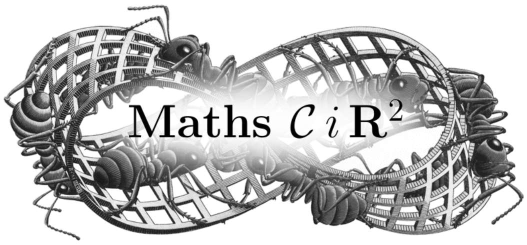
ISÉN $\mathscr{L}$ille 3 juin 2013



$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve contient **4** questions équipondérées.
- L'usage de tout dispositif électronique est **interdit**.
- **Rédigez** clairement en **explicitant** vos raisonnements.
- **Amusez**-vous bien, et bon **été** !

1. Déterminer la meilleure approximation parabolique $g(x) = Ax^2 + Bx + C$ de la chaînette d'équation

$$f(x) = \operatorname{ch}(\lambda x) = \frac{e^{\lambda x} + e^{-\lambda x}}{2}$$

sur l'intervalle $[-1, 1]$ et interpréter géométriquement vos calculs. Que dire de la distance entre f et g ?

Les coefficients $A, B, C \in \mathbf{R}^3$ minimisant $\Delta = ||f - g||^2$ sont les solutions du système d'équations linéaires

$$\begin{bmatrix} \langle x^2, x^2\rangle & \langle x, x^2\rangle & \langle 1, x^2\rangle \\ \langle x^2, x\rangle & \langle x, x\rangle & \langle 1, x\rangle \\ \langle x^2, 1\rangle & \langle x, 1\rangle & \langle 1, 1\rangle \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \langle f, x^2\rangle \\ \langle f, x\rangle \\ \langle f, 1\rangle \end{bmatrix},$$

i.e. après évaluation des produits scalaires

$$\begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda} - 4\frac{\operatorname{ch}\lambda}{\lambda^2} + 4\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda^3} \\ 0 \\ 2\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda} \end{bmatrix}.$$

On trouve :

$$\begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{15}{2}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda} - 45\frac{\operatorname{ch}\lambda}{\lambda^2} + \frac{45}{2}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda^3} \\ 0 \\ -\frac{3}{2}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda} + \frac{15}{2}\frac{\operatorname{ch}\lambda}{\lambda^2} - \frac{15}{2}\frac{\operatorname{sh}\lambda}{\lambda^3} \end{bmatrix}.$$

Pour ces valeurs de coefficients, on a $g \perp (f - g)$, on peut donc évaluer avec Pythagore

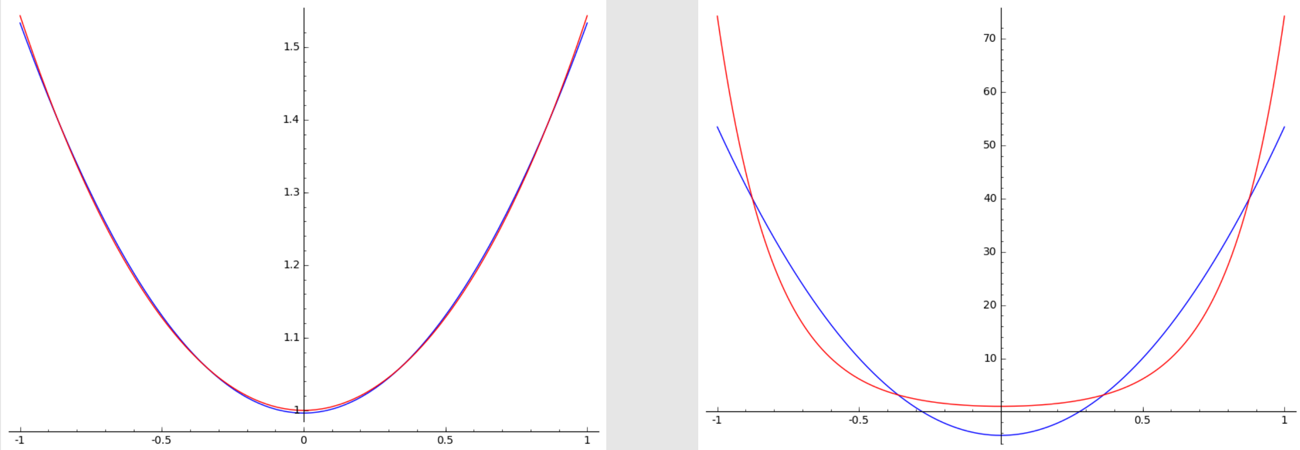
$$\begin{aligned} \Delta = ||f-g||^2 = ||f||^2 - ||g||^2 &= \int_{-1}^{1} f(x)^2\,\mathrm{d}x - \begin{bmatrix} A & B & C \end{bmatrix} \begin{bmatrix} \frac{2}{5} & 0 & \frac{2}{3} \\ 0 & \frac{2}{3} & 0 \\ \frac{2}{3} & 0 & 2 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} A \\ B \\ C \end{bmatrix} \\ &= 1 + \frac{\operatorname{sh} 2\lambda}{2\lambda} - 12\frac{\operatorname{sh}^2\lambda}{\lambda^2} + 60\frac{\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}{\lambda^3} - 60\frac{\operatorname{sh}^2\lambda}{\lambda^4} - 90\frac{\operatorname{ch}^2\lambda}{\lambda^4} + 180\frac{\operatorname{sh}\lambda\operatorname{ch}\lambda}{\lambda^5} - 90\frac{\operatorname{sh}^2\lambda}{\lambda^6}. \end{aligned}$$

