Transformations

III – Signaux et convolution

G. Chênevert

9 novembre 2021

Au menu aujourd'hui

Notion de signal

Convolution

Philosophie

Nous allons adopter un point de vue pragmatique et opérationnel :

- définitions souvent floues et/ou non définitives
- résultats vrais seulement sous certaines hypothèses implicites
- nous allons plutôt nous attarder à comprendre *ce qui marche*
- ainsi que comment/pourquoi ça marche

Mais que l'étudiant·e inquiet·e se rassure, on peut donner un cadre rigoureux :

la **théorie des distributions** développée par Laurent Schwartz (médaille Fields 1950)

Difficulté

Sous le vocable de *signal* on veut regrouper des choses de nature (mathématique) a priori plutôt différentes :

- signaux continus (analogiques) : $t \mapsto x(t)$
- signaux discrets (numériques) : suite $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ de valeurs – voire vecteur $(x_1, \ldots, x_N)$
- analogues de plus haute dimension : fonctions de plusieurs variables, matrices (x_{ij}), $\ll$ hypermatrices $\gg$ (x_{ijk}), ...

Pour l'instant

Restreignons-nous au cas unidimensionnel et considérons des signaux que l'on peut modéliser par des fonctions

$$x : \begin{array}{ccc} \mathbb{R} & \longrightarrow & \mathbb{C} \\ t & \mapsto & x(t) \end{array}$$

Exemple

L'**échelon d'Heaviside**

$$H(t) := \begin{cases} 1 & \text{si } t \geq 0 \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

Signaux causaux

Définition

Un signal $x(t)$ est dit *causal* si $x(t) = 0$ pour $t < 0$.

L'échelon d'Heaviside est un exemple typique de signal causal.

Exemple

Un signal sinusoïdal « qui commence » en $t = 0$:

$$x(t) = H(t) \cdot \sin t.$$

Opérations sur les signaux

1. Opérations algébriques

   Étant donnés $x(t)$ et $y(t)$, on peut former

   - leur produit $x(t) \cdot y(t)$
   - leur quotient $x(t)/y(t)$ – du moins là où $y(t) \neq 0$
   - leur somme $x(t) + y(t)$
   - combinaisons linéaires $a \cdot x(t) + b \cdot y(t)$
   - de façon générale, expressions polynomiales ou rationnelles en x et y

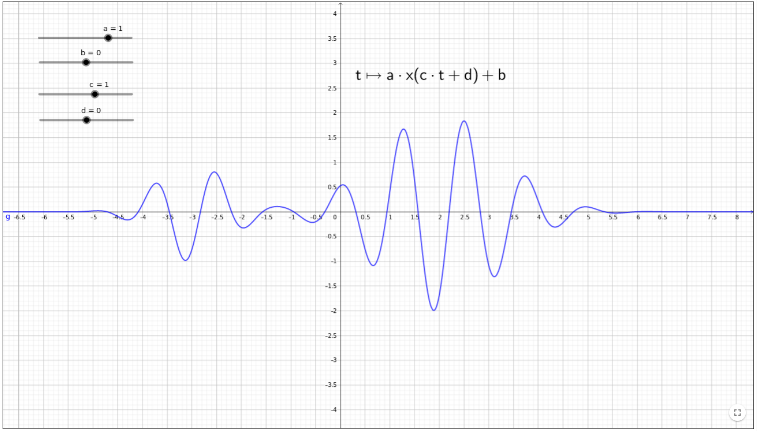
Opérations sur les signaux

2. Changements d'échelles

- inversion de l'axe des valeurs : $-x(t)$
- dilatation / contraction de l'axe des valeurs : $a \cdot x(t)$, $a > 0$
- translation verticale : $x(t) + b$
- transformation affine générale : $a \cdot x(t) + b$

- inversion de la flèche du temps : $x(-t)$
- contraction / dilatation de l'axe temporel : $x(c \cdot t)$
- translation horizontale (retard) : $x(t - t_0)$
- transformation affine générale : $x(c \cdot t + d)$

Jouons avec les opérations affines



Exemples

Exemple

Porte de largeur T, hauteur 1, centrée en 0

$$\Pi_T(t) = \begin{cases} 1 & \text{si } -\frac{T}{2} \leq t \leq \frac{T}{2} \\ 0 & \text{sinon} \end{cases} \qquad = H\left(t + \tfrac{T}{2}\right) \cdot H\left(\tfrac{T}{2} - t\right)$$

Exemple

$$\text{Fonction « signe »} \qquad \mathrm{sg}(t) = \begin{cases} +1 & t > 0 \\ 0 & t = 0 \\ -1 & t < 0 \end{cases} \qquad = H(t) - H(-t) = 2H(t) - 1$$

Égalité de signaux

$$H(t) + H(-t) \stackrel{?}{=} 1$$

Euh c'est **faux** en $t = 0\dots$ (avec notre convention pour $H(0)$)

Définition (égalité au sens des signaux)

On écrira $x = y$ lorsque l'égalité $x(t) = y(t)$ est vraie pour « presque toutes » les valeurs de t.

