CIR$_2$ CNB$_2$

Géométrie différentielle
Résumé de cours (IV)

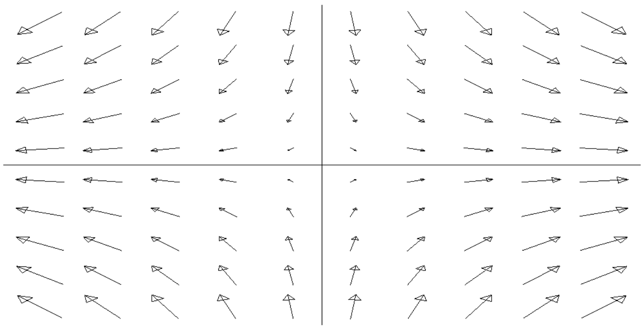
III. Champs scalaires - Champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^2$

1. Définition

Champ scalaire dans $\mathbb{R}^2$: fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & F(x,y) \end{array}$

Exemple : Température en chaque point d'une surface plane.

Champ vectoriel dans $\mathbb{R}^2$: fonction $V : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} & \to & V(x,y) = \begin{pmatrix} P(x,y) \\ Q(x,y) \end{pmatrix} \end{array}$ aussi notée $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$



Exemple : Champ électrique entre les armatures d'un condensateur cylindrique

2. Circulation d'un champ de vecteurs

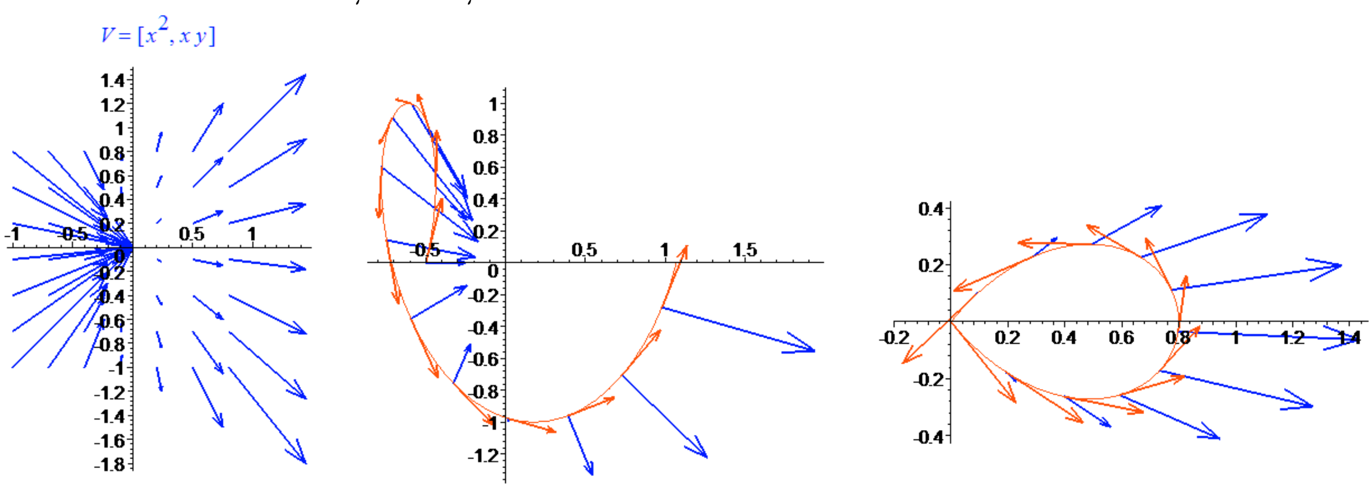
Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1. On note $\gamma(t) = M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$.

Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs.

