TD7 : Régime sinusoïdal résonance RLC série

Exercice 1 :

1)a) $e(t) - L\frac{di}{dt} - Ri - u_c(t) = 0$

or $i = C\frac{du_c}{dt}$

d'où $LC\frac{d^2u_c}{dt^2} + RC\frac{du_c}{dt} + u_c(t) = e(t)$.

b) $-LC\omega^2 \underline{u}_c(t) + jRC\omega \underline{u}_c(t) + \underline{u}_c(t) = \underline{e}(t)$

$\Leftrightarrow \underline{u}_c(t) = \frac{\underline{e}(t)}{-LC\omega^2 + 1 + jRC\omega}$

diviseur de tension : $\underline{u}_c(t) = \frac{Z_C}{Z_C + Z_L + Z_R}\underline{e}(t)$

$= \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R}\underline{e}(t)$

$= \frac{1}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\underline{e}(t)$

c) $\underline{U}_c = \frac{E_0}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

d) $U_{C_0} = |\underline{U}_c| = \frac{E_0}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$

e) $U_{e_0} = \dfrac{E}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2+(RC\omega)^2}} = \dfrac{E}{\sqrt{\left(1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2\right)^2+\left(\frac{\omega}{Q\omega_0}\right)^2}} = \dfrac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2+\frac{x^2}{Q^2}}}$

f) $\varphi = \arg\left(\dfrac{E}{1-LC\omega^2+jRC\omega}\right)$

$= \arg(E) - \arg(1-LC\omega^2+jRC\omega)$

$= -\arg(1-LC\omega^2+jRC\omega)$

g) $\varphi = -\arg\left(j\left(RC\omega - j(1-LC\omega^2)\right)\right)$

$= -\arg(j) - \arg\left(RC\omega - j(1-LC\omega^2)\right)$

$= -\dfrac{\pi}{2} - \arctan\left(\dfrac{-(1-LC\omega^2)}{RC\omega}\right)$

$= -\dfrac{\pi}{2} + \arctan\left(\dfrac{1-LC\omega^2}{RC\omega}\right)$

h) $\varphi = -\dfrac{\pi}{2} + \arctan\left(\dfrac{1-\left(\frac{\omega}{\omega_0}\right)^2}{\frac{\omega}{Q\omega_0}}\right) = -\dfrac{\pi}{2} + \arctan\left(\dfrac{1-x^2}{\frac{x}{Q}}\right)$

$= -\dfrac{\pi}{2} + \arctan\left(\dfrac{Q(1-x^2)}{x}\right)$

i) Étudions les variations de $f(x) = (1-x^2)^2 + \left(\dfrac{x}{Q}\right)^2$:

Calculons $f'(x)$:

$f'(x) = \dfrac{2x}{Q^2} - 2(1-x^2)2x = 2x\left(\dfrac{1}{Q^2} - 2 + 2x^2\right)$

$f'(x) = 0$ pour $x = 0$ et $x^2 = 1 - \dfrac{1}{2Q^2}$

$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ avec $1 - \frac{1}{2Q^2} \geq 0 \iff Q \geq \frac{1}{\sqrt{2}}$

x	0		$\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}$		$+\infty$
$2x$		$+$		$+$	
$2x^2 + \frac{1}{Q^2} - 2$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$\searrow$		$\nearrow$	
$\sqrt{f(x)}$		$\searrow$		$\nearrow$	
U_{C_0}		$\nearrow$		$\searrow$	

Quand $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ $\Rightarrow f'(x)$ s'annule en $x = 0$ et $f'(x) \geq 0$

$\Rightarrow f(x)$ est croissante.

$\Rightarrow U_{C_0}$ est décroissante

$\Rightarrow$ pas de résonance en tension sur condensateur.

b) $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$: $\lim\limits_{x \to 0} U_{C_0} = \underline{E}$ et $\lim\limits_{x \to +\infty} U_{C_0} = \underline{0}$

$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$: $U_{max} = U_{C_0}\left(\sqrt{1-\frac{1}{2Q^2}}\right) = \dfrac{E}{\sqrt{\left(1-1+\frac{1}{2Q^2}\right)^2 + \left(\frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}\right)}}$

$$= \frac{E}{\sqrt{\frac{1}{4Q^4} + \frac{1}{Q^2} - \frac{1}{2Q^4}}} = \frac{E}{\sqrt{\frac{1 + 4Q^2 - 2}{4Q^4}}}$$

$$= \underline{\frac{2Q^2 E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}}$$

c) Plus Q est grand, plus le pic de résonance est élevé et plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit.

