

Soit $\int_a^{+\infty} f(x) dx$ une intégrale impropre convergente de valeur I . On supposera ici que pour tout $X \in [a, +\infty[$, f est Riemann-intégrable sur l'intervalle $[a, X]$, de sorte que l'on peut écrire $I = F(X) + R(X)$ avec

$$F(X) := \int_a^X f(x) dx \longrightarrow I, \quad R(X) := \int_X^{+\infty} f(x) dx \longrightarrow 0 \quad \text{quand } X \longrightarrow +\infty.$$

Puisque le reste $R(X)$ tend vers 0, nous savons que pour tout $\varepsilon > 0$ nous aurons $|R(X)| < \varepsilon$ pour x suffisamment grand ; l'erreur commise en approximant I par la valeur de $F(X)$ est donc inférieure à ε à partir de ce moment.

En pratique, la tolérance ε nous est spécifiée et c'est à nous de trouver une valeur de X suffisamment grande pour garantir que $|R(X)| < \varepsilon$, la plupart du temps en passant par une majoration du reste.

Remarque : On utilisera ici les intégrales numériques de Sage, *e.g.*

`numerical_integral(sin(x)/x, 0, pi) # (valeur, précision)`

On peut donc définir une primitive en tant que fonction (au sens pythonesque, et non symbolique, du terme) en faisant quelque chose comme

```
def F(X):
    return numerical_integral(sin(x)/x, 0, X)[0]
```

qu'on peut tout de même `plotter` avec, par exemple, `plot(F, (-pi, pi))`.

Exercice 1

Considérons

$$I := \int_0^{+\infty} \frac{\sin x}{x} dx$$

(notez qu'il n'y a pas de souci à se faire en $x = 0$ car la fonction à intégrer y est prolongeable par continuité).

- Porter sur un même graphe les fonctions $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ et $X \mapsto F(X)$ et discuter de ce que vous pouvez conjecturer par rapport à la convergence de l'intégrale impropre.
- Pour cette intégrale impropre, on peut montrer que

$$|R(X)| \leq \frac{2}{(n+1)\pi} \quad \text{avec } n = \left\lfloor \frac{X}{\pi} \right\rfloor \in \mathbb{N}.$$

Utiliser ceci pour obtenir une approximation de I précise à 10^{-3} près. Votre réponse est-elle cohérente avec vos observations en a) ? Reconnaissez-vous cette valeur ?

Exercice 2

- Mêmes questions avec $I := \int_0^{+\infty} \frac{1 - e^{-x}}{1 + x^2} dx$, $|R(X)| \leq \int_X^{+\infty} \frac{1}{1 + x^2} dx = \frac{\pi}{2} - \arctan X$.
- Cette fois avec $I := \int_0^{+\infty} e^{-x^2} dx$, $|R(X)| \leq \frac{\sqrt{\pi}}{2} e^{-X^2}$.
- Qu'en est-il de $I := \int_1^{+\infty} \frac{1}{x - e^{-x}} dx$?

Discutez des ressemblances et différences entre ces quatre cas.

Exercice 3

Considérons la fonction, définie par une intégrale impropre (convergente n'est-ce pas ?)

$$G(t) := \int_0^\infty x^t e^{-x} dx, \quad t \geq 0.$$

Pour des petites valeurs de t (disons, $0 \leq t \leq 10$), on peut raisonnablement dire que

$$G(t) \approx \int_0^{40} x^t e^{-x} dx.$$

Utilisez cette approximation pour tracer le graphe de G sur $[0, 10]$. Reconnaissez-vous les valeurs prises par G lorsque t est entier ?