1 Funktionen

1.1 Surjektivität

Definiere $y = f(x)$. Löse nach x auf. Ist jedes y in der Gleichung in Definitionsmenge vertreten? Wenn ja, ist die Funktion surjektiv.

1.2 Injektivität

Nehme an, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Versuche zu zeigen, dass daraus folgt, dass $x_1 = x_2$. Dann ist die Funktion injektiv.

1.3 Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.4 Funktion Invertieren

$y = f(x)$ nach x auflösen, dann y und x vertauschen.

2 Folgenmonotonie

Sei a_n eine Folge, dann ist a_n streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} > a_n$ bzw. streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} < a_n$ (bzw. *nur* monoton steigend/fallend, wenn $\geq$ oder $\leq$).

2.1 Monotoniekriterium

Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

2.2 Nullfolgenkriterium

Eine Folge a_k kann nur konvergieren, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3 Konvergenz

3.1 Konvergenzradius

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

3.2 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Ist eine Folge absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

3.3 Majorantenkriterium

Sei a_k eine Folge und $|a_k| \leq b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent.

3.4 Quotientenkriterium

TODO

3.5 Limes von Reihe

$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a+2} \longmapsto a = \sqrt{a+2}$

3.6 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_n$

Konvergent, wenn a_n streng monoton fallend (Leibnitz-Kriterium).

4 Grenzwerte

4.1 Wichtige Grenzwerte

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a+bx} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1+\frac{b}{cn}\right)^n = e^{\frac{b}{c}}}$$

4.2 L'Hospital

Wenn $h(x) = 0$, dann ist $\lim \frac{g(x)}{h(x)} = \lim \frac{g'(x)}{h'(x)}$.

5 Tangenten

Allgemein Tangentengleichung: $y = mx + b$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Allgemeine Form der Tangentengleichung an der Stelle a:

$$t(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

Die Tangente ist äquivalent zur Taylorreihe ersten Grades der jeweiligen Funktion. b bestimmt sich durch Gleichsetzung mit $f(x)$ an der Stelle x, wo die Tangente erstellt werden soll.

6 Schranken finden

Die kleinste obere Schranke heißt *Surpremum*. Bei monoton fallenden Folgen ist das erste Folgenglied die obere Schranke. (Bei monoton steigenden ist das erste das kleinste und daher das *Infimum*). Wenn Monotonie weder (s)mf noch (s)ms, dann obere Schranke abschätzen und per Induktion beweisen (dann nicht notwendigerweise kleinste obere Schranke!).

7 Taylorreihe

Allgemeine Formel zur Bestimmung von Taylorreihenapproximationen an der Stelle x_0:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x-x_0)^k$$

7.1 Approximationsfehler

Der Fehler einer Taylorapproximation an der Stelle a kann abgeschätzt werden mit:

$$R_n(x) = \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

wobei M eine obere Schranke von $|f^{(n+1)}(z)| \geq M$ sein muss.

8 Ableitungen

8.1 Definition Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

8.2 Produktregel

$$f(x) = g \cdot h \longmapsto f'(x) = g' \cdot h + g \cdot h'$$

8.3 Quotientenregel

$$f = \frac{g}{h} \longmapsto f' = \frac{h \cdot g' - h' \cdot g}{[h]^2}$$

8.4 Kettenregel

$$f = g(h) \longmapsto f' = g'(h) \cdot h'$$

8.5 Spezielle Ableitungen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\frac{a}{(b+cx)^k}\right) = -ack(b+cx)^{-k-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(\ln(a+bx^n)\right) = \frac{bnx^{n-1}}{a+bx^n}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(ab^{x+c}\right) = a\ln(b) \cdot b^{c+x}}$$

$$\boxed{f(x) = \ln(x) \longmapsto f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x} \longmapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left((\sqrt{ax^n+b}\right) = \frac{anx^{n-1}}{2\sqrt{ax^n+b}}}$$

$$\boxed{\sin x \longmapsto \cos x} \qquad \boxed{\cos x \longmapsto -\sin x}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(a\sin\left(b+cx^d\right)\right) = acdx^{d-1}\cos\left(b+cx^d\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x}\left(a\cos\left(b+cx^d\right)\right) = -acdx^{d-1}\sin\left(b+cx^d\right)}$$

