Répondez directement sur l'énoncé en **détaillant vos calculs** et **justifiant vos raisonnements**.

Nom: **CORRIGÉ**

1. Faire un croquis aussi précis que possible de l'ellipsoïde d'équation cartésienne

$$x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 2x - 4y - 8z + 3 = 0$$

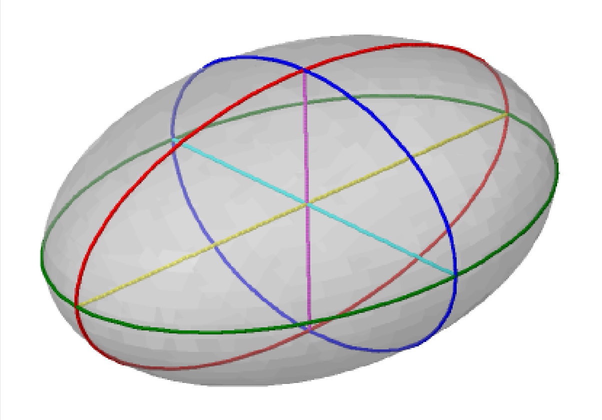
en y faisant figurer les éléments pertinents (centre, axes principaux et longueurs de ceux-ci, ...).

Si on met l'équation sous forme canonique, on obtient

$$\left(\frac{x-1}{2}\right)^2 + \left(\frac{y-1}{\sqrt{2}}\right)^2 + (z-1)^2 = 1.$$

On reconnaît un ellipsoïde centré en $(1,1,1)$ et d'axes principaux de longueur 4 (parallèle à Ox), $2\sqrt{2}$ (parallèle à Oy) et 2 (parallèle à Oz).

Sur la figure ci-contre on observe aux extrémités des axes les points de coordonnées $(3,1,1)$, $(-1,1,1)$, $(1,1-\sqrt{2},1)$, $(1,1+\sqrt{2},1)$, $(1,1,0)$ et $(1,1,2)$.



2. **À l'aide de calculs matriciels**, déterminez l'équation de la conique obtenue à partir de celle d'équation $x^2 + xy + 2y^2 + 4x - 2y + 3 = 0$ en effectuant le changement de variables affine

$$\begin{cases} x = u + v + 1 \\ y = 2u - v - 2. \end{cases}$$

Sous forme matricielle, l'équation s'écrit $X^\top Q X = 0$ et le changement de variables proposé $X = AU$ avec

$$X = \begin{bmatrix} x \\ y \\ 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix}, \quad U = \begin{bmatrix} u \\ v \\ 1 \end{bmatrix} \quad \text{et} \quad A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}.$$

Sous forme matricielle, la nouvelle équation s'écrit donc $U^\top Q' U = 0$ avec

$$Q' = A^\top Q A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 1 & -1 & 0 \\ 1 & -2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & \frac{1}{2} & 2 \\ \frac{1}{2} & 2 & -1 \\ 2 & -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 2 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 11 & -\frac{5}{2} & -7 \\ -\frac{5}{2} & 2 & \frac{13}{2} \\ -7 & \frac{13}{2} & 18 \end{bmatrix},$$

ce qui correspond à l'équation

$$11u^2 - 5uv + 2v^2 - 14u + 13v + 18 = 0.$$

3. Pour les deux matrices P et Q suivantes, existe-t-il une matrice $A \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ pour laquelle $A^\top PA = Q$?

   Si oui explicitez-en une, si non expliquez pourquoi : $P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$, $Q = \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix}$.

Première solution : puisque $\mathrm{dét}(P) = -1$ et $\mathrm{dét}(Q) = -9$ sont tous deux strictement négatifs, on sait par la classification affine des matrices symétriques qu'il existe deux matrices $A_1, A_2 \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{R})$ pour lesquelles

$$A_1^\top PA_1 = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} = A_2^\top QA_2.$$

En posant $A := A_1A_2^{-1}$ on obtient donc une matrice inversible ayant l'effet voulu.

Deuxième solution : cela revient à se demander si on peut passer de P à Q en utilisant l'algorithme de Gauss-Lagrange, et en effet :

$$P = \begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix} \overset{*_1-*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \overset{*_2+2*_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{3*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -9 \end{bmatrix} \overset{*_2-2*_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 \\ -2 & -5 \end{bmatrix} = Q.$$

Explicitement, cela nous fournit la matrice de passage suivante :

$$I = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_1-c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_2+2c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} \overset{3c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 6 \\ -1 & -3 \end{bmatrix} \overset{c_2-2c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ -1 & -1 \end{bmatrix} = A$$

et effectivement on peut vérifier qu'on a bien $A^\top PA = Q$.

4. Déterminez la nature de la quadrique d'équation cartésienne $x^2 + 2xz + 4y^2 + z^2 + 4y - 2z + 1 = 0$.

À l'aide d'opérations élémentaires lignes/colonnes sur la matrice augmentée associée, on obtient

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{*_3-2*_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 & 2 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 2 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 1 \end{bmatrix} \overset{*_4-*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{bmatrix}$$

ce qui nous donne, par rapport aux nouvelles coordonnées implicites, une équation de la forme

$$2w = u^2 + v^2;$$

il s'agit donc d'un paraboloïde elliptique.