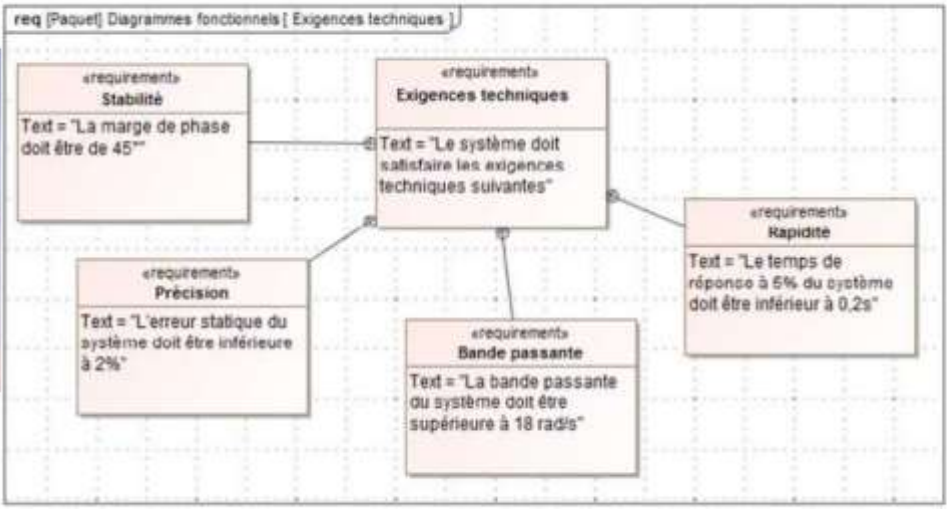
Séance 4 – MODÈLE DE COMPORTEMENT DU PREMIER et DU DEUXIEME ORDRE

EXERCICE 1 : RADAR D'AVION

Le support d'étude est un radar d'avion dont on donne une description structurelle ainsi qu'un extrait de cahier des charges fonctionnel. Ce système permet notamment au pilote de détecter des engins extérieurs (avions, hélicoptères, bateaux, ...) et de connaître leur position.

L'objectif de cette étude est de vérifier si l'asservissement proposé ici en phase de conception par le bureau d'études est compatible aux performances attendues par le client.



La solution proposée est un asservissement de position angulaire du radar : l'angle souhaité est θc(t), l'angle réel du radar est θr(t). La différence des deux angles est transformée et amplifiée d'un gain A en une tension $u_m(t)$. La tension $u_m(t)$ engendre, via un moteur à courant continu de fonction de transfert Hm(t) et un réducteur de vitesse de rapport B<1, une vitesse angulaire du radar $\omega_r(t)$.

Hypothèses :
- on néglige tous les frottements.
- on néglige l'effet de l'inductance du bobinage du rotor du moteur.

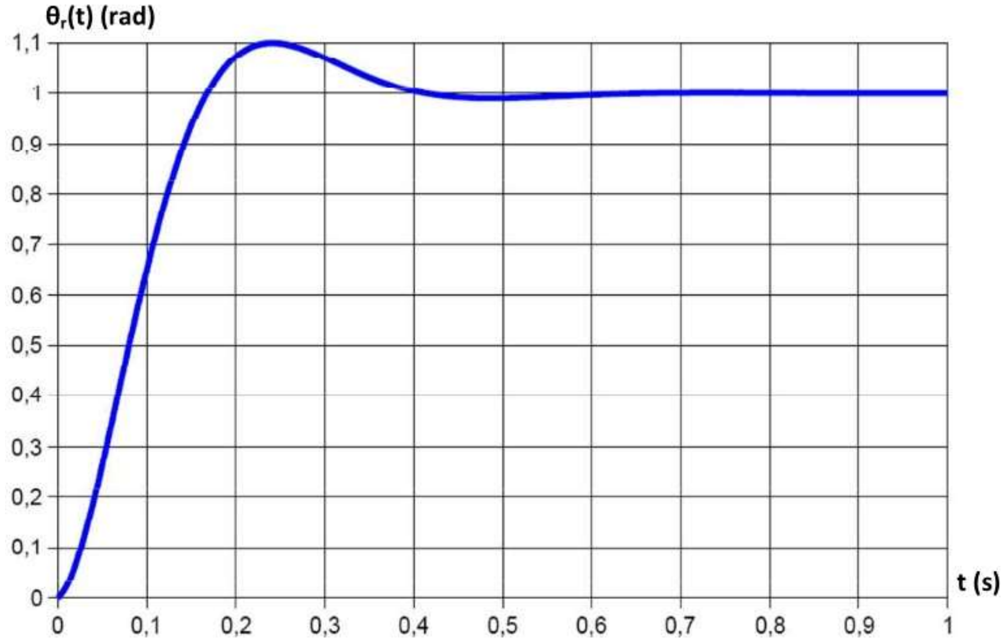
Notations :
J : inertie équivalente ramenée sur l'arbre moteur (kg.m²)
K_e : constante de force-contre électromotrice (en V/rad/s))
K_t : constante de couple (en N.m/A)
e(t) : force contre-électromotrice
i(t) : intensité
$C_m(t)$: couple moteur
R : la résistance du moteur

