CIR2 Lundi 2 Mars 2020

DS de Maths

Durée 2 heures
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable
Les 4 exercices sont indépendants
Barème envisagé : 2 - 4 - 4 - 10

Exercice 1 : Une opération dans $\mathbb{R}$

Pour tous x et y dans $\mathbb{R}$ on pose $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
Étudier les propriétés de cette opération
(commutativité, associativité, existence d'un élément neutre, existence d'un symétrique pour tout élément)

Commutative : $x \star y = \sqrt[3]{x^3 + y^3} = \sqrt[3]{y^3 + x^3} = y \star x$

Associative : $(x \star y) \star z = \sqrt[3]{\left(\sqrt[3]{x^3 + y^3}\right)^3 + z^3} = \sqrt[3]{\left(x^3 + y^3\right) + z^3} = \sqrt[3]{x^3 + \left(y^3 + z^3\right)} = x \star (y \star z)$

Elément neutre 0
Symétrique de x : $-x$

Exercice 2 : Equipotence

Soient :
C l'intérieur du carré unité : $C =]-1,+1[\times]-1,+1[$ et D l'intérieur du disque unité : $D = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 < 1\right\}$

1. Montrer que C et D sont équipotents (On pourra penser à la fonction $f : (x,y) \to \left(x, y\sqrt{1-x^2}\right)$).

   Pour tout $(x,y) \in C$, donc $f(x,y) \in D$

   Réciproquement, si $(u,v) \in D$, $-1 < u < 1$ et $-\sqrt{1-u^2} < v < \sqrt{1-u^2}$ donc $\left(u, \frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right) \in C$

   donc f est une bijection de C sur D, de réciproque $(u,v) \to \left(u, \frac{v}{\sqrt{1-u^2}}\right)$

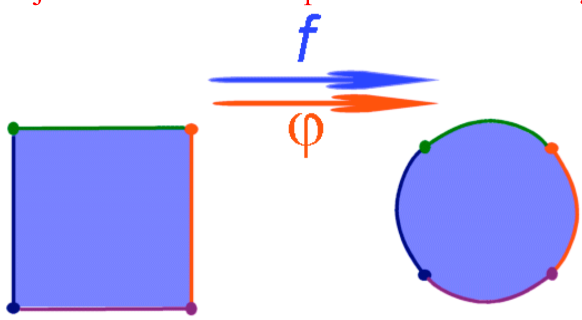
2. Montrer que $\Gamma = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x = 1 \text{ et } -1<y \leqslant 1\right\}$ et $\gamma = \left\{z \in \mathbb{C} / |z| = 1 \text{ et } -\frac{\pi}{4} < \arg(z) \leqslant \frac{\pi}{4}\right\}$ sont équipotents .

   $\varphi : (x,y) \to e^{i\frac{\pi}{4}y}$ est une bijection de Γ sur γ

3. En déduire que $\overline{C} = [-1,+1] \times [-1,+1]$ et $\overline{D} = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x^2 + y^2 \leqslant 1\right\}$ sont équipotents

   (indication : faire des figures !)

   On peut définir une bijection de $\overline{C}$ sur $\overline{D}$ "par morceaux" voir figure ci-dessous



Exercice 3 : Calcul d'une somme

On pose $S_1 = 1+2+...+n$, $S_2 = 1^2+2^2+...+n^2$, $S_3 = 1^3+2^3+...+n^3$

1. Rappeler les valeurs de S_1 et S_2 (donner une expression factorisée)

$$S_1 = \frac{n(n+1)}{2} , \ S_2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

