MECANIQUE CLASSIQUE

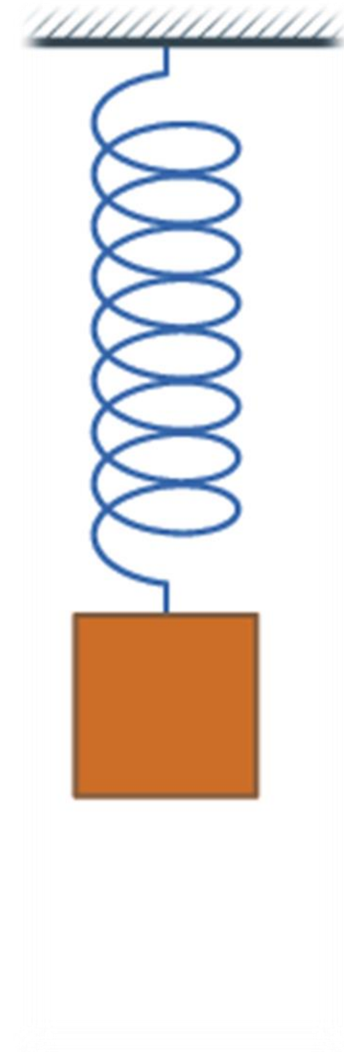
Chapitre 5 : Oscillateurs mécaniques

Introduction
1. Ressort
2. Oscillations libres
3. Oscillations amorties
4. Oscillations forcées et résonance

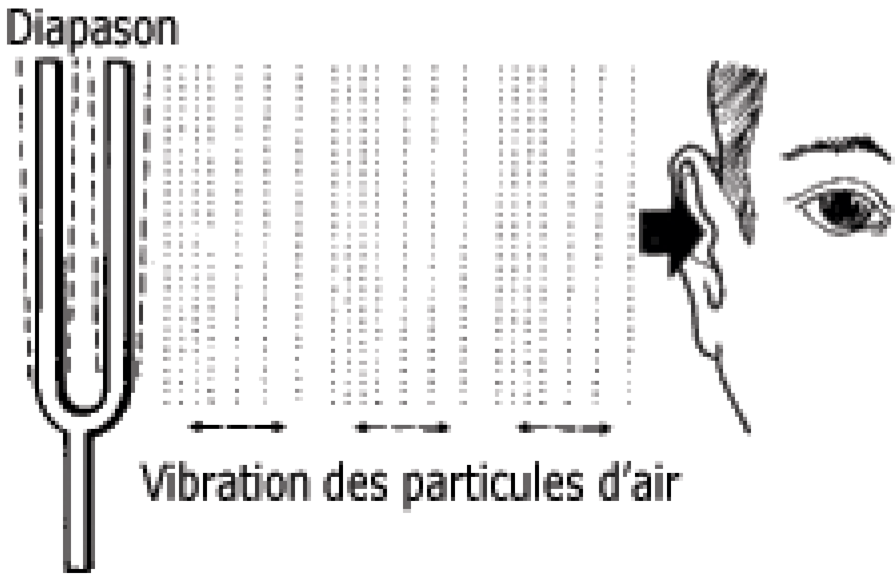
Introduction

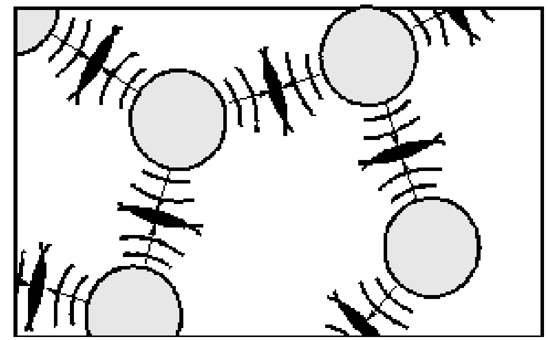
On va étudier un **système modèle** :

SYSTÈME MASSE-RESSORT

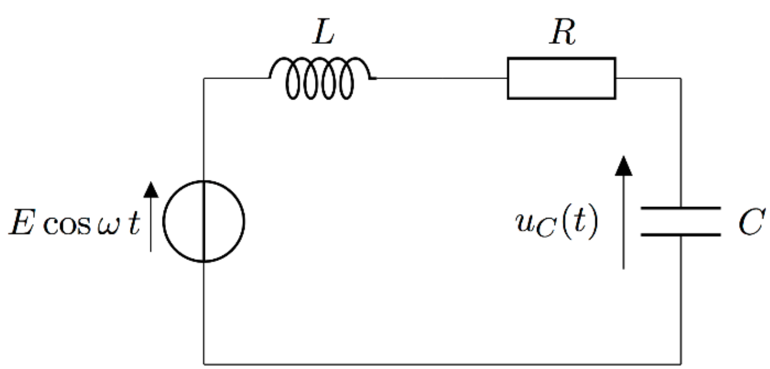


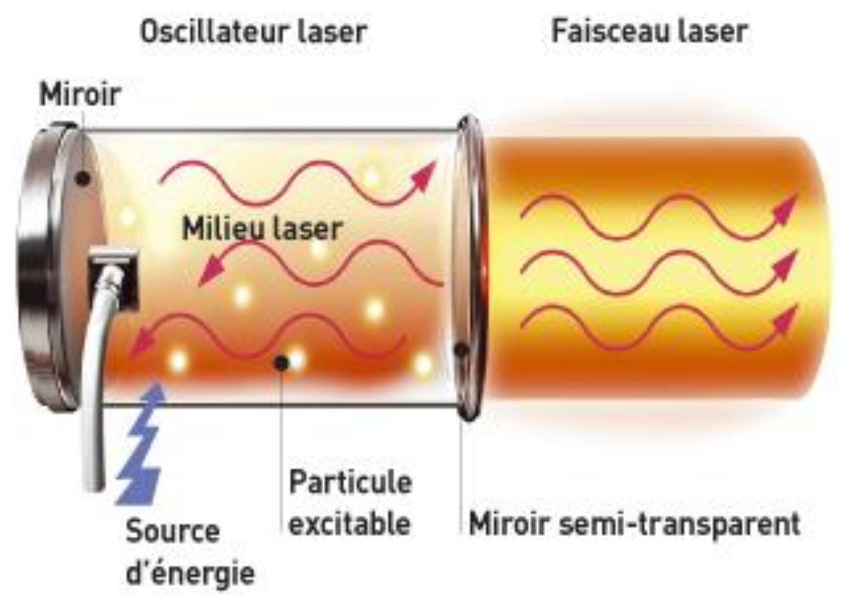
Les oscillations sont partout





Cristal= atomes liés par des « ressorts »

