ISEN LILLE – Section CIR1&CNB1 – 2019 / 2020	Mécanique TD5 et TD6 – Chutes avec frottement, applications du PFD

Exercice 1. Chute de grêle

Les grêlons sont des particules de glace dont les chutes en très grand nombre depuis certains nuages constituent la grêle. On a mesuré expérimentalement leur vitesse à l'arrivée au sol *(v_s).* Cette vitesse varie, en fonction de la masse du grêlon, entre $v_s = 15$ et $v_s = 100\ km.h^{-1}$.

On cherche à connaître le modèle mécanique permettant d'expliquer ces valeurs. Pour cela, on modélise le grêlon par une boule de glace (densité de la glace: $\rho_{glace} = 917\ kg.m^{-3}$) de rayon $R = 5\ mm$ qui chute d'un nuage situé à une altitude $h = 1500\ m$. On prendra g = 9,81 $m.s^{-2}$. On prendra un axe Oz descendant tel qu'à $t = 0$, $z = 0$ et $v = 0$.

On teste alors trois modèles mécaniques différents :

1. On néglige les forces de frottement fluide dues à l'air.

a) Déterminer $v = f(t)$ et $z = f(t)$.

b) Calculer t_c la durée de la chute et en déduire v_s.

c) Conclure sur la validité du modèle.

2. On considère une force de frottement fluide due à l'air de la forme $\vec{f} = -\alpha\vec{v}$ avec $\alpha = 6\pi R\eta_{air}$ où R est le rayon du grêlon et $\eta_{air} = 1,8.10^{-5}\ kg.m^{-1}.s^{-1}$ est la viscosité de l'air.

a) Établir l'équation différentielle en $v(t)$.

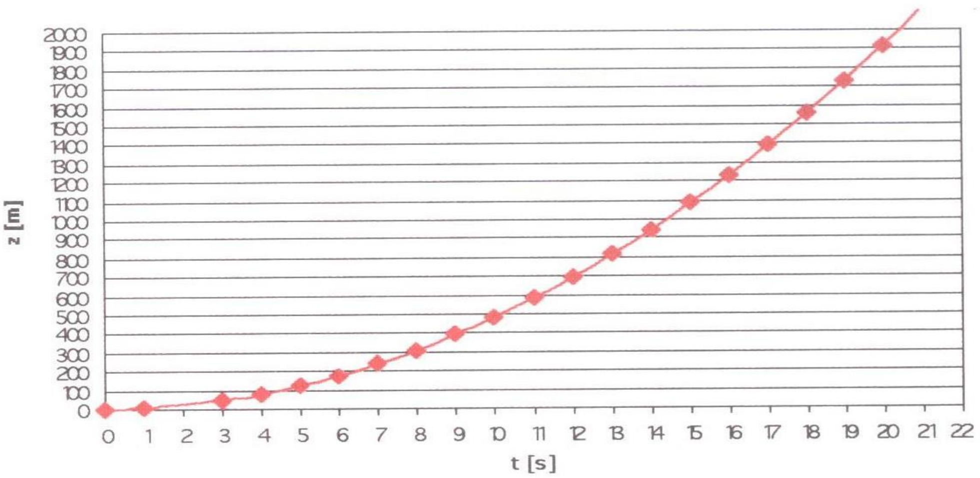
b) Résoudre cette équation et donner $v = f(t)$.

c) Montrer que le grêlon ne peut dépasser une vitesse limite v_l que l'on calculera.

d) Déterminer l'équation $z = f(t)$.

e) La fonction $z = f(t)$ est tracée sur le graphique de la figure ci-dessous. Déterminer une valeur approchée de t_c et en déduire v_s.

f) Conclure sur la validité du modèle.



