Examen final

Consignes :

- Vous disposez de **3 h** pour répondre aux 4×4 questions suivantes.
- **Calculatrice** non programmable peu utile, mais **autorisée**.
- Un formulaire sur les transformées de Fourier et Laplace est fourni en annexe.
- Soyez **concis** et **précis** dans vos réponses et **justifications**.

Exercice 1

a) Si $f(t)$ est un signal à valeurs réelles, montrer que sa transformée de Fourier $\widehat{f}$ satisfait

$$\overline{\widehat{f}(\nu)} = \widehat{f}(-\nu).$$

Que peut-on dire alors sur le spectre d'amplitude $|\widehat{f}|$ de f ?

D'après la définition :

$$\overline{\widehat{f}(\nu)} = \overline{\int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi j\nu t}\, \mathrm{d}t} = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{2\pi j\nu t}\, \mathrm{d}t = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2\pi j(-\nu)t}\, \mathrm{d}t = \widehat{f}(-\nu).$$

(ou encore : d'après le formulaire, puisque $f(t) = \overline{f(t)}$ on a $\widehat{f}(\nu) = \overline{\widehat{f}(-\nu)}$, d'où $\overline{\widehat{f}(\nu)} = \widehat{f}(-\nu)$.)

Pour l'amplitude :

$$|\widehat{f}(\nu)|^2 = \widehat{f}(\nu)\overline{\widehat{f}(\nu)} = \widehat{f}(\nu)\widehat{f}(-\nu) = \overline{\widehat{f}(-\nu)}\widehat{f}(-\nu) = |\widehat{f}(-\nu)|^2$$

donc

$$|\widehat{f}(\nu)| = |\widehat{f}(-\nu)|;$$

on a une symétrie par rapport à la droite verticale $\nu = 0$ (spectre pair).

b) Effet d'une dilatation : établir que pour $a > 0$, la transformée de Fourier de $t \mapsto f(at)$ est

$$\nu \mapsto \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right).$$

La transformée de la fonction dilatée est

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(at)\, e^{-2\pi j\nu t}\, \mathrm{d}t.$$

En posant $u = at$, de sorte que $\mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}t$, on trouve que celle-ci est égale à

$$\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\, e^{-2\pi j\nu \frac{u}{a}}\, \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\int_{-\infty}^{+\infty} f(u)\; e^{-2\pi j \frac{\nu}{a} u}\, \mathrm{d}u = \frac{1}{a}\widehat{f}\left(\frac{\nu}{a}\right).$$

c) À l'aide du formulaire, calculer la transformée de Fourier de $g(t) = te^{-t^2}$.

On y lit que la transformée de e^{-t^2} est $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$. De là,

$$\widehat{te^{-t^2}} = \frac{1}{-2\pi j}(\widehat{-2\pi j te^{-t^2}}) = \frac{1}{-2\pi j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\widehat{e^{-t^2}} = \frac{1}{-2\pi j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\left(\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}\right) = \frac{\pi^{\frac{3}{2}}}{j}\nu\, e^{-\pi^2\nu^2}.$$

d) Même question avec $h(t) = g(t) * \dfrac{1}{t^2 - 2t + 2}$.

Calculons tout d'abord

$$\widehat{\frac{1}{t^2-2t+2}} = \widehat{\frac{1}{(t-1)^2+1}} = e^{-2\pi j\nu}\widehat{\frac{1}{1+t^2}} = e^{-2\pi j\nu}\pi e^{-2\pi|\nu|}.$$

De là, par convolution on a

$$\widehat{h} = \widehat{g} \cdot \widehat{\frac{1}{t^2-2t+2}} = \frac{1}{j}\pi^{\frac{5}{2}}\nu\, e^{-\pi(\pi\nu^2+2j\nu+2|\nu|)}.$$

Exercice 2

Retrouvons dans cet exercice le lien entre séries de Fourier et transformées de Fourier.