2. Après avoir développé $(k+1)^4$ $\qquad (k+1)^4 = k^4 + 4k^3 + 6k^2 + 4k + 1$

   simplifier la somme $(n+1)^4 + n^4 + ... + (k+1)^4 + ... + 2^4 + 1^4$

   et en déduire que $(n+1)^4 = 1 + 4S_3 + 6S_2 + 6S_1 + n + 1$

$$\begin{array}{ccccccccccc}
(n+1)^4 & = & n^4 & + & 4n^3 & + & 6n^2 & + & 4n & + & 1 \\
n^4 & = & (n-1)^4 & + & 4(n-1)^3 & + & 6(n-1)^2 & + & 4(n-1) & + & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
(k+1)^4 & = & k^4 & + & 4k^3 & + & 6k^2 & + & 4k & + & 1 \\
\vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots & & \vdots \\
2^4 & = & 1^4 & + & 4.1^3 & + & 6.1^2 & + & 4.1 & + & 1 \\
1^4 & = & 0^4 & + & 4.0^3 & + & 6.0^2 & + & 4.0 & + & 1 \\
\hline
(n+1)^4 & = & 0 & + & 4S_3 & + & 6S_2 & + & 4S_1 & + & (n+1)
\end{array}$$

3. Calculer S_3 (donner une expression factorisée)

$$S_3 = \frac{(n+1)^4 - 6S_2 - 4S_1 - (n+1)}{4} = \frac{(n+1)^4 - n(n+1)(2n+1) - 2n(n+1) - (n+1)}{4}$$

$$S_3 = (n+1)\frac{(n+1)^3 - n(2n+1) - 2n - 1}{4} = (n+1)\frac{(n+1)^3 - (2n+1)(n+1)}{4} = (n+1)^2\frac{(n+1)^2 - (2n+1)}{4} = \frac{n^2(n+1)^2}{4}$$

Exercice 4 :Relations binaires

Soit E un ensemble

On rappelle qu'une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est déterminée par son graphe G, qui est une partie de $E \times E$.

On a alors $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow (x,y) \in G$

1) Dans cette question, $E = \{a,b\}$. Écrire $E \times E$.

   Étudier **toutes** les relations binaires **réflexives** dans E :

   pour chacune d'elles, on écrira le graphe

   et on précisera si la relation est symétrique (S), antisymétrique (A)

   Les graphes de relations sont les sous-ensembles de $\{a,b\} \times \{a,b\} = \{(a,a),(b,b),(a,b),(a,b)\}$.

   Les graphes des relations réflexives doivent contenir les couples (a,a) et (b,b). Reste 4 possibilités :

   $G = \{(a,a),(b,b)\} S, A$

   $G = \{(a,a),(b,b),(a,b)\} non\, S, A$

   $G = \{(a,a),(b,b),(b,a)\} non\, S, A$

   $G = \{(a,a),(b,b),(a,b),(a,b)\} \ S, non\, A$

2) Dans cette question, E est un ensemble fini à n éléments

a) Combien existe-t-il de relations binaires dans E ? $2^{Card(E\times E)} = 2^{n^2}$

b) Combien existe-t-il de relations binaires **réflexives** dans E ?

Les graphes doivent contenir les n couples (x_i, x_i). Il reste $n^2 - n$ couples qu'on peut prendre ou non.

Donc 2^{n^2-n} relations réflexives

c) Combien existe-t-il de relations binaires dans E à la fois **réflexives et symétriques** ?

Les graphes doivent contenir les n couples (x_i, x_i).

Parmi les $n^2 - n$ couples restant, si on prend un couple (x_i, x_j), il faut forcément prendre le couple (x_j, x_i).

Il n'y a donc plus que $\dfrac{n^2-n}{2}$ couples qu'on peut prendre ou non.

