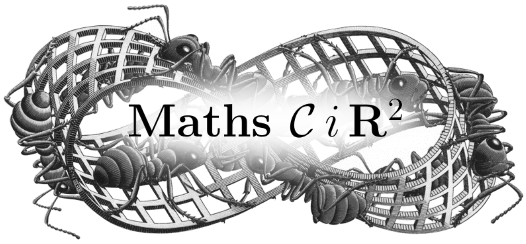


$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **4** questions équipondérées plus ou moins indépendantes.
- L'usage de tout dispositif électronique est **interdit**.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements.
- **Amusez**-vous bien !

$\mathscr{N}$otations

- Considérons les fonctions de trois variables

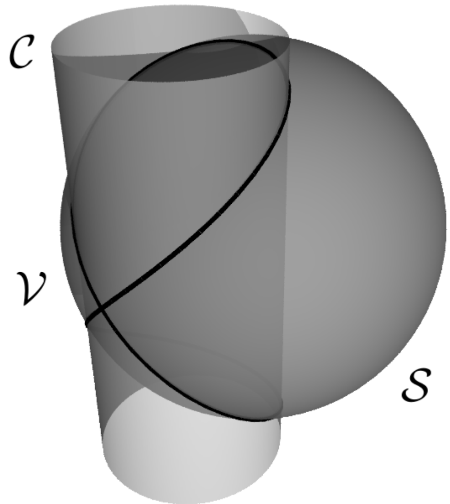
$$f(x,y,z) = x^2 + y^2 - x \quad \text{et}$$
$$g(x,y,z) = x^2 + y^2 + z^2 - 1.$$

- Soit $\mathcal{C}$ la surface de niveau 0 de f et $\mathcal{S}$ celle de g.
- Notons $\mathcal{V} = \mathcal{C} \cap \mathcal{S}$ la courbe de Viviani :

$$\begin{cases} x(t) = \cos^2 t \\ y(t) = \cos t \, \sin t \\ z(t) = \sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

- Pour $\lambda \in \mathbf{R}$, soit $\mathcal{Q}_\lambda$ la surface d'équation

$$f(x,y,z) - \lambda\, g(x,y,z) = 0.$$



$\mathscr{Q}$uestions

Vérifier que toutes les quadriques $\mathcal{Q}_\lambda$ contiennent $\mathcal{V}$ et décrire celles-ci en fonction de λ.

Commençons par vérifier que $\mathcal{V} \subseteq \mathcal{Q}_\lambda$: on vérifie directement que

$$f(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) - \cos^2 t = 0,$$

$$g(\mathbf{r}(t)) = \cos^2 t\,(\cos^2 t + \sin^2 t) + \sin^2 t - 1 = 0.$$

Solution alternative : il suffit de vérifier que

$$\nabla f \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \nabla g \cdot \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = 0 \qquad \text{et que } e.g. \qquad f(\mathbf{r}(0)) = g(\mathbf{r}(0)) = 0.$$

(pourquoi ?)

Description de $\mathcal{Q}_\lambda$: l'équation qui nous intéresse est

$$f_\lambda(x,y,z) := f(x,y,z) - \lambda\, g(x,y,z) = (1-\lambda)\, x^2 + (1-\lambda)\, y^2 - \lambda\, z^2 - x + \lambda = 0.$$

La matrice symétrique 3×3 associée à la partie quadratique est déjà diagonale :

$$\begin{bmatrix} 1-\lambda & 0 & 0 \\ 0 & 1-\lambda & 0 \\ 0 & 0 & -\lambda \end{bmatrix}.$$

Il y a deux valeurs particulières pour lesquelles celle-ci est dégénérée :

- $\lambda = 0$: on a $\mathcal{Q}_0 = \mathcal{C}$, d'équation

  $$x^2 + y^2 - x = 0 \qquad i.e. \qquad \left(x - \frac{1}{2}\right)^2 + y^2 = \frac{1}{4},$$

  un cylindre circulaire droit de rayon $\frac{1}{2}$ et d'axe vertical, passant par le point $(\frac{1}{2}, 0, 0)$.
- $\lambda = 1$: on trouve comme équation

  $$x = 1 - z^2,$$

  il s'agit d'un cylindre parabolique droit, sommets situés en $(1, y, 0)$ et ouverture du côté des $x < 0$.

