# Chapitre 1 :
# Fonctions logiques et algèbre de Boole

Justine Philippe

ISEN école d'ingénieurs

# Sommaire

- Quelques définitions
- Portes logiques de base
- Propriétés et théorèmes
- Simplification algébrique
- Simplification graphique

# Sommaire

- Quelques définitions
- Portes logiques de base
- Propriétés et théorèmes
- Simplification algébrique
- Simplification graphique

# Variable et fonction logique

- Les états logiques sont représentés par les valeurs binaires 0 et 1

- Une variable logique est une grandeur physique ne pouvant prendre que deux états : 0 et 1

| Convention | Représentation physique (tension) | Représentation logique (état) |
|---|---|---|
| *Logique positive* | *Haute* | *'1' ou actif* |
| | *Basse* | *'0' ou inactif* |
| *Logique négative* | *Basse* | *'1' ou actif* |
| | *Haute* | *'0' ou inactif* |

# Tables de vérité

- La table de vérité donne la valeur des sorties pour chaque configuration des entrées :

N entrées
→ $2^N$ combinaisons <u>différentes</u>

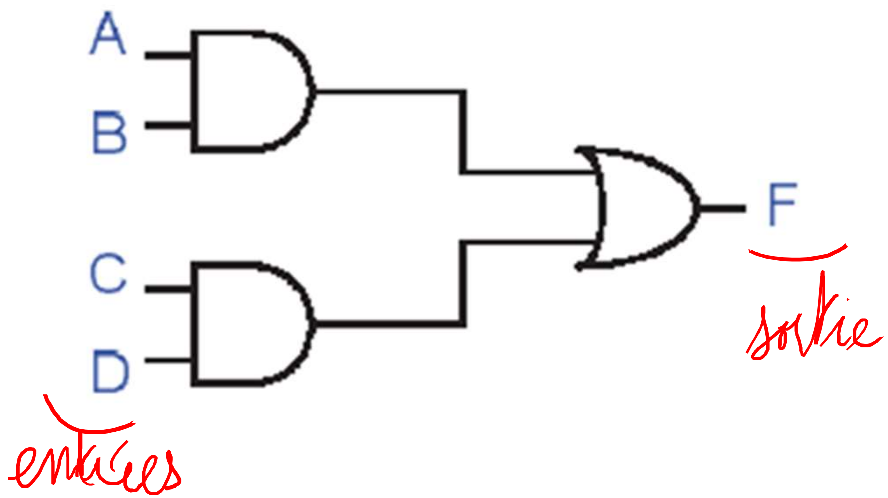
| A | B | C | $S_1$ | $S_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | X | 0 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | X |
| 0 | 1 | 1 | X | X |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | X |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 1 |

**état indifférent : la sortie peut prendre la valeur 0 ou 1 en fonction de ce qui donnera le résultat le plus simple à réaliser par exemple**

**deux configurations différentes des entrées donnent la même sortie, l'entrée A est ici indifférente : ces deux lignes peuvent se regrouper dans la table en une ligne unique de la forme A=X, B=0, C=0**

# Logigramme

- Représentation graphique d'une fonction logique par des symboles logiques
- La lecture s'effectue de gauche à droite

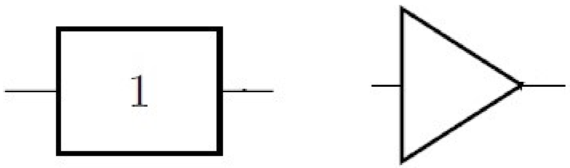


# Sommaire

- Quelques définitions
- Portes logiques de base
- Propriétés et théorèmes
- Simplification algébrique
- Simplification graphique

