Cours Automatique

Régulation
Systèmes linéaires et continus

Department of Smart Systems and Energies

CHAPITRE 3

Dynamique des systèmes asservis

03

Introduction :

- Généralement, nous appliquons à l'entrée du système un signal temporel, que la sortie suit plus ou moins suivant le système à étudier.

- Les objectifs de l'analyse de la dynamique des systèmes asservis (SA) sont de pouvoir comparer les performances de différents systèmes suivant un signal d'entrée bien défini, mais aussi de pouvoir appréhender le système de commande idéal pour ce type de système.

- Introduction :
  - Suivant la nature du signal mis en entrée, différentes informations peuvent être obtenues.
  - Avec un signal temporel, nous pouvons caractériser
    - la rapidité,
    - la précision,
    - la stabilité du système.
  - Avec un signal fréquentiel, nous pourrons déterminer les réglages pour obtenir la stabilité du système.

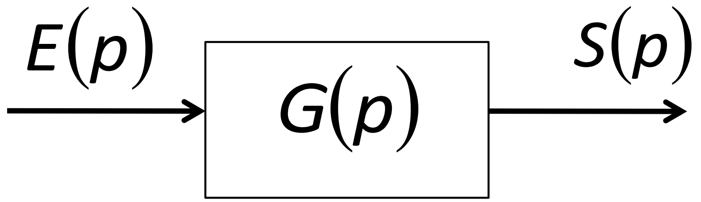
Introduction :

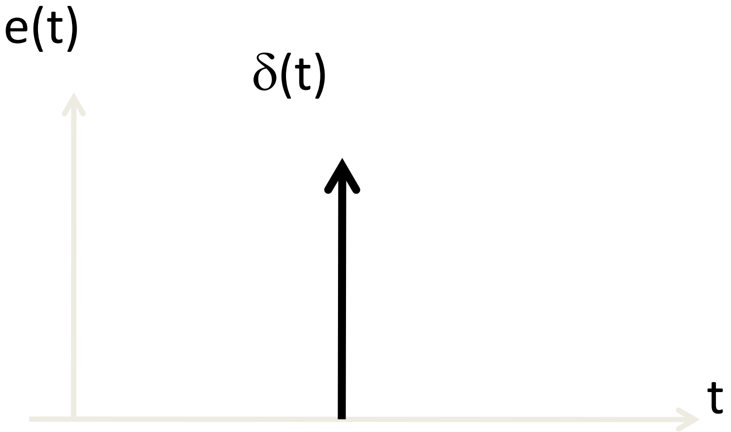
- Différents signaux typiques vont être appliqués à l'entrée de notre système pour :
  - Faciliter la résolution des équations différentielles
  - Attaquer un système plus difficile
  - Pouvoir comparer les performances de différents systèmes

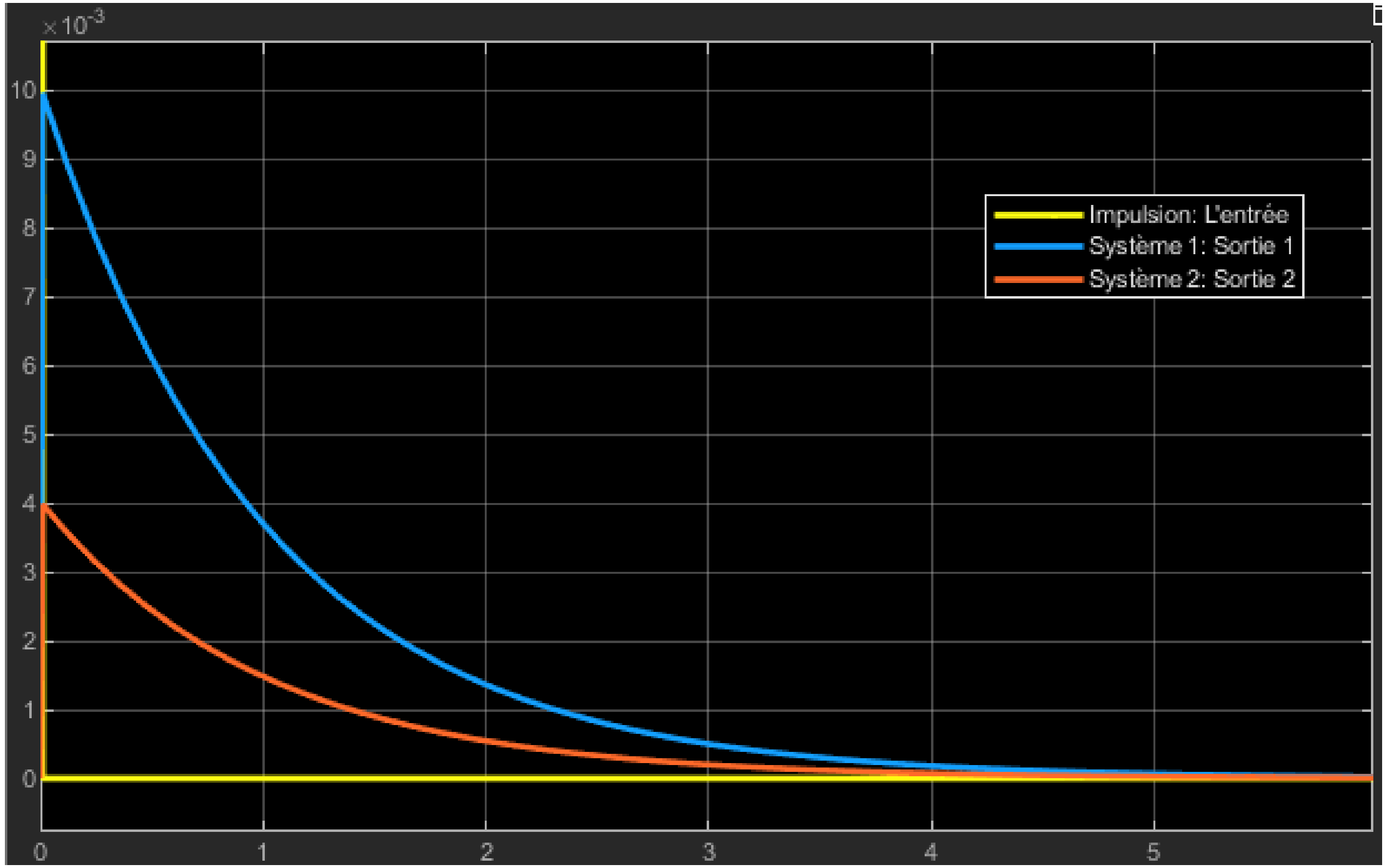
- Les signaux typiques appliqués sont :
  - Un dirac,
  - Un échelon,
  - Une rampe,
  - Une excitation harmonique.

Signaux d'entrée:

- **Impulsion de Dirac :**





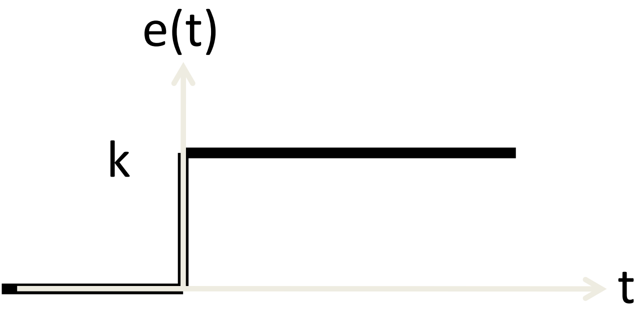


Or $TL(\delta(t))=1$ d'où $S(p) = G(p).E(p)=G(p)$

Si l'entrée est une impulsion de dirac, la réponse est dite **IMPULSIONNELLE**

•Signaux d'entrée:

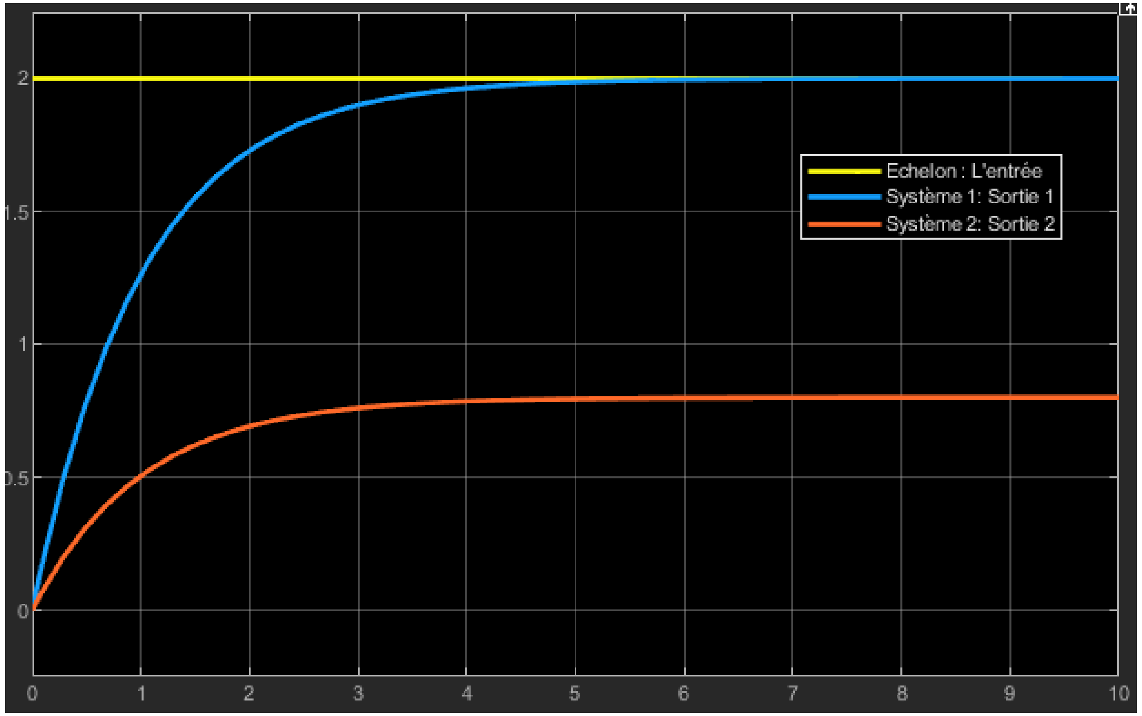
- **Echelon :**



$e(t) = 0$ pour $t < 0$

$e(t) = k$ pour $t \geq 0$

Laplace :

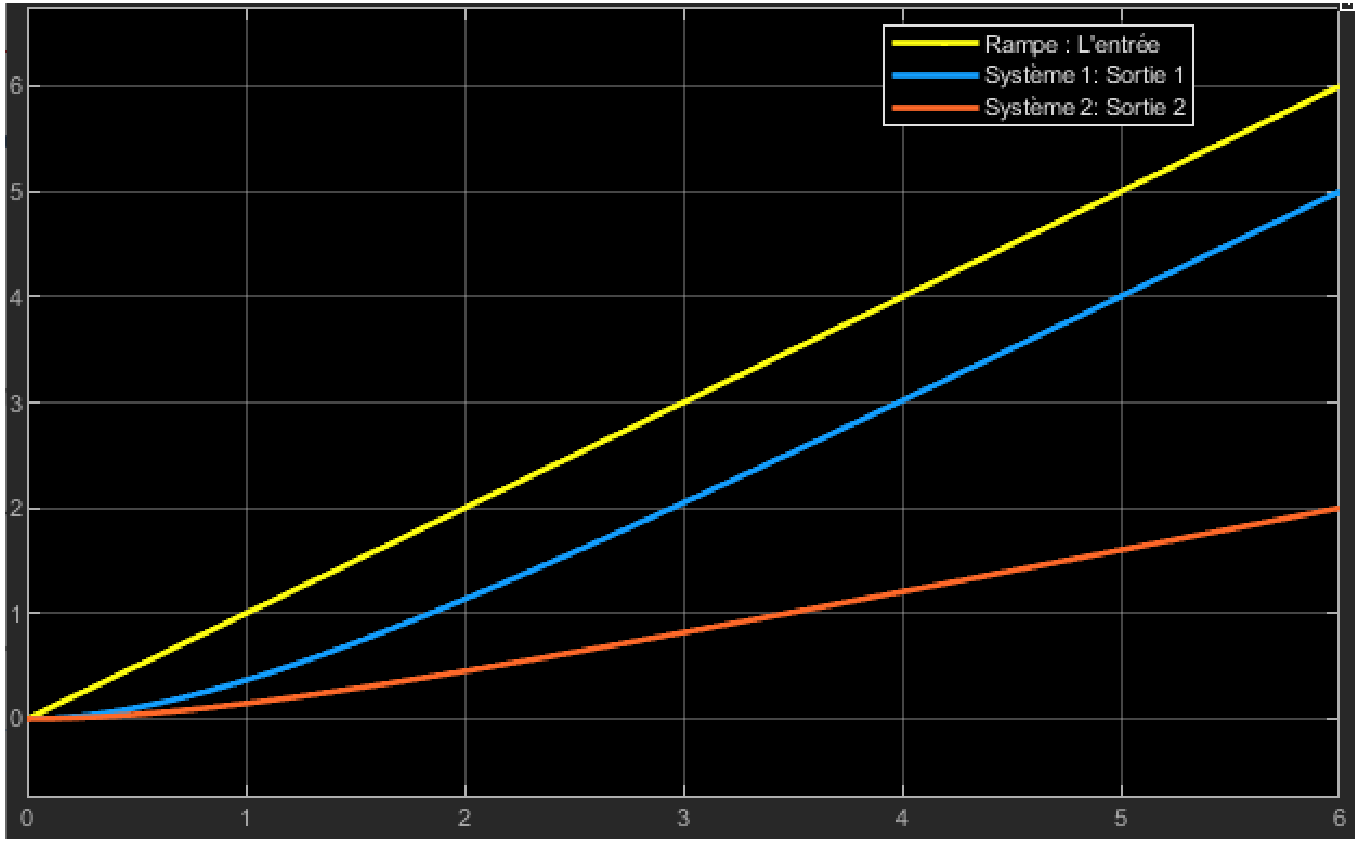


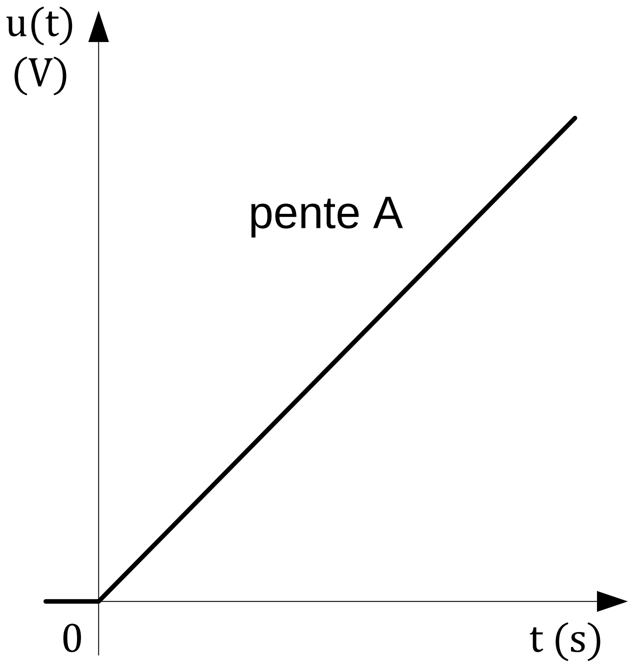
$$L\big(e(t)\big) = L(k) = E(p) = \frac{k}{p}$$

$$\boxed{\boldsymbol{L\big(e(t)\big) = \int_0^{+\infty} e(t)e^{-pt}dt = \int_0^{+\infty} \mathrm{k}e^{-pt}dt = \frac{e^{-pt}}{-p}\bigg|_0^{+\infty} = \frac{\mathrm{k}}{p}}}$$

La réponse à un échelon est appelée **réponse indicielle**. Un échelon est dit unitaire si k=1.

- Signaux d'entrée:
  - Entrée de vitesse (rampe) :





$U(t) = 0$ pour $t < 0$

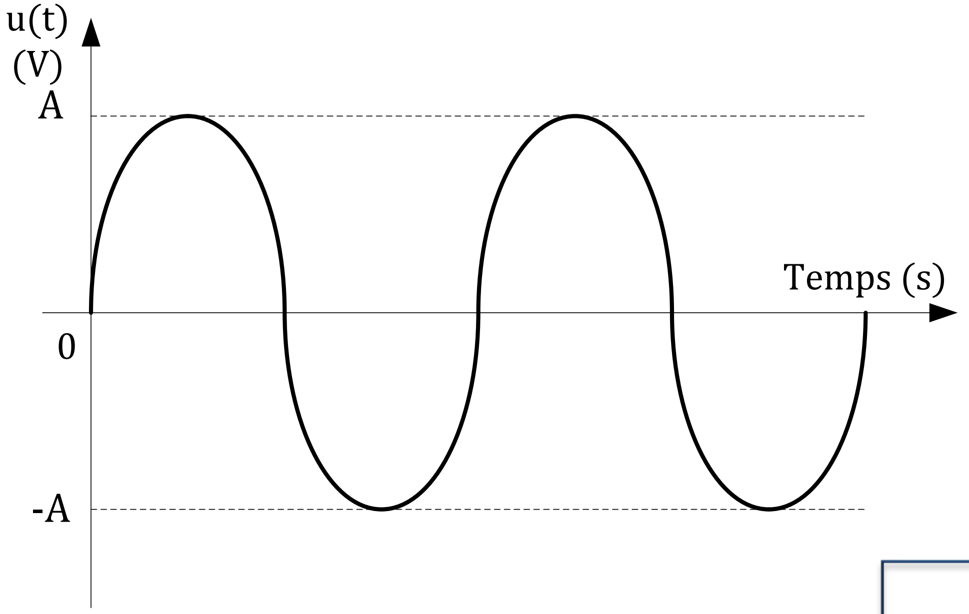
$U(t) = A.t$ pour $t \geq 0$

Laplace : $L\big(u(t)\big) = L(A.t) = U(p) = \frac{A}{p^2}$

avec A = pente

•Signaux d'entrée :

- Excitation harmonique



REPONSE HARMONIQUE

$U(t) = 0$ pour $t < 0$

$U(t) = A.sin(\omega.t)$ pour $t \geq 0$

Laplace :

$$L(u(t)) = L(A.sin(\omega.t)) = U(p) = \frac{A.\omega}{p^2 + \omega^2}$$

$$L(sin(\omega t)) = \int_0^{+\infty} sin(\omega t)\, e^{-pt} dt = \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{j\omega t} - e^{-j\omega t}}{2j}\right) e^{-pt} dt$$

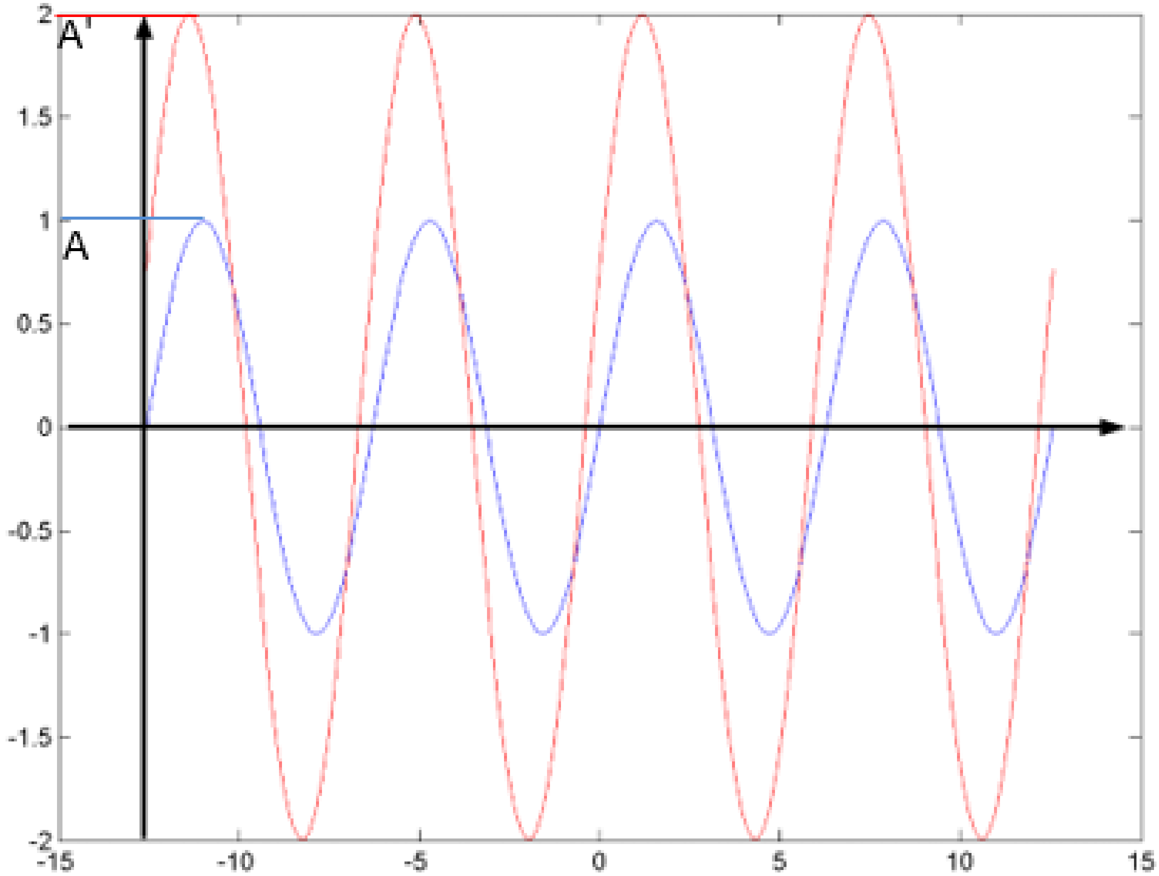
$$= \int_0^{+\infty} \left(\frac{e^{-(p-j\omega)t)} - e^{-(p+j\omega)t)}}{2j}\right) dt = \frac{1}{2j}\left(\frac{1}{p-j\omega} - \frac{1}{p+j\omega}\right) = \frac{\omega}{p^2 + \omega^2}$$

•Signaux d'entrée :

La réponse à l'excitation harmonique est appelée **réponse harmonique**. Pour cette réponse, le régime permanent est une sinusoïde de même fréquence que l'entrée mais qui diffère par l'amplitude et la phase. Si $u(t) = A\,sin(\omega.t)$ alors $s(t) = A' sin(\omega.t + \varphi)$.

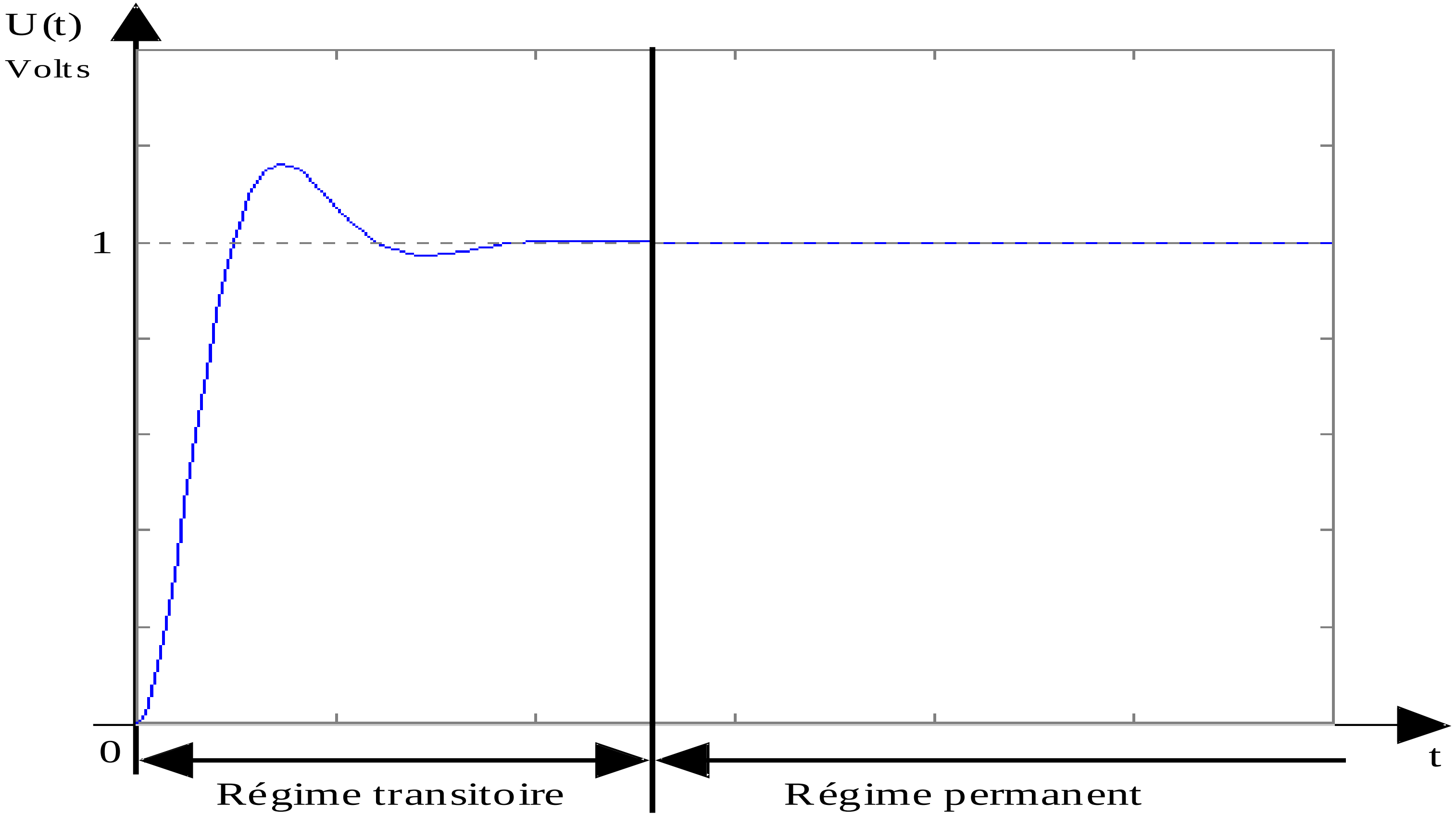
$\frac{A'}{A}$ comme le **gain** du système

φ comme **phase** (ou déphasage).



