CIR$_2$

Relations binaires
Résumé de cours

I/ ***Relations binaires***

1. Définition

Soit un ensemble E. Une relation binaire $\mathcal{R}$ sur E est définie par un sous-ensemble G de $E \times E$.

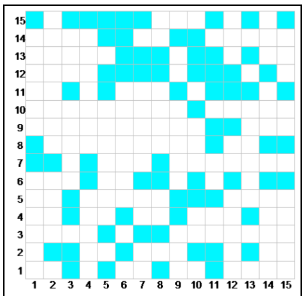
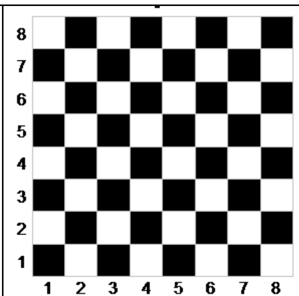
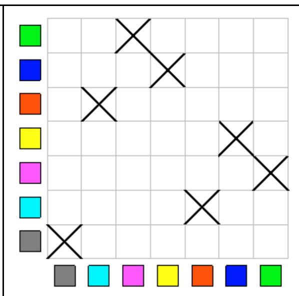
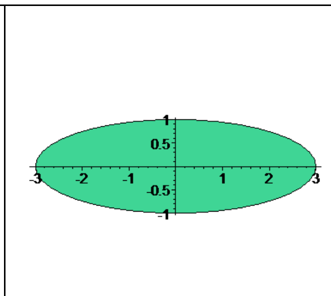
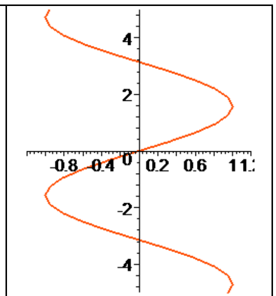
Si $(x, y) \in E \times E$ on écrira : $x \,\mathcal{R}\, y$ pour dire que $(x, y) \in G$

On dit que G est le graphe de $\mathcal{R}$

Exemples

Dans $E = \{a, b, c, d, e\}$, $\mathcal{R}_0$ définie par $G = \{(a,b),(a,e),(b,a),(b,c),(c,c),(d,d)\}$

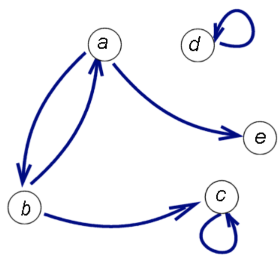
Exemples de représentation du graphe

				
Une relation aléatoire dans $\{1,..15\}$	dans $\{1,..8\}$ $a \,\mathcal{R}\, b \Leftrightarrow a-b$ est pair	Couleurs complémentaires	dans $\mathbb{R}$ $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow 4x^2+9y^2<36$	dans $\mathbb{R}$ $x \,\mathcal{R}\, y \Leftrightarrow x=\sin y$

2. Représentation

- Représentation sagittale

Exemple pour $\mathcal{R}_0$



- Matrice d'une relation sur un ensemble E fini (ou matrice d'adjacence)

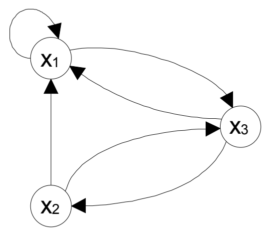
Si $E = \{x_1, x_2, .., x_n\}$ C'est la matrice $M \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ telle que $\forall i, j \,/\, M_{i,j} = 1 \Leftrightarrow x_i \,\mathcal{R}\, x_j$

Exemples

Pour $\mathcal{R}_0$, matrice d'adjacence

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{pmatrix}$$

Pour



$$A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \end{pmatrix}$$

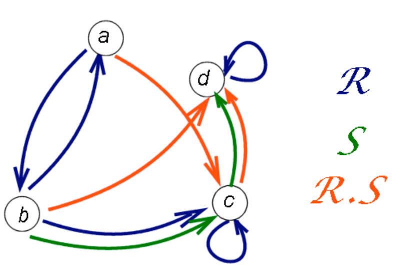
3. Produit de 2 relations

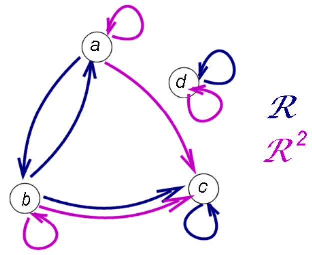
- Définition

  Soient $\mathcal{R}$ et S deux relations binaires sur E. Le produit de ces 2 relations est la relation $\mathcal{P}$ telle que

  $$\forall(x,z) \in E\times E \,/\, x \,\mathcal{P}\, z \Leftrightarrow \exists y \in E \text{ tel que } x \,\mathcal{R}\, y \text{ et } y \,\mathcal{S}\, z$$

  On définit ainsi la relation $\mathcal{R}^2$ (produit de $\mathcal{R}$ par elle-même),… la relation $\mathcal{R}^k$





- Fermeture transitive d'une relation $\mathcal{R}$.

