Information utile pour le semestre

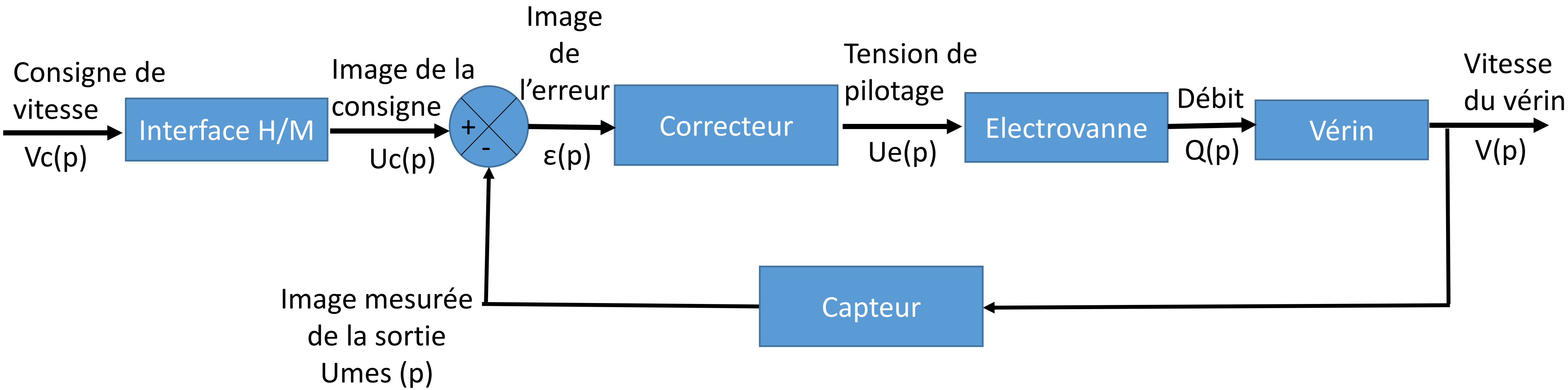
- 1 épreuve de DS **le 03 février**
- 1 **épreuve de partiel** qui sera prévue **début Avril**

Exercice d'application

Une pelle hydraulique est composée de différents vérins hydrauliques asservis en position et en vitesse. Nous nous intéresserons au schéma fonctionnel d'un vérin asservi seulement en vitesse. La vitesse de sortie de ce vérin est notée v(t). Une électrovanne (vanne pilotée électriquement) (considérée comme un distributeur hydraulique proportionnel), délivre le débit q(t) qui alimente le vérin. La chaîne fonctionnelle est constituée d'une interface H/M permettant de transformer la consigne de vitesse $v_c(t)$ en tension $u_c(t)$. Cette tension est comparée à la tension $u_{mes}(t)$, délivrée par un capteur de vitesse, puis corrigée.

Question: Représenter le système asservi par un schéma-bloc. (Vous indiquerez le nom des constituants dans les blocs, ainsi que les flux d'énergie ou d'information entre les blocs).

Corrigé


Consigne de vitesse
Vc(p)
Interface H/M
Image de la consigne
Uc(p)
+
-
Image de l'erreur
ε(p)
Correcteur
Tension de pilotage
Ue(p)
Electrovanne
Débit
Q(p)
Vérin
Vitesse du vérin
V(p)
Capteur
Image mesurée de la sortie
Umes (p)

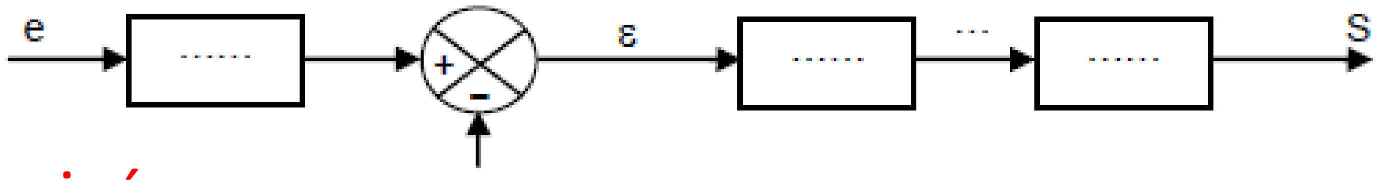
Exercice d'application

Passage d'un système d'équation à un schéma fonctionnel :

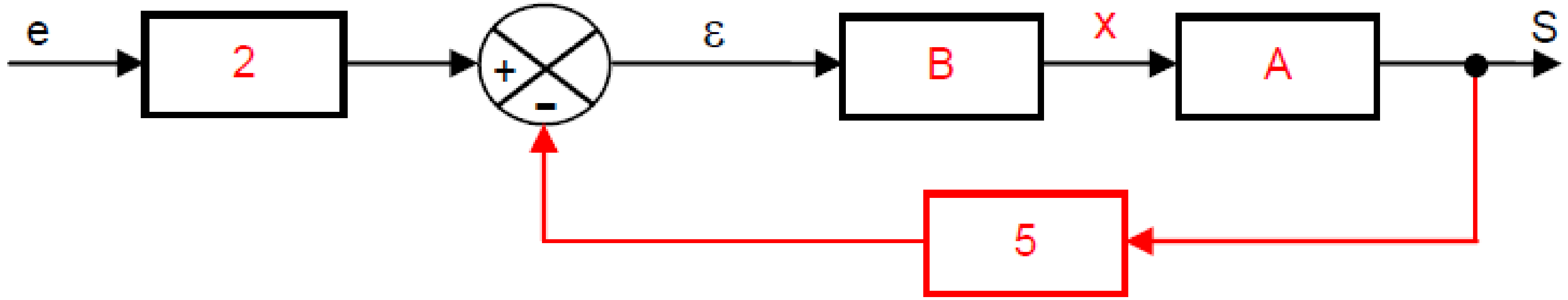
Soient les équations suivantes : $\varepsilon = 2e - 5S$, $S = A.x$ et $x = B\,\varepsilon$

Compléter le schéma fonctionnel correspondant :

Avec $\begin{cases} e : \text{signal d'entrée (consigne)} \\ S : \text{signal de sortie} \end{cases}$



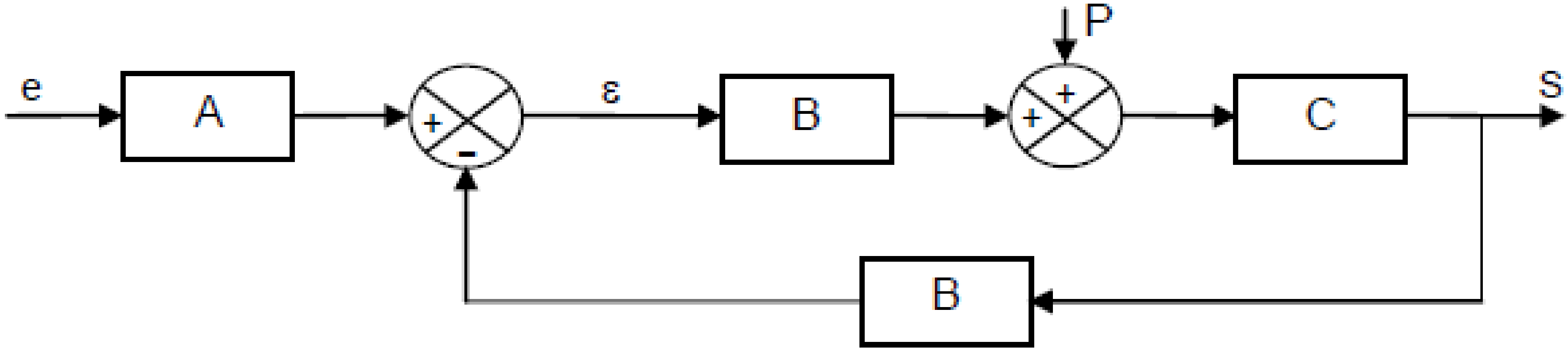
Corrigé



Exercice d'application

Passage d'un schéma fonctionnel à un système d'équation:

Déterminer les équations à partir du schéma fonctionnel suivant :



ε = ... S = ...

