IV/ Équations de récurrence ('Équations aux différences')

1. *Suite arithmétique - suite géométrique - suite arithmético-géométrique*

- Suite arithmétique : $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} = u_n + r$.

  Alors $\forall n \in \mathbb{N} / u_n = u_0 + n\,r$ et $\sum_{k=p}^{p+q} u_k = (q+1)\left(\frac{u_p + u_{p+q}}{2}\right)$

- Suite géométrique : $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} = r\, u_n$

  Alors $\forall n \in \mathbb{N} / u_n = u_0\, r^n$ et, si $r \neq 1$, $\sum_{k=p}^{p+q} u_k = u_0\, r^p\left(1 + r + ... + r^q\right) = u_0\, r^p\, \frac{1 - r^{q+1}}{1 - r} = \frac{u_p - u_{p+q+1}}{1 - r}$

- Suite arithmético-géométrique : $\exists a, b \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} = a\, u_n + b$

  Alors , si $r \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N} / u_n = a^n u_0 + b\, \frac{1 - a^n}{1 - a}$

2. *Récurrences linéaires homogènes du second ordre :* $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \quad (\text{EH})$

- L'ensemble $(\mathcal{E})$ des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de réels.

  Soient (α_n) et (β_n) définies par $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \alpha_{n+2} = \alpha\, u_{n+1} + \alpha\, u_n \end{cases}$ et $\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \beta_{n+2} = \beta\, u_{n+1} + \beta\, u_n \end{cases}$

  Ce sont deux éléments de $(\mathcal{E})$ linéairement indépendants et tout élément (u_n) de $(\mathcal{E})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire : $(u_n) = u_0(\alpha_n) + u_1(\beta_n)$. Donc $(\mathcal{E})$ est de dimension 2, et toute famille de 2 solutions indépendantes est une base de $(\mathcal{E})$.

- On cherche des solutions qui soient des suites géométriques $u_n = r^n$
  On voit que *r* doit satisfaire l'équation caractéristique $X^2 = aX + b$.

  Si l'équation caractéristique a 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2, les suites (r_1^n) et (r_2^n) sont 2 solutions indépendantes donc la solution générale est $u_n = A\, r_1^n + B\, r_2^n$

  Si l'équation caractéristique a 2 racines imaginaires (conjuguées) $r_1 = \rho\, \mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \rho\, \mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, les suites
  $\rho^n \cos(n\theta) = \frac{r_1^n + r_2^n}{2}$ et $\rho^n \cos(n\theta) = \frac{r_1^n - r_2^n}{2i}$ sont 2 solutions indépendantes
  la solution générale est donc $u_n = A\,\rho^n \cos(n\theta) + B\,\rho^n \sin(n\theta)$

  Si l'équation caractéristique a une racine double r_0, les suites (r_0^n) et $(n\, r_0^n)$ sont 2 solutions indépendantes donc la solution générale est $u_n = A\, r_0^n + B\,n\, r_0^n$

- **Exemple : Suite de Fibonacci** $u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. L'équation caractéristique est $X^2 = X + 1$ dont les racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1.618$ (nombre d'or) et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \approx -0.618$.

  La solution est $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n$, en particulier $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$

3. ***Récurrences linéaires du second ordre avec second membre :*** $u_{n+2} - a\,u_{n+1} - b\,u_n = v_n \quad (\mathrm{E})$

- Théorème : La solution générale de (E) st égale à la somme de la solution générale de (EH) et d'une solution particulière de (E)
- Exemple $u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n + 1$
  On voit que la suite constante -1 est une solution particulière.
  La solution générale est donc $u_n = A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n + B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n - 1$.
  Les conditions initiales permettent de calculer $A = 1 + \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $B = 1 - \dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $u_n \underset{n\to\infty}{\sim} \left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Exemple $u_{n+1} = \dfrac{1}{2}u_n + n^2$. La solution générale de l'équation homogène est $h_n = A\dfrac{1}{2^n}$.
  On cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 2 : $p_n = a\,n^2 + b\,n + c$.
  comme $p_{n+1} = a(n+1)^2 + b(n+1) + c = a\,n^2 + (2a+b)n + (a+b+c)$ et $\dfrac{1}{2}p_n + n^2 = \left(\dfrac{a}{2}+1\right)n^2 + \dfrac{b}{2}n + \dfrac{c}{2}$
  on a bien une solution en prenant $a = 2,\ b = -8,\ c = 12$
  La solution générale est donc $u_n = h_n + p_n = \dfrac{A}{2^n} + 2n^2 - 8n + 12$. Notons que $A - 12 = u_0$.
- Exemple $u_{n+1} = \alpha\,u_n + \beta^n$ (α et β constantes distinctes, $\beta \neq 0$).
  On peut écrire $u_{n+2} = \alpha\,u_{n+1} + \beta^{n+1}$, et en combinant les deux, $u_{n+2} - \beta u_{n+1} = \alpha\,u_{n+1} - \alpha\beta\,u_n$.
  C'est une équation homogène du second ordre $u_{n+2} - (\alpha+\beta)u_{n+1} + \alpha\beta\,u_n = 0$, d'équation caractéristique $X^2 - (\alpha+\beta)X + \alpha\beta = 0$. Les racines sont α et β.
  La solution est donc de la forme $u_n = A\alpha^n + B\beta^n$.
  En reportant dans l'équation donnée, on voit que $B = \dfrac{1}{\beta - \alpha}$
- Exemple $u_{n+1} = \alpha\,u_n + (n-1)\alpha^n$ (α constante $\neq 0$).
  La solution générale de l'équation homogène est $h_n = A\alpha^n$.
  On cherche une solution particulière sous forme $p_n = a\,\alpha^n$: on n'en trouve pas (bien sûr !)
  On cherche une solution particulière sous forme $p_n = (a\,n + b)\alpha^n$: on n'en trouve pas non plus !
  On cherche une solution particulière sous forme $p_n = (a\,n^2 + bn + c)\alpha^n$:
  comme $p_{n+1} = \alpha^{n+1}\left(a\,n^2 + (2a+b)n + (a+b+c)\right)$ et $\alpha\,p_n + (n-1)\alpha^n = \alpha^n\left(a\,\alpha\,n^2 + (b\,\alpha+1)n + (c\,\alpha - 1)\right)$,
  les "n^2" s'éliminent. Il reste, en simplifiant, $(6a-1)n + (3a+3b+1) = 0$.
  On a bien une solution en prenant $a = \dfrac{1}{6},\ b = -\dfrac{1}{2},\ c$ quelconque.
  La solution générale est donc $u_n = \left(\dfrac{n^2}{6} - \dfrac{n}{2} + A\right)3^n$