Exercice 1.

Un condensateur de capacité C = 100 µF, initialement déchargé, est branché en série avec un générateur de fem E = 6 V, un interrupteur et une résistance R = 100 Ω.

a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par $u_C(t)$, la tension aux bornes du condensateur, lorsque l'on ferme l'interrupteur.

b) Déterminer l'expression de $u_C(t)$.

c) Tracer E(t), u_C (t) et i(t) dans trois graphes ayant la même échelle de temps.

d) Quelle est l'intensité maximale parcourant le circuit ?

Exercice 2.

Une bobine d'inductance L = 100 mH, est branchée en série avec un générateur de fem E = 6 V, un interrupteur et une résistance R = 100 Ω.

a) Etablir l'équation différentielle vérifiée par le courant dans le circuit i(t) lorsque l'on ferme l'interrupteur.

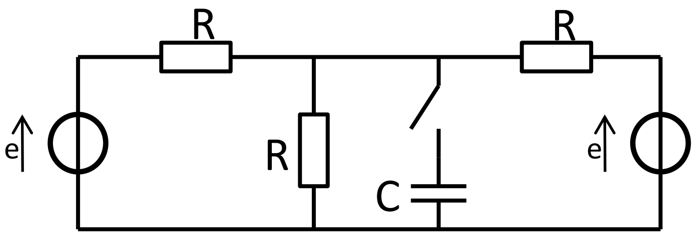
b) En déduire l'expression de i(t).

c) Tracer E(t), $u_L(t)$ (tension aux bornes de la bobine) et i(t) dans trois graphes ayant la même échelle de temps.

d) Quelle est la tension maximale aux bornes de la bobine ?

Exercice 3.

Le condensateur du circuit ci-dessous est initialement déchargé. A $t=t_0$, on ferme l'interrupteur.



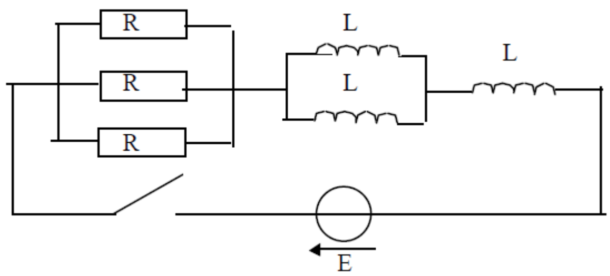
a) Donner graphiquement l'évolution qualitative de la tension u(t) aux bornes du condensateur.

b) Déterminer l'expression de u(t) pour ce circuit.

<u>Coup de pouce</u> : on peut simplifier le circuit avec un équivalent thévenin.

Exercice 4.

A t = 0 on ferme l'interrupteur. Donner la loi de variation avec le temps de l'intensité du courant qui traverse le générateur. On donne R = 6000 Ω, L = 30 mH, E = 6 V.

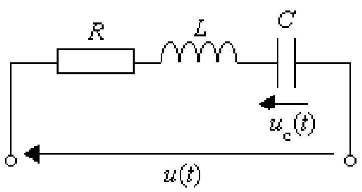


Exercice 5.

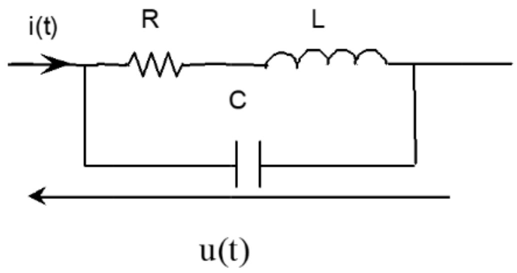
On considère le circuit ci contre.

a) Établir l'équation différentielle reliant uc(t) et ses dérivées première et seconde, R, L, C et u(t).

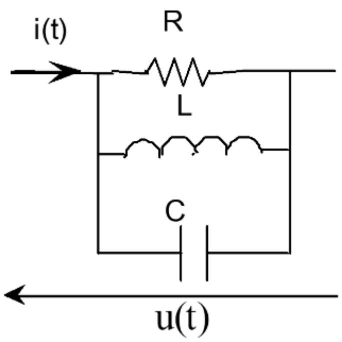
b) Quels sont les trois régimes transitoires dans lesquels ce circuit peut se trouver ?



Exercice 6. Bonus.
Soit le circuit suivant.
a) Déterminer l'équation différentielle régissant u(t) et i(t).



Exercice 7. Bonus.
Soit le circuit suivant.
a) Déterminer l'équation différentielle régissant u(t) et i(t).
b) Avant t = 0 le condensateur est initialement déchargé et la bobine n'a accumulé aucune énergie. A t=0 on impose i(t) = Io déterminer u(0+) et du/dt à t=0+.



