Maths – 2e semestre

Analyse complexe

Consignes

- L'épreuve dure **2h** et comporte **6 questions** indépendantes (**10 pts** chacune) sur **2 pages**.
- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant votre raisonnement et mentionnant les résultats utilisés.
- Bon courage !

1. On considère la fonction définie par la série

$$f(z) = \sum_{n=2}^{\infty} n(n-1)z^n.$$

   a) Quel est son domaine de définition ?

   b) Obtenir une formule explicite pour $f(z)$ en manipulant la série précédente.

   [*Indice* : reconnaissez-vous $\dfrac{f(z)}{z^2}$?]

   c) Lorsque l'on effectue des lancers successifs d'une pièce de monnaie non biaisée, la probabilité d'obtenir la combinaison PF pour la première fois après n lancers est

$$p_n = \frac{n-1}{2^n} \qquad (n \geqslant 2).$$

   Quelle est l'espérance $\mu = \sum_n n\, p_n$ du nombre de lancers nécessaires pour obtenir PF ?

2. a) Déterminer toutes les solutions analytiques au voisinage de $z = 0$ (ainsi que leur rayon de convergence) de l'équation différentielle

$$zf''(z) + 2f'(z) + zf(z) = 0.$$

   b) Si g désigne l'unique solution trouvée en a) telle que $g(0) = 1$, montrer que pour tout $z \neq 0$ appartenant à son disque de convergence on a

$$g(z) = \frac{\sin z}{z}.$$

   c) Vérifier que $h(z) = \dfrac{\cos z}{z}$ est également une solution. Pourquoi n'a-t-elle pas été trouvée en a) ?

3. Considérons la fonction complexe $f(z) = 1/z^2$.

   a) Calculer les parties réelles et imaginaires de $f(z)$.

   b) Étudier les deux familles de courbes images des droites $\operatorname{Re} z = a$ et $\operatorname{Im} z = b$ par la fonction f.

   c) Déterminer et représenter graphiquement l'ensemble des $z \in \mathbf{C}^*$ tels que $\sin f(z) = 0$.

4. a) Pour $z = x + iy \in \mathbf{C}$ avec $x, y \in \mathbf{R}$, établir les inégalités

$$|\operatorname{sh} y| \leqslant |\sin z| \leqslant \operatorname{ch} y.$$

   [*Indication* : décomposer $\sin z$ en parties réelle et imaginaire]

b) En déduire que la fonction $z \mapsto \sin z$ n'est pas bornée sur $\mathbf{C}$.

c) Démontrer que la série de fonctions complexes

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} \sin\left(\frac{z}{n^2}\right)$$

converge uniformément sur chaque bande horizontale de la forme

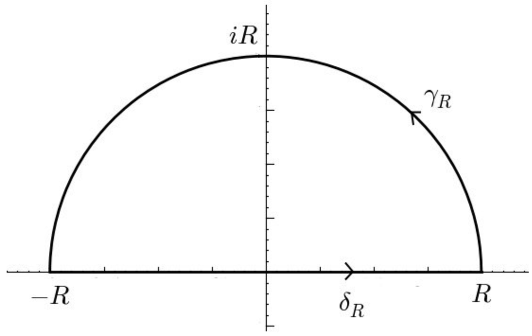
$$H_R = \{\ z \in \mathbf{C} \mid -R \leqslant \operatorname{Im} z \leqslant R\ \} \quad \text{avec } R > 0 \text{ fixé.}$$

5. Dans ce problème, nous allons évaluer de façon un peu détournée l'intégrale impropre réelle

$$I = \int_{-\infty}^{+\infty} \frac{1}{1+x^2}\, \mathrm{d}x$$

(dont on peut facilement donner la valeur si on connaît la fonction Arctan) !

Soient γ_R et δ_R les deux chemins orientés représentés ci-contre et considérons $f(z) = \dfrac{1}{1+z^2}$.



a) Selon Cauchy, que vaut $\displaystyle\int_{\gamma_R+\delta_R} f(z)\,\mathrm{d}z$ lorsque $R < 1$? Et lorsque $R > 1$?

b) En paramétrant δ_R, montrer que $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\delta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = I$.

c) Si $R > 1$, montrer que le long de γ_R on a la majoration

$$\left|\frac{1}{1+z^2}\right| \leqslant \frac{1}{R^2-1}.$$

En déduire que $\displaystyle\left|\int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z\right| \leqslant \frac{\pi R}{R^2-1}$, et donc la valeur de $\displaystyle\lim_{R\to\infty} \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z$.

d) Retrouver la valeur de I en écrivant

$$\int_{\gamma_R+\delta_R} f(z)\,\mathrm{d}z = \int_{\gamma_R} f(z)\,\mathrm{d}z + \int_{\delta_R} f(z)\,\mathrm{d}z$$

et en prenant la limite quand $R \to \infty$ à l'aide de a), b) et c).

6. a) Soit γ un cercle de rayon $\rho > 0$ centré en $z = a$ parcouru dans le sens anti-horaire. Pour $n \in \mathbf{Z}$, calculer directement (en utilisant la définition) l'intégrale curviligne

$$\int_{\gamma} (z-a)^n\,\mathrm{d}z.$$

[Il faudra distinguer les cas $n = -1$ et $n \neq -1$.]

b) Montrer qu'une série de puissances de la forme

$$\sum_{n=-N}^{\infty} a_n(z-a)^n = \frac{a_{-N}}{(z-a)^N} + \cdots + \frac{a_{-1}}{z-a} + a_0 + a_1(z-a) + \cdots + a_n(z-a)^n + \cdots$$

converge uniformément sur toute région annulaire de la forme $\varepsilon \leqslant |z-a| \leqslant r$ avec $0 < \varepsilon \leqslant r < R$, où $R = \displaystyle\lim_{n\to\infty} \left|\frac{a_n}{a_{n+1}}\right|$.

c) Soit f une fonction admettant une représentation en série de puissances comme en b) sur le disque troué $\{0 < |z-a| < R\}$ et γ un cercle comme en a) avec $0 < \rho < R$. Conclure que

$$\int_{\gamma} f(z)\,\mathrm{d}z = 2\pi i\, a_{-1}.$$

Reconnaissez-vous cet énoncé lorsque $N = 0$ et $N = 1$?