CIR$_2$

Dénombrement
Résumé de cours

I/ Entiers naturels

1. Notion d'ensemble

- C'est une notion primitive, qu'on ne cherchera pas à définir autrement qu'intuitivement.
  Un ensemble (*set*) est défini quand on connaît ses éléments et les objets qui ne le sont pas.
  Deux ensembles sont égaux ssi ils ont les mêmes éléments.
- Notations $x \in E$ « x est élément de E », « x appartient à E » ~~« x est dans E »~~
  $x \notin E$ « x n'est pas élément de E », « x n'appartient pas à E »
- Exemples $\{bleu, blanc, rouge\}$, $\{1..100\}$, $\mathbb{N}$, l'ensemble des nombres premiers, $]-1,1]$,
  $\{x \in \mathbb{R} / \sin x > 0\}$, $\{x \in \mathbb{N} / 2 < x < 3\}$, $\{\ \}$ (aussi noté $\varnothing$) : L'ensemble vide.
- Sous-ensemble (*subset*) : A est un sous-ensemble de B ssi tout élément de A est élément de B.
  notation $A \subset B$: « A est une partie de B », « A est inclus dans B » ~~« A est dans B »~~
- Exemples : Soit $E = \{x, \{x\}\}$. On a $x \in E$, $\{x\} \in E$, $\{x\} \subset E$, $x \not\subset E$, $\{\{x\}\} \subset E$
- $A \cap B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \in B\}$, $A \cup B = \{x \ / \ x \in A \text{ ou } x \in B\}$, $A - B = A \backslash B = \{x \ / \ x \in A \text{ et } x \notin B\}$

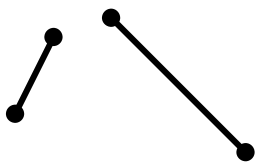
2. Ensembles équipotents

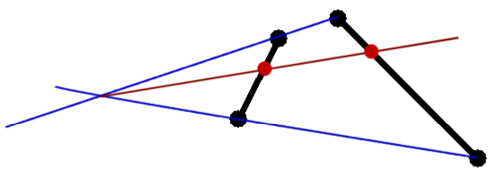
- Bijection (*bijection*) $f : A \to B$ est une bijection ssi tout élément de A a une image et une seule et tout élément de B a un antécédent et un seul.
- Définition : A est équipotent à B ssi il existe une bijection de A vers B.
- Remarques A est équipotent à B $\Leftrightarrow$ B est équipotent à A . On dit que A et B sont équipotents.
  Si A est équipotent à B et B est équipotent à C, alors A est équipotent à C.
  Tout ensemble A est équipotent à lui-même.
- Exemples : ➔ $\{$as, roi, dame, valet$\}$ est équipotent à $\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}$.

  ➔  est équipotent à 

  ➔ $\mathbb{N}$ et $\mathbb{N}^*$ sont équipotents, de même que $\mathbb{N}$ et l'ensemble des naturels pairs.

  ➔ Les deux segments ci-dessous sont équipotents Preuve :





- Si des ensembles sont équipotents, on dit qu'ils ont le même cardinal.
  Si ce sont des ensembles 'finis', on dit qu'ils ont le même nombre d'éléments.

$$Card(\{\clubsuit, \diamondsuit, \heartsuit, \spadesuit\}) = Card(\{1,2,3,4\}) = Card(\{N,S,E,W\})$$: chacun a '*4*' éléments.

$$Card(\mathbb{N}) = Card(\mathbb{N}^*) = Card(\mathbb{Z}) = Card(\mathbb{N}^2)$$

$$Card(]-1, 1[) = Card(\mathbb{R})$$

$$Card(\mathbb{N}) \neq Card(\mathbb{R}) \quad \text{(Cantor)}$$

- Si un ensemble est équipotent à $\mathbb{N}$, on dit qu'il est <u>dénombrable</u>.
  $\mathbb{N}^*, \mathbb{Z}, \mathbb{N}^2, \mathbb{Q}$ sont dénombrables
  $\mathbb{R}, \mathscr{P}(\mathbb{N}),]0,1[, \mathbb{R}^2$, une droite ne sont pas dénombrables.
- Notion d'entier naturel :
  On note 0 le cardinal de $\varnothing$, 1 le cardinal de $\{\varnothing\}$, 2 celui de $\{\varnothing,\{\varnothing\}\}$, 3 celui de $\{\varnothing,\{\varnothing\},\{\varnothing,\{\varnothing\}\}\}\dots$
  On définit ainsi de proche en proche tous les entiers naturels : 0 est le premier, et si *n* est un naturel (c'est le cardinal d'un ensemble *X* comme ci-dessus), le successeur de *n* est le cardinal de $X \cup \{X\}$ noté $n+1$.
  $\mathbb{N}$ est l'ensemble des naturels ainsi définis.
  Soient *n* et *p* deux naturels.
  On dit que $n \leqslant p$
  s'il existe une application injective d'un ensemble de cardinal *n* vers un ensemble de cardinal *p*,
  ou (ce qui est équivalent)
  s'il existe deux ensembles *A* et *B* tels que $n = Card(A), p = Card(B)$ et $A \subset B$.
  On note $[\![n,p]\!]$ l'ensemble des naturels *q* tels que $n \leqslant q \leqslant p$.
  Si *E* est un ensemble non vide, dire que $Card(E) = n$ revient à dire que E est équipotent à $[\![1,n]\!]$.
  On note aussi $\#E = n$ ou encore $|E| = n$
- Ensembles finis (définition 1)
  Un ensemble *E* est fini ssi il existe un naturel *n* tel que $Card(E) = n$
  Un ensemble qui n'est pas fini est dit infini. Exemples : $\mathbb{N}, \mathbb{Z}, \mathbb{R}, \mathbb{Q},]0,1[$
- Ensembles finis (définition 2)
  Un ensemble *E* est infini ssi il existe une partie *F* de *E* telle que $F \neq E$ et $Card(F) = card(E)$
  Un ensemble qui n'est pas infini est dit fini.

