CIR2	DS de Maths	17/01/2019

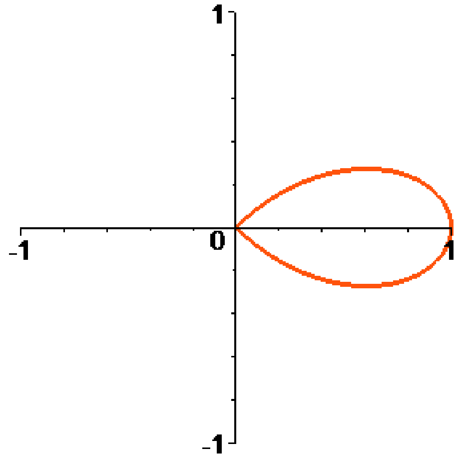
NOM - Prénom - Login

Durée 2 heures
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable
Les réponses (succinctes) sont à faire sur cette feuille d'énoncé, dans les cadres prévus à cet effet, sans râture ni surcharge.

Exercice 1

Soit $\mathcal{C}$ la courbe définie en polaires par $\begin{cases} \rho = \cos(2\theta) \\ \theta \in \left[-\frac{\pi}{4}, +\frac{\pi}{4}\right] \end{cases}$..

Tracer l'allure de la courbe $\mathcal{C}$ et calculer l'aire du domaine limité par $\mathcal{C}$.

Tracé de la courbe	➢ Formule à utiliser pour calculer l'aire ➢ Une étape du calcul ➢ Le résutat
	➢ $\int_{-\pi/4}^{\pi/4}\int_0^{\rho(\theta)} r\,dr\,d\theta$ ➢ $\int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos^2(2\theta)}{2} d\theta = \int_{-\pi/4}^{\pi/4} \frac{\cos(4\theta)+1}{4} d\theta$ ➢ $= \pi/8 \approx 0.4$ (voir ordre de grandeur sur la figure)

Exercice 2

Soit la courbe γ $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t}{1+t^2} \\ y(t) = \dfrac{2}{1+t^2} \end{cases}$, $t \in]0,+\infty[$ et $\vec{V}$ le champ de vecteurs $\vec{V} = \begin{pmatrix} 2 \\ \frac{1}{x} \end{pmatrix}$

On étudie la circulation **C** de $\vec{V}$ le long de la courbe γ. On appelle J l'intégrale impropre $J = \int_0^\infty \frac{x^2}{(1+x^2)^2} dx$

Montrer que l'intégrale J converge	Intégrer J par parties en posant $u = x$ et $v' = \ldots$
$\frac{x^2}{(1+x^2)^2} \underset{x\to\infty}{\sim} \frac{1}{x^2}$ et $\int_1^\infty \frac{dx}{x^2}$ converge (Riemann) ou $0 \leqslant \frac{x^2}{(1+x^2)^2} \leqslant \frac{1}{1+x^2}$ et $\int_0^\infty \frac{dx}{1+x^2}$ converge (vers $\frac{\pi}{2}$)	$u = x \to u' = 1$; $v = \frac{x}{(1+x^2)^2} \to v = -\frac{1}{2}\frac{1}{1+x^2}$ $J = \left[-\frac{1}{2}\frac{x}{1+x^2}\right]_0^\infty - \int_0^\infty -\frac{1}{2}\frac{dx}{1+x^2} = 0 + \frac{1}{2}[\arctan x]_0^\infty = \frac{\pi}{4}$

Calculer le vecteur vitesse $\frac{\overrightarrow{dM}}{dt}$	Exprimer **C** par une intégrale	Simplifier cette expression en faisant apparaître J.	Résultat : **C =**
$\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} = \begin{pmatrix} \frac{1-t^2}{(1+t^2)^2} \\ \frac{-4t}{(1+t^2)^2} \end{pmatrix}$	$C = \int \vec{V}.\overrightarrow{dM} = \int_0^\infty \overrightarrow{V\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}}.\frac{\overrightarrow{dM}}{dt} dt$ $C = \int_0^\infty \left(\frac{2(1-t^2)}{(1+t^2)^2} + \frac{-4}{1+t^2}\right) dt$	$C = \int_0^\infty \frac{-2-6t^2}{(1+t^2)^2} dt = \int_0^\infty \frac{-2(1+t^2)-4t^2}{(1+t^2)^2} dt$ $C = \int_0^\infty \frac{-2}{1+t^2} dt - 4\int_0^\infty \frac{t^2}{(1+t^2)^2} dt$	$C = -2\frac{\pi}{2} - 4J$ $C = -2\pi$

