Examen final

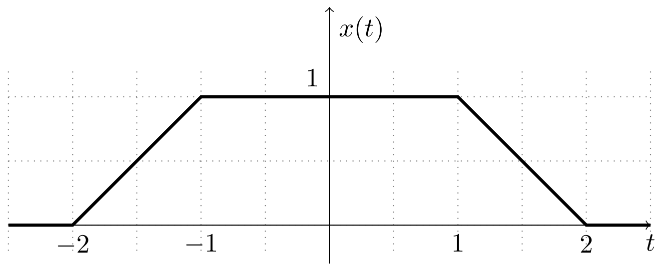
Consignes :

- Vous disposez de **3 h** pour répondre aux 3×4 questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Un formulaire sur les transformées de Fourier et Laplace est fourni en annexe.
- Soyez **concis** et **précis** dans vos réponses et **justifications**.

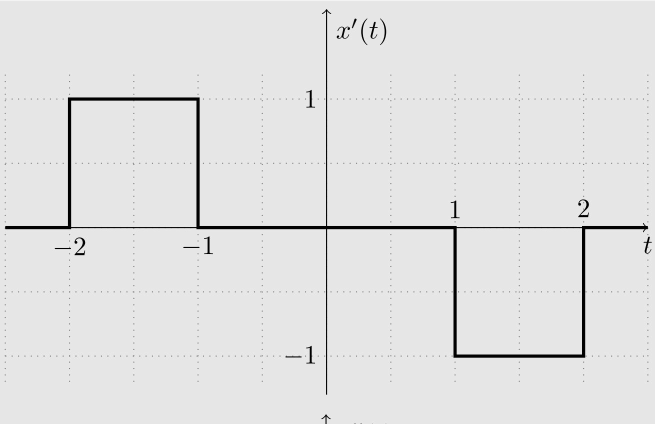
□

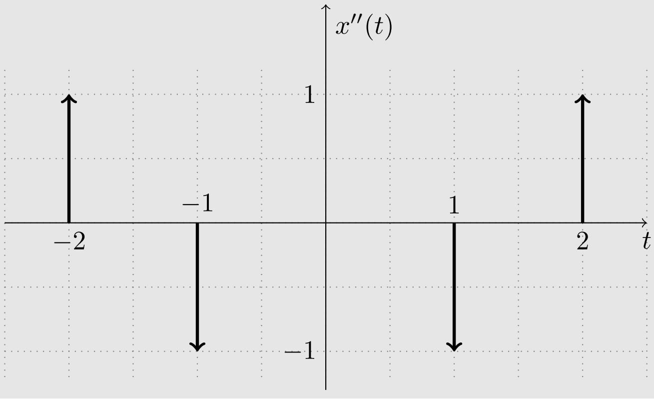
Exercice 1

Considérons le signal suivant :



a) Représenter $x'(t)$ et $x''(t)$, puis utiliser cela pour vous convaincre (sans calcul d'intégrale !) que $x = \Pi_1 * \Pi_3$.





On constate par exemple que

$$x'(t) = \Pi_1\big(t+\frac{3}{2}\big) - \Pi_1\big(t-\frac{3}{2}\big) = \Pi_1(t) * \left(\delta\big(t+\frac{3}{2}\big) - \delta\big(t-\frac{3}{2}\big)\right) = \Pi_1(t) * \Pi_3'(t) = (\Pi_1 * \Pi_3)'(t).$$

Il suit que $x(t) = \Pi_1(t) * \Pi_3(t) + c$ où c est une constante, et on peut se convaincre que $c = 0$ par exemple en comparant les aires sous la courbe de part et d'autre.

b) À l'aide de la question précédente, donner une expression pour $\widehat{x}(f)$ et vérifier que la valeur obtenue pour $\widehat{x}(0)$ est cohérente avec la figure ci-dessus.

