



**Gérard Vergnaud**

## **Recherches en psychologie didactique**

Ce document est issu du  
site officiel de Gérard Vergnaud

**[www.gerard-vergnaud.org](http://www.gerard-vergnaud.org)**

Ce document a été numérisé afin de rester le plus fidèle possible à l'original qui a servi à cette numérisation. Certaines erreurs de texte ou de reproduction sont possibles.

Vous pouvez nous signaler les erreurs ou vos remarques via le site internet.

---

## **Morphismes fondamentaux dans les processus de conceptualisation**

### **In Les sciences cognitives en débat**

Editions du CNRS (Ed.)  
1991, pp.15-28

Lien internet permanent pour l'article :

**[https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud\\_1991\\_Morphismes-Fondamentaux\\_Sciences-Cognitives-Debat](https://www.gerard-vergnaud.org/GVergnaud_1991_Morphismes-Fondamentaux_Sciences-Cognitives-Debat)**

Ce texte est soumis à droit d'auteur et de reproduction.

---

# LES SCIENCES COGNITIVES = EN DÉBAT =

Édité par Gérard Vergnaud



 CNRS EDITIONS

## MORPHISMES FONDAMENTAUX DANS LES PROCESSUS DE CONCEPTUALISATION

Gérard Vergnaud

Le concept de représentation calculable est essentiel pour la psychologie cognitive. Or un système ne peut pas calculer sur un autre système si n'existent pas des homomorphismes du système représenté dans le système représentant. Qui dit homomorphisme ne dit pas isomorphisme. Dans l'application réel -- représentation, ce sont des classes d'aspects, de relations et de processus qui sont représentés pour entrer dans des calculs, non pas des phénomènes singuliers. L'adaptation du système cognitif à l'environnement consiste à retenir progressivement les aspects les plus pertinents d'une classe de situations pour permettre un ajustement toujours meilleur de l'action du sujet. Considérons d'abord la perception visuelle: elle repose sur certains homomorphismes, qui concernent des propriétés topologiques et métriques des objets (par exemple les formes et les ordres de grandeur sous certaines conditions). Mais en même temps la perception visuelle donne lieu à des illusions perceptives nombreuses notamment dans le domaine de la perspective et des propriétés métriques. Au cours du développement cognitif, le sujet humain apporte des améliorations substantielles à sa perception du réel, mais il élabore aussi, parallèlement, une connaissance rationnelle qui, à certains égards, s'appuie sur la perception, à d'autres égards en prend le contrepied. En effet, la perception ne nous informe pas de manière totalement fiable: ni sur la relation entre force, vitesse et accélération, ni sur la taille et la distance du soleil, ni même sur la distance des objets éloignés, en montagne par exemple.

Je n'aborderai pas dans ce texte, la question, essentielle pour la relation entre neurosciences et psychologie cognitive, des morphismes entre le fonctionnement du cerveau et le fonctionnement du système cognitif: les neurosciences sont quasiment muettes sur la formation des compétences mathématiques chez le sujet humain, qui nous intéresse ici. Mais je m'intéresserai à trois autres catégories de morphismes, tous les trois essentiels pour l'étude du développement des connaissances. Le premier concerne la relation réel -- représentation, le second la relation signifié -- signifiant, le troisième la relation

entre concepts de différents niveaux, à l'intérieur de la connaissance conceptuelle elle-même.

## 1 DEFINITION DU CONCEPT D'HOMOMORPHISME

Hom. de propriété	$P(x) \implies P'(f(x))$
Hom. de relation binaire	$R_2(x, y) \implies R'_2(f(x), f(y))$
Hom. de relation ternaire	$R_3(x, y, z) \implies R'_3(f(x), f(y), f(z))$

par exemple, dans le cas d'une loi de composition binaire

$$x = y \text{ Tz} \implies f(x) = f(y) \perp f(z)$$

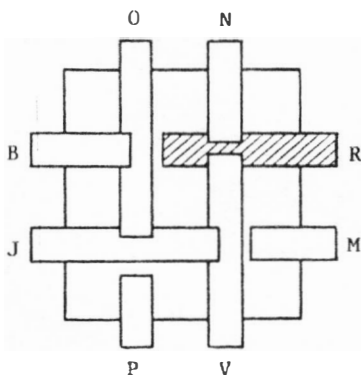
qu'on peut écrire  $f(y \text{ Tz}) = f(y) \perp f(z)$

On retrouve ainsi la définition classique de l'homomorphisme pour les lois de composition binaires. On peut obtenir  $f(y \text{ Tz})$  soit en calculant d'abord dans l'ensemble de départ  $x = y \text{ Tz}$ , et en prenant l'image ensuite, soit en prenant d'abord l'image de  $y$  et l'image de  $z$ , et en les composant ensuite dans l'ensemble d'arrivée  $f(y) \perp f(z)$ .

