

Chapitre I - La Physique à la veille du XXème siècle

(Compléments de cours et démonstrations)

I.1 Mécanique classique

I.1.1 particule ponctuelle (rappels)

En physique classique, une particule ponctuelle qui se déplace dans \mathbb{R}^3 est caractérisée en chaque instant t par deux vecteurs :

- Sa position $\vec{x}(t)$
- Sa vitesse $\vec{v}(t)$

On considère $\vec{x}(t)$ comme une fonction continue et dérivable du temps tel que :

$$\frac{d}{dt}\vec{x}(t) = \vec{v}(t)$$

L'ensemble des points $\vec{x}(t)$ dans l'espace s'appelle une trajectoire. Si l'on connaît la position et la vitesse de la particule de masse m à l'instant $t=0$ ainsi que la somme des forces à laquelle elle est soumise, on peut calculer cette trajectoire via le principe fondamentale de la dynamique énoncé par Newton :

$$\sum \vec{F} = m \frac{d^2\vec{x}(t)}{dt^2} = m \frac{d\vec{v}(t)}{dt} = m\vec{a}$$

La solution $\vec{x}(t)$ de cette équation différentielle permet d'avoir accès à tout temps à la position $\vec{x}(t)$ et à la vitesse $\vec{v}(t)$ de la particule.

A la place de \vec{v} , on utilise souvent la notion de quantité de mouvement \vec{p} défini comme :

$$\vec{p} = m\vec{v} \quad \text{d'où} \quad \sum \vec{F} = \frac{d\vec{p}}{dt}$$

Remarques importantes pour la suite :

- En physique classique il est possible d'attribuer à chaque instant t , une position $\vec{x}(t)$ et une vitesse $\vec{v}(t)$ (ou une quantité de mouvement \vec{p}).

Ce qui ne sera pas le cas en mécanique quantique où une particule ne peut être parfaitement localisée et avoir en même temps une vitesse bien définie.

- En physique classique, les conditions initiales $\vec{x}(0)$ et $\vec{v}(0)$ d'une particule soumise à une force \vec{F} détermine complètement l'évolution du système.

Ce « déterminisme » ne sera plus possible en mécanique quantique, en particulier quand la mesure ou l'observation influe sur le système.

I.1.2 Energie mécanique et Hamiltonien

Connaissant la trajectoire $\vec{x}(t)$ de notre particule soumis à une force \vec{F} il est possible de calculer son énergie mécanique comme la somme de l'énergie cinétique K et de l'énergie potentielle U :

$$(1) \quad E = K + U \quad \text{En mécanique quantique cette quantité sera appelée l'Hamiltonien}$$

L'énergie cinétique est liée au mouvement de la particule :

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{p^2}{2m}$$

Lorsque la particule est soumise à un potentiel $U(\vec{x})$, elle subit une force $\vec{F}(\vec{x})$ qui dépend de sa position de sorte que :

$$\vec{F}(\vec{x}) = -\overrightarrow{\text{grad}} U(\vec{x})$$

$$\text{Soit en 1D : } F(x) = -\frac{d}{dx} U(x)$$

On peut donc réécrire l'énergie mécanique comme une fonction de \vec{x} et de \vec{p} :

$$E(\vec{x}, \vec{p}) = \frac{p^2}{2m} + U(\vec{x})$$

Toujours en 1D, si on dérive partiellement l'énergie mécanique en fonction de p :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial p} E(x, p) &= \frac{\partial}{\partial p} \left(\frac{p^2}{2m} + U(x) \right) && U(x) \text{ ne dépendant pas de } p \\ &= 2 \left(\frac{p}{2m} + 0 \right) \\ &= \frac{p}{m} \\ &= v \\ \frac{\partial}{\partial p} E(x, p) &= \frac{dx}{dt} \end{aligned}$$

De même, si on dérive $E(x, p)$ partiellement par rapport à x :

$$\begin{aligned} \frac{\partial}{\partial x} E(x, p) &= \frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{p^2}{2m} + U(x) \right) && \frac{p^2}{2m} \text{ ne dépendant pas de } x \\ &= \frac{\partial U(x)}{\partial x} \\ &= \overrightarrow{\text{grad}} U(x) \\ &= -F(x) \\ &= -m \frac{dv}{dt} \\ \frac{\partial}{\partial x} E(x, p) &= -\frac{dp}{dt} \end{aligned}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} E(x, p) = -\frac{dp}{dt}$$

$$\frac{\partial}{\partial p} E(x, p) = \frac{dx}{dt}$$

Ces **équations d'Hamilton** montrent qu'en connaissant l'expression de l'énergie et les conditions $x(0)$ et $p(0)$ il est possible de calculer l'évolution du système

- Démarche similaire en mécanique quantique

NB : il n'est pas nécessaire de connaître cette démonstration (même s'il ne s'agit que de deux dérivées partielles) ni d'apprendre par cœur ces équations. L'important pour la suite du cours est de se rappeler que l'Hamiltonien est défini comme la somme de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle et qu'à partir de ça, il est possible de calculer l'évolution d'un système.

