$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^2$

$\circ$

Dans cette question et la suivante, étant donné un anneau commutatif A, on s'intéresse à l'ensemble

$$\mathcal{C}(A) := \{\, (x,y) \in A^2 \mid x^2 + y^2 = 1 \,\}.$$

Le « cercle unité » à coordonnées dans A

a) Soit $(G, \star, e)$ un groupe, $(M, \cdot, 1)$ un monoïde et $f : G \to M$ un morphisme (de monoïdes). Vérifier que

$$\operatorname{Ker} f := \{\, x \in G \mid f(x) = 1 \,\}$$

est un sous-groupe de G, et que f est injectif si et seulement si $\operatorname{Ker} f = \{e\}$.

Vérification que c'est un sous-groupe :

- Stabilité sous $\star$: pour $x, y \in \operatorname{Ker} f$, on a $x \star y \in \operatorname{Ker} f$ puisque
$$f(x \star y) = f(x) \cdot f(y) = 1 \cdot 1 = 1.$$
- Stabilité sous $^{-1}$: pour $x \in \operatorname{Ker} f$, on a $x^{-1} \in \operatorname{Ker} f$ puisque
$$f(x^{-1}) = f(x)^{-1} = 1^{-1} = 1.$$
En effet, pour justifier la première égalité : en appliquant f à
$$x \star x^{-1} = e = x^{-1} \star x$$
on trouve bien
$$f(x) \cdot f(x^{-1}) = f(e) = 1 = f(x^{-1}) \cdot f(x),$$
ce qui montre que $f(x)$ est inversible dans M et que $f(x^{-1}) = f(x)^{-1}$.
- Stabilité sous e : on a $e \in \operatorname{Ker} f$ puisque (par définition de morphisme de monoïde)
$$f(e) = 1.$$

On montre alors que f est injectif $\iff \operatorname{Ker} f = \{e\}$:

- ($\Rightarrow$) Puisqu'il est toujours vrai que $\{e\} \subseteq \operatorname{Ker} f$, montrons l'inclusion inverse. Pour $x \in \operatorname{Ker} f$, on a
$$f(x) = 1 = f(e),$$
donc par injectivité de f il suit que $x = e$. Donc $\operatorname{Ker} f \subseteq \{e\}$.
- ($\Leftarrow$) Pour montrer l'injectivité de f : prenons $x, y \ \in G$ tels que $f(x) = f(y)$; on a alors
$$1 = f(x) \cdot f(y)^{-1} = f(x \star y^{-1})$$
donc $x \star y^{-1} \in \operatorname{Ker} f$, d'où $x \star y^{-1} = e$, ce qui signifie que $x = (x \star y^{-1}) \star y = e \star y = y$.

b) Vérifier que $\mathcal{C}(A)$ forme un groupe pour la loi de composition

$$(a,b) \star (c,d) := (ac - bd,\ ad + bc)$$

avec neutre $(1,0)$ et inverse $(a,b)^{-1} = (a,-b)$.

- Stabilité sous $\star$: pour $(a,b),(c,d) \in \mathcal{C}(A)$ on a bien $(a,b)\star(c,d) \in \mathcal{C}(A)$ puisque

$$(ac-bd)^2+(ad+bc)^2 = a^2c^2+b^2d^2+a^2d^2+b^2c^2 = (a^2+b^2)(c^2+d^2) = 1\cdot 1 = 1$$

(où on utilise le fait que la multiplication de A est commutative).

- Neutre :

$$(a,b)\star(1,0) = (a\cdot 1 - b\cdot 0, a\cdot 0 + b\cdot 1) = (a,b)$$

et de même dans l'autre sens (ou alors on remarque dès le départ que la loi $\star$ est commutative).

