Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur le questionnaire.

Nom:	**CORRIGÉ**

1. Parmi les applications suivantes, lesquelles sont des produits scalaires sur $\mathbf{R}^2$? Justifiez succintement.

   a) $\langle (x,y) \,|\, (x',y') \rangle = xx' + yy' + 1$

   non : n'est linéaire en aucune des deux variables ($||(0,0)|| = 1\,!$)

   b) $\langle (x,y) \,|\, (x',y') \rangle = 2xx' + 3yy'$

   oui : représenté par $\begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}$ qui est bien définie positive (les coefficients diagonaux le sont)

   c) $\langle (x,y) \,|\, (x',y') \rangle = 2xx' + yx' - xy' - 2yy'$

   non : n'est pas symétrique (*e.g.* $\langle \mathbf{e}_1 \,|\, \mathbf{e}_2 \rangle = - \langle \mathbf{e}_2 \,|\, \mathbf{e}_1 \rangle$)

   d) $\langle (x,y) \,|\, (x',y') \rangle = xx' + yx' + xy' + yy'$

   non : bilinéaire, symétrique et positive, mais pas définie (*e.g.* $||(1,-1)|| = 0$)

   e) $\langle (x,y) \,|\, (x',y') \rangle = 3xx' - yx' - xy' + yy'$

   oui : bilinéaire et symétrique, représentée par $\begin{bmatrix} 3 & -1 \\ -1 & 1 \end{bmatrix}$ qui est bien définie positive (d'après le critère des mineurs principaux ou complétion de carrés).

2. a) Énoncer l'inégalité de Cauchy-Schwarz ainsi que l'inégalité triangulaire dans un espace vectoriel muni d'un produit scalaire, et montrer que la seconde est une conséquence formelle de la première.

Cauchy-Schwarz : $|\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle| \leqslant ||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}||$

Triangle : $||\mathbf{u}+\mathbf{v}|| \leqslant ||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||$

Lien :

$$\begin{aligned} ||\mathbf{u}+\mathbf{v}||^2 &= ||\mathbf{u}||^2 + 2\langle \mathbf{u} \,|\, \mathbf{v} \rangle + ||\mathbf{v}||^2 && \text{par bilinéarité} \\ &\leqslant ||\mathbf{u}||^2 + 2\,||\mathbf{u}||\,||\mathbf{v}|| + ||\mathbf{v}||^2 && \text{par Cauchy-Schwarz} \\ &= \big(||\mathbf{u}|| + ||\mathbf{v}||\big)^2 \end{aligned}$$

d'où l'inégalité du triangle en prenant la racine carrée de part et d'autre.

b) Dans $\mathbf{R}^3$ muni du produit scalaire usuel, donner la matrice représentant, par rapport à la base canonique, la symétrie orthogonale (réflexion) par rapport au plan $\mathcal{P} : x + 2y - 3z = 0$.

Pour un vecteur quelconque $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^3$ se décomposant orthogonalement

$$\mathbf{v} = \operatorname{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}) + \operatorname{proj}_{\mathcal{P}^\perp}(\mathbf{v}),$$

son symétrique par rapport à $\mathcal{P}$ peut s'écrire

$$S(\mathbf{v}) = \operatorname{proj}_{\mathcal{P}}(\mathbf{v}) - \operatorname{proj}_{\mathcal{P}^\perp}(\mathbf{v}) = \mathbf{v} - 2\operatorname{proj}_{\mathcal{P}^\perp}(\mathbf{v}).$$

En prenant $\mathbf{n} = \begin{bmatrix} 1 & 2 & -3 \end{bmatrix}^\top$ comme vecteur directeur de $\mathcal{P}^\perp$, on trouve donc

$$[S] = I - 2\,[\operatorname{proj}_{\mathcal{P}^\perp}] = I - 2\,\frac{\mathbf{n}\mathbf{n}^\top}{\mathbf{n}^\top\mathbf{n}} = \frac{1}{7}\begin{bmatrix} 6 & -2 & 3 \\ -2 & 3 & 6 \\ 3 & 6 & -2 \end{bmatrix}.$$

Autre approche : écrire $[S] = 2\,[\operatorname{proj}_{\mathcal{P}}] - I$ puis expliciter la projection sur $\mathcal{P}$.

