# Transformations

## I – Introduction

G. Chênevert

18 octobre 2021

## Au menu aujourd'hui

Présentation du cours

Produit(s) scalaire(s)

Applications

Version complexe

# Organisation temporelle

Chaque semaine :

- 2 h de cours (lundi ou mardi)
- 2 h de TD (mercredi ou vendredi)
- 2 h de TP MATLAB (jeudi ou vendredi ou ...)

Évaluation :

- 50 % examen final
- 50 % travaux pratiques

# Organisation temporelle

Déroulement en 6 semaines / thèmes :

I – Introduction

II – Séries de Fourier

III – Signaux et convolution

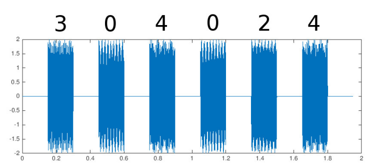
IV – Transformée de Laplace

V – Transformée de Fourier

VI – Synthèse

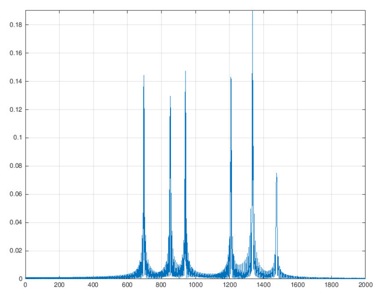
# De quoi est-il question ?

Idée centrale : avoir plusieurs représentations d'un même *signal*



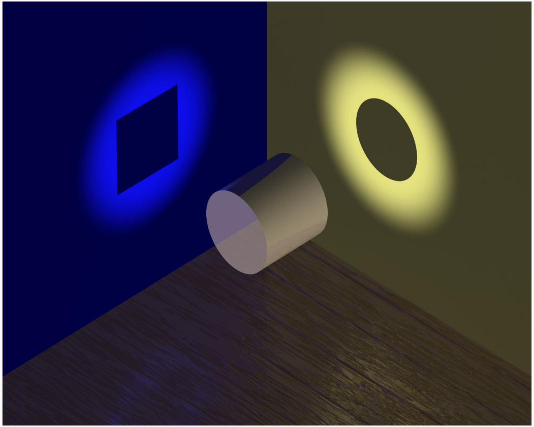

représentation temporelle

*vs* fréquentielle



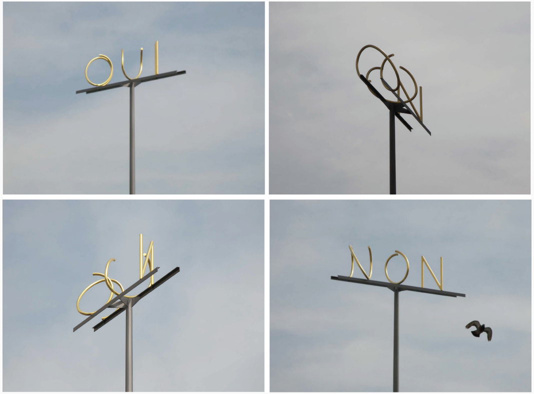

Les *transformations* permettent de passer d'une vue à l'autre sans perte d'information

# Quel point de vue est le bon ?



Aucun/les deux ! Chacun capture des caractéristiques différentes de l'objet étudié. . .

# Autre exemple




Œuvre anamorphique de Markus Raetz, place du Rhône, Genève

# De quoi est-il question ?

Buts :

- Filtrer pour réduire le bruit
- Syntoniser un canal de transmission
- Prédire la réponse d'un système
- Piloter (commander) un système
- Modifier (asservir) la réponse d'un système
- ...

Outils adaptés presqu'exclusivement aux problèmes *linéaires*

## De quoi est-il question ?

Tronc commun à de multiples domaines :

- Télécommunications
  (transmission, réception, modulation)
- Automatique
  (asservissement, contrôle, caractérisation)
- Traitement sonore
  (synthèse et reconnaissance vocale, compression et filtrage)
- Traitement d'images
  (application d'effets, reconnaissance de formes)
- et tous autres types de signaux (numériques ou analogiques)

# Au menu aujourd'hui

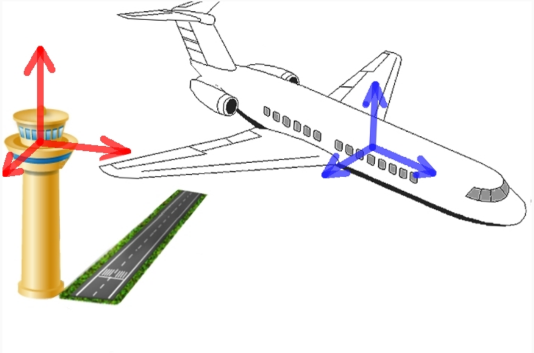
Présentation du cours

Produit(s) scalaire(s)

