III/ *Relation d'ordre*

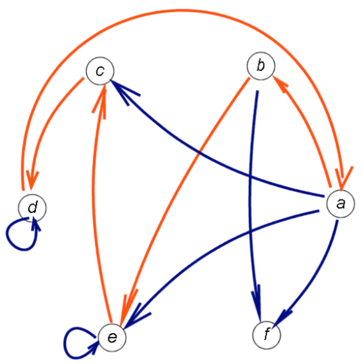
1. Définitions

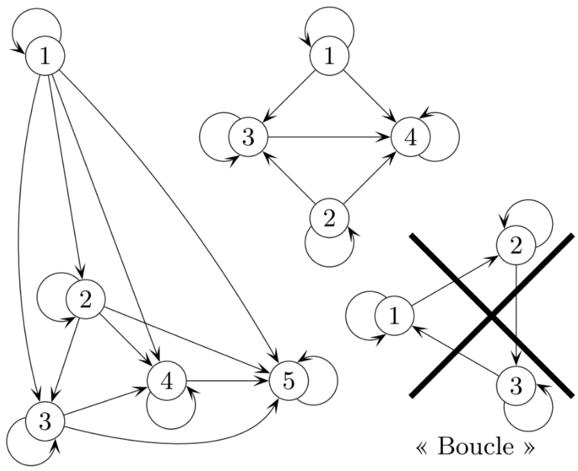
Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E est une **relation de pré-ordre** si elle est
1. réflexive
2. transitive

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E est une **relation d'ordre** si elle est :
1. réflexive
2. antisymétrique
3. transitive

Une relation d'ordre permet de comparer deux éléments, de mettre une "hiérarchie" entre eux.
Lorsque $x \mathcal{R} y$, on dit que x est "inférieur" à y, et on préfère noter $x \leqslant y$ ou $x \ll y$ ou $x \preccurlyeq y$ (interprétation purement conventionnelle, on pourrait tout autant dire "supérieur". D'ailleurs $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre)

La transitivité et l'antisymétrie empêchent d'avoir un cycle formé d'éléments distincts de la forme $x_1 \mathcal{R} x_2$, $x_2 \mathcal{R} x_3$,..., $x_{k-1} \mathcal{R} x_k$ et $x_k \mathcal{R} x_1$





« Boucle »

Cette propriété des relations d'ordre montre que les graphes de relations d'ordre ont une orientation naturelle : en les parcourant on va toujours de l'avant, on ne revient jamais en arrière, on ne tourne jamais en rond. Comme les fleuves et les rivières qui coulent tous en direction de la mer et ne bouclent jamais. C'est précisément cette orientation ou « sens de lecture » qui nous invite à considérer que certains éléments sont plus petits/plus grands que d'autres.

Exemples

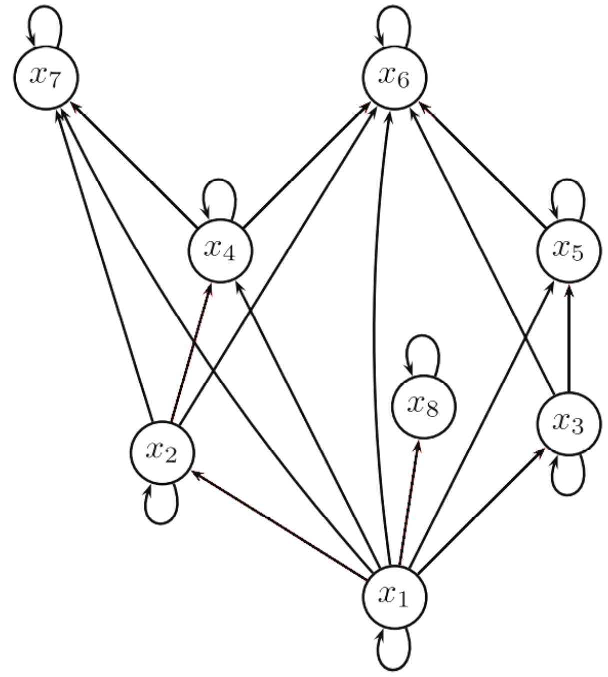
- $\leqslant$ est un relation d'ordre
- $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- L'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$
- La divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
- La divisibilité dans $\mathbb{Z}$ n'est une relation d'ordre mais c'est une relation de pré-ordre.

