CIR$_2$

TD de Maths
Relations binaires

Exercice 1
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire sur un ensemble E à la fois réflexive et transitive.
On définit les nouvelles relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ par :

$$x\mathcal{S}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ et } y\mathcal{R}x) \text{ et } x\mathcal{T}y \Leftrightarrow (x\mathcal{R}y \text{ ou } y\mathcal{R}x)$$

Les relations $\mathcal{S}$ et $\mathcal{T}$ sont-elles des relations d'équivalences ?

Exercice 2
Soit E un ensemble et A une partie de E.
On définit une relation $\mathcal{R}$ sur $\wp(E)$ par : $X\mathcal{R}Y \Leftrightarrow X \cup A = Y \cup A$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence
b) Décrire la classe d'équivalence de $X \in \wp(E)$

Exercice 3
On considère sur $\mathcal{F}(E,E)$ la relation binaire $\mathcal{R}$ définie par :

$$f\mathcal{R}g \Leftrightarrow \exists \varphi \in \mathfrak{S}(E) \text{ telle que } f \circ \varphi = \varphi \circ g$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.
b) Décrire la classe d'équivalence d'une fonction donnée $f \in \mathfrak{S}(E)$.

Exercice 4
Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire réflexive et transitive.
On définit une relation $\mathcal{S}$ par : $x\mathcal{S}y \Leftrightarrow x\mathcal{R}y$ et $y\mathcal{R}x$
Montrer que $\mathcal{S}$ est une relation d'équivalence et que $\mathcal{R}$ permet de définir une relation d'ordre sur les classes d'équivalences de $\mathcal{S}$.

Exercice 5
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\mathbb{R}^{+\star}$ par :

$$x \preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists n \in \mathbb{N}, y = x^n$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre. Cet ordre est-il total ?

Exercice 6
Soit $\preccurlyeq$ la relation définie sur $E = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 / x \leqslant y\right\}$ par

$$(x,y) \preccurlyeq (x',y') \Leftrightarrow (x,y) = (x',y') \text{ ou } y \leqslant x'$$

Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.

Exercice 7
On définit une relation binaire $\preccurlyeq$ sur $\{z \in \mathbb{C} / \mathrm{Im}(z) \geqslant 0\}$ par :

$$z \preccurlyeq z' \Leftrightarrow |z| < |z'| \text{ ou } (|z| = |z'| \text{ et } \mathrm{Re}(z) \leqslant \mathrm{Re}(z'))$$

Montrer qu'il s'agit d'une relation d'ordre total.

Exercice 8
Soit E un ensemble ordonné par une relation $\leqslant$.
Un tableau à n lignes et p colonnes est formé d'éléments $a_{i,j} \in E$ avec i indice de ligne $(1 \leqslant i \leqslant n)$ et j indice de colonne $(1 \leqslant j \leqslant p)$.
On note le plus petit élément de chaque colonne et l'on prend le plus grand de ces plus petits :

$$\max_{1 \leqslant j \leqslant p} \left(\min_{1 \leqslant i \leqslant n} a_{i,j} \right)$$

On note aussi le plus grand élément de chaque ligne et l'on prend le plus petit de ces plus grands :

$$\min_{1 \leqslant i \leqslant n} \left(\max_{1 \leqslant j \leqslant p} a_{i,j} \right)$$

a) Comparer ces deux nombres.
b) Donner un exemple de non égalité.

Exercice 9
Soient A et B deux parties non vides et bornées de $\mathbb{R}$ telles que $A \subset B$.
Comparer $\inf A, \sup A, \inf B$ et $\sup B$.

Exercice 10
Soient A et B deux parties de $\mathbb{R}$ non vides et majorées.
Montrer que $\sup A, \sup B$ et $\sup(A \cup B)$ existent et

$$\sup(A \cup B) = \max(\sup A, \sup B)$$

Exercice 11
Soient E un ensemble et $f : E \to \mathbb{R}$ une application injective.
On définit sur E une relation binaire $\preccurlyeq$ par $x \preccurlyeq y \Leftrightarrow f(x) \leqslant f(y)$
Montrer que $\preccurlyeq$ est une relation d'ordre sur E.