a) Donner une expression de la transformée de Fourier d'une fonction T-périodique

$$f(t) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, e^{2\pi j n f_0 t}$$

représentée sous forme de série de Fourier (on pose $f_0 = 1/T$).

$$\widehat{f}(\nu) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \widehat{e^{2\pi j n f_0 t}} = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \widehat{1}(\nu - nf_0) = \sum_{n\in\mathbb{Z}} c_n\, \delta(\nu - nf_0).$$

b) Soit maintenant m la restriction de f à un intervalle $[a, a+T[$ de longueur T, de sorte que $f = m * Ш_T$. Utiliser cette représentation pour obtenir une autre expression de $\widehat{f}$.

$$\widehat{f}(\nu) = \widehat{m}(\nu)\cdot\widehat{Ш_T}(\nu) = \widehat{m}(\nu)\cdot\frac{1}{T}Ш_{f_0}(\nu) = \frac{1}{T}\widehat{m}(\nu)\sum_{n\in\mathbb{Z}}\delta(\nu - nf_0) = \frac{1}{T}\sum_{n\in\mathbb{Z}}\widehat{m}(nf_0)\,\delta(\nu - nf_0).$$

c) En comparant les expressions obtenues en a) et b), retrouver la relation

$$c_n = \frac{1}{T}\widehat{m}\left(\frac{n}{T}\right).$$

En comparant les amplitudes des diracs dans les deux expressions, on trouve bien

$$c_n = \frac{1}{T}\widehat{m}(nf_0) = \frac{1}{T}\widehat{m}\left(\frac{n}{T}\right).$$

(Coquille dans l'énoncé, désolé !)

d) Exemple : pour le signal T-périodique f en « dents de scie » dont un motif est

$$m(t) = t \qquad \text{pour} -\frac{T}{2} \leqslant t \leqslant \frac{T}{2},$$

calculer $\widehat{m}$ et en déduire les c_n (aucun calcul d'intégrale requis !), puis représenter soigneusement

$$m \text{ et } f \text{ d'une part,} \quad \widehat{m} \text{ et } \widehat{f} \text{ d'autre part.}$$

Puisque $m(t) = t \cdot \Pi_T(t)$, on a

$$\widehat{m}(\nu) = -\frac{1}{2\pi j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\widehat{\Pi_T} = -\frac{1}{2\pi j}\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}\nu}\big(T \operatorname{sinc} \pi T\nu\big) = -\frac{T^2}{2j}\operatorname{sinc}'(\pi T\nu).$$

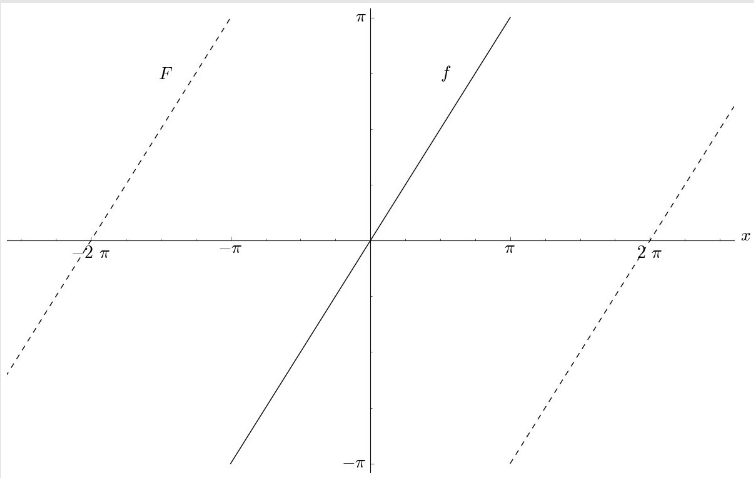
$$\Longrightarrow c_n = \frac{1}{T}\widehat{m}\left(\frac{n}{T}\right) = -\frac{T}{2j}\operatorname{sinc}'(n\pi) = \begin{cases} \dfrac{(-1)^n jT}{2\pi n} & \text{si } n \neq 0, \\ 0 & \text{si } n = 0. \end{cases}$$

