

Géométrie différentielle

Résumé de cours

I - Courbes planes

1 - Courbe paramétrée

a/ Définition

Une courbe plane paramétrée c'est une application γ d'un intervalle $[a, b]$ de \mathbb{R} à valeur dans \mathbb{R}^2 .

On peut la concevoir comme l'équation horaire d'un mobile dans le plan.

On peut aussi noter $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ .

Si (O, \vec{i}, \vec{j}) est un repère orthonormé du plan, $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

b/ Support

L'image de γ (ensemble des points \mathbb{R}^2 qui sont images par γ d'un point de $[a, b]$) est appelé le support de cette courbe paramétrée.

On dit aussi (improprement dans ce contexte) que c'est une courbe.

c/ Changement de paramètre

Si ϕ est une application bijective de $[\alpha, \beta]$ dans $[a, b]$, l'application $\gamma \circ \phi$ définit une courbe qui a le même support que γ . On dit que ϕ constitue un changement de paramètre admissible.

d/ Opérations

Soit $\gamma [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$. La courbe $-\gamma$ est la courbe $[a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $(-\gamma)(t) = \gamma(b - (t - a))$.

Elle a le même support que γ , mais est parcourue "dans le sens inverse".

Soient $\gamma_1 [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ et $\gamma_2 [b, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telles que $\gamma_1(b) = \gamma_2(b)$ (Deux courbes qui "se suivent")

La courbe $\gamma_1 + \gamma_2$ est la courbe $[a, c] \rightarrow \mathbb{R}^2$ telle que $(\gamma_1 + \gamma_2)(t) = \begin{cases} \gamma_1(t) & \text{si } t \in [a, b] \\ \gamma_2(t) & \text{si } t \in [b, c] \end{cases}$

2 - Vecteur vitesse - Tangente

a/ Vecteur vitesse

Soit $\gamma [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ .

On note $\frac{dM}{dt}$ ou $\frac{dM}{dt}(t)$ le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \frac{dx}{dt} \\ \frac{dy}{dt} \end{pmatrix}$. On l'appelle le vecteur vitesse (au point t)

On écrit aussi $\frac{dM}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$

b/ Définition :

On dit que la droite Δ est tangente en $M(t_0)$ à la courbe γ si $M(t_0) \in \Delta$ et si la direction de Δ est la limite des direction des "cordes" $(M(t_0)M(t_1))$ quand $t_1 \rightarrow t_0$

c/ Propriété :

Si $\frac{dM}{dt}(t_0) \neq 0$, la courbe γ possède une tangente au point $M(t_0)$

et cette tangente a le vecteur vitesse $\frac{dM}{dt}(t_0)$ comme vecteur directeur.

Si $\forall t \in [a, b] / \frac{dM}{dt}(t) \neq 0$, on dit que la courbe est régulière. En tout point elle a une tangente.

3 - Courbes polaires

Soit I un intervalle de \mathbb{R} . Pour tout réel $\theta \in I$, on pose $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos \theta \\ \sin \theta \end{pmatrix}$

La courbe polaire définie par la fonction $\rho(\theta)$ est la courbe paramétrée qui, à θ , associe

$$M(\theta) = \rho(\theta) \vec{r} = \begin{pmatrix} \rho(\theta) \cos \theta \\ \rho(\theta) \sin \theta \end{pmatrix}$$

On note \vec{n} le vecteur $\frac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin \theta \\ \cos \theta \end{pmatrix}$.

On remarque que $\frac{d\vec{n}}{d\theta} = -\vec{r}$ et que, pour tout θ , (O, \vec{r}, \vec{n}) est un repère orthonormé direct (repère tournant)

Le vecteur vitesse est alors $\frac{dM}{d\theta} = \rho'(\theta) \vec{r} + \rho(\theta) \vec{n}$

4 - Longueur d'une courbe plane de classe C^1

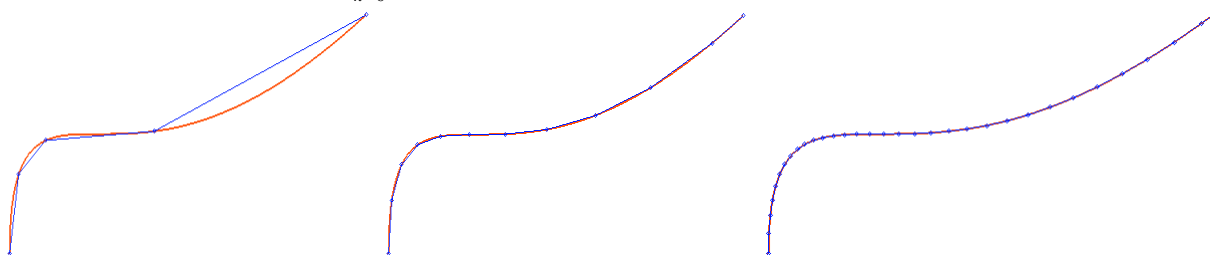
Soit Γ un arc paramétré $\begin{matrix} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \Gamma(t) = M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{matrix}$ de classe C^1

a/ Définition

Soit $\sigma = (t_0, t_1, \dots, t_n)$ une subdivision de $[a, b]$ ($t_0 = a < t_1 < t_2 < \dots < t_n = b$)

La ligne polygonale $P_\sigma(\Gamma)$ est la ligne formée des segments $[M(t_k)M(t_{k+1})]$, $k = 0..n-1$

Sa longueur est $mes(P_\sigma(\Gamma)) = \sum_{k=0}^{n-1} \left\| \overrightarrow{M(t_k)M(t_{k+1})} \right\|$



