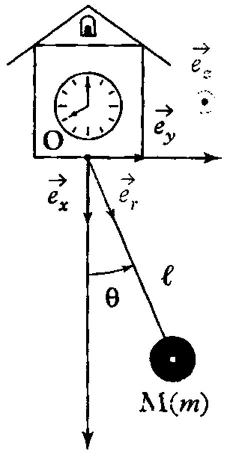
Exercice 1. Balancier d'une horloge



On s'intéresse au balancier d'une « horloge à poids ». Le balancier est composé d'une tige de longueur L et de masse négligeable fixée en O et portant à son autre extrémité un disque modélisable par un point matériel M de masse m. Le référentiel R (O ; $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$) est supposé galiléen.

1. Ecrire l'équation différentielle du mouvement du balancier.
2. Le mouvement du balancier est considéré de faible amplitude. Déterminer les expressions de la période et de la fréquence des petites oscillations.
3. Le balancier possède un réglage qui permet d'ajuster la longueur L afin que l'horloge donne l'heure exacte. Faut-il augmenter ou diminuer L si l'horloge avance ? si l'horloge retarde ?

Exercice 2. L'atome de Bohr

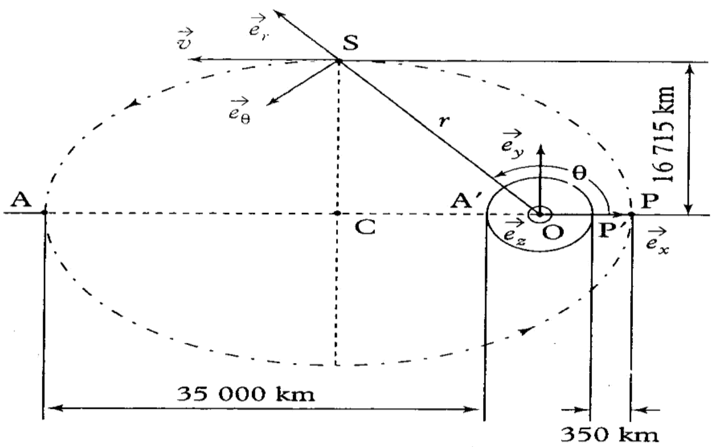
L'atome d'hydrogène est constitué d'un proton O, de masse m_P et charge + e, et d'un électron M, de masse m_e et charge – e, ayant un mouvement circulaire uniforme, de rayon *r* et de vitesse *v* autour de O.

Dans le modèle de Bohr, le moment cinétique de l'électron est quantifié : $L_O(M) = n\frac{h}{2\pi}$, où n est un entier et h est la constante de Planck. Le référentiel R (O ; $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$) est supposé galiléen.

1. Déterminer une relation entre r, v, m, n, h.
2. Sachant que l'électron n'est soumis qu'à la force d'interaction électrostatique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\overrightarrow{e_r}$, déterminer une nouvelle relation entre *r* et *v*.
3. En déduire que r se met sous la forme $n^2 r_0$; on calculera alors r_0.
4. Montrer que l'énergie mécanique de l'électron se met sous la forme : $E_m = -\frac{E_0}{n^2}$.
5. En supposant que l'électron est dans son état fondamental (n=1), calculer la vitesse de l'électron ainsi que l'énergie d'ionisation de l'atome (l'exprimer en eV).

Données : $h = 6{,}64.10^{-34} J.s$, $e = 1{,}6.10^{-19} C$, $\varepsilon_0 = 8{,}84.10^{-12} C^2.N^{-1}m^{-2}$, $m_e = 9{,}1.10^{-31}\ kg$

Exercice 3. Un satellite



Un satellite, assimilé à son centre d'inertie, de masse m=1 tonne, décrit ue trajectoire elliptique autour de la Terre. Ce satellite n'est soumis qu'à la force d'interaction gravitationnelle $\vec{F}$ dirigée vers le centre O de la Terre. Le référentiel R (O ; $\overrightarrow{e_x}, \overrightarrow{e_y}, \overrightarrow{e_z}$) est supposé galiléen. A l'instant représenté, la vitesse du satellite dans ce référentiel est $v = 14\ 650\ km.h^{-1}$. Le rayon de la Terre est $R_T = 6400\ km$.

