

Programme

Elec1 Introduction et notions de base

Elec2 Analyse des circuits

Loi d'Ohm, de Kirchhoff, Millman
Equivalent Thévenin, Norton...

Elec3 Régime transitoire

Elec4 Régime sinusoïdal

Elec5 Introduction au filtrage

Elec6 Amplificateur opérationnel

XI. Résonance du circuit RLC série, résolution complète

= TD7

1. Introduction

On a déjà vu dans la section précédente une description courte du phénomène de résonance électrique.

Ici on va détailler un peu le calcul, car c'est un calcul type, qui permet aussi de faire le point sur le chapitre Régime Sinusoïdal, et constitue une bonne transition pour le chapitre suivant sur les filtres (un circuit RLC permet de réaliser un filtre passe bande, cf application radio).

Lorsque l'on parle de circuit RLC série, nous n'indiquons pas dans quel ordre les composants vont être reliés. On distinguera ici deux cas, ceux-ci seront présentés dans le premier paragraphe.

Nous verrons alors que le montage RLC série peut-être étudié en tension ou en intensité et qu'il y a donc existence de deux types de résonances aux caractéristiques différentes.

Objectifs :

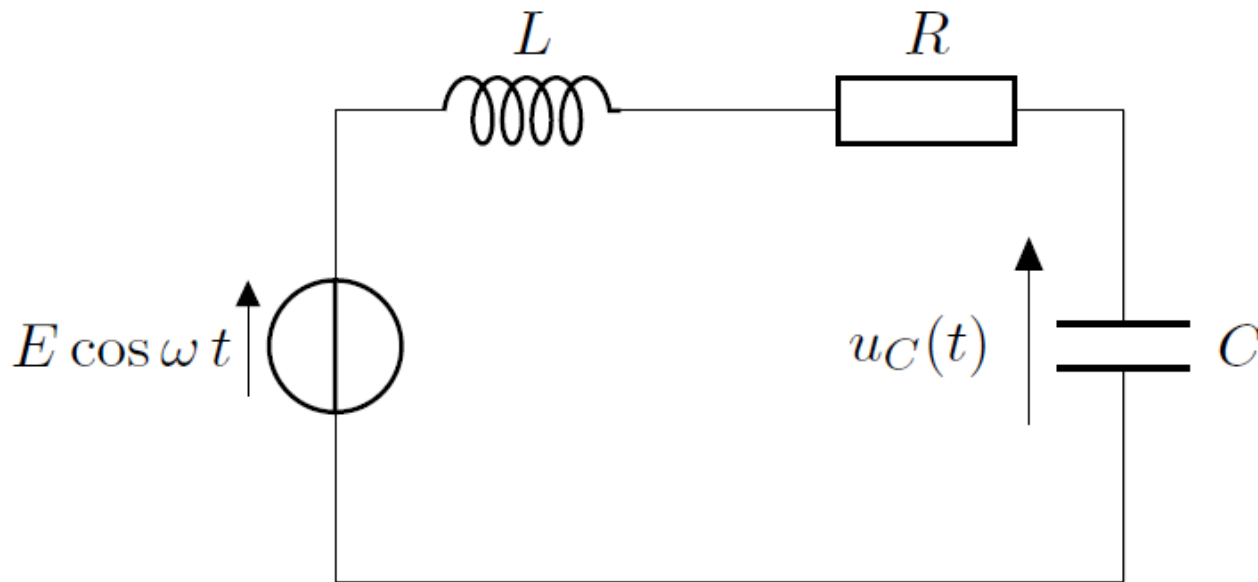
Repérer quelques méthodes de résolutions classiques, en électronique mais aussi au-delà

- Déterminer l'équation différentielle caractéristique d'un circuit RLC
- Savoir utiliser la notation complexe pour s'affranchir de la résolution directe de cette équation différentielle (détermination du régime permanent uniquement)
- Savoir calculer la phase, repérer l'astuce pour obtenir une expression valable pour toutes les fréquences
- Savoir évaluer la forme graphique d'une grandeur (utilisation de la dérivée, connaissance de la forme de quelques fonctions de base comme $1/x$ et \sqrt{x})

