| ISEN LILLE – Section CIR1&CNB1 – 2019 / 2020 | Mécanique TD5 et TD6 – Chutes avec frottement, applications du PFD |
|---|---|

**Exercice 1. Chute de grêle**

Les grêlons sont des particules de glace dont les chutes en très grand nombre depuis certains nuages constituent la grêle. On a mesuré expérimentalement leur vitesse à l'arrivée au sol ($v_s$). Cette vitesse varie, en fonction de la masse du grêlon, entre $v_s = 15$ et $v_s = 100\ km.h^{-1}$.

On cherche à connaître le modèle mécanique permettant d'expliquer ces valeurs. Pour cela, on modélise le grêlon par une boule de glace (densité de la glace: $\rho_{glace} = 917\ kg.m^{-3}$) de rayon $R = 5\ mm$ qui chute d'un nuage situé à une altitude $h = 1500\ m$. On prendra g = 9,81 m.s$^{-2}$. On prendra un axe Oz descendant tel qu'à $t = 0$, $z = 0$ et $v = 0$.

On teste alors trois modèles mécaniques différents :

**1.** On néglige les forces de frottement fluide dues à l'air.

a) Déterminer $v = f(t)$ et $z = f(t)$.

b) Calculer $t_c$ la durée de la chute et en déduire $v_s$.

c) Conclure sur la validité du modèle.

**2.** On considère une force de frottement fluide due à l'air de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha = 6\pi R\eta_{air}$ où $R$ est le rayon du grêlon et $\eta_{air} = 1,8.10^{-5}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$ est la viscosité de l'air.

a) Établir l'équation différentielle en $v(t)$.

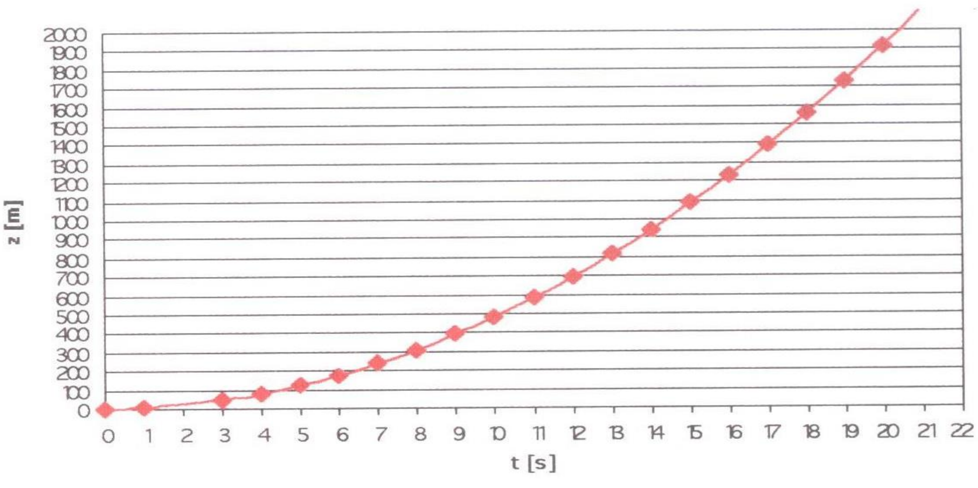
b) Résoudre cette équation et donner $v = f(t)$.

c) Montrer que le grêlon ne peut dépasser une vitesse limite $v_l$ que l'on calculera.

d) Déterminer l'équation $z = f(t)$.

e) La fonction $z = f(t)$ est tracée sur le graphique de la figure ci-dessous. Déterminer une valeur approchée de $t_c$ et en déduire $v_s$.

f) Conclure sur la validité du modèle.




**3.** On considère une force de frottement fluide due à l'air de la forme $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$ avec $\beta = 0,225\pi R^2\rho_{air}$ où $R$ est le rayon du grêlon et $\rho_{air} = 1,6\ kg.m^{-3}$ est la densité de l'air.

a) Établir l'équation différentielle en $v = f(t)$.

b) En posant $w(z) = v^2(z)$, montrer que l'équation précédente $v = f(t)$ peut s'écrire : $\frac{1}{2}\frac{dw}{dz} + \frac{\beta}{m}w = g$

On rappelle ici que pour une fonction $u = f(z(t))$ : $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}$

c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'équation $v = f(z)$.

d) Montrer que le grêlon ne peut dépasser une vitesse limite $v_l$ que l'on calculera.

e) Calculer $v_s$.

f) Conclusion.

