Cette épreuve de **40** minutes contient **4** questions équipondérées – répondez directement sur le questionnaire.

Détaillez vos calculs, **explicitez** vos raisonnements, **représentez** les situations !

Nom: **CORRIGÉ**

1. Déterminez les coordonnées d'un point $P \in \mathbf{R}^3$ de telle sorte que

$$A = (1,0,0), \quad B = (0,1,0), \quad C = (0,0,1) \quad \text{et} \quad P = (x,y,z)$$

forment un tétraèdre régulier (*i.e.* toutes les distances entre paires de points sont égales).

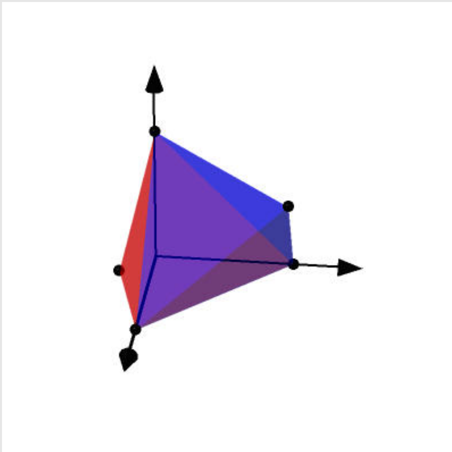
On peut tout d'abord se convaincre que ABC est un triangle équilatéral :

$$d(A,B) = d(A,C) = d(B,C) = \sqrt{2}.$$

Il ne nous reste plus qu'à positionner le point P de façon à ce que

$$d(A,P) = d(B,P) = d(C,P) = \sqrt{2}.$$

On pourrait développer ces trois équations et résoudre le système correspondant, mais il est plus aisé de travailler géométriquement : la symétrie de la situation nous dit que le point P est à chercher sur la droite passant par l'origine normale au plan contenant A, B, C ; en d'autres termes, cherchons un point P de la forme (t,t,t) avec $t \in \mathbf{R}$ à déterminer.



L'équation $d(A,P) = \sqrt{2}$ s'écrit alors

$$\sqrt{(t-1)^2 + t^2 + t^2} = \sqrt{2} \quad \text{soit} \quad 3t^2 - 2t - 1 = (3t-1)(t-1) = 0.$$

On trouve deux solutions : $P = (1,1,1)$ et $P = (-\frac{1}{3}, -\frac{1}{3}, -\frac{1}{3})$.

2. Soit $\mathcal{P}$ le plan normal à $\mathbf{n} = (1,1,2)$ passant par $A = (1,0,1)$ et $\mathcal{Q}$ le plan paramétré par

$$\begin{bmatrix}3\\1\\0\end{bmatrix} + u\begin{bmatrix}1\\-1\\1\end{bmatrix} + v\begin{bmatrix}2\\0\\-1\end{bmatrix} \qquad (u, v \in \mathbf{R}).$$

Décrire leur intersection $\mathcal{P} \cap \mathcal{Q}$.

Équation cartésienne pour chaque plan :

$$\mathcal{P} : x + y + 2z = 3, \qquad \mathcal{Q} : x + 3y + 2z = 6.$$

Leur intersection est l'ensemble solution du système d'équations linéaires

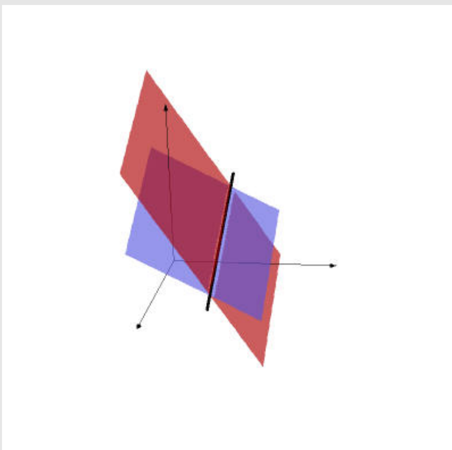
$$\begin{cases} x + y + 2z = 3, \\ x + 3y + 2z = 6. \end{cases}$$

- Solution générale : on peut prendre comme vecteur directeur le produit vectoriel des vecteurs normaux

$$(1,1,2) \wedge (1,3,2) = (-4,0,2).$$

- Solution particulière : on fait comme on en a envie, par exemple on pourrait en chercher une avec $z = 0$: on trouve $(x,y,z) = (\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$.

