Logic (ตรรกศาสตร์)

Pana Wanitchollakit

ประพจน์ (proposition)

ประโยคบอกเล่าหรือประโยคปฏิเสธซึ่งบอกได้ว่า**จริง (True)** หรือ**เท็จ (False)**

ตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ (Logical operators)

ให้ p, q เป็นประพจน์

- นิเสธ (negation): $\neg\, p$
- และ (and): $p \wedge q$
- หรือ (or): $p \vee q$
- ถ้า. . .แล้ว (implication): $p \rightarrow q$
- ก็ต่อเมื่อ (if and only if): $p \leftrightarrow q$

ตารางค่าความจริง (Truth table)

ตารางที่แสดงค่าความจริงทุกความเป็นไปได้ทั้งหมดของการกำหนดค่าทุกประพจน์ โดยจะมีทั้งหมด 2^N แถว เมื่อ N เป็นจำนวนประพจน์ทั้งหมด.

ตัวอย่างเช่นเรามี 2 ประพจน์ได้แก่ p, q

p	q	$\neg p$	$p \wedge q$	$p \vee q$	$p \rightarrow q$	$p \leftrightarrow q$
T	T	F	T	T	T	T
T	F	F	F	T	F	F
F	T	T	F	T	T	F
F	F	T	F	F	T	T

สมมูล (equivalence, $\equiv$)

ประพจน์ใดๆ 2 ประพจน์จะสมมูลกัน **ก็ต่อเมื่อ** ทั้งสองประพจน์ให้ค่าในตารางความจริง**เหมือนกันทั้งหมด**

ตัวอย่างเช่น $p \rightarrow q \equiv \neg p \vee q$ (* ใช้ในการแก้โจทย์ที่อยู่ในรูป ถ้า. . .แล้ว บ่อย)

p	q	$\neg p$	$\neg p \vee q$	$p \rightarrow q$
T	T	F	T	T
T	F	F	F	F
F	T	T	T	T
F	F	T	T	T

Logical equivalences

กำหนดให้ p, q, r เป็นประพจน์ และ T, F หมายถึง **จริง** และ **เท็จ** ตามลำดับ.

if...then, if and only if ***

- $p \to q \equiv \neg p \vee q$
- $p \leftrightarrow q \equiv (p \to q) \wedge (q \to p)$

contra-positive ****

- $p \to q \equiv \neg q \to \neg p$

Identity laws *

- $p \wedge T \equiv p$
- $p \vee F \equiv p$

Domination laws *

- $p \wedge F \equiv F$
- $p \vee T \equiv T$

Idempotent laws

- $p \wedge p \equiv p$
- $p \vee p \equiv p$

Double negation law

- $\neg(\neg p) \equiv p$

Commutative law

- $p \wedge q \equiv q \wedge p$
- $p \vee q \equiv q \vee p$

Associative laws

- $(p \wedge q) \wedge r \equiv p \wedge (q \wedge r)$
- $(p \vee q) \vee r \equiv p \vee (q \vee r)$

Distributive laws *

- $p \vee (q \wedge r) \equiv (p \vee q) \wedge (p \vee r)$
- $p \wedge (q \vee r) \equiv (p \wedge q) \vee (p \wedge r)$

Absorption laws ***

- $p \vee (p \wedge q) \equiv p$
- $p \wedge (p \vee q) \equiv p$

Negation laws *

- $p \wedge \neg p \equiv F$
- $p \vee \neg p \equiv T$

Note(Trick?)

สำหรับน้องที่จำสูตรไม่ได้วิธีแนะนำคือลองวาด Venn-Euler diagram โดยมองว่าประพจน์เป็นเซ็ต และ T คือ space ($\mathcal{U}$) และ F คือเซตว่าง (ϕ) และมองกระบวนการทางตรรกศาสตร์เป็นกระบวนการทางเซตแทน.

- $\wedge$ มองเป็น $\cap$
- $\vee$ มองเป็น $\cup$
- $\neg p$ มองเป็น $\bar{A}$

Fact: กระบวนการทางเซ็ต (Union, Intersect, etc.) ถูกนิยามโดยตัวดำเนินการทางตรรกศาสตร์ ตัวอย่างเช่น

- $A \cup B = \{x \in \mathcal{U} | x \in A \vee x \in B\}$
- $A \cap B = \{x \in \mathcal{U} | x \in A \wedge x \in B\}$
- $\bar{A} = \{x \in \mathcal{U} | \neg(x \in A)\} = \{x \in \mathcal{U} | x \notin A\}$

สัจนิรันดร์ และ ความสมเหตุสมผล (Tautology and Valid argument)

สัจนิรันดร์(Tautology)

ประพจน์ประกอบ ที่ไม่ว่าจะระบุค่าความจริงในแต่ละประพจน์ใดๆ นั้นจะให้ค่า**เป็นจริงเสมอ**

