Corrigé Séance 2 – Outils mathématiques_ Transformée de Laplace

Le but de ce TD est de se familiariser avec la transformée de Laplace qui fait partie des techniques élémentaires en Automatique.

<u>Exercice 1</u> : Calcul d'une transformée de Laplace inverse

Rechercher les transformées inverses des fonctions suivantes :

1) $F(p) = \frac{3}{p^3+5p^2+6p}$; 2) $G(p) = \frac{5}{p^2+6p+8}$; 3) $H(p) = \frac{10}{p(p+3)(2p+1)}$

Corrigé de l'exercice 1

1. Factorisons tout d'abord le dénominateur de l'expression de $F(p)$:

$$F(p) = \frac{3}{p^3+5p^2+6p} = \frac{3}{p(p+3)(p+2)}$$

La décomposition de cette fraction rationnelle nous donne :

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+2} = \frac{A(p^2+5p+6)+B(p^2+2p)+C(p^2+3p)}{p(p+3)(p+2)}$$

Soit : $$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{(A+B+C)p^2+(5A+2B+3C)p+6A}{p(p+3)(p+2)}$$

En identifiant, on tire immédiatement :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+2B+3C=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=1 \\ C=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

d'où : $$F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{p+3} - \frac{3}{2(p+2)}$$

Il suffit à présent de rechercher dans la table des transformées de Laplace les fonctions temporelles originales des trois termes simples qui constituent cette combinaison et d'écrire $f(t)$ comme étant la même combinaison des trois fonctions temporelles originales :

$$f(t) = \left[\frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-2t}\right]u(t)$$

Réponse 2 et 3 S'inspirer de la méthode appliquée à 1)

<u>Exercice 2</u> : Calcul d'une fonction de transfert simple

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^3s}{dt^3} + 3\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + s(t) = 2\frac{de}{dt} + e(t)$$

1. Calculer la fonction de transfert de ce système et calculer ses pôles et ses zéros.

2.On considère un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s(t) = e(t)$$

Calculer la réponse de ce système $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ à une entrée $\boldsymbol{e}(\boldsymbol{t})$ $en\ échelon\ unitaire$

3.Représenter puis calculer la transformée de Laplace de la fonction $\boldsymbol{s}(\boldsymbol{t})$ définie par :

$$\begin{cases} s(t) = 0\ pour\ t < 0 \\ s(t) = \frac{At}{T}\ pour\ 0 < t < T \\ s(t) = A\ pour > \ t > T \end{cases}$$

Corrigé de l'exercice 2

1) $\frac{d^3S(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2S(t)}{dt^2} + 3\frac{dS(t)}{dt} + S(t) = 2\frac{de(t)}{dt} + e(t)$

$\Rightarrow L\left[\frac{d^3S(t)}{dt^3}\right] + 3L\left[\frac{d^2S(t)}{dt^2}\right] + 3L\left[\frac{dS(t)}{dt}\right] + L[S(t)] = 2L\left[\frac{de(t)}{dt}\right] + L[d(t)]$

$\Rightarrow p^3 S(p) + 3p^2 S(P) + 3p S(p) + S(p) = 2pE(p) + E(p)$

$\Rightarrow S(p)[p^3 + 3p^2 + 3p + 1] = (2p+1)E(p)$ soit $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$: la fonction de transfert du système

$\Rightarrow H(p) = \frac{2p+1}{p^3+3p^2+3p+1} = \frac{N(P)}{D(P)}$

Les zéros de H(p) $\Rightarrow N(p) = 0 \Rightarrow 2p + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$ d'où : $-\frac{1}{2}$ est un zéro simple

Les pôles de H(p) $\Rightarrow D(p) = 0 \Rightarrow p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = 0$

On remarque que -1 est un zéro pour D (p) (pôle pour H (p)) d'où

$D(p) = (p+1)(ap^2 + bp + c)$

$ap3 + bp^2 + cp + ap^2 + bp + c$ par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 3 \\ c + b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où $a = 1, c = 1\ et\ b = 2$

$\Rightarrow D(p) = (p+1)(p^2 + 2p + 1) = (p+1)(p+1)^2 = (p+1)^3$ d'où : -1 est un pôle triple.

