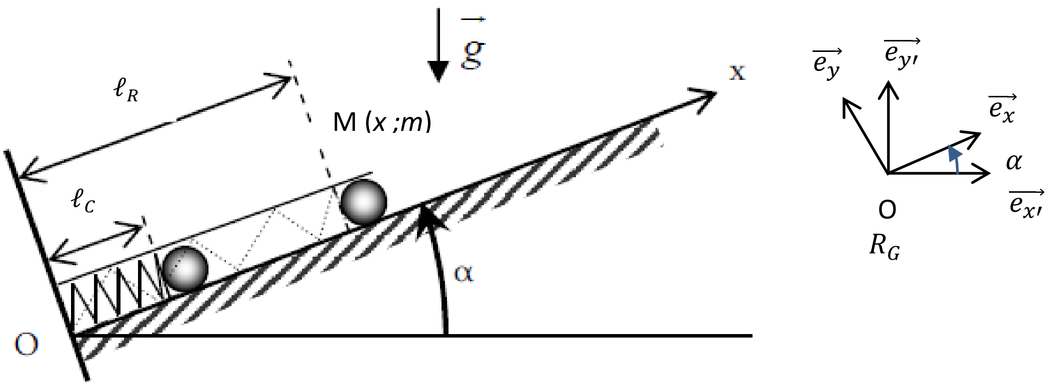
Une boule de flipper en acier, de masse *m* (repérée par le point *M (x ;m)*), initialement placée dans son logement cylindrique fixe sur le plateau de flipper, repose contre l'embout d'un ressort de raideur *k* dont l'autre extrémité *O* est fixée au fond du logement. Le joueur comprime alors le ressort au maximum, et à un instant *t = 0* pris comme origine, il relâche brusquement le ressort.
Le plateau et le cylindre sont inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. La longueur à vide du ressort est ℓ_0 , cette longueur vaut ℓ_R lorsque la bille est au repos contre l'embout, et diminue jusqu'à ℓ_C quand le ressort est comprimé au maximum.
On néglige complètement le frottement de la boule sur le plateau, de sorte qu'elle ne fait que glisser sans rouler ni frotter. On l'assimilera donc à un point matériel de rayon nul. La masse du ressort est supposée négligeable.
L'accélération de la pesanteur est g supposée constante.



A. Etude Statique :

1. La bille reste au contact du plan incline, quel repère (2D) vous semple le plus indiqué pour traiter ce problème (On impose juste l'origine 0)?

Le repère le plus adapté est $(O\ ;\ \vec{e_x}\ ;\ \vec{e_y})$ *car c'est celui qui est dans le sens du mouvement*

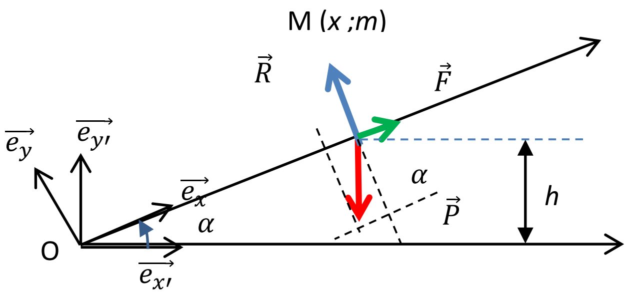
2. Exprimer les produits scalaires suivants : $\vec{e_x} \cdot \vec{e_{x'}}$ et $\vec{e_x} \cdot \vec{e_{y'}}$

$\vec{e_x} \cdot \vec{e_{x'}} = \cos\alpha$

$\vec{e_x} \cdot \vec{e_{y'}} = \sin\alpha$

3. Faire un bilan des forces auxquelles est soumise la bille au repos, donner leurs expressions et les représenter sur un schéma. On représentera le poids $\vec{P}$; la réaction du plan incliné $\vec{R}$ et la force de rappel du ressort $\vec{F}$.

Trois forces sont présentes sur le système étudié :
Le poids de sens opposé à $\vec{e_{y'}}$
La réaction du plan incliné de sens de $\vec{e_y}$
La force de rappel du ressort de sens $\vec{e_x}$



4. Donner l’expression de $\vec{P}$ dans la base $\left(O\ ;\ \overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\right)$

$\vec{P} = -mg\overrightarrow{e_{y'}} = -mgcos\alpha\,\overrightarrow{e_y} - mgsin\alpha\,\overrightarrow{e_x}$

5. Donner l’expression de $\vec{R}$ dans la base $\left(O\ ;\ \overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\right)$

$\vec{R} = R\overrightarrow{e_y}$

6. Donner l’expression de $\vec{F}$ dans la base $\left(O\ ;\ \overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\right)$.

