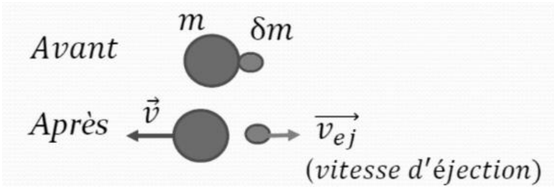
Exercice 1. Application de la loi de conservation de la quantité de mouvement

a) Soit un système de masse variable schématisé ci-dessous. Ce type de modélisation est utile notamment pour décrire les appareils ayant une propulsion par réaction (ex. fusée, la masse variable est le carburant consommé). On le décrit par deux éléments de masse m et δm et de vitesse $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v_{ej}}$. On suppose ce système isolé. Appliquer la loi de conservation de la quantité de mouvement pour déterminer une relation entre m, δm, $\vec{v}$ et $\overrightarrow{v_{ej}}$.



b) Un individu de 90 kg en apesanteur tente de se déplacer en tirant des balles (masse 2 g) avec un fusil mitrailleur. La vitesse d'éjection des balles est de 1000 m/s. Quelle vitesse peut il acquérir en tirant une rafale de 10 balles ?

Exercice 2. Travail d'une force, force conservative

On considère un point matériel *M* de masse *m* pouvant se déplacer le long de l'axe $(O\,;\overrightarrow{e_x})$ dans le référentiel galiléen $R_G(O\,;\,\overrightarrow{e_x})$. Il est soumis à une force $\vec{F} = -kx\overrightarrow{e_x}$, x étant la position du point *M*.

1) Déterminer le travail de la force $\vec{F}$ pour aller du point A (x_A) au point B (x_B) directement, en suivant l'axe $(O\,;\,\overrightarrow{e_x})$.

2) Déterminer le travail de la force $\vec{F}$ pour aller du point A (x_A) au point B (x_B) en passant par le point C (x_C) (en restant sur l'axe $(O\,;\,\overrightarrow{e_x})$).

3) $\vec{F}$ est-elle conservative ? Si oui, déterminer l'énergie potentielle associée.

Exercice 3. Application du théorème de l'énergie cinétique

Un skieur, assimilé à un point matériel ***M*** de masse ***m = 75 kg***, utilise un tire-fesses pour remonter une pente à ***30%***. Le tire-fesses est constitué d'une tige faisant un angle **β = *30°*** avec la ligne de plus grande pente de la piste. Le tire-fesses exerce sur le skieur une force de module ***F*** constant égal à ***270 N***.

1) On suppose dans cette question qu'il n'y a pas de frottement entre la piste et le skieur.

a. Déterminer la valeur de l'angle ***α*** entre l'horizontale et la ligne de plus grande pente de la piste.

b. Déterminer l'expression de la vitesse ***v*** atteinte par le skieur en haut de la piste, parti du bas (point ***O***) à ***t = 0*** sans vitesse initiale, en fonction de ***F, α,* β*, m, g*** et ***L***, longueur sur laquelle le tire-fesses entraine le skieur.

c. Quelle est la masse maximale que peut avoir le skieur pour que le dispositif fonctionne ?

d. A.N. : ***g = 10m.s***$^{-2}$ et ***L = 300m***. Calculer ***v***.

2) En fait, la vitesse atteinte en bout de piste est ***v = 8 m.s***$^{-1}$.

a. Que peut-on en conclure ?

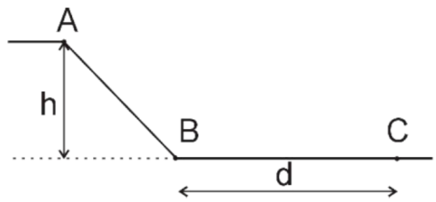
b. On modélise les frottements de la piste sur le skieur par une force constante $\vec{f}$. Exprimer puis calculer le module de cette force de frottement.

