Fiche : Plan d'étude d'une courbe paramétrée

1 **Domaine de définition :** On étudie la courbe paramétrée $f : t \mapsto (x(t), y(t))$. On commence par déterminer le domaine de définition de f : D_f, qui est l'intersection des domaines de définition des fonctions $t \mapsto x(t)$ et $t \mapsto y(t)$.

2 **Symétries et restriction du domaine d'étude :** Si x et y possèdent une période commune, on restreind l'étude à cette période. On essaye ensuite de réduire l'intervalle d'étude en utilisant les symétries de la courbe. Pour ce faire, on cherche un changement de paramètre $t \mapsto \varphi(t)$ qui induit une transformation géométrique simple :

1. $\forall t \in D_f, \begin{cases} x(\varphi(t)) = x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à l'axe Ox.
2. $\forall t \in D_f, \begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = y(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à l'axe Oy.
3. $\forall t \in D_f, \begin{cases} x(\varphi(t)) = -x(t) \\ y(\varphi(t)) = -y(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à l'origine.
4. $\forall t \in D_f, \begin{cases} x(\varphi(t)) = y(t) \\ y(\varphi(t)) = x(t) \end{cases}$: symétrie par rapport à la première bissectrice.
5. ...

Ce changement de paramètre φ est souvent de la forme $t \mapsto -t$ ou $t \mapsto \pi - t$, $t \mapsto \frac{\pi}{2} - t$ ou encore $t \mapsto \frac{1}{t}$.

3 **Variations :** On étudie les variations de x et de y. On rassemble ces informations dans un même tableau.

4 **Étude des points stationnaires :** On repère dans ce tableau les points stationnaires, c'est à dire les points de paramètre t_0 tels que $\boxed{x'(t_0) = 0 \text{ et } y'(t_0) = 0}$. On détermine la tangente à la courbe au point staionnaire en utilisant une des deux méthodes suivantes :

Méthode I

- si $\boxed{\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)} \xrightarrow[t \to t_0]{} m}$ où m est un réel alors la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente de pente m (d'équation $y = m(x - x(t_0)) + y(t_0)$).
- si $\boxed{\left|\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}\right| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty}$ alors la courbe admet en $M(t_0)$ une tangente verticale (d'équation $x = x(t_0)$).

Méthode II

Le premier vecteur non nul de la liste suivante :

$$(x''(t_0), y''(t_0)), \quad (x'''(t_0), y'''(t_0)), \quad \ldots$$

dirige la tangente en $M(t_0)$ au support de f.

5 **Étude des branches infinies :** On recherche les branches infinies de la courbe (lorsqu'une des deux fonctions $t \mapsto x(t)$ ou $t \mapsto y(t)$ a une limite infinie quand t tend vers t_0) et on essaye de déterminer une asymptote à ces branches infinies. Si la courbe admet une branche infinie quand t tend vers t_0 :

Une seule des deux applications x ou y tend vers l'infini en valeur absolue quand $t \to t_0$

a) Si $\boxed{x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l \in \mathbb{R} \text{ et } |y(t)| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty}$ alors la droite d'équation $\boxed{x = l}$ est asymptote à la courbe et le signe de $x(t) - l$ détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

b) Si $\boxed{|x(t)| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty \text{ et } y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} l \in \mathbb{R}}$ alors la droite d'équation $\boxed{y = l}$ est asymptote à la courbe et le signe de $y(t) - l$ détermine la position de la courbe par rapport à l'asymptote.

Les deux applications x et y tendent vers l'infini en valeur absolue quand $t \to t_0$

Si $|x(t)| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$ et $|y(t)| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$, on forme le quotient $\dfrac{y(t)}{x(t)}$ et on cherche la limite de ce quotient quand t tend vers t_0.

a) Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a \in \mathbb{R}^*$: on forme alors $y(t) - a\,x(t)$ et si cette quantitée tend vers une limite finie b alors la droite d'équation $y = a\,x + b$ est asymptote à la courbe en t_0. La position de la courbe par rapport à l'asymptote est donnée par le signe de $y(t) - a\,x(t) - b$.

b) Si $\left|\dfrac{y(t)}{x(t)}\right| \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$, on dit que la courbe possède une branche parabolique (Oy).

c) Si $\dfrac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$, on dit que la courbe possède une branche parabolique (Ox)

6 **Tracé :** On trace le support de f : on commence par représenter les asymptotes, les points stationnaires, les points à tangente verticale ou horizontale, et on ébauche le tracé de la courbe.