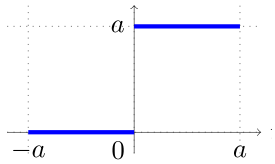
II – Séries de Fourier

Exercice 1

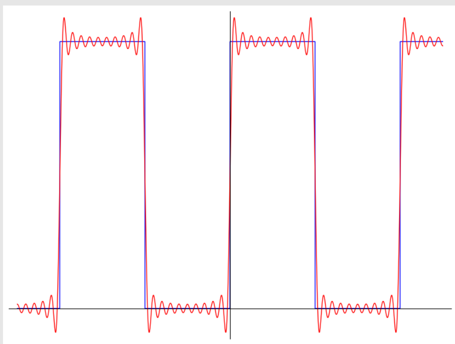
a) Par calcul direct, déterminez les coefficients de Fourier du signal périodique $x(t)$ ayant comme motif :



On trouve $c_0 = \frac{a}{2}$, $c_n = 0$ pour $n > 0$ pair et $c_n = \frac{a}{\pi i n}$ pour n impair.

On obtient donc la série de Fourier

$$S(t) = \frac{a}{2} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{impair}}}^{+\infty} \frac{a}{\pi i n}\, e^{\frac{\pi i n t}{a}} = \frac{a}{2} + \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{+\infty} \frac{2a}{\pi n} \sin \frac{\pi n t}{a}.$$



b) Que peut-on dire sur la convergence ponctuelle de la série obtenue en a) ? Précisez notamment les valeurs aux multiples entiers de a.

D'après le théorème de Dirichlet : $S(t)$ est la $2a$-périodisation de $x(t)$ prenant les valeurs moyennes aux discontinuités :

$$S(t) = \begin{cases} 0 & t \notin a\mathbb{Z},\ \lfloor t/a \rfloor \text{ impair}, \\ a & t \notin a\mathbb{Z},\ \lfloor t/a \rfloor \text{ pair}, \\ \frac{a}{2} & t \in a\mathbb{Z}. \end{cases}$$

Remarque : pour $t \in a\mathbb{Z}$ c'est très clair d'après l'expression de la série, mais pour les autres valeurs de t c'est un énoncé non trivial. Par exemple pour $t = \frac{a}{2}$ ça dit que

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{2k+1} = \frac{\pi}{4} \qquad \text{(formule de Leibniz).}$$

c) Exprimer l'énergie totale de x de deux manières différentes (identité de Parseval). Qu'est-ce que cela nous apprend sur la somme des séries

$$1 + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{5^2} + \frac{1}{7^2} + \cdots \qquad \text{et} \qquad 1 + \frac{1}{2^2} + \frac{1}{3^2} + \frac{1}{4^2} + \cdots \ ?$$

Par intégration directe, pour le produit scalaire normalisé : $\|x\|^2 = \frac{a^2}{2}$. Par ailleurs

$$\|x\|^2 = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} |c_n|^2 = \frac{a^2}{4} + \sum_{\substack{n=-\infty \\ \text{impair}}}^{+\infty} \frac{a^2}{\pi^2 n^2}.$$

En remaniant cela on découvre que

$$I := \sum_{\substack{n=1 \\ \text{impair}}}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{8},$$

d'où il découle, en écrivant $\zeta(2) = I + \frac{1}{4}\zeta(2)$, que

$$\zeta(2) := \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}.$$

Exercice 2

Considérons l'espace vectoriel des fonctions T-périodiques $x : \mathbb{R} \to \mathbb{C}$ muni du produit hermitien

$$\langle x \,|\, y\rangle = \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{x(t)}\, y(t)\, \mathrm{d}t.$$

a) Calculer explicitement les produits scalaires $\langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_n\rangle$ $(m, n \in \mathbb{Z})$ et en déduire

$$\langle \mathbf{c}_m \,|\, \mathbf{c}_n\rangle\,, \qquad \langle \mathbf{c}_m \,|\, \mathbf{s}_n\rangle\,, \qquad \langle \mathbf{s}_m \,|\, \mathbf{s}_n\rangle \qquad (m, n \in \mathbb{N}).$$

$$\langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_n\rangle = \int_{-T/2}^{+T/2} \overline{\mathbf{e}_m(t)}\, \mathbf{e}_n(t)\, \mathrm{d}t = \int_{-T/2}^{+T/2} \mathbf{e}_{n-m}(t)\, \mathrm{d}t = \begin{cases} \left[\dfrac{T}{2\pi \mathrm{i}(n-m)}\, \mathbf{e}_{n-m}(t) \right]_{-T/2}^{+T/2} = 0 & n \neq m \\ \displaystyle\int_{-T/2}^{+T/2} \mathrm{d}t = T & n = m. \end{cases}$$

