## Théorie

Soit $\sum_{n\in\mathbb{N}} a_n$ une série convergente de somme $S$. Pour chaque $N \in \mathbb{N}$, nous pouvons écrire $S = S_N + R_N$ avec

$$S_N := \sum_{n=0}^{N} a_n, \qquad R_N := \sum_{n=N+1}^{\infty} a_n,$$

et la propriété que $S_N \to S$ (ou de façon équivalente, $R_N \to 0$) quand $N \to \infty$.

Dans les applications, on s'intéresse à la valeur numérique de $S$ que l'on cherche à obtenir avec une précision suffisante. Concrètement, cela signifie que l'on se donne une tolérance à l'erreur $\varepsilon > 0$ et que l'on cherche à produire un nombre $\tilde{S} \in \mathbb{R}$ pour lequel

$$|S - \tilde{S}| < \varepsilon.$$

Puisque $R_N$ tend vers 0, nous savons que $|R_N| = |S - S_N| < \varepsilon$ à partir d'un certain rang et il est donc tentant de prendre $\tilde{S} := S_N$ avec $N$ suffisamment grand. Reste qu'en pratique il faudra également évaluer explicitement $S_N$ et cela peut aussi entraîner des erreurs numériques.

En résumé : pour obtenir une approximation $\varepsilon$-proche $\tilde{S}$ de $S$, on va typiquement

1) déterminer une valeur de $N$ (démontrablement) suffisamment grande pour que $|S - S_N| < \varepsilon_1$ ;
2) puis calculer numériquement une approximation $\tilde{S}$ de la somme partielle $S_N$ satisfaisant $|S_N - \tilde{S}| < \varepsilon_2$

avec $\varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon$, de façon à pouvoir ainsi garantir que

$$|S - \tilde{S}| \leqslant |S - S_N| + |S_N - \tilde{S}| < \varepsilon_1 + \varepsilon_2 \leqslant \varepsilon.$$

Dans Sage, les calculs sont effectués par défaut avec des « nombres réels » représentés par des mantisses de 53 bits, donnant typiquement [1] une précision de l'ordre de

$$2^{-53} \approx 10^{-16}$$

qui sera amplement suffisante ici pour considérer que $\varepsilon_2$ est négligeable devant $\varepsilon_1$ et nous permettre de nous concentrer sur ce dernier via une majoration du reste $R_N$.

## Consignes

Créez une feuille de calcul Jupyter Sage (version $\geqslant 9$) dans lequel vous répondrez aux questions suivantes. Présentez vos calculs numériques dans des cellules de code et abusez des cellules de texte (en fait du Markdown, vous pouvez utiliser du LaTeX ou du HTML aussi) pour commenter copieusement ceux-ci.

Vous rendrez un fichier par équipe de deux sur *Teams*.

### Exercice 1

Considérons la série $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{1}{2^n}$.

a) En utilisant le fait que $R_N = 1/2^N$ (n'est-ce pas ?) : quelle valeur de $N$ doit-on prendre pour commettre, en remplaçant $S$ par $S_N$, une erreur d'au plus $\varepsilon = 10^{-6}$ ? Évaluer cette somme partielle à l'aide d'une boucle effectuant les additions répétées.

b) Représenter graphiquement (par exemple avec `list_plot`) la suite des sommes partielles jusqu'au rang trouvé en a). Commentez !

1. La réalité est un peu plus délicate puisque la précision obtenue dépend de l'ordre de grandeur des quantités manipulées.

**Exercice 2**

On peut montrer que la série alternée convergente $\sum_{n\in\mathbb{N}} \frac{(-1)^n}{(2n)!}$ a pour somme $\cos(1)$.

a) En admettant le fait que, pour cette série, on a $|R_N| \leqslant \frac{1}{(2N+2)!}$ : combien de termes doit-on prendre dans la somme pour obtenir une approximation de $\cos(1)$ valable à $\varepsilon = 10^{-6}$ près ?

b) En n'utilisant que des opérations élémentaires, obtenir une telle approximation – *puis* comparez avec `cos(1.)` pour vérifier sa validité.

**Exercice 3**

On considère la *série harmonique alternée* $\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$.

a) En admettant que $|R_N| \leqslant \frac{1}{N+1}$, calculer une approximation de sa somme valable à $\varepsilon = 10^{-6}$ près. Reconnaissez-vous cette valeur ?

b) D'après vous, combien de temps serait nécessaire avec cette méthode pour la calculer à une précision $\varepsilon = 10^{-12}$ ? (`%%time` en début de cellule permet d'afficher le temps d'exécution de celle-ci) Comparez avec la série de la question précédente.

**Exercice 4**

La *fonction zêta de Riemann* est la fonction qui associe à chaque $\alpha > 1$ la somme $\zeta(\alpha)$ de la série convergente

$$\sum_{n\in\mathbb{N}^*} \frac{1}{n^\alpha}.$$

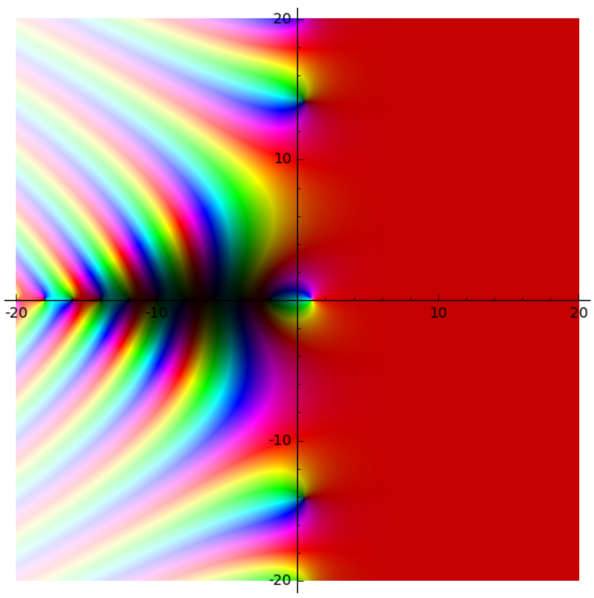
a) En comparant le reste de la série à l'aire sous $y = 1/x^\alpha$ à partir d'une certaine abscisse, établir l'inégalité

$$\left|\zeta(\alpha) - \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{n^\alpha}\right| \leqslant \frac{1}{\alpha - 1} \cdot \frac{1}{N^{\alpha-1}}.$$

En déduire le nombre $N$ de termes nécessaires pour obtenir une estimation de $\zeta(\alpha)$ à une précision $\varepsilon$ donnée.

b) Donner une estimation numérique de $\zeta(2 + \frac{m}{12})$, où $m$ est le numéro de votre mois de naissance.

c)* Sauriez-vous conjecturer une formule pour la valeur exacte de $\zeta(2n)$, $n \in \mathbb{N}^*$ ?




`complex_plot(zeta, (-20,20), (-20,20))`