DS de maths n° 6

Convergence uniforme

Consignes

- L'épreuve dure 2h et comporte **5** questions valant 4 points chacune.
- L'usage de la calculatrice est interdit (et inutile).
- Rédigez clairement vos solutions en explicitant votre raisonnement ainsi que les résultats utilisés.
- Amusez-vous bien !

Convergence uniforme, version générale

Les notions de convergence simple et uniforme se généralisent telles quelles sans problème à des fonctions sur des domaines quelconques prenant leurs valeurs dans des espaces vectoriels normés.

1. a) Soit D un ensemble non vide et $(V, ||\cdot||)$ un espace vectoriel normé. Formuler des définitions raisonnables pour la convergence simple et uniforme d'une suite de fonctions $f_n : D \to V$.

   (Assurez-vous lorsque $D \subseteq \mathbf{R}$ et $V = \mathbf{R}$ de bien récupérer les définitions vues en classe !)

   b) Pour une fonction $f : D \to V$, on pose (notez que l'on ne sait pas *a priori* si ce nombre est fini) :

   $$||f||_\infty = \sup_{P \in D} ||f(P)|| \ \in \ [0, +\infty].$$

   Démontrer qu'il s'agit d'une norme sur l'espace vectoriel $\mathcal{B}(D, V)$ des fonctions bornées de D dans V.

   (Dire qu'une fonction $f : D \to V$ est bornée revient à dire que $||f||_\infty$ est finie.)

2. Étudier la convergence (simple, uniforme ?) de la suite de fonctions $f_n : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ définie par

   $$f_n(x, y) = \sin(x + y) - \frac{xy}{e^{n(x^2+y^2)}}.$$

Une petite intégrale

Le but de ce problème est de déterminer la valeur numérique précise de l'intégrale

$$I = \int_0^1 \frac{\ln(1+x)}{x}\,\mathrm{d}x.$$

3. a) Établir, en justifiant les manipulations effectuées, l'égalité

   $$I = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1}}{n^2}.$$

   b) Montrer que $\zeta(2) - I = \frac{1}{2}\zeta(2)$, et en déduire la valeur de I.

   [*Rappel* : $\zeta(2) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$]

Zêta revisited

De façon plus générale, rappelons que la fonction zêta de Riemann est définie, pour $x > 1$, par la formule

$$\zeta(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^x}.$$

4. a) Montrer que cette série converge uniformément sur $[\alpha, \infty[$ pour tout $\alpha > 1$.

   b) En déduire la continuité de ζ en tout point de $]1, \infty[$ ainsi que ses limites aux bornes de l'intervalle.

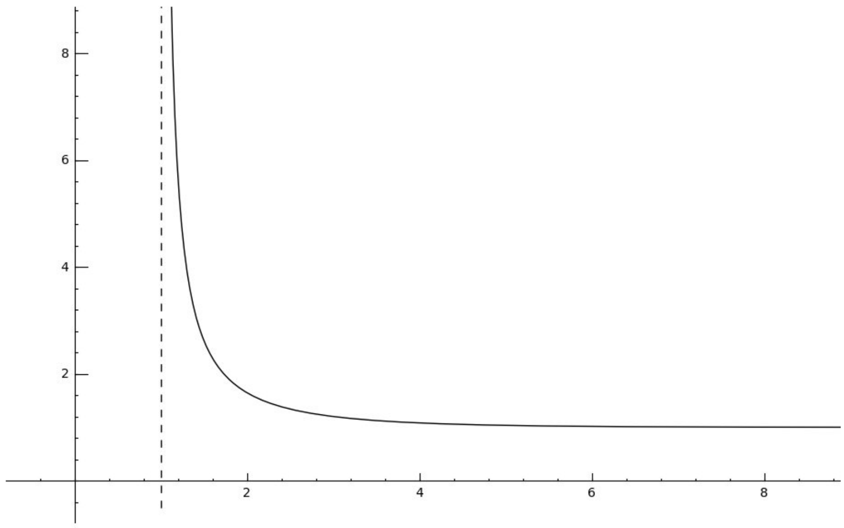

FIG. 1 – La fonction ζ de Riemann sur $]1, \infty[$

5. a) Démontrer que l'intégrale impropre

$$\int_1^{\infty} \frac{(\ln x)^k}{x^\alpha}\,\mathrm{d}x$$

   converge pour tout $\alpha > 1$ et $k \in \mathbf{N}$.

   [*Suggestion* : Intégrer par parties et procéder par induction sur k]

   b) En déduire que, pour tout entier positif k, la série de fonctions

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(\ln n)^k}{n^x}$$

   converge uniformément sur les compacts de $]1, \infty[$.

   c) Conclure que ζ est de classe $\mathcal{C}^\infty$ sur $]1, \infty[$ et donner une formule pour ses dérivées de tout ordre.