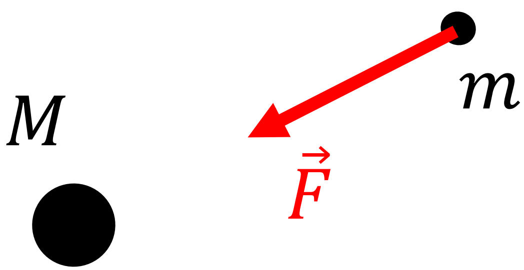
Chapitre 6 : Lois de conservation

Partie D – Le problème de Kepler

1. Introduction
2. PFD et TMC
3. Détermination de la trajectoire
4. Coniques
5. Lois de Kepler

1. Introduction

Le problème de Kepler



Mouvement d'une masse soumis à la force gravitationnelle d'une autre masse

- Pas d'autres forces que $\vec{F}$

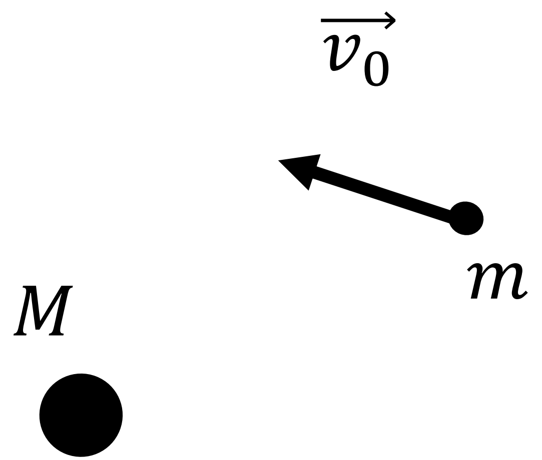
- On suppose que la masse M ne bouge pas
  (En réalité, petite rotation de M autour de O due à l'attraction par m)

- m a une vitesse initiale v_0

1. Introduction

Remarque

Par raison de symétrie, la vitesse initiale $\overrightarrow{v_0}$ définit le plan dans lequel se trouve le mouvement : plan contenant M, m et $\overrightarrow{v_0}$.

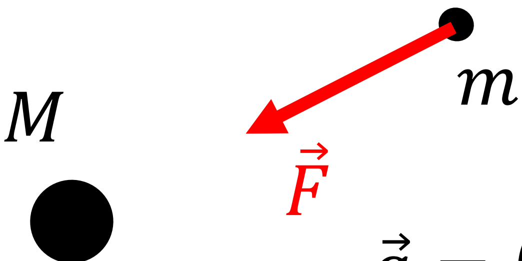


Ici : plan du dessin

On peut donc traiter le problème en 2 dimensions.

1. PFD et TMC

Application du principe fondamental de la dynamique



$$\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

$$m\vec{a} = \vec{F} \quad \Longrightarrow$$

$$\mathrm{m}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

1. PFD et TMC

$$\mathrm{m}\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + m\left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

On divise par *m*

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Le mouvement ne dépend pas de *m*
Universalité de la chute libre

1. PFD et TMC

$$\left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} = -\frac{GM}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

On obtient par identification des composantes

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

$$2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0$$

1. PFD et TMC

Théorème du moment cinétique (TMC)

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

Détermination de $\overrightarrow{\mathcal{M}_F^O}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_F^O} = \vec{0}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{cte}$$

1. PFD et TMC

Calcul de $\overrightarrow{L_O}$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,r\,\overrightarrow{u_r} \wedge \left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,r\,\overrightarrow{u_r} \wedge r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,r^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$$

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = m\,r^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}$$

Calcul de $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt}$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = 2mr\dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z} + mr^2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}$$

1. PFD et TMC

Application du TMC

$$\overrightarrow{L_O} = m\, r^2 \dot{\theta}\, \overrightarrow{u_z} = \overrightarrow{cte}$$

$$m\, r^2 \dot{\theta} = cte$$

$$\boxed{r^2 \dot{\theta} = C}$$

C est la « constante des aires »

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = 2mr\dot{r}\dot{\theta}\, \overrightarrow{u_z} + mr^2 \ddot{\theta}\, \overrightarrow{u_z} = \vec{0}$$

on divise par mr

$$\boxed{2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0}$$

1. PFD et TMC

On récapitule

PFD
$$\begin{cases} \ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\dfrac{GM}{r^2} \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

L'équation qu'on va résoudre

TMC
$$\begin{cases} r^2\dot{\theta} = C \\ 2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

Relation qu'on va utiliser

3. Détermination de la trajectoire

Remarque : la résolution qui suit n'est pas intuitive

$$\ddot{r} - r\dot{\theta}^2 = -\frac{GM}{r^2}$$

On multiplie par $\dot{r}$

$$\dot{r}\ddot{r} - r\dot{r}\dot{\theta}^2 = -\frac{GM\dot{r}}{r^2}$$

On fait disparaître le $\dot{\theta}$ en utilisant la relation $r^2\dot{\theta} = C$

$$\dot{r}\ddot{r} - \frac{C^2\dot{r}}{r^3} = -\frac{GM\dot{r}}{r^2}$$

3. Détermination de la trajectoire

On a $$\dot{r}\ddot{r} - \frac{C^2\dot{r}}{r^3} = -\frac{GM\dot{r}}{r^2}$$

On cherche la primitive. Procédons terme par terme :

$$\dot{r}\ddot{r} \Rightarrow \frac{1}{2}\dot{r}^2 \qquad (f^2)' = 2f'f$$

$$-\frac{C^2\dot{r}}{r^3} \Rightarrow \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} \qquad \left(\frac{1}{f^2}\right)' = -2\frac{f'}{f^3}$$

$$-\frac{GM\dot{r}}{r^2} \Rightarrow \frac{GM}{r} \qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2}$$

