## Quiz du 10 mars, programme

**Dernier cours :**

- Chapitre 5 Oscillation partie B. Oscillations forcées, résonance
- Chapitre 6 Lois de conservation A.

**Cours d'aujourd'hui :**

- Chapitre 6 lois de conservation B + feuille d'exercice « travail, moment d'une force »

**TD 9, 10, 11 et 12**

# Chapitre 6 : Lois de conservation

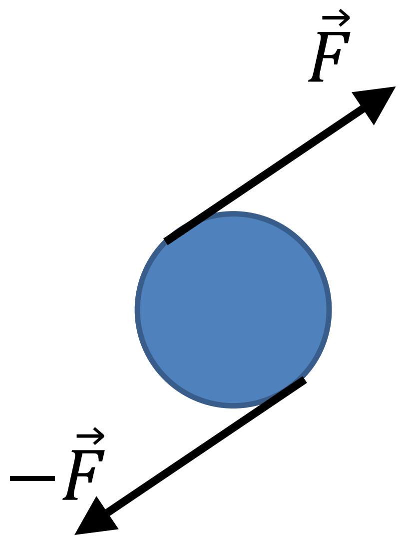
## Partie B – TMC

## 1. Introduction

**Le PFD ne donne pas une description exhaustive des mouvements possibles**

Exemple

(Système non ponctuel)



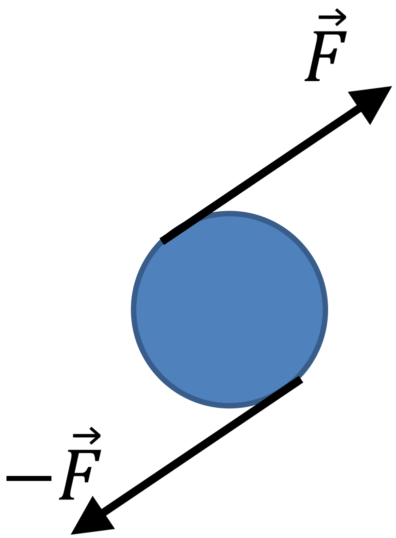

PFD : $\sum \vec{F} = \vec{0}$
→ Pas de mouvement

Pourtant : rotation

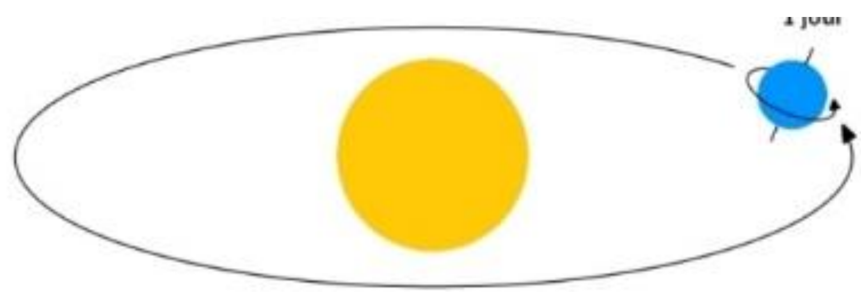
Pour décrire tous les mouvements : PFD + **moment de force**

# 1. Introduction

Notion de **moment de force** utile pour :




Mécanique des solides
(Systèmes non ponctuels)



Mouvement des planètes

→ *Cours SI $2^e$ année*

*CE CHAPITRE*

# 2. Rappels sur les vecteurs

## PRODUIT VECTORIEL

Soit deux vecteurs $\vec{a} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix}$ $\vec{b} = \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$

Le produit vecteur de ces deux vecteurs est :

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

## 2. Rappels sur les vecteurs

Remarque :

Une méthode pour se rappeler du résultat / ne pas se tromper de signe

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_y b_z - a_z b_y \\ a_z b_x - a_x b_z \\ a_x b_y - a_y b_x \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} a_x \\ a_y \\ a_z \end{pmatrix} \wedge \begin{pmatrix} b_x \\ b_y \\ b_z \end{pmatrix}$$

# 2. Rappels sur les vecteurs

## Produit vectoriel, propriétés

$$\vec{a} \wedge \left(\vec{b} + \vec{c}\right) = \vec{a} \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge c$$

$$\vec{a} \wedge \left(k\vec{b}\right) = (k\vec{a}) \wedge \vec{b} = k\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)$$

$$\left\|\vec{a} \wedge \vec{b}\right\| = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \left|sin\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$$

Remarque : produit scalaire : $\vec{a}.\vec{b} = \|\vec{a}\| \left\|\vec{b}\right\| \left|cos\left(\vec{a}, \vec{b}\right)\right|$

Un produit vectoriel est un VECTEUR
Un produit scalaire est un NOMBRE

# 2. Rappels sur les vecteurs

Exemple 1

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ -7 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ -3 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} -19 \\ -15 \\ -7 \end{pmatrix}$$

## 2. Rappels sur les vecteurs

Exemple 2

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = 2\begin{pmatrix} 4 \\ 3 \\ -2 \end{pmatrix}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 2 \\ 20 \\ 34 \end{pmatrix}$$

# 2. Rappels sur les vecteurs

## Exemple 3

$$\vec{a} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \\ -1 \end{pmatrix} \qquad \vec{b} = \vec{a}$$

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

# 2. Rappels sur les vecteurs

Produit vectoriel d'un vecteur avec lui-même :

$$\vec{a} \wedge \vec{a} = \vec{0}$$

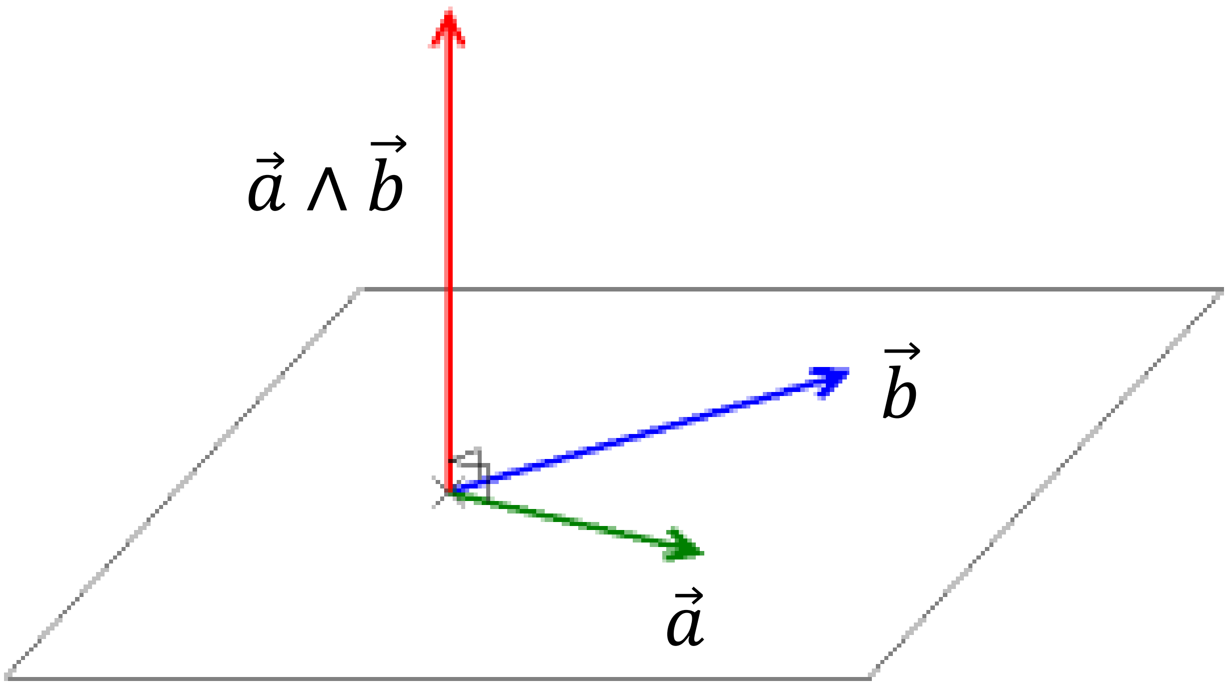
Remarque : pour la norme on le voit directement car $sin(\vec{a}, \vec{a}) = \sin(0) = 0$

