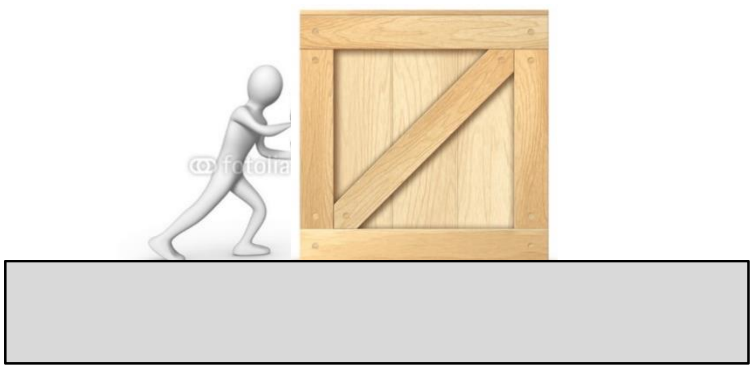
MECANIQUE CLASSIQUE
Chapitre 4 : Chutes
[Dynamique appliquée à des systèmes simples]

Introduction
1. Force de gravitation
2. Chute libre
3. Force de frottement fluide
4. Chute en présence de frottements fluides

3. Forces de frottement fluide

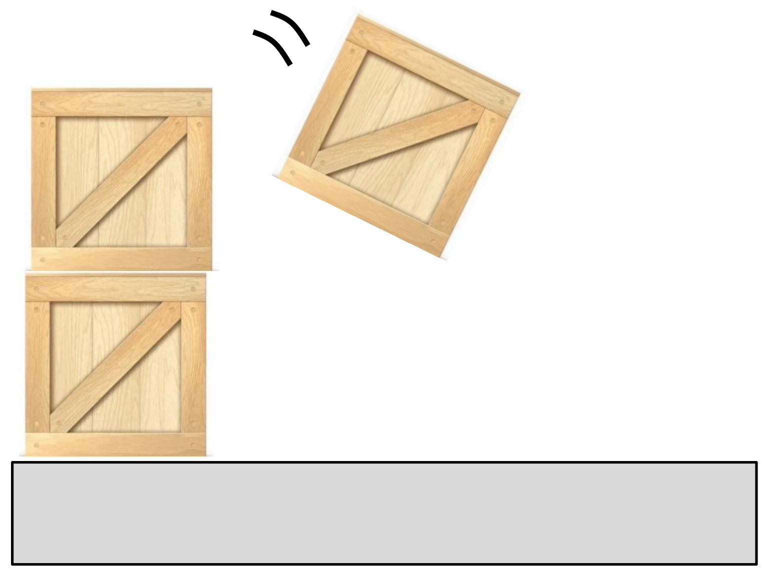
DEUX TYPES DE FROTTEMENTS

FROTTEMENT SOLIDE



Exemple : frottement du sol

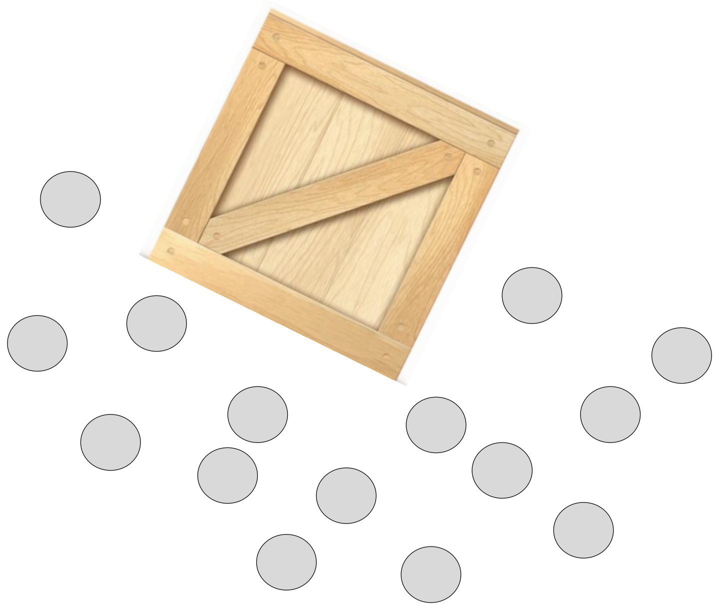
FROTTEMENT FLUIDE



Exemple : frottement de l’air

3. Forces de frottement fluide

Pourquoi, lorsqu’un corps chute, est il freiné par « frottement » ?
Que se passe-t-il physiquement ?

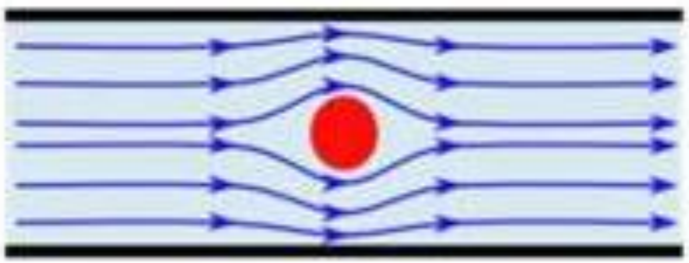


Les molécules d’air freinent la chute

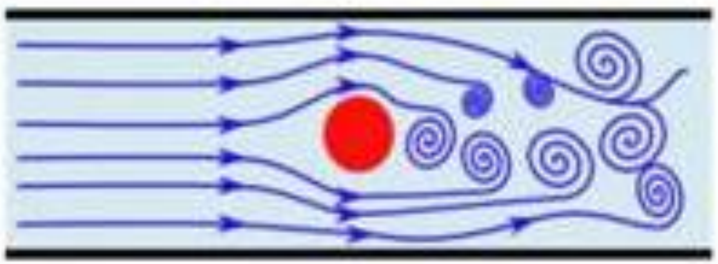
3. Forces de frottement fluide

DEUX REGIMES DE FROTTEMENT FLUIDE

En fonction de la vitesse du corps



FAIBLES VITESSES



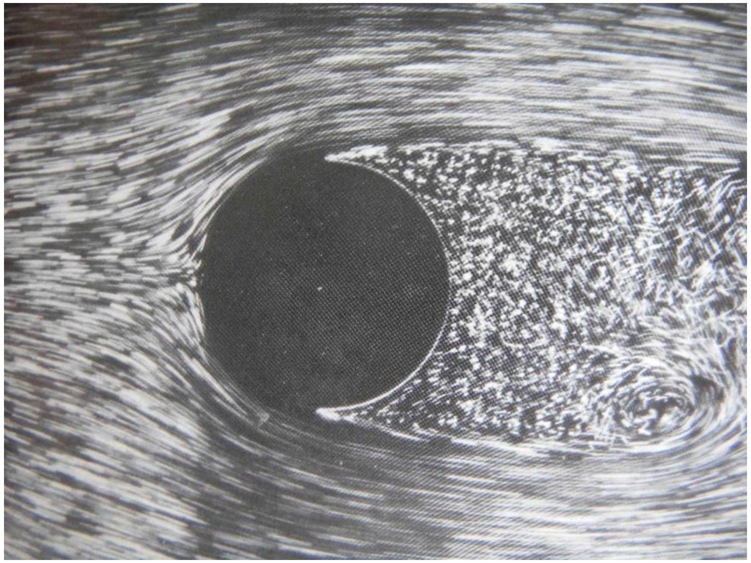
vortex

VITESSES ELEVES

Dans les 2 cas, la force dépend de la vitesse, mais de façon différente

3. Forces de frottement fluide

Remarque : vortex dans la nature



3. Forces de frottement fluide

Vitesses faibles : frottements visqueux

Le corps subit une force **proportionnelle à sa vitesse**

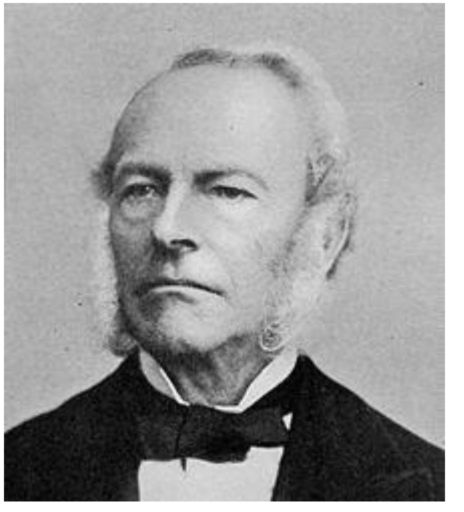
Dans le cas sphérique :

