Maths Cei $\mathbb{R}^2$ — Corrigé de l'examen du 1/6/2015

JOHN

On définit la suite $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ par $\begin{cases} a_0 = 0 \\ a_1 = 1 \\ a_{n+2} = 2\,a_{n+1} + a_n \quad (n \geq 0) \end{cases}$

et $$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z + 2z^2 + 5z^3 + 12z^4 + 29z^5 + \dots$$

a) À partir de l'équation de récurrence $a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n$,

on obtient $$\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^n + \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$$

soit $$\frac{f(z) - z}{z^2} = 2\,\frac{f(z)}{z} + f(z)$$

i.e. $$f(z) - z = 2z\,f(z) + z^2 f(z)$$

d'où $(1 - 2z - z^2)\, f(z) = z$ en réarrangeant.

ou : on part de l'expression annoncée :

$$(1 - 2z - z^2)\, f(z) = f(z) - 2z\,f(z) - z^2 f(z)$$
$$= z + \cancel{2z^2} + \cancel{5z^3} + \cancel{12z^4} + \cancel{29z^5} + \dots$$
$$- \cancel{2z^2} - \cancel{4z^3} - \cancel{10z^4} - \cancel{24z^5} - \dots$$
$$- \cancel{z^3} - \cancel{2z^4} - \cancel{5z^5} - \dots = z$$

b) D'après a), $f(z) = \dfrac{-z}{-1 + 2z + z^2}$ pour tout z à l'intérieur du disque de convergence de la série.

Si $\mu_1 = -1 + \sqrt{2}$ et $\mu_2 = -1 - \sqrt{2}$ désignent les deux racines du dénominateur $z^2 + 2z - 1$, on sait que la décomposition en éléments simples de f

est de la forme $f(z) = \dfrac{A}{z-\mu_1} + \dfrac{B}{z-\mu_2}$

$$= \frac{(A+B)\,z - (\mu_1 A + \mu_2 B)}{(z-\mu_1)(z-\mu_2)}$$

Pour déterminer A, et B, on résoud le système d'équations

$$\begin{cases} A + B = 1 \\ \mu_1 A + \mu_2 B = 0 \end{cases}$$

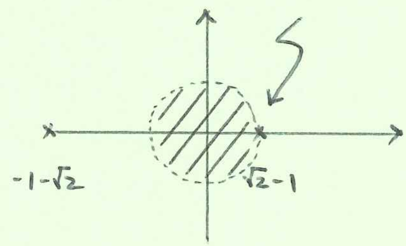
, par exemple avec les formules

de Cramer : $A = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ 0 & \mu_2 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \dfrac{\mu_2}{\mu_2 - \mu_1} = \dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

$B = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & 0 \end{vmatrix} \Big/ \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ \mu_1 & \mu_2 \end{vmatrix} = \dfrac{-\mu_1}{\mu_2 - \mu_1} = \dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}$

donc $f(z) = \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \dfrac{1}{z+1-\sqrt{2}} + \left(\dfrac{1}{2} - \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\right) \dfrac{1}{z+1+\sqrt{2}}$

Le rayon de convergence de la série est la distance à laquelle se trouve le pôle le plus près de l'origine :



soit $\sqrt{2}-1$.

c) Si on reprend : si une série géométrique

$u_n = \lambda^n \quad (n \geq 0)$ satisfait la récurrence

$u_{n+2} = 2u_{n+1} + u_n$, alors sa raison λ

est racine de $\lambda^2 = 2\lambda + 1$, soit

$\lambda_1 = 1 + \sqrt{2}$ ou $\lambda_2 = 1 - \sqrt{2}$.

On cherche donc à écrire $a_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n$.

Il suffit (pourquoi ?) de vérifier l'égalité pour $n = 0, 1$:

$$\begin{cases} 0 = C + D \\ 1 = C\lambda_1 + D\lambda_2 \end{cases} \Rightarrow \quad C = \frac{-1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{1}{2\sqrt{2}}$$

$$D = \frac{1}{\lambda_2 - \lambda_1} = \frac{-1}{2\sqrt{2}}$$

on trouve donc $a_n = \dfrac{1}{2\sqrt{2}}\left((1+\sqrt{2})^n - (1-\sqrt{2})^n \right)$

$$\sim \frac{1}{2\sqrt{2}}(1+\sqrt{2})^n \quad \text{quand } n \to \infty.$$

Quel lien avec les questions précédentes ?

