$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

土 (terre)

On considère l'espace vectoriel V des fonctions continues $[-1,1] \to \mathbf{R}$ muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle := \int_{-1}^{1} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

a) Calculer une base orthogonale du sous-espace tridimensionnel W des polynômes de degré 2 ou moins.

Si on applique Gauss-Lagrange à la matrice du produit scalaire par rapport à la base monomiale $(1,\, x,\, x^2)$:

$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \overset{(3)-\frac{1}{3}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 0 & 0 & 8/45 \end{bmatrix}$$

on trouve que $\mathcal{B} := (1,\, x,\, x^2 - \frac{1}{3})$ est une base orthogonale (autres réponses possibles).

b) En interprétant la question comme un problème de projection orthogonale, déterminer la meilleure approximation au sens des moindres carrés sur l'intervalle $[-1,1]$ de $h(x) = e^x$ par une fonction de la forme $a + bx + cx^2$.

On cherche la fonction $p \in W = \mathrm{Vect}(1,\, x,\, x^2)$ minimisant l'expression

$$\int_{-1}^{1} (h(x) - a - bx - x^2)^2\, \mathrm{d}x = ||h - p||^2;$$

en d'autres termes, f est la projection orthogonale de h sur W. On détermine les coefficients, soit en résolvant le système d'équations

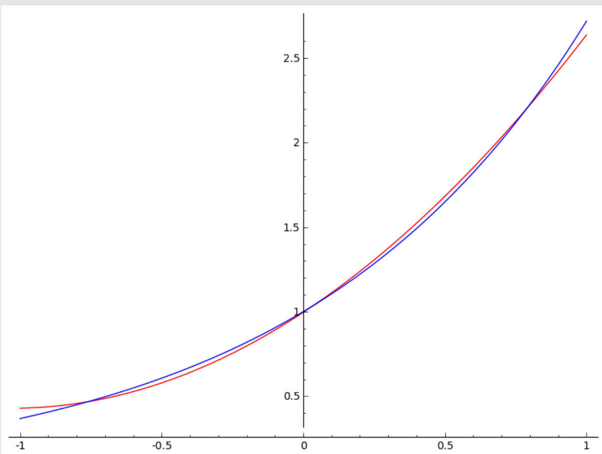
$$\begin{bmatrix} 2 & 0 & 2/3 \\ 0 & 2/3 & 0 \\ 2/3 & 0 & 2/5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle e^x \mid 1 \rangle \\ \langle e^x \mid x \rangle \\ \langle e^x \mid x^2 \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} e - e^{-1} \\ 2e^{-1} \\ e - 5e^{-1} \end{bmatrix},$$

soit en utilisant la formule de projection

$$f(x) = \frac{\langle e^x \mid 1 \rangle}{||1||^2} 1 + \frac{\langle e^x \mid x \rangle}{||x||^2} x + \frac{\langle e^x \mid x^2 - \frac{1}{3} \rangle}{||x^2 - \frac{1}{3}||^2} (x^2 - \frac{1}{3}).$$

Dans les deux cas, on trouve

$$a = -\frac{3}{4}e + \frac{33}{4}e^{-1} \approx 0{,}996, \;\; b = 3e^{-1} \approx 1{,}104, \;\; c = \frac{15}{4}e - \frac{105}{4}e^{-1} \approx 0{,}537.$$



La fonction exponentielle et sa meilleure approximation quadratique

水 (eau)

Considérons l'application linéaire « transposée » sur l'espace vectoriel de dimension 9 des matrices réelles 3×3 :

$$\varphi : \mathcal{M}_3(\mathbf{R}) \to \mathcal{M}_3(\mathbf{R}), \qquad \varphi(A) := A^\top.$$

a) Utiliser le fait que $\varphi \circ \varphi = \mathrm{Id}$ pour vous convaincre que les seules possibilités de valeurs propres pour φ sont ± 1. Quelles sont les multiplicités algébriques de chacune ?

