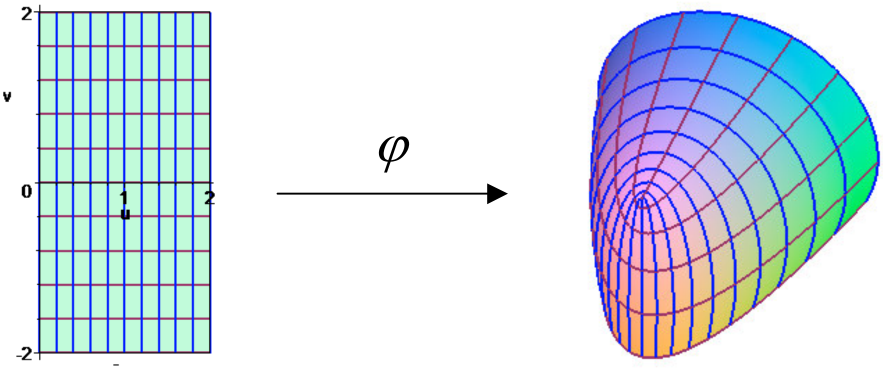
CIR_2 CNB_2

Géométrie différentielle
Résumé de cours (III)

III - Surfaces

1 - Nappe paramétrée de $\mathbb{R}^3$

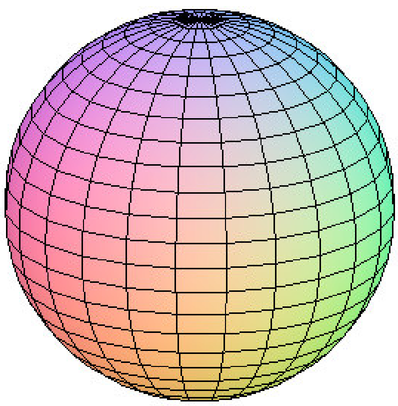
Une nappe paramétrée de $\mathbb{R}^3$ c'est une application φ d'un ouvert U de $\mathbb{R}^2$ à valeur dans $\mathbb{R}^3$.



Les génératrices de la nappe sont les courbes $u = \text{constante}$ (en bleu) et $v = \text{constante}$ (en rouge)

On note $M(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ l'image du point $(u,v) \in U$ par φ.

<u>Exemple 1 : Sphère de centre 0 et de rayon R</u>

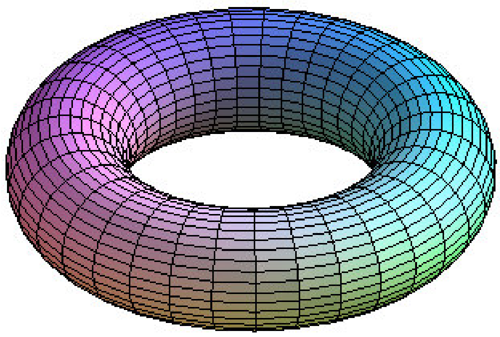


$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) & \to & (x,y,z) \end{array} \text{ telle que } \begin{cases} x = R\sin\theta\cos\varphi \\ y = R\sin\theta\sin\varphi \\ z = R\cos\theta \end{cases}$$

On représente sur la sphère
* les courbes à θ constant (les parallèles)
* les courbes à φ constant (les méridiens)

<u>Exemple 2 : Tore de rayons R et r</u>

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,2\pi]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,\varphi) & \to & (x,y,z) \end{array} \text{ telle que } \begin{cases} x = (R + r\cos\theta)\cos\varphi \\ y = (R + r\cos\theta)\sin\varphi \\ z = r\sin\theta \end{cases}$$

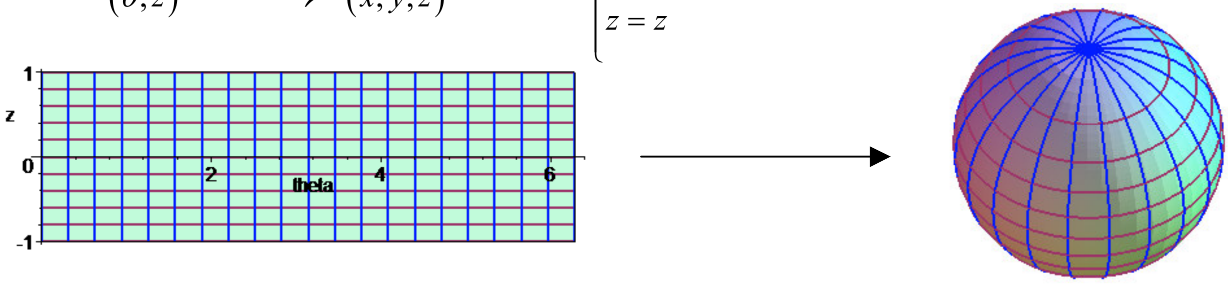


2 - Changement de paramétrage

C'est une bijection d'un ouvert V de $\mathbb{R}^2$ dans U. $\begin{array}{ccccc} V & \xrightarrow{f} & U & \xrightarrow{\varphi} & \mathbb{R}^3 \\ (\alpha,\beta) & \longrightarrow & (u,v) & \longrightarrow & (\varphi\circ f)(\alpha,\beta) \end{array}$

