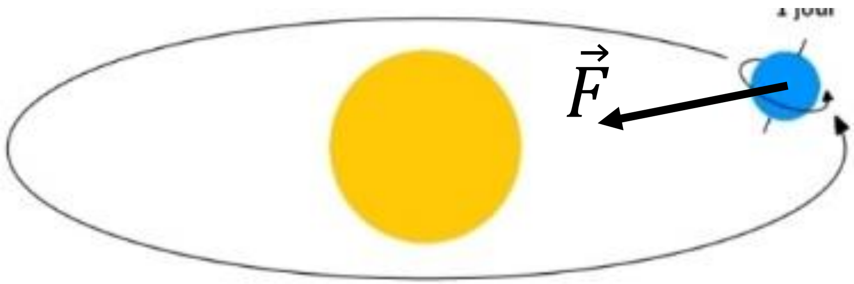
Chapitre 6 : Lois de conservation

Partie C – Forces centrales et coordonnées polaires

1. Introduction

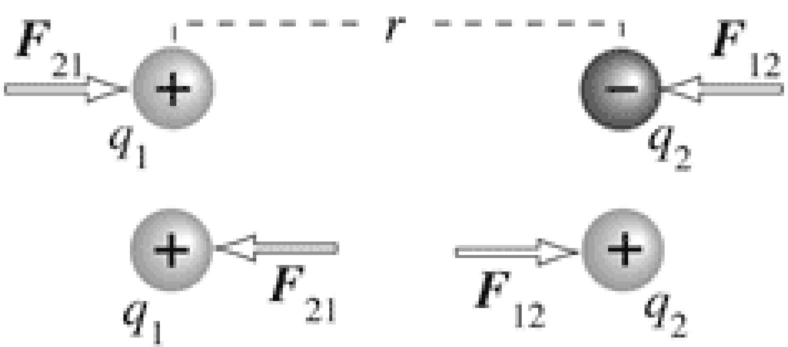
Force centrale
→ dans la direction du vecteur position

Exemples

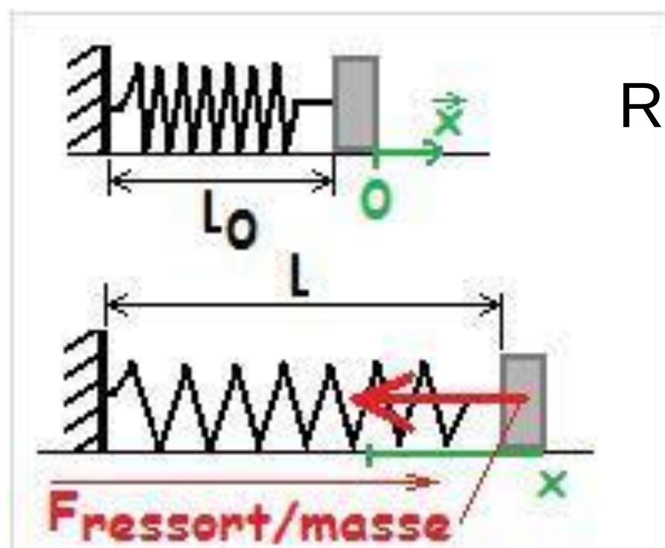


Gravitation

Force électrostatique



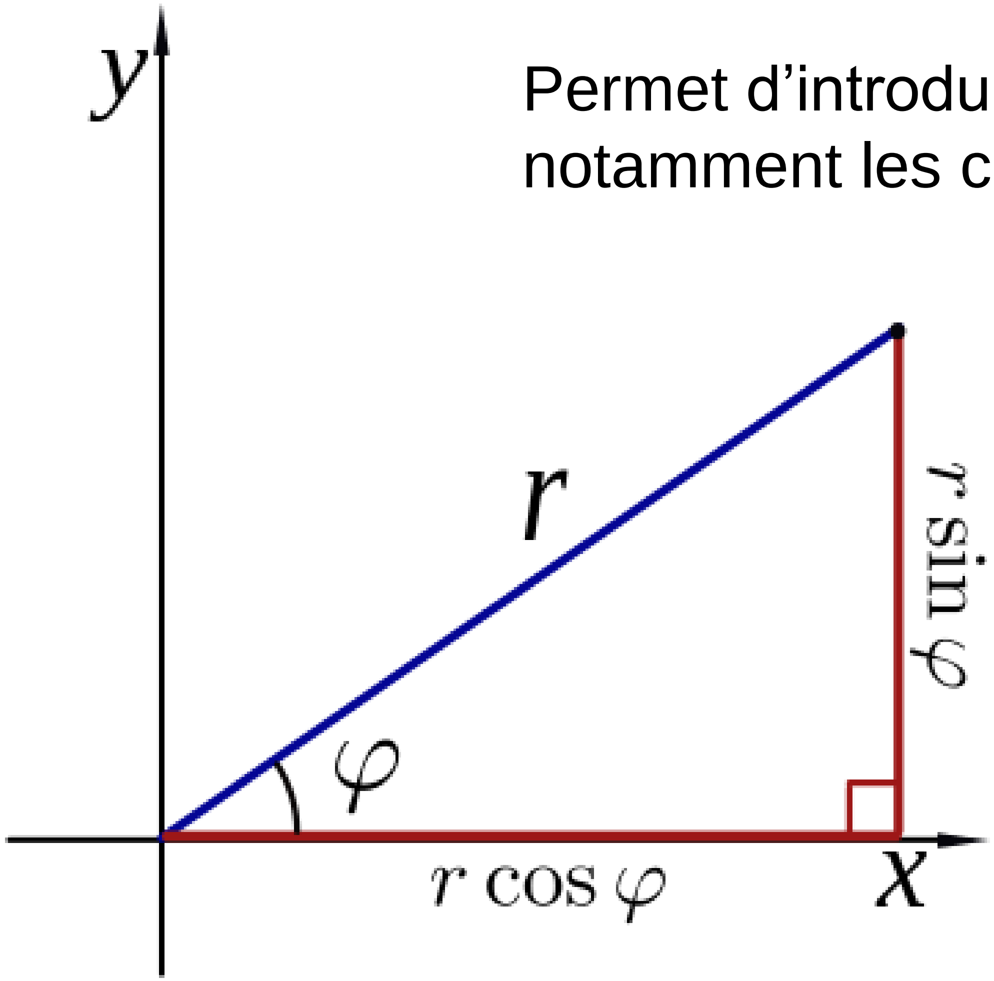
Ressort



1. Introduction

Pourquoi étudier les forces centrales ?

