ISEN Lille 20 novembre 2017

$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

I

a) (R)établir les formules d'éléments de longueur et d'aire en coordonnées polaires :

$$\mathrm{d}\ell = \sqrt{\,r^2 + \big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\big)^2}\;\mathrm{d}\theta, \qquad \mathrm{d}A = |r|\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta.$$

- Élément de longueur : on sait qu'en terme d'une paramétrisation $t \mapsto \mathbf{r}(t)$ on a

$$\mathrm{d}\ell = \left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} \right\| \mathrm{d}t.$$

Pour une paramétrisation polaire, on prend $t = \theta$ et une paramétrisation de la forme

$$\mathbf{r}(\theta) = r(\theta)\,\mathbf{u}_r \qquad \text{avec} \quad \mathbf{u}_r = (\cos\theta,\, \sin\theta).$$

En dérivant cette expression, on trouve

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\,\mathbf{u}_r + r\,\mathbf{u}_\theta \qquad \text{où} \quad \mathbf{u}_\theta = (-\sin\theta,\, \cos\theta).$$

Puisque la base $(\mathbf{u}_r, \mathbf{u}_\theta)$ est orthonormée, on a donc bien

$$\left\| \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta} \right\| = \sqrt{\,\big(\frac{\mathrm{d}r}{\mathrm{d}\theta}\big)^2 + r^2}$$

et donc la formule annoncée.

- Élément d'aire : on sait que pour un changment de variables φ en général l'élément d'aire s'écrit

$$\mathrm{d}A = |\mathrm{jac}(\varphi)|\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$$

Ici, avec

$$\varphi(r,\theta) = (r\cos\theta, r\sin\theta)$$

on a

$$\mathrm{Jac}(\varphi) = \begin{bmatrix} \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}r} & \frac{\mathrm{d}\varphi}{\mathrm{d}\theta} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{bmatrix}$$

d'où

$$\mathrm{jac}(\varphi) = \mathrm{d\acute{e}t}\,\mathrm{Jac}(\varphi) = r$$

et donc la formule annoncée.

b) Application : calculer la longueur de la cardioïde $\mathcal{C}$ d'équation polaire $r = 1 + \cos\theta$ (avec $\theta \in [0, 2\pi]$) ;

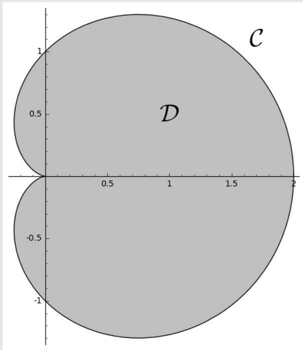
En utilisant la formule de $\mathrm{d}\ell$ rappelée en a), on trouve

$$\ell = \int_{\mathcal{C}} \mathrm{d}\ell = \int_0^{2\pi} \sqrt{(1+\cos\theta)^2 + \sin^2\theta}\,\mathrm{d}\theta = 2\int_0^{2\pi} \big|\cos\frac{\theta}{2}\big|\,\mathrm{d}\theta = 4\int_0^{\pi} \cos\frac{\theta}{2}\,\mathrm{d}\theta = 8\sin\frac{\theta}{2}\Big|_0^{\pi} = 8.$$

c) ainsi que l'aire de la région $\mathcal{D}$ délimitée par $\mathcal{C}$.

En utilisant la formule pour l'élément d'aire rappelée en a), on trouve

$$A = \iint_{\mathcal{D}} \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi} \int_0^{1+\cos\theta} r \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\Big|_0^{1+\cos\theta} \mathrm{d}\theta$$
$$= \int_0^{2\pi} \Big(\frac{1}{2} + \cos\theta + \frac{1}{2}\cos^2\theta\Big) \mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \Big(\frac{3}{4} + \underbrace{\cos\theta + \frac{1}{8}\cos 2\theta}_{\text{moyenne nulle}}\Big) \mathrm{d}\theta$$
$$= \frac{3}{4}\cdot 2\pi = \frac{3\pi}{2}.$$



II

Soit $\mathcal{H}$ la surface dans $\mathbf{R}^3$ paramétrée par

$$x = \cos u - v\sin u, \quad y = \sin u + v\cos u, \quad z = v \qquad (0 \leqslant u \leqslant 2\pi, -1 \leqslant v \leqslant 1).$$

a) Trouver une relation simple entre x^2, y^2 et z^2 et en déduire la nature de $\mathcal{H}$.

