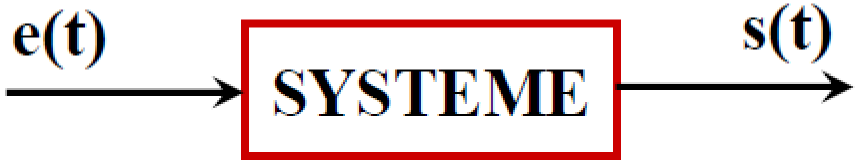
III- Fonction de transfert

III. Fonction de transfert

DEFINITION

Soit un système tel que:



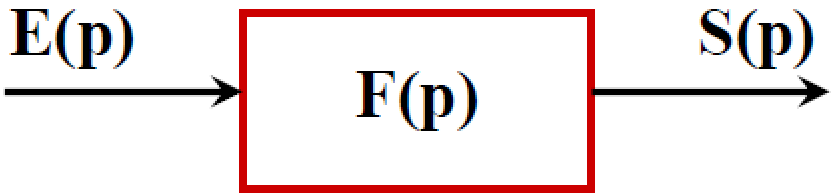
On appelle la **fonction de transfert** d'un système, le rapport de la transformée de Laplace du signal de sortie à celui de l'entrée.

$$\boxed{F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}}$$

III. Fonction de transfert

DEFINITION

Si $F(p)$ est une fonction de transfert $\Rightarrow$ $S(p) = F(p) \times E(p)$



Réponse temporelle

La réponse du système peut être déterminée par :

$$\boxed{s(t) = TL^{-1}\{F(p) \times E(p)\}}$$

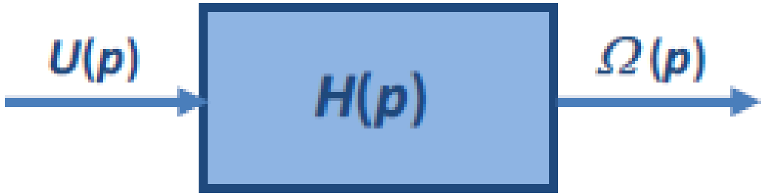
DEFINITION

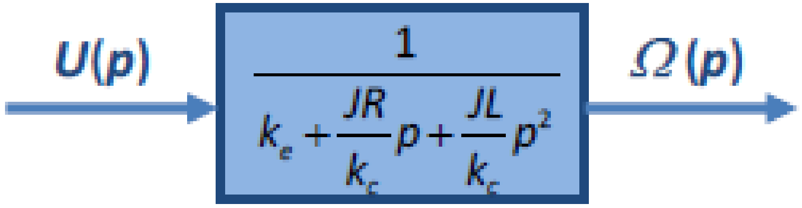
Le terme reliant la sortie à l'entrée est caractéristique du comportement du système et de ses équations différentielles. Il s'exprime uniquement en fonction de la **variable symbolique *p*** et des paramètres du système.

Ce terme est la **fonction de transfert du moteur à courant continu**.

Soit $H(p)$ est la fonction de transfert du moteur à courant continue : $H(p) = \dfrac{1}{k_e + \dfrac{JR}{k_c}p + \dfrac{JL}{k_c}p^2}$.

Le système se représente sous une des formes suivantes dans le domaine symbolique :





$$\underbrace{\Omega(p)}_{\text{sortie}} = \underbrace{H(p)}_{\text{fonction de transfert}} \cdot \underbrace{U(p)}_{\text{entrée}}$$

Comment établir la fonction de transfert d'un système

Méthode 3. Détermination de la fonction de transfert d'un système

La fonction de transfert d'un système n'a de sens que pour des conditions initiales nulles de toutes les fonctions et de leurs dérivées.

Si tel n'est pas le cas, alors on peut effectuer un changement de fonction et étudier les variations autour d'un point de fonctionnement.

Si tel est le cas et que le système d'équation est linéaire, il faut transformer le système d'équation dans le domaine de Laplace, rechercher la loi « entrée »/ « sortie » puis donner le résultat sous la forme d'une fraction où l'on fait apparaître la forme canonique.

Comment établir la fonction de transfert d'un système

Méthode 3. Détermination de la fonction de transfert d'un système

$$e(t) \longrightarrow \boxed{\text{SYSTEME}} \longrightarrow s(t)$$

⬇

Écrire l'équation différentielle qui lie l'entrée e(t) et la sortie s(t) du système

⬇

Appliquer la Transformée de Laplace à l'équation différentielle

⬇

Exprimer la fonction de transfert F(p) du système

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$$

Application à la résolution des équations différentielles

Données : Equation différentielle.

Entrée temporelle du système x(t).

Conditions initiales nulles (c'est le plus souvent le cas).

Objectif : Recherche de la réponse temporelle du système y(t).

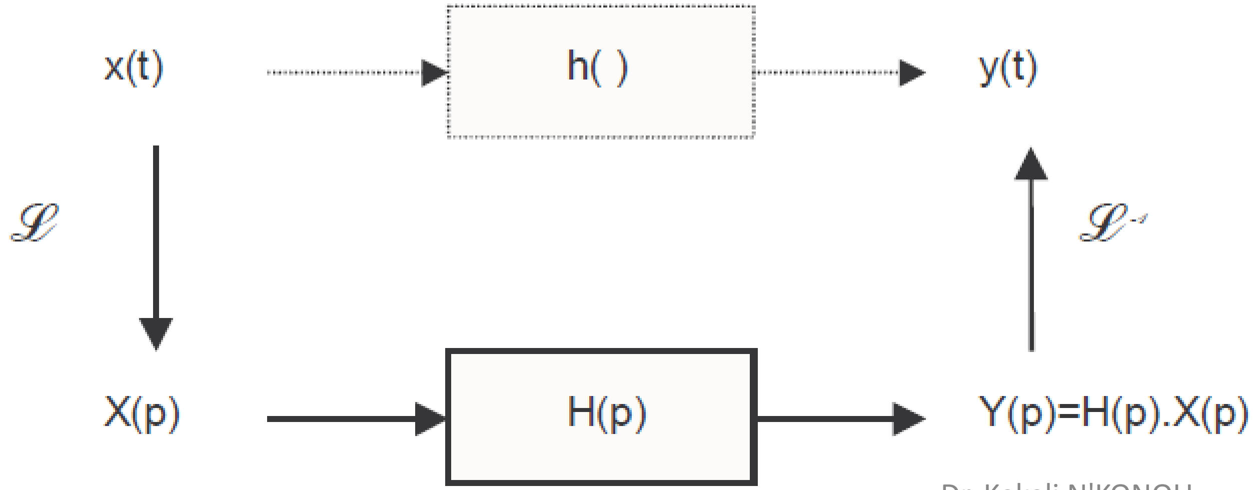
Démarche :

1° calcul de la fonction de transfert H(p).

2° calcul de l'entrée dans le domaine de Laplace X(p).

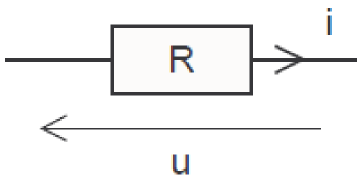
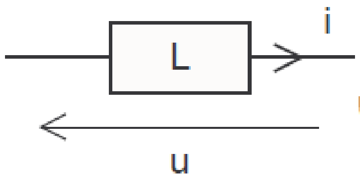
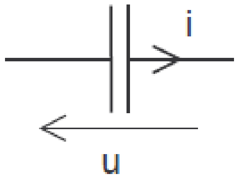
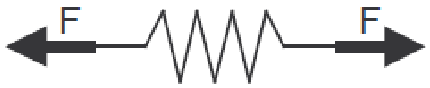
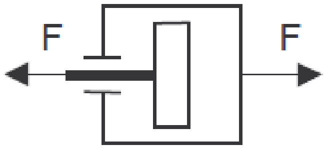
3° calcul de la sortie dans le domaine de Laplace Y(p).

4° calcul de la sortie temporelle en appliquant la transformée de Laplace inverse y(t).

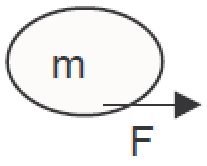
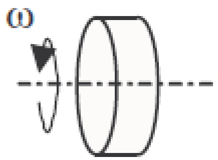


Le calcul de la transformée de Laplace inverse de Y(p) nécessite une décomposition en éléments simples dont les transformées inverses sont connues.

Principales transmittances.

Résistance	 $u=Ri$	$I(p) \rightarrow \boxed{R} \rightarrow U(p)$ $U(p) \rightarrow \boxed{1/R} \rightarrow I(p)$
Inductance	 $u = L\dfrac{di}{dt}$	$I(p) \rightarrow \boxed{Lp} \rightarrow U(p)$ $U(p) \rightarrow \boxed{1/Lp} \rightarrow I(p)$
Condensateur	 $u = \dfrac{1}{C}\int i\,dt$	$I(p) \rightarrow \boxed{1/Cp} \rightarrow U(p)$ $U(p) \rightarrow \boxed{Cp} \rightarrow I(p)$
Ressort	$F=kx$ 	$X(p) \rightarrow \boxed{K} \rightarrow F(p)$ $F(p) \rightarrow \boxed{1/K} \rightarrow X(p)$
Frottement visqueux (amortisseur)	 $F = fv\dfrac{dx}{dt}$	$X(p) \rightarrow \boxed{fv.p} \rightarrow F(p)$

Principales transmittances.

Masse	 $F = m\frac{d^2x}{dt^2}$	$X(p) \rightarrow \boxed{m.p^2} \rightarrow F(p)$
Inertie en rotation	 $C = J\frac{d\omega}{dt}$	$\Omega(p) \rightarrow \boxed{J.p} \rightarrow C(p)$

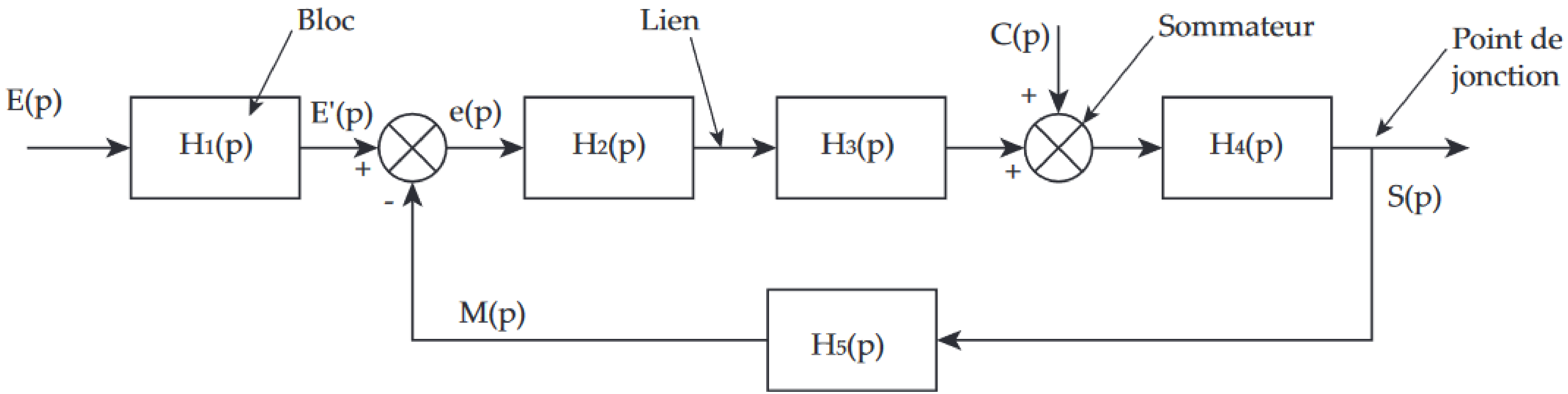
Manipulation des schémas blocs

Éléments de base

Les blocs : Ils contiennent une fonction de transfert (H(p)) caractérisant la relation entre l'entrée et la sortie.