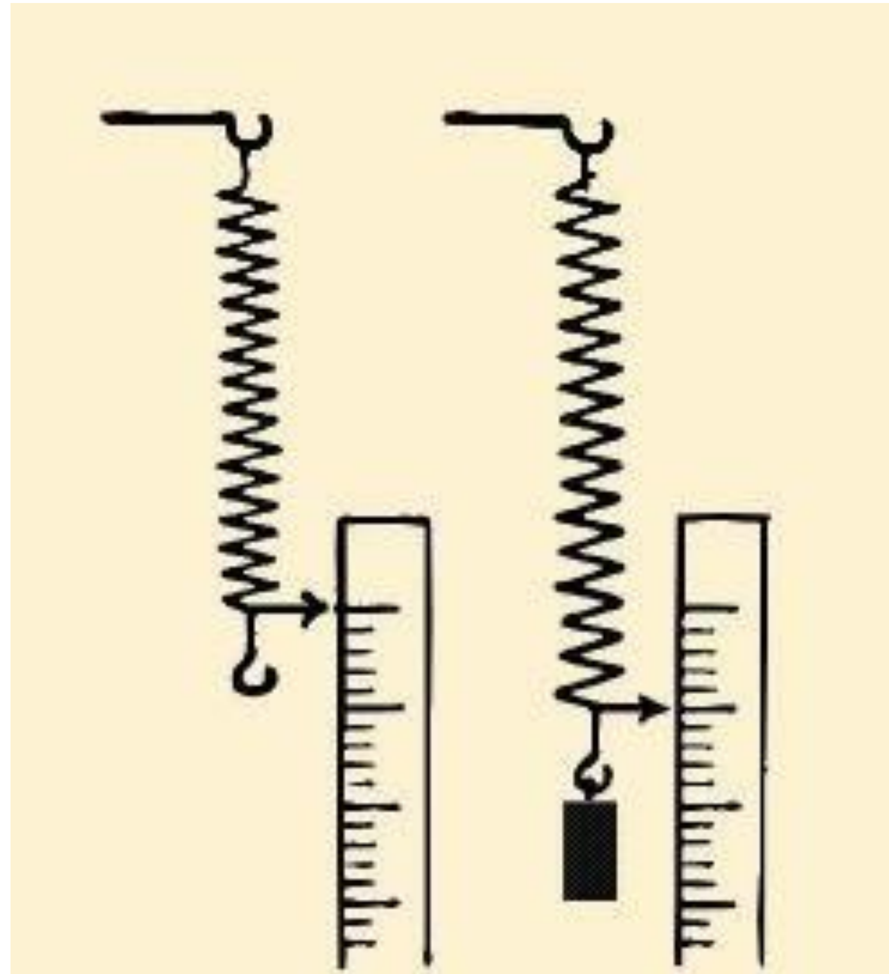




1. Ressort

Mesure de la longueur d'un ressort en fonction du poids

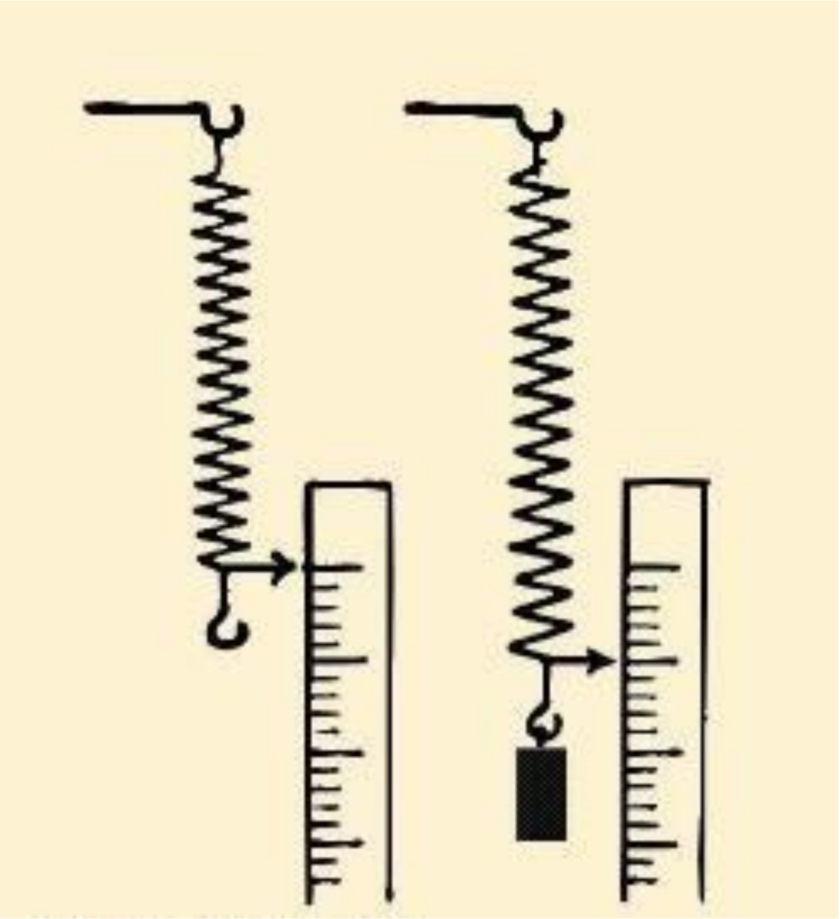
L (0 kg) =
L (1 kg) =
L (2 kg) =



→ **L'allongement est proportionnel à la force appliquée**

1. Ressort

Mesure de la longueur d'un ressort en fonction du poids



Exemple. On mesure
L (0 kg) = 10 cm
L (1 kg) = 11 cm
L (2 kg) = 12 cm
L (3 kg) = 13 cm

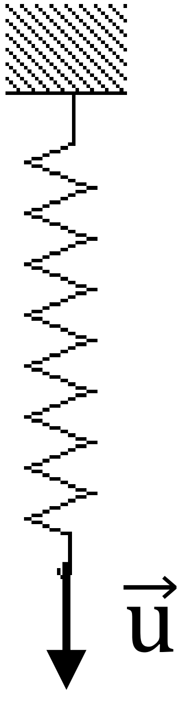
→ L'allongement est proportionnel à la force appliquée

Allongement de 1cm/kg

1. Ressort

Force de rappel du ressort

$$\vec{\mathrm{F}} = -k\ \Delta\ell\ \vec{\mathrm{u}}$$



k constante de raideur

$\Delta\ell = \ell$- ℓ_0 allongement

$\vec{u}$ vecteur unitaire pointé vers l’extérieur du ressort

Remarque : k et ℓ_0 suffisent à caractériser un ressort

1. Ressort

$$\vec{F} = -k\,\Delta\ell\,\vec{u}$$

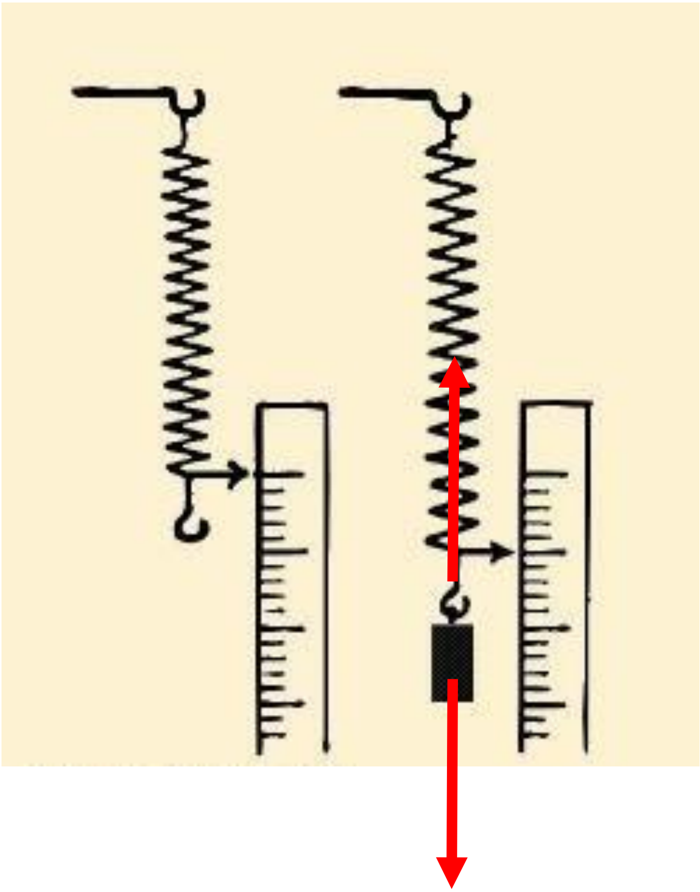
Mesure de k (suite)

Par exemple, $m = 1\ kg$

$\|\vec{P}\| = mg = 9.8\ N$

$\Delta\ell(1kg) = \ell - \ell_0 = 1\ cm$

$\rightarrow k = \frac{9.8}{0.01} = 980\ N/m$



Remarque : le poids s’exerce sur la masse, pas sur le ressort. En première approximation on peut dire que cela correspond à la force exercée par la masse sur le ressort.

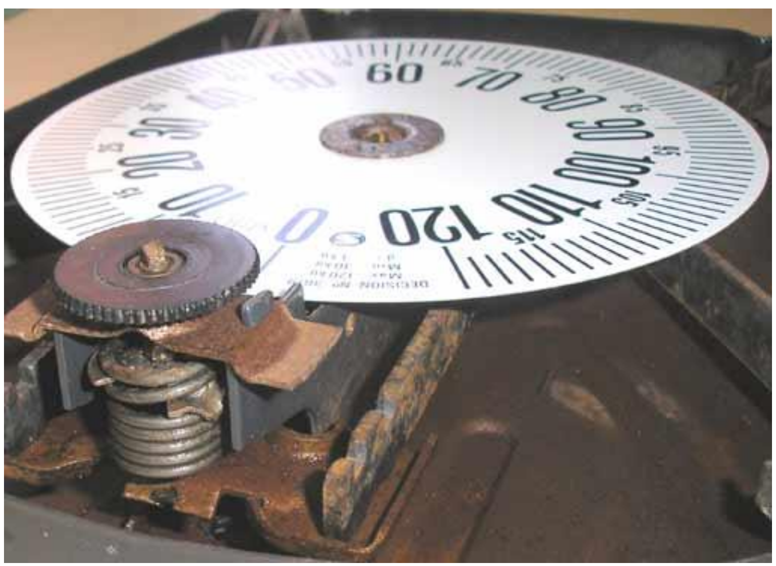
1. Ressort

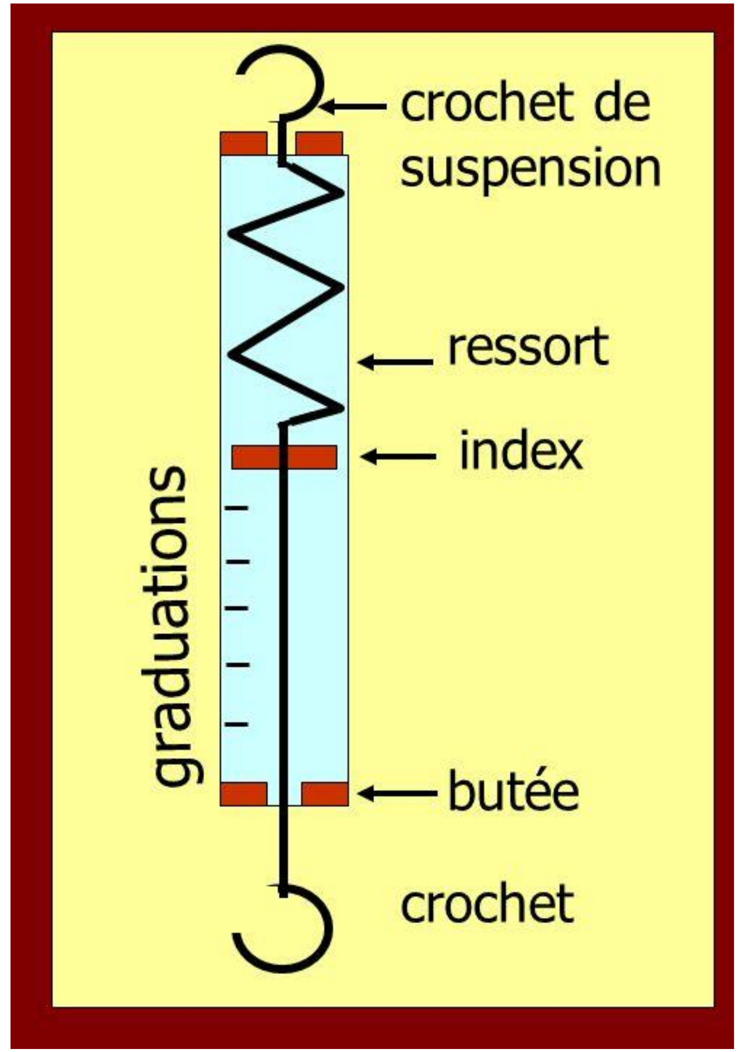
Remarque : constante de raideur d'un **ressort moins rigide** : k plus grand ou plus petit ?

