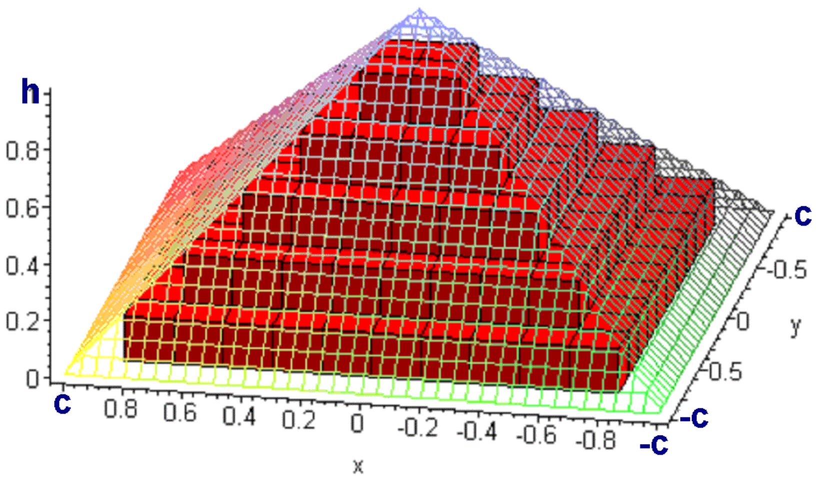
CIR_2 CNB_2

Intégrales multiples
Résumé de cours

I/ Intégrales doubles

Introduction : volume de la pyramide



On approche la pyramide avec des pavés c/n x c/n x h/n

Nombre de cubes sous la pyramide : $4\left((n-1)^2+(n-2)^2+\ldots+2^2+1^2\right)=4\dfrac{n(n-1)(2n-1)}{6}$

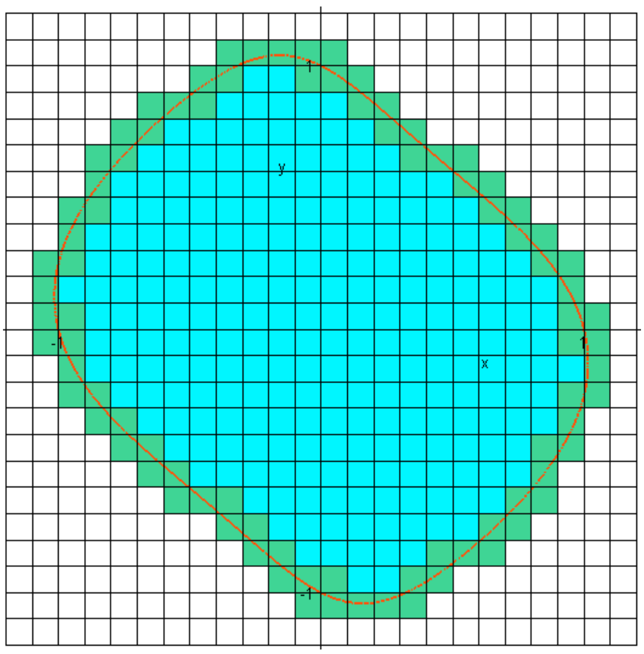
Volume des cubes sous la pyramide : $\dfrac{2n(n-1)(2n-1)}{3}\dfrac{hc^2}{n^3}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{4}{3}hc^2$

Nombre de cubes au-dessus de la pyramide : $4\left(n^2+(n-1)^2+\ldots+2^2+1^2\right)=4\dfrac{n(n+1)(2n+1)}{6}$

Volume des cubes au-dessus de la pyramide : $\dfrac{2(n+1)(2n+1)}{3n^2}\xrightarrow[n\to\infty]{}\dfrac{4}{3}hc^2=\dfrac{\text{hauteur x aire de base}}{3}$

1. Parties mesurables du plan

Une partie bornée D est dite mesurable (quarrable) si, en découpant un rectangle contenant D en n^2 rectangles, l'aire totale des rectangles intérieurs à D et l'aire totale des rectangles recouvrant D ont une limite commune A. On appelle aire de D cette limite.



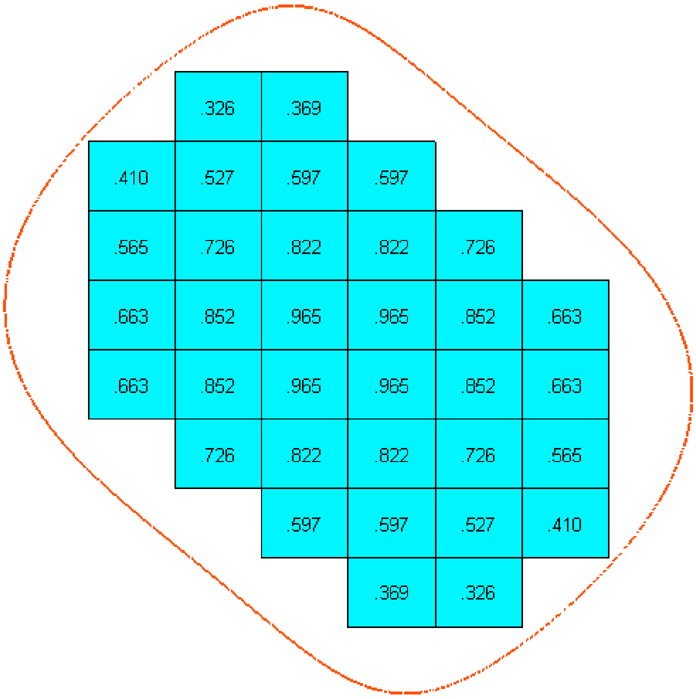
Carrés de côté 0.1 :
244 carrés intérieurs
88 carrés chevauchant la frontière
2.44 < Aire < 3.32

Carrés de côté 0.02 :
6836 carrés intérieurs
416 carrés chevauchant la frontière
2.7344 < Aire < 2.9008

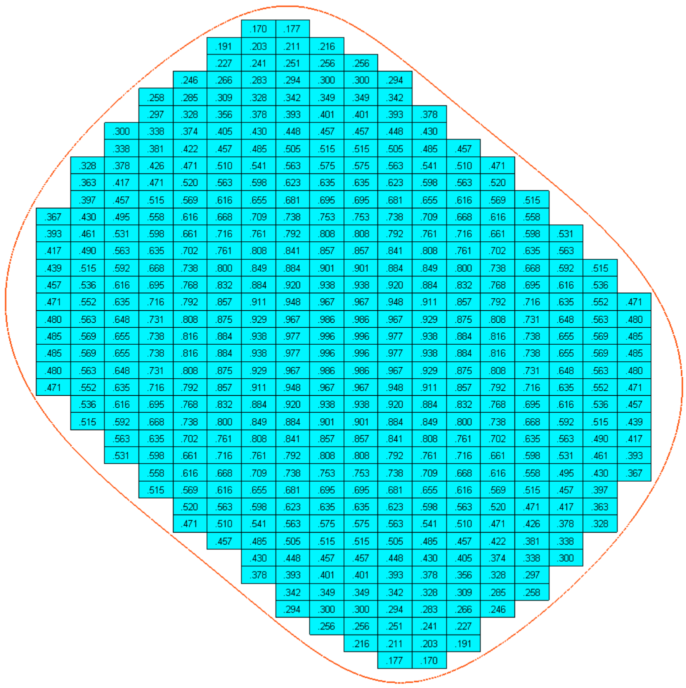
Carrés de côté 0.005 :
111908 carrés intérieurs
1654 carrés chevauchant la frontière
2.7977 < Aire < 2.8391

