# $\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

## $\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **4 questions** équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que peu utile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et **expliquant** vos réponses.
- **Soignez** votre rédaction, ne soyez pas avare de détails... le but est de démontrer votre maîtrise du sujet !

— **John** —

Soit $(a_n)_{n=0}^{\infty}$ la suite d'entiers définie par récurrence

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+2} = 2a_{n+1} + a_n \quad (n \geqslant 0),$$

et considérons la fonction complexe définie au voisinage de 0 par la série entière

$$f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

a) En manipulant les séries entières, établir l'identité (valable pour $z$ appartenant au disque de convergence)

$$(1 - 2z - z^2) f(z) = z.$$

b) En déduire la décomposition en éléments simples de $f$, et donner le rayon de convergence de la série.

c) Exprimer explicitement $(a_n)$ comme une combinaison linéaire de deux séries géométriques et donner un équivalent simple de $a_n$ quand $n \to \infty$. Quel lien avec les questions précédentes ?

— **Paul** —

Supposons que l'on cherche à assigner à chacune des faces d'un cube l'une des 6 couleurs (répétitions permises)

$$W \text{ (blanc)}, \quad R \text{ (rouge)}, \quad B \text{ (bleu)}, \quad O \text{ (orange)}, \quad G \text{ (vert)} \quad \text{et} \quad Y \text{ (jaune)}.$$

a) Le groupe $\mathcal{G}$ des rotations dans $\mathbf{R}^3$ stabilisant un cube comporte 24 éléments : rappeler la description de ceux-ci selon leur ordre (géométriquement, ou en utilisant l'action sur les 4 diagonales intérieures du cube).

b) Soit $\mathcal{X}$ l'ensemble des coloriages possibles des faces du cube ; on considère deux coloriages équivalents s'ils ne diffèrent que par une rotation. Combien y en a-t-il ? En d'autres termes, combien y a-t-il d'orbites pour l'action de $\mathcal{G}$ sur $\mathcal{X}$ ?

c) Combien y a-t-il de coloriages (vraiment différents) distincts si l'on demande maintenant que chaque couleur soit utilisée exactement une fois ? (*i.e.* nombre de schémas de couleurs possibles pour un cube Rubik)

— George —

a) Si $M$ est la matrice représentative d'un produit scalaire sur un espace vectoriel de dimension finie, expliquer pourquoi on peut affirmer qu'il existe une matrice inversible $P$ telle que $M = P^\top P$ ; en déduire dét $M > 0$.

b) Donner la représentation matricielle de la forme bilinéaire sur $\mathbf{R}^3$

$$\langle (x_1, x_2, x_3) \mid (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1y_1 - x_1y_3 - x_3y_1 + x_2y_2 - x_2y_3 - x_3y_2.$$

Est-ce un produit scalaire ?

c) Calculer les valeurs propres de la matrice $M$ de la question précédente. Est-elle diagonalisable ?

— Ringo —

On travaille dans l'espace vectoriel $\mathcal{C}[0, \pi]$ des fonctions continues sur $[0, \pi]$ muni du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle := \int_0^\pi f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x.$$

a) Quel est l'angle entre les fonctions $f(x) = x$ et $g(x) = 1$ dans cet espace ?

b) Soit $W$ le sous-espace de $\mathcal{C}[0, \pi]$ des fonctions de la forme

$$x \mapsto B_1 \sin x + B_2 \sin 2x + B_3 \sin 3x;$$

donnez la matrice représentant le produit scalaire restreint à $W$ par rapport à la base de votre choix.

c) Calculer la projection orthogonale de $g$ sur $W$.