

1 Funktionen

1.1 Surjektivität

Definiere $y = f(x)$. Löse nach x auf. Ist jedes y in der Gleichung in Definitionsmenge vertreten? Wenn ja, ist die Funktion surjektiv.

1.2 Injektivität

Nehme an, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Versuche zu zeigen, dass daraus folgt, dass $x_1 = x_2$. Dann ist die Funktion injektiv.

1.3 Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.4 Funktion invertieren

$y = f(x)$ nach x auflösen, dann y und x vertauschen.

2 Folgenmonotonie

Sei a_n eine Folge, dann ist a_n streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} > a_n$ bzw. streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} < a_n$ (bzw. nur monoton steigend/fallend, wenn \geq oder \leq).

2.1 Monotoniekriterium

Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

2.2 Nullfolgenkriterium

Eine Folge a_k kann nur konvergieren, wenn $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$.

3 Konvergenz

3.1 Konvergenzradius

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

3.2 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Ist eine Folge absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

3.3 Majorantenkriterium

Sei a_k eine Folge und $|a_k| \leq b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent.

3.4 Quotientenkriterium

TODO

3.5 Limes von Reihe

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a+2} \rightarrow a = \sqrt[n]{a+2}$$

3.6 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_n$

Konvergent, wenn a_n streng monoton fallend (Leibniz-Kriterium).

4 Grenzwerte

4.1 Wichtige Grenzwerte

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

$$\lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a+bx} = 1$$

$$\lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{cn}\right)^n = e^{\frac{b}{c}}$$

4.2 L'Hospital

Wenn $h(x) = 0$, dann ist $\lim_{x \rightarrow a} \frac{g(x)}{h(x)} = \lim_{x \rightarrow a} \frac{g'(x)}{h'(x)}$.

5 Tangenten

Allgemein Tangentengleichung: $y = mx + b$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Allgemeine Form der Tangentengleichung an der Stelle a :

$$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Die Tangente ist äquivalent zur Taylorreihe ersten Grades der jeweiligen Funktion. b bestimmt sich durch Gleichsetzung mit $f(x)$ an der Stelle x , wo die Tangente erstellt werden soll.

6 Schranken finden

Die kleinste obere Schranke heißt *Supremum*. Bei monoton fallenden Folgen ist das erste Folgenglied die obere Schranke. (Bei monoton steigenden ist das erste das kleinste und daher das *Infimum*). Wenn Monotonie weder (s)mf noch (s)ms, dann obere Schranke abschätzen und per Induktion beweisen (dann nicht notwendigerweise kleinste obere Schranke!).

7 Taylorreihe

Allgemeine Formel zur Bestimmung von Taylorreihenapproximationen an der Stelle x_0 :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

7.1 Approximationsfehler

Der Fehler einer Taylorapproximation an der Stelle a kann abgeschätzt werden mit:

$$R_n(x) = \frac{M}{(n+1)!} (x - a)^{n+1},$$

wobei M eine obere Schranke von $|f^{(n+1)}(z)| \geq M$ sein muss.

8 Ableitungen

8.1 Definition Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

8.2 Produktregel

$$f(x) = g \cdot h \mapsto f'(x) = g' \cdot h + g \cdot h'$$

8.3 Quotientenregel

$$f = \frac{g}{h} \mapsto f' = \frac{h \cdot g' - g \cdot h'}{h^2}$$

8.4 Kettenregel

$$f = g(h) \mapsto f' = g'(h) \cdot h'$$

8.5 Spezielle Ableitungen

$$\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{(b+cx)^k} \right) = -ack(b+cx)^{-k-1}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\ln(a+bx^n)) = \frac{bnx^{n-1}}{a+bx^n}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (ab^{x+c}) = a \ln(b) \cdot b^{c+x}$$

$$f(x) = \ln(x) \mapsto f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$f(x) = \sqrt{x} \mapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (\sqrt{ax^n+b}) = \frac{anx^{n-1}}{2\sqrt{ax^n+b}}$$

$$\sin x \mapsto \cos x$$

$$\cos x \mapsto -\sin x$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (a \sin(b+cx^d)) = acdx^{d-1} \cos(b+cx^d)$$

$$\frac{\partial}{\partial x} (a \cos(b+cx^d)) = -acdx^{d-1} \sin(b+cx^d)$$

9 Integration

$$\int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$\int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$\int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$\int f'(x) g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{u^2} du = -\frac{1}{u}$$

9.1 Partielle Integration

$$\int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Oder auch: $\int u dv = uv - \int v du$. Wähle u so, dass es nach endlich vielen Ableitungen eine Konstante wird.