2. Notion d'intégrale double

Soient D une partie du plan $\mathbb{R}^2$ et f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.
Pour toute subdivision d'un rectangle contenant D en cellules rectangulaires, on définit une **somme de Riemann** :
Somme des aires des cellules intérieures à *D*, chacune multipliée par la valeur de *f* en un point arbitraire de la cellule.



somme de Riemann = 1.1448



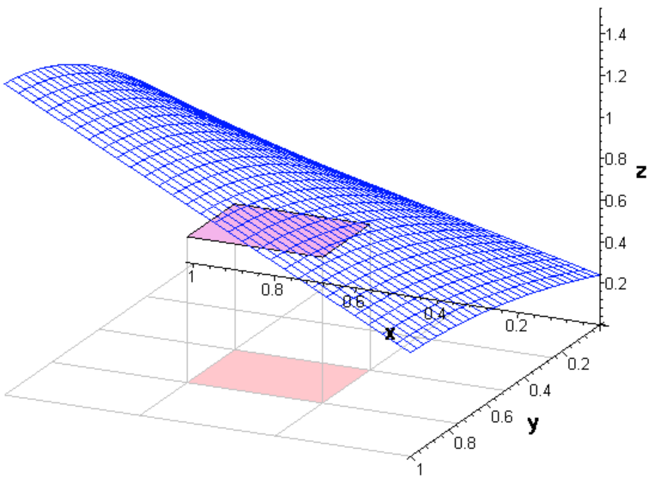
somme de Riemann = 1.3947

avec des rectangles 0.01×0.01 somme de Riemann = 1.4892	avec des rectangles 0.002×0.002 somme de Riemann = 1.4953

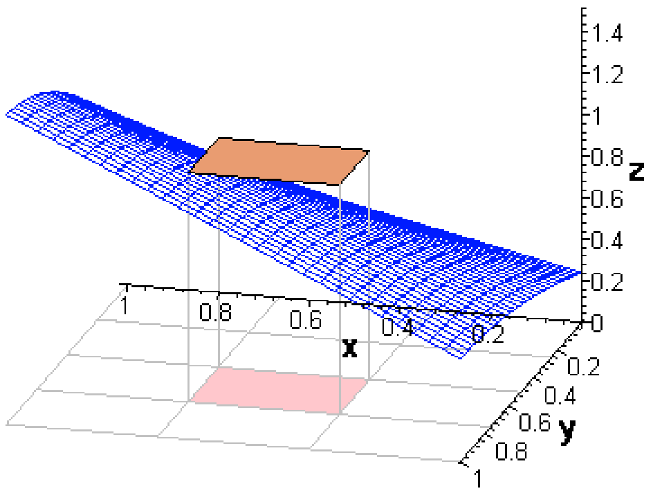
Si f est **intégrable** (au sens de Riemann) sur D , ces sommes de Riemann ont une limite quand la longueur et la largeur des cellules tend vers 0.
Cette limite est notée $\iint_D f$ ou $\iint_D f(x,y)\, dx\, dy$

Interprétation géométrique pour une fonction positive

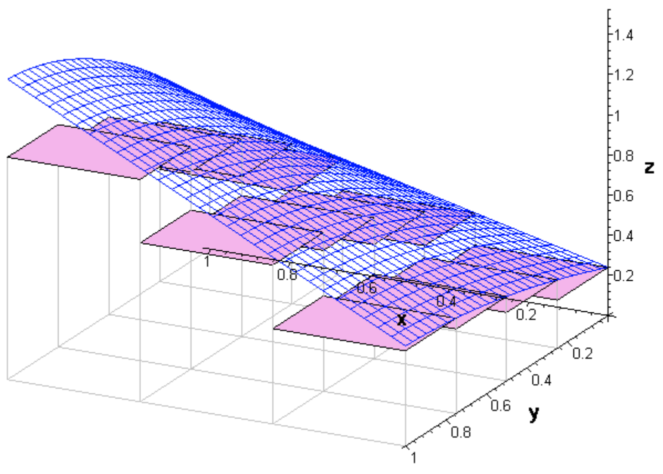
Cellule élémentaire valeur minimale



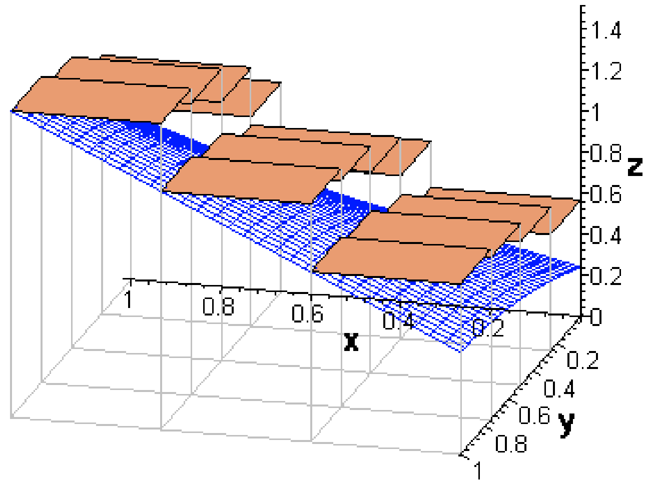
Cellule élémentaire valeur maximale



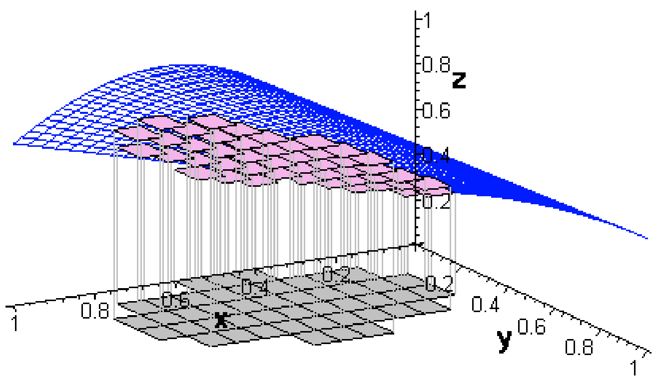
Somme de Riemann inférieure sur un rectangle



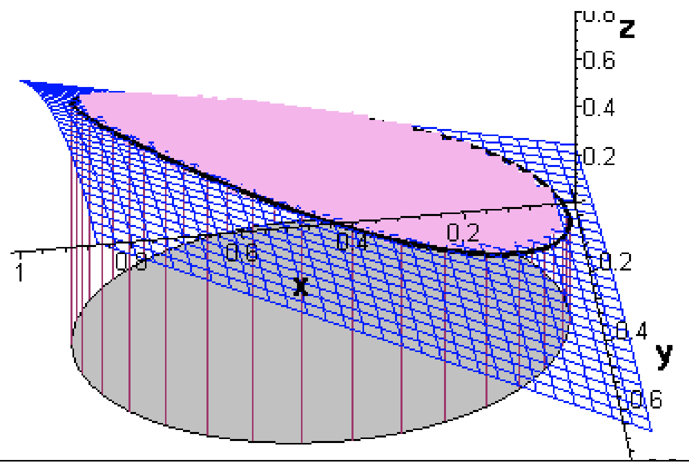
Somme de Riemann supérieure sur un rectangle



Somme de Riemann inférieure sur un domaine



Intégrale sur un domaine



Propriétés :

Linéarité : Si f et g sont intégrables sur D alors $\lambda f+g$ également et $\iint_D \lambda f+g=\lambda\iint_D f+\iint_D g$

Positivité : Si f est intégrable sur D et $\forall(x,y)\in D\,/\,f(x,y)\geqslant 0$ alors $\iint_D f\geqslant 0$

Si f et g sont intégrables sur D et $\forall(x,y)\in D\,/\,f(x,y)\leqslant g(x,y)$ alors $\iint_D f\leqslant\iint_D g$

Si $|f|$ et f sont intégrables sur D alors $\left|\iint_D f\right|\leqslant\iint_D |f|$

