$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **120 minutes** contient **3** × **3** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que peu utile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et **expliquant** vos réponses.
- **Amusez**-vous bien !

— Tao —

a) Retrouver la formule pour le volume d'une boule (tridimensionnelle) $\mathcal{B}$ de rayon 1, par la méthode de votre choix.

b) Par changement de variables, en déduire le volume d'un ellipsoïde (plein) de rayons a, b, $c > 0$:

$$\mathcal{E} = \left\{ (x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \;\middle|\; \left(\frac{x}{a}\right)^2 + \left(\frac{y}{b}\right)^2 + \left(\frac{z}{c}\right)^2 \leqslant 1 \right\}.$$

c) On génère aléatoirement un vecteur $\mathbf{v} = x\,\mathbf{i} + y\,\mathbf{j} + z\,\mathbf{k}$ en prenant pour x, y et z trois nombres réels choisis uniformément dans l'intervalle $[0, 1]$. Quelle est la probabilité que $||\mathbf{v}|| \leqslant \sqrt{2}$? (faire un dessin. . .)

— Zia —

a) Quelle est la nature du point critique en $(0, 0, 0)$ de la fonction de trois variables

$$f(x, y, z) = 1 + x^2 + y^2 - x^3 + z^3 \ ?$$

b) Soient g et $h : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ deux fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ et cherchons à extrémiser g sur le domaine

$$\mathcal{D} = \left\{ (x, y) \in \mathbf{R}^2 \;\middle|\; h(x, y) \leqslant 0 \right\}.$$

Montrer que si un extremum est atteint en $(x_0, y_0) \in \mathcal{D}$, alors il existe une constante λ_0 pour laquelle (x_0, y_0, λ_0) est un point critique de la fonction de *trois* variables

$$L(x, y, \lambda) := g(x, y) + \lambda^3\, h(x, y).$$

c) Déterminer les valeurs extrêmes prises par l'expression $x^2 + \sqrt{3}\,xy$ sur la région $x^2 + y^2 \leqslant 1$.

— Esteban —

a) Calculer la courbure en chaque point de la courbe plane $\mathcal{C}$ admettant la paramétrisation polaire

$$r = 2a\cos\theta \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant \pi),$$

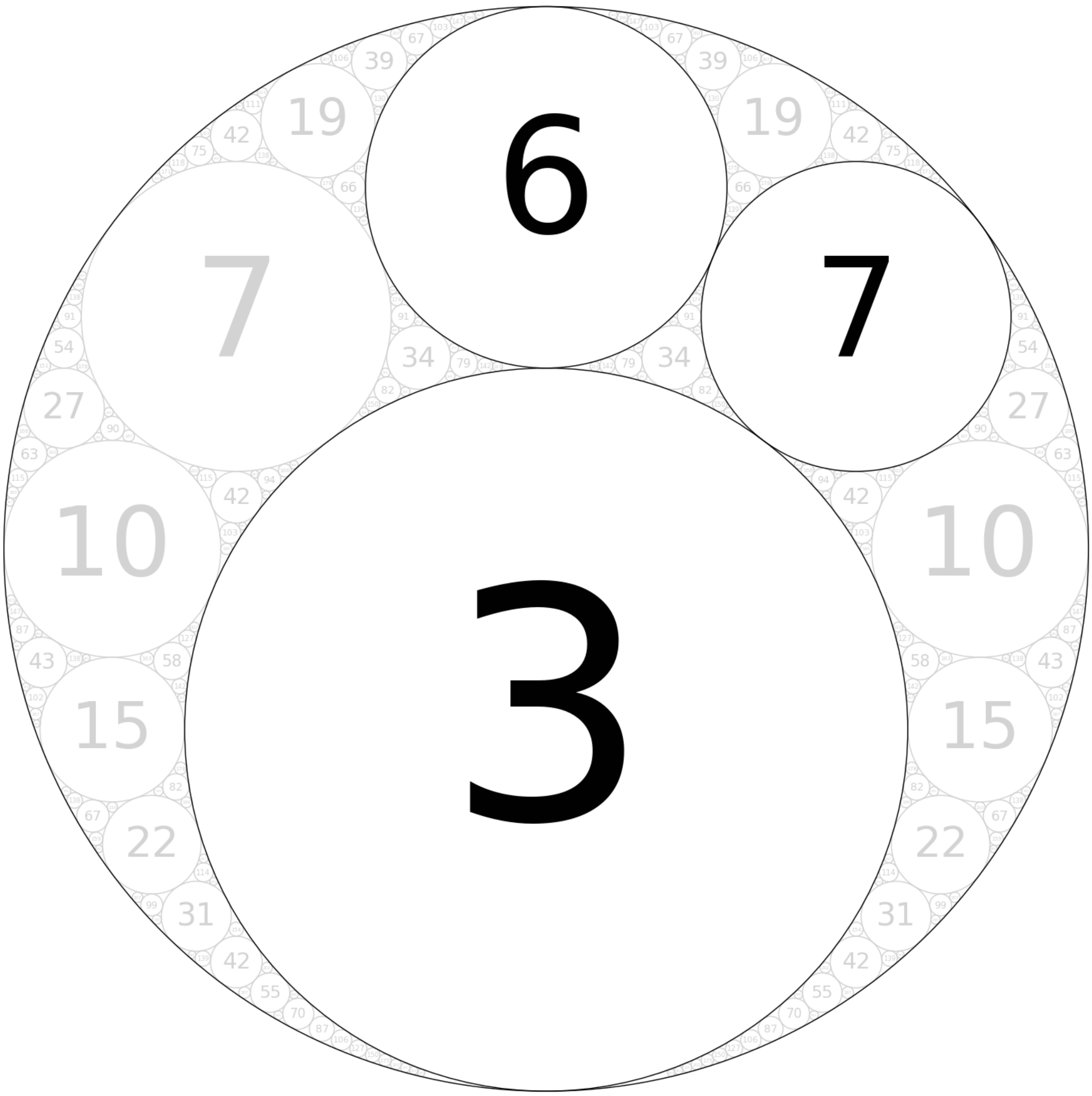
où a est une constante positive. Qu'en conclure ?

b) Les courbures κ_i de quatre cercles deux à deux tangents dans $\mathbf{R}^2$ satisfont la *relation de Descartes* :

$$(\kappa_1 + \kappa_2 + \kappa_3 + \kappa_4)^2 = 2(\kappa_1^2 + \kappa_2^2 + \kappa_3^2 + \kappa_4^2).$$

Décrire géométriquement l'ensemble $\mathcal{A}$ des quadruplets $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4) \in \mathbf{R}^4$ respectant celle-ci.

c) Donner l'équation cartésienne de l'hyperplan $\mathcal{H}$ de $\mathbf{R}^4$ tangent à $\mathcal{A}$ au point $(-2, 3, 6, 7)$.



Dans cette figure, chaque quadruplet de cercles deux à deux tangents nous donne un point $(\kappa_1, \kappa_2, \kappa_3, \kappa_4)$ sur $\mathcal{A}$.

(La courbure de chaque cercle est indiquée au centre de celui-ci.)