

# 1 Funktionseigenschaften

## 1.1 Surjektivität

Definiere  $y = f(x)$ . Löse nach  $x$  auf. Ist jedes  $y$  in der Gleichung in Definitionsmenge vertreten? Wenn ja, ist die Funktion surjektiv.

## 1.2 Injektivität

Nehme an, dass  $f(x_1) = f(x_2)$ . Versuche zu zeigen, dass daraus folgt, dass  $x_1 = x_2$ . Dann ist die Funktion injektiv.

## 1.3 Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

# 2 Funktion Invertieren

$y = f(x)$  nach  $x$  auflösen, dann  $y$  und  $x$  vertauschen.

# 3 Folgenmonotonie

Sei  $a_n$  eine Folge, dann ist  $a_n$  streng monoton fallend, wenn  $a_{n+1} > a_n$  bzw. streng monoton steigend, wenn  $a_{n+1} < a_n$  (bzw. nur monoton steigend/fallend, wenn  $\geq$  oder  $\leq$ ).

## 3.1 Monotoniekriterium

Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.  
TODO

## 3.2 Nullfolgenkriterium

Eine Folge  $a_k$  kann nur konvergieren, wenn  $\lim_{n \rightarrow \infty} a_n = 0$ .

# 4 Konvergenz

## 4.1 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  heißt *absolut konvergent*, wenn  $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$  konvergiert. Ist eine Folge absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.

Die Reihe  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$  ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

## 4.2 Majorantenkriterium

Sei  $a_k$  eine Folge und  $|a_k| \leq b_k$  und  $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$  konvergent, dann ist auch  $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$  (absolut) konvergent.

## 4.3 Quotientenkriterium

TODO

## 4.4 Limes von Reihe

$$a = \lim_{n \rightarrow \infty} \sqrt[n]{a+2} \rightarrow a = \sqrt{a+2}$$

## 4.5 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_n$

Konvergent, wenn  $a_n$  streng monoton fallend (Leibnitz-Kriterium).

## 4.6 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g}{a^k}$

$$\sum_{k=0}^{\infty} \frac{g}{a^k} = g \cdot \frac{a}{a-1} \text{ für } |a| > 1$$

## 4.7 $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty} \left(\frac{a}{b}\right)^k$

Für  $|a| < |b|$ :  $\frac{b}{b-a}$

Für  $\left|\frac{a}{b}\right| < 1$ :  $-\frac{b}{a-b}$

## 4.8 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \cdot z^k$

Für  $|z| < 1$ :  $\frac{1}{1+z}$

## 4.9 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^n}{n!} = e^x$

## 4.10 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Für  $x \in (-1, 1]$ :  $\ln(1+x)$ .

## 4.11 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)$

## 4.12 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)$

## 4.13 $\sum_{n=0}^{\infty} (-1)^n \frac{x^{n+1}}{n+1}$

Für  $x \in (-1, 1]$ :  $\ln(1+x)$

## 4.14 $\sum_{n=0}^{\infty} x^n = \frac{1}{1-x}$ (Geometrische Reihe)

## 4.15 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n} = \infty$ (Harmonische Reihe)

## 4.16 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n^a}$

Fall  $a = 2$ :  $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$

## 4.17 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2)$ (Alt. harm. R.)

## 4.18 $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}$ (Basler Problem)

## 4.19 $\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4}$ (Leibnitzreihe)

# 5 Grenzwerte

## 5.1 Wichtige Grenzwerte

$$5.1.1 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}$$

$$5.1.2 \quad \lim_{x \rightarrow \infty} \sqrt[n]{x} = 1$$

$$5.1.3 \quad \lim_{x \rightarrow -\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e$$

$$5.1.4 \quad \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1$$

$$5.1.5 \quad \lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{b}{cn}\right)^n = e^{\frac{b}{c}}$$

## 5.2 L'Hospital

Die Regel von L'Hospital besagt, dass, wenn man bei einem Grenzwert auf die Form  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g(x)}{h(x)} = \frac{0}{0}$  kommt, man den Grenzwert der beiden Ableitungen  $\lim_{h \rightarrow 0} \frac{g'(x)}{h'(x)}$  bilden kann, der gleich dem Grenzwert der Ursprungsfunktion ist, wenn er existiert.

# 6 Tangenten

Allgemein Tangentengleichung:  $y = mx + b$

$$m = \lim_{h \rightarrow 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Allgemeine Form der Tangentengleichung an der Stelle  $a$ :

$$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Die Tangente ist äquivalent zur Taylorreihe ersten Grades der jeweiligen Funktion.

## 7 Schranken finden

Die kleinste obere Schranke heißt *Supremum*. Bei monoton fallenden Folgen ist das erste Folgenglied die obere Schranke. (Bei monoton steigenden ist das erste das kleinste und daher das *Infimum*). Wenn Monotonie weder (s)mf noch (s)ms, dann obere Schranke abschätzen und per Induktion beweisen (dann nicht notwendigerweise kleinste obere Schranke!).