3. On considère une force de frottement fluide due à l'air de la forme $\vec{f} = -\beta v\vec{v}$ avec $\beta = 0,225\pi R^2\rho_{air}$ où R est le rayon du grêlon et $\rho_{air} = 1,6\ kg.m^{-3}$ est la densité de l'air.

a) Établir l'équation différentielle en $v = f(t)$.

b) En posant $w(z) = v^2(z)$, montrer que l'équation précédente $v = f(t)$ peut s'écrire : $\frac{1}{2}\frac{dw}{dz} + \frac{\beta}{m}w = g$

On rappelle ici que pour une fonction $u = f(z(t))$: $\frac{du}{dt} = \frac{du}{dz}\frac{dz}{dt}$

c) Résoudre cette équation différentielle et en déduire l'équation $v = f(z)$.

d) Montrer que le grêlon ne peut dépasser une vitesse limite v_l que l'on calculera.

e) Calculer v_s.

f) Conclusion.

Exercice2. Montgolfière (extrait du sujet d'examen 2nde session 2019)

Une montgolfière est constituée d'un ballon sphérique de volume $V = 2145\ m^3$ ouvert vers le bas, donc en communication avec l'atmosphère, et d'une nacelle avec son équipement. Le volume V du ballon sera supposé constant. Un brûleur permet de réchauffer l'air à l'intérieur du ballon et de le maintenir à la température souhaitée.

La température extérieure est $\theta_e = 17{,}0°C$ et on chauffe l'air intérieur à la température $\theta_i = 35{,}0°C$.
La masse volumique de l'air dépend de la température, elle vaut $\rho_e = 1{,}21\ kg.m^{-3}$ à $\theta_e = 17{,}0°C$ et $\rho_i = 1{,}14\ kg.m^{-3}$ à $\theta_i = 35{,}0°C$ (à pression ambiante).

On rappelle que la poussée d'Archimède a pour expression générale $\overrightarrow{F_A} = -\rho V \vec{g}$, avec ρ la masse volumique du fluide dans lequel le système est plongé, V le volume du système et $\vec{g}$ l'accélération de la pesanteur, de valeur $g = 9{,}81\ m.s^{-2}$.

Tous les résultats numériques seront donnés avec **3 chiffres significatifs.**

1. La montgolfière est au sol, prête à partir.

1.1. Calculer l'intensité F_P du poids de l'air enfermé dans le ballon. Préciser la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{F_P}$ représentatif de ce poids.

1.2. Préciser la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{F_A}$ représentatif de la poussée d'Archimède sur le ballon. Vérifier que son intensité F_A est égale à $2{,}55.\ 10^4 N$.

1.3. On appelle masse limite soulevable M_m la masse maximale qui pourra être soulevée quand on supprime les liens avec le sol (enveloppe du ballon, nacelle, équipement, passager(s) éventuel(s)). Déduire la valeur M_m des deux questions précédentes.

2. Etude du mouvement d'ascension de la montgolfière.

On s'intéresse maintenant au mouvement d'ascension verticale de la montgolfière. On suppose que, quittant le sol à vitesse initiale nulle, elle s'élève verticalement dans l'atmosphère. On néglige les variations de pression, de température et d'accélération de la pesanteur dues à l'altitude.
Dans ce mouvement ascensionnel, la montgolfière est soumise aux forces suivantes :

- Le poids $\overrightarrow{F_P}$ de l'air à l'intérieur (masse M_P) de l'enveloppe,
- La poussée d'Archimède $\overrightarrow{F_A}$,
- Le poid $\vec{\Pi}$ de l'ensemble des équipements (nacelle, enveloppe, passager) dont la masse totale est $M = 130\ kg$,
- Une force $\overrightarrow{F_R}$ de frottements de l'air sur la montgolfière, verticale et dirigée vers le sol, d'intensité proportionnelle au carré de la vitesse de la montgolfière $F_R(t) = k\ v^2(t)$,
  k étant une constante $k = 60{,}0\ S.I.$ et $v(t)$ étant la valeur algébrique de la vitesse de la montgolfière à l'instant t, mesurée selon la verticale ascendante Oz.

