EXAMEN DE MECANIQUE DU POINT – 2e SESSION

23 / 03 / 2017 - *Durée : 2H*

Aucun document n'est autorisé. La calculatrice est permise. Un formulaire se trouve à la fin du sujet.

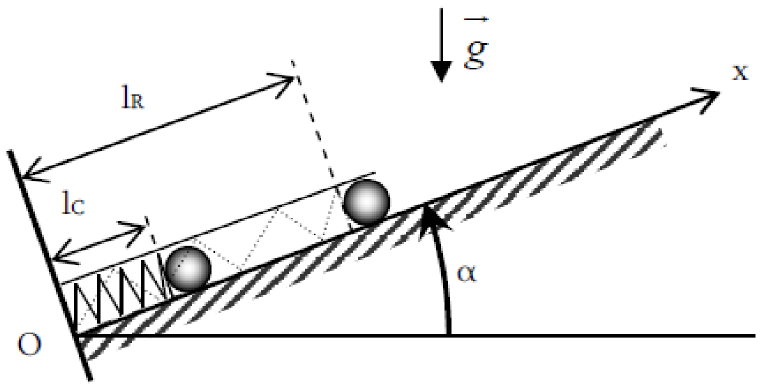
Exercice 1.

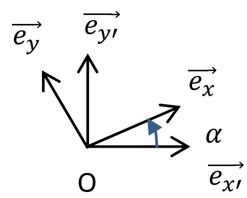
Une boule de flipper en acier, de masse *m* (repérée par le point *M*), initialement placée dans son logement cylindrique fixe sur le plateau de flipper, repose contre l'embout d'un ressort de raideur *k* dont l'autre extrémité *O* est fixée au fond du logement. Le joueur comprime alors le ressort et à un instant *t = 0* pris comme origine, il relâche brusquement le ressort.

Le plateau et le cylindre sont inclinés d'un angle α par rapport à l'horizontale. La longueur à vide du ressort est ℓ_0, cette longueur vaut ℓ_R lorsque la bille est au repos contre l'embout, et diminue jusqu'à ℓ_C quand le ressort est comprimé .

On néglige complètement le frottement de la boule sur le plateau, de sorte qu'elle ne fait que glisser sans rouler ni frotter. On l'assimilera donc à un point matériel de rayon nul. La masse du ressort est supposée négligeable.

L'accélération de la pesanteur est g supposée constante.





A. Etude Statique :

1. Faire un bilan des forces auxquelles est soumise la bille au repos, donner leurs expressions et les représenter sur un schéma. On représentera le poids $\vec{P}$; la réaction du plan incliné $\vec{R}$ et la force de rappel du ressort $\vec{F}$.
2. Donner l'expression de $\vec{P}$, $\vec{R}$ et $\vec{F}$ dans la base $\left(O\ ;\ \overrightarrow{e_x}\ ;\ \overrightarrow{e_y}\right)$
3. Quelle relation entre les forces peut-on écrire lorsque le système est au repos ? En déduire l'expression de la longueur au repos ℓ_R en fonction de $\ell_0\ ; m\ ; g;\ k\ \ et\ \alpha.$
4. Rappeler la définition d'une force conservative.
5. Quelles sont les forces conservatives qui « travaillent » (dont le travail est non nul) dans ce problème ?
6. Exprimer les énergies potentielles associées à ces forces en fonction de la variable x.
7. En écrivant que la dérivée de la fonction énergie potentielle totale est nulle retrouver la position d'équilibre de *M* c'est-à-dire l'expression de ℓ_R : $\ell_R = \ \ell_0 - \frac{mgsin\alpha}{k}$.

B. Etude énergétique globale :

On comprime le ressort jusqu'à $\ell = \ell_C$

1. Donner les valeurs prises par l'énergie potentielle et par l'énergie mécanique de la bille en fonction de $\ell_C\ \ \ell_0\ ; m\ ; g\ ; k\ ;\ \alpha.$

A *t= 0* on relâche le ressort et on considère que la boule perd le contact avec le ressort lorsque sa tension s'annule, c'est-à-dire lorsque $\ell = \ell_0$.

2. Donner la valeur prise par l'énergie mécanique de la bille en $\ell = \ell_0$ en fonction de $v_0\ \ell_0\ ; m\ ; g\ ;\ \alpha.$
3. Appliquer le TEM et exprimer la vitesse v_0 lorsque la boule quitte le ressort en fonction de $\ell_C\ \ell_0\ ; m\ ; g\ ; k\ ;\ \alpha.$
4. Donner une condition sur ℓ_C (notée ℓ_{Cmax}) pour que la bille soit à la limite de quitter réellement le ressort (il doit lui rester juste un peu de vitesse lorsqu'elle passe en $\ell = \ell_0$).
5. Dans de l'utilisation normale du flipper (la bille décolle) , exprimer jusqu'à quelle distance x_h la bille va monter sur le flipper (sans frottements) en fonction de $v_0\ , \ell_0\ ; g\ ; et\ \alpha$. *(théorème de l'énergie mécanique)*

C. Applications numériques : on donne les différentes valeurs suivantes :
m= 200 g ; k= 40 Nm^{-1} *;* $\ell_0 = 12\ cm$ *;* $\alpha = 11{,}53°$ *; g=10 ms*$^{-2}$

