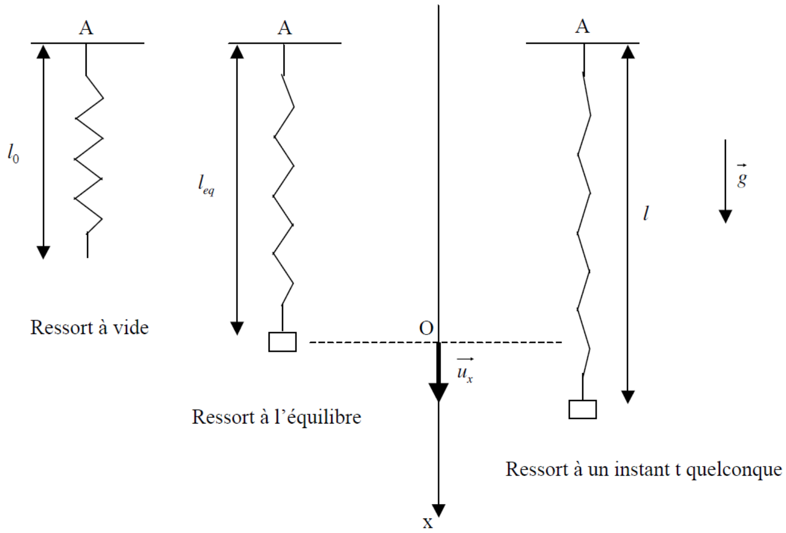
Exercice 1. Oscillateur à ressort vertical, décrément logarithmique



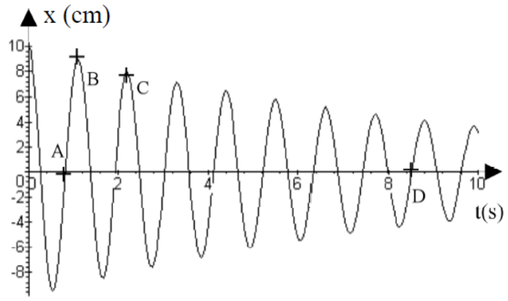
Un ressort de raideur *k* et de longueur à vide l_0 est accroché au plafond en un point fixe A. On accroche une masse m à l'extrémité du ressort. Lorsque la masse oscille, elle est soumise à une force de frottement de l'air : $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$ où λ s'appelle le coefficient de frottements.

1. Calculer la longueur du ressort à l'équilibre (quand la masse est accrochée), notée l_{eq}.
2. On pose $x = l - l_{eq}$ (c'est-à-dire que l'on prend l'origine du repère au niveau de la position d'équilibre). Etablir l'équation différentielle satisfaite par x(t) et la mettre sous la forme canonique : $\ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$ où vous donnerez les expressions de ω_0 et de Q en fonction de k, m et λ.
3. A quelle condition sur k, m et λ la masse pourra-t-elle osciller («pseudo-oscillations ») ?
4. Si la condition de la question 3 est vérifiée, résoudre l'équation différentielle sachant que la masse est initialement dans sa position d'équilibre (soit x(0)=0 et qu'on lui communique une vitesse initiale v_0 vers le bas (soit $\dot{x}(0) = v_0$).
5. Exprimer la pseudo-période T des oscillations en fonction de ω_0 et Q.
6. Quand un système décrit des oscillations amorties, on définit le « décrément logarithmique » δ par :

$$\delta = ln\left(\frac{x(t)}{x(t+T)}\right)$$

Où t est un instant quelconque et T est la « pseudo-période ». Exprimer δ en fonction de ω_0 et Q.

7. En enregistrant la position de la masse au cours du temps, on a obtenu le graphe expérimental suivant pour lequel on précise les coordonnées de quatre points particuliers :



Points	A	B	C	D
t (s)	0,53	1,1	2,2	8,25
x (cm)	0	8,95	8,02	0

En déduire la pseudo-période T et le décrément logarithmique δ.

8) On a pesé la masse, qui vaut m = 500 g.

En déduire la valeur de la constante de raideur k du ressort et du coefficient de frottements λ (on pourra considérer que comme Q est grand, la pseudo-période est à peu près égale à la période propre $T_0 = \frac{2\pi}{\omega_0}$).