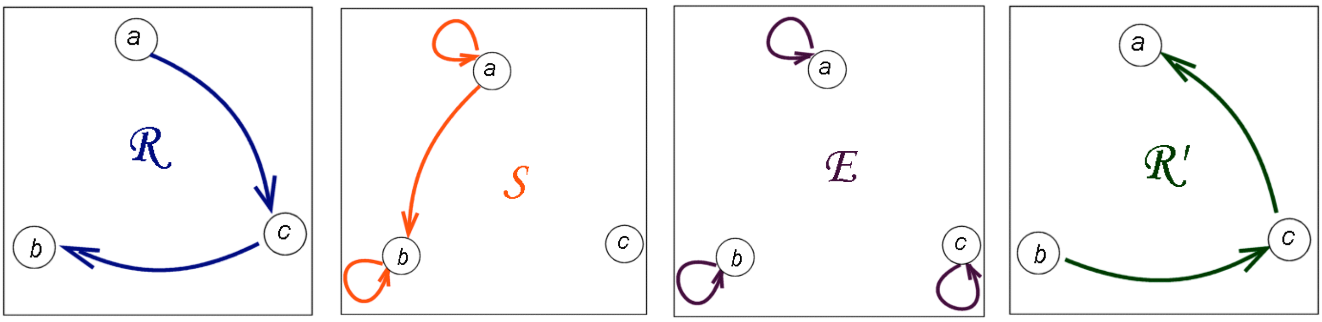
Donc $2^{\frac{n^2-n}{2}}$ relations à la fois réflexives et symétriques.

On rappelle que le produit de 2 relations binaires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ est la relation binaire $\mathcal{R}.\mathcal{S}$ définie par

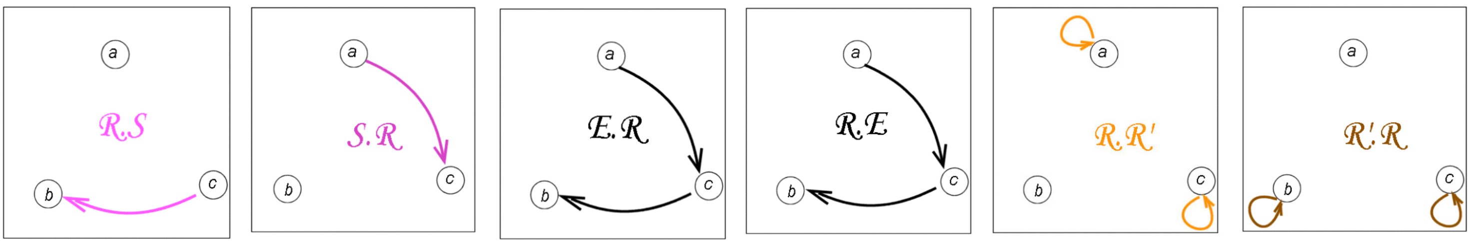
$\forall x, y \in E,\ x(\mathcal{R}.\mathcal{S})y \Leftrightarrow \exists z \in E / x\mathcal{R}z$ et $z\mathcal{S}y$

3) Dans cette question, $E = \{a, b, c\}$

On définit les relations binaires $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{E}$ et $\mathcal{R}'$ par leurs diagrammes sagittaux ci-dessous :



Faire ci-dessous les diagrammes sagittaux des relations $\mathcal{R}.\mathcal{S}$, $\mathcal{S}.\mathcal{R}$, $\mathcal{E}.\mathcal{R}$, $\mathcal{R}.\mathcal{E}$, $\mathcal{R}.\mathcal{R}'$ et $\mathcal{R}'.\mathcal{R}$:



4) Dans cette question, on revient au cas général.

On appelle R l'ensemble des relations binaires dans E et on étudie l'opération interne qui, à deux relations binaires $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ appartenant à E, associe leur produit $\mathcal{R}.\mathcal{S}$

a) Cette opération est-elle commutative ? Non voir contre-exemple(s) au 3)

b) Démontrer que la relation d'égalité $\mathcal{E}$ définie par $x\,\mathcal{E}\,y \Leftrightarrow x = y$ est l'élément neutre.

(on montrera que $x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x\left(\mathcal{E}.\mathcal{R}\right)y$ puis …)

$\forall x,z \in E$, si $x\,\mathcal{E}\,z$ c'est que $x = z$ donc $x\left(\mathcal{E}.\mathcal{R}\right)y \Rightarrow \exists z \in E \ / \ x\,\mathcal{E}\,z$ et $z\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x = z$ et $z\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,y$

Réciproque : $\forall x \in E, x\,\mathcal{E}\,x$ donc $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{E}\,x$ et $x\,\mathcal{R}\,y$ et $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\left(\mathcal{E}.\mathcal{R}\right)y$

Donc $\mathcal{E}.\mathcal{R} = \mathcal{R}$. On démontre de la même manière que $\mathcal{R}.\mathcal{E} = \mathcal{R}$

Comme l'élément neutre est unique, $\mathcal{E}$ est **l**'élément neutre.

c) Démontrer que cette opération est associative

Soients $\mathcal{R}, \mathcal{S}, \mathcal{T}$ trois relations dans E et x , y deux éléments de E.