**Exercice2. Montgolfière** (extrait du sujet d'examen 2nde session 2019)

Une montgolfière est constituée d'un ballon sphérique de volume $V = 2145\ m^3$ ouvert vers le bas, donc en communication avec l'atmosphère, et d'une nacelle avec son équipement. Le volume V du ballon sera supposé constant. Un brûleur permet de réchauffer l'air à l'intérieur du ballon et de le maintenir à la température souhaitée.

La température extérieure est $\theta_e = 17{,}0°C$ et on chauffe l'air intérieur à la température $\theta_i = 35{,}0°C$.
La masse volumique de l'air dépend de la température, elle vaut $\rho_e = 1{,}21\ kg.m^{-3}$ à $\theta_e = 17{,}0°C$ et $\rho_i = 1{,}14\ kg.m^{-3}$ à $\theta_i = 35{,}0°C$ (à pression ambiante).

On rappelle que la poussée d'Archimède a pour expression générale $\overrightarrow{F_A} = -\rho V \vec{g}$, avec $\rho$ la masse volumique du fluide dans lequel le système est plongé, $V$ le volume du système et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, de valeur $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$.

Tous les résultats numériques seront donnés avec **3 chiffres significatifs.**

**1. La montgolfière est au sol, prête à partir.**

1.1. Calculer l'intensité $F_P$ du poids de l'air enfermé dans le ballon. Préciser la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{F_P}$ représentatif de ce poids.

1.2. Préciser la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{F_A}$ représentatif de la poussée d'Archimède sur le ballon. Vérifier que son intensité $F_A$ est égale à $2{,}55.\,10^4 N$.

1.3. On appelle masse limite soulevable $M_m$ la masse maximale qui pourra être soulevée quand on supprime les liens avec le sol (enveloppe du ballon, nacelle, équipement, passager(s) éventuel(s)). Déduire la valeur $M_m$ des deux questions précédentes.

**2. Etude du mouvement d'ascension de la montgolfière.**

On s'intéresse maintenant au mouvement d'ascension verticale de la montgolfière. On suppose que, quittant le sol à vitesse initiale nulle, elle s'élève verticalement dans l'atmosphère. On néglige les variations de pression, de température et d'accélération de la pesanteur dues à l'altitude.
Dans ce mouvement ascensionnel, la montgolfière est soumise aux forces suivantes :

- Le poids $\overrightarrow{F_P}$ de l'air à l'intérieur (masse $M_P$) de l'enveloppe,
- La poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$ ,
- Le poid $\vec{\Pi}$ de l'ensemble des équipements (nacelle, enveloppe, passager) dont la masse totale est $M = 130\ kg$,
- Une force $\overrightarrow{F_R}$ de frottements de l'air sur la montgolfière, verticale et dirigée vers le sol, d'intensité proportionnelle au carré de la vitesse de la montgolfière $F_R(t) = k\ v^2(t)$ ,
  $k$ étant une constante $k = 60{,}0\ S.I.$ et $v(t)$ étant la valeur algébrique de la vitesse de la montgolfière à l'instant $t$, mesurée selon la verticale ascendante $Oz$.

Le mouvement est étudié selon un axe vertical Oz, de vecteur unitaire $\vec{\imath}$ dirigé vers le haut, l'origine O étant au sol.
L'origine des temps t=0 est prise à l'instant où la montgolfière quitte le sol.

2.1. Ecrire sous forme vectorielle la relation fondamentale de la dynamique pour le mouvement du centre de masse de la montgolfière.

2.2. Que donne la projection de la relation précédente selon l'axe $Oz$ ?

2.3. Montrer que l'équation précédente se met sous la forme d'une équation différentielle :
$\frac{dv(t)}{dt} + Av^2(t) = B$ où $A$ et $B$ sont des constantes dont on précisera l'expression. L'application numérique pour les valeurs de $A$ et $B$ n'est pas demandée.
Pour la suite du problème, on prendra : $A = 23{,}3.\,10^{-3} m^{-1}$ et $B = 76{,}8.\,10^{-3} ms^{-2}$

2.4. L'équation différentielle précédente peut être résolue analytiquement. On montre alors que la vitesse tend vers une valeur *constante*. En déduire la valeur de cette vitesse limite $V_L$ en fonction de *A* et *B*.