Ainsi l'égalité ci-dessus, techniquement fausse au sens des fonctions, est tout à fait légitime au sens des signaux.

Philosophie

Un *signal* ne se comporte donc pas vraiment comme une fonction

Étant donné une fonction x et $t_0 \in \mathbb{R}$:

- on peut toujours trouver une autre fonction y avec $x = y$ au sens des signaux mais $x(t_0) \neq y(t_0)$
- d'ailleurs y pourrait très bien n'être pas même définie en t_0 !

Conclusion : pour un signal x, il est absurde de parler de sa valeur $x(t_0)$ en t_0 donné

Attention : on dit quand même souvent « le signal $x(t)$ » par abus de notation

(on devrait dire « le signal x »)

Séries de Fourier revisitées

Si x est un signal T-périodique (disons continu par morceaux)

alors ses coefficients de Fourier $c_n = \dfrac{1}{T}\displaystyle\int_0^T x(t)\,\overline{\mathbf{e}_n(t)}\,\mathrm{d}t$ sont bien définis.

Si de plus x est continûment dérivable par morceaux, alors

$$x = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\,\mathbf{e}_n \qquad \text{au sens des signaux !}$$

On peut dire également :

$$x(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n\, e^{\frac{2\pi i n t}{T}} \qquad \text{presque partout.}$$

Opérations sur les signaux (suite)

3. Opérations analytiques

   - dérivation : $x'(t)$
   - dérivées d'ordre supérieur : $x''(t)$, $x'''(t)$, $\ldots$, $x^{(n)}(t)$, $\ldots$
   - intégration : $X(t) := \int_{t_0}^{t} x(u)\,\mathrm{d}u$

Théorème fondamental du calcul différentiel et intégral :

$$X'(t) = x(t)$$

$X(t)$ est la primitive de $x(t)$ qui s'annule en $t = t_0$

Exercice

Calculer (au sens des signaux) :

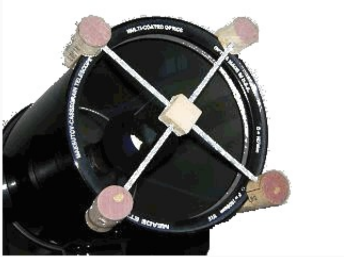
- $|t|'$
- $\displaystyle\int_0^t H(u)\,\mathrm{d}u$
- $\displaystyle\int_{-\infty}^t \Pi_T(u)\,\mathrm{d}u$

Au menu aujourd'hui

Notion de signal

Convolution

Exemple : aigrettes du télescope



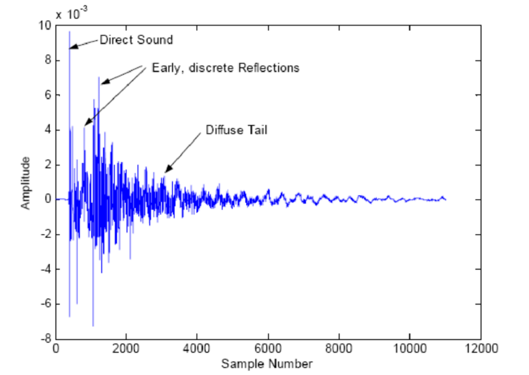
Les aigrettes de diffraction résultent de la convolution de l'image originale avec la fonction de transfert du téléscope.

Exemple : bougé photographique

De même, le phénomène du *bougé* résulte de la convolution du signal utile avec le mouvement du photographe.

Exemple : réverbération

Considérons la *réponse impulsionnelle* $y(t)$ d'une pièce à un son très bref (claquement de mains) ayant lieu en $t = 0$.



Exemple : réverbération

Qu'entendra-t-on si on émet dans cette pièce un signal sonore $x(t)$?

