CIR2 CNB2 Vendredi 18 Octobre 2019

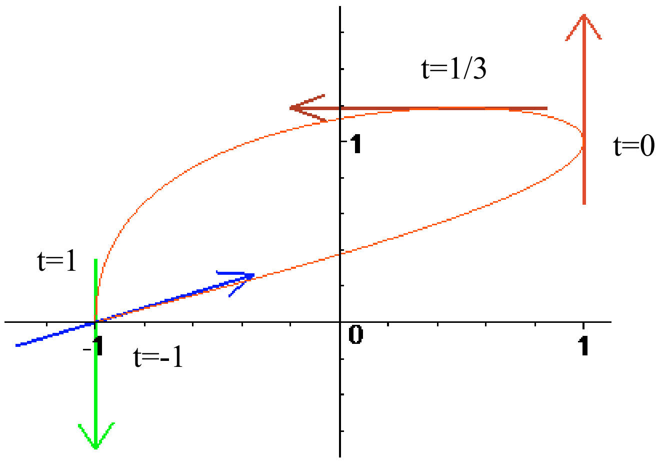
DS de Maths

Durée 2 heures
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable
Les 2 parties sont indépendantes, et notées chacune sur 10

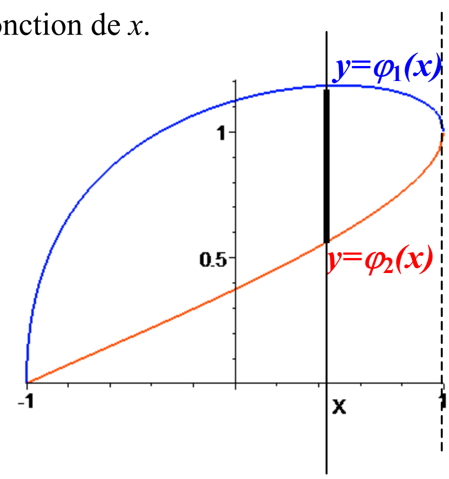
Partie 1 : Courbes, intégrales multiples

On considère la courbe C d'équations paramétriques : $\begin{cases} x = \cos(\pi t) \\ y = (1+t)^2(1-t) \end{cases}$ $t \in [-1, 1]$

1. Déterminer la tangente à la courbe au point de paramètre $t = 1$ Point régulier $\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ -4 \end{pmatrix}$
2. Déterminer la tangente à la courbe au point de paramètre $t = -1$ Point singulier
   $\frac{dM}{dt} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ *mais* $\frac{y'}{x'} = \frac{(1+t)(3t-1)}{\pi \sin(\pi t)} \overset{u=t+1}{=} \frac{u(3u-4)}{-\pi \sin(\pi u)} \underset{u=0}{\sim} \frac{-4u}{-\pi^2 u} \underset{u=0}{\to} \frac{4}{\pi^2} \approx 0.4$
3. Déterminer le(s) point(s) de la courbe où la tangente est horizontale $y' = 0$ et $x' \neq 0$: $t = 1/3$
   et le(s) point(s) de la courbe où la tangente est verticale. $x' = 0$ et $y' \neq 0$: $t = 0$
4. Résumer les résultats précédents sur une représentation sommaire de la courbe



5. Pour quelles valeurs de t entre -1 et 1 la relation entre x et t peut-elle s'écrire $\pi t = \arccos(x)$?
   Pour $t \in [0,1]$. En effet 'cos' est une bijection de $[0,\pi]$ sur $[-1,1]$. Sa réciproque est à valeur dans $[0,\pi]$.
   Justifier que pour les autres valeurs de t entre -1 et 1 on a $\pi t = -\arccos(x)$
   pour $t \in [-1,0]$, $-t \in [0,1]$ et $t+1 \in [0,1]$ donc (ci-dessus) $\pi(-t) = \arccos(x(-t)) = \arccos(x(t))$
   ou.. $t+1 \in [0,1]$ donc $\pi(t+1) = \arccos(x(t+1)) = \arccos(-x(t)) = \pi - \arccos(x(t))$
   En déduire dans chacun de ces 2 cas une expression de y en fonction de x.
   pour $t \in [0,1]$ (en haut de la courbe),
   $$y = \varphi_1(x) = \left(1 + \frac{\arccos(x)}{\pi}\right)^2 \left(1 - \frac{\arccos(x)}{\pi}\right)$$
   pour $t \in [-1,0]$ (en bas de la courbe),
   $$y = \varphi_2(x) = \left(1 - \frac{\arccos(x)}{\pi}\right)^2 \left(1 + \frac{\arccos(x)}{\pi}\right)$$



