$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

— Épisode IV —

Considérons la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $x^2 + 2xy + 2y^2 + 2xz + 2z^2 + 2x - 2y + 5z + 2 = 0$.

a) En utilisant l'algorithme de Gauss-Lagrange, montrer que celle-ci peut être mise sous la forme

$$\mathcal{Q}' : w = u^2 + v^2.$$

Sous forme matricielle, l'équation s'écrit

$$\begin{bmatrix} x & y & z & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 5/2 \\ 1 & -1 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \\ 1 \end{bmatrix} = 0.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Lagrange à la matrice symétrique ainsi obtenue, par exemple :

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 2 & 0 & -1 \\ 1 & 0 & 2 & 5/2 \\ 1 & -1 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} \overset{*_2 - *_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 1 & -1 & 2 & 5/2 \\ 1 & -2 & 5/2 & 2 \end{bmatrix} \overset{*_3 - *_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3/2 \\ 1 & -2 & 3/2 & 2 \end{bmatrix} \overset{*_4 - *_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & -1 & -2 \\ 0 & -1 & 1 & 3/2 \\ 0 & -2 & 3/2 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*_3 + *_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & -2 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & -2 & -1/2 & 1 \end{bmatrix} \overset{*_4 + 2*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & -3 \end{bmatrix} \overset{*_4 - 3*_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1/2 & 0 \end{bmatrix}$$

qui est bien la matrice symétrique associée à $\mathcal{Q}'$.

b) Expliciter un changement de variables affines $(u, v, w) \mapsto (x, y, z)$ permettant de transformer $\mathcal{Q}$ en $\mathcal{Q}'$.

On obtient un tel changement de variables en enregistrant les opérations colonnes effectuées ci-dessus dans une matrice identité :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_2 - c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_3 - c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_4 - c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{c_3 + c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -1 \\ 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_4 + 2c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & 1 & 2 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_4 - 3c_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 3 \\ 0 & 1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & -3 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

ce qui correspond au changement de variables affine (autres bonnes réponses possibles) :

$$\begin{cases} x = u - v - 2w + 3 \\ y = \phantom{u - {}} v + w - 1 \\ z = w - 3. \end{cases}$$

c) Décrire géométriquement $\mathcal{Q}'$ en faisant des croquis de ses intersections avec les plans où u, v ou w sont constants.

Il s'agit d'un paraboloïde circulaire : les intersections avec les plans $u = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ ou $v = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ sont des paraboles, celles avec $w = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$ des cercles (peut-être vides si $w < 0$). Cela signifie que $\mathcal{Q}$ est un paraboloïde elliptique (l'égalité des deux rayons des ellipses n'étant probablement pas préservée par le changement de variables affine ci-dessus).

— ÉPISODE V —

a) Évaluer $I := \iint_{\mathcal{D}} xy \, \mathrm{d}A$ où $\mathcal{D}$ est la portion du disque $x^2 + y^2 \leqslant 1$ pour laquelle $x, y \geqslant 0$.

Le plus simple est de passer en coordonnées polaires : on a alors

$$I = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^1 r\cos\theta \cdot r\sin\theta \cdot r \, \mathrm{d}r \, \mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin\theta \, \cos\theta \, \mathrm{d}\theta \cdot \int_0^1 r^3 \, \mathrm{d}r = \frac{1}{8} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin 2\theta \, \mathrm{d}\theta = \frac{1}{8}.$$

b) Évaluer le déterminant jacobien du changement de variables $(r, \theta, s, \varphi) \mapsto (x, y, z, w)$ défini par

$$x = r\cos\theta, \quad y = r\sin\theta, \quad z = s\cos\varphi, \quad w = s\sin\varphi.$$