Pour faire l'analyse on va *discrétiser* le signal en considérant $x(t)$ à peu près constant sur des intervalles de la forme

$$\left[u_n - \tfrac{\Delta u}{2}, u_n + \tfrac{\Delta u}{2}\right] :$$

$$x(t) \approx \sum_n x(u_n)\,\Pi_{\Delta u}(t - u_n)$$

Pour une meilleure représentation, on va utiliser des portes normalisées d'aire 1 pouvant être assimilées à des claquements de main :

$$x(t) \approx \sum_n x(u_n)\,\frac{\Pi_{\Delta u}(t - u_n)}{\Delta u}\,\Delta u.$$

Exemple : réverbération

$$x(t) \approx \sum_n x(u_n)\, \frac{\Pi_{\Delta u}(t-u_n)}{\Delta u}\, \Delta u.$$

Chaque claquement va donner lieu à une copie de la réponse impulsionnelle démarrant en $t = u_n$:

$$\mathcal{R}(x)(t) \approx \sum_n x(u_n)\, y(t-u_n)\, \Delta u.$$

En faisant $\Delta u \to 0$ pour améliorer l'approximation, on trouve à la limite

$$\mathcal{R}(x)(t) = \int_u x(u)\, y(t-u)\, \mathrm{d}u.$$

Convolution

Définition

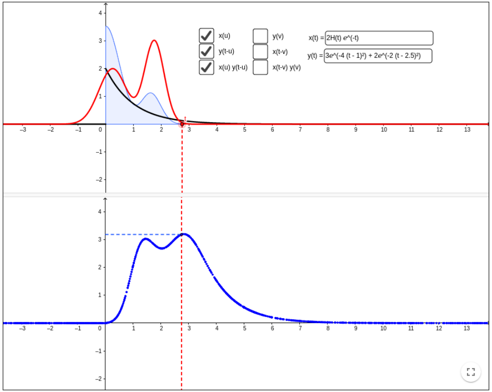
Le **produit de convolution** de x et y est le signal $x * y$ défini par

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\ \mathrm{d}u$$

Mnémotechnique : **R**etourner **T**ranslater **M**ultiplier **I**ntégrer

Principe R T M I

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, \mathrm{d}u$$



Exemple

Calcul de la convolution de $H(t)$ avec $H(t) \cdot \sin t$.

Existence du produit de convolution

Pour que le produit de convolution $x * y$ existe : la fonction

$$u \mapsto x(u)\, y(t-u) \quad \text{doit être intégrable pour presque tout } t.$$

Si les fonctions $x(t)$ et $y(t)$ sont, disons, continues par morceaux et *à décroissance suffisamment rapide* alors $(x * y)(t)$ est une fonction bien définie.

Exemple

$1 * 1 =$??? mais $H(t) * H(t) = t \cdot H(t)$

Convolution avec H

De façon générale : $x * H$ est la primitive de x s'annulant en $-\infty$.

En effet :

$$(x * H)(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, H(t-u)\, \mathrm{d}u = \int_{-\infty}^{t} x(u)\, \mathrm{d}u$$

Primitiver est une opération de convolution !

Principales propriétés

Si les convolutions sont bien définies et les fonctions suffisamment raisonnables,

- commutativité (symétrie) : $x * y = y * x$
- associativité : $(x * y) * z = x * (y * z)$
- (bi)linéarité : $(a \cdot x + b \cdot y) * z = a \cdot (x * z) + b \cdot (y * z)$
- translation : (retardée de x) $* y =$ retardée de $(x * y) = x *$ (retardée de y)
- dérivation : $x' * y = (x * y)' = x * y'$

Principales propriétés

- étalement des supports : si
  - x est nulle en dehors de $[a_1, a_2]$
  - y est nulle en dehors de $[b_1, b_2]$
  - alors $x * y$ est nulle en dehors de $[a_1 + b_1, a_2 + b_2]$
- lissage : si $x \in \mathcal{C}^n_{\mathrm{mcx}}$ et $y \in \mathcal{C}^m_{\mathrm{mcx}}$, alors $x * y \in \mathcal{C}^{n+m+1}_{\mathrm{mcx}}$
- aire totale : $A(x * y) = A(x) \cdot A(y)$ où

$$A(x) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(t)\,\mathrm{d}t$$

Résumé de la séance

- On considère des **signaux** $x(t)$ qui ne sont pas tout à fait des fonctions mais pour lesquels la plupart des opérations sur celles-ci ont du sens « presque partout »
- Une « nouvelle » opération sur les fonctions / signaux : la **convolution**

$$(x * y)(t) := \int_{-\infty}^{+\infty} x(u)\, y(t-u)\, \mathrm{d}u$$

Suite la semaine prochaine