CIR$_2$

Relations binaires
Résumé de cours

I/ *Relations binaires*

1. Définition

Soit un ensemble E. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est définie par un sous-ensemble G de $E \times E$.

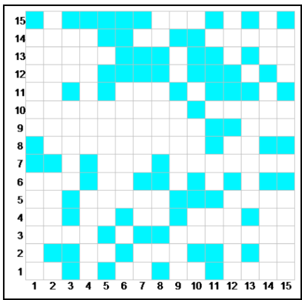
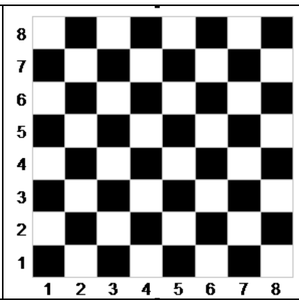
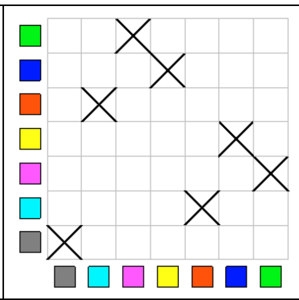
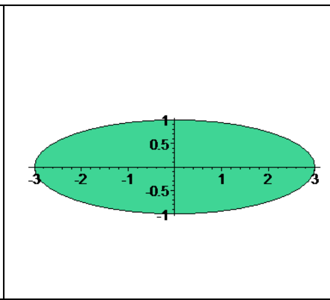
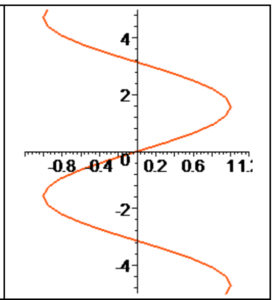
Si $(x,y) \in E \times E$ on écrira : $x \,\mathcal{R}\, y$ pour dire que $(x,y) \in G$

On dit que G est le graphe de $\mathcal{R}$

Exemples

Dans $E = \{a,b,c,d,e\}$, $\mathcal{R}_0$ définie par $G = \{(a,b),(a,e),(b,a),(b,c),(c,c),(d,d)\}$

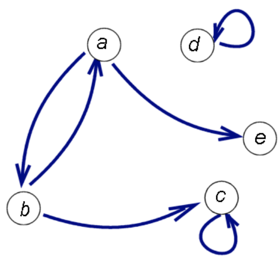
Exemples de représentation du graphe

				
Une relation aléatoire dans $\{1,..15\}$	dans $\{1,..8\}$ $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow a-b$ est pair	Couleurs complémentaires	dans $\mathbb{R}$ $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow 4x^2+9y^2<36$	dans $\mathbb{R}$ $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x=\sin y$

2. Représentation

- Représentation sagittale

  Exemple pour $\mathcal{R}_0$ définie par $G = \{(a,b),(a,e),(b,a),(b,c),(c,c),(d,d)\}$

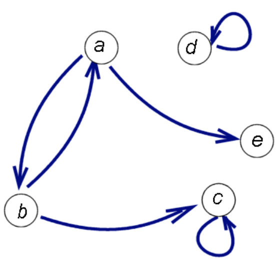


- Matrice d'une relation sur un ensemble E fini (ou matrice d'adjacence)

  Si $E = \{x_1, x_2, .., x_n\}$ C'est la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ telle que $\forall i,j \,/\, M_{i,j} = 1 \Leftrightarrow x_i \,\mathcal{R}\, x_j$

Exemples

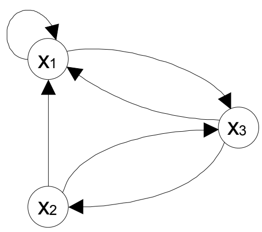
Pour $\mathcal{R}_0$



matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour



matrice d'adjacence

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

3. Produit de 2 relations

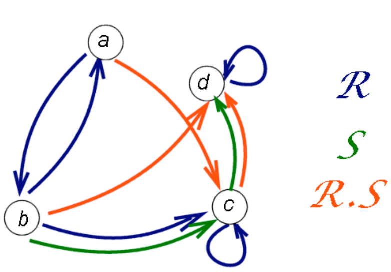
- Définition

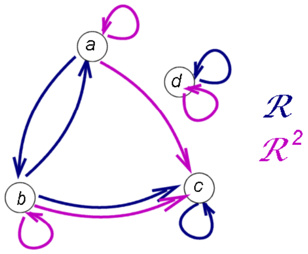
Soient $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ deux relations binaires sur E. Le produit de ces 2 relations est la relation $\mathcal{P}$ telle que

$$\forall(x,z) \in E\times E \,/\, x\,\mathcal{P}\,z \Leftrightarrow \exists y \in E \text{ tel que } x\,\mathcal{R}\,y \text{ et } y\,\mathcal{S}\,z$$

On écrit $\mathcal{P} = \mathcal{R}.\mathcal{S}$ ou $\mathcal{R}$ suivie de $\mathcal{S}$

On définit ainsi la relation $\mathcal{R}^2$ (produit de $\mathcal{R}$ par elle-même),… la relation $\mathcal{R}^k$





- Fermeture transitive d'une relation $\mathcal{R}$.