•Réponses d'un système asservi

Si nous soumettons un système à une de ces entrées, dans la plupart des cas la sortie finira par avoir la même forme que l'entrée. A ce moment-là, nous dirons que le système a atteint son régime **permanent**.



Régime transitoire : réaction d'un système au repos lorsque nous appliquons un signal d'entrée, ou lorsque le signal d'entrée est modifié.

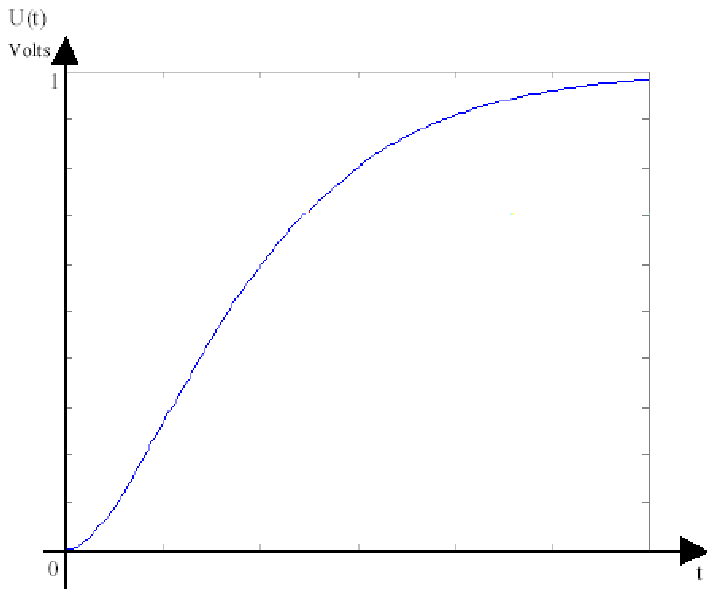
Régime permanent : se met en place à la fin du régime transitoire lorsque le signal de sortie est constant.

•Réponses d'un système asservi

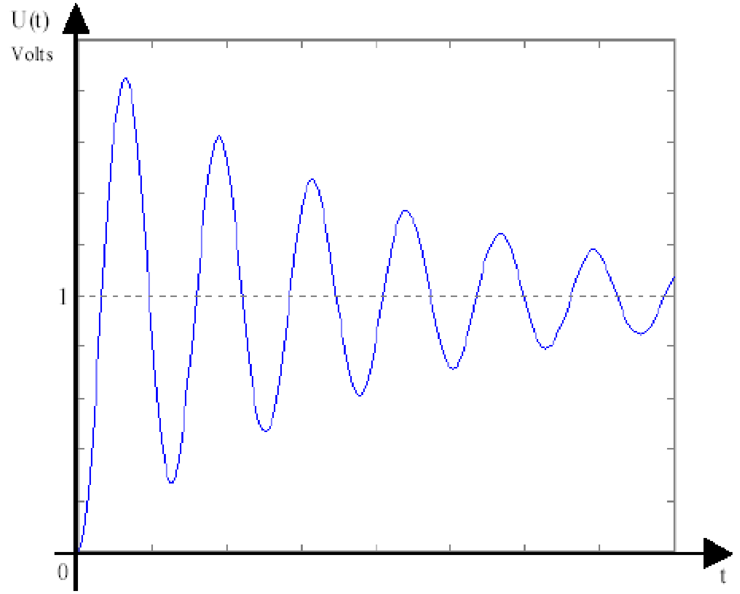
Il faut donc un certain temps à un système pour atteindre son régime permanent.

La période entre t=0 et ce régime correspond au régime transitoire.

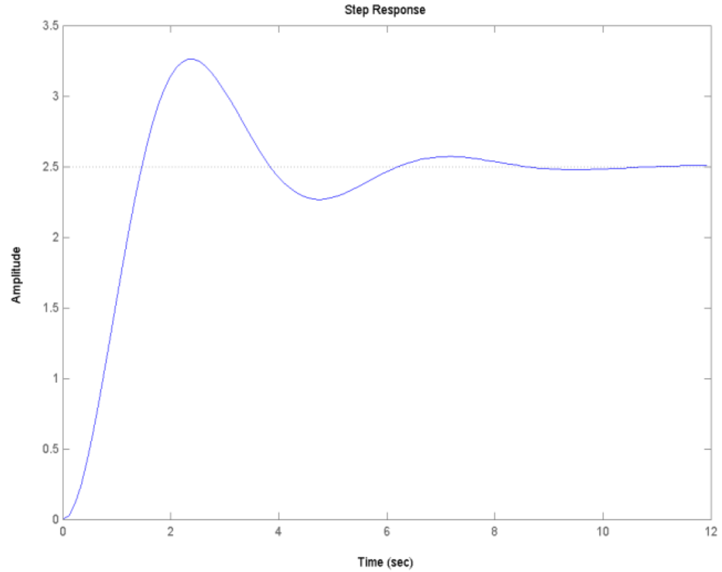
Ce temps permet de définir différents types d 'asservissements :



Asservissement « mou »



Transitoire Trop lent et trop peu amorti



Bon asservissement : régime transitoire rapide et bien amorti avec un seul dépassement

- Performances des systèmes asservis :

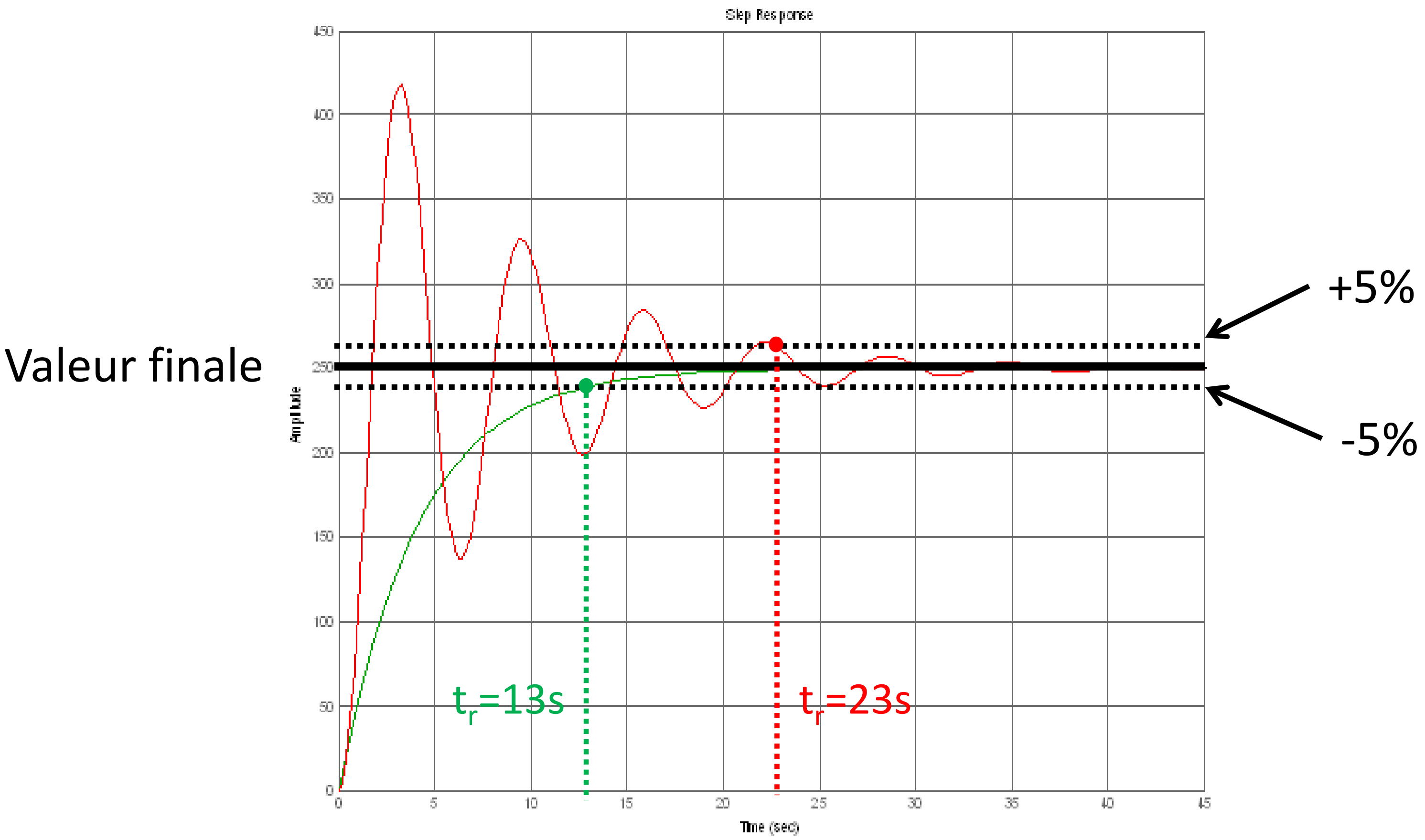
L'asservissement d'un système est caractérisé par 3 grandeurs :

- sa rapidité,
- sa stabilité,
- sa précision.

▪Rapidité

Un système est dit rapide s'il se stabilise à un niveau constant en un temps satisfaisant et fixé par l'utilisateur.

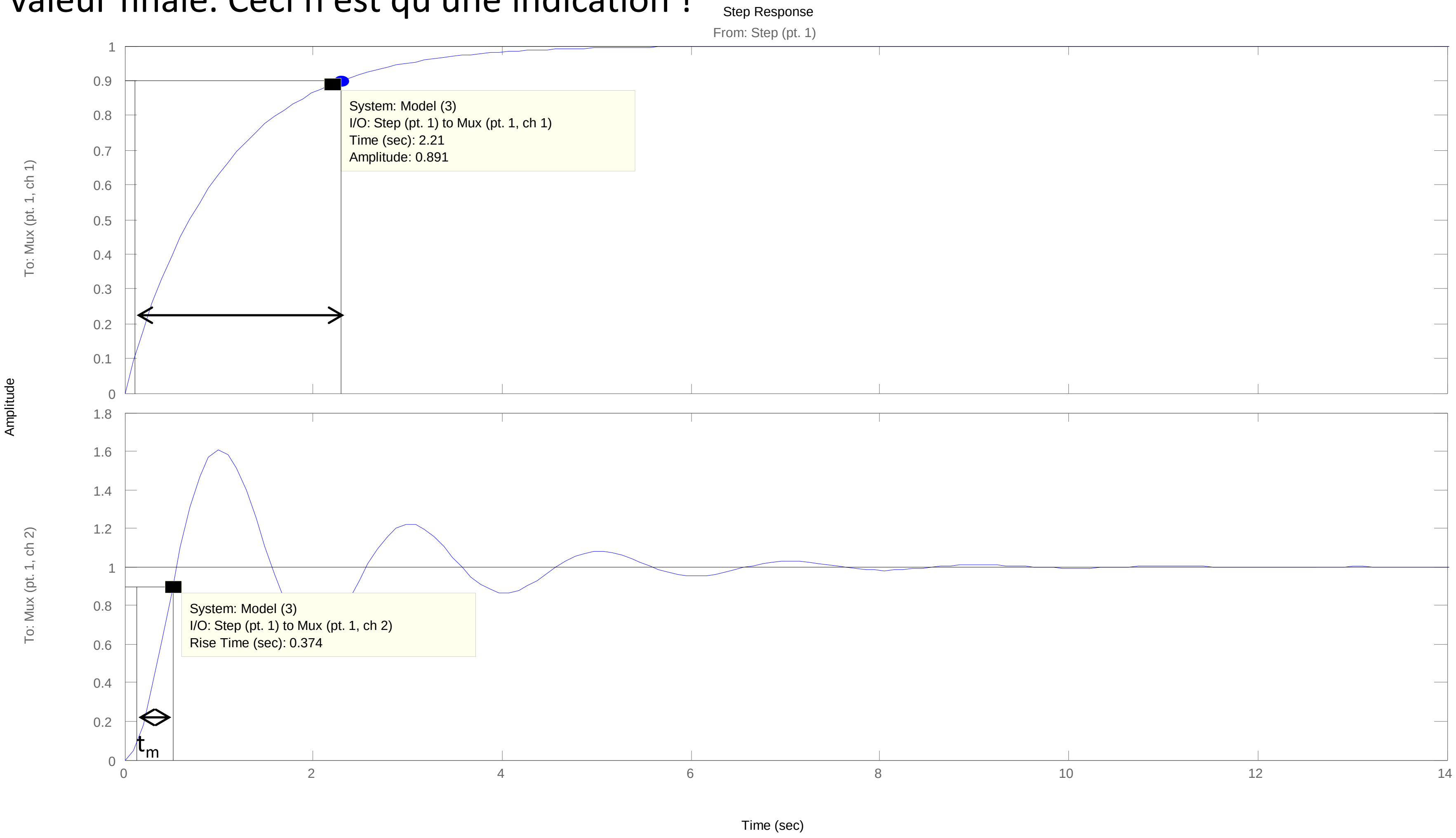
La rapidité est donnée par le temps de réponse : temps pour arriver à ± x % de la valeur finale (généralement x = 5).



Le temps de réponse à 5% est atteint lorsque la sortie rentre dans le « tube de ± 5% » et n'en sort plus !

▪Rapidité

Une indication supplémentaire sur la rapidité peut être donnée, en prenant en compte le temps de montée : temps pour passer de 10 % à 90 % de la valeur finale. Ceci n'est qu'une indication !



▪Rapidité

Application: Déterminer le temps de réponse à 5%.

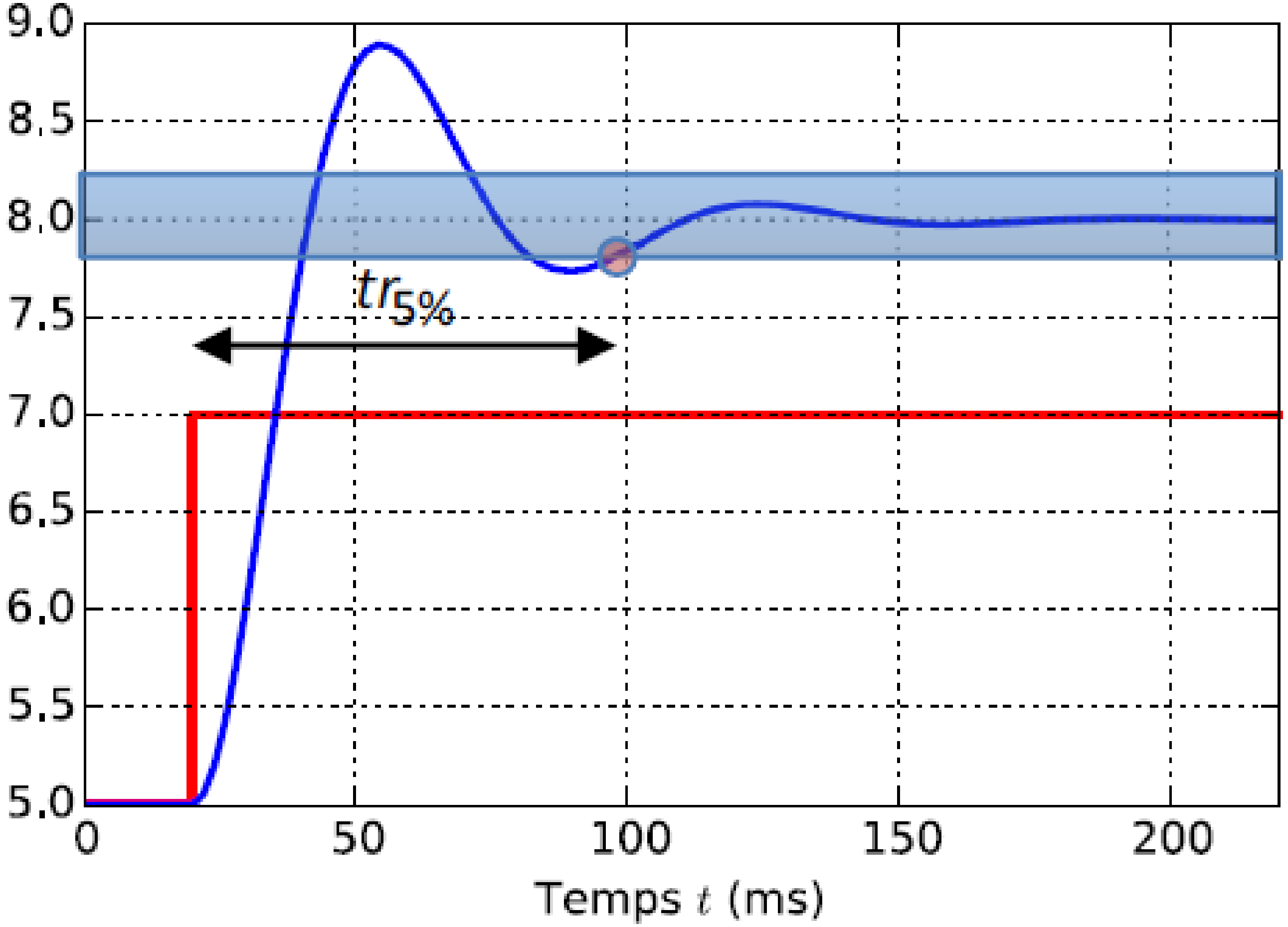
Le "tube de ±5%" correspond à l'intervalle

[8x0.95 ; 8x1.05], soit [7.6 ; 8.4].

La réponse reste dans le tube à partir de t=100 ms.

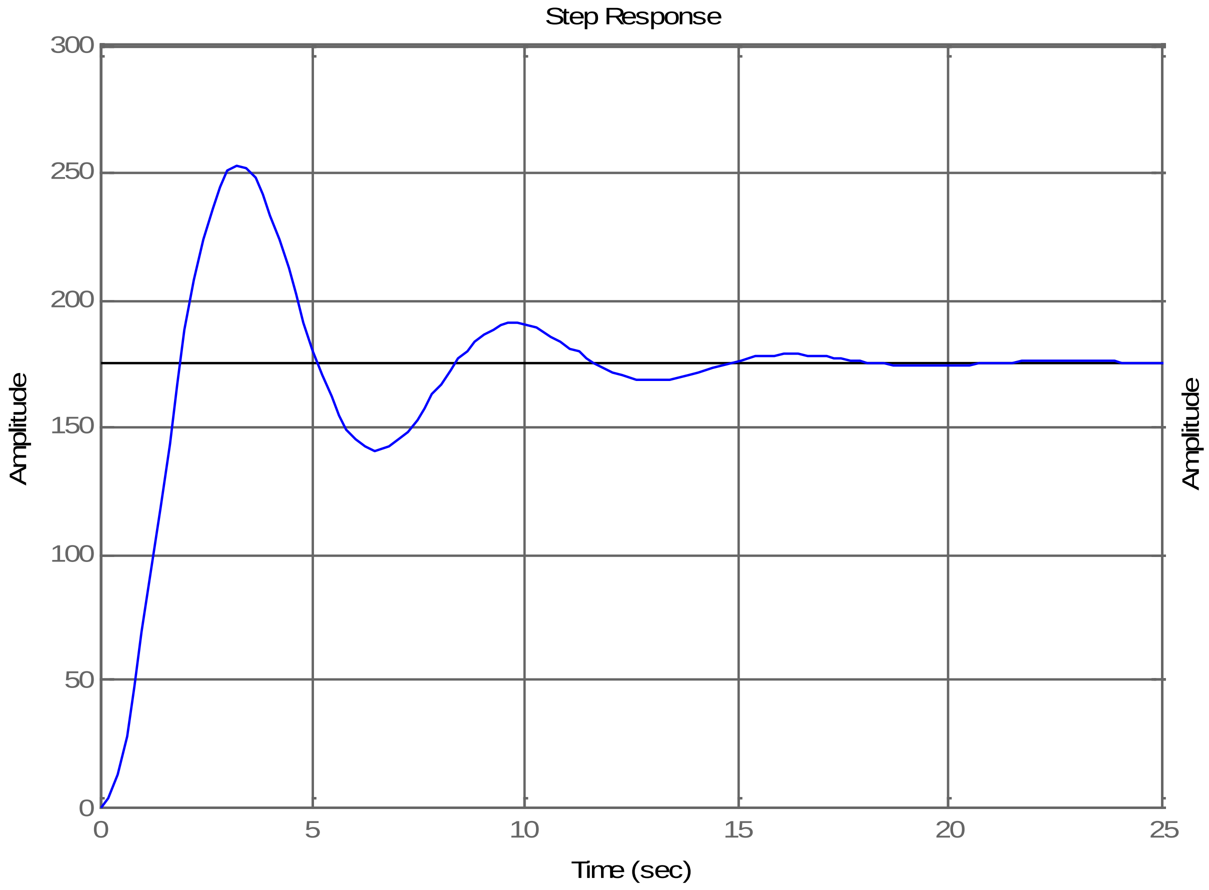
La sollicitation débutant à t_{init} =20 ms, on obtient

tr5%= 100-20=80 ms.

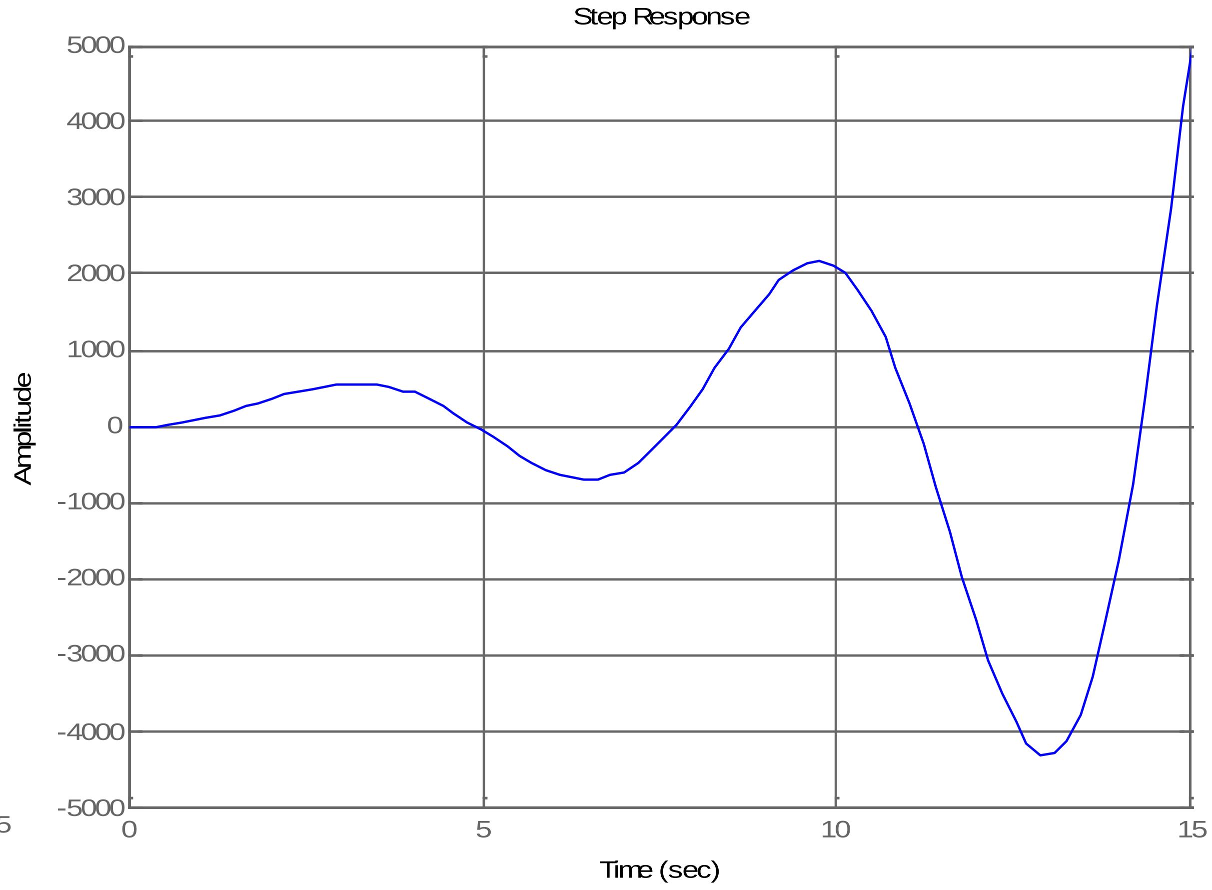


Stabilité

Un système est dit stable si sa sortie tend vers une constante pour une entrée constante.