3. *Propriétés de* $\mathbb{N}$

- **Proposition 1 :**
  - Toute partie non vide de $\mathbb{N}$ admet un plus petit élément
  - Toute partie non vide et majorée de $\mathbb{N}$ admet un plus grand élément
- **Proposition 2 : (principe de récurrence)**
  Si une partie *A* de $\mathbb{N}$ vérifie la propriété : $0 \in A$ et $\forall n \in \mathbb{N}, (n \in A \Rightarrow n+1 \in A)$, alors $A = \mathbb{N}$
- **Récurrence simple**
  Soit $n_0 \in \mathbb{N}$ et $\mathcal{P}(n)$ une propriété portant sur un entier *n* tel que $n \geqslant n_0$.
  Pour prouver la validité de $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$ il suffit de démontrer que
  $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geqslant n_0$ $\mathcal{P}(n)$ vraie $\Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie.
  Exemples : $\sum_{k=1}^{n} k^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$. $2^n \geqslant n^2$ pour tout *n* à partir d'un certain rang (lequel ?).
- **Récurrence forte**
  Pour prouver la validité de $\mathcal{P}(n)$ pour tout $n \geqslant n_0$ il suffit de démontrer que
  $\mathcal{P}(n_0)$ est vraie et que pour tout $n \geqslant n_0$ $(\forall k = n_0 \dots n,\ \mathcal{P}(k)$ vraie $) \Rightarrow \mathcal{P}(n+1)$ vraie .
  Exemple : Si $\forall n \geqslant 1$ $a_{n+1} = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} a_k a_{n-k}$ et si $|a_0| \leqslant 1$ et $|a_1| \leqslant 1$, alors $\forall n \in \mathbb{N}$ $|a_n| \leqslant 1$

II/ Opérations dans $\mathbb{N}$

1. Réunion - Intersection d'ensembles finis

Si A et B sont disjoints (i.e. $A \cap B = \varnothing$), $Card\left(A \cup B\right) = Card\left(A\right) + Card\left(B\right)$: C'est la définition de « + »

Cas général : $Card\left(A \cup B\right) = Card\left(A\right) + Card\left(B\right) - Card\left(A \cap B\right)$

Extension à 3 ensembles …

2. Produit cartésien d'ensembles, n-uples

- Définition : $A \times B = \left\{\left(x, y\right) / x \in A \text{ et } y \in B\right\}$
- Si A et B sont finis, $Card\left(A \times B\right) = Card\left(A\right) \times Card\left(B\right)$: C'est la définition de « $\times$ »
- Définition : F^E est l'ensemble des applications de E dans F
- Si E est fini, de cardinal $n > 0$ ($E = \left\{x_1 x_2, ..., x_n\right\}$) alors F^E est équipotent à $F \times F \times ... \times F$ (ensemble des n-uples d'éléments de F) donc $Card\left(F^E\right) = Card\left(F\right)^n$.

  Si E et F sont finis, $Card\left(F^E\right) = Card\left(F\right)^{Card(E)}$.

  (C'est une définition de l'opération 'puissance' dans $\mathbb{N}$)

  Si $n = 0$, $F^{\varnothing} = \left\{\text{la fonction de graphe vide}\right\}$ donc si $p \neq 0$, $p^0 = 1$.
- Interprétation de p^n : n tirages à p choix avec remise , rangement d'objets de p sortes dans n casiers.

3. Ensemble des parties

- Fonction indicatrice d'une partie B de A : c'est la fonction $\varphi_B : \begin{array}{ccc} A & \to & \{0,1\} \\ x & \to & \begin{array}{l} 1 \text{ si } x \in B \\ 0 \text{ si } x \notin B \end{array} \end{array}$
- Pour tout ensemble A , l'ensemble $\mathcal{P}\left(A\right)$ des parties de A est équipotent à l'ensemble $\left\{0,1\right\}^A$ des applications de A dans $\left\{0,1\right\}$.
- Si A est fini, de cardinal n, $Card\left(\mathcal{P}\left(A\right)\right) = 2^n = 2^{Card(A)}$

III/ Dénombrement

1. *Partitions - Principe du berger*

Soit E un ensemble fini, $A_1, A_2, ..., A_n$ n parties de E.

On dit que $A_1, A_2, ..., A_n$ forme une partition de E ssi les A_i sont disjoints 2 à 2 et leur réunion est égale à E.