d) soit $f(x) = \frac{Q(1-x^2)}{x} = Q\left(\frac{1}{x} - x\right)$

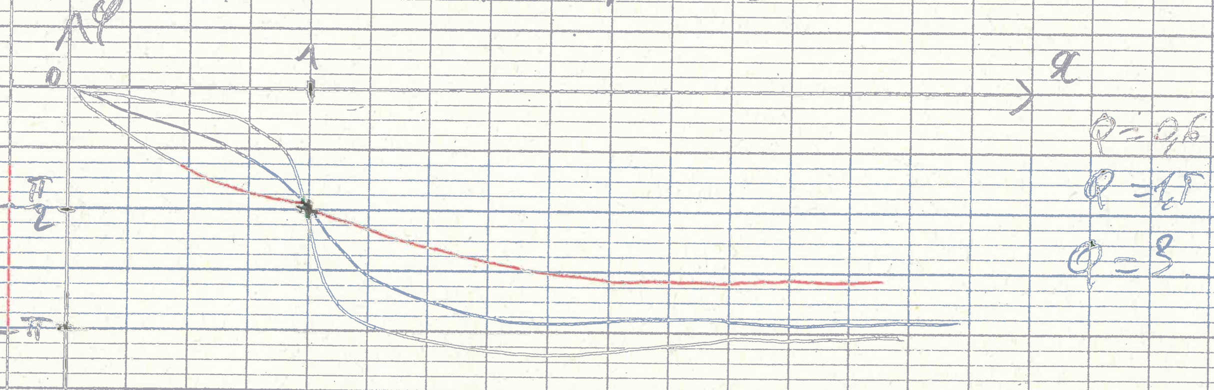
$$f'(x) = Q\left(-\frac{1}{x^2} - 1\right) = -Q\left(\frac{1}{x^2} + 1\right) < 0$$

$\Rightarrow f(x)$ est décroissante

$\Rightarrow \varphi$ décroissante.

e) $\lim\limits_{x \to 0} \varphi = 0 \qquad \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi = -\pi$

pour $x = 1$ $(\omega = \omega_0) \Rightarrow \varphi = -\frac{\pi}{2}$



f) $\lim\limits_{x \to 1} \varphi = -\frac{\pi}{2}$

Exercice 2 (bonus)

1) $\underline{U_c} = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega} = \underline{Z_c}\,\underline{I} \Leftrightarrow \underline{I} = \frac{\underline{U_c}}{\underline{Z_c}} = \frac{jEC\omega}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$

2) $I_0 = |\underline{I}| = \frac{EC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + (RC\omega)^2}}$

$$I_0 = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}} = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + \frac{1}{R^2}\frac{L}{C}\left(\omega\sqrt{LC} - \frac{1}{\omega\sqrt{LC}}\right)^2}}$$

$$I_0 = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1+\frac{1}{R^2}\frac{L}{C}\left(LC\omega^2 - 2 + \frac{1}{LC\omega^2}\right)}} = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1+\frac{L^2}{R^2}\omega^2 - \frac{2}{R^2}\frac{L}{C} + \frac{1}{R^2C^2\omega^2}}}$$

$$I_0 = \frac{EC\omega}{RC\omega\sqrt{1+\frac{L^2}{R^2}\omega^2 - \frac{2}{R^2}\frac{L}{C} + \frac{1}{R^2C^2\omega^2}}} = \frac{EC\omega}{\sqrt{R^2C^2\omega^2 + 1 + L^2C^2\omega^4 - 2LC\omega^2}}$$

$$I_0 = \frac{EC\omega}{\sqrt{(1-LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

3) $f(x) = 1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 \Rightarrow f'(x) = +2Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$

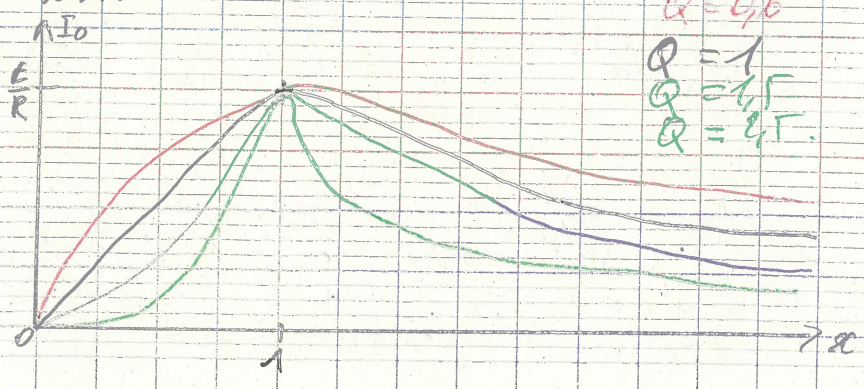
$= +2Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)\left(1+\frac{1}{x^2}\right)$.

