CIR_2 CNB_2

Géométrie différentielle
Résumé de cours

I - Courbes planes

1 - Courbe paramétrée

a/ Définition

Une courbe plane paramétrée c'est une application γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$.

On peut la concevoir comme l'équation horaire d'un mobile dans le plan.

On peut aussi noter $M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

Si $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan, $\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$

b/ Support

L'image de γ (ensemble des points $\mathbb{R}^2$ qui sont images par γ d'un point de $[a,b]$) est appelé le support de cette courbe paramétrée.

On dit aussi (improprement dans ce contexte) que c'est une courbe.

c/ Changement de paramètre

Si φ est une application bijective de $[\alpha,\beta]$ dans $[a,b]$, l'application $\gamma\circ\varphi$ définit une courbe qui a le même support que γ. On dit que φ constitue un changement de paramètre admissible.

d/ Opérations

Soit γ $[a,b]\to\mathbb{R}^2$. La courbe $-\gamma$ est la courbe $[a,b]\to\mathbb{R}^2$ telle que $(-\gamma)(t)=\gamma(b-(t-a))$.

Elle a le même support que γ, mais est parcourue "dans le sens inverse".

Soient γ_1 $[a,b]\to\mathbb{R}^2$ et γ_2 $[b,c]\to\mathbb{R}^2$ telles que $\gamma_1(b)=\gamma_2(b)$ (Deux courbes qui "se suivent")

La courbe $\gamma_1+\gamma_2$ est la courbe $[a,c]\to\mathbb{R}^2$ telle que $(\gamma_1+\gamma_2)(t)=\begin{cases}\gamma_1(t) & \text{si } t\in[a,b] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t\in[b,c]\end{cases}$

2 - Vecteur vitesse - Tangente

a/ Vecteur vitesse

Soit γ $[a,b]\to\mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

On note $\frac{dM}{dt}$ ou $\frac{dM}{dt}(t)$ le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$. On l'appelle le vecteur vitesse (au point t)

On écrit aussi $\frac{dM}{dt}=\frac{dx}{dt}\vec{i}+\frac{dy}{dt}\vec{j}$

b/ Définition :

On dit que la droite Δ est tangente en $M(t_0)$ à la courbe γ si $M(t_0)\in\Delta$ et si la direction de Δ est la limite des direction des "cordes" $(M(t_0)M(t_1))$ quand $t_1\to t_0$

c/ Propriété :

Si $\frac{dM}{dt}(t_0)\neq 0$, la courbe γ possède une tangente au point $M(t_0)$

et cette tangente a le vecteur vitesse $\frac{dM}{dt}(t_0)$ comme vecteur directeur.

Si $\forall t\in[a,b]$ / $\frac{dM}{dt}(t)\neq 0$, on dit que la courbe est régulière. En tout point elle a une tangente.

3 - Courbes polaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout réel $\theta \in I$, on pose $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

La courbe polaire définie par la fonction $\rho(\theta)$ est la courbe paramétrée qui, à θ, associe

$$M(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$$

On note $\vec{n}$ le vecteur $\dfrac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

On remarque que $\dfrac{d\vec{n}}{d\theta} = -\vec{r}$ et que , pour tout θ , $(O, \vec{r}, \vec{n})$ est un repère orthonormé direct (repère tournant)

Le vecteur vitesse est alors $\dfrac{dM}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{r} + \rho(\theta)\vec{n}$

4 - Longueur d'une courbe plane de classe C^1

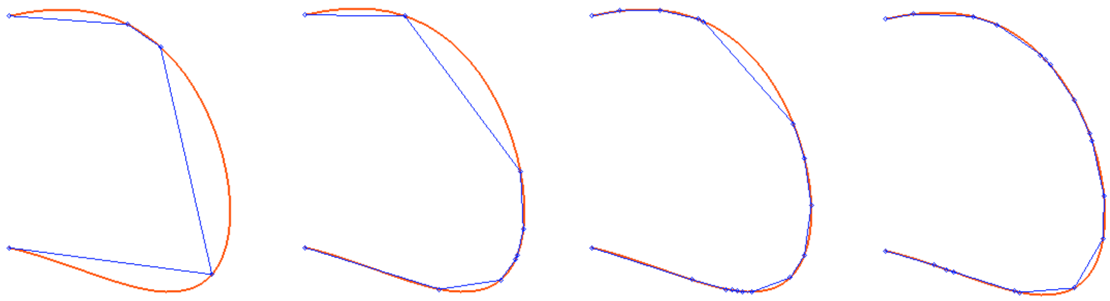
Soit Γ un arc paramétré $\begin{array}{l} [a,b] \to \mathbb{R}^2 \\ t \quad \to \Gamma(t) = M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{array}$ de classe C^1

a/ Définition

Soit $\sigma = (t_0, t_1, \ldots, t_n)$ une subdivision de $[a,b]$ $\quad (t_0 = a < t_1 < t_2 < \ldots < t_n = b)$

