Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur la feuille.

Faites bien attention aux *différents corps* dans lesquels les calculs doivent être effectués.

Nom:	**CORRIGÉ**

1. Déterminer toutes les solutions $x \in \mathbf{F}_{61}$ à l'équation

$$x^4 + 54x^2 + 12 = 0.$$

[Indication : Commencer pas déterminer les valeurs de $X = x^2$]

En résolvant l'équation quadratique $X^2 - 7X + 12 = 0$, on trouve les deux solutions

$$X = \frac{7 \pm 1}{2} = 3 \text{ ou } 4.$$

On trouve donc 4 solutions pour x : ± 8 et ± 2, soit 2, 8, 53 et 59.

2. Calculer l'inverse de la matrice suivante à coefficients dans le corps fini à 7 éléments :

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_3(\mathbf{F}_7)$$

et en déduire les solutions $(x, y, z) \in {\mathbf{F}_7}^3$ du système d'équations linéaires

$$\begin{cases} x + 4y + z = 2, \\ 3x + 4y + 4z = 0, \\ \phantom{3x + {}} 3y + 5z = 1. \end{cases}$$

Par réduction de Gauss, on trouve

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix}^{-1} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix}.$$

Le système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} 1 & 4 & 1 \\ 3 & 4 & 4 \\ 0 & 3 & 5 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

admet donc l'unique solution

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1 & 3 & 2 \\ 1 & 2 & 1 \\ -2 & 3 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 3 \\ -3 \end{bmatrix}.$$

3. Déterminer la forme normale N ainsi que deux matrices inversibles P et Q telles que $PAQ = N$ pour

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 4 & -2 & 3 \\ 1 & 3 & -1 & 2 \\ -2 & -8 & 4 & -6 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{4\times 3}(\mathbf{R}).$$

Plusieurs réponses possibles pour P et Q, par exemple

$$P = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad Q = \begin{bmatrix} -3 & 4 & -2 & 1 \\ 1 & -1 & 1 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix},$$

du moment que l'on trouve bien la bonne forme normale

$$N = PAQ = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}.$$

4. Déterminer, pour l'application linéaire $T : {\mathbf{F}_5}^5 \to {\mathbf{F}_5}^4$ suivante, des bases de $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$:

$$T(x, y, z, t, w) = \big(x + 2y - t + 2w,\ -x + 3y + z + 2t,\ -x + 2y + z + 2t + 3w,\ x - y - t + w\big).$$

L'application linéaire est de rang 3, avec

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Vect}\big((1, 0, -1, 1, 0),\ (2, 3, 3, 0, 1)\big).$$

Pour $\operatorname{Im} T$, on peut prendre comme base

$$(1, -1, -1, 1),\ (2, 3, 2, -1),\ (0, 1, 1, 0).$$