2) $\frac{d^2S(t)}{dt^2} + 3\frac{dS(t)}{dt} + 2S(t) = e(t)$

$\Rightarrow L\left[\frac{d^2S(t)}{dt^2}\right] + 3L\left[\frac{dS(t)}{dt}\right] + 2L\,[S(t)] = L\,[e(t)]$

On a : $e(t) = U(t) \Rightarrow L\,[e(t)] = \frac{1}{p}$

D'où $p^2\,S(p) + 3\,pS(p) + 2\,S(p) = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow S(p) = [p^2 + 3p + 2] = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow S(p) = \frac{1}{p\,(p^2+3p+2)} = \frac{1}{p\,(p+2)(p+1)}$

Décomposition des S(p) en éléments simple

$\Rightarrow S(p) = \frac{\propto}{p} + \frac{\beta}{p+2} + \frac{\delta}{p+1}$

Avec $\propto = pS(P)/_{p=0} \Rightarrow \propto = \frac{1}{2}$

$\beta = (p+2)S(P)/_{p=-2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$\delta = (p+1)\,S(P)/_{p=-1} \Rightarrow \delta = -1$

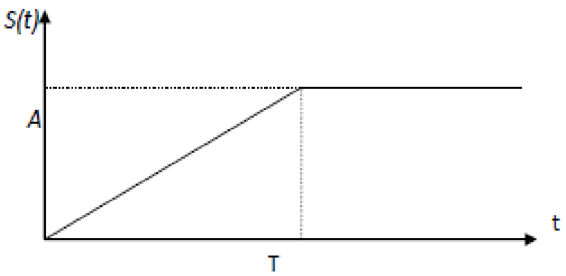
$\Rightarrow S(P) = \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{P} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{P+2} - 1\cdot\frac{1}{P+1}$

$\Rightarrow S(t) = \frac{1}{2}\,U(t) + \frac{1}{2}\,e^{-2t}\,U(t) - e^{-t}\,U(t)$

$\Rightarrow S(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,e^{-2t} - e^{-t}\right]\,U(t)$

3) $\begin{cases} S(t) = 0 \;pour\; t < 0 \\ S(t) = \frac{At}{T} \;pour\; 0 < t < T \\ S(t) = A \;pour\; t > T \end{cases}$

<u>Représentation :</u>



$S(t) = \frac{A}{T}\,t(U(t) - U(t-T)) + AU\,(t-T)$

$$s(t) = \frac{A}{T}\, tU(t) - \frac{A}{T} t\, U(t-T) + AU(t-T)$$

$$\Rightarrow s(t) = \frac{A}{T}\, tU(t) - \frac{A}{T}(t-T)U(t-T) - AU(t-T) + AU(t-T)$$

$$s(t) = \frac{A}{T}\, tU(t) - \frac{A}{T}(t-T)\, U(t-T)$$

$$\Rightarrow S(P) = \frac{A}{T} \cdot \frac{1}{p^2} - \frac{A}{T} \frac{e^{-Tp}}{p^2}$$

<u>Exercice 3</u> : Étude de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$T\frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système. En déduire $S(p)$ si le signal d'entrée est un échelon unité.
Déterminer la valeur finale de $s(t)$ en utilisant le théorème de la valeur finale.
Calculer l'expression de $s(t)$ et retrouver le résultat précédent.
Pour quelle valeur t_0 de t, $s(t)$ atteint-il 95 % de sa valeur finale ?

Corrigé de l'exercice 3

La fonction de transfert du système se détermine aisément en appliqua
membres de l'équation :

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp+1}$$

Nous en déduisons immédiatement l'expression de $S(p)$:

$$E(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{}{p}$$

Le théorème de la valeur finale prévoit que :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{p \to 0} \frac{pK}{p(Tp+1)}$$

Calculons l'expression de $s(t)$ afin de retrouver le résultat précédent. D'après

$$S(p) = \frac{K}{p(Tp+1)} \quad \Rightarrow \quad s(t) = K\left(1 - \right.$$

On a bien $\lim_{t \to +\infty} s(t) = K$.
L'expression du signal de sortie nous conduit alors à la valeur t_0 de t, pour la

On a :

$$K\left(1 - e^{-\frac{t_0}{T}}\right) = 0,95K$$

Soit :

$$1 - e^{-\frac{t_0}{T}} = 0,95$$

$$\frac{t_0}{T} = -\ln 0,05 \approx 3T$$

Exercice 4:

Soit le système régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$$

1. Déterminer la fonction de transfert de système : $F(p) = \frac{Y(P)}{U(P)}$
2. Calculer les pôles et zéros de ce système

On considère que les conditions initiales sont nulles.

