OPTIQUE GEOMETRIQUE II. Miroirs sphériques

Introduction

- 1. Définition
- 2. Propriétés des miroirs sphériques

Caustiques, stigmatisme approché, foyer, plan focal Conditions de Gauss, construction des rayons Relation de conjugaison (3 expressions)

Illustration: télescope

INTRODUCTION

Objectif du chapitre : application des lois de la réflexion aux miroirs sphériques





INTRODUCTION

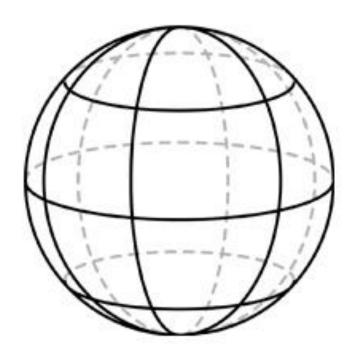
Objectif du cours : application des lois de la réflexion aux miroirs sphériques

Partie 1 : **démonstration** des propriétés de ces systèmes (partie du cours la plus technique)

Partie 2 : savoir faire (calculs) que vous devez acquérir (plus simple, essentiel à retenir)

DEFINITON

Miroir sphérique = Miroir qui s'appuie sur la surface d'une sphère



Attention : le miroir que l'on découpe dans la sphère peut être rond, carré, ...

Rayon de courbure du miroir = rayon de la sphère initiale « R»

DEFINITON

MIROIR CONCAVE



quand on regarde à l'intérieur de la sphère

MIROIR CONVEXE

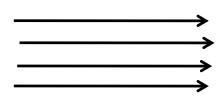


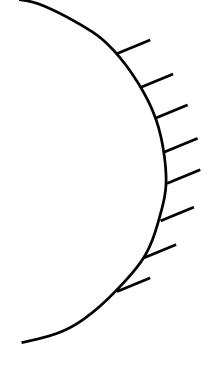
Quand on regarde à l'**ext**érieur

Question : quel est la partie miroir convexe de la cuillère ?

Remarque : dans ce cours on ne démontrera que les propriétés du miroir concave, les propriétés du miroir convexe seront admis

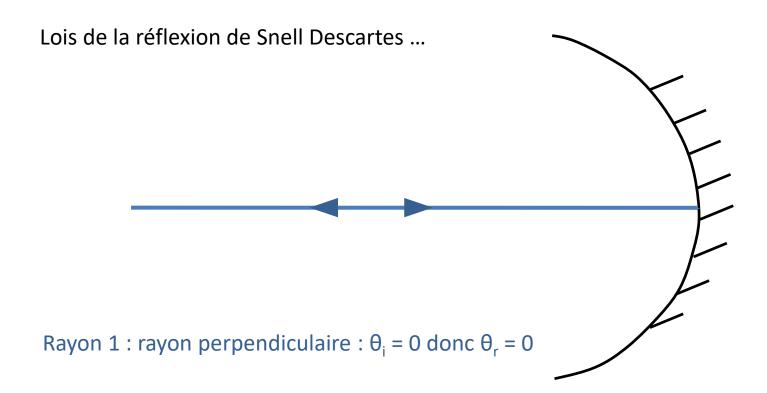
PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE



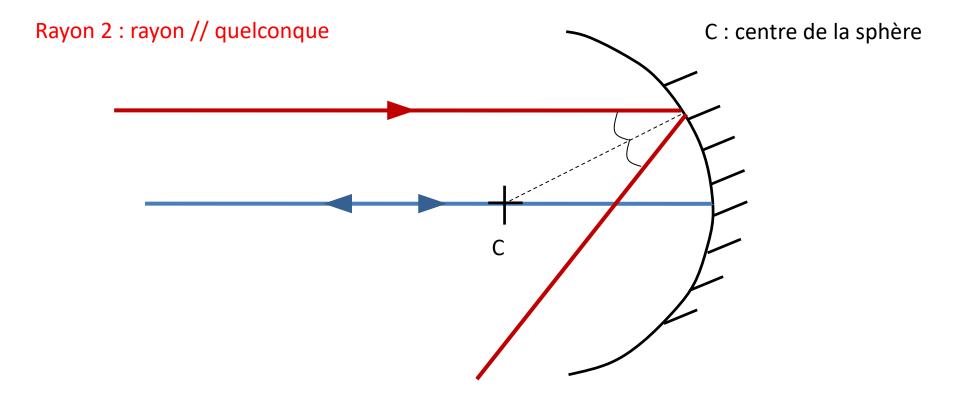


Que se passe t il ?

PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE



PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE

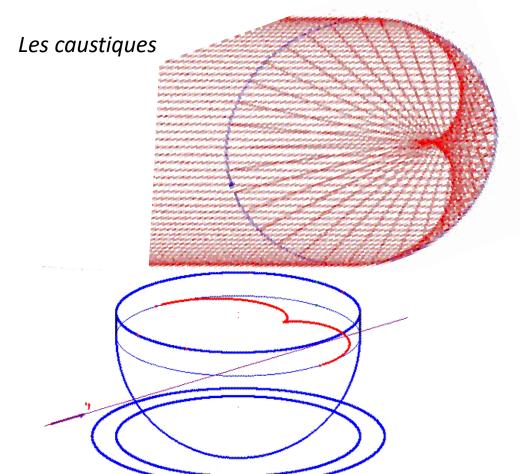


Propriété de la normale du miroir : droite perpendiculaire à la surface, donc passe par le centre C de la sphère (propriété des rayons d'un cercle ou d'une sphère)

PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE : CAUSTIQUES

Si on continue pour plusieurs rayons,

On va voir une accumulation de rayons à certains endroits





PROPRIETES DU MIROIR CONCAVE : CAUSTIQUES

Si on continue pour plusieurs rayons,

On va voir une accumulation de rayons à certains endroits

Les caustiques



Mais ca ne fait pas vraiment une image... (image floue)

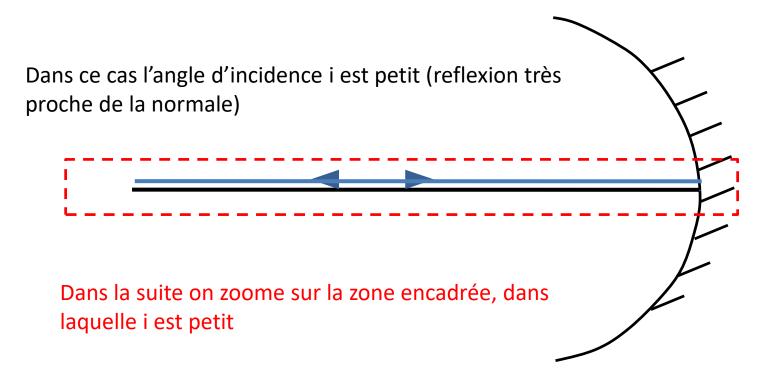
Dans la suite, nous allons voir un cas spécifique plus intéressant : celui des rayons proche de l'axe optique, pour lequel on a un stigmatisme approché (convergence des rayons au même point)

