

Labforsøk: Rulling på skråplan

Introduksjon

Laboratoriearbeidet i fysikk utgjør ca. 20 timers arbeid i dette faget, inkludert to separate labøkter (én for gjennomføring av forsøket; én for hjelp med rapportskriving, gjentak av forsøk osv.). Vi skal bruke programmet Tracker til å gjøre videoanalyse av en video av forsøket, så du trenger å medbringe følgende utstyr på labøktene:

- En smarttelefon eller annen enhet **med kamera**
- Datamaskin med Windows/Linux/Mac OS

I Appendix finner du en kort introduksjon til videoanalyseprogrammet Tracker, samt en detaljert beskrivelse av hvordan video importeres og analyseres i Tracker.

Hensikt

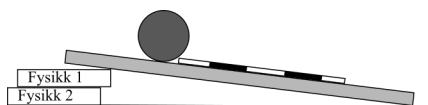
Vi skal bestemme akselerasjonen for et legeme som ruller uten å gli nedover et skråplan, samt beregne koeffisienten c (et mål på hvor «godt»/raskt legemet ruller, se Teori) for forskjellige rullende legemer.

Metode

1. Film to forskjellige legemer som **ruller nedover et skråplan uten å gli**. Velg blant skive; hul sylinder; skive med en tynn, sylindrisk rulleakse («slipestein»). Gjenta forsøket for hvert legeme 5 - fem - ganger, og bruk Tracker til å finne **massesenterets akselerasjon langs skråplanet** i hvert tilfelle.
2. Beregn **gjennomsnitt, standardavvik og standardfeil** for akselerasjonen ut i fra målingene og oppgi måleresultatet som *gjennomsnitt \pm standardfeil*.
3. Bestem skråplanets helningsvinkel β (se Teori), enten ved å bruke Videoanalyse i Tracker, eller ved å bruke lengdemålinger/trigonometriske beregninger.
4. Bruk regneoppgavene under Teori til å beregne koeffisienten c for de forskjellige legemene, ut i fra de målte akselerasjonsverdiene.
5. Finn teoretiske verdier for c for de ulike legemene ut i fra tabell og evt. målinger av radius.
6. **Sammenlikn** målte verdier for koeffisienten c med teoretiske verdier, og **drøft** eventuelle forskjeller i lys av feilkilder.

Utstyrsett

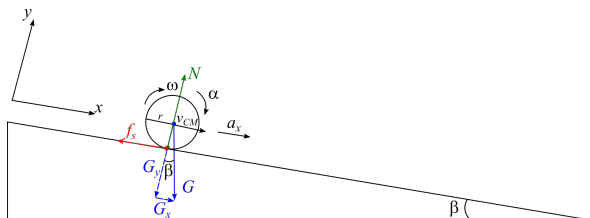
Som skråplan kan vi bruke en treplate som er hevet i den ene enden. Det er viktig at objektet *ruller uten å gli* nedover skråplanet. Sørg for at en målestav/tommestokk e.l. for å angi skala/størrelsesforhold er synlig i videoen - se figuren under.



Plasser kameraet 2-3 meter unna skråplanet - hvis det plasseres for nært, kan det gi perspektivfeil ved analysen i Tracker.

Teori

Figuren under viser kreftene som virker på et legeme med rulleradius¹ r når det ruller ned skråplanet uten å gli: tyngden G , normalkrafta N og hvilefriksjonen f_s . Koordinatsystemet er valgt slik at positiv x -retning er langs skråplanet, og y -retningen står normalt på skråplanet. Skråvinkelen er β .



Newtons 2. lov for bevegelsen til massesenteret langs skråplanet gir

$$\begin{aligned}\sum F_x &= ma_x \\ G_x - f_s &= ma_x \\ mg \sin \beta - f_s &= ma_x\end{aligned}\quad (1)$$

Newtons 2. lov for rotasjonsbevegelsen om massesenteret blir (kun friksjonen gir et dreiemoment om

¹Rulleradius er radien til den delen av legemet som ruller på underlaget. Denne er lik R for skive/hul/tynnvegget sylinder med radius R , og er lik r for en skive som ruller på en mindre akse med radius r .

massesenteret):

$$\begin{aligned}\sum \tau &= I\alpha \\ f_s \cdot r &= I\alpha\end{aligned}\quad (2)$$