Corrigé

$\boxed{\varepsilon = Ae - BS}$

$\boxed{S = (P + B\varepsilon)C}$

Modélisation des Systèmes Linéaires Continus et Invariants (SLCI)

Sommaire

Définition d'un système

- Systèmes
  - Continus
  - Échantillonnés
  - À événements discrets

- Systèmes
  - Linéaires
  - Non linéaires

- Systèmes
  - Monovariables
  - Multivariables

- Systèmes
  - Invariants
  - Variants

Systèmes Linéaires Continus Invariants

Système monovariable

Un **système monovariable** est un système ne possédant qu'une seule entrée et une seule sortie.
Si un système étudié fonctionne avec plusieurs entrées (ou une entrée et des perturbations), il sera possible, grâce à l'hypothèse de linéarité, d'étudier séparément la relation entre la sortie et chacune des entrées, puis de superposer les effets de chaque entrée.

Systèmes linéaires

Un modèle est dit **linéaire** s'il satisfait au théorème de superposition, c'est-à-dire si l'effet de la somme e des grandeurs d'entrées e_i est égale à la somme y de leurs effets y_i.

Si y_i est la réponse à l'entrée e_i et y la réponse à l'entrée e telle que : $e = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i . e_i$

Systèmes Linéaires Continus Invariants

Système continu

Un **système** est **continu** si les fonction d'entrée et de sortie sont définies pour tout instant t. Les signaux sont dits **analogiques.** Dans les systèmes de commande modernes, l'information est traitée informatiquement, ce qui nécessite un échantillonnage des signaux. Ce sont des systèmes et des signaux discrets.

Système invariant

Les caractéristiques de comportement **d'un système invariant** sont indépendantes du temps. Si une même entrée se produit à deux instants distincts (t_1 et t_2), alors les deux sorties temporelles ($s_1(t)$ et $s_2(t)$) seront identiques.

Systèmes Linéaires Continus Invariants

Un **système** est causal si, lorsqu'il se trouve dans un état d'équilibre, les sorties ne varient pas tant que tous les signaux d'entrée sont constants.
Un signal est dit causal, si son futur ne peut pas influencer ni son présent ni son passé.
En d'autres termes, la réponse d'un système causal ne précède pas son excitation, autrement dit , l'effet vient toujours après la cause.

Tous les systèmes physiquement réalisables sont causaux

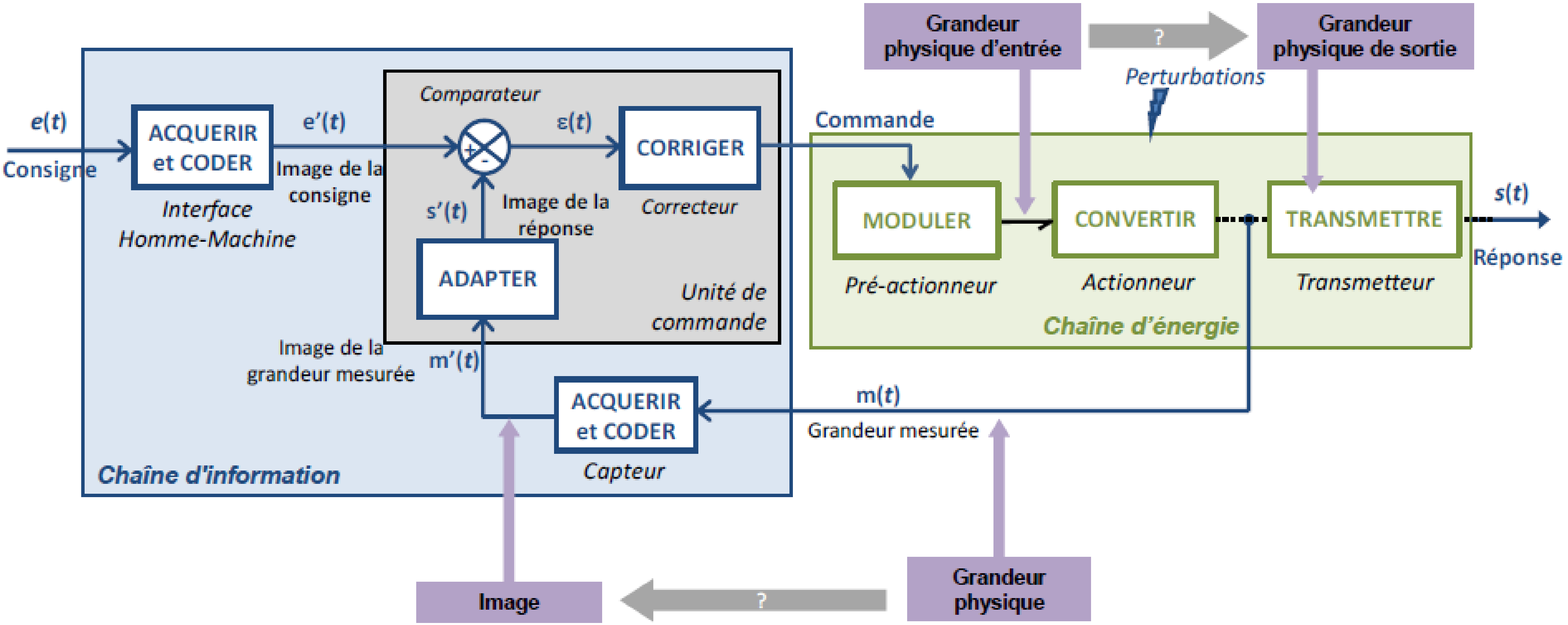
Un signal f(t) est causal ssi $f(t) = 0 \quad \forall t < 0$.
Ne pas confondre système causal et signal causal

Tous les signaux physiques réels peuvent être rendus causaux par décalage de l'origine de la mesure du temps

I- Modélisation des Systèmes Linéaires Continus et Invariants (SLCI)

I. 1. Objectif

L'objectif est de **modéliser un composant** ou un **système**, caractérisé par un ensemble de grandeurs scalaires, à partir de **l'analyse de la réponse** à une entrée test. Le modèle ainsi obtenu est appelé **modèle de comportement**. Il est représenté par une **fonction de transfert**, caractéristique des équations différentielles régissant le comportement du système.



I.2. Modéliser en SLCI : modèle et Système Linéaire Continu Invariant

Pour prédire les performances d'un système par simulation ou calcul, il faut pouvoir modéliser mathématiquement son comportement. Le modèle présenté ici est dit linéaire, continu, invariant.
Les systèmes pouvant être modélisés ainsi sont des SLCI.

I.2.1 Grandeurs temporelles, paramètres, entrées et sortie

Dans le système et les modèles étudiés, on distingue :

− des **grandeurs temporelles**, **scalaires**, qui **dépendent** du **temps** : température, position, vitesse, tension, intensité…. Elles correspondent à des grandeurs échangées dans une chaîne fonctionnelle ;

− des **paramètres,** physiques ou non, scalaires : dimensions, résistance et inductance électrique, masse… Ces paramètres sont **caractéristiques du système** étudié.

