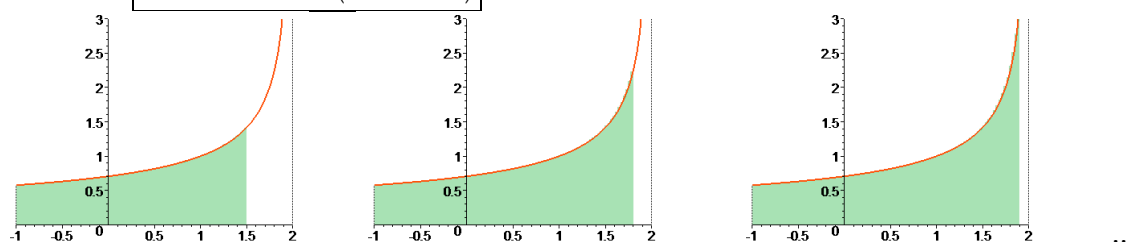


I. Définition - Convergence**1. Définition :**

a. Soit f continue sur $[a, b[$. Pour tout $x \in [a, b[$, on étudie $\int_a^x f(t) dt$

Si cette intégrale a une limite quand $x \xrightarrow{x < b} b$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ converge,

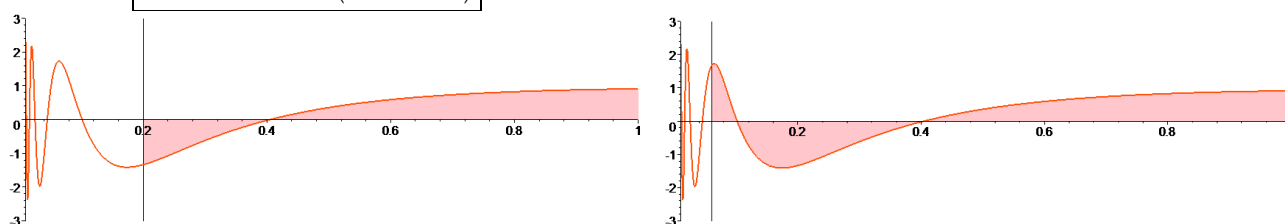
et on note $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow b} \left(\int_a^x f(t) dt \right)$



b. Soit f continue sur $]a, b]$. Pour tout $x \in]a, b]$, on étudie $\int_x^b f(t) dt$

Si cette intégrale a une limite quand $x \xrightarrow{x > a} a$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t) dt$ converge,

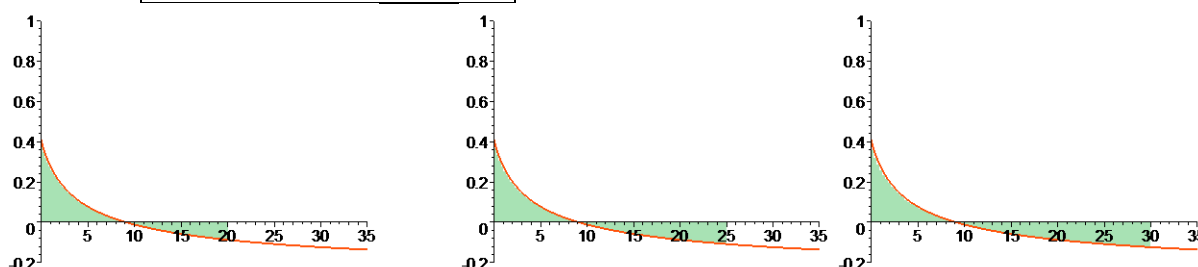
et on note $\int_a^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow a} \left(\int_x^b f(t) dt \right)$



c. Soit f continue sur $[a, +\infty[$. Pour tout $x \in [a, +\infty[$, on étudie $\int_a^x f(t) dt$

Si cette intégrale a une limite quand $x \longrightarrow +\infty$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t) dt$ converge,