Applications

Version complexe

# Représentation des vecteurs



Différents repères pour exprimer le même point :

$$\overrightarrow{\Omega M} = x\ \mathbf{e}_x + y\ \mathbf{e}_y + z\ \mathbf{e}_z$$

$$\overrightarrow{OM} = c_1\mathbf{e}_1 + c_2\mathbf{e}_2 + c_3\mathbf{e}_3$$

## Représentation des vecteurs

On a donc deux représentations pour le point $M$ :

$$(x, y, z) \quad \text{et} \quad (c_1, c_2, c_3)$$

reliées par une *transformation* affine de la forme

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \underbrace{\begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{bmatrix}}_{\text{matrice de passage}} \begin{bmatrix} c_1 \\ c_2 \\ c_3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

# Extraction de coordonnées dans $\mathbb{R}^n$

On dispose d'une opération permettant d'extraire les coordonnées d'un vecteur

$$\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n) = \sum_{i=1}^{n} x_i \, \mathbf{e}_i$$

Il s'agit du produit scalaire avec les vecteurs de base : $x_i = \mathbf{e}_i \cdot \mathbf{x}$.

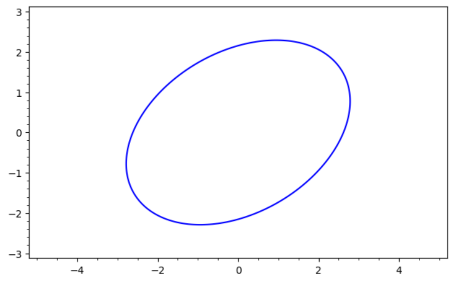
Ça marche parce que la base canonique est *orthonormée*, *i.e.*

$$\mathbf{e}_i \cdot \mathbf{e}_j = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j. \end{cases}$$

# Exemple motivant

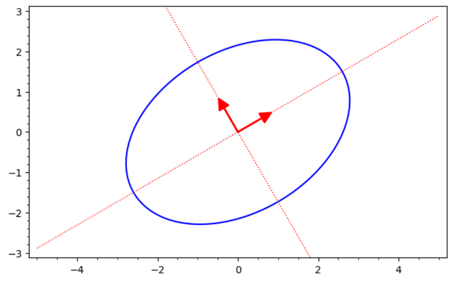
Considérons l'ellipse d'équation

$$21x^2 - 10\sqrt{3}\,xy + 31y^2 = 144.$$



## Exemple motivant

Pour comprendre la courbe, on a intérêt à travailler dans une base adaptée

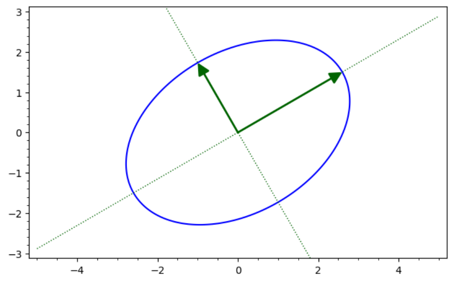



Par rapport à la base $\mathbf{u} = \left(\frac{\sqrt{3}}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $\mathbf{v} = \left(-\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ on vérifie que l'équation devient

$$\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4} = 1.$$

## Exemple motivant

Par rapport à la base $\mathbf{s} = 3\,\mathbf{u}$, $\mathbf{t} = 2\,\mathbf{v}$ l'équation se simplifie encore davantage



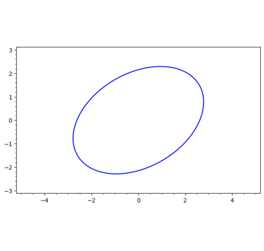

$s^2 + t^2 = 1$, l'équation d'un cercle dans le plan des coordonnées $(s, t)$.