On distingue aussi, parmi les grandeurs temporelles, une ou plusieurs **entrées** et une **sortie**.

I.2. Modéliser en SLCI : modèle et Système Linéaire Continu Invariant

Exemple : Pour un moteur électrique, les paramètres sont généralement la résistance électrique et l'inductance du bobinage, l'inertie des pièces en mouvement…

Les **grandeurs temporelles** sont la tension d'alimentation aux bornes du moteur, l'intensité du courant, le couple (effort tournant) fourni par le moteur, le couple résistant s'opposant au mouvement…

Les **entrées** sont généralement **la tension d'alimentation et le couple résistant** ;
la sortie **la vitesse angulaire**.

I.2. Modéliser en SLCI : modèle et Système Linéaire Continu Invariant

I.2.2 Comportement linéaire

On appelle **réponse**, l'évolution temporelle de la grandeur de sortie pour des fonctions d'entrée (signaux) données.

Lorsque le **comportement** est **linéaire**, la **réponse dépend linéairement des signaux d'entrée**.

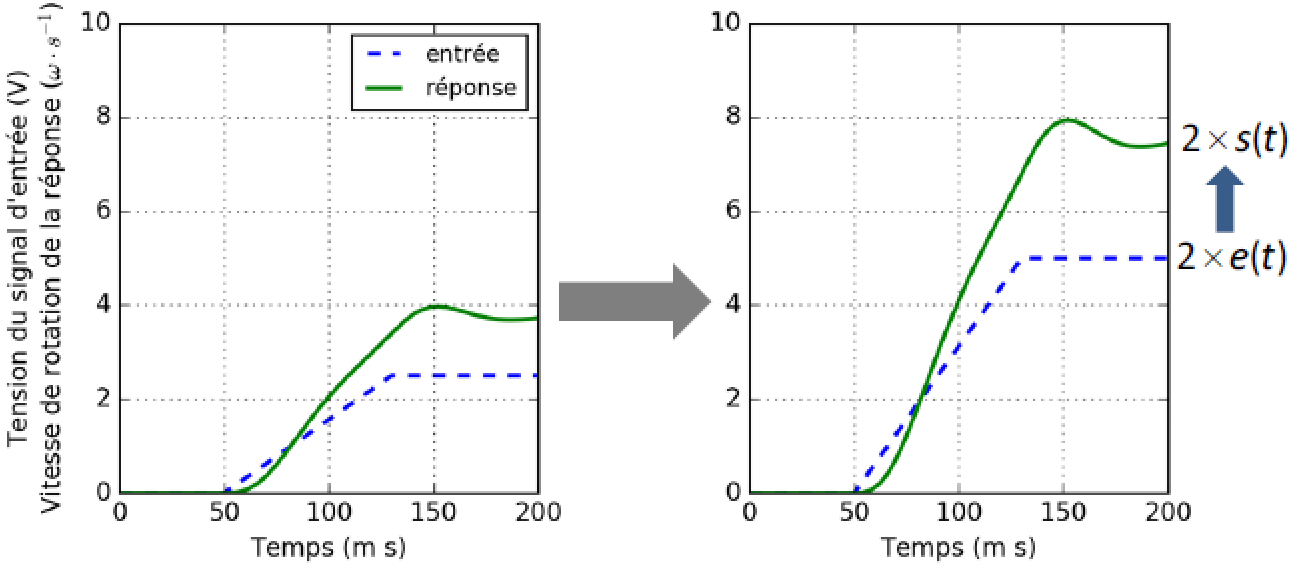
Conséquence pour la réponse à 1 entrée :

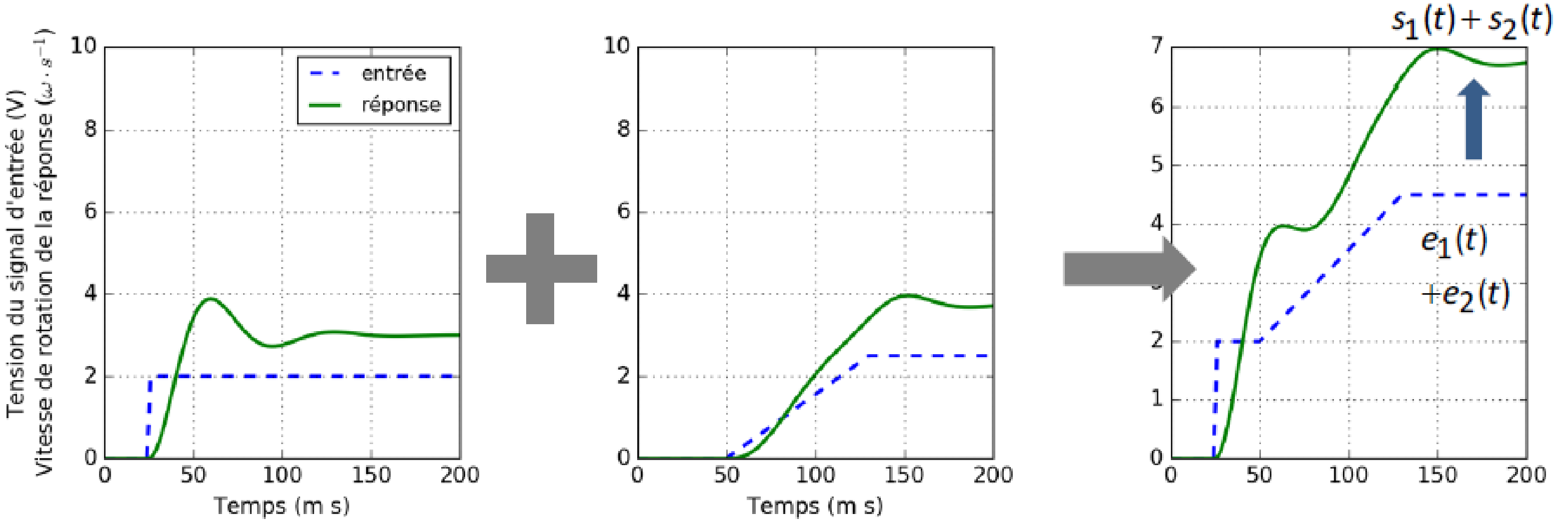
- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$

alors, pour un signal d'entrée $e(t) = e_1(t) + k \times e_2(t)$, la réponse est $s(t) = s_1(t) + k \times s_2(t)$