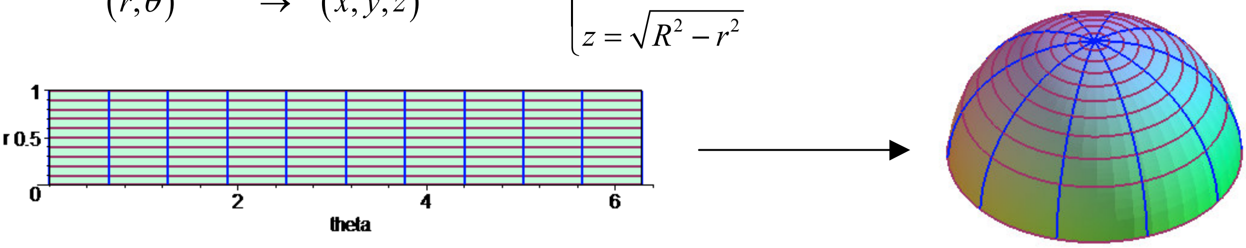
Exemple : autre paramétrage de la sphère :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,2\pi]\times[-R,+R] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (\theta,z) & \to & (x,y,z) \end{array} \text{ telle que } \begin{cases} x=\sqrt{R^2-z^2}\cos\theta \\ y=\sqrt{R^2-z^2}\sin\theta \\ z=z \end{cases}$$



autre paramétrage de la demi-sphère :

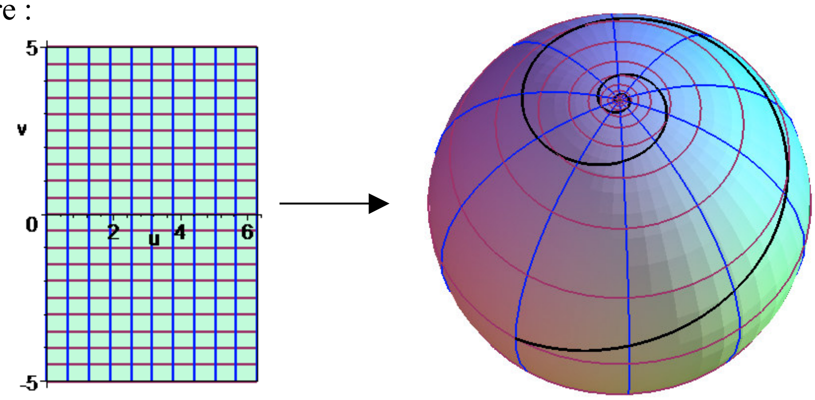
$$\varphi : \begin{array}{ccc} [0,R]\times[0,2\pi] & \to & \mathbb{R}^3 \\ (r,\theta) & \to & (x,y,z) \end{array} \text{ telle que } \begin{cases} x=r\cos\theta \\ y=r\sin\theta \\ z=\sqrt{R^2-r^2} \end{cases}$$



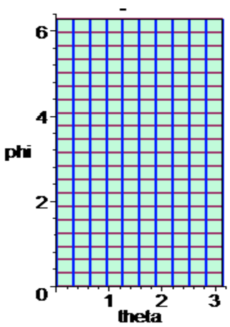
Paramétrage de Mercator pour la sphère :

$$\psi : \begin{array}{ccc} [0,2\pi]\times]-\infty,+\infty[& \to & \mathbb{R}^3 \\ (u,v) & \to & (x,y,z) \end{array}$$

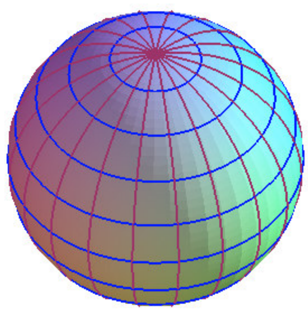
$$\text{telle que } \begin{cases} x=R\dfrac{\cos u}{\operatorname{ch} v} \\ y=R\dfrac{\sin u}{\operatorname{ch} v} \\ z=R\ \operatorname{th} v \end{cases}$$



