CIR$_2$ **TD de Maths** Groupes (suite)

Exercice 1

L'ensemble $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$ est muni de sa structure naturelle de groupe produit.

Soit φ l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times \\ (x,y) & \longmapsto & \left(\ln|y|, \mathrm{sg}(y)e^x\right)\end{array}\right.$, où sg est l'application « signe ».

1) Montrer que φ est un endomorphisme de groupes de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}^\times$.

2) Calculer $\varphi\circ\varphi$. En déduire que φ est un automorphisme de $\mathbb{R}\times\mathbb{R}$.

Exercice 2

1) Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{R}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}^\times \\ x & \longmapsto & \dfrac{x}{|x|}\end{array}\right.$ est un morphisme de groupes.

Déterminer son noyau et son image.

2) Même question avec $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{C}^\times \\ z & \longmapsto & \dfrac{z}{|z|}\end{array}\right.$.

Exercice 3

Montrer que l'application $\left\{\begin{array}{ccc}\mathbb{C}^\times & \longrightarrow & \mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{U} \\ z & \longmapsto & \left(|z|, \dfrac{z}{|z|}\right)\end{array}\right.$ est un isomorphisme de groupes

$\mathbb{R}_+^\times\times\mathbb{U}$ étant muni de sa structure naturelle de groupe produit.

Exercice 4

Soit G un groupe. On suppose que : $\forall x\in G,\quad x^2=1_G$

Montrer que G est commutatif.

Exercice 5

Soit G un groupe. Pour tout $g\in G$, notons μ_g l'application $\left\{\begin{array}{ccc}G & \longrightarrow & G \\ x & \longmapsto & gx\end{array}\right.$.

1) Montrer pour tout $g\in G$ que μ_g est une permutation de G, i.e. une bijection de G sur G. Quelle est sa réciproque ?

2) Montrer que l'application μ : $\left\{\begin{array}{ccc}G & \longrightarrow & S_G \\ g & \longmapsto & \mu_g\end{array}\right.$ est un morphisme de groupes injectif. En déduire que G est isomorphe à un sous-groupe de S_G. Ce résultat est connu sous le nom de *théorème de Cayley*.

Exercice 6

a) Soit $(G,\cdot)$ un groupe. Montrer que la loi de composition « externe »

$$g\star x := g\cdot x\cdot g^{-1}$$

définit une action de G sur lui-même (deux choses à vérifier).

b) Expliciter les orbites pour cette action dans le cas de $G=\mathcal{S}_3$. Décrire également le stabilisateur d'un élément représentatif dans chaque orbite.

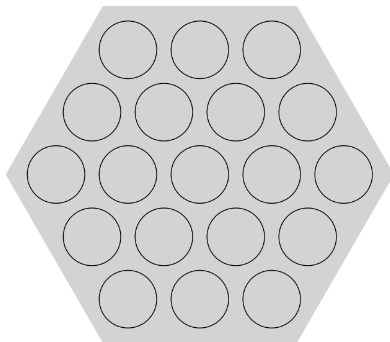
Exercice7

a) Déterminer le nombre de roulettes différentes à 12 secteurs que l'on peut réaliser si 2 secteurs sont bleus, 3 sont rouges et 7 sont verts.

b) Déterminer le nombre de colliers différents que l'on peut réaliser avec 2 saphirs, 3 rubis et 7 émeraudes.

Exercice 8

Pour Pâques, on décide de confectionner de jolies boîtes de chocolats hexagonales contenant 7 chocolats pralinés, 6 à la liqueur et 6 à la nougatine.



On estime que deux assortiments qui ne diffèrent que par une rotation de la boîte sont « les mêmes. » On va donc considèrer donc l'action du groupe de rotations

$$\mathcal{C}_6=\langle\,\rho\,\rangle$$

sur l'ensemble X des assortiments.

a) Numéroter les emplacements à votre guise, et donner avec cette notation la décomposition cyclique des permutations dans $\mathcal{S}_{19}$ correspondant à : ρ, ρ^2 et ρ^3.

b) Combien d'assortiments réellement différents peut-on réaliser ?