CIR_2

TD de Maths - Anneaux

Exercice 1 : Anneau produit

Soient $(A,+,\times)$ et $(B,+,\times)$ deux anneaux.

On définit sur $A\times B$ une addition et une multiplication en posant :

$$(a,b)\oplus(a',b')=(a+a',b+b') \text{ et } (a,b)\otimes(a',b')=(a\times a',b\times b')$$

Vérifier que $(A\times B,\oplus,\otimes)$ est un anneau.

Quels sont les éléments inversibles de $A\times B$?

Exercice 2 : Anneau de Boole

Soit $(A,+,\star)$ un anneau tel que $\forall x\in A\ /\ x\star x=x$

- Quels sont les éléments inversibles de A ?
- Montrer que $\forall x\in A\ /\ x+x=0$. En déduire que A est commutatif.
- Pour x et y dans A, on pose $x\preccurlyeq y \Leftrightarrow \exists a\in A\ /\ x=a\star y$. Montrer que c'est une relation d'ordre.
- Exemple d'un tel anneau ?

Exercice 3

On munit $\mathbb{Q}^2$ des deux opérations $+$ et $\times$: $\begin{cases}(a,b)+(c,d)=(a+b,c+d)\\(a,b)\times(c,d)=(ac+2bd,ad+bc)\end{cases}$

- Vérifier que $(\mathbb{Q}^2,+,\times)$ est un anneau commutatif. Quel est l'élément unité ?
- Montrer que l'ensemble des éléments $(a,0)$ est un sous-anneau de $\mathbb{Q}^2$ isomorphe à $\mathbb{Q}$
- En calculant $(a,b)\times(a,-b)$, montrer que tout élément non nul de $\mathbb{Q}^2$ admet un inverse.

  (on rappelle que $\sqrt{2}\notin\mathbb{Q}$, c'est-à-dire que l'équation $x^2=2$ n'a pas de solution dans $\mathbb{Q}$)
- Trouver un élément $(a,b)\in\mathbb{Q}^2$ tel que $(a,b)^2=(2,0)$

Exercice 4

Soit $M=\begin{pmatrix}1&2\\3&1\end{pmatrix}$.

- Si on considère M dans l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{R}$, M est-elle inversible ?
- Si on considère M dans l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}$, M est-elle inversible ?
- Si on considère M dans l'anneau des matrices à coefficients dans $\mathbb{Z}/6\mathbb{Z}$, M est-elle inversible ?

Mêmes questions pour $M=\begin{pmatrix}1&2\\-1&1\end{pmatrix}$

Exercice 5

Soit $(A,+,\times)$ un anneau **commutatif** et $a\in A$.

On dit que a est nilpotent s'il existe $n\in\mathbb{N}$ tel que $a^n=0$.

- Exemple : Déterminer les éléments nilpotents de $\mathbb{Z}/36\mathbb{Z}$.
- Exemple : Montrer que la matrice $M=\begin{pmatrix}0&3&-3\\2&7&-13\\1&4&-7\end{pmatrix}\in M_3(\mathbb{R})$ est nilpotente.
- Montrer que si a et b sont nilpotents, alors $a+b$ est nilpotent.
- Soit $a\neq 0$ nilpotent et $n\in\mathbb{N}$ tel que $a^n=0$. Montrer que $1-a$ est inversible

  (remarquer que $n\geqslant 2$ et que $1^n-a^n=1$). Quel est l'inverse de $A=\begin{pmatrix}-1&3&-3\\2&6&-13\\1&4&-8\end{pmatrix}$?
- Soient a nilpotent et b inversible. Montrer que $b+a$ est inversible.

Exercice 6 : Équation de Fermat (ou de Pell-Fermat)

Soit $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ l'ensemble des réels de la forme $a+b\sqrt{2}$ où a et b sont des entiers.

- Soit $x \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. Montrer que l'écriture $x=a+b\sqrt{2}$ est unique.
- Montrer que $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est un sous-anneau de $\mathbb{R}$.
- Pour tout $x=a+b\sqrt{2} \in \mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, on note $\overline{x}=a-b\sqrt{2}$.

  Montrer que $x \to \overline{x}$ est un automorphisme de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ (isomorphisme d'anneau de $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ sur lui-même)
- Calculer $x\overline{x}$.

  En déduire que si x est inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$, alors $x\overline{x}$ est un élément inversible de $\mathbb{Z}$ et donc $x\overline{x}=\pm 1$.

  Étudier la réciproque.
- Soit $x=a+b\sqrt{2}$ un élément inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$. On suppose que $x>1$

  En considérant le plus grand des 4 nombres $x,-x,x^{-1},-x^{-1}$, montrer que $a>0$ et $b>0$.

  Vérifier que $\omega=1+\sqrt{2}$ est le plus petit élément inversible strictement supérieur à 1.
- Soit $x=a+b\sqrt{2}$ un élément inversible dans $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ strictement supérieur à 1.

  Montrer qu'il existe un unique entier naturel n tel que $1 \leqslant x\omega^{-n} < \omega$.

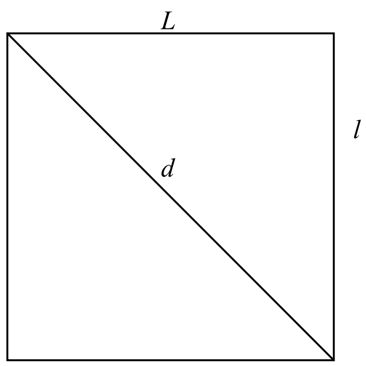
  En remarquant que $x\omega^{-n}$ est inversible, en déduire que $x=\omega^{n}$.
- Conclure que :

  Les éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ qui sont >1 sont les puissances de ω d'exposants $\geqslant 1$.

  L'ensemble des éléments inversibles de l'anneau $\mathbb{Z}\left[\sqrt{2}\right]$ est $\left\{\pm\omega^{n} / n \in \mathbb{Z}\right\}$.
- Pour tout $n \in \mathbb{N}$ on pose $\omega^{n}=a_n+b_n\sqrt{2}$.

  Déterminer une relation de récurrence sur les (a_n, b_n). Les calculer jusqu'à $n=5$.
- Sur la figure ci-dessous, les côtés L et l du rectangle des entiers compris entre 50 et 100, et la diagonale d est aussi un entier. Trouver L et l pour que le rectangle soit « presque » carré. Calculer $\dfrac{L}{d}$.

  Noter le format d'une feuille A4 : $\dfrac{21.0\,\text{cm}}{29.7\,\text{cm}}$



Pierre de Fermat 1601-1665