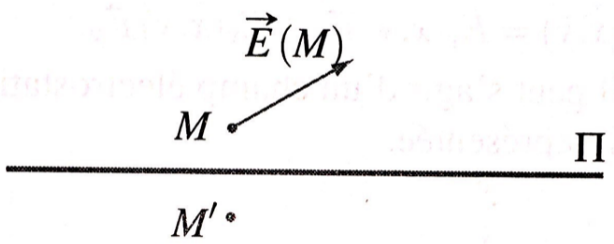
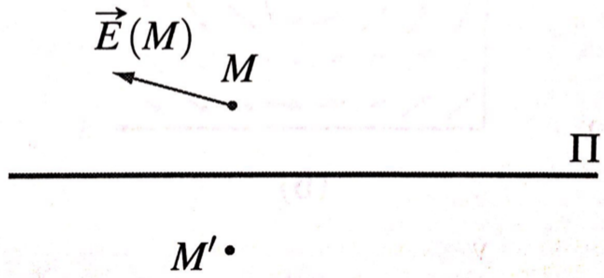
TD 1

Ex1 : Symétries du champ électrostatique (1)

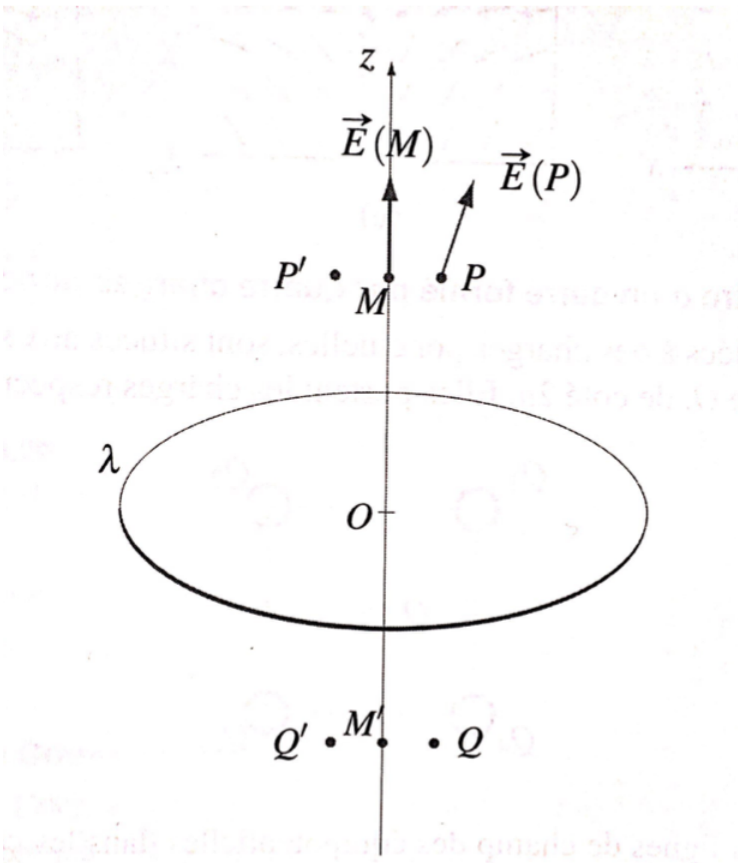
1. Le plan Π est un plan de symétrie d'une distribution de charges $\rho(P)$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π. Compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point M'.



2. Le plan Π est un plan d'antisymétrie d'une distribution de charges $\rho(P)$. Le point M' est le symétrique du point M par rapport à Π. Compléter le schéma en dessinant le champ électrique au point M'.

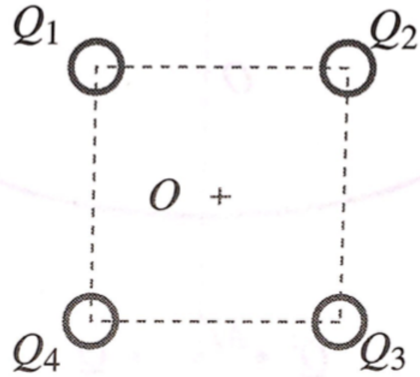


Ex2 : Symétries du champ électrostatique (2)
On considère un cerceau d'axe Oz portant la charge Q uniformément répartie. On donne le champ électrique en M et en P.



1. Représenter le champ électrique en M' symétrique de M par rapport au cerceau, en P' symétrique de P par rapport à l'axe, en Q symétrique de P par rapport au cerceau et en Q' symétrique de Q par rapport à l'axe.
2. *Sans calcul*, déterminer le champ électrostatique au centre O de l'anneau.

Ex3 : Champ au centre d'un carré formé par quatre charges ponctuelles
Quatre sphères, assimiliées à des charges ponctuelles, sont situées aux sommets O_1, O_2, O_3 et O_4 d'un carré de centre O, de coté $2a$. Elles portent les charges respectives Q_1, Q_2, Q_3 et Q_4.



On donne la carte des lignes de champ des équipotentielles dans les cas où les charges sont dans les rapports ($Q_1 : Q_2 : Q_3 : Q_4$) suivants : (1 : 1 : 1 : 1) ; (-1 : 1 : -1 : 1) ; (-1 : -1 : 1 : 1) ; (1 : 2 : 1 : 2).