3. Détermination de la trajectoire

La primitive de $$\dot{r}\ddot{r} - \frac{C^2\dot{r}}{r^3} = -\frac{GM\dot{r}}{r^2}$$

Est donc $$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} = \frac{GM}{r} + cte$$

3. Détermination de la trajectoire

Signification de $$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = cte$$

Si on multiplie par *m* et et qu'on utilise la relation $r^2\dot{\theta} = C$

$$\frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2 - \frac{GMm}{r} = cte$$

Vitesse en coordonnées polaires : $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

Energie cinétique : $$E_c = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{1}{2}mr^2\dot{\theta}^2$$

On obtient $$E_c - \frac{GMm}{r} = cte$$

3. Détermination de la trajectoire

Signification de $\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = cte$

$$E_c - \frac{GMm}{r} = cte$$

$$-\frac{GMm}{r} = E_P$$ L’énergie potentielle de gravitation

$$\boxed{E_c + E_P = cte = E_{totale}}$$

Conservation de l’énergie

3. Détermination de la trajectoire

On reprend. $$\frac{1}{2}\dot{r}^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = cte$$

On cherche la trajectoire r en fonction de θ

On veut donc passer de r(t) à r(θ) pour cela on écrit

$$\dot{r} = \frac{dr}{dt} = \frac{dr}{d\theta}\frac{d\theta}{dt} = \dot{\theta}\,\frac{dr}{d\theta}$$

On injecte ce résultat dans l'équation précédente

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2} - \frac{GM}{r} = cte$$

3. Détermination de la trajectoire

$$\frac{1}{2}\left(\dot{\theta}\,\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{1}{2}\frac{C^2}{r^2}-\frac{GM}{r}=cte$$

On multiplie par 2 et on fait disparaître $\dot{\theta}$ en utilisant $r^2\dot{\theta}=C$

$$\frac{C^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2+\frac{C^2}{r^2}-\frac{2GM}{r}=cte$$

3. Détermination de la trajectoire

$$\frac{C^2}{r^4}\left(\frac{dr}{d\theta}\right)^2 + \frac{C^2}{r^2} - \frac{2GM}{r} = cte$$

Changement de variable $u = \frac{1}{r}$ $\quad r = \frac{1}{u}$ $\quad \frac{dr}{d\theta} = -\frac{1}{u^2}\frac{du}{d\theta}$

On obtient $C^2u^4\frac{1}{u^4}\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + C^2u^2 - 2GMu = cte$

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2GMu}{C^2} = cte$$

3. Détermination de la trajectoire

$$\left(\frac{du}{d\theta}\right)^2 + u^2 - \frac{2GMu}{C^2} = cte$$

Dernière étape…! On dérive par rapport à θ

$$2\frac{d^2u}{d\theta^2}\frac{du}{d\theta} + 2u\frac{du}{d\theta} - \frac{2GM}{C^2}\frac{du}{d\theta} = 0$$

Division par 2 du/dθ

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}}$$

3. Détermination de la trajectoire

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}}$$

Une équation différentielle qu’on sait résoudre

3. Détermination de la trajectoire

$$\boxed{\frac{d^2u}{d\theta^2} + u = \frac{GM}{C^2}}$$

Solution de f’’+f=A ?

1. Résolution de l’équation sans second membre
2. Détermination d’une solution particulière

$$u_H = A\cos\theta + B\sin\theta$$ ou $$u_H = K\cos(\theta + \theta_0)$$

$$u_P = \frac{GM}{C^2}$$

$$u(\theta) = \frac{GM}{C^2} + K\cos(\theta + \theta_0)$$

3. Détermination de la trajectoire

$$u(\theta) = \frac{GM}{C^2} + K\cos(\theta + \theta_0)$$

On met GM/C2 en facteur

$$u(\theta) = \frac{GM}{C^2}\left(1 + \frac{KC^2}{GM}\cos(\theta + \theta_0)\right)$$

On définit « l'excentricité » : $e = -\frac{KC^2}{GM}$

$$u(\theta) = \frac{GM}{C^2}(1 - e\cos(\theta + \theta_0))$$

r=1/u donc

$$\boxed{r(\theta) = \frac{C^2/GM}{(1 - e\cos(\theta + \theta_0))}}$$

Pour la suite on choisit $\theta_0 = 0$ car en pratique θ_0 ne change pas qualitativement la trajectoire

