EXAMEN DE MECANIQUE

24 / 03 / 2020

Durée : 2 heures

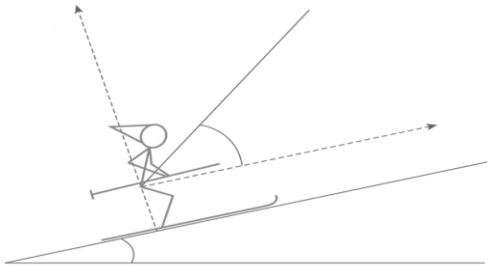
Les réponses doivent être rédigées et justifiées avec soin.

La consultation des notes de cours et de TDs est ***permise****. La calculatrice est autorisée.*

Barème indicatif : ***chaque question vaut un point****. Un formulaire se trouve à la fin du sujet.*

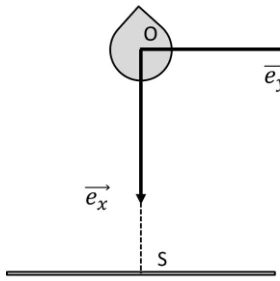
Exercice 1. Notions de base

1. Quelle est la dimension d'une énergie ? Justifier en utilisant l'expression de l'énergie cinétique et de l'énergie potentielle de pesanteur.
2. Un skieur est tracté par un remonte pente sur une pente inclinée, voir le schéma ci-dessous. Reproduire le schéma en y ajoutant toutes les forces subies par le skieur.



Exercice 2. Goutte de pluie

Une goutte de pluie de masse m tombe d'une hauteur h avec une vitesse initiale $\overrightarrow{v_0} = v_O\overrightarrow{e_x}$. Elle parvient au sol au point S.



A. on néglige les forces de frottements.

1. Appliquer le principe fondamental de la dynamique (PFD) pour déterminer l'expression de la vitesse $v(t)$ et de la position de la goutte $x(t)$ en fonction du temps.
2. En déduire la vitesse de la goutte v_S lorsqu'elle arrive au sol.
3. Vérifier votre résultat en déterminant cette fois v_S à partir du théorème de l'énergie mécanique.

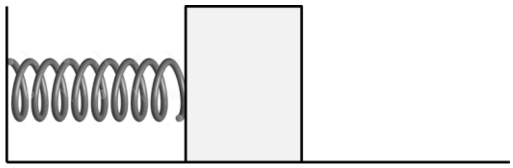
B. On ajoute maintenant une force de frottement fluide $\vec{f} = -a\vec{v}$ avec a une constante

4. Appliquer le PFD et en déduire l'équation différentielle de la vitesse de la goutte.
5. Résoudre l'équation différentielle.
6. Tracer le graphe $v(t)$ en précisant les valeurs limites à temps nul et temps infini.
7. Ecrire le théorème de l'énergie mécanique entre 0 et S et en déduire une expression du travail de la force de frottement entre 0 et S en fonction de v_0, v_S, m et h.

Exercice 3. Ressort horizontal.

On dispose de deux ressorts identiques de longueur L et de de raideur k. On veut déterminer la pulsation de l'oscillation d'une masse m fixée au bout de ces ressorts sur un plan horizontal. On néglige les frottements. Dans chaque cas, on étudie le mouvement selon l'axe horizontal x en choisissant l'origine x=0 correspondant à la position d'équilibre de la masse.

A. Un seul ressort.

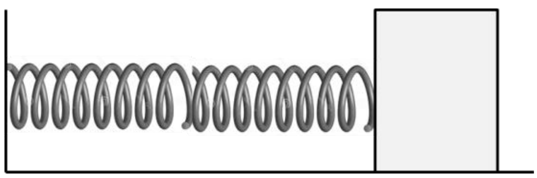


1. Déterminer l'équation différentielle qui régit le mouvement de la masse.
2. Résoudre l'équation différentielle ; les conditions initiales sont x=L et v=0. Quelle est l'expression de la pulsation de l'oscillation ?

B. On fixe maintenant à la masse m les deux ressorts en parallèle.

3. Déterminer l'équation différentielle dans ce cas.
4. Que devient la pulsation de l'oscillation, par rapport au cas A ?