I.2. Modéliser en SLCI : modèle et Système Linéaire Continu Invariant

I.2.2 Comportement linéaire





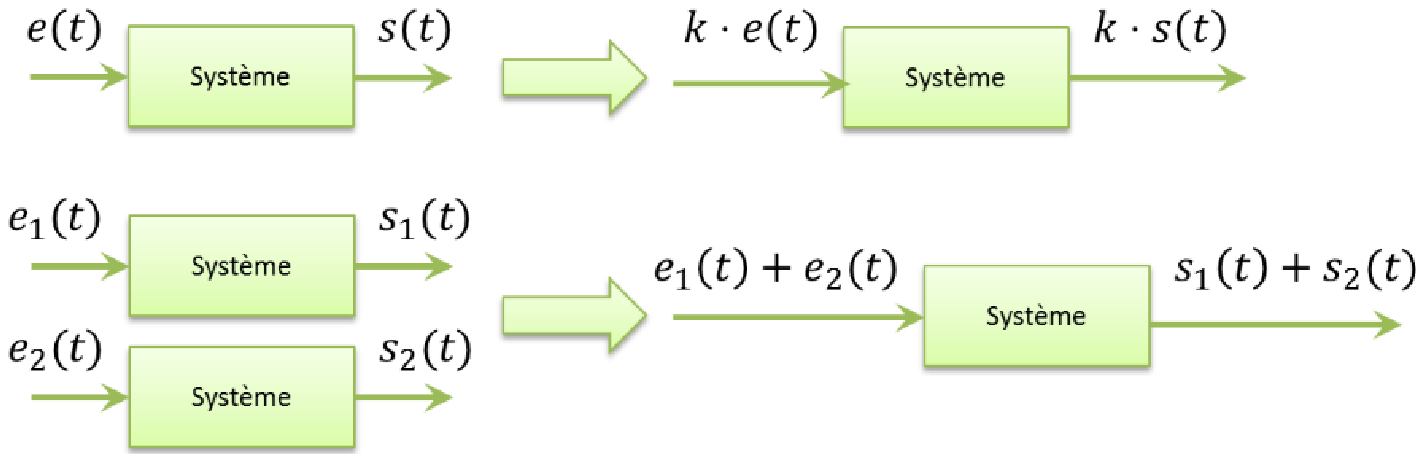
I.2. Modéliser en SLCI : modèle et Système Linéaire Continu Invariant

I.2.2 Comportement linéaire

Conséquence pour la réponse à 2 entrées :

- si $s_1(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_1(t)$ sur l'entrée e_1
- si $s_2(t)$ est la réponse à un signal d'entrée $e_2(t)$ sur l'entrée e_2

alors, si les signaux sont appliqués simultanément aux deux entrées, la réponse est $s(t) = s_1(t) + s_2(t)$



I.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

Un système de type **SLCI**, vérifie les hypothèses suivantes :

- les grandeurs temporelles sont des **fonctions continues du temps** ;
- le modèle est **invariant** ; les paramètres physiques sont supposés constants durant la période d'étude
- le modèle est **linéaire.**

Un **SLCI** est caractérisé par un **système d'équations différentielles linéaires à coefficients constants** de la forme :

$$a_n \frac{d^n s}{dt^n} + a_{n-1} \frac{d^{n-1} s}{dt^{n-1}} + \ldots + a_1 \frac{ds}{dt} + a_0 s(t) = b_m \frac{d^m e}{dt^m} + b_{m-1} \frac{d^{m-1} e}{dt^{m-1}} + \ldots + b_1 \frac{de}{dt} + b_0 e(t)$$

s(t) : réponse et **e(t) signal d'entrée**

n est **l'ordre** de l'équation.
Le modèle est **causal** : les signaux d'entrée imposent la réponse.

I.3.1 Comment modéliser un système par une équation différentielle ?

Méthode 1 : Modélisation d'un système par une équation différentielle

Tout d'abord, il faut connaître les différentes relations concernant les systèmes fondamentaux.

Ensuite, il s'agit d'appliquer les principes et théorèmes fondamentaux correspondant aux phénomènes mis en jeu.

Exemple : Considérons un **moteur à courant continu**.

La grandeur d'entrée est une tension d'alimentation du moteur.
La grandeur de sortie est la vitesse angulaire de l'axe du moteur par rapport au stator.

I.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

Méthode 1 : Modélisation d'un système par une équation différentielle

Les équations du modèle de connaissance usuel, sans couple résistant, sont données ci-dessous.

Équations fondamentales d'un Moteur à Courant Continu (MCC)	
$u(t) = e(t) + R \cdot i(t) + L\dfrac{di(t)}{dt}$ (1) $e(t) = k_e \cdot \omega(t)$ (2) $c(t) = k_C \cdot i(t)$ (3) $J\dfrac{d\omega(t)}{dt} = c(t)$ (4)	$u(t)$: tension aux bornes du moteur $i(t)$: intensité du courant du moteur $\omega(t)$: vitesse angulaire du moteur $c(t)$: couple du moteur $e(t)$: f.e.m J, k_e, k_c, R et L : caractéristiques du moteur

Les équations proviennent des lois physiques suivantes :

(1) loi des mailles; (2) et (3) électromagnétisme et (4) loi de Newton pour un solide en rotation

I.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

Méthode 1 : Modélisation d'un système par une équation différentielle

Les équations (3) et (4) permettent d'obtenir l'intensité en fonction de la vitesse angulaire du moteur :

$$i(t) = \frac{J}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt}$$

Le modèle étant invariant, *J* et *kc* sont des constantes, et en dérivant : $\frac{di(t)}{dt} = \frac{J}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}$

En remplaçant l'intensité et *e*(*t*) dans l'équation (1), on obtient une équation différentielle (du second ordre), caractéristique du moteur :

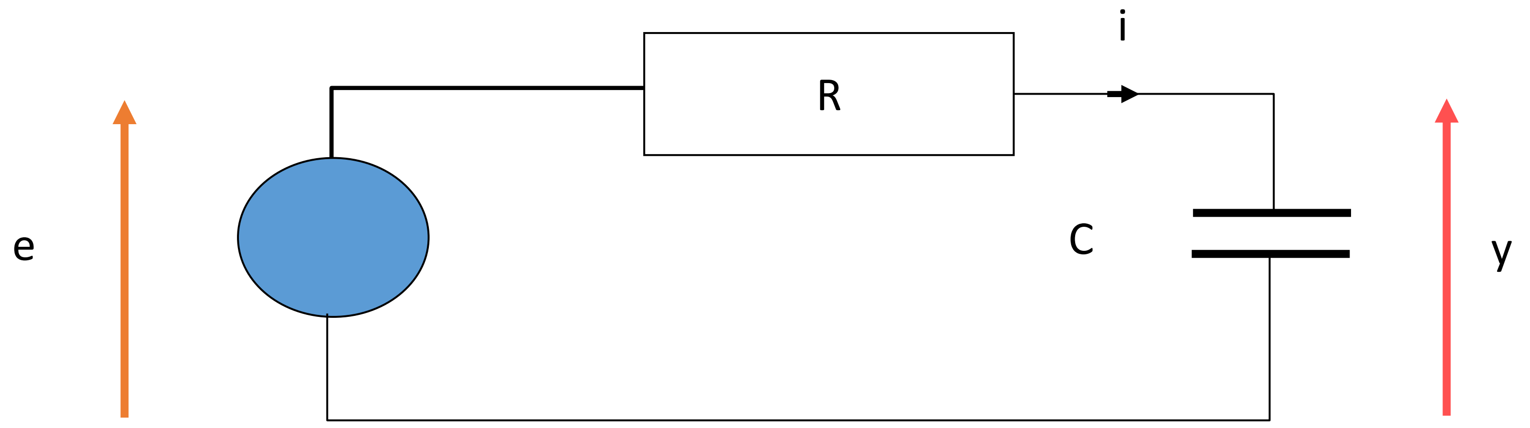
$$k_e\,\omega(t) + \frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} = u(t)$$

Cette équation caractérise le comportement du composant. Cependant, on recherche une représentation indépendante de *u*(*t*) et de ω(*t*) .

