CIR$_2$ CNB$_2$

Intégrales impropres
Résumé de cours

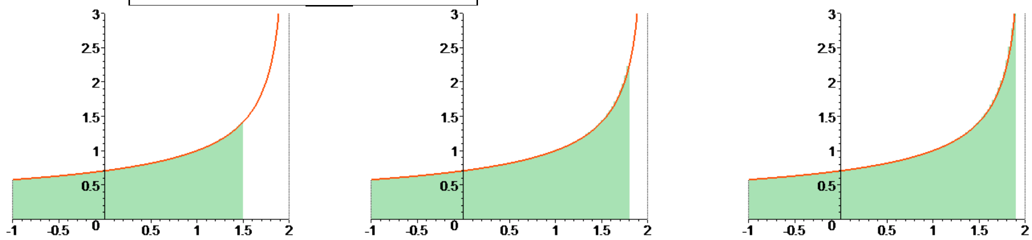
I. Définition - Convergence

1. *Définition :*

a. Soit f continue sur $[a,b[$. Pour tout $x \in [a,b[$, on étudie $\int_a^x f(t)\,dt$

Si cette intégrale a une limite quand $x \xrightarrow[x<b]{} b$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge,

et on note $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to b}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)}$

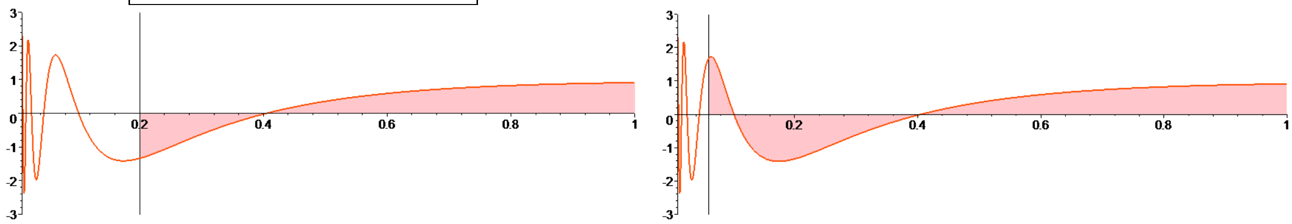


…

b. Soit f continue sur $]a,b]$. Pour tout $x \in]a,b]$, on étudie $\int_x^b f(t)\,dt$

Si cette intégrale a une limite quand $x \xrightarrow[x>a]{} a$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^b f(t)\,dt$ converge,

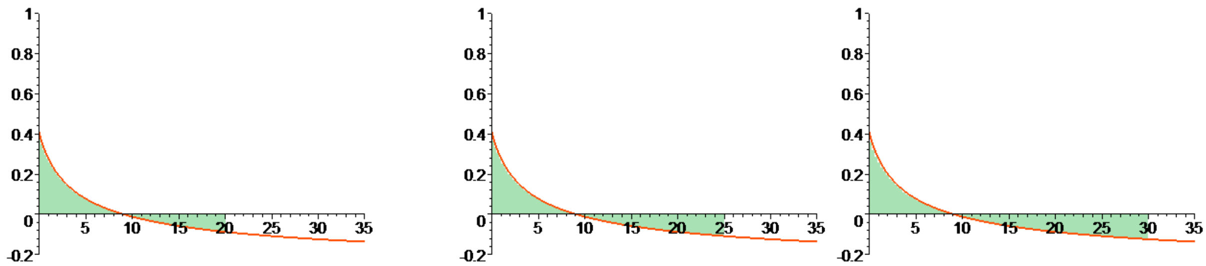
et on note $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \lim_{x\to a}\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)}$



c. Soit f continue sur $[a,+\infty[$. Pour tout $x \in [a,+\infty[$, on étudie $\int_a^x f(t)\,dt$

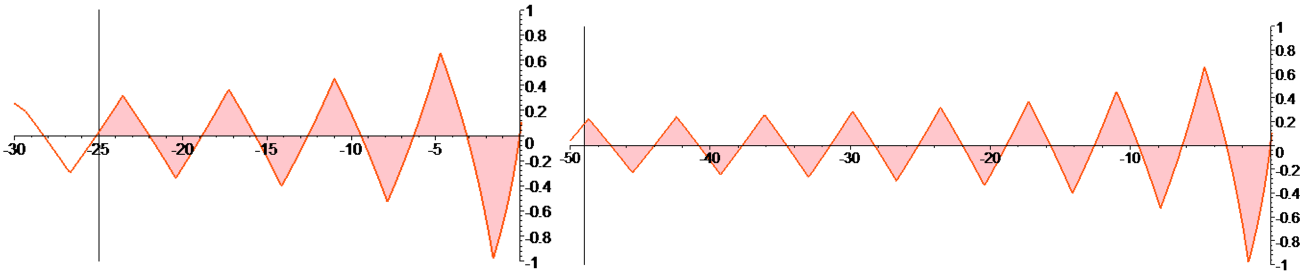
Si cette intégrale a une limite quand $x \longrightarrow +\infty$, on dit que l'intégrale impropre $\int_a^{+\infty} f(t)\,dt$ converge,