On considère maintenant la surface S limitée par la courbe C.

6. Par un découpage à x constant, montrer que l'aire de S peut s'écrire $A=\int_{....}^{....}\left(\int_{....}^{....} ....d...\right)d...$

$$A=\int_{x=-1}^{1}\left(\int_{y=\varphi_2(x)}^{\varphi_1(x)} dy\right)dx=\int_{x=-1}^{1}\left(\varphi_1(x)-\varphi_2(x)\right)dx$$

7. Dans l'intégrale obtenue, on fera le changement de variable $x=\cos(\pi t)$ (bien sûr !)

   et on trouvera un résultat de la forme $A=k\int_{....}^{....}(t-t^3)\sin(\pi t)\,dt$ où k est une constante à déterminer.

   si $x=\cos(\pi t)$, $\arccos(x)=\pi t$, donc $\varphi_1(x)=(1+t)^2(1-t)=(1+t)(1-t^2)$ et $\varphi_2(x)=(1-t)^2(1+t)=(1-t)(1-t^2)$

$$A=\int_{t=1}^{0}\left(2t(1-t^2)\right)(-\pi)\sin(\pi t)\,dt=2\pi\int_{t=0}^{1}(t-t^3)\sin(\pi t)\,dt$$

8. Finir le calcul. Vérifier. Deux intégrations par parties …. $A=\dfrac{12}{\pi^2}\approx 1.216$ ouf !

   Le rectangle autour de la courbe fait à peu près 2*1.2 . Penser que S en vaut la moitié n'est pas absurde.

Partie 2 : Séries entières

Soit (u_n) une suite de réels.

On définit la suite (v_n) par la formule : $\forall n\in\mathbb{N}/\, v_n=\dfrac{1}{2}(u_n+u_{n+1})$

On étudie alors les séries $\sum u_n$ et $\sum v_n$

1. **Premier cas particulier** : Soit a un réel. On étudie le cas où $u_n=a^n$. Calculer v_n.

   $v_n=\dfrac{1}{2}(a^n+a^{n+1})=a^n\left(\dfrac{1+a}{2}\right)$ série géométrique de raison a (sauf si $a=-1$, dans ce cas c'est la série nulle)

   A quelle condition la série $\sum u_n$ converge-t-elle ? si et seulement si $-1<a<1$

   A quelle condition la série $\sum v_n$ converge-t-elle ? si et seulement si $-1\leqslant a<1$

   (Étudier en particulier le cas où $a=-1$)

2. **Deuxième cas particulier** : On étudie le cas où $u_n=\dfrac{1}{n+1}$. Calculer v_n.

   $v_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{1}{n+1}+\dfrac{1}{n+2}\right)=\dfrac{2n+3}{2(n+1)(n+2)}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$

   La série $\sum u_n$ converge-t-elle ? $u_n\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{n}$ série harmonique : diverge La série $\sum v_n$ converge-t-elle ? idem

3. **Troisième cas particulier** : On étudie le cas où $u_n=\dfrac{(-1)^n}{n+1}$. Calculer v_n.

