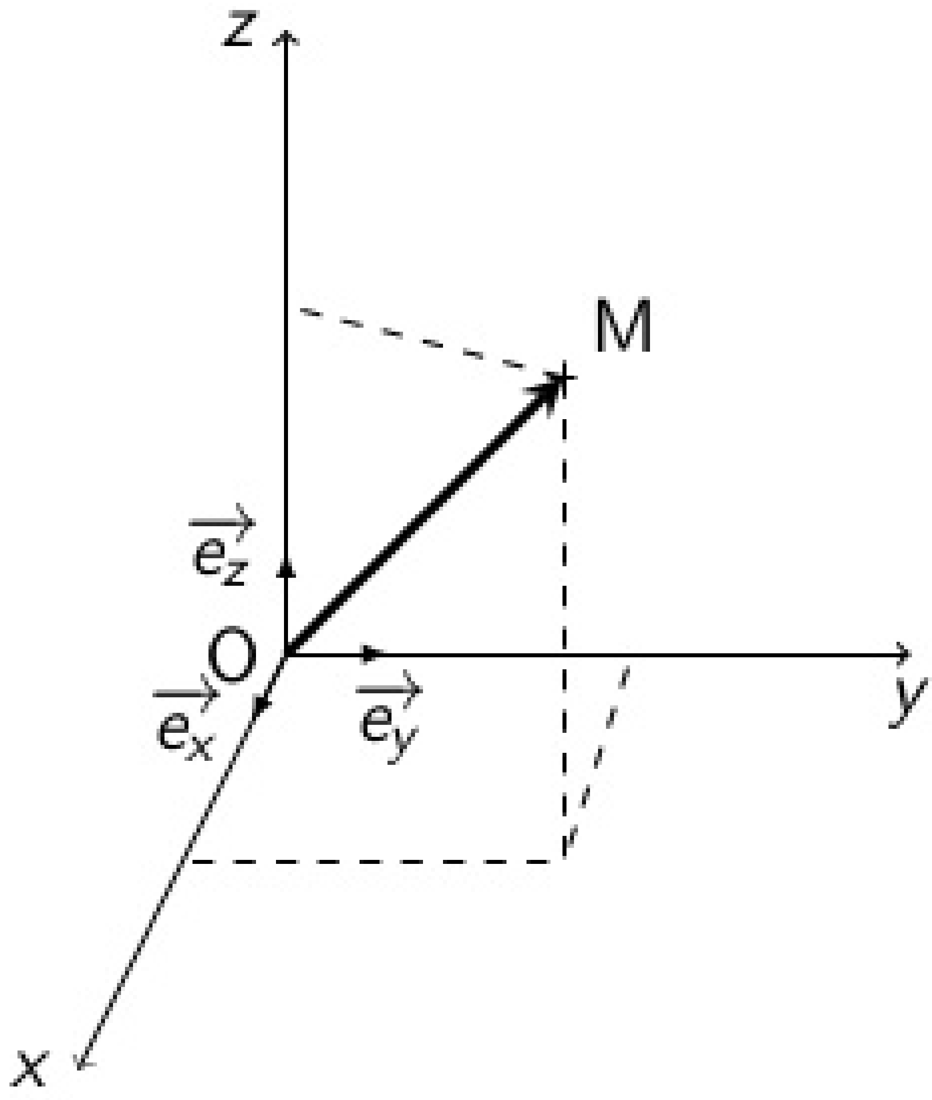
MECANIQUE CLASSIQUE

Chapitre 2 : Cinématique

1. Position
2. Vitesse
3. Accélération
4. Composition des vitesses / accélérations

1. Position



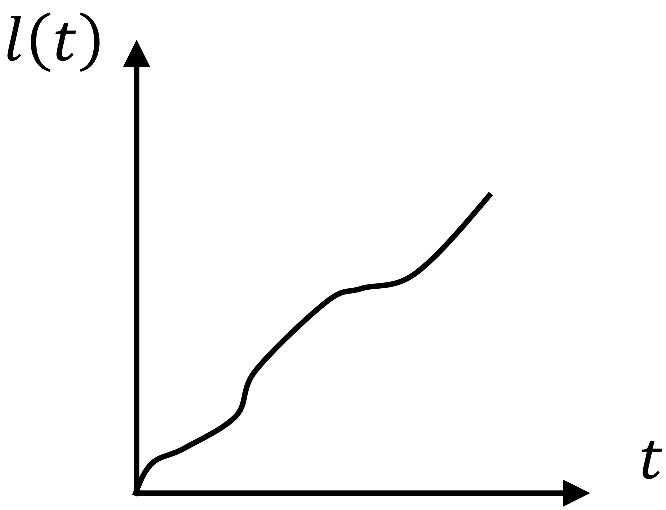
z
M
$\overrightarrow{e_z}$
O
$\overrightarrow{e_x}$
$\overrightarrow{e_y}$
y
x

2. Vitesse

Vitesse moyenne
Distance parcourue durant un temps Δt divisée par ce temps

Si l est la distance parcourue :

$$v = \frac{l(t_0 + \Delta t) - l(t_0)}{\Delta t}$$

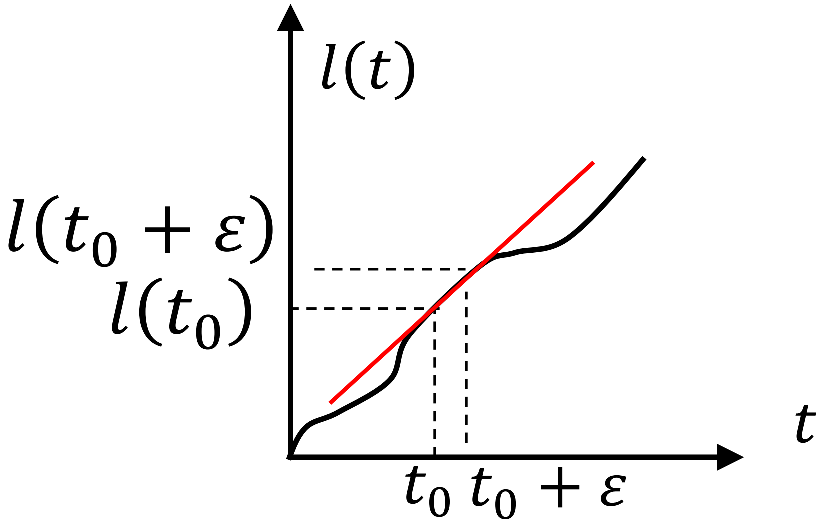


Vitesse instantanée : la même chose, avec Δt → 0

2. Vitesse

Vitesse instantanée: la même chose, avec Δt → 0
→ On tombe sur la définition de la dérivée de la position

$$v = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{l(t_0 + \varepsilon) - l(t_0)}{\varepsilon} = \frac{dl}{dt}$$



On peut donc utiliser tout ce qu'on sait sur les dérivées

2. Vitesse

Remarque : les théorèmes mathématiques sur les dérivées que l'on va pouvoir utiliser sont eux même simplement issus de la définition de la dérivée. Par exemple pour x^2 :

$$\frac{d}{dt}(x^2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{(x+\varepsilon)^2 - x^2}{\varepsilon}$$

$$\frac{d}{dt}(x^2) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{x^2 + 2\varepsilon x + \varepsilon^2 - x^2}{\varepsilon}$$