$$\vec{F} = -6\pi\eta R\vec{v}$$

FORMULE DE STOKES

R : rayon de la sphère
η : viscosité dynamique

AIR $\eta = 2.\ 10^{-5}\ kg.m^{-1}s^{-1}$
EAU $\eta = 10^{-3}\ kg.m^{-1}s^{-1}$



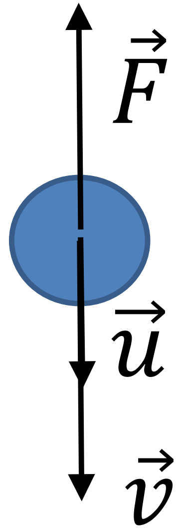
George G. Stokes
(1819 – 1903)

3. Forces de frottement fluide

Vitesses élevées : régime turbulent

La force est **proportionnelle à la vitesse du corps au carré**

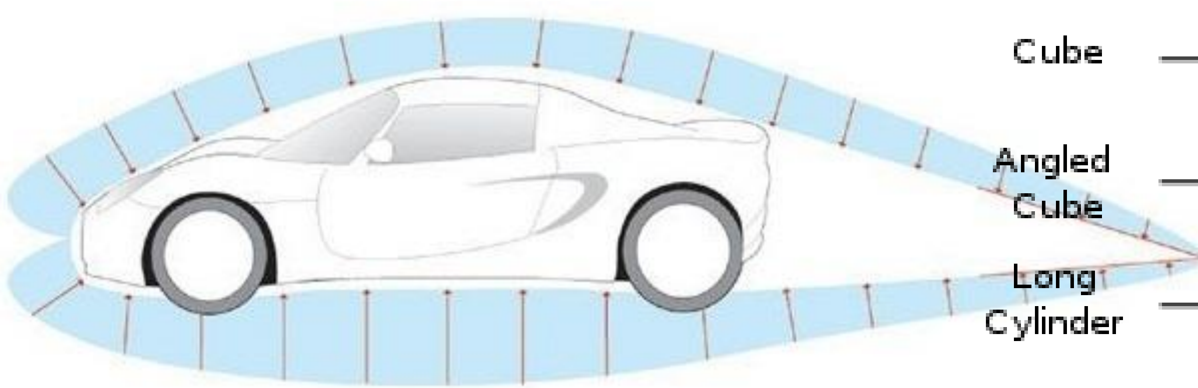
$$\vec{F} = -\frac{1}{2} C_x \rho_f S \boldsymbol{v}^2 \vec{u}$$

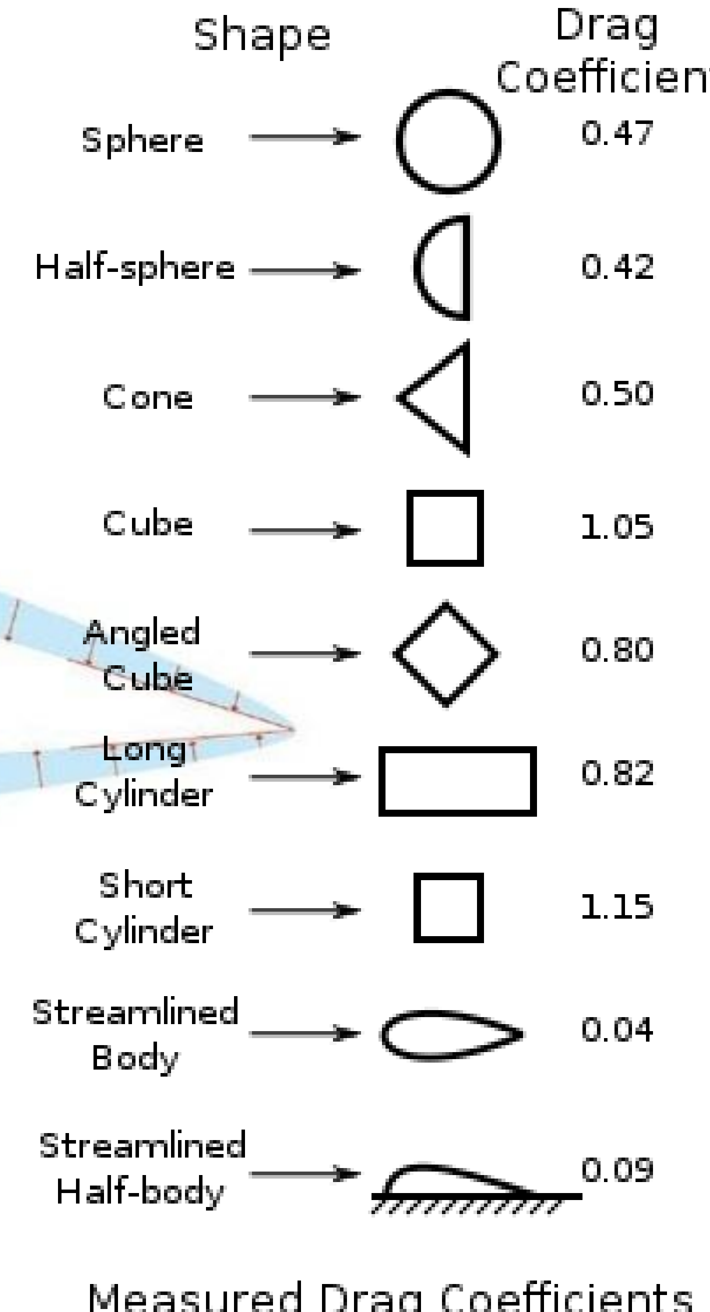


$\vec{u}$ vecteur unitaire dirigé selon $\vec{v}$
S section du corps
ρ_f masse volumique du fluide
C_x coefficient de traînée