Les liens : Ils représentent une grandeur (U(p)) dans le domaine de Laplace.

Les points de jonction : Une jonction permet de transmettre une grandeur en entrée de plusieurs blocs ou sommateurs.



Association de blocs en série

Soient n éléments de fonction de transfert Hi(p) mis en cascade ; la fonction de transfert de l'ensemble est égale au produit des fonctions de transfert de chaque élément :

$$H(p) = \Pi .\, H_i(p)$$

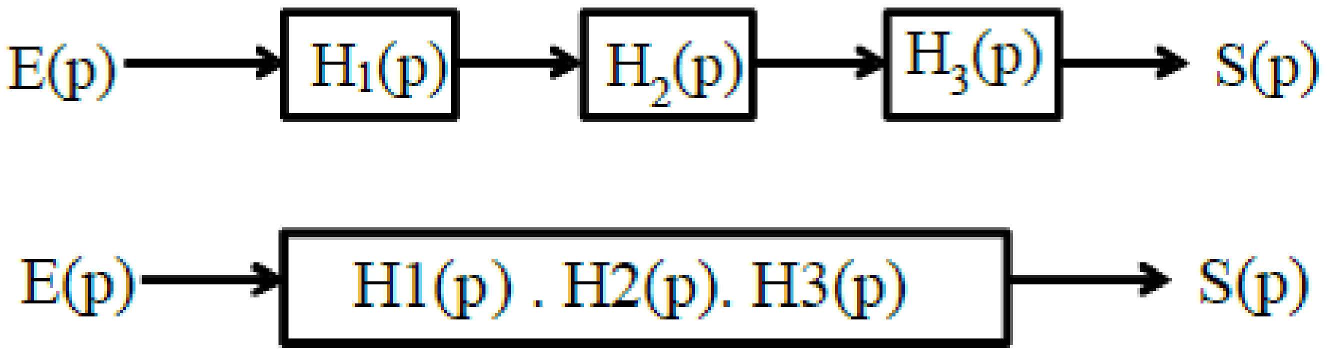


Figure : Eléments en cascade

Association de blocs en parallèle

Soit n éléments de fonction de transfert Hi(p) mis en parallèle ; la fonction de transfert de l'ensemble est égale à la somme des fonctions de transfert de chaque élément :

$$H(p) = \Sigma . H_i(p)$$

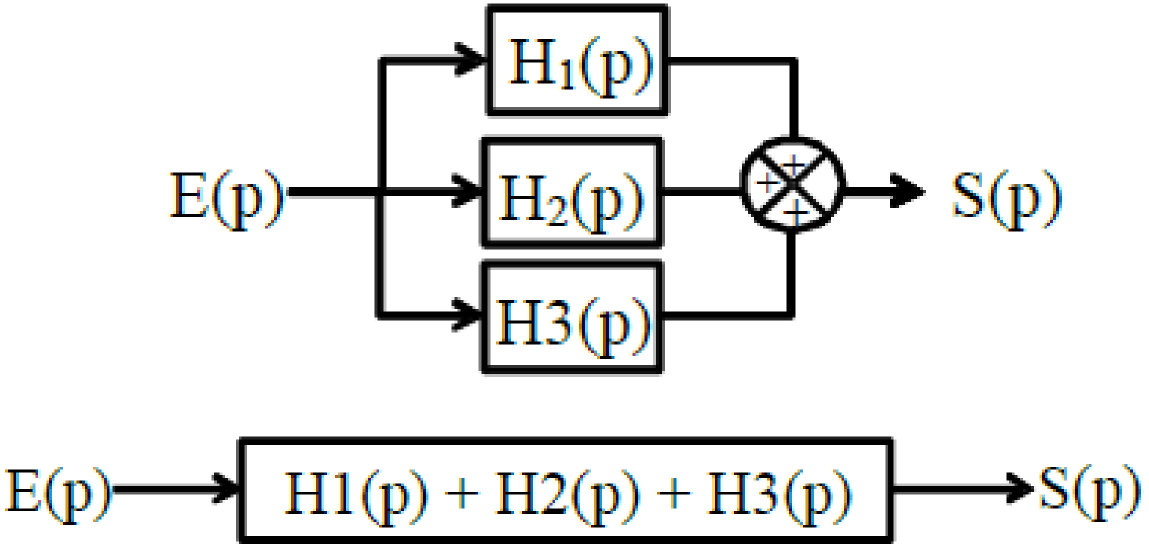


Figure : Eléments en parallèle

Fonction de transfert d'un système bouclé

Soit un système asservi représenté par le schéma de la Figure (a) Système bouclé.
Soient A(p) et B(p) les fonctions de transfert respectivement de la chaîne d'action et de la chaîne de contre-réaction.

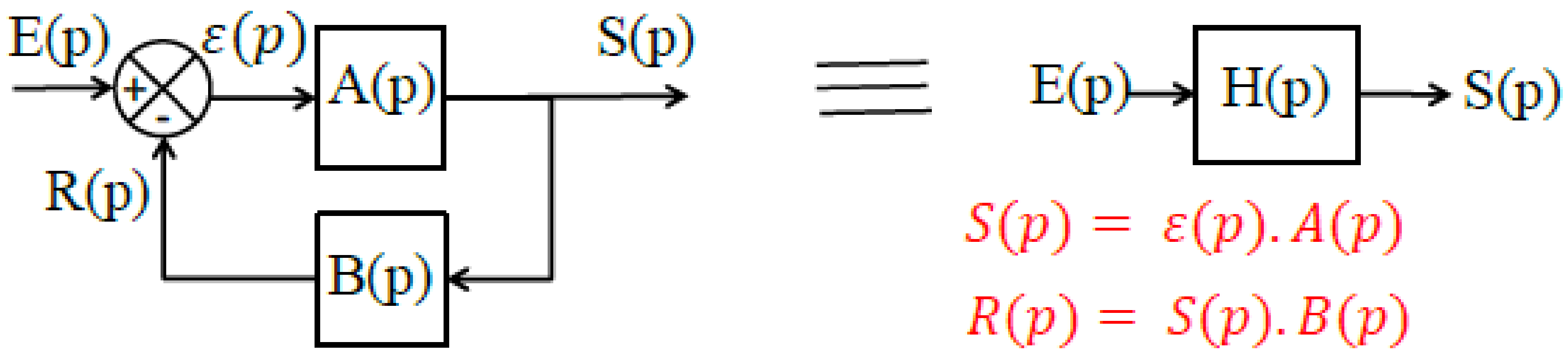


Figure (a) Système bouclé

$$S(p) = \varepsilon(p).A(p)$$

$$R(p) = S(p).B(p)$$

$$\varepsilon(p) = E(p) - R(p)$$

$$S(p) = [E(p) - R(p)].A(p)$$

$$S(p) = [E(p) - S(p).B(p)].A(p) = E(p).A(p) - S(p).B(p).A(p)$$

$$S(p) = \frac{A(p)}{1 + A(p).B(p)}.E(p)$$

La **fonction de transfert** du système bouclé est :

$$H(p) = \frac{A}{1 + A.B}$$

H(p) est appelée **Fonction de Transfert en Boucle Fermée (FTBF)**

Fonction de transfert en boucle ouverte

On définit la Fonction de Transfert en Boucle Ouverte (FTBO) comme le rapport entre l'image de la sortie S'(p) et l'erreur ε(p). Elle correspond à l'ouverture de la boucle, c'est-à-dire, à sa coupure au niveau du comparateur (Figure (b) Boucle ouverte).