# Fonctions logiques de base

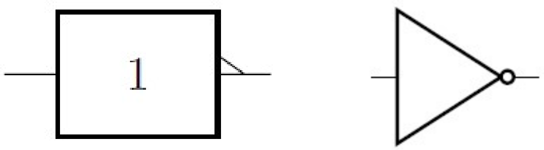
- Opérateur « oui » : f(A) = A



| A | A |
|---|---|
| 0 | 0 |
| 1 | 1 |

norme internationale    norme anglo-saxonne

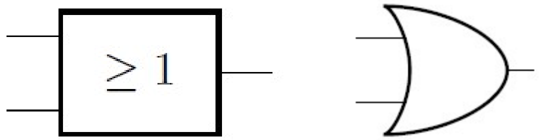
- Opérateur « non » (NOT) : $f(A) = \bar{A}$



| A | $\bar{A}$ |
|---|---|
| 0 | 1 |
| 1 | 0 |

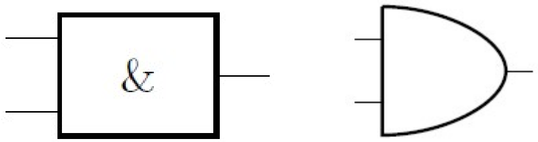
# Fonctions logiques de base

- Opérateur « ou » (OR) : f(A,B) = A + B




| A | B | A + B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 |

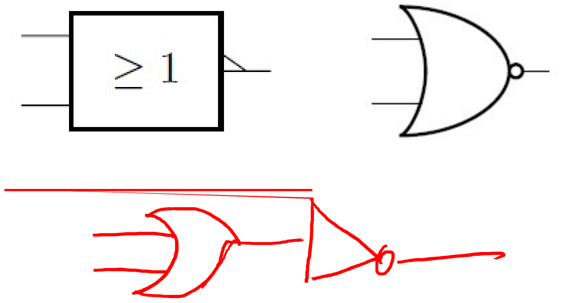
- Opérateur « et » (AND) : f(A,B) = A.B




| A | B | A.B |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

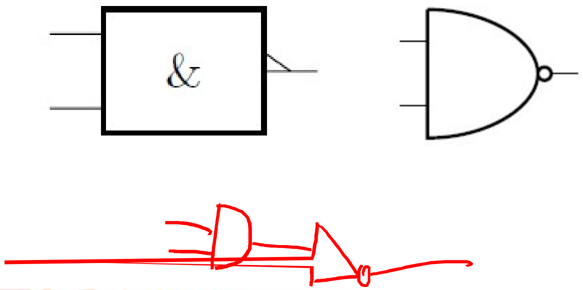
# Fonctions logiques dérivées

- Opérateur « non ou » (NOR) : $f(A,B) = \overline{A + B}$




| A | B | $\overline{A+B}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 0 |

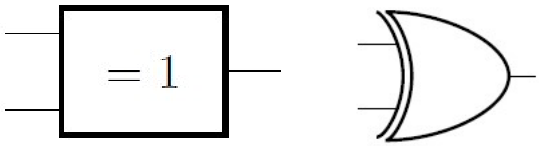
- Opérateur « non et » (NAND) : $f(A,B) = \overline{A.B}$




| A | B | $\overline{A.B}$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

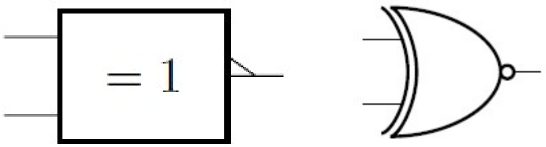
# Fonctions logiques dérivées

- Opérateur « ou exclusif » (XOR) : $f(A,B) = A \oplus B$




| A | B | $A \oplus B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 |

- Opérateur « et inclusif » (XNOR) : $f(A,B) = A \odot B$ $= \overline{A \oplus B}$




| A | B | $A \odot B$ |
|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 |
| 1 | 1 | 1 |

# Sommaire

- Quelques définitions
- Portes logiques de base
- Propriétés et théorèmes
- Simplification algébrique
- Simplification graphique

# Propriétés des opérations

- **Commutativité :**
  - $A+B = B+A$
  - $A.B = B.A$
- **Associativité :**
  - $A+B+C = (A+B)+C = A+(B+C)$
  - $A.B.C = (A.B).C = A.(B.C)$
- **Distributivité :**
  - $A.(B+C) = (A.B) + (A.C)$
  - $A+(B.C) = (A+B).(A+C)$
- **Existence d'un élément neutre :**
  - $A+0 = A$
  - $A.1 = A$
- **Existence d'un complément (unique) :**
  - $A+\overline{A} = 1$
  - $A.\overline{A} = 0$
- **Dualité :**
  - et ↔ ou
  - 0 ↔ 1
  - A.(B + 0) = A.B ↔ A + (B.1) = A + B

