Transformations

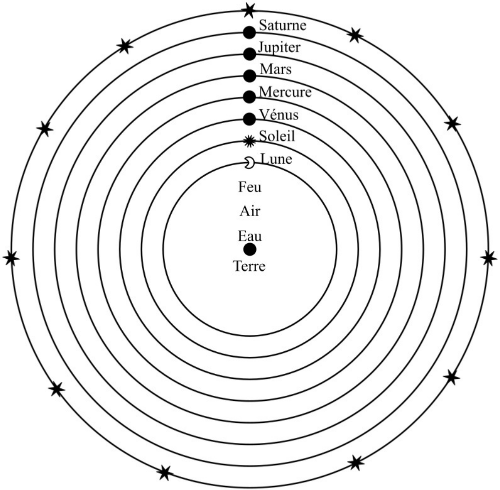
II – Séries de Fourier

G. Chênevert

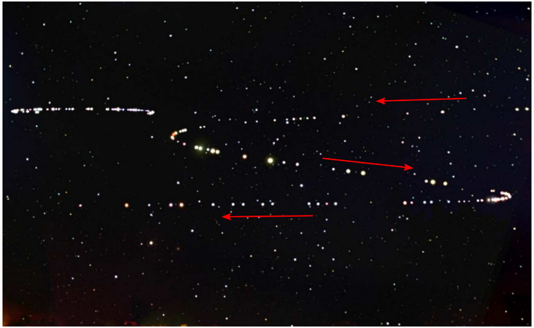
25 octobre 2021

Au menu aujourd'hui

Le système solaire d'Aristote

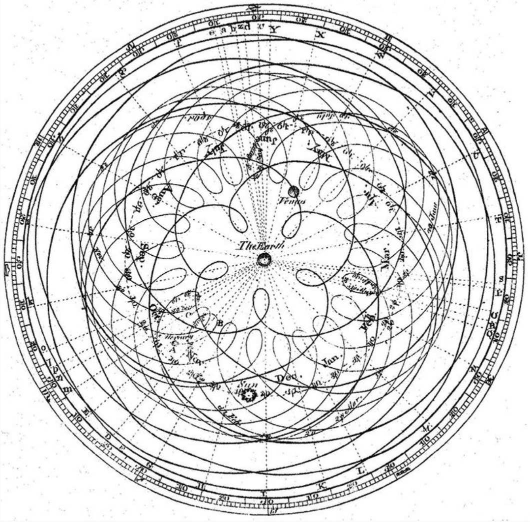


Problème du mouvement rétrograde

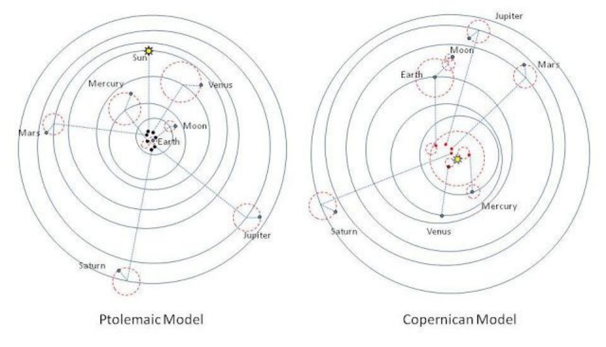


Solution : faire tourner les astres sur des cercles *qui tournent sur des cercles*

Modèle de Ptolémée (II^{e} siècle)



Copernic (1513)



Met le soleil au centre... mais doit tout de même recourir aux artifices des épicycles

Tycho Brahé (1587)

Pour rendre le modèle davantage compatible avec les observations astronomiques, et pouvoir faire des prédictions aussi précises qu'avec le modèle de Ptolémée, il introduit des épicycles supplémentaires !

Rétrospectivement : en introduisant suffisamment d'épicycles, on pourrait faire coller un tel modèle avec *n'importe quel* mouvement périodique.

Voyez Pluto

Avec 250 épicycles (explication ici pour les impatients)

Joseph Fourier

Théorie analytique de la chaleur (1822)

Introduit pour résoudre l'équation de propagation de la chaleur

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \alpha \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

les *séries trigonométriques* qui portent aujourd'hui son nom.