et on note $\boxed{\int_a^{+\infty} f(t)\,dt = \lim_{x\to+\infty}\left(\int_a^x f(t)\,dt\right)}$



d. Soit f continue sur $]-\infty, b]$. Pour tout $x \in]-\infty, b]$, on étudie $\int_x^b f(t)\,dt$

Si cette intégrale a une limite quand $x \longrightarrow -\infty$, on dit que <u>l'intégrale impropre</u> $\int_{-\infty}^b f(t)\,dt$ <u>converge</u>, et on note $\boxed{\int_{-\infty}^b f(t)\,dt = \lim\limits_{x \to -\infty}\left(\int_x^b f(t)\,dt\right)}$

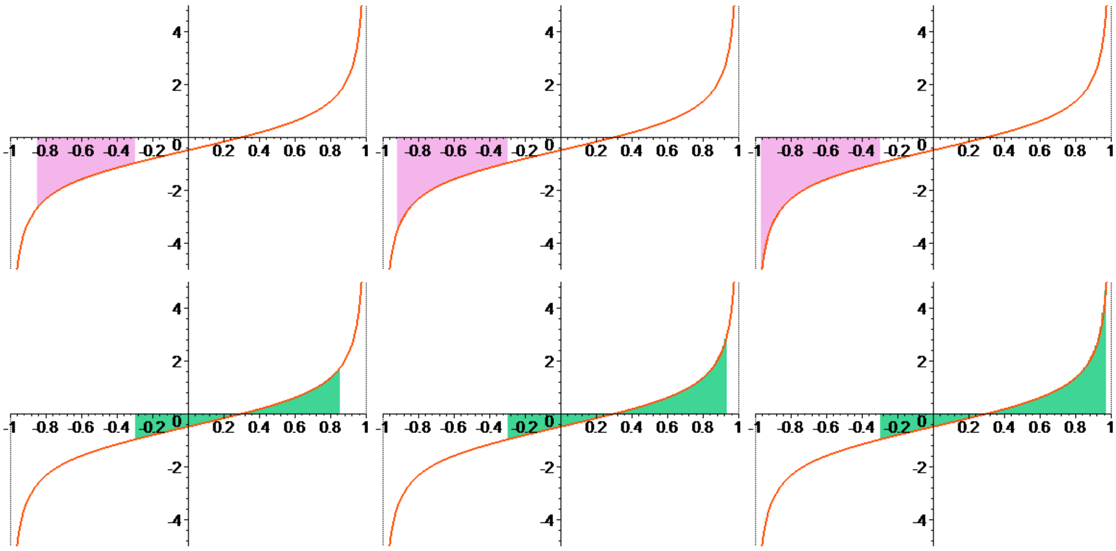


e. Soit f continue sur $]a, b[$. On choisit c quelconque dans $]a, b[$.

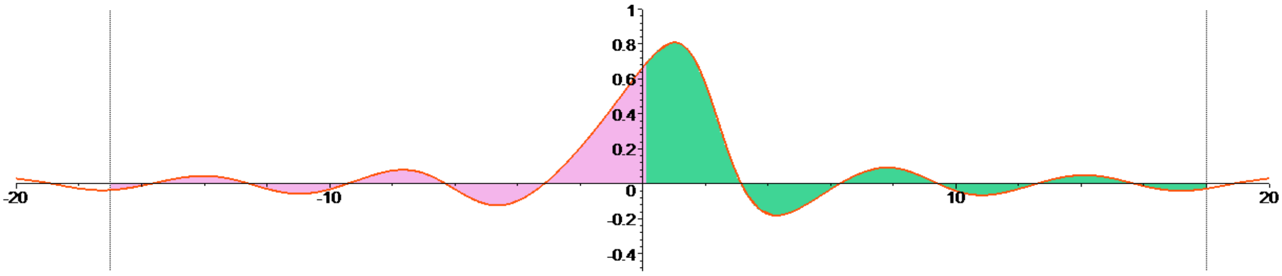
Si <u>les intégrales</u> $\int_a^c f(t)\,dt$ <u>et</u> $\int_c^b f(t)\,dt$ <u>convergent toutes les deux</u>, on dit que <u>l'intégrale impropre</u> $\int_a^b f(t)\,dt$ <u>converge</u>, et on note $\boxed{\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt}$.