- Inverses : le candidat étant fourni, on n'a qu'à vérifier

$$(a,b)\star(a,-b) = (a^2+b^2, -ab+ab) = (1,0)$$

en remarquant qu'on a bien $(a,-b)\in\mathcal{C}(A)$ puisque $a^2+(-b)^2 = a^2+b^2 = 1$.

c) Supposons que $2 \in A^\times$ et que A contient un élément i tel que $i^2 = -1$ (par exemple : $A = \mathbf{C}$ ou $A = \mathbf{F}_5$).
Montrer dans ce cas que l'application $\psi : \mathcal{C}(A) \to A^\times$ définie par $\psi(x,y) := x+iy$ est un isomorphisme.
[*Indication* : pour $z \in A^\times$, considérer $x = \dfrac{z+z^{-1}}{2}$, $y = \dfrac{z-z^{-1}}{2i}$]

- ψ est un morphisme : puisque $A^\times$ est un groupe, il suffit de vérifier que ψ préserve l'opération, et effectivement on a bien

$$\psi(a,b)\cdot\psi(c,d) = (a+bi)\cdot(c+di) = (ac-bd)+(ad+bc)i = \psi\big((a,b)\star(c,d)\big).$$

- Injectivité : en utilisant la propriété démontrée en a), il suffit de considérer $(a,b)\in\mathcal{C}(A)$ pour lequel $\psi(a,b) = a+bi = 1$. Cela signifie que $a = 1-bi$, et on se rappelle qu'on doit avoir

$$1 = a^2+b^2 = (1-bi)^2+b^2 = 1-2bi-b^2+b^2 = 1-2bi$$

d'où $2bi = 0$. Puisque $2i$ est inversible dans A (pourquoi ?), on conclut que $b = 0$ puis $a = 1$. Donc on a bien montré que

$$\operatorname{Ker}\psi = \{(1,0)\}.$$

- Surjectivité : étant donné $z \in A^\times$, on doit montrer qu'il existe $(x,y)\in\mathcal{C}(A)$ pour lequel $\psi(x,y) = z$. On nous fournit justement les valeurs de x,y (qui ne tombent pas du ciel, on aurait pu les retrouver en résolvant un système d'équations linéaires 2×2 !) et pour celles-ci on vérifie que

$$x^2+y^2 = \left(\frac{z+z^{-1}}{2}\right)^2 + \left(\frac{z-z^{-1}}{2i}\right)^2 = \frac{z^2+2+z^{-2}}{4} - \frac{z^2-2+z^{-2}}{4} = \frac{1}{2}+\frac{1}{2} = 1$$

donc on a bien $(x,y)\in\mathcal{C}(A)$, et de plus

$$\psi(x,y) = x+iy = \frac{z+z^{-1}}{2} + \frac{z-z^{-1}}{2} = \frac{z}{2}+\frac{z}{2} = z.$$

Remarque : ça ressemble beaucoup à l'expression complexe de cos et sin non ?

∘ ∘

Pour $n \geqslant 1$, notons $N(n) := |\mathcal{C}(\mathbf{Z}_n)|$ le nombre de couples $(x,y)\in(\mathbf{Z}_n)^2$ avec $x^2+y^2 = 1$.

a) Si m et n sont premiers entre eux, expliquer pourquoi on peut dire que $N(n\cdot m) = N(n)\cdot N(m)$.

D'après le théorème des restes chinois, lorsque m et n sont premiers entre eux on a un isomorphisme d'anneaux

$$\mathbf{Z}_{mn} \cong \mathbf{Z}_m \times \mathbf{Z}_n.$$

Sous cette correspondance, pour $x,y\in\mathbf{Z}$ on a

$$x^2+y^2 \underset{mn}{\equiv} 1 \iff \begin{cases} x^2+y^2 \underset{m}{\equiv} 1 \\ x^2+y^2 \underset{n}{\equiv} 1 \end{cases}$$

ce qui donne une bijection

$$\mathcal{C}(\mathbf{Z}_{mn}) \cong \mathcal{C}(\mathbf{Z}_m) \times \mathcal{C}(\mathbf{Z}_n)$$

et donc finalement

$$N(mn) = |\mathcal{C}(\mathbf{Z}_{mn})| = |\mathcal{C}(\mathbf{Z}_m)| \cdot |\mathcal{C}(\mathbf{Z}_n)| = N(m) \cdot N(n).$$

b) En explicitant les éléments de $\mathcal{C}(\mathbf{Z}_7)$, déterminer $N(7)$.