En utilisant les formules d'Euler, on trouve donc

$$\langle \mathbf{c}_m \,|\, \mathbf{c}_n\rangle = \frac{\langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_n\rangle + \langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_{-n}\rangle + \langle \mathbf{e}_{-m} \,|\, \mathbf{e}_n\rangle + \langle \mathbf{e}_{-m} \,|\, \mathbf{e}_{-n}\rangle}{4} = \begin{cases} \dfrac{0+0+0+0}{4} = 0 & n \neq m \\ \dfrac{T+0+0+T}{4} = \dfrac{T}{2} & n = m \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{c}_m \,|\, \mathbf{s}_n\rangle = \frac{\langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_n\rangle - \langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_{-n}\rangle + \langle \mathbf{e}_{-m} \,|\, \mathbf{e}_n\rangle - \langle \mathbf{e}_{-m} \,|\, \mathbf{e}_{-n}\rangle}{4\mathrm{i}} = \begin{cases} \dfrac{0-0+0-0}{4\mathrm{i}} = 0 & n \neq m \\ \dfrac{T-0+0-T}{4\mathrm{i}} = 0 & n = m \end{cases}$$

$$\langle \mathbf{s}_m \,|\, \mathbf{s}_n\rangle = \frac{\langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_n\rangle - \langle \mathbf{e}_m \,|\, \mathbf{e}_{-n}\rangle - \langle \mathbf{e}_{-m} \,|\, \mathbf{e}_n\rangle + \langle \mathbf{e}_{-m} \,|\, \mathbf{e}_{-n}\rangle}{4} = \begin{cases} \dfrac{0-0-0+0}{4} = 0 & n \neq m \\ \dfrac{T-0-0+T}{4} = \dfrac{T}{2} & n = m \end{cases}$$

b) Exprimer les coefficients de Fourier c_n en termes des a_n, b_n, et vice-versa.

On peut utiliser soit l'expression des coefficients en tant que produits scalaires ou l'écriture de $x(t)$ sous forme de série de Fourier réelle ou complexe.

Dans les deux cas on trouve $a_0 = c_0$ et

$$c_n = \frac{a_n - \mathrm{i}b_n}{2}, \qquad c_{-n} = \frac{a_n + \mathrm{i}b_n}{2}, \qquad a_n = c_n + c_{-n}, \qquad b_n = \mathrm{i}(c_n - c_{-n}) \qquad (n > 0).$$

c) Comment se reflète dans les coefficients de Fourier d'une fonction x le fait qu'elle soit :

i) paire ? ii) impaire ? iii) réelle ? iv) imaginaire ?

On peut raisonner encore avec l'expression des coefficients et avec la reconstruction de x en tant que série de Fourier en utilisant l'équivalence des points de vue.

i) x paire $\iff b_n = 0 \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \iff c_{-n} = c_n \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$

ii) x impaire $\iff a_n = 0 \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \iff c_{-n} = -c_n \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$

iii) x réelle $\iff a_n, b_n \in \mathbb{R} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \iff \overline{c_n} = c_{-n} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$

iv) x imaginaire $\iff a_n, b_n \in \mathrm{i}\mathbb{R} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}} \iff \overline{c_n} = -c_{-n} \quad \forall_{n\in\mathbb{N}}$

Exercice 3 (phénomène de Gibbs)

a) Obtenir la série de Fourier de $z(t) = \frac{\pi}{4}\,\mathrm{sg}(t)$ sur $[-\pi, \pi]$.

En utilisant la formule explicite (ou comparant avec l'exercice 1 ou le cours) on trouve

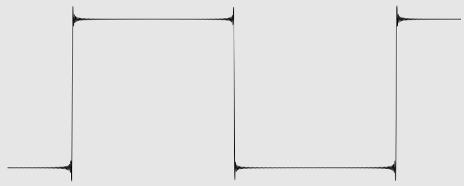
$$c_n = \frac{1}{2\pi}\int_{-\pi}^{\pi} z(t)\, e^{-nit}\,\mathrm{d}t = -\frac{1}{8}\int_{-\pi}^{0} e^{-nit}\,\mathrm{d}t + \frac{1}{8}\int_{0}^{\pi} e^{-nit}\,\mathrm{d}t$$

et donc

$$c_n = \frac{1-(-1)^n}{4in} = \begin{cases} \dfrac{1}{2in} & n \text{ impair} \\ 0 & n \text{ pair.} \end{cases}$$

Représentation en série de Fourier :

$$z(t) = \sum_{n=-\infty}^{+\infty} c_n e^{2\pi\mathrm{i}\frac{n}{2\pi}t} = \sum_{n \text{ impair}} \frac{1}{2in}\, e^{nit} = \sum_{\substack{n=1\\ \text{impair}}}^{\infty} \frac{\sin(nt)}{n} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\sin((2n+1)t)}{2n+1}.$$



b) Soit S_N la somme des N premiers termes non nuls dans la série de Fourier de z. Montrer que sa dérivée peut s'écrire sous la forme

$$\frac{\sin(2Nt)}{2\sin t}$$

et utiliser ceci pour étudier les variations de S_N sur $[0, \pi]$.

