Mathématiques

Examen partiel – 1er semestre

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte $\mathbf{3} \times \mathbf{3}$ questions équipondérées.
- Calculatrice et documentation interdites.
- Explicitez vos raisonnements, et surtout amusez-vous bien !

1. La *cubique de Cayley* est la surface $\mathcal{C}$ d'équation cartésienne

$$2xyz + x^2 + y^2 + z^2 = 1.$$

a) Décrire l'intersection de $\mathcal{C}$ avec la sphère $\mathcal{S}$ de rayon 1 centrée à l'origine.

b) Quelles sont les droites passant par $A = (1, 1, -1)$ incluses dans $\mathcal{C}$?

c) Déterminez l'équation du plan tangent à $\mathcal{C}$ au point $B = (0, 1, 0)$.

♫ ♫ ♫

2. On étudie dans cette question les solutions de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation d'onde unidimensionnelle

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2} \qquad (c > 0).$$

a) Vérifiez que $f(x,t) = e^x \operatorname{ch} ct$ en est une.
[*Rappel* : $\operatorname{ch} x = \frac{1}{2}(e^x + e^{-x})$]

b) En introduisant les variables $u = x + ct$ et $v = x - ct$, montrez que l'équation d'onde est équivalente à

$$\frac{\partial^2 f}{\partial u \partial v} = 0.$$

c) En déduire que sa solution générale peut s'écrire sous la forme

$$f(x,t) = g(x + ct) + h(x - ct).$$

♫ ♫ ♫

3. Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} xy \sin \dfrac{1}{x^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & \text{sinon.} \end{cases}$$

a) Calculer les dérivées partielles de f et montrer qu'elles ne sont pas continues en $(0, 0)$.

b) Montrer que f est $\mathrm{o}(\sqrt{x^2 + y^2})$ à l'origine et conclure qu'elle y est différentiable.

c) Cela est-il compatible avec les résultats vus en classe ?