Additivité par rapport au domaine :

Si deux domaines D_1 et D_2 sont tels que $D_1\cap D_2$ est d'intérieur vide,
alors pour toute fonction f intégrable sur D_1 et sur D_2, $\iint_{D_1\cup D_2} f=\iint_{D_1} f+\iint_{D_2} f$

Cas particulier : La fonction constante 1 est intégrable sur toute partie mesurable et $\iint_D 1=$ aire de D

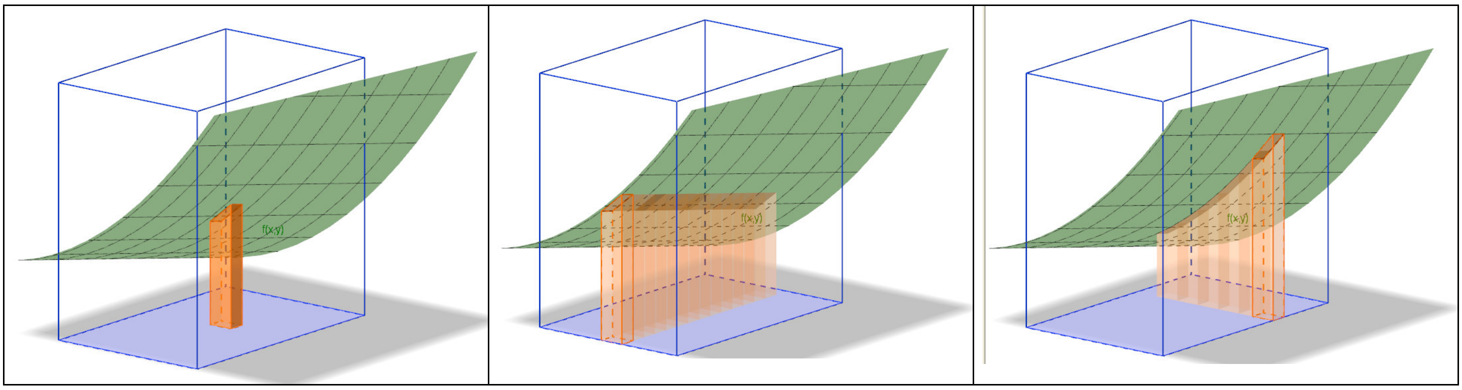
Théorème : Si *f* est une fonction continue et *D* une partie mesurable alors *f* est intégrable sur *D*.

Propriété : Si *D* est une partie mesurable, alors son intérieur $\overset{\circ}{D}$ et son adhérence $\bar{D}$ sont mesurables, et si *f* est une fonction continue sur $\bar{D}$ alors $\int_D f=\int_{\overset{\circ}{D}} f=\int_{\bar{D}} f$

3. Calcul d'intégrale double : Théorème de Fubini

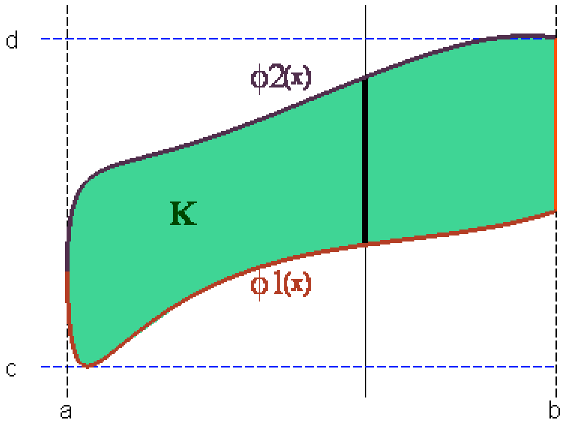
Intégrale sur un rectangle : Si f est continue sur $[a,b]\times[c,d]$,

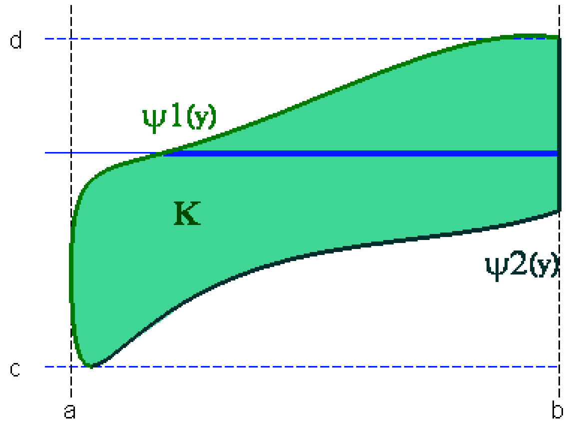
$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} f = \int_a^b \left(\int_c^d f(x,y)\, dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_a^b f(x,y)\, dx \right) dy$$



Compact simple : C'est un compact K tel qu'il existe des fonctions continues $\phi 1, \phi 2, \psi 1, \psi 2$ telles que

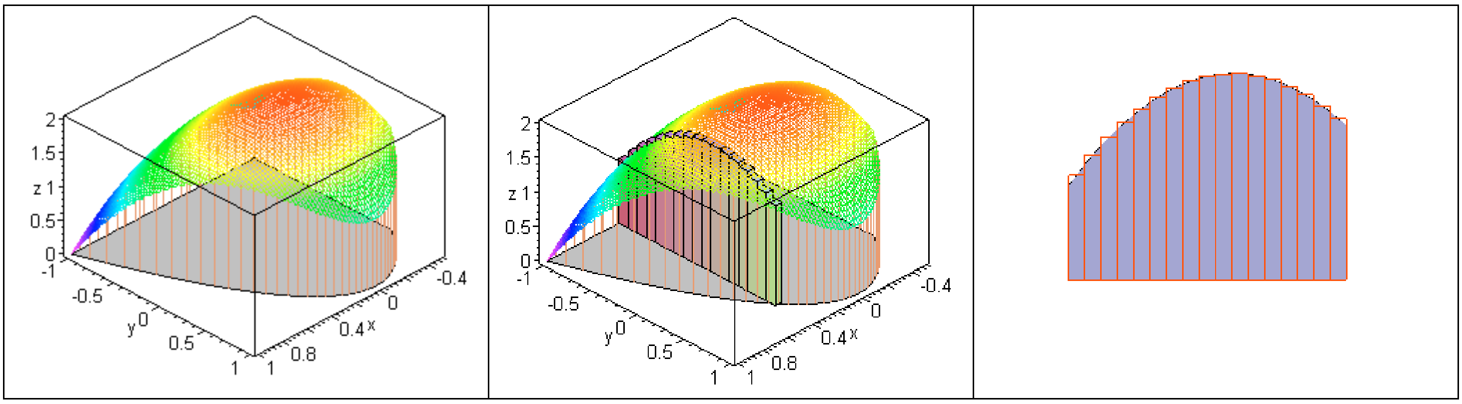
$$K = \left\{ (x,y) \in [a,b]\times[c,d] \;/\; \phi_1(x) \leqslant y \leqslant \phi_2(x) \;/\; \psi_1(y) \leqslant x \leqslant \psi_2(y) \right\}$$





Découpage à x constant $\qquad \iint_K f = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} f(x,y)\, dy \right) dx$

Découpage à y constant $\qquad \iint_K f = \int_c^d \left(\int_{\psi_1(y)}^{\psi_2(y)} f(x,y)\, dx \right) dy$



Cas particulier : Variables séparées

<u>Si</u> $f(x,y)$ est de la forme $f(x,y) = g(x).h(y)$ **<u>et si</u>** le domaine d'intégration est le rectangle $[a,b]\times[c,d]$, alors l'intégrale double se ramène au produit de deux intégrales simples :

$$\iint_{[a,b]\times[c,d]} g(x)h(y)\,dx\,dy = \left(\int_a^b g(x)\,dx \right)\left(\int_c^d h(y)\,dy \right)$$

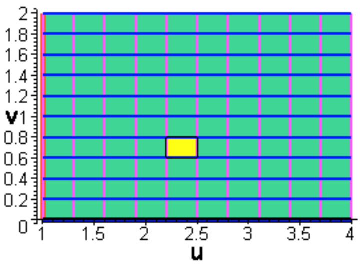
4. Calcul d'intégrale double : Changement de variables

Soit $\varphi : \begin{array}{ccc} \Delta \subset \mathbb{R}^2 & \to & D \subset \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \to & (x,y) \end{array}$ une bijection de classe C^1

telle que la matrice jacobienne $J_\varphi(u,v)$ soit inversible pour tout $(u,v) \in \Delta$.