Exercice 2. Une application des oscillations forcées : le microscope à force atomique

Le microscope à force atomique (AFM) est une technique de caractérisation permettant d'imager des objets de taille nanométrique à l'aide d'une pointe fixée sur un micro-levier ayant une longueur de quelques centaines de micromètres.
Pour pouvoir imager les objets on fait osciller ce micro-levier et on le déplace sur la zone que l'on désire imager. Pour optimiser la qualité de l'image il est nécessaire de comprendre son comportement mécanique. Ainsi, le micro-levier peut être assimilé à un ressort de raideur $k = 40\ N.m^{-1}$ et de masse m que l'on force à osciller en lui appliquant une force de la forme $F = F_0 \cos \omega t$ dans un milieu où les amortissements α sont faibles. On supposera dans la suite de l'exercice que $\frac{F_0}{m} = A_0 = 710{,}5\ m.s^{-2}$.

1) Donner l'équation différentielle du mouvement du micro-levier ($z(t)$).

2) La solution de cette équation est la somme de deux termes : le premier terme qui correspond au régime transitoire est la solution de l'équation différentielle posée au 1) sans second membre. Le deuxième terme correspondant au régime permanent est de la forme $z = Z_0 \cos(\omega t + \varphi)$.
Donner la forme de la solution correspondant au régime transitoire. On ne demande pas de calculer les constantes.

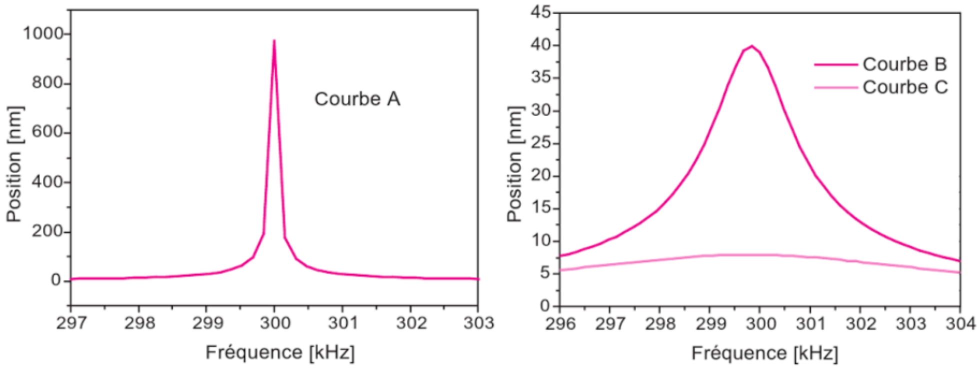
3) On suppose que le régime permanent est établi, c'est-à-dire que $z = Z_0 \cos(\omega t + \varphi)$ et on néglige la solution correspondant au régime transitoire.

a) Réécrire l'équation différentielle obtenue au 1), en utilisant la représentation complexe, c'est-à-dire en posant $z = Re(\underline{z})$ avec $\underline{z} = Z_0 e^{i(\omega t + \varphi)}$ et $A_0 \cos \omega t = Re(\underline{A})$ avec $\underline{A} = A_0 e^{i\omega t}$.

b) En déduire une expression de l'amplitude Z_0 et la phase φ en fonction de A_0, ω, $\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$ et $\lambda = \alpha/2m$.

c) Afin d'obtenir une image AFM, l'opérateur doit choisir une fréquence d'oscillation du micro-levier telle que son amplitude d'oscillation soit maximale. Déterminer la pulsation ω_r pour que l'amplitude des oscillations du micro-levier AFM soit maximale.

d) Le facteur de qualité Q est défini par $Q = \frac{\omega_0}{2\lambda}$. Sachant que dans le vide $Q_{vide} = 5000$, dans l'air $Q_{air} = 200$ et dans l'eau $Q_{eau} = 40$, calculer l'amplitude maximale des oscillations Z_{max} et la fréquence de résonance f_r correspondant aux trois cas précédents. En déduire dans quels milieux ont été obtenues les courbes d'amplitude A,B et Cen fonction de la fréquence illustrées par la figure suivante.



Courbes d'amplitudes en fonction de la fréquence d'excitation obtenues dans différents milieux (vide, air et eau).

Exercice 3. (Bonus) Corde vibrante (issu du sujet d'agrégation 2009 de Physique)

Les cordes des instruments de musique sont des objets cylindriques homogènes, tendus entre deux points séparés par une longueur L. Le rayon du cylindre est a avec $a \ll L$.

A. Équation de propagation de l'ébranlement

La corde de masse linéique μ est tendue avec la tension T_0. Au repos la corde est rectiligne et parallèle à l'axe horizontal (Ox).