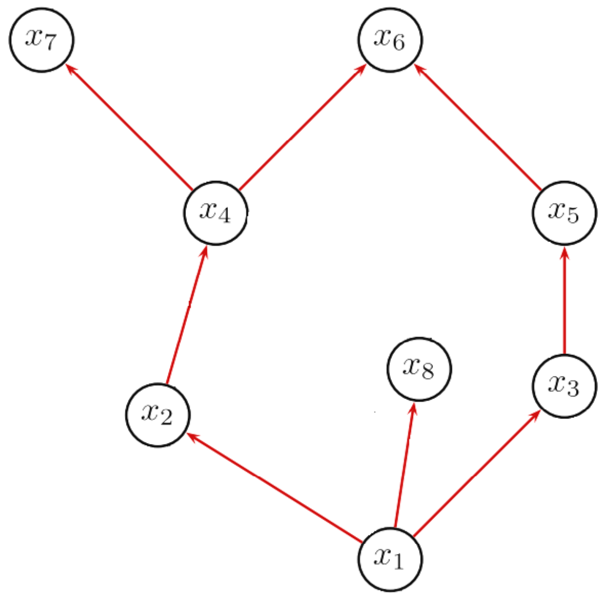
Dans un ensemble d'ensembles, la relation $\mathcal{R}$ définie par $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow$ il existe une application injective de A vers B n'est pas une relation d'ordre : elle n'est pas antisymétrique. Mais c'est un pré-ordre.

- Dans une famille, la relation "est descendant de" n'est pas une relation d'ordre : elle n'est pas réflexive. Mais la relation "$x = y$ ou x est un descendant de y" est une relation d'ordre.
- Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la relation

  $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \left(f = O(g) \text{ en } +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\exists K \in \mathbb{R}^* / \exists A \in \mathbb{R}^* / \forall x \geqslant A \,/\, f(x) \leqslant K\, g(x)\right)$ est un pré-ordre.

Quand on sait qu'une relation est une relation d'ordre, on peut omettre dans sa représentation par flèches les boucles et les flêches qui peuvent se déduire d'autres par transitivité. On ne laisse que les "flèches élémentaires".





2. *Ordre total, ordre partiel*

Soit (E, $\preccurlyeq$) un ensemble ordonné.

Si tous les éléments de E sont deux à deux comparables $\left(\text{i.e. } \forall (x,y) \in E \times E \ / \ x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq y\right)$, on dit que l'ordre $\preccurlyeq$ est total ou que (E, $\preccurlyeq$) est un **ensemble totalement ordonné**.

Exemples

- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.
- $(\mathbb{N}^*, \text{divise})$ et $(\mathcal{P}(E), \subset)$ (si $Card(E) \geqslant 2$) sont partiellement ordonnés.
- Sur $\mathbb{R}^2$ On définit les deux relations d'ordre suivantes :
  – L'ordre produit : $(x,y) \preccurlyeq (x',y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y')$
  – L'ordre lexicographique : $(x,y) \preceq (x',y') \Leftrightarrow \left(x < x' \text{ ou } (x = x' \text{et } y \leqslant y')\right)$
  L'ordre produit est un ordre partiel et l'ordre lexicographique est un ordre total.

3. *Majorants, minorants*

Soit une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur un ensemble E et une partie A de E.

– Un élément $M \in E$ est un majorant de la partie A si et seulement si $\forall a \in A, a \preccurlyeq M$

remarque : dans ce cas, tout élément M' tel que $M \preccurlyeq M'$ est aussi majorant de A.

– Un élément $m \in E$ est un minorant de la partie A si et seulement si $\forall a \in A, m \preccurlyeq a$

remarque : dans ce cas, tout élément m' tel que $m' =\preccurlyeq m$ est aussi minorant de A.