Exercice 3

Soit l'équation différentielle $(1-x)\,y'+y=x$ (où x est la variable et y la fonction inconnue),

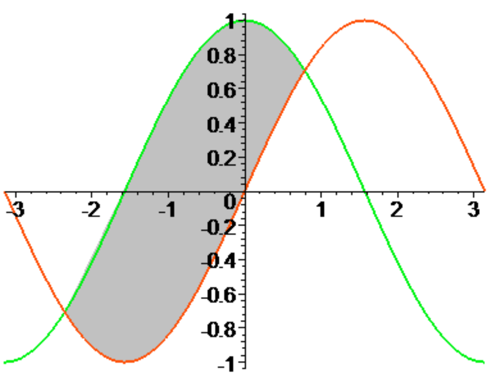
avec la condition initiale $y(0)=0$. On cherche une solution développable en série entière $y=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$.

Justifier que $a_0=0$	$a_0=y(0)=0$
Justifier que $a_1=0$	$a_1=y'(0)$ et dans l'équa diff, en posant $x=0$, on obtient $y'(0)=0$
Calculer y, y' et xy' sous la forme $\sum_{n=k}^{\infty} .... \, x^n$ avec <u>un même k</u>	$y=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} a_n x^n}$ ou $\sum_{n=2}^{\infty} a_n x^n$ car $a_0=a_1=0$ $\quad y'=\sum_{n=2}^{\infty} n\,a_n x^{n-1}=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n}$ $xy'=\sum_{n=2}^{\infty} n\,a_n x^n=\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} n\,a_n x^n}$ car $a_1=0$
Justifier que $a_2=.....$	comme $y'-x\,y'+y=x$, le coefficient de x est 1 : $2a_2-a_1+a_1=1$ et $a_n=\frac{1}{2}$
Établir une relation de récurrence sur les a_n	Pour $n \geqslant 2$ le coefficient de x^n est nul : $(n+1)a_{n+1}-na_n+a_n=0$: $a_{n+1}=\frac{n-1}{n+1}a_n$ et $a_n=\frac{1}{2}$
Déterminer le rayon de convergence de la série obtenue	$\frac{a_{n+1}}{a_n}=\frac{n-1}{n+1}\to 1$ donc le rayon de convergence est 1
Calculer a_n en fonction de n seulement (pour $n \geqslant 2$)	Pour $n \geqslant 3$ $\;a_n=\frac{\boxed{n-2}}{n}.\frac{n-3}{n-1}.\frac{n-4}{\boxed{n}}....\frac{\boxed{4-1}}{4+1}.\frac{3-1}{3+1}.\frac{2-1}{\boxed{2+1}}\,a_2=\frac{1}{n(n+1)}$
Exprimer y' sous forme de série	$y'=\sum_{n=1}^{\infty}(n+1)a_{n+1}x^n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{x^n}{n}$
Exprimer y' avec les fonctions usuelles	On reconnait le développement en série $y'=-\ln(1-x)$ En intégrant par parties, on trouve $y=(1-x)\ln(1-x)-1+x \qquad (y(0)=0)$

Exercice 4

Soit $\mathcal{S}$ la surface définie par $-\pi \leqslant x \leqslant \pi$, $\sin x \leqslant y \leqslant \cos x$

Dessiner la surface $\mathcal{S}$ et calculer $\iint_{\mathcal{S}} y\;dx\;dy$.

figure	➢ Méthode utilisée ➢ Une étape du calcul ➢ Le résutat
	$\iint_{\mathcal{S}} y\;dx\;dy=\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\left(\int_{\sin x}^{\cos x} y\;dy\right)dx$ $\iint_{\mathcal{S}} y\;dx\;dy=\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos^2 x-\sin^2 x}{2}dx=\int_{-3\pi/4}^{\pi/4}\frac{\cos(2x)}{2}dx$ $\iint_{\mathcal{S}} y\;dx\;dy=\left[\frac{\sin(4x)}{4}\right]_{-3\pi/4}^{\pi/4}=0$ On peut alors calculer l'ordonnée du centre de gravité : $y_G=\frac{\iint_{\mathcal{S}} y\;dx\;dy}{\iint_{\mathcal{S}}\;dx\;dy}=0$. Bien sûr ! $\mathcal{S}$ est symétrique par rapport à $\begin{pmatrix}-\pi/4\\0\end{pmatrix}$!