Ceci nous fournit le paradigme d'une théorie des représentations calculables.

### Premier exemple: Tirer la barre Rouge

Cet exemple illustre l'homomorphisme réel-représentation.



Ce problème, posé à des enfants de 3 ans 1/2 à 8 ans sans masquage des barres, a permis d'étudier le progrès des procédures et des représentations des enfants (Vergnaud, 1968). Voici quelques faits intéressants, notamment pour leurs conséquences théoriques.

- l'antisymétrie de la relation d'encastrement n'est pas comprise par les plus jeunes enfants, on les voit tirer R, puis V, puis R à nouveau, puis V, etc.

- lorsque les enfants (entre 4 ans 1/2 et 6 ans) découvrent l'antisymétrie, ils adoptent une procédure réglée et tirent successivement R, V, J, O et B, puis recommencent:

\* soit avec R: cela donne alors une nouvelle suite R V J O

\* soit avec une autre barre, par exemple J: cela donne J O.

Et ainsi de suite.

Ils parviennent ainsi à la réussite avec un algorithme simple qu'on peut écrire de la manière suivante:

Si Y encadré dans X, pour tirer X, tirer Y

- les enfants plus âgés (entre 5 ans et 1/2 et 8 ans) découvrent une autre procédure, plus économique, qui résulte d'une inférence transitive:

pour tirer X tirer Y et pour tirer Y tirer Z ==> pour tirer X tirer Z

Ils se contentent alors d'examiner visuellement et successivement les relations V encadré dans R, J encadré dans V, O encadré dans J, B encadré dans O; puis ils tirent directement B. Ce raisonnement "transitif" s'appuie bien entendu sur la compréhension de la relation d'encastrement, mais la relation d'encastrement n'est pas elle-même transitive: J n'est pas encadré dans R. C'est donc aux règles d'action que s'applique le calcul transitif. Ce nouvel algorithme s'appuie donc à la fois sur une représentation homomorphe des barres et de la relation d'encastrement, et sur un enchaînement transitif des implications entre actions.

On ne peut faire l'économie, dans une théorie de l'action opératoire, ni d'une représentation calculable du réel, ni des règles d'action et de l'intentionnalité du sujet. Ces règles et ces intentions se prêtent elles-mêmes à des calculs.

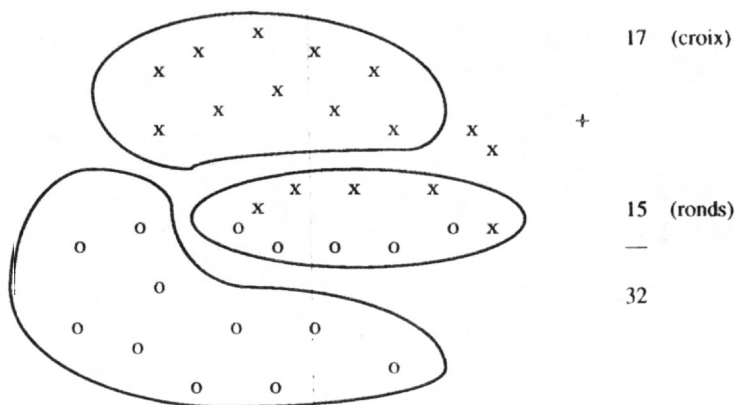
### **Deuxième exemple: L'apprentissage de l'algorithme de l'addition.**

Cet exemple illustre à la fois l'homomorphisme entre concepts et l'homomorphisme signifié -- signifiant.

