Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur la feuille.

Pour chaque question, **représentez** le domaine d'intégration en portant une attention particulière aux **bornes**, et prenez soin de bien **détailler vos calculs** et de mentionner les **résultats utilisés**.

Nom: **CORRIGÉ**

1. Calculer l'aire de la région plane $\mathcal{A}$ formée des points dont les coordonnées (x, y) satisfont

$$(x^2 + y^2 + x)^2 \leqslant x^2 + y^2.$$

Si on passe en coordonnées polaires, l'inégalité s'exprime

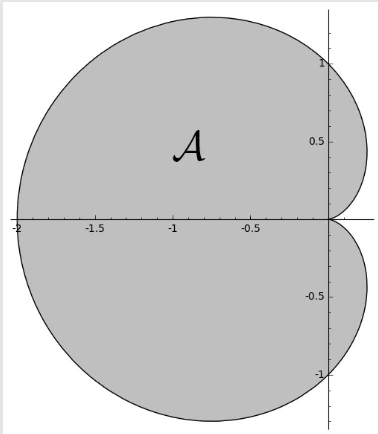
$$(r^2 + r\cos\theta)^2 \leqslant r^2,$$

soit, après simplfication :

$$r + \cos\theta \leqslant 1;$$

on reconnaît l'intérieur d'une cardioïde.

Calculons son aire en intégrant en coordonnées polaires :



$$\text{aire}(\mathcal{A}) = \iint_{\mathcal{A}} \mathrm{d}A = \int_0^{2\pi}\int_0^{1-\cos\theta} r\,\mathrm{d}r\,\mathrm{d}\theta = \int_0^{2\pi} \frac{r^2}{2}\bigg|_0^{1-\cos\theta}\mathrm{d}\theta = \frac{1}{2}\int_0^{2\pi}(1 - 2\cos\theta + \cos^2\theta) = \frac{3\pi}{2}.$$

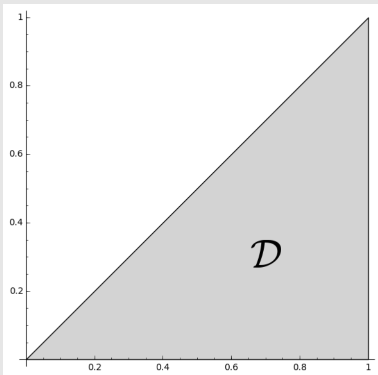
2. Évaluer $\displaystyle\int_0^1\int_y^1 \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}x\,\mathrm{d}y.$

Effectuer cette intégration itérée est embêtant tel quel, puisque $\dfrac{e^x - 1}{x}$ ne possède pas de primitive qui s'exprime en fonctions élémentaires...

Utilisons donc le théorème de Fubini pour interpréter le calcul proposé comme la valeur de

$$\iint_{\mathcal{D}} f\,\mathrm{d}A,$$

où $\mathcal{D}$ est le triangle de sommets $(0, 0)$, $(1, 0)$ et $(1, 1)$ et $f(x, y) := (e^x - 1)/x$.



Une seconde application du théorème de Fubini (dans l'autre direction) nous fournit alors

$$\iint_{\mathcal{D}} f\,\mathrm{d}A = \int_0^1\int_0^x \frac{e^x - 1}{x}\,\mathrm{d}y\,\mathrm{d}x = \int_0^1 \frac{e^x - 1}{x}\,y\bigg|_0^x \mathrm{d}x = \int_0^1 (e^x - 1)\,\mathrm{d}x = (e^x - x)\bigg|_0^1 = e - 2.$$

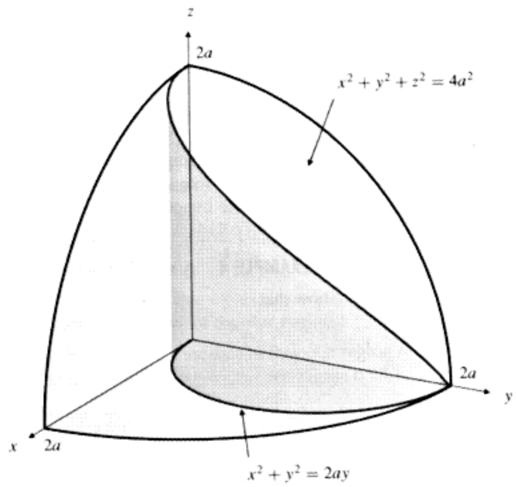
3. Déterminer, en fonction du paramètre $a > 0$, le volume du solide $B \cap C$, où B est la boule

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 + z^2 \leqslant 4a^2\}$$

et C le cylindre circulaire

$$\{(x, y, z) \in \mathbf{R}^3 \mid x^2 + y^2 \leqslant 2ay\}.$$

(La partie du solide située dans le premier octant $x, y, z \geqslant 0$ est représentée dans la figure ci-contre.)



En coordonnées cylindriques, l'équation du cercle $x^2 + y^2 = 2ay$ devient $r = 2a \sin\theta$. Par symétrie, le volume du solide recherché est 4 fois le volume de la portion du solide se trouvant dans le premier octant, et on calcule donc

$$\begin{aligned} V &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a\sin\theta} \int_0^{\sqrt{4a^2 - r^2}} r \,\mathrm{d}z \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta \\ &= 4 \int_0^{\pi/2} \int_0^{2a\sin\theta} r\sqrt{4a^2 - r^2} \,\mathrm{d}r \,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

En posant $u = 4a^2 - r^2$, cela devient

$$\begin{aligned} V &= 2 \int_0^{\pi/2} \int_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} \sqrt{u} \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} u^{\frac{3}{2}} \Big|_{4a^2\cos^2\theta}^{4a^2} \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{4}{3} \int_0^{\pi/2} (8a^3 - 8a^3\cos^3\theta) \,\mathrm{d}\theta \\ &= \frac{16}{3}\pi a^3 - \frac{32}{3} a^3 \int_0^{\pi/2} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta. \end{aligned}$$

Or, en posant $v = \sin\theta$, on trouve

$$\int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos^3\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^{\frac{\pi}{2}} (1 - \sin^2\theta)\cos\theta \,\mathrm{d}\theta = \int_0^1 (1 - v^2) \,\mathrm{d}v = 1 - \frac{1}{3} = \frac{2}{3},$$

d'où

$$V = \frac{16}{9}(3\pi - 4)a^3 \text{ unités cubes.}$$

4. Évaluer $\iint_{\mathcal{D}} x \,\mathrm{d}A$, où $\mathcal{D}$ est le parallélogramme de sommets $(0,0)$, $(1,3)$, $(3,2)$ et $(2,-1)$.

Le domaine d'intégration est le parallélogramme engendré par $\mathbf{u} = \begin{bmatrix} 2 \\ -1 \end{bmatrix}$ et $\mathbf{v} = \begin{bmatrix} 1 \\ 3 \end{bmatrix}$, il pourrait donc être intéressant de travailler en coordonnées par rapport à cette base, *i.e.* utiliser le changement de variables

$$\varphi : \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix} \mapsto \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ -1 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} u \\ v \end{bmatrix}.$$

On a alors

$$\iint_{\mathcal{D}} x \,\mathrm{d}A = \iint_{\mathcal{D}'} (2u + v) \left|\mathrm{jac}(\varphi)\right| \mathrm{d}A' = \int_0^1 \int_0^1 (2u + v)\, 7 \,\mathrm{d}u \,\mathrm{d}v = 7\, u^2\Big|_0^1 \, v\Big|_0^1 + 7\, u\Big|_0^1 \frac{v^2}{2}\Big|_0^1 = \frac{21}{2}.$$