TD UR2.

Transformé :

$$u_{n+1} \longrightarrow z f(z) - u_0 z$$

$$n^2 \longrightarrow \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$3u_n \longrightarrow 3 f(z)$$

$$z f(z) - u_0 z = 3 f(z) + \frac{z(z+1)}{(z-1)^3}$$

$$f(z)(z-3) = \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} + u_0 z$$

$$f(z) = \frac{z\left(u_0 + \frac{(z+1)}{(z-1)^3}\right)}{(z-3)} = z\left(\frac{u_0}{z-3} + \frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}\right)$$

$$f(z) = z\left(\frac{u_0}{z-3} + \frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}\right) \quad \cdot \ u_0 = 1$$

$$\frac{1}{z} f(z) = \underbrace{\frac{u_0}{z-3}} + \frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}.$$

$$\frac{u_0 z}{z-3} \xrightarrow[\text{inverse}]{\text{transformée}} u_0 3^n.$$

Décomposition en éléments simples de $\frac{z+1}{(z-1)^3(z-3)}$

$$= \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{(z-1)^3} + \frac{D}{z-3}$$

① $\times (z-1)^3$ des 2 côtés.

$$\frac{z+1}{z-3} = A(z-1)^2 + B(z-1) + C + \frac{D(z-1)^3}{z-3}.$$

$z=1$. $\frac{2}{-2} = C \Rightarrow C = -1$.

② $\times (z-3)$ des 2 côtés.

$$\frac{z+1}{(z-1)^3} = \frac{A(z-3)}{z-1} + \frac{B(z-3)}{(z-1)^2} - \frac{1(z-3)}{(z-1)^3} + D.$$

$z=3$. $\frac{4}{8} = \frac{1}{2} = D$.

③ . $z=0$. $\frac{0+1}{(0-1)^3(0-3)} = \frac{1}{3} = -A + B + 1 - \frac{1}{6}$

$$B - A = \frac{1}{3} + \frac{1}{6} - 1 = -\frac{1}{2}$$

$z=-1$. $0 = -\frac{A}{2} + \frac{B}{4} + \frac{1}{8} - \frac{1}{8}$

$$A = \frac{B}{2}.$$

$B - A = \frac{B}{2} = -\frac{1}{2} \Rightarrow B = -1$. $A = -\frac{1}{2}$

$$\frac{z+1}{(z-1)^3(z+3)} = -\frac{1}{2}\frac{1}{z-1} - \frac{1}{(z-1)^2} - \frac{1}{(z-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{1}{z-3}$$

donc $f_2(z) = -\frac{1}{2}\frac{z}{z-1} - \frac{z}{(z-1)^2} - \frac{z}{(z-1)^3} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-3}$

Tableau transformée de Z :

$a^n \to a = 1$.

$$n^2 1^n - n 1^n \xrightarrow{\text{transf.}} \frac{z(z+1)}{(z-1)^3} - \frac{z}{(z-1)^2} = \frac{z^2 + z - z(z-1)}{(z-1)^3}$$

$$= \frac{2z}{(z-1)^3}$$

donc $T^{-1}\left(\frac{z}{(z-1)^3}\right) = \frac{1}{2}(n^2 - n)$.

Donc $T^{-1}\left(f_2(z)\right) = -\frac{1}{2} - n - \frac{1}{2}(n^2 - n) + \frac{1}{2} 3^n$

on ajoute le terme avec u_0 calculé précédemment.

$$u_n = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)3^n - \frac{1}{2} - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}n^2.$$

Equation de récurrence:

$$u_{n+1} = 3u_n + n^2$$

équation "homogène" : $u_{n+1} - 3u_n = 0$.

$r - 3 = 0$.

$r = 3$.

$u_n = \lambda 3^n$

Solution particulière : on cherche u_n sous la forme

$$an^2 + bn + c$$

$$u_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c.$$

$$a(n+1)^2 + b(n+1) + c = 3an^2 + 3bn + 3c + n^2$$

$$an^2 + 2an + a + bn + b + c = 3an^2 + 3bn + 3c + n^2.$$

On identifie les termes de même degré :

$$\begin{cases} a = 3a + 1 \\ 2a + b = 3b. \\ a + b + c = 3c. \end{cases} \qquad \begin{aligned} a &= -1/2 \\ b &= -1/2 \\ c &= -1/2. \end{aligned}$$

