TD 3 : Ondes mécaniques unidimensionnelles

Ex1 : Instruments à cordes

On considère une corde homogène, infiniment fine, de longueur totale L, de masse linéique constante μ, maintenue tendue entre deux points fixes A et B par une tension T. On suppose que la corde est sans raideur.
Au repos la corde se confond avec l'axe (Ox). On s'intéresse aux petits mouvements transversaux de cette corde dans le plan xOy, de part et d'autre de sa position d'équilibre. On admet qu'un élément de corde au repos reste pendant le mouvement à la même abscisse. L'élongation du point M d'abscisse x à l'instant t est notée $y(x,t)$. La tangente en M à la corde fait avec l'axe Ox un angle $\alpha(x,t)$ qui reste petit, ce qui suppose $|\frac{\partial y}{\partial x}| << 1$. Enfin, on néglige l'action du champ de pesanteur sur le mouvement ainsi que toute cause d'amortissement.

1. Equation d'onde pour un ébranlement le long de la corde

a. Montrer à l'aide des hypothèses faites que l'équation vérifiée par $y(x,t)$ est :

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2}(x,t) - \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}(x,t) = 0$$

Exprimer la constante v en fonction de T et μ. Quelle est son unité ?

b. Application numérique : déterminer la valeur de v dans le cas d'une corde de longueur $L = 63,0$ cm, de masse $m = 1,90$ g, tendue sous une tension $T = 103$ N.

2. Recherche d'une solution en ondes stationnaires générales

La corde est fixée en ses deux extrémitées $A(x = 0)$ et $B(x = L)$.

a. Après avoir justifié le choix d'une onde stationnaire, montrer qu'une telle onde est bien solution de l'équation de d'Alembert. Quelle relation doivent satisfaire ω et k ?

b. Montrer que les conditions aux limites imposent à ω de ne pouvoir prendre qu'une suite de valeurs discrètes ω_n dont on donnera l'expression. En déduire que pour des grandeurs L et v fixées, la longueur d'onde λ ne peut prendre qu'une suite de valeur discrètes λ_n. Exprimer L en fonction de λ_n.

c. Quelle est l'expression de la solution $y_n(x,t)$ (mode propre) correspondant à la pulsation propre ω_n ? Montrer que, outre les extrémités, il existe le long de la corde des points immobiles dont on précisera le nombre et la position.

3. Interprétation de la solution en fondamental et harmoniques

a. Proposer une représentation graphique de l'état de déformation de la corde en visualisant le fondamental (n=1) et les harmoniques $n = 2$ et $n = 3$ à des instants distincts t judicieusement choisis.

On admet que toute solution de l'équation d'onde, compte tenu des conditions aux limites, s'écrit comme une superposition des modes propres :

$$y(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} \left(a_n \cos\left(\frac{n\pi v}{L} t\right) + b_n \sin\left(\frac{n\pi v}{L} t + b_n\right)\right) \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

b. La résolution de cette équation ne nécessite pas de connaissances musicales particulières.

L'élaboration de la gamme musicale dite naturelle repose sur trois intervalles consonnants (c'est-à-dire agréables à l'oreille) et qui constituent l'accord parfait majeur complété par l'octave. Ainsi dans la suite do - mi -sol - do, les rapports des fréquences sont :

— pour la tierce do - mi : 5/4

— pour la quinte do - sol : 3/2

— pour l'octave do - do : 2

Il apparaît que si le fondamental est do, l'harmonique $n = 2$ est également do, mais à l'octave, et l'harmonique $n = 3 = \frac{3}{2} \times 2$ est le sol de l'octave supérieur.

Trouver les notes correspondant aux harmoniques $n = 4$, $n = 5$, $n = 6$.

Montrer que l'harmonique $n = 7$ ne rentre pas dans le schéma tierce - quinte - octave (les musiciens disent de ce fait qu'il est dissonant).

Quelle est la note correspondant à l'harmonique $n = 8$? Est-elle consonnante ou dissonante ?