On étudie les mouvements de la corde autour de sa position d'équilibre. On note $y(x,t)$ le déplacement (ou ébranlement) du point de la corde à l'abscisse x à l'instant t. L'axe Oy est l'axe vertical ascendant.

On fait les hypothèses suivantes :

(1) Les déplacements sont petits, de même que l'angle que fait la corde avec l'axe Ox, ce qui entraîne : $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right| \ll 1$.

(2) La tension de la corde en mouvement est : $T(x,t) = T_0 + T_1(x,t)$ avec $|T_1(x,t)| \ll T_0$ et $\dfrac{|T_1(x,t)|}{T_0}$ infiniment petit du même ordre ou d'un ordre supérieur à $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|$.

(3) On ne gardera que les termes du premier ordre en $y(x,t)$ et en ses dérivées.

(4) On néglige les effets de la pesanteur.

1. a) On considère l'élément de corde de longueur $\mathrm{d}\ell$ situé entre les plans d'abscisses x et $x + \mathrm{d}x$.

Montrer que :

$$\mathrm{d}\ell \simeq \mathrm{d}x$$

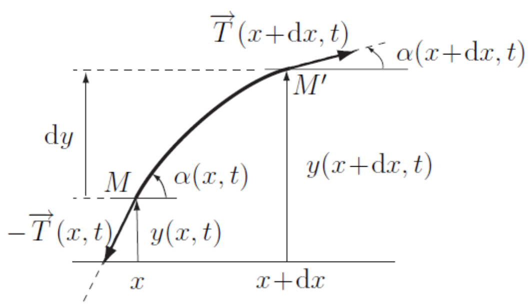
au premier ordre en $\left|\dfrac{\partial y}{\partial x}\right|$.

b) Appliquer le théorème de la résultante cinétique à cet élément de corde et le projeter sur $\overrightarrow{e_y}$. En déduire que l'ébranlement $y(x,t)$ vérifie l'équation aux dérivées partielles :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \qquad (1)$$

où c est une grandeur à exprimer en fonction de T_0 et μ.

2. a) Vérifier l'homogénéité de l'expression obtenue pour c.



FORMULAIRE DE MECANIQUE DU POINT

Forces usuelles Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, Frottements fluides (laminaire) $\vec{F} = -k\vec{v}$, Frottements solides (dynamiques) $\|\vec{F}\| = \mu\|\vec{R}\|$ Force électrique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, Force de gravitation $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$.

Quelques définitions travail $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$, moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$, moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$, énergie potentielle E_P d'une force conservative : $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P$ → $E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}(\vec{F})$

Cinématique et dynamique en coordonnées cartésiennes

$\vec{r} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$; $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$; $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}$

Cinématique et dynamique en coordonnées polaires

$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$; $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$; $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

PFD. $m\vec{a} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$ ou $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{F_i}$

TEC. $\Delta_{AB}E_C = \sum_i W_{AB}(\overrightarrow{F_i})$

TEM. $\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{non\ conservatives})$

TMC. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}$

Equations différentielles usuelles

$\frac{dy}{dt} + ay = b$ → $y(t) = Kexp(-at) + \frac{b}{a}$

$\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = 0$ → $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = 0$ →équation caractéristique de discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4{\omega_0}^2$.

Si $\Delta > 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + b\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right\}$

Si $\Delta < 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right\}$

Solutions

Ex1.

Ex 1. Oscillateur à ressort vertical, décrément logarithmique

1) Bilan des forces : le poids $\vec{P}$, la force de rappel du ressort $\vec{F} = -k\Delta l\,\vec{u}$, la force de frottement $\vec{f} = -\lambda\vec{v}$

A l'équilibre $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = \vec{0}$

Projection sur l'axe x $\quad mg - k(l_{eq} - l_0) + 0 = 0 \Rightarrow \boxed{l_{eq} - l_0 = \frac{mg}{k}}$

2) $\vec{P} + \vec{F} + \vec{f} = m\vec{a}$ avec un mouvement uniquement selon x.

