CIR2CNB2 | **Séries numériques**
2020-2021 | **Résumé de cours**

I/ Définition, propriétés globales

1. Introduction

On se donne $(u_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de complexes.

Étudier la série associée, notée $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$, c'est étudier la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ définie par $S_n = u_0 + u_1 + ... + u_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$.

S_n est appelée somme partielle de rang n de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$

2. Convergence

On dit que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ <u>converge</u> si et seulement si la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$ des sommes partielles converge.

Dans ce cas on appelle <u>somme</u> de la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et on note $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ la limite de la suite $(S_n)_{n\in\mathbb{N}}$:

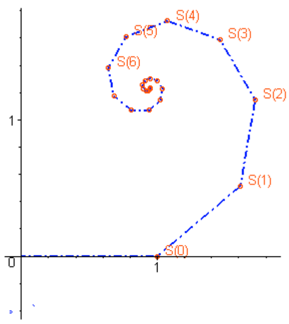
$$\sum_{n=0}^{\infty} u_n = \lim_{n\to\infty} S_n = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=0}^{n} u_k\right)$$

Sinon on dira que $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ <u>diverge</u>. Dans ce cas la notation $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ n'a pas de sens.

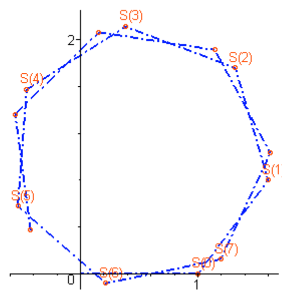
Exemple fondamental : Série géométrique $u_n = r^n$, où r est un complexe fixé.

Soit $r \in \mathbb{C}$. La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ converge si et seulement si $|r| < 1$

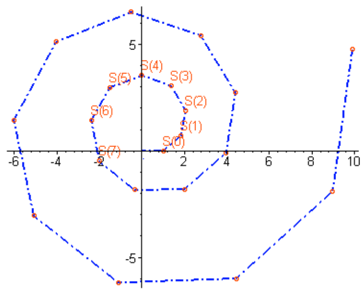
et dans ce cas, sa somme est $\sum_{n=0}^{\infty} r^n = \dfrac{1}{1-r}$



$r = \frac{4}{5}e^{7i/10}$ **:** $\sum_{n=0}^{\infty} r^n \approx 0.932 + 1.238\,i$



$r = \frac{3}{5} + \frac{4}{5}i$



$r = \frac{11}{10}e^{7i/10}$

Cas particulier : Si r est un réel, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} r^n$ converge si et seulement si $-1 < r < 1$

Théorème : Condition nécessaire de convergence

Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge, alors nécessairement $\lim_{n\to+\infty} u_n = 0$:

Si la <u>série</u> de terme général u_n <u>converge</u>, alors nécessairement la <u>suite</u> de terme général u_n <u>converge vers 0</u>

Remarque : La réciproque est fausse. Contre-exemple $u_n = \dfrac{1}{n}$ (série harmonique).

3. Opérations sur les séries

Soient λ un complexe et $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries de complexes.

1. Si les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ convergent, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda u_n + v_n$ converge également,

   et $\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda u_n + v_n) = \lambda\sum_{n=0}^{\infty} u_n + \sum_{n=0}^{\infty} v_n$.

2. Si l'une des deux séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge et l'autre diverge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n + v_n$ diverge.

3. Si les deux séries divergent, alors on ne sait rien sur la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_{\mathrm{n}} + v_n$.

4. Les séries $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} \lambda u_n$ sont de même nature si $\lambda \neq 0$.

II/ Séries à termes réels positifs

Remarque fondamentale

Si tous les u_n sont des réels positifs, la suite des sommes partielles est croissante.

1. Critère de majoration des sommes partielles

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série de réels positifs.

La série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement si la suite (S_n) des sommes partielles est majorée.

2. Critère de majoration du terme général

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $\forall n \in \mathbb{N} / u_n \leqslant v_n$.

