MATHS Courbes planes CIR2

I Courbes paramétrées

1. Définition

Une courbe plane paramétrée, c'est une application γ d'un intervalle $[a,b]$ de $\mathbb{R}$ à valeur dans $\mathbb{R}^2$.
On peut la concevoir comme l'équation horaire d'un mobile dans le plan
On peut aussi noter $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ

Si $(O, \vec{i}, \vec{j})$ est un repère orthonormé du plan, $\overrightarrow{OM}(t) = x(t)\vec{i} + y(t)\vec{j}$

Support

L'image de γ (ensemble des points $\mathbb{R}^2$ qui sont images par γ d'un point de $[a,b]$) est appelé le support de cette courbe paramétrée. On dit aussi (improprement dans ce contexte) que c'est une courbe.

Paramètres équivalents

La courbe $M_1(t) = \begin{pmatrix} x_1(t) \\ y_1(t) \end{pmatrix}$ $t \in [a,b]$ et la courbe $M_2(\tau) = \begin{pmatrix} x_2(\tau) \\ y_2(\tau) \end{pmatrix}$ $\tau \in [\alpha, \beta]$
sont équivalentes (ou "les paramétrages sont équivalents") s'il existe une bijection $\varphi : [\alpha, \beta] \to [a,b]$ telle que pour tout $\tau \in [\alpha, \beta]$, on ait $M_2(\tau) = M_1(\varphi(\tau))$.

Dans ce cas, les supports sont les mêmes (mais cette condition n'est pas suffisante).

2. Symétries

si → et ↓	$x(t_2) = x(t_1)$	$x(t_2) = -x(t_1)$
$y(t_2) = y(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont confondus	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont sym par rapport à l'axe Oy
$y(t_2) = -y(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont sym par rapport à l'axe Ox	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont sym par rapport à l'origine

si → et ↓	$x(t_2) = y(t_1)$	$x(t_2) = -y(t_1)$
$y(t_2) = x(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont sym par rapport à l'axe $y = x$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont → Rotation d'angle $\frac{\pi}{2}$
$y(t_2) = -x(t_1)$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont → Rotation d'angle $-\frac{\pi}{2}$	alors $M(t_2)$ et $M(t_1)$ sont sym par rapport à l'axe $y = -x$

3. Vecteur vitesse - tangente

a/ Vecteur vitesse

Soit $\gamma [a,b] \to \mathbb{R}^2$ une courbe paramétrée de classe C^1 et $M(t) = \begin{pmatrix} x(t) \\ y(t) \end{pmatrix}$ l'image de t par γ.

On note $\frac{dM}{dt}$ ou $\frac{dM}{dt}(t)$ le vecteur $\begin{pmatrix} x'(t) \\ y'(t) \end{pmatrix}$ également noté $\begin{pmatrix} dx/dt \\ dy/dt \end{pmatrix}$

On l'appelle le vecteur vitesse (au point t). On écrit aussi $\frac{dM}{dt} = \frac{dx}{dt}\vec{i} + \frac{dy}{dt}\vec{j}$

b/ Définition

On dit que la droite Δ est tangente en $M(t_0)$ à la courbe γ si $M(t_0) \in \Delta$ et si la direction de Δ est la limite des directions des "cordes" $(M(t_0)M(t_1))$ quand $t_1 \to t_0$

c/ Propriété

Si $\frac{dM}{dt}(t_0) \neq 0$, la courbe γ possède une tangente au point $M(t_0)$, et cette tangente a le vecteur vitesse $\frac{dM}{dt}(t_0)$ comme vecteur directeur.

Si $\forall t \in [a,b] \ / \ \frac{dM}{dt}(t) \neq 0$, on dit que la courbe est régulière. En tout point, elle a une tangente

4. Etude globale

Exemple $\begin{cases} x(t) = 4\sin t - 3\sin 3t \\ y(t) = 4\cos t - 3\cos 2t \end{cases}$ $(t \in \mathbb{R})$

Période	$x(t+2\pi) = x(t)$ $y(t+2\pi) = y(t)$ $M(t+2\pi) = M(t)$	$x(t+\pi) = -x(t)$ $y(t+\pi) = -4\cos(t) - 3\cos(2t)$ $M(t+\pi) = /$
Symétries	$x(-t) = -x(t)$ $y(-t) = y(t)$ $M(-t) =$ symétrie de $M(t)$ par rapport à Oy	$x\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 4\cos(t) - 3\cos(3t)$ $y\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = 4\sin(t) + 3\cos(2t)$ $M\left(\frac{\pi}{2} - t\right) = /$

5. Etude locale (courbe de classe C^1)

a/ Limite des cordes

Si $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ a une limite finie quand $t \to t_0$, la courbe a une tangente au point $M(t_0)$ et la limite est la pente de cette tangente