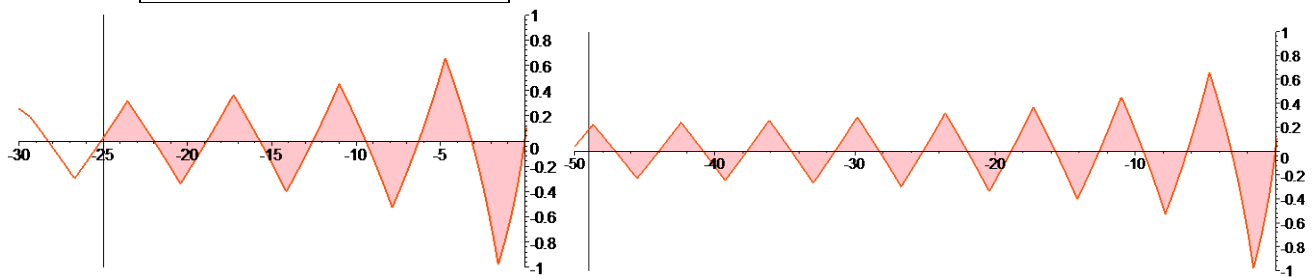
et on note $\int_a^{+\infty} f(t) dt = \lim_{x \rightarrow +\infty} \left(\int_a^x f(t) dt \right)$



d. Soit f continue sur $]-\infty, b]$. Pour tout $x \in]-\infty, b]$, on étudie $\int_x^b f(t) dt$

Si cette intégrale a une limite quand $x \rightarrow -\infty$, on dit que l'intégrale impropre $\int_{-\infty}^b f(t) dt$ converge,

et on note $\int_{-\infty}^b f(t) dt = \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(\int_x^b f(t) dt \right)$



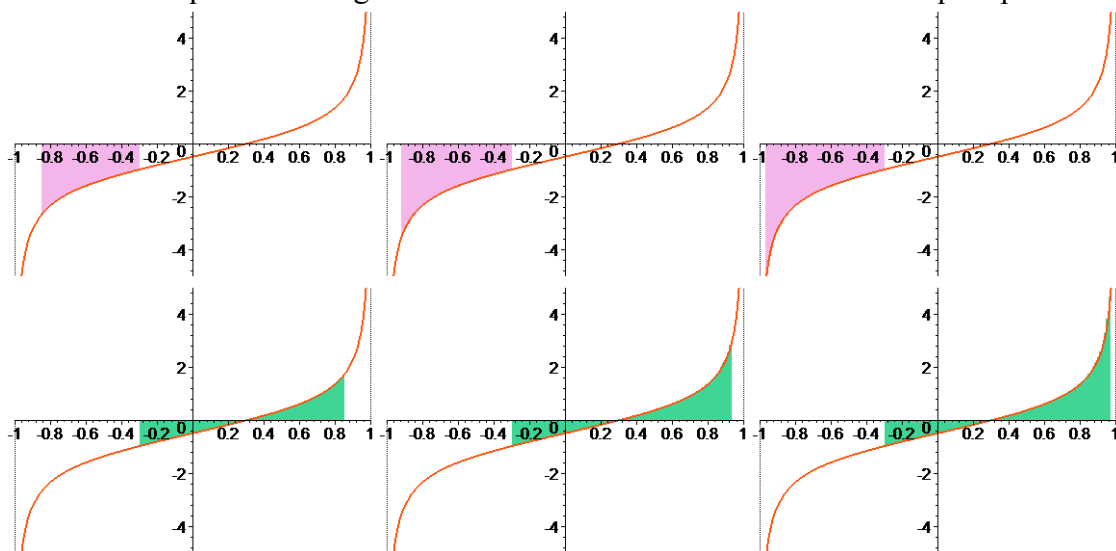
e. Soit f continue sur $]a, b[$. On choisit c quelconque dans $]a, b[$.

