Transformations

VI – Transformée de Fourier (bis)

G. Chênevert

30 novembre 2021

JUNIA ISEN

Au menu aujourd'hui

Propriétés de Fourier

Signaux périodiques

Filtres

Rappel : Transformée de Fourier

Pour tout signal $x(t)$ convenable, on a une représentation

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi i f t}\, \mathrm{d}f$$

avec

$$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t$$

(Convenable : $x(t)$ et $\widehat{x}(f)$ sont limites de fonctions intégrables)

Exemples de transformées

- $x(t) = \Pi_T(t) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{x}(f) = T\,\mathrm{sinc}(\pi T f)$
- $x(t) = \delta(t) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{x}(f) = 1$
- $x(t) = \delta(t - t_0) \quad \Longrightarrow \quad \widehat{x}(f) = e^{-2\pi \mathrm{i} t_0 f}$
- $x(t) = 1 \quad \Longrightarrow \quad \widehat{x}(f) = \delta(f)$
- $x(t) = e^{2\pi \mathrm{i} f_0 t} \quad \Longrightarrow \quad \widehat{x}(f) = \delta(f - f_0)$

Propriétés de la transformation de Fourier

Notons $\mathcal{F}(x)$ la transformée de Fourier d'un signal x.

- Linéarité : $\mathcal{F}(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \mathcal{F}(x) + b \cdot \mathcal{F}(y)$
- Retard : $\mathcal{F}(x(t-a)) = e^{-2\pi \mathrm{i} a f}\mathcal{F}(x)$
- Modulation par une onde pure : $\mathcal{F}(e^{2\pi \mathrm{i} a t} x(t)) = \mathcal{F}(x)(f-a)$
- Dérivation temporelle : $\mathcal{F}(x') = 2\pi \mathrm{i} f \mathcal{F}(x)$
- Dérivation fréquentielle : $\mathcal{F}(x)' = \mathcal{F}(-2\pi \mathrm{i} t\, x)$
- Parité : $\mathcal{F}(x(-t)) = \mathcal{F}(x)(-f)$
- Transformée inverse : $\mathcal{F}(\mathcal{F}(x(t))) = x(-t)$ i.e. $\mathcal{F}^{-1}(\widehat{x}(f)) = \mathcal{F}(\widehat{x}(-f))$

Fourier et convolution

Comme pour la transformation $\mathcal{L}$ de Laplace, on a

$$\mathcal{F}(x * y) = \mathcal{F}(x) \cdot \mathcal{F}(y).$$

Par contre, cette fois on peut aussi dire que

$$\mathcal{F}(x) * \mathcal{F}(y) = \mathcal{F}(x \cdot y).$$

Symétrie profonde entre les deux domaines (temporel et fréquentiel)

dans MATLAB : $\texttt{conv}(\mathtt{x}, \mathtt{y})$ est implémenté via $\texttt{ifft}(\texttt{fft}(\mathtt{x}). * \texttt{fft}(\mathtt{y}))$!

Exemple : transformée d'une dérivée

On a dit :

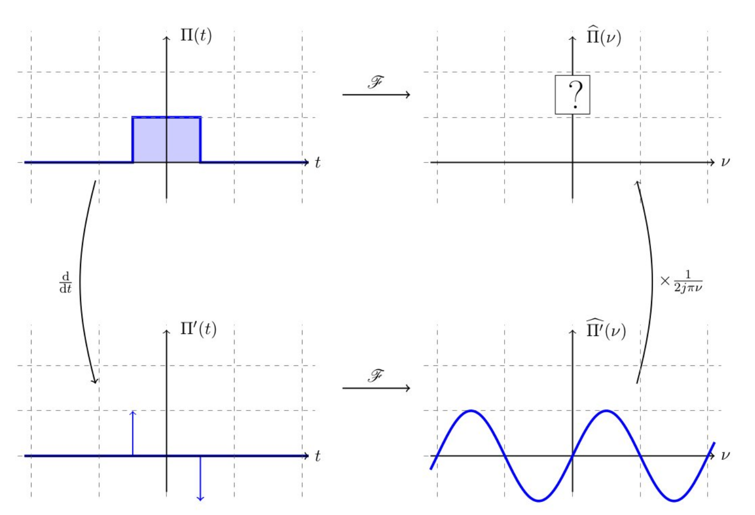
$$\widehat{x'}(f) = 2\pi \mathrm{i} f \cdot \widehat{x}(f).$$

