Chapitre 4:
Introduction au filtrage

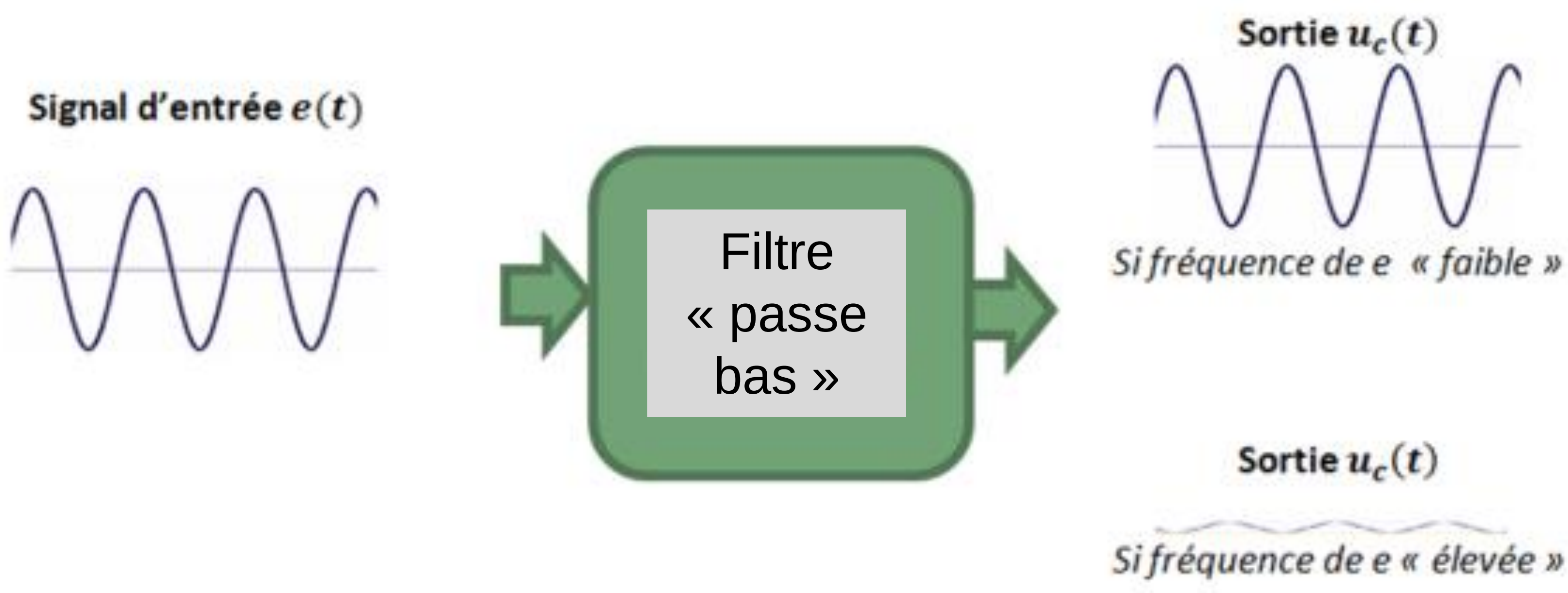
Justine Philippe

Sommaire

Sommaire

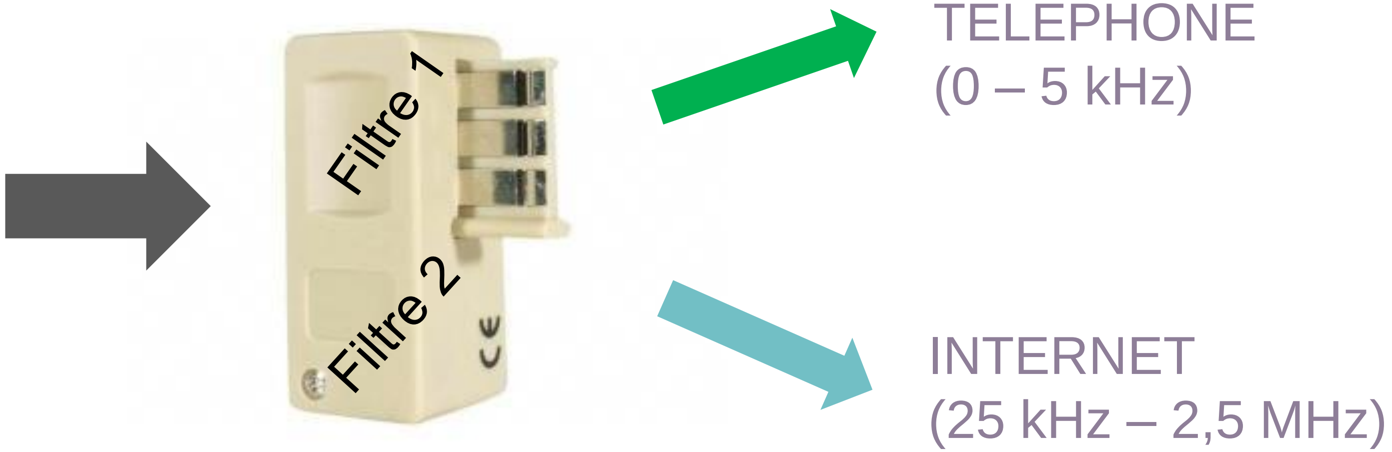
Que fait un filtre ?

Le signal de sortie est **égal au signal d'entrée à certaines fréquences nul à d'autres fréquences**



A quoi sert un filtre ?

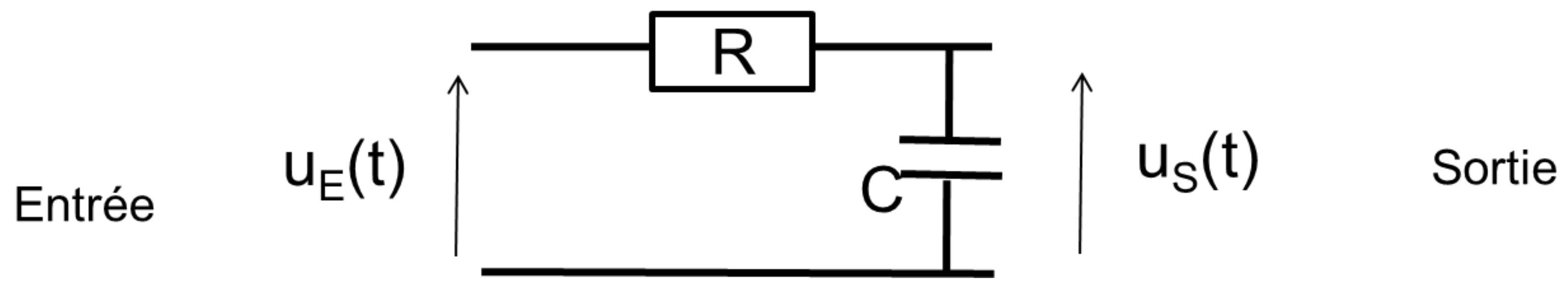
Exemple : filtre ADSL



Pourquoi l'étudie-t-on maintenant ?

On peut faire des filtres avec de simples circuits RLC

Exemple : Filtre passe-bas RC



A fréquence (ou pulsation) nulle, condensateur = circuit ouvert ; $u_S = u_E$
A fréquence (ou pulsation) infinie, condensateur = court-circuit ; $u_S = 0$

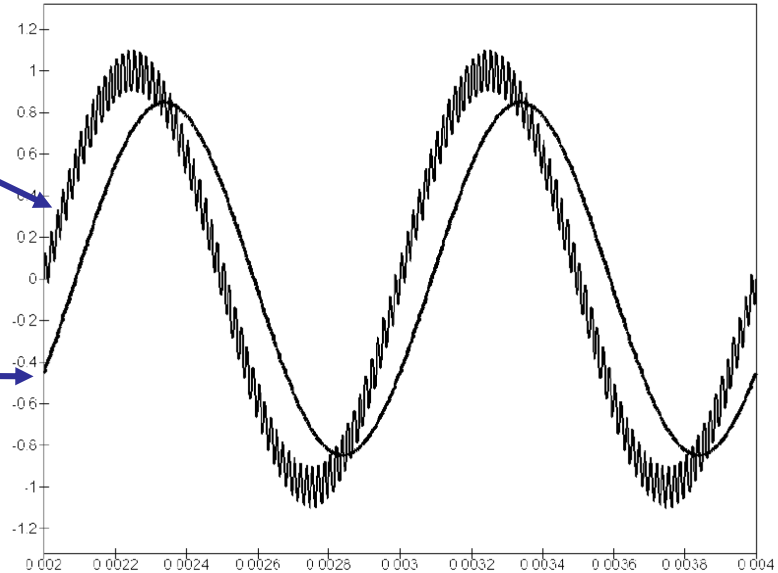
Pourquoi l’étudie-t-on maintenant ?

On peut faire des filtres avec de simples circuits RLC

Exemple : Filtre passe-bas RC

Signal d’entrée

Signal de sortie



Le signal de sortie est le même que le signal d’entrée, (déphasé et) nettoyé des « petites oscillations » / oscillations à hautes fréquences

ISEN école d’ingénieurs

Vue globale du cours d'électronique

Chapitre 1 et 2
Régime permanent et transitoire des circuits RLC **en courant continu**

Chapitre 3
Circuits RLC avec une **tension d'entrée sinusoïdale**
(on n'a traité que le régime permanent)

Chapitre 4. Filtrage
Circuits RLC avec une **tension d'entrée multifréquences**
(= multi sinusoïdale)

Chapitre 5. Amplificateur opérationnel

Objectifs du chapitre

- Connaître le vocabulaire associé au filtrage
- Savoir faire une analyse spectrale simple : comportement d'un filtre RLC lorsque $\omega \rightarrow 0$ et $\omega \rightarrow \infty$
- Calculer la fonction de transfert d'un filtre passif
- Tracer les diagrammes de Bode associés [donc savoir utiliser des graphes semilog et des dB]

Sommaire

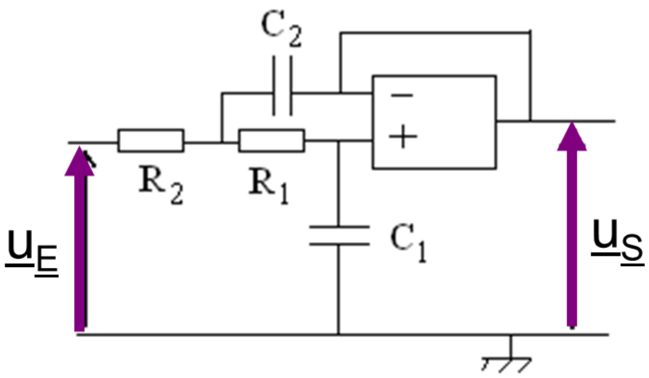
- Introduction
- Quelques définitions
- Un exemple de filtre du premier ordre
- Diagrammes de Bode : quelques précisions
- Un exemple de filtre du second ordre
- Analyse spectrale d'une grandeur périodique

Quelques définitions

Fonction de transfert H : $\underline{H} = \dfrac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}}$