184 THÉORIE DE LA CHALEUR.

$$\cos.\, x - \frac{1}{3}\cos.\, 3x + \frac{1}{5}\cos.\, 5x - \frac{1}{7}\cos.\, 7x + \text{etc.}$$

n'est équivalente à $\frac{1}{4}\pi$, que si la variable x est contenue entre les limites que nous avons assignées. Il en est de même de la série

$$\sin.\, x - \frac{1}{2}\sin.\, 2x + \frac{1}{3}\sin.\, 3x - \frac{1}{4}\sin.\, 4x + \frac{1}{5}\sin.\, 5x - \text{etc.}$$

Cette suite infinie, qui est toujours convergente, donne la valeur $\frac{1}{2}x$ toutes les fois que l'arc x est plus grand que o, et moindre que π. Mais elle n'équivaut plus à $\frac{1}{2}x$, si l'arc surpasse π; elle a au contraire des valeurs très-différentes

Au menu aujourd'hui

Introduction

Reprenons les bases

Séries de Fourier

Convergence

Représentations des fonctions

Quelles bases dans un espace de fonctions ?

- Polynômes
  - monômes : x^n
  - monômes centrés en a : $(x-a)^n$
  - interpolateurs (Lagrange)
- exponentielles complexes : e^{pt}, $p \in \mathbb{C}$ (Laplace)
- ondelettes en traitement d'images
- transformation de Hadamard (signaux binaires)
- ...

Fonctions périodiques

On va s'intéresser aujourd'hui aux fonctions T-périodiques :

$$x(t+T) = x(t) \qquad \text{pour tout } t \in \mathbb{R}.$$

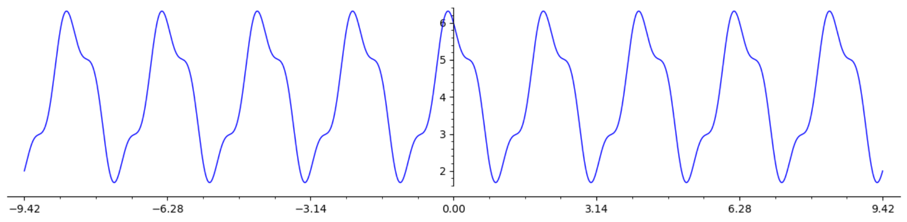
On en connaît quelques-unes : $\cos(t)$, $\sin(t)$ pour $T = 2\pi$

Pour $T > 0$ quelconque : $\cos\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi t}{T}\right)$

mais aussi plus généralement : $\cos\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$, $\sin\left(\frac{2\pi n t}{T}\right)$, $n \in \mathbb{N}$

Exemple 1

$$x(t) = 4 + 2\cos 3t - \frac{1}{2}\sin 9t$$

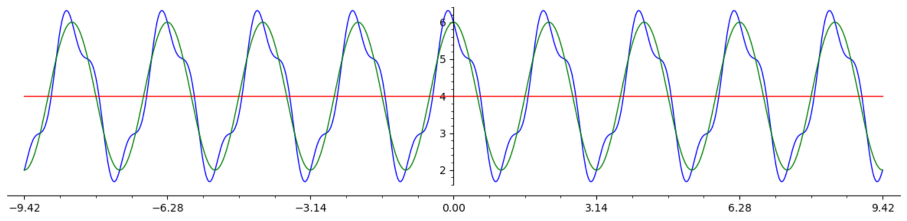


On peut prendre $T = 2\pi$ mais aussi $T = \frac{2\pi}{3}$ (ou tout autre multiple entier de $\frac{2\pi}{3}$)

Exemple 1

On peut voir la fonction comme superposition d'*harmoniques* de fréquences de plus en plus élevées :

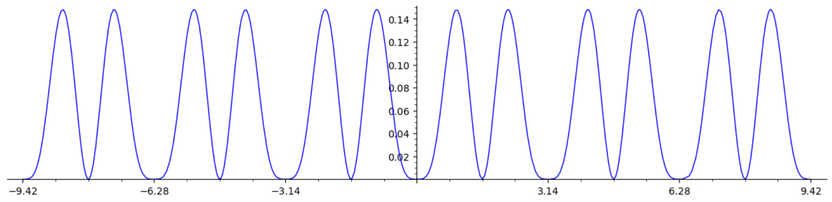
$$x(t) = 4 + 2\cos 3t - \frac{1}{2}\sin 9t$$



Exemple 2

$$x(t) = \cos^2(t)\sin^4(t)$$

qui est π-périodique (n'est-ce pas ?)



