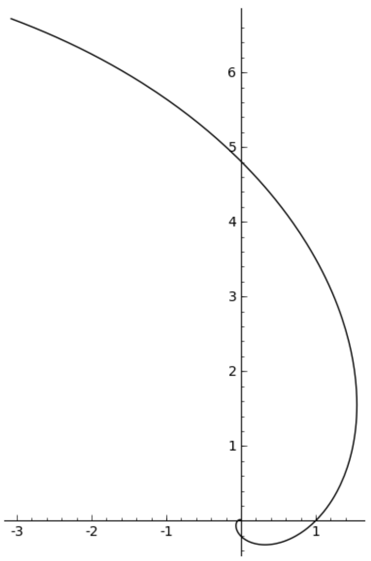
Ce quiz contient **4** questions équipondérées – répondez directement sur la feuille.

Nom: **CORRIGÉ**

1. Je suis parti du point $(1, 0)$ et j'ai parcouru une distance de $\sqrt{2}\,(e^{\frac{\pi}{3}} - 1)$ dans le sens anti-horaire le long de la spirale logarithmique d'équation polaire $r = e^\theta$. Où suis-je rendu ?



$$\mathbf{r} = e^\theta \mathbf{u}_r$$

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta} = e^\theta \mathbf{u}_r + e^\theta \mathbf{u}_\theta = e^\theta(\mathbf{u}_r + \mathbf{u}_\theta)$$

$$\mathrm{d}\ell = \left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta}\right\| \mathrm{d}\theta = \sqrt{2}\, e^\theta\, \mathrm{d}\theta$$

donc l'abscisse curviligne mesurée à partir de $\theta = 0$ est donnée par

$$\ell(\theta) = \int_0^\theta \sqrt{2}\, e^t\, \mathrm{d}t = \sqrt{2}\,(e^\theta - 1).$$

Je suis donc parti du point $\theta = 0$ pour me rendre en $\theta = \frac{\pi}{3}$; je suis rendu au point

$$\mathbf{r}\big(\frac{\pi}{3}\big) = \left(\frac{e^{\frac{\pi}{3}}}{2}, \frac{e^{\frac{\pi}{3}}\sqrt{3}}{2}\right).$$

2. Calculez la longueur d'une arche (entre deux points de rebroussement) de la cycloïde $\begin{cases} x(t) = t - \sin t, \\ y(t) = 1 - \cos t. \end{cases}$

$$\mathbf{r} = \begin{bmatrix} t - \sin t \\ 1 - \cos t \end{bmatrix}, \qquad \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t} = \begin{bmatrix} 1 - \cos t \\ \sin t \end{bmatrix}$$

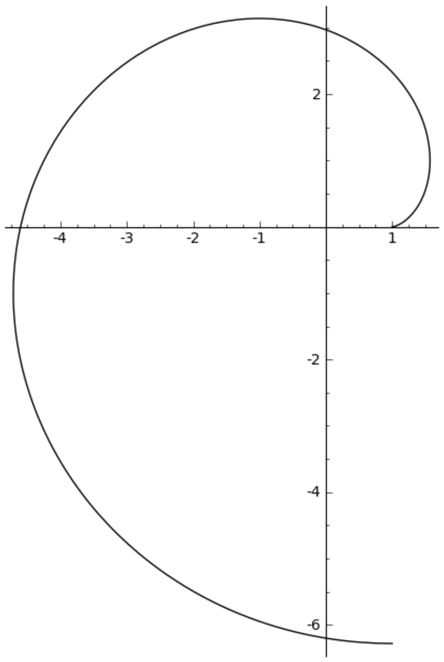
$$\left\|\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}t}\right\| = \sqrt{(1 - \cos t)^2 + \sin^2 t} = \sqrt{2\,(1 - \cos t)} = 2\,\big|\sin\frac{t}{2}\big|$$

donc

$$\ell = 2\int_0^{2\pi} \sin\frac{t}{2}\, \mathrm{d}t = -4\cos\frac{t}{2}\Big|_0^{2\pi} = 8.$$

3. Calculez la développée (lieu des centres de courbure) de la courbe paramétrée

$$\begin{cases} x(t) = \cos t + t \sin t \\ y(t) = \sin t - t \cos t \end{cases} \quad (t \geqslant 0).$$



En posant $\theta = t$, on remarque que cette paramétrisation peut s'écrire

$$\mathbf{r} = \mathbf{u}_r - \theta\, \mathbf{u}_\theta.$$

De là

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\theta} = \mathbf{u}_\theta - (\mathbf{u}_\theta - \theta\, \mathbf{u}_r) = \theta\, \mathbf{u}_r,$$

de sorte que

$$\mathrm{d}\ell = \theta\, \mathrm{d}\theta, \quad \mathbf{T} = \mathbf{u}_r, \quad \mathbf{N} = \mathbf{u}_\theta.$$

Dérivons $\mathbf{T}$ pour obtenir la courbure :

$$\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\ell} = \frac{\mathrm{d}\theta}{\mathrm{d}\ell}\frac{\mathrm{d}\mathbf{T}}{\mathrm{d}\theta} = \frac{1}{\theta}\mathbf{u}_\theta$$

donc $\kappa = 1/\theta$, $R = \theta$. Le centre de courbure est donc donné par

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} + R\,\mathbf{N} = (\mathbf{u}_r - \theta\, \mathbf{u}_\theta) + \theta\, \mathbf{u}_\theta = \mathbf{u}_r;$$

la développée est un cercle de rayon 1 !

4. Soit $\mathcal{C}$ une courbe birégulière et $\mathcal{D}$ sa développée. Calculez et exprimez la base mobile de Frenet $(\mathbf{T}_\mathcal{D}, \mathbf{N}_\mathcal{D})$ de $\mathcal{D}$ en termes de celle $(\mathbf{T}_\mathcal{C}, \mathbf{N}_\mathcal{C})$ de $\mathcal{C}$.

Soit $\mathbf{r}$ une paramétrisation de $\mathcal{C}$ par rapport à une abscisse curviligne ℓ. On peut alors paramétrer $\mathcal{D}$ par

$$\mathbf{c} = \mathbf{r} + R\,\mathbf{N}_\mathcal{C},$$

où R désigne le rayon de courbure de $\mathcal{C}$ en fonction de ℓ.

Calculons le vecteur dérivé de cette paramétrisation :

$$\begin{aligned} \frac{\mathrm{d}\mathbf{c}}{\mathrm{d}\ell} &= \frac{\mathrm{d}\mathbf{r}}{\mathrm{d}\ell} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ell}\mathbf{N}_\mathcal{C} + R(-\kappa\,\mathbf{T}_\mathcal{C}) \\ &= \mathbf{T}_\mathcal{C} + \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ell}\mathbf{N}_\mathcal{C} - \mathbf{T}_\mathcal{C} \\ &= \frac{\mathrm{d}R}{\mathrm{d}\ell}\mathbf{N}_\mathcal{C} \end{aligned}$$

En normalisant ce vecteur, on trouve

$$\mathbf{T}_\mathcal{D} = \mathbf{N}_\mathcal{C}, \qquad \text{d'où} \qquad \mathbf{N}_\mathcal{D} = -\mathbf{T}_\mathcal{D}.$$

En d'autres termes, la base $(\mathbf{T}_\mathcal{D}, \mathbf{N}_\mathcal{D})$ est obtenue de $(\mathbf{T}_\mathcal{C}, \mathbf{N}_\mathcal{C})$ par une rotation de $+90°$.