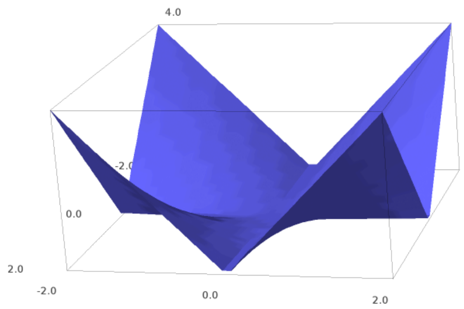
12 décembre 2014 — **Quiz de math n° 5** — ISÉN - $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur la feuille.

Nom:	**CORRIGÉ**

1. La fonction $f(x,y) = |xy|$ est-elle différentiable à l'origine ? Justifiez soigneusement.



Peut-être suprenamment, la réponse est oui. Les fonctions partielles

$$x \mapsto f(x,0) \qquad \text{et} \qquad y \mapsto f(0,y)$$

sont identiquement nulles, de sorte que

$$\frac{\partial f}{\partial x}(0,0) = \frac{\partial f}{\partial y}(0,0) = 0.$$

Or,

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} \frac{|xy|}{\sqrt{x^2+y^2}} = 0.$$

En d'autres termes, la fonction f est $\mathrm{o}(\sqrt{x^2+y^2})$... On a donc le développement limité

$$f(x,y) = \underbrace{0}_{f(0,0)} + \underbrace{0}_{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)}\, x + \underbrace{0}_{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)}\, y + \underbrace{|xy|}_{\mathrm{o}(\sqrt{x^2+y^2})}\ .$$

2. Déterminer l'équation cartésienne du plan $\mathcal{P}$ tangent à l'ellipsoïde $\mathcal{E} : x^2 + 2y^2 + 3z^2 = 6$ en $A = (1, -1, 1)$.

Considérant $\mathcal{E}$ comme une surface de niveau de la fonction de trois variables

$$g(x,y,z) = x^2 + 2y^2 + 3z^2,$$

on obtient comme vecteur normal à la surface en A :

$$\nabla g(A) = 2(x\,\mathbf{i} + 2y\,\mathbf{j} + 3z)\,\mathbf{k}\Big|_A = 2(\mathbf{i} - 2\,\mathbf{j} + 3\,\mathbf{k}).$$

Le plan $\mathcal{P}$ peut donc être décrit comme le plan passant par A admettant ce vecteur normal, d'équation cartésienne

$$x - 2y + 3z = 6.$$

3. Justifier pourquoi la fonction
$$f(x, y) = \cos y + x \sin y^2 + e^{xy}$$
admet un développement limité d'ordre 2 au voisinage du point $(0, 0)$ puis spécifier celui-ci.

La fonction f est de classe $\mathcal{C}^\infty$, étant obtenue comme combinaison linéaire de compositions de fonctions de classe $\mathcal{C}^\infty$ de fonctions à une variable ; elle admet donc des développements limités de tout ordre en chaque point.

Pour obtenir le $\mathrm{DL}_2(0, 0)$, on peut soit utiliser la formule générale
$$f(x, y) = f(0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0)\, y + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0)\, x^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0)\, xy + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0)\, y^2\right) + \mathrm{o}(x^2 + y^2)$$
ou raisonner plus simplement sur les DL_2 des fonctions à une variable impliquées ; dans les deux cas, on trouve
$$f(x, y) = 2 + xy - \frac{1}{2}y^2 + \mathrm{o}(x^2 + y^2).$$

4. Déterminer les valeurs extrêmes prises par la fonction $f(x, y) = xy - y^2$ sur le disque $\mathcal{D} : x^2 + y^2 \leqslant 1$.

La fonction f étant continue sur le domaine compact (fermé et borné) $\mathcal{D}$, on sait qu'elle atteint ses valeurs extrêmes, et comme elle est de classe $\mathcal{C}^1$: soit en un point critique intérieur au domaine, soit à la frontière de celui-ci.

- Point(s) critique(s) : le seul endroit où $\nabla f = y\,\mathbf{i} + (x - 2y)\,\mathbf{j}$ est en $(0, 0)$, où elle admet un point de selle.
- Les valeurs extrêmes sont donc forcément atteintes à la frontière de $\mathcal{D}$. On pourrait chercher les points où ∇f est normal à celle-ci, ou encore travailler directement avec une paramétrisation :
$$f(\cos\theta, \sin\theta) = \cos\theta \sin\theta - \sin^2\theta = -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \sin\left(2\theta - \frac{\pi}{4}\right).$$
Dans tous les cas, on trouve comme valeurs extrêmes
$$-\frac{1}{2} - \frac{1}{\sqrt{2}} \approx -1{,}21 \quad \text{et} \quad -\frac{1}{2} + \frac{1}{\sqrt{2}} \approx 0{,}21.$$