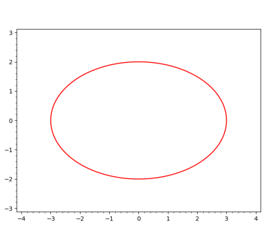
# Exemple motivant

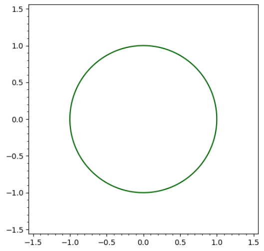
Bref : on peut considérer qu'il s'agirait de l'ensemble des points à distance 1 de l'origine dans le plan $(x, y)$

**si** on redéfinissait la distance d'un point $(x, y)$ à l'origine comme étant

$$\frac{1}{12}\sqrt{21x^2 - 10\sqrt{3}\,xy + 31y^2} \quad \text{ou} \quad \sqrt{\frac{u^2}{9} + \frac{v^2}{4}}$$



# Définition générale

## Définition

Un **produit scalaire** sur un espace vectoriel réel $V$ est une application

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{R}$$

satisfaisant pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ et scalaires $a, b \in \mathbb{R}$,

- $\langle \mathbf{x} \,|\, a\,\mathbf{y} + b\,\mathbf{z} \rangle = a\,\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle + b\,\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{z} \rangle$
- $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle = \langle \mathbf{y} \,|\, \mathbf{x} \rangle$
- $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = 0$

# Exemples

## Exemple

Le produit scalaire usuel sur $\mathbb{R}^n$

$$\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle = \mathbf{x} \cdot \mathbf{y} = \begin{bmatrix} x_1 & \cdots & x_n \end{bmatrix} \begin{bmatrix} y_1 \\ \vdots \\ y_n \end{bmatrix} = \sum_{i=1}^{n} x_i \, y_i$$

## Exemple

Un produit scalaire non-standard sur $\mathbb{R}^2$ (*cf.* exemple de l'ellipse)

$$\left\langle \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} \,\middle|\, \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \end{bmatrix} \right\rangle = \frac{7\sqrt{3}}{2} \, x_1 \, y_1 - \frac{5}{2} \, x_1 \, y_2 - \frac{5}{2} \, x_2 \, y_1 + \frac{31}{2\sqrt{3}} \, x_2 \, y_2$$

## Propriétés

À chaque fois qu'on a un produit scalaire $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ sur un espace $V$ :

- $\|\mathbf{x}\| := \sqrt{\langle x \mid x \rangle}$ définit une norme sur $V$
- en particulier : $\|\mathbf{x}+\mathbf{y}\| \leq \|\mathbf{x}\| + \|\mathbf{y}\|$ (inégalité triangulaire)
- on en déduit une notion de distance $d(\mathbf{x}, \mathbf{y}) = \|\mathbf{x}-\mathbf{y}\|$
- $|\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle| \leq \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\|$ (inégalité de Cauchy-Schwarz)
- on peut donc *définir* l'angle $\theta$ entre deux vecteurs non nuls $\mathbf{x}$, $\mathbf{y}$ par la formule

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \|\mathbf{x}\| \, \|\mathbf{y}\| \cos \theta.$$

## Un exemple en dimension infinie

Sur l'espace vectoriel $C([0,1],\mathbb{R}) = \{x : [0,1] \to \mathbb{R} \mid x \text{ continue}\}$,

$$\langle\, x \mid y \,\rangle = \int_0^1 x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t$$

définit un produit scalaire (vérifier !).

Quelles sont pour celui-ci les normes des fonctions $x(t) = 1$ et $y(t) = t$ ?

Et l'angle entre les deux ?

## Solution

- $\|x\|^2 = \int_0^1 x(t)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 \mathrm{d}t = 1 \implies \|x\| = 1$
- $\|y\|^2 = \int_0^1 y(t)^2 \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t^2 \, \mathrm{d}t = \frac{1}{3} \implies \|y\| = \frac{1}{\sqrt{3}}$
- $\langle\, x \mid y \,\rangle = \int_0^1 x(t)\, y(t) \, \mathrm{d}t = \int_0^1 t \, \mathrm{d}t = \frac{1}{2}$
- $\cos\theta = \frac{\langle\, x \mid y \,\rangle}{\|x\| \, \|y\|} = \frac{\sqrt{3}}{2} \implies \theta = \frac{\pi}{6}$

# Théorème de décomposition

Prenons un vecteur quelconque $\mathbf{x} = \sum_i x_i \, \mathbf{e}_i$ exprimé dans une base $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots)$ de $V$.

Si la base est orthonormée :

$$\langle \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{e}_j \rangle = \begin{cases} 0 & \text{si } i \neq j, \\ 1 & \text{si } i = j \end{cases}$$

alors on vérifie qu'on a $x_i = \langle \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{x} \rangle$.

