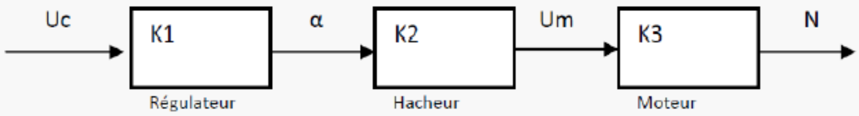
Exercice 1

A/

1.

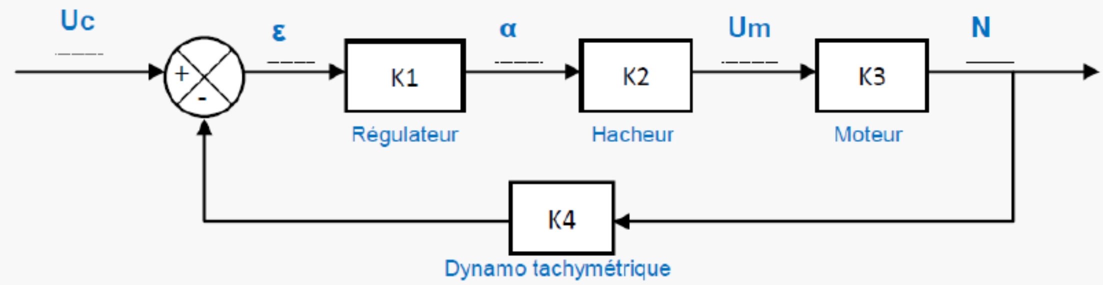
Le schéma bloc devient:



2. La transmittance de la chaîne directe est alors K = sortie/entrée = N / Uc
3. Si la consigne reste constante et que la charge du moteur diminue, **la vitesse augmente**
4. Comment doit-on procéder pour retrouver la vitesse désirée ? **on augmente la consigne**
5. Que se passe-t-il si le une perturbation affecte le système? **la sortie ne respecte plus la consigne**.
6. Que manque-t-il à ce système pour être respecter une consigne quand apparait une perturbation ?
 Un capteur : une chaîne de retour.

B/

7. Schéma bloc

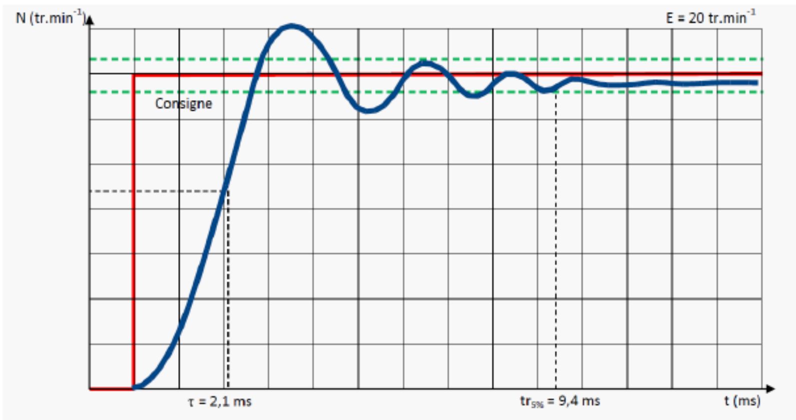


8. La dynamo tachymétrique joue le rôle de **capteur** dans le schéma bloc ?

9. Si la charge du moteur diminue, la vitesse mesurée **augmente**, la différence entre la consigne et la mesure **diminue**, l'écart **diminue,** la tension aux bornes du moteur **diminue** et la vitesse **diminue**.

10. Si la charge du moteur augmente, la vitesse mesurée **diminue**, la différence entre la consigne et la mesure **augmente**, l'écart **augmente**, la tension aux bornes du moteur **augmente** et la vitesse **augmente**.

Valeur finale est :
$S(+\infty) = 6{,}8*100=680$ tr/min
Erreur statique
$e_r = e(+\infty) - s(+\infty)$
$= (7 - 6{,}8)*100 = 20$ tr/min
La réponse reste dans le tube à partir de $t = 10{,}4$ cm.
La sollicitation débutant à $t_{init} = 1$ cm, on obtient :
$tr_{5\%} = (10{,}4-1)*10\text{ms} = 94$ ms



Exercice 1 : **Calcul d'une transformée de Laplace inverse**

Rechercher les transformées inverses des fonctions suivantes :

1) $F(p) = \frac{3}{p^3+5p^2+6p}$; 2) $G(p) = \frac{5}{p^2+6p+8}$; 3) $H(p) = \frac{10}{p(p+3)(2p+1)}$

Corrigé de l'exercice 1

1. Factorisons tout d'abord le dénominateur de l'expression de $F(p)$:

$$F(p) = \frac{3}{p^3+5p^2+6p} = \frac{3}{p(p+3)(p+2)}$$

La décomposition de cette fraction rationnelle nous donne :

$$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{A}{p} + \frac{B}{p+3} + \frac{C}{p+2} = \frac{A(p^2+5p+6)+B(p^2+2p)+C(p^2+3p)}{p(p+3)(p+2)}$$

Soit : $$F(p) = \frac{3}{p(p+3)(p+2)} = \frac{(A+B+C)p^2+(5A+2B+3C)p+6A}{p(p+3)(p+2)}$$

En identifiant, on tire immédiatement :

$$\begin{cases} A+B+C=0 \\ 5A+2B+3C=0 \\ A=\frac{1}{2} \end{cases} \Rightarrow \begin{cases} A=\frac{1}{2} \\ B=1 \\ C=-\frac{3}{2} \end{cases}$$

d'où : $$F(p) = \frac{1}{2p} + \frac{1}{p+3} - \frac{3}{2(p+2)}$$

Il suffit à présent de rechercher dans la table des transformées de Laplace les fonctions temporelles originales des trois termes simples qui constituent cette combinaison et d'écrire $f(t)$ comme étant la même combinaison des trois fonctions temporelles originales :

$$f(t) = \left[\frac{1}{2} + e^{-3t} - \frac{3}{2}e^{-2t}\right]u(t)$$

Réponse 2 et 3 S'inspirer de la méthode appliquée à 1)

1) $\frac{d^3S(t)}{dt^3} + 3\frac{d^2S(t)}{dt^2} + 3\frac{dS(t)}{dt} + S(t) = 2\frac{de(t)}{dt} + e(t)$

$\Rightarrow L\left[\frac{d^3S(t)}{dt^3}\right] + 3L\left[\frac{d^2S(t)}{dt^2}\right] + 3L\left[\frac{dS(t)}{dt}\right] + L\,[S(t)] = 2L\left[\frac{de(t)}{dt}\right] + L\,[d(t)]$

$\Rightarrow p^3\,S(p) + 3\,p^2\,S(P) + 3\,p\,S(p) + S(p) = 2\,pE(p) + E(p)$

$\Rightarrow S(p)\,[p^3 + 3p^2 + 3p + 1] = (2p+1)\,E\,(p)$ soit $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$: la fonction de transfert du système

$\Rightarrow H(p) = \frac{2p+1}{p^3+3p^2+3p+1} = \frac{N(P)}{D(P)}$

Les zéros de H(p) $\Rightarrow N(p) = 0 \Rightarrow 2p + 1 = 0 \Rightarrow p = -\frac{1}{2}$ d'où : $-\frac{1}{2}$ est un zéro simple

Les pôles de H(p) $\Rightarrow D(p) = 0 \Rightarrow p^3 + 3p^2 + 3p + 1 = 0$

On remarque que -1 est un zéro pour D (p) (pôle pour H (p)) d'où

$D(p) = (p + 1)\,(ap^2 + b\,p + c)$

$ap3 + bp^2 + cp + ap^2 + bp + c$ par identification :

$$\begin{cases} a = 1 \\ b + a = 3 \\ c + b = 3 \\ c = 1 \end{cases}$$

D'où $a = 1, c = 1$ et $b = 2$

$\Rightarrow D(p) = (p + 1)\,(p^2 + 2p + 1) = (p + 1)\,(p + 1)^2 = (p + 1)^3$ d'où : -1 est un pôle triple.

