Absolue convergence, semi-convergence *in Gérard Lavau - http://lavau.pagesperso-orange.fr/index.htm*

La série $\sum \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente sans être absolument convergente. Elle est dite semi-convergente.

En 1829, dans un article sur les séries trigonométriques, Dirichlet relève une erreur chez Cauchy.

Dans un article de 1823, ce dernier utilise le fait que, si le quotient de u_n sur $\frac{\sin(n\,x)}{n}$ tend vers 1, alors $\sum u_n$ converge puisque $\sum \frac{\sin(n\,x)}{n}$ converge. L'erreur, communément commise de nos jours par tout étudiant débutant dans l'étude des séries, est de croire que $\sum u_n$ converge lorsque la suite (u_n) est équivalente à la suite (v_n) et que $\sum v_n$ converge. Rappelons que ce résultat est vraie si séries sont positives, mais si ce n'est pas le cas, le résultat peut être faux.

Dirichlet donne un contre-exemple : $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}$ converge, mais $\sum \frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\left(1+\frac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$ diverge, alors même que le quotient des termes de même rang tend vers 1.

En 1854, dans son mémoire sur les séries trigonométriques, Riemann définit à la suite de Dirichlet deux types de séries, celles que nous nommons maintenant série absolument convergente et semi-convergente :

> *« En janvier 1829, parut dans le Journal de Crelle un mémoire de Dirichlet, où la possibilité de la représentation par les séries trigonométriques se trouvait établie en toute rigueur pour les fonctions qui sont, en général, susceptibles d'intégration, et qui se présentent pas une infinité de maxima et de minima.*
>
> *Il arriva à la découverte du chemin à suivre pour arriver à la solution de ce problème, par la considération que les séries infinies se partagent en deux classes suivant qu'elles restent convergentes ou non convergentes, lorsqu'on rend leurs termes tous positifs.*
>
> *Dans les premières, les termes peuvent être intervertis d'une manière quelconque ; dans les deux autres, au contraire, la valeur dépend de l'ordre des termes.*
>
> *Si on désigne, en effet, dans une série de seconde classe, les termes positifs successifs par a_1 , a_2 , a_3 , ..., et les termes négatifs par $-b_1$, $-b_2$, $-b_3$, ..., il est clair que $\sum a$, ainsi que $\sum b$, doit être infinie ; car, si ces deux sommes étaient finies l'une et l'autre, la série serait encore convergente lorsqu'on donnerait à tous les termes le même signe ; si une seule était infinie, la série serait divergente.*
>
> *Il est clair maintenant que la série, en plaçant les termes dans un ordre convenable, pourra prendre une valeur donnée C ;*
>
> *car, si l'on prend alternativement des termes positifs de la série jusqu'à ce que sa valeur soit plus grande que C, puis des termes négatifs jusqu'à ce que sa valeur soit moindre que C, la différence entre cette valeur et C ne surpassera jamais la valeur du terme qui précède le dernier changement de signe. Or les quantités a, aussi bien que les quantités b, finissant toujours par devenir infiniment petites pour des valeurs croissantes de l'indice, les écarts entre la somme de la série et C deviendront encore infiniment petits, lorsqu'on prolongera assez loin la série, c'est-à-dire que la série converge vers C.*
>
> *C'est aux seules séries de la première classe que l'on peut appliquer les lois des sommes finies ; elles seules peuvent être considérées comme l'ensemble de leurs termes ; celles de la seconde classe ne le peuvent pas : circonstance qui avait échappé aux mathématiciens du siècle dernier, principalement par la raison que les séries qui procèdent suivant les puissances ascendantes d'une variable appartiennent, généralement parlant (c'est-à-dire à l'exception de certaines valeurs particulières de cette variable), à la première classe. »*

Bernhard Riemann 1826-1866