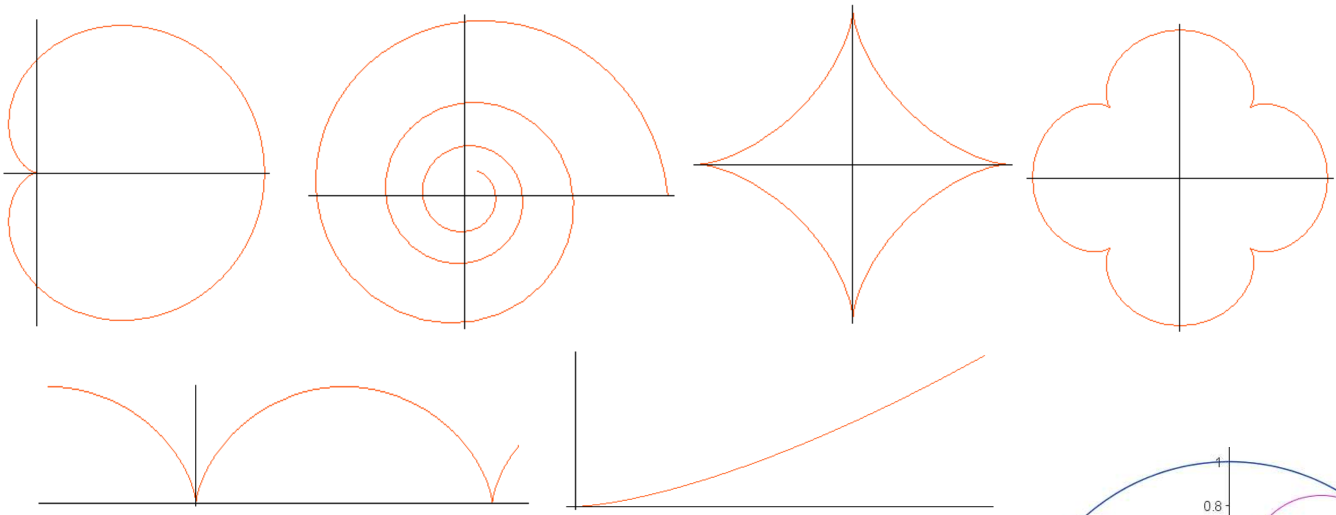
CIR_2 CNB_2

TD de Maths – COURBES

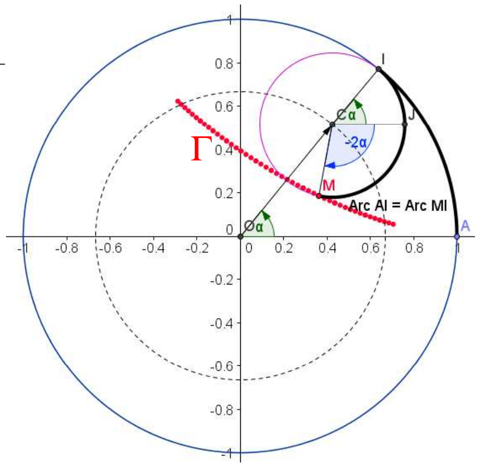
- *La ligne courbe est la ligne la plus jolie d'un point à un autre. (Mae West)*
- *Le carré, c'est une circonférence qui a mal tourné. (Pierre Dac)*
- *Le cercle est le plus long chemin d'un point au même point. (Stoppard)*

1/ Reconnaître les courbes suivantes. Calculer la longueur de la courbe (ou d'une portion de courbe).

$\begin{cases} x = t - \sin t \\ y = 1 - \cos t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$ $\begin{cases} x = \cos^3 t \\ y = \sin^3 t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ $\begin{cases} x = 2t^2 \\ y = t^3 \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ $\begin{cases} x = \cos t (1 + \cos t) \\ y = \sin t (1 + \cos t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$ $\begin{cases} x = e^{-t/10} \cos t \\ y = e^{-t/10} \sin t \\ t \in \mathbb{R}_+ \end{cases}$ $\begin{cases} x = 5\cos t + \cos 5t \\ y = 5\sin t + \sin 5t \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$



2/ Un cercle de rayon 1/3 roule sans glisser à l'intérieur d'un cercle fixe de rayon 1, centré en 0.
Déterminer les équations de la trajectoire Γ d'un point M fixé sur la circonférence du petit cercle.
Tracer la courbe Γ. Calculer sa longueur.
Envisager le cas d'un cercle de rayon 1/4, ou 1/5 ...



