

Mathématiques

Rattrapage – 1^{er} semestre

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **5** questions équipondérées non ordonnées.
- L'usage de la calculatrice est déconseillé.
- Explicitez vos raisonnements, faites des croquis, et surtout amusez-vous bien !

♣ – Tangence

Montrer que l'hyperboloïde $\pi(x^2 - y^2) + z^2 = \pi^2$ et l'hélicoïde $\begin{cases} x = 2v \cos u \\ y = 2v \sin u \\ z = -4u \end{cases}$ sont tangents en $P = (\sqrt{2}, \sqrt{2}, -\pi)$.

♡ – Cardioïde

Calculer la longueur totale et le rayon de courbure en chaque point de la cardioïde $r = 1 + \cos \theta$, $\theta \in [-\pi, \pi]$.

♠ – Viviani

Calculer le volume du solide d'intersection de la boule $\mathcal{B} : x^2 + y^2 + z^2 \leq 4a^2$ et du cylindre $\mathcal{C} : (x-a)^2 + y^2 \leq a^2$.

◇ – Optimisation

Déterminer les valeurs extrêmes de $f(x, y) = x^2 + y^2 + \frac{1}{3}y^3$ sur le disque de rayon 3 centré à l'origine.

★ – Intégrale curviligne

Calculer l'intégrale curviligne $\int_C \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r}$ du champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = 2xy \mathbf{i} + x^2 \mathbf{j} + \mathbf{k}$$

le long de l'arc d'ellipse $\mathbf{r}(t) = (\cos t, \sin t, \sin t)$, $t \in [0, \pi]$.