TD ASSERVISSEMENT **CIR2/CNB2 : 2020-2021**

Séance 2 – Outils mathématiques_ Transformée de Laplace

Le but de ce TD est de se familiariser avec la transformée de Laplace qui fait partie des techniques élémentaires en Automatique.

<u>Exercice 1</u> : Calcul d'une transformée de Laplace inverse

Rechercher les transformées inverses des fonctions suivantes :

1) $F(p) = \frac{3}{p^3+5p^2+6p}$; 2) $G(p) = \frac{5}{p^2+6p+8}$; 3) $H(p) = \frac{10}{p(p+3)(2p+1)}$

<u>Exercice 2</u> : Calcul d'une fonction de transfert simple

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$\frac{d^3s}{dt^3} + 3\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + s(t) = 2\frac{de}{dt} + e(t)$$

1. Calculer la fonction de transfert de ce système et calculer ses pôles et ses zéros.

2.On considère un système d'entrée $e(t)$ et de sortie $s(t)$ régi par l'équation différentielle suivante :

$$\frac{d^2s}{dt^2} + 3\frac{ds}{dt} + 2s(t) = e(t)$$

Calculer la réponse de ce système $\boldsymbol{s(t)}$ à une entrée $\boldsymbol{e(t)}$ $en\ échelon\ unitaire$

3.Représenter puis calculer la transformée de Laplace de la fonction $\boldsymbol{s(t)}$ définie par :

$$\begin{cases} s(t) = 0\ pour\ t < 0 \\ s(t) = \frac{At}{T}\ pour\ 0 < t < T \\ s(t) = A\ pour > \ t > T \end{cases}$$

<u>Exercice 3</u> : Étude de la réponse d'un système du premier ordre à un échelon

On considère un système régi par l'équation différentielle :

$$T\frac{ds}{dt} + s(t) = Ke(t)$$

Calculer la fonction de transfert de ce système. En déduire $S(p)$ si le signal d'entrée est un échelon unité.
Déterminer la valeur finale de $s(t)$ en utilisant le théorème de la valeur finale.
Calculer l'expression de $s(t)$ et retrouver le résultat précédent.
Pour quelle valeur t_0 de t, $s(t)$ atteint-il 95 % de sa valeur finale ?

Exercice 4:

Soit le système régi par l'équation différentielle suivante :

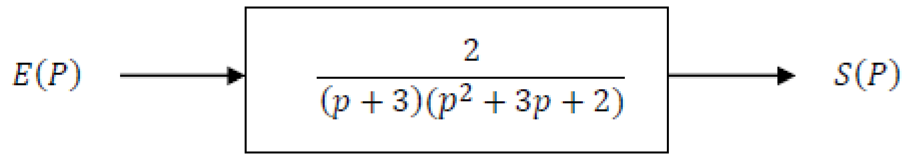
$$\frac{d^3y(t)}{dt^3} + 7\frac{d^2y(t)}{dt^2} + 11\frac{dy(t)}{dt} + 5y(t) = \frac{du(t)}{dt} + 2u(t)$$

1. Déterminer la fonction de transfert de système : $F(p) = \frac{Y(P)}{U(P)}$
2. Calculer les pôles et zéros de ce système

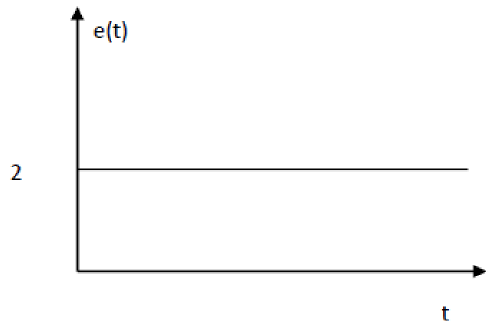
On considère que les conditions initiales sont nulles.

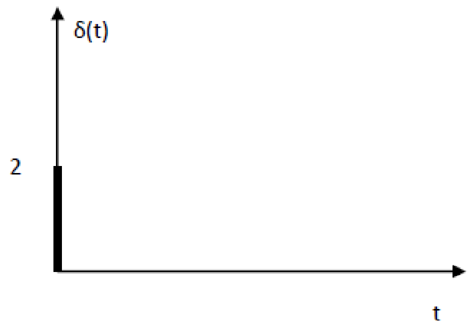
Exercice 5 :

On considère un système d'entrée E(p) et de sortie S(p) donné par le schéma bloc suivant :



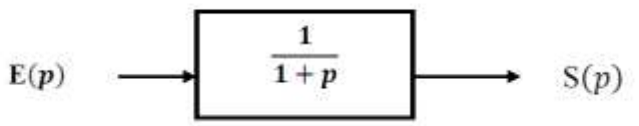
1. Déduire la fonction de transfert du système
2.Faire la décomposition en éléments simples de la fonction de transfert
3.Déduire s(t) dans chaque cas, pour les entrées suivantes :



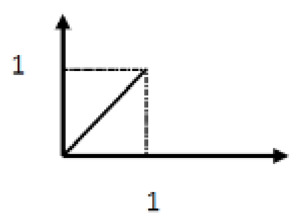


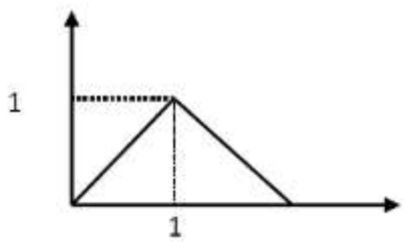
Exercice 6

Soit le système suivant :



Dont $e(t)$ est donné par :