Si l'une au moins des deux intégrales $\int_a^c f(t)\,dt$ et $\int_c^b f(t)\,dt$ diverge, on dit que $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge.

On démontre que la convergence et la valeur éventuelle sont les mêmes quel que soit le choix de c.



f. Même définition et même propriété pour f continue sur $]a, +\infty[$ ou sur $]-\infty, b[$ ou sur $]-\infty, +\infty[$



Pour la suite du chapitre, les définitions et propriétés seront énoncés dans le cas de fonctions continues sur $[a, b[$. On adaptera facilement les énoncés aux autres cas.

2. ***Fonctions de $\mathbb{R}$ dans $\mathbb{C}$***

Soit *f* continue de $[a,b[$ (ou $]a,b]$ ou $]a,b[$) dans $\mathbb{C}$ (*a* et *b* sont des réels ou $-\infty$ ou $+\infty$)

L'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi $\int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)\,dt$ et $\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)\,dt$ <u>convergent toutes les deux</u>

Dans ce cas, on note $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^b \mathrm{Re}\big(f(t)\big)\,dt + i\int_a^b \mathrm{Im}\big(f(t)\big)\,dt$

3. ***Relation de Chasles***

Soit *f* continue sur $[a,b[$ et $c \in [a,b[$

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si $\int_c^b f(t)\,dt$ converge

et dans ce cas $\int_a^b f(t)\,dt = \int_a^c f(t)\,dt + \int_c^b f(t)\,dt$

4. ***Combinaisons linéaires***

Soient *f* et *g* continues sur $[a,b[$ et λ un scalaire

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors $\int_a^b \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\,dt$ converge

et dans ce cas, $\int_a^b \big(\lambda f(t)+g(t)\big)\,dt = \lambda\int_a^b f(t)\,dt + \int_a^b g(t)\,dt$

Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge et $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b \big(f(t)+g(t)\big)\,dt$ diverge

5. ***Positivité***

Soient *f* et *g* continues sur $[a,b[$

a. Si f est positive sur $[a,b[$ et si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt \geqslant 0$

b. Si $f \leqslant g$ sur $[a,b[$, si $\int_a^b f(t)\,dt$ et $\int_a^b g(t)\,dt$ convergent, alors $\int_a^b f(t)\,dt \leqslant \int_a^b g(t)\,dt$

c. Si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge, (on verra + loin qu'alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge) alors $\left|\int_a^b f(t)\,dt\right| \leqslant \int_a^b |f(t)|\,dt$

II. Intégrale des fonctions positives

1. *Majoration des intégrales partielles*

Soit f positive et continue sur [a,b[.

On dit que les intégrales partielles sont majorées s'il existe un réel M tel que $\forall x \in [a,b[/ \int_a^x f(t)\,dt \leqslant M$

Alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge si et seulement si les intégrales partielles sont majorées

2. *Majoration de la fonction*

Soient f et g positives et continues sur [a,b[.telles que $f \leqslant g$ sur $[a,b[$.

a/ Si $\int_a^b g(t)\,dt$ converge, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge

b/ Si $\int_a^b f(t)\,dt$ diverge, alors $\int_a^b g(t)\,dt$ diverge

3. *Équivalence*

Soient f et g positives continues sur [a,b[.

On dit que f et g sont équivalentes en b si $\dfrac{f(t)}{g(t)} \xrightarrow[t \to b]{} 1$. On note $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$

Propriété : Si $f(t) \underset{b}{\sim} g(t)$, alors $\left(\int_a^b f(t)\,dt \text{ converge } \Leftrightarrow \int_a^b g(t)\,dt \text{ converge}\right)$

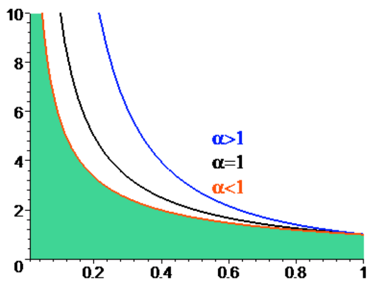
4. *Intégrales de référence*

a. Exponentielle

Soit α un réel $\int_0^\infty e^{-\alpha t}\,dt$ converge vers $\dfrac{1}{\alpha}$ si $\alpha > 0$ et diverge si $\alpha \leqslant 0$

