13 décembre 2013 **Quiz de maths n° 5** ISÉN - $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Ce quiz comporte quatre questions équipondérées; répondez directement sur cette feuille.

| Nom: | **CORRIGÉ** |
|---|---|

1. À l'aide d'un changement de variables approprié , déterminer l'aire de la région $\mathcal{D}$ délimitée par les courbes

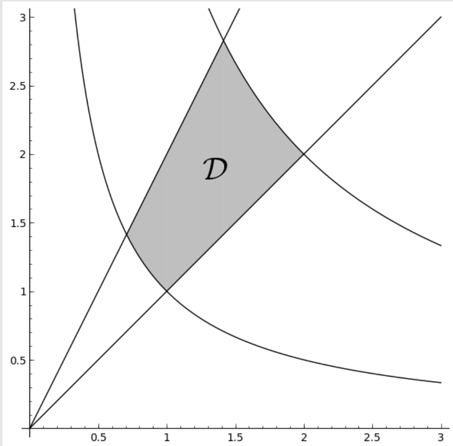
$$xy = 1, \quad xy = 4, \quad y = x, \quad y = 2x.$$

On a envie de poser $u = xy$ et $v = \frac{y}{x}$, de telle sorte que le domaine $\mathcal{D}$ s'exprime dans le plan $(u, v)$ sous la forme $[1, 4] \times [1, 2]$. Pour obtenir l'élément d'aire : si on note $\psi(x, y) = (xy, \frac{y}{x})$, on doit calculer le déterminant jacobien de $\varphi = \psi^{-1}$. Deux méthodes :

- On explicite $\varphi(u, v) = \left(\sqrt{\frac{u}{v}}, \sqrt{uv}\right)$, on calcule $\mathrm{Jac}_\varphi$ puis $\mathrm{jac}_\varphi = \mathrm{dét}(\mathrm{Jac}_\varphi)$.
- Plus facile : puisque $\psi \circ \varphi = \mathrm{Id}$, on a $\mathrm{Jac}_\psi \cdot \mathrm{Jac}_\varphi = I$, d'où $\mathrm{jac}_\varphi = (\mathrm{jac}_\psi)^{-1}$.

Avec les deux méthodes on trouve $\mathrm{jac}_\varphi = \frac{1}{2v}$, et donc

$$\mathrm{aire}(\mathcal{D}) = \iint_{\mathcal{D}} 1 \,\mathrm{d}A = \int_1^4 \int_1^2 \frac{1}{2v} \,\mathrm{d}v \,\mathrm{d}u = \frac{1}{2} u\Big|_1^4 \ln v\Big|_1^2 = \frac{3}{2} \ln 2.$$




2. Calculer les points critiques de $f(x, y) = x\,y\,e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)}$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = y(1 - x^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = x(1 - y^2)e^{-\frac{1}{2}(x^2+y^2)} \end{cases}$$

d'où

$$\nabla f(x, y) = \mathbf{0} \iff (x, y) \in \big\{(0, 0),\ (1, 1),\ (1, -1),\ (-1, 1),\ (-1, -1)\big\}.$$

3. Déterminer et classifier les points critiques de la fonction de Rosenbrock $f(x,y) = (1-x)^2 + 100(y-x^2)^2$.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial f}{\partial x} = -2(1-x) - 400(y-x^2)x = 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} = 200(y-x^2) = 0 \end{cases} \iff \begin{cases} y = x^2 \\ x = 1 \end{cases} \iff (x,y) = (1,1)$$

En développant $f(1+h, 1+k)$ ou en dérivant pour obtenir les dérivées secondes, on trouve

$$H_f(1,1) = \begin{bmatrix} 802 & -400 \\ -400 & 200 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 200 \end{bmatrix}.$$

Il s'agit d'un minimum local (global aussi d'ailleurs, car $f(x,y) \geqslant 0 = f(1,1)$ pour tout $(x,y)$).

4. Quelles dimensions pour une boîte de conserve cylindrique de volume donné permettent de minimiser la quantité de métal nécessaire à sa fabrication ?

On modélise la situation en prenant comme variables le rayon $r$ de la base et la hauteur $h$ du cylindre. On souhaite alors minimiser

$$A(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi r h = 2\pi r(r+h)$$

sujette à la contrainte $\pi r^2 h = V$.

- Approche « élémentaire » : on peut éliminer l'une des variables à l'aide de la contrainte pour se ramener à un problème d'optimisation à une variable,

$$f(r) := A\left(r, \frac{V}{\pi r^2}\right) = 2\pi r^2 + \frac{2V}{r}$$

qui atteint son maximum en $r = \sqrt[3]{\frac{V}{2\pi}}$, ce qui donne $h = \frac{V}{\pi r^2} = \sqrt[3]{\frac{4V}{\pi}}$.

- Approche géométrique : on cherche à minimiser $A$ sur une courbe de niveau de la fonction

$$V(r,h) = \pi r^2 h.$$

Au point cherché, le gradient de l'objectif doit être parallèle au gradient de la contrainte ; en calculant

$$\nabla A = 2\pi \begin{bmatrix} h + 2r \\ r \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad \nabla V = \pi r \begin{bmatrix} 2h \\ r \end{bmatrix},$$

on voit qu'il faut pour qu'ils soient parallèles que $h = 2r$, et de là avec $V = 2\pi r^3$ on retrouve aisément la réponse précédente.