Ориентированные графы и дискретная вероятность

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Орграфы и дискретная вероятность

Ориентированные графы

Пути в ориентированных графах

Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

Что такое вероятность?

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Случайные величины

Математическое ожидание

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?

Ориентированные графы

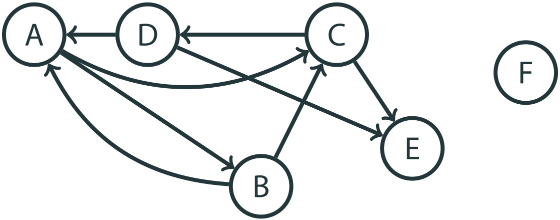
- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?
- Что если в нашей транспортной сети есть односторонние дороги?

Ориентированные графы

- Не все задачи можно естественно описать теми графами, которые мы обсуждали
- Если в социальной сети отношение «быть другом» взаимно, то описывается нашими графами
- А что если отношение не симметрично, например «быть подписанным»?
- Что если в нашей транспортной сети есть односторонние дороги?
- Есть много других случаев, в которых отношения между объектами не симметричны

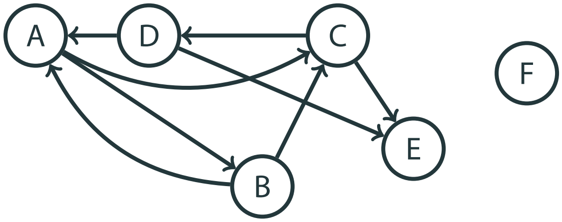
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами



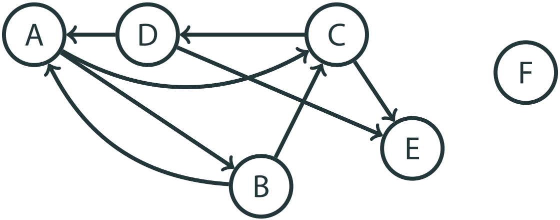
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами



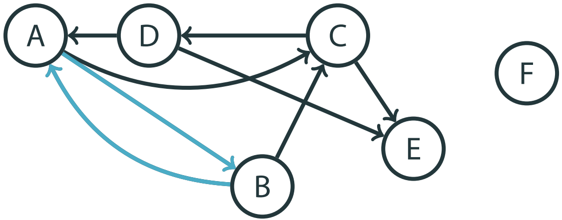
Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами
- При изображении ребра могут пересекаться



Ориентированные графы

- Объекты изображаем точками — вершинами
- Связанные отношением соединяем стрелками — ребрами
- При изображении ребра могут пересекаться
- Возможны ребра сразу в обе стороны



Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u

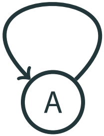
Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E

Ориентированные графы

- Ориентированный граф — множество вершин, соединенных ориентированными ребрами
- Множество вершин графа обычно обозначают буквой V
- Отдельные вершины часто обозначают буквами v и u
- Множество ребер графа обозначают буквой E
- Отдельные ребра часто обозначают буквой e

Что разрешается?

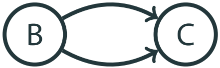


- Допускаются ли петли?

Что разрешается?

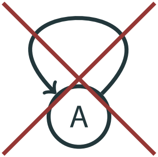
- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?

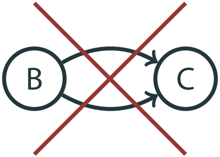
Что разрешается?



- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет

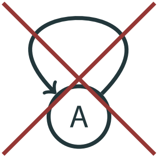
Что разрешается?

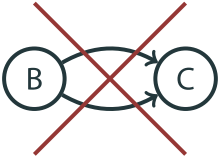




- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем

Что разрешается?

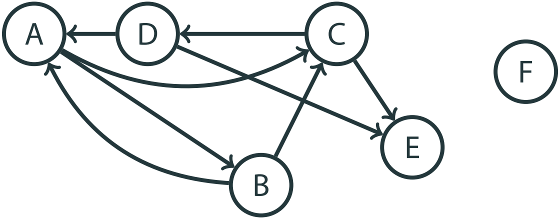




- Допускаются ли петли?
- Допускаются ли кратные ребра?
- Можно допускать, можно нет
- По умолчанию не допускаем
- Большинство результатов переносится и на эти случай

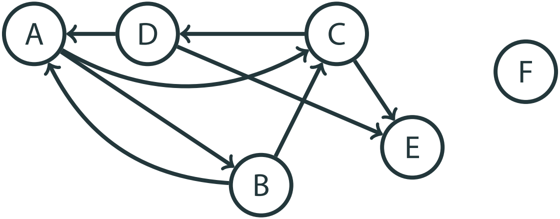
Степени вершин

- Пусть v вершина графа



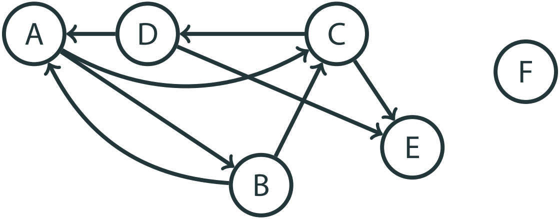
Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$



