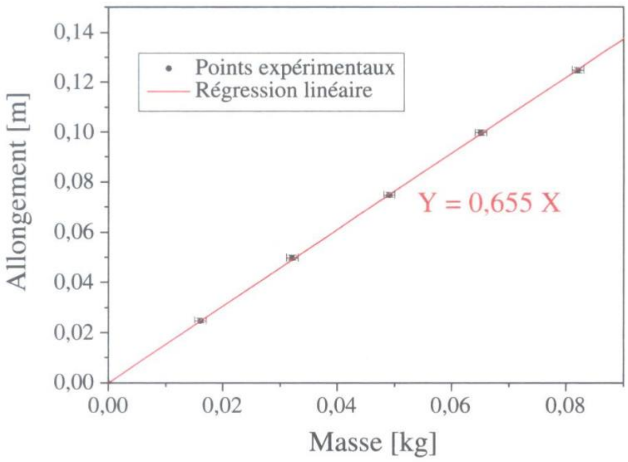
Exercice 1. Oscillations libres d'un ressort

Soit un ressort vertical de constante de raideur *k* inconnue et de longueur à vide l_0=*5cm*.

1) Un étudiant cherche à déterminer expérimentalement la valeur de la constante *k*. Pour cela, il trace l'allongement du ressort en fonction de la valeur de la masse *m* qu'il a accrochée au ressort et obtient le résultat illustré par la figure ci-contre. Une régression linéaire donne un coefficient directeur de *0.655*. En déduire la valeur de la constante de raideur *k*.



2) On accroche maintenant à ce ressort une masse *m=75g*, on écarte la masse de sa position d'équilibre d'une grandeur z_0=*4cm* et on la lâche sans vitesse initiale. En considérant que le mouvement a lieu sans frottement, déterminer l'équation du mouvement *z=f(t)* et donner la position de la masse par rapport à sa position d'équilibre *3s* après qu'il l'ait lâchée.

Exercice 2. Système oscillant à deux ressorts

Soit une masse *m*, attachée de chaque côté à deux ressorts de raideur respective k_1 et k_2 et le longueur à vide l_{10} et l_{2O}, se déplaçant sans frottement suivant une direction horizontale *x'x*. A l'équilibre, les ressorts ont respectivement une longueur l_{1e} et l_{2e}. L'origine *O* du repère *Ox* correspond à la position d'équilibre de la masse.

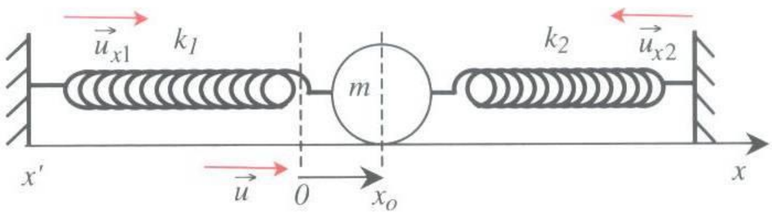


Schéma représentant la masse *m* et les deux ressorts lorsque la masse est écarté de la distance x_0 par rapport à sa position d'équilibre.

1. On écarte la masse m de sa position d'équilibre d'une grandeur x_0 et on la lâche sans vitesse initiale. Donner l'équation du mouvement *x=f(t)*.
2. Donner la constante de raideur *k* du ressort qui, attaché à la masse *m*, conduirait à la même équation du mouvement.

Exercice 3.

L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne et horizontal est donné par la relation suivante : $x(t) = 3cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$ avec x en cm et t en s.

a- Donner la période, la fréquence et l'amplitude des oscillations.
b- Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de l'oscillateur en fonction du temps.
c- Calculer les valeurs des amplitudes de la vitesse et de l'accélération.
d- Calculer la vitesse et l'élongation pour t = 0 et t = 4s

Exercice 4. (Bonus) Analogie oscillations libres d'un ressort et oscillation de la charge dans un circuit LC