Pour enseigner la numération de position et les algorithmes qui l'accompagnent et lui donnent sa fonction, les enseignants utilisent des jetons, des bûchettes, des matériels physiquement ou visuellement composables et décomposables (cubes emboîtables; matériel multibase, etc.). Quatre types d'éléments sont alors en présence: les objets physiques à dénombrer, les ensembles formés par ces objets, les cardinaux de ces ensembles, et les représentations en numération de position de ces cardinaux (en base dix par exemple). Dans ses manipulations et dans sa pensée l'enfant travaille donc sur quatre plans à la fois: le regroupement ou l'assemblage physique d'objets, l'union d'ensembles disjoints, la somme des nombres, et l'algorithme associé à la numération de position. On ne peut pas rendre compte de la conquête intellectuelle que cela représente sans les trois homomorphismes fondamentaux suivants:

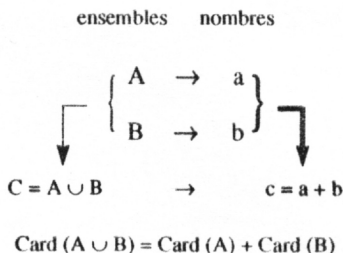
- (1)  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$  pourvu que A et B soient disjoints  
 (2)  $\text{Ecrit}(a + b) = \text{Ecrit}(a) + \text{Ecrit}(b)$   
 (3)  $\text{Ecrit}(\text{Card}(A \cup B)) = \text{Ecrit}(\text{Card}(A)) + \text{Ecrit}(\text{Card}(B))$  si A et B sont disjoints  
 $\cup$  signe de l'union,  $+$  signe de la somme,  $+$  signe de l'algorithme d'addition.

L'homomorphisme (3) est évidemment le composé des deux premiers, mais il intervient directement dans l'apprentissage de la règle de la retenue, comme on peut le voir avec le dessin ci-dessous: la formation d'une nouvelle dizaine en (l'ellipse), au moment de l'union des deux ensembles, traduit l'opération sur la colonne des unités:  $7 + 5$  égale 12, je pose deux unités et je retiens une dizaine.



Prenons le premier homomorphisme:  $\text{Card}(A \cup B) = \text{Card}(A) + \text{Card}(B)$ . Les psychologues ont étudié les procédures utilisées par les jeunes enfants dans de petits problèmes d'addition:  $6 + 3$  par exemple. Ils ont observé notamment que les jeunes enfants, quand ils ont compté une collection A de 6 objets et une collection B de 3 objets, recomptent le tout: un, deux, trois, quatre, cinq, six, sept, huit, neuf! C'est seulement plus tard qu'ils commencent à faire l'économie du recomptage. Pour éviter totalement de recompter, il leur faudrait évidemment savoir que  $6 + 3 = 9$ . Comme beaucoup d'enfants ne connaissent pas encore ce fait numérique, ils ne peuvent faire l'économie que du premier recomptage: ils résument alors l'information pertinente sur la première collection (6) et comptent, à partir de 6, les éléments de la deuxième collection: six! sept, huit, neuf! Le schème du comptage en avant (counting-on) se substitue au schème du recomptage du tout (counting-all).

Le tableau ci-après exprime le gain apporté:



En traits simples, opération sur les ensembles, comptage des ensembles et re-comptage du tout. En gras, opération d'addition sur les nombres.

Ce premier homomorphisme représente la relation fondamentale entre deux conquêtes conceptuelles: celle d'ensemble et d'union d'une part, celle de cardinal et de somme d'autre part. Il tire sa puissance de la possibilité d'opérer sur les nombres sans revenir aux ensembles et aux objets.

Le second homomorphisme  $\text{Ecrit}(a + b) = \text{Ecrit}(a) + \text{Ecrit}(b)$  est d'une autre nature, il porte sur la relation signifié/signifiant. C'est la signification associée à la disposition spatiale (unités à droite, groupements du premier ordre immédiatement à gauche, groupements du second ordre encore à gauche, etc.), qui confère sa puissance à l'algorithme de l'addition:

- commencer par la colonne des unités, la plus à droite;
- continuer par la colonne des dizaines, puis des centaines, etc
- calculer la somme des nombres dans chaque colonne. Si la somme des nombres

dans une colonne est inférieure à dix, inscrivez cette somme sur la ligne du total. Si elle est égale ou supérieure à dix, écrivez seulement le chiffre des unités de cette somme et retenez le chiffre des dizaines, que vous reporterez en haut de la colonne immédiatement située à gauche, pour l'ajouter aux autres nombres de cette dernière colonne;

- et ainsi de suite en progressant de droite à gauche, jusqu'à épuisement des colonnes.

Les propriétés des nombres entiers sont totalement indépendantes des propriétés de leur écriture. Mais les différentes écritures possibles des nombres (romaine, égyptienne, arabe) rendent plus ou moins aisées les opérations d'addition, de soustraction, de multiplication, de division, de comparaison. L'économie apportée par l'homomorphisme "Ecriture" illustre l'idée de représentation calculable dans un sens différent de ce que nous avons vu jusqu'ici.