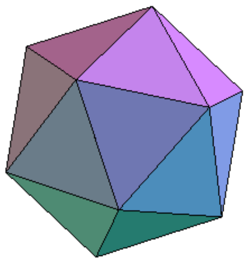
c'est-à-dire $\bigcup_{i=1}^{n} A_i = E$ et $\forall i, j$ tels que $1 \leqslant i < j \leqslant n$, $A_i \cap A_j = \varnothing$

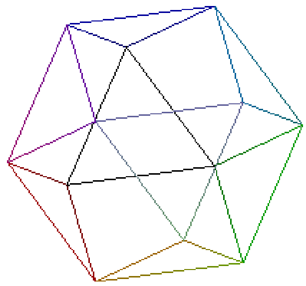
Cela signifie aussi que tout élément de E appartient à un et un seul des A_i

Dans le cas particulier où tous les A_i ont le même cardinal p, on a $card(E) = n.p$, ou $n = \dfrac{Card(E)}{p}$

Exemples

- Combien de triangles peut-on faire avec n points ?
- L'icosaèdre régulier a 20 faces.
  chacune d'elle est un triangle équilatéral.
  Combien a-t-il d'arêtes
- L'octaèdre tronqué a 14 faces :
  6 carrés et 8 triangles.
  Combien a-t-il de sommets ? d'arêtes ?





2. *Puissances - Arrangements- Combinaisons*

Soit E un ensemble à n éléments $(n > 0)$. Soit p un naturel.

- L'ensemble des p-uples d'éléments de E a comme cardinal n^p .
- Si $p \leqslant n$, l'ensemble des p-uples d'éléments de E distincts 2 à 2

  a comme cardinal $n(n-1)...(n-p+1) = \dfrac{n!}{(n-p)!}$. On le note A_n^p

  Si $p > n$, c'est l'ensemble vide On écrit $A_n^p = 0$
- Cas particulier : l'ensemble des n-uples d'éléments de E disticts 2 à 2 a comme cardinal $n!$
  De même l'ensemble des permutations de E (i.e. bijections $E \to E$)
  ou l'ensemble des façons de mettre dans un certain ordre les éléments de E
  ou l'ensemble des anagrammes d'un mot de n lettres distinctes 2 à 2.
- Si $p \leqslant n$, l'ensemble des parties à p éléments de E

  a comme cardinal $\dfrac{n(n-1)...(n-p+1)}{p(p-1)...1} = \dfrac{n!}{p!(n-p)!}$.

  On le note C_n^p ou $\dbinom{n}{p}$ « p parmi n »

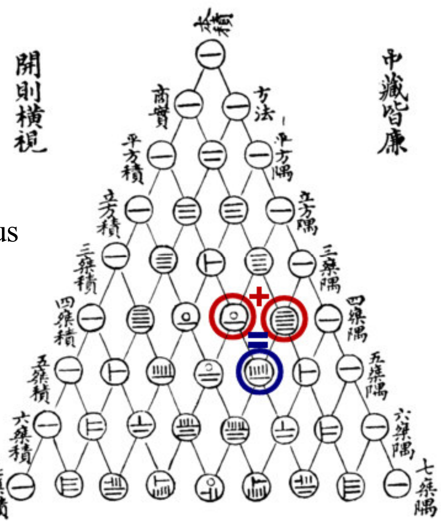
  Si $p > n$, c'est l'ensemble vide. On écrit $C_n^p = 0$

  Interprétations : Tirage avec remise, sans tenir compte de l'ordre.
  Tirages d'un échantillon de p individus dans une population de n individus
  Nombre de mains (5 cartes) au poker.

- Triangle de Pascal

  $\forall n \in \mathbb{N}, \dbinom{n}{0} = \dbinom{n}{n} = 1$ et $\forall n, p \in \mathbb{N}$ $\dbinom{n}{p} + \dbinom{n}{p+1} = \dbinom{n+1}{p+1}$
- Formule du binôme de Newton

  $\forall a, b \in \mathbb{C}$ $(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \dbinom{n}{k} a^k b^{n-k}$

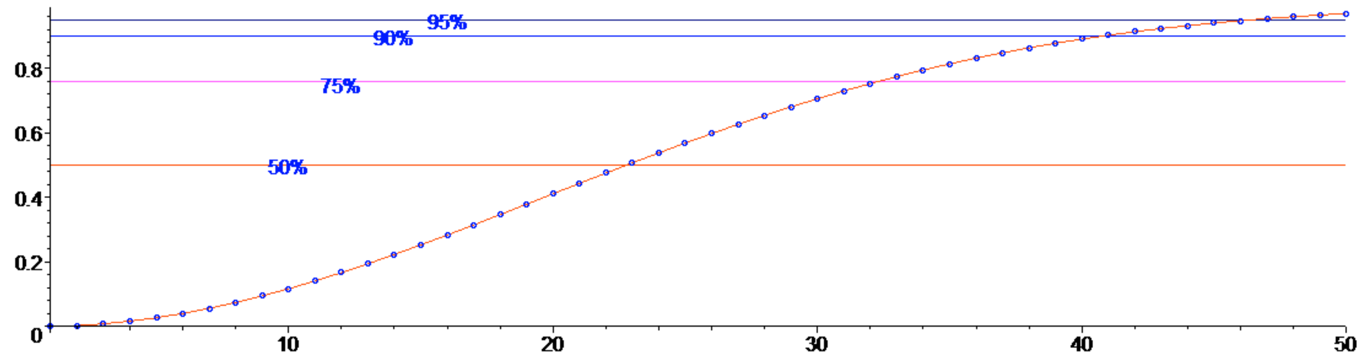


Triangle de Jia Xian (Zhu Shijie 1303)