Gain G : $G = |\underline{H}|$

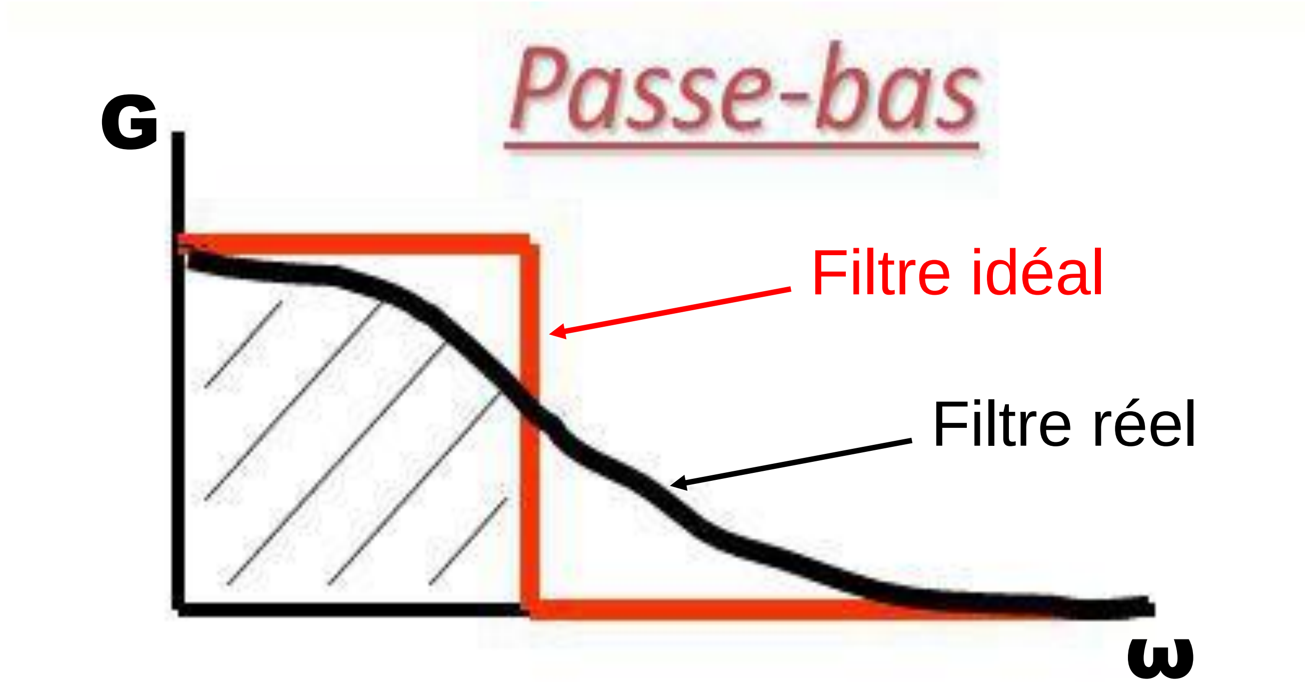
Déphasage Φ_H : $\Phi_H = Arg(\underline{H})$



(Exemple pour un circuit quelconque)

Classification des filtres

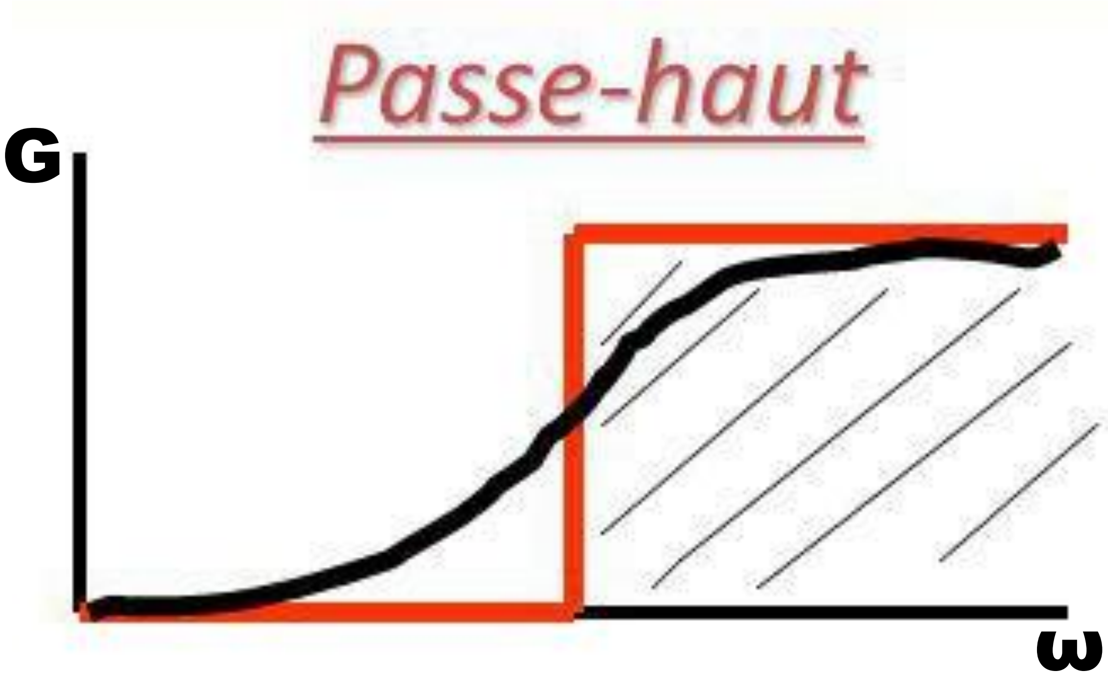
Les différents types de filtres :



Filtre qui laisse passer les basses fréquences et coupe les hautes fréquences

Classification des filtres

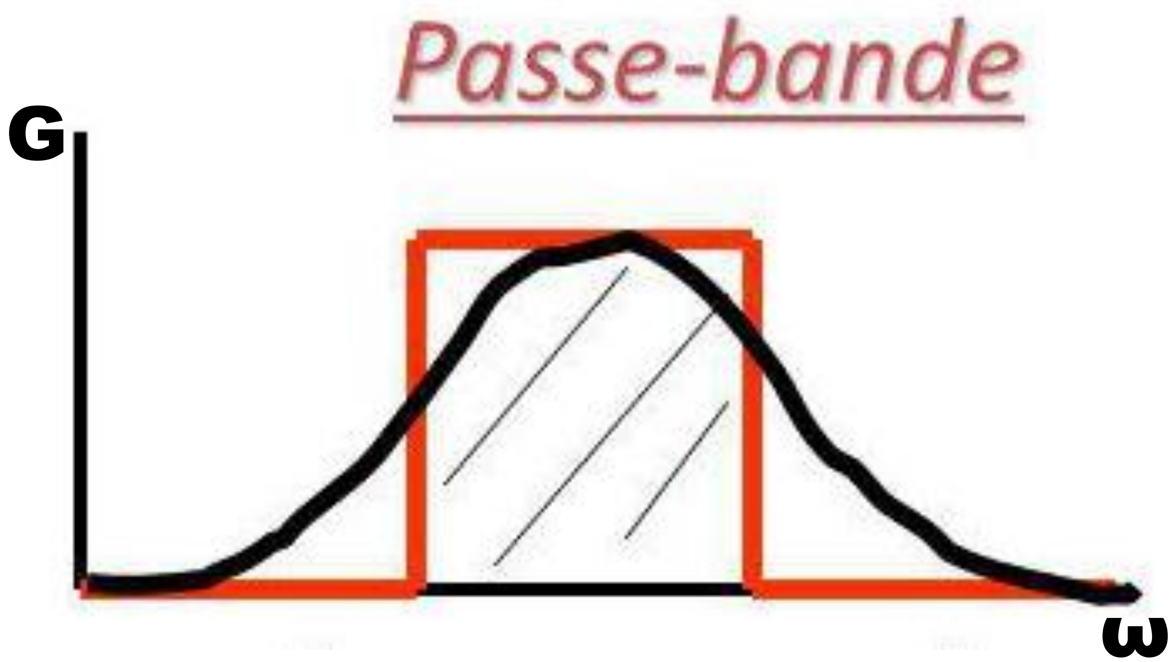
Les différents types de filtres :



Filtre qui laisse passer les hautes fréquences et coupe les basses fréquences

Classification des filtres

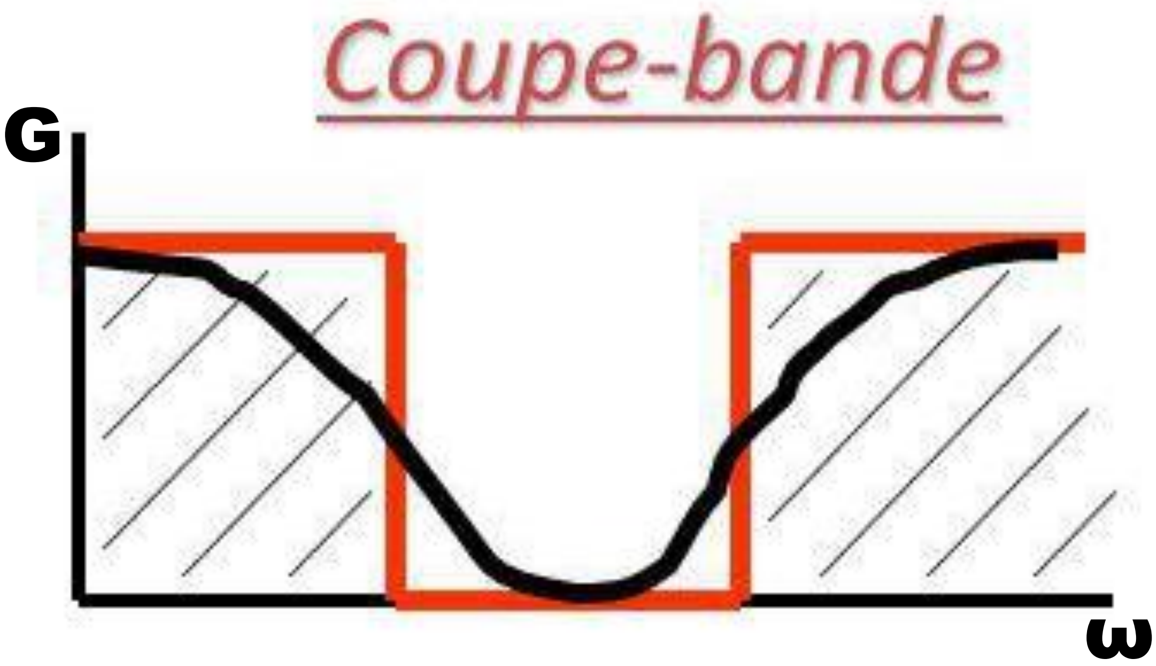
Les différents types de filtres :



Filtre qui coupe les basses et hautes fréquences et laisse passer le signal sur une bande de fréquence dite bande passante

Classification des filtres

Les différents types de filtres :



