CIR2 CNB2 — Interrogation 3 — 15 Novembre 2019

# Intégrales impropres

| NOM | Prénom | Classe |
|---|---|---|
| | | |

Durée 45 minutes
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable
Inscrire les réponses sur la feuille d'énoncé, sans râture ni surcharge (utiliser un brouillon !)

1. Soit $\alpha$ un réel strictement positif.
Compléter par « VRAI » , « FAUX » ou « On ne sait pas » *(bonne réponse +0.5, mauvaise réponse -0.5).*

| Si ↓ Alors ➔ | l'intégrale $\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge | l'intégrale $\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge |
|---|---|---|
| $\alpha < 1$ | **VRAI** | **FAUX** |
| $\alpha = 1$ | **FAUX** | **FAUX** |
| $\alpha > 1$ | **FAUX** | **VRAI** |

2. Soient $[a,b[$ un intervalle et $f$ et $g$ des fonctions continues sur $[a,b[$ et dont l'intégrale sur $[a,b[$ converge .
Compléter par « VRAI » , « FAUX » ou « On ne sait pas » *(bonne réponse +0.5, mauvaise réponse -0.5).*

| | |
|---|---|
| $\int_a^b \lvert f(t)\rvert dt \leqslant \left\lvert \int_a^b f(t)\,dt \right\rvert$ | **FAUX** |
| $\int_a^b f(t)g(t)\,dt = \left(\int_a^b f(t)\,dt\right)\left(\int_a^b g(t)\,dt\right)$ | **FAUX** |
| $\int_a^b \lambda f(t)\,dt = \lambda \int_a^b f(t)\,dt \quad (\lambda \in \mathbb{R})$ | **VRAI** |
| si $\forall t \in [a,b[ \; f(t) \leqslant g(t)$ alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$ | **VRAI** |

3. Soient $[a,b[$ un intervalle et $f$ et $g$ des fonctions continues et positives sur $[a,b[$.
Compléter par « VRAI » , « FAUX » ou « On ne sait pas » *(bonne réponse +0.5, mauvaise réponse -0.5).*

| | |
|---|---|
| si $\forall t \in [a,b[ \; f(t) \leqslant g(x)$ et que $\int_a^b f(t)\,dt$ converge alors $\int_a^b g(t)\,dt$ converge | **On ne sait pas** |
| si $\forall t \in [a,b[ \; f(t) \leqslant g(x)$ et que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge | **VRAI** |
| si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent alors $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt$ converge | **VRAI** |
| si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ divergent alors $\int_a^b (f(t)+g(t))\,dt$ diverge | **On ne sait pas** |

4. *(3 points)* Écrire en français la signification du signe " = " dans les formules suivantes :

a / $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_\alpha^\beta f(\varphi(u))\varphi'(u)\,\mathrm{d}u$ ($f$ continue sur $[a,b[$ , $\varphi$ bijection de classe $C^1$ de $[\alpha,\beta[$ dans $[a,b[$ )

L'intégrale à gauche converge si et seulement si l'intégrale à droite converge
et dans ce cas les deux intégrales ont la même valeur (changement de variable)

b / $\int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t = \int_a^c f(t)\,\mathrm{d}t + \int_c^b f(t)\,\mathrm{d}t$ ($f$ continue sur $]a,b[$ , $c \in ]a,b[$ )

L'intégrale à gauche converge si et seulement si <u>les deux</u> intégrales à droite convergent
et dans ce cas l'intégrale à gauche a comme valeur la somme des deux intégrales à droite
(par définition)

5. *(3 points)* Soient $I = \int_0^{\infty} \sin t\, e^{-t}\, dt$ et $J = \int_0^{\infty} \cos t\, e^{-t}\, dt$ (on admet qu'elles convergent)

Faire 2 intégrations par parties différentes sur $I$ pour trouver 2 relations différentes entre $I$ et $J$. Conclure.

$$\left.\begin{matrix} u = \sin t & v' = e^{-t} \\ u' = \cos t & v = -e^{-t} \end{matrix}\right| I = \left[\sin t\left(-e^{-t}\right)\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} \cos t\left(-e^{-t}\right) dt = 0 - 0 + J$$

$$\left.\begin{matrix} u = e^{-t} & v' = \sin t \\ u' = -e^{-t} & v = -\cos t \end{matrix}\right| I = \left[(-\cos t)e^{-t}\right]_0^{\infty} - \int_0^{\infty} (-\cos t)\left(-e^{-t}\right) dt = 0 - (-1) - J$$

$I = J$ et $I = 1 - J$ donc $I = J = \frac{1}{2}$

6. *(3 points)* Faire le changement de variable $u = -\ln(t)$ dans l'intégrale impropre $K = \int_0^1 \sin\left(\ln(t)\right) dt$. Conclure.

$u = -\ln t$ , $t = e^{-u}$ , $dt = -e^{-u} du$ , $K = \int_0^1 \sin\left(\ln(t)\right) dt = \int_{+\infty}^{0} \sin(-u)\left(-e^{-u}\right) du = -\int_0^{\infty} \sin u\; e^{-u} du$

On retrouve au signe près l'intégrale $I$ du 5. Donc $K$ converge vers $-\frac{1}{2}$

7. *(6 points)* Déterminer la valeur éventuelle : (entourer la réponse correcte)

| | | | | | | | |
|---|---|---|---|---|---|---|---|
| $\int_0^1 \frac{dt}{t^{3/4}} = \ldots$ | 4 | 2 | $\frac{3}{4}$ | $\frac{4}{3}$ | 0 | autre résultat | ne converge pas |
| $\int_{-\infty}^{\infty} \frac{t\, dt}{1+t^2} = \ldots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | 0 | 1 | -1 | autre résultat | ne converge pas |
| $\int_0^{\infty} \frac{dt}{t^2+1} = \ldots$ | $\frac{\pi}{2}$ | $\frac{\pi}{4}$ | 0 | 1 | -1 | autre résultat | ne converge pas |
| $\int_{-1}^{1} \frac{dt}{\sqrt{1-t^2}} = \ldots$ | 0 | $\frac{\pi}{2}$ | $\pi$ | $\frac{1}{2}$ | 1 | autre résultat | ne converge pas |
| $\int_0^{\infty} e^{-t/2}\, dt = \ldots$ | -2 | -1 | 0 | 1 | 2 | autre résultat | ne converge pas |
| $\int_0^{\infty} \cos(t)\, dt = \ldots$ | $\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ | $-\frac{\sqrt{2\pi}}{4}$ | $\frac{\pi}{4}$ | $-\frac{\pi}{4}$ | 0 | autre résultat | ne converge pas |