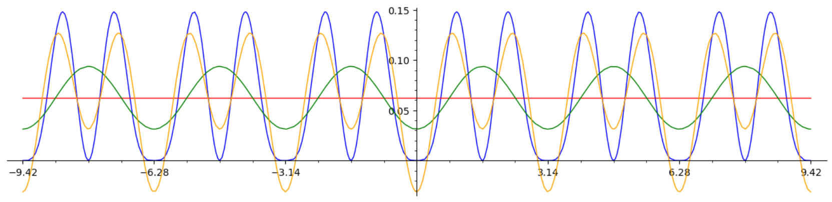
En *linéarisant* l'expression on trouve

$$x(t) = \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos(2t) - \frac{1}{16}\cos(4t) + \frac{1}{32}\cos(6t)$$

Exemple 2

$$x(t) = \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos(2t) - \frac{1}{16}\cos(4t) + \frac{1}{32}\cos(6t)$$

Décomposition en harmoniques :



Polynômes trigonométriques

Rappel :

Un **polynôme trigonométrique** est une expression de la forme

$$P(\cos t, \sin t)$$

où $P(x, y) \in \mathbb{R}[x, y]$ est un polynôme à deux variables.

Si P est de degré d, on peut *linéariser* l'expression $P(\cos t, \sin t)$ à l'aide d'identités trigonométriques afin de l'écrire comme combinaison linéaire des fonctions

$$\cos(nt), \quad \sin(nt) \qquad (n \leq d).$$

Ce sera la base qui nous intéresse !

Au menu aujourd'hui

Approche constructive

On travaille dans l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques : $x(t+T) = x(t)$.

Posons pour $n \in \mathbb{N}$:

$$\mathbf{c}_n(t) = \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right), \qquad \mathbf{s}_n(t) = \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right).$$

Cas particuliers :

$$\mathbf{c}_0(t) = 1, \qquad \mathbf{s}_0(t) = 0.$$

Orthogonalité

Par rapport au produit hermitien

$$\langle x \mid y \rangle = \int_0^T \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t,$$

la famille $(\mathbf{c}_n, \mathbf{s}_n)_{n \in \mathbb{N}}$ est orthogonale.

Plus précisément :

$$\langle \mathbf{c}_n \mid \mathbf{s}_m \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } m, n \in \mathbb{N}$$

$$\langle \mathbf{c}_n \mid \mathbf{c}_m \rangle = \langle \mathbf{s}_n \mid \mathbf{s}_m \rangle = 0 \qquad \text{pour tout } m \neq n$$

$$\|\mathbf{c}_n\|^2 = \|\mathbf{s}_n\|^2 = \frac{T}{2} \qquad \text{pour tout } n > 0$$

$$\|\mathbf{c}_0\|^2 = T, \qquad \|\mathbf{s}_0\| = 0.$$

Ondes pures

On se rend rapidement compte qu'il est souvent bien plus agréable de tout exprimer en exponentielles complexes ...

Définition

La n^{e} **onde pure** de période T est $\mathbf{e}_n(t) := \exp\left(\frac{2\pi \mathrm{i} n}{T} t\right) = e^{\frac{2\pi \mathrm{i} n}{T} t} = \left(e^{\frac{2\pi \mathrm{i}}{T} t}\right)^n = \mathbf{e}_1(t)^n$.

Remarque : il faudra prendre en compte aussi les valeurs de n négatives !

C'est le prix à payer pour travailler avec le formalisme des exponentielles complexes.

