Répondez directement sur l'énoncé en **détaillant vos calculs** et **justifiant vos raisonnements**.

Nom:	**CORRIGÉ**

1. Donner la décomposition cyclique, l'ordre et la signature des quatre permutations suivantes :

$$\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 7 & 4 & 5 & 2 & 1 & 6 & 8 & 3 \end{bmatrix}, \qquad \tau = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 \\ 2 & 3 & 1 & 6 & 5 & 4 & 8 & 7 \end{bmatrix}, \qquad \sigma^{-1}, \qquad \tau \circ \sigma.$$

- $\sigma = (1\,7\,8\,3\,5)(2\,4)$, ordre 10, signature -1
- $\tau = (1\,2\,3)(4\,6)(7\,8)$, ordre 6, signature $+1$
- $\sigma^{-1} = (1\,5\,3\,8\,7)(2\,4)$, ordre 10, signature -1
- $\tau \circ \sigma = (1\,8)(2\,6\,4\,3\,5)$, ordre 10, signature -1

2. Quelles sont les solutions à l'équation $(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) = 0$ dans $\mathbf{F}_3$? Et dans le corps à 9 éléments :

$$\mathbf{F}_9 = \{0,\, 1,\, 2,\, j,\, 1 + j,\, 2 + j,\, 2j,\, 1 + 2j,\, 2 + 2j\} \quad \text{où } j^2 = -1\,?$$

Dans n'importe quel corps,

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + x - 1) = 0 \iff x^2 + x + 1 = 0 \text{ ou } x^2 + x - 1 = 0$$

et puisque 2 est inversible dans les corps qui nous intéressent, on peut utiliser la formule habituelle pour chacune de ces deux équations quadratiques :

- Pour la première : $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot 1 = 0$ on a donc une racine double. D'ailleurs

  $$x^2 + x + 1 = x^2 - 2x + 1 = (x - 1)^2,$$

  on trouve donc comme unique solution (double) $x = 1$.

- Pour la seconde : $\Delta = 1^2 - 4 \cdot 1 \cdot (-1) = -1$. Le discriminant ne possède pas de racine carrée dans $\mathbf{F}_3$ (puisque les seuls carrés y sont $0 = 0^2$ et $1 = 1^2 = (-1)^2$), mais dans $\mathbf{F}_9$ on a $\Delta = (\pm j)^2$ de sorte que les solutions sont données par

  $$x = \frac{-1 \pm j}{2} = 1 \mp j.$$

Pour résumer, l'équation possède l'unique solution $x = 1$ dans $\mathbf{F}_3$, mais dans le corps plus grand $\mathbf{F}_9$ il y en a trois : 1, $1 + j$ et $1 - j$. (On pourrait aussi, par force brute, tester chacun des éléments de $\mathbf{F}_9$ pour arriver à la même conclusion).

3. Soit $\varphi : \mathbf{R}[x]_{\leqslant 2} \longrightarrow \mathbf{R}^3$ l'application linéaire définie par $\varphi(f) := (f(0), f(1), f(2))$. Donner une représentation matricielle pour φ puis déterminer des bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ pour lesquelles ${}_{\mathcal{C}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ est sous forme canonique.

Par rapport aux bases $\mathbf{mon} = (1, x, x^2)$ et $\mathbf{can} = (e_1, e_2, e_3)$, puisque

$$\begin{aligned}\varphi(1) &= (1,1,1) = e_1 + e_2 + e_3\\ \varphi(x) &= (0,1,2) = + e_2 + 2e_3\\ \varphi(x^2) &= (0,1,4) = + e_2 + 4e_3,\end{aligned}$$

on trouve

$$_{\mathbf{can}}[\varphi]_{\mathbf{mon}} = \begin{bmatrix}1&0&0\\1&1&1\\1&2&4\end{bmatrix} \overset{\substack{c_1-c_2\\c_3-c_2}}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&2&2\end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}c_3}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\-1&2&1\end{bmatrix} \overset{\substack{c_1+c_3\\c_2-2c_3}}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix}$$

cela signifie que la matrice

$$\begin{bmatrix}1&0&0\\0&1&0\\0&0&1\end{bmatrix} \overset{\substack{c_1-c_2\\c_3-c_2}}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-1\\0&0&1\end{bmatrix} \overset{\frac{1}{2}c_3}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\-1&1&-\frac{1}{2}\\0&0&\frac{1}{2}\end{bmatrix} \overset{\substack{c_1+c_3\\c_2-2c_3}}{\sim} \begin{bmatrix}1&0&0\\-\frac{3}{2}&2&-\frac{1}{2}\\\frac{1}{2}&-1&\frac{1}{2}\end{bmatrix} = P$$

s'interprète comme une matrice de passage de la base monomiale vers une base $\mathcal{B}$ pour laquelle ${}_{\mathbf{can}}[\varphi]_{\mathcal{B}} = I$ (qui est sous forme canonique). En d'autres termes :

$$\mathcal{B} = \left(1 - \frac{3x}{2} + \frac{x^2}{2},\ 2x - x^2,\ -\frac{x}{2} + \frac{x^2}{2}\right) \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C} = \mathbf{can}$$

est *une* des réponses possibles.

4. Soit $T : (\mathbf{F}_5)^4 \longrightarrow (\mathbf{F}_5)^3$ l'application linéaire représentée par rapport aux bases canoniques par $\begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&1&4&2\\2&3&4&0\end{bmatrix}$.

Donner des bases de $\operatorname{Ker} T$ et $\operatorname{Im} T$.

En faisant des opérations-lignes :

$$\operatorname{Ker} T = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1&3&3&2\\0&1&4&2\\0&2&3&1\end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1&0&1&1\\0&1&4&2\\0&0&0&2\end{bmatrix} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix}1&0&1&0\\0&1&4&0\\0&0&0&1\end{bmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix}4\\1\\1\\0\end{bmatrix}\right).$$

D'après le théorème du rang, on sait que $\dim \operatorname{Im} T = 3$, donc que $\operatorname{Im} T = (\mathbf{F}_5)^3$. On peut donc prendre comme bases, par exemple,

$$\begin{bmatrix}4\\1\\1\\0\end{bmatrix} \qquad \text{et} \qquad e_1, e_2, e_3$$

(autres rédactions possibles).