

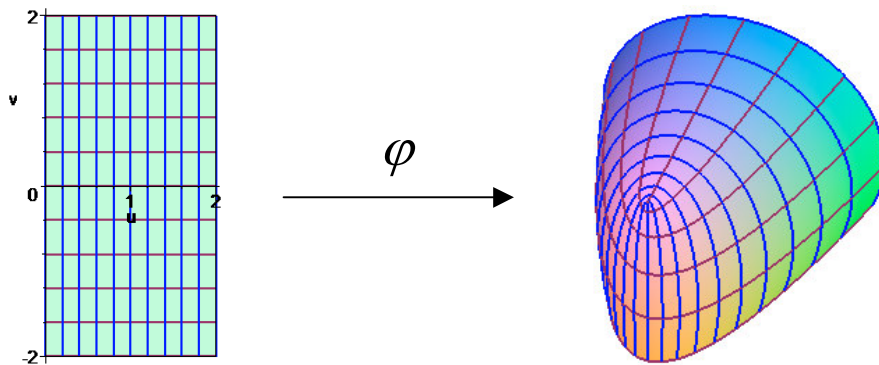
Géométrie différentielle

Résumé de cours (III)

III - Surfaces

1 - Nappe paramétrée de \mathbb{R}^3

Une nappe paramétrée de \mathbb{R}^3 c'est une application φ d'un ouvert U de \mathbb{R}^2 à valeur dans \mathbb{R}^3 .



Les génératrices de la nappe sont les courbes $u = \text{constante}$ (en bleu) et $v = \text{constante}$ (en rouge)

On note $M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ l'image du point $(u, v) \in U$ par φ .

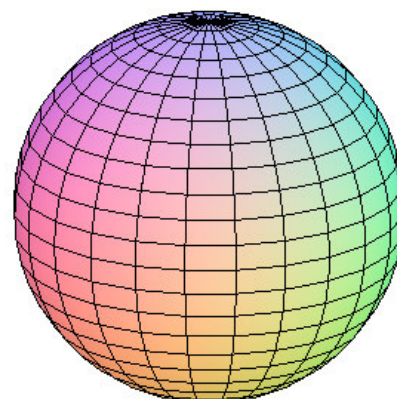
Exemple 1 : Sphère de centre 0 et de rayon R

$$\varphi : \begin{matrix} [0, \pi] \times [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \rightarrow & (x, y, z) \end{matrix} \text{ telle que } \begin{cases} x = R \sin \theta \cos \varphi \\ y = R \sin \theta \sin \varphi \\ z = R \cos \theta \end{cases}$$

On représente sur la sphère

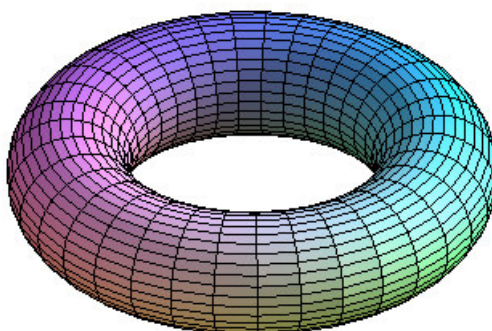
* les courbes à θ constant (les parallèles)

* les courbes à φ constant (les méridiens)



Exemple 2 : Tore de rayons R et r

$$\varphi : \begin{matrix} [0, 2\pi] \times [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, \varphi) & \rightarrow & (x, y, z) \end{matrix} \text{ telle que } \begin{cases} x = (R + r \cos \theta) \cos \varphi \\ y = (R + r \cos \theta) \sin \varphi \\ z = r \sin \theta \end{cases}$$

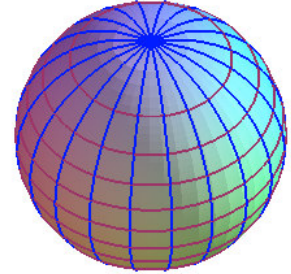
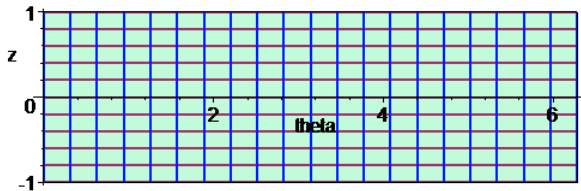