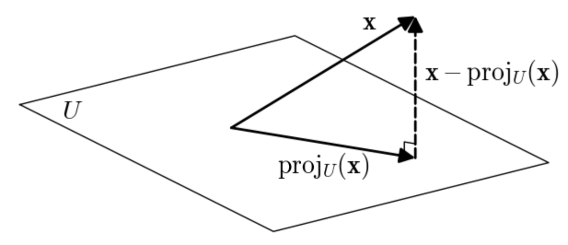
En d'autres termes, on a

$$\mathbf{x} = \sum_i \langle \mathbf{e}_i \,|\, \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{e}_i .$$

# Projection orthogonale

Si on a une base orthonormée $(\mathbf{u}_1, \mathbf{u}_2, \ldots)$ d'un sous-espace $U$ de $V$, la projection orthogonale d'un vecteur $\mathbf{x}$ sur $U$ est

$$\mathrm{proj}_U(\mathbf{x}) = \sum_i \langle \mathbf{u}_i \mid \mathbf{x} \rangle \, \mathbf{u}_i.$$



## Propriétés

- Il s'agit de la meilleure approximation de $\mathbf{x}$ par un vecteur de $U$ :

$$\|\mathbf{x} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{x})\| = \min_{\mathbf{u} \in U} \|\mathbf{x} - \mathbf{u}\|.$$

- En particulier : $\mathrm{proj}_U(\mathbf{x}) = \mathbf{x}$ lorsque $\mathbf{x} \in U$ (et seulement dans ce cas)
- En général, $\mathbf{x} - \mathrm{proj}_U(\mathbf{x})$ est orthogonal à $U$ (notamment à $\mathrm{proj}_U(\mathbf{x})$)
- On peut transformer n'importe quelle base $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \ldots)$ en une base orthonormée $(\mathbf{e}_1, \mathbf{e}_2, \ldots)$ en posant

$$\mathbf{e}_i = \frac{\mathbf{w}_i}{\|\mathbf{w}_i\|} \quad \text{où} \quad \mathbf{w}_i = \mathbf{v}_i - \sum_{j<i} \langle\, \mathbf{e}_j \mid \mathbf{v}_i \,\rangle\, \mathbf{e}_j.$$

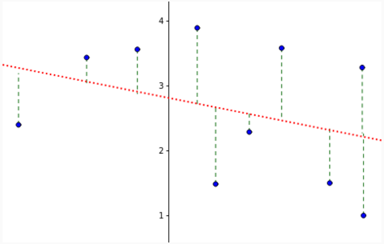
# Au menu aujourd'hui

# Régression linéaire

Il arrive souvent qu'on dispose d'un certain nombre de données expérimentales

$$(x_1, y_1),\ (x_2, y_2),\ \ldots,\ (x_n, y_n)$$

et qu'on aimerait trouver la *meilleure* équation de droite $y = ax + b$ représentant ces données.



# Régression linéaire

La notion de « meilleure » droite peut se formaliser de plusieurs façons

On utilise souvent la **droite des moindres carrés**, qui minimise la somme des carrés des erreurs verticales

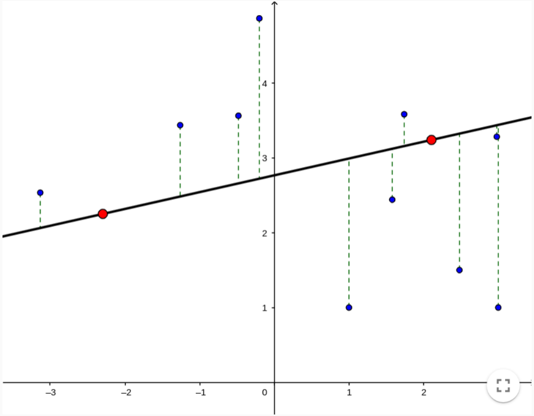
$$\Delta(a, b) = \sum_{i=1}^{n} |y_i - a x_i - b|^2.$$

On peut voir cela comme un problème de projection orthogonale dans $\mathbb{R}^n$ puisque

$$\Delta(a, b) = \|\mathbf{y} - a\,\mathbf{x} - b\,\mathbf{1}\|^2$$

avec $\mathbf{x} = (x_1, \ldots, x_n)$, $\mathbf{y} = (y_1, \ldots, y_n)$, $\mathbf{1} = (1, \ldots, 1)$.

# Régression linéaire




Appliquette

## Approximation $L^2$

Cette idée se généralise à l'approximation de fonctions définies sur un intervalle $[a, b]$.