# Propriétés des opérations

- **Loi d'idempotence :**
  - $A+A = A$
  - $A.A = A$
- **Loi d'involution :**

$$\overline{\overline{A}} = A$$

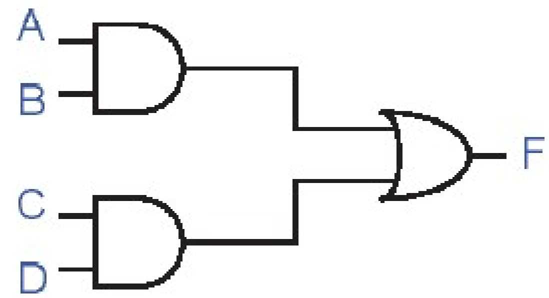
- **Loi de simplification :**
  - $A+(\overline{A}.B) = A+B$
  - $A.(\overline{A}+B) = A.B$
- **Loi d'absorption :**
  - $A+A.B = A$
  - $A.(A+B) = A$
- **Théorème du consensus :**

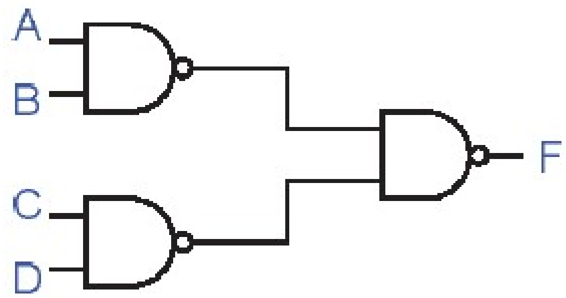
$$A.B + \overline{A}.C + B.C = A.B + \overline{A}.C$$

- **Théorème de DE MORGAN :**
  - $\overline{(A + B)} = \overline{A}.\overline{B}$
  - $\overline{(A.B)} = \overline{A}+\overline{B}$
  - $\overline{(A_0 + A_1 + A_2 + \cdots + AN)} = \overline{A_0}.\overline{A_1}.\overline{A_2}.\ldots.\overline{A_N}$

# Réseaux de NOR et de NAND

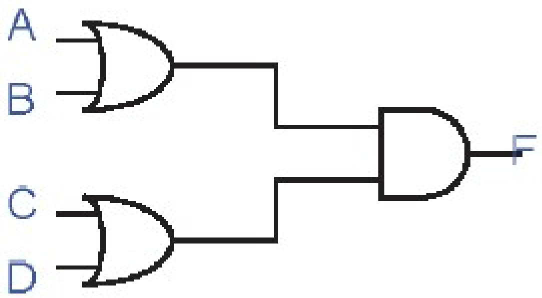
- Intérêt : homogénéiser les opérateurs

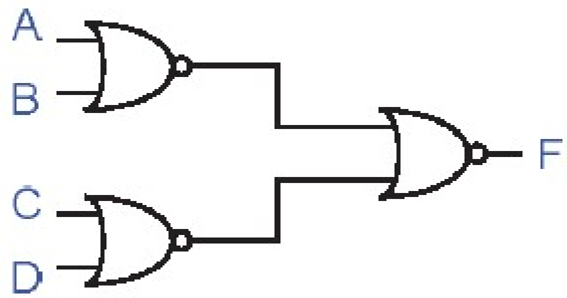



$$F = A.B + C.D$$

$$F = \overline{\overline{(A.B)}.\overline{(C.D)}} = \overline{\overline{A.B}} + \overline{\overline{C.D}} = A.B + C.D$$




$$F = (A + B).(C + D)$$

$$F = \overline{\overline{(A + B)} + \overline{(C + D)}} = \overline{\overline{A + B}}.\overline{\overline{C + D}} = (A + B).(C + D)$$