Q.1. Montrer que $H_m(p)$ peut se mettre sous la forme canonique et déterminer les expressions littérales de K_m et T_m

$$H_m(p) = \frac{K_m}{1 + T_m p}$$

Q.2. Déterminer la fonction de transfert global H(p) *de l'asservissement de position et déterminer les expressions des caractéristiques du modèle de comportement.*

La réponse à un échelon unitaire (réponse indicielle) obtenue à partir d'une simulation du système de fonction de transfert H(p) est donnée sur la figure suivante :



Q.4. Déterminer les valeurs numériques des caractéristiques de la fonction de transfert de l'asservissement en position.

Q.5. Conclure quant à la capacité du système proposé par le bureau d'étude à vérifier le critère de rapidité du cahier des charges.

On améliore la performance du radar en ajoutant un correcteur. La nouvelle fonction de transfert est :

$$H(p) = \frac{1}{(1+0{,}05\cdot p)(1+0{,}0005\cdot p)(1+0{,}002\cdot p)}$$

Q.6 Tracer le diagramme de Bode asymptotique de cette fonction de transfert, en expliquant la démarche utilisée.

Q.7. Déterminer, en régime permanent, $\theta_r(t)$ pour une entrée sinusoïdale d'amplitude 0,2 rad et de pulsation 10 rad/s.

Q.8 Vérifier la capacité du radar à satisfaire tous les critères du cahier des charges et conclure.

RADAR D'AVION – Corrigé

Q.1 On réécrit les 4 équations du MCC en tenant compte des hypothèses de l'énoncé

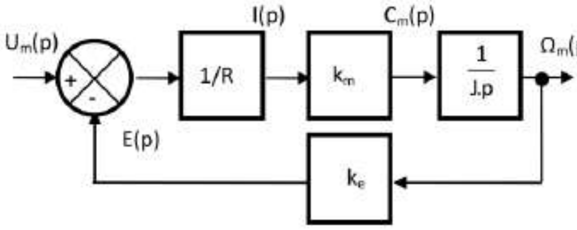
Q.2. et

$u_m(t) = e(t) + R.i(t)$ → $U_m(p) = E(p) + R.I(p)$

$e(t) = k_e.\omega_m(t)$ → $E(p) = k_e.\Omega_m(p)$

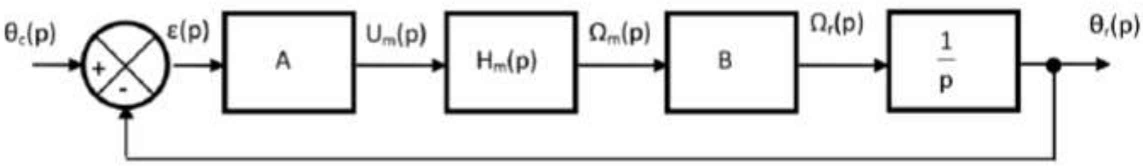
$J.\dfrac{d\omega_m(t)}{dt} = C_m(t)$ → $J.p\ \Omega_m(p) = C_m(p)$

