CIR_2 CNB_2

Courbes planes - Résumé de cours

I - Courbes paramétrées

1 - Définition

Une <u>courbe plane paramétrée</u> c'est une application γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$.
On peut la concevoir comme l'équation horaire d'un mobile dans le plan.

On peut aussi noter $M(t)=\begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

Si $(O,\vec{i},\vec{j})$ est un repère orthonormé du plan, $\overrightarrow{OM}(t)=x(t)\vec{i}+y(t)\vec{j}$

Support

L'image de γ (ensemble des points $\mathbb{R}^2$ qui sont images par γ d'un point de $[a,b]$) est appelé le <u>support</u> de cette courbe paramétrée. On dit aussi (improprement dans ce contexte) que c'est une courbe.

Paramétrages équivalents

La courbe $M_1(t)=\begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ $t\in[a,b]$ et la courbe $M_2(\tau)=\begin{pmatrix} x_2(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix}$ $\tau\in[\alpha,\beta]$

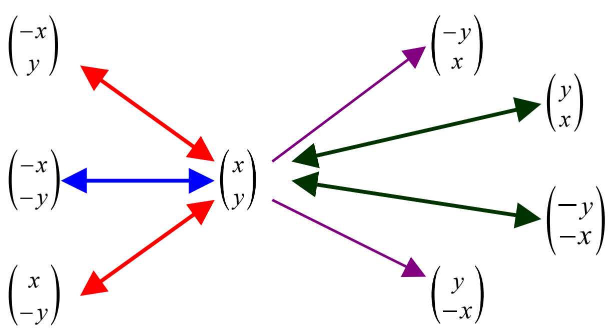
sont équivalentes (ou "les paramétrages sont équivalents" s'il existe une bijection $\varphi:[\alpha,\beta]\to[a,b]$ telle que pour tout $\tau\in[\alpha,\beta]$ on ait $M_2(\tau)=M_1(\varphi(\tau))$.

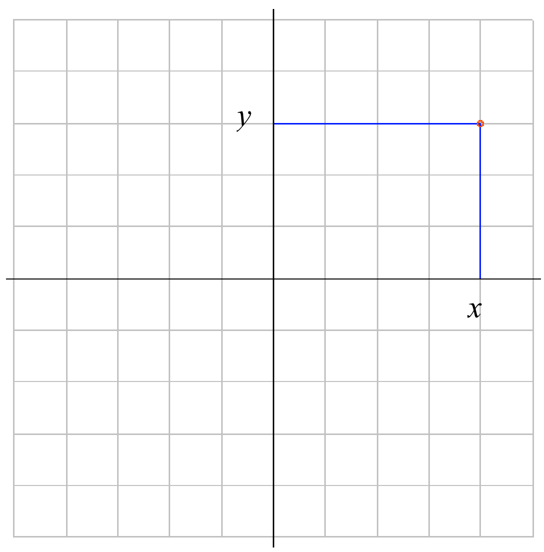
Dans ce cas, les supports sont les mêmes (mais cette condition n'est pas suffisante)

2 - symétries

si → et ↓	$x(t_2)=x(t_1)$	$x(t_2)=-x(t_1)$
$y(t_2)=y(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...
$y(t_2)=-y(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...

si → et ↓	$x(t_2)=y(t_1)$	$x(t_2)=-y(t_1)$
$y(t_2)=x(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...
$y(t_2)=-x(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont ...





3 - Vecteur vitesse - Tangente

a/ Vecteur vitesse

Soit $\gamma\ \ [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée <u>de classe C^1</u> et $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

On note $\dfrac{dM}{dt}$ ou $\dfrac{dM}{dt}(t)$ le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ également noté $\begin{pmatrix} \dfrac{dx}{dt} \\ \dfrac{dy}{dt} \end{pmatrix}$.

On l'appelle le vecteur vitesse (au point t). On écrit aussi $\dfrac{dM}{dt} = \dfrac{dx}{dt}\vec{i} + \dfrac{dy}{dt}\vec{j}$

b/ Définition :

On dit que la droite Δ est tangente en $M(t_0)$ à la courbe γ si $M(t_0) \in \Delta$ et si la direction de Δ est la limite des direction des "cordes" $\left(M(t_0)M(t_1)\right)$ quand $t_1 \to t_0$

c/ Propriété :

Si $\dfrac{dM}{dt}(t_0) \neq 0$, la courbe γ possède une tangente au point $M(t_0)$

et cette tangente a le vecteur vitesse $\dfrac{dM}{dt}(t_0)$ comme vecteur directeur.

Si $\forall t \in [a,b]\ /\ \dfrac{dM}{dt}(t) \neq 0$, on dit que la courbe est régulière. En tout point elle a une tangente.