Corrigé exercice 4

1)

$$p^3Y(p) + 7p^2Y(p) + 11pY(p) + 5Y(p) = p\,U(p) + 2U(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p^3 + 7p^2 + 11p + 5}$$

2) Les zéros sont les valeurs de p qui annulent le numérateur de la fonction de transfert

donc les zéros= {-2}

Les pôles sont les valeurs de p qui annulent le dénominateur

$$D(p) = p^3 + 7p^2 + 11p + 5 = (p+1)(\,p^2 + a*p\, + b) = (p+1)(\,p^2 + 6p + 5)$$

$$= (p+1)(p+1)(p+5)$$

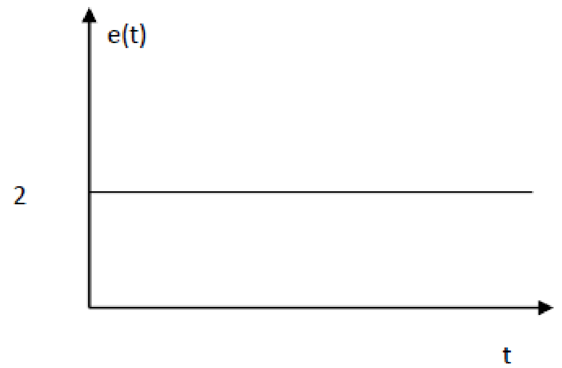
Les pôles $= \{-1, -5\}$

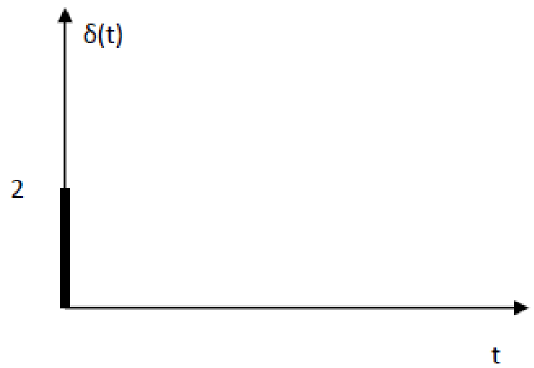
<u>Exercice 5</u> :

On considère un système d'entrée E(p) et de sortie S(p) donné par le schéma bloc suivant :

$$E(P) \longrightarrow \boxed{\frac{2}{(p+3)(p^2+3p+2)}} \longrightarrow S(P)$$

1. Déduire la fonction de transfert du système
2.Faire la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert
3.Déduire s(t) dans chaque cas, pour les entrées suivantes :





Corrigé exercice 5

1. $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(p+3)(p^2+3p+2)}$

2. $H(p) = \frac{1}{(p+3)(p+2)(p+1)} = \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+1}$

$$= \frac{a\,(p+2)(p+1) + b(p+3)(p+1) + c(p+3)(p+2)}{(p+3)(p+2)(p+1)}$$

Par identification on obtient : $a = -1, b = 2, c = -1$

$$H(p) = \frac{-1}{p+3} + \frac{2}{p+2} + \frac{-1}{p+1}$$

3. **Cas 1** : L'entrée est un échelon

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) = H(p) \cdot \frac{2}{p}$$

$$= \frac{2}{p(p+3)(p+2)(p+1)}$$

$$= \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+1} + \frac{d}{p}$$

Par identification on obtient :

$$a = \frac{1}{3}\ , \quad b = -\frac{1}{3}, \quad c = 1, \quad d = -1,$$

$$donc\ s(t) = [\frac{1}{3}\ e^{-t} - \frac{1}{3}\ e^{-3t} + e^{-2t} - e^{-t}].u(t)$$