Application numérique : calculer $V_L$ numériquement.

2.5. Les graphes d'évolution de la vitesse v(t) et de l'altitude z(t) résultant de mesures réalisées toutes les 5 secondes avec des appareils embarqués sont donnés à la page suivante.

a) L'examen des graphes est-il en accord avec le modèle proposé précédemment ? Pourquoi ?

b) Dans l'intervalle de temps $0 < t < 15\ s$, on approxime $v(t)$ par une courbe linéaire. Comment s'appelle ce type de mouvement ? Quelle est approximativement la valeur de l'accélération ?

c) Déterminer le temps $t_1$ mis par la montgolfière pour que partant du sol, sa vitesse atteigne 95% de sa vitesse limite mesurée. Déterminer l'altitude correspondante $z_1$.

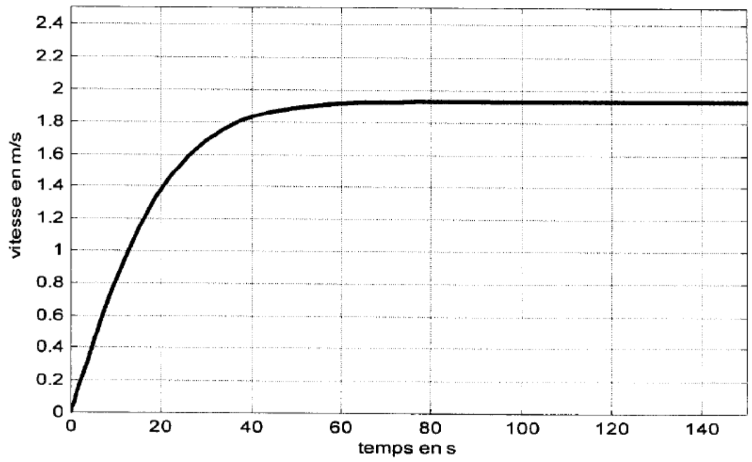
(2.6. non traitée)

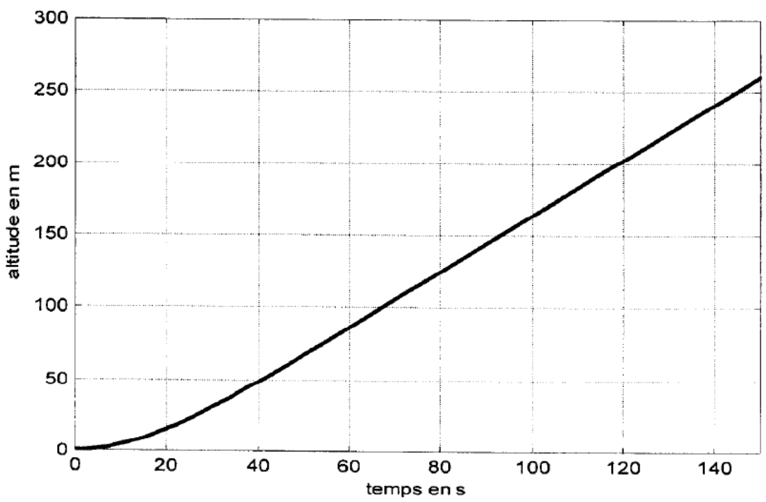
2.7. Mouvement pour les altitudes $z > z_2 = 130\ m$.

a) Qu'est-ce qui caractérise le mouvement pour des altitudes z telles que $z > z_2 = 130\ m$ et comment s'appelle ce type de mouvement ?

b) Déterminer l'équation horaire $z(t)$ du mouvement de la montgolfière dans le repère de temps et d'espace proposé.

c) Quelle est la durée du mouvement entre les altitudes $z_2$ et $z_3 = 300\ m$ ?



**Exercice3. (bonus) Frottements solides**

On veut tracter un bloc de béton d'une tonne en le faisant glisser sur une surface plastique. Quelle force doit-on appliquer pour mettre en mouvement le bloc ? Quelle force minimale doit-on ensuite appliquer pour maintenir le mouvement ? Les coefficients de frottement dynamique et statique de l'interface pneu/béton sont respectivement 0.7 et 1.