Déterminer

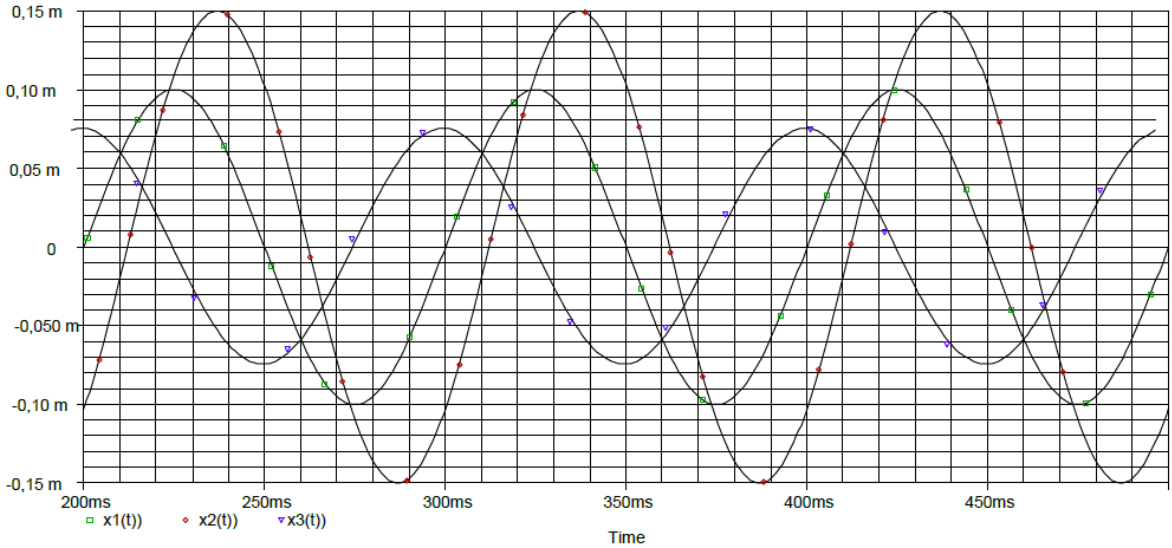
1. l'équation différentielle régissant la charge électrique $q = di/dt$ dans un circuit LC.
2. L'équation différentielle régissant le mouvement d'une masse *m* attachée à un ressort horizontal de raideur *k* lorsqu'on néglige les frottements.

En comparant les 2 équations, faire l'analogie entre les deux systèmes. Quel est l'équivalent de la position *x* du ressort ? de la masse *m* ? de la raideur *k* ?

Exercice 5. (Bonus) Signaux sinusoïdaux

1. En utilisant la relation trigonométrique permettant de développer $cos(a + b)$, montrer que la solution de la forme $x(t) = x_0 cos(\omega t + \varphi)$ est équivalente à $x(t) = Acos(\omega t) + Bsin(\omega t)$.

2. Les trois signaux ci-dessous représentent l'élongation de trois systèmes ressort masse (différents ?), en fonction du temps. Attention on a commencé l'enregistrement après 200ms.
Pour chaque signal donner : la valeur Max, la période, la fréquence, la pulsation, les déphasages des signaux par rapport à une référence que vous choisirez (conseil : prendre $x_1(t)$), l'expression temporelle exacte. On demande donc $x_1(t); x_2(t); x_3(t)$.



Solutions

Ex2. Réponses : *k=15N.m-1 ; z(t=3s)=2.9cm*

× TD 22 - 23

$(\sin \omega t)'' = (\omega \cos \omega t)' = -\omega^2 \sin \omega t$
$(\cos \omega t)'' = (\omega \sin \omega t)' = -\omega^2 \cos \omega t$

Exo 1. oscillateurs libres.

a)

Système : masse variable
référentiel : galiléen (terrestre)
Forces : $\vec{P}$, $\vec{T}$

- $\vec{P} = m\vec{g} = -mg\,\vec{u_z}$
- $\vec{T} = k(\ell - \ell_0)\,\vec{u_z}$

PFD selon z → $\vec{P} + \vec{T} = \vec{0}$

$mg = k(\ell - \ell_0)$

$mg = k\,Z$ ↳ l'allongement tracé sur le graphe

$$k = \frac{mg}{Z}$$

or, $Z = 0,655$ m

↳ $k = \frac{g}{0,655} = \frac{9,8}{0,655}$

$k = 15$ N.m^{-1}

b) $m = 75$g $z_0 = 4$cm

même sys / réf / forces q précédemment.