Dans l'exemple des barres encadrées, l'homomorphisme concerne la relation entre la réalité physique des objets et la représentation; cette représentation est en outre implicite et inférée à partir des conduites des enfants. Dans l'exemple de l'union disjointe d'ensembles et de la somme des cardinaux, l'homomorphisme met en rapport des objets de connaissance de statut différent (ensembles et nombres). Leur représentation est là encore

largement implicite. Certes, les enfants prononcent des mots-nombres (un, deux, trois, etc.) mais ils ne font aucun usage de signifiants pour traduire la somme des nombres ou l'union des ensembles. Dans le cas de l'écriture, au contraire, le signifiant occupe une place essentielle, et c'est sur la relation entre signifié et signifiant que repose l'efficacité de l'homomorphisme. Les signes sur le papier, accompagnés de l'algorithme, constituent une représentation symbolique explicitement calculable. Le travail sur le signifiant n'est pas pour autant autonome.

## 2 DEFINITIONS ET THESES

A partir de ces exemples nous allons formuler plusieurs définitions et plusieurs thèses qui ont valeur de principes.

**SCHEME: organisation invariante de la conduite pour une classe de situations donnée.**

Commentaire: le schème est une totalité dynamique fonctionnelle. Il consiste en plusieurs catégories d'éléments:

- une **anticipation du but à atteindre**,
- des **règles d'action**,
- des **invariants opératoires** qui constituent la conceptualisation nécessaire à l'action,
- des **possibilités d'inférence** qui permettent de calculer règles et anticipations en fonction de l'information prélevée dans la situation et des invariants opératoires pertinents.

Les deux algorithmes vus plus haut pour débloquer les barres sont des schèmes; le dénombrement, le comptage en avant et l'algorithme de l'addition également.

On peut donner d'autres exemples de schèmes, pour d'autres domaines de compétence: la marche, une certaine manière de danser la valse, le système phonologique d'un parler régional, l'intonation d'une actrice, l'organisation rhétorique des arguments d'un homme politique en campagne électorale. Dans tous ces cas, en effet, on peut mettre en évidence une organisation invariante, consistant en règles, anticipations et invariants opératoires. Les schèmes ne sont pas pour autant des stéréotypes. Le même schème engendre des actions différentes en fonction des valeurs des variables de situation et il se prête à des inférences en situation.

**Thèse 1:** la connaissance d'un sujet individuel est fondamentalement un répertoire de schèmes. Ce répertoire est en général très grand et beaucoup de schèmes ont un domaine d'application restreint.

**Thèse 2:** les schèmes se développent et se transforment au cours de l'expérience et de la maturation, à cause de la résistance qu'opposent les situations nouvelles à leur traitement par les schèmes existants.

**Thèse 3:** Les schèmes ne peuvent exister sans invariants opératoires; ces invariants constituent un système de représentation des situations concernées, c'est-à-dire une



sorte de conceptualisation. Cette conceptualisation est largement implicite, voire inconsciente. Elle peut aussi faire l'objet d'un discours explicite, comme dans les textes scientifiques.

**Thèse 4:** le développement cognitif s'analyse en dernier ressort comme un enrichissement adaptatif par filiations et ruptures des invariants opératoires, des règles d'action, et des systèmes d'effectuation et de contrôle des productions du sujet. Ce processus d'adaptation des schèmes consiste principalement en découvertes, combinaisons, décombinaisons et recombinaisons. La conscience joue souvent un rôle dans ce processus, le langage aussi, éventuellement.

**Thèse 5:** Les algorithmes sont des schèmes, mais les schèmes ne sont pas tous des algorithmes; en effet, ils n'ont pas tous les propriétés d'effectivité et de nécessité des algorithmes.

**CHAMP CONCEPTUEL:** ensemble de situations dont la maîtrise demande un certain système de concepts, de procédures et de représentations symboliques en étroite connexion.

Commentaire: la formation d'un concept est étroitement liée aux problèmes pratiques et théoriques auxquels ce concept apporte une réponse (ou des éléments de réponse). Or une situation ne se laisse presque jamais analyser avec un seul concept et un concept ne prend pas en général sa fonction dans un seul type de situation. L'idée de prendre pour objet d'étude un ensemble de situations et un ensemble de concepts découle de là.