La ligne polygonale $P_\sigma(\Gamma)$ est la ligne formée des segments $\left[M(t_k)M(t_{k+1})\right]$, $k = 0..n-1$

Sa longueur est $mes(P_\sigma(\Gamma)) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_k)M(t_{k+1})} \right\|$



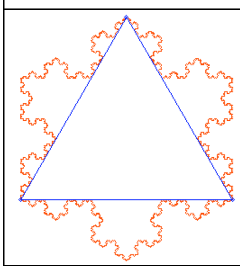
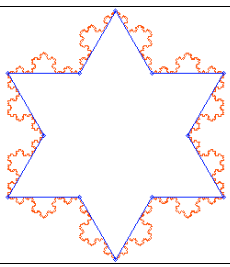
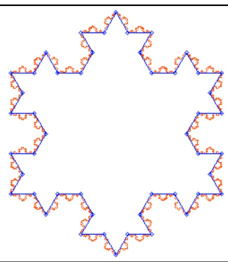
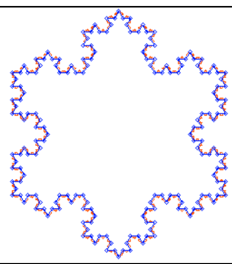
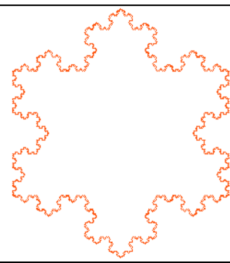
La longueur de Γ est, si elle existe, la borne sup des $mes(P_\sigma(\Gamma))$:

$$\boxed{mes(\Gamma) = \sup_{\sigma \text{ subdivision de } [a,b]} \left(mes(P_\sigma(\Gamma)) \right)}$$

<u>Remarque : le flocon de Von Koch n'est pas mesurable</u>

C'est une courbe continue, mais pas de classe C^1

Si on considère une subdivision en n parties égales,

$n = 3$	$n = 12$	$n = 48$	$n = 192$	$n = 3.4^k$
$mes(P_\sigma(\Gamma)) = 3$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = 4$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = \frac{16}{3}$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = \frac{64}{9}$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = 3.\left(\frac{4}{3}\right)^k \xrightarrow[k\to\infty]{} \infty$
				

b/ Théorème : si Γ est une courbe de classe C^1 alors elle est mesurable et $\boxed{mes(\Gamma)=\int_a^b \|\Gamma'(t)\|\mathrm{d}t}$

Corollaire : la mesure ne change pas si on fait un changement de paramètre admissible de classe C^1.

Remarque $\|\Gamma'(t)\|=\left\|\dfrac{dM}{dt}\right\|=\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2}$ et en polaires $\|\Gamma'(\theta)\|=\sqrt{(\rho'(\theta))^2+(\rho(\theta))^2}$

Idée de la démonstration (on admet que Γ est mesurable)

Soit $s(t)$ la mesure de la restriction de l'arc à $[a,t]$

Alors si $h>0$ $s(t+h)-s(t)$ est la mesure de la restriction de l'arc à $[t,t+h]$

On démontre alors que $\dfrac{s(t+h)-s(t)}{h}\xrightarrow[h\to 0^+]{}\|\Gamma'(t)\|$

et donc $s(t)$ est dérivable à droite et sa dérivée à droite est $\|\Gamma'(t)\|$

On démontre de même que $s(t)$ est dérivable à gauche et sa dérivée à gauche est $\|\Gamma'(t)\|$

Ainsi $s(t)$ est une primitive de $\|\Gamma'(t)\|$. Comme elle s'annule en a, $s(t)=\int_{u=a}^t \|\Gamma'(u)\|du$.

En particulier, la mesure de l'arc entier est $mes(\Gamma)=\int_a^b \|\Gamma'(t)\|\mathrm{d}t$

c/ relation de Chasles :

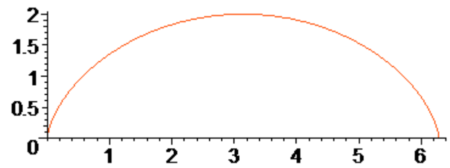
Pour $t_1\in[a,b]$, $t_2\in[a,b]$, $t_1<t_2$ on note Γ_{t_1,t_2} la restriction de Γ à l'intervalle $[t_1,t_2]$

Alors pour tout $c\in[a,b]$, $\Gamma_{a,b}=\Gamma_{a,c}+\Gamma_{c,b}$ et $\boxed{mes(\Gamma_{a,b})=mes(\Gamma_{a,c})+mes(\Gamma_{c,b})}$

