$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\boxed{\mathrm{I}}$ – On considère dans cette question la fonction de deux variables $f(x,y) = e^{-xy}\sin x$.

a) Pour $x > 0$ fixé, montrer que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y$ converge et que

$$\lim_{Y\to\infty}\int_0^Y f(x,y)\,\mathrm{d}y = \frac{\sin x}{x}.$$

Par calcul direct :

$$\int_0^\infty e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y = \lim_{Y\to\infty}\int_0^Y e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}y = \lim_{Y\to\infty}\sin x\int_0^Y e^{-xy}\,\mathrm{d}y$$
$$= \lim_{Y\to\infty}\sin x\left.\frac{e^{-xy}}{-x}\right|_0^Y = \lim_{Y\to\infty}\frac{\sin x}{x}\left(1-e^{-xY}\right) = \frac{\sin x}{x}.$$

Puisque la limite existe, l'intégrale est convergente.

b) Pour $y > 0$ fixé, montrer que l'intégrale $\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ converge ; puis par double intégration par parties que

$$\lim_{X\to\infty}\int_0^X f(x,y)\,\mathrm{d}x = \frac{1}{1+y^2}.$$

Puisque $|f(x,y)| \leqslant e^{-xy}$ et que l'intégrale impropre $\displaystyle\int_0^\infty e^{-xy}\,\mathrm{d}x$ converge, on sait que $\displaystyle\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x$ est absolument convergente – donc en particulier convergente.

Calculons maintenant, en intégrant par parties ($u = e^{-xy},\ \mathrm{d}v = \sin x\,\mathrm{d}x$) :

$$I_X := \int_0^X e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x = -e^{-xy}\cos x\Big|_0^X - y\int_0^X e^{-xy}\cos x\,\mathrm{d}x = 1 - e^{-Xy}\cos X - y\int_0^X e^{-xy}\cos x\,\mathrm{d}x$$

et avec une seconde intégration par parties ($u = e^{-xy},\ \mathrm{d}v = \cos x\,\mathrm{d}x$) :

$$I_X = 1 - e^{-Xy}\cos X - y\left(e^{-xy}\sin x\Big|_0^X + y\int_0^X e^{-xy}\sin x\,\mathrm{d}x\right) = 1 - e^{-Xy}\underbrace{(\cos X + y\sin X)}_{\text{bornée}} - y^2 I_X.$$

En prenant la limite quand $X\to\infty$ de part et d'autre de cette équation et en notant $I := \lim_{X\to\infty} I_X$ (qu'on sait exister par l'argument ci-dessus), on trouve

$$I = 1 - y^2 I, \qquad \text{soit en isolant} \qquad I = \frac{1}{1+y^2}.$$

c) Expliquer pourquoi on peut conclure que $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sinc} x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y$ et en déduire la valeur de $\displaystyle\int_0^\infty \operatorname{sinc} x\,\mathrm{d}x$.

D'après le théorème de Fubini,

$$\int_0^X\int_0^Y f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^Y\int_0^X f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

puisque ces deux expressions peuvent être interprétées comme l'intégrale double de f sur le rectangle $[0,X]\times[0,Y]$. Admettant que l'on puisse passer à la limite quand $X, Y\to\infty$ sans problème et dans l'ordre qu'on veut, on en déduit que

$$\int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty\int_0^\infty f(x,y)\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y$$

soit, d'après ce qui a été calculé plus haut,

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x\,\mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2}\,\mathrm{d}y.$$

On peut donc en déduire la valeur de l'intégrale impropre du sinus cardinal (démontrée convergente en classe) :

$$\int_0^\infty \operatorname{sinc} x \, \mathrm{d}x = \int_0^\infty \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = \lim_{Y\to\infty} \int_0^Y \frac{1}{1+y^2} \, \mathrm{d}y = \lim_{Y\to\infty} \arctan y \Big|_0^Y = \lim_{Y\to\infty} \Big(\arctan y - 0 \Big) = \frac{\pi}{2}.$$

$\boxed{\mathrm{II}}$ – Où il est question de champs de vecteurs planaires.

a) Calculer directement (d'après la définition) la circulation de

$$\mathbf{F}(x,y) = (2xy - y)\,\mathbf{i} + x^2\,\mathbf{j}$$

le long de la ligne brisée $\mathcal{C}$ allant de $(0,0)$ à $(2,0)$ puis à $(2,3)$.