La définition ci-dessus permet de découper, dans le répertoire des compétences et des conceptions du sujet, des domaines d'une taille respectable et cependant relativement homogènes, sur lesquels il soit possible de conduire des analyses significatives du point de vue de l'apprentissage et du développement cognitif: notamment parce qu'on peut y repérer des niveaux différents de connaissance, des filiations, des ruptures. La source des concepts est à rechercher dans les invariants opératoires, et par conséquent dans les schèmes.

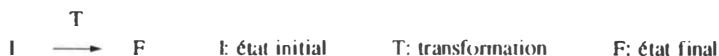
### **3 UN EXEMPLE DE CHAMP CONCEPTUEL: LA CONSTRUCTION DES STRUCTURES ADDITIVES**

Les premières élaborations du concept de nombre chez l'enfant reposent sur le schème du dénombrement et sur les schèmes de traitement des premières situations d'addition, de soustraction, de comparaison et de conservation des quantités.

Lorsqu'un enfant de 5 ans dénombre une collection de 4 objets il met en œuvre plusieurs coordinations perceptivo-gestuelles: entre les objets, les gestes du doigt et de la main, les gestes de l'œil, et l'énonciation des mots - nombres; en outre il marque habituellement le statut différent du dernier mot prononcé, soit en l'accentuant, soit en le répétant: un, deux, trois, quatre... *quatre!* La conduite de l'enfant peut être modifiée par la taille des objets, leur disposition spatiale et leur nombre, mais son organisation reste invariante et repose sur deux idées mathématiques essentielles qui restent totalement impli-

cites: celle de bijection et celle de cardinal. Ce sont des concepts-en-acte. Chacun des deux peut être défaillant, indépendamment de l'autre.

Les situations dans lesquelles l'addition et la soustraction prennent leur signification sont beaucoup plus diversifiées que ne le laisserait penser le modèle de la loi de composition binaire, commutative et associative. Les conceptions de l'enfant proviennent aussi des situations de type état initial/transformation/état final: l'addition c'est une quantité qui s'accroît (j'avais 3 billes, j'en gagne 2, combien en ai-je maintenant?); et la soustraction une quantité qui décroît (j'avais 5 bonbons, j'en donne 3, combien m'en reste-t-il?). Ce type de situation n'est pas adéquatement modélisé par une loi binaire mais plutôt par une opération unaire, dans laquelle une transformation, positive ou négative, opère sur un cardinal. D'où le schéma



A partir des schèmes primitifs de l'addition, associés à la réunion de deux parties connues en un tout, ou à la transformation positive d'un état initial connu, ainsi que du schème primitif de la soustraction, associé à la transformation négative d'un état initial connu, l'enfant va devoir étendre ces deux opérations arithmétiques à une grande variété de classes de problèmes qui s'écartent sensiblement des modèles primitifs. Cette extension occupe au moins dix années du développement cognitif de l'enfant.

On peut résumer de la manière suivante les six grandes catégories de relations additives élémentaires que l'enfant et le jeune adolescent peuvent avoir à traiter.

- 1. Partie/partie/tout.** Deux catégories de problèmes: chercher le tout quand on connaît les deux parties, chercher une partie quand on connaît le tout et l'autre partie.
- 2. Etat initial/transformation/état final.** Six catégories de problèmes: chercher l'état final, ou la transformation, ou l'état final, quand on connaît les deux autres informations. Ces trois catégories se dédoublent selon que la transformation est une augmentation ou une diminution.
- 3. Référé/relation de comparaison/référent.** Six catégories de problèmes également.
- 4. Composition de deux transformations connues en une troisième (inconnue) et décomposition d'une transformation connue en deux transformations dont l'une est connue et l'autre inconnue.** Comme chacune des données peut être positive ou négative, et que les valeurs absolues peuvent elles-mêmes modifier la tâche cognitive, il y a un grand nombre de cas de figures, du point de vue du calcul relationnel et du choix de l'opération arithmétique pertinente.
- 5. Transformation d'une relation.** On retrouve les six mêmes catégories de problèmes que pour la relation 2, mais elles se divisent en sous-catégories selon les signes et les valeurs absolues des données.

## 6. Composition de deux relations et décomposition d'une relation. Démultiplication des catégories comme pour la relation 4.

Faute de place je ne commenterai pas ici toutes ces relations et les catégories différentes d'opérations de pensée auxquelles elles donnent lieu. Je me contenterai de quelques exemples, pour caractériser certaines des conquêtes cognitives de l'enfant et pour tirer quelques leçons théoriques.