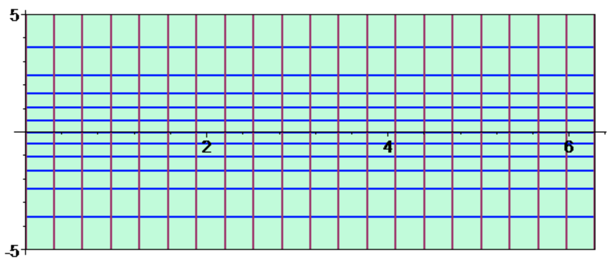
Les courbes $v=\text{constante}\times u$ sont les loxodromies (en noir) :
Elles font un angle constant avec les génératrices (les méridiens et les parallèles)



$$\begin{aligned} x &= R\sin\theta\cos\varphi \\ y &= R\sin\theta\sin\varphi \\ z &= R\cos\theta \end{aligned}$$



ψ^{-1}



3 - Vecteurs tangents - Plan tangent

Soit $\varphi\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée <u>de classe C¹</u> et $M(u,v)=\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ l'image de (u,v) par φ.

Pour tout u_0, l'application $v \to M(u_0,v)$ est une courbe de $\mathbb{R}^3$ contenue dans la surface.

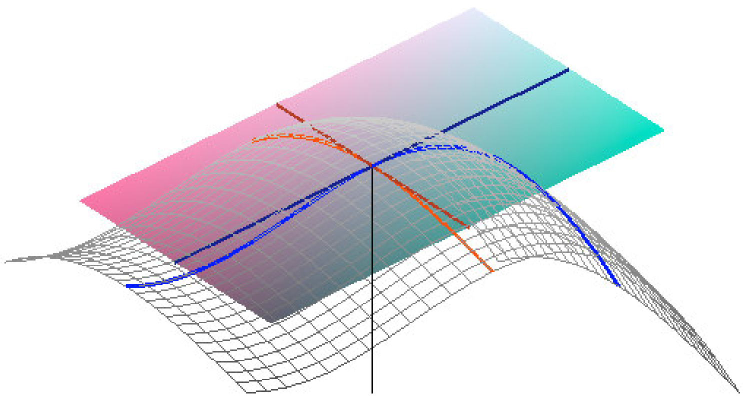
Son vecteur vitesse $\dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)$ est donc tangent à la surface en $M(u_0,v_0)$. Idem pour $\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0)$.

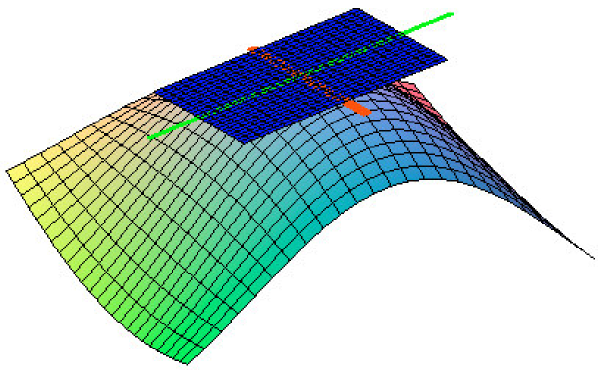
Si ces vecteurs ne sont pas colinéaires, on dit que la nappe est régulière en $M(u_0,v_0)$

Elle a alors un plan tangent en $M(u_0,v_0)$, dirigé par ces 2 vecteurs,

et le vecteur $\overrightarrow{N}=\dfrac{\partial M}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial M}{\partial v}$ est un vecteur normal à la surface.

En posant $\overrightarrow{N}=\begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$, l'équation du plan tangent est $a(x-x_0)+b(y-y_0)+c(z-z_0)=0$





4 - Aire d'une nappe paramétrée

Soit $\varphi\ U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée <u>de classe C¹</u>, <u>régulière</u>, $M(u,v)=\begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ l'image de (u,v) par φ.