**Exercice 4. (bonus) (**Extrait de la préparation au concours puissance alpha.**)**

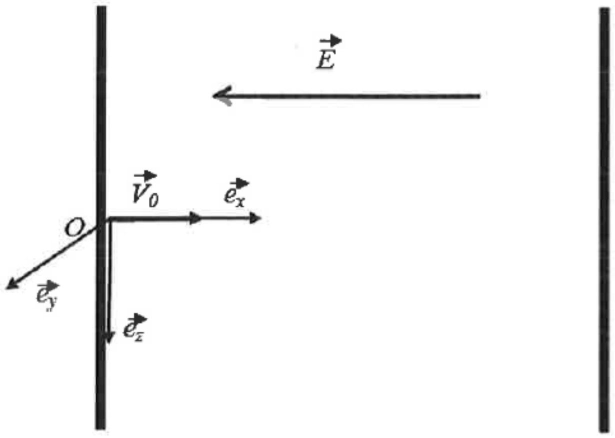
Déterminer si les affirmations a, b, c et d sont vraies ou fausses.

**Particule chargée dans un champ électrique**

Une micro goutte d'huile électrisée de masse $m$ et de charge $q$ pénètre en $O$ à l'instant $t = 0$, avec une vitesse $\vec{v_0}$ horizontale, dans l'espace contenu entre deux plaques conductrices verticales chargées. Il y règne un champ électrique uniforme de valeur $E$.

Cette goutte possède un excédent de $10^6$électrons. L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

**Données**: $m = 0,16\ mg$ ; $E = 10^7 V.m^{-1}$; charge électrique élémentaire: $e = 1,6.10^{-19}C$ ; l'intensité du champ de pesanteur terrestre est: $g = 10 m.s^{-2}$




*a) Cette goutte subit une force électrique horizontale dirigée vers la droite, de valeur:* $F = 1,6.10^{-6}\ N$

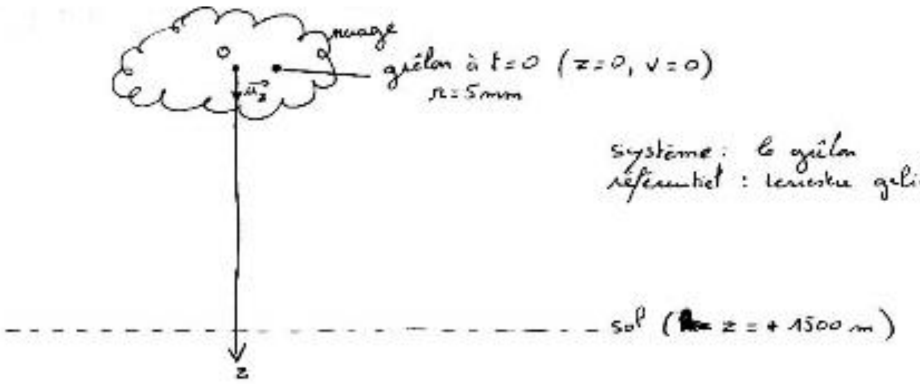
*b) La somme des forces appliquées à la goutte a une valeur égale à* $(\sqrt{2} \times F)\ \mu N$

*c) Les équations horaires de la goutte sont:*

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + v_o t\ ;\ y(t) = 0\ ;\ z(t) = \frac{F}{2m}t^2$$

*d) La goutte d'huile va être déviée vers le bas du dispositif.*

**Solutions. Ex1.** Réponses :1) $v_s$ = 171,5 m.s$^{-1}$ 2) $v_s$ = 167 m.s$^{-1}$ ; **3)** $v_s$ = 12,9 m.s$^{-1}$




système : le grêlon
référentiel : terrestre galiléen

1) on néglige les forces de frottement.

a) Bilan des forces : Poids : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$

et c'est tout.