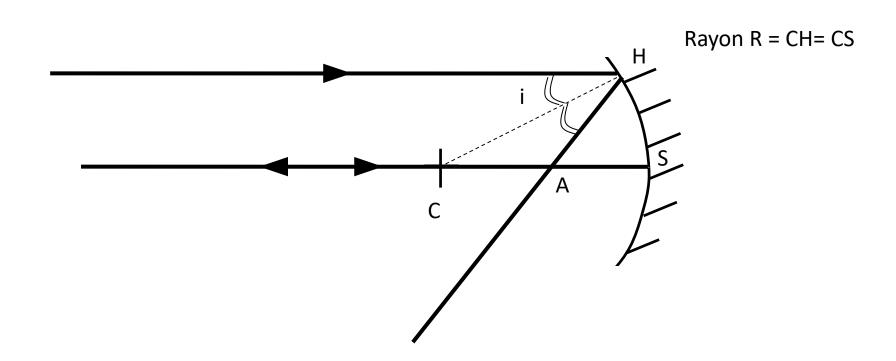
Stigmatisme des miroirs sphériques

a. Rayons // axe optique

- b. Rayons faiblement inclinés
- c. Construction des rayons
- d. Généralisation aux miroirs convexes et applications

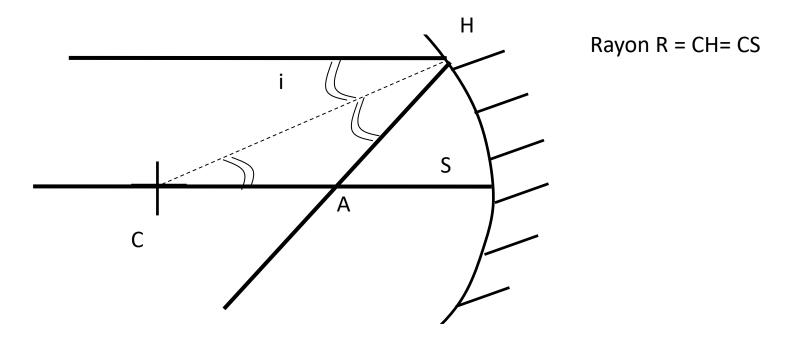
On se concentre sur les rayons proche de l'axe optique





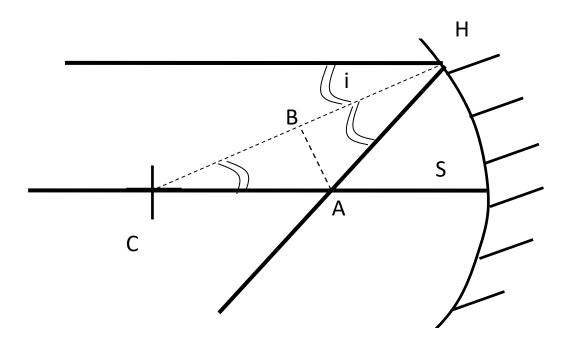
Calculons la distance CA en fonction de i et de R ...

Calculons la distance CA en fonction de i et de R ...



1. On remarque que l'angle ACH=i car le rayon incident et l'axe optique sont parallèles Le triangle CAH est donc isocèle

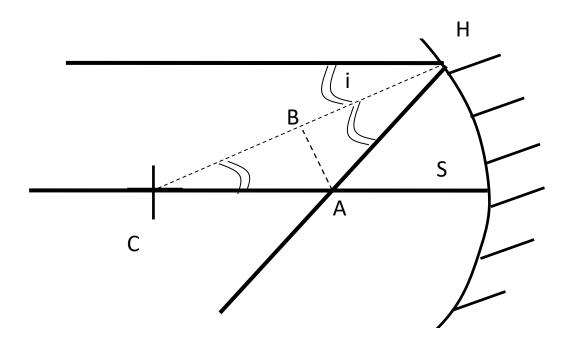
Calculons la distance CA en fonction de i et de R ...



Rayon R = CH= CS

2. On ajoute le point B tel que AB perpendiculaire à CH. Puisque CAH est isocèle et AB perpendiculaire à CH, BC=R/2

Calculons la distance CA en fonction de i et de R ...



Rayon R = CH= CS

3. Cos i = CB / CA donc CA=CB / cos i
$$\rightarrow$$

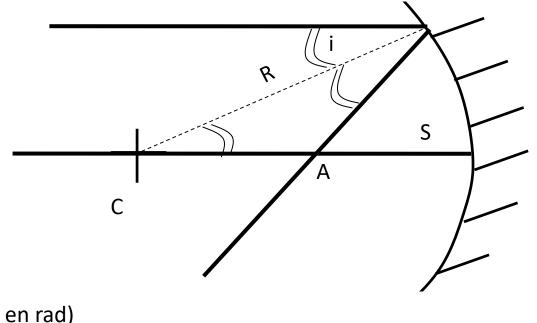
$$CA = \frac{R}{2\cos i}$$

$$CA = \frac{R}{2\cos i}$$

Approximation des petits angles

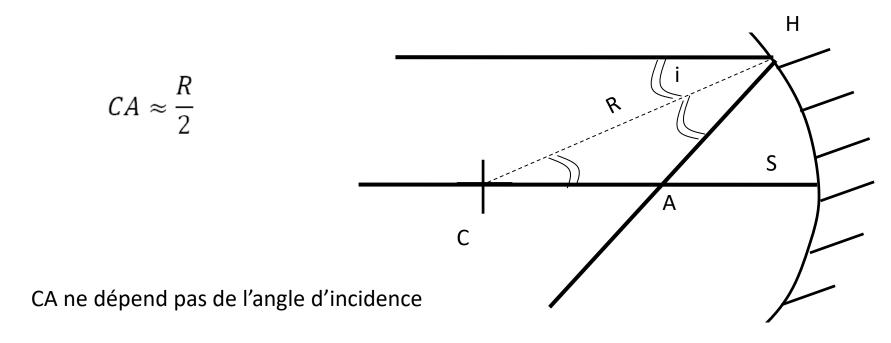
Développement limité de cosinus (voir le cours de math 2^e semestre)

$$\cos i = 1 - \frac{i^2}{2} + O\frac{i^4}{4}$$
 (i en rad)



Si i est petit, le terme en i2 est négligeable devant 1 et cos i ~ 1

Donc pour i petit,
$$CA \approx \frac{R}{2}$$

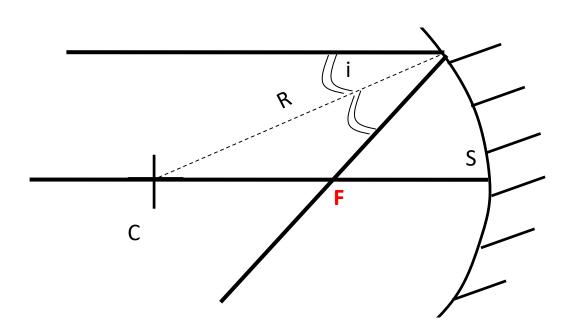


→Stigmatisme!

