Ce sujet à tiroirs « à la française » est autant un exercice de compréhension que de rédaction. Les questions forment une progression de difficulté croissante et on s'attend pas à ce que vous ayez le temps de tout traiter: le but est plutôt de se rendre le plus loin possible avec un niveau de qualité élevée.

---

1. Un *pré-ordre* est une relation binaire, réflexive et transitive. Expliciter ce que cela signifie en termes d'ensembles et d'éléments.

   - Un pré-ordre sur un ensemble E est une relation binaire sur E : c'est-à-dire une partie $\mathcal{R}$ du produit $E \times E$. Par convention, pour $x, y \in E$, on note « $x \mathcal{R} y$ » pour dire « $(x, y) \in \mathcal{R}$. »
   - Réflexive : pour tout $x \in E$, on a $x \mathcal{R} x$.
   - Transitive : si $x \mathcal{R} y$ et $y \mathcal{R} z$, alors $x \mathcal{R} z$.

2. La relation $\mathcal{R} = \{(a, a), (a, b), (b, b), (b, c), (c, b), (c, c)\}$ est-elle un pré-ordre sur $X = \{a, b, c\}$?

   - Relation binaire : oui, c'est un ensemble de paires d'éléments de X.
   - Réflexive : oui, on a $a \mathcal{R} a$, $b \mathcal{R} b$ et $c \mathcal{R} c$.
   - Transitive : non, $a \mathcal{R} b$ et $b \mathcal{R} c$ mais $a \not\mathcal{R} c$.

3. Montrer que la relation de dominance « f est $O(g)$ en $+\infty$ » est un pré-ordre sur l'ensemble Y des fonctions de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{R}$.

   Pour $f, g \in Y$, notons $f \preceq g$ lorsque f est $O(g)$ en $+\infty$, c'est-à-dire quand il existe des constantes C et N pour lesquelles

   $$|f(n)| \leqslant C|g(n)| \qquad \text{pour tout } n \geqslant N.$$

   - Réflexivité : pour tout $f \in Y$ on a bien $f \preceq f$, il suffit de prendre $C = 1$ et $N = 0$.
   - Transitivité : si $f \preceq g$ et $g \preceq h$, alors il existe des constantes C_1, C_2, N_1, N_2 pour lesquelles

   $$\begin{cases} |f(n)| \leqslant C_1|g(n)| & \text{pour tout } n \geqslant N_1 \\ |g(n)| \leqslant C_2|h(n)| & \text{pour tout } n \geqslant N_2. \end{cases}$$

Il suit que pour tout $n \geqslant \max(N_1, N_2)$, on a

$$|f(n)| \leqslant C_1|g(n)| \leqslant C_1C_2|h(n)|,$$

on a donc bien $f \preceq h$.

4. Est-ce une relation d'équivalence ? (preuve ou un contre-exemple)

Non, on n'a pas la symétrie. Par exemple : $n \preceq n^2$ mais $n^2 \npreceq n$.

5. La dominance est-elle une relation d'ordre ? (idem)

Non : on n'a pas non plus l'antisymétrie. Par exemple : $1 + \sin n \preceq 1$ et $1 \preceq 1 + \sin n$ mais $1 + \sin n \neq 1$.

6. Soit $\vdash$ un pré-ordre sur un ensemble E et $\sim$ la relation sur E définie par

$$x \sim y \iff x \vdash y \text{ et } y \vdash x.$$

Montrer que $\sim$ est une relation d'équivalence.

- Réflexivité : pour tout $x \in E$, $x \sim x$ car $x \vdash x$ (et $x \vdash x$).
- Symétrie : si $x \sim y$, alors $x \vdash y$ et $y \vdash x$; puisque $y \vdash x$ et $x \vdash y$, alors $y \sim x$.
- Transitivité : si $x \sim y$ et $y \sim z$, alors

$$\begin{cases} x \vdash y \text{ et } y \vdash z \\ z \vdash y \text{ et } y \vdash x \end{cases} \implies \begin{cases} x \vdash z \\ z \vdash x \end{cases}$$

donc $x \sim z$.

7. Vérifier que $\vdash$ et $\sim$ sont compatibles : si $x \sim x'$ et $y \sim y'$, alors

$$x \vdash y \iff x' \vdash y'.$$

Par hypothèse : $x \vdash x'$, $x' \vdash x$, $y \vdash y'$, $y' \vdash y$.

$(\Leftarrow)$: $x' \vdash x$, $x \vdash y$, $y \vdash y' \implies x' \vdash y'$ par transitivité.

$(\Rightarrow)$: de même $x \vdash x'$, $x' \vdash y'$, $y' \vdash y \implies x \vdash y$.

8. Pour $\overline{x}$ et $\overline{y}$ deux classes d'équivalence pour $\sim$, on définit

$$\overline{x} \leqslant \overline{y} \iff x \vdash y$$

(la propriété précédente garantit que cela ne dépend pas du choix des éléments x et y dans leur classe respective). Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre sur l'ensemble $E/\sim$ des classes d'équivalence.

- Réflexivité : $\overline{x} \leqslant \overline{x}$ car $x \vdash x$.
- Antisymétrie : si $\overline{x} \leqslant \overline{y}$ et $\overline{y} \leqslant \overline{x}$, alors $x \vdash y$ et $y \vdash x$. Mais cela signifie que $x \sim y$, donc $\overline{x} = \overline{y}$.
- Transitivité : si $\overline{x} \leqslant \overline{y}$ et $\overline{y} \leqslant \overline{z}$, alors $x \vdash y$ et $y \vdash z$ donc $x \vdash z$ d'où $\overline{x} \leqslant \overline{z}$.

9. Cet ordre est-il forcément total ? (démonstration ou contre-exemple)

Non : par exemple dans Y pré-ordonné par la dominance, 1 et $e^n \sin n$ ne sont pas comparables ; leurs classes ne le sont pas non plus dans $Y/\sim$.

10. La relation $x \vdash\!\dashv y \iff x \vdash y$ ou $y \vdash x$ est-elle d'équivalence sur E ?

En général : non, on a la réflexivité et la symétrie mais il n'y a pas de raison que cette relation soit transitive.

Par exemple, dans Y on a $1 \vdash\!\dashv e^n$ (car $1 \preceq e^n$) et $e^n \vdash\!\dashv e^n \sin n$ (car $e^n \sin n \preceq e^n$) mais pas $1 \vdash\!\dashv e^n \sin n$.