Dit comme ça, ce n'est pas très édifiant... On peut tout de même observer le comportement local

$$||f-g|| = \sqrt{\Delta} \sim \begin{cases} \frac{\sqrt{2}}{315}\lambda^4 & \text{quand } \lambda \to 0 \\ \frac{e^{2\lambda}}{2\lambda} & \text{quand } \lambda \to +\infty. \end{cases}$$

L'approximation, plutôt bonne quand λ est petit, devient asymptotiquement catastrophique.

Ci-dessous : les approximations obtenues avec $\lambda = 1$ (à gauche) et $\lambda = 5$ (à droite).



2. On s'intéresse au système d'équations différentielles linéaires d'inconnue $\mathbf{Y} : \mathbf{R} \to \mathbf{R}^3$

$$\mathbf{Y}'(t) = A\,\mathbf{Y}(t) \qquad \text{avec} \qquad A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 8 \\ 1 & 0 & 4 \\ -1 & -1 & -5 \end{bmatrix}.$$

Trouver une matrice inversible P telle que $P^{-1}AP$ soit diagonale, puis expliquer comment cela permet de simplifier la résolution du système. Que peut-on dire des solutions $\mathbf{Y}(t)$ de celui-ci lorsque $t \to +\infty$?

$$\chi_A(\lambda) = \lambda^3 + 4\lambda^2 + 5\lambda + 2 = (\lambda+1)^2(\lambda+2)$$

$$E_{-1} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 1 & 4 \end{bmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix} \right), \qquad E_{-2} = \operatorname{Ker}\begin{bmatrix} 1 & 0 & 2 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix} = \operatorname{Vect}\left(\begin{bmatrix} -2 \\ -1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$$

On peut donc prendre, par exemple $P = \begin{bmatrix} -1 & -4 & -2 \\ 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 1 \end{bmatrix}$, de telle sorte que $P^{-1}AP = D = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & -2 \end{bmatrix}$.

Cela nous suggère, pour simplifier le problème, d'effectuer le changement de variables $\mathbf{Z} = P^{-1}\mathbf{Y}$ de façon à obtenir un système diagonal : $\mathbf{Z}'(t) = D\,\mathbf{Z}(t)$ dont la résolution est immédiate :

$$\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} \alpha e^{-t} \\ \beta e^{-t} \\ \gamma e^{-2t} \end{bmatrix} \qquad \Longrightarrow \qquad \mathbf{Y}(t) = P\,\mathbf{Z}(t) = \begin{bmatrix} -(\alpha+4\beta)e^{-t} - 2\gamma e^{-2t} \\ \alpha e^{-t} - \gamma e^{-2t} \\ \beta e^{-t} + \gamma e^{-2t} \end{bmatrix}$$

où α, β, γ sont des constantes dépendant des conditions initiales. Sans même expliciter la solution on se convainc, en observant le signe négatif des valeurs propres, que $\mathbf{Y}(t) \to \mathbf{0}$ quand $t \to +\infty$ (peu importe les conditions initiales).

