CIR2 CIR2 Mardi 19 Décembre 2019

DS de Maths

Durée 2 h 30
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable

Le sujet porte sur la courbe $\mathcal{C}$ d'équation $\begin{cases} x = \dfrac{\cos t}{\operatorname{ch} t} \\ y = \dfrac{\sin t}{\operatorname{ch} t} \\ z = \operatorname{th} t \\ t \in \left]-\infty, +\infty\right[\end{cases}$

On rappelle que : $\operatorname{ch} t = \dfrac{e^t + e^{-t}}{2}$, $\operatorname{sh} t = \dfrac{e^t - e^{-t}}{2}$, $\operatorname{th} t = \dfrac{\operatorname{sh} t}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{e^t - e^{-t}}{e^t + e^{-t}}$

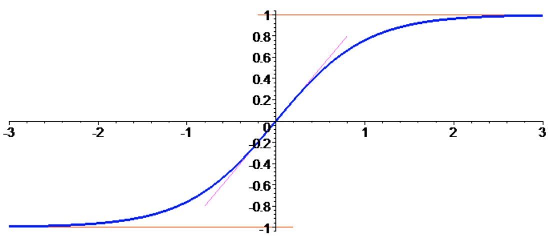
Les parties 2, 3, 4 et 5 sont indépendantes entre elles.

Partie 1 (4 points) : Etude des fonction hyperboliques (ne pas détailler les calculs)

1. Calculer $\operatorname{ch}^2 t + \operatorname{sh}^2 t = \dfrac{e^{2t} + e^{-2t}}{2} = \operatorname{ch}(2t)$ et $\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t = 1$
2. Calculer la dérivée de $\operatorname{th} t$. $(\operatorname{th} t)' = \dfrac{\operatorname{ch}^2 t - \operatorname{sh}^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} = 1 - \operatorname{th}^2 t = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$
   On l'exprimera en fonction de $\operatorname{th} t$ seulement et en fonction de $\operatorname{ch} t$ seulement.
3. Calculer les limites en $+\infty$ et en $-\infty$ de $\operatorname{ch} t$, $\operatorname{sh} t$ et $\operatorname{th} t$.

t	$-\infty$	$+\infty$
$\operatorname{ch} t$	$+\infty$	$+\infty$
$\operatorname{sh} t$	$-\infty$	$+\infty$
$\operatorname{th} t$	-1	1

4. Tracer le graphe de la fonction $\operatorname{th} t$.



Partie 2 (7 points) : Séries entières

5. Rappeler les développements en série entière de $\operatorname{ch} t$ et de $\operatorname{sh} t$. Rayon de convergence ?

$$\operatorname{ch} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{t^{2n}}{(2n)!} \quad (\text{RdC} = \infty) \quad , \operatorname{sh} t = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{t^{2n+1}}{(2n+1)!} \quad (\text{RdC} = \infty)$$

6. En déduire que $\operatorname{th} t$ possède un développement en série entière de rayon de convergence $R > 0$:

   $\operatorname{th} t = \sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$. (on ne cherchera pas à calculer ce développement, ni à calculer R)

   Justifier que $a_0 = 0$ et $a_1 = 1$

   D'après le théorème sur le DES de $\dfrac{1}{1-f(t)}$, si $f(t)$ a un DES de rayon de convergence R non nul et si $f(0) = 0$, alors $\dfrac{1}{1-f(t)}$ a un DES de rayon de convergence > 0.

   C'est le cas pour $f(t) = -\sum_{n=1}^{\infty} \dfrac{t^{2n}}{(2n)!}$. Donc $\dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ a un DES de rayon de convergence > 0 et en utilisant le produit de Cauchy, $\operatorname{th} t = \operatorname{sh} t . \dfrac{1}{\operatorname{ch} t}$ a un DES de rayon de convergence > 0 .

   $a_0 = \operatorname{th}(0) = 0$, $a_1 = \operatorname{th}'(0) = 1 - \operatorname{th}^2(0) = 1$ (voir aussi le graphe du 4.)

7. En déduire que $\operatorname{th}^2 t$ possède un développement en série entière $\operatorname{th}^2 t = \sum_{n=0}^{\infty} b_n t^n$

   Déterminer le coefficient b_n en fonction des coefficients a_k .

   Théorème sur le produit de Cauchy. Même RdC au moins que $\operatorname{th} t$. $\forall n \in \mathbb{N}$, $b_n = \sum_{k=0}^{n} a_k . a_{n-k}$

8. Quel est le développement en série entière de la dérivée de $\operatorname{th} t$?

   Montrer que, pour tout $n \geqslant 1$, $(n+1) a_{n+1} = -\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$. Que vaut $a_1 + a_0^{\ 2}$?