Si $S_N(t) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1}\sin(2k+1)t$, on a

$$S_N'(t) = \sum_{k=0}^{N-1}\cos(2k+1)t = \mathrm{Re}\sum_{k=0}^{N-1} e^{(2k+1)\mathrm{i}t} = \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t}\sum_{k=0}^{N-1}(e^{2\mathrm{i}t})^k = \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t}\frac{e^{2\mathrm{i}tN}-1}{e^{2\mathrm{i}t}-1}$$

$$= \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}t}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}tN}}{e^{\mathrm{i}t}}\cdot\frac{e^{\mathrm{i}tN}-e^{-\mathrm{i}tN}}{e^{\mathrm{i}t}-e^{-\mathrm{i}t}} = \mathrm{Re}\, e^{\mathrm{i}tN}\frac{\sin Nt}{\sin t} = \frac{\cos Nt\cdot\sin Nt}{\sin t} = \frac{\sin 2Nt}{2\sin t}.$$

En $t = 0$ on remarque que $S_N'(0) = N$, et comme $\sin t > 0$ sur l'intervalle considéré le signe de $S_N'(t)$ se comporte comme celui de $\sin 2Nt$; en particulier, la dérivée est nulle aux multiples de $\frac{\pi}{2N}$.

c) Soit $t_N > 0$ la position du premier maximum local de S_N à droite de l'origine. En reconnaissant une somme de Riemann, établir que

$$S_N(t_N) \longrightarrow \frac{1}{2}\int_0^{\pi} \frac{\sin u}{u}\,\mathrm{d}u \quad \text{quand} \quad N \to \infty.$$

D'après ce qui précède, on sait que $t_N = \frac{\pi}{2N}$. Or

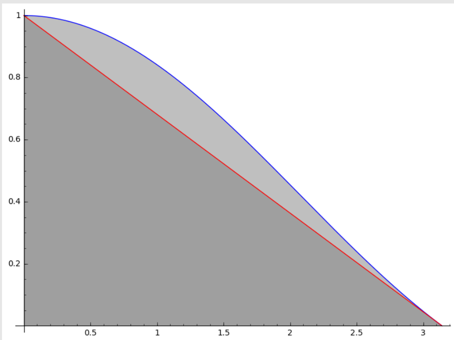
$$S_N(t_N) = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{1}{2k+1} \sin\frac{(2k+1)\pi}{2N} = \sum_{k=0}^{N-1} \frac{\sin x_k}{x_k}\frac{\Delta x_k}{2}$$

avec $x_k = \frac{(2k+1)\pi}{2N}$: il s'agit des points milieux des intervalles $[\frac{k}{N}\pi, \frac{k+1}{N}\pi]$ subdivisant $[0,\pi]$ en N intervalles égaux ; on obtient donc la conclusion annoncée en prenant la limite quand $N \to \infty$.

d) Montrer que cette valeur limite est strictement plus grande que $\pi/4 = z(0^+)$, et estimer numériquement le pourcentage de surévaluation que commettent les grandes sommes partielles de la série de Fourier de f au voisinage de 0^+, i.e. le ratio limite

$$\lim_{N\to\infty} \frac{S_N(t_N)}{\pi/4}.$$

La valeur limite en question est la moitié de l'aire sous la courbe de $\operatorname{sinc} u$ sur l'intervalle $[0,\pi]$; or cette aire est strictement supérieure à celle du triangle de sommets $(0,0), (0,1), (\pi,0)$ qui vaut $\frac{\pi}{2}$.



Une intégration numérique nous apprend que l'aire sous le sinus cardinal est supérieure d'environ 18% à celle du triangle.

En d'autres termes, la valeur de $\lim_{N\to\infty} S_N(t_N)$ dépasse $z(0^+)$ d'environ 18 % de la *demi*-amplitude du saut à la discontinuité ; soit environ 9 % de l'amplitude du saut.

À retenir : le saut des sommes partielles de la série de Fourier à la discontinuité est à la limite 9% plus ample que celui de la fonction initiale.