Filtre qui coupe le signal sur une plage de fréquence

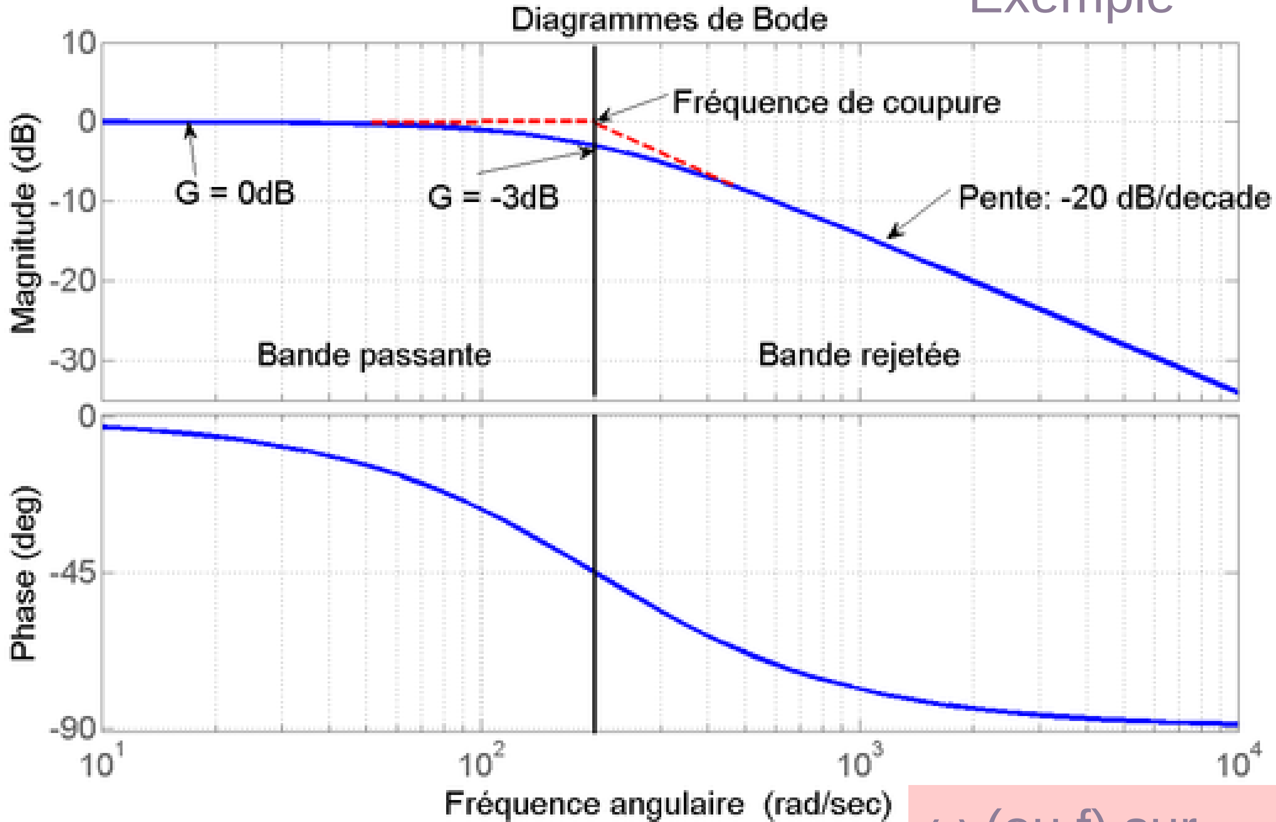
Diagramme de Bode

Une représentation particulière du gain et du déphasage en fonction de la pulsation/fréquence

Exemple

Gain en dB

Phase en Degré (ou rad)



ω (ou f) sur une échelle log

Décibels

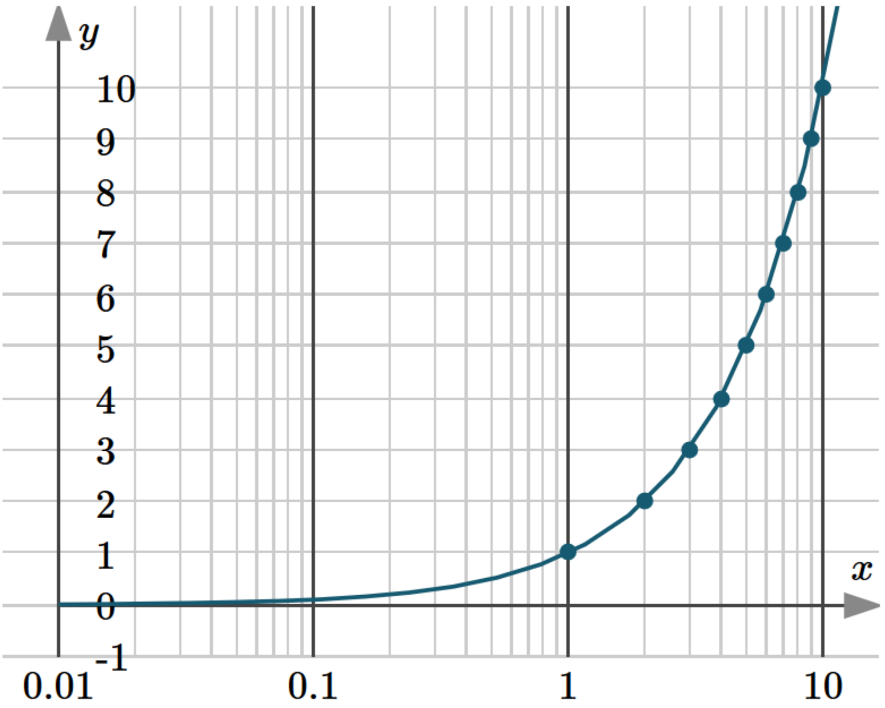
$$G_{dB} = 20\log(G)$$

Exemples :

G	0,01	0,1	0,5	1	10	0
G_{dB}	-40	-20	-6,02	0	+20	-∞

Propriété de la fonction log à savoir par cœur : $\log(10^P) = P\,log\,(10) = P$

Echelle/papier semi log x

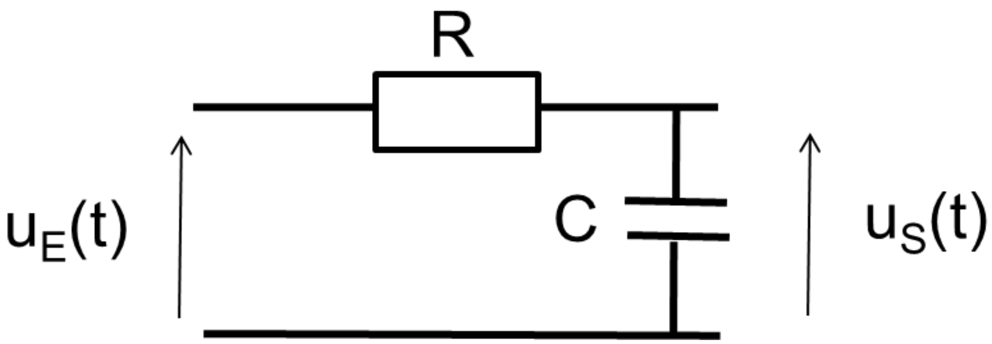


Fonction y = x

On utilise ce type d'échelle dans les diagrammes de Bode pour pouvoir comparer la réponse à basse et haute fréquence, sur plusieurs décades

Sommaire

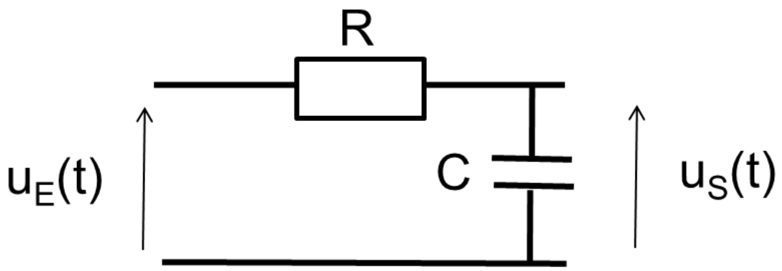
Filtre RC passe-bas



a) Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}} = \frac{1}{1+jRC\omega}$

(On a utilisé le diviseur de tension $\underline{u_S} = \frac{\underline{Z_C}}{\underline{Z_R}+\underline{Z_C}}\underline{u_E}$ puis simplifié en multipliant par jCω au numérateur et au dénominateur)

Filtre RC passe-bas

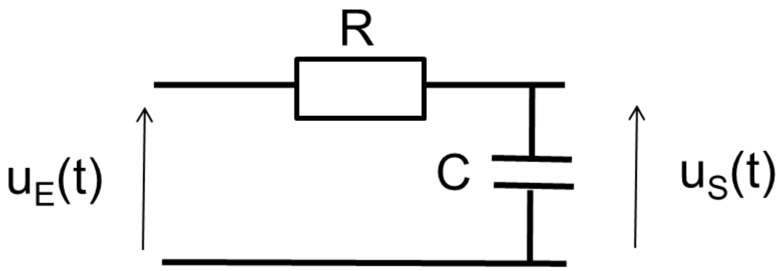


b) Expression avec les variables usuelles ω_0 et x :

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jRC\omega} = \frac{1}{1 + j\dfrac{\omega}{\omega_0}} = \frac{1}{1 + jx}$$

Avec $\begin{cases} \omega_0 = \dfrac{1}{RC} \\ x = \dfrac{\omega}{\omega_0} \end{cases}$

Filtre RC passe-bas



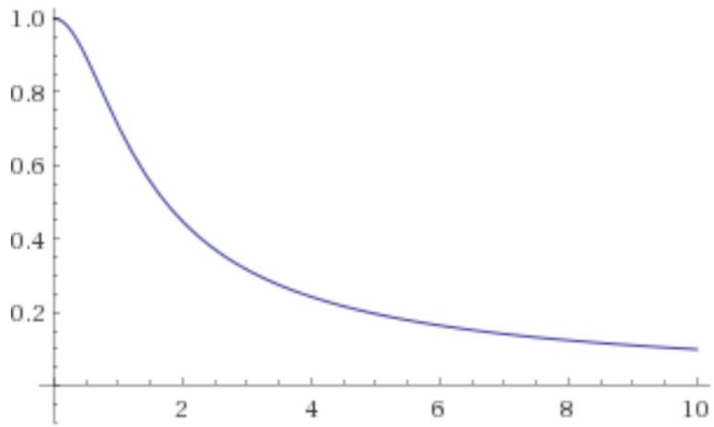
c) Etude du gain G = |H|

$$G = |\underline{H}| = \left|\frac{1}{1+jx}\right| = \frac{1}{\sqrt{1+x^2}}$$

A quoi ressemble G en fonction de x ?

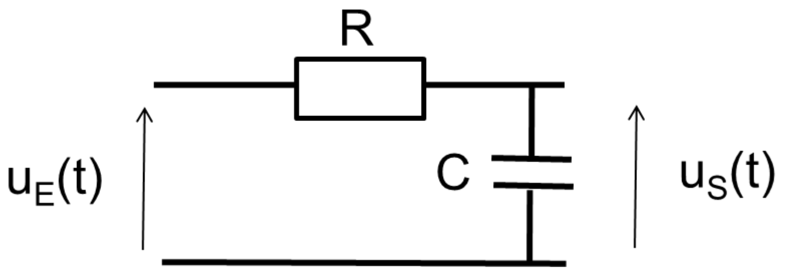
Limite en x = 0 ? En x = +ω ? La fonction √ est croissante, donc ?

