Exercice 1

a) Soit $\mathcal{R}$ une relation binaire. Établir la négation de :
$\mathcal{R}$ est réflexive ; $\mathcal{R}$ est symétrique ; $\mathcal{R}$ est transitive ; $\mathcal{R}$ est antisymétrique.

b) Caractériser la relation $\mathcal{R} = \{(a,a),\ (a,c),\ (c,a),\ (b,c)\}$ sur $E = \{a,b,c\}$.

c) Déterminer l'ensemble des relations binaires que l'on peut définir sur $E = \{a,b\}$.

d) Combien y a-t-il de relations binaires sur un ensemble ayant n éléments ?

Exercice 2

Soit $f : E \to F$ une fonction et considérons $\mathcal{P}(E)$, $\mathcal{P}(F)$ ordonnés par $\subseteq$.

a) Montrer que l'application $f_* : \mathcal{P}(E) \to \mathcal{P}(F)$ est croissante, où
$$f_*(A) := f(A) = \{\, f(a) \mid a \in A \,\}.$$

b) Peut-on en dire autant de $f^* : \mathcal{P}(F) \to \mathcal{P}(E)$ définie par
$$f^*(B) := f^{-1}(B) = \{\, a \in A \mid f(a) \in B \,\}\ ?$$

c) Expliciter tout ceci dans le cas : $E = \{1,2,3\}$, $F = \{a,b\}$,
$$f(1) = b, \quad f(2) = a, \quad f(3) = b.$$

Exercice 3

Pour $x, y \in \mathbf{N}$, on note
$$x \mid y \iff \exists_{n \in \mathbf{N}}\ \ y = nx.$$

a) Vérifier que l'on définit ainsi une relation d'ordre sur $\mathbf{N}$.

b) Pour chacun des sous-ensembles suivants, décrire (s'ils existent) : le plus petit élément, le plus grand, les minorants, majorants, borne supérieure, inférieure.
$$A = \{2,3\}, \quad B = \{2,4,8\}, \quad C = \mathbf{N}, \quad D = \mathbf{N} \setminus \{0\}.$$

Exercice 4

Si on a deux ensembles ordonnés : $(X, \preceq)$ et $(Y, \trianglelefteq)$, on définit sur le produit cartésien
$$(x,y) \leqslant (x',y') \iff \begin{cases} & (x \neq x' \quad \text{et} \quad x \preceq x') \\ \text{ou} & (x = x' \quad \text{et} \quad y \trianglelefteq y') \end{cases}$$

a) Montrer que $\leqslant$ est une relation d'ordre, appelée *ordre lexicographique* sur $X \times Y$.

b) Si $\preceq$ et $\trianglelefteq$ sont totaux, montrer que $\leqslant$ l'est également.

c) Dans le cas où $X = Y = \mathbf{R}$ muni de l'ordre usuel : représenter l'ensemble des couples (x,y) supérieurs à $(1,2)$.

Exercice 5

Un ensemble est dit *bien ordonné* si et seulement toute partie non-vide admet un plus petit élément.

a) Donner un exemple et un contre-exemple d'ensembles bien ordonnés.

b) Montrer qu'un ensemble bien ordonné est nécessairement totalement ordonné.

c) Montrer que la réciproque est fausse en exhibant un ensemble totalement ordonné qui ne soit pas bien ordonné.

Exercice 6

E est un ensemble et $A \subset E$. On pose sur $\mathcal{P}(E)$ la relation $\mathcal{R}$ définie par :
$$X \,\mathcal{R}\, Y \iff A \cap X = A \cap Y.$$

a) Montrer que $\mathcal{R}$ est une relation d'équivalence.

b) Que se passe-t-il si $A = \varnothing$? Et si $A = E$?

Exercice 7

Déterminer les classes d'équivalence de la relation d'équivalence sur $E = \{a,b,c,d\}$:
$$\mathcal{R} = \{(a,a),\ (b,b),\ (c,c),\ (d,d),\ (a,c),\ (a,d),\ (c,d),\ (c,a),\ (d,a),\ (d,c)\}.$$

Exercice 8

Soit E l'ensemble des applications de $\mathbf{R}_+$ dans $\mathbf{R}$; pour f et g dans E, on pose :
$$\forall (f,g) \in E^2\ ,\ (\, f \,\mathcal{R}\, g) \iff (\exists A > 0 : \forall x \geq A\ ,\ f(x) = g(x)\,)$$
Cette relation est-elle une relation d'équivalence ?

Exercice 9

La relation $\mathcal{R}$ définie sur $\mathbf{R}^2$ par :
$$(x,y)\,\mathcal{R}\,(x',y') \iff xy = x'y'$$
est-elle une relation d'équivalence ? Si c'est le cas, déterminer la classe de $(1,1)$.

Exercice 10

a) Soit $f : E \to F$ une fonction. Montrer que la relation
$$x \,\mathcal{R}\, y \iff f(x) = f(y)$$
est une relation d'équivalence sur E.

b) En fait : montrer que toute relation d'équivalence sur E est de la forme précédente.