Ce quiz comporte **2** questions équipondérées; répondez directement sur cette feuille. L'utilisation de la calculatrice non programmable est autorisée.

Nom: **CORRIGÉ**

1. a) Soit $(G, \cdot)$ un groupe. Montrer que la loi de composition « externe »

$$g \star x := g \cdot x \cdot g^{-1}$$

définit une action de G sur lui-même (deux choses à vérifier).

Pour tout $x \in G$:

$$1 \star x = 1 \cdot x \cdot 1^{-1} = x \cdot 1 = x,$$

et pour $g,\, h \in G$, $x \in G$:

$$(g \cdot h) \star x = (g \cdot h) \cdot x \cdot (g \cdot h)^{-1} = g \cdot (h \cdot x \cdot h^{-1}) \cdot g^{-1} = g \star (h \star x).$$

b) Expliciter les orbites pour cette action dans le cas de $G = \mathfrak{S}_3$. Décrire également le stabilisateur d'un élément représentatif dans chaque orbite.

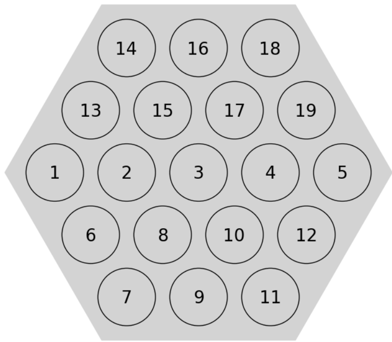
- $\mathcal{O}_1 = \{1\}$, Stab $1 = \mathfrak{S}_3$
- $\mathcal{O}_2 = \{(12), (23), (13)\}$, Stab $(12) = \{1, (12)\}$
- $\mathcal{O}_3 = \{(123), (132)\}$, Stab $(123) = \{1, (123), (132)\}$

2. Pour la Saint-Valentin, on décide de confectionner de jolies boîtes de chocolats hexagonales contenant 7 chocolats pralinés, 6 à la liqueur et 6 à la nougatine.

On estime que deux assortiments qui ne diffèrent que par une rotation de la boîte sont « les mêmes. » On va donc considérer l'action du groupe de rotations

$$\mathcal{C}_6 = \langle \rho \rangle$$

sur l'ensemble X des façons de remplir une boîte.



a) Numéroter les emplacements à votre guise, et donner avec cette notation la décomposition cyclique des permutations dans $\mathfrak{S}_{19}$ correspondant à : ρ, ρ^2 et ρ^3.

Par exemple, avec la numérotation ci-dessus :

- $\rho \mapsto (1\ 7\ 11\ 5\ 18\ 14)\,(2\ 8\ 10\ 4\ 17\ 15)\,(6\ 9\ 12\ 19\ 16\ 13)$
- $\rho^2 \mapsto (1\ 11\ 18)\,(2\ 10\ 17)\,(4\ 15\ 8)\,(5\ 14\ 7)\,(6\ 12\ 16)\,(9\ 13\ 19)$
- $\rho^3 \mapsto (1\ 5)\,(2\ 4)\,(6\ 19)\,(7\ 18)\,(8\ 17)\,(9\ 16)\,(10\ 15)\,(11\ 14)\,(12\ 13)$

b) Combien d'assortiments réellement différents peut-on réaliser ?

- $|\mathrm{Fix}\ 1| = \binom{19}{7, 6, 6} = 46\,558\,512$
- $|\mathrm{Fix}\ \rho| = |\mathrm{Fix}\ \rho^5| = \binom{3}{1, 1, 1} = 6$
- $|\mathrm{Fix}\ \rho^2| = |\mathrm{Fix}\ \rho^4| = \binom{6}{2, 2, 2} = 90$
- $|\mathrm{Fix}\ \rho^3| = \binom{9}{3, 3, 3} = 1680$

d'où par la formule de Cauchy-Frobenius

$$m = \frac{1}{6}\Big(46\,558\,512 + 2 \cdot 6 + 2 \cdot 90 + 1680\Big) = 7\,760\,064.$$