ISÉN Lille novembre 2015

$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **4** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien qu'inutile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et énonçant les résultats utilisés.
- **Amusez**-vous bien !

a) Discuter, en fonction du paramètre $\lambda \in \mathbf{R}$, de la nature de la quadrique

$$\mathcal{Q}_\lambda : x^2 + y^2 + (1+\lambda)z^2 - \lambda x - (1+\lambda) = 0$$

en portant attention aux valeurs particulières de λ. Que dire de $\mathcal{Q}_\infty := \lim\limits_{\lambda\to\infty} \mathcal{Q}_\lambda$?

b) Vérifier que la courbe $\mathcal{C}$ d'intersection entre $\mathcal{Q}_0$ et $\mathcal{Q}_\infty$ est donnée paramétriquement par

$$\begin{cases} x = \cos^2 t \\ y = \cos t \sin t \\ z = \sin t \end{cases} \qquad (0 \leqslant t \leqslant 2\pi).$$

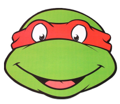
a) Soit f la fonction définie pour $(x, y) \neq (0, 0)$ par

$$f(x, y) = \frac{x^2 + y^4 + x^3y^2}{x^2 + y^4}.$$

Quelle valeur devrait-on attribuer à $f(0, 0)$ pour obtenir une fonction continue ?

b) En utilisant la définition des dérivées partielles, calculer précautionneusement dans ce cas

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial f}{\partial y}(0,0).$$

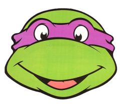


a) On appelle *cardioïde* la courbe d'équation paramétrique

$$\mathbf{r}(\theta) = (1 - \sin\theta)\begin{bmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{bmatrix} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi).$$

Faire une étude de la courbe pour donner son allure générale, en incluant la position des tangentes aux éventuels points stationnaires.

b) Quelle est la longueur totale de cette courbe ?



Bonus) Comment s'appellent ces quatre tortues ? (dans l'ordre !)