29 janvier 2016 **Quiz de maths n° 6** ISÉN - $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Répondez sur une copie à carreaux en soignant au maximum la **clarté** et la **précision** de votre rédaction. Il y a sans doute un peu plus de questions que ce qui est raisonnablement faisable en 40 minutes, faites-en le plus que vous pouvez.

1. Rappelez la définition d'un groupe telle qu'elle a été formulée *cette année* (avec trois opérations).

Un groupe est la donnée d'un quadruplet $(G, \cdot, \iota, 1)$ où

- G est un ensemble,
- $\cdot$ est une opération binaire sur G,
- ι une opération unaire sur G,
- 1 une constante (opération zéroaire) dans G ;

satisfaisant

⚀) $(x \cdot y) \cdot z = x \cdot (y \cdot z)$ pour tout $x, y, z \in G$ (**associativité**),

⚁) $x \cdot 1 = x = 1 \cdot x$ pour tout $x \in G$ (**neutre**),

⚂) $x \cdot \iota(x) = 1 = \iota(x) \cdot x$ pour tout $x \in G$ (**inverse**).

2. (Re)démontrer l'identité, valable dans n'importe quel groupe :

$$(x \cdot y)^{-1} = y^{-1} \cdot x^{-1}.$$

L'inverse $\iota(g) = g^{-1}$ d'un élement étant uniquement déterminé par la propriété ci-dessus, il suffit de se convaincre que $z := y^{-1} \cdot x^{-1}$ se comporte bien comme l'inverse de $x \cdot y$. Pour cela, on calcule :

$$(x \cdot y) \cdot z \overset{\text{déf}}{=} (x \cdot y) \cdot (y^{-1} \cdot x^{-1}) \overset{\text{⚀}}{=} x \cdot ((y \cdot y^{-1}) \cdot x^{-1}) \overset{\text{⚂}}{=} x \cdot (1 \cdot x^{-1}) \overset{\text{⚁}}{=} x \cdot x^{-1} \overset{\text{⚂}}{=} 1$$

et on vérifie de même que $z \cdot (x \cdot y) = 1$. Par l'unicité de l'inverse, on peut donc conclure que $z = (x \cdot y)^{-1}$.

3. Nouveau concept : un **groude** est un ensemble non vide G muni d'une loi ternaire $(x, y, z) \mapsto [x, y, z]$ satisfaisant :

- $[v, w, [x, y, z]] = [[v, w, x], y, z]$ pour tout $v, w, x, y, z \in G$ (**para-associativité**) et
- $[x, y, y] = x = [y, y, x]$ pour tout $x, y \in G$ (**para-identité**).

Montrer soigneusement que n'importe quel groupe $(G, \cdot)$ peut être muni d'une structure de groude en posant

$$[x, y, z] := x \cdot (y^{-1} \cdot z).$$

Tout d'abord : on se convainc que $[\ ,\ ,\ ]$ est bien une opération ternaire en vérifiant que la formule donnée associe bien à chaque triplet x, y, z d'élements de G un élément $[x, y, z] \in G$ (oui). Il suffit par la suite de vérifier que les deux identités requises sont satisfaites :

- para-associativité : pour $v, w, x, y, z \in G$ on calcule

  $$[v, w, [x, y, z]] = v \cdot (w^{-1} \cdot [x, y, z]) = v \cdot (w^{-1} \cdot (x \cdot (y^{-1} \cdot z)))$$

  tandis que

  $$[[v, w, x], y, z] = [v, w, x] \cdot (y^{-1} \cdot z) = (v \cdot (w^{-1} \cdot x)) \cdot (y^{-1} \cdot z),$$

  expressions qui sont bien égales d'après l'associativité de $\cdot$ (n'est-ce pas ?).
- para-identité : pour $x, y \in G$ on calcule

  $$[x, y, y] = x \cdot (y^{-1} \cdot y) = x \cdot 1 = x$$

  ainsi que

  $$[y, y, x] = y \cdot (y^{-1} \cdot x) = (y \cdot y^{-1}) \cdot x = 1 \cdot x = x.$$

4. Cela nous suggère la construction réciproque suivante : sur n'importe quel groude G, on peut définir une opération binaire en choisissant un élément $e \in G$ et en posant

$$x \star y := [x, e, y].$$

Montrer que la structure algébrique ainsi obtenue est un groupe (avec neutre e et $x^{-1} = [e, x, e]$).

