1 Funktionseigenschaften

1.1 Surjektivität

Definiere $y = f(x)$. Löse nach x auf. Ist jedes y in der Gleichung in Definitionsmenge vertreten? Wenn ja, ist die Funktion surjektiv.

1.2 Injektivität

Nehme an, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Versuche zu zeigen, dass daraus folgt, dass $x_1 = x_2$. Dann ist die Funktion injektiv.

1.3 Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

2 Funktion Invertieren

$y = f(x)$ nach x auflösen, dann y und x vertauschen.

3 Folgenmonotonie

Sei a_n eine Folge, dann ist a_n streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} > a_n$ bzw. streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} < a_n$ (bzw. *nur* monoton steigend/fallend, wenn $\geq$ oder $\leq$).

3.1 Monotoniekriterium

Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

TODO

3.2 Nullfolgenkriterium

Eine Folge a_k kann nur konvergieren, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

4 Konvergenz

4.1 Absolute Konvergenz

$\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum\limits_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Ist eine Folge absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

4.2 Majorantenkriterium

Sei a_k eine Folge und $|a_k| \leq b_k$ und $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent.

4.3 Quotientenkriterium

TODO

4.4 Limes von Reihe

$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a+2} \to a = \sqrt{a+2}$

4.5 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_n$

Konvergent, wenn a_n streng monoton fallend (Leibnitz-Kriterium).

4.6 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g}{a^k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g}{a^k} = g \cdot \frac{a}{a-1} \text{ für } |a| > 1$$

4.7 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k$

Für $|a| < |b|$: $\frac{b}{b-a}$

Für $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$: $-\frac{b}{a-b}$

4.8 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^k$

Für $|z| < 1$: $\frac{1}{1+z}$

4.9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

4.10 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Für $x \in (-1, 1]$: $\ln(1+x)$.

4.11 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$

4.12 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$

4.13 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Für $x \in (-1, 1]$: $\ln(1+x)$

4.14 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (Geometrische Reihe)

4.15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (Harmonische Reihe)

4.16 $\sum_{n=}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

Fall $a = 2$: $\sum\limits_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

4.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$ (Alt. harm. R.)

4.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basler Problem)

4.19 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ (Leibnitzreihe)

5 Grenzwerte

5.1 Wichtige Grenzwerte

5.1.1 $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$

5.1.2 $\lim\limits_{x\to\infty} \sqrt[x]{x} = 1$

5.1.3 $\lim\limits_{x\to-\infty} \left(1+\frac{1}{x}\right)^x = e$

5.1.4 $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$

5.1.5 $\lim\limits_{n\to\infty} \left(1+\frac{b}{cn}\right)^n = e^{\frac{b}{c}}$

5.2 L'Hospital

Die Regel von L'Hospital besagt, dass, wenn man bei einem Grenzwert auf die Form $\lim \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{0}{0}$ kommt, man den Grenzwert der beiden Ableitungen $\lim \frac{g'(x)}{h'(x)}$ bilden kann, der gleich dem Grenzwert der Ursprungsfunktion ist, wenn er existiert.

6 Tangenten

Allgemein Tangentengleichung: $y = mx + b$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Allgemeine Form der Tangentengleichung an der Stelle a:

$$t(x) = f'(a) \cdot (x-a) + f(a)$$

Die Tangente ist äquivalent zur Taylorreihe ersten Grades der jeweiligen Funktion.

7 Schranken finden

Die kleinste obere Schranke heißt *Surpremum*. Bei monoton fallenden Folgen ist das erste Folgenglied die obere Schranke. (Bei monoton steigenden ist das erste das kleinste und daher das *Infimum*). Wenn Monotonie weder (s)mf noch (s)ms, dann obere Schranke abschätzen und per Induktion beweisen (dann nicht notwendigerweise kleinste obere Schranke!).