D'après le formulaire,

$$\widehat{x}(f) = \widehat{\Pi_1}(f) \cdot \widehat{\Pi_3}(f) = \operatorname{sinc}(\pi f) \cdot 3 \operatorname{sinc}(3\pi f).$$

On trouve donc $\widehat{x}(0) = 3\operatorname{sinc}(0) = 3$, ce qui correspond (comme il se doit) à l'aire totale sous la courbe de x.

c) Étant donnée une fonction y, expliquer et expliciter la signification de chacune des expressions suivantes :

$$Ш_1 \cdot y, \qquad Ш_1 * y, \qquad \int_{-\infty}^{+\infty} Ш_1(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

Puisque $Ш_1 = \sum_{n\in\mathbb{Z}} \delta(t-n)$:

- $(Ш_1 \cdot y)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n)\, \delta(t-n)$ comporte une raie à chaque entier dont l'amplitude est la valeur de y en ce point : il s'agit d'une version échantillonnée de y.
- $(Ш_1 * y)(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(t-n)$ est la superposition d'une infinité de copies de y ayant subi les différents décalages entiers : il s'agit d'une version 1-périodisée de y. Note : puisqu'il peut y avoir interférence entre différentes répliques de y, on ne peut pas vraiment en général considérer y comme un motif ici.
- $\int_{-\infty}^{+\infty} Ш_1(t)\, y(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} y(n).$

d) Si y et $\widehat{y}$ sont des fonctions, donner une démonstration simple (une ligne !) du fait que :

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{y}(n).$$

Vérifier par calcul direct le validité de ce résultat dans le cas de la fonction x ci-dessus.

Puisque $\widehat{Ш_1} = Ш_1$, on a d'après le théorème de Plancherel

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} y(n) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{Ш_1}(t) \cdot y(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{\infty} Ш_1(t) \cdot \widehat{y}(t)\, \mathrm{d}t = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{y}(n).$$

En l'occurence, avec notre exemple on trouve bien

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} x(n) = \cdots + 0 + 1 + 1 + 1 + 0 + \cdots = 3$$

et

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(n) = 3 + \sum_{n\neq 0} \underbrace{3\operatorname{sinc}(n\pi)\operatorname{sinc}(3n\pi)}_{0} = 3.$$

□

Exercice 2

On considère maintenant, pour $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, le signal x_n défini par

$$x_n(t) = t^n e^{-\lambda t} H(t),$$

où H est la fonction d'Heaviside.

a) En utilisant directement la définition, calculer la transformée de Laplace de x_0.

$$X_0(p) = \int_0^\infty e^{-\lambda t} e^{-pt}\,\mathrm{d}t = \left.\frac{e^{-(\lambda+p)t}}{-(\lambda+p)}\right|_0^\infty = 0 - \frac{1}{-(\lambda+p)} = \frac{1}{\lambda+p}.$$

b) Vérifiez que x_0 est la réponse impulsionnelle du filtre dont la sortie y dépend de l'entrée e *via*

$$y'(t) + \lambda\, y(t) = e(t) \qquad \text{et} \qquad y(0^-) = 0$$

et utilisez ceci pour confirmer votre réponse à la question précédente.

Puisque $x_0(t) = e^{-\lambda t} H(t)$, on calcule

$$x_0'(t) = (e^{-\lambda t})' H(t) + e^{-\lambda t} H'(t) = -\lambda e^{-\lambda t} H(t) + e^{-\lambda t}\delta(t) = -\lambda x_0(t) + \delta(t)$$

et on trouve $x_0'(t) + \lambda x_0(t) = \delta(t)$: il s'agit bien de la solution causale de l'équation différentielle avec second membre $e(t) = \delta(t)$.

Prenant la transformée de Laplace de part et d'autre de cette égalité, on retrouve $(p+\lambda)X_0(p) = 1$, ce qui confirme le calcul effectué en a).

c) Calculer par les propriétés la transformée de Laplace de x_n.