Si les intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ convergent toutes les deux, on dit que l'intégrale impropre

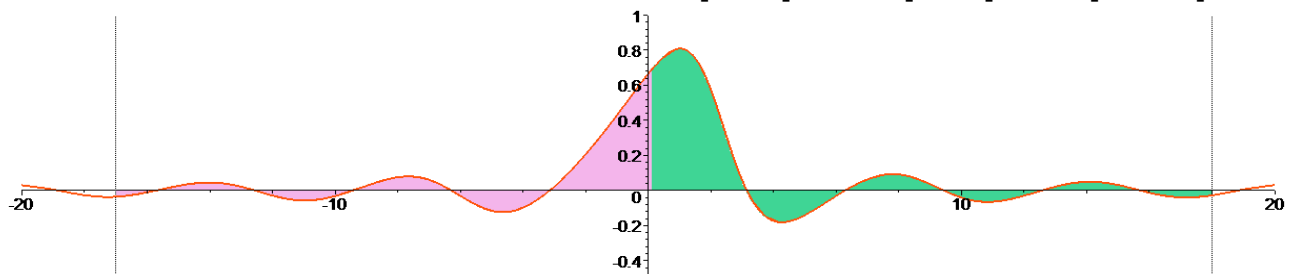
$\int_a^b f(t) dt$ converge, et on note $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$.

Si l'une au moins des deux intégrales $\int_a^c f(t) dt$ et $\int_c^b f(t) dt$ diverge, on dit que $\int_a^b f(t) dt$ diverge.

On démontre que la convergence et la valeur éventuelle sont les mêmes quel que soit le choix de c .



f. Même définition et même propriété pour f continue sur $]a, +\infty[$ ou sur $]-\infty, b[$ ou sur $]-\infty, +\infty[$



Pour la suite du chapitre, les définitions et propriétés seront énoncés
dans le cas de fonctions continues sur $[a, b[$.
On adaptera facilement les énoncés aux autres cas.

2. Fonctions de \mathbb{R} dans \mathbb{C}

Soit f continue de $[a, b[$ (ou $]a, b]$ ou $]a, b[$) dans \mathbb{C} (a et b sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$)

L'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge ssi $\int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt$ et $\int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$ convergent toutes les deux

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t) dt = \int_a^b \operatorname{Re}(f(t)) dt + i \int_a^b \operatorname{Im}(f(t)) dt$

3. Relation de Chasles

Soit f continue sur $[a, b[$ et $c \in [a, b[$

Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si $\int_c^b f(t) dt$ converge

et dans ce cas $\int_a^b f(t) dt = \int_a^c f(t) dt + \int_c^b f(t) dt$

4. Combinaisons linéaires

Soient f et g continues sur $[a, b[$ et λ un scalaire

Si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt$ converge

et dans ce cas, $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt = \lambda \int_a^b f(t) dt + \int_a^b g(t) dt$

Si $\int_a^b f(t) dt$ converge et $\int_a^b g(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b (\lambda f(t) + g(t)) dt$ diverge

5. Positivité

Soient f et g continues sur $[a, b[$

a. Si f est positive sur $[a, b[$ et si $\int_a^b f(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt \geq 0$

b. Si $f \leq g$ sur $[a, b[$, si $\int_a^b f(t) dt$ et $\int_a^b g(t) dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t) dt \leq \int_a^b g(t) dt$

c. Si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge, (on admet qu'alors $\int_a^b f(t) dt$ converge) alors $\left| \int_a^b f(t) dt \right| \leq \int_a^b |f(t)| dt$

II. Intégrale des fonctions positives

1. Majoration des intégrales partielles

Soit f positive et continue sur $[a, b[$.

On dit que les intégrales partielles sont majorées s'il existe un réel M tel que $\forall x \in [a, b[\int_a^x f(t) dt \leq M$

Alors $\int_a^b f(t) dt$ converge si et seulement si les intégrales partielles sont majorées

2. Majoration de la fonction

Soient f et g positives et continues sur $[a, b[$ telles que $f \leq g$ sur $[a, b[$.

a/ Si $\int_a^b g(t) dt$ converge, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge

b/ Si $\int_a^b f(t) dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t) dt$ diverge

3. Équivalence

Soient f et g positives continues sur $[a, b[$.

