$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **4 questions** équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que peu utile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et **expliquant** vos réponses.
- **Soignez** votre rédaction, ne soyez pas avare de détails...
- Le but est de me convaincre que vous avez appris **quelque chose** cette année !

— MICK —

Considérons la suite de nombres réels définie par $a_0 = 1$ et la récurrence

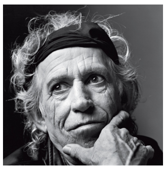
$$a_{n+1} = 2a_n + n \quad (n \geqslant 0).$$

a) Montrer que la fonction holomorphe $A(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ satisfait

$$\frac{A(z)-1}{z} = 2A(z) + \frac{z}{(1-z)^2}.$$

b) En déduire une formule explicite pour $A(z)$ puis pour les coefficients a_n.

c) Quel est le rayon de convergence de la série ?



— KEITH —

Supposons qu'on cherche à assigner à chacune des faces d'un *tétraèdre* l'une des 6 couleurs (répétitions permises)

$$W \text{ (blanc)}, \quad R \text{ (rouge)}, \quad B \text{ (bleu)}, \quad O \text{ (orange)}, \quad G \text{ (vert)} \quad \text{et} \quad Y \text{ (jaune)}.$$

a) Le groupe $\mathcal{G}$ des rotations dans $\mathbf{R}^3$ stabilisant ce tétraèdre comporte 12 éléments : décrire ceux-ci géométriquement (en précisant leur ordre) et en terme de la permutation induite sur les sommets du tétraèdre.

b) Décrire l'orbite et le stabilisateur d'un coloriage de votre choix.

c) Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des coloriages possibles des faces du cube ; on considère deux coloriages équivalents s'ils ne diffèrent que par une rotation. Combien y en a-t-il ? En d'autres termes, combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}$?

— **Charlie** —

Soient a, b et c trois réels vérifiant $a^2 + b^2 + c^2 = 1$ et A la matrice

$$A := \begin{bmatrix} 0 & c & -b \\ -c & 0 & a \\ b & -a & 0 \end{bmatrix}$$

a) Déterminer les valeurs propres de A dans $\mathbf{C}$.

b) Peut-on diagonaliser A ? Discuter.

c) Donner les valeurs propres de $I + A + A^2$ et en déduire la valeur du déterminant : $\begin{vmatrix} a^2 & ab+c & ca-b \\ ab-c & b^2 & bc+a \\ ca+b & bc-a & c^2 \end{vmatrix}$.

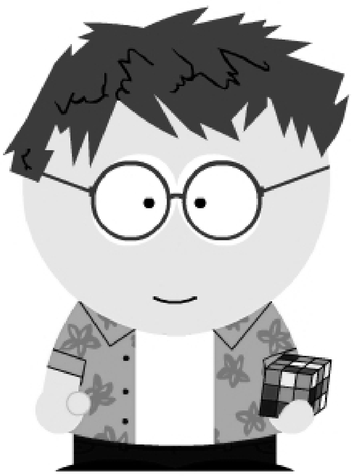
— **Ronnie** —

a) Soit $\langle \cdot \mid \cdot \rangle$ une forme bilinéaire symétrique définie (*i.e.*, $\langle v \mid v \rangle = 0 \implies v = 0$) pour laquelle il existe un vecteur v_0 tel que $\langle v_0 \mid v_0 \rangle > 0$. Montrer qu'il s'agit en fait d'un produit scalaire.

b) Déterminer une base orthonormée de l'espace vectoriel $\mathbf{R}[x]_{\leqslant 2}$ des polynômes de degré $\leqslant 2$ par rapport au produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle := \int_0^1 f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

c) Calculer la meilleure approximation, en moyenne quadratique sur l'intervalle $[0, 1]$, de $h(x) := e^x$ par un polynôme du second degré. Expliquer précisément ce que signifie l'expression technique « la meilleure approximation en moyenne quadratique sur $[0, 1]$. »



Bonne réussite et bon été !