Chapitre 1 - Electrostatique

I. Forces, champs et potentiels électriques

1. Hypothèses de la charge électrique

On peut attribuer une charge électrique (ou quantité d'électricité) à toute particule élémentaire. Si cette particule est indifférente aux phénomènes électriques, la charge électrique attribuée à cette particule est égale à zéro.

- La charge électrique est une valeur algébrique (elle est positive ou négative).
- La charge électrique est indépendante du référentiel d'étude.
- La charge électrique est une grandeur conservative, c'est-à-dire que la charge électrique totale d'un système isolé est constante, quelles que soient les transformations subies par ce système (figure 1).

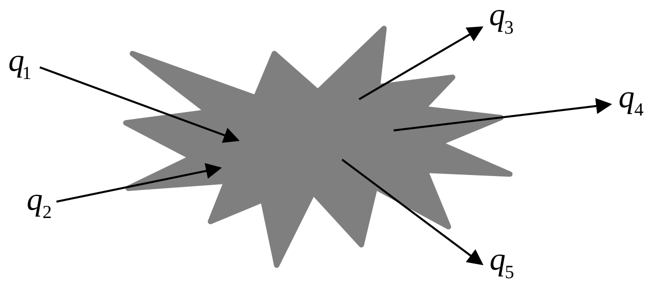

Figure 1 : Peu importe la transformation, la somme des charges électriques avant cette transformation est égale à la somme des charges électriques après. Ici, $q_1+q_2 = q_3+q_4+q_5$

2. Force électrique : force de Coulomb

On observe qu'une particule possédant une charge électrique non nulle exerce une action sur toute autre particule de charge électrique non nulle. Cette action est attractive si les charges sont de signe contraire et répulsive si les charges sont de même signe exemple donné sur la figure 2.

Soit M la position d'une particule de charge électrique notée q et N la position d'une particule de charge électrique notée q'.

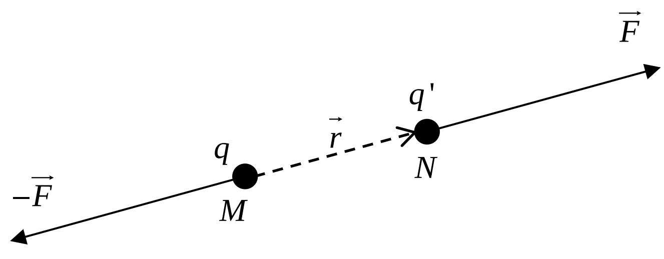

Figure 2 : interaction répulsive entre deux charges électriques de même signe.

L'action exercée par la particule de charge q sur celle de charge q' est modélisée par le vecteur force de Coulomb $\vec{F}$. Cette force a pour direction la droite (MN). Elle est dans le sens du vecteur $\overrightarrow{MN} = \vec{r}$ si les charges q et q' sont de même signe, dans le sens contraire sinon.

Le principe d'« action-réaction » dit que la particule de charge électrique q' exerce alors une force $-\vec{F}$ sur la particule de charge électrique q.
On remarque que l'intensité de cette force est proportionnelle à q mais aussi à q'. L'intensité est alors proportionnelle au produit qq' et la constante de proportionnalité est obligatoirement positive pour rendre compte de l'attraction dans le cas de charges de même signe. Nous avons :

$$F = \underset{>0}{Cste} \times \left(qq'\right)$$

Pour une distance plus grande, la force est plus faible et l'expérience montre qu'elle décroit comme l'inverse du carré de la distance. C'est également le cas de la force gravitationnelle de Newton et c'est pour cette raison que la force électrostatique est dite « force Newtonienne ». Nous obtenons pour une distance r = MN donnée et fixe :

$$F = k \times \frac{qq'}{r^2}$$

Avec k une nouvelle constante positive que l'expérience donne égale à 9.10^9 $m.F^{-1}$ (mètre/Farad)

Par la suite, il s'avérera plus aisé d'utiliser une autre constante, appelée permittivité du vide et notée ε_0, telle que $k = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}$.

