Chapitre 5

Ondes électromagnétiques dans le vide

Notes personnelles

Dans ce chapitre on étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans une région où il n'y a ni charges, ni courants, c'est-à-dire dans une région qui n'englobe pas les sources du champs électromagnétique.

I Équation de propagation des champs

Le champ électromagnétique $\left(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)\right)$ vérifie les quatre équations de Maxwell, qui constituent le postulat de base du cours d'électromagnétisme :

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div}\overrightarrow{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} & \text{(M-G)} \\ \operatorname{div}\overrightarrow{B}(M,t) = 0 & \text{(M-flux/Thomson)} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t) & \text{(M-F)} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\left(\overrightarrow{j}(M,t) + \epsilon_0\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t)\right) & \text{(M-A)} \end{cases}}$$

Avec : $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$

Puisque l'on s'interesse à une région vide de charges et de courants on a : $\rho(M,t) = 0$ et $\overrightarrow{j}(M,t) = 0$; ce qui donne :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overrightarrow{E}(M,t) = 0 \\ \operatorname{div}\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\dfrac{\partial \overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial \overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t) \end{cases}$$

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Or, en math : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}\ \forall\vec{A}$

Et où $\Delta\vec{A}$ est l'opérateur Laplacien vectorielle, dont l'expression en coordonées cartésiennes est :

$$\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \dfrac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\boxed{\Delta\vec{E}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}(M,t)}{\partial t^2} \quad \text{où } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}}$$

Procédons maintenant de la même façon, mais en partant cette fois-ci du rotationelle de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

On obtient :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t^2}}$$

Les champs $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ vérifient l'équation de .... tridimensionnelle, la vitesse de propagation de l'onde est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ kg.m.A^{-2}.s^{-2} et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-9}$ A^2.s^4.kg^{-1}.m^{-3}

Application numérique :

$$c = ...$$

La lumière est .... !!! \0/ Bouya ! :D

Remarque : Contrairement aux ondes sonores, les ondes électromagnétiques n'ont besoin d'aucun support matériel pour se propager.

II Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

II.1 Représentation complexe

Si le champ vectoriel $\overrightarrow{E}(M,t)$ satisfait une équation d'onde (i.e : équation de d'Alembert) et est donc une onde et si on la considère comme une OPPH, alors ses trois composantes cartésiennes sont des OPPH. Seules leur phases et leur amplitude diffèrent a priori. On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E} &= E_{0x}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_x\right)\overrightarrow{u}_x \\ &+ E_{0y}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_y\right)\overrightarrow{u}_y \\ &+ E_{0z}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_z\right)\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

Cette notation est extrêmement lourde. On préfére généralement la notation complexe suivante :

$$\underline{\overrightarrow{E}}(M,t) = \underline{\overrightarrow{E}}_0 \exp\left(i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\right)$$

où :

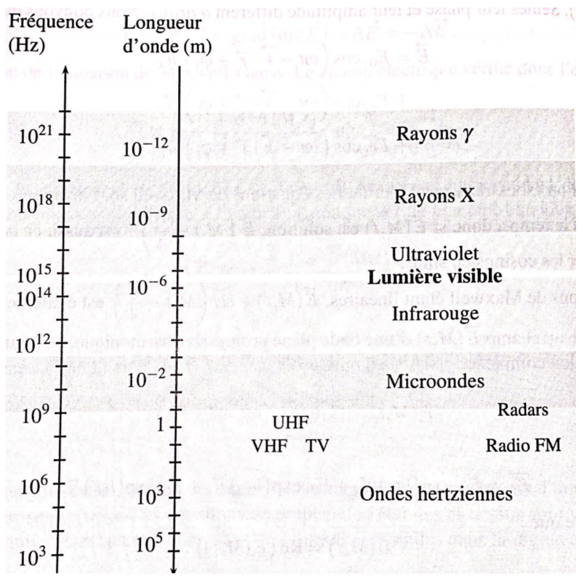
$$\underline{\overrightarrow{E}}_0 = E_{0x}\exp(i\varphi_x)\overrightarrow{u}_x + E_{0y}\exp(i\varphi_y)\overrightarrow{u}_y + E_{0z}\exp(i\varphi_z)\overrightarrow{u}_z$$

de telle sorte que :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = Re(\underline{\overrightarrow{E}}(M,t))$$

II.2 Spectre électromagnétique

La gamme des fréquences (ou de longueurs d'onde) couverte par les ondes électromagnétiques est très vaste. Selon les valeurs de la fréquence ou de la longueur d'onde, classe les ondes électromagnétiques dans différents domaines.



