ISÉN - CIR2 29 mars 2010

DS de maths n° 5

Consignes

- L'épreuve dure 2h et comporte **6** problèmes sur 1 page.
- L'usage de la calculatrice est interdit.
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant votre raisonnement ainsi que les résultats utilisés.

Extrémisation et intégration (10 pts)

1. Déterminer les valeurs extrêmes prises sur $\mathbf{R}^3$ par la fonction $f(x,y,z) = \dfrac{xyz}{e^{x^2+y^2+z^2}}$.

2. Étudier la convergence de l'intégrale impropre $\displaystyle\iiint_{(\mathbf{R}_+)^3} f$.

Hypervolume des hyperbouloïdes (10 pts)

3. Soit B la boule unité dans $\mathbf{R}^4$. Calculer $\mathrm{vol}_4(B)$.

4. Soit $\langle\,\cdot\,,\,\cdot\,\rangle$ un produit scalaire sur $\mathbf{R}^4$, $\mathcal{B}$ une base orthonormée pour ce produit scalaire et $P \in \mathrm{GL}_4(\mathbf{R})$ la matrice inversible dont les colonnes sont les coordonnées des vecteurs de $\mathcal{B}$ dans la base canonique. Si D désigne "l'hyperbouloïde" $\{v \in \mathbf{R}^4 \mid \langle v, v\rangle \leqslant 1\}$, montrer que

$$\mathrm{vol}_4(D) = \frac{\pi^2}{2}|\,\mathrm{d\acute{e}t}\,P|.$$

[*Indication* : Chercher un changement de variables permettant de transformer B en D]

5. Évaluer l'hypervolume de l'ensemble des points $(x_1,\, x_2,\, x_3,\, x_4) \in \mathbf{R}^4$ tels que

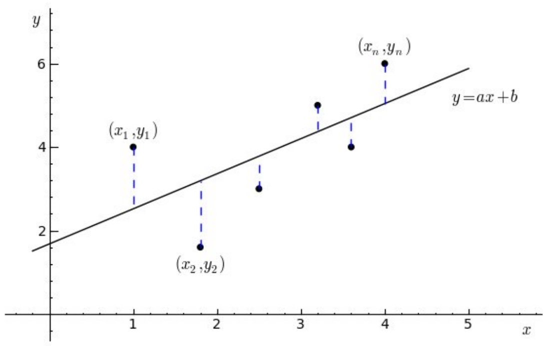
$$x_1^2 - 4x_1x_2 + 2x_1x_3 - 8x_1x_4 + 8x_2^2 + 8x_2x_3 + 16x_2x_4 + 11x_3^2 - 12x_3x_4 + 36x_4^2 \leqslant 1.$$

Droite des moindres carrés (10 pts)

6. On suppose donné un certain nombre $n \geqslant 2$ de points $(x_1,\, y_1),\, \ldots,\, (x_n,\, y_n)$ dans $\mathbf{R}^2$ et on cherche l'équation de la droite $y = ax + b$ minimisant la quantité

$$\Delta(a,b) = \sum_{i=1}^{n}(y_i - ax_i - b)^2,$$

c'est-à-dire la somme des carrés des distances verticales entre les points donnés et la droite.



En supposant que les abscisses $x_1,\, \ldots,\, x_n$ des données ne soient pas toutes égales, montrer que la pente et l'ordonnée à l'origine de la droite des moindres carrés sont données par les formules

$$a = \frac{n(\sum x_iy_i) - (\sum x_i)(\sum y_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2} \qquad \text{et} \qquad b = \frac{(\sum x_i^2)(\sum y_i) - (\sum x_i)(\sum x_iy_i)}{n(\sum x_i^2) - (\sum x_i)^2},$$

où les sommes sont toutes prises pour i allant de 1 à n.

[*Conseil* : Interpréter la question comme un problème de projection orthogonale sur un plan de $\mathbf{R}^n$]