3. *Exemple de dénombrement - paradoxe des anniversaires*

La probabilité que parmi n personnes, deux au moins aient le même jour d'anniversaire est

$$p(n) = 1 - \frac{365 \times 364 \times \ldots \times (365-n+1)}{365^n} = 1 - \frac{365!}{(365-n)!\,365^n} = 1 - \frac{365}{365} \times \frac{364}{365} \times \ldots \times \frac{(365-n+1)}{365}$$



Généralisation

Soit f une application de E dans F. On pose $n = Card(E)$ et $N = Card(F)$

La probabilité que, parmi les éléments de E, deux au moins aient une même image par f est :

$p(n) = 1 - \frac{N!}{(N-n)!\,N^n}$. On écrit $1 - p(n) = \frac{N-1}{N} \times \ldots \times \frac{(N-n+1)}{N} = \prod_{k=1}^{n-1}\left(1 - \frac{k}{N}\right)$

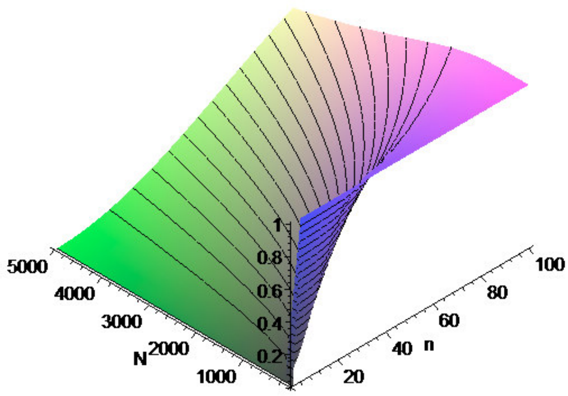
Si n est 'petit' devant N, on a

$$\ln(1-p(n)) = \sum_{k=1}^{n-1} \ln\left(1 - \frac{k}{N}\right) \sim \sum_{k=1}^{n-1}\left(-\frac{k}{N}\right) = -\frac{n(n-1)}{2N}$$

et $p(n) \approx 1 - \exp\left(-\frac{n(n-1)}{2N}\right)$.

Réciproquement $n \approx \sqrt{-2N\ln(1-p(n))}$

A.N. pour $p(n) = \frac{1}{2}$ on a $n \approx \sqrt{2N\ln(2)} \approx 1.18\sqrt{N}$



Application en cryptographie

Le paradoxe des anniversaires est utilisé en cryptographie pour élaborer des attaques sur les fonctions de hachage. Une des contraintes imposées sur ces fonctions, pour une utilisation cryptographique, est de produire peu de collisions, autrement dit, de rarement prendre la même valeur sur des entrées différentes.

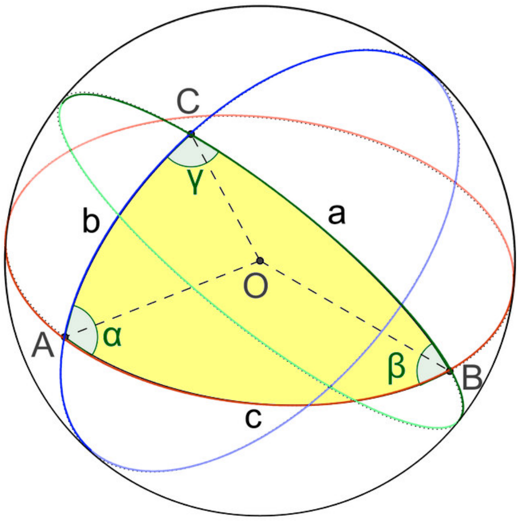
Le paradoxe des anniversaires donne une borne sur le nombre moyen d'éléments nécessaires pour avoir une collision avec une probabilité p = 1/2, à savoir essentiellement la racine carrée du nombre de valeurs possibles pour la fonction de hachage, sous l'hypothèse que cette fonction est uniformement distribuée sur ses valeurs d'arrivée.

Plus concrètement, si une fonction de hachage a une sortie de N bits alors l'ensemble d'arrivée possède 2^N éléments et il faut environ $2^{N/2}$ hachés d'éléments distincts pour produire une collision avec 50 % de chance.

https://fr.wikipedia.org/wiki/Paradoxe_des_anniversaires

4. *Exemples de dénombrement - Formule d'Euler et polyèdres réguliers de* $\mathbb{R}^3$

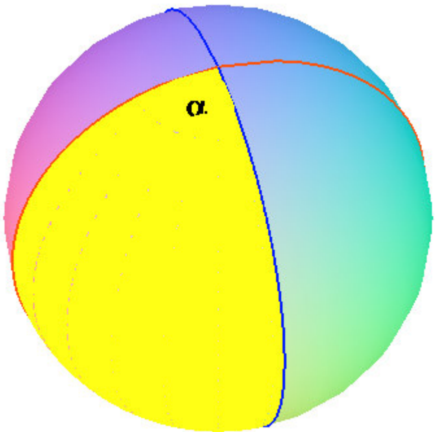
'Grand cercle'
= intersection de la sphère avec un plan passant par le centre
Triangle sphérique
= partie de la sphère limitée par 3 'grands cercles'
Angle de 2 arcs incidents en M
= angle des tangentes en M

