CiR2 Eléments de correction des exercices du TD Groupes (suite)

EXERCICE 1 :

1. Rappel : Si $(G_1,*)$ et $(G_2,\star)$ sont deux groupes, on peut définir le groupe produit $(G_1\times G_2,\bullet)$ où la loi $\bullet$ est définie par $(x_1,x_2)\bullet(x_1',x_2')=\big(x_1*x_1',x_2\star x_2'\big)$

   A partir des deux groupes $(\mathbb{R},+)$ et $(\mathbb{R}^\times,.)$ on obtient le groupe produit $(\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times,\bullet)$.

   Montrons que φ est un morphisme de groupes :

   Pour tout élément (x,y) et (x',y') de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$:

   $\varphi\big((x,y)\bullet(x',y')\big)=\varphi\big((x+x',yy')\big)=\big(\ln|yy'|,sg(yy')e^{x+x'}\big)=\big(\ln(|y||y'|),sg(y)sg(y')e^{x+x'}\big)$

   $\varphi\big((x,y)\bullet(x',y')\big)=\big(\ln|y|+\ln|y'|,sg(y)e^{x}sg(y')e^{x'}\big)=\big(\ln|y|,sg(y)e^{x}\big)\bullet\big(\ln|y'|,sg(y')e^{x'}\big)$

   Donc $\varphi\big((x,y)\bullet(x',y')\big)=\varphi\big(x,y)\bullet\varphi(x',y'\big)$.

   On a également pour tout élément $(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times,\quad \varphi(x,y)\in\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$.

   Conclusion : φ est un endomorphisme de groupes.

2. Pour tout élément (x,y) de R$\times\mathbb{R}^\times$ on a $\varphi\ (x,y)=\big(\ln|y|,sg(y)e^{x}\big)$

Si $y>0$ alors $sg(y)=1$ et $\varphi(x,y)=\big(\ln y,e^{x}\big)$ d'où $\varphi\circ\varphi(x,y)=\big(\ln e^{x},sg(e^{x})e^{\ln y}\big)=(x,y)$

Si $y<0$ alors $sg(y)=-1$ et $\varphi(x,y)=\big(\ln(-y),-e^{x}\big)$
et $\varphi\circ\varphi(x,y)=\big(\ln|-e^{x}|,sg(-e^{x})e^{\ln(-y)}\big)=\big(x,-(-y)\big)=(x,y)$

On a donc pour tout élément (x,y) de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$, $\varphi\circ\varphi(x,y)=(x,y)$

Conclusion : φ est involutive donc bijective de R$\times\mathbb{R}^\times$ dans R$\times\mathbb{R}^\times$ et par suite c'est un automorphisme de R$\times\mathbb{R}^\times$.

EXERCICE 2 :

1. Si on note φ_1 cette application alors pour tout éléments x et x' appartenant à $\mathbb{R}^\times$:

   $\varphi_1(xx')=\dfrac{xx'}{|xx'|}=\dfrac{x}{|x|}\dfrac{x'}{|x'|}=\varphi_1(x)\varphi_1(x')$.

   Si x appartient au noyau de φ_1 alors $x\in\mathbb{R}^\times$ et $\varphi_1(x)=\dfrac{x}{|x|}=1$.

   D'où $x=|x|$ et donc $x\in\mathbb{R}_+^\times$

   Réciproquement, si $x\in\mathbb{R}_+^\times$, alors montrons que $\varphi_1(x)=1$:
   En effet dans ce cas, $x=|x|$ et $\varphi_1(x)=\dfrac{x}{|x|}=\dfrac{x}{x}=1$.

   Conclusion : le noyau de φ_1 est $\mathbb{R}_+^\times$.

Si y appartient à l'image de φ_1 alors $y \in \mathbb{R}^\times$ et il existe $x \in \mathbb{R}^\times$ tel que $\varphi_1(x) = \dfrac{x}{|x|} = y$.

Or $\dfrac{x}{|x|} \in \{-1, 1\}$ d'où nécessairement $y \in \{-1, 1\}$

Réciproquement, si $y \in \{-1, 1\}$ alors on peut trouver au moins un antécédent $x \in \mathbb{R}^\times$ tel que $y = \varphi_1(x) = \dfrac{x}{|x|}$.
En effet si $y = 1$ alors tout $x \in \mathbb{R}_+^\times$ convient et si $y = -1$ alors tout $x \in \mathbb{R}_-^\times$ convient.