Si λ est une valeur propre de φ avec matrice propre associée A, *i.e.* $A^\top = \lambda A$, alors

$$A = (A^\top)^\top = (\lambda A)^\top = \lambda A^\top = \lambda^2 A$$

d'où $\lambda^2 = 1$ puisque $A \neq 0$; il suit que $\lambda = \pm 1$, disons de multiplicités algébriques respectives m_+ et m_-.
Pour déterminer celles-ci, le plus simple est de calculer la trace de φ : d'une part, celle-ci vaut

$$\operatorname{tr} \varphi = m_+ - m_-;$$

d'autre part, en la calculant à l'aide de la représentation matricielle de φ par rapport la base « canonique » des matrices A_{ij} nulles sauf pour un 1 en position (i, j). Puisque $\varphi(A_{ij}) = A_{ij}^\top = E_{ji}$, les seules colonnes de $[\varphi]$ contenant des valeurs non nulles sur la diagonale sont celles correspondants aux matrices E_{ij} avec $i = j$; on a donc

$$\operatorname{tr} \varphi = 3.$$

En résolvant le système d'équations

$$\begin{cases} m_+ - m_- = 3, \\ m_+ + m_- = 9, \end{cases}$$

on trouve $m_+ = 6$, $m_- = 3$.

b) Montrer que φ est diagonalisable en explicitant une base de vecteurs (matrices) propres (assurez-vous d'obtenir des résultats cohérents avec ceux du point précédent). Quelle est la signification des espaces propres dans cet exemple ?

E_1 est le sous-espace des matrices symétriques, admettant comme base (par exemple)

$$A_{11},\ A_{22},\ A_{33},\ A_{12} + A_{21},\ A_{13} + A_{31},\ A_{23} + A_{32}$$

alors que E_{-1} est celui des matrices antisymétriques, admettant comme base (par exemple)

$$A_{12} - A_{21},\ A_{13} - A_{31},\ A_{23} - A_{32}.$$

木 (bois)

Soit $\mathbf{F}$ un corps et n un entier naturel.

a) Montrer que l'on peut définir une action du groupe $G = \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ des matrices inversibles sur l'ensemble $X = \mathcal{S}\mathrm{ym}_n(\mathbf{F})$ des matrices symétriques à coefficients dans $\mathbf{F}$ à l'aide de la formule

$$P \star A := P A P^\top.$$

- Pour tout $P \in G$ et $A \in X$, on a bien $P \star A \in X$ puisque

  $$(P \star A)^\top = (P A P^\top)^\top = (P^\top)^\top A^\top P^\top = PAP^\top = P \star A :$$

  il s'agit bien d'une matrice symétrique.
- Pour toutes matrices $P, Q \in G$ et $A \in X$, on a

  $$P \star (Q \star A) = P(QAQ^\top)P^\top = (PQ)A(PQ)^\top = (PQ) \star A$$

- Pour toute $A \in X$, on a

  $$I \star A = IAI^\top = AI = A.$$

Il s'agit bien d'une action.

b) Dans le cas $\mathbf{F} = \mathbf{R}$ et $n = 3$, déterminer à l'aide du critère des mineurs principaux si les matrices

$$\begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 \\ -1 & 2 & 0 \\ -1 & 0 & 0 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & -3 \\ 1 & -3 & 6 \end{bmatrix}$$

sont dans la même orbite pour cette action. La réponse change-t-elle si l'on prend $\mathbf{F} = \mathbf{C}$?

Deux matrices symétriques A et B sont dans la même orbite pour cette action si et seulement s'il existe une matrice inversible P telle que $B = PAP^\top$. En d'autres termes, en interprétant P comme une matrice de passage, si et seulement si A et B représentent la même forme bilinéaire dans des bases différentes.
Raisonnons sur la forme normale de Sylvester de chaque matrice, puisqu'il y en a une unique dans chaque orbite :

- Pour la première, on obtient pour les mineurs principaux

$$\text{dét}\, A_1 = 1 > 0, \quad \text{dét}\, A_2 = 3 > 0, \quad \text{dét}\, A_3 = -2 < 0,$$

  donc forme normale

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}.$$

- Pour la seconde, on a

$$\text{dét}\, B_1 = 1 > 0, \quad \text{dét}\, B_2 = 2 > 0, \quad \text{dét}\, B_3 = 1 > 0,$$

  donc forme normale

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

Elles ne sont donc pas dans la même orbite sur $\mathbf{R}$; mais sur $\mathbf{C}$ la différence de signe n'est pas un problème :

$$\begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & i \end{bmatrix} \star \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix}.$$