(On peut évaluer la dérivée du sinus cardinal en $x \neq 0$ directement avec :

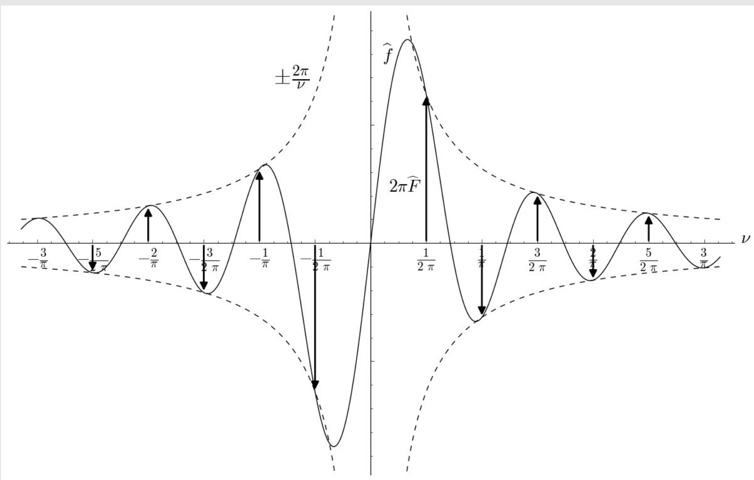
$$\operatorname{sinc}'(x) = \left(\frac{\sin x}{x}\right)' = \frac{x\cos x - \sin x}{x^2},$$

et en $x = 0$ faire un DL, ou bien se laisser guider par le graphe ...)

Le motif élémentaire m (trait plein) et sa périodisation f (pointillés) dans le cas $T = 2\pi$:



La transformée de m (trait plein) et celle de $2\pi f$ (peigne de Dirac de période $\frac{1}{2\pi}$ modulé par $\widehat{m}$) :

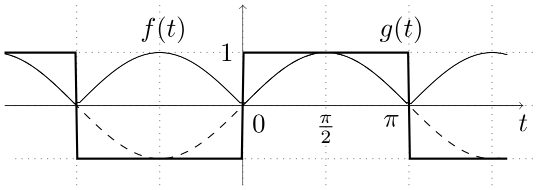


(le facteur 2π a été inclus pour améliorer la lisibilité du graphique)

Exercice 3

Considérons le signal π-périodique $f(t) = |\sin t|$.

Nous l'écrivons $f(t) = g(t) \cdot \sin t$ où $g(t)$ est le signe de $\sin t$ (fonction créneau 2π-périodique).



a) Donnez ou rappelez la transformée de Fourier de sin.

$$\sin t = \frac{e^{jt} - e^{-jt}}{2j} \qquad \text{d'où} \qquad \widehat{\sin}(\nu) = \frac{\delta(\nu - f_0) - \delta(\nu + f_0)}{2j} \qquad \text{avec} \qquad f_0 = 1/2\pi.$$

b) Calculez directement les coefficients de Fourier c_n de g et écrivez sa série de Fourier.

On a $c_0 = 0$ (signal de moyenne nulle), et pour $n \neq 0$,

$$\begin{aligned}
c_n &= \frac{1}{2\pi} \int_{-\pi}^{\pi} g(t)\, e^{-jnt}\, \mathrm{d}t = \frac{1}{2\pi} \left(\int_0^{\pi} e^{-jnt}\, \mathrm{d}t - \int_{-\pi}^{0} e^{-jnt}\, \mathrm{d}t \right) \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\frac{e^{-jnt}}{-jn} \bigg|_0^{\pi} - \frac{e^{-jnt}}{-jn} \bigg|_{-\pi}^{0} \right) = \frac{1}{2\pi} \left(-\frac{(-1)^n}{jn} + \frac{1}{jn} + \frac{1}{jn} - \frac{(-1)^n}{jn} \right) \\
&= \frac{2 - 2(-1)^n}{2\pi j n} = \begin{cases} \dfrac{2}{\pi j n} & n \text{ impair,} \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}
\end{aligned}$$

