CIR2 CNB2

Courbes planes - Résumé de cours

I - Courbes paramétrées

1 - Définition

Une <u>courbe plane paramétrée</u> c'est une application γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$.
On peut la concevoir comme l'équation horaire d'un mobile dans le plan.

On peut aussi noter $M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

Si $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan, $\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$

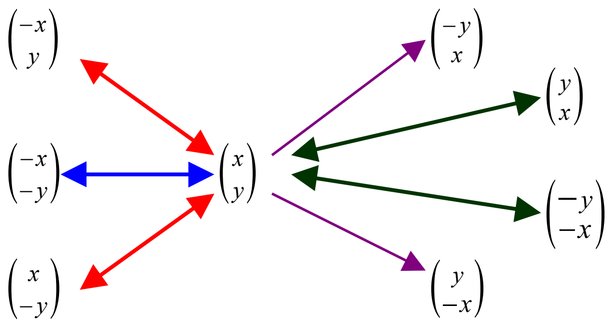
Support

L'image de γ (ensemble des points $\mathbb{R}^2$ qui sont images par γ d'un point de $[a,b]$) est appelé le <u>support</u> de cette courbe paramétrée. On dit aussi (improprement dans ce contexte) que c'est une courbe.

2 - symétries

si $\rightarrow$ et $\downarrow$	$x(t_2)=x(t_1)$	$x(t_2)=-x(t_1)$
$y(t_2)=y(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...
$y(t_2)=-y(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...

si $\rightarrow$ et $\downarrow$	$x(t_2)=y(t_1)$	$x(t_2)=-y(t_1)$
$y(t_2)=x(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...
$y(t_2)=-x(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...



3 - Vecteur vitesse - Tangente

a/ Vecteur vitesse

Soit $\gamma\ [a,b]\to\mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée <u>de classe C^1</u> et $M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

On note $\dfrac{dM}{dt}$ ou $\dfrac{dM}{dt}(t)$ le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ également noté $\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$.

On l'appelle le vecteur vitesse (au point t). On écrit aussi $\dfrac{dM}{dt}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}$

b/ Définition :

On dit que la droite Δ est tangente en $M(t_0)$ à la courbe γ si $M(t_0) \in \Delta$ et si la direction de Δ est la limite des direction des "cordes" $(M(t_0)M(t_1))$ quand $t_1 \to t_0$

c/ Propriété :

Si $\dfrac{dM}{dt}(t_0) \neq 0$, la courbe γ possède une tangente au point $M(t_0)$

et cette tangente a le vecteur vitesse $\dfrac{dM}{dt}(t_0)$ comme vecteur directeur.

Si $\forall t \in [a,b]$ / $\dfrac{dM}{dt}(t) \neq 0$, on dit que la courbe est régulière. En tout point elle a une tangente.

4 - Étude globale

Exemple $\begin{cases} x(t) = 4\sin t - 3\sin 3t \\ y(t) = 4\cos t - 3\cos 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

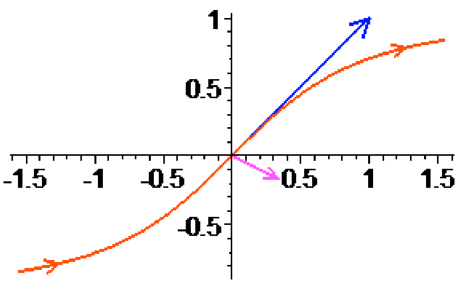
Période
Symétries
Tableau de variations

t	0		0.38		1.23		$\pi/2$		2.76		π
x	0	$\searrow$	-1.24	$\nearrow$	5.34	$\nearrow$	7	$\searrow$	-1.24	$\nearrow$	0
x'	-5	-	0	+	9	+	0	-	0	+ $\searrow$	5
y	1	$\nearrow$	1.55	$\nearrow$	3.67	$\searrow$	3	$\searrow$	-5.88		-7
y'	0	+	2.66	+	0	-	-4	-	-5.64	-	0
$\dfrac{dM}{dt}$	$\leftarrow$	$\nwarrow$	$\uparrow$	$\nearrow$	$\rightarrow$	$\searrow$	$\downarrow$	$\swarrow$	$\downarrow$	$\searrow$	$\rightarrow$

5 - Étude locale

Utilisation des développements limités

Exemple $\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ étude en $t = 0$. DL : $M(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} + t^3\varepsilon(t)$