2. Présentation des deux montages étudiés

2.1. Etude de la tension aux bornes du condensateur

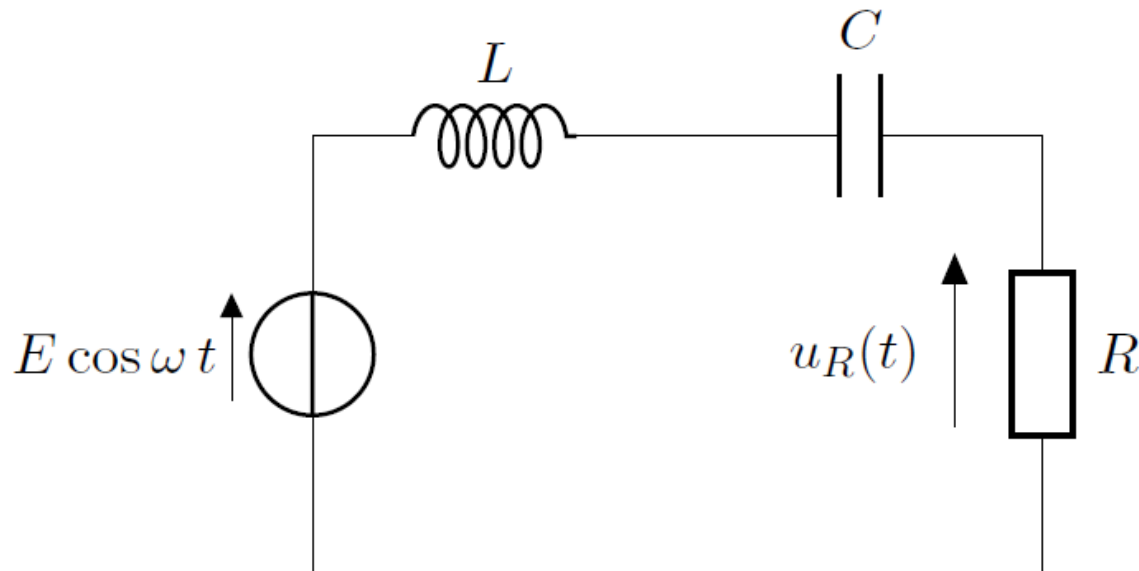
Le premier montage est celui où l'on enregistre la tension aux bornes du condensateur $u_C(t)$



Dans celui-ci,
on étudie en réalité la charge q du condensateur ($u_C = q/C$)

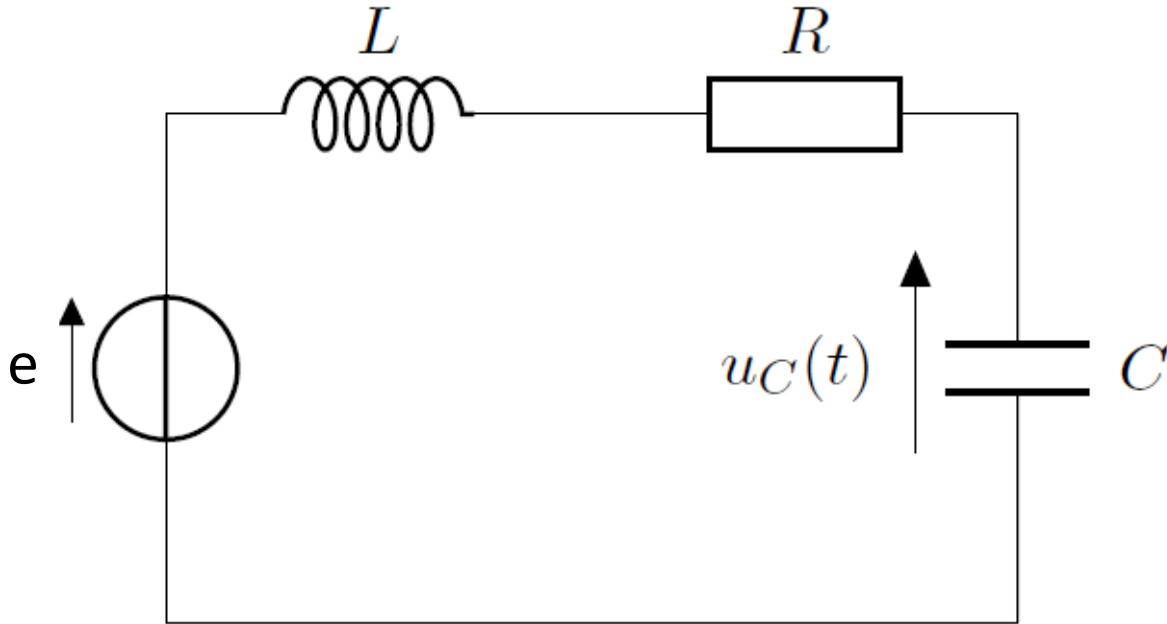
2.2. Etude de l'intensité via la tension aux bornes du resistor

On peut également enregistrer la tension aux bornes du conducteur ohmique, mais dans ce cas il faut intervertir condensateur et résistance pour ne pas avoir de problèmes de masse.



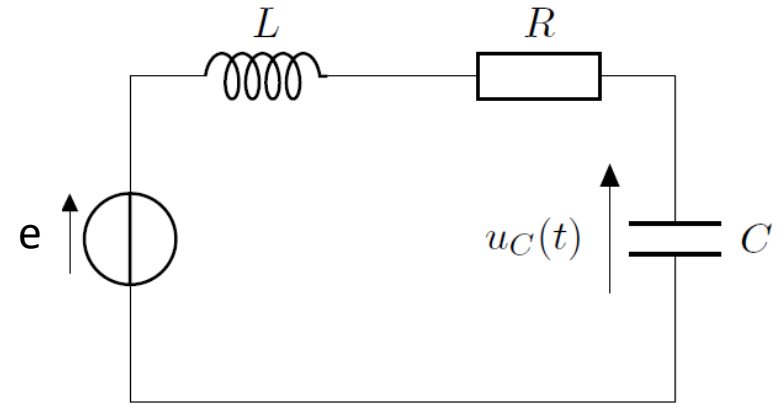
Cette tension est l'image de l'intensité du courant, à R près ($u_R = R i$)