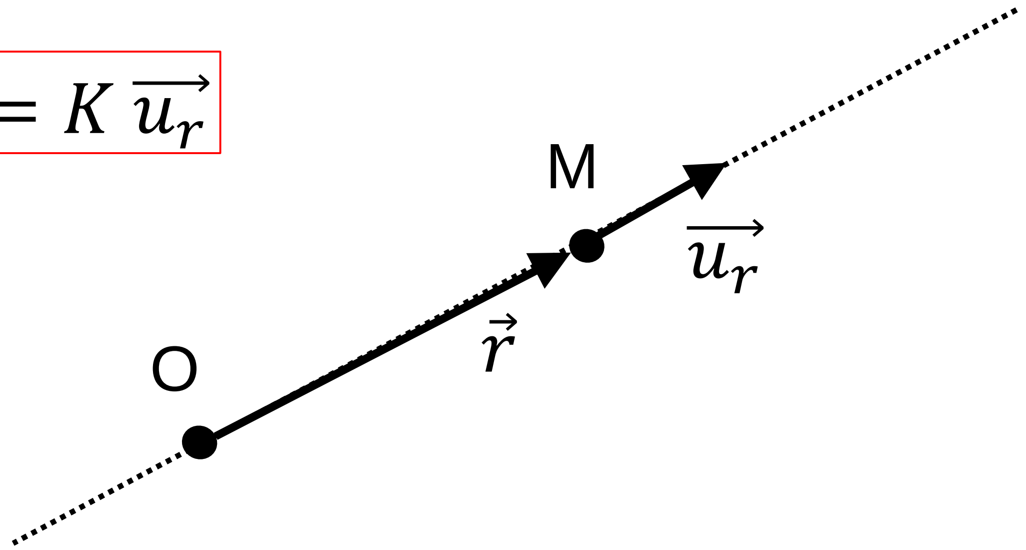
Permet d'introduire des outils très utiles, notamment les coordonnées polaires



1. Introduction

Force centrale, définition

$$\boxed{\vec{F} = K\,\overrightarrow{u_r}}$$



$\overrightarrow{u_r}$ est un vecteur unitaire radial = porté par la droite OM

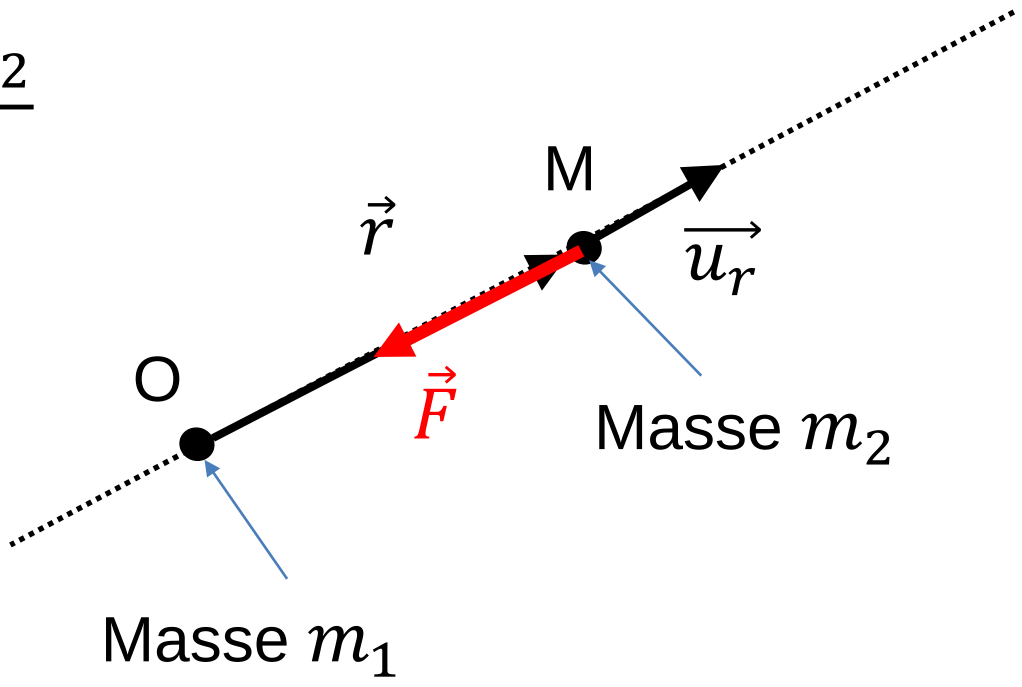
Remarque : $\overrightarrow{u_r}$ ne sert à rien d’autre qu’à indiquer la direction