L'image de φ_1 est donc $\{-1, 1\}$

2. On note φ_2 cette application.

   On utilise la même démonstration (question 1) pour montrer que φ_2 est un morphisme de groupes puisque ici on généralise dans $\mathbb{C}^\times$

   Si z appartient au noyau de φ_2 alors $z \in \mathbb{C}^\times$ et $z = |z|$ d'où $z \in \mathbb{R}_+^\times$

   Réciproquement, si $z \in \mathbb{R}_+^\times$, alors $\varphi_2(z) = \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{z}{z} = 1$
   Le noyau de φ_2 est donc $\mathbb{R}_+^\times$

   Si z appartient à l'image de φ_2 alors $z \in \mathbb{C}^\times$ et il existe $w \in \mathbb{C}^\times$ tel que $\varphi_2(w) = \dfrac{w}{|w|} = z$.

   D'où nécessairement $z \in \mathbb{U} = \big\{z \in \mathbb{C} \mid |z| = 1\big\}$.

   Réciproquement, si $z \in \mathbb{U}$ alors on peut trouver au moins un antécédent $\omega \in \mathbb{C}^\times$ tel que $z = \varphi_2(w) = \dfrac{w}{|w|}$
   En effet, en posant $w = \lambda z$ avec $\lambda \in \mathbb{R}_+^\times$ on a bien $\omega \in \mathbb{C}^\times$ et $\varphi_2(w) = \dfrac{\lambda z}{|\lambda z|} = \dfrac{\lambda z}{\lambda} = z$ d'après $|\lambda| = \lambda$ et $|z| = 1$ puisque $z \in \mathbb{U}$.

   L'image de φ_2 est donc U.

Exercice 3 :

1. Notons φ cette application alors pour tous éléments $z, z' \in \mathbb{C}^\times$:
   $\varphi(zz') = \left(|zz'|, \dfrac{zz'}{|zz'|}\right) = \left(|z|, \dfrac{z}{|z|}\right) \bullet \left(|z'|, \dfrac{z'}{|z'|}\right) = \varphi(z) \bullet \varphi(z')$.
   Donc φ est un morphisme de groupes.

2. Montrons que φ est une bijection de $\mathbb{C}^\times$ dans $\mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{U}$

<u>Injectivité</u> :

Soient $z, z' \in \mathbb{C}^\times$ tels que $\varphi(z) = \varphi(z') \Leftrightarrow \begin{cases} z, z' \in \mathbb{C}^\times \\ |z| = |z'| \\ \dfrac{z}{|z|} = \dfrac{z'}{|z'|} \end{cases}$

Ainsi après résolution on obtient en particulier : $\varphi(z) = \varphi(z') \Rightarrow z = z'$.

Surjectivité :

Soit $y = (u, v) \in \mathbb{R}_+^\times \times \mathbb{U}$.
Analyse : s'il existe $z \in \mathbb{C}^\times$ vérifiant $\varphi(z) = y$ alors ceci implique, après la résolution du système $\left\{ \begin{array}{l} |z| = u \\ \dfrac{z}{|z|} = v \end{array} \right.$ que $z = uv \in \mathbb{C}^\times$
Synthèse : si on pose $z = uv$, on a bien $z \in \mathbb{C}^\times$ et $\varphi(z) = (u, v) = y$.
.

Conclusion : φ est bien un isomorphisme de groupes.

Exercice 4 :

Soit G un groupe. On suppose $\forall x \in G, \quad x^2 = 1_G$.

Pour tout $x, y \in G, \quad xy \in G$, par conséquent $(xy)^2 = 1_G$.

La loi étant associative on a : $1_G = (xy)^2 = (xy)(xy) = xyxy$

En composant simultanément dans les deux membres de l'égalité à gauche par x puis à droite par y, on obtient :

$x1_Gy = x(xyxy)y$. soit $xy = x^2yxy^2 = 1_Gyx1_G = yx$.

G est donc un groupe commutatif.

Exercice 5 :

1. Soit g un élément fixé de G. Pour tout $x \in G$, on a bien $gx \in G$

   Montrons μ_g est une injection de G dans G :

   S'il existe deux éléments x et x' de G tels que $\mu_g(x) = \mu_g(x')$ alors $gx = gx'$.

   En composant par g^{-1} l'inverse de g dans G, on obtient par associativité de la loi :

   $g^{-1}gx = g^{-1}gx'$ d'où $1_Gx = 1_Gx'$ soit $x = x'$

Montrons μ_g est une surjection de G sur G :
Soit h un élément quelconque de G. En posant $x = g^{-1}h \in G$, on a $x \in G$ et$\mu_g(x) = gg^{-1}h = h$, x est donc un antécédent de h par l'application μ_g

Conclusion : on montré que pour tout $g \in G$ fixé, l'application μ_g est surjective et injective de G sur G : μ_g est donc une permutation de G.