Orthogonalité

Théorème (facile)

La famille $(\mathbf{e}_n)_{n\in\mathbb{Z}}$ *est orthogonale et isonormée.*

Plus précisément :

$$\langle\, \mathbf{e}_n \,|\, \mathbf{e}_m \,\rangle = 0 \qquad \textit{pour tout } m \neq n,$$

$$\|\mathbf{e}_n\|^2 = T \qquad \textit{pour tout } n \in \mathbb{Z}.$$

Si nécessaire, on passera de la famille réelle $(\mathbf{c}_n, \mathbf{s}_n)$ à la famille complexe $(\mathbf{e}_n, \mathbf{e}_{-n})$ avec

$$\mathbf{e}_{\pm n} = \mathbf{c}_n \pm \mathrm{i}\mathbf{s}_n, \qquad \mathbf{c}_n = \frac{\mathbf{e}_n + \mathbf{e}_{-n}}{2}, \qquad \mathbf{s}_n = \frac{\mathbf{e}_n - \mathbf{e}_{-n}}{2\mathrm{i}} \qquad (n \in \mathbb{N}).$$

Décomposition en ondes pures

Cherchons donc à décomposer un signal T-périodique x quelconque comme combinaison linéaire d'ondes pures.

Si on peut écrire $x = \sum_n c_n \, \mathbf{e}_n$, alors

$$\langle \mathbf{e}_n \,|\, x \rangle = \left\langle \mathbf{e}_n \,\middle|\, \sum_m c_m \, \mathbf{e}_m \right\rangle = \sum_m c_m \, \langle \mathbf{e}_n \,|\, \mathbf{e}_m \rangle = T \, c_n$$

$$\Longrightarrow \quad c_n = \frac{\langle \mathbf{e}_n \,|\, x \rangle}{\|\mathbf{e}_n\|^2} = \frac{1}{T} \int_0^T x(t) \, e^{-\frac{2\pi i n}{T} t} \, \mathrm{d}t.$$

Définition officielle

Rien ne nous empêche, étant donnée une fonction x définie sur un intervalle $[a, b]$ de longueur T, de poser

Définition (coefficients de Fourier de x)

$$c_n := \frac{\langle \mathbf{e}_n \,|\, x \rangle}{\|\mathbf{e}_n\|^2} = \frac{1}{T} \int_a^b x(t)\, e^{-\frac{2\pi i n}{T} t}\, \mathrm{d}t$$

et de définir la **série de Fourier de x** dont les sommes partielles sont :

$$S_N(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathbf{e}_n(t) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, e^{\frac{2\pi i n}{T} t}$$

et somme totale $S(t)$, de $-\infty$ à $+\infty$, si elle a un sens.

Coefficients de Fourier « réels »

Note : on pourrait aussi travailler avec la famille orthogonale $(\mathbf{c}_n, \mathbf{s}_n)$ et poser

$$a_0 := \frac{\langle\, \mathbf{c}_0 \mid x \,\rangle}{\|\mathbf{c}_0\|^2} = \frac{1}{T} \int_a^b x(t)\,\mathrm{d}t$$

$$a_n := \frac{\langle\, \mathbf{c}_n \mid x \,\rangle}{\|\mathbf{c}_n\|^2} = \frac{2}{T} \int_a^b x(t)\, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t \qquad (n > 0),$$

$$b_n := \frac{\langle\, \mathbf{s}_n \mid x \,\rangle}{\|\mathbf{s}_n\|^2} = \frac{2}{T} \int_a^b x(t)\, \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) \mathrm{d}t \qquad (n > 0).$$

de sorte que

$$S_N(t) = \sum_{n=0}^{N} \left(a_n\, \mathbf{c}_n(t) + b_n\, \mathbf{s}_n(t)\right) = \sum_{n=0}^{N} \left(a_n\, \cos\left(\frac{2\pi nt}{T}\right) + b_n\, \sin\left(\frac{2\pi nt}{T}\right)\right)$$

Exemple 1

$$x(t) = 4 + 2\cos 3t - \frac{1}{2}\sin 9t$$

vue comme fonction 2π-périodique, on peut vérifier que les intégrales nous redonnent bien les coefficients.

$$a_0 = 4, \quad a_3 = 2, \quad b_9 = -\frac{1}{2}, \quad \text{tous les autres } 0.$$

$$x(t) = 4 + e_3(t) + e_{-3}(t) + \frac{\mathrm{i}}{4} e_9(t) - \frac{\mathrm{i}}{4} e_{-9}(t)$$

$$c_0 = 4,\ c_3 = 1,\ c_{-3} = 1,\ c_9 = \frac{\mathrm{i}}{4},\ c_{-9} = -\frac{\mathrm{i}}{4},\ c_n = 0 \text{ pour tout autre } n$$

(et si on la voit comme fonction $\frac{2\pi}{3}$-périodique ?)