La circulation du champ $\vec{V}$ le long de la courbe γ, est l'intégrale

$$\int_\gamma \vec{V}\,\vec{\mathrm{d}l} = \int_a^b \vec{V}\,\overrightarrow{\frac{\mathrm{d}M}{\mathrm{d}t}}\mathrm{d}t = \int_a^b \Big(P\big(x(t),y(t)\big)\,x'(t) + Q\big(x(t),y(t)\big)\,y'(t)\Big)\mathrm{d}t$$

On note aussi $\int_\gamma \vec{V}\,\vec{\mathrm{d}l} = \int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y$



exemple : Si V est un champ de force, la circulation de V est le travail de cette force lorsque son point d'application se déplace sur la courbe.

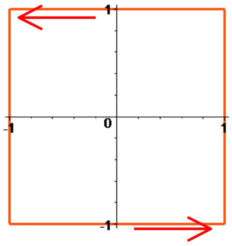
Propriétés

Si $\left\|\vec{V}\right\| \leqslant k$, en appelant L la longueur de γ, on a $\left|\int_{\gamma_1} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}\right| \leqslant k.L$

Si γ_1 et γ_2 sont 2 paramétrages équivalents de même sens, alors $\int_{\gamma_1} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\gamma_2} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

$\int_{-\gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = -\int_{\gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$

Si $\gamma = \gamma_1 + \gamma_2$, alors $\int_{\gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_{\gamma_1} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} + \int_{\gamma_2} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l}$



Exemple $\int_{\gamma} \dfrac{(x-y)\,dx + (x+y)\,dy}{x^2+y^2}$ sur le carré $[[-1,-1],[+1,-1],[+1,+1],[-1,+1]]$

3. *Primitive d'un champ de vecteurs*

F est une primitive de $\vec{V}$ si et seulement si $\vec{V} = \operatorname{grad}(F)$, c'est-à-dire $P = \dfrac{\partial F}{\partial x}$ et $Q = \dfrac{\partial F}{\partial y}$

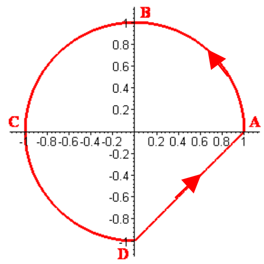
Condition nécessaire (mais pas suffisante) pour que $\vec{V}$ de classe C^1 admette une primitive : $\boxed{\dfrac{\partial P}{\partial y} = \dfrac{\partial Q}{\partial x}}$

Exemple : Primitives de $\omega = \dfrac{y}{x^2}\,dx - \dfrac{1}{x}\,dy$

Propriété : Si F est une primitive de $\vec{V}$ alors

1° pour toute courbe γ de classe C^1 par morceaux, $\int_{\gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = F(M(b)) - F(M(a))$ notée $F(B) - F(A)$

2° pour toute courbe γ fermée (i.e. $M(b) = M(a)$) de classe C^1, $\int_{\gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$

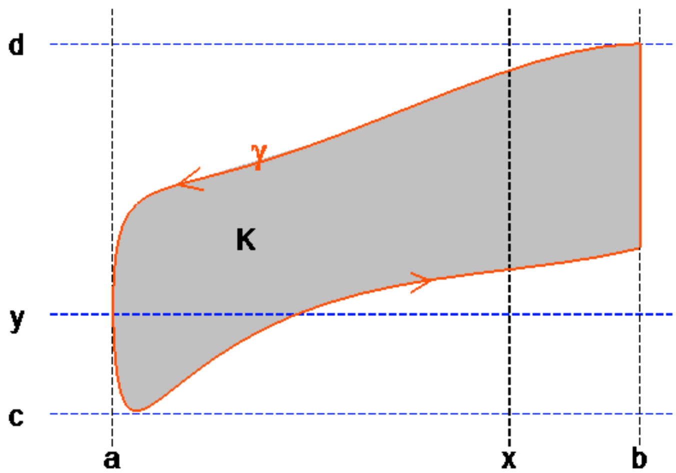


Exemple : $\int_{\gamma} -\dfrac{y}{x^2+y^2}\,dx + \dfrac{x}{x^2+y^2}\,dy$, où γ est composée de l'arc $ABCD$ et du segment $[DA]$