DEFINITION: FOYER IMAGE

Les rayons proches de l'axe optique convergent vers un point F, appelé le **foyer image**, vérifiant

$$CF = \frac{CS}{2} = \frac{R}{2}$$

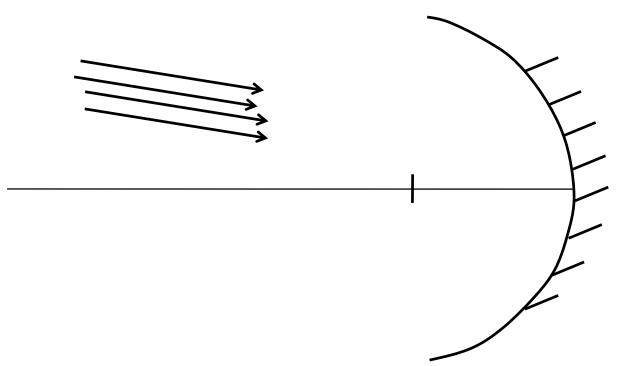


Stigmatisme des miroirs sphériques

- a. Rayons // axe optique
- b. Rayons faiblement inclinés
- c. Construction des rayons
- d. Généralisation aux miroirs convexes et applications

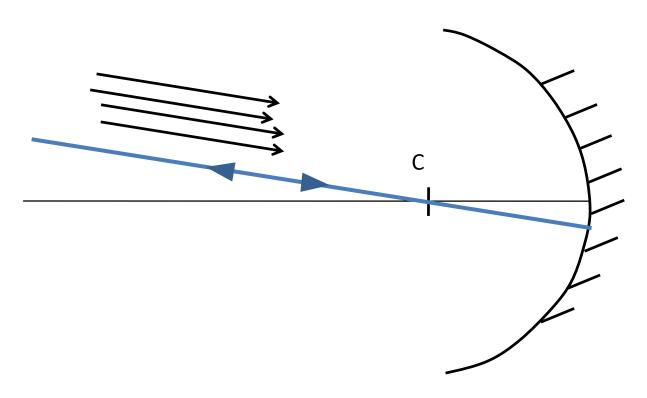
STIGMATISME DU MIROIR CONCAVE b. rayons // inclinés(α petit)

Cas un peu plus général : rayon parallèles entre eux, mais qui ne sont pas parallèles à l'axe optique



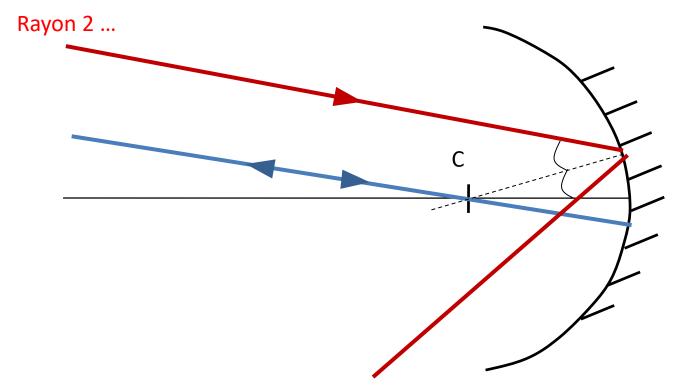
1. Rayon passant par le centre du miroir : se refléchit dans la direction incidente

STIGMATISME DU MIROIR CONCAVE b. rayons // inclinés(α petit)



Rayon 1 passant par le centre du miroir : se réfléchit dans la direction incidente (les rayons de la sphère sont perpendiculaire à la surface donc $i=0^{\circ}$)

STIGMATISME DU MIROIR CONCAVE b. rayons // inclinés(α petit)

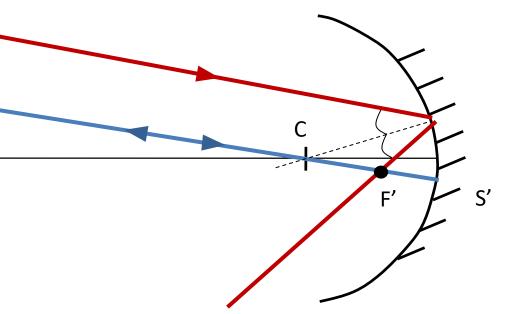


En penchant la tête, on peut s'apercevoir que ce problème est identique au cas des rayons parallèles à l'axe optique! Toutes les normales à la surface sont des rayons passant par C

STIGMATISME DU MIROIR CONCAVE b. rayons // inclinés(α petit)

Mêmes propriétés que les rayons // à l'axe optique :

- -Caustiques
- Convergence vers un **point foyer F'** sur le rayon passant par le centre C et tel que **CF'=R/2**



STIGMATISME DU MIROIR CONCAVE b. rayons // inclinés(α petit)

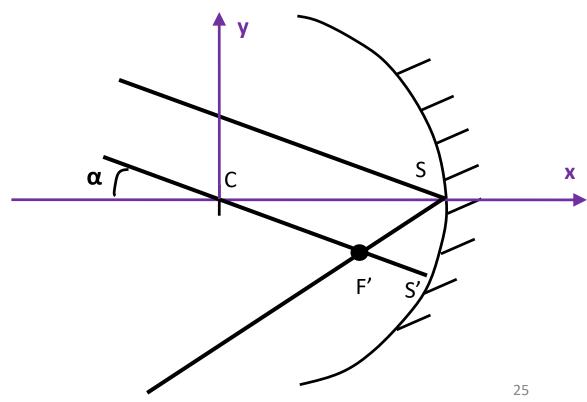
Objectif : calculer les coordonnées de F' dans le repères Cxy ?

 $\boldsymbol{\alpha}$: angle entre les rayons incidents et l'axe optique

$$CF' = R / 2$$

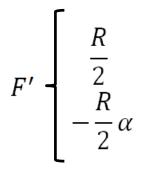
$$F' \begin{cases} \frac{R}{2} \cos \alpha \\ -\frac{R}{2} \sin \alpha \end{cases}$$

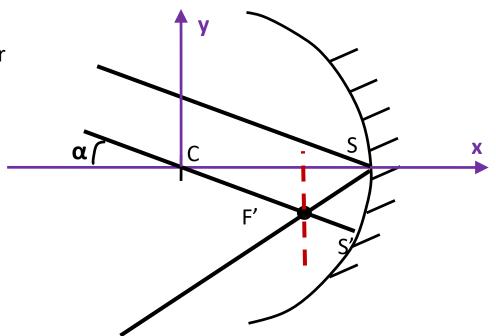
Et si α est petit ?



STIGMATISME DU MIROIR CONCAVE b. rayons // inclinés(α petit)

Si α est petit (rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique)

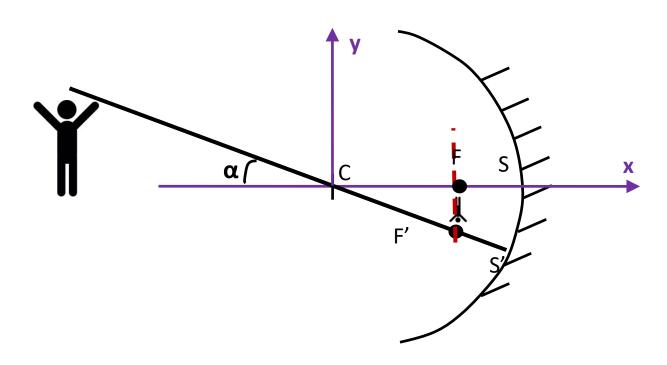




Donc:

- 1. Tous les points F' ont la même abscisse et se retrouvent sur un même plan vertical Ce plan est appelé le plan focal image
- 2. La position F' dépend en y de l'angle α Cela correspond à une relation de proportionnalité entre l'objet et l'image!