3. Forces de frottement fluide

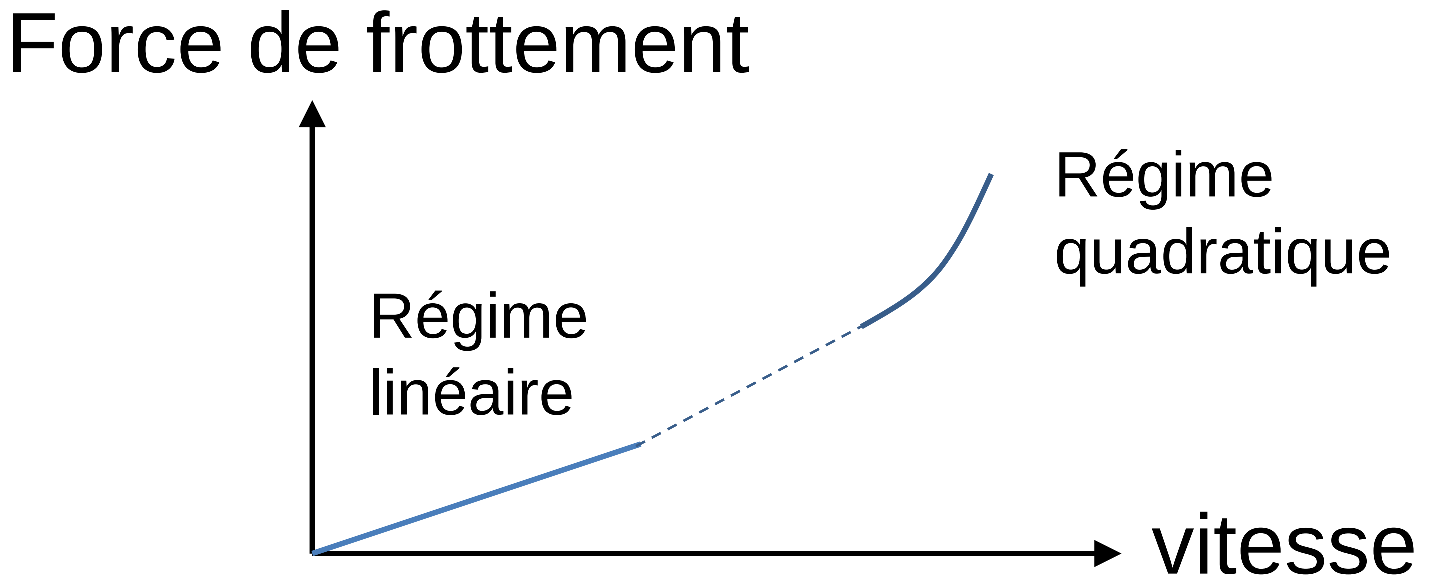
Remarque : Cx





3. Forces de frottement fluide

Remarque : à quelle vitesse passe-t-on d'un régime à l'autre ?



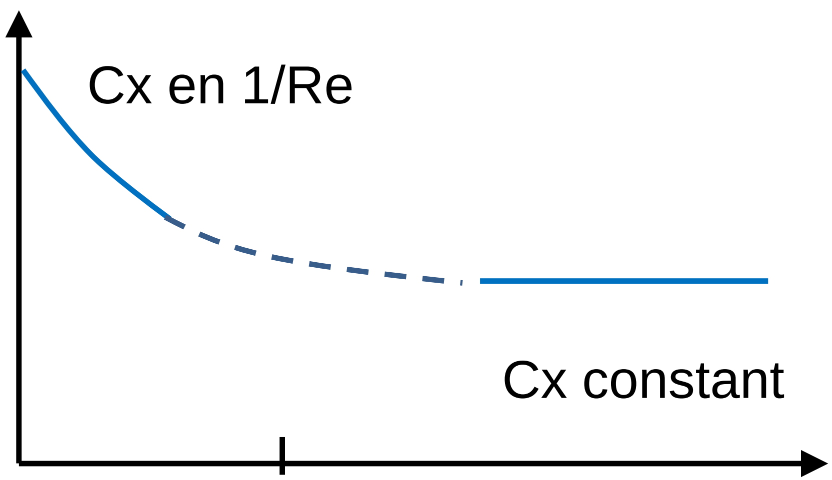
Détermination expérimentale.
La vitesse de changement de régime dépend du système.
Par contre **le régime change au même « nombre de Reynolds»**

3. Forces de frottement fluide

(suite) à quelle vitesse passe-t-on d'un régime à l'autre ?

Nombre de Reynolds : $$\mathrm{Re} = \frac{\rho_f R v}{\eta}$$

Cx (proportionnel à F/v^2)

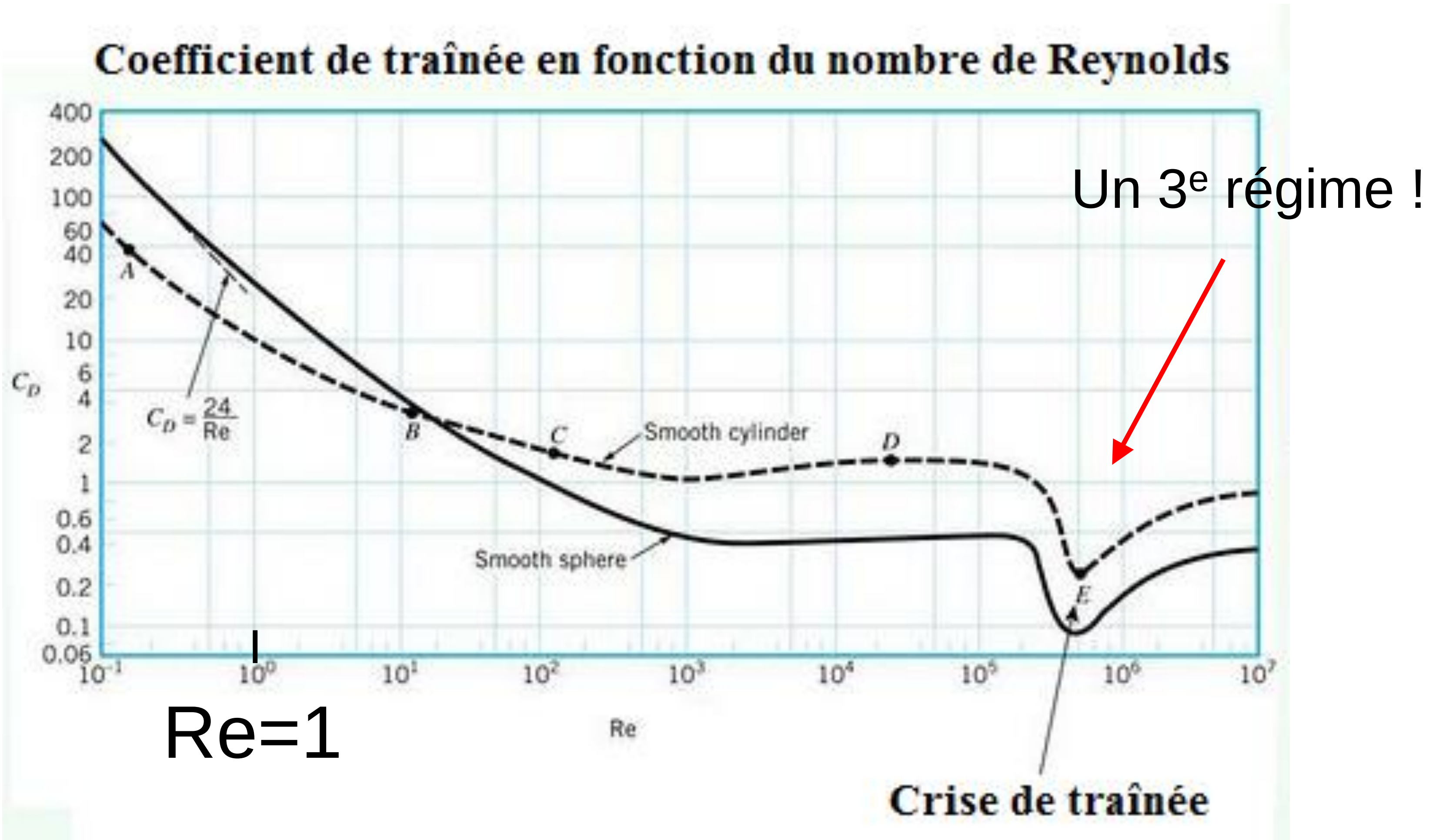


Re (proportionnel à v)

Re=1

3. Forces de frottement fluide

(suite) à quelle vitesse passe-t-on d'un régime à l'autre ?