$$\|\vec{a} \wedge \vec{a}\| = \|\vec{a}\|\|\vec{a}\||sin(\vec{a}, \vec{a})| = 0$$

# 2. Rappels sur les vecteurs

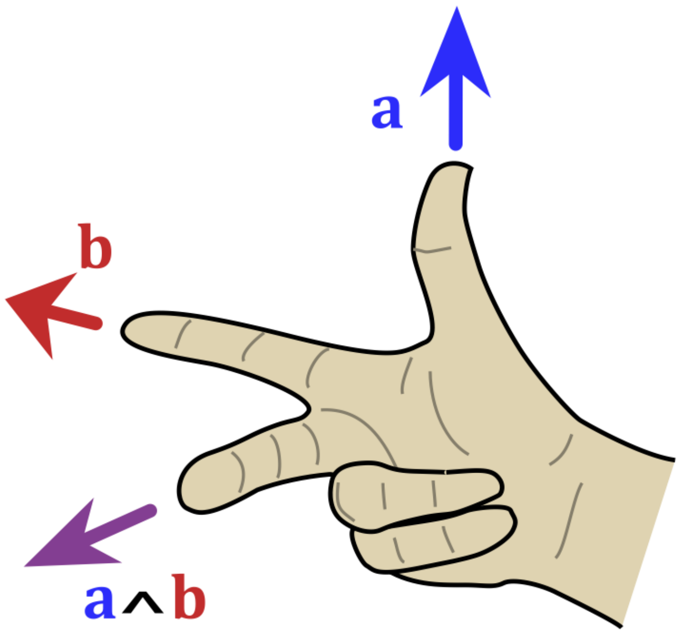
## Direction du produit vectoriel

$$\vec{a} \wedge \vec{b} = \vec{c} \qquad \Longrightarrow \vec{c} \perp \vec{a} \quad et \quad \vec{c} \perp \vec{b}$$



# 2. Rappels sur les vecteurs

Direction **et sens** du produit vectoriel




Donné par la règle
de la main droite

Ou encore :

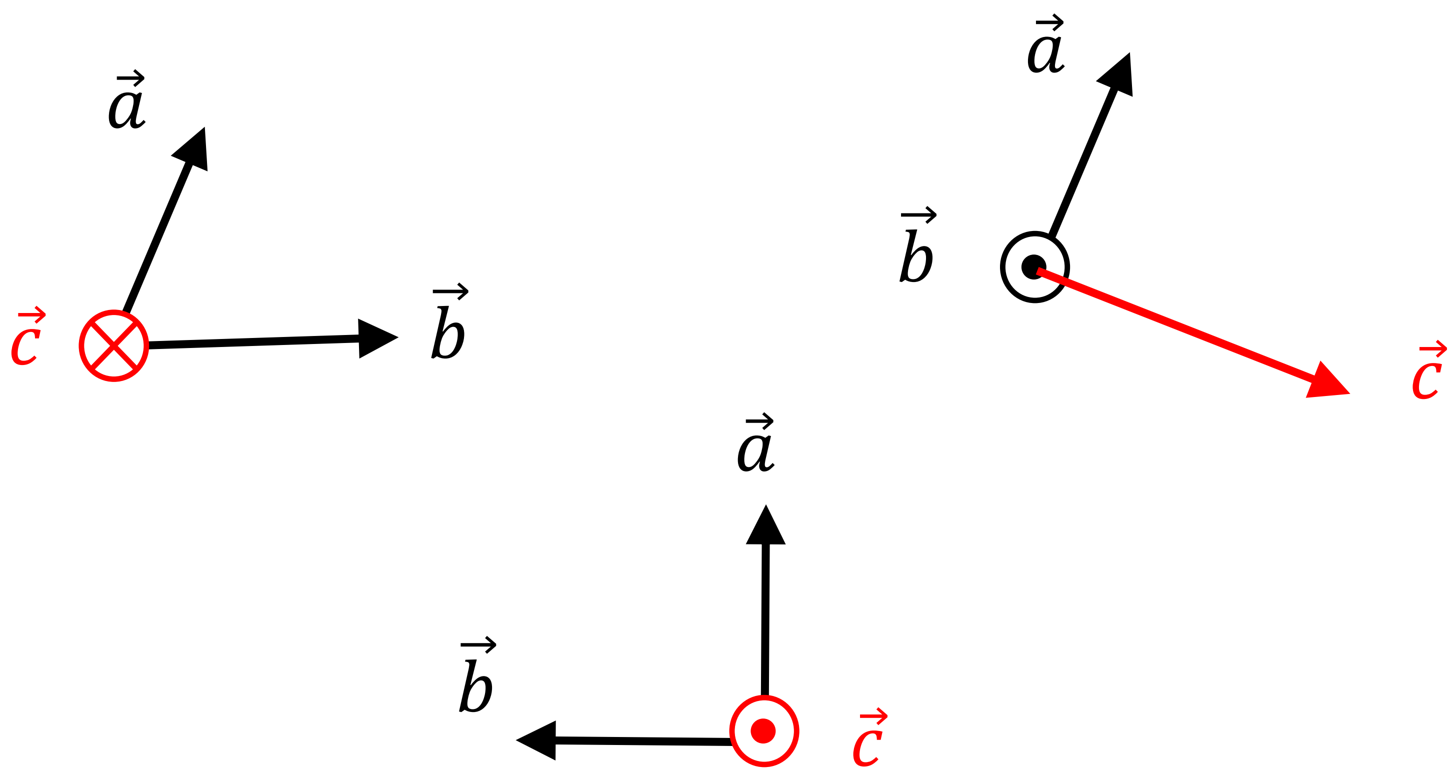
Bonhomme couché sur le 1er vecteur

Regarde le 2e vecteur qui part de ses pieds

Tend le bras gauche pour indiquer la direction du produit vectoriel

# 2. Rappels sur les vecteurs

Exemples Direction et sens de $\vec{c} = \vec{a} \wedge \vec{b}$ ?