PFD : $\vec{P} = m\vec{a}$

$m\vec{g} = m\vec{a} \Rightarrow \vec{a} = \vec{g}$

projection sur Oz : $a = g$

$\ddot{z} = g$ équation différentielle

pour trouver $v$ et $z$, on intègre successivement.

$$v = \dot{z} = gt + \underbrace{v(t=0)}_{=0 \text{ d'après les CI}}$$

$$z = \frac{1}{2}gt^2 + \underbrace{z(0)}_{=0 \text{ d'après les CI}}$$

d'où $\boxed{v(t) = gt \qquad z(t) = \frac{1}{2}gt^2}$

b) $t_c$ est atteinte quand $z = h$

$h = \frac{1}{2}gt_c^2 \longrightarrow \boxed{t_c = \sqrt{\frac{2h}{g}}}$

on en déduit $v_s = gt_c = g\sqrt{\frac{2h}{g}}$

$\boxed{v_s = \sqrt{2gh}}$

AN $t_c = \sqrt{\frac{2 \times 1500}{9,81}} = 17,5\ s$ $\quad v_s = \sqrt{2 \times 9,81 \times 1500} = 171,5\ m.s^{-1}$

$= 617.6\ km.h^{-1}$

2) a) Bilan des Forces : • $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$

• frottement fluide $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$

PFD : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - \alpha\vec{v} = m\vec{a}$

Projection sur Oz : $ma = mg - \alpha v$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\alpha}{m}v = g \quad \text{équation différentielle}}$$

b) • ESSM : $\frac{dv}{dt} = -\frac{\alpha}{m}v$

Solution $v = K e^{-\frac{\alpha}{m}t}$

• SP : vitesse limite $v_0 = \text{cte} \Rightarrow v_0 = \frac{mg}{\alpha}$

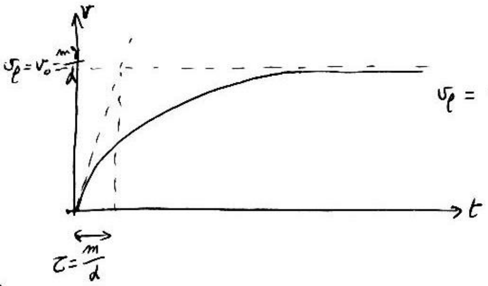
d'où $v(t) = K e^{-\frac{\alpha}{m}t} + \frac{mg}{\alpha}$

• détermination de K : $0 = v(0) = K + \frac{mg}{\alpha}$

$K = -\frac{mg}{\alpha}$

d'où : $\boxed{v(t) = \frac{mg}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)}$

c)




$v_\ell = \lim_{t\to\infty} v(t) = v_0 = \frac{mg}{\alpha}$

AN $m = \rho_{glace} V = \rho_{glace} \times \frac{4}{3}\pi R^3$ , $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$ , $\alpha = 6\pi R \eta_{air}$

$$v_\ell = \frac{mg}{\alpha} = \frac{\rho_{glace} \times \frac{4}{3}\pi R^3 \times g}{6\pi R\,\eta_{air}} = \frac{2\rho_{glace} R^2 \times g}{9\,\eta_{air}} = \frac{2 \times 917 \times (5.10^{-3})^2 \times 9{,}81}{9 \times 1{,}8.10^{-5}}$$

$= 2777\ m.s^{-1} \simeq 10000\,km.h^{-1}$

2) d) Pour avoir $z$, on intègre $v$

$$\frac{dz}{dt}(t) = \underbrace{\frac{mg}{\alpha}}_{v_\ell}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)$$

$$z(t) = v_\ell\left[t + \frac{m}{\alpha}e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right] + cte$$

en $t=0$, $\quad 0 = z(0) = v_\ell\frac{m}{\alpha} + cte$

d'où : $\boxed{z(t) = v_\ell\left[t - \frac{m}{\alpha}\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t}\right)\right]}$

e) d'après la courbe, $h = 1500\,m$ correspond à $t_c \simeq 17{,}7\,s$

d'où $v_s(t_c) = v_\ell\left(1 - e^{-\frac{\alpha}{m}t_c}\right) \simeq 0{,}06\, v_\ell = 167\,m.s^{-1} = 600\,km.h^{-1}$

f) MODELE NON VALIDE.