1. Calculer la valeur du moment cinétique du satellite en O dans R à l'instant considéré.
2. A l'aide du TMC, donner la valeur de la vitesse du satellite :

- A son apogée A (point de la trajectoire le plus éloigné de la Terre)
- A son périgée P (point de la trajectoire le plus près de la Terre).

Ex4. (Bonus) Calcul de moments

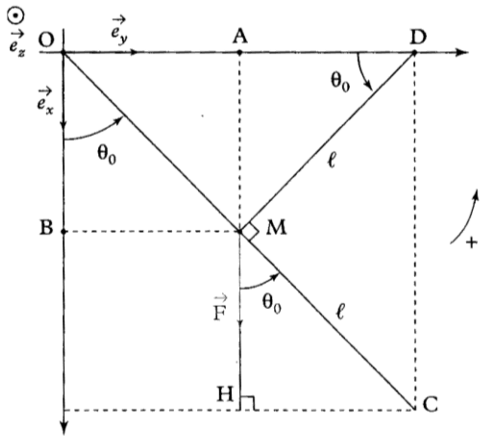
On considère un point matériel $M(m)$ soumis à une force $\vec{F} = F\vec{e_x}$ constante.

Exprimer et calculer les moments de la force suivants :

$$\overrightarrow{\mathcal{M}_O}(\vec{F})\ ;\quad \overrightarrow{\mathcal{M}_B}(\vec{F})\ ;\quad \overrightarrow{\mathcal{M}_A}(\vec{F})\ ;\quad \overrightarrow{\mathcal{M}_C}(\vec{F})$$

Données :

$F = 1{,}0 \cdot 10^3\ \mathrm{N}$; $\ell = 1{,}0\ \mathrm{m}$; $\theta_0 = 45°$.



FORMULAIRE DE MECANIQUE DU POINT

Forces usuelles Poids $\vec{P} = m\vec{g}$, Frottements fluides (laminaire) $\vec{F} = -k\vec{v}$, Frottements solides (dynamiques) $\|\vec{F}\| = \mu\|\vec{R}\|$ Force électrique $\vec{F} = \frac{-e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2}\vec{e_r}$, Force de gravitation $\vec{F} = -\frac{GMm}{r^2}\overrightarrow{u_r} = -\frac{GMm}{r^3}\vec{r}$.

Quelques définitions travail $W_{AB}(\vec{F}) = \int_A^B \vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$, moment d'une force $\overrightarrow{\mathcal{M}_i^O} = \vec{r} \wedge \vec{F_i}$, moment cinétique $\overrightarrow{L_O} = m\,\vec{r} \wedge \vec{v}$, énergie potentielle E_P d'une force conservative : $\vec{F} = -\vec{\nabla}E_P$ → $E_P(B) - E_P(A) = -W_{AB}(\vec{F})$

Cinématique et dynamique en coordonnées cartésiennes

$\vec{r} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y}$; $\vec{v} = \dot{\vec{r}} = \dot{x}\,\overrightarrow{u_x} + \dot{y}\,\overrightarrow{u_y}$; $\vec{a} = \ddot{\vec{r}} = \ddot{x}\overrightarrow{u_x} + \ddot{y}\overrightarrow{u_y}$

Cinématique et dynamique en coordonnées polaires

$\vec{r} = r\,\overrightarrow{u_r}$; $\vec{v} = \dot{r}\,\overrightarrow{u_r} + r\dot{\theta}\,\overrightarrow{u_\theta}$; $\vec{a} = (\ddot{r} - r\dot{\theta}^2)\overrightarrow{u_r} + (2\dot{r}\dot{\theta} + r\ddot{\theta})\overrightarrow{u_\theta}$