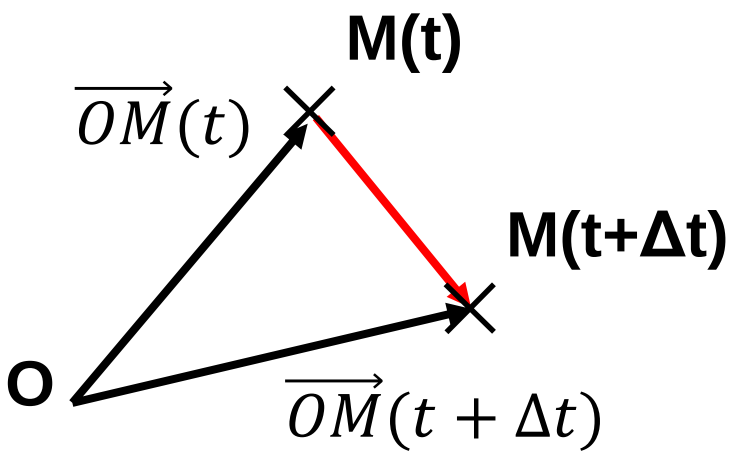
$$\frac{d}{dt}(x^2) = \lim_{\varepsilon \to 0} (2x + \varepsilon)$$

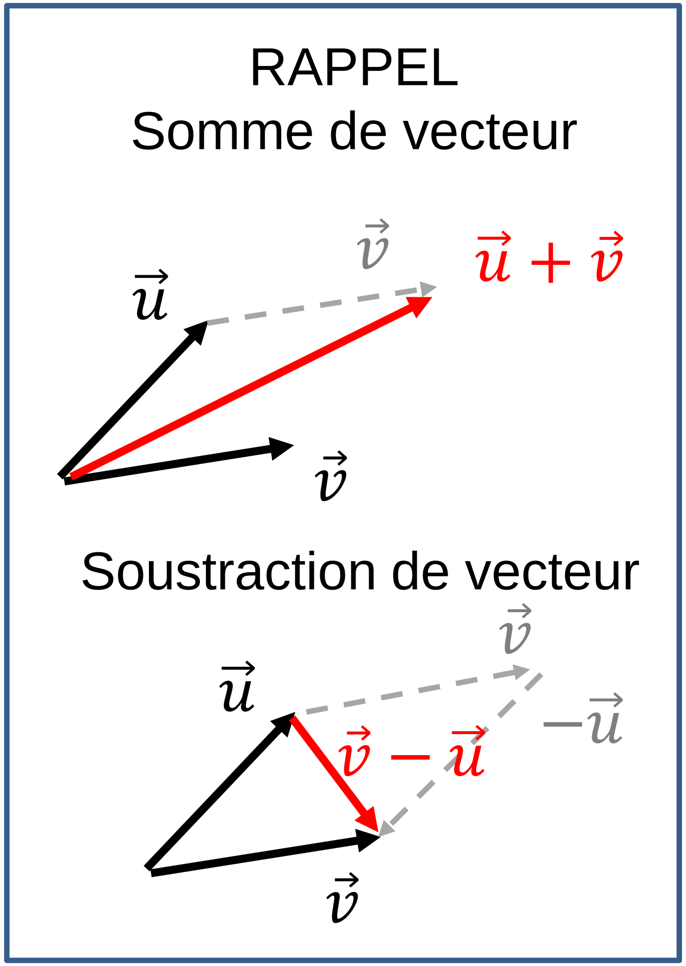
$$\frac{d}{dt}(x^2) = 2x$$

2. Vitesse

De façon générale, on a vu que la position n'est pas défini par une seule longueur $l(t)$ mais par le vecteur $\overrightarrow{OM}(t)$.

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \lim_{\Delta t \to 0} \frac{\overrightarrow{OM}(t+\Delta t) - \overrightarrow{OM}(t)}{\Delta t}$$





2. Vitesse

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt}$$

La vitesse est donc la dérivée d'un vecteur

En pratique on n'a généralement pas besoin de dériver des vecteurs mais seulement les composantes x, y et z dans une base orthonormée

$$\overrightarrow{OM} = x\,\overrightarrow{u_x} + y\,\overrightarrow{u_y} + z\,\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{dx}{dt}\,\overrightarrow{u_x} + \frac{dy}{dt}\overrightarrow{u_y} + \frac{dz}{dt}\overrightarrow{u_z}$$

$$\vec{v} = \begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \\ dz/dt \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \dot{x} \\ \dot{y} \\ \dot{z} \end{pmatrix}$$

