DS de maths n° 4

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **8** questions équipondérées.
- L'usage de la calculatrice ou du compilateur `Java` est fortement déconseillé.
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant au maximum vos raisonnements.
- Amusez-vous bien !

A) Produit scalaire

1. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice carrée symétrique (i.e. $A^t = A$). Montrez que l'application définie par
$$\langle \mathbf{x}, \mathbf{y} \rangle := \mathbf{x}^t A\, \mathbf{y}$$
est une forme bilinéaire symétrique sur $\mathbf{R}^n$, identifié à l'espace des vecteurs-colonnes $\mathcal{M}_{n\times 1}(\mathbf{R})$.

On dit que A est *définie positive* lorsque cette forme bilinéaire est un produit scalaire.

2. Montrer que $A_1 = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ -1 & 2 & 2 \\ 0 & 2 & 5 \end{pmatrix}$ est définie positive, alors que $A_2 = \begin{pmatrix} 1 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}$ ne l'est pas.

3. Calculer une base orthonormée de $\mathbf{R}^3$ pour le produit scalaire défini par la matrice A_1 ci-dessus.

4. Soit $A \in \mathcal{M}_n(\mathbf{R})$ une matrice symétrique définie positive. Si $P = {}_{\mathrm{can}}[\mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$ désigne la matrice de passage de la base canonique vers une base $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \ldots, \mathbf{v}_n)$ de $\mathbf{R}^n$, montrer que
$$\mathcal{B} \text{ est orthonormée par rapport à } \langle \cdot \rangle \cdot \qquad \Longleftrightarrow \qquad P^T A P = I_n.$$

B) Courbes à courbure prescrite

5. Donnez des exemples de courbes paramétrées planes à courbure constante $\kappa > 0$, $\kappa < 0$ et $\kappa = 0$.

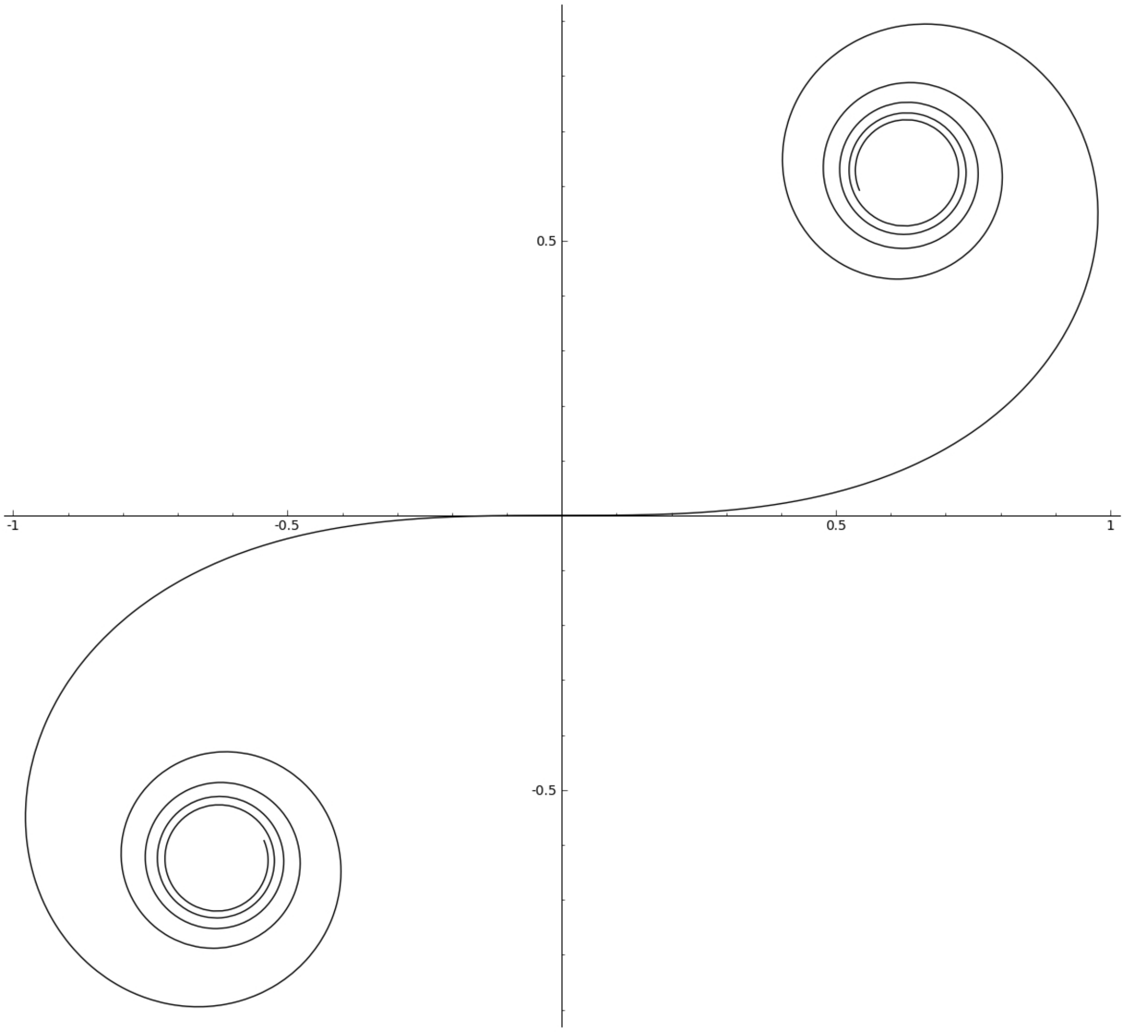
6. Montrez que la courbure de la spirale logarithmique d'équation polaire $r(\theta) = e^\theta$ est inversement proportionnelle à l'abscisse curviligne mesurée à partir du point $(0,0)$ asymptote à la courbe en $\theta \to -\infty$.

7. Montrez que la courbure de la *clothoïde*, d'équation paramétrique
$$\mathbf{r}(t) = \left(\int_0^t \cos \tau^2 \, \mathrm{d}\tau \right) \mathbf{i} + \left(\int_0^t \sin \tau^2 \, \mathrm{d}\tau \right) \mathbf{j},$$
est directement proportionnelle à son abscisse curviligne mesurée à partir de $t = 0$.

8. Plus généralement, soit I un intervalle de la droite réelle et $t_0 \in I$ fixé. Étant donné une fonction $\varphi : I \to \mathbf{R}$ de classe $\mathcal{C}^1$, on définit une courbe paramétrée $\mathbf{r} : I \to \mathbf{R}^2$ par
$$\mathbf{r}(t) = \left(x_0 + \int_{t_0}^t \cos \varphi(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \mathbf{i} + \left(y_0 + \int_{t_0}^t \sin \varphi(\tau) \, \mathrm{d}\tau \right) \mathbf{j}.$$
Montrez qu'il s'agit d'une courbe régulière et déterminez sa courbure en chaque point en fonction de φ.

   En déduire le résultat suivant (probablement dû à Gauss) :

   Théorème. Pour toute fonction continue $\kappa : I \to \mathbf{R}$, il existe une courbe plane régulière dont la courbure (en fonction de l'abscisse curviligne) est donnée par κ.



Un bout de clothoïde...

```
var('t')

x(t) = integral( taylor(cos(t^2), t, 0, 400), t )
y(t) = integral( taylor(sin(t^2), t, 0, 400), t )

parametric_plot( (x,y), (-5.5, 5.5), plot_points=1000, rgbcolor='black', figsize=10 )
```

...produit par ce bout de code