1. Introduction

Exemple de la force de gravitation

$$\vec{F} = K\,\overrightarrow{u_r}$$

avec $$K = -\frac{G m_1 m_2}{r^2}$$



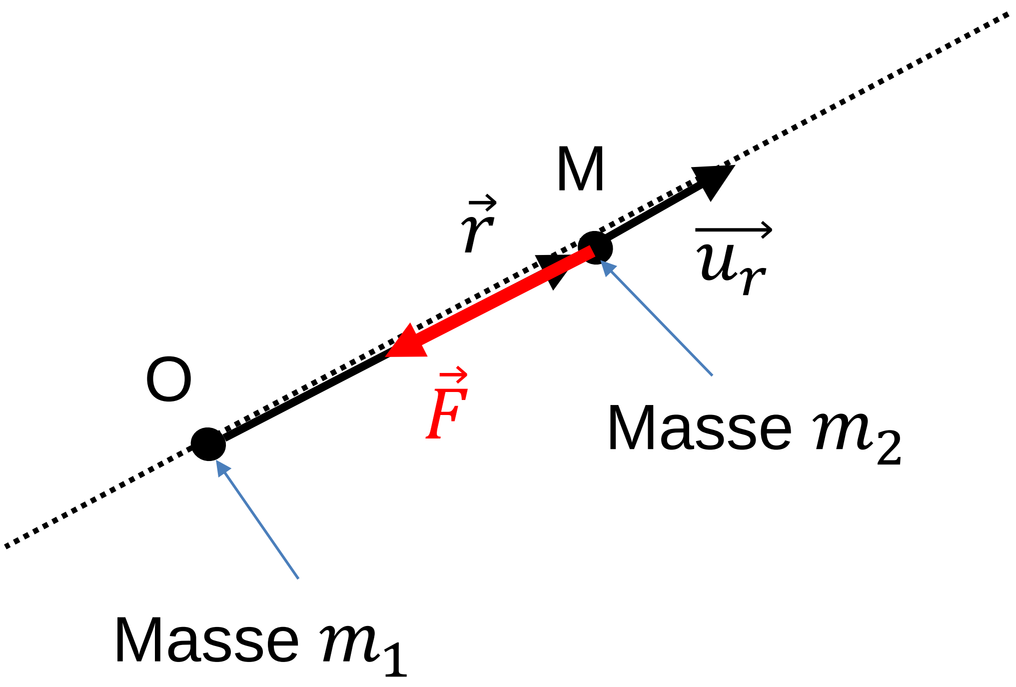
1. Introduction

Une autre expression de la force de gravitation (qu'on utilisera par la suite)

$$\vec{F} = K\,\overrightarrow{u_r} = -\frac{Gm_1m_2}{r^2}\overrightarrow{u_r}$$

Or : $\overrightarrow{u_r} = \frac{\vec{r}}{r}$

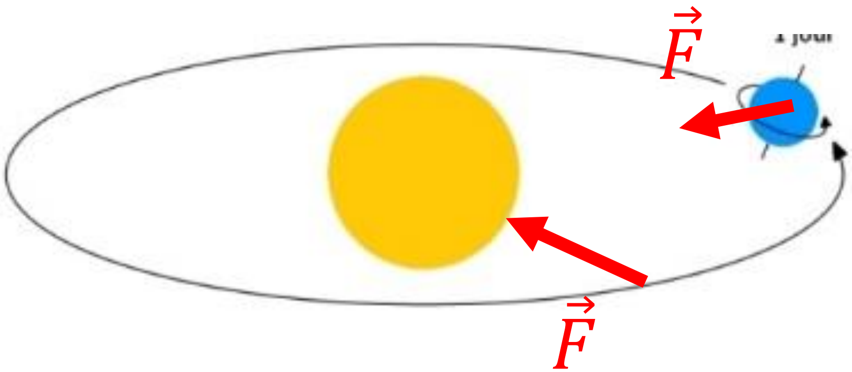
$$\boxed{\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}}$$



1. Introduction

Remarque : la force de gravitation est une force plus compliquée que ce qu’on a vu jusqu’ici.
La direction et la norme de F dépend de la position r

$$\boxed{\vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}}$$

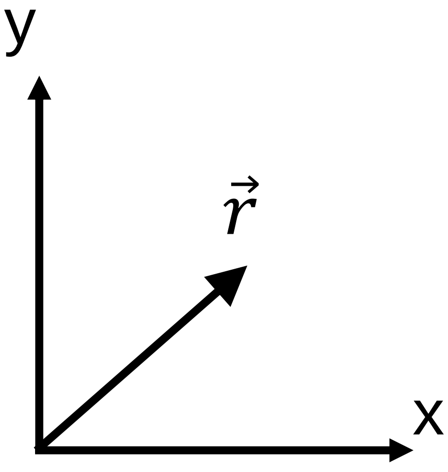


A comparer par exemple au poids $\vec{P} = m\vec{g} = \overrightarrow{cte}, \ldots$

1. Introduction

Appliquons la méthode de résolution traditionnelle pour déterminer le mouvement d'une masse *m* soumis uniquement à la gravitation

$$m_2\vec{a} = \vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$$



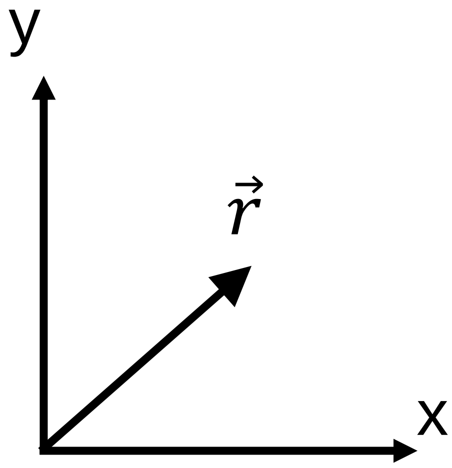
Projection sur les axes x et y ?

$$m_2\vec{a} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix} \qquad r = \|\vec{r}\| =$$

1. Introduction

Appliquons la méthode de résolution traditionnelle pour déterminer le mouvement d'une masse *m* soumis uniquement à la gravitation

$$m_2\vec{a} = \vec{F} = -\frac{Gm_1m_2}{r^3}\vec{r}$$



Projection sur les axes x et y ?

$$m_2\vec{a} = \begin{pmatrix} m_2\ddot{x} \\ m_2\ddot{y} \end{pmatrix} \qquad \vec{r} = \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \qquad r = \|\vec{r}\| = \sqrt{x^2 + y^2}$$