PFD. $m\vec{a} = \sum_i \vec{F_i}$ ou $\frac{d\vec{p}}{dt} = \sum_i \vec{F_i}$

TEC. $\Delta_{AB}E_C = \sum_i W_{AB}(\vec{F_i})$

TEM. $\Delta E_m = \sum W(\vec{F}_{non\ conservatives})$

TMC. $\frac{d\overrightarrow{L_O}}{dt} = \sum_i \overrightarrow{\mathcal{M}_i^O}$

Equations différentielles usuelles

$\frac{dy}{dt} + ay = b$ → $y(t) = Kexp(-at) + \frac{b}{a}$

$\frac{d^2y}{dt^2} + {\omega_0}^2 y = 0$ → $y(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t) = C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

$\frac{d^2y}{dt^2} + 2\lambda\frac{dy}{dt} + {\omega_0}^2 y = 0$ →équation caractéristique de discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4{\omega_0}^2$.

Si $\Delta > 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\exp\left(\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right) + b\exp\left(-\frac{\sqrt{\Delta}}{2}t\right)\right\}$

Si $\Delta < 0$: $y(t) = \exp(-\lambda t)\left\{a\cos\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right) + b\sin\left(\frac{\sqrt{-\Delta}}{2}t\right)\right\}$

Solutions

Ex1.

Exercice 1

Balancier d'une horloge.

1) Le mouvement est plus facile à étudier en coordonnées polaires car la trajectoire est sur le cercle de centre O et rayon ℓ.
L'objectif pour décrire le mouvement est de déterminer $\theta(t)$.

Méthode 1. avec le TMC.

2 forces : le poids $\vec{P}$
la tension du fil $\vec{T}$

Coordonnées cylindriques
~~Repère~~ $\vec{e_r}, \vec{e_\theta}, \vec{e_z}$
• $\vec{e_r}$ vers l'extérieur du cercle
• $\vec{e_\theta}$ orthogonal à $\vec{e_r}$, dans le sens des θ positifs
• $\vec{e_z}$ de telle sorte que $\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta} = \vec{e_z}$

$\vec{\mathcal{M}}^O(\vec{T}) = \vec{OM} \wedge \vec{T} = \vec{0}$ (vecteurs colinéaires) $\sin(\vec{OM}, \vec{T}) = 0$

$\vec{\mathcal{M}}^O(\vec{P}) = \vec{OM} \wedge \vec{P}$

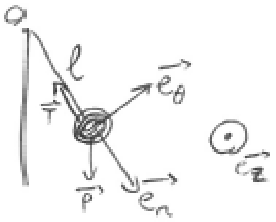
$= \|\vec{OM}\| \, \|\vec{P}\| \, |\sin(\vec{OM}, \vec{P})| \, . \underbrace{(-\vec{e_z})}$

$= -\ell m g \sin(\theta) \, \vec{e_z}$

Sens de $\mathcal{M}$ déterminé avec la règle de la main droite.

$\vec{L_O} = m \, \vec{OM} \wedge \vec{v}$

$\vec{OM} = \ell \vec{e_r}$, $\vec{v} = \ell \dot{\theta} \vec{e_\theta}$ (voir formulaire + ici $\begin{cases} \dot{r} = 0 \\ r = \ell = cte \end{cases}$)



$\vec{L_O} = m \ell^2 \dot{\theta} \, \underbrace{\vec{e_r} \wedge \vec{e_\theta}}_{\vec{e_z}}$

$\hookrightarrow \dfrac{d\vec{L_O}}{dt} = m \ell^2 \ddot{\theta} \, \vec{e_z}$ (m, ℓ et $\vec{e_z}$ sont des constantes, seul $\theta(t)$ est une fonction du temps)

Théorème du moment cinétique :

$m \ell^2 \ddot{\theta} \, \vec{e_z} = \vec{0} - \ell m g \sin\theta \, \vec{e_z}$

$$\boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell} \sin(\theta) = 0}$$

