$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

— **I** —

a) Si (a_n) désigne la suite de nombres réels définie par la récurrence

$$a_0 = 0, \qquad a_1 = 1, \qquad a_{n+2} = 3a_{n+1} - 2a_n \quad (n \geqslant 0),$$

donner une formule explicite pour la fonction complexe $f(z) := \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$.

Plusieurs approches (équivalentes) possibles ...

- On pourrait tout d'abord résoudre l'équation de récurrence : c'est une récurrence linéaire d'ordre 2 à coefficients constants, équation caractéristique

$$\lambda^2 - 3\lambda + 2 = (\lambda - 2)(\lambda - 1) = 0,$$

donc solution générale

$$a_n = A + B \cdot 2^n.$$

En imposant les conditions initiales on trouve qu'on doit avoir $A+B=0$ et $A+2B=1$ donc $B=1$, $A=-1$.

On trouve donc

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty}(2^n - 1)z^n = \sum_{n=0}^{\infty}(2z)^n - \sum_{n=0}^{\infty} z^n = \frac{1}{1-2z} - \frac{1}{1-z}.$$

- Autre approche : on peut transformer l'équation de récurrence en une équation algébrique pour f :

$$\begin{aligned} f(z) &= z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n = z + \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+2} z^{n+2} = z + \sum_{n=0}^{\infty}(3a_{n+1} - 2a_n) z^{n+2} \\ &= z + 3z \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} z^{n+1} - 2z^2 \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n = z + 3zf(z) - 2z^2 f(z) \end{aligned}$$

d'où

$$(1 - 3z + 2z^2) f(z) = z \qquad \Longrightarrow \qquad f(z) = \frac{z}{1 - 3z + 2z^2},$$

ce qui est (heureusement !) cohérent avec la première approche.

Remarque : Résoudre une récurrence linéaire et décomposer en éléments simples seraient donc assez proches...

b) Pour $\lambda \in \mathbf{C}$ donné, supposons que g est une fonction complexe satisfaisant l'équation différentielle

$$(1 - \lambda z)\, g'(z) = 1.$$

Donner une représentation en série entière de g au voisinage de $z = 0$ et préciser son rayon de convergence.

Encore une fois plusieurs approches :

- La plus simple consiste à utiliser le développement en série entière connu

$$g'(z) = \frac{1}{1 - \lambda z} = \sum_{n=0}^{\infty} (\lambda z)^n = \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^n,$$

convergent pour $|z| < 1/|\lambda|$ (à interpréter comme $+\infty$ si jamais $\lambda = 0$).

Il suffit alors d'intégrer terme à terme pour obtenir (avec même rayon de convergence) :

$$g(z) = g(0) + \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n \frac{z^{n+1}}{n+1}.$$

- Ou alors on écrit $g(z) = \sum b_n z^n$ et on raisonne sur les coefficients : en dérivant terme à terme et groupant les puissances semblables de z, on obtient

$$(1-\lambda z)\sum_{n=1}^{\infty} n b_n z^{n-1} = b_1 + \sum_{n=1}^{\infty}\Big((n+1)b_{n+1} - \lambda n b_n\Big) z^n = 1,$$

ce qui (par l'unicité du développement en série entière) nous donne la relation de récurrence :

$$b_1 = 1, \qquad b_{n+1} = \frac{n}{n+1}\,\lambda\, b_n \quad (n \geqslant 1),$$

qui admet comme solution $b_n = \frac{1}{n}\lambda^{n-1}$ $(n \geqslant 1)$. On trouve donc bien

$$g(z) = b_0 + \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda^{n-1}}{n} z^n$$

puis le rayon de convergence en appliquant le critère de d'Alembert.

Remarque : En prenant $b_0 = g(0) = 0$, on a $g(z) = \mathrm{Ln}(1-\lambda z)$ (branche principale du logarithme naturel).

— II —

a) Pour $\mathbf{F}$ un corps et $n \in \mathbf{N}$ donné, montrer que la formule $P \star A := PAP^{-1}$ définit une action de $\mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$ sur $\mathcal{M}_n(\mathbf{F})$.

Trois choses à vérifier :

1) Cela définit bien une loi de composition externe $\star : \mathrm{GL}_n(\mathbf{F}) \times \mathcal{M}_n(\mathbf{F}) \to \mathcal{M}_n(\mathbf{F})$: en effet, pour $P \in \mathrm{GL}_n(\mathbf{F})$, P et P^{-1} sont des matrices $n \times n$ donc PAP^{-1} en est également une.
2) Action du neutre :

$$I \star A = IAI^{-1} = IAI = A \quad \checkmark$$

3) Action d'un produit :

$$(PQ) \star A = (PQ)A(PQ)^{-1} = PQAQ^{-1}P^{-1} = P(QAQ^{-1})P^{-1} = P \star (Q \star A) \quad \checkmark$$

b) Avec $\mathbf{F} = \mathbf{C}$, parmi les matrices ci-dessous, lesquelles sont dans la même orbite pour cette action ?