La longueur de Γ est, si elle existe, la borne sup des $mes(P_\sigma(\Gamma))$:

$$mes(\Gamma) = \sup_{\sigma \text{ subdivision de } [a, b]} \left(mes(P_\sigma(\Gamma)) \right)$$

Remarque : le flocon de Von Koch n'est pas mesurable

C'est une courbe continue, mais pas de classe C^1

Si on considère une subdivision en n parties égales,

$n = 3$	$n = 12$	$n = 48$	$n = 192$	$n = 3 \cdot 4^k$
$mes(P_\sigma(\Gamma)) = 3$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = 4$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = \frac{16}{3}$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = \frac{64}{9}$	$mes(P_\sigma(\Gamma)) = 3 \cdot \left(\frac{4}{3}\right)^k \xrightarrow{k \rightarrow \infty} \infty$

b/ Théorème : si Γ est une courbe de classe C^1 alors elle est mesurable et $\boxed{mes(\Gamma) = \int_a^b \|\Gamma'(t)\| dt}$

Corollaire : la mesure ne change pas si on fait un changement de paramètre admissible de classe C^1 .

Remarque $\|\Gamma'(t)\| = \left\| \frac{dM}{dt} \right\| = \sqrt{(x'(t))^2 + (y'(t))^2}$ et en polaires $\|\Gamma'(\theta)\| = \sqrt{(\rho'(\theta))^2 + (\rho(\theta))^2}$

c/ relation de Chasles :

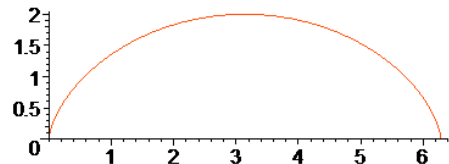
Pour $t_1 \in [a, b]$, $t_2 \in [a, b]$, $t_1 < t_2$ on note Γ_{t_1, t_2} la restriction de Γ à l'intervalle $[t_1, t_2]$

Alors pour tout $c \in [a, b]$, $\Gamma_{a, b} = \Gamma_{a, c} + \Gamma_{c, b}$ et $\boxed{mes(\Gamma_{a, b}) = mes(\Gamma_{a, c}) + mes(\Gamma_{c, b})}$

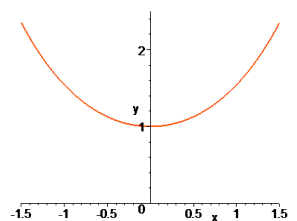
On peut ainsi définir la mesure d'une courbe de classe C^1 par morceaux

d/ Exemples :

Longueur d'une arche de cycloïde $\begin{cases} x(t) = R(t - \sin t) \\ y(t) = R(1 - \cos t) \\ t \in [0, 2\pi] \end{cases}$



Longueur de la chaînette, graphe de la fonction ch : $y = \text{ch}(x)$, ou $\begin{cases} x(t) = t \\ y(t) = \text{ch}(t) \\ t \in [a, +a] \end{cases}$



5 - Abscisse curviligne

Soit Γ un arc paramétré $\begin{matrix} [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2 \\ t \rightarrow \Gamma(t) = M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix} \end{matrix}$ de classe C^1

En prenant $M(a)$ comme origine, pour tout $t \in [a, b]$ l'abscisse curviligne de $M(t)$, notée $s(t)$, est la longueur de la restriction de l'arc à $[a, t]$ $s(t) = mes(\Gamma_{a, t}) = \int_a^t \|\Gamma'(u)\| du$.

En prenant $M(t_0)$ comme origine, pour tout $t \in [a, b]$ l'abscisse curviligne de $M(t)$ est

* la longueur de la restriction de l'arc à $[t_0, t]$ si $t_0 \leq t$

* l'opposé de longueur de la restriction de l'arc à $[t, t_0]$ si $t \leq t_0$

Dans les 2 cas, $s(t) = \int_{t_0}^t \|\Gamma'(u)\| du$.

L'abscisse curviligne est invariante par changement de paramètre admissible croissant.

Soit L la longueur de la courbe.

Si la courbe est régulière, $\forall t \in [a, b]$, $s'(t) = \left\| \frac{dM}{dt} \right\| > 0$. La fonction $s(t)$ est alors une bijection

croissante de $[a, b]$ dans $[0, L]$ et constitue donc un changement de paramètre admissible.

Si on prend comme nouveau paramètre l'abscisse curviligne s , on a :

$\frac{dM}{dt} = s'(t) \frac{dM}{ds}$ noté $\frac{ds}{dt} \frac{dM}{ds}$. Mais comme $s'(t) = \frac{ds}{dt} = \left\| \frac{dM}{dt} \right\|$, on obtient $\left\| \frac{dM}{ds} \right\| = 1$.

s est donc un paramétrage intrinsèque : la courbe est parcourue à la "vitesse" constante 1.

6 - Intégrale d'un champ scalaire.

Soient $f: \mathbb{R}^2 \rightarrow \mathbb{R}$ et $\gamma: [a, b] \rightarrow \mathbb{R}^2$ un courbe paramétrée.

L'intégrale de f le long de γ est $\int_a^b f(x(t), y(t)) \left\| \frac{dM}{dt} \right\| dt$. On la note $\int_{\gamma} f ds$.

Exemple : l'abscisse du centre de gravité de la ligne (supposée homogène) est $x_G = \frac{\int_{\gamma} x ds}{\int_{\gamma} ds} = \frac{\int_a^b x(t) \left\| \frac{dM}{dt} \right\| dt}{L}$