## 8 Taylorreihe

Allgemeine Formel zur Bestimmung von Taylorreihenapproximationen an der Stelle  $x_0$ :

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^n \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

### 8.0.1 Approximationsfehler

Der Fehler einer Taylorapproximation an der Stelle  $a$  kann abgeschätzt werden mit:

$$R_n(x) = \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

wobei  $M$  eine obere Schranke von  $|f^{(n+1)}(z)| \geq M$  sein muss.

## 9 Ableitungen

### 9.1 Definition Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\epsilon \rightarrow 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

### 9.2 Produktregel

$$f(x) = g(x) \cdot h(x) \mapsto f'(x) = g'(x) \cdot h(x) + g(x) \cdot h'(x)$$

### 9.3 Quotientenregel

$$f(x) = \frac{g(x)}{h(x)} \mapsto f'(x) = \frac{h(x) \cdot g'(x) - g(x) \cdot h'(x)}{[h(x)]^2}$$

### 9.4 Kettenregel

$$f(x) = g(h(x)) \mapsto f'(x) = g'(h(x)) \cdot h'(x)$$

### 9.5 Spezielle Ableitungen

$$9.5.1 \quad f(x) = \ln(x) \mapsto f'(x) = \frac{1}{x}$$

$$9.5.2 \quad f(x) = \sqrt{x} \mapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$$

$$9.5.3 \quad \sin x \mapsto \cos x$$

$$9.5.4 \quad \cos x \mapsto -\sin x$$

## 10 Integration

$$10.1 \quad \int x^n dx = \frac{1}{n+1} x^{n+1} + C$$

$$10.2 \quad \int c \cdot f(x) dx = c \cdot \int f(x) dx$$

$$10.3 \quad \int (f(x) + g(x)) dx = \int f(x) dx + \int g(x) dx$$

$$10.4 \quad \int f'(x) g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

$$10.5 \quad \int \frac{f'(x)}{f(x)} dx = \ln(f(x)) + C$$

$$10.6 \quad \int f'(x) \cdot g(x) dx = f(x) \cdot g(x) - \int f(x) \cdot g'(x) dx$$

Oder auch:  $\int u dv = uv - \int v du$ . Wähle  $u$  so, dass es nach endlich vielen Ableitungen eine Konstante wird.

$$10.7 \quad \int \frac{1}{u^2} du = \frac{1}{u}$$

## 10.8 Partialbruchzerlegung

Echt gebrochene Funktion:  $\frac{a^2}{c^3}$

Unecht gebrochene Funktion:  $\frac{a^3}{c^2}$

Falls unecht gebrochen:

Schritt 0: Polynomdivision (falls unecht gebrochen)

$$10.9 \quad \frac{f(g)}{g(x) \cdot h(x) \cdot i(x) \dots} = \frac{a}{g(x)} \cdot \frac{b}{h(x)} \cdot \frac{c}{i(x)} \dots$$

$a, b, c, \dots$  Herausfinden, indem man schaut, ob man durch geschicktes Einsetzen und Umstellen eine Gleichung der Form  $c = a + n$  (mit  $c, n$  fest, aber beliebig) herausbekommt. Beispiel:  $g(x) = x - 5$ , dann würde man  $x = 5$  setzen und den  $g(x)$ -Teil wegstreichen. Damit  $a, b, c, \dots$  berechnen und dann einzelne Integrale bilden.

TOD!!! Richtiges Beispiel rechnen!!!

## 11 Differentialgleichungen

### 11.1 Matrix-Methode

Schritt 1: Differentialgleichungen als Koeffizientenmatrix aufschreiben

Schritt 2: Eigenwerte herausfinden, Eigenvektoren  $\vec{v}_n$  bilden

Schritt 3: Lösung ist System aus Gleichungen  $\vec{x} = \sum c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n x}$

## 12 Beispielrechnungen

$$12.1 \quad \int \cos(ax) dx$$

$$u = ax, du = a dx, \frac{du}{a} = dx$$

$$\cos(ax) dx = \int \cos(u) \frac{du}{a} = \frac{1}{a} \int \cos(u) du = \frac{1}{a} \sin(u) = \frac{1}{a} \sin(ax) + c$$

### 12.2 Determinanten

$$\det \begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg$$

$$12.3 \quad (a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$$

$$12.4 \quad (a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3$$

$$12.5 \quad (a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3$$

$$12.6 \quad (a-b)(a+b)^2 = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3$$

$$12.7 \quad x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}$$

## 13 Wichtige Summen

$$13.1 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a}{b^k} = \frac{ab}{b-1} \quad (\text{für } |b| > 1)$$

$$13.2 \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{a^{k+1}}{b^k} = \frac{ab}{b-a} \quad (\text{für } |a| < |b|)$$

$$13.3 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{n-1}}{b^n} = \frac{b}{a(b-a)} \quad (\text{für } |a| < |b|)$$

$$13.4 \quad \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a(-b)^n}{c^n} = \frac{ca}{b+c} \quad (\text{für } |b| < |c|)$$