Maths – automne 2009

Examen récapitulatif

Consignes

- L'épreuve dure 2h et comporte 6 questions sur 2 pages.
- L'usage de la calculatrice est interdit (et inutile).
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant votre raisonnement et mentionnant les résultats utilisés.
- Bon succès !

Géométrie et algèbre linéaire

1. Déterminer la distance dans $\mathbf{R}^3$ entre le point $B\begin{pmatrix}1\\2\\3\end{pmatrix}$ et le plan $\mathcal{P}$ passant par $A\begin{pmatrix}1\\1\\4\end{pmatrix}$ dirigé par les vecteurs
$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix}0\\-1\\0\end{pmatrix} \text{ et } \boldsymbol{v} = \begin{pmatrix}1\\2\\-1\end{pmatrix}.$$

2. a) Rappeler les formules permettant de développer le déterminant d'une matrice carrée selon l'une de ses lignes ou colonnes (*formules de Lagrange*).

   b) On considère une matrice carrée de taille $n \times n$ à coefficients réels *variables*
$$X = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ x_{21} & x_{22} & \dots & x_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}.$$
   Calculer la dérivée partielle du déterminant de X par rapport à son entrée x_{ij}.

   c) Supposons maintenant que chacune des entrées x_{ij} de X dépend d'un paramètre réel t et notons
$$X^{[i]} = \begin{pmatrix} x_{11} & x_{12} & \dots & x_{1n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ {x_{i1}}' & {x_{i2}}' & \dots & {x_{in}}' \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ x_{n1} & x_{n2} & \dots & x_{nn} \end{pmatrix}$$
   la matrice obtenue de X en dérivant par rapport à t chacune des entrées de sa i^{e} ligne. Montrer que
$$(\text{dét}\, X)' = \sum_{i=1}^{n} \text{dét}\, X^{[i]}.$$

Calculs rénaux

3. a) Déterminer l'allure générale ainsi que les points stationnaires de la courbe paramétrée
$$\mathcal{C} : \begin{cases} x(t) = 3\cos t - \cos 3t \\ y(t) = 3\sin t - \sin 3t \end{cases} \qquad (t \in \mathbf{R}),$$
   appelée *néphroïde* en raison de sa forme rappelant vaguement celle d'un rein.

b) Calculer la longueur d'arc de cette courbe entre $t = 0$ et $t = \pi$.

4. Soit R la région du plan $\mathbf{R}^2$ contenant l'origine et délimitée par $\mathcal{C}$ (frontière comprise). Quelles sont les valeurs extrêmes sur R de la fonction

$$f(x, y) = x^2 + y^2 - y \ ?$$

Développements en base quelconque

Soit :

- β un nombre réel tel que $\beta > 1$,
- M un entier naturel,
- $D = \{0, 1, 2, \ldots, M\}$ l'ensemble des $M + 1$ premiers entiers naturels et
- $\mathcal{S} = D^{\mathbf{N}^*}$ l'ensemble des suites $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots)$ d'éléments de D.

5. a) Démontrer que pour toute suite $\mathbf{d} \in \mathcal{S}$ d'éléments de D, la série

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{d_n}{\beta^n} = \frac{d_1}{\beta} + \frac{d_2}{\beta^2} + \cdots + \frac{d_n}{\beta^n} + \cdots$$

converge, et ce vers un nombre réel compris dans l'intervalle $[0, \frac{M}{\beta-1}]$.

Pour $\mathbf{d} \in \mathcal{S}$, notons $\sigma_\beta(\mathbf{d})$ la somme de la série précédente. Nous obtenons donc ainsi une application

$$\sigma_\beta : \ \mathcal{S} \longrightarrow \left[0, \frac{M}{\beta - 1}\right], \qquad \mathbf{d} \mapsto \sigma_\beta(\mathbf{d}).$$

b) Soit $d \in D$ un entier fixé et considérons la suite constante $\mathbf{d} = (d, d, d, \ldots)$. Que vaut $\sigma_\beta(\mathbf{d})$?

c) Quelle est la valeur de $\sigma_\beta(\mathbf{d})$ lorsque $\beta = \frac{1+\sqrt{5}}{2}$ et $\mathbf{d} = (d_n)_{n=1}^{\infty}$ est la suite définie par

$$d_n = \frac{1 - (-1)^n}{2} = \begin{cases} 1 & \text{si } n \text{ est impair,} \\ 0 & \text{si } n \text{ est pair ?} \end{cases}$$

6. Pour simplifier, supposons maintenant que β est un entier et que $M = \beta - 1$. Étant donné un réel $x = x_1 \in [0, 1]$, on peut alors toujours trouver un entier $d_1 \in D$ tel que

$$0 \leqslant x_1 - \frac{d_1}{\beta} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

En répétant le processus avec $x_2 = \beta x_1 - d_1$, on trouve un entier $d_2 \in D$ tel que

$$0 \leqslant x_2 - \frac{d_2}{\beta} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

Ainsi de suite, on construit récursivement (x_{n+1}, d_{n+1}) à partir de (x_n, d_n) en posant $x_{n+1} = \beta x_n - d_n$ et en trouvant un entier $d_{n+1} \in D$ tel que

$$0 \leqslant x_{n+1} - \frac{d_{n+1}}{\beta} \leqslant \frac{1}{\beta}.$$

a) Avec la suite $\mathbf{d} = (d_1, d_2, \ldots)$ construite comme ci-haut à partir de x, montrer par induction sur N que

$$\left| x - \sum_{n=1}^{N} \frac{d_n}{\beta^n} \right| \leqslant \frac{1}{\beta^N}.$$

b) En conclure que $x = \sigma_N(\mathbf{d})$ et la surjectivité de $\sigma_\beta : \mathcal{S} \to [0, 1]$.

c) L'application σ_β est-elle injective ?

[Indication : considérer $\mathbf{d}_1 = (1, 0, 0, 0, \ldots)$ et $\mathbf{d}_2 = (0, \beta - 1, \beta - 1, \beta - 1, \ldots)$]