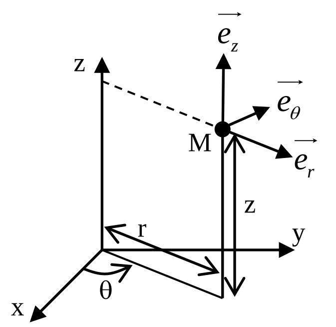
Électrostatique – ISEN, CIR2 et CNB2 – 2019-20

2ème semestre TD n°2

Les coordonnés cylindriques d'un point M de l'espace sont notées (r,θ,z) et on définit en ce point la base locale orthonormée direct ($\vec{e_r}$, $\vec{e_\theta}$, $\vec{e_z}$).

Les expressions de la divergence et du rotationnel sont alors :



$$\overrightarrow{\text{grad}}\, f = \left(\frac{\partial f}{\partial \text{r}}\right)\vec{\text{e}}_\text{r} + \left(\frac{1}{\text{r}}\frac{\partial f}{\partial \theta}\right)\vec{\text{e}}_\theta + \left(\frac{\partial f}{\partial \text{z}}\right)\vec{\text{e}}_\text{z}$$

$$\text{div}\,\vec{\text{A}} = \frac{1}{\text{r}}\left(\frac{\partial(\text{r}\,\text{A}_\text{r})}{\partial \text{r}} + \frac{\partial \text{A}_\theta}{\partial \theta}\right) + \frac{\partial \text{A}_\text{z}}{\partial \text{z}}$$

$$\overrightarrow{\text{rot}\,\text{A}} = \left(\frac{1}{\text{r}}\frac{\partial \text{A}_\text{z}}{\partial \theta} - \frac{\partial \text{A}_\theta}{\partial \text{z}}\right)\vec{\text{e}}_\text{r} + \left(\frac{\partial \text{A}_\text{r}}{\partial \text{z}} - \frac{\partial \text{A}_\text{z}}{\partial \text{r}}\right)\vec{\text{e}}_\theta + \frac{1}{\text{r}}\left(\frac{\partial(r\text{A}_\theta)}{\partial \text{r}} - \frac{\partial \text{A}_\text{r}}{\partial \theta}\right)\vec{\text{e}}_\text{z}$$

Un cylindre de révolution, d'axe z'z, de rayon a, illimité dans la direction de l'axe, est placé dans le vide et renferme une densité volumique de charge ρ > 0 uniforme et invariable.

1.a. Montrez que les symétries du problème imposent aux composantes du champ électrique $\vec{\text{E}}(\text{E}_\text{r},\text{E}_\theta,\text{E}_\text{z})$ de ne dépendre que d'une variable que l'on précisera.

1.b. A partir de la relation de Maxwell-Faraday calculez E_z et E_θ. Montrez que ces composantes sont nulles. Le justifiez par symétrie.

1.c. A partir de la forme locale du théorème de Gauss calculez l'expression générale de E_r.

1.d. Etablir ensuite un théorème intégral permettant le calcul de E.

2. En considérant une hauteur h de cylindre, calculez la valeur de $\vec{\text{E}}$ en fonction de la distance à l'axe, en distinguant les cas r ≤ a, r ≥ a. (On vérifiera la continuité en r = a)
Envisagez le cas particulier des points situés sur l'axe et commentez.
Comparez les résultats ainsi obtenus à ceux obtenus à la question 1.c.

3. Etablir que $\vec{\text{E}}$ dérive d'un potentiel scalaire électrostatique V qu'on calculera en fonction de r. On choisira V = 0 sur la surface du cylindre.