Cours de Physique
Semestre 4

Physique des ondes

Dr. Vivien L. Scottez CIR/CNB 2 2020-2021

Comment utiliser ce cours ?

L'objectif de ce poly de cours est de vous fournir ce qui, je l'espère, sera la colonne vertébrale de votre apprentissage de l'électromagnétisme. Il s'agit d'un poly "à trous". L'idée générale est que vous puissiez le lire et essayer de compléter les trous AVANT la séance de cours - au crayon gris/de bois/à papier selon votre région d'origine - de façon à ce que le temps que nous passons ensemble soit essentiellement un temps d'échange tourné vers la compréhension des notions. Cela se fera à travers : les explications supplémentaires que *je* donnerai, les démonstrations que *je* ferai, les petits exercices d'illustrations que *nous* ferons, les évaluations formatives (non notées) que *nous* ferons et évidemment les questions que *vous* poserez.

Si le cœur de ce que doit contenir un cours d'électromagnétisme se trouve dans ce poly, il ne dispense absolument pas de venir en cours et de prendre des notes et cela même si les "trous" sont déjà complétés. Au fil des explications et des questions que vous poserez, il est plus que probable que je présenterai *à l'oral* telle ou telle approche qui vous permettra à vous individuellement de mieux comprendre certains points. C'est à ce moment-là qu'intervient l'importance de la prise de notes. La marge conséquente se trouvant tout le long du poly est prévue pour cela. Utilisez-la comme bon vous semble, cet espace est le vôtre car ce cours l'est aussi.

C'est la première fois que je mets en place ce type de fonctionnement, j'espère que cela vous conviendra. Évidemment, toutes les remarques me permettant de mieux répondre à vos attentes et besoins sont les bienvenues.

Chapitre 1

Signaux physiques

Notes personnelles

I Oscillateur harmonique : rappels

On appelle signal physique une grandeur physique dépendant du temps. Dans cette partie du cours, on s'intéressera surtout à des signaux ....
Un signal périodique est un signal qui se reproduit identique à lui-même au cours du temps. Le plus fondamental des signaux périodiques est le signal sinusoïdal.

Dans ce chapitre on revient sur un modèle physique qui produit un signal sinusoïdal appelé l'oscillateur harmonique.

Remarque : Les adjectifs harmonique et sinusoïdal sont synonymes.

I.1 Un oscillateur harmonique mécanique

On appelle oscillateur harmonique un système physique décrit par une grandeur $x(t)$ dépendant du temps et vérifiant une équation différentielle de la forme :

$$\boxed{\frac{\mathrm{d}^2x}{\mathrm{d}t^2} = -\omega_0^2.x(t)}$$

où ω_0 est une constante réelle positive qui est appelée : .... de l'oscillateur harmonique et qui s'exprime en rad.s^{-1}.
La solution d'une telle équation est de la forme :

$$\boxed{x(t) = a\cos(\omega_0 t) + b\sin(\omega_0 t)}$$

où a et b sont des constantes fixées par les ....
Exemples de systèmes physiques : masse acrochée à un ressort, pendule simple, circuit LC...

I.2 Signal sinusoïdal

a. Définition

Un signal sinusoïdal est un signal de la forme :

$$\boxed{s(t) = A\cos(\omega t + \varphi)}$$

où A et ω sont des constantes positives et φ une constante. ω est la pulsation du signal, A son amplitude, et φ sa phase initiale.

Remarque : Cette forme est totalement équivalente à : $s(t) = a\cos(\omega t) + b\cos(\omega t)$ et l'amplitude vaut : $A = \sqrt{a^2 + b^2}$.

b. Phase instantanée, phase initiale, période, fréquence

L'argument de la fonction cosinus est appelé phase instantanée.

Le signal oscille entre $-A$ et $+A$ (il vaut A quand la phase instantanée est égale à $2n\pi$ avec n un entier).

La phase initiale φ donne la valeur de départ du signal à $t = 0$. Elle dépend de l'origine des temps choisie.

Un signal physique $s(t)$ est périodique s'il se répète dans le temps. Sa période T est la plus petite durée telle que :

$$s(t + T) = s(t)$$

La fréquence f du signal :

$$\boxed{f = \frac{1}{T}}$$

est le nombre de répétitions du signal par unité de temps.

La période T se mesure en secondes, la fréquence f se mesure en hertz.

Important : La période d'un signal sinusoïdal est reliée à sa pulsation ω par :

$$\boxed{T = \frac{2\pi}{\omega}}$$

Sa fréquence est donc reliée à la pulsation par :

$$\boxed{f = \frac{\omega}{2\pi}}$$

II Propagation d'un signal

II.1 Signaux physiques, spectre

a. Ondes et signaux physiques

Première définition d'une onde : On appelle onde un phénomène physique dans lequel une perturbation locale se .... dans l'espace sans qu'il y ait de déplacement de matière en moyenne. Toute grandeur physique, nulle dans l'état de repos et apparaissant avec la perturbation, est appelée signal physique transporté par l'onde.

Exemples d'ondes :

b. Notion de spectre

En général, le signal d'une onde n'est pas sinusoïdal. Cependant, une théorie mathématique due à Joseph Fourier, mathématicien et physicien du début du $XIX^{\text{ème}}$ siècle, montre que tout signal réalisable en pratique peut être décomposé en une somme de signaux sinusoïdaux.

L'opération qui consiste à déterminer les signaux sinusoïdaux composant un signal donné est appelée : analyse spectrale. Le résultat de l'analyse spectrale est :

- la liste des fréquences f_i des composantes sinusoïdales contenues dans le signal,
- l'amplitude A_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i,
- la phase initiale φ_i de chaque composante sinusoïdale de fréquence f_i.

Elle permet de savoir que le signal s'écrit :

$$\boxed{s(t) = \sum_i A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)}$$

Chaque signal sinusoïdal $s_i(t) = A_i \cos(2\pi f_i t + \varphi_i)$ est une composante sinusoïdale du signal $s(t)$. On dit que le signal $s(t)$ "contient les fréquences f_i". Le spectre du signal est l'ensemble des fréquences contenues dans le signal.
Exemple :

c. Cas d'un signal périodique de forme quelconque

Tout signal périodique de fréquence f_S et de forme quelconque peut se reconstituer par la superposition de signaux sinusoïdaux de fréquence multiples de f_S : 0, f_S, $2f_S$, ... , nf_S, ... Il peut donc s'écrire sous la forme :

$$\boxed{s(t) = A_0 + \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)}$$

où les A_n sont des constantes positives et les φ_n des constantes.

Remarques :
i) On reconnait le développement en série de Fourier du signal $s(t)$.
ii) L'usage a consacré des noms pour les différents termes qui apparaissent dans la série de Fourier :

— A_0 est appelée composante continue. C'est la moyenne du signal. (Dans le cas du signal d'une onde, le plus souvent $A_0 = 0$).
— La composante sinusoïdale $A_1 \cos(2\pi f_S t + \varphi_1)$ qui a la même fréquence f_S que le signal $s(t)$ est appelée fondamental.
— La composante sinusoïdale $A_n \cos(2\pi n f_S t + \varphi_n)$ qui a une fréquence n fois plus élevée que la fréquence du signal, avec $n \geq 2$ est appelée harmonique de rang n.

