EX 2. Dénombrement.

$E_{n,p} = \{(a_1, a_2 \dots a_p) \in \mathbb{N}^p / a_1 + a_2 \dots + a_p = n\}$

$F_{n,p}$ = {dispositions de $p-1$ cases noires parmi $n+p-1$ cases alignées}.

<u>Ex</u> : $p = 3$ $n = 2$.

$E_{2,3} = \{(2,0,0), (0,2,0), (0,0,2), (1,1,0), (1,0,1), (0,1,1)\}$.

1 2 3 4 5 6

6 éléments.

$F_{2,3}$: on dispose 2 cases noires parmi 4 cases.

1 2 3 4 5 6

6 éléments.

6! bijections possibles.

On choisit une bijection : par exemple on choisit qu'une case noire va séparer des groupes de cases blanches. Le nombre de cases blanches à chaque interstice correspond à un a_i.

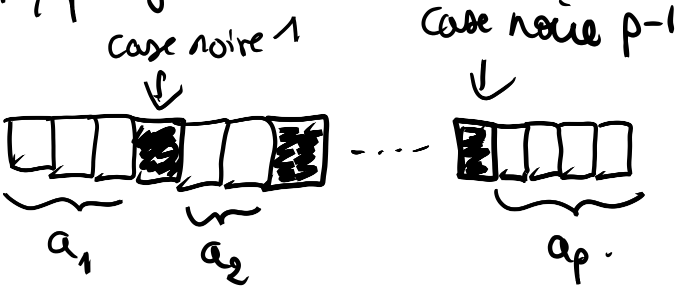
Pour $E_{2,3}$ et $F_{2,3}$ on aurait :

1 $\longleftrightarrow$ 6   2 $\longleftrightarrow$ 3   3 $\longleftrightarrow$ 1

4 $\longleftrightarrow$ 5   5 $\longleftrightarrow$ 4   6 $\longleftrightarrow$ 2

Pour tous n, p $(p \geq 2)$ on aura une bijection qui associera une unique image à un élément de $E_{n,p}$, dans $F_{n,p}$.

n, p fixés.



$\begin{cases} p-1 \text{ cases noires.} \\ a_1 + a_2 \dots + a_p = n. \end{cases}$

$n+p-1$ cases au total.

(nombre de cases blanches avant la case noire = valeur de a_i).

Donc (cf cours) $E_{n,p}$ et $F_{n,p}$ sont équipotents, ils ont le même cardinal $u_{n,p}$.

Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \forall p \geq 2, u_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} u_{k,p-1}$

Comment initialiser cette relation de récurrence ?

On fixe $p \geq 2$.

Proposition de récurrence : $\mathcal{P}(n) : u_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} u_{k,p-1}$.

Initialisation

$n=0$. $E_{0,p} = \{(a_1, a_2 \dots a_p) \in \mathbb{N}^p / a_1 + \dots + a_p = 0\}$

$F_{0,p}$ = nombre de dispositions de $p-1$ cases noires parmi $p-1$ cases.

$u_{0,p} = 1$. $\qquad \sum_{k=0}^{0} u_{k,p-1} = u_{0,p-1}$

$E_{0,p-1} = \{(a_1, a_2 \dots a_{p-1}) \in \mathbb{N}^{p-1} / a_1 \dots + a_{p-1} = 0\}$

$F_{0,p-1}$ = dispositions de $p-2$ cases noires parmi $p-2$.

donc $u_{0,p-1} = 1$.

donc $u_{0,p} = \sum_{k=0}^{0} u_{k,p-1} = u_{0,p-1} = 1$ donc $P(0)$ vraie.

<u>Hérédité</u>. Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose $P(n)$ vraie : $u_{n,p} = \sum_{k=0}^{n} u_{k,p-1}$

On doit démontrer que $P(n+1)$ vraie.

On regarde donc $E_{n+1,p} = \{(a_1 \dots a_p) \in \mathbb{N}^p / a_1 + a_2 \dots + a_p = n+1\}$

$F_{n+1,p}$ = nombre de dispositions de $(p-1)$ cases noires parmi $n+1+p-1 = n+p$ cases.

$F_{n+1,p}$: on a le même nombre de cases noires que pour $F_{n,p}$ mais une case de plus dans l'alignement.

On doit montrer : $u_{n+1,p} = \sum_{k=0}^{n+1} u_{k,p-1} = \underbrace{\sum_{k=0}^{n} u_{k,p-1}}_{} + u_{n+1,p-1}$

$= u_{n,p} + u_{n+1,p-1}$

On regarde une case quelconque de l'alignement.

On a 2 choix :

- on choisit qu'elle soit blanche. Il reste alors à positionner $(p-1)$ cases noires parmi $n+p-1$ cases. Il y a $u_{n,p}$ manières de le faire
- on choisit qu'elle soit noire. Il reste alors à positionner $(p-2)$ cases noires parmi $n+p-1$ cases $(n+p-1 = n+1+p-2)$ Il y a $u_{n+1,p-1}$ manières de le faire.

Ce sont 2 cas dissociés donc on a toutes les dispositions possibles en les sommant.

D'où $u_{n+1,p} = u_{n,p} + u_{n+1,p-1}$

$$u_{n+1,p} = \sum_{k=0}^{n+1} u_{k,p-1}$$

Donc $\mathcal{P}(n+1)$ vraie.

Par le principe de récurrence, $\mathcal{P}(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}$.

p était quelconque, ≥ 2 donc c'est valable $\forall p \geq 2$.

$\boxed{\text{EX 3}}$ Matchs de volley. $2n$ équipes, n matchs le premier jour. (chaque équipe ne fait qu'un match)

<u>Méthode 1</u> : on prend une équipe. Elle a $(2n-1)$ adversaires possibles.

$2^{ème}$ équipe : elle a $(2n-3)$ adversaires possibles.

$3^{ème}$ équipe : $(2n-5)$

⋮

$n^{ème}$ équipe : 1 seul adversaire possible.

Nombre de possibilités : $(2n-1)(2n-3) \cdots \times 1$.

$$= \frac{(2n-1)!}{(2n-2)(2n-4) \cdots 2}$$

$$= \frac{(2n-1)!}{2(n-1) \cdot 2(n-2) \cdots 2(1)} = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$$

Méthode 2 : on regarde le nombre de possibilités pour chacun des n matchs.

1^{er} match : $\binom{2n}{2} = \frac{2n!}{(2n-2)!\,2!} = \frac{2n.(2n-1)}{2\times 1} = n(2n-1)$

2^e match : $\binom{2n-2}{2} = \frac{(2n-2)!}{(2n-4)!\,2!} = \frac{(2n-2)(2n-3)}{2} = (n-1)(2n-3)$

$\vdots$

n^e match : $\binom{2}{2}$ $\qquad \vdots \qquad 1.$

Attention : ici on a tenu compte d'un ordre dans les matchs alors que ce qui importe c'est quelle équipe affronte quelle autre. On doit donc diviser par $n!$

On obtient alors $(2n-1)(2n-3)\dots\times 1 = \frac{(2n-1)!}{2^{n-1}(n-1)!}$ possibilités.