# Algèbre – Examen partiel

## Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte $\mathbf{3} \times \mathbf{2}$ questions équipondérées non ordonnées.
- L'usage de la calculatrice est chaleureusement déconseillé.
- Explicitez vos raisonnements, justifiez vos réponses, et surtout amusez-vous bien !

## ◯ – Möbius

a) Montrer que l'ensemble $\mathcal{M}(\mathbf{K})$ des fonctions rationnelles à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$ de la forme

$$h(X) = \frac{aX+b}{cX+d} \qquad \text{avec} \qquad \mathrm{PGCD}(aX+b,\, cX+d) = 1$$

est un monoïde pour la composition de fonctions (vous pouvez admettre l'associativité).

b) Décrire, à l'aide d'un graphe de Cayley, le sous-monoïde de $\mathcal{M}(\mathbf{K})$ engendré par

$$f(X) = \frac{1}{X} \quad \text{et} \quad g(X) = \frac{1}{1-X}.$$

Possède-t-il quelque propriété particulière ?

## □ – Détection d'erreur

On encode des mots binaires $m \in (\mathbf{F}_2)^*$ de la façon suivante :

- on rajoute tout d'abord zéro, un ou deux 0 à la fin pour obtenir un mot de longueur divisible par 3 ;
- on subdivise le mot ainsi obtenu en blocs de trois bits ;
- on ajoute à la fin de chaque bloc la somme (dans $\mathbf{F}_2$) des trois bits du bloc.

Exemple d'encodage :

$$m = 1110011011 \;\rightsquigarrow\; 1110011011\mathbf{00} \;\rightsquigarrow\; 111\ 001\ 101\ 100 \;\rightsquigarrow\; 111\mathbf{1}001\mathbf{1}101\mathbf{0}100\mathbf{1} = \varphi(m).$$

a) Si on identifie les mots avec les suites à support fini :

$$b_0 b_1 \cdots b_k \in (\mathbf{F}_2)^* \;\longleftrightarrow\; (b_0,\, b_1,\, \ldots,\, b_k,\, 0,\, 0,\, \ldots) \in \mathbf{F}_2^{(\mathbf{N})},$$

montrer que cet encodage définit un endomorphisme linéaire $\varphi : (\mathbf{F}_2)^* \to (\mathbf{F}_2)^*$ et en donner une représentation matricielle (en précisant la base utilisée).

b) Montrer que $\operatorname{Im}\varphi$ est un langage rationnel.

## △ – Un opérateur récurrent

a) Décrire les espaces propres de l'opérateur de décalage à gauche

$$\sigma : \mathbf{K}^{\mathbf{N}} \longrightarrow \mathbf{K}^{\mathbf{N}}, \quad \sigma\big((a_n)_{n=0}^{\infty}\big) = (a_{n+1})_{n=0}^{\infty}$$

sur l'espace des suites à coefficients dans un corps $\mathbf{K}$.

b) Trouver des formules explicites pour $a_n,\, b_n,\, c_n \in \mathbf{Q}$ si ces trois suites satisfont

$$\begin{array}{rclcl} a_{n+1} &=& a_n - 2b_n - c_n & & a_0 = 1, \\ b_{n+1} &=& -2a_n - 5b_n - 2c_n & (n \geqslant 0) & b_0 = 0, \\ c_{n+1} &=& 4a_n + 14b_n + 6c_n & & c_0 = 1. \end{array}$$