On a donc la série de Fourier

$$g(t) = \sum_{n \text{ impair}} \frac{2}{\pi j n} e^{jnt}.$$

c) Déduisez-en sa transformée de Fourier.

$$\widehat{g}(\nu) = \sum_{n \text{ impair}} \frac{2}{\pi j n} \delta(\nu - n f_0) \qquad \text{avec} \quad f_0 = 1/2\pi.$$

d) Quelle est la transformée de Fourier de f ? Quelle est sa série ?

Puisque $f(t) = g(t) \cdot \sin t$, on a

$$\begin{aligned}
\widehat{f}(\nu) = \widehat{g}(\nu) * \widehat{\sin}(\nu) &= \frac{\widehat{g}(\nu - f_0) - \widehat{g}(\nu + f_0)}{2j} \\
&= \frac{1}{2j} \cdot \frac{2}{\pi j} \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{n} \big(\delta(\nu - n f_0 - f_0) - \delta(\nu - n f_0 + f_0) \big) \\
&= \frac{-1}{\pi} \sum_{m \text{ pair}} \left(\frac{1}{m-1} - \frac{1}{m+1} \right) \delta(\nu - m f_0) \\
&= \frac{-2}{\pi} \sum_{m \text{ pair}} \frac{1}{m^2 - 1} \delta(\nu - m f_0)
\end{aligned}$$

d'où, par transformée inverse,

$$f(t) = \frac{-2}{\pi} \sum_{m \text{ pair}} \frac{1}{m^2 - 1} e^{jmt}.$$

Exercice 4

On considère maintenant, pour $\lambda > 0$ et $n \in \mathbb{N}$, le signal f_n défini par

$$f_n(t) = t^n e^{-\lambda t} H(t),$$

où H est la fonction d'Heaviside.

a) Calculer directement $f_0 * f_0$.

$$(f_0 * f_0)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(u) f_0(t-u)\,\mathrm{d}u = \int_0^t e^{-\lambda u} e^{-\lambda(t-u)}\,\mathrm{d}u = \int_0^t e^{-\lambda t}\,\mathrm{d}u = te^{-\lambda t}$$

pour $t \geqslant 0$, et 0 sinon.

b) En utilisant directement la définition, calculer la transformée de Fourier de f_0.

$$\widehat{f_0}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_0(t) e^{-2\pi j t \nu}\,\mathrm{d}t = \int_0^{\infty} e^{-(\lambda+2\pi j\nu)t}\,dt = -\frac{e^{-(\lambda+2\pi j\nu)t}}{\lambda + 2\pi j\nu}\bigg|_0^{\infty} = \frac{1}{\lambda + 2\pi j\nu}$$

c) Vérifiez que f_0 est la réponse impulsionnelle du filtre dont la sortie y dépend de l'entrée e *via*

$$y'(t) + \lambda y(t) = e(t) \qquad \text{et} \qquad y(0^-) = 0$$

et utilisez ceci pour confirmer votre réponse à la question précédente.