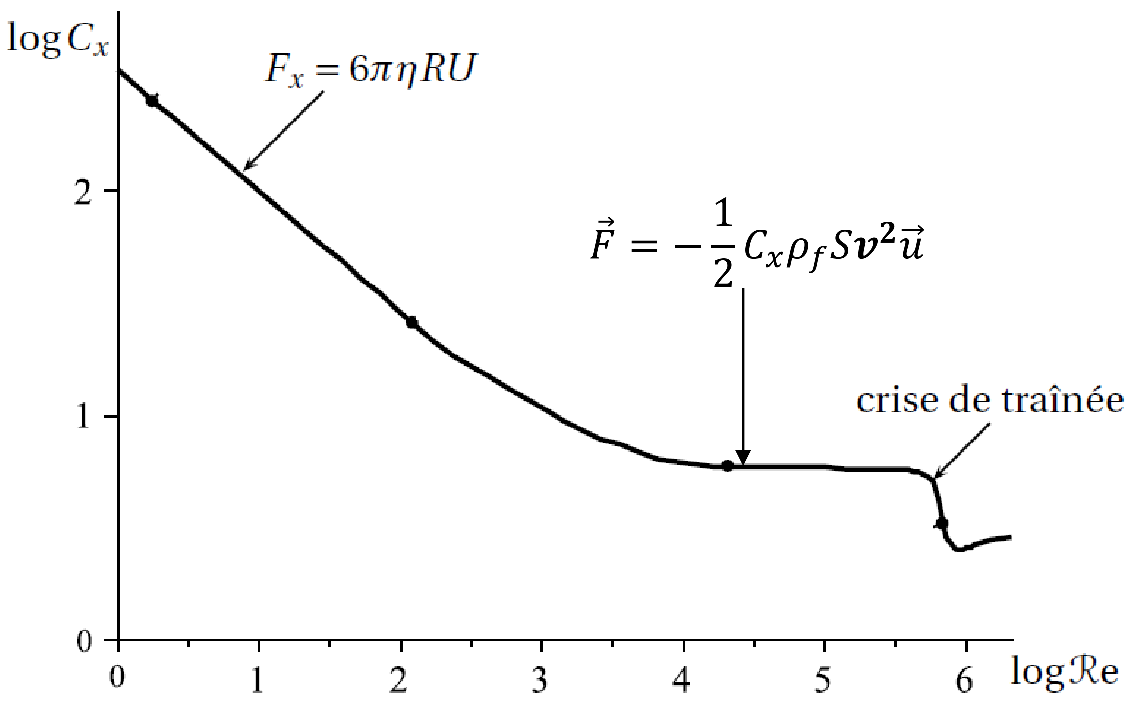


3e régime : « crise de traînée» découvert par Eiffel

3. Forces de frottement fluide

(suite) à quelle vitesse passe-t-on d'un régime à l'autre ?

Re < 1 : régime faible vitesse (laminaire)
1000 < Re < 100 000 régime des vitesses élevées (turbulent)
Au dessus : modélisation plus difficile



3. Forces de frottement fluide

Application :
Une fourmi tombe du haut d'un immeuble. Vitesse maximale pour laquelle on est en régime des faibles vitesses ?

$$\mathrm{Re} = \frac{\rho_f R v}{\eta} < 1$$

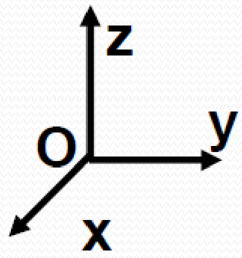
$$v < \frac{\eta_{air}}{\rho_{air} R}$$

ρ(air)= 1,3 kg / m^3
η(air)= 2. 10^{-5} kg.$m^{-1}s^{-1}$
R « rayon de la fourmi »
R=1 mm

→ 1,5 cm/s

Si une fourmi chute, reste elle dans le régime des vitesses faibles ? Il faut pour cela étudier la chute libre en présence de frottements

4. Etude du mouvement de chute en présence de frottements fluides



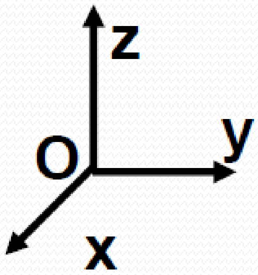
Problème type

Corps de masse m, de rayon R, vitesse initiale nulle

$$\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$$

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

Equations du mouvement ?



$$\vec{F} = -6\pi R\eta\vec{v}$$

$$\vec{P} = m\vec{g}$$

PFD

$$m\,\vec{a} = \vec{P} + \vec{F}$$

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} - 6\pi R\eta\vec{v}$$

$$m\begin{pmatrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{pmatrix} = m\begin{pmatrix}0\\ 0\\ -g\end{pmatrix} - \pi R\eta\begin{pmatrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{pmatrix}$$

$$\ddot{x} = -\frac{6\pi R\eta}{m}\,\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -\frac{6\pi R\eta}{m}\,\dot{y}$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{6\pi R\eta}{m}\,\dot{z}$$

Remarque. Attention, ne pas ajouter de signe (–) à $\begin{matrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{matrix}$ ou $\begin{matrix}\ddot{x}\\ \ddot{y}\\ \ddot{z}\end{matrix}$! Leur valeur peut être négative, les composantes de v seront toujours $\begin{matrix}\dot{x}\\ \dot{y}\\ \dot{z}\end{matrix}$

$$\ddot{x} = -\frac{6\pi R\eta}{m}\dot{x}$$

$$\ddot{y} = -\frac{6\pi R\eta}{m}\dot{y}$$

$$\ddot{z} = -g - \frac{6\pi R\eta}{m}\dot{z}$$

Pour simplifier l'écriture, on renomme en général la constante $\frac{6\pi R\eta}{m}$

On pourait l'appeler par exemple K cela dit on peut faire mieux en déterminant la dimension de $\frac{6\pi R\eta}{m}$ et en donnant un nom de constant plus parlant

dimension de $\frac{6\pi R\eta}{m}$?

dimension de $\frac{6\pi R\eta}{m}$?

Soit on évalue la dimension de chaque grandeur dans $\frac{6\pi R\eta}{m}$, soit plus rapide : on utilise par exemple

$$\underbrace{\ddot{x}}_{LT^{-2}} = \frac{6\pi R\eta}{m}\,\underbrace{\dot{x}}_{LT^{-1}}$$

Donc $\frac{6\pi R\eta}{m}$ est homogène à T^{-1}

→ on va l'appeler $1/\tau$

On obtient

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{1}{\tau}\,\dot{x} \\ \ddot{y} = -\dfrac{1}{\tau}\dot{y} \\ \ddot{z} = -g \;\; -\dfrac{1}{\tau}\dot{z} \end{cases}$$

Pour résoudre, on pourrait être tenté d'intégrer. Faisons le pour voir que ça pose problème

Pour résoudre, on pourrait être tenté d'intégrer. Faisons le pour voir que ça pose problème

$$\ddot{z} = -g \ -\frac{1}{\tau}\dot{z}$$

$$\dot{z} = -gt \ -\frac{1}{\tau}z + \mathrm{cte}$$

$$z = -\frac{1}{2}gt^2 \ -\frac{1}{\tau}zt$$

Non! Ce n'est pas correct puisque si on fait l'opération dans l'autre sens on obtient autre chose :

$$\left(-\frac{1}{2}gt^2 - \frac{1}{\tau}zt\right)' = -gt - \frac{1}{\tau}z - \frac{1}{\tau}t\dot{z}$$

Jusqu'ici on a eu des équations simples qu'on pouvait directement intégrer, là ce n'est plus possible.