2) $\frac{d^2S(t)}{dt^2} + 3\,\frac{ds(t)}{dt} + 2S(t) = e(t)$

$\Rightarrow L\left[\frac{d^2S(t)}{dt^2}\right] + 3L\left[\frac{dS(t)}{dt}\right] + 2L\,[S(t)] = L\,[e(t)]$

On a : $e(t) = U(t) \Rightarrow L\,[e(t)] = \frac{1}{p}$

D'où $p^2\,S(p) + 3\,pS(p) + 2\,S(p) = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow S(p) = [p^2 + 3p + 2] = \frac{1}{p}$

$\Rightarrow S(p) = \frac{1}{p\,(p^2 + 3p + 2)} = \frac{1}{p\,(p+2)(p+1)}$

Décomposition des S(p) en éléments simple

$\Rightarrow S(p) = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p+2} + \frac{\delta}{p+1}$

Avec $\alpha = pS(P)/_{p=0} \Rightarrow \alpha = \frac{1}{2}$

$\beta = (p+2)S(P)/_{p=-2} \Rightarrow \beta = \frac{1}{2}$

$\delta = (p+1)\,S(P)/_{p=-1} \Rightarrow \delta = -1$

$\Rightarrow S(P) = \frac{1}{2}.\frac{1}{p} + \frac{1}{2}\,\frac{1}{P+2} - 1.\frac{1}{P+1}$

$\Rightarrow S(t) = \frac{1}{2}\,U(t) + \frac{1}{2}\,e^{-2t}\,U(t) - e^{-t}\,U(t)$

$\Rightarrow S(t) = \left[\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\,e^{-2t} - e^{-t}\right]\,U(t)$

3) $\begin{cases} S(t) = 0 \; pour \; t < 0 \\ S(t) = \frac{At}{T} \; pour \; 0 < t < T \\ S(t) = A \; pour \; t > T \end{cases}$

La fonction de transfert du système se détermine aisément en appliqua
membres de l'équation :

$$TpS(p) + S(p) = KE(p)$$

$$G(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{K}{Tp+1}$$

Nous en déduisons immédiatement l'expression de $S(p)$:

$$E(p) = \frac{1}{p} \quad \Rightarrow \quad S(p) = \frac{K}{Tp+1} \cdot \frac{1}{p} = \frac{}{p}$$

Le théorème de la valeur finale prévoit que :

$$\lim_{t \to +\infty} s(t) = \lim_{p \to 0} pS(p) = \lim_{p \to 0} \frac{pK}{p(Tp+1)}$$

Calculons l'expression de $s(t)$ afin de retrouver le résultat précédent. D'après

$$S(p) = \frac{K}{p(Tp+1)} \quad \Rightarrow \quad s(t) = K\left(1 - \right.$$

On a bien $\lim_{t \to +\infty} s(t) = K$.
L'expression du signal de sortie nous conduit alors à la valeur t_0 de t, pour la

On a : $$K\left(1 - e^{-\frac{t_0}{T}}\right) = 0,95K$$

Soit : $$1 - e^{-\frac{t_0}{T}} = 0,95$$

$$\frac{t_0}{T} = -\ln 0,05 \approx 3T$$

1)

$$p^3Y(p) + 7p^2Y(p) + 11pY(p) + 5Y(p) = p\,U(p) + 2U(p)$$

$$F(p) = \frac{Y(p)}{U(p)} = \frac{p+2}{p^3 + 7p^2 + 11p + 5}$$

2) Les zéros sont les valeurs de p qui annulent le numérateur de la fonction de transfert

donc les zéros= {-2}

Les pôles sont les valeurs de p qui annulent le dénominateur

$$D(p) = p^3 + 7p^2 + 11p + 5 = (p+1)(p^2 + a * p + b) = (p+1)(p^2 + 6p + 5)$$
$$= (p+1)(p+1)(p+5)$$

Les pôles = $\{-1, -5\}$

1. $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)} = \frac{1}{(p+3)(p^2+3p+2)}$

2. $H(p) = \frac{1}{(p+3)(p+2)(p+1)} \quad = \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+1}$

$$= \frac{a\,(p+2)(p+1) + b(p+3)(p+1) + c(p+3)(p+2)}{(p+3)(p+2)(p+1)}$$

Par identification on obtient : $a = -1, b = 2, c = -1$

$$H(p) = \frac{-1}{p+3} + \frac{2}{p+2} + \frac{-1}{p+1}$$

3. **Cas 1** : L'entrée est un échelon

$$S(p) = H(p) \cdot E(p) \ = H(p) \cdot \frac{2}{p}$$

$$= \frac{2}{p(p+3)(p+2)(p+1)}$$

$$= \frac{a}{p+3} + \frac{b}{p+2} + \frac{c}{p+1} + \frac{d}{p}$$

Par identification on obtient :

$a = \frac{1}{3}$, $b = -\frac{1}{3}$, $c = 1$, $d = -1$,

$donc\ s(t) = [\frac{1}{3}\ e^{-t} - \frac{1}{3}\ e^{-3t} \ + e^{-2t} - e^{-t}].u(t)$

Cas 2 :L'entrée est une impulsion

$$S(p) = H(p) * E(p) \quad = H(p) * 2 = \frac{-2}{p+3} + \frac{4}{p+2} + \frac{-2}{p+1}$$

$$s(t) = [-2e^{-3t} \ + 4e^{-2t} - 2\,e^{-t} \ ]\,u(t)$$

a)

$e(t) = t(u(t) - U(t-1))$

$\Rightarrow e(t) = t\,u(t) - tU\,(t\text{-}1)$

$= t\,u(t) - (t-1)\,U\,(t-1) - U(t-1)$

$E(p) = L\,[e(t)] = \frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}$

$S(p) = \frac{1}{1+p}\,.\,E(p)$

$\Rightarrow S(p) = (\frac{1}{1+p}\,(\frac{1}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p^2} - \frac{e^{-p}}{p}))$

$\Rightarrow S(p) = (\frac{1}{p^2\,(1+p)} - \frac{e^{-p}}{p^2(1+p)} - \frac{e^{-p}}{p(1+p)})$

On pose $H(p) = \frac{1}{p^2\,(1+p)}$

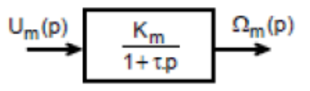
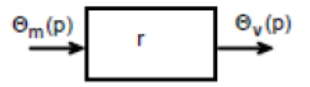
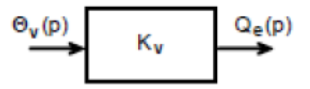
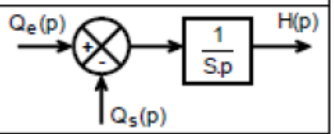
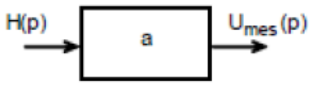
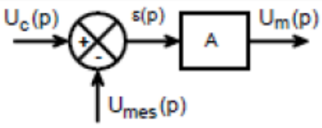
Décomposant H(p) en éléments simples

$H(p) = \frac{1}{p^2(1+p)} = \frac{\alpha}{p} + \frac{\beta}{p^2} + \frac{\delta}{1+p}$

Avec : $\beta = p^2H\,(p)\,/_{\,p=0} \Rightarrow \beta = 1$

$\alpha = \frac{d}{dp}[p^2H(p)]/_{\,p=0} \Rightarrow \alpha = -1$

Question 1 : *Appliquer, pour chacun des modèles de connaissance des constituants du système, la transformation de Laplace. Puis indiquer sa fonction de transfert, et enfin en déduire son schéma-bloc.*

