$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Déterminer, aussi précisément que possible, la nature de la quadrique d'équation cartésienne

$$x^2 + 4xy - 4xz + 8y^2 - 6yz + 4z^2 + x + 2y - z = 0.$$

Sous forme matricielle, l'équation de cette quadrique s'écrit

$$\begin{bmatrix} x & y & z \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 1 & 2 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = 0.$$

Appliquons l'algorithme de Gauss-Lagrange à la matrice définissant la partie quadratique de cette équation :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 8 & -3 \\ -2 & -3 & 4 \end{bmatrix} \overset{(2)-2(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & -2 \\ 0 & 4 & 1 \\ -2 & 1 & 4 \end{bmatrix} \overset{(3)+2(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\overset{(3)-\frac{1}{4}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -\frac{1}{4} \end{bmatrix} \overset{2(3)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}.$$

En appliquant les opérations effectuées (selon les colonnes) à la matrice identité, on obtient un changement de variables

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 5 \\ 0 & \frac{1}{2} & -\frac{1}{2} \\ 0 & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \\ w \end{bmatrix},$$

par rapport auquel l'équation initiale s'écrit

$$u^2 + v^2 - w^2 + u + 2w = 0.$$

Ne reste plus qu'à compléter les carrés en posant

$$\begin{bmatrix} U \\ V \\ W \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} u - \frac{1}{2} \\ v \\ w - 1 \end{bmatrix}$$

pour ainsi obtenir

$$U^2 + V^2 - W^2 = -1,$$

la forme canonique d'un hyperboloïde à deux nappes.

Vérifier que la fonction de deux variables $f : \mathbf{R}^2 \setminus \{\, (x,y) \mid x \leqslant 0 \,\} \longrightarrow \,]-\pi, \pi[$ définie par

$$f(x,y) = \operatorname{atan2}(y,x)$$

est solution de l'équation aux dérivées partielles

$$x\,\frac{\partial f}{\partial x} + y\,\frac{\partial f}{\partial y} = 0.$$

Pour être très explicite, cette fonction est définie par

$$f(x,y) = \begin{cases} \frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{x}{y}) & \text{si } y > 0, \\ \arctan(\frac{y}{x}) & \text{si } x > 0, \\ -\frac{\pi}{2} - \arctan(\frac{x}{y}) & \text{si } y < 0 \end{cases}$$

(on peut vérifier que ces définitions sont bien compatibles sur l'intersection des différents morceaux).

Dès lors, on trouve en tout point

$$\frac{\partial f}{\partial x} = -\frac{y}{x^2+y^2}, \qquad \frac{\partial f}{\partial y} = \frac{x}{x^2+y^2},$$

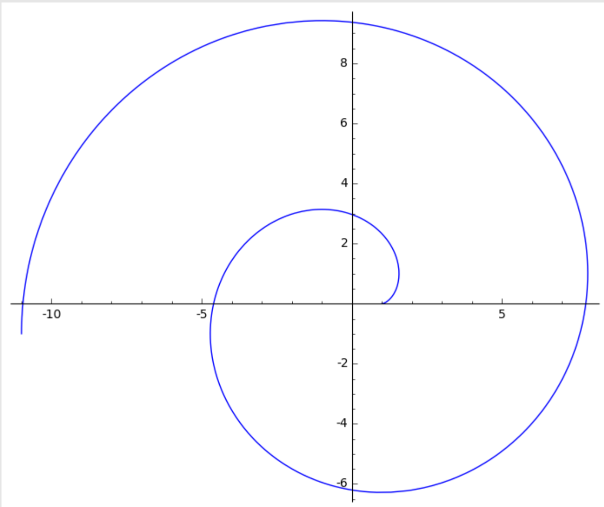
d'où l'égalité annoncée.

Pour la courbe paramétrée d'équations :

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t\sin t \\ y(t) = \sin t - t\cos t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$

déterminer : l'allure générale, les points stationnaires, une abscisse curviligne, une paramétrisation naturelle, le repère de Frenet, la courbure en chaque point, ainsi que la développée (lieu des centres de courbure).

Pour l'allure générale, en étudiant les variations de $x(t)$ et $y(t)$ on obtient quelque chose qui ressemble à ceci :



(par souci de simplicité, considérons ici seulement la partie de la courbe avec $t \geqslant 0$; la partie avec $t \leqslant 0$ s'obtient par réflexion de celle-ci par rapport à l'axe $y = 0$).