Projection sur x : $\quad mg - k\underbrace{(l - l_0)}_{l - l_{eq} + l_{eq} - l_0 = x + \frac{mg}{k}} - \lambda\dot{x} = m\ddot{x}$

$$mg - kx - k\frac{mg}{k} - \lambda\dot{x} = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} + \frac{\lambda}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = 0 \Rightarrow \boxed{\omega_0^2 = \frac{k}{m}} \quad \frac{\omega_0}{Q} = \frac{\lambda}{m}$$

$$\Rightarrow Q = \frac{m}{\lambda}\omega_0 = \frac{m}{\lambda}\sqrt{\frac{k}{m}} = \frac{\sqrt{km}}{\lambda} \qquad \boxed{Q = \frac{\sqrt{km}}{\lambda}}$$

3) Equation caractéristique $\quad r^2 + \frac{\omega_0}{Q}r + \omega_0^2 = 0$

Les pseudos oscillations correspondent au cas où les racines sont complexes car le discriminant est négatif

$$\Delta = \left(\frac{\omega_0}{Q}\right)^2 - 4\omega_0^2 < 0 \quad \text{soit} \quad \boxed{Q > \frac{1}{2}}$$

4) Solution à partir du formulaire. Attention ici les notations ne sont pas les notations usuelles.

FORMULAIRE $\quad \frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + \omega_0^2 y = 0$

Ici $\quad \ddot{x} + \frac{\omega_0}{Q}\dot{x} + \omega_0^2 x = 0$

$\Delta < 0$ $\quad$ FORMULAIRE $\quad y(t) = \exp(-\lambda t)\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right)$

ICI $\quad x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\left(a\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right)$

avec $\Delta = \omega_0^2\left(\frac{1}{Q^2} - 4\right)$

Détermination des constantes a et b

$$x(t=0) = 0 = \underbrace{\exp(0)}_{1}\left(a\underbrace{\cos(0)}_{1} + b\underbrace{\sin(0)}_{0}\right) \Rightarrow a = 0$$

$$\Rightarrow x(t) = \exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right).b.\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)$$

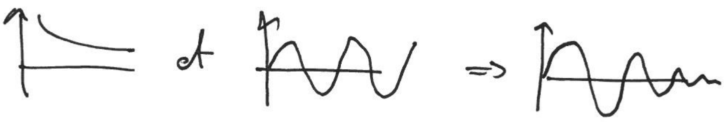
calcul de la dérivée

$$\dot{x}(t) = -\frac{\omega_0}{2Q}.b\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right).\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\frac{\sqrt{\Delta}}{2}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)$$

A $t=0$ $\dot{x} = v_0$ donc $v_0 = 0 + b\frac{\sqrt{\Delta}}{2}.1.1 \Rightarrow b = \frac{v_0 \times 2}{\sqrt{\Delta}}$

$$\Rightarrow \boxed{x(t) = \frac{2v_0}{\sqrt{\Delta}}\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)}$$

C'est bien l'équation de pseudo-oscillations amorties, qui combine une exponentielle décroissante et un terme oscillant



5) La pseudo période est déterminé à partir du terme en $\underline{\sin}$

$$\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}T = 2\pi \Rightarrow T = \frac{4\pi}{\sqrt{-\Delta}} = \frac{4\pi}{\omega_0\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}}$$

6) $$\exp(\delta) = \frac{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}t\right)}{\exp\left(-\frac{\omega_0}{2Q}(t+T)\right)}\ \frac{\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)}{\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}(t+T)\right)}$$

sinus égaux puisque T est la période

$$\delta = \frac{\omega_0 T}{2Q} = \frac{\omega_0}{2Q}\ \frac{4\pi}{\omega_0\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}} = \frac{2\pi}{Q\sqrt{4-\frac{1}{Q^2}}} = \frac{2\pi}{\sqrt{4Q^2-1}}$$

7) 7 périodes entre A et D

$\Leftrightarrow T = \frac{8{,}25-0{,}53}{7} = 1{,}1\,s$. $\delta = \ln\left(\frac{x(t_B)}{x(t_C)}\right) = \ln\left(\frac{8{,}95}{8{,}02}\right)$

$$\boxed{\delta = 0{,}11}$$

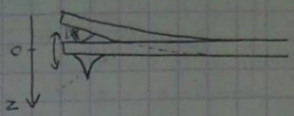
8) $T_0 \approx \frac{2\pi}{\omega_0} \approx 2\pi\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\right)^{-1}$

$k = m\frac{(2\pi)^2}{(T_0)^2} = 0{,}5.\frac{4\pi^2}{(1{,}1)^2} = \underline{1640\ N/m}$. $\lambda = \frac{m\omega_0}{Q} = m.\frac{2\delta}{T} = \frac{0{,}5.2.0{,}11}{1{,}1}$

$$\boxed{\lambda = 0{,}1}$$

Ex2.