$C_m(t) = k_m.i(t)$ → $C_m(p) = k_m.I(p)$



$$H_m(p)=\frac{\Omega_m(p)}{U_m(p)}=\frac{1}{k_e}.\frac{\frac{k_m.k_e}{R.J.p}}{1+\frac{k_m.k_e}{R.J.p}}=\frac{1}{k_e}.\frac{k_m.k_e}{R.J.p+k_m.k_e}=\frac{1}{k_e}.\frac{1}{1+\frac{R.J}{k_m.k_e}.p}=\frac{K_m}{1+T_m.p}\quad \text{avec } K_m=\frac{1}{k_e} \text{ et } T_m=\frac{R.J}{k_m.k_e}$$

Q.2 On trace le schéma bloc de l'asservissement de position



$$\frac{\theta_r(p)}{\theta_c(p)}=\frac{A.B.H_m(p).\frac{1}{p}}{1+A.B.H_m(p).\frac{1}{p}}=\frac{A.B.\frac{K_m}{1+T_m.p}.\frac{1}{p}}{1+A.B.\frac{K_m}{1+T_m.p}.\frac{1}{p}}=\frac{A.B.K_m}{p.(1+T_m.p)+A.B.K_m}=\frac{1}{\frac{p.(1+T_m.p)}{A.B.K_m}+1}$$

$$H(p)=\frac{1}{\frac{p.(1+T_m.p)}{A.B.K_m}+1}=\frac{1}{1+\frac{1}{A.B.K_m}.p+\frac{T_m}{A.B.K_m}p^2}=\frac{K}{(1+\frac{2.z}{\omega_0}p+\frac{1}{\omega_0^{\,2}}p^2)}\quad \text{avec :}$$

$$K=1\quad ;\qquad \frac{1}{\omega_0^{\,2}}=\frac{T_m}{A.B.K_m}\rightarrow \omega_0=\sqrt{\frac{A.B.K_m}{T_m}}\quad ;\qquad \frac{2.z}{\omega_0}=\frac{1}{A.B.K_m}\rightarrow z=\frac{1}{2}.\sqrt{\frac{1}{T_m.A.B.K_m}}$$

Q.3 une réponse indicielle d'un système du 2nd ordre on a :

Ordonnée en $+\infty$ de la courbe de sortie :

$$s(+\infty)=\lim_{t\to+\infty} s(t)=\lim_{p\to 0} p.S(p)=\lim_{p\to 0}\frac{K.\omega_0^{\,2}}{p^2+2.z.\omega_0.p+\omega_0^{\,2}}=K \quad\rightarrow\quad \boxed{s(+\infty)=K}$$

Théorème de la valeur finale

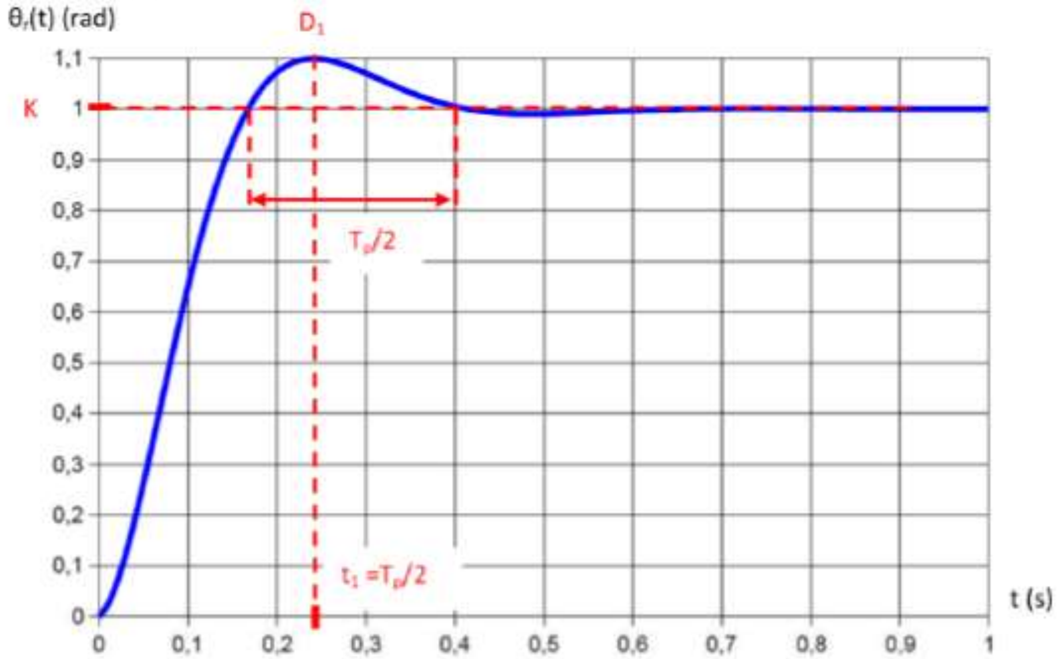
Le régime établi ne dépend que du gain statique K alors que z et ω_0 n'interviennent que sur le régime transitoire