Remarque : attention $\vec{a} \wedge \vec{b} \neq \vec{b} \wedge \vec{a}$ $\vec{a} \wedge \vec{b} = -\vec{b} \wedge \vec{a}$

# 3. Théorème du moment cinétique

3. Théorème du moment cinétique

Définition : le moment cinétique $\overrightarrow{L_O}$ d'une masse ponctuelle en M de masse m et de vitesse $\vec{v}$ est

$$\overrightarrow{L_O} = m\,\overrightarrow{OM} \wedge \vec{v} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$$

Remarque : $\overrightarrow{L_O}$ est toujours **défini par rapport à une origine donnée** (*O*)

Pourquoi définir cette quantité ? Voyons ce qu'il se passe quand on dérive en fonction du temps

# 3. Théorème du moment cinétique

Dérivée en fonction du temps de $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$

Dérivée d'un produit vectoriel :

$$\left(\vec{a} \wedge \vec{b}\right)' = (\vec{a})' \wedge \vec{b} + \vec{a} \wedge \left(\vec{b}\right)'$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = m\frac{d\vec{r}}{dt} \wedge \vec{v} + m\vec{r} \wedge \frac{d\vec{v}}{dt}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = m\,\boldsymbol{\vec{v}} \wedge \vec{v} + m\vec{r} \wedge \boldsymbol{\vec{a}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \quad \mathbf{0} \quad + m\vec{r} \wedge \vec{a}$$

$$= m\vec{r} \wedge \vec{a}$$

$$= \vec{r} \wedge m\vec{a}$$

$$= \vec{r} \wedge \sum_i \overrightarrow{F_i}$$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$$

# 3. Théorème du moment cinétique

Dérivée en fonction du temps de $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$

$$\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$$

On appelle la quantité $\vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$ le **moment de la force** $\overrightarrow{F_i}$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$$

On obtient :

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

# 3. Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

THEOREME DU
MOMENT CINETIQUE

La dérivée du moment cinétique par rapport au temps est donnée par la somme des moments des forces qui s'appliquent sur le système

On va voir plusieurs application de ce théorème dans les cours à venir

## 3. Théorème du moment cinétique

Remarque : qu'est-ce qu'un **moment** ?

| MOMENT CINETIQUE | MOMENT D'UNE FORCE |
|---|---|
| $\vec{r} \wedge m\vec{v}$ | $\vec{r} \wedge \vec{F}$ |

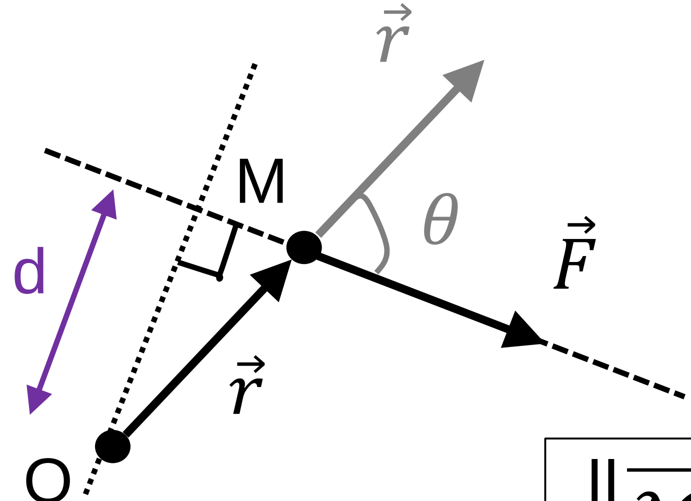
*Le produit vectoriel du vecteur position avec un autre vecteur*

# 3. Théorème du moment cinétique

Interprétation du **moment d'une force** ? $\overrightarrow{\mathcal{M}^O} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

Interprétation géométrique

Norme de $\overrightarrow{\mathcal{M}^O}$ ?




$$\left\| \overrightarrow{\mathcal{M}^O} \right\| = r\ F\ sin\theta$$

$$d = r\ sin\theta$$

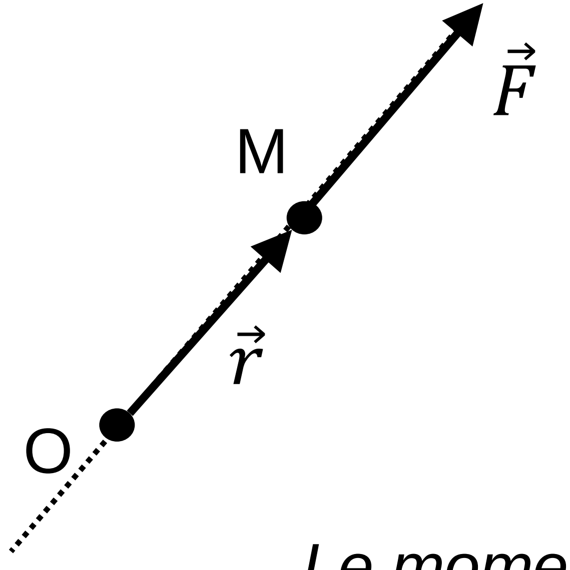
$$\boxed{\left\| \overrightarrow{\mathcal{M}^O} \right\| = d\ F}$$

*Le moment de la force a une norme qui vaut simplement : la force multiplié par la distance entre O et la droite portant F*

# 3. Théorème du moment cinétique

Interprétation du **moment d'une force** ? $\overrightarrow{\mathcal{M}^{O}} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

Interprétation géométrique $\boxed{\left\|\overrightarrow{\mathcal{M}^{O}}\right\| = d\ F}$




*En particulier, si on a une force radiale …*

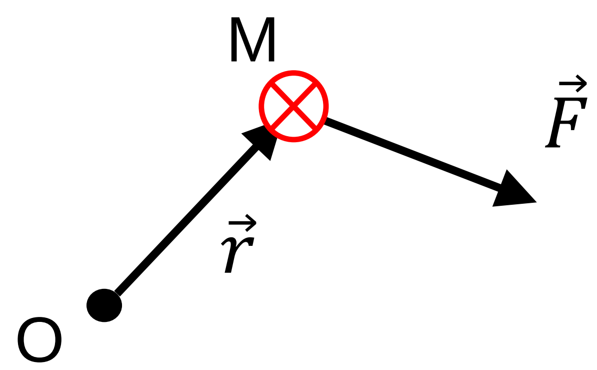
*Le moment de la force est nul*

# 3. Théorème du moment cinétique

Interprétation du **moment d'une force** ? $\overrightarrow{\mathcal{M}^{O}} = \vec{r} \wedge \vec{F}$

