# Monoïdes - Groupes

## V/ *Action d'un groupe sur un ensemble*

### *1. Définition*

Soit $(G,\star)$ un groupe d'élément neutre $e$ et $E$ un ensemble.

On dit que $G$ opère sur $E$ quand on a défini une application $\begin{array}{ccc} G\times E & \to & E \\ (g,x) & \to & \varphi_g(x) \end{array}$ telle que

- $\forall x \in E / \varphi_e(x) = x$, c'est-à-dire $\varphi_e = id_E$
- $\forall x \in E / \forall g,h \in G / \varphi_g(\varphi_h(x)) = \varphi_{g\star h}(x)$, c'est-à-dire $\forall g,h \in G / \varphi_g \circ \varphi_h = \varphi_{g\star h}$

Remarque :
Pour tout $g \in G$, l'application $\varphi_g$ est alors une bijection dans $E$ (une permutation de $E$)
et l'application $g \longrightarrow \varphi_g$ est un morphisme de groupes entre $G$ et le groupe des permutations de $E$

Notation : $\varphi_g(x)$ est parfois noté $g \bullet x$ ou même $g\,x$. Les conditions s'écrivent alors :

- $\forall x \in E / e \bullet x = x$
- $\forall x \in E / \forall g,h \in G / g \bullet (h \bullet x) = (g \star h) \bullet x$

Exemples :

- Soit $(G,\star)$ un groupe. Pour tout $g \in G$ on pose $\varphi_g : \begin{array}{ccc} G & \to & G \\ x & \to & g\star x \star g^{-1} \end{array}$
  $G$ agit ainsi sur lui-même par "conjugaison"
- Soient $(G,\star)$ un groupe et $H$ un sous-groupe. Soit $E$ l'ensemble des classes à gauche suivant $H$.
  Pour tout $g \in G$ on pose $\varphi_g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ xH & \to & (g\star x)H \end{array}$. $G$ opère ainsi sur les classes à gauche.
- Soit $GL(n)$ le groupe des matrices $n\times n$ inversibles et $M_n(\mathbb{R})$ l'ensemble des matrices $n\times n$.
  $GL(n)$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ en posant pour tout $P \in GL(n)$ $\varphi_P : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \to & P\,A\,P^{-1} \end{array}$
- Soit $GL(\mathbb{R}^2)$ le groupe des isométries vectorielles du plan. $GL(\mathbb{R}^2)$ agit sur le plan $\mathbb{R}^2$ en posant,
  pour toute isométrie $f$ et tout point $M$, $\varphi_f(M) = f.M =$ le point $M'$ tel que $\overrightarrow{OM'} = f\left(\overrightarrow{OM}\right)$

### *2. Orbite d'un élément*

Soit $(G,\star)$ un groupe opérant sur un ensemble $E$ et $x$ un élément de $E$.

L'orbite de $x$ sous l'action de $E$ est l'ensemble $Gx = \{\varphi_g(x) \ / \ g \in G\}$. On le note aussi $O(x)$.

Exemples :

- Soient $(G,\star)$ un groupe et $H$ un sous-groupe. Soit $E$ l'ensemble des classes à gauche suivant $H$.
  $G$ opère sur les classes à gauche par $\varphi_g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ xH & \to & (g\star x)H \end{array}$
  L'orbite de n'importe quelle classe sous l'action de $G$ est l'ensemble $E$ de toutes les classes.
  en effet pour tous $x$ et $y$, $\varphi_{y\star x^{-1}}(x\,H) = (y\star x^{-1}\star x)H = y\,H$

➢ $GL(n)$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ par $\varphi_P : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \to & P\ A\ P^{-1} \end{array}$

L'orbite de $A$ sous l'action de $GL(n)$ est l'ensemble des matrices semblables à $A$

Cas particulier : Orbite de $I_n$ : ..........., Orbite de $\begin{pmatrix} a & 0 \\ 0 & b \end{pmatrix} (a \neq b)$ : ...........

➢ $GL(\mathbb{R}^2)$ agit sur le plan $\mathbb{R}^2$, donc il en est de même pour les sous-groupes de $GL(\mathbb{R}^2)$.

Orbite d'un point sous l'action de $GL(\mathbb{R}^2)$ : ...........

Orbite d'un point sous l'action du sous-groupe engendré par la rotation d'angle $\frac{2\pi}{n}$ : ...........