Valeur du 1er dépassement : $D_1=e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}$

Valeur de la pseudo-période : $T_p=\frac{2\pi}{\omega_p}=\frac{2\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$

Graphiquement on lit : K = 1 ; $t_1=0{,}24=\frac{\pi}{\omega_0\sqrt{1-z^2}}$; $D_1=e^{-\frac{z.\pi}{\sqrt{1-z^2}}}=0{,}1$

Soit $z\approx 0{,}58$ et $\omega_0\approx 15{,}8$ rad/s.



Q.4 Soit on lit sur la réponse temporelle : t5%=0,33s

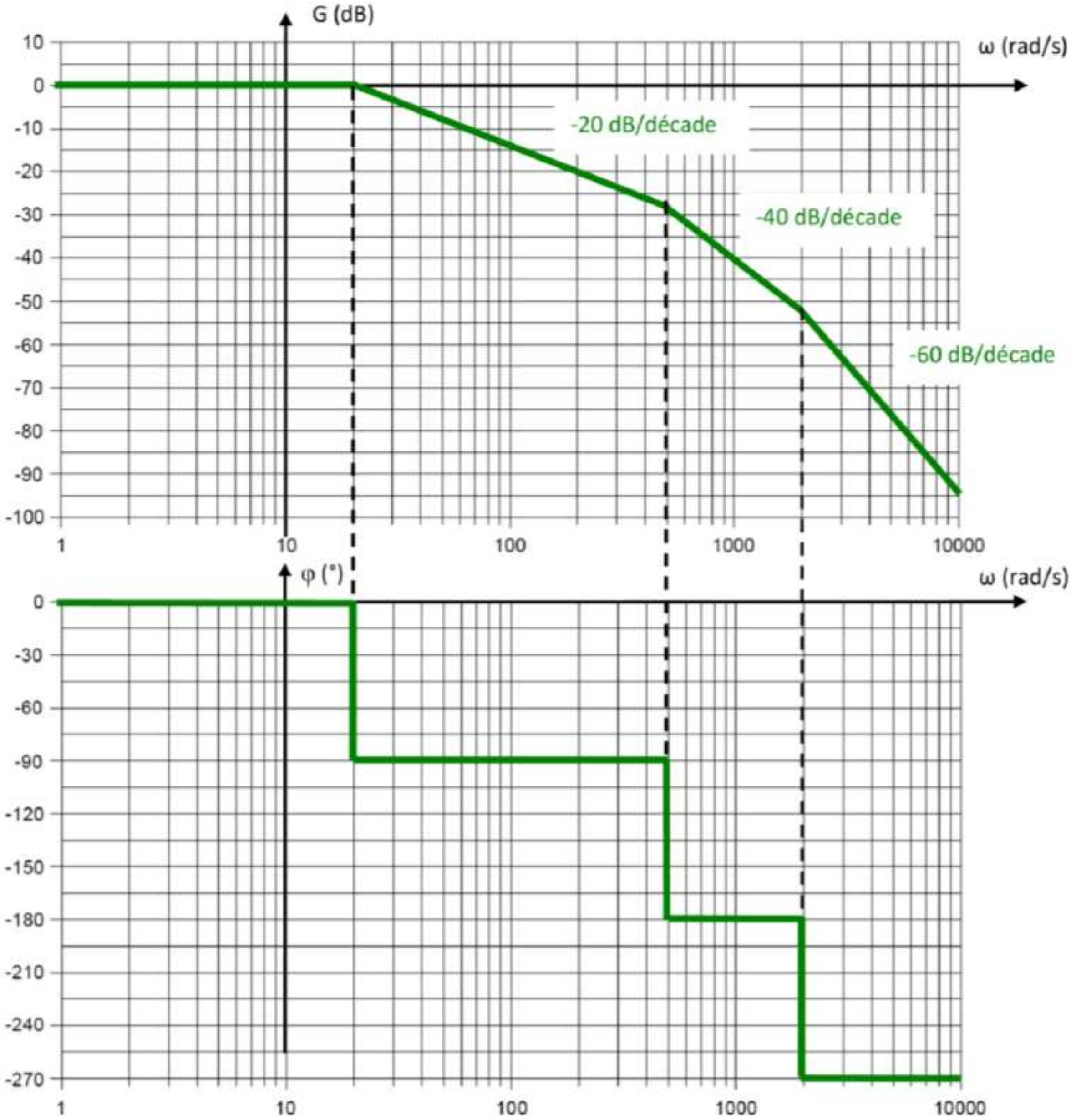
Soit

On utilise l'abaque donnant le temps de réponse réduit et on lit $t_{5\%}.\omega_0=5$ pour z=0,5 soit $t_{5\%}=0.33s>0{,}2s\rightarrow$ le critère de rapidité du cahier des charges n'est pas respecté.

Q.5

Il y a 3 fonctions de transfert du 1er ordre : $H(p)=\frac{1}{(1+0{,}05.p).(1+0{,}0005.p).(1+0{,}002.p)}$

Les constantes de temps sont T_1 = 0,05 s (soit ω_1 = 20 rad/s), T_2 = 0,002 s (soit ω_2 = 500 rad/s) et T_3 = 0,0005 s (soit ω_2 = 2000 rad/s).



Q.6

Pour ω = 10 rad/s on a :

$$G_{dB} = \left|H(j10)\right|_{dB} \approx -20\log\left(\sqrt{\left(1+(0{,}05\times10)^2\right)}\right) \approx -1\ \text{dB}$$

$$\text{et } \varphi = \arg(H(j10)) \approx -\arctan\left(\frac{0{,}05\times10}{1}\right) \approx -26{,}5°$$