Ou encore : si $(\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2)$ désigne une base de $\mathcal{P}$, alors par rapport à $\mathcal{B} = (\mathbf{v}_1, \mathbf{v}_2, \mathbf{n})$ on a

$$S = {}_{\mathcal{B}}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}_{\mathcal{B}}$$

puis effectuer un changement de base.

[Ces trois approches sont-elles si différentes ?]

3. Considérons le sous-espace de $\mathbf{R}^4$

$$V = \operatorname{Vect}\big((1,0,1,0),\ (0,2,-1,0),\ (1,1,0,-1)\big).$$

Donnez une représentation matricielle du produit scalaire usuel sur V puis calculez-en une base orthogonale.

Si B désigne la matrice des coordonnées de la famille génératrice de V dans la base canonique, la représentation matricielle du produit scalaire usuel par rapport à celle-ci est

$$B^\top B = \begin{bmatrix} 2 & -1 & 1 \\ -1 & 5 & 2 \\ 1 & 2 & 3 \end{bmatrix} \overset{(2)+\frac{1}{2}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 1 \\ 0 & 9/2 & 5/2 \\ 1 & 5/2 & 3 \end{bmatrix} \overset{(3)-\frac{1}{2}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 5/2 \\ 0 & 5/2 & 5/2 \end{bmatrix} \overset{(3)-\frac{5}{9}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 2 & 0 & 0 \\ 0 & 9/2 & 0 \\ 0 & 0 & 10/9 \end{bmatrix},$$

correspondant par la famille donnée par la matrice

$$B = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 1 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{(2)+\frac{1}{2}(1),\ (3)-\frac{1}{2}(1)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 1/2 \\ 0 & 2 & 1 \\ 1 & -1/2 & -1/2 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix} \overset{(3)-\frac{5}{9}(2)}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 1/2 & 2/9 \\ 0 & 2 & -1/9 \\ 1 & -1/2 & -2/9 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix}$$

ou encore, si on préfère se débarrasser des dénominateurs,

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 & 2 \\ 0 & 4 & -1 \\ 1 & -1 & -2 \\ 0 & 0 & -9 \end{bmatrix}.$$

4. Quelle est la meilleure approximation de $f(x) = x^2$ par une fonction de la forme

$$x \mapsto ax + b \qquad (a, b \in \mathbf{R}^2)$$

au sens des moindres carrés sur l'intervalle $[0, 1]$?

La fonction recherchée est la projection orthogonale de f sur le sous-espace vectoriel engendré par 1 et x au sens du produit scalaire

$$\langle f \mid g \rangle = \int_0^1 f(x)\, g(x)\; \mathrm{d}x.$$

On peut utiliser la formule explicite de projection par rapport à une base orthogonale (qu'il faut tout d'abord obtenir), ou bien utiliser le fait que les coefficients a et b cherchés sont les solutions du système de Cramer

$$\begin{bmatrix} ||x||^2 & \langle x \mid 1 \rangle \\ \langle x \mid 1 \rangle & ||1||^2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f \mid x \rangle \\ \langle f \mid 1 \rangle \end{bmatrix},$$

soit, en évaluant les produits scalaires :

$$\begin{bmatrix} 1/3 & 1/2 \\ 1/2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/3 \end{bmatrix}$$

$$\Longrightarrow \begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \frac{1}{1/12} \begin{bmatrix} 1 & -1/2 \\ -1/2 & 1/3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1/4 \\ 1/3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1/6 \end{bmatrix}.$$

Ci-dessous, la fonction f sur $[0, 1]$ ainsi que sa meilleure approximation affine au sens des moindres carrés.