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 4 & 5 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad B = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}, \quad C = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 6 \end{bmatrix}, \quad D = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 1 & 1 & 1 \end{bmatrix}, \quad I = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

Si $P \star X = Y$, *i.e.* $Y = PXP^{-1}$, cela signifie que X et Y représentent le même endomorphisme mais par rapport à des bases différentes.

- $\chi_A(\lambda) = (\lambda-1)(\lambda-4)(\lambda-6)$: comme les valeurs propres (1,4,6) sont simples, A est forcément diagonalisable, et donc dans la même orbite que C.
- D est la seule matrice ayant 0 comme valeur propre (donc non inversible), elle est donc seule dans son orbite.
- $\chi_B(\lambda) = (\lambda-1)^3 = \chi_I(\lambda)$, mais $P \star I = PIP^{-1} = I$ pour tout P, donc B et I ne sont pas dans la même orbite (B n'est pas diagonalisable).

Il n'y a que A et C qui partagent leur orbite.

— III —

a) Soit V un espace vectoriel réel muni d'un produit scalaire et W un sous-espace de V. Pour $v \in V$ et $\widetilde{w} \in W$, montrer que : si $v - \widetilde{w}$ est orthogonal à tout vecteur de W, alors

$$||v - \widetilde{w}|| \leqslant ||v - w|| \qquad \text{pour tout } w \in W.$$

Pour $w \in W$ quelconque, on peut écrire d'après l'hypothèse

$$||v - w||^2 = ||(v - \widetilde{w}) + \underbrace{(\widetilde{w} - w)}_{\in W}||^2 = ||v - \widetilde{w}||^2 + ||\widetilde{w} - w||^2 \geqslant ||v - \widetilde{w}||^2,$$

d'où la conclusion en prenant la racine carrée de part et d'autre.

b) Dans $\mathbf{R}^4$ muni du produit scalaire usuel, calculer la projection orthogonale du vecteur $v = (1, 0, 0, 1)$ sur le plan

$$W := \{(x, y, z, t) \in \mathbf{R}^4 \mid x + y + z + t = 0 = y - t\}.$$

Famille génératrice : on peut prendre, disons

$$w_1 = (1, 0, -1, 0) \qquad \text{et} \qquad w_2 = (2, -1, 0, -1).$$

Deux approches (équivalentes) possibles :

- On fabrique une base orthogonale de W, par exemple en remplaçant w_2 par

$$\widehat{w}_2 = w_2 - \frac{\langle w_2 \,|\, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 = w_2 - \frac{2}{2} = (1, -1, 1, -1),$$

puis calculant

$$\mathrm{pr}_W(v) = \frac{\langle v \,|\, w_1 \rangle}{||w_1||^2} w_1 + \frac{\langle v \,|\, \widehat{w}_2 \rangle}{||\widehat{w}_2||^2} \widehat{w}_2 = \frac{1}{2} w_1 + \frac{0}{4} \widehat{w}_2 = \left(\frac{1}{2}, 0, -\frac{1}{2}, 0 \right).$$

- Ou alors : on travaille dans la base non orthogonale $\{w_1, w_2\}$ et on résoud pour les coordonnées de $\mathrm{pr}_W(v) = \lambda_1 w_1 + \lambda_2 w_2$ le système 2×2

$$\begin{bmatrix} \langle w_1 \,|\, w_1 \rangle & \langle w_1 \,|\, w_2 \rangle \\ \langle w_2 \,|\, w_1 \rangle & \langle w_2 \,|\, w_2 \rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle v \,|\, w_1 \rangle \\ \langle v \,|\, w_2 \rangle \end{bmatrix},$$

soit

$$\begin{bmatrix} 2 & 2 \\ 2 & 6 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \lambda_1 \\ \lambda_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \lambda_1 = \frac{1}{2},\ \lambda_2 = 0.$$

a) Étant donnée une action $\star$ d'un groupe $(G,\,\cdot\,)$ sur un ensemble X, on définit pour $x, y \in X$ la notion de *transporteur* :

$$T(x,y) := \{\, g \in G \mid g \star x = y \,\}.$$

Que peut-on dire sur $T(x,y)$ lorsque x et y sont dans la même orbite ? Montrer, en général, que

$$T(h \star x,\ g \star y) = g \cdot T(x,y) \cdot h^{-1}.$$

Dire que $y \in \mathrm{Orb}(x)$ signifie qu'il existe $g \in G$ tel que $y = g \star x$. En d'autres termes : x et y sont dans la même orbite si et seulement si $T(x,y) \neq \varnothing$.

Pour l'égalité à établir, montrons la double inclusion :

($\supseteq$) Pour $k \in T(x,y)$, on vérifie que

$$(gkh^{-1}) \star (h \star x) = (gk) \star x = g \star (k \star x) = g \star y,$$

donc on a bien $gkh^{-1} \in T(h \star x, g \star y)$.