   $v_n=\dfrac{1}{2}\left(\dfrac{(-1)^n}{n+1}+\dfrac{(-1)^{n+1}}{n+2}\right)=\dfrac{(-1)^n}{2(n+1)(n+2)}$

   La série $\sum u_n$ converge-t-elle ? Critère des séries alternées : converge La série $\sum v_n$ converge-t-elle ? idem

   ou $|v_n|=\dfrac{1}{2(n+1)(n+2)}\underset{\infty}{\sim}\dfrac{1}{2n^2}$ série de Riemann convergente donc la série $\sum v_n$ converge absolument

On revient désormais au cas général

4. Montrer que si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum v_n$ converge. Comparer alors $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ et $\sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

Si la série $\sum u_n$ converge, alors la série $\sum u_{n+1}$ converge, et donc par combinaison linéaire, la série $\sum v_n$

converge. On a alors $\sum_0^{\infty} v_n = \frac{1}{2}\left(\sum_0^{\infty} u_n + \sum_0^{\infty} u_{n+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_0^{\infty} u_n + \sum_1^{\infty} u_n\right) = \sum_0^{\infty} u_n - \frac{1}{2}u_0$

5. Que peut-on dire de la série $\sum v_n$ si la série $\sum u_n$ converge absolument ? $|v_n| \leqslant \frac{1}{2}\left(|u_n| + |u_{n+1}|\right)$

Si la série $\sum u_n$ converge absolument, alors la série $\sum u_{n+1}$ également. Alors par combinaison linéaire, la

série $\sum_0^{\infty} \frac{1}{2}\left(|u_n| + |u_{n+1}|\right)$ aussi et par majoration, la série $\sum u_n$ converge absolument.

6. Que peut-on dire de la série $\sum u_n$ si la série $\sum v_n$ converge ?

Rien : cf 1. Si $u_n = (-1)^n$, la série $\sum v_n$ est la série nulle donc converge mais la série $\sum u_n$ diverge

7. Calculer la somme partielle $T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k$ en fonction de la somme partielle $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

$$T_n = \sum_{k=0}^{n} v_k = \frac{1}{2}\left(\sum_0^{n} u_k + \sum_0^{n} u_{k+1}\right) = \frac{1}{2}\left(\sum_0^{n} u_k + \sum_1^{n+1} u_k\right) = \sum_0^{n} u_n - \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_{n+1} = S_n - \frac{1}{2}u_0 + \frac{1}{2}u_{n+1}$$

8. Que peut-on en déduire pour la série $\sum u_n$ si la série $\sum v_n$ converge et que $u_n \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$?

Sous ces hypothèses T_n a une limite et $u_{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ donc $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} \lim_{n\to\infty}(T_n) + \frac{1}{2}u_0$

et donc $\sum u_n$ converge vers $\sum_0^{\infty} v_n + \frac{1}{2}u_0$

9. En utilisant les résultats précédents, proposer un algorithme de calcul approché à 10^{-10} près de $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n+1}$.

Elle vérifie le critère des séries alternées donc l'écart entre la somme partielle de rang *n* et la somme de la série est inférieur à $|u_{n+1}| = \frac{1}{n+2}$.

Il faudrait donc presque 10^{10} termes pour avoir la précision souhaitée. Ce n'est pas raisonnable en temps (sans compter l'accumulation des arrondis qui obligerait à calculer chaque terme à 10^{-20} près).

Mais la série $v_n = \frac{(-1)^n}{2(n+1)(n+2)}$ du 3. vérifie aussi le critère des séries alternées donc l'écart entre la somme partielle de rang *n* et la somme de la série est maintenant inférieur à $|v_{n+1}| = \frac{1}{2(n+2)(n+3)}$. Il ne faudrait plus qu'à peu près $\frac{1}{2}10^5 = 50000$ termes pour avoir la précision souhaitée. Il restera à ajouter $\frac{1}{2}u_0 = \frac{1}{2}$(cf 8.)

```
pseudo code :  # faire les calculs avec une précision de 1e-15

  initialiser S à 0
  initialiser signe à 1
```

```
pour n de 0 à 50000 faire
 S←S+signe/2/(n+1)/(n+2)
 signe←-signe
fin pour
afficher ( 'somme de la série harmonique alternée =' S+0.5, '+/- 1e-10 )
```

Résultat :   .69314718066
Somme de la série = ln(2)=.69314718056
Écart : -0.99933 e-10