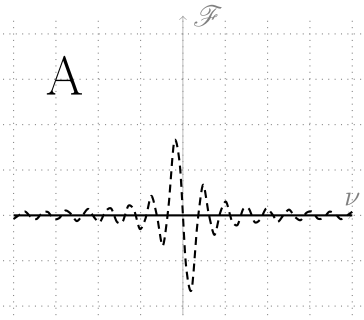
Devoir Surveillé

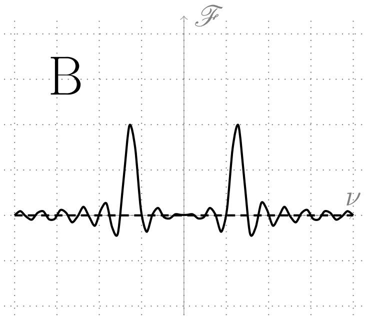
Consignes :
- Épreuve de **2** heures,
- calculatrice non-graphique autorisée
- documents interdits (voir les formulaires en fin de sujet),
- Il est conseillé de lire les **10** questions entièrement avant de commencer.
- Un devoir de mathématiques est un exercice de rédaction… propre et concise !
  Une réponse ne comportant pas de phrase française explicitant un raisonement ne sera pas corrigée.

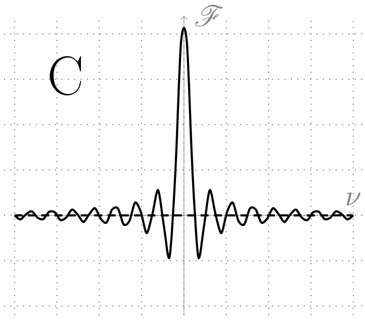
I. Transformation de Fourier

On étudie trois signaux :
- la porte $\Pi_2(t)$ valant 1 lorsque $-1 \leqslant t \leqslant 1$ et 0 partout ailleurs,
- $x(t)$ défini comme étant $t \cdot \Pi_2(t)$
- et $y(t)$ égal à $\cos(5\pi t) \cdot \Pi_2(t)$.

1. Représenter ces trois signaux dans le domaine temporel.
2. Calculer leurs transformées de Fourier (pour Π_2, vous n'utiliserez pas directement le résultat du formulaire, mais établirez la transformée par un calcul de votre choix).
3. Les spectres des trois signaux ont été représentés ci-après (partie réelle en trait plein : ▬▬ et partie imaginaire en pointillés : - - - - - -). Attribuez chacune des figures A, B, C aux signaux temporels proposés : Π_2, x et y. Explicitez vos raisonnements.



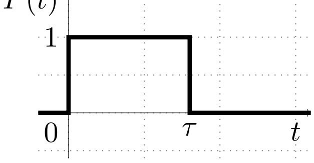




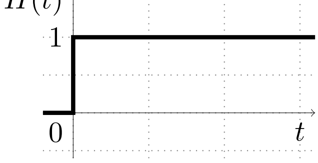
II. Transformation de Laplace

τ est une constante exprimée en secondes. On pose $e(t) = t \cdot H(t) - (t - \tau) \cdot H(t - \tau)$.

4. Calculer le produit de convolution de la porte $P(t)$ valant 1 entre 0 et τ avec la fonction H d'Heaviside (faites des schémas soignés) :

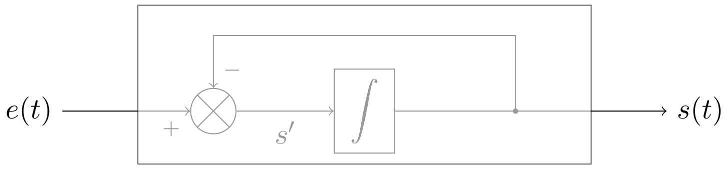


$*$



5. Représenter le signal $e(t)$, calculer son image de Laplace, vérifier le théorème de la valeur finale.

On utilise le signal $e(t)$ comme entrée du système suivant :



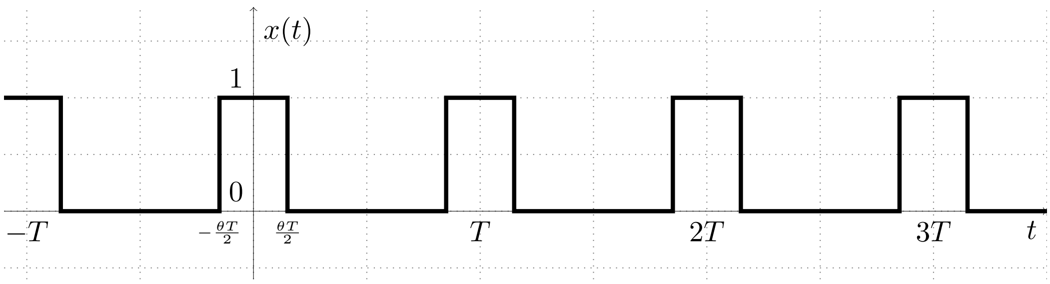
système pour lequel, on a

$$s' + s = e$$

6. Commencez par étudier la réponse de ce système à une rampe : $r(t) := t \cdot H(t)$.
   En déduire la réponse $s(t)$ du système à l'entrée $e(t)$, sachant que $s(0) = 0$.