Exemple 2

$$x(t) = \cos^2(t)\sin^4(t)$$

vu comme fonction π-périodique

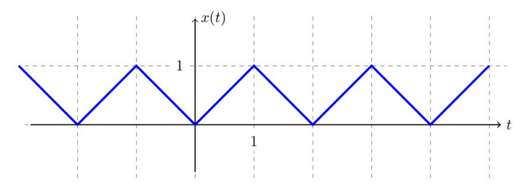
$$x(t) = \frac{1}{16} - \frac{1}{32}\cos(2t) - \frac{1}{16}\cos(4t) + \frac{1}{32}\cos(6t)$$

On a

$$a_0 = \frac{1}{16}, \qquad a_2 = -\frac{1}{32}, \qquad a_4 = -\frac{1}{16}, \qquad a_8 = \frac{1}{32}$$

$$c_0 = \frac{1}{16}, \quad c_1 = c_{-1} = -\frac{1}{64}, \quad c_2 = c_{-2} = -\frac{1}{32}, \quad c_3 = c_{-3} = \frac{1}{64}$$

Exemple 3 : onde triangulaire



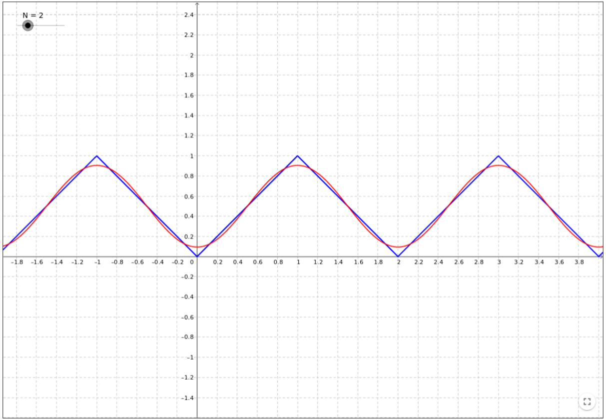
- Des points anguleux ?? $\Longrightarrow$ nécessairement une infinité de termes !
- Les calculs (faisons les !) donnent

$$c_0 = \frac{1}{2}, \qquad c_{2n+1} = \frac{-2}{\pi^2(2n+1)^2}, \qquad c_{2n} = 0 \ (n \neq 0)$$

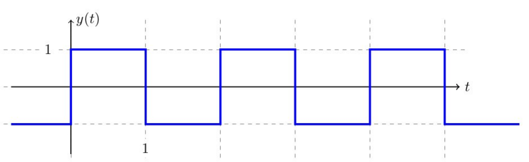
- Reconstruction :

$$S_{2N+1}(t) = \frac{1}{2} - 4\sum_{n=0}^{N} \frac{\cos(2n+1)\pi t}{\pi^2(2n+1)^2}$$

Reconstruction



Exemple 4 : onde carrée



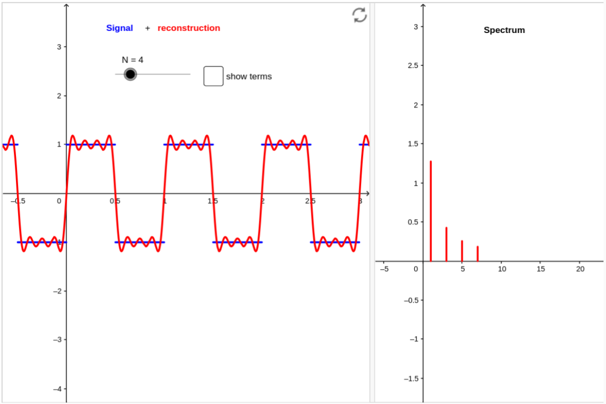
- Des discontinuités ?? $\implies$ une infinité de termes !
- On calcule

$$c_n = \cdots = \frac{1-(-1)^n}{\pi i n} \qquad \text{i.e.} \qquad c_{2n+1} = \frac{2}{\pi i(2n+1)}, \quad c_{2n} = 0$$

- Reconstruction :