Pour $\lambda \notin \{0, 1\}$ on a une quadrique non dégénérée qu'on peut mettre sous forme (plus) canonique

$$\left(x + \frac{1}{2(\lambda-1)}\right)^2 + y^2 + \underbrace{\frac{\lambda}{\lambda-1}}_{\alpha}\, z^2 = \underbrace{\frac{(2\lambda-1)^2}{4(\lambda-1)^2}}_{\beta}.$$

- $-\infty < \lambda < 0$: on a $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, il s'agit d'un ellipsoïde centré en $(\frac{1}{2(1-\lambda)}, 0, 0)$ d'axes parallèles aux axes de coordonnées (dont on pourrait préciser les demi-longueurs) ;
- $0 < \lambda < 1$: on a $\alpha < 0$, il s'agit donc d'un hyperboloïde, d'axe vertical passant par $(\frac{1}{2(1-\lambda)}, 0, 0)$, à une nappe puisque $\beta > 0$... sauf en $\lambda = \frac{1}{2}$ où $\beta = 0$, on obtient alors un cône circulaire d'axe vertical ;
- $1 < \lambda < +\infty$: on a encore $\alpha > 0$ et $\beta > 0$, un ellipsoïde fort semblable au premier.

Remarque : En divisant l'équation par λ et en faisant tendre celui-ci vers l'infini, on voit

$$\lim_{\lambda \to \pm\infty} \frac{-f_\lambda}{\lambda} = g \qquad \text{d'où} \qquad \lim_{\lambda \to \pm\infty} \mathcal{Q}_\lambda = \mathcal{S} \ldots$$

On a envie de considérer que la sphère est le cas limite séparant les deux sortes d'ellipsoïdes ($\lambda < 0$ et $\lambda > 1$), tout comme le cône est le cas limite séparant les deux sortes d'hyperboloïdes ($0 < \lambda < \frac{1}{2}$ et $\frac{1}{2} < \lambda < 1$).

Et avec raison ! On la singularité de la situation en $\lambda \to \pm\infty$ n'est qu'apparente puisque l'équation $f_\lambda = 0$ définissant $\mathcal{Q}_\lambda$ n'est unique qu'à une constante multiplicative près. Pour faire disparaître celle-ci, on peut poser $\lambda = -\tan\theta$ et tout multiplier par $\cos\theta$ pour obtenir une équation de la forme

$$(\cos\theta) f + (\sin\theta) g$$

qui n'exhibe plus aucun problème en $\theta \equiv \frac{\pi}{2}\,[\pi]$ (revoir l'animation).

Quelles sont les valeurs extrêmes de f sur la boule $\mathcal{B} = \{\, (x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid g(x,y,z) \leqslant 0 \,\}$?

La boule étant un ensemble fermé et borné dans $\mathbf{R}^3$, on sait que la fonction continue f y admet des valeurs extrêmes. Celles-ci peuvent être atteintes soit en des points critiques intérieurs à $\mathcal{B}$, soit à la frontière :

- $\nabla f = (2x - 1, 2y, 0)$, il y a toute une droite critique $(\frac{1}{2}, 0, z)$, $z \in \mathbf{R}$. Parmi ces points, seuls ceux avec $-\frac{\sqrt{3}}{2} < z < \frac{\sqrt{3}}{2}$ sont à l'intérieur de $\mathcal{B}$, et la fonction est vaut $f(\frac{1}{2}, 0, z) = -\frac{1}{4}$.

- Pour déterminer les valeurs extrêmes de f à la frontière, on cherche les points où le gradient de l'objectif est parallèle à celui de la contrainte : en résolvant l'équation $\nabla f \wedge \nabla g = 0$ sur $\mathcal{S}$ (ou encore, ce qui est équivalent, en étudiant les points critiques de la fonction de quatre variables $f - \lambda\, g$), on trouve les quatre points
$$(\pm 1,\, 0,\, 0),\ \left(\frac{1}{2},\, 0,\, \pm\frac{\sqrt{3}}{2}\right) \qquad \text{où } f \text{ vaut } 0, 2, -\frac{1}{4} \text{ et } -\frac{1}{4}.$$

Les valeurs extrêmes prises par f sont donc $-\frac{1}{4}$ sur tout le segment critique $(x, y) = (\frac{1}{2}, 0)$ et 2 en $(-1, 0, 0)$.