# Sommaire

# Expressions algébriques : définitions

- Terme somme : $A + B + C + D + \cdots$
- Terme produit : $A.B.C.D.\ \ldots$
- Minterm : terme produit contenant toutes les variables une seule fois

  ex : 3 entrées a,b,c $A.B.C$ $A.\overline{B}.C$ etc...
- Maxterm : terme somme contenant toutes les variables une seule fois

  ex : 3 entrées a,b,c $A+B+C$ $A+\overline{B}+C$ etc...
- Somme de produits canoniques (SPC) : 1e forme canonique

  ex : 3 entrées a,b,c $S = A.B.C + A.\overline{B}.C + \overline{A}.B.\overline{C}$
- Produit de sommes canoniques (PSC) : 2e forme canonique

  ex : 3 entrées a,b,c $S = (A+B+C).(A+\overline{B}+C).(\overline{A}+B+\overline{C})$

ISEN école d'ingénieurs

# Simplification algébrique

## Quelques propriétés utiles :

- $A.B + \bar{A}.B = B$ (1)
- $\bar{A} + A.B = \bar{A} + B$ (2)
- $(A + B).(\bar{A} + B) = B$ (3)

## Règles de simplification :

- Regrouper les termes à l'aide des identités ci-dessus

  ex : $A.B.C + A.B.\bar{C} + A.\bar{B}.C.D = A.B + A.\bar{B}.C.D$ $(identité\ 1)$

  $= A.(B + \bar{B}.C.D)$ $(factorisation\ par\ A)$

  $= A.(B + C.D)$ $(loi\ de\ simplification)$

- Ajouter un terme déjà existant

  ex : $A.B.C + \bar{A}.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.\bar{C} = A.B.C + \bar{A}.B.C + A.B.C + A.\bar{B}.C + A.B.C + A.B.\bar{C}$

  $= B.C + A.C + A.B$ $(identité\ 1)$

- Supprimer les termes superflus (théorème du consensus)
- Simplifier la forme canonique ayant le nombre de termes minimum

# Sommaire

- Quelques définitions
- Portes logiques de base
- Propriétés et théorèmes
- Simplification algébrique
- Simplification graphique

# Tableaux de Karnaugh : construction

- But : obtenir une expression algébrique simplifiée sous forme SPC ou PSC en minimisant
  - le nombre de sommes (de produits)
  - les produits (les sommes) eux-mêmes

- Exemple de construction : 3 variables d'entrée A, B, C donc $2^3 = 8$ combinaisons possibles

| A | B | C | S |
|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | X |
| 0 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | X |
| 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 1 |

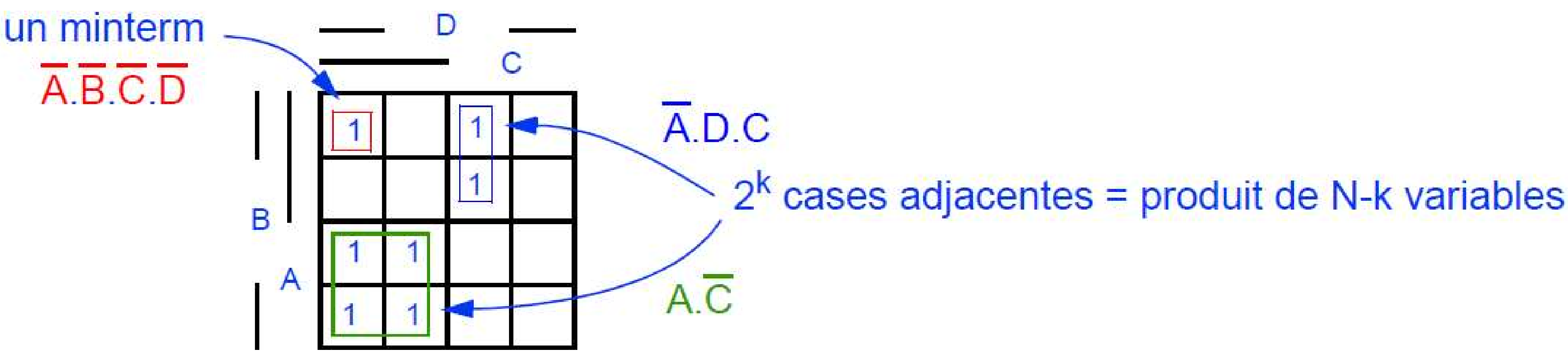
**Codage GRAY : <u>une</u> seule variable change entre 2 lignes**

| | | C | | |
|---|---|---|---|---|
| | | | B | |
| | 0 | X | 1 | X |
| A | 1 | 0 | 1 | 1 |

| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | X | 1 | X |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 |

