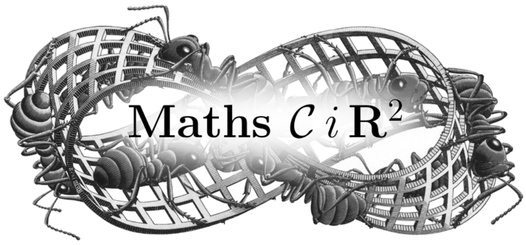
ISÉN Lille 25 octobre 2012



Examen partiel

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **6** questions équipondérées (ainsi que **2** rubans de Möbius).
- L'usage de la calculatrice est vivement déconseillé.
- Rédigez clairement, explicitez vos raisonnements… et surtout amusez-vous bien !

1. Calculer l'aire du triangle $\mathcal{T}$ de sommets $A = (1, 0, -1)$, $B = (2, 3, 0)$ et $C = (-1, 1, 2)$.

2. Décrire aussi précisément que possible les intersections de la surface

$$\mathcal{W} = \{\, (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 z = y^2 \,\},$$

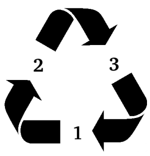
appelée *parapluie de Whitney*, avec des plans parallèles aux plans de coordonnées.

3. Soit (a_n) la suite de nombres réels définie par

$$a_0 = 0, \quad a_1 = 1, \quad \text{puis} \quad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \,+\, 2 \,+\, 6 \cdot (-1)^n \quad \text{pour } n \geqslant 0.$$

Donner une formule explicite pour a_n.

4. Considérons la variante du problème des tours de Hanoï à 3 poteaux dans laquelle les seuls mouvements possibles sont du 1^{er} au 2^{e} poteau, du 2^{e} au 3^{e} et du 3^{e} au 1^{er}.



Établir une récurrence linéaire d'ordre 2 satisfaite par le nombre minimal de mouvements nécessaires pour déplacer une tour de n disques de tailles différentes du 1^{er} au 3^{e} poteau (ou du 2^{e} au 1^{er}, ou du 3^{e} au 2^{e}…) et en déduire une formule explicite pour celui-ci.

5. Évaluer $\displaystyle\int_1^e \frac{e^{3t} - e^t}{e^{4t} - 1}\,\mathrm{d}t$.

6. Calculer, pour tout entier $n \in \mathbf{N}$, la valeur de

$$G(n) = \lim_{R\to\infty} \underbrace{\int_0^R e^{-t}\, t^n \,\mathrm{d}t}_{G_R(n)}.$$

[*Indication* : intégrer par parties pour obtenir une relation entre $G_R(n)$ et $G_R(n-1)$]