En régime permanent : $\theta_r(t) = 0{,}2.G.\sin(10t+\varphi)$ pour une entrée $\theta_c(t) = 0{,}2.\sin(10t)$.

Q.7

- Critère bande passante :
  Pour ω<20 rad/s, H(p) peut être approximé à un 1er ordre de constante de temps T_1=0,05s et de gain K=1.
  Avec cette approximation : ω_c<20 rad/s soit une bande passante de 20 rad/s > 18 rad/s , le critère bande passante du cahier des charges est donc respecté.

- Critère rapidité
  Avec la même approximation d'un premier ordre : $t_{5\%}$=3*0,05 = 0,15 s < 0,2s => CdCh vérifié

- Critère de précision
  Théorème de la valeur finale => écart statique = 0

- Critère de marge de phase > 45°. On ne peut répondre car on a pas la FTBO

EXERCICE 2 : CAMÉRA

La camera PTZ étanche IP68 ZOOM 28X existe en 2 versions, noir et camouflage Otan. Elle est dotée d'un socle aimanté ce qui permet de la positionner sur un véhicule. Elle est asservie en position angulaire à l'aide de deux moteurs à courant continu. Le comportement du moteur permettant l'orientation suivant l'axe vertical, est modélisé par la fonction de transfert :

$$\frac{\Theta(p)}{\Theta_c(p)} = \frac{9800}{10000 + 600p + 35p^2}$$

$\theta c(t)$ est l'angle de consigne en ° par rapport au plan horizontal ;
$\theta(t)$ est l'angle atteint en ° par rapport au plan horizontal.