  C'est la relation $\mathcal{R}^*$ telle que $\forall(x,y) \in E\times E \,/\, x \,\mathcal{R}^*\, y \Leftrightarrow \exists k \in \mathbb{N}^* \text{ tel que } x \,\mathcal{R}^k\, y$

  Exemple : généalogie

  E = l'ensemble des individus d'une même famille depuis plusieurs générations.

  Soient les relations binaires :

  - x $\mathcal{R}$ y ssi x est le père de y
  - x $\mathcal{S}$ y ssi x est la mère de y
  - x $\mathcal{T}$ y ssi x est un enfant de y

  On peut définir les liens familiaux à l'aide des opérations sur les relations binaires :

  $\mathcal{R}^2$ = est grand père paternel de

  $\mathcal{S}^2$ = est grand mère maternelle de

  $\mathcal{R}.\mathcal{S}$ = est grand père maternel de

  $\mathcal{S}.\mathcal{R}$ = est grand mère paternelle de

  $\mathcal{P} = (\mathcal{R}$ *ou* $\mathcal{S})$ = est parent de

  $\mathcal{P}^*$ = est un ancêtre de

  $\mathcal{T}^*$ = est un descendant de

  $\mathcal{T}.\mathcal{P}$ = est frère ou sœur de (ou soi-même).

- Matrice du produit, de la fermeture transitive

  On définit les opérations $\oplus$ et $\otimes$ dans { 0, 1 } par les tables :

$\oplus$	0	1
0	0	1
1	1	1

et

$\otimes$	0	1
0	0	0
1	0	1

On étend alors les opérations $\oplus$ et $\otimes$ à $\mathcal{M}_n(\{0,1\})$:

Pour A et $B \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$, en notant $A = (a_{i,j})$ et $B = (b_{i,j})$,

on pose $A \oplus B = (a_{i,j} \oplus b_{i,j})$ et $A \otimes B = \left(\bigoplus_{k=1}^{n} (a_{i,k} \otimes b_{k,j})\right)$.

Pour $A \in \mathcal{M}_n(\{0,1\})$ on pose $A^{\otimes 2} = A \otimes A$, $A^{\otimes 3} = A \otimes A \otimes A, \ldots, A^{\otimes(k+1)} = A^{\otimes k} \otimes A$.

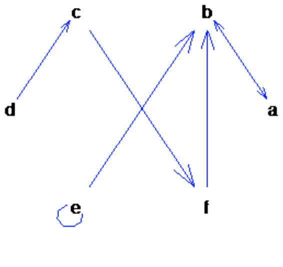
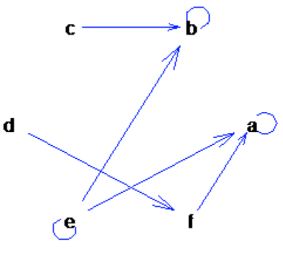
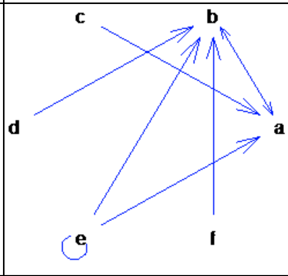
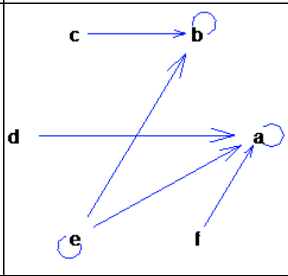
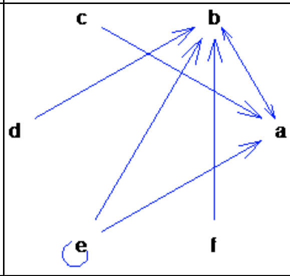
Alors, si A est la matrice de $\mathcal{R}$ et B la matrice de $\mathcal{S}$, on a