Solutions

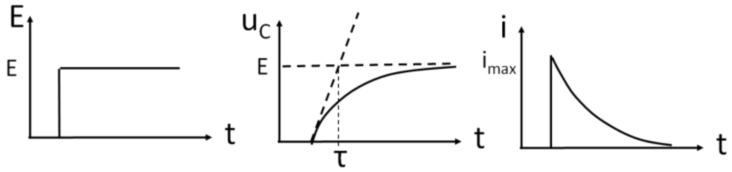
Ex1. a) Loi des mailles $E = Ri + u_C$ loi d'ohm du condensateur $i = C\frac{du_C}{dt}$

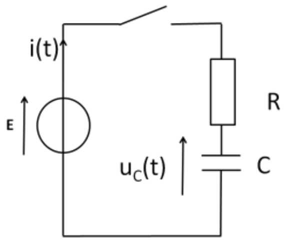
en combinant on obtient : $u_C + RC\frac{du_C}{dt} = E$

b) L'équation obtenue est sous la forme canonique $y + \tau y' = x$ avec x indépendant du temps. La solution, somme du transitoire (solution de l'équation sans second membre) et du permanent (solution particulière de même forme que le second membre) est de la forme $u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + x$ avec $\tau = RC$, $x = E$ et A une constante à déterminer en fonction des conditions initiales. A t = 0, $u_C(0+) = u_C(0-)$. Or $u_C(0-) = 0$ et $u_C(0+) = A + E$ donc $A = -E$.

On obtient $u_C(t) = E(1 - e^{-t/RC}) = 6(1 - e^{-100t})$.

c)





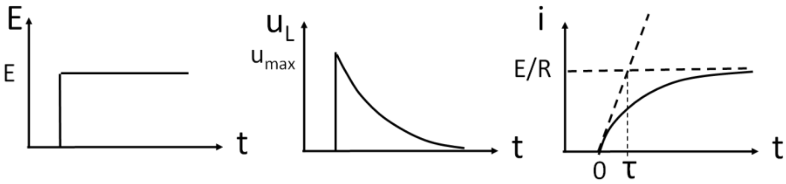
d) i_{max}=E/R=60 mA

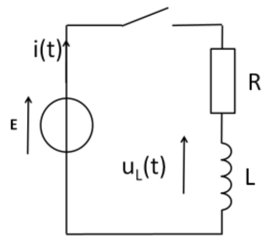
Ex2. a) Loi des mailles $E = Ri + u_L$ loi d'ohm de la bobine $u_L = L\frac{di}{dt}$; en combinant on obtient : $i + \frac{L}{R}\frac{di}{dt} = \frac{E}{R}$

b) Solution de la forme $u_C(t) = Ae^{-t/\tau} + x$ avec $\tau = L/R$, $x = E/R$ et A une constante à déterminer en fonction des conditions initiales. A t = 0, $i(0+) = i(0-)$. Or $i(0-) = 0$ et $i(0+) = A + E/R$ donc $A = -E/R$.

On obtient $i(t) = \frac{E}{R}(1 - e^{-Rt/L}) = 0{,}066(1 - e^{-1000t})$.

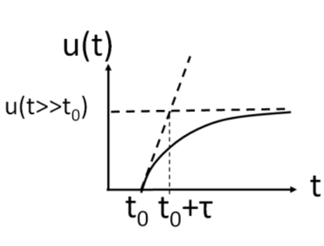
c)



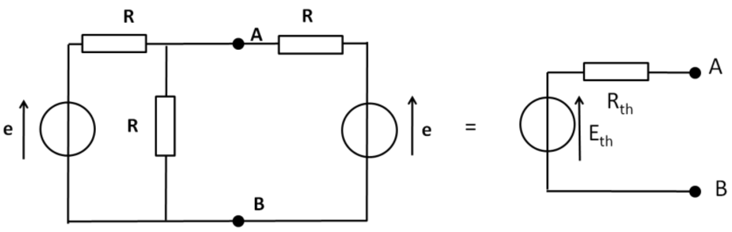


d) u_{max}=E = 6 V

Ex3. a)



b) pour trouver $U_0 = u_{t>>t0}$ et τ on va chercher l'équivalent Thévenin du circuit autour du condensateur.

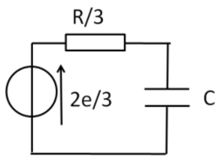


D'après le théorème de Millman :

$\mathrm{E_{th}} = \frac{\frac{e}{R}+\frac{0}{R}+\frac{e}{R}}{\frac{1}{R}+\frac{1}{R}+\frac{1}{R}} = \frac{2e}{3}$.

La résistance équivalente de Thévenin correspond à 3 résistances R en parallèle. On trouve $\mathrm{R_{th}} = \frac{R}{3}$.

On a donc le circuit équivalent suivant :



Loi des mailles $2e/3 = \frac{R}{3}i + u$ loi d'ohm du condensateur $i = C\frac{du}{dt}$

en combinant on obtient : $u + \frac{RC}{3}\frac{du}{dt} = \frac{2e}{3}$

solution de la forme $u\,(t) = Ae^{-t/\tau} + \mathrm{U_0}$ avec $\tau = RC/3$ et U_0=2e/3.

