$\mathscr{M}$athématiques $\mathcal{C}\,i\,\mathbf{R}^{2\,\prime}$

$\mathscr{C}$onsignes

- Cette épreuve de **120 minutes** contient **3** $\times$ **3** questions équipondérées indépendantes.
- L'usage de la calculatrice non programmable est **permis** bien que peu utile.
- Rédigez clairement en **explicitant** vos raisonnements et **expliquant** vos réponses.
- Le but de cette épreuve[1] est de convaincre le lecteur que vous maîtrisez le matériel ; **exprimez**-vous !
- Et surtout, **amusez**-vous bien !

— Chico —

a) Montrer que la différentiabilité d'une fonction $f : \mathbf{R}^2 \to \mathbf{R}$ en un point $P_0 \in \mathbf{R}^2$ implique sa continuité en ce point.

b) Vérifiez que les dérivées partielles en $(1,0)$ de

$$f(x,y) = \begin{cases} x + \dfrac{xy - y}{(x-1)^2 + y^2} & \text{si } (x,y) \neq (1,0), \\ 1 & \text{sinon,} \end{cases}$$

existent et précisez leur valeur.

c) La dérivabilité partielle est-elle suffisante pour garantir la différentiabilité d'une fonction ? Justifiez.

— Harpo —

a) Déterminer le plan tangent au point (π, π, π) à la surface

$$\mathcal{G} : \cos x \sin y + \cos y \sin z + \cos z \sin x = 0.$$

b) Mettre la quadrique suivante sous forme canonique et en déduire une paramétrisation :

$$\mathcal{Q} : x^2 - 2xy + 2xz + 2y^2 - 6yz + 4z^2 = 0.$$

c) Calculer le volume du solide d'intersection des cylindres

$$\mathcal{C}_1 : x^2 + z^2 \leqslant 1 \qquad \text{et} \qquad \mathcal{C}_2 : y^2 + z^2 \leqslant 1.$$

— Groucho —

a) La Poste précise que les dimensions (ℓ, L, h) d'un paquet doivent satisfaire

$$\ell + L + h \leqslant 90 \text{ cm}$$

pour pouvoir être envoyé en tarif normal. Quel est le volume maximal d'un tel paquet ?

b) Question reliée : quelles sont les valeurs extrêmes pour l'aire de la surface latérale d'un tel paquet ?

c) Exprimer la longueur $\ell(a,b)$ d'une ellipse de rayons a et b en fonction de ceux-ci (ne cherchez *pas* à évaluer l'intégrale). Quel est le périmètre maximal d'une ellipse satisfaisant $0 \leqslant a, b \leqslant 1$?

1. comme de toutes les autres, d'ailleurs