$A \otimes B$ est la matrice de $\mathcal{R}.\mathcal{S}$

$A^{\otimes k}$ est la matrice de $\mathcal{R}^k$

$\bigoplus_k \left(A^{\otimes k}\right)$ est la matrice de $\mathcal{R}^*$

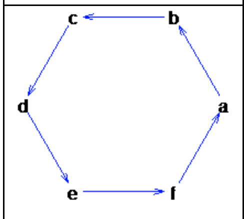
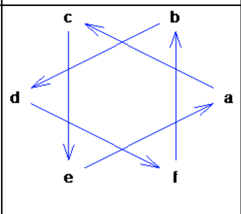
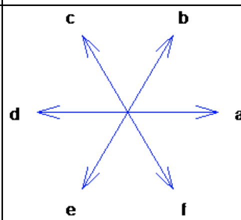
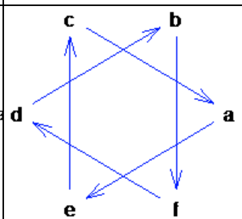
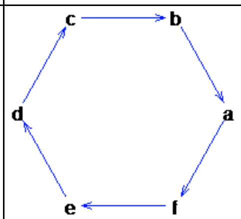
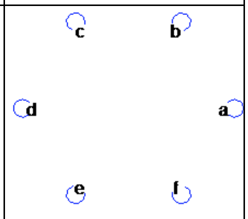
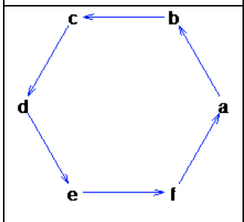
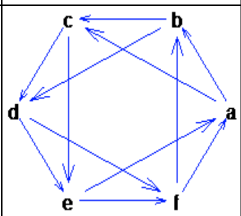
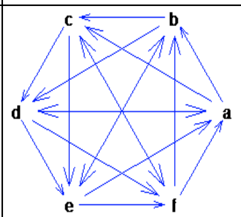
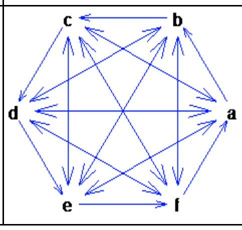
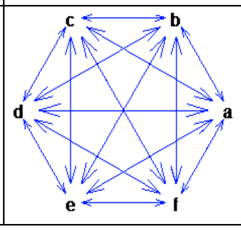
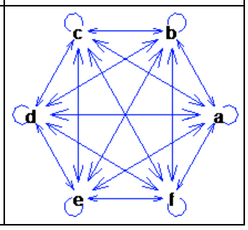
Exemple

$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}^4$	$\mathcal{R}^5$
				
A	$A^{\otimes 2}$	$A^{\otimes 3}$	$A^{\otimes 4}$	$A^{\otimes 5}$
$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 0&0&1&0&0&0 \\ 0&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&0&0&0&0&1 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \end{bmatrix}$	$\begin{bmatrix} 0&1&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 1&0&0&0&0&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \\ 1&1&0&0&1&0 \\ 0&1&0&0&0&0 \end{bmatrix}$

Propriétés : Si $\mathcal{R}^{k+1} = \mathcal{R}^k$ alors $\forall i \geqslant k \ \mathcal{R}^i = \mathcal{R}^k$

Si $Card(E) = n$ alors $\mathcal{R}^* = \left(\mathcal{R} \text{ ou } \mathcal{R}^2 \text{ ou} \ldots \text{ ou } \mathcal{R}^n\right)$, soit $A^* = \bigoplus_{k=1}^{n}\left(A^{\otimes k}\right)$

Exemple

$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}^4$	$\mathcal{R}^5$	$\mathcal{R}^6$
					
$\mathcal{R}$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2$ ou $\mathcal{R}^3$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2 \ldots \mathcal{R}^4$	$\mathcal{R}$ ou $\mathcal{R}^2 \ldots \mathcal{R}^5$	$\mathcal{R}^*$
					

Complexité :

Le calcul du produit de 2 matrices $n \times n$ est de complexité $O\left(n^3\right)$

(on peut certes améliorer si la matrice est très "creuse")