4 - Étude globale

Exemple $\begin{cases} x(t) = 4\sin t - 3\sin 3t \\ y(t) = 4\cos t \text{ - } 3\cos 2t \end{cases}$ $\quad (t \in \mathbb{R})$

Période	$x(t+2\pi) = ...$ $y(t+2\pi) = ...$ $M(t+2\pi) = ...$	$x(t+\pi) = ...$ $y(t+\pi) = ...$ $M(t+\pi) = ...$
Symétries	$x(-t) = ...$ $y(-t) = ...$ $M(-t) = ...$	$x\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = ...$ $y\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = ...$ $M\left(\dfrac{\pi}{2} - t\right) = ...$

Tableau de variations

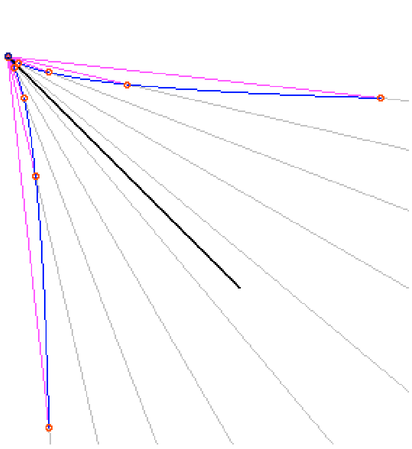
t	0		0.38		1.23		$\pi/2$		2.76		π
x	0	↘	-1.24	↗	5.34	↗	7	↘	-1.24	↗	0
x'	-5	-	0	+	9	+	0	-	0	+	5
y	1	↗	1.55	↗	3.67	↘	3	↘	-5.88		-7
y'	0	+	2.66	+	0	-	-4	-	-5.64	-	0
$\dfrac{dM}{dt}$	←	↖	↑	↗	→	↘	↓	↙	↓	↘	→

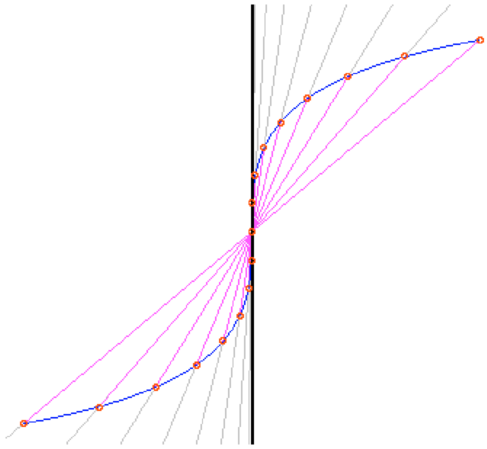
5 - Étude locale (courbe de classe C^1)

Limite des cordes

Si $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ a une limite finie quand $t \to t_0$, la courbe a une tangente au point $M(t_0)$ et la limite est la pente de cette tangente

Si $\dfrac{y(t)-y(t_0)}{x(t)-x(t_0)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand $t \to t_0$, , la courbe a une tangente verticale en $M(t_0)$

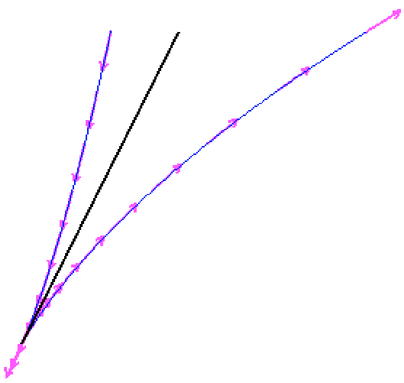


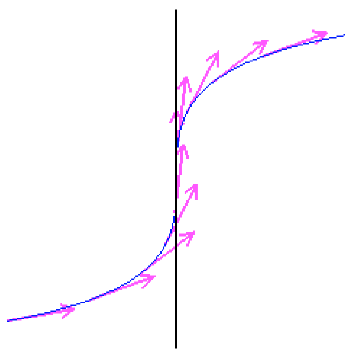


Limite des tangentes

Si $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ a une limite finie quand $t \to t_0$, la courbe a une tangente au point $M(t_0)$ et la limite est la pente de cette tangente

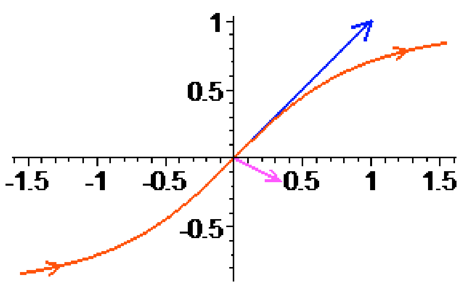
Si $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand $t \to t_0$, , la courbe a une tangente verticale en $M(t_0)$