Exemple du spectre d'un signal :.

d. Cas d'un signal non périodique (pas au programme)

La théorie de la transformée de Fourier montre qu'il est possible de reconstituer tout signal physique, même non périodique, par superposition de signaux sinusoïdaux. La différence avec le cas des signaux périodiques est que les fréquences f des composantes sinusoïdales peuvent prendre toutes les valeurs de 0 à l'infini.

La décomposition d'un signal non périodique s'écrit sous la forme :

$$s(t) = \int_0^{\infty} A(\omega) \cos(\omega t + \varphi(\omega)) \mathrm{d}\omega$$

II.2 Phénomène de propagation

Lorsqu'une onde se déplace (pierre dans un étang, son...) on dit qu'elle se propage. La vitesse de déplacement du signal est appelée vitesse de propagation ou encore .... Dans la suite on note la célérité c. Attention, c désigne la vitesse de propagation de l'onde et pas la vitesse de la lumière.

Une onde qui se propage est appelée une onde ....

a. Onde progressive : première approche

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox), *dans le sens positif* de cet axe, sans atténuation ni déformation, a pour expression :

$$s(x,t) = f(t - \frac{x}{c})$$

où f est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox), *dans le sens négatif* de cet axe, sans atténuation ni déformation, a pour expression :

$$s(x,t) = g(t + \frac{x}{c})$$

où g est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'un temps.

b. Onde progressive : deuxième approche

Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox), *dans le sens positif* de cet axe, sans atténuation ni déformation, a pour expression :

$$s(x,t) = F(x - ct)$$

où F est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.
Une onde progressive se propageant à la vitesse c dans la direction de l'axe (Ox), *dans le sens négatif* de cet axe, sans atténuation ni déformation, a pour expression :

$$s(x,t) = G(x + ct)$$

où g est une fonction quelconque dont l'argument a la dimension d'une longueur.

c. Onde progressive sinusoïdale

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation ω se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) avec la vitesse c a pour expression :

$$\boxed{s(x,t) = A_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}}$$

k est appelé le .... A_0 est l'amplitude de l'onde et φ_0 sa phase initiale à l'origine.
Ainsi l'onde progressive sinusoïdale est une fonction sinusoïdale à la fois :
— du temps (pour x fixé) avec une pulsation temporelle ω.
— de la variable spatiale x (pour t fixé) avec une pulsation spatiale k.

On parle de la double prériodicité spatio-temporelle de l'onde.
De même que la période temporelle est : $T = 2\pi/\omega$, la période spatiale est la longueur d'onde : $\lambda = 2\pi/k = 2\pi c/\omega = cT$.
La fréquence spatiale est le nombre d'onde : $\sigma = 1/\lambda$.

Une onde progressive sinusoïdale se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) peut alors également s'écrire :

$$\boxed{s(x,t) = A_0 \cos(2\pi(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}) + \varphi_0)}$$

Les grandeurs relatives à la double périodicité spatio-temporelle de l'onde progressive sinusoïdale sont rassemblées dan le tableau suivant.

	Période	Fréquence	Pulsation
Temps	T	f	ω
Espace	λ	σ	k

Il faut savoir passer de l'une à l'autre sans difficulté.

Interprétation physique :

La courbe représentant l'onde en fonction de x à l'instant t_1 est la courbe à l'instant $t_0 < t_1$ décalée vers la droite de $\delta = c(t_1 - t_0)$. Ceci fait qu'en chaque point la valeur de l'onde change entre t_0 et t_1. Il faut pour cela que la courbe soit décalée d'une période spatiale soit $\delta = \lambda$. Ainsi : $\lambda = c(t_1 - t_0) = cT$.

La phase initiale de la vibration à l'abscisse x est : $\varphi(x) = \varphi_0 - kx = \varphi_0 - 2\pi x/\lambda$.

Les signaux d'une onde sinusoïdale se propageant dans le sens positif de (Ox) en deux points d'abscisses x_1 et x_0 sont déphasés de :

$$\Delta\varphi = \varphi(x_1) - \varphi(x_0) = -\frac{2\pi}{\lambda}(x_1 - x_0)$$

Deux points en lesquels l'onde est en phase sont séparés le long de la direction de propagation (Ox) d'un nombre entier de fois la longueur d'onde.

Deux points en lesquels l'onde est en opposition de phase sont séparés le long de la direction de propagation (Ox) d'un nombre entier de fois la longueur d'onde plus une demi-longueur d'onde.

Chapitre 2

Superpositions de deux signaux sinusoïdaux

Notes personnelles

I Interférence entre deux ondes de même fréquence

I.1 Somme de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence

Soit deux signaux de même fréquence : $s_1(t) = A_1 \cos(\omega t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A_2 \cos(\omega t + \varphi_2)$. Quelle est l'amplitude du signal $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$?

Le signal résultant de la superposition de deux signaux sinusoïdaux de même fréquence, d'amplitude A_1 et A_2 et de phases initiales φ_1 et φ_2 est un signal sinusoïdal de même fréquence et dont l'amplitude est donnée par la formule des interférences :

$$\boxed{A = \sqrt{A_1^2 + A_2^2 + 2A_1A_2\cos(\varphi_2 - \varphi_1)}}$$

Cette amplitude n'est pas égale à la somme des amplitudes des deux signaux.

Importantes remarques :

i) L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est maximale lorsque les signaux sont en phase.

ii) L'amplitude du signal somme de deux signaux sinusoïdaux de même pulsation est minimale lorsque les signaux sont en opposition de phase.

I.2 Phénomène d'interférences

II Battements

II.1 Superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences voisines

Soit deux signaux de mêmes amplitudes mais de fréquences légèrement différentes f_1 et f_2 telle que $f_2 > f_1$ et donc de pulsation $\omega_1 = 2\pi f_1$ et ω_2 également voisines et $\omega_2 > \omega_1$:
$s_1(t) = A\cos(\omega_1 t + \varphi_1)$ et $s_2(t) = A\cos(\omega_2 t + \varphi_2)$

La superposition de deux signaux sinusoïdaux de fréquences f_1 et f_2 voisines donne un signal quasi sinusoïdal dont la fréquence est la moyenne $f_m = \frac{1}{2}(f_1 + f_2)$ des deux fréquences et dont l'amplitude est modulée dans le temps à la fréquence :

$$f_{\text{batt}} = |f_2 - f_1|$$

C'est le phénomène des battements qui s'observe avec des signaux physique de toutes natures.