On dit que f et g sont équivalentes en b si $\frac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow{t \rightarrow b} 1$. On note $f(t) \sim_b g(t)$

Propriété : Si $f(t) \sim_b g(t)$, alors $\left(\int_a^b f(t) dt \text{ converge} \Leftrightarrow \int_a^b g(t) dt \text{ converge} \right)$

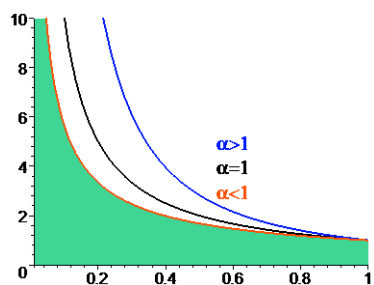
4. Intégrales de référence

a. Exponentielle

Soit α un réel $\int_0^\infty e^{-\alpha t} dt$ converge vers $\frac{1}{\alpha}$ si $\alpha > 0$ et diverge si $\alpha \leq 0$

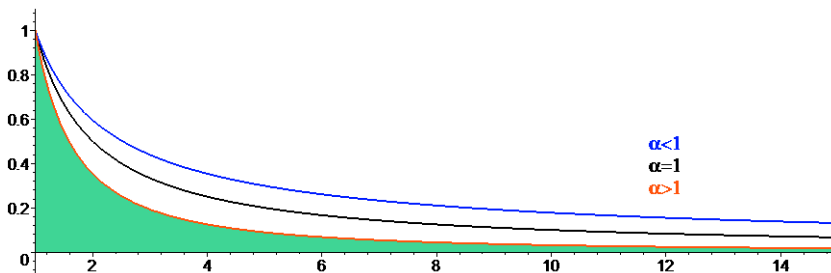
b. Intégrale de Riemann sur $]0, 1]$: soit α un réel strictement positif

$\int_0^1 \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$



c. Intégrale de Riemann sur $[1, +\infty[$: soit α un réel strictement positif

$\int_1^\infty \frac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leq 1$



III. Intégrale des fonctions quelconques

1. **Convergence absolue**

Soit f continue de $[a, b[$ dans \mathbb{C}

Définition : $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument si et seulement si $\int_a^b |f(t)| dt$ converge.

Théorème : Si $\int_a^b f(t) dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

La réciproque est fautive . exemple $\int_0^\infty \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais ne converge pas absolument

Corollaire : Si la fonction f est continue et bornée sur $]a, b[$
et si l'intervalle $]a, b[$ est borné (i.e. $a \neq -\infty$ et $b \neq +\infty$)
alors $\int_a^b f(t) dt$ converge.

2. **Primitives**

Soit f continue sur $[a, b[$.

Si F est une primitive de f sur $[a, b[$, l'intégrale $\int_a^b f(t) dt$ converge ssi $F(t)$ a une limite quand $t \rightarrow b$
on note alors : $\int_a^b f(t) dt = [F(t)]_a^b$, ce qui doit être lu comme « $\lim_{t \rightarrow b} F(t) - F(a)$ ».

3. **Changement de variable :**

Soit f continue sur $[a, b[$.

Soit φ bijection de classe C^1 , de $[\alpha, \beta[$ dans $[a, b[$ (si elle est croissante) ou de $]\alpha, \beta]$ dans $[a, b[$

alors $\int_a^b f(u) du$ converge ssi $\int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$ converge.

et dans ce cas $\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$

On note $\int_a^b f(u) du = \int_\alpha^\beta (f \circ \varphi)(t) \varphi'(t) dt$ pour dire que l'intégrale de gauche converge ssi l'intégrale de droite converge et qu'alors ces deux intégrales sont égales.

4. **Intégration par parties :**

Soit u et v continues sur $[a, b[$.

Comme au 2. on note $[u(t)v(t)]_a^b$ pour dire « $\lim_{t \rightarrow b} u(t)v(t) - u(a)v(a)$ » si cette limite existe

On a alors $\int_a^b u(t) v'(t) dt = [u(t)v(t)]_a^b - \int_a^b u'(t) v(t) dt$ pour dire que l'intégrale de gauche converge si le crochet de droite et l'intégrale de droite convergent tous les deux et que dans ce cas on a égalité.

Si l'un des deux termes de droite converge et que l'autre diverge, alors l'intégrale de gauche diverge.

5. **Exemples et compléments :**

Pour $a < b$ et $\alpha > 0$

$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$

$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geq 1$