CIR2 2018-2019 | DS de Maths | Mardi 18/12/2018

Durée 2 heures
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable

Barème indicatif :

Q1	Q2	Q3	Q4	Q5	Q6
2pts	2pts	2pts	4pts	6pts	6pts

Etude de la courbe γ $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t+t^3}{1+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t-t^3}{1+t^4} \end{cases}$, $t \in]-\infty, +\infty[$. On note $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$

1. a. Vérifier que $x(t)^2 + y(t)^2 = \dfrac{2t^2}{1+t^4}$.

En déduire que $x(t)^2 + y(t)^2 \leqslant 1$ (noter que pour tout réel u, $1+u^2 \geqslant 2u$, avec égalité si et seulement si ...)

$1+u^2-2u = (1-u)^2 \geqslant 0$ (et $=0$ si et seulement si $u=1$)

La courbe γ est donc à l'intérieur d'une courbe $\mathcal{C}$ très simple. Laquelle ? cercle de centre (0,0) et de rayon 1

b. Comment est située la courbe γ par rapport à la courbe $\mathcal{C}$ aux points $M(1)$ et $M(-1)$?

Elle est "à l'intérieur" de $\mathcal{C}$ et ne la touche qu'aux points $M(1)$ et $M(-1)$. Elle est donc "tangente" au cercle

2. a. Montrer que la courbe γ a un centre de symétrie. $M(-t)$ est symétrique de $M(-t)$ par rapport à l'origine

b. Pour $t>0$, étudier $M\left(\dfrac{1}{t}\right)$. En déduire que la courbe γ a un axe de symétrie.

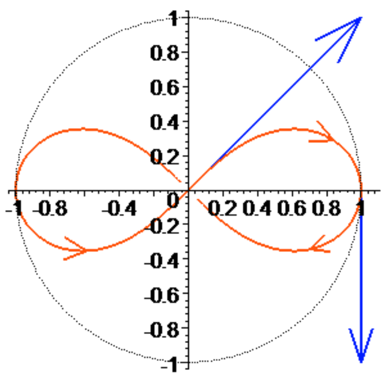
$M\left(\dfrac{1}{t}\right) = \begin{pmatrix} x(t) \\ -y(t) \end{pmatrix}$ = symétrique de $M(t)$ par rapport à Ox

3. Pour éviter de longs calculs, <u>on admettra que</u>

$x'(t) = \dfrac{1+3t^2-3t^4-t^6}{(1+t^4)^2}$ et $y'(t) = \dfrac{1-3t^2-3t^4+t^6}{(1+t^4)^2}$ et que $(x'(t))^2 + (y'(t))^2 = \dfrac{2}{1+t^4}$

a. Déterminer et tracer le vecteur vitesse en $t=0$ et en $t=1$ $\dfrac{dM}{dt}(0) = \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}$, $\dfrac{dM}{dt}(1) = \begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$

b. Tracer l'allure de la courbe γ



On peut pressentir que $x(t)$ augmente quand t augmente de 0 à 1.

On peut s'en assurer en factorisant $x'(t) = \dfrac{(t-1)(t+1)(t^4+4t^2+1)}{(1+t^4)^2}$,

où l'on voit que $x'(t) \geqslant 0$ pour $t \in [0,1]$

De même $y'(t) = \dfrac{(t^2+1)(t^4-4t^2+1)}{(1+t^4)^2}$ est positif pour $0 \leqslant t \leqslant \sqrt{2+\sqrt{3}}$

et négatif pour $\sqrt{2+\sqrt{3}} \leqslant t \leqslant 1$

4.

5. a. Montrer que la longueur de la courbe γ est de la forme $L = k\int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^4)^{-1/2}\,dt$, où k est un scalaire à préciser.

$L = \int_{-\infty}^{+\infty} \left\| \dfrac{dM}{dt} \right\| dt = \int_{-\infty}^{+\infty} \sqrt{\dfrac{2}{1+t^4}}\,dt = \sqrt{2}\int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^4)^{-1/2}\,dt$

On ne cherchera pas à calculer formellement cette intégrale (voir question 6)

b. Montrer que l'intégrale $I = \int_{-\infty}^{+\infty} (1+t^4)^{-1/2}\,dt$ converge.

Quand $t \to \infty$, $(1+t^4)^{-1/2}$ est équivalent à $\dfrac{1}{t^2}$ dont l'intégrale converge en $+\infty$ (Riemann)

Convergence également en $-\infty$ par parité.

c. Montrer que $I = 2\int_0^{+\infty}\left(1+t^4\right)^{-1/2} dt$ Par parité, puisque l'intégrale converge.

d. Faire le changement de variable $u = \frac{1}{t}$ dans l'intégrale $J = \int_0^1\left(1+t^4\right)^{-1/2} dt$. Conclusion ?

