$Ci^{2}_{\mathbb{R}}$ **Examen Maths** **Avril 2020**

NOM (en majuscules) - Prénom :

Dans l'anneau $\mathcal{M}_4(\mathbb{R})$ des matrices 4×4 à coefficients réels, on considère les matrices suivantes :

$$I=\begin{pmatrix}1&0&0&0\\0&1&0&0\\0&0&1&0\\0&0&0&1\end{pmatrix}\quad E=\begin{pmatrix}0&-1&0&0\\1&0&0&0\\0&0&0&1\\0&0&-1&0\end{pmatrix}\quad F=\begin{pmatrix}0&0&-1&0\\0&0&0&-1\\1&0&0&0\\0&1&0&0\end{pmatrix}\quad \text{et}\quad G=\begin{pmatrix}0&0&0&1\\0&0&-1&0\\0&1&0&0\\-1&0&0&0\end{pmatrix}$$

On notera que la famille $(I, E\ F, G)$ *est libre et donc que* $(aI+bE+cF+dG=0)\Leftrightarrow(a=b=c=d=0)$

Partie I

1. Vérifier que $E.F=G$, $E^2=-I$ et $F^2=-I$

   Calculer $F.E$ et $G.E$

$F.E=$	$G.E=$

Dans le reste de la partie I, on ne fera plus aucun calcul de matrice, mais on utilisera les résultats du 1.

2. Démontrer que $E.G=-F$. On précisera la propriété de la multiplication qu'on utilise.

$E.G=$

   Calculer de la même façon $F.G$, $G.F$ et G^2

$F.G=$ $\qquad$ $G.F=$ $\qquad$ $G^2=$

3. Soit $H=\{I, E, F, G, -I, -E, -F, -G\}$. En utilisant 1. et 2. compléter la table de multiplication :

   (d'abord les composées de *I, E, F, G* puis compléter en tenant compte des signes)

	I	E	F	G	$-I$	$-E$	$-F$	$-G$
I								
E								
F								
G								
$-I$								
$-E$								
$-F$								
$-G$								

4. Démonter que H est un groupe pour la multiplication (un sous-groupe du groupe des matrices inversibles)

5. Déterminer le sous-groupe de H engendré par E

sous-groupe engendré par $E = \langle E \rangle =$

6. Combien H a-t-il de sous-groupes d'ordre 4 ? d'ordre 2 ?

7. Combien H a-t-il de sous-groupes en tout ?

Partie II

1. Calculer $(E+F)^2$, $(I+E)^2$, $(I+E)^3$:

$(E+F)^2 =$

$(I+E)^2 =$

$(I+E)^3 =$

2. Soit $K = \{aI + bE + cF + dG \ / \ (a,b,c,d) \in \mathbb{R}^4\}$

C'est l'ensemble des combinaisons linéaires des matrices I, E, F et G.

Montrer que $(K,+,\times)$ est un sous-anneau de l'anneau $(\mathcal{M}_4(\mathbb{R}),+,\times)$

3. Soit $Q = aI + bE + cF + dG$ un élément de *K*. On notera $Q^* = aI - bE - cF - dG$.

Soit $V = bE + cF + dG$

Calculer V^2 puis $Q.Q^* = (aI+V)(aI-V)$

$V^2 =$

$QQ^* = (aI+V)(aI-V) =$

4. En déduire que si $Q \neq 0$, alors $Q.Q^* \neq 0$ et Q est inversible. Noter que son inverse est élément de *K*.

$(K,+,\times)$ est un corps non commutatif.

Partie III

Dans le groupe $\mathfrak{S}_8$ des permutations de $\{1,2,3,4,5,6,7,8\}$, on note $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 5 & 4 & 7 & 6 & 1 & 8 & 3 \end{pmatrix}$

et $\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 3 & 8 & 5 & 2 & 7 & 4 & 1 & 6 \end{pmatrix}$.

1. Calculer $\sigma_3 = \sigma_1 \quad \sigma_2$.

$\sigma_3 = \sigma_1 \quad \sigma_2 =$

2. Décomposer σ_1 en produits de cycles.
   En déduire $s = \sigma_1^{\,2}$ en produits de cycles.
   Calculer $\sigma_1^{\,4}$.

$\sigma_1 =$

$s = \sigma_1^{\,2} =$

$\sigma_1^{\,4} =$

3. Mêmes questions pour σ_2 et σ_3.

$\sigma_2 =$	$\sigma_3 =$
$\sigma_2^{\,2} =$	$\sigma_3^{\,2} =$
$\sigma_1^{\,4} =$	$\sigma_3^{\,4} =$

4. En déduire que $\sigma_2 \quad \sigma_1 = \sigma_3^{\,-1}$.

5. Montrer que $\left\{ id, \sigma_1, \sigma_2, \sigma_3, s, \sigma_1^{\,-1}, \sigma_2^{\,-1}, \sigma_3^{\,-1} \right\}$ est un goupe isomorphe à *H*.