II.2 Phénomène des battements

III Ondes stationnaires et modes propres

III.1 Superposition de deux ondes progressives de même amplitude

Dans les deux parties précédentes on a considéré différents cas de superposition de signaux sinusoïdaux sans considérer leur dépendance spatiale (signaux pris ennun point donné).
Dans cette partie, on va étudier la superposition, dans tout l'espace, de deux ondes de même fréquence et même amplitude, se propageant en sens inverse. Ces deux ondes progressives s'écrivent :

$$s_1(x,t) = A\cos(\omega t - kx + \varphi_1) \quad \text{et} \quad s_2(x,t) = A\cos(\omega t + kx + \varphi_2)$$

avec, $k = \frac{\omega}{c}$. Elles se propagent le long de l'axe (Ox) en sens opposés.

En utilisant la formule de trigonométrie : $\cos(p) + \cos(q) = 2\cos(\frac{p+q}{2})\cos(\frac{p-q}{2})$, comment s'écrit : $s(x,t) = s_1(x,t) + s_2(x,t)$?

Cette expression mathématique montre que l'onde $s(x,t)$ est de nature totalement différente des $s_1(x,t)$ et $s_2(x,t)$. En effet, on n'a plus la combinaison $\omega t - kx$ ou $\omega t + kx$ qui traduit la propagation d'une onde, mais au contraire on a une séparation de la variable spatiale x et de la variable temporelle t. Une telle onde ne se propage pas, mais .... et est appelée onde stationnaire.

III.2 Onde stationnaire

Une onde stationnaire harmonique est une onde de la forme :

$$\boxed{s(x,t) = 2A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)}$$

avec $k = \frac{\omega}{c}$, où c est la célérité des ondes progressives de même nature physique. Elle est égale à la superposition de deux ondes progressives sinusoïdales de pulsation ω se propageant en sens inverse le long de l'axe (Ox), ayant la même amplitude A.

L'amplitude de l'onde dépend alors de la position x (ce qui n'est pas le cas pour une onde progressive) et elle est donnée par :

$$\mathcal{A}(x) = |2A\cos(kx + \psi)|$$

On constate qu'il existe des points pour lesquels l'onde stationnaire est nulle $\mathcal{A}(x) = 0$ à chaque instant. Ces points sont appelés les nœuds de vibration.

Il existe aussi des points en lesquels l'amplitude de l'onde stationnaire est maximale $\mathcal{A}(x) = 2A$. Ces points sont appelés les ventres de vibration. Ce sont les points pour lesquels $\mathcal{A}(x) = 2A$.

Les nœuds et les ventres sont disposés de manière alternée. La distance entre un nœud et un ventre consécutifs est $\lambda/4$. La distance entre deux nœuds ou deux ventres consécutifs est $\lambda/2$.

L'existence de nœuds et de ventres de vibration est une propriété caractéristique des ondes stationnaires.

III.3 Expérience de la corde de Melde

Dispositif expérimental

Observation expérimentale

Interprétation physique

Il se propage le long de la corde un très grand nombre d'ondes provenant des réflexions aux deux extrémités.
Les fréquences de résonnance sont celles pour lesquelles il y a interférence constructice entre les ondes se propageant dans le même sens.
La superposition entre les ondes se propageant dans les deux sens donne une onde stationnaire.

III.4 Modes propres

On s'intéresse maintenant aux vibrations d'une corde de longueur L finie, fixée entre deux points (par exemple, une corde de guitare). Ces vibrations sont des superpositions de vibrations sinusoïdales appelés modes propres.

Les ondes stationnaires pouvant exister sur une corde de longueur L fixée en ses extrémités sont :

$$\boxed{y(x,t) = A\sin(n\frac{\pi}{L}x)\cos(n\frac{\pi c}{L}t+\varphi)}$$

où n est un entier, et A et φ des constantes quelconques.
Ce sont les modes propres de vibration de la corde. Les fréquences des modes propres appelées ...., sont :

$$\boxed{f_n = n\frac{c}{2L}}$$

Les longueurs d'ondes correspondantes,

$$\boxed{\lambda_n = \frac{c}{f_n} = \frac{2L}{n}}$$

sont les sous-multiples entiers de $2L$.

Le mouvement le plus général de la corde est obtenu par superposition linéaire de tous ses modes propres, soit :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n\sin(n\frac{\pi}{L}x)\cos(n\frac{\pi c}{L}t+\varphi_n)$$

où les A_n et φ_n sont des constantes quelconques.

Chapitre 3

Ondes mécaniques unidimensionnelles

Notes personnelles

Dans les chapitres précédents on s'est intéressé à des phénomènes de propagation mais sans jamais faire référence à l'équation d'onde (équation aux dérivées partielles) vérifiées par la grandeur physique considérée. Dans ce chapitre, nous allons établir sur deux exemples l'équation de propagation et relier celle-ci aux phénomènes vus précédemments.

I Corde vibrante

Considerons une corde de longueur L, homogène, sans raideur (pas de résistance à la déformation), de masse m donc de masse linéique $\mu_l = m/L$.

I.1 Tension d'une corde

La portion de fil MB exerce sur la portion AM une force $\overrightarrow{T}$, appelée tension du fil, tangente au fil en M pour un fil sans raideur. Elle s'écrit : $\overrightarrow{T} = T(M)\overrightarrow{\tau}$, où $T(M)$ est un réel positif et $\overrightarrow{\tau}$ le vecteur unitaire tangent à la corde, dirigé de M vers B. D'après le principe des actions réciproques, AM exerce sur MB la force $-\overrightarrow{T}$.

I.2 Mise en place du modèle

I.3 Équation d'onde

L'élongation $y(x,t)$ vérifie l'équation :

$$\boxed{\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t)}$$

où $c^2 = T_0/\mu_l$. Cette équation s'appelle : équation de d'Alembert unidimensionnelle. C'est une équation d'onde, il en existe d'autres mais celle-ci est la plus "classique". On retrouve cette équation dans l'étude de nombreux systèmes physiques.

Les mêmes équations, admettant les mêmes solutions, son étude et sa compréhension (résolution) sont indispensable (incontournable...) dans un cours de physique des ondes.

Vous devez savoir établir cette équation.

Déterminons quelle doit être la dimension du coefficient c à l'aide d'une analyse dimensionnelle afin de respecter l'homogénéité des grandeur physique intervenant dans cette équation :

Le coefficient c a nécessairement la dimension d'une vitesse.

Seconde (et bien meilleure) définition d'une onde : Une onde est un phénomène physique qui se produit lorsqu'un champ satisfait une (ou plusieurs...) équation au dérivées partielles couplant ses variations spatiales et temporelles.

II Onde acoustique dans un solide élastique

II.1 Module d'Young

Les solides sont souvent caractérisés par leur module d'Young noté E qui caractérise l'allongement du solide sous l'action d'une force extérieur. Plus précisemment, si on considère un échantillon de solide de longueur L et de section S.

Quand on exerce la force $\overrightarrow{F}$ dans le sens de la longueur de l'échantillon, celui-ci s'allonge de ΔL.

