CIR2-CNB2 **TD de Maths**

Courbes planes (2)

1/ Étudier les courbes paramétrées suivantes :

$\begin{cases} x = t - t^3 \\ y = t^2 - t^4 \end{cases}$	$\begin{cases} x = \cos(2t) \\ y = \cos(3t) \end{cases}$	$\begin{cases} x = \dfrac{1+t^2}{1+t} \\ y = \dfrac{t^2}{1+t^3} \end{cases}$	$\begin{cases} x = \dfrac{2t}{1+t^3} \\ y = \dfrac{2t^2}{1+t^3} \end{cases}$	$\begin{cases} x = 5\cos(t) - \cos(5t) \\ y = 5\sin(t) - \sin(5t) \end{cases}$

2/ Exercice 2 - Étude de la courbe paramétrée $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t-t^3}{1+t^2+t^4} \end{cases}$

- Pour étudier les variations de y on pourra au préalable étudier les racines du polynôme $P(t) = t^3 - 4t^2 - 4t + 1$ puis du polynôme $Q(t) = t^6 - 4t^4 - 4t^2 + 1$

3/ Dans chaque cas construire la courbe paramétrée définie par (t) = $\left(x(t) \, , \, y(t) \right)$:

1. $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ (*Astroïde).*
2. $\begin{cases} x(t) = t - \sin t \\ y(t) = 1 - \cos t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$ *(Cycloïde)*
3. $\begin{cases} x(t) = t^2 + \dfrac{2}{t} \\ y(t) = t^2 + \dfrac{1}{t^2} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}^*$.
4. $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$.
5. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{t\,e^t}{t+1} \\ y(t) = \dfrac{e^t}{t+1} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R} \setminus \{-1\}$.
6. $\begin{cases} x(t) = \dfrac{1-t^2}{1+t^2+t^4} \\ y(t) = \dfrac{t\left(1-t^2\right)}{1+t^2+t^4} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$
7. $\begin{cases} x(t) = \cos t \\ y(t) = \dfrac{\sin^2 t}{2 - \sin t} \end{cases}$, $t \in \mathbb{R}$

3/ Soient a et b deux réels strictement positifs.

a / Tracer la courbe polaire $\rho = \dfrac{a}{\cos\theta}$

b / En déduire le tracé de la courbe polaire $\rho = \dfrac{a}{\sin\theta}$

c / Trouver l'équation polaire de la droite $y = x + 1$

d / Tracer la courbe polaire $\rho = 2a\cos\theta$

e / En déduire le tracé de la courbe polaire $\rho = a\cos\theta + b\sin\theta$

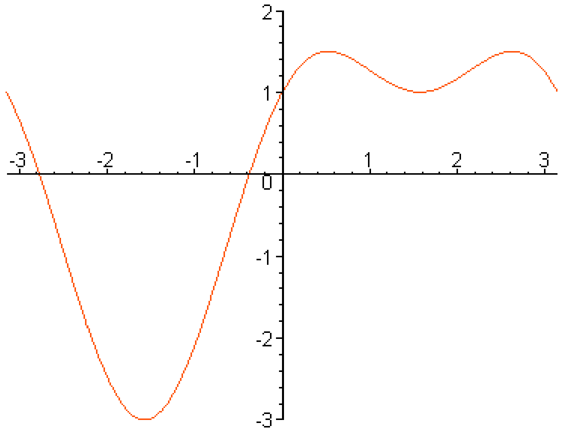
f / Quelle est l'équation polaire du cercle de centre O et de rayon R ,

g / Quelle est l'équation polaire d'un cercle passant par O ? On appellera $C = \left(R\cos\alpha, R\sin\alpha\right)$ son centre.

4/ Étudier les courbes polaires suivantes :

$\rho = \cos(\theta) + \sin(\theta)$	$\rho = \dfrac{1}{1+\cos(\theta)}$	$\rho = \dfrac{1}{\sin(2\theta)}$	$\rho = 2 - \dfrac{1}{\cos(\theta)}$	$\rho = e^{\left(\frac{\theta}{2\pi}\right)}$

5/ La fonction $f : t \to f(t)$ est 2π -périodique et a le graphe ci-dessous pour $-\pi \leqslant t \leqslant \pi$



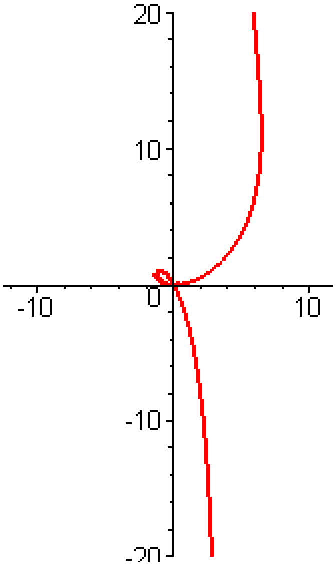
Tracer l'allure de la courbe d'équation polaire $\rho = f(\theta)$

6/ Tracer les courbes polaires $\rho = \cos(k\ \theta)$ pour différents entiers k.

7/ On donne ci-contre le tracé de la courbe polaire définie par

$$\rho = \frac{\sin(\theta)+\sin(2\theta)+\sin(3\theta)}{1+\sin(\theta)}$$

Étudier la boucle de cette courbe.
(on pourra développer le numérateur de ρ)



8/ Trouver l'équation d'une courbe polaire dont le tracé a l'allure ci-dessous.