L'expression du vecteur force de Coulomb modélisant l'action qu'exerce une particule de charge électrique q et située en un point M, sur une particule de charge électrique q' placée en un point N est :

$$\vec{F} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{qq'}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

(Force de Coulomb)

Avec le vecteur $\vec{r} = \overrightarrow{MN}$ et le vecteur unitaire $\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$ qui a donc la direction et le sens du vecteur $\overrightarrow{MN}$

3. Champ électrique : loi de Coulomb

La question que le physicien va se poser est de savoir quelle information est échangée entre les deux particules pour qu'elles aient chacune « conscience » de la présence et de la charge électrique de l'autre et ainsi de s'attirer ou de se repousser. Autrement dit, comment la particule chargée placée en M signale-t-elle sa présence en tous points de l'univers et dans notre cas particulier au point N ?

A ce niveau, nous allons nous contenter de modéliser cette information émise par la particule vers tous les points de l'univers, par un champ de vecteur appelé « *champ électrique* ». Au point N ce champ électrique est représenté par le vecteur $\vec{E}$ tel que sur la figure 3.

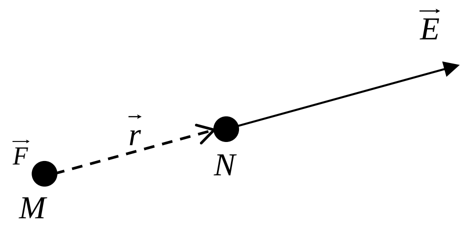

Figure 3 : vecteur $\vec{E}$ du champ électrique créé au point N par une charge électrique « q » en un autre point M dans le cas q>0.

En notant $\vec{r}$ le vecteur $\overrightarrow{MN}$, l'expression de $\vec{E}$ est :

$$\vec{E} = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{q}{r^2}\left(\frac{\vec{r}}{r}\right)$$

(Loi de Coulomb)

Les propriétés du champ électrique créé par une charge ponctuelle sont :

1er : Quelle que soit la position du point N, la direction du vecteur $\vec{E}$ est la droite (MN). On dit que le champ de vecteur créé par la particule de charge q est radial (figure 4).

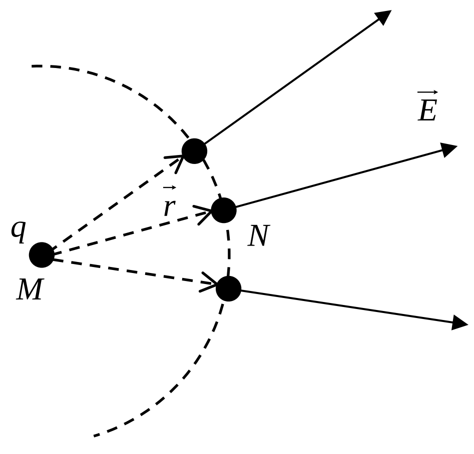

Figure 4 : le champ électrique est un champ radial.

2[e] : La direction du vecteur $\vec{E}$ est dans le sens du vecteur $\overrightarrow{MN}$ (centrifuge) lorsque q est positif et dans le sens inverse (centripète) sinon (figure 5).

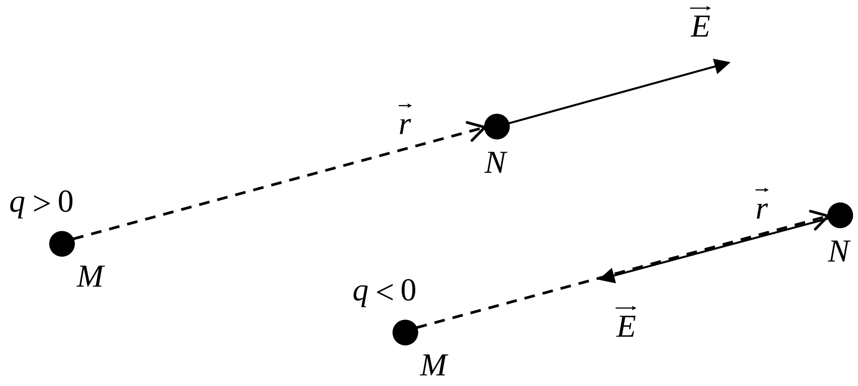

Figure 5 : le champ électrique créé par une charge positive est centrifuge. Il est centripète si la charge est négative.