($\subseteq$) Prenons $k \in T(h \star x, g \star y)$ et écrivons $k = g\ell h^{-1}$, *i.e.* $\ell = g^{-1}kh$. Vérifions que $\ell \in T(x,y)$:

$$\ell \star x = (g^{-1}kh) \star x = g^{-1} \star (k \star (h \star x)) = g^{-1} \star (g \star y) = y \quad \checkmark.$$

b) Soit V l'espace vectoriel complexe des fonctions $f\,;\mathbf{C} \to \mathbf{C}$ représentables en série entière au voisinage de 0. Montrer que la formule

$$\widetilde{f}(z) := \begin{cases} \dfrac{f(z) - f(0)}{z} & \text{si } z \neq 0 \\ f'(0) & \text{si } z = 0 \end{cases}$$

définit un endomorphisme linéaire $(f \mapsto \widetilde{f})$ de V. Quelles en sont les fonctions propres ?

Il est clair que $\widetilde{f}$ est continue puisque

$$f'(0) = \lim_{z \to 0} \frac{f(z) - f(0)}{z},$$

mais on doit montrer plus. La façon la plus simple de procéder est d'écrire explicitement

$$f(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n,$$

de sorte que l'on trouve

$$\widetilde{f}(z) = \sum_{n=0} a_{n+1} z^n,$$

qui est effectivement représentable en série entière (même rayon de convergence que f).

On doit également se convaincre que $\widetilde{f+g} = \widetilde{f} + \widetilde{g}$ et $\widetilde{cf} = c\widetilde{f}$.

Si f est propre pour cet opérateur, disons avec valeur propre associée λ :

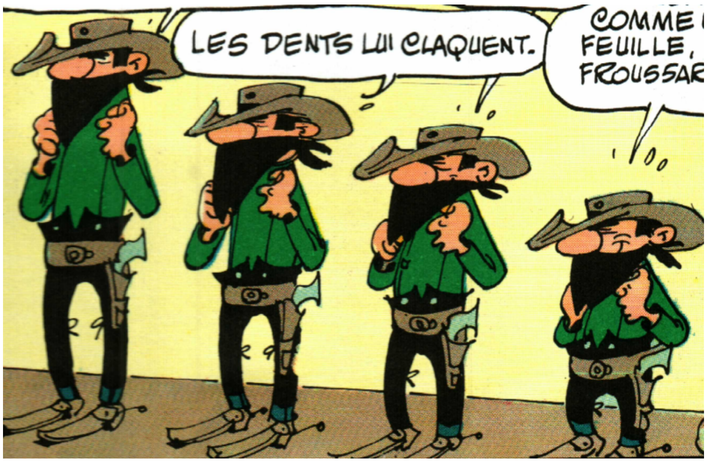
- Si on résoud l'équation
$$\frac{f(z) - f(0)}{z} = \lambda f(z),$$
on trouve
$$f(z) = \frac{f(0)}{1 - \lambda z}.$$
- Ou alors : en utilisant la représentation en série entière, si $\widetilde{f} = \lambda f$ alors les coefficients de f satisfont la récurrence
$$a_{n+1} = \lambda a_n \qquad (n \geqslant 0),$$
ce qui signifie que $a_n = a_0 \lambda^n$, et donc que
$$f(z) = a_0 \sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n z^n = \frac{a_0}{1 - \lambda z}.$$

Bref, les fonctions propres sont les « éléments simples » $\dfrac{A}{1 - \lambda z}$.

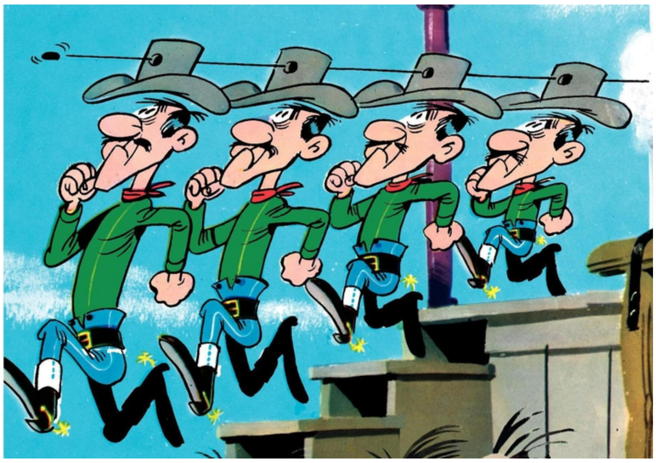
— **Question bonus** —

Culture générale : Nommer (dans l'ordre !) ces douze célèbres (?) personnages de bande dessinée.

Morris, *Hors-la-loi* (1951)



Morris, *Le retour des frères Dalton* (1952)



Morris & Goscinny, *Les cousins Dalton* (1957)

Du plus petit au plus grand :

a) Bob, Grat, Bill et Emmett Dalton (personnages historiques, abattus par Lucky Luke lors d'un vol de banque) ;
b) Microbe, Mouche-à-bière, Smiley et Lucky Luke (déguisés en Dalton pour confondre un shériff se vantant de a)) ;
c) Joe, Jack, William et Averell Dalton (les cousins des premiers, moins futés, mais décidés à se venger de a)).

Preuve de b) :