Composant	Relation temporelle	Relation dans le domaine de Laplace + fonction de transfert	Schéma-bloc
Moteur	$\tau.\frac{d\omega_m(t)}{dt}+\omega_m(t)=K_m.u_m(t)$	$\tau.p.\Omega_m(p)+\Omega_m(p)=K_m.U_m(p)$ $\Omega_m(p).(1+\tau.p)=K_m.U_m(p)$ $\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}=\frac{K_m}{1+\tau.p}$	
Réducteur	$\theta_v(t)=r.\theta_m(t)$	$\Theta_v(p)=r.\Theta_m(p)$ $\frac{\Theta_v(p)}{\Theta_m(p)}=r$	
Vanne	$q_e(t)=K_v.\theta_v(t)$	$Q_e(p)=K_v.\Theta_v(p)$ $\frac{Q_e(p)}{\Theta_v(p)}=K_v$	
Réservoir	$q_e(t)-q_s(t)=S.\frac{dh(t)}{dt}$	$Q_e(p)-Q_s(p)=S.p.H(p)$ $\frac{H(p)}{Q_e(p)-Q_s(p)}=\frac{1}{S.p}$	
Limnimètre (capteur)	$u_{mes}(t)=a.h(t)$	$U_{mes}(p)=a.H(p)$ $\frac{U_{mes}(p)}{H(p)}=a$	
Régulateur (comparateur + correcteur)	$\varepsilon(t)=u_c(t)-u_{mes}(t)$ $u_m(t)=A.\varepsilon(t)$	$\frac{U_m(p)}{A}=U_c(p)-U_{mes}(p)$ $\frac{U_m(p)}{U_c(p)-U_{mes}(p)}=A$	

Question 2 : *Donner cette relation entre $h_c(t)$ et $u_c(t)$ qui assure que $\varepsilon(t)$ soit bien une image de l'erreur du niveau d'eau. En déduire le schéma-bloc correspondant au potentiomètre.*

Pour que $\varepsilon(p)$ soit l'image de l'erreur, il faut que $\varepsilon(p)$ soit proportionnelle à l'erreur : $\boxed{\varepsilon(p)=K.Er(p)=K.[H_c(p)-H(p)]}$

Or ici, $\varepsilon(p)=U_c(p)-U_{mes}(p)$

$\varepsilon(p)=F_{interface\ H/M}(p).H_c(p)-F_{capteur}(p).H(p)$

Donc la seule possibilité de vérifier que $\varepsilon(p)$ soit l'image de l'erreur, est que $\boxed{F_{interface\ H/M}(p)=F_{capteur}(p)=K=C^{te}}$.

Le capteur qui mesure la grandeur physique en sortie, et l'interface H/M qui traduit la consigne en entrée doivent impérativement :

- produire une image de même nature (en général une tension électrique) ;
- et aussi utiliser le même coefficient de proportionnalité…

Ainsi $\boxed{\varepsilon(p)=K.[H_c(p)-H(p)]=K.Er(p)}$ Dans cet exercice, K vaut a.

Question 3: Donner donc en précisant les unités, cette relation temporelle générale qui lie vitesse et position. En déduire le schéma-bloc qui passe de $\Omega_m(p)$ à $\Theta_m(p)$.

La vitesse instantanée linéaire est la dérivée de la position linéaire : $v(t) = \frac{dx(t)}{dt}$.

De même, la vitesse instantanée angulaire est la dérivée de la position angulaire : $\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$.

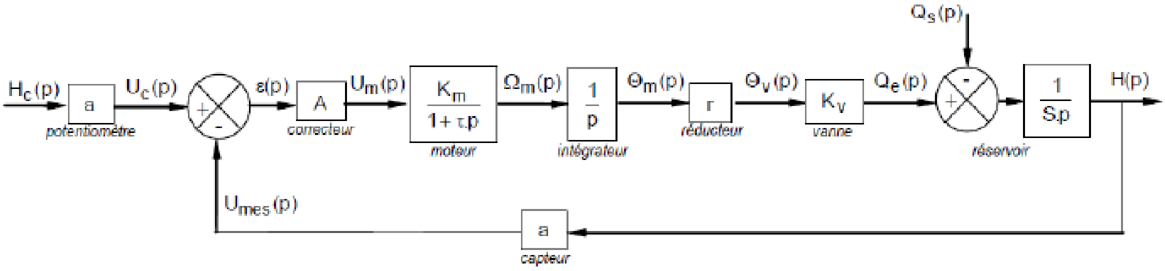
Avec $\theta_m(t)$ en rad, et $\omega_m(t)$ en rad/s.

Composant	Relation temporelle	Relation dans le domaine de Laplace + fonction de transfert	Schéma-bloc
Intégrateur (composant "virtuel")	$\omega_m(t) = \frac{d\theta_m(t)}{dt}$	$\Omega_m(p) = p.\Theta_m(p)$ $\frac{\Theta_m(p)}{\Omega_m(p)} = \frac{1}{p}$	$\Omega_m(p) \longrightarrow \boxed{\frac{1}{p}} \longrightarrow \Theta_m(p)$

Ce bloc est appelé intégrateur car la vitesse angulaire est intégrée en position angulaire…

Question 4: Donner la variable d'entrée et la variable de sortie du système. Puis, représenter le schéma-bloc du système entier en précisant le nom des constituants sous les blocs, ainsi que les flux d'énergie ou d'information entre les blocs.

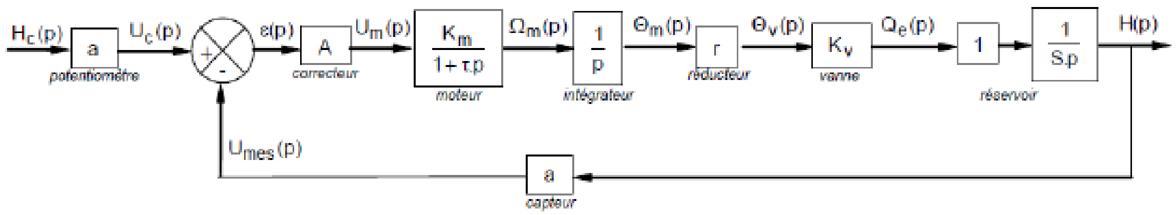
Variable d'entrée (consigne) : $h_c(t)$
Variable de sortie à asservir : $h(t)$



Question 5: Déterminer les fonctions de transfert

$$F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} \quad et \quad F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0}.$$

Si $Q_s(p)=0$ alors le schéma est similaire à :



Donc $F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = a.\dfrac{A.\dfrac{K_m}{1+\tau.p}.\dfrac{1}{p}.r.K_v.1.\dfrac{1}{S.p}}{1+a.A.\dfrac{K_m}{1+\tau.p}.\dfrac{1}{p}.r.K_v.1.\dfrac{1}{S.p}}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur, par le dénominateur du dénominateur…

$$F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = a.\frac{A.K_m.r.K_v}{(1+\tau.p).p.S.p + a.A.K_m.r.K_v}$$