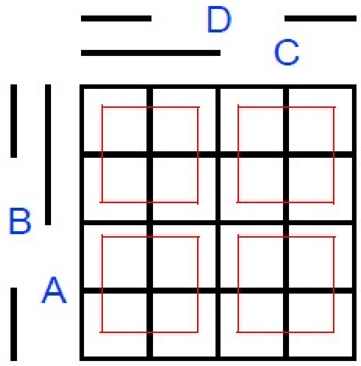
# Tableaux de Karnaugh : propriétés

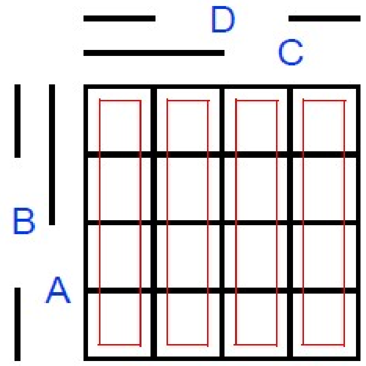
- Propriétés :

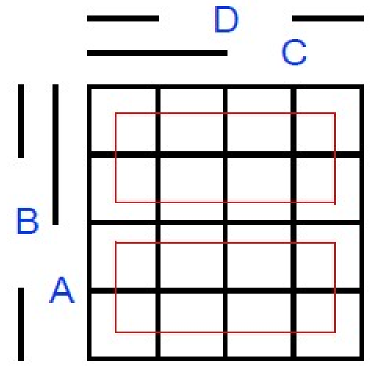



- Simplification des équations logiques :
  - réaliser <u>les plus grands regroupements possibles</u> de ‘0’ ou de ‘1’
  - les ‘X’ peuvent être <u>choisis</u> comme des ‘0’ ou des ‘1’
  - une case peut appartenir à plusieurs groupements
  - pas de groupements "inutiles"
  - tous les ‘0’ ou les ‘1’ doivent appartenir à un regroupement