$\vec{F} = -k \cdot (x - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x}$

7. Appliquer le PFS à ce système.

Le PFS donne $m\frac{d^2x}{dt^2} = 0 = \vec{P} + \vec{R} + \vec{F}$

$$0 = -mgcos\alpha\,\overrightarrow{e_y} - mgsin\alpha\,\overrightarrow{e_x} + R\overrightarrow{e_y} - k \cdot (x - \ell_0)\,\overrightarrow{e_x}$$

En projection sur $\overrightarrow{e_x}$ *:*

$$0 = -mgsin\alpha - k \cdot (x - \ell_0)$$

8. Déduire de l’application du PFS que l’expression de la longueur au repos ℓ_R en fonction de $\ell_0\ ; m\ ; g;\ k\ \ et\ \alpha$

$$k \cdot (\ell_R - \ell_0) = -mgsin\alpha$$

$$\ell_R = \ell_0 - \frac{mgsin\alpha}{k}$$

9. Rappeler la définition d’une force conservative.

Une force conservative est une force qui dérive d’une énergie potentielle $F_C = -\frac{dE_P}{dx}$

10. Quelles sont les forces conservatives qui « travaillent » dans ce problème ?

Le poids et la force de rappel sont des forces conservatives ; la réaction ne « travaille » pas

11. Exprimer les énergies potentielles associées à ces forces en fonction de la variable x.

Pour le poids $E_{PP} = +mgh = mgxsin\alpha$

Pour la force de rappel $E_{PF} = \frac{1}{2}k(x - \ell_0)^2$

12. En écrivant que la dérivée de la fonction énergie potentielle totale est nulle retrouver la position d'équilibre de M c'est-à-dire l'expression de ℓ_R :

$$\ell_R = \ell_0 - \frac{mgsin\alpha}{k}$$

L'énergie potentielle totale $E_P = mgxsin\alpha + \frac{1}{2}k(x-\ell_0)^2$

Sa dérivée vaut $mgsin\alpha + k(x-\ell_0) = 0$

Pour $x = \ell_r$ *alors on retrouve* $\ell_r = \ell_0 - \frac{mgsin\alpha}{k}$

2 Etude énergétique globale :

On comprime le ressort jusqu'à $\ell = \ell_C$

1. Donner les valeurs prises par l'énergie potentielle et par l'énergie mécanique de la bille en fonction de $\ell_C\ \ell_0\ ; m\ ; g\ ; k\ ;\ \alpha$.

L'énergie potentielle totale est égale à l'énergie mécanique car il n'a pas d'énergie cinétique au départ (bille à l'arrêt)

$$E_M = E_P = mg\ell_C sin\alpha + \frac{1}{2}k(\ell_C - \ell_0)^2$$

A *t= 0* on relâche le ressort et on considère que la boule perd le contact avec le ressort lorsque sa tension s'annule, c'est-à-dire lorsque $\ell = \ell_0$.

2. Donner la valeur prise par l'énergie mécanique de la bille en $\ell = \ell_0$ en fonction de $\ell_C\ \ell_0\ ; m\ ; g\ ; k\ ;\ \alpha$.

$E_P = mg\ell_0 sin\alpha$
$E_C = \frac{1}{2}m{v_0}^2$

$E_M = mg\ell_0 sin\alpha + \frac{1}{2}m{v_0}^2$

3. Appliquer le TEM et exprimer la vitesse v_0 lorsque la boule quitte le ressort en fonction de $\ell_C\ \ell_0\ ; m\ ; g\ ; k\ ;\ \alpha$.

Le théorème de l'énergie mécanique permet d'égaliser les deux expressions de E_M

$$mg\ell_C sin\alpha + \frac{1}{2}k(\ell_C - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2 + mg\ell_0 sin\alpha$$

$$mgsin\alpha\ (\ell_C - \ell_0) + \frac{1}{2}k(\ell_C - \ell_0)^2 = \frac{1}{2}m{v_0}^2$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2 + 2gsin\alpha \ (\ell_C - \ell_0)}$$

4. Donner une condition sur ℓ_C pour que la bille quitte réellement le ressort (Il doit lui rester de la vitesse lorsqu'elle passe en $\ell = \ell_0$).