1. Introduction

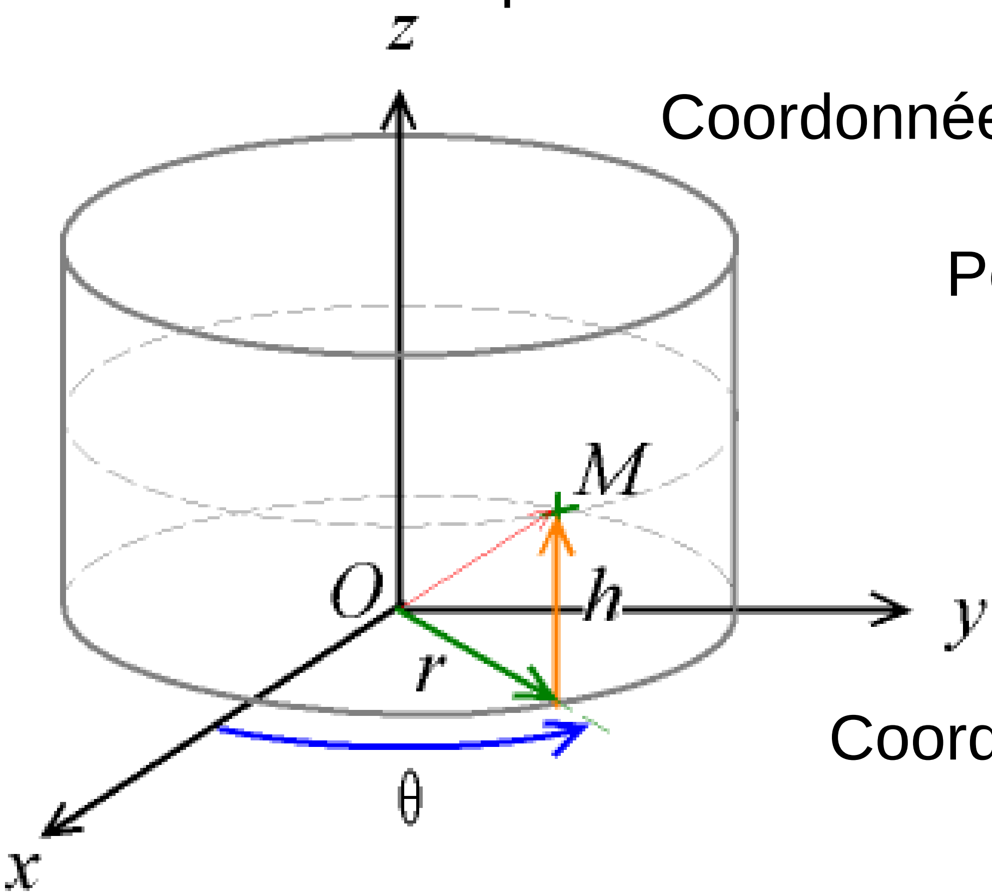
On obtient $$m_2 \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \end{pmatrix} = -\frac{Gm_1 m_2}{(x^2+y^2)^{3/2}} \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix}$$

$$\begin{cases} \ddot{x} = -\dfrac{Gm_1 x}{(x^2+y^2)^{3/2}} \\ \ddot{y} = -\dfrac{Gm_1 y}{(x^2+y^2)^{3/2}} \end{cases}$$

Equations différentielles non usuelles, couplées …

D’où l’intérêt de traiter le problème dans d’autres coordonnées

2. Coordonnées polaires et coordonnées cylindriques



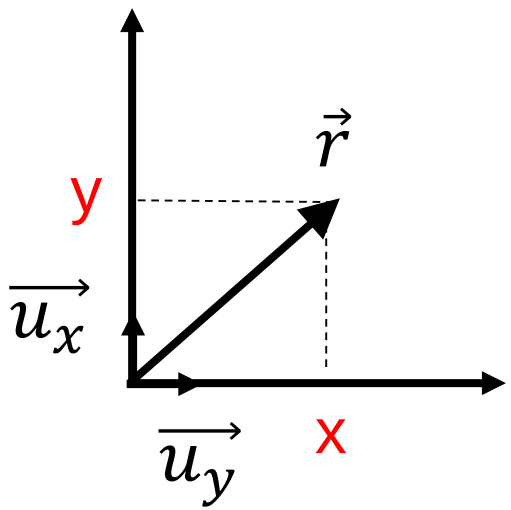
Coordonnées cylindriques :

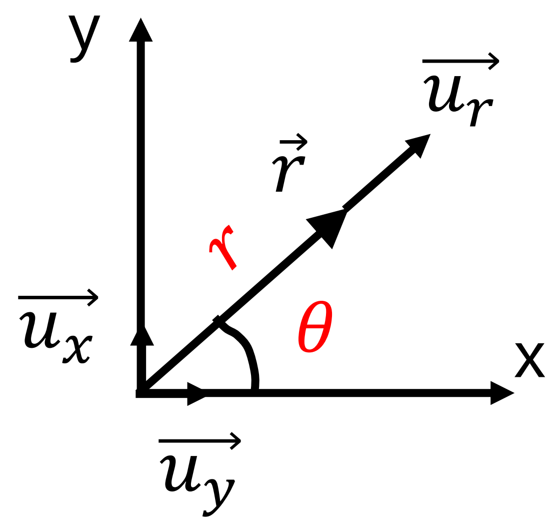
Point M repéré par $\begin{pmatrix} r \\ \theta \\ z \end{pmatrix}$

Coordonnées polaires : $\begin{pmatrix} \boxed{\begin{matrix} r \\ \theta \end{matrix}} \\ z \end{pmatrix}$

2. Coordonnées polaires

2D. Coordonnées cartésiennes et coordonnées polaires





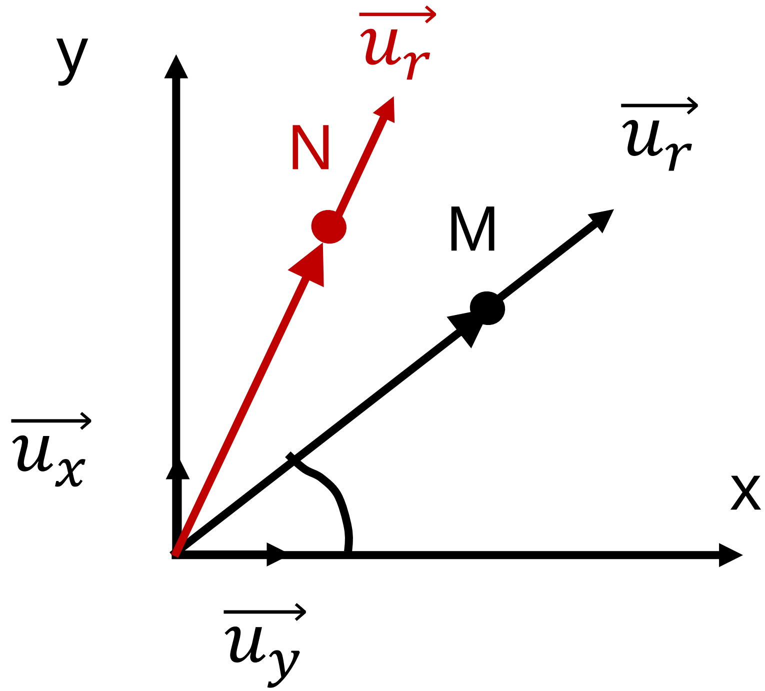
$$\vec{r} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

Remarque : la notation polaire semble plus simple (une seule composante, mais … non, car $\overrightarrow{u_r}$ varie d’un point à un autre

