant 2] = \mathbb{P}[X \geqslant 2 \text{ ou } X \leqslant -2] = 1 - F(2) + F(-2) \approx 4{,}55\%$$

Exercice 4

Soit $X \sim \mathcal{U}([0,1])$. Comparer $\mathbb{E}[X]$, $\mathbb{E}[X^2]$, $\mathbb{E}[\sqrt{X}]$, $\mathbb{E}[e^X]$, $\mathbb{E}[\ln X]$... et en tirer les conclusions appropriées.

$$\mathbb{E}[X] = \int_0^1 x \,\mathrm{d}x = \frac{1}{2}, \qquad \mathbb{E}[X^2] = \int_0^1 x^2 \,\mathrm{d}x = \frac{1}{3}, \qquad \mathbb{E}[\sqrt{X}] = \int_0^1 \sqrt{x} \,\mathrm{d}x = \frac{2}{3},$$

$$\mathbb{E}[e^X] = \int_0^1 e^x \,\mathrm{d}x = e - 1, \qquad \mathbb{E}[\ln X] = \int_0^1 \ln x \,\mathrm{d}x = -1$$

en tout cas, certainement en général on n'a *pas* $\mathbb{E}[f(X)] = f(\mathbb{E}[X])$.

Exercice 5

Fabriquer une variable aléatoire $\mathcal{U}([3,5])$ à partir d'une $\mathcal{U}([0,1])$.

Plus généralement, expliquer comment obtenir une $\mathcal{U}([a,b])$.

Si $X \sim \mathcal{U}([0,1])$, alors $2X + 3 \sim \mathcal{U}([3,5])$, et de façon générale $(b-a)X + a \sim \mathcal{U}([a,b])$.

Exercice 6

« S'opposer au hasard des naissances » : comment expliquez-vous l'apparent paradoxe décrit ici ?

`https://accromath.uqam.ca/2021/10/rubrique-des-paradoxes-sopposer-au-hasard-des-naissances/`

Soit X et Y le nombre de filles et de garçons, respectivement, d'un ménage avec cette stratégie de planning familial.

On a $X = 1$ (presque) sûrement : chaque couple a exactement une fille, cette variable aléatoire est (presque) constante.

Par ailleurs, on peut considérer que Y est le nombre d'échecs avant l'obtention d'un premier succès pour une $\mathcal{B}(\frac{1}{2})$: donc le nombre total d'enfants $Z = X + Y$ suit une loi géométrique de paramètre $\frac{1}{2}$ et on a

$$\mathbb{E}[Y] = \mathbb{E}[Z] - \mathbb{E}[X] = 2 - 1 = 1.$$

En moyenne, les familles ont toujours le même nombre de garçons et de filles.

Fonction de répartition d’une loi normale centrée réduite