

## 1. Groupe $S_n$

$S_n$  est le groupe des permutations (bijections) de l'ensemble  $\{1, 2, \dots, n\}$ .

Il est isomorphe au groupe des permutations de n'importe quel ensemble à  $n$  éléments.

Exemples

$S_2$  est composé de l'identité et de la bijection  $1 \longleftrightarrow 2$

$S_3$  est isomorphe au groupe des permutations des sommets d'un triangle équilatéral, et donc aussi au groupe des isométries du plan qui laissent un triangle équilatéral globalement invariant.

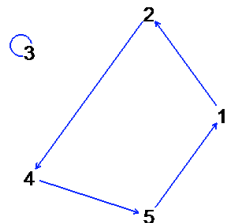
$S_n$  est un groupe d'ordre  $n!$

Une permutation  $\sigma$  peut être notée  $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & \dots & n \\ \sigma(1) & \sigma(2) & \sigma(3) & \dots & \sigma(n) \end{pmatrix}$

Cette notation (notation de Gauss) peut être commode pour composer 2 permutations.

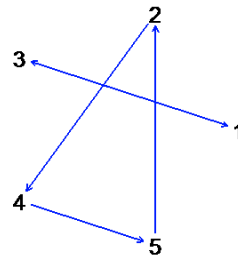
Exemple :

pour  $\sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \end{pmatrix}$



et

$\sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \end{pmatrix}$



on écrit  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 2 & 4 & 3 & 5 & 1 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$  pour voir que  $\sigma_2 \circ \sigma_1 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 4 & 5 & 1 & 2 & 3 \end{pmatrix}$

et  $\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 4 & 1 & 5 & 2 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$  pour voir que  $\sigma_1 \circ \sigma_2 = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 \\ 3 & 5 & 2 & 1 & 4 \end{pmatrix}$

La composée  $\sigma_2 \circ \sigma_1$  se note aussi  $\sigma_2 \sigma_1$  ;  $\sigma \circ \sigma \circ \dots \circ \sigma = \sigma^k$ ,  $\sigma^0 = id$  (notation multiplicative).

## 2. Permutations particulières

### Orbite d'un élément sous l'action d'une permutation

Soit  $\sigma$  une permutation de  $\{1, 2, \dots, n\}$  et  $x \in \{1, 2, \dots, n\}$ .

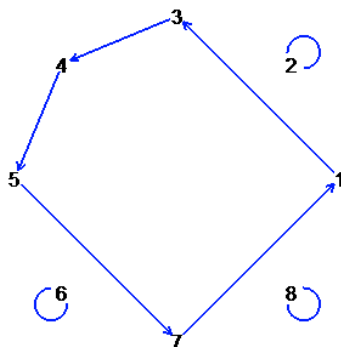
L'orbite de  $x$  sous l'action de  $\sigma$  est l'ensemble  $O(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^k(x) \dots\}$

Exemple pour  $\sigma_1$  :  $O(1) = \{1, 2, 4, 5\}$ ,  $O(2) = O(4) = O(5) = O(1)$  et  $O(3) = \{3\}$

- $O(x)$  est un ensemble fini.
- Pour tout  $x$ , il existe un entier  $k \leq n$  tel que  $O(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{k-1}(x)\}$  et  $\sigma^k(x) = x$
- La relation  $y \mathcal{R} x \Leftrightarrow y \in O(x)$  est une relation d'équivalence. Les orbites sont donc disjointes 2 à 2.

## ***p*-cycle**

Une permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, n\}$  est un *p*-cycle (ou cycle d'ordre  $p$ ) si toutes les orbites sont réduites à un élément, sauf une seule, qui a  $p$  éléments.



Dans ce cas, pour tout  $x$  élément de cette orbite,  $O(x) = \{x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{p-1}(x)\}$

Le  $p$ -cycle  $\sigma$  est alors noté  $(x, \sigma(x), \sigma^2(x), \dots, \sigma^{p-1}(x))$

L'ensemble des éléments de l'orbite ( sans tenir compte de l'ordre ) est appelé le support du cycle.

Exemples  $\sigma_1$  est un 4-cycle noté  $(1, 2, 4, 5)$  ou  $(2, 4, 5, 1)$  ou... mais pas  $(1, 4, 2, 5)$ .

Son support est  $\{1, 2, 4, 5\} = \{1, 4, 2, 5\} = \dots$

$\sigma_2$  n'est pas un cycle.

## ***Transposition***

Une transposition est un 2-cycle.