Système stable

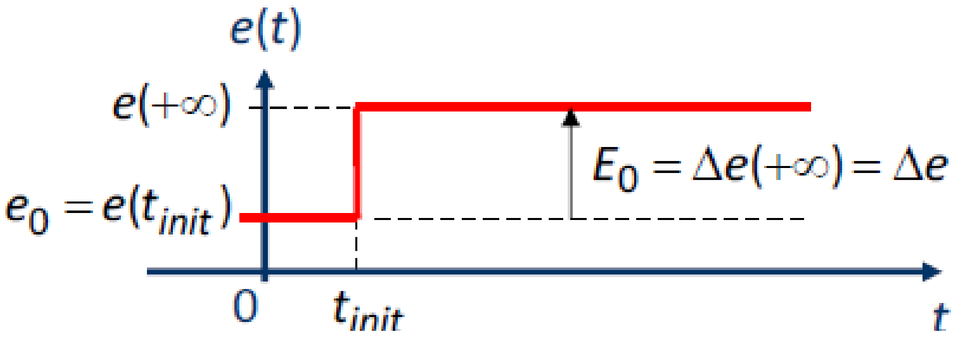


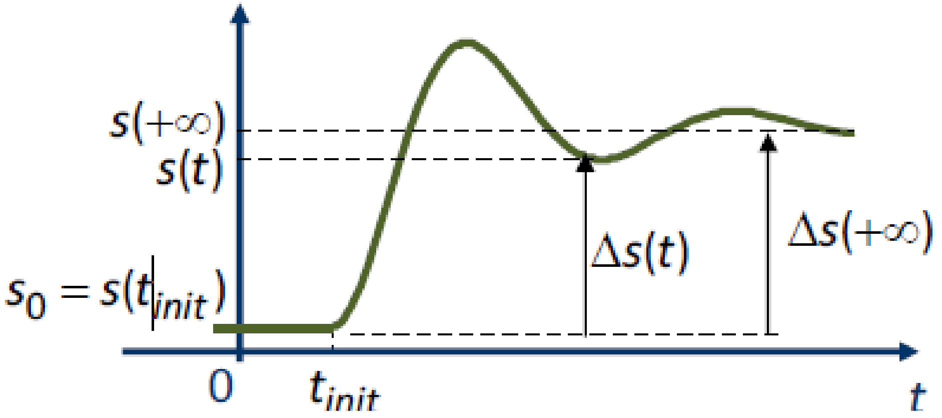
Système instable

Stabilité

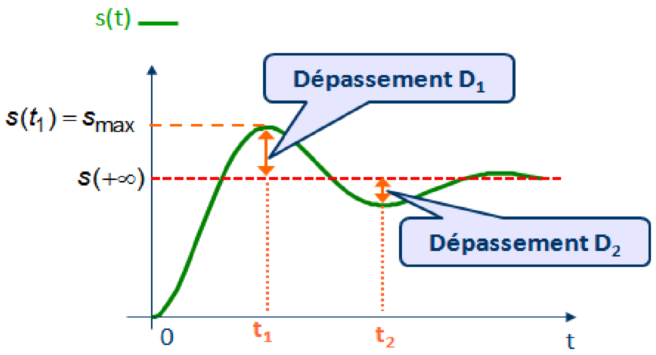
La stabilité d'un système continu est caractérisée par la valeur finale et les dépassements.

- la **valeur finale** $s(+\infty)$ (ou $s_{+\infty}$) ;
- la **variation finale** $\Delta s(+\infty) = s(+\infty) - s_0$.



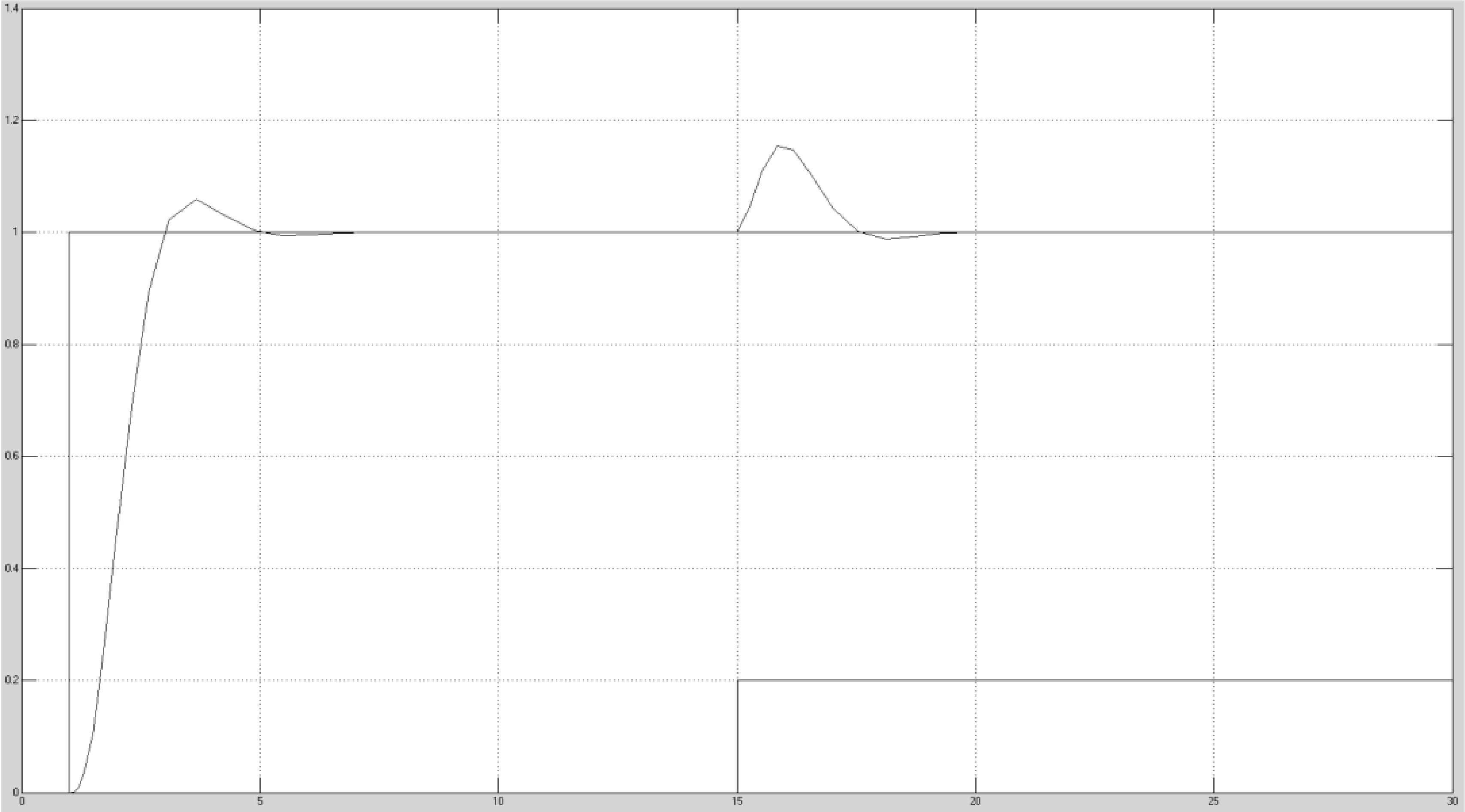


- le **dépassement absolu** $\boxed{D_k = \left| s(t_k) - s(+\infty) \right|}$ avec t_k l'instant de l'extrémum ;
- le **dépassement relatif** $\boxed{D_{k\%} = \left| \frac{D_k}{\Delta s(+\infty)} \right|}$ (relatif à la variation finale de la réponse).

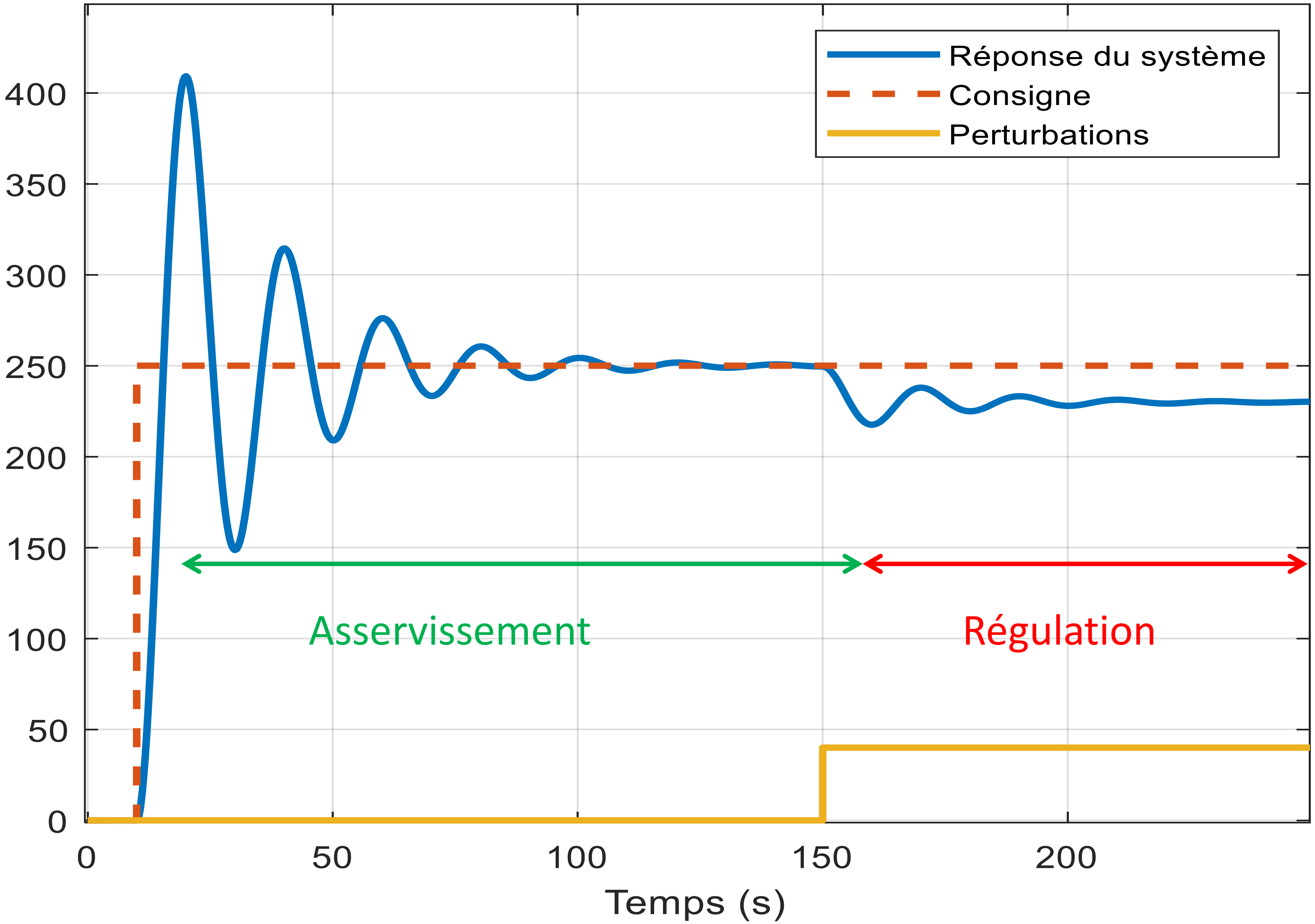


▪Précision

Un système est précis si la sortie suit la consigne en toute circonstance (asservissement et régulation) et retourne à la valeur de consigne après une perturbation.



- Précision se détermine en régime permanent

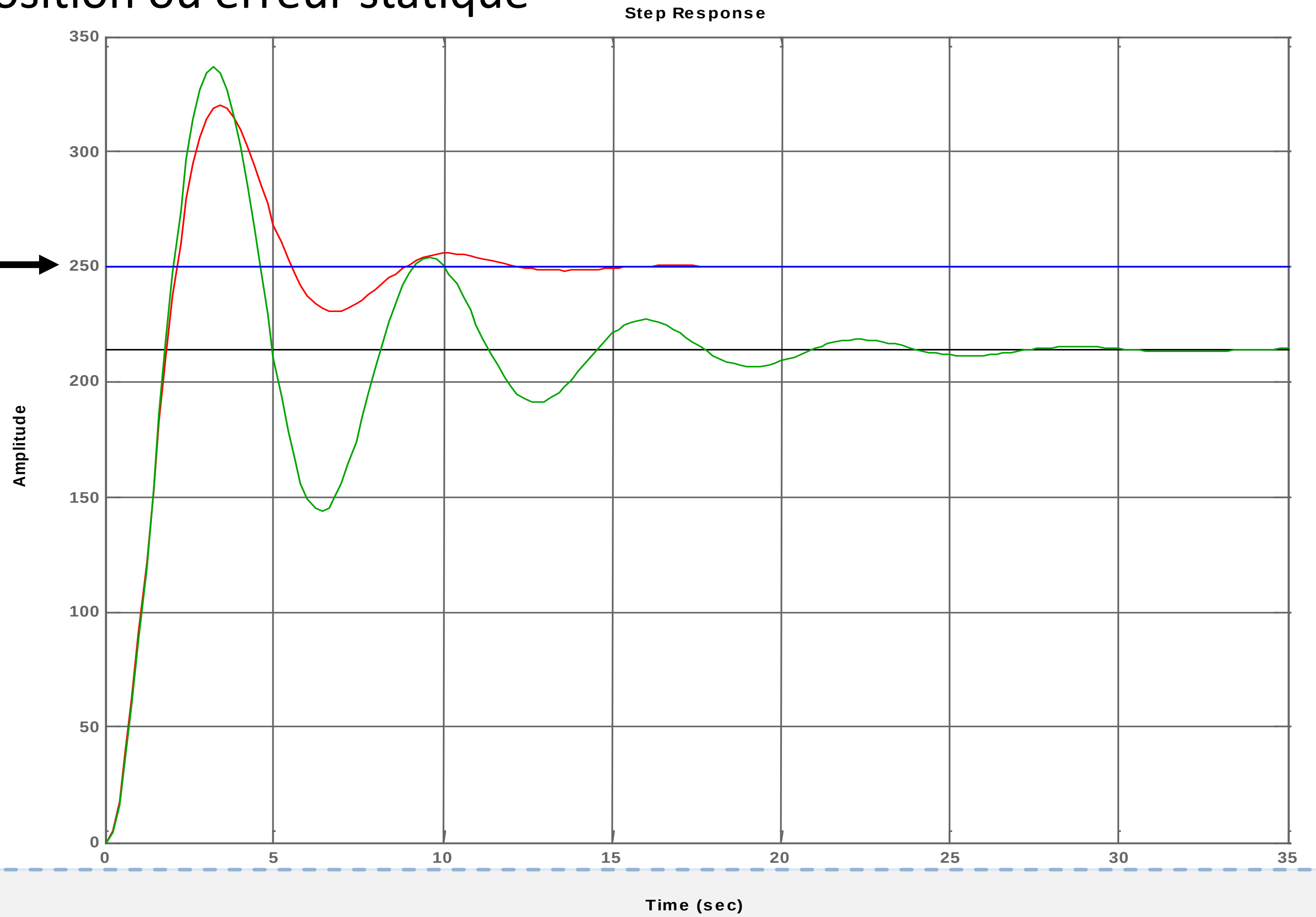


Système avec erreur

•Précision:

- **Exemple de réponses à un échelon :** l'erreur permanente s'appelle erreur de position ou erreur statique

Entrée de 250°:



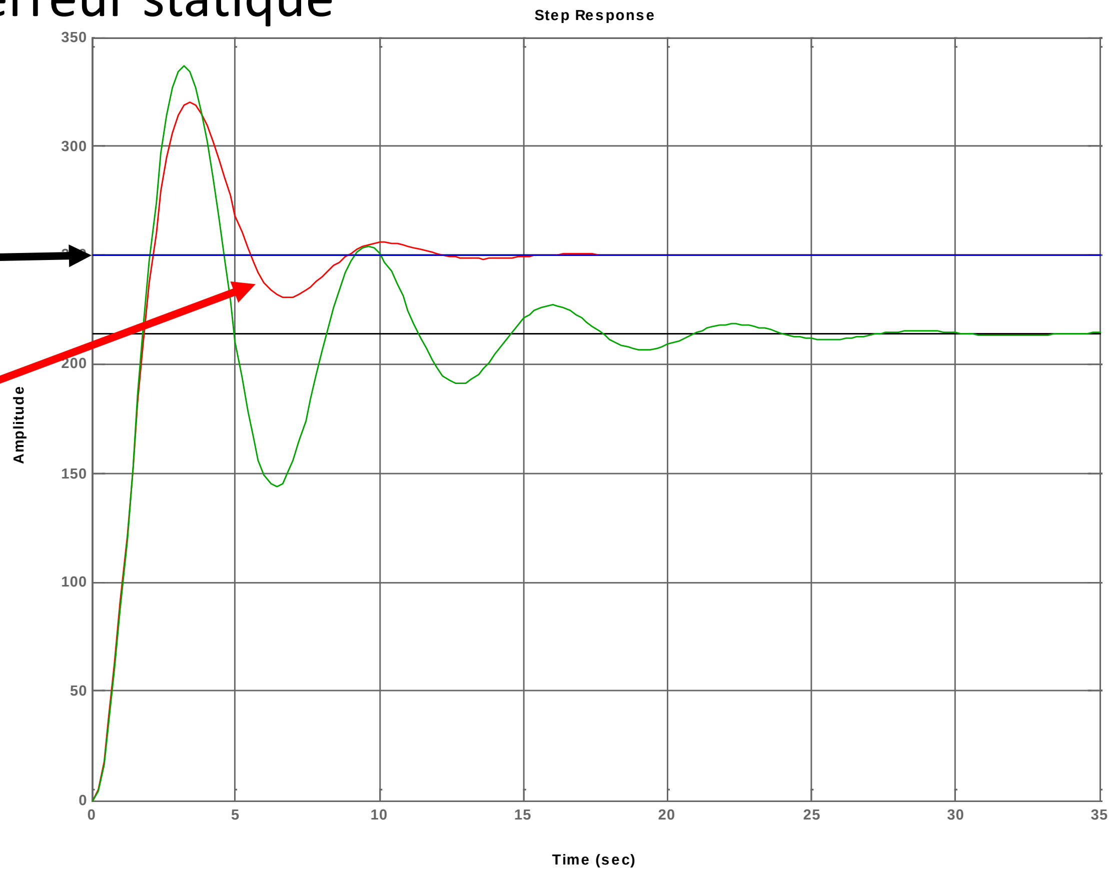
•Précision:

Elle se détermine en régime permanent

- **Exemple de réponses à un échelon :** l'erreur permanente s'appelle erreur de position ou erreur statique

Entrée de 250°:

Réponse système 1 :



•Précision:

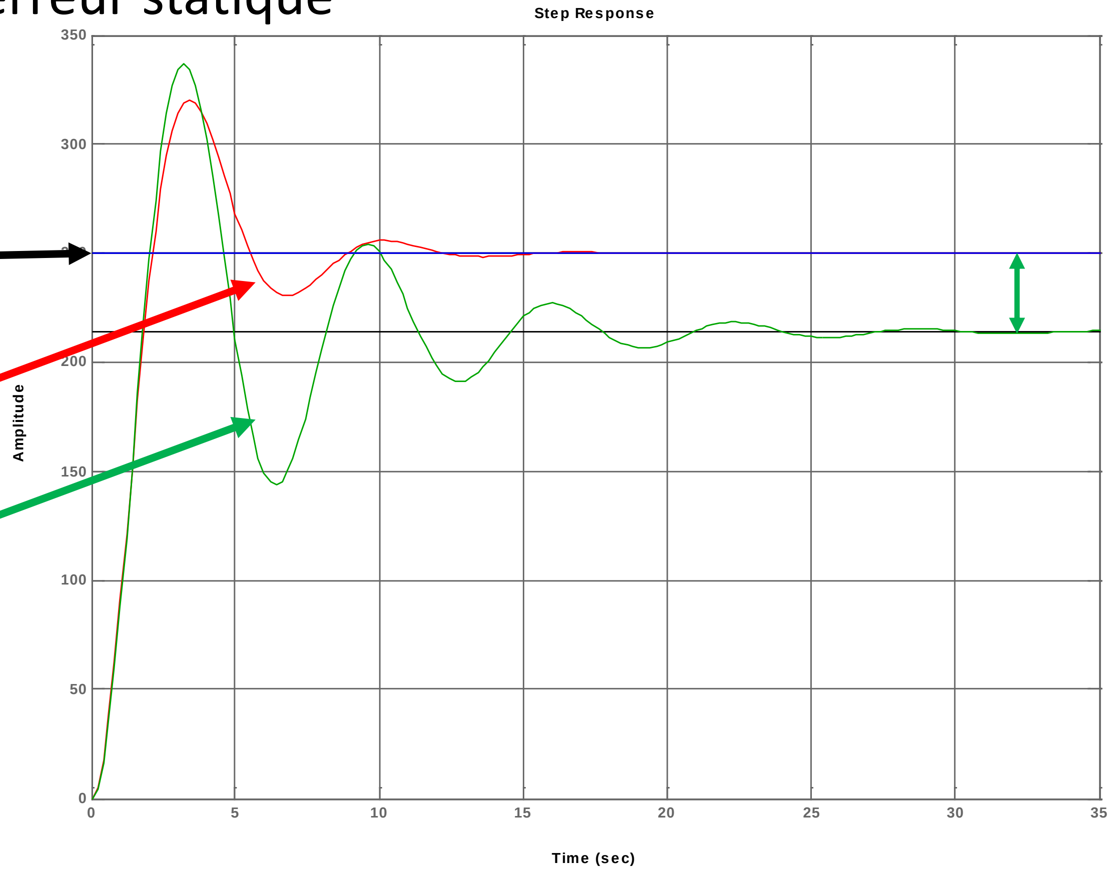
Elle se détermine en régime permanent

- **Exemple de réponses à un échelon :** l'erreur permanente s'appelle erreur de position ou erreur statique

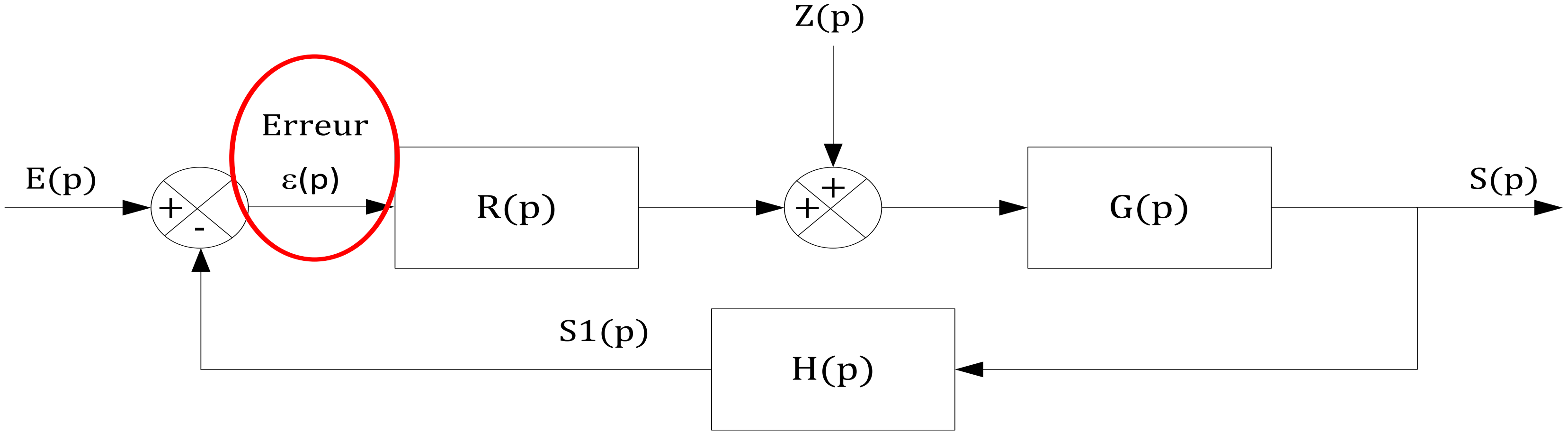
Entrée de 250°:

Réponse système 1 :

Réponse système 2 :



•Calculs des erreurs d'un système asservi :



L'erreur <u>(asservissement et régulation)</u> est égale à : $\varepsilon(p) = E(p) - S1(p)$

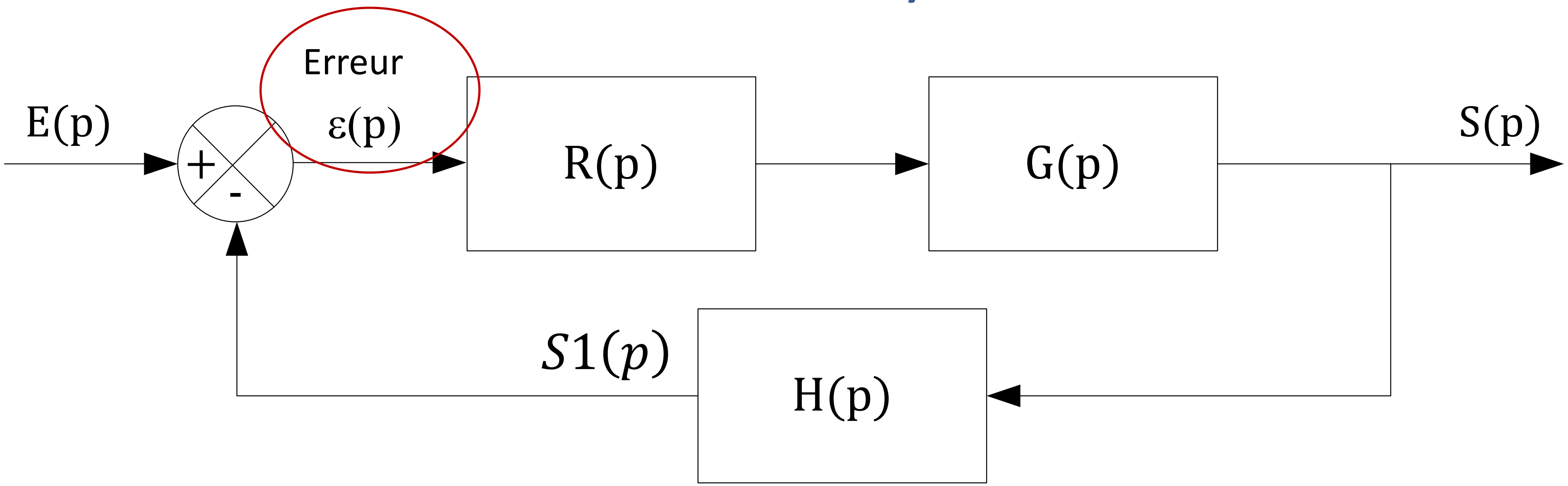
La valeur finale de l'erreur d'un système asservi se détermine en régime permanent et est donc définie par :

$$\varepsilon_f = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t)$$

Si nous appliquons le **théorème de la valeur finale** nous obtenons l'équation suivante :

$$\varepsilon_f = \lim_{t\to\infty} \varepsilon(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p)$$

• Calculs des erreurs d'un système asservi :



Erreur en asservissement : $\boldsymbol{Z(p) = 0 \ et \ E(p) \neq 0}$

Pour calculer la valeur finale de l'erreur d'asservissement, il faut tout d'abord déterminer l'expression de $\varepsilon_{ass}(p)$.

