CORRECTION DE L'EXAMEN DE MECANIQUE DU 5/3/19

Exercice 1

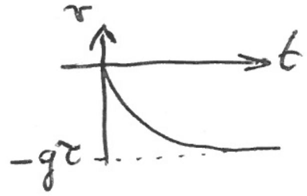
(2pts) 1. Poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} 0 \\ -mg \end{pmatrix}$ Frottement $\vec{F} = -\alpha \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$

2. PFD selon z. $m\ddot{z} = -mg - \alpha \dot{z}$

(2pts) $\ddot{z} = -g - \frac{\alpha}{m}\dot{z} \Rightarrow \frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = -g$ avec $\tau = \frac{m}{\alpha}$

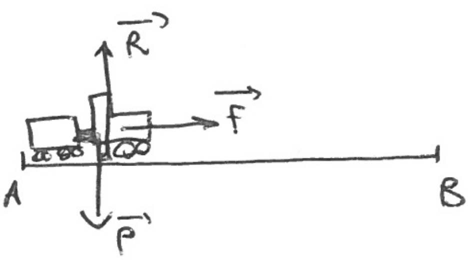
3. $v(t) = K\exp\left(-\frac{t}{\tau}\right) - g\tau$

(2pts) $v(t=0) = 0$ donc $K = g\tau \Rightarrow v(t) = -g\tau\left(1 - \exp\left(-\frac{t}{\tau}\right)\right)$



Exercice 2

1)



(2pts)

- Poids $\vec{P}$
- Reaction du support $\vec{R}$
- Force de traction $\vec{F}$

(Forces de frottements négligés)

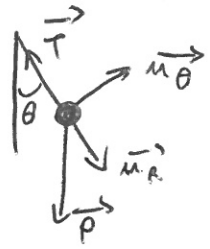
2) $\frac{1}{2} m V_B^2 - 0 = \underbrace{W_{AB}(\vec{P})}_{0} + \underbrace{W_{AB}(\vec{R})}_{0} + \underbrace{W_{AB}(\vec{F})}_{\|\vec{F}\| . AB}$ avec $AB = 2{,}5$ km

(2pts) $\Leftrightarrow \boxed{F = 1{,}3 . 10^5 \text{ N}}$

3) $m\vec{a} = \vec{F} + \vec{R} + \vec{P}$ avec $\vec{R} = -\vec{P}$

(1pt) $\|\vec{a}\| = \frac{\|\vec{F}\|}{m} = 0{,}26 \, m s^{-2}$

Exercice 3

1) 

Poids $\vec{P} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$

Tension du fil $\vec{T} = \begin{pmatrix} -\|\vec{T}\| \\ 0 \end{pmatrix}$

1pt bilan des $\vec{F}$
1pt coord. polaires

2a) $m\vec{a} = \vec{P} + \vec{T}$ avec $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\vec{u_R} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\vec{u_\theta}$

$r = cte = L$ et $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$ donc $\vec{a} = L\dot{\theta}^2\vec{u_R} + L\ddot{\theta}\vec{u_\theta}$

1pt On obtient, selon $\vec{u_\theta}$:

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

2b) Petits angles $\sin\theta \approx \theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\theta = 0 \Rightarrow \theta(t) = A\cos\left(\sqrt{\frac{g}{L}}\,t + \varphi\right)$

1pt

3) $\vec{L_O} = m\vec{r}\wedge\vec{v}$ avec $\vec{r} = L\vec{u_R}$ $\vec{v} = L\dot{\theta}\vec{u_\theta}$

$\vec{L_O} = mL^2\dot{\theta}\,\vec{u_R}\wedge\vec{u_\theta} = mL^2\dot{\theta}\,\vec{u_z} \Rightarrow \frac{dL_O}{dt} = mL^2\ddot{\theta}\,\vec{u_z}$

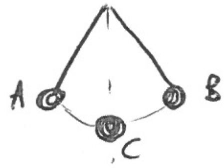
2pts $\mathcal{M}(\vec{T}) = \vec{r}\wedge\vec{T} = \vec{0}$ car $\vec{r}, \vec{T}$ colinéaires

$\mathcal{M}(\vec{P}) = \vec{r}\wedge\vec{P} = L.mg.\sin(\vec{r},\vec{P}).(-\vec{e_z}) = -mgL\sin\theta\,\vec{e_z}$.

TMC $\rightarrow mL\ddot{\theta} = -mgL\sin\theta \Rightarrow \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$

4) Energie potentielle maximale en A et B, lorsque $v = 0 \Rightarrow E_c = 0$ puisque $E_c + E_p = cte$ (système conservatif)

2pt De même, E_p est minimal en C puisque l'energie potentiel du poids dépend de la hauteur. $E_{meca} = cte$ donc E_c est max lorsque E_p est min en C.



5) Resonance. l'amplitude du mouvement diverge en présence d'une force d'excitation ayant une fréquence correspondant à la fréquence propre du système.

1pt

On pourrait par exemple pousser le pendule à chaque fois qu'il arrive en A, ~~...~~