$\mathscr{M}$aths $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **3** $\times$ **3** questions équipondérées pouvant être traitées dans n'importe quel ordre.
- Calculatrice **permise** mais peu utile...
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et énonçant les résultats utilisés.
- N'oubliez pas que le but de l'exercice est de faire étalage de ce que vous avez compris ce semestre.
- **Exprimez**-vous donc en utilisant le langage et vocabulaire approprié, et surtout **amusez**-vous bien !

1. Considérons l'hélice conique $\mathcal{H}$ paramétrée par $\mathbf{r}(t) = \big(e^t\cos t,\, e^t\sin t,\, e^t\big)$ pour $t \geqslant 0$.

   a) Vérifier que $\mathcal{H}$ est bien située à la surface d'un cône dont vous préciserez l'équation cartésienne.

   b) Calculer l'angle entre la direction tangente à $\mathcal{H}$ en un point donné et la verticale et vérifier que celui-ci ne dépend pas du point choisi.

   c) Exprimer en fonction de t l'abscisse curviligne sur cette courbe calculée à partir de $(0,0,0)$.

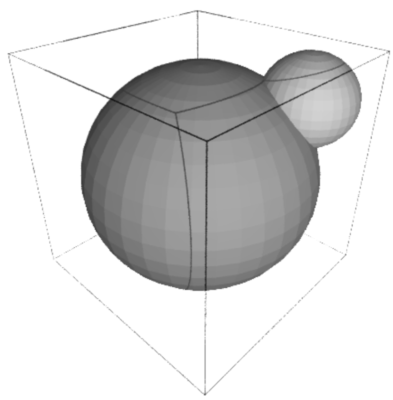
2. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par $f(x,y) = e^{-x^2-y^2}$.

   a) Montrer que f est de classe $\mathcal{C}^2$ et spécifier son DL_2 en $(0,1)$.

   b) Déterminer et classifier les points critiques de f. Quelles sont les valeurs extrêmes prises par celle-ci sur le disque
   $$\mathcal{D}_R : x^2 + y^2 \leqslant R^2 \ ?$$

   c) Évaluer explicitement $\displaystyle\iint_{\mathcal{D}_R} f\,\mathrm{d}A$ et regarder ce qui se passe lorsque $R \to \infty$.

3. a) Dans la mémoire d'un droïde astromécanicien on découvre le schéma suivant représentant :
   - la sphère $\mathcal{S}$ centrée en $(0,0,0)$ de rayon $R > 0$;
   - la sphère $\mathcal{T}$ centrée en (a,b,c) de rayon $0 < r < R$;
   - le cercle $\mathcal{C}$ d'intersection de $\mathcal{S}$ et de $\mathcal{T}$.

   Donner des équations cartésiennes pour $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ ainsi que pour le plan $\mathcal{P}$ contenant $\mathcal{C}$.

   b) Déterminer le centre et le rayon ρ de $\mathcal{C}$ en fonction de R, r et $d := \sqrt{a^2+b^2+c^2}$, puis expliquer comment faire pour obtenir une paramétrisation de $\mathcal{C}$.

   c) Soit $\mathcal{E}$ le solide formé des points situés à l'intérieur de $\mathcal{S}$ mais à l'extérieur de $\mathcal{T}$. Évaluer $\mathrm{vol}(\mathcal{E})$ à l'aide d'une intégrale triple en fonction de R et ρ (vous pouvez supposer que $a = b = 0$ pour simplifier la représentation).