3[e] : L'intensité du vecteur est proportionnelle à la valeur absolue de la charge électrique $|q|$ et inversement proportionnelle au carré de la distance (c'est un champ Newtonien)

$$E = \frac{1}{4\pi\varepsilon_0}\frac{|q|}{r^2}$$

La force de Coulomb exercée par la particule de charge q (en M) sur une particule de charge q' placée en N est alors donnée par l'équation :

$$\vec{F} = q'\vec{E}$$

Le vecteur force électrique $\vec{F}$ et le vecteur $\vec{E}$ sont de même sens lorsque la charge q' est positive et en sens inverse sinon.

Le lecteur vérifiera que deux particules de charge électrique de même signe se repoussent et que deux particules de charge électrique de signe contraire s'attirent.

Lorsque plusieurs particules chargées électriquement (de charge électrique q_1, q_2, q_3, …) sont présentes (aux points M_1, M_2, M_3, …), elles créent chacune le champ électrique qu'elles créeraient si elles étaient seules. On peut donc exprimer en un point N les vecteurs $\vec{E_1}$, $\vec{E_2}$, $\vec{E_3}$, … dus à chacune des charges. En plaçant au point N une particule de charge q', cette particule subit les forces $\vec{F_1} = q'\vec{E_1}$, $\vec{F_2} = q'\vec{E_2}$, $\vec{F_3} = q'\vec{E_3}$, …. La force totale $\vec{F}$ exercée sur la particule peut alors être notée :

$$\vec{F} = q'\left(\vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + ...\right) = q'\vec{E}$$

Un exemple d'additivité des vecteurs est représenté sur la figure 6.

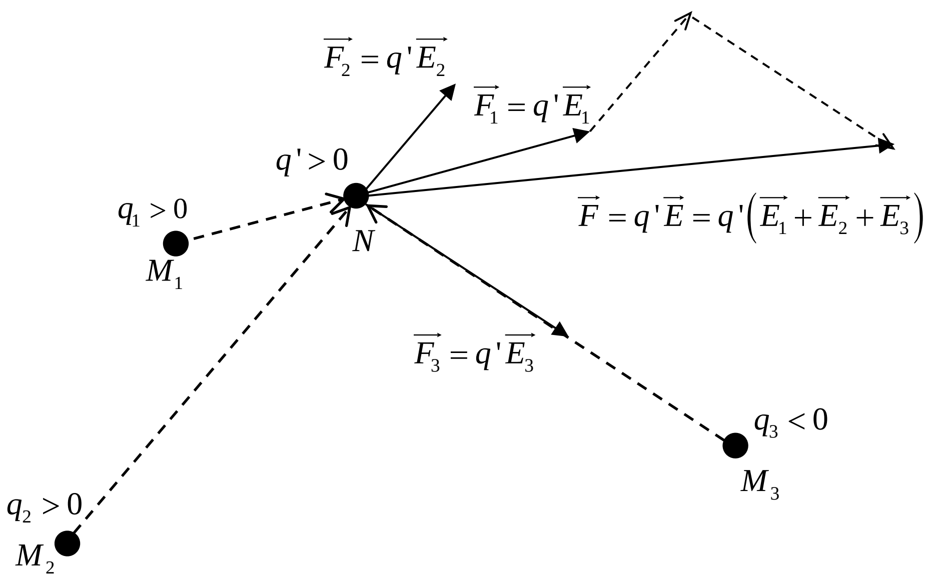

Figure 6 : le champ électrique total est la somme des champs électriques créés par chaque particule chargée électriquement.

Imaginons que ces vecteurs soient orientés dans l'espace et non dans un plan comme ci-dessus, on se rend compte que la détermination de la force totale exercée sur q', connaissant les coordonnées spatiales des positions des particules et la valeur de leur charge, sera rapidement compliquée et pénible.

Il sera alors plus aisé d'exprimer le potentiel électrique et d'en déduire le champ électrique

4. Travail de la force de Coulomb

Rappelons l'expression du travail d'une force $\vec{F}$ lors d'un déplacement infinitésimal décrit par le vecteur $\overrightarrow{d\ell}$. Ce travail, alors lui-même infinitésimale et noté dW, est égal au produit scalaire $\vec{F}.\overrightarrow{d\ell}$.

Dans le cas de la force de Coulomb exercée sur une particule de charge q, nous pouvons écrire :

$$dW = \vec{F}.\overrightarrow{d\ell} = q\vec{E}.\overrightarrow{d\ell} = q.dc$$

Où $dc = \vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$ est par définition la « circulation élémentaire du vecteur champ électrostatique le long du déplacement $\overrightarrow{d\ell}$ ».