$$\vec{\mathrm{F}} = -k\,\Delta\ell\,\vec{\mathrm{u}}$$

Pour un allongement identique, il faut une force plus petite
→ k plus petit

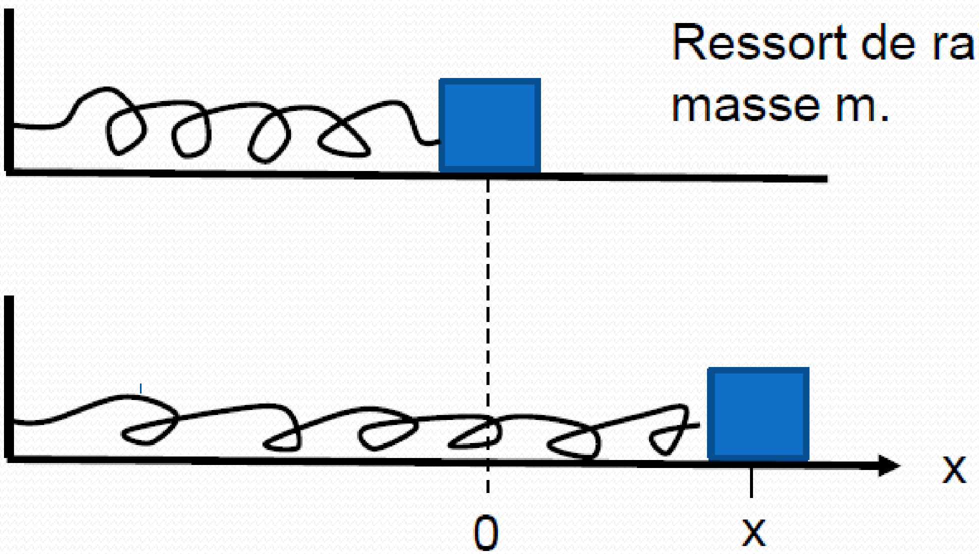
Application directe :
- Dynamomètre à ressort
- Pèse personne





2. Oscillations libres

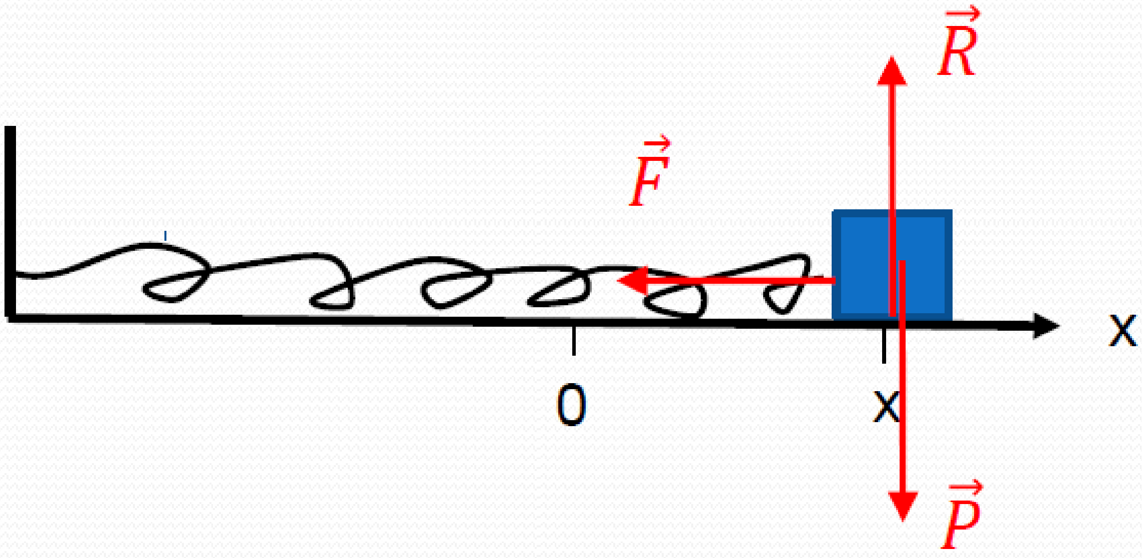
→On néglige les frottements.



Ressort de raideur k et de longueur ℓ_0, masse m.

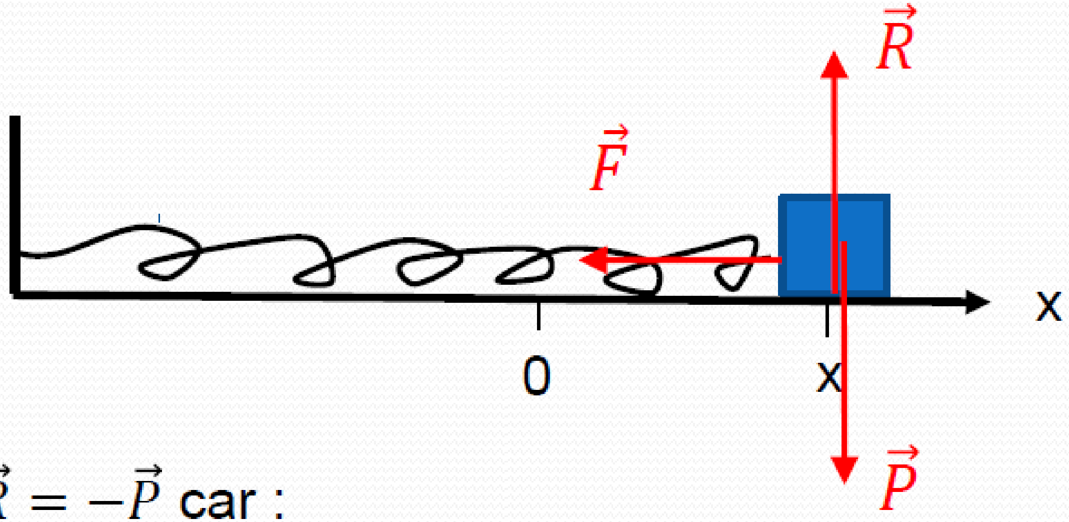
On écarte la masse de sa position d'équilibre et on étudie son mouvement :
→ Oscillations autour de sa position d'équilibre.
Déplacement selon x, position d'équilibre à $x=0$

Bilan des forces appliquées sur la masse m ?



- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- Réaction du support $\vec{R}$
- Force exercée par le ressort $\vec{F}$

Que peut on dire sur $\vec{R}$ et $\vec{P}$?



$\vec{R} = -\vec{P}$ car :

le système ne peut ni monter ni descendre, donc l'accéleration selon l'axe vertical **z** est nulle

$m\ddot{z} = P_z + R_z + F_z = 0$

$-\|\vec{P}\| + \|\vec{R}\| + 0 = 0$

Et $\vec{P}$ et $\vec{R}$ selon z donc $\vec{R} = -\vec{P}$

La justification peut être plus concise, mais elle est essentielle, ne pas oublier de justifier en DS

Principe fondamental de la dynamique, dans la direction x :

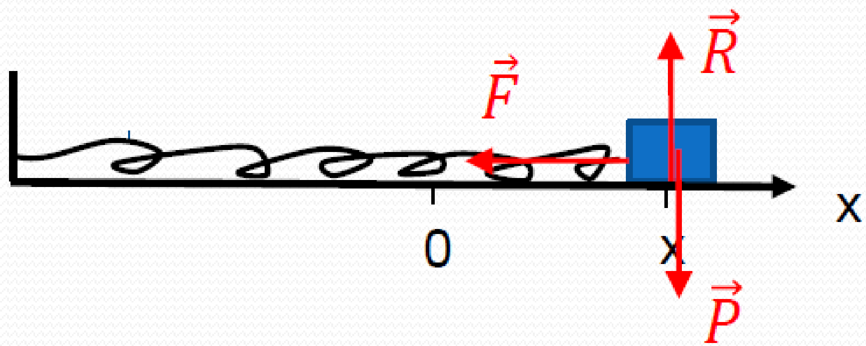
$$\boldsymbol{F_x = m\ddot{x}} \qquad \text{(une seule force : cas le plus simple !)}$$

Expression de Fx en fonction de l'allongement :

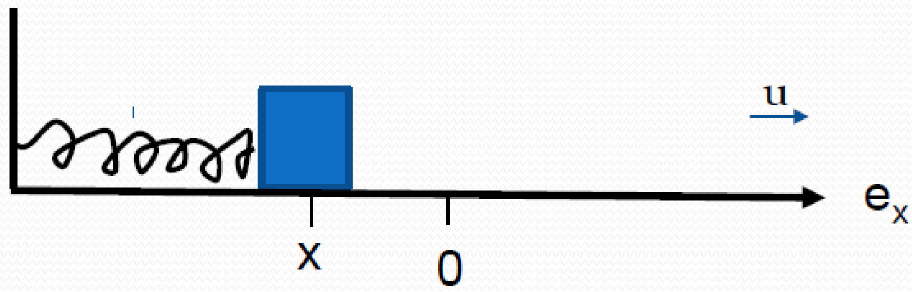
On sait que $\vec{\mathrm{F}} = -k\,\Delta\ell\,\vec{\mathrm{u}}$

On rappelle que $\vec{\mathrm{u}}$ = vecteur unitaire qui pointe vers l'extérieur du ressort
Donc $\vec{\mathrm{u}} = \overrightarrow{e_x}$

$$F_x = -k\Delta\ell$$
$$F_x = -kx \text{ ici}$$



$\vec{F} = -k\,\Delta\ell\,\vec{u}$



Remarque

Si le ressort était comprimé quelle serait l'expression de Fx ?

La même expression ! $F_x = -kx$

C'est la valeur de x qui est négative, donc Fx est au final dans l'autre sens

On obtient $m\ddot{x} = -kx$

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

EQUATION DES OSCILLATEURS LIBRES

Quel type d'équation est-ce ?

Equation différentielle,
du second ordre, à coeff. constants, sans second membre

Type d'équation ultraclassique en Physique !!
A SAVOIR RESOUDRE

$$\ddot{x} + \frac{k}{m}x = 0$$

Changement de nom pour k/m, qui signale au passage sa dimension ..

Dimension ?

$$\left[\frac{k}{m}\right] = FL^{-1}M^{-1} = MLT^{-2}L^{-1}M^{-1} = T^{-2}$$

k/m est homogène à T-2, on ne l'appelle pas 1/tau2 mais :

$$\frac{k}{m} = {\omega_0}^2$$

la pulsation (en rad/s)

Pourquoi changer de nom ? Equation TRES GENERALE, on va voir que ω_0 est la pulsation qui caractérise les oscillations

$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

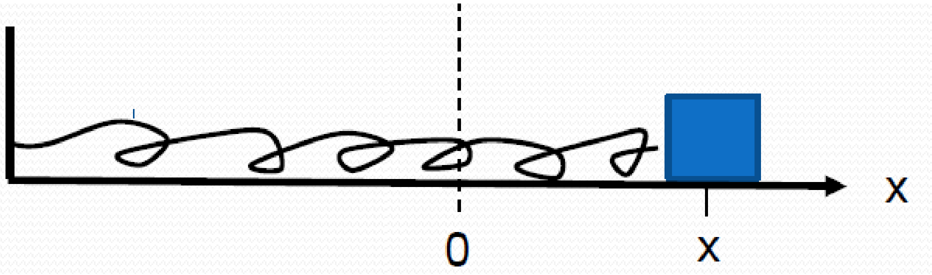
$$\ddot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Solution générale de la forme

$$x = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

A et B constantes

! A savoir !