Pour cela, nous lisons sur le schéma bloc :

$$\varepsilon_{ass}(p) = E(p) - S1(p) = E(p) - S(p).H(p) \text{ avec } S(p) = R(p).G(p).\varepsilon_{ass}(p)$$

$$\varepsilon_{ass}(p) = \frac{1}{1 + H(p).R(p).G(p)} E(p)$$

•Calculs des erreurs d'un système asservi :

Erreur en asservissement : $\boldsymbol{Z(p) = 0 \ et \ E(p) \neq 0}$

Entrée en échelon :

L'erreur permanente s'appelle **erreur de position** ou **erreur statique**.

Dans ce cas : $E(p) = \frac{k}{p}$ avec k amplitude de l'échelon d'entrée.

Entrée en rampe :

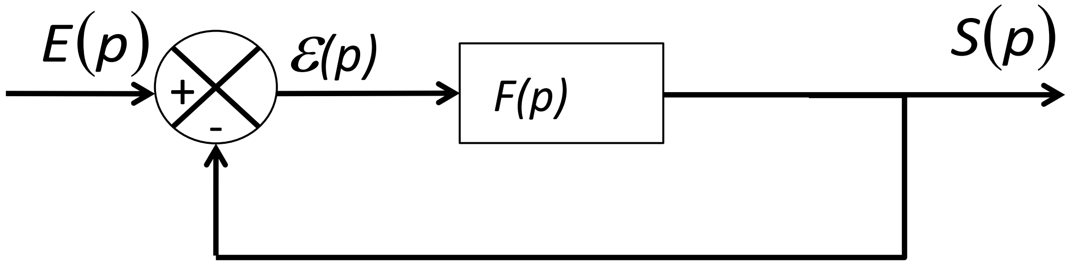
L'erreur permanente s'appelle **l'erreur de traînage** ou **l'erreur de vitesse**.

Dans ce cas : $E(p) = \frac{E_0}{p^2}$

•Calculs des erreurs d'un système asservi :

Erreur en asservissement : $Z(p) = 0$ *et* $E(p) \neq 0$

- Cas particulier : Etude d'un système de fonction de transfert F(p) inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.



Erreur d'asservissement :

$$\varepsilon_{ass}(p) = \frac{1}{1+F(p)} E(p) \quad \text{avec} \quad F(p) = \frac{K\left(1 + b_1.p + b_2.p^2 + \cdots + b_k.p^k\right)}{p^{\alpha}.\left(1 + a_1.p + a_2.p^2 + \cdots + a_n.p^n\right)}$$

La valeur finale de l'erreur d'asservissement est donc :

$$\varepsilon_{f,ass} = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon_{ass}(p) = \lim_{p\to 0} p.E(p).\frac{1}{1 + \dfrac{K(1 + b_1.p + b_2.p^2 + \cdots + b_k.p^k)}{p^{\alpha}.(1 + a_1.p + a_2.p^2 + \cdots + a_n.p^n)}}$$

•Calculs des erreurs d'un système asservi :

Erreur en asservissement : $\boldsymbol{Z(p) = 0 \ et \ E(p) \neq 0}$

Erreur d'asservissement : si E(p) est un échelon et que le système est de classe 0 alors :

$$\mathrm{E}(p) = \frac{E_0}{p} \quad \text{et} \quad F(p) = \frac{K(1 + b_1.p + \ldots + b_m.p^m)}{(1 + a_1.p + \ldots + a_n.p^n)}$$

$$\varepsilon_{f,ass} = \lim_{p \to 0} p\,.\,\varepsilon_{ass}(p) = \lim_{p \to 0} p\,.\frac{E_0}{p}\frac{1}{1 + \frac{K(1 + b_1.p + \ldots + b_m.p^m)}{(1 + a_1.p + \ldots + a_n.p^n)}} = \frac{E_0}{1 + K}$$

• Calculs des erreurs d'un système asservi :

Erreur en asservissement : $Z(p) = 0 \ et \ E(p) \neq 0$

Erreur d'asservissement : Nous pouvons appliquer le même raisonnement dans le cas où l'entrée est une rampe de pente A et que le système est de classe 0 alors :

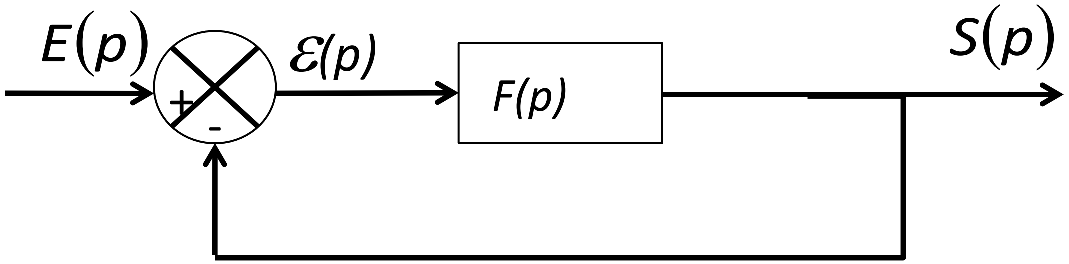
$$\mathrm{E}(p) = \frac{A}{p^2} \qquad \text{et} \qquad F(p) = \frac{K(1 + b_1.p + \ldots + b_m.p^m)}{(1 + a_1.p + \ldots + a_n.p^n)}$$

$$\varepsilon_{f,ass} = \lim_{p \to 0} p \,.\, \varepsilon_{ass}(p) = \lim_{p \to 0} p \,.\, \frac{A}{p^2} \frac{1}{1 + \frac{K(1 + b_1.p + \ldots + b_m.p^m)}{(1 + a_1.p + \ldots + a_n.p^n)}} = \infty$$

•Calculs des erreurs d'un système asservi :

Erreur en asservissement : $\boldsymbol{Z(p) = 0 \; et \; E(p) \neq 0}$

- Cas particulier : Etude d'un système de fonction de transfert F(p) inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire.



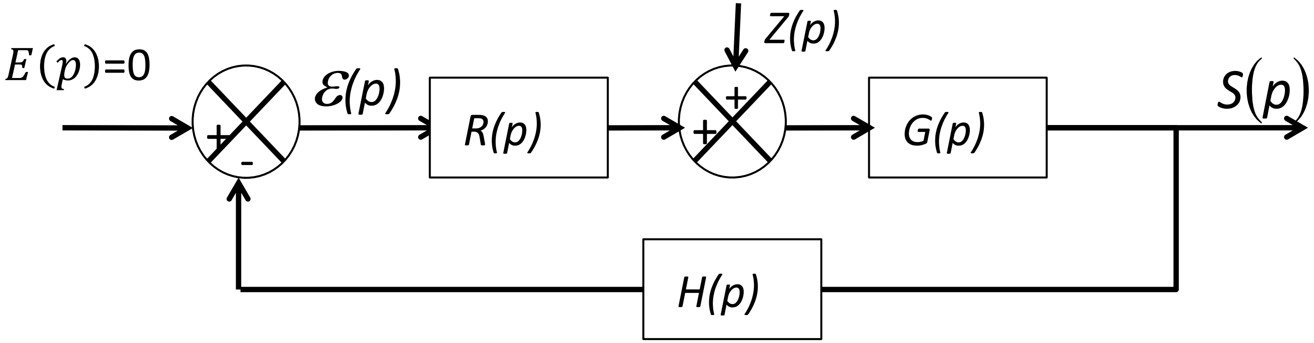
Erreur d'asservissement : En résumé :

Entrée \ Classe	Classe 0	Classe 1	Classe 2
Echelon d'amplitude E_0	$\frac{E_0}{1+K}$	0	0
Rampe d'amplitude A	∞	$\frac{A}{K}$	0

Tableau : Valeur de l'erreur finale d'asservissement pour un système inséré dans une boucle d'asservissement à retour unitaire en fonction de l'entrée et de la classe du système

•Calculs des erreurs d'un système asservi :

Erreur de régulation : : $\boldsymbol{Z(p) \neq 0}$ ***et*** $\boldsymbol{E(p) = 0}$



Il faut tout d'abord déterminer l'expression de l'erreur de régulation:

$$\varepsilon_{reg}(p) = -S(p).H(p) \text{ avec } S(p) = G(p).\left(R(p).\varepsilon(p) + Z(p)\right)$$

$$\varepsilon_{reg}(p) = -\frac{H(p).G(p)}{1 + H(p).R(p).G(p)} Z(p)$$

Ensuite il faut calculer la valeur finale de l'erreur en utilisant le théorème de la valeur finale.

$$\varepsilon_{reg_0} = \lim_{t\to\infty} \varepsilon_{reg}(t) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon_{reg}(p)$$

CHAPITRE 4

Analyse fréquentielle des systèmes

04

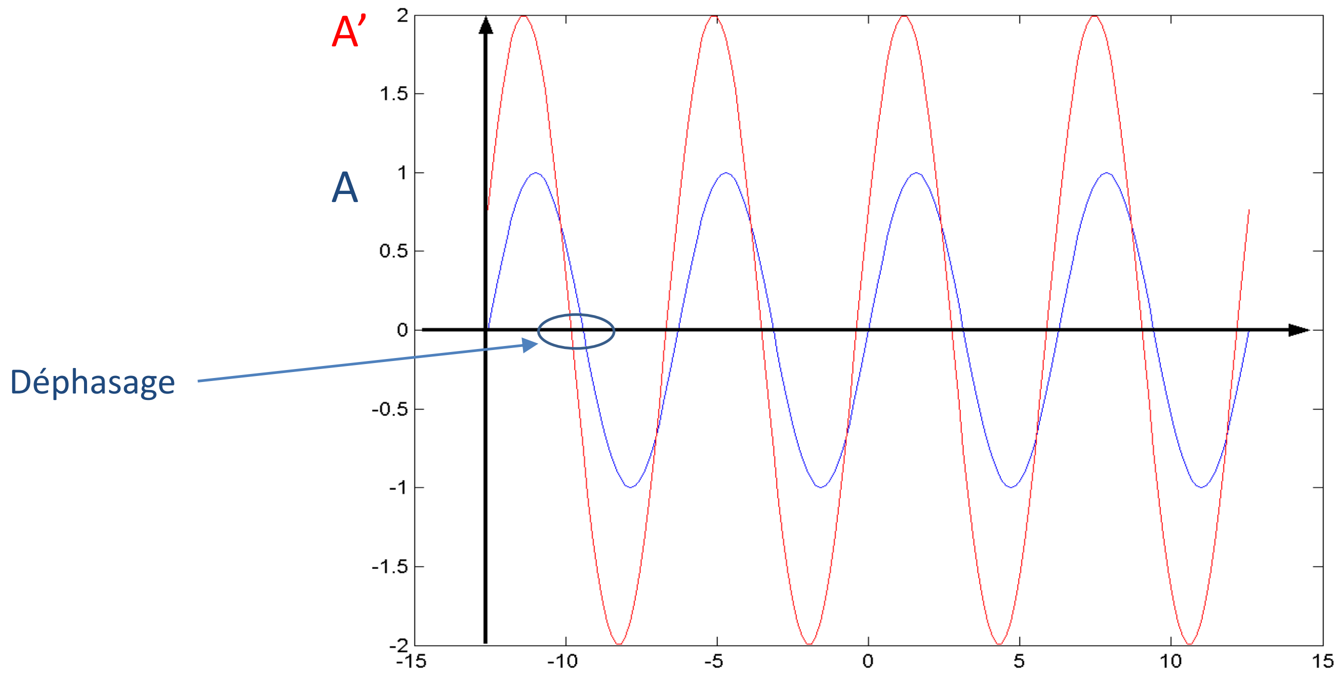
- Introduction :

  - Dans la pratique, les performances d'un système asservi sont souvent jugées sur sa réponse temporelle.
  - Pour des ordres élevés de système, ou pour définir d'autres performances, l'analyse fréquentielle est utilisée : on applique un signal sinusoïdal en entrée.
  - L'analyse fréquentielle des systèmes se fait **en boucle ouverte.**
  - Nous balayons le comportement du système en fréquence et nous observons le signal de sortie.

ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES

- Réponse harmonique

Dans le cas d'une entrée harmonique, le régime permanent est une sinusoïde de <u>même fréquence</u> que l'entrée, mais qui diffère en amplitude et en phase.

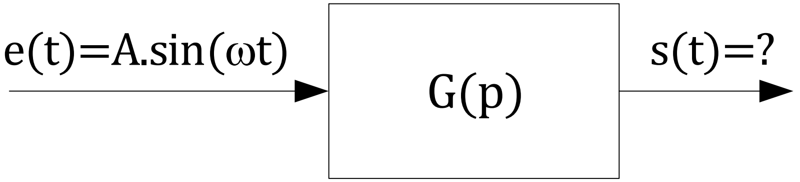


$e(t)=A \sin\omega t$

$s(t)= A' \sin(\omega t+\varphi)$

ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES

- Analyse fréquentielle:



Nous aurons alors en sortie $$s(t) = G(\omega).A.sin\big(\omega t + \varphi(\omega)\big)$$

- Le passage d'une écriture de Laplace à une étude fréquentielle se fait en remplaçant tout simplement p par $j\omega$. Nous pouvons alors définir $G(j\omega)$ comme la fonction de transfert harmonique:

p par **jω**

- Nous pouvons définir :

- La fonction de transfert harmonique : $G(j\omega)$

- Le gain : $G(\omega) = |G(j\omega)| = \dfrac{A'}{A}$

- La phase : $\varphi_G(\omega) = \arg(G(j\omega))$

$$G(j\omega) = |G(j\omega)|\, e^{j\varphi_G(\omega)}$$

- Analyse fréquentielle :

$$G(j\omega)=Re(\omega)+j.Im(\omega)$$

  - Calcul du Module :

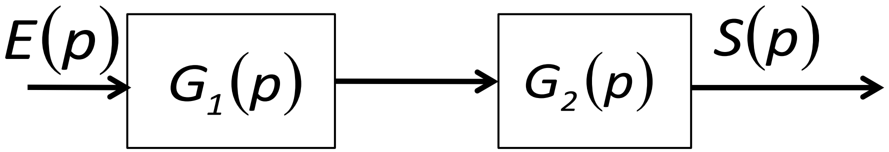
$$G(\omega) = \left| G(j\omega) \right| = \sqrt{Re(\omega)^2 + Im(\omega)^2}$$

  - Calcul de la phase :

$$\varphi_G(\omega) = Arg\left(G(j\omega)\right) = \arctan\frac{Im(\omega)}{Re(\omega)}$$

- Propriétés - Calcul du Module et de la phase

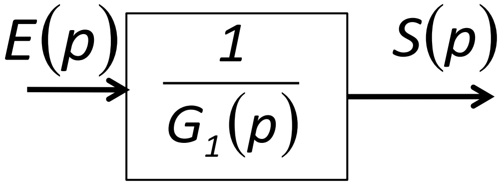
- Propriété n°1 :



$$G(\omega)=G_1(\omega).G_2(\omega)$$

$$\varphi_G(\omega)=\varphi_{G_1}(\omega)+\varphi_{G_2}(\omega)$$

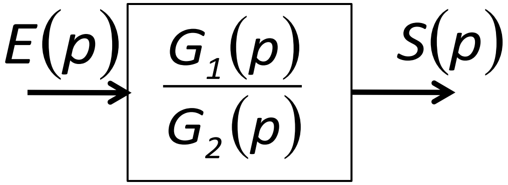
- Propriété n°2 :



$$G(\omega)=\frac{1}{G_1(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega)=-\varphi_{G_1}(\omega)$$

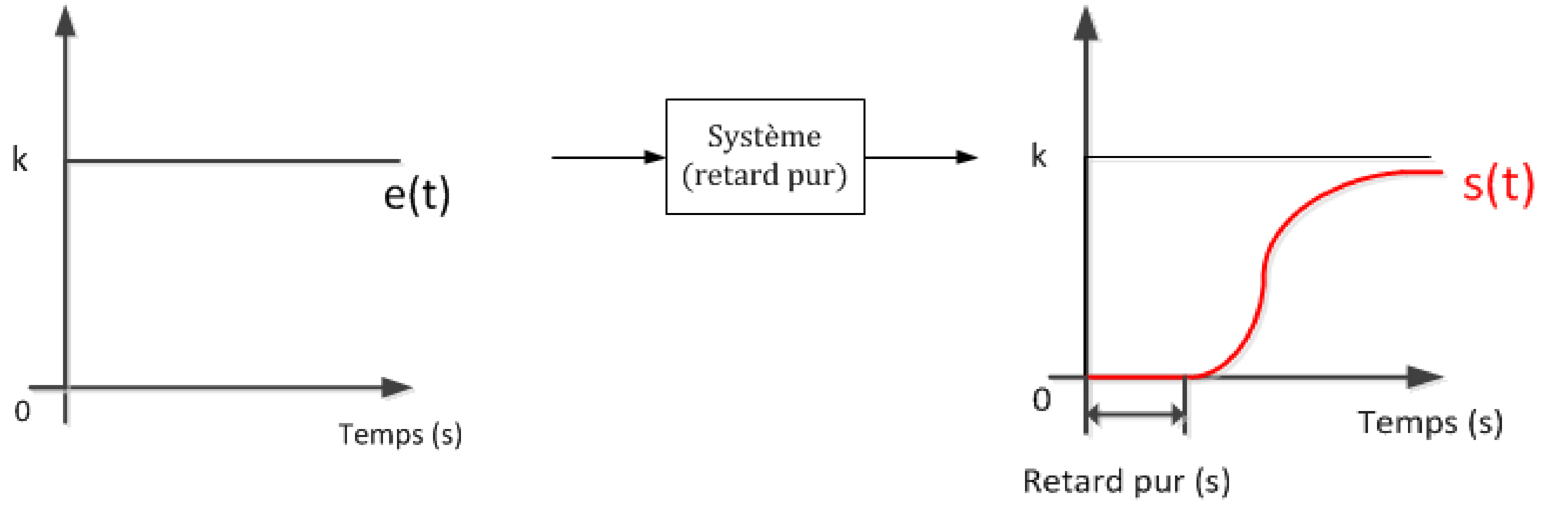
- Propriété n°3 :



$$G(\omega)=\frac{G_1(\omega)}{G_2(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega)=\varphi_{G_1}(\omega)-\varphi_{G_2}(\omega)$$

- Retard pur:



La fonction de transfert d'un retard pur est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = e^{-\tau . p}$$

- Retard pur:

La fonction de transfert d'un retard pur est :

$$G(p) = e^{-\tau.p}$$

La fonction de transfert d'un système muni d'un retard pur est :

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = e^{-\tau.p}$$

En fréquentiel, pour le calcul du gain et de la phase, nous écrivons l'expression du retard pur sous la forme :

$$G(j\omega) = e^{-\tau.j.\omega} = cos(\omega.\tau) - j.sin(\omega.\tau)$$

Nous en déduisons :

- le module :

$$G(\omega) = \sqrt{\left(cos(\omega.\tau)\right)^2 + \left(sin(\omega.\tau)\right)^2} = 1$$

- la phase :

$$\varphi(\omega) = -arctan\left(\frac{sin(\omega.\tau)}{cos(\omega.\tau)}\right) = -\omega.\tau$$

Les amplitudes se reproduisent sans distorsion tandis que <u>la phase croit proportionnellement à la fréquence</u>

- *Exercice C-8 : calculer le module et l'argument de :*

$$H_1(p)=\frac{1}{(1+p)^3} \qquad H_2(p)=\frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$

$$H_3(p)=\frac{K\,e^{-\tau p}}{1+Tp} \qquad H_4(p)=\frac{1-2p}{(1+p)^2(1+2p)}$$

- *Exercice C-8 : calculer le module et l'argument de :*

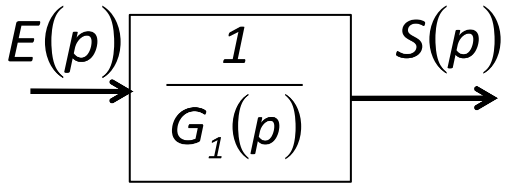
$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

Passage en fréquentielle

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^3}$$

Nous allons utiliser deux propriétés :

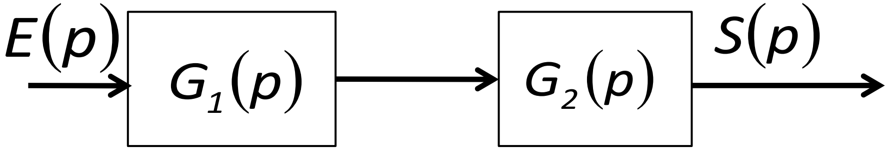
- Propriété n°1 :



$$G(\omega) = \frac{1}{G_1(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega) = -\varphi_{G_1}(\omega)$$

- Propriété n°2 :



$$G(\omega) = G_1(\omega).G_2(\omega)$$

$$\varphi_G(\omega) = \varphi_{G_1}(\omega) + \varphi_{G_2}(\omega)$$

- Nous allons calculer le module et l'argument de :

$$G1(j\omega) = 1 + j\omega$$

- Module :

$$G1(\omega) = \sqrt{1^2 + \omega^2} = \sqrt{1 + \omega^2}$$

- Argument :

$$\varphi_{G1}(\omega) = \arctan\frac{\omega}{1} = \arctan\omega$$

• *Nous allons utiliser la première propriété*

$$E(p) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{G_1(p)}} \longrightarrow S(p)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{G_1(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega) = -\varphi_{G_1}(\omega)$$

$$G(\omega) = \frac{1}{G1(\omega)} = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$$

$$\varphi_G(\omega) = -\varphi_{G1}(\omega) = -\arctan\omega$$

ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES

- *Nous allons utiliser la deuxième propriété*

$$E(p) \longrightarrow \boxed{G_1(p)} \longrightarrow \boxed{G_2(p)} \longrightarrow S(p)$$

$$G(\omega) = G_1(\omega).G_2(\omega)$$

$$\varphi_G(\omega) = \varphi_{G_1}(\omega) + \varphi_{G_2}(\omega)$$

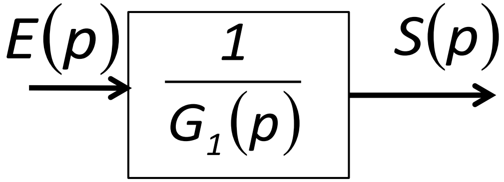
$$\mathrm{H1}(\omega) = \mathrm{G}(\omega) * \mathrm{G}(\omega) * \mathrm{G}(\omega) = \frac{1}{\left(1+\omega^2\right)^{\frac{3}{2}}} = \left(1+\omega^2\right)^{-\frac{3}{2}}$$

$$\varphi_{H1}(\omega) = \varphi_G(\omega) + \varphi_G(\omega) + \varphi_G(\omega) = -3 * \arctan\omega$$

$$H_2(p) = \frac{1}{p(p+1)(p+2)}$$ Passage en fréquentielle $$H_2(j\omega) = \frac{1}{j\omega(j\omega+1)(j\omega+2)}$$

Nous allons utiliser deux propriétés :

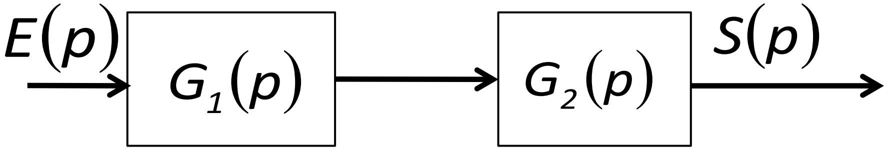
- Propriété n°1 :



$$G(\omega) = \frac{1}{G_1(\omega)}$$

$$\varphi_G(\omega) = -\varphi_{G_1}(\omega)$$

- Propriété n°2 :



$$G(\omega) = G_1(\omega).G_2(\omega)$$

$$\varphi_G(\omega) = \varphi_{G_1}(\omega) + \varphi_{G_2}(\omega)$$

$$G_1(j\omega) = \frac{1}{j\omega}$$

- Module : $G1(\omega) = \frac{1}{\sqrt{\omega^2}} = \frac{1}{\omega}$
- Argument : $\varphi_{G1}(\omega) = -\arctan(+\infty) = -\frac{\pi}{2}$

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 1)}$$

- Module : $G2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$
- Argument : $\varphi_{G2}(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{1} = -\arctan\omega$

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{(j\omega + 2)}$$

- Module : $G3(\omega) = \frac{1}{\sqrt{4+\omega^2}}$
- Argument : $\varphi_{G3}(\omega) = -\arctan\frac{\omega}{2}$

