CIR2CNB2 **TD de Maths – Séries(2)**

1/ Soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

Le côté du carré C_0 est 1, celui de C_1 $\dfrac{1}{\varphi}$,

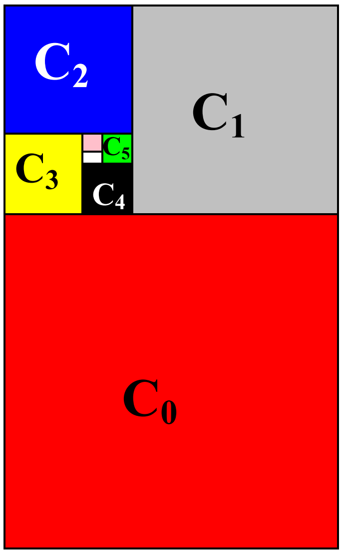
celui de C_2 $\dfrac{1}{\varphi^2}$, etc...

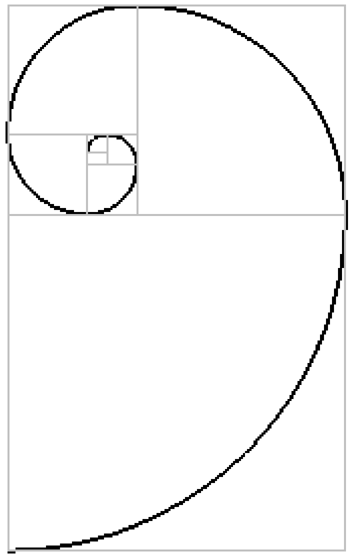
Calculer $\dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{\varphi^2}$.

Remarquer que cela justifie la construction.

Calculer la somme de la série $[C_n]$.

Calculer la longueur de la spirale.





2/ Soit $a \in \mathbb{C}$ tel que $|a|<1$.

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, et tout $k \leqslant n$, calculer $S_k = a^k + a^{k+1} + \ldots + a^{n-1} + a^n$

Calculer de 2 manières la somme $S_0 + S_1 + .. + S_n$.

Montrer que $(n+1)\,a^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

En déduire que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (n+1)\,a^n$ converge et calculer sa somme.

3/ Étudier la convergence et calculer éventuellement la somme de la série $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

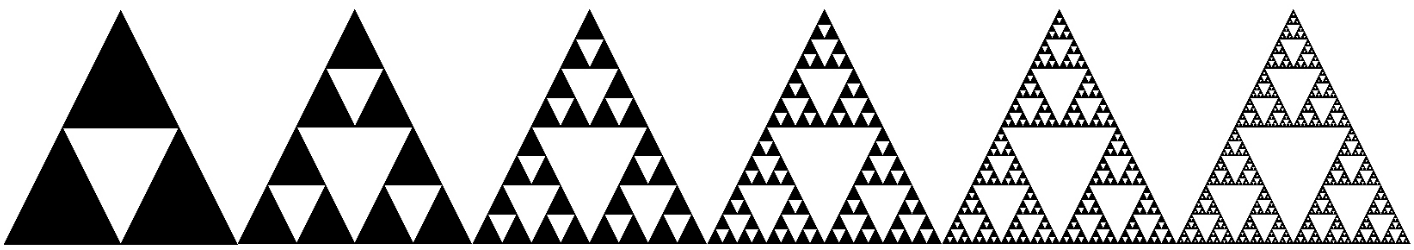
$u_n = \dfrac{1}{5^n}$, $u_n = \left(\dfrac{-1}{3}\right)^n$, $u_n = \dfrac{2^n}{3^{n+1}}$, $u_n = \dfrac{n^2}{n^2+n+1}$, $u_n = \dfrac{\exp(n)}{2^n}$, $u_n = \dfrac{2^{n+1}}{n!}$, $u_n = 2^n \exp(-2n)$

$u_n = \dfrac{1}{n!} + \dfrac{1}{(n+1)!}$, $u_n = \dfrac{2^{n+1}+3^{n+2}}{5^n}$, $u_n = \dfrac{9}{(3n+1)(3n+4)}$, $u_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}}$, $u_n = \sqrt{n^2+n}-n$

4/ Étudier la convergence et calculer éventuellement la somme de la série $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

$u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$	$u_n = \dfrac{n!}{n^n}$	$u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$	$u_n = \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
$u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$u_n = \dfrac{1}{n\ \ln(n)}$	$u_n = \dfrac{\ln(2)\times\ln(3)\times\ldots\times\ln(n)}{n!}$	$u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{n}}-1$
$u_n = -1+\exp\left(\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$	$u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{4\ n-3}{6}\pi\right)$	$u_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$	$u_n = (-1)^n\dfrac{\ln(n)}{n}$

5/ Pour chacune des 6 figures ci-dessous, quelle est l'aire en noir ? Si on continuait ? limite ?



Wacław Franciszek Sierpiński (1882-1969)

Problème : la série harmonique alternée

a/ Pour des entiers $0 < n < p$, soit $S_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k}$.

Encadrer $S_{n,p}$ à l'aide d'intégrales. Montrer que $\ln\left(\frac{p+1}{n+1}\right) < S(n,p) < \ln\left(\frac{p}{n}\right)$

b/ On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$, $A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}$ et $B_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$

Écrire A_n et B_n en fonction des $H_{....}$

c/ Écrire $U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ en fonction des $H_{....}$ puis en fonction des $S_{...,...}$

Encadrer U_n. En déduire que la série $\sum_{n \geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et calculer sa somme

d/ Encadrer de même $V_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

En déduire que la série $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \ldots$ est convergente

et calculer sa somme

e/ Étudier la série $\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17}\right) + \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$

puis la série $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} .. - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} \ldots - \frac{1}{30}\right) + \ldots$