$\mathcal{D}$iagonalisation

I – Miscellanées

1. Déterminer les valeurs propres de l'endomorphisme $\varphi : \mathbf{R}[X]_{<n} \to \mathbf{R}[X]_{<n}$ défini par
$$\varphi(f) = X \cdot f'(X).$$
[*Rappel* : $\mathbf{F}[X]_{<n}$ désigne l'espace des polynômes de degré $\leqslant n-1$ à coefficients dans un corps $\mathbf{F}$]

2. Dans chacun des deux cas suivants, est-il possible de trouver une matrice $P \in \mathrm{GL}_2(\mathbf{Q})$ telle que
$$P^{-1}BP = A\ ?$$
a) $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ -2 & -1 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ b) $A = \begin{pmatrix} -3 & -4 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ et $B = \begin{pmatrix} -1 & 2 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$

[Notez qu'il n'est pas demandé de préciser P, seulement de se prononcer sur son (in)existence]

3. Racine carrée matricielle : trouvez une matrice $B \in \mathcal{M}_3(\mathbf{Q})$ telle que
$$B^2 = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ -2 & -4 & -8 \\ 1 & 4 & 8 \end{pmatrix}.$$
[*Indication* : Ce serait bien plus facile si la matrice était diagonale ...]

II – Vandermonde

Dans toute cette section, $\mathbf{F}$ désigne un corps quelconque.

La *matrice de Vandermonde* associée à n scalaires $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{F}$ est par définition la matrice carrée
$$V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \ldots & 1 \\ \lambda_1 & \lambda_2 & \ldots & \lambda_n \\ \lambda_1^2 & \lambda_2^2 & \ldots & \lambda_n^2 \\ \vdots & \vdots & & \vdots \\ \lambda_1^{n-1} & \lambda_2^{n-1} & \ldots & \lambda_n^{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{F}).$$

4. Montrer par récurrence sur n que
$$\mathrm{dét}\, V(\lambda_1, \ldots, \lambda_n) = \prod_{i<j} (\lambda_j - \lambda_i)$$
et conclure qu'une matrice de Vandermonde est inversible $\iff$ les λ_i sont deux à deux distincts.

5. Étant donnés n scalaires *distincts* $\lambda_1, \ldots, \lambda_n \in \mathbf{F}$ ainsi que n autres scalaires (quelconques) $b_1, \ldots, b_n \in \mathbf{F}$, montrer qu'il existe un unique polynôme
$$f(X) = a_0 + a_1 X + \ldots + a_{n-1} X^{n-1} \in \mathbf{F}[X]_{<n}$$
tel que
$$f(\lambda_i) = b_i, \qquad \text{pour } i = 1, \ldots, n.$$
[*Indication* : traduire le problème en système d'équations linéaires dont les inconnues sont $a_0, \ldots, a_{n-1}$]

6. Considérons maintenant un polynôme unitaire de degré n

$$g(X) = c_0 + c_1 X + \cdots + c_{n-1} X^{n-1} + X^n \in \mathbf{F}[X]$$

ainsi que la matrice

$$C_g = \begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & \dots & 0 \\ 0 & 0 & 1 & \ddots & \vdots \\ \vdots & \vdots & \ddots & \ddots & 0 \\ 0 & 0 & \dots & 0 & 1 \\ -c_0 & -c_1 & \dots & -c_{n-2} & -c_{n-1} \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_n(\mathbf{F}).$$

a) Montrer que $v_\lambda = \begin{pmatrix} 1 \\ \lambda \\ \lambda^2 \\ \vdots \\ \lambda^{n-1} \end{pmatrix}$ est vecteur propre pour $C_g \iff g(\lambda) = 0$.

b) En déduire une condition *suffisante* sur les racines de g pour que C_g soit diagonalisable, et préciser une matrice de passage ainsi que la matrice diagonale correspondante.