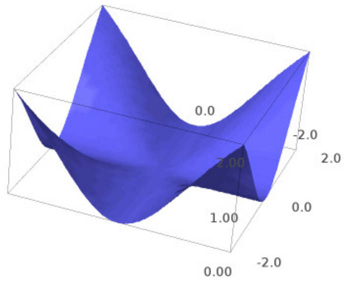
11 décembre 2015 | **Quiz de maths n° 5** | ISÉN - $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

Répondez directement sur l'énoncé en **détaillant vos calculs** et **justifiant vos raisonnements**.

Nom: **CORRIGÉ**

1. Justifier soigneusement pourquoi la fonction




$$f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2y^2}{x^2+y^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = 0 \end{cases}$$

est différentiable en $(0,0)$ et préciser l'équation du plan tangent au graphe de $f$ en ce point.

- D'après la définition et la figure qui nous suggère l'existence d'un plan tangent horizontal : il suffit de se convaincre que $f$ est négligeable devant $\sqrt{x^2+y^2}$ car alors son développement limité à l'ordre 1 est

$$f(x,y) = \underbrace{0}_{f(0,0)} + \underbrace{0}_{\frac{\partial f}{\partial x}(0,0)} x + \underbrace{0}_{\frac{\partial f}{\partial y}(0,0)} y + \underbrace{f(x,y)}_{o(\sqrt{x^2+y^2})}.$$

C'est effectivement le cas car $f$ est $\mathrm{O}(r^4/r^2) = \mathrm{O}(r^2)$ qui est bien $\mathrm{o}(r)$, on a donc comme plan tangent le plan $z = 0$.

- Ou alors : on calcule les dérivées partielles

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \dfrac{2xy^4}{(x^2+y^2)^2} & (x,y) \neq (0,0), \\ 0 & (x,y) = 0, \end{cases}$$

et similirairement pour $\frac{\partial f}{\partial y}$ puis on se convainc qu'elles sont continues à l'origine (car elles y sont $\mathrm{O}(r)$). La fonction est donc de classe $\mathcal{C}^1$ à l'origine, ce qui implique qu'elle y est différentiable.

On obtient alors comme équation du plan tangent :

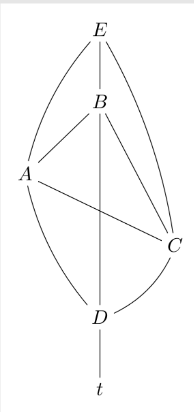
$$z = f(0,0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0,0)\,x + \frac{\partial f}{\partial y}(0,0)\,y = 0 + 0\,x + 0\,y = 0.$$

2. Supposons que les quantités $A, B, C, D$ variant avec le temps sont reliées de la façon suivante :

$$A = \log C + D^2, \quad B = e^A \cos C + D, \quad C + \sqrt{D} = 0.$$

Faire un graphe de dépendances et exprimer le taux de variation instantané (pa rapport au temps) de la quantité

$$E = AB + CD.$$




En utilisant la notation $\dot{f} = \frac{\mathrm{d}f}{\mathrm{d}t}$, on a

$$\dot{A} = \frac{1}{C}\dot{C} + 2D\dot{D}, \qquad \dot{B} = \dot{A}e^A \cos C - \dot{C}e^A \sin C + \dot{D}, \qquad \dot{C} = -\frac{1}{2\sqrt{D}}\dot{D},$$

d'où on tire

$$\dot{A} = \left(2D - \frac{1}{2C\sqrt{D}}\right)\dot{D}, \qquad \dot{B} = \left(e^A \cos C\left(2D - \frac{1}{2C\sqrt{D}}\right) + e^A \sin C \frac{1}{2\sqrt{D}} + 1\right)\dot{D}.$$

On peut alors exprimer le taux de variation voulu en terme de $\dot{D}$ à l'aide de l'expression

$$\dot{E} = A\dot{D} + \dot{A}D + B\dot{C} + \dot{B}C.$$

3. Une *fonction harmonique* est une solution de classe $\mathcal{C}^2$ de l'équation aux dérivées partielles

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = 0.$$

Vérifiez que $f(x, y, z) = e^{3x+4y} \sin 5z$ est une fonction harmonique et spécifiez son $\mathrm{DL}_2$ à l'origine.

La fonction est de classe $\mathcal{C}^2$ car obtenue par somme, produit, composition de fonctions de classe $\mathcal{C}^2$.

Calculons les dérivées qui nous intéressent :

$$\frac{\partial f}{\partial x} = 3f(x, y, z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial x^2} = 9f(x, y, z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial y} = 4f(x, y, z), \quad \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} = 16f(x, y, z),$$
$$\frac{\partial f}{\partial z} = 5e^{3x+4y} \cos 5z, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = -25e^{3x+4y} \sin 5z = -25f(x, y, z)$$

et effectivement

$$\frac{\partial^2 f}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f}{\partial z^2} = (9 + 16 - 25)f(x, y, z) = 0.$$

Pour le $\mathrm{DL}_2$ on peut soit utiliser la formule générale

$$f(x, y, z) \approx f(0, 0, 0) + \frac{\partial f}{\partial x}(0, 0, 0)\, x + \frac{\partial f}{\partial y}(0, 0, 0)\, y + \frac{\partial f}{\partial z}(0, 0, 0)\, z + \frac{1}{2}\left(\frac{\partial^2 f}{\partial x^2}(0, 0, 0)\, x^2 + \frac{\partial^2 f}{\partial y^2}(0, 0, 0)\, y^2 + \right.$$
$$\left. \frac{\partial^2 f}{\partial z^2}(0, 0, 0)\, z^2 + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial y}(0, 0, 0)\, xy + 2\frac{\partial^2 f}{\partial x \partial z}(0, 0, 0)\, xz + 2\frac{\partial^2 f}{\partial y \partial z}(0, 0, 0)\, yz\right)$$

soit, ce qui revient au même (mais est plus rapide), manipuler les $\mathrm{DL}_2$ des constituents de $f$ ; dans tous les cas, on trouve

$$f(x, y) \approx 5z + 15xz + 20yz.$$

4. Je suis un oiseau se trouvant en $(0, 0, 0)$ d'une masse d'air dont la température en $(x, y, z)$ est donnée par

$$T(x, y, z) = \frac{3xy}{1 + z^2} + \sin(y^2 + z)$$

et j'ai froid. Dans quelle direction devrais-je me diriger pour me réchauffer au plus vite ?

La fonction étant de classe $\mathcal{C}^1$ (car somme, produit, quotient, composée de fonctions de classe $\mathcal{C}^1$ dont le dénominateur ne s'annule pas), on sait que le taux d'accroissement instantané de la température est maximal dans la direction du gradient $\nabla T$ en $(0, 0, 0)$.

Pour calculer celui-ci : soit on évalue $\nabla T$ symboliquement en un point quelconque

$$\nabla T = \left(\frac{3y}{1 + z^2}, \frac{3x}{1 + z^2} + 2y \cos(y^2 + z), -\frac{6xyz}{1 + z^2} + \cos(y^2 + z)\right)$$

avant d'évaluer celui-ci en $(0, 0, 0)$, soit on procède par développement limité :

$$T(x, y, z) \approx \underbrace{3xy(1 - z^2) + y^2}_{\text{degré 2 et plus}} + z \approx z.$$

Dans les deux cas, on trouve $\nabla T(0, 0, 0) = (0, 0, 1)$ : je suis mieux de me déplacer directement à la verticale.