3. Détermination de la trajectoire

$$\boxed{r(\theta) = \frac{C^2/GM}{(1 - e\cos(\theta))}}$$

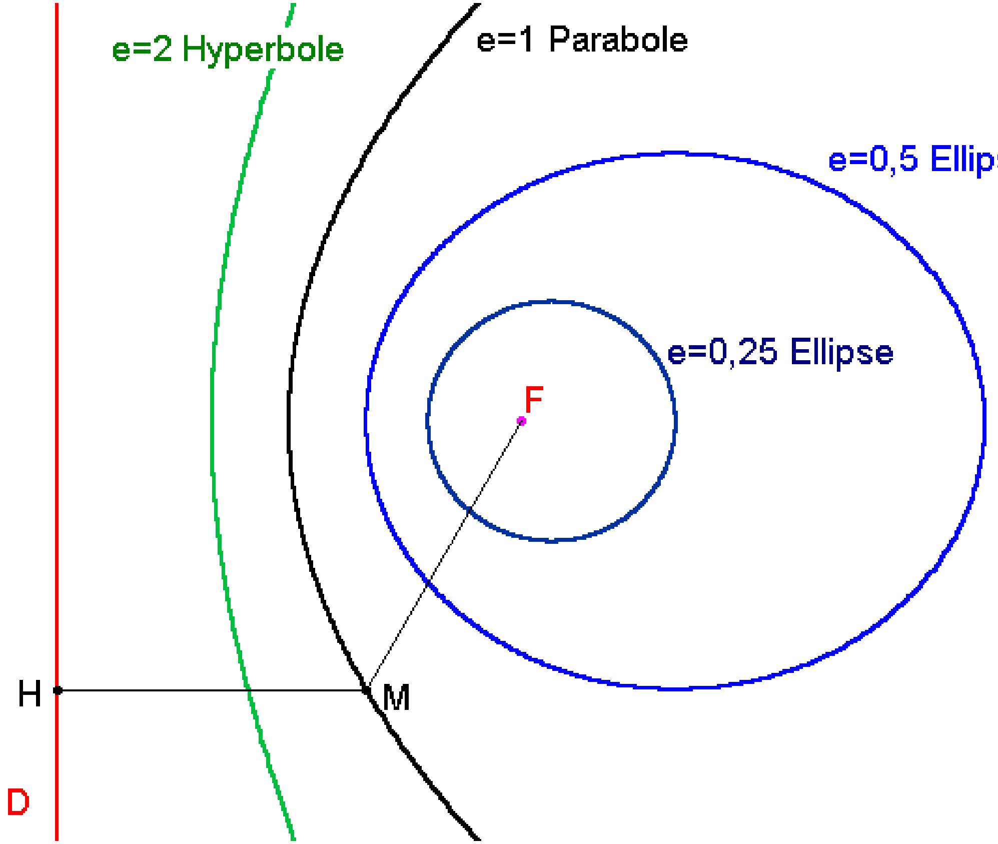
C'est l'équation d'une « conique »
Diférents types de trajectoire selon la valeur de *e*

4. Coniques

4. Coniques

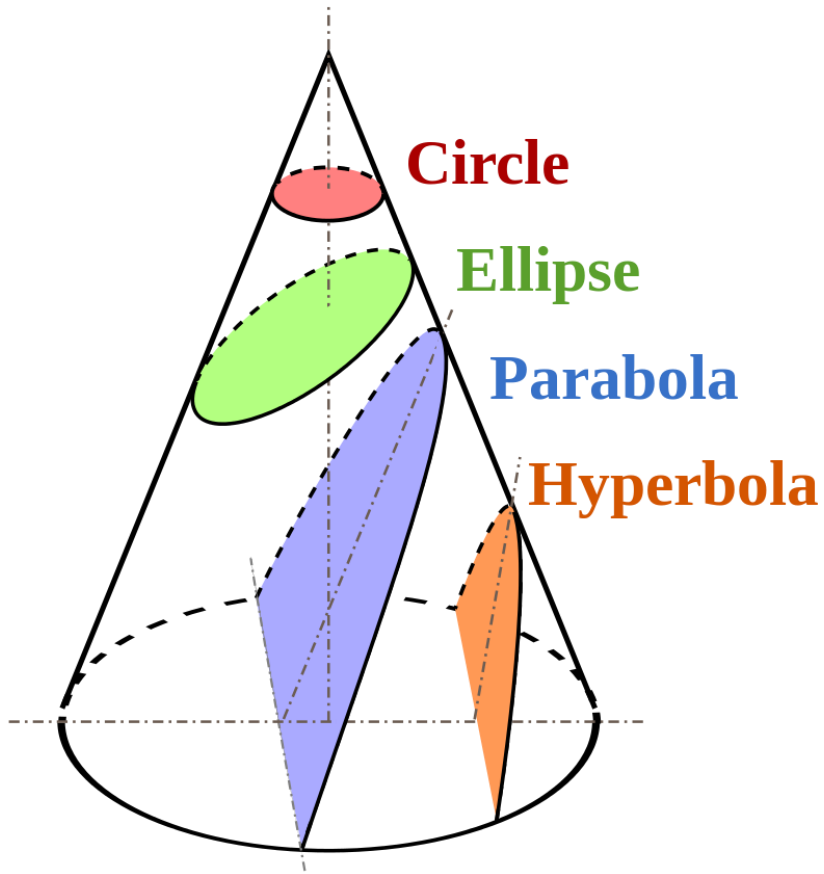
$$\boxed{r(\theta) = \frac{p}{(1 - e\cos(\theta))}}$$