Combien y a-t-il de classes si on considère comme équivalents les points $(\pm x, \pm y)$, $(\pm y, \pm x)$?

Par force brute, cherchons les valeurs de y possibles pour chaque valeur de x :

x	0	± 1	± 2	± 3
x^2	0	1	4	2
$1 - x^2$	1	0	4	-1
y	± 1	0	± 2	$\nexists$

(-1 n'est pas un carré dans $\mathbf{Z}_7$), ce qui nous laisse comme possibilités les 8 points

$$(0, \pm 1),\ (\pm 1, 0),\ (\pm 2, \pm 2).$$

Donc $N(7) = 8$.

Classes d'équivalence : soit on remarque « à la main » avec la définition fournie qu'il y en a deux :

$$\{(\pm 1, 0), (0, \pm 1)\} \qquad \text{et} \qquad \{(\pm 2, \pm 2)\};$$

soit on applique la formule de Cauchy-Frobenius à l'action du groupe diédral $\mathcal{D}_4 = \langle \rho, \sigma \rangle$ avec

$$\rho(x, y) = (-y, x), \qquad \sigma(x, y) = (x, -y).$$

- pour $g = \mathrm{id}$: $\mathrm{Fix}\, g = \mathcal{C}(\mathbf{Z}_7)$, $|\mathrm{Fix}\, g| = 8$;
- $g = \rho$ ou ρ^3, rotation d'ordre 4 : points de la forme (x, y) avec $(y, -x) = (x, y)$, donc $x = y = 0$, $|\mathrm{Fix}\, g| = 0$;
- $g = \rho^2$ rotation d'ordre 2 : points de la forme (x, y) avec $(x, y) = (-x, -y)$ donc $x = y = 0$, $\mathrm{Fix}\, g = 0$;
- $g = \sigma$ ou $\rho^2\sigma$, réflexion le long des axes de coordonnées : par exemple pour $g = \sigma$ on a $\mathrm{Fix}\, g = \{\ (\pm 1, 0)\}$, $|\mathrm{Fix}\, g| = 2$;
- $g = \rho\sigma$ ou $\rho^3\sigma$, réflexion le long d'une diagonale : pour exemple pour $g = \rho\sigma$, $\mathrm{Fix}\, g$ est l'ensemble des points (x, y) avec $(y, x) = (x, y)$ donc $x = y$ et $x^2 + y^2 = 2x^2 = 1$, d'où $x = \pm 2$; on a $|\mathrm{Fix}\, g| = 2$.

On vérifie bien alors que le nombre de classes d'équivalence est

$$\frac{1}{|\mathcal{D}_4|} \sum_{g \in \mathcal{D}_4} |\mathrm{Fix}\, g| = \frac{8 + 3 \cdot 0 + 4 \cdot 2}{8} = 2.$$

c) Avec tout ce qui précède, évaluer $N(3598)$. [*NB* : $3598 = 2 \cdot 7 \cdot 257$]

Les entiers 2, 7 et 257 sont trois nombres premiers distincts (on peut facilement se convaincre que $257 = 2^8 + 1$ l'est en testant la divisibilité par tous les nombres premiers jusqu'à $\sqrt{257} < 2^4 + 1 = 17$) donc d'après la question a) on a

$$N(3598) = N(2) \cdot N(7) \cdot N(257).$$

- Pour $x, y \in \mathbf{Z}_2$, $x^2 + y^2 = (x + y)^2 = 1 \iff x + y = 1$ donc on trouve deux solutions, $(0, 1)$ et $(1, 0)$; donc $N(2) = 2$.
- Depuis la question b) on sait que $N(7) = 8$.
- Ne reste plus qu'à évaluer $N(257)$, il faut déterminer le nombre d'éléments dans $\mathcal{C}(\mathbf{F}_{257})$. Or on remarque que $\mathbf{F}_{257}$ contient une racine carrée de -1 :

  $$2^8 = -1 \qquad \text{donc} \qquad i := 2^4 = 16 \text{ est racine de } -1.$$

  D'après la question 1 c), on a donc $N(257) = |\mathbf{F}_{257}^\times| = 256$.