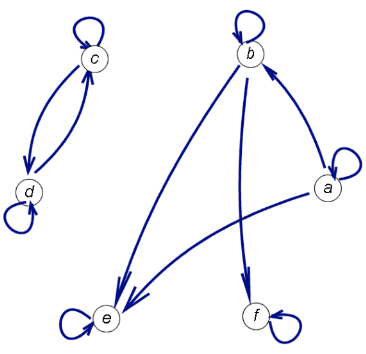
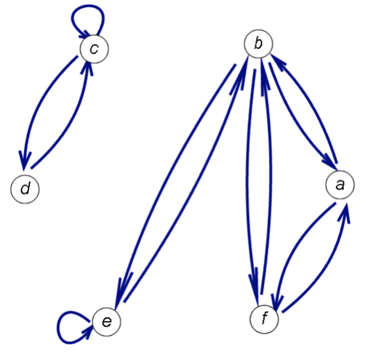
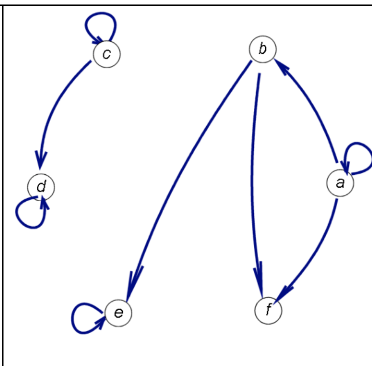
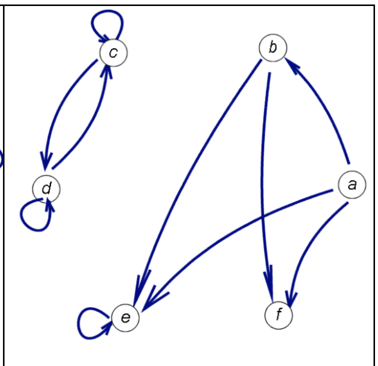
Le calcul de $A^{\otimes n}$ est donc de complexité $O\left(n^4\right)$

En faisant le produit "binaire" on peut arriver à une complexité $O\left(n^3 \ln(n)\right)$

4. Propriétés des relations binaires

Soit $\mathcal{R}$ une relation sur E. On dit que $\mathcal{R}$ est :

- réflexive ssi $\forall x \in E \;/\; x \;\mathcal{R}\; x$
- symétrique ssi $\forall (x,y) \in E \times E \,/\, x \;\mathcal{R}\; y \Leftrightarrow y \;\mathcal{R}\; x$
- antisymétrique ssi $\forall (x,y) \in E \times E \,/\, \left(x \;\mathcal{R}\; y \text{ et } y \;\mathcal{R}\; x \right) \Rightarrow \left(x = y \right)$
- transitive ssi $\forall (x,yz) \in E \times E \times E \,/\, \left(x \;\mathcal{R}\; y \text{ et } y \;\mathcal{R}\; z \right) \Rightarrow \left(x \;\mathcal{R}\; z \right)$

			
réflexive, non symétrique, non antisymétrique, non transitive	symétrique, non réflexive, non antisymétrique, non transitive	antisymétrique, non réflexive, non symétrique, non transitive	transitive, non réflexive, non symétrique, non antisymétrique

Si $\mathcal{R}$ est transitive,

on peut sans risque écrire $x_1 \mathcal{R}\, x_2 \,\mathcal{R}\, x_3 \,\mathcal{R}\, \ldots \,\mathcal{R}\, x_{k-1} \mathcal{R}\, x_k$ au lieu de $\left(x_1 \mathcal{R}\, x_2 \text{ et } x_2 \mathcal{R}\, x_3 \text{ et} \ldots \text{ et } x_{k-1} \mathcal{R}\, x_k \right)$,

mais on s'interdira de le faire si $\mathcal{R}$ n'est pas transitive :

Exemple : ne pas écrire $x \neq y \neq z$ car on ne sait pas si $x = z$ ou si $x \neq z$

Remarque : $\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow \mathcal{R}^2$ est contenue dans $\mathcal{R}$,

et si A est la matrice de $\mathcal{R}$, $\mathcal{R}$ est transitive $\Leftrightarrow A \oplus A^{\otimes 2} = A$

Remarque : si $\mathcal{R}$ est réflexive alors $\mathcal{R}$ est contenue dans $\mathcal{R}^2$,

et donc $A \oplus A^{\otimes 2} = A^{\otimes 2}$, $A \oplus A^{\otimes 2} \oplus A^{\otimes 3} = A^{\otimes 3} \ldots$

La matrice de la fermeture transitive de $\mathcal{R}$ est donc $A^* = A \oplus A^{\otimes 2} \oplus \ldots \oplus A^{\otimes n} = A^{\otimes n}$

