Maths – 2$^{\text{e}}$ semestre

Examen récapitulatif

1. a) Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, où

$$A = \begin{pmatrix} 0 & -2 & 2 \\ 1 & 3 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Q}).$$

b) Quelle est la forme normale de Jordan associée à l'application linéaire $\varphi : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}^2$ définie par

$$\varphi(x, y) = (x - y,\, 4x - 3y) \text{ ?}$$

2. Une plaque de métal plane occupe l'intérieur (frontière comprise) de la cardioïde en coordonnées polaires

$$r(\theta) = 1 + \cos\theta, \quad \theta \in [0, 2\pi].$$

a) Calculer le périmètre et l'aire de cette plaque.

b) On la place au-dessus d'une bougie qui induit au point de coordonnées (x, y) une température (en °C)

$$T(x, y) = 24x - 16x^2 - 16y^2 + 50.$$

Quelle est la température aux points les plus chauds et les plus froids de la plaque ?

3. On munit l'espace vectoriel $\mathbf{R}[x]_d$ des fonctions polynomiales de degré $\leqslant d$ du produit scalaire défini par

$$\langle f, g\rangle = \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

a) Écrire la matrice représentant ce produit scalaire dans la base monomiale

$$1,\, x,\, x^2,\, \ldots,\, x^d.$$

[*Indication* : il pourrait être utile d'établir au préalable que $\displaystyle\int_0^\infty e^{-x}\, x^n\, \mathrm{d}x = n!$ pour tout $n \in \mathbf{N}$]

b) Calculer une base de $\mathbf{R}[x]_3$ orthonormée pour $\langle\cdot\,,\,\cdot\rangle$ en appliquant le procédé de Gram-Schmidt à la base monomiale. Les polynômes ainsi obtenus sont les premiers *polynômes de Laguerre.*

4. a) Déterminer si les séries suivantes convergent absolument, conditionnellement ou bien divergent.

$$\sum_{n=0}^\infty \left(e^{-n^2} + \frac{n^4}{4^n}\right), \qquad \sum_{n=1}^\infty \frac{(-1)^n\, 3n^2}{n^3+1}, \qquad \sum_{n=2}^\infty \frac{1}{n\,(\ln n)^2} \qquad \sum_{n=1}^\infty \left(\frac{n}{n+1}\right)^2.$$

b) Établir la convergence uniforme sur $[0, \infty[$ de la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{xe^{-nx}}{n}.$$

⋆ bon été mathématique ! ⋆