Nous en déduisons donc:

- **Module de H2:**

$$H1(\omega) = G1(\omega) * G2(\omega) * G3(\omega) = \frac{1}{\omega\sqrt{1+\omega^2}\sqrt{4+\omega^2}}$$

- **Argument de H2:** $\varphi_{H1}(\omega) = \varphi_{G1}(\omega) + \varphi_{G2}(\omega) + \varphi_{G3}(\omega) = -\frac{\pi}{2} -\arctan\omega - \arctan\frac{\omega}{2}$

$$H_3(p) = \frac{K e^{-\tau p}}{1 + Tp}$$

Passage en fréquentielle

$$H_3(j\omega) = \frac{K e^{-\tau j\omega}}{1 + Tj\omega}$$

$$G_1(j\omega) = K e^{-\tau j\omega} = K(cos(\omega.\tau) - j.sin(\omega.\tau))$$

- Module : $G1(\omega) = K\sqrt{(cos(\omega.\tau))^2 + (sin(\omega.\tau))^2} = \mathrm{K}$
- Argument : $\varphi 1(\omega) = -arctan\left(\frac{sin(\omega.\tau)}{cos(\omega.\tau)}\right) = -\omega.\tau$

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{(1 + Tj\omega)}$$

- Module : $G2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$
- Argument : $\varphi_{G2}(\omega) = -\arctan\frac{T\omega}{1} = -\arctan T\omega$

Nous en déduisons donc:

- **Module de H3:** $H3(\omega) = G1(\omega) * G2(\omega) = \frac{K}{\sqrt{1 + T^2\omega^2}}$
- **Argument de H3:** $\varphi_{H1}(\omega) = \varphi_{G1}(\omega) + \varphi_{G2}(\omega) = -\omega.\tau - \arctan T\omega$

ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES

$$H_4(p) = \frac{1-2p}{(1+p)^2(1+2p)}$$

Passage en fréquentielle

$$H_4(j\omega) = \frac{1-2j\omega}{(1+j\omega)^2(1+2j\omega)}$$

$$G_1(j\omega) = 1 - 2j\omega$$

- Module : $G1(\omega) = \sqrt{1+4\omega^2}$
- Argument : $\varphi_{G1}(\omega) = \arctan(-\frac{2\omega}{1}) = -\arctan(2\omega)$

$$G_2(j\omega) = \frac{1}{1+2j\omega}$$

- Module : $G2(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+4\omega^2}}$
- Argument : $\varphi_{G2}(\omega) = -\arctan(\frac{2\omega}{1}) = -\arctan(2\omega)$

$$G_3(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^2} = \frac{1}{(1+j\omega)} \frac{1}{(1+j\omega)}$$

$$G_{31}(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)}$$

- Module : $G31(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$
- Argument : $\varphi_{G31}(\omega) = -\arctan(\frac{\omega}{1}) = -\arctan(\omega)$

$$G_{32}(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)}$$

- Module : $G32(\omega) = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}}$
- Argument : $\varphi_{G32}(\omega) = -\arctan(\frac{\omega}{1}) = -\arctan(\omega)$

- Module G3 : $G3(\omega) = G31(\omega) * G32(\omega) = \frac{1}{1+\omega^2}$
- Argument G3: $\varphi_{G3}(\omega) = \varphi_{G31}(\omega) + \varphi_{G32}(\omega) = -2\arctan(\omega)$

Nous en déduisons donc:

- **Module de H4:**

$$H4(\omega) = G1(\omega) * G2(\omega) * G3(\omega) = \frac{\sqrt{1+4\omega^2}}{\sqrt{1+4\omega^2}(1+\omega^2)} = \frac{1}{(1+\omega^2)}$$

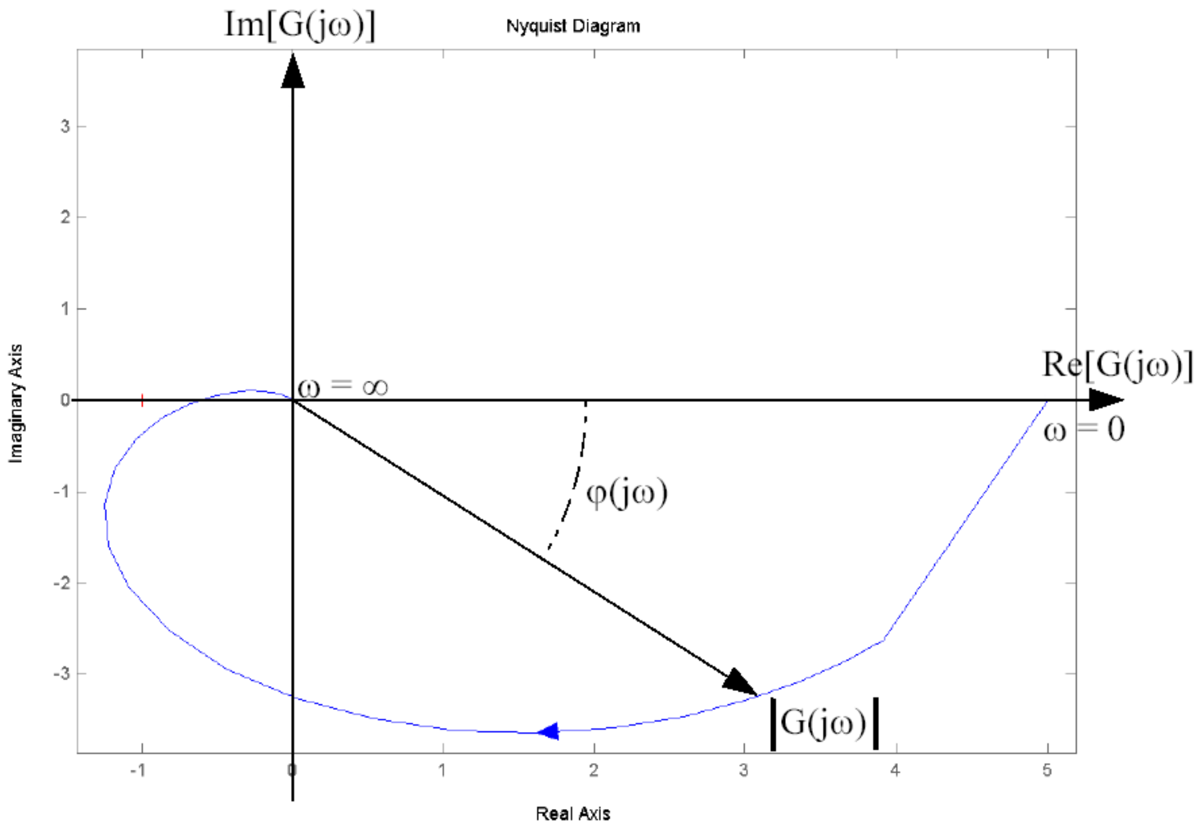
- **Argument de H4:**

$$\varphi_{H4}(\omega) = \varphi_{G1}(\omega) + \varphi_{G2}(\omega) + \varphi_{G3}(\omega)$$
$$= -2\arctan(2\omega) - 2\arctan(\omega)$$

- **Lieu de Nyquist :**

  C'est la représentation dans le plan complexe de l'extrémité du vecteur image $G(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à l'infini.

Le module est représenté par la distance entre l'origine et l'extrémité du vecteur image $G(j\omega)$ lorsque ω varie de 0 à $+\infty$. La phase est représentée par l'angle fait entre l'axe des abscisses et le vecteur image.



L'étude se fait en **boucle ouverte**

- Lieu de Nyquist :

  - *Exercice C-9 : représentez sur le lieu de Nyquist la fonction H1(p) calculée précédemment.*

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

Le tableau de valeurs est le suivant :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$							
$\varphi(\omega)$							

Calculatrice mise en RADIANS
PUIS
Calcul en DEGRES

- Lieu de Nyquist :

  - *Exercice C-9 : Représentez sur le lieu de Nyquist la fonction H1(p) calculée précédemment.*

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

Le tableau de valeurs est le suivant :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

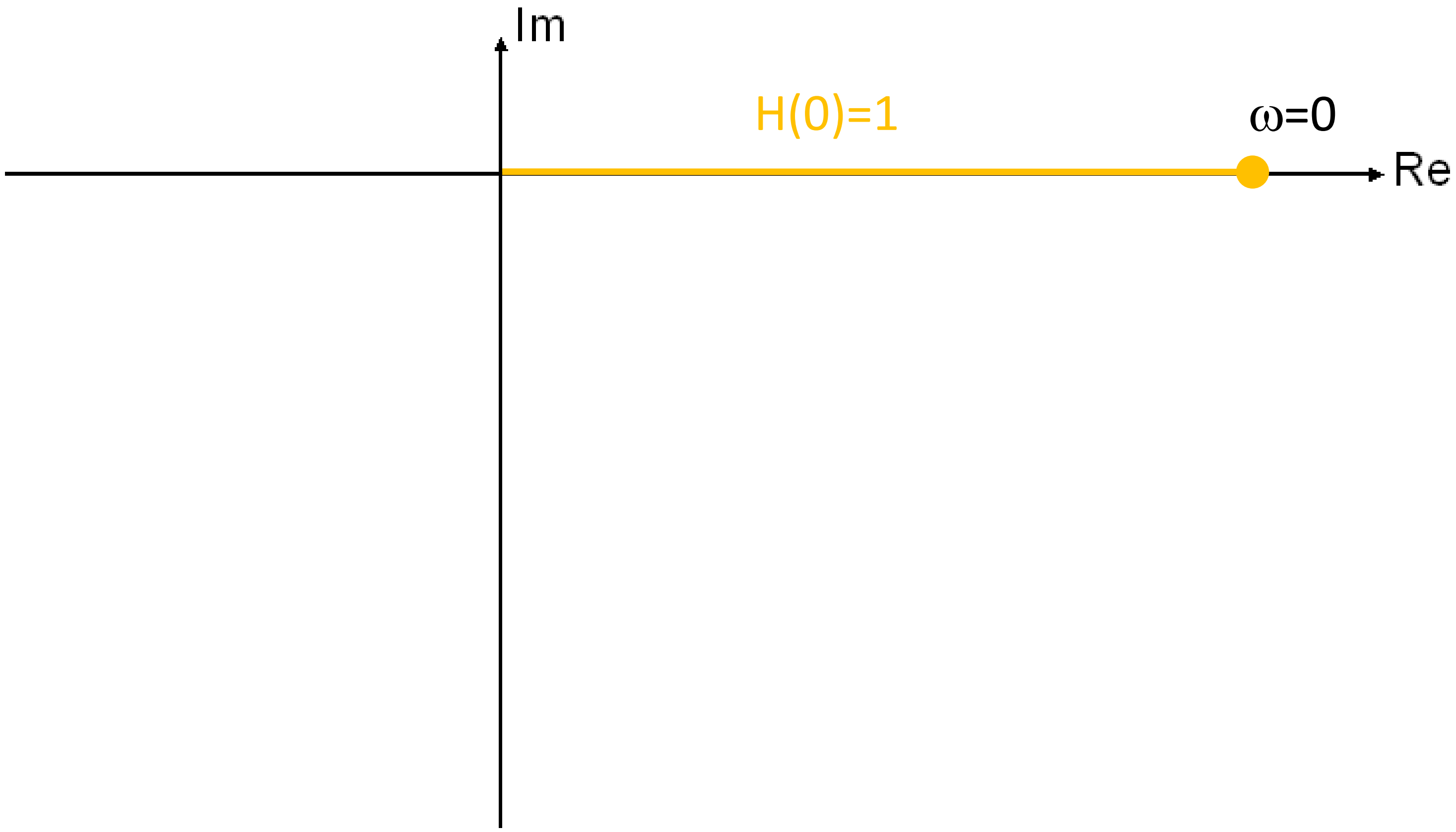
Calculatrice mise en RADIANS

PUIS

Calcul en DEGRES

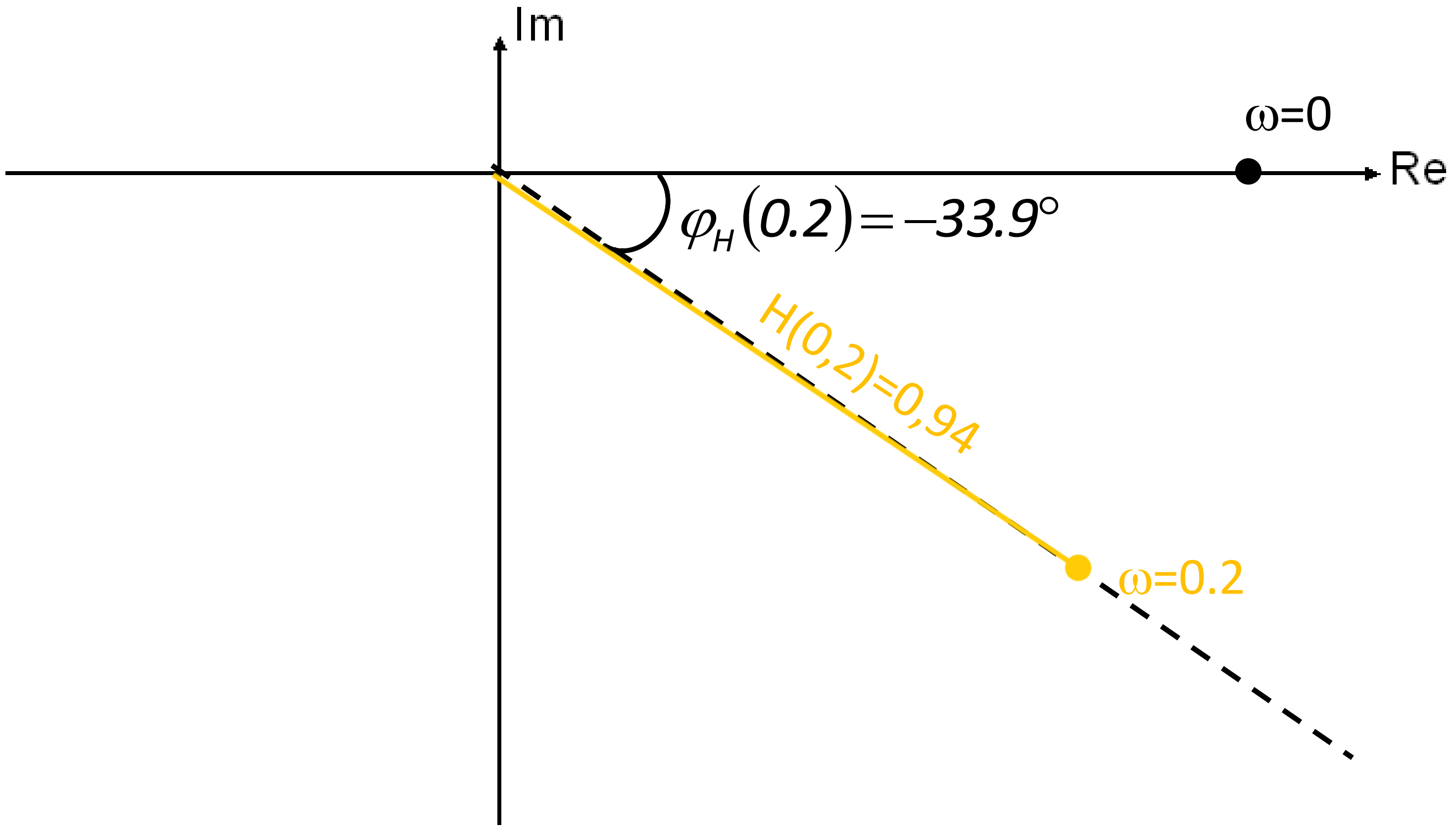
- Lieu de Nyquist :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



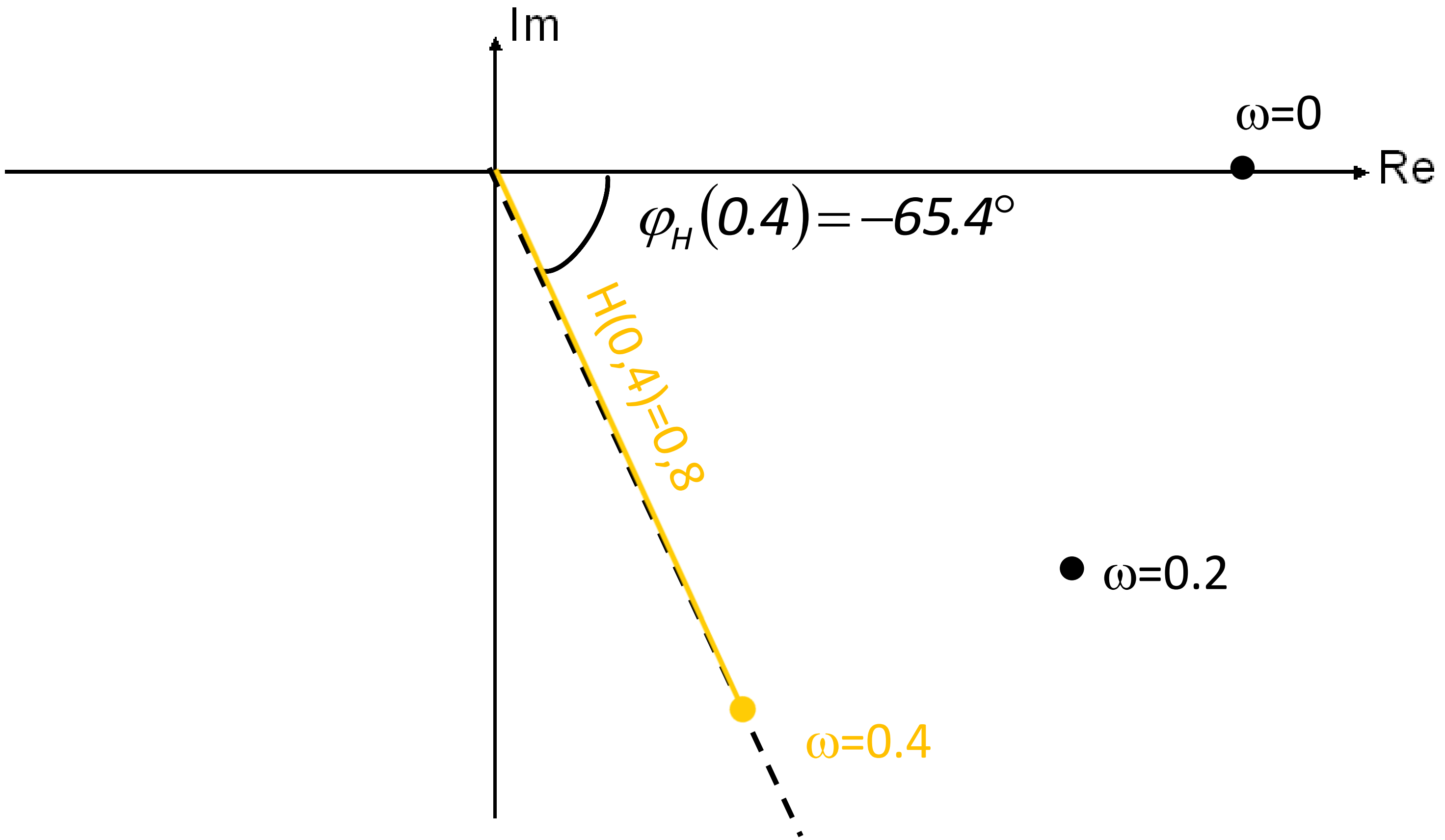
- Lieu de Nyquist :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



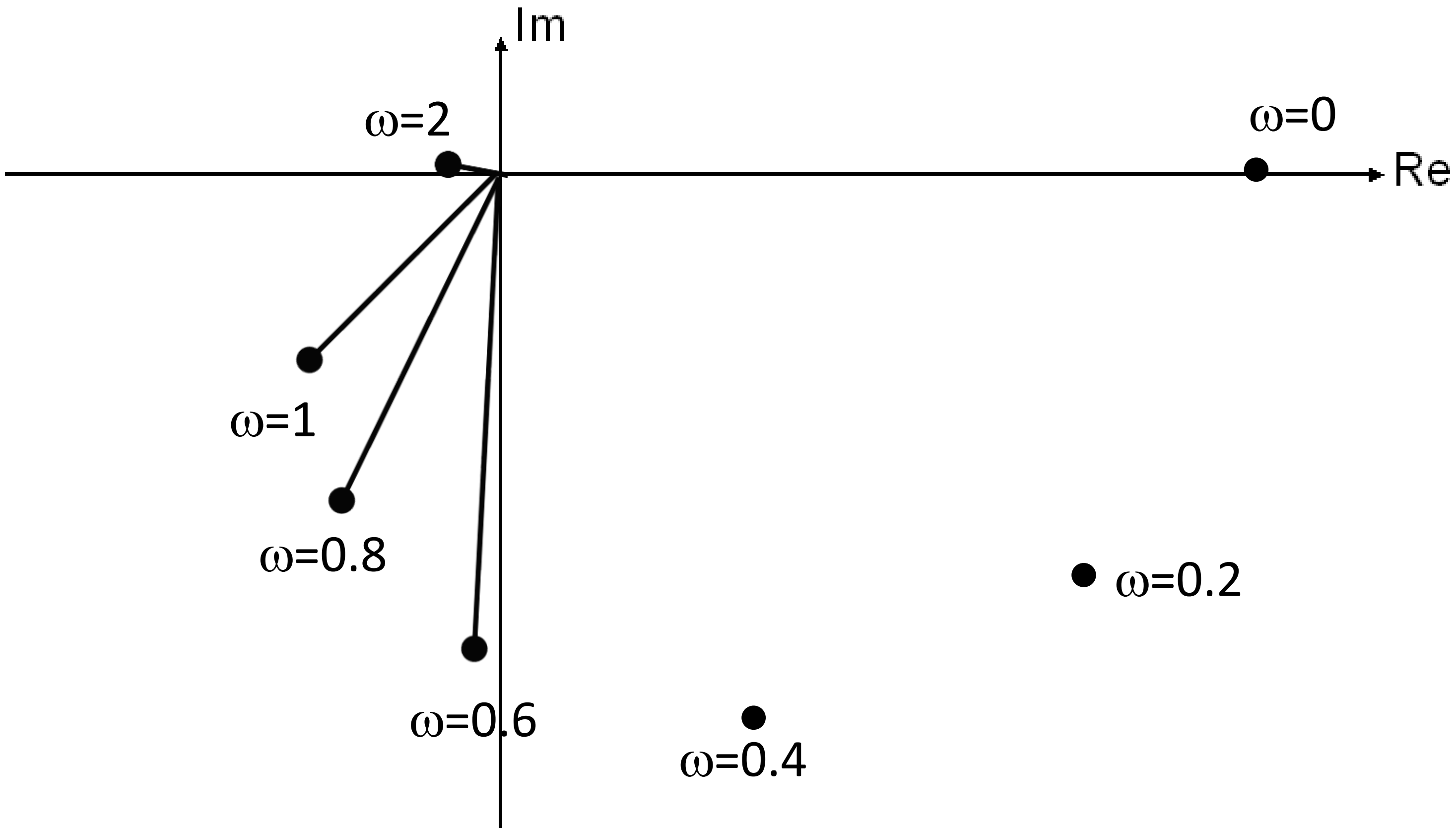
- Lieu de Nyquist :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



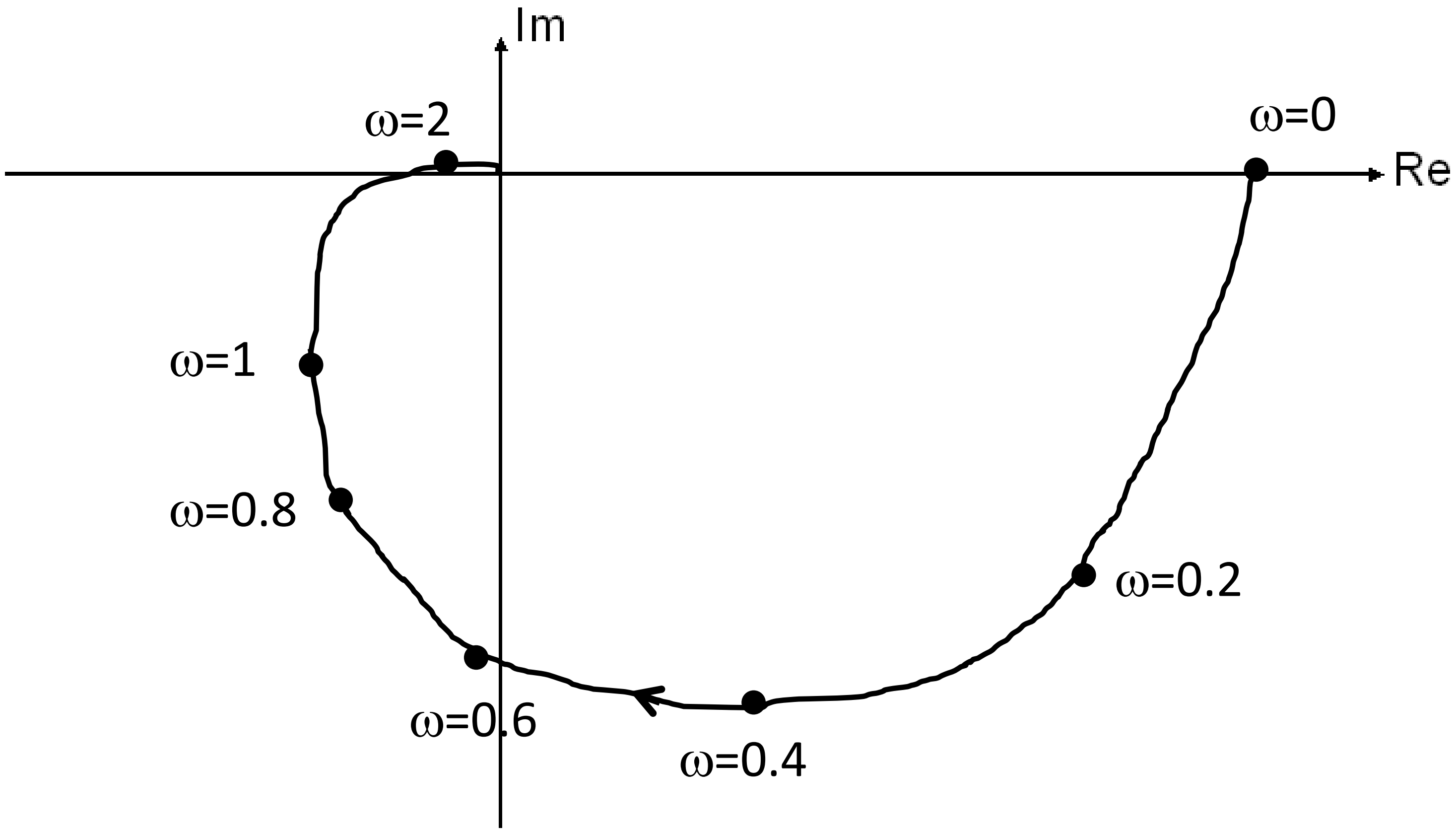
- Lieu de Nyquist :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190



ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

- Lieu de Nyquist :



- Lieu de Nyquist :
  - Cas de systèmes à retard :

$$G(p)=\frac{e^{-\tau p}}{1+p}$$

$$|G(j\omega)| = \frac{1}{\sqrt{1+\omega^2}} \quad \text{et } \varphi_G(j\omega) = -\tau\omega - \arctan\omega$$

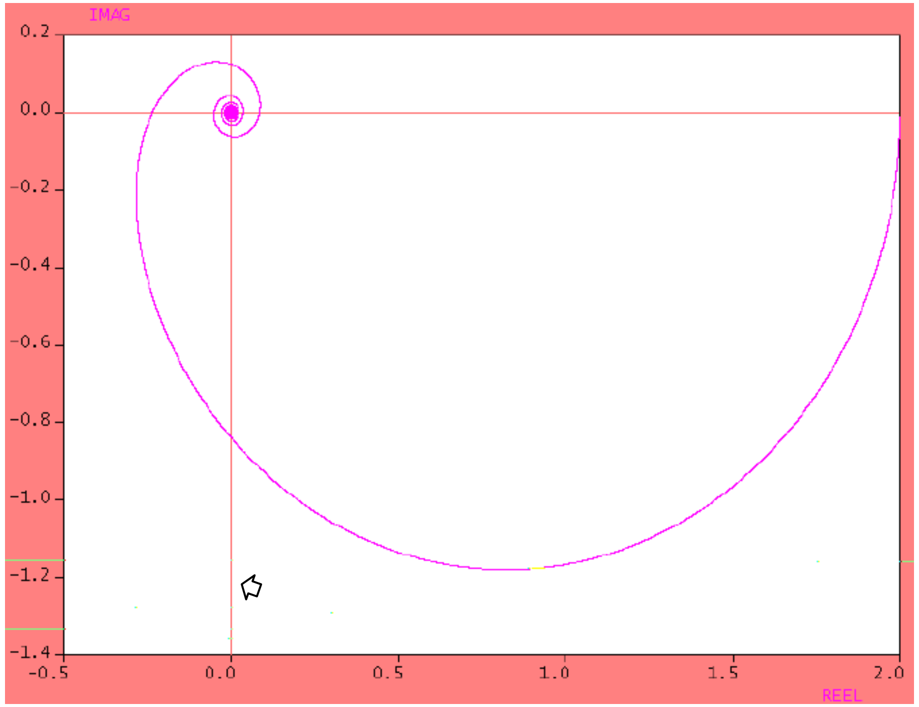


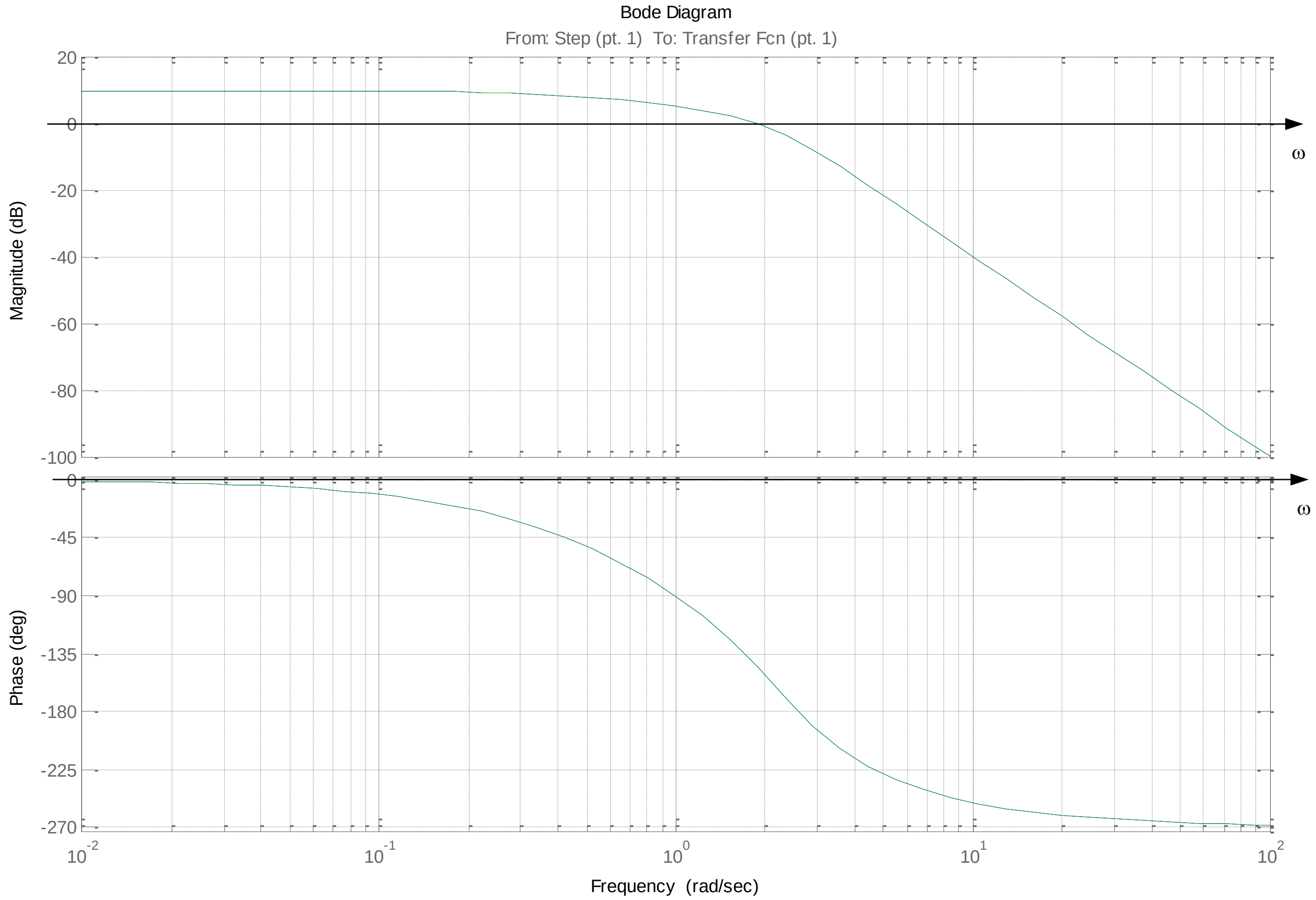
Diagramme de Nyquist d'un système avec retard pur

• Lieu de BODE :

Un lieu de Bode est la <u>représentation séparée du gain et de la phase</u> en fonction de la fréquence. La fréquence est représentée en échelle logarithmique et le gain est exprimé en dB.

$$|G(j\omega)|_{dB} = 20.logG(\omega)$$

$\varphi(\omega) = Arg\big(G(j\omega)\big)$ en degré



Lieu de Bode d'un système

- Lieu de BODE

$$\underline{H}(j\omega) = \frac{K}{1 + j\omega\tau}$$

$$H_{dB} = 20.log\left|\underline{H}(j\omega)\right| = 20.\log|K| - 20.\log\left|\sqrt{1+\omega^2\tau^2}\right|$$

$$ArgH = -\arctan(\omega\tau)$$

$\omega_c = 1/\tau$

- pour $\omega << \omega_c$: $\underline{H}(j\omega) \approx K$ soit $H_{dB} = 20.\log|K|$

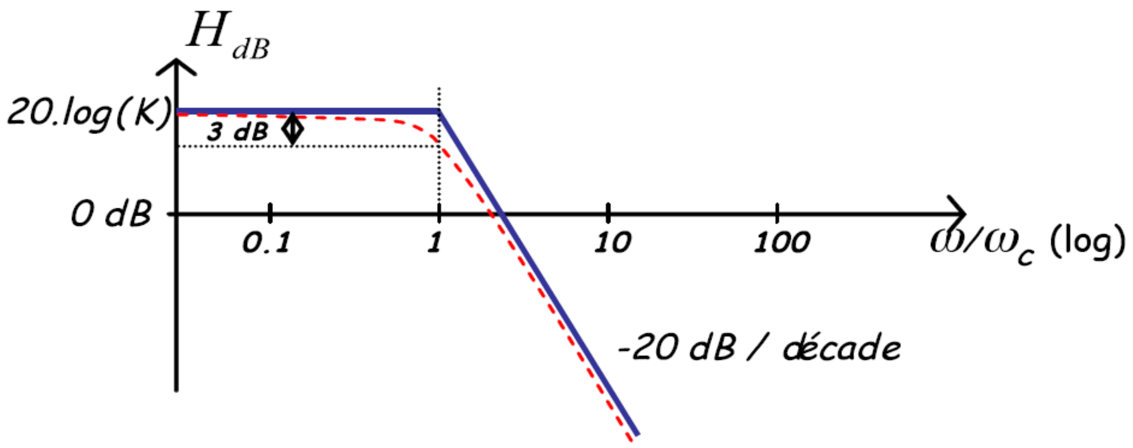
et $ArgH = 0$

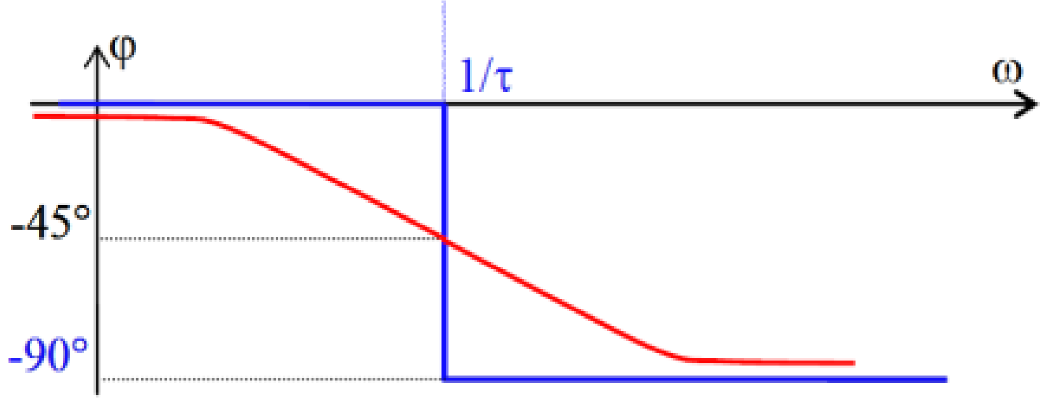
- pour $\omega >> \omega_c$: $\underline{H}(j\omega) \approx \dfrac{K}{j\omega/\omega_c}$ soit $H_{dB} = 20.\log|K.\omega_c| - 20.\log(\omega)$

et $ArgH = -\pi/2$

- pour $\omega = \omega_c$: $H_{dB} = 20.\log|K| - 3$

$ArgH = -\pi/4$





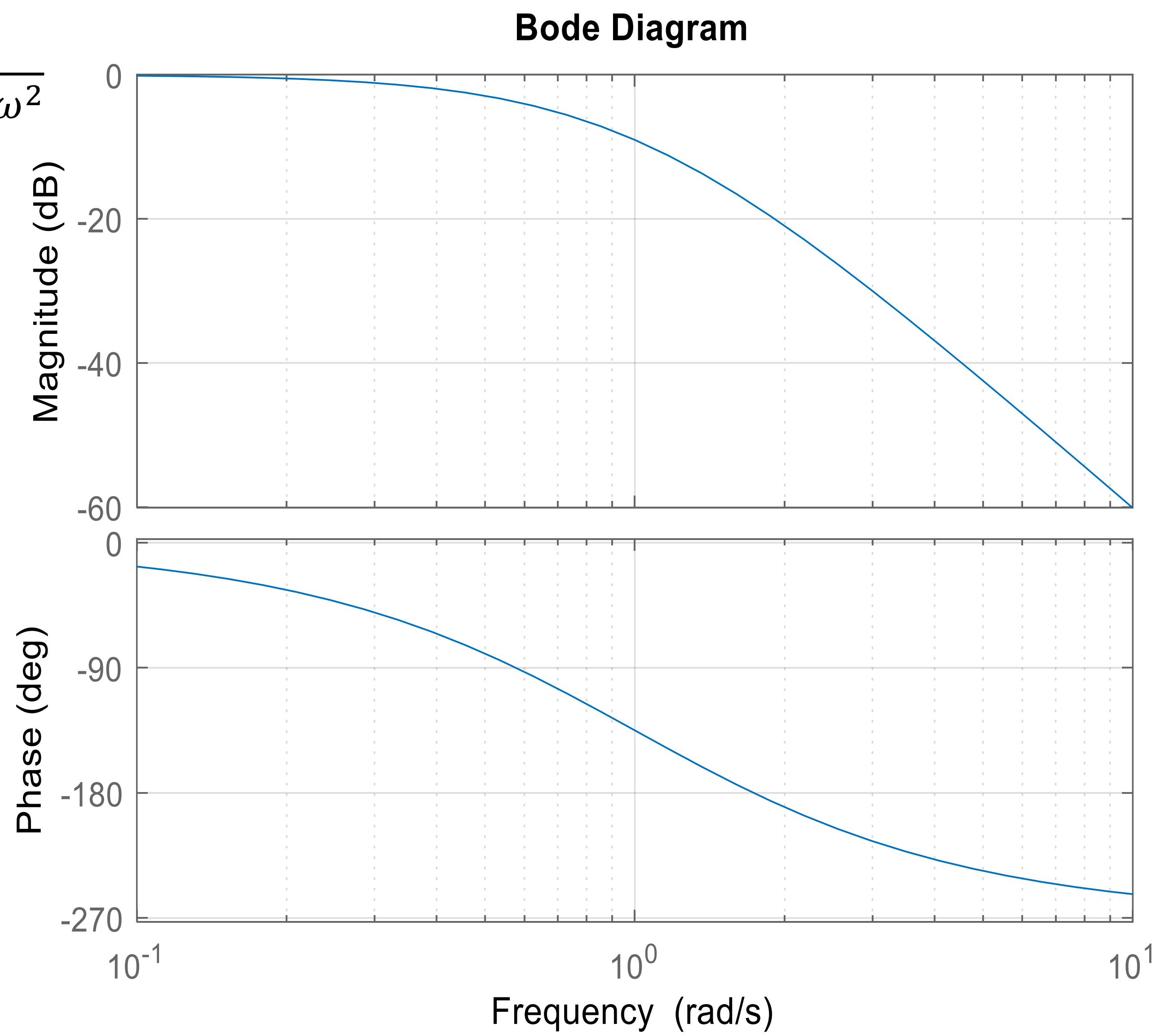
- Lieu de BODE

$$H_1(j\omega) = \frac{1}{(1+j\omega)^3} \quad \left\{ \begin{array}{l} H1(\omega) = -60\log(\sqrt{1+\omega^2} \\ \varphi_{H1}(\omega) = -3 * \arctan\omega \end{array} \right.$$

$$\omega \longrightarrow 0 \quad \left\{ \begin{array}{l} H1(\omega) = 0 \\ \varphi_{H1}(\omega) = 0 \end{array} \right.$$

$$\omega = 1 \quad \left\{ \begin{array}{l} H1(\omega) = -9{,}03 \\ \varphi_{H1}(\omega) = -135\ deg \end{array} \right.$$

$$\omega \longrightarrow \infty \quad \left\{ \begin{array}{l} H1(\omega) = -60\log(\omega) \\ \varphi_{H1}(\omega) \longrightarrow -270\ deg \end{array} \right.$$



- Lieu de Black :

Il s’agit d’une représentation du **gain en dB** en fonction de la phase, sur le même lieu. Comme Nyquist, **ce lieu est gradué en** ω.

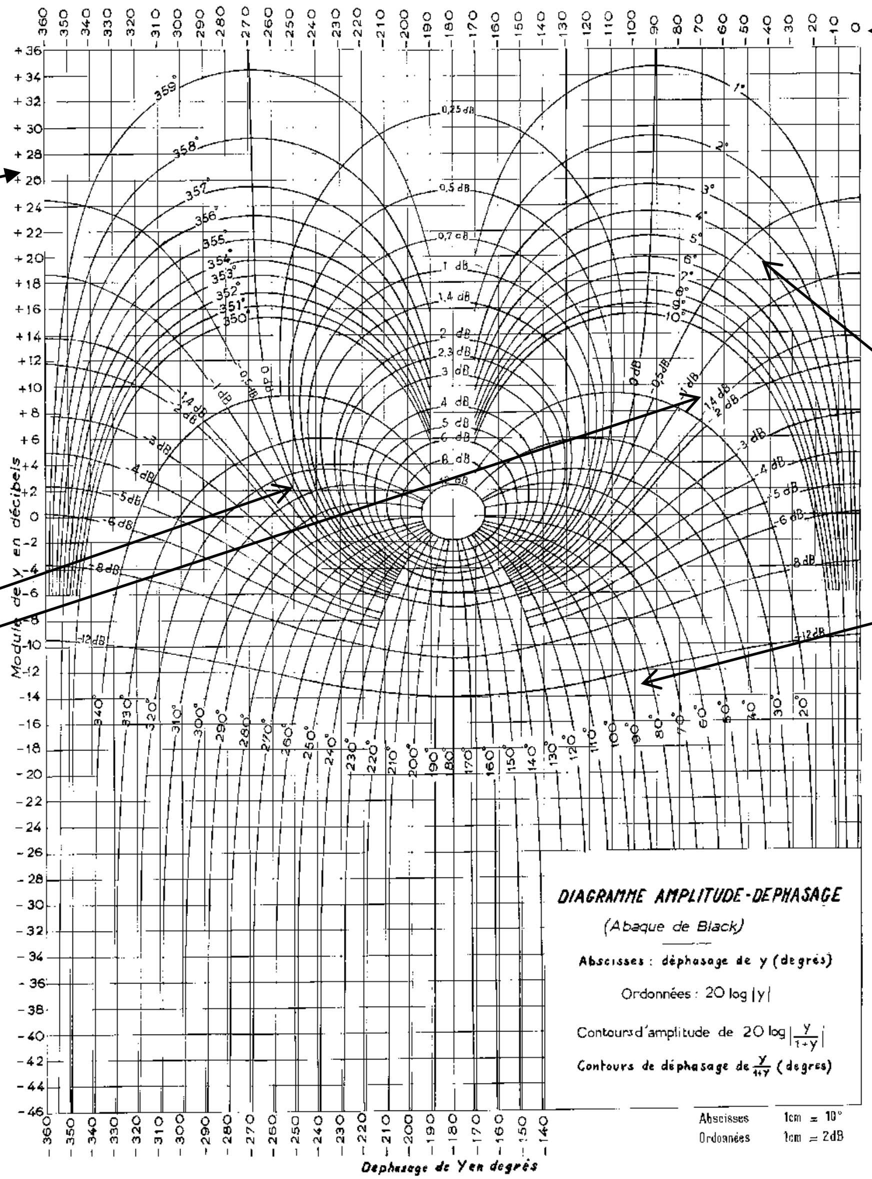
L’étude se fait en **boucle ouverte** pour le lieu de Black.

- Lieu de Black :

Un lieu de Black comporte les représentations des isophases et des isogains correspondants aux fonctions de transfert en boucle fermée. A partir de ces isophases et isogains, il est possible de déduire les caractéristiques en boucle fermée d'une fonction de transfert en boucle ouverte pour une valeur ω.

Phase : de 0° à -360°

Gain : de 36 dB à -46 dB

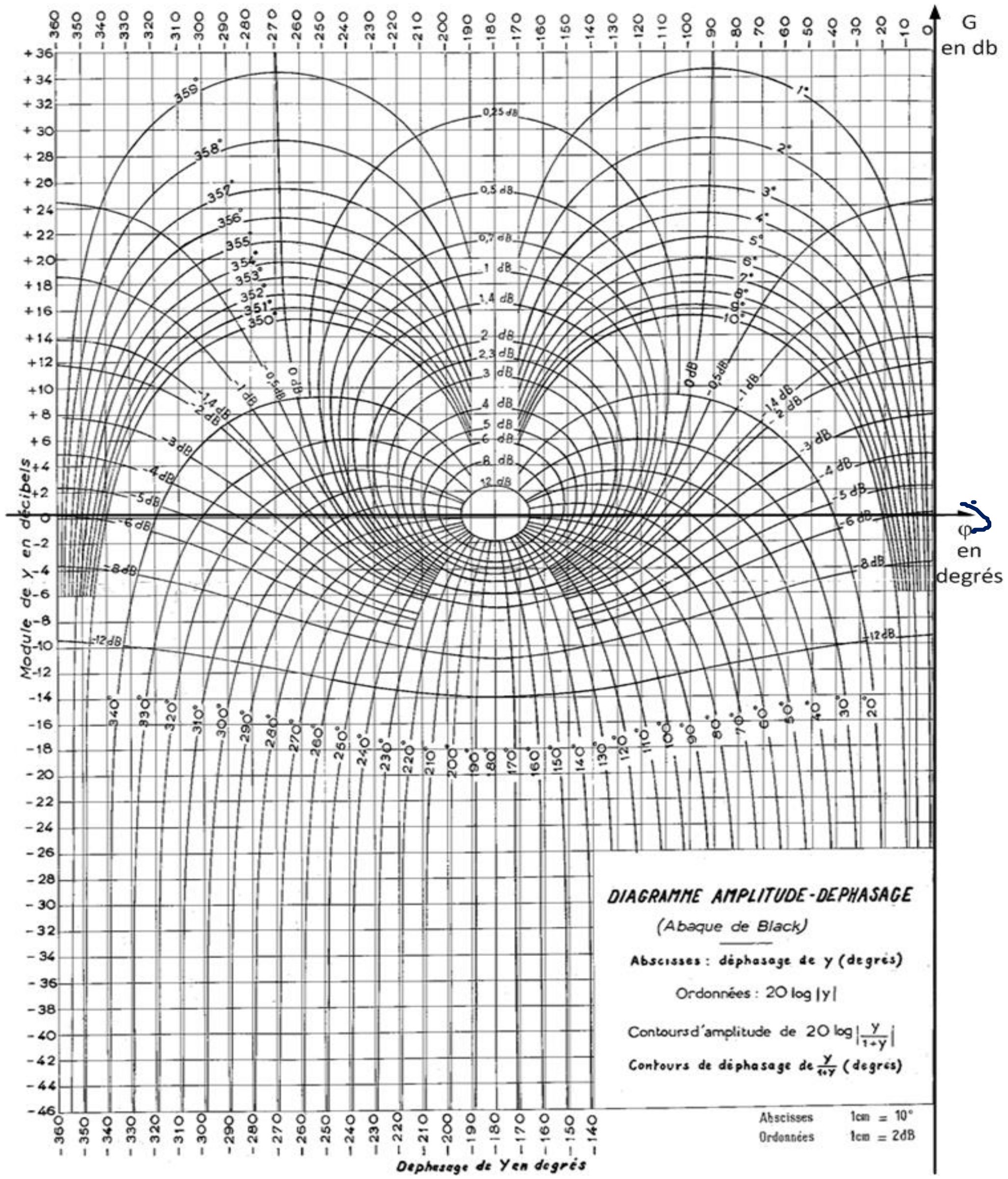


Courbes d'isogain

Courbes d'isophase

- Lieu de Black :

  Exemple :

