ISEN Lille 29 mai 2017

$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

— Jack —

a) Soit $\mathbf{F}$ un corps, $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ l'ensemble des matrices carrées $n \times n$ à coefficients dans $\mathbf{F}$ et $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F}) \subseteq \mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ celui des matrices inversibles. Vérifier que la formule suivante définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$:

$$P \star A := P\,A\,P^{-1}.$$

- Si P est une matrice $n \times n$ inversible et A une matrice $n \times n$, le produit $P\,A\,P^{-1}$ est une matrice $n \times n$ bien définie ; on a donc bien une loi de composition externe

$$\star : \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{F}) \longrightarrow \mathcal{M}_n(\mathbf{F}).$$

- Le neutre agit trivialement :

$$I \star A = I\,A\,I^{-1} = I\,A\,I = A \qquad \checkmark$$

- Associativité :

$$P \star (Q \star A) = P(QAQ^{-1})P^{-1} = (PQ)A(PQ)^{-1} = (PQ) \star A \qquad \checkmark$$

b) Deux matrices sont dans la même orbite pour cette action si et seulement si elles représentent le même endomorphisme dans deux bases différentes. Pour $n = 3$ et $\mathbf{F} = \mathbf{Q}$, les matrices suivantes sont-elles dans la même orbite ?

$$A_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A_2 = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Les deux matrices ont le même polynôme caractéristique $(\lambda - 1)^2(\lambda - 2)$. Cependant, en regardant les espaces propres :

$$\mathrm{Ker}(A_1 - I) = \mathrm{Vect}(e_1, e_2) \qquad \mathrm{Ker}(A_2 - I) = \mathrm{Vect}(e_1),$$

on voit que A_1 est diagonalisable (i.e. est dans la même orbite qu'une matrice diagonale) alors que la seconde ne l'est pas. Les matrices A_1 et A_2 ne sont donc pas dans la même orbite pour cette action.

c) Combien y a-t-il d'orbites pour cette action dans le cas $n = 2$, $\mathbf{F} = \mathbf{F}_2$? Donner un représentant pour chacune.

On peut s'y prendre (d'au moins) 2 façons pour étudier l'action de $G = \mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur $X = \mathcal{M}_2(\mathbf{F}_2)$.

1) En examinant les 16 éléments de X du point de vue de la réduction des endomorphismes. On peut dans un premier temps trier les matrices selon leur polynôme caractéristique,

$$\lambda^2 : \quad \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda(\lambda+1) : \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

$$(\lambda+1)^2 : \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \qquad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\lambda^2 + \lambda + 1 : \quad \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$$

puis pour chacun distinguer les différentes orbites. Pour cela remarquons :

- Si une matrice a deux valeurs propres distinctes (nécessairement 0 et 1), elle est forcément diagonalisable, i.e. dans l'orbite de la matrice diagonale $\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$. Les matrices avec polynôme caractéristique $\lambda(\lambda+1)$ sont donc toutes dans la même orbite.
- Une matrice avec valeur propre répétée λ, si elle est diagonalisable, est forcément *égale* à la matrice $\begin{bmatrix} \lambda & 0 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$ (car cette matrice commute avec tous les changements de base).

- Si une matrice avec propre répétée n'est pas diagonalisable, puisqu'elle est forcément trigonalisable, c'est qu'elle est équivalente à $\begin{bmatrix} \lambda & 1 \\ 0 & \lambda \end{bmatrix}$.
- Les deux matrices sans valeur propre dans $\mathbf{F}_2$ sont équivalentes, puisque par exemple

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}.$$

Il y a donc 6 orbites (mises en évidence dans la liste ci-dessus).

2) Autre approche : si on veut utiliser la formule de Cauchy-Frobenius, on va plutôt s'intéresser aux éléments de

$$\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2) = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \right\}$$

et déterminer pour chacun les fixateurs en résolvant une équation matricielle :

$$A \in \mathrm{Fix}(P) \iff P \star A = A \iff PA = AP.$$

On trouve explicitement (on peut aller plus vite en remarquant que le nombre d'éléments fixés ne dépend *a priori* que de l'ordre de la transformation) :

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_2(\mathbf{F}_2)$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbf{F}_2 \right\}$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 1 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x & 0 \\ y & x \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbf{F}_2 \right\}$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ 0 & x \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbf{F}_2 \right\}$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} x & y \\ y & x+y \end{bmatrix} \;\middle|\; x, y \in \mathbf{F}_2 \right\} = \mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 1 \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne bien

$$|X/G| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \frac{16 + 5 \cdot 2^2}{6} = 6.$$

— Ginger —

a) Déterminer l'ordre multiplicatif de chaque élément dans $\mathbf{F}_9^\times$, où $\mathbf{F}_9 = \{ \, a + bj \mid a, b \in \mathbf{F}_3 \, \}$, $j^2 = -1$. Quels sont les éléments primitifs ?

En calculant les puissances des différents éléments de $\mathbf{F}_9^\times$ (ou autrement), on trouve

- ordre 1 : 1
- ordre 2 : -1
- ordre 4 : $\pm j$
- ordre 8 : $\pm 1 \pm j$ (éléments primitifs)

(Cela est en accord avec le nombre d'éléments primitifs attendus soit $\phi(|\mathbf{F}_9^\times|) = \phi(8) = 4$.)

b) Quelles sont les solutions de l'équation $x^3 + x + 1 = 0$ dans $\mathbf{F}_9$? (il y en a une évidente)

La solution évidente est $x = 1$ et le polynôme proposé se factorise comme $(x-1)(x^2+x-1)$. Pour déterminer les racines du facteur de second degré on peut utiliser la formule usuelle : $\Delta = -1 = (\pm j)^2$, ce qui donne comme autres solutions

$$x = \frac{-1 \pm j}{2} = 1 \mp j.$$

c) Gonzague considère des suites d'entiers (x_n) satisfaisant la récurrence

$$x_{n+3} = -x_{n+1} - x_n \qquad (n \geqslant 0)$$

et constate avec stupeur que la suite des restes (x_n mod 6) présente toujours une période dont la longueur divise 56. Sauriez-vous lui expliquer pourquoi ?