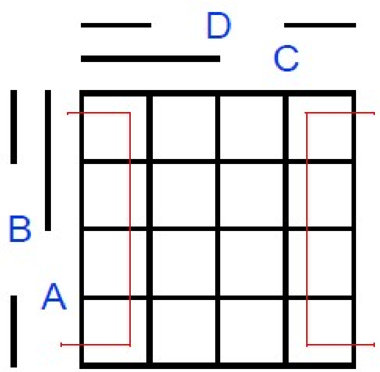
# Exemples de groupements autorisés

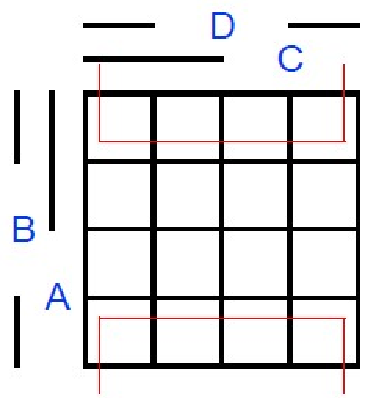


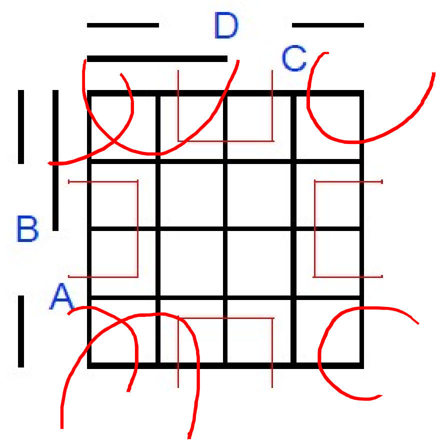




**Penser à utiliser les symétries !**

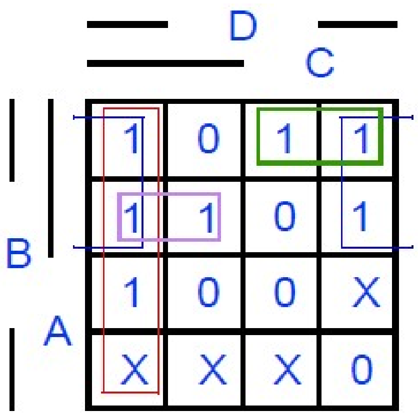


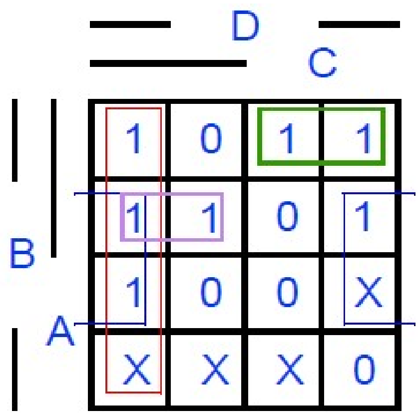



# Minimisation en somme de produits

Regroupement de cellules adjacentes à ‘1’, chaque regroupement est **<u>un produit</u>** (fonction ET), le résultat est **<u>la somme de ces produits</u>** (fonction OU)



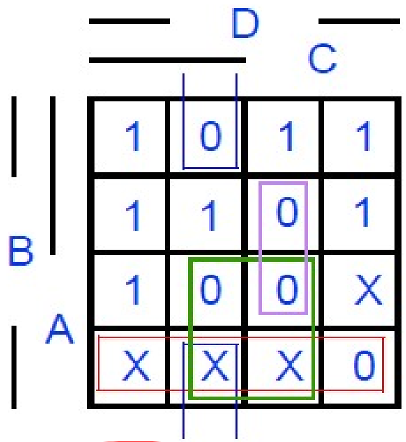

$\mathbf{F} = \bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + \bar{A}.\bar{D}$

$\mathbf{F} = \bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{B}.C + B.\bar{D}$

# Minimisation en produit de sommes

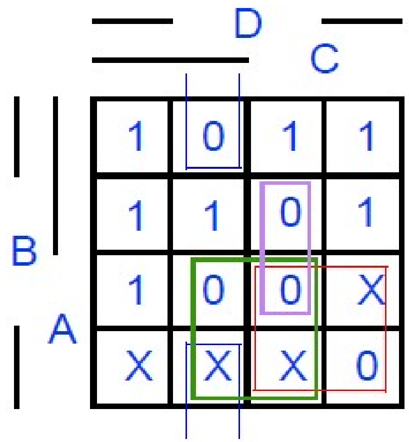
Regroupement de cellules adjacentes à '0', chaque regroupement est **un produit** (fonction ET), le résultat est **la somme de ces produits** (fonction OU)

$F = \overline{\overline{F}}$




$$\overline{\overline{\mathbf{F}}} = \overline{(\mathbf{A}.\overline{\mathbf{B}}) + (\mathbf{A}.\mathbf{D}) + (\mathbf{B}.\mathbf{C}.\mathbf{D}) + (\overline{\mathbf{B}}.\overline{\mathbf{C}}.\mathbf{D})}$$

$$\mathbf{F} = (\overline{\mathbf{A}} + \mathbf{B}).(\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{D}}).(\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{D}}).(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \overline{\mathbf{D}})$$




$$\mathbf{F} = (\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{C}}).(\overline{\mathbf{A}} + \overline{\mathbf{D}}).(\overline{\mathbf{B}} + \overline{\mathbf{C}} + \overline{\mathbf{D}}).(\mathbf{B} + \mathbf{C} + \overline{\mathbf{D}})$$

**La minimisation en somme de produits donne un résultat identique à la minimisation en produit de sommes !**

# Et pour plus de 4 variables ?

Exemple dans le cas d'une fonction à 5 variables d'entrée :

| | | | |
|---|---|---|---|
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 1 | 1 |

E=0

| | | | |
|---|---|---|---|
| 1 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 |