Deux façons : soit on écrit $x_n(t) = t^n x_0(t)$, de sorte que

$$X_n(p) = (-1)^n \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}p^n}\left(\frac{1}{p+\lambda}\right);$$

soit on écrit $x_n(t) = e^{-\lambda t} t^n$ de sorte que $X_n(p)$ est la transformée de t^n évaluée et $p + \lambda$.

Dans les deux cas, on trouve $X_n(p) = \dfrac{n!}{(p+\lambda)^{n+1}}$.

d) En passant par le domaine opérationnel, déterminer le produit de convolution

$$x_m * x_n.$$

$$\mathcal{L}(x_m * x_n) = X_m \cdot X_n = \frac{m!n!}{(p+\lambda)^{m+n+2}} = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!} \cdot X_{m+n+1};$$

par transformée inverse on conclut que

$$x_m * x_n = \frac{m!\,n!}{(m+n+1)!}\, x_{m+n+1}.$$

□

Exercice 3

a) Soit $x(t)$ un signal *réel* et soit $A(f)$ et ϕ_f le module et l'argument de $\widehat{x}(f)$, de sorte que $\widehat{x}(f) = A(f)\, e^{j\phi_f}$.

Montrer que l'on peut exprimer $x(t)$ sous la forme d'une somme de sinusoïdes aux différentes fréquences :

$$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} A(f) \cos(2\pi f t + \phi_f)\,\mathrm{d}f.$$

La formule d'inversion de Fourier nous dit que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2\pi j f t}\, \mathrm{d}f.$$

En écrivant $\widehat{x}(f) = A(f)\, e^{j\phi_f}$ et développant, on trouve donc

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)\, e^{j(2\pi f t + \phi_f)}\, \mathrm{d}f = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)\, \cos(2\pi f t + \phi_f)\, \mathrm{d}f + j \int_{-\infty}^{\infty} A(f)\, \sin(2\pi f t + \phi_f)\, \mathrm{d}f.$$

Dans notre cas, la partie imaginaire est supposée nulle, de sorte que

$$x(t) = \int_{-\infty}^{\infty} A(f)\, \cos(2\pi f t + \phi_f)\, \mathrm{d}f.$$

b) Que devient cette expression si l'on suppose de plus que le signal est périodique : $x(t+T) = x(t)$?

Dans ce cas nous avons un spectre de raies aux multiples entiers de la fréquence fondamentale $f_0 = \frac{1}{T}$,

$$\widehat{x}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} A_n\, e^{j\phi_n}\, \delta(f - n f_0)$$

et la formule de la question précédente devient une série :

$$x(t) = \sum_{n=\infty}^{\infty} A_n\, \cos(2\pi n f_0 t + \phi_n).$$

c) Soit maintenant $x(t)$ pour lequel $\widehat{x}(f) = 0$ lorsque $|f| \geqslant f_{\max}$, et soit $f_e \geqslant 2 f_{\max}$. En vous aidant de schémas, expliquer pourquoi on peut écrire :

$$\widehat{x} = (\widehat{x} * \text{Ш}_{f_e}) \cdot \Pi_{f_e}.$$

Puisque $\widehat{x}$ est supportée sur un intervalle de largeur $2 f_{\max}$, il n'y a pas d'interférence entre les différentes répliques lorsque l'on f_e-périodise $\widehat{x}$ et on récupère donc le motif par fenêtrage.
En symboles :

$$(\widehat{x} * \text{Ш}_{f_e})(f) \cdot \Pi_{f_e}(f) = \left(\sum_{n=-\infty}^{\infty} \widehat{x}(f - n f_e) \right) \cdot \Pi_{f_e}(f) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \underbrace{\widehat{x}(f - n f_e) \cdot \Pi_{f_e}(f)}_{0 \text{ si } n \neq 0} = \widehat{x}(f).$$

d) En prenant la transformée inverse et en posant $T_e = 1/f_e$, expliquer pourquoi cela implique :

$$x(t) = (x \cdot T_e \text{Ш}_{T_e}) * f_e \operatorname{sinc}(\pi f_e t)$$

et en déduire la *formule d'interpolation de Whittaker* :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} x(nT_e) \operatorname{sinc}\big(\pi f_e (t - nT_e)\big).$$

Conclusion : le signal $x(t)$ peut être exactement reconstruit à partir des échantillons discrets $x(nT_e)$, $n \in \mathbb{Z}$!