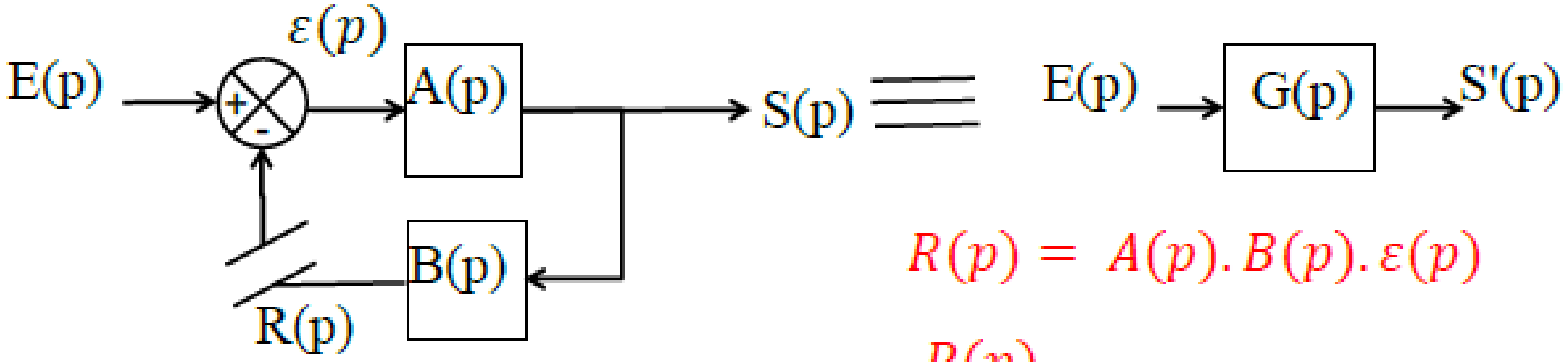


Figure (b) : Boucle ouverte

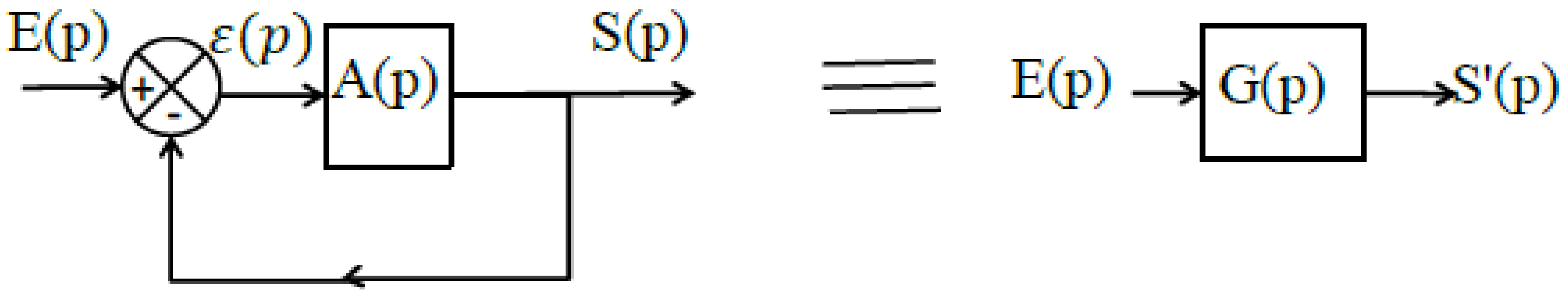
$$R(p) = A(p).B(p).\varepsilon(p)$$

$$\frac{R(p)}{\varepsilon(p)} = A(p).B(p)$$

La fonction de transfert en boucle ouverte est alors : **G(p) = A(p).B(p)**

La fonction de transfert en boucle ouverte est donc définie comme **le produit des fonctions de transfert de la chaîne d'action et de la chaîne de contre-réaction**.

Fonction de transfert en retour unitaire



FTBO = A(p) et $FTBF = \frac{A(p)}{1+A(p)}$

d'où

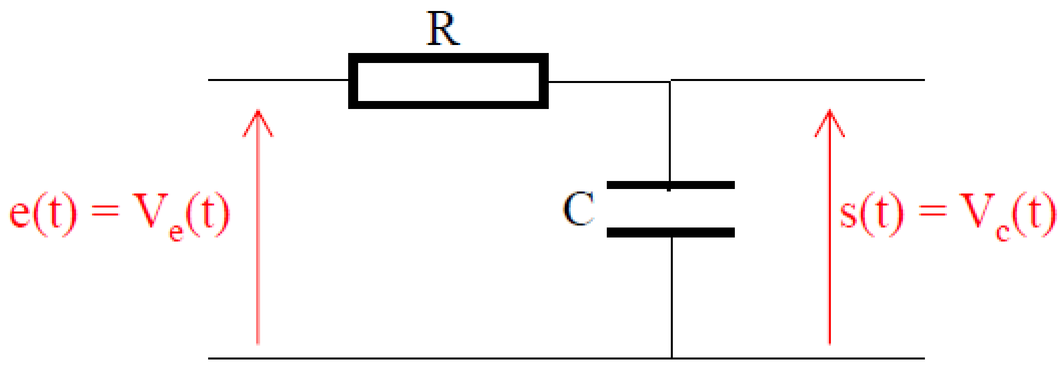
$$FTBF = \frac{FTBO}{1 + FTBO}$$

Attention uniquement pour des systèmes à retour unitaire

Application

Exemple 1

Circuit RC



- **Loi des mailles :**

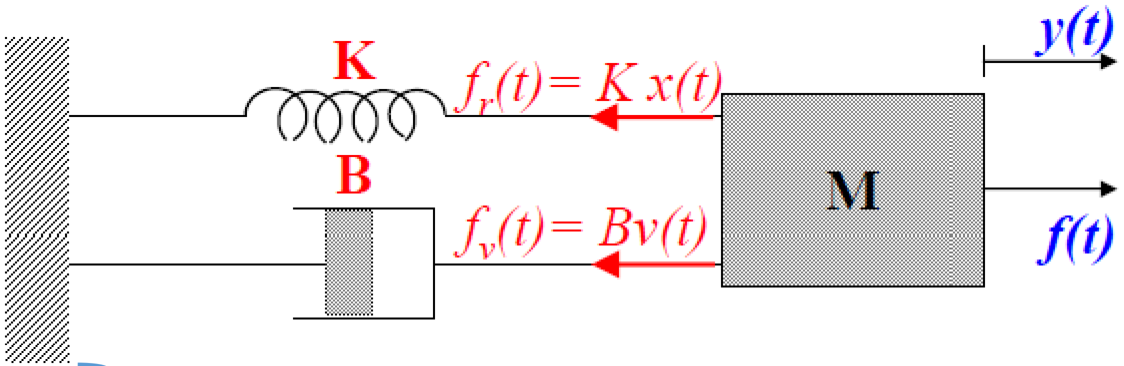
$$\begin{cases} V_e(t) - R \cdot i(t) - V_c(t) = 0 \\ i(t) = C \cdot \dfrac{dV_C(t)}{dt} \end{cases} \Rightarrow V_e(t) = RC\frac{dV_c(t)}{dt} + V_c(t)$$

- **Transformée de Laplace :** $\Rightarrow$ $V_e(p) = RCpV_c(p) + V_c(p)$

- **Fonction de transfert :** $\Rightarrow$ $\boxed{F(p) = \dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{1}{1 + RC \cdot p}}$

Exemple 2

Système mécanique



$$M\frac{d^2y(t)}{dt^2} = f(t) - Ky(t) - Bv(t)$$

$$v(t) = \frac{dy(t)}{dt}$$

$$M\frac{dy^2(t)}{dt^2} + B\frac{dy(t)}{dt} + Ky(t) = f(t)$$

$$Mp^2Y(p) + BpY(p) + KY(p) = F(p)$$

$$(Mp^2 + Bp + K)Y(p) = F(p)$$

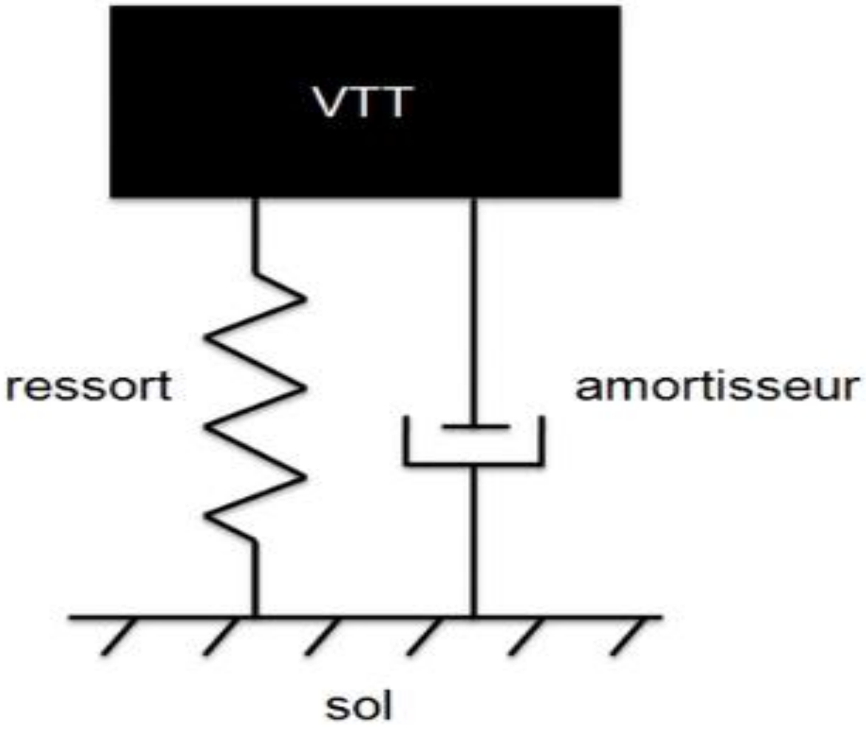
Fonction de transfert du système :

- Sortie y(t)
- Entrée f(t)

$$\boxed{\frac{Y(p)}{F(p)} = \frac{1}{Mp^2 + Bp + K}}$$

Exemple 3

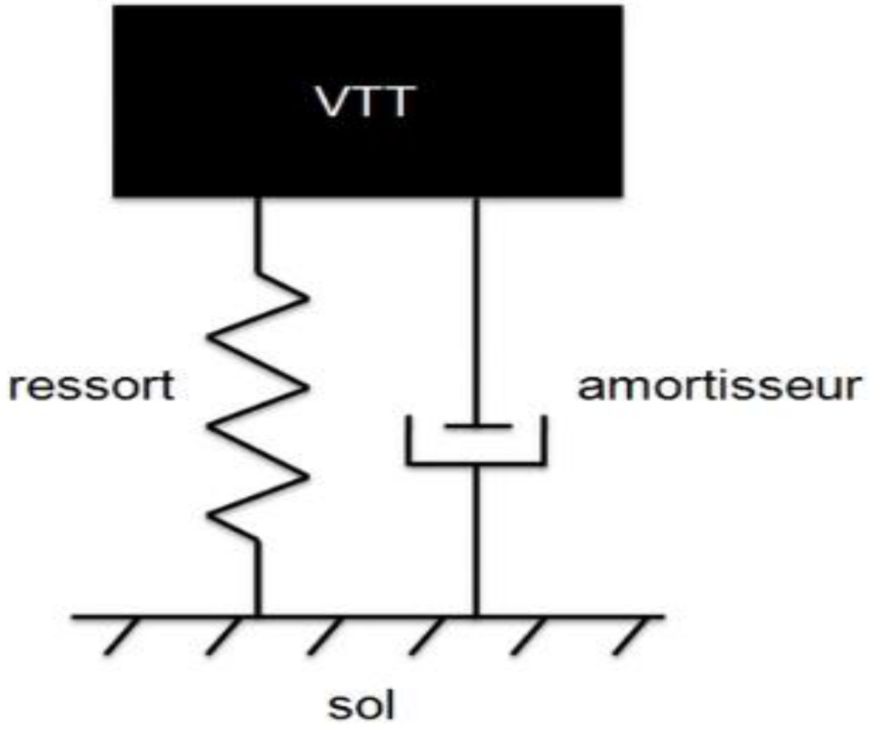
Exemple – modélisation de la suspension d’un VTT



Source MathWorks : Tutoriel vidéo Simscape : Modélisation d'un système mécanique
Laurent Vaylet, MathWorks

Exemple 3

Exemple – modélisation mathématique par une FdT de la suspension d'un VTT



$$F(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \boxed{b\frac{dy(t)}{dt}} + \boxed{ky(t)}$$

$$F(s) = Ms^2Y(s) + bsY(s) + kY(s)$$

$$H(s) = \frac{Y(s)}{F(s)} = \frac{1}{Ms^2 + bs + k}$$

Fonction de transfert à conditions initiales nulles

Soit le modèle traduisant la relation entre une entrée *e*(*t*) et la sortie *s*(*t*) d'un SLCI sous la forme d'une équation différentielle linéaire à coefficients constants :

$$a_0 e(t) + a_1 \frac{de(t)}{dt} + \ldots + a_n \frac{d^n e(t)}{dt^n} = b_0 s(t) + b_1 \frac{ds(t)}{dt} + \ldots + b_m \frac{d^m s(t)}{dt^m}$$

$$\Downarrow$$

$$E(p)\left[a_0 + a_1 p + \ldots + a_n p^n\right] = S(p)\left[b_0 + b_1 p + \ldots + b_m p^m\right]$$

$$\boxed{F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 \ldots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 \ldots + b_m p^m}}$$

On appelle **fonction de transfert** cette fraction de 2 polynômes de la variable *p*.