Exercice 4. (Bonus) Police scientifique

Le conducteur d'une voiture de masse **m = 1,6 t** freine en urgence afin d'éviter la collision avec un autobus à l'arrêt. Le choc ne peut être évité mais heureusement, il ne fait aucune victime. Les marques sur la route montrent que la voiture a eu besoin de **25 m** pour s'arrêter. Le conducteur affirme qu'il roulait à une vitesse **inférieure à 50 km/h** mais un témoin dit le contraire…
Des tests effectués par des experts scientifiques ont montré que le coefficient de frottement entre les pneus de la voiture et la route est de **0.6** (route mouillée).
Calculer la vitesse de la voiture et déterminer qui du conducteur ou du témoin a raison ?
Remarque. 2 méthodes : PFD ou TEC

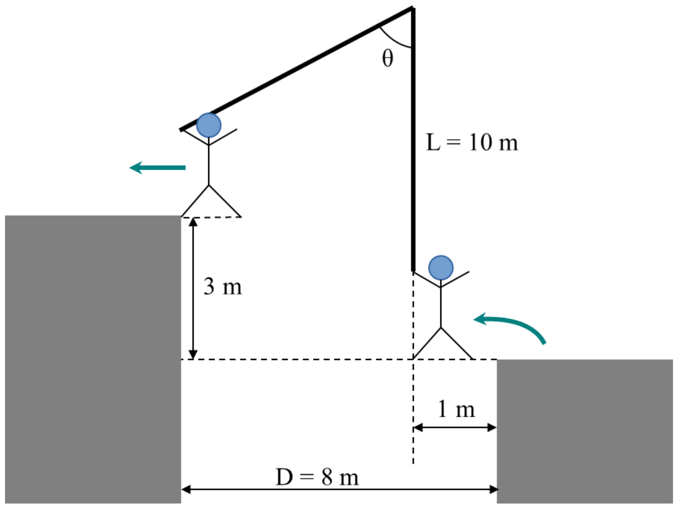
Exercice 5. Application du théorème de l'énergie mécanique

Un esquimau aimerait atteindre un point ***C*** situé à ***D=1,9km*** du point ***B***. Pour cela il s'élance du point ***A***, situé à une hauteur ***h=200m*** au-dessus de ***B***, ***sans vitesse initiale***.
La masse totale du traineau et de l'esquimau est ***m=200kg*** et le traineau glisse avec des frottements négligeables sur la pente ***AB***. Sachant qu'à partir de ***B***, des frottements de glissement de coefficient ***μ=0,1*** interviennent, calculer la distance d'arrêt ***d***.
L'esquimau va-t-il atteindre son objectif ?



Exercice 6. (Bonus) L'intelligence du héros

Bruce Willis, poursuivi par un ennemi, court sur le toit d'un immeuble. Pour passer sur le toit de l'immeuble voisin, situé à une hauteur ***h=3m*** au-dessus de lui, il doit franchir un vide large de ***D=8m*** (voir figure). Pour franchir ce vide, Bruce fait un saut de ***1m*** et se saisit d'un câble vertical (***L=10m***) accroché à une grue. Au moment où il se saisit du câble, la vitesse de Bruce est horizontale et vaut ***V0=8m.s-1***. On néglige les frottements de l'air.



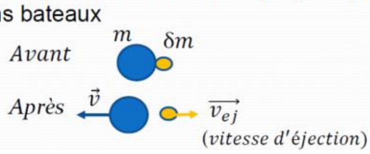
1) Faire le bilan des forces appliquées à Bruce Willis et en déduire si ce héros est un système conservatif.
2) Calculer l'énergie mécanique au moment où Bruce se saisit du fil (préciser le choix de l'origine des énergies potentielles).
3) Donner l'expression générale de l'énergie mécanique de Bruce en fonction de l'angle ***θ*** que fait le fil avec la verticale.
4) Déterminer l'angle maximal ***θmax*** que peut atteindre Bruce. On prendra ***g=9.81m.s-2***.
5) Bruce va-t-il réussir à passer sur le toit voisin pour attraper le méchant ?

Solutions

Ex1.

