Ce quiz comporte **4** questions équipondérées; répondez directement sur le questionnaire.

Nom:	**CORRIGÉ**

1. La matrice suivante est-elle diagonalisable ?

$$B = \begin{bmatrix} 1 & -1 & 2 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & -2 \\ 4 & -1 & 3 & 4 & 4 \\ -4 & 0 & -4 & -5 & -8 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 3 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_5(\mathbf{R})$$

Son polynôme caractéristique vous est fourni : $\chi_B(\lambda) = (\lambda-2)(\lambda-1)^2(\lambda+1)^2$.

La matrice est diagonalisable si et seulement la multiplicité algébrique m_λ de chaque valeur propre est égale à sa multiplicité géométrique d_λ.

- Pour $\lambda = 2$: $m_2 = 1$, on a automatiquement $d_2 = 1$ ✓
- Pour $\lambda = 1$: $m_1 = 2$, et puisque

$$E_1 = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 2 \\ -2 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \\ -1 \\ 2 \\ -1 \end{bmatrix} \right)$$

  on a également $d_1 = 2$ ✓
- Pour $\lambda = -1$: $m_{-1} = 2$, on trouve

$$E_{-1} = \text{Vect}\left(\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \\ -1 \\ 0 \end{bmatrix} \right)$$

  donc $d_{-1} = 2$ ✓

La matrice est donc diagonalisable.

2. Système d'équations différentielles linéaires : déterminez l'unique couple de fonctions $(x(t), y(t))$ satisfaisant

$$\begin{cases} x'(t) &= -7\,x(t) + 9\,y(t), \\ y'(t) &= -6\,x(t) + 8\,y(t), \end{cases} \qquad\qquad \begin{cases} x(0) = 1, \\ y(0) = 2. \end{cases}$$

Mis sous forme matricielle, le problème consiste à résoudre l'équation différentielle vectorielle

$$X'(t) = A\,X(t) \qquad \text{avec} \quad A = \begin{bmatrix} -7 & 9 \\ -6 & 8 \end{bmatrix}, \quad X(t) = \begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}, \quad X(0) = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}.$$

Première solution : on sait que l'unique solution est donnée par

$$X(t) = e^{tA} X(0),$$

ne reste plus qu'à évaluer e^{tA}. Pour cela, le plus simple est de diagonaliser A : on trouve que

$$A = P \begin{bmatrix} -1 & \\ & 2 \end{bmatrix} P^{-1} \quad \text{avec (par exemple)} \quad P = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix},$$

d'où

$$e^{tA} = P \begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1}$$

et donc

$$X(t) = P \begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} P^{-1} X(0) = \begin{bmatrix} 3 & 1 \\ 2 & 1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} e^{-t} & \\ & e^{2t} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 & -1 \\ -2 & 3 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -3e^{-t} + 4e^{2t} \\ -2e^{-t} + 4e^{2t} \end{bmatrix}.$$

Autre solution : connaissant les valeurs propres de A, on sait que la solution cherchée sera de la forme

$$X(t) = B\,E(t) \quad \text{avec} \quad E(t) = \begin{bmatrix} e^{-t} \\ e^{2t} \end{bmatrix}$$

où B est une matrice de coefficients à déterminer. En remettant cela dans l'équation, on trouve que cette matrice doit satisfaire

$$AB = B \begin{bmatrix} -1 & \\ & 2 \end{bmatrix},$$

i.e. B doit être une matrice de passage vers une base de vecteurs propres pour A. Ayant calculé la matrice P ci-dessus, tous les espaces propres étant de dimension 1, on conclut qu'il existe des constantes a et b telles que

$$B = P \begin{bmatrix} a & \\ & b \end{bmatrix};$$

en utilisant $B\,E(0) = X(0)$ on trouve

$$\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = P^{-1} X(0) = \begin{bmatrix} -1 \\ 4 \end{bmatrix}$$

d'où

$$B = \begin{bmatrix} -3 & 4 \\ -2 & 4 \end{bmatrix} \quad \text{comme attendu.}$$

3. On définit, sur l'espace vectoriel $V := \mathbf{R}^3$,

$$\langle (a_1, a_2, a_3) \,|\, (b_1, b_2, b_3) \rangle := a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2.$$

Est-ce un produit scalaire ? Justifier soigneusement.