Alors :

- Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge également.
- Si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge, alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ diverge également.

3. Critère d'équivalence

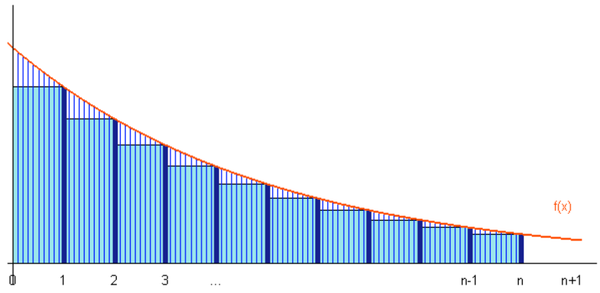
Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ deux séries à termes positifs telles que $u_n \sim v_n$ (i.e. $\frac{u_n}{v_n} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$)

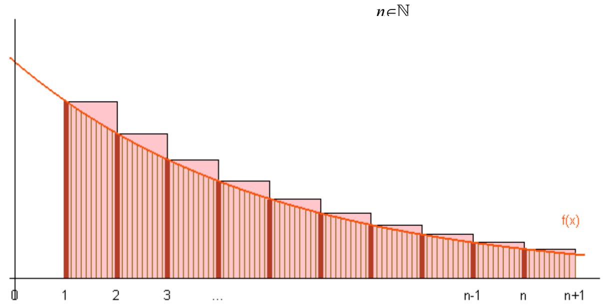
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} v_n$ converge.

On dit que les deux séries sont de même nature.

4. Critère de comparaison à une intégrale

Soit f une fonction continue sur $[0,\infty[$, <u>positive</u> et <u>décroissante</u>. On étudie la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ où $u_n = f(n)$





Dans ce cas la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge si et seulement l'intégrale $\int_0^n f(t)\,dt$ a une limite quand $n \to \infty$.

5. Séries de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ pour α réel strictement positif

Si $\alpha \leqslant 1$, la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ diverge (en particulier la série harmonique $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}$ diverge)

Si $\alpha > 1$, la série de Riemann $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}$ converge.

6. Critère de D'Alembert

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série à termes <u>strictement positifs</u> telles que $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ <u>ait une limite</u> L réelle ou $+\infty$.

- Si $L < 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge
- Si $L > 1$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge
- Si $L = 1$, le critère ne permet pas de conclure

exemples

$\sum n^2 e^{-n}$ Soit $u_n = n^2 e^{-n} \quad \forall n / u_n > 0$ $\qquad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^2 e^{-n-1}}{n^2 e^{-n}} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^2 e^{-1} \to e^{-1} < 1$

$$\sum_{n\geqslant 1} \frac{n^n}{n!} \quad \frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)^{n+1}}{n^n} \frac{n!}{(n+1)!} = \left(\frac{n+1}{n}\right)^n = \left(1+\frac{1}{n}\right)^n \to e > 1 \text{ car } \ln\left(\left(1+\frac{1}{n}\right)^n\right) = n \ln\left(1+\frac{1}{n}\right) = n\left(\frac{1}{n}+\frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)\right) \to 1$$

Remarques :

→ Si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ n'a pas de limite, le critère de D'Alembert ne s'applique pas.

→ Si les u_n ne sont pas tous positifs , le critère de D'Alembert ne s'applique pas à $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$.

Mais on peut l'essayer pour la convergence absolue.

→ Le critère compare la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ à une série géométrique.

