Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur le questionnaire.

Nom: **CORRIGÉ**

1. Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = \sin x$ par une fonction de la forme

$$x \mapsto ax + b \qquad (a, b \in \mathbf{R}^2)$$

au sens des moindres carrés sur l'intervalle $[0, \pi]$?

On travaille dans l'espace vectoriel V des fonctions continues sur l'intervalle $[0, \pi]$, muni du produit scalaire

$$\langle g \mid h \rangle = \int_0^\pi g(x)\, h(x)\, \mathrm{d}x,$$

de sorte que la question s'interprète géométriquement comme le calcul de la projection orthogonale de f sur le plan $\mathcal{P}$ engendré par les fonction x et 1. Par rapport à cette base, le produit scalaire sur $\mathcal{P}$ est représenté par la matrice symétrique

$$\begin{bmatrix} ||x||^2 & \langle 1 \mid x \rangle \\ \langle x \mid 1 \rangle & ||1||^2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \pi \end{bmatrix}.$$

Première solution : on peut préférer travailler dans un base orthogonale de $\mathcal{P}$. L'algorithme de Gauss-Lagrange nous apprend que $(x - \frac{\pi}{2},\, 1)$ en est une. On calcule alors la projection :

$$\operatorname{proj}_{\mathcal{P}} f = \frac{\langle f \mid x - \frac{\pi}{2} \rangle}{||x - \frac{\pi}{2}||^2}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{\langle f \mid 1 \rangle}{||1||^2} 1 = \frac{0}{\frac{\pi^3}{12}}\left(x - \frac{\pi}{2}\right) + \frac{2}{\pi} \cdot 1 = \frac{2}{\pi}.$$

La meilleure approximation en moyenne quadratique est donc celle obtenue avec les coefficients $a = 0$ et $b = \frac{2}{\pi}$.

Seconde solution : il n'est pas nécessaire de travailler dans une base orthogonale, on peut directement exploiter le fait que la projection $\operatorname{proj}_{\mathcal{P}} f = ax + b$ cherchée est solution du système d'équations

$$\begin{cases} \langle \operatorname{proj}_{\mathcal{P}} f \mid x \rangle = \langle f \mid x \rangle, \\ \langle \operatorname{proj}_{\mathcal{P}} f \mid 1 \rangle = \langle f \mid 1 \rangle, \end{cases}$$

i.e.

$$\begin{bmatrix} ||x||^2 & \langle 1 \mid x \rangle \\ \langle x \mid 1 \rangle & ||1||^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f \mid x \rangle \\ \langle f \mid 1 \rangle \end{bmatrix}$$

d'où

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{\pi^3}{3} & \frac{\pi^2}{2} \\ \frac{\pi^2}{2} & \pi \end{bmatrix}^{-1} \begin{bmatrix} \pi \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ \frac{2}{\pi} \end{bmatrix}.$$

2. La matrice suivante

$$A = \begin{bmatrix} 0 & -2 & 0 & -2 & 4 \\ -2 & 1 & 0 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ -1 & 2 & 0 & 1 & -1 \\ -2 & 0 & 0 & -2 & 4 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbf{Q})$$

satisfait $A^2 = 3A - 2I$. Utilisez ce fait pour déterminer aisément ses valeurs propres (ne *pas* calculer le polynôme caractéristique), puis fournir une base de $\mathbf{Q}^5$ formée de vecteurs propres pour A.

Puisque $A^2 - 3A + 2I = 0$, si λ est une valeur propre de A, avec vecteur propre associé $\mathbf{v}$, on doit avoir

$$\mathbf{0} = A^2\mathbf{v} - 3A\mathbf{v} + 2\mathbf{v} = \lambda^2\mathbf{v} - 3\lambda\mathbf{v} + 2\mathbf{v} = (\lambda - 2)(\lambda - 1)\mathbf{v}$$

soit $\lambda = 1$ ou 2 puisque $\mathbf{v} \neq \mathbf{0}$. Ne reste plus qu'à calculer les espaces propres :

$$E_1 = \operatorname{Ker}(A - I) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -\frac{3}{2} \\ 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & -\frac{5}{4} \end{bmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -\frac{1}{2} \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} \frac{3}{2} \\ \frac{5}{4} \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right),$$

$$E_2 = \operatorname{Ker}(A - 2I) = \operatorname{Ker} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{bmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

On peut donc prendre pour base, par exemple, la famille

$$\left(\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 0 \\ 2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 0 \\ 0 \\ 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right).$$

3. La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$$

Son polynôme caractéristique vous est fourni : $\chi_B(\lambda) = (\lambda - 2)(\lambda - 1)^2(\lambda + 1)^2$.

La matrice est diagonalisable si et seulement la multiplicité algébrique m_λ de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité géométrique d_λ.

- Pour $\lambda = 2$: $m_2 = 1$, on a automatiquement $d_2 = 1$ ✓
- Pour $\lambda = 1$: $m_1 = 2$, et puisque

$$E_1 = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

  on a également $d_1 = 2$ ✓
- Pour $\lambda = -1$: $m_{-1} = 2$, on trouve

$$E_{-1} = \mathrm{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

  donc $d_{-1} = 2$ ✓

La matrice est donc diagonalisable.

4. Système d'équations différentielles linéaires : déterminez l'unique triplet de fonctions $(x(t), y(t), z(t))$ satisfaisant

$$\begin{cases} x'(t) &= x(t) + 2y(t) + 4z(t), \\ y'(t) &= -2x(t) - 3y(t) - 10z(t), \\ z'(t) &= x(t) + y(t) + 4z(t), \end{cases} \qquad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 0, \\ z(0) = -1. \end{cases}$$

Mis sous forme matriciel, le problème consiste à résoudre le l'équation différentielle vectorielle

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 4 \\ -2 & -3 & -10 \\ 1 & 1 & 4 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ -1 \end{bmatrix}.$$

Première solution : on sait que l'unique solution est donnée par

$$X(t) = e^{tA} X(0),$$

ne reste plus qu'à évaluer e^{tA}. Pour cela, le plus simple est de diagonaliser A : on trouve que

$$P^{-1}AP = \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix} \quad \text{avec (par exemple)} \quad P = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & -1 & -1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{-t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

et donc

$$X(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & & \\ & e^{t} & \\ & & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} X(0) = \cdots = \begin{bmatrix} 2e^{-t} - e^{t} \\ -2e^{-t} - 2e^{t} + 4e^{2t} \\ e^{t} - 2e^{-2t} \end{bmatrix}.$$

Autre solution : connaissant les valeurs propres de A, on sait que la solution cherchée sera de la forme

$$X(t) = BE(t) \quad \text{avec} \quad E(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

où B est une matrice de coefficients à déterminer. En remettant cela dans l'équation, on trouve que cette matrice doit satisfaire

$$AB = B \begin{bmatrix} -1 & & \\ & 1 & \\ & & 2 \end{bmatrix},$$

i.e. B doit être une matrice de passage vers une base de vecteurs propres pour A. Ayant calculé la matrice P ci-dessus, tous les espaces propres étant de dimension 1, on conclut qu'il existe des constantes a, b, c telles que

$$B = P \begin{bmatrix} a & & \\ & b & \\ & & c \end{bmatrix};$$

en utilisant $BE(0) = X(0)$ on trouve

$$\begin{bmatrix} a \\ b \\ c \end{bmatrix} = P^{-1} X(0) = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

d'où

$$B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 0 \\ -2 & -2 & 4 \\ 0 & 1 & -2 \end{bmatrix} \quad \text{comme attendu.}$$