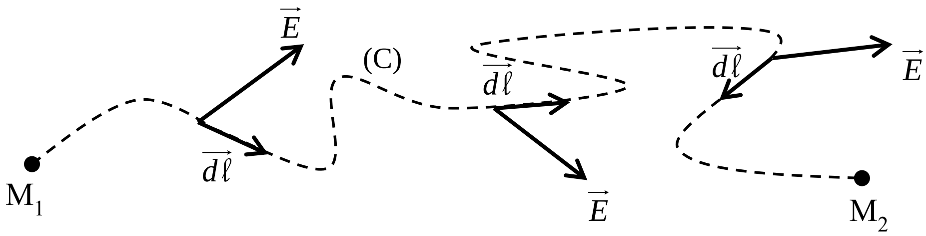

Figure 7 : vecteur du champ électrique $\vec{E}$ et vecteur déplacement élémentaire $\vec{d\ell}$ en différents points du chemin (C) entre les points M_1 et M_2.

Le travail de la force de Coulomb le long d'un chemin (C) d'un point de départ M_1 à un point d'arrivée M_2 (voir figure 7) est la somme des travaux infinitésimaux le long de ce chemin :

$$W = \int_{M_1}^{M_2} dW = \int_{M_1}^{M_2} \vec{F}.\vec{d\ell} = \int_{M_1}^{M_2} q\vec{E}.\vec{d\ell} = q\int_{M_1}^{M_2} dc$$

5. Potentiel électrique

On définit la fonction « potentiel électrostatique », notée V, telle que :

$$dV = -dc = -\vec{E}.\vec{d\ell}$$

Lors de la circulation élémentaire du champ électrique le long de $\vec{d\ell}$, cette circulation se fait d'un point où le potentiel est V(r) vers un point où le potentiel est V(r+dr).
Dans le cas d'une charge unique à l'origine du champ électrique, on peut écrire $\vec{E}.\vec{d\ell} = E.dr$ lorsque la charge est positive (figure 8), mais on a $\vec{E}.\vec{d\ell} = -E.dr$ lorsque la charge est négative (figure 9). J'attire l'attention sur le fait que E est l'intensité du vecteur champ électrique et par définition positive !

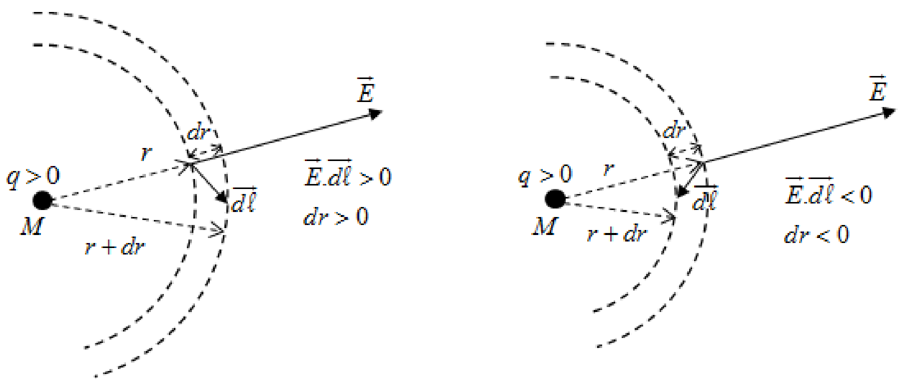

Figure 8 : dans les 2 cas de figure où q > 0 nous avons toujours le produit scalaire $\vec{E}.\vec{d\ell}$ et dr qui sont de même signe et donc $\vec{E}.\vec{d\ell} = E.dr$.