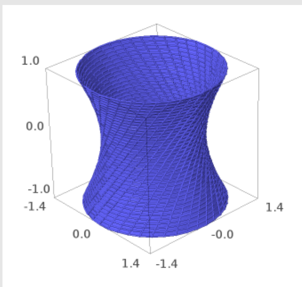
Puisque

$$x^2 = \cos^2 u - 2v\cos u \sin u + v^2 \sin^2 u,$$
$$y^2 = \sin^2 u + 2v\cos u \sin u + v^2 \cos^2 u,$$

on remarque que

$$x^2 + y^2 = 1 + v^2 = 1 + z^2.$$

Il s'agit d'un hyperboloïde à une nappe d'axe Oz.



b) Décrire géométriquement les deux familles de courbes sur $\mathcal{H}$ données par $u = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$, puis $v = \mathrm{c}^{\mathrm{te}}$.

- $u = u_0$: on a une paramétrisation de la forme

$$\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos u_0 \\ \sin u_0 \\ 0 \end{bmatrix} + v \begin{bmatrix} -\sin u_0 \\ \cos u_0 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad (-1 \leqslant v \leqslant 1),$$

  il s'agit d'un segment de droite passant par $(\cos u_0, \sin u_0, 0)$ et dirigée par $(-\sin u_0, \cos u_0, 1)$.

- $v = v_0$: on a déjà vu que $x^2 + y^2 = 1 + v_0^2$, il s'agit donc d'un cercle de rayon $\sqrt{1+v_0^2}$ centré sur l'axe Oz dans le plan $z = v_0$.

  Ou (« approche du physicien ») : si on pose $r_0 = \sqrt{1+v_0^2}$ et $\theta_0 = \operatorname{atan2}(v_0, 1)$, on a

$$\begin{cases} x = r_0 \cos(u + \theta_0) \\ y = r_0 \sin(u + \theta_0) \\ z = v_0 \end{cases}$$

  et on retrouve la même conclusion.

c) Exprimer l'aire de $\mathcal{H}$ sous la forme d'une intégrale double simple explicite (qu'il n'est pas nécessaire d'évaluer).

On sait en général en termes d'une paramétrisation $(u,v) \mapsto \mathbf{r}(u,v)$ que

$$\mathrm{d}A = \left\| \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} \right\| \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v.$$

Ici on a

$$\mathbf{r}(u,v) = \begin{bmatrix} \cos u - v \sin u \\ \sin u + v \cos u \\ v \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} = \begin{bmatrix} -\sin u - v \cos u \\ \cos u - v \sin u \\ 0 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} -\sin u \\ \cos u \\ 1 \end{bmatrix}, \quad \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial u} \wedge \frac{\partial \mathbf{r}}{\partial v} = \begin{bmatrix} \cos u - v \sin u \\ \sin u + v \cos u \\ -v \end{bmatrix}$$

de sorte que

$$\operatorname{aire}(\mathcal{H}) = \iint_{\mathcal{H}} \mathrm{d}A = \int_{-1}^{1} \int_{0}^{2\pi} \sqrt{1 + 2v^2}\, \mathrm{d}u\, \mathrm{d}v = 4\pi \int_0^1 \sqrt{1+2v^2}\, \mathrm{d}v.$$

(Cette dernière intégrale pouvant être évaluée explicitement avec un peu d'efforts, on trouve une aire totale d'environ 15,98 unités carrées).