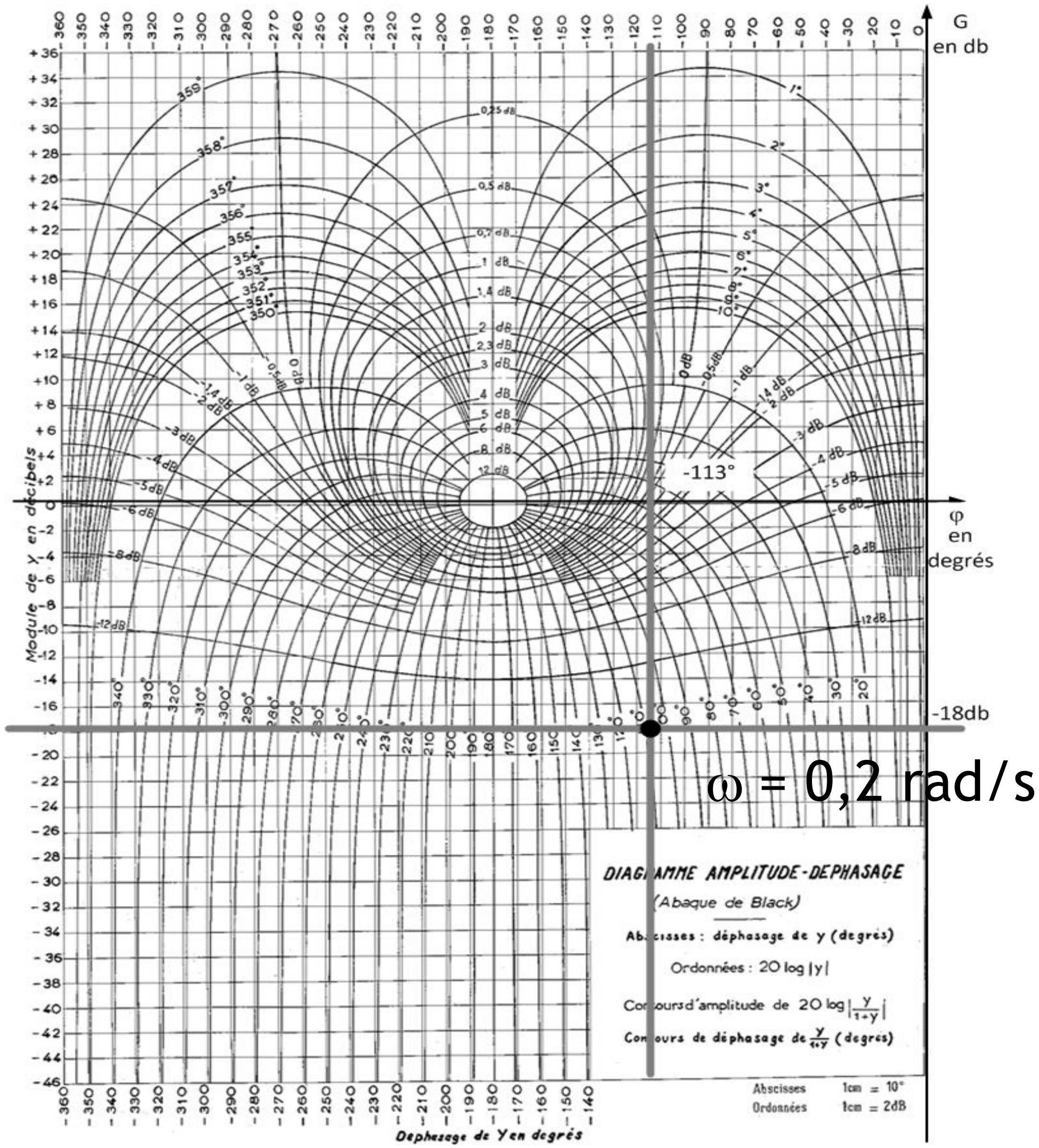


- Lieu de Black :

Exemple :

ω = 0,2 rad/s

Gain = -18 dB
Phase : -113°



- Lieu de Black :

  - *Exercice C-8* :

ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$	1	0.942	0.8	0.630	0.476	0.353	0.089
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

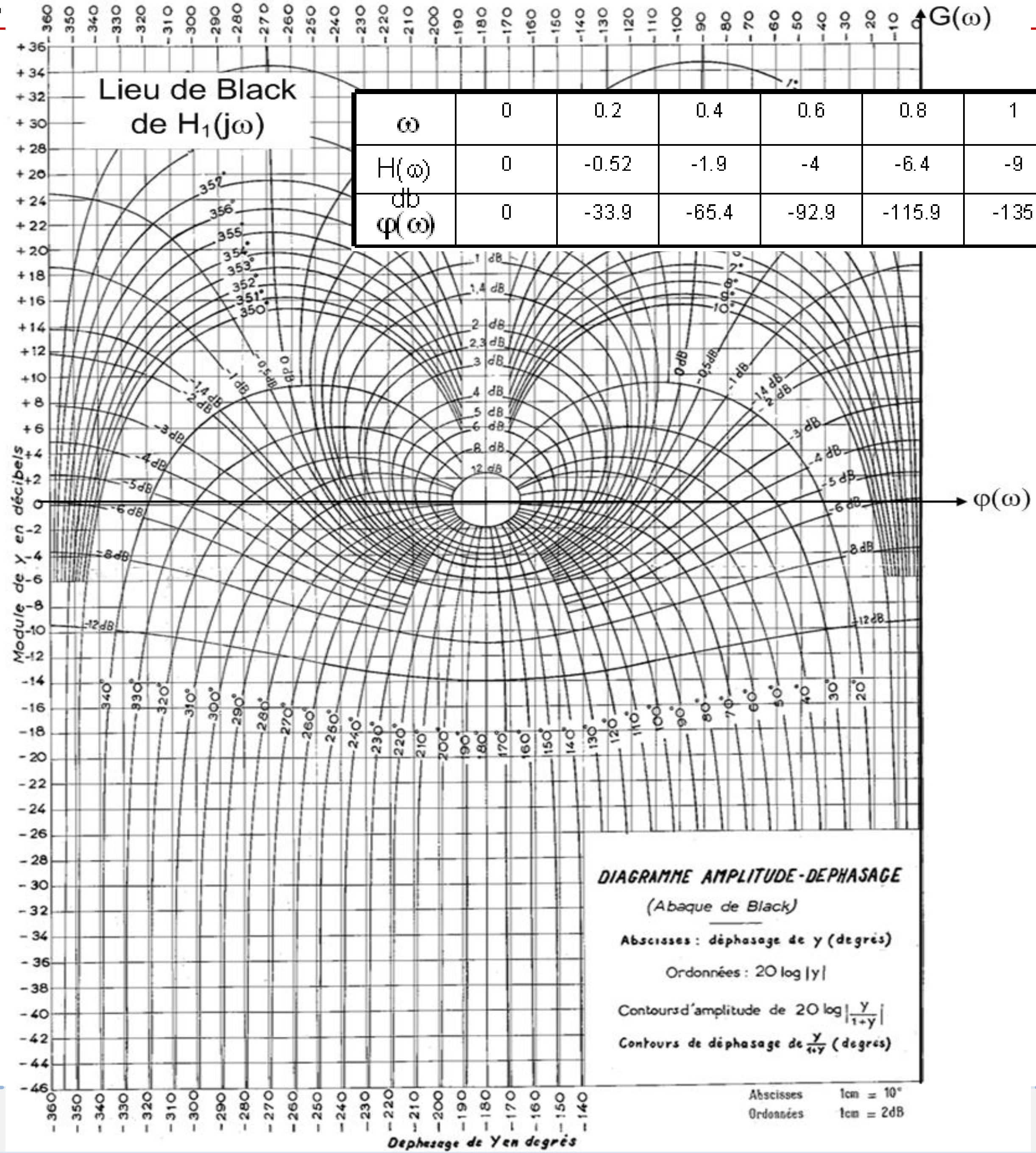
    - *Représentez sur le lieu de Black la fonction de transfert :*

$$H_1(p) = \frac{1}{(1+p)^3}$$

    - *Puis effectuez la représentation de :*

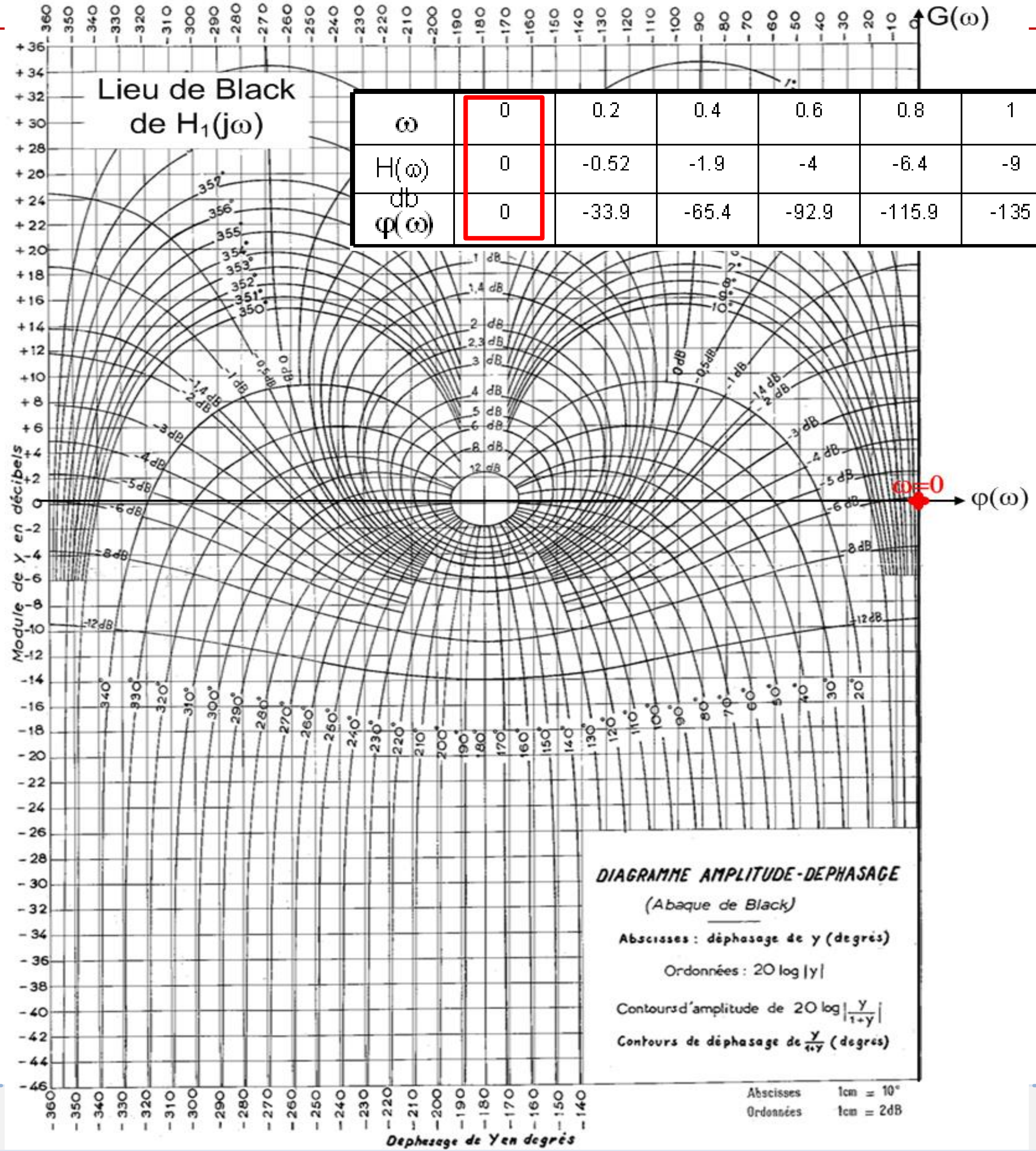
$$H_2(p) = \frac{5}{(1+p)^3}$$

- Lieu de Black :



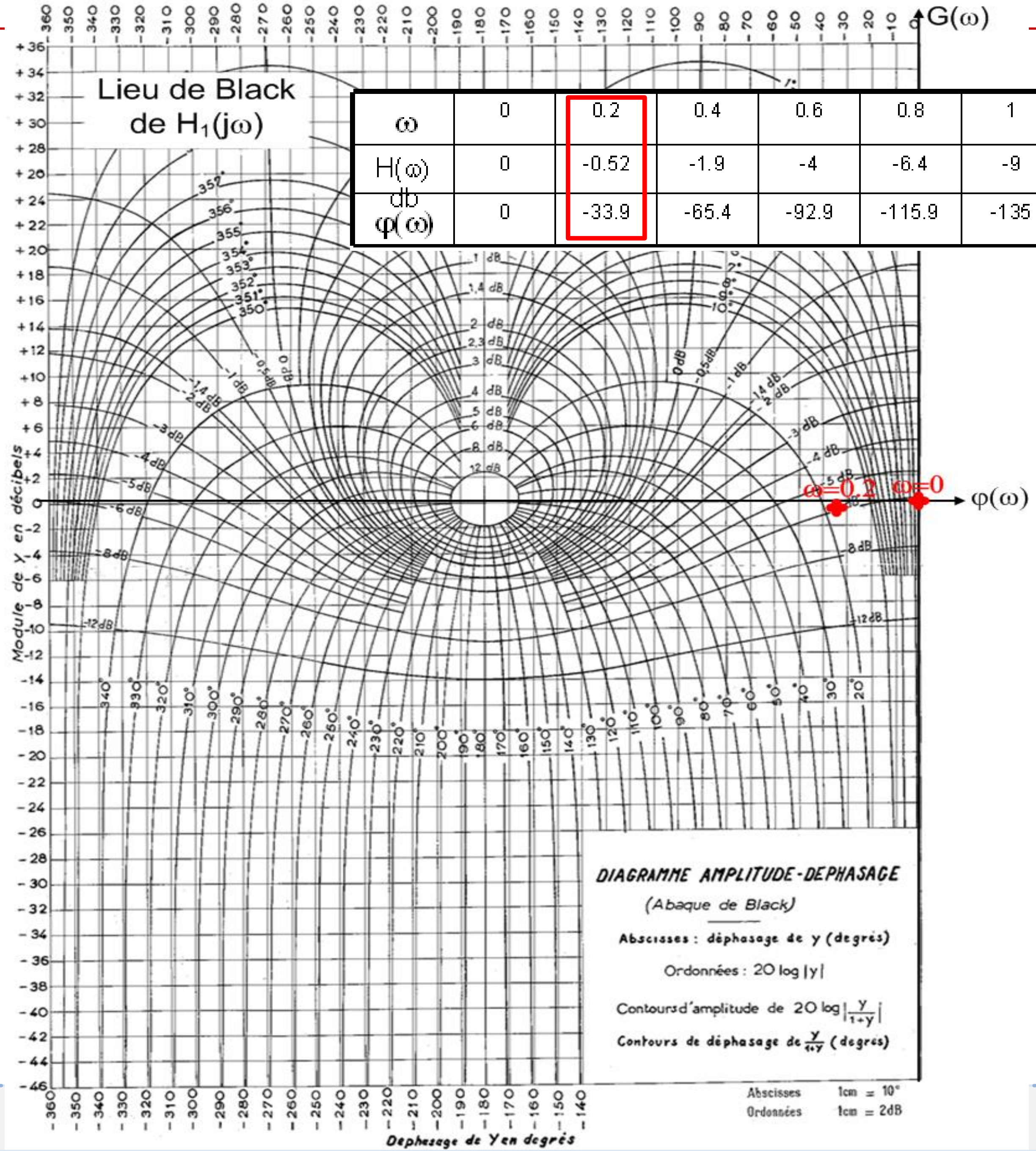
ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
H(ω) db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
φ(ω)	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

- Lieu de Black :



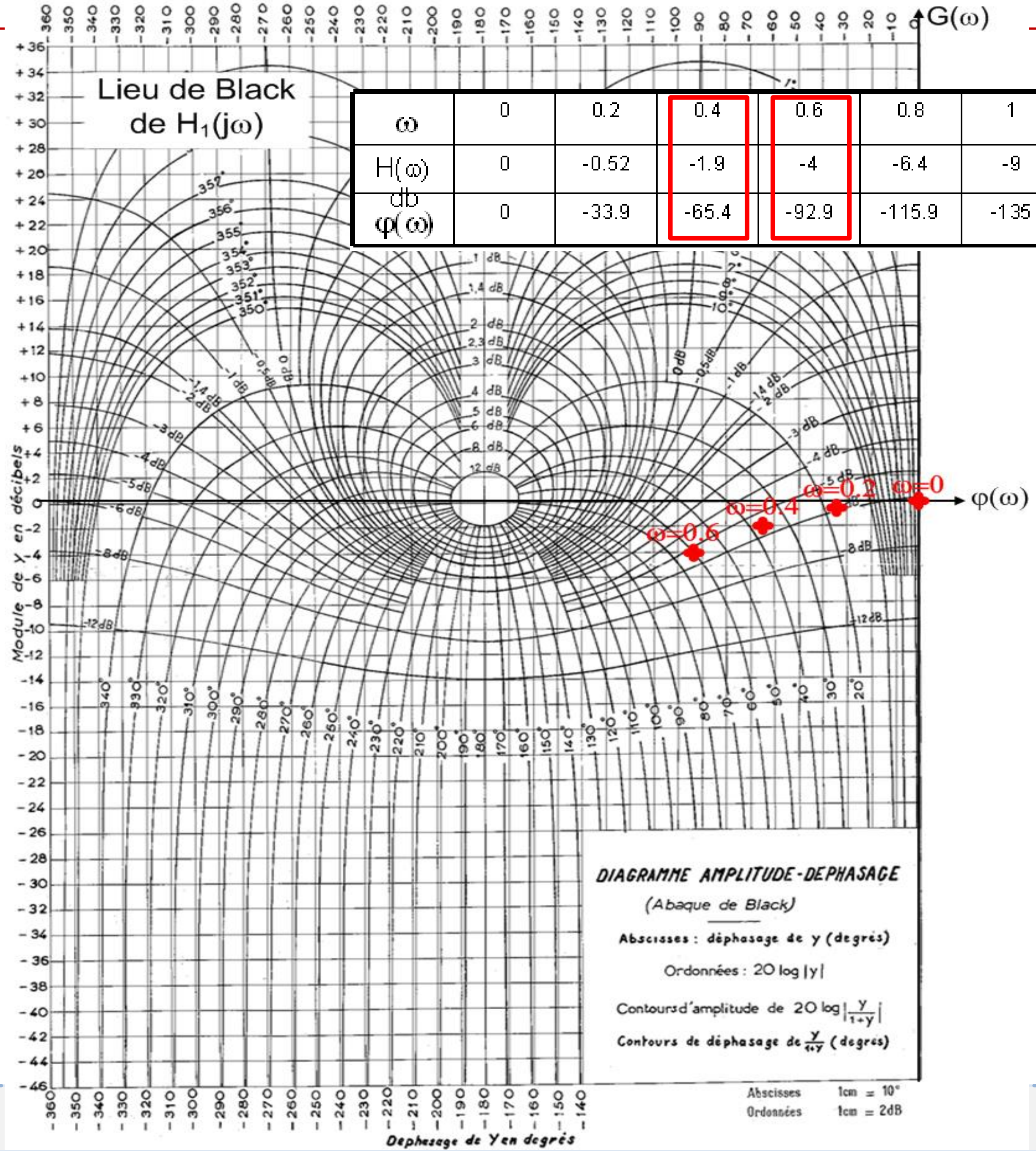
ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
H(ω) db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
φ(ω)	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

- Lieu de Black :



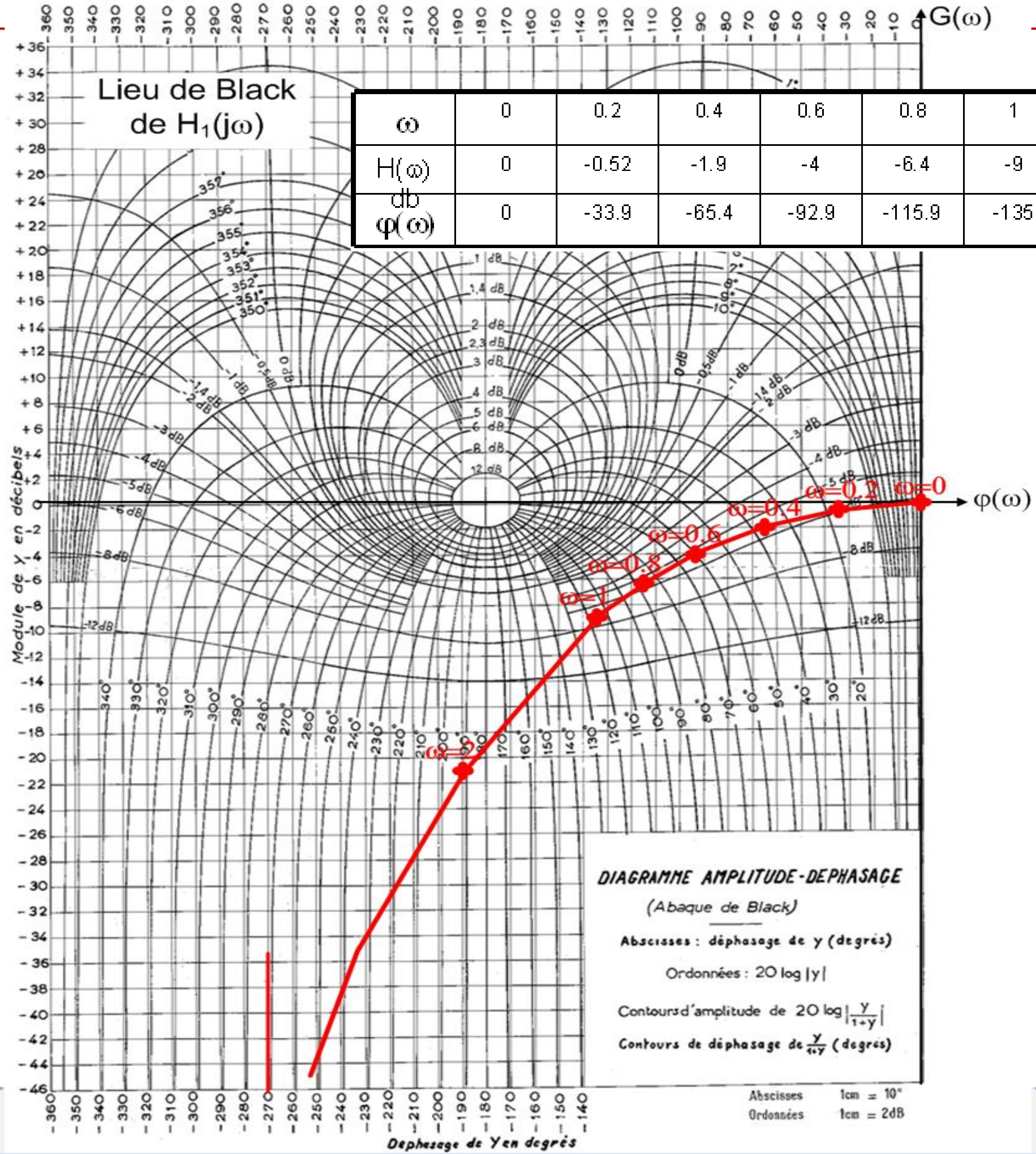
ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$ db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

- Lieu de Black :



ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
H(ω) db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
φ(ω)	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

- Lieu de Black :



ω	0	0.2	0.4	0.6	0.8	1	2
$H(\omega)$ db	0	-0.52	-1.9	-4	-6.4	-9	-21
$\varphi(\omega)$	0	-33.9	-65.4	-92.9	-115.9	-135	-190

- Lieu de Black :

  - *Puis effectuez la représentation de :*

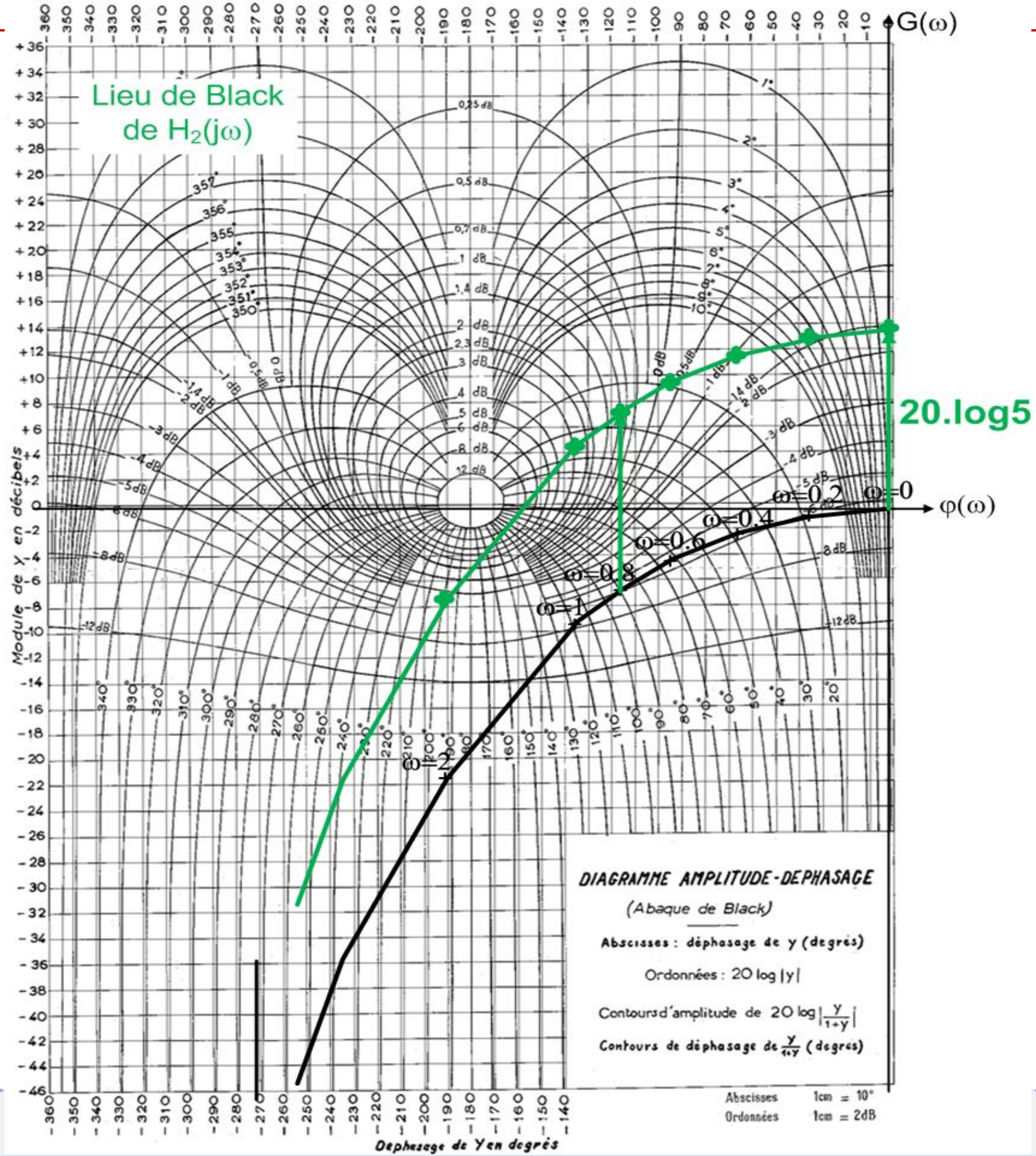
$$H_2(p) = \frac{5}{(1+p)^3} \quad \Longrightarrow \quad H_2(j\omega) = 5.H_1(j\omega)$$