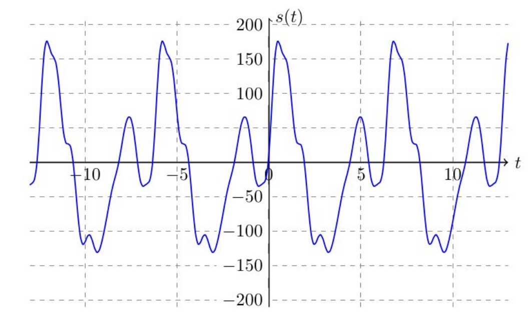
$$S_{2N+1}(t) = 4 \sum_{n=0}^{N} \frac{\sin{(2n+1)\pi t}}{\pi(2n+1)}$$

Reconstruction



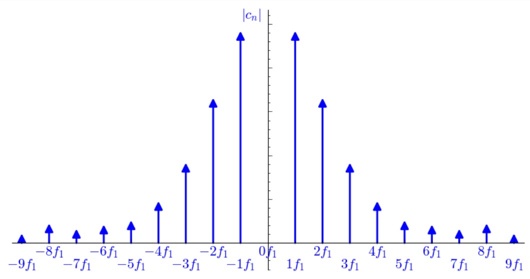
Exemple 5 : Do^3 sur un orgue

Vue temporelle :



Exemple 5 : Do^3 sur un orgue

Vue fréquentielle :



avec $f_1 = 261{,}6$ Hz

Spectre

SPECTRE

Définition

La suite de coefficients complexes (c_n) est le **spectre** de x

$$x(t) \text{ périodique} \longrightarrow (c_n)_{n \in \mathbb{Z}}$$

donnant la proportion de chaque onde pure présente dans x

Spectre

Attention : les c_n sont des complexes...

On se contente souvent de représenter $|c_n|$ *spectre d'amplitude*

mais les informations de phase sont nécessaires pour la reconstruction du signal

$$f_n := \frac{2\pi}{T} n = n\, f_1$$

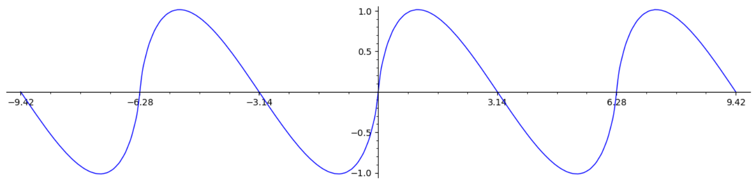
f_1 : *fréquence fondamentale*, les autres sont les fréquences des *harmoniques*

Travail inverse

Analyse de Fourier : calculer les c_n à partir de $x(t)$

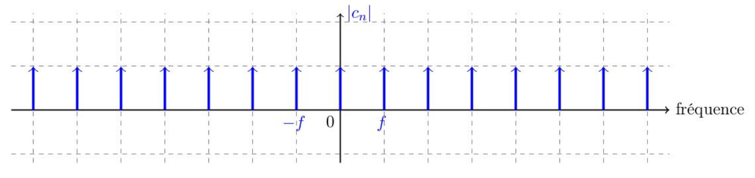
Synthèse de Fourier : reconstruire $x(t)$ à partir des c_n (ou des a_n, b_n)

Par exemple : si on prend $b_n = \frac{1}{n^2}$, $a_n = 0$



Autre exemple de synthèse

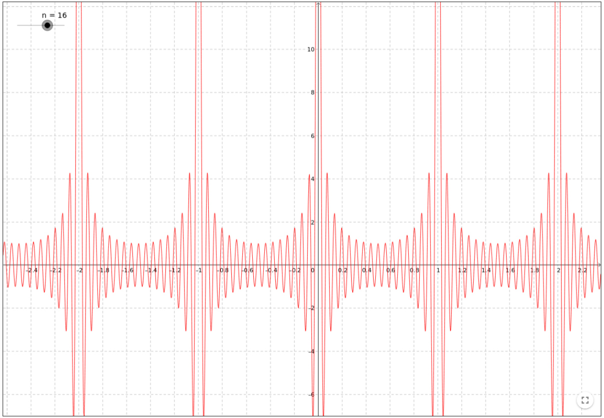
Si on part d'un spectre constant : $c_n = 1$ pour tout n