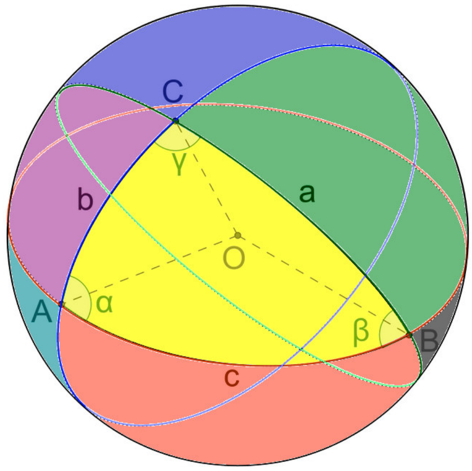


Formule de Girard :

Si la sphère est de rayon 1,
l'aire du triangle sphérique ABC est égale à

$$\text{Aire}(\text{ABC}) = \hat{\text{A}} + \hat{\text{B}} + \hat{\text{C}} - \pi = \alpha + \beta + \gamma - \pi$$



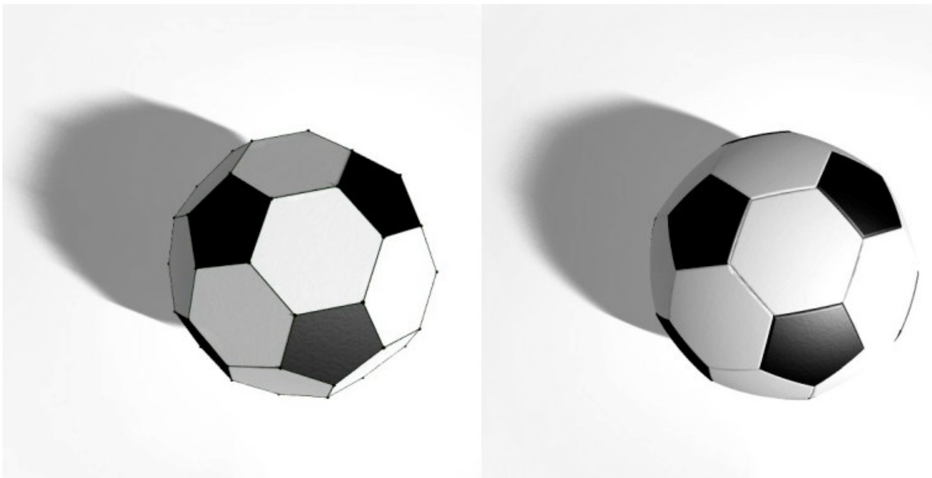


Formule d'Euler

Un polyèdre convexe est le domaine borné de l'espace limité par un certain nombre de plans.
Ses arêtes sont les intersections de plans deux à deux.
Ses sommets sont les intersections de plans trois à trois.
Ses faces sont des polygones (convexes) limiés par des arêtes.

Pour tout polyèdre convexe, $\boxed{S + F - A = 2}$,

où S est le nombre de sommets, F le nombre de faces et A le nombre d'arêtes.



Application : Polyèdres réguliers convexes

Un polyèdre est dit régulier ssi il est inscrit dans une sphère, si toutes les faces sont des polygones réguliers de même dimension et si tous les sommets sont identiques (un même nombre d'arêtes incidentes à chaque sommet)
Soit r le nombre d'arêtes incidentes à un sommet. r est aussi le nombre de faces incidentes à un sommet.
Notons que $r \geqslant 3$
Soit s le nombre de sommets de chaque face. s est aussi le nombre d'arêtes de chaque face.
Notons que $s \geqslant 3$

Alors d'après le principe du berger, $A = \frac{1}{2} s F$ donc $F = \frac{2A}{s}$, $S = \frac{1}{r} s F$ donc $S = \frac{2A}{r}$.

La formule d'Euler $S + F - A = 2$ donne donc $\frac{2A}{r} + \frac{2A}{s} - A = 2$ ou $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} - \frac{1}{2} = \frac{1}{A}$.

Il faut donc que $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} > \frac{1}{2}$

Puisque $r \geqslant 3$, dès que $s \geqslant 6$, on a $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{3} + \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$.

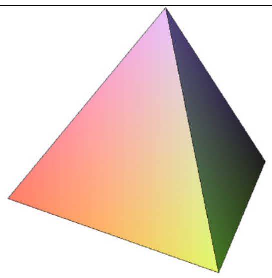
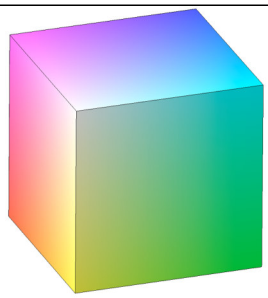
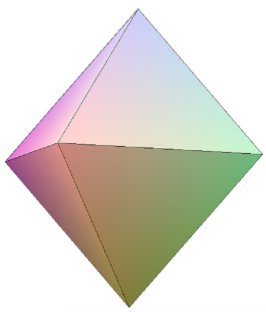
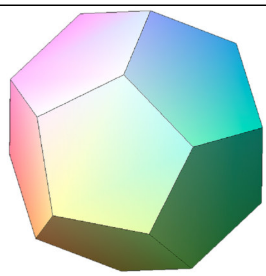
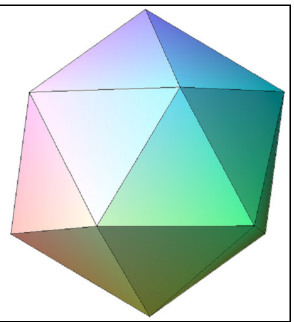
De même, puisque $s \geqslant 3$, dès que $r \geqslant 6$, on a $\frac{1}{r} + \frac{1}{s} \leqslant \frac{1}{6} + \frac{1}{3} = \frac{1}{2}$

Restent les cas suivants.