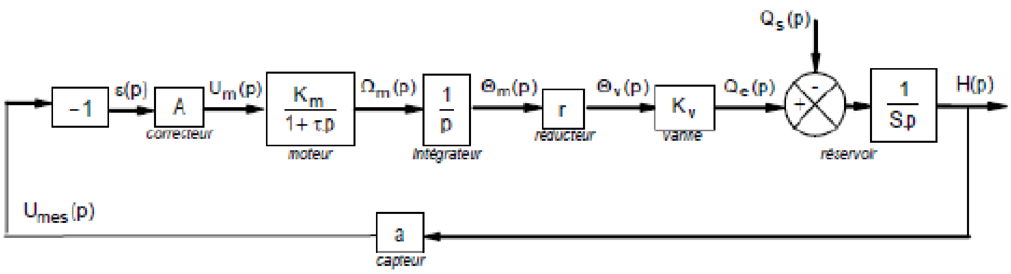
$$F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = \frac{a.A.K_m.r.K_v}{S.p^2 + \tau.S.p^3 + a.A.K_m.r.K_v}$$

$$F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = \frac{a.A.K_m.r.K_v}{a.A.K_m.r.K_v}\,\frac{1}{1+\dfrac{S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^2 + \dfrac{\tau.S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^3}$$

$$F_1(p) = \left.\frac{H(p)}{H_c(p)}\right|_{Q_s(p)=0} = \frac{1}{1+\dfrac{S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^2 + \dfrac{\tau.S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^3}$$

Ainsi si $Q_s(p)=0$ alors $H(p) = F_1(p).H_c(p)$

Si $H_c(p)=0$ alors le schéma est similaire à :



Donc $F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{-\frac{1}{S.p}}{1 - a.(-1).A.\frac{K_m}{1+\tau.p}.\frac{1}{p}.r.K_v.\frac{1}{S.p}}$

On multiplie le numérateur et le dénominateur, par le dénominateur du dénominateur…

$$F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{-(1+\tau.p).p}{(1+\tau.p).p.S.p + a.A.K_m.r.K_v}$$

$$F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{-p-\tau.p^2}{S.p^2 + \tau.S.p^3 + a.A.K_m.r.K_v}$$

$$F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{-p}{a.A.K_m.r.K_v}.\frac{1+\frac{-\tau.p^2}{-p}}{1+\frac{S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^2+\frac{\tau.S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^3}$$

$$F_2(p) = \left.\frac{H(p)}{Q_s(p)}\right|_{H_c(p)=0} = \frac{-p}{a.A.K_m.r.K_v}.\frac{1+\tau.p}{1+\frac{S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^2+\frac{\tau.S}{a.A.K_m.r.K_v}.p^3}$$

$\boxed{\text{Ainsi si } H_c(p)=0 \text{ alors } H(p)=F_2(p).Q_s(p)}$

Question 6: En déduire, à l'aide du théorème de superposition, l'expression de H(p) = f [Hc(p) + Qs(p)]

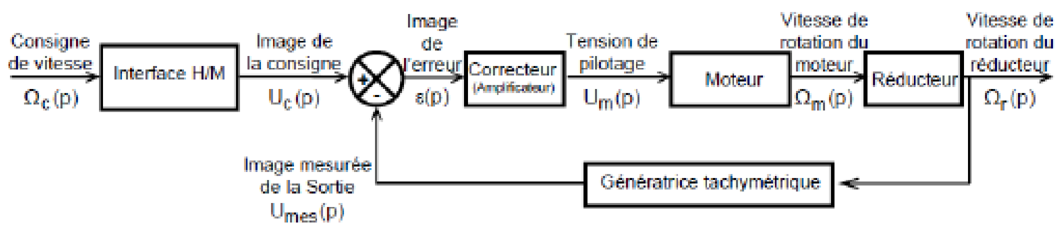
Si les 2 entrées sont présentes en même temps, le théorème de superposition nous donne :

$$\boxed{H(p) = F_1(p).H_c(p) + F_2(p).Q_s(p)}$$

En connaissant la nature (échelon, rampe…) et les caractéristiques (amplitude, pente…) des deux entrées du système (consigne de niveau d'eau $h_C(t)$ et débit d'évacuation $q_S(t)$), on pourrait repasser dans le domaine temporel et connaître ainsi l'évolution du niveau d'eau h(t) dans le bassin en fonction du temps…

Corrigé Exercice 2 : BANDEROLEUSE À PLATEAU TOURNANT.

Question 1 : *Représenter le système asservi par un schéma-bloc. (Vous indiquerez le nom des éléments constituants les blocs ainsi que les informations entre les blocs).*

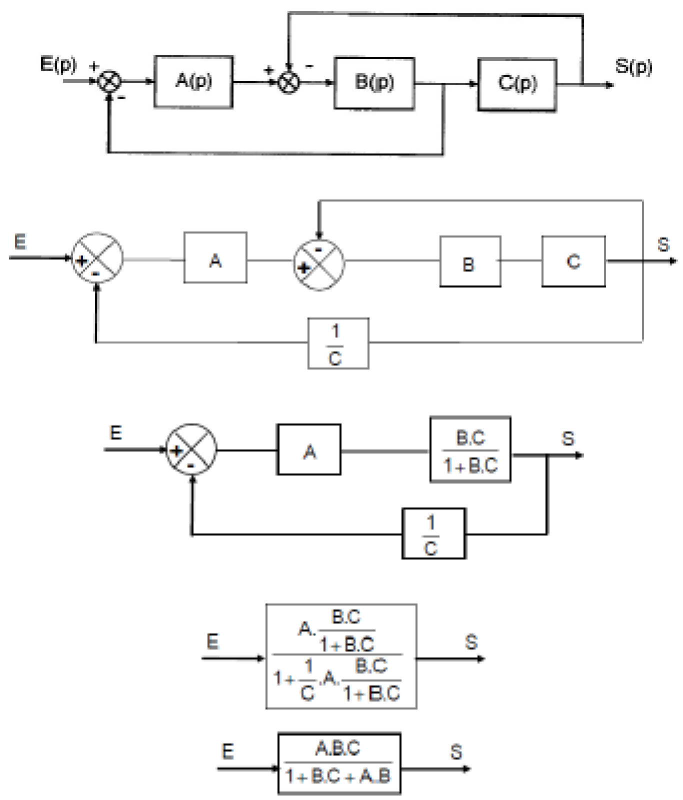


Corrigé Exercice 3 : SIMPLIFICATION DE SCHÉMAS-BLOCS A BOUCLES IMBRIQUÉES.

Donner l'expression de la transmittance $H(p) = \frac{S(p)}{E(p)}$ par réduction du schéma-bloc des systèmes à boucles imbriquées A, B et C.

1. **Système à boucles imbriquées A.**

Soit le système définit par le schéma-bloc suivant:



NB : Il est plus long de retrouver ce résultat par le calcul...

2) Par le calcul, en notant ε_1 et ε_2 les sorties respectives des 1[er] et 2[ème] sommateurs

$\varepsilon_1(p) = E(p) - B(p).\varepsilon_2(p)$ $\quad$ $\varepsilon_2(p) = A(p).\varepsilon_1(p) - S(p)$ $\quad$ et $S(p) = B(p).C(p).\varepsilon_2(p)$

La 2[ème] expression s'écrit encore $\varepsilon_2(p) = A(p).(E(p) - B(p).\varepsilon_2(p)) - S(p)$

Soit $\varepsilon_2(p) = \dfrac{A(p).E(p) - S(p)}{1 + A(p).B(p)}$ et $S(p) = B(p).C(p).\dfrac{A(p).E(p) - S(p)}{1 + A(p).B(p)}$

On retrouve bien $\dfrac{S(p)}{E(p)} = \dfrac{A(p).B(p).C(p)}{1 + A(p).B(p) + B(p).C(p)}$

Q.1 On réécrit les 4 équations du MCC en tenant compte des hypothèses de l'énoncé