On obtient :



Notons que
À x=0 : G=1
À x=1 : G=1/√2
À x→∞ : G=0

Filtre RC passe-bas



e) Diagrammes de Bode :

G_{dB} et Φ_H sur un graphe semilogarithmique

$$G_{dB} = 20\log(G) = 20\log\left(\frac{1}{\sqrt{1+x^2}}\right)$$

$$G_{dB} = -20\log\left(\sqrt{1+x^2}\right) = -10\log(1+x^2)$$

Et on a déjà calculé le déphasage :

$$\Phi_H = Arg(\underline{H}) = Arg\left(\frac{1}{1+jx}\right) = -\arctan x$$

Propriété de la fonction log à savoir par cœur : $\log(A^B) = B\ log\ (A)$

ISEN école d'ingénieurs

Filtre RC passe-bas

Pour tracer la courbe du gain et la courbe de phase, on fait varier f

$$G_{dB} = -10\log(1 + x^2)$$

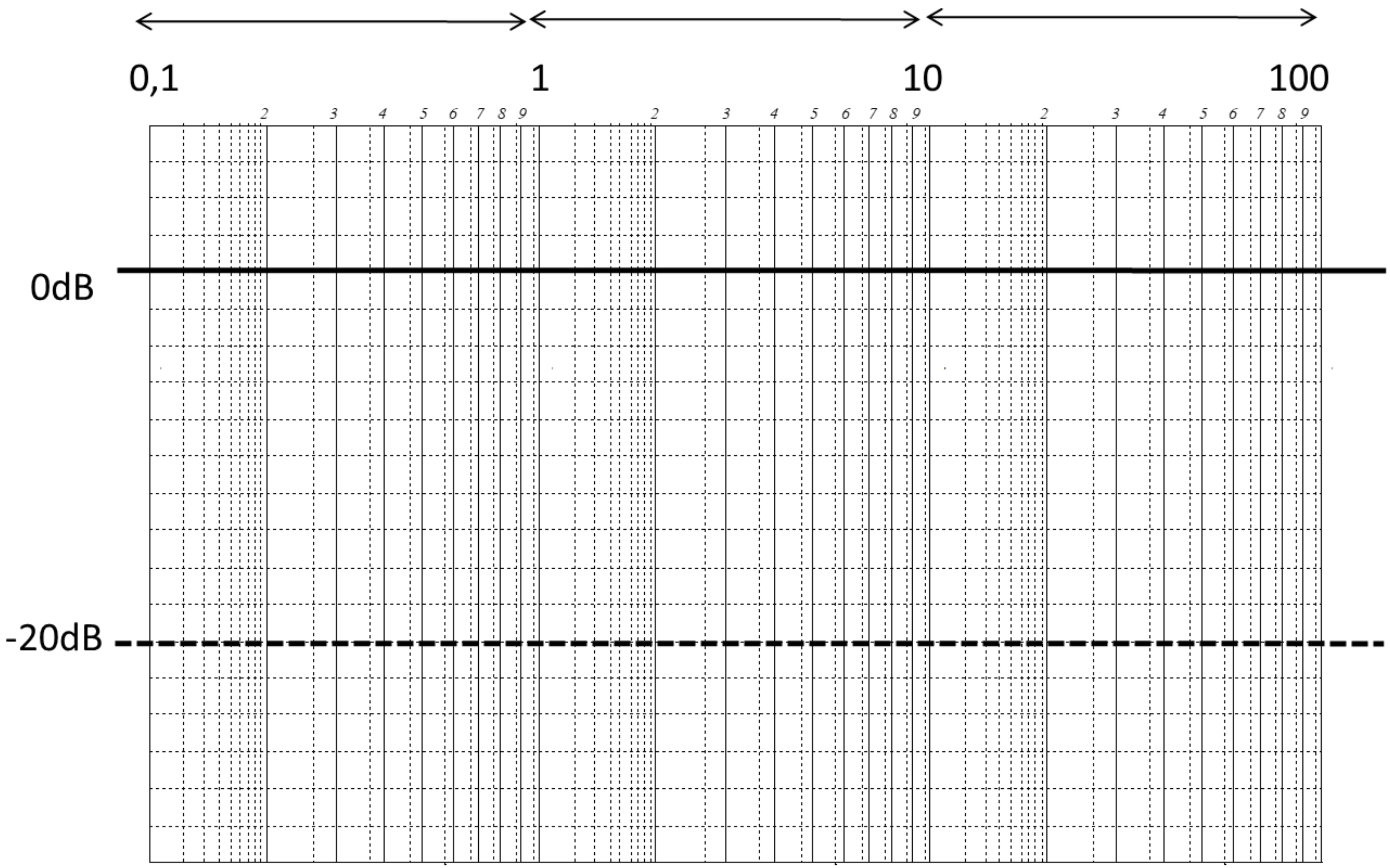
X=f/f0	f0/10	f0/2	f0	2f0	10f0	100f0
G (dB)	-0,04	-0,97	-3	-7	-20	-40

$$\Phi_H = -\arctan x$$

f	f0/10	f0/2	f0	2f0	10f0	100f0
Φ (°) Φ (rad)	-5,7 -0,099	-26,6 -0,463	-45 -0,78	-63,4 -1,10	-84,3 -1,47	-89,4 -1,57

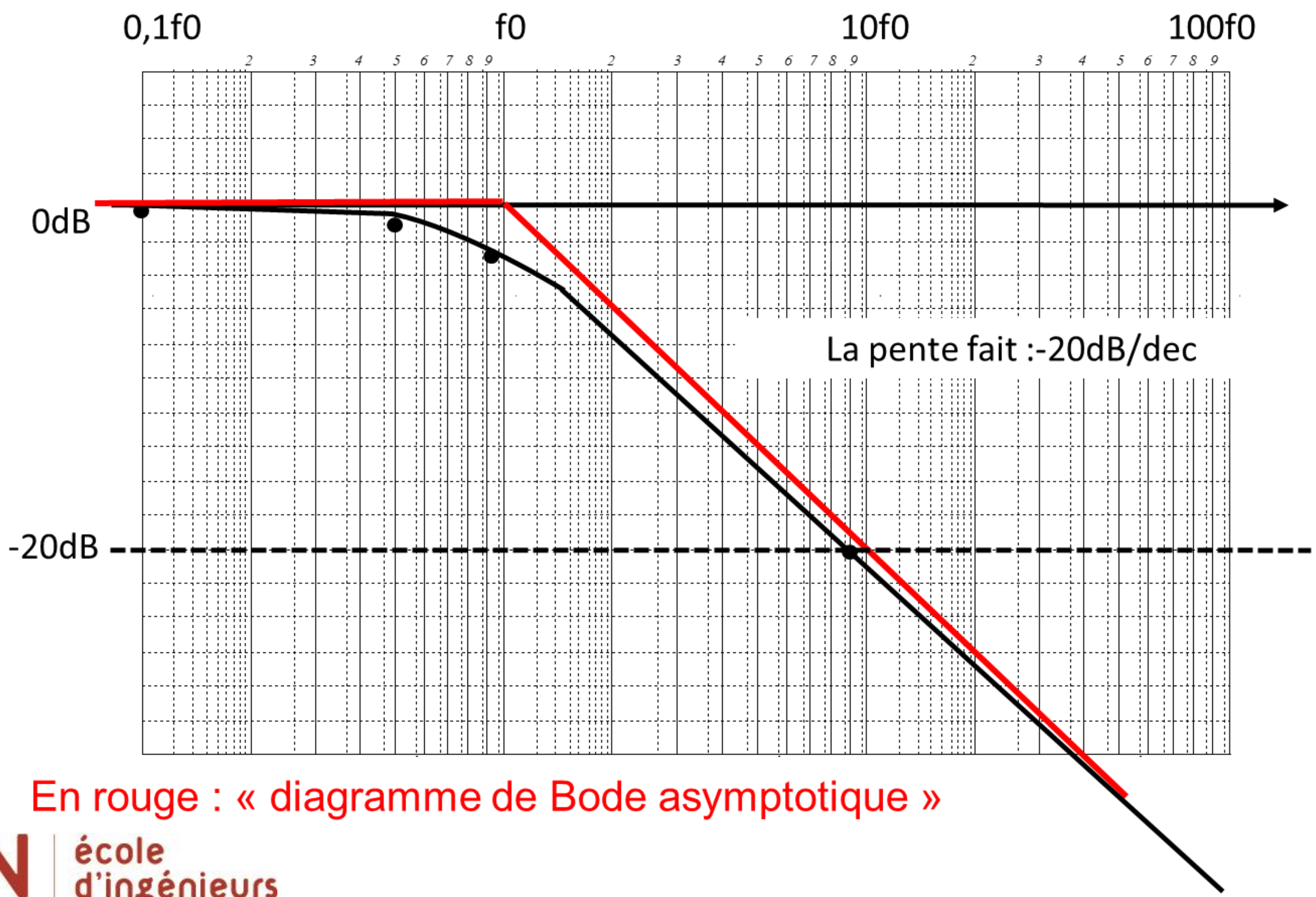
Filtre RC passe-bas

Papier semi-log : 3 décades



Filtre RC passe-bas

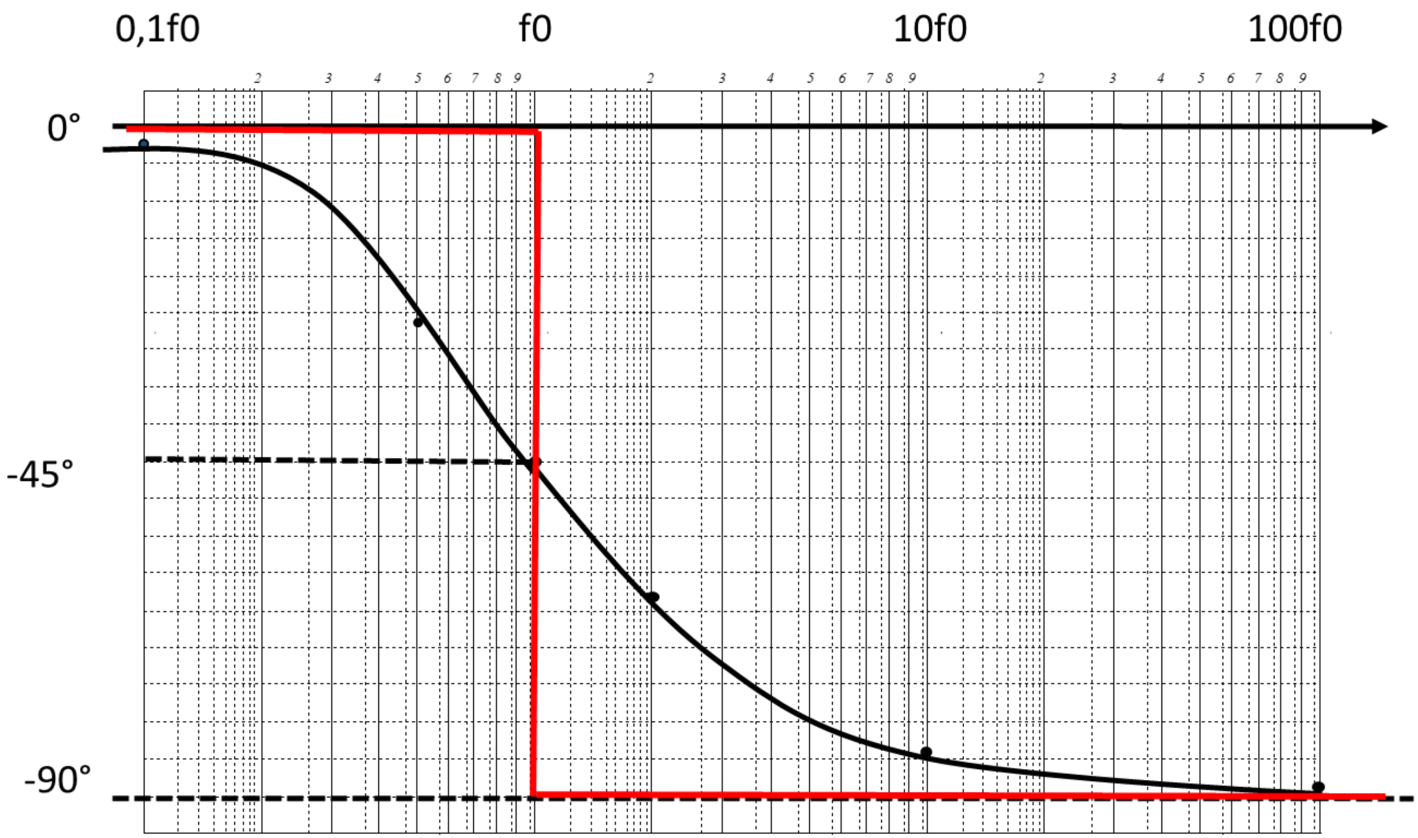
Tracé du diagramme de Bode : le gain



En rouge : « diagramme de Bode asymptotique »