I.2 Optique/mécanique ondulatoire

I.2.1 L'onde (rappels)

Une onde est une variation locale d'un paramètre physique qui se propage dans l'espace et le temps. Elle transporte de l'énergie sans nécessairement transporter de matière.

Une onde sinusoïdale dans un espace 1D s'écrit :

$$A(x, t) = A_0 \cos(kx - \omega t + \phi)$$

- A_0 est l'amplitude de l'onde
- $\Phi = kx - \omega t + \phi$ (l'argument du cos) est la phase
- ϕ est la phase à l'origine
- k est le vecteur d'onde $k = \frac{2\pi}{\lambda}$ (en m^{-1})
- λ est la longueur d'onde (en m)
- ω est la pulsation $\omega = 2\pi\nu = \frac{2\pi}{T}$
- ν ([nu] à ne pas confondre avec v [vé] la vitesse) est la fréquence (en Hz ou s^{-1})
- T est la période (en s)
- $c = \frac{\omega}{k} = \frac{\lambda}{T}$ est la célérité de l'onde

I.2.2 Interférences entre deux ondes

Considérons la somme A_s de deux ondes A_1 et A_2 de même fréquence et amplitude mais de phase à l'origine différentes.

$$\begin{aligned} A_s &= A_1(x, t) + A_2(x, t) \\ &= A_0 \cos(kx - \omega t + \phi_1) + A_0 \cos(kx - \omega t + \phi_2) \end{aligned}$$

En utilisant la relation trigonométrique : $\cos \alpha + \cos \beta = 2 \cos \frac{(\alpha + \beta)}{2} \cos \frac{(\alpha - \beta)}{2}$

$$A_s = \underbrace{2A_0 \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)}_{\text{nouvelle amplitude}} \underbrace{\cos\left(kx - \omega t + \frac{\phi_1 + \phi_2}{2}\right)}_{\text{terme d'oscillation en fonction de x et t de pulsation } \omega}$$

On obtient bien à nouveau une onde progressive dont l'amplitude $2A_0 \cos\left(\frac{\phi_1 - \phi_2}{2}\right)$ est déterminée par la différence des phases à l'origine $\phi_1 - \phi_2$ des deux ondes initiales A_1 et A_2 .

- Si $\phi_1 - \phi_2 = n 2\pi$ (avec n entier), les ondes sont en phase et l'amplitude de A_s est maximale et égale à $2A_0$
 \Rightarrow Interférences constructives
- Si $\phi_1 - \phi_2 = \pi + n 2\pi$ alors le cosinus sera nul ainsi que l'amplitude. A_1 et A_2 sont en opposition de phase.
 \Rightarrow Interférences destructives

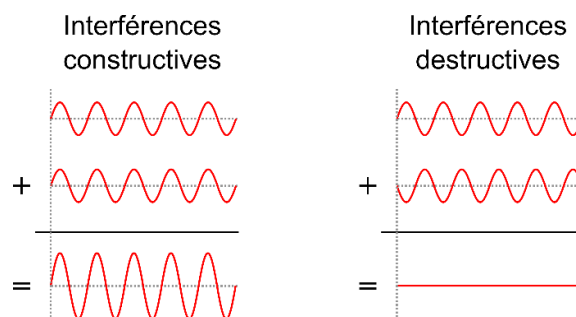


Figure 1 : Différences des phases à l'origine de deux ondes et donnant lieu à des interférences constructives et destructives

I.2.3 Représentations complexe des ondes

Il est en général plus pratique d'utiliser la notation complexe pour décrire des ondes :

$$e^{i\Phi} = \cos \Phi + i \sin \Phi$$

Avec $\Phi = kx - \omega t + \phi$ et $i^2 = -1$

L'onde $A(x, t)$ décrite précédemment par $A(x, t) = A_0 \cos \Phi$ sera donc la partie réelle du nombre complexe $\tilde{A} = A_0 e^{i\Phi}$

Mais en mécanique quantique on s'intéressera davantage à la partie complexe de l'onde.

Exemple :

$\psi = \psi_0 \operatorname{Re}[e^{-i(\omega t - kx)}]$ où Re est un opérateur qui ne conserve que la partie réelle de la fonction (Généralement on omet de l'écrire).

$$\psi = \psi_0 e^{-i(\omega t - kx)}$$

En notation complexe l'intensité moyenne d'une onde monochromatique est donnée par :

$$I = \frac{|\tilde{A}|^2}{2} \text{ où } |\tilde{A}|^2 \text{ est le module au carré du nombre complexe}$$

Pour rappel :

Soit \tilde{z} un nombre complexe définit comme : $\tilde{z} = a + ib$

Alors $|\tilde{z}| = \sqrt{a^2 + b^2}$ ou $|\tilde{z}|^2 = z \cdot \bar{z}$ \bar{z} étant le complexe conjugué ($\bar{z} = a - ib$)