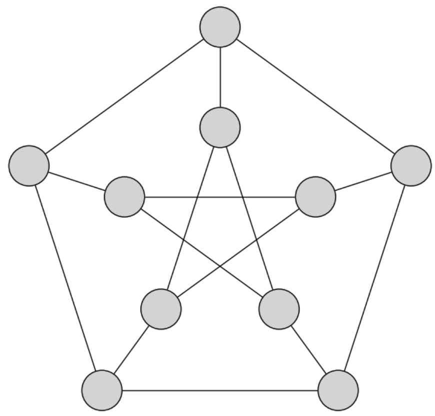
$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Question 1

Pour occuper votre petit neveu lors d'une journée pluvieuse, vous mettez la main sur un vieux sujet d'examen et lui demandez de réaliser tous les coloriages possibles de la figure suivante pour lesquels exactement 3 emplacements sont bleus, 3 sont verts et 4 sont rouges (pas grave si deux emplacements adjacents sont de la même couleur).



On convient que deux tels coloriages sont « les mêmes » s'ils ne diffèrent que par une symétrie géométrique (rotation ou réflexion) de la figure (en tenant compte des arêtes).

Combien de photocopies devez-vous réaliser ?

Soit X l'ensemble des coloriages des 10 emplacements à l'aide de 3 B, 3 V et 4 R ; on cherche à connaître le nombre m d'orbites pour l'action du groupe diédral $\mathcal{D}_5$ sur X. Étudions les points fixes de chaque élément $g \in \mathcal{D}_5$:

- $g = 1$: tous les coloriages sont fixes, il y en a $\binom{10}{3,3,4} = 4200$;
- $g \in \{\rho, \rho^2, \rho^3, \rho^4\}$ (rotation d'ordre 5) : g n'a aucun point fixe, en effet les 5 sommets extérieurs devraient être de la même couleur (de même pour les 5 intérieurs), ce qui est impossible ;
- $g \in \{\sigma, \sigma\rho, \sigma\rho^2, \sigma\rho^3, \sigma\rho^4\}$ (réflexion) : on a deux sommets sur l'axe, les 8 autres viennent par paires. On doit attribuer un B et un V aux deux sommets sur l'axe, puis il reste 4 paires de couleurs à disposer, pour un grand total de $\binom{2}{1,1}\binom{4}{1,1,2} = 24$ points fixes.

D'après la formule de Cauchy-Frobenius, on a donc

$$m = \frac{1}{|\mathcal{D}_5|} \sum_{g \in \mathcal{D}_5} |\mathrm{Fix}(g)| = \frac{1}{10}\Big(4200 + 4 \cdot 0 + 5 \cdot 24\Big) = 432.$$

Question 2

Soit $\mathbf{F}$ un corps quelconque. Vérifier que la formule $P \star A := PAP^{-1}$ définit une action de $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ sur $\mathcal{M}_2(\mathbf{F})$, et déterminer pour cette action le stabilisateur d'une matrice diagonale

$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \qquad (\lambda_1, \lambda_2 \in \mathbf{F}).$$

[*Indication* : Distinguer les cas $\lambda_1 = \lambda_2$ et $\lambda_1 \neq \lambda_2$]

Vérification qu'il s'agit d'une action : pour $P, Q \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ et $A \in \mathcal{M}_2(\mathbf{F})$, on a bien

- $I \star A = IAI^{-1} = AI = A$,
- $P \star (Q \star A) = P \star (QAQ^{-1}) = P(QAQ^{-1})P^{-1} = (PQ)A(PQ)^{-1} = (PQ) \star A$.

Soit maintenant $A = \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix}$ et déterminons le stabilisateur de A pour cette action, *i.e.* l'ensemble des matrices $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$ pour lesquelles

$$P \star A = PAP^{-1} = A.$$

- Si $\lambda_1 = \lambda_2 =: \lambda$, alors A est de la forme λI et commute avec toute matrice ; pour tout P on a donc

$$PAP^{-1} = APP^{-1} = AI = A.$$

Donc $\mathrm{Stab}(A) = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F})$.

- Supposons maintenant que $\lambda_1 \neq \lambda_2$ et cherchons quelles matrices inversibles $P = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$ satisfont l'équation ci-dessus, qu'on peut ré-écrire pour plus de commodité sous la forme
$$PA = AP,$$
i.e.
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 & 0 \\ 0 & \lambda_2 \end{bmatrix},$$
soit
$$\begin{bmatrix} \lambda_1 a & \lambda_1 b \\ \lambda_2 c & \lambda_2 d \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \lambda_1 a & \lambda_2 b \\ \lambda_1 c & \lambda_2 d \end{bmatrix}.$$
Puisque $\lambda_1 \neq \lambda_2$, on doit conclure que $b = c = 0$. Pour leur part, a et d peuvent être quelconques (à condition que P soit inversible), on a donc
$$\mathrm{Stab}(A) = \left\{ \begin{bmatrix} a & 0 \\ 0 & d \end{bmatrix} \,\middle|\, a, d \in \mathbf{F}^\times \right\}.$$

Question 3

Considérons la matrice à coefficients dans le corps à 7 éléments $\mathbf{F}_7$
$$A := \begin{bmatrix} 4 & 4 & 3 & 2 \\ 4 & 6 & 0 & 5 \\ 6 & 4 & 4 & 0 \end{bmatrix}.$$
Déterminer des matrices inversibles P et Q pour lesquelles PAQ est sous forme canonique.

