CIR$_2$

TD de Maths - Groupes

Exercice 1

- Dans $G = \mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on définit la loi de composition interne dans G : $(x,y) * (x',y') = (xx', xy'+y)$.
  Montrer que $(G, *)$ est un groupe non abélien.
- Dans $G = \mathbb{R}\setminus\{-1\}$ on définit la loi de composition interne dans G : $x * y = x + y + xy$
  Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.
  Résoudre dans ce groupe $a * x = b$. Exemple : $3 * x = 1$.

Exercice 2

- Dans $\mathbb{R}$ on définit la loi de composition interne : $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
  Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
- Dans l'intervalle $]-1,+1[$ montrer que $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ définit une loi de composition interne.
  Montrer que $]-1,+1[$ muni de cette loi est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$ (penser à $x \to \operatorname{th} x$)

Exercice 3

Soient n un naturel non nul et $U = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} \;/\; k \in \mathbb{Z} \right\}$

Montrer que $(U,\times)$ est un groupe. Quel est son ordre ?

Trouver un groupe additif isomorphe à $(U,\times)$.

Dans le cas particulier $n = 12$, déterminer l'orbite et l'ordre de chaque élément du groupe U.
faire une figure

Revenant au cas général, déterminer suivant k et n l'ordre de $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ dans le groupe U.

Exercice 4

Soit F l'ensemble des 6 fonctions f_i suivantes :

$$f_1(x) = x, f_2(x) = 1 - x, f_3(x) = \frac{1}{x}, f_4(x) = \frac{1}{1-x}, f_5(x) = 1 - \frac{1}{x}, f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des bijections de $E = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ dans lui-même.

En déduire qu'il en est de même pour f_4, f_5 et f_6.

Faire la table de l'opération $\circ$ dans F.

Montrer que $(F,\circ)$ est un groupe et déterminer tous les sous-groupes.

Montrer que $(F,\circ)$ est isomorphe à S_3.

Exercice 5

Soient $(E,\star)$ et $(F,\otimes)$ deux groupes et $f : E \to F$ un morphisme de groupes

- Soit H un sous-groupe de E.
  On considère l'ensemble $\overrightarrow{f}(H) = \{ y \in F \;/\; \exists x \in H \;/\; y = f(x) \}$ des images par f des éléments de H.
  Montrer que $\overrightarrow{f}(H)$ est un sous-groupe de F.
- Soit K un sous-groupe de F.
  On considère l'ensemble $\overleftarrow{f}(K) = \{ x \in E \;/\; f(x) \in K \}$ des éléments de E dont l'image appartient à K.
  Montrer que $\overleftarrow{f}(K)$ est un sous-groupe de E.
- Soit $x \in E$. Montrer que l'ordre de $f(x)$ dans $(F,\otimes)$ est un diviseur de l'ordre de x dans $(E,\star)$
- Trouver tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
- Trouver tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$