CIR3-CSI3-CNB3 13 décembre 2021

Durée : 3 heures

Partiel
PHYSIQUE QUANTIQUE

Sans document
Avec calculatrice

Constantes physiques :

Constante de Planck h = 6.628 x 10^{-34} J.s Charge électrique élémentaire e= 1.6 x 10^{-19} C
Vitesse de la lumière c = 3 x 10^{8} m/s Masse de l'électron m_e= 9.11 x 10^{-31} kg

Echauffement (3points) :

1) Déterminer l'énergie cinétique d'un électron extrait par effet photoélectrique d'un échantillon de calcium éclairé par un photon UV de longueur d'onde 255nm. Le travail d'extraction du calcium est W= 2,88eV.

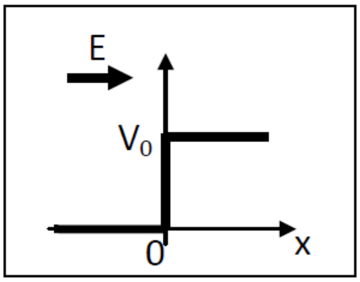
$E_{cin} = h\nu - W = hc/\lambda - W$=3,19 .$10^{-19}$J=2eV

2) D'après De Broglie, à quel objet associe-t-on la plus grande longueur d'onde entre un coronavirus de 10^{-20} kg propulsé à 2m/s et un proton de 1,67.10^{-27} kg voyageant à 1/10 de la vitesse de la lumière ?

λ_{virus} = 3,31 .10^{-14}m > λ_{proton} = 1,32 .10^{-14}m

Problème 1 – Réflexion par un saut de potentiel (7points) :

On imagine qu'un flux de particules de masse *m* arrive de gauche à droite et rencontre en x=0 un saut de potentiel de hauteur V_0>0. On suppose que la zone x<0, l'énergie potentielle est nulle. Les particules incidentes possèdent l'énergie E>V_0.



1) Ecrire l'équation vérifiée par les états stationnaires dans les différentes régions. On posera $k' = \sqrt{2m(E-V_0)}/\hbar$ et $k = \sqrt{2mE}/\hbar$

Pour x<0

$$E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + k^2\varphi(x) = 0$$

Pour x>0, E>V_0

$$E\varphi(x) = -\frac{\hbar^2}{2m}\Delta\varphi(x) + V_0\varphi(x)$$

$$\frac{\partial^2}{\partial x^2}\varphi(x) + k'^2\varphi(x) = 0$$

2) Donner la forme générale des solutions stationnaires. (On prendra les termes en +kx comme sens de propagation de l'onde vers les x croissants)

Pour x<0
Δ< 0 donc
$\varphi(x) = A\,e^{ikx} + Be^{-ikx}$

Pour x<0
Δ< 0 donc
$\varphi(x) = C\,e^{ikx} + De^{-ikx}$= $C\,e^{ikx}$
car pas de réflexion en x= ∞

3) Ecrire les conditions de continuité de la fonction d'onde et de sa dérivée, en déduire les relations qui lient les amplitudes (constantes des solutions générales) à k et k'.

Continuité de $\varphi(0)$
$\varphi(0) = A + B = C$

$A + B = C$ ***(1)***

Continuité de $\varphi'(0)$
$\varphi'(0) = ik(A - B) = ik'C$

$(A - B) = \frac{k'}{k}C$ ***(2)***

4) Exprimer le coefficient de réflexion R en x=0 en fonction des constantes au carré (amplitude au carré) des solutions générales de l'onde incidente et réfléchie.

$$R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$$

5) Exprimer R en fonction des k et k' puis de V0 et E.

A partir de $R = \frac{|B|^2}{|A|^2}$

(1) + (2) → $2A = (1+\frac{k'}{k})C$

(1) - (2) → $2B = (1-\frac{k'}{k})C$

$$R = \frac{\left(1-\frac{k'}{k}\right)^2}{\left(1+\frac{k'}{k}\right)^2} \quad ou \quad \frac{(k-k')^2}{(k+k')^2}$$

$$R = \frac{\left(1-\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}\right)^2}{\left(1+\sqrt{\frac{E-V_0}{E}}\right)^2} \quad ou \quad \frac{(\sqrt{E}-\sqrt{E-V_0})^2}{(\sqrt{E}+\sqrt{E-V_0})^2}$$

6) Exprimer le coefficient de transmission T en fonction de R puis de k et k'.