STIGMATISME DU MIROIR CONCAVE b. rayons // inclinés(α petit)



Donc:

- 1. Tous les points F' ont la même abscisse et se retrouvent sur un même plan vertical Ce plan est appelé le plan focal image
- 2. La position F' dépend en y de l'angle α Une relation de proportionnalité entre l'objet et l'image! + image à l'envers

CONDITIONS DE GAUSS

Pour résumer

On obtient une image sur l'écran si :

- Rayons proches de l'axe optique
- Rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique

Conditions de Gauss



Importance de se placer dans les conditions de Gauss pour obtenir une image ! Par exemple, utilisation de diaphragme dans les systèmes optiques

Stigmatisme des miroirs sphériques

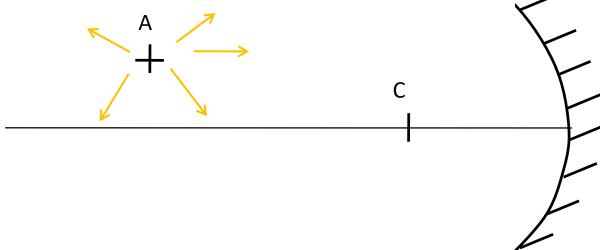
- a. Rayons // axe optique
- b. Rayons faiblement inclinés
- c. Construction des rayons
- d. Généralisation aux miroirs convexes et applications

METHODE DE CONSTRUCTION DES RAYONS

Propriété générale (qu'on va d'abord admettre, et qui sera justifiée plus tard): le miroir sphérique est approximativement stigmatique dans les conditions de Gauss

= Tous les rayons provenant d'un même point et dans les conditions de Gauss convergent vers un

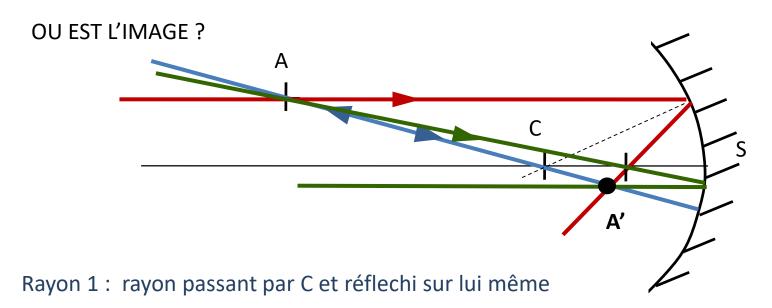
même point, dont on va déterminer la position



Si on admet cette propriété, l'image est facile à déterminer : il suffit de prendre 2 rayons particulier et l'image se situe à l'intersection de ces 2 rayons

METHODE DE CONSTRUCTION DES RAYONS

Propriété générale (qu'on va d'abord admettre, et qui sera justifiée plus tard): le miroir sphérique est approximativement stigmatique dans les conditions de Gauss



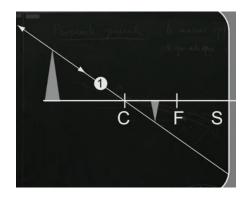
Rayon 2 : parallele à l'axe optique – ce rayon a la propriété de passer par le point CS/2

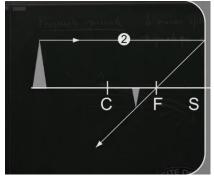
L'image est donc en A'

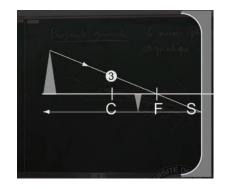
Pour se convaincre du stigmatisme, traçons un 3^e rayon pour voir s'il passe aussi par A' Rayon 3 : rayon passant par le foyer F repart // à l'axe optique (propriété de retour inverse de la lumière) → Un seul point image A' pour un objet ponctuel A 31

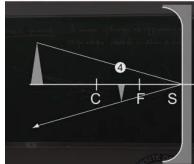
METHODE DE CONSTRUCTION DES RAYONS

- 1. Le rayon qui passe par C n'est pas dévié
- 2. Le rayon parallèle à l'axe optique est réfléchi vers F
- 3. Le rayon qui passe par F est réfléchi parallèlement à l'axe optique
- 4. Le rayon qui atteint le miroir en S est réfléchi avec le même angle que son angle d'incidence





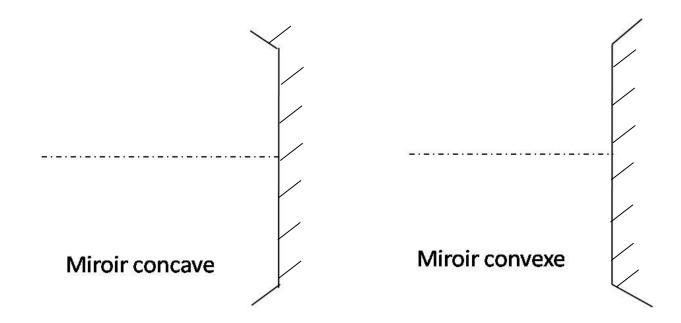




REPRESENTATION DES MIROIRS

Remarque : dans les conditions de Gauss on peut négliger la petite différence d'abscisse de la surface d'un miroir sphérique

Représentation classique d'un miroir sphérique

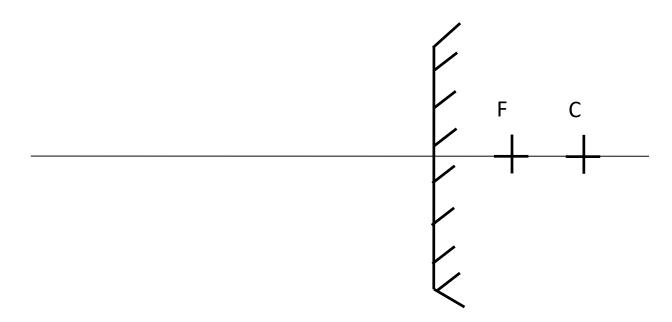


Stigmatisme des miroirs sphériques

- a. Rayons // axe optique
- b. Rayons faiblement inclinés
- c. Construction des rayons
- d. Généralisation aux miroirs convexes et applications

GENERALISATION AU MIROIR CONVEXE

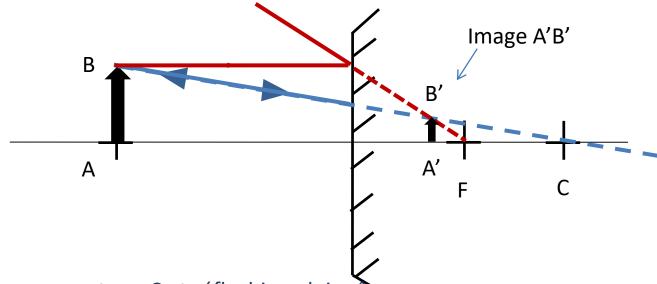
Attention! Centre à l'arrière du miroir!



On peut montrer que le foyer est aussi au milieu de CS

GENERALISATION AU MIROIR CONVEXE

Construction de l'image de l'objet AB en suivant les règles définies précédemment



Rayon 1: rayon passant par C et réflechi sur lui même

Rayon 2 : parrallele à l'axe optique – ce rayon a la propriété de passer par le point CS/2

Image B' à l'intersection de 1 et 2

Si on fait cela pour tous les points entre A et B, on construit l'image A'B' indiquée

L'image est dans le même sens, et plus petite que l'objet.