La transposition  $(i, j)$  dans  $S_n$  échange  $i$  et  $j$  et laisse invariant tous les autres éléments de  $\{1, 2, \dots, n\}$

Remarque :

Pour  $i, j, k$  distincts 2 à 2, le produit des transpositions  $(i, j)$  et  $(j, k)$  est un 3-cycle :  $(i, j)(j, k) = (i, j, k)$

$\uparrow \circ \rightarrow$	id	(1,2)
id	id	(1,2)
(1,2)	(1,2)	id

Table du groupe  $S_2$

$\uparrow \circ \rightarrow$	id	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)
id	id	(1,2,3)	(1,3,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)
(1,2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	id	(1,3)	(1,2)	(2,3)
(1,3,2)	(1,3,2)	id	(1,2,3)	(2,3)	(1,3)	(1,2)
(1,2)	(1,2)	(2,3)	(1,3)	id	(1,2,3)	(1,3,2)
(2,3)	(2,3)	(1,3)	(1,2)	(1,3,2)	id	(1,2,3)
(1,3)	(1,3)	(1,2)	(2,3)	(1,2,3)	(1,3,2)	id

Table du groupe  $S_3$

### 3. Décomposition en cycles, en transposition

Théorème 1 :

- Toute permutation se décompose en produit de cycles de supports disjoints.
- Cette décomposition est unique à l'ordre près.
- Tous ces cycles commutent

Théorème 2 :

- Toute permutation se décompose en produit de transpositions.
- Cette décomposition n'est pas unique

Exemple

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 \\ 3 & 10 & 6 & 4 & 2 & 1 & 7 & 5 & 8 & 9 \end{pmatrix} = (1, 3, 6)(2, 10, 9, 8, 5) = (1, 3)(3, 6)(2, 10)(10, 9)(9, 8)(8, 5)$$

$\uparrow \circ \rightarrow$	id	(1,2,3,4)	(1,3)(2,4)	(1,4,3,2)	(1,2)(3,4)	(1,4)(2,3)	(2,4)	(1,3)
id	id	(1,2,3,4)	(1,3)(2,4)	(1,4,3,2)	(1,2)(3,4)	(1,4)(2,3)	(2,4)	(1,3)
(1,2,3,4)	(1,2,3,4)	(1,3)(2,4)	(1,4,3,2)	id	(1,3)	(2,4)	(1,2)(3,4)	(1,4)(2,3)
(1,3)(2,4)	(1,3)(2,4)	(1,4,3,2)	id	(1,2,3,4)	(1,4)(2,3)	(1,2)(3,4)	(1,3)	(2,4)
(1,4,3,2)	(1,4,3,2)	id	(1,2,3,4)	(1,3)(2,4)	(2,4)	(1,3)	(1,4)(2,3)	(1,2)(3,4)
(1,2)(3,4)	(1,2)(3,4)	(2,4)	(1,4)(2,3)	(1,3)	id	(1,3)(2,4)	(1,2,3,4)	(1,4,3,2)
(1,4)(2,3)	(1,4)(2,3)	(1,3)	(1,2)(3,4)	(2,4)	(1,3)(2,4)	id	(1,4,3,2)	(1,2,3,4)
(2,4)	(2,4)	(1,4)(2,3)	(1,3)	(1,2)(3,4)	(1,4,3,2)	(1,2,3,4)	id	(1,3)(2,4)
(1,3)	(1,3)	(1,2)(3,4)	(2,4)	(1,4)(2,3)	(1,2,3,4)	(1,4,3,2)	(1,3)(2,4)	id

Table du sous-groupe de  $S_4$  engendré par le cycle  $(1, 2, 3, 4)$  et la transposition  $(1, 3)$

#### Application :

Pour prouver qu'une expression utilisant  $n$  variable est symétrique, c'est-à-dire invariante par toute permutation des variables, il suffit de démontrer qu'elle ne change pas quand on échange 2 des  $n$  variables.

Exemples :

le polynôme  $P(X, Y, Z) = (X + Y + Z)^3 - X^2Y - X^2Z - XY^2 - ZY^2 - XZ^2 - YZ^2 + XYZ$  est symétrique.

le polynôme  $Q(X, Y, Z) = X^2(Y^2 + Z^2) + Y^2(X^2 + Z^2) + XYZ$  ne l'est pas (échanger  $X$  et  $Z$ ).

## 4. Signature

Pour toute permutation  $\sigma$  de  $S_n$ , on détermine le nombre  $m$  d'orbites distinctes sous l'action de  $\sigma$ .

