CIR₂ CNB₂

# TD Intégrales curvilignes

## Exercice 1

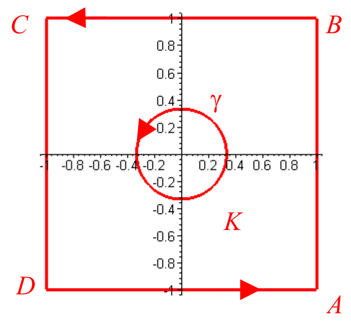
Soit $\omega$ la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ avec $P = \dfrac{x^2 - y^2 + 2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$ et $Q = \dfrac{-x^2 + y^2 + 2xy}{\left(x^2+y^2\right)^2}$.

Est-elle fermée ? sur quel domaine ? Est-elle exacte ? si c'est le cas, en trouver une primitive.

En étudiant l'intégrale de $\omega$ sur le segment $[AB]$ avec $A = (1,-1)$ et $B = (1,1)$, calculer $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{t^2-1}{\left(t^2+1\right)^2}\,dt$.

## Exercice 2

Soit $\omega$ la forme différentielle $\omega = Pdx + Qdy$ avec $P = \dfrac{-y}{x^2+y^2}$ et $Q = \dfrac{x}{x^2+y^2}$.




Est-elle fermée ? sur quel domaine ?
Est-elle exacte ? si c'est le cas, en trouver une primitive.
Soit $K$ le domaine compris entre le carré $ABCD$ et le cercle de rayon $R$.
Soit $ABCDA$ le contour orienté du carré et $\gamma$ le cercle de rayon $R$.

Montrer à l'aide de la formule de Green-Riemann que $\displaystyle\int_{ABCDA} \omega = \int_{\gamma} \omega$

Vérifier en calculant ces deux intégrales curvilignes

## Exercice 3

Calculer $\displaystyle\oint_{\Gamma} y^2\,dx + x^2\,dy$ dans les cas suivants :

a/ $\Gamma$ est la courbe d'équation $x^2 + y^2 - a\,y = 0 \quad (a > 0)$

b/ $\Gamma$ est la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = 1 \quad (a > 0 , b > 0)$

c/ $\Gamma$ est la courbe d'équation $\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{2x}{a} - \dfrac{2y}{b} = 0 \quad (a > 0, b > 0)$

## Exercice 4

Calculer $\displaystyle\oint_{C} \frac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2 + y^2}$

où C est le carré ABCD avec A = ( 1 , 1 ) , B = ( -1 , 1 ) , C = ( -1 , -1 ) , D = ( 1 , -1 ).

## Exercice 5

En utilisant la formule de Green-Riemann, calculer l'aire et la position du centre de gravité de la surface limitée par la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos\theta$ , $\theta \in [-\pi, +\pi]$

## Exercice 6

Calculer $\displaystyle\int_{\gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{dM}$ (circulation du champ de vecteurs $V$ le long de la courbe $\gamma$) dans les cas suivants :

a / $V(x,y,z) = \left(\dfrac{x-y}{x^2+y^2}, \dfrac{x+y}{x^2+y^2}, z\right)$ ,

$\gamma$ = une spire d'hélice circulaire de rayon 1, d'axe Oz, entre les points $(1,0,0)$ et $(1,0,2\pi\lambda)$

b / $V(x,y,z) = \left(\dfrac{x}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{y}{x^2+y^2+z^2}, \dfrac{z}{x^2+y^2+z^2}\right)$ ,

$\gamma$ = la courbe $x = \cos(2t)\sin(t), y = \sin(2t)\sin(t), z = \cos(t), t \in [0..\pi]$

c / $V(x,y,z) = (xy , yz , xz)$ , $\gamma$ = le triangle $ABC$, avec $A = (0,1,0)$, $B = (1,0,1)$, $C = (0,-1,0)$

d / $V(x,y,z) = (xy , yz , xz)$ , $\gamma$ = la courbe $x = \sin(t), y = \cos(t), z = 1 - \cos^2(t), t \in [0..\pi]$