La reconstruction donne ce qu'on appelle le **noyau de Dirichlet** :

$$D_N(t) := \sum_{n=-N}^{N} e^{2\pi i n f t} = \frac{\sin{(2N+1)\pi f t}}{\sin \pi f t}$$

Noyau de Dirichlet



Au menu aujourd'hui

Convergence ponctuelle

Théorème (Dirichlet)

Si x est continûment dérivable par morceaux, alors

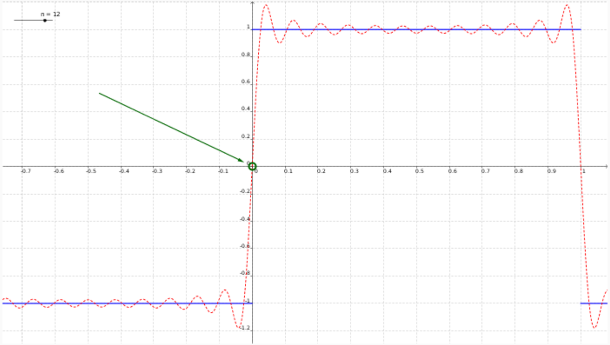
$$\lim_{N\to\infty} S_N(x)(t) = \frac{x(t^+) + x(t^-)}{2}$$

La preuve fait apparaître le noyau de Dirichlet (nous y reviendrons).

En particulier :

- là où x est continue, il y a convergence
- en un saut d'amplitude finie, $S_N(x)(t)$ converge vers la valeur milieu

Théorème de Dirichlet



Produit scalaire

Pour x, y deux fonctions T-périodiques, on considère le produit hermitien

$$\langle x \mid y \rangle := \frac{1}{T} \int_a^{a+T} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

La famille $(\mathbf{e}_n)_{n \in \mathbb{Z}}$ est orthonormée pour ce produit scalaire

et les sommes partielles (reconstructions) ne sont que

$$S_N(x) = \sum_{n=-N}^{N} c_n\, \mathbf{e}_n \qquad \text{avec} \quad c_n = \langle \mathbf{e}_n \mid x \rangle$$

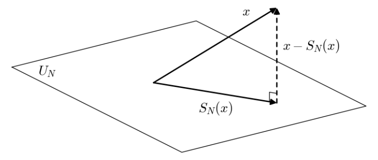
Projection

En d'autres termes :

$S_N(x)$ est la projection de x sur le sous-espace U_N engendré par les ondes pures de fréquence f_n, $-N \leq n \leq N$

Mais alors . . .

- $S_N(x)$ est la meilleure approximation de x dans U_N
- plus N augmente, et meilleure est l'approximation



Convergence en moyenne quadratique

Théorème (Parseval)

*Si x est d'***énergie** $\|x\|^2$ *finie, alors*

$$\|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2$$

Conséquence : puisque les ondes pures capturent toute l'énergie de x, on conclut que

$$\|x - S_N(x)\| \longrightarrow 0 \quad \text{quand } N \to \infty.$$

En d'autres termes

On a équivalence complète de points de vue (au sens du produit scalaire) entre

$$L^2_T(\mathbb{R},\mathbb{C}) := \left\{x : \mathbb{R} \to \mathbb{C} \mid x : T\text{-périodique}, \|x\|^2 < +\infty\right\}$$

et l'ensemble des suites de carré sommable

$$\ell^2(\mathbb{Z},\mathbb{C}) := \left\{(c_n)_{n\in\mathbb{Z}} \,\middle|\, \sum_n |c_n|^2 < +\infty\right\}$$

donnée par

$$x(t) \longleftrightarrow (c_n)_{n\in\mathbb{Z}}$$

$(\to)$: Analyse et $(\leftarrow)$: Synthèse de Fourier

Résumé

Tout signal T-périodique $x(t)$ raisonnable (d'énergie finie) peut être représenté en **série de Fourier**

$$x(t) = \sum_{n \in \mathbb{Z}} c_n \, e^{\frac{2\pi i n t}{T}}$$

avec

$$c_n = \frac{\langle \mathbf{e}_n \mid x \rangle}{\|\mathbf{e}_n\|^2} = \frac{1}{T} \int_{t_0 - \frac{T}{2}}^{t_0 + \frac{T}{2}} x(t) \, e^{-\frac{2\pi i n t}{T}} \, \mathrm{d}t.$$