Équation différentielle $x(x+2)y' + (x+1)y = 1$

- Résolution en série entière au voisinage de $x = 0$: on trouve

$$y = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, n!}{(2n+1)!!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2\, 2^n}{(2n+1)!} x^n = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{(2n+1)C_{2n}^n} (2x)^n \text{ sur }]-2, 2[$$

- Résolution élémentaire : on trouve la solution générale de l'équation homogène $y = A|x(x+2)|^{-1/2}$ puis par variation de la constante une solution particulière

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{2\,\mathrm{argsh}\sqrt{\frac{x}{2}}}{\sqrt{x(x+2)}} & x > 0 \\ -\dfrac{2\arcsin\sqrt{\frac{-x}{2}}}{\sqrt{-x(x+2)}} & -2 < x < 0 \end{cases}$$

C'est la seule solution bornée en 0, donc celle dont on a trouvé la représentation en série ci-dessus.

- Valeurs particulières:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(n!)^2}{(2n+1)!} = f\big(-\tfrac{1}{2}\big) = \frac{2\pi}{3\sqrt{3}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n (n!)^2}{(2n+1)!} = f\big(\tfrac{1}{2}\big) = \frac{4}{\sqrt{5}} \ln\Big(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\Big)$$

qu'on peut vérifier numériquement.