Il s'agit bien d'une forme linéaire en sa première variable :

$$\begin{aligned}
\langle \lambda(a_1, a_2, a_3) + \mu(a_1', a_2', a_3') \,|\, (b_1, b_2, b_3) \rangle &= \langle (\lambda a_1 + \mu a_1', \lambda a_2 + \mu a_2', \lambda a_3 + \mu a_3') \,|\, (b_1, b_2, b_3) \rangle \\
&= (\lambda a_1 + \mu a_1') b_1 + (\lambda a_2 + \mu a_2') b_3 + (\lambda a_3 + \mu a_3') b_2 \\
&= \lambda (a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2) + \mu (a_1' b_1 + a_2' b_3 + a_3' b_2) \\
&= \lambda \langle (a_1, a_2, a_3) \,|\, (b_1, b_2, b_3) \rangle + \mu \langle (a_1', a_2', a_3') \,|\, (b_1, b_2, b_3) \rangle \,,
\end{aligned}$$

symétrique :

$$\begin{aligned}
\langle (b_1, b_2, b_3) \,|\, (a_1, a_2, a_3) \rangle &= b_1 a_1 + b_2 a_3 + b_3 a_2 \\
&= a_1 b_1 + a_2 b_3 + a_3 b_2 \\
&= \langle (a_1, a_2, a_3) \,|\, (b_1, b_2, b_3) \rangle
\end{aligned}$$

(donc forcément linéaire en sa seconde variable) mais non forcément positive :

$$\langle (a_1, a_2, a_3) \,|\, (a_1, a_2, a_3) \rangle = a_1^2 + 2 a_2 a_3$$

peut très bien être négatif, par exemple $\langle (0, 1, -1) \,|\, (0, 1, -1) \rangle = -2$.

Matriciellement : le fait que l'on puisse écrire

$$\langle (a_1, a_2, a_3) \,|\, (b_1, b_2, b_3) \rangle = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \\ a_3 \end{bmatrix}^\top \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} b_1 \\ b_2 \\ b_3 \end{bmatrix}$$

nous apprend qu'il s'agit d'une forme bilinéaire, symétrique car la matrice l'est. Par contre, la réduction de Gauss-Lagrange nous donne comme forme canonique

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \end{bmatrix} \sim \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & -1 \end{bmatrix},$$

ce qui nous apprend que la forme n'est pas positive. Ou encore : puisque le déterminant de la matrice est négatif, la forme ne saurait être positive (pourquoi ?).

4. Déterminer une base de $\mathbf{R}^3$ formée de vecteurs deux à deux orthogonaux pour le produit scalaire (on ne demande pas de vérifier que c'en est un) :

$$\langle (x_1, x_2, x_3) \,|\, (y_1, y_2, y_3) \rangle := x_1y_1 + 2x_1y_2 + 2x_2y_1 + 6x_2y_2 - 3x_2y_3 - 3x_3y_2 + 5x_3y_3.$$

On applique Gauss-Lagrange à la matrice représentant le produit scalaire dans la base canonique :

$$\begin{bmatrix} 1 & 2 & 0 \\ 2 & 6 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \overset{*_2 - 2*_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & -3 \\ 0 & -3 & 5 \end{bmatrix} \overset{*_3 + \frac{3}{2}*_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & \frac{1}{2} \end{bmatrix}$$

et on obtient ainsi une matrice de passage vers une base orthogonale :

$$\begin{bmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_2 - 2c_1}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} \overset{c_3 + \frac{3}{2}c_2}{\sim} \begin{bmatrix} 1 & -2 & -3 \\ 0 & 1 & \frac{3}{2} \\ 0 & 0 & 1 \end{bmatrix} =: P$$

De façon équivalente, on peut obtenir une base orthogonale à partir de la base canonique en « redressant » celle-ci :

$$\begin{aligned}
\mathbf{v}_1 &:= \mathbf{e}_1 = (1, 0, 0) \\
\mathbf{v}_2 &:= \mathbf{e}_2 - \frac{\langle \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{e}_2 \rangle}{||\mathbf{v}_1||^2} \mathbf{v}_1 = \mathbf{e}_2 - 2\mathbf{v}_1 = (-2, 1, 0) \\
\mathbf{v}_3 &:= \mathbf{e}_3 - \frac{\langle \mathbf{v}_1 \,|\, \mathbf{e}_3 \rangle}{||\mathbf{v}_1||^2} \mathbf{v}_1 - \frac{\langle \mathbf{v}_2 \,|\, \mathbf{e}_3 \rangle}{||\mathbf{v}_2||^2} \mathbf{v}_2 = \mathbf{e}_3 - 0\,\mathbf{v}_1 + \tfrac{3}{2}\,\mathbf{v}_2 = (-3, \tfrac{3}{2}, 1).
\end{aligned}$$