La recherche d'une partie par soustraction d'une partie connue d'un tout connu est sensiblement plus difficile que la recherche d'un état final après transformation négative d'un état initial connu. De même la recherche d'une transformation par soustraction de deux états. Mais il est plus difficile encore de rechercher un état initial connaissant l'état final et la transformation, positive ou négative. La solution canonique exige en effet une opération de pensée nouvelle, l'inversion de la transformation directe et son application à l'état final: il faut rajouter les bonbons qu'on a donnés pour retrouver ce qu'on avait avant (addition alors que la quantité a diminué), ou soustraire les billes qu'on vient de gagner pour reconstituer le stock initial de billes (soustraction alors qu'on a gagné). Ces opérations de pensée reposent sur un théorème-en-acte non trivial pour les enfants de 7 ans:

$$F = T(I) \implies I = T^{-1}(F)$$

**THEOREME-EN-ACTE:** Proposition tenue pour vraie sur le réel et permettant de rendre compte de l'organisation de la conduite du sujet. Les théorèmes-en-acte sont souvent implicites, mais ils peuvent aussi être explicites.

Une classe de problèmes très difficile pour la majorité des enfants jusqu'au début du collège, et qui le reste pour beaucoup d'entre eux jusqu'à la fin du collège, peut être illustrée par l'exemple suivant:

*Thierry a joué deux parties de billes. Il ne se souvient plus de ce qui s'est passé à la première partie. A la seconde partie il a perdu 7 billes. En recomptant ses billes à la fin il s'aperçoit qu'il a gagné 5 billes en tout. Que s'est-il passé à la première partie?*

La difficulté conceptuelle de cette catégorie de problèmes tient au fait qu'il faut faire une addition arithmétique  $5 + 7$  alors que le schéma de composition amènerait normalement une solution par soustraction. Il s'agit d'ailleurs de la soustraction d'un négatif.

$$x + (-7) = (+5) \implies x = (+5) - (-7) = (+12)$$

La conceptualisation progressive des structures additives, c'est-à-dire la maîtrise progressive des classes de problèmes dont la solution demande une addition, une soustraction ou une combinaison de telles opérations est jalonnée par la découverte de plusieurs sortes de concepts et de théorèmes, qui pour la plupart d'entre eux restent largement implicites dans les conduites des élèves. C'est ce caractère implicite qui conduit à parler de concepts-en-acte et de théorèmes-en-acte. Parmi les concepts-en-acte nécessaires à la compréhension des structures additives on peut énumérer les concepts de collection et de grandeur, de cardinal et de mesure, de partie et de tout, d'état final et d'état initial, de transfor-

mation, d'augmentation et de diminution, de comparaison (plus que, n de plus que, n de moins que), de nombre naturel et de nombre relatif, de loi binaire et d'opération unaire, de composition, de décomposition et d'inversion, d'abscisse et de déplacement orienté, et bien entendu d'addition et de soustraction.

Mais un concept implicite n'est pas tout à fait un concept. C'est donc un problème théorique essentiel que d'analyser les signifiants langagiers et non langagiers qui donnent au concept son caractère public, et qui permettent de débattre de sa définition, de ses propriétés, de la vérité des propositions dans lesquelles il s'inscrit.

Du point de vue d'une théorie pragmatiste de l'apprentissage, un concept est en effet un triplet de trois ensembles

$$C = (S, I, S')$$

$S$ : ensemble des situations qui donnent du sens au concept.

$I$ : ensemble des invariants opératoires (concepts-en-acte et théorèmes-en-acte) sur lesquels repose l'efficacité des schèmes.

$S'$ : ensemble des formes langagières et non langagières qui permettent de représenter symboliquement le concept, ses propriétés, les situations et les procédures de traitement.

$S$  est la référence,  $I$  le signifié,  $S'$  le signifiant.

Cette définition du concept comme triplet doit être interprétée à un autre niveau que l'interprétation habituelle des concepts comme prédicats et arguments. Le triplet fait référence au processus de conceptualisation tout entier.

La place manque pour exposer ici avec des exemples les fonctions cognitives des signifiants langagiers et non langagiers. On peut cependant esquisser trois sortes de considérations théoriques intéressantes:

1) la mise en mots ou en symboles permet de représenter, dans un certain système de signifiants, les éléments pertinents de la situation (relations, valeurs des variables, questions) et de conduire plus aisément à la solution.