	$r = 3$	$r = 4$	$r = 5$
$s = 3$	$A = 6, F = 4, S = 4$	$A = 12, F = 8, S = 6$	$A = 30, F = 20, S = 12$
$s = 4$	$A = 12, F = 6, S = 8$	$\cancel{\frac{1}{r} + \frac{1}{s} = \frac{1}{2}}$	
$s = 5$	$A = 30, F = 12, S = 20$		

Il se trouve que pour chacun des cas restant, il existe un polyèdre régulier.

Les 5 polyèdres réguliers convexes (Platon)

				
$A = 6, F = 4, S = 4$ Tétraèdre régulier	$A = 12, F = 6, S = 8$ Cube	$A = 12, F = 8, S = 6$ Octaèdre régulier	$A = 30, F = 12, S = 20$ Dodécaèdre régulier	$A = 30, F = 20, S = 12$ Icosaèdre régulier

IV/ Équations de récurrence (‘Équations aux différences’)

1. *Suite arithmétique - suite géométrique - suite arithmético-géométrique*

- Suite arithmétique : $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} = u_n + r$.

  Alors $\forall n \in \mathbb{N} / u_n = u_0 + n\,r$ et $\sum_{k=p}^{p+q} u_k = (q+1)\left(\frac{u_p + u_{p+q}}{2}\right)$

- Suite géométrique : $\exists r \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} = r\ u_n$

  Alors $\forall n \in \mathbb{N} / u_n = u_0\, r^n$ et, si $r \neq 1$, $\sum_{k=p}^{p+q} u_k = u_0\ r^p \left(1 + r + ... + r^q\right) = u_0\ r^p\, \frac{1 - r^{q+1}}{1 - r} = \frac{u_p - u_{p+q+1}}{1 - r}$

- Suite arithmético-géométrique : $\exists a, b \in \mathbb{R} / \forall n \in \mathbb{N} / u_{n+1} = a\ u_n + b$

  Alors , si $r \neq 1$, $\forall n \in \mathbb{N} / u_n = a^n u_0 + b\, \frac{1 - a^n}{1 - a}$

2. *Récurrences linéaires homogènes du second ordre :* $u_{n+2} = a\,u_{n+1} + b\,u_n \quad (\mathrm{EH})$

- L'ensemble $(\mathcal{E})$ des solutions est un sous-espace vectoriel de l'ensemble des suites de réels.

  Soient (α_n) et (β_n) définies par $\begin{cases} \alpha_0 = 1 \\ \alpha_1 = 0 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \alpha_{n+2} = \alpha\,u_{n+1} + \alpha\,u_n \end{cases}$ et $\begin{cases} \beta_0 = 0 \\ \beta_1 = 1 \\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \beta_{n+2} = \beta\,u_{n+1} + \beta\,u_n \end{cases}$

  Ce sont deux éléments de $(\mathcal{E})$ linéairement indépendants et tout élément (u_n) de $(\mathcal{E})$ s'écrit de manière unique comme combinaison linéaire : $(u_n) = u_0(\alpha_n) + u_1(\beta_n)$. Donc $(\mathcal{E})$ est de dimension 2, et toute famille de 2 solutions indépendantes est une base de $(\mathcal{E})$.

- On cherche des solutions qui soient des suites géométriques $u_n = r^n$
  On voit que *r* doit satisfaire l’équation caractéristique $X^2 = aX + b$.

  Si l’équation caractéristique a 2 racines réelles distinctes r_1 et r_2, les suites $(r_1^{\,n})$ et $(r_2^{\,n})$ sont 2 solutions indépendantes donc la solution générale est $u_n = A\ r_1^n + B\ r_2^n$

  Si l’équation caractéristique a 2 racines imaginaires (conjuguées) $r_1 = \rho\,\mathrm{e}^{\mathrm{i}\theta}$ et $r_2 = \rho\,\mathrm{e}^{-\mathrm{i}\theta}$, les suites $\rho^n \cos(n\theta) = \frac{r_1^{\,n} + r_2^{\,n}}{2}$ et $\rho^n \cos(n\theta) = \frac{r_1^{\,n} - r_2^{\,n}}{2i}$ sont 2 solutions indépendantes
  la solution générale est donc $u_n = A\,\rho^n \cos(n\theta) + B\,\rho^n \sin(n\theta)$

  Si l’équation caractéristique a une racine double r_0, les suites $(r_0^{\,n})$ et $(n\,r_0^{\,n})$ sont 2 solutions indépendantes donc la solution générale est $u_n = A\ r_0^n + B\,n\ r_0^n$

- **Exemple : Suite de Fibonacci** $u_0 = 1,\ u_1 = 1,\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ u_{n+2} = u_{n+1} + u_n$. L’équation caractéristique est $X^2 = X + 1$ dont les racines sont $\frac{1 + \sqrt{5}}{2} = \varphi \approx 1.618$ (nombre d’or) et $\frac{1 - \sqrt{5}}{2} = -\frac{1}{\varphi} \approx -0.618$.