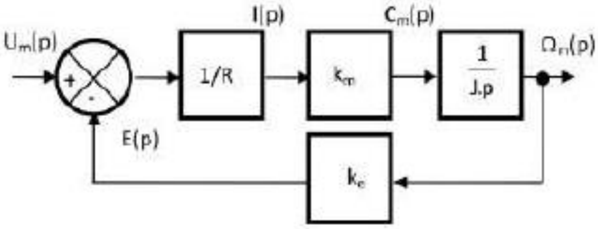
Q.2. et

$u_m(t) = e(t) + R.i(t)$ $\rightarrow$ $U_m(p) = E(p) + R.I(p)$

$e(t) = k_e.\omega_m(t)$ $\rightarrow$ $E(p) = k_e.\Omega_m(p)$

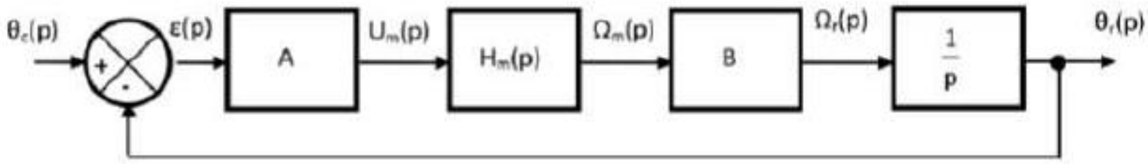
$J.\dfrac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$ $\rightarrow$ $J.p\ \Omega_m(p) = C_m(p)$

$C_m(t) = k_m.i(t)$ $\rightarrow$ $C_m(p) = k_m.I(p)$



$$H_m(p)=\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}=\frac{1}{k_e}.\frac{\dfrac{k_m.k_e}{R.J.p}}{1+\dfrac{k_m.k_e}{R.J.p}}=\frac{1}{k_e}.\frac{k_m.k_e}{R.J.p+k_m.k_e}=\frac{1}{k_e}.\frac{1}{1+\dfrac{R.J}{k_m.k_e}.p}=\frac{K_m}{1+T_m.p}\ \text{avec}\ K_m=\frac{1}{k_e}\ \text{et}\ T_m=\frac{R.J}{k_m.k_e}$$

Q.2 On trace le schéma bloc de l'asservissement de position



$$\frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}=\frac{A.B.H_m(p).\dfrac{1}{p}}{1+A.B.H_m(p).\dfrac{1}{p}}=\frac{A.B.\dfrac{K_m}{1+T_m.p}.\dfrac{1}{p}}{1+A.B.\dfrac{K_m}{1+T_m.p}.\dfrac{1}{p}}=\frac{A.B.K_m}{p.(1+T_m.p)+A.B.K_m}=\frac{1}{\dfrac{p.(1+T_m.p)}{A.B.K_m}+1}$$

$$H(p)=\frac{1}{\dfrac{p.(1+T_m.p)}{A.B.K_m}+1}=\frac{1}{1+\dfrac{1}{A.B.K_m}.p+\dfrac{T_m}{A.B.K_m}p^2}=\frac{K}{(1+\dfrac{2.z}{\omega_0}p+\dfrac{1}{\omega_0^{\ 2}}p^2)}\ \text{avec :}$$

$$K = 1 \quad ; \qquad \frac{1}{\omega_0^{\ 2}}=\frac{T_m}{A.B.K_m}\rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{A.B.K_m}{T_m}} \quad ; \qquad \frac{2.z}{\omega_0}=\frac{1}{A.B.K_m}\rightarrow z=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{T_m.A.B.K_m}}$$

Q.3 une réponse indicielle d'un système du 2^{nd} ordre on a :

<u>Ordonnée en $+\infty$ de la courbe de sortie :</u>

$$s(+\infty) = \lim_{t\to+\infty} s(t) = \lim_{p\to 0} p.S(p) = \lim_{p\to 0} \frac{K.\omega_0^2}{p^2 + 2.z.\omega_0.p + \omega_0^2} = K \quad \rightarrow \quad \boxed{s(+\infty) = K}$$

Théorème de la valeur finale

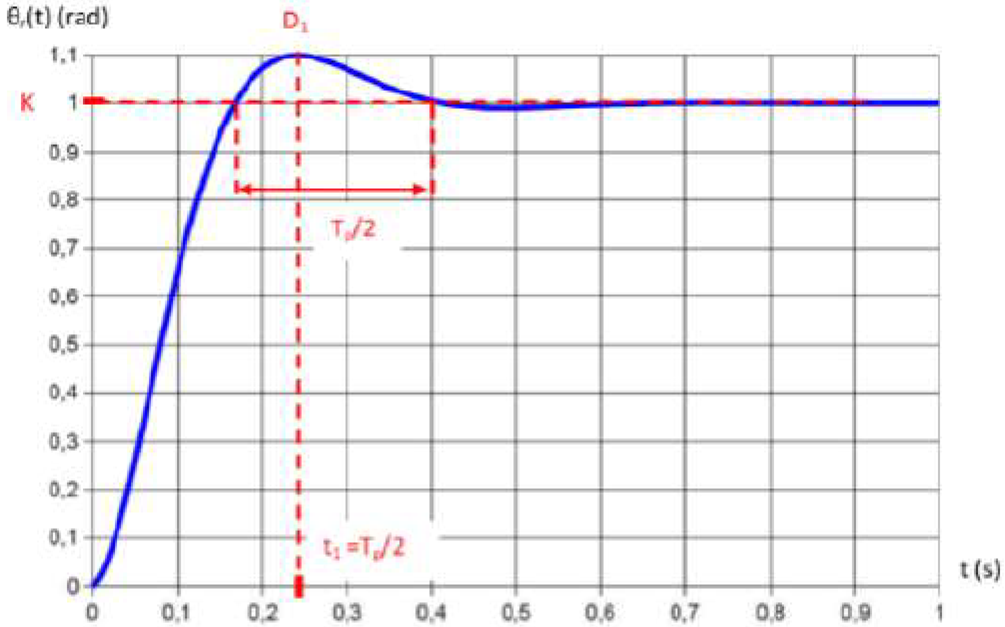
Le régime établi ne dépend que du gain statique K alors que z et ω_0 n'interviennent que sur le régime transitoire

<u>Valeur du 1er dépassement :</u> $D_1 = e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$

<u>Valeur de la pseudo-période :</u> $T_p = \frac{2\pi}{\omega_p} = \frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

Graphiquement on lit : K = 1 ; $t_1 = 0{,}24 = \frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$; $D_1 = e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}} = 0{,}1$

Soit $z \approx 0{,}58$ et $\omega_0 \approx 15{,}8$ rad/s.



Q.4 Soit on lit sur la réponse temporelle : t5%=0,33s

Soit

On utilise l'abaque donnant le temps de réponse réduit et on lit $t_{5\%}.\omega_0 = 5$ pour z=0,5 soit $t_{5\%} = 0.33s > 0{,}2s$ → le critère de rapidité du cahier des charges n'est pas respecté.

Q.5

Il y a 3 fonctions de transfert du 1er ordre : $H(p) = \frac{1}{(1+0{,}05.p).(1+0{,}0005.p).(1+0{,}002.p)}$

Les constantes de temps sont T_1 = 0,05 s (soit ω_1 = 20 rad/s), T_2 = 0,002 s (soit ω_2 = 500 rad/s) et T_3 = 0,0005 s (soit ω_2 = 2000 rad/s).

Q.6

Pour ω = 10 rad/s on a :

$$G_{dB} = |H(j10)|_{dB} \approx -20\log\left(\sqrt{\left(1+(0{,}05\times10)^2\right)}\right) \approx -1 \text{ dB}$$

$$\text{et } \varphi = \arg(H(j10)) \approx -\arctan\left(\frac{0{,}05\times10}{1}\right) \approx -26{,}5°$$

En régime permanent : $\theta_r(t) = 0{,}2.G.\sin(10t+\varphi)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0{,}2.\sin(10t)$.

Q.7

- Critère bande passante :
  Pour ω<20 rad/s, H(p) peut être approximé à un 1[er] ordre de constante de temps T_1=0,05s et de gain K=1.
  Avec cette approximation : ω_c<20 rad/s soit une bande passante de 20 rad/s > 18 rad/s , le critère bande passante du cahier des charges est donc respecté.

