Maths – 2^{e} partie

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **4** questions équipondérées.
- Calculatrice et documentation interdites.

1. On munit l'espace euclidien $\mathbf{E}$ d'un repère orthonormé $(O, \boldsymbol{i}, \boldsymbol{j}, \boldsymbol{k})$.

   a) Déterminer l'axe et l'angle de la rotation $R : \mathbf{E} \to \mathbf{E}$ définie en coordonnées par
   $$R(x,y,z) = \left(\frac{2x+2y+z}{3}, \frac{-x+2y-2z}{3}, \frac{-2x+y+2z}{3}\right).$$

   b) On applique la rotation R au plan $\mathcal{P}$ qui est tangent en $A(0,0,1)$ à la surface $\mathcal{S}$ d'équation
   $$z = y^2 + e^{-x}\cos y.$$
   Donner une équation cartésienne pour le plan $\mathcal{P}' = R(\mathcal{P})$ ainsi obtenu.

2. a) Étudier les points critiques (nature et position) de la fonction
   $$f(x,y) = \exp\left(-\frac{x^3}{3} + x - y^2\right).$$

   b) Quelles sont les valeurs maximale et minimale de f sur le disque de rayon 2 centré à l'origine ?

3. Soit $T : (\mathbf{F}_7)^4 \to (\mathbf{F}_7)^3$ la transformation linéaire définie par
   $$T(x,y,z,t) = (x-3y+2z+2t,\ 2x-6y+5z+3t,\ x-3y+z+3t),$$
   où $\mathbf{F}_7$ désigne le corps à 7 éléments.

   a) Combien existe-t-il de quadruplets $(x,y,z,t) \in (\mathbf{F}_7)^4$ tels que
   $$T(x,y,z,t) = (3,1,1) \ ?$$

   b) Calculer des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ telles que ${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{C}}$ soit sous forme canonique.

   c) En déduire des bases du noyau et de l'image de T.

4. Déterminer la nature (convergence absolue, conditionnelle ou divergence) des séries suivantes.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n!}$ b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n}{\cos n}$ c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\operatorname{Arctan} n}{n^3}$ d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^n \ln n}{n}$