9 Integration

$$\boxed{\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C}$$

$$\boxed{\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int (f(x) + g(x))\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x)\,\mathrm{d}x}$$

$$\boxed{\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(f(x)) + C}$$

$$\boxed{\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{u}}$$

9.1 Partielle Integration

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Oder auch: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$. Wähle u so, dass es nach endlich vielen Ableitungen eine Konstante wird.

10 Differentialgleichungen

10.1 Matrix-Methode

Schritt 1: Differentialgleichungen als Koeffizientenmatrix aufschreiben
Schritt 2: Eigenwerte herausfinden, Eigenvektoren $\vec{v}_n$ bilden
Schritt 3: Lösung ist System aus Gleichungen $\vec{x} = \sum c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n x}$

10.2 Determinanten

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}$$

$$\boxed{(a-b)(a+b)^2 = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}$$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

11 Wichtige Summen

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{g}{a^n} = g\cdot\frac{a}{a-1} \text{ (für } |a|>1)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (Basler Problem)}} \qquad \boxed{\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n\cdot z^n = \frac{1}{1+z} \text{ (für } |z|<1)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a}{b^n} = \frac{ab}{b-1} \text{ (für } |b|>1)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n+1}}{b^n} = \frac{ab}{b-a} \text{ (für } |a|<|b|)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{b^n} = \frac{b}{a(b-a)} \text{ (für } |a|<|b|)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a((-b)^n)}{c^n} = \frac{ca}{b+c} \text{ (für } |b|<|c|)}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) \text{ (Alt. harm. R.)}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \text{ (Leibnitzreihe)}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \text{ (Geometrische Reihe)}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \text{ (Harmonische Reihe)}}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \text{(für } x \in (-1,1])}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^n}{b^n} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^n = \begin{cases} \frac{b}{b-a} & \text{Für } |a|<|b| \\ -\frac{b}{a-b} & \text{Für } \left|\frac{a}{b}\right|<1 \end{cases}}$$

12 Höhenlinien

$z = f(x,y)$, Höhenlinien $c = 0,2,4,\ldots \to 0 = f(x,y)$ usw.

13 Extrempunkte

Bei einem EP ist $f'(x) = 0$.
Bei $f''(x) > 0$ ist es ein Tiefpunkt, bei $f''(x) < 0$ ein Hochpunkt.

14 Wichtige Werte

$$\boxed{\sin(0) = 0} \qquad \boxed{\cos(0) = 1}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1} \qquad \boxed{\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) = 0}$$

$$\boxed{\sin\left(\frac{-\pi}{2}\right) = -1} \qquad \boxed{\cos(-\pi) = -1}$$

15 Beispielrechnungen

15.1 $\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x$

$$u = ax,\ \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x,\ \frac{\mathrm{d}u}{a} = \mathrm{d}x$$

$$\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \int \cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\int\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{a}\sin(u) = \underline{\underline{\frac{1}{a}\sin(ax) + c}}$$

15.2 Induktion Folge

$$\boxed{a_{n+1} = 1 - \sqrt{1-a_n}} \qquad \boxed{a_0 = \frac{3}{4}}$$

a_{n+1} ist beschränkt durch 0 und 1.
Zu zeigen: $0 < 1 - \sqrt{a_{n+1}} < 1$

$$\boxed{\text{IA: } 0 < a_n < 1}$$

$$\boxed{\text{IS: } 0 < a_n < 1} \quad \longmapsto \quad \boxed{|\cdot(-1)|\cdot +1|\sqrt{\ }|\cdot(-1)|+1}$$

$$\boxed{0 < 1 - \sqrt{1-a_n} < 1} \quad \longmapsto \quad \boxed{0 < 1 - a_{n+1} < 1\blacksquare}$$