Pour $g \in G$ fixé, on définit l'application $\mu_{g^{-1}}$ par :
$\mu_{g^{-1}} : \left\{ \begin{array}{l} G \longrightarrow G \\ x \longmapsto g^{-1}x \end{array} \right.$

On vérifie que $\mu_{g^{-1}} \circ \mu_g = \mu_g \circ \mu_{g^{-1}} = id_G$ où id_G est l'application identité de G qui à tout élément $g \in G$ associe g.

On note S_G l'ensemble des permutation de G et on définit l'application μ par :

$$\mu : \begin{cases} G \longrightarrow \mathcal{S}_\mathcal{G} \\ g \longmapsto \mu_g \end{cases}$$

Montrons que μ est un morphisme de groupes :
Soient g, g' appartenant à G :
Pour tout $x \in G$: $\mu(gg')(x) = \mu_{gg'}(x) = (gg')x = g(g'x) = g(\mu_{g'}(x)) = \mu_g(\mu_{g'}(x)) = \mu_g \circ \mu_{g'}(x)$
Ainsi $\forall g, g' \in G$, $\mu(gg') = \mu(g) \circ \mu(g')$.

μ étant un morphisme de G dans $\mathcal{S}_\mathcal{G}$, pour montrer que μ est injective il suffit de montrer que le noyau de μ est réduit à $\{1_G\}$.

Soit $g \in G$ tel que $\mu(g) = id_{\mathcal{S}_\mathcal{G}}$ où $id_{\mathcal{S}_\mathcal{G}}$ est la permutation identité qui est l'élément neutre du groupe $\mathcal{S}_\mathcal{G}$.
On a donc pour tout $x \in G$: $\mu(g)(x) = id_{\mathcal{S}_\mathcal{G}}(x) \Leftrightarrow \mu_g(x) = x \Leftrightarrow gx = x \Leftrightarrow g = xx^{-1} = 1_G$.
Donc le noyau de μ est inclus dans $\{1_G\}$ et puisque $\mu(1_G) = id_{\mathcal{S}_\mathcal{G}}$ (vérifiez !) on a bien par double inclusion que $Ker\mu = \{1_G\}$.

Notons $\overrightarrow{\mu}(G)$ l'image de G dans $\mathcal{S}_\mathcal{G}$ (voir TD précédent sur les groupes).
μ est surjective de G sur $\overrightarrow{\mu}(G)$, étant de plus injective de G sur $\mathcal{S}_\mathcal{G}$ donc sur $\overrightarrow{\mu}(G)$, on en déduit que μ est bijective de G sur $\overrightarrow{\mu}(G)$.

Conclusion : μ est un isomorphisme de G sur $\overrightarrow{\mu}(G)$ qui est un sous groupe de $\mathcal{S}_\mathcal{G}$ (voir TD précédent sur les groupes) Donc G bien est isomorphe à un sous groupe de $\mathcal{S}_\mathcal{G}$.

Exercice 6 :

1. Deux choses sont à vérifier :
   (a) $\forall x \in G$, $1_G \star x = x$
   (b) $\forall (g_1, g_2) \in G^2$, $\forall x \in G$: $(\mathrm{g}_1.g_2) \star x = g_1 \star (g_2 \star x)$

   (a) $\forall x \in G$ puisque 1_G est son propre symétrique dans G alors :
   $\forall x \in G : 1_G \star x = 1_G x 1_G = x$
   (b) $\forall (g_1, g_2) \in G^2$, $\forall x \in G$:
   $(g_1.g_2) \star x = g_1.g_2 x (g_1.g_2)^{-1} = g_1.g_2 x g_2^{-1} g_1^{-1} = g_1(g_2 x g_2^{-1}) g_1^{-1} = g_1(g_2 \star x) g^{-1} = g_1 \star (g_2 \star x)$

2. Dans le cas où $G = S_3$, explicitons les orbites pour cette action :
   Les orbites sont des classes d'équivalence pour la relation R suivante $xRy \Leftrightarrow$ il existe $g \in G$ tel que $y = gxg^{-1}$ donc elles partitionnent S_3 et le stabilisateur d'un élément de S_3 est un sous groupe de S_3 donc il contient i_d.