4. *Formule de Green-Riemann*

Soit $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs de classe C^1. Soit K un compact simple de $\mathbb{R}^2$, limité par une courbe γ de classe C^1 par morceaux, orientée dans le sens trigonométrique.

$$\boxed{\int_{\gamma} P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y = \iint_K \left(\frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y}\right) dx\,dy}$$



Exemple Aire de $K = \int_{\gamma} x\,\mathrm{d}y = -\int_{\gamma} y\,\mathrm{d}x = \int_{\gamma} \dfrac{x}{2}\mathrm{d}y - \dfrac{y}{2}\mathrm{d}x$

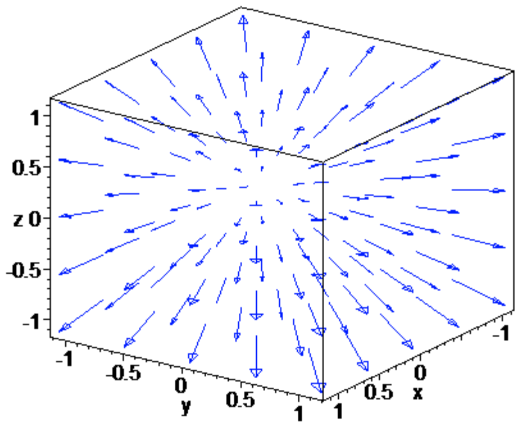
Cas particulier : Si $f \geqslant 0$, si K est limité par la courbe $y = f(x)$, l'axe des x et les droites $x = a$ et $x = b$, alors Aire de $K = \int_a^b f(t)\,\mathrm{d}t$

IV. Champs scalaires - Champs de vecteurs dans $\mathbb{R}^3$

1. Définitions

Champ scalaire dans $\mathbb{R}^3$: fonction $F : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R} \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & F(x,y,z) \end{array}$

Champ vectoriel dans $\mathbb{R}^3$: fonction $V : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^3 \\ \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} & \to & V(x,y,z) = \begin{pmatrix} P(x,y,z) \\ Q(x,y,z) \\ R(x,y,z) \end{pmatrix} \end{array}$ aussi notée $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$



Gradient d'un champ scalaire : $\operatorname{grad} F = \begin{pmatrix} \frac{\partial F}{\partial x} \\ \frac{\partial F}{\partial y} \\ \frac{\partial F}{\partial z} \end{pmatrix}$ noté $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} F$ ou ∇F avec $\nabla = \begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix}$ (nabla)

Divergence d'un champ vectoriel : $\operatorname{div} V = \frac{\partial P}{\partial x} + \frac{\partial Q}{\partial y} + \frac{\partial R}{\partial z}$ noté $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} . \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ou $\nabla . V$.

Rotationnel d'un champ vectoriel $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$: $\operatorname{rot} V = \begin{pmatrix} \frac{\partial R}{\partial y} - \frac{\partial Q}{\partial z} \\ \frac{\partial P}{\partial z} - \frac{\partial R}{\partial x} \\ \frac{\partial Q}{\partial x} - \frac{\partial P}{\partial y} \end{pmatrix}$ noté $\begin{pmatrix} \frac{\partial}{\partial x} \\ \frac{\partial}{\partial y} \\ \frac{\partial}{\partial z} \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ ou $\nabla \wedge V$.

Propriétés : Si F est de classe C^2, $\operatorname{rot}(\operatorname{grad} F) = \vec{0}$

Si $\vec{V}$ est de classe C^2, $\operatorname{div}(\operatorname{rot} \vec{V}) = 0$

2. Circulation d'un champ de vecteurs le long d'une courbe

Soit $\gamma : [a,b] \to \mathbb{R}^3$ une courbe de classe C^1, $\gamma(t) = M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \\ z(t) \end{pmatrix}$ et $\vec{V} = \begin{pmatrix} P \\ Q \\ R \end{pmatrix}$ un champ de vecteurs.