Prenons la transformée de Fourier de la formule proposée :

$$\mathcal{F}\Big((x \cdot T_e \text{Ш}_{T_e}) * f_e \operatorname{sinc}(\pi f_e t) \Big) = \mathcal{F}(x \cdot T_e \text{Ш}_{T_e}) \cdot \mathcal{F}(f_e \operatorname{sinc}(\pi f_e t)) = (\widehat{x} \cdot \text{Ш}_{f_e}) * \Pi_{f_e} = \widehat{x}.$$

(puisque sinc est une fonction paire, sa transformée directe et inverse coincident ; rappellons qu'en général on a seulement $\widehat{\widehat{y}}(t) = y(-t)$.) En prenant la transformée inverse de part et d'autre, on trouve bien

$$x(t) = (x \cdot T_e \text{Ш}_{T_e}) * f_e \operatorname{sinc}(\pi f_e t) = (x \cdot \text{Ш}_{T_e}) * \operatorname{sinc}(\pi f_e t)$$

et on obtient le résultat attendu en développant Ш_{T_e}.

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$x(t)$	$X(p) = \int_0^{+\infty} x(t)\, e^{-pt}\,\mathrm{d}t$	
$x'(t)$	$pX(p) - x(0^+)$	
$\int_0^t x(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{X(p)}{p}$	
$tx(t)$	$-X'(p)$	
$(-1)^n t^n x(t)$	$X^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{x(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} X(s)\,\mathrm{d}s$	
$e^{at}x(t)$	$X(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$x(t-a)$	$e^{-pa}X(p)$	$(a \geqslant 0)$
$x(kt)$	$\dfrac{1}{k}X\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p\to+\infty} pX(p) = x(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to 0} pX(p) = x(+\infty)$$

original causal $x(t)$	image $X(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Produit de convolution

$$(x_1 * x_2)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(u)\, x_2(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{+\infty} x_1(t-v)\, x_2(v)\,\mathrm{d}v$$

Coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} x(t)\, e^{-2\pi n j t/T}\, \mathrm{d}t$$

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$x(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{x}(f)\, e^{2j\pi f t}\, \mathrm{d}f$	$\widehat{x}(f) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\, e^{-2j\pi f t}\, \mathrm{d}t$
$\lambda\, x_1(t) + \mu\, x_2(t)$	$\lambda\, \widehat{x_1}(f) + \mu\, \widehat{x_2}(f)$
$x(-t)$ $\overline{x(t)}$	$\widehat{x}(-f)$ $\overline{\widehat{x}(-f)}$
$x(t-a)$ $e^{2j\pi a t} x(t)$	$e^{-2j\pi a f}\widehat{x}(f)$ $\widehat{x}(f-a)$
$\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}$ $-2j\pi t x(t)$	$2j\pi\nu\widehat{x}(f)$ $\frac{\mathrm{d}\widehat{x}}{\mathrm{d}f}$
$(x_1 * x_2)(t)$ $x_1(t)\, x_2(t)$	$\widehat{x_1}(t)\, \widehat{x_2}(t)$ $(\widehat{x_1} * \widehat{x_2})(f)$
$\Pi_a(t) = H\big(t + \frac{a}{2}\big) - H\big(t - \frac{a}{2}\big)$ $\frac{1}{1+t^2}$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a f)$ $\pi e^{-2\pi\|f\|}$ $\sqrt{\pi} e^{-\pi^2 f^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(f)$ $\frac{1}{T} Ш_{\frac{1}{T}}(f)$