Détermination de A et B dans quelques cas types

CAS 1. La masse est écartée de sa position d'équilibre d'une distance L sans vitesse initiale.

CAS 2. La masse est lancée depuis l'origine avec une vitesse V.

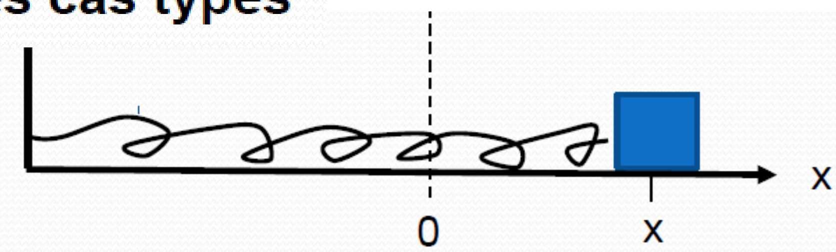
Que valent A et B dans chaque cas ?

On a x(t), on calcule $\dot{x}\,(t)$,
puis on les réexprime dans le cas t=0 avec les conditions initiales.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$

$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

Détermination de A et B dans quelques cas types



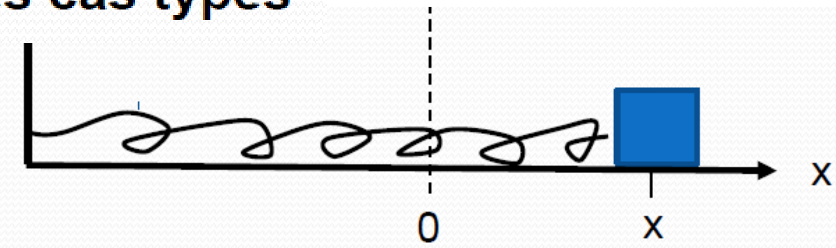
CAS 1. La masse est écartée de sa position d'équilibre d'une distance L sans vitesse initiale.

$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t=0) = L = A\cos(0) + B\sin(0) = A \quad \rightarrow A = L$$
$$\dot{x}\,(t=0) = 0 = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = B\omega_0 \quad \rightarrow B = 0$$

$$\boldsymbol{x(t) = L\cos\big((\omega_0 t)\big)}$$

Détermination de A et B dans quelques cas types



CAS 2. La masse est lancée depuis l'origine avec une vitesse V.

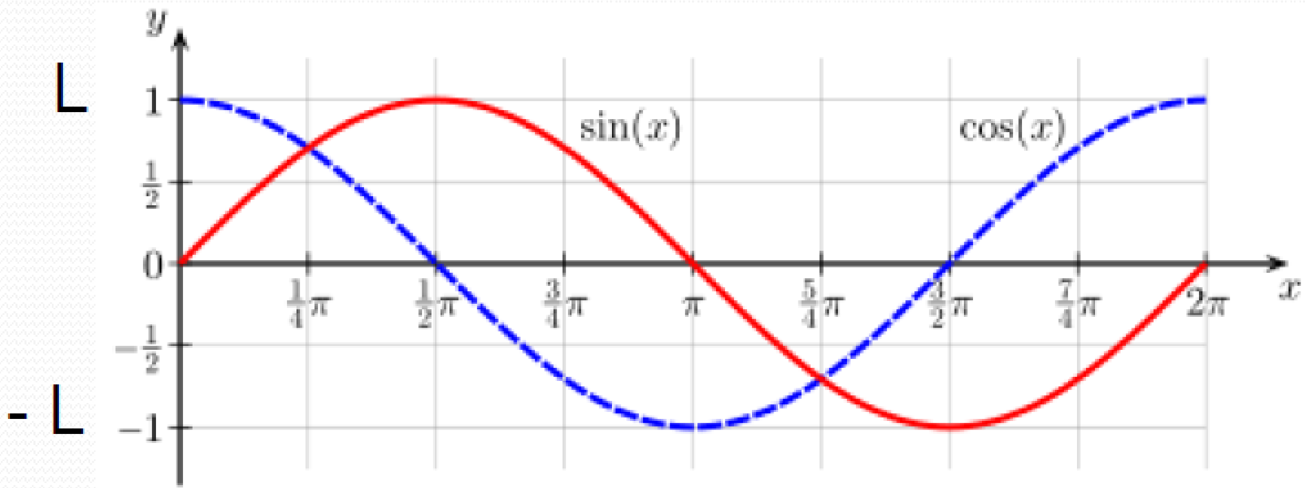
$$x(t) = A\cos(\omega_0 t) + B\sin(\omega_0 t)$$
$$\dot{x}(t) = -A\omega_0 \sin(\omega_0 t) + B\omega_0 \cos(\omega_0 t)$$

$$x(t=0) = 0 = A\cos(0) + B\sin(0) = A \quad \rightarrow A = 0$$
$$\dot{x}\,(t=0) = V = -A\omega_0 \sin(0) + B\omega_0 \cos(0) = B\omega_0 \quad \rightarrow B = \frac{V}{\omega_0}$$

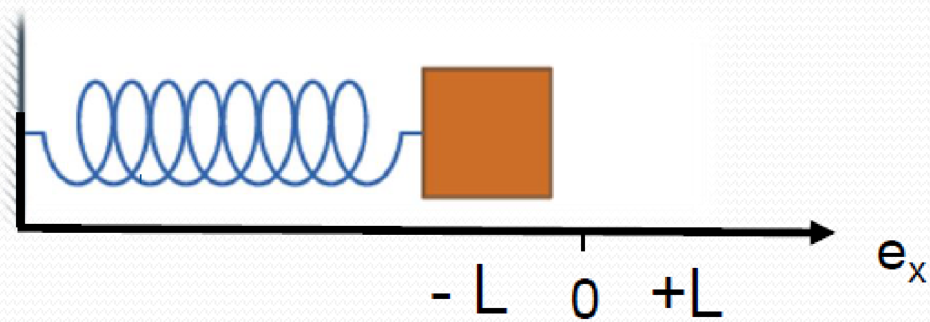
$$\boldsymbol{x(t) = \frac{V}{\omega_0} sin\big((\omega_0 t)\big)}$$

Mouvement du ressort ?

Par exemple dans le cas 1. $x(t) = L\cos\big((\omega_0 t)\big)$



Oscillations autour de la position d'équilibre



$$\omega_0 = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

Mouvement du ressort ?

Par exemple dans le cas 1. $x(t) = L\cos\big((\omega_0 t)\big)$

Période T des oscillations ?

Périodicité du cos : 2π

Donc $\omega_0 T = 2\pi$ $\mathbf{T} = \dfrac{\mathbf{2\pi}}{\boldsymbol{\omega_0}}$ ω_0 est bien la pulsation du mvt

Fréquence ? $f = \dfrac{1}{T} = \dfrac{\omega_0}{2\pi}$

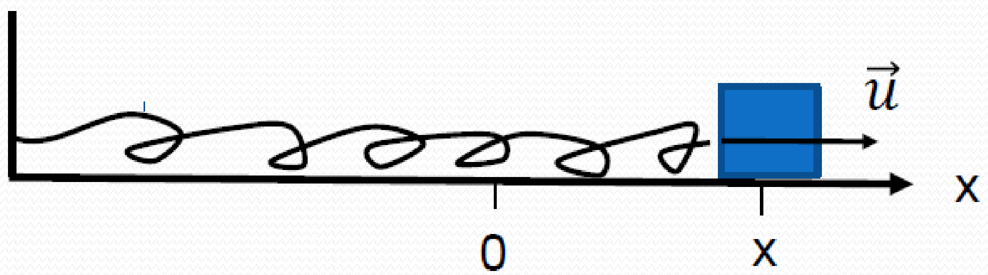
MECANIQUE CLASSIQUE

Chapitre 5 : Oscillateurs mécaniques

3. Oscillations amorties

Même cas que précédemment, mais en considérant en plus un frottement de type fluide $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$

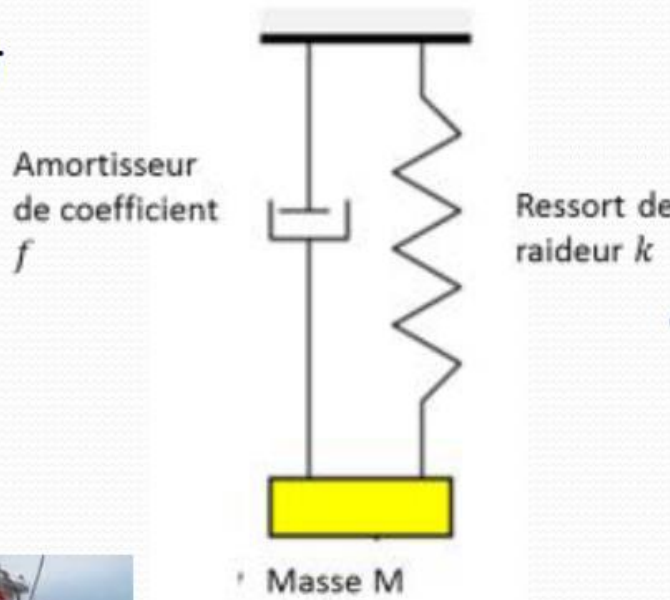
dépend du fluide et du corps

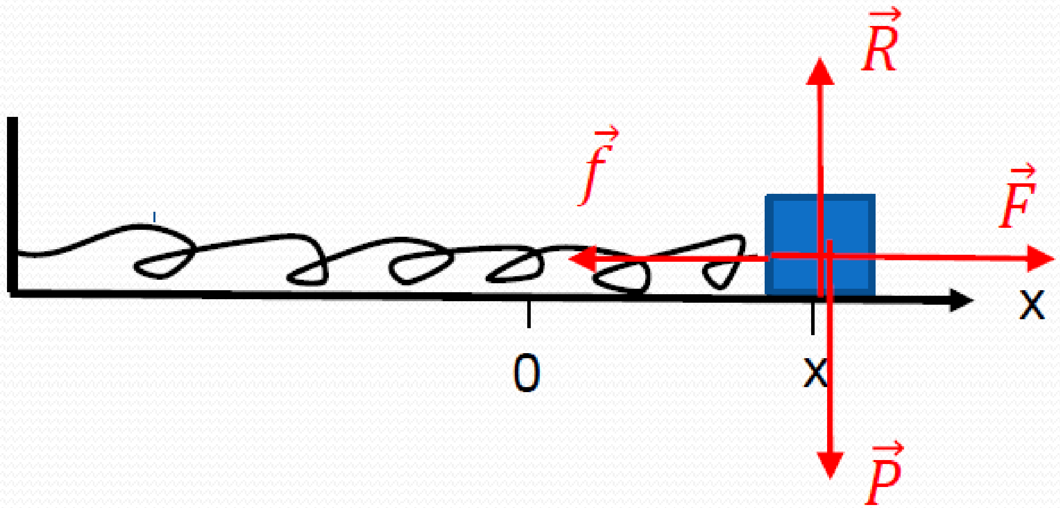


- Force exercée par le ressort $\vec{F} = -k\,\Delta\ell\,\vec{\mathrm{u}}$
- Frottement $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$

