TD. T2. 12/01.

EXO 3 (suite).

Méthode 3 : montrer que $u_n = (2n-1)u_{n-1}$.

u_1 : 2 équipes. → 1 possibilité.

u_2 : 4 équipes. → A, B, C, D.
$n = 2$

A - B et C - D.
B - C et A - D.
A - C et B - D

u_3. 6 équipes. A, B, C, D, E, F.
$n = 3$.

A, B. CDEF.

nombre de possibilités $= u_2$.

nombre de choix pour le match A - B.
5 choix. 1ère équipe n'a pas d'influence.
5 possibilités d'adversaires
$= 2n-1$.

u_n. $2n$ équipes.

→ on prend 1 équipe. je lui choisis un adversaire.
$2n-1$ possibilités.
Il reste alors $2n-2 = 2(n-1)$ équipes. Il y a alors u_{n-1} possibilités d'organiser les matchs.

donc on a $u_n = (2n-1)\, u_{n-1}$.

EXO 4 **Q1** Montrer que pour $n \le p$ $\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}$

$$\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{n}{n} + \sum_{k=n+1}^{p} \binom{k}{n}$$

$\boxed{\text{Relation de Pascal : } \binom{k}{n} + \binom{k}{n+1} = \binom{k+1}{n+1}}$

$$\Rightarrow \sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{n}{n} + \sum_{k=n+1}^{p} \left(\binom{k+1}{n+1} - \binom{k}{n+1} \right) \qquad \binom{n}{n} = \binom{n+1}{n+1} = 1$$

$$= \binom{n+1}{n+1} + \underbrace{\sum_{k=n+1}^{p} \binom{k+1}{n+1}} - \sum_{k=n+1}^{p} \binom{k}{n+1}$$

changement d'indice $i = k+1$

$k = n+1 \to i = n+2$

$k = p \to i = p+1$

$$= \binom{n+1}{n+1} + \underbrace{\sum_{i=n+2}^{p+1} \binom{i}{n+1} - \sum_{k=n+1}^{p} \binom{k}{n+1}}$$

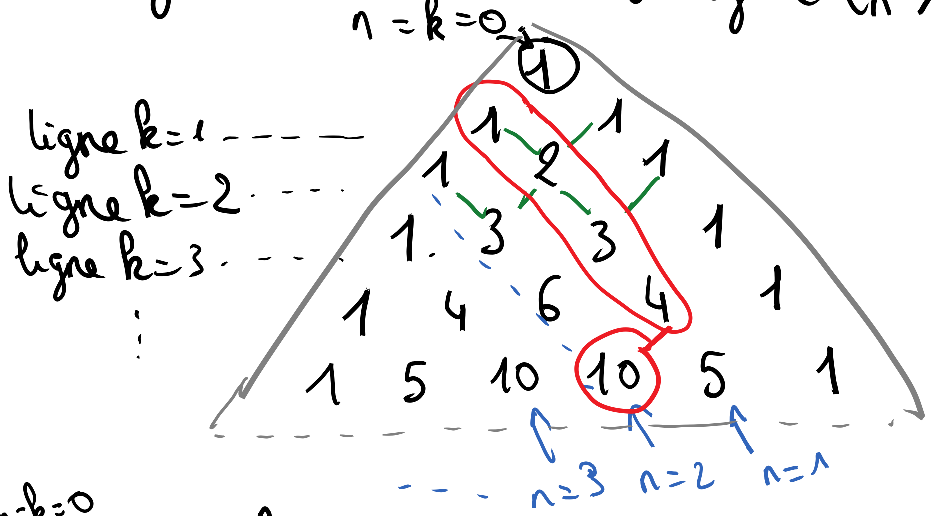
Sommes télescopiques.
Les termes s'annulent 2 à 2 sauf $i = p+1$ (à gauche) et $k = n+1$ (à droite)

$$= \binom{n+1}{n+1} + \binom{p+1}{n+1} - \binom{n+1}{n+1} = \binom{p+1}{n+1}$$

donc $\boxed{\displaystyle\sum_{k=n}^{p} \binom{k}{n} = \binom{p+1}{n+1}}$

Triangle de Pascal

on regarde $\binom{k}{n}$

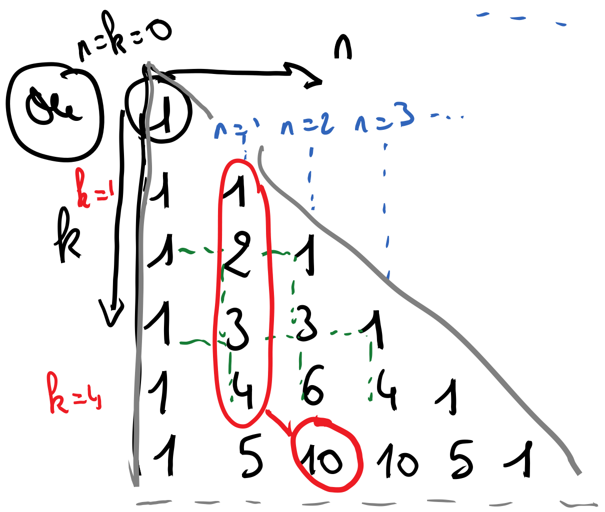


on prend n=1.

p=4

k=1 → 4.

la somme vaut le coefficient en bas à gauche. $\binom{5}{2} = \binom{p+1}{n+1}$



on somme ici sur une colonne.

On obtient le coefficient en bas à droite.

Q2

Formule du binôme

$\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} = (1+1)^n = 2^n$ et pour $\sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}(-1)^k = (1-1)^n = 0$

$\underbrace{\sum_{k=0}^{n} \binom{2n}{2k}}_{S_{p,n}}$ et $\sum_{k=0}^{n} \binom{2n+1}{2k+1}$ $S_{I,n}$

n=0.

