Développement en série entière de $(1+x)^{\alpha}$

Soit $f(x)=(1+x)^{\alpha}$. f est de classe C^{∞} sur $]-1\,,1[$.

Sur cet intervalle, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$, $f''(x)=\alpha(\alpha-1)(1+x)^{\alpha-2}$ ... $f^{(n)}(x)=\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))(1+x)^{\alpha-n}$

Posons $a_n=\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$: $a_0=1$, $a_1=\alpha$, $a_2=\dfrac{\alpha(\alpha-1)}{2!}$, ... , $a_n=\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}$ (n facteurs au numérateur)

On étudie la série entière $\left[a_n x^n\right]$. Comme $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\dfrac{|\alpha-n|}{n+1}\xrightarrow[n\to\infty]{}1$, son rayon de convergence est 1.

Pour tout $x\in\,]-1\,,1[$, posons $S(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n=1+\alpha\, x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$

On étudie une équation différentielle que vérifie S pour montrer que $\forall x\in\,]-1\,,1[$, $S(x)=f(x)$.

Pour tout $x\in\,]-1\,,1[$,

D'après le théorème de dérivation d'une série entière (rayon de convergence = 1),

$$S'(x)=\sum_{n=1}^{\infty}n\,a_n x^{n-1}=\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}n\,\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^{n-1}=\alpha+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{(n-1)!}x^{n-1}\qquad(1)$$

par changement d'indice, $S'(x)=\alpha+\sum_{n=1}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}x^n$

Le terme de rang 1 dans la série est $\alpha(\alpha-1)x$ donc $S'(x)=\alpha+\alpha(\alpha-1)x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n)}{n!}x^n$ (2)

Par ailleurs en multipliant (1) par x , on a : $x\;S'(x)=\alpha\,x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{(n-1)!}x^n$ (3)

En additionnant (2) et (3) on trouve $(1+x)\,S'(x)=\alpha+\alpha^2x+\sum_{n=2}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{(n-1)!}\left(\dfrac{\alpha-n}{n}+1\right)x^n$

$$(1+x)\,S'(x)=\alpha+\alpha^2x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha^2(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n$$

Finalement $(1+x)\,S'(x)=\alpha S(x)$.

La fonction S est donc solution sur l'intervalle $]-1\,,1[$ du problème de Cauchy $\begin{cases}(1+x)\,y'=\alpha y\\ y(0)=1\end{cases}$.

Or $f(0)=1$ et on a vu que sur $]-1\,,1[$, $f'(x)=\alpha(1+x)^{\alpha-1}$ donc $(1+x)f'(x)=\alpha f(x)$.

Par unicité de la solution du problème de Cauchy, on obtient le résultat attendu :

Pour tout $x\in\,]-1\,,1[$, $f(x)=S(x)$

$$\boxed{\forall x\in\,]-1\,,1[\;,\;(1+x)^{\alpha}=1+\alpha\,x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-(n-1))}{n!}x^n\quad\text{(série entière de rayon de convergence 1)}}$$

Application

$$\forall x\in\,]-1\,,1[\;,\;\frac{1}{\sqrt{1+x}}=1-\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\left(-\frac{1}{2}\right)\left(-\frac{3}{2}\right)...\left(-\frac{(2n-1)}{2}\right)}{n!}x^n=1-\frac{1}{2}x+\sum_{n=2}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}x^n$$

Remarque $\dfrac{1.3...(2n-1)}{2.4...(2n)}=\dfrac{1.2.3.4...(2n-1)(2n)}{2.4...(2n).2.4...(2n)}=\dfrac{(2n)!}{2^{2n}(n!)^2}$ = probabilité d'avoir n fois pile en lançant $2n$ fois une pièce