$0 \leq e < 1$: ellipse
$e = 1$: parabole
$e > 1$: hyperbole



4. Coniques

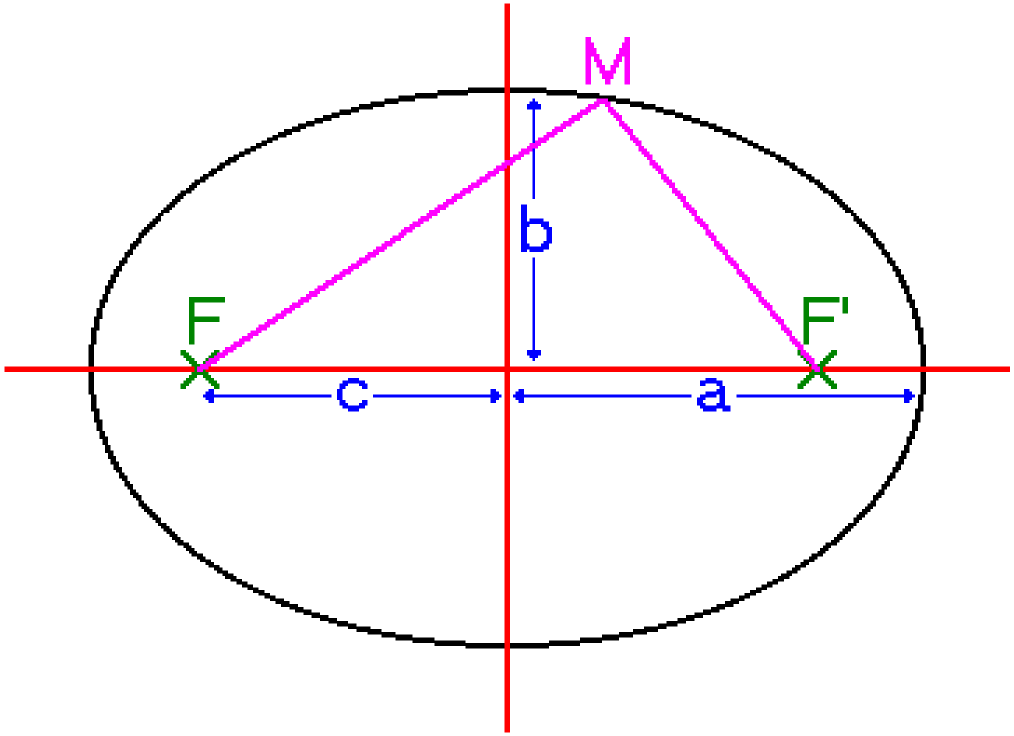
Pourquoi le nom de « conique » ?



Les courbes obtenues correspondent aux différentes coupes d’un cône

4. Coniques

Propriétés des ellipses



$$r(\theta) = \frac{p}{(1 - e\cos(\theta))}$$

Deux foyers

Rayon maximum

$$r_{max} = \frac{p}{1-e}$$

Rayon minimum

$$r_{min} = \frac{p}{1+e}$$

Grand axe

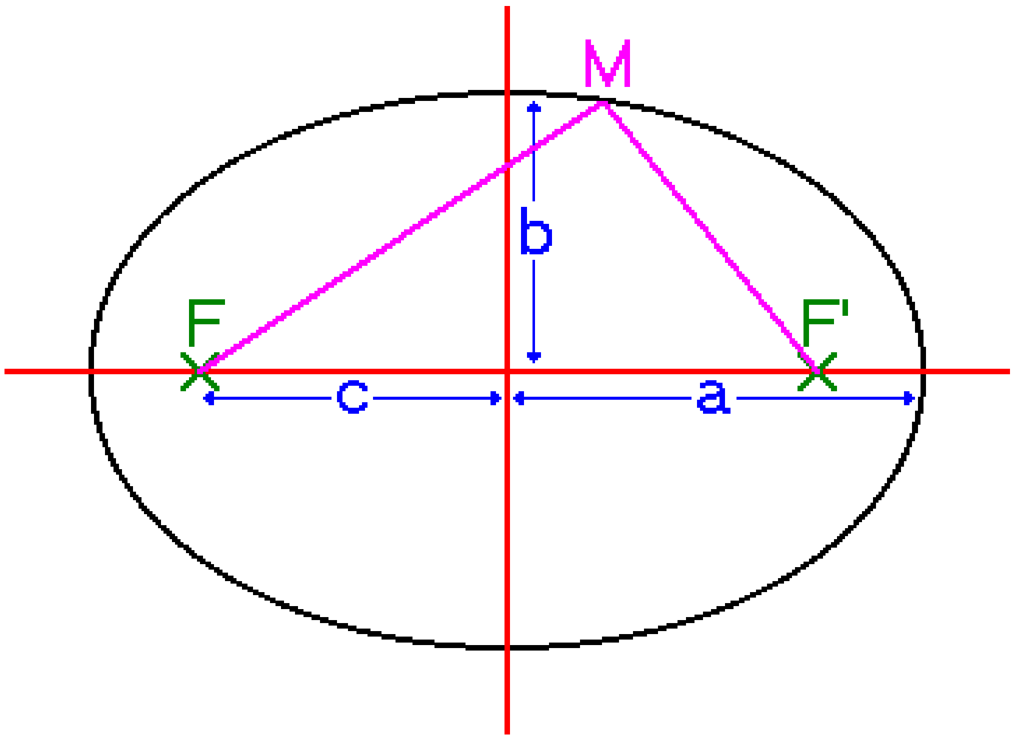
$$2a = \frac{2p}{1-e^2}$$

Demi grand axe

$$a = \frac{p}{1-e^2}$$

4. Coniques

Propriétés des ellipses



$$r(\theta) = \frac{p}{(1 - e\cos(\theta))}$$

Distance p :

