

Répondez directement sur l'énoncé en **détaillant vos calculs** et **justifiant vos raisonnements**.

Nom:

1. Soit \mathbf{F} un corps pour lequel $2 \in \mathbf{F}^\times$, $V = \mathbf{F}[x]_{\leq 3}$ l'espace vectoriel des polynômes de degré ≤ 3 sur \mathbf{F} et $\varphi : V \rightarrow \mathbf{F}^3$ l'application linéaire définie par

$$\varphi(f) = \left(\frac{f(1) + f(-1)}{2}, f'(1), f(0) \right).$$

Déterminer une base $\mathcal{B} = (f_1, f_2, f_3, f_4)$ de V pour laquelle ${}_{\text{can}}[\varphi]_{\mathcal{B}}$ est la plus simple possible.

2. On définit par récurrence les deux suites de nombres réels (x_n) et (y_n) par

$$\begin{cases} x_{n+1} = -x_n + 2y_n, & x_0 = 0, \\ y_{n+1} = -3x_n + 4y_n, & y_0 = 1. \end{cases}$$

Donner une formule explicite pour x_n et y_n en fonction de $n \in \mathbf{N}$.