Mais aussi :

- $x' = (\delta * x)' = \delta' * x$
- $\widehat{\delta'}(f) = 2\pi \mathrm{i} f \cdot \widehat{\delta}(f) = 2\pi \mathrm{i} f$
- donc $\widehat{x'}(f) = \widehat{\delta'}(f) \cdot \widehat{x}(f) = 2\pi \mathrm{i} f \cdot \widehat{x}(f).$

C'est tout à fait cohérent !

Exemple : transformée d'une porte (de nouveau)



Exemple : transformée d'une porte (de nouveau)

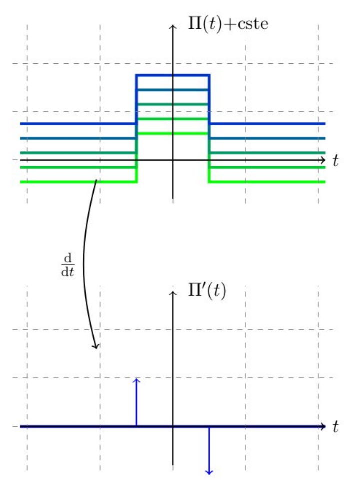
$$\Pi_T(t) = H(t + T/2) - H(t - T/2) \qquad \widehat{\Pi_T}(f) = T\ \mathrm{sinc}(\pi f T)$$

$$\downarrow \qquad\qquad\qquad\qquad \uparrow$$

$$\Pi'_T(t) = \delta(t + T/2) - \delta(t - T/2) \quad \longrightarrow \quad \widehat{\Pi'_T}(f) = e^{+\pi \mathrm{i} f T} - e^{-\pi \mathrm{i} f T}$$

$$= 2\mathrm{i}\sin(\pi f T) = 2\pi \mathrm{i} f\, \widehat{\Pi_T}(f)$$

Attention !



Mais où est passée la constante d'intégration ?

Fonctions vs signaux

- Nous savons que

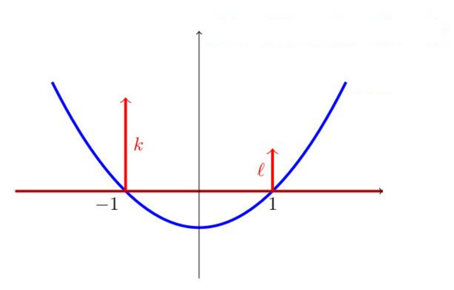
$$x(t) \cdot \delta(t-a) = x(a) \cdot \delta(t-a).$$

En particulier :

$$x(a) = 0 \implies x(t) \cdot \delta(t-a) = 0.$$

- Inversement (x étant une fonction et y un signal), si on a $x(t) \cdot y(t) = 0$ alors :
  - il faut que y soit nulle partout où $x(t) \neq 0$;
  - il se peut que y présente des Diracs aux zéros de x.

Exemple



$$x(t) \cdot y(t) = 0 \quad \Longrightarrow \quad y(t) = k\,\delta(t+1) + \ell\,\delta(t-1)$$

Refermons la porte

- D'une part,

$$\widehat{\Pi(t) + C} = \widehat{\Pi}(f) + C\,\delta(f)$$

- D'autre part,

$$\widehat{\Pi}'(f) = 2\pi \mathrm{i} f\,\widehat{\Pi}(f) = 2\mathrm{i}\sin(\pi f T)$$

$$\Longrightarrow\ \widehat{\Pi}(f) = T\,\mathrm{sinc}(\pi T f) + C\,\delta(f).$$

- Reste à déterminer la valeur de C : par exemple avec la condition initiale

$$\widehat{\Pi}(0) = A(\Pi) = T.$$

Signaux d'énergie finie

Définition

L'**énergie** d'un signal x est $E(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \, \mathrm{d}t$.