$r = p$ quand $\cos(\theta) = 0$

→ Quand $\theta = \frac{\pi}{2}$

On peut aussi montrer que

$b = a\sqrt{1 - e^2}$

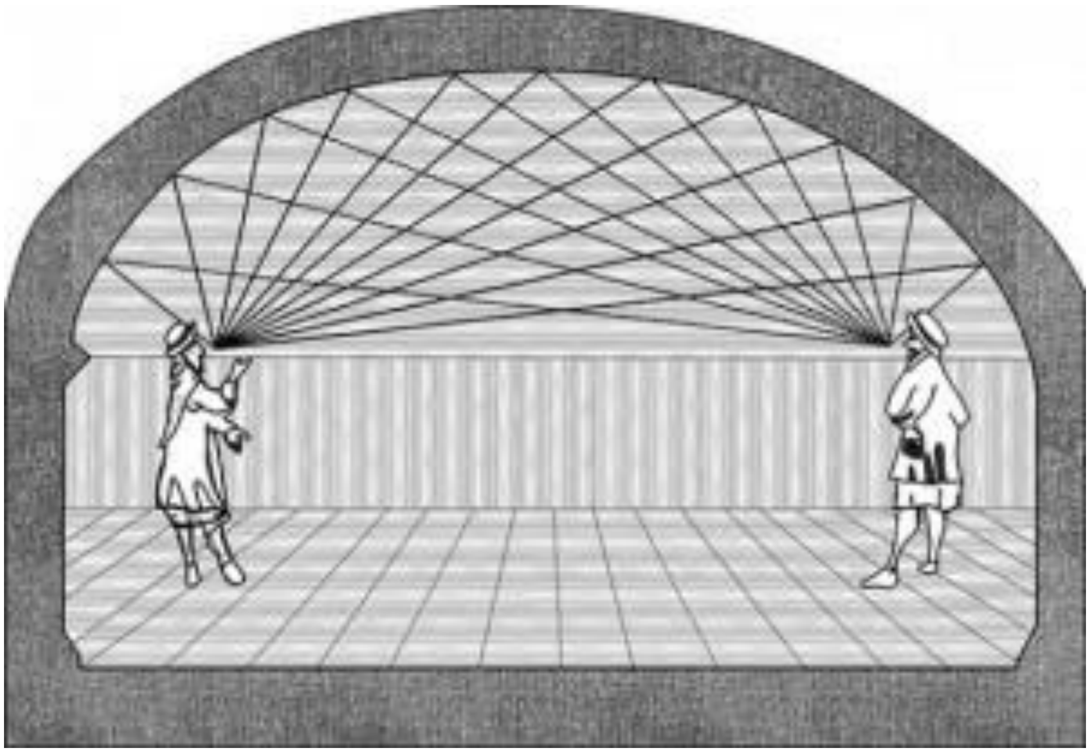
Excentricité donné par

$$e = \frac{c}{a}$$

« Hors du centre » - écart au cercle

4. Coniques

Remarque : propriétés des foyers des ellipses



Les rayons (optique, acoustiques, …) émis à un des foyers convergent au 2^{e} foyer – *whispering galleries (exemple : station de métro)*

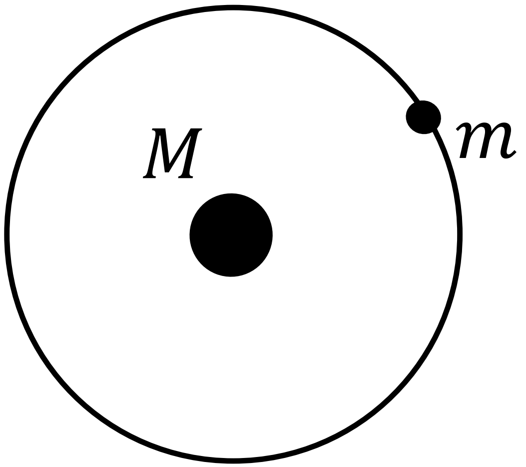
4. Coniques

$$\boxed{r(\theta) = \frac{C^2/GM}{(1 - e\cos(\theta))}}$$

Trajectoire dans le cas le plus simple : $e = 0$

$\Rightarrow$ $r(\theta) = \dfrac{C^2}{GM} = cte$ $\Rightarrow$ **Trajectoire circulaire**