E=1

$$F_0 = \overline{B}.D.\overline{E} + A.C.\overline{D}.\overline{E} \qquad F_1 = D.E + \overline{B}.\overline{C}.E$$

$$F = F0 + F1$$

| | | | |
|---|---|---|---|
| e | 1 | 1 | 0 |
| 0 | e | e | 0 |
| 0 | e | e | $\overline{e}$ |
| e | 1 | 1 | $\overline{e}$ |

$$F = B.D.E + \overline{B}.\overline{C}.\overline{D}.E + \overline{B}.D + A.C.\overline{D}.\overline{E}$$

# Exemple 1

$S_1$

| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$S_1 = \bar{A}.B + A.\bar{B} = A \oplus B$

$\bar{S}_1 = \bar{A}\,\bar{B} + A.B = A \odot B$

$S_1 = \bar{\bar{S}}_1 = \overline{\bar{A}.\bar{B} + A.B}$

$= \overline{\bar{A}.\bar{B}} \quad \overline{A.B} = (A+B).(\bar{A}+\bar{B})$

| A | B | C | $S_1$ | $S_2$ |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 |

$S_2$

| A \ BC | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |

$S_2 = \bar{A}.C + A.\bar{C}$

$\bar{S}_2 = \cancel{A.C} + \bar{A}.\bar{C}$

$S_2 = \bar{\bar{S}}_2 = \overline{A.C + \bar{A}.\bar{C}}$

$= \overline{A.C}\,.\,\overline{\bar{A}.\bar{C}}$

$= (\bar{A}+\bar{C}).(A+C)$

ISEN école d'ingénieurs

# Exemple 2

$S_1$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 1 | 0 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 11 | 1 | 1 | 0 | 0 |
| 10 | 0 | 0 | 0 | 0 |

$S_1 = B.\bar{C} + \bar{A}.\bar{C}.\bar{D} + \bar{A}.C.D$

$\bar{S}_1 = A.\bar{B} + C.\bar{D} + A.C + \bar{B}.\bar{C}.D$

$S_1 = \bar{\bar{S}}_1 = \overline{A\bar{B} + C.\bar{D} + AC + \bar{B}.\bar{C}.D}$

$= \overline{A.\bar{B}} . \overline{C.\bar{D}} . \overline{A.C} . \overline{\bar{B}.\bar{C}.D}$

$= (\bar{A}+B).(\bar{C}+D).(\bar{A}+\bar{C}).(B+C+\bar{D})$

| A | B | C | D | $S_1$ | $S_2$ |
|---|---|---|---|---|---|
| 0 | 0 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 0 | 0 | 0 | 1 | 0 | 1 |
| 0 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 0 | 1 | 1 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 0 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 0 | 1 | 1 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 0 | 0 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 0 | 0 | 1 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 1 | 0 | 1 | 1 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 0 | 0 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 1 | 1 | 1 | 0 | 0 | 1 |
| 1 | 1 | 1 | 1 | 0 | 1 |

$S_2$

| AB \ CD | 00 | 01 | 11 | 10 |
|---|---|---|---|---|
| 00 | 0 | 1 | 1 | 0 |
| 01 | 1 | 0 | 0 | 0 |
| 11 | 0 | 0 | 1 | 1 |
| 10 | 1 | 0 | 1 | 0 |

$S_2 = A.C.D + A.B.C + \bar{A}.\bar{B}.D + \bar{A}.B.\bar{C}.\bar{D} + A.\bar{B}.\bar{C}.\bar{D}$

$\bar{S}_2 = A.B.\bar{C} + \bar{A}.C.\bar{D} + \bar{A}BD + \bar{A}.\bar{B}.\bar{D} + A.\bar{C}.D + \bar{B}.C.\bar{D}$

$S_2 = \bar{\bar{S}}_2 = (A+\bar{C}+D).(\bar{A}+\bar{B}.C).(A+\bar{B}+\bar{D}).(A+B+D).(\bar{A}+C+\bar{D}).(B+\bar{C}+D)$

# Récapitulatif (A savoir)

- Règles d'algèbre de Boole
- Opérateurs standards
- Tables de vérités et tableaux de Karnaugh

# Fin du chapitre 1