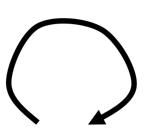
Interprétation physique

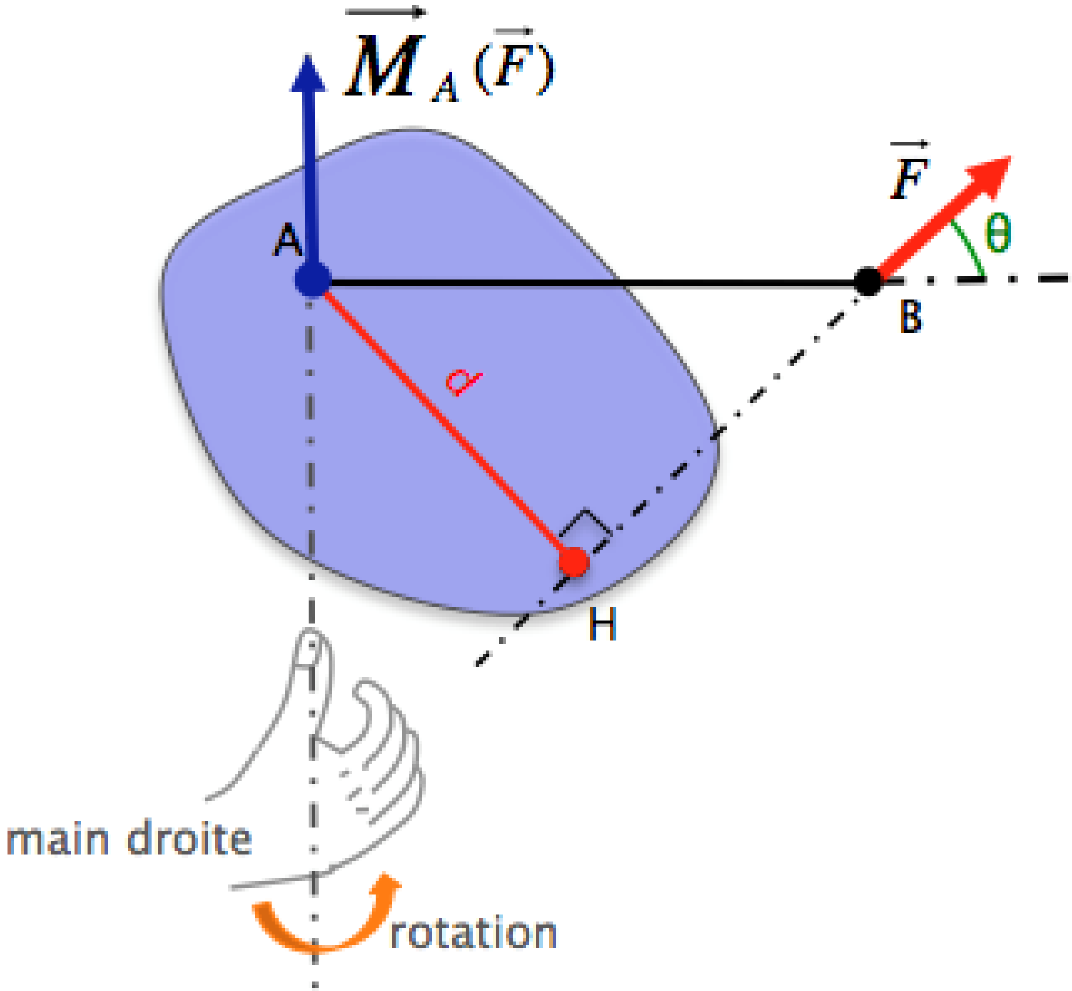
Dans quel sens pointe $\overrightarrow{\mathcal{M}^{O}}$ ?




Le moment indique dans quel sens le système a envie de tourner

Pouce droit en direction du vecteur, les doigts indiquent le sens de rotation // Ici : sens horaire




$\vec{M}_A(\vec{F})$
$\vec{F}$
A
B
H
d
θ
main droite
rotation

## 3. Théorème du moment cinétique

$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

Deux situations dans laquelle cette relation est très pratique

**1. Cas statique**

$\rightarrow \vec{v} = \vec{0}$

$\rightarrow \overrightarrow{L_O} = \vec{0}$

$\rightarrow \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0}$ $\Rightarrow$ $\boxed{\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0}}$

# 3. Théorème du moment cinétique

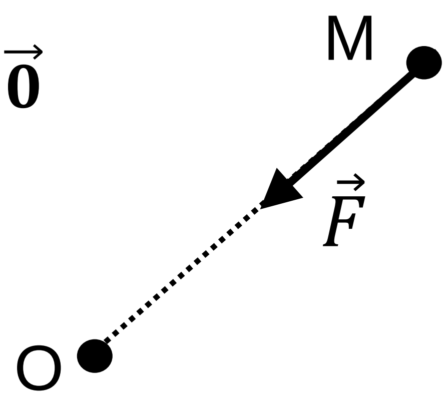
$$\boxed{\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}}$$

THEOREME DU MOMENT CINETIQUE

Deux situations dans laquelle cette relation est très pratique

**2. Cas où $\sum_i \overrightarrow{\boldsymbol{\mathcal{M}}_i^O} = \vec{\mathbf{0}}$**

$\vec{F}$ et $\vec{r}$ colinéaires




Exemple

$\vec{F}$ de gravitation

$\vec{F}$ de tension d'un fil

$\vec{F}$ electrostatique

$$\Rightarrow \quad \frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \vec{0} \quad \Rightarrow \quad \boxed{\overrightarrow{L_O} = \overrightarrow{cte}}$$

Très utile pour résoudre le problème d'un corps soumis à la gravitation

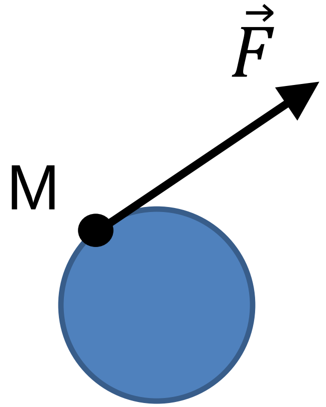
# 3. Théorème du moment cinétique

Remarque (pour la suite)

Expression du moment pour un corps étendu (=non ponctuel)

$$\overrightarrow{\mathcal{M}^O} = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F}$$

