CIR₂ CNB₂

Géométrie différentielle
Résumé de cours (II)

II - Courbes gauches

1 - Courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$

Une courbe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ c'est une application γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$.

On note $M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

Dans un repère orthonormé $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$, $\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}+z(t)\vec{j}$.

2 - Vecteur vitesse - Tangente

a/ Vecteur vitesse. Soit γ $[a,b]\to\mathbb{R}^3$ une courbe <u>de classe C¹</u> et $M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

le vecteur vitesse (au point t) est le vecteur $\dfrac{dM}{dt}=\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \\ z'(t) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \\ \frac{dz}{dt} \end{pmatrix}=\dfrac{dx}{dt}\vec{i}+\dfrac{dy}{dt}\vec{j}+\dfrac{dz}{dt}\vec{k}$

b/ Propriété

Si $\dfrac{dM}{dt}(t_0)\neq 0$, la courbe γ possède une tangente au point $M(t_0)$, de vecteur directeur $\dfrac{dM}{dt}(t_0)$.

Si $\forall t\in[a,b]$ / $\dfrac{dM}{dt}(t)\neq 0$, on dit que la courbe est régulière. En tout point elle a une tangente.

3 - Vecteur accélération - Plan osculateur

a/ Le vecteur accélération (au point t) est le vecteur $\dfrac{d^2M}{dt^2}=\begin{pmatrix} x''(t) \\ y''(t) \\ z''(t) \end{pmatrix}=\dfrac{d^2x}{dt^2}\vec{i}+\dfrac{d^2y}{dt^2}\vec{j}+\dfrac{d^2z}{dt^2}\vec{k}$

b/ Si $\forall t\in[a,b]$ / $\dfrac{d^2M}{dt^2}$ // $\dfrac{dM}{dt}$ $\left(\text{i.e.}\dfrac{d^2M}{dt^2}\wedge\dfrac{dM}{dt}=0\right)$, alors la courbe est un segment de droite.

c/ Si $\forall t\in[a,b]$ / $\dfrac{d^3M}{dt^3}$ est dans le plan contenant $\dfrac{dM}{dt}$ et $\dfrac{d^2M}{dt^2}$ $\left(\text{ i.e. }\det\left(\dfrac{dM}{dt},\dfrac{d^2M}{dt^2},\dfrac{d^3M}{dt^3}\right)=0\right)$,

alors la courbe est contenue dans un plan. : c'est en fait une courbe plane.

d/ Si $\dfrac{d^2M}{dt^2}(t_0)$ n'est pas parallèle à $\dfrac{dM}{dt}(t_0)$, le plan défini par le point $M(t_0)$ et les vecteurs $\dfrac{dM}{dt}(t_0)$ et $\dfrac{d^2M}{dt^2}(t_0)$ est appelé <u>plan osculateur</u> de la courbe en $M(t_0)$. En ce point, l'approximation au 2$^{\text{ème}}$ ordre de la courbe est une courbe plane contenue dans ce plan : $M(t_0+h)=M(t_0)+h.\dfrac{dM}{dt}(t_0)+\dfrac{h^2}{2}.\dfrac{d^2M}{dt^2}(t_0)$

4 - Longueur d'une courbe de l'espace de classe C¹

a/ Définition : comme pour une courbe plane, on définit la longueur d'une courbe de l'espace comme limite des longueurs des lignes polygonales s'appuyant sur la courbe.

b/ Théorème : Si $\gamma:[a,b]\to\mathbb{R}^3$ est de classe C¹ alors elle est mesurable et sa longueur est :

$$\boxed{\int_a^b\|\gamma'(t)\|\mathrm{d}t=\int_a^b\left\|\frac{dM}{dt}\right\|\mathrm{d}t=\int_a^b\sqrt{(x'(t))^2+(y'(t))^2+(z'(t))^2}\,\mathrm{d}t}$$