C'est la relation $\mathcal{R}^*$ telle que $\forall(x,y) \in E\times E \,/\, x\,\mathcal{R}^*\,y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x\,\mathcal{R}^k\,y$

Exemple : généalogie
E = l'ensemble des individus d'une même famille depuis plusieurs générations.
Soient les relations binaires :

- x $\mathcal{R}$ y ssi x est le père de y
- x $\mathcal{S}$ y ssi x est la mère de y
- x $\mathcal{T}$ y ssi x est un enfant de y

On peut définir les liens familiaux à l'aide des opérations sur les relations binaires :

$\mathcal{R}^2$ = est grand père paternel de
$\mathcal{S}^2$ = est grand mère maternelle de
$\mathcal{R}.\mathcal{S}$ = est grand père maternel de
$\mathcal{S}.\mathcal{R}$ = est grand mère paternelle de
$\mathcal{P} = (\mathcal{R}$ *ou* $\mathcal{S})$ = est parent de
$\mathcal{P}^*$ = est un ancêtre de
$\mathcal{T}^*$ = est un descendant de
$\mathcal{T}.\mathcal{P}$ = est frère ou sœur de (ou demi-frère, ou demi-sœur, ou soi-même).

- Matrice du produit, de la fermeture transitive

On définit les opérations $\oplus$ et $\otimes$ dans { 0, 1 } par les tables :

« ou inclusif »

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

et

« et »

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

On étend alors les opérations $\oplus$ et $\otimes$ à $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$:

Pour A et $B \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, en notant $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$,

on pose $A \oplus B = (s_{i,j})$ où $\forall i, j,\ s_{i,j} = a_{i,j} \oplus b_{i,j}$ et $A \otimes B = (c_{i,j})$ où $\forall i, j,\ c_{i,j} = \bigoplus_{k=1}^{n} (a_{i,k} \otimes b_{k,j})$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ on pose $A^{\otimes 2} = A \otimes A,\ A^{\otimes 3} = A \otimes A \otimes A, \ldots,\ A^{\otimes(k+1)} = A^{\otimes k} \otimes A$.

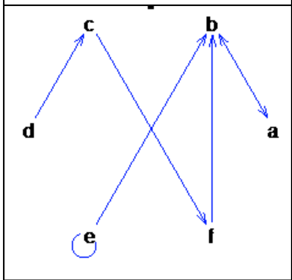
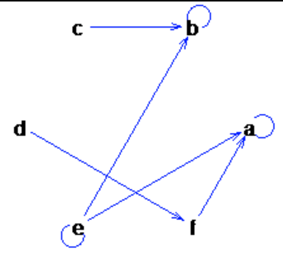
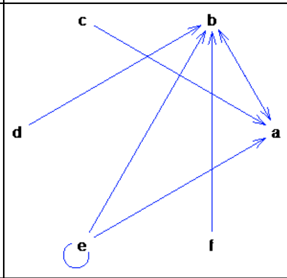
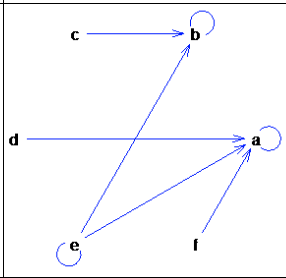
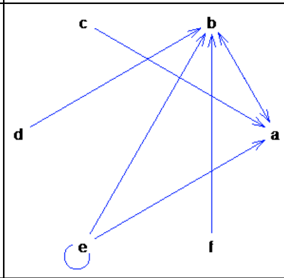
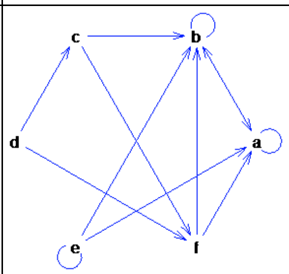
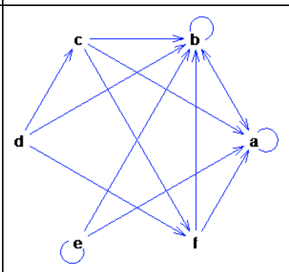
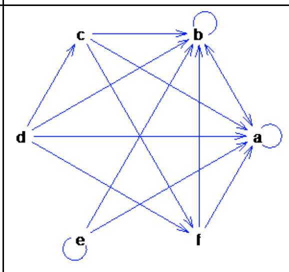
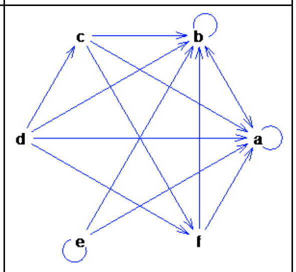
Alors, si A est la matrice de $\mathcal{R}$ et B la matrice de $\mathcal{S}$, on a

$A \otimes B$ est la matrice de $\mathcal{R}.\mathcal{S}$

$A^{\otimes k}$ est la matrice de $\mathcal{R}^k$

$\bigoplus_k (A^{\otimes k})$ est la matrice de $\mathcal{R}^*$

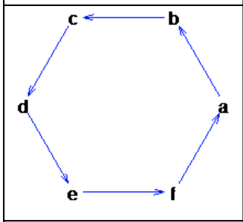
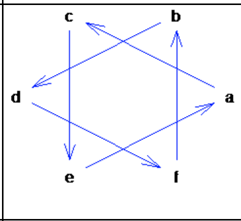
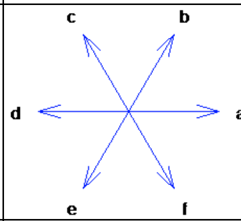
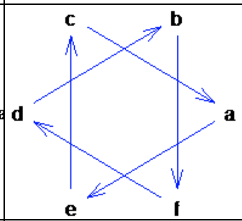
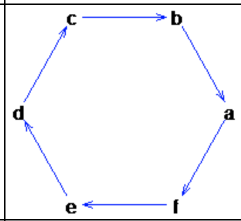
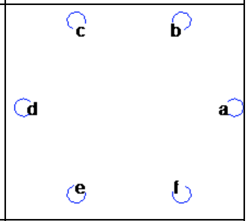
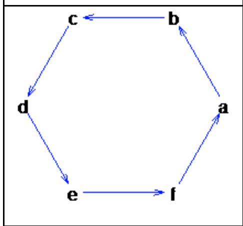
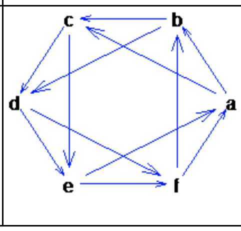
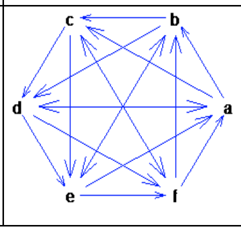
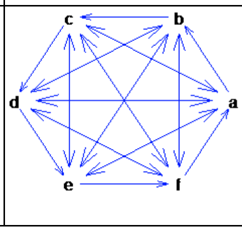
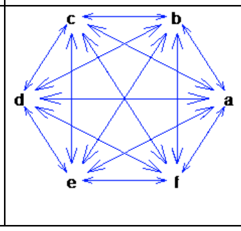
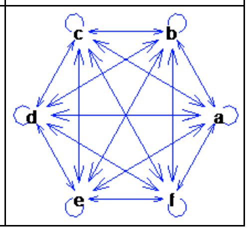
Exemple