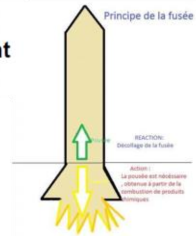
Application qui permet de comprendre comment se propulsent les avions, fusées, certains bateaux

Soit un système qui se sépare d'un élément de masse



On suppose le système isolé
→ **conservation de la quantité de mouvement**
Avant $\vec{p} = \vec{0}$ donc $m\,\vec{v} + \delta m\,\overrightarrow{v_{ej}} = \vec{0}$

$$\vec{v} = \frac{-\delta m}{m}\overrightarrow{v_{ej}}$$



Par exemple

$$\vec{v} = \frac{-\delta m}{m}\overrightarrow{v_{ej}}$$

Propulsion en apesanteur avec un fusil mitrailleur ?
(remake de Total Recall)

$\delta m \sim 2g$ poids d'une balle
$\overrightarrow{v_{ej}} = 1000\ m.s^{-1}$ (> mur du son)
$m_{acteur} = 90\ kg$
→ $v = \frac{2.10-3}{90}1000 = 0.02 m/s = 2cm/s$

Balles en rafales → $v \times 10$=20cm/s
→ Déplacement crédible

Ex2.

1) $W_{AB} = \int_A^B \vec{F}.d\overrightarrow{OM}$ avec $\vec{F} = -kx\vec{e_x}$ et $\overrightarrow{OM} = dx\,\vec{e_x}$

$\boxed{\vec{e_x}.\vec{e_x} = 1}$

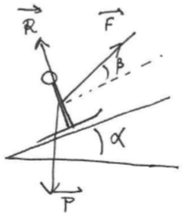
$= \int_{x_A}^{x_B} -kx.dx = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_B} = \underline{-\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2}$

2) $W_{ACB} = \int_A^C \vec{F}.d\overrightarrow{OM} + \int_C^B \vec{F}.d\overrightarrow{OM} = \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_A}^{x_C} + \left[-\frac{1}{2}kx^2\right]_{x_C}^{x_B}$

$= -\frac{1}{2}k\left(x_C^2 - x_A^2 + x_B^2 - x_C^2\right) = -\frac{1}{2}kx_B^2 + \frac{1}{2}kx_A^2$

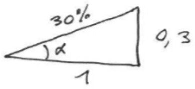
3) Le travail de cette force semble ne pas dépendre du chemin suivi, on suppose donc que $\vec{F}$ ~~de~~ est conservative.
$\vec{F}$ dérive donc d'une energie potentielle E_p : $F = -\frac{dE_p}{dx}$
$\Rightarrow -\frac{dE_p}{dx} = -kx \Rightarrow E_p = \frac{1}{2}kx^2 + cte$

Ex3.



Système : skieur.
Réf : terrestre galiléen
Forces $\vec P$
$\vec R$
$\vec F$
pas de frottements

1) a. Pente à 30%
$\Rightarrow \tan\alpha = 0,3$
$\alpha = 16,7°$

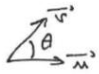


b. TEC. $\frac{1}{2} m v^2 = W_L(\vec P) + W_L(\vec R) + W_L(\vec F)$ (Vitesse initiale nulle)

Par déf $W_L(\vec F) = \int_L \vec F . d\vec l$

$d\vec l$ dans la direction de la pente $\perp$ donc $\vec R . d\vec l = 0 \rightarrow W(\vec R) = 0$

$\vec P$ et $\vec F$ sont constants et $\vec u . \vec v = uv\cos\theta$



donc

$$\frac{1}{2} m v^2 = FL\cos\beta + mgL\cos\left(\frac{\pi}{2}+\alpha\right)$$
$$= FL\cos\beta - mgL\sin\alpha .$$
$$v = \sqrt{L\left(\frac{2F}{m}\cos\beta - 2g\sin\alpha\right)}$$

c. Tant que la quantité sous la racine est >0, la vitesse est définie

Il faut $v>0 \Rightarrow \frac{2F}{m}\cos\beta - 2g\sin\alpha > 0 \Rightarrow m < \frac{F\cos\beta}{g\sin\alpha} = 81,4\,kg$

d. A.N. $\boxed{v = 11,7\,m.s^{-1}}$

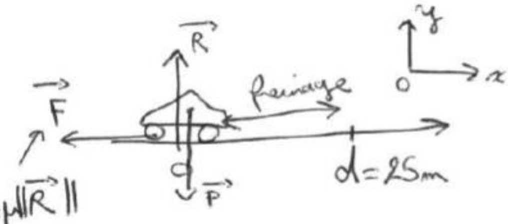
2. a) $v = 8\,m.s^{-1} < 11,7\,m.s^{-1}$ donc il y a des frottements : force exercée par la piste sur le skieur dans la direction du déplacement, de sens opposé au déplacement.