$T + R = 1 \; donc \; T = 1 - R$ donc $T = 1 - \frac{(k-k')^2}{(k+k')^2} = \frac{4kk'}{(k+k')^2}$

7) Quels coefficients de réflexion et de transmission attendrait-on avec des particules classiques dans le cas similaire ?

En mécanique classique on aurait une transmission de 100%, T=1 et R=0

Problème 2 - Formalisme (7points)

Les matrices $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ et $\hat{\sigma}_z$, appelées matrices de Pauli, sont très utilisées en physique quantique pour représenter le spin d'un électron, la polarisation d'un photon ou certaines portes agissant sur un Qubit en informatique quantique. Elles se définissent dans la base de $\hat{\sigma}_z : |0\rangle = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ et $|1\rangle = \begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$ tel que :

$$\hat{\sigma}_x = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix} \; ; \; \hat{\sigma}_y = \begin{pmatrix}0 & -i\\i & 0\end{pmatrix} \; ; \; \hat{\sigma}_z = \begin{pmatrix}1 & 0\\0 & -1\end{pmatrix}$$

1) Les matrices de Pauli sont-elles hermitiques ? Pourquoi ?

Oui car $\hat{\sigma}_i = \overline{\hat{\sigma}_i}^T$ (les matrices sont carrées, leurs diagonales réelles et leurs éléments symétriques conjugués entre eux).

2) Montrer que le commutateur de $[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y]$ peut s'exprimer en fonction $\hat{\sigma}_z$.

$[\hat{\sigma}_x, \hat{\sigma}_y] = \begin{pmatrix}+2i & 0\\0 & -2i\end{pmatrix} = 2i\hat{\sigma}_z$

3) Montrer que les vecteurs $|+\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix}$ et $|-\rangle = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix}$ sont les vecteurs propres orthonormés de $\hat{\sigma}_x$.

$\hat{\sigma}_x|+\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 1|+\rangle$

$\hat{\sigma}_x|-\rangle = \begin{pmatrix}0 & 1\\1 & 0\end{pmatrix}\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\-1\end{pmatrix} = \frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -1|-\rangle$

On considère un système quantique ψ à deux niveaux décrit dans un espace hilbertien de base $\{|0\rangle; |1\rangle\}$. Dans ce système, l'Hamiltonien $\hat{H}$ est donné par :

$$\hat{H} = \sin\theta \;\; \hat{\sigma}_x + \cos\theta \;\; \hat{\sigma}_z$$

où $\theta \in [0;\pi]$ et $\hat{\sigma}_x$, $\hat{\sigma}_y$ et $\hat{\sigma}_z$ les matrices de Pauli vues précédemment

4) L'opérateur $\hat{H}$ est-il hermitique ?

$\hat{H} = \begin{pmatrix}\cos\theta & \sin\theta\\ \sin\theta & -\cos\theta\end{pmatrix}_{\{|0\rangle;|1\rangle\}}$ est bien hermitique.

5) En rappelant à quoi à quelle grandeur est rattachée l'Hamiltonien, préciser pourquoi l'hermicité de $\hat{H}$ est si important en physique.

L'hamiltonien renvoie à l'énergie du système, l'hermicité de l'opérateur garantit d'avoir des valeurs propres (résultats possibles d'une mesure) qui sont des réels.

6) Calculez les valeurs propres de $\widehat{H}$. Ecrire la matrice $\widehat{H}$ dans cette base de vecteurs propres

$$\det(H-\lambda I)=0 \rightarrow \begin{vmatrix} \cos\theta-\lambda & \sin\theta \\ \sin\theta & -\cos\theta-\lambda \end{vmatrix} = -\cos^2\theta+\lambda^2-\sin^2\theta=\lambda^2-1=0$$

d'où : $\lambda_1=+1$ et $\lambda_2=-1$

donc $\widehat{H}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_{\{vp\}}$ dans sa base de vecteurs propres

7) Pour quel angle θ, $|0\rangle$ et $|1\rangle$ sont-ils les vecteurs propres de $\widehat{H}$?

Si $\theta=0$ alors $\widehat{H}=\begin{pmatrix}\cos 0 & \sin 0\\ \sin 0 & -\cos 0\end{pmatrix}_{\{|0\rangle;|1\rangle\}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_{\{|0\rangle;|1\rangle\}}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_{\{vp\}}$

En fixant θ trouvé précédemment. On peut décrire un système quantique ψ représenté par un vecteur d'état normé :

$|\psi\rangle=\alpha|0\rangle+\beta|1\rangle$ avec α et β des coefficients qui peuvent être complexes.