Comment résoudre :

$$\ddot{z} = -g \; - \frac{1}{\tau}\dot{z}$$

On peut la réécrire

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}\mathrm{v} = -g$$

→ Equation différentielle !
du premier ordre à coefficient constant avec second membre constant.

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}\mathrm{v} = -g$$

RAPPEL. Résolution de ce type d'équation différentielle

1) On cherche la solution générale de l'équation de l'équation sans second membre

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau} v = 0$$

2) On cherche une solution particulière

3) On fait la Somme de 1 et 2 + on détermine k avec les conditions initiales

RAPPEL. Résolution de ce type d'équation différentielle $\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}\mathrm{v} = -g$

1) On cherche la solution générale de l'équation de l'équation sans second membre

$$\frac{dv}{dt} + \frac{1}{\tau}\, v = 0 \qquad v_g = k\, e^{-\frac{t}{\tau}}$$

2) On cherche une solution particulière

$$v_p = \ -g\,\tau$$

3) On fait la Somme de 1 et 2 + on détermine k avec les conditions initiales

$$v = ke^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau$$

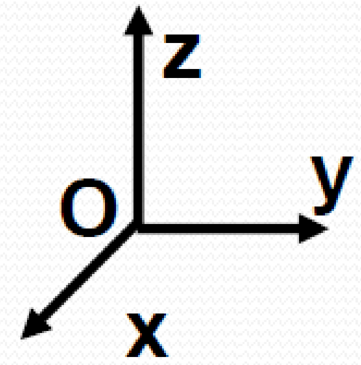
Détermination de k : v=0 à t=0 $\quad 0 = k - g\tau \Rightarrow \ k = g\tau$

$$v = g\tau\, e^{-\frac{t}{\tau}} - g\tau$$

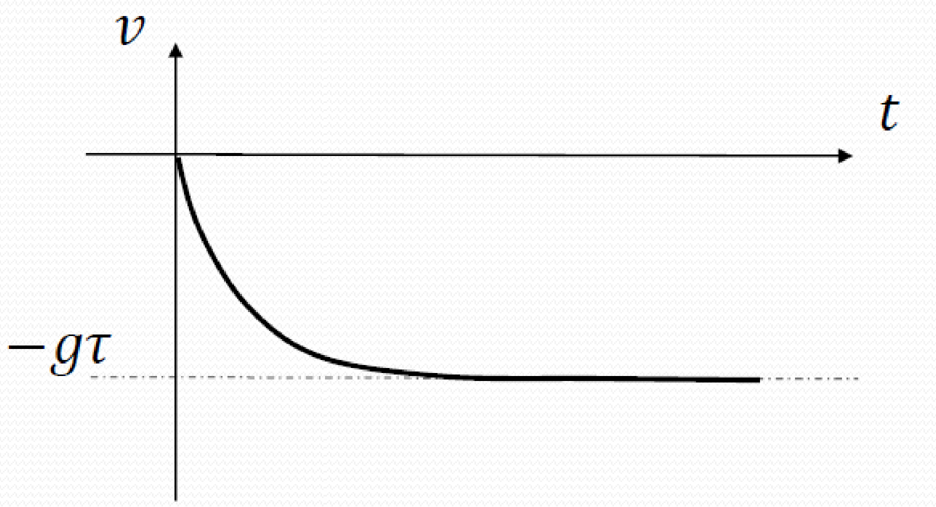
$$v = g\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$$

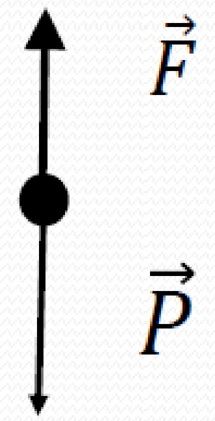
τ Est le temps pour arriver à la vitesse v limite du système (64%)

Résultat : $v = g\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$



A quoi ressemble cette fonction ?





Remarque. Vitesse limite $-g\tau$ où $\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi R\eta}{m}$

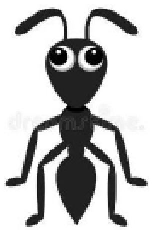
Sens physique de τ : temps caractéristique au bout duquel v=v_limite

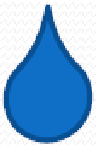
Remarque 2. Vitesse négative car la chute va dans le sens opposé de l'axe **z**.

Application.

Comparaison de la chute d'une fourmi et d'une goutte d'eau : calcul de τ et v_{limite}

$$v = g\tau\left(e^{-\frac{t}{\tau}} - 1\right)$$





$$\frac{1}{\tau} = \frac{6\pi R\eta}{m}$$

$R_{Fourmi} = 2mm \quad R_{goutte} = R$

$\eta(air) = 2.10^{-5}kg.m^{-1}.s^{-1}$

$\rho_{eau} = masse\ volumique\ eau = 10^{3}kg.m^{-1}.s^{-1}$ (pour la goutte et la fourmi)

$$m = \frac{4}{3}\,\pi\,R^{3} * \rho_{eau}$$

→ Détermination de τ

$$\tau = \frac{m}{6\pi R\eta} = \frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{eau}}{6\pi R\eta_{air}} = \frac{2R^2 \rho_{eau}}{9\,\eta_{air}}$$

$$R = 2mm \qquad \tau = \frac{2 * (2.10^{-3})^2 * 10^3}{9 * 2 * 10^{-5}} \approx 44s \rightarrow \left\|\overrightarrow{v_{\mathrm{lim}}}\right\| = g\tau \approx 440\, m.s^{-1}$$

Goutte d'eau

$$R = 0.1mm \rightarrow \tau \approx 0.1s \qquad \left\|v_{\mathrm{lim}}\right\| \approx 1m.s^{-1}$$

→ Taille typique des gouttes de pluie qui forment les nuages – les nuages ne tombent pas car cette faible vitesse de chute peut être compensée par des courants d'air ascendants

Remarque.

POUR DETERMINER PLUS RAPIDEMENT V_{lim}

En régime laminaire

$$m\,\vec{a} = m\vec{g} - \alpha\,\vec{v}$$

$$\vec{V}_{\text{lim}} = \vec{V}_{cst} \rightarrow \vec{a} = \vec{0}$$

Quand la vitesse a atteint sa valeur limite, elle est constante

→ accélération nulle

Donc

$$m\vec{g} = \alpha\,\vec{v}_{\text{lim}} \rightarrow v_{\text{lim}} = \frac{mg}{6\pi\eta R} = g\tau$$

En régime turbulent

$$m\ddot{z} = -mg + \frac{1}{2}\, C * \rho f\, S\, \dot{z}^2$$

$$m\frac{dv}{dt} = -mg + \frac{1}{2}\, C * \rho f\, S v^2$$

Vitesse limite dans le régime turbulent ?