Le mouvement est étudié selon un axe vertical Oz, de vecteur unitaire $\vec{\imath}$ dirigé vers le haut, l'origine O étant au sol. L'origine des temps t=0 est prise à l'instant où la montgolfière quitte le sol.

2.1. Ecrire sous forme vectorielle la relation fondamentale de la dynamique pour le mouvement du centre de masse de la montgolfière.

2.2. Que donne la projection de la relation précédente selon l'axe Oz ?

2.3. Montrer que l'équation précédente se met sous la forme d'une équation différentielle :
$\frac{dv(t)}{dt} + Av^2(t) = B$ où A et B sont des constantes dont on précisera l'expression. L'application numérique pour les valeurs de A et B n'est pas demandée.
Pour la suite du problème, on prendra : $A = 23{,}3.\ 10^{-3} m^{-1}$ et $B = 76{,}8.\ 10^{-3} ms^{-2}$

2.4. L'équation différentielle précédente peut être résolue analytiquement. On montre alors que la vitesse tend vers une valeur *constante*. En déduire la valeur de cette vitesse limite V_L en fonction de *A* et *B*.

Application numérique : calculer V_L numériquement.

2.5. Les graphes d'évolution de la vitesse v(t) et de l'altitude z(t) résultant de mesures réalisées toutes les 5 secondes avec des appareils embarqués sont donnés à la page suivante.

a) L'examen des graphes est-il en accord avec le modèle proposé précédemment ? Pourquoi ?

b) Dans l'intervalle de temps $0 < t < 15\ s$, on approxime $v(t)$ par une courbe linéaire. Comment s'appelle ce type de mouvement ? Quelle est approximativement la valeur de l'accélération ?

c) Déterminer le temps t_1 mis par la montgolfière pour que partant du sol, sa vitesse atteigne 95% de sa vitesse limite mesurée. Déterminer l'altitude correspondante z_1.

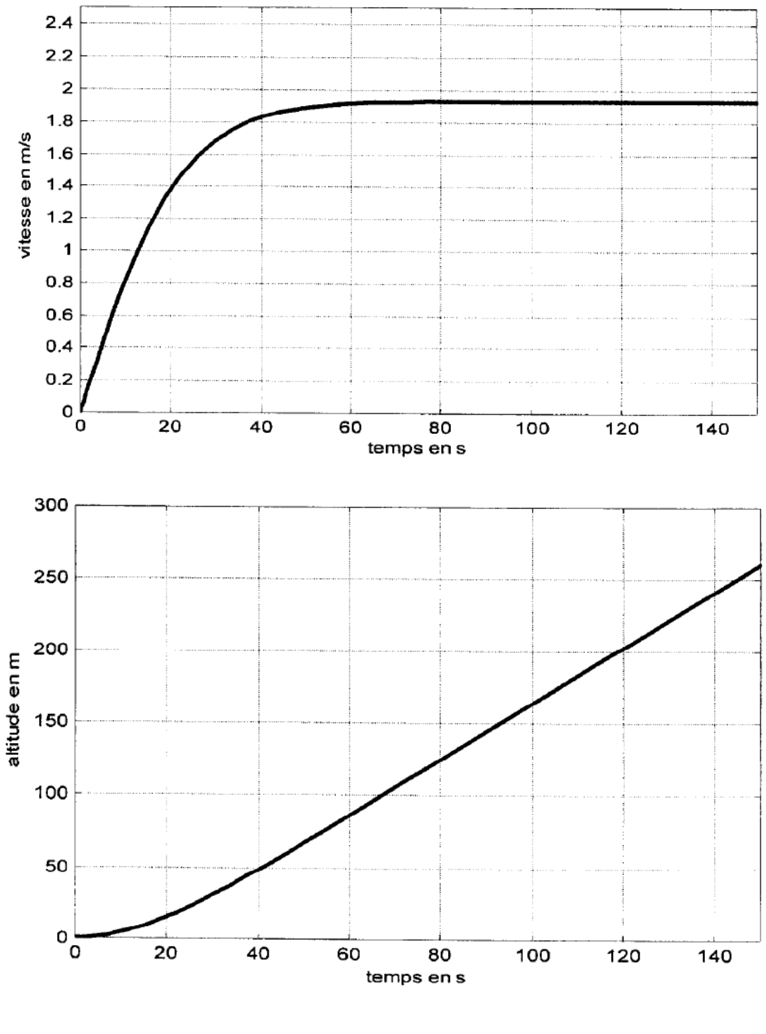
(2.6. non traitée)

