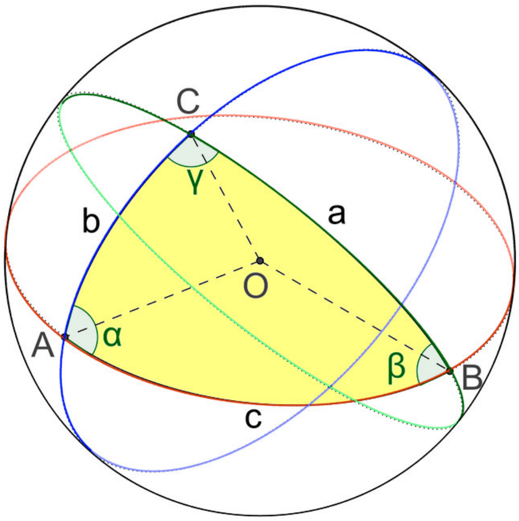
4. *Exemples de dénombrement - Formule d'Euler et polyèdres réguliers de* $\mathbb{R}^3$

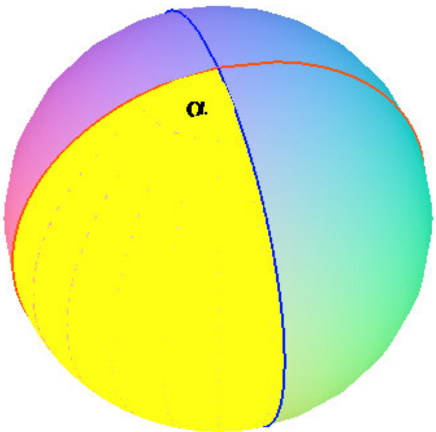
'Grand cercle'
= intersection de la sphère avec un plan passant par le centre
Triangle sphérique
= partie de la sphère limitée par 3 'grands cercles'
Angle de 2 arcs incidents en M
= angle des tangentes en M

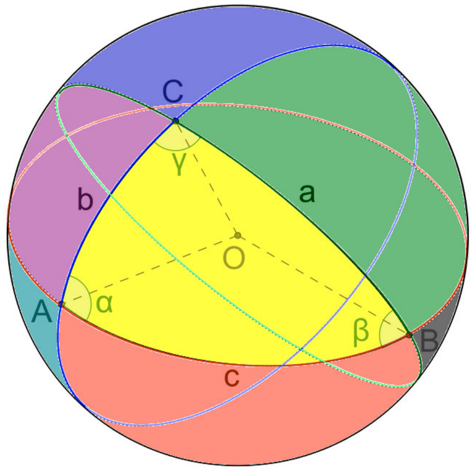


Formule de Girard :

Si la sphère est de rayon 1,
l'aire du triangle sphérique ABC est égale à

$$\text{Aire}(\text{ABC}) = \hat{\text{A}} + \hat{\text{B}} + \hat{\text{C}} - \pi = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$





Formule d'Euler

Un polyèdre convexe est le domaine borné de l'espace limité par un certain nombre de plans.
Ses arêtes sont les intersections de plans deux à deux.
Ses sommets sont les intersections de plans trois à trois.
Ses faces sont des polygones (convexes) limiés par des arêtes.

Pour tout polyèdre convexe, $\boxed{S + F - A = 2}$,

où S est le nombre de sommets, F le nombre de faces et A le nombre d'arêtes.

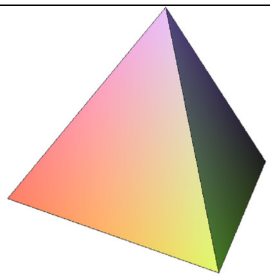
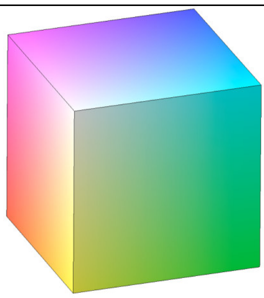
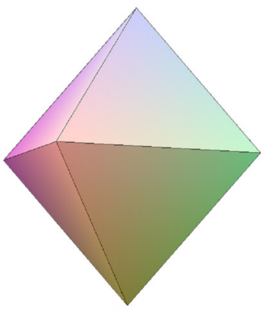
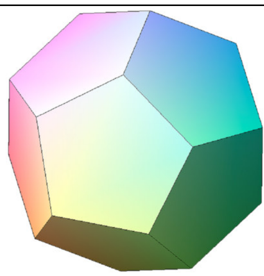
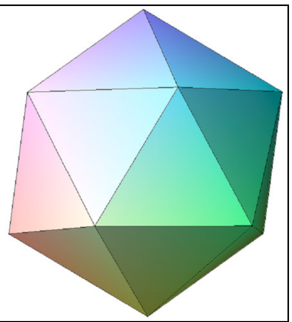
Application : Polyèdres réguliers convexes

Un polyèdre est dit régulier ssi il est inscrit dans une sphère, si toutes les faces sont des polygones réguliers de même dimension et si tous les sommets sont identiques (un même nombre d'arêtes incidentes à chaque sommet)
Soit r le nombre d'arêtes incidentes à un sommet. r est aussi le nombre de faces incidentes à un sommet.
Notons que $r \geqslant 3$
Soit s le nombre de sommets de chaque face. s est aussi le nombre d'arêtes de chaque face.
Notons que $s \geqslant 3$
Alors d'après le principe du berger, $A = \frac{1}{2} s F$ donc $F = \frac{2A}{s}$, $S = \frac{1}{r} s F$ donc $S = \frac{2A}{r}$.
La formule d'Euler $S + F - A = 2$ donne donc $\frac{2A}{r} + \frac{2A}{s} - A = 2$ ou $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}$.
Il faut donc que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}$
Puisque $r \geqslant 3$, dès que $s \geqslant 6$, on a $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.
De même, puisque $s \geqslant 3$, dès que $r \geqslant 6$, on a $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$
Restent les cas suivants.

	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
$s = 3$	$A = 6, F = 4, S = 4$	$A = 12, F = 8, S = 6$	$A = 30, F = 20, S = 12$
$s = 4$	$A = 12, F = 6, S = 8$	$\cancel{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}}$	
$s = 5$	$A = 30, F = 12, S = 20$		

Il se trouve que pour chacun des cas restant, il existe un polyèdre régulier.

Les 5 polyèdres réguliers convexes (Platon)

				
$A = 6, F = 4, S = 4$ Tétraèdre régulier	$A = 12, F = 6, S = 8$ Cube	$A = 12, F = 8, S = 6$ Octaèdre régulier	$A = 30, F = 12, S = 20$ Dodécaèdre régulier	$A = 30, F = 20, S = 12$ Icosaèdre régulier