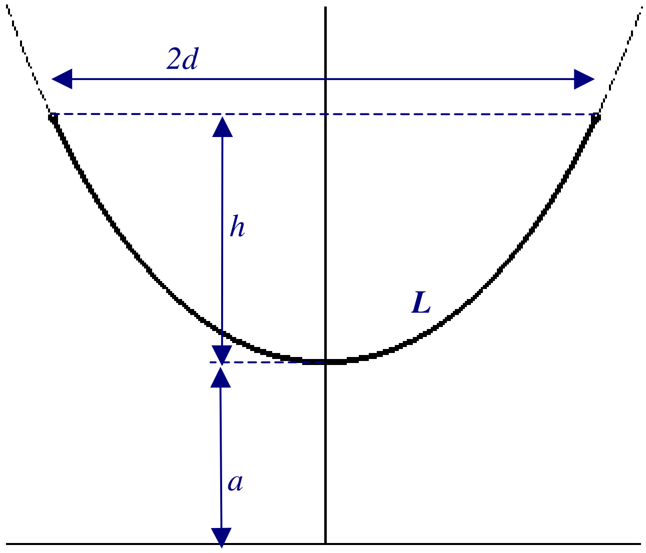
3/ Construire la cardioïde d'équation polaire $\rho = 1 + \cos(\theta)$.
Calculer sa longueur.
Calculer la position de son centre de gravité.

4/ Soit α un réel strictement positif fixé.
Construire la spirale logarithmique Γ_1 d'équation polaire $\rho = e^{-\alpha\theta}$ $\theta \in [0, +\infty[$
Calculer sa longueur.

5/ La chaînette est le nom que porte la courbe obtenue en tenant une corde (ou un collier, un fil. . .) par deux extrémités. C'est une courbe que vous voyez tous les jours : la chaîne qui pend à votre cou ou le fil électrique entre deux pylônes. Mais on la retrouve dans des endroits plus surprenants : si vous souhaitez faire une arche qui s'appuie sur deux piles alors la forme la plus stable est une chaînette renversée. Gaudi a beaucoup utilisé cette forme dans les bâtiments qu'il a construit. Sur un bateau, si une voile rectangulaire est maintenue par deux mats horizontaux et que le vent souffle perpendiculairement alors le profil de la voile est une chaînette.

Christian Huygens a démontré que la chaînette avait comme équation $y = a\ \mathrm{ch}\left(\frac{x}{a}\right)$ *où a est un paramètre.*

Le paramètre a dépend de la chaînette :
on peut écarter plus ou moins les mains.
Et même si l'on garde les mains fixes,
on peut prendre des cordes de différentes longueurs.



Soit une chaînette de longueur L
suspendue en 2 points éloignés d'une distance $2d$.

En utilisant les équations paramétriques $\left| \begin{array}{l} x(t) = t \\ y = a\ \mathrm{ch}\left(\frac{t}{a}\right) \\ t \in [-d, d] \end{array} \right.$,

calculer L en fonction de d et a.

En déduire que $a = \dfrac{L^2 - 4h^2}{8h}$ (h est la "flêche")

6/ Etude de l'hélice circulaire $\begin{cases} x(t) = \sin(t) \\ y(t) = \cos(t) \\ z(t) = a.t \\ t \in \mathbb{R} \end{cases}$:

Longueur de la spire obtenue avec $t \in [0, 2\pi]$?

7/ Soit la courbe $\begin{cases} x(t) = \sqrt{t}.\cos(t) \\ y(t) = \sqrt{t}.\sin(t) \\ z(t) = t \\ t \in \mathbb{R}^+ \end{cases}$.

En remarquant que pour tout $t > 0$, le point $M(t)$ se trouve sur le paraboloïde de révolution $z = x^2 + y^2$, donner l'allure de la courbe.

Calculer la longueur de la portion de courbe obtenue pour $t \in]0, 12]$

8/ Soit la courbe $\begin{cases} x(t) = \dfrac{\cos(t)}{\mathrm{ch}(t)} \\ y(t) = \dfrac{\sin(t)}{\mathrm{ch}(t)} \\ z(t) = \mathrm{th}(t) \\ t \in]-\infty, +\infty[\end{cases}$.

En remarquant que pour tout $t \in \mathbb{R}$, le point $M(t)$ se trouve sur la sphère $x^2 + y^2 + z^2 = 1$, donner l'allure de la courbe.

Calculer la longueur de la courbe.