I.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

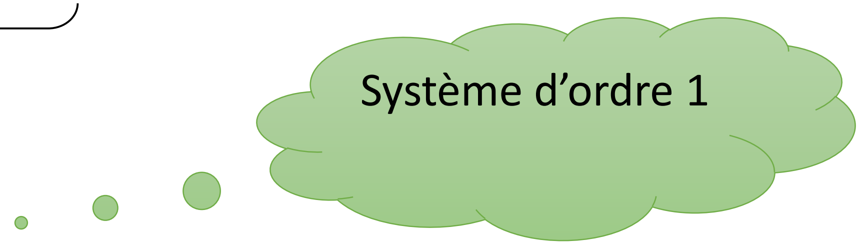
Méthode 1 : Modélisation d'un système par une équation différentielle

Exemple d'un système décrit par une EDO



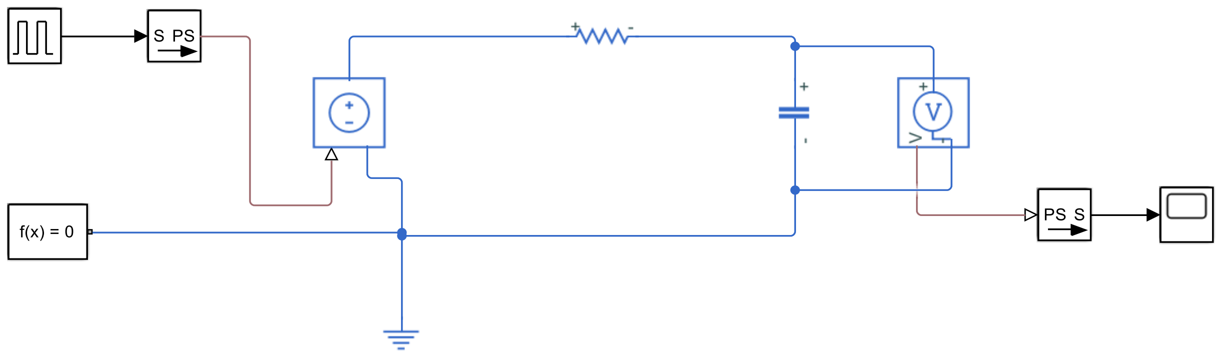
$$\underbrace{e = Ri + y, \qquad I = C\,dy/dt}$$

$$y + RC\,dy/dt = e$$



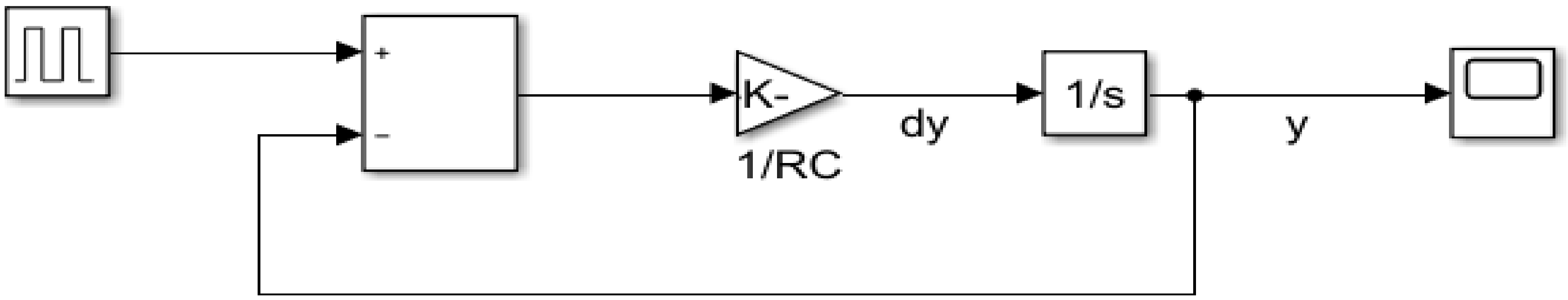
Modèle Simscape

Partie réelle



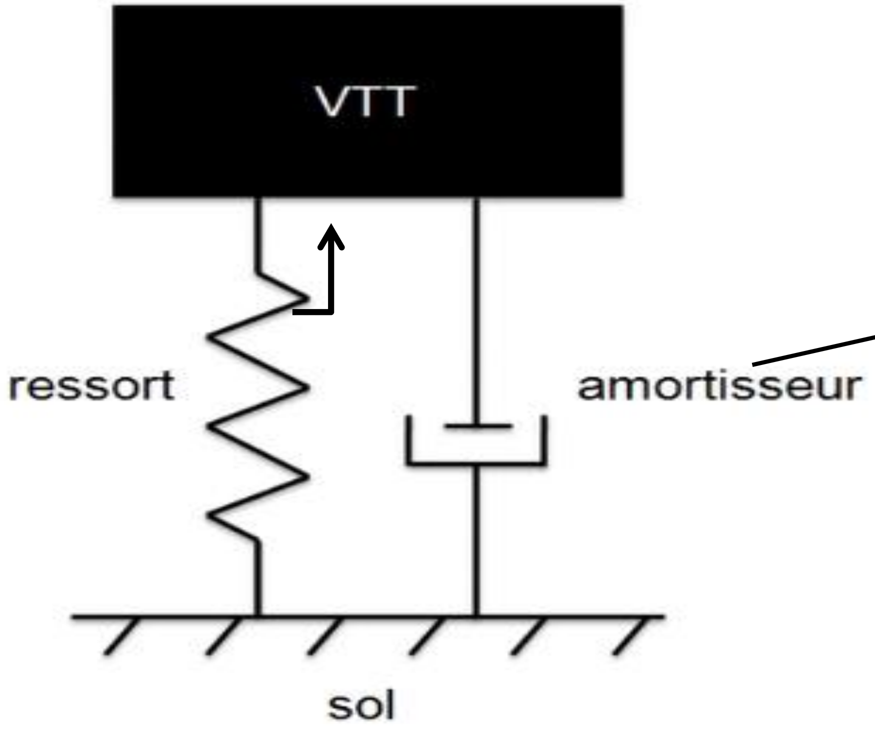
Modèle Simulink

$y + RC\,dy/dt = e \longrightarrow dy/dt = (e - y)/RC$



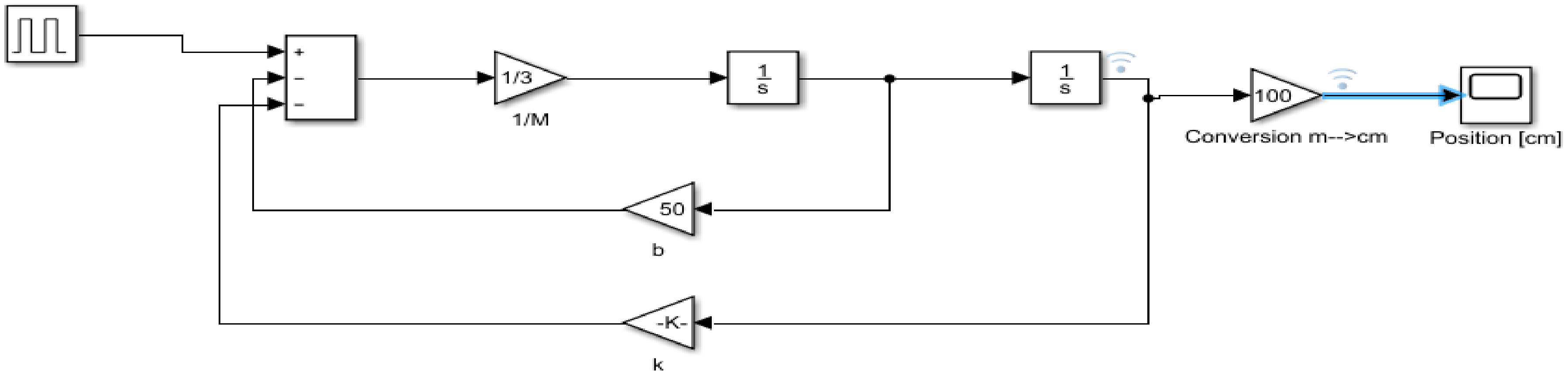
I.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI

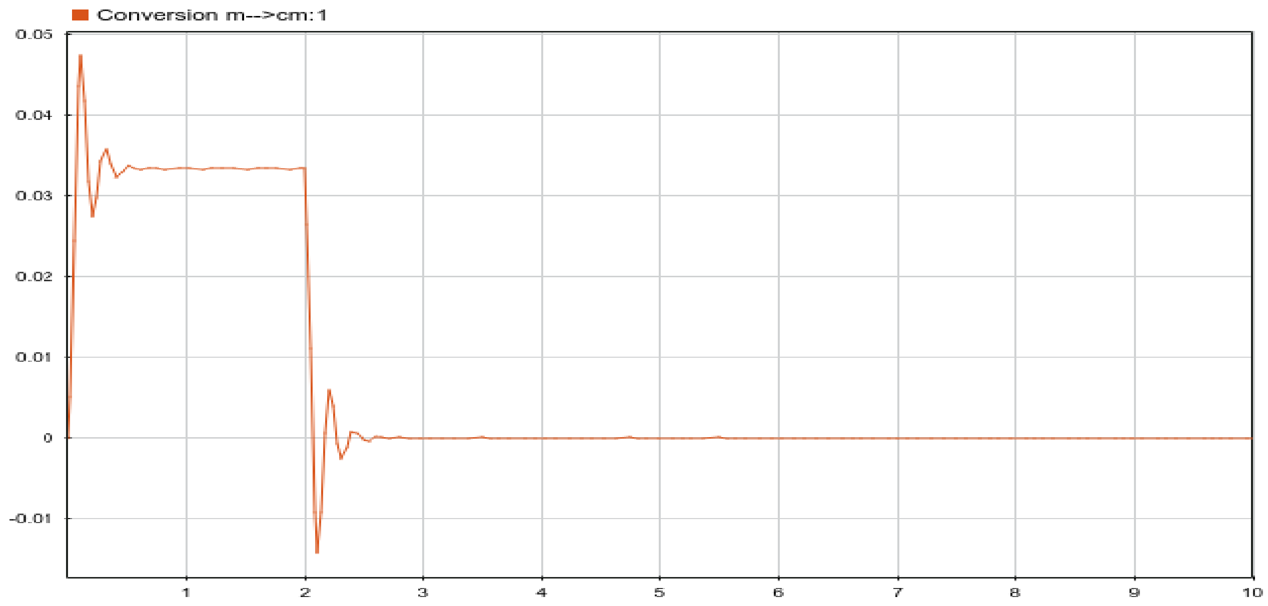
Exemple – modélisation mathématique par une EDO de la suspension d'un VTT



$$F(t) = M\frac{d^2y(t)}{dt^2} + \boxed{b\frac{dy(t)}{dt}} + \boxed{ky(t)}$$

I.3 Modèle utilisé : Système Linéaire, Continu et Invariant – SLCI (suspension d’un VTT)

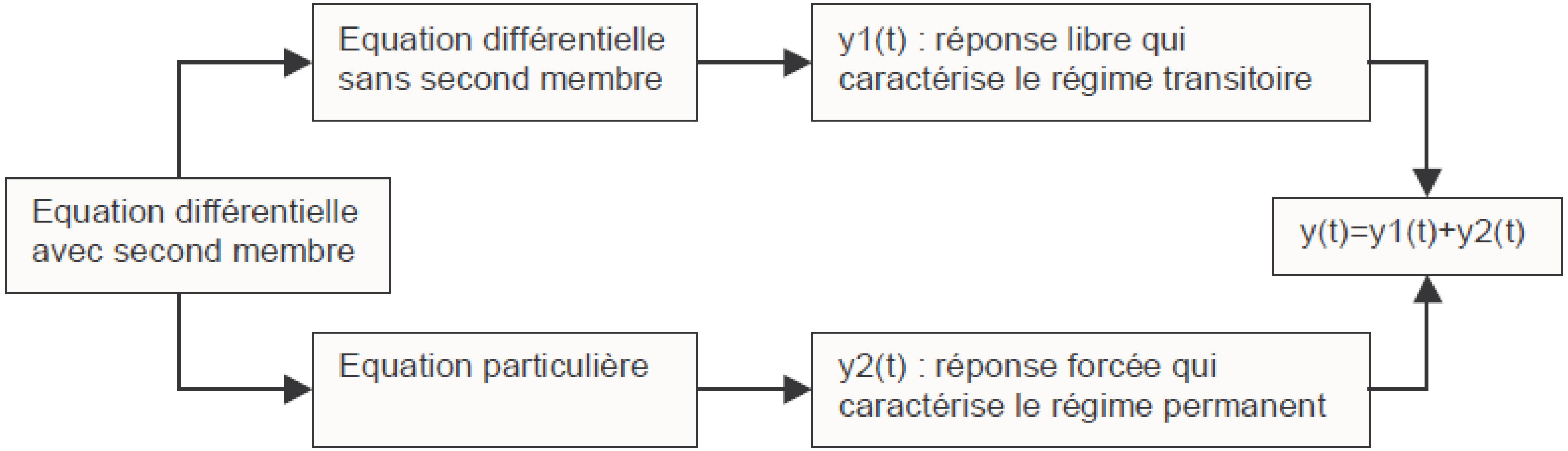




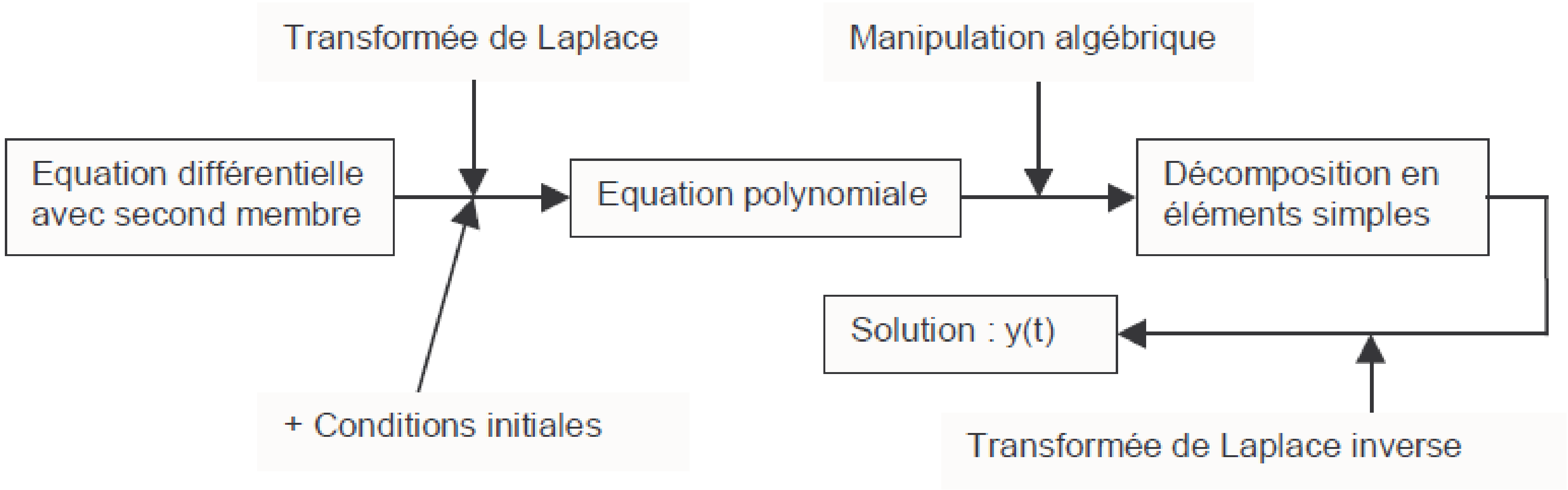
Variation temporelle de la position de la selle en fonction de la force appliquée sur la roue du VTT

II- Transformée de Laplace

Technique de résolution classique



Technique utilisée par les automaticiens : elle repose sur les transformées de Laplace.