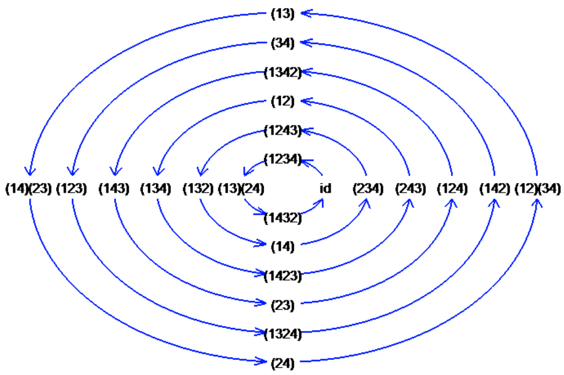
Orbite d'un point sous l'action du sous-groupe engendré par symétrie d'axe O$x$ : ...........

➢ Le groupe des applications affines bijectives agit de même sur le plan.
Orbite d'un point sous l'action du sous-groupe des rotations de centre O : ...........
Orbite d'un point sous l'action du sous-groupe des homothéties de centre O et de rapport $> 0$ : ...
Orbite d'un point sous l'action du sous-groupe engendré par la translation de vecteur $(1,1)$ : ...........
Orbite de l'origine sous l'action du sous-groupe engendré par les translations

de vecteurs $(1,0)$ et $\left(\frac{1}{2}, \frac{\sqrt{3}}{2}\right)$ : ...........

➢ $S_4$ agit sur lui-même par $\varphi_\sigma(s) = \sigma \circ s$

Les orbites sous l'action du sous-groupe engendré par le cycle $(1,2,3,4)$




**Propriétés** : Les orbites sous l'action de $E$ forment une partition de $E$.

En effet la relation $x\ \mathcal{R}\ y \Leftrightarrow y \in O(x) \Leftrightarrow \exists g \in G\ /\ y = g \star x$ est une équivalence sur $E$.

### *3. Stabilisateur d'un élément*

Soit $(G, \star)$ un groupe opérant sur un ensemble $E$ et $x$ un élément de $E$.

Le stabilisateur (ou groupe d'isotropie ) de $x$ sous l'action de $E$ est le sous-groupe de $G$ :

$I_x = \{ g \in G\ /\ \varphi_g(x) = x \}$. On le note aussi $\text{stab}(x)$.

Exemples

➢ Soient $(G, \star)$ un groupe et $H$ un sous-groupe. Soit $E$ l'ensemble des classes à gauche suivant $H$.

$G$ opère sur les classes à gauche par $\varphi_g : \begin{array}{ccc} E & \to & E \\ xH & \to & (g \star x)H \end{array}$

Le stabilisateur de n'importe quelle classe sous l'action de $G$ est le sous-groupe $H$.

En effet $\varphi_y(xH) = xH \Leftrightarrow (y \star x)H = xH \Leftrightarrow (y \star x) \in xH \Leftrightarrow \exists g \in H / y \star x = g \star x \Leftrightarrow y \in H$

- $GL(n)$ agit sur $M_n(\mathbb{R})$ par $\varphi_P : \begin{array}{ccc} M_n(\mathbb{R}) & \to & M_n(\mathbb{R}) \\ A & \to & P\,A\,P^{-1} \end{array}$

  Le stabilisateur de $A$ est l'ensemble des matrices qui commutent avec $A$
- $GL(\mathbb{R}^2)$ agit sur le plan $\mathbb{R}^2$, donc il en est de même pour les sous-groupes de $GL(\mathbb{R}^2)$.

  Le stabilisateur de O est le groupe $GL(\mathbb{R}^2)$ entier.

  Le stabilisateur d'un autre point *M* est le sous-groupe $\{id, s\}$ où *s* est la symétrie d'axe OM.
- $GL(\mathbb{R}^2)$ agit de même sur l'ensemble des triangles (non ordonnés) du plan.