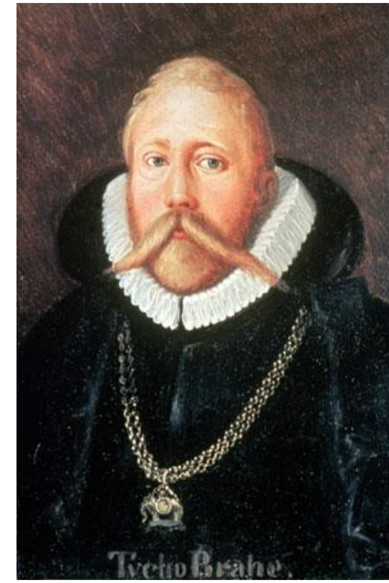
Donc $r(\theta) = cte$ et on sait que $r^2\dot{\theta} = C = cte$ $\Rightarrow$ $\dot{\theta} = cte$



$\Rightarrow$ **Vitesse angulaire constante**

5. Lois de Kepler

5. Lois de Kepler



Tycho Brahe
1546 - 1601

Johannes Kepler
1571-1630

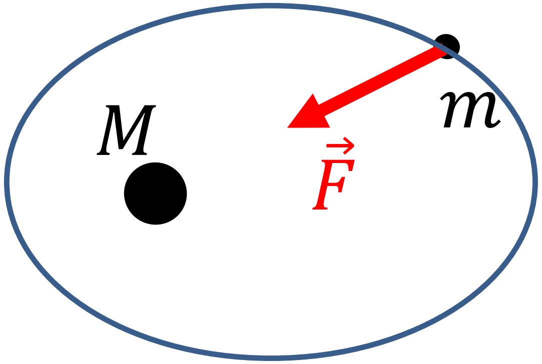
Kepler s’appuie sur les observations de Tycho Brahe pour énoncer 3 lois régissant le mouvement des planètes autour du soleil.

Plus tard, Newton se basera sur son travail pour vérifier sa théorie

5. Lois de Kepler

1ère loi de Kepler (loi des orbites)

Les planètes décrivent des **trajectoires elliptiques** dont le Soleil occupe l'un des foyers.