Comment résoudre un système d’équations différentielles par transformée de Laplace ?

Méthode 2. Résolution d’un système d’équations différentielles par transformée de Laplace

On commence par transformer les équations différentielles dans le domaine symbolique.

Ensuite, on résout le système afin d’obtenir l’expression de la fonction recherchée.

Il faut alors décomposer l’expression en éléments simples le cas échéant, puis identifier les termes obtenus à ceux du tableaux des transformées usuelles.

II. 1. Définition

La **transformée de Laplace** permet de transformer les équations différentielles linéaires à coefficients constants **en polynômes**.

Soit $f(t)$ une fonction réelle d'une variable réelle telle que $f(t) = 0$ pour $t < 0$.
On définit sa transformée de Laplace $L[\,f\,(t)]$ comme l'unique **fonction** $F(p)$ **de la variable complexe** p **telle que :**

$$f(t) \xrightarrow{L[f(t)]} F(p) = \int_{0}^{+\infty} f(t) \cdot e^{-pt} \cdot dt$$

Domaine temporel

Domaine symbolique (ou de Laplace)

La transformée de Laplace inverse existe. Elle est bi-univoque. Ces propriétés permettent de résoudre les équations différentielles linéaires invariantes de façon simple. Nous ne l'utiliserons pas dans ce contexte.

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

	LINEARITE		DERIVATION	INTEGRATION	PRODUIT DE 2 FONCTIONS
$f(t)$	$K\,f(t)$	$K_1\,g(t)+K_2\,h(t)$	$\dfrac{d^n f(t)}{dt^n}$	$\int f(t)dt$	$f(t)\cdot g(t)$
$F(p)$	$K\,F(p)$	$K_1\,G(p)+K_2\,H(p)$	$p^n\,F(p)$	$\dfrac{F(p)}{p}$	$\cancel{F(p)\cdot G(p)}$
			avec **conditions initiales nulles**		

Les **conditions initiales sont supposées nulles** lorsque le système est supposé **au repos** pour $t<0$.
C'est-à-dire, si la fonction et ses dérivées sont nulles pour $t = 0$: $f(0) = f\,'(0) = f\,''(0) = ... = 0$
C'est la **condition de Heaviside**.

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

- **Linéarité:** $L[\alpha f_1(t)+\beta f_2(t)]=\alpha F_1(p)+\beta F_2(p)$, avec $(\alpha, \beta) \in \Re^2$.
- **Théorème de retard:** $L[f(t-T)]=e^{-pT}F(p)$, avec $T \in \Re^+$.
- **Théorème de décalage fréquentiel:** $L[e^{-p.w_0.t}.f(t)]=F(p+w_0)$.
- **Théorème de facteur d'échelle:** $L\left[f(nt)\right]=\frac{1}{n}F(\frac{p}{n})$; $n \in Z^+$.

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

❖ Théorème de la dérivation:

- $L[\dfrac{df(t)}{dt}]=pF(p)-f(0^{+})$, (dérivée première)

- $L[\dfrac{d^{2}f(t)}{dt^{2}}]=p^{2}F(p)-pf(0^{+})-\dfrac{df}{dt}(0^{+})$, (dérivée seconde).

- $L[\dfrac{d^{n}f(t)}{dt^{n}}]=p^{n}F(p)-\sum_{k=0}^{n-1}p^{k}\dfrac{d^{n-k-1}f(0^{+})}{dt^{n-k-1}}$, (dérivée d'ordre n).

❖ Théorème d'intégration:

$$\boxed{L\left[\int_{0}^{+\infty}f(t)dt\right]=\frac{F(p)+f(0^{+})}{p}}$$

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

❖ **Théorème de la valeur initiale:**

On suppose que la fonction $f(t)$ est dérivable et possède une transformée de Laplace. On admet

que $\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}dt\right)=\int_0^{+\infty}\lim\limits_{p\to+\infty}\left(\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}dt\right)$. Sachant que $L\left[\frac{df(t)}{dt}\right]=pF(p)-f(0^+)$ et $\lim\limits_{p\to+\infty}\frac{df}{dt}e^{-pt}=0$.

On obtient alors donc : $\boxed{\lim\limits_{p\to+\infty}\left[pF(p)\right]=f(0^+)}$.

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

❖ **Théorème de la valeur finale:**

On suppose que la fonction $f(t)$ est dérivable et possède une transformée de Laplace. Sachant que: $\lim_{p\to 0}[\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}dt]=\int_0^{+\infty}\lim_{p\to 0}[\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}]dt$ et $\lim_{p\to 0}\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}=\frac{df(t)}{dt}$. On obtient alors:

$\lim_{p\to 0}[\int_0^{+\infty}\frac{df(t)}{dt}e^{-pt}dt]=\left[f(t)\right]_0^{+\infty}=\lim_{t\to +\infty}[f(t)\text{-}f(0^+)]$, en plus on a $\left(L[\frac{df(t)}{dt}]=pF(p)\text{-}f(0^+)\right)$.Si les limites sont finies, on obtient alors donc: $\boxed{\lim_{p\to 0}\left[pF(p)\right]=\lim_{t\to +\infty}\left[f(t)\right]}$.

TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE QUELQUES SIGNAUX USUELS

Échelon unité

L'échelon unité (figure a) est la fonction $u(t)$ telle que
$u(t) = 0$ pour $t < 0$ et $u(t) = 1$ pour $t \geq 0$

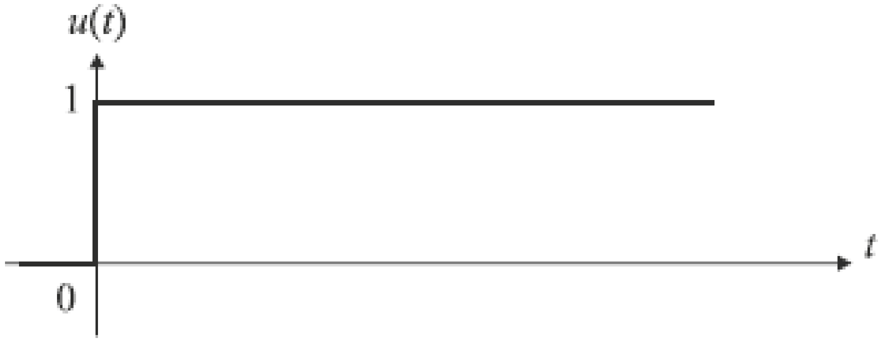


Figure a Échelon unité.

$$u(t) \quad \longrightarrow \quad U(p) = \frac{1}{p}$$

On a alors :

Compte tenu de la linéarité de la transformée de Laplace, tout échelon (non unitaire), d'amplitude A, aura pour transformée de Laplace :

$$f(t) = Au(t) \quad \longrightarrow \quad F(p) = \frac{A}{p}$$

TRANSFORMÉES DE LAPLACE DE QUELQUES SIGNAUX USUELS

Rampe ou vitesse

Il s'agit en réalité de l'intégrale de la fonction *u*(*t*) précédente. On la note en général *v*(*t*). Elle est nulle pour *t* négatif et est égale à *t* pour *t* positif ou nul (figure b).