– Un élément $a \in A$ est un plus petit élément de A si et seulement si $\forall x \in A, a \preccurlyeq x$ (bien noter : $a \in A$)

remarque : Il n'existe pas toujours un plus petit élément de A, mais s'il en existe, il est unique.

– Un élément $a \in A$ est un plus grand élément de A si et seulement si $\forall x \in A, x \preccurlyeq a$ (bien noter : $a \in A$)

remarque : Il n'existe pas toujours un plus grand élément de A, mais s'il en existe, il est unique.

– Un élément $m \in A$ est un élément minimal de A si et seulement si $\forall x \in A$, ($x \preccurlyeq m \Rightarrow x = m$)

remarque : Il peut y avoir plusieurs éléments minimaux de A.
Exemple : pour la divisibilité dans l'ensemble des naturels $\geqslant 2$,
tous les nombres premiers sont minimaux et il n'y a pas de plus petit élément

– Un élément $M \in A$ est un élément maximal de A si et seulement si $\forall x \in A$, ($M \preccurlyeq x \Rightarrow x = M$)

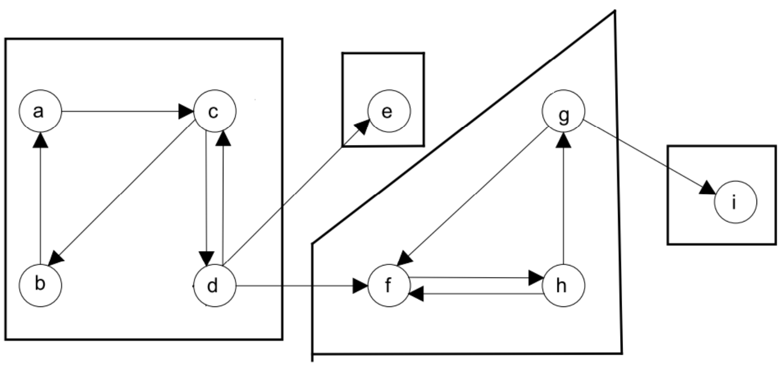
Exemple : pour l'inclusion dans ,

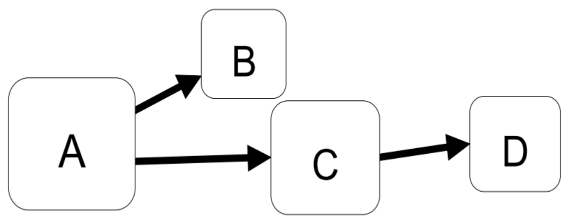
4. Relation d'équivalence associée à un pré-ordre

Soit $\mathcal{R}$ une **relation de pré-ordre** définie sur E. On définit la relation $\approx$ par $x \approx y \Leftrightarrow (x \mathcal{R}\, y \text{ et } y \mathcal{R}\, x)$
Alors la relation $\approx$ est une relation d'équivalence sur E.
Exemples

- Dans $\mathbb{Z}$ la relation de pré-ordre "divise" induit l'équivalence "a même valeur absolue"
- Dans un ensemble d'ensembles, la relation de pré-ordre définie par $A \mathcal{R}\, B \Leftrightarrow$ il existe une application injective de A vers B induit la relation d'équivalence "est équipotent". En effet s'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A, alors il existe une bijection de A vers B (théorème de Cantor-Bernstein)
- Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la relation de pré-ordre $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \left(f = O(g) \text{ en } +\infty\right)$ induit la relation d'équivalence "de même ordre de grandeur en $+\infty$".

Si $\mathcal{R}$ est une relation de pré-ordre définie sur E et $\approx$ la relation d'équivalence associée, on peut définir une relation d'ordre entre les classes d'équivalence par :
$C_1 \underset{\approx}{\precsim} C_2 \Leftrightarrow \left(\exists x \in C_1 / \exists y \in C_2 / x \mathcal{R}\, y\right) \Leftrightarrow \left(\forall x \in C_1 / \forall y \in C_2 / x \mathcal{R}\, y\right)$





(on a omis les boucles et des flêches pouvant se déduire par transitivité)