Q1 : Déterminer les paramètres caractéristiques de la fonction de transfert de ce système.
Q2 : En déduire, si sa réponse à un échelon est non oscillatoire ou oscillatoire amortie. Si elle est définie, indiquer la valeur de la pseudo-période notée *Ta.*
Q3 : Calculer le temps de réponse à 5 % de ce système soumis à une entrée de type échelon.
On soumet le système à une entrée en échelon θc (*t*) = 20°
Q4 : Donner, dans ce cas, le nombre de dépassements d'amplitude supérieure à 1% de la réponse θ (*t*). Indiquer, pour chacun d'eux, leur valeur relative et leur valeur absolue.
Q5 : Tracer l'allure de la réponse θ (*t*) en précisant les points caractéristiques.

CORRIGE

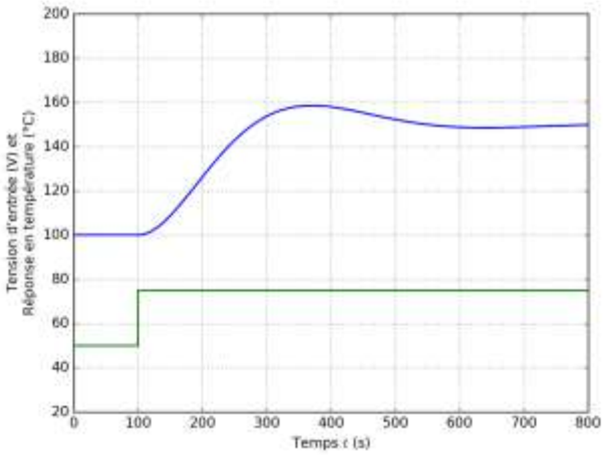
Q1 : $K = 0{,}98$ $\omega_0 = 16{,}9\ rad/s$ $z = 0{,}51$ Q2 : $T_a = 0{,}43\,s$ Q3 : $t_{r5\%} = 0{,}31\,s$
Q4 : $D_1 = 2{,}9°, D_2 = 0{,}4°$

EXERCICE 3 : FOUR ÉLECTRIQUE

La modélisation (équation thermique) d'un four thermique est décrite par l'équation différentielle suivante :

$$2\frac{d^2\theta(t)}{dt^2}+6\alpha\frac{d\theta(t)}{dt}+4\alpha^2\,\theta(t)=K\,u(t)$$

avec :
$u(t)$ tension d'alimentation de la résistance
$\theta(t)$ température du four ; α et K constantes réelles, positive pour K. On suppose les conditions de Heaviside.



Q1 : Déterminer la fonction de transfert $H(p)$ du système sous forme canonique. Sous quelle condition le modèle est-il stable ?
Q2 : Sachant que $u(t)$ est un échelon d'amplitude U_0, donner l'expression de $u(t)$ puis $U(p)$.
Q3 : En déduire $\Theta(p)$ en fonction des constantes α , K et U_0 .
Q4 : Déterminer la variation finale de la réponse si elle existe.
Soit la situation suivante : pour une tension d'alimentation de la résistance du four de 50 V, la température est stabilisée à 100°C. La tension d'alimentation passe 75 V à l'instant t = 100 s. Le relevé de la température est donné ci-dessus.
Q5 : Déterminer une condition, fonction de U_0, K et α, devant être vérifiée pour que le modèle corresponde aux résultats expérimentaux en variation finale.

CORRIGE

Q1 : $H(p)=\frac{\Theta(p)}{U(p)}=\frac{K}{4\alpha^2}\frac{1}{1+\frac{3}{2\alpha}p+\frac{1}{2\alpha^2}p^2}$. Stable si α positif.