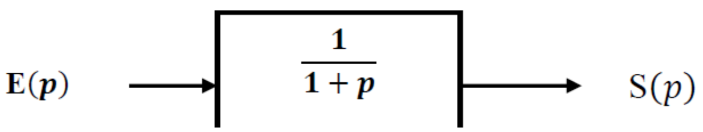
Cas 2 :L'entrée est une impulsion

$$S(p) = H(p) * E(p) \quad = H(p) * 2 = \frac{-2}{p+3} + \frac{4}{p+2} + \frac{-2}{p+1}$$

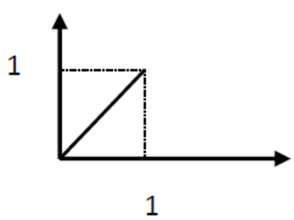
$$s(t) = [-2e^{-3t} + 4e^{-2t} - 2\,e^{-t}\ ]\,u(t)$$

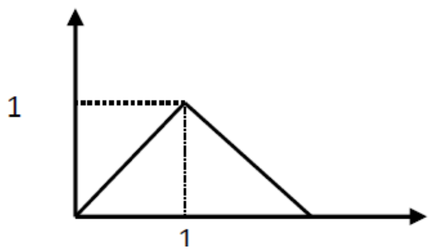
Exercice 6

Soit le système suivant :



Dont $e(t)$ est donné par :





Calculer $S(p)$ puis déduire $s(t)$

Corrigé exercice 6

a)

$e(t) = t(u(t) - U(t-1))$

$\Rightarrow e(t) = t\,u(t) - tU\,(t\text{-}1)$

$= t\,u(t) - (t-1)\,U\,(t-1) - U(t-1)$

$E(p) = L\,[e(t)] = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}$

$S(p) = \frac{1}{1+p}\,.\,E(p)$

$\Rightarrow S(p) = (\frac{1}{1+p}\,(\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}))$

$\Rightarrow S(p) = (\frac{1}{p^2\,(1+p)} - \frac{e^{-p}}{p^2(1+p)} - \frac{e^{-p}}{p(1+p)})$

On pose $H(p) = \frac{1}{p^2\,(1+p)}$

Décomposant H(p) en éléments simples

$H(p) = \frac{1}{p^2(1+p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\delta}{1+p}$

Avec : $\beta = p^2H\,(p)\,/_{\,p=0} \Rightarrow \beta = 1$

$\alpha = \frac{d}{dp}[p^2H(p)]/_{\,p=0} \Rightarrow \alpha = -1$

$\delta = (1+p)H(p)/_{p=-1} \Rightarrow \delta = 1$

de même on pose F1(p) = $\frac{1}{p(1+p)}$, décomposant F1(p) en

$F(p) = \frac{1}{p(1+p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{1+p}$

Avec : $\alpha = pF(p)/p{=}0 \Rightarrow \alpha = 1$

$\beta = (1 + p)\ F(p)\ /p = -1 \Rightarrow \beta = -1$

D'où $F(p) = \frac{1}{p(1+p)} = \frac{1}{p} - \frac{1}{1+p}$

D'où $S(p) = \frac{-1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{1+p} + \frac{1}{1+p} + \frac{e^{-p}}{p} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{1+p} - \frac{e}{}$

D'où $S(p) = -\frac{1}{p} + \frac{1}{p^2} + \frac{1}{1+p} - \frac{e^{-p}}{p^2}$

$\Rightarrow S(t) = -U(t) + t(U)(t) + e^{-t}\ U(t) - (t-1)\ U(t-1)$

b)

On a $e(t) = t(u(t) - u(t-1)) - (t-2)\ (u(t-1) - U(t-2))$

$\Rightarrow e(t) = tu(t) - (t-1)\ u\ (t-1) - u(t-1) - (t-1)\ u\ (t-1) + u(t-1) + (t-2)\ u\ (t-2)$