Fonction de transfert à conditions initiales nulles

La fonction de transfert est une **fraction de deux polynômes** de la variable *p*.
La **fonction de transfert** ou transmittance du système caractérise un **SLCI** de façon indépendante de l'entrée qui lui est appliquée. Elle ne dépend que de la **variable symbolique *p*** et des **paramètres** physiques du système.

$$F(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{a_0 + a_1 p + a_2 p^2 \ldots + a_n p^n}{b_0 + b_1 p + b_2 p^2 \ldots + b_m p^m} = \frac{N(p)}{D(p)}$$

Pôles et zéros

Les **zéros** de la fonction de transfert: N(p) = 0

Les **pôles** de la fonction de transfert: D(p) = 0

Les zéros: z_i et les pôles p_j peuvent être réels ou complexes.

La puissance la plus élevée du dénominateur donne l'ordre du système.

Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe

On peut également poser F(p) = H(p)

En **factorisant** chaque polynôme par le **terme de plus petit degré** on obtient la **forme canonique :**

$$H(p) = \frac{K}{p^{\alpha}} \frac{1 + \dots p + \dots p^2 + \cdots + \dots p^m}{1 + \dots p + \dots p^2 + \cdots + \dots p^{n-\alpha}}$$

K : gain statique

α : classe du système

n : ordre du système (degré dénominateur)

ou

$$H(p) = K\,p \frac{1 + \dots p + \dots p^2 + \cdots + \dots p^{m-1}}{1 + \dots p + \dots p^2 + \cdots + \dots p^n}$$

si classe 0 avec un dérivateur[(1)]

Forme canonique d'une fonction de transfert : gain statique, ordre et classe

Exemple : Moteur à courant continu

$$H(p)=\frac{1}{k_e+\frac{RJ}{k_C}p+\frac{LJ}{k_C}p^2}=\frac{1}{k_e}\frac{1}{\left(1+\frac{RJ}{k_e\,k_C}p+\frac{LJ}{k_e\,k_C}p^2\right)}$$

$ordre : 2$

$classe : 0$

$gain\ statique : 1/k_e$

Application :

factoriser par les termes de plus petit ordre

$$H(p)=\frac{2+3p+5p^2}{3p^2+4p^3+7p^5}\xrightarrow[canonique]{forme}H(p)=\frac{2}{3p^2}\frac{1+\frac{3}{2}p+\frac{5}{2}p^2}{1+\frac{4}{3}p+\frac{7}{3}p^3}$$

$ordre : 5$

$classe : 2$

$gain\ statique : \frac{2}{3}$

Prévoir la stabilité à partir de la fonction de transfert

L'étude des solutions des équations différentielles à coefficients constants permet de montrer que la stabilité est assurée si les racines du dénominateur $D(p)$ de la fonction de transfert sont à partie réelle strictement négative. Les coefficients du dénominateur sont alors tous de même signe.

Un modèle **stable** est nécessairement de **classe 0** avec des **coefficients** au dénominateur **strictement de même signe**.

Ces conditions sont suffisantes pour des modèles d'ordre 1 et 2. Pour des modèles d'ordre 3 ou supérieur, il existe des conditions supplémentaires sur les coefficients.

Ordre	**Condition de stabilité :**
Ordre 1 $D(p)=a_0+a_1\,p$	Classe 0 et coefficients du dénominateur de même signe
Ordre 2 $D(p)=a_0+a_1\,p+a_2\,p^2$	Classe 0 et coefficients du dénominateur de même signe
Ordre 3 $D(p)=a_0+a_1\,p+a_2\,p^2+a_3\,p^3$	Classe 0, coefficients du dénominateur de même signe $a_1\,a_2>a_0\,a_3$

Prévoir la stabilité à partir de la fonction de transfert

Propriété : Stabilité

On peut déterminer la **stabilité** d'un système linéaire à partir de son équation caractéristique: Elle s'obtient en égalant à zéro le dénominateur: $D(p) = 0$

Le système est stable si toutes les racines du dénominateur ont leur partie réelle négative.

Théorème de superposition

Considérons un système à 2 entrées, notées $E(p)$ et $P(p)$ dans le domaine de Laplace.

Si le modèle est linéaire : $\boxed{S(p) = H_1(p)\,E(p) + H_2(p)\,P(p)}$

avec $\quad H_1(p) = \left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ (définie avec $P(p) = 0$)

et $\quad H_2(p) = \left.\dfrac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ (définie avec $E(p) = 0$)

La sortie du système est obtenue en **additionnant** les **réponses à chaque entrée**.

Théorème de superposition

Si $E(p)$ est une **consigne** et $P(p)$ une **perturbation**,

- $\left.\dfrac{S(p)}{E(p)}\right|_{P(p)=0}$ caractérise le **comportement en poursuite** ;
- $\left.\dfrac{S(p)}{P(p)}\right|_{E(p)=0}$ caractérise le **comportement en régulation**.

Le « théorème » de superposition est une conséquence directe de la linéarité des équations : la réponse à plusieurs entrées est la somme des réponses à chaque entrée.

Synthétiser le comportement

1. Composants d'un schéma-bloc : bloc, sommateur et point de prélèvement

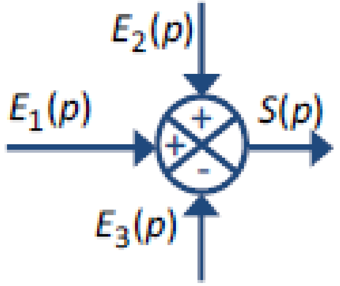
Les trois éléments de base d'un schéma-bloc sont :

– le **bloc** qui représente, dans le **domaine de Laplace**, le modèle d'un **composant**, une partie de ce modèle, ou une **équation mathématique** ;

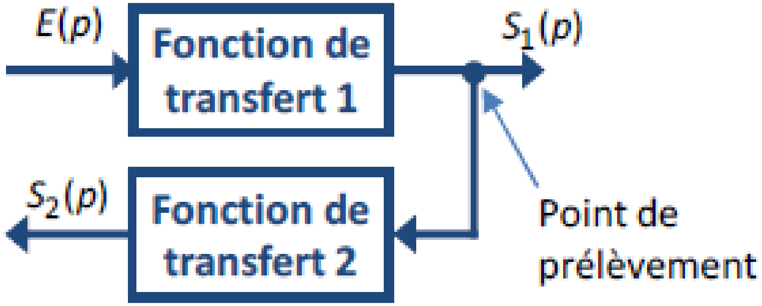
Composant ou équation différentielle

– le **soustracteur** ou **sommateur** qui comporte plusieurs entrées mais une seule sortie ;

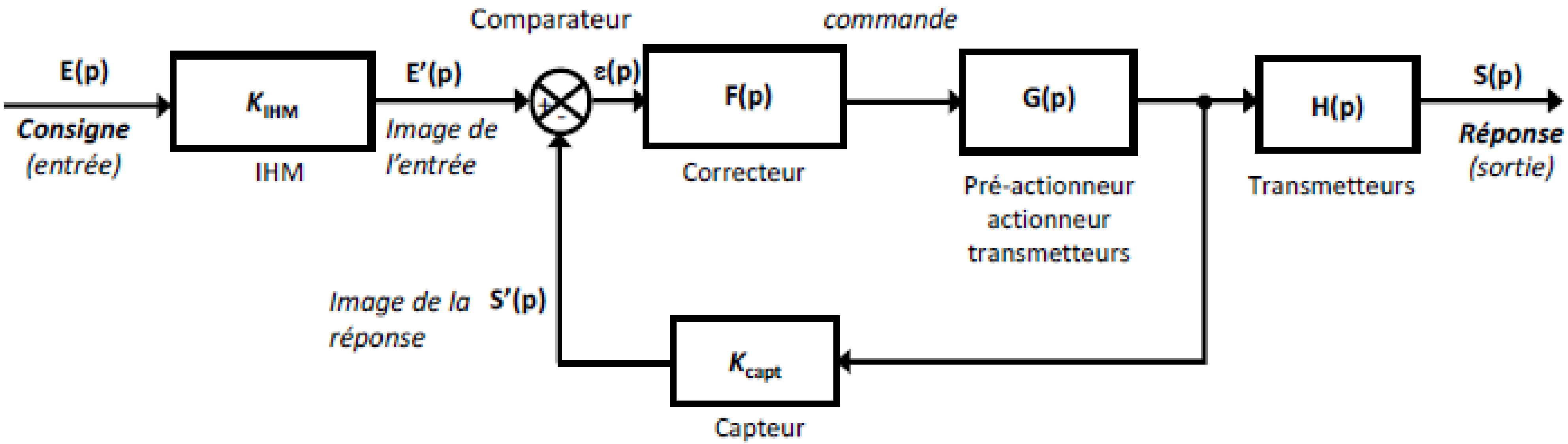
ici : $S(p) = E_1(p) + E_2(p) - E_3(p)$



– le **point de prélèvement** qui prélève, sans la modifier, une grandeur en un point.



