TD 2020/12/1 Séries entières

3/ Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle $x(2-x)y'+(1-x)y=1$.
Étudier la série obtenue aux bornes de l'intervalle de convergence.

EDO lin. non homog.
deg. 1 coeffs non constants

Cherchons $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ au voisinage de $x=0$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

EDO : $x(2-x)\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$

$$2x\sum_0^{\infty} n a_n x^{n-1} - x^2 \sum_0^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_0^{\infty} a_n x^n - x\sum_0^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_0^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_0^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_0^{\infty} a_n x^n - \sum_0^{\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

$$2\cdot \cancel{0} \cdot a_0 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \Big(\underbrace{2n a_n - (n-1)a_{n-1} + a_n - a_{n-1}}_{(2n+1)a_n - n a_{n-1}} \Big) x^n = 1$$

par l'unicité des coeff.

$a_0 = 1$ et $(2n+1)a_n - n a_{n-1} = 0 \quad \forall_{n\geq 1}$

éq. de récurrence pour $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ sur $]-R,R[$, $R>0$ $\Rightarrow b_n = \dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (Taylor)

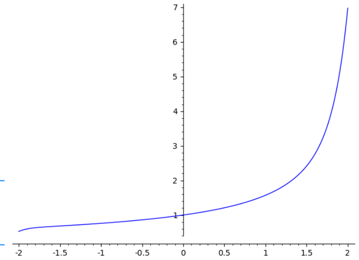
conséquence : $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n$ sur $]-R,R[$ $\Leftrightarrow b_n = c_n \ \forall_{n\geq 0}$

$a_0 = 1$ ✓ $\quad a_n = \dfrac{n a_{n-1}}{2n+1} = \dfrac{n}{(2n+1)} a_{n-1} \quad n \geq 1$

$$a_1 = \frac{1}{3} a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{5} a_1 = \frac{2}{5\cdot 3} = \frac{2}{15}$$

$$a_3 = \frac{3}{7}\cdot a_2 = \frac{6}{7\cdot 15} \quad \dots \quad \boxed{a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}}$$

Bref : $\quad y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} x^n$



rayon de convergence :

D'Alembert : $\quad L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{!}\ x^{\cancel{n+1}}}{(2n+3)\cancel{!!}} \cdot \frac{\cancel{(2n+1)}!!}{\cancel{n!}\ \cancel{x^n}} \right|$

$\ell = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2} \qquad R = \frac{1}{\ell} = 2$

$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{|x|}{2}$

$$\begin{cases} \text{conv. si } L = \frac{|x|}{2} < 1 & \text{i.e. } |x| < 2 \\ \text{div. si } L > 1 & \text{i.e. } |x| > 2 \end{cases} \qquad \text{donc } R = 2$$

On a trouvé une solution analytique sur $]-2,2[$

4/ Déterminer une solution **f** développable en série entière de l'équation différentielle $x(2+x)y'+(1+x)y=1$.
Résoudre cette équation de façon élémentaire. Quelles sont les solutions bornées au voisinage de 0 ?
Exprimer **f** à l'aide de fonctions élémentaires. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

On cherche $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \qquad a_n \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0

$2x y' + x^2 y' + y + xy = 1$

$2x \sum_0 n a_n x^{n-1} + x^2 \sum_0 n a_n x^{n-1} + \sum_0 a_n x^n + x \sum_0 a_n x^n = 1$

$\sum_0 2n a_n x^n + \sum_0 n a_n x^{n+1} + \sum_0 a_n x^n + \sum_0 a_n x^{n+1} = 1$

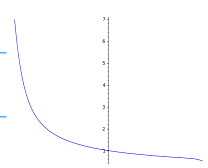
$\sum_0 2n a_n x^n + \sum_1 (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_0 a_n x^n + \sum_1 a_{n-1} x^n = 1$

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((2n+1) a_n + n a_{n-1} \right) x^n = 1$

$\Rightarrow \quad a_0 = 1 \quad , \quad (2n+1) a_n + n a_{n-1} = 0 \quad \forall_{n\geq 1}$

$a_n = \frac{-n\, a_{n-1}}{2n+1}$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!} x^n$



$a_n = \frac{(-1)^n\ n!}{(2n+1)!!}$

Recherche élémentaire de solution :

$$x(2+x)y' + (1+x)y = 1$$

solution générale = solution gén. homog. + solution part.

