

Noircissez sur la feuille-réponse l'*unique* meilleure réponse à chaque question.

Calculatrice non programmable permise bien que peu utile.

1. Les *courbes intégrales* du champ de vecteurs  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$  sont :

- (1) ☐ des demi-droites
- (2) ☐ des hyperboles
- (3) ☐ des cercles
- (4) ☐ des paraboles
- (5) ☐ aucune de ces réponses

2. Les *courbes isopotentielles* du champ de vecteurs  $\mathbf{F}(x, y) = (x, y)$  sont :

- (1) ☐ des demi-droites
- (2) ☐ des hyperboles
- (3) ☐ des cercles
- (4) ☐ des paraboles
- (5) ☐ aucune de ces réponses

3. Soit  $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs de classe  $\mathcal{C}^1$  défini sur un ouvert simplement connexe  $\mathcal{U}$  de  $\mathbf{R}^3$ . Lequel des énoncés suivants n'est pas équivalent aux autres ?

- (1) ☐  $\mathbf{rot}(\mathbf{F}) = \mathbf{0}$  sur  $\mathcal{U}$
- (2) ☐ pour toute courbe fermée  $\mathcal{C} \subseteq \mathcal{U}$ , on a  $\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot d\mathbf{r} = 0$
- (3) ☐  $\mathbf{F}$  est conservatif
- (4) ☐ il existe une fonction  $\phi : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$  de classe  $\mathcal{C}^2$  pour laquelle  $\mathbf{F} = \nabla\phi$
- (5) ☐  $\text{div}(\mathbf{F}) = 0$  sur  $\mathcal{U}$

4. Le rotationnel du champ de vecteurs  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y, -yz, \sin xy)$  vaut

- (1) ☐  $(0, 0, 0)$
- (2) ☐  $(x \cos xy + y, -y \cos xy, 1)$
- (3) ☐  $(1, -z, 0)$
- (4) ☐  $(\sin xy, x - z, y)$
- (5) ☐ aucune de ces réponses

5. Soit  $\vec{\omega}$  le champ de vecteurs défini par

$$\vec{\omega}(x, y) = \frac{-y\mathbf{i} + x\mathbf{j}}{x^2 + y^2}.$$

Que vaut la circulation de  $\vec{\omega}$  le long du cercle  $\mathcal{C} : (\cos t, \sin t)$ ,  $0 \leq t \leq 2\pi$  ?

- (1) ☐  $-2\pi$
- (2) ☐  $-\pi$
- (3) ☐  $0$
- (4) ☐  $\pi$
- (5) ☐  $2\pi$

6. Le champ de vecteurs  $\mathbf{F}(x, y) = (2xy, x^2)$  est conservatif. Calculez sa circulation le long de l'arc de cercle :

$$\mathcal{C} : (\cos t, \sin t), \quad 0 \leq t \leq \frac{\pi}{4}.$$

- (1) ☐  $-1$
- (2) ☐  $0$
- (3) ☐  $\frac{\pi}{4}$
- (4) ☐  $\frac{1}{2\sqrt{2}}$
- (5) ☐  $2$

7. Calculer le flux du champ de vecteurs  $\mathbf{F}(x, y, z) = (x + y^2, y + z^2, z + x^2)$  à travers la surface du cube  $[0, 1] \times [0, 1] \times [0, 1]$  (orientée par la normale extérieure).

(1) ☐ -2      (2) ☐ 0      (3) ☐ 3      (4) ☐  $2\pi$       (5) ☐ aucune de ces réponses

8. Soit  $\mathbf{F} : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}^3$  un champ de vecteurs et  $\lambda : \mathcal{U} \rightarrow \mathbf{R}$  une fonction, tous deux de classe  $\mathcal{C}^1$ , définis sur un ouvert  $\mathcal{U}$  simplement connexe. Donner une condition nécessaire et suffisante pour que  $\lambda \mathbf{F}$  soit conservatif.

(1) ☐  $\mathbf{rot}(\lambda \mathbf{F}) = \nabla \lambda$   
 (2) ☐  $\nabla \lambda + \lambda \mathbf{F} = \mathbf{0}$   
 (3) ☐  $\text{div}(\mathbf{F}) = \lambda$   
 (4) ☐  $\nabla \lambda \wedge \mathbf{F} = -\lambda \mathbf{rot}(\mathbf{F})$   
 (5) ☐  $\nabla \lambda \cdot \mathbf{F} = 0$

9. Parmi les régions suivantes, laquelle n'est *pas* simplement connexe ?

(1) ☐  $\mathbf{R}^2$       (2) ☐  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, 0)\}$       (3) ☐  $\mathbf{R}^2 \setminus \{(0, y) \mid y \geq 0\}$   
 (4) ☐  $\mathbf{R}^3$       (5) ☐  $\mathbf{R}^3 \setminus \{(0, 0, 0)\}$

10. Que vaut l'intégrale impropre  $\int_1^\infty \left( e^{-2x} - \frac{1}{x^4} \right) dx$  ?

(1) ☐ 0      (2) ☐  $\frac{1}{3}$       (3) ☐  $\frac{1}{2}$       (4) ☐  $\frac{1}{6}$       (5) ☐ elle diverge

11. La longueur totale de la courbe paramétrée en coordonnées polaires  $r(\theta) = e^{-\theta}$  ( $\theta \in [0, +\infty[$ ) vaut

(1) ☐ 0      (2) ☐ 1      (3) ☐  $\sqrt{2}$       (4) ☐  $2\pi$       (5) ☐  $+\infty$

12. Pour quelles valeurs de  $\alpha \in \mathbf{R}$  l'intégrale impropre  $\int_0^\infty x^\alpha dx$  est-elle convergente ?

(1) ☐  $\alpha > 1$       (2) ☐  $\alpha < 1$       (3) ☐  $\alpha \geq 1$       (4) ☐  $\alpha \leq 1$       (5) ☐ aucune

13. L'intégrale impropre  $\int_0^\infty \frac{x^2 - 3x + 1}{x^4 + 1} dx$  est

(1) ☐ absolument convergente      (2) ☐ semi-convergente      (3) ☐ divergente  
 (4) ☐ on ne peut pas dire

14. L'intégrale impropre  $\int_0^\infty \frac{\cos x}{x} dx$  est

(1) ☐ absolument convergente      (2) ☐ semi-convergente      (3) ☐ divergente  
 (4) ☐ on ne peut pas dire

15. Culture générale : de quelle planète viennent les wookiees ?

(1) ☐ Kashyyyk      (2) ☐ Alderaan      (3) ☐ Hoth      (4) ☐ Dagobah      (5) ☐ Tatooine