2ème semestre TD n°3

Exercice 1 : parce qu'il faut l'avoir fait au moins une fois dans sa vie !

1) Montrez que quel que soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{X}$ nous avons toujours $div\left(\overrightarrow{rot}.\overrightarrow{X}\right)=0$.
2) Montrez que quel que soit le champ scalaire f nous avons toujours $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{grad}.f\right)=\vec{0}$.
3) Montrez que quel que soit le champ de vecteurs $\overrightarrow{X}$ nous avons toujours $\overrightarrow{rot}\left(\overrightarrow{rot}.\overrightarrow{X}\right)=\overrightarrow{grad}\left(div.\overrightarrow{X}\right)-\Delta\overrightarrow{X}$.

Exercice 2 :
Les vecteurs sont indiqués en caractère gras.

L'espace est rapporté à un trièdre rectangle direct Oxyz et on désigne par **i**, **j** et **k** respectivement les vecteurs unitaires des axes.

On rappelle que:

$$\mathbf{Rot\ A} = \nabla \wedge \mathbf{A} = \left(\frac{\partial A_z}{\partial y} - \frac{\partial A_y}{\partial z}\right)\mathbf{i} + \left(\frac{\partial A_x}{\partial z} - \frac{\partial A_z}{\partial x}\right)\mathbf{j} + \left(\frac{\partial A_y}{\partial x} - \frac{\partial A_x}{\partial y}\right)\mathbf{k}$$

$$\mathbf{Rot\ Rot\ A} = \mathbf{grad}\ \mathrm{div}\ \mathbf{A} - \mathbf{\Delta\ A}$$

L'équation aux dérivées partielles $\frac{\partial^2 f}{\partial z^2}=\frac{1}{c^2}\frac{\partial^2 f}{\partial t^2}$ admet comme solution générale :

$$f_1\left(t - \frac{z}{c}\right) + f_2\left(t + \frac{z}{c}\right)$$

On se place dans le vide, en l'absence de charges et courants.

1) En partant des équations de Maxwell, établir les équations vectorielles reliant $\Delta\mathbf{E}$ à $\frac{\partial^2\mathbf{E}}{\partial t^2}$ et $\Delta\mathbf{B}$ à $\frac{\partial^2\mathbf{B}}{\partial t^2}$

2) On suppose que les champs cherchés ne dépendent que de la coordonnée spatiale z (les dérivés partielles des champs par rapport à x et y sont nulles). C'est l'hypothèse de d'onde plane.
Écrire les équations aux dérivées partielles auxquelles obéissent les composantes du champ électrique.
Pour chaque composante, la solution de cette équation est la somme de deux termes. A quoi correspondent-ils ?

3) On considère un de ces deux termes. Montrer que l'onde correspondante est transversale et exprimer sa vitesse de propagation, notée c en fonction de ε_0 et μ_0, respectivement la permittivité électrique et la perméabilité magnétique du vide.
On admettra pour la suite et ce, sans démonstration, que **E** et **B** sont orthogonaux et que le trièdre (**E**, **B**, **c**) est direct et que **E** = **B** $\wedge$ **c** (**c** est le vecteur vitesse de l'onde: **c** = c **k** ou **c** = - c **k** suivant le sens de propagation).

4) On suppose: $\mathbf{E} = E_l \cos\left\{\omega\left(t - \frac{z}{c}\right)\right\} \mathbf{i}$

Déterminer l'expression du champ magnétique d'amplitude B_1. Préciser le rapport $\frac{E_1}{B_1}$.

5) On suppose: $\mathbf{E} = E_2 \cos\left\{\omega\left(t + \frac{z}{c}\right)\right\} \mathbf{i}$. Déterminer l'expression du champ magnétique d'amplitude B_2. Préciser le rapport $\frac{E_2}{B_2}$