DS de maths n° 2

Fonctions harmoniques

Consignes

- La durée de l'épreuve est 2h.
- L'énoncé comporte 10 questions valant 10 points chacune.
- L'usage de la calculatrice est interdit (et non nécessaire).
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant vos raisonnements.
- Amusez-vous bien !

Une fonction de deux variables $f(x, y)$ de classe $\mathcal{C}^2$ est dite *harmonique* si elle satisfait l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 0.$$

Les fonctions harmoniques jouent un rôle de premier plan dans plusieurs questions physiques et mathématiques.

Un exemple

On considère sur $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = \frac{x}{x^2 + y^2}.$$

1. Est-il possible de prolonger continûment f en $(0, 0)$? Justifier.
2. Montrer que f est harmonique sur son domaine.
3. Quels sont les valeurs maximale et minimale prises par f sur le rectangle $[1, 4] \times [2, 3]$?

Un autre exemple

Soit $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ la fonction définie par

$$f(x, y) = e^{x^2 - y^2} \cos(2xy).$$

4. Calculer le gradient de f et montrer que l'origine est son unique point critique.
5. Vérifier que f est harmonique.
6. Donner la meilleure approximation quadratique de f au voisinage de $(0, 0)$. Quelle est la nature du point critique ?

Quelques faits

7. Rappeler le critère de la hessienne permettant de classifier les points critiques d'une fonction de classe $\mathcal{C}^2$.
8. Soit f une fonction harmonique sur un domaine D et (x_0, y_0) un point critique de f intérieur à D où la matrice hessienne est non nulle. Montrer que ce point critique est forcément un point de selle.
9. Soit u et v deux fonctions de classe $\mathcal{C}^2$ satisfaisant les *équations de Cauchy-Riemann* :
$$\frac{\partial u}{\partial x} = \frac{\partial v}{\partial y} \qquad \text{et} \qquad \frac{\partial u}{\partial y} = -\frac{\partial v}{\partial x}.$$
Montrer que u et v sont harmoniques.
10. Si f est une fonction harmonique, montrer que $u = \dfrac{\partial f}{\partial y}$ et $v = \dfrac{\partial f}{\partial x}$ satisfont les équations de Cauchy-Riemann.