La courbe donnant la contrainte $\sigma = F/S$ en fonction du taux d'allongement $\epsilon = \Delta L/L$ a l'allure suivante :

Quand on augmente progressivement la contrainte, le taux d'allongement varie linéairement en fonction de celle-ci. Si on ne dépasse pas la limite d'élasticité représenté par le point A, la déformation est réversible. Si on fait décroître la contrainte, l'échantillon reprend sa forme initiale. En revanche, si on dépasse la limite d'élasticité, les déformations ne sont plus réversibles et le taux d'allongement ne varie plus linéairement en fonction de la contrainte.

Dans la zone d'élasticité, σ est donc proportionelle à ϵ. Le coefficient de proportionnalité est l'inverse du module d'Young.

$$\frac{\Delta L}{L} = \frac{1}{E}\frac{F}{S}$$

Le module d'Young est homogène à une .... Il s'exprime en pascals ou en newtons par mètres carrés.

Remarque : Pour un métal comme le fer, le module d'Young est environ égal à 190×10^9 Pa.

II.2 Ondes de déformation longitudinales

II.3 Récapitulatif

Nous venons de rencontrer deux exemples pour lesquels une grandeur physique $s(x, t)$ vérifie l'équation d'onde de d'Alembert unidimensionnelle :

$$\boxed{\frac{\partial^2 s}{\partial t^2}(x, t) = c^2 \frac{\partial^2 s}{\partial x^2}(x, t)}$$

où c à la dimension d'une vitesse. Dans ce chapitre, la grandeur $s(x, t)$ est une grandeur scalaire, dépendant d'une seule variable d'espace x. Nous étudierons dans les chapitres suivants des phénomènes tridimensionnels puis des phénomènes décrits par des grandeurs vectorielles...

III Solutions de l'équation de d'Alembert unidimensionnelle

III.1 Solution en onde progressive harmonique

On cherche une solution de l'équation de d'Alembert sous la forme d'ondes progressives sinusoïdales, que l'on appelle encore ondes progressives harmoniques.

On cherche donc une solution sous la forme $s(x, t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0)$.

L'équation de d'Alembert admet-elle des solutions de cette forme et si oui, quelle est la relation entre ω et k ?

Une onde progressive sinusoïdale de pulsation ω se propageant dans le sens positif de l'axe (Ox) aillant pour expression :

$$s(x,t) = s_0 \cos(\omega t - kx + \varphi_0) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}$$

est bien une solution de l'équation de d'Alembert.

La relation entre k et ω est appellée la ....
Cette relation est très importante car elle fixe la condition (et donc certaines propriétés) que doit posséder l'onde pour pouvoir exister.

La solution précédente pouvant également s'écrire :

$$s(x,t) = s_0 \cos\left(2\pi\left(\frac{t}{T} - \frac{x}{\lambda}\right) + \varphi_0\right)$$

avec T la période temporelle et λ la période spatiale (longueur d'onde) en accord avec la double périodicité spatio-temporelle de l'onde progressive sinusoïdale.

On peut également remarquer que la relation de dispersion explicite le lien entre ces deux aspects (spatial et temporel) de l'onde.

C'est elle qui permet d'écrire : $\lambda = cT = c/f$.
Pour un type d'onde donné, si la relation de dispersion change alors la relation entre λ et T change également.

On peut également chercher des solutions se propageant dans le sens négatif de l'axe (Ox) sous la forme $s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + kx + \varphi_0)$. Elle est aussi solution de l'équation de d'Alembert si et seulement si : $\omega = kc$, où k est le module du vecteur d'onde.

III.2 Célérité des ondes

La grandeur c apparaît comme la vitesse de propagation ou célérité des ondes.

Pour la corde, on avait $c = \sqrt{T_0/\mu_l}$. Pour l'onde de déformation longitudinale d'un solide, on a : $c = \sqrt{E/\mu}$.

Dans les deux cas, la célérité des ondes augmente avec la « raideur »du milieu (T_0 pour la corde, E pour la tige solide) et diminue avec l'inertie du milieu (μ_l pour la corde, μ pour la tige solide).

III.3 Ondes stationnaire

Considérons la superposition de deux ondes planes progressives harmoniques de même pulsation et amplitude se propageant en sens inverse et de phase à l'origine nulle, par souci de simplicité.

L'équation de d'Alembert étant linéaire, la somme de ces deux solutions est également une solution (théorème de superposition). Elle s'écrit :

$$\begin{aligned} s(x,t) &= s_0 \cos(\omega t - kx) + s_0 \cos(\omega t + kx) \\ &= 2s_0 \cos(\omega t) \cos(kx) \end{aligned}$$

Une telle onde peut s'écrire sous la forme d'un produit d'une fonction du temps par une fonction de l'abscisse x : il n'y a plus propagation. C'est une onde stationnaire, comme nous en avons déjà rencontré.

De façon générale les solutions en ondes stationnaires sont de la forme :

$$\boxed{s(x,t) = s_0 \cos(\omega t + \varphi) \cos(kx + \psi) \quad \text{avec} \quad k = \frac{\omega}{c}}$$

IV Régime libre d'une corde fixée à ses deux extrémités

IV.1 Conditions aux limites et conditions initiales

Considérons une corde de longueur L fixée à ses deux extrémités. Les conditions aux limites imposées sont donc :

$$y(0,t) = 0 \quad \text{et} \quad y(L,t) = 0 \quad \forall t$$

À l'instant initial, on déforme la corde en imposant les conditions initiales suivantes :

$$\begin{cases} y(x,0) = a(x) & \text{condition sur la position} \\ \dfrac{\partial y}{\partial t}(x,0) = b(x) & \text{condition sur la vitesse} \end{cases}$$

où $a(x)$ et $b(x)$ sont des fonctions données, définies sur l'intervalle $[0, L]$.

Comment évolue la corde ?

Pour répondre à cette question nous devons chercher les solutions particulières des solutions de l'équation d'onde. Mais comment choisir entre une onde progressive et une onde stationnaire ?

Ce choix se fait en prenant en compte les spécificités du sytème physique étudié. Ici, la corde est fixée à ses deux extrémités à tout instant. Une onde progressive ne correspond pas à un tel système alors qu'une onde stationnaire admet des nœuds.

On choisit donc de rechercher des solutions particulières sous la forme .... à causes des conditions aux limites imposées par le système expérimental.