Her er I legemets treghetsmoment om en akse gjennom massesenteret, og α er legemets vinkelakselerasjon. Ettersom legemet ruller uten å gli, har vi dessuten rullebetingelsene:

$$a_x = \alpha r, \quad v_{CM} = \omega r. \quad (3)$$

For et rullende legeme med en gitt form er det et bestemt forhold mellom den kinetiske energien knyttet til hhv. rotasjon og translasjon. Dette forholdet angis med koeffisienten c , som er definert som forholdet

$$c = \frac{K_{rotasjon}}{K_{translasjon}} = \frac{\frac{1}{2}I\omega^2}{\frac{1}{2}Mv_{CM}^2} \quad (4)$$

Tabellen under viser verdien av c for ideelle legemer med masse M :

Legeme	I	c
Skive	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}$
Hul sylinder	$\frac{1}{2}M(R_i^2 + R_y^2)$	$\frac{1}{2}\left(1 + \left(\frac{R_i}{R_y}\right)^2\right)$
Tynnvegget sylinder	MR^2	1
Skive med mindre rulleakse	$\frac{1}{2}MR^2$	$\frac{1}{2}\left(\frac{R}{r}\right)^2$

Teorioppgaver

a) Kombiner likningene (1), (2) og (3) samt definisjonen (4) av c og utled følgende uttrykk for akselerasjonen nedover skråplanet:

$$a_x = \frac{g \sin \beta}{c + 1} \quad (5)$$

b) Bruk (5) til å finne et uttrykk for c som funksjon av målt verdi av a_x og β . Denne skal du bruke til å beregne verdier av c ut i fra målingene av a_x og β .

Appendiks

Introduksjon til Tracker


Tracker er et program for videoanalyse. Programmet har åpen kildekode og installasjonsfiler for forskjellige plattformer kan lastes ned herifra: <http://physlets.org/tracker>










I forsøket vi skal gjennomføre, bruker vi Tracker til å måle akselerasjonen til et legeme som ruller ned et skråplan, ved å be programmet “tracke” (“følge”) objektet. Programmet vil da lage sammenhørende verdier av posisjon og tid, som vi så kan bruke til å bestemme akselerasjonen til objektet.

Det er laget 3 instruksjonsvideoer, som med fordel kan sees før man bruker Tracker:

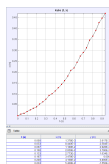
- Introduksjon og manuell “tracking”/sporing
- Automatisk “tracking”/sporing
- Grafisk analyse av bevegelse

Videoanalyse i Tracker

1. Gjør et opptak av et legeme som ruller nedover et skråplan. Opptaket blir lettest å behandle i Tracker hvis du følger disse retningslinjene:
 - (a) Film objektet fra en avstand på 2-3 m, slik at du får filmet det over en tilstrekkelig lang strekning, og unngår perspektivfeil som kan oppstå når objekter filmes fra kort avstand.
 - (b) Plasser et objekt med kjent lengde langs skråplanet (f.eks. en meterstav), godt synlig i bilderuta.
 - (c) Dersom du ønsker å bruke vinkelmåleren i Tracker til å måle skråplanetets helningsvinkel, lønner det seg å ha en horisontal referanselinje synlig.
 - (d) Bruk et objekt som gir god kontrast mot bakgrunnen.
 - (e) “Vanlig” video har 25 eller 29.97 (ca. 30) bilder i sekundet. Hvis kameraet ditt støtter flere bilder i sekundet (60/120 er vanlig), bruk dette.
2. Kopier videoopptaket inn på PCen, og åpne Tracker-programmet .

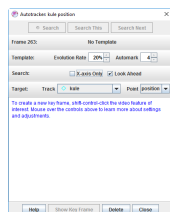
3. Hent inn videofilen ved å trykke knappen  eller hurtigtast **Ctrl + O**.
4. **Sjekk riktig “frame rate”**: Trykk på  og sjekk at programmet har valgt riktig antall bilder i sekundet (**Frame rate**) for din video. Avhengig av kamerainnstillingene du valgte for opptaket, kan 25/29.97/30/50/60/120 være riktige verdier.
5. **Marker start og slutt**: Videoen inneholder sannsynligvis “overflødig” materiale ved start og slutt. Dra avspillerkontrolleren  til ønsket startsted (der objektet slippes), høyreklikk og velg **Set start frame to slider**. Dra så til ønsket sluttsted (like før det treffer underlaget), høyreklikk og velg **Set end frame to slider**.
6. **Sett lengdeskala**: Programmet må få informasjon om skala/størrelsesforhold i opptaket. Trykk på knappen  og velg **New ► Calibration stick**. Tast **Shift+** klikk på den ene enden av tommestokken/linjalen som du har synlig i bildet, og **Shift +** klikk på den andre enden. Trykk på boksen for lengdeangivelse, og skriv inn den faktiske lengden på objektet, f.eks. .
7. **Definér koordinatsystem**: Trykk på  for å legge inn et koordinatsystem. Spol videoen til bildet som viser at objektet slippes, og dra origo til objektets massesenter i startposisjonen. Roter koordinataksene (“tilt”) ved å dra i krysset til høyre for origo, , og la positiv x -akse ligge nedover langs skråplanet (slik at akselerasjonsverdiene blir positive).
8. **Sette opp “tracking”**: Vi kan velge to former for “tracking”: manuell og automatisk. I det som følger gjennomgås begge metodene.
 - (a) **Manuell “tracking”**: Her følger vi selv objektet, og markerer objektets posisjon bilde for bilde.
 - i. Trykk på  **Create** og velg **Point Mass**.
 - ii. Det dukker opp et vindu . Høyreklikk på mass A, velg **Name...** og skriv inn et passende navn (f.eks. “kule”).

