TD. 15/01/21

EX 04 (suite)

3) Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}$ $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$

$(1+X)^{2n} = \underbrace{(1+X)^n (1+X)^n}_{\text{coefficient de } X^n}$.

$\downarrow$ coefficient de X^n $= \binom{2n}{n}$

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k 1^{n-k}\right)\left(\sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} X^j 1^{n-j}\right)$$

quand on réalise le produit, les termes qui vont nous intéresser seront k et j tels que $k+j=n$.

$$= \left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} X^k\right)\left(\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{n-k} X^{n-k}\right)$$

Donc pour X^n le coefficient sera :

$$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \underbrace{\binom{n}{n-k}}_{=\binom{n}{k}} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2$$

4) Formule du capitaine : $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

On regarde de 2 manières le nombre de possibilités de former une équipe de p personnes dont 1 capitaine, sélectionnées parmi n personnes.

• on choisit d'abord les p $\underbrace{\text{membres de l'équipe}}_{\binom{n}{p}}$ puis $\underbrace{\text{un capitaine parmi ceux-ci}}_{p \text{ possibilités}}$.

$\Rightarrow p \times \binom{n}{p}$.

• on choisit d'abord le capitaine $\rightarrow n$ possibilités

puis les autres membres $\rightarrow$ il reste $p-1$ personnes à prendre parmi $(n-1)$. $\rightarrow \binom{n-1}{p-1}$

$\Rightarrow n \times \binom{n-1}{p-1}$

On a obtenu la même chose donc $p\binom{n}{p} = n\binom{n-1}{p-1}$

5)

		on somme.	
$n=0$	1	$n=0$	1
$n=1$	1 1	$n=1$	1
$n=2$	1 2 1	$n=2$	2
$n=3$	1 3 3 1	$n=3$	3
$n=4$ ←	1 4 6 4 1	$n=4$	5
	1 5 10 10 5 1	⋮	

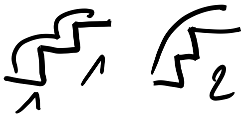
Somme des termes des diagonales ascendantes = termes de la suite de Fibonacci. $F_0 = 0 \quad F_1 = F_2 = 1$.

$\forall n \in \mathbb{N}^* \quad F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

On conjecture que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$.

Autre manière de regarder : une grenouille monte un escalier de n marches. Elle ne peut que monter et doit sauter 1 ou 2 marches. Combien a-t-elle de $\underbrace{\text{façons de monter}}_{u_n}$? $u_n = F_{n+1}$.

$n=1$. 1 façon. $u_1 = F_2 = 1$.

$n=2$.  $\rightarrow$ 2 façons. $u_2 = 2 = F_3$.

$n=3$.  $\rightarrow$ 3 façons. $u_3 = 3 = F_4$.

⋮

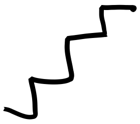
← correspond au nombre maximal de sauts de 2 marches.

Par le calcul : $\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$

$n=1$. $\binom{1}{0} = 1 = u_1$.

← nombre de groupes de 2 marches.

$n=2$  $\binom{2}{0} + \binom{1}{1} = 1+1 = 2 = u_2$.

$n=3$.  $\binom{3}{0} + \binom{2}{1} = 1+2 = 3 = u_3$

2 manières de sauter. (2 groupes de 2 marches possibles)

⋮

On démontre par récurrence. C'est vrai pour $n=1$.

On suppose n fixé avec $\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n-k}{k} = F_{n+1} = F_n + F_{n-1}$.

On regarde au rang $n+1$. 2 cas selon la parité de $n+1$.

- $\underline{n+1 \text{ pair}}$. $\rightarrow \exists p \in \mathbb{N}\ n+1 = 2p+2$. $E\left(\frac{n+1}{2}\right) = p+1$

$$\sum_{k=0}^{p+1} \binom{2p+2-k}{k} = \binom{2p+2}{0} + \sum_{k=1}^{p} \binom{2p+2-k}{k} + \binom{p+1}{p+1}$$

$$\boxed{\text{Relation de Pascal : } \binom{2p+2-k}{k} = \binom{2p+1-k}{k} + \binom{2p+1-k}{k-1}}$$

$$\sum_{k=0}^{p+1}\binom{2p+2-k}{k} = 2 + \sum_{k=1}^{p}\binom{2p+1-k}{k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{2p+1-k}{k-1}$$

changement d'indice.
$j=k-1$. $k=1 \to j=0$.
$k=p \to j=p-1$

$$= \binom{2p+1}{0} + \sum_{k=1}^{p}\binom{2p+1-k}{k} + \underbrace{\sum_{j=0}^{p-1}\binom{2p-j}{j} + \binom{p}{p}}$$

$$= \sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1-k}{k} + \sum_{j=0}^{p}\binom{2p-j}{j}$$

$n+1 = 2p+2$. $\quad E(n/2) = p$
$n = 2p+1$
$n-1 = 2p$. $\quad E\left(\frac{n-1}{2}\right) = p$.

$$= \underbrace{\sum_{k=0}^{E(n/2)}\binom{n-k}{k}}_{\substack{u_n \\ \shortparallel \\ F_{n+1}}} + \underbrace{\sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)}\binom{n-1-j}{j}}_{\substack{u_{n-1} \\ \shortparallel \\ F_n}}$$

$$= F_{n+2} = u_{n+1}$$

Donc hypothèse de récurrence vraie pour le cas pair au rang $n+1$.

- <u>Cas impair</u> : $n+1 = 2p+1$.

$$\sum_{k=0}^{p}\binom{2p+1-k}{k} = \binom{2p+1}{0} + \sum_{k=1}^{p}\left[\binom{2p-k}{k} + \binom{2p-k}{k-1}\right]$$

$$= 1 + \sum_{k=1}^{p}\binom{2p-k}{k} + \sum_{k=1}^{p}\binom{2p-k}{k-1}$$

changement d'indice
$j=k-1$.

$$= \underbrace{\binom{2p}{0} + \sum_{k=1}^{p} \binom{2p-k}{k}} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{2p-1-j}{j}$$

$$= \sum_{k=0}^{p} \binom{2p-k}{k} + \sum_{j=0}^{p-1} \binom{2p-1-j}{j}$$

$n+1 = 2p+1$. $E(n/2) = p$.
$n = 2p$.
$n-1 = 2p-1$. $E\left(\frac{n-1}{2}\right) = p-1$.

donc $\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n+1/2)} \binom{n+1-k}{k} = \sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n-k}{k} + \sum_{j=0}^{E\left(\frac{n-1}{2}\right)} \binom{n-1-j}{j}$

$= u_n + u_{n-1}$
$= F_{n+1} + F_n$
$= F_{n+2}$.

par l'hypothèse de récurrence.

donc l'hypothèse de récurrence est aussi vérifiée pour le cas impair
$\Rightarrow$ elle est vrai au rang $n+1$.

Donc par le principe de récurrence, $\forall n \in \mathbb{N}$, on a :
$\displaystyle\sum_{k=0}^{E(n/2)} \binom{n-k}{k} = F_{n+1}$, n^e terme de la suite de Fibonacci.