III. Série de Fourier

Voici un signal carré T-périodique de rapport cyclique θ que nous allons décomposer en séries de Fourier :



7. Démontrer que ses coefficients de Fourier sont

$$c_n = \theta \,\mathrm{sinc}(n\pi\theta) = \begin{cases} \theta & \text{si} \quad n = 0, \\ \frac{\sin(n\pi\theta)}{n\pi} & \text{si} \quad n \neq 0, \end{cases}$$

8. Que représente c_0 ?
   Quel spectre obtient-on pour $\theta = 1$?
   Représenter le spectre d'amplitude, mais cette fois, pour une faible valeur de θ.
9. Montrer que les sommes partielles de la série de Fourier $S_N(x)(t)$ peuvent s'exprimer comme

$$S_N(x)(t) = \theta \left[1 + 2 \sum_{n=1}^{N} \mathrm{sinc}(n\pi\theta) \cos(2n\pi t/T) \right].$$

10. En remplaçant θ par $\frac{1}{2}$ et t par 0, établir que $\displaystyle\sum_{k \geqslant 1} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4}$.

    Écrire l'identité de Parseval et montrer que, pour tout $\theta \in [0; 1]$, $\displaystyle\sum_{n \geqslant 1} \left(\frac{\sin(n\pi\theta)}{n\pi} \right)^2 = \frac{\theta(1-\theta)}{2}$.

Transformation de Laplace

domaine temporel	domaine opérationnel	remarque
$f'(t)$	$pF(p) - f(0^+)$	
$\displaystyle\int_0^t f(u)\,\mathrm{d}u$	$\dfrac{F(p)}{p}$	
$tf(t)$	$-F'(p)$	
$(-1)^n t^n f(t)$	$F^{(n)}(p)$	$(n \in \mathbb{N})$
$\dfrac{f(t)}{t}$	$\displaystyle\int_p^{+\infty} F(s)\,\mathrm{d}s$	
$e^{at} f(t)$	$F(p-a)$	$(a \in \mathbb{C})$
$f(t-a)$	$e^{-pa}F(p)$	$(a \geqslant 0)$
$f(kt)$	$\dfrac{1}{k}F\left(\dfrac{p}{k}\right)$	$(k > 0)$

Théorèmes des valeurs initiale et finale : Si les limites temporelles existent et sont finies, on a

$$\lim_{p \to +\infty} pF(p) = f(0^+) \qquad \text{et} \qquad \lim_{p \to 0} pF(p) = f(+\infty)$$

original causal $f(t)$	image $F(p)$	remarque
1 ou $H(t)$	$\dfrac{1}{p}$	
t	$\dfrac{1}{p^2}$	
$\dfrac{t^n}{n!}$	$\dfrac{1}{p^{n+1}}$	
e^{at}	$\dfrac{1}{p-a}$	$(a \in \mathbb{C})$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	
$\delta(t)$	1	

Transformation de Fourier

domaine temporel	domaine fréquentiel
$f(t) = \int_{-\infty}^{+\infty} \widehat{f}(\nu)\, e^{2j\pi\nu t}\, \mathrm{d}\nu$	$\widehat{f}(\nu) = \int_{-\infty}^{+\infty} f(t)\, e^{-2j\pi\nu t}\, \mathrm{d}t$
$f(at)$ $f(-t)$	$\dfrac{1}{\lvert a\rvert}\widehat{f}\left(\dfrac{\nu}{a}\right)$ $\widehat{f}(-\nu)$
$f(t-a)$ $e^{2j\pi at} f(t)$	$e^{-2j\pi a\nu}\widehat{f}(\nu)$ $\widehat{f}(\nu - a)$
$\dfrac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$ $-2j\pi t f(t)$	$2j\pi\nu\widehat{f}(\nu)$ $\dfrac{\mathrm{d}\widehat{f}}{\mathrm{d}\nu}$
$(f_1 * f_2)(t)$ $f_1(t)\, f_2(t)$	$\widehat{f_1}(\nu)\, \widehat{f_2}(\nu)$ $(\widehat{f_1} * \widehat{f_2})(\nu)$
$\Pi_a(t)$ $H(t)e^{-\lambda t},\ \mathrm{Re}(\lambda) > 0$ $\dfrac{1}{1+t^2}$ e^{-t^2}	$a\ \mathrm{sinc}(\pi a\nu)$ $\dfrac{1}{\lambda + 2j\pi\nu}$ $\pi e^{-2\pi\lvert\nu\rvert}$ $\sqrt{\pi}e^{-\pi^2\nu^2}$
$\delta(t)$ 1 $Ш_T(t)$	1 $\delta(\nu)$ $\dfrac{1}{T}Ш_{\frac{1}{T}}(\nu)$

$$(f_1 * f_2)(x) = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(y)\, f_2(x-y)\, \mathrm{d}y = \int_{-\infty}^{+\infty} f_1(x-y)\, f_2(y)\, \mathrm{d}y$$