   Théorème de dérivation d'un DSE. Même RdC que $\operatorname{th} t$. $\operatorname{th}(t) = \sum_{n=1}^{\infty} n\, a_n t^{n-1} = \sum_{n=0}^{\infty} (n+1) a_{n+1} t^n$

   Par unicité du DES, de $\operatorname{th}(t) = 1 - \operatorname{th}^2 t$ on déduit $\begin{cases} \text{pour } n = 0 \text{ , } a_1 = 1 - b_0 = 1 - a_0^{\ 2} \\ \forall n \geqslant 1 \;\; (n+1) a_{n+1} = -b_n = -\sum_{k=0}^{n} a_k . a_{n-k} \end{cases}$

9. Montrer par récurrence que pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a : $|a_n| \leqslant 1$

   $|a_0| = 0$, $|a_1| = 1$ et si $\forall k \leqslant n$, $|a_k| \leqslant 1$, alors $|(n+1) a_{n+1}| = \left| -\sum_{k=0}^{n} a_k . a_{n-k} \right| \leqslant \sum_{k=0}^{n} |a_k| . |a_{n-k}| \leqslant \sum_{k=0}^{n} 1 = n+1$

10. En conclure que pour tout réel t tel que $|t| < 1$, la série $\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n$ converge absolument.

    Que peut-on en déduire pour le rayon de convergence R ?

    si $|t| < 1$, $\sum_{0}^{\infty} |a_n| |t^n| \leqslant \sum_{0}^{\infty} |t^n|$ dont la série converge (série géométrique). Donc $\sum_{0}^{\infty} a_n t^n$ converge absolument Par suite le rayon de convergence est au moins égal à 1.

11. Montrer par ailleurs que pour tout n **pair** , $a_n = 0$.

    Comme la fonction th est impaire, tous les coefficients pairs de son DES dont nuls.
    On peut aussi le montrer par récurrence avec la formule du 8. mais c'est plus long.

```
# calcul de la liste a des coefficients su DSE de tht
a=[0,1]
for n in range(1,20):
    somme=0
    for k in range(n+1):
        somme=somme+a[k]*a[n-k]
    a.append(somme/(n+1))
print(a)
```

```
*** Python 3.2.5 (default, May 15 2013, 23:06:03) [MSC v.1500 32 bit (Intel)] on win32. ***
>>>
*** Console de processus distant Réinitialisée ***
>>>
[0, 1, 0.0, 0.3333, 0.0, 0.1333, 0.0, 0.054, 0.0, 0.0219, 0.0, 0.0089, 0.0, 0.0036, 0.0, 0.0015, 0.0, 0.0006, 0.0, 0.0002, 0.0]
>>>
```

Partie 3 (5 points) : Etude de la courbe $\mathcal{C}$

12. Montrer que pour tout réel t, le point $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ appartient à la sphère de centre O et de rayon 1 .

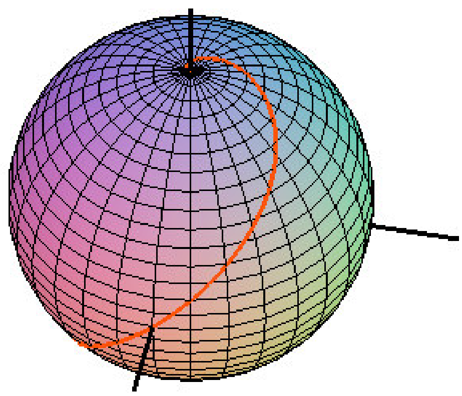
$$x(t)^2 + y(t)^2 + z(t)^2 = \frac{\cos^2 t + \sin^2 t}{\operatorname{ch}^2 t} + \operatorname{th}^2 t = 1$$

13. Le point $M(t)$ a-t-il une limite quand $t \to +\infty$? quand $t \to -\infty$?

D'après 3., $M(t) \xrightarrow[t\to-\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (pôle sud) et $M(t) \xrightarrow[t\to+\infty]{} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$ (pôle nord)

14. Étudier les variations de $z(t)$. $\operatorname{th}'(t) = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t} > 0$ donc th crissante voir limites au 3.

15. Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ (tracé sommaire !) On pourra s'aider de la figure ci-dessous.