La matrice jacobienne contenant toutes les dérivées partielles de ce changement de variables est

$$\begin{bmatrix} \frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta} & \frac{\partial x}{\partial s} & \frac{\partial x}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta} & \frac{\partial y}{\partial s} & \frac{\partial y}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial z}{\partial r} & \frac{\partial z}{\partial \theta} & \frac{\partial z}{\partial s} & \frac{\partial z}{\partial \varphi} \\ \frac{\partial w}{\partial r} & \frac{\partial w}{\partial \theta} & \frac{\partial w}{\partial s} & \frac{\partial w}{\partial \varphi} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 & 0 \\ 0 & 0 & \cos\varphi & -s\sin\varphi \\ 0 & 0 & \sin\varphi & s\cos\varphi \end{bmatrix},$$

dont le déterminant vaut

$$(r\cos^2\theta + r\sin^2\theta)(s\cos^2\varphi + s\sin^2\varphi) = rs.$$

c) Gràce à a) et b), évaluer l'hypervolume de la région $\mathcal{H} \subseteq \mathbf{R}^4$ définie par l'inégalité

$$\frac{x^2 + y^2}{a^2} + \frac{z^2 + w^2}{b^2} \leqslant 1.$$

En utilisant le changement de variables proposé, l'inégalité définissant $\mathcal{H}$ devient

$$\frac{r^2}{a^2} + \frac{s^2}{b^2} \leqslant 1,$$

soit l'intérieur d'une ellipse $\mathcal{E}$ de rayons a et b, avec $r, s \geqslant 0$.

On peut donc écrire

$$\text{hypervol}(\mathcal{H}) = \iiiint_{\mathcal{H}} \mathrm{d}H = \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \left(\iint_{\mathcal{E}} rs \, \mathrm{d}A \right) \mathrm{d}\theta \, \mathrm{d}\varphi = 4\pi^2 abI = \frac{\pi^2 ab}{2}.$$

— ÉPISODE VI —

Pour $0 < r < R$, considérons la surface $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{R}^3$ définie par l'équation cartésienne

$$(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2).$$

a) Vérifier que $\mathcal{T}$ admet la paramétrisation

$$x = (R + r\cos\lambda)\cos\theta, \quad y = (R + r\cos\lambda)\sin\theta, \quad z = r\sin\lambda \qquad (0 \leqslant \theta, \lambda \leqslant 2\pi).$$

On vérifie effectivement que x, y, z ainsi définis vérifient l'équation proposée :

$$x^2 + y^2 = (R + r\cos\lambda)^2 = R^2 + 2Rr\cos\lambda + r^2\cos^2\lambda$$

donc

$$x^2 + y^2 + z^2 = R^2 + 2Rr\cos\lambda + r^2,$$
$$x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2 = 2R(R + r\cos\lambda)$$

et il ne reste plus qu'à mettre au carré de part et d'autre. (Réciproquement, on peut se convaincre en raisonnant en coordonnées cyclindrique que tout point (x, y, z) satisfaisant l'équation peut s'écrire sous la forme proposée.)

b) Montrer que l'élément d'aire à la surface de $\mathcal{T}$ peut s'exprimer $\mathrm{d}A = (R + r\cos\lambda)\, r \,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda$.

Écrivons

$$\mathbf{F} = \begin{bmatrix} (R + r\cos\lambda)\cos\theta \\ (R + r\cos\lambda)\sin\theta \\ r\sin\lambda \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} = (R + r\cos\lambda) \begin{bmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \\ 0 \end{bmatrix}, \qquad \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} = r \begin{bmatrix} -\sin\lambda\cos\theta \\ -\sin\lambda\sin\theta \\ \cos\lambda \end{bmatrix}$$

et

$$\frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} = r(R + r\cos\lambda) \begin{bmatrix} \cos\ \theta\cos\lambda \\ \sin\theta\cos\lambda \\ \sin\lambda \end{bmatrix},$$

d'où

$$\mathrm{d}A = \left\| \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \theta} \wedge \frac{\partial \mathbf{F}}{\partial \lambda} \right\| \mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda = r(R + r\cos\lambda)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda.$$

c) En déduire une formule pour l'aire de $\mathcal{T}$.

$$\mathrm{aire}(\mathcal{T}) = \iint_{\mathcal{T}} \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^{2\pi} r(R + r\cos\lambda)\,\mathrm{d}\theta\,\mathrm{d}\lambda = 2\pi r\left(2\pi R + \int_0^{2\pi} \cos\lambda\,\mathrm{d}\lambda\right) = 4\pi^2 Rr.$$

Vous aurez bien sûr reconnu que $\mathcal{T}$ était un tore de rayons R et r : ce calcul montre rigoureusement le fait que celui-ci a la même aire qu'un cylindre circulaire de rayon r et hauteur $2\pi R$.