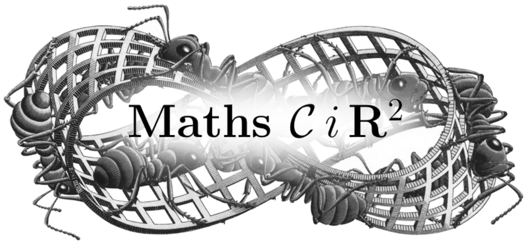

$\mathscr{C}$onsignes

- Répondre à **6 questions** parmi les 8 ci-dessous tant que les **4 sujets** sont représentés.
- L'usage de tout dispositif électronique est chaleureusement interdit.

1. a) Exprimer comme un déterminant, puis évaluer, le volume du parallèlépipède $\mathcal{P} \subseteq \mathbf{R}^3$ de sommets

$$(1,2,3), \quad (2,2,4), \quad (3,3,2), \quad (1,4,6), \quad (4,3,3), \quad (2,4,7), \quad (3,5,5) \quad \text{et} \quad (4,5,6).$$

$$\mathcal{P} = \begin{bmatrix}1\\2\\3\end{bmatrix} + \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}1\\0\\1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}2\\1\\-1\end{bmatrix}, \begin{bmatrix}0\\2\\3\end{bmatrix}\right) \quad \Longrightarrow \quad \operatorname{vol}(\mathcal{P}) = \begin{vmatrix}1 & 2 & 0\\0 & 1 & 2\\1 & -1 & 3\end{vmatrix} = 9.$$

b) Calculer le déterminant de l'endomorphisme de l'espace $\mathbf{R}[X]_{\leqslant 2}$ des polynômes de degré $\leqslant 2$ défini par

$$f(X) \quad \mapsto \quad f''(X) + Xf'(X).$$

La matrice de cet endomorphisme dans la base $(1, X, X^2)$ est $\begin{bmatrix}0 & 0 & 2\\0 & 1 & 0\\0 & 0 & 2\end{bmatrix}$, son déterminant est nul.

2. a) Déterminer et classifier les points critiques de la fonction

$$f(x,y) = x^3 + (1-x)y^2.$$

Trois points de selle, en $(0,0)$, $(1,\sqrt{3})$ et $(1,-\sqrt{3})$.

b) Trouver les dimensions de la boîte cylindrique fermée de volume donné nécessitant le moins de carton.

En minimisant $S(r,h) = 2\pi r^2 + 2\pi rh$ avec la contrainte $V = \pi r^2 h$, on trouve $r = \sqrt[3]{\dfrac{V}{2\pi}}$, $h = 2r$.

3. a) Donner le développement en série entière (en précisant son rayon de convergence) de la fonction

$$\Phi(x) := \int_0^x e^{-t^2}\,\mathrm{d}t.$$

En intégrant terme à terme, on trouve $\Phi(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}$, $R = +\infty$.

b) Chercher par la méthode des séries entières des solutions analytiques à l'équation différentielle

$$4\,x f''(x) + 2 f'(x) + f(x) = 0.$$

Ce sont les fonctions de la forme $f(x) = a_0 \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^n}{(2n)!} = \begin{cases} a_0 \cos\sqrt{x} & x \geqslant 0, \\ a_0 \operatorname{ch}\sqrt{-x} & x \leqslant 0. \end{cases}$

4. a) Exprimer comme une intégrale triple, puis évaluer, le volume du tétraèdre $\mathcal{T} \subseteq \mathbf{R}^3$ de sommets

$$(3,0,0), \quad (0,2,0) \quad \text{et} \quad (0,0,1).$$

$$\mathrm{vol}(\mathcal{T}) = \int_0^3 \int_0^{2(1-\frac{x}{3})} \int_0^{1-\frac{x}{3}-\frac{y}{2}} \mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \int_0^{2(1-\frac{x}{3})} \left(1 - \frac{x}{3} - \frac{y}{2}\right) \mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^3 \left(1 - \frac{x}{3}\right)^2 \mathrm{d}x = 1.$$

b) Calculer l'aire de la cardioïde $\mathcal{C} \subseteq \mathbf{R}^2$ d'équation cartésienne

$$(x^2 + y^2 + y)^2 \leqslant x^2 + y^2.$$

En coordonnées polaires, $\mathrm{aire}(\mathcal{C}) = \displaystyle\int_0^{2\pi} \int_0^{1-\sin\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2} \int_0^{2\pi} (1 - \sin\theta)^2\,\mathrm{d}\theta = \frac{3\pi}{2}.$