

Pour $n \in \mathbb{N}$, nous allons dans ce TP explorer l'ensemble des relations binaires sur un ensemble à n éléments, disons pour fixer les idées

$$E_n := \text{range}(n) = \llbracket 0, n \rrbracket.$$

Exercice 1

Combien y a-t-il de relations binaires distinctes sur E_n ? Pour confirmer votre réponse, générer toutes les relations possibles pour $n = 3$, sous deux formes :

- liste des couples d'éléments en relation ;
- matrice d'adjacence.

Puis répondre aux questions : parmi celles-ci, combien y a-t-il de relations

- a) réflexives ?
- b) symétriques ?
- c) antisymétriques ?
- d) transitives ?

NB : on a intérêt à répondre à ces questions programmatiquement, à l'aide de vérifications soit sur les listes de couples ou les matrices d'adjacence.

Exercice 2

Deux relations \mathcal{R} et \mathcal{S} sur un ensemble E sont dites *transitivement équivalentes* si pour toute relation transitive \mathcal{T} sur E on a $\mathcal{R} \subset \mathcal{T} \iff \mathcal{S} \subset \mathcal{T}$. Se convaincre qu'il s'agit d'une relation d'équivalence sur l'ensemble des relations et décrire ses classes d'équivalence pour l'ensemble $E_3 = \{0, 1, 2\}$ de l'exercice précédent (nombre, tailles).

Exercice 3 (étude d'une relation aléatoire)

- a) Générer une relation aléatoire \mathcal{Q} sur E_{50} de la façon suivante : pour chaque paire (x, y) , la probabilité que $x \mathcal{Q} y$ est $\frac{1}{10}$.
- b) Votre relation est-elle réflexive ? Sinon, la rendre réflexive et obtenir ainsi une relation \mathcal{R} .
- c) Cette nouvelle relation est-elle symétrique ? Sinon, la rendre symétrique et obtenir ainsi une relation \mathcal{S} (vérifier qu'elle est toujours réflexive).
- d) Cette nouvelle relation est-elle transitive ? Sinon, la rendre transitive et obtenir ainsi une relation \mathcal{T} (vérifier qu'elle est restée réflexive et symétrique). Vous devriez maintenant avoir une relation d'équivalence sur E_{50} ; que remarquez-vous ?
- e) (bonus pour les curieux) Faire varier la probabilité p que $x \mathcal{Q} y$ dans la relation initiale pour voir quelle incidence cela a sur le résultat.