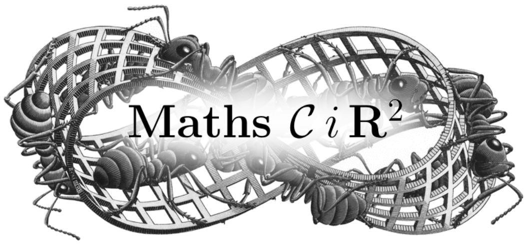


$\mathcal{C}$onsignes

- Cette épreuve contient **5** questions équipondérées non ordonnées.
- L'usage de tout dispositif électronique est **interdit**.
- Rédigez clairement en **expli{cit,qu}ant** vos raisonnements.
- **Amusez**-vous bien !

Décrire géométriquement, aussi précisément que possible, l'ensemble

$$\mathcal{S} = \{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + 2x + 4y^2 - 4y + 2z^2 = 2\,\}.$$

En mettant l'équation sous forme canonique, on trouve

$$\frac{(x+1)^2}{4} + \frac{(y-\frac{1}{2})^2}{1} + \frac{z^2}{2} = 1;$$

il s'agit d'un ellipsoïde de centre $(-1, \frac{1}{2}, 0)$ et de demi-axes 2, 1, $\sqrt{2}$.

Soit $\mathcal{P}$ le plan tangent à l'hyperboloïde d'équation $x^2 + y^2 = z^2 + 1$ au point $A = (1,1,1)$.

Calculez la distance entre le point $B = (1,2,3)$ et $\mathcal{P}$.

Pour décrire le plan tangent : la méthode la plus simple consiste à considérer l'hyperboloïde comme la surface de niveau 1 de la fonction

$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 - z^2$$

et donc que $\nabla g(1,1,1)$ est normal à la surface (et donc à $\mathcal{P}$). On pourrait aussi voir la partie de la surface qui nous intéresse comme le graphe de la fonction

$$f(x,y) = \sqrt{x^2 + y^2 - 1}$$

et linéariser celle-ci au voisinage de $(x,y) = (1,1)$. Dans les deux cas on trouve un vecteur normal $\mathbf{n} = (1,1,-1)$.

Que l'on calcule explicitement la distance qui nous intéresse comme $d = d(B,H)$, où $H = \left(\frac{4}{3}, \frac{7}{3}, \frac{8}{3}\right)$ est la projection orthogonale de B sur $\mathcal{P}$, ou utilise

$$|\overrightarrow{AB} \cdot \mathbf{n}| = d \cdot ||\mathbf{n}||,$$

on trouve $d = \frac{1}{\sqrt{3}}$.

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} x \sin y & \text{si } y \geqslant x^2 \text{ ou } y \leqslant 0, \\ x^2 - y^2 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Montrer que les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ existent en $(0,0)$ et donner leur valeur.

Attention : s'agissant d'une fonction définie par morceaux, on peut facilement dériver à l'intérieur de ceux-ci :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \sin y \\ 2x \end{cases}, \quad \frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} -x \cos y & \text{si } y > x^2 \text{ ou } y < 0, \\ -2y & \text{si } 0 < y < x^2, \end{cases}$$

mais pour étudier ce qui se passe à l'interface entre les deux ($x^2 y = 0$) il vaut mieux revenir à la définition des dérivées partielles.

En l'occurence, $\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)$ est la dérivée en $x = 0$ de la fonction partielle $f(x,0) = x \sin 0 = 0$, et $\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)$ est la dérivée en $y = 0$ de la fonction partielle $f(0,y) = 0 \sin y = 0$. Elles existent donc bien, et valent toutes deux 0.

b) f est-elle différentiable en $(0,0)$?

Si le calcul des dérivées partielles en $(0,0)$ n'utilise pas les valeurs de f sur le second morceau, il faut en tenir compte pour ce qui est de la différentiabilité car des points de celui-ci sont présent dans tout voisinage de l'origine.

Mais puisque les deux fonctions $g(x,y) = x \sin y$ et $h(x,y) = x^2 - y^2$ sont différentiables à l'origine, avec plan tangent horizontal, on peut conclure la même chose de f :

$$f(x,y) = 0 + 0 \cdot x + 0 \cdot y + \varepsilon(x,y)$$

avec

$$0 \leqslant \frac{\varepsilon(x,y)}{\sqrt{x^2+y^2}} \leqslant \frac{1}{\sqrt{x^2+y^2}} \max\big(g(x,y), h(x,y)\big)$$

qui tend bien vers 0 par le théorème du sandwich.