8) Ecrire l'expression du bra $\langle\psi|$ ainsi que la relation, en fonction de α et β, qui vérifie que ce ket est normé.

$\langle\psi|=\alpha^*\langle 0|+\beta^*\langle 1|$

Et $\langle\psi||\psi\rangle=|\alpha|^2+|\beta|^2=1$

9) Calculer la valeur moyenne de l'énergie $\langle E\rangle_\psi=\langle\psi|\widehat{H}|\psi\rangle$ et $\langle E^2\rangle_\psi$ dans cet état en fonction de α et β.

$$\langle E\rangle_\psi=\langle\psi|\widehat{H}|\psi\rangle=(\alpha^* \quad \beta^*)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & -1\end{pmatrix}_{\{|0\rangle;|1\rangle\}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=|\alpha|^2-|\beta|^2$$

$$\langle E^2\rangle_\psi=\langle\psi|\widehat{H}^2|\psi\rangle=(\alpha^* \quad \beta^*)\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}_{\{|0\rangle;|1\rangle\}}\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}=|\alpha|^2+|\beta|^2=1$$

Mesure en physique quantique (3 points)

Un opérateur A représente une grandeur mesurable et possède 2 états propres normés $|u_1\rangle$, et $|u_2\rangle$, de valeurs propres respectives a_1 et a_2. Un autre opérateur B possède lui 2 états propres normés $|\varphi_1\rangle$ et $|\varphi_2\rangle$ de valeurs propres b_1 et b_2.

Les états propres des 2 opérateurs A et B sont reliés par les relations suivantes :

$$|u_1\rangle=\frac{1}{5}(3|\varphi_1\rangle+4|\varphi_2\rangle)$$
$$|u_2\rangle=\frac{1}{5}(4|\varphi_1\rangle-3|\varphi_2\rangle)$$

1) On commence par mesurer la grandeur A sans connaître l'état de départ. On obtient le résultat a_1. Dans quel état est le système immédiatement après cette mesure ? Quel postulat de la mécanique quantique fait-on intervenir ici ?

Après la mesure de A, on obtient la valeur propre a_1, l'état s'est donc projeté sur l'état propre associé $|u_1\rangle$.

Cette mesure s'effectue par réduction du paquet d'onde ou décohérence.

2) Après la mesure de la question 1), on mesure B. Quels sont les résultats et états finaux possibles et avec quelles probabilités associées ?

L'état du système est initialement sur $|u_1\rangle$. La mesure de B permet :

Etat initial	Résultat possible de B	Probabilité d'obtenir ce résultat	Etat final
$|u_1\rangle$	b_1	$P(b_1)=|\langle\varphi_1|u_1\rangle|^2=\frac{9}{25}$	$|\varphi_1\rangle$
	b_2	$P(b_2)=|\langle\varphi_2|u_1\rangle|^2=\frac{16}{25}$	$|\varphi_2\rangle$

Question bonus (+1,5points)

3) On imagine maintenant qu'après la mesure de A de la question 1), on mesure B mais sans connaitre le résultat et on mesure A à nouveau. Quelle est la probabilité d'obtenir a_1 ?

Etat initial	Probabilité d'obtenir ce résultat de B	Probabilité d'obtenir une nouvelle fois le résultat a_1	Probabilité totale d'obtenir le résultat a_1
$\vert u_1\rangle$	$P(b_1) = \frac{9}{25}$	$P(b_1 \to a_1) = \vert\langle u_1\vert\varphi_1\rangle\vert^2 = \vert\langle\varphi_1\vert u_1\rangle\vert^2 = \frac{9}{25}$	$P(a_1) = P_{(b_1)}\, P_{(b_1 \to a_1)} + P_{(b_2)}\, P_{(b_2 \to a_1)}$ $= \frac{9}{25}\frac{9}{25} + \frac{16}{25}\frac{16}{25}$
	$P(b_2) = \frac{16}{25}$	$P(b_2 \to a_1) = \vert\langle u_1\vert\varphi_2\rangle\vert^2 = \vert\langle\varphi_2\vert u_1\rangle\vert^2 = \frac{16}{25}$	$= \frac{337}{625}$ $(\approx 54\%)$