$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **4** $\times$ **2** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que peu utile.
- **Lisez attentivement** les concises questions ainsi que ces quelques consignes.
- Cette ligne était **juste pour voir** si vous aviez lu la précédente.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et énonçant les résultats utilisés.
- **Amusez**-vous bien ! et surtout, **exprimez-vous** (sensément) sur les différents sujets.

$\mathscr{N}$otations

- $\mathbf{F}_q$ désigne le corps fini à q éléments, $\mathbf{C}$ l'ensemble des nombres complexes ;
- j l'un des deux nombres complexes satisfaisant $j^2 = -1$;
- $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{F})$ l'ensemble des matrices $m \times n$ à coefficients dans un corps $\mathbf{F}$;
- $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ le groupe des matrices inversibles dans $\mathcal{M}_{n\times n}(\mathbf{F})$;
- $\mathcal{D}_n$ le groupe des isométries du plan préservant un n-gone régulier ;
- $\mathcal{S}_n$ le groupe des permutations de $\{1, \ldots, n\}$.

— I —

Soit j l'un des deux nombres complexes satisfaisant $j^2 = -1$.

a) Résoudre pour $w \in \mathbf{C}$ l'équation du second degré $w^2 - 2(1+2j)w + 1 = 0$.

b) Décrire soigneusement l'ensemble des nombres complexes $z \in \mathbf{C}$ pour lesquels $\cos z = 1 + 2j$.

— II —

a) Pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}_5)$ et $A \in \mathcal{M}_{m\times n}(\mathbf{F}_5)$, vérifier que la formule $P \star A := A \cdot P^{-1}$ définit une action de groupe.

b) Vérifier que $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 4 & 0 \\ 3 & 1 & 4 & 2 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ et $B = \begin{bmatrix} 4 & 3 & 2 & 1 \\ 1 & 1 & 0 & 0 \\ 2 & 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$ sont dans la même orbite pour cette action.

— III —

On fabrique des assortiments de 16 chocolats dans des boîtes carrées 4×4.

a) Décrire les 8 éléments du groupe diédral $\mathcal{D}_4$ comme des permutations dans $\mathcal{S}_{16}$, en précisant leur signature.

b) Combien d'assortiments géométriquement différents peut-on confectionner à l'aide de 3 A, 3 B, 4 C et 6 D ?

— IV —

a) Donner une formule pour le terme général d'une suite de nombres réels $(x_n)_{n\in\mathbf{N}}$ satisfaisant

$$x_{n+2} = x_{n+1} + 6x_n + 1 + 3^n \quad (n \geqslant 0), \qquad x_0 = 0, \quad x_1 = 1.$$

b) Même question en supposant maintenant que les x_n sont des scalaires dans $\mathbf{F}_5$.