IV.2 Pulsations propres, modes propres

On cherche donc $y(x,t)$ sous la forme : $y(x,t) = A\cos(\omega t + \varphi)\cos(kx + \psi)$ avec $\omega = kc$. Les conditions aux limites donnent, pour tout t :

$$\begin{cases} y(0,t) = \text{...} \\ \\ y(L,t) = \text{...} \end{cases}$$

Donc : $\cos(\psi) = 0$, c'est-à-dire : $\psi = \pi/2 + n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}$
et $\cos(kL + \psi) = 0$, c'est-à-dire : $kL = n\pi$ avec $n \in \mathbb{N}^*$ (car $n = 0$ pas physique)

Ainsi on constate que, la norme du vecteur d'onde k et la pulsation ω ne peuvent prendre que des valeurs discrètes :

$$k_n = n\frac{\pi}{L} \quad \text{et} \quad \omega_n = k_n c = n\frac{\pi c}{L} \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Les fréquences f_n sont donc toutes un multiple entier d'une fréquence f_0 appelée fréquence fondamentale :

$$f_n = nf_0 \quad \text{avec} \quad f_0 = \frac{c}{2L}$$

Les longueurs d'ondes sont reliées à la longueur de la corde par l'équation :

$$L = n\frac{\lambda_n}{2}$$

La longueur de la corde est un multiple entier de la demi-longueur d'onde, ce qui est parfaitement normal puisque les extrémités $x = 0$ et $x = L$ sont des nœuds et que deux nœuds sont distants d'une demi-longueur d'onde.

Les solutions particulières en ondes stationnaires sont donc :

$$y_n(x,t) = A_n\cos(n\frac{\pi c}{L}t + \varphi_n)\sin(n\frac{\pi}{L}x) \quad \text{avec} \quad n \in \mathbb{N}^*$$

Ce sont les modes propres. Les pulsations ω_n étant les pulsations propres. Pour $n = 1$, on parle de mode fondamental et pour $n > 1$ de n-ième harmonique.

Concrètement, pour une corde de guitare de longueur $L = 64$ cm, sa longueur d'onde fondamentale est : $\lambda_0 = 2L = 1,28$ m et sa fréquence fondamentale est : $f_0 = c/2L$

Or pour une corde de diamètre $\phi = 3 \times 10^{-4}$ m, tendue avec une tension $T_0 = 100$ N. La masse volumique de l'acier étant $\rho = 7,87 \times 10^3$ kg.m^{-3}.

On a : $c = \sqrt{T_0/\mu_l} = \sqrt{T_0/(\rho\pi\phi^2/4)} = 424$ m.s^{-1}

Soit : $f_0 = c/2L = 424/1,28 = 331$ Hz.

Remarque : Plus L est grand, plus la fréquence fondamentale est petite (donc plus le son émis est grave) : les cordes d'un violoncelle sont plus longues que celles d'un violon. :D !!!

L'aspect de la corde pour les premiers modes propres est le suivant :

Remarque : Dans l'étude de la corde, les modes propres sont les $y_n(x,t)$ où y à la dimension d'une longueur.Les modes propres correspondent à la forme balayée par l'onde lors de son déplacement lorsque celle-ci est excitée à l'une de ses fréquence propre.

Les modes propres vérifient les conditions aux limites mais correspondent à des conditions initiales particulières car pour observer ses modes il faut exciter la corde à une .... particulière.

Qu'en est-il pour des conditions initiales générales ?

IV.3 Solution générale

Le mouvement général de la corde fixée à ses deux extrémités est une superposition des différents harmoniques, l'amplitude de chacun pouvant être déterminée grâce au développement en série de Fourier.

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n \cos(n\frac{\pi c}{L}t + \varphi_n)\sin(n\frac{\pi}{L}x)$$

V Corde fixée à une extrémité : oscillations forcées, résonnance

V.1 Description de l'expérience

Intéressons-nous au dispositif expérimentale suivant appelé « corde de Melde » :

L'électroaimant impose $y(0,t) = y_0 \cos(\omega t)$, l'extrémité $x = L$ est fixe et la masse impose la tension $T_0 = mg$ (poulie supposée parfaite et masse immobile).

Observations

V.2 Étude théorique

On cherche une solution sous forme d'onde stationnaire de même pulsation que l'excitation :

avec $\omega = kc$ et vérifiant les conditions aux limites :

Quand $kL = n\pi$, donc quand la fréquence est une des fréquences propres de la corde, $y(x, t)$ tend vers l'infini : il y a ....

Dans la pratique, l'amplitude du mouvement de la corde ne diverge pas. Si les mouvements deviennent de grande amplitude, l'approximation linéaire faite pour établir l'équation de d'Alembert ne convient plus. Les effets non linéaires provoquent une saturation de l'amplitude des oscillations.

Chapitre 4

Ondes acoustiques dans les fluides

Notes personnelles

Ce chapitre aborde l'étude des ondes sonores. Après avoir posé le cadre de l'approximation des ondes acoustiques, nous établirons l'équation de propagation, équation de d'Alembert à trois dimensions, dont nous étudierons deux types de solutions : les ondes planes et les ondes sphériques, toutes deux sinusoïdales.

I Approximation acoustique, propagation des ondes sonores

I.1 Introduction

Nous allons étudier la propagation d'ondes sonores dans un fluide. Un objet, la membrane d'un haut parleur par exemple, se déplace dans un fluide. Les fluides étant des milieux ...., les particules de fluides au voisinage immédiat de cet objet voient leur volume et donc leur .... varier. Cette modification de volume entraîne une modification de la pression qui permet la mise en mouvement des particules de fluide voisines, cette mise en mouvement entraînant des variations de volume et donc de pression des particules de fluide voisines et ainsi de suite, générant ainsi une onde sonore (ou onde ....).

Deux points importants ressortent de cette description :
- La présence d'un milieu .... est nécessaire.
- La propagation des ondes sonores résulte du .... entre les variations de pression et le déplacement des particules de fluides.

I.2 Approximation acoustique

Le fluide est considéré comme parfait et on néglige l'influence de la pesanteur. Au repos le fluide est caractérisé par :
- une pression uniforme P_0,
- une masse volumique uniforme μ_0,
- une vitesse particulaire (vitesse de la particule de fluide) nulle.

L'onde sonore est une perturbation par rapport à cet état d'équilibre. L'état du fluide est donc décrit par :

—

—

—

I.3 Mise en équation

En mécanique des fluides on montre que les équations décrivant ces systèmes sont :

— l'équation locale de conservation de la masse :

$$\boxed{\frac{\partial \mu}{\partial t}(M,t) + \mathrm{div}(\mu \vec{v})(M,t) = 0}$$

— L'équation d'Euler :

$$\boxed{\mu(M,t)\left(\frac{\partial \vec{v}}{\partial t}(M,t) + \left(\vec{v}\cdot\overrightarrow{\mathrm{grad}}\right)\vec{v}(M,t)\right) = -\overrightarrow{\mathrm{grad}}P(M,t)}$$

Combien d'inconnues scalaires figurent dans ces deux équations ?

Or on ne dispose ici que de 4 équations scalaires. Il manque donc une équation pour pouvoir résoudre ce système.

Pour cela, on fait donc une hypothèse sur la nature du fluide. On suppose que le fluide est décrit par une équation reliant la masse volumique et la pression, de la forme : $\mu = f(P)$ (équation de comportement du fluide).

Comme $\mu(M,t) = \mu_0 + \mu_1(M,t)$, à l'ordre 1 l'équation locale de conservation de la masse s'écrit :

Concernant l'équation d'Euler, on a :

On fait un développement limité au premier ordre de l'équation de comportement du fluide, on obtient :

On a donc :

Ces deux équations relient les variations spatiales aux variations .... de la vitesse particulaire et de la surpression. C'est ce couplage qui est à l'origine de la propagation.

