Noircissez sur la feuille-réponse *toutes les bonnes réponses* à chacune des questions; un cochage erroné induit *bien sûr* des points négatifs ! L'usage de la règle à calcul logarithmique est *permis* mais peu indiqué.

1. Dans $\mathbf{R}^2$, quelle est la matrice de changement de base de $\mathcal{B} = (\mathbf{u}, \mathbf{v})$ vers $\mathcal{B}' = (\mathbf{u}', \mathbf{v}')$, où

$$\mathbf{u} = (3, -1), \quad \mathbf{v} = (1, 2), \quad \text{et} \quad \mathbf{u}' = (-1, 1), \quad \mathbf{v}' = (3, -4)\ ?$$

(1)■ $\frac{1}{7}\begin{bmatrix} -3 & 10 \\ 2 & -9 \end{bmatrix}$ (2)□ $\begin{bmatrix} -2 & 5 \\ 3 & -11 \end{bmatrix}$ (3)□ $\begin{bmatrix} -6 & 7 \\ 5 & -7 \end{bmatrix}$

(4)□ $\begin{bmatrix} -2 & 3 \\ 5 & -11 \end{bmatrix}$ (5)□ $\begin{bmatrix} -13 & 2 \\ -10 & 1 \end{bmatrix}$

2. Soit $V = \mathbf{F}[x]_{\leqslant 3}$ l'espace des polynômes de degré $\leqslant 3$ à coefficients dans un corps $\mathbf{F}$ et $\varphi : V \to V$ l'endomorphisme linéaire défini par $\varphi(P) = P'$. Quelles sont les affirmations vraies ?

(1) □ φ est inversible
(2) ■ 0 est valeur propre de φ
(3) □ $1 + x$ est vecteur propre de φ
(4) □ φ est diagonalisable
(5) ■ $\chi_\varphi(\lambda) = \lambda^4$

3. L'application $\varphi : \mathbf{C} \to \mathbf{C}$ définie par $\varphi(z) = (1 + j) \cdot z \ldots$

(1) □ est diagonalisable en tant qu'application $\mathbf{R}$-linéaire
(2) ■ est diagonalisable en tant qu'application $\mathbf{C}$-linéaire
(3) □ possède 0 comme valeur propre
(4) ■ est inversible en tant qu'application $\mathbf{R}$-linéaire
(5) ■ est inversible en tant qu'application $\mathbf{C}$-linéaire

4. L'endomorphisme φ de $\mathbf{Q}^3$ défini par

$$\varphi(x,\, y,\, z) = (y - z,\, x + 6y - 5z,\, x + 7y - 6z)$$

admet comme représentation matricielle par rapport à une certaine base :

(1)■ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ (2)□ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 3 \end{bmatrix}$ (3)□ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$

(4)■ $\begin{bmatrix} 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$ (5)□ $\begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

5. Un produit scalaire sur un espace vectoriel réel est une

(1)■ forme (2)■ bilinéaire (3)■ symétrique (4)■ définie (5)■ positive

6. Lesquelles parmi les fonctions $\langle \cdot \,|\, \cdot \rangle : V \times V \to \mathbf{R}$ suivantes sont des produits scalaires ?

(1) ■ $V = \mathbf{R},\ \langle x \,|\, y \rangle = xy$
(2) □ $V = \mathbf{R}^2,\ \langle (x, y) \,|\, (z, w) \rangle = xz - yw$
(3) □ $V = \mathbf{R}^2,\ \langle (x, y) \,|\, (z, w) \rangle = xz + yw + 1$
(4) ■ $V = \mathbf{C},\ \langle z \,|\, w \rangle = \mathrm{Re}(z\overline{w})$
(5) □ $V = \mathbf{R}^2,\ \langle (x, y) \,|\, (z, w) \rangle = xz + \frac{1}{2}yz + yw$

7. Combien mesure l'angle entre les vecteurs $u = (1, 0, -1, 0)$ et $v = (-1, 1, 1, 1)$ dans $(\mathbf{R}^4, \cdot)$?

(1)☐ $\pi/6$ (2)☐ $\pi/4$ (3)☐ $\pi/3$ (4)☐ $2\pi/3$ (5)■ $3\pi/4$

8. Quelle est la matrice représentant le produit scalaire usuel de $\mathbf{R}^3$ par rapport à la base

$$u_1 = (1, 0, -1), \quad u_2 = (0, 1, 1), \quad u_3 = (2, 0, 0) \text{ ?}$$

(1)☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 0 \\ -1 & 1 & 0 \end{bmatrix}$ (2)■ $\begin{bmatrix} 2 & -1 & 2 \\ -1 & 2 & 0 \\ 2 & 0 & 4 \end{bmatrix}$ (3)☐ $\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$

(4)☐ $\begin{bmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & 1 \\ 1 & 2 & 4 \end{bmatrix}$ (5)☐ $\begin{bmatrix} 0 & 1 & 2 \\ 1 & -1 & 2 \\ 2 & 2 & 1 \end{bmatrix}$

9. Avec la notation de la question précédente, quel est le projeté orthogonal de $v = (1, 2, 3)$ sur $W = \mathrm{Vect}(u_1, u_2)$?

(1)☐ $(1,\ 1,\ 0)$ (2)☐ $(-1,\ \frac{5}{2},\ \frac{7}{2})$ (3)☐ $(-2,\ 5,\ 7)$ (4)☐ $(1,\ -1,\ 1)$ (5)■ $(\frac{1}{3},\ \frac{8}{3},\ \frac{7}{3})$

Les prochaines questions portent sur l'espace vectoriel V des fonctions continues sur l'intervalle $[0, 2\pi]$ muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^{2\pi} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

10. Quelle est la norme de la fonction constante $f(x) = \frac{1}{2}$?

(1)☐ $\pi/2$ (2)■ $\sqrt{2\pi}/2$ (3)☐ π (4)☐ $\sqrt{\pi}$ (5)☐ 2π

11. La norme de la fonction $g(x) = \sin x$?

(1)☐ $\pi/2$ (2)☐ $\sqrt{2\pi}/2$ (3)☐ π (4)■ $\sqrt{\pi}$ (5)☐ 2π

12. Quel est la mesure de l'angle θ entre f et g ?

(1)☐ 0 (2)☐ $\pi/6$ (3)☐ $\pi/4$ (4)☐ $\pi/3$ (5)■ $\pi/2$

13. Quelle est la fonction appartenant à $\mathrm{Vect}(f, g)$ la plus proche de $h(x) = \cos x$?

(1)☐ $1 + 2\sin x$ (2)☐ $1 - \sin x$ (3)☐ $\frac{1}{\sqrt{\pi}} + \frac{2}{\sqrt{\pi}} \sin x$ (4)☐ $\sin x$ (5)■ 0

14. La famille $(1,\ \sin x,\ \cos x)$ est :

(1) ☐ une base de V
(2) ■ orthogonale
(3) ☐ orthonormée
(4) ■ libre
(5) ☐ liée car $\sin^2 x + \cos^2 x = 1$