2. Coordonnées polaires

Coordonnées polaires $\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$



$\overrightarrow{u_r}$ dépend du point considéré

≠ coordonnées cartésiennes

→ Influence sur l'expression de la vitesse et de l'accélération

2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées **cartésiennes**

$$\vec{r} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$$ Vitesse

$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}$$ Accélération

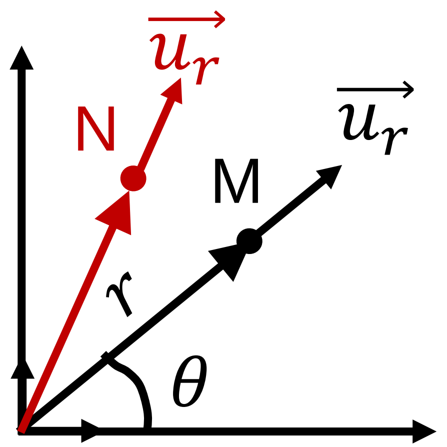
2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées **polaires**

a) Vitesse

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$$



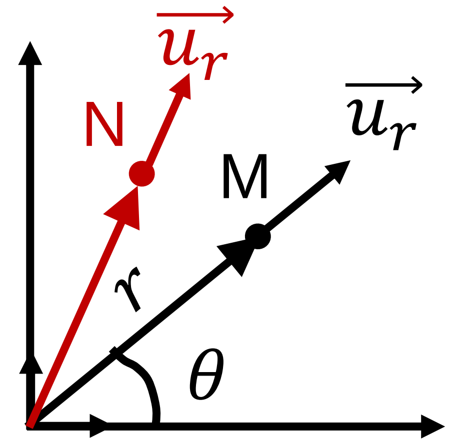
$\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées cartésiennes ?

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} \quad \end{pmatrix}$$

2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées **polaires**

a) Vitesse



$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$$

$\overrightarrow{u_r}$ en coordonnées cartésiennes

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

Dérivée de $\overrightarrow{u_r}$?

θ dépend du temps → dérivée d'une fonction composée

2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées **polaires** a) Vitesse

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$$

$$\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} \qquad \dot{\overrightarrow{u_r}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\sin\theta \\ +\dot{\theta}\cos\theta \end{pmatrix} = \dot{\theta}\begin{pmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix}$$

On appelle $\overrightarrow{u_\theta}$ le vecteur $\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix}$

$$\Rightarrow \boxed{\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

2. Coordonnées polaires

Remarques sur les vecteurs $\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$

VECTEUR RADIAL

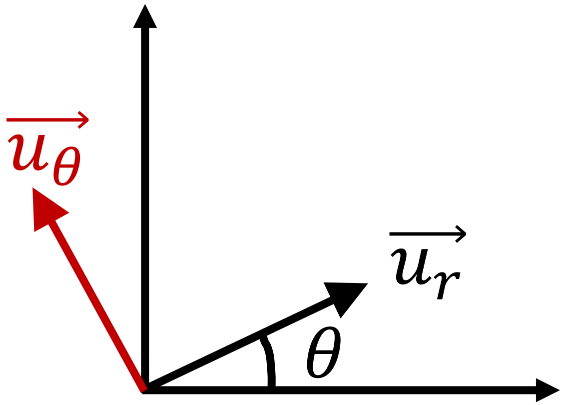
$$\overrightarrow{u_r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

VECTEUR ORTHORADIAL

$$\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{u_r}$ et $\overrightarrow{u_\theta}$ sont orthogonaux

En effet $\overrightarrow{u_r}\,.\,\overrightarrow{u_\theta} = 0$



2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées **polaires**   a) Vitesse

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\,\dot{\overrightarrow{u_r}}$$ avec $$\boxed{\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\boxed{\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

Expression générale de la vitesse en coordonnées polaires

Remarque : souvent $r = cte = L$

La vitesse est alors simplement $\vec{v} = L\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées polaires **b) Accélération**

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{a} = \ ?$$

Remarques :

Dérivée d'un produit de 3 termes : *(abc)' = a'bc + ab'c + abc'*

Dérivée de $\overrightarrow{u_\theta}$: pour l'instant $\dot{\overrightarrow{u_\theta}}$, on le calculera ensuite

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\,\dot{\overrightarrow{u_r}} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\overrightarrow{u_\theta}}$$

$$\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées polaires

b) Accélération

Dérivée de $\overrightarrow{u_\theta}$

$$\overrightarrow{u_\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ +\cos\theta \end{pmatrix}$$

$$\dot{\overrightarrow{u_\theta}} = \begin{pmatrix} -\dot{\theta}\cos\theta \\ -\dot{\theta}\sin\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{u_\theta}} = -\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r}}$$

Pour rappel / comparaison :

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{u_r}} = \dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

2. Coordonnées polaires

Dérivée en coordonnées polaires

b) Accélération

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\boxed{\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}} = -\dot{\boldsymbol{\theta}}\,\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\dot{\theta}\,\dot{\overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}}$$

$$\vec{a} = \ddot{r}\,\overrightarrow{u_r} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + \dot{r}\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} + r\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} - r\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r}$$

$$\boxed{\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}}$$

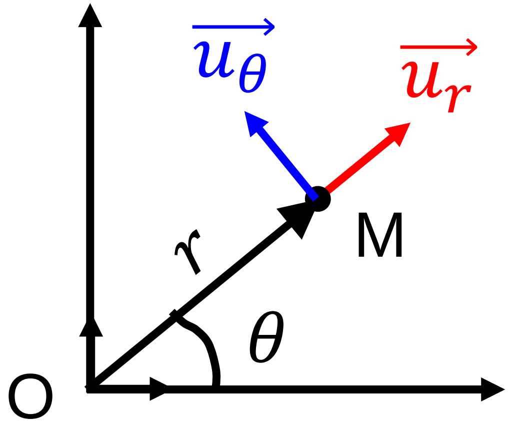
Expression générale de l'accélération en coordonnées polaires

On va l'utiliser pour appliquer le PFD

! Pas besoin de l'apprendre par cœur

Synthèse :

