Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur la feuille.

Nom: **CORRIGÉ**

1. On travaille pour cette question dans le monoïde $M = \mathcal{F}([\![1,5]\!])$ des fonctions de $[\![1,5]\!]$ dans lui-même.

   a) Donner un exemple de deux éléments f, $g \in M$ pour lesquels $f \circ g \neq g \circ f$.

   9 694 060 réponses possibles ; par exemple, $f = [2\ 1\ 3\ 4\ 5]$ et $g = [1\ 1\ 1\ 2\ 2]$ pour lesquels
   $$f \circ g = [2\ 2\ 2\ 1\ 1] \neq [1\ 1\ 1\ 2\ 2] = g \circ f.$$

   b) Donner un exemple de deux éléments h, $k \in M$ pour lesquels $h \circ k = k \circ h$.

   71 565 réponses possibles ; par exemple, $h = [2\ 1\ 3\ 4\ 5]$ et $h = [1\ 2\ 5\ 4\ 3]$ pour lesquels
   $$h \circ k = [2\ 1\ 5\ 4\ 3] = k \circ h.$$

   c) Résoudre dans M l'équation $[3\ 2\ 5\ 1\ 4] \circ f \circ [1\ 3\ 2\ 5\ 4] = \mathrm{id}$.

   $f = [3\ 2\ 5\ 1\ 4]^{-1} \circ \mathrm{id} \circ [1\ 3\ 2\ 5\ 4]^{-1} = [4\ 2\ 1\ 5\ 3] \circ [1\ 3\ 2\ 5\ 4] = [4\ 1\ 2\ 3\ 5]$ est l'unique solution.

   d) Combien y a-t-il d'éléments dans M ? Combien d'éléments inversibles ?

   $|M| = 5^5 = 3125$, $|M^\times| = |\mathfrak{S}_5| = 5! = 120$.

2. a) Rappeler la définition d'une action d'un monoïde M sur un ensemble X.

Une **action** de M sur X est une loi de composition externe $\cdot : M \times X \to X$ satisfaisant :

- $1_M \cdot x = x$ pour tout $x \in X$; et
- $m \cdot (n \cdot x) = (m \cdot n) \cdot x$ pour tous $m, n \in M$, $x \in X$.

b) Si M agit sur X, notons, pour $m \in M$ donné, $\varphi_m : X \to X$ la fonction définie par $\varphi_m(x) = m \cdot x$.

Montrer que la fonction $\varphi : M \to \mathcal{F}(X)$, $m \mapsto \varphi_m$ est un morphisme de monoïdes (deux choses à vérifier).

- Comme $\cdot$ est une LCE, φ_m est bien une endofonction de X pour chaque $m \in M$.
- La première condition dans la définition d'action nous dit que $\varphi_{1_M} = \mathrm{id}_X$ car

$$\varphi_{1_M}(x) = 1_M \cdot x = x = \mathrm{id}_X(x) \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

- Et la seconde nous dit que $\varphi_{m \cdot n} = \varphi_m \circ \varphi_n$ puisque

$$\varphi_{m \cdot n}(x) = (m \cdot n) \cdot x = m \cdot (n \cdot x) = \varphi_m(n \cdot x) = \varphi_m\big(\varphi_n(x)\big) = \big(\varphi_m \circ \varphi_n\big)(x).$$

c) Réciproquement : si $\varphi : M \to \mathcal{F}(X)$ est un morphisme de monoïdes, vérifier que la formule

$$m \cdot x := \varphi_m(x)$$

définit une action de M sur X.

- Il s'agit bien d'une LCE puisque φ_m est une endofonction de X pour chaque $m \in M$.
- Puisque $\varphi_{1_M} = \mathrm{id}_X$, on a :

$$1_M \cdot x = \varphi_{1_M}(x) = \mathrm{id}_X(x) = x \qquad \text{pour tout } x \in X.$$

- Puisque $\varphi_{m \cdot n} = \varphi_m \circ \varphi_n$, on a

$$(m \cdot n) \cdot x = \varphi_{m \cdot n}(x) = \varphi_m\big(\varphi_n(x)\big) = m \cdot (n \cdot x).$$

3. Considérons l'action du groupe multiplicatif $G = \{z \in \mathbf{C} \,|\, |z| = 1\}$ sur $X = \mathbf{C}$ via multiplication usuelle.

a) 1 et $1 + j$ sont-ils dans la même orbite pour cette action ? (justifiez)

Existe-t-il $z \in G$ tel que $z \cdot 1 = 1 + j$? Clairement non, puisque $|1 + j| \neq 1$.

b) Même question avec 5 et $3 + 4j$.

