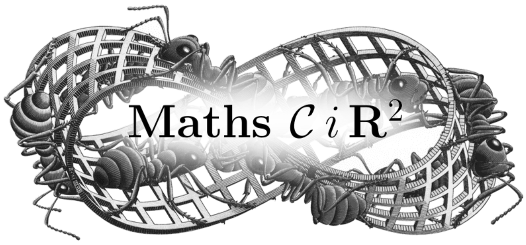
ISÉN Lille 22 janvier 2013



Examen Final $\mathfrak{S}_1$

Consignes

- Cette épreuve de **2h** comporte **4** questions équipondérées.
- L'usage de la calculatrice est vivement déconseillé.
- **Rédigez** clairement en **explicitant** vos raisonnements.
- Plutôt que de bloquer sur une question : simplifiez, expérimentez, reformulez, … bref battez-vous !

1. Montrer que pour tout $n \in \mathbf{N}$ il existe des polynômes $P_n(x)$ et $Q_n(x)$ à coefficients entiers tels que

$$\int_0^\pi x^n \sin x \,\mathrm{d}x = P_n(\pi) \quad \text{et} \quad \int_0^\pi x^n \cos x \,\mathrm{d}x = Q_n(\pi).$$

Donner un algorithme récursif permettant de calculer ceux-ci et l'utiliser pour expliciter $P_5(x)$ et $Q_5(x)$.

En intégrant par parties, on trouve

$$\begin{cases} P_0(x) = 2 \\ P_n(x) = x^n + nQ_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1) \end{cases} \qquad \text{et} \qquad \begin{cases} Q_0(x) = 0 \\ Q_n(x) = -nP_{n-1}(x) \quad (n \geqslant 1) \end{cases}$$

d'où, en itérant,

$$P_5(x) = x^5 - 20x^3 + 120x \qquad \text{et} \qquad Q_5(x) = -5x^4 + 60x^2 - 240.$$

Note : Il peut être ici judicieux de passer dans les complexes pour effectuer une seule intégration par partie afin d'obtenir une équation de récurrence satisfaite par $R_n = P_n + iQ_n$ (ou $R_n = Q_n + iP_n$) …

2. Justifier soigneusement le fait que pour tout $\mathbf{v} \in \mathbf{R}^2$ et

$$f(x,y) = \begin{cases} x^2\big(1 + \ln(x^2+y^2)\big) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0), \end{cases}$$

la fonction $(x,y) \mapsto \mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(x,y)$ est définie et continue en tout point $(x,y) \in \mathbf{R}^2$, puis déterminer dans quelle direction (donnée par un vecteur $\mathbf{v}$ unitaire) $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(0,0)$ est maximale.

On pourrait calculer explicitement les dérivées directionnelles d'après la définition, ou encore se contenter des dérivées partielles. En utilisant la définition en $(0,0)$ et les règles usuelles de dérivation ailleurs, on a

$$\frac{\partial f}{\partial x} = \begin{cases} \frac{2x^3}{x^2+y^2} + 2x\big(1+\ln(x^2+y^2)\big) & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\frac{\partial f}{\partial y} = \begin{cases} \frac{2x^2y}{x^2+y^2} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0). \end{cases}$$

Ces dérivées partielles sont continues en tout point (par calcul explicite de limite en $(0,0)$ et par composition de fonctions continues ailleurs), la fonction f est donc de classe $\mathcal{C}^1$. Elle est par conséquent différentiable en tout point, et en particulier ses dérivées directionnelles sont données par

$$\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(x,y) = \nabla f(x,y) \cdot \mathbf{v} = a\,\frac{\partial f}{\partial x}(x,y) + b\,\frac{\partial f}{\partial y}(x,y) \qquad \text{si } \mathbf{v} = a\,\mathbf{i} + b\,\mathbf{j}.$$

On obtient au passage leur continuité par combinaison linéaire de fonctions continues.

En $(0,0)$: s'il est vrai en général que la dérivée directionnelle est maximale dans la direction du gradient, malheureusement ici $\nabla f(0,0) = \mathbf{0}$. Aucune direction n'est donc privilégiée, $\mathrm{D}_{\mathbf{v}} f(0,0) = 0$ pour tout $\mathbf{v}$.

3. Donner pour tout $\tau \in \mathfrak{S}_9$ la décomposition cyclique de $\tau^{-1}\sigma\tau$, où $\sigma = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 & 4 & 5 & 6 & 7 & 8 & 9 \\ 6 & 1 & 7 & 8 & 9 & 2 & 4 & 3 & 5 \end{bmatrix}$.

   [*Conseil* : commencez par calculer l'image de $\tau^{-1}(1)$]

   Utiliser ceci pour déterminer le nombre de solutions $\tau \in \mathfrak{S}_9$ à l'équation

$$\sigma\tau = \tau(1234)(567)(89).$$

Pour alléger les notations, posons $\rho = \tau^{-1}$, de sorte que $\tau^{-1}\sigma\tau = \rho\sigma\rho^{-1}$. En remarquant que

$$(\rho\sigma\rho^{-1})(\rho(i)) = \rho(\sigma(\underbrace{\rho^{-1}(\rho(i))}_{i})) = \rho(\sigma(i)),$$

on obtient la décomposition cyclique de $\rho\sigma\rho^{-1}$ à partir de celle de σ :

$$\rho\sigma\rho^{-1} = \big(\rho(1)\,\rho(6)\,\rho(2)\big)\,\big(\rho(3)\,\rho(7)\,\rho(4)\,\rho(8)\big)\,\big(\rho(5)\,\rho(9)\big).$$

Pour résoudre l'équation proposée, il suffit donc de trouver tous les $\rho \in \mathfrak{S}_9$ tels que

$$\big(\rho(1)\,\rho(6)\,\rho(2)\big)\,\big(\rho(3)\,\rho(7)\,\rho(4)\,\rho(8)\big)\,\big(\rho(5)\,\rho(9)\big) = (1234)\,(567)\,(89).$$

En raisonnant cycle par cycle, on voit qu'il faut (et suffit) que

$$\rho|_{\{1,2,6\}} = \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 5 & 6 & 7 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 6 & 7 & 5 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 1 & 6 & 2 \\ 7 & 5 & 6 \end{bmatrix},$$

$$\rho|_{\{3,4,7,8\}} = \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 \\ 1 & 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 \\ 2 & 3 & 4 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 3 & 7 & 4 & 8 \\ 3 & 4 & 1 & 2 \end{bmatrix},$$

$$\rho|_{\{5,9\}} = \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 8 & 9 \end{bmatrix} \text{ ou } \begin{bmatrix} 5 & 9 \\ 9 & 8 \end{bmatrix}.$$

En multipliant les différentes possibilités, on trouve 24 solutions pour ρ (et donc pour τ).

4. Étudier la courbe paramétrée donnée en coordonnées polaires par

$$r(\theta) = 2\cos^2\left(\frac{\theta}{2}\right) \qquad (\theta \in \mathbf{R})$$

   (allure, points stationnaires, tangente en chaque point, ...)

Je vous réfère au cours, il s'agit de nulle autre que la cardioïde $r(\theta) = 1 + \cos\theta$.