Utilisation des développements limités

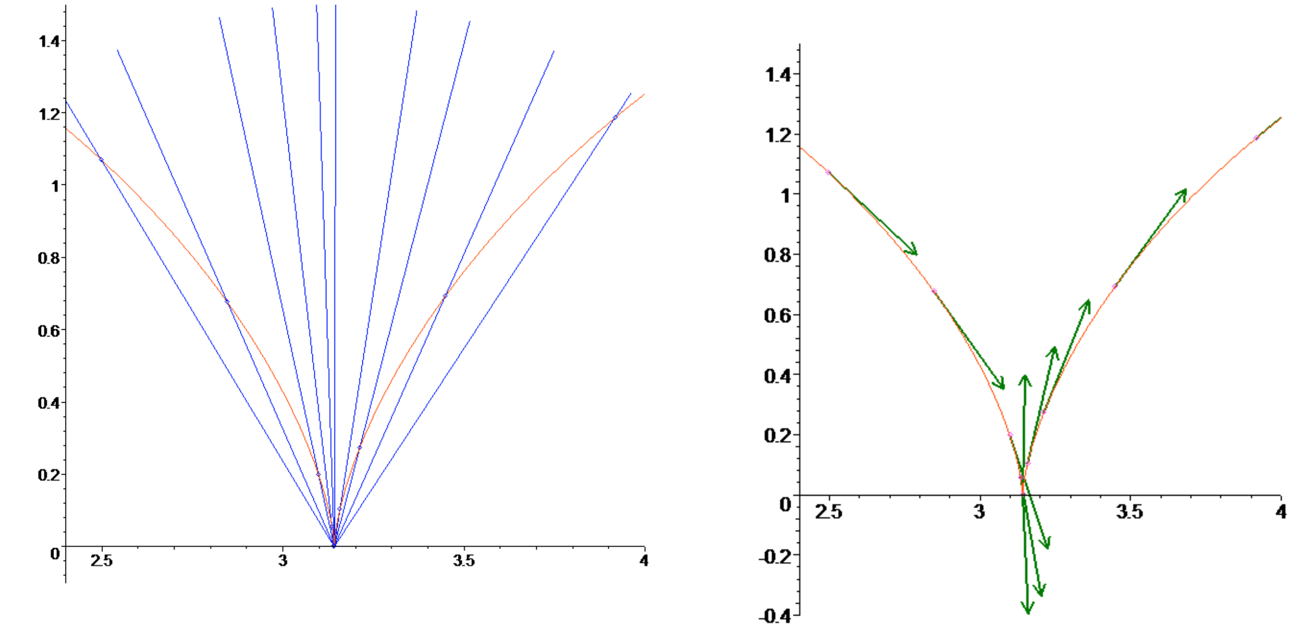
Exemple $\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ étude en $t = 0$. DL : $M(t) = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix} + t^3 \varepsilon(t)$



Point singulier (ou point d'arrêt) (ou point stationnaire) : Cas où $\frac{dM}{dt} = 0$

exemple : Cycloïde $\begin{cases} x(t) = t + \sin t \\ y(t) = 1 + \cos t \end{cases}$. Point singulier en $t = \pi$

$$\lim_{t \to \pi} \frac{y(t) - y(\pi)}{x(t) - x(\pi)} = \lim_{t \to \pi} \frac{1 + \cos t}{t + \sin t - \pi} \overset{(u = t - \pi)}{=} \lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos u}{u - \sin u} = \pm\infty \quad \text{et} \quad \lim_{t \to \pi} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \to \pi} \frac{-\sin t}{1 + \cos t} \overset{(u = t - \pi)}{=} \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \pm\infty$$



6 - Branches infinies. Quand $t \longrightarrow t_0$ …

1. **Direction asymptotique**
   - verticale si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$
   - horizontale si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$
   - oblique dans la direction de la droite $y = a\ x$ si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a$
2. **Asymptote**
   - verticale si $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$ et $x(t)$ a une limite finie
   - horizontale si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$ et $y(t)$ a une limite finie
   - oblique : $y = a\ x + b$ si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a$ et $y(t) - a\ x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} b$
3. **branche parabolique**
   - de direction verticale si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$, $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$ et $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$,
   - de direction horizontale si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$, $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$ et $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$,
   - oblique : si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a$ et $y(t) - a\ x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} +\infty$ ou $-\infty$

II - Courbes polaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout réel $\theta \in I$, on pose $\vec{r} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

La courbe polaire définie par la fonction $\rho(\theta)$ est la courbe paramétrée qui, à θ, associe

$M(\theta) = \rho(\theta)\,\vec{r} = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$

On note $\vec{n}$ le vecteur $\dfrac{d\vec{r}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$.