Méthode 2 : avec le PFD, en coordonnées ~~cylindriques~~ polaires

$\vec{P} = \begin{pmatrix} mg\cos(\theta) \\ -mg\sin(\theta) \\ \end{pmatrix}$ $\vec{T} = \begin{pmatrix} -T \\ 0 \\ \end{pmatrix}$ $\vec{a} = \begin{pmatrix} -\ell\dot{\theta}^2 \\ \ell\ddot{\theta} \end{pmatrix}$

(voir formulaire, avec $r = \ell$ et $\dot{r} = 0$)

$\hookrightarrow$ selon $\vec{e_\theta}$: $-mg\sin(\theta) = m\ell\ddot{\theta}$ $\rightarrow \boxed{\ddot{\theta} + \frac{g}{\ell}\sin\theta = 0}$

2. faibles amplitudes : $\sin\theta \approx \theta$ → $\ddot{\theta}(t) + \frac{g}{\ell}\theta(t) = 0$

De la forme $\ddot{\theta} + \omega_0^2\theta = 0$ $\omega_0 = \sqrt{\frac{g}{\ell}}$.

Solution de la forme $\theta(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$

ou $= C\cos(\omega_0 t + \varphi)$

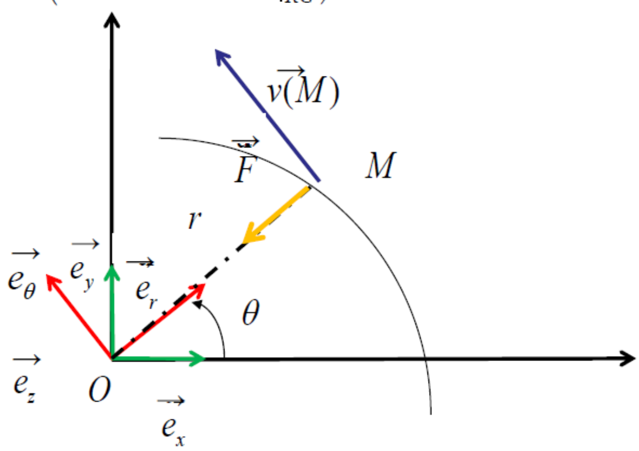
3. Si l'horloge avance, c'est que la période est trop faible, il faudra donc augmenter la période : $T = \frac{1}{f} = \frac{2\pi}{\omega_0} = 2\pi\sqrt{\frac{\ell}{g}}$ donc augmenter la longueur ℓ

Ex2.

1°) Relation

Le mouvement de l'électron est circulaire uniforme à la vitesse v :

$$L_O(M)\big|_{RG} = \left(\overrightarrow{OM} \wedge m_e\vec{v}(M)\big|_{RG}\right) = r\vec{e}_r \wedge m_e v\vec{e}_\theta = m_e r v\vec{e}_z$$



D'après l'énoncé on obtient donc :

$$L_O(M)\big|_{RG} = m_e r v = n\frac{h}{2\pi} \quad \Rightarrow v = \frac{nh}{2\pi m_e r}$$

2°) Application du PFD

Le mouvement de l'électron est circulaire uniforme à la vitesse v :

$$\overrightarrow{OM} = r \cdot \overrightarrow{e_r}$$

$$m_e \overrightarrow{a}(M)\Big|_{RG} = \overrightarrow{F}$$

$$\overrightarrow{v}(M) = r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta} = v \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

$$\overrightarrow{a}(M) = -r \cdot \dot{\theta}^2 \cdot \overrightarrow{e_r} = -\frac{v^2}{r^2} \cdot \overrightarrow{e_r}$$

$$-m_e \frac{v^2}{r^2} \cdot \overrightarrow{e_r} = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \cdot \overrightarrow{e_r}$$

$$v^2 \cdot r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e}$$

3°) Forme de r

En utilisant les deux réponses précédentes :

$$v = \frac{nh}{2\pi m_e r} \qquad v^2 \cdot r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \qquad \Rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \frac{1}{v^2}$$