3. Etude de la tension aux bornes du condensateur



A partir de la loi des mailles, déterminer l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$

3.1. Equation différentielle, régime transitoire, régime permanent



$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = e$$

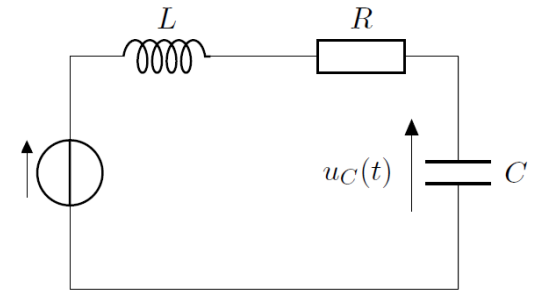
Solution ?

La solution de cette équation différentielle est la somme de la **solution de l'équation homogène** (équation différentielle avec second membre nul) et d'une **solution particulière**.

On rappelle que :

La solution de l'équation homogène correspond au **régime transitoire**

La solution particulière correspond au **régime permanent**

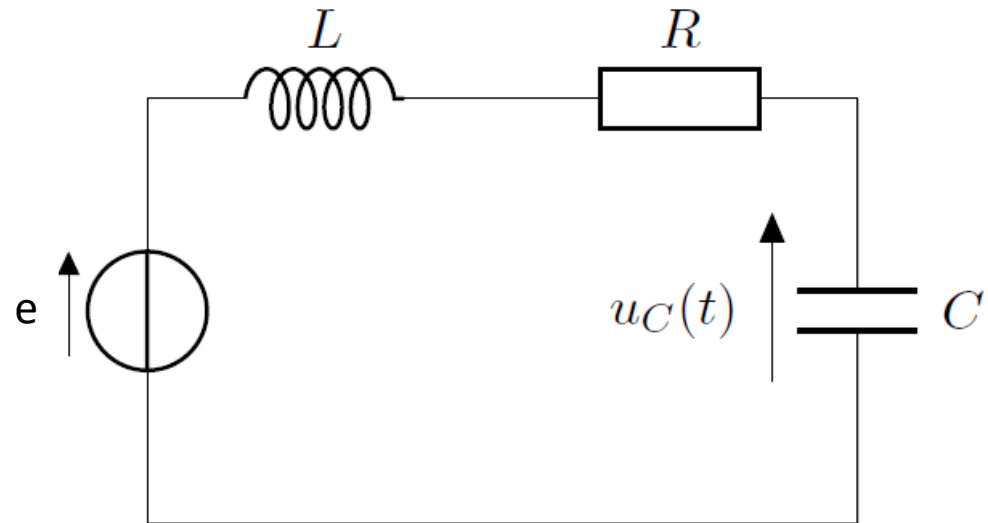


Nous connaissons la forme du régime transitoire puisqu'il a été étudié dans le chapitre précédent, de plus celui-ci est souvent bref.

Le but étant ici d'étudier le régime forcé, permanent (c'est dans celui-ci que l'on peut observer la résonance), **on ne s'intéressera qu'à la solution particulière.**

$$u_C + RC \frac{du_C}{dt} + LC \frac{d^2 u_C}{dt^2} = e$$

3.2. Solution particulière et notation complexe

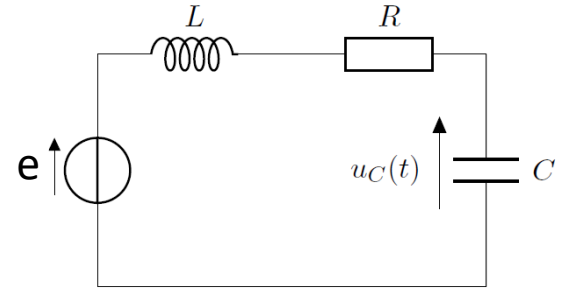


Expression de $\underline{u}_C(t)$?

A partir de l'équation différentielle, ou directement en utilisant le diviseur de tension, en notation complexe

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{Z}_C}{\underline{Z}_C + \underline{Z}_L + \underline{Z}_R} \underline{e}(t) = \frac{\frac{1}{jC\omega}}{\frac{1}{jC\omega} + jL\omega + R} \underline{e}(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$



Toute l'information physique, permettant de caractériser le signal réel, est contenue dans l'amplitude complexe \underline{U}_C de $\underline{u}_C(t)$:

$$\underline{U}_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

On va maintenant s'intéresser à l'**amplitude** du signal réel et à son **déphasage** (déphasage de $u_C(t)$ par rapport à $e(t)$)

3.2.1. Amplitude

$$\underline{U}_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

L'amplitude est donné par le module de l'amplitude complexe

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

On introduit les variables réduites vues en partie dans le chapitre 2 :

La pulsation propre du circuit $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

Une grandeur sans dimension $x = \frac{\omega}{\omega_0}$

Le facteur de qualité $Q = \frac{1}{R} \sqrt{\frac{L}{C}}$

On obtient :

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$\underline{U}_C = \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

3.2.2. Déphasage

Pour obtenir ϕ , on prend l'argument de \underline{U}_C :

$$\begin{aligned}\phi = \text{Arg}(\underline{U}_C) &= \text{Arg}\left(\frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}\right) \\ &= \text{Arg}(E) - \text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \\ &= -\text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega)\end{aligned}$$

POINT TECHNIQUE.

