CIR_2 CNB_2

Séries entières
Résumé de cours

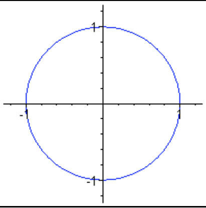
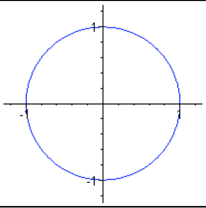
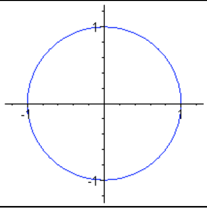
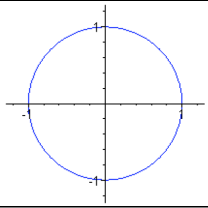
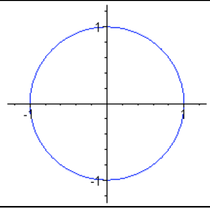
Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite d'éléments de $\mathbb{C}$. Pour tout complexe z, on définit une série $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$.

- Pour quelles valeurs de z cette série converge-t-elle ?
- Sous réserve de convergence, quelles sont les propriétés de la fonction $z \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$?

On peut ainsi considérer $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ comme une série numérique (z fixé) ou comme une série de fonctions.

<u>I/ Convergence</u>

1. Exemples

$\left[z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$	$\left[\dfrac{z^n}{n!}\right]_{n\in\mathbb{N}}$	$\left[\dfrac{z^n}{n(n+1)}\right]_{n\in\mathbb{N}^*}$	$\left[\dfrac{z^n}{n}\right]_{n\in\mathbb{N}^*}$	$\left[n^n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}^*}$
				
$\sum_{n=0}^{\infty} z^n =$	$\sum_{n=0}^{\infty} \dfrac{z^n}{n!} =$			

2. Lemme d'Abel (version simplifiée)

Soient $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ une série entière et z_0 un complexe.

Si la <u>série</u> $\left[a_n z_0^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ converge ,

alors, pour tout complexe z tel que $|z| < |z_0|$, la <u>série</u> $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ converge absolument.

3. Rayon de convergence

Soit $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ une série entière.

Il existe $R \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ tel que $\begin{cases} \text{si } |z| < R, \text{ la série} \left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}} \text{ converge absolument} \\ \text{si } |z| > R, \text{la série} \left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}} \text{ diverge} \end{cases}$

R est appelé rayon de convergence de la série entière.

$D(0,R) = \{z \in \mathbb{C} / \ |z| < R\}$ est appelé disque de convergence de la série entière.

4. Règle de D'Alembert

Soit $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ une série entière telle que $\forall n \in \mathbb{N} / a_n \neq 0$.

- Si la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ a une limite ℓ strictement positive quand $n \to \infty$ alors le rayon de convergence est $R = \dfrac{1}{\ell}$
- Si la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ a une limite nulle quand $n \to \infty$ alors le rayon de convergence est $R = +\infty$
- Si la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ tend vers $+\infty$ quand $n \to \infty$ alors le rayon de convergence est $R = 0$
- Si la suite $\left|\dfrac{a_{n+1}}{a_n}\right|$ n'a pas de limite quand $n \to \infty$ la règle de D'Alembert ne s'applique pas.

II/ Opérations algébriques

Soient deux séries entières $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$, de rayon de convergence R_1 et $\left[b_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$, de rayon de convergence R_2.

Pour $|z| < R_1$, on note $S(z) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ et pour $|z| < R_2$, $T(z) = \sum_{n=0}^{\infty} b_n z^n$

1. Substitution $z \to -z$

Le RdC de $\left[(-1)^n a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à R_1 et pour $|z| < R_1$, $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n a_n z^n = S(-z)$

2. Combinaisons linéaires

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, le RdC de $\left[(\lambda a_n + b_n) z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ est supérieur ou égal à $\inf(R_1, R_2)$

et pour $|z| < \inf(R_1, R_2)$, $\sum_{n=0}^{\infty} (\lambda a_n + b_n) z^n = \lambda S(z) + T(z)$

3. Homothétie

Pour tout $\lambda \in \mathbb{C}^*$, le RdC de $\left[\lambda^n a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à $\dfrac{R_1}{|\lambda|}$,

et pour $|z| < \dfrac{R_1}{|\lambda|}$, $\sum_{n=0}^{\infty} \lambda^n a_n z^n = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (\lambda z)^n = S(\lambda z)$

4. Puissance

Pour tout $k \in \mathbb{N}$, le RdC de $\left[a_n z^{kn}\right]_{n\in\mathbb{N}}$ est égal à $\sqrt[k]{R_1} = R_1^{1/k}$,

et pour $|z| < \sqrt[k]{R_1}$, $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^{kn} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(z^k\right)^n = S\left(z^k\right)$

5. Produit (de Cauchy)

Pour tout $n \in \mathbb{N}$, on pose $c_n = \sum_{k=0}^{n} a_k b_{n-k}$

Alors le RdC de $\left[c_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ est supérieur ou égal à $\inf(R_1, R_2)$

et pour $|z| < \inf(R_1, R_2)$, $\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n = S(z) T(z)$

6. Inverse

Soient une série entière $\left[a_n z^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$, de rayon de convergence <u>non nul</u>.

