Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur cette feuille.

Nom: **CORRIGÉ**

Considérons les deux permutations :

$$\sigma = (1\,4\,5)\,(2\,3\,6), \quad \tau = [2\,5\,7\,8\,6\,3\,4\,1] \quad \in \quad \mathfrak{S}_8.$$

1. a) Donner la décomposition cyclique de τ.

$\tau = (1\,2\,5\,6\,3\,7\,4\,8)$

b) Calculer σ^2, $\sigma\,\tau$ et $\tau^{-1}\,\sigma$.

$\sigma^2 = (1\,5\,4)\,(2\,6\,3)$
$\sigma\,\tau = (1\,3\,7\,5\,2)\,(4\,8)$
$\tau^{-1}\,\sigma = (1\,8\,4\,7\,3\,6\,5\,2)\,(1\,4\,5)\,(2\,3\,6) = (1\,7\,3\,5\,8\,4\,2\,6)$

c) Quelle est la signature de σ ? de τ ? de $\sigma^2\,\tau^{-1}\,\sigma\,\tau^2$?

$\mathrm{sg}(\sigma) = \mathrm{sg}(1\,5\,4) \cdot \mathrm{sg}(2\,6\,3) = 1 \cdot 1 = 1$
$\mathrm{sg}(\tau) = (-1)^7 = -1$
$\mathrm{sg}(\sigma^2\tau^{-1}\sigma\tau^2) = 1 \cdot \mathrm{sg}(\tau) \cdot \mathrm{sg}(\sigma) \cdot 1 = -1 \cdot 1 = 1$

2. a) Déterminer toutes les permutations $\rho \in \mathfrak{S}_8$ telles que $\sigma\,\rho\,\tau^{-2} = (1\,2)$.

$\rho = \sigma^{-1}\,(1\,2)\,\tau^2 = (1\,5\,4)\,(2\,6\,3)\,(1\,2)\,(1\,5\,3\,4)\,(2\,6\,7\,8) = (1\,4\,6\,7\,8\,5\,2\,3)$

b) Déterminer toutes les permutations $\rho \in \mathfrak{S}_8$ telles que $\rho^2 = \sigma$.

On raisonne sur la décomposition en cycles disjoints d'une telle permutation : $\rho = c_1 \cdots c_k$. Puisque ceux-ci commutent, $\rho^2 = c_1^2 \cdots c_k^2$. Or le carré d'un cycle de longueur impaire reste un cycle de même longueur, alors que le carré d'un cycle de longueur paire se décompose en deux cycles deux fois plus petits. Pour obtenir deux 3-cycles (plus deux 1-cycles) dans ρ^2, les possibilités sont donc d'avoir dans ρ un 6-cycle ou deux 3-cycles, plus un 2-cycle ou deux 1-cycles. En observant la décomposition du carré d'un 6-cycle

$$(i\,j\,k\,\ell\,m\,n)^2 = (i\,k\,m)\,(j\,\ell\,n),$$

on trouve huit possibilités :

$$\rho = (1\,5\,4)\,(2\,6\,3),\ (1\,2\,4\,3\,5\,6),\ (1\,3\,4\,6\,5\,2),\ (1\,6\,4\,2\,5\,3),$$

$$(1\,5\,4)\,(2\,6\,3)\,(7\,8),\ (1\,2\,4\,3\,5\,6)\,(7\,8),\ (1\,3\,4\,6\,5\,2)\,(7\,8),\ (1\,6\,4\,2\,5\,3)\,(7\,8).$$

3. Démontrer soigneusement l'affirmation suivante :

si $\varphi : (M_1, \star) \to (M_2, *)$ est un morphisme de monoïdes, pour tout $m \in M_1^\times$ on a $\varphi(m) \in M_2^\times$.

Soit $m \in M_1^\times$. Puisque m est inversible dans M_1, cela signifie qu'il existe un élément $n \in M_1$ tel que

$$m \star n = n \star m = e_1,$$

où e_1 désigne le neutre de M_1. En appliquant φ de parts et d'autres de ces égalités, on trouve

$$\varphi(m \star n) = \varphi(n \star m) = \varphi(e_1),$$

d'où, par propriété de φ,

$$\varphi(m) * \varphi(n) = \varphi(n) * \varphi(m) = e_2.$$

Mais cela signifie que $\varphi(m)$ est inversible dans M_2 – son inverse est $\varphi(n)$ – on a donc bien $\varphi(m) \in M_2^\times$.

4. Dans $\mathfrak{S}_{20}\ldots$

a) quel est l'ordre de $\sigma = [\,13\ 2\ 19\ 4\ 18\ 7\ 1\ 9\ 14\ 15\ 20\ 17\ 8\ 5\ 11\ 6\ 10\ 16\ 12\ 3\,]$?

Décomposition en cycles disjoints :

$$\sigma = (1\ 13\ 8\ 9\ 14\ 5\ 18\ 16\ 6\ 7)\,(3\ 19\ 12\ 17\ 10\ 15\ 11\ 20)$$

L'ordre de σ est le plus petit commun multiples des ordres de ses cycles, à savoir

$$\mathrm{PPCM}(10, 8) = 40.$$

b) existe-t-il des éléments d'ordre 15 ? 21 ? 25 ? 31 ? 35 ?

On raisonne sur la décomposition cyclique d'un élément :

$$\sigma = c_1 \cdots c_k.$$

Si ℓ_i désigne la longueur de c_i, l'ordre de σ est $\mathrm{PPCM}(\ell_1, \ldots, \ell_k)$, en se rappelant que dans $\mathfrak{S}_{20}$ on doit avoir

$$\ell_1 + \ell_2 + \cdots + \ell_k \leqslant 20$$

(voire la stricte égalité si l'on inclut les points fixes, qui ne changent rien au PPCM).

- $15 = 3 \times 5$: facile, suffit de prendre $\ell_1 = 5$ et $\ell_2 = 3$, e.g.

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5)\,(6\,7\,8)$$

- $21 = 3 \times 7$: encore, suffit de prendre $\ell_1 = 7$ et $\ell_2 = 3$, e.g.

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)\,(8\,9\,10)$$

- $25 = 5^2$: ça nous prendrait $\ell_1 = 25 > 20$, n'existe pas
- 31 : étant premier, ça nous prendrait $\ell_1 = 31 > 20$, n'existe pas
- $35 = 5 \times 7$: pas de problème, on peut prendre $\ell_1 = 7$ et $\ell_2 = 5$, e.g.

$$\sigma = (1\,2\,3\,4\,5\,6\,7)\,(8\,9\,10\,11\,12).$$