Avec M le point
d’application de la force



4. Application à la statique

Cas statique : on a donc deux relations indépendantes

$$\boxed{\sum_i \overrightarrow{F_i} = \vec{0}}$$

$$\boxed{\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0}}$$

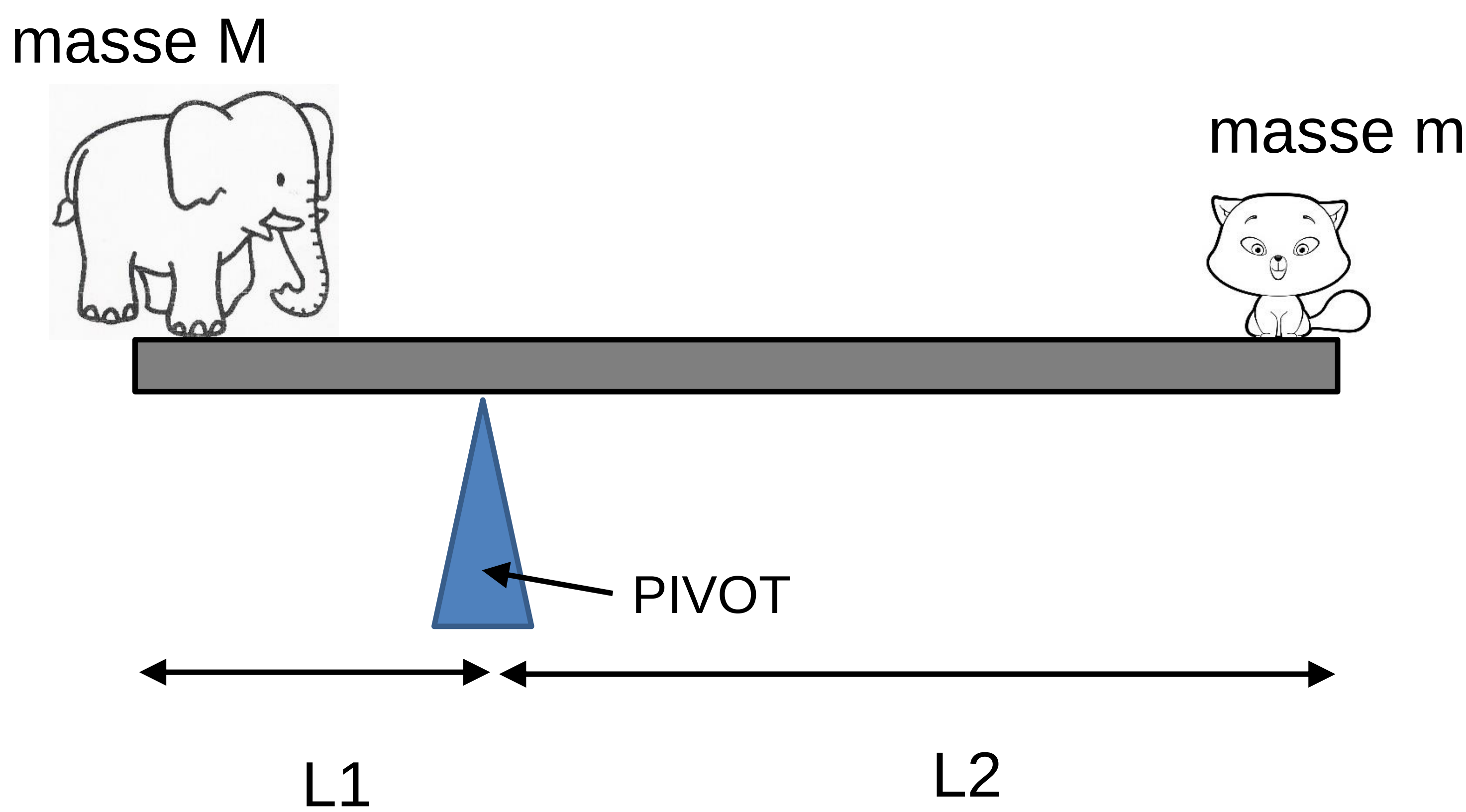
Principe fondamental de la dynamique ( avec $\vec{a} = \vec{0}$)

Théorème de l'énergie cinétique (avec $\vec{v} = \vec{0}$)

# 4. Application à la statique

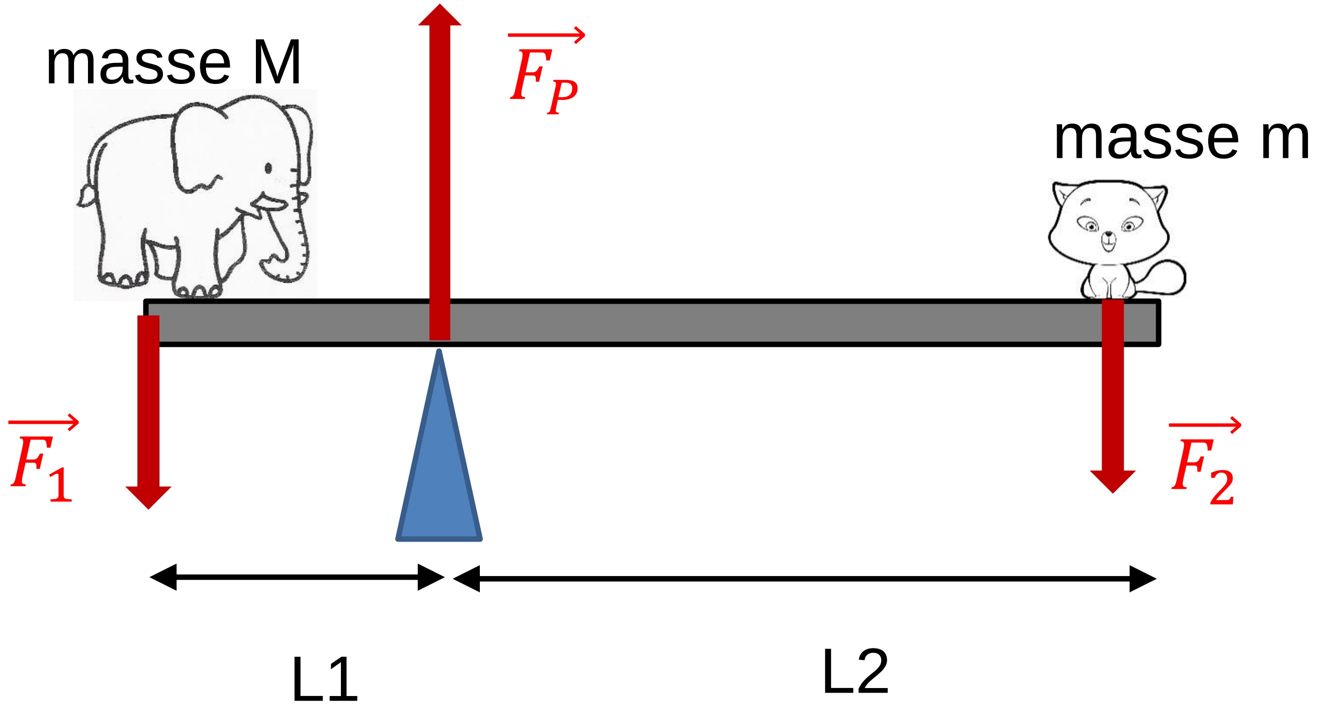
Exemple simple

Position du pivot pour que la barre soit à l'équilibre ?