Force centrale : $\vec{F} = K\,\overrightarrow{u_r}$



Coordonnées polaires

$$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$$

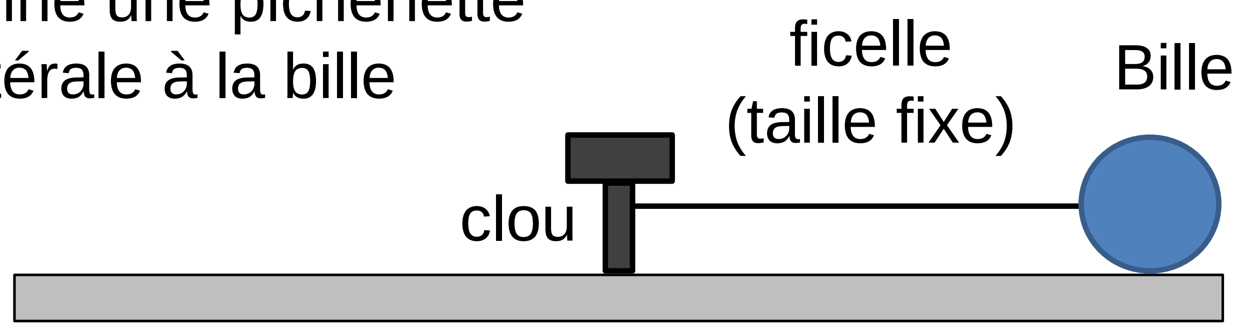
$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta}$$

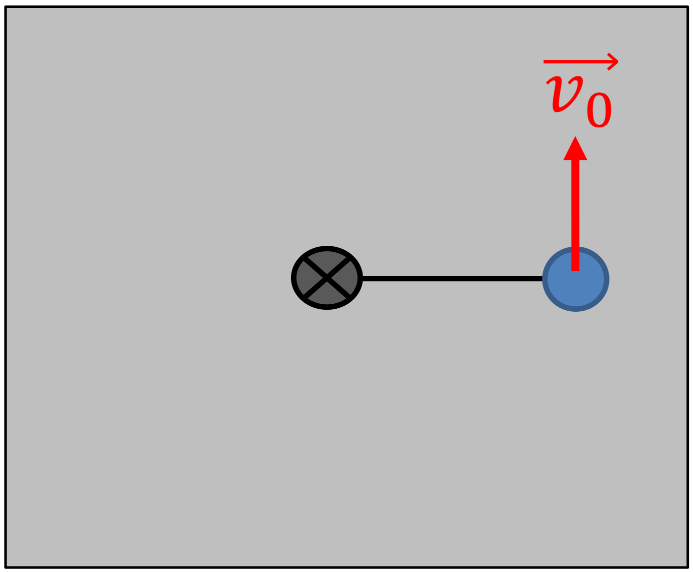
Application !

3. Application : bille tournante

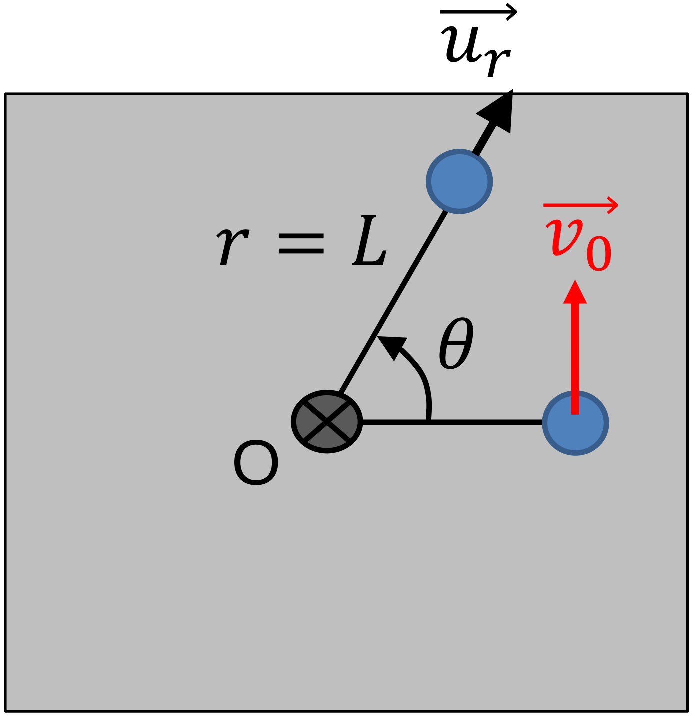
On donne une pichenette latérale à la bille

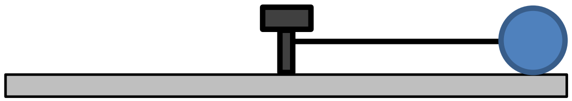


Vue du dessus



3. Application : bille tournante





Bilan des forces

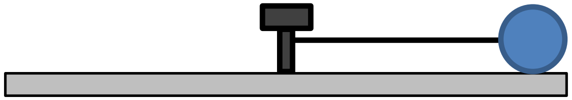
$\vec{P}$ poids
$\vec{R}$ réaction du support
$\vec{T}$ tension du fil
On néglige les frottements

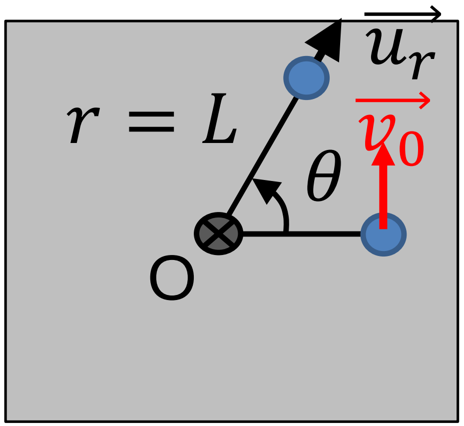
$\vec{T} = -T\overrightarrow{u_r}$ Force qui tend à ramener la masse vers O

On applique le principe fondamental de la dynamique :

$$m\vec{a} = \vec{T}$$

3. Application : bille tournante





$m\vec{a} = \vec{T}$ avec

$$\begin{cases} \vec{a} = \left(\ddot{r} - r\dot{\theta}^2\right)\overrightarrow{u_r} + \left(2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta}\right)\overrightarrow{u_\theta} \\ \vec{T} = -T\,\overrightarrow{u_r} \end{cases}$$

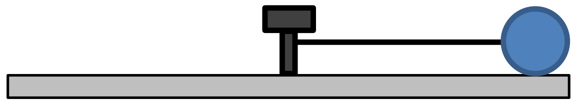
On obtient, sachant que $r = L = cte$ donc $\dot{r} = 0 = \ddot{r}$