$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}^4$	$\mathcal{R}^5$
				
A	$A^{\otimes 2}$	$A^{\otimes 3}$	$A^{\otimes 4}$	$A^{\otimes 5}$
$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$
	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$ou $\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$...ou $\mathcal{R}^4$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$...ou $\mathcal{R}^5$
				
	$A \oplus A^{\otimes 2}$	$A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3}$	$A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes 4}$	$A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes 5}$
	$\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1 \\ 0&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&0&1 \\ 1&1&1&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

Propriétés : Si $\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k$ alors $\forall i \geqslant k \; \mathcal{R}^i = \mathcal{R}^k$

Propriétés : Si $Card(E) = n$ alors $\mathcal{R}^* = \mathcal{R}^k$ ou $\mathcal{R}^k$ ou… ou $\mathcal{R}^n$, soit $A^* = \overset{n}{\underset{k=1}{\oplus}}\left(A^{\otimes k}\right)$

Exemple

$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}^4$	$\mathcal{R}^5$	$\mathcal{R}^6$
					
$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$ ou $\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2 \ldots \mathcal{R}^4$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2 \ldots \mathcal{R}^5$	$\mathcal{R}^*$
					

Complexité :

Le calcul du produiit de 2 matrices $n \times n$ est de complexité $O\left(n^3\right)$

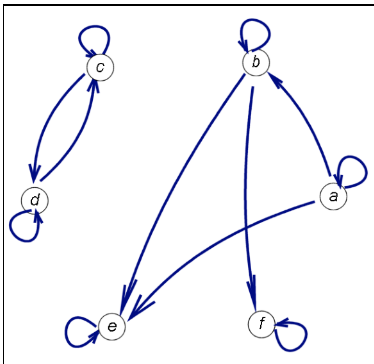
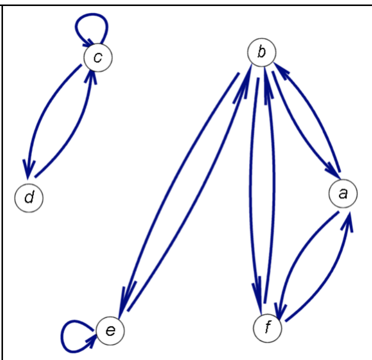
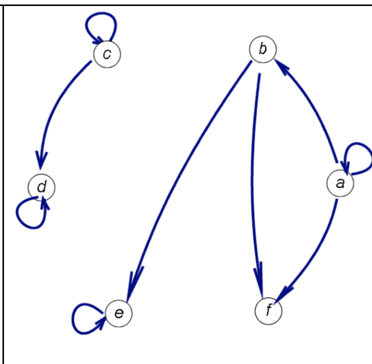
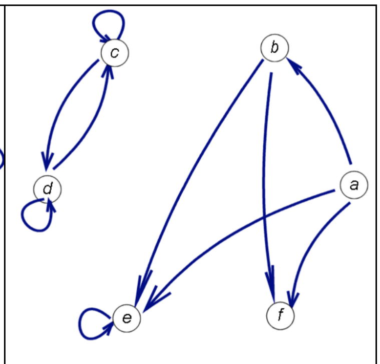
(on peut certes améliorer si la matrice est très "creuse")

Le calcul de $A^{\otimes n}$ est donc de complexité $O\left(n^4\right)$

4. Propriétés des relations binaires

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :

- réflexive ssi $\forall x \in E \ / \ x \ \mathcal{R} \ x$
- symétrique ssi $\forall (x, y) \ \in E \times E \,/\, x \ \mathcal{R} \ y \Leftrightarrow y \ \mathcal{R} \ x$
- antisymétrique ssi $\forall (x, y) \ \in E \times E \,/\, \left(x \ \mathcal{R} \ y \text{ et } y \ \mathcal{R} \ x\right) \Rightarrow \left(x = y\right)$ y
- transitive ssi $\forall (x, yz) \ \in E \times E \times E \,/\, \left(x \ \mathcal{R} \ y \text{ et } y \ \mathcal{R} \ z\right) \Rightarrow \left(x \ \mathcal{R} \ z\right)$

			
réflexive, non symétrique, non antisymétrique, non transitive	symétrique, non réflexive, non antisymétrique, non transitive	antisymétrique, non réflexive, non symétrique, non transitive	transitive, non réflexive, non symétrique, non antisymétrique