Pour étudier la suite des restes modulo 6, il suffit d'après le théorème des restes chinois de l'étudier modulo 2 et modulo 3. Dans les deux cas on s'intéresse à l'ordre multiplicatif des racines de l'équation caractéristique de l'équation

$$\lambda^3 + \lambda + 1 = 0.$$

- Modulo 2 : l'équation n'a pas de solution dans $\mathbf{F}_2$, ses trois racines α, β, γ sont donc dans $\mathbf{F}_8^\times$ donc forcément d'ordre multiplicatif 7 (d'après Lagrange).
  On sait que les restes modulo 2 peuvent s'écrire

$$x_n \equiv_2 A\alpha^n + B\beta^n + C\gamma^n$$

  où A, B, C sont des constantes dépendant des conditions initiales, ils sont donc 7-périodiques.
- Modulo 3 : on sait déjà d'après la question précédente que les racines de l'équation caractéristique sont d'ordre 1, 8 et 8, donc les restes

$$x_n \equiv_3 D + E(1+j)^n + F(1-j)^n$$

  sont forcément 8-périodiques (voire constants si jamais $E = F = 0$).

En mettant ces deux affirmations ensemble, on trouve bien une période de $7 \vee 8 = 56$ pour les restes mod 6.

— Eric —

a) Soit V un espace vectoriel réel de dimension finie muni d'un produit scalaire $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle$. Si (v_i) est une base orthogonale de V et $v = \sum_i x_i v_i$, démontrer soigneusement que

$$x_i = \frac{\langle v \,|\, v_i \rangle}{||v_i||^2} \qquad (1 \leqslant i \leqslant n).$$

Si $v = \sum_j x_j v_j$, on développe par linéarité le produit scalaire

$$\langle v \,|\, v_i \rangle = \Big\langle \sum_j x_j v_j \,\Big|\, v_i \Big\rangle = \sum_j x_j \, \langle v_j \,|\, v_i \rangle \, .$$

Or par l'orthogonalité de la famille (v_i) on sait que $\langle v_j \,|\, v_i \rangle = 0$ si $i \neq j$, donc

$$\langle v \,|\, v_i \rangle = \sum_{j \neq i} x_j \underbrace{\langle v_j \,|\, v_i \rangle}_{0} + x_i \, \langle v_i \,|\, v_i \rangle = x_i \, \|v_i\|^2 \, ,$$

ce qui nous donne la formule anoncée en divisant par $\|v_i\|^2$ (ce qu'on a le droit de faire car $v_i \neq 0$).

b) Vérifier que la formule suivante définit un produit scalaire sur l'espace vectoriel des fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ sur $[0, 1]$:

$$\langle f \,|\, g \rangle := \int_0^1 f'(x)\, g'(x)\, \mathrm{d}x + f(0)\, g(0).$$

- Les fonctions étant de classe $\mathcal{C}^1$, leurs dérivées sont définies et continues, donc intégrables... donc l'application est bien définie.
- Linéarité en la 2e variable :

$$\langle f \,|\, \alpha g + \beta h \rangle = \int_0^1 f'(x)\big(\alpha g'(x) + \beta h'(x)\big)\, \mathrm{d}x + f(0)\big(\alpha g(0) + \beta h(0)\big) = \ldots = \alpha \, \langle f \,|\, g \rangle + \beta \, \langle f \,|\, h \rangle \quad \checkmark$$

- Symétrie :

$$\langle g \,|\, f \rangle = \int_0^1 g'(x) f'(x)\, \mathrm{d}x + g(0) f(0) = \int_0^1 f'(x) g'(x)\, \mathrm{d}x + f(0) g(0) = \langle f \,|\, g \rangle \quad \checkmark$$

  (d'où la linéarité en la 1re variable qui suit d'après le point précédent)

- Positivité :

$$\langle f \mid f \rangle = \int_0^1 \underbrace{f'(x)^2}_{\geqslant 0} \,\mathrm{d}x + \underbrace{f(0)^2}_{\geqslant 0} \geqslant 0 \quad \checkmark$$

- Définitude : si $\langle f \mid f \rangle = 0$, alors on doit avoir (la dérivée f' étant continue) $f'(x) = 0$ pour tout $x \in [0,1]$ et $f(0) = 0$; la fonction est constante, et cette constante vaut 0, donc $f = 0$.

c) Déterminer une base orthogonale du sous-espace $\mathbf{R}[x]_{\leqslant 2}$ des polynômes de degré $\leqslant 2$ pour ce produit scalaire.

Si on commence avec la base monomiale $(1, X, X^2)$, on trouve la matrice de Gram $[\langle X^i \mid X^j \rangle]$ suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & \frac{4}{3} \end{bmatrix} \overset{*_3 - *_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{3} \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne une base orthogonale : $(1, X, X^2 - X)$.

(Ou alors on raisonne par projections orthogonales successives.)

— Bonus : Culture générale —

À quel influent groupe musical des années 60 les trois prénoms utilisés pour numéroter les questions font-il référence ?

Il s'agit bien sûr (?) de Cream, habituellement considéré comme le premier *supergroupe* de l'histoire du rock

(à ne pas confondre avec la notion de supergroupe en physique mathématique).