Vitesse constante $\rightarrow \vec{a} = \vec{0}$

$$\vec{v} = \overrightarrow{cste}$$

$$0 = -mg + \frac{1}{2} C_x \rho S v_{\mathrm{lim}}^2$$

$$\boxed{v_{\mathrm{lim}} = \sqrt{\frac{2mg}{C_x \rho f S}}}$$

Application :
Estimation de la vitesse maximale d'un homme en chute libre

$$v_{lim} = \sqrt{\frac{2mg}{C_x \rho f S}}$$

$$m = 80kg$$

$$g \sim 10m.s^{-2}$$

$$C_x = 0.2$$

$$\rho f \ 1.kg.m^{-3}$$

$$S = 0.5m^2$$

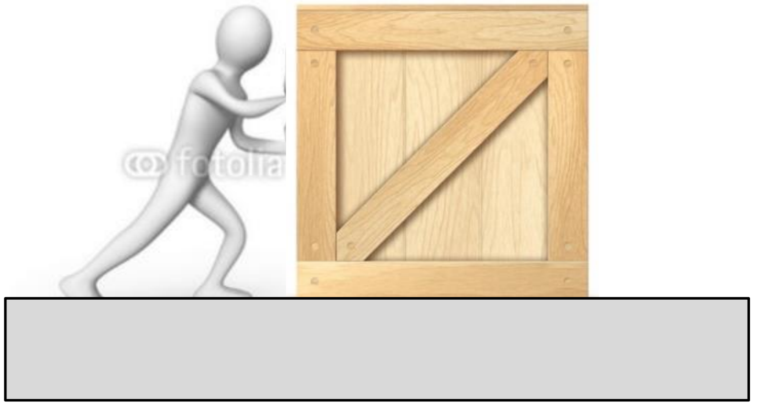
$$v_{lim} = \sqrt{\frac{1600}{0.1}} = 126.5\ m.s^{-1} = 455km.h^{-1}$$

En réalité environ 195 km/h
Et record environ 1000km/h à haute altitude

MECANIQUE CLASSIQUE
Chapitre 4 :
Dynamique appliquée à des systèmes simples

5. Forces de frottement solide

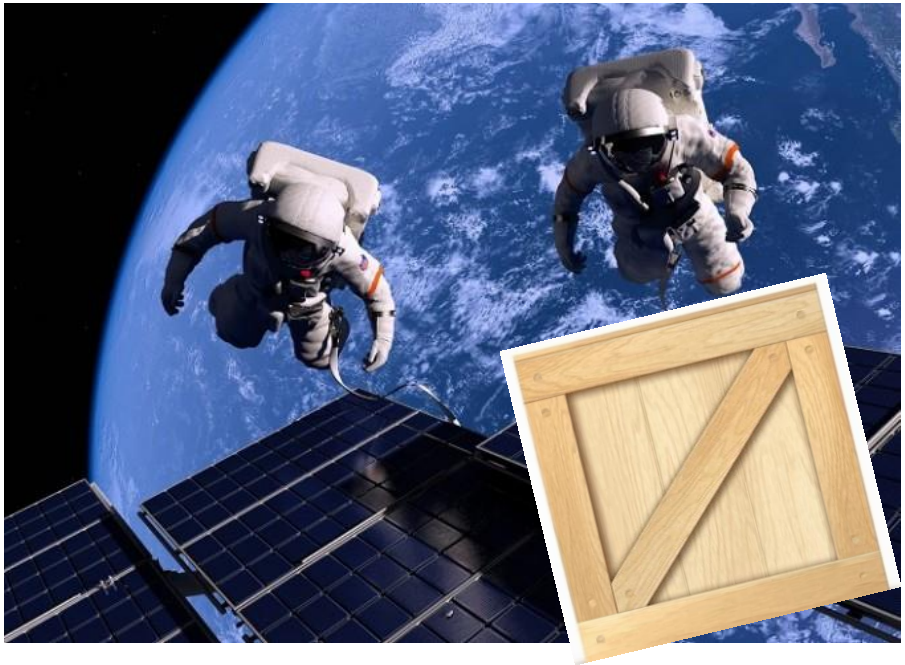
Exemple : déplacement d'une caisse par poussée latérale.
Qu'est-ce qui rend l'opération difficile ?



- La masse de la caisse
- Les frottements au sol
- Les frottements de l'air

5. Forces de frottement solide

Remarque 1. Importance de l'inertie (pas le poids : *la masse*)

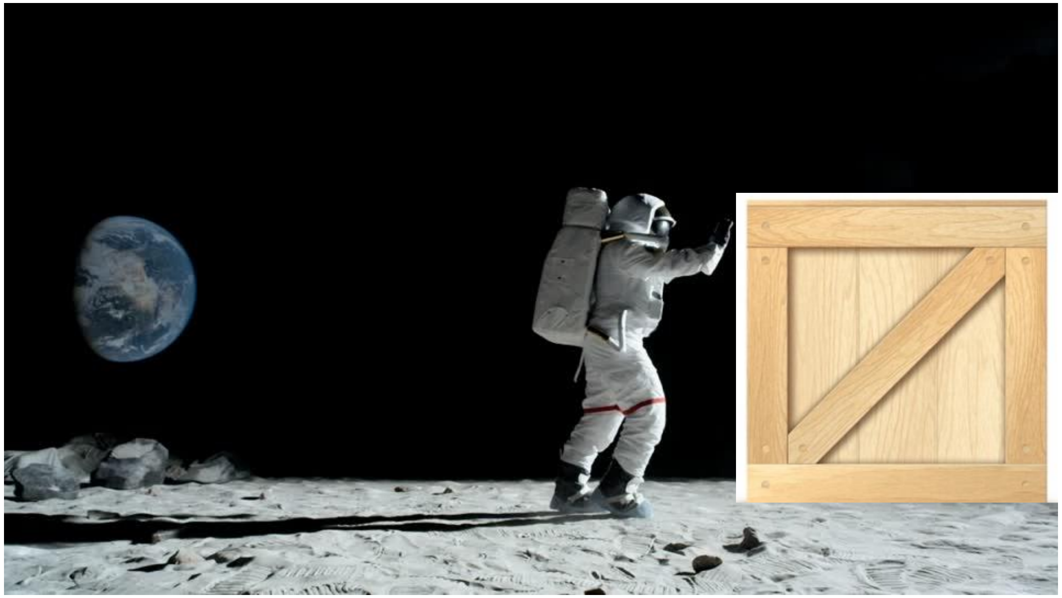


$$m\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

Exemple : dans l'espace, si on pousse la caisse, il n'y a pas de frottements et pourtant ce ne sera pas facile!
Le déplacement dépend en premier lieu de l'inertie

