CIR$_2$

Dénombrement
Résumé de cours

I/ Entiers naturels

1. Notion d'ensemble

- C'est une notion primitive, qu'on ne cherchera pas à définir autrement qu'intuitivement.
  Un ensemble (*set*) est défini quand on connaît ses éléments et les objets qui ne le sont pas.
  Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments.
- Notations $x \in E$ « x est élément de E », « x appartient à E » ~~« x est dans E »~~
  $x \notin E$ « x n'est pas élément de E », « x n'appartient pas à E »
- Exemples $\{bleu, blanc, rouge\}$, $\{1..100\}$, $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres premiers, $]-1,1]$,
  $\{x \in \mathbb{R} / \sin x > 0\}$, $\{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3\}$, $\{\ \}$ (aussi noté $\varnothing$) : L'ensemble vide.
- Sous-ensemble (*subset*) : A est un sous-ensemble de B ssi tout élément de A est élément de B.
  notation $A \subset B$: « A est une partie de B », « A est inclus dans B » ~~« A est dans B »~~
- Exemples : Soit $E = \{x, \{x\}\}$. On a $x \in E,\ \{x\} \in E,\ \{x\} \subset E,\ x \not\subset E,\ \{\{x\}\} \subset E$
- $A \cap B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$, $A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$, $A - B = A \backslash B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

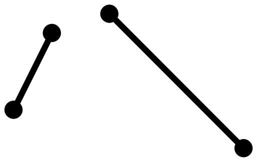
2. Ensembles équipotents

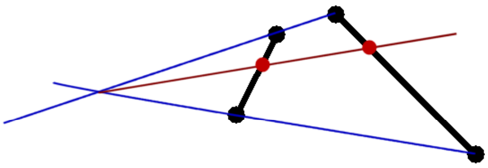
- Bijection (*bijection*) $f : A \to B$ est une bijection ssi tout élément de A a une image et une seule et tout élément de B a un antécédent et un seul.
- Définition : A est équipotent à B ssi il existe une bijection de A vers B.
- Remarques A est équipotent à B $\Leftrightarrow$ B est équipotent à A . On dit que A et B sont équipotents.
  Si A est équipotent à B et B est équipotent à C, alors A est équipotent à C.
  Tout ensemble A est équipotent à lui-même.
- Exemples : ➔ $\{$as, roi, dame, valet$\}$ est équipotent à $\{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit\}$.

  ➔  est équipotent à 

  ➔ $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents, de même que $\mathbb{N}$ et l'ensemble des naturels pairs.

  ➔ Les deux segments ci-dessous sont équipotents Preuve :





- Si des ensembles sont équipotents, on dit qu'ils ont le même cardinal.
  Si ce sont des ensembles 'finis', on dit qu'ils ont le même nombre d'éléments.

$$Card\left(\{\clubsuit, \blacklozenge, \heartsuit, \spadesuit\}\right) = Card\left(\{1,2,3,4\}\right) = Card\left(\{N,S,E,W\}\right)$$: chacun a '*4*' éléments.

$$Card(\mathbb{N}) = Card(\mathbb{N}^*) = Card(\mathbb{Z}) = Card(\mathbb{N}^2)$$

$$Card(]-1,1[) = Card(\mathbb{R})$$

$$Card(\mathbb{N}) \neq Card(\mathbb{R}) \quad \text{(Cantor)}$$

- Si un ensemble est équipotent à $\mathbb{N}$, on dit qu'il est <u>dénombrable</u>.
  $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$ sont dénombrables
  $\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{N}),]0,1[, \mathbb{R}^2$, une droite ne sont pas dénombrables.
- Notion d'entier naturel :
  On note 0 le cardinal de $\varnothing$, 1 le cardinal de $\{\varnothing\}$, 2 celui de $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, 3 celui de $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}$ …
  On définit ainsi de proche en proche tous les entiers naturels : 0 est le premier, et si n est un naturel (c'est le cardinal d'un ensemble X comme ci-dessus), le successeur de n est le cardinal de $X \cup \{X\}$ noté $n+1$.
  $\mathbb{N}$ est l'ensemble des naturels ainsi définis.
  Soient n et p deux naturels.
  On dit que $n \leqslant p$
  s'il existe una application injective d'un ensemble de cardinal n vers un ensemble de cardinal p,
  ou (ce qui est équivalent)
  s'il existe deux ensembles A et B tels que $n = Card(A), p = Card(B)$ et $A \subset B$.
  On note $[\![n, p]\!]$ l'ensemble des naturels q tels que $n \leqslant q \leqslant p$.
  Si E est un ensemble non vide, dire que $Card(E) = n$ revient à dire que E est équipotent à $[\![1, n]\!]$.
  On note aussi $\#E = n$ ou encore $|E| = n$
- Ensembles finis (définition 1)
  Un ensemble E est fini ssi il existe un naturel n tel que $Card(E) = n$
  Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini. Exemples : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q},]0,1[$
- Ensembles finis (définition 2)
  Un ensemble E est infini ssi il existe une partie F de E telle que $F \neq E$ et $Card(F) = card(E)$
  Un ensemble qui n'est pas infini est dit fini.

3. Propriétés de $\mathbb{N}$

- **Proposition 1 :**
  - Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément
  - Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément
- **Proposition 2 : (principe de récurrence)**
  Si une partie A de $\mathbb{N}$ vérifie la propriété : $0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$, alors $A = \mathbb{N}$
- **Récurrence simple**
  Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une propriété portant sur un entier n tel que $n \geqslant n_0$.
  Pour prouver la validité de $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$ il suffit de démontrer que
  $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geqslant n_0$ $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.
  Exemples : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $2^n \geqslant n^2$ pour tout n à partir d'un certain rang (lequel ?).
- **Récurrence forte**
  Pour prouver la validité de $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$ il suffit de démontrer que
  $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geqslant n_0$ $(\forall k = n_0 ... n,\ \mathcal{P}(k)$ vraie $) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie .
  Exemple : Si $\forall n \geqslant 1$ $a_{n+1} = \frac{1}{n+1} \sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ et si $|a_0| \leqslant 1$ et $|a_1| \leqslant 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leqslant 1$