

1 Funktionseigenschaften

1.1 Surjektivität

Definiere $y = f(x)$. Löse nach x auf. Ist jedes y in der Gleichung in Definitionsmenge vertreten? Wenn ja, ist die Funktion surjektiv.

1.2 Injektivität

Nehme an, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Versuche zu zeigen, dass daraus folgt, dass $x_1 = x_2$. Dann ist die Funktion injektiv.

1.3 Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

2 Funktion Invertieren

$y = f(x)$ nach x auflösen, dann y und x vertauschen.

3 Folgenmonotonie

Sei a_n eine Folge, dann ist a_n streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} > a_n$ bzw. streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} < a_n$ (bzw. nur monoton steigend/fallend, wenn \geq oder \leq).

4 Konvergenz

4.1 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Ist eine Folge absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.

4.2 Majorantenkriterium

Sei a_k eine Folge und $|a_k| \leq b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent.

4.3 Quotientenkriterium

TODO

$$4.4 \quad \sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_n$$

Konvergent, wenn a_n streng monoton fallend (Leibnitz-Kriterium).

$$4.5 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{g}{a^k}$$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g}{a^k} = g \cdot \frac{a}{a-1} \text{ für } |a| > 1$$

$$4.6 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k$$

Für $|a| < |b|$: $\frac{b}{b-a}$
Für $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$: $-\frac{b}{a-b}$

$$4.7 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^k$$

Für $|z| < 1$: $\frac{1}{1+z}$

$$4.8 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$$

$$4.9 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Für $x \in (-1, 1]$: $\ln(1+x)$.

$$4.10 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$$

$$4.11 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$$

$$4.12 \quad \sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$$

Für $x \in (-1, 1]$: $\ln(1+x)$

$$4.13 \quad \sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x} \quad (\text{Geometrische Reihe})$$

$$4.14 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty \quad (\text{Harmonische Reihe})$$

$$4.15 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^a}$$

Fall $a = 2$: $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

$$4.16 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) \quad (\text{Alt. harm. R.})$$

$$4.17 \quad \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \quad (\text{Basler Problem})$$

$$4.18 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \quad (\text{Leibnitzreihe})$$

5 Grenzwerte

5.1 Wichtige Grenzwerte

$$5.1.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

$$5.1.2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

$$5.1.3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$5.1.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$5.1.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{cn}\right)^n = e^{\frac{b}{c}}$$

5.2 L'Hospital

Die Regel von L'Hospital besagt, dass, wenn man bei einem Grenzwert auf die Form $\lim_{h(x)} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{0}{0}$ kommt, man den Grenzwert der beiden Ableitungen $\lim_{h'(x)} \frac{g'(x)}{h'(x)}$ bilden kann, der gleich dem Grenzwert der Ursprungsfunktion ist, wenn er existiert.

6 Tangenten

Allgemein Tangentengleichung: $y = mx + b$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Allgemeine Form der Tangentengleichung an der Stelle a :

$$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Die Tangente ist äquivalent zur Taylorreihe ersten Grades der jeweiligen Funktion.

7 Schranken finden

Die kleinste obere Schranke heißt *Supremum*. Bei monoton fallenden Folgen ist das erste Folgenglied die obere Schranke. (Bei monoton steigenden ist das erste das kleinste und daher das *Infimum*). Wenn Monotonie weder (s)mf noch (s)ms, dann obere Schranke abschätzen und per Induktion beweisen (dann nicht notwendigerweise kleinste obere Schranke!).

8 Taylorreihe

Allgemeine Formel zur Bestimmung von Taylorreihenapproximationen an der Stelle x_0 :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

8.0.1 Approximationsfehler

Der Fehler einer Taylorapproximation an der Stelle a kann abgeschätzt werden mit:

$$R_n(x) = \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

wobei M eine obere Schranke von $|f^{(n+1)}(z)| \geq M$ sein muss.

9 Ableitungen

9.1 Definition Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

9.2 Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \mapsto f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

9.3 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \mapsto f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

9.4 Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \mapsto f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

9.5 Spezielle Ableitungen

$$9.5.1 \quad f(x) = \ln(x) \mapsto f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$9.5.2 \quad f(x) = \sqrt{x} \mapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$9.5.3 \quad \sin x \mapsto \cos x$$

$$9.5.4 \quad \cos x \mapsto -\sin x$$

10 Integration

$$10.1 \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$10.2 \quad \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$10.3 \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$10.4 \quad \int f'(x) g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$10.5 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$$

$$10.6 \quad \int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Oder auch: $\int u dv = uv - \int v du$. Wähle u so, dass es nach endlich vielen Ableitungen eine Konstante wird.

$$10.7 \quad \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{u}$$

10.8 Partialbruchzerlegung

Echt gebrochene Funktion: $\frac{a^2}{c^3}$

Unecht gebrochene Funktion: $\frac{a^3}{c^2}$

Falls unecht gebrochen:

Schritt 0: Polynomdivision (falls unecht gebrochen)

$$10.9 \quad \frac{f(g)}{g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) \dots} = \frac{a}{g(x)} \cdot \frac{b}{h(x)} \cdot \frac{c}{i(x)} \dots$$

a, b, c, \dots Herausfinden, indem man schaut, ob man durch geschicktes Einsetzen und Umstellen eine Gleichung der Form $c = a + n$ (mit c, n fest, aber beliebig) herausbekommt. Beispiel: $g(x) = x - 5$, dann würde man $x = 5$ setzen und den $g(x)$ -Teil wegstreichen. Damit a, b, c, \dots berechnen und dann einzelne Integrale bilden.

TODO!!! Richtiges Beispiel rechnen!!!

11 Differentialgleichungen

11.1 Matrix-Methode

Schritt 1: Differentialgleichungen als Koeffizientenmatrix aufschreiben

Schritt 2: Eigenwerte herausfinden, Eigenvektoren \vec{v}_n bilden

Schritt 3: Lösung ist System aus Gleichungen $\vec{x} = \sum c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n x}$

12 Beispielrechnungen

$$12.1 \quad \int \cos(ax) dx$$

$$u = ax, du = a dx, \frac{du}{a} = dx$$

$$\cos(ax) dx = \int \cos(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \cos(u) du = \frac{1}{a} \sin(u) = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$$

12.2 Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

12.3

$$(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

12.4

$$(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

12.5

$$(a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

12.6

$$(a-b)(a+b)^2 = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$$

12.7

$$x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$