Filtre RC passe-bas

Tracé du diagramme de Bode : la phase



En rouge : « diagramme de Bode asymptotique »

Filtre RC passe-bas

f) Diagrammes de Bode asymptotiques

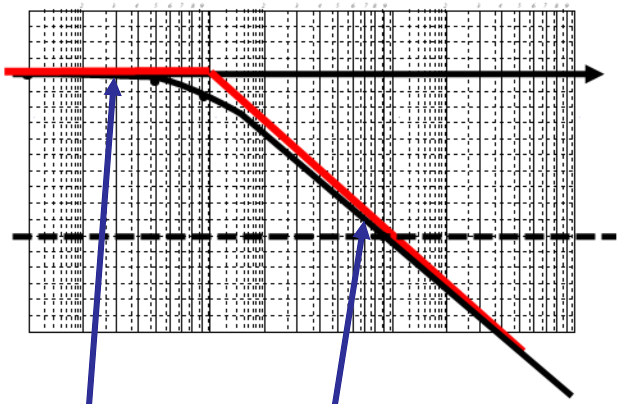
Pour déterminer les équations des demi-droites du diag. Asymptotique, le plus simple est de revenir à la fonction de transfert complexe

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx} \quad avec \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Lorsque $\omega \rightarrow 0$, $\underline{H} \sim 1 \Rightarrow G = |\underline{H}| \sim 1$

Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20 \log G \sim 0$

Filtre RC passe-bas



$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jx} \quad avec \quad x = \frac{\omega}{\omega_0}$$

Lorsque ω → 0, $\underline{H}$ ~ 1 => G = |$\underline{H}$| ~ 1
Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20 \log G \sim 0$

Lorsque ω → ∞, $\underline{H}$ ~ 1/jx => G = |$\underline{H}$| ~ 1/x
Donc la première asymptote est : $G_{dB} = 20 \log G = -20 \log x$

=> La pente est de -20 dB par décade

ISEN école d'ingénieurs

Sommaire

- Introduction
- Quelques définitions
- Un exemple de filtre du premier ordre
- Diagrammes de Bode : quelques précisions
- Un exemple de filtre du second ordre
- Analyse spectrale d'une grandeur périodique

Définitions

Une décade correspond à l'intervalle de pulsation pour passer de la pulsation *ω* *à* la pulsation *10 ω.*

Une octave correspond à l'intervalle de pulsation pour passer de la pulsation *ω* *à* la pulsation *2 ω.*

La pente d'une droite dans la représentation du gain en tension G en fonction de log(ω) est exprimée en décibel /décade (dB/dec).

L'ordre d'un filtre est le degré du polynôme en x situé au dénominateur de la fonction de transfert complexe $\underline{H}$

Définitions

Une pulsation de coupure à -3dB, notée ω_C d'un filtre est une pulsation pour laquelle

$$G(\omega) = \frac{Gmax}{\sqrt{2}}$$

En effet cela correspond à une diminution du gain de 3 dB :

$$G_{dB}(\omega_C) = 20\log G_{max} - 20\log\sqrt{2} = 20\log G_{max} - 10\log 2$$

$$G_{dB}(\omega_C) = G_{dB}max - 3$$

Définitions

La bande passante d'un filtre est l'intervalle (ou les intervalles) de pulsations pour lequel le gain G a une valeur supérieure au gain max -3 dB .

Une bande passante est donc comprise entre deux pulsations de coupures

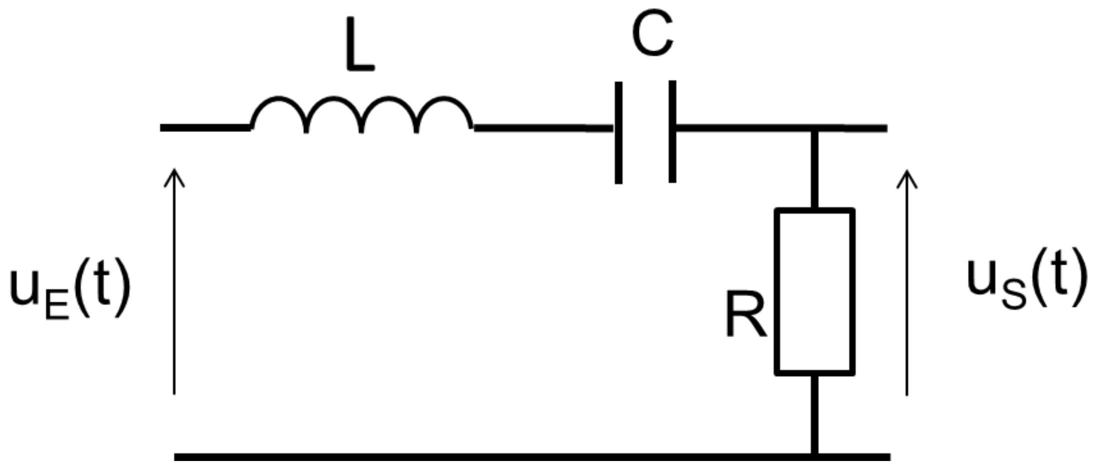
Cela correspond à une transmission en tension de 1/√2 et donc une transmission en puissance d'entrée de 1/2.

→ lorsqu'on a « perdu » la moitié de la puissance au travers du filtre, alors le signal est considéré comme perdu (il n'a pas transité vers la sortie)

Sommaire

- Introduction
- Quelques définitions
- Un exemple de filtre du premier ordre
- Diagrammes de Bode : quelques précisions
- Un exemple de filtre du second ordre
- Analyse spectrale d'une grandeur périodique

Circuit RLC



Quel type de filtre est-ce ?
Quand $\omega \rightarrow 0$, condensateur = circuit ouvert
Quand $\omega \rightarrow +\infty$, bobine = circuit ouvert
Donc c'est un filtre qui coupe les basses et hautes fréquences ; c'est un **filtre passe bande**

Circuit RLC

a) Fonction de transfert : $\underline{H} = \frac{\underline{u_S}}{\underline{u_E}} = \frac{R}{R+j\left(L\omega-\frac{1}{C\omega}\right)}$

b) Expression avec les variables usuelles ω_0, x et Q

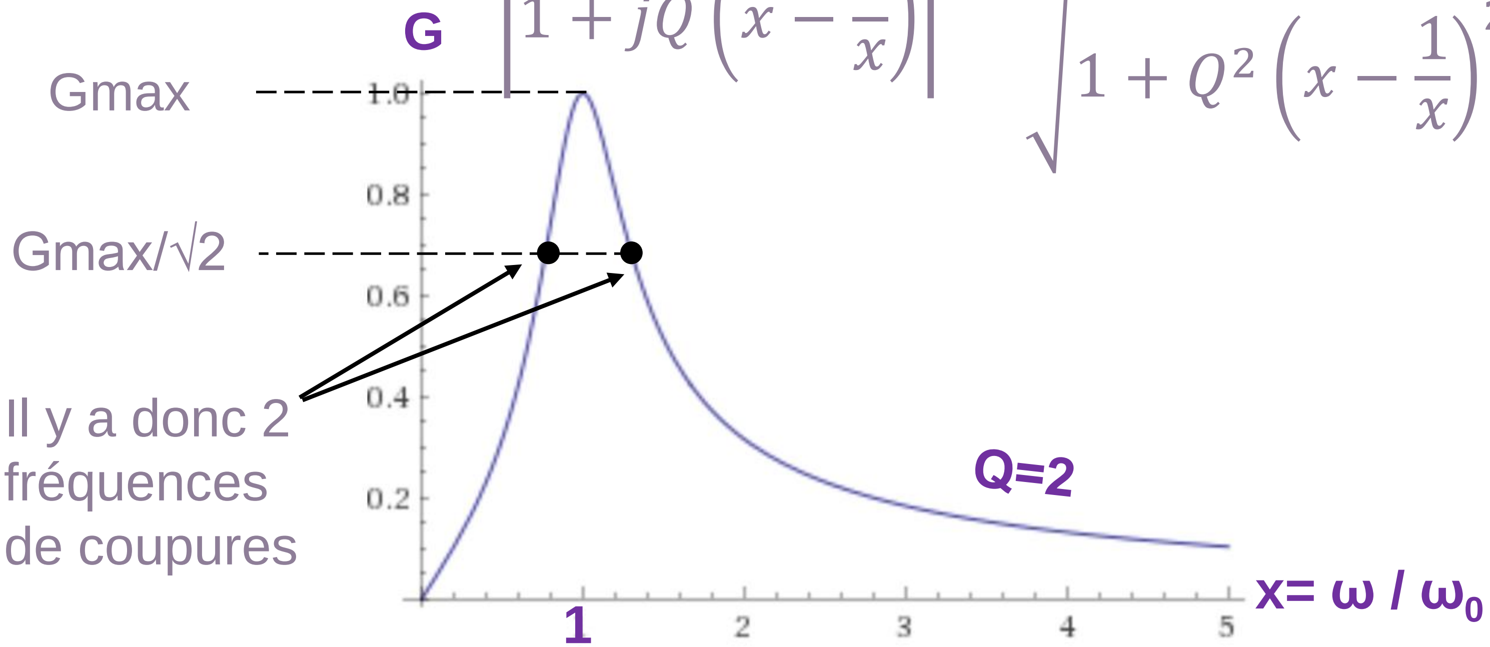
$$\underline{H} = \frac{1}{1+jQ\left(x-\frac{1}{x}\right)} \quad avec \quad \begin{cases} \omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}} \\ x = \frac{\omega}{\omega_0} \\ Q = \frac{L\omega_0}{R} \end{cases}$$

Circuit RLC

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

c) Etude du gain G = |H|

$$G = |\underline{H}| = \left|\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right| = \frac{1}{\sqrt{1 + Q^2\left(x - \frac{1}{x}\right)^2}}$$