- iii. Spol filmen til det bildet der objektet begynner å rulle og **Shift** + klikk på objektet du ønsker å følge - dette blir da markert.
- iv. Filmen vil automatisk hoppe til neste enkeltbilde, hvor du gjentar prosessen: **Shift** + klikk på objektet.
- v. Gjenta til du har markert alle enkeltbildene som utgjør opptaket.
- vi. Legg merke til at det på høyre side i programvinduet kommer en graf, samt en tabell med sammenhørende verdier for $x(t)$ og $y(t)$ - se under.

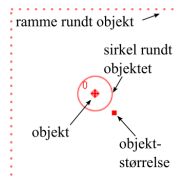



- (b) **Automatisk “tracking”**: Her bruker programmet bildegjenkjenning til å følge objektet når det beveger seg over bilde-ruta. Det hender imidlertid at vi må gjøre visse manuelle justeringer for at programmet skal klare å finne igjen objektet i hver bilderute.

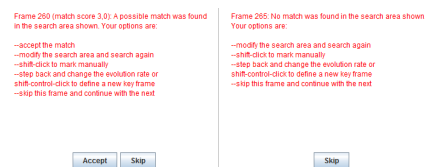
- i. Spol filmen til det bildet der objektet slippes.
- ii. I hovedmenyen velg **Track**, velg navnet på objektet i lista og velg **Autotracker...** Dette vil åpne et eget Autotracker-vindu - se under.




- iii. Trykk **Shift** + **Ctrl** og klikk på objektet som skal følges. Det vil da komme fram en ramme rundt objektet - se figuren under:



- iv. Ved behov kan du justere størrelsen av sirkelen rundt objektet ved å klikke og dra i håndtaket for objektstørrelse. Den rektangulære ramma definerer “søkeområdet” der Tracker forsøker å finne igjen objektet som du markerte i utgangspunktet. Rammestørrelsen kan justeres med håndtaket nederst i høyre hjørne.
- v. Ved å trykke på knappen  vil programmet forsøke å følge objektet gjennom alle enkeltbildene innenfor start- og slutt punktet for filmen, og lage en tabell med sammenhørende verdier for $x(t)$ og $y(t)$, samt en graf som beskriver bevegelsen.
- vi. Dersom Tracker har vanskeligheter med å finne igjen objektet (f.eks. ved dårlig fargekontrast mellom objekt og bakgrunn, eller fordi enkeltbildene er uskarpe), kan du få feilmeldinger som vist i figuren under:



- vii. (Venstre): Du kan akseptere Tracker sin “gjetning” med , eller markere manuelt hvor objektet befinner seg ved å trykke **Shift** og klikke på objektet. (Høyre): Hvis Tracker ikke finner objektet, kan du utvide rammen rundt objektet, eller manuelt angi objektets plassering med **Shift** + klikk på objektet. *Får du mange slike feilmeldinger, er det lettere å bruke manuell “tracking”.*

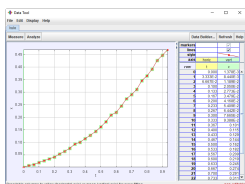
9. **Måle skråplanets helningsvinkel (hvis ønskelig)**: Dersom du ønsker å bruke Tracker til å måle helningsvinkelen (i stedet for å bruke en fysisk gradskive eller faktiske

lengdemålinger), velger du i hovedmenyen **Track, New ► Measuring Tools ► Protractor**. Dra vinkelspissen til ønsket posisjon, dra det ene vinkelbenet i horisontal retning og det andre langs skråplanet - den målte vinkelen vises da på skjermen. Se figuren under.



