CIR_2 **TD de Maths - Groupe des permutations**

Exercices

- Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 5 & 6 & 10 & 7 & 9 & 2 & 11 & 1 & 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
  en produit de cycles de supports disjoints puis en produit de transpositions.
  Quelle est sa signature ?
- Quelle est la composée de 2 cycles dont les supports ont un et un seul élément commun ?
- Décomposer en produit de cycles disjoints la composée de 2 cycles dont les supports ont exactement deux éléments communs.
- Quelle est la signature de la permutation de l'alphabet représentée par le mot
  `pvlwihcbfazoteqkdxnsuymgjr` ?

Problème

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 3 et S_n est le groupe des permutations de $\{1..n\}$.

Une transposition est notée (i,j) , un p-cycle est noté $(x_1, x_2, .., x_p)$

pour deux permutations σ_1 et σ_2 , on notera $\sigma_1.\sigma_2$ au lieu de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ leur composée.

1) Soient i et j deux entiers tels que $1 \leq i < j \leq n$. Calculer les composées suivantes :
   a) $(1,2).(1,3)..(1,i)$
   b) $(1,i).(1,i-1)..(1,3).(1,2)$
   c) $(1,i).(1,j).(1,i)$
   d) $(j+1, j, j-1, .., 2, 1).(1, 2, .. j-1, j)$
   e) $(i,i+1).(i+1,i+2)..(j-2,j-1).(j-1,j)$
   f) $(j,j-1).(j-1,j-2)...(3,2).(2,1)$
   g) $(i,i+1,..,j-2,j-1).(j,j-1,..,i+1,i)$
2) Soient :
   $A = \{(1,2),(1,3),..,(1,n)\}$ l'ensemble des transpositions de 1 avec les autres entiers
   $B = \{(1,2),(2,3),..,(n-2,n-1),(n-1,n)\}$ l'ensemble des transpositions de 2 entiers consécutifs
   $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée d'éléments de A
   Ecrire σ comme composée d'éléments de A
   b) Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée d'éléments de B
   Ecrire σ comme composée d'éléments de B
3) Soient τ et τ' deux transpositions.
   Montrer que $\tau.\tau' = id$ **<u>ou</u>** $(\tau.\tau').(\tau.\tau') = id$ **<u>ou</u>** $(\tau.\tau').(\tau.\tau').(\tau.\tau') = id$
4) Soit σ une permutation telle que pour toute transposition τ , $\sigma.\tau = \tau.\sigma$
   a) En considérant la transposition $\tau = (1,2)$,
   utiliser l'égalité $(\sigma.\tau)(n) = (\tau.\sigma)(n)$ pour démontrer que
   $\sigma(n) \neq 1$ et $\sigma(n) \neq 2$
   b) En poursuivant, montrer que $\sigma(n) = n$.
   c) Poursuivre. Conclure.