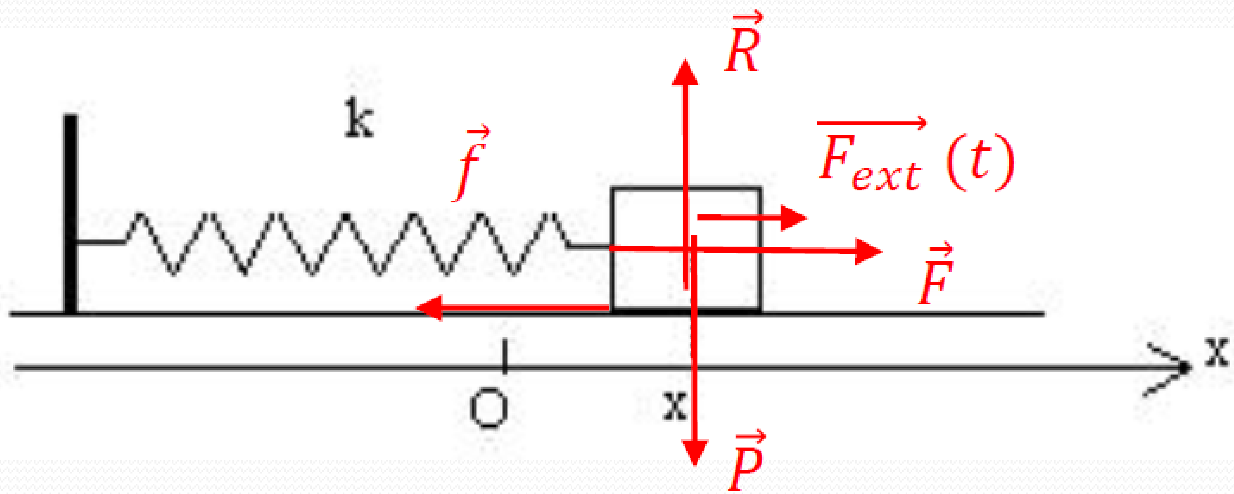
# MECANIQUE CLASSIQUE

# Chapitre 5 : Oscillateurs mécaniques

Introduction
1. Ressort
2. Oscillations libres
3. Oscillations amorties
**4. Oscillations forcées et résonance**

# 4. Oscillations forcées et résonance

On ajoute une force d'excitation $\overrightarrow{F_{ext}}\ (t)$




Bilan des forces :

$\vec{P}$, $\vec{R}$

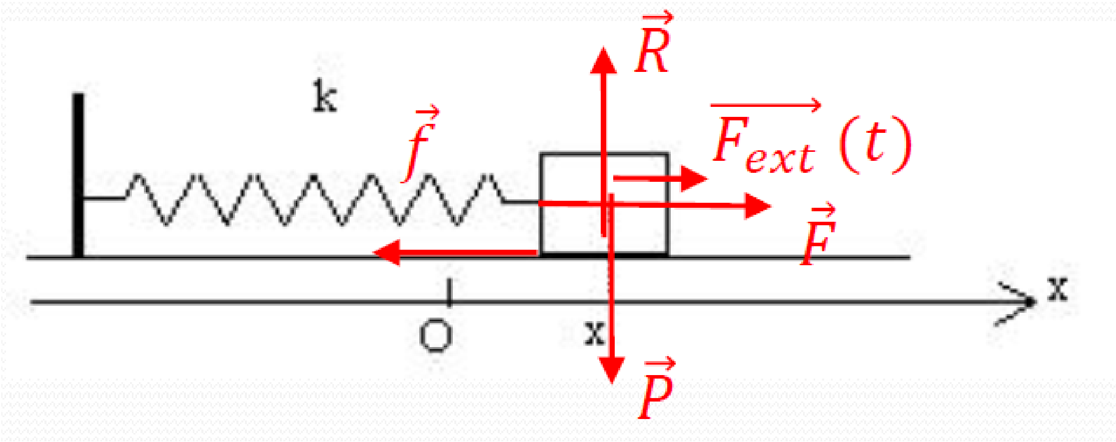
$\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{u}$

$\vec{f} = -\gamma\vec{v}$

$\overrightarrow{F_{ext}}\ (t) = \overrightarrow{F_0} \cos(\Omega t)$

Remarque. On choisit une force d'excitation très particulière : une force qui varie sinusoïdalement. Situation qui modélise un grand nombre de phénomènes naturels.

