4. *Séries génératrices - transformée en Z*

Définition : Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes.

On lui associe la fonction $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n$: $(a_n)\xrightarrow{\text{transformée en } Z}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n$

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty}a_n z^n$ étant définie et de classe C^∞ dans le disque de convergence $|z|<R$,

la fonction *f* est définie et de classe C^∞ dans le domaine $|z|>\frac{1}{R}$ (si $R\neq 0$)

Exemples :

- Si $a=(1,0,0,...)$ $\left(a_0=1 \text{ et } \forall n\geqslant 1/a_n=0\right)$ alors $f(z)=1$
- Si $\forall n\geqslant k/a_n=0$ alors $f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+...+\frac{a_k}{z^k}=\frac{a_0z^k+a_1z^{k-1}+...+a_{k1}z+a_k}{z^k}$
- Si $\forall n/a_n=1$ alors $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}$ (pour $|z|>1$)
- Si $\forall n/a_n=\alpha^n$ $(\alpha$ constante non nulle$)$ alors $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}}=\frac{z}{z-\alpha}$ (pour $|z|>|\alpha|$)

Propriétés

- Unicité : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ et } (b_n)\to f(z) \text{ et si le RdC est } >0 \text{, alors } \forall n\in\mathbb{N}\ /\ a_n=b_n}$ ①
- Linéarité : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ et } (b_n)\to g(z) \text{ alors } \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ (\alpha a_n+\beta b_n)\to\alpha f(z)+\beta g(z)}$ ②

  Exemples

  $(\cos(\omega n))\to\frac{z\,(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$, $\left(2a^n-b^n\right)\to 2\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-b}=\frac{z^2+(a-2b)z}{(z-a)(z-b)}$
- Homothétie : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{, alors pour } \alpha \text{ non nul fixé, } (\alpha^n a_n)\to f\left(\frac{z}{\alpha}\right)}$ ③
- Dérivée en *z* $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ alors } (n\,a_n)\to -z\,f'(z)}$ ④

  Exemples : Si $\forall n/a_n=n$, $f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$, Si $\forall n/a_n=n\ \alpha^n$, $f(z)=\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$

Notation : la suite (a_{n-1}) est la suite (b_n) telle que $b_0=0$ et $\forall n\geqslant 1\ /\ b_n=a_{n-1}$

- Retard en *n*: $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ alors } (a_{n-1})\to\frac{1}{z}f(z)}$ ⑤
- Avance en *n* : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ alors } (a_{n+1})\to z\,f(z)-a_0\,z}$ ⑥

Application : Équations de récurrence

Exemple 1 $u_{n+1}=a\,u_n+b$

Appelons $f(z)$ la transformée en *z* de (u_n).

Alors la transformée en *z* de u_{n+1} est $z\,f(z)-u_0\,z$, celle de $(u_{n+1}-a\,u_n)$ est $z\,f(z)-u_0\,z-a\ f(z)$ (⑥ et ②)

Celle de (b) est $\dfrac{b\,z}{z-1}$, donc par unicité ①, $f(z)=\dfrac{u_0 z}{z-a}+\dfrac{b\,z}{(z-a)(z-1)}=\dfrac{u_0 z}{z-a}+\dfrac{b}{a-1}\left(\dfrac{z}{z-a}-\dfrac{z}{z-1}\right)$

Comme $\dfrac{z}{z-a}$ est la transformée de (a^n) et $\dfrac{z}{z-1}$ la transformée de (a^n), on obtient $u_n=u_0a^n+\dfrac{b}{a-1}(a^n-1)$

Exemple 2 $u_{n+2}=2\,u_{n+1}-u_n+2^n$, $u_0=1$, $u_1=1$ (équation linéaire du 2ème ordre non homogène)

Appelons $f(z)$ la transformée en z de (u_n).

Alors la transformée en z de u_{n+1} est $z\,f(z)-u_0\,z=z\,f(z)-z$,

celle de u_{n+2} est donc $z\big(z\,f(z)-u_0\,z\big)-u_1 z=z^2 f(z)-z^2-z$

Celle de (2^n) est $\dfrac{z}{z-2}$, donc par unicité, $z^2 f(z)-z^2-z=2\big(z\,f(z)-z\big)-f(z)+\dfrac{z}{z-2}$

On obtient $f(z)=\dfrac{z}{z-1}+\dfrac{z}{(z-1)^2(z-2)}=-\dfrac{z}{(z-1)^2}+\dfrac{z}{z-2}$ et par suite $u_n=-n+2^n$

Méthode

1. Appliquer la transformée en Z aux 2 membres de l'équation aux différences en u_n
2. Calculer $f(z)$ en utilisant les propriétés de la transformée en Z
3. Décomposer $\dfrac{1}{z}f(z)$ en éléments simples
4. Utiliser la table de transformée pour obtenir u_n par transformée inverse

Table de transformées en Z

R est le RdC de la série $\sum u_n z^n$, a est un complexe non nul, ω un réel.

$\sum\ u_n$	Transformée $f(z)$	Domaine de convergence
1	$\dfrac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
a^n	$\dfrac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$n\,a^n$	$\dfrac{a\,z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$n^2\,a^n$	$\dfrac{a\,z(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\cos(\omega n)$	$\dfrac{z\,(z-\cos\omega)}{z^2-2\,z\cos\omega+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$\sin(\omega n)$	$\dfrac{z\sin\omega}{z^2-2\,z\cos\omega+1}$	$\lvert z\rvert>1$
u_{n+1}	$z\,f(z)-u_0\,z$	$\lvert z\rvert>\dfrac{1}{R}$
u_{n+2}	$z^2 f(z)-z^2u_0-z\,u_1$	$\lvert z\rvert>\dfrac{1}{R}$
$a^n\ u_n$	$f\left(\dfrac{z}{a}\right)$	$\lvert z\rvert>\dfrac{\lvert a\rvert}{R}$