La valeur limite est donnée lorsque $v_0 = 0$

Donc $mgsin\alpha \ (\ell_C - \ell_0) + \frac{1}{2}k(\ell_C - \ell_0)^2 = 0$

$mgsin\alpha + \frac{1}{2}k(\ell_C - \ell_0) \quad = 0$

$$\ell_C = \ell_0 - \frac{2mgsin\alpha}{k}$$

5. Calculer jusqu'à quelle distance x_h la bille va-t-elle monter sur le flipper (sans frottements), et exprimer cette longueur x_h maximale atteinte par la bille en fonction de v_0 , ℓ_0 ; g ; $et\ \alpha$.

Le Théorème de l'énergie mécanique donne :

$E_{Mlo} = mg\ell_0 sin\alpha + \frac{1}{2}m{v_0}^2$
$E_{Mxh} = mgx_h sin\alpha + \frac{1}{2}mv^{\ \ 2}$ or *v=0 pour avoir la hauteur max*

$mg\ell_0 sin\alpha + \frac{1}{2}m{v_0}^2 = mgx_h sin\alpha$

Ce qui donne $x_h = \ell_0 + \frac{{v_0}^2}{2gsin\alpha}$

6. Montrer que cette distance x_h peut s'écrire : $x_h = \ell_C + \frac{k(\ell_C - \ell_0)^2}{2mgsin\alpha}$

On peut ainsi remplacer v_0^2 *par sa valeur :*
Ce qui donne

$$x_h = \ell_0 + \frac{2gsin\alpha \ (\ell_C - \ell_0) + \frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2}{2gsin\alpha}$$

$$x_h = \ell_C + \frac{\frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2}{2gsin\alpha}$$

$$x_h = \ell_C + \frac{k(\ell_C - \ell_0)^2}{2mgsin\alpha}$$

3 Applications numériques : on donne les différentes valeurs suivantes :
m= 200 g ; k= 40 Nm^{-1} *;* $\ell_0 = 12\ cm$ *;* $\alpha = 11{,}53°$ *; g=10 ms*$^{-2}$

7. Calculer les valeurs de $\ell_R \quad \ell_C$

$$\ell_R = \ell_0 - \frac{mgsin\alpha}{k} = 0{,}12 - \frac{0{,}2 \times 10 \times \sin(10)}{40} = 0{,}12 - 0{,}01 = 11cm$$

$$\ell_C = \ell_0 - \frac{2mgsin\alpha}{k} = 0{,}12 - \frac{2 \times 0{,}2 \times 10 \times \sin(10)}{40} = 0{,}12 - 0{,}02 = 10cm$$

8. Calculer les valeurs de v_0 et de x_h pour une compression du ressort de *2 cm ; 7cm ;* et *9 cm*

On donne $v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2 + 2gsin\alpha\ (\ell_C - \ell_0)}$

Compression de 2 cm : $\ell_C = 10\ cm$

$$x_h = \ell_C + \frac{k(\ell_C - \ell_0)^2}{2mgsin\alpha} = 0{,}10 + \frac{40 \times (0{,}02)^2}{2 \times 0{,}2 \times 10 \times \sin(11{,}54)} = 12\ cm$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2 + 2gsin\alpha\ (\ell_C - \ell_0)} = \sqrt{\frac{40}{0{,}2}0{,}02^2 - 2 \times 10 \times \sin(11{,}54) \times 0{,}02} = 0\ \ \textit{évident}$$

Compression de 7 cm : $\ell_C = 5\ cm$

$$x_h = \ell_C + \frac{k(\ell_C - \ell_0)^2}{2mgsin\alpha} = 0{,}05 + \frac{40 \times (0{,}07)^2}{2 \times 0{,}2 \times 10 \times \sin(11{,}54)} = 29{,}5cm$$
$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2 + 2gsin\alpha\ (\ell_C - \ell_0)} = \sqrt{\frac{40}{0{,}2}0{,}07^2 - 2 \times 10 \times \sin(11{,}54) \times 0{,}07} = 0{,}7\ ms^{-1}$$

Compression de 9 cm : $\ell_C = 3\ cm$

$$x_h = \ell_C + \frac{k(\ell_C - \ell_0)^2}{2mgsin\alpha} = 0{,}03 + \frac{40 \times (0{,}09)^2}{2 \times 0{,}2 \times 10 \times \sin(11{,}54)} = 43{,}5cm$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2 + 2gsin\alpha\ (\ell_C - \ell_0)} = \sqrt{\frac{40}{0{,}2}0{,}09^2 - 2 \times 10 \times \sin(11{,}54) \times 0{,}09} = 1{,}26\ ms^{-1}$$