CIR$_2$

TD de Maths
Groupes

Exercice 1

- Dans $G=\mathbb{R}^* \times \mathbb{R}$ on définit la loi de composition interne dans G : $(x,y) * (x',y')=(xx',xy'+y)$.
  Montrer que $(G, *)$ est un groupe non abélien.
- Dans $G=\mathbb{R}\setminus\{-1\}$ on définit la loi de composition interne dans G : $x * y = x + y + xy$
  Montrer que $(G, *)$ est un groupe abélien.
  Résoudre dans ce groupe $a * x = b$. Exemple : $3 * x = 1$.

Exercice 2

- Dans $\mathbb{R}$ on définit la loi de composition interne : $x * y = \sqrt[3]{x^3 + y^3}$.
  Montrer que $(\mathbb{R}, *)$ est un groupe abélien isomorphe à $(\mathbb{R}, +)$.
- Dans l'intervalle $]-1,+1[$ montrer que $x \star y = \dfrac{x+y}{1+xy}$ définit une loi de composition interne.
  Montrer que $]-1,+1[$ muni de cette loi est un groupe isomorphe à $(\mathbb{R},+)$ (penser à $x \to \operatorname{th} x$)

Exercice 3

Soient n un naturel non nul et $U = \left\{ e^{i\frac{2k\pi}{n}} / k \in \mathbb{Z} \right\}$

Montrer que $(U,\times)$ est un groupe. Quel est son ordre ?

Trouver un groupe additif isomorphe à $(U,\times)$.

Dans le cas particulier $n = 12$, déterminer l'orbite et l'ordre de chaque élément du groupe U.
faire une figure

Revenant au cas général, déterminer suivant k et n l'ordre de $x_k = e^{i\frac{2k\pi}{n}}$ dans le groupe U.

Exercice 4

Soit F l'ensemble des 6 fonctions f_i suivantes :

$$f_1(x) = x,\ f_2(x) = 1 - x,\ f_3(x) = \frac{1}{x},\ f_4(x) = \frac{1}{1-x},\ f_5(x) = 1 - \frac{1}{x},\ f_6(x) = \frac{x}{x-1}$$

Montrer que f_1, f_2 et f_3 sont des bijections de $E = \mathbb{R} - \{-1,1\}$ dans lui-même.

En déduire qu'il en est de même pour f_4, f_5 et f_6.

Faire la table de l'opération $\circ$ dans F.

Montrer que $(F,\circ)$ est un groupe et déterminer tous les sous-groupes.

Montrer que $(F,\circ)$ est isomorphe à S_3.

Exercice 5

Soient $(E,\star)$ et $(F,\otimes)$ deux groupes et $f : E \to F$ un morphisme de groupes

- Soit H un sous-groupe de E.
  On considère l'ensemble $\overrightarrow{f}(H) = \{ y \in F \ / \ \exists x \in H \ / \ y = f(x) \}$ des images par f des éléments de H.
  Montrer que $\overrightarrow{f}(H)$ est un sous-groupe de F.
- Soit K un sous-groupe de F.
  On considère l'ensemble $\overleftarrow{f}(K) = \{ x \in E \ / \ f(x) \in K \}$ des éléments de E dont l'image appartient à K.
  Montrer que $\overleftarrow{f}(K)$ est un sous-groupe de E.
- Soit $x \in E$. Montrer que l'ordre de $f(x)$ dans $(F,\otimes)$ est un diviseur de l'ordre de x dans $(E,\star)$
- Trouver tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/7\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/13\mathbb{Z}$
- Trouver tous les morphismes de groupe de $\mathbb{Z}/3\mathbb{Z}$ dans $\mathbb{Z}/12\mathbb{Z}$

Exercice 6

- Décomposer la permutation $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 & 10 & 11 & 12 \\ 3 & 5 & 6 & 10 & 7 & 9 & 2 & 11 & 1 & 12 & 4 & 8 \end{pmatrix}$
  en produit de cycles de supports disjoints puis en produit de transpositions.
  Quelle est sa signature ?
- Quelle est la composée de 2 cycles dont les supports ont un et un seul élément commun ?
- Décomposer en produit de cycles disjoints la composée de 2 cycles dont les supports ont exactement deux éléments communs.
- Quelle est la signature de la permutation de l'alphabet représentée par le mot
  pvlwihcbfazoteqkdxnsuymgjr ?

Exercice 7 : Groupe des permutations

Dans tout le problème, n est un entier supérieur ou égal à 3 et S_n est le groupe des permutations de $\{1..n\}$.
Une transposition est notée (i, j) , un p-cycle est noté $(x_1, x_2, .., x_p)$
pour deux permutations σ_1 et σ_2 , on notera $\sigma_1.\sigma_2$ au lieu de $\sigma_1 \circ \sigma_2$ leur composée.

1) Soient i et j deux entiers tels que $1 \le i < j \le n$. Calculer les composées suivantes :
   a) $(1,2).(1,3)..(1,i)$
   b) $(1,i).(1,i-1)..(1,3).(1,2)$
   c) $(1,i).(1,j).(1,i)$
   d) $(j+1, j, j-1,..,2,1).(1,2,..j-1, j)$
   e) $(i,i+1).(i+1,i+2)..(j-2, j-1).(j-1, j)$
   f) $(j, j-1).(j-1, j-2)...(3,2).(2,1)$
   g) $(i,i+1,.., j-2, j-1).(j, j-1,..,i+1,i)$
2) Soient :
   $A = \{(1,2),(1,3),..,(1,n)\}$ l'ensemble des transpositions de 1 avec les autres entiers
   $B = \{(1,2),(2,3),..,(n-2,n-1),(n-1,n)\}$ l'ensemble des transpositions de 2 entiers consécutifs
   $\sigma = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 \\ 7 & 5 & 1 & 2 & 6 & 4 & 3 \end{pmatrix}$
   a) Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée d'éléments de A
   Ecrire σ comme composée d'éléments de A
   b) Montrer que toute permutation peut s'écrire comme composée d'éléments de B
   Ecrire σ comme composée d'éléments de B
3) Soient τ et τ' deux transpositions.
   Montrer que $\tau.\tau' = id$ **ou** $(\tau.\tau').(\tau.\tau') = id$ **ou** $(\tau.\tau').(\tau.\tau').(\tau.\tau') = id$
4) Soit σ une permutation telle que pour toute transposition τ , $\sigma.\tau = \tau.\sigma$
   a) En considérant la transposition $\tau = (1,2)$,
   utiliser l'égalité $(\sigma.\tau)(n) = (\tau.\sigma)(n)$ pour démontrer que
   $\sigma(n) \neq 1$ et $\sigma(n) \neq 2$
   b) En poursuivant, montrer que $\sigma(n) = n$.
   c) Poursuivre. Conclure.