2.7. Mouvement pour les altitudes $z > z_2 = 130\ m$.

a) Qu'est-ce qui caractérise le mouvement pour des altitudes z telles que $z > z_2 = 130\ m$ et comment s'appelle ce type de mouvement ?

b) Déterminer l'équation horaire $z(t)$ du mouvement de la montgolfière dans le repère de temps et d'espace proposé.

c) Quelle est la durée du mouvement entre les altitudes z_2 et $z_3 = 300\ m$?



Exercice3. (bonus) Frottements solides

On veut tracter un bloc de béton d'une tonne en le faisant glisser sur une surface plastique. Quelle force doit-on appliquer pour mettre en mouvement le bloc ? Quelle force minimale doit-on ensuite appliquer pour maintenir le mouvement ? Les coefficients de frottement dynamique et statique de l'interface pneu/béton sont respectivement 0.7 et 1.

Exercice 4. (bonus) (Extrait de la préparation au concours puissance alpha.**)**

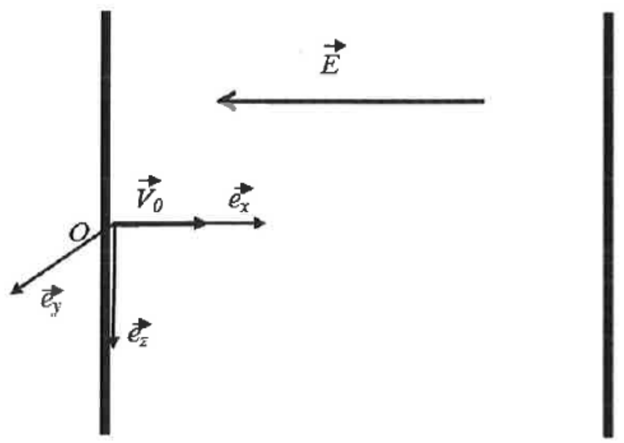
Déterminer si les affirmations a, b, c et d sont vraies ou fausses.

Particule chargée dans un champ électrique

Une micro goutte d'huile électrisée de masse m et de charge q pénètre en O à l'instant $t = 0$, avec une vitesse $\vec{v_0}$ horizontale, dans l'espace contenu entre deux plaques conductrices verticales chargées. Il y règne un champ électrique uniforme de valeur E.

Cette goutte possède un excédent de 10^6électrons. L'étude est menée dans le référentiel terrestre supposé galiléen.

Données: $m = 0,16\ mg$; $E = 10^7 V.m^{-1}$; charge électrique élémentaire: $e = 1,6.10^{-19}C$; l'intensité du champ de pesanteur terrestre est: $g = 10m.s^{-2}$



a) Cette goutte subit une force électrique horizontale dirigée vers la droite, de valeur: $F = 1,6.10^{-6}\ N$

b) La somme des forces appliquées à la goutte a une valeur égale à $(\sqrt{2} \times F)\ \mu N$

c) Les équations horaires de la goutte sont:

$$x(t) = \frac{F}{2m}t^2 + v_o t\ ;\ y(t) = 0\ ;\ z(t) = \frac{F}{2m}t^2$$

d) La goutte d'huile va être déviée vers le bas du dispositif.