Remarque. Ce type de modèle est très général, beaucoup d'applications (avec un vrai ressort ou plus généralement un matériau élastique)

Ex. Amortisseur



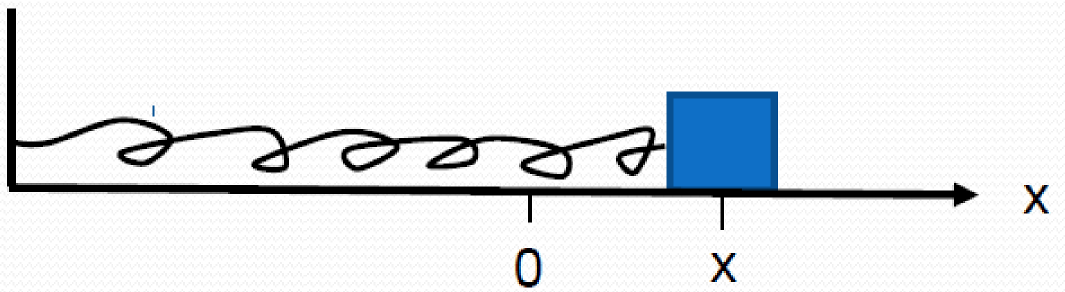


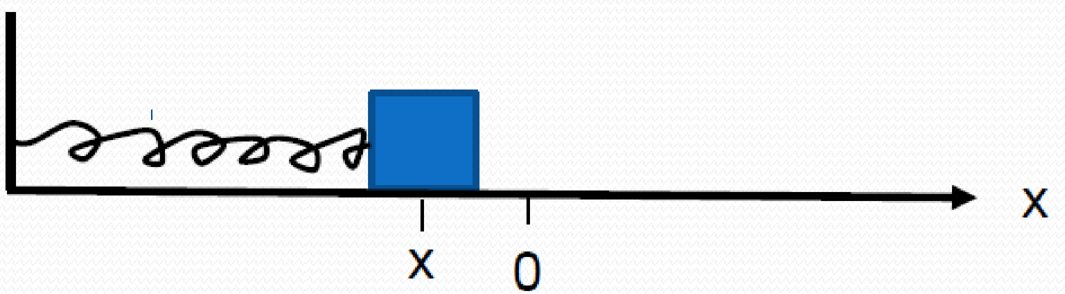
Bilan des forces sur la masse m

- Poids $\vec{P} = m\vec{g}$
- Réaction du support $\vec{R}$
- Force exercée par le ressort $\vec{F} = -k\,\Delta\ell\,\vec{\mathrm{u}}$
- Frottement $\vec{f} = -\gamma\vec{v}$

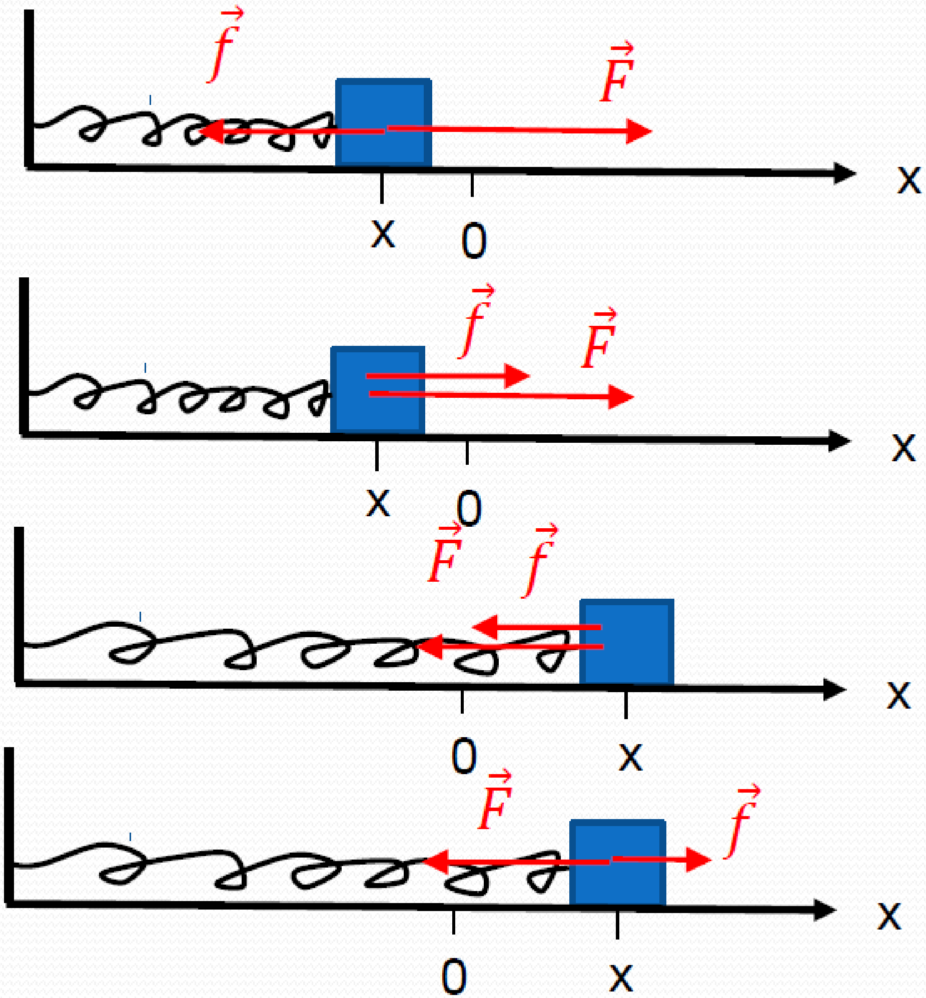
Rmq. Dans quel sens orienter $\vec{f}$ et $\vec{F}$? Ca dépend des cas ?

Rmq. Dans quel sens orienter $\vec{f}$ et $\vec{F}$? Ca dépend des cas ?





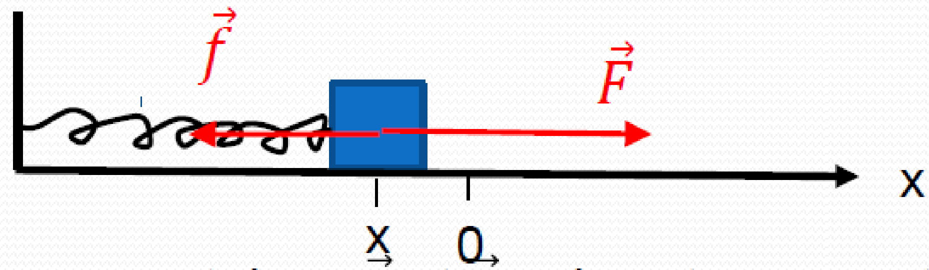
Voilà les 4 situations possibles pour l'orientation de f et F



Même à gauche de la position d'équilibre la masse peut être en train de se déplacer vers la gauche → de se comprimer plus

Même chose lorsque la masse est à droite

On va voir heureusement qu'on n'a pas besoin de traiter les 4 cas séparement



Application du PFD

- Selon **z**, le système n'a pas de mouvement donc $\vec{R}$ et $\vec{P}$ qui sont purement verticaux se compensent $\vec{R} + \vec{P} = \vec{0}$

- $\boldsymbol{m\vec{a} = \vec{f} + \vec{F} = -\gamma\vec{v} - k\Delta\ell\vec{u}}$

- Projection selon l'axe x ?

- $ma_x = f_x + F_x$ Vrai dans les 4 cas, car le sens des vecteurs est implicite, fx et Fx peuvent être négatifs

- $\boldsymbol{ma_x = -\gamma\, v_x - k\, \Delta\ell\, u_x}$ idem

$$ma_x = -\gamma\, v_x - k\,\Delta\ell\, u_x$$

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - k\,\Delta\ell$$

$\Delta\ell$ allongement du resort donc si on place l'origine à l'endroit où le resort est au repos, $\Delta\ell = x$

$$m\ddot{x} = -\gamma\dot{x} - k\,x$$

Réecrit en général sous la forme :

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

Rmq. Bien réessayer, réflechir à cet exercice pour ne pas se tromper de signe.

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}\,x = 0$$

- Remarque. Si on enlève les frottements qu'obtient on ?

Équation de l'oscillateur libre

- On renomme : $\frac{k}{m} = {\omega_0}^2$ comme précédemment

- Dimensions de $\frac{\gamma}{m}$?

$[\ddot{x}] = \left[\frac{\gamma}{m}\dot{x}\right] = LT^{-2}$ donc $\left[\frac{\gamma}{m}\right] = LT^{-2}/LT^{-1} = T^{-1}$

- On renomme $\frac{\gamma}{m} = 2\lambda \; ou \; \frac{1}{\tau}$ Pourquoi τ ?