3) a) Bilan des forces : $\vec{P} = m\vec{g} = mg\,\vec{u_z}$

$\vec{f} = -\beta v \vec{v} = -\beta v^2\,\vec{u_z}$

PFD : $\vec{P} + \vec{f} = m\vec{a}$

$m\vec{g} - \beta v \vec{v} = m\vec{a}$

$mg\,\vec{u_z} - \beta v^2\,\vec{u_z} = ma\,\vec{u_z}$

Projection sur Oz : $ma = mg - \beta v^2$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{\beta}{m}v^2 = g}$$ équation différentielle

b) Soit $w(z) = v^2(z)$

(i) on transforme $v(t)$ en $v(z(t)) = v(z)$

d'où $\frac{dv}{dt} = \frac{dv}{dz} \times \frac{dz}{dt} = v\frac{dv}{dz}$

$$\underbrace{v\frac{dv}{dz}}_{\text{pose encore pb.}} + \frac{\beta}{m}\underbrace{v^2}_{w(z)} = g$$

(ii) $w(z) = v^2(z)$ $\quad \frac{dw}{dz} = \frac{d\,v^2}{dz} = 2v\frac{dv}{dz}$

d'où l'équation : $\frac{1}{2}\frac{dw}{dz} + \frac{\beta}{m}w = g$

c) facile à résoudre : $\frac{dw}{dz} = -\frac{2\beta}{m}w + 2g$

$w(z) = K e^{-\frac{2\beta}{m}z} + \text{cte}$

SP : $w = \frac{gm}{\beta}$

CI : en $z=0$, $v=0 \Rightarrow w=0$

d'où $w(z) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{2\beta}{m}z}\right)$

3) c) (Suite)

$$w(z) = \frac{mg}{\beta}\left(1 - e^{-\frac{2\beta}{m}z}\right)$$

d'où $\boxed{v(z) = \sqrt{w(z)} = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}\left(1 - e^{-\frac{2\beta}{m}z}\right)^{\frac{1}{2}}}$

d) $\boxed{v_\ell = \lim_{z\to\infty} v(z) = \sqrt{\frac{mg}{\beta}}}$

AN $\sqrt{\frac{mg}{\beta}} = \sqrt{\frac{\frac{4}{3}\pi R^3 \rho_{glace}\, g}{0{,}225\,\pi R^2 \rho_{air}}} = \sqrt{\frac{4 R g \rho_{glace}}{0{,}675\, \rho_{air}}}$

$$v_\ell = \sqrt{\frac{mg}{\beta}} = 12{,}9\ m.s^{-1} = 46{,}5\ km.h^{-1}$$

La vitesse est compatible avec les valeurs mesurées.

e) $v_s = v(h)$

$$\frac{2\beta}{m}h = \frac{2\times 0{,}225.\pi R^2 \rho_{air}}{m} \times h = \frac{2\times 2{,}83.10^{-5}}{4{,}8.10^{-4}} \times 1500 = 125$$

Rq: $e^{-125} \simeq 0$

d'où : on a atteint la vitesse limite.

$v_s = v_\ell = 46{,}5\ km.h^{-1}$

f) la vitesse calculée est comparable à la vitesse mesurée on peut donc considérer ce modèle comme valable.

**Ex2. Montgolfière**

Montgolfière. (1)

**1) 1.1)** $F_p = m_{air}\, g = \rho_a \times V g = 1{,}14 \times 2145 \times 9{,}81 = 2{,}40 \cdot 10^4\,N$

Direction verticale, sens : vers le sol.

**1.2)** $\vec{F_A} = -\rho_e V \vec{g}$ sens inverse de $\vec{g}$ donc vers le haut

$F_A = 1{,}21 \times 2145 \times 9{,}81 = 2{,}55 \cdot 10^4\,N$

**1.3)** $\vec{F_p} + \vec{F_M} + \vec{F_A} = \vec{0}$ en statique avec $\vec{F_M} = M_m \vec{g}$ poids de la masse soulevée, hors celui de l'air du ballon

$$M_m = \frac{(2{,}55 - 2{,}40) \cdot 10^4}{9{,}81} = 153\ kg$$

**2) 2.1)** $\vec{F_P} + \vec{F_A} + \vec{F_R} + \vec{\Pi} = (M_p + M)\vec{a}$

$$M_p \vec{g} - \rho_e V \vec{g} - k v^2 \vec{z} + M \vec{g} = (M_p + M)\vec{a}$$