2 - Changement de paramétrage

C'est une bijection d'un ouvert V de \mathbb{R}^2 dans U .
$$\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (\alpha, \beta) & \longrightarrow & (u, v) & \longrightarrow & (\varphi \circ f)(\alpha, \beta) \end{array}$$

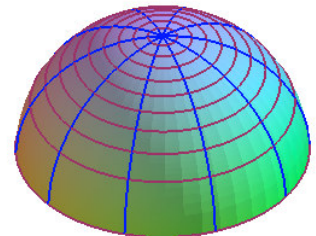
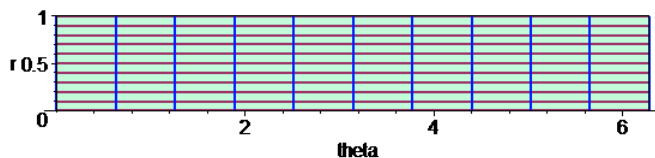
Exemple : autre paramétrage de la sphère :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] \times [-R, +R] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (\theta, z) & \rightarrow & (x, y, z) \end{array} \text{ telle que } \begin{cases} x = \sqrt{R^2 - z^2} \cos \theta \\ y = \sqrt{R^2 - z^2} \sin \theta \\ z = z \end{cases}$$



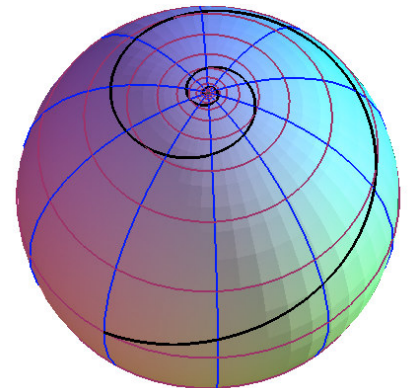
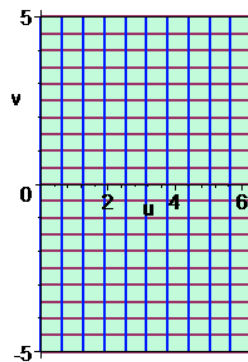
autre paramétrage de la demi-sphère :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0, R] \times [0, 2\pi] & \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (r, \theta) & \rightarrow & (x, y, z) \end{array} \text{ telle que } \begin{cases} x = r \cos \theta \\ y = r \sin \theta \\ z = \sqrt{R^2 - r^2} \end{cases}$$



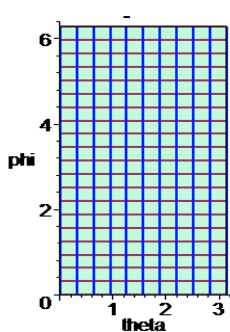
Paramétrage de Mercator pour la sphère :

$$\psi : \begin{array}{ccc} [0, 2\pi] \times]-\infty, +\infty[& \rightarrow & \mathbb{R}^3 \\ (u, v) & \rightarrow & (x, y, z) \end{array} \text{ telle que } \begin{cases} x = R \frac{\cos u}{\operatorname{ch} v} \\ y = R \frac{\sin u}{\operatorname{ch} v} \\ z = R \operatorname{th} v \end{cases}$$

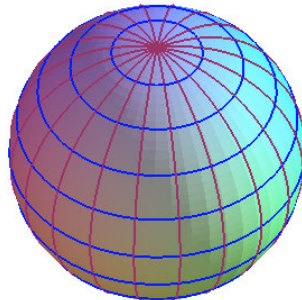


Les courbes $v = \text{constante} \times u$ sont les loxodromies (en noir) :

