Noircissez sur la feuille-réponse *toutes les bonnes réponses* à chacune des questions.

1. Le déterminant de la matrice $A = [a_{ij}] \in \mathcal{M}_n(\mathbf{F})$ peut se calculer par la formule...

(1)☐ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sg}(i)\, a_{i1}a_{i2}\cdots a_{in}$ (2)☐ $\displaystyle\sum_{i=1}^{n} \mathrm{sg}(i)\, a_{1i}a_{2i}\cdots a_{ni}$

(3)■ $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sg}(\sigma)\, a_{1\sigma(1)}a_{2\sigma(2)}\cdots a_{n\sigma(n)}$ (4)■ $\displaystyle\sum_{\sigma\in\mathcal{S}_n} \mathrm{sg}(\sigma)\, a_{\sigma(1)1}a_{\sigma(2)2}\cdots a_{\sigma(n)n}$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

2. Calculer le déterminant de la matrice

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 0 & 1 & 2 \\ 1 & -2 & 3 \\ 0 & 0 & 7 \end{bmatrix}.$$

(1)☐ 6 (2)☐ -2 (3)☐ -7 (4)☐ 0 (5)■ cette question n'a pas de sens

3. Calculer le déterminant de la matrice

$$M = \begin{bmatrix} -1 & 17 & 1 & 1 \\ 5 & 6 & -8 & -9 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 1 & -1 & 9 & -9 \end{bmatrix}.$$

(1)☐ 64 (2)☐ 664 (3)☐ 958 (4)■ 0 (5)☐ cette question n'a pas de sens

4. Soient A et B deux matrices carrées de taille n.

A-t-on toujours $\mathrm{dét}(AB) = \mathrm{dét}(BA)$?

(1)■ oui (2)☐ non

A-t-on toujours $\mathrm{dét}(AB) = \mathrm{dét}(A)\,\mathrm{dét}(B)$?

(3)■ oui (4)☐ non

5. Calculer le déterminant suivant :

$$\begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & 0 \\ -1 & 0 & -1 & -1 \\ 0 & 1 & -1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & -5 \end{vmatrix}$$

(1)■ 22 (2)☐ 6 (3)☐ 28 (4)☐ -22

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

6. Soit t un paramètre réel, calculer le déterminant de la matrice A suivante

$$A = \begin{bmatrix} 1 & t & 1 \\ -1 & t & -1 \\ t & -9 & -3 \end{bmatrix}$$

(1)☐ $18 - 6t - 2t^2$ (2)☐ $-6t$ (3)☐ 0 (4)■ $-2t(t+3)$

(5)☐ aucune des réponses précédentes n'est correcte.

7. La matrice représentant l'endomorphisme $\varphi(x,y) = (x-2y,\, 3x+2y)$ de $\mathbf{R}^2$ dans la base $\mathcal{B} = \left(\begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 1 \end{bmatrix} \right)$:

(1)☐ $\begin{bmatrix} 1 & -2 \\ 3 & 2 \end{bmatrix}$ (2)☐ $\begin{bmatrix} 2 & -2 \\ 3 & 1 \end{bmatrix}$ (3)■ $\begin{bmatrix} 1 & -3 \\ 2 & 2 \end{bmatrix}$

(4)☐ $\begin{bmatrix} 2 & 3 \\ -2 & 1 \end{bmatrix}$ (5)☐ $\begin{bmatrix} 1 & 2 \\ -3 & 2 \end{bmatrix}$

8. Identifiez les formules correctes pour tout endomorphisme $\varphi : V \to V$, bases $\mathcal{B}$ et $\mathcal{C}$ de V, scalaire $\lambda \in \mathbf{F}$:

(1)☐ ${}_{\mathcal{C}}[\varphi]_{\mathcal{B}} + I = \mathcal{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}} \cdot [\varphi + \mathrm{Id}]_{\mathcal{B}}$ (2)■ $[\varphi^2]_{\mathcal{B}} = [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}} \cdot [\varphi]_{\mathcal{C}} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{C}\to\mathcal{B}}$

(3)☐ $[\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} = [\varphi]_{\mathcal{C}}$ (4)■ $[\varphi - \lambda\,\mathrm{Id}]_{\mathcal{C}} = [\varphi]_{\mathcal{C}} - \lambda\, I$ (5)☐ $[\varphi]_{\mathcal{B}} = \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}^{-1} \cdot [\varphi]_{\mathcal{B}} \cdot \mathcal{P}_{\mathcal{B}\to\mathcal{C}}$

9. L'endomorphisme φ du numéro 47 est ...

(1) ☐ diagonalisable sur $\mathbf{Q}$
(2) ☐ diagonalisable sur $\mathbf{R}$
(3) ■ diagonalisable sur $\mathbf{C}$

10. Même question pour $\begin{bmatrix} 0 & 2 \\ 1 & 0 \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_2(\mathbf{Q})$:

(1) ☐ diagonalisable sur $\mathbf{Q}$
(2) ■ diagonalisable sur $\mathbf{R}$
(3) ■ diagonalisable sur $\mathbf{C}$

On considère pour les prochaines questions la matrice suivante :

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{bmatrix}$$

11. Multiplicité algébrique (ordre d'annulation du polynôme caractéristique) de 1 en tant que valeur propre de A :

(1)☐ 1 (2)☐ 2 (3)☐ 3 (4)☐ 4 (5)■ 5

12. Multiplicité géométrique (dimension de l'espace propre associé) de 1 en tant que valeur propre de A :

(1)☐ 1 (2)☐ 2 (3)■ 3 (4)☐ 4 (5)☐ 5

13. A est-elle diagonalisable ?

(1)☐ oui (2)■ non (3)☐ ça dépend du corps des scalaires

14. Cochez toutes les affirmations vraies pour la matrice $A \in \mathcal{M}_5(\mathbf{C})$:

(1) ■ Si $\chi_A(\lambda) = \lambda^5 - 2,$ alors A est forcément diagonalisable.
(2) ■ Si $\chi_A(\lambda) = \lambda^5 + 2\lambda + 1,$ alors A est forcément inversible.
(3) ☐ Si $\chi_A(\lambda) = (\lambda - 1)^5,$ alors A est forcément diagonalisable.
(4) ☐ Si A est inversible alors A est diagonalisable.
(5) ☐ Si A est diagonalisable alors A est inversible.