9.2 Partialbruchzerlegung

Echt gebrochene Funktion: $\frac{a^2}{c^3}$

Unecht gebrochene Funktion: $\frac{a^3}{c^2}$

Falls unecht gebrochen:

- 1: Polynomdivision (falls unecht gebrochen)
- 2: Nullstellen des Nenners berechnen
- 3: Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen
- 4: Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen
- 5: Koeffizienten bestimmen

$$9.2.1 \quad \frac{f(g)}{g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) \cdots} = \frac{a}{g(x)} + \frac{b}{h(x)} + \frac{c}{i(x)} + \cdots$$

a, b, c, \dots Herausfinden, indem man schaut, ob man durch geschicktes Einsetzen und Umstellen eine Gleichung der Form $c = a + n$ (mit c, n fest, aber beliebig) herausbekommt. Beispiel: $g(x) = x - 5$, dann würde man $x = 5$ setzen und den $g(x)$ -Teil wegstreichen. Damit a, b, c, \dots berechnen und dann einzelne Integrale bilden.

TODO!!! Richtiges Beispiel rechnen!!!

10 Differentialgleichungen

10.1 Matrix-Methode

Schritt 1: Differentialgleichungen als Koeffizientenmatrix aufschreiben

Schritt 2: Eigenwerte herausfinden, Eigenvektoren \vec{v}_n bilden

Schritt 3: Lösung ist System aus Gleichungen $\vec{x} = \sum c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n x}$

10.2 Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$(a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

$$(a-b)(a+b)^2 = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$$

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

11 Wichtige Summen

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g}{a^k} = g \cdot \frac{a}{a-1} \quad (\text{für } |a| > 1)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Basler Problem})$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^n = \frac{1}{1+z} \quad (\text{für } |z| < 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{b^k} = \frac{ab}{b-1} \quad (\text{für } |b| > 1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{b^k} = \frac{ab}{b-a} \quad (\text{für } |a| < |b|)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{b^n} = \frac{b}{a(b-a)} \quad (\text{für } |a| < |b|)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{a((-b)^n)}{c^n} = \frac{ca}{b+c} \quad (\text{für } |b| < |c|)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) \quad (\text{Alt. harm. R.})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Leibnitzreihe})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (\text{Geometrische Reihe})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad (\text{Harmonische Reihe})$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \quad (\text{für } x \in (-1, 1])$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k = \begin{cases} \frac{b}{b-a} & \text{Für } |a| < |b| \\ -\frac{b}{a-b} & \text{Für } \left|\frac{a}{b}\right| < 1 \end{cases}$$

12 Höhenlinien

$z = f(x, y)$, Höhenlinien $c = 0, 2, 4, \dots \rightarrow 0 = f(x, y)$ usw.

13 Extrempunkte

Bei einem EP ist $f'(x) = 0$.

Bei $f''(x) > 0$ ist es ein Tiefpunkt, bei $f''(x) < 0$ ein Hochpunkt.

14 Beispielrechnungen

14.1 $\int \cos(ax) dx$

$$u = ax, du = a dx, \frac{du}{a} = dx$$

$$\begin{aligned} \cos(ax) dx &= \int \cos(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \cos(u) du \\ &= \frac{1}{a} \sin(u) = \frac{1}{a} \sin(ax) + C \end{aligned}$$

$$\sin(0) = 0$$

$$\sin\left(\frac{\pi}{2}\right) = 1$$

14.2 Induktion Folge

a_{n+1} ist beschränkt durch 0 und 1. Zu zeigen:

$$0 < 1 - a_{n+1} < 1$$

$$a_{n+1} = 1 - \sqrt{1 - a_n}$$

$$a_0 = \frac{3}{4}$$

$$\text{IA: } 0 < a_n < 1$$

$$\text{IS: } 0 < a_n < 1 \rightarrow | \cdot (-1) | \cdot +1 | \sqrt{1 - (-1)} | \cdot (-1) | + 1$$

$$0 < 1 - \sqrt{1 - a_n} < 1 \rightarrow 0 < 1 - a_{n+1} < 1 \blacksquare$$