5. Forces de frottement solide

Remarque 2. Frottements de l’air ≠ Frottements solides

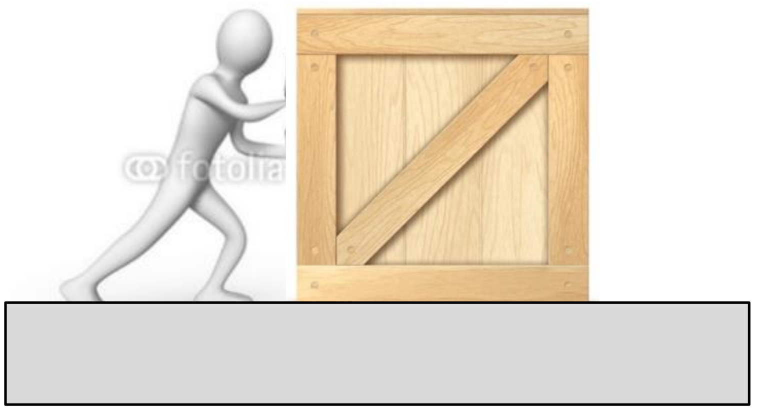


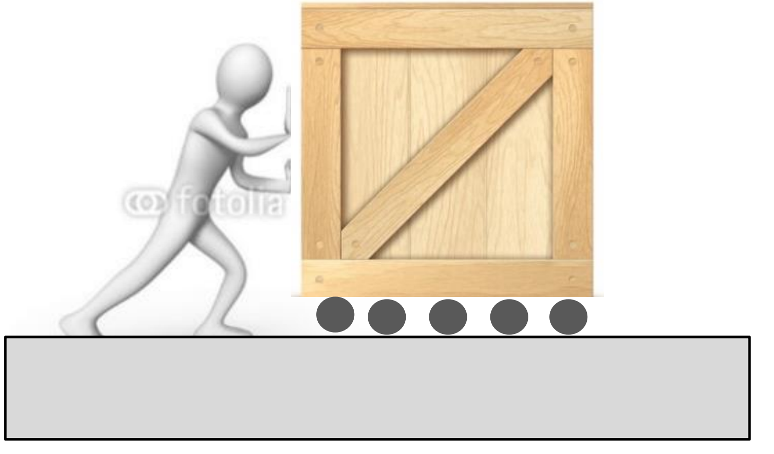
Exemple : sur la Lune, le déplacement de la caisse serait toujours difficile alors qu’il n’y a pas d’air : **frottements solides >> frottements de l’air**

5. Forces de frottement solide

Remarque 3. Frottements solides

Frottements solides : la différence entre une caisse avec ou sans roulettes



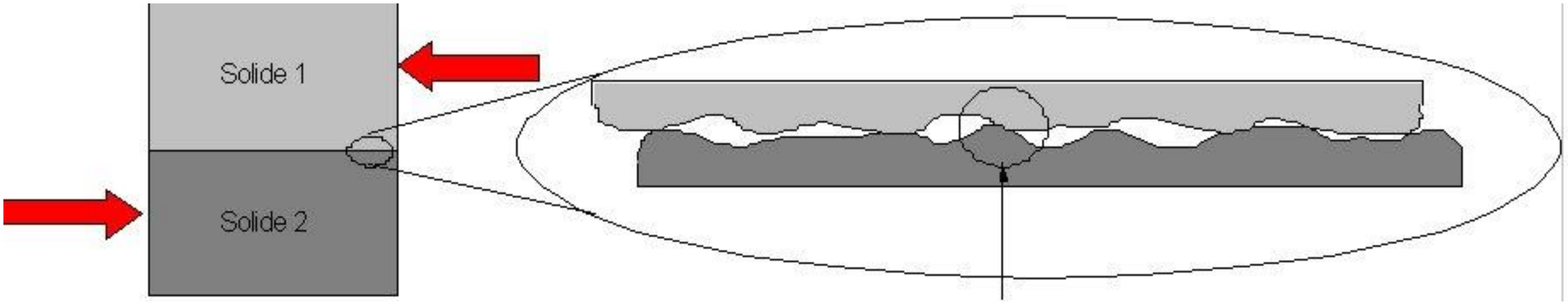


Frottements solides et frottements fluides sont très différents

5. Forces de frottement solide

Notion de **contact**

Surface de contact entre deux solides



5. Forces de frottement solide

Notion de **glissement**

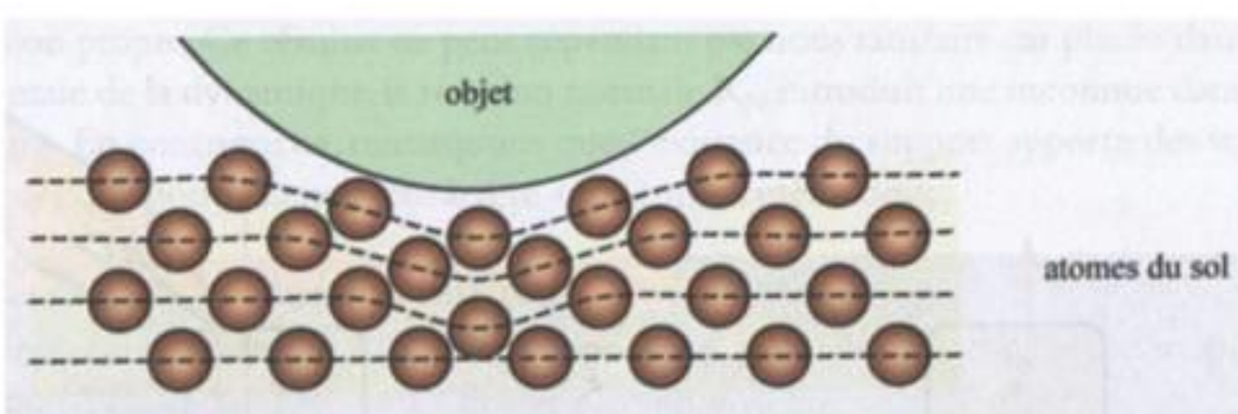
Il y a glissement lorsque le corps 1 et le corps 2 ont un **mouvement relatif** au niveau de leur contact

On va voir que la description des frottements diffère selon qu'on est en situation de glissement ou non

5. Forces de frottement solide

Modélisation des frottements solides : **Lois de Coulomb**

Remarque : la description précise est bien plus complexe
Dépend de la forme, de processus chimiques, de la capacité de déformation du système, …