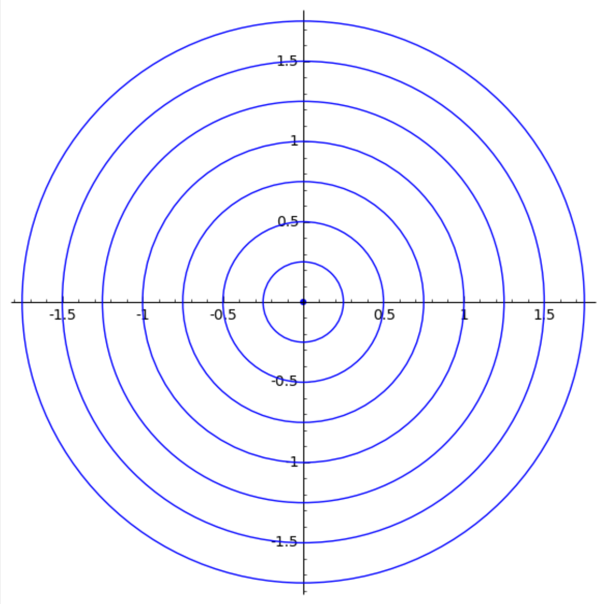
Cette fois-ci, $|3 + 4j| = 5$, donc $z := \frac{3}{5} + \frac{4}{5}j$ est un élément de G pour lequel

$$z \cdot 5 = 3 + 4j.$$

c) Faire un croquis des différentes orbites.

En général, on remarque que x et y sont dans la même orbite si et seulement si $|x| = |y|$. Les orbites pour cette action sont donc les cercles concentriques

$$\{\, x \in \mathbf{C} \mid |x| = r \,\}, \qquad r \geqslant 0.$$



4. a) Vérifier que n'importe quel groupe $(G, \cdot)$ agit sur lui-même par conjugaison :

$$g \star x := g \cdot x \cdot g^{-1}.$$

- Il s'agit bien d'une LCE puisque G est stable sous multiplication et inverses.
- On a bien :

$$1 \star x = 1 \cdot x \cdot 1^{-1} = x \cdot 1 = x \qquad \text{pour tout } x.$$

- Action d'un produit :

$$(g \cdot h) \star x = (g \cdot h) \cdot x \cdot (g \cdot h)^{-1} = g \cdot (h \cdot x \cdot h^{-1}) \cdot g^{-1} = g \cdot (h \star x) \cdot g^{-1} = g \star (h \star x).$$

b) Numéroter les éléments du groupe symétrique $(\mathfrak{S}_3, \circ)$ et expliciter le morphisme $\mathfrak{S}_3 \to \mathfrak{S}_6$ ainsi obtenu.

Disons (arbitrairement)

$$A = \mathrm{id},\ B = (1\,2),\ C = (1\,3),\ D = (2\,3),\ E = (1\,2\,3),\ F = (1\,3\,2).$$

Alors les permutations induites par l'action de $\mathfrak{S}_3$ sur lui-même par conjugaison sont :

$$A \mapsto \mathrm{id} \qquad\qquad B \mapsto (C\,D)\,(E\,F)$$

$$E \mapsto (B\,D\,C) \qquad\qquad C \mapsto (B\,D)\,(E\,F)$$

$$F \mapsto (B\,C\,D) \qquad\qquad D \mapsto (B\,C)\,(E\,F)$$

(Par exemple : $E \star B = E \cdot B \cdot F = D$, etc.)

c) Quelles sont les orbites pour cette action dans le cas de $\mathfrak{S}_3$?

Avec la notation ci-dessus :

$$\{A\},\ \{B, C, D\},\ \{E, F\}.$$

En d'autres termes, deux permutions sont dans la même orbite (*i.e.*, considérées « les mêmes » pour cette action) si et seulement si elles ont la même structure cyclique.