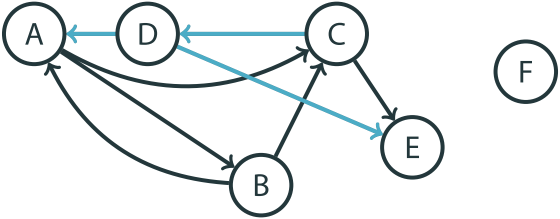
Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$
- Исходящей степенью v называется число ребер, исходящих из v; обозначение: $d\_(v)$



Степени вершин

- Пусть v вершина графа
- Входящей степенью v называется число ребер, входящих в v; обозначение: $d_+(v)$
- Исходящей степенью v называется число ребер, исходящих из v; обозначение: $d_-(v)$
- Например, $d_+(D) = 1, d_-(D) = 2$



Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма всех исходящих степеней вершин в графе равна сумме всех входящих степеней вершин и равна числу ребер

Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d_+(v) = \sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$$

Степени вершин и число ребер

Лемма

Сумма всех исходящих степеней вершин в графе равна сумме всех входящих степеней вершин и равна числу ребер

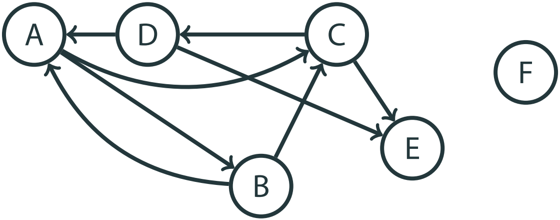
Или в виде формулы

$$\sum_{v \in V} d_+(v) = \sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$$

Доказательство почти такое же, как для неориентированных графов

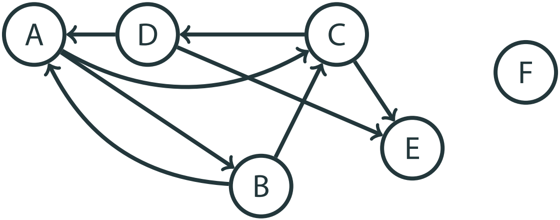
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер



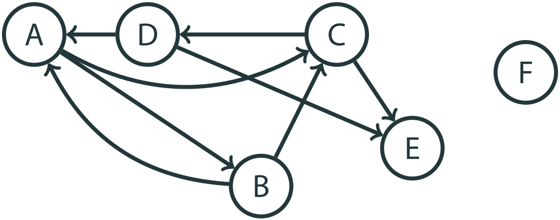
Степени вершин и число ребер

- Давайте посчитаем двумя способами число концов ребер
- С одной стороны, концов ребер столько же, сколько ребер



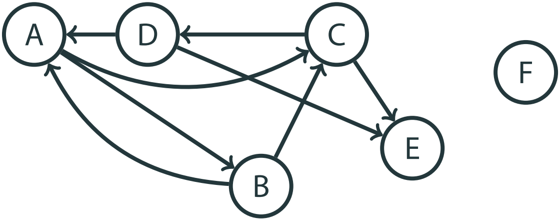
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину



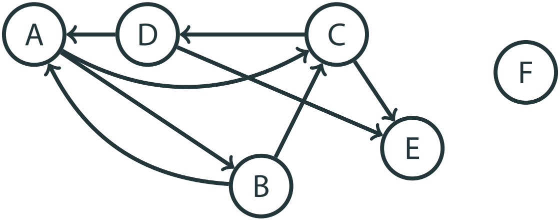
Степени вершин и число ребер

- С другой стороны, каждый конец ребра входит в какую-то вершину
- В вершину v входит $d_+(v)$ концов, так что всего концов $\sum_{v \in V} d_+(v)$



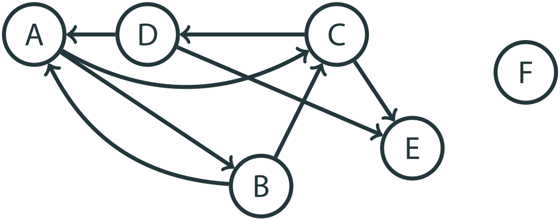
Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$



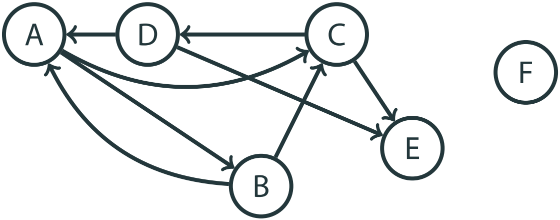
Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$
- Аналогично можно посчитать двумя способами число начал ребер



Степени вершин и число ребер

- Получаем $\sum_{v \in V} d_+(v) = |E|$
- Аналогично можно посчитать двумя способами число начал ребер
- Получаем $\sum_{v \in V} d_-(v) = |E|$



Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k

Ориентированные пути

- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \dots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k
- Вершины могут повторяться