Si $\mathcal{R}$ est transitive,

on peut sans risque écrire $x_1 \mathcal{R} \, x_2 \, \mathcal{R} \, x_3 \, \mathcal{R} \ \ldots \ \mathcal{R} \, x_{k-1} \mathcal{R} \, x_k$ au lieu de $x_1 \mathcal{R} \, x_2$ et $x_2 \mathcal{R} \, x_3$ et… et $x_{k-1} \mathcal{R} \, x_k$,

mais on s'interdira de le faire si $\mathcal{R}$ n'est pas transitive :

Exemple : ne pas écrire $x \neq y \neq z$ car on ne sait pas si $x = z$ ou si $x \neq z$

Remarque : $\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \mathcal{R}^2$ est contenue dans $\mathcal{R}$,

et si A est la matrice de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow A \oplus A^{\otimes 2} = A$

Remarque : si $\mathcal{R}$ est réflexive alors $\mathcal{R}$ est contenue dans $\mathcal{R}^2, \mathcal{R}^2$ est contenue dans $\mathcal{R}^3 \ldots$,

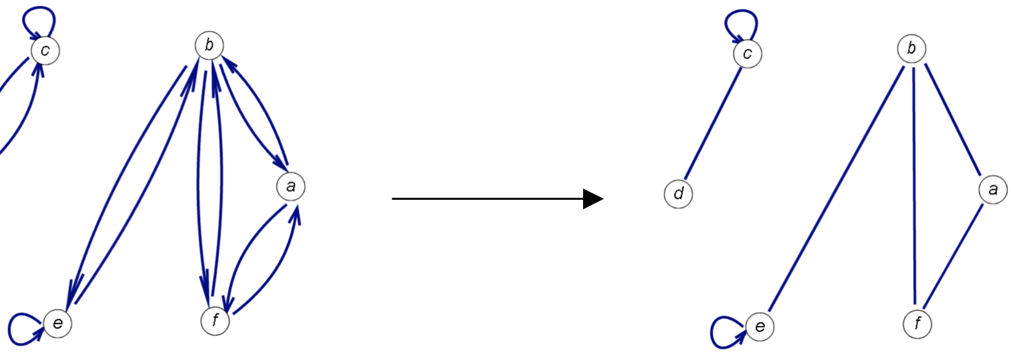
et donc $A \oplus A^{\otimes 2} = A^{\otimes 2}$, $A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} = A^{\otimes 3} \ldots$

La matrice de la fermeture transitive de est donc $A^* = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} = A^{\otimes n}$

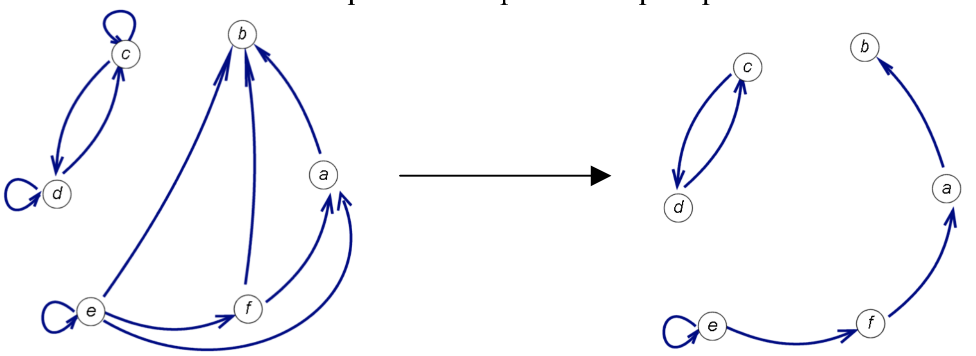
Comme $A^{\otimes n} = A^{\otimes n+1} = A^{\otimes n+2} = \ldots$ son calcul est en $O\left(n^3 \ln(n)\right)$

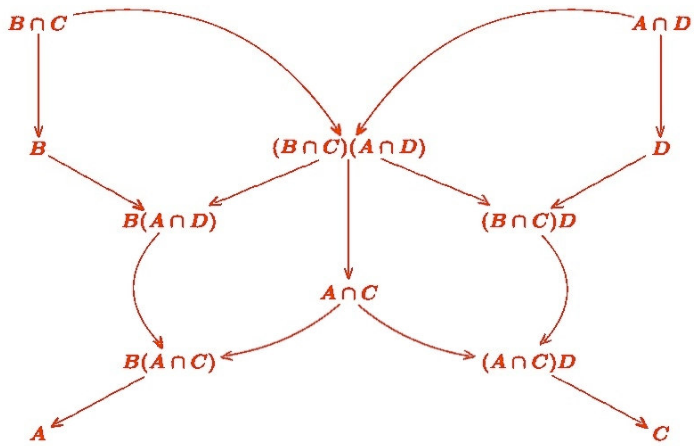
Remarque : On peut simplifier la représentation d'une relation

- quand elle est symétrique (segments au lieu de flêches)



- quand elle est transitive : On ne trace que flèches que l'on ne peut pas déduire des autres par transitivité





"Butterfly lemma"

Interprétation des propriétés d'une relation $\mathcal{R}$ par sa matrice d'adjacence $M = \left(a_{i,j}\right)$:

- $\mathcal{R}$ est réflexive ssi tous les termes de la diagonale de M sont égaux à 1, soit $M \oplus I = M$
- $\mathcal{R}$ est symétrique ssi M est symétrique, soit $M = {}^tM$
- $\mathcal{R}$ est antisymétrique ssi $\forall i \neq j \quad a_{i,j} = 1 \Rightarrow a_{j,i} = 0$, soit $\forall i \neq j \quad a_{i,j} \otimes a_{j,i} = 0$.
- $\mathcal{R}$ est est transitive ssi $M \oplus M^{\otimes 2} = M$
- La fermeture transitive de $\mathcal{R}$ est la "plus petite" relation transitive "contenant" $\mathcal{R}$. On la note $\mathcal{R}^*$
  Sa matrice est $M \oplus M^{\otimes 2} \oplus M^{\otimes 3} \oplus \ldots \oplus M^{\otimes n}$, où n est "assez grand".

