Mathématiques

Examen récapitulatif – 2e partie

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **4** questions équipondérées.
- Calculatrice et documentation interdites.

∞

1. Donner la représentation matricielle (par rapport à la base canonique) de la projection orthogonale
$$\pi : \mathbf{R}^4 \longrightarrow \mathbf{R}^4$$
sur le sous-espace engendré par $(1, 1, 1, -3)$, $(1, -2, 1, 0)$ et $(1, 2, 3, -6)$.

∞

2. En passant en coordonnées polaires, calculer l'aire de la région plane délimitée par la lemniscate d'équation
$$(x^2 + y^2)^2 = x^2 - y^2.$$

∞

3. Soit V l'espace vectoriel sur $\mathbf{C}$ des suites $\boldsymbol{a} = (a_0,\, a_1,\, a_2,\, \dots)$ de nombres complexes satisfaisant :
$$a_{n+3} = a_{n+2} - a_{n+1} + a_n \qquad (n \geqslant 0).$$
Déterminer une base de V formée de vecteurs propres pour l'opérateur de décalage $\sigma \in \mathrm{End}(V)$ défini par
$$\sigma(\boldsymbol{a}) = (a_1,\, a_2,\, a_3,\, \dots)\,.$$

∞

4. Déterminer le domaine de convergence simple et préciser la somme de la série de fonctions réelles $\displaystyle\sum_{n=0}^{\infty} f_n$ où
$$f_n(x) = \frac{x}{(1 + x^2)^n} \qquad (x \in \mathbf{R}).$$
La convergence est-elle uniforme ?

∞

(bonus) Reprendre la question précédente en considérant f_n comme une fonction d'une variable *complexe*.