On rappelle que :

$$\ell_R = \ell_0 - \frac{mgsin\alpha}{k}$$

$$\ell_{Cmax} = \ell_0 - \frac{2mgsin\alpha}{k}$$

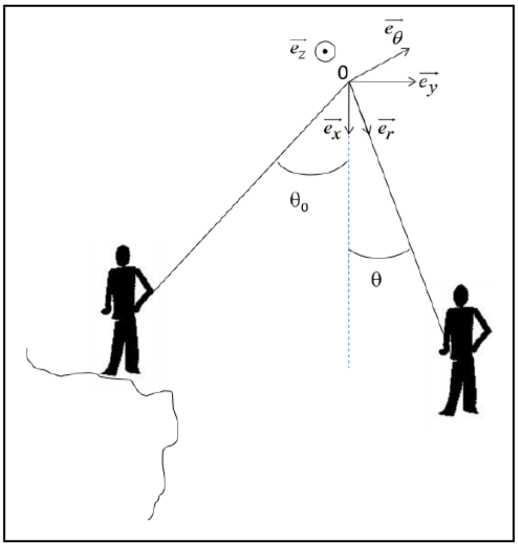
$$x_h = \ell_C + \frac{k(\ell_C - \ell_0)^2}{2mgsin\alpha}$$

$$v_0 = \sqrt{\frac{k}{m}(\ell_C - \ell_0)^2 + 2gsin\alpha.(\ell_C - \ell_0)}$$

1. Calculer les valeurs de $\ell_R\ \ \ell_{Cmax}$
2. Calculer les valeurs de v_0 et de x_h pour une compression ***totale*** du ressort de *2 cm ; 7cm et 9 cm.*

Exercice 2.

Un alpiniste de masse *m* est suspendu, dans le vide, à une corde de longueur *L*. Afin d'atteindre une plate-forme voisine, il effectue un mouvement pendulaire. L'angle *θ* que fait la corde avec la verticale varie au cours du mouvement et atteint la valeur *θ₀* au bout de la course lorsque l'alpiniste touche la plateforme. A cet instant, la vitesse de déplacement de l'alpiniste est nulle.



1. En utilisant le principe fondamental de la dynamique, exprimer la tension *T* de la corde en fonction de *m, g L,* θ et $\dot{\theta}$.
2. En posant $V = L\dot{\theta}$, exprimer *T* en fonction de *m, g, L, V* et θ.
3. Calculer le travail du poids *P* lorsque θ varie d'un angle θ_1 à l'angle θ_0. Ce travail sera exprimé en fonction de *m,g, L,* θ_1 et θ_0.
4. En déduire l'expression de la vitesse V_1 de l'alpiniste, lorsque $|\theta| = \theta_1 \leq \theta_0$. Cette relation sera exprimée en fonction de *g, L,* θ_0 et θ_1.
5. En admettant que pour un angle θ quelconque, la vitesse *V* de l'alpiniste a pour expression :
6. $V = \sqrt{2Lg(\cos\theta - \cos\theta_0)}$, exprimer la tension T, de la corde, en fonction de *m, g*, θ et θ_0.
7. En déduire l'expression de la tension maximale notée T_{Max}.
8. Les valeurs numériques sont les suivantes : g = 9.81 m/s^2 , θ_0= 30°, et la tension limite que peut supporter la corde est T_{Lim} = 4000 N.
9. En prenant un coefficient de sécurité de 3, calculer le poids maximal que peut avoir un alpiniste pour utiliser cette corde en toute sécurité.

Note : barème. Chaque question vaut 1 point. Il y a en tout 23 questions, on peut donc obtenir une note allant jusqu'à 23/20.

FORMULAIRE DE MECANIQUE DU POINT

Forces usuelles Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, Frottements fluides (laminaire) $\vec{F} = -k\vec{v}$, Frottements solides (dynamiques) $\|\vec{F}\| = \mu\|\vec{R}\|$ Force électrique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, Force de gravitation $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$.

Quelques définitions travail $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$, moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \vec{F_i}$, moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$, énergie potentielle E_P d'une force conservative : $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P$ → $E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}(\vec{F})$

Cinématique et dynamique en coordonnées cartésiennes

$\vec{r} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$; $\quad \vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$; $\quad \vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}$

Cinématique et dynamique en coordonnées polaires

$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$; $\quad \vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$; $\quad \vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

PFD. $m\vec{a} = \sum_i \vec{F_i}$ ou $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F_i}$

TEC. $\Delta_{AB}E_C = \sum_i W_{AB}(\vec{F_i})$

TEM. $\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{non\ conservatives})$

TMC. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}$

Equations différentielles usuelles

$\frac{dy}{dt} + ay = b$ → $y(t) = Kexp(-at) + \frac{b}{a}$

$\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = 0$ → $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + \frac{1}{\tau}\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = 0$ →équation caractéristique de discriminant $\Delta = \frac{1}{\tau^2} - 4{\omega_0}^2$.

Si $\Delta > 0$: $y(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\left\{a\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + b\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right\}$

Si $\Delta < 0$: $y(t) = \exp\left(-\frac{t}{2\tau}\right)\left\{a\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right\}$