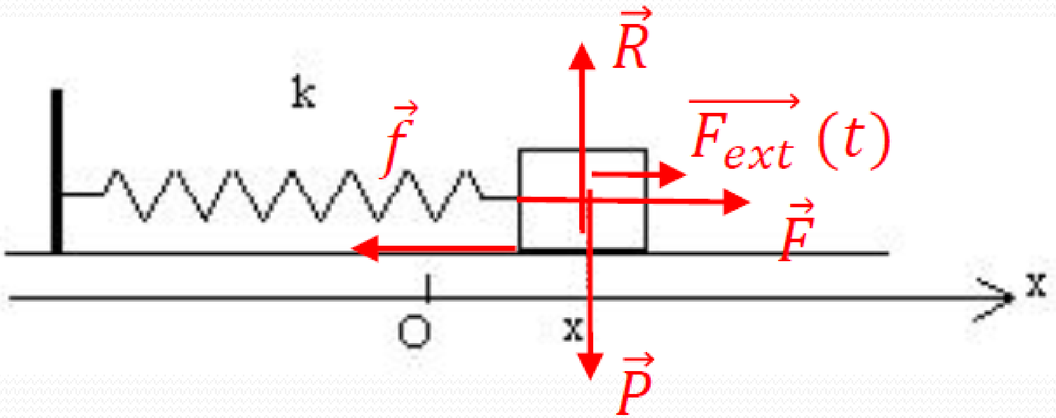
$$\overrightarrow{F_{ext}}(t) = \overrightarrow{F_0}\cos(\Omega t)$$




$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ car pas de mouvement vertical et P et R sont les seules forces dans cette direction

PFD :

$$\mathrm{m}\vec{a} = \vec{F} + \vec{f} + \overrightarrow{F_{ext}}\,(t)$$
$$\mathrm{m}\vec{a} = -k\Delta\ell\vec{u} - \gamma\vec{v} + \overrightarrow{F_0}\cos(\Omega t)$$




$$\mathrm{m}\vec{a} = -k\Delta\ell\vec{u} - \gamma\vec{v} + \overrightarrow{F_0}\cos(\Omega t)$$

$$\mathrm{m}\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\cos(\Omega t)$$

On obtient : $\boxed{\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)}$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)}$$

Equation différentielle, du second ordre, à coefficients constants, avec second membre.

Résolution :

solution de l 'équation sans second membre

+

Solution particulière de l'équation avec second membre

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

On réécrit l'équation au préalable sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}$ et ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$

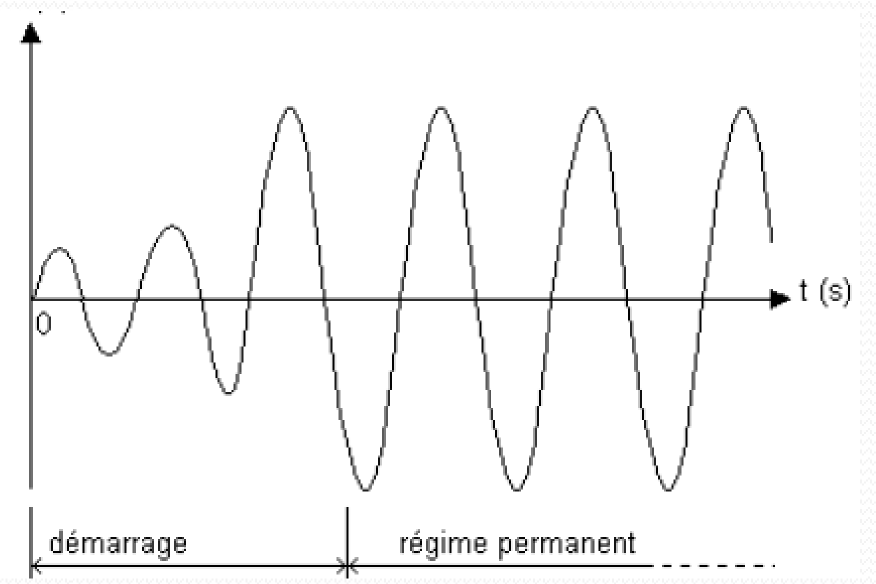
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Solution de la forme