On peut écrire :

$$v(t) = t \cdot u(t)$$

On a évidemment : $V(p) = \dfrac{U(p)}{p} = \dfrac{1}{p^2}$

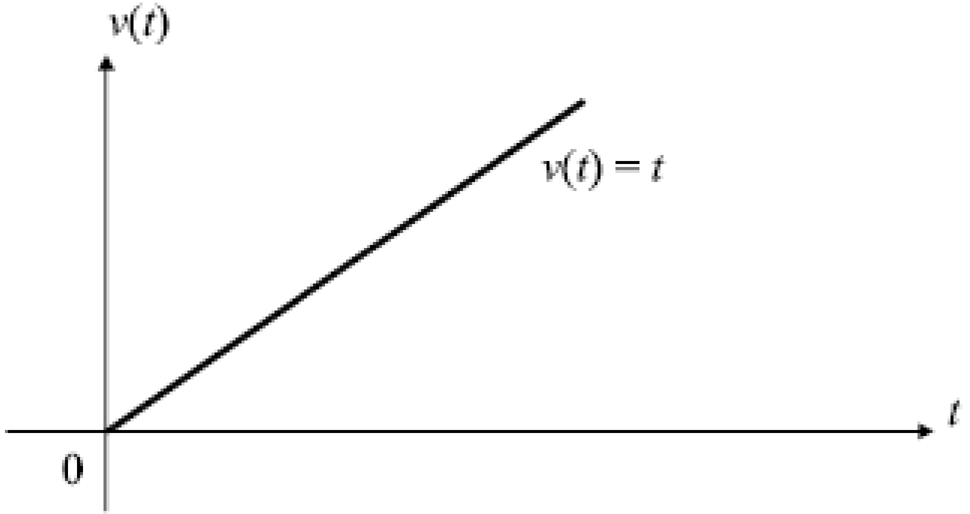
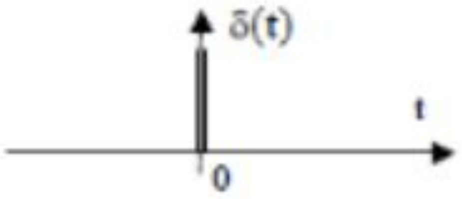
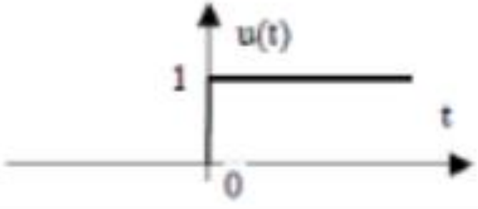
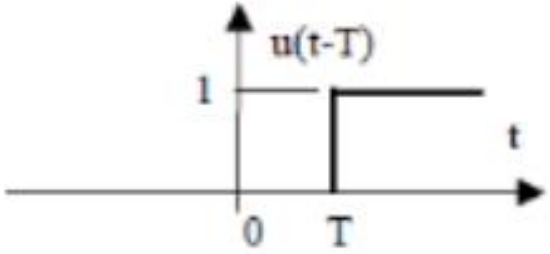
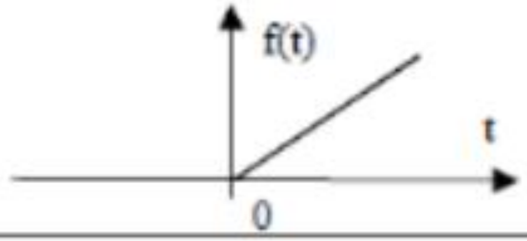


Figure b Rampe.

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

Les transformées des fonctions usuelles

Fonction	Figure	Transformée de Laplace
Impulsion unité (fonction de Dirac) : $\delta(t)$ tel que : $\delta(t) = 0$ pour $t < 0$ et $t > 0$ et $\int_a^b \delta(u)du = 1 \quad \forall (a,b) \in R^{+2}$		$L[\delta(t)] = 1$
Echelon unité : u(t) $u(t) = 0$ si $t [0$ $u(t) = 1$ si $t > 0$		$L[u(t)] = \frac{1}{p}$
Echelon unité retardé : u(t-T) $u(t\text{-}T) = 0$ si $t [T$ $u(t\text{-}T) = 1$ si $t > T$		$L[u(t-T)] = \frac{1}{p} \cdot e^{-Tp}$
Fonction rampe : $f(t) = a.t.u(t)$; de pente : a = constante		$L[a \cdot t \cdot u(t)] = \frac{a}{p^2}$

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

Tableau des transformées de Laplace usuelles

f(t)u(t)	F(p)	f(t)u(t)	F(p)
$\delta(t)$	1	$e^{-at}\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
K	$\dfrac{K}{p}$	$e^{-at}\cos(\omega t)$	$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$
Kt	$\dfrac{K}{p^2}$	$e^{at}t^n$	$\dfrac{n!}{(p-a)^{n+1}}$
e^{-at}	$\dfrac{1}{p+a}$	t^n	$\dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$\sin(\omega t)$	$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$	$\dfrac{1}{p(1+\tau p)}$
$\cos(\omega t)$	$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$		

Les transformées de Laplace de l'impulsion de Dirac, de l'échelon, de la rampe et de la fonction exponentielle sont à connaître par cœur car elles sont très utilisées !!!

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

Application : Déterminer une transformée de Laplace

Déterminer, dans les conditions de Heaviside, la transformée de Laplace de l'équation

$$5\frac{d^2x(t)}{dt^2}+3\frac{dx(t)}{dt}+2x(t)=v(t)$$

Si $x(t)\xrightarrow{L}X(p)$ alors, avec les conditions initiales nulles : $\frac{dx(t)}{dt}\xrightarrow{L}p\,X(p)$ et $\frac{d^2x(t)}{dt^2}\xrightarrow{L}p^2\,X(p)$

d'où la transformée de l'équation différentielle : $5p^2\,X(p)+3p\,X(p)+2\,X(p)=V(p)$

soit encore : $X(p)\left[5p^2+3p+2\right]=V(p)$

II.2. Propriétés de la transformée de Laplace

Exemple du moteur à courant continu

L'équation différentielle obtenue sans couple résistant est : $u(t) = k_e\,\omega(t) + \frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2}$

Notons $U(p)$ la transformée de Laplace de $u(t)$ et $\Omega(p)$ celle de $\omega(t)$.
Si les conditions initiales sont nulles, l'équation différentielle, dans le domaine de Laplace s'écrit :

$$u(t) = k_e\,\omega(t) + \frac{JR}{k_c}\frac{d\omega(t)}{dt} + \frac{JL}{k_c}\frac{d^2\omega(t)}{dt^2} \xrightarrow{\mathrm{L}} U(p) = k_e\,\Omega(p) + \frac{JR}{k_c}p\,\Omega(p) + \frac{JL}{k_c}p^2\,\Omega(p)$$

$$U(p) = \left[k_e + \frac{JR}{k_c}p + \frac{JL}{k_c}p^2\right]\Omega(p) \Longrightarrow \Omega(p) = \frac{1}{k_e + \frac{JR}{k_c}p + \frac{JL}{k_c}p^2}U(p)$$