D.S. de maths n° 3

Développées

Consignes

- La durée de l'épreuve est 2h.
- L'énoncé comporte 5 questions.
- L'usage de la calculatrice est interdit (et inutile).
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant votre raisonnement et mentionnant les résultats utilisés.
- Bon courage !

La *développée* D d'une courbe plane birégulière C est par définition le lieu formé par ses centres de courbure.

Si C est donnée par une paramétrisation $\boldsymbol{\alpha}$, on obtient une paramétrisation $\boldsymbol{\beta}$ de sa développée D en posant

$$\boldsymbol{\beta} = \boldsymbol{\alpha} + \rho \boldsymbol{N}.$$

1. Supposons que $\boldsymbol{\alpha} : I \to \mathbf{R}^2$ est un arc paramétré birégulier de classe $\mathcal{C}^2$ exprimé en terme d'un paramètre quelconque t. Rappeler comment sont définis et/ou calculés :
   - son abscisse curviligne s (à partir d'un point initial de paramètre t_0 sur la courbe),
   - son vecteur unitaire tangent $\boldsymbol{T}$,
   - son vecteur unitaire normal $\boldsymbol{N}$,
   - sa courbure κ,
   - son rayon de courbure ρ.

2. En utilisant les formules de Frénet, montrer que le vecteur dérivé le long de D est donné par

$$\frac{\mathrm{d}\boldsymbol{\beta}}{\mathrm{d}s} = \frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s} \boldsymbol{N}.$$

3. Supposons que $\frac{\mathrm{d}\rho}{\mathrm{d}s}$ ne s'annule nulle part, de sorte qu'elle possède partout le même signe $\varepsilon \in \{1, -1\}$. Montrer que l'arc paramétré β est alors birégulier, et exprimer son vecteur tangent unitaire $\boldsymbol{T}_\beta$, son vecteur normal unitaire $\boldsymbol{N}_\beta$, sa courbure κ_β et son rayon de courbure ρ_β en termes de ceux de α.

(Attention : s n'est sans doute pas une abscisse curviligne pour β !)

4. Montrer que la développée d'une ellipse est une astroïde.

5. Déterminer une paramétrisation naturelle ainsi que la développée de la cardioïde

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta, \qquad \theta \in \left]-\pi, \pi\right[.$$