Dans chacun des quatre cas :

1. Quels sont les plans de symétrie ? D'antisymétrie ?

2. Que peut-on dire du champ au centre ?

3. Y a-t-il des points où le champ est nul ?

4. Commenter soigneusement ces cartes de lignes de champ et d'équipotentielles.

Figure 13.27 – Cas (a) : (1 : 1 : 1 : 1)

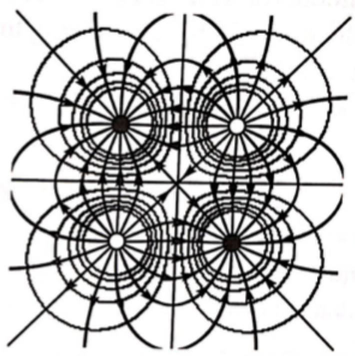


Figure 13.28 – Cas (b) : (-1 : 1 : -1 : 1)

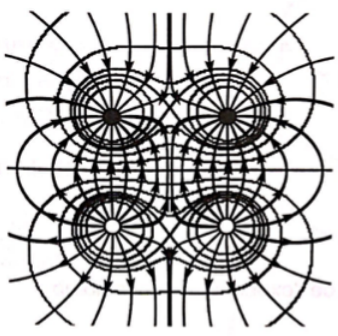


Figure 13.29 – Cas (c) : (-1 : -1 : 1 : 1)

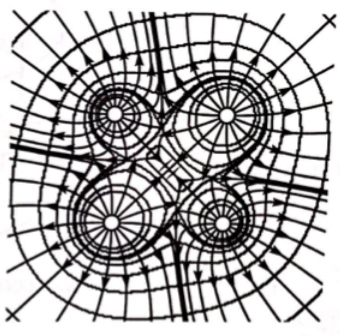
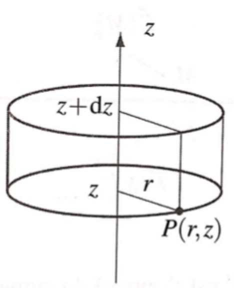


Figure 13.30 – Cas (d) : (1 : 2 : 1 : 2)

Ex4 : Potentiel d'un disque
Soit un disque de rayon R portant une densité surfacique de charge σ.
Démontrer l'expression du potentiel en son centre.

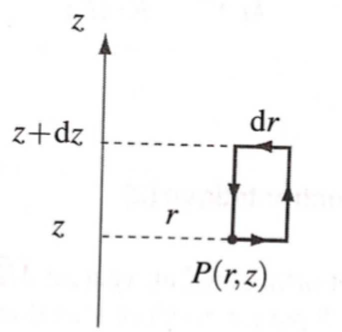
Ex5 : Potentiel d'une boule (sphère pleine)
Soit une boule de rayon R portant une densité volumique de charge ρ.
Démontrer l'expression du potentiel en son centre.

Ex6 : Anneau chargé
On reprend la distribution de charges étudiée dans l'exercice 2.
Le champ sur l'axe de l'anneau, en un point M de cote z, est de la forme $\vec{E} = E_0(z)\vec{u}_z$. L'expression de la fonction $E(z)$ est inutile pour résoudre l'exercice. On s'intéresse au champ électrostatique au voisinage de l'axe. On calcule donc le champ en un point P défini par des coordonnées cylindriques (r,θ,z), avec $r << a$ où a est le rayon de l'anneau, c'est aussi la distance caractéristique des variations spatiales des composantes du champ $\vec{E}$.
De manière générale : $\vec{E}(P) = \vec{E}(r,\theta,z) = E_r(r,\theta,z)\vec{u}_r + E_\theta(r,\theta,z)\vec{u}_\theta + E_z(r,\theta,z)\vec{u}_z$
1. Montrer par des arguments de symétrie très précis, qu'en P, $E_\theta(r,\theta,z) = 0$?
2. Montrer que $E_r(r,\theta,z)$ et $E_z(r,\theta,z)$ ne dépendent que de r et de z.
3. Montrer qu'au voisinage de l'axe, le flux du champ $\vec{E}$ est conservatif. Que peut-on dire de sa circulation le long d'un contour fermé ?
4. On choisit r et dz tels que r/a et dz/a soient des infiniment petits du premier ordre.



Calculer le flux du champ électrostatique à travers ce cylindre et en déduire l'expression de $E_r(r,z)$ en fonction de $E_0(z)$ et/ou de sa dérivée.
5. Justifier le fait que $E_z(r,z) - E_z(0,z)$ est au moins d'ordre deux en r.

6. On considère le rectangle ci-dessous :
On a choisi r/a infiniment petit d'ordre 1, $\mathrm{d}r/a$ et $\mathrm{d}z/a$ infiniment petits d'ordre 2.



En calculant la circulation de $\vec{E}$ le long de ce rectangle, montrer que :
$E_z(r,z) = E_z(0,z) - \frac{r^2}{4}\frac{\mathrm{d}^2 E_0}{\mathrm{d}z^2}(z)$.
7. Récapituler l'expression de $\vec{E}(P)$ au premier ordre en r, puis au deuxième ordre en r.