Plusieurs réponses possibles selon les choix effectués lors de la résolution, par exemple
$$P = \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 3 & 4 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 3 & 1 \\ 0 & 1 & -2 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$
Dans tous les cas, on doit avoir
$$PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

Question 4

Soit $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ l'application linéaire définie par
$$T(x, y, z, t) = \big(x - 2z + 2t,\ x + y + 2z - t,\ x - 3y + 4z + t,\ x - 2y + 2z + 2t\big).$$
Sachant que les valeurs propres de T sont 1, 2 et 3, donner une matrice diagonale D et une base $\mathcal{B}$ de $\mathbf{R}^4$ pour lesquelles
$${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = D.$$

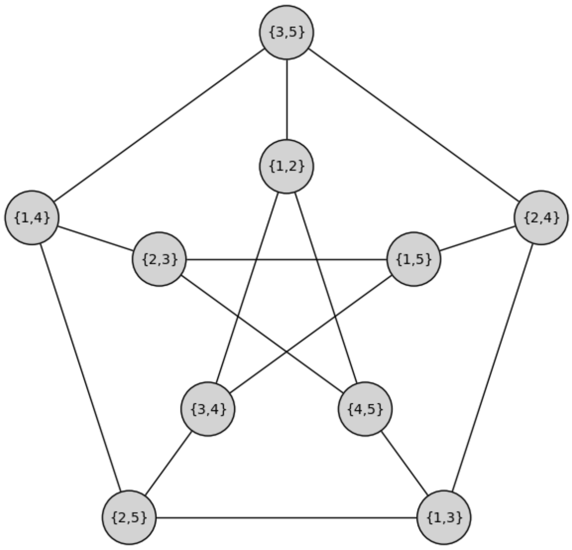
Encore une fois, plusieurs réponses sont possibles, bien que la marge de manœuvre soit plus réduite que pour la question précédente. On peut prendre, par exemple
$$\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 1 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 2 \\ 4 \\ 3 \end{bmatrix} \right)$$
et ainsi avoir
$${}_{\mathcal{B}}[T]_{\mathcal{B}} = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}.$$

Question bonus

Vous avez bien sûr reconnu dans la figure de la page précédente une représentation du célèbre *graphe de Petersen* G_5. Formellement, on peut décrire les sommets de ce graphe par

$$V(G_5) = \mathcal{P}_2(\llbracket 1,5 \rrbracket) = \big\{\{1,2\},\ \{1,3\},\ \{1,4\},\ \{1,5\},\ \{2,3\},\ \{2,4\},\ \{2,5\},\ \{3,4\},\ \{3,5\},\ \{4,5\}\big\}$$

avec une arête entre deux sommets lorsque les paires d'indices correspondantes sont disjointes.

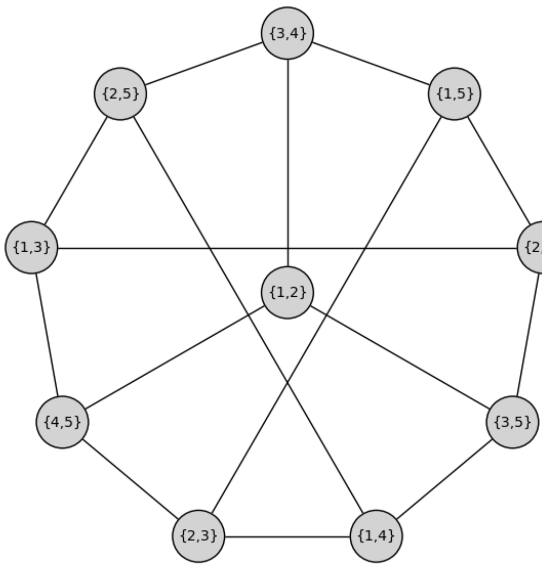


Le groupe symétrique $\mathfrak{S}_5$ agit sur les sommets du graphe *via*

$$\sigma \cdot \{i,\, j\} := \{\sigma(i),\, \sigma(j)\}$$

en préservant l'adjacence entre sommets : on parle de *symétrie combinatoire* (ou automorphisme de graphe) de G_5.

Par exemple, $\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)$ induit la symétrie combinatoire correspondant à la rotation de $+2\pi/5$ de la représentation ci-dessus. Cependant, certaines symétries combinatoires ne sont pas directement visibles géométriquement dans cette représentation, par exemple celle correspondant à $\sigma = (3\,4\,5)$ – mais on peut redessiner le graphe de façon à les rendre plus apparentes.



Mon collègue de bureau aimerait afficher sur son mur une copie de chaque coloriage « vraiment différent » de la figure, considérant que deux coloriages sont « les mêmes » lorsqu'ils ne diffèrent que par une symétrie combinatoire induite par une permutation $\sigma \in \mathfrak{S}_5$.

Combien de copies de la figure seront nécessaires cette fois ?

[*Indication* : Raisonner sur la décomposition cyclique de σ et étudier les orbites de son action sur $V(G_5)$]