Maths – DS 3 – Séries

Consignes

- La durée de l'épreuve est 2h.
- L'énoncé comporte 6 questions équipondérées + 1 question bonus.
- L'usage de la calculatrice et du compilateur `C++` est interdit (et inutile).
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant au maximum vos raisonnements.
- Amusez-vous bien !

On se propose d'étudier la nature de la série $\mathcal{B}_\alpha : \displaystyle\sum_{n=2}^{\infty} \frac{1}{n\,(\ln n)^\alpha}$ en fonction du paramètre $\alpha \in \mathbf{R}$.

1. Énoncer le critère de d'Alembert pour les séries à termes positifs et déterminer ce qu'il permet d'affirmer sur $\mathcal{B}_\alpha$.

2. Par comparaison avec la série harmonique, montrer que $\mathcal{B}_\alpha$ diverge lorsque $\alpha \leqslant 0$.

3. Soit $f : [n_0, \infty[\to \mathbf{R}$ une fonction *continue*, *positive* et *décroissante* et posons $S_N = \displaystyle\sum_{n=n_0}^{N} f(n)$. Montrer que
$$\int_{n_0}^{N+1} f(x)\,\mathrm{d}x \;\leqslant\; S_N \;\leqslant\; f(n_0) + \int_{n_0}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x$$
et en déduire que
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} f(n) < +\infty \quad\Longleftrightarrow\quad \lim_{N\to\infty} \int_{n_0}^{N} f(x)\,\mathrm{d}x < +\infty$$

4. En prenant soin de vous assurer que la fonction f choisie satisfait les hypothèses requises, utiliser 3) pour montrer que $\mathcal{B}_\alpha$ est convergente $\iff$ $\alpha > 1$. Donner également un encadrement de sa somme lorsque celle-ci est définie.

Cela étant établi, nous allons maintenant passer à une version alternée de la même série :
$$\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha : \sum_{n=2}^{\infty} \frac{(-1)^n}{n\,(\ln n)^\alpha}.$$

5. Soit $(a_n)_{n\geqslant n_0}$ une suite *décroissante* de nombres réels *positifs* telle que $a_n \to 0$ quand $n \to \infty$. Établir la convergence de la série à termes alternés
$$\sum_{n=n_0}^{\infty} (-1)^n a_n.$$
[*Indication* : Montrer que les suites de sommes partielles de rang pair (resp. impair) sont adjacentes.]

6. Déterminer la nature (absolument convergente, semi-convergente ou divergente) de $\widetilde{\mathcal{B}}_\alpha$ en fonction de $\alpha \in \mathbf{R}$.

---

7. (cadeau de Noël) Montrer que la suite de terme général
$$1 + \frac{1}{2} + \cdots + \frac{1}{N} - \ln N$$
est convergente et que sa limite γ est comprise entre 0 et 1.

À l'heure actuelle, personne ne sait si le nombre γ (appelé *constante d'Euler*) est rationnel ou irrationnel !