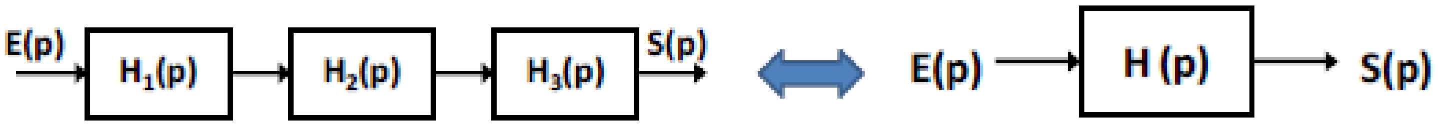
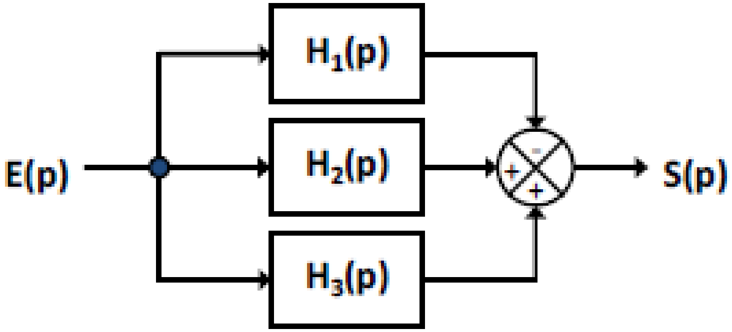
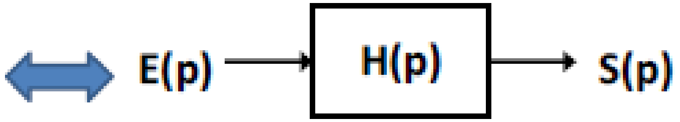
2. Schéma-bloc générique d'un asservissement et relation entre IHM et capteur



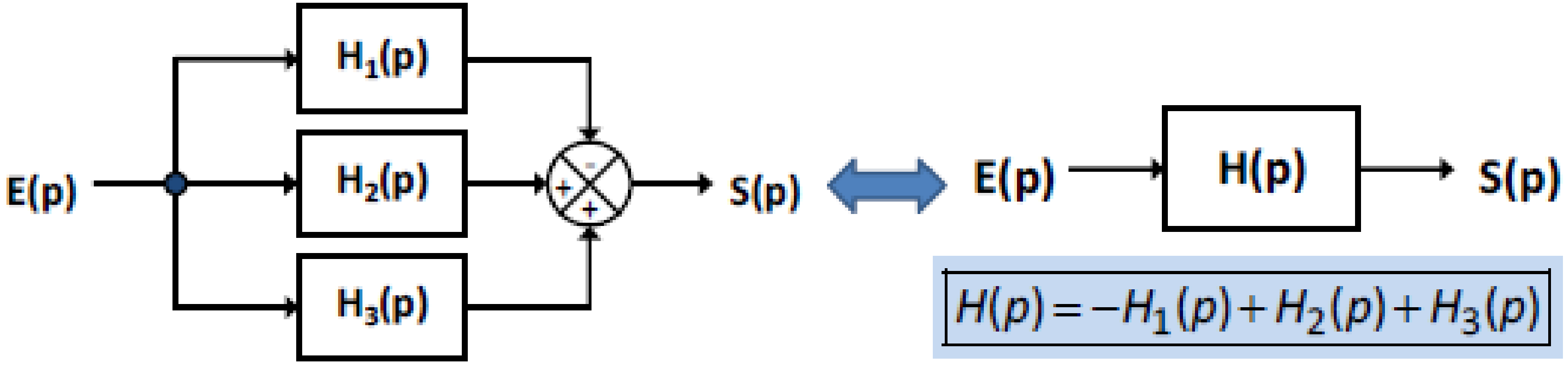
Pour toute valeur de la consigne, **l'image de l'erreur** $\varepsilon(p) = K_{IHM}\, E(p) - \dfrac{K_{capt}}{H(p)} S(p)$ **doit être nulle lorsque l'erreur est nulle**, d'où : $K_{IHM} = \dfrac{K_{capt}}{H(p)}$

Synthétiser le comportement

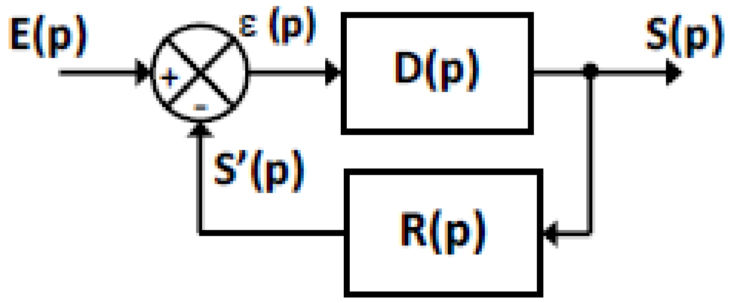
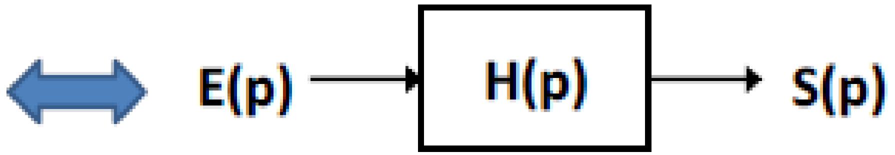
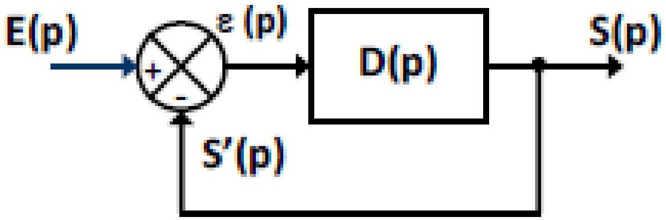
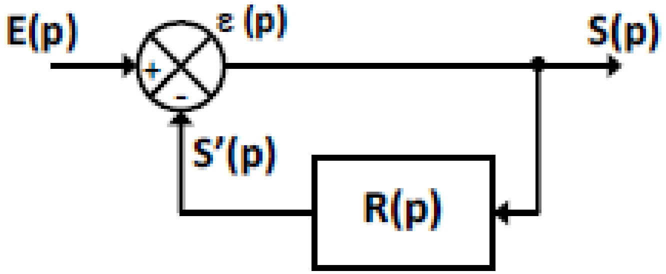
Le schéma bloc des systèmes asservis est une représentation qui se généralise à l'ensemble des SLCI.

Blocs en série	 $\boxed{H(p) = H_1(p)\,H_2(p)\,H_3(p)}$ La fonction de transfert équivalente de blocs en **série** est égale au **produit** des fonctions de transfert de chacun des blocs.
Blocs en parallèle	  $\boxed{H(p) = -H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)}$ La fonction de transfert équivalente de blocs en **parallèle** est égale à la **somme** des fonctions de transfert de chacun des blocs.

Synthétiser le comportement

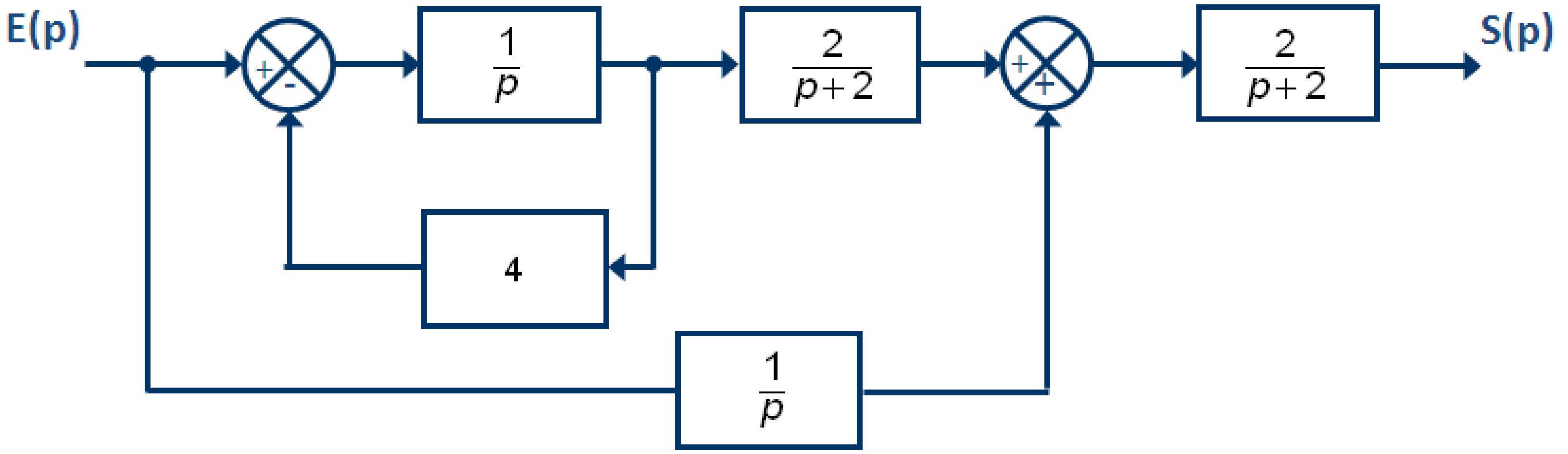
Blocs en parallèle	 $H(p) = -H_1(p) + H_2(p) + H_3(p)$ La fonction de transfert équivalente de blocs en **parallèle** est égale à la **somme** des fonctions de transfert de chacun des blocs.

Synthétiser le comportement

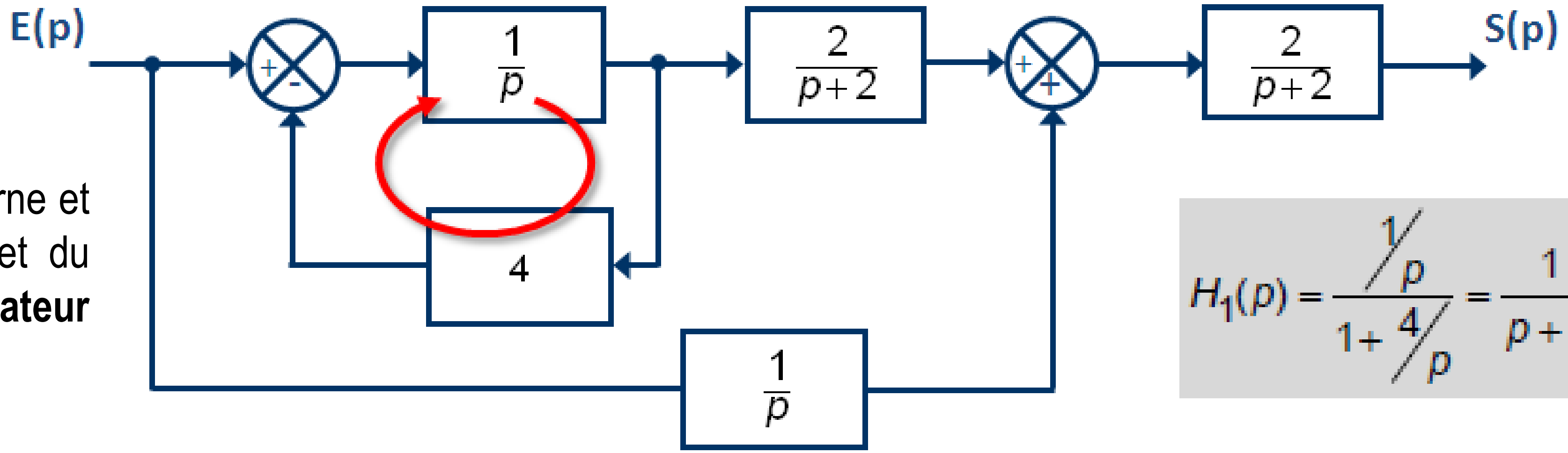
Boucle fermée	  $\boxed{H(p)=\dfrac{D(p)}{1+D(p)\,R(p)}}$ $D(p)$: *FT de la chaine directe* $R(p)$: *FT de la chaine de retour*
avec retour unitaire	 Retour unitaire : $\boxed{R(p)=1}$
avec chaîne directe unitaire	 Chaîne directe unitaire : $\boxed{D(p)=1}$