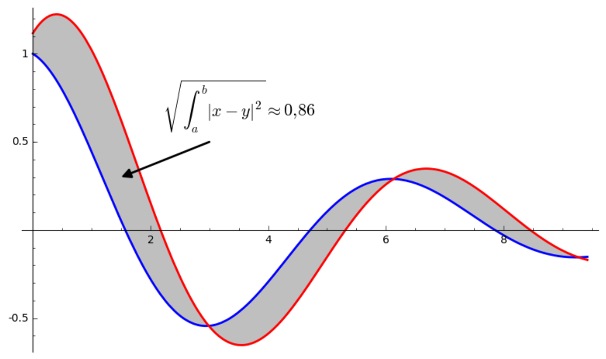
On travaille donc dans l'espace $C([a, b], \mathbb{R})$ des fonctions continues sur $[a, b]$ muni du produit scalaire

$$\langle x \mid y \rangle = \int_a^b x(t)\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

La distance entre deux fonctions mesure donc l'*erreur quadratique* totale commise en remplaçant l'une par l'autre :

$$\|x - y\|^2 = \int_a^b |x(t) - y(t)|^2\, \mathrm{d}t$$

# Approximation $L^2$



# Approximation $L^2$

Si on se donne :

- une fonction $x(t)$ sur $[a, b]$,
- un sous-espace $U$ de $C([a, b], \mathbb{R})$,

  (par exemple : les fonctions polynomiales de degré $\leq n$)

on peut donc obtenir la meilleure approximation, en moyenne quadratique, de $x$ par une fonction de $U$ en calculant $\text{proj}_U(x)$.

Appliquette

# Au menu aujourd'hui

Présentation du cours

Produit(s) scalaire(s)

Applications

Version complexe

# Extension au cas complexe

Nous aurons besoin par la suite de considérer des espaces vectoriels *complexes* comme

$$\mathbb{C}^n \qquad \text{ou} \qquad C([a,b],\mathbb{C}).$$

La notion de produit scalaire doit être légèrement adaptée.

**Exemple**

Dans $\mathbb{C}^2$, $\|(1,\mathrm{i})\| = \sqrt{1^2+\mathrm{i}^2} = 0$ ?

# Produit hermitien

## Définition

Un **produit hermitien** sur un espace vectoriel *complexe* $V$ est une application

$$\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbb{C}$$

satisfaisant pour tous vecteurs $\mathbf{x}, \mathbf{y}, \mathbf{z} \in V$ et scalaires $a, b \in \mathbb{C}$,

- $\langle \mathbf{x} \,|\, a\,\mathbf{y} + b\,\mathbf{z} \rangle = a\,\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle + b\,\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{z} \rangle$
- $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{y} \rangle = \overline{\langle \mathbf{y} \,|\, \mathbf{x} \rangle}$
- $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle \geq 0$
- $\langle \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \rangle = 0 \iff \mathbf{x} = 0$

## Différence avec le cas réel

Attention : un produit hermitien n'est pas $\mathbb{C}$-linéaire en sa première variable :

$$\langle\, a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y} \,|\, \mathbf{z} \,\rangle = \overline{\langle\, \mathbf{z} \,|\, a\,\mathbf{x} + b\,\mathbf{y} \,\rangle} = \overline{a\,\langle\, \mathbf{z} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle + b\,\langle\, \mathbf{z} \,|\, \mathbf{y} \,\rangle} = \overline{a}\,\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{z} \,\rangle + \overline{b}\,\langle\, \mathbf{y} \,|\, \mathbf{z} \,\rangle$$

Mais tant mieux, ça permet d'avoir les propriétés attendues pour une norme en posant

$$\|\mathbf{x}\| = \sqrt{\langle\, \mathbf{x} \,|\, \mathbf{x} \,\rangle}.$$

**Exemple** : $\|(1, \mathrm{i})\| = \sqrt{|1|^2 + |\mathrm{i}|^2} = \sqrt{2}$

## Exemples

### Exemple

Sur $\mathbb{C}^n$, le produit hermitien standard

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \sum_{i=1}^{n} \overline{x_i}\, y_i \qquad \Longrightarrow \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = \sum_{i=1}^{n} |x_i|^2.$$

### Exemple

Sur $\mathcal{C}([a, b], \mathbb{C})$,

$$\langle \mathbf{x} \mid \mathbf{y} \rangle = \int_a^b \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t \qquad \Longrightarrow \qquad \|\mathbf{x}\|^2 = \int_a^b |x(t)|^2\, \mathrm{d}t.$$

## Suite la semaine prochaine