Si $a_n = C\lambda_1^n + D\lambda_2^n$, alors

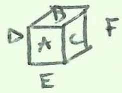
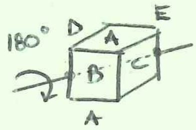
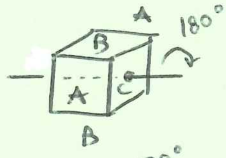
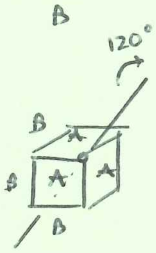
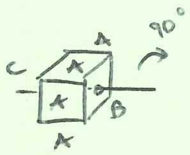
$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = C\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_1 z)^n + D\sum_{n=0}^{\infty}(\lambda_2 z)^n$$

$$= \frac{C}{1-\lambda_1 z} + \frac{D}{1-\lambda_2 z} = \underbrace{\frac{-C}{\lambda_1}}_{A}\,\frac{1}{z - \underbrace{1/\lambda_1}_{\mu_1}} \quad \underbrace{\frac{-D}{\lambda_2}}_{B}\,\frac{1}{z - \underbrace{1/\lambda_2}_{\mu_2}}$$

Le rayon de convergence $R = |\mu_2|$ correspond à l'inverse de la raison dominante λ_2.

PAUL

Faisons a) et b) en même temps :

ordre	élément de G	nombre	action sur diagonales	$\lvert Fix \rvert$
1	id 	1	id	6^6
2		6	(12)	6^5
2		3	$(12)(34)$	6^4
3		$4 \times 2 = 8$	(123)	6^2
4		$3 \times 2 = 6$	(1234)	6^3
		24 ✓		

D'après la formule de Cauchy-Frobenius,

$$|G \backslash X| = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |Fix\, g| = \frac{6^6 + 6 \cdot 6^5 + 3 \cdot 6^4 + 8 \cdot 6^2 + 6 \cdot 6^3}{24}$$

$$= 4116$$

c) Les configurations sans couleur répétée ont toutes un stabilisateur trivial (aucune symétrie) ; par conséquent, la formule « naïve » s'applique et nous donne

$$\frac{6!}{|G|} = \frac{6!}{24} = 6 \times 5 = 30 \text{ configurations possibles}$$

a) Si on applique Gauss-Lagrange à M, on trouve une matrice inversible Q telle que

$Q^T M Q = I$; par conséquent

$M = (Q^{-1})^T Q^{-1}$, on peut donc prendre

$P = Q^{-1}$.

En d'autres termes, Q est une matrice de passage vers une base orthonormée ; P est la matrice de passage inverse qui revient à la base initiale.

Par conséquent : $\det(M) = \det(P^T P) = \det(P^T)\det(P)$

$= \det(P)^2 \geqslant 0$

et $\det(P) \neq 0$ puisque P est inversible.

b)
$$\begin{aligned} &x_1 y_1 \qquad\quad - x_1 y_3 \\ &\qquad + x_2 y_2 - x_2 y_3 \\ &- x_3 y_1 - x_3 y_2 \end{aligned} = \begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{bmatrix}^T \underbrace{\begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{bmatrix}}_{M} \begin{bmatrix} y_1 \\ y_2 \\ y_3 \end{bmatrix}$$

Il s'agit bien d'une forme bilinéaire symétrique.