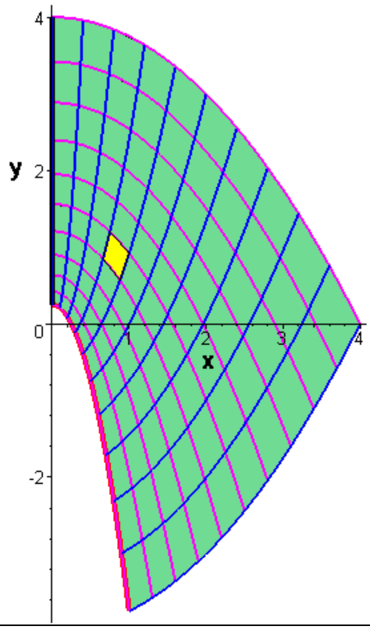
On définit le jacobien de φ : $\dfrac{D\,x\,y}{D\,u\,v} = \left|\det\left(J_\varphi(u,v)\right)\right|$

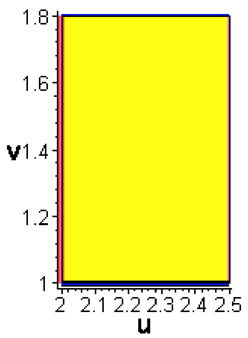
On démontre que, si $R = [u, u+\alpha] \times [v, v+\beta]$ est un "petit" rectangle inclus dans Δ, alors son image $\varphi(R)$ est telle que l'aire de $\varphi(R)$ est égale à $\dfrac{D\,x\,y}{D\,u\,v}\,\alpha\,\beta + \left\|\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}\right\|^2 \varepsilon\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\end{pmatrix}$

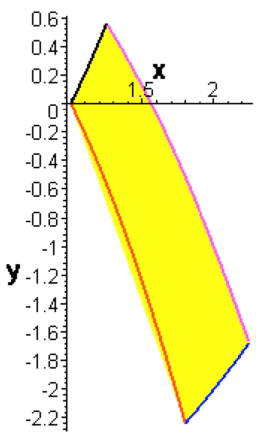


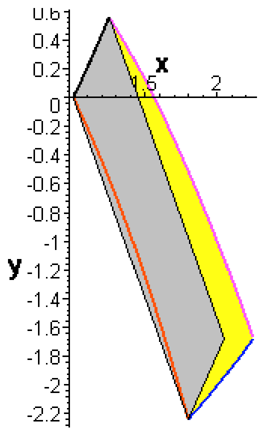
$$\begin{cases} x = \dfrac{1}{2}u\,v \\ y = \dfrac{1}{4}u^2 - v^2 \end{cases}$$

$$\frac{Dxy}{Duv} = \left|\det\begin{pmatrix} \frac{1}{2}v & \frac{1}{2}u \\ \frac{1}{2}u & -2v \end{pmatrix}\right| = \frac{1}{4}u^2 + v^2$$







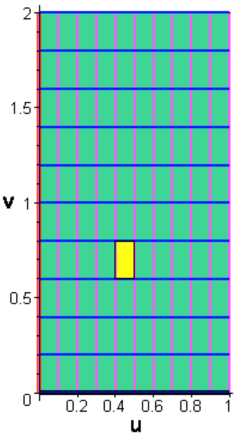


On en déduit pour toute fonction *f* continue sur *D* la formule de changement de variables :

$$\boxed{\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta (f \circ \varphi)(u,v)\,\frac{D\,x\,y}{D\,u\,v}\,du\,dv}$$

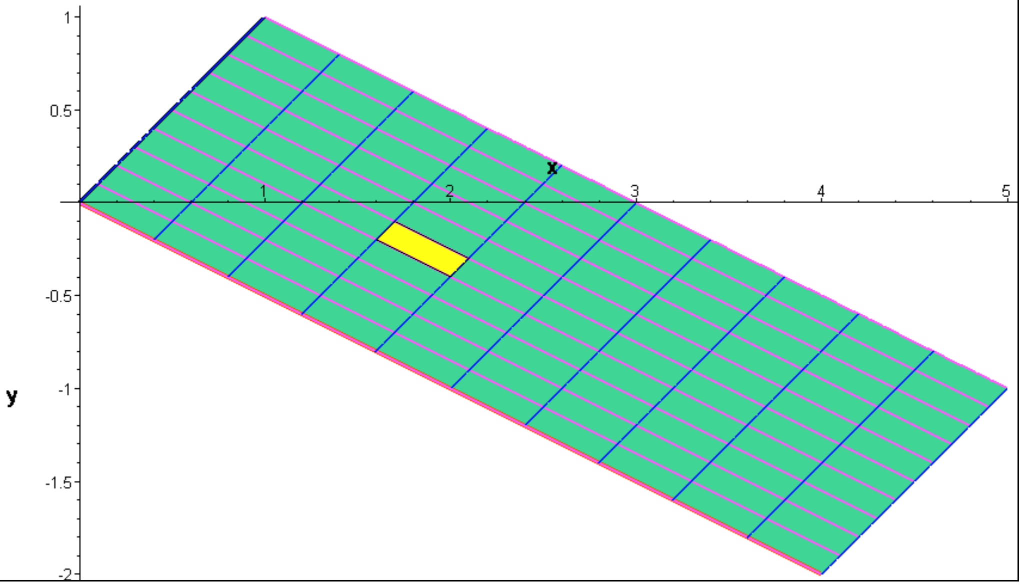
Cas particulier : Changement de variable linéaire : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^2 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v) & \to & (x,y) \end{array}$ telle que $\varphi\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \end{pmatrix}$

Alors $J_\varphi(u,v) = \begin{pmatrix} a & c \\ b & d \end{pmatrix}$ et donc $\dfrac{D\,x\,y}{D\,u\,v} = |a\,d - b\,c| = cste = k$, et $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = k\iint_\Delta (f\circ\varphi)(u,v)\,du\,dv$.



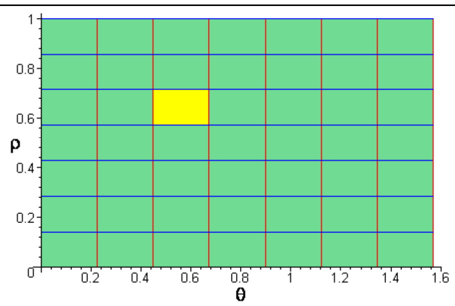
$$\begin{cases} x = u + 2v \\ y = u - v \end{cases}$$

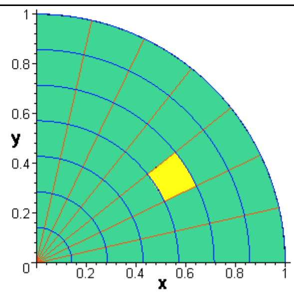
$$\frac{D\,x\,y}{D\,u\,v} = 3$$



Cas particulier : Coordonnées polaires : $\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]0,2\pi[& \to & \mathbb{R}^2 - Ox' \\ (r,\theta) & \to & (x,y) \end{array}$ telle que $\begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}$

Alors $J_\varphi(r,\theta) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta \\ \sin\theta & r\cos\theta \end{pmatrix}$ et donc $\dfrac{D\,x\,y}{D\,r\,\theta} = r \neq 0$. $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy = \iint_\Delta (f\circ\varphi)(r,\theta)\; r\; dr\,d\theta$.