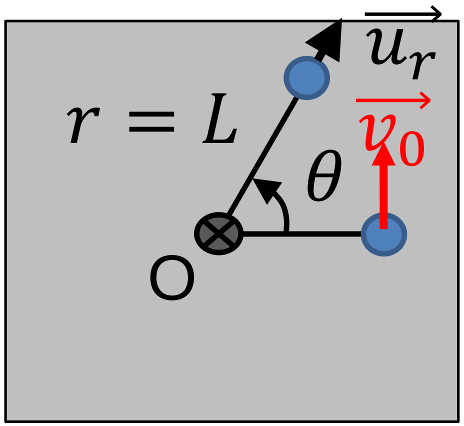
$$-mL\dot{\theta}^2\overrightarrow{u_r} + mL\ddot{\theta}\overrightarrow{u_\theta} = -T\,\overrightarrow{u_r}$$

Par identification des composantes, on obtient :

$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = -T \\ mL\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

3. Application : bille tournante





$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = -T \\ mL\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On cherche $\vec{v}$(t)

$$mL\ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \ddot{\theta} = 0 \Rightarrow \boxed{\dot{\theta} = cte \equiv \Omega}$$

Lien entre la vitesse et $\dot{\theta}$?

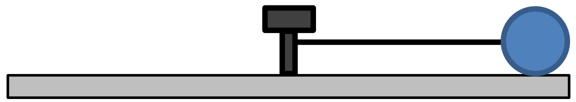
$$\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta} \Rightarrow \vec{v} = L\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$ *vitesse orthoradiale*

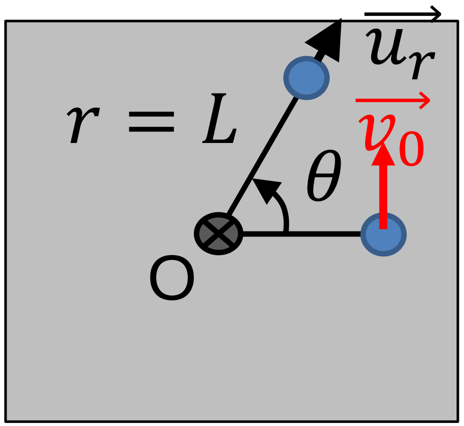
On obtient :

$$\boxed{\vec{v} = L\Omega\,\overrightarrow{u_\theta}}$$

De plus $\vec{v}(t=0) = \overrightarrow{v_0} \Rightarrow \boxed{\Omega = v_0/L}$

3. Application : bille tournante





$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = -T \\ mL\ddot{\theta} = 0 \end{cases}$$

On peut aussi déterminer T à partir de la première équation

$$T = mL\dot{\theta}^2 = mL\Omega^2 = m\frac{{v_0}^2}{L}$$

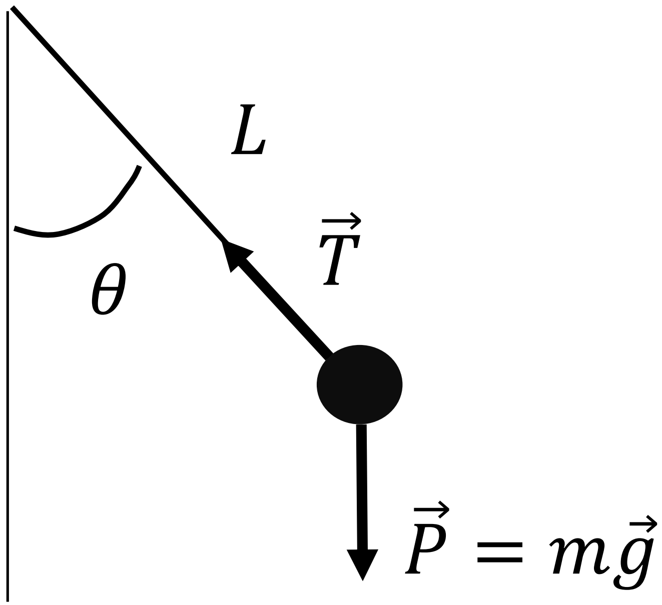
Plus le mouvement circulaire est rapide, plus la force de tension est grande.
Cas statique : quand v=0 on a bien T=0

Remarque : on peut aussi traiter ce problème en coordonnées cartésienne (avec un peu de méthode et beaucoup de rigueur)

L’application type : pendule simple

4. Application : le pendule

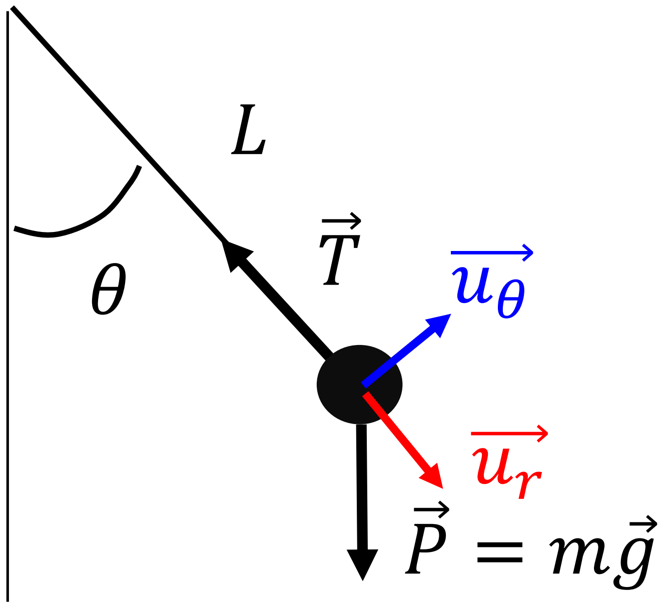
Par rapport au cas précédent : on ajoute le poids



Ecrire les coordonnées des forces dans la base $\overrightarrow{\boldsymbol{u_r}}, \overrightarrow{\boldsymbol{u_\theta}}$

Remarque. Il faut d'abord tracer les vecteurs $\overrightarrow{u_r}, \overrightarrow{u_\theta}$.
$\overrightarrow{u_\theta}$ est défini dans le sens des θ positifs et on sait que $\overrightarrow{u_r} \perp \overrightarrow{u_\theta}$