Mais :

$$\det(M) = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & -1 \\ -1 & -1 & 0 \end{vmatrix} \overset{\text{Sarrus}}{=} 0+0+0-1-0-1$$

$$= -2 < 0.$$

Par a), ça ne saurait être un produit scalaire (la forme n'est pas définie positive).

c) $$\chi_M(\lambda) = \det(\lambda I - M) = \begin{vmatrix} \lambda-1 & 0 & 1 \\ 0 & \lambda-1 & 1 \\ 1 & 1 & \lambda \end{vmatrix}$$

$$= \lambda(\lambda-1)^2 + 0 + 0 - (\lambda-1) - 0 - (\lambda-1)$$

$$= (\lambda-1)\big(\lambda(\lambda-1)-2\big) = (\lambda-1)(\lambda-2)(\lambda+1)$$

valeurs propres $1, 2, -1$ $\quad (1 \times 2 \times -1 = -2 = \det M$ ok$)$

La matrice n'ayant que des valeurs propres simples, elle est forcément diagonalisable.

<u>Remarque</u> : De façon plus générale, on peut montrer que toute matrice symétrique réelle est diagonalisable sur $\mathbb{R}$ (théorème spectral).

<u>RINGO</u>

a) $\|f\|^2 = \int_0^\pi x^2\,dx = \frac{\pi^3}{3}$, $\|g\|^2 = \int_0^\pi 1^2\,dx = \pi$

$$\langle f | g \rangle = \int_0^\pi x \cdot 1 \, dx = \frac{\pi^2}{2}$$

d'où $\quad \theta = \operatorname{Arc\,cos} \dfrac{\langle f | g \rangle}{\|f\| \, \|g\|} = \operatorname{Arc\,cos} \left(\dfrac{\pi^2/2}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sqrt{\pi}} \right) = \pi/6$

$$\underbrace{\dfrac{\pi^2/2}{\sqrt{\frac{\pi^3}{3}}\sqrt{\pi}}}_{= \sqrt{3}/2}$$

b) Prenons pour base $(\sin x, \sin 2x, \sin 3x)$:

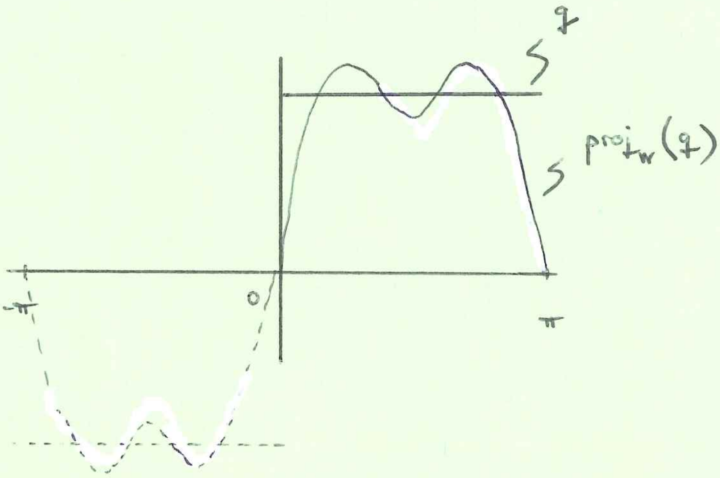
on se rappelle (ou on recalcule) les produits scalaires

$$\begin{bmatrix} \langle \sin x | \sin x \rangle & \langle \sin x | \sin 2x \rangle & \langle \sin x | \sin 3x \rangle \\ \langle \sin 2x | \sin x \rangle & \langle \sin 2x | \sin 2x \rangle & \langle \sin 2x | \sin 3x \rangle \\ \langle \sin 3x | \sin x \rangle & \langle \sin 3x | \sin 2x \rangle & \langle \sin 3x | \sin 3x \rangle \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \pi/2 & 0 & 0 \\ 0 & \pi/2 & 0 \\ 0 & 0 & \pi/2 \end{bmatrix}$$

c) $$\operatorname{proj}_W(g) = \sum_{k=1}^{3} \frac{\langle g | \sin kx \rangle}{\| \sin kx \|^2} \sin kx$$

$$= \frac{2}{\pi/2} \sin x + \frac{0}{\pi/2} \sin 2x + \frac{2/3}{\pi/2} \sin 3x$$

$$= \frac{4}{\pi} \sin x + \frac{4}{3\pi} \sin 3x$$



meilleure approximation de g par un élément de W en moyenne quadratique