D.S. de maths n° 2

La fonction ζ

Consignes

- La durée de l'épreuve est 2h.
- L'énoncé comporte 11 questions sur 1 page (recto/verso).
- L'usage de la calculatrice est interdit (et inutile).
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant votre raisonnement et mentionnant les résultats utilisés.
- Bon courage !

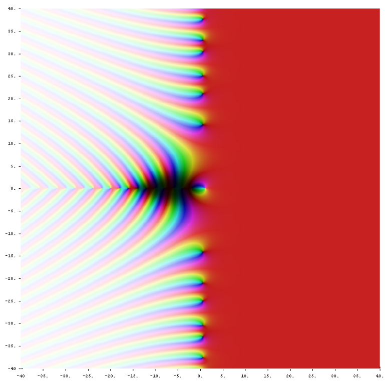

FIG. 1 – Représentation graphique de la fonction zêta dans le plan complexe

La fonction ζ est un objet mathématique extrêmement mystérieux se trouvant au coeur de relations profondes entre la théorie des nombres, l'analyse et la mécanique quantique. Considérée comme une fonction d'une variable complexe, la localisation exacte de ses zéros constitue l'un des plus grands problèmes ouverts des mathématiques modernes, connu sous le nom de "hypothèse de Riemann" (un prix d'un million de dollars sera attribué à quiconque le résoudra !). Sa solution aura des implications majeures sur notre compréhension des niveaux d'énergie des particules élementaires *et* de la distribution des nombres premiers.

Dans ce sujet, nous allons considérer la fonction ζ sur un sous-ensemble de la droite réelle et obtenir une formule exacte pour la valeur de $\zeta(2)$.

I - Définition de ζ

1) Énoncer le critère de convergence de l'intégrale pour les séries à termes réels.

2) Déterminer l'ensemble D des nombres réels $\alpha \in \mathbf{R}$ tels que la série suivante converge.

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^\alpha}$$

Pour $x \in D$, l'expression $\zeta(x) := \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}$ est donc un nombre réel bien défini, et on obtient ainsi une application

$$\begin{array}{rccc} \zeta : & D & \longrightarrow & \mathbf{R} \\ & x & \mapsto & \zeta(x) \end{array}$$

définie sur le sous-ensemble D de $\mathbf{R}$; on la nomme *fonction zêta de Riemann.*

3) Montrer que ζ est monotone décroissante sur D.

II - Calcul de $\zeta(2)$

4) Rappeler l'argument vu en classe pour obtenir l'encadrement $1 \leqslant \zeta(2) \leqslant 2$.

5) Établir l'identité :

$$\sin(2n+1)\theta = \sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1} (-1)^k \sin^{2k+1}\theta \cdot \cos^{2(n-k)}\theta \qquad (n \in \mathbf{N}).$$

[On pourra procéder, soit par induction, soit en considérant le membre de gauche comme la partie imaginaire de $e^{(2n+1)\theta i}$ puis en développant à l'aide de la formule binomiale.]

Considérons pour $n \in \mathbf{N}$ le polynôme de degré n suivant :

$$f_n(x) := \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{2n+1}{2k+1} x^{n-k}.$$

6) Déduire de 5) que pour tout angle $0 < \theta < \pi/2$, on a l'identité :

$$\sin(2n+1)\theta = f_n(\operatorname{cotan}^2\theta) \cdot \sin^{2n+1}\theta.$$

[Rappel : $\operatorname{cotan}\theta = 1/\tan\theta$.]

7) Pour $k \in \{1, \ldots, n\}$, on pose $\theta_k := k\pi/(2n+1)$. Montrer que chacun des nombres réels $x_k := \operatorname{cotan}^2\theta_k$ est une racine de f_n.

8) En déduire une factorisation de f_n en produit de facteurs linéaires.

9) En examinant le coefficient de x^{n-1} dans f_n, obtenir la formule :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cotan}^2\theta_k = \frac{n(2n-1)}{3}.$$

On admettra que par des considérations similaires il soit possible d'obtenir :

$$\sum_{k=1}^{n} \operatorname{cosec}^2\theta_k = \frac{2n(n+1)}{3}.$$

[Rappel : $\operatorname{cosec}\theta = 1/\sin\theta$.]

10) En déduire les inégalités :

$$\frac{\pi^2 n(2n-1)}{3(2n+1)^2} < \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k^2} < \frac{2\pi^2 n(n+1)}{3(2n+1)^2}.$$

[On pourra admettre que $\operatorname{cotan}^2 x < 1/x^2 < \operatorname{cosec}^2 x$ pour $0 < x < \pi/2$.]

11) Évaluer $\zeta(2)$.