Ce quiz comporte **2** questions équipondérées; répondez directement sur la feuille.

Nom: **CORRIGÉ**

1. On considère le groupe multiplicatif $G = \left\{ \begin{bmatrix} 1 & a & b \\ 0 & 1 & c \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbf{F}_2 \right\}$ agissant par conjugaison sur l'ensemble $X = \mathcal{M}_3(\mathbf{F}_2)$ des matrices 3×3 :

$$g \star x := g \cdot x \cdot g^{-1}.$$

Calculer $\mathrm{Fix}(g)$ pour chaque $g \in G$ et en déduire le nombre d'orbites pour cette action.

Pour $g \in G$, $\mathrm{Fix}(g) = \{\, x \in \mathcal{M}_3(\mathbf{F}_2) \mid g \cdot x = x \cdot g \,\}$ est ici l'ensemble des matrices qui commutent avec g.

On trouve :

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \mathcal{M}_3(\mathbf{F}_2)$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ & a & \\ & d & e \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d, e \in \mathbf{F}_2 \right\} = \mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}^{\top}$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & a-d & a-e \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d, e \in \mathbf{F}_2 \right\} = \mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}^{\top}$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ & a & b \\ & & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c \in \mathbf{F}_2 \right\} = \mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & 1 & \\ & 1 & 1 \\ & & 1 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{Fix} \begin{bmatrix} 1 & & 1 \\ & 1 & \\ & & 1 \end{bmatrix} = \left\{ \begin{bmatrix} a & b & c \\ & d & e \\ & & a \end{bmatrix} \;\middle|\; a, b, c, d, e \in \mathbf{F}_2 \right\}.$$

Il suit, d'après la formule de Cauchy-Frobenius, que le nombre d'orbites pour cette action est

$$|G \setminus X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)| = \frac{2^9 + 5 \cdot 2^5 + 2 \cdot 2^3}{2^3} = 86.$$

2. Évaluer le déterminant suivant à l'aide d'opérations lignes ou colonnes *de deux façons différentes* :

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix}$$

(bien indiquer les opérations effectuées).

Moult résolutions possibles ; en voici deux parmi tant d'autres.

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{\ell_1-\ell_2 \\ \ell_3-2\ell_2 \\ \ell_4-3\ell_2}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ -6 & 0 & 1 & 2 \\ -8 & 0 & 3 & 1 \end{vmatrix} \overset{\substack{\ell_2+4\ell_1 \\ \ell_3-6\ell_1 \\ \ell_4-8\ell_1}}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 2 \\ 0 & 1 & 8 & 9 \\ 0 & 0 & -11 & -10 \\ 0 & 0 & -13 & -15 \end{vmatrix} \overset{c_4-c_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -13 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{\ell_4+2\ell_3}{=} \begin{vmatrix} -1 & 0 & 2 & 0 \\ 0 & 1 & 8 & 1 \\ 0 & 0 & -11 & 1 \\ 0 & 0 & -35 & 0 \end{vmatrix} \overset{c_3\leftrightarrow c_4}{=} - \begin{vmatrix} -1 & 0 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 & 8 \\ 0 & 0 & 1 & -11 \\ 0 & 0 & 0 & -35 \end{vmatrix} = -(-1\cdot 1\cdot 1\cdot -35) = -35;$$

ou encore

$$\begin{vmatrix} 3 & 1 & 2 & 3 \\ 4 & 1 & 0 & 1 \\ 2 & 2 & 1 & 4 \\ 4 & 3 & 3 & 4 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1-3c_2 \\ c_3-2c_2 \\ c_3-3c_2}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & -2 \\ -4 & 2 & -3 & -2 \\ -5 & 3 & -3 & -5 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_3+2c_1 \\ c_4+2c_1}}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -11 & -10 \\ -5 & 3 & -13 & -15 \end{vmatrix} \overset{c_4-c_3}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & -11 & 1 \\ -5 & 3 & -13 & -2 \end{vmatrix}$$

$$\overset{c_3+11c_4}{=} \begin{vmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ -4 & 2 & 0 & 1 \\ -5 & 3 & -35 & -2 \end{vmatrix} \overset{\substack{c_1\leftrightarrow c_2 \\ c_3\leftrightarrow c_4}}{=} \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & -4 & 1 & 0 \\ 3 & -5 & -2 & -35 \end{vmatrix} = 1\cdot 1\cdot 1\cdot(-35) = -35.$$