

TD 2020/12/1 Séries entières

3/ Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle  $x(2-x)y' + (1-x)y = 1$ .  
Étudier la série obtenue aux bornes de l'intervalle de convergence.

Cherchons  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$  au voisinage de  $x=0$

EDO lin. non homog.  
deg. 1 coeff. non constant

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n$$

EDO :  $x(2-x) \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + (1-x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$

$$2x \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n - x^2 \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} x^{n+2} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2(n+1) a_{n+1} x^{n+1} - \sum_{n=1}^{\infty} n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

$$2 \cdot 0 \cdot a_0 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} (2(n+1) a_{n+1} - n a_n + a_n - a_{n-1}) x^n = 1$$

$$(2n+1) a_n - n a_{n-1}$$

par l'unicité des coeff.

$a_0 = 1$  et  $(2n+1) a_n - n a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1$

eq. de récurrence pour  $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$  sur  $] -R, R[$   $R > 0$

$\Rightarrow b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$  (Taylor)

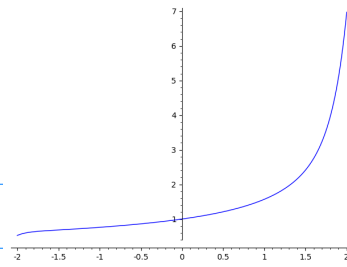
conséquence :  $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Leftrightarrow b_n = c_n \quad \forall n \geq 0$  sur  $] -R, R[$

$a_0 = 1 \quad \checkmark \quad a_n = \frac{n a_{n-1}}{2n+1} = \frac{n}{(2n+1)} a_{n-1} \quad n \geq 1$

$a_1 = \frac{1}{3} a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{5} a_1 = \frac{2}{5 \cdot 3} = \frac{2}{15}$

$a_3 = \frac{3}{7} a_2 = \frac{6}{7 \cdot 15} \quad \dots \quad a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}$

Bref :  $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} x^n$



rayon de convergence :

D'Alembert :  $L = \lim_{n \rightarrow \infty} \left| \frac{(n+1)! x^{n+1}}{(2n+3)!!} \cdot \frac{(2n+1)!!}{n! x^n} \right|$

$\rho = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \quad R = \frac{1}{\rho} = 2$   $= |x| \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{|x|}{2}$

$\begin{cases} \text{conv.} & \text{si } L = \frac{|x|}{2} < 1 & \text{i.e. } |x| < 2 \\ \text{div.} & \text{si } L > 1 & \text{i.e. } |x| > 2 \end{cases} \quad \text{donc } R = 2$

On a trouvé une solution analytique sur  $] -2, 2[$

4/ Déterminer une solution  $f$  développable en série entière de l'équation différentielle  $x(2+x)y' + (1+x)y = 1$ .

Résoudre cette équation de façon élémentaire. Quelles sont les solutions bornées au voisinage de 0 ?

Exprimer  $f$  à l'aide de fonctions élémentaires. En déduire  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$  et  $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

On cherche  $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad a_n \in \mathbb{R} \quad \text{au voisinage de } 0$

$2x y' + x^2 y' + y + x y = 1$

$2x \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x^2 \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + x \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1$

$\sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 1$

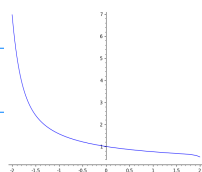
$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} ((2n+1) a_n + n a_{n-1}) x^n = 1$

$\Rightarrow a_0 = 1, \quad (2n+1) a_n + n a_{n-1} = 0 \quad \forall n \geq 1$

$a_n = -\frac{n a_{n-1}}{2n+1}$

$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!} x^n$



Recherche élémentaire de solution :

$$x(2+x)y' + (1+x)y = 1$$

solution générale = solution gén. homog. + solution part.

éq. homog.:  $x(2+x) \frac{dy}{dx} + (1+x)y = 0$

$$x(2+x) \frac{dy}{dx} = -(1+x)y$$

$$-\frac{dy}{y} = \frac{(1+x)}{x(2+x)} dx$$

↓

$$\int -\frac{dy}{y} = \int \frac{(1+x)}{x(2+x)} dx$$

$$-\ln|y| + C = \int \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{2+x} dx$$

$$= 1/2 \ln|x| + 1/2 \ln|2+x|$$

$$= \ln|x|^{1/2} + \ln|x+2|^{1/2}$$

$$= \ln \sqrt{|x(x+2)|}$$

$$\ln|y| = C - \ln \sqrt{|x(x+2)|}$$

$$|y| = \frac{e^C}{\sqrt{|x(x+2)|}}$$

$$y = \pm \frac{e^C}{\sqrt{|x(x+2)|}} = \frac{A}{\sqrt{|x(x+2)|}} \quad \text{constante}$$

solution de l'éq. non homog.:

cherchons  $y(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{x(x+2)}}$

$$y'(x) = \frac{A'(x)}{\sqrt{x(x+2)}} - \frac{1}{2} A(x) (x(x+2))^{-3/2} (x+2+x)$$

$$= A'(x) (x(x+2))^{-1/2} - (x+1) A(x) (x(x+2))^{-3/2}$$

$$x(x+2)y' + (1+x)y = 1$$

$$A'(x(x+2))^{1/2} - (x+1)A(x(x+2))^{1/2} + (1+x)A(x(x+2))^{1/2} = 1$$

$$A' = \frac{1}{(x(x+2))^{1/2}} = (x(x+2))^{-1/2}$$