Répondez directement sur l'énoncé en **détaillant vos calculs** et **justifiant vos raisonnements**.

Nom:

1. Prolongement de la fonction racine carrée réelle : considérons la fonction complexe définie, pour $\operatorname{Re} z > 0$, par

$$s(z) := \sqrt{|z|} \cdot e^{\frac{j}{2}\operatorname{Arg}(z)} \qquad \text{avec } \operatorname{Arg}(z) := \operatorname{Arctan}\left(\frac{\operatorname{Im} z}{\operatorname{Re} z}\right).$$

   a) Vérifier que s satisfait bien $s(z)^2 = z$ partout sur son domaine et que $s(x) = \sqrt{x}$ lorsque $x \in \mathbf{R}_{>0}$.

   b) Montrer que s est analytique en vérifiant que les équations de Cauchy-Riemann sont satisfaites.

2. Soit f une fonction analytique au voisinage de $z = 0$ satisfaisant

$$f'(z) = \frac{1}{2f(z)} \qquad \text{et} \qquad f(0) = 1.$$

(a) En calculant les dérivées successives de f, établir le développement en série entière

$$f(z) = 1 + \frac{1}{2}z - \frac{1}{8}z^2 + \frac{1}{16}z^3 - \frac{5}{128}z^4 + \cdots = 1 + \frac{z}{2}\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{4^n(n+1)}\binom{2n}{n} z^n$$

(b) Quel est le domaine de convergence de cette série ?

Remarque : Si s est comme dans la question précédente, alors $f(z) := s(1+z)$ est comme dans celle-ci.

En d'autres termes, il s'agit ici de (ré-)établir le développement en série de la branche principale de $\sqrt{1+z}$.

3. Considérons la fonction génératrice des nombres de Catalan $C(z) = 1 + z + 2z^2 + 5z^3 + \cdots = \sum_{n=0}^{\infty} C_n\, z^n$.

a) Sachant que $C_n \sim \dfrac{4^n}{\sqrt{\pi}\, n^{\frac{3}{2}}}$ quand $n \to +\infty$, quel est le domaine de convergence de cette série ?

b) À l'aide des questions précédentes et l'expression

$$C(z) = \frac{1 - s(1-4z)}{2z},$$

conclure que $C_n = \dfrac{1}{n+1}\dbinom{2n}{n}$ et vérifier la cohérence du rayon de convergence trouvé en a).

4. Culture générale : qui se cache derrière ce masque ?

Si vous ne savez pas, pendant les vacances, rendez un employé municipal heureux en allant lui poser la question.