En termes du vecteur unitaire $\mathbf{u}(t) = (\cos t, \sin t)$, on trouve

$$\mathbf{r}(t) = \mathbf{u}(t) - t\,\frac{\mathrm{d}\mathbf{u}}{\mathrm{d}t}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = t\,\mathbf{u}(t).$$

Le seul point stationnaire est donc en $t = 0$, et

$$\frac{\mathrm{d}s}{\mathrm{d}t} = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| = t.$$

En prenant $s(0) = 0$, on obtient l'abscisse curviligne

$$s(t) = \frac{t^2}{2},$$

et donc la paramétrisation naturelle

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} \cos\sqrt{2s} + \sqrt{2s}\sin\sqrt{2s} \\ \sin\sqrt{2s} - \sqrt{2s}\cos\sqrt{2s} \end{bmatrix}.$$

Repère de Frenet :

$$\mathbf{T}(t) = \mathbf{u}(t) = \begin{bmatrix} \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}, \qquad \mathbf{N}(t) = \begin{bmatrix} -\sin t \\ \cos t \end{bmatrix},$$

$$\text{courbure } \kappa = \frac{1}{t}, \qquad \text{rayon de courbure } R = \frac{1}{\kappa} = t,$$

donc développée

$$\mathbf{r}(t) + R\,\mathbf{N}(t) = \mathbf{u}(t)$$

– un cercle de rayon 1.

Une puce, initialement située en $(1, \operatorname{ch} 1)$, se laisse glisser le long de la chaînette d'équation

$$y = \operatorname{ch} x = \frac{e^x + e^{-x}}{2}$$

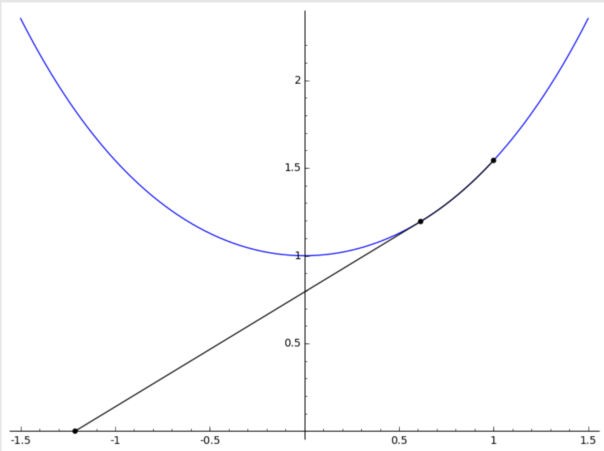
et parcourt ainsi $\operatorname{sh} \frac{1}{2}$ unités de distance avant de décrocher tangentiellement et d'aller s'écraser sur l'axe des x. Quelle est l'abscisse de son point d'impact ?

Paramétrons la courbe par

$$\mathbf{r}(x) = \begin{bmatrix} x \\ \operatorname{ch} x \end{bmatrix},$$

de sorte que

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}x} \right\| = \sqrt{1 + \operatorname{sh}^2 x} = \operatorname{ch} x.$$



En parcourant la courbe de la droite vers la gauche, avec $s(1) = 0$, on a donc

$$s(x) = -\int_1^x \operatorname{ch} x \,\mathrm{d}x = \operatorname{sh} x - \operatorname{sh} 1.$$

Si ℓ désigne la distance parcourue par la puce (je suis désolé, la valeur fournie dans l'énoncé ne donne pas des calculs qui tombent particulièrement bien...), l'abscisse x_d de décrochage est la solution de

$$s(x_d) = \operatorname{sh} x_d - \operatorname{sh} 1 = \ell,$$

soit

$$x_d = \operatorname{argsh}(\ell + \operatorname{sh} 1).$$

Le vecteur tangent au point $(x_d, \operatorname{ch} x_d)$ est $(1, \operatorname{sh} x_d)$, la droite tangente est donc donnée par l'équation

$$y - \operatorname{ch} x_d = \operatorname{sh} x_d (x - x_d).$$

On trouve donc, quand $y = 0$,

$$x = x_d - \frac{\operatorname{ch} x_d}{\operatorname{sh} x_d}.$$

Avec la valeur de ℓ fournie, on trouve

$$x_d \approx 0{,}61 \qquad \text{et} \qquad x \approx -1{,}21.$$