- Critère rapidité
  Avec la même approximation d'un premier ordre : $t_{5\%}$=3*0,05 = 0,15 s < 0,2s => CdCh vérifié

- Critère de précision
  Théorème de la valeur finale => écart statique = 0

- Critère de marge de phase > 45°. On ne peut répondre car on a pas la FTBO

Q1 : Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert de ce système.
Q2 : En déduire, si sa réponse à un échelon est non oscillatoire ou oscillatoire amortie. Si elle est définie, indiquer la valeur de la pseudo-période notée *Ta*.
Q3 : Calculer le temps de réponse à 5 % de ce système soumis à une entrée de type échelon.
On soumet le système à une entrée en échelon θc (*t*) = 20°
Q4 : Donner, dans ce cas, le nombre de dépassements d'amplitude supérieure à 1% de la réponse θ (*t*). Indiquer, pour chacun d'eux, leur valeur relative et leur valeur absolue.
Q5 : Tracer l'allure de la réponse θ (*t*) en précisant les points caractéristiques.

CORRIGE

Q1 : $K = 0{,}98 \quad \omega_0 = 16{,}9\ rad/s \quad z = 0{,}51$ Q2 : $T_a = 0{,}43\ s$ Q3 : $t_{r5\%} = 0{,}31\ s$

Q4 : $D_1 = 2{,}9°, D_2 = 0{,}4°$

Q1 : Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du système sous forme canonique. Sous quelle condition le modèle est-il stable ?
Q2 : Sachant que $u(t)$ est un échelon d'amplitude U_0, donner l'expression de $u(t)$ puis $U(p)$.
Q3 : En déduire $\Theta(p)$ en fonction des constantes α , K et U_0 .
Q4 : Déterminer la variation finale de la réponse si elle existe.
Soit la situation suivante : pour une tension d'alimentation de la résistance du four de 50 V, la température est stabilisée à 100°C. La tension d'alimentation passe 75 V à l'instant t = 100 s. Le relevé de la température est donné ci-dessus.
Q5 : Déterminer une condition, fonction de U_0, K et α, devant être vérifiée pour que le modèle corresponde aux résultats expérimentaux en variation finale.

CORRIGE

Q1 : $H(p)=\dfrac{\Theta(p)}{U(p)}=\dfrac{K}{4\alpha^2}\dfrac{1}{1+\dfrac{3}{2\alpha}p+\dfrac{1}{2\alpha^2}p^2}$. Stable si α positif.

Q2 : $U(p)=\dfrac{U_0}{p}$

Q3 : $\Theta(p)=\dfrac{K\,U_0}{\left(2p^2+6\alpha p+4\alpha^2\right)p}$

Q4 : $\Delta s(+\infty)=\dfrac{K}{4\alpha^2}U_0$

Q6 : il faut $\dfrac{K}{4\alpha^2}=\dfrac{\Delta s_{\exp}(+\infty)}{E_c}=\dfrac{50}{25}$

CORRIGE

1) $$FTBF = H(p) = \frac{\frac{K}{p}\cdot\frac{0,5}{1+0,1p}}{1+\frac{K}{p}\cdot\frac{0,5}{1+0,1p}\cdot 0,1} = \frac{0,5.K}{p(1+0,1p)+0,05.K}$$

1,5

$$\boxed{H(p) = \frac{10}{1+\frac{p}{0,05.K}+\frac{p^2}{0,5K}}} \quad (1)$$

2) $H(p)$ est un syst. du 2^{nd} ordre.

Un dépassement $D = 16\%$ correspond à un coefficient d'amortissement $m = 0,5$

Or, en identifiant $H(p)$ à l'expression "canonique" il vient :

$$\omega_0^2 = 0,5K \qquad \frac{2m}{\omega_0} = \frac{1}{0,05.K}$$

$$\text{soit} \quad 2m = \frac{\sqrt{0,5.K}}{0,05.K}$$

$$\sqrt{K} = \frac{\sqrt{0,5}}{0,1.m} \Rightarrow \boxed{K = \frac{0,5}{0,01.m^2}} = \frac{0,5}{0,01.0,5^2} = 200$$

2,5

on a $$\boxed{H(p) = \frac{10}{1+0,1p+0,01p^2}}$$

3) D'après le Th. de la valeur finale :

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p)$$

Avec
$$\varepsilon(p) = x_c(p) - x_s(p)$$
$$\varepsilon(p) = x_c(p) - \varepsilon(p)\cdot\frac{K}{p}\cdot\frac{0,5}{(1+0,1p)}$$
$$\varepsilon(p)\cdot\left[1+\frac{0,5.K}{p(1+0,1p)}\right] = x_c(p)$$

$$\varepsilon(p) \cdot \frac{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}{p(1+0{,}1p)} = X_c(p)$$

$$\varepsilon(p) = X_c(p) \frac{p(1+0{,}1p)}{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}$$

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p\to 0} p \cdot X_c(p) \cdot \frac{p(1+0{,}1p)}{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}$$

. réponse à un échelon unitaire $X_c(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p\to 0} \cancel{p} \cdot \frac{1}{\cancel{p}} \cdot \frac{p(1+0{,}1p)}{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}$$

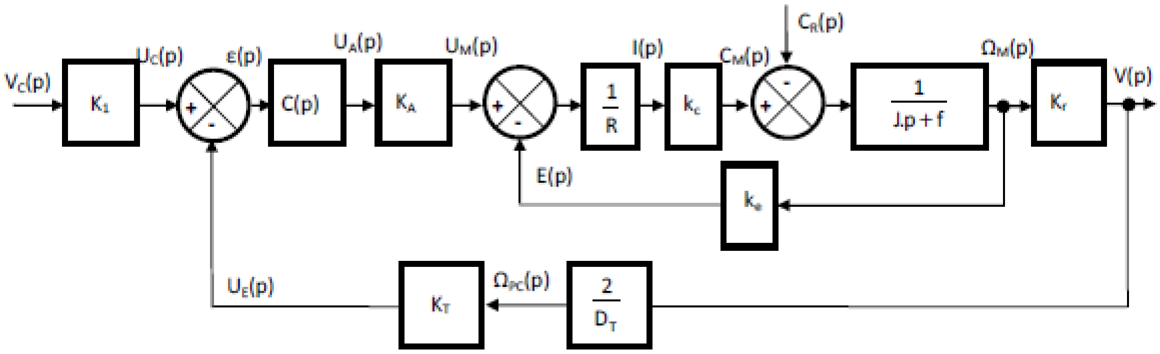
$\boxed{\varepsilon(+\infty) = 0}$ pour un échelon

. réponse à une rampe $X_c(p) = \frac{2}{p^2}$

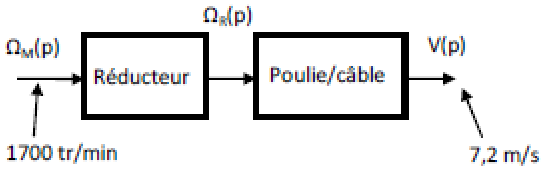
$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p\to 0} \cancel{p} \cdot \frac{2}{\cancel{p^2}} \cdot \frac{\cancel{p}(1+0{,}1p)}{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}$$

$\boxed{\varepsilon(+\infty) = \frac{4}{K}}$ pour une rampe de pente $\alpha = 2$.

Q.1.