→ Relation entre L1 et L2 ?

# 4. Application à la statique




Système considéré : {barre + élephant + chat}

Bilan des forces :

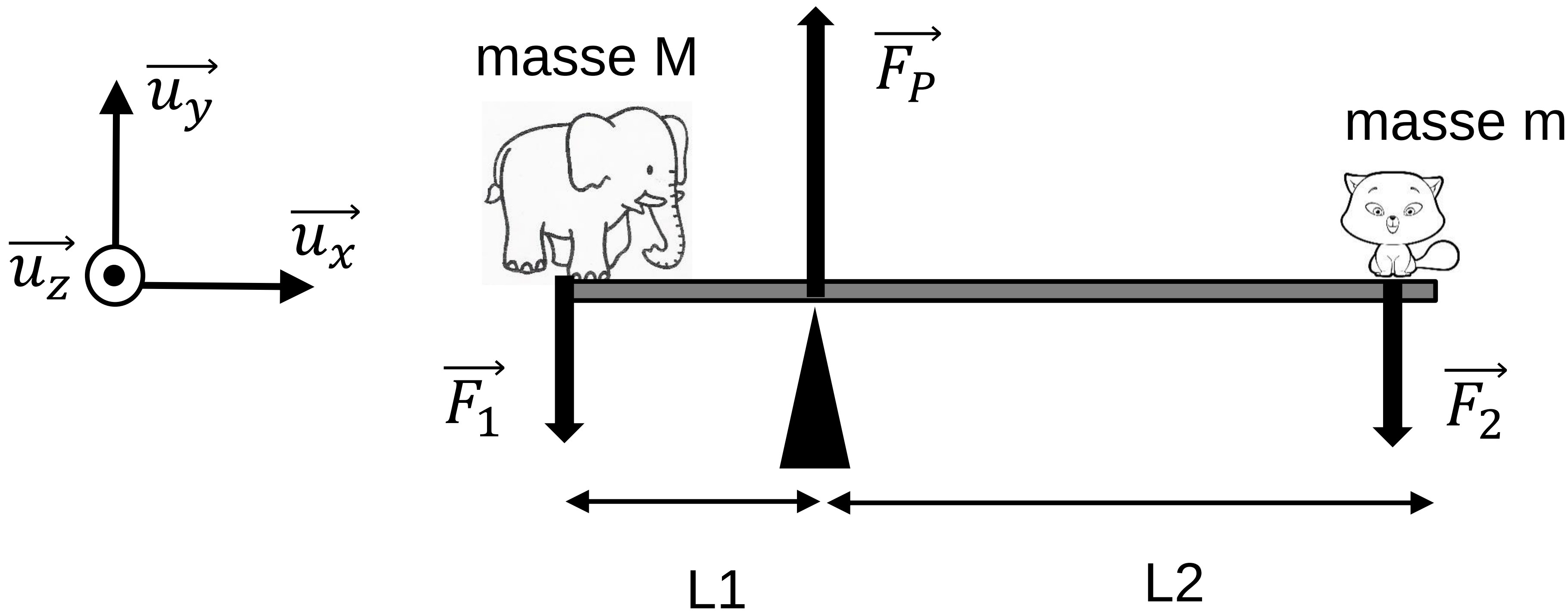
$\overrightarrow{F_1}$ Poids de l'éléphant

$\overrightarrow{F_2}$ Poids du chat

$\overrightarrow{F_P}$ Réaction du support

On néglige le poids de la barre

# 4. Application à la statique



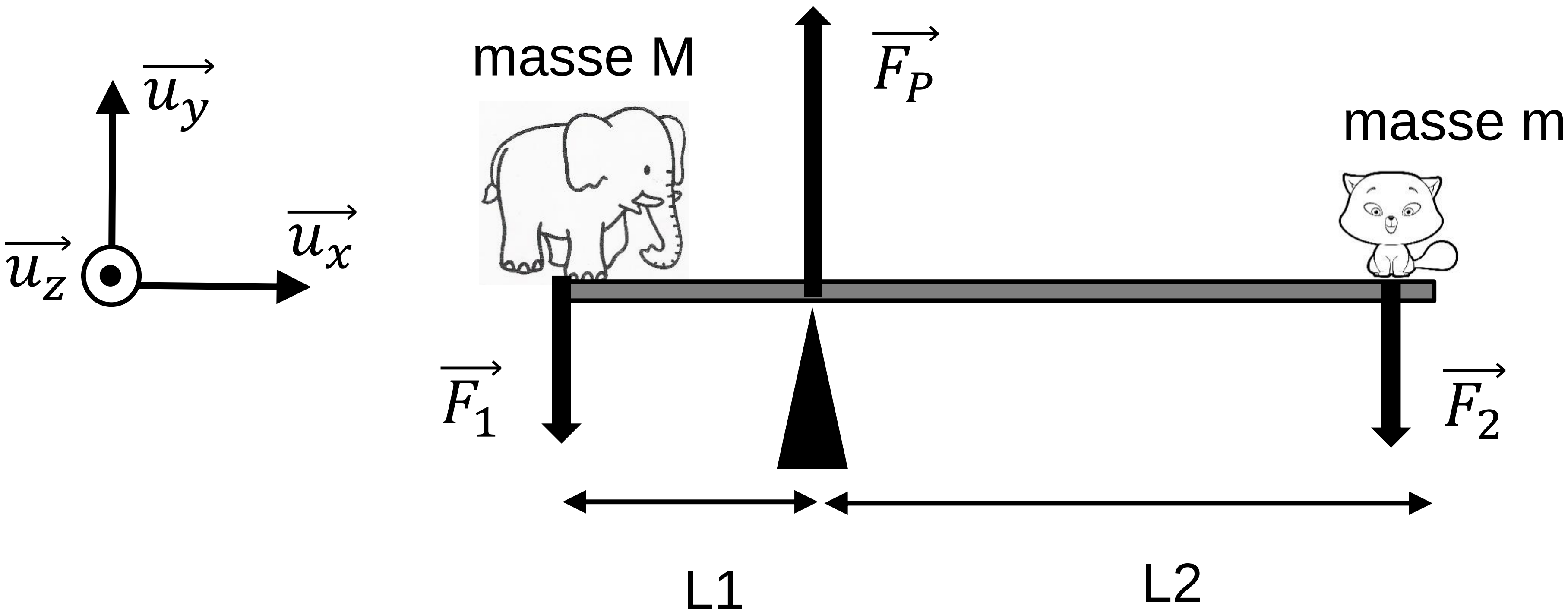

Soit le point O au niveau du haut du pivot + repère dessiné

Calculer

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_1^O} = \overrightarrow{r_1} \wedge \overrightarrow{F_1}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_2^O} = \overrightarrow{r_2} \wedge \overrightarrow{F_2}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P^O} = \overrightarrow{r_P} \wedge \overrightarrow{F_P}$$

