Séries entières

Exercice 1. Soit $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ une série entière

On suppose qu'elle diverge pour $z = 3 + 4i$ et qu'elle converge pour $z = 5i$

Quel est son rayon de convergence ?

Exercice 2. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n (n+3)!\, z^n\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} n^n z^n\,; \qquad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2n)!}{(n!)^2} z^n\,; \qquad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\ln(n)}{\ln(n+1)} z^n$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(1 + \frac{1}{n}\right)^{n^2} z^n\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-2)^n}{n+1} z^{3n+1}\,; \quad \sum_{n=0}^{\infty} (1+i)^n z^n$$

Exercice 3. Déterminer le rayon de convergence des séries entières suivantes :

$$f_1(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^{\frac{n(n+1)}{2}} (n-1) 2^n z^n\,; \quad f_2(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2+1}{3^n} z^n\,; \quad f_3(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} e^{-n^2} z^n\,;$$

$$f_4(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(3n)!}{(n!)^3} z^{3n}\,; \qquad f_5(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n-1}{n^2+1} z^n\,; \qquad f_6(z) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^n}{n+1} z^{2n+2}\,;$$

Exercice 4.

Soit f la fonction définie par :

$$f(x) = \sum_{n=1}^{+\infty} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{n}}\right) x^n$$

1. Déterminer le rayon de convergence R de cette série entière.
2. Etudier la convergence en $-R$ et en R.

Exercice 5.

Développer les fonctions suivantes en séries entières de x :

1. $f : x \to \frac{1}{(1-x)(2+x)}$
2. $f : x \to \frac{1}{1+x+x^2+x^3}$
3. $f : x \to \ln(x^2+1)$

Exercice 6.

Soit f définie sur $]-1,1[$ par $\quad f(x) = \dfrac{\arcsin(x)}{\sqrt{1-x^2}}$

1. Justifier que f est développable en série entière sur $]-1,1[$.
2. Montrer que f est solution de l'équation différentielle $(1-x^2)y' - xy = 1$.
3. Déterminer le développement en série entière de f sur $]-1,1[$.

Exercice 7.

1. Déterminer f solution de l'équation différentielle $x^2y'' + 4xy' + (2-x^2)y - 1 = 0$
2. Reconnaitre f.

Exercice 8.

On considère la série complexe de somme $f(z) = \sum_{n \in \mathbb{N}} a_n z^n$ où les a_n sont définis par :

$$a_0 = 1, a_1 = 3, \quad \text{et} \quad \forall n \geq 2 \quad a_n = 3a_{n-1} - 2a_{n-2}$$

1. Montrer que le rayon de convergence de cette série est supérieur ou égal à $\frac{1}{4}$.
2. Montrer que $\forall z \in \mathbb{C},\ |z| < R$

$$f(z) = \frac{1}{2z^2 - 3z + 1}$$

3. En déduire R, ainsi que l'expression de a_n en fonction de n.

Exercice 9.

Montrer que : $\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = -\int_0^1 \frac{\arctan(x)}{x} dx$

$$\int_0^1 \frac{\ln(x)}{1+x^2} dx = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{(2n+1)^2}$$