4/ Déterminer une solution **f** développable en série entière de l'équation différentielle $x(2+x)y'+(1+x)y=1$.
Résoudre cette équation de façon élémentaire. Quelles sont les solutions bornées au voisinage de 0 ?

Exprimer **f** à l'aide de fonctions élémentaires. En déduire $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(n!)^2}{(2n+1)!}$ et $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n(n!)^2}{(2n+1)!}$

$$x(2+x)y' + (1+x)y = 1$$ ÉDO 1^{er} ordre lin. non homog.
coeff. non constants

a) Cherchons $y = f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

$$y' = \sum_{n=0}^{\infty} n a_n x^{n-1}$$

$$x(2+x)\sum_{0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + (1+x)\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$2x\sum_{0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + x^2\sum_{0}^{\infty} n a_n x^{n-1} + \sum_{0}^{\infty} a_n x^n + x\sum_{0}^{\infty} a_n x^n = 1$$

$$\sum_{0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{0}^{\infty} n a_n x^{n+1} + \sum_{0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{0}^{\infty} a_n x^{n+1} = 1$$

$$\sum_{0}^{\infty} 2n a_n x^n + \sum_{1}^{\infty}(n-1) a_{n-1} x^n + \sum_{0}^{\infty} a_n x^n + \sum_{1}^{\infty} a_{n-1} x^n = 1$$

$$0 + a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left(2na_n + (n-1)a_{n-1} + a_n + a_{n-1}\right)x^n = 1$$

$$a_0 + \sum_{n=1}^{\infty}\left((2n+1)a_n + n a_{n-1}\right)x^n = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} 0\cdot x^n$$

$f(x)=\sum a_n x^n$
$a_n = \frac{f^{(n)}(0)}{n!}$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} a_0 = 1 \\ (2n+1)a_n + n a_{n-1} = 0 \quad n \geq 1 \end{cases}$$

$$a_n = -\frac{n\, a_{n-1}}{(2n+1)} \quad (n \geq 1)$$

$$a_1 = -\frac{1}{3} \qquad a_2 = +\frac{2\cdot 1/3}{5} = \frac{2}{15} \qquad a_3 = -\frac{3}{7}\cdot\frac{2}{15} = \frac{-6}{7\cdot 5\cdot 3} \quad \dots$$

$$a_n = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)(2n-1)\dots 5\cdot 3\cdot 1} = \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!}\,\frac{(2n)!!}{(2n)!!}$$

$2n \quad 2n-2 \quad 4 \quad 2$

$$= \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!}\cdot 2^n n! = \frac{(-1)^n (n!)^2 2^n}{(2n+1)!} = \frac{(-1)^n 2^n}{(2n+1)C_{2n}^n}$$

Conclusion : on trouve $y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n \, n!}{(2n+1)!!} \, x^n$

rayon de convergence ?

$$L = \lim_{n\to\infty} \left| \frac{(-1)^{\cancel{n+1}} (n+1)\cancel{!} \; x^{\cancel{n+1}}}{(2n+3)\cancel{!!}} \cdot \frac{(\cancel{2n+1})!!}{\cancel{(-1)^n} \; \cancel{n!} \; \cancel{x^n}} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)\,|x|}{2n+3}$$

$$= \frac{|x|}{2} \begin{cases} < 1 & \text{conv.} \quad \text{i.e.} \quad |x| < 2 \\ > 1 & \text{div.} \quad \text{i.e.} \quad |x| > 2 \end{cases} \qquad \text{donc } \underline{R = 2}$$

On a trouvé la solution analytique sur $]-2, 2[$

b) Résolution élémentaire : $x(x+2)\,y' + (x+1)\,y = 1$

· éq. homogène : $x(x+2)\,y' + (x+1)\,y = 0$

$$x(x+2)\,y' = -(x+1)\,y$$

$$\frac{dy}{dx} = y' = -\frac{(x+1)}{x(x+2)}\, y$$

$$-\frac{dy}{y} = \frac{(x+1)}{x(x+2)}\, dx$$

$$\Rightarrow \; -\ln|y| = \int \frac{2(x+1)}{2\,x(x+2)}\, dx$$

$$= \frac{1}{2} \int \frac{u'}{u}\, dx \qquad u = x(x+2) = x^2 + 2x, \quad u' = 2x+2$$

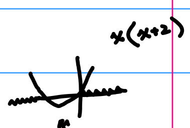
$$= \tfrac{1}{2} \ln|u| + C$$

$$= \tfrac{1}{2} \ln|x(x+2)| + C$$

$$= \ln\sqrt{|x(x+2)|} + C$$

$$\ln|y| = -\ln\sqrt{|x(x+2)|} - C$$

$$|y| = \frac{1}{\sqrt{|x(x+2)|}}\, e^{-C}$$



admet des solutions $y = \frac{\pm e^{-C}}{\sqrt{|x(x+2)|}}$ — A constante

sur $]-\infty, -2[$ — $y = C\left(x(x+2)\right)^{-1/2}$

$]-2, 0[$ — $y = B\left(-x(x+2)\right)^{-1/2}$

$]0, +\infty[$ — $y = A\left(x(x+2)\right)^{-1/2}$

· $x(x+2)y' + (x+1)y = 0$ admet solution gén.