(Les mathématiciens parlent de « norme L^2 »)

Théorème (Plancherel)

Si x et y sont des signaux d'énergie finie, alors $\widehat{x}$ et $\widehat{y}$ le sont aussi et

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u) \, \widehat{y}(u) \, du = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(v) \, y(v) \, dv.$$

Identité un peu curieuse car on brise la sémantique des variables !

Signaux d'énergie finie

$$\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\,\widehat{y}(u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(v)\,y(v)\,\mathrm{d}v$$

Cas particulier : $u = t$, $v = f$, $\widehat{y} = \overline{x}$, donc $y = \overline{\widehat{x}}$ (vérifier !), alors :

Corollaire (identité de Parseval)

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2\,dt = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{x}(f)|^2\,df$$

$$\textit{i.e.} \quad E(x) = E(\widehat{x})$$

Identité de Parseval : interprétation

$$\int_{-\infty}^{+\infty} |x(t)|^2 \,\mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} |\widehat{x}(f)|^2 \,\mathrm{d}f$$

$\mathcal{F}$ est une transformation unitaire (préservant les normes).

Le spectre n'est qu'*une* représentation d'un phénomène physique :

- on lit l'énergie aussi bien sur l'axe des t que des f,
- on mesure la quantité d'énergie qui passe à une fréquence précise.

$\Longrightarrow$ interprétation de $|\widehat{x}(f)|^2$ en tant que *densité d'énergie*

Au menu aujourd'hui

Propriétés de Fourier

Signaux périodiques

Filtres

Spectre d'un signal périodique

Soit $x(t)$ un signal T-périodique (donc typiquement d'énergie infinie !) :

$$x(t) = x(t + T)$$

alors

$$\widehat{x}(f) = e^{2\pi \mathrm{i} f T} \cdot \widehat{x}(f)$$

$$(1 - e^{2\pi \mathrm{i} f T}) \cdot \widehat{x}(f) = 0$$

donc $\widehat{x}(f)$:

- est nulle presque partout ;
- sauf quand $2\pi \mathrm{i} f T$ est multiple entier de $2\pi \mathrm{i}$ où elle possède d'éventuels Diracs.

Spectre d'un signal périodique

En d'autres termes :

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, \delta(f - f_n)$$

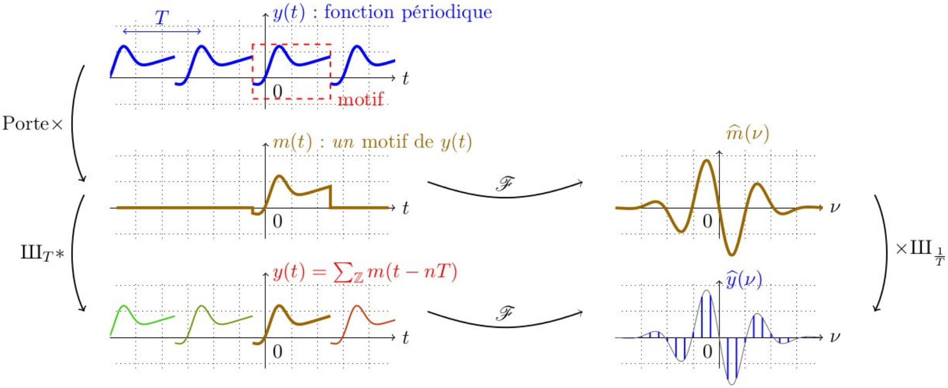
où

$$f_n := \frac{n}{T} = n \, f_1$$

$$\Longrightarrow \; x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n \, e^{2\pi \mathrm{i} f_n t}$$

On vient de refaire toute la théorie des séries de Fourier en 10 lignes !

Autre point de vue



Détaillons le calcul

Soit $x(t)$ un signal T-périodique et $m(t)$ un *motif* pour x (restriction à un intervalle de longueur T).

