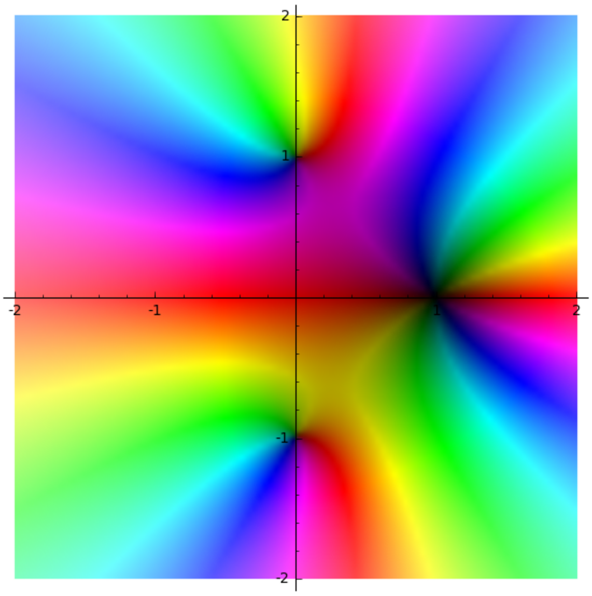
Il est un peu difficile de se représenter le graphe d'une fonction complexe

$$f \quad ; \quad \begin{array}{ccc} \mathbf{C} & \longrightarrow & \mathbf{C} \\ z & \mapsto & f(z). \end{array}$$

D'un point de vue réel, il s'agit en effet d'une surface vivant dans un espace de dimension 4... Heureusement, il y a dans Sage une commande `complex_plot` :

```
var('z')
f(z) = z^4 - 2*z^3 + 2*z^2 - 2*z + 1
complex_plot(f, (-2,2), (-2,2))
```



Qu'observe-t-on exactement ? Au-dessus de chaque point z du plan complexe, on voit la valeur $f(z)$ de la fonction exprimée sous forme polaire : la teinte donne l'argument (rouge $= 0$, vert $= \frac{\pi}{2}$, cyan $= \pi$, bleu $= \frac{3\pi}{2}$) alors que l'intensité représente le module (foncé $= 0$, pâle $= +\infty$). Cette figure permet en particulier d'observer les zéros de la fonction (points noirs), ainsi que leur multiplicité : i et $-i$ sont des racines simples du polynôme, d'ailleurs à leur voisinage les arguments effectuent une seule révolution ; tandis que 1 est racine double (les arguments font deux tours à son voisinage).

1) Visualiser, à l'aide de `complex_plot`, les fonctions complexes

$$f(z) = z^2 - z - 1, \qquad g(z) = \frac{1}{z} + z \qquad \text{et} \qquad h(z) = \cos z.$$

   Commenter (position et multiplicité des zéros et des pôles, ...)

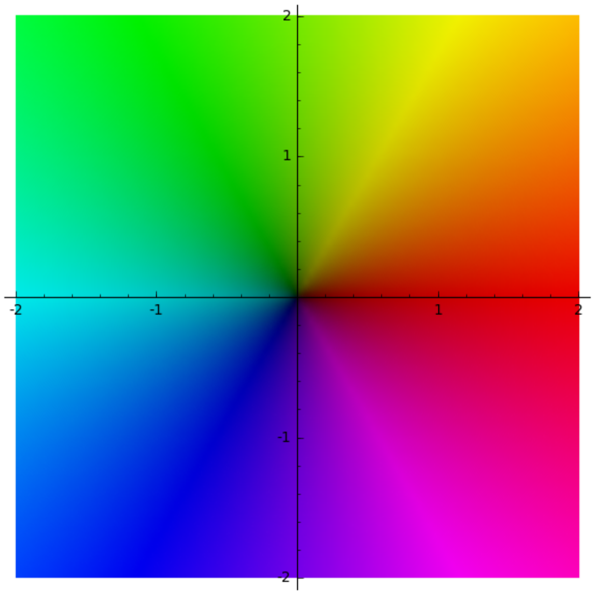
2) Cela peut nous aider à comprendre la façon dont les fonctions analytiques sont représentées par leurs développements en séries de puissances. Observez les sommes, et quelques sommes partielles, des séries :

$$\frac{z^2+z+1}{2-z} = \frac{1}{2} + \frac{3}{4}z + \frac{7}{2}\sum_{n=2}^{\infty} \frac{z^n}{2^n}, \qquad \frac{1}{z} = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{3^{n+1}}(z-3)^n, \qquad \operatorname{Arctan} z = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} z^{2n+1}.$$

   Arrivez-vous à déterminer les rayons de convergence graphiquement ?

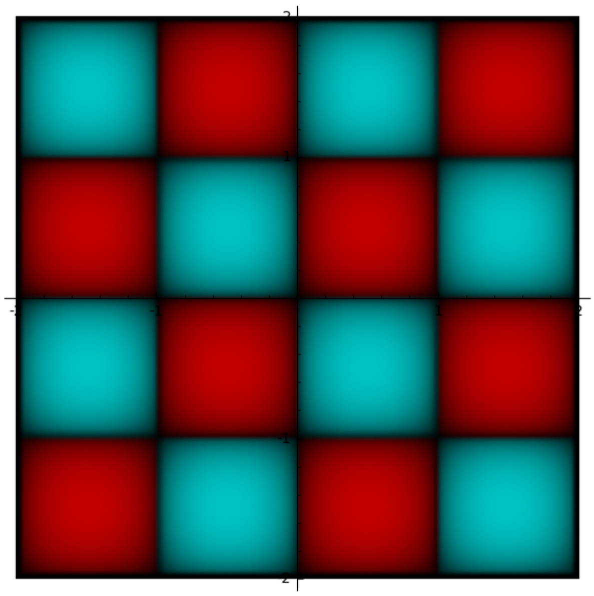
De façon plus générale, on peut obtenir de belles (et instructives) figures de la façon suivante. Dans le plan complexe d'arrivée, on se donne une image quelconque – qu'on peut considérer comme une fonction $g : \mathbf{C} \to \mathcal{X}$, où $\mathcal{X}$ est un espace de couleurs ($\mathcal{X} = [\![0, 255]\!]^3$ pour les amateurs de concret). Pour se représenter l'effet d'une fonction $f\,;\mathbf{C} \to \mathbf{C}$, on peut utiliser l'image obtenue on coloriant chaque point z du plan de départ avec la couleur de $f(z)$ dans le plan d'arrivée ; en d'autres termes, on fabrique l'image $g \circ f$.

L'image par défaut utilisée par `complex_plot` est ce qu'elle répond lorsqu'on lui demande de visualiser la fonction identité (z) :



mais on pourrait facilement la remplacer par celle de notre choix, par exemple le quadrillage correspondant à la visualisation de la fonction

$$q(z) = \sin(\pi \operatorname{Re} z) \cdot \sin(\pi \operatorname{Im} z) :$$



3) Reprendre la visualisation des fonctions précédentes en les post-composant par q. Qu'observez-vous ? (Portez attention, notamment, à la façon dont les courbes noires se croisent.)

Vous êtes bien sûr encouragés à expérimenter avec d'autres fonctions / images dans le plan d'arrivée.