# Maths – automne 2009

# Fonctions de plusieurs variables

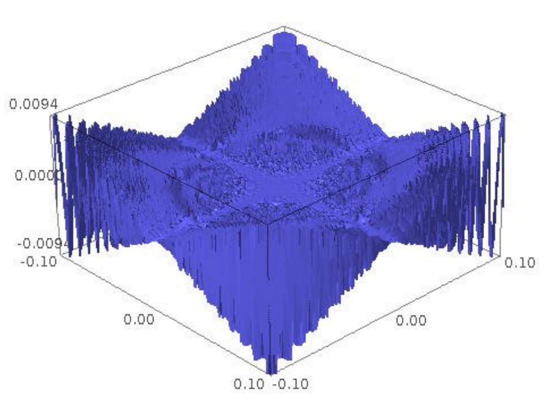
## Consignes

- L'épreuve dure 2h et comporte 5 questions.
- L'usage de la calculatrice est interdit (et inutile).
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant votre raisonnement et mentionnant les résultats utilisés.
- Bon succès !

## Contrexemples

1. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$



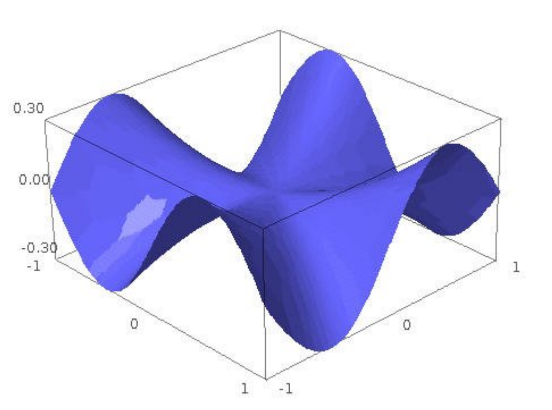

a) Calculer les dérivées partielles de $f$ et montrer qu'elles ne sont pas continues en $(0,0)$.

b) Montrer que $f$ est $o(\sqrt{x^2+y^2})$ à l'origine et conclure qu'elle y est différentiable.

c) Cela est-il compatible avec les résultats vus en classe ?

2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{xy(x^2-y^2)}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$




a) Calculer les dérivées partielles $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$ et montrer qu'elles sont partout continues.

b) Montrer que les dérivées secondes mixtes $\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}$ et $\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial x}$ existent en $(0,0)$ mais ne sont pas égales.

c) Cela contredit-il un résultat vu en classe ?

## Laplacien et fonctions harmoniques

Le *laplacien* d'une fonction $f$ de classe $\mathcal{C}^2$ sur un ouvert $U$ de $\mathbf{R}^n$ est la fonction continue $\Delta f : U \to \mathbf{R}$ définie comme

$$\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x_1^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial x_2^2} + \cdots + \frac{\partial^2 f}{\partial x_n^2}.$$

3. a) Si $f$ et $g$ sont deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ sur $U$, établir les identités

$$\Delta(f+g) = \Delta f + \Delta g, \qquad \Delta(fg) = (\Delta f)g + 2\,\boldsymbol{\nabla} f \cdot \boldsymbol{\nabla} g + f(\Delta g).$$

b) Si $f : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ et $g : \mathbf{R}^n \to \mathbf{R}$ sont des fonctions de classe $\mathcal{C}^2$, montrer que

$$\Delta(f \circ g) = (f'' \circ g) \sum_{i=1}^{n} \left( \frac{\partial g}{\partial x_i} \right)^2 + (f' \circ g)\, \Delta g.$$

4. Soit $T : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ la transformation $T(r, \theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$. Si l'on a une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$, la composée $F = f \circ T$ est "$f$ exprimée en coordonnées polaires".

a) Calculer la matrice jacobienne de $T$ et l'utiliser pour exprimer $\frac{\partial F}{\partial r}$ et $\frac{\partial F}{\partial \theta}$ en termes de $\frac{\partial f}{\partial x}$ et $\frac{\partial f}{\partial y}$.

b) En faisant une restriction convenable du domaine si nécessaire, obtenir à partir de a) que

$$\boldsymbol{\nabla} f = \frac{\partial F}{\partial r}\boldsymbol{u} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial \theta}\boldsymbol{v},$$

où $\boldsymbol{u} = (\cos\theta, \sin\theta)$ et $\boldsymbol{v} = (-\sin\theta, \cos\theta)$.

c) En déduire l'expression du laplacien en coordonnées polaires :

$$\Delta f = \frac{\partial^2 F}{\partial r^2} + \frac{1}{r}\frac{\partial F}{\partial r} + \frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 F}{\partial \theta^2}$$

5. Une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ est dite *harmonique* si son laplacien est nul. Dans ce problème nous déterminons, en toute dimension $n$, quelles sont les fonctions harmoniques ne dépendant que de la distance à l'origine.

a) Soit $\rho : \mathbf{R}^n \setminus \{\mathbf{0}\} \to \mathbf{R}$ la fonction définie par $\rho(\boldsymbol{x}) = ||\boldsymbol{x}||$. Montrer qu'elle est de classe $\mathcal{C}^2$ et que l'on a :

$$\frac{\partial \rho}{\partial x_i} = \frac{x_i}{\rho}, \qquad \frac{\partial^2 \rho}{\partial x_i^2} = \frac{\rho^2 - x_i^2}{\rho^3}, \qquad i = 1, \ldots, n.$$

En déduire une expression simple pour le laplacien de $\rho$.

b) Soit $f : \mathbf{R}_{>0} \to \mathbf{R}$ une fonction de classe $\mathcal{C}^2$ et considérons $F = f \circ \rho$. En utilisant 3 b), montrer que $F$ est harmonique si et seulement si $f$ est une solution de l'équation différentielle

$$f''(t) + \frac{n-1}{t} f'(t) = 0.$$

c) En interprétant l'équation précédente comme une équation différentielle pour la dérivée $f'$ de $f$, montrer qu'elle doit être de la forme

$$f'(t) = At^{1-n}$$

où $A$ est une constante.

d) Conclure :

$$\Delta F = 0 \iff F = \begin{cases} B\rho + C & \text{si } n = 1, \\ B\log\rho + C & \text{si } n = 2, \\ B\frac{1}{\rho^{n-2}} + C & \text{si } n \geqslant 3, \end{cases}$$

où $B$ et $C$ sont des constantes.