TD 19/01/21.

$\boxed{\text{EXO 5}}$

$$A_n = \begin{pmatrix} 1 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & & \vdots \\ 0 & & \ddots & 1 \end{pmatrix}$$

triangulaire supérieure.

$$A_n = I_n + B_n.$$

$$B_n = \begin{pmatrix} 0 & 1 & \cdots & 1 \\ & \ddots & \ddots & \vdots \\ & & \ddots & 1 \\ 0 & & & 0 \end{pmatrix}$$

B matrice nilpotente.

$$B^n = 0.$$

$$(A_n)^m = (I_n + B_n)^m$$

binôme de Newton.

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_n^k \, I_n^{m-k}$$

$$= \sum_{k=0}^{m} \binom{m}{k} B_n^k$$

Si $m \geq n$. $= \sum_{k=0}^{n} \binom{m}{k} B_n^k$.

EX06

- Une ligue de football contient 15 clubs.
  Chaque équipe ne joue que la moitié des matchs → 7
  Comment organiser le tournoi ?

  Nombre de matchs : $\dfrac{15 \times 7}{2}$ → nombre qui n'est pas entier, impossible.

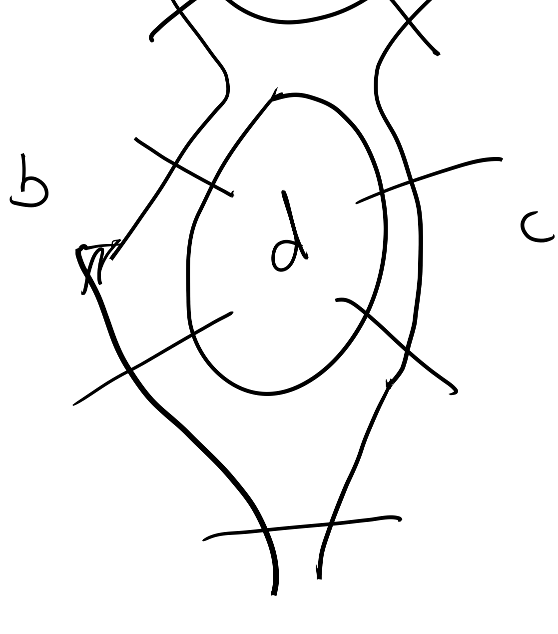
- Tracer 5 segments, chaque segment en coupe exactement 3 autres.

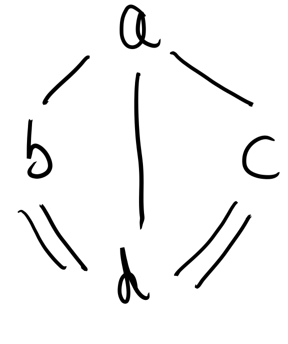
  Nombre d'intersections : $\dfrac{15}{2}$: pas un entier, impossible.

(utilisation du principe du berger).

Problème d'Euler : Königsberg. 1736.

Peut-on passer une unique fois par chaque pont ?
Non.





EXO 7

Icosaèdre tronqué :

↓

Icosaèdre : 20 faces.

Arêtes : $\frac{20 \times 3}{2} = 30$ (3 arêtes par face. 1 arête touche 2 faces)

Sommets : 12 sommets.

↳ $\frac{3 \times 20}{5} = 12$.

Formule d'Euler : $S + F - A = 2$.

Icosaèdre tronqué : Ico : 12 sommets → pentagones → 12 faces
20 faces → hexagones → 20 faces

32 faces.

Sommets : 12×5 : tous les sommets appartiennent à un pentagone.

Ou autre explication : 5 sommets/pentagone → $12 \times 5 = 60$.
6 sommets/hexagone → $20 \times 6 = 120$

180

chaque sommet est incident à 3 faces → $180/3 = 60$

Arêtes : 90

Explication (1) : – on reprend les 30 arêtes de départ → seulement dans les hexagones.
– on ajoute $12 \times 5 = 60$ arêtes des pentagones.

Explication (2) : – pentagones : $5 \times 12 = 60$ arêtes
– hexagones : $20 \times 6 = 120$ arêtes. 180
– chaque arête appartient à 2 faces → 90.

Icosidodecaèdre.

Faces : • chaque triangle donne un nouveau triangle → 20 faces.

• chaque sommet donne une nouvelle face → 12 faces.

⇒ au total 32 faces.

Sommets : Pentagones : chaque sommet de pentagone appartient à 2 pentagones. → $\frac{5 \times 12}{2} = 30$

(couvre aussi les sommets des triangles).

Arêtes : pentagones : 12×5 arêtes. Aucune arête commune avec les autres pentagones mais comprend les arêtes des triangles.

→ 60 arêtes.