Algèbre et combinatoire
Examen final′ – 2e semestre

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **4** questions équipondérées non ordonnées.
- Explicitez vos raisonnements, soignez votre rédaction, et surtout amusez-vous bien !

♣ – Laguerre, Laguerre

a) Montrer que l'application $f \mapsto T(f)$ définie par

$$T(f)(x) = xf''(x) + (1-x)f'(x)$$

est un endomorphisme de $\mathbf{Q}[x]_{\leqslant 3}$ et en donner une représentation matricielle.

b) Déterminer une base formée de vecteurs propres pour T.

♢ – Nim a varié

Considérons une variante du jeu de Nim multi-tas dans laquelle les coups permis consistent à :

- soit retirer un nombre pair (strictement positif) d'allumettes de l'un des tas ;
- soit ajouter ou retirer une seule allumette d'un tas contenant un nombre impair d'allumettes.

a) Montrer que la valeur de Sprague-Grundy d'un tas à n allumettes pour ces règles est donné par :

n	$6k$	$6k+1$	$6k+2$	$6k+3$	$6k+4$	$6k+5$
$g(n)$	$3k$	$3k+2$	$3k+1$	$3k$	$3k+2$	$3k+1$

$(k \geqslant 0)$.

b) On vous présente trois tas à 5, 6, 7 allumettes. Que jouez-vous ?

♠ – Doublons

a) Soit V l'espace vectoriel des séries entières $\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \in \mathbf{Q}[\![x]\!]$ dont les coefficients satisfont la récurrence

$$a_{n+1} = 2a_n \qquad (n \geqslant 1).$$

Montrer que $\beta = \left(1, \dfrac{x}{1-2x}\right)$ est une base de V.

b) Soit $L \subseteq \{\mathtt{a}, \mathtt{b}, \mathtt{c}\}^*$ l'ensemble des mots ne contenant aucun doublon $\mathtt{aa}$, $\mathtt{bb}$ ou $\mathtt{cc}$. Si ℓ_n désigne le nombre de mots de longueur n appartenant à L, montrer que la série $\ell(x) = \sum \ell_n x^n$ appartient à V et donner ses coordonnées par rapport à β. Quel est son rayon de convergence ?

♡ – Toujours Laguerre

a) Montrer que l'application

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty e^{-x} f(x)\, g(x)\, \mathrm{d}x$$

est un produit scalaire sur l'espace $\mathbf{R}[x]$ des polynômes et évaluer les produits $\langle x^i, x^j \rangle$.

b) Calculer la distance pour ce produit scalaire entre x^3 et le sous-espace $\mathbf{R}[x]_{\leqslant 2}$.