On verra que τ est un temps caractéristique d'amortissement

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

On retrouve l'équation valable aussi en électrocinétique et dans de nombreux autres domaines.

Comment la résoudre ?

Equation différentielle - du second ordre, à coefficients constants, sans second membre

$$\ddot{x} + 2\lambda\dot{x} + {\omega_0}^2 x = 0$$

Solutions de la forme $\boldsymbol{x(t) = e^{rt}}$

Avec r qui satisfait l'équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 = 0$

A partir des racines r1 et r2 de l'équation caractéristique, on construit la solution de la manière suivante :

$$\boldsymbol{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$

$$\boldsymbol{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$

équation caractéristique $r^2 + 2\lambda r + {\omega_0}^2 = 0$

Que vaut r ?

Discriminant $\Delta = 4\lambda^2 - 4{\omega_0}^2$

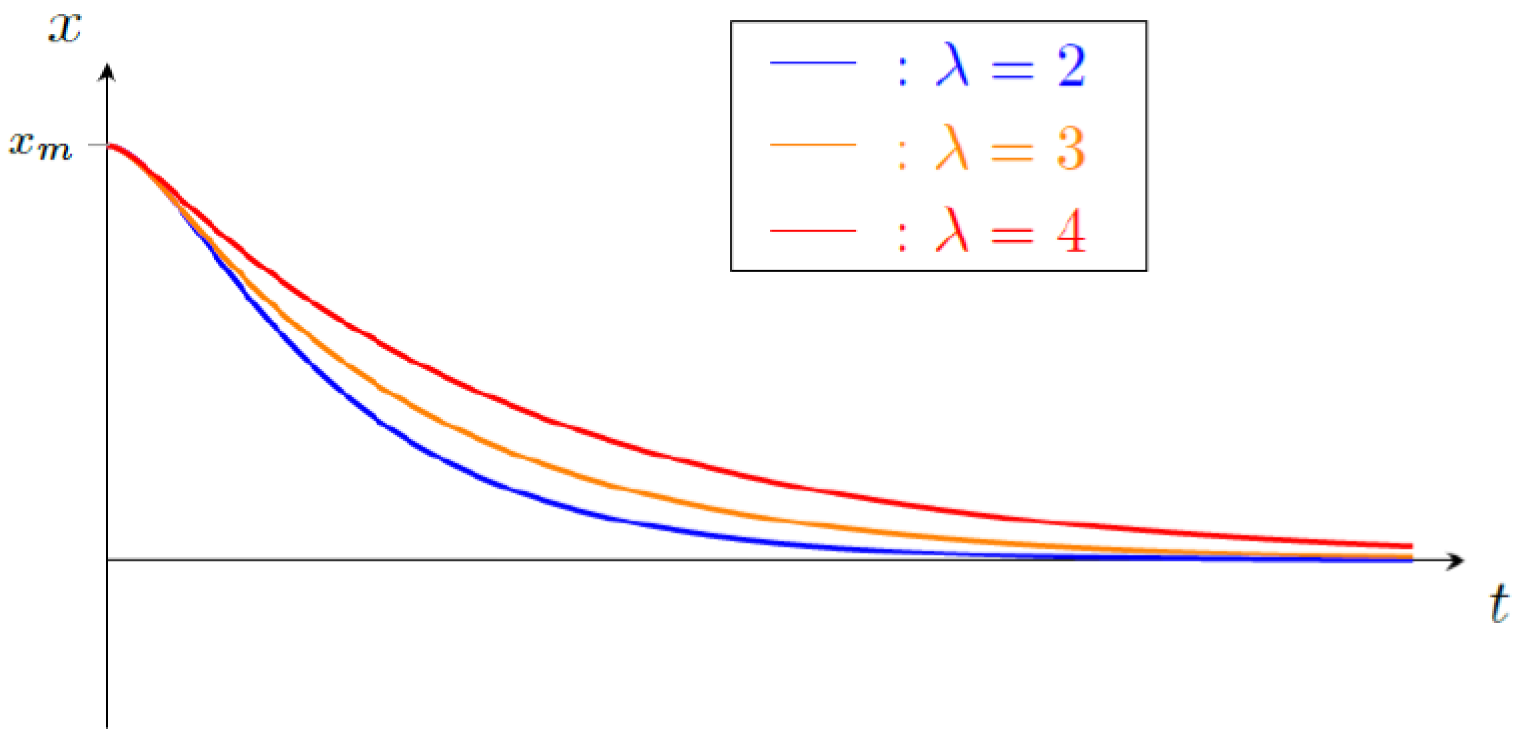
$\Delta > 0$ 2 racines réelles $r_1 = -\lambda + \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$ et $r_2 = -\lambda - \frac{\sqrt{\Delta}}{2}$

$\Delta < 0$ 2 racines imaginaires $r_\pm = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\,\omega$

$\Delta > 0$ Régime apériodique

$$r_\pm = -\lambda \pm \sqrt{\lambda^2 - \omega_0^2}$$

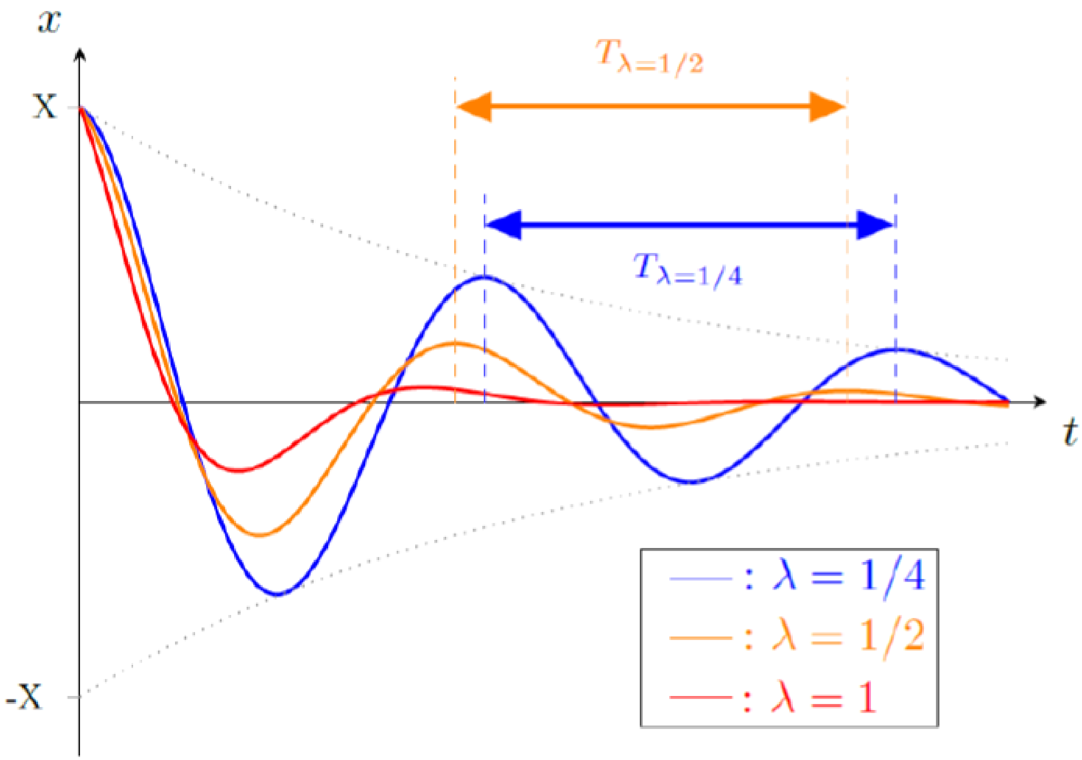
$$x(t) = A\,\exp(r_-\,t) + B\,\exp(r_+\,t)$$



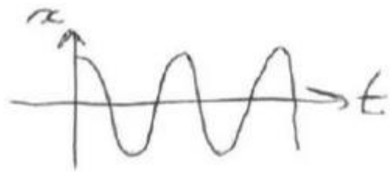
$\Delta < 0$ Régime pseudopériodique

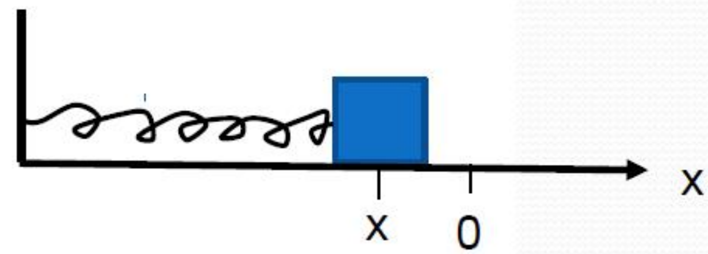
$$r_{\pm} = -\lambda \pm j\sqrt{\omega_0^2 - \lambda^2} = -\lambda \pm j\,\omega$$

$$x(t) = \exp(-\lambda\, t)\,(A\,\cos(\omega\, t) + B\,\sin(\omega\, t))$$

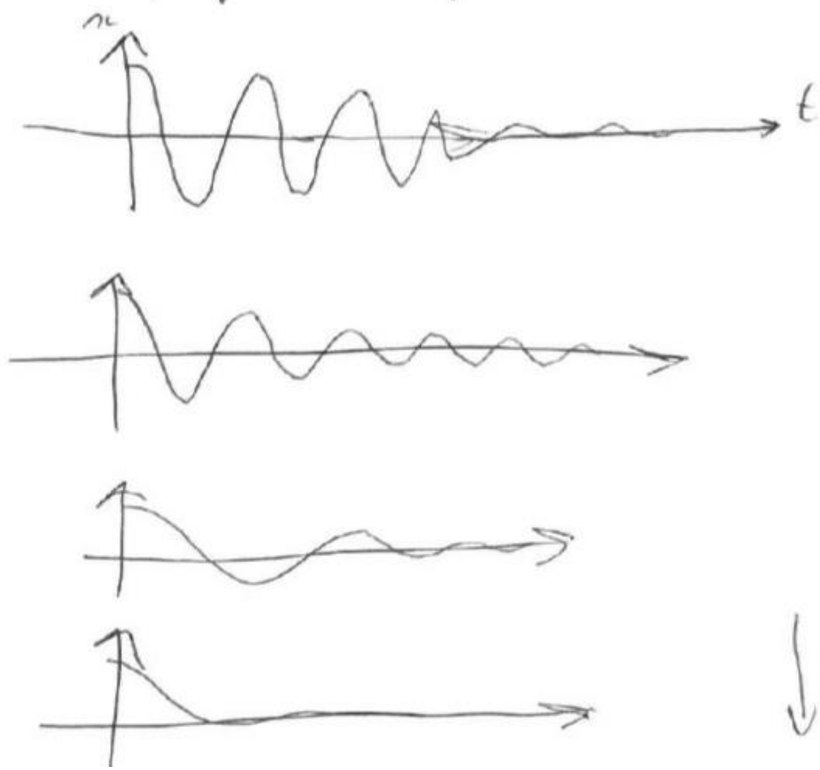


Evolution du mouvement lorsqu'on augmente les frottements ?