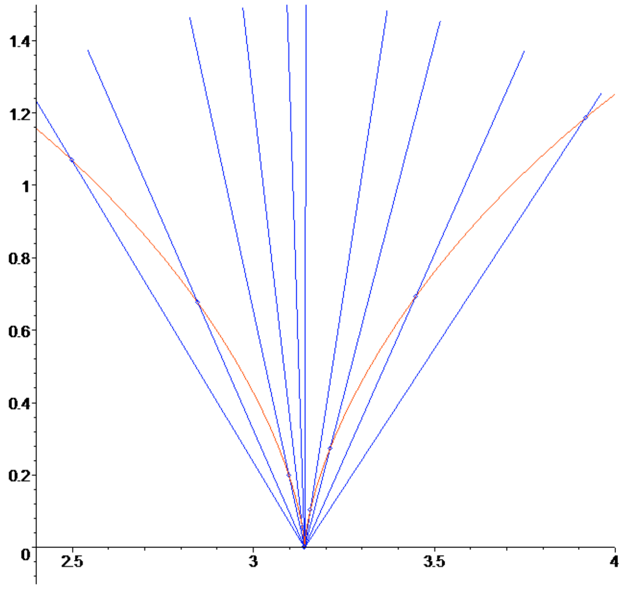


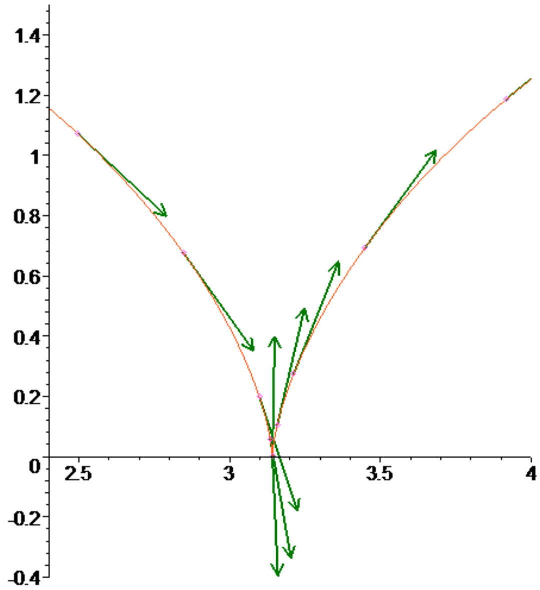
Point singulier (ou point d'arrêt) (ou point stationnaire) : Cas où $\dfrac{dM}{dt} = 0$

On peut étudier $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ (position limite de la corde)

ou $\lim\limits_{t \to t_0} \dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ (position limite de la tangente) (On démontre que ces 2 limites sont égales) exemple : Cycloïde $\begin{cases} x(t) = t + \sin t \\ y(t) = 1 + \cos t \end{cases}$. Point singulier en $t = \pi$

$$\lim_{t\to\pi} \frac{y(t)-y(\pi)}{x(t)-x(\pi)} = \lim_{t\to\pi} \frac{1+\cos t}{t+\sin t-\pi} \overset{(u=t-\pi)}{=} \lim_{u\to 0} \frac{1-\cos u}{u-\sin u} = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t\to\pi} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t\to\pi} \frac{-\sin t}{1+\cos t} \overset{(u=t-\pi)}{=} \lim_{u\to 0} \frac{\sin u}{1-\cos u} = \pm\infty$$





6 - Branches infinies. Quand $t \longrightarrow t_0$ …

1. Direction asymptotique

- verticale si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$
- horizontale si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} 0$
- oblique dans la direction de la droite $y = a\ x$ si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} a$

2. Asymptote

- verticale si $y(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$ et $x(t)$ a une limite finie
- horizontale si $x(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$ et $y(t)$ a une limite finie
- oblique : $y = a\ x + b$ si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} a$ et $y(t) - a\ x(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} b$

3. branche parabolique

- de direction verticale si $x(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$, $y(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$ et $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$,
- de direction horizontale si $x(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$, $y(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} \pm\infty$ et $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} 0$,
- oblique : si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} a$ et $y(t) - a\ x(t) \xrightarrow[t\longrightarrow t_0]{} +\infty$ ou $-\infty$

II - Courbes polaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$**.** Pour tout réel $\theta \in I$**,** on pose $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

La courbe polaire définie par la fonction $\rho(\theta)$ est la courbe paramétrée qui, à θ, associe

$M(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$

On note $\vec{n}$ le vecteur $\dfrac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

On remarque que $\dfrac{d\vec{n}}{d\theta} = -\vec{r}$ et que , pour tout θ ,$\left(O, \vec{r}, \vec{n}\right)$ est un repère orthonormé direct (repère tournant)

Le vecteur vitesse est alors $\dfrac{dM}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{r} + \rho(\theta)\vec{n}$

Interprétation :

Quand θ varie, le point $M = \rho\,\vec{r}$ subit un double déplacement :

- rotation autour de O parce que le vecteur $\vec{r}$ varie (tourne régulièment dans le sens trigonométrique)
- déplacement le long de l'axe défini par $\vec{r}$ parce que ρ varie.

Le vecteur vitesse $\dfrac{dM}{d\theta} = \rho'\vec{r} + \rho\vec{n}$ a donc 2 composantes

- l'une radiale $\rho'\vec{r}$
  (s'il n'y avait que celle-là - si θ était constant - le mouvement serait rectiligne)
- l'autre normale $\rho\vec{n}$
  (s'il n'y avait que celle-là - si ρ était constant - le mouvement serait circulaire)

Étude pratique des courbes polaires
Équation polaire d'une droite, d'un cercle passant par O.