Si $\mathcal{C}_1$ désigne le segment allant de $(0,0)$ à $(2,0)$ et $\mathcal{C}_2$ celui allant de $(2,0)$ à $(2,3)$, on a

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}_1} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}_2} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_0^2 \mathbf{F}(x,0) \cdot \mathbf{i} \, \mathrm{d}x + \int_0^3 \mathbf{F}(2,y) \cdot \mathbf{j} \, \mathrm{d}y = \int_0^2 0 \, \mathrm{d}x + \int_0^3 4 \, \mathrm{d}y = 12.$$

b) Montrer que $\mathbf{F}$ n'est pas conservatif mais que $\mathbf{G} := \mathbf{F} - x\,\mathbf{j}$ l'est. Déterminer un potentiel ϕ pour $\mathbf{G}$ et utilisez la décomposition $\mathbf{F} = \nabla\phi + x\,\mathbf{j}$ pour confirmer votre réponse à la question précédente.

Les champs conservatifs ont tous leur rotationnel nul ; or

$$\operatorname{rot}(\mathbf{F}) = \frac{\partial}{\partial x}(x^2) - \frac{\partial}{\partial y}(2xy - y) = 2x - (2x - 1) = 1 \neq 0,$$

ce qui montre que $\mathbf{F}$ n'est pas conservatif. Par contre

$$\operatorname{rot}(\mathbf{G}) = \operatorname{rot}(\mathbf{F}) - \operatorname{rot}(x\,\mathbf{j}) = 1 - 1 = 0,$$

donc $\mathbf{G}$ est conservatif sur toute région simplement connexe (en particulier, sur $\mathbf{R}^2$ tout entier).

Si on cherche un potentiel ϕ pour $\mathbf{G}$, i.e. une fonction satisfaisant $\nabla\phi = \mathbf{G}$, soit

$$\frac{\partial\phi}{\partial x} = 2xy - y, \qquad \frac{\partial\phi}{\partial y} = x^2 - x,$$

on trouve $\phi(x,y) = x^2y - xy + C$; par exemple, avec $C = 0$.

On peut ainsi confirmer notre calcul de circulation de la question précédente, puisque $\mathbf{F}$ est « presque » conservatif :

$$\int_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \int_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} + \int_{\mathcal{C}} x\,\mathbf{j} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \phi(2,3) - \phi(0,0) + \int_0^3 2 \, \mathrm{d}y = 6 + 6 = 12.$$

Remarque : le calcul aurait été encore plus simple en considérant plutôt $\mathbf{H} := \mathbf{F} + y\,\mathbf{i} = \nabla x^2 y$!

c) Soit en général $\mathbf{F} = F_x\,\mathbf{i} + F_y\,\mathbf{j}$ un champ de vecteurs planaire et $\mathbf{G} := -F_y\,\mathbf{i} + F_x\,\mathbf{j}$; appliquer le théorème de Green-Riemann à $\mathbf{G}$ pour démontrer une version planaire du théorème de flux-divergence.

Le théorème de Green-Riemann dans le plan nous dit : si $\mathcal{C}$ est une courbe simple fermée orientée positivement bordant une région $\mathcal{D}$, alors

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{rot}(\mathbf{G}) \, \mathrm{d}A.$$

Dans le cas qui nous intéresse :

$$\operatorname{rot}(\mathbf{G}) = \frac{\partial}{\partial x}(F_x) - \frac{\partial}{\partial y}(-F_y) = \frac{\partial F_x}{\partial x} + \frac{\partial F_y}{\partial y} = \operatorname{div}(\mathbf{F})$$

et, si $\mathbf{T} = (T_x, T_y)$ désigne un vecteur tangent unitaire sur $\mathcal{C}$,

$$\mathbf{G} \cdot \mathrm{d}\mathbf{r} = \mathbf{G} \cdot \mathbf{T} \, \mathrm{d}\ell = (-F_y T_x + F_x T_y) \, \mathrm{d}\ell = \mathbf{F} \cdot \underbrace{(T_y, -T_x)}_{\mathbf{N}} \, \mathrm{d}\ell,$$

où on remarque que $\mathbf{N}$ est un vecteur normal unitaire extérieur pour $\mathcal{C}$. En d'autres termes, Green-Riemann pour $\mathbf{G}$ nous dit que

$$\oint_{\mathcal{C}} \mathbf{F} \cdot \mathbf{N} \, \mathrm{d}\ell = \iint_{\mathcal{D}} \operatorname{div}(\mathbf{F}) \, \mathrm{d}A :$$

le flux de $\mathbf{F}$ hors de $\mathcal{C}$ est l'intégrale de sa divergence sur la région bordée par $\mathcal{C}$.