Système : micro-levier
Système : terrestre galiléen



Forces : $\vec{P}$ le poids du plevier
$\vec{T}$ la force de rappel exercée par le plevier
$\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ la force de frottement fluide due au milieu
$\vec{F}$: la force imposée au système pour entretenir les vibrations.

1) * à l'équilibre, $m\vec{g} + \vec{T} = \vec{0} \overset{\text{projecθ}}{\Rightarrow} mg - k(l - l_0) = 0$

* PFD en mvt : $m\vec{g} + \vec{T} + \vec{f} + \vec{F} = m\vec{a}$

projecθ sur Oz : $\cancel{mg} - k\left[z + \cancel{(l - l_0)}\right] - \alpha\dot{z} + F_0\cos\omega t = m\ddot{z}$

$$\ddot{z} + \frac{\alpha}{m}\dot{z} + \frac{k}{m}z = \frac{F_0}{m}\cos(\omega t)$$

en posant $\lambda = \frac{\alpha}{2m}$ (facteur d'amortisst), on obtient l'équa dif du 2nd ordre avec 2nd membre :

$$\boxed{\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = A_0\cos\omega t \quad \text{avec } \omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}} \text{ la pulsation propre de l'oscillateur harmoniq non amorti}}$$

2) Les amortissements sont faibles $\Rightarrow$ régime pseudo-périodique ↗ r_1 et r_2 racines complexes conjuguées etc...

$$\boxed{\hookrightarrow \text{solution de la forme } z(t) = z_{max}\, e^{-\lambda t}\cos(\Omega t + \varphi) \quad \text{avec } \Omega = \sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} \text{ et } \lambda = \frac{\alpha}{2m}}$$

3) a) $\ddot{z} + 2\lambda\dot{z} + \omega_0^2 z = \underline{A}$

avec $\dot{z} = i\omega Z_0\, e^{i(\omega t + \varphi)}$ et $\ddot{z} = -\omega^2 Z_0\, e^{i(\omega t + \varphi)}$

d'où : $(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2)\, Z_0\, e^{i(\omega t + \varphi)} = A_0\, e^{i\omega t}$

$$\boxed{(-\omega^2 + 2i\lambda\omega + \omega_0^2)\, Z_0\, e^{i\varphi} = A_0}$$

TD22 (4)

b) $$Z_0 e^{i\varphi} = \frac{A_0}{\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda i \omega}$$

module : $$\boxed{Z_0 = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2}}}$$

argument : $$\varphi = -\arg\left(\omega_0^2 - \omega^2 + 2\lambda i\omega\right)$$

$$\Rightarrow \boxed{\tan\varphi = \frac{-2\lambda\omega}{\omega_0^2-\omega^2}}$$

c) Z_0 max $\Rightarrow$ $(\omega_0^2 - \omega^2)^2 + 4\lambda^2\omega^2$ minimal

on dérive par rapport à ω $\longrightarrow$ $2 \times -2\omega\,(\omega_0^2-\omega^2) + 4\lambda^2 \times 2\omega = 0$

$$4\omega\left[\omega^2 - \omega_0^2 + 2\lambda^2\right] = 0$$

Solutions $\cancel{\omega = 0}$ et $\omega^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$

↳ fréquence non nulle, c'est mieux pour le z_0

$\Rightarrow$ fréquence d'excitat° pour avoir Z_{0max} : $\omega_r^2 = \omega_0^2 - 2\lambda^2$

Rq : la Résonance ne se produira q si $\omega_0^2 - 2\lambda^2 > 0$, il faut des amortisst° faibles !

d) $$\omega_r = \sqrt{\omega_0^2 - 2\lambda^2} = \sqrt{\omega_0^2 - 2\frac{\omega_0^2}{Q^2}} = \omega_0\sqrt{1-\frac{2}{Q^2}}$$

donc $$f_{résonance} = \frac{\omega_r}{2\pi} = \frac{\omega_0}{2\pi}\sqrt{1-\frac{2}{Q^2}} = f_0\sqrt{1-\frac{2}{Q^2}}$$

de m̂, $$Z_{0max} = \frac{A_0}{\sqrt{(\omega_0^2-\omega_r^2)^2 + 4\lambda^2\omega_r^2}} = \frac{A_0}{\sqrt{(2\lambda^2)^2 + 4\lambda^2(\omega_0^2 - 2\lambda^2)}}$$