$$y = A\left(x(x+2)\right)^{-1/2} \text{ sur }]0,+\infty[$$

· solution de l'équation non homogène ?

méthode de variation de la constante :

on cherche $y(x) = A(x) \cdot \left(x(x+2)\right)^{-1/2}$

$$y' = A'\left(x(x+2)\right)^{-1/2} - \cancel{\tfrac{1}{2}} A \left(x(x+2)\right)^{-3/2} \cdot \cancel{2}(x+1)$$

$$x(x+2)y' + (x+1)y \overset{\text{vaut}}{=} 1$$

$$A'\left(x(x+2)\right)^{1/2} - A\cancel{\left(x(x+2)\right)^{-1/2}}(x+1) + A\cancel{\left(x(x+2)\right)^{-1/2}}(x+1) = 1$$

$$A'\left(x(x+2)\right)^{1/2} = 1$$

$$A'(x) = \left(x(x+2)\right)^{-1/2}$$

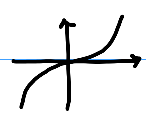
$$A(x) = \int \frac{1}{\sqrt{x(x+2)}}\,dx$$

Alternate form assuming x>0:

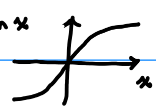
$2\sinh^{-1}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right)$ + constant

$$= 2 \operatorname{Arg\,sh}\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$\operatorname{sh} x = \frac{e^x - e^{-x}}{2}$$



Arg sh x



$$y = \operatorname{Arg\,sh} x \iff x = \operatorname{sh} y = \frac{e^y - e^{-y}}{2}$$

$$2x = e^y - e^{-y}$$

$$\Rightarrow 2x\,e^y = (e^y)^2 - 1$$

$$(e^y)^2 - 2x\,e^y - 1 = 0$$

$$e^y = \frac{2x \pm \sqrt{4x^2+4}}{2} = x \cancel{\pm} \sqrt{x^2+1}$$

$$\operatorname{Arg\,sh} x = y = \ln\left(x + \sqrt{x^2+1}\right)$$

$$A(x) = 2\ln\left(\frac{\sqrt{x}}{\sqrt{2}} + \sqrt{\frac{x}{2}+1}\right) + C$$

$$= 2\ln\left(\frac{\sqrt{x} + \sqrt{x+2}}{\sqrt{2}}\right) + C$$

$$= 2\ln\left(\sqrt{x} + \sqrt{x+2}\right) + C'$$

Bref : $y(x) = \dfrac{2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right) + C}{\sqrt{x(x+2)}}$ solution gén. de l'éq. diff. sur $]0,+\infty[$

vois. 0

$$\frac{2\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right)+C}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}$$

$$\ln\left(\sqrt{x}+\sqrt{x+2}\right) = \ln\left(\sqrt{x+2}\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)\right)$$

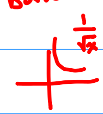
$$= \ln\sqrt{x+2} + \ln\left(1+\sqrt{\frac{x}{x+2}}\right)$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{2\left(\ln\sqrt{2} + \sqrt{\frac{x}{2}}\right) + C}{\sqrt{x}\qquad\sqrt{2}}$$

$$\underset{0}{\sim} \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\frac{2}{\sqrt{2}} + \frac{2\ln\sqrt{2}+C}{\sqrt{x}}\right)$$

$C = -2\ln\sqrt{2}$ pour avoir une solution bornée en 0^+

$$= \frac{2}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}}\frac{(2\ln\sqrt{2}+C)}{\sqrt{x}}$$



En résumé : $y(x) = \dfrac{2 \cdot \ln\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}}$ est l'unique solution bornée à l'éq. diff. sur $]0,+\infty[$

c) En comparant a) et b) :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n!}{(2n+1)!!} x^n = \begin{cases} \dfrac{2\ln\left(\frac{\sqrt{x}+\sqrt{x+2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{x}\,\sqrt{x+2}} & \text{sur }]0,2[\\ \cdots\cdots & \text{sur }]-2,0[\end{cases}$$

$$\|$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n n! \cdot 2^n n!}{(2n+1)!} x^n$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2\, 2^n}{(2n+1)!} x^n$$

puis on évalue en $x = 1/2$

$$\rightsquigarrow \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!} = \frac{2\ln\left(\frac{\sqrt{1/2}+\sqrt{1/2+2}}{\sqrt{2}}\right)}{\sqrt{1/2}\,\sqrt{1/2+2}}$$