C. On met maintenant les deux ressorts en série.

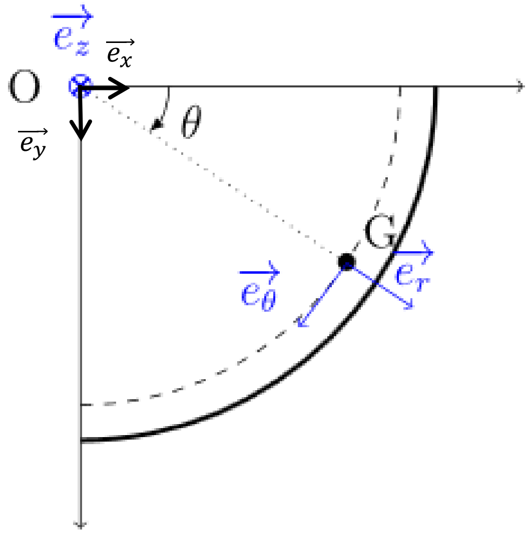


5. Que devient la pulsation de l'oscillation, par rapport au cas A ? Commenter.

6. On a jusqu'ici négligé les frottements. Schématiser sans justification ce que devient le graphe x(t) en présence de : a) faibles frottements et b) forts frottements.
7. Calculer l'énergie potentielle de rappel d'un ressort à partir de l'expression de la force de rappel. Que vaut l'énergie potentielle de rappel des deux ressorts, dans le cas B ?

Exercice 4.

Un enfant glisse assis le long d'un toboggan. Celui-ci est une portion de cercle de centre *O* et de rayon *2,7m*. Le centre de gravité de l'enfant, noté *G*, glisse tout au long de la descente à *20 cm* au-dessus du toboggan. L'angle que fait le rayon *OG=R* de la trajectoire de l'enfant avec l'horizontale est noté θ. Il est représenté sur la figure ci-dessous. Initialement, l'enfant s'élance d'une position $\theta_0 = 15°$, sans vitesse initiale. En sortie du toboggan, l'angle θ vaut $90°$.
On considère que tout frottement est négligeable.



1. Indiquez les forces qui s'exercent sur *G* et donner leurs expressions.
2. Exprimer le moment des forces par rapport au point *O*
3. Exprimer le moment cinétique de l'enfant par rapport au point *O*
4. Appliquez le théorème du moment cinétique au point *G* et déterminer l'équation de son mouvement. L'équation à trouver est de la forme $\boldsymbol{\ddot{\theta} - K cos\theta = 0}$ avec K une constante à préciser.

Les questions suivantes sont en bonus

5. Multiplier les termes de l'équation différentielle par $\dot{\theta}$ et intégrer l'équation différentielle en tenant compte des conditions initiales.
6. En déduire l'expression de la vitesse de l'enfant en fonction de l'angle θ.
7. Montrer que la vitesse maximale atteinte par l'enfant s'écrit $v_{max} = \sqrt{2gR(1 - sin15°)}$
8. Calculer sa valeur (*g=9,81m/s²*)

FORMULAIRE DE MECANIQUE DU POINT

Forces usuelles Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, Frottements fluides (laminaire) $\vec{F} = -k\vec{v}$, Frottements solides (dynamiques) $\|\vec{F}\| = \mu\|\vec{R}\|$ Force électrique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, Force de gravitation $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$.

Quelques définitions travail $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$, moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \vec{F_i}$, moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$, énergie potentielle E_P d'une force conservative : $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P$ → $E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}(\vec{F})$

Cinématique et dynamique en coordonnées cartésiennes

$\vec{r} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$; $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$; $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}$

Cinématique et dynamique en coordonnées polaires

$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$; $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$; $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

PFD. $m\vec{a} = \sum_i \vec{F_i}$ ou $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F_i}$

TEC. $\Delta_{AB}E_C = \sum_i W_{AB}(\vec{F_i})$

TEM. $\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{non\ conservatives})$

TMC. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}$

Equations différentielles usuelles

$\frac{dy}{dt} + ay = b$ → $y(t) = Kexp(-at) + \frac{b}{a}$

$\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = 0$ → $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = 0$ →équation caractéristique de discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4{\omega_0}^2$.

Si $\Delta > 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + b\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right\}$

Si $\Delta < 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right\}$