$\Rightarrow e(t) = tu(t) - (t-1)\ u\ (t-1) - (t-1)\ u(t-1) + (t-2)\ u\ (t-2)$

$\Rightarrow E(p) = \frac{1}{p^2} - 2\frac{e^{-p}}{p^2} + \frac{e^{-2p}}{p^2}$

$S(p) = \frac{1}{1+p} \cdot E(p) = \ . \ E(p) = \frac{1}{p^2(1+p)} - \frac{2e^{-p}}{p^2(1+p)} + \frac{2e^{-p}}{p^2(1+p)}$

Table des transformées de Laplace

Fonctions temporelles	Transformées de Laplace
$u(t) = 1$	$U(p) = \dfrac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \dfrac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$S(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{1}{p+a}$
$s(t) = t\,e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{1}{(p+a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{a}{p(p+a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \dfrac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = t - \dfrac{1}{a} + \dfrac{e^{-at}}{a}$	$S(p) = \dfrac{1}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 + \dfrac{b}{a-b}e^{-at} - \dfrac{a}{a-b}e^{-bt}$	$S(p) = \dfrac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - at\,e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{a^2}{p(p+a)^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \sin \omega t$	$S(p) = \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$s(t) = e^{-at} \cos \omega t$	$S(p) = \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

F(p)		f(t) t > 0
$\dfrac{1}{p^2.(1+\tau p)}$		$(t-\tau+\tau.e^{-t/\tau}).u(t)$
$\dfrac{1}{p.(1+\tau p)^2}$		$\left(1-(1+\dfrac{t}{\tau})e^{-t/\tau}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{p^2.(1+\tau p)^2}$		$\left(t-2\tau+(t+2\tau)e^{-t/\tau}\right).u(t)$
$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$		$\sin(\omega t).u(t)$
$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$		$\cos(\omega t).u(t)$
$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$		$e^{-at}.\sin(\omega t).u(t)$
$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$		$e^{-at}.\cos(\omega t).u(t)$
$\dfrac{p+a}{p^2+\omega^2}$		$\sqrt{\dfrac{a^2+\omega^2}{\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi).u(t)$ $\varphi = \text{arc}$
$\dfrac{1}{p.(p^2+\omega^2)}$		$\dfrac{1-\cos\omega t}{\omega^2}u(t)$
$\dfrac{1}{(p+a).(p+b)}$		$\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)}$		$\dfrac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{p.(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)}$		$1-\dfrac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1.e^{-t/\tau_1}-\tau_2.e^{-t/\tau_2}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{p^2(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)}$		$t-(\tau_1+\tau_2)+\dfrac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1^2.e^{-t/\tau_1}-\tau_2^2.\right.$
$\dfrac{1}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}$	$m < 1$	$\dfrac{1}{\omega}e^{-m\omega_0 t}\sin(\omega t).u(t)$ $\omega = \omega_0\sqrt{1}$
$\dfrac{1}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2}$	$m > 1$	$\dfrac{e^{r_2.t}-e^{r_1.t}}{r_2-r_1}u(t)$ $r_{1,2}$: racines de l'équat
$\dfrac{1}{p.(p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2)}$	$m < 1$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{\omega_0}{\omega}e^{-m\omega_0 t}\sin(\omega t+\varphi)\right)u(t)$
$\dfrac{1}{p.(p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2)}$	$m > 1$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{\omega_0^2}{r_2-r_1}\left(\dfrac{e^{r_2 t}}{r_2}-\dfrac{e^{r_1 t}}{r_1}\right)\right)u(t)$
$\dfrac{1}{p^2(p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2)}$	$m < 1$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{2m}{\omega_0}+\dfrac{1}{\omega}e^{-m\omega_0 t}\sin(\omega t+\varphi)\right)$

Transformation de Laplace Table.doc

F(p)	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$
1	$\delta(t)$ Impulsion de Dirac
$\frac{1}{p}$	$u(t)$ Echelon unité
e^{-Tp}	$\delta(t-T)$ Impulsion retardée
$\frac{e^{-Tp}}{p}$	$u(t-T)$ Echelon retardé
$\frac{1}{p^2}$	$t.u(t)$ Rampe unitaire
$\frac{1}{p^n}$ n entier	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{1+\tau p}$	$\frac{1}{\tau} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1}{\tau^2} t e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\frac{1}{\tau^n (n-1)!} t^{n-1} e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$