1 Funktionen

1.1 Surjektivität

Definiere $y = f(x)$. Löse nach x auf. Ist jedes y in der Gleichung in Definitionsmenge vertreten? Wenn ja, ist die Funktion surjektiv.

1.2 Injektivität

Nehme an, dass $f(x_1) = f(x_2)$. Versuche zu zeigen, dass daraus folgt, dass $x_1 = x_2$. Dann ist die Funktion injektiv.

1.3 Bijektivität

Eine Funktion ist bijektiv, wenn sie injektiv und surjektiv ist.

1.4 Funktion Invertieren

$y = f(x)$ nach x auflösen, dann y und x vertauschen.

2 Folgenmonotonie

Sei a_n eine Folge, dann ist a_n streng monoton fallend, wenn $a_{n+1} > a_n$ bzw. streng monoton steigend, wenn $a_{n+1} < a_n$ (bzw. *nur* monoton steigend/fallend, wenn $\geq$ oder $\leq$).

2.1 Monotoniekriterium

Jede monotone und beschränkte Folge konvergiert.

2.2 Nullfolgenkriterium

Eine Folge a_k kann nur konvergieren, wenn $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$.

3 Konvergenz

3.1 Konvergenzradius

$$r = \lim \left| \frac{a_n}{a_{n+1}} \right|$$

3.2 Absolute Konvergenz

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ heißt *absolut konvergent*, wenn $\sum_{k=0}^{\infty} |a_k|$ konvergiert. Ist eine Folge absolut konvergent, dann ist sie auch konvergent.

Die Reihe $\sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n}$ ist konvergent, aber nicht absolut konvergent.

3.3 Majorantenkriterium

Sei a_k eine Folge und $|a_k| \leq b_k$ und $\sum_{k=0}^{\infty} b_k$ konvergent, dann ist auch $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ (absolut) konvergent.

3.4 Quotientenkriterium

TODO

3.5 Limes von Reihe

$a = \lim_{n\to\infty} \sqrt{a+2} \to a = \sqrt{a+2}$

3.6 $\sum_{k=0}^{\infty} (-1)^k a_n$

Konvergent, wenn a_n streng monoton fallend (Leibnitz-Kriterium).

4 Grenzwerte

4.1 Wichtige Grenzwerte

$$\boxed{\lim_{x\to\infty} \frac{ax+b}{cx+d} = \frac{a}{c}} \qquad \boxed{\lim_{x\to\infty} \sqrt[x]{a+bx} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{x\to-\infty} \left(1 + \frac{1}{x}\right)^x = e} \qquad \boxed{\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{x} = 1}$$

$$\boxed{\lim_{n\to\infty} \left(1 + \frac{b}{cn}\right)^n = e^{\frac{b}{c}}}$$

4.2 L'Hospital

Wenn $h(x) = 0$, dann ist $\lim \frac{g(x)}{h(x)} = \lim \frac{g'(x)}{h'(x)}$.

5 Tangenten

Allgemein Tangentengleichung: $y = mx + b$

$$m = \lim_{h\to 0} \frac{f(a+h) - f(a)}{(a+h) - a}$$

Allgemeine Form der Tangentengleichung an der Stelle a:

$$t(x) = f'(a) \cdot (x - a) + f(a)$$

Die Tangente ist äquivalent zur Taylorreihe ersten Grades der jeweiligen Funktion. b bestimmt sich durch Gleichsetzung mit $f(x)$ an der Stelle x, wo die Tangente erstellt werden soll.

6 Schranken finden

Die kleinste obere Schranke heißt *Surpremum*. Bei monoton fallenden Folgen ist das erste Folgenglied die obere Schranke. (Bei monoton steigenden ist das erste das kleinste und daher das *Infimum*). Wenn Monotonie weder (s)mf noch (s)ms, dann obere Schranke abschätzen und per Induktion beweisen (dann nicht notwendigerweise kleinste obere Schranke!).