allongement à l'équilibre :
$Z_{eq} = 0,655$m
$= 4,9$cm

PFD à l'équilibre selon z : $mg - k\,Z_{eq} = 0$
$mg = k\,Z_{eq}$

hors équilibre selon z :
$mg - k(\ell - \ell_0) = m\ddot{Z}$
$mg - k(\ell - \ell_{eq} + \ell_{eq} - \ell_0) = m\ddot{Z}$
$mg - k\underbrace{(\ell - \ell_{eq})}_{Z_{osc}} - k\underbrace{(\ell_{eq} - \ell_0)}_{Z_{eq}} = m\ddot{Z}$

$$m\ddot{Z} = -k\,Z_{osc}$$

$$\ddot{Z} = -\frac{k}{m}\,Z_{osc}$$

$$Z_{osc} = A\cos\left(\sqrt{\tfrac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

$$Z = Z_{eq} + Z_{osc} = Z_{eq} + A\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right)$$

Valeur de φ et de A ?

en $t = 0$,

$$Z_{osc} = Z_0 = A\cos\varphi$$

$$\dot{Z}_{osc} = A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t + \varphi\right) = A\sqrt{\frac{k}{m}}\sin\varphi = 0$$

d'où $\varphi = 0$ ou $\varphi = \pi$

on a 2 cas car on peut tirer sur le ressort ($\varphi = 0$) ou le comprimer ($\varphi = \pi$) au démarrage.

prenons le cas $\varphi = 0$ $\longrightarrow$ $Z_{osc}(t=0) = Z_0 = A\cos 0 = A$

d'où $A = Z_0$

$$Z_{osc}(t) = Z_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right) \quad \text{ou} \quad Z_{osc}(t) = -Z_0\cos\left(\sqrt{\frac{k}{m}}\,t\right)$$

$$Z_{osc}(t = 3s) = 0{,}04\cos\left(\sqrt{\frac{15}{0{,}075}} \times 3\right) \simeq 0{,}04\cos(4{,}5\pi t) = 0{,}04\cos(2{,}25 \times 2\pi t) = 0$$

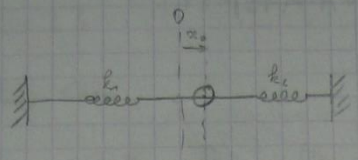
$f = 2{,}25$ Hz $\rightarrow$ 2,25 A/R par sec

en 3 s $\rightarrow$ 6,75 A/R

$\cos(6{,}75 \times 2\pi) = 0{,}014$

donc en 3 s, on est revenu à la posi° d'équilibre.

Exercice 2 :



$x = l - l_{0}$

$=$

$x =$

a) Sys : masse
réf : galiléen
Forces : $\vec{T_1} = -k_1 x \vec{u_x}$
$\vec{T_2} = k_2 x \vec{u_x}$
$\vec{P} = -mg \vec{u_z}$
$\vec{R} = R \vec{u_z}$