Pour finir le calcul on pourrait écrire $\tan \phi = \frac{RC\omega}{1 - LC\omega^2}$ et regarder le signe de

$\cos \phi$ avant de prendre l'arc-tangente. Mais le signe du cosinus dépend de la

fréquence (de la pulsation) puisqu'il dépend de $1 - LC\omega^2$

On obtiendrait alors deux expressions du déphasage selon la fréquence considérée.

Pour obtenir une seule expression, on utilise l'astuce de réécriture suivante :

$$\begin{aligned}
 \phi &= -\text{Arg}(1 - LC\omega^2 + jRC\omega) \\
 &= -\text{Arg}(j(RC\omega - j(1 - LC\omega^2))) \\
 &= -\text{Arg}(j) - \text{Arg}((RC\omega - j(1 - LC\omega^2))) \\
 &= -\frac{\pi}{2} - \arctan\left(\frac{-(1 - LC\omega^2)}{RC\omega}\right) \iff \phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{(1 - LC\omega^2)}{RC\omega}\right)
 \end{aligned}$$

Ainsi, sachant que $\text{Arg}(z z') = \text{Arg}(z) + \text{Arg}(z')$, on fait apparaître l'argument d'un nombre complexe dont la partie réelle est positive, donc le cosinus de l'argument de ce complexe est positif et on peut écrire $\phi' = \arctan()$.

En introduisant les variables réduites on obtient :

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan\left(\frac{1 - x^2}{\frac{x}{Q}}\right)$$

3.3. Etude du phénomène de résonance

Cette étude consiste à tracer, en fonction de la pulsation d'excitation ω (ou de la fréquence) ou en fonction de la variable réduite $x = \omega / \omega_0$, le comportement de l'amplitude du signal $u_C(t)$ et de son déphasage par rapport à $e(t)$.

3.3.1. Etude de l'amplitude

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

Si on veut connaître le sens de variation de U_C , on peut se référer à celui de la fonction :

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

Comme $U_C = \frac{1}{\sqrt{f(x)}}$ et comme la fonction $\sqrt{}$ est croissante, U_C varie de manière inverse à $f(x)$

$$f(x) = (1 - x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2$$

Etude de la fonction $f(x)$

Pour étudier $f(x)$, il nous faut sa dérivée :

$$f'(x) = 2 \times (-2x) \times (1 - x^2) + \frac{2x}{Q^2} = -4x + 4x^3 + \frac{2x}{Q^2} = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

La dérivée s'annule pour $x = 0$ et pour $x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} = 0$

Cette 2^e condition implique que $x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$ si et seulement si $1 - \frac{1}{2Q^2} > 0$ soit $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$.

→ On distingue alors deux cas : $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$ et $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$f'(x) = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

$$U_C = E / \sqrt{f}$$

Cas d'un petit facteur de qualité : $Q < \frac{1}{\sqrt{2}}$

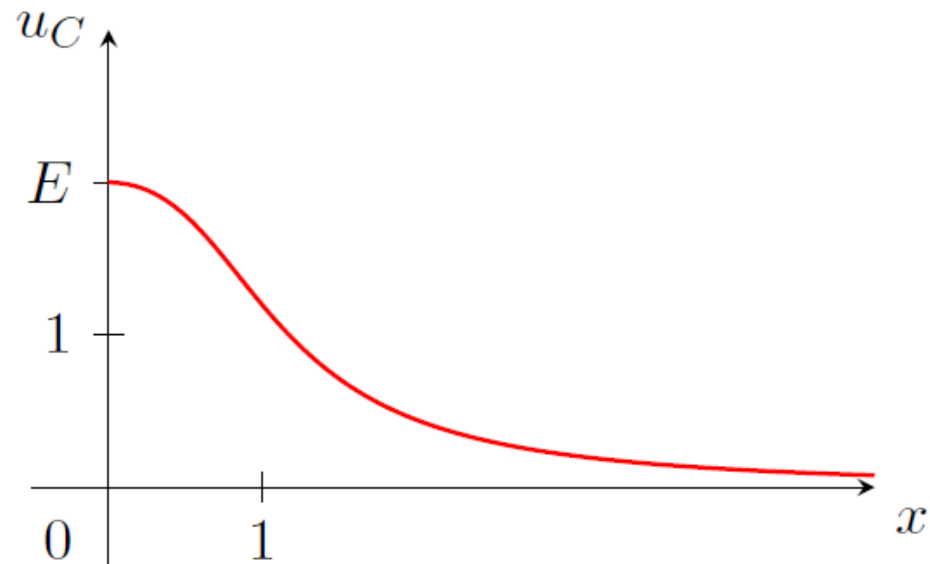
La dérivée $f'(x)$ ne s'annule que pour $x = 0$, $f(x)$ est croissante ($4x$ croissant et $x^2 - 1 + 1/(2Q^2)$ croissant) de $]0, +\infty[$.

