Intégrales multiples
Théorème de Fubini

Soit D un compact simple : il existe des fonctions continues $\phi_1, \phi_2, \psi_1, \psi_2$ telles que
$D = \{(x,y) \in [a,b] \times [c,d] \ / \ \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x) \ / \ \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y)\}$.
On note 1_D la fonction indicatrice de D : $1_D(x,y) = 1$ si $x \in D$, $1_D(x,y) = 0$ sinon.
On suppose que la fonction f est continue sur D.

Pour des naturels non nuls n et p on subdivise $[a,b]$ en n parties égales $[x_i, x_{i+1}]$ et on subdivise $[c,d]$ en p parties égales $[y_j, y_{j+1}]$. On pose $h = \dfrac{b-a}{n} = x_{i+1} - x_i$ et $k = \dfrac{d-c}{p} = y_{j+1} - y_j$

Alors $\displaystyle \iint_D f = \lim_{n\to\infty}\left(\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\sum_{j=0}^{p-1} h\,k\,1_D(x_i,y_j)\,f(x_i,y_j)\right)\right)\right)$

Limite d'une somme de n termes = somme des limites donc

$$\iint_D f = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\lim_{p\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{p-1} h\,k\,1_D(x_i,y_j)\,f(x_i,y_j)\right)\right)\right)$$

Par définition de l'intégrale comme limite d'une somme de Riemann $\displaystyle \int_c^d g(v)\,dv = \lim_{p\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{p-1} k\,g(y_j)\right)$ donc

$$\iint_D f = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1}\left(\int_c^d h 1_D(x_i,v)\,f(x_i,v)\,dv\right)\right)$$

Puisque $(x_i,v) \in D \Leftrightarrow x_i \in [a,b]$ et $v \in [\phi_1(x_i), \phi_2(x_i)]$ on obtient

$$\iint_D f = \lim_{n\to\infty}\left(\sum_{i=0}^{n-1} h\left(\int_{\phi_1(x_i)}^{\phi_2(x_i)} f(x_i,v)\,dv\right)\right)$$

soit, par définition de $\displaystyle\int_a^b G(u)\,du$ comme limite d'une somme de Riemann,

$$\boxed{\iint_D f = \int_a^a\left(\int_{\phi_1(u)}^{\phi_2(u)} f(u,v)\,dv\right)du}$$

De manière analogue, en partant de $\displaystyle \iint_D f = \lim_{p\to\infty}\left(\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{j=0}^{p-1}\left(\sum_{i=0}^{n-1} h\,k\,1_D(x_i,y_j)\,f(x_i,y_j)\right)\right)\right)$, on démontre

$$\boxed{\iint_D f = \int_c^d\left(\int_{\psi_1(u)}^{\psi_2(u)} f(u,v)\,du\right)dv}$$

Démonstration analogue pour le théorème sur les intégrales triples :

Si D est de la forme $D = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 \ / \ x \in [a,b] \ / \ y \in [\phi_1(x), \phi_2(x)] \ / \ z \in [\psi_1(x,y), \psi_2(x,y)]\}$
où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,
ψ_1 et ψ_2 des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
et si f est continue, alors

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\,dz = \int_a^b\left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)}\left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\,dz\right)dy\right)dx}$$