$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\, i\, \mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **3** $\times$ **3** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que peu utile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et **expliquant** vos réponses.
- **Soignez** votre rédaction, et surtout **amusez**-vous bien !

— I —

a) (R)établir le développement en série entière de $\cos z$ au voisinage de $z = 0$ ainsi que son rayon de convergence.

b) Est-il possible de parler sans ambiguité de *la* fonction $c(z) := \cos(\sqrt{z})$ définie sur tout le plan complexe (et si oui, qu'est-ce que ça signifie précisément) ?

c) Déterminer toutes les solutions représentables en série entière $f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ de l'équation différentielle

$$4\, z f''(z) + 2\, f'(z) + f(z) = 0.$$

— II —

a) Quelles sont les solutions $x \in \mathbf{F}_7$ de l'équation polynomiale

$$(x^2 + x + 1)(x^2 + 1) = 0 \ ?$$

b) Même question avec le corps $\mathbf{F}_5$.

c) Si ξ est un élément formel satisfaisant $\xi^2 = 2$, expliquer pourquoi l'ensemble suivant est un corps :

$$\mathbf{F}_{25} := \{\, a + b\,\xi \mid a, b \in \mathbf{F}_5 \,\}$$

(comment trouver, par exemple, l'inverse de $1 - \xi$?) et vérifier que notre équation y possède bien 4 solutions.

— III —

Considérons l'application linéaire $T : \mathbf{R}^4 \to \mathbf{R}^4$ définie par

$$T(x, y, z, w) = (z - 2w,\ 4x + 2y - 2z + 4w,\ 2x - 4y - z + 12w,\ 2x - z + 4w).$$

a) Donner une représentation matricielle de T et calculer sa forme normale à l'aide de l'algorithme de Gauss.

b) Déterminer une base du noyau et de l'image de T.

c) Vérifier que $(1, -1, 2, 0)$ est un vecteur propre pour T et spécifier la valeur propre associée. Puis, décrire explicitement l'ensemble de tous les vecteurs propres associés à cette valeur propre.