8 Taylorreihe

Allgemeine Formel zur Bestimmung von Taylorreihenapproximationen an der Stelle x_0:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

8.0.1 Approximationsfehler

Der Fehler einer Taylorapproximation an der Stelle a kann abgeschätzt werden mit:

$$R_n(x) = \frac{M}{(n+1)!)}(x-a)^{n+1},$$

wobei M eine obere Schranke von $|f^{(n+1)}(z)| \geq M$ sein muss.

9 Ableitungen

9.1 Definition Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

9.2 Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \longmapsto f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

9.3 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \longmapsto f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

9.4 Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \longmapsto f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

9.5 Spezielle Ableitungen

$$f(x) = \ln(x) \longmapsto f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \longmapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\sin x \longmapsto \cos x$$

$$\cos x \longmapsto -\sin x$$

10 Integration

10.1 $\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$

10.2 $\int c \cdot f(x) \,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x) \,\mathrm{d}x$

10.3 $\int \big(f(x) + g(x)\big) \,\mathrm{d}x = \int f(x) \,\mathrm{d}x + \int g(x) \,\mathrm{d}x$

10.4 $\int f'(x) g(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x$

10.5 $\int \frac{f'(x)}{f(x)} \,\mathrm{d}x = \ln(f(x)) + C$

10.6 $\int f'(x) \cdot g(x) \,\mathrm{d}x = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) \,\mathrm{d}x$

Oder auch: $\displaystyle\int u \,\mathrm{d}v = uv - \int v \,\mathrm{d}u$. Wähle u so, dass es nach endlich vielen Ableitungen eine Konstante wird.

10.7 $\int \frac{1}{u^2} \,\mathrm{d}u = \frac{1}{u}$

10.8 Partialbruchzerlegung

Echt gebrochene Funktion: $\frac{a^2}{c^3}$

Unecht gebrochene Funktion: $\frac{a^3}{c^2}$

Falls unecht gebrochen:
Schritt 0: Polynomdivision (falls unecht gebrochen)

10.9 $\frac{f(g)}{g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) \cdot \cdots} = \frac{a}{g(x)} \cdot \frac{b}{h(x)} \cdot \frac{c}{i(x)} \cdots$

$a, b, c, \cdots$ Herausfinden, indem man schaut, ob man durch geschicktes Einsetzen und Umstellen eine Gleichung der Form $c = a + n$ (mit c, n fest, aber beliebig) herausbekommt. Beispiel: $g(x) = x - 5$, dann würde man $x = 5$ setzen und den ›$g(x)$-Teil‹ wegkriegen. Damit $a, b, c, \cdots$ berechnen und dann einzelne Integrale bilden.
TODO!!! Richtiges Beispiel rechnen!!!

11 Differentialgleichungen

11.1 Matrix-Methode

Schritt 1: Differentialgleichungen als Koeffizientenmatrix aufschreiben
Schritt 2: Eigenwerte herausfinden, Eigenvektoren $\vec{v_n}$ bilden
Schritt 3: Lösung ist System aus Gleichungen $\vec{x} = \sum c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n x}$

12 Beispielrechnungen

12.1 $\int \cos(ax) \,\mathrm{d}x$

$$u = ax, \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x, \frac{\mathrm{d}u}{a} = \mathrm{d}x$$

$$\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \int \cos(u) \frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a} \int \cos(u) \,\mathrm{d}u = \frac{1}{a} \sin(u) = \underline{\underline{\frac{1}{a} \sin(ax) + c}}$$

12.2 Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

12.3 $(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$

12.4 $(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$

12.5 $(a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$

12.6 $(a-b)(a+b)^2 = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$

12.7 $x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$

13 Wichtige Summen

13.1 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{b^k} = \frac{ab}{b-1}$ (für $|b| > 1$)

13.2 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{b^k} = \frac{ab}{b-a}$ (für $|a| < |b|$)

13.3 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{b^n} = \frac{b}{a(b-a)}$ (für $|a| < |b|$)

13.4 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a((-b)^n)}{c^n} = \frac{ca}{b+c}$ (für $|b| < |c|$)