En appliquant la règle de dérivée d'un produit,

$$f_0'(t) = e^{-\lambda t} H'(t) + (e^{-\lambda t})' H(t) = e^{-\lambda t}\delta(t) - \lambda e^{-\lambda t} H(t) = \delta(t) - f_0(t)$$

donc f_0 est bien une solution causale de l'équation différentielle

$$y'(t) + \lambda y(t) = \delta(t).$$

En prenant la transformée d'une de cette équation :

$$2\pi j\nu \widehat{y}(\nu) + \lambda \widehat{y}(\nu) = 1 \qquad \text{soit} \qquad (2\pi j\nu + \lambda)\,\widehat{y}(\nu) = 1$$

d'où

$$\widehat{y}(\nu) = \frac{1}{2\pi j\nu + \lambda} + A\,\delta(\nu - \frac{\lambda}{2\pi j})$$

où A est une constante à déterminer ; la solution obtenue correspond au cas $A = 0$.

d) Calculez, le plus simplement possible (dans le domaine fréquentiel !), le produit de convolution

$$f_m * f_n.$$

Établissons tout d'abord la transformée de f_n :

$$f_n(t) = t^n \cdot f_0(t) \qquad \Longrightarrow \qquad \widehat{f_n}(\nu) = \frac{1}{(2\pi j)^n} \frac{\mathrm{d}^n}{\mathrm{d}^n\nu}\left(\frac{1}{2\pi j\nu + \lambda}\right) = \frac{n!}{(2\pi j\nu + \lambda)^{n+1}}$$

On obtient donc :

$$\widehat{f_m * f_n} = \widehat{f_m} \cdot \widehat{f_n} = \frac{m!}{(2\pi j\nu + \lambda)^{m+1}} \cdot \frac{n!}{(2\pi j\nu + \lambda)^{n+1}} = \frac{m! \cdot n!}{(m+n+1)!} \cdot \frac{(m+n+1)!}{(2\pi j\nu + \lambda)^{m+n+2}}$$

d'où la conclusion :

$$f_m * f_n = \frac{m! \cdot n!}{(m+n+1)!} f_{m+n+1}.$$

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$f(t)$	$F(p) = \int_0^{+\infty} f(t)e^{-pt}\,\mathrm{d}t$	
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$	
$\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{F(p)}{p}$	
$tf(t)$	$-F'(p)$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\int_p^{+\infty} F(s)\,\mathrm{d}s$	
$e^{at}f(t)$	$F(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$f(t-a)$	$e^{-pa}F(p)$	$(a \geqslant 0)$
$f(kt)$	$\dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p\to+\infty} pF(p) = f(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p\to 0} pF(p) = f(+\infty)$$

original causal $f(t)$	image $F(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Produit de convolution

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\,\mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\,\mathrm{d}y$$

Coefficients de Fourier

$$c_n = \frac{1}{T}\int_a^{a+T} f(t)\, e^{-2\pi n j t/T}\,\mathrm{d}t$$

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\, e^{2j\pi\nu t}\,\mathrm{d}\nu$	$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2j\pi\nu t}\,\mathrm{d}t$
$\lambda\, f_1(t) + \mu\, f_2(t)$	$\lambda\, \widehat{f}_1(\nu) + \mu\, \widehat{f}_2(\nu)$
$f(-t)$	$\widehat{f}(-\nu)$
$\overline{f(t)}$	$\overline{\widehat{f}(-\nu)}$
$f(t-a)$	$e^{-2j\pi a\nu}\widehat{f}(\nu)$
$e^{2j\pi a t} f(t)$	$\widehat{f}(\nu - a)$
$\frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$	$2j\pi\nu\widehat{f}(\nu)$
$-2j\pi t f(t)$	$\frac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\nu}$
$(f_1 * f_2)(t)$	$\widehat{f}_1(\nu)\, \widehat{f}_2(\nu)$
$f_1(t)\, f_2(t)$	$(\widehat{f}_1 * \widehat{f}_2)(\nu)$
$\Pi_a(t) = H\big(t + \frac{a}{2}\big) - H\big(t - \frac{a}{2}\big)$	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a\nu)$
$\frac{1}{1+t^2}$	$\pi e^{-2\pi\lvert\nu\rvert}$
e^{-t^2}	$\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$
$\delta(t)$	1
1	$\delta(\nu)$
$\mathrm{III}_T(t)$	$\frac{1}{T}\mathrm{III}_{\frac{1}{T}}(\nu)$