Donc la fonction d'amplitude U_C est décroissante sur $]0, +\infty[$.

Les limites sont :

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow 0} U_C = E ;$$

$$\text{— } \lim_{x \rightarrow +\infty} U_C = 0 ;$$



→ Pas de résonance en tension aux bornes du condensateur

$$U_C = \frac{E}{\sqrt{(1-x^2)^2 + \left(\frac{x}{Q}\right)^2}}$$

$$f'(x) = 4x \left(x^2 - 1 + \frac{1}{2Q^2} \right)$$

$$U_C = E / \sqrt{f}$$

Cas d'un grand facteur de qualité : $Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$

Cette fois $f'(x)$ possède **deux racines**, $x = 0$ et $x = \sqrt{1 - 1/2Q^2}$, racine du polynôme du second degré contenu dans $f'(x)$.

$f'(x)$ est du signe du polynôme du second degré, donc du signe du "a" de ce polynôme partout sauf entre les racines. On sait aussi que U_C varie de façon inverse à $f(x)$.

On peut déduire le tableau suivant :

x	0	$x = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$	$+\infty$
$f'(x)$		-	+
$f(x)$	Décroissante		Croissante
U_C	Croissante	$U_{\max} = \frac{2Q^2 E}{\sqrt{4Q^2 - 1}}$	décroissante

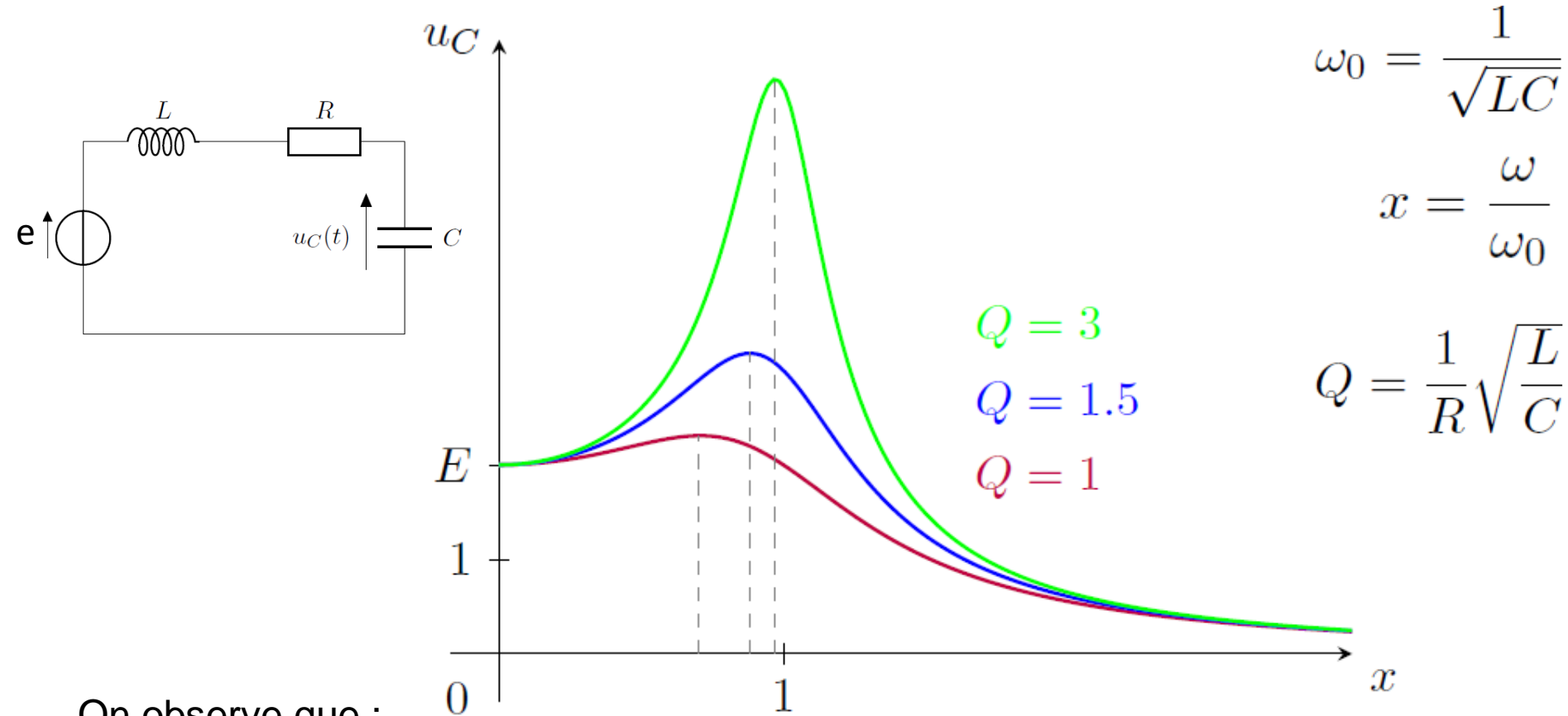
$$Q > \frac{1}{\sqrt{2}}$$

Il y a un maximum d'amplitude pour $x = x_r = \sqrt{1 - \frac{1}{2Q^2}}$

C'est ce phénomène que l'on appelle résonance en tension.