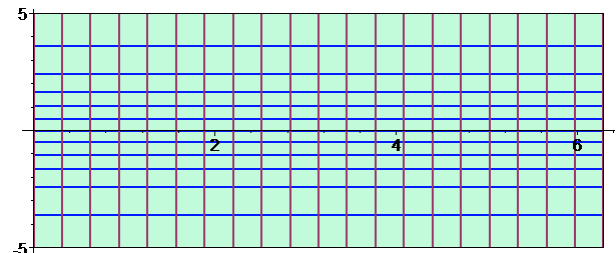
Elles font un angle constant avec les génératrices (les méridiens et les parallèles)



$$\begin{aligned} x &= R \sin \theta \cos \varphi \\ y &= R \sin \theta \sin \varphi \\ z &= R \cos \theta \end{aligned}$$



ψ^{-1}



3 - Vecteurs tangents - Plan tangent

Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée de classe C^1 et $M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ l'image de (u, v) par φ .

Pour tout u_0 , l'application $v \rightarrow M(u_0, v)$ est une courbe de \mathbb{R}^3 contenue dans la surface.

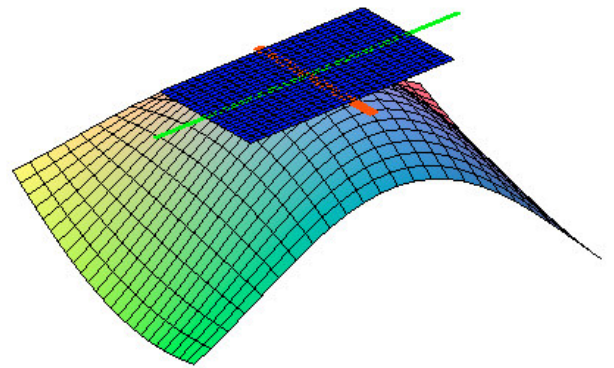
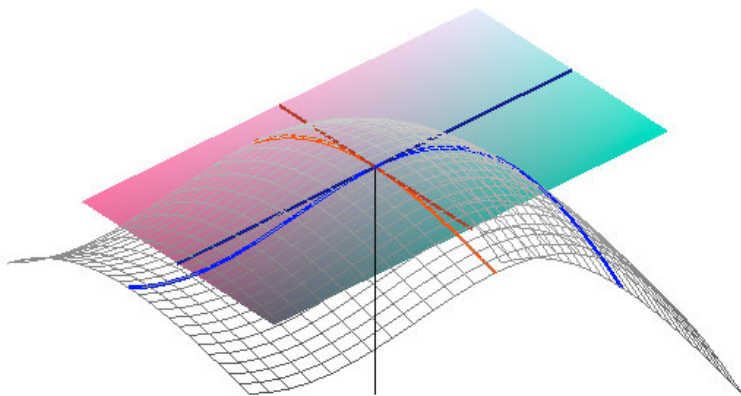
Son vecteur vitesse $\frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$ est donc tangent à la surface en $M(u_0, v_0)$. Idem pour $\frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0)$.

Si ces vecteurs ne sont pas colinéaires, on dit que la nappe est régulière en $M(u_0, v_0)$

Elle a alors un plan tangent en $M(u_0, v_0)$, dirigé par ces 2 vecteurs,

et le vecteur $\vec{N} = \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v}$ est un vecteur normal à la surface.

En posant $\vec{N} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, l'équation du plan tangent est $a(x - x_0) + b(y - y_0) + c(z - z_0) = 0$



4 - Aire d'une nappe paramétrée

Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée de classe C^1 , régulière, $M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ l'image de (u, v) par φ .