$x\left(\left(\mathcal{R}.\mathcal{S}\right).\mathcal{T}\right)y \Leftrightarrow \exists u \in E \ / \ x\left(\mathcal{R}.\mathcal{S}\right)u$ et $u\,\mathcal{T}\,y \Leftrightarrow \exists u,v \in E \ / \ \left(x\,\mathcal{R}\,v \text{ et } v\,\mathcal{S}\,u\right)$ et $u\,\mathcal{T}\,y$

$x\left(\mathcal{R}.\left(\mathcal{S}.\mathcal{T}\right)\right)y \Leftrightarrow \exists v \in E \ / \ x\mathcal{R}\,v$ et $v\left(\mathcal{S}.\mathcal{T}\right)\mathcal{T}\,y \Leftrightarrow \exists u,v \in E \ / \ x\,\mathcal{R}\,v$ et $\left(v\,\mathcal{S}\,u \text{ et } u\,\mathcal{T}\,y\right)$

donc $\forall x,y \in E$, $x\left(\left(\mathcal{R}.\mathcal{S}\right).\mathcal{T}\right)y \Leftrightarrow x\left(\mathcal{R}.\left(\mathcal{S}.\mathcal{T}\right)\right)y$ et $\left(\mathcal{R}.\mathcal{S}\right).\mathcal{T} = \mathcal{R}.\left(\mathcal{S}.\mathcal{T}\right)$

d) Montrer que si $\mathcal{R}$ avait un symétrique $\mathcal{R}^{-1}$ et si on avait $\mathcal{R}.\mathcal{R} = \mathcal{R}$, alors on aurait $\mathcal{R} = \mathcal{E}$.

En déduire que les éléments de E n'ont pas tous un symétrique.

Puisque $\mathcal{E}$ est l'élément neutre, si $\mathcal{R}^{-1}$ est le symétrique de $\mathcal{R}$, alors $\mathcal{R}^{-1}.\mathcal{R} = \mathcal{E}$

Alors en utilisant l'associativité, $\mathcal{R}.\mathcal{R} = \mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{R}^{-1}.\mathcal{R}.\mathcal{R} = \mathcal{R}^{-1}.\mathcal{R} \Rightarrow \mathcal{E}.\mathcal{R} = \mathcal{E} \Rightarrow \mathcal{R} = \mathcal{E}$

5) On définit la relation □ dans l'ensemble R des relations binaires dans E en posant :

$\mathcal{R} □ \mathcal{S} \Leftrightarrow \left(\forall x,y \in E, x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{S}\,y\right)$.

Montrer que □ est une relation d'ordre.

□ est réflexive car $\forall x,y \in E$, $x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{R}\,y$ donc $\mathcal{R} □ \mathcal{R}$

□ est antisymétrique car si $\mathcal{R} □ \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} □ \mathcal{R}$, alors $\forall x,y \in E$, $\left(x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{S}\,y\right)$ et $\left(x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{S}\,y\right)$

donc $\forall x,y \in E, x\,\mathcal{R}\,y \Leftrightarrow x\,\mathcal{S}\,y$ et $\mathcal{R} = \mathcal{S}$

□ est transitive car si $\mathcal{R} □ \mathcal{S}$ et $\mathcal{S} □ \mathcal{T}$, alors $\forall x,y \in E$, $\left(x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{S}\,y\right)$ et $\left(x\,\mathcal{S}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{T}\,y\right)$

donc $\forall x,y \in E, x\,\mathcal{R}\,y \Rightarrow x\,\mathcal{T}\,y$ et $\mathcal{R} □ \mathcal{T}$

★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★★