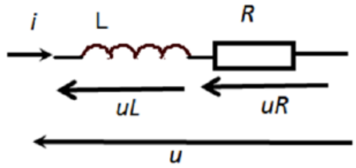
Exercice 1. Circuit RL série en régime sinusoïdal : représentation de Fresnel

On considère le circuit suivant, avec R=100 Ω et L= 1H mis en série et soumis à une tension u(t) de fréquence 50Hz et de valeur efficace 24V (choisie comme référence) :



1) Exprimer et calculer l'impédance $\underline{Z}$ de ce circuit (forme cartésienne et polaire)
2) Exprimer et calculer le courant $\underline{I}$ qui traverse ce circuit.
3) Exprimer et calculer les tensions complexes $\underline{VR}$ et $\underline{VL}$.
4) Tracer le diagramme vectoriel des tensions et courant.
5) Vérifier votre résultat en appliquant la loi des mailles
6) Retrouver l'expression de $\underline{VL}$ par l'application du diviseur de tension.

Exercice 2 : Résonance en tension aux bornes de l'inductance *L*

Un circuit *RLC* série est alimenté par un générateur de tension sinusoïdale $e(t) = E_0 \cos(\omega t)$.

a. Retrouver l'équation différentielle vérifiée par la tension u_C aux bornes du condensateur.
b. Retrouver, en notation complexe, l'expression de la tension $\underline{u_C}$ en fonction de $\underline{e}$. En déduire l'amplitude complexe $\underline{U_{C0}}$ en fonction de E_0.
c. Retrouver l'expression de l'intensité complexe $\underline{i}$ et celle de l'amplitude complexe $\underline{I_0}$.
d. Quelle relation linéaire lie la tension u_L aux bornes de l'inductance et l'intensité i ? En déduire l'expression de la tension complexe $\underline{u_L}$ et celle de l'amplitude complexe $\underline{U_{L0}}$.
e. On pose : $x = \omega/\omega_0$, avec $\omega 0 = 1/\sqrt{LC}$ et $Q = L\omega_0/R$.
Déterminer l'amplitude réelle $U_{L0} = \left|\underline{U_{L0}}\right|$ en fonction de E_0, x et Q.
f. On pose $x' = 1/x$, exprimer à nouveau $\underline{U_{L0}}$ et U_{L0} en fonction de x'.
Vérifier que la loi obtenue est la même que celle de l'amplitude réelle $\underline{U_{C0}}$ de la tension aux bornes du condensateur en fonction de x.
Quelle conclusion peut-on en tirer pour le tracé des courbes de résonance ?

Exercice 3. (Bonus) Résonance en intensité

On effectue l'étude de la résonance en intensité d'un circuit *RLC* série. Le générateur de tension sinusoïdale branché à ses bornes délivre une tension d'amplitude constante $E_0 = 6V$. On s'intéresse au régime sinusoïdal permanent. Quand on fait varier la fréquence, on observe que l'intensité du courant passe par un maximum d'amplitude $I_{0max} = 60\ mA$ pour la fréquence $f_0 = 1590\ Hz$. Pour la fréquence $f = 3000Hz$, l'amplitude de l'intensité est *36 mA*.

Rappels dans le cas d'un circuit RLC série : $\omega_0 = 1/\sqrt{LC}$ la pulsation propre, $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ le facteur de qualité, $\alpha = \frac{1}{2Q}$ l'amortissement du circuit et $x = \frac{\omega}{\omega_0}$. L'intensité suit la relation $I_0 = \frac{I_{0max}}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}$ avec $I_{0max} = E_0 /R$.

a. Déterminer la pulsation propre ω_0.
b. Déterminer le facteur de qualité Q et le coefficient d'amortissement α.
c. Exprimer les grandeurs *L*, *R* et *C*.

Solutions

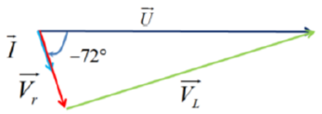
Ex1. 1) . $\underline{Z} = R + j\omega L = 100 + j314 = [329{,}5; 1{,}26] = [329{,}5; 72{,}3°]$

2) $\underline{I} = \frac{\underline{U}}{\underline{Z}} = \frac{[24;0]}{[329{,}5;1{,}26]} = [72{,}8mA; -1{,}26rad]$

3) $\underline{V_R} = R\underline{I} = 100.[0{,}0728; -1{,}26] = [7{,}28V; -1{,}26rad]$

$\underline{V_L} = j\omega L\underline{I} = \left[314; +\frac{\pi}{2}\right].[0{,}0728; -1{,}26] = [22{,}8V; 0{,}31rad]$

4)



5) $\underline{U} = \underline{V_R} + \underline{V_L} = [7{,}28V; -1{,}26rad] + [22{,}8V; 0{,}31rad] = 2{,}22 - j6{,}94 + 21{,}78 + j6{,}94 = 24V$

6) $\underline{V_L} = \underline{U}\frac{jL\omega}{R+jL\omega} = [24; 0].\frac{j314}{100+j314} = [24; 0].\frac{[314;+\frac{\pi}{2}]}{[329{,}5;1{,}26]} = \left[\frac{24\times314}{329{,}5}; 1{,}57 - 1{,}26\right] = [22{,}8V; 0{,}31rd]$