La circulation du champ $\vec{V}$ le long de la courbe γ, est l'intégrale $\int_\gamma \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_a^b \vec{V}\,\frac{\overrightarrow{\mathrm{d}M}}{\mathrm{d}t}\mathrm{d}t$

$$\int_\gamma \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \int_a^b \big(P(x(t), y(t), z(t))\,x'(t) + Q(x(t), y(t), z(t))\,y'(t) + R(x(t), y(t), z(t))\,z'(t)\big)\mathrm{d}t = \int_\gamma P\,\mathrm{d}x + Q\,\mathrm{d}y + R\,\mathrm{d}z$$

3. Primitive d'un champ de vecteurs

F est une primitive de $\vec{V}$ si et seulement si $\vec{V} = \mathrm{grad}(F)$, c'est-à-dire $P = \frac{\partial F}{\partial x}$, $Q = \frac{\partial F}{\partial y}$ et $R = \frac{\partial F}{\partial z}$

Condition nécessaire (mais non suffisante) pour que $\vec{V}$ admette une primitive : $\mathrm{rot}(\vec{V}) = \vec{0}$

Propriété : Si F est une primitive de $\vec{V}$ alors

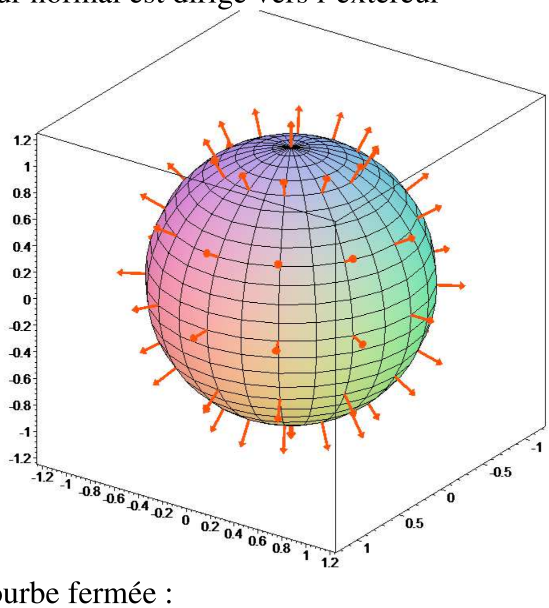
1° pour toute courbe γ de classe C^1 par morceaux, $\int_\gamma \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = F(M(b)) - F(M(a))$ notée $F(B) - F(A)$

2° pour toute courbe γ fermée de classe C^1 par morceaux, $\int_\gamma \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = 0$

4. Flux d'un champ de vecteurs à travers une surface

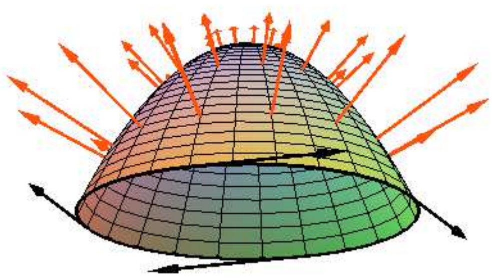
Orientation conventionnelle d'une surface :

Surface fermée : Le vecteur normal est dirigé vers l'extéreur



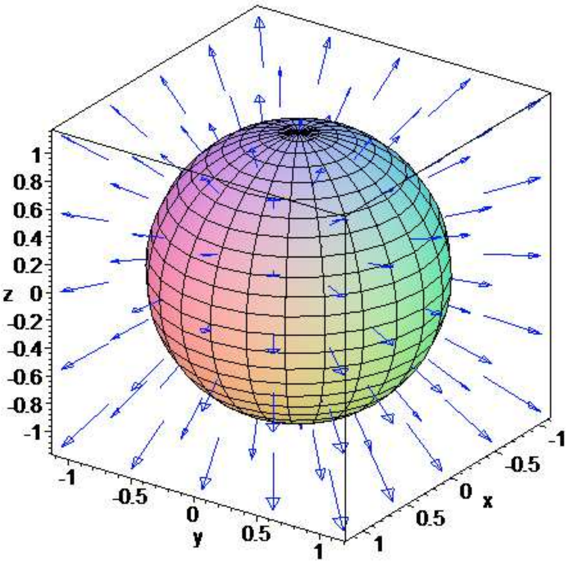
Surface limitée par une courbe fermée :

