$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **3** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien qu'inutile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et en **mettant en valeur** votre maîtrise du cours.
- **Amusez**-vous bien !

— ÉPISODE I —

Un ami joue à la roulette russe avec un revolver ayant une probabilité constante $0 < p \leqslant 1$ de tirer une balle à chaque fois qu'on presse sur la gachette ; la probabilité que sa partie dure exactement n coups est donc

$$p_n := q^{n-1}p, \qquad \text{où on a posé } q := 1-p \text{ (la probabilité de se rater).}$$

a) Vérifier que $\displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} p_n = 1$ (*i.e.* la probabilité que sa partie se termine est 1).

$$\sum_{n=1}^{\infty} p_n = p\sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} = p\sum_{n=0}^{\infty} q^n = \frac{p}{1-q} = \frac{p}{p} = 1$$

en utilisant la formule pour la somme de la série géométrique de raison $0 \leqslant q < 1$.

b) L'espérance de durée de la partie est $E_1 := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,p_n$. Pour quelles valeurs de p cette série est-elle convergente ?

Il s'agit d'une série à termes positifs, et le ratio limite

$$L := \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)p_{n+1}}{np_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{(n+1)pq^n}{npq^{n-1}} = \lim_{n\to\infty} q\cdot\frac{n+1}{n} = q$$

est strictement inférieur à 1 pour toute valeur de $p \in]0,1]$. D'après le critère de D'Alembert, la série est donc convergente.

c) Introduisons la fonction $f(z) := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n\,z^{n-1}$, de sorte que $E_1 = p\,f(q)$. À l'aide d'une primitive de f, obtenir une formule explicite pour E_1.

La série définissant f ayant un rayon de convergence égal à 1, on sait que sur le disque de convergence on peut intégrer terme à terme pour obtenir la primitive de f s'annulant en $z = 0$:

$$\sum_{n=1}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-z} - 1.$$

En redérivant de part et d'autre de l'égalité, on obtient une formule explicite pour f :

$$f(z) = \left(\frac{1}{1-z}\right)' = \frac{1}{(1-z)^2}$$

d'où on peut conclure que

$$E_1 = pf(q) = \frac{p}{(1-q)^2} = \frac{1}{p}.$$

d) Posons plus généralement $E_k := \displaystyle\sum_{n=1}^{\infty} n^k p_n$ et soit $g(z)$ la fonction dont les dérivées à l'origine sont $g^{(k)}(0) = E_k$.

Montrer que $g(z) = \dfrac{pe^z}{1-qe^z}$ et utiliser cela pour confirmer par dérivation votre réponse à la question précédente.

On sait que si la fonction g est dérivable à l'origine, elle admet un développement en série entière et que celui-ci sera de la forme

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g^k(0)}{k!} z^k = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{E_k}{k!} z^k.$$

En remplaçant E_k par sa définition on trouve, en se permettant d'inverser les sommes,

$$g(z) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{n^k}{k!} p q^{n-1}\right) z^k = p \sum_{n=1}^{\infty} q^{n-1} \sum_{k=0}^{\infty} \frac{(nz)^k}{k!} = \frac{p}{q} \sum_{n=1}^{\infty} q^n e^{nz}$$

puis on reconnaît la somme d'une série géométrique de raison qe^z :

$$g(z) = \frac{p}{q} \cdot \left(\frac{1}{1-qe^z} - 1\right) = \frac{pe^z}{1-qe^z}.$$

— Épisode II —

a) Donner une inégalité en coordonnées cartésiennes décrivant l'ellipsoïde solide $\mathcal{E}$ de centre (x_0, y_0, z_0) et de demi-axes, respectivement, a, b et c. Vérifier que votre inéquation est satisfaite par la paramétrisation

$$\begin{cases} x = x_0 + a\,t\cos u\cos v \\ y = y_0 + b\,t\sin u\cos v \\ z = z_0 + c\,t\sin v \end{cases} \qquad 0 \leqslant t \leqslant 1,\ 0 \leqslant u \leqslant 2\pi,\ 0 \leqslant v \leqslant \pi.$$

En coordonnées cartésiennes,

$$\mathcal{E} : \left(\frac{x-x_0}{a}\right)^2 + \left(\frac{y-y_0}{b}\right)^2 + \left(\frac{z-z_0}{c}\right)^2 \leqslant 1$$

et effectivement en remplaçant x, y, z par leurs expressions par la paramétrisation on trouve dans le même de gauche

$$t^2(\cos^2 u + \sin^2 u)\cos^2 v + t^2\sin^2 v = t^2(\cos^2 v + \sin^2 v) = t^2 \leqslant 1.$$

Note : Pour obtenir une paramétrisation presqu'injective on aurait eu mieux fait ceci dit de prendre $-\frac{\pi}{2} \leqslant v \leqslant \frac{\pi}{2}$, mais ça ne change pas le résultat ici.

b) Utiliser cette paramétrisation pour montrer que le volume de cet ellipsoïde est donné par $\frac{4}{3}\pi abc$.

Si $\mathcal{E}'$ désigne le pavé $[0,1] \times [0, 2\pi] \times [0, \pi]$ dans l'espace (t, u, v), alors la paramétrisation ci-dessus nous décrit un changement de variables $\varphi : (t, u, v) \to (x, y, z)$ transformant $\mathcal{E}'$ en $\mathcal{E}$.

(Ou plutôt : avec les bornes proposées pour v, on parcourt deux fois la moitié de $\mathcal{E}$ pour laquelle $z \geqslant z_0$.)