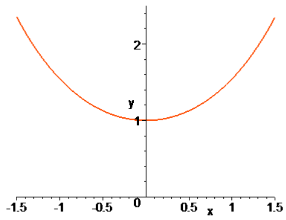
On peut ainsi définir la mesure d'une courbe de classe C^1 par morceaux

d/ Exemples :

Longueur d'une arche de cycloïde $\begin{cases} x(t)=R(t-\sin t)\\ y(t)=R(1-\cos t)\\ t\in[0,2\pi]\end{cases}$



Longueur de la chaînette, graphe de la fonction ch : $y=\mathrm{ch}(x)$, ou $\begin{cases} x(t)=t\\ y(t)=\mathrm{ch}(t)\\ t\in[a,+a]\end{cases}$



5 - Abscisse curviligne

Soit Γ un arc paramétré $\begin{array}{l}[a,b]\to\mathbb{R}^2\\ t\ \ \to\Gamma(t)=M(t)=\begin{pmatrix}x(t)\\y(t)\end{pmatrix}\end{array}$ de classe C^1

En prenant $M(a)$ comme origine, pour tout $t\in[a,b]$ l'abscisse curviligne de $M(t)$, notée $s(t)$, est la longueur de la restriction de l'arc à $[a,t]$ $s(t)=mes(\Gamma_{a,t})=\int_a^t\|\Gamma'(u)\|\mathrm{d}u$.

En prenant $M(t_0)$ comme origine, pour tout $t\in[a,b]$ l'abscisse curviligne de $M(t)$ est

* la longueur de la restriction de l'arc à $[t_0,t]$ si $t_0\leqslant t$
* l'opposé de longueur de la restriction de l'arc à $[t,t_0]$ si $t\leqslant t_0$

Dans les 2 cas, $s(t)=\int_{t_0}^t\|\Gamma'(u)\|\mathrm{d}u$.

L'abscisse curviligne est invariante par changement de paramètre admissible <u>croissant</u>.

Soit L la longueur de la courbe.

Si la courbe est régulière, $\forall t \in [a,b]$, $s'(t) = \left\| \frac{dM}{dt} \right\| > 0$. La fonction $s(t)$ est alors une bijection croissante de $[a,b]$ dans $[0,L]$ et constitue donc un changement de paramètre admissible.

Si on prend comme nouveau paramètre l'abscisse curviligne s, on a :

$\frac{dM}{dt} = s'(t)\frac{dM}{ds}$ noté $\frac{ds}{dt}\frac{dM}{ds}$. Mais comme $s'(t) = \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{dM}{dt} \right\|$, on obtient $\left\| \frac{dM}{ds} \right\| = 1$.

s est donc un paramétrage intrinsèque : la courbe est parcourue à la "vitesse" constante 1.

6 - Courbure.

Soit φ l'angle entre l'axe Ox et le vecteur $\frac{dM}{dt}$, donc aussi le vecteur $\frac{dM}{ds}$. Ainsi $\frac{dM}{ds} = \begin{pmatrix} \cos\varphi \\ \sin\varphi \end{pmatrix} = \overrightarrow{T}$

On appelle courbure la dérivée de φ par rapport à s : $c = \frac{d\varphi}{ds}$

c'est la vitesse de rotation de la tangente, quand la courbe est parcourue à la "vitesse" constante

On appelle rayon de courbure l'inverse de la courbure : $R = \frac{1}{c}$

Calcul de c :

- $\frac{d^2M}{ds^2} = \frac{d\overrightarrow{T}}{ds} = \frac{d\varphi}{ds}.\begin{pmatrix} -\sin\varphi \\ \cos\varphi \end{pmatrix} = c\ \overrightarrow{N}$ donc $|c| = \left\| \frac{d^2M}{ds^2} \right\|$
- On peut montrer que $c = \frac{x'y'' - x''y'}{\left(x'^2 + y'^2\right)^{3/2}} = \frac{\det\left(\frac{dM}{dt}, \frac{d^2M}{dt^2}\right)}{\left\| \frac{dM}{dt} \right\|^3}$

Exemple : cercle de rayon R $\begin{cases} x = R\cos t \\ y = R\sin t \end{cases}$ $t \in [0, 2\pi]$: courbure = $\frac{1}{R}$, rayon de courbure = R

7 - Intégrale d'un champ scalaire.

Soient $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$ et $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ un courbe paramétrée.

L'intégrale de f le long de γ est $\int_a^b f\left(x(t), y(t)\right) \left\| \frac{dM}{dt} \right\| dt$. On la note $\int_\gamma f\ ds$.

Exemple : l'abscisse du centre de gravité de la ligne (supposée homogène) est $x_G = \frac{\int_\gamma x\ ds}{\int_\gamma ds} = \frac{\int_a^b x(t) \left\| \frac{dM}{dt} \right\| dt}{L}$