On augmente les frottements

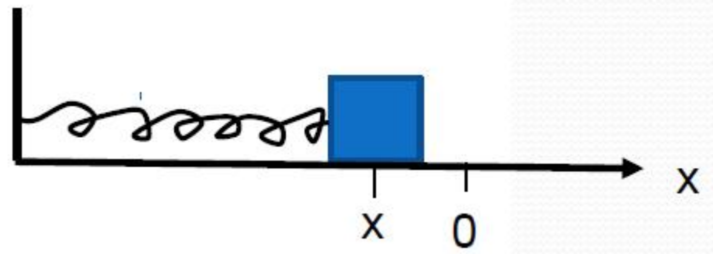


. l'amplitude décroît avec le temps

. la pulsation ω diminue avec $\frac{1}{\tau}$

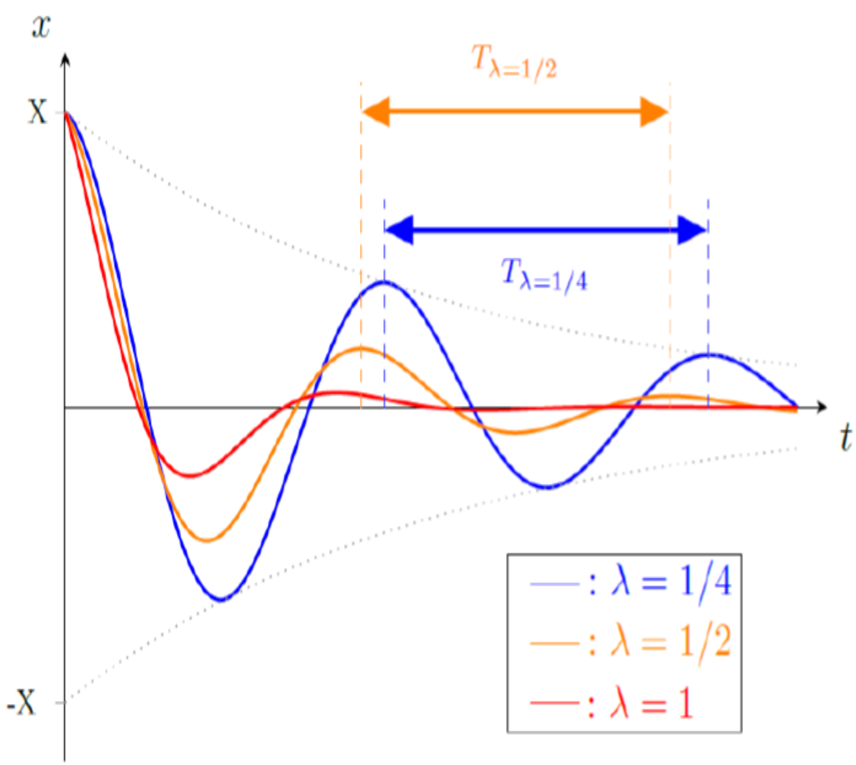
presque plus d'oscillation

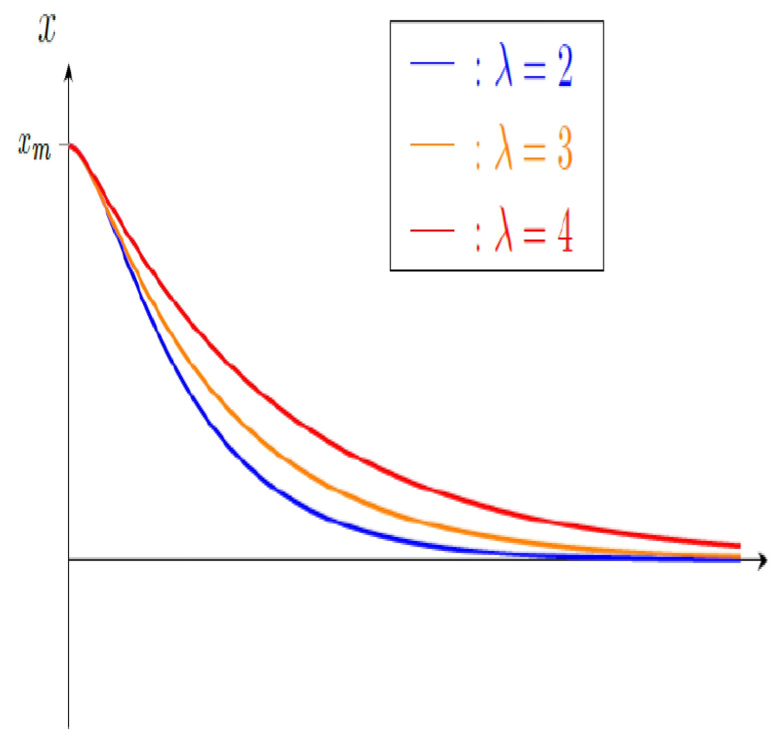
SYNTHESE DES RESULTATS



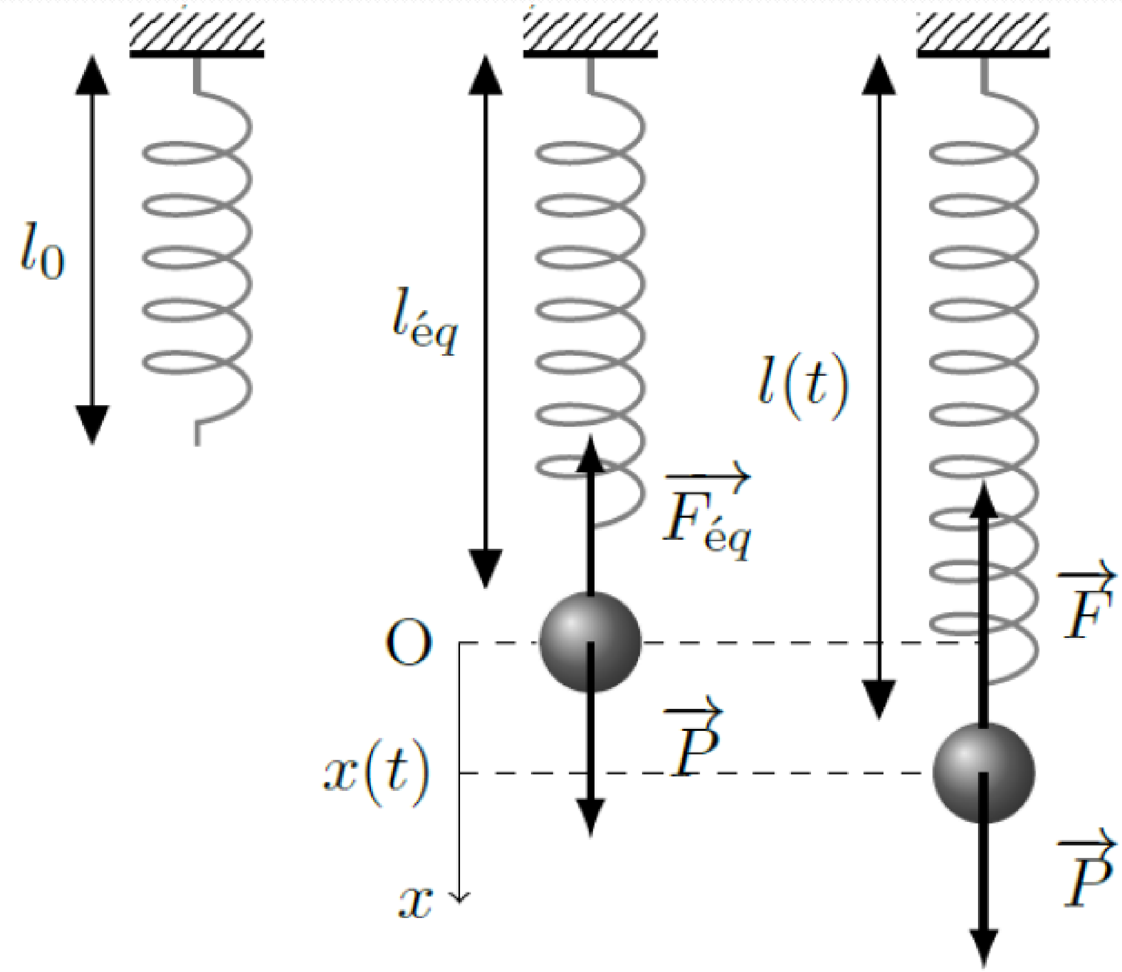
$\Delta < 0$ Régime pseudopériodique

$\Delta > 0$ Régime apériodique





Remarque. Problème type du ressort vertical
→ Mêmes équations que le ressort vertical, mais avec une position d'équilibre différente à cause du poids



