CIR$_2$ CNB$_2$

TD Intégrales impropres

Exercice 1:

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes, et le cas échéant calculer leur valeur :

1. $\displaystyle\int_0^1 \frac{dt}{\sqrt{1-t}}$
2. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \frac{t}{(1+t^2)^2}\,dt$
3. $\displaystyle\int_{-\infty}^0 xe^{-x^2}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} 1\,dt$
5. $\displaystyle\int_2^{+\infty} \frac{1}{3^t}\,dt$
6. $\displaystyle\int_0^{+\infty} xe^{-x}\,dx$

Exercice 2:

Déterminer si les intégrales suivantes sont convergentes :

1. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \sqrt{\frac{2x+3}{5x^3+3x^2+7}}\,dx$
2. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{x-5}{x^2+4x+4}\,dx$
3. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{\ln x}{x^2+1}\,dx$
4. $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{-u^2}\,du$
5. $\displaystyle\int_0^{+\infty} \frac{2+\ln x}{x+4}\,dx$
6. $\displaystyle\int_1^2 \frac{1}{t^2-t}\,dt$
7. $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{\sqrt{t^3+3t^2+t}}\,dt$
8. $\displaystyle\int_1^{+\infty} \ln\left(1+\frac{1}{x^2}\right)\,dx$

Exercice 3:

Montrer la convergence et calculer la valeur des intégrales :

$$I_1 = \int_0^{+\infty} t^3 e^{-t} dt\ ;\ I_2 = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt\ ;\ \ I_3 = \int_0^{+\infty} \frac{t\ln(t)}{(t^2+1)^2} dt\ ;\ I_4 = \int_0^{+\infty} \frac{\ln(1+t^2)}{t^2} dt$$

Les intégrales généralisées suivantes sont-elles convergentes ou divergentes ?

$$I_1 = \int_2^{+\infty} \ln(t)\,dt\ ;\ I_2 = \int_0^2 \ln(t)\,dt\ ; I_3 = \int_0^{+\infty} e^{-4t} dt\ ; I_4 = \int_0^{+\infty} e^{-t^2} dt\ ; I_5 = \int_0^{+\infty} \frac{t^5}{(t^4+1)\sqrt{t}} dt$$

$$I_6 = \int_0^{\pi} \ln(\sin(t))\,dt\ ; I_7 = \int_2^{+\infty} \left(1-\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt\ ; I_8 = \int_0^1 \sin\left(\frac{1}{t}\right) dt\ , I_9 = \int_{\frac{2}{\pi}}^{+\infty} \ln\left(\cos\left(\frac{1}{t}\right)\right) dt$$

Exercice 5:

Calculer $\displaystyle I = \int_1^{+\infty} \frac{1}{t\sqrt{t^2+1}} dt$ à l'aide du changement de variable $u = \sqrt{t^2+1}$

Exercice 6:

Etudier la convergence de l'intégrale $I = \int_0^{+\infty} \frac{t^x + t^{2-x}}{t^3 + \sqrt{t}}\,dt$ selon les valeurs de $x \in \mathbb{R}$

Exercice 7:

Soit f la fonction définie sur $[2;+\infty[$ par $f(t) = \frac{1}{t(\ln(t))^2}$

1. Quelle est la nature de l'intégrale $\int_2^{+\infty} f(t)\,dt$?
2. Déterminer le tableau de variations de f.
3. En déduire la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^2(n)}$
4. Généraliser ce résultat en déterminant la nature de la série $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln^{\beta}(n)}$, où $\beta > 1$.

Exercice 8:

On note f la fonction définie pour tout réel $x > 0$ par $f(x) = \frac{e^{1/x}}{x^2}$.

On pose pour tout entier $n \geqslant 1$, $I_n = \int_n^{+\infty} f(x)\,dx$

1. Montrer que l'intégrale I_n est convergente et exprimer I_n en fonction de n.
2. Montrer que $I_n \underset{n\to+\infty}{\sim} \frac{1}{n}$.
3. Montrer que la série $\sum_{n\geqslant 1} f(n)$ est convergente.

Exercice 9:

1. Démontrer la convergence de l'intégrale $\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx$.
2. Montrer que, pour tout $x \in]0,1[$, $\frac{x-1}{x} \leq \ln(x) < x - 1$.
3. Pour $X \in]0,1[$, démontrer l'égalité :
$$\int_0^X \frac{x\,dx}{\ln(x)} = \int_0^{X^2} \frac{dx}{\ln(x)}$$
4. En déduire un encadrement de $\int_0^X \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx$ et montrer que
$$\int_0^1 \frac{x-1}{\ln(x)}\,dx = \ln(2)$$