$$Z_{0max} = \frac{A_0}{2\lambda\sqrt{\omega_0^2-\lambda^2}} = \frac{A_0}{\frac{\omega_0}{Q}\sqrt{\omega_0^2 - \frac{\omega_0^2}{Q^2}}} = \frac{A_0}{\omega_0^2}\frac{Q}{\sqrt{1-\frac{1}{4Q^2}}}$$

$$\boxed{Z_{0max} = \frac{2A_0}{(2\pi f_0)^2}\frac{Q^2}{\sqrt{4Q^2-1}}}$$

AN. $f_0 = 300\,kHz$, $A_0 = 710{,}5\ m.s^{-2}$

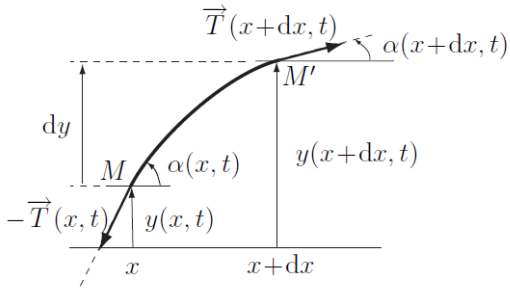
	$Q_{vide} = 5000$	$Q_{air} = 200$	$Q_{eau} = 40$
f_r/kHz	300,00	300,00	299,81
Z_{0max}(nm)	999,8	40,0	8,0

Corde vibrante - Instruments à cordes

A. Équation de propagation de l'ébranlement

1. a) $\mathrm{d}\ell = \sqrt{(\mathrm{d}x)^2 + (\mathrm{d}y)^2} = \mathrm{d}x\sqrt{1 + \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)^2}$. Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$: $\mathrm{d}\ell = \mathrm{d}x$.

b) Soit l'élément de corde MM' compris entre les abscisses x et $x + \mathrm{d}x$ (sur la figure les angles ont étés exagérés pour la rendre lisible) :



Puisque le poids est négligé, l'élément de corde, de longueur $\mathrm{d}\ell \simeq \mathrm{d}x$, de masse $\mathrm{d}m = \mu \mathrm{d}\ell$, est soumis à :

- la tension de la portion de fil située à droite du point M', soit $\overrightarrow{T}(x + \mathrm{d}x, t)$,
- la tension de la portion de fil située à gauche du point M', soit $-\overrightarrow{T}(x, t)$.

Le mouvement de la corde ayant lieu selon Oy, le théorème de la résultante cinétique appliqué à cet élément de corde s'écrit :

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}\overrightarrow{e_y} = \overrightarrow{T}(x + \mathrm{d}x, t) - \overrightarrow{T}(x, t). \tag{1}$$

Soit en projection sur Oy :

$$\mathrm{d}m\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = (T\sin\alpha)(x + \mathrm{d}x, t) - (T\sin\alpha)(x, t). \tag{2}$$

Au premier ordre en $\frac{\partial y}{\partial x}$:

$$\mathrm{d}m = \mu\,\mathrm{d}x, \quad \cos\alpha(x,t) = 1 \quad \text{et} \quad \sin\alpha(x,t) = \alpha(x,t) = \frac{\partial y}{\partial x}$$

En se limitant à l'ordre 1 en $\frac{\partial y}{\partial x}$, l'équation (2) s'écrit :

$$\mu \, \mathrm{d}x \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = \frac{\partial (T\alpha)}{\partial x} \mathrm{d}x. \tag{3}$$

Mais le module de la tension lui-même est une légère perturbation par rapport à sa valeur T_0 au repos. Au premier ordre en $\dfrac{\partial y}{\partial x}$, $T\alpha = T_0\alpha$ puisque l'angle α est un infiniment petit du premier ordre.

L'équation (3) s'écrit alors, au premier ordre :

$$\mu \, \frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = T_0 \frac{\partial \alpha}{\partial x} = T_0 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2}.$$

L'élongation $y(x,t)$ vérifie donc l'équation d'onde de d'Alembert :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial t^2} = c^2 \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} \tag{4}$$

où $c = \sqrt{\dfrac{T_0}{\mu}}$.

2. a) T_0 est une force, donc s'exprime en N ou encore en kg.m.s^{-2}, μ est une masse linéique, donc s'exprime en kg.m^{-1}, $\dfrac{T_0}{\mu}$ s'exprime donc en m^2.s^{-2} : c est bien homogène à une vitesse.