10. **Grafisk analyse av bevegelsen:** Nå som vi har $x(t)$, skal vi be programmet tilpasse en posisjonsgraf til bevegelsen langs skråplanet, og så kan vi ut fra denne finne akselerasjonen a_x langs skråplanet.

- (a) Som standard viser grafen $x(t)$, som er det vi ønsker i dette tilfellet. Dersom en annen størrelse vises på y -aksen (f.eks. $y(t)$), trykk på variabelnavnet på y -aksen (f.eks. $y(m)$) og velg x position x-component).
- (b) Høyreklikk på grafen og velg **Analyze...** Dette åpner vinduet som figuren under viser:



- (c) Trykk på knappen **Analyze** og velg **Curve fits** for å tilpasse en posisjonsgraf til datapunktene:

- i. Vi vet fra kinematikken at posisjonsgrafene blir (ideelt sett) en parabel. Vi velger derfor **Fit Name: Parabola**, og programmet tilpasser en parabel $x(t) = At^2 + Bt + C$ - se figuren under:

Fit Name: Parabola	Fit Builder
Fit Equation: $x = A*t^2 + B*t + C$	
<input checked="" type="checkbox"/> Autofit rms dev: 3.536E-3	
Parameter	Value
A	4.215E-1
B	1.151E-1
C	3.243E-3

- ii. Programmet vil tegne inn den tilpassede parabelen med fargen spesifisert over.
- iii. For et legeme som ruller uten å gli fra en utgangsposisjon x_0 med startfart v_{0x} , er posisjonen gitt ved $x(t) =$

$x_0 + v_{0x}t + \frac{1}{2}a_x t^2$ (med positiv x -akse langs skråplanet, slik vi har brukt i Tracker). Det er altså koeffisienten A foran t^2 -leddet for parabelen som gir oss a_x , slik at $\frac{1}{2}a_x = A \Rightarrow a_x = 2A$.

- iv. I eksemplet over får vi tallverdien $a_x = 2 \cdot 0,4215 \approx 0,84$ (enhetene bestemmes av hvilke enheter vi har lagt inn for lengdemålinger; vi valgte tidligere meter, slik at a_x har enhet m/s^2).

11. **Lagring og eksportering av filer:** Tracker kan lagre forskjellige filformater, som fyller ulike formål:

- (a) Hovedmeny **File, Save Tab as...**: dette lagrer en fil i formatet .trk, som er en ren XML-fil med informasjon om videoanalysen (datapunkter osv.).
- (b) Hovedmeny **File, Save Project as...**: dette lagrer en fil i format .trz, som er en komprimert (zippet) fil som inneholder .trk-filen samt videofila, samt noen hjelpefiler.

Usikkerhetsberegninger

Når vi måler den samme fysiske størrelsen flere ganger, vil vi typisk ikke måle eksakt samme verdi - det er en viss usikkerhet i målingene. Dersom vi har gjort N målinger x_1, x_2, \dots, x_N , er gjennomsnittet av målingene definert som

$$\bar{x} = \frac{x_1 + x_2 + \dots + x_N}{N} = \sum_{i=1}^N \frac{x_i}{N}.$$

Et mål på usikkerheten i målingene får vi fra standardavviket δx , som essensielt er gjennomsnittlig avvik fra snittmålingen²;

$$\delta x = \sqrt{\sum_{i=1}^N \frac{(x_i - \bar{x})^2}{N - 1}}.$$

Standardavviket δx er altså et mål på usikkerheten i hver *enkeltmåling*. Tenk deg nå at vi gjør

²Vi deler på $N - 1$ i stedet for N fordi man ønsker at δx skal være en såkalt *forventningsrett* estimator.

forsøksserien mange ganger - dvs. vi gjør f.eks. 10 målinger og beregner et gjennomsnitt; vi gjør nye 10 målinger og beregner et snitt osv. Vi vil da observere at gjennomsnittet varierer systematisk *mindre* enn enkeltmålingene - fra statistikken vet vi at standardavviket til gjennomsnittet \bar{x} er gitt ved

$$\delta\bar{x} = \frac{\delta x}{\sqrt{N}}.$$

Vi oppgir et måleresultat på formen

$$gjennomsnitt \pm standardfeil = \bar{x} \pm \delta\bar{x}.$$

Rapportkrav

En egen rapportmal er lagt ut som spesifiserer hvilke deler rapporten skal inneholde.