Notation indiquant la dérivée par rapport au temps

2. Vitesse

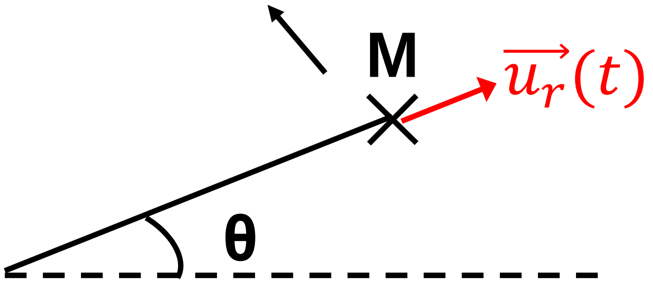
Remarque : pourquoi la dérivée de $x\,\overrightarrow{u_x}$ est simplement $\dfrac{dx}{dt}\,\overrightarrow{u_x}$?

$$\frac{d}{dt}(x\,\overrightarrow{u_x}) = \frac{dx}{dt}\,\overrightarrow{u_x} + x\underbrace{\frac{d\overrightarrow{u_x}}{dt}}_{\vec{0}}$$

$\vec{0}$ car $\overrightarrow{u_x}$ est indépendant de t

Mais ce n'est pas le cas pour tous les référentiels.

Exemple en coordonnées polaires, le vecteurs de base $\overrightarrow{u_r}$ varie avec le temps



3. Accélération

$$\overrightarrow{a} \equiv \frac{d\vec{v}}{dt} = \frac{d^2\overrightarrow{OM}}{dt^2}$$

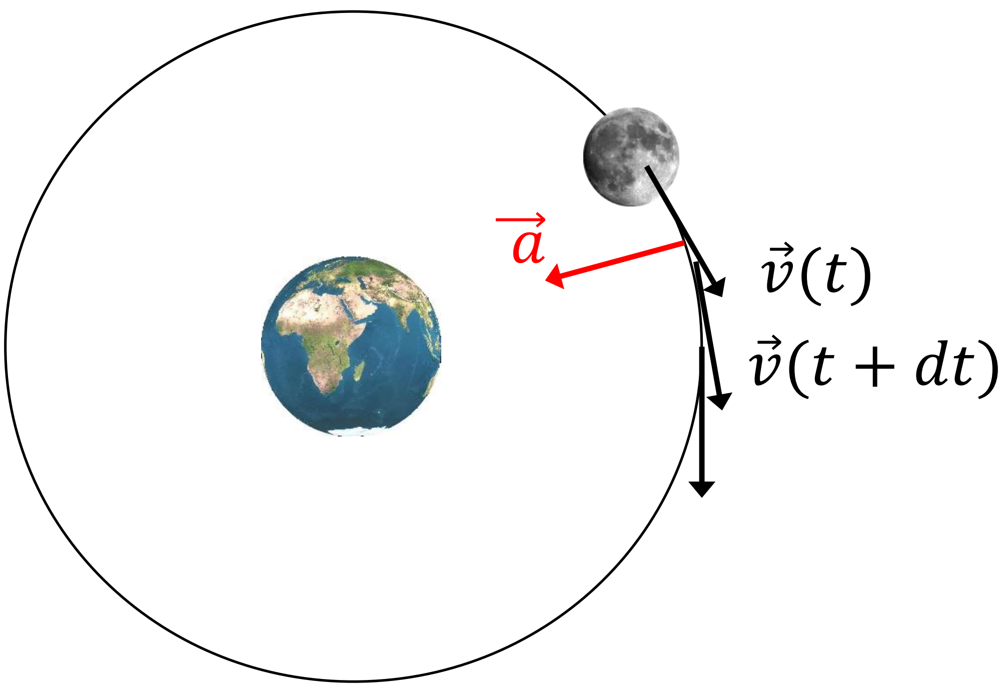
En coordonnées cartésiennes :

$$\overrightarrow{a} = \frac{d^2x}{dt^2}\overrightarrow{u_x} + \frac{d^2y}{dt^2}\overrightarrow{u_y} + \frac{d^2z}{dt^2}\overrightarrow{u_z}$$