A t = t_0, continuité de u : $u\,(0+) = u\,(0-)$. Or $u\,(0-) = 0$ et $u\,(0+) = A + \frac{2e}{3}$

donc $A = -E$.

On obtient $u\,(t) = \frac{2e}{3}(1 - e^{-3t/RC})$

Ex4. Même problème que l'exercice 2 avec R'=R/3 et L'=3L/2. On obtient :

$$i = \frac{3\,\mathrm{E}}{\mathrm{R}}\,(1 - \exp(-t/\tau)) = 3.10^{-3}\,(1 - \exp(-\frac{4}{9}\,.\,10^{5}\,t))$$

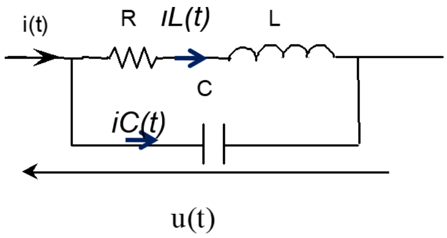
Ex5.

a) A partir de la loi des mailles et des différentes lois d'ohm on obtient :

$$u(t) = LC\frac{d^2u_C(t)}{dt^2} + RC\frac{du_C(t)}{dt} + u_C(t)$$

b) Régime apériodique, critique, pseudopériodique

Ex6.



Etablir l'équation différentielle régissant u(t) et i(t)

$$i_c(t) = C\frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = R.i_L(\mathrm{t}) + \mathrm{L}\frac{di_L(\mathrm{t})}{dt}$$

$$i(t) = i_L(\mathrm{t}) + i_C(\mathrm{t})$$

$$i_L(t) = i(t) - C\frac{du(t)}{dt}$$

$$d'ou\ u(t) = R(i(t) - C\frac{du(t)}{dt}) + L\frac{d}{dt}(\ i(t) - C\frac{du(t)}{dt})$$

$$u(t) = Ri(t) - RC\frac{du(t)}{dt} + L\frac{di(t)}{dt} - LC\frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

$$u(t) + RC\frac{du(t)}{dt} + LC\frac{d^2u(t)}{dt^2} = Ri(t) + L\frac{di(t)}{dt}$$

Ex7.

Pour l'équation différentielle il est indispensable d'exprimer la loi des nœuds :

$$i(t) = i_R(\mathrm{t}) + i_L(\mathrm{t}) + i_C(\mathrm{t})$$

$$i_R(t) = \frac{u(t)}{R} \qquad i_c(t) = C\frac{du(t)}{dt} \qquad u(t) = L\frac{di_L(t)}{dt}$$

$$i(t) = \frac{u(\mathrm{t})}{R} + i_L(\mathrm{t}) + \mathrm{C}\frac{du(t)}{dt}$$

En dérivant cette équation on obtient :

$$\frac{di(t)}{dt} = \frac{1}{R}\frac{du(\mathrm{t})}{dt} + \frac{di_L(\mathrm{t})}{dt} + \mathrm{C}\frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

On peut ainsi exprimer Ldi/dt

$$L\frac{di(t)}{dt}=\frac{L}{R}\frac{du(\mathrm{t})}{dt}+\mathrm{L}\frac{di_L(\mathrm{t})}{dt}+\mathrm{L\ C}\frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

$$L\frac{di(t)}{dt}=\frac{L}{R}\frac{du(\mathrm{t})}{dt}+u(\mathrm{t})+\mathrm{L\ C}\frac{d^2u(t)}{dt^2}$$

$$u(\mathrm{t})+\frac{L}{R}\frac{du(\mathrm{t})}{dt}+\mathrm{L\ C}\frac{d^2u(t)}{dt^2}=L\frac{di(t)}{dt}$$

On a ainsi la forme canonique du second ordre:

$$y(\mathrm{t})+\frac{2m}{\omega_0}\frac{dy(\mathrm{t})}{dt}+\frac{1}{\omega_0^2}\frac{d^2y(t)}{dt^2}=x(t)$$

•Avant t = 0 le condensateur est initialement déchargé et la bobine n'a accumulé aucune énergie. A t=0 on impose i(t) = Io déterminer u(0+) et du/dt à t=0+.

$$\grave{a}\ \ t=0\ \text{ on a } u_C(0)=0\ \text{ et } i_L(0)=0$$

La tension u(0) est égale à la tension aux bornes du condensateur uC(0) et elle reste égale à 0 car un condensateur ne peut subir de discontinuité de tension .

$$\grave{a}\ t=0\ \text{ on impose } i(t)=I_0 \quad \text{donc :}$$

$$i(0)=I_0=\frac{u(0)}{R}+i_L(0)+\mathrm{C}\frac{du(0)}{dt}$$

iL(0) reste égal à 0 car une bobine ne peut subir de discontinuité de courant donc on trouve :

$$C\frac{du(0)}{dt}=I_0 \text{ c'est à dire : } \frac{du(0)}{dt}=\frac{I_0}{C}$$