Rmq. Quand Q augmente, le pic devient plus étroit

Circuit RLC

d) Pulsations de coupure à -3 dB, bande passante

- Gain maximum $G_{max} = 1$ pour $x = 1$
- Pulsations réduites de coupures x_{c1} et x_{c2} pour $G = \frac{G_{max}}{\sqrt{2}}$

On trouve **(preuve page suivante) :**

$$\begin{cases} x_{c1} = -\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \\ x_{c2} = +\frac{1}{2Q} + \sqrt{1 + \frac{1}{4Q^2}} \end{cases}$$

Quand Q est élevé, Δx petit et filtre plus sélectif

- La bande passante est donc : $\Delta x_c = \frac{1}{Q}$

Circuit RLC

- *Pulsations réduites de coupure x_{c1} et x_{c2} pour $G=G_{max}/\sqrt{2}$*

Donc pour :

$$\frac{1}{\sqrt{1+Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}$$

Équivalent à $Q^2\left(x-\frac{1}{x}\right)^2=1$

Soit $\left|x-\frac{1}{x}\right|=\frac{1}{Q}$

En multipliant par x

$$|x^2-1|=\frac{x}{Q}$$

On a donc deux équations du second degré à résoudre : $x^2\pm\frac{x}{Q}-1=0$

Le discriminant commun à ces deux équations est :

$$\Delta=\frac{1}{Q^2}+4$$

Discriminant positif, donc 2 solutions par équation. Sachant que x est une grandeur physique positive, on ne retient que les solutions positives, il y en a bien deux :

$$x_{c1}=\frac{1}{2}\left(-\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$$

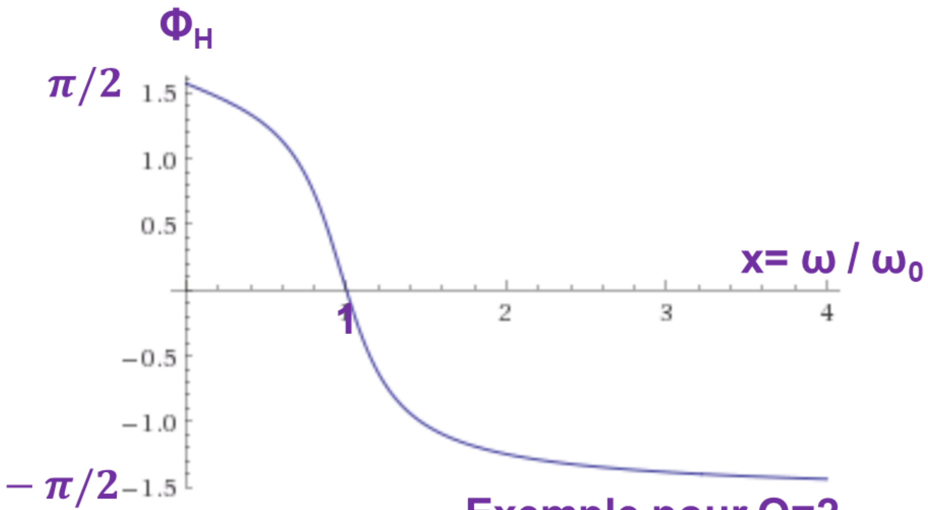
$$x_{c2}=\frac{1}{2}\left(+\frac{1}{Q}+\sqrt{\frac{1}{Q^2}+4}\right)$$

ISEN école d'ingénieurs

Circuit RLC

e) Etude du déphasage $\Phi_H = Arg\left(\underline{H}\right)$

$$\Phi_H = Arg\left(\underline{H}\right) = Arg\left(\frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}\right) = -\arctan\left(Q\left(x - \frac{1}{x}\right)\right)$$



Circuit RLC

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Lorsque x → 0, $\underline{H} \sim \frac{1}{-\frac{jQ}{x}} = \frac{jx}{Q}$

Donc le gain est : $G = |\underline{H}| \sim \frac{x}{Q}$

La 1ère asymptote du diagramme de Bode en gain est ainsi :

$$G_{dB} = 20 \log G \sim 20 \log x - 20 \log Q$$

Elle a une pente de +20 dB par décade

Pour le déphasage, on peut ainsi montrer qu'on a l'asymptote horizontale $\Phi_H = +\frac{\pi}{2}$

ISEN école d'ingénieurs

Circuit RLC

$$\underline{H} = \frac{1}{1 + jQ\left(x - \frac{1}{x}\right)}$$

Lorsque x → ∞, $\underline{H} \sim \frac{1}{jQx} = -\frac{j}{Qx}$

Donc le gain est : $G = |\underline{H}| \sim \frac{1}{Qx}$

La 1ère asymptote du diagramme de Bode en gain est ainsi :

$$G_{dB} \sim -20 \log x - 20 \log Q$$

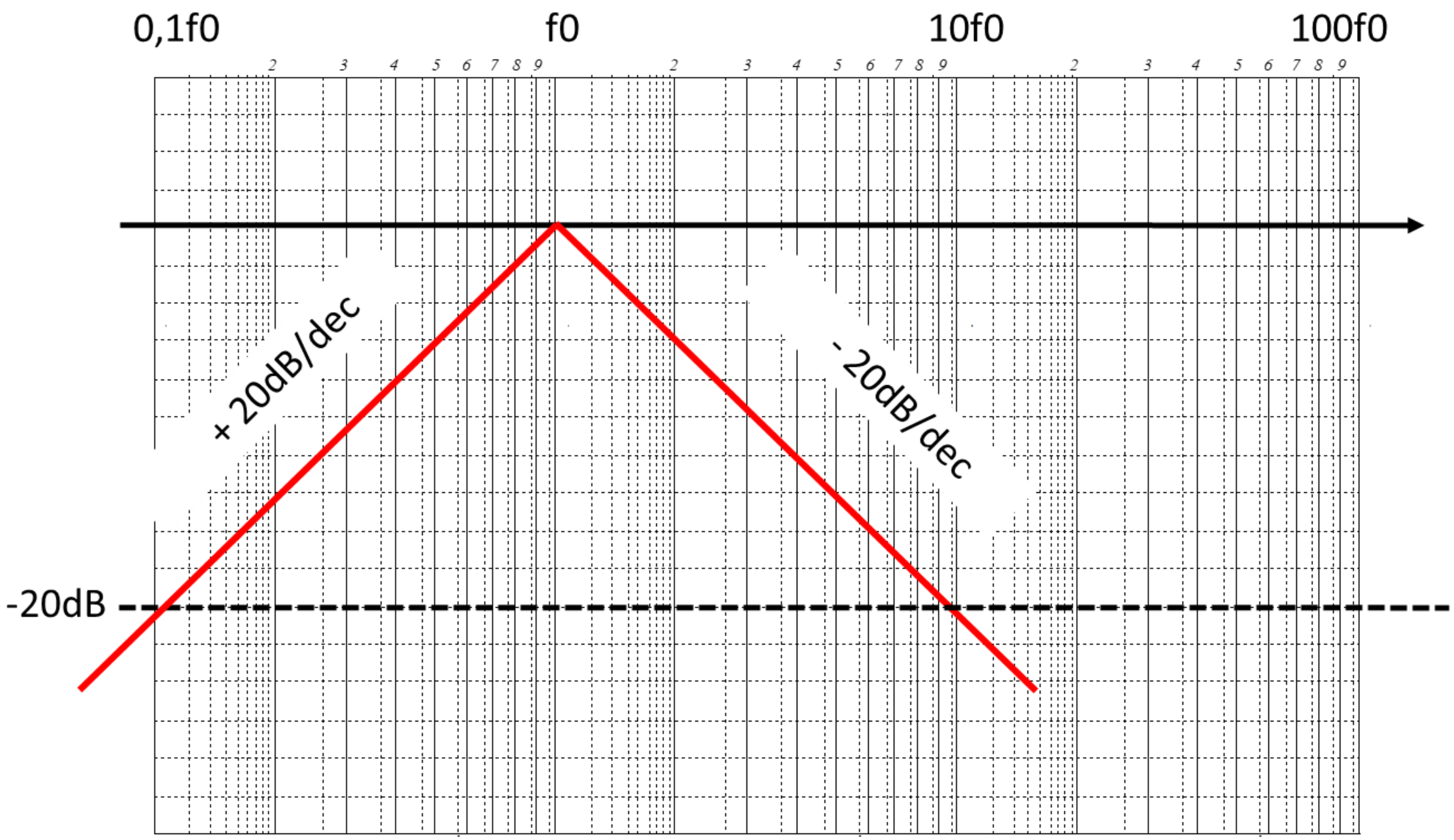
Elle a une pente de -20 dB par décade

Pour le déphasage, on peut ainsi montrer qu'on a l'asymptote horizontale $\Phi_H = -\frac{\pi}{2}$

ISEN école d'ingénieurs

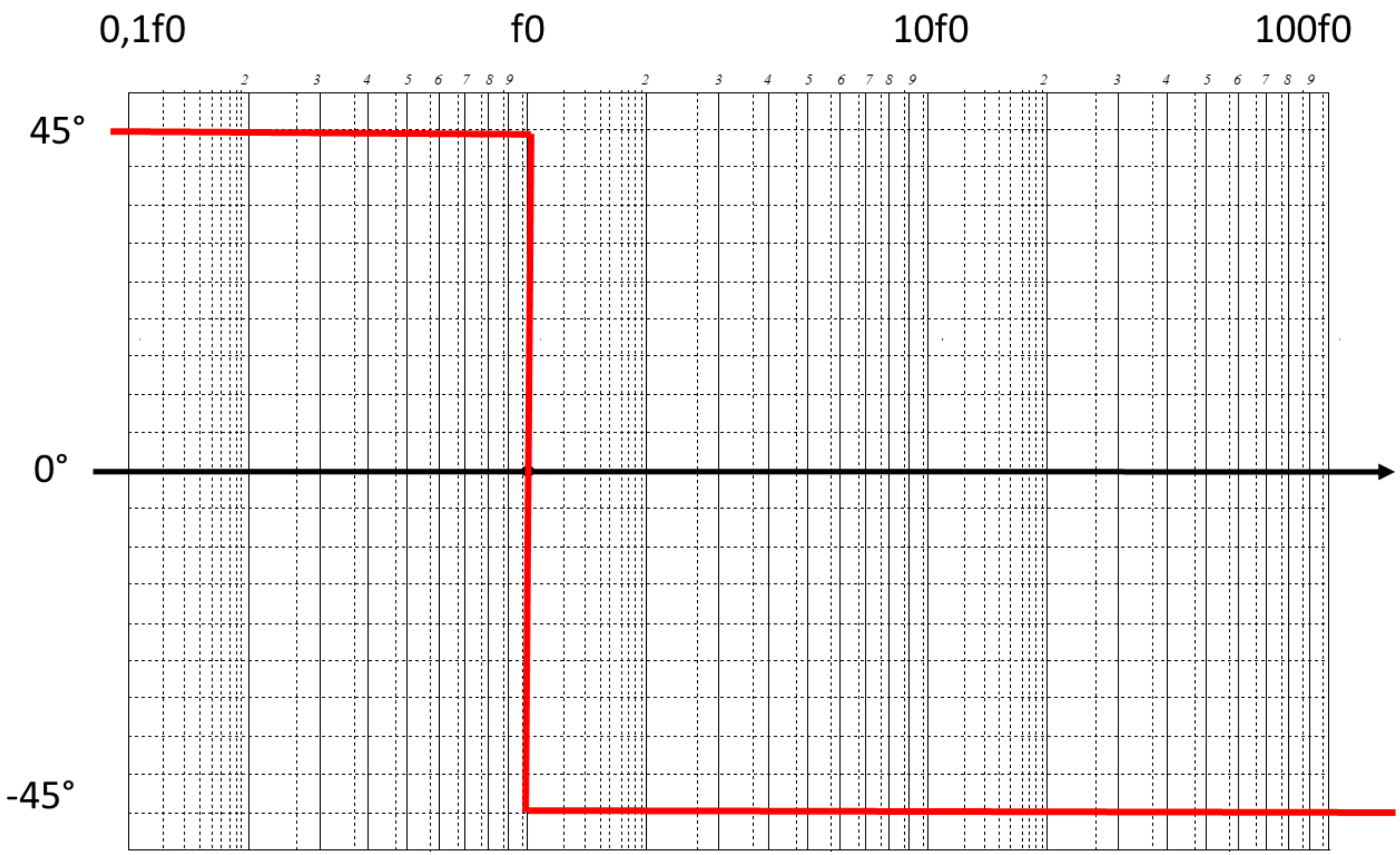
Circuit RLC

Diagramme de Bode asymptotique du gain



Circuit RLC

Diagramme de Bode asymptotique de la phase



Sommaire

Analyse spectrale d’une grandeur périodique

On ne traite que le cas de signaux sinusoïdaux,

Pourquoi ?

