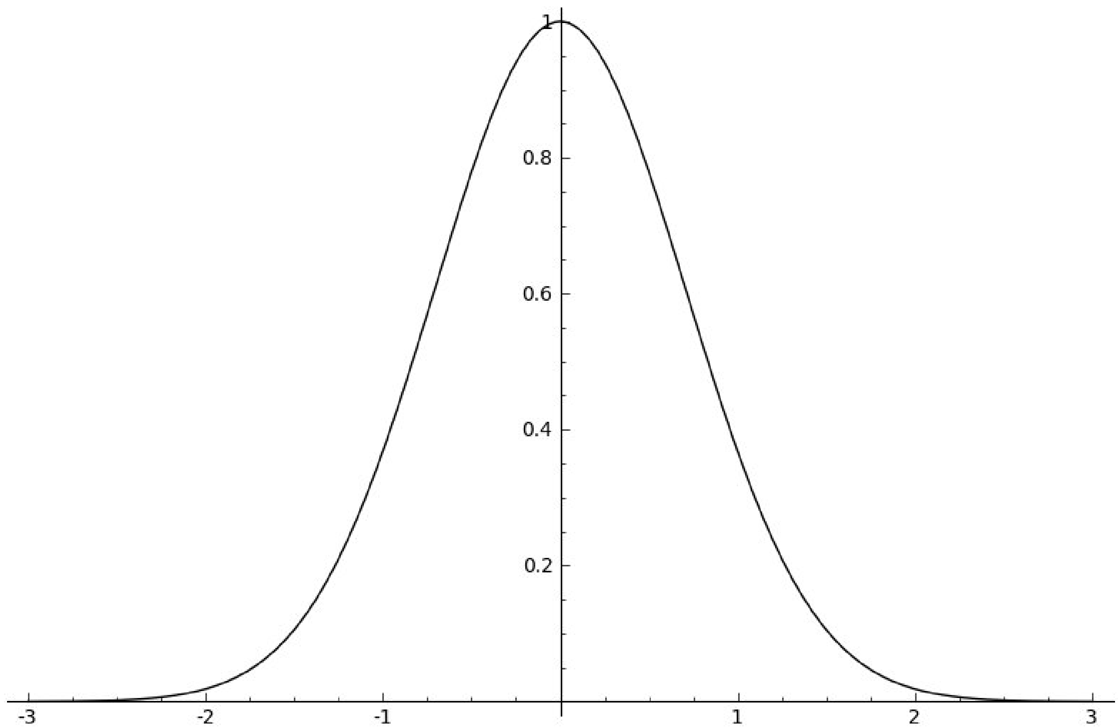
Une belle courbe [1]



N'est-ce pas ?

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **4** parties équipondérées (+ **1** question bonus).
- Celles-ci peuvent être traitées dans n'importe lequel des **24** ordres possibles.
- Raison de plus pour **lire** calmement l'énoncé en entier avant de commencer.
- L'usage de la calculatrice est **interdit** (et inutile).
- Rédigez clairement vos solutions en **explicitant** vos raisonnements et **citant** les résultats utilisés.
- Et surtout, **amusez**-vous bien !

1. Mauvaise translation de : *bell curve* – courbe en forme de cloche.

The Bell Curve est également le titre d'un ouvrage sur les déterminismes sociaux liés au QI qui a suscité une vive controverse dans les années 90 – vous gouglerez ça.

Pour $\lambda > 0$ fixé (le cas $\lambda = 1$ est représenté au verso), on considère la fonction $f_\lambda : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$ définie par

$$f_\lambda(x) = e^{-\lambda x^2}.$$

♣ – Une équation différentielle

a) Donner le développement en série entière de f_λ au voisinage de 0 en spécifiant son rayon de convergence.

b) Déterminer par la méthode des séries quelles sont les fonctions f analytiques au voisinage de 0 telles que

$$f'(x) + 2\lambda x f(x) = 0.$$

♢ – Changement d'échelle

a) Calculez la limite simple (ponctuelle) de f_λ quand $\lambda \to \infty$.
Pour $\alpha > 0$ fixé, la convergence est-elle uniforme sur $[-\alpha, \alpha]$? Sur $[\alpha, \infty[$? Sur $\mathbf{R}$?

b) Mêmes questions avec $g_\lambda = (f_\lambda)'$.

♠ – Aire sous la courbe

Définissons, pour λ et $R > 0$:

$$I_\lambda(R) = \int_{-R}^{R} f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \qquad \text{et} \qquad J_\lambda(R) = \iint_{x^2+y^2 \leqslant R^2} f_\lambda(\sqrt{x^2+y^2})\,\mathrm{d}A.$$

a) Évaluer $J_\lambda(R)$ par un calcul direct en coordonnées polaires.

b) En interprétant $I_\lambda(R)^2$ comme une intégrale double sur un carré, établir les inégalités

$$J_\lambda(R) \;\leqslant\; I_\lambda(R)^2 \;\leqslant\; J_\lambda(\sqrt{2}R)$$

et en déduire la valeur de

$$\int_{-\infty}^{\infty} f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t = \lim_{R\to\infty} I_\lambda(R).$$

♡ – Une autre expression

a) Montrer que la formule $F(x) = \displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n\, x^{2n+1}}{(2n+1)\, n!}$ définit une fonction continue $F : \mathbf{R} \to \mathbf{R}$.

b) Justifier l'égalité suivante, valable pour tout λ et $R > 0$:

$$I_\lambda(R) = \frac{2}{\sqrt{\lambda}}\, F(\sqrt{\lambda}R),$$

et en déduire la relation :

$$R\, I_{R^2}(\sqrt{\lambda}) = \sqrt{\lambda}\, I_\lambda(R).$$

★ – Bonus

Que vaut $\displaystyle\lim_{\lambda\to\infty} \left(\sqrt{\lambda} \int_0^x f_\lambda(t)\,\mathrm{d}t \right)$? La convergence est-elle uniforme ?