Komplexe Division

$$\frac{a}{1+i} = \frac{a}{1+i} \cdot \frac{1-i}{1-i}$$

Darstellungsformen: - $a+bi$
- $re^{i\varphi}$, - $r(\cos\varphi + i\sin\varphi)$

$r = \sqrt{a^2+b^2}$,

$\varphi = \arctan\left(\frac{b}{a}\right)$,

bei $a = 0 \rightarrow \varphi = 90°$

Komplexe Potenzen:

$$z^5 = (re^{i\varphi})^5 = r^5 e^{i\varphi 5}$$

Komplexe Wurzeln:

Die n-te Wurzel aus z hat n Ergebnisse.

$k = \{0, 1, 2, \dots, n-1\}$

$$z_k = \sqrt[n]{r}\, e^{i\left(\frac{\varphi}{n} + \frac{2k\pi}{n}\right)}$$

Winkelfunktionen:

$$\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\cos(\alpha) = \frac{\text{Ankathete}}{\text{Hypothenuse}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\text{Gegenkathete}}{\text{Ankathete}}$$

$$\tan(\alpha) = \frac{\sin(\alpha)}{\cos(\alpha)}$$

Matrixtransponierung:

$A^T \rightarrow$ Erste Spalte zu erster Zeile, zweite S zu zweiter Zeile usw.

$(A^T)^T = A$; $A^T + B^T = (A+B)^T$;
$(A \cdot B)^T = B^T \cdot A^T$

ist U ein UVR? → -beinhaltet er $\vec{0}$? -ist er abgeschlossen?

Matrixdimension:

Matrix in Spalten aufteilen, Vielfache streichen, Anzahl Restspalten = Dim

Rang: 1. Zeilenstufenform, 2. Nullzeilen streichen, Anzahl übriger Zeilen = Rang

PQ-Formel:

$$x^2 + px + q = 0$$

$$\rightarrow x_{1,2} = -\frac{p}{2} \pm \sqrt{\frac{p^2}{4} - q}$$

Span:

$$U = \begin{pmatrix} a+3b \\ a-b \end{pmatrix}$$

$$= \left\{ \begin{pmatrix} a \\ a \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 3b \\ -b \end{pmatrix} \right\}$$

$$= \left\{ a\begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix} + b\begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

$$\rightarrow \text{Span}(U) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 3 \\ -1 \end{pmatrix} \right\}$$

Kern:

$\text{Ker}(A) \rightarrow Ax = \vec{0}$, der Kern ist x

Pascalsches Dreieck

$\binom{0}{0}$
$\binom{1}{0}\binom{1}{1}$
$\binom{2}{0}\binom{2}{1}\binom{2}{2}$

0: 1
1: 1 1
2: 1 2 1
3: 1 3 3 1
4: 1 4 6 4 1
5: 1 5 10 10 5 1
6: 1 6 15 20 15 6 1

Kommutativ: $a \cdot b = b \cdot a$
Assoziativ: $a \cdot (b \cdot c) = (a \cdot b) \cdot c$
Distributiv: $a \cdot (b + c) = (a \cdot b) + (a \cdot c)$

$$\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!} = |\{x \in \mathcal{P}(\underset{n\text{-Elemente}}{M}) \mid |x| = k\}|$$

KNF: Wahrheitstabelle nach 0 suchen, Werte negieren, mit $\wedge$ konkatinieren

DNF: Wie KNF, nur 1 und $\vee$

Horn-SAT: Klausel mit 1 pos. Literal, alle Negationen in anderen Klauseln streichen. Nur 1 Klausel / Variable. Falsch wenn K. leer. Sonst 1.

Surjektiv: jedes Elem. in Zielmenge wird getroffen
Injektiv: jedes Element wird max 1x getroffen
Bijektiv: Injektiv + Surjektiv, → eineindeutige Umkehrfunktion

P-Dichte bis $x \approx x/\ln(x)$.

$\mathbb{Z}_n^* = \{x > 0 \wedge x < n \mid ggT(n,x) = 1\}$

$\mathbb{Z}_n = \{0, 1, \dots, n\}$

$|\mathbb{Z}_n^*| = \phi(n) = \phi(\dots PFZ)$

E-Eukl / Bezout: $ggT(x,y) = am + bn$

i	k_i	r_i	a_i	b_i
0		x	1	0
1	-	y	0	1
2				

$k_i \hat{=}$ Wie oft geht r_{i+1} in r_i?
$r_i \hat{=}$ Restwert
$a_i, b_i \hat{=}$ Bezout

$k_n = \left\lfloor \frac{r_{n-1}}{r_n} \right\rfloor$; $r_n = r_{n-2} - (r_{n-1} \cdot k_{n-1})$;

$a_n = a_{n-2} - (k_{n-1} \cdot a_{n-1})$

$b_n = b_{n-2} - (k_{n-1} \cdot b_{n-1})$

Körper: $(G, \diamond, \circ) \to (G, \diamond)$ und $(G, \circ)$ sind abelsche Gruppen, es gilt Distributivgesetz

Gruppe: $(G, \circ)$; Bedingungen: - Assoziativität, - neutrales und inverses Element, - Abgeschlossenheit

Abelsche Gruppen: Kommutative Gruppen

Halbgruppe: Assoziativität, nicht zwingend invertierbar, nicht zwingend neutrales Element

Zyklische Gruppe mod n: $\exists x: x^n$ erreicht mod n jedes Element der Gruppe.

Ring: $(G, \diamond, \circ)$, so dass $(G, \diamond)$ abelsche G. ist und $(G, \circ)$ Halbgruppe

Restklassenring: Ring, in dem nach jeder Operation modulo genommen wird

Einheit: Element eines Ringes, für das gilt: $a \circ a^{-1} = e$.

Nullteiler: Elem. Ring, so dass $a \cdot b \equiv 0$ mod n

Sin / cos / tan:

α	0°	30°	45°	60°	90°
$\sin\alpha$	0	1/2	$1/2\sqrt{2}$	$1/2\sqrt{3}$	1
$\cos\alpha$	1	$1/2\sqrt{3}$	$1/2\sqrt{2}$	1/2	0
$\tan\alpha$	0	$\frac{1}{3}\sqrt{3}$	1	$\sqrt{3}$	

$\tan(\alpha) = \frac{\sin\alpha}{\cos\alpha}$; $\sin(\alpha) = \frac{\text{Gegen}}{\text{Hyp}}$; $\cos(\alpha) = \frac{\text{An}}{\text{Hyp}}$;

$\tan\alpha = \frac{\text{Gegen}}{\text{An}}$

arcsin / arccos / arctan:

x	0	1	-1	$x \to \pm\infty$
arcsin	0	$\frac{\pi}{2}$	$-\frac{\pi}{2}$	/
arccos	$\frac{\pi}{2}$	0	π	/
arctan	0	$\frac{\pi}{4}$	$-\frac{\pi}{4}$	$\pm\frac{\pi}{2}$