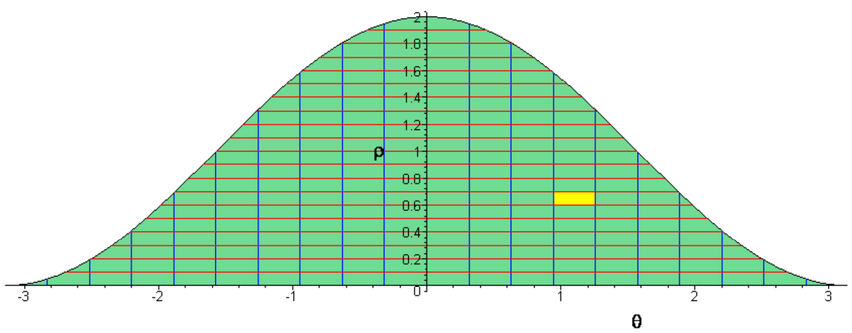


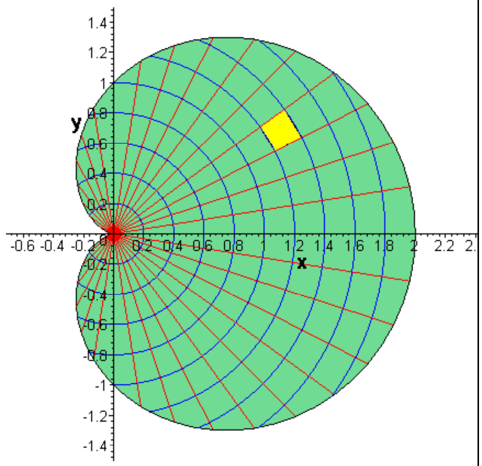


" $dx\,dy \longrightarrow r\,dr\,d\theta$ "

Exemple : étude de la cardioïde

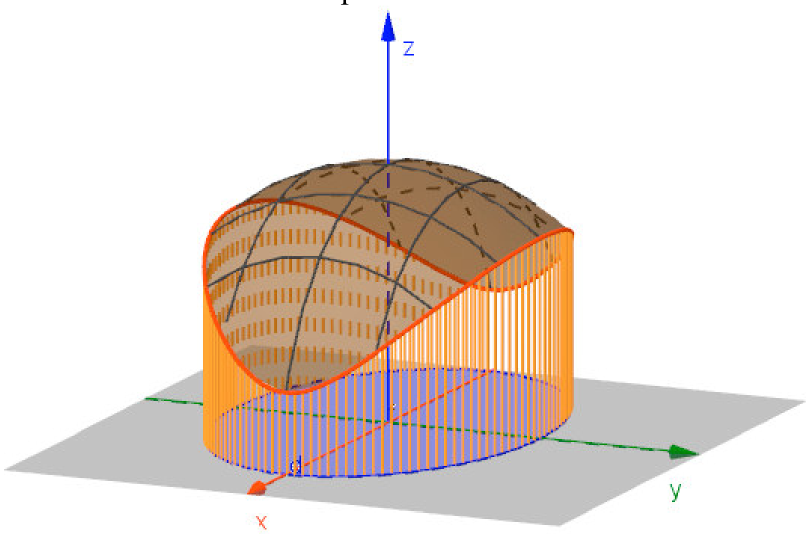
$C = \{(x,y)\,/\,x = r\cos\theta,\, y = r\sin\theta\,/ -\pi < \theta < \pi\,/\,0 < r < 1 + \cos\theta\}$





5/ Interprétations d'une intégrale double

- Si ρ est la densité d'une surface *S*, $\iint_S \rho$ est la masse totale de *S*.
- Si *d* est la densité superficielle de charge d'une surface *S*, $\iint_S d(x,y)\,dx\,dy$ est la charge totale de *S*.
- $\iint_S dx\ dy$ est l'aire de la surface *S*.
- $\dfrac{\iint_S x\ dx\ dy}{\iint_S dx\ dy}$ est l'abscisse du centre de gravité de *S*. $\dfrac{\iint_S y\ dx\ dy}{\iint_S dx\ dy}$ est l'ordonnée du centre de gravité de *S*.
- $\dfrac{\iint_D f(x,y)\ dx\ dy}{\iint_D dx\ dy}$ est la moyenne de la fonction *f* sur le domaine *D*
- Si *f* est positive, $\iint_D f(x,y)\,dx\,dy$ est le volume du solide compris entre la surface *D* du plan horizontal, la surface représentative de *f* et les verticales issues des points du contour de *D*



- $\iint_S (x^2+y^2)\rho(x,y)\,dx\,dy$ est le moment d'inertie par rapport à *O* de la plaque superficielle de densité ρ
  $\iint_S x^2\,\rho(x,y)\,dx\,dy$ est le moment d'inertie par rapport à *Oy* de la plaque superficielle de densité ρ
- ...

II/ Intégrales triples

1/ Notion d'intégrale triple

Soient D une partie de $\mathbb{R}^3$ f une fonction de D dans $\mathbb{R}$.
Pour toute subdivision d'un parallélépipéde (pavé droit) contenant D en cellules parallélépipédiques, on définit une **somme de Riemann** : **Somme des volumes des cellules intérieures à *D*, chacune multipliée par la valeur de *f* en un point arbitraire de *la cellule.***

Si f est intégrable (au sens de Riemann) sur D , ces sommes de Riemann ont une limite quand la longueur, la largeur et la hauteur des cellules tend vers 0.
Cette limite est notée $\iiint_D f$ ou $\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\, dz$

2/ Calcul d'intégrale triple : Théorème de Fubini

Intégrale sur un pavé : Si f est continue sur $[a,b]\times[c,d]\times[e,f]$,

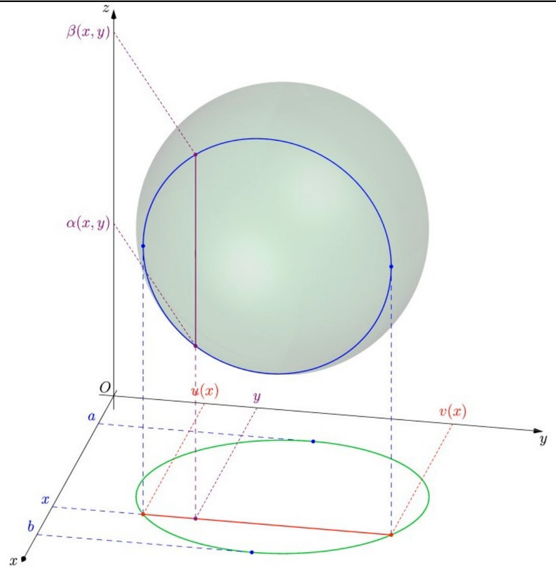
$$\iiint_{[a,b]\times[c,d]\times[e,f]} f = \int_a^b \left(\int_c^d \left(\int_e^f f(x,y,z)\ dz \right) dy \right) dx = \int_c^d \left(\int_e^f \left(\int_a^b f(x,y,z)\ dx \right) dz \right) dy = \ldots$$

Généralisation

Si D est de la forme
$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ x\in[a,b] \ / \ y\in[\phi_1(x),\ \phi_2(x)] \ / \ z\in[\psi_1(x,y),\psi_2(x,y)]\}$

où ϕ_1 et ϕ_2 sont des fonctions continues de $[a,b]$ dans $\mathbb{R}$,
ψ_1 et ψ_2 des fonctions continues de $\mathbb{R}^2$ dans $\mathbb{R}$
et si f est continue, alors