Q2 : $U(p)=\frac{U_0}{p}$

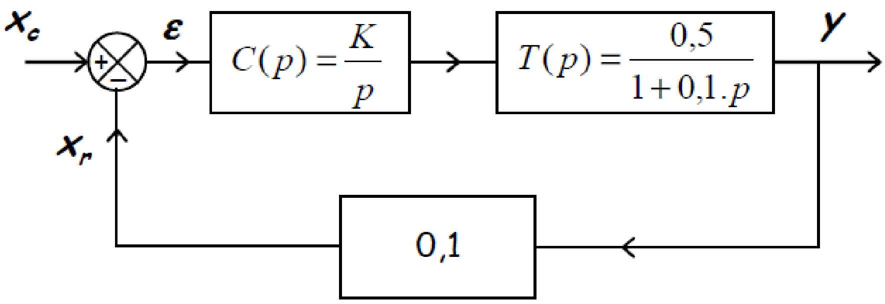
Q3 : $\Theta(p)=\frac{K\,U_0}{\left(2p^2+6\alpha p+4\alpha^2\right)p}$

Q4 : $\Delta s(+\infty)=\frac{K}{4\alpha^2}U_0$

Q6 : il faut $\frac{K}{4\alpha^2}=\frac{\Delta s_{exp}(+\infty)}{E_c}=\frac{50}{25}$

EXERCICE 4

On considère le système bouclé de la figure 2 :



1. Etablir l'expression de la transmittance *H(p)* en boucle fermée de ce système asservi.
2. Calculer la valeur de K permettant d'obtenir un dépassement de 16% en réponse à un échelon unitaire. Donner l'expression numérique de *H(p)*.
3. Calculer l'erreur statique, e(+∞), en réponse à un échelon unitaire, et en réponse à une rampe de pente α = 2.

CORRIGE

1) $$FTBF = H(p) = \frac{\frac{K}{p}\cdot\frac{0,5}{1+0,1p}}{1+\frac{K}{p}\cdot\frac{0,5}{1+0,1p}\cdot 0,1} = \frac{0,5.K}{p(1+0,1p)+0,05.K}$$

1,5

$$\boxed{H(p) = \frac{10}{1+\frac{p}{0,05.K}+\frac{p^2}{0,5K}}} \quad (1)$$

2) $H(p)$ est un syst. du 2^{nd} ordre.

Un dépassement $D=16\%$ correspond à un coefficient d'amortissement $m=0,5$

Or, en identifiant $H(p)$ à l'expression "canonique" il vient :

$$\omega_0^2 = 0,5K \qquad \frac{2m}{\omega_0} = \frac{1}{0,05.K}$$

soit $$2m = \frac{\sqrt{0,5.K}}{0,05.K}$$

$$\sqrt{K} = \frac{\sqrt{0,5}}{0,1.m} \Rightarrow K = \frac{0,5}{0,01.m^2} = \frac{0,5}{0,01.0,5^2} = 200$$

2,5

on a $$\boxed{H(p) = \frac{10}{1+0,1p+0,01p^2}}$$

3) D'après le Th. de la valeur finale :

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p\to 0} p.\varepsilon(p)$$

Avec $$\varepsilon(p) = X_c(p) - X_s(p)$$

$$\varepsilon(p) = X_c(p) - \varepsilon(p)\cdot\frac{K}{p}\cdot\frac{0,5}{(1+0,1p)}$$

$$\varepsilon(p)\cdot\left[1+\frac{0,5.K}{p(1+0,1p)}\right] = X_c(p)$$

$$\varepsilon(p) \cdot \frac{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}{p(1+0{,}1p)} = X_c(p)$$

$$\varepsilon(p) = X_c(p) \frac{p(1+0{,}1p)}{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}$$

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p \to 0} p . X_c(p) . \frac{p(1+0{,}1p)}{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}$$

. réponse à un échelon unitaire $X_c(p) = \frac{1}{p}$

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p \to 0} \cancel{p} . \frac{1}{\cancel{p}} . \frac{p(1+0{,}1p)}{0{,}5K + p(1+0{,}1p)}$$

$\boxed{\varepsilon(+\infty) = 0}$ pour un échelon

. réponse à une rampe $X_c(p) = \frac{2}{p^2}$

$$\varepsilon(+\infty) = \lim_{p \to 0} \cancel{p} . \frac{2}{\cancel{p^2}} . \frac{\cancel{p(1+0{,}1p)}}{0{,}5K + \cancel{p(1+0{,}1p)}}$$

$\boxed{\varepsilon(+\infty) = \frac{4}{K}}$ pour une rampe de pente $\alpha = 2$.