II/ *Relation d'équivalence*

1. Définitions

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur *E* est une **relation d'équivalence** si elle est

1. réflexive
2. symétrique
3. transitive

2. Classes d'équivalence

Rappel : Soit *E* un ensemble fini, $A_1, A_2, ..., A_n$ *n* parties de *E*.

On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forme une partition de *E* ssi les A_i sont disjoints 2 à 2 et leur réunion est égale à *E*.

c'est-à-dire $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall i, j$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$

ou encore $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall i, j \;\; A_i \cap A_j \neq \varnothing \Rightarrow A_i = A_j$

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur *E*.

Pour tout élément *x* de *E* on note : $C(x) = \{ y \in E \mid x R y \}$: classe d'équivalence de l'élément *x*.

Théorème :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur E.

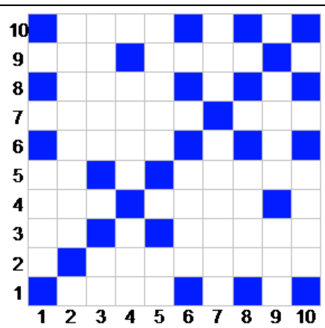
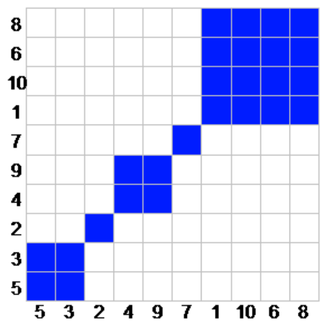
Alors la famille $\left(C(x)\right)_{x \in E}$ des classes d'équivalences associées forme une partition de E.

Réciproquement :

Étant donnée une partition $(A_i)_{i \in I}$ d'un ensemble *E*,

la relation définie sur *E* par : $x \mathcal{R} y \Leftrightarrow \exists i \in I \mid x \in A_i$ et $y \in A_i$ est une relation d'équivalence

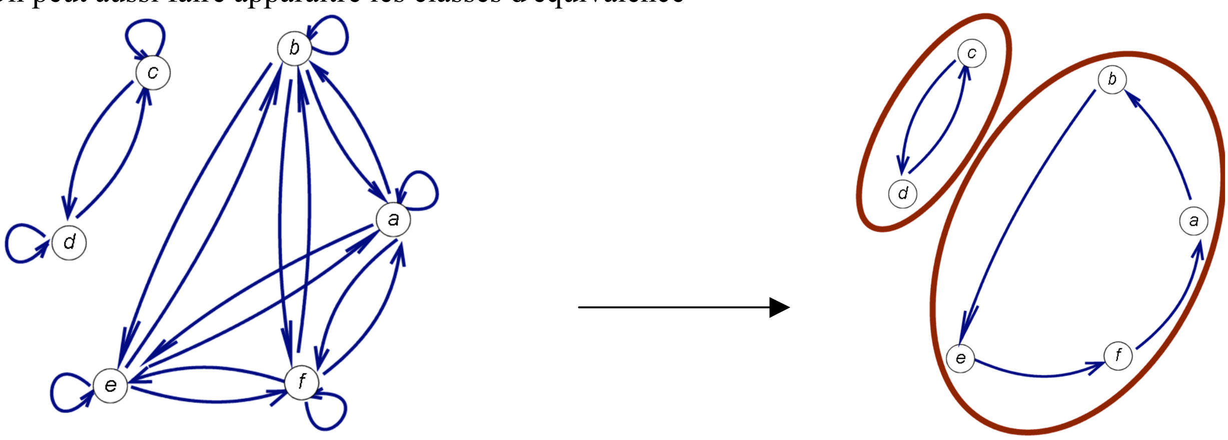
et les classes d'équivalences associées sont les ensembles A_i.

	
Une relation d'équivalence dans $\{1..10\}$	La même relation en ordonnant les éléments par classe d'équivalence

2. Représentation sagittale

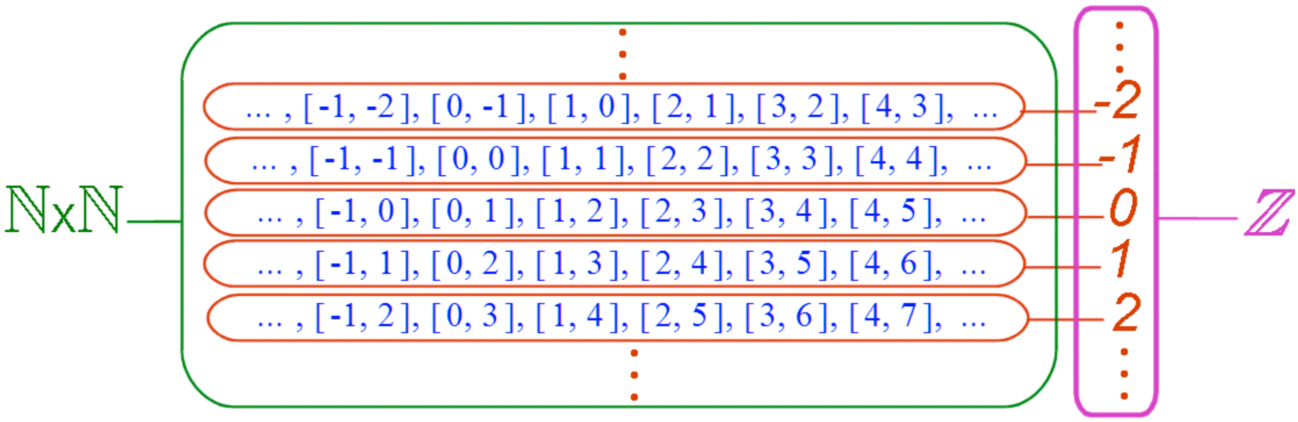
Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, il suffit d'afficher un cycle par classe d'équivalence.