I.4 Équation de propagation

Pour simplifier les calculs, on se place dans le cas unidimensionnelle. Les équations sont donc :

La surpression p_1 vérifie l'équation de d'Alembert à trois dimensions :

$$\boxed{\frac{\partial^2 p_1}{\partial t^2}(M,t) = c^2 \Delta p_1(M,t) \quad \text{avec} \quad c = \frac{1}{\sqrt{\mu_0 \chi_0}}}$$

où on note Δ, l'opérateur Laplacien.

Important, en math :

$$\Delta f = \vec{\nabla}^2 f = \vec{\nabla}.(\vec{\nabla} f) = \text{div}\left(\overrightarrow{\text{grad}} f\right)$$

En coordonnées cartésiennes lorsqu'il s'applique sur un champ scalaire, on a :

$$\boxed{\Delta f = \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}}$$

I.5 Célérité du son

Vérifions l'homogénéité de cette relation.

Applications numériques :

II Solutions de l'équation de d'Alembert vectorielle

Il existe deux grandes familles de solutions à cette équation vectorielle : Les ondes planes et les ondes sphériques.

Important : On appelle ...., la surface formée par les points $M = M(x, y, z)$ en lequels la phase de l'onde est constante.

II.1 Ondes planes

Une onde plane est une onde dont les surfaces d'ondes sont des .... parallèles entre eux, ce sont les plans d'ondes.

$$s(M,t) = s(x,t)$$

Une telle onde possède le même état de vibration en tout point du plan d'onde $\Pi \perp (Ox)$.

Remarque : En accord avec le théorème de Malus (optique géométrique) pour la lumière, considérer une onde plane revient à considérer des rayons lumineux selon des droites parallèles entres elles.

En pratique on considère des ondes planes progressives harmoniques (OPPH) :

$$\boxed{s(M,t) = A\cos(\omega t \pm \overrightarrow{k}.\overrightarrow{r} + \varphi) \quad \text{avec : } k = \frac{\omega}{c}\, ,\, \overrightarrow{r} = \overrightarrow{OM}}$$

Et où $\overrightarrow{k}$ est le vecteur d'onde. Ce vecteur donne la .... de l'onde et son module vaut k, le module du vecteur d'onde.

Comme dans les chapitres précédents, on a le signe « $-$ », pour une onde allant de le sens croissant de l'axe et « + », pour le sens décroissant.

II.2 Ondes sphériques

Une onde sphérique est une onde dont les surfaces d'ondes sont des ....

Remarque : En accord avec le théorème de Malus (optique géométrique) pour la lumière, considérer une onde sphérique revient à considérer des rayons lumineux selon des droites concourantes en un point.

En pratique on considère des ondes sphériques progressives harmoniques :

$$\boxed{s(M,t) = \frac{A}{r}\cos(\omega t \pm kr + \varphi) \quad \text{avec : } k = \frac{\omega}{c}}$$

On a le signe « - », pour une onde divergente et le signe « + », pour une onde convergente.

III Effet Doppler longitudinal

III.1 Présentation du phénomène

Quand un émetteur d'onde sinusoïdale est en mouvement par rapport à un récepteur, celui-ci attribue aux vibrations qu'il reçoit une fréquence différente de la fréquence émise. C'est l'effet Doppler.

La fréquence f' mesurée par le détecteur est reliée à la fréquence f émise par la source par la formule :

$$\boxed{f' = (1 - \frac{v}{c})f}$$

Exemple :

III.2 Comment mesurer une faible différence de fréquence ?

Les variations de fréquences mises en jeu sont faibles. Or l'effet Doppler est utilisé pour mesurer la vitesse de la source. Comment faire pour mesurer une si faible différence de fréquence ?

On dispose du signal émis, de fréquence f et du signal reçu, de fréquence $f' = f + \delta f$ avec $|\delta f| << f$. On utilise un multiplieur en sortie duquel on récupère un signal proportionnel au produit des deux signaux mis en entrée. Le signal de sortie comporte donc deux composantes, l'une de fréquence $f_1 = f + f' \approx 2f$, l'autre de fréquence $f_2 = |f' - f| = \delta f << f_1$. Il ne reste plus qu'à filtrer ce signal avec un filtre passe-bas qui ne laisse passer que la composante de plus basse fréquence. La mesure de δf nous permet d'accéder à la vitesse v de l'émetteur.

Ce procédé porte le nom de détection synchrone.

Chapitre 5

Ondes électromagnétiques dans le vide

Notes personnelles

Dans ce chapitre on étudie la propagation d'une onde électromagnétique dans une région où il n'y a ni charges, ni courants, c'est-à-dire dans une région qui n'englobe pas les sources du champs électromagnétique.

I Équation de propagation des champs

Le champ électromagnétique $\left(\overrightarrow{E}(M,t), \overrightarrow{B}(M,t)\right)$ vérifie les quatre équations de Maxwell, qui constituent le postulat de base du cours d'électromagnétisme :

$$\boxed{\begin{cases} \operatorname{div}\overrightarrow{E}(M,t) = \dfrac{\rho(M,t)}{\epsilon_0} & \text{(M-G)} \\ \operatorname{div}\overrightarrow{B}(M,t) = 0 & \text{(M-flux/Thomson)} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t) & \text{(M-F)} \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\left(\overrightarrow{j}(M,t) + \epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t)\right) & \text{(M-A)} \end{cases}}$$

Avec : $\epsilon_0\mu_0 c^2 = 1$

Puisque l'on s'interesse à une région vide de charges et de courants on a : $\rho(M,t) = 0$ et $\overrightarrow{j}(M,t) = 0$; ce qui donne :

$$\begin{cases} \operatorname{div}\overrightarrow{E}(M,t) = 0 \\ \operatorname{div}\overrightarrow{B}(M,t) = 0 \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{E}(M,t) = -\dfrac{\partial\overrightarrow{B}}{\partial t}(M,t) \\ \overrightarrow{\operatorname{rot}}\,\overrightarrow{B}(M,t) = \mu_0\epsilon_0\dfrac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}(M,t) \end{cases}$$

On prend le rotationnel de l'équation de Maxwell-Faraday :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{E}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(-\frac{\partial \vec{B}}{\partial t}\right)$$

Or, en math : $\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\vec{A}) = \overrightarrow{\text{grad}}(\text{div}\,\vec{A}) - \Delta\vec{A}\ \forall\vec{A}$

Et où $\Delta\vec{A}$ est l'opérateur Laplacien vectorielle, dont l'expression en coordonées cartésiennes est :

$$\Delta\vec{A} = \begin{pmatrix} \Delta A_x \\ \Delta A_y \\ \Delta A_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{\partial^2 A_x}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_x}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_y}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_y}{\partial z^2} \\ \frac{\partial^2 A_z}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 A_z}{\partial z^2} \end{pmatrix}$$

