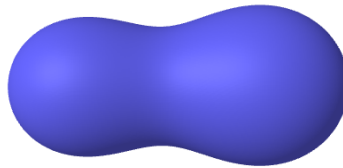


Nous allons dans cette séance explorer différentes méthodes permettant d'approximer numériquement le volume d'un solide $\mathcal{S} \subseteq \mathbb{R}^3$, *i.e.* l'intégrale triple

$$\text{vol}(\mathcal{S}) = \iiint_{\mathcal{S}} dV.$$

Pour fixer les idées, nous prendrons pour \mathcal{S} la région cacahuétoïdale définie par l'inégalité :

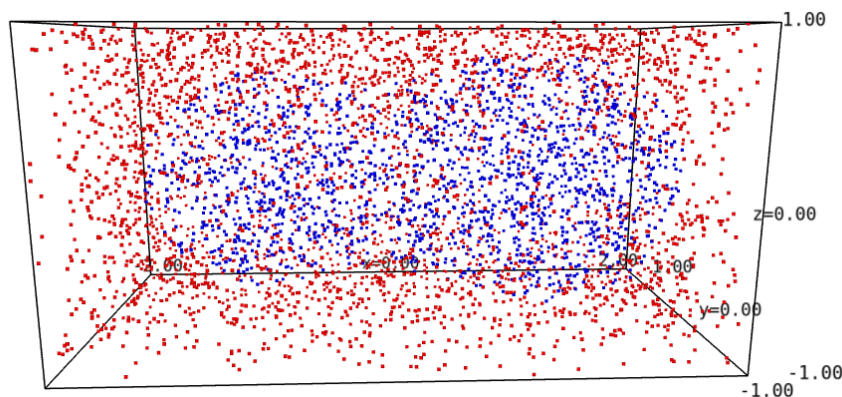
$$f(x, y, z) \geq 0 \quad \text{avec} \quad f(x, y, z) = 5x^2 + 2 - ((0,05 - x)^2 + y^2 + z^2 + 1)^2.$$



A) Monte-Carlo, pt. 1

En l'absence de quelque chose de mieux à faire, on peut toujours (comme dans la vie) jouer à des jeux de hasard, à savoir ici : tirer aléatoirement un certain nombre n de points à l'intérieur d'un pavé \mathcal{P} contenant \mathcal{S} et déterminer le nombre m de ces points tombant dans \mathcal{S} ; son volume peut alors vraisemblablement être approchée par la quantité

$$\frac{m}{n} \cdot \text{vol}(\mathcal{P}).$$



Implémenter numériquement cette méthode et porter sur un graphe les estimations obtenues en fonction de n pour observer comment elles évoluent. Quels sont les avantages et les inconvénients de cette méthode ?

B) Monte-Carlo, pt. 2

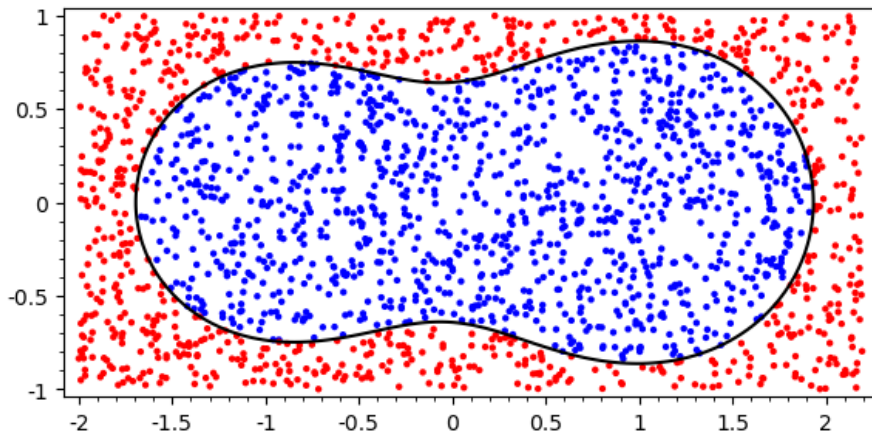
Avec Fubini, on peut calculer $\text{vol}(\mathcal{S})$ comme l'intégrale double

$$\iint_{\mathcal{D}} g \, dA,$$

où \mathcal{D} est l'intersection de \mathcal{S} avec le plan $z = 0$ et g est une fonction appropriée que vous préciserez. Par analogie avec la méthode précédente : une fois choisi un rectangle \mathcal{R} incluant \mathcal{D} , on génère n points P_i au hasard dans \mathcal{R} et on approxime $\text{vol}(\mathcal{S})$ par

$$\frac{\text{aire}(\mathcal{R})}{n} \sum_i g(P_i),$$

où la somme est prise sur les indices i pour lesquels $P_i \in \mathcal{D}$.



Comment cette méthode se compare-t-elle à la précédente ? Assurez-vous de la cohérence de vos réponses entre elles.

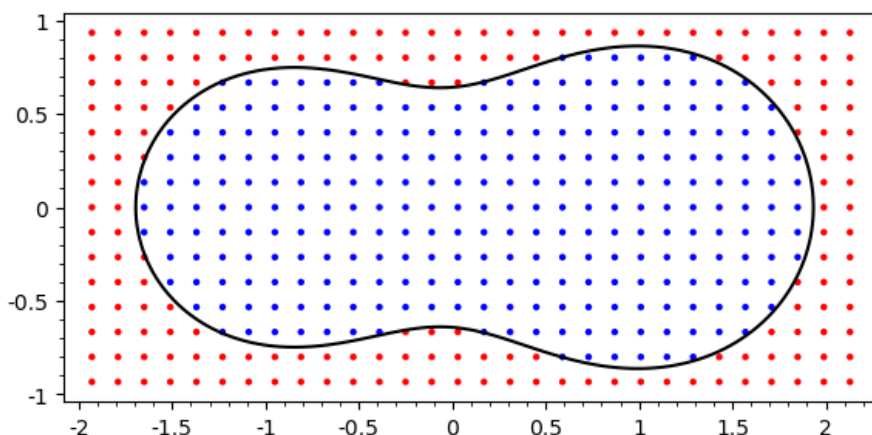
C) Maillage rectangulaire (sommes de Riemann)

Voici une façon de procéder un peu plus systématique : on divise \mathcal{R} en m parties égales selon l'axe des x , et en n parties égales selon l'axe des y , obtenant ainsi mn sous-rectangles \mathcal{R}_{ij} .

On peut alors approximer le volume de \mathcal{S} par

$$\frac{\text{aire}(\mathcal{R})}{mn} \sum_{i,j} g(P_{ij}),$$

où P_{ij} désigne le centre du rectangle \mathcal{R}_{ij} lorsqu'il est à l'intérieur de \mathcal{D} .



Implémenter cette méthode et en observer numériquement la convergence quand $m, n \rightarrow \infty$. (On pourra prendre par exemple $m = 2n$ pour simplifier.)