$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$
Examen final $'$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **3** $\times$ **3** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que peu utile.
- **Lisez attentivement** les concises questions ainsi que ces quelques consignes.
- $\mathbf{F}_q$ désigne le corps fini à q éléments, $\mathbf{Q}$ le corps des rationnels, $\mathbf{C}$ celui des nombres complexes.
- **Amusez**-vous bien ! et surtout, **exprimez-vous** (sensément) sur les différents sujets.

— I —

a) La fonction complexe $f(z) = \dfrac{1}{j - e^z}$ est-elle dérivable sur son domaine de définition ? (préciser celui-ci !)

b) Soit g une fonction complexe dérivable satisfaisant $g(z+w) = g(z) \cdot g(w)$ pour tous $z, w \in \mathbf{C}$. En dérivant cette identité par rapport à z puis évaluant la formule obtenue en $w = 0$, vous obtiendrez une équation différentielle dont vous chercherez les solutions admettant un développement en série entière. Quelles-sont elles ?

c) Déterminer par la méthode de votre choix le développement en série entière au voisinage de $z = 0$ de

$$h(z) = \frac{1}{(1-z)^2}$$

et préciser son rayon de convergence.

— II —

a) Décrire les orbites de l'action du groupe $\mathrm{GL}_2(\mathbf{F}_2)$ sur $(\mathbf{F}_2)^2$ par multiplication matricielle usuelle (à gauche) et vérifier que l'identité de Cauchy-Frobenius est satisfaite.

b) Si on considère $\mathbf{F}_4$ comme $\mathbf{F}_2$-espace vectoriel, l'application $\varphi : \mathbf{F}_4 \to \mathbf{F}_4$ définie par $\varphi(x) := x^2$ est un endomorphisme. Est-il diagonalisable ?

c) Diagonaliser (si possible) la matrice suivante :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Q}).$$

— III —

a) Dans un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire, établir soigneusement l'identité d'Al-Kashi :

$$||\mathbf{u} + \mathbf{v}||^2 = ||\mathbf{u}||^2 + ||\mathbf{v}||^2 + 2\,\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle\,.$$

b) La formule $||(x,y)|| := \max(|x|, |y|)$ définit-elle une norme associée à un produit scalaire sur $\mathbf{R}^2$?

c) Dans $\mathbf{R}^3$, donner la matrice représentant dans la base canonique la projection orthogonale sur le plan

$$\mathcal{P} : x + 2y + 3z = 0.$$

— Question bonus —

Culture générale (catégorie « musique de vieux ») :

Quel célèbre artiste canadien, surnommé *The Loner*, a-t-on des chances de croiser à Lille aujourd'hui ?