Il s'agit bien d'une opération binaire sur G.

⚀) associativité : par para-associativité, on a

$$x \star (y \star z) = x \star [y, e, z] = [x, e, [y, e, z]] = [[x, e, y], e, z] = [x, e, y] \star z = (x \star y) \star z$$

⚁) neutre : par para-identité,

$$x \star e = [x, e, e] = x = [e, e, x] = e \star x$$

⚂) inverses : en utilisant les deux propriétés,

$$x \star [e, x, e] = [x, e, [e, x, e]] = [[x, e, e], x, e] = [x, x, e] = e$$

et de même

$$[e, x, e] \star x = [[e, x, e], e, x] = [e, x, [e, e, x]] = [e, x, x] = e.$$

Note : les constructions des deux questions précédentes sont mutuellement inverses (*i.e.* la loi $\star$ associée à une loi de groude associée à une loi de groupe est cette même loi ; la loi de groude associée à une loi de groupe associée à une loi de groude est cette dernière).

5. En déduire : dans n'importe quel groude, on a l'égalité

$$[v, w, [x, y, z]] = [v, [y, x, w], z] \qquad (v, w, x, y, z \in G).$$

Ce n'est pas si évident à établir directement à partir des axiomes de groudes. Ceci dit, d'après les deux questions précédentes, on peut sans perte de généralité supposer que la loi de groude provient d'une loi de groupe $\cdot$. On a donc :

$$[v, [y, x, w], z] = v \cdot [y, x, w]^{-1} \cdot z = v \cdot (y \cdot x^{-1} \cdot w)^{-1} \cdot z = v \cdot (w^{-1} \cdot x \cdot y^{-1}) \cdot z = v \cdot w^{-1} \cdot [x, y, z] = [v, w, [x, y, z]].$$

6. Soient e et f deux éléments d'un groude G, et $\star$ et $\dagger$ les lois de groupe associées :

$$x \star y = [x, e, y] \qquad \text{et} \qquad x \dagger y = [x, f, y].$$

Montrer que la fonction $\varphi : G \to G$ définie par $\varphi(x) = [e, x, f]$ est un morphisme de $(G, \star, e)$ vers $(G, \dagger, f)$.

Tout d'abord on vérifie (au moins mentalement) que la fonction est bien définie (ok). Ensuite, il suffit de vérifier que φ transforme $\star$ en $\dagger$ (par les propriétés de groupes, il sera alors immédiat que φ envoie e sur f (même si on peut le voir directement par l'axiome de para-identité)). Or :

$$\begin{aligned}\varphi(x) \dagger \varphi(y) &= [e, x, f] \dagger [e, y, f] = [[e, x, f], f, [e, y, f]] = [e, [x, f, f], [e, y, f]] \\ &= [e, x, [e, y, f]] = [e, [x, e, y], f] = \varphi(x \star y).\end{aligned}$$

7. Vérifier que $\psi(x) := [f, x, e]$ est l'inverse de φ et en déduire que $(G, \star, e)$ et $(G, \dagger, f)$ sont des groupes isomorphes.

En effet, en utilisant l'identité établie à la question 5 :

$$\psi(\varphi(x)) = [f, \varphi(x), e] = [f, [e, x, f], e] = [f, f, [x, e, e]] = [x, e, e] = x$$

et vice versa. Puisque φ est un morphisme bijectif, il s'agit donc d'un isomorphisme.

En d'autres termes, on peut penser à un groude comme à un groupe dans lequel on a oublié qui est l'élément neutre (tout comme un espace affine est un espace vectoriel dans lequel on a oublié où est l'origine).

Vive les groudes !