$\mathscr{M}$aths $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Avertissement : cet examen contient des paraboloïdes

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **2 h** contient **3** $\times$ **3** questions équipondérées, interreliées, mais non ordonnées.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien qu'inutile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et énonçant les résultats utilisés.
- N'oubliez pas que le but de l'exercice est de faire étalage de ce que vous avez compris ce semestre.
- **Exprimez**-vous donc en utilisant le langage et vocabulaire approprié, et surtout **amusez**-vous bien !

1. Les réflecteurs paraboliques sont utiles pour concentrer un faisceau de rayons parallèles en un point unique, appelé *foyer* (ou, inversement, de créer un faisceau de rayons parallèles à partir d'une source ponctuelle).

   Notons donc, pour $\alpha > 0$ donné, $\mathcal{R}$ la surface dans $\mathbf{R}^3$ d'équation cartésienne $z = \alpha(x^2 + y^2)$.

   a) Décrire les intersections de $\mathcal{R}$ avec des plans parallèles aux plans de coordonnées. Comment appelle-t-on $\mathcal{R}$?

   b) Un rayon lumineux $\mathcal{L}$ arrive verticalement et atteint $\mathcal{R}$ en un point $P_0 = (x_0, y_0, z_0)$. Donner l'équation du plan $\mathcal{P}$ tangent à $\mathcal{R}$ en P_0 et décrire la droite $\mathcal{N}$ normale à $\mathcal{R}$ en ce même point.

   c) Décrire le rayon réfléchi $\mathcal{L}'$ en tant que demi-droite, sachant que celui-ci est coplanaire à $\mathcal{L}$ et $\mathcal{N}$ et que les angles d'incidence et de refléxion (mesurés en P_0 par rapport à $\mathcal{N}$) sont égaux, et vérifier que $\mathcal{L}'$ passe par le point

   $$F = \left(0,\, 0,\, \frac{1}{4\alpha}\right).$$

2. Je veux fabriquer un bol en céramique dont la surface $\mathcal{B}$ correspond à la portion de $\mathcal{R}$ (voir question 1) située au-dessus du disque $\mathcal{D} \subset \mathbf{R}^2$ centré à l'origine de rayon $R > 0$.

   a) Établir, à l'aide d'une intégrale triple, que le volume de lait que je peux mettre dans un tel bol est donné par

   $$V = \frac{\pi \alpha R^4}{2}.$$

   b) La surface $\mathcal{B}$ étant paramétrée par $\varphi : \mathcal{D} \to \mathbf{R}^3$, $\varphi(x, y) := \big(x,\, y,\, \alpha(x^2 + y^2)\big)$, expliquer géométriquement pourquoi l'élément d'aire sur $\mathcal{B}$ est donné par

   $$\mathrm{d}A = \left\| \frac{\partial \varphi}{\partial x} \wedge \frac{\partial \varphi}{\partial y} \right\| \mathrm{d}x\, \mathrm{d}y$$

   et en déduire l'aire de $\mathcal{B}$:

   $$A = \frac{\pi}{6\alpha^2}\left((1 + 4\alpha^2 R^2)^{\frac{3}{2}} - 1 \right).$$

   c) Pour une contenance donnée, je cherche les valeurs de R et α qui permettent de minimiser la quantité de céramique nécessaire. Formuler cela sous forme d'un problème d'optimisation à plusieurs variables – et résoudre celui-ci !

3. a) Une fourmi spirale dans mon bol $\mathcal{B}$ (voir question 2) selon la courbe

$$\mathbf{r}(t) = \sqrt{t}\cos t\,\mathbf{i} + \sqrt{t}\sin t\,\mathbf{j} + \alpha t\,\mathbf{k}.$$

Donner une expression pour la distance qu'elle aura parcourue lorsqu'elle sera arrivée au sommet.

b) En mangeant mes céréales, je m'intéresse à la fonction de trois variables

$$g(x, y, z) = 2e^x + \sin(2x - 12y - 8z) - 2\cos y.$$

Donner son développement limité à l'ordre 2 en $(0, 0, 0)$ en précisant son gradient et sa hessienne en ce point.

c) La surface $\mathcal{S}$ de niveau 0 de g est compliquée, mais peut être approximée au voisinage de $(0, 0, 0)$ par une quadrique $\mathcal{Q}$ donnée par ce développement limité... Vérifier que $\mathcal{Q}$ est un paraboloïde de révolution dont vous préciserez la distance focale ($\frac{1}{4\alpha}$ dans la question 1).

Bonus : quelques paraboloïdes de plus si vous avez un petit creux.