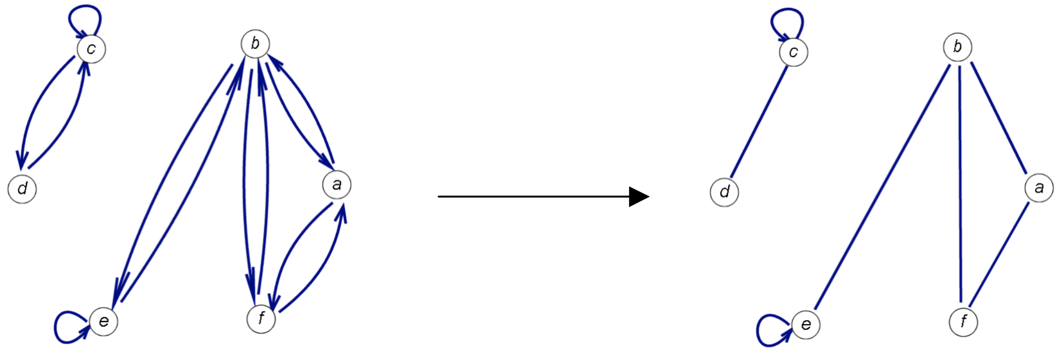
Comme $A^{\otimes n} = A^{\otimes n+} = A^{\otimes n+2} = \ldots$ son calcul est en $O\left(n^3 \ln(n)\right)$

Exemple pour $n = 2020$, on calcule $A^{\otimes 2}, A^{\otimes 4}, A^{\otimes 8}, \ldots A^{\otimes 1024}, A^{\otimes 2048}$ en 10 multiplications

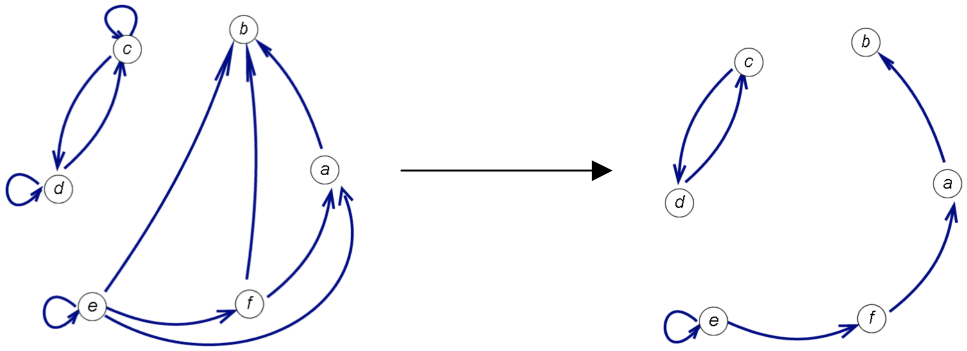
et $A^* = A^{\otimes 2020} = A^{\otimes 2048}$ est la matrice de $\mathcal{R}^*$

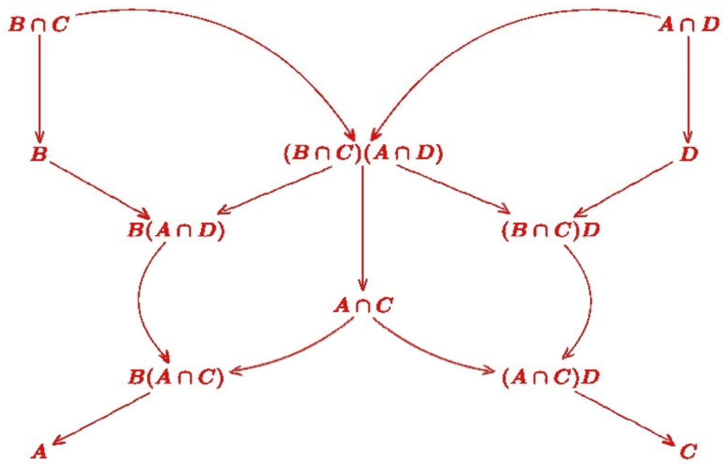
On peut simplifier la représentation d'une relation …

- quand elle est symétrique (segments au lieu de flêches)



- quand elle est transitive : On ne trace que flèches que l'on ne peut pas déduire des autres par transitivité





"Butterfly lemma"

Interprétation des propriétés d'une relation $\mathcal{R}$ par sa matrice d'adjacence M :

- $\mathcal{R}$ est réflexive ssi tous les termes de la diagonale de M sont égaux à 1
- $\mathcal{R}$ est symétrique ssi M est symétrique
- si M est antisymétrique alors $\mathcal{R}$ est antisymétrique mais si $\mathcal{R}$ est antisymétrique, M peut avoir des termes non nuls sur la diagonale (boucles de $\mathcal{R}$) dans ce cas elle n'est pas antisymétrique.
- $\mathcal{R}$ est transitive ssi $M \oplus M^{\otimes 2} = M$
- La fermeture transitive de $\mathcal{R}$ est la "plus petite" relation transitive "contenant" $\mathcal{R}$. On la note $\mathcal{R}^*$