Montrer que la développée de la cardioïde d'équation polaire

$$r = 1 + \cos\theta$$

admet comme paramétrisation

$$\theta \;\mapsto\; \frac{2}{3}\,\mathbf{i} + \frac{1-\cos\theta}{3}\,\mathbf{u}_r.$$

On a une paramétrisation régulière sur $]-\pi, \pi[$, avec

$$\mathbf{r} = (1+\cos\theta)\mathbf{u}_r = 2\cos^2\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_r, \quad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta} = 2\cos\tfrac{\theta}{2}\Big(\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_\theta - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_r\Big)$$

$$\frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}\theta} = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}\right\| = 2\cos\tfrac{\theta}{2}, \quad \mathbf{T} = \cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_\theta - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_r, \quad \mathbf{N} = -\cos\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_r - \sin\tfrac{\theta}{2}\,\mathbf{u}_\theta$$

$$\alpha = \frac{\pi}{2} + \frac{3\theta}{2}, \quad \kappa = \frac{\mathrm{d}\alpha}{\mathrm{d}\ell} = \frac{3}{4\cos\frac{\theta}{2}}, \quad R = \frac{1}{\kappa} = \frac{4}{3}\cos\tfrac{\theta}{2}$$

et centre de courbure

$$\begin{aligned}
\mathbf{c} &= \mathbf{r} + R\,\mathbf{N} \\
&= 2\cos^2\ \mathbf{u_r} - \frac{4}{3}\cos(\cos\ \mathbf{u_r} + \sin\ \mathbf{u}_\theta) \\
&= \frac{2}{3}\cos^2\ \mathbf{u_r} + \frac{4}{3}\sin\cos\ \mathbf{u}_\theta \\
&= \frac{1}{3}(1+\cos\theta)\mathbf{u}_r + \frac{2}{3}\sin\theta\,\mathbf{u}_\theta \\
&= \frac{1}{3}(1-\cos\theta)\mathbf{u}_r + \frac{2}{3}\underbrace{\left(\cos\theta\,\mathbf{u}_r + \sin\theta\,\mathbf{u}_\theta\right)}_{\mathbf{i}}
\end{aligned}$$

Associez à chacune des fonctions de deux variables suivantes son graphe ainsi que ses courbes de niveau.

$f(x,y) = x^2 + 2y^2$ $\boxed{7}$ $\boxed{\text{D}}$

$g(x,y) = \cos x + \cos y$ $\boxed{6}$ $\boxed{\text{B}}$

$h(x,y) = \max(|x|,|y|)$ $\boxed{2}$ $\boxed{\text{H}}$

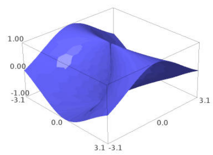
$k(x,y) = e^{-(x^2+y^2)}$ $\boxed{8}$ $\boxed{\text{C}}$

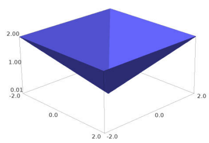
$\ell(x,y) = \dfrac{x^2-y^2}{x^2+y^2}$ $\boxed{1}$ $\boxed{\text{F}}$

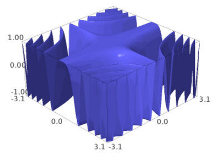
$m(x,y) = \cos x^2 y$ $\boxed{3}$ $\boxed{\text{G}}$

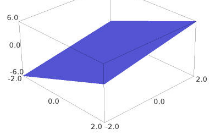
$n(x,y) = 2x + y$ $\boxed{4}$ $\boxed{\text{E}}$

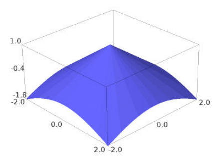
$o(x,y) = 1 - \sqrt{x^2+y^2}$ $\boxed{5}$ $\boxed{\text{A}}$

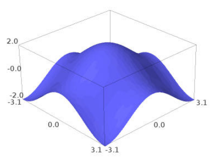

1)

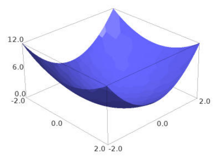

2)

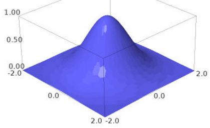

3)

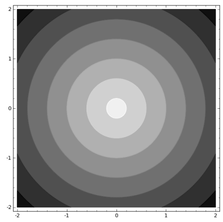

4)

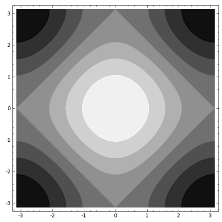

5)

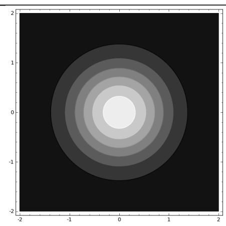

6)

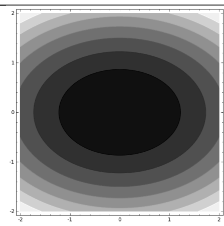

7)

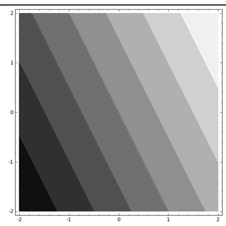

8)

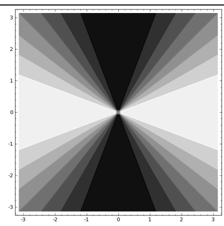

A)

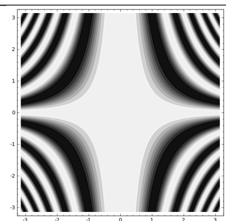

B)

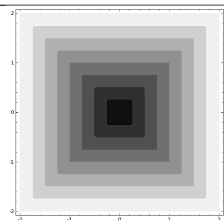

C)


D)


E)


F)


G)


H)