Calculer $S(p)$ puis déduire $s(t)$

Table des transformées de Laplace

Fonctions temporelles	Transformées de Laplace
$u(t) = 1$	$U(p) = \dfrac{1}{p}$
$v(t) = kt$	$V(p) = \dfrac{k}{p^2}$
$s(t) = t^n$	$S(p) = \dfrac{n!}{p^{n+1}}$
$s(t) = e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{1}{p+a}$
$s(t) = t\,e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{1}{(p+a)^2}$
$s(t) = 1 - e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{a}{p(p+a)}$
$s(t) = e^{-at} - e^{-bt}$	$S(p) = \dfrac{b-a}{(p+a)(p+b)}$
$s(t) = t - \dfrac{1}{a} + \dfrac{e^{-at}}{a}$	$S(p) = \dfrac{1}{p^2(p+a)}$
$s(t) = 1 + \dfrac{b}{a-b}e^{-at} - \dfrac{a}{a-b}e^{-bt}$	$S(p) = \dfrac{ab}{p(p+a)(p+b)}$
$s(t) = 1 - e^{-at} - at\,e^{-at}$	$S(p) = \dfrac{a^2}{p(p+a)^2}$
$s(t) = \sin \omega t$	$S(p) = \dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$
$s(t) = \cos \omega t$	$S(p) = \dfrac{p}{p^2+\omega^2}$
$s(t) = e^{-at}\sin \omega t$	$S(p) = \dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$
$s(t) = e^{-at}\cos \omega t$	$S(p) = \dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$

F(p)	f(t) t > 0
$\dfrac{1}{p^2.(1+\tau p)}$	$(t-\tau+\tau.e^{-t/\tau}).u(t)$
$\dfrac{1}{p.(1+\tau p)^2}$	$\left(1-(1+\dfrac{t}{\tau})e^{-t/\tau}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{p^2.(1+\tau p)^2}$	$\left(t-2\tau+(t+2\tau)e^{-t/\tau}\right).u(t)$
$\dfrac{\omega}{p^2+\omega^2}$	$\sin(\omega t).u(t)$
$\dfrac{p}{p^2+\omega^2}$	$\cos(\omega t).u(t)$
$\dfrac{\omega}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}.\sin(\omega t).u(t)$
$\dfrac{p+a}{(p+a)^2+\omega^2}$	$e^{-at}.\cos(\omega t).u(t)$
$\dfrac{p+a}{p^2+\omega^2}$	$\sqrt{\dfrac{a^2+\omega^2}{\omega^2}}\sin(\omega t+\varphi).u(t) \quad \varphi=\arctan\dfrac{\omega}{a}$
$\dfrac{1}{p.(p^2+\omega^2)}$	$\dfrac{1-\cos\omega t}{\omega^2}u(t)$
$\dfrac{1}{(p+a).(p+b)}$	$\dfrac{1}{b-a}\left(e^{-at}-e^{-bt}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)}$	$\dfrac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(e^{-t/\tau_1}-e^{-t/\tau_2}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{p.(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)}$	$1-\dfrac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1.e^{-t/\tau_1}-\tau_2.e^{-t/\tau_2}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{p^2(1+\tau_1 p).(1+\tau_2 p)}$	$t-(\tau_1+\tau_2)+\dfrac{1}{\tau_1-\tau_2}\left(\tau_1^2.e^{-t/\tau_1}-\tau_2^2.e^{-t/\tau_2}\right).u(t)$
$\dfrac{1}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2} \quad m<1$	$\dfrac{1}{\omega}e^{-m\omega_0 t}\sin(\omega t).u(t) \quad \omega=\omega_0\sqrt{1-m^2}$
$\dfrac{1}{p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2} \quad m>1$	$\dfrac{e^{r_2.t}-e^{r_1.t}}{r_2-r_1}u(t)$ $r_{1,2}$: racines de l'équation caractéristique
$\dfrac{1}{p.(p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2)} \quad m<1$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{\omega_0}{\omega}e^{-m\omega_0 t}\sin(\omega t+\varphi)\right)u(t) \quad \varphi=\arccos(m)$
$\dfrac{1}{p.(p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2)} \quad m>1$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{\omega_0^2}{r_2-r_1}\left(\dfrac{e^{r_2 t}}{r_2}-\dfrac{e^{r_1 t}}{r_1}\right)\right)u(t)$
$\dfrac{1}{p^2(p^2+2m\omega_0 p+\omega_0^2)} \quad m<1$	$\dfrac{1}{\omega_0^2}\left(1-\dfrac{2m}{\omega_0}+\dfrac{1}{\omega}e^{-m\omega_0 t}\sin(\omega t+\varphi)\right)u(t)$

F(p)	$f(t) = \mathcal{L}^{-1}[F(p)]$
1	$\delta(t)$ Impulsion de Dirac
$\frac{1}{p}$	$u(t)$ Echelon unité
e^{-Tp}	$\delta(t-T)$ Impulsion retardée
$\frac{e^{-Tp}}{p}$	$u(t-T)$ Echelon retardé
$\frac{1}{p^2}$	$t.u(t)$ Rampe unitaire
$\frac{1}{p^n}$ n entier	$\frac{t^{n-1}}{(n-1)!}$
$\frac{1}{1+\tau p}$	$\frac{1}{\tau}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^2}$	$\frac{1}{\tau^2}te^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{(1+\tau p)^n}$	$\frac{1}{\tau^n(n-1)!}t^{n-1}e^{-\frac{t}{\tau}}$
$\frac{1}{p(1+\tau p)}$	$1-e^{-\frac{t}{\tau}}$