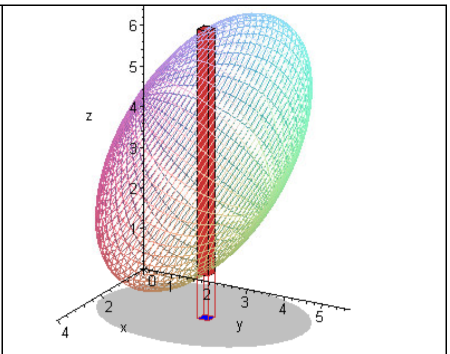
$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\, dz = \int_a^b \left(\int_{\phi_1(x)}^{\phi_2(x)} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dy \right) dx}$$



3/ Calcul d'intégrale triple : Découpage "en batonnets"

Si D est de la forme
$D = \{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \ / \ (x,y)\in\mathcal{D}_0 \ / \ z\in[\psi_1(x,y),\psi_2(x,y)]\}$
où $\mathcal{D}_0$ est un domaine du plan xOy, ψ_1 et ψ_2 des fonctions continues de $\mathcal{D}_0$ dans $\mathbb{R}$ et si f est continue, alors

$$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\ dx\ dy\, dz = \iint_{\mathcal{D}_0} \left(\int_{\psi_1(x,y)}^{\psi_2(x,y)} f(x,y,z)\, dz \right) dx\, dy}$$



4/ Calcul d'intégrale triple : Découpage "en tranches"

Découpage en tranches parallèles à *yOz* : .

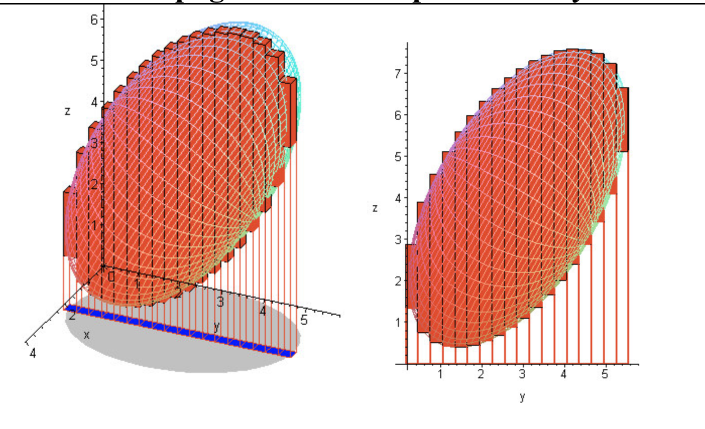
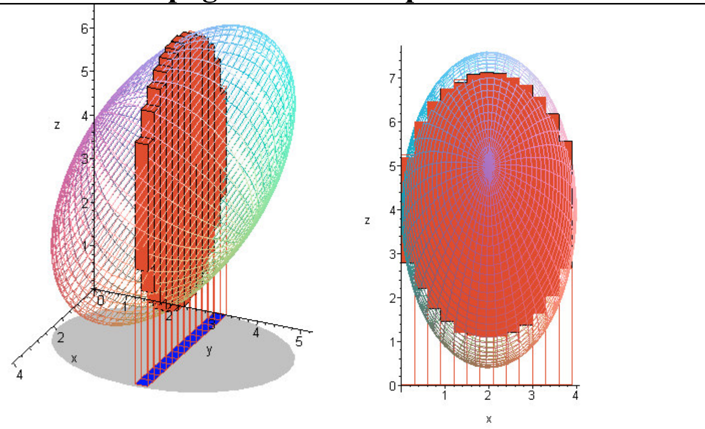
Si D est de la forme $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; x\in[a,b] \;/\; (y,z)\in\Delta x\}$ où, pour tout x, Δx est un domaine du plan yOz,

alors si f est continue sur D $$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\;dx\;dy\,dz=\int_a^b\left(\iint_{\Delta x} f(x,y,z)\,dy\,dz\right)dx}$$

Découpage en tranches parallèles à *xOz* :

Si D est de la forme $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; y\in[a,b] \;/\; (x,z)\in\Delta y\}$ où, pour tout y, Δy est un domaine du plan xOz,

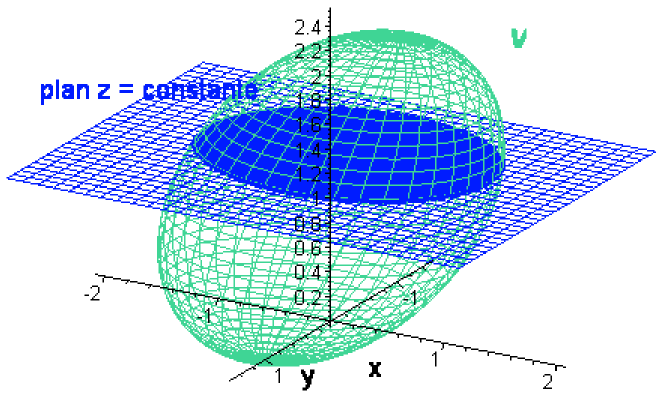
alors si f est continue sur D $$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\;dx\;dy\,dz=\int_a^b\left(\iint_{\Delta y} f(x,y,z)\,dx\,dz\right)dy}$$

Découpage en tranches parallèles à *yOz*	**Découpage en tranches parallèles à *xOz***
	

Découpage "en tranches"parallèles à *xOy* (coupes "à *z* constant")

Si D est de la forme $D=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 \;/\; z\in[a,b] \;/\; (x,y)\in\Delta z\}$ où, pour tout y, Δz est un domaine du plan xOy,

alors si f est continue sur D $$\boxed{\iiint_D f(x,y,z)\;dx\;dy\,dz=\int_a^b\left(\iint_{\Delta z} f(x,y,z)\,dx\,dy\right)dz}$$



5/ Calcul d'intégrale triple : Changement de variables

Soit $\varphi : \begin{matrix} \Delta \subset \mathbb{R}^3 & \to & D \subset \mathbb{R}^3 \\ (u,v,w) & \to & (x,y,z) \end{matrix}$ une bijection de classe C^1

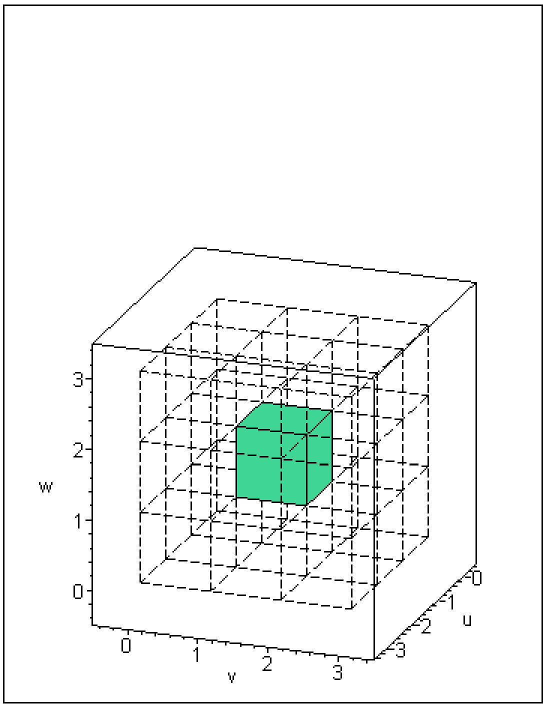
telle que la matrice jacobienne $J_\varphi(u,v,w)$ soit inversible pour tout $(u,v,w) \in \Delta$.