Avec $K_r = \dfrac{V(p)}{\Omega_M(p)}$ tel que :



Soit $K_r = \dfrac{V(p)}{\Omega_M(p)} = \dfrac{7{,}2}{1700 \times \dfrac{2.\pi}{60}} = 0{,}04$

Q.2. On a $\varepsilon(p) = U_C(p) - U_E(p) = K_1.V_C(p) - K_T.\dfrac{2}{D_T}.V(p)$

Pour $V_C(p) = V(p)$ on doit avoir $\varepsilon(p) = 0 \rightarrow K_1 - K_T.\dfrac{2}{D_T} = 0 \rightarrow K_1 = K_T.\dfrac{2}{D_T}$

A.N. : $K_1 = 0{,}3.\dfrac{2}{0{,}4} = 1{,}5\ V.s.m^{-1}$

Q.3. $H_M(p)\Big|_{C_R(p)=0} = \dfrac{\Omega_M(p)}{U_M(p)} = \dfrac{1}{k_e}.\dfrac{\dfrac{1}{R}.k_c.\dfrac{1}{f+J.p}.k_e}{1+\dfrac{1}{R}.k_c.\dfrac{1}{f+J.p}.k_e} = \dfrac{1}{k_e}.\dfrac{k_c.k_e}{R.(f+J.p)+k_c.k_e}$

$$H_M(p)\Big|_{C_R(p)=0} = \frac{1}{k_e}.\frac{k_c.k_e}{J.R.p+k_c.k_e+R.f} = \frac{\dfrac{k_c}{k_c.k_e+R.f}}{\dfrac{J.R}{k_c.k_e+R.f}.p+1}$$

$$H_R(p)\Big|_{U_M(p)=0} = \frac{C_R(p)}{U_M(p)} = \frac{R}{k_c.k_e}.\frac{\dfrac{1}{R}.k_c.\dfrac{1}{f+J.p}.k_e}{1+\dfrac{1}{R}.k_c.\dfrac{1}{f+J.p}.k_e} = \frac{R}{k_c.k_e}.\frac{k_c.k_e}{J.R.p+k_c.k_e+R.f}$$

$$H_R(p)\Big|_{U_M(p)=0} = \frac{C_R(p)}{U_M(p)} = \frac{R}{k_c.k_e}.\frac{\frac{1}{R}.k_c.\frac{1}{f+J.p}.k_e}{1+\frac{1}{R}.k_c.\frac{1}{f+J.p}.k_e} = \frac{\frac{R}{k_c.k_e+R.f}}{\frac{J.R}{k_c.k_e+R.f}.p+1}$$

Enfin en utilisant le théorème de superposition on obtient :

$$\Omega_M(p) = H_M(p)\Big|_{C_R(p)=0}.U_M(p) - H_R(p)\Big|_{U_M(p)=0}.C_R(p)$$

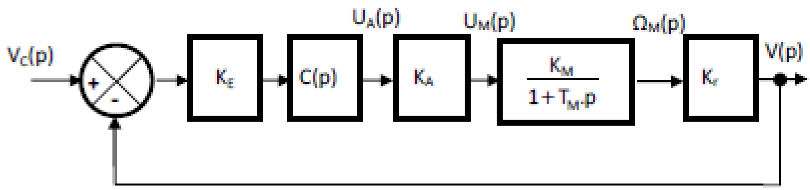
Q.4. $H_M(p)\Big|_{C_R(p)=0} = \dfrac{\frac{k_c}{k_c.k_e+R.f}}{\frac{J.R}{k_c.k_e+R.f}.p+1} = \dfrac{K_M}{T_M.p+1}$

→ système du 1[er] ordre avec $K_M = \dfrac{k_c}{k_c.k_e+R.f}$ et $T_M = \dfrac{J.R}{k_c.k_e+R.f}$

A.N. : $K_M = \dfrac{2,5}{2,5\times 2,5+0,0999\times 4,8} = 0,37\ \text{rad.V}^{-1}.\text{s}^{-1}$

$T_M = \dfrac{420\times 0,0999}{2,5\times 2,5+0,0999\times 4,8} = 6,23\ \text{s}$

Q.5. En régulation le schéma bloc devient :



Avec $K_E = K_T.\dfrac{2}{D_T} = K_1$ et $C(p) = K_C$

Calcul de la FTBF : $\dfrac{V(p)}{V_C(p)} = \dfrac{\frac{K_E.K_C.K_A.K_M.K_r}{1+T_M.p}}{1+\frac{K_E.K_C.K_A.K_M.K_r}{1+T_M.p}} = \dfrac{\frac{K_C.K_S}{1+T_M.p}}{1+\frac{K_C.K_S}{1+T_M.p}}$

$$\frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{K_C.K_S}{K_C.K_S+1+T_M.p} = \frac{\frac{K_C.K_S}{K_C.K_S+1}}{1+\frac{T_M}{K_C.K_S+1}.p} \rightarrow G(p) = \frac{V(p)}{V_C(p)} = \frac{\frac{K_C.K_S}{K_C.K_S+1}}{1+\frac{T_M}{K_C.K_S+1}.p}$$

Q.6. On obtient question 5 un système du 1[er] ordre → stable par définition.

Q.7. $t_{5\%} = 3.\dfrac{T_M}{K_C.K_S+1}$ par définition pour un système du 1[er] ordre.

Cahier des charges → $t_{5\%} < 5$ s → $3.\dfrac{T_M}{K_C.K_S+1} < 5 \rightarrow 3.T_M < 5.K_C.K_S+5 \rightarrow \dfrac{3.T_M-5}{5.K_S} < K_C$.

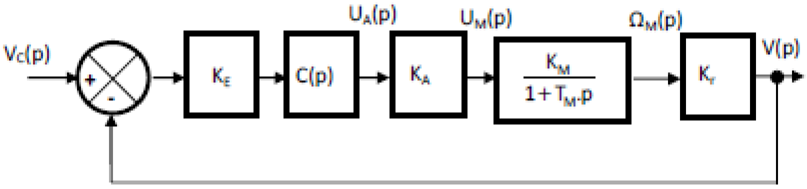
A.N. : $K_S = K_A.K_E.K_r.K_M = 30\times1{,}5\times0{,}04\times0{,}37 = 0{,}67 \rightarrow K_C > \dfrac{3\times6{,}3-5}{5\times0{,}67} = 4{,}1$

Q.8. Erreur statique : $e_r = \lim\limits_{p\to0} p.\dfrac{V_0}{p}.\dfrac{1}{1+\dfrac{K_C.K_S}{1+T_M.p}} = \dfrac{V_0}{1+K_C.K_S}$ et cahier des charges $\rightarrow e_r < 0{,}02.V_0$

$\rightarrow \dfrac{V_0}{1+K_C.K_S} < 0{,}02.V_0 \rightarrow 1 < 0{,}02.(1+K_C.K_S) \rightarrow 0{,}98 < 0{,}02.K_C.K_S \rightarrow K_C > \dfrac{0{,}98}{0{,}02.K_S} \approx 74$

Q.9. Pour $K_C = 74$ et $V_0 = 7{,}2$ on obtient une tension U_M en entrée de moteur $U_M = 7{,}2\times1{,}5\times30\times74 = 23976$ V >>> 300 V nominal du moteur → le correcteur proportionnel n'est pas adapté.

Q.10. En régulation le schéma bloc devient :



Avec $K_E = K_T.\dfrac{2}{D_T} = K_1$ et $C(p) = \dfrac{K_i}{p}$

Calcul de la FTBF : $\dfrac{V(p)}{V_C(p)} = \dfrac{\dfrac{K_E.K_i.K_A.K_M.K_r}{p.(1+T_M.p)}}{1+\dfrac{K_E.K_i.K_A.K_M.K_r}{p.(1+T_M.p)}} = \dfrac{\dfrac{K_i.K_S}{p.(1+T_M.p)}}{1+\dfrac{K_i.K_S}{p.(1+T_M.p)}}$

$\dfrac{V(p)}{V_C(p)} = \dfrac{K_i.K_S}{T_M.p^2+p+K_i.K_S} = \dfrac{1}{\dfrac{T_M}{K_i.K_S}.p^2+\dfrac{1}{K_i.K_S}p+1} \rightarrow H(p) = \dfrac{V(p)}{V_C(p)} = \dfrac{1}{\dfrac{T_M}{K_i.K_S}.p^2+\dfrac{1}{K_i.K_S}p+1}$

Système du 2ème ordre avec :

$K = 1$; $\dfrac{1}{\omega_0^{\,2}} = \dfrac{T_M}{K_i.K_S} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_i.K_S}{T_M}}$; $\dfrac{2.z}{\omega_0} = \dfrac{1}{K_i.K_S} \rightarrow z = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{K_i.K_S.T_M}}$

Q.11. FTBO de classe 1 → erreur statique nulle → C.d.C.F. ok.

