TD 0 : Oscillateur Harmonique

Ex1 : Oscillations d'un pendule simple

Un objet ponctuel A de masse m est suspendu à l'extrémité d'un fil de masse négligeable et de longueur L dont l'autre extrémité O est fixe. On ne considère pas les mouvements en dehors d'un plan vertical xOy perpendiculaire à un axe Oz horizontal. On repère A par l'angle θ entre le fil et la verticale. On suppose que le référentiel terrestre est galiléen. On néglige tous les frottements. On désigne par $\overrightarrow{g} = g\overrightarrow{u}_x$ l'accélération du champ de pesanteur.

1. Déterminer l'équation différentielle du mouvement de A en appliquant le théorème de l'énergie mécanique.

2. Retrouver le résultat par le principe fondamental de la dynamique.

3. Tracer la courbe d'énergie potentielle et déterminer les positions d'équilibre du système et leur stabilité.

4. On abandonne A sans vitesse initiale alors que le fil est écarté d'un angle θ_0. On se place dans le cas où θ_0 est petit. Montrer que le système constitue un oscillateur harmonique dont on exprimera la pulsation propre ω_0 et la période propre T_0 en fonction de g et L.

5. Compte tenu des conditions initiales, déterminer l'évolution temporelle de l'angle θ.

6. Quelle est la valeur maximale v_{max} de la vitesse de l'objet A au cours de son mouvement ?

On l'exprimera en fonction de θ_0, L et g.

7. Tracer la courbe donnant θ en fonction du temps.

Ex2 : Oscillations d'une masse suspendue à un ressort

On s'intéresse au mouvement d'un petit objet de masse m attaché à un ressort dont l'autre extrémité est accrochée à un bâti fixé au sol. Le ressort étant initialement dans sa situation de repos pour laquelle sa longueur est égale à sa longueur à vide, on lâche l'objet sans lui donner de vitesse initiale. Le mouvement qui suit est vertical et on veut l'étudier.

On idéalise le comportement du ressort en l'assimilant à un ressort parfaitement élastique, sans masse, de raideur k et de longueur à vide l_0. On repère la position de l'objet sur un axe (Ox) vertical descendant par son abscisse x. L'origine O du repère est située à l'extrémité fixe du ressort. On néglige les frottements dus à l'air.

1. Montrer que l'équation du mouvement s'écrit :

$$\ddot{x} + \omega_0^2 x = \omega_0^2 x_{\text{eq}}$$

où ω_0 et x_{eq} sont des constantes à déterminer en fonction de l_0, g, m et k.

2. Que représente la position M_{eq} d'abscisse $x = x_{\text{eq}}$?
3. Pour résoudre l'équation du mouvement, on déplace l'origine de repère en M_{eq}
 a. Montrer que cela revient à faire le changement de variable $X = x - x_{\text{eq}}$
 b. En déduire que l'on obtient alors une équation différentielle du mouvement connue.
 c. Résoudre en tenant compte des conditions initiales.
 d. Représenter l'évolution temporelle de l'abscisse x.

Ex3 : Vibration d'un diapason

Un diapason vibre à la fréquence du La4 soit $f = 440$ Hz. On mesure sur une photo l'amplitude du mouvement de l'extrémité des branches $A = 0,5$ mm. Quelle est la vitesse maximale de l'extrémité du diapason ? Quelle est l'accélération maximale de ce point ?

