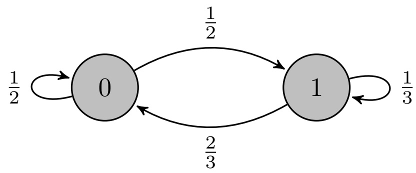
IV – Processus aléatoires

Exercice 1

Considérons la chaîne de Markov suivante :



a) Soit X_n l'état atteint après n transitions à partir de l'état 0. Expliciter les lois de X_0, X_1, X_2.

b) Que dire de $\lim\limits_{n\to\infty} X_n$? Montrer que l'état obtenu ne dépend pas de la distribution initiale X_0.

Exercice 2

Quel est le nombre moyen de lancers de dé nécessaires pour observer au moins une fois chaque valeur ?

Exercice 3

Planification familiale : quelle est le nombre moyen d'enfants d'un couple qui déciderait d'avoir des enfants...

a) jusqu'à l'arrivée d'un premier garçon ?

b) jusqu'à avoir des enfants des deux sexes ?

c) jusqu'à ce qu'il n'y ait plus de place à l'arrière de l'auto ?

Exercice 4

Marche aléatoire dans le plan : débutant à l'origine $(X_0, Y_0) = (0, 0)$, on choisit à chaque étape une direction de façon équiprobable parmi {`haut`, `bas`, `gauche`, `droite`} et on se déplace d'une unité dans cette direction.

a) Si $D_n := \sqrt{X_n^2 + Y_n^2}$, montrer que $\mathbb{E}[D_{n+1}^2 - D_n^2] = 1$ et en déduire l'espérance de D_n^2.

b) Que devient le résultat de la question précédente si à chaque étape on choisit maintenant une direction donnée par un angle $\Theta \sim \mathcal{U}([0, 2\pi])$ dans laquelle on se déplace d'une unité ?

Exercice 5

a) Un *bruit blanc* est un processus aléatoire stationnaire $X(t)$ dont la densité spectrale de puissance est constante : $s_X(f) = s_0$. Montrer qu'alors chaque variable aléatoire $X(t_0)$ est de variance infinie.

b) On préfère habituellement travailler avec un *bruit blanc échantillonné* à la fréquence f_e, dont la densité spectrale de puissance est de la forme
$$s_X(f) = s_0 \, \Pi_{f_e}(f).$$
Montrer que les variables $X_n := X(nt_e)$ sont identiquement distribuées, décorrélées et de variance finie.