On définit alors sa signature  $\varepsilon(\sigma)$  comme étant égale à 1 si  $n - m$  est pair et  $-1$  sinon :  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^{n-m}$

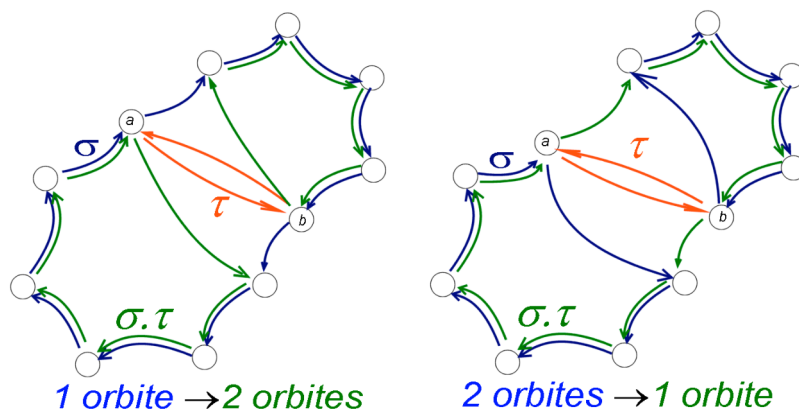
- La signature de l'identité est  $+1$
- La signature d'une transposition est  $-1$
- La signature d'un 3-cycle est  $+1$

### Théorème 3 :

- Pour toute permutation  $\sigma$  de  $S_n$  et toute transposition  $\tau$ ,  $\varepsilon(\sigma\tau) = -\varepsilon(\sigma)$
- Pour toutes permutations  $\sigma_1$  et  $\sigma_2$  de  $S_n$ ,  $\varepsilon(\sigma_1\sigma_2) = \varepsilon(\sigma_1)\varepsilon(\sigma_2)$  :

La fonction  $\varepsilon : S_n \longrightarrow \{-1, +1\}$  est un morphisme de groupes

- Si une permutation  $\sigma$  de  $S_n$  se décompose en produit de  $k$  transpositions, alors  $\varepsilon(\sigma) = (-1)^k$



### Théorème 4 :

Pour toute permutation  $\sigma$  de  $S_n$ , sa signature est égale à  $\prod_{i < j} \frac{\sigma(i) - \sigma(j)}{i - j}$ ,

c'est-à-dire à  $+1$  si le nombre de "dérangements" de la liste  $[1, 2, \dots, n]$  est pair, et à  $-1$  sinon.

### Permutation paire :

Une permutation est paire si et seulement si sa signature est  $+1$ . Sinon c'est une permutation impaire.

L'ensemble des permutations paires est un sous groupe de  $S_n$ . On le nomme groupe alterné  $A_n$ .

Il est d'ordre  $\frac{n!}{2}$

o	paire impaire	
	paire	impaire
paire	paire	impaire
impaire	impaire	paire

## 5. Applications

### Ordre d'une permutation

Mélange « américain » d'un jeu de 32 cartes <https://youtu.be/hFFx8ImnP2Y?t=143>

Ce mélange réalise la permutation  $\sigma$  de  $\{1, 2, \dots, 32\}$  telle que

$$\sigma(1) = 1, \sigma(32) = 32, \forall n \in \{2, 3, \dots, 31\} \sigma(n) = 2n - 1 \bmod 31$$

$\sigma$  se décompose en produit de 6 cycles de supports disjoints, tous d'ordre 5.

Comme ils commutent,  $\sigma^5 = id$ .

### Le jeu du taquin (jeu des quinze)

Voici le récit de Sam Loyd (extrait de Oh ! les Maths de Yakov Perelman Dunod) :

*"Les anciens parmi les habitants du royaume de la débrouillardise se rappellent qu'au début des années 70, j'ai amené le monde entier à se casser la tête sur un jeu de carrés mobiles connu sous le nom de "jeu des quinze". Les quinze carrés étaient disposés dans l'ordre à l'intérieur d'un cadre, à l'exception, des pièces 14 et 15, interverties... Le problème consistait à rétablir la disposition initiale, les pièces 14 et 15 étant, cette fois, dans l'ordre."*



*La prime de 1000 dollars offerte comme récompense au premier qui y parviendrait ne fut décernée à personne, bien que tous se soient acharnés sur le problème...*

*Nul ne voulait renoncer à ses recherches, chacun étant certain qu'il parviendrait au but."*

- Déplacer un carré revient à le permuter avec la case vide (notons-la 0) et donc d'effectuer une transposition sur  $\{0, 1, 2, \dots, 15\}$ . On cherche à effectuer un certain nombre de transpositions  $(k, 0)$  dont le produit donne la transposition  $(14, 15)$ , qui est de signature -1.
- Comme la case vide revient à sa place, le nombre de transpositions qui s'appliquent à 0 est pair. Donc la signature du produit est +1.
- Contradiction

Et en partant de la disposition suivante ?



<https://fr.wikipedia.org/wiki/Taquin>

<http://images.math.cnrs.fr/Le-jeu-de-taquin-du-cote-de-chez-Galois>