  La solution est $u_n = \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n - \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 - \sqrt{5}}{2}\right)^n$, en particulier $u_n \underset{n \to \infty}{\sim} \frac{1}{\sqrt{5}}\left(\frac{1 + \sqrt{5}}{2}\right)^n$

3. *Récurrences linéaires du second ordre avec second membre :* $u_{n+2}-a\,u_{n+1}-b\,u_n=v_n\ \ (\mathrm{E})$

- Théorème : La solution générale de (E) st égale à la somme de la solution générale de (EH) et d'une solution particulière de (E)
- Exemple $u_0=1,\ u_1=1,\ \forall n\in\mathbb{N}\ \ u_{n+2}=u_{n+1}+u_n+1$
  On voit que la suite constante -1 est une solution particulière.
  La solution générale est donc $u_n=A\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n+B\left(\dfrac{1-\sqrt{5}}{2}\right)^n-1$.
  Les conditions initiales permettent de calculer $A=1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $B=1-\dfrac{1}{\sqrt{5}}$ et $u_n\underset{n\to\infty}{\sim}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{5}}\right)\left(\dfrac{1+\sqrt{5}}{2}\right)^n$
- Exemple $u_{n+1}=\dfrac{1}{2}u_n+n^2$. La solution générale de l'équation homogène est $h_n=A\dfrac{1}{2^n}$.
  On cherche une solution particulière sous forme d'un polynôme de degré 2 : $p_n=a\,n^2+b\,n+c$.
  comme $p_{n+1}=a(n+1)^2+b(n+1)+c=a\,n^2+(2a+b)n+(a+b+c)$ et $\dfrac{1}{2}p_n+n^2=\left(\dfrac{a}{2}+1\right)n^2+\dfrac{b}{2}n+\dfrac{c}{2}$
  on a bien une solution en prenant $a=2,\ b=-8,\ c=12$
  La solution générale est donc $u_n=h_n+p_n=\dfrac{A}{2^n}+2n^2-8n+12$. Notons que $A-12=u_0$.
- Exemple $u_{n+1}=\alpha\,u_n+\beta^n\ \ (\alpha$ et β constantes distinctes, $\beta\neq 0)$.
  On peut écrire $u_{n+2}=\alpha\,u_{n+1}+\beta^{n+1}$, et en combinant les deux, $u_{n+2}-\beta u_{n+1}=\alpha\,u_{n+1}-\alpha\beta\,u_n$.
  C'est une équation homogène du second ordre $u_{n+2}-(\alpha+\beta)u_{n+1}+\alpha\beta\,u_n=0$, d'équation caractéristique $X^2-(\alpha+\beta)X+\alpha\beta=0$. Les racines sont α et β.
  La solution est donc de la forme $u_n=A\alpha^n+B\beta^n$.
  En reportant dans l'équation donnée, on voit que $B=\dfrac{1}{\beta-\alpha}$
- Exemple $u_{n+1}=\alpha\,u_n+(n-1)\alpha^n\ \ (\alpha$ constante $\neq 0)$.
  La solution générale de l'équation homogène est $h_n=A\alpha^n$.
  On cherche une solution particulière sous forme $p_n=a\,\alpha^n$: on n'en trouve pas (bien sûr !)
  On cherche une solution particulière sous forme $p_n=(a\,n+b)\alpha^n$: on n'en trouve pas non plus !
  On cherche une solution particulière sous forme $p_n=(a\,n^2+bn+c)\alpha^n$:
  comme $p_{n+1}=\alpha^{n+1}\left(a\,n^2+(2a+b)n+(a+b+c)\right)$ et $\alpha\,p_n+(n-1)\alpha^n=\alpha^n\left(a\,\alpha\,n^2+(b\,\alpha+1)n+(c\,\alpha-1)\right)$,
  les "n^2" s'éliminent. Il reste, en simplifiant, $(6a-1)n+(3a+3b+1)=0$.
  On a bien une solution en prenant $a=\dfrac{1}{2\alpha},\ b=-\dfrac{3}{2\alpha},\ c$ quelconque .
  La solution générale est donc $u_n=\left(\dfrac{n^2}{2\alpha}-\dfrac{2n}{2\alpha}+A\right)\alpha^n$

4. *Séries génératrices - transformée en Z*

Définition : Soit $a=(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ une suite de réels ou de complexes.

On lui associe la fonction $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n$: $(a_n)\xrightarrow{\text{transformée en } Z}\sum_{n=0}^{\infty} a_n\left(\frac{1}{z}\right)^n$

La série entière $\sum_{n=0}^{\infty} a_n z^n$ étant définie et de classe C^∞ dans le disque de convergence $|z|<R$,

la fonction *f* est définie et de classe C^∞ dans le domaine $|z|>\frac{1}{R}$ (si $R\neq 0$)

Exemples :

- Si $a=(1,0,0,...)$ $(a_0=1 \text{ et } \forall n\geqslant 1/a_n=0)$ alors $f(z)=1$
- Si $\forall n\geqslant k/a_n=0$ alors $f(z)=a_0+\frac{a_1}{z}+\frac{a_2}{z^2}+...+\frac{a_k}{z^k}=\frac{a_0 z^k+a_1 z^{k-1}+...+a_{k1}z+a_k}{z^k}$
- Si $\forall n/a_n=1$ alors $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{1}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{1}{z}}=\frac{z}{z-1}$ (pour $|z|>1$)
- Si $\forall n/a_n=\alpha^n$ $(\alpha$ constante non nulle$)$ alors $f(z)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(\frac{\alpha}{z}\right)^n=\frac{1}{1-\frac{\alpha}{z}}=\frac{z}{z-\alpha}$ (pour $|z|>|\alpha|$)