Dans le cas de l'algèbre notamment, la mise en symboles permet de résoudre des problèmes complexes que les élèves seraient incapables de résoudre par des moyens purement arithmétiques. Certaines représentations préalgébriques, comme les diagrammes et les tableaux ont une fonction analogue. On peut faire l'hypothèse que le langage naturel a lui-même cette fonction, même s'il est difficile d'identifier, dans le signifiant langagier, les éléments qui se prêtent au calcul, se substituent aux raisonnements purement conceptuels, ou les accompagnent.

A dire vrai, la représentation algébrique d'un problème ne permet pas à l'élève ou à l'ingénieur de s'en remettre totalement à la "machine" symbolique. On peut en effet observer que la résolution d'une équation (ou d'un système) est jalonnée d'opérations de pensée implicites, lesquelles ne sont possibles que parce qu'elles s'appuient sur des théorèmes-en-acte: par exemple la conservation de l'égalité lorsqu'on applique aux deux membres de l'équation la même opération.

Seuls les théorèmes-en-acte sont susceptibles de vérité ou de fausseté, et peuvent entrer dans un calcul d'inférences. Les concepts-en-acte sont des briques indispensables pour la formation des théorèmes-en-acte, mais ils ne sont susceptibles que de pertinence ou de non-pertinence.

2) Il est intéressant d'analyser avec ce cadre théorique les opérations linguistiques et les opérations de pensée qui permettent la représentation et la résolution d'un problème dans le langage naturel. C'est en effet un phénomène frappant que, lorsqu'ils sont confrontés à des problèmes pour lesquels ils ne disposent pas quasi-immédiatement d'un schème de traitement, les élèves parlent à voix haute, ou à mi-voix; à l'évidence parce que cette activité langagière favorise l'émergence de la solution. Si le problème est très facile pour eux, ou trop difficile, ils ne parlent pas, ou guère. Parfois l'accompagnement langagier de la résolution est subvocal, notamment chez les adultes. C'est ce qui avait conduit Vygotski, et de nombreux psychologues à sa suite, à essayer d'analyser les différentes fonctions du langage, lorsqu'il accompagne la pensée. Pour ma part, j'en distinguerai trois principales:

- la planification et le contrôle de l'action: le langage permet d'annoncer et d'identifier le but et les sous-buts, les étapes à atteindre, il permet de faire le point sur ce qui a été accompli ou établi;

- l'extraction de l'information pertinente: quels objets, quelles propriétés, quelles relations méritent-elles d'être retenues pour le traitement de la situation. C'est une fonction de sélection et de catégorisation,

- le pilotage et l'accompagnement des inférences: le langage permet de traduire une ou plusieurs relations en une autre soit par une opération syntaxique (composition, inversion...) soit par un glissement de sens, lorsqu'une relation conceptuellement complexe est interprétée avec un modèle plus simple, qui permet cependant d'avancer vers la solution.

3) Enfin le langage permet non seulement d'explicitier les connaissances en acte et d'en favoriser ainsi l'apprentissage et le fonctionnement, il permet aussi de marquer différemment les formes de conceptualisation. Marquer par l'imparfait l'état initial et par le présent l'état final, c'est à l'évidence manifester qu'on a compris ces deux termes de la relation. Parler d'"état initial", de "point de départ", de "ce que Mélanie avait avant" c'est donner à cet état un autre statut. On peut dire que l'imparfait est un outil pour repérer l'état initial alors que la nominalisation lui donne un statut d'objet. Le diagramme fléché vu plus haut donne pareillement un statut d'objets aux états, à la transformation, et à la relation entre transformation directe et transformation réciproque; de même l'algèbre, mais celle-ci est d'une lecture plus difficile pour les élèves.

## diagramme fléché

## algèbre

transformation directe

état initial

état final

+ 7

←----- 15

- 7

transformation réciproque

$$F = T(I) \implies I = T^{-1}(F)$$

Un autre exemple permettra d'apprécier l'importance de la transformation de la connaissance qui est sollicitée et favorisée par le langage et par certaines opérations linguistiques.

Schéma: construire la figure symétrique d'une figure donnée par rapport à une droite.

énoncé (1): le triangle A' B' C' est symétrique du triangle A B C par rapport à Δ.

énoncé (2): la symétrie orthogonale conserve les longueurs et les angles.

énoncé (3): la symétrie orthogonale est une isométrie.