$$\Rightarrow r = \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 m_e} \frac{4\pi^2 m_e^2 r^2}{n^2 h^2} \Rightarrow \quad r = \frac{e^2}{\varepsilon_0} \frac{\pi m_e r^2}{n^2 h^2} \Rightarrow \quad \frac{r}{r^2} = \frac{1}{r} = \frac{e^2}{\varepsilon_0} \frac{\pi m_e}{n^2 h^2} \Rightarrow$$

$$r = \frac{n^2 h^2 \varepsilon_0}{e^2 \pi m_e} = \frac{h^2 \varepsilon_0}{e^2 \pi m_e} n^2 \qquad \Rightarrow r = r_0 \cdot n^2 \qquad avec \ r_0 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e \cdot e^2}$$

AN :

$$r_0 = \frac{h^2 \varepsilon_0}{\pi m_e \cdot e^2} = \frac{\left(6,64 \times 10^{-34}\right)^2 \times 8,84 \times 10^{-12}}{\pi \times 9,1 \times 10^{-31} \times \left(1,6 \times 10^{-19}\right)^2} \approx 5,3 \times 10^{-11} \ m$$

4°) Energie cinétique de l'électron

$$E_C = \frac{1}{2} m_e v^2 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0 n^2}$$

La force d'interaction électrostatique dérive d'une énergie potentielle

$$E_P(r) = -\int F \cdot dr + Cste = \int \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r^2} dr + Cste$$

$$E_P(r) = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cste = -\frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 n^2} + Cste$$

On choisit la Cste =0 (référence de l'énergie potentielle =0 à l'infini)

L'énergie mécanique s'écrit donc :

$$E_M = E_C + E_P = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0 n^2} - \frac{e^2}{4\pi\varepsilon_0 r_0 n^2} = -\frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0 n^2}$$

$$E_M = -\frac{E_0}{n^2} \quad avec \quad E_0 = \frac{e^2}{8\pi\varepsilon_0 r_0}$$

5°) Energie d'ionisation :

L'énergie d'ionisation est l'énergie qu'il faut fournir à l'électron pour le faire passer de son état fondamental (n=1) à un état infiniment éloigné de O c'est-à-dire dans un état d 'énergie nulle .

Elle vaut donc : $E_{ion} = \Delta E_M = 0 - \frac{-E_0}{1^2} = E_0$

AN :

$$E_{ion} = E_0 = \frac{\left(1,6\times10^{-19}\right)^2}{8\pi\times8,84\times10^{-12}\times5,3\times10^{-11}} \approx 2,17\times10^{-18}\ J \approx 13,6\ \ eV$$

Ex3.

1°) Moment cinétique

Le moment cinétique en O du satellite dans le référentiel galiléen R_G s'écrit :

$$\vec{L_O}(S)\big|_{RG} = \vec{OS} \wedge m\vec{v}(S)\big|_{RG} \qquad \left\|\vec{L_O}(S)\big|_{RG}\right\| = OS \times mv \times |\sin\alpha|$$

$$\alpha \text{ angle entre } \vec{OS} \text{ et } \vec{v}(S)$$

On peut remarquer que $CS = OS\sin\alpha$

$$\left\|\vec{L_O}(S)\big|_{RG}\right\| = mv \times CS$$

AN :

$$\left\|\vec{L_O}(S)\big|_{RG}\right\| = 1\times 10^3 \times \frac{14650}{3,6} \times 16715\times 10^3 \approx 6,8\times 10^{13}\ kgm^2s^{-1}$$

2°) TMC

Système étudié : le satellite S assimilé à son centre d'inertie

Référentiel galiléen d'étude : R_G $\left(O;\vec{e_x};\vec{e_y};\vec{e_z}\right)$

Bilan des forces appliquées au système : forces d'interaction gravitationnelle

$$\vec{F} = -F\cdot\vec{e_r}$$

Point de calcul : le point O dans le référentiel R_G

Théorème du moment cinétique:

$$\left(\frac{d\vec{L_O}(S)}{dt}\right)_{RG} = \vec{M_O}\left(\vec{F}\right) = \vec{0}$$

$$d\vec{L_O}(S)\big|_{RG} = \vec{cste} \text{ et } \left\|\vec{L_O}(S)\big|_{RG}\right\| = cste$$

