II/ *Relation d'équivalence*

1. Définitions

Une relation binaire $\mathcal{R}$ définie sur E est une **relation d'équivalence** si elle est

1. réflexive
2. symétrique
3. transitive

2. Classes d'équivalence

Rappel : Soit E un ensemble fini, $A_1, A_2, ..., A_n$ n parties de E.

On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forme une partition de E ssi les A_i sont disjoints 2 à 2 et leur réunion est égale à E.

c'est-à-dire $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall i, j$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur E.

Pour tout élément x de E on note : $C(x) = \{ y \in E \mid x \, R \, y \}$: classe d'équivalence de l'élément x.

Théorème :

Soit $\mathcal{R}$ une relation d'équivalence définie sur E.

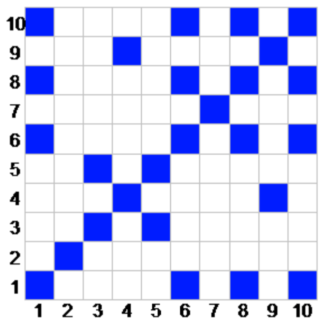
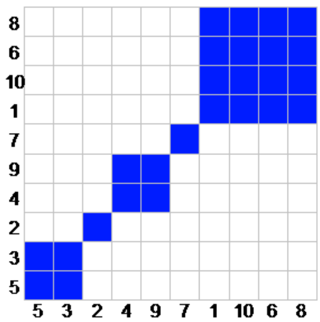
Alors la famille $\left(C(x)\right)_{x \in E}$ des classes d'équivalences associées forme une partition de E.

Réciproquement :

Étant donnée une partition $\left(A_i\right)_{i \in I}$ d'un ensemble E,

la relation définie sur E par : $x \, \mathcal{R} \, y \Leftrightarrow \exists \, i \in I \mid x \in A_i$ et $y \in A_i$ est une relation d'équivalence

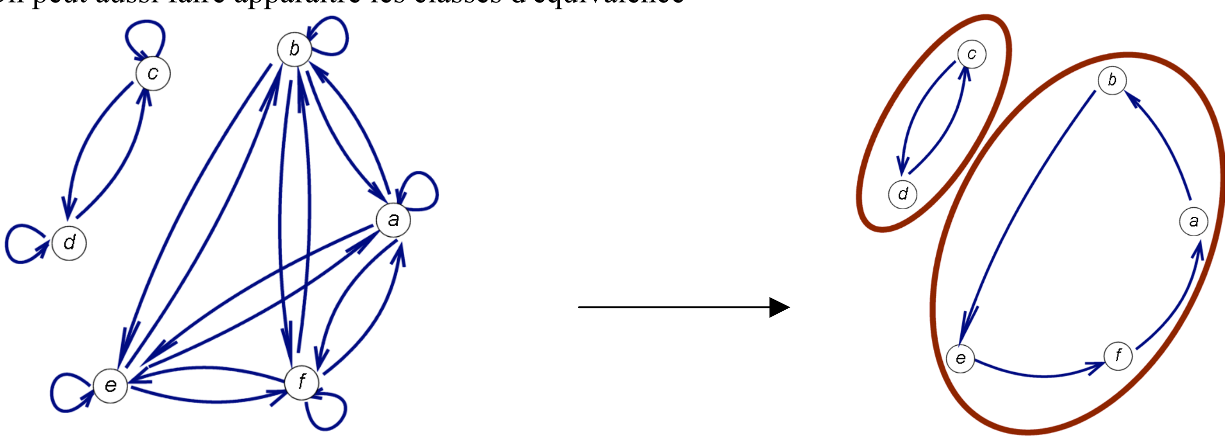
et les classes d'équivalences associées sont les ensembles A_i.

	
Une relation d'équivalence dans $\{1..10\}$	La même relation en ordonnant les éléments par classe d'équivalence

2. Représentation sagittale

Si $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence, il suffit d'afficher un cycle par classe d'équivalence.

On peut aussi faire apparaître les classes d'équivalence



3. Exemples

- Dans n'importe quel ensemble, la relation d'égalité
- Dans $\mathbb{N}\times\mathbb{N}, (a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow a+d=b+c$ $\longrightarrow$ définition de $\mathbb{Z}$
- Dans $\mathbb{Z}\times\mathbb{N}^*, (a,b)\mathcal{R}(c,d) \Leftrightarrow ad=bc$ $\longrightarrow$ définition de $\mathbb{Q}$
- Dans l'ensemble des bipoints du plan euclidien,
  (A,B) équipollent à $(C,D) \Leftrightarrow (A,D)$ et (B,C) ont même milieu $\Leftrightarrow (AB)//(CD)$ et $(AC)//(BD)$
  $\longrightarrow$ définition des vecteurs du plan.
- Dans un ensemble d'ensembles A est équipotent à $B \Leftrightarrow$ il existe une bijection de A vers B
  $\longrightarrow$ définition des cardinaux.
- Dans l'ensemble des droites du plan euclidien, $\Delta_1 \sim \Delta_2 \Leftrightarrow \Delta_1 // \Delta_2$ ou $\Delta_1 = \Delta_2$ $\longrightarrow$ définition des directions.
- Dans $\mathbb{Z}$, n étant fixé, $a \underset{n}{\equiv} b \Leftrightarrow n$ divise $a-b$ $\longrightarrow$ définition de $\mathbb{Z}/n\mathbb{Z}$
- Dans $\mathbb{R}$, congruence modulo 2π
- Dans l'ensemble des matrices carrées d'ordre n,
  A est semblable à $B \Leftrightarrow$ il existe une matrice inversible P telle que $B = P^{-1}AP$