$u = \frac{1}{t}$, $dt = -\frac{1}{u^2}du$, u varie de $+\infty$ à 1 , $\int_0^1\left(1+t^4\right)^{-1/2} dt = \int_{+\infty}^1\left(1+\frac{1}{u^4}\right)^{-1/2}\left(-\frac{1}{u^2}\right)du = \int_1^{\infty}\left(u^4+1\right)^{-1/2} du$

Donc $I = 4\int_0^1\left(1+t^4\right)^{-1/2} dt$. Et puisqu'on ne peut pas calculer I formellement, on en fait un calcul approché. Il vaut mieux alors avoir une intégrale sur un compact.

6. Calcul d'aire

Soit γ_1 la partie de la courbe γ obtenue en faisant varier t de 0 à ∞. Soit $\mathcal{S}$ la surface limitée par γ_1.

a. Quelle est la relation entre l'intégrale curviligne $\int_{\gamma_1} -y\ dx + x\ dy$ et l'aire de $\mathcal{S}$?

Si la courbe était bien orientée, la formule de Green-Riemann donnerait $\int_{\gamma_1} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_S\left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right)dx\,dy$.

Comme elle est parcourue dans le sens négatif (voir fig au 3.) Il faut changer le signe.

Avec $P = -y$ et $Q = x$, on a $\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} = 2$ donc l'aire de S est $\iint_S dx\,dy = -\frac{1}{2}\int_{\gamma_1} -y\ dx + x\ dy$

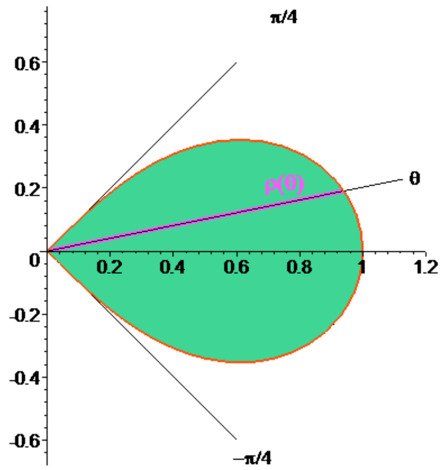
b. Calculer $\int_{\gamma_1} -y\ dx + x\ dy$

$$= \int_0^{\infty}\left(-\frac{t-t^3}{1+t^4}\frac{1+3t^2-3t^4-t^6}{\left(1+t^4\right)^2} + \frac{t+t^3}{1+t^4}\frac{1-3t^2-3t^4+t^6}{\left(1+t^4\right)^2}\right)dt$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{t}{\left(1+t^4\right)^3}\left(\left(-1+t^2\right)\left(1+3t^2-3t^4-t^6\right)+\left(1+t^2\right)\left(1-3t^2-3t^4+t^6\right)\right)dt$$

$$= \int_0^{\infty}\frac{t}{\left(1+t^4\right)^3}\left(-4t^2-4t^6\right)dt = \int_0^{\infty}\frac{-4t^3}{\left(1+t^4\right)^3}dt = \left[\frac{1}{\left(1+t^4\right)^2}\right]_0^{\infty} = -1$$

Donc l'aire est $\frac{1}{2}$. Voir la figure pour vérifier l'ordre de grandeur.



c. Pour éviter de longs calculs, <u>on admettra que</u> la courbe γ_1

a comme équation polaire $\rho = \sqrt{\cos(2\theta)}$, $\theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, \frac{\pi}{4}\right]$

Calculer alors l'aire de la surface $\mathcal{S}$ d'une seconde manière.

$$Aire = \iint_S dx\ dy = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4}\int_{r=0}^{\rho(\theta)} r\,dr\,d\theta$$

$$Aire = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\rho(\theta)^2}{2}d\theta = \int_{\theta=-\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos(2\theta)}{2}d\theta = \left[\frac{\sin(2\theta)}{4}\right]_{-\pi/4}^{\pi/4} = \frac{1}{2}$$

7. On rappelle le développement en série entière de $(1+x)^{-1/2}$: $(1+x)^{-1/2} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{1.3.5...(2n-1)}{2^n\,n!}x^n$

a. Quel est le rayon de convergence ?

b. En déduire le développement en série entière de $F(x) = \int_0^x\left(1+t^4\right)^{-1/2} dt$. Rayon de convergence ?

c. Cette série converge-t-elle pour $x = 1$? Conclusion ?