**2.2)** $-M_p g + \rho_e V g - k v^2 - M g = (M_p + M)\dfrac{dv}{dt}$

**2.3)** $(M_p + M)\dfrac{dv}{dt} + k v^2 = g(\rho_e V - M_p - M)$

$$\boxed{\frac{dv}{dt} + \frac{k}{M_p + M} v^2 = \frac{g \rho_e V}{M_p + M} - g} = g\left(\frac{\rho_e V}{M_p + M} - 1\right)$$

$$A = \frac{k}{M_p + M}$$

$$B = g\left(\frac{\rho_e V}{M_p + M} - 1\right)$$

**2.4)** $v_{t \to \infty} = cte = v_L \rightarrow \dfrac{dv}{dt}(t \to \infty) = 0 \Rightarrow A v_L^2 = B$

$$\Rightarrow v_L = \sqrt{\frac{B}{A}} = 1{,}82\ m/s$$

2.5) a) Plutôt bon accord $V_{L exp} \simeq 1,95$ m/s $\sim 1,82$ (2)
accélération puis vitesse constante.

b) mouvement uniformément accéléré car $v(t)$ linéaire donc $a$ = cte.
$a$ = pente de $v(t) = \dfrac{1-0}{15-0} = 6,67.10^{-2}\,m\,s^{-2}$

c) $V_{L exp} = 1,95$ m/s $\rightarrow 0,95 V_{L exp} = 1,85$ m/s $\rightarrow t_1 = 40$ s
$\rightarrow z_1 = 50$ m

2.6) a) $E_c$(montgolfière) $= \dfrac{1}{2}(M+M_p)v^2$

en $z_1$, $v_1 = 1,85$ m/s $\Rightarrow E_c = \dfrac{1}{2}(130+1,14\times 2145)\times 1,85^2$
$E_c = 4420$ Joule

b) $E_{pp} = (M+M_p)\,g\,z$

$E_{PA}(z) - \underbrace{E_{PA}(z=0)}_{=0 \text{ (origine des énergies potentielle)}} = -\int_0^z \vec{F}_A \cdot d\vec{l} = -z\times\rho_e V g$

$E_{pp}(z_1) = (130+1,14\times 2145)\times 9,81\times 50 = 1,26.10^6$ J

$E_{PA}(z_1) = -50\times 1,21\times 2145\times 9,81 = -1,27.10^6$ J.

c) $E_{meca}(z=0) = \underbrace{E_{pp}(z=0)}_{0} + \underbrace{E_{PA}(z=0)}_{0} + \underbrace{E_c(z=0)}_{0} = 0$ Joule

d) $E_{meca}(z_1) \sim -5500$ J $\Rightarrow$ l'énergie mécanique a diminué, c'est normal puisqu'il y a des frottements

2.7) a) $v$ = cte mouvement rectiligne uniforme (3)

b) $v$ = cte $\rightarrow z = v_L t + K$ avec $K = 0$ puisque $z(t=0) = 0$.
$z(t) = v_L t$.

c) $v_L t_2 = 130$ m $\quad v_L t_3 = 300$ m

$t_3 - t_2 = \dfrac{300-130}{1,95} = 87$ s.

**Ex3. Frottements solides**

Bilan des forces : le poids P, la réaction R, le frottement f, la traction T. Seules R et P sont selon l'axe vertical, direction selon laquelle l'accélération est nulle donc R=mg. Par ailleurs la force de frottement statique maximale vaut $f=\mu_S R$ Donc le bloc est mis en mouvement pour une traction horizontale $T=f=\mu_S mg=1*1000*10=10\ 000$ N.

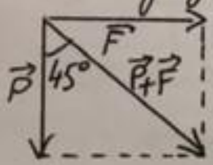
Ensuite le mouvement est maintenu pour $T=f=\mu R=\mu mg=0.7*1000*10=7\ 000$N

**Ex4.**

Particule chargée dans un champ électrique :

a) ✓ $\vec{F} = -e\vec{E} = eE\vec{e_x}$ ; $\|\vec{F}\| = (1,6.10^{-19} \times 10^{7} \times 10^{6})$ N

b) ✓ $\vec{P} = mg\vec{e_z} = 0,16.10^{-6} \times 10\,\vec{e_z}$ ; $\|\vec{P}\| = 1,6 \times 10^{-6}$ N




c) ✓ 2ème loi de Newton : $m\vec{a} = F\vec{e_x} + F\vec{e_z}$

$\vec{a}\left(F/m \,;\, 0 \,;\, F/m\right)$ $\vec{v}\left((F/m)t + V_0 \,;\, 0 \,;\, (F/m)t\right)$

d) ✓ $\vec{OM}\left(\frac{F}{2m}t^2 + V_0 t \,;\, 0 \,;\, \frac{F}{2m}t^2\right)$