Q.12. $D_1 = e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}} = 0{,}1 \rightarrow -\dfrac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}} = \ln0{,}1 \rightarrow z^2.\pi^2 = (\ln0{,}1)^2.(1-z^2)$

$\rightarrow z^2.(\pi^2+(\ln0{,}1)^2) = (\ln0{,}1)^2 \rightarrow z = \sqrt{\dfrac{(\ln0{,}1)^2}{(\pi^2+(\ln0{,}1)^2)}} = 0{,}6$

$z = \dfrac{1}{2}.\dfrac{1}{\sqrt{K_i.K_S.T_M}} \rightarrow 4.z^2 = \dfrac{1}{K_i.K_S.T_M} \rightarrow K_i = \dfrac{1}{4.z^2.K_S.T_M}$

A.N. : $K_i = \dfrac{1}{4\times0{,}6^2\times0{,}67\times6{,}23} = 0{,}17$

Q.13. Pour $z = 0{,}6$ on a $t_{5\%}.\omega_0 = 5$ avec $\omega_0 = \sqrt{\dfrac{K_i.K_S}{T_M}} \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{0{,}17\times0{,}67}{6{,}23}} = 0{,}13$ rad/s

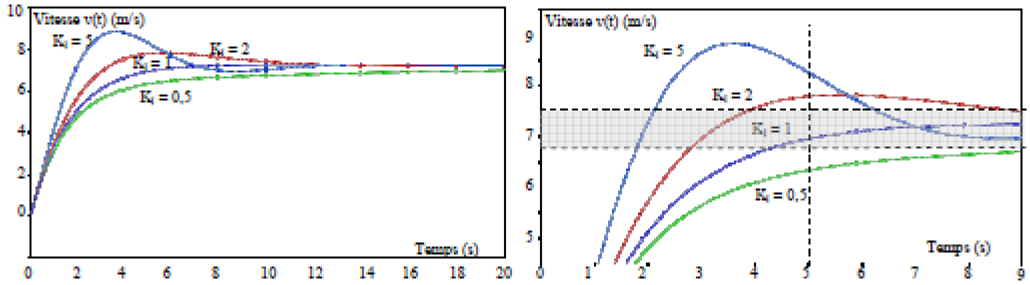
$\rightarrow t_{5\%} = \dfrac{5}{\omega_0} = \dfrac{5}{0{,}13} = 38{,}5$ s $\rightarrow$ Système très lent.

Q.14. Temps de réponse minimal pour z = 0,7 $\rightarrow K_i = \dfrac{1}{4 \times 0{,}7^2 \times 0{,}67 \times 6{,}23} = 0{,}12 \rightarrow \omega_0 = \sqrt{\dfrac{0{,}12 \times 0{,}67}{6{,}23}} = 0{,}11$

$\rightarrow t_{5\%} = \dfrac{3}{\omega_0} = \dfrac{3}{0{,}11} = 27{,}2$ s $\rightarrow$ Système trop lent encore.

L'action intégrale pure ne permet pas de corriger le système correctement.

Q.15.



K_i = 1 est le bon gain qui permet de respecter le critère de rapidité, de précision et de dépassement imposé par le C.d.C.F..

Q.16. Il faudrait déterminer la fonction de transfert qui permet de passer de la vitesse du vent à une action mécanique sous forme de couple résistant. Dans le sujet on suppose que l'action du vent est modélisable par un couple résistant sous forme de perturbation en échelon. Avec le correcteur PI il y a un intégrateur dans la boucle ouverte en amont de la perturbation, l'erreur en régulation est donc nulle.

Exercice1:

1-La fonction de transfert du système en boucle fermée.

$$H(p) = \frac{KG(p)}{1 + KG(p)B(p)} = \frac{\dfrac{0{,}02K}{p\,(1 + 2\,000p)}}{1 + \dfrac{0{,}02K}{p\,(1 + 2\,000p)} \cdot \dfrac{5 \cdot 10^{-3}}{1 + 2p}}$$

soit :

$$H(p) = \frac{0{,}02K\,(1 + 2p)}{p\,(1 + 2p)\,(1 + 2\,000p) + 10^{-4}K} = \frac{0{,}02K\,(1 + 2p)}{4\,000\,p^3 + 2\,002\,p^2 + p + 10^{-4}K}$$

2-La condition nécessaire sur K pour que le système soit stable (selon le critère de Routh).

$$\begin{array}{ccc}
4\,000 & 1 & 0 \\
2\,002 & 10^{-4}K & 0 \\
\dfrac{2\,002 - 0{,}4K}{2\,002} & 0 & 0 \\
10^{-4}K & 0 & 0
\end{array}$$

Exercice 2 : Stabilité d'un système bouclé

1-On a utilisé un correcteur intégrateur.
2- La fonction de transfert en boucle fermée.

$$FTBF = \frac{A(p)}{1+A(p)} = \frac{1}{1+\frac{1}{A(p)}}$$

donc $$FTBF = \frac{1}{1+\frac{p}{K_i}\cdot\frac{(1+\tau_1 p)(1+\tau_2 p)}{100}}$$

soit $$\boxed{FTBF = \frac{100k_i}{100.K_i + p + (\tau_1+\tau_2)p^2 + \tau_1\tau_2 p^3}}$$

3- Etude de la stabilité en fonction de Ki par le critère de Routh.

Tableau de Routh :

p^3	$\tau_1\tau_2$	1
p^2	$\tau_1+\tau_2$	$100k_i$
p	$\frac{\tau_1+\tau_2-\tau_1\tau_2 100k_i}{\tau_1+\tau_2}$	0
1	$100k_i$	

Pour que le système soit stable il faut que

$100K_i>0$ $\boxed{K_i>0}$ et

$\tau_1+\tau_2 - \tau_1\tau_2 100k_i > 0$ soit $\boxed{k_i < \frac{\tau_1+\tau_2}{100.\tau_1\tau_2} = 6\ mrad/s}$

Exercice 3 :

1- La fonction de transfert du système en boucle fermée.

$$F_{bf}(p) = \frac{F_d(p)}{1+F_d(p)\cdot F_r(p)} = \frac{\frac{1}{p^2+3p+2}}{1+\frac{K}{p}\cdot\frac{1}{p^2+3p+2}} = \frac{p}{p(p^2+3p+2)+K}$$

$$F_{bf}(p) = \frac{p}{p^3+3p^2+2p+K}$$

2- La valeur de K pour que le système en boucle fermée soit stable.

P^3	1	2	0
P^2	3	K	0
P^1	C_{31}	C_{32}	
p^0	C_{41}	C_{42}	

$$C_{31} = \frac{3\times 2 - 1\times K}{3} = \frac{6-K}{3} \quad ; \quad C_{32} = \frac{3\times 0 - 1\times 0}{3}$$

$$C_{41} = \frac{\frac{6-K}{3}\times K - 3\times 0}{\frac{6-K}{3}} = K \quad ; \quad C_{42} = 0$$

Rappelons que pour que l'équation caractéristique ne possède que des racines à parties réelles négatives, il faut et il suffit que tous les termes de la première colonne de la table de Routh soient de même signe.
Dans notre cas, il faut que *6-K>0 et K>0 , alors 0<K<6* pour que le système soit stable.