Ориентированные пути

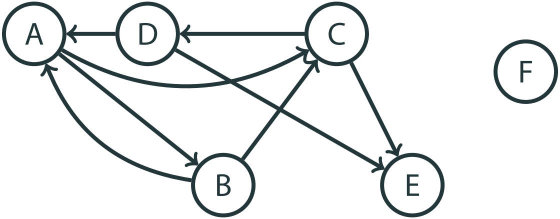
- Ориентированный путь это последовательность вершин в графе:

$$v_0, v_1, \ldots, v_k$$

- Из каждой вершины есть ребро в следующую
- Длина пути — число шагов в нем, у нас k
- Вершины могут повторяться
- Если вершины не повторяются, то это простой путь

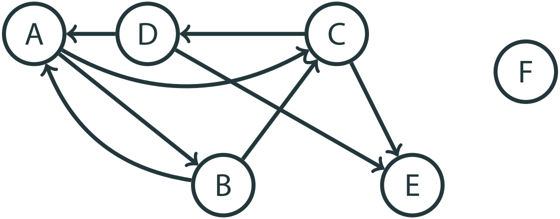
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь



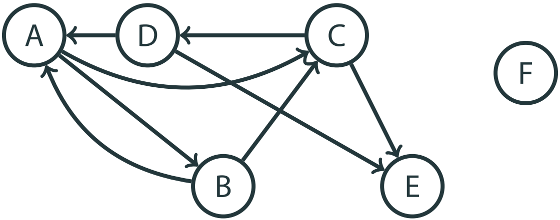
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь
- A, B, C, D, E — простой ориентированный путь



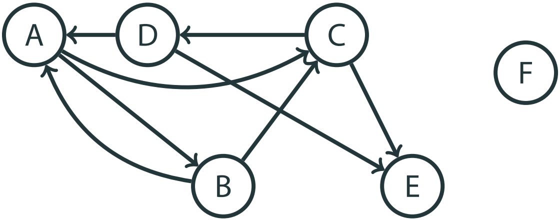
Ориентированные пути

- Например, A, B, C, D, A, C — это ориентированный путь, но не простой путь
- A, B, C, D, E — простой ориентированный путь
- A, C, E, D, A — не является ориентированным путем: нет ребра (E, D)



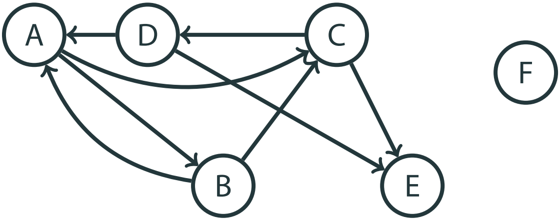
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \ldots, v_k = v_0$



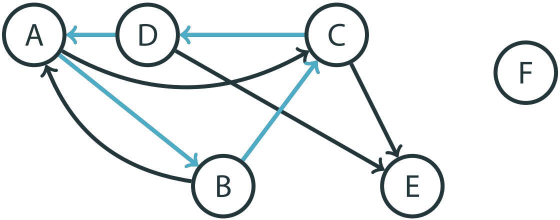
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)



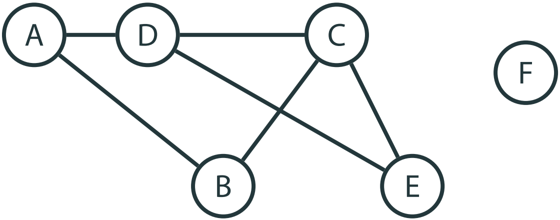
Ориентированные циклы

- Если начальная вершина ориентированного пути совпадает с конечной, то это ориентированный цикл: $v_0, v_1, \dots, v_k = v_0$
- Длина цикла — число шагов в нем (у нас k)
- Например: A, B, C, D, A — ориентированный цикл



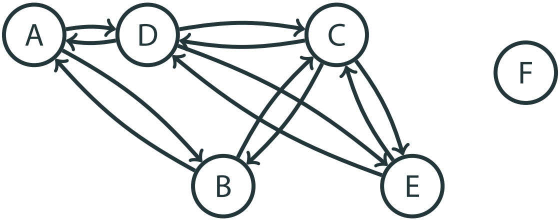
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные



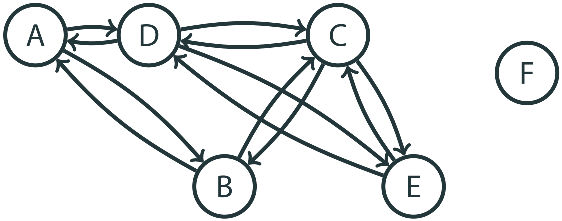
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные
- Просто раздваиваем ребра



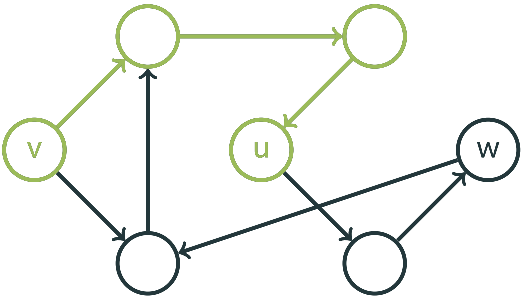