$$x(t) = x_{homogène} + x_{particulière}$$

Régime transitoire

Régime permanent



$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Solution de la forme

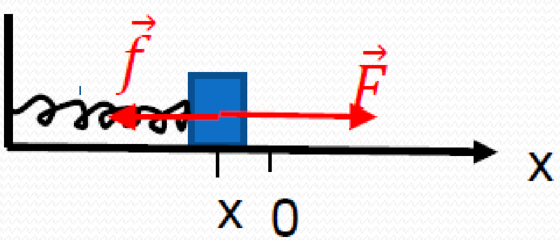
$$x(t) = x_{homogène} + x_{particulière}$$

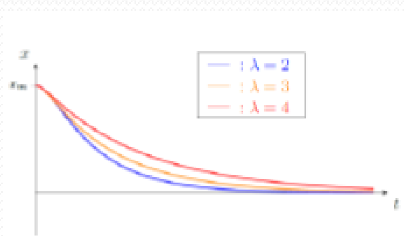
**Régime transitoire**

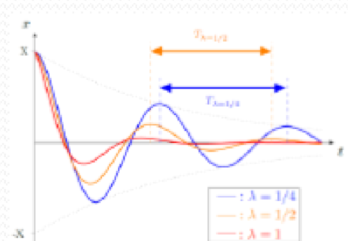
Régime permanent

Exactement le même problème que la partie précédente (oscillations amorties)

$$\boldsymbol{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$





$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Solution de la forme

$$x(t) = x_{homogène} + x_{particulière}$$

Régime transitoire

**Régime permanent**

Fonction de la forme

$$x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$$

(Ω la pulsation de la fréquence d'excitation F0)

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Détermination de la solution particulière / régime permanent

De la forme $x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. **A et B ?**

Calculer $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ en fonction de A et B puis réexprimer l'éq. diff. Avec A et B

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Détermination de la solution particulière / régime permanent

De la forme $x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. **A et B ?**

$$\dot{x}(t) = -A\Omega\sin(\Omega t) + B\Omega\cos(\Omega t)$$
$$\ddot{x}(t) = -A\Omega^2\cos(\Omega t) - B\Omega^2\sin(\Omega t)$$

On réécrit l'équa diff avec ces expressions

$$\begin{aligned}
&\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x \\
&= \cos(\Omega t)\left[-A\Omega^2 + \frac{B\Omega}{\tau} + A{\omega_0}^2\right] \\
&+ \sin(\Omega t)\left[-B\Omega^2 - \frac{A\Omega}{\tau} + B{\omega_0}^2\right] = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)
\end{aligned}$$

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Détermination de la solution particulière / régime permanent

De la forme $x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. **A et B ?**

$$\cos(\Omega t)\left[-A\Omega^2 + \frac{B\Omega}{\tau} + A{\omega_0}^2\right] + \sin(\Omega t)\left[-B\Omega^2 - \frac{A\Omega}{\tau} + B{\omega_0}^2\right] = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Pour que l'égalité soit vrai il faut que

$$\begin{cases} -A\Omega^2 + \dfrac{B\Omega}{\tau} + A{\omega_0}^2 = \dfrac{F_0}{m} \\ -B\Omega^2 - \dfrac{A\Omega}{\tau} + B{\omega_0}^2 = 0 \end{cases}$$