A la résonance, U_C est maximum et supérieur à E : c'est ce que l'on appelle la surtension.

Résonance de la tension en fonction de la pulsation et du facteur de qualité



On observe que :

- La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que le facteur de qualité est grand
- Plus Q est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit (x tend vers 1) en restant toujours inférieure à elle ;
- La surtension est d'autant plus grande que le facteur de qualité est grand.

3.3.1. Etude de la phase

Rappel de l'expression de la phase $\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1 - x^2}{\frac{x}{Q}} \right)$

On pose $f(x) = \left(\frac{1 - x^2}{\frac{x}{Q}} \right) = Q \left(\frac{1}{x} - x \right)$

Sa dérivée est : $f'(x) = Q \left(\frac{-1}{x^2} - 1 \right) = -Q \left(\frac{1}{x^2} + 1 \right)$

$f'(x)$ est négative quelque soit Q , la fonction $f(x)$ est donc décroissante.
La fonction $\arctan(x)$ étant croissante, au final ϕ décroît.

Calcul des limites de ϕ :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \phi = 0$$

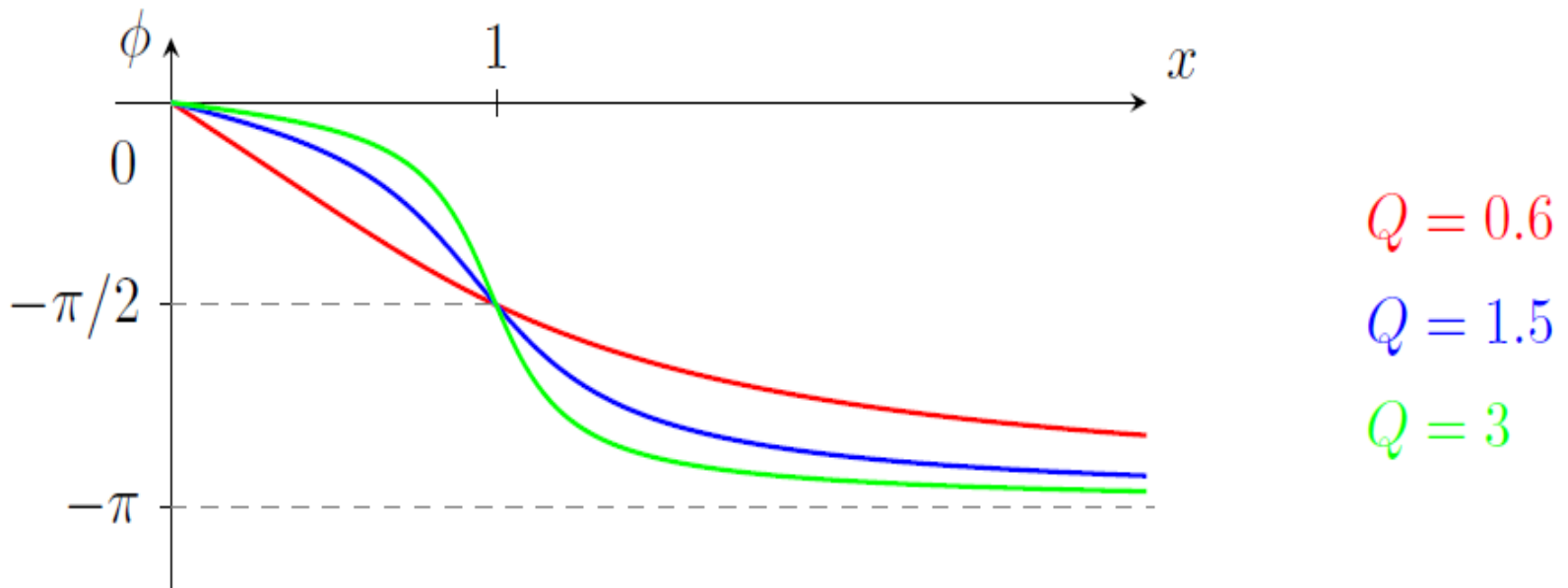
$$\lim_{x \rightarrow \infty} \phi = -\pi$$

Valeur de ϕ lorsque $x=1$ (soit $\omega = \omega_0$)

$$\phi(x = 1) = -\frac{\pi}{2}$$

$$\phi = -\frac{\pi}{2} + \arctan \left(\frac{1 - x^2}{\frac{x}{Q}} \right)$$

Cela nous donne une bonne idée de l'allure de la courbe de phase,
la voici :



Déphasage de $-\pi/2$ à la résonance

RESUME

1. Il y a résonance en tension aux bornes du condensateur si et seulement si le facteur de qualité $Q > 1/\sqrt{2}$.

Si $Q > 1/\sqrt{2}$:

- La résonance est d'autant plus aigüe (pic étroit) que Q est grand ;
- Plus Q est grand, plus la pulsation de résonance tend vers la pulsation propre du circuit en restant toujours inférieure à celle-ci
- La surtension (fait que $U_{max} > E$) est d'autant plus importante que le facteur de qualité est grand.

