$CIR_2\ CNB_2$ **TD de Maths – Séries entières**

1/ Rayon de convergence des séries entières suivantes :

$\left[2^n\ z^{\left(n^2\right)}\right]$ $\left[\left(3+(-1)^n\right)^n\ z^n\right]$ $\left[\dfrac{\ln(n)}{n} z^n\right]_{n\geqslant 1}$ $\left[n!\ z^{n^2}\right]$

2/ Développer en série entière les fonctions :

$e^x \cos x$	$\mathrm{ArcTan}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$	$\dfrac{x+3}{(x+1)^2(2x-1)}$	$\dfrac{e^{-x}}{1+x}$
$\dfrac{1}{1+x+x^2+x^3}$	$\dfrac{1}{(x+a)^3}$	sin x ch x	$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

3/ Sans utiliser la formule de D'Alembert, montrer que les séries entières

$\left[a_n z^n\right]$, $\left[n\ a_n\ z^n\right]$ et $\left[\dfrac{a_n}{n} z^n\right]_{n\geqslant 1}$ ont même rayon de convergence.

Montrer que si la série entière $\left[a_n z^n\right]$ a un rayon de convergence R non nul, alors les séries entières $\left[\dfrac{a_n}{n^n} z^n\right]$ et $\left[\dfrac{a_n}{n!} z^n\right]$ ont un rayon de convergence infini

4/ Rayon de convergence de la série entière $\left[a_n\ z^n\right]$ dans les cas suivants :

$a_n = \dfrac{1}{n^\alpha}\ (\alpha > 0)$	$a_n = \left(1-\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$a_n = \sin\left(\dfrac{1}{\sqrt{n}}\right)\ (n \geqslant 1)$	la série $\left[a_n\right]$ converge mais pas absolument	a_n équivalent à k^n $\left(k \in \mathbb{R}_+^*\right)$

5/ Calculer la somme des séries :

$\left[\dbinom{n}{3} x^n\right]_{n\geqslant 3}$	$\left[\dfrac{1}{n!}\dbinom{n}{3} x^n\right]_{n\geqslant 3}$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^3-4\,n^2+3\,n+2\right) x^n$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\left(n^2+5\,n-2\right)}{n!}\, x^n$
$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\cos(n\theta)\ x^n$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\sin(n\theta)\ x^n$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\left(n^2+1\right)2^{n+1}\ x^n$	$\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{n+1}{3^n\ n!}\ x^n$

6/ Développer en série entière les fonctions :

$\dfrac{1}{(x+a)^3}$	$\mathrm{ArcTan}\dfrac{1-x^2}{1+x^2}$	$\dfrac{e^{-x}}{1+x}$	$\ln\left(\dfrac{1+x}{1-x}\right)$	$\displaystyle\int_0^x \dfrac{\sin t}{t}\,dt$
$\displaystyle\int_x^{2x} \dfrac{\arctan t}{t}\,dt$	$\dfrac{x}{\left(1+x^2\right)^2}$	$\displaystyle\int_0^x e^{-t^2}\,dt$	$x\ \ln(1+x)-x$	$\left(\dfrac{\sin x}{x}\right)^2$

7/ Montrer que , pour $\theta \in \mathbb{R}$ et $x \in]-1,+1[$ on a :

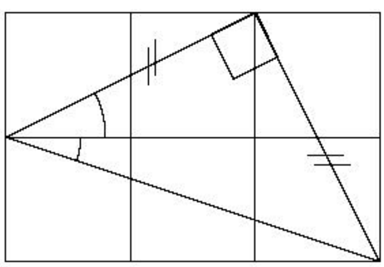
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \cos(n\theta) = \frac{x\cos\theta - x^2}{1-2x\cos\theta + x^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} x^n \sin(n\theta) = \frac{x\sin\theta}{1-2x\cos\theta + x^2}$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \cos(n\theta)}{n} = -\frac{1}{2}\ln\left(1-2x\cos\theta + x^2\right)$
- $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n \sin(n\theta)}{n} = ArcTan\left(\frac{x\sin\theta}{1-x\cos\theta}\right)$

En déduire $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\cos(n\theta)}{n}$ et $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\sin(n\theta)}{n}$ pour $\theta \in]0,\pi[$

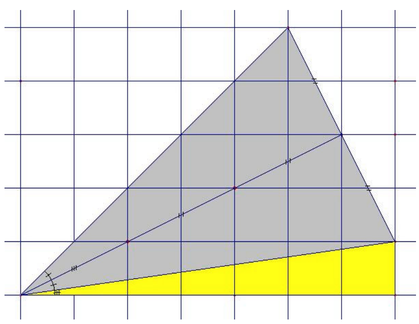
8/ Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle $x(2-x)y'+(1-x)y=1$.
Étudier la série obtenue aux bornes de l'intervalle de convergence.

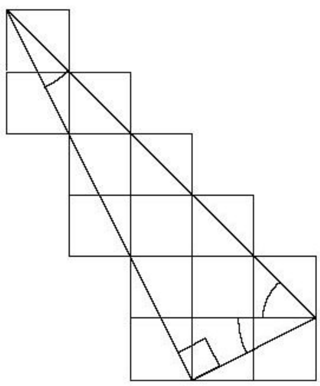
Problème : calcul de $S = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2}$

1. Montrer que $1^2+2^2+3^2+\ldots+n^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$
2. Soit $f(x) = \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^{2n+2}}{n(n+1)(2n+1)}$. Dans quel intervalle *f* est-elle définie ?
3. Méthode 1
   Écrire la dérivée troisième de *f* sous forme de série. Dans quel intervalle $f^{(3)}$ est-elle définie ?
   Calculer successivement $f^{(3)}(x)$ puis $f''(x)$ puis $f'(x)$ et enfin $f(x)$
   On pourra au préalable calculer une primitive de $\ln(t)$ et une primitive de $t\ln(t)$.
4. Méthode 2
   Décomposer en éléments simples $\dfrac{1}{n(n+1)(2n+1)}$
   Calculer $f(x)$ en utilisant cette décomposition.
5. Étudier la série entière $f(x)$ aux bornes de l'intervalle de convergence. En déduire S.



$\arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{4}$





$\arctan 1 + \arctan\frac{1}{2} + \arctan\frac{1}{3} = \frac{\pi}{2}$