CIR2 CNB2 | Interrogation 2 | 4 Octobre 2019

Intégrales multiples

NOM	Prénom	Classe

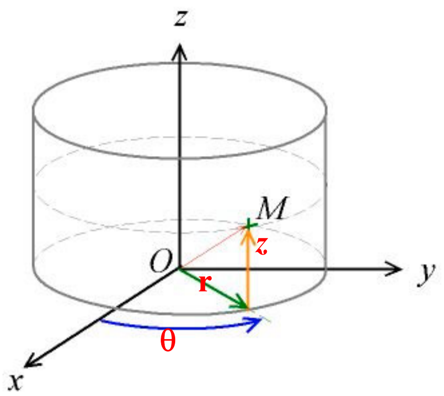
Durée 45 minutes
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable
Inscrire les réponses sur la feuille d'énoncé, sans râture ni surcharge (utiliser un brouillon !)

1. Soient D un domaine de $\mathbb{R}^2$ et f et g des fonctions de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ intégrables sur D.
   Entourer la bonne réponse.

$\iint_D \lvert f \rvert \leqslant \left\lvert \iint_D f \right\rvert$	VRAI	FAUX
$\iint_D (\lambda f + g) = \lambda \iint_D f + \iint_D g$	VRAI	FAUX
$\iint_D (f\, g) = \left(\iint_D f \right)\left(\iint_D g \right)$	VRAI	FAUX
si $\forall (x,y) \in D \; f(x,y) \leqslant g(x,y)$ alors $\iint_D f \leqslant \iint_D g$	VRAI	FAUX

2. Noter sur les schémas ci-dessous la signification géométrique :
   - des variables r, θ, z des coordonnées cylindriques du point M
   - des variables r, θ, φ des coordonnées sphériques du point M.

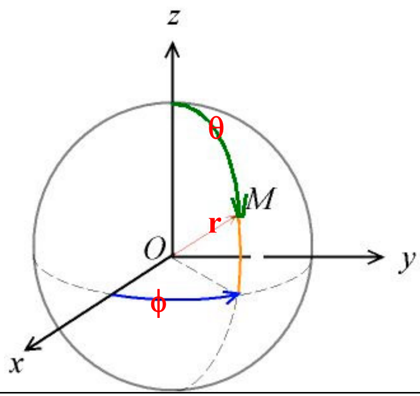
   Compléter les formules des coordonnées cylindriques et sphériques.



$x = r\cos\theta$

$y = r\sin\theta$

$z = z$



$x = r\sin\theta\cos\varphi$

$y = r\sin\theta\sin\varphi$

$z = r\cos\theta$

3. Ecrire le jacobien du changement de variable en coordonnées cylindriques (r,θ,z) r
   Ecrire le jacobien du changement de variable en coordonnées sphériques (r,θ,φ) $r^2 \sin\theta$

4. Soient D et Δ deux domaines de $\mathbb{R}^2$, f une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$ intégrable sur D et φ une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}^2$ telle que φ soit de classe C^1 sur Δ, φ soit une bijection de Δ sur D et que le déterminant jacobien de φ ne s'annule pas sur Δ.

Encadrer la(les) formule(s) correcte(s) :

$\cancel{\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f\circ\varphi(u,v)\,\frac{D\,u\,v}{D\,x\,y}\,du\,dv}$	$\boxed{\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f\circ\varphi(u,v)\,\frac{D\,x\,y}{D\,u\,v}\,du\,dv}$
$\cancel{\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(u,v)\,du\,dv}$	$\cancel{\iint_{D} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{\Delta} f(u,v)\,\frac{D\,x\,y}{D\,u\,v}\,du\,dv}$
$\cancel{\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} \varphi\circ f(u,v)\,\frac{D\,x\,y}{D\,u\,v}\,du\,dv}$	$\cancel{\iint_{\Delta} f(x,y)\,dx\,dy = \iint_{D} f\circ\varphi(u,v)\,\frac{D\,x\,y}{D\,u\,v}\,du\,dv}$

5. Pour chacune des intégrales suivantes,
indiquer une étape du calcul puis le résultat, à choisir parmi les valeurs suivantes :

$\frac{\pi}{4}$	1	$\frac{2\pi}{3}$	$\frac{1}{6}$	$\frac{4\pi}{5}$

L'étape du calcul sera l'intégrale d'une intégrale …. sous la forme $\int_{....}^{....}\left(\int_{....}^{....} \;.....\; d....\right)d....$ (préciser les bornes !)

Domaine d'intégration	Fonction à intégrer	étape du calcul	résultat
$\left[0,\pi/2\right]\times\left[0,\pi/2\right]$	$f(x,y)=\cos x\,\sin 2y$	variables séparées $\left(\int_{x=0}^{\pi 2}\cos x\,dx\right)\left(\int_{y=0}^{\pi/2}\sin 2y\;dy\right)$	1
$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ x^2+y^2\leqslant 1 \text{ et } 0\leqslant z\leqslant x^2+y^2\right\}$	$f(x,y,z)=4z$	coordonnées cylindriques $\int_{\theta=0}^{2\pi}\left(\int_{r=0}^{1}\left(\int_{z=0}^{r^2}4z\,dz\right)r\,dr\right)d\theta$	$\frac{2\pi}{3}$
$\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 /\ y\geqslant 0 \text{ et } x^2+y^2\leqslant 1\right\}$	$f(x,y)=\frac{1}{\left(1+x^2+y^2\right)^2}$	Coordonnées polaires $\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{1}\frac{1}{\left(1+r^2\right)^2}r\,dr\right)d\theta$	$\frac{\pi}{4}$
$\left\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 /\ x^2+y^2+z^2\leqslant 1\right\}$	$f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$	coordonnées sphèriques $\int_{\varphi=0}^{2\pi}\left(\int_{\theta=0}^{\pi}\left(\int_{r=0}^{1}r^2\,r^2\sin\theta\,dr\right)d\theta\right)d\varphi$	$\frac{4\pi}{5}$
$\left\{(x,y)\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]\times\mathbb{R} /\ 0\leqslant y\leqslant\cos x\right\}$	$f(x,y)=y\,\sin x$	découpage à x constant $\int_{x=0}^{\pi/2}\left(\int_{y=0}^{\cos x}y\,dy\right)\sin x\,dx$	$\frac{1}{6}$