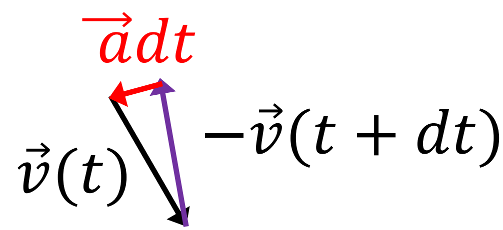
$$\vec{a} = \begin{pmatrix} d^2x/dt^2 \\ d^2y/dt^2 \\ d^2z/dt^2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \ddot{x} \\ \ddot{y} \\ \ddot{z} \end{pmatrix}$$

3. Accélération

Remarque : dans certains cas, la **norme de la vitesse** est **constante** mais l’**accélération n’est pas nulle**



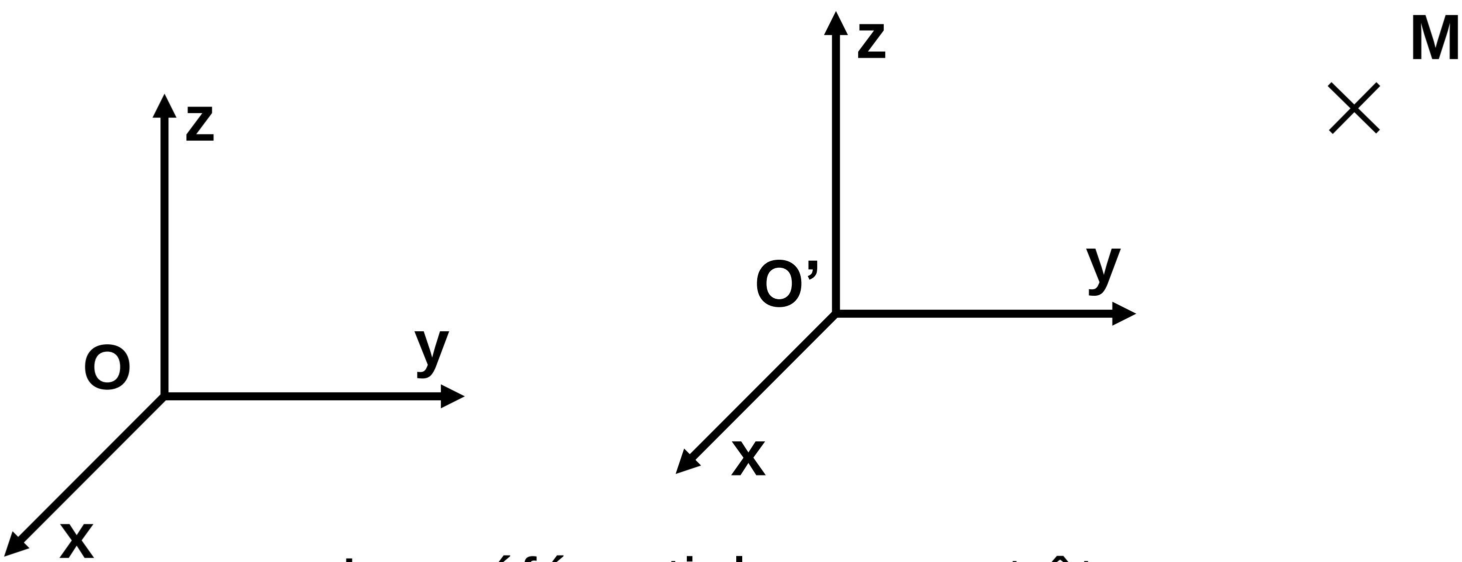
Accélération ?



L’accélération est nulle lorsque le *vecteur* vitesse est constant

4. Composition des vitesses/accélérations

Soit un **objet M** que l'on mesure dans un **référentiel O'xyz**
Position et vitesse de M dans le référentiel Oxyz ?



