9 décembre 2016 — **Quiz de maths n° 5** — ISÉN - $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Calculatrice non programmable permise bien que peu utile; répondez sur une copie séparée à ces 3×2 questions.

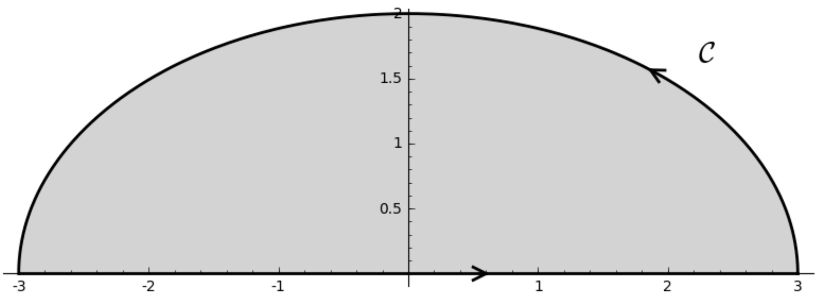
1. Considérons la courbe $\mathcal{C}$ paramétrée par $\mathbf{r}(t) = (at^2,\, bt,\, c\ln t)$ avec $t > 0$ et a, b, c trois constantes positives.

   a) Déterminer l'élément de longueur $\mathrm{d}\ell$ le long de $\mathcal{C}$ et montrer que, lorsque $b^2 = 4ac$, celui-ci peut s'exprimer

   $$\mathrm{d}\ell = \left(2at + \frac{c}{t}\right)\mathrm{d}t.$$

   b) Déterminer la longueur totale de la courbe pour $t \in [1, T]$ lorsque $a = c = 1$, $b = 2$.

2. Soit $\mathcal{C}$ la frontière (orientée trigonométriquement) de la portion d'ellipse visible ci-dessous et $\mathbf{F} = -y\,\mathbf{i} + x\,\mathbf{j}$.



   a) Calculer directement (d'après la définition) la circulation de $\mathbf{F}$ le long de $\mathcal{C}$.

   b) Vérifier que l'on obtient exactement le même résultat en utilisant la formule de Green-Riemann.

3. a) Calculer, en termes des paramètres A et B, le rotationnel du champ de vecteurs

   $$\mathbf{F} = A\,x\ln z\,\mathbf{i} + B\,y^2 z\,\mathbf{j} + \left(\frac{x^2}{z} + y^3\right)\mathbf{k}.$$

   b) Pour quelles valeurs de A et B le champ $\mathbf{F}$ est-il conservatif ? Expliciter dans ce cas un potentiel ϕ.