EULER, *Introduction à l'Anal. infin.* Tome I.

DES QUANTITÉS TRANSCENDANTES QUI NAISSENT DU CERCLE.

132. Puisque $(\sin. z)^2 + (\cos. z)^2 = 1$, en décomposant en facteurs, on aura $(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)(\cos. z - \sqrt{-1}\,\sin. z) = 1$. Ces facteurs, quoique imaginaires, sont d'un grand usage dans la combinaison & dans la multiplication des arcs. En effet, cherchons le produit de ces facteurs $(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)(\cos. y + \sqrt{-1}.\sin. y)$, nous trouverons $\cos. y.\cos. z - \sin. y.\sin. z + (\cos. y.\sin. z + \sin. y.\cos. z)\sqrt{-1}$; mais comme $\cos. y.\cos. z - \sin. y.\sin. z = \cos.(y+z)$, & $\cos. y.\sin. z + \sin. y.\cos. z = \sin.(y+z)$; nous obtiendrons ce produit $(\cos. y + \sqrt{-1}.\sin. y)(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z) = \cos.(y+z) + \sqrt{-1}.\sin.(y+z)$.

Semblablement

$$(\cos. y - \sqrt{-1}.\sin. y)(\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z) = \cos.(y+z) - \sqrt{-1}.\sin.(y+z).$$

De même

$$(\cos. x \pm \sqrt{-1}.\sin. x)(\cos. y \pm \sqrt{-1}.\sin. y)(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\sin. z) = \cos.(x+y+z) \pm \sqrt{-1}.\sin.(x+y+z).$$

133. Il suit de-là que $(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\sin. z)^2 = \cos. 2z \pm \sqrt{-1}.\sin. 2z$, & $(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\sin. z)^3 = \cos. 3z \pm \sqrt{-1}.\sin. 3z$; & qu'en général $(\cos. z \pm \sqrt{-1}.\sin. z)^n = \cos. nz \pm \sqrt{-1}.\sin. nz$: d'où nous tirerons à cause du double signe,

$$\cos. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)^n + (\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)^n}{2} \quad \&$$

$$\sin. nz = \frac{(\cos. z + \sqrt{-1}.\sin. z)^n - (\cos. z - \sqrt{-1}.\sin. z)^n}{2\sqrt{-1}}$$

Donc en développant ces binomes en séries, nous aurons

$$\cos. nz = (\cos. z)^n - \frac{n.(n-1)}{1.\ 2}(\cos. z)^{n-2}(\sin. z)^2 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)}{1.\ 2.\ 3.\ 4}(\cos. z)^{n-4}(\sin. z)^4 - \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)(n-5)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6}(\cos. z)^{n-6}(\sin. z)^6 + \&c.$$

$$\& \sin. nz = \frac{n}{1}(\cos. z)^{n-1}\sin. z - \frac{n.(n-1)(n-2)}{1.\ 2.\ 3}(\cos. z)^{n-3}(\sin. z)^3 + \frac{n.(n-1)(n-2)(n-3)(n-4)}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5}(\cos. z)^{n-5}(\sin. z)^5 - \&c.$$

134. Soit z un arc infiniment petit, alors $\sin. z = z$, & $\cos. z = 1$; soit en même temps n un nombre infiniment grand, pour que l'arc nz soit d'une grandeur finie, pour que nz, par exemple, $= v$; à cause de $\sin. z = z = \frac{v}{n}$, on aura

$$\cos. v = 1 - \frac{v^2}{1.\ 2} + \frac{v^4}{1.\ 2.\ 3.\ 4} - \frac{v^6}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6} + \&c. \ \&$$

$$\sin. v = v - \frac{v^3}{1.\ 2.\ 3} + \frac{v^5}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5} - \frac{v^7}{1.\ 2.\ 3.\ 4.\ 5.\ 6.\ 7} + \&c.$$

...

138. Supposons encore dans les formules précédentes (*art.* 133) l'arc z infiniment petit, & n un nombre infiniment grand i, afin d'obtenir pour iz une valeur finie v; nous aurons donc $nz = v$, & $z = \frac{v}{i}$, & par conséquent $\sin. z = \frac{v}{i}$; & $\cos. z = 1$; ces substitutions faites donneront $\cos. v = \dfrac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i + \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2}$ & $\sin. v = \dfrac{\left(1 + \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i - \left(1 - \frac{v\sqrt{-1}}{i}\right)^i}{2\sqrt{-1}}$. Or dans le Chapitre précédent, nous avons vu que $\left(1 + \frac{z}{i}\right)^i = e^z$, e désignant la base des logarithmes hyperboliques; ayant donc écrit pour z, d'une part $+v\sqrt{-1}$ & d'une autre part $-v\sqrt{-1}$, on aura

$$\cos. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} + e^{-v\sqrt{-1}}}{2} \ \& \ \sin. v = \frac{e^{+v\sqrt{-1}} - e^{-v\sqrt{-1}}}{2\sqrt{-1}}.$$

On comprend par là comment les quantités exponentielles imaginaires se ramenent à des sinus & à des cosinus d'arcs réels. On aura aussi $e^{+v\sqrt{-1}} = \cos. v + \sqrt{-1}\,\sin. v$, & $e^{-v\sqrt{-1}} = \cos. v - \sqrt{-1}\,\sin. v$.

Introduction à l'analyse infinitésimale,
Volume 1 pages 96-98
Leonhard Euler