Exercice 1

Étudier les lois de compositions suivantes sur les ensembles spécifiés.

(commutativité ? associativité ? élément neutre ? élément absorbant ? ...)

a) Sur $\mathbf{Z}$: $a * b := 2a - b + 1$.

b) Sur $\mathbf{R}$: $a \wedge b := \max(a, b)$.

c) Sur $\mathbf{R}_{\geqslant 0}$: $a \star b := \sqrt{a^2 + b^2}$.

d) Sur $\mathbf{Q}$: $a \dagger b := \frac{1}{2}(a + b)$.

e) Sur $\mathbf{R}_{>0}$: $R_1 /\!\!/ R_2 := (R_1^{-1} + R_2^{-1})^{-1}$.

Exercice 2

Loi de composition des vitesses en relativité restreinte : pour $c > 0$, $x * y := \dfrac{x + y}{1 + \frac{xy}{c^2}}$.

a) Vérifier qu'il s'agit d'une loi commutative et associative sur $[0, c]$ admettant un neutre et un élément absorbant.

b) Peut-on la prolonger en une loi de composition interne sur $[-c, c]$? Et sur $]-c, c[$?

c) Que se passe-t-il lorsque $c \to +\infty$? (i.e. $|x|, |y| \ll c$).

Exercice 3

Soit H un ensemble muni de deux lois de compositions $*$ et $\cdot$ admettant un neutre commun ε et satisfaisant

$$(a * b) \cdot (c * d) = (a \cdot c) * (b \cdot d) \qquad \text{pour tous } a, b, c, d \in H.$$

Montrer que ces lois sont commutatives.

Exercice 4

Soit E un ensemble muni d'une loi de composition $\star$ et $a, b \in E$. Montrer que :

a) si a est neutre à gauche et b neutre à droite, alors $a = b$;

b) si a est absorbant à gauche et b absorbant à droite, alors $a = b$;

c) si a est neutre à gauche et b absorbant à droite, alors $a = b$.

Que dire d'une loi qui admettrait à la fois un élément neutre et un élément absorbant ?

Exercice 5

Montrer que tout monoïde M pour lequel $\forall_{x \in M}\ x \star x = 1$ est commutatif.

Exercice 6

On définit sur $\mathbf{R} \times \mathbf{R}$ une loi de composition par la formule

$$(x, y) \star (x', y') := (x \cdot x',\ y + y').$$

Vérifier que cela définit une structure de monoïde sur $\mathbf{R}^2$.

Exercice 7

Le but de cet exercice est de (re)construire l'ensemble $\mathbf{Z}$ des relatifs à partir de $\mathbf{N}$.

Sur $\mathbf{N}^2$, on définit la somme des couples (a, b) et (c, d) par :

$$(a, b) \oplus (c, d) = (a + c, b + d)$$

ainsi qu'une relation d'équivalence :

$$(x, y) \sim (x', y') \iff x + y' = x' + y.$$

a) Vérifier que $\oplus$ est une loi associative, commutative et admettant un neutre.

b) Vérifier que $\sim$ est bien d'une relation d'équivalence sur $\mathbf{N}^2$.

c) Montrer que si $(a, b) \sim (a', b')$ et $(c, d) \sim (c', d')$ alors $(a, b) \oplus (c, d) \sim (a', b') \oplus (c', d')$ (on dit que la loi $\oplus$ est *compatible* avec la relation $\sim$).

d) Expliquer pourquoi l'opération définie par : $\overline{(a, b)} \oplus \overline{(c, d)} = \overline{(a + c, b + d)}$ a un sens.

e) Vérifier que l'opération $\oplus$ sur $\mathbf{Z} := \mathbf{N}^2/\sim$ est associative, commutative et admet un neutre que l'on notera $\mathbf{0}$.

f) Montrer que : pour tout $\mathbf{m} \in \mathbf{Z}$, il existe un élément $\mathbf{m}' \in \mathbf{Z}$ pour lequel $\mathbf{m} \oplus (\mathbf{m}') = \mathbf{0}$. On pose alors pour $\mathbf{m}, \mathbf{n} \in \mathbf{Z}$: $\mathbf{n} \ominus \mathbf{m} = \mathbf{n} \oplus \mathbf{m}'$.

g) Vérifier que $\iota(n) := (n, 0)$ définit un morphisme injectif de $\mathbf{N}$ dans $\mathbf{Z}$ et que

$$(a, b) = \iota(a) \ominus \iota(b).$$

Exercice 8

Déterminer le groupe des inversibles $M^\times$ chacun des monoïdes M suivants :

$$(\mathbf{R}, \cdot, 1), \quad (\mathbf{Z}/7\mathbf{Z}, \cdot, 1), \quad (\mathbf{Z}/12\mathbf{Z}, \cdot, 1), \quad (\mathbf{R}[X], \cdot, 1), \quad (\mathbf{R}[X], \circ, X).$$

Exercice 9

Une matrice $A \in \mathcal{M}_{m \times n}(\mathbf{R})$ est dite *inversible à gauche* (resp. *à droite*) s'il existe une matrice $B \in \mathcal{M}_{n \times m}(\mathbf{R})$ pour laquelle $BA = I_n$ (resp. $AB = I_m$). Lesquelles des matrices suivantes sont inversibles à gauche ? à droite ? Déterminez dans chaque cas une matrice B possible.

$$\begin{bmatrix} 0 & 1 & -1 & -1 \\ 1 & 2 & 3 & -1 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & -1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 2 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \\ 4 & -2 & 7 \\ 2 & 0 & 5 \\ 1 & 0 & 3 \end{bmatrix}, \quad \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{bmatrix}$$