*On commence par exprimer les coordonnées de $\overrightarrow{r_1}$, $\overrightarrow{r_2}$, $\overrightarrow{r_P}$ et $\overrightarrow{F_1}$, $\overrightarrow{F_2}$ et $\overrightarrow{F_P}$*

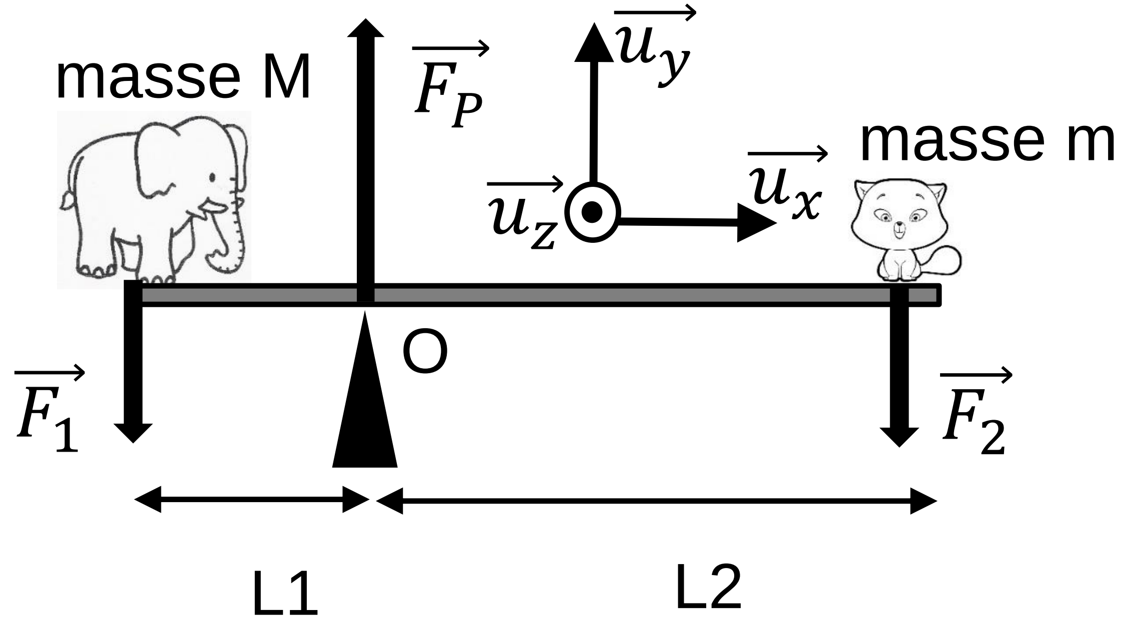
# 4. Application à la statique




Soit le point O au niveau du haut du pivot

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_1^O} = (-L_1\overrightarrow{u_x}) \wedge \left(-Mg\overrightarrow{u_y}\right) = L_1 Mg\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_2^O} = (L_2\overrightarrow{u_x}) \wedge \left(-mg\overrightarrow{u_y}\right) = -L_2 mg\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P^O} = \left(\vec{0}\right) \wedge \left(\overrightarrow{F_P}\right) = \vec{0}$$

# 4. Application à la statique




Cas statique :

$$\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_1^O} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2^O} + \overrightarrow{\mathcal{M}_P^O} = \vec{0}$$
$$L_1 M g \overrightarrow{u_z} + -L_2 m g \overrightarrow{u_z} = \vec{0}$$
$$L_1 M = L_2 m$$
$$\frac{L_1}{L_2} = \frac{m}{M}$$

A. N.
Eléphant : M=2 tonnes
Chat : m=2 kg

→ $\frac{L_1}{L_2} = 10^{-3}$

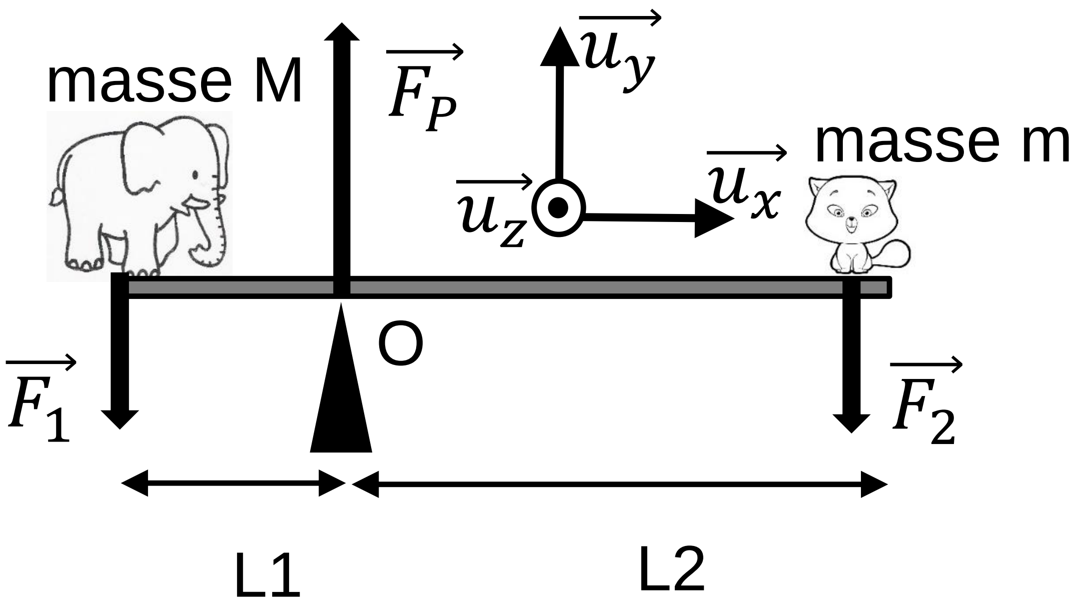
Ex. barre de 2m : pivot à 2mm

# 4. Application à la statique

Remarque
Plus généralement, on montre ici qu'on peut toujours compenser une grande force par une petite avec un bras de levier suffisamment grand.