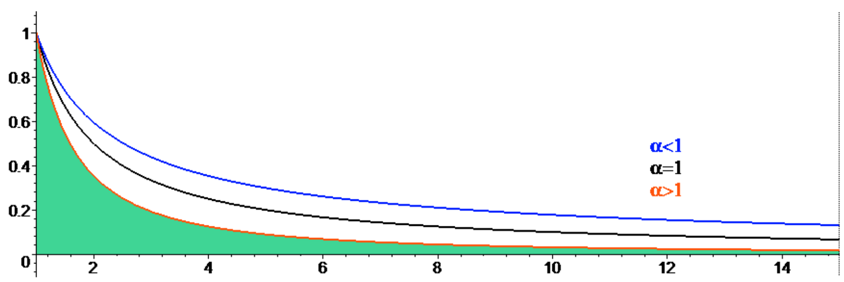
b. Intégrale de Riemann sur $]0,1]$: soit α un réel strictement positif

$\int_0^1 \dfrac{dt}{t^\alpha}$ converge si $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$



c. Intégrale de Riemann sur $[1,+\infty[$: soit α un réel strictement positif

$\int_1^\infty \dfrac{dt}{t^\alpha}$ converge si. $\alpha > 1$ et diverge si $\alpha \leqslant 1$



III. Intégrale des fonctions quelconques

1. *Convergence absolue*

Soit f continue de $[a,b[$ dans $\mathbb{C}$

Définition : $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument si et seulement si $\int_a^b |f(t)|\,dt$ converge.

Théorème : Si $\int_a^b f(t)\,dt$ converge absolument, alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

La réciproque est fausse . exemple $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t}\,dt$ converge mais ne converge pas absolument (voir + loin)

Corollaire : Si la fonction f est continue et bornée sur $]a,b[$

et si l'intervalle $]a,b[$ est borné$\left(\text{ i.e. } a \neq -\infty \text{ et } b \neq +\infty\right)$

alors $\int_a^b f(t)\,dt$ converge.

2. *Primitives*

Soit f continue sur [a,b[.

Si F est une primitive de f sur [a,b[, l'intégrale $\int_a^b f(t)\,dt$ converge ssi $F(t)$ a une limite quand $t \to b$

on note alors : $\int_a^b f(t)\,dt = \left[F(t)\right]_a^b$, ce qui doit être lu comme « $\lim\limits_{t\to b} F(t) - F(a)$ ».

3. *Changement de variable :*

Soit f continue sur [a,b[.

Soit φ bijection de classe C^1, de [α,β[dans [a,b[(si elle est croissante) ou de]α,β]dans[a,b[

alors $\int_a^b f(u)\,du$ converge ssi $\int_\alpha^\beta \left(f \circ \varphi\right)(t)\ \varphi'(t)\,dt$ converge.

et dans ce cas $\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta \left(f \circ \varphi\right)(t)\ \varphi'(t)\,dt$

On note $\int_a^b f(u)\,du = \int_\alpha^\beta \left(f \circ \varphi\right)(t)\ \varphi'(t)\,dt$ pour dire que l'intégrale de gauche converge ssi l'intégrale de droite converge et qu'alors ces deux intégrales sont égales.

4. *Intégration par parties :*

Soient u et v continues sur [a,b[.

Comme au 2. on note $\left[u(t)v(t)\right]_a^b$ pour dire « $\lim\limits_{t\to b} u(t)v(t) - u(a)v(a)$ » si cette limite existe

On a alors $\int_a^b u(t)\,v'(t)dt = \left[u(t)\,v(t)\right]_a^b - \int_a^b u'(t)\,v(t)dt$ pour dire que l'intégrale de gauche converge si le crochet de droite et l'intégrale de droite convergent tous les deux et que dans ce cas on a égalité.

Si l'un des deux termes de droite converge et que l'autre diverge, alors l''intégrale de gauche diverge.