Au premier ordre, $M(u_0 + \alpha, v_0) \approx M(u_0, v_0) + \alpha \cdot \frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0)$, et $M(u_0, v_0 + \beta) \approx M(u_0, v_0) + \beta \cdot \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0)$

On approche donc l'aire de la cellule

$$\{M(u, v) / u_0 \leq u \leq u_0 + \alpha, v_0 \leq v \leq v_0 + \beta\}$$

par l'aire du parallélogramme construit sur

$$M(u_0, v_0), \alpha \frac{\partial M}{\partial u}(u_0, v_0) \text{ et } \beta \frac{\partial M}{\partial v}(u_0, v_0).$$

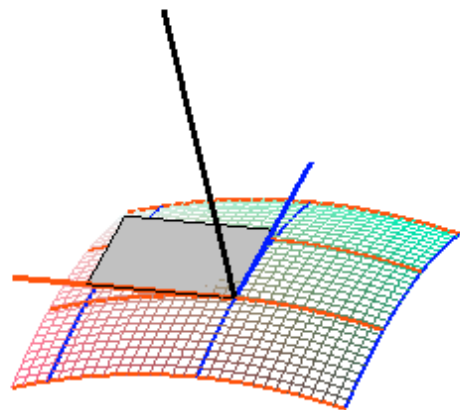
Cette aire est $\alpha \beta \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| = \alpha \beta \|\vec{N}\|$

On admet que l'aire de la nappe est

$$A = \iint_U \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| du dv = \iint_U \|\vec{N}\| du dv$$

Exemples : Aire d'une sphère de rayon R : $A = 4\pi R^2$

Aire d'un tore de rayons r et R .



5 - Intégrale d'un champ scalaire

Soit $\varphi : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée de classe C^1 , régulière et $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$ un champ scalaire.

Soit $M(u, v) = \begin{pmatrix} x(u, v) \\ y(u, v) \\ z(u, v) \end{pmatrix}$ l'image de (u, v) par φ et \mathcal{S} le support de φ (la surface)

L'intégrale de f sur la surface φ est $\iint_U f(M(u, v)) \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| du dv$.

On la note $\iint_U f(M) \|\vec{N}\| du dv$ ou encore $\int_{\mathcal{S}} f dS$.

Exemple : l'abscisse du centre de gravité de la surface (supposée homogène) est $x_G = \frac{\iint_{\mathcal{S}} x dS}{\iint_{\mathcal{S}} dS} = \frac{\iint_U x \|\vec{N}\| du dv}{\text{Aire de } \mathcal{S}}$

6 - Graphe d'une fonction de \mathbb{R}^2 dans \mathbb{R}

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$. Son graphe est l'ensemble des $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ et $z = f(x, y)$.

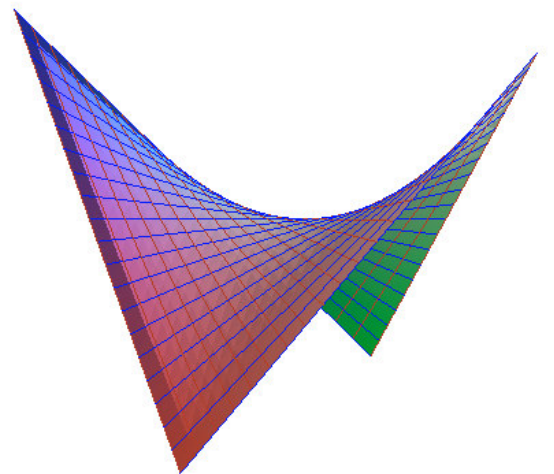
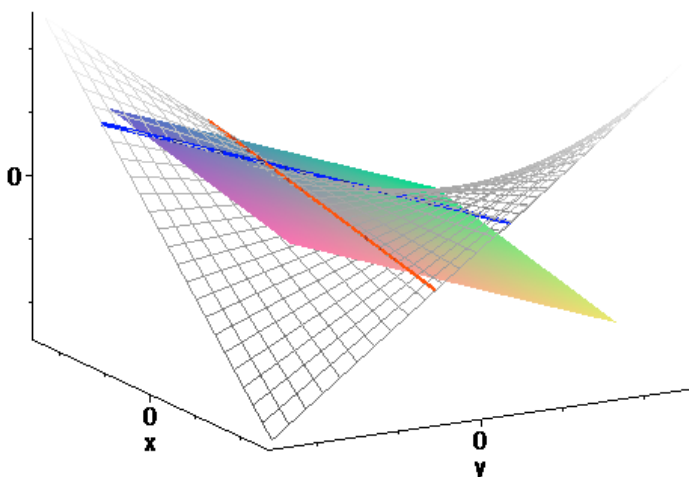
Équation paramétrique $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x, y) \end{cases}$ Exemple : le parabolôïde hyperbolique $z = x y$