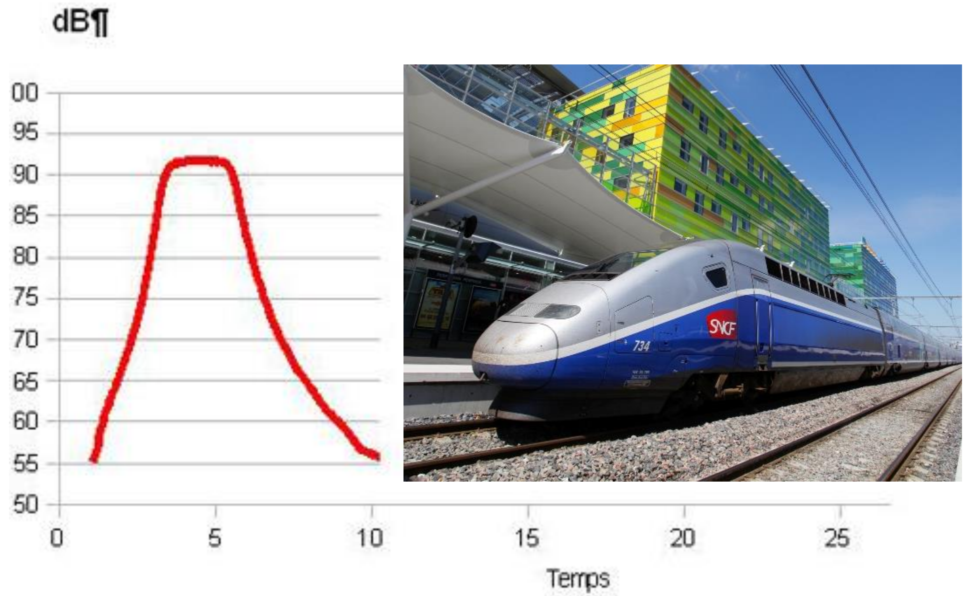


5. Forces de frottement solide

Importance de l’étude des frottements solides
un enjeu industriel important

Usure des pièces / tribologie

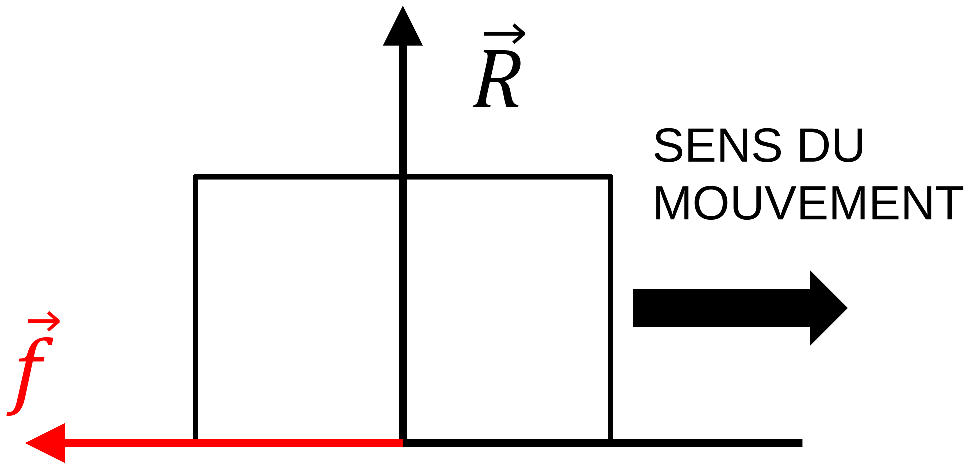
Bruit/Nuisance sonore



→ Domaine de recherche actif

5. Forces de frottement solide

Lois de Coulomb. Loi 1 lorsqu'il y a glissement



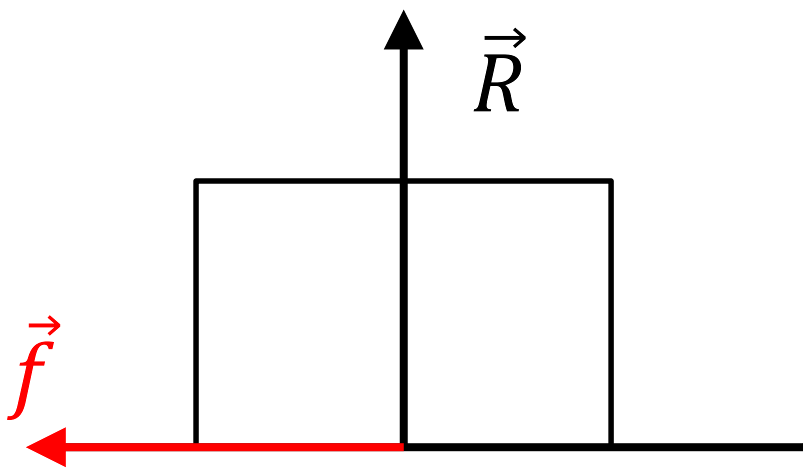
$$\left\|\vec{f}\right\| = \mu\left\|\vec{R}\right\|$$

avec $\boldsymbol{\mu}$ le **coefficient de frottement dynamique**

Le frottement est proportionnel à la réaction du support

5. Forces de frottement solide

Lois de Coulomb. Loi 2 frottements en **l'absence de glissement**



$$\left\|\vec{f}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{f_0}\right\| = \mu_S \|\vec{R}\|$$

avec $\boldsymbol{\mu_s}$ le coefficient de frottement **statique**

Force qui empêche un objet *immobile* de se déplacer à l'application d'une force de traction

5. Forces de frottement solide

Lois de Coulomb. Loi 2 frottements en **l'absence de glissement**

Ce que dit la loi 2 :

$$\left\|\vec{f}\right\| \leq \left\|\overrightarrow{f_0}\right\| = \mu_S \|\vec{R}\|$$

- Lorsqu'on applique une force de traction, ***f*** bloque le mouvement
- Au-delà d'une certaine force de traction pour laquelle $\boldsymbol{f = f_0}$ on sort du régime statique / la loi 2 n'est plus valable

5. Forces de frottement solide

Ordres de grandeur des coefficients dynamiques et statiques

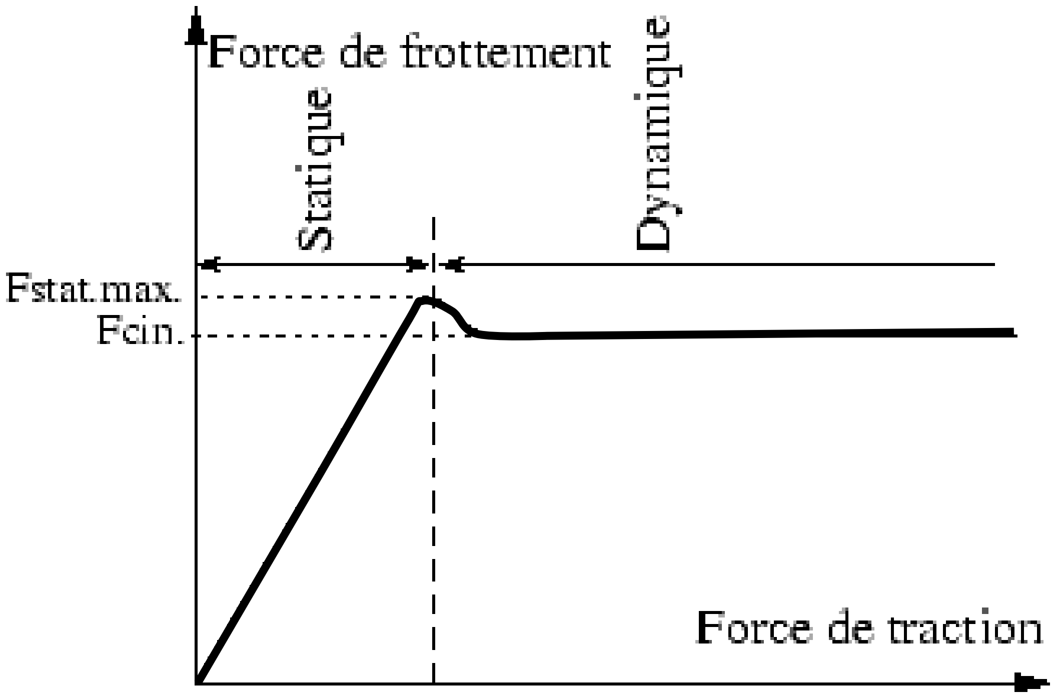
	Acier/acier	Bois/bois	Téflon/acier	Pneu/Béton
μ	0,4	0,3	0,04	0,7
μ_S	0,6	0,5	0,04	1

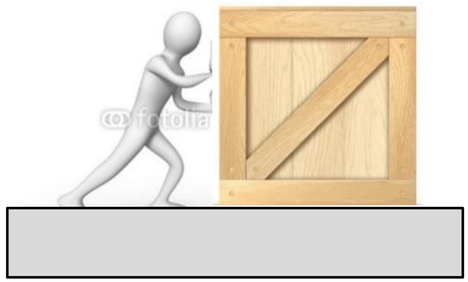
Remarques
Acier/acier : exemple tgv
Teflon/acier : on voit que le teflon permet de minimiser les frottements
Pneu/Béton : il faut des frottements suffisants pour une bonne adhérance

5. Forces de frottement solide

Remarque :
en général (mais pas systématiquement) : $\boldsymbol{\mu < \mu_S}$

Quand le mouvement commence, le frottement diminue





5. Forces de frottement solide

APPLICATIONS

Voir : Cours_meca3_chutes_libre_frottements_complement_manuscrit