Pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons dans ce TP explorer l'ensemble des relations binaires sur un ensemble à n éléments, disons pour fixer les idées

$$E_n := \texttt{range}(n) = [\![0, n[\![.$$

Exercice 1

Combien y a-t-il de relations binaires distinctes sur E_n ? Pour confirmer votre réponse, générer toutes les relations possibles pour $n = 3$, sous deux formes :

- liste des couples d'éléments en relation ;
- matrice d'adjacence.

Puis répondre aux questions : parmi celles-ci, combien y a-t-il de relations

a) réflexives ?
b) symétriques ?
c) antisymétriques ?
d) transitives ?

Exercice 2

Deux relations $\mathcal{R}$ et $\mathcal{S}$ sont dites *transitivement équivalentes* si $\mathcal{R}^* = \mathcal{S}^*$. Se convaincre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des relations et décrire ses classes d'équivalence pour l'ensemble $E_3 = \{0, 1, 2\}$ de l'exercice précédent (nombre, tailles).

Exercice 3 (étude d'une relation aléatoire)

a) Générer une relation aléatoire $\mathcal{Q}$ sur E_{50} de la façon suivante : pour chaque paire (x, y), la probabilité que $x\,\mathcal{Q}\,y$ est $\frac{1}{10}$.

b) Votre relation est-elle réflexive ? Sinon, la rendre réflexive et obtenir ainsi une relation $\mathcal{R}$.

c) Cette nouvelle relation est-elle symétrique ? Sinon, la rendre symétrique et obtenir ainsi une relation $\mathcal{S}$ (vérifier qu'elle est toujours réflexive).

d) Cette nouvelle relation est-elle transitive ? Sinon, la rendre transitive et obtenir ainsi une relation $\mathcal{T}$ (vérifier qu'elle est restée réflexive et symétrique). Vous devriez maintenant avoir une relation d'équivalence sur E_{50} ; que remarquez-vous ?

e) (bonus pour les curieux) Faire varier la probabilité p que $x\,\mathcal{Q}\,y$ dans la relation initiale pour voir quelle incidence cela a sur le résultat.