On peut aussi faire apparaître les classes d'équivalence



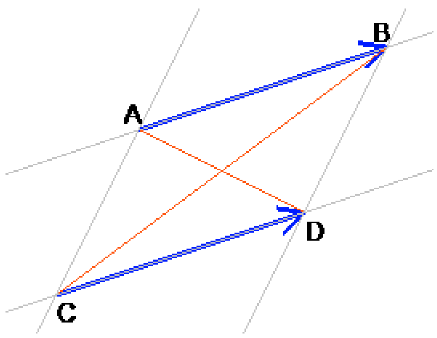
3. Exemples

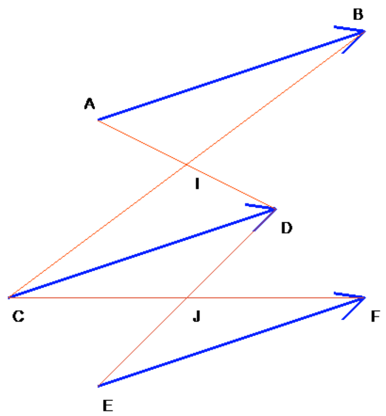
- Dans n'importe quel ensemble, la relation d'égalité
- Dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}, (a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c \longrightarrow$ définition de $\mathbb{Z}$



- Dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, (a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad=bc \longrightarrow$ définition de $\mathbb{Q}$
- Dans l'ensemble des bipoints du plan euclidien,
  (A,B) équipollent à $(C,D) \Leftrightarrow (A,D)$ et (B,C) ont même milieu $\Leftrightarrow (A,B,D,C)$ est un parallélogramme

  rem : Si A,B,C,D ne sont pas alignés, (A,B,D,C) parallélogramme $\Leftrightarrow (AB)//(CD)$ et $(AC)//(BD)$



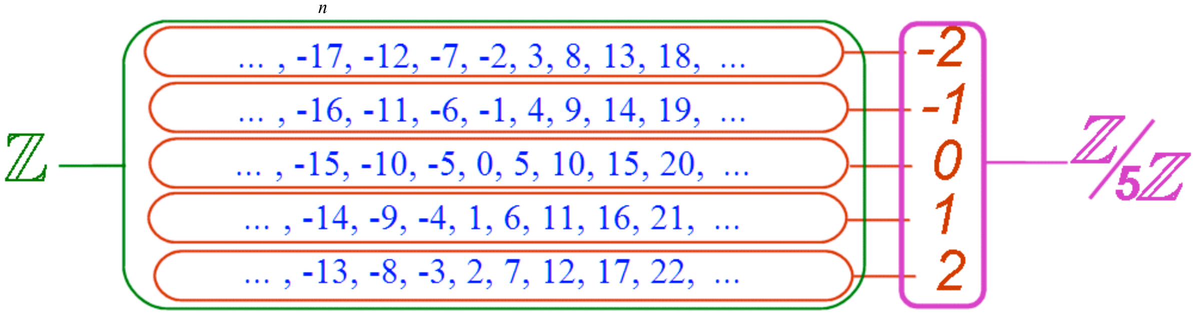


$\longrightarrow$ définition des vecteurs du plan.

- Dans un ensemble d'ensembles A est équipotent à $B \Leftrightarrow$ il existe une bijection de A vers B

  $\longrightarrow$ définition des cardinaux.
- Parallélisme dans l'ensemble des droites du plan euclidien, $\Delta_1 // \Delta_2 \Leftrightarrow (\Delta_1 \cap \Delta_2 = \varnothing$ ou $\Delta_1 = \Delta_2)$

  $\longrightarrow$ définition des directions.
- Dans $\mathbb{Z}$, n étant fixé, $a \underset{n}{\equiv} b \Leftrightarrow n$ divise $a-b \longrightarrow$ définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$



- Dans $\mathbb{R}$, congruence modulo 2π
- Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n,
  A est semblable à $B \Leftrightarrow$ il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$

III/ *Relation d'ordre*

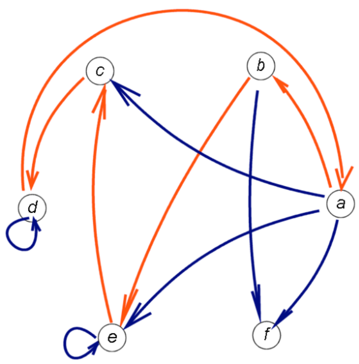
1. Définitions

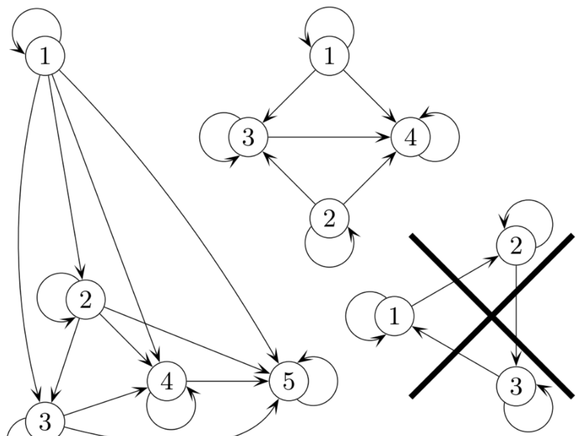
Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E est une **relation de pré-ordre** si elle est
1. réflexive
2. transitive