On définit le jacobien de φ : $\dfrac{D\,x\,y\,z}{D\,u\,v\,w} = \left|\det\left(J_\varphi(u,v,w)\right)\right|$

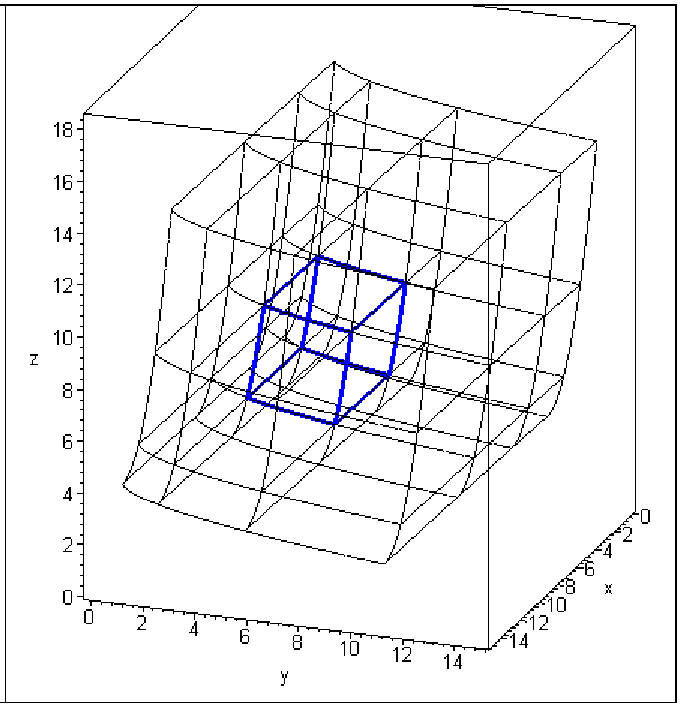
On démontre que, si $R = [u, u+\alpha] \times [v, v+\beta] \times [w, w+\gamma]$ est un "petit" pavé inclus dans Δ, alors son image $\varphi(R)$ est telle que le volume de $\varphi(R)$ est égale à $\dfrac{D\,x\,y\,z}{D\,u\,v\,w}\,\alpha\,\beta\,\gamma + \left\|\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}\right\|^3 \varepsilon\begin{pmatrix}\alpha\\ \beta\\ \gamma\end{pmatrix}$

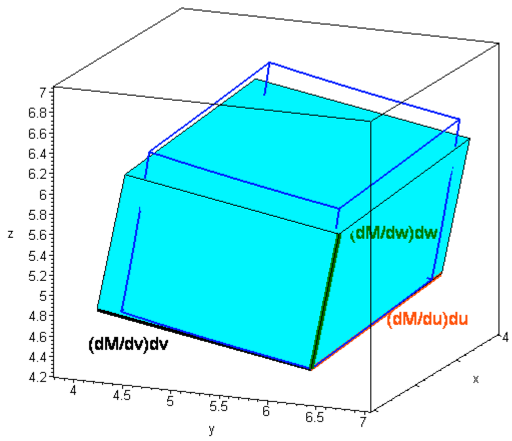
On en déduit la formule de changement de variables :

$$\iiint_D f(x,y,z)\; dx\; dy\, dz = \iiint_\Delta (f\circ\varphi)(u,v,w)\,\frac{D\,x\,y\,z}{D\,u\,v\,w}\,du\,dv\,dw$$



$$\begin{pmatrix}x\\ y\\ z\end{pmatrix} = f\begin{pmatrix}u\\ v\\ w\end{pmatrix}$$

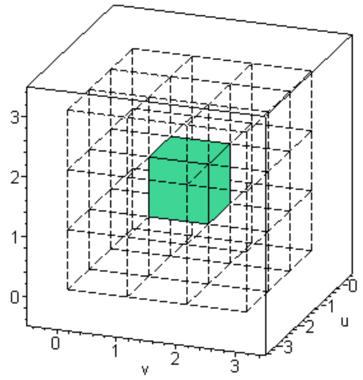




Cas particulier : Changement de variable linéaire :

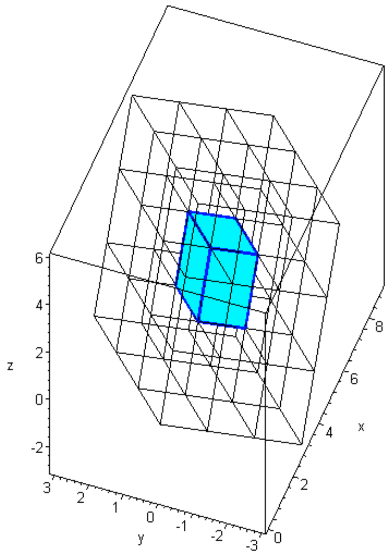
$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}^3 & \to & \mathbb{R}^2 \\ (u,v,w) & \to & (x,y,z) \end{array} \text{ telle que } \varphi\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} = A\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix} \text{ où } A \text{ est une matrice } 3\times 3 . \; J_\varphi(u,v,w) = A$$

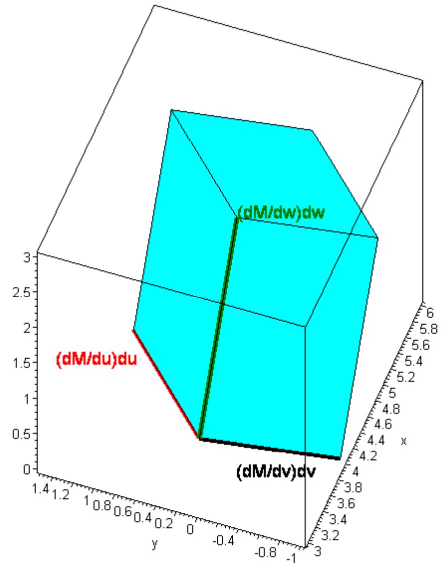
et donc $\dfrac{D\,x\,y\,z}{D\,u\,v\,w} = |\det(A)| = \text{constante}$, et $\iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = |\det(A)| \iiint_\Delta (f\circ\varphi)(u,v,w)\, du\, dv\, dw$.



$$\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} u \\ v \\ w \end{pmatrix}, \det(A) = -5$$

$$\frac{D\,x\,y\,z}{D\,u\,v\,w} = 5$$

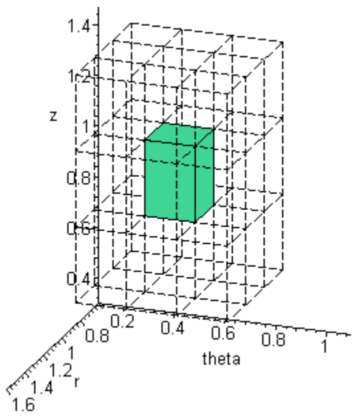


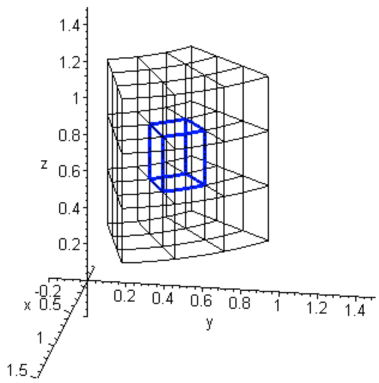


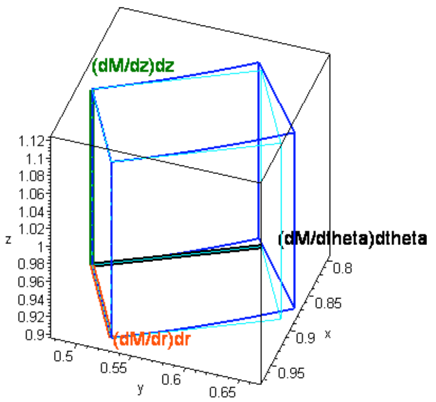
Cas particulier : Coordonnées cylindriques :

$$\varphi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times [0,2\pi[\times \mathbb{R} & \to & \mathbb{R}^3 - \text{demi-plan } x \leqslant 0 \\ (r,\theta,z) & \to & (x,y,z) \end{array} \text{ où } \begin{cases} x = r\cos\theta \\ y = r\sin\theta \end{cases}. \text{ Alors } J_\varphi(r,\theta,z) = \begin{pmatrix} \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \\ \sin\theta & r\cos\theta & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}.$$

$$\frac{D\,x\,y\,z}{D\,r\,\theta\,z} = r \neq 0 \quad \text{donc} \quad \iiint_D f(x,y,z)\, dx\, dy\, dz = \iiint_\Delta (f\circ\varphi)(r,\theta,z)\, r\, dr\, d\theta\, dz .$$