Propriétés

- Unicité : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ et } (b_n)\to f(z) \text{ et si le RdC est } >0 \text{, alors } \forall n\in\mathbb{N}\ /\ a_n=b_n}$ ①
- Linéarité : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ et } (b_n)\to g(z) \text{ alors } \forall\alpha,\beta\in\mathbb{C}\ (\alpha a_n+\beta b_n)\to\alpha f(z)+\beta g(z)}$ ②

  Exemples

  $(\cos(\omega n))\to\frac{z\,(z-\cos\omega)}{z^2-2z\cos\omega+1}$, $(2a^n-b^n)\to 2\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-b}=\frac{z^2+(a-2b)z}{(z-a)(z-b)}$

- Homothétie : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{, alors pour } \alpha \text{ non nul fixé, } (\alpha^n a_n)\to f\left(\frac{z}{\alpha}\right)}$ ③
- Dérivée en *z* $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ alors } (n\,a_n)\to -z\,f'(z)}$ ④

  Exemples : Si $\forall n/a_n=n$, $f(z)=\frac{z}{(z-1)^2}$, Si $\forall n/a_n=n\ \alpha^n$, $f(z)=\frac{\alpha z}{(z-\alpha)^2}$

Notation : la suite (a_{n-1}) est la suite (b_n) telle que $b_0=0$ et $\forall n\geqslant 1\ /\ b_n=a_{n-1}$

- Retard en *n*: $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ alors } (a_{n-1})\to\frac{1}{z}f(z)}$ ⑤
- Avance en *n* : $\boxed{\text{Si } (a_n)\to f(z) \text{ alors } (a_{n+1})\to z\,f(z)-a_0\,z}$ ⑥

Application : Équations de récurrence

Exemple 1 $u_{n+1}=a\,u_n+b$

Appelons $f(z)$ la transformée en *z* de (u_n).

Alors la transformée en *z* de u_{n+1} est $z\,f(z)-u_0\,z$, celle de $(u_{n+1}-a\,u_n)$ est $z\,f(z)-u_0\,z-a\ f(z)$ (⑥ et ②)

Celle de (b) est $\frac{b\,z}{z-1}$, donc par unicité ①, $f(z)=\frac{u_0 z}{z-a}+\frac{b\,z}{(z-a)(z-1)}=\frac{u_0 z}{z-a}+\frac{b}{a-1}\left(\frac{z}{z-a}-\frac{z}{z-1}\right)$

Comme $\frac{z}{z-a}$ est la transformée de (a^n) et $\frac{z}{z-1}$ la transformée de (a^n), on obtient $u_n=u_0 a^n+\frac{b}{a-1}(a^n-1)$

Exemple 2 $u_{n+2}=2\,u_{n+1}-u_n+2^n$, $u_0=1$, $u_1=1$ (équation linéaire du 2ème ordre non homogène)

Appelons $f(z)$ la transformée en z de (u_n).

Alors la transformée en z de u_{n+1} est $z\,f(z)-u_0\,z=z\,f(z)-z$,

celle de u_{n+2} est donc $z\left(z\,f(z)-u_0\,z\right)-u_1 z=z^2 f(z)-z^2-z$

Celle de (2^n) est $\frac{z}{z-2}$, donc par unicité, $z^2 f(z)-z^2-z=2\left(z\,f(z)-z\right)-f(z)+\frac{z}{z-2}$

On obtient $f(z)=\frac{z}{z-1}+\frac{z}{(z-1)^2(z-2)}=-\frac{z}{(z-1)^2}+\frac{z}{z-2}$ et par suite $u_n=-n+2^n$

Méthode

1. Appliquer la transformée en Z aux 2 membres de l'équation aux différences en u_n
2. Calculer $f(z)$ en utilisant les propriétés de la transformée en Z
3. Décomposer $\frac{1}{z}f(z)$ en éléments simples
4. Utiliser la table de transformée pour obtenir u_n par transformée inverse

Table de transformées en Z

R est le RdC de la série $\sum u_n z^n$, a est un complexe non nul, ω un réel.

$\sum$ u_n	Transformée $f(z)$	Domaine de convergence
1	$\frac{z}{z-1}$	$\lvert z\rvert>1$
a^n	$\frac{z}{z-a}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$n\,a^n$	$\frac{a\,z}{(z-a)^2}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$n^2\,a^n$	$\frac{a\,z(z+a)}{(z-a)^3}$	$\lvert z\rvert>\lvert a\rvert$
$\cos(\omega n)$	$\frac{z\,(z-\cos\omega)}{z^2-2\,z\cos\omega+1}$	$\lvert z\rvert>1$
$\sin(\omega n)$	$\frac{z\sin\omega}{z^2-2\,z\cos\omega+1}$	$\lvert z\rvert>1$
u_{n+1}	$z\,f(z)-u_0\,z$	$\lvert z\rvert>\frac{1}{R}$
u_{n+2}	$z^2 f(z)-z^2 u_0-z\,u_1$	$\lvert z\rvert>\frac{1}{R}$
$a^n\,u_n$	$f\left(\frac{z}{a}\right)$	$\lvert z\rvert>\frac{\lvert a\rvert}{R}$