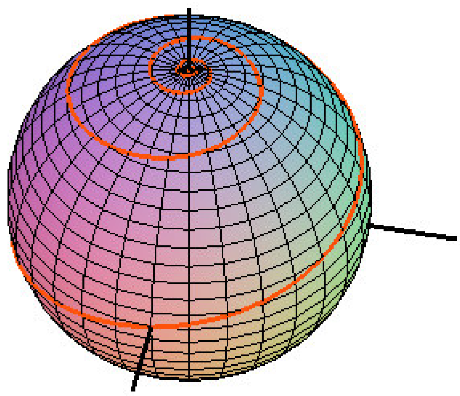
C'aurait été plus joli avec

$$x(t) = \frac{\cos\left(\frac{t}{5}\right)}{\operatorname{ch} t}$$

$$y(t) = \frac{\sin\left(\frac{t}{5}\right)}{\operatorname{ch} t}$$

mais les calculs auraient été un peu plus lourds

$\longrightarrow$



Partie 4 (5 points) : Longueur de la courbe C

16. Calculer le vecteur vitesse $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$.

L'écrire sous la forme $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \dfrac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\vec{A}$ où le vecteur $\vec{A}$ s'écrit sans dénominateurs.

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} \dfrac{-\sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \\ \dfrac{\cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t}{\operatorname{ch}^2 t} \\ 1 - \operatorname{th}^2 t \end{pmatrix} = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t} \begin{pmatrix} -\sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t \\ \cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t \\ 1 \end{pmatrix}$$

17. Calculer $\|A\|^2$ et en déduire la norme de $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}$

on trouve facilement $\|A\|^2 = 2\operatorname{ch}^2 t$ donc $\left\|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| = \dfrac{2}{\operatorname{ch}^2 t}$ et $\left\|\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| = \dfrac{\sqrt{2}}{\operatorname{ch} t}$ ($\operatorname{ch} t$ est toujours > 0)

18. Montrer que la longueur de la courbe s'écrit comme une intégrale impropre $k\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ (préciser k)

$$Longueur = \int_C dl = \int_{-\infty}^{\infty} \left\|\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}\right\| dt = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$$

19. Montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_{-\infty}^{+\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch} t}$ converge.

$\dfrac{1}{\operatorname{ch} t} = \dfrac{2}{e^t + e^{-t}} \underset{+\infty}{\sim} 2e^{-t}$ dont l'intégrale converge en $+\infty$ (intégrale de référence)

Idem en $-\infty$ par symétrie

20. Faire le changement de variable $u = e^t$ dans cette intégrale (noter que $e^{-t} = \dfrac{1}{u}$)et finir le calcul.

$$Longueur = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{2\,dt}{e^t + e^{-t}} = 2\sqrt{2}\int_{-\infty}^{\infty} \frac{e^t\,dt}{e^{2t}+1} \underset{(u=e^t,\,u=e^t\,dt)}{=} 2\sqrt{2}\int_0^{\infty} \frac{du}{u^2+1} = 2\sqrt{2}\left[\arctan u\right]_0^{\infty} = 2\sqrt{2}\,\frac{\pi}{2} = \pi\sqrt{2}$$

Partie 5 (4 points) : Circulation d'un champ de vecteurs le long de la courbe C

21. Soit le champ de vecteurs $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \longrightarrow \vec{V}(M) = \begin{pmatrix} -y \\ x \\ 0 \end{pmatrix}$.

Calculer $\vec{V}(M(t))$ puis le produit scalaire $\dfrac{\overrightarrow{dM}}{dt}.\vec{V}(M(t))$

$$\vec{V}(M(t)) = \begin{pmatrix} -y(t) \\ x(t) \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\operatorname{ch} t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}.\vec{V}(M(t)) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}\begin{pmatrix} -\sin t \operatorname{ch} t - \cos t \operatorname{sh} t \\ \cos t \operatorname{ch} t - \sin t \operatorname{sh} t \\ 1 \end{pmatrix} . \frac{1}{\operatorname{ch} t}\begin{pmatrix} -\sin t \\ \cos t \\ 0 \end{pmatrix} = \frac{1}{\operatorname{ch}^3 t}(\operatorname{ch} t) = \frac{1}{\operatorname{ch}^2 t}$$

22. Calculer la circulation $\displaystyle\int_C \vec{V}.\vec{dl}$ du champ de vecteurs $\vec{V}$ le long de la courbe C.

$$\int_C \vec{V}.\vec{dl} = \int_{-\infty}^{\infty} \frac{dt}{\operatorname{ch}^2 t} = \left[\operatorname{th} t\right]_{-\infty}^{\infty} = 2$$