b) TEC. $\frac{1}{2} m v^2 = FL\cos\beta - mgL\sin\alpha - fL$

d'où $f = F\cos\beta - mg\sin\alpha - \frac{1}{2L} m v^2 = \underline{10,3\,N}$

Ex 4.

• Méthode de résolution n°1



$\vec{F} + \vec{R} + \vec{P} = m\vec{a}$ $\quad \|\vec{F}\| = \mu\|\vec{R}\|$

Selon y : $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0} \Rightarrow \|\vec{R}\| = mg$

Selon x : $\|\vec{F}\| = m\ddot{x} \Rightarrow \ddot{x} = -\frac{1}{m}\mu\|\vec{R}\| = -\frac{1}{m}\mu mg = -\mu g$

On obtient par intégration :

$\dot{x} = v(t) = -\mu g t + v_0$ avec v_0 = vitesse avant le freinage.

$x(t) = -\frac{\mu g}{2} t^2 + v_0 t + 0.$

La voiture stoppe ($v=0$) en un temps t_S donc

$-\mu g t_S + v_0 = 0 \Rightarrow \mu g t_S = v_0 \Rightarrow t_S = \frac{v_0}{\mu g}$ qu'on injecte dans $x(t)$:

$x(t_S) = d = -\frac{\mu g}{2}\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)^2 + v_0\left(\frac{v_0}{\mu g}\right)$

2

On obtient :

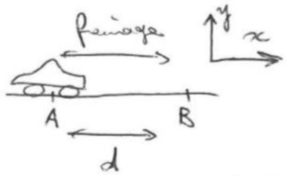
$$d = -\frac{v_0^2}{2\mu g} + \frac{v_0^2}{\mu g} \Rightarrow v_0^2\left(\frac{2-1}{2\mu g}\right) = d \Rightarrow \boxed{v_0 = \sqrt{2\mu g d}}$$

A.N. $v_0 = (2 \cdot 0{,}6 \cdot 9{,}81 \cdot 25)^{1/2} = 17{,}16\ m\,s^{-1} = \dfrac{17{,}16 \times 10^{-3}\ km}{\frac{1}{3600}\ h}$

$\underline{v_0 = 61{,}8\ km/h}$

• Méthode de résolution n°2

Théorème de l'énergie cinétique entre A et B



TEC $\quad \Delta E_C = E_{CB} - E_{CA} = \sum W_{AB}$

Forces : $\begin{cases} \vec{P}, \vec{R} \text{ ne travaillent pas pendant le freinage car } \perp \text{ déplacement} \\ \vec{F} \Rightarrow W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F} \cdot d\vec{\ell} = \int_{x_A}^{x_B} -\|\vec{F}\| dx\ \underbrace{\vec{e_x} \cdot \vec{e_x}}_{1} \end{cases}$

$$= -\|\vec{F}\| \int_{x_A}^{x_B} dx = -\|\vec{F}\| d$$

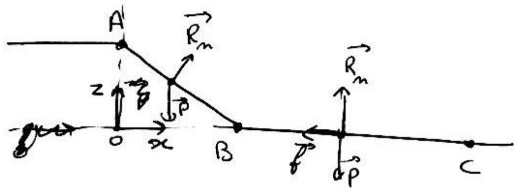
Avec $\|\vec{F}\| = \mu\|\vec{R}\| = \mu mg$ puisque $\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ (PFD selon y)

TEC $\quad \frac{1}{2} m v_B^2 - \frac{1}{2} m v_A^2 = -\mu m g d.$ avec $v_B = 0$ (la voiture s'arrête en B)

$$\frac{1}{2} m v_A^2 = \mu m g d \Rightarrow \boxed{v_A = \sqrt{2\mu g d}}$$

Ex. 5

~~entre A et B~~



entre A et B : système traineau + esquimau
référentiel terrestre galiléen
Forces : $\vec{P}$, $\vec{R_n}$

