Série d'Abel

Pour tout réel $\theta \in]0\ ,\ 2\pi[$ et tout réel $\alpha \in]0,1]$, la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

Démonstration.

Posons $a_n = e^{in\theta}$ et $A_n = \sum_{p=0}^{n} a_p = \sum_{p=0}^{n} e^{ip\theta}$

- On note que *(1)* $\boxed{\forall p \in \mathbb{N}^*\ a_p = A_p - A_{p-1}}$
- Par ailleurs $A_n = \sum_{p=0}^{n} \left(e^{i\theta}\right)^p = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{1-e^{i\theta}}$ puisque $e^{i\theta} \neq 1$. donc $A_n = \frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{e^{i\theta/2}\left(e^{-i\theta/2}-e^{i\theta/2}\right)} = e^{-i\theta/2}\,\frac{1-e^{i(n+1)\theta}}{-2i\sin\left(\theta/2\right)}$.

  Ainsi $|A_n| = \frac{\left|1-e^{i(n+1)\theta}\right|}{2\left|\sin\left(\theta/2\right)\right|}$ et *(2)* $\boxed{|A_n| \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\theta/2\right)\right|}}$

On étudie les sommes partielles de la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$: $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{e^{ip\theta}}{p^\alpha} = \sum_{p=1}^{n} \frac{a_p}{p^\alpha}$

En utilisant la remarque *(1)*, on a $S_n = \sum_{p=1}^{n} \frac{A_p - A_{p-1}}{p^\alpha} = \sum_{p=1}^{n} \frac{A_p}{p^\alpha} - \sum_{p=1}^{n} \frac{A_{p-1}}{p^\alpha}$

En faisant le changement d'indice $p = k$ dans la 1ère somme et le changement d'indice $p = k+1$ dans la 2ème somme, on a :

$$S_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{A_k}{k^\alpha} - \sum_{k=0}^{n-1} \frac{A_k}{(k+1)^\alpha} = \frac{A_n}{n^\alpha} + \sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{A_k}{k^\alpha} - \frac{A_k}{(k+1)^\alpha}\right) - \frac{A_0}{1^\alpha} \qquad \text{("Transformation d'Abel")}$$

► D'après la remarque *(2)* , $\left|\frac{A_n}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{n^\alpha\left|\sin\left(\theta/2\right)\right|}$ donc $\left|\frac{A_n}{n^\alpha}\right| \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$ puisque $\alpha > 0$

► $\left|\frac{A_k}{k^\alpha} - \frac{A_k}{(k+1)^\alpha}\right| = |A_k|\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) \leqslant \frac{1}{\left|\sin\left(\theta/2\right)\right|}\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$

Or la série $\sum_{k\geqslant 1}\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right)$ converge : c'est une série "télescopique" :

En effet sa somme partielle de rang *n* est $\sum_{k=1}^{n}\left(\frac{1}{k^\alpha} - \frac{1}{(k+1)^\alpha}\right) = \frac{1}{1^\alpha} - \frac{1}{(n+1)^\alpha} \xrightarrow[n\to\infty]{} 1$

Donc la série $\sum_{n\geqslant 1}\left|\frac{A_k}{k^\alpha} - \frac{A_k}{(k+1)^\alpha}\right|$, majorée par une série convergente, est elle-même convergente.

Ainsi la série $\sum_{n\geqslant 1}\left(\frac{A_k}{k^\alpha} - \frac{A_k}{(k+1)^\alpha}\right)$ converge absolument donc converge

et $\sum_{k=1}^{n-1}\left(\frac{A_k}{k^\alpha} - \frac{A_k}{(k+1)^\alpha}\right)$ a une limite L quand $n \to \infty$.

► Enfin $S_n \xrightarrow[n\to\infty]{} L-1$ et la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{e^{in\theta}}{n^\alpha}$ converge.

Niels Henrik Abel
5 août 1802 - 6 avril 1829