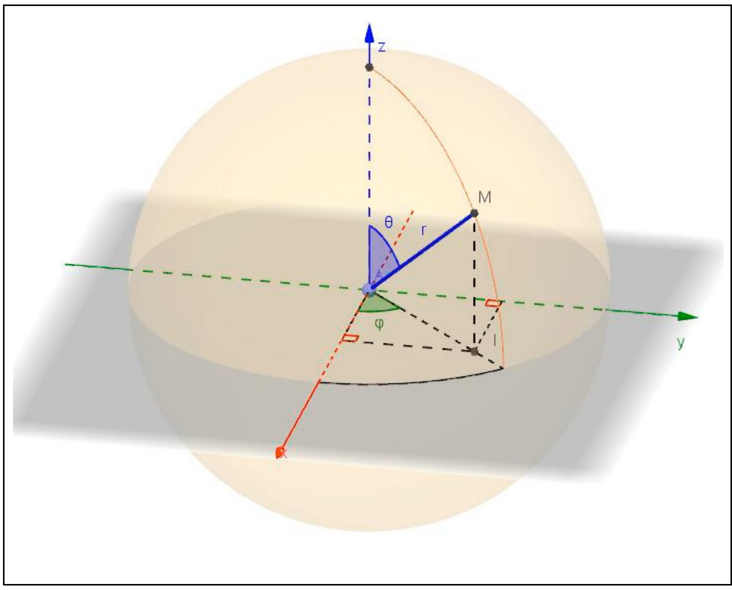


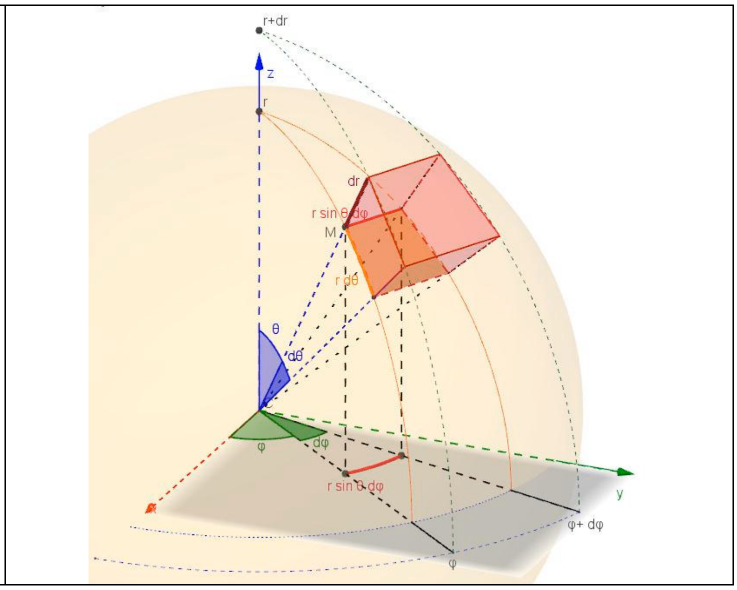
" $dx\, dy\, dz \longrightarrow r\, dr\, d\theta\, dz$ "

(Peu utile ! ! ! Faire plutôt un découpage par tranches puis des coordonnées polaires)

Cas particulier : Coordonnées sphériques :

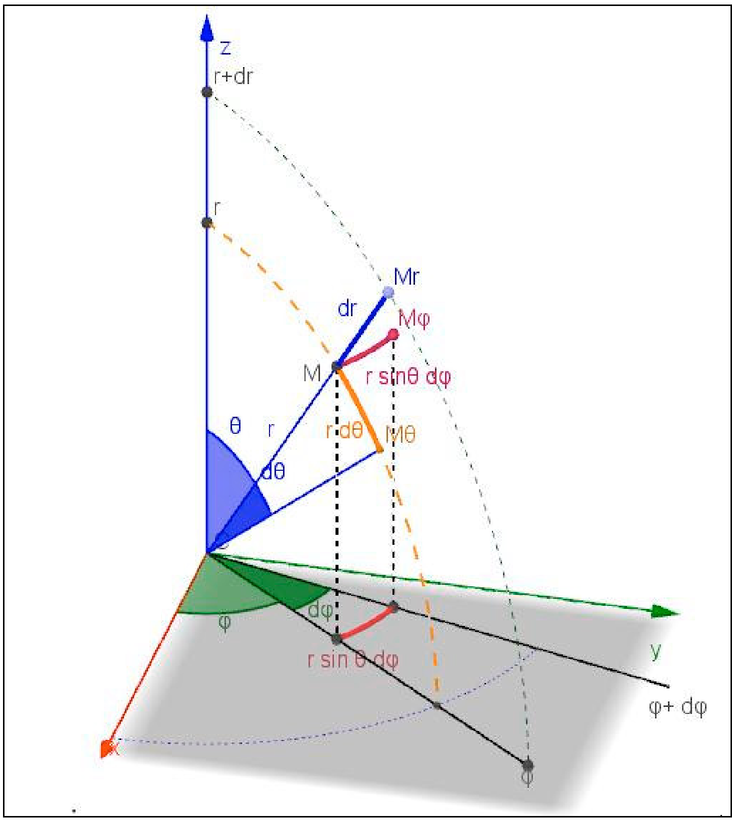
$$\phi : \begin{array}{ccc} \mathbb{R}_+^* \times]0,\pi[\times]-\pi,\pi[& \to & \mathbb{R}^3 - \text{demi-plan } x \leqslant 0 \\ (r,\theta,\varphi) & \to & (x,y,z) \end{array} \quad \text{où} \begin{cases} x = r\sin\theta\cos\varphi \\ y = r\sin\theta\sin\varphi \\ z = r\cos\theta \end{cases}.$$





Alors $J_\phi(r,\theta,\varphi) = \begin{pmatrix} \sin\theta\cos\varphi & r\cos\theta\cos\varphi & -r\sin\theta\sin\varphi \\ \sin\theta\sin\varphi & r\cos\theta\sin\varphi & r\sin\theta\cos\varphi \\ \cos\theta & -r\sin\theta & 0 \end{pmatrix} . \dfrac{D\,x\,y\,z}{D\,r\,\theta\,\varphi} = r^2\sin\theta \neq 0$

$$\iiint_D f(x,y,z)\; dx\; dy\, dz = \iiint_\Delta (f\circ\phi)(r,\theta,\varphi)\; r^2\sin\varphi\; dr\, d\theta\, d\varphi\ .$$



M M_r : segment de longueur dr

M M_θ : arc de cercle (rayon r) de longueur $dr\ \ d\theta$

M M_φ : arc de cercle (rayon $r\sin\theta$) de longueur $r\sin\theta\, d$

" $dx\, dy\, dz \longrightarrow r^2\sin\theta\, dr\, d\theta\, d\varphi$ "