Un problème type.

Soit un corps de masse m et de vitesse initiale $\vec{v_0}$

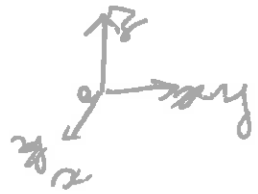
Soumis à une seule force, son poids $\vec{P} = m\vec{g}$ qu'on suppose constant.
Quel est le mouvement de ce corps ? En fonction du temps.

On veut donc $x =$
$y =$
$z =$

Que fait on ? RFD $m\vec{a} = m\vec{g} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$
Le RFD ne donne pas x, y, z mais l'accélération

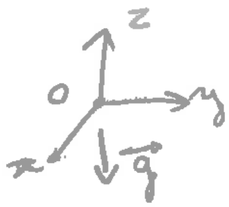
1) Commençons par écrire les coordonnées de $\vec{a}$
On choisit un référentiel

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$



On sait que $\vec{a} = \vec{g}$ quelles sont les coordonnées de $\vec{g}$?

$$\vec{g} \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ -g \end{pmatrix} \quad \text{ou } g > 0$$



$\vec{a} = \vec{g}$ donc 3 équations :

$$\begin{cases} \ddot{x} = 0 \\ \ddot{y} = 0 \\ \ddot{z} = -g \end{cases}$$

2) Ensuite on intègre :

$$\begin{cases} \dot{x} = cte \\ \dot{y} = cte' \\ \dot{z} = -gt + cte'' \end{cases}$$

Comment déterminer tous les constantes cte, cte' et cte''?
On connaît les conditions initiales de la vitesse :

$$\vec{v_0} \begin{pmatrix} \dot{x}_0 \\ \dot{y}_0 \\ \dot{z}_0 \end{pmatrix} \equiv \begin{pmatrix} v^0_x \\ v^0_y \\ v^0_z \end{pmatrix}$$

Si $\dot{x}$ et $\dot{y}$ sont constantes elles valent donc les valeurs initiales

$$\begin{cases} \dot{x} = cte = \dot{x}_0 \\ \dot{y} = cte' = \dot{y}_0 \\ \dot{z} = -gt + cte'' = -gt + \dot{z}_0 \end{cases}$$

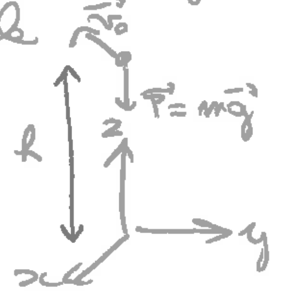
Comment déterminer cte'' ?

$$\dot{z}(t=0) = \dot{z}_0 = -g \times 0 + cte'' \Longrightarrow cte'' = \dot{z}_0$$

3] On veut maintenant les coordonnées x, y, z. On intègre une fois de plus

$$\begin{cases} x = \dot{x}_0 t + cte \\ y = \dot{y}_0 t + cte' \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + \dot{z}_0 t + cte'' \end{cases} \qquad \begin{cases} x = v^0_x t + cte \\ y = v^0_y t + cte' \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v^0_z t + cte'' \end{cases}$$

Pour déterminer les ctes, de nouveau, on regarde les conditions initiale.
On va choisir un système de coordonnées / repère pratique.
Par exemple



Ainsi $\begin{cases} x(t=0) = cte = 0 \\ y(t=0) = cte' = 0 \\ z(t=0) = cte'' = h \end{cases}$ avec le repère choisi

$\Longrightarrow$ Finalement, on obtient

$$\boxed{\begin{cases} x = v^0_x t \\ y = v^0_y t \\ z = -\frac{1}{2}gt^2 + v^0_z t + h \end{cases}}$$

Chute libre. Calcul de la vitesse en fonction de la position.

Prenons le cas simple dans lequel le système n'a pas de vitesse initiale.

$$\vec{v}_0 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Les équations du mouvement s'écrivent (voir le calcul précédent)

$$\begin{cases} x = 0 \\ y = 0 \\ z = -\frac{1}{2} g t^2 \end{cases}$$

Ici on a choisi le repère avec l'origine au point de lâcher.

et les équations de la vitesse sont (à partir des résultats du calcul précédent, ou simplement en dérivant les équations du mouvement)

$$\begin{cases} \dot{x} = 0 \\ \dot{y} = 0 \\ \dot{z} = -gt \end{cases}$$

On va appeler $\dot{z} = -gt \underline{\underline{= v}}$

Question : calculer $v(z)$

- On a z en fonction du temps : $z = -\frac{1}{2} g t^2$ et v en fonction de z : $v = -gt$. On doit les combiner pour obtenir $v(z)$
- $z = -\frac{1}{2} g t^2 \rightarrow t^2 = -\frac{2z}{g} \rightarrow t = \sqrt{\frac{-2z}{g}}$

Remarque : z est négatif sur toute la trajectoire, puisqu'on lâche l'objet à $z = 0$ (origine au point de lâcher) donc $-z$ est positif et a fortiori $-2z/g \Rightarrow$ le nombre sous la racine est bien positif.

- On injecte l'expression de $t(z)$ dans l'expression de $v(t)$

$$v = -gt = -g\sqrt{\frac{-2z}{g}} = -\sqrt{\frac{-2zg^2}{g}} = -\sqrt{-2zg}$$

$$\boxed{v = -\sqrt{-2zg}}$$