Il est donc inutile si la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ est elle-même une série géométrique (i.e. si $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ est constante)

→

7. Série exponentielle : Pour tout complexe z , la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{z^n}{n!}$ converge absolument. (rappel : 0 ! est égal à 1)

La somme de cette série est notée $\exp(z)$: $\boxed{\forall z \in \mathbb{C} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{z^n}{n!} = \exp(z)}$. On démontre que

→ si z est un réel x, on retrouve la fonction exponentielle bien connue. $\boxed{\forall x \in \mathbb{R} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x}$

→ si $z = i\,\theta$, on retrouve les fonctions sinus et cosinus $\boxed{\forall \theta \in \mathbb{R} \ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(i\,\theta)^n}{n!} = e^{i\,\theta} = \cos\theta + i\,\sin\theta}$

III/ Séries à termes quelconques

1. Convergence absolue

Définition : Une série de complexes $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument ('est absolument convergente')

si et seulement si la série des valeurs absolues (modules) $\sum_{n\in\mathbb{N}} |u_n|$ converge.

Propriété : Si une série de complexes $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument, alors elle converge et $\left|\sum_{n=0}^{\infty} u_n\right| \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} |u_n|$.

Remarque : La réciproque est fausse : une série peut être convergente sans être absolument convergente. On dit alors qu'elle est semi-convergente. Exemple : la série harmonique alternée $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$

2. Critère des séries alternées (Leibniz)

Théorème

Si $(v_n)\, n\in\mathbb{N}$ est une suite <u>décroissante</u> et <u>qui tend vers 0</u>

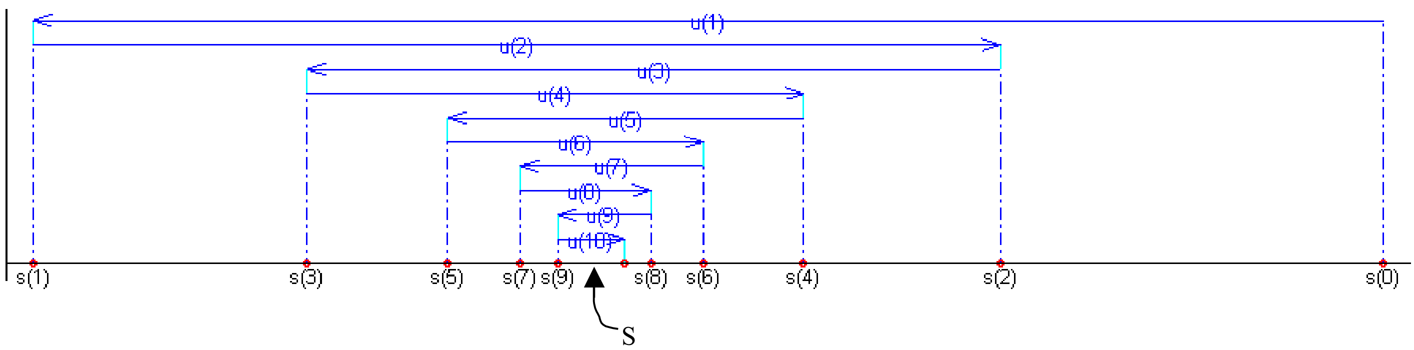
Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} (-1)^n v_n$ converge

et sa somme est toujours comprise entre deux sommes partielles consécutives

Si $u_n = (-1)^n v_n$, (v_n) décroissante et $\lim_{n\to\infty} v_n = 0$ alors $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et

$$\forall n \in \mathbb{N} / v_0 - v_1 + v_2 \ldots + v_{2n} - v_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant v_0 - v_1 + v_2 \ldots - v_{2n-1} + v_{2n},$$

$$\text{soit } S_{2n+1} = \sum_{k=0}^{2n+1} u_k \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant S_{2n} = \sum_{k=0}^{2n} u_k$$



Exemple : La série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^n}{n}$ (série harmonique alternée) converge (mais n'est pas absolument convergente).

3. Série d'Abel

Théorème

Pour tout $\theta \in]0, 2\pi[$ et tout $\alpha > 0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ est convergente.