5. *Exemples et compléments :*

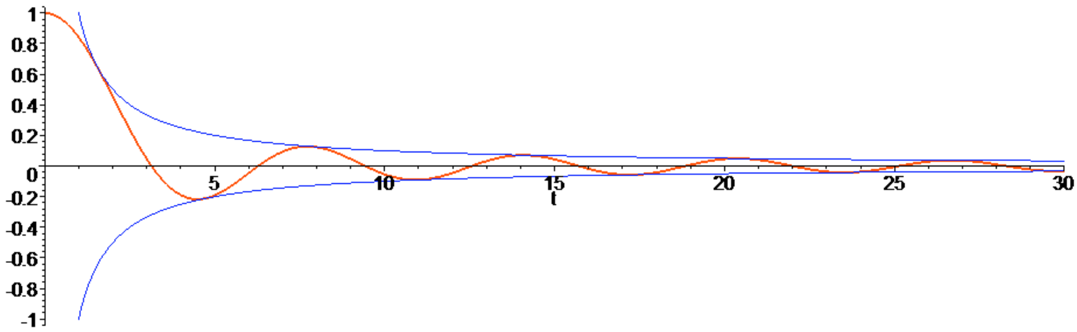
Pour $a < b$ et $\alpha > 0$

$\int_a^b \frac{dt}{(t-a)^\alpha}$ converge si. $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$

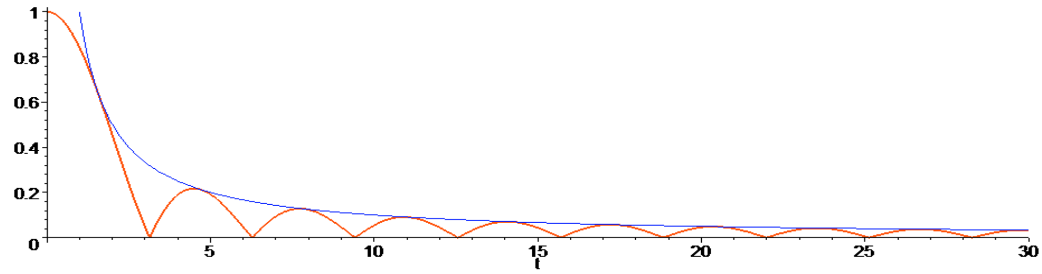
$\int_a^b \frac{dt}{(b-t)^\alpha}$ converge si. $\alpha < 1$ et diverge si $\alpha \geqslant 1$

Sinus cardinal

$\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge

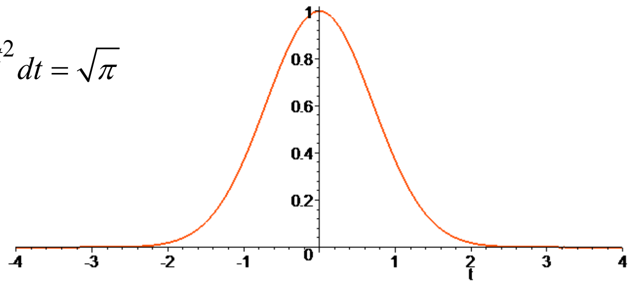


$\int_0^{\infty} \frac{|\sin t|}{t} dt$ diverge



donc $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt$ converge mais ne converge pas absolument. On peut démontrer que $\int_0^{\infty} \frac{\sin t}{t} dt = \frac{\pi}{2}$

Intégrale de Gauss $\int_0^{\infty} e^{-t^2} dt = \frac{\sqrt{\pi}}{2}$, $\int_{-\infty}^{\infty} e^{-t^2} dt = \sqrt{\pi}$



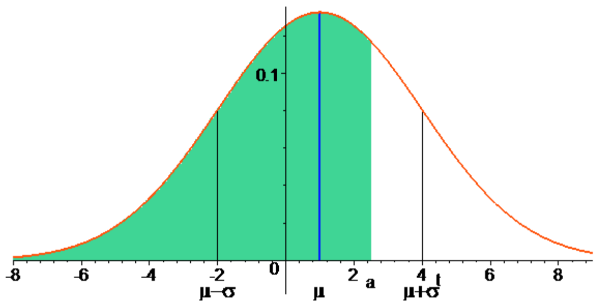
Loi normale

Si la variable aléatoire X suit la loi normale réduite et centrée $\mathcal{N}(0,1)$, alors

$$P(X \leqslant a) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{t^2}{2}} dt$$

Si la variable aléatoire X suit la loi normale $\mathcal{N}(\mu,\sigma)$ de moyenne μ et d'écart-type σ, alors

$$P(X \leqslant a) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{a} e^{-\frac{1}{2}\left(\frac{t-\mu}{\sigma}\right)^2} dt$$



$$P(\mu - \sigma \leqslant X \leqslant \mu + \sigma) \approx 0.68$$