1/ Étudier la convergence et calculer éventuellement la somme de la série $[u_n]_{n\in\mathbb{N}}$ dans les cas suivants :

$u_n = \left(1+\dfrac{1}{n}\right)^{n^2}$	$u_n = \left(\dfrac{n^2-5n+1}{n^2-4n+2}\right)^{n^2}$	$u_n = \displaystyle\int_n^{n+1} \frac{dt}{\sqrt{1+t^4}}$	$u_n = \dfrac{1}{2^n}\left(1+\dfrac{1}{n}\right)^n$
$u_n = Arc\sin\dfrac{2n}{4n^2+1}$	$u_n = \left(\dfrac{n-1}{n}\right)^n$	$u_n = \dfrac{n!}{n^n}$	$u_n = \dfrac{2^n}{n^2}$
$u_n = \dfrac{2\times 4\times 6\times\ldots\times(2n)}{n^n}$	$u_n = \dfrac{1}{n}\sin\left(\dfrac{4n-3}{6}\pi\right)$	$u_n = \sin\left(\dfrac{n^2+n+1}{n+1}\pi\right)$	$u_n = \dfrac{3\times 6\times 9\times\ldots\times(3n)}{n^n}$
$u_n = \sqrt{1+\dfrac{(-1)^n}{n}}-1$	$u_n = \dfrac{1}{n\ln(n)}$	$u_n = \sin\left(\pi\sqrt{n^2+1}\right)$	$u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{n}\right)$
$u_n = \ln\left(1+\dfrac{(-1)^n}{\sqrt{n}}\right)$	$u_n = \dfrac{\sin^2 n}{n}$	$u_n = (-1)^n\dfrac{\sin^2 n}{n}$	$u_n = \sqrt[3]{n^3+1}-\sqrt{n^2+1}$

2/ Soit $a\in\mathbb{C}$ tel que $|a|<1$. Pour tout $n\in\mathbb{N}$, et tout $k\leqslant n$, calculer $S_k = a^k + a^{k+1} + \ldots + a^{n-1} + a^n$

Calculer de 2 manières la somme $S_0 + S_1 + .. + S_n$. Montrer que $(n+1)a^{n+1} \xrightarrow[n\to\infty]{} 0$.

En déduire que la série $\sum\limits_{n\in\mathbb{N}}(n+1)a^n$ converge et calculer sa somme.

3/ Soit $\varphi = \dfrac{1+\sqrt{5}}{2}$ le nombre d'or.

Le côté du carré C_0 est 1, celui de C_1 $\dfrac{1}{\varphi}$,

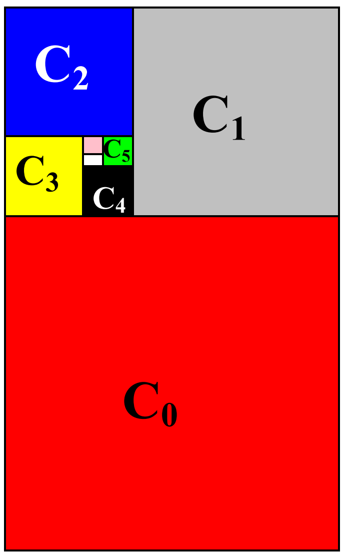
celui de C_2 $\dfrac{1}{\varphi^2}$, etc...

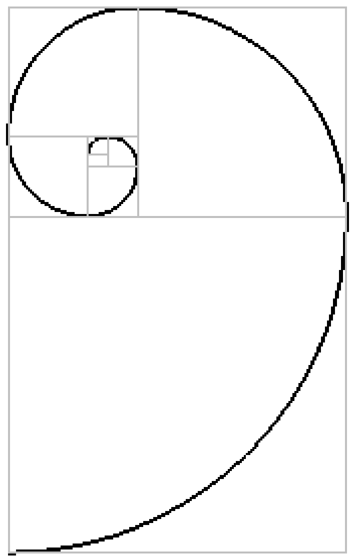
Calculer $\dfrac{1}{\varphi}+\dfrac{1}{\varphi^2}$.