4. Application : le pendule



$$\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \end{pmatrix}$$

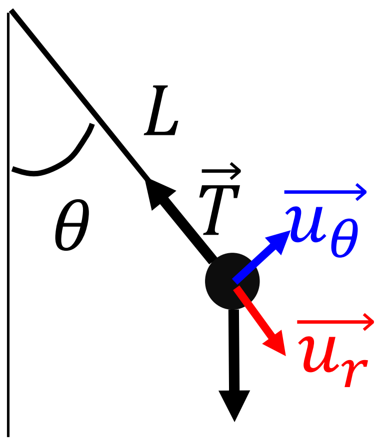
$$\vec{P} = \begin{pmatrix} mg\cos\theta \\ -mg\sin\theta \end{pmatrix}$$

PFD $\quad m\vec{a} = \vec{T} + \vec{P}$

avec $\quad \vec{a} = -L\dot{\theta}^2\,\overrightarrow{u_r} + L\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$

On obtient $\quad \begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$

4. Application : le pendule



$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

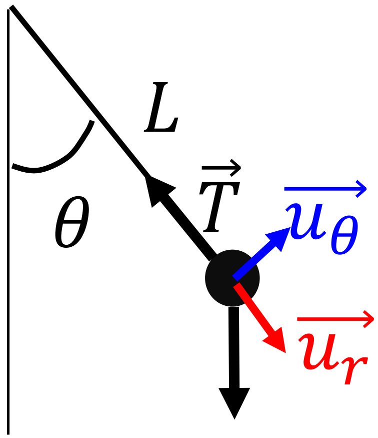
Déterminer le mouvement du pendule revient à connaître l'évolution de θ au cours du temps

$$mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \quad \Rightarrow \quad \ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0$$

Equation différentielle dont la résolution exacte est difficile
Approx petites oscillations : $\sin\theta \sim \theta$ → Equa diff y''+ay=0 (OK)

Remarque : θ ne dépend pas de la tension du fil T

4. Application : le pendule



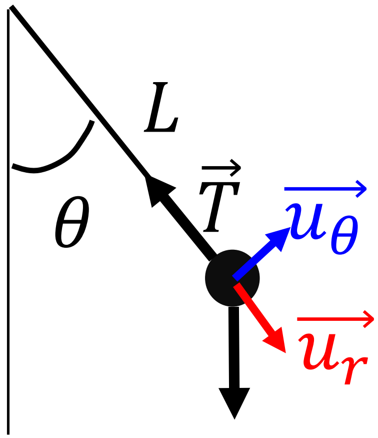
$$\begin{cases} -mL\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \\ mL\ddot{\theta} = -mg\sin\theta \end{cases}$$

On peut aussi déterminer l'expression de T

$$-mL\dot{\theta}^2 = -T + mg\cos\theta \quad \Rightarrow \quad T = mL\dot{\theta}^2 + mg\cos\theta$$

4. Application : le pendule

Exercice :
appliquer le théorème du moment cinétique à la masse *m*



$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$$

1. Calcul de $\overrightarrow{L_O}$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,r\,\overrightarrow{u_r} \wedge \left(\dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}\right)$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,r\,\overrightarrow{u_r} \wedge r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,r^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_r} \wedge \overrightarrow{u_\theta}$$

Sens de $\overrightarrow{L_O}$?

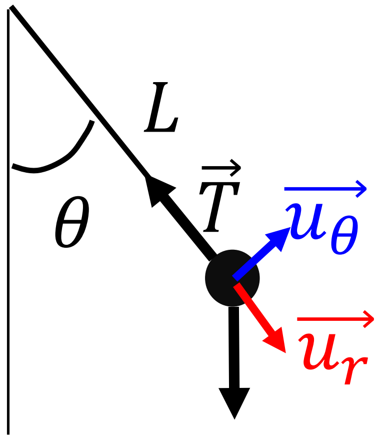
⊙ Dans le sens de $\overrightarrow{u_z}$

$$\boxed{\overrightarrow{L_O} = m\,r^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}}$$

(En coordonnées cylindriques)

4. Application : le pendule

Exercice :
appliquer le théorème du moment cinétique à la masse *m*



$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$$

2. Calcul de $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_T^O} = \vec{r} \wedge \vec{T} \quad = \vec{0}$$ *car les vecteurs sont colinéaires*

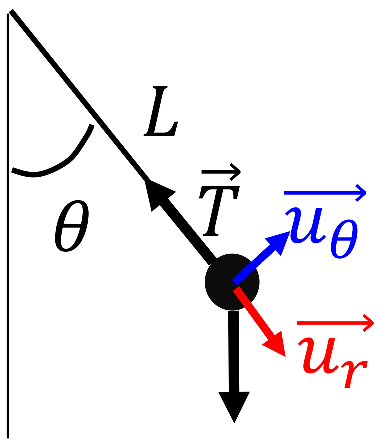
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P^O} = \vec{r} \wedge \vec{P} \quad = -\,r\,mg\sin\theta\,\overrightarrow{u_z}$$

Attention au signe, le produit vectoriel est ici dans le sens opposé au cas de L

4. Application : le pendule

Exercice :

appliquer le théorème du moment cinétique à la masse *m*



3. Application du théorème

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

$$\overrightarrow{L_O} = m\,L^2\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P^O} = -L\,mg\sin\theta\;\overrightarrow{u_z}$$

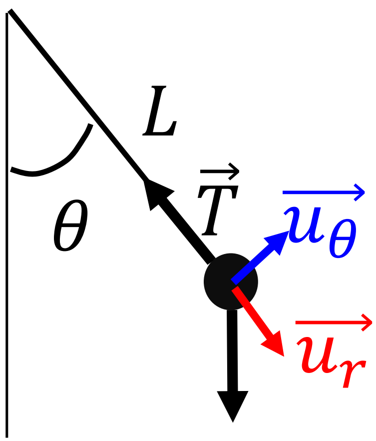
$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = m\,L^2\ddot{\theta}\,\overrightarrow{u_z}$$

$$m\,L^2\ddot{\theta} = -L\,mg\sin\theta$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

On obtient la même équation du mouvement qu'avec le PFD

4. Application : le pendule



$$\boxed{\sum_i \overrightarrow{F_i} = m\vec{a}}$$

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{L}\sin\theta = 0}$$

PFD et TMC donnent en général le même résultat pour des corps ponctuels.

Par contre lorsque le corps est étendu, le TMC peut apporter des informations supplémentaires