CIR2CNB2 TD de Maths – Intégrales doubles

Exemples d'applications directes du cours

symétries : calculer $\iint_D x\,y\,dx\,dy$ où D = {(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$, $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$ }

théorème de Fubini

exemple 2 : calculer I = $\iint_D x\,y\,dx\,dy$ où D = {(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$, x ≥ 0, y ≥ 0, 2x+y ≤ 1 }

exemple 3 : calculer J = $\iint_D \sin\frac{\pi x}{2y}dxdy$ où D = {(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$, 1 ≤ x ≤ 4 $\sqrt{x} \leq y \leq \min(2,x)$}

exemple 4 : calculer K = $\iint_D xy^2dxdy$ où D = [1,2]×[3,4]

changement de variables coordonnées polaires

exemple 5 : calculer L = $\iint_\Delta x^2y^2dxdy$ où Δ = {(x,y)∈ $\mathbb{R}^2$, $x^2+y^2 \leq 1$}

changement de variables affine

exemple 6 : calculer l'aire du disque elliptique Δ : $\frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1$, puis son moment d'inertie par rapport à O.

Calcul d'intégrales doubles

1. $\iint_D (1-x-y)dxdy$ avec D={$(x, y)\in\mathbb{R}^2$, 0≤ x ≤0.5, 0 ≤ y ≤0.5 }.
2. $\iint_D \frac{x^2}{1+y^2}dxdy$ avec D={$(x, y)\in\mathbb{R}^2$, 0≤ x ≤1, 0 ≤ y ≤1 }.
3. $\iint_T \sqrt{x^2-y^2}\,dxdy$ avec T : triangle OAB, A(1;-1) et B(1;1).
4. $\iint_D xydxdy$ avec D={$(x, y)\in\mathbb{R}^2$, $x^2\leq y, y^2\leq x$ }.
5. $\iint_D xy\sqrt{x^2+y^2}\,dxdy$ avec D={$(x, y)\in\mathbb{R}^2$ $0\leq y\leq x, x^2+y^2\leq 1$}
6. $\iint_D dx\,dy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / \frac{x^2}{a^2}+\frac{y^2}{b^2}\leq 1\right\}$, où $a>0$ et $b>0$
7. $\iint_D \frac{1}{1+x^2+y^2}dx\,dy$ où $D=\left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 / x^2+y^2\leq 1\right\}$

Applications

1. Moment d'inertie d'une plaque homogène circulaire par rapport à un point du périmètre ?
2. Aire de la surface limitée par la courbe polaire $\rho^2=a^2\sin(2\theta)$?
3. Aire de la surface limitée par la courbe $x^3+y^3=x\;y$?
4. Représenter le domaine D défini en polaires par $0\leqslant\theta\leqslant\pi$, $0\leqslant\rho\leqslant\theta$. Calculer $\iint_D \arctan\left(\frac{y}{x}\right)dx\,dy$

Intégrale de Gauss

Soient $D_t=\left\{(x,y)/ x\geq 0, y\geq 0, x^2+y^2\leq t^2\right\}$ et $\Delta_t=\left\{(x,y)/ x\geq 0, y\geq 0, x\leq t, y\leq t\right\}$

a/ Soient $I_t=\iint_{\Delta_t} e^{-x^2-y^2}dxdy$ et $J_t=\iint_{D_t} e^{-x^2-y^2}dxdy$. Calculer J_t et $\lim_{t\to\infty} J_t$

b/ Soit g(t) = $\int_0^t e^{-x^2}dx$. Calculer I_t en fonction de g(t) . (Ne pas chercher à calculer g(t))

c/ Montrer qu'il existe 2 réels a et b strictement positifs tels que $\forall t\in\mathbb{R}_+$, $J_{at}\leqslant I_t \leqslant J_{bt}$

d/ En déduire la valeur de l'intégrale de Gauss $\int_0^\infty e^{-x^2}dx$.