EXAMEN DE MECANIQUE

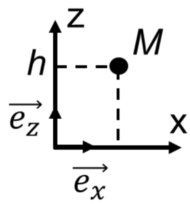
05 / 03 / 2019

Durée : 2 heures

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est permise. Un formulaire se trouve à la fin du sujet.

Exercice 1. (6 points)

Une bille de masse m, assimilée à un point matériel M, est en chute verticale sous l'effet de son poids. Elle est lâchée d'une hauteur h sans vitesse initiale et subit une force de frottement fluide $\vec{f} = -a\vec{v}$, avec $\vec{v}$ le vecteur vitesse et a une constante positive. Le référentiel $(O, \overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_z})$ est supposé galiléen.



1. Effectuer le bilan des forces appliquées à la bille et donner leur expression vectorielle.
2. Appliquer le principe fondamental de la dynamique puis en déduire l'équation différentielle régissant la vitesse de la bille. Mettre cette équation sous la forme canonique $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}v = cste$ et donner l'expression de la constante de temps τ du système étudié.
3. Résoudre cette équation et tracer schématiquement l'évolution de la vitesse au cours du temps.

Exercice 2. (5 pts) *Les questions 2 et 3 sont indépendantes.*

Un train de 500 tonnes a initialement une vitesse nulle et démarre du quai de la gare situé au point A. Au bout de 2,5 km il atteint le point B à une vitesse de 130 km.h^{-1}. On modélisera l'action du moteur sur le train par une force horizontale $\vec{F}$ et on néglige les forces de frottement.

1. Faire un schéma et effectuer le bilan des forces appliquées au train.
2. A l'aide du théorème de l'énergie cinétique, déterminer F (la norme de la force du moteur : $F = \|\vec{F}\|$).

Toute la phase de l'accélération du train a été effectuée sur une portion rectiligne, on admettra pour la suite que l'intensité de la force du moteur sur le train est égale à 1,3 10^5 N.

3. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, déterminer la valeur de l'accélération du train.

Exercice 3. (9 pts) *Les questions 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes.*

On considère un pendule simple de masse m et de longueur L. L'angle que fait le pendule avec la verticale est noté θ. On néglige tout frottement.

1. Effectuer le bilan des forces appliquées à la masse m. Exprimer ses forces en coordonnées polaires.
2. a) Exprimer le principe fondamental de la dynamique. En utilisant l'expression de l'accélération en coordonnées polaires (l'expression générale est dans le formulaire), déterminer l'équation différentielle vérifiée par la position angulaire $\theta(t)$. b). Si l'on suppose que les oscillations sont faibles (θ petit), que devient cette équation ? Quelle est l'expression de $\theta(t)$ dans ce cas ?
3. En appliquant le théorème du moment cinétique, déterminer à nouveau l'équation différentielle vérifiée par la vitesse angulaire $\dot{\theta}$.
4. Soit A et B les positions extrèmes du pendule et C la position d'équilibre de *m*. Justifier chaque réponse, sans calcul : pour quelle(s) position(s) de la masse m l'énergie potentielle est elle maximale ? Pour cette ou ces positions, que peut on dire de l'énergie cinétique ? Pour quelle(s) position(s) l'énergie cinétique est elle maximale ? Pour cette ou ces positions, que peut on dire de l'énergie potentielle ?
5. Qu'est-ce que le phénomène de résonance ? Que pourrait on faire pour l'observer avec ce pendule ?

FORMULAIRE DE MECANIQUE DU POINT

Forces usuelles Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, Frottements fluides (laminaire) $\vec{F} = -k\vec{v}$, Frottements solides (dynamiques) $\|\vec{F}\| = \mu\|\vec{R}\|$ Force électrique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, Force de gravitation $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$.

Quelques définitions travail $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$, moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$, moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$, énergie potentielle E_P d'une force conservative : $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P$ → $E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}(\vec{F})$

Cinématique et dynamique en coordonnées cartésiennes

$\vec{r} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$; $\quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$; $\quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}$

Cinématique et dynamique en coordonnées polaires

$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$; $\quad \vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$; $\quad \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$

PFD. $m\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$ ou $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$

TEC. $\Delta_{AB}E_C = \sum_i W_{AB}(\overrightarrow{F_i})$

TEM. $\Delta E_m = \sum W\left(\vec{F}_{non\ conservatives}\right)$

TMC. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}$

Equations différentielles usuelles

$\frac{dy}{dt} + ay = b$ → $y(t) = Kexp(-at) + \frac{b}{a}$

$\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = 0$ → $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = 0$ →équation caractéristique de discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4{\omega_0}^2$.

Si $\Delta > 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + b\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right\}$

Si $\Delta < 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right\}$