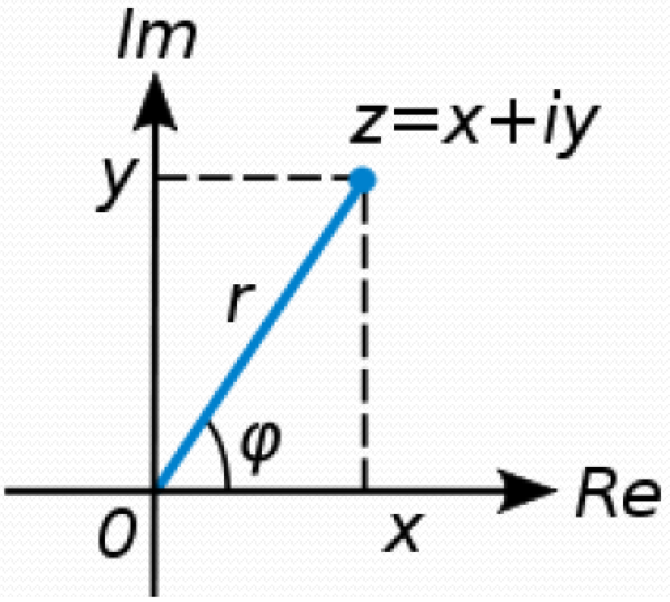
On peut résoudre ce système de 2 éq. à 2 inconnues, et trouver ainsi A et B donc l'expression de la sol. Particulière
→ Méthode de détermination correcte mais fastidieuse

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Détermination de la solution particulière / régime permanent

Une autre méthode de calcul bien plus puissante
Comme en électrocinétique

Résolution en notation complexe



$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Rappels. L'idée : on réecrit l'éq. sous la forme

$$\mathcal{R}e\left(\underline{\ddot{x}} + \frac{1}{\tau}\underline{\dot{x}} + {\omega_0}^2 \underline{x} = \frac{F_0}{m}\exp(i\Omega t)\right)$$

Avec $x = \mathcal{R}e(\underline{x})$

Rappel $\exp(i\Omega t) = \cos(\Omega t) + i\sin(\Omega t)$

On résout l'équation entre parenthèses, qui est exprimé avec des nombres complexes, et on prend ensuite la partie réelle de la solution.

Pourquoi faire ça ?
Parce que le calcul est bien plus simple sous la forme complexe, notamment parce qu'on fait disparaître les dérivées

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

En effet : on cherche une solution de la forme $\underline{x}(t) = \underline{x_0}\exp(i\Omega t)$

$$\underline{\dot{x}}(t) = i\Omega \underline{x_0}\exp(i\Omega t) = i\Omega\,\underline{x}(t)$$

$$\underline{\ddot{x}}(t) = -\Omega^2 \underline{x_0}\exp(i\Omega t) = -\Omega^2 \underline{x}(t)$$

L'équation à résoudre s'écrit en notation complexe :

$$-\Omega^2 \underline{x_0}\exp(i\Omega t) + \frac{1}{\tau} i\Omega \underline{x_0}\exp(i\Omega t) + {\omega_0}^2 \underline{x_0}\exp(i\Omega t) == \frac{F_0}{m}\exp(i\Omega t)$$

$$\left({\omega_0}^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}\right)\underline{x_0} = \frac{F_0}{m} \quad \rightarrow \quad \underline{x_0} = \frac{F_0}{m\left({\omega_0}^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}\right)}$$

→ Solution en notation complexe : $\underline{x}(t) = \frac{F_0}{m\left({\omega_0}^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}\right)}\exp(i\Omega t)$

x(t) est obtenu en prenant la partie réelle

Détermination de **la partie réelle** de $\underline{x}(t)$

On doit ramener l'équation $\underline{x}(t) = \frac{F_0}{m\left(\omega_0{}^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}\right)} \exp(i\Omega t)$ sous la forme a+ib

$$\underline{x}(t) = \frac{F_0(\cos(\Omega t) + i\sin(\Omega t))}{m\omega_0{}^2 - m\Omega^2 + \frac{im\Omega}{\tau}}$$

Puis on multiplie le dénominateur par son complexe conjugué

Rappel sur les complexes : $\frac{a+ib}{c+id} = \frac{c-id}{c-id}\ \frac{a+ib}{c+id} = \frac{(ac+bd)+i(bc-ad)}{c^2+d^2}$