L'intersection des deux plans est donc la droite passant par $(\frac{3}{2}, \frac{3}{2}, 0)$ dirigée par $(2,0,-1)$.



(autres réponses possibles)

3. Donner une paramétrisation du cercle $\mathcal{C}$ de rayon 2 centré en $(-1, 2, 1)$ dans le plan $\mathcal{P}$ d'équation $x + y = 1$.

   [*Suggestion* : commencer par fabriquer un repère orthonormé dans $\mathcal{P}$]

Le plan $\mathcal{P}$ contient $\Omega = (-1, 2, 1)$ et est normal au vecteur $\mathbf{n} = (1, 1, 0)$. Pour obtenir un repère orthonormé dans $\mathcal{P}$, on a besoin de deux vecteurs orthogonaux à $\mathbf{n}$, et entre eux : on a envie de prendre $(1, -1, 0)$ et $(0, 0, 1)$.

Après normalisation, on peut donc travailler avec

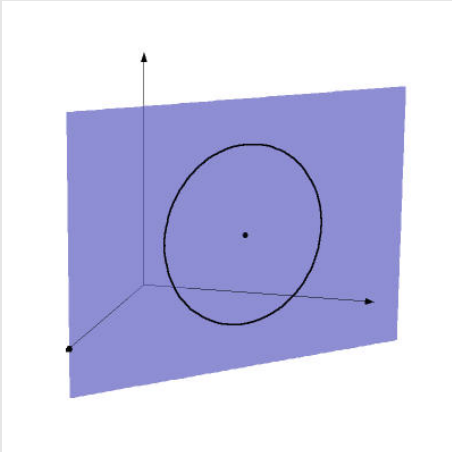
$$(\Omega, \mathbf{u}, \mathbf{v}) \quad \text{où} \quad \mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0\right) \text{ et } \mathbf{v} = (0, 0, 1).$$

Les points sur $\mathcal{C}$ sont ceux de la forme

$$\Omega + 2\cos\theta\, \mathbf{u} + 2\sin\theta\, \mathbf{v} \qquad (0 \leqslant \theta \leqslant 2\pi),$$

ce qui nous donne la paramétrisation

$$\begin{cases} x = -1 + \sqrt{2}\cos\theta, \\ y = \quad 2 - \sqrt{2}\cos\theta, \\ z = \quad 1 + \quad 2\sin\theta. \end{cases}$$



4. Décrire, aussi précisément que possible, la courbe plane d'équation cartésienne

$$x^2 + 3y^2 + 2x - 6y + 8 = 0.$$

En complétant les carrés, on obtient

$$(x + 1)^2 + 3(y - 1)^2 = -4 \ldots$$

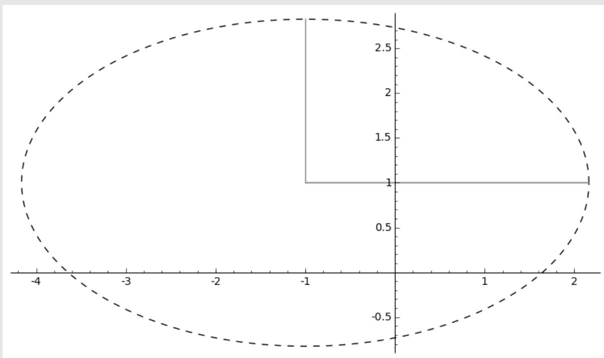
l'ensemble-solution (réel) est vide !

(ce n'était pas volontaire, désolé)

Ceci dit, si on a de l'*imagination*, rien ne nous empêche de mettre l'équation sous forme canonique

$$\frac{(x + 1)^2}{-4} + \frac{(y - 1)^2}{-4/3} = 1,$$

et de considérer qu'il s'agit d'une ellipse centrée en $(-1, 1)$ et de demi-axes $2j$, $\frac{2}{\sqrt{3}}j$ ...



représentation de l'artiste