CIR2 CNB2 — Interrogation 4 — Séries Entières — 29 Novembre 2019

| NOM | Prénom | Classe |
|---|---|---|
| | | |

Durée 45 minutes
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable
Inscrire les réponses sur la feuille d'énoncé, sans râture ni surcharge (utiliser un brouillon !)

1/ Donner le rayon de convergence des 5 séries entières et la somme des 2 premières

| $\left[z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ | $\left[\frac{z^n}{n!}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ | $\left[\frac{z^n}{n(n+1)}\right]_{n\in\mathbb{N}^*}$ | $\left[\frac{z^n}{n}\right]_{n\in\mathbb{N}^*}$ | $\left[n^n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}^*}$ |
|---|---|---|---|---|
| $R=1$ | $R=\infty$ | $R=1$ | $R=1$ | $R=0$ |
| $\sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z}$ | $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{z^n}{n!} = \exp(z)$ | | | |

2/ Soit $f$ une fonction développable en série entière : $f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ avec un rayon de convergence $R$.

Entourer la (ou les) réponse(s) correcte(s)

$\int_0^x f(t)dt$ a comme développement en série entière :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_{n+1}x^n}{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n x^n}{n}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n}$ | autre chose $\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a_n x^{n+1}}{n+1}$ |

$f'$ a comme développement en série entière :

| | | | | |
|---|---|---|---|---|
| $\sum_{n=0}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}$ | $\sum_{n=1}^{\infty}(n-1)a_{n-1}x^n$ | $\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n$ | autre chose |

3/ Développement en série entière au voisinage de 0 et rayon de convergence:

| | Développement en série entière | rayon de convergence |
|---|---|---|
| $\frac{1}{1-x^2}$ | $\sum_{n=0}^{\infty} x^{2n}$ | 1 |
| Arctan x | $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{2n+1}$ | 1 |
| cos x | $\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$ | $\infty$ |
| $(1+x)^{\alpha}$ | $1+\alpha\,x+\sum_{n=2}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)..(\alpha-n+1)x^n}{n!}$ | 1 |
| $\ln(1-x)$ | $-\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n} = -\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n+1}}{n+1}$ | 1 |

4/ Soit $R$ le rayon de convergence de la série $\left[a_n z^n\right]$

| | |
|---|---|
| Si la série $\left[(-1)^n a_n\right]$ converge, que peut-on dire de $R$ ? | $R \geqslant 1$ |
| Si la série $\left[a_n\right]$ diverge, que peut-on dire de $R$ ? | $R \leqslant 1$ |
| Si la série $\left[2^n a_n\right]$ converge et la série $\left[3^n a_n\right]$ diverge, que peut-on dire de $R$ ? | $2 \leqslant R \leqslant 3$ |
| Si $\forall x \in \mathbb{R}$ , $\lvert x\rvert < 2 \Rightarrow$ la série $\left[a_n x^n\right]$ converge , que peut-on dire de $R$ ? | $R \geqslant 2$ |
| Si $\forall x \in \mathbb{R}$, $\lvert x\rvert \leqslant 2 \Rightarrow$ la série $\left[a_n x^n\right]$ converge , que peut-on dire de $R$ ? | $R \geqslant 2$ |

5/ Soit $R$ le rayon de convergence de la série $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ .

| | |
|---|---|
| Quel est le rayon de convergence $R_1$ de la série $\left[a_n z^{2n}\right]$ ? | $R_1 = \sqrt{R}$ |
| Quel est le rayon de convergence $R_2$ de la série $\left[(-1)^n a_n z^n\right]$? | $R_2 = R$ |
| Quel est le rayon de convergence $R_3$ de la série $\left[n\ a_n\ z^n\right]$ ? | $R_3 = R$ |
| Quel est le rayon de convergence $R_4$ de la série $\left[3^n a_n z^n\right]$ ? | $R_4 = \dfrac{R}{3}$ |

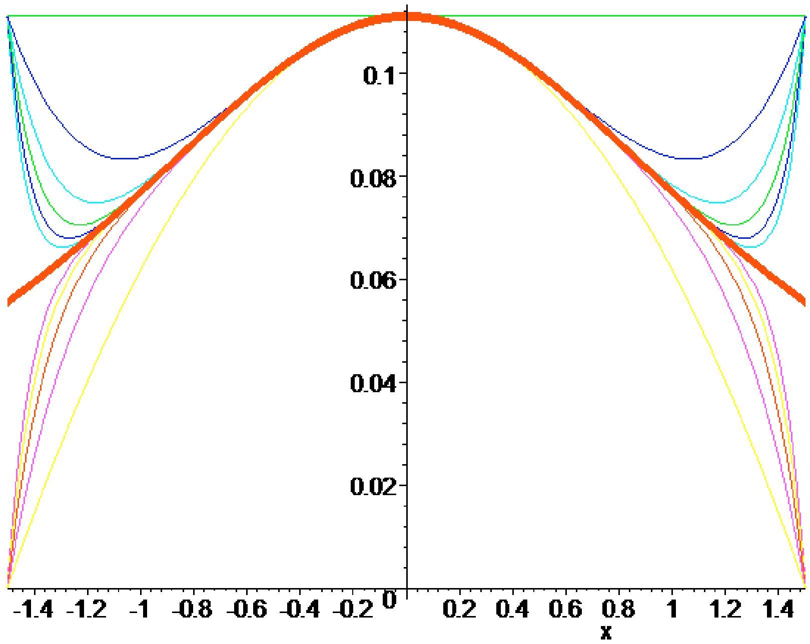
6/ Développement en série entière et rayon de convergence de $f(x) = \dfrac{1}{4x^2+9} = \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1}$

$\dfrac{1}{1-x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} x^n \left(RdC = 1\right)$ donc (homothétie de rapport -1) $\dfrac{1}{1+x} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^n \left(RdC = 1\right)$

Par substitution $x \to x^2$ (puissance) $\dfrac{1}{1+x^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n x^{2n} \left(RdC = \sqrt{1} = 1\right)$

Par homothétie de rapport $\dfrac{2}{3}$ , $\dfrac{1}{1+\left(\frac{2x}{3}\right)^2} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} (-1)^n \left(\dfrac{2x}{3}\right)^{2n} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{3^{2n}} x^{2n} \left(RdC = \dfrac{3}{2}\right)$

Par linéarité, on obtient $f(x) = \dfrac{1}{4x^2+9} = \dfrac{1}{9}\dfrac{1}{\left(\frac{2x}{3}\right)^2+1} = \sum\limits_{n=0}^{\infty} \dfrac{(-1)^n 2^{2n}}{3^{2n+2}} x^{2n} \left(RdC = \dfrac{3}{2}\right)$




La fonction $f$
et les 16 premières sommes partielles de son développement en série entière sur l'intervalle $\left]-\dfrac{3}{2}\ ,\ +\dfrac{3}{2}\right[$