PFD : $\vec{P} + \vec{R} + \vec{T_1} + \vec{T_2} = m\vec{a}$

projecⁿ selon $z \rightarrow \vec{P} + \vec{R} = \vec{0}$

projecⁿ selon x → $\vec{T_1} + \vec{T_2} = m\vec{a}$

$$T_1 - T_2 = ma$$

$$-k_1 x - k_2 x = ma$$

$$-x(k_1 + k_2) = m\ddot{x}$$

$$\ddot{x} = -\frac{k_1 + k_2}{m} x$$

$$x(t) = A \cos\left(\sqrt{\frac{k_1 + k_2}{m}}\, t + \varphi\right)$$

comme on lâche la masse sans vitesse ini, $\varphi = 0$

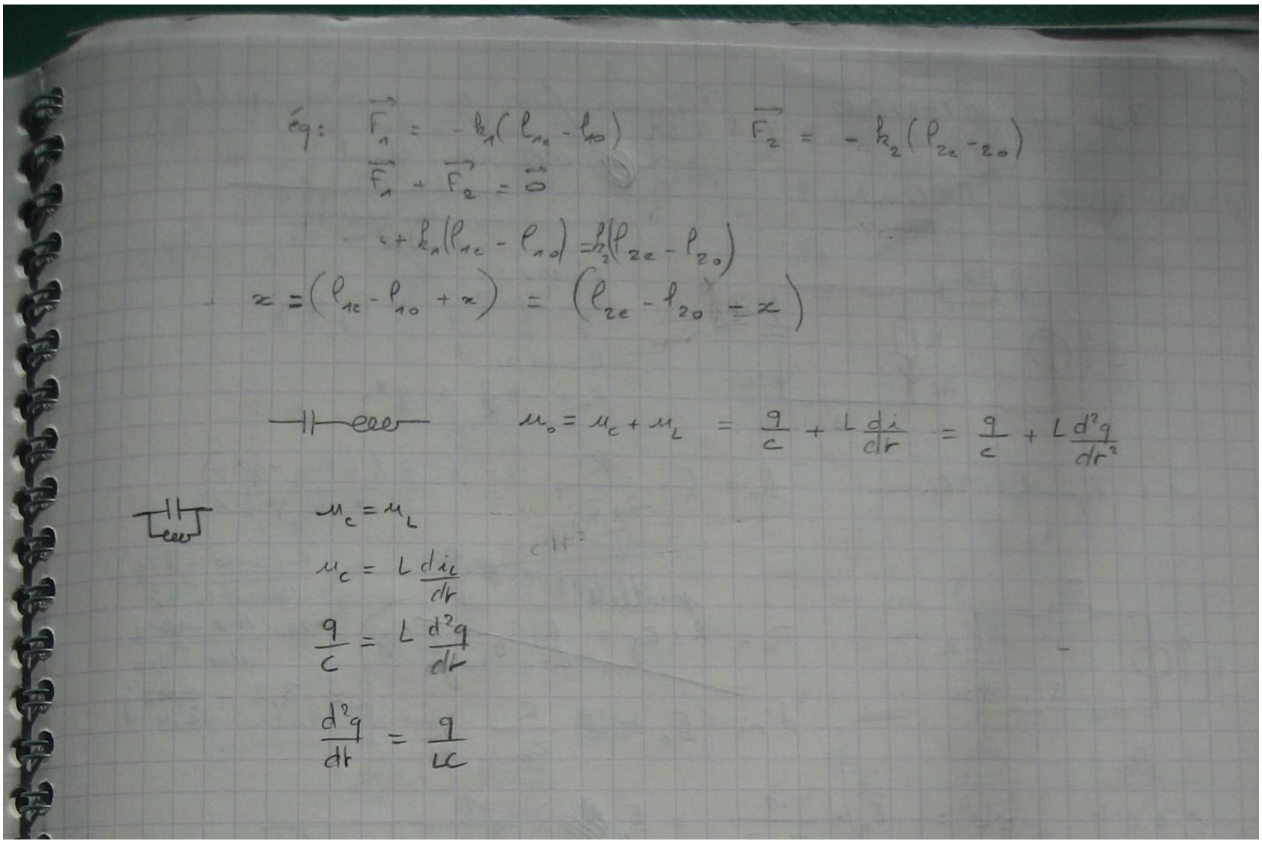
en $t = 0$, $x_0 = x(0) = A$

d'où $x(t) = A \cos\left(\frac{\sqrt{k_1 + k_2}}{m}\, t\right)$

b) 1 seul ressort de constante $k_1 + k_2$ donnerait le m̂ résultat.

analogie électromécanique :

charge q	distance x
intensité $\dot{q} = i$	vitesse $\dot{x}$
$\ddot{q} = \frac{di}{dt}$	accélérⁿ $\ddot{x}$
L	m
R	λ coef de frottᵗ
$1/C$	k
$T = 2\pi\sqrt{LC}$ $\left(\omega = \frac{1}{\sqrt{LC}}\right)$	$T = 2\pi\sqrt{\frac{m}{k}}$ $\left(\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}\right)$
$U = Ri$	$f = \lambda\dot{x}$ force de frottᵗ



Ex3. L'équation horaire du mouvement d'un oscillateur mécanique rectiligne et horizontal est donné par la relation suivante : $x(t) = 3cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$ avec x en cm et t en s.

a- Donner la période, la fréquence et l'amplitude des oscillations.

Pulsation=20 rd/s.

Période= 0,314 s

Fréquence = 3,18 Hz

Amplitude = 3 cm

b- Donner l'expression de la vitesse et de l'accélération de l'oscillateur en fonction du temps.