Au premier ordre, $M(u_0+\alpha,v_0)\approx M(u_0,v_0)+\alpha.\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0)$, et $M(u_0,v_0+\beta)\approx M(u_0,v_0)+\beta.\dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)$

On approche donc l'aire de la cellule

$\{M(u,v)\ /\ u_0\leqslant u\leqslant u_0+\alpha\ ,\ v_0\leqslant v\leqslant v_0+\beta\}$

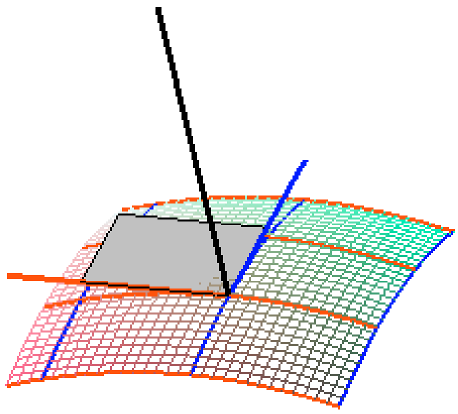
par l'aire du parallélogramme construit sur

$M(u_0,v_0)$, $\alpha\dfrac{\partial M}{\partial u}(u_0,v_0)$ et $\beta\dfrac{\partial M}{\partial v}(u_0,v_0)$.

Cette aire est $\alpha\,\beta\left\|\dfrac{\partial M}{\partial u}\wedge\dfrac{\partial M}{\partial v}\right\|=\alpha\,\beta\left\|\overrightarrow{N}\right\|$

On admet que l'aire de la nappe est

$$\boxed{A=\iint_U\left\|\frac{\partial M}{\partial u}\wedge\frac{\partial M}{\partial v}\right\|du\ dv=\iint_U\left\|\overrightarrow{N}\right\|du\ dv}$$



Exemples : Aire d'une sphère de rayon R : $A=4\pi R^2$

Aire d'un tore de rayons r et R.

5 - Intégrale d'un champ scalaire

Soit $\varphi \quad U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^3$ une nappe paramétrée <u>de classe C^1</u>, <u>régulière</u> et $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$ un champ scalaire.

Soit $M(u,v) = \begin{pmatrix} x(u,v) \\ y(u,v) \\ z(u,v) \end{pmatrix}$ l'image de (u,v) par φ et $\mathcal{S}$ e support de φ (la surface)

L'intégrale de f sur la surface φ est $\iint_U f\left(M(u,v)\right) \left\| \frac{\partial M}{\partial u} \wedge \frac{\partial M}{\partial v} \right\| du dv$.

On la note $\iint_U f\left(M\right) \left\| \overrightarrow{N} \right\| du dv$ ou encore $\int_{\mathcal{S}} f \; dS$.

Exemple : l'abscisse du centre de gravité de la surface (supposée homogène) est $x_G = \dfrac{\iint_{\mathcal{S}} x \; dS}{\iint_{\mathcal{S}} dS} = \dfrac{\iint_U x \left\| \overrightarrow{N} \right\| du dv}{\text{Aire de } \mathcal{S}}$

6 - Graphe d'une fonction de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$

Soit $f : U \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}$. Son graphe est l'ensemble des $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que $\begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \in U$ et $z = f(x,y)$.

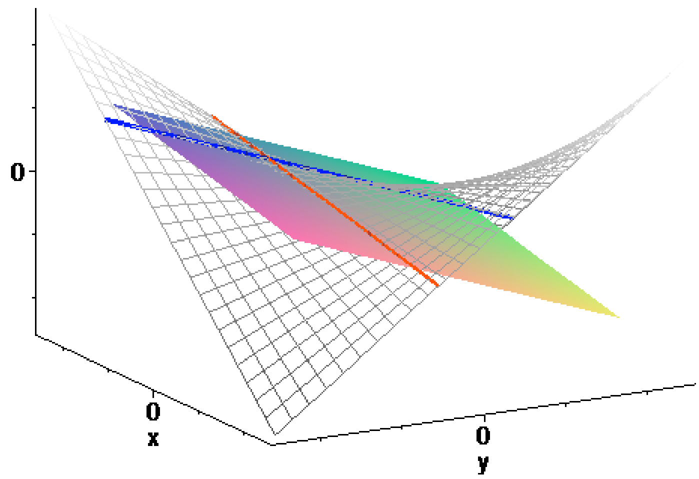
Équation paramétrique $\begin{cases} x = x \\ y = y \\ z = f(x,y) \end{cases}$ Exemple : le paraboloïde hyperbolique $z = x\,y$

