CIR_2 CNB_2

TD de Maths – SURFACES

1/ Soit Σ la nappe paramétrée : $x = u+v$, $y = v-u$, $z = u^2 - v^2$, $u \in [-1,+1]$, $v \in \left[0, \sqrt{1-u^2}\right]$

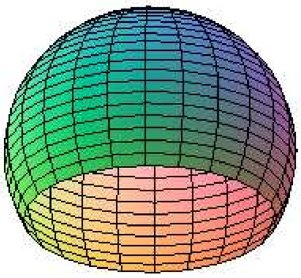
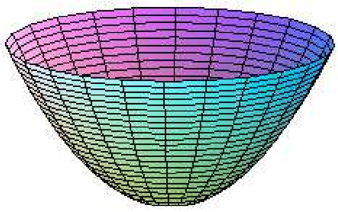
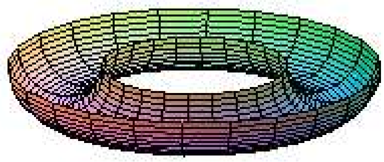
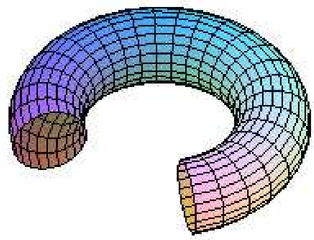
a. Déterminer un vecteur normal à la nappe Σ au point de paramètre (u,v).

b. Calculer l'aire de Σ (on pourra calculer l'intégrale en coordonnées polaires).

c. Calculer les coordonnées du centre de gravité de Σ en termes de l'intégrale $\int_0^1 \rho^3 \sqrt{2\rho^2+1}\, d\rho$.

d. Calculer cette intégrale par le changement de variable $t = \sqrt{2\rho^2+1}$.

2/ Calculer l'aire et la position du centre de gravité des surfaces suivantes :

3/ Soit Γ une courbe simple fermée du plan xOz , de centre de gravité G.
Par révolution autour de Oz, Γ engendre une surface de révolution Σ .
Étant donnée une paramétrisation de la courbe Γ : $x = x(t),\ y = y(t),\ t \in [a,b]$,
trouver une paramétrisation de la surface Σ .
En déduire une relation entre la longueur de Γ , l'aire de Σ et l'abscisse de G
($2^{\text{ème}}$ formule dite "de Guldin" (1577-1643) , due en fait à Pappus d'Alexandrie 4° siècle après J.C.)

4/ On considère la quadrique Q d'équation $x^2 + 2y^2 + 4z^2 - 6x + 3y + 5 = 0$
Montrer qu'il s'agit d'un ellipsoïde de révolution. Quel est son centre ?
A quelle condition sur x, y et z le plan tangent à Q passe-t-il par l'origine ?
Montrer que les points obtenus sont situés sur un même plan dont on calculera l'équation.

5/ a/ Une « lune » d'angle α est la région de la sphère unité délimitée par 2 méridiens faisant entre eux l'angle α .
Faire une figure.
Par un calcul en coordonnées sphériques, montrer que l'aire de cette région est 2α .

b/ Un triangle sphérique T d'angles α, β et γ peut être vu comme l'intersection de 3 lunes d'angles α, β et γ .
Faire une figure.
Démontrer que l'aire de T est égale à $\alpha + \beta + \lambda - \pi$ (*Formule de Girard*).
Remarque : il en découle en particulier que la somme des angles d'un triangle sphérique est toujours $\geqslant \pi$.

6/ Trouver une représentation paramétrique de la surface suivante :