L'image est virtuelle = si on met un écran en A' à l'arrière du miroir : pas d'image

MIROIRS CONCAVE ET **CONVEXE**

Vérification : cuillère

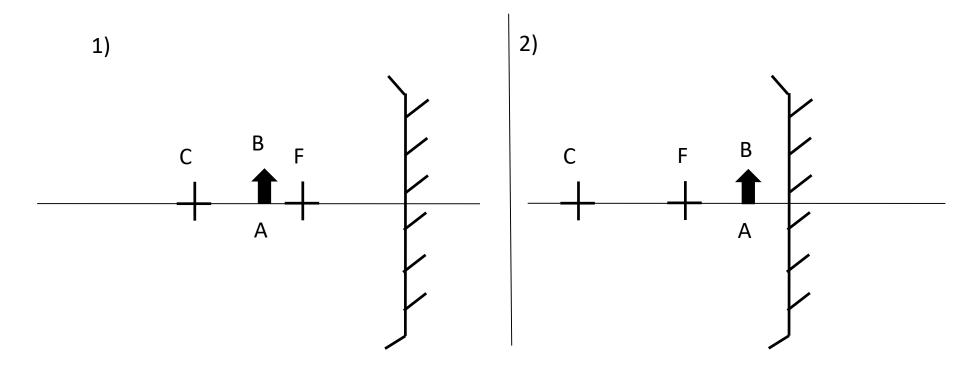




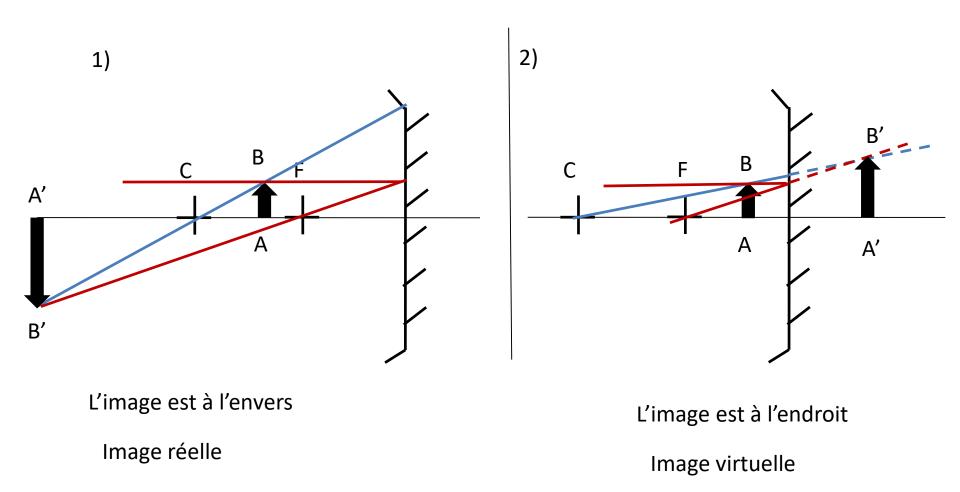
Dans un sens on se voit petit et droit Dans l'autre sens : à l'envers

Miroir grossissant : l'image est à l'endroit ou à l'envers en fonction de la distance au miroir... On va voir ca maintenant

Application. Deux autres cas de figures du miroir concave. Où est l'image de AB?



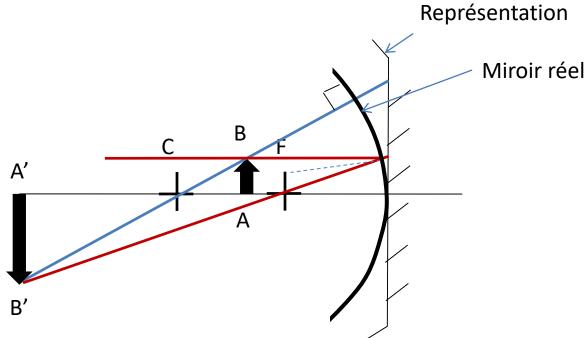
Application. Deux autres cas de figures du miroir concave. Où est l'image de AB?



On peut d'ailleurs déterminer le foyer en déterminant la distance à laquelle l'image s'inverse quand on s'éloigne du miroir

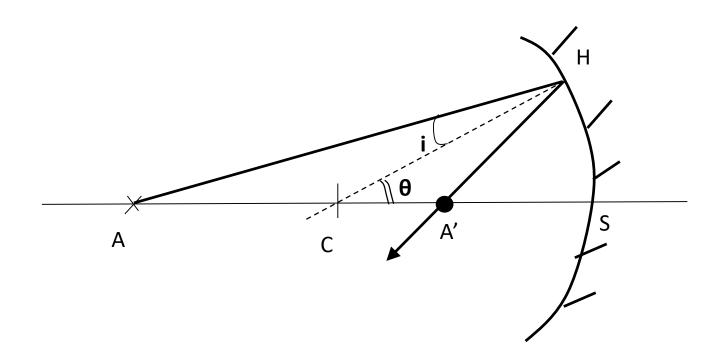
REMARQUES

- 1. Constructions typiques, savoir-faire à maîtriser!
- 2. Attention, la représentation du miroir est verticale mais c'est bien un miroir sphérique C'est pour cela par exemple que le rayon qui se reflechit sur lui même semble avoir un angle incident non nul.

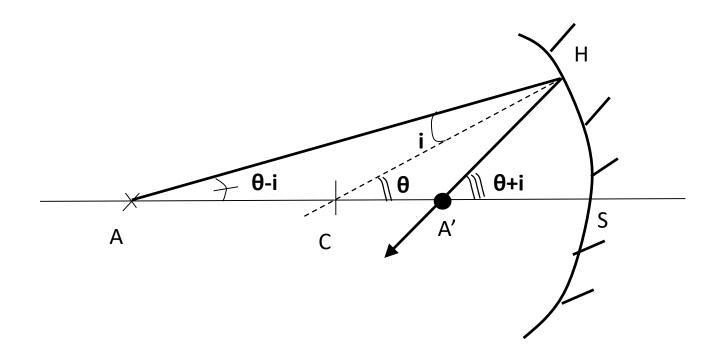


Relations de conjugaison

Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave

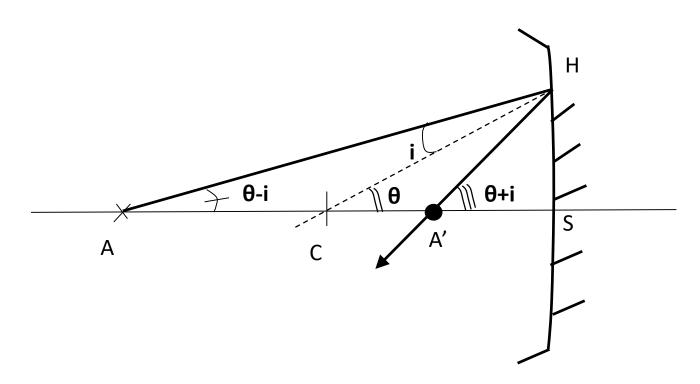


Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave



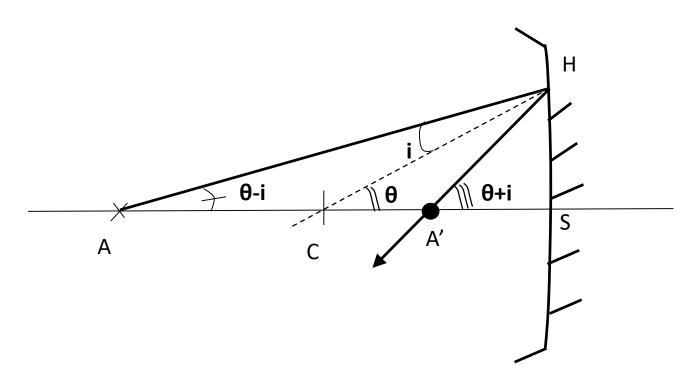
1. On remarque que l'angle CAH vaut $(\theta-i)$ et SA'H vaut $(\theta+i)$ (par exemple en utilisant la propriété de somme des angles d'un triangle qui vaut π sur ACH et A'CH,...)

Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave



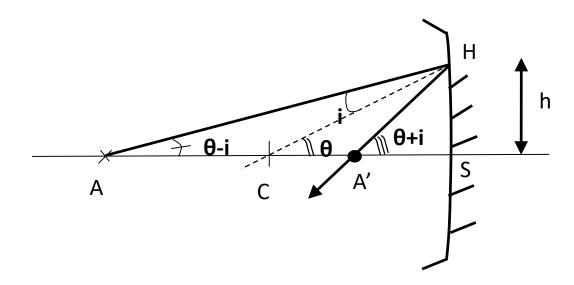
2. Conditions de Gauss : S et H ont environ la même abcisse

Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave



3. On exprime les tangente en utilisant les triangles rectangles ASH, CSH et A'SH

Calcul de la position de l'image A' dans le cas du miroir concave



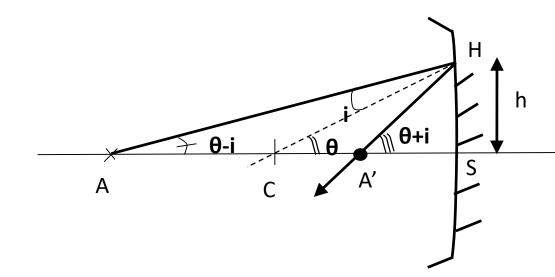
3. On exprime les tangente en utilisant les triangles rectangles ASH, CSH et A'SH

$$\begin{cases}
\tan(\theta - i) = \frac{h}{SA} \approx \theta - i \\
\tan(\theta) = \frac{h}{CS} \approx \theta \\
\tan(\theta + i) = \frac{h}{SA'} \approx \theta + i
\end{cases}$$

En sommant la 1^e et la 3^e équation, <u>puis</u> en utilisant l'équation 2 on obtient :

$$\frac{h}{SA} + \frac{h}{SA'} = 2\theta = \frac{2h}{CS}$$

En divisant par h à gauche et à droite,



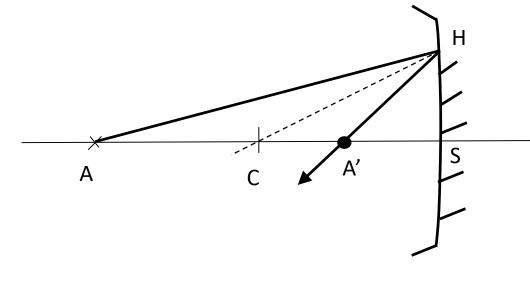
$$\frac{1}{SA} + \frac{1}{SA'} = \frac{2}{CS}$$

Ne dépend pas de h! Stigmatisme approché dans les conditions de Gauss

RELATION DE CONJUGAISON DES MIROIRS SPHERIQUES

En notation algébrique :

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

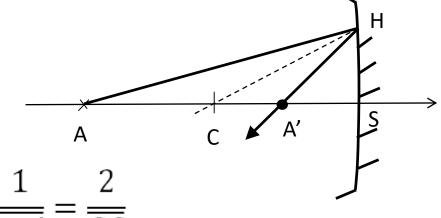


Cette formule est valable pour tous les miroirs sphériques

La preuve dans le cas des miroirs convexes ne sera pas faite durant ce cours Le miroir plan est un cas particulier de miroir sphérique pour lequel CS = ∞

ETUDE DES CAS PARTICULIERS

1. Cas ou l'objet est au centre



$$A = C$$

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \longrightarrow \frac{1}{\overline{SC}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

$$\Rightarrow \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{1}{\overline{SC}} \Rightarrow \overline{SA'} = \overline{SC} \Rightarrow A' = C$$

L'image A' est aussi au centre

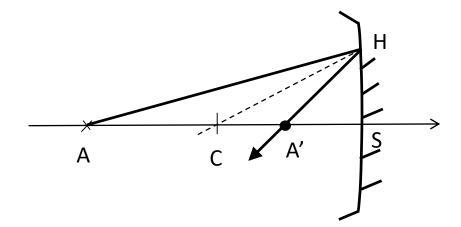
2. Cas ou l'image est au centre A' = C

A et A' sont interchangeables dans la relation de conjugaison, donc le résultat est le même que dans le cas 1 : L'objet est au centre

ETUDE DES CAS PARTICULIERS

3. Cas ou l'objet est à l'infini

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \qquad A \to -\infty$$



$$\frac{1}{\overline{SA}} \to 0 \implies \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \implies \overline{SA'} = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF}$$

Image à Foù Fest le « Foyer image»

4. Cas où l'image est à l'infini

Même calcul,
$$\overline{SA} = \frac{\overline{SC}}{2} = \overline{SF}$$

L'objet est à F qui est aussi le « foyer objet»

Foyer objet = Point où il faut placer l'objet pour que l'image soit à l'infini Foyer image= l'image l'objet

APPLICATION

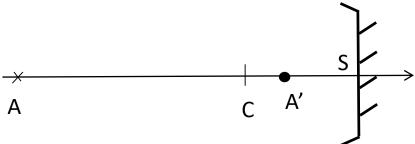
Soit un objet qui se trouve à 30 cm en avant d'un miroir concave de rayon de courbure R=10cm. Où se trouve l'image ?

$$\frac{1}{\overline{SA}} + \frac{1}{\overline{SA'}} = \frac{2}{\overline{SC}} \qquad \qquad \frac{1}{\overline{SA'}} = -\frac{2}{10} + \frac{1}{30} = -\frac{1}{6} (cm^{-1})$$

$$\overline{SA} = -30 \text{ cm}$$

$$\overline{SC} = -10 \text{ cm}$$

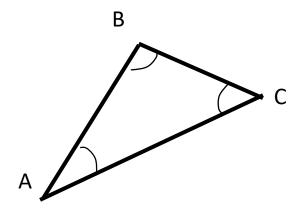
$$\overline{SC} = -10 \text{ cm}$$



On obtiendrait le même résultat (moins précisément) avec la construction des rayons

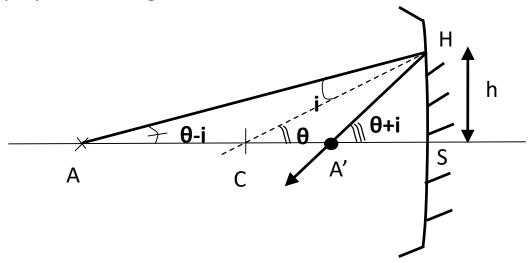
Relations de conjugaison : 2e et 3e expressions

1. On va utiliser la propriété suivante, valable pour tous les triangles



$$\frac{\sin a}{BC} = \frac{\sin b}{AC} = \frac{\sin c}{AB}$$

2. On l'applique au triangle ACH



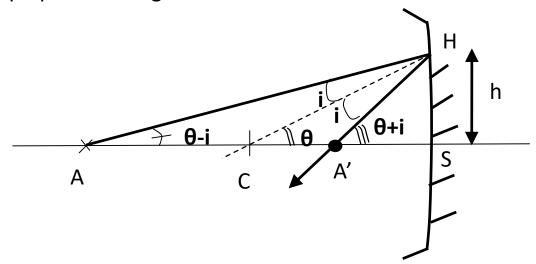
$$\frac{\sin i}{CA} = \frac{\sin(\theta - i)}{CH}$$