Tout signal peut être décrit comme une somme de sinusoïdes

Analyse spectrale d'une grandeur périodique

Un théorème très utilisé : le théorème de Fourier

Tout signal périodique de période T peut s'écrire sous la forme d'une somme de fonctions sinusoïdales de pulsations multiples de la pulsation $\omega = \frac{2\,\pi}{T}$:

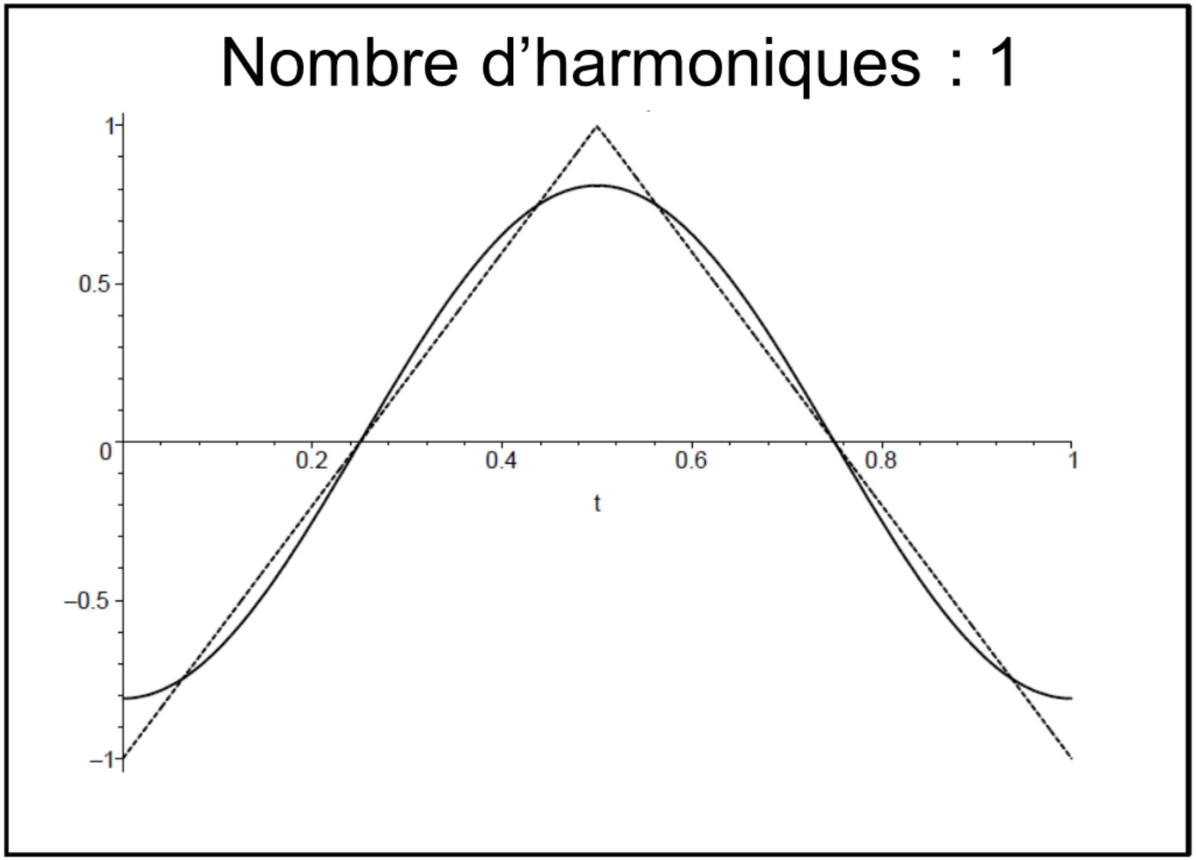
$$u(t) = c_0 + \sum_{n=1}^{+\infty} c_n \cos(n\,\omega\,t + \varphi_n)$$

Cette écriture est appelée *décomposition en série de* FOURIER.

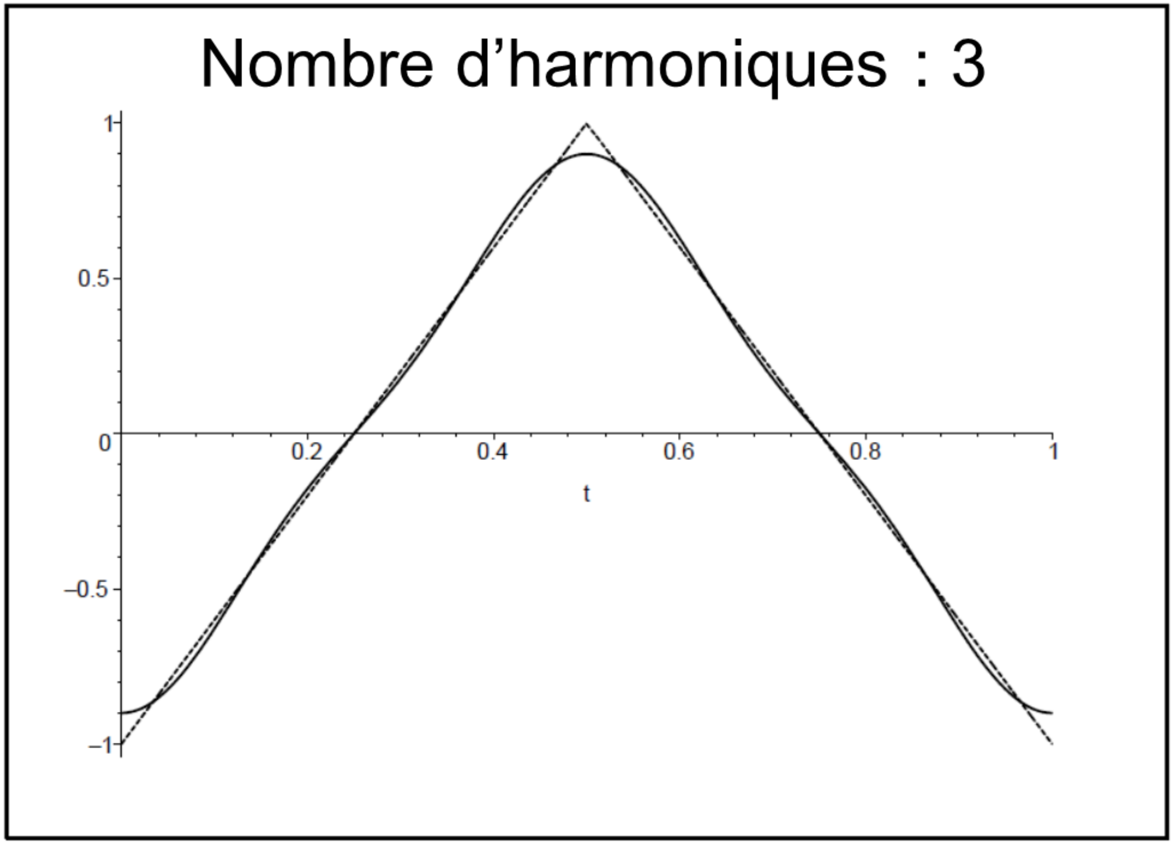
Tous les signaux périodiques sont des sommes de sinusoïdes

Sinusoïde de pulsation ω : « le fondamental »
Les multiples : « les harmoniques »

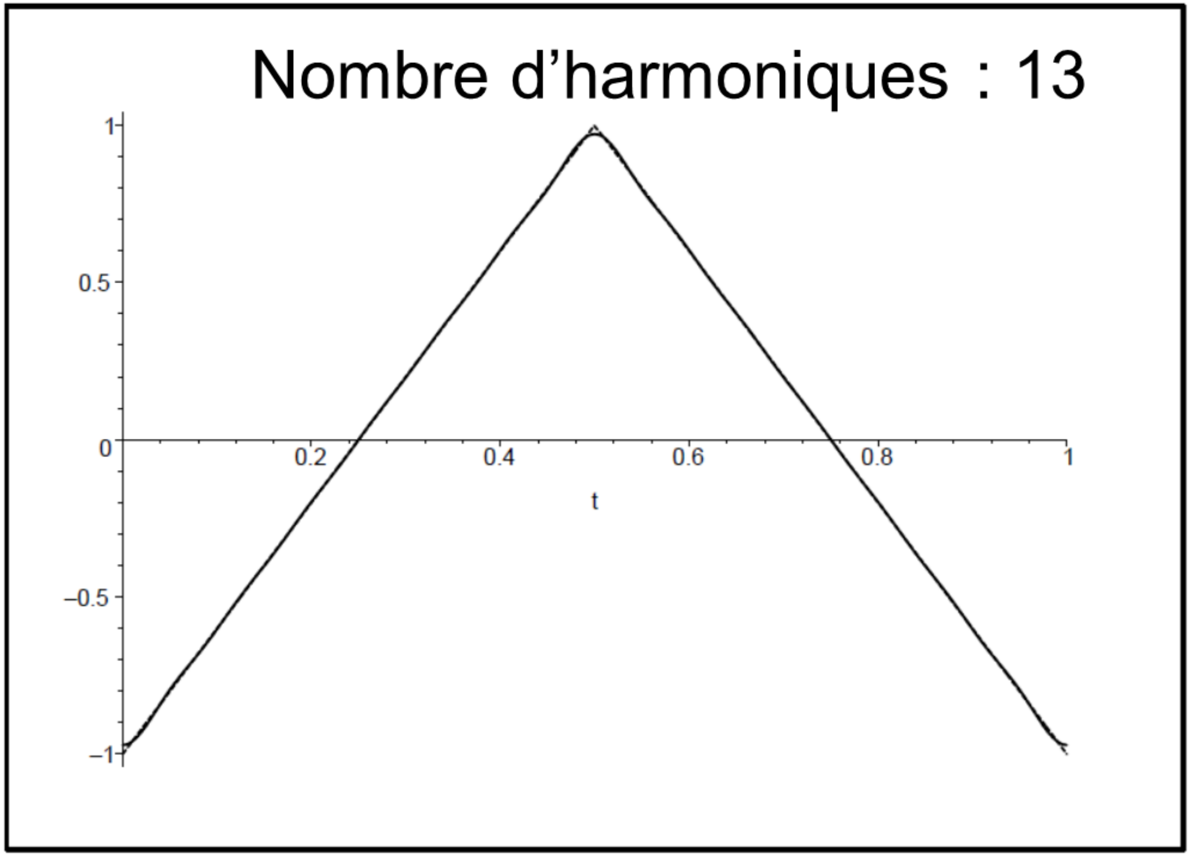
Un signal triangulaire décomposé en sinusoïdes