En un point régulier, $\frac{\partial M}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \frac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\frac{\partial M}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \frac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$. Un vecteur normal est donc $\frac{\partial M}{\partial x} \wedge \frac{\partial M}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\frac{\partial f}{\partial x} \\ -\frac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$

et le plan tangent a comme équation (en X, Y, Z) : $-(X - x) \frac{\partial f}{\partial x} - (Y - y) \frac{\partial f}{\partial y} + (Z - f(x, y)) = 0$.

Exemple :

le plan tangent en $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x y \end{pmatrix}$ au parabolôïde $z = x y$ coupe le parabolôïde en 2 droites $\begin{cases} X = x \\ Y = t \\ Z = x t \end{cases}$ et $\begin{cases} X = t \\ Y = y \\ Z = y t \end{cases}$



7 - Équation cartésienne

Soit $f : \mathbb{R}^3 \rightarrow \mathbb{R}$

L'ensemble des $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(M) = f(x, y, z) = 0$ est une surface \mathcal{S} définie implicitement.

Plan tangent, vecteur normal.

Si $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un point de \mathcal{S} et si $\overrightarrow{\text{grad } f} = \begin{pmatrix} \frac{\partial f}{\partial x} \\ \frac{\partial f}{\partial y} \\ \frac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ n'est pas nul en M , alors c'est un vecteur normal à \mathcal{S} en M .

Exemples

	Équation cartésienne	Équations paramétriques
Sphère	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	$[R \cos(\phi) \sin(\theta), R \sin(\phi) \sin(\theta), R \cos(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\pi$
Ellipsoïde	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} + \frac{z^2}{c^2} = 1$	$[a \cos(\phi) \sin(\theta), b \sin(\phi) \sin(\theta), c \cos(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\pi$
Hyperboloïde à 2 nappes	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = -1$	$[a \cos(\phi) \sinh(\theta), b \sin(\phi) \sinh(\theta), c \cosh(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\infty$ $[a \cos(\phi) \sinh(\theta), b \sin(\phi) \sinh(\theta), -c \cosh(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\infty$
Hyperboloïde à 1 nappe	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = +1$	$[a \cos(\phi) \cosh(\theta), b \sin(\phi) \cosh(\theta), c \sinh(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = -\infty..\infty$
Cône elliptique	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} - \frac{z^2}{c^2} = 0$	$[a \cos(\phi) t, b \sin(\phi) t, t], \phi = 0..2\pi, t = -\infty..\infty$
Paraboloïde hyperbolique	$\frac{x^2}{a^2} - \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$	$[a \cosh(\phi) t, b \sinh(\phi) t, c t^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$ $[-a \cosh(\phi) t, b \sinh(\phi) t, c t^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$ $[a \sinh(\phi) t, b \cosh(\phi) t, -c t^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$ $[a \sinh(\phi) t, -b \cosh(\phi) t, -c t^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$
Paraboloïde elliptique	$\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = \frac{z}{c}$	$[a \cos(\phi) t, b \sin(\phi) t, c t^2], \phi = 0..2\pi, t = 0..\infty$
Tore	$(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2)^2 = 4R^2(r^2 - z^2)$ ou $(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2)^2 = 4R^2(x^2 + y^2)$ ou $\rho = R \pm \sqrt{r^2 - z^2}$ en coord. cylindriques	$[(R + r \cos \theta) \cos \varphi, (R + r \cos \theta) \sin \varphi, r \sin \theta], \theta = 0..2\pi, \varphi = 0..2\pi$