Et on prend la partie réelle $\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}$

## Détermination de la partie réelle de $\underline{x}(t)$

$\underline{x}(t) = \frac{F_0(\cos(\Omega t)+i\sin(\Omega t))}{m{\omega_0}^2-m\Omega^2+\frac{im\Omega}{\tau}}$ de la forme $\frac{a+ib}{c+id}$ → partie réelle $\frac{(ac+bd)}{c^2+d^2}$

Ici avec $\mathrm{a} = F_0\cos(\Omega t)$, b $= F_0\sin(\Omega t)$, $\mathrm{c} = m{\omega_0}^2 - m\Omega^2$, $\mathrm{d} = \frac{m\Omega}{\tau}$

On obtient : $x(t) = \frac{F_0\left(m{\omega_0}^2-m\Omega^2\right)\cos(\Omega t)+F_0\frac{m\Omega}{\tau}\sin(\Omega t)}{(m{\omega_0}^2-m\Omega^2)^2+\left(\frac{m\Omega}{\tau}\right)^2}$

(Rmq. On peut encore simplifier un peu cette expression)

Détermination de la partie réelle de $\underline{x}(t) = \frac{F_0(\cos(\Omega t) + i \sin(\Omega t))}{m{\omega_0}^2 - m\Omega^2 + \frac{im\Omega}{\tau}}$

On obtient : $x(t) = \frac{F_0\left(m{\omega_0}^2 - m\Omega^2\right)\cos(\Omega t) + F_0\frac{m\Omega}{\tau}\sin(\Omega t)}{(m{\omega_0}^2 - m\Omega^2)^2 + \left(\frac{m\Omega}{\tau}\right)^2}$

Cette équation est, pour rappel, la solution particulière de l'équation diff. $\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$

C'est bien de la forme $x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$ avec A et B constants

Remarque.
Toute expression qui somme des sin et des cos oscillant à la même pulsation peut se réécrire sous la forme $A\cos(\omega t + \varphi)$

$$\mathrm{a}\cos(\omega t) + \mathrm{b}\sin(\omega t) = \mathrm{c}\cos(\omega t + \varphi)$$

Cette forme est plus intéressante pour certains calculs, notamment :

Quelle est l'amplitude maximale de $x$ ?

$$x_{max} = c$$

**Calcul du module de la solution complexe x(t)**

Rappel : module d'un nombre complexe $\underline{x}$ : $|\underline{x}| = \sqrt{\underline{x}\ \underline{x}^*}$

$$\underline{x}(t) = \frac{F_0}{m\left({\omega_0}^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}\right)}\exp(i\Omega t)$$

$$|\underline{x}(t)|^2 = \frac{F_0}{m\left({\omega_0}^2 - \Omega^2 + \frac{i\Omega}{\tau}\right)}\exp(i\Omega t)\,\frac{F_0}{m\left({\omega_0}^2 - \Omega^2 - \frac{i\Omega}{\tau}\right)}\exp(-i\Omega t)$$

$$|\underline{x}(t)|^2 = \frac{{F_0}^2}{m^2\left(({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+\frac{\Omega^2}{\tau^2}\right)} \rightarrow |\underline{x}(t)| = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2-\Omega^2)^2+\frac{\Omega^2}{\tau^2}}}$$

## Calcul du module de la solution complexe x(t)

$$\left|\underline{x}(t)\right| = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}}}$$

Voilà l'amplitude des oscillations qu'on obtient si on soumet un système oscillant à une force oscillante à la pulsation $\Omega$

$\omega_0$ est la pulsation propre

$\frac{1}{\tau}$ caractérise les frottements

(si $\frac{1}{\tau}$ est grand forts frottements)

## Etude du résultat :

$$\left|\underline{x}(t)\right| = \frac{F_0}{m\sqrt{({\omega_0}^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}}}$$

$\frac{1}{\tau}$ caractérise les frottements

Si pas de frottements : $\frac{1}{\tau} \to 0$

$$\left|\underline{x}(t)\right| = \frac{F_0}{m({\omega_0}^2 - \Omega^2)}$$

On voit que si $\Omega = \omega_0$ l'amplitude tend vers l'infini !