Avec pour le module : $H_2(\omega) = 5.H_1(\omega)$

donc en db $H_2(\omega)_{db} = 20.\log H_2(\omega) = 20.\log 5 + 20\log H_1(\omega)$

Avec pour la phase : $\varphi_{H_2}(\omega) = \varphi_{H_1}(\omega)$

- Lieu de Black :



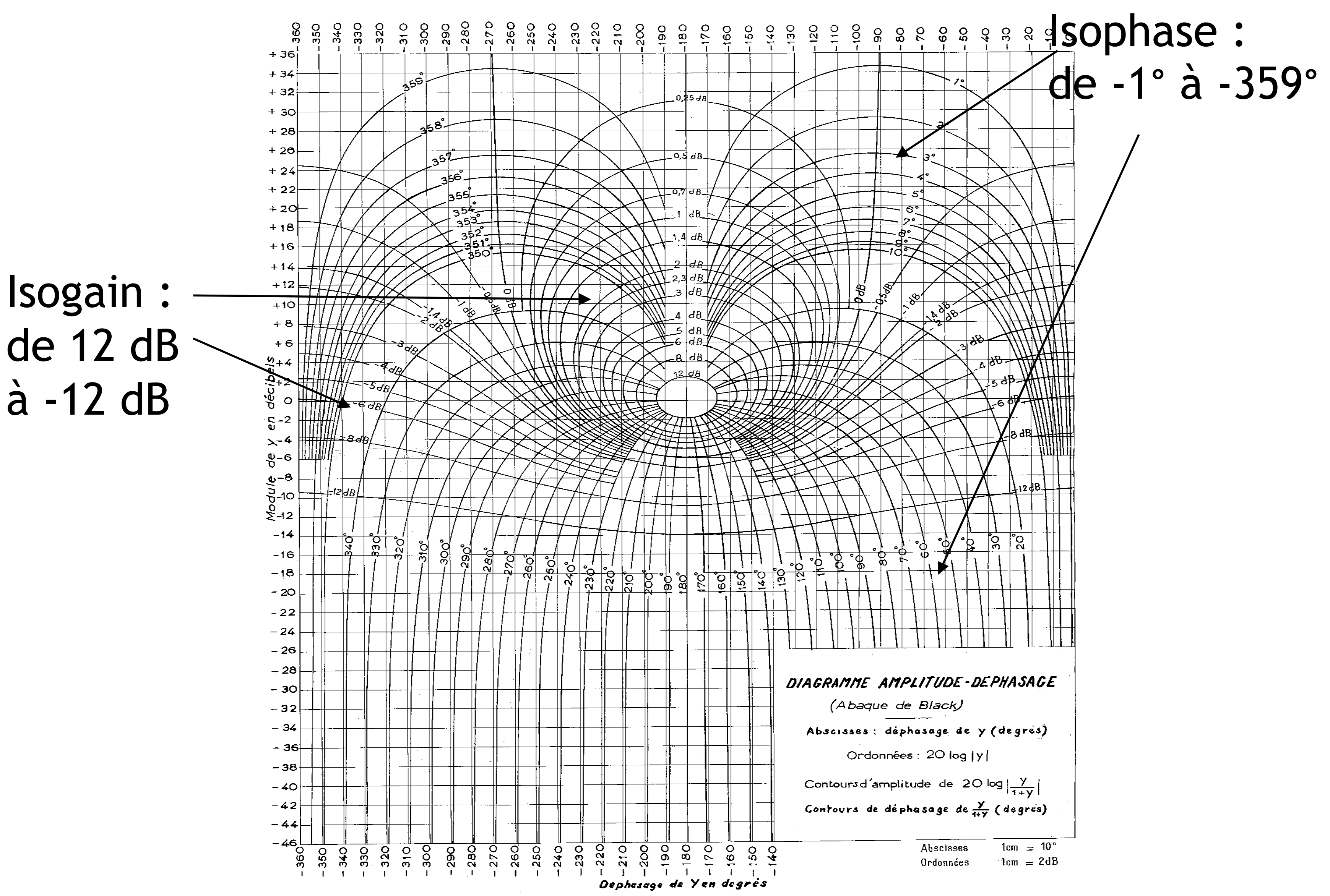
- Lieu de Black :

  - Lieu de Black – courbes isophases - isogains:

    Le lieu de black permet de connaître la représentation en BO du système en traçant le gain et la phase de ce système en BF.

ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES

- Lieu de Black :

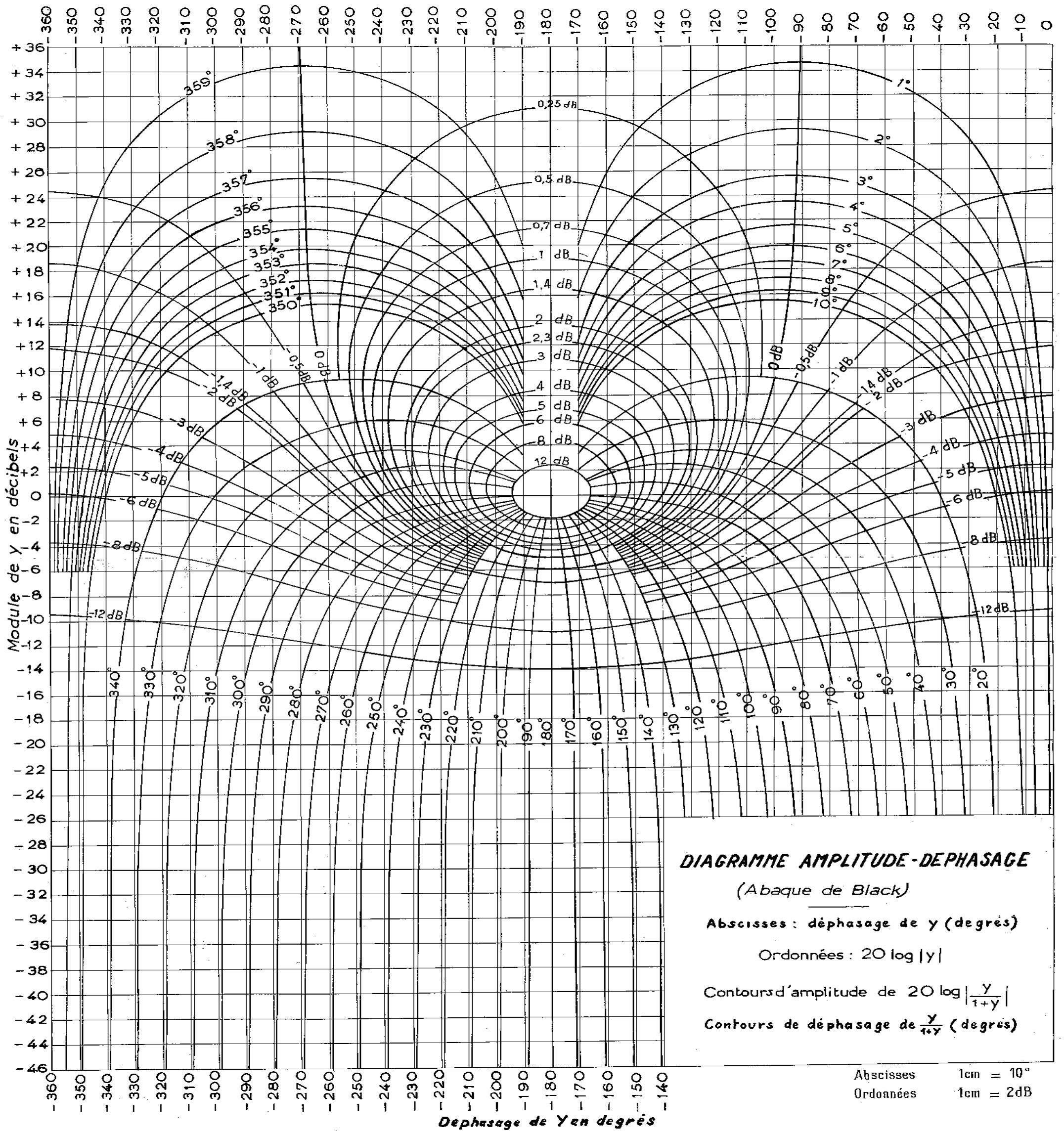


- Lieu de Black :

Exemple en boucle fermée :

ω = 0,5 rad/s

Gain = -2,9 dB
Phase : -30°

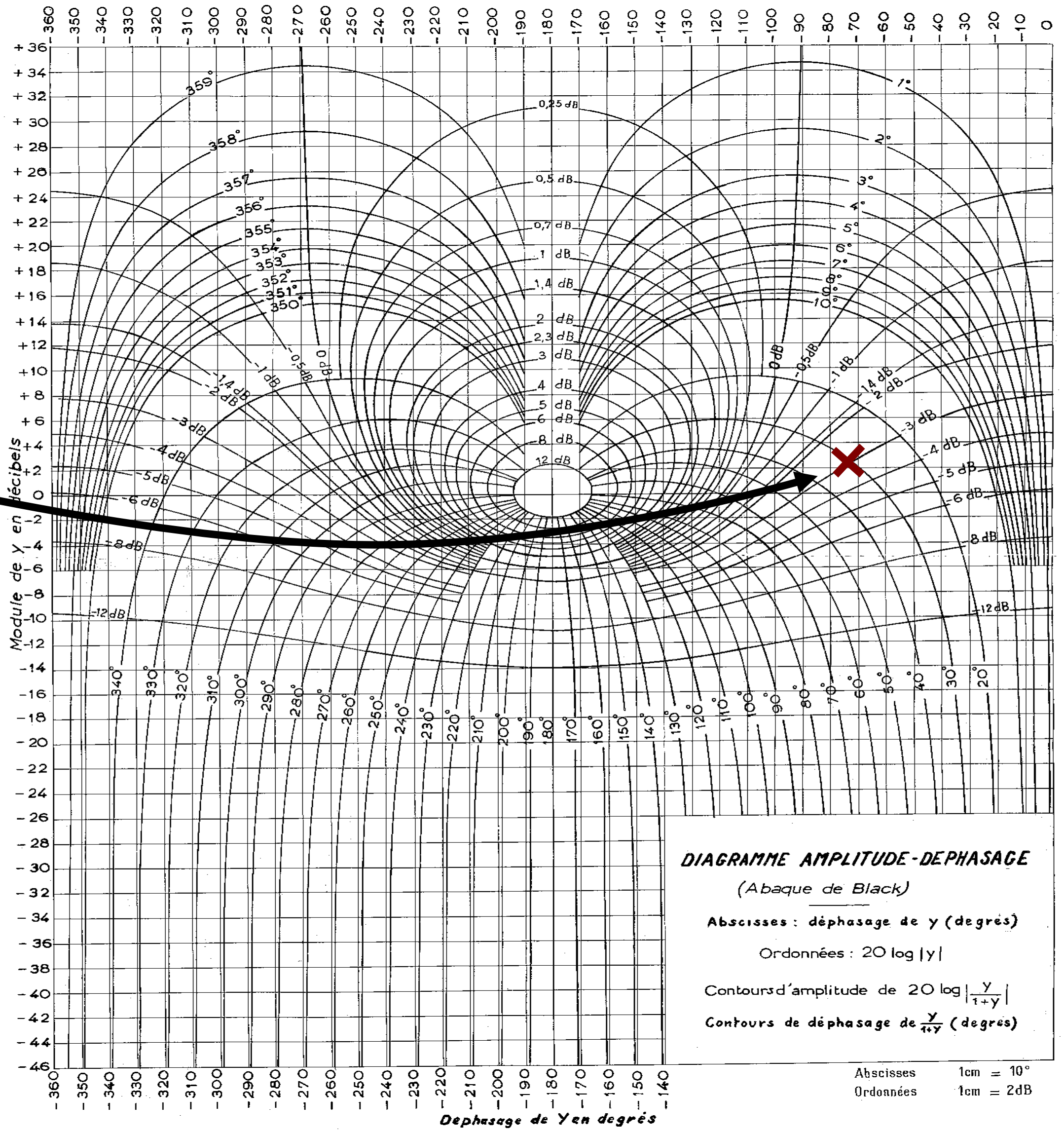


- Lieu de Black :

Exemple en boucle fermée :

ω = 0,5 rad/s

Gain = -2,9 dB
Phase : -30°



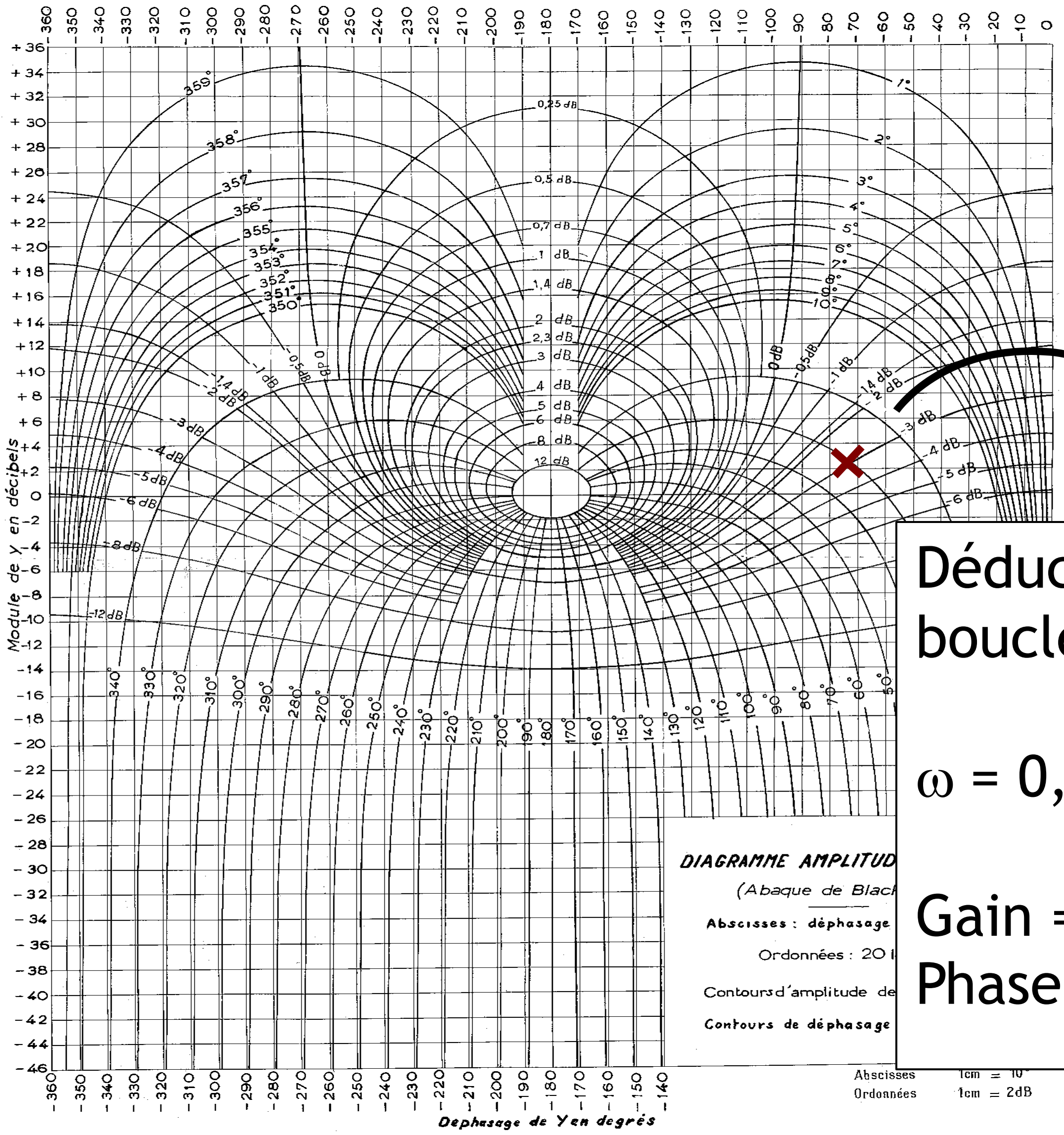
ANALYSE FRÉQUENTIELLE DES SYSTÈMES

- Lieu de Black :

Exemple en boucle fermée :

ω = 0,5 rad/s

Gain = -2,9 dB
Phase : -30°



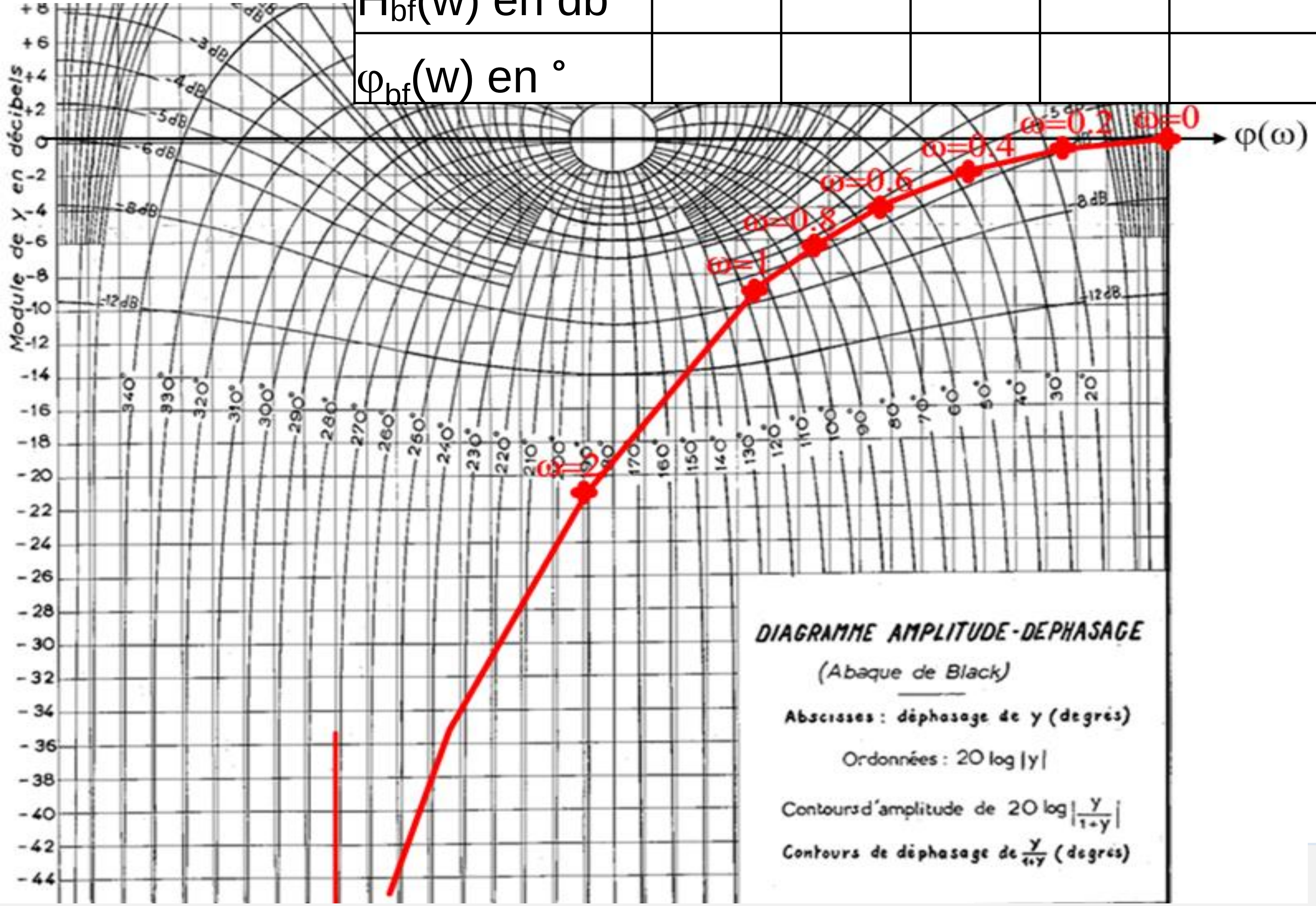
Déduction en boucle ouverte :

ω = 0,5 rad/s

Gain = +3 dB
Phase : -72°

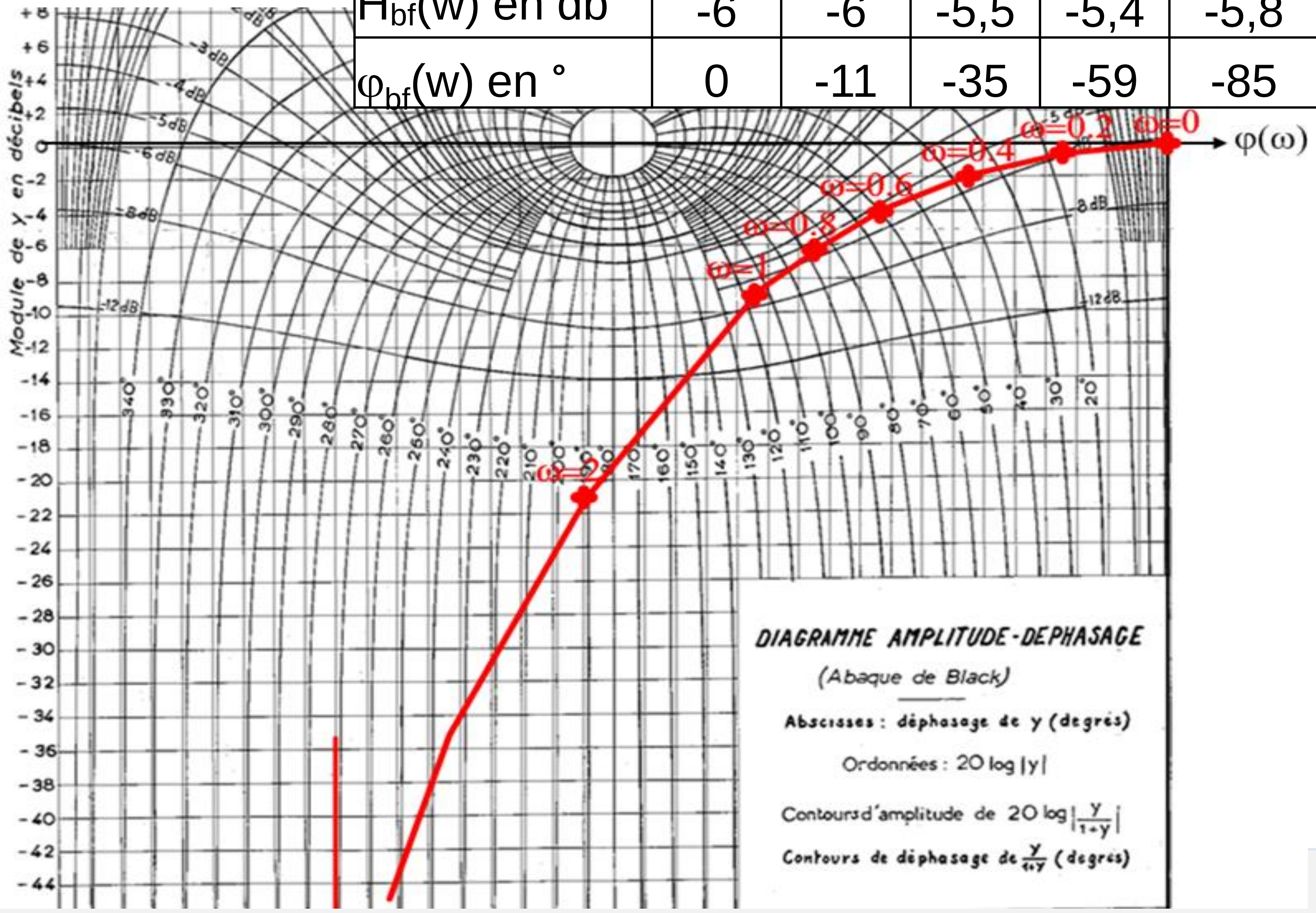
Trouver les points $H_{bf}(\omega)$

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
$H_{bo}(w)$ en db	0	-0,5	-1,9	-4,0	-6,4	-9,0	-21,0
$\varphi_{bo}(w)$ en °	0	-34	-65	-93	-116	-135	-190
$H_{bf}(w)$ en db							
$\varphi_{bf}(w)$ en °							



- Lieu de Black :

ω	0	0,2	0,4	0,6	0,8	1	2
$H_{bo}(w)$ en db	0	-0,5	-1,9	-4,0	-6,4	-9,0	-21,0
$\varphi_{bo}(w)$ en °	0	-34	-65	-93	-116	-135	-190
$H_{bf}(w)$ en db	-6	-6	-5,5	-5,4	-5,8	-7,5	<-12
$\varphi_{bf}(w)$ en °	0	-11	-35	-59	-85	-116	-191



Merci pour votre attention