On suppose ici que $a_0 = 0$ (c'est-à-dire $S(0) = 0$ soit $S(z) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$)

On pose $u_0 = 1$, $u_1 =$ coefficient de z dans $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n$, $u_2 =$ coeff de z^2 dans $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)^2$,

... u_k=coeff de z^k dans $1 + \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)^2 + \ldots + \left(\sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n\right)^k$.

Alors la série entière $\left[u_k\ z^k\right]_{k\in\mathbb{N}}$ a un rayon de convergence R non nul

et pour $|z| < R$, $\sum_{k=0}^{\infty} u_k z^k = \dfrac{1}{1 - S(z)}$.

On écrira $\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n\right)^k = \dfrac{1}{1 - \sum_{n=1}^{\infty} a_n z^n}$

III/ Séries entières de variable réelle

Soit $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels. On étudie la série entière $\left[a_n x^n\right]_{n\in\mathbb{N}}$ pour $x \in \mathbb{R}$.

Soit R son rayon de convergence, $]-R, +R[$ est l'intervalle (ouvert) de convergence.

On étudie les propriétés de la fonction S de $]-R, +R[$ dans $\mathbb{R}$ telle que $S(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

1. Continuité de la somme

La somme d'une série entière est continue dans l'intervalle de convergence

2. Intégration

La somme d'une série entière s'intègre terme à terme dans l'intervalle de convergence

$$\forall x \in]-R, +R[\ / \int_{t=0}^{x}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n t^n\right) dt = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\int_{t=0}^{x} t^n\, dt\right) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k-1} \frac{x^k}{k}$$

Remarque : le rayon de convergence de la série $\left[a_n \dfrac{x^{n+1}}{n+1}\right]$ est le même que celui de $\left[a_n x^n\right]$

3. Dérivation

La somme d'une série entière se dérive terme à terme dans l'intervalle de convergence

$$\text{sur }]-R, +R[\ / \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \text{ a comme dérivée } \sum_{n=0}^{\infty} n\ a_n x^{n-1} = \sum_{n=1}^{\infty} n\ a_n x^{n-1} = \sum_{k=0}^{\infty} (k+1)\ a_{k+1} x^k$$

Remarque : le rayon de convergence de la série $\left[n\, a_n x^{n-1}\right]$ est le même que celui de $\left[a_n x^n\right]$

Corollaire : La somme d'une série entière est de classe C^∞ dans l'intervalle de convergence.

4. Fonctions analytiques

Définition : Soit f une fonction de $]-R,+R[$ dans $\mathbb{R}$.

f est analytique sur $]-R,+R[$ si et seulement si

il existe une série entière de RdC $\geqslant R$ telle que $\forall x \in]-R,+R[\ /\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$

Propriété : Si f est analytique sur $]-R,+R[$ alors f est de classe C^∞ dans $]-R,+R[$

et sa dérivée k-ième est $f^{(k)}(x)=\sum_{n=0}^{\infty} n(n-1)(n-2)...(n-k+1)a_n x^{n-k}$ pour $x \in]-R,+R[$.

En particulier $f^{(k)}(0)=k!\,a_k$, ce qui prouve en passant l'unicité de la série $[a_n x^n]$ (unicité du développement en série entière)

5. Développement de Taylor - Mac Laurin

Soit f une fonction de classe C^∞ de $]-a,+a[$ dans $\mathbb{R}$. On étudie la série $\left[\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}\,x^n\right]$:

- Le rayon de convergence R est-il strictement positif ?
- Est-ce que $\forall x \in]-R,+R[\ /\ f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{f^{(n)}(0)}{n!}x^n$?

Développement en série de $f(x)=(1+x)^\alpha$

Soit α un réel quelconque fixé.

La série $\sum_{n=0}^{\infty}\dfrac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$ a un rayon de convergence 1 et, pour tout $x \in]-1,+1[$,

$$(1+x)^\alpha=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n=1+\alpha x+\frac{\alpha(\alpha-1)}{2!}x^2+\sum_{n=3}^{\infty}\frac{\alpha(\alpha-1)...(\alpha-n+1)}{n!}x^n$$

6. Théorème d'Abel (version simplifiée)

Soit $[a_n x^n]$ une série entière de rayon de convergence égal à 1.

Si la série $[a_n]$ converge, alors la fonction $F : \begin{array}{ccc}[0,1] & \to & \mathbb{R}\\ x & \to & \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\end{array}$ est continue sur $[0,1]$

et $\lim_{x\to 1^-}(F(x))=\lim_{x\to 1^-}\left(\sum_{n=0}^{\infty}a_n x^n\right)=F(1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\lim_{x\to 1^-}a_n x^n\right)$