La fonction propositionnelle à trois places du premier énoncé "...est symétrique de... par rapport à ..." devient dans l'énoncé (2), par une opération de nominalisation, un argument pour une fonction propositionnelle à une place "...conserve les longueurs et les angles". Dans l'énoncé (3) c'est au tour de cette fonction propositionnelle de devenir, toujours par une opération de nominalisation, le deuxième argument d'une fonction propositionnelle à deux places, en l'occurrence la relation d'inclusion "... est une ...".

L'opération de nominalisation est une opération essentielle pour la transformation d'un concept-outil en concept-objet. Une partie du travail cognitif se reflète dans la signification des articles: le "la" des énoncés (2) et (3) est générique, il désigne une classe de transformations du plan; tandis que le "le" de l'énoncé (1) ne désigne que le triangle particulier A' B' C'. De simple élément d'un schème visuel, puis d'un schème de construction géométrique, la symétrie orthogonale est devenue une classe de transformations géométriques, entretenant des rapports avec d'autres classes de transformations. Ainsi, le langage traduit et favorise le fonctionnement de la connaissance, son développement, sa transformation. Tout porte à penser que les invariants opératoires contenus dans les schèmes ont également des statuts différents. Mais c'est leur mise en mots qui permet le mieux d'analyser ces différences.

## CONCLUSION

Les travaux de psychologie et de didactique des mathématiques accréditent la thèse que la connaissance est une construction: une construction réaliste. Cette construction s'appuie à la fois sur la perception, l'action opératoire, le langage et le symbolisme.

Les schèmes qui organisent l'action opératoire constituent une clé sans laquelle on ne comprend ni la sélection qui s'opère dans la prise d'information perceptive, ni la sélection qui se fait dans l'activité langagière. Les prises de conscience qui jalonnent le processus de formation des connaissances opératoires sont d'une grande variété: sélection de l'information, analyse des buts, des sous-buts et des étapes, transformation du statut cognitif des relations et des propriétés prises en compte, explicitation des concepts-en-acte et des théorèmes-en-acte, organisation discursive des connaissances et de l'argumentation qui les accréditent.

## BIBLIOGRAPHIE

Bideaud, J., Meljac, C., Fischer, J.P. (Eds.) (1991), *Les Chemins du Nombre*, Lille, P.U.F.

Carpenter, T.P., Moser, J.M., Romberg, T.A. (Eds.) (1982), *Addition and subtraction: A cognitive perspective*, Hillsdale, NJ: Erlbaum.

Fayol, M. (1990), *L'enfant et le nombre*, Neuchâtel, Paris: Delachaux & Niestlé.

Fuson, K.C. (1988), *Children's counting and concepts of number*, New York, Springer-Verlag.

Gelman, R., Gallistel, C.R. (1978), *The child's understanding of number*, Cambridge, MA: Harvard University Press.

Ginsburg, H.P. (Ed.) (1983), *The development of mathematical thinking*, New York: Academic Press.

Gréco, P. (1962), Quantité et qualité: Nouvelles recherches sur la correspondance terme-à-terme et la conservation des ensembles. In P. Gréco & A. Morf (Eds.), *Structures numériques élémentaires* (pp. 1-70), Paris: P.U.F.

Meljac, C. (1979), *Décrire, agir et compter: L'enfant et le dénombrement spontané*, Paris: P.U.F.

Piaget, J. (1950), *Introduction à l'épistémologie génétique* (Vol. 1), Paris: P.U.F.

Russel, B. (1958) *Signification et vérité*, Flammarion, Paris.

Russel, B. (1910) La théorie des types logiques, *Revue de Métaphysique et de Morale*, 18, pp. 263-301.

Vergnaud, G. (1981), *L'enfant, la mathématique et la réalité*, Berne: Peter Lang.

Vergnaud, G. (1983), Multiplicative structures. In R. Lesh & M. Landau (Eds.), *Acquisition of mathematics concepts and processes*, Academic Press.

Vergnaud, G. (1985), Concepts et schèmes dans une théorie opératoire de la représentation, *Psychologie Française*, 30, 245-252.

Vergnaud, G. (1987), Les fonctions de l'action et de la symbolisation dans la formation des connaissances chez l'enfant, In J. Piaget, P. Mounoud & J.P. Bronckart (Eds.), *Psychologie, Encyclopédie de la Pléiade* (pp. 821-844), Paris: Gallimard.

Vergnaud, G. (1990) La théorie des champs conceptuels. *Recherches en Didactique des Mathématiques*, 10, 2-3, pp. 133-170.

Vygotski, L. (1985), *Langage et Pensée*, Paris: Editions Sociales, Messidor.