On remarque que $\dfrac{d\vec{n}}{d\theta} = -\vec{r}$ et que , pour tout θ ,$\left(O,\vec{r},\vec{n}\right)$ est un repère orthonormé direct (repère tournant)

Le vecteur vitesse est alors $\dfrac{dM}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{r} + \rho(\theta)\vec{n}$

Interprétation :

Quand θ varie, le point $M = \rho\,\vec{r}$ subit un double déplacement :

- rotation autour de O parce que le vecteur $\vec{r}$ varie (tourne régulièment dans le sens trigonométrique)
- déplacement le long de l'axe défini par $\vec{r}$ parce que ρ varie.

Le vecteur vitesse $\dfrac{dM}{d\theta} = \rho'\vec{r} + \rho\vec{n}$ a donc 2 composantes

- l'une radiale $\rho'\vec{r}$
  (s'il n'y avait que celle-là - si θ était constant - le mouvement serait rectiligne)
- l'autre normale $\rho\vec{n}$
  (s'il n'y avait que celle-là - si ρ était constant - le mouvement serait circulaire)

Symétries des courbes polaires

$$M(\theta) = \rho(\theta)\,\overrightarrow{r(\theta)} \quad \text{avec} \quad \overrightarrow{r(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$$

$\overrightarrow{r(-\theta)}$ est ...	
$\overrightarrow{r(\pi-\theta)}$ est ...	
$\overrightarrow{r(\pi+\theta)}$ est ...	

$\overrightarrow{r\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ est ...	
$\overrightarrow{r\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ est ...	
$\overrightarrow{r(\theta+\theta_0)}$ est ...	

si $\rho(-\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(-\theta)$...	si $\rho(-\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(-\theta)$...
si $\rho(\pi-\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(\pi-\theta)$...	si $\rho(\pi-\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(\pi-\theta)$...
si $\rho(\pi+\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(\pi+\theta)$...	si $\rho(\pi+\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(\pi+\theta)$...
si $\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\rho(\theta)$ alors $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$...	si $\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\rho(\theta)$ alors $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$...
si $\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=\rho(\theta)$ alors $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$...	si $\rho\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)=-\rho(\theta)$ alors $M\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)$...

Exemple $\rho(\theta)=\cos(\theta)\cos(2\theta)=2\cos^3(\theta)-\cos(\theta)$

Période - Symétries

Valeurs de θ où $\rho(\theta)$ s'annule : la courbe passe par l'origine

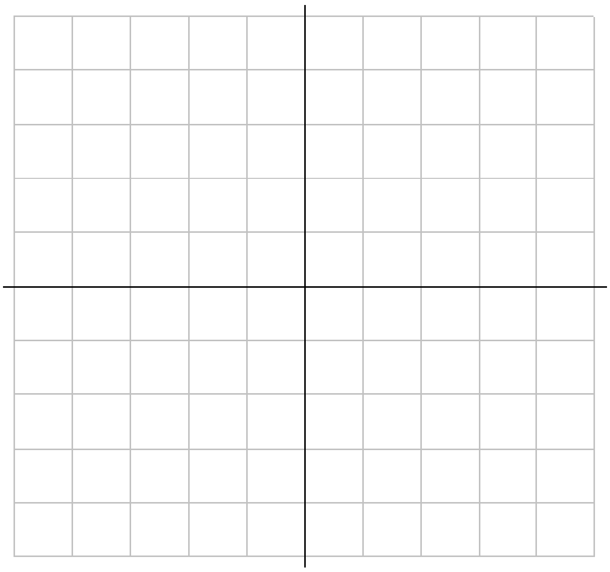
si $\rho'(\theta)\neq 0$ la tangente est radiale (colinéaire à $\overrightarrow{r(\theta)}$)

Valeurs de θ où $\rho'(\theta)$ s'annule : si $\rho(\theta)\neq 0$ la tangente est normale (orthogonale à $\overrightarrow{r(\theta)}$)

Variations de $\rho(\theta)$.

Si $\rho(\theta)\geqslant 0$ et $\rho(\theta)$ croit , le point M s'éloigne de l'origine.

Si $\rho(\theta)\leqslant 0$ et $\rho(\theta)$ croit , le point M se rapproche de l'origine.



Équation polaire d'une droite ne passant pas par O : $a\,x+b\,y+c=0 \to \rho=\dfrac{-c}{a\,\cos\theta+b\,\sin\theta}$

Équation polaire d'un cercle passant par O :

Cercle de centre $(0,r)$ $\rho=2r\,\cos\theta$

Cercle de centre $(r,0)$ $\rho=2r\,\sin\theta$

Cercle de centre $(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$ $\rho=2r\,\cos(\theta-\theta_0)$