Alors :

$$x(t) = \cdots + m(t+2T) + m(t+T) + m(t) + m(t-T) + m(t-2T) + \cdots$$

$$= \sum_{n\in\mathbb{Z}} m(t-nT) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT) * m(t) = \underbrace{\left(\sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-nT)\right)}_{Ш_T} * m(t)$$

$Ш_T$: **peigne de Dirac** de période T (caractère cyrillique « cha »)

Détaillons le calcul

$$x(t) = \text{Ш}_T(t) * m(t)$$

$$\implies \widehat{x}(f) = \widehat{\text{Ш}}_T(f) \cdot \widehat{m}(f).$$

Ne reste plus qu'à expliciter $\widehat{\text{Ш}}_T$. Mais le calcul direct ne nous aide pas trop :

$$\widehat{\text{Ш}}_T = \int_{-\infty}^{+\infty} \text{Ш}_T(t)\, e^{-2\pi i f t}\, \mathrm{d}t = \sum_{n \in \mathbb{Z}} e^{-2\pi i n f T} \quad (??)$$

Par propriétés

- $\sqcup\!\sqcup\!\sqcup_T$ est T-périodique, on aura donc : $\widehat{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup_T}(f) = \sum_n c_n \, \delta(f - f_n)$;
- $\sqcup\!\sqcup\!\sqcup_T$ est invariante par multiplication par $e^{2\pi i f_1 t}$: $\widehat{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup_T}(f)$ est f_1-périodique

$$\widehat{\sqcup\!\sqcup\!\sqcup_T}(f) = c \sum_n \delta(f - f_n) = c \, \sqcup\!\sqcup\!\sqcup_{f_1}(f);$$

- En considérant l'aire sous $\Pi_T \cdot \sqcup\!\sqcup\!\sqcup_T$, on vérifie (exercice !) que $c = f_1 = \frac{1}{T}$.

Transformée de Ш

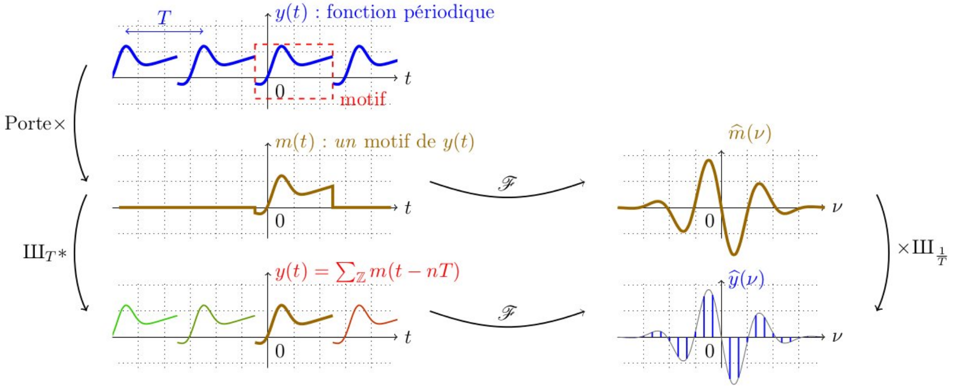
On a donc montré :

$$\widehat{\text{Ш}_T(t)} = \frac{1}{T}\text{Ш}_{\frac{1}{T}}(f) = f_1\,\text{Ш}_{f_1}(f).$$

En particulier, pour $T = 1$:

$$\widehat{\text{Ш}(t)} = \text{Ш}(f) \quad (!)$$

Retour au calcul



Retour au calcul

$$x(t) = Ш_T(t) * m(t)$$

$$\widehat{x}(f) = f_1\, Ш_{f_1}(f) \cdot \widehat{m}(f)$$

$$\widehat{x}(f) = f_1 \sum_n \delta(f - f_n) \cdot \widehat{m}(f)$$

$$\widehat{x}(f) = f_1 \sum_n \widehat{m}(f_n)\, \delta(f - f_n)$$

Coefficients de Fourier

En comparant cette dernière expression avec

$$\widehat{x}(f) = \sum_n c_n \, \delta(f - f_n),$$

on trouve

$$c_n = f_1 \, \widehat{m}(f_n) = \tfrac{1}{T} \widehat{m}\left(\tfrac{n}{T}\right) = \frac{1}{T} \int_a^{a+T} m(t) \, e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \, \mathrm{d}t$$

C'est précisément la définition qu'on avait donné des coefficients de Fourier !