Approx petits angles



$$\frac{i}{CA} \approx \frac{\theta - i}{R}$$

3. On l'applique au triangle CA'H



$$\frac{\sin i}{CA'} = \frac{\sin(\pi - (\theta + i))}{CH} = \frac{\sin(\theta + i)}{CH}$$
 [R

[Rappel : $sin(\pi-x) = sin(x)$]

$$\frac{i}{CA'} \approx \frac{\theta + i}{R}$$
 Approx petits angles

4. On en déduit

Apres soustraction de (1) et (2)

Puis on divise par i

$$(1) \frac{i}{CA} \approx \frac{\theta - i}{R}$$

$$\Rightarrow$$

$$\frac{\iota}{CA} - \frac{\iota}{CA'} = \frac{-2}{R}$$



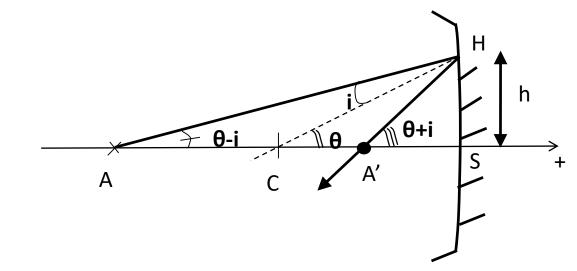
$$\Rightarrow \frac{i}{CA} - \frac{i}{CA'} = \frac{-2i}{R} \Rightarrow \frac{1}{CA} - \frac{1}{CA'} = \frac{-2}{R}$$

(2) $\frac{i}{CA'} \approx \frac{\theta + i}{R}$

5. En notation algébrique ?

$$\frac{1}{CA} - \frac{1}{CA'} = \frac{-2}{R}$$

$$\longrightarrow -\frac{1}{\overline{CA}} - \frac{1}{\overline{CA'}} = -\frac{2}{\overline{CS}}$$





$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

Relation de conjugaison avec origine au centre

APPLICATION

Même question – calcul avec la deuxième relation de conjugaison : Objet à 30 cm en avant d'un miroir concave de rayon de courbure R=10cm. Où se trouve l'image ?

$$CA=$$
 $CS=$ \rightarrow $CA'=$?

$$\frac{1}{\overline{CA}} + \frac{1}{\overline{CA'}} = \frac{2}{\overline{CS}}$$

$$\frac{1}{-20} + \frac{1}{\overline{CA'}} = + \frac{1}{5}$$

$$\overline{CA} = -20 \text{ cm}$$

$$\overline{CA'} = + 4 \text{ cm}$$

$$\overline{CS} = + 10 \text{ cm}$$

Les deux relations donnent le même résultat

$$\overline{FA}.\overline{FA'} = f^2$$

Relation de conjugaison avec origine au foyer

Avec
$$f = \frac{R}{2}$$

APPLICATION

Même question – calcul avec la 3e relation de conjugaison : Objet à 30 cm en avant d'un miroir concave de rayon de courbure R=10cm. Où se trouve l'image ?

$$\overline{FA} = -25 cm$$

$$f = 5 cm$$
Avec
$$f = \frac{R}{2}$$

$$\overline{FA'} = -\frac{25}{25} = -1 cm$$

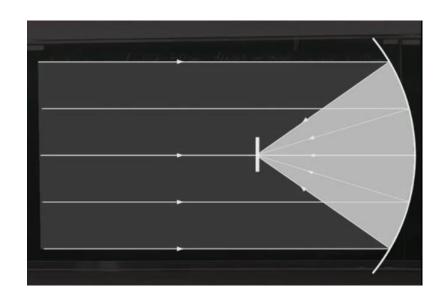
$$C$$

$$A$$

Illustration de l'utilisation de miroirs sphériques : les télescopes

ILLUSTRATION DE L'UTILISATION DES MIROIRS SPHERIQUES : TELESCOPE

On utilise un miroir concave pour concentrer la lumiere d'une étoile au loin sur la zone de détection



Herschel telescope (2009)



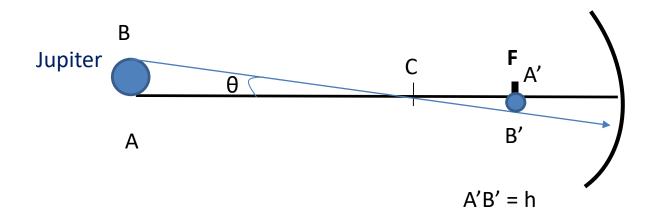
ILLUSTRATION DE L'UTILISATION DES MIROIRS SPHERIQUES : TELESCOPE

Télescope Hubble : (dès 1990) F Jupiter Rayons provenant de A Rayons provenant de B sont // à l'axe optique sont légèrement inclinés

R = 60 m taille angulaire de Jupiter = 1min d'arc=1 $^{\circ}$ /60 ou 2,9x10 $^{-4}$ rad Taille de l'image de Jupiter sur le détecteur ?

ILLUSTRATION DE L'UTILISATION DES MIROIRS SPHERIQUES : TELESCOPE

Télescope Hubble :



R = 60 m taille angulaire de Jupiter = 1min d'arc=1 $^{\circ}$ /60 ou 2,9x10 $^{-4}$ rad

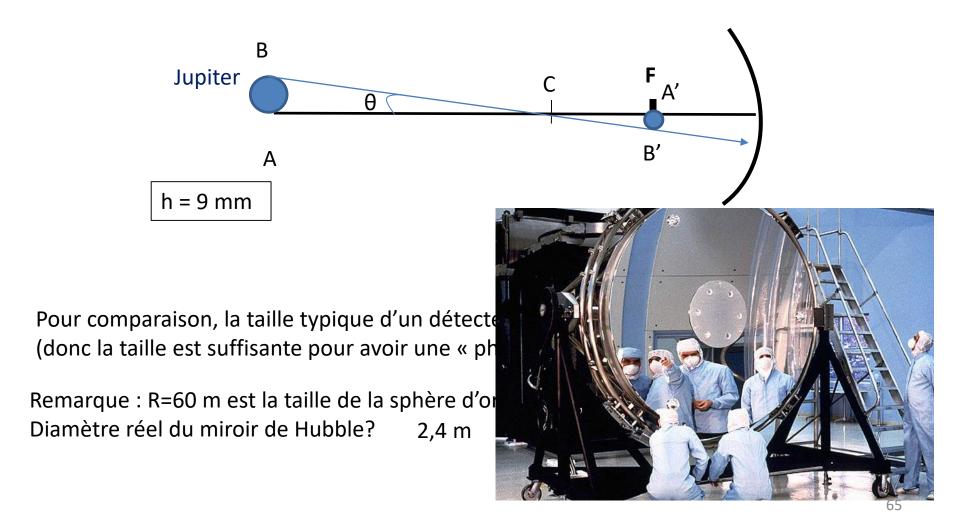
B' peut être déterminé simplement en tracant l'intersection entre le plan foyer et le rayon passant par C

tan
$$\theta = h/CF \approx \theta$$

donc h= θ x CF = 2,9 x 10⁻⁴ x (60 / 2) = 9 x 10⁻³ m

$$h = 9 mm$$

ILLUSTRATION DE L'UTILISATION DES MIROIRS SPHERIQUES : TELESCOPE Télescope Hubble :