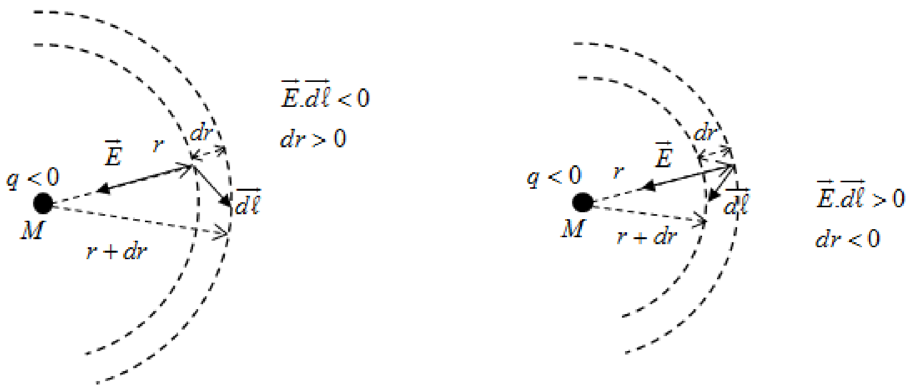

Figure 9 : dans les 2 cas de figure où q < 0 nous avons toujours le produit scalaire $\vec{E}.\vec{d\ell}$ et dr qui sont de signe opposé et donc $\vec{E}.\vec{d\ell} = -E.dr$.

En reprenant la définition $dV = -\vec{E}.\vec{d\ell}$ il vient :

$$\begin{cases} \text{pour } q > 0 \quad \Rightarrow \quad E = -\dfrac{dV}{dr} \quad ; \quad \dfrac{dV}{dr} < 0 \\ \text{pour } q < 0 \quad \Rightarrow \quad E = +\dfrac{dV}{dr} \quad ; \quad \dfrac{dV}{dr} > 0 \end{cases}$$

Lorsque la charge électrique à l'origine du champ est positive, la fonction potentiel électrostatique qui lui est associée diminue donc lorsque r augmente. Au contraire, elle augmente en même temps que r lorsque la charge électrique est négative.

Remarquons que dans tous les cas, le vecteur champ électrostatique est dirigé dans le sens des potentiels décroissants.
De plus, si pour un déplacement dr la variation de potentiel est nulle (dV = 0), alors E = 0. Ce qui se traduit encore par le fait que le vecteur champ électrique est perpendiculaire aux surfaces équipotentielles.

L'expression du potentiel électrostatique créé par une charge électrique ponctuelle q qui vérifie toutes ces propriétés est :

$$V(r) = \frac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cste \qquad \text{avec } Cste \in \mathbb{R}$$

Où nous prenons bien la valeur algébrique de la charge électrique et non sa valeur absolue comme c'était le cas dans l'expression de l'intensité du champ électrique.

Nous avons alors :

$$\begin{cases} \text{pour } q > 0 \quad \Rightarrow \quad E = -\dfrac{d\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cste\right)}{dr} = \dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \\ \text{pour } q < 0 \quad \Rightarrow \quad E = +\dfrac{d\left(\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r} + Cste\right)}{dr} = -\dfrac{q}{4\pi\varepsilon_0 r^2} = \dfrac{|q|}{4\pi\varepsilon_0 r^2} \end{cases}$$

Il est courant de poser le potentiel électrostatique comme nul à l'infini et donc de poser Cste = 0, ce que nous faisons par la suite.

En coordonnées cartésiennes, nous définissons en tous points M de coordonnées (x,y,z) un déplacement infinitésimal $\overrightarrow{d\ell}$, un vecteur champ électrique $\vec{E}(x,y,z)$ et son potentiel électrostatique associé $V(x,y,z)$. Soit le repère d'espace $(O,\vec{i},\vec{j},\vec{k})$ nous avons :

$$\begin{cases} \overrightarrow{d\ell} = dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k} \\ \vec{E}(x,y,z) = Ex(x,y,z)\vec{i} + Ey(x,y,z)\vec{j} + Ez(x,y,z)\vec{k} \\ V(x,y,z) \Rightarrow dV(x,y,z) = \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}dx + \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}dy + \dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}dz \end{cases}$$

De la définition $dV = -\vec{E}.\overrightarrow{d\ell}$ il vient alors :

$$\vec{E}(x,y,z).\overrightarrow{d\ell} = -dV(x,y,z)$$

$$\left(Ex(x,y,z)\vec{i} + Ey(x,y,z)\vec{j} + Ez(x,y,z)\vec{k}\right).\left(dx\vec{i} + dy\vec{j} + dz\vec{k}\right) = -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}dz\right)$$

$$Ex(x,y,z)dx + Ey(x,y,z)dy + Ez(x,y,z)dz = -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}dx + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}dy + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}dz\right)$$

