Exercice 1

Donner une condition nécessaire et suffisante sur la transformée de Fourier $\widehat{x}$ d'un signal $x : \mathbf{R} \to \mathbf{C}$ pour qu'il soit :

a) à valeurs réelles,

b) pair,

c) impair.

Même question avec les coefficients de Fourier c_n dans le cas périodique.

Exercice 2

Calculer la représentation en série de Fourier de l'onde triangulaire

$$x(t) = \begin{cases} 1+t & -1 \leqslant t \leqslant 0 \\ 1-t & 0 \leqslant t \leqslant +1 \end{cases}, \qquad x(t+2) = x(t) \quad \forall_t$$

- en utilisant la définition des coefficients de Fourier ;
- en voyant x comme la périodisation du carré de convolution d'une porte.

Expliciter également ce qu'affirme l'identité de Parseval dans ce cas.

Exercice 3

Si $u(\theta, t)$ désigne la température au temps t au point de coordonnées polaires (R, θ) sur un cercle conducteur et que celle-ci évolue selon l'équation de diffusion

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial \theta^2},$$

exprimer u comme un produit de convolution par rapport à θ :

$$u(\theta, t) = g(\theta, t) \circledast u(\theta, 0)$$

où g est à préciser et $\circledast$ désigne la *convolution circulaire* :

$$(x \circledast y)(\theta) := \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} x(u)\, y(\theta - u)\, \mathrm{d}u.$$

Exercice 4

Montrer que

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \operatorname{sinc} \pi(t-n) = 1.$$