4. Utilisation des développements limités

Lemme : Pour tout $\alpha > 1$, si $\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right) \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$, la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ est absolument convergente.

exemple $u_n = \ln\left(1 + \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$: $u_n = \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}} - \frac{1}{2}\frac{1}{n} + \frac{(-1)^n}{3n^{3/2}}\varepsilon\left(\frac{1}{n^{3/2}}\right)$ donc $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ diverge

Attention la série $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n}\varepsilon\left(\frac{1}{n}\right)$ ne converge pas forcément ! Exemple $\sum_{n\geqslant 2} \frac{1}{n\ln(n)}$ diverge.

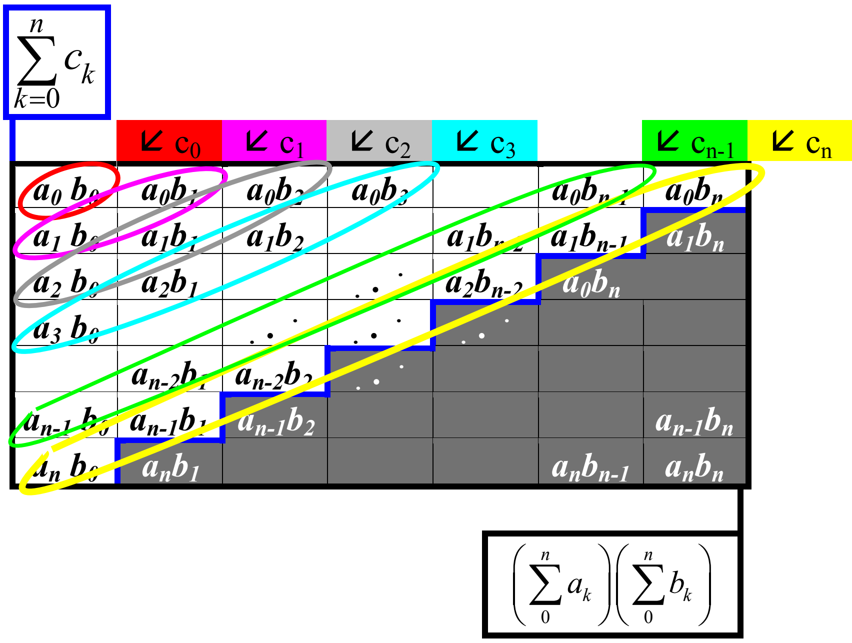
IV/ Séries absolument convergentes

1. Produit de deux séries absolument convergentes (Produit de Cauchy)

Soient $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ et $\sum_{n\in\mathbb{N}} b_n$ deux séries absolument convergentes.

Pour tout naturel n, on pose $c_n = a_0 b_n + a_1 b_{n-1} + \ldots + a_{n-1} b_1 + a_n b_0$, soit $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} c_n$ converge absolument et $\sum_{n=0}^{\infty} c_n = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right)\left(\sum_{n=0}^{\infty} b_n\right)$



2. Séries doubles

Théorème (Fubini) pour les séries doubles de réels positifs

Soit $\left(a_{i,j}\right)_{\substack{i\in\mathbb{N}\\ j\in\mathbb{N}}}$ une suite double de réels.

On suppose	Alors
(1) $\forall (i,j)\in\mathbb{N}\times\mathbb{N}\ /\ a_{i,j} \geqslant 0$ (2) $\forall i\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{j\in\mathbb{N}} a_{i,j}$ converge (3) la série $\sum_{i\in\mathbb{N}}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ converge On note $S = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$	(i) $\forall j\in\mathbb{N}$, la série $\sum_{i\in\mathbb{N}} a_{i,j}$ converge (ii) la série $\sum_{j\in\mathbb{N}}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$ converge (iii) $\sum_{j=0}^{\infty}\left(\sum_{i=0}^{\infty} a_{i,j}\right) = \sum_{i=0}^{\infty}\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_{i,j}\right)$

V/ Calcul approché de séries numériques

1. Généralités

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ une série numérique convergente.

Soient $S = \sum_{n=0}^{\infty} u_n$ sa somme, $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$ sa somme partielle de rang *n* et $R_n = S - S_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k$ son reste de rang *n*.