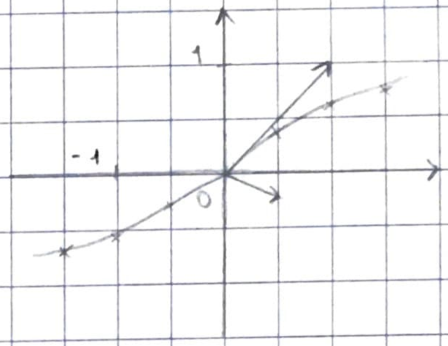
Si $\dfrac{y(t) - y(t_0)}{x(t) - x(t_0)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand $t \to t_0$, la courbe a une tangente verticale en $M(t_0)$

b/ Limite des tangentes

Si $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ a une limite finie quand $t \to t_0$, la courbe a une tangente au point $M(t_0)$ et la limite est la pente de cette tangente

Si $\dfrac{y'(t)}{x'(t)}$ tend vers $+\infty$ ou $-\infty$ quand $t \to t_0$, la courbe a une tangente verticale en $M(t_0)$

c/ Utilisation des DL



Exemple $\begin{cases} x(t) = \tan t \\ y(t) = \sin t \end{cases}$ étude en $t = 0$

DL : $M(t) = \underbrace{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}}_{\text{position}} + t \underbrace{\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}}_{\text{tangente}} + t^2 \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix} + t^3 \underbrace{\begin{pmatrix} 1/3 \\ -1/6 \end{pmatrix}}_{\text{négligeable}} + t^3 \varepsilon(t)$

d/ Point singulier (ou point d'arrêt ou point stationnaire) cas où $\frac{dM}{dt} = 0$

Exemple : Cycloïde $\begin{cases} x(t) = t + \sin t \\ y(t) = 1 + \cos t \end{cases}$ Point singulier en $t = \pi$

$$\lim_{t \to \pi} \frac{y(t) - y(\pi)}{x(t) - x(\pi)} = \lim_{t \to \pi} \frac{1 + \cos t}{t + \sin t - \pi} \overset{(u = t - \pi)}{=} \lim_{u \to 0} \frac{1 - \cos u}{u - \sin u} = \pm \infty$$

$$\lim_{t \to \pi} \frac{y'(t)}{x'(t)} = \lim_{t \to \pi} \frac{-\sin t}{1 + \cos t} \overset{(u = t - \pi)}{=} \lim_{u \to 0} \frac{\sin u}{1 - \cos u} = \pm \infty$$

6. Branches infinies quand $t \to t_0$...

a/ Direction asymptotique

* verticale si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm \infty$
* horizontale si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$
* oblique dans la direction de la droite $y = ax$ si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a$

b/ Asymptote

* verticale si $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm \infty$ et $x(t)$ a une limite finie
* horizontale si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm \infty$ et $y(t)$ a une limite finie
* oblique : $y = ax + b$ si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a$ et $y(t) - ax(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} b$

c/ Branche parabolique

* de direction verticale si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$, $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$ et $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$
* de direction horizontale si $x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$, $y(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$ et $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} 0$
* oblique : si $\frac{y(t)}{x(t)} \xrightarrow[t \to t_0]{} a$ et $y(t) - a x(t) \xrightarrow[t \to t_0]{} \pm\infty$

II. Courbes polaires

Soit I un intervalle de $\mathbb{R}$. Pour tout réel $\theta \in I$, on pose $\vec{u} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

La courbe polaire définie par la fonction $\rho(\theta)$ est la courbe paramétrée qui, à θ, associe $M(\theta) = \rho(\theta)\vec{u} = \begin{pmatrix} \rho(\theta)\cos\theta \\ \rho(\theta)\sin\theta \end{pmatrix}$

On note $\vec{n}$ le vecteur $\frac{d\vec{u}}{d\theta} = \begin{pmatrix} -\sin\theta \\ \cos\theta \end{pmatrix}$. On remarque que $\frac{d\vec{n}}{d\theta} = -\vec{u}$ et que pour tout θ, $(O, \vec{u}, \vec{n})$ est un repère orthonormé direct (repère tournant).