III

On considère la quadrique $\mathcal{Q}$ d'équation cartésienne $xy + yz + xz - \frac{2}{\sqrt{3}}(x+y+z) + 1 = 0$.

a) Réduire l'équation à l'aide de l'algorithme de Gauss-Lagrange afin de déterminer la nature de $\mathcal{Q}$.

On applique l'algorithme à la matrice augmentée :

$$\widetilde{Q} = \begin{bmatrix} 0 & 1/2 & 1/2 & -1/\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/\sqrt{3} \\ 1/2 & 1/2 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \overset{*_1+*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1 & -2/\sqrt{3} \\ 1/2 & 0 & 1/2 & -1/\sqrt{3} \\ 1 & 1/2 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & -1/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*_2-\frac{1}{2}*_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & -1/4 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \overset{2*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & -1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & 0 & -1/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix}$$

$$\overset{*_3-*_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & -2/\sqrt{3} \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/\sqrt{3} \\ -2/\sqrt{3} & 0 & 1/\sqrt{3} & 1 \end{bmatrix} \overset{*_4+\frac{2}{\sqrt{3}}*_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 1/\sqrt{3} \\ 0 & 0 & 1/\sqrt{3} & -1/3 \end{bmatrix} \overset{*_4+\frac{1}{\sqrt{3}}*_3}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

On obtient une équation réduite de la forme $u^2 - v^2 - w^2 = 0$: un cône.

b) Fabriquer une base orthonormée $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v}, \mathbf{w})$ de $\mathbf{R}^3$ pour laquelle $\mathbf{w}$ est normal au plan $\mathcal{P} : x + y + z = 0$.

Commençons par une base orthogonale $(\mathbf{u}', \mathbf{v}', \mathbf{w}')$ en prenant par exemple $\mathbf{w}' = (1,1,1)$ comme vecteur normal à $\mathcal{P}$. Pour $\mathbf{u}$' on peut partir de n'importe quel vecteur $\mathbf{u}'$ orthogonal à $\mathbf{w}$, par exemple $\mathbf{u}' = (1,-1,0)$ puis puis compléter à l'aide de $\mathbf{v}' = \mathbf{w}' \wedge \mathbf{u}' = (1,1,-2)$. en normalisant, cela donnerait (autres réponses possibles)

$$\mathbf{u} = \left(\frac{1}{\sqrt{2}}, -\frac{1}{\sqrt{2}}, 0 \right), \quad \mathbf{v} = \left(\frac{1}{\sqrt{6}}, \frac{1}{\sqrt{6}}, -\frac{2}{\sqrt{6}} \right), \quad \mathbf{w} = \left(\frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \frac{1}{\sqrt{3}}, \right)$$

c) Vérifier que par rapport à cette base, la quadrique $\mathcal{Q}$ s'écrit $X^2 + Y^2 = 2Z^2$. Est-ce cohérent avec a) ?

Avec les valeurs de la question précédente : la matrice

$$P = \begin{bmatrix} \frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ -\frac{1}{\sqrt{2}} & \frac{1}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \\ 0 & -\frac{2}{\sqrt{6}} & \frac{1}{\sqrt{3}} \end{bmatrix}$$

est la matrice de passage de la base canonique vers $\mathcal{B}$.

On calcule donc :

$$\begin{bmatrix} P^\top & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} \widetilde{Q} \begin{bmatrix} P & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -1/2 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & -1/2 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$$

qui correspond à une équation de la forme

$$-\frac{X^2}{2} - \frac{Y^2}{2} + Z^2 \qquad \underbrace{+2Z + 1}_{\text{manquant dans l'énoncé, toutes mes excuses !}} \qquad = 0$$

soit $X^2 + Y^2 = 2(Z')^2$ avec $Z' = Z + 1$.

Il s'agit bien de l'équation d'un cône : pas exactement la même qu'en a) car on n'a pas fait le même changement de variables ; cette fois-ci il s'agit d'un changement de variables isométrique.