Les deux forces sont conservatives, pas de frottement
$\Rightarrow$ $\boxed{\text{système conservatif}}$

$\Rightarrow E_m = \text{cte}$

$$E_m(B) = E_m(A) = E_m = E_c + E_{pp}$$
$$= \frac{1}{2}mv^2 + mgz$$
$$(E_{pp} = 0 \text{ en } z = 0)$$

en A : $v_A = 0$, altitude z_A

en B : v_B , $z_B = 0$

$$\Rightarrow E_m(A) = mgz_A = E_m(B) = \frac{1}{2}mv_B^2$$

entre B et C : Sys traineau + esquimau
réf terrestre galiléen
Forces : $\vec{P}$, $\vec{R_n}$, $\vec{f}$ le frottement.

la force de frott^t n'est pas conservatrice
$\Rightarrow$ la variation d'E_m est égale au travail de $\vec{f}$ entre B et C.

$$\Delta E_m = \underset{\substack{\parallel \\ 0}}{E_m(C)} - \underbrace{E_m(B)}_{= -mgz_A} = W_{B\to C}(\vec{f}) = \int_B^C \vec{f}\cdot\vec{dl} = \int_B^C -f\,dl = -f\int_B^C dl = -fd$$

car $z_C = 0$ et $v_C = 0$

$$\boxed{mgz_A = fd}$$

pour trouver f, on applique le PFD : $\vec{P} + \vec{f} + \vec{R_n} = m\vec{a}$
on projette sur Oz : $mg - R_n = m\ddot{z} = 0 \Rightarrow R_n = mg$

or, $f = \mu_c R_n = \mu_c mg$

d'où $\cancel{m}gz_A = \mu_c \cancel{m}g\,d$ $\boxed{d = \frac{z_A}{\mu} = \frac{200}{\;} = 2000\,m}$

Ex 6.

1) Système : Bruce Willis
référentiel : terrestre galiléen

Forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$ ↘ ne travaille pas
↓
force conservatrice

donc le système est conservatif.

2) $E_{pp} = 0$ lorsq Bruce attrape le f.l.

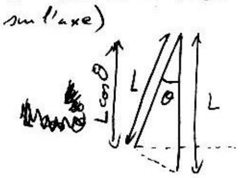
$E_m = E_c + E_{pp} = \frac{1}{2} m v_0^2$

3) $E_m = E_c + E_{pp}$ à tout instant.

$E_c = \frac{1}{2} m v^2 = \frac{1}{2} m \underbrace{L^2 \dot\theta^2}_{v = L\dot\theta}$

$E_{pp} = mgz$, z l'altitude à l'instant t % position initiale.

en t, on a l'angle $\theta \longrightarrow z = L - L\cos\theta = L(1-\cos\theta)$
(projectiO sur l'axe)



donc $E_m = \frac{1}{2} m L^2 \dot\theta^2 + mgL(1-\cos\theta)$

4) par conservatiO de l'E_m : $\frac{1}{2} m L^2 \dot\theta^2 + mgL(1-\cos\theta) = \frac{1}{2} m v_0^2$

l'angle sera max quand $\dot\theta = 0$ (vitesse angulaire)

$\rightarrow \frac{1}{2} m v_0^2 = mgL(1-\cos\theta_{max}) \Rightarrow \cos\theta_{max} = 1 - \frac{v_0^2}{2gl}$

$\cos\theta_{max} = 1 - \frac{64}{2 \times 10 \times 9{,}81} = 1 - 0{,}326 = 0{,}6738 \Rightarrow \theta_{max} = 47{,}64°$

5) On veut déterminer si Bruce peut aller au dessus de 3m et + loin q 8-1 = 7m.

$\cos\theta_{max} = \frac{L-h}{L} \Rightarrow h = L(1-\cos\theta_{max}) = 3{,}26m > 3m$ OK!

$\sin\theta_{max} = \frac{d}{L} \Rightarrow d = 7{,}38m > 7m$ OK

il passe !