II.3 Equations de Maxwell en notation complexe

Considérons une OPPH, $\vec{a}(M,t)$, de représentation complexe :

$$\overrightarrow{\underline{a}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{a}}_0 \exp\left(i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned}
\mathrm{div}\,\overrightarrow{\underline{a}} &= \left(-ik_x\underline{a}_{0x} - ik_y\underline{a}_{0y} - ik_z\underline{a}_{0z}\right)\exp\left(i(\omega t - \vec{k}\cdot\vec{r})\right)\\
&= -i\,\vec{k}\,\overrightarrow{\underline{a}}
\end{aligned}$$

De même, le calcul de $\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\underline{a}}$ en coordonnées cartésiennes permet d'établir la relation :

$$\overrightarrow{\mathrm{rot}}\,\overrightarrow{\underline{a}} = -i\,\vec{k}\wedge\overrightarrow{\underline{a}}$$

Remarque : Si l'on dérive par rapport au temps, c'est un facteur : $i\omega$; qui "sort".

Finalement les équations de Maxwell pour les champs complexes s'écrivent :

$$\boxed{\begin{cases}
(MG) : & -i\,\vec{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = 0\\
(M\phi) : & -i\,\vec{k}\cdot\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = 0\\
(MF) : & -i\,\vec{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = -i\omega\overrightarrow{\underline{B}}(M,t)\\
(MA) : & -i\,\vec{k}\wedge\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = i\omega\epsilon_0\mu_0\overrightarrow{\underline{E}}(M,t)
\end{cases}}$$

Avec $\vec{k} = \frac{\omega}{c}\vec{n}$ où $\vec{n}$ est le vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde.

II.4 Structure de l'onde plane progressive harmonique

La structure de l'OPPH se déduit des équations de Maxwell. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\vec{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}} = 0$; ce qui implique que le vecteur $\overrightarrow{\underline{E}}$ est .... à $\vec{k}$. Le vecteur étant réel, la partie réelle de l'équation précédente donne : $\vec{k}\cdot\vec{E} = 0$: le champs réel $\vec{E}$ est orthogonal à la direction de propagation de l'onde électromagnétique. On dit donc que le champ électrique est .... On montre de même, grâce à l'équation de Maxwell-flux, que le champ magnétique est également transverse.

L'équation de Maxwell-Faraday donne la relation entre $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$:

$$\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \frac{\vec{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}(M,t)}{\omega}$$

ou encore, en penant la partie réelle :

$$\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{k}\wedge\vec{E}(M,t)}{\omega}$$

Les vecteurs $\vec{E}$ et $\vec{k}$ étant orthogonaux, la norme du champ $\vec{B}$ est donc égale à :

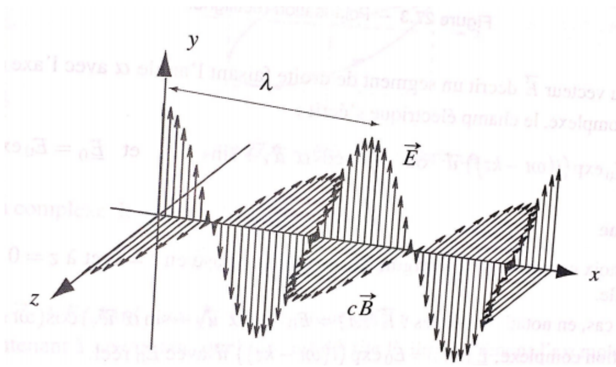
$$\|\vec{B}\| = \frac{\|\vec{E}\| \times \|\vec{k}\|}{\omega} = \frac{\|\vec{E}\|}{c}$$

Bilan :
Les champs $\vec{E}(M,t)$ et $\vec{B}(M,t)$ sont orthogonaux, en phase et $\|\vec{B}(M,t)\| = \frac{\|\vec{E}(M,t)\|}{c}$
Pour une OPPH, les vecteurs $\vec{E}(M,t)$, $\vec{B}(M,t)$ et $\vec{n}$ forment un trièdre direct, la norme de $\vec{B}(M,t)$ étant égale à $1/c$ fois celle de $\vec{E}(M,t)$.