On obtient :

$$\boxed{\Delta\vec{E}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\vec{E}(M,t)}{\partial t^2} \text{ où } c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}}$$

Procédons maintenant de la même façon, mais en partant cette fois-ci du rotationelle de l'équation de Maxwell-Ampère :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\,(\overrightarrow{\text{rot}}\,\overrightarrow{B}) = \overrightarrow{\text{rot}}\left(\mu_0\epsilon_0\frac{\partial\overrightarrow{E}}{\partial t}\right)$$

On obtient :

$$\boxed{\Delta\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{1}{c^2}\frac{\partial^2\overrightarrow{B}(M,t)}{\partial t^2}}$$

Les champs $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ vérifient l'équation de .... tridimensionnelle, la vitesse de propagation de l'onde est :

$$c = \frac{1}{\sqrt{\epsilon_0\mu_0}}$$

Avec $\mu_0 = 4\pi.10^{-7}$ kg.m.A^{-2}.s^{-2} et $\epsilon_0 = \frac{1}{36\pi}.10^{-9}$ A^2.s^4.kg^{-1}.m^{-3}

Application numérique :

$$c = \ldots$$

La lumière est .... !!! \0/ Bouya ! :D

Remarque : Contrairement aux ondes sonores, les ondes électromagnétiques n'ont besoin d'aucun support matériel pour se propager.

II Ondes planes progressives harmoniques (OPPH)

II.1 Représentation complexe

Si le champ vectoriel $\overrightarrow{E}(M,t)$ satisfait une équation d'onde (i.e : équation de d'Alembert) et est donc une onde et si on la considère comme une OPPH, alors ses trois composantes cartésiennes sont des OPPH. Seules leur phases et leur amplitude diffèrent a priori. On a donc :

$$\begin{aligned}\overrightarrow{E} &= E_{0x}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_x\right)\overrightarrow{u}_x \\ &+ E_{0y}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_y\right)\overrightarrow{u}_y \\ &+ E_{0z}\cos\left(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r} + \varphi_z\right)\overrightarrow{u}_z\end{aligned}$$

Cette notation est extrêmement lourde. On préfére généralement la notation complexe suivante :

$$\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{E}}_0 \exp\left(i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\right)$$

où :

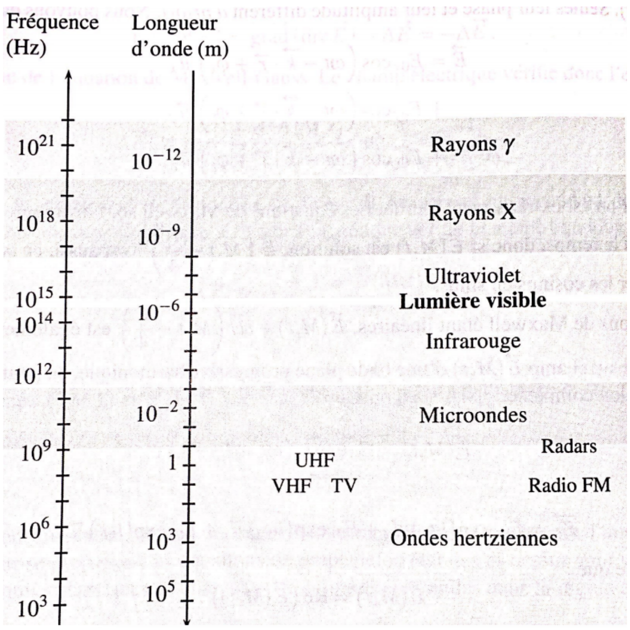
$$\overrightarrow{\underline{E}}_0 = E_{0x}\exp(i\varphi_x)\overrightarrow{u}_x + E_{0y}\exp(i\varphi_y)\overrightarrow{u}_y + E_{0z}\exp(i\varphi_z)\overrightarrow{u}_z$$

de telle sorte que :

$$\overrightarrow{E}(M,t) = Re(\overrightarrow{\underline{E}}(M,t))$$

II.2 Spectre électromagnétique

La gamme des fréquences (ou de longueurs d'onde) couverte par les ondes électromagnétiques est très vaste. Selon les valeurs de la fréquence ou de la longueur d'onde, classe les ondes électromagnétiques dans différents domaines.



II.3 Equations de Maxwell en notation complexe

Considérons une OPPH, $\overrightarrow{\underline{a}}(M,t)$, de représentation complexe :

$$\overrightarrow{\underline{a}}(M,t) = \overrightarrow{\underline{a}}_0 \exp\left(i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\right)$$

Alors :

$$\begin{aligned} \text{div}\overrightarrow{\underline{a}} &= \left(-ik_x\underline{a}_{0x} - ik_y\underline{a}_{0y} - ik_z\underline{a}_{0z}\right)\exp\left(i(\omega t - \overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{r})\right) \\ &= -i\overrightarrow{k}\overrightarrow{\underline{a}} \end{aligned}$$

De même, le calcul de $\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\underline{a}}$ en coordonnées cartésiennes permet d'établir la relation :

$$\overrightarrow{\text{rot}}\overrightarrow{\underline{a}} = -i\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{a}}$$

Remarque : Si l'on dérive par rapport au temps, c'est un facteur : $i\omega$; qui "sort".

Finalement les équations de Maxwell pour les champs complexes s'écrivent :

$$\boxed{\begin{cases} (MG) : & -i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = 0 \\ (M\phi) : & -i\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = 0 \\ (MF) : & -i\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) = -i\omega\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) \\ (MA) : & -i\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = i\omega\epsilon_0\mu_0\overrightarrow{\underline{E}}(M,t) \end{cases}}$$

Avec $\overrightarrow{k} = \frac{\omega}{c}\overrightarrow{n}$ où $\overrightarrow{n}$ est le vecteur unitaire de la direction de propagation de l'onde.

II.4 Structure de l'onde plane progressive harmonique

La structure de l'OPPH se déduit des équations de Maxwell. L'équation de Maxwell-Gauss s'écrit : $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{\underline{E}} = 0$; ce qui implique que le vecteur $\overrightarrow{\underline{E}}$ est .... à $\overrightarrow{k}$. Le vecteur étant réel, la partie réelle de l'équation précédente donne : $\overrightarrow{k}\cdot\overrightarrow{E} = 0$: le champs réel $\overrightarrow{E}$ est orthogonal à la direction de propagation de l'onde électromagnétique. On dit donc que le champ électrique est .... On montre de même, grâce à l'équation de Maxwell-flux, que le champ magnétique est également transverse.