éq. homog. : $x(2+x)\frac{dy}{dx} + (1+x)y = 0$

$$x(2+x)\frac{dy}{dx} = -(1+x)y$$

$$-\frac{dy}{y} = \frac{(1+x)\,dx}{x(2+x)}$$

$$\downarrow$$

$$\int -\frac{dy}{y} = \int \frac{(1+x)\,dx}{x(2+x)}$$

$$-\ln|y| + C = \int \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{2+x}\,dx$$

$$= 1/2\ln|x| + 1/2\ln|2+x|$$

$$= \ln|x|^{1/2} + \ln|x+2|^{1/2}$$

$$= \ln\sqrt{|x(x+2)|}$$

$$\ln|y| = C - \ln\sqrt{|x(x+2)|}$$

$$|y| = \frac{e^c}{\sqrt{|x(x+2)|}}$$

constante

$$y = \frac{\pm e^c}{\sqrt{|x(x+2)|}} = \frac{A}{\sqrt{|x(x+2)|}}$$

solution de l'éq. non homog. :

chercheons $y(x) = \frac{A(x)}{\sqrt{x(x+2)}}$

$$y'(x) = \frac{A'(x)}{\sqrt{x(x+2)}} - \frac{1}{2}A(x)\left(x(x+2)\right)^{-3/2}(x+2+x)$$

$$= A'(x)\left(x(x+2)\right)^{-1/2} - (x+1)A(x)\left(x(x+2)\right)^{-3/2}$$

$$x(x+2)y' + (1+x)y = 1$$

$$A'\left(x(x+2)\right)^{1/2} - \cancel{(x+1)A\left(x(x+2)\right)^{1/2}} + \cancel{(1+x)A\left(x(x+2)\right)^{1/2}} = 1$$

$$A' = \frac{1}{\left(x(x+2)\right)^{1/2}} = \left(x(x+2)\right)^{-1/2}$$

TD 2020/12/1 Séries entières

3/ Déterminer une solution développable en série entière de l'équation différentielle $x(2-x)y'+(1-x)y=1$.
Étudier la série obtenue aux bornes de l'intervalle de convergence.

EDO lin. non homog.

deg. 1 coeffs non constants

Cherchons $y(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

au voisinage de $x=0$

$$y(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

$$y'(x) = a_1 + 2a_2 x + 3a_3 x^2 + \dots = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

EDO : $$x(2-x)\sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (1-x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$2x\sum_0^{\infty} n a_n x^{n-1} - x^2\sum_0^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_0^{\infty} a_n x^n - x\sum_0^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_0^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_0^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_0^{\infty} a_n x^n - \sum_0^{\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} 2n a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n - \sum_{n=1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

$$2\cdot\cancel{0}\cdot a_0 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big(\underbrace{2na_n - (n-1)a_{n-1} + a_n - a_{n-1}}_{(2n+1)a_n - n a_{n-1}}\Big)x^n = 1$$

par l'unicité des coeff.

$a_0 = 1$ et $(2n+1)a_n - n a_{n-1} = 0 \quad \forall_{n\geq 1}$

éq. de récurrence pour $(a_n)_{n=0}^{\infty}$

$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n \Rightarrow b_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$ (Taylor)

sur $]-R,R[$

$R>0$

conséquence : $\sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n = \sum_{n=0}^{\infty} c_n x^n \Leftrightarrow b_n = c_n \ \forall_{n\geq 0}$

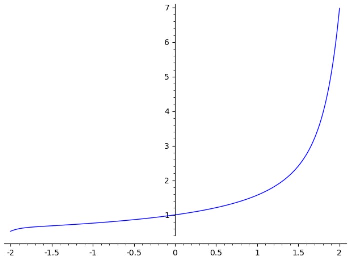
sur $]-R,R[$

$a_0 = 1$ ✓ $\quad a_n = \frac{n a_{n-1}}{2n+1} = \frac{n}{(2n+1)} a_{n-1} \quad n \geq 1$

$$a_1 = \frac{1}{3}a_0 = \frac{1}{3}, \quad a_2 = \frac{2}{5}a_1 = \frac{2}{5\cdot 3} = \frac{2}{15}$$

$$a_3 = \frac{3}{7}\cdot a_2 = \frac{6}{7\cdot 15} \quad \dots \quad \boxed{a_n = \frac{n!}{(2n+1)!!}}$$

Bref : $y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{n!}{(2n+1)!!} x^n$



rayon de convergence :