$S_p.\quad \sum_{k=0}^{0} \binom{0}{2k} = 1$

$n=1.\quad S_{p,1} = \sum_{k=0}^{1} \binom{2}{2k} = \binom{2}{0} + \binom{2}{2} = 2$

$n=2.\quad S_{p,2} = \sum_{k=0}^{2} \binom{4}{2k} = \binom{4}{0} + \binom{4}{2} + \binom{4}{4} = 2 + \frac{4!}{2!\,2!} = 8$

<u>idée</u> : $n\in\mathbb{N}^*$ $S_{p,n} = 2^{2n-1}$

Pour $S_{i,n}$:

$n=0$. $\sum_{k=0}^{0}\binom{2n+1}{2k+1} = \binom{1}{1} = 1$

$n=1$. $\sum_{k=0}^{1}\binom{3}{2k+1} = \binom{3}{1}+\binom{3}{3} = 3+1=4$

$n=2$. $\sum_{k=0}^{2}\binom{5}{2k+1} = \binom{5}{1}+\binom{5}{3}+\binom{5}{5} = 5+\underbrace{\frac{5!}{3!\,2!}}_{10}+1 = 16$

<u>idée</u> : $n\in\mathbb{N}$ $S_{i,n} = 2^{2n}$

On fait une récurrence simultanée. Pour $n\in\mathbb{N}^*$,

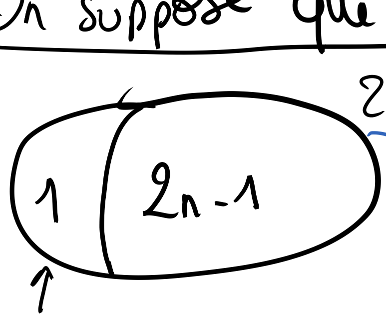
$\mathcal{P}(n)$: $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k} = 2^{2n-1}$ et $\sum_{k=0}^{n}\binom{2n+1}{2k+1} = 2^{2n}$.

<u>Initialisation</u> : $n=1$. $\sum_{k=0}^{1}\binom{2}{2k} = 2 = 2^{2n-1}$ ($2n-1=1$) vrai

$\sum_{k=0}^{1}\binom{2n+1}{2k+1} = 4 = 2^{2n}$ ($2n=2$) vrai

<u>On suppose que c'est vrai au rang $n-1$.</u> (hérédité).

2n éléments.



<u>On s'intéresse d'abord à $S_{p,n}$.</u> $= \sum_{k=0}^{n}\binom{2n}{2k}$

2 choix : – on le prend. alors on doit prendre un nombre impair d'éléments parmi $2n-1$. $\to$ on a $2^{2(n-1)}$ possibilités ($\to S_{i,n-1}$)

- on ne le prend pas. On prend un nombre pair d'éléments parmi $2n-1$.

[<u>Rappel</u> : ensemble qui a n éléments. On peut faire 2^n parties avec ses éléments].

Ici on a 2^{2n-1} parties.

Prendre des parties avec un nombre pair ou impair d'éléments correspond à faire une partition de l'ensemble : on aura fait toutes les parties possibles et l'intersection est nulle.

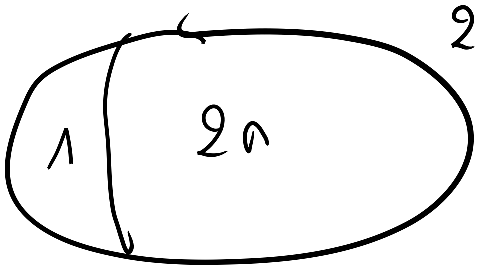
donc $\text{Card}\left(\underset{\text{parmi } 2n-1}{\text{parties avec } 2p \text{ éléments}}\right) = \text{Card}\left(\begin{matrix}\text{parties parmi}\\ 2n-1 \text{ éléments}\end{matrix}\right) - \text{Card}\left(\begin{matrix}\text{parties avec } 2p+1\\ \text{éléments}\end{matrix}\right)$

$$= 2^{2n-1} - 2^{(2)(n-1)}$$

Les 2 choix s'éliminent réciproquement et constituent les 2 uniques possibilités.

$$\Rightarrow S_{p,n} = 2^{2(n-1)} + 2^{2n-1} - 2^{2(n-1)} = 2^{2n-1}$$

<u>Il reste à calculer $S_{i,n}$</u>



2n+1 éléments

2 choix : → je prends l'élément seul. alors je prend $2k$ éléments parmi $2n$.

$\Rightarrow S_{p,n} = 2^{2n-1}$ possibilités

→ je ne prends pas l'élément seul. Je prend $2k+1$ éléments.

$\rightarrow 2^{2n} - 2^{2n-1}$ possibilités

$S_{i,n}$ = somme des possibilités pour les 2 choix.

$S_{i,n} = 2^{2n}$

<u>donc $P(n)$ vraie.</u>

Par le principe de récurrence, $P(n)$ vraie $\forall n \in \mathbb{N}^*$.

Q3 Montrer que $\forall n \in \mathbb{N}, \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k}^2 = \binom{2n}{n}$ formule de Vandermonde.

$$\underbrace{(1+X)^{2n}}_{\text{coefficient de } X^n} = \underbrace{(1+X)^n}_{=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k 1^{n-k}} \underbrace{(1+X)^n}_{\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}X^k 1^{n-k}} \quad \text{(binôme de Newton)}$$

$= \sum_{k=0}^{2n} \binom{2n}{k} X^k 1^{2n-k}$

$\binom{2n}{n}$

la somme des exposants doit être égale à n.