L'équation de Maxwell-Faraday donne la relation entre $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$:

$$\overrightarrow{\underline{B}}(M,t) = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{\underline{E}}(M,t)}{\omega}$$

ou encore, en penant la partie réelle :

$$\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\overrightarrow{k}\wedge\overrightarrow{E}(M,t)}{\omega}$$

Les vecteurs $\overrightarrow{E}$ et $\overrightarrow{k}$ étant orthogonaux, la norme du champ $\overrightarrow{B}$ est donc égale à :

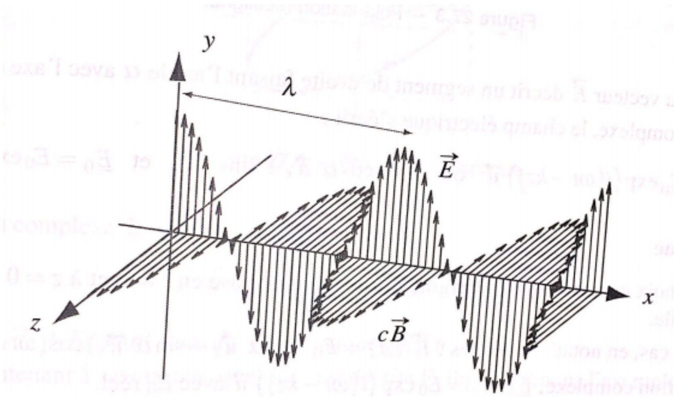
$$\|\overrightarrow{B}\| = \frac{\|\overrightarrow{E}\| \times \|\overrightarrow{k}\|}{\omega} = \frac{\|\overrightarrow{E}\|}{c}$$

Bilan :
Les champs $\overrightarrow{E}(M,t)$ et $\overrightarrow{B}(M,t)$ sont orthogonaux, en phase et $\|\overrightarrow{B}(M,t)\| = \frac{\|\overrightarrow{E}(M,t)\|}{c}$
Pour une OPPH, les vecteurs $\overrightarrow{E}(M,t)$, $\overrightarrow{B}(M,t)$ et $\overrightarrow{n}$ forment un trièdre direct, la norme de $\overrightarrow{B}(M,t)$ étant égale à $1/c$ fois celle de $\overrightarrow{E}(M,t)$.

Toutes ces informations sont résumées dans la relation de structures des OPPH électromagnétiques :

$$\boxed{\overrightarrow{B}(M,t) = \frac{\overrightarrow{n} \wedge \overrightarrow{E}(M,t)}{c}}$$

Dans le cas d'une OPPH se propageant dans le sens des x croissants, telle que le champs électrique soit selon (Oy) : $\overrightarrow{E}(x,t) = E_0 \cos(\omega t - kx)\overrightarrow{u}_y$, les champs électrique et magnétique, à un instant donné, sont représentés sur la figure ci-après :



II.5 Polarisation des ondes planes progressives harmoniques

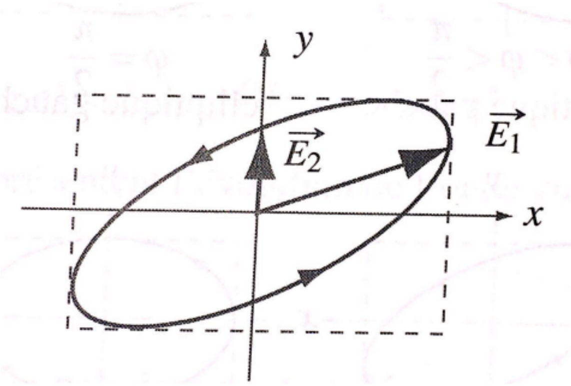
Soit une OPPH EM se propageant dans le sens des z croissant.

On étudie la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$ dans un plan d'onde orienté de telle sorte que l'observateur voit arriver l'onde vers lui.

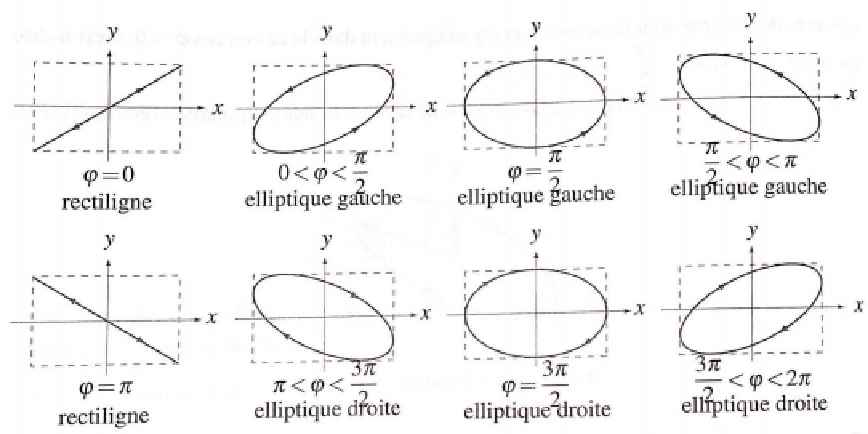
On dit que l'onde EM est polarisée rectilignement selon (Oy), lorsque le champ électrique garde une direction fixe dans un plan d'onde. La courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$ est alors un segment de droite selon (Oy). Le champ $\overrightarrow{E}$ ne possède alors qu'une seule composante et s'écrit : $\overrightarrow{E}(z,t) = E_0 \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_y$.

On dit que l'onde EM possède une polarisation elliptique, lorsque la courbe décrite par l'extrémité du vecteur $\overrightarrow{E}$ est une ellipse. Le champ s'écrit : $\overrightarrow{E}(z,t) = E_{0x} \cos(\omega t - kz)\overrightarrow{u}_x + E_{0y} \cos(\omega t - kz - \varphi)\overrightarrow{u}_y$

Si l'ellipse est parcourue dans le sens trigonométrique l'onde est dite : elliptique gauche. Elle est elliptique droite dans le cas contraire.



On dit que l'onde EM est polarisée circulairement dans le cas particulier où $E_{0x} = E_{0y}$ et où $\varphi = \pm\pi/2$



III Aspect énergétique des ondes planes progressives

III.1 Vecteur de Poynting

Le vecteur de Poynting $\overrightarrow{\Pi}$, ou vecteur densité de courant d'énergie électromagnétique, s'écrit :

$$\boxed{\overrightarrow{\Pi}(M,t) = \frac{\overrightarrow{E}(M,t) \wedge \overrightarrow{B}(M,t)}{\mu_0}}$$

Le vecteur de Poynting donne la direction de propagation de l'énergie électromagnétique transportée par l'onde.

III.2 Puissance émise

La puissance émise, ou puissance rayonnée, par une onde électromagnétique à travers la surface S est :

$$\boxed{P_{\text{rayonnée}} = \iint_S < \overrightarrow{\Pi} > \cdot \mathrm{d}\overrightarrow{S}}$$

Où $< \overrightarrow{\Pi} >$ désigne la valeur moyenne temporelle du vecteur de Poynting.

Rappel math : Pour une fonction périodique f(t) de période T, on a :

$$< f(t) >= \frac{1}{T}\int_0^T f(t)\mathrm{d}t$$

Remarques :

i) $< \cos(t) >= 0$

ii) $< \cos^2(t) >= \frac{1}{2}$