Ex4 : Energie de l'oscillateur harmonique

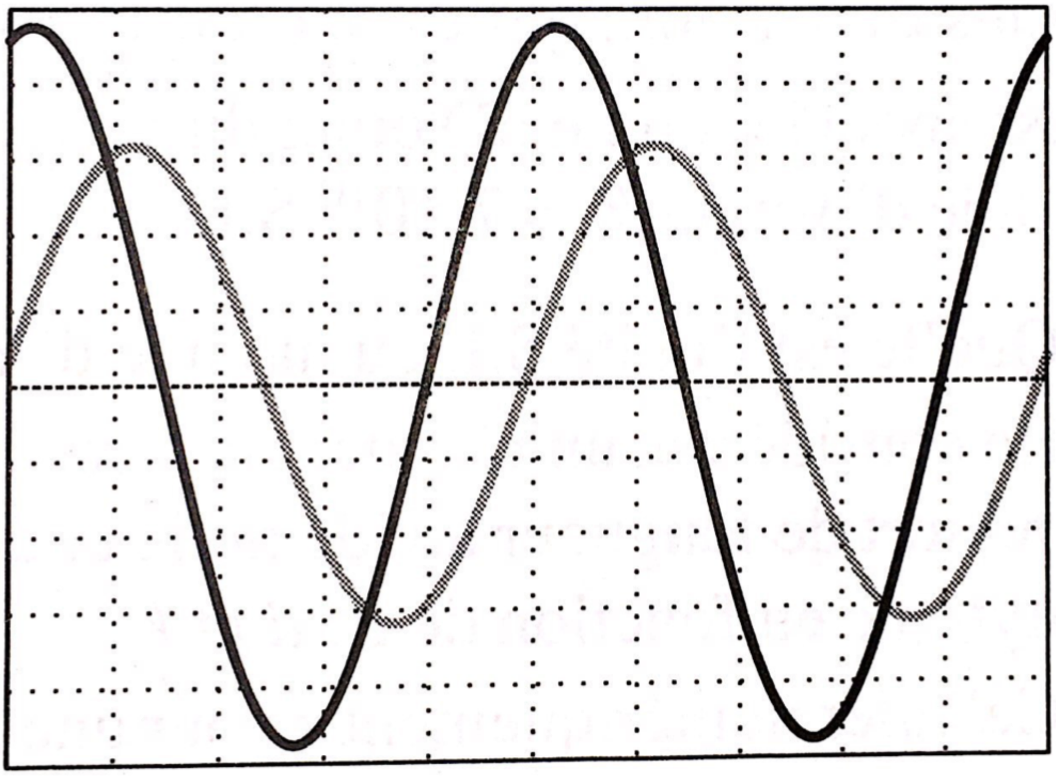
L'énergie mécanique d'un oscillateur harmonique s'écrit : $E_m(t) = \frac{1}{2}m\omega_0^2x^2 + \frac{1}{2}m\left(\frac{\mathrm{d}x}{\mathrm{d}t}\right)^2$.
On suppose qu'il n'y a aucun phénomène dissipatif : l'énergie mécanique est donc constante.
1. En utilisant la conservation de l'énergie, retrouver l'équation différentielle de l'oscillateur harmonique.
2. On suppose que $x(t) = A\cos(\omega_0 t + \varphi)$. Exprimer l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction de m, ω_0 et $\cos(2\omega t + 2\varphi)$. Vérifier que l'énergie mécanique est bien constante.
3. Tracer sur un même graphe les courbes donnant l'énergie cinétique et l'énergie potentielle en fonction du temps. Quelle est la fréquence de variation de ces énergies ?

Ex5 : Caractéristiques de signaux sinusoïdaux

1. Donner l'amplitude, la période, la fréquence et la phase initiale des signaux suivants :
 a. $x(t) = 15\cos(100\pi t + 0,5)$;
 b. $x(t) = 5\sin(7,854.10^6 t)$;
 c. $x(t) = 2\sin(120\pi t - \frac{\pi}{4})$;
2. Quelle est la phase initiale d'un signal sinusoïdal qui vaut la moitié de sa valeur maximale et croît à l'instant $t = \frac{T}{4}$ où T est la période ?

Ex6 : Détermination d'un déphasage

La figure représente un écran d'oscilloscope avec deux signaux sinusoïdaux de même fréquence $s_1(t)$ (foncé) et $s_2(t)$ (clair). La ligne en tireté représente le niveau zéro pour les deux signaux. Une division de l'axe des temps correspond à 20 ms.



1. Déterminer la fréquence des signaux.

2. Calculer le déphasage de s_2 par rapport à s_1.

3. Quelle est la phase de s_1 au point le plus à gauche de l'écran ?