   Pour $\sigma \in S_3$ et (i, j, k) un cycle de S_3, on a $\sigma(i, j, k)\sigma^{-1} = (\sigma(i), \sigma(j), \sigma(k))$
   Ainsi l'orbite de l'identité i_d est $\{i_d\}$ et $\mathrm{Stab}(i_d) = S_3$ puisque $\forall \sigma \in S_3$ on a $\sigma i_d \sigma^{-1} = i_d$

   L'orbite des transpositions est constituée de $\{(1, 2), (1, 3), (2, 3)\}$ avec $\mathrm{Stab}(i, j) = \{i_d, (i, j)\}$ et l'orbite des 3-cycles est $\{(1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ avec $\mathrm{Stab}(1, 2, 3) = \{id, (1, 2, 3), (1, 3, 2)\}$ (A vérifier)

Pour les exercices 7 et 8, on fait agir un groupe d'isométries G sur un ensemble X :
Pour les roulettes : G est engendré par une rotation ρ d'angle $\frac{2\pi}{12} = \frac{\pi}{6}$ et X est l'ensemble des coloriages possibles avec les couleurs bleu, vert ou rouge
Pour les colliers de perles : G laisse invariant les sommets d'un dodécagone régulier, il est composé de 12 rotations et de 12 symétries axiales et X est l'ensemble des partitions possibles de l'ensemble des sommets du décagone régulier
Pour les boites de chocolats : G est engendré par une rotation d'angle $\frac{2\pi}{6} = \frac{\pi}{3}$ et X est l'ensemble des assortiments possibles.

Par exemple le nombre de colliers différents est exactement le nombre d'orbites dans l'action de G sur X.

On utilise l'isomorphisme μ entre G et S_X qui à g associe μ_g définie par :
$\forall x \in X$, $\mu_g(x) = g(x)$ (voir exercice 5) pour identifier les isométries de G et les permutations de S_X.

Exercice 7 :

1. Ainsi on identifie :
   $\rho \mapsto (1,2,3,4,5,6,7,8,9,10,11,12)$
   $\rho^2 \mapsto (1,3,5,7,9,11)(2,4,6,8,10,12)$
   $\rho^3 \mapsto (1,4,7,10)(2,5,8,11)(3,6,9,12)$
   $\rho^4 \mapsto (1,5,9)(2,6,10)(3,7,11)(3,6,9)(4,8,12)$
   $\rho^5 \mapsto (1,5,9)(2,6,10)(3,7,11)(3,6,9)(4,8,12)$
   $\rho^6 \mapsto (1,6,11,4,9,2,7,12,5,10,3,8)$

   Par conséquent puisque $(\rho^k)^{-1} = \rho^{12-k}$ et $|Fix(\rho^k)| = |Fix((\rho^k)^{-1})|$, on a :

   Rotations d'ordre 1 :
   $|Fix(I_d)| = \binom{12}{2,3,7} = 7920$
   Rotations d'ordre 12 : $|Fix(\rho)| = 0 = |Fix(\rho^{11})|$

   Rotations d'ordre 6 : $|Fix(\rho^2)| = 0$

   Rotations d'ordre 4 : $|Fix(\rho^3)| = 0 = |Fix(\rho^9)|$

   Rotations d'ordre 3 : $|Fix(\rho^4)| = 0 = |Fix(\rho^8)|$

   Rotations d'ordre 12 : $|Fix(\rho^5)| = 0 = |Fix(\rho^7)|$

   Rotations d'ordre 2 : $|Fix(\rho^6)| = 0$

   Donc, d'après le théorème de Cauchy-Frobenius, le nombre de roulettes différentes est égal à :

   $$\frac{1}{|G|}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = \frac{1}{12} \times 7920 = 660$$

2. Correction demain

Exercice 8 :

Ainsi on identifie :

$\rho \mapsto (1,3,5,7,9,11)(2,4,6,8,10,12)(13,14,15,16,17,18)$

$\rho^2 \mapsto (1,5,9)(3,7,11)(2,6,10)(4,8,12)(13,15,17)(14,16,,18)$

$\rho^3 \mapsto (1,7)(3,9)(5,11)(2,8)(4,10)(6,12)(13,16)(14,17)(15,18)$

Puisque ρ ne laisse fixe que 19 et est associé à une décomposition en 6-cycles à supports disjoints : en 19 ne peut être placé qu'un praliné.

$$|Fix(I_d)| = \binom{19}{6,6,7} = 46558512$$

$$|Fix(\rho)| = |Fix(\rho^5)| = \binom{3}{1,1,1} = 6$$

$$|Fix(\rho^2)| = |Fix(\rho^4)| = \binom{6}{2,2,2} = 90$$

$$|Fix(\rho^3)| = \binom{9}{3,3,3} = 1680$$

Donc, d'après le théorème de Cauchy-Frobenius, le nombre d'assortiments différents est égal à :

$$\frac{1}{6}\sum_{g\in G}|Fix(g)| = \frac{1}{6}(46558512 + 2\times 6 + 2\times 90 + 1680) = 7760064$$