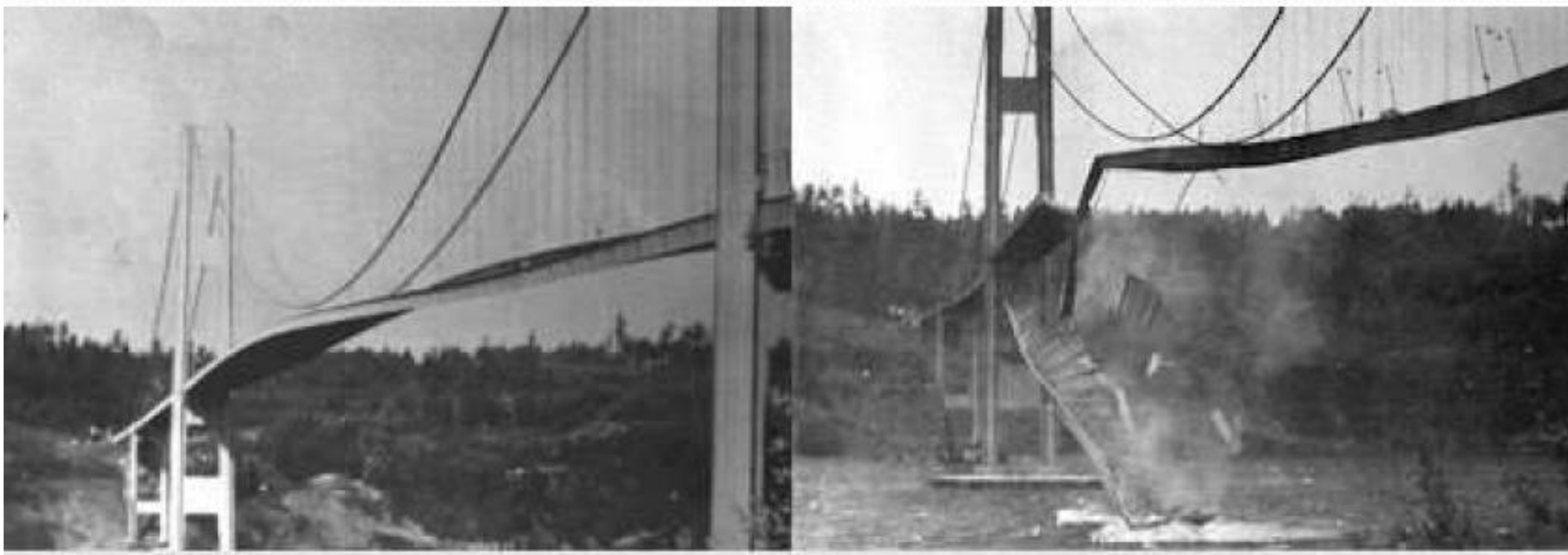
→ Résonance

## Résonance

Le système réagit violemment lorsqu’on l’excite à certaines fréquences

Remarque.

Le phénomène de résonance peut apparaître **dans tous les systèmes oscillants**, lorsqu’ils sont soumis à une **excitation périodique** de même fréquence que leur **fréquence propre**.