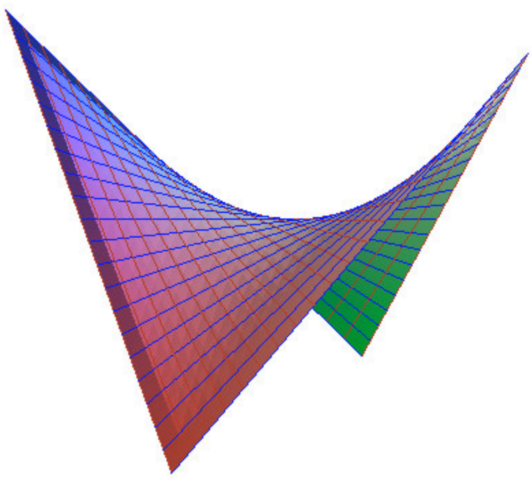
En un point régulier, $\dfrac{\partial M}{\partial x} = \begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ \dfrac{\partial f}{\partial x} \end{pmatrix}$ et $\dfrac{\partial M}{\partial y} = \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \end{pmatrix}$. Un vecteur normal est donc $\dfrac{\partial M}{\partial x} \wedge \dfrac{\partial M}{\partial y} = \begin{pmatrix} -\dfrac{\partial f}{\partial x} \\ -\dfrac{\partial f}{\partial y} \\ 1 \end{pmatrix}$

et le plan tangent a comme équation (en X, Y, Z) : $-\left(X - x\right)\dfrac{\partial f}{\partial x} - \left(Y - y\right)\dfrac{\partial f}{\partial y} + \left(Z - f(x,y)\right) = 0$.

Exemple :

le plan tangent en $\begin{pmatrix} x \\ y \\ x\,y \end{pmatrix}$ au paraboloïde $z = x\,y$ coupe le paraboloïde en 2 droites $\begin{cases} X = x \\ Y = t \\ Z = x\,t \end{cases}$ et $\begin{cases} X = t \\ Y = y \\ Z = y\,t \end{cases}$





7 - Équation cartésienne

Soit $f : \mathbb{R}^3 \to \mathbb{R}$

L'ensemble des $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3$ tels que $f(M) = f(x, y, z) = 0$ est une surface $\mathcal{S}$ définie implicitement.

Plan tangent, vecteur normal.

Si $M = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$ est un point de $\mathcal{S}$ et si $\overrightarrow{\mathrm{grad}\, f} = \begin{pmatrix} \dfrac{\partial f}{\partial x} \\ \dfrac{\partial f}{\partial y} \\ \dfrac{\partial f}{\partial z} \end{pmatrix}$ n'est pas nul en M, alors c'est un vecteur normal à $\mathcal{S}$ en M.

Exemples

	Équation cartésienne	Équations paramétriques
Sphère	$x^2 + y^2 + z^2 = R^2$	$[R\cos(\phi)\sin(\theta), R\sin(\phi)\sin(\theta), R\cos(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\pi$
Ellipsoïde	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} + \dfrac{z^2}{c^2} = 1$	$[a\cos(\phi)\sin(\theta), b\sin(\phi)\sin(\theta), c\cos(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\pi$
Hyperboloïde à 2 nappes	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = -1$	$[a\cos(\phi)\sinh(\theta), b\sin(\phi)\sinh(\theta), c\cosh(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\infty$ $[a\cos(\phi)\sinh(\theta), b\sin(\phi)\sinh(\theta), -c\cosh(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = 0..\infty$
Hyperboloïde à 1 nappe	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = +1$	$[a\cos(\phi)\cosh(\theta), b\sin(\phi)\cosh(\theta), c\sinh(\theta)], \phi = 0..2\pi, \theta = -\infty..\infty$
Cône elliptique	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} - \dfrac{z^2}{c^2} = 0$	$[a\cos(\phi)t, b\sin(\phi)t, t], \phi = 0..2\pi, t = -\infty..\infty$
Paraboloïde hyperbolique	$\dfrac{x^2}{a^2} - \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$	$[a\cosh(\phi)t, b\sinh(\phi)t, ct^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$ $[-a\cosh(\phi)t, b\sinh(\phi)t, ct^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$ $[a\sinh(\phi)t, b\cosh(\phi)t, -ct^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$ $[a\sinh(\phi)t, -b\cosh(\phi)t, -ct^2], \phi = -\infty..\infty, t = 0..\infty$
Paraboloïde elliptique	$\dfrac{x^2}{a^2} + \dfrac{y^2}{b^2} = \dfrac{z}{c}$	$[a\cos(\phi)t, b\sin(\phi)t, ct^2], \phi = 0..2\pi, t = 0..\infty$
Tore	$\left(x^2 + y^2 + z^2 - R^2 - r^2\right)^2 = 4R^2\left(r^2 - z^2\right)$ ou $\left(x^2 + y^2 + z^2 + R^2 - r^2\right)^2 = 4R^2\left(x^2 + y^2\right)$ ou $\rho = R \pm \sqrt{r^2 - z^2}$ en coord. cylindriques	$[(R + r\cos\theta)\cos\varphi, (R + r\cos\theta)\sin\varphi, r\sin\theta], \theta = 0\ ..2\pi, \varphi = 0\ ..2\pi$