Au menu aujourd'hui

Propriétés de Fourier

Signaux périodiques

Filtres

L'ubiquité de la convolution

On a vu que plusieurs opérations peuvent être vues comme des convolutions :

- dilatation des valeurs — avec $a \cdot \delta(t)$
- retard — avec $\delta(t - a)$
- primitive — avec $H(t)$
- dérivée — avec $\delta'(t)$
- périodisation — avec $\text{Ш}_T(t)$
- ... — avec ...

Filtres

On peut voir un **filtre** comme un opérateur $\mathcal{S} : x \mapsto \mathcal{S}(x)$ sur l'espace des signaux.

Ceux qui nous intéressent le plus en pratique sont

- linéaires : $\mathcal{S}(a \cdot x + b \cdot y) = a \cdot \mathcal{S}(x) + b \cdot \mathcal{S}(y)$
- continus : $\mathcal{S}\big(\lim_{n\to\infty} x_n\big) = \lim_{n\to\infty} \mathcal{S}(x_n)$
- invariants : $\mathcal{S}\big(x(t-t_0)\big) = \mathcal{S}(x)(t-t_0)$

Exemple

Pour h donné, l'opérateur $\mathcal{S}(x) := x * h$ satisfait ces trois propriétés.

Résultat fondamental

Théorème

Tout opérateur linéaire continu invariant $\mathcal{S}$ est de la forme $\mathcal{S}(x) = x * h$.

Démonstration.

1. Par linéarité, continuité et invariance, on a pour tous signaux x et y :

$$\mathcal{S}(x * y) = \mathcal{S}\left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, \mathrm{d}u \right) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, \mathcal{S}(y)(t-u)\, \mathrm{d}u = x * \mathcal{S}(y)$$

2. En posant $h := \mathcal{S}(\delta)$ la **réponse impulsionnelle** de $\mathcal{S}$, on a donc

$$\mathcal{S}(x) = \mathcal{S}(x * \delta) = x * \mathcal{S}(\delta) = x * h.$$

All is convolution !

Théorème

Tout opérateur linéaire continu invariant $\mathcal{S}$ est de la forme $\mathcal{S}(x) = x * h$.

La sortie $y = \mathcal{S}(x)$ du filtre est obtenue par convolution avec la réponse impulsionnelle

$$y = x * h.$$

D'où l'importance des transformées transformant $*$ en $\cdot$ (comme $\mathcal{L}$ et $\mathcal{F}$) !

Côté fréquentiel, on observe une multiplication par la **fonction de transfert** du filtre :

$$\widehat{y} = \widehat{x} \cdot \widehat{h}.$$

À ce propos

Supposons que $\mathcal{T}$ est une transformation sur les signaux avec la propriété que

$$\mathcal{T}(x * y) = \mathcal{T}(x) \cdot \mathcal{T}(y).$$

Les exponentielles jouent un rôle particulier pour la convolution :

$$(x * e^{\lambda t})(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{\lambda(t-u)}\, \mathrm{d}u = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u\right) e^{\lambda t}$$

$$\Longrightarrow \ \mathcal{T}(x * e^{\lambda t}) = \left(\int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u\right) \mathcal{T}(e^{\lambda t})$$

Ce qui ne laisse pas beaucoup d'autres choix que de prendre

$$\mathcal{T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u \qquad \text{pour certaines valeurs de } \lambda \text{ !}$$

Transformée de Fourier-Laplace

$$\mathcal{T}(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, e^{-\lambda u}\, \mathrm{d}u$$

- pour x causal, $\lambda = p$ on a la transformée de Laplace classique
- x d'énergie finie, $\lambda = 2\pi \mathrm{i} f$ on a la transformée de Fourier
- $x = \sqcup\!\sqcup_T \cdot m$ périodique, $\lambda = 2\pi \mathrm{i} f_n$ on retrouve les coefficients de Fourier

Fin.

. . . mais est-ce bien la fin ? . . .