On calcule

$$\operatorname{jac}\varphi = \begin{vmatrix} a\cos u\cos v & -at\sin u\cos v & -at\cos u\sin v \\ b\sin u\cos v & bt\cos u\cos v & -bt\sin u\sin v \\ c\sin v & 0 & ct\cos v \end{vmatrix} = abc\,t^2\cos v$$

et donc

$$\operatorname{vol}\mathcal{E} = \iiint_{\mathcal{E}} \mathrm{d}V = \iiint_{\mathcal{E}'} |\operatorname{jac}\varphi|\,\mathrm{d}V' = abc\int_0^1 t^2\,\mathrm{d}t \int_0^{2\pi} \mathrm{d}u \int_0^{\pi} |\cos v|\,\mathrm{d}v = abc \cdot \frac{1}{3} \cdot 2\pi \cdot 2$$

c) Utiliser le théorème de Stokes pour calculer le flux normal de $\mathbf{F} = x\,z\,\mathbf{i} - z_0\,y\,\mathbf{j}$ à la surface $\mathcal{D}$ de $\mathcal{E}$.

Comme certains l'ont souligné, il serait peut-être plus approprié de parler du théorème d'Ostrogradsky ici (l'appelation « théorème de Stokes » étant souvent utilisée comme ombrelle pour les autres), il reste que l'on sait que :

$$\oiint_{\mathcal{D}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{S} = \iiint_{\mathcal{E}} \operatorname{div}\mathbf{F}\,\mathrm{d}V.$$

Or ici : on trouve $\operatorname{div}\mathbf{F} = z - z_0$, son intégrale sur $\mathcal{E}$ est donc nulle (l'intégrale sur la partie où $z \leqslant z_0$ étant de signe opposé à celle sur la partie où $z \geqslant z_0$).

d) Ce champ de vecteur admet-il un potentiel vectoriel ? Si oui, donnez-en un ; si non, expliquez pourquoi.

On sait qu'un champ de vecteur admettant un potentiel vectoriel a forcément un flux nul sur toute surface fermée ; le « piège » serait ici de croire que c'est le cas pour $\mathcal{F}$ alors qu'on sait seulement que son flux est nul à travers *une* surface fermée (la surface $\mathcal{D}$).

En fait : si $\mathbf{F} = \mathbf{rot}\,\mathbf{G}$, on sait que l'on doit avoir $\operatorname{div}\mathbf{F} = \mathbf{0}$ (condition de Brocvielle) ; puisque ce n'est pas le cas, on sait que $\mathbf{F}$ ne peut pas admettre de potentiel vectoriel.

— Épisode III —

a) Expliquer pour quelles valeurs de $\alpha \in \mathbf{R}$ l'intégrale $\displaystyle\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$ converge et donner dans ce cas sa valeur.

Pour $\alpha \neq 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty}\int_1^b \frac{1}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \left.\frac{x^{1-\alpha}}{1-\alpha}\right|_1^b = \lim_{b\to\infty} \frac{1}{b^\alpha}\cdot\frac{b}{1-\alpha} + \frac{1}{\alpha-1}.$$

Cette limite existe si et seulement si $\alpha > 1$, auquel cas elle vaut $\frac{1}{\alpha-1}$.
Dans le cas où $\alpha = 1$,

$$\int_1^\infty \frac{1}{x}\,\mathrm{d}x = \lim_{b\to\infty} \ln x\big|_1^b = \lim_{b\to\infty} \ln b = +\infty$$

et l'intégrale diverge également. Conclusion : l'intégrale converge si et seulement si $\alpha > 1$.

b) Pour quelles valeurs de $z \in \mathbf{C}$ l'expression $\displaystyle\zeta(z) := \sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^z}$ converge-t-elle absolument ? [NB : $n^z := \exp(z\ln n)$]

Pour étudier la convergence absolue de la série, on s'intéresse à la convergence de la série à termes positifs

$$\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{|n^z|}.$$

Or, d'après notre connaissance de l'expontielle complexe, $|n^z| = |\exp(z\ln n)| = e^{\operatorname{Re} z \ln n} = n^{\operatorname{Re} z}$. La série ci-dessus est donc une série de Riemann de paramètre $\alpha = \operatorname{Re} z$, qui converge (par comparaison avec l'intégrale de la question a)) si et seulement si $\alpha = \operatorname{Re} z > 1$.

c) Donner en particulier un encadrement de $\zeta(2)$ par des intégrales dont vous connaissez la valeur.

Puisque la fonction $f(x) = 1/x^2$ est décroissante sur $[1,\infty[$, on peut dire par exemple que

$$\int_n^{n+1} \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x \leqslant \frac{1}{n^2} \leqslant \int_{n-1}^n \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x.$$

On trouve donc

$$\underbrace{\int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{1} \leqslant \underbrace{\sum_{n=1}^\infty \frac{1}{n^2}}_{\zeta(2)} \leqslant \underbrace{1 + \int_1^\infty \frac{1}{x^2}\,\mathrm{d}x}_{2}.$$

d) En développant l'intégrande comme la somme d'une série géométrique, montrer qu'on a $\displaystyle\zeta(2) = \iint_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}A$.

$$\iint_{[0,1]^2} \frac{1}{1-xy}\,\mathrm{d}A = \iint_{[0,1]^2} \sum_{n=0}^\infty (xy)^n\,\mathrm{d}A \overset{\text{Fubini}}{=} \sum_{n=0}^\infty \int_0^1 x^n\,\mathrm{d}x \int_0^1 y^n\,\mathrm{d}y = \sum_{n=0}^\infty \frac{1}{(n+1)^2} = \zeta(2).$$

Note : on pourrait évaluer cette intégrale à l'aide d'un changement de variables astucieux pour conclure que

$$\boxed{\zeta(2) = \frac{\pi^2}{6}.}$$