Répondez directement sur l'énoncé en **détaillant vos calculs** et faisant des **schémas des régions** d'intégration.

Nom: **CORRIGÉ**

1. Évaluer le volume du solide situé sous le paraboloïde d'équation $z = x^2 + y^2$ et au-dessus du triangle $\mathcal{T}$ de sommets $(0,0)$, $(0,2)$ et $(1,1)$ dans le plan Oxy.

En appliquant Fubini en coupant en tranches verticales :

$$V = \int_0^1 \int_x^{2-x} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

ou en tranches horizontales :

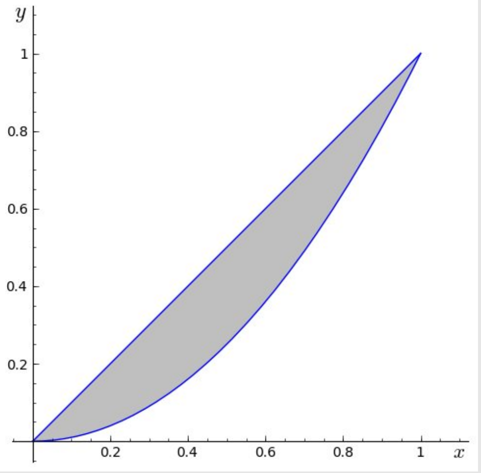
$$V = \int_0^1 \int_0^y (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y + \int_1^2 \int_0^{2-y} (x^2 + y^2)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Dans les deux cas, on trouve en évaluant les intégrales itérées $V = \frac{4}{3}$.

2. Tracer le domaine d'intégration et évaluer $\displaystyle\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{x}{y} e^y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$.

Le domaine d'intégration est la région simple comprise entre les courbes $y = x^2$ et $y = x$, pour $0 \leqslant x \leqslant 1$. Puisque l'on ne sait pas intégrer $\frac{e^y}{y}$ directement, changeons l'ordre d'intégration :

$$\begin{aligned}
\int_0^1 \int_{x^2}^x \frac{x}{y} e^y \,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x &= \int_0^1 \int_y^{\sqrt{y}} \frac{x}{y} e^y \,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\
&= \int_0^1 \frac{e^y}{y} \frac{x^2}{2}\bigg|_y^{\sqrt{y}} \,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}\int_0^1 (e^y - ye^y)\,\mathrm{d}y \\
&= \frac{1}{2}(2e^y - ye^y)\bigg|_0^1 = \frac{e-2}{2}.
\end{aligned}$$



3. Évaluer $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}A$, où $\mathcal{D}$ est le parallélogramme de sommets $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,2)$ et $(2,-1)$.

Le domaine d'intégration est le parallélogramme engendré par $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, il pourrait donc être intéressant de travailler en coordonnées par rapport à cette base, *i.e.* utiliser le changement de variables

$$\varphi : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$\iint_{\mathcal{D}} y\,\mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{D}'} (-u+3v)\,|\mathrm{jac}(\varphi)|\,\mathrm{d}A' = \int_0^1 \int_0^1 (-u+3v)\,7\,\mathrm{d}u\,\mathrm{d}v = -7\,\frac{u^2}{2}\bigg|_0^1 v\bigg|_0^1 + 21\,u\bigg|_0^1 \frac{v^2}{2}\bigg|_0^1 = \frac{14}{2} = 7.$$

4. Calculez l'hypervolume de $\mathcal{B} = \{(x,y,z,w) \in \mathbf{R}^4 \mid x^2+y^2+z^2+w^2 \leqslant 1\}$, l'hyperboule unité dans $\mathbf{R}^4$.

Une façon de procéder est de découper $\mathcal{B}$ en tranches « horizontales » $w = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$: celles-ci sont des boules (tridimensionnelles) de rayon $\sqrt{1-w^2}$. On peut donc exprimer l'hypervolume de $\mathcal{B}$ en intégrant le volume de ces tranches auxquelles on donne une épaisseur infinitésimale $\mathrm{d}w$:

$$H = \int_{-1}^1 \frac{4\pi}{3}(1-w^2)^{\frac{3}{2}}\,\mathrm{d}w.$$

Pour évaluer l'intégrale, le plus simple est de poser $w = \sin\theta$ de façon à avoir

$$\begin{aligned} H &= \frac{8\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \cos^4\theta\,\mathrm{d}\theta = \frac{8\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+\cos 2\theta}{2}\right)^2 \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8\pi}{3}\int_0^{\pi/2} \left(\frac{1+2\cos 2\theta + \frac{1+\cos 4\theta}{2}}{4}\right) \mathrm{d}\theta \\ &= \frac{8\pi}{3}\cdot\frac{1}{4}\left(1+\frac{1}{2}\right)\frac{\pi}{2} = \frac{\pi^2}{2}. \end{aligned}$$

Étonnant, non ?