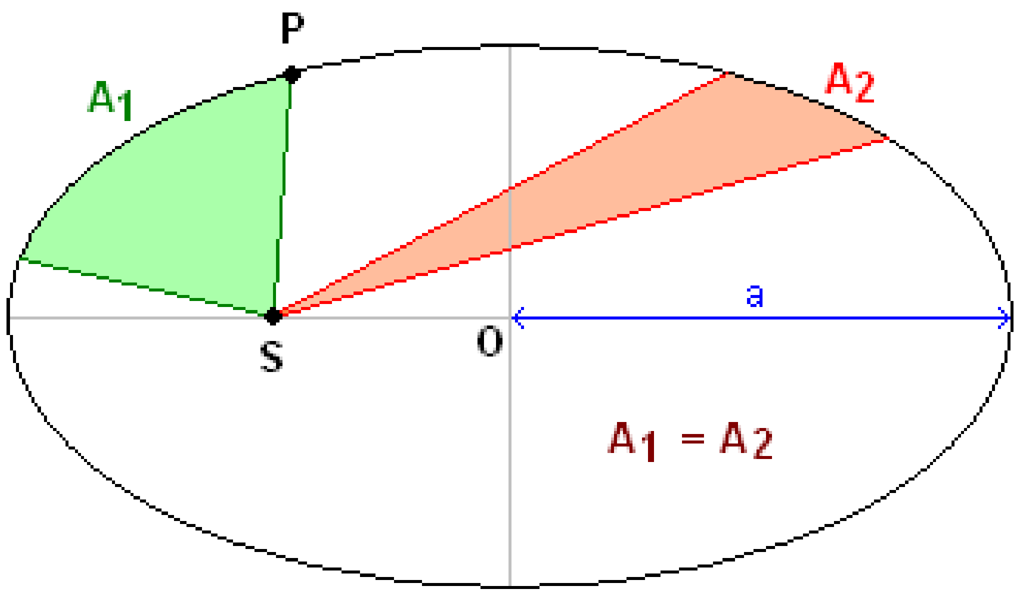
→ Ce qu'on vient de démontrer

$$\boxed{r(\theta) = \frac{C^2/GM}{(1 - e\cos(\theta))}}$$

5. Lois de Kepler

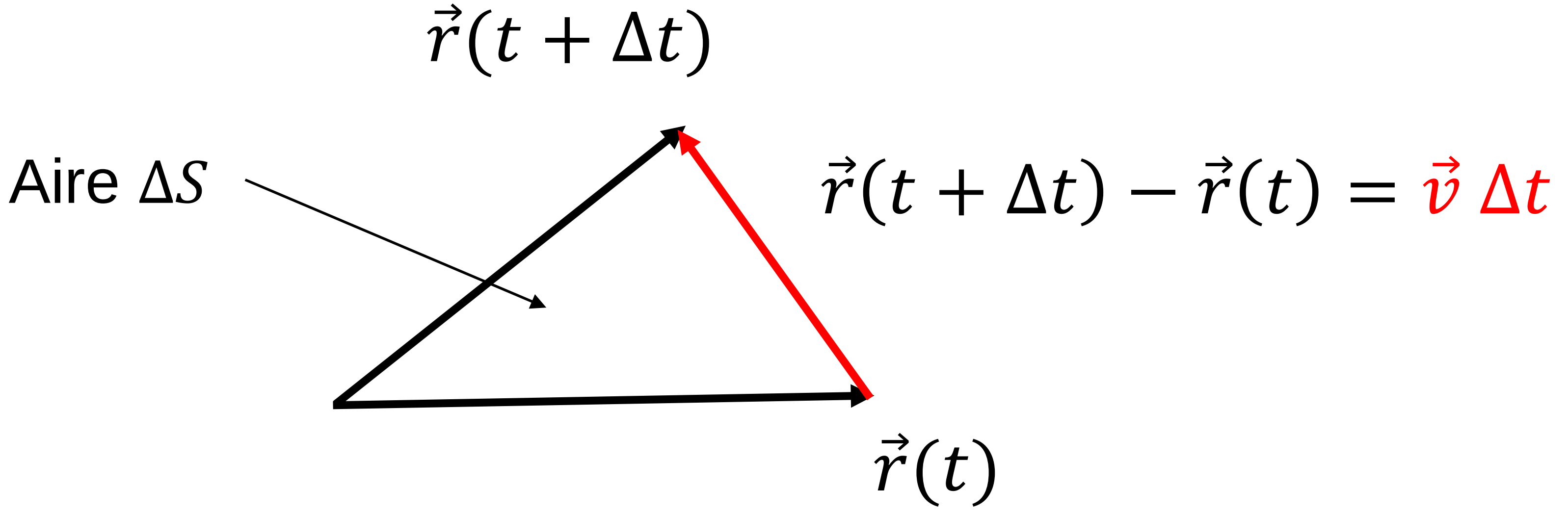
2ème loi de Kepler (loi des aires)

L'aire balayée par le rayon vecteur pendant un temps *Δt* est constant.



→ Démonstration

5. Lois de Kepler

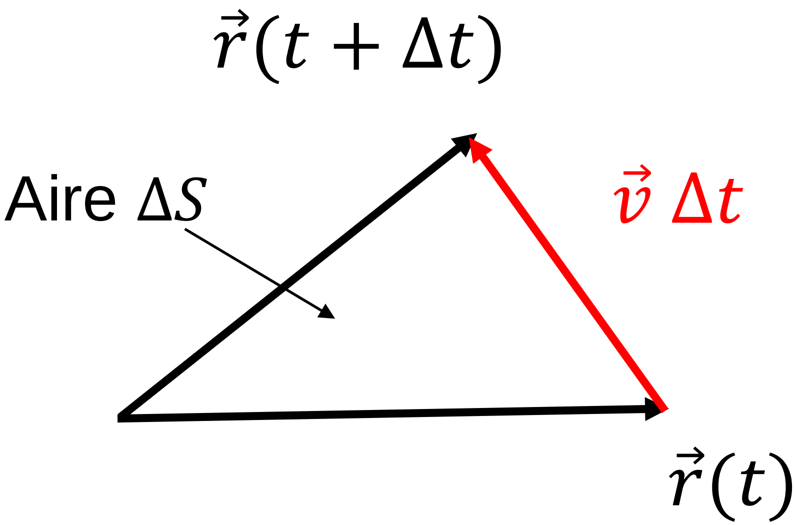


Aire du triangle : à partir d'une propriété du produit vectoriel

La norme du produit vectoriel correspond à l'aire du parallélogramme défini par les 2 vecteurs

$$\Delta S = \frac{1}{2}\|\vec{r} \wedge \vec{v}\Delta t\|$$

5. Lois de Kepler



$$\Delta S = \frac{1}{2}\|\vec{r}\wedge\vec{v}\Delta t\|$$

Expression du moment cinétique : $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r}\wedge\vec{v}$

$$\Rightarrow \quad \Delta S = \frac{L_O \Delta t}{2m} \quad \Rightarrow \quad \Delta S = \frac{1}{2} C \Delta t$$

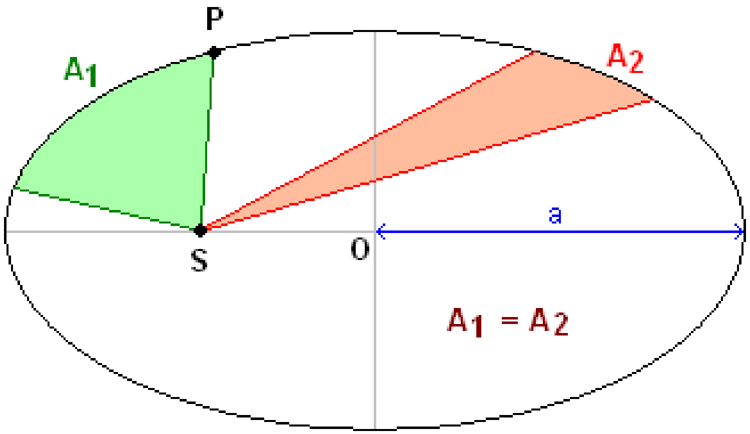
La surface est bien proportionnelle à Δt et on comprend pourquoi C s'appelle la constante des aires

5. Lois de Kepler

3$^{\text{ème}}$ loi de Kepler (loi des périodes)