Synthétiser le comportement

Exemple : déterminer la fonction de transfert du système représenté par le schéma-bloc ci-dessous:



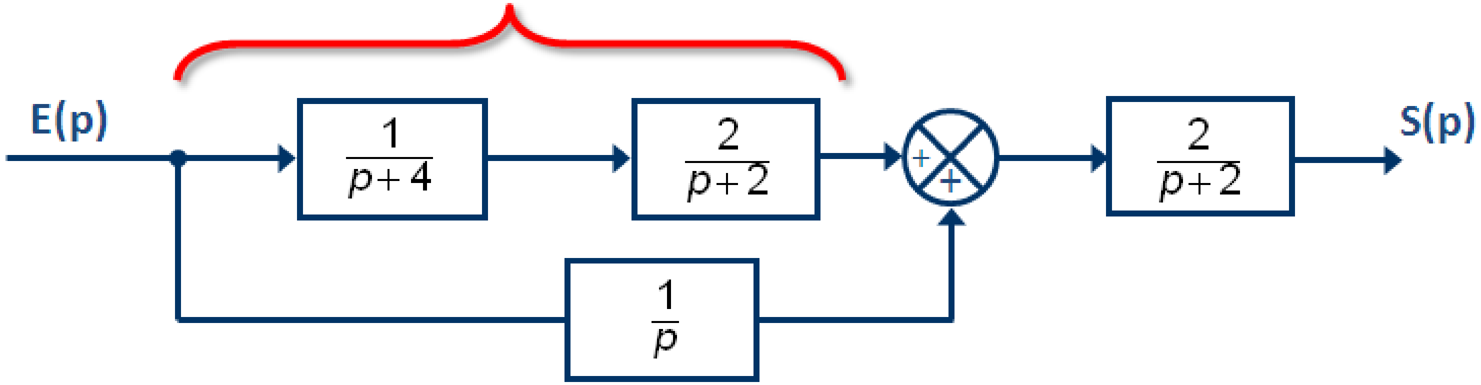
1ere étape - Simplification 1 : boucle fermée



Simplification de la boucle interne et multiplication du numérateur et du dénominateur par le **dénominateur du dénominateur**.

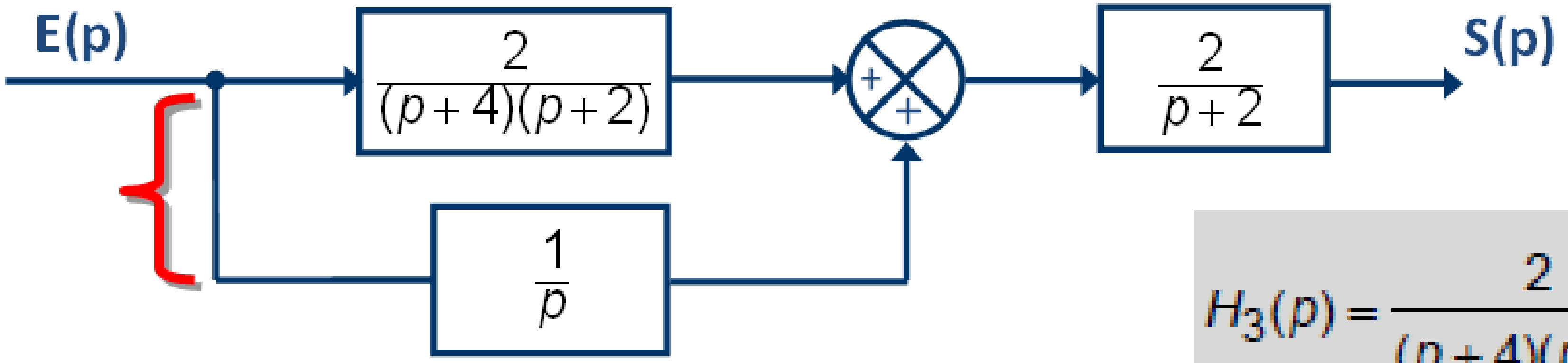
$$H_1(p) = \frac{1/p}{1 + 4/p} = \frac{1}{p+4}$$

Q2 - Simplification 2 : blocs en série



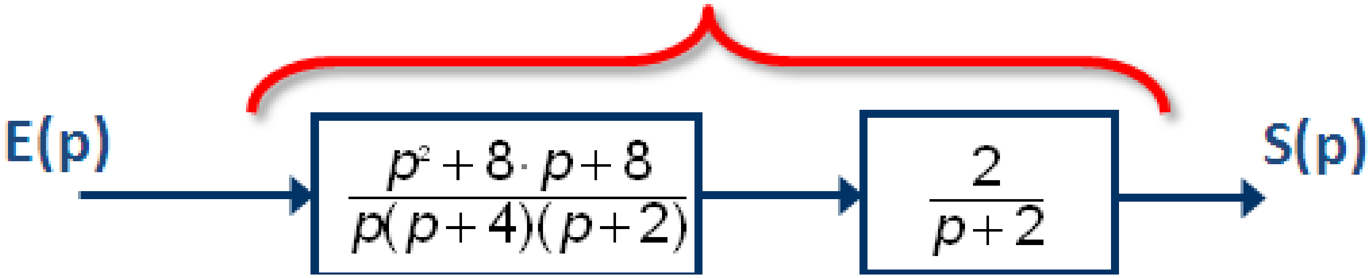
$$H_2(p) = \frac{1}{p+4} \times \frac{2}{p+2} = \frac{2}{(p+4)(p+2)}$$

Q3 - Simplification 3 : Blocs en parallèle



$$H_3(p) = \frac{2}{(p+4)(p+2)} + \frac{1}{p} = \frac{p^2 + 8 \cdot p + 8}{p(p+4)(p+2)}$$

Q4 - Simplification 4 : Blocs en série



$$H(p)=\frac{p^2+8\cdot p+8}{p(p+4)(p+2)}\times\frac{2}{(p+2)}=\boxed{\frac{2(p^2+8\cdot p+8)}{p(p+4)(p+2)^2}}$$

Q5 - Mettre sous forme canonique

Par développement et factorisation des termes de plus petits degrés :

$$H(p)=\frac{1}{p}\,\frac{1+p+\frac{p^2}{8}}{1+\frac{5}{4}p+\frac{1}{2}p^2+\frac{p^3}{16}}$$

Classe 1, gain statique unitaire, 4ème ordre.

Démarche de synthèse

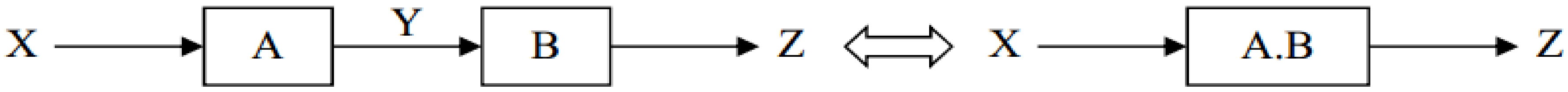
Démarche de synthèse (si les boucles ne sont pas couplées).

Partir des boucles internes (et ne pas confondre les sommateurs utilisés dans une boucle fermée et ceux utilisés avec des blocs en parallèle) :

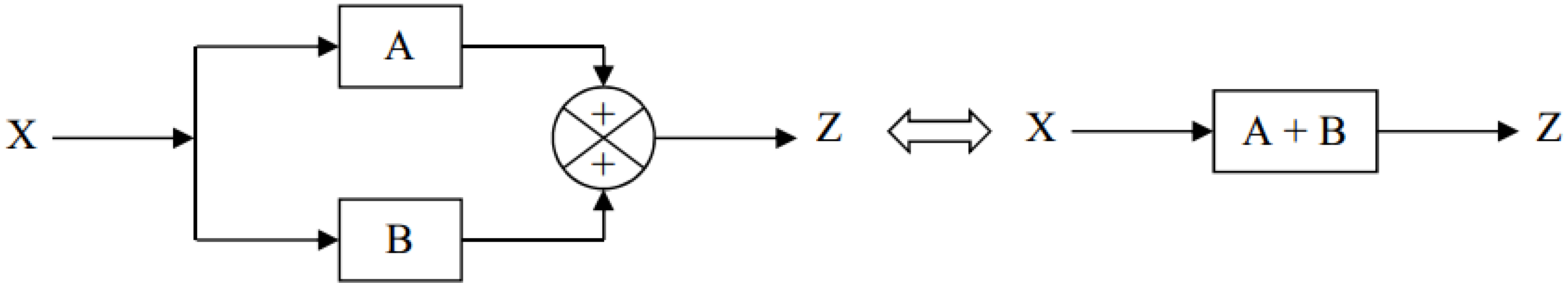
- **identifier** la **chaîne directe** et la **chaîne de retour** de la boucle interne et vérifier les signes du soustracteur (+ l'entrée – le retour) ;
- utiliser la formule sur les **boucles fermées** pour **poser** la fonction de transfert de la boucle ;
- **simplifier** sans développer ;
- **multiplier** dénominateur et numérateur **par le dénominateur du dénominateur**, sans développer ;
- **simplifier** sans développer ;
- recommencer afin d'obtenir la fonction de transfert du système complet ;
- **simplifier, développer** ;
- mettre sous **forme canonique**.