Le vecteur vitesse est alors $\frac{dM}{d\theta} = \rho'(\theta)\vec{u} + \rho(\theta)\vec{n}$

1. Interprétation

Quand θ varie, le point $M = \rho\vec{u}$ subie un double déplacement.
→ rotation autour de O parce que le vecteur $\vec{u}$ varie (tourne régulièrement dans le sens trigonométrique)
→ déplacement le long de l'axe défini par $\vec{u}$ parce que ρ varie
Le vecteur vitesse $\frac{dM}{d\theta} = \rho'\vec{u} + \rho\vec{n}$ a donc 2 composantes

→ l'une radiale $\rho'\vec{u}$ (s'il n'y avait que celle-là - si θ constant - mouvement recti)
→ l'autre normale $\rho\vec{n}$ (s'il n'y avait que celle-là - si ρ constant - mouv circulaire)

2. Symétries des courbes polaires

$M(\theta) = \rho(\theta)\,\overrightarrow{u(\theta)}$ avec $\overrightarrow{u(\theta)} = \begin{pmatrix} \cos\theta \\ \sin\theta \end{pmatrix}$

$\overrightarrow{u(-\theta)}$ est le sym de $\overrightarrow{u(\theta)}$ par rapport à Ox
$\overrightarrow{u(\pi-\theta)}$ est le sym de $\overrightarrow{u(\theta)}$ par rapport à Oy
$\overrightarrow{u(\pi+\theta)}$ est égal à $-\overrightarrow{u(\theta)}$ + sym de $\overrightarrow{u(\theta)}$ par rapport à O

$\overrightarrow{u\left(\frac{\pi}{2}-\theta\right)}$ est le sym de $\overrightarrow{u(\theta)}$ par rapport à l'axe $y=x$
$\overrightarrow{u\left(\frac{\pi}{2}+\theta\right)}$ est l'image par rotation d'angle $\pi/2$
$\overrightarrow{u(\theta+\theta_0)}$ est l'image de $\overrightarrow{u(\theta)}$ par rotation d'angle θ_0

Si $\rho(-\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(-\theta)$ est le sym de $M(\theta)$ par rapport à Ox
Si $\rho(\pi-\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(\pi-\theta)$ est le sym de $M(\theta)$ par rapport à Oy
Si $\rho(\pi+\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(\pi+\theta)$ est le sym de $M(\theta)$ par rapport à O
Si $\rho(\pi/2-\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(\pi/2-\theta)$ est le sym de $M(\theta)$ par rapport à l'axe $y=x$
Si $\rho(\pi/2+\theta)=\rho(\theta)$ alors $M(\pi/2+\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par rotation de $\pi/2$

Si $\rho(-\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(-\theta)$ est le sym de $M(\theta)$ par rapport à Oy
Si $\rho(\pi-\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(\pi-\theta)$ est le sym de $M(\theta)$ par rapport à Ox
Si $\rho(\pi+\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(\pi+\theta)$ est égal à $M(\theta)$
Si $\rho(\pi/2-\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(\pi/2-\theta)$ est le sym de $M(\theta)$ par rapport à l'axe $y=-x$
Si $\rho(\pi/2+\theta)=-\rho(\theta)$ alors $M(\pi/2+\theta)$ est l'image de $M(\theta)$ par rotation d'angle $-\pi/2$

Exemple $\rho(\theta) = \cos\theta\cos(2\theta) = 2\cos^3(\theta) - \cos(\theta)$

Période - Symétries
Valeurs de θ où $\rho(\theta)$ s'annule : la courbe passe par l'origine
si $\rho'(\theta)\neq 0$, tangente est radiale (colinéaire à $\overrightarrow{u(\theta)}$)
Valeurs de θ où $\rho'(\theta)$ s'annule : si $\rho(\theta)\neq 0$, tangente est normale (ortho à $\overrightarrow{u(\theta)}$)
Variations de $\rho(\theta)$.
→ si $\rho(\theta)\geq 0$ et $\rho(\theta)$ croit, le point M s'éloigne de l'origine
→ si $\rho(\theta)\leq 0$ et $\rho(\theta)$ croit, le point M se rapproche de l'origine

3. Equation polaire d'une droite ne passant pas par O

$$ax+by+c=0 \rightarrow \rho = \frac{-c}{a\cos\theta + b\sin\theta}$$

4. Equation polaire d'un cercle passant par O

→ Cercle de centre $(0, r)$: $\rho = 2r\cos\theta$

→ Cercle de centre $(r, 0)$: $\rho = 2r\sin\theta$

→ Cercle de centre $(r\cos\theta_0, r\sin\theta_0)$: $\rho = 2r\cos(\theta - \theta_0)$

RAPPEL

$\sin(-\alpha) = -\sin\alpha$	$\cos(-\alpha) = \cos\alpha$
$\sin(\alpha + 2n\pi) = \sin\alpha$	$\cos(\alpha + 2n\pi) = \cos\alpha$
$\sin(\alpha + \pi) = -\sin\alpha$	$\cos(\alpha + \pi) = -\cos\alpha$
$\sin(\pi - \alpha) = \sin\alpha$	$\cos(\pi - \alpha) = -\cos\alpha$
$\sin\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = \cos\alpha$	$\cos\left(\alpha + \frac{\pi}{2}\right) = -\sin\alpha$
$\sin\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \cos\alpha$	$\cos\left(\frac{\pi}{2} - \alpha\right) = \sin\alpha$