金 (métal)

a) Déterminer la représentation en série de Fourier sur $[-\pi, \pi]$ de la fonction

$$f(x) = \begin{cases} -\pi - x & \text{si } -\pi \leqslant x < -\frac{\pi}{2}, \\ x & \text{si } -\frac{\pi}{2} \leqslant x < \frac{\pi}{2}, \\ \pi - x & \text{si } \frac{\pi}{2} \leqslant x \leqslant \pi. \end{cases}$$

On a $a_n = 0$ pour tout n puisque f est impaire. Pour les b_n, on trouve après intégration par parties et simplification

$$b_n = \frac{4}{\pi n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) = \begin{cases} 0 & n = 2k \\ \frac{4(-1)^k}{\pi(2k+1)^2} & n = 2k+1 \end{cases}$$

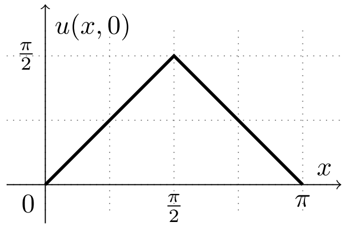
on a donc, d'après le théorème de Dirichlet,

$$f(x) = \frac{4}{\pi} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{n\pi}{2}\right) \sin(nx) = \frac{4}{\pi} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(-1)^k}{(2k+1)^2} \sin[(2k+1)x].$$

b) Donner une formule pour le déplacement latéral $u(x,t)$, satisfaisant l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

d'une corde de longueur π, fixée aux extrémités, initialement au repos, à partir de la position initiale suivante :



On sait (ou retrouve...) que la solution est de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \sin(nx)\cos(nct).$$

où les A_n sont les coefficients dans le développement en série de sinus de la condition initiale $u(x,0)$ sur $[0,\pi]$. En prolongement celle-ci en une fonction impaire sur $[-\pi,\pi]$, on obtient exactement la fonction f de la question précédente, de sorte que

$$u(x,t) = \frac{4}{\pi}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}\sin\left(\frac{n\pi}{2}\right)\sin(nx)\cos(nct) = \frac{4}{\pi}\sum_{k=0}^{\infty}\frac{(-1)^k}{(2k+1)^2}\sin[(2k+1)x]\cos[(2k+1)ct].$$

火 (feu)

On travaille pour cette question dans le corps $\mathbf{F}_5$ à 5 éléments.

a) Diagonaliser, si possible, la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & 1 \\ -1 & 1 & 2 \\ -1 & -1 & -1 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{F}_5).$$

$$\chi_A(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)(\lambda+1)$$

$$E_2 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}0\\2\\1\end{bmatrix}\right),\quad E_1 = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}2\\1\\1\end{bmatrix}\right),\quad E_{-1} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}-1\\1\\1\end{bmatrix}\right)$$

Si on prend, par exemple, $P = \begin{bmatrix} 0 & 2 & -1 \\ 2 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, on a $P^{-1}AP = \begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}$.

b) Utiliser cela pour donner une formule explicite pour a_n, b_n et c_n si ces trois suites dans $\mathbf{F}_5$ satisfont

$$\begin{cases} a_{n+1} = 2a_n + 2b_n + c_n \\ b_{n+1} = -a_n + b_n + 2c_n \\ c_{n+1} = -a_n - b_n - c_n \end{cases} \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

Si on pose $\mathbf{v}_n = \begin{bmatrix} a_n \\ b_n \\ c_n \end{bmatrix}$, l'équation s'écrit

$$\mathbf{v}_{n+1} = A\mathbf{v}_n.$$

On peut donc dire :

$$\mathbf{v}_n = A^n\mathbf{v}_0 = P\begin{bmatrix} 2 & & \\ & 1 & \\ & & -1 \end{bmatrix}^n P^{-1}\mathbf{v}_0 = \begin{bmatrix} 2(-1)^n - 1 & (-1)^{n+1} + 1 & (-1)^n - 2 \\ 2(-1)^{n+1} + 2 & 2^{n+1} + (-1)^n - 2 & -2^{n+1} - 2(-1)^n - 1 \\ 2(-1)^{n+1} + 2 & 2^n + (-1)^n - 2 & -2^n + 2(-1)^{n+1} - 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a_0 \\ b_0 \\ c_0 \end{bmatrix}.$$