7 Taylorreihe

Allgemeine Formel zur Bestimmung von Taylorreihenapproximationen an der Stelle x_0:

$$f(x) \approx \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(x_0)}{k!} \cdot (x - x_0)^k$$

7.1 Approximationsfehler

Der Fehler einer Taylorapproximation an der Stelle a kann abgeschätzt werden mit:

$$R_n(x) = \frac{M}{(n+1)!} (x-a)^{n+1},$$

wobei M eine obere Schranke von $|f^{(n+1)}(z)| \geq M$ sein muss.

8 Ableitungen

8.1 Definition Ableitung

$$f'(x) = \lim_{\epsilon\to 0} \frac{f(x+\epsilon) - f(x)}{\epsilon}$$

8.2 Produktregel

$$f(x) = g \cdot h \longmapsto f'(x) = g' \cdot h + g \cdot h'$$

8.3 Quotientenregel

$$f = \frac{g}{h} \longmapsto f' = \frac{h \cdot g' - h' \cdot g}{[h]^2}$$

8.4 Kettenregel

$$f = g(h) \longmapsto f' = g'(h) \cdot h'$$

8.5 Spezielle Ableitungen

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(\frac{a}{(b+cx)^k} \right) = -ack(b+cx)^{-k-1}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(\ln\left(a + bx^n\right) \right) = \frac{bnx^{n-1}}{a+bx^n}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(ab^{x+c} \right) = a\ln(b) \cdot b^{c+x}}$$

$$\boxed{f(x) = \ln(x) \longmapsto f'(x) = \frac{1}{x}}$$

$$\boxed{f(x) = \sqrt{x} \longmapsto f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left((\sqrt{ax^n + b} \right) = \frac{anx^{n-1}}{2\sqrt{ax^n + b}}}$$

$$\boxed{\sin x \longmapsto \cos x} \qquad \boxed{\cos x \longmapsto -\sin x}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(a\sin\left(b + cx^d\right) \right) = acdx^{d-1} \cos\left(b + cx^d\right)}$$

$$\boxed{\frac{\partial}{\partial x} \left(a\cos\left(b + cx^d\right) \right) = -acdx^{d-1} \sin\left(b + cx^d\right)}$$

9 Integration

$$\int x^n \,\mathrm{d}x = \frac{1}{n+1}x^{n+1} + C$$

$$\int c \cdot f(x)\,\mathrm{d}x = c \cdot \int f(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \big(f(x)+g(x)\big)\,\mathrm{d}x = \int f(x)\,\mathrm{d}x + \int g(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int f'(x)g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

$$\int \frac{f'(x)}{f(x)}\,\mathrm{d}x = \ln(f(x)) + C$$

$$\int \frac{1}{u^2}\,\mathrm{d}u = \frac{1}{u}$$

9.1 Partielle Integration

$$\int f'(x)\cdot g(x)\,\mathrm{d}x = f(x)\cdot g(x) - \int f(x)\cdot g'(x)\,\mathrm{d}x$$

Oder auch: $\int u\,\mathrm{d}v = uv - \int v\,\mathrm{d}u$. Wähle u so, dass es nach endlich vielen Ableitungen eine Konstante wird.

9.2 Partialbruchzerlegung

Echt gebrochene Funktion: $\frac{a^2}{c^3}$
Unecht gebrochene Funktion: $\frac{a^3}{c^2}$

Falls unecht gebrochen:
1: Polynomdivision (falls unecht gebrochen)
2: Nullstellen des Nenners berechnen
3: Jeder Nullstelle ihren Partialbruch zuordnen
4: Ansatz zur Partialbruchzerlegung aufstellen
5: Koeffizienten bestimmen

9.2.1 $\frac{f(g)}{g(x)\cdot h(x)\cdot i(x)\cdot\dots} = \frac{a}{g(x)}\cdot\frac{b}{h(x)}\cdot\frac{c}{i(x)}\cdots$

$a, b, c, \cdots$ Herausfinden, indem man schaut, ob man durch geschicktes Einsetzen und Umstellen eine Gleichung der Form $c = a + n$ (mit c, n fest, aber beliebig) herausbekommt. Beispiel: $g(x) = x - 5$, dann würde man $x = 5$ setzen und den ›$g(x)$-Teil‹ wegkriegen. Damit $a, b, c, \cdots$ berechnen und dann einzelne Integrale bilden.