Toutes ces informations sont résumées dans la relation de structures des OPPH électromagnétiques :

$$\boxed{\vec{B}(M,t) = \frac{\vec{n} \wedge \vec{E}(M,t)}{c}}$$

Dans le cas d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants, telle que le champs électrique soit selon (Oy) : $\vec{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\vec{u}_y$, les champs électrique et magnétique, à un instant donné, sont représentés sur la figure ci-après :



II.5 Polarisation des ondes planes progressives harmoniques

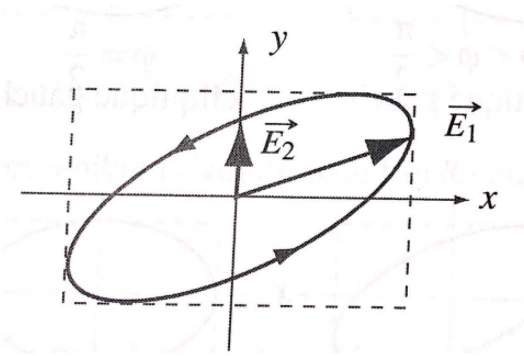
Soit une OPPH EM se propageant dans le sens des z croissant.

On étudie la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\vec{E}$ dans un plan d'onde orienté de telle sorte que l'observateur voit arriver l'onde vers lui.

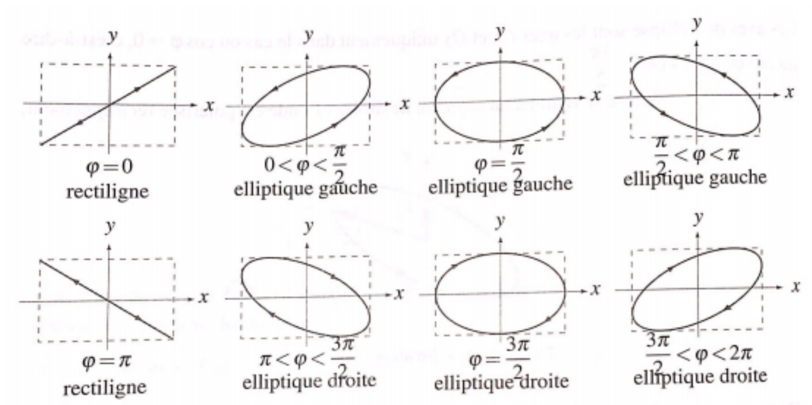
On dit que l'onde EM est polarisée rectilignement selon (Oy), lorsque le champ électrique garde une direction fixe dans un plan d'onde. La courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$ est alors un segment de droite selon (Oy). Le champ $\overrightarrow{E}$ ne possède alors qu'une seule composante et s'écrit : $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_y$.

On dit que l'onde EM possède une polarisation elliptique, lorsque la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$ est une ellipse. Le champ s'écrit : $\overrightarrow{E}(z,t) = E_{0x}\cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_x + E_{0y}\cos(\omega t - kz - \varphi)\overrightarrow{u}_y$

Si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique l'onde est dite : elliptique gauche. Elle est elliptique droite dans le cas contraire.



On dit que l'onde EM est polarisée circulairement dans le cas particulier où $E_{0x} = E_{0y}$ et où $\varphi = \pm\pi/2$



III Aspect énergétique des ondes planes progressives

III.1 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$, ou vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi}(M,t) = \frac{\overrightarrow{E}(M,t) \wedge \overrightarrow{B}(M,t)}{\mu_0}}$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique transportée par l'onde.

III.2 Puissance émise

La puissance émise, ou puissance rayonnée, par une onde électromagnétique à travers la surface S est :

$$\boxed{P_{\text{rayonnée}} = \iint_S < \overrightarrow{\Pi} > \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}}$$

Où $< \overrightarrow{\Pi} >$ désigne la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

Rappel math : Pour une fonction périodique f(t) de période T, on a :

$$< f(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

Remarques :

i) $< \cos(t) >= 0$

ii) $< \cos^2(t) >= \frac{1}{2}$