Principales règles de l’algèbre de diagrammes

- Les propriétés de linéarités se traduisent par les transformations de diagramme suivantes [2] :



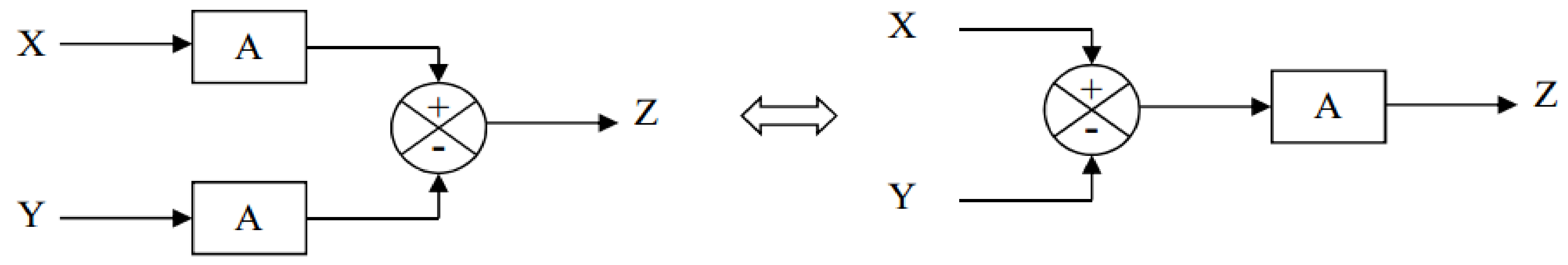
$$Y(s)=A(s)X(s) \text{ et } Z(s)=B(s)Y(s) \Rightarrow Z(s)=\left[A(s)B(s)\right]X(s)$$



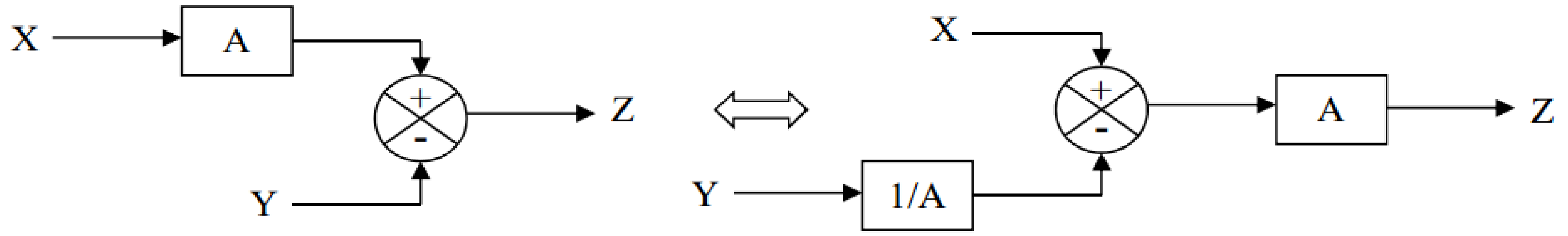
$$Z(s)=A(s)X(s)+B(s)X(s) \Rightarrow Z(s)=\left[A(s)+B(s)\right]X(s)$$

Principales règles de l'algèbre de diagrammes

- Les propriétés de linéarités se traduisent par les transformations de diagramme suivantes [2] :



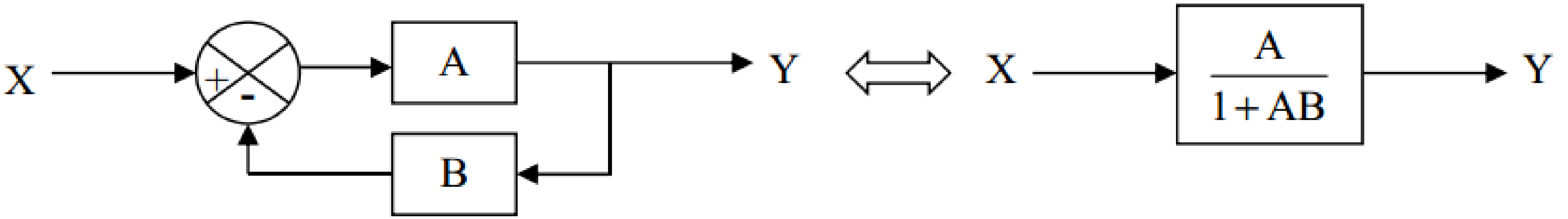
$$Z(s)=A(s)X(s)-A(s)Y(s) \rightarrow Z(s)=A(s)\left[X(s)-Y(s)\right]$$



$$Z(s)=A(s)X(s)-Y(s) \rightarrow Z(s)=A(s)\left[X(s)-\frac{1}{A(s)}Y(s)\right]$$

Principales règles de l’algèbre de diagrammes

- Les propriétés de linéarités se traduisent par les transformations de diagramme suivantes [2] :

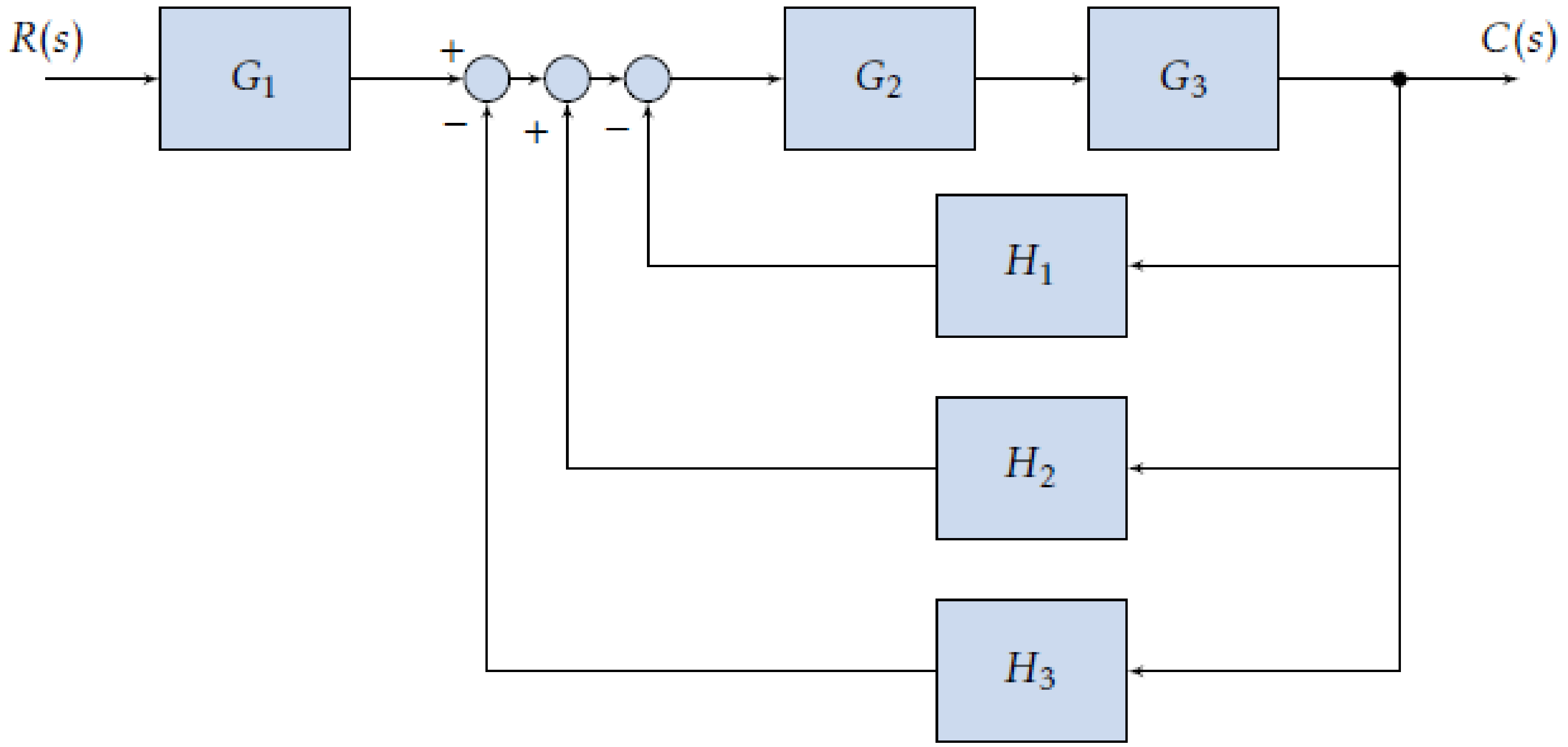


$$Y(s)=A(s)\left[X(s)-B(s)Y(s)\right] \rightarrow Y(s)=\frac{A(s)}{1+A(s)B(s)}X(s)$$

Application schéma-bloc

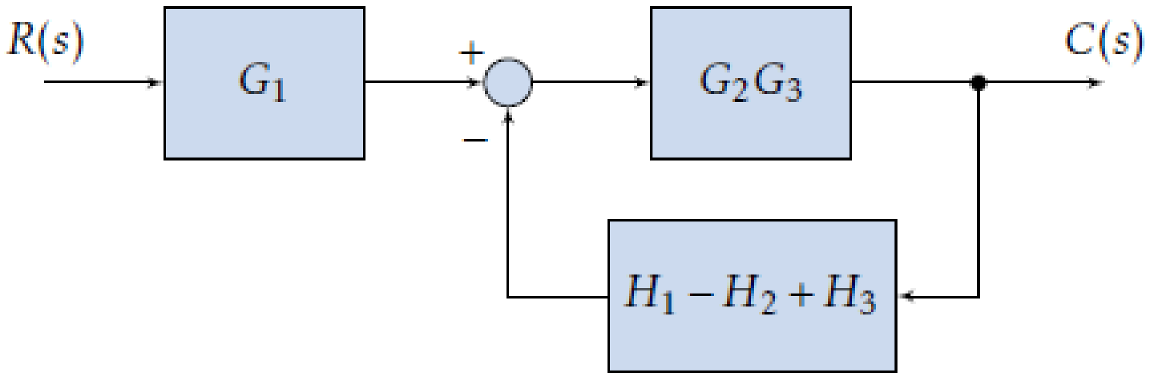
Exemple 1

Simplifier le diagramme suivant.

