Mécanique - Examen 2ème session 23/03/2017
Exercice 2

1. <u>Expression de T grâce au PFD :</u>
Référentiel galiléen $(0,\vec{e}_r,\vec{e}_\theta,\vec{e}_z)$.
PFD : $\sum\vec{F}=m\vec{a}$.
Pour exprimer $\vec{a}$ on peut utiliser le formulaire (dynamique en coordonnées polaires) :
$\vec{a}=(\ddot{r}-r\dot{\theta}^2)\vec{e}_r+(2\dot{r}\dot{\theta}+r\ddot{\theta})\vec{e}_\theta$.
Le mouvement est circulaire, avec une corde de longueur L donc $r=L$, $\dot{r}=0$, $\ddot{r}=0$ et :
$\vec{a}=-L\dot{\theta}^2\vec{e}_r+L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta$.
Bilan des forces : poids $\vec{P}=mg\vec{e}_x$ et tension de la corde $\vec{T}=-T\vec{e}_r$.
Donc : $\sum\vec{F}=m\vec{a}\Rightarrow mg\vec{e}_x-T\vec{e}_r=m(-L\dot{\theta}^2\vec{e}_r+L\ddot{\theta}\vec{e}_\theta)$.
On cherche une expression de T, on va donc projeter cette expression sur $\vec{e}_r$.
On exprime $\vec{e}_x$ dans le repère polaire : $\vec{e}_x=\cos(\theta)\vec{e}_r-\sin(\theta)\vec{e}_\theta$.
La projection donne donc :
$mg\cos(\theta)-T=-mL\dot{\theta}^2$ et enfin $T=mg\cos(\theta)+mL\dot{\theta}^2$.

2. Si $V=L\dot{\theta}$ alors $\dot{\theta}^2=\frac{V^2}{L^2}$ et $T=mg\cos(\theta)+m\frac{V^2}{L}$.

3. <u>Travail du poids :</u>
Par définition : $W_{AB}(\vec{P})=\int_A^B\vec{P}.\vec{dl}$ avec A le point de la trajectoire pour lequel $\theta=\theta_1$ et B celui pour lequel $\theta=\theta_0$ (attention : ici l'indice 1 correspond au *départ*, l'indice 0 à *l'arrivée*).
La trajectoire est circulaire donc $\vec{dl}=dl\vec{e}_\theta$ et de rayon L donc $dl=Ld\theta$.
De plus, $\vec{P}=mg\vec{e}_x$ donc on peut écrire : $W_{AB}(\vec{P})=\int_A^B P\vec{e}_x.Ld\theta\vec{e}_\theta=LP\int_A^B\vec{e}_x.\vec{e}_\theta d\theta$.
Les vecteurs $\vec{e}_x$ et $\vec{e}_\theta$ formant un angle de $\pi/2+\theta$, on a :
$\vec{e}_x.\vec{e}_\theta=\cos(\pi/2+\theta)=-\sin(\theta)$, et par conséquent :
$W_{AB}(\vec{P})=-LP\int_A^B\sin(\theta)d\theta=LP[\cos(\theta)]_A^B=LP(\cos(\theta_0)-\cos(\theta_1))$.
<u>Travail de la tension de la corde :</u>
Par définition : $W_{AB}(\vec{T})=\int_A^B\vec{T}.\vec{dl}$.
Avec $\vec{T}=-T\vec{e}_r$ et l'expression de $\vec{dl}$ déjà utilisée on a :
$W_{AB}(\vec{T})=-\int_A^B T\vec{e}_r.dl\vec{e}_\theta=\int_A^B 0\,dl=0$, puisque $\vec{e}_r$ et $\vec{e}_\theta$ sont orthogonaux.

4. <u>Expression de V1 (vitesse quand $\theta=\theta_1$) :</u>
D'après le TEC, la somme des travaux des forces entre A et B est égale à la différence d'énergie cinétique :
$\Delta E_c=W_{AB}(\vec{T})+W_{AB}(\vec{P})=LP(\cos(\theta_0)-\cos(\theta_1))$.
Par définition $\Delta E_c=\frac{1}{2}mv_0{}^2-\frac{1}{2}mv_1{}^2$ avec $v_0=v(\theta_0)$ et $v_1=v(\theta_1)$.
De plus, l'énoncé nous apprend que lorsque l'alpiniste atteint l'angle θ_0 , sa vitesse de déplacement est nulle, donc $v_0=0$.
On en déduit : $-\frac{1}{2}mv_1{}^2=LP(\cos(\theta_0)-\cos(\theta_1))$, et $v_1=\sqrt{2gL(\cos(\theta_1)-\cos(\theta_0))}$.
Cette vitesse est définie uniquement si $|\theta_1|\leq|\theta_0|$. C'est nécessairement le cas ici : l'alpiniste est en

mouvement pendulaire simple, l'angle qu'il fait par rapport à la verticale à un instant quelconque est toujours inférieur à l'angle maximal, qui est l'angle pour lequel sa vitesse s'annule.

5. <u>Expression générale de la tension de la corde :</u>
Le raisonnement fait précédemment en définissant un angle θ_1 est toujours valable, donc on peut le remplacer par un angle quelconque θ. L'expression de la tension de la corde en fonction de l'angle est donc :

$$T = mg\cos(\theta) + m\frac{V^2}{L} = mg\cos(\theta) + m\frac{2gL(\cos(\theta) - \cos(\theta_0))}{L} = mg(3\cos(\theta) - 2\cos(\theta_0)) \quad .$$

6. <u>Tension maximale de la corde :</u>
T est maximal quand $\cos(\theta)$ est maximal, donc quand $\theta = 0$, et :
$T_{max} = mg(3 - 2\cos(\theta_0))$.

7. <u>Masse maximale acceptable pour l'alpiniste :</u>
On applique un coefficient de sécurité de 3, donc on cherche *un tiers* de la masse qui donnerait une tension T_{max} égale à la tension supportable par la corde :

$$m = \frac{1}{3}\frac{T_{max}}{g(3 - 2\cos(\theta_0))} \approx 107{,}2 \text{ kg.}$$