Et par identification :

$$\begin{cases} Ex(x,y,z) = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial x} \\ Ey(x,y,z) = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial y} \\ Ez(x,y,z) = -\dfrac{\partial V(x,y,z)}{\partial z} \end{cases}$$

Le vecteur du champ électrique au point M peut alors s'écrire :

$$\vec{E}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial V(x,y,z)}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial V(x,y,z)}{\partial z}\vec{k}\right)$$

Il est courant de modifier cette écriture pour finalement alléger la notation. Dans un premier temps on écrit :

$$\vec{E}(x,y,z) = -\left(\frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}\right)V(x,y,z)$$

(Ce qui reviendrait à factoriser la fonction $V(x,y,z)$, ce qui n'est bien évidemment pas le cas.)

Dans un deuxième temps on utilise un pseudo-vecteur appelé « opérateur nabla » et noté $\vec{\nabla}$ dont la définition est $\vec{\nabla} = \frac{\partial}{\partial x}\vec{i} + \frac{\partial}{\partial y}\vec{j} + \frac{\partial}{\partial z}\vec{k}$. Nous avons alors :

$$\vec{E}(x,y,z) = -\vec{\nabla}.V(x,y,z)$$

Il est encore plus fréquent de dire que le champ électrique est égal à « moins » le gradient de la fonction potentiel électrostatique, ce qui est noté :

$$\vec{E}(x,y,z) = -\overrightarrow{grad}\,V(x,y,z)$$

Comme nous l'avons dit plus haut, dans le cas de plusieurs particules chargées électriquement, il est bien plus aisé d'exprimer la fonction potentiel électrostatique puis d'en déduire le vecteur champ électrique grâce à cette égalité.

Soit plusieurs particules chargées électriquement, on peut exprimer en un point N les vecteurs $\vec{E}_1$, $\vec{E}_2$, $\vec{E}_3$, … dus à chacune des charges, ainsi que les potentiels électrostatiques V_1, V_2, V_3, …

De l'additivité des vecteurs champs électrostatiques il résulte l'additivité des potentiels électrostatiques. En effet :

$$
\begin{aligned}
dV = -\vec{E}.\vec{d\ell} &= -\left(\vec{E_1} + \vec{E_2} + \vec{E_3} + \ldots\right).\vec{d\ell} \\
&= -\vec{E_1}.\vec{d\ell} - \vec{E_2}.\vec{d\ell} - \vec{E_3}.\vec{d\ell} + \ldots \\
&= dV_1 + dV_2 + dV_3 + \ldots \\
&= d\left(V_1 + V_2 + V_3 + \ldots\right)
\end{aligned}
$$

Et finalement : $V = V_1 + V_2 + V_3 + \ldots$

6. Représentation d'un champ électrique à partir du potentiel

7. Energie électrostatique

Soit l'univers rempli de charges électriques créant en tout point un potentiel électrostatique et un champ électrique. Quelle énergie doit-on dépenser pour amener une particule de charge q depuis l'infini (où le potentiel électrostatique est nul) jusqu'en un point M où le potentiel est V_M , et cela en luttant contre les forces de coulomb (figure 10) ? Cette énergie que nous devons fournir sera alors « emmagasinée » par la particule sous forme d'énergie potentielle électrostatique.

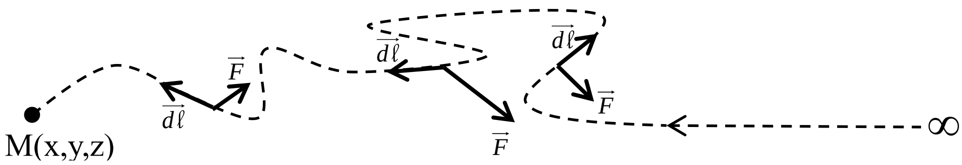

Figure 10 : exemple de chemin permettant d'amener une particule depuis l'infini jusqu'au point M.

L'expression du travail de la force de Coulomb est :

$$W_{\infty \to M} = \int_{\infty}^{M} dW = \int_{\infty}^{M} -q.dV = -q.\left(V_M - 0\right) = -q.V_M$$

L'énergie potentielle d'une particule de charge électrique q au point où le potentiel électrostatique est V est alors :

$$E_p = qV$$

Si $q < 0$, la force de Coulomb a un travail moteur et l'énergie potentielle de la particule est alors négative.