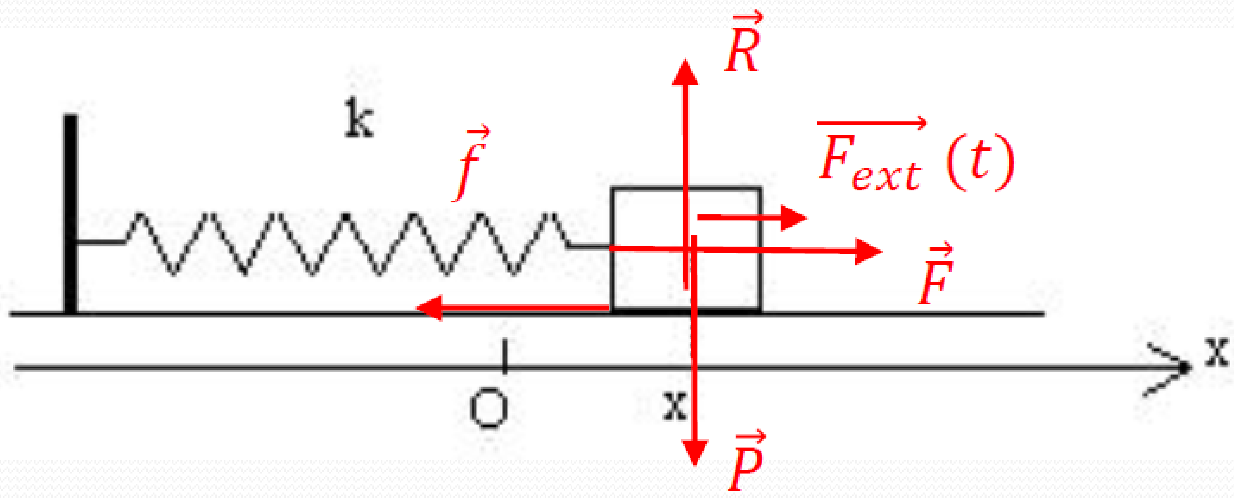
MECANIQUE CLASSIQUE

Chapitre 5 : Oscillateurs mécaniques

Introduction
1. Ressort
2. Oscillations libres
3. Oscillations amorties
4. Oscillations forcées et résonance

4. Oscillations forcées et résonance

On ajoute une force d'excitation $\overrightarrow{F_{ext}}\ (t)$



Bilan des forces :

$\vec{P}$, $\vec{R}$

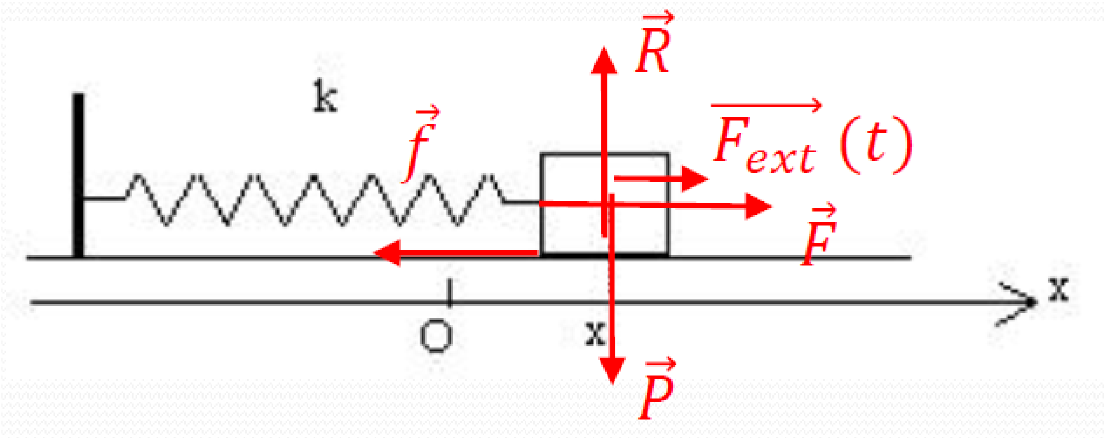
$\vec{F} = -k\Delta\ell\vec{u}$

$\vec{f} = -\gamma\vec{v}$

$\overrightarrow{F_{ext}}\ (t) = \overrightarrow{F_0}\cos(\Omega t)$

Remarque. On choisit une force d'excitation très particulière : une force qui varie sinusoïdalement. Situation qui modélise un grand nombre de phénomènes naturels.

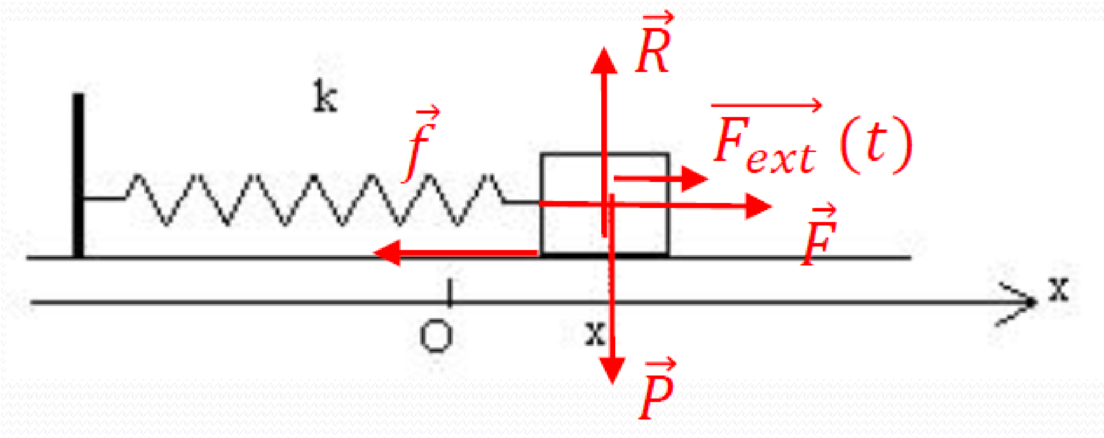
$$\overrightarrow{F_{ext}}(t) = \overrightarrow{F_0}\cos(\Omega t)$$



$\vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$ car pas de mouvement vertical et P et R sont les seules forces dans cette direction

PFD :

$$m\vec{a} = \vec{F} + \vec{f} + \overrightarrow{F_{ext}}(t)$$
$$m\vec{a} = -k\Delta\ell\vec{u} - \gamma\vec{v} + \overrightarrow{F_0}\cos(\Omega t)$$



$$m\vec{a} = -k\Delta\ell\vec{u} - \gamma\vec{v} + \overrightarrow{F_0}\cos(\Omega t)$$

$$m\ddot{x} = -kx - \gamma\dot{x} + F_0\cos(\Omega t)$$

On obtient : $\boxed{\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)}$

$$\boxed{\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)}$$

Equation différentielle, du second ordre, à coefficients constants, avec second membre.

Résolution :

solution de l 'équation sans second membre

+

Solution particulière de l'équation avec second membre

$$\ddot{x} + \frac{\gamma}{m}\dot{x} + \frac{k}{m}x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

On réécrit l'équation au préalable sous la forme

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Avec $\frac{1}{\tau} = \frac{\gamma}{m}$ et ${\omega_0}^2 = \frac{k}{m}$

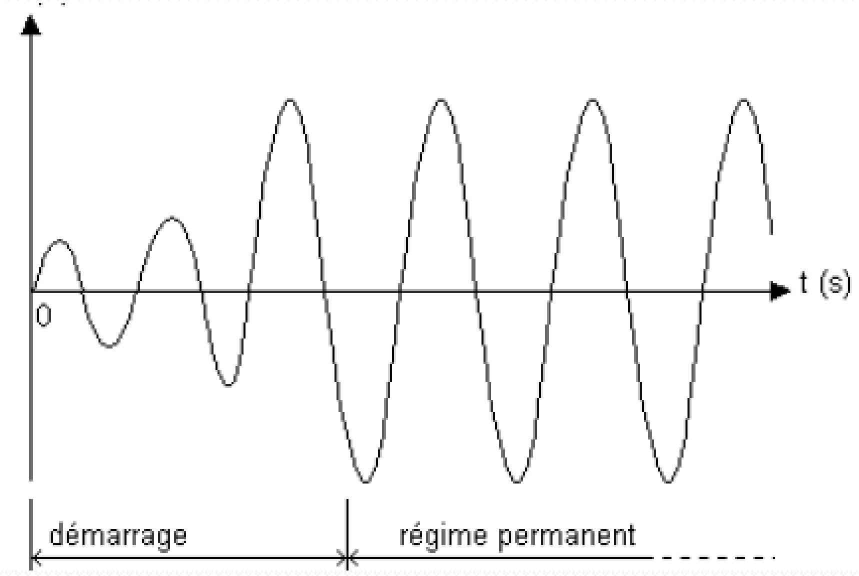
$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + \omega_0{}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Solution de la forme

$$x(t) = x_{homogène} + x_{particulière}$$

Régime transitoire

Régime permanent



$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Solution de la forme

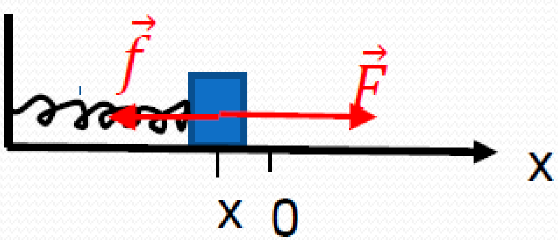
$$x(t) = x_{homogène} + x_{particulière}$$

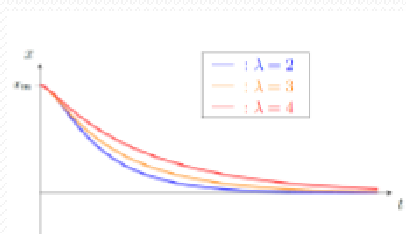
Régime transitoire

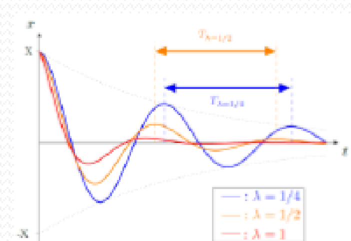
Régime permanent

Exactement le même problème que la partie précédente (oscillations amorties)

$$\boldsymbol{x(t) = Ae^{r_1 t} + Be^{r_2 t}}$$







$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Solution de la forme

$$x(t) = x_{homogène} + x_{particulière}$$

Régime transitoire

Régime permanent

Fonction de la forme

$$x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$$

(Ω la pulsation de la fréquence d'excitation F0)

$$\ddot{x} + \frac{1}{\tau}\dot{x} + {\omega_0}^2 x = \frac{F_0}{m}\cos(\Omega t)$$

Détermination de la solution particulière / régime permanent

De la forme $x(t) = A\cos(\Omega t) + B\sin(\Omega t)$. **A et B ?**

Calculer $\dot{x}(t)$, $\ddot{x}(t)$ en fonction de A et B puis réexprimer l'éq. diff. Avec A et B