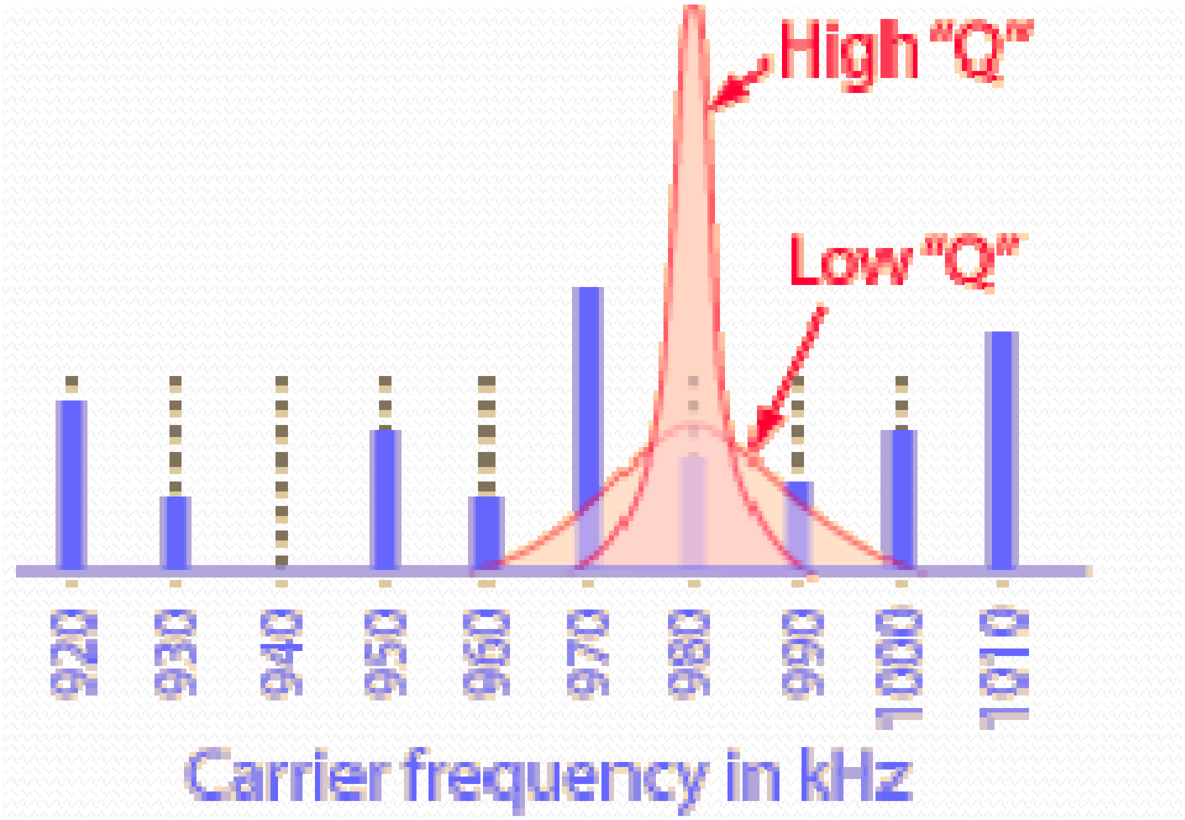
Mise en résonance du pont par le vent, puis effrondrement du pont (Pont Tacoma - 1940)

La fréquence du vent a coïncidé avec la fréquence propre du pont (oscillation du réseau d’atomes, la fréquence propre dépend des matériaux)

Résonance électrique

→ Permet de sélectionner une fréquence radio (amplitude max à la résonance)

→ On voit ici qu'on peut définir un facteur de qualité (ce qu'on va faire maintenant)



**Etude du résultat (2):**

$$\left|\underline{x}(t)\right| = \frac{F_0}{m\sqrt{(\omega_0{}^2 - \Omega^2)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2}}}$$