$\boxed{\text{III}}$ – Voulant impressionner la parenté pour Noël, le petit Alphonse fabrique une décoration en collant ensemble une infinité de boules, de rayon respectif $n^{-2/5}$ ($n = 1, 2, 3, \ldots$).

a) Rappeler le calcul de l'aire d'une sphère et du volume d'une boule de rayon $r > 0$ à l'aide d'intégrales multiples.

Paramétrisation d'une boule $\mathcal{B}_r$ en coordonnées sphériques, disons

$$\varphi(\rho, \alpha, \beta) = \begin{bmatrix} \rho\cos\alpha\cos\beta \\ \rho\cos\alpha\sin\beta \\ \rho\sin\alpha \end{bmatrix} \qquad (0 \leqslant \rho \leqslant r,\ -\frac{\pi}{2} \leqslant \alpha \leqslant \frac{\pi}{2},\ 0\ \leqslant \beta \leqslant 2\pi).$$

On calcule (ou on sait) que

$$|\mathrm{jac}(\varphi)| = \rho^2\cos\alpha$$

d'où

$$\mathrm{vol}(\mathcal{B}_r) = \int_0^{2\pi}\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^r \rho^2\cos\alpha\,\mathrm{d}\rho\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = \int_0^r \rho^2\,\mathrm{d}\rho\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta = \frac{r^3}{3}\cdot 2\cdot 2\pi = \frac{4\pi r^3}{3}.$$

Pour l'aire de la sphère $\mathcal{S}_r$: on dérive $\mathrm{vol}(\mathcal{B}_r)$ par rapport à r (pourquoi ?) ou on utilise la paramétrisation

$$\mathbf{r}(\alpha, \beta) := \varphi(r, \alpha, \beta),$$

qui nous donne

$$\mathrm{d}A = \left\|\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\alpha}\wedge\frac{\partial\mathbf{r}}{\partial\beta}\right\| = r^2\cos\alpha$$

et ainsi

$$\mathrm{aire}(\mathcal{S}_r) = \int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\int_0^{2\pi} r^2\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\,\mathrm{d}\beta = r^2\cdot\int_{-\frac{\pi}{2}}^{\frac{\pi}{2}}\cos\alpha\,\mathrm{d}\alpha\cdot\int_0^{2\pi}\mathrm{d}\beta = r^2\cdot 2\cdot 2\pi = 4\pi r^2.$$

b) Montrer que l'aire totale de l'assemblage d'Alphonse est infinie.

L'aire totale de l'assemblage d'Alphonse s'écrit

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{aire}(\mathcal{S}_{n^{-2/5}}) = \sum_{n=1}^{\infty}4\pi(n^{-2/5})^2 = 4\pi\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{4/5}}.$$

Or on sait que cette dernière série à termes positifs diverge (série de Riemann avec $\alpha = 4/5 < 1$), l'aire totale est donc infinie.

c) Montrer par contre que le volume total de l'assemblage d'Alphonse est fini et donnez-en un encadrement en le comparant à des intégrales que vous évaluerez.

Pour le volume total des boules d'Alphonse, on trouve cette fois

$$\sum_{n=1}^{\infty}\mathrm{vol}(\mathcal{B}_{n^{-2/5}}) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{4\pi(n^{-2/5})^3}{3} = \frac{4\pi}{3}\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{6/5}}.$$

On reconnaît une série de Riemann convergente ($\alpha = 6/5 > 1$), l'assemblage possède donc un volume fini V.

Afin de l'encadrer, considérons la fonction décroissante $f(x) = x^{-6/5}$: puisque

$$f(x-1) \geqslant n^{-6/5} \geqslant f(x) \qquad \text{pour}\ \ x \in [n, n+1],$$

on a

$$\int_{n-1}^{n} f(x)\,\mathrm{d}x \geqslant n^{-6/5} \geqslant \int_n^{n+1} f(x)\,\mathrm{d}x$$

d'où en sommant

$$1 + \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{6/5}} \leqslant \int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x.$$

Or

$$\int_1^{\infty} f(x)\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\int_1^X x^{-6/5}\,\mathrm{d}x = \lim_{X\to\infty}\left.\frac{x^{-1/5}}{-1/5}\right|_1^X = \lim_{X\to\infty} 5\left(1 - \frac{1}{X^{1/5}}\right) = 5,$$

ce qui nous donne

$$5 \leqslant \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^{6/5}} \leqslant 6 \qquad \text{soit} \qquad \frac{20\pi}{3} \leqslant V \leqslant 8\pi.$$