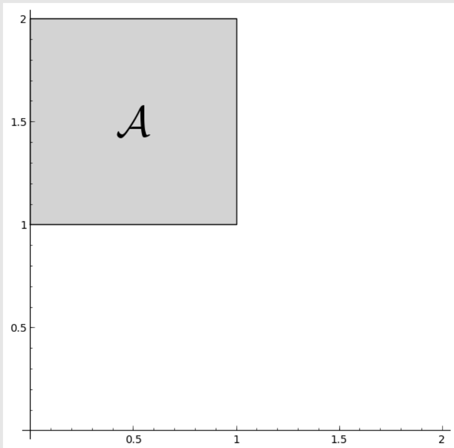
Pour chacune des intégrales multiples suivantes: faites un schéma du domaine, posez les intégrales itérées et évaluez-les.

Nom:	**CORRIGÉ**

1. $\displaystyle\iint_{\mathcal{A}} \frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}A$ où $\mathcal{A}$ est le carré $[0,1]\times[1,2]$

$$\begin{aligned} I &= \int_1^2\int_0^1 \frac{e^y}{1+x^2}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y \\ &= \left(\int_0^1 \frac{\mathrm{d}x}{1+x^2}\right)\left(\int_1^2 e^y\,\mathrm{d}y\right) \\ &= \arctan x\Big|_0^1 \cdot e^y\Big|_1^2 \\ &= \left(\frac{\pi}{4}-0\right)\left(e^2-e\right) \\ &= \frac{\pi e(e-1)}{4} \end{aligned}$$



2. $\displaystyle\iint_{\mathcal{B}} xy^2\,\mathrm{d}A$ où $\mathcal{B}$ est le triangle de sommets $(0,0)$, $(1,0)$ et $(1,1)$

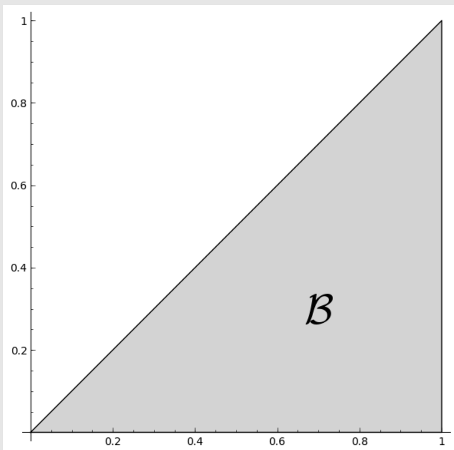
Direction la plus simple :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1\int_0^x xy^2\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 x\,\frac{y^3}{3}\Big|_0^x\,\mathrm{d}x \\ &= \int_0^1 \frac{x^4}{3}\,\mathrm{d}x = \frac{x^5}{15}\Big|_0^1 = \frac{1}{15} \end{aligned}$$

On peut aussi utiliser

$$I = \int_0^1\int_y^1 xy^2\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

pour arriver au même résultat.



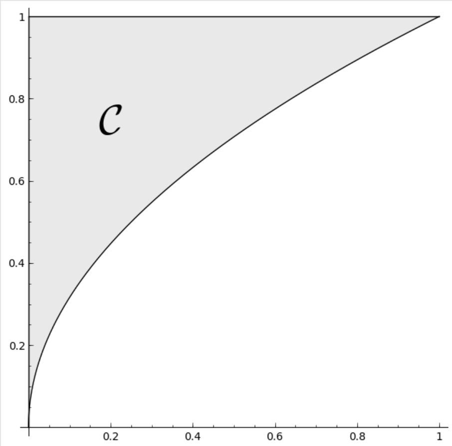
3. $\displaystyle\iint_{\mathcal{C}} e^{y^3}\,\mathrm{d}A$ où $\mathcal{C} = \{\,(x,y) \in \mathbf{R}^2 \mid \sqrt{x} \leqslant y \leqslant 1 \text{ et } 0 \leqslant x \leqslant 1\,\}$

On peut écrire

$$I = \int_0^1 \int_{\sqrt{x}}^1 e^{y^3}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x$$

mais cela ne nous aide pas beaucoup car $y \mapsto e^{y^3}$ n'admet pas de primitive élémentaire. Par contre dans l'autre direction :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^{y^2} e^{y^3}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y = \int_0^1 e^{y^3}\, x\Big|_0^{y^2}\,\mathrm{d}y \\ &= \int_0^1 y^2 e^{y^3}\,\mathrm{d}y = \frac{e^{y^3}}{3}\Big|_0^1 = \frac{e-1}{3}. \end{aligned}$$



4. $\displaystyle\iiint_{\mathcal{D}} x\,\mathrm{d}V$ où $\mathcal{D}$ est le tétraèdre $\{\,(x,y,z) \in \mathbf{R}^3 \mid 0 \leqslant x \leqslant y \leqslant z \leqslant 1\,\}$

Façon la plus simple :

$$\begin{aligned} I &= \int_0^1 \int_0^z \int_0^y x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z \\ &= \int_0^1 \int_0^z \frac{y^2}{2}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z = \int_0^1 \frac{z^3}{6}\,\mathrm{d}z = \frac{1}{24} \end{aligned}$$

mais il y a 5 autres façons de la poser :

$$\int_0^1 \int_y^1 \int_0^y x\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y,$$

$$\int_0^1 \int_0^z \int_x^z x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}z, \qquad \int_0^1 \int_x^1 \int_x^z x\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x,$$

$$\int_0^1 \int_0^y \int_y^1 x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y, \qquad \int_0^1 \int_x^1 \int_y^1 x\,\mathrm{d}z\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x.$$