Mathématiques

Examen récapitulatif – 1re partie

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **4** questions équipondérées.
- Calculatrice et documentation interdites.

1. Quelles sont les valeurs extrêmes prises par
$$f(x,y) = x^4 + y^4 - 4xy \quad \text{sur} \quad \mathcal{D} = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x^4+y^4} \leqslant 2\,\} \ ?$$

2. Déterminer la trajectoire dans l'espace d'une particule, initialement en $(1,-1,0)$, dont le mouvement est régi par
$$\frac{\mathrm{d}}{\mathrm{d}t}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -1 & 0 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \\ 3 & 0 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}.$$

3. Les *fonctions bêta* et *gamma* sont définies pour $x, y > 0$ par les intégrales
$$B(x,y) = \int_0^1 s^{x-1}(1-s)^{y-1}\,\mathrm{d}s \quad \text{et} \quad \Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}\,\mathrm{d}t.$$
En considérant le changement de variables $u = st$, $v = (1-s)t$, établir l'identité
$$B(x,y)\cdot\Gamma(x+y) = \Gamma(x)\cdot\Gamma(y).$$

4. Montrer qu'il y a une unique solution analytique au voisinage de $x = 0$ à l'équation différentielle
$$4xf''(x) + f(x) + 2f'(x) = 0$$
satisfaisant $f(0) = 1$, et que celle-ci est donnée par
$$f(x) = \begin{cases} \cos\sqrt{x} & \text{pour } x \geqslant 0 \\ \operatorname{ch}\sqrt{-x} & \text{pour } x < 0. \end{cases}$$