Pour calculer une valeur approchée de $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ à ε près :

1. On trouve un rang *N* pour duquel $\left|R_n\right| < \varepsilon' < \varepsilon$ (par exemple $\varepsilon' = \dfrac{\varepsilon}{2}$)
2. On calcule une valeur approchée de S_N à $(\varepsilon - \varepsilon')$ près (dans l'exemple, à $\dfrac{\varepsilon}{2}$ près)

2. Série alternée

Soit $u_n = (-1)^n v_n$ telle que (v_n) décroissante et $\lim\limits_{n\to\infty} v_n = 0$.

On sait que la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge et que $\forall n \in \mathbb{N} / S_{2n+1} \leqslant \sum_{n=0}^{\infty} u_n \leqslant S_{2n}$ donc $u_{2n+1} \leqslant R_{2n} \leqslant 0$ et $0 \leqslant R_{2n+1} \leqslant u_{2n+2}$

On retiendra $\forall n \in \mathbb{N} / \left|R_n\right| \leqslant \left|u_{n+1}\right|$ (le reste de rang *n* est majoré en valeur absolue par le premier terme négligé)

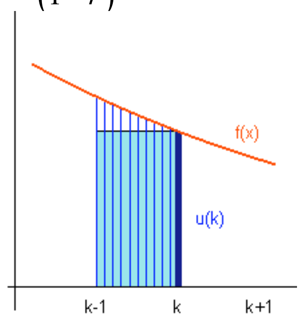
On choisit alors *N* tel que $\left|u_{N+1}\right| < \dfrac{\varepsilon}{2}$

3. Majoration par une série géométrique

Soit u_n telle qu'il existe un réel *r* tel que $|r| < 1$ et $\forall n \in \mathbb{N} / \left|u_n\right| \leqslant r^n$.

Alors la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} u_n$ converge absolument et $\forall n \in \mathbb{N} / \left|R_n\right| \leqslant K \sum_{k=n+1}^{\infty} \left|u_k\right| \leqslant K \sum_{k=n+1}^{\infty} r^k = \dfrac{K\, r^{n+1}}{(1-r)}$.

On choisit alors *N* tel que $\dfrac{K\, r^{N+1}}{(1-r)} < \dfrac{\varepsilon}{2}$



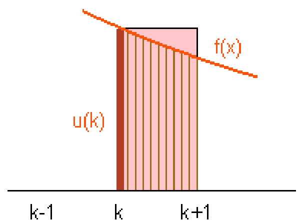
4. Majoration par une intégrale

Soit *f* une fonction de $\mathbb{R}^+$ dans $\mathbb{R}^+$ décroissante telle que $\int_0^n f(t)\,dt \xrightarrow[n\to\infty]{} L$

Alors la série de terme général $u_n = f(n)$ converge et $\forall n, p \in \mathbb{N} / \sum_{k=n+1}^{p} u_k \leqslant \sum_{k=n+1}^{p} \left(\int_{k-1}^{k} f(t)\,dt \right) = \int_n^p f(t)\,dt$.

Donc $\forall n \in \mathbb{N} / R_n = \sum_{k=n+1}^{\infty} u_k \leqslant \lim\limits_{p\to\infty} \int_n^p f(t)\,dt$ notée $\int_n^{\infty} f(t)\,dt$

On choisit alors *N* tel que $\int_n^{\infty} f(t)\,dt < \dfrac{\varepsilon}{2}$



Remarque : On peut aussi noter que

$$\forall n, p \in \mathbb{N} / \sum_{k=n+1}^{p} u_k \geqslant \sum_{k=n+1}^{p} \left(\int_k^{k+1} f(t)\,dt \right) = \int_{n+1}^{p+1} f(t)\,dt \text{ et donc } \forall n \in \mathbb{N} / R_n \geqslant \int_{n+1}^{\infty} f(t)\,dt$$