D.S. de Math n° 1
durée : 2 heures

- La calculatrice est interdite.
- Le sujet comporte une feuille recto-verso.
- Utilisez les brouillons à votre disposition afin de rendre des copies sans rature ni faute d'orthographe.
- Rédigez clairement et concisément vos réponses et encadrez les résultats importants.
- Les questions qui nécessitent des réponses sont précédées d'un numéro que vous reporterez sur vos copies

---

I. Distance entre deux droites

On se situe dans l'espace physique à trois dimensions identifié à $\mathbb{R}^3$.

1. On donne deux points A et B et deux vecteurs non-nuls u et v. Calculer, en fonction de A, B, u et v, la distance entre $\mathcal{D}_1$ (passant par A dirigée par u) et $\mathcal{D}_2$ (passant par B et dirigée par v).
   (indication : vous traiterez à part le cas où u et v sont colinéaires...)
2. On définit maintenant les droites $\mathcal{D}_1$ et $\mathcal{D}_2$ par les équations cartésiennes ci-dessous ; calculer la distance qui les sépare.

$$\mathcal{D}_1 \left\{ \begin{array}{rrrrcl} x & & +2z & -43 & = & 0 \\ 15x & -4y & & -91 & = & 0 \end{array} \right. \qquad \mathcal{D}_2 \left\{ \begin{array}{rrrrcl} 3x & -y & & +2 & = & 0 \\ -9x & +3y & -z & +10 & = & 0 \end{array} \right.$$

II. Une vague histoire de point d'équilibre

Dans ce problème, les parties ne sont pas indépendantes.

A. Définition du barycentre

Dans l'espace à deux dimensions, identifié à $\mathbb{R}^2$, on donne trois points A_1, A_2 et A_3 par leurs coordonnées respectives $(x_1, y_1), (x_2, y_2)$ et (x_3, y_3).

1. Comment peut-on tester simplement le fait que ces trois points sont alignés ou non (donner une équation simple portant sur les coordonnées) ?

Hypothèse 1 : on suppose désormais que A_1, A_2 et A_3 sont non-alignés. On dit qu'ils constituent un **repère barycentrique** du plan.

On définit maintenant trois réels (appelés **poids**) : α_1, α_2 et α_3 et une fonction :

$$\begin{array}{rccl} f : & \mathbb{R}^2 & \longrightarrow & \mathbb{R}^2 \\ & M & \longmapsto & \displaystyle\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \overrightarrow{MA_i}. \end{array}$$

2. Montrer que si $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 0$, alors f est constante.
3. La réciproque est-elle vraie ?

Hypothèse 2 : on suppose maintenant que $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i \neq 0$

4. Montrer qu'il existe un unique point G tel que $f(G) = 0$, et déterminer $\overrightarrow{OG}$ en fonction des vecteurs $\overrightarrow{OA_i}$.

Le point G s'appelle le **barycentre** des points pondérés $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2)$ et (A_3, α_3).

5. Montrer qu'on ne change pas le barycentre en multipliant tous les scalaires α_i par une même constante non-nulle.

B. Recherche de coordonnées barycentriques

On cherche maintenant à résoudre le problème inverse : connaissant un point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ du plan, on cherche les poids $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ tels que M soit le barycentre de $(A_1, \alpha_1), (A_2, \alpha_2)$ et (A_3, α_3).

6. Déterminez (sans résoudre) une équation vectorielle (et par suite deux équations scalaires) portant sur $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ pour que ce triplet soit solution du problème.

D'après la question 5 et l'hypothèse 2, on peut aussi imposer la condition $\sum_{i=1}^{3} \alpha_i = 1$. Désormais, on imposera toujours cette condition.

7. Mettre les trois équations ainsi trouvées sous forme matricielle :

$$\underbrace{\begin{pmatrix} \cdot & \cdot & \cdot \\ \cdot & \cdot & \cdot \\ 1 & 1 & 1 \end{pmatrix}}_{A} \begin{pmatrix}\alpha_1\\ \alpha_2\\ \alpha_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\cdot\\ \cdot\\ \cdot\end{pmatrix}$$

Éléments de cours :

A est inversible $\iff$ ses colonnes sont linéairement indépendantes $\iff$ $\det(A) \neq 0$.
On trouve donc un unique triplet $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ dès que $\det(A) \neq 0$.
Les coefficients $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ sont alors appelés les **coordonnées barycentriques** de M dans le repère barycentrique (A_1, A_2, A_3).

8. Par la méthode du pivot de Gauss, simplifier le déterminant de A et montrer que la condition $\det(A) \neq 0$ est équivalente à l'hypothèse 1.

C. Quelques points particuliers

9. Quelles sont les coordonnées barycentriques, dans le repère barycentrique (A_1, A_2, A_3), des points suivants :
   (a) A_1, A_2 et A_3,
   (b) les milieux des segments $[A_1A_2]$, $[A_2A_3]$ et $[A_3A_1]$,
   (c) l'intersection des médianes du triangle $A_1A_2A_3$?
10. à quelle condition sur les coordonnées barycentriques $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$ du point $M\begin{pmatrix}x\\y\end{pmatrix}$ a-t-on M qui appartient à la droite (AB) ?

D. Condition d'alignement de trois points en coordonnées barycentriques

On cherche une conditions nécessaire et suffisante sur les coordonnées barycentriques de trois points pour qu'ils soient alignés.

Poser $M_1(X_1, Y_1)$ de coordonnées barycentriques $(\alpha_1, \alpha_2, \alpha_3)$, $M_2(X_2, Y_2)$ de coordonnées barycentriques $(\beta_1, \beta_2, \beta_3)$, et $M_3(X_3, Y_3)$ de coordonnées barycentriques $(\gamma_1, \gamma_2, \gamma_3)$,
et chercher.

III. Intersection des médianes d'un triangle

Dans le plan muni d'un repère orthonormé, on définit trois points :

$$A\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} \qquad B\begin{pmatrix}-3\\2\end{pmatrix} \qquad C\begin{pmatrix}-1\\-3\end{pmatrix}$$

1. Déterminer les équations cartésiennes des médianes du triangle ABC.
2. Montrer qu'elles sont concourrantes et donner leur point d'intersection (comment s'appelle ce point... vous pouvez utiliser le problème II. pour vous faciliter les calculs).

Bon courage !