Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur la feuille.

Nom:	**CORRIGÉ**

1. Déterminer toutes les solutions complexes à l'équation $\cos z = 1$.

   [*Indication* : Commencer par déterminer les valeurs possibles pour $Z := e^{jz}$]

En développant le cosinus, l'équation s'écrit

$$\frac{e^{jz} + e^{-jz}}{2} = 1,$$

soit, en multipliant tout par $2e^{jz}$,

$$(e^{jz})^2 + 1 = 2e^{jz} \qquad i.e. \qquad (e^{jz} - 1)^2 = 0.$$

On doit donc avoir $e^{jz} = 1$. Décomposant $z = x + jy$ avec $x, y \in \mathbf{R}$, cela nous donne

$$e^{-y}e^{jx} = 1,$$

donc en prenant les parties réelle et imaginaire

$$e^{-y} = 1 \qquad \text{et} \qquad e^{jx} = 1.$$

On conclut donc que $y = -\ln 1 = 0$ et $x = 2k\pi$, $k \in \mathbf{Z}$: l'ensemble-solution est donc $2\pi\mathbf{Z}$ (pas plus de solutions dans $\mathbf{C}$ que dans $\mathbf{R}$).

2. Évaluer $\displaystyle\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{z} + z^3\right) \mathrm{d}z$, où $\mathcal{C}$ est le cercle paramétré par $z(t) = 1 + j - je^{jt}$, $0 \leqslant t \leqslant 2\pi$.

- Façon pénible : on évalue directement

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{z} + z^3\right) \mathrm{d}z = \int_0^{2\pi} \left(\frac{1}{z(t)} + z(t)^3\right) z'(t)\, \mathrm{d}t$$

  avec $z(t) = 1 + j - je^{jt}$ et on trouve 0.

- Façon agréable : on remarque que la fonction à intégrer est holomorphe sur la région considérée ; ainsi, son intégrale le long de toute courbe fermée est nulle. De façon équivalente, on peut dire :

$$\int_{\mathcal{C}} \left(\frac{1}{z} + z^3\right) \mathrm{d}z = \left(\ln z + \frac{z^4}{4}\right)\Bigg|_1^1 = 0$$

  où $\ln z$ est (par exemple) la branche principale du logarithme.

3. Déterminer la relation imposée sur les coefficients d'une série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ pour qu'elle satisfasse

$$f'(z) = 2f(z).$$

Résoudre cette récurrence et reconnaître la fonction ainsi obtenue.

L'équation différentielle s'écrit

$$\sum_{n=0}^{\infty}(n+1)a_{n+1}z^n = 2\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n.$$

En égalisant les coefficients de part et d'autre (unicité de la décomposition en série entière), on trouve la relation de récurrence

$$(n+1)a_{n+1} = 2a_n \qquad \text{soit} \qquad a_{n+1} = \frac{2}{n+1}a_n \quad (n \geqslant 0).$$

On trouve aisément alors que le coefficient général est donné par

$$a_n = \frac{2^n}{n!}a_0,$$

de sorte que

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_0 \frac{2^n}{n!} z^n = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(2z)^n}{n!} = a_0 e^{2z}.$$

4. Établir le développement en série entière de Arctan z au voisinage de $z = 0$ et préciser son rayon de convergence.

La façon simple de procéder est de reconnaître sa dérivée comme la somme d'une série géométrique :

$$(\operatorname{Arctan} z)' = \frac{1}{1+z^2} = \frac{1}{1-(-z^2)} = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n z^{2n}$$

puis d'intégrer terme à terme (on cherche la primitive qui s'annule en 0) :

$$\operatorname{Arctan} z = \sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n \frac{z^{2n+1}}{2n+1}.$$

La formule utilisée pour la somme de la série géométrique étant valable pour $|-z^2| < 1$, soit $|z| < 1$, son rayon de convergence vaut 1. Comme le rayon de convergence d'une série de puissances ne change pas quand on intègre ou dérive terme à terme, on en conclut que le rayon de convergence de la série obtenue pour Arctan z vaut 1. (Ou alors : on applique le critère de d'Alembert pour trouver le même résultat.)

Note : Si on ne se limite qu'à des valeurs réelles de z, on ne voit pas bien pourquoi l'intervalle de convergence n'est pas plus grand, puisque la fonction Arctan ne possède aucun problème discernable sur l'axe réel... Cependant sa dérivée possède dans le plan complexe des pôles imaginaires en $\pm j$ et c'est ce qui empêche le disque de convergence de croître davantage.