

Mesure en Physique Quantique: cas de 2 opérateurs

On considère un système quantique dont l'état évolue dans un espace à 2 dimensions. Soit $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$ une base orthonormée de cet espace.

Le but de cet exercice est de vous familiariser avec :

- le rôle des vecteurs et valeurs propres en physique quantique,
- l'utilisation du calcul matriciel en physique quantique
- les commutateurs et la compatibilité des mesures en physique quantique

On s'intéresse aux mesures de 2 grandeurs physiques représentées par les opérateurs H et B définis par leur matrice dans $\{|u_1\rangle, |u_2\rangle\}$:

$$H = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} 3/2 & i \\ -i & 0 \end{bmatrix}$$

- 1) H et B sont-ils hermitiques ? Pourquoi ? En quoi est-ce important pour des opérateurs associés à des grandeurs mesurables ?
- 2) Calculer le commutateur de H et B. On posera $[H, B] = iC$. Préciser la matrice de C.
- 3) Existe-t-il une base de vecteurs propres communs à H et B ? Pourquoi ?
- 4) Quels sont les valeurs et vecteurs propres de H et B ?

Dans la suite du problème, on considère que le système occupe l'état $|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$

5) Mesure de H puis B

- a) On mesure d'abord la grandeur H sur ce système. Quels sont les résultats possibles, avec quelles probabilités ?
- b) On fait **ensuite** une mesure de la grandeur B. Quels sont les résultats possibles, avec quelles probabilités ? Dans quel état se trouve le système après la mesure ?

6) Mesure de B puis H

Le système occupe à nouveau l'état $|u\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}(|u_1\rangle + |u_2\rangle)$.

- a) On fait une mesure de la grandeur B sur ces particules. Quels sont les résultats possibles, avec quelles probabilités ? Dans quel état se trouve le système après la mesure ?
- b) On fait ensuite une mesure de la grandeur H. Quels sont les résultats possibles, avec quelles probabilités ? Dans quel état se trouve le système après la mesure ?

7) Comparer les résultats des questions 5b et 6b.

8) Calculer les valeurs moyennes $\langle H \rangle$, $\langle H^2 \rangle$, $\langle B \rangle$, $\langle B^2 \rangle$ et $\langle C \rangle$ dans l'état $|u\rangle$.

9) On rappelle que, quand deux opérateurs hermitiques H et B vérifient la relation $[H, B] = iC$, on a la relation d'incertitude $\Delta H \Delta B \geq \frac{|C|}{2}$. Quelle est la relation d'incertitude vérifiée par les opérateurs H et B dans l'état $|u\rangle$? Quelle est la conséquence sur la mesure de H et B ? Que dire de la compatibilité des mesures de H et B ?

10) A votre avis à quelle grandeur doit être rattaché l'opérateur B ?