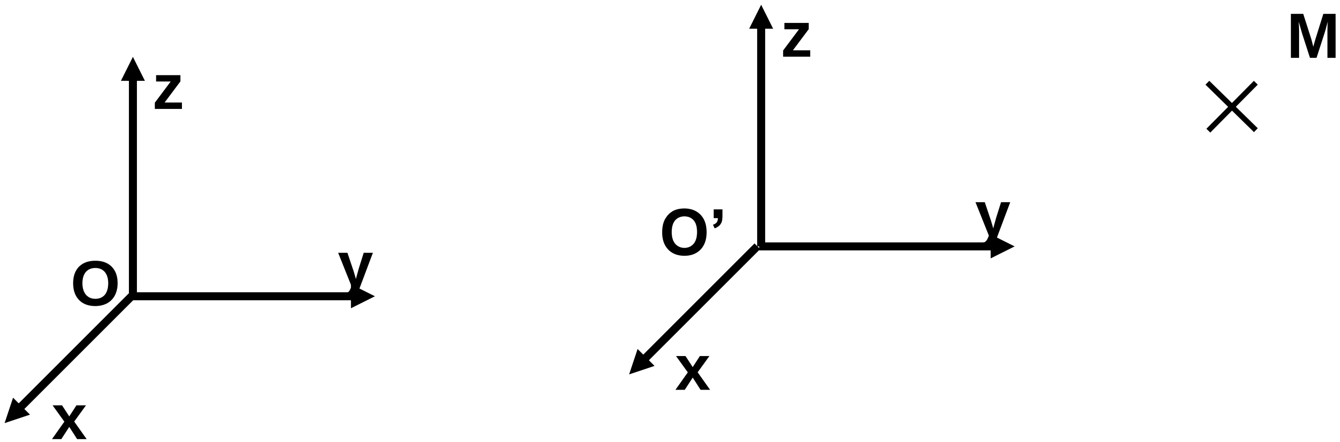
Les référentiels peuvent être en mouvement l'un par rapport à l'autre

4. Composition des vitesses/accélérations

Soit un **objet M** que l'on mesure dans un **référentiel O'xyz**
Position et vitesse de M dans le référentiel Oxyz ?

$$\overrightarrow{O'M} = \overrightarrow{O'O} + \overrightarrow{OM} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{OM} = \overrightarrow{O'M} + \overrightarrow{OO'}}$$

$$\frac{d\overrightarrow{OM}}{dt} = \frac{d\overrightarrow{O'M}}{dt} + \frac{d\overrightarrow{OO'}}{dt} \Rightarrow \boxed{\overrightarrow{v_{M/O}} = \overrightarrow{v_{M/O'}} + \overrightarrow{v_{O'/O}}}$$



De même on peut montrer que $\boxed{\overrightarrow{a_{M/O}} = \overrightarrow{a_{M/O'}} + \overrightarrow{a_{O'/O}}}$

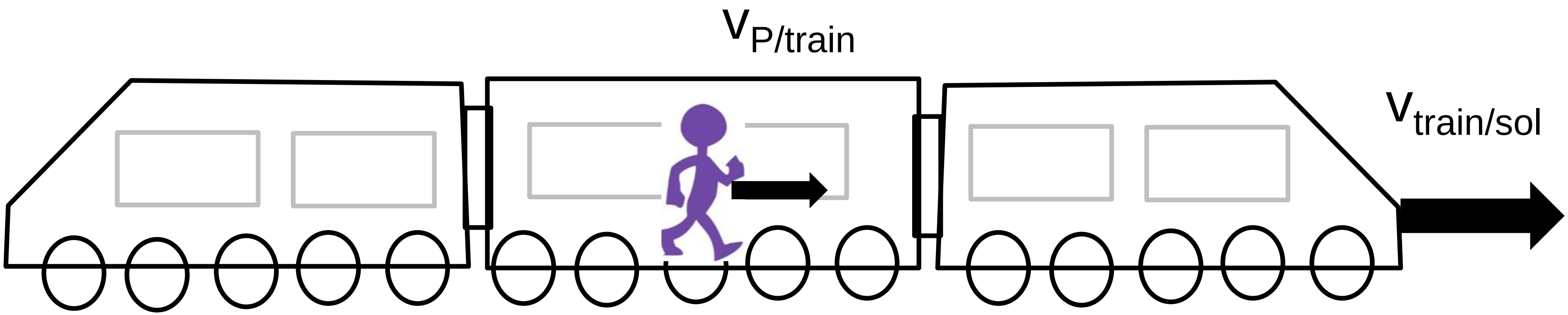
4. Composition des vitesses/accélérations

