CIR2 CNB2 — Interrogation 5 — 12 Décembre 2019

Interrogation 5
Courbes - Surfaces

NOM	Prénom	Classe

Durée 45 minutes

Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable

Inscrire les réponses aux endroits indiqués sur la feuille d'énoncé, sans râture ni surcharge (utiliser un brouillon !)

1. Calculer un vecteur tangent à la courbe $M(t)=\begin{pmatrix} x(t)=e^t\sin t \\ y(t)=e^t\cos t \\ z(t)=\tan t\end{pmatrix}$ au point $M(t)$.

$$\vec{T}=\frac{dM}{dt}=\begin{pmatrix} e^t\sin t+e^t\cos t \\ e^t\cos t-e^t\sin t \\ 1+\tan^2 t\end{pmatrix}$$

2. Calculer un vecteur tangent à la courbe polaire $\rho=\cos(3\theta)$ au point $M(\theta)$.

   On pourra poser $\vec{r}=\begin{pmatrix}\cos\theta \\ \sin\theta\end{pmatrix}$ et $\vec{n}=\begin{pmatrix}-\sin\theta \\ \cos\theta\end{pmatrix}$

$$\overrightarrow{OM}=\rho\vec{r} \text{ donc } \frac{dM}{d\theta}=\frac{d\rho}{d\theta}\vec{r}+\rho\frac{d\vec{r}}{d\theta}=-3\sin(3\theta)\vec{r}+\cos(3\theta)\vec{n}=\begin{pmatrix}-3\sin(3\theta)\cos\theta-\cos(3\theta)\sin\theta \\ -3\sin(3\theta)\sin\theta+\cos(3\theta)\cos\theta\end{pmatrix}$$

3. Définition de l'abscisse curviligne du point $M(t)$ sur une courbe plane $M(t)=\begin{pmatrix}x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}$, $t\in[a,b]$,

   en prenant comme origine le point $M(a)$.

$$s(t)=\int_{u=a}^{t}\left\|\frac{dM}{dt}\right\|_{t=u}du=\int_{u=a}^{t}\sqrt{x'(u)^2+y'(u)^2}\,du$$

4. Formule de calcul de l'abscisse du centre de gravité

   d'une courbe plane $M(t)=\begin{pmatrix}x(t) \\ y(t)\end{pmatrix}$, $t\in[a,b]$

$$x_G=\frac{\int_\gamma x\,ds}{\int_\gamma ds}=\frac{\int_a^b x(t)\left\|\frac{dM}{dt}\right\|dt}{L}$$

5. Calculer la longueur de la courbe $\begin{pmatrix}x(t)=t^2\cos t \\ y(t)=t^2\sin t \\ z(t)=2t\end{pmatrix}$, $t\in[0\,,1]$

$$\frac{dM}{dt}=\begin{pmatrix}-t^2\sin t+2t\cos t \\ t^2\cos t+2t\sin t \\ 2\end{pmatrix},\ \left\|\frac{dM}{dt}\right\|^2=t^4+4t^2+4,\ \left\|\frac{dM}{dt}\right\|=t^2+2_{\text{(positif !)}},\ L=\int_0^1(t^2+2)dt=\frac{1}{3}+2=\mathbf{\frac{7}{3}}$$

6. Calculer l'aire de la nappe paramétrée $\begin{pmatrix}x=\cos u \\ y=\sin u \\ z=u\cos v\end{pmatrix}$, $u\in[-1\,,1]$, $v\in[0\,,\pi]$

$$\frac{dM}{du}=\begin{pmatrix}-\sin u \\ \cos u \\ \cos v\end{pmatrix},\ \frac{dM}{dv}=\begin{pmatrix}0 \\ 0 \\ -u\sin v\end{pmatrix},\ \vec{N}=\frac{dM}{du}\wedge\frac{dM}{dv}=\begin{pmatrix}-u\sin v\cos u \\ -u\sin v\sin u \\ 0\end{pmatrix}=-u\sin v\begin{pmatrix}\cos u \\ \sin u \\ 0\end{pmatrix},\ \|\vec{N}\|=|u\sin v|$$

$$Aire=\int_{u=-1}^{1}\int_{v=0}^{\pi}|u\sin v|\,dv\,du\underset{\text{(variables séparées)}}{=}\int_{u=-1}^{1}|u|\,du\int_{v=0}^{\pi}\sin v\,dv=2\int_{u=0}^{1}u\,du\int_{v=0}^{\pi}\sin v\,dv=\mathbf{2}$$