T = période de l'orbite

Surface d'une ellipse : $S = \pi\, a\, b$



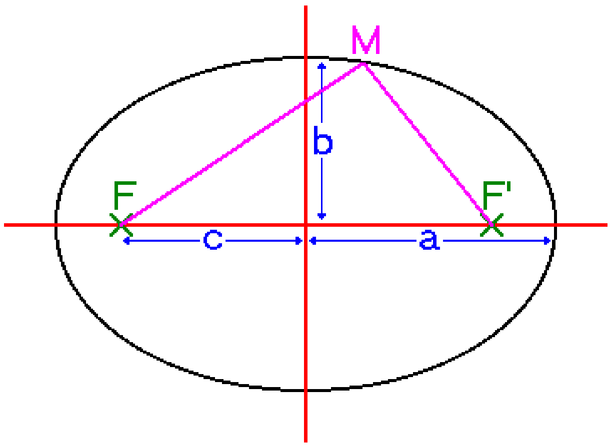
Sachant que $\Delta S = \frac{1}{2} C \Delta t$ et $S = \pi\, a\, b$, que vaut T ?

$$T = \frac{S}{\Delta S/\Delta t} = \frac{2\pi\, a\, b}{C}$$

5. Lois de Kepler

3ème loi de Kepler (loi des périodes)

$$T = \frac{2\pi\ a\ b}{C}$$



$$b = a\sqrt{1 - e^2}$$

$$C^2 = GMp$$

$$a = \frac{p}{1 - e^2}$$

On élève au carré et on réarrange

$$T^2 = \frac{4\pi^2 a^2 b^2}{C^2} = \frac{4\pi^2 a^2 a^2 (1 - e^2)}{GMp}$$

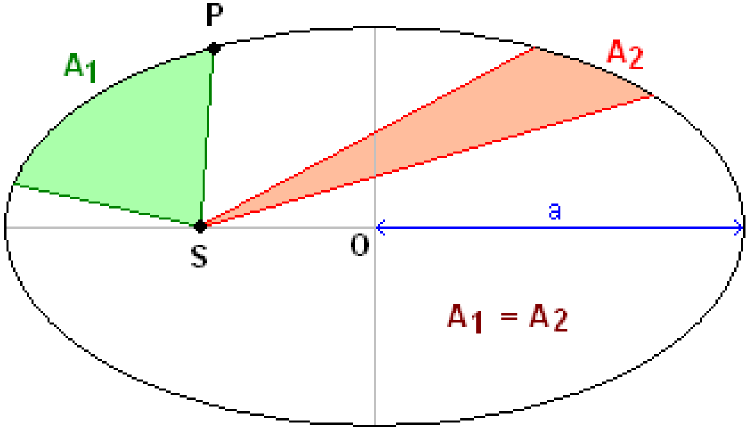
$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

5. Lois de Kepler

3ème loi de Kepler (loi des périodes)

Le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$



5. Lois de Kepler

3ème loi de Kepler (loi des périodes)

Le carré de la période est proportionnel au cube du demi grand axe

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

Loi TRES importante en astronomie !

L'un des seuls moyens qu'on ait pour déterminer la masse des objets

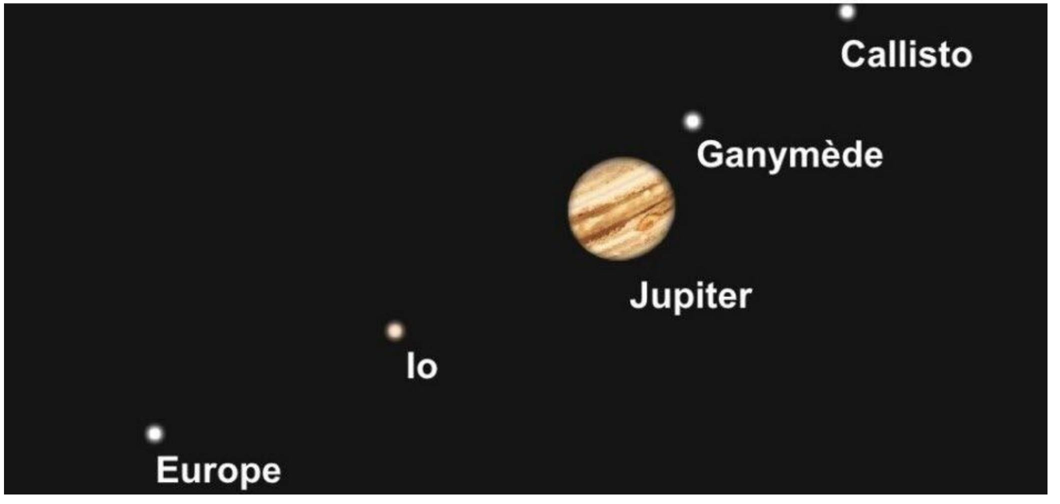
5. Lois de Kepler

3ème loi de Kepler (loi des périodes)

$$T^2 = \frac{4\pi^2}{GM} a^3$$

L'un des seuls moyens pour déterminer la masse des objets

Exemple : masse de Jupiter à partir de la mesure de ***T*** et ***a*** de ses satellites



D'autres méthodes moins précises pour une planète sans satellites – par exemple, effet de sa gravité sur les trajectoires des planètes voisines