2. **Si $Q < 1/\sqrt{2}$** , la tension aux bornes du condensateur n'admet pas d'autre maximum que E en $x = 0$ et tend vers 0 quand x tend vers l'infini.

3. Le déphasage de la tension aux bornes du condensateur sur la tension d'entrée varie de 0 à $-\pi$ et est égale à $-\pi/2$ à la résonance lorsqu'elle existe.

4. Etude de l'intensité

4.1 Obtention de l'intensité à partir de la tension aux bornes du condensateur

Pour cette étude, nous nous servons de la relation entre la tension aux bornes du condensateur, que nous venons de déterminer, et l'intensité du courant.

$$i = C \frac{du_C}{dt} \quad (\text{en convention récepteur})$$

Ainsi, si la tension aux bornes du condensateur est la somme d'une tension correspondant au régime transitoire et d'une tension correspondant au régime permanent (forcé), il en est de même pour l'intensité.

Comme nous l'avons dit précédemment, **on ne s'intéresse qu'au régime forcé.**

$$\underline{u}_C(t) = \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

4.2. Solution particulière et notation complexe

$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega \underline{u}$$

On a donc directement \underline{i} à partir de \underline{u} :

$$\underline{i} = jC\omega \frac{\underline{e}(t)}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

Donc l'amplitude complexe est :

$$\boxed{\underline{I} = jC\omega \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}}$$

A partir de l'amplitude complexe, on peut déduire l'amplitude et la phase du signal réel

$$\underline{I} = jC\omega \frac{E}{1 - LC\omega^2 + jRC\omega}$$

4.2.1. Amplitude de l'intensité réelle

C'est le module de l'amplitude complexe :

$$I = \frac{EC\omega}{\sqrt{(1 - LC\omega^2)^2 + R^2C^2\omega^2}}$$

On passe alors en variable réduite :

$$I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x} \right)^2}}$$

$$I = \frac{\frac{E}{R}}{\sqrt{1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$

Etude de l'amplitude de l'intensité :

On pose

$$f(x) = 1 + Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right)^2$$

On calcule sa dérivée

$$f'(x) = 2Q^2 \left(x - \frac{1}{x}\right) \left(1 + \frac{1}{x^2}\right)$$

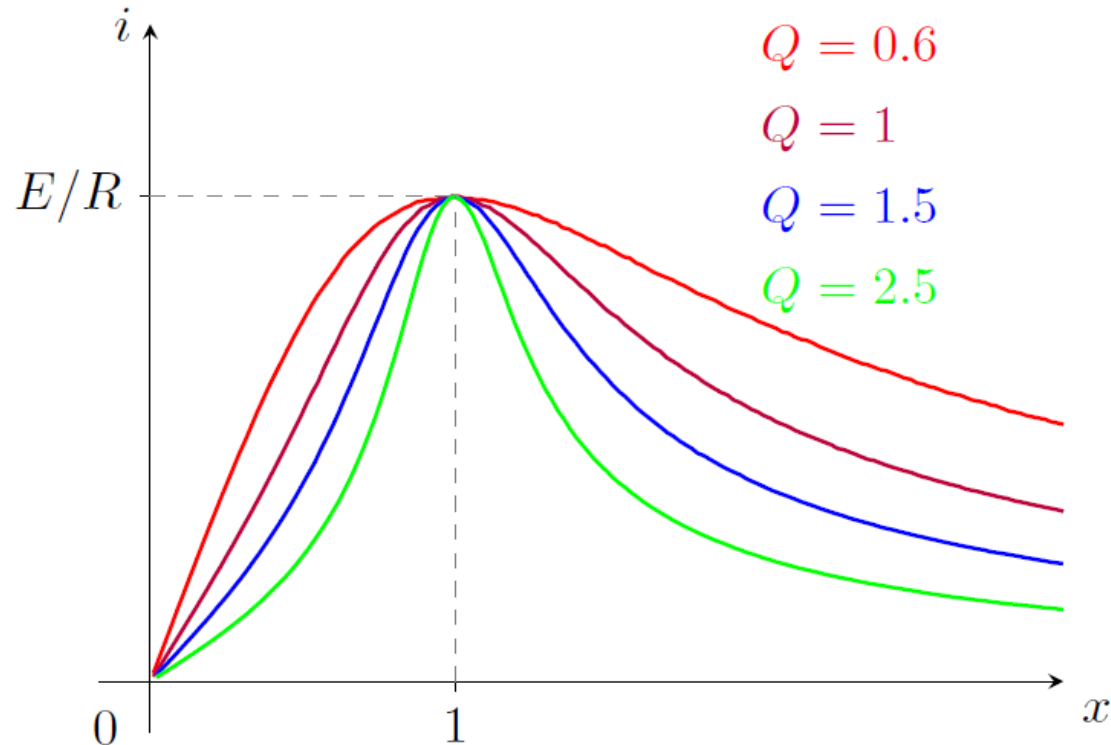
Cette dérivée s'annule pour $x = 1$, elle est négative dans l'intervalle $]0, 1[$ et positive dans l'intervalle $]1, +\infty[$;