D'Alembert : $L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(n+1)\cancel{!}\ x^{\cancel{n+1}}}{(2n+3)\cancel{!!}} \cdot \frac{\cancel{(2n+1)}!!}{\cancel{n!}\ \cancel{x^n}} \right|$

$l = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{n+1}}{a_n} = \frac{1}{2}$ $R = \frac{1}{l} = 2$

$= |x| \lim_{n\to\infty} \frac{n+1}{2n+3} = \frac{|x|}{2}$

$\begin{cases} \text{conv. si } L = \frac{|x|}{2} < 1 & \text{i.e. } |x| < 2 \\ \text{div. si } L > 1 & \text{i.e. } |x| > 2 \end{cases}$ donc $R = 2$

On a trouvé une solution analytique sur $]-2,2[$

4/ Déterminer une solution **f** développable en série entière de l'équation différentielle $x(2+x)y'+(1+x)y=1$.
Résoudre cette équation de façon élémentaire. Quelles sont les solutions bornées au voisinage de 0 ?
Exprimer **f** à l'aide de fonctions élémentaires. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!}$

On cherche $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ $a_n \in \mathbb{R}$ au voisinage de 0

$2x y' + x^2 y' + y + xy = 1$

$2x \sum_0 n a_n x^{n-1} + x^2 \sum_0 n a_n x^{n-1} + \sum_0 a_n x^n + x \sum_0 a_n x^n = 1$

$\sum_0 2n a_n x^n + \sum_0 n a_n x^{n+1} + \sum_0 a_n x^n + \sum_0 a_n x^{n+1} = 1$

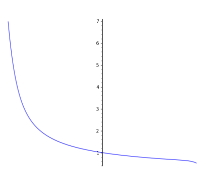
$\sum_0 2n a_n x^n + \sum_1 (n-1) a_{n-1} x^n + \sum_0 a_n x^n + \sum_1 a_{n-1} x^n = 1$

$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \left((2n+1) a_n + n a_{n-1} \right) x^n = 1$

$\Rightarrow a_0 = 1$, $(2n+1) a_n + n a_{n-1} = 0$ $\forall_{n \geq 1}$

$a_n = \frac{-n\, a_{n-1}}{2n+1}$

$y(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!} x^n$



$a_n = \frac{(-1)^n\ n!}{(2n+1)!!}$

Recherche élémentaire de solution :

$$x(2+x)y' + (1+x)y = 1$$

solution générale = solution gén. homog. + solution part.

éq. homog. : $\quad x(2+x)\dfrac{dy}{dx} + (1+x)y = 0$

$$x(2+x)\frac{dy}{dx} = -(1+x)y$$

$$-\frac{dy}{y} = \frac{(1+x)\,dx}{x(2+x)}$$

$$\downarrow$$

$$\int -\frac{dy}{y} = \int \frac{(1+x)\,dx}{x(2+x)}$$

$$-\ln|y| + C = \int \frac{1/2}{x} + \frac{1/2}{2+x}\,dx$$

$$= 1/2 \ln|x| + 1/2 \ln|2+x|$$

$$= \ln|x|^{1/2} + \ln|x+2|^{1/2}$$

$$= \ln\sqrt{|x(x+2)|}$$

$$\ln|y| = C - \ln\sqrt{|x(x+2)|}$$

$$|y| = \frac{e^C}{\sqrt{|x(x+2)|}}$$

$$y = \frac{\pm e^C}{\sqrt{|x(x+2)|}} = \frac{\overset{\text{constante}}{A}}{\sqrt{|x(x+2)|}}$$

solution de l'éq. non homog. :

cherchons $\quad y(x) = \dfrac{A(x)}{\sqrt{x(x+2)}}$

$$y'(x) = \frac{A'(x)}{\sqrt{x(x+2)}} - \frac{1}{2}A(x)\left(x(x+2)\right)^{-3/2}(x+2+x)$$

$$= A'(x)\left(x(x+2)\right)^{-1/2} - (x+1)A(x)\left(x(x+2)\right)^{-3/2}$$

$$x(x+2)y' + (1+x)y = 1$$

$$A'\left(x(x+2)\right)^{1/2} - (x+1)\cancel{A\left(x(x+2)\right)^{1/2}} + (1+x)\cancel{A\left(x(x+2)\right)^{1/2}} = 1$$

$$A' = \frac{1}{\left(x(x+2)\right)^{1/2}} = \left(x(x+2)\right)^{-1/2}$$