Algèbre et combinatoire $\mathcal{C}\,i\,\mathbb{R}^2$

7 avril 2020

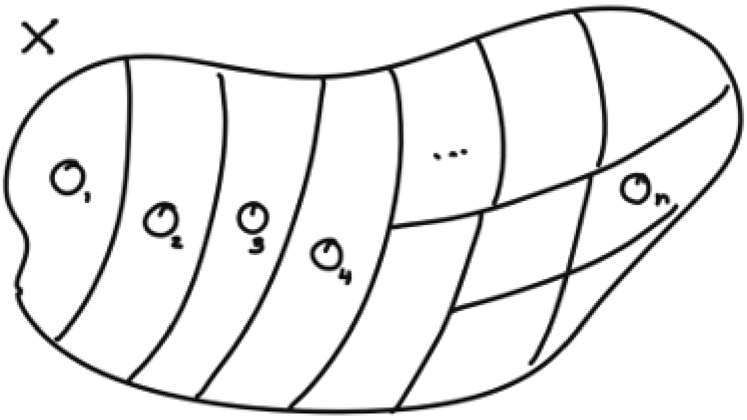
Complément: formule de Cauchy-Frobenius

Soit G un groupe fini agissant sur un ensemble fini X. On sait que

$$x \sim y \iff \exists_{g \in G}\ y = g \star x$$

définit une relation d'équivalence sur X, dont les classes d'équivalence sont les orbites de l'action

$$O_1, \ldots, O_n.$$



Puisqu'on a une partition en classes disjointes, on sait au niveaux de cardinaux que

$$|X| = |O_1| + \cdots + |O_n| = \sum_{i=1}^{n} |O_i|.$$

La *formule de Cauchy-Frobenius* (aussi parfois appelée *lemme de Burnside*) permet d'accéder directement au nombre n d'orbites dans cette décomposition:

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g \in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

où $\mathrm{Fix}(g) = \{x \in X \mid g \star x = x\}$ désigne l'ensemble des éléments de X fixés par un élément $g \in G$.

Remarque*: Dans le cas où l'action de G sur X est _sans points fixes*, i.e. que pour tout $g \neq 1$ on a $\mathrm{Fix}(g) = \varnothing$, la formule se réduit au cas simple où toutes les orbites ont le cardinal de G:

$$n = \frac{|X|}{|G|}.$$

Dans le cas général, il faut tenir compte des contributions des éléments ayant des points fixes:

$$n = \frac{|X|}{|G|} + \frac{1}{|G|} \sum_{g \neq 1} |\mathrm{Fix}(g)|,$$

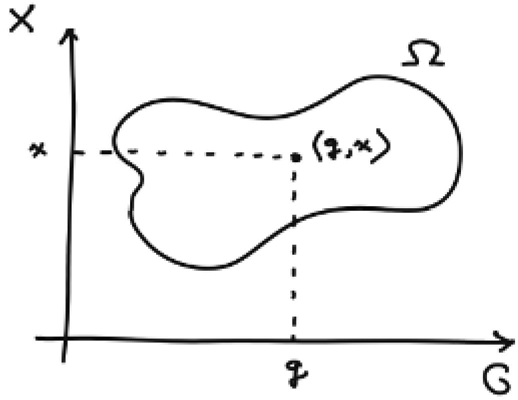
on peut donc penser au second terme comme à un « terme de correction » permettant de prendre en compte correctement les éléments de X ayant des stabilisateurs non triviaux.

Preuve

L'idée est d'un certain point de vue de se ramener à la situation où G agit sans point fixe en introduisant un ensemble potentiellement plus gros que X permettant de prendre en compte chaque élément avec une multiplicité correspondant à la taille de son stabilisateur. Considérons donc l'ensemble

$$\Omega = \left\{ (g,x) \in G \times X \mid g \star x = x \right\}$$

et dénombrons-le de deux façons différentes (théorème de Fubini pour les ensembles finis !).



D'une part: si on découpe Ω en tranches « horizontales » (à x constant) on trouve

$$|\Omega| = \sum_{x\in X} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in O_i} |\mathrm{Stab}(x)| = \sum_{i=1}^{n} \sum_{x\in O_i} \frac{|G|}{|O_i|} = \sum_{i=1}^{n} |G| = n|G|.$$

D'autre part: si on découpe Ω en tranches « verticales » (à g constant) on trouve directement

$$|\Omega| = \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|$$

et on conclut en comparant ces deux expressions:

$$n = \frac{1}{|G|} \sum_{g\in G} |\mathrm{Fix}(g)|.$$

Pour quelques exemples d'application (en plus de ceux du TD), voir

J.-P. Delahaye, *Miraculeux lemme de Burnside*, Pour la science, décembre 2006