Montrer que $\mathcal{V}$ est de la même longueur qu'une ellipse dont les demi-axes mesurent 1 et $\sqrt{2}$.

Si on écrit la paramétrisation de $\mathcal{V}$ de façon vectorielle :
$$\mathbf{r}(t) = \begin{bmatrix} \cos^2 t \\ \cos t \sin t \\ \sin t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}(1 + \cos 2t) \\ \frac{1}{2}\sin 2t \\ \sin t \end{bmatrix},$$
on a
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -2\cos t \sin t \\ \cos^2 t - \sin^2 t \\ \cos t \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -\sin 2t \\ \cos 2t \\ \cos t \end{bmatrix} \quad \text{d'où} \quad \frac{\mathrm{d}\ell}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| = \sqrt{1 + \cos^2 t},$$
longueur totale
$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t}\ \mathrm{d}t.$$
Pour l'ellipse qui nous intéresse : on peut prendre par exemple la paramétrisation
$$\mathbf{s}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sqrt{2}\sin t \end{bmatrix} \quad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi),$$
pour laquelle
$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \sqrt{2}\cos t \end{bmatrix}, \qquad \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{s}}{\mathrm{d}t} \right\| = \sqrt{\sin^2 t + 2\cos^2 t} = \sqrt{1 + \cos^2 t},$$
on trouve bien la même longueur
$$\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{1 + \cos^2 t}\ \mathrm{d}t.$$

Remarque : La description donnée ici de ce nombre irrationnel $\ell \approx 7{,}6404$ comme périmètre d'une certaine ellipse est essentiellement la plus simple possible (voyez ce qu'en dit une populaire calculatrice).

Déterminer le volume de la partie $\mathcal{T}$ de $\mathcal{B}$ située à l'intérieur de $\mathcal{C}$.

Ce volume est par définition l'intégrale triple
$$\mathrm{vol}(\mathcal{T}) = \iiint_{\mathcal{T}} 1\, \mathrm{d}V.$$
Le plus simple est probablement de travailler en coordonnées cylindriques, la description
$$\mathcal{T} : \begin{cases} x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 1 \\ x^2 + y^2 \leqslant x \end{cases} \qquad \text{devenant} \qquad \mathcal{T} : \begin{cases} z^2 \leqslant 1 - r^2 \\ r^2 \leqslant r\cos\theta. \end{cases}$$
Attention à cette dernière inégalité : si on simplifie par $r \geqslant 0$ pour obtenir $r \leqslant \cos\theta$, on doit se restreindre à $\theta \in [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$ pour s'assurer que $\cos\theta \geqslant 0$. On évalue donc

$$
\begin{aligned}
\mathrm{vol}(\mathcal{T}) &= \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} \int_{-\sqrt{1-r^2}}^{\sqrt{1-r^2}} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= 4 \int_0^{\frac{\pi}{2}} \int_0^{\cos\theta} r\sqrt{1-r^2} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\
&= -\frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-r^2)^{\frac{3}{2}} \Big|_0^{\cos\theta} \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1-\sin^3\theta) \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3} \int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^3\theta \,\mathrm{d}\theta \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{4}{3} \left[\frac{\cos^3\theta}{3} - \cos\theta \right]_0^{\frac{\pi}{2}} \\
&= \frac{2\pi}{3} - \frac{8}{9}
\end{aligned}
$$

Remarque : Si l'on retire *deux* copies de $\mathcal{T}$ à la boule, ce qui nous reste a un volume rationnel (à savoir $\frac{16}{9}$ unités de volume). Cet objet, quelquefois appelé *temple de Viviani*, possède toutes sortes d'autres propriétés remarquables appréciées des Anciens (voir notamment ici et là).

Quant au lien entre Led Zeppelin et Viviani, je n'en vois *a priori* aucun – mais n'hésitez pas à me faire part de vos trouvailles ! L'univers n'est riche que de ce que l'on y trouve…