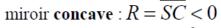


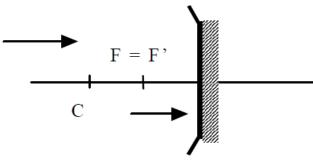
Animation : tracé des rayons dans le cas du miroir sphérique en conditions de Gauss

http://www.sciences.univnantes.fr/sites/genevieve_tulloue/optiqueGeo/miroirs/miroir_spherique.php

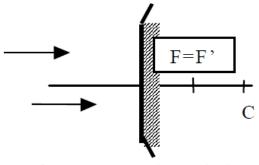
FORMULAIRE – Miroirs sphériques

Miroirs sphériques





miroir **convexe** : $R = \overline{SC} > 0$



Les foyers F et F' d'un miroir sphérique sont **confondus** avec le **milieu** de [S ; C] cf schéma ci-dessus :

$$\overline{SF} = \overline{SF'} = \frac{\overline{SC}}{2}$$

Conjugaison :

Descartes: $\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$

Newton: $\overline{F'A'}.\overline{FA} = ff'$

grandissement:

Descartes: $\gamma = -\frac{SA'}{\overline{SA}}$

Newton: $\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{F'A}{f'}$

Avec C: $\gamma = \frac{CA}{\overline{CA}}$

Remarque : grandissement $\gamma = A'B' / AB$

Formules admises pour les miroirs sphériques

Descartes: $\gamma = -\frac{\overline{SA'}}{\overline{SA}}$ Newton: $\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A'}}{f'}$ Avec C: $\gamma = \frac{\overline{CA'}}{\overline{CA}}$

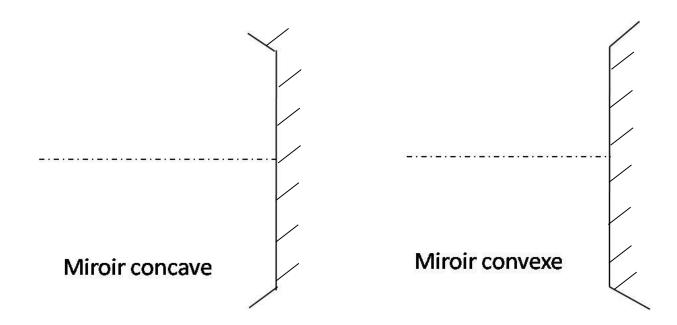
6. Qu'est-ce que les relations de Gauss?

On obtient une image sur l'écran si :

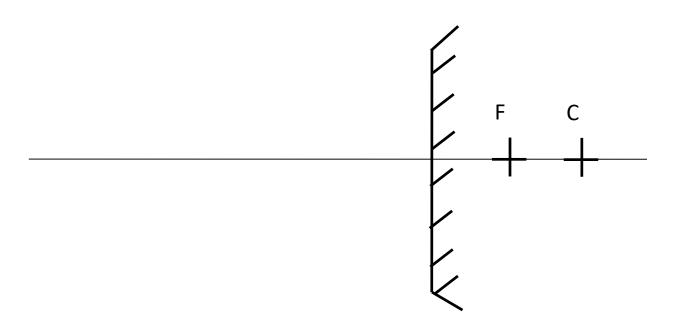
- Rayons proches de l'axe optique
- Rayons peu inclinés par rapport à l'axe optique

Conditions de Gauss

1. Qu'est-ce qu'un miroir concave, convexe et comment les représente t on en optique ?

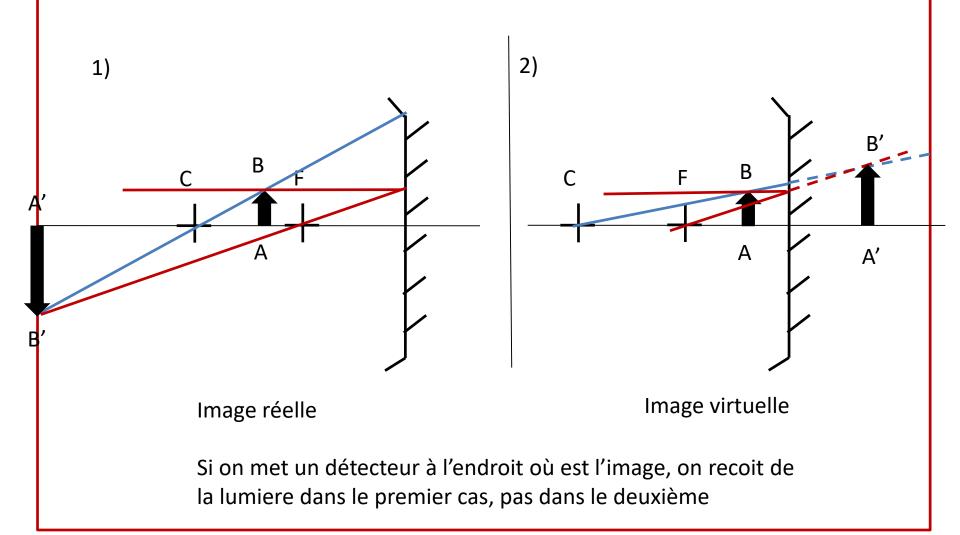


2. Où se trouve le foyer d'un miroir sphérique convexe ?



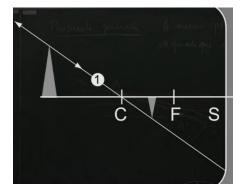
Le foyer est au milieu de CS

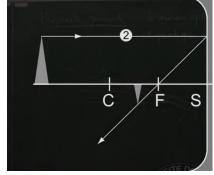
3. Qu'est ce qu'une image réelle ? Virtuelle ?

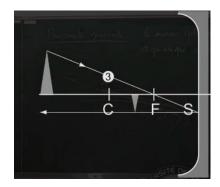


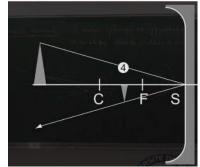
4. Dans le cas des miroirs sphériques, quels sont les rayons remarquables que l'on peut utiliser pour déterminer graphiquement où est l'image ?

- 1. Le rayon qui passe par C n'est pas dévié
- 2. Le rayon parallèle à l'axe optique est réfléchi vers F
- 3. Le rayon qui passe par F est réfléchi parallèlement à l'axe optique
- 4. Le rayon qui atteint le miroir en S est réfléchi avec le même angle que son angle d'incidence









Pour construire une image, deux des 4 rayons suffisent

5. Un objet est à 2 cm en avant d'un miroir concave de rayon 5 cm. Comment déterminer où se trouve l'image ?

Faire un schéma et utiliser les relations de conjugaison

Pareil pour le grandissement

Conjugaison:

Descartes:
$$\frac{1}{\overline{SA'}} + \frac{1}{\overline{SA}} = \frac{2}{\overline{SC}}$$

Newton: $\overline{F'A'}.\overline{FA} = ff'$

grandissement:

Descartes:
$$\gamma = -\frac{SA'}{\overline{SA}}$$

Newton:
$$\gamma = -\frac{f}{\overline{FA}} = -\frac{\overline{F'A}}{f'}$$

Avec C:
$$\gamma = \frac{CA}{\overline{CA}}$$