TODO!!! Richtiges Beispiel rechnen!!!

10 Differentialgleichungen

10.1 Matrix-Methode

Schritt 1: Differentialgleichungen als Koeffizientenmatrix aufschreiben
Schritt 2: Eigenwerte herausfinden, Eigenvektoren $\vec{v}_n$ bilden
Schritt 3: Lösung ist System aus Gleichungen $\vec{x} = \sum c_n \vec{v}_n e^{\lambda_n x}$

10.2 Determinanten

$$\boxed{\det\begin{pmatrix} a & b & c \\ d & e & f \\ g & h & i \end{pmatrix} = aei - afh - bdi + bfg + cdh - ceg}$$

$$\boxed{(a+b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3}$$

$$\boxed{(a-b)^3 = a^3 - 3a^2b + 3ab^2 - b^3}$$

$$\boxed{(a+b)(a-b)^2 = a^3 - a^2b - ab^2 + b^3}$$

$$\boxed{(a-b)(a+b)^2 = a^3 + a^2b - ab^2 - b^3}$$

$$\boxed{x_{1/2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\left(\frac{p}{2}\right)^2 - q}}$$

11 Wichtige Summen

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^n}{n!} = e^x} \qquad \boxed{\sum_{k=0}^{\infty}\frac{g}{a^k} = g\cdot\frac{a}{a-1} \text{ (für } |a|>1)}$$

$$\boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!} = \sin(x)} \qquad \boxed{\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!} = \cos(x)}$$

$$\boxed{\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6} \text{ (Basler Problem)}} \qquad \boxed{\sum_{n=}^{\infty}\frac{1}{n^2} = \frac{\pi^2}{6}}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\cdot z^k = \frac{1}{1+z} \text{ (für } |z|<1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a}{b^k} = \frac{ab}{b-1} \text{ (für } |b|>1)$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^{k+1}}{b^k} = \frac{ab}{b-a} \text{ (für } |a|<|b|)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a^{n-1}}{b^n} = \frac{b}{a(b-a)} \text{ (für } |a|<|b|)$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{a((-b)^n)}{c^n} = \frac{ca}{b+c} \text{ (für } |b|<|c|)$$

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}}{n} = \ln(2) \text{ (Alt. harm. R.)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n}{2n+1} = \frac{\pi}{4} \text{ (Leibnitzreihe)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}x^n = \frac{1}{1-x} \text{ (Geometrische Reihe)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n} = \infty \text{ (Harmonische Reihe)}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^n\frac{x^{n+1}}{n+1} = \ln(1+x) \text{(für } x \in (-1,1])$$

$$\sum_{k=0}^{\infty}\frac{a^k}{b^k} = \sum_{k=0}^{\infty}\left(\frac{a}{b}\right)^k = \begin{cases}\frac{b}{b-a} & \text{Für } |a|<|b| \\ -\frac{b}{a-b} & \text{Für } \left|\frac{a}{b}\right|<1\end{cases}$$

12 Extrempunkte

Bei einem EP ist $f'(x) = 0$.

Bei $f''(x) > 0$ ist es ein Tiefpunkt, bei $f''(x) < 0$ ein Hochpunkt.

13 Beispielrechnungen

13.1 $\int \cos(ax)\,\mathrm{d}x$

$$u = ax, \mathrm{d}u = a\,\mathrm{d}x, \frac{\mathrm{d}u}{a} = \mathrm{d}x$$

$$\cos(ax)\,\mathrm{d}x = \int \cos(u)\frac{\mathrm{d}u}{a} = \frac{1}{a}\int\cos(u)\,\mathrm{d}u$$

$$= \frac{1}{a}\sin(u) = \underline{\underline{\frac{1}{a}\sin(ax) + c}}$$

$$\sin(0) = 0$$