Ex2. a) Loi des mailles $e = u_L + u_R + u_C = L\frac{di}{dt} + Ri + u_C$. Par ailleurs $i = C\frac{du_C}{dt}$, on injecte cette relation dans la première équation : $e = L\frac{d}{dt}\left(C\frac{du_C}{dt}\right) + R\left(C\frac{du_C}{dt}\right) + u_C = LC\frac{d^2u_C}{dt^2} + RC\frac{du_C}{dt} + u_C$.

b) L'équation différentielle obtenue en a) devient en notation complexe :

$\underline{e} = LC\frac{d^2\underline{u_C}}{dt^2} + RC\frac{d\,\underline{u_C}}{dt} + \underline{u_C} = (j\omega)^2LC\,\underline{u_C} + j\omega RC\underline{u_C} + \underline{u_C} = (1 - \omega^2LC + j\omega RC)\,\underline{u_C}$

Donc $\underline{u_C} = \frac{1}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)}\underline{e}$.

Rappel amplitude complexe : $\underline{u_C} = \underline{U_C}e^{j\omega t}$ et $\underline{e} = \underline{E_0}e^{j\omega t}$ avec $\underline{E_0} = E_0e^{j\varphi} = E_0$ (phase nulle car c'est la phase de référence) . Pour obtenir les amplitudes complexes on doit donc comme d'habitude simplement diviser par $e^{j\omega t}$ et on obtient : $\underline{U_C} = \frac{E_0}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)}$.

c) $i = C\frac{du_C}{dt}$ donne en notation complexe : $\underline{i} = C\frac{d\underline{u_C}}{dt} = j\omega C\underline{u_C}$. Donc d'après b) : $\underline{i} = \frac{j\omega C}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)}\underline{e}$ et en amplitude complexe : $\underline{I_0} = \frac{j\omega C}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)}E_0$.

d) $u_L = L\frac{di}{dt}$. En notation complexe $\underline{u_L} = L\frac{d\underline{i}}{dt} = j\omega L\underline{i}$. Donc d'après c) :

$\underline{u_L} = \frac{j\omega C\,j\omega L}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)}\underline{e} = \frac{-\omega^2LC}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)}\underline{e}$. En amplitude complexe : $\underline{U_L} = \frac{-\omega^2LC}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)}E_0$.

e) On fait apparaître $\omega 0 = 1/\sqrt{LC}$ dans l'expression de $\underline{U_L}$: $\underline{U_L} = \frac{-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}}{\left(1-\frac{\omega^2}{\omega_0{}^2}+j\frac{\omega}{\omega_0}\omega_0RC\right)}E_0$

Or $Q = \frac{L\omega_0}{R} = \frac{1}{RC\omega_0}$ et $x = \omega/\omega_0$ d'où : $\underline{U_L} = \frac{-x^2\,E_0}{\left(1-x^2+j\frac{x}{Q}\right)}$.

L'amplitude réelle vaut donc $U_L = \left|\underline{U_L}\right| = \left|\frac{-x^2\,E_0}{\left(1-x^2+j\frac{x}{Q}\right)}\right| = \frac{\left|-x^2\,E_0\right|}{\left|1-x^2+j\frac{x}{Q}\right|} = \frac{x^2\,E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$.

f) On remplace x par 1/x' dans l'expression obtenue en e) : $\underline{U_L} = \frac{-\left(\frac{1}{x'}\right)^2E_0}{1-\left(\frac{1}{x'}\right)^2+j\frac{1}{Qx'}} = \frac{-E_0}{x'^2-1+j\frac{x'}{Q}}$

L'amplitude réelle est donc : $U_L = \left|\underline{U_L}\right| = \frac{E_0}{\sqrt{\left(1-x'^2\right)^2+\left(\frac{x'}{Q}\right)^2}}$

D'après la question b) on réecrit l'amplitude complexe de la tension aux bornes du condensateur :

$\underline{U_C} = \frac{E_0}{(1-\omega^2LC+j\omega RC)} = \frac{E_0}{\left(1-x^2+j\frac{x}{Q}\right)}$ et on obtient en effet $U_C = \frac{E_0}{\sqrt{(1-x^2)^2+\left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$

Ex3.

Ex1. a) D'après l'énoncé la fréquence propre est 1590 Hz. On en déduit la pulsation propre $\omega_0 = 2\pi f_0 = 2\pi.1590 = 9990\, rad.s^{-1}$.

b) On utilise l'expression de I_0 en fonction de I_{0max}. Pour f=3000Hz, x=1,89 d'où

$1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2 = \left(\frac{I_{0max}}{I_0}\right)^2$ soit $Q = \frac{\sqrt{\left(\frac{I_{0max}}{I_0}\right)^2 - 1}}{\left|x - \frac{1}{x}\right|}$=0,983

$\alpha = \frac{1}{2Q} = 0{,}509.$

c) A la résonance intensité, on a $I_{0max} = E_0 / R$ d'où R=100Ω.

On déduit L de l'expression du facteur de qualité : $Q = \frac{L\omega_0}{R}$ d'où L=9,83 mH.

On déduit C de l'expression de la pulsation propre, on obtient C=1,02 µF.