$\rightarrow$ terme général. $u_n = \lambda 3^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}$

$$u_0 = \lambda 3^0 - \frac{1}{2} \Rightarrow \lambda = u_0 + \frac{1}{2}.$$

$$u_n = \left(u_0 + \frac{1}{2}\right)3^n - \frac{1}{2}n^2 - \frac{1}{2}n - \frac{1}{2}.$$

Ex 9 b) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 4u_n + 2^n$ $u_0 = 1$ $u_1 = 0$.

transformée de z : $z^2 f(z) - z^2 u_0 - z u_1$ pour u_{n+2}

$4z f(z) - 4u_0 z$ pour $4u_{n+1}$

$-4 f(z)$ pour $-4u_n$.

$\frac{z}{z-2}$ pour 2^n

On regroupe :

$$f(z)\left(z^2-4z+4\right) = z^2u_0 + zu_1 - 4u_0 z + \frac{z}{z-2}$$

$$f(z)\,(z-2)^2 = z^2 - 4z + \frac{z}{z-2}$$

$$f(z) = \frac{z(z-4)}{(z-2)^2} + \underbrace{\frac{z}{(z-2)^3}}_{\text{déjà un élément simple.}}$$

$$f_2(z) = \frac{z(z-4)}{(z-2)^2}$$

on décompose $\frac{1}{z} f_2(z)$ en éléments simples : $\frac{A}{z-2} + \frac{B}{(z-2)^2}$

$\boxed{\text{Ou}}$ on voit que $f_2(z) = \frac{z(z-2-2)}{(z-2)^2} = \frac{z}{z-2} - \frac{2z}{(z-2)^2}$

$$\Rightarrow f(z) = \frac{z}{z-2} - \frac{2z}{(z-2)^2} + \frac{z}{(z-2)^3}$$

Transformée inverse :

$$\frac{z}{z-2} \longrightarrow 2^n$$

$$-\frac{2z}{(z-2)^2} \longrightarrow -n2^n$$

$\frac{z}{(z-2)^3}$: comme au a : $(n^2-n)2^n \to \frac{8z}{(z-2)^3}$

donc $\frac{z}{(z-a)^3} \longrightarrow \frac{1}{8}(n^2-n)2^n$

Alors $u_n = 2^n\left(\frac{1}{8}n^2 - \frac{1}{8}n - n + 1\right) = 2^n \frac{(n-8)(n-1)}{8}$

(c) La transformée de z est peu pratique.

Néanmoins on obtient comme équation :

$$f(z)(z^2-5z+1) = z(z-3) + \frac{z}{z-1}$$

On la traite donc avec les équations de récurrence.

$$u_{n+2} - 5u_{n+1} + u_n = 1.$$

équation "homogène" : $X^2 - 5X + 1 = 0$.

$$\Delta = 25 - 4 = 21$$

$$\begin{matrix} r_1 \\ r_2 \end{matrix} = \frac{5 \pm \sqrt{21}}{2}$$

donc $u_n = \lambda r_1^n + \mu r_2^n$

solution particulière : on la cherche du même "degré" que 1 donc sous la forme d'une constante

$\Rightarrow k - 5k + k = 1$ donc $k = -1/3$

$$u_n = -\frac{1}{3} + \lambda r_1^n + \mu r_2^n \qquad u_0 = 1 \quad u_1 = 2.$$

$$u_0 = 1 = -\frac{1}{3} + \lambda + \mu \quad \Rightarrow \lambda + \mu = 4/3.$$

$$u_1 = 2 = -\frac{1}{3} + \lambda \frac{5+\sqrt{21}}{2} + \mu \frac{5-\sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{7}{3} = \frac{5}{2} \underbrace{(\lambda+\mu)}_{4/3} + \lambda \frac{\sqrt{21}}{2} - \mu \frac{\sqrt{21}}{2}$$

$$\frac{\sqrt{21}}{2}(\lambda-\mu) = -1$$

$$\lambda-\mu = \frac{-2}{\sqrt{21}}$$

alors $2\lambda = \frac{4}{3} - \frac{2}{\sqrt{21}}$ donc $\lambda = \frac{2}{3} - \frac{1}{\sqrt{21}}$

et $\mu = \frac{2}{3} + \frac{1}{\sqrt{21}}$

(d) Idem, la transformée est peu pratique.

$u_{n+2} = 3u_{n+1} - u_n + 2n - 2^{n+1}$ $\quad u_0 = u_1 = 1$.

