ISÉN - $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$ 18 janvier 2012

Mathématiques
Examen final – 1^{er} semestre

Consignes

- Cette épreuve de **3h** comporte **6** questions équipondérées non ordonnées.
- Explicitez vos raisonnements, faites des croquis, et surtout amusez-vous bien !

⚁ – Plan bitangent

Le plan $\mathcal{P} : x + \sqrt{3}z = 0$ est tangent au tore $\mathcal{T}$ paramétré par

$$\mathbf{F}(u, v) = (2 + \cos v) \cos u\,\mathbf{i} + (2 + \cos v) \sin u\,\mathbf{j} + \sin v\,\mathbf{k} \qquad (0 \leqslant u, v \leqslant 2\pi)$$

en exactement deux points. Lesquels ?

⚄ – Astroïde

Calculer la longueur totale et le rayon de courbure de l'arc d'astroïde $\begin{cases} x(t) = \cos^3 t \\ y(t) = \sin^3 t \end{cases} \quad (0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2})$.

⚀ – Voile florentine

Soit $\mathcal{V} \subseteq \mathbf{R}^3$ l'image du carré de sommets $(\pm\frac{\pi}{2}, 0)$, $(0, \pm\frac{\pi}{2})$ dans le plan (u, v) par le changement de variables

$$\mathbf{F}(u, v) = \sin u \cos v\,\mathbf{i} + \sin v\,\mathbf{j} + \cos u \cos v\,\mathbf{k}.$$

Montrer qu'il s'agit d'une portion de sphère et calculer son aire.

⚅ – Cassini

Considérons le produit des carrés des distances

$$f(P) = ||\overrightarrow{AP}||^2 \cdot ||\overrightarrow{BP}||^2$$

d'un point quelconque $P = (x, y) \in \mathbf{R}^2$ aux points fixés $A = (-1, 0)$ et $B = (1, 0)$.

Déterminer les valeurs extrêmes de f sur le disque de rayon 2 centré à l'origine.

⚂ – Cubique réglée

Soit $\mathbf{n} : \mathcal{S} \to \mathbf{R}^3 \setminus \{\mathbf{0}\}$ une application de classe $\mathcal{C}^1$ fournissant un vecteur normal en chaque point d'une surface régulière $\mathcal{S}$. Montrer que si $\mathbf{r}(t) = P_0 + t\,\mathbf{d}$ est une droite paramétrée incluse dans $\mathcal{S}$, alors le long de cette droite on a

$$\mathbf{n}(t) \cdot \mathbf{d} = \frac{\mathrm{d}\mathbf{n}}{\mathrm{d}t} \cdot \mathbf{d} = 0.$$

Utiliser ce fait pour trouver une famille de droites incluses dans la cubique $\mathcal{C} : z = 3xy - 2x^3$.

⚃ – Intégrale curviligne

Calculer l'intégrale curviligne $\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r}$ du champ de vecteurs

$$\mathbf{F}(x, y, z) = -2xy\,\mathbf{i} + e^y \cos z\,\mathbf{j} - e^y \sin z\,\mathbf{k}$$

le long de l'arc de cercle $\mathbf{r}(t) = (\sqrt{2} \cos t, 1 + 2 \sin t, \sqrt{2} \cos t)$, $0 \leqslant t \leqslant \frac{\pi}{2}$.

[*Suggestion* : Pour simplifier les calculs, chercher des fonctions f et g pour lesquelles $\mathbf{F} = \boldsymbol{\nabla} f + g\,\mathbf{j}$]