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E est une **relation d'ordre** si elle est :
1. réflexive
2. antisymétrique
3. transitive

Une relation d'ordre permet de comparer deux éléments, de mettre une "hiérarchie" entre eux.
Lorsque $x \mathcal{R} y$, on dit que x est "inférieur" à y, et on préfère noter $x \leqslant y$ ou $x \ll y$ ou $x \preccurlyeq y$ (interprétation purement conventionnelle, on pourrait tout autant dire "supérieur". D'ailleurs $\geqslant$ est aussi une relation d'ordre)

La transitivité et l'antisymétrie empêchent d'avoir un cycle formé d'éléments distincts de la forme $x_1 \mathcal{R} x_2$, $x_2 \mathcal{R} x_3$,..., $x_{k-1} \mathcal{R} x_k$ et $x_k \mathcal{R} x_1$





« Boucle »

Cette propriété des relations d'ordre montre que les graphes de relations d'ordre ont une orientation naturelle : en les parcourant on va toujours de l'avant, on ne revient jamais en arrière, on ne tourne jamais en rond. Comme les fleuves et les rivières qui coulent tous en direction de la mer et ne bouclent jamais. C'est précisément cette orientation ou « sens de lecture » qui nous invite à considérer que certains éléments sont plus petits/plus grands que d'autres.

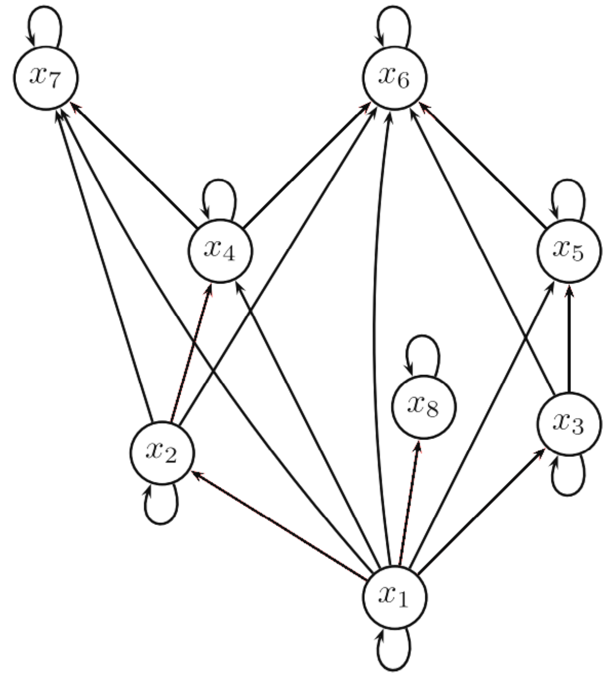
Exemples

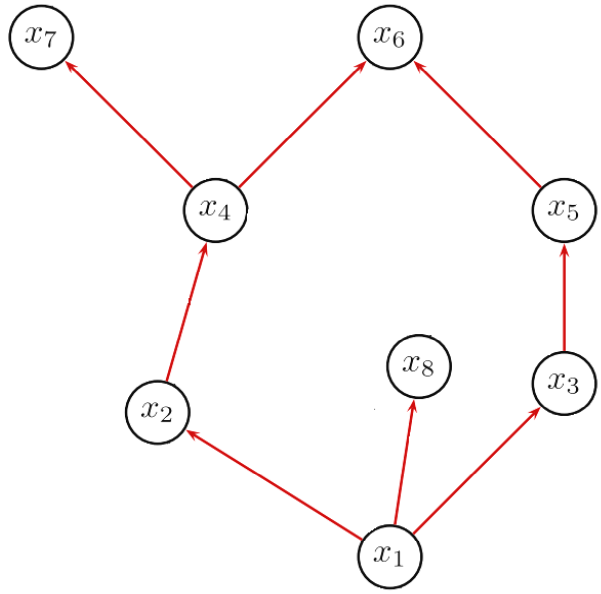
- $\leqslant$ est un relation d'ordre
- $<$ n'est pas une relation d'ordre sur $\mathbb{R}$.
- L'inclusion est une relation d'ordre sur $\mathcal{P}(E)$
- La divisibilité est une relation d'ordre sur $\mathbb{N}^*$.
- La divisibilité dans $\mathbb{Z}$ n'est une relation d'ordre mais c'est une relation de pré-ordre.

Dans un ensemble d'ensembles, la relation $\mathcal{R}$ définie par $A \mathcal{R} B \Leftrightarrow$ il existe une application injective de A vers B n'est pas une relation d'ordre : elle n'est pas antisymétrique. Mais c'est un pré-ordre.

- Dans une famille, la relation "est descendant de" n'est pas une relation d'ordre : elle n'est pas réflexive. Mais la relation "$x = y$ ou x est un descendant de y" est une relation d'ordre.
- Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la relation
  $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow \left(f = O(g) \text{ en } +\infty\right) \Leftrightarrow \left(\exists K \in \mathbb{R}^* / \exists A \in \mathbb{R}^* / \forall x \geqslant A / \left|f(x)\right| \leqslant K \left|g(x)\right|\right)$ est un pré-ordre.

Quand on sait qu'une relation est une relation d'ordre, on peut omettre dans sa représentation par flèches les boucles et les flêches qui peuvent se déduire d'autres par transitivité. On ne laisse que les "flèches élémentaires".





2. Ordre total, ordre partiel

Soit (E, $\preccurlyeq$) un ensemble ordonné.

Si tous les éléments de E sont deux à deux comparables $\left(\text{i.e. } \forall (x,y) \in E\times E \ / \ x \preccurlyeq y \text{ ou } y \preccurlyeq y\right)$, on dit que l'ordre $\preccurlyeq$ est total ou que (E, $\preccurlyeq$) est un **ensemble totalement ordonné**.