Conclusion :

$$N(3598) = 2 \cdot 8 \cdot 256 = 2^{12} = 4096.$$

∘ ∘ ∘

On cherche maintenant à résoudre l'équation de la diffusion de la chaleur :

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

pour $t \geqslant 0$ sur une tige de longueur L située entre $x = 0$ et $x = L$.

a) Montrer que toute solution bornée pour $t \geqslant 0$, supposée de la forme $u(x,t) = f(x)\,g(t)$, s'écrit

$$u(x,t) = (A\cos\omega x + B\sin\omega x)\,e^{-\omega^2 t} \qquad (A, B \in \mathbf{R}).$$

Cherchons une solution de la forme $u(x,t) = f(x)\,g(t)$ (où f et g sont des fonctions suffisamment régulières, par exemple f de classe $\mathcal{C}^1$ et g de classe $\mathcal{C}^2$). On a donc

$$\frac{\partial u}{\partial t} = f(x)\,g'(t), \qquad \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = f''(x)\,g(t),$$

l'équation aux dérivées partielles s'écrit donc

$$f(x)\,g'(t) = f''(x)\,g(t).$$

En divisant de par et d'autre par $u(x,t) = f(x)\,g(t)$ (si la solution est identiquement nulle, ce n'est pas très intéressant), on trouve

$$\frac{f''(x)}{f(x)} = \frac{g'(t)}{g(t)}.$$

Puisque le membre de gauche ne dépend que de x, et celui de droite, de t, ces deux expressions doivent être égales à une constante commune λ :

$$f''(x) = \lambda\,f(x) \qquad \text{et} \qquad g'(t) = \lambda\,g(t).$$

De la seconde équation on tire $g(t) = Ke^{\lambda t}$, mais pour avoir une solution bornée quand $t \to +\infty$ on a intérêt à avoir une constante λ négative, écrivons-la donc $\lambda = -\omega^2$. L'équation pour f est maintenant celle d'un oscillateur harmonique simple :

$$f''(x) + \omega^2 f(x) = 0$$

dont les solutions sont combinaisons linéaires de $\cos\omega x$ et $\sin\omega x$. En remettant tout ensemble, on trouve la solution proposée.

b) Si on impose les conditions au bord

$$u(0,t) = u(L,t) = 0 \qquad (t \geqslant 0),$$

expliquer pourquoi il est raisonnable de chercher à exprimer la solution générale $u(x,t)$ sous la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n x)\,e^{-\omega_n^2 t} \qquad \text{avec } \omega_n = \frac{2\pi n}{L}.$$

Pour une solution élémentaire de la forme trouvée à la question précédente,

$$u(x,t) = (A\cos\omega x + B\sin\omega x)\,e^{-\omega^2 t},$$

imposons les conditions au bord :

- $u(0,t) = A\,e^{-\omega^2 t} = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ impose $A = 0$;
- $u(L,t) = B\sin(\omega L)\,e^{-\omega^2 t} = 0$ pour tout $t \geqslant 0$ force $B = 0$ (pas intéressant) ou $\sin(\omega L) = 0$, soit

  $$\omega L = \pi n \qquad (n \geqslant 1),$$

  ce qui n'est possible que pour certaines valeurs particulières de ω de la forme

  $$\omega_n := \frac{\pi n}{L}.$$

  Remarque : petite coquille dans l'énoncé, désolé !

Les expressions de la forme $B_n \sin(\omega_n x)\, e^{-\omega_n^2 t}$ sont donc toutes des solutions du problème avec conditions au bord ; par principe de superposition linéaire, il est raisonnable (négligeant ici les questions de convergence) que toute combinaison linéiare (même infinie) le soit encore, et donc de rechercher des solutions de la forme

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n \sin(\omega_n x)\, e^{-\omega_n^2 t}.$$

c) En supposant que la condition initiale est

$$u(x,0) = \begin{cases} 1 & \text{si } 0 < x \leqslant \frac{L}{2}, \\ 0 & \text{si } \frac{L}{2} < x \leqslant L, \end{cases}$$

expliciter les coefficients B_n ainsi obtenus.

