CIR2

Groupe des permutations d'un ensemble fini

4. Signature

Théorème 4 :

Pour toute permutation σ de S_n, sa signature est égale à $\prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}$,

c'est-à-dire à +1 si le nombre de "dérangements" de la liste $[1,2,...,n]$ est pair, et à -1 sinon.

Démonstration : Notons $s(\sigma)=\prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)}$.

1° $s(\sigma)=\prod_{i<j} \frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j} = \prod_{i<j} \frac{\sigma(j)-\sigma(i)}{j-i}$ donc $(s(\sigma))^2 = \frac{\prod_{i<j}(\sigma(i)-\sigma(j))(\sigma(j)-\sigma(j))}{\prod_{i<j}(i-j)(j-i)}$

Comme σ est une permutation, chaque facteur $a-b$ (avec $a<b$ ou $b<a$) se trouve une fois et une seule au numérateur. Donc $(s(\sigma))^2=1$ et $s(\sigma)=\pm 1$. Il n'y a plus qu'à trouver son signe !

2° Si σ est une transposition (a,b) (avec $a<b$),

Pour *i* et *j* donnés (avec $i<j$),

- si $i \neq a$ et $j \neq b$, $\sigma(i)=i$, $\sigma(j)=j$ donc $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}=1$
- si $i=a$ et $j \neq b$, $\sigma(i)=b$, $\sigma(j)=j$ donc $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}=\frac{b-j}{a-j}$,

  ce qui est négatif si et seulement si $a<j<b$, ce qui fait $b-a-1$ cas
- De même si $i \neq a$ et $j=b$, $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}=\frac{i-a}{i-b}<0 \Leftrightarrow a<i<b$, ce qui fait encore $b-a-1$ cas
- Enfin si $i=a$ et $j=b$ $\frac{\sigma(i)-\sigma(j)}{i-j}=\frac{b-a}{a-b}<0$

Il y a donc $(b-a+1)+(b-a+1)+1$ facteurs négatifs dans $s(\sigma)$ donc $s(\sigma)<0$ et $s(\sigma)=-1$

3° Soient maintenant 2 permutations σ_1 et σ_2.

Comme σ_2 est une permutation, $s(\sigma_1)=\prod_{i<j} \frac{\sigma_1(i)-\sigma_1(j)}{i-j} = \prod_{i<j} \frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}$

(c'est seulement un changement de l'ordre des facteurs). Donc

$$s(\sigma_1).s(\sigma_2)=\prod_{i<j}\left(\frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}.\frac{\sigma_2(i)-\sigma_2(j)}{i-j}\right)=\prod_{i<j}\frac{\sigma_1(\sigma_2(i))-\sigma_1(\sigma_2(j))}{i-j}=s(\sigma_1 \circ \sigma_2).$$

4° Toute permutation peut se décomposer en produit de transpositions.

Si σ est le produit de *k* transpositions $\sigma=\tau_1 \circ \tau_2 \circ ... \circ \tau_k$ alors (3°) $s(\sigma)=s(\tau_1)s(\tau_2)...s(\tau_k)$

et comme (2°) $\forall i\ s(\tau_i)=-1$ on a bien $s(\sigma)=(-1)^k=$ la signature de σ