  Le stabilisateur d'un triangle équilatéral centré en O est le "groupe du triangle" isomorphe à $S_3$.
- Tout groupe $(G,\star)$ agit sur lui-même par $\varphi_g(h) = g \star h$

  le stabilisateur de tout élément est le sous-groupe $\{1_G\}$

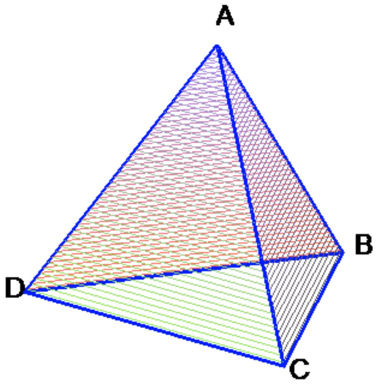
**Propriétés** :

- Le stabilisateur d'un élément de *E* sous l'action de *G* est un sous-groupe de $(G,\star)$
- Si *G* est fini, pour tout $x \in E$ le nombre d'éléments de l'orbite de *x* suivant *G* est égal à l'ordre de *G* divisé par l'ordre de son stabilisateur : $Card(O(x)) = \dfrac{\mathrm{Card}(\mathrm{G})}{Card(\mathrm{stab}(x))}$

  Preuve :
  Soit $k = Card(\mathrm{Stab}(x))$
  Soit $y \in O(x)$. On va démontrer qu'il y a exactement *k* éléments de *G* tels que $y = \varphi_g(x)$.
  * Il existe un tel *g* par définition de "$y \in O(x)$"
  * Par ailleurs soient $g$ et $h \in G$ $\varphi_g(x) = \varphi_h(x) \Leftrightarrow \varphi_{h^{-1}}(\varphi_g(x)) = \varphi_e(x) = x = \varphi_{h^{-1}\star g}(x) \Leftrightarrow h^{-1} \star g \in I_x$.
  Donc $\varphi_g(x) = \varphi_h(x) \Leftrightarrow h$ et *g* appartiennent à la même classe modulo le sous-groupe $I_x$.
  D'après la formule des classes (III.5.), toutes les classes ont le même cardinal que $I_x$ donc il y a *k* éléments $h \in G$ tels que $\varphi_g(x) = \varphi_h(x)$.
  La propriété s'en déduit par le principe du berger.
- Corollaire : Si *G* et *E* sont finis, soient $O(x_1), O(x_2), ..., O(x_n)$ les orbites de *E* sous l'action de *G*.

  Comme les orbites constituent une partition de *E*, on a $Card(E) = \sum_i \dfrac{Card(G)}{Card(\mathrm{Stab}(x_i))}$

*4. Exemple : Groupe des isométries du tétraèdre régulier*



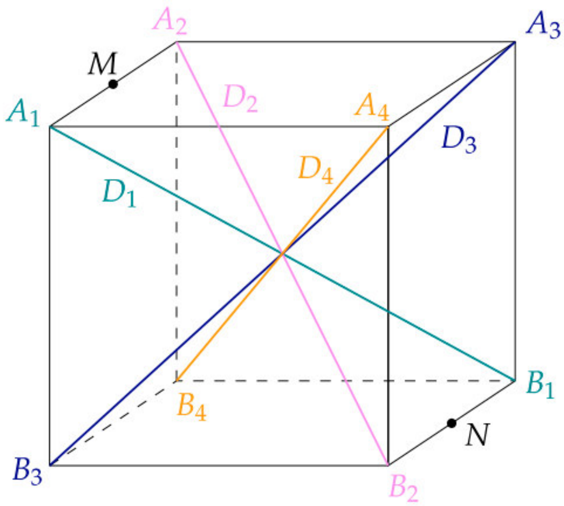

On fait agir le groupe $Isom(T)$ des isométries de l'espace euclidien laissant globalement invariant un tétraèdre régulier T sur l'ensemble des sommets $\{A,B,C,D\}$

On obtient ainsi un morphisme de groupes $\varphi$ de $Isom(T)$ sur l'ensemble des permutations de $\{A,B,C,D\}$, isomorphe au groupe $S_4$ des permutations de $\{1,2,3,4\}$

on démontre que $\varphi$ est un isomorphisme.

Donc $Isom(T)$ est isomorphe à $S_4$

*5. Exemple : Groupe des isométries du cube*




Soit $Isom(C)$ le groupe des isométries de l'espace euclidien laissant globalement invariant un cube C.

Soit $Isom^+(C)$ le sous-groupe composé des isométries directes (déterminant +1) : Ce sont les rotations.

**Une action de groupe**

On fait agir le groupe $Isom(C)$ sur l'ensemble $\{D_1,D_2,D_3,D_4\}$ des 4 "grandes" diagonales.