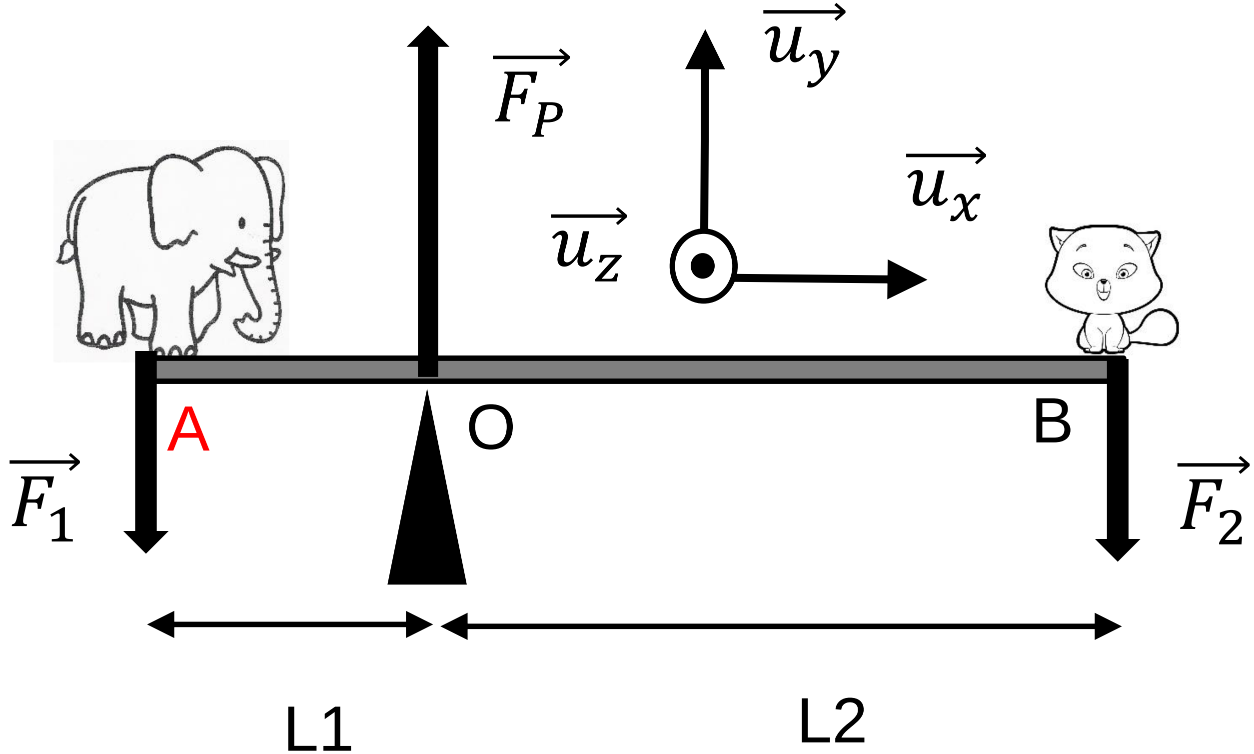
*On peut réellement soulever un éléphant*

$$\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0}$$



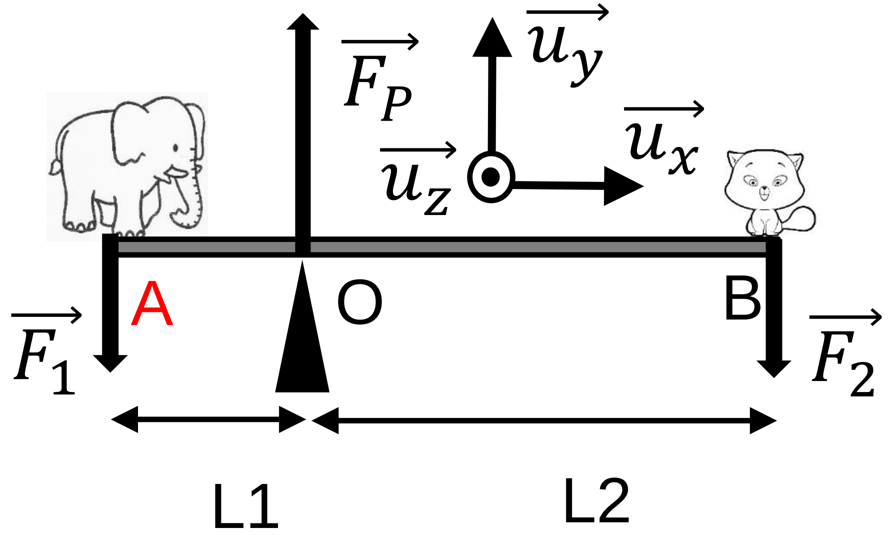
4. Application à la statique

Application 2.
Même situation, mais on déplace l'origine du repère au point A. Si $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0}$ , a-t-on $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^A} = \vec{0}$ ?



# 4. Application à la statique

Application 2.
Même situation, mais on déplace l'origine du repère au point A. Si $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0}$ , a-t-on $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^A} = \vec{0}$ ?




$$\overrightarrow{\mathcal{M}_1^A} = (\vec{0}) \wedge (-Mg\overrightarrow{u_y}) = \vec{0}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_2^A} = ((L_1 + L_2)\overrightarrow{u_x}) \wedge (-mg\overrightarrow{u_y}) = -mg(L_1 + L_2)\overrightarrow{u_z}$$
$$\overrightarrow{\mathcal{M}_P^A} = (L_1\overrightarrow{u_x}) \wedge \left((M + m)g\overrightarrow{u_y}\right) = L_1(M + m)g\overrightarrow{u_z}$$

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_1^A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2^A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_P^A} = -mg(L_1 + L_2)\overrightarrow{u_z} + L_1(M + m)g\overrightarrow{u_z}$$
$$-mgL_1 - mgL_2 + MgL_1 + mgL_1 = -mgL_2 + MgL_1$$
$\overrightarrow{\mathcal{M}_1^A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_2^A} + \overrightarrow{\mathcal{M}_P^A} = \vec{0}$ si $L_1M = L_2m$ → OK quand $\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0}$

# 4. Application à la statique

Généralisation : dans le cas statique, la somme des moments est nulle quel que soit le point de référence

$$\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{0} \rightarrow \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^{O'}} = \vec{0}$$

→ On peut choisir le point qui nous arrange pour le calcul

Démonstration :

$$\begin{aligned}
\sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^{O'}} &= \sum_i \overrightarrow{O'M_i} \wedge \overrightarrow{F_i} \\
&= \sum_i \left(\overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM_i}\right) \wedge \overrightarrow{F_i} \\
&= \sum_i \overrightarrow{O'O} \wedge \overrightarrow{F_i} + \sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_i} \\
&= \overrightarrow{O'O} \wedge \underbrace{\sum_i \overrightarrow{F_i}} + \underbrace{\sum_i \overrightarrow{OM_i} \wedge \overrightarrow{F_i}}
\end{aligned}$$

Statique : $= \vec{0}$ (PFD) $= \vec{0}$ (TMC)

Dimensions d'un moment cinétique et d'un moment d'une force ?

MOMENT CINETIQUE

$$\vec{r} \wedge m\vec{v}$$

$[L^O]$ = L M LT$^{-1}$ = M L$^2$T$^{-1}$

Unités

kg m$^2$s$^{-1}$ = J.s

MOMENT D'UNE FORCE

$$\vec{r} \wedge \vec{F}$$

$[\mathcal{M}^O]$ = L [ma] = L M LT$^{-2}$ = M L$^2$T$^{-2}$

kg m$^2$s$^{-2}$ = N.m

# Rappel pour les exercices

travail $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$ $= \vec{F}.\overrightarrow{AB}$

moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \overrightarrow{F_i}$

moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$