En outre, on a à chaque instant :

$$\overrightarrow{OS} = r \cdot \overrightarrow{e_r} \qquad \overrightarrow{v}(S)\Big|_{RG} = \dot{r} \cdot \overrightarrow{e_r} + r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

Or , r est extrêmal à l'apogée et au périgée (max en A et min en P) et en ces points: $\dot{r} = 0$

$$\overrightarrow{OS} = r\overrightarrow{e_r} \perp \overrightarrow{v}(S) = r \cdot \dot{\theta} \cdot \overrightarrow{e_\theta}$$

On en déduit :

En A :

$$\left\|\overrightarrow{L_O}(S)\Big|_{RG}\right\| = OA \times m v_A \times \left|\sin\frac{\pi}{2}\right|$$

$$v_A = \frac{\left\|\overrightarrow{L_O}(S)\Big|_{RG}\right\|}{(AA' + R_T)m} = \frac{6,8 \times 10^{13}}{41400 \times 10^3 \times 1,0 \times 10^3} =$$

$$= 1,6 \times 10^3 \ ms^{-1} \approx 5,9 \times 10^3 \ km/h$$

En P :

$$v_P = \frac{\left\|\overrightarrow{L_O}(S)\Big|_{RG}\right\|}{(R_T + P'P)m} = \frac{6,8 \times 10^{13}}{6750 \times 10^3 \times 1,0 \times 10^3} =$$

$$= 1,0 \times 10^4 \ ms^{-1} \approx 3,6 \times 10^4 \ km/h$$

Ex4.

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = \overrightarrow{OM} \wedge \vec{F} = \left(\ell\cos\theta_0 \cdot \vec{e_x} + \ell\sin\theta_0 \cdot \vec{e_y}\right) \wedge F \cdot \vec{e_x}$$

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = F\ell\sin\theta_0 \left(\vec{e_y} \wedge \vec{e_x}\right) \quad \text{car } \vec{e_x} \wedge \vec{e_x} = 0$$

$$\overrightarrow{M_0}(\vec{F}) = -F\ell\sin\theta_0 \cdot \vec{e_z}$$

AN: $\left\|\overrightarrow{M_0}(\vec{F})\right\| = 1{,}0 \times 1{,}0 \times 10^3 \times \sin 45 \approx 7{,}1 \times 10^2 \;\; N \cdot m$

$$\overrightarrow{M_B}(\vec{F}) = \overrightarrow{BM} \wedge \vec{F} = \left(\ell\sin\theta_0 \cdot \vec{e_y}\right) \wedge F \cdot \vec{e_x} = -F\ell\sin\theta_0 \cdot \vec{e_z}$$

AN: $\left\|\overrightarrow{M_B}(\vec{F})\right\| = \left\|\overrightarrow{M_O}(\vec{F})\right\| \approx 7{,}1 \times 10^2 \;\; N \cdot m$

$$\overrightarrow{M_C}(\vec{F}) = \overrightarrow{CM} \wedge \vec{F} = \left(-\ell\cos\theta_0 \cdot \vec{e_x} - \ell\sin\theta_0 \cdot \vec{e_y}\right) \wedge F \cdot \vec{e_x} = -F\ell\sin\theta_0 \cdot \left(\vec{e_y} \wedge \vec{e_x}\right)$$

$$\overrightarrow{M_C}(\vec{F}) = +F\ell\sin\theta_0 \cdot \left(\vec{e_y} \wedge \vec{e_x}\right)$$

AN: $\left\|\overrightarrow{M_C}(\vec{F})\right\| = \overrightarrow{M_O}(\vec{F}) \approx 7{,}1 \times 10^2 \text{N.m}$

Cet exercice permet de verifier que l'amplitude du moment est simplement le produit de la force, par la distance entre le point de référence et la droite portant la force. (voir cours, « interprétation du moment d'une force »)