En effet si une isométrie $f$ laisse le cube globalement invariant, l'image d'une diagonale (segment de longueur $c\sqrt{3}$ joignant 2 sommets) doit être un segment de longueur $c\sqrt{3}$ joignant 2 sommets donc une diagonale.

On obtient ainsi un morphisme de groupes $\varphi$ de $Isom(C)$ sur le groupe $S_4$ des permutations de $\{1,2,3,4\}$.

On obtient également un morphisme de groupes $\psi$ du sous-groupe $Isom^+(C)$ sur le groupe $S_4$

Le noyau de $\psi$ est l'ensemble des rotations laissant chacune des diagonales globalement invariantes.

Si une telle rotation $r$ n'est pas l'identité, supposons (quitte à changer la numérotation) que $r(A_1)=B_1$

Alors on aurait compte tenu de la conservation des distances $r(A_2)=B_2$ et $r(A_4)=B_4$

Comme le centre $O$ est invariant, l'image du repère affine $\left(O,\overrightarrow{OA_1},\overrightarrow{OA_2},\overrightarrow{OA_4}\right)$ serait le repère $\left(O,\overrightarrow{OB_1},\overrightarrow{OB_2},\overrightarrow{OB_4}\right)$ et donc $r$ serait l'homothétie de rapport $-1$ (symétrie $S_O$ par rapport à l'origine), ce qui est impossible car $\det(S_O)=-1$.

Donc $Ker(\psi)=\{Id\}$ et par suite $\psi$ est injective. Remarque : $Ker(\varphi)=\{Id,S_0\}$

Pour montrer que $\psi$ est surjective, il suffit de montrer que chaque transposition de $S_4$ est l'image par $\psi$ d'une rotation laissant le cube globalement invariant. En effet toute permutation est produit de transpositions.

Par exemple, pour la transposition $(1,2)$, on cherche une rotation qui amène la diagonale $D_1$ sur la diagonale $D_2$ en laissant chacune des diagonales $D_3$ et $D_4$ globalement invariantes.

La rotation d'angle $\pi$ autour de l'axe passant par les milieux des arêtes $[A_1A_2]$ et $[B_1B_2]$ est une solution (d'ailleurs la seule car $\psi$ est injective )

Ainsi $\psi$ est un isomorphisme de $Isom^+(C)$ sur $S_4$. $Isom^+(C)$ a donc 24 éléments.

$Isom(C)$ est donc composé de 24 rotations et des 24 composées de ces rotations par $S_O$. Il est d'ordre 48.

$$Isom(C)\cong Isom^+(C)\times\{Id,S_O\}\cong S_4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$$

Les 24 rotations sont :

l'application identité, qui est une rotation (d'angle nul et d'axe quelconque) ;
3 demi-tours d'axe passant par le centre de deux faces opposées (3 axes possibles) ;
6 quart de tours d'axe passant par le centre de deux faces opposées (3 axes possibles et 2 angles possibles) ;
6 demi-tours d'axe passant par les milieux de deux arêtes opposées (6 axes possibles) ;
8 tiers de tours d'axe passant par deux sommets opposés (4 axes possibles et 2 angles possibles).

Les 24 isométries négatives sont respectivement :

la symétrie centrale
3 symétries par rapport à un plan passant par le centre du cube et parallèle à une face (3 plans possibles) ;
6 composées des symétries précédentes avec un quart de tour d'axe perpendiculaire au plan de symétrie (3 plans possibles et 2 angles possibles) ;
6 symétries par rapport à un plan passant par deux arêtes opposées (6 plans possibles) ;
8 composées d'un sixième de tour d'axe passant par deux sommets opposés avec la symétrie par rapport au plan passant par le centre du cube et perpendiculaire à cet axe (4 axes possibles et 2 angles possibles).
Le plan de symétrie intersecte les arêtes du cube en formant un hexagone régulier.

https://www.wikiwand.com/fr/Cube

**Un autre point de vue :**

Le cube contient 2 tétraèdres réguliers, image l'un de l'autre par l'homothétie $S_O$ de rapport -1 .

Il y a donc 2 sortes d'isométries du cube :

- Celles qui conservent chacun des tétraèdres : ce sont les isométries du tétraèdre.
- Les composées des précédentes par $S_O$ : celles qui envoient chacun des tétraèdres sur l'autre.

Donc $Isom(C)\cong Isom(T)\times\{Id,S_O\}\cong S_4\times\mathbb{Z}/2\mathbb{Z}$