— La fonction $f(x)$ est donc décroissante dans l'intervalle $]0, 1[$ et croissante dans l'intervalle $]1, +\infty[$;

— Comme la fonction $\sqrt{}$ est croissante, la fonction $I(x)$ varie inversement à la fonction $f(x)$ et est croissante dans l'intervalle $]0, 1[$ et décroissante dans l'intervalle $]1, +\infty[$;

— Ceci impose que $I(x)$ admet un maximum en $x = 1$ et que ce maximum vaut E/R .

Voici les courbes que l'on peut obtenir :



En résumé :

Il y a donc toujours résonance en intensité quelque soit la valeur du facteur de qualité, cette résonance a toujours lieu pour $\omega = \omega_0$ et le maximum atteint a toujours la valeur E/R .

4.2.2. Phase de l'intensité réelle

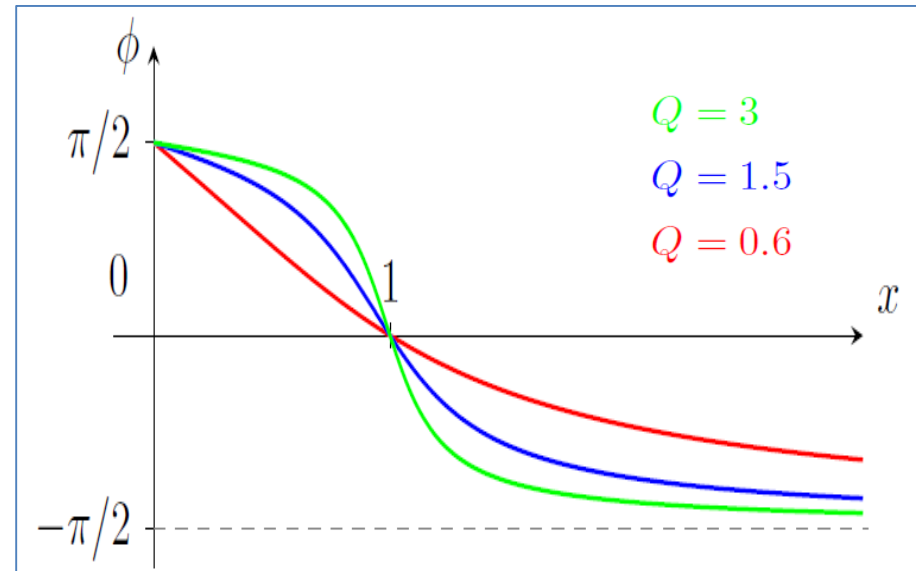
$$\underline{i} = C \frac{d\underline{u}}{dt} = jC\omega \underline{u}$$

Donc : $I e^{j\phi'} e^{j\omega t} = jC\omega U_C e^{j\phi} e^{j\omega t}$

Si on pose $I = C\omega U_C$

On obtient

$$e^{j\phi'} = j e^{j\phi}$$
$$\Leftrightarrow e^{j\phi'} = e^{j\frac{\pi}{2}} e^{j\phi}$$
$$\Leftrightarrow \phi' = \frac{\pi}{2} + \phi$$



On peut donc déduire la phase de $i(t)$ à partir de la phase de $u(t)$: les courbes sont de même forme mais décalées vers le haut de $\pi/2$:

5. Etude de l'impédance

Comme on l'a vu dans la section précédente (X.) : $\underline{u}(t) = \underline{Z} \underline{i}(t)$

$$\underline{Z} = R + jL\omega + \frac{1}{jC\omega}$$

L'impédance réelle, module de l'impédance complexe, est donc

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$

Que se passe t-il en fonction de la fréquence ?

- **En basse fréquence, $\omega \rightarrow 0$** , l'impédance tend vers l'infini à cause de la partie capacitive : cela induit également un déphasage de $-\pi/2$ entre la tension et l'intensité (un retard de la tension par rapport à l'intensité) ;
- **En haute fréquence, $\omega \rightarrow \infty$** , l'impédance tend également vers l'infini à cause de la partie inductive : cela induit un déphasage de $\pi/2$ entre la tension et l'intensité ;
- **A la résonance, lorsque $\omega = \omega_0$** , les parties capacitive et inductive se compensent, et l'impédance est une résistance : il n'y a pas de déphasage entre tension et courant.

$$Z = \sqrt{R^2 + \left(L\omega - \frac{1}{C\omega} \right)^2}$$