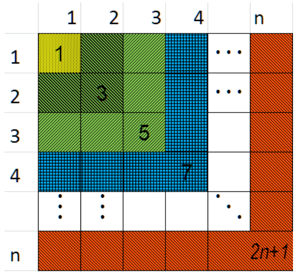
CIR2 | Interrogation 5 | 27 Janvier 2021

Interrogation 5
Dénombrement

NOM	Prénom
CORRIGÉ	

Durée 1 heure
Pas de document, ni calculatrice, ni téléphone portable
Inscrire les réponses sur la feuille d'énoncé, sans râture ni surcharge (utiliser un brouillon !)

1. En utilisant la figure ci-dessous, compléter : $n^2 = 1+3+5+ \quad +(2n+1) = \sum_{k=0}^{n}(2k+1)$



2. Définition : Deux ensembles A et B sont équipotents

   si et seulement si il existe une bijection de A vers B.

3. Classer comme dénombrables ou non dénombrables les ensembles : $\mathbb{N}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $]0,1[$, $\mathbb{N}^*$

dénombrables	non dénombrables
$\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{N}^2$, $\mathbb{N}^*$	$\mathbb{R}$, $]0,1[$

4. Calculer $\sum_{k=1}^{n} k = \dfrac{n(n+1)}{2}$ et $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

5. Soient n et p deux naturel tels que $p < n$.

   Exprimer $\binom{n}{p}$ avec des factorielles $\binom{n}{p} = \dfrac{n!}{p!\,(n-p)!}$

   Compléter la formule $\binom{n}{p} + \binom{n}{p+1} = \binom{n+1}{p+1}$

6. Soit l'équation de récurrence $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n$ $(a$ et b constantes réelles$)$. On pose $\Delta = a^2 - 4b$

   Écrire la solution générale de l'équation dans le cas où $\Delta > 0$:

   $u_n = A\,r_1^{\,n} + B\,r_2^{\,n}$, où A et B sont des constantes arbitraires, et r_1 et r_2 les racines (réelles) de l'équation caractéristique $X^2 = a\,X + b$

7. Définition de la transformée en Z d'une suite (u_n) :

   C'est la fonction f telle que $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} u_n \left(\dfrac{1}{z}\right)^n$

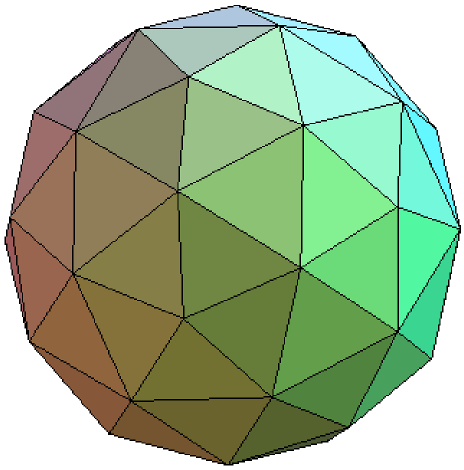
8. Calculer la transformée en Z de la suite (u_n) définie par $u_n = n(n-1)$:

C'est $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{z}\right)^n = \left(\frac{1}{z}\right)^2 \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\left(\frac{1}{z}\right)^{n-2}$.

Soit $S(t) = \sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)\, t^{n-2}$: C'est la dérivée seconde de $\sum_{n=0}^{\infty} t^n = \frac{1}{1-t}$ (rayon de convergence 1)

Donc $S(t) = \frac{2}{(1-t)^3}$ (rayon de convergence 1) et, pour $|z| > 1$, $f(z) = \frac{1}{z^2} S\left(\frac{1}{z}\right) = \frac{2}{z^2\left(1-\frac{1}{z}\right)^3} = \frac{2z}{(z-1)^3}$

9. Le polyèdre convexe ci-contre est composé de 80 faces, qui sont toutes des triangles équilatéraux.



a/ Combien a-t-il d'arêtes ? (expliciter la méthode)

Si on compte 3 arêtes par face $\times$ 80 faces, on compte chaque arête exactement 2 fois.

Donc nombre d'arêtes $= A = \frac{3 \times 80}{2} = 120$

b/ Citer la formule d'Euler pour les polyèdres convexes.
en déduire le nombre de sommets

Pour tout polyèdre convexe , $S + F - A = 2$, où S est le nombre de sommets, F le nombre de faces et A le nombre d'arêtes
Ici $F = 80, A = 120$ donc $S = 42$

c/ Soient S_5 le nombre de sommets où se rejoignent 5 faces
et S_6 le nombre de sommets où se rejoignent 6 faces
Trouver une relation entre $5S_5 + 6S_6$ et le nombre de faces.
Considérant que $S_5 + S_6$ est le nombre de sommets, en déduire S_5.

Si on compte 5 faces par sommet $\times$ S_5 sommets à 6 faces
plus 6 faces par sommet $\times$ S_6 sommets à 6 faces,
on compte chaque face exactement 3 fois,
donc $5S_5 + 6S_6 = 3 \times 80 = 240$ (1)
Comme $S_5 + S_6 = S = 42$, on a $5S_5 + 5S_6 = 5 \times 42 = 210$ (2)
En soustrayant (2) de (1) on otient $S_6 = 30$ et par suite $S_5 = 12$