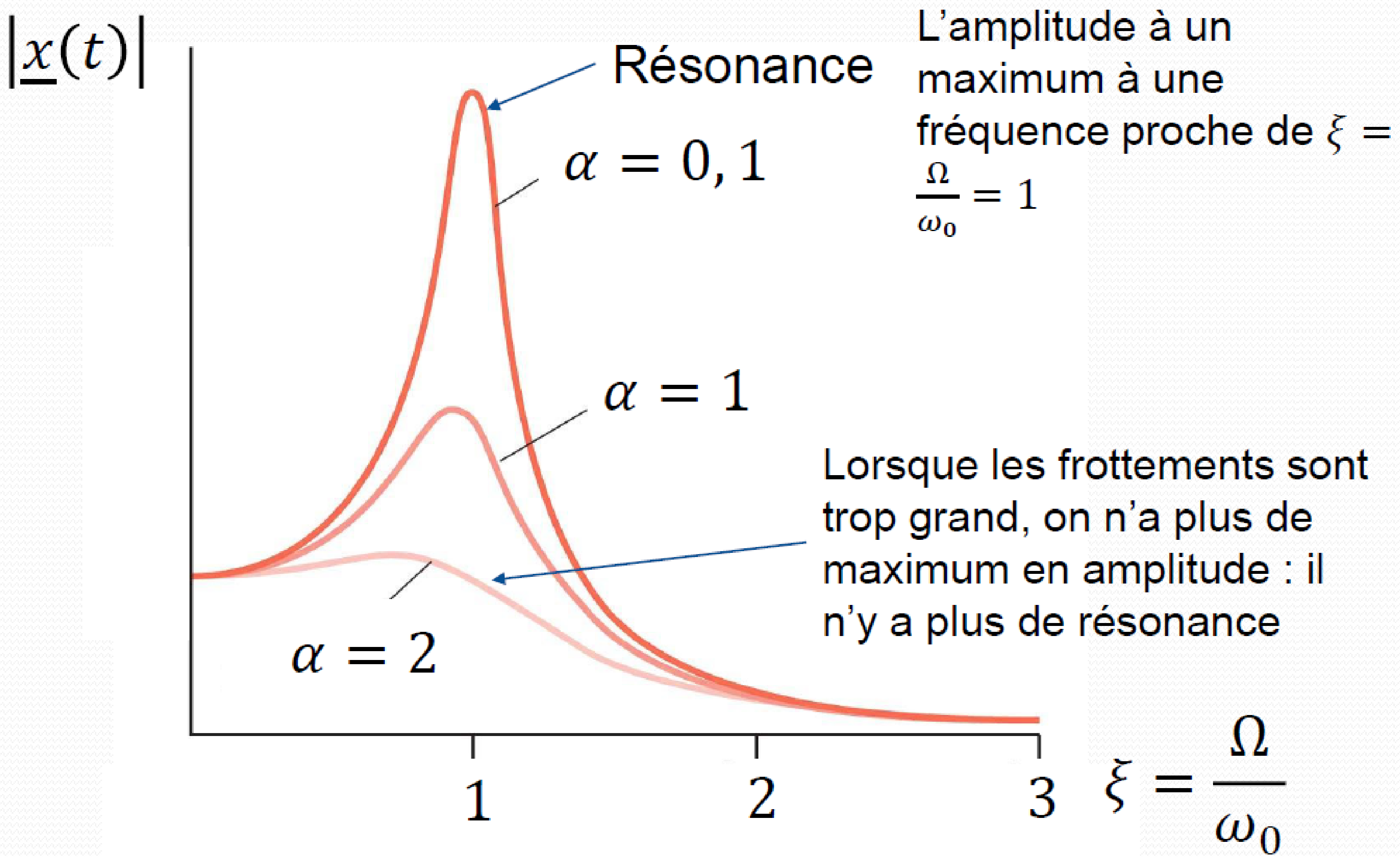
Avec frottements : autre écriture

$$\left|\underline{x}(t)\right| = \frac{F_0}{m\omega_0{}^2\sqrt{\left(1 - \frac{\Omega^2}{\omega_0{}^2}\right)^2 + \frac{\Omega^2}{\tau^2\omega_0{}^4}}}$$

Si on pose $\xi = \frac{\Omega}{\omega_0}$

$$\left|\underline{x}(t)\right| = \frac{F_0}{m\omega_0{}^2}\left((1-\xi^2)^2 + \alpha\xi^2\right)^{-1/2}$$

On peut tracer cette fonction, $y = \left((1-x^2)^2 + \alpha x^2\right)^{-1/2}$ pour différentes valeurs de $\alpha$




On définit le facteur de qualité $Q = \omega_0 \tau$ (ou $Q = \omega_0 / 2\lambda$). Changement de régime lorsque $Q = 1/\sqrt{2}$ . Plus le facteur de qualité est grand, plus l'amplitude de resonance est grande.