$f'(x) = 0$ qd $x = 1$.

x	0		1		$+\infty$
$1+\frac{1}{x^2}$		$+$		$+$	
$x-\frac{1}{x}$		$-$	0	$+$	
$f'(x)$		$-$		$+$	
$f(x)$		↘		↗	
$\sqrt{f(x)}$		↘		↗	
I_0		↗		↘	

4) $\lim\limits_{x\to 0} I_0 = 0$ et $\lim\limits_{x\to+\infty} I_0 = 0$

$I_{0_{max}} = \frac{E}{R}$ ...



5) Le pic de résonance s'affine à mesure que Q augmente

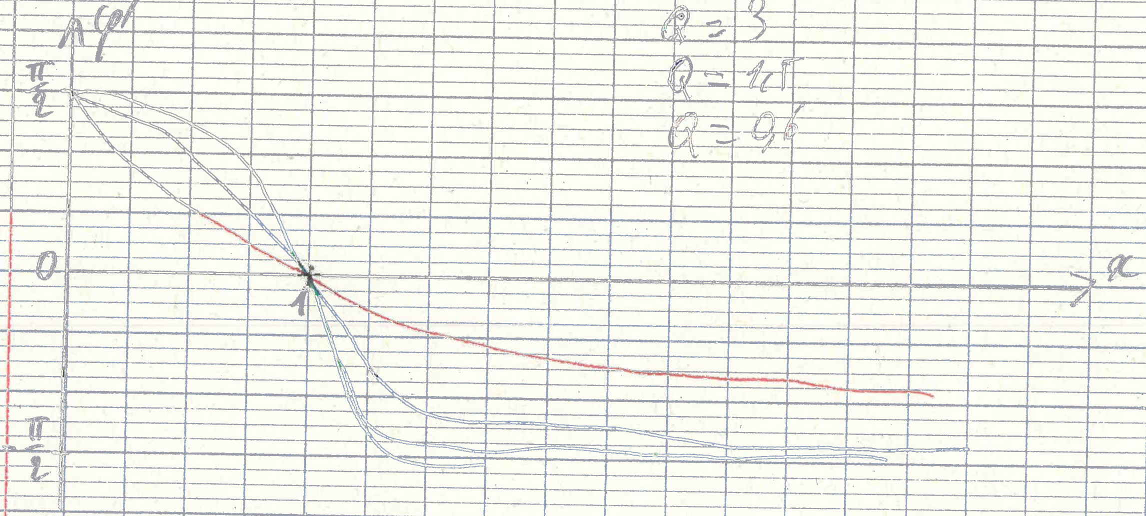
6) $\varphi' = \arg\left(\underline{I}\right) = \arg(jECw) - \arg(1 - LCw^2 + jRCw)$

$$= \frac{\pi}{2} - \frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1-LCw^2}{RCw}\right)$$

$$= \arctan\left(\frac{Q(1-x^2)}{x}\right) = \arctan\left(Q\left(\frac{1}{x} - x\right)\right)$$

7) $\lim\limits_{x \to 0} \varphi' = \frac{\pi}{2}$ $\quad \lim\limits_{x \to +\infty} \varphi' = -\frac{\pi}{2}$

$\varphi' = 0$ pour $x = 1$



Exercice 3 (Bonus).

1) $\underline{Z} = \underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R = \frac{1}{jCw} + jLw + R = \frac{1 - LCw^2 + jRCw}{jCw}$

2) $Z = |\underline{Z}| = \frac{\sqrt{(1-LCw^2)^2 + (RCw)^2}}{Cw} = \sqrt{\frac{(1-LCw^2)^2 + (RCw)^2}{C^2w^2}} = \sqrt{R^2 + \left(\frac{1-LCw^2}{Cw}\right)^2}$

$$= \sqrt{R^2 + \left(\frac{1}{Cw} - Lw\right)^2}$$

$$Z' = \frac{1}{2}\sqrt{R^2+\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)^2}\left(2\left(\frac{1}{C\omega}-L\omega\right)\left(-\frac{1}{C\omega^2}-L\right)\right)$$

$$Z' = 0 \text{ si } \frac{1}{C\omega} - L\omega = 0 \Leftrightarrow \omega^2 = \frac{1}{LC} \Leftrightarrow \omega = \frac{1}{\sqrt{LC}} = \omega_0.$$

$$\Rightarrow Z = \sqrt{R^2+\left(\frac{\sqrt{LC}}{C} - \frac{L}{\sqrt{LC}}\right)^2} = \sqrt{R^2+\left(\sqrt{\frac{L}{C}}-\sqrt{\frac{L}{C}}\right)^2} = R.$$