ISEN Lille 12 mars 2018

$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **3** × **3** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que fort peu utile.
- Le but d'une évaluation est de vérifier que vous savez dire des choses sensées sur les sujets proposés ; **exprimez**-vous !
- Et surtout : **amusez**-vous bien ☺

On définit une loi de composition interne $\star$ sur $\mathbf{R}$ par

$$a \star b := a \cdot b + a + b.$$

a) Montrer que $\mathbf{R}$ muni de $\star$ est un monoïde (en précisant bien qui est le neutre).

b) Vérifier que la fonction $\varphi : (\mathbf{R}, \star) \to (\mathbf{R}, \cdot)$ définie par $\varphi(x) = x + 1$ est un isomorphisme.

c) Déterminer quels sont les éléments symétrisables dans $(\mathbf{R}, \star)$ et expliciter une formule pour leur symétrique.

Dans cette question, un *domaine* désigne une région connexe de $\mathbf{C}$ contenant un disque de rayon > 0.

a) Soit exp la fonction exponentielle complexe et $\ell(z)$ une fonction analytique sur un domaine $\mathcal{D} \subseteq \mathbf{C}$ satisfaisant

$$\exp(\ell(z)) = z \qquad \text{pour tout } z \in \mathcal{D}.$$

Montrer que $\operatorname{Re} \ell(z) = \ln |z|$. Que dire de sa partie imaginaire ?

b) Montrer que ℓ est solution de l'équation différentielle $z\,\ell'(z) = 1$ et en déduire sa représentation en série entière au voisinage de tout point $z_0 \neq 0$ (en précisant son rayon de convergence).

c) Sur l'ensemble $\mathcal{X}$ des paires $(\mathcal{D}, f)$ où $\mathcal{D}$ est un domaine et $f : \mathcal{D} \to \mathbf{C}$ une fonction analytique sur $\mathcal{D}$, on définit

$$(\mathcal{D}_1, f_1) \preceq (\mathcal{D}_2, f_2) \quad \iff \quad \mathcal{D}_1 \subseteq \mathcal{D}_2 \text{ et } f_1(z) = f_2(z) \text{ pour tout } z \in \mathcal{D}_1.$$

Est-une relation d'ordre sur $\mathcal{X}$?

a) Dans le groupe symétrique $\mathcal{S}_3$: exprimer explicitement chaque élément en termes de $\alpha = (1\ 2)$ et $\beta = (2\ 3)$.

b) Soit G un groupe à 6 éléments et $a \in G$ qui ne commute pas avec tous les autres. Montrer que a est d'ordre 2.

c) Conclure : tout groupe *non commutatif* à 6 éléments est isomorphe à $\mathcal{S}_3$. Y en a-t-il des commutatifs ?

Culture générale (bonus) : comment se nomme cette charmante petite boule de poils ?