Equation homogène. $X^2 - 3X + 1 = 0$.
(E_h) $\quad \Delta = 9 - 4 = 5$.

$$r_{1,2} = \frac{3 \pm \sqrt{5}}{2} \quad \Rightarrow u_n = \lambda\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n$$

Solutions particulières :

(1) $u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = 2n$. $\quad$ 2 n'est pas racine de (E_h)
donc on cherche $u_n = kn + l$

$k(n+2) + l - 3k(n+1) - 3l + kn + l = 2n$.

$\Rightarrow n(k - 3k + k) = 2n \quad \Rightarrow k = -2$

$2k + l - 3k - 3l + l = 0 \Rightarrow -k - l = 0 \Rightarrow l = 2$

$u_n = -2n + 2$

(2) $u_{n+2} - 3u_{n+1} + u_n = -2^{n+1} = -2(2^n)$

2 n'est pas racine de (Eh) donc on cherche $u_n = c2^n$

$$c\,2^{n+2} - 3c\,2^{n+1} + c2^n = -2^{n+1}$$

on simplifie par 2^n.

$$4c - 6c + c = -2$$

$$-c = -2 \text{ donc } c = 2 \text{ et } u_n = 2^{n+1}$$

Donc la suite est : $u_n = \lambda\left(\frac{3+\sqrt{5}}{2}\right)^n + \mu\left(\frac{3-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 2n + 2 + 2^{n+1}$.

Et on détermine λ et μ grâce à u_0 et u_1. (à faire !)

e) $u_{n+2} = 4u_{n+1} - 3u_n - 2n + 3^n$. $\quad u_0 = u_1 = 1$.

Transformée de Z :

$$z^2 f(z) - z^2 - z = 4z f(z) - 4z - 3f(z) - \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-3}$$

$$f(z)\underbrace{(z^2-4z+3)}_{(z-3)(z-1)} = \underbrace{z^2 + z - 4z}_{z(z-3)} - \frac{2z}{(z-1)^2} + \frac{z}{z-3}.$$

$$f(z) = \underbrace{\frac{z}{z-1}}_{} - \frac{2z}{(z-1)^3(z-3)} + \frac{z}{(z-3)^2(z-1)}$$

on a directement la transformée de Z inverse donc on

décompose en éléments simples $\frac{1}{z} f_2(z) = \frac{-2}{(z-1)^3(z-3)} + \frac{1}{(z-3)^2(z-1)}$

$$\frac{1}{z} f_2(z) = \frac{-2(z-3)+(z-1)^2}{(z-1)^3\,(z-3)^2} = \frac{z^2-4z+7}{(z-1)^3(z-3)^2} = \frac{z^2-6z+9+2(z-2}{(\quad)^3(\quad)^2}$$

$$= \frac{(z-3)^2+2(z-1)}{(z-1)^3(z-3)^2} = \frac{1}{(z-1)^3} + \underbrace{\frac{2}{(z-1)^2(z-3)^2}}_{\text{on décompose ce terme.}}$$

$$\frac{2}{(z-1)^2(z-3)^2} = \frac{A}{z-1} + \frac{B}{(z-1)^2} + \frac{C}{z-3} + \frac{D}{(z-3)^2}$$

① $\times (z-1)^2$ puis $z=1$. $\Rightarrow B = \frac{1}{2}$

② $\times (z-3)^2$ puis $z=3$ $\Rightarrow D = \frac{1}{2}$

③ $z=0$. $\frac{2}{9} = -A + \frac{1}{2} - \frac{C}{3} + \frac{1}{18}$

$$A + \frac{C}{3} = \frac{1}{3}$$

$z=2$. $2 = A + \frac{1}{2} - C + \frac{1}{2}$

$$A - C = 1$$

$$\Rightarrow \frac{4}{3}C = -\frac{2}{3} \Rightarrow C = -\frac{1}{2}$$

$$\Rightarrow A = 1/2$$

Alors $f(z) = -\frac{1}{2}\frac{z}{z-3} + \frac{1}{2}\frac{z}{(z-3)^2} + \frac{1}{2}\frac{z}{z-1} + \frac{1}{2}\frac{z}{(z-1)^2} + \frac{z}{(z-1)^3}$

$\Rightarrow u_n = \left(\frac{1}{6} - \frac{1}{2}\right)3^n + \frac{1}{2}(n^2+3)$