Application numérique

Un train se déplace à une vitesse de 50 km/h par rapport au sol.

Une personne se déplace dans le train à une vitesse de norme 2 m/s par rapport au train.

Vitesse de la personne par rapport au sol ?



CAS 1. $v_{P/train}$ dans le même sens que $v_{train/sol}$

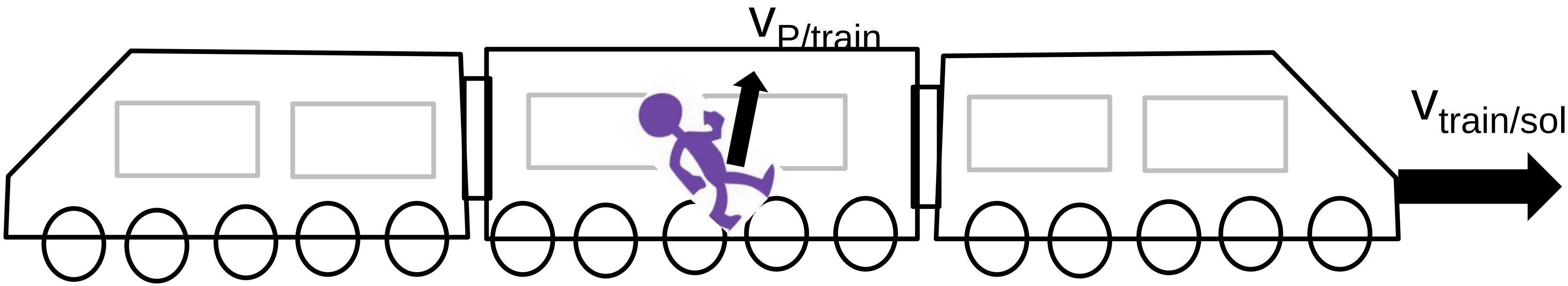
→ $v_{P/sol}$ =57,2km/h

4. Composition des vitesses/accélérations

Application numérique

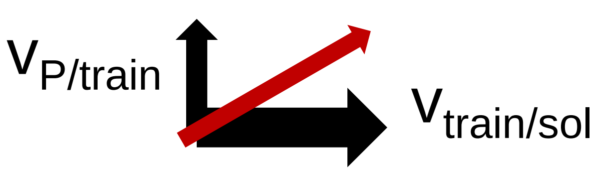
Un train se déplace à une vitesse de 50 km/h par rapport au sol. Une personne se déplace dans le train à une vitesse de norme 2 m/s par rapport au train.

Vitesse de la personne par rapport au sol ?



CAS 2. $v_{P/train}$ perpendiculaire à $v_{train/sol}$

→ $v_{P/sol}$ =50,5 km/h



4. Composition des vitesses/accélérations

Remarque : cette loi n'est valable que pour des vitesses petites devant celle de la lumière

Exemple : $\left.\begin{array}{l} v_1 = 0{,}6\ c \\ v_2 = 0{,}6\ c \end{array}\right\}$ $1{,}2\ c$ v > vitesse de la lumière, impossible

Formule de composition des vitesses en relativité restreinte :

$$v = \frac{v_1 + v_2}{1 + \frac{v_1 v_2}{c^2}}$$

Dans l'exemple ci-dessus on obtiendrait :

$$v = \frac{1{,}2\ c}{1 + 0{,}36} = 0{,}88\ c$$ → OK