Pour récupérer les coefficients B_n : l'idée est d'exploiter l'orthogonalité des fonctions $\sin(\omega_n x)$:

$$\int_{-L}^{L} \sin(\omega_m x) \sin(\omega_n x)\, \mathrm{d}x = 0 \qquad \text{quand } m \neq n,$$

$$\int_{-L}^{L} \sin^2(\omega_n x)\, \mathrm{d}x = \int_{-L}^{L} \frac{1 - \cos(2\omega_n x)}{2}\, \mathrm{d}x = \frac{1}{2} \cdot 2L = L.$$

Donc en posant

$$f(x) := u(x,0) = \sum_{m=1}^{\infty} B_m \sin(\omega_m x),$$

on accède au coefficient B_n en intégrant $f(x)\sin(\omega_n x)$:

$$\int_{-L}^{L} f(x) \sin(\omega_n x)\, \mathrm{d}x = L \cdot B_n$$

$$\implies B_n = \frac{1}{L} \int_{-L}^{L} f(x) \sin(\omega_n x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{L} \int_{0}^{L} f(x) \sin(\omega_n x)\, \mathrm{d}x.$$

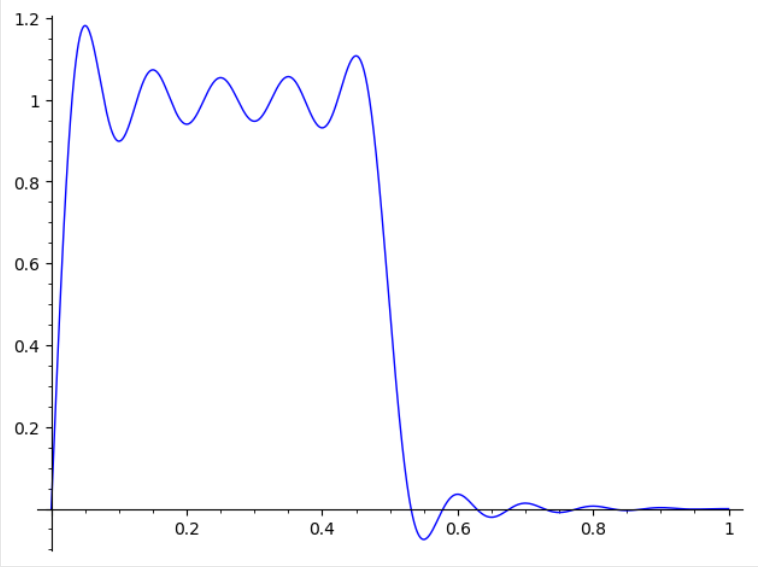
Dans notre exemple :

$$B_n = \frac{2}{L} \int_0^{\frac{L}{2}} \sin(\omega_n x)\, \mathrm{d}x = \frac{2}{\omega_n L} \cos(\omega_n x) \Big|_{\frac{L}{2}}^{0} = \frac{2}{\omega_n L} \left(1 - \cos \frac{\omega_n L}{2}\right) = \frac{2}{n\pi} \left(1 - \cos \frac{n\pi}{2}\right).$$

En résumé :

$$B_n \begin{cases} 0 & n \underset{4}{\equiv} 0 \\ \frac{2}{n\pi} & n \underset{2}{\equiv} 1 \\ \frac{4}{n\pi} & n \underset{4}{\equiv} 2 \end{cases}$$

Voir ci-dessous la somme partielle obtenue en prenant 20 termes dans la série :



$$B \circ O \circ N \circ U \circ S$$

Classez les super-héros suivants dans l'ordre chronologique de leur première apparition dans les *comics* Marvel :

Black Panther, Daredevil, Fantastic Four, Hulk, Iron Man, Spider-Man, X-Men.

Quel est leur (principal) point commun ?

Ce sont tous des super-héros (co-)créés par Stan Lee dans les années 60 :

- Fantastic Four (novembre 1961)
- Hulk (mai 1962)
- Spider-Man (août 1962)
- Iron Man (mars 1963)
- X-Men (septembre 1963)
- Daredevil (avril 1964)
- Black Panther (juillet 1966)