Remarque : En introduisant la notion d'exponentielle de matrice (définie via sa série de Taylor) on peut dire, de façon équivalente, dès le départ que la solution sera de la forme $\mathbf{Y}(t) = e^{At}\,\mathbf{Y}_0$ – ne reste plus alors qu'à évaluer cette exponentielle ! (essentiellement ce qu'on a fait ici)

3. Déterminer les valeurs extrêmes du produit $f(x,y,z) = x^2y^2z^2$ sur la boule de rayon r centrée à l'origine

$$\mathcal{B} : \; x^2 + y^2 + z^2 \leqslant r^2.$$

Déduire que la moyenne géométrique de 3 nombres positifs a, b et c ne peut excéder leur moyenne arithmétique, *i.e.*

$$\sqrt[3]{abc} \leqslant \frac{a+b+c}{3}.$$

La fonction f étant continue sur le compact $\mathcal{B}$, nous savons qu'elle y atteint des extrema. En des points intérieurs de $\mathcal{B}$, ceux-ci se produisent forcément en des points où

$$\nabla f = 2xyz\,(yz,\, xz,\, xy) = \mathbf{0};$$

il s'agit des points sur les plans de coordonnées, et f y est nulle. Il s'agit clairement du minimum global de f puisqu'il s'agit d'une fonction à valeurs positives.
La valeur maximale de f sur $\mathcal{B}$ est pour sa part forcément atteinte à la frontière

$$g(x, y, z) = x^2 + y^2 + z^2 - r^2 = 0,$$

donc, d'après la théorie des multiplicateurs de Lagrange, en des points où

$$\nabla f = \lambda \nabla g$$

pour une certaine constante λ. Cherchant de tels points pour lesquels $xyz \neq 0$ (où nous savons déjà que f atteint son minimum), on trouve les 8 solutions

$$\left(\pm\frac{r}{\sqrt{3}}, \pm\frac{r}{\sqrt{3}}, \pm\frac{r}{\sqrt{3}}\right)$$

où f atteint sa valeur maximale, à savoir $r^6/27$.

Prenons maintenant trois nombres positifs a, b, c. Leurs racines $\sqrt{a}$, $\sqrt{b}$ et $\sqrt{c}$ sont situées sur une sphère de rayon $r = \sqrt{a+b+c}$, donc d'après le calcul précédent,

$$abc = f(\sqrt{a}, \sqrt{b}, \sqrt{c}) \leqslant \frac{(a+b+c)^3}{27},$$

qui nous donne l'inégalité souhaitée en prenant la racine cubique de part et d'autres.

Remarque : Tout cet argument se généralise très bien au cas de n nombres.

4. Chercher les solutions f développables en série entière au voisinage de $x = 0$ de l'équation différentielle

$$x^2 f''(x) + 4x f'(x) + (2 - x^2) f(x) = 1$$

et exprimer celles-ci à l'aide de fonctions usuelles.

Si on substitue $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty}$ dans l'équation, celle-ci s'écrit

$$2a_0 + 3a_1 + \sum_{n=2}^{\infty}\Big(n(n-1)a_n + 4na_n + 2a_n - a_{n-2}\Big)x^n = 1.$$

En égalisant les coefficients de part et d'autre (unicité de la représentation en série entière), on trouve

$$a_0 = \frac{1}{2}, \quad a_1 = 0, \quad a_n = \frac{a_{n-2}}{(n+1)(n+2)} \quad (n \geqslant 2)$$

d'où on tire par une récurrence facile

$$a_{2n+1} = 0, \qquad a_{2n} = \frac{1}{(2n+2)!} \qquad \text{pour tout } n \geqslant 0$$

On trouve donc une unique solution développable en série entière,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n+2)!} = \frac{\operatorname{ch} x - 1}{x^2} \qquad (R = +\infty).$$

Remarque : On peut vérifier que la solution générale de l'équation qui nous intéresse est en fait

$$-\frac{1}{x^2} + A\frac{\operatorname{ch} x}{x^2} + B\frac{\operatorname{sh} x}{x^2},$$

la solution particulière trouvée ci-haut ($A = 1$, $B = 0$) est bien l'unique qui soit analytique en $x = 0$.