$x(t) = 3cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$

$v(t) = -60sin\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$

$a(t) = -1200cos\left(20t + \frac{\pi}{4}\right)$

c- Calculer les valeurs des amplitudes de la vitesse et de l'accélération.

Amplitude vitesse = 60 cm/s

Amplitude accélération = -1200 cm/s^2

d- Calculer la vitesse et l'élongation pour t = 0 et t = 4s

A t=0

$v(0) = -60sin\left(+\frac{\pi}{4}\right) = -42{,}4\ cm/s$

$x(0) = 3cos\left(+\frac{\pi}{4}\right) = 2{,}12\ cm$

A t=4

$v(0) = -60sin\left(80 + \frac{\pi}{4}\right) = 46{,}9\ cm/s$

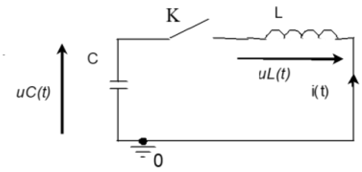
$x(0) = 3cos\left(80 + \frac{\pi}{4}\right) = 1{,}87\ cm$

Ex4.

Analogie électrique : Oscillateur électrique LC:

Pour t<0 le condensateur est initialement chargé sous la tension $v(t) = E$

A $t=0$ on ferme l'interrupteur .



La loi des mailles donne : $u_c(t) + u_L(t) = 0$ $\quad i(t) = \frac{dq(t)}{dt}$

$u_L(t) = L \cdot \frac{di(t)}{dt} = L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt}$ $\quad q(t) = C \cdot u_C(t)$

D'où: $L \cdot \frac{d^2q(t)}{dt} + \frac{q}{C} = 0$ Soit: $L \cdot \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$ ou: $\ddot{q} + \frac{q}{LC} = 0$

$\ddot{q} + \omega_0^2 \cdot q = 0$ avec $\omega_0 = \frac{1}{\sqrt{LC}}$

En comparant avec la mécanique (ressort+masse)

$$m \cdot \ddot{x} + k \cdot x = 0 \qquad L \cdot \ddot{q} + \frac{q}{C} = 0$$

On peut substituer à l'étude d'un problème mécanique ; un problème électrique (circuit LC) en utilisant les transformations suivantes:

$$\boxed{\begin{array}{c} x \to q \\ m \to L \\ k \to \frac{1}{C} \end{array}}$$

$v \to i$

$E_C = \frac{1}{2} m \cdot \dot{x}^2 \to E_L = \frac{1}{2} L \cdot i^2$

$E_P = \frac{1}{2} k \cdot x^2 \to E_C = \frac{1}{2} \frac{q^2}{C}$

Ex5.

1.

En utilisant la relation trigonométrique $\cos(a + b)$: $\cos a \cos b - \sin a \sin b$, on a :

$x(t) = x_0\cos(\omega t + \varphi) = x_0\cos\omega t \cdot \cos\varphi - x_0\sin\omega t \cdot \sin\varphi$. Par identification avec la solution de la forme $x(t) = A\cos\omega t + B\sin\omega t$, on en déduit l'équivalence pour $A = x_0\cos\varphi$ et $B = -x_0\sin\varphi$.

2.

x1(t)

Lmax= 0.1m ; Periode T= (300-200) ms ; Frequence 1/T=10 Hz ; Pulsation 2 pi f = 62.8 rad/s

$x_1(t) = 0.1\sin(62.8t)$

x2(t)

Lmax= 0.15m ; Periode T= 100 ms ; f=10 Hz ; ω= 20.9 rad/s ;

déphasage : 2π * (1,25 carreaux de 10 ms) / T = π/4

$x_2(t) = 0.15\sin(20.9t - \pi/4)$ (signe moins car le signal est en retard, tester t=0)

x3(t)

Lmax= 0.075m ; Periode T= 100 ms ; f=10 Hz ; ω= 20.9 rad/s ;

déphasage : 2π * (2,5 carreaux de 10 ms) / T = π/2

$x_3(t) = 0.075\sin(20.9t + \pi/2)$ (signe + car val max à t=0)

Ces enregistrements peuvent provenir du même ressort, car ils sont d'élongation max variable mais tous avec la même période.