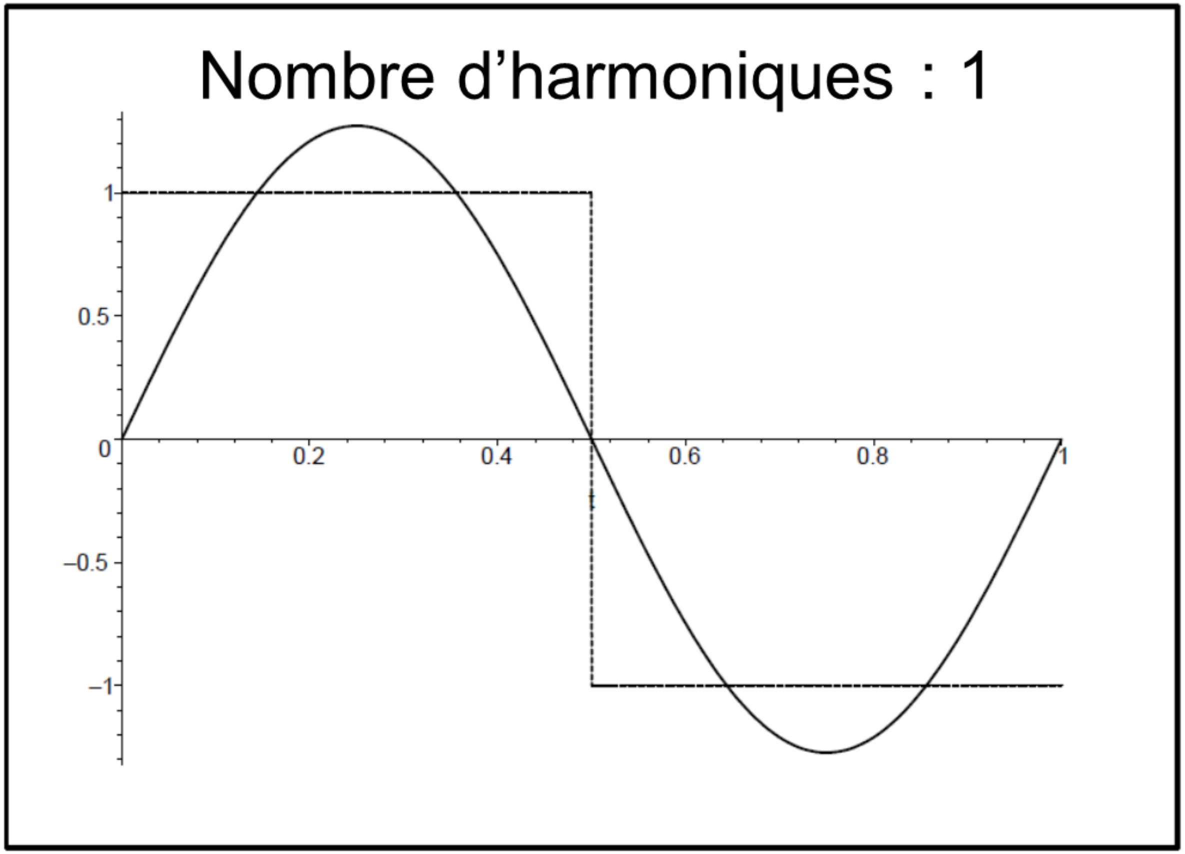
Un signal triangulaire décomposé en sinusoïdes



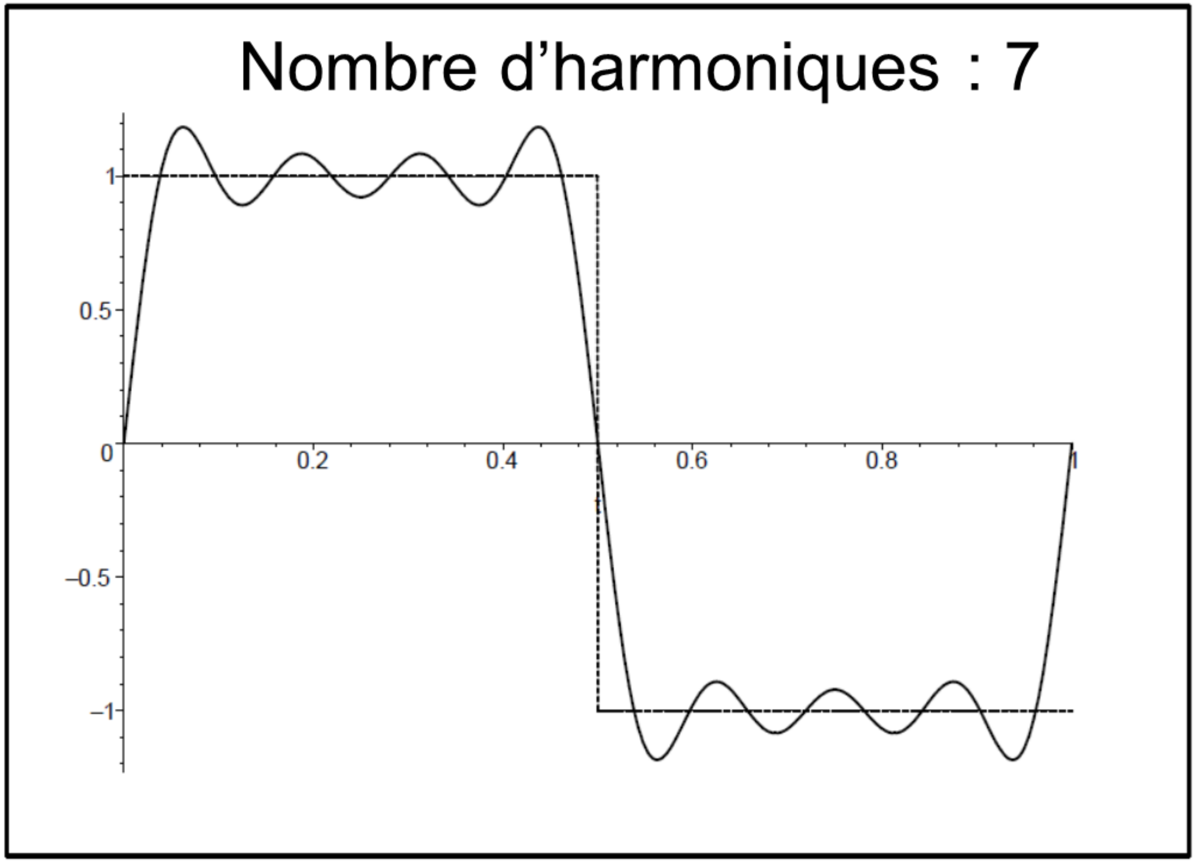
Un signal triangulaire décomposé en sinusoïdes



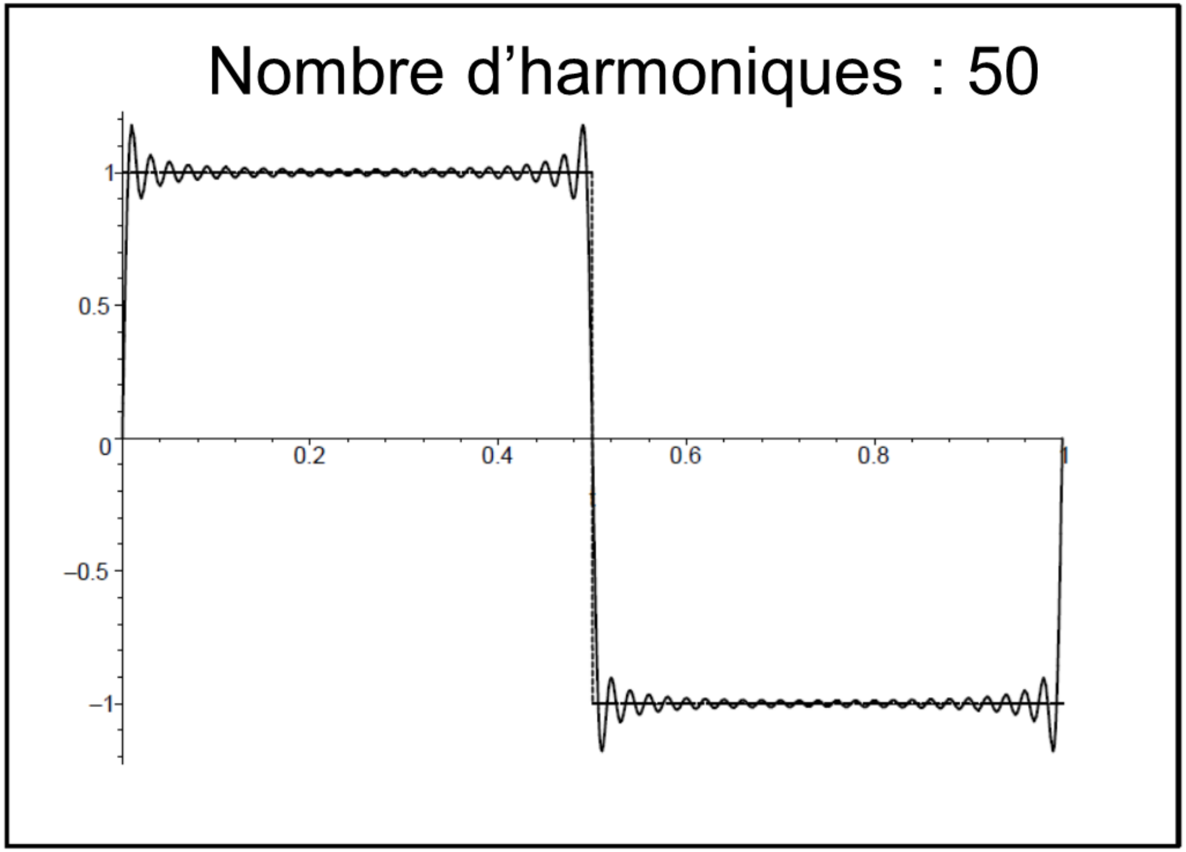
Un signal rectangulaire décomposé en sinusoïdes



Un signal rectangulaire décomposé en sinusoïdes



Un signal rectangulaire décomposé en sinusoïdes



Récapitulatif (A savoir)

- Notion de filtrage
- Fonction de transfert
- Diagramme de Bode
- Filtres de premier et second ordre
- Analyse spectrale

Fin du chapitre 4