Exemples

- $(\mathbb{R}, \leqslant)$ est un ensemble totalement ordonné.
- $(\mathbb{N}^*, \text{divise})$ et $(\mathcal{P}(E), \subset)$ (si $Card(E) \geqslant 2$) sont partiellement ordonnés.
- Sur $\mathbb{R}^2$ On définit les deux relations d'ordre suivantes :
  – L'ordre produit : $(x,y) \preccurlyeq (x',y') \Leftrightarrow (x \leqslant x' \text{ et } y \leqslant y')$
  – L'ordre lexicographique : $(x,y) \preceq (x',y') \Leftrightarrow \left(x < x' \text{ ou } (x = x' \text{et } y \leqslant y')\right)$
  L'ordre produit est un ordre partiel et l'ordre lexicographique est un ordre total.

3. Majorants, minorants

Soit une relation d'ordre $\preccurlyeq$ sur un ensemble E et une partie A de E.

– Un élément $M \in E$ est un majorant de la partie A si et seulement si $\forall a \in A$, $a \preccurlyeq M$

remarque : dans ce cas, tout élément M' tel que $M \preccurlyeq M'$ est aussi majorant de A.

– Un élément $m \in E$ est un minorant de la partie A si et seulement si $\forall a \in A$, $m \preccurlyeq a$

remarque : dans ce cas, tout élément m' tel que $m' =\preccurlyeq m$ est aussi minorant de A.

– Un élément $a \in A$ est un plus petit élément de A si et seulement si $\forall x \in A$, $a \preccurlyeq x$ (bien noter : $a \in A$)

remarque : Il n'existe pas toujours un plus petit élément de A, mais s'il en existe, il est unique.

– Un élément $a \in A$ est un plus grand élément de A si et seulement si $\forall x \in A$, $x \preccurlyeq a$ (bien noter : $a \in A$)

remarque : Il n'existe pas toujours un plus grand élément de A, mais s'il en existe, il est unique.

– Un élément $m \in A$ est un élément minimal de A si et seulement si $\forall x \in A, (x \preccurlyeq m \Rightarrow x = m)$

remarque : Il peut y avoir plusieurs éléments minimaux de A.
Exemple : pour la divisibilité dans l'ensemble des naturels $\geqslant 2$,
tous les nombres premiers sont minimaux et il n'y a pas de plus petit élément

– Un élément $M \in A$ est un élément maximal de A si et seulement si $\forall x \in A, (M \preccurlyeq x \Rightarrow x = M)$

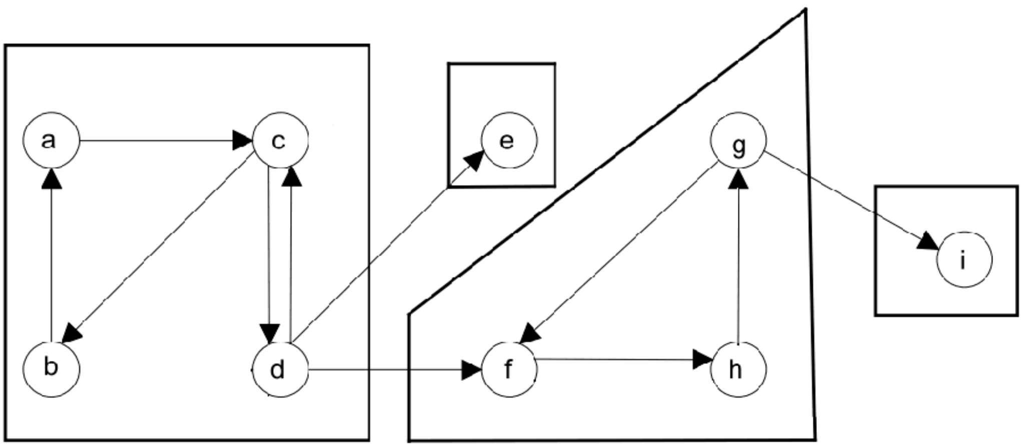
Exemple : pour l'inclusion dans $\mathcal{P}(E)$, E est élément maximal

4. Relation d'équivalence associée à un pré-ordre

Soit $\mathcal{R}$ une **relation de pré-ordre** définie sur E. On définit la relation $\approx$ par $x \approx y \Leftrightarrow (x \mathcal{R}\, y \text{ et } y \mathcal{R}\, x)$
Alors la relation $\approx$ est une relation d'équivalence sur E.
Exemples

- Dans $\mathbb{Z}$ la relation de pré-ordre "divise" induit l'équivalence "a même valeur absolue"
- Dans un ensemble d'ensembles, la relation de pré-ordre définie par $A \mathcal{R}\, B \Leftrightarrow$ il existe une application injective de A vers B induit la relation d'équivalence "est équipotent". En effet s'il existe une injection de A vers B et une injection de B vers A, alors il existe une bijection de A vers B (théorème de Cantor-Bernstein)
- Dans l'ensemble des fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{R}$, la relation de pré-ordre $f \preccurlyeq g \Leftrightarrow (f = O(g) \text{ en } +\infty)$ induit la relation d'équivalence "de même ordre de grandeur en $+\infty$".

Si $\mathcal{R}$ est une relation de pré-ordre définie sur E et $\approx$ la relation d'équivalence associée, on peut définir une relation d'ordre entre les classes d'équivalence par :
$C_1 \precapprox C_2 \Leftrightarrow (\exists x \in C_1 / \exists y \in C_2 / x \mathcal{R}\, y) \Leftrightarrow (\forall x \in C_1 / \forall y \in C_2 / x \mathcal{R}\, y)$



(on a omis les boucles et des flêches pouvant se déduire par transitivité)