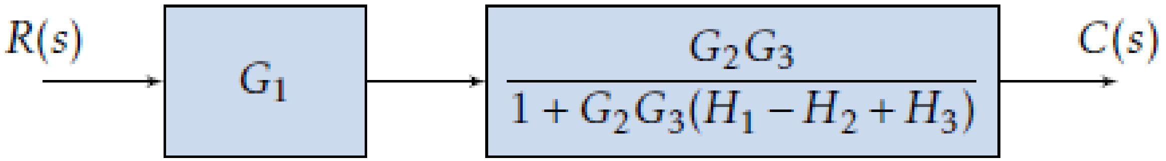


Application schéma-bloc

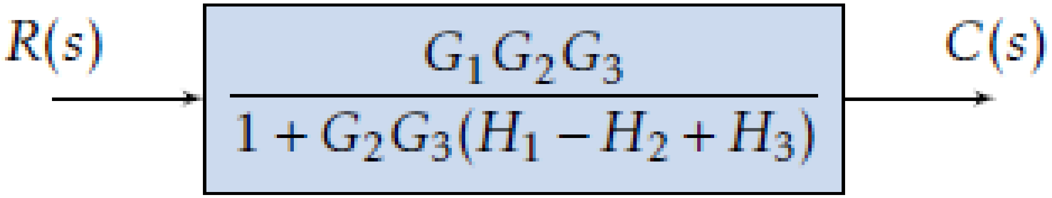
Première étape :



Deuxième étape :



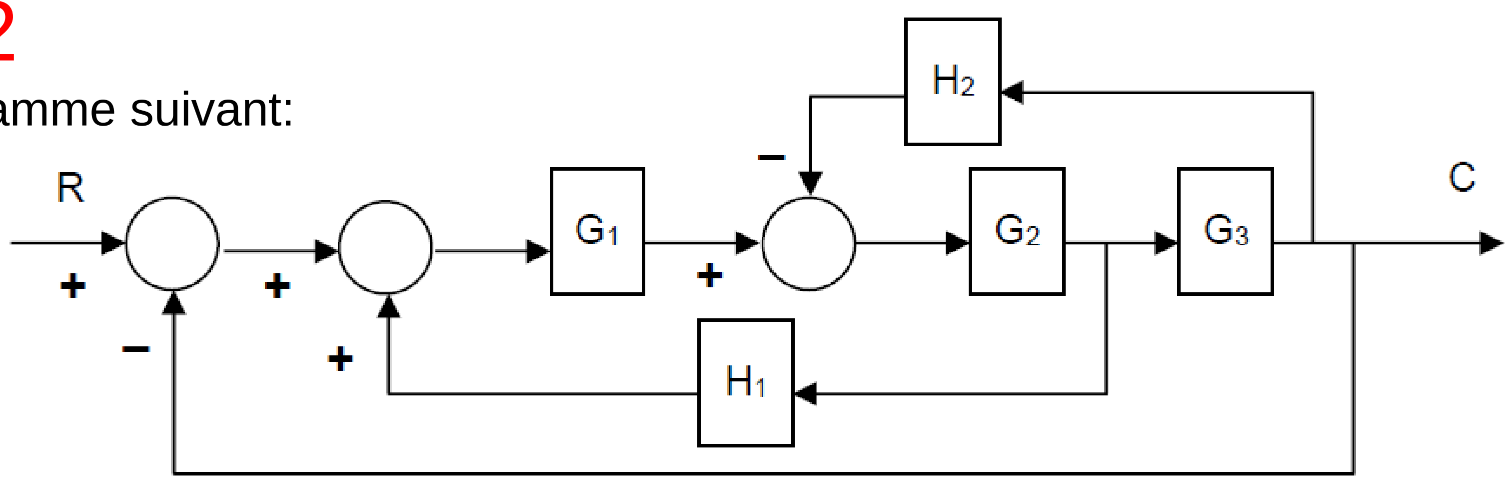
Troisième étape :



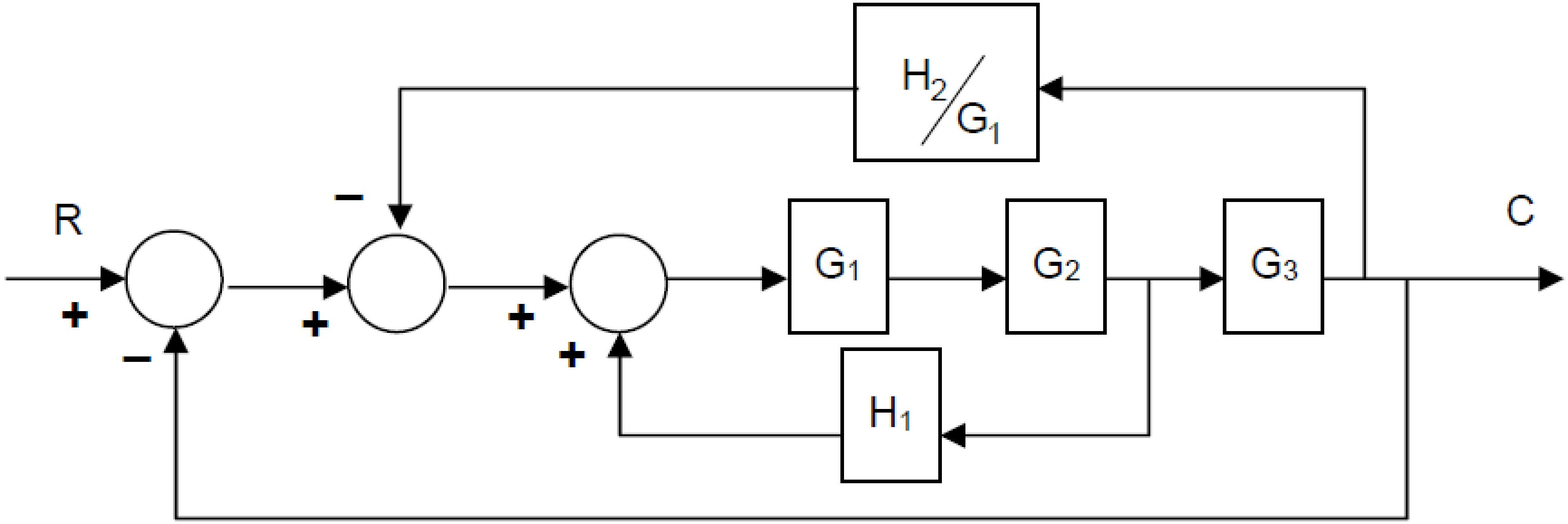
Application schéma-bloc

Exemple 2

Simplifier le diagramme suivant:

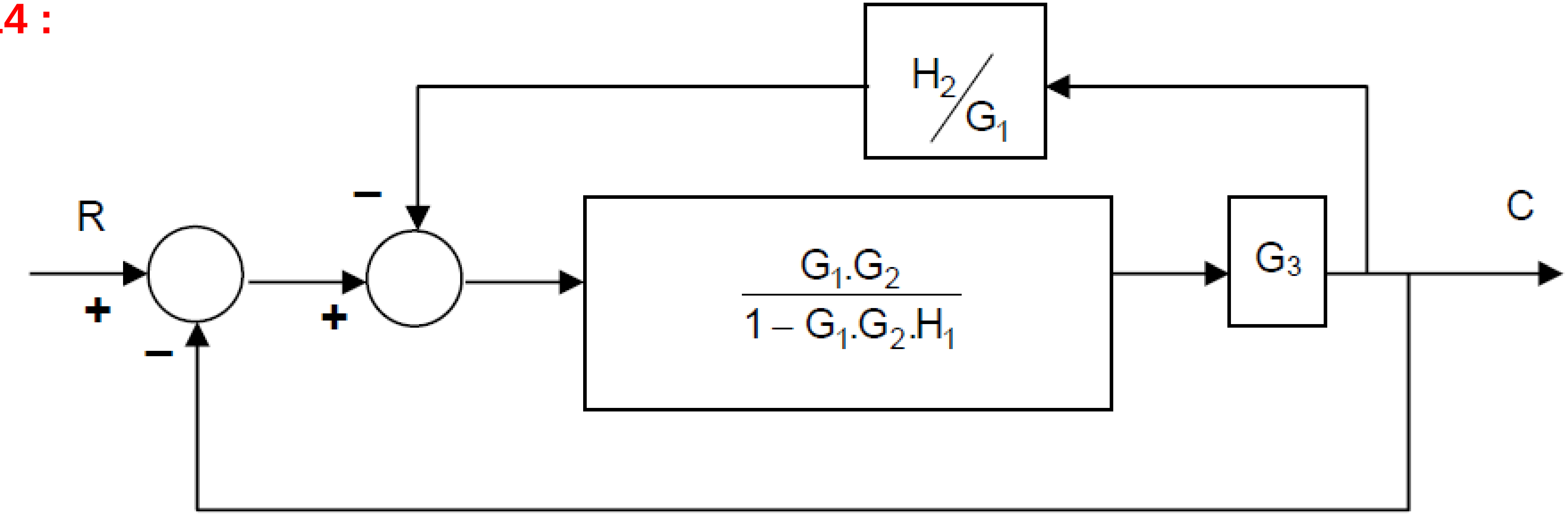


En appliquant la **règle n° 6**, puis la **règle n° 1**, on obtient :

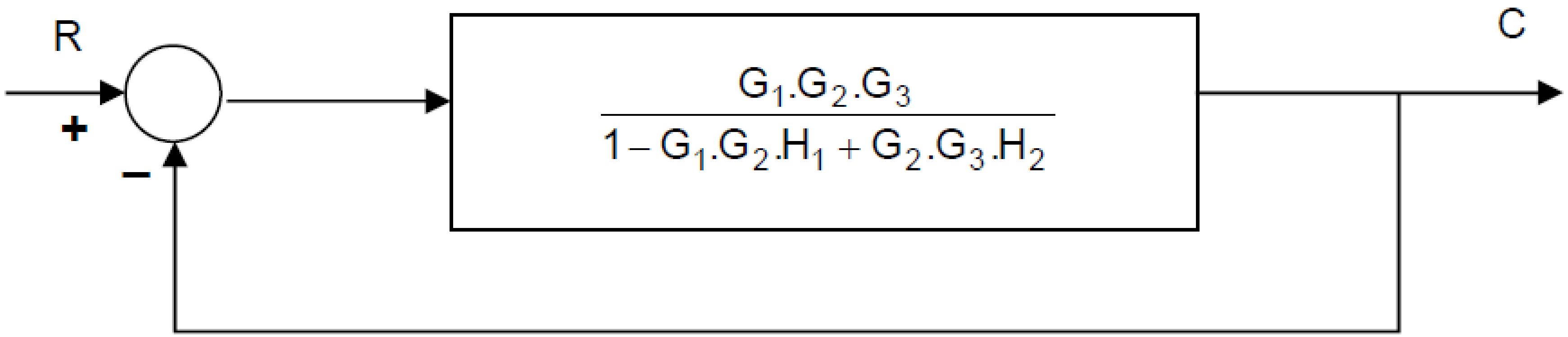


Application schéma-bloc

Règle n° 14 :



Règle n°13 :



Application schéma-bloc

Règle n°13 :

$$R \longrightarrow \boxed{\dfrac{G_1.G_2.G_3}{1 - G_1.G_2.H_1 + G_2.G_3.H_2 + G_1.G_2.G_3}} \longrightarrow C$$