ตัวอย่างโจทย์

จงตรวจสอบว่าประพจน์นี้เป็นสัจนิรันดร์หรือไม่

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

ความสมเหตุสมผล (Valid argument)

ประพจน์ประกอบด้วย**เหตุ**หลายประพจน์และ**ผล**หนึ่งประพจน์ จะสมเหตุสมผล ก็ต่อเมื่อ นำ**เหตุมาเชื่อมด้วย และ ทั้งหมด** แล้ว เชื่อมเหตุทั้งหมดกับผลด้วย**ถ้า...แล้ว**เป็นประพจน์ใหม่ แล้วประพจน์นั้นเป็น **สัจนิรันดร์**

ตัวอย่างโจทย์

เหตุ

- $p \to q$
- $q \to r$

ผล

- $p \to r$

ได้ประพจน์ที่ต้องตรวจสอบว่า

$$[(p \to q) \land (q \to r)] \to (p \to r)$$

กฎการให้เหตุผล (Rule of Inference)

มีหลายเหตุการณ์ ต้องการทราบผลของเหตุการณ์

Modus ponens

$$\begin{array}{l} p \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore q \end{array}$$

Modus tollens

$$\begin{array}{l} \neg q \\ p \rightarrow q \\ \hline \therefore \neg p \end{array}$$

ตัวอย่างโจทย์ (สอวน. คอมพิวเตอร์ 2560 ข้อที่ 29)

เหตุ

- ถ้าฝนตกแล้วน้ำท่วม
- ถ้าน้ำท่วมแล้วจะเกิดโรคระบาด
- ถ้าเกิดโรคระบาดแล้วประชาชนยากจน
- ประชาชนไม่ยากจน

ประโยคเปิด และ ตัวบ่งปริมาณ (Predicate logic and Quantifier)

ประโยคเปิด (Predicate logic, Open sentence)

ประโยคเปิด $P(x)$ จะเป็นประพจน์ก็ต่อเมื่อมีการใส่ตัวแปร x เข้าไปในประโยค เช่น

$P(x)$ คือ x มาเข้าค่ายอบรม สอวน. ที่ระยองวิทฯ (ประโยคนี้ยังไม่เป็นประพจน์ เพราะไม่รู้ว่า x คือใคร)

- P(หยู) - หยู มาเข้าค่ายอบรม สอวน. ที่ระยองวิทฯ (เป็นประพจน์เพราะตอบได้ว่าหยูเข้าค่ายหรือไม่เข้าค่าย)
- P(ทหารเรือ) - ทหารเรือ มาเข้าค่ายอบรม สอวน. ที่ระยองวิทฯ

$Q(x)$ คือ $x < 10$ (ยังตอบไม่ได้ว่าจริงหรือเท็จเพราะยังไม่รู้ค่า x)

- $Q(1)$ - $1 < 10$ (เป็นจริง)
- $Q(11)$ - $11 < 10$ (เป็นเท็จ)

ตัวบ่งปริมาณ (Quantifier)

กำหนดให้ทุก x อยู่ใน space $\mathcal{U}$

Universal Quantifier (For all $\forall$)

$\forall_x\,[P(x)]$ จะเป็น **จริงได้ในกรณีเดียว** เมื่อ $P(x)$ ในทุก $x \in \mathcal{U}$ เป็น**จริงทั้งหมด** ตัวอย่างเช่น

ให้ $\mathcal{U} = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$ และ $Q(x)$ คือ $x < 10$

$\therefore \forall_x[Q(x)] \equiv T$ (เพราะทุกเลขใน $\mathcal{U}$ น้อยกว่า 10 หมด)

Existential Quantifier (For some $\exists$)

$\exists_x\,[P(x)]$ จะเป็น **เท็จได้ในกรณีเดียว** เมื่อ $P(x)$ ในทุก $x \in \mathcal{U}$ เป็น**เท็จทั้งหมด** ตัวอย่างเช่น

ให้ $\mathcal{U} = \{10, 20, 30, 40, 50\}$ และ $Q(x)$ คือ $x < 10$

$\therefore \exists_x[Q(x)] \equiv F$ (เพราะทุกเลขใน $\mathcal{U}$ มากกว่าหรือเท่ากับ 10 หมด)

การกระจายนิเสธเข้าตัวบ่งปริมาณ (Negating Quantified expression)

- $\neg\forall_x[P(x)] \equiv \exists_x[\neg P(x)]$
- $\neg\exists_x[P(x)] \equiv \forall_x[\neg P(x)]$

(เปลี่ยนตัวบ่งปริมาณเป็นอีกแบบแล้วกระจายนิเสธเข้าประพจน์ได้เลย)
ตัวอย่างเช่น

$$\neg\forall_x[x < 10] \equiv \exists_x[\neg(x < 10)] \equiv \exists_x[x \geq 10]$$

มองเป็นคำพูดได้ว่า ไม่ใช่ทุกเลขที่น้อยกว่า 10 ความหมายเหมือน มีบางเลขมากกว่าหรือเท่ากับ 10