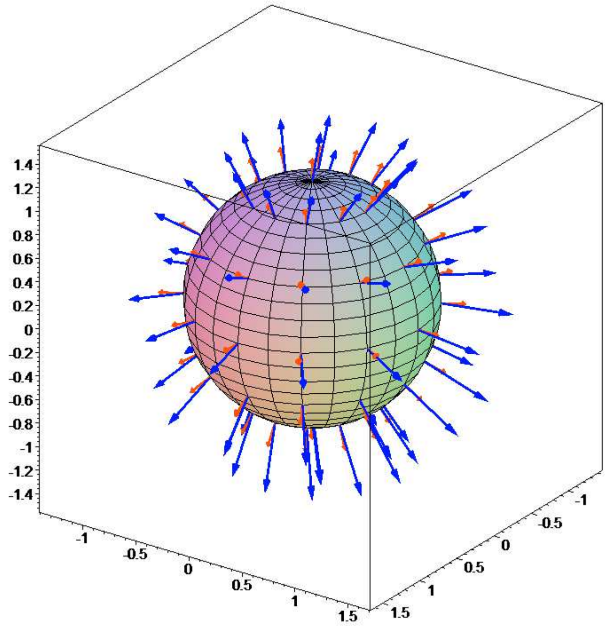
Le vecteur normal est dirigé suivant la règle du tire-bouchon en suivant l'orientation de la courbe

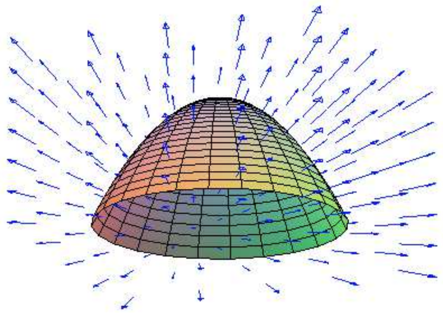


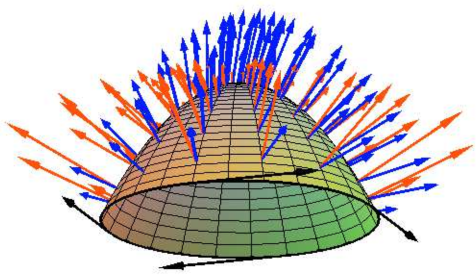
Flux de $\vec{V}$ à travers la surface $\mathcal{S}$: $\iint_{\mathcal{S}} \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iint_{U} \vec{V}.\vec{N}\, du\, dv = \iint_{U} \vec{V}.\dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial u} \wedge \dfrac{\overrightarrow{\partial M}}{\partial v} du\, dv$,

où le paramétrage $(u,v) \in U \to M(u,v) \in \mathbb{R}^3$ de $\mathcal{S}$ est tel que $\mathcal{S}$ est "bien orienté".









5. Théorème de Gauss-Ostrogradski

Soient $\vec{V}$ un champ de vecteurs, $\mathcal{S}$ une surface fermée orientée vers l'extérieur et $\mathcal{V}$ le volume limité par $\mathcal{S}$.

$$\boxed{\iint_{\mathcal{S}} \vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}S} = \iiint_{\mathcal{V}} \mathrm{div}\vec{V} du\, dv\, dw}$$

6. Théorème de Stockes

Soient $\vec{V}$ un champ de vecteurs, $\mathcal{S}$ une surface orientée limitée par une courbe fermée γ.

$$\boxed{\int_{\gamma} \vec{V}\,\overrightarrow{\mathrm{d}l} = \iint_{\mathcal{S}} \mathrm{rot}\,\vec{V}.\overrightarrow{\mathrm{d}S}}$$