Remarquer que cela justifie la construction.

Calculer la somme de la série $[C_n]$.

Calculer la longueur de la spirale.





4/ Soient $u_n = \dfrac{n!}{n^n e^{-n}\sqrt{n}}$ et $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$

En étudiant la série de terme général $\ln\left(\dfrac{u_{n+1}}{u_n}\right)$, montrer que la suite (u_n) a une limite non nulle L.

Calculer par récurrence $I_n = \displaystyle\int_0^{\frac{\pi}{2}} \sin^n x\, dx$. Montrer que $I_{n+1} < I_n < I_{n-1}$.

En déduire que la suite $\left(\dfrac{I_n}{I_{n+1}}\right)$ converge. Calculer L.

Étudier la série de terme général $a_n = \dfrac{(\ln n)^n}{n!}$.

Problème : la série harmonique alternée

a/ Pour des entiers $0 < n < p$, soit $S_{n,p} = \sum_{k=n+1}^{p} \frac{1}{k}$.

Encadrer $S_{n,p}$ à l'aide d'intégrales. Montrer que $\ln\left(\frac{p+1}{n+1}\right) < S(n,p) < \ln\left(\frac{p}{n}\right)$

b/ On pose $H_n = 1 + \frac{1}{2} + \frac{1}{3} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{n}$, $A_n = \frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n}$ et $B_n = 1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5} + \frac{1}{7} + \ldots + \frac{1}{2n-1}$

Écrire A_n et B_n en fonction des $H_{\ldots}$

c/ Écrire $U_n = 1 - \frac{1}{2} + \frac{1}{3} - \frac{1}{4} + \ldots + \frac{1}{2n-1} - \frac{1}{2n}$ en fonction des $H_{\ldots}$ puis en fonction des $S_{\ldots,\ldots}$

Encadrer U_n. En déduire que la série $\sum_{n\geqslant 1} \frac{(-1)^n}{n}$ est convergente et calculer sa somme

d/ Encadrer de même $V_n = \left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \ldots + \left(\frac{1}{4n-3} + \frac{1}{4n-1} - \frac{1}{2n}\right)$

En déduire que la série $\left(1 + \frac{1}{3}\right) - \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{5} + \frac{1}{7}\right) - \frac{1}{4} + \left(\frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) - \frac{1}{6} + \ldots$ est convergente et calculer sa somme

e/ Étudier la série

$$\left(1 + \frac{1}{3} + \frac{1}{5}\right) + \left(-\frac{1}{2} - \frac{1}{4}\right) + \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{9} + \frac{1}{11}\right) + \left(-\frac{1}{6} - \frac{1}{8}\right) + \left(\frac{1}{13} + \frac{1}{15} + \frac{1}{17}\right) + \left(-\frac{1}{10} - \frac{1}{12}\right) + \ldots$$

puis la série $\left(1 - \frac{1}{2}\right) + \left(\frac{1}{3} - \frac{1}{4} - \frac{1}{6}\right) + \left(\frac{1}{5} - \frac{1}{8} - \frac{1}{10} .. - \frac{1}{14}\right) + \left(\frac{1}{7} - \frac{1}{16} - \frac{1}{18} \ldots - \frac{1}{30}\right) + \ldots$

f/ Riemann a démontré (voir document Absolue convergence, semi-convergence) qu'en changeant l'ordre des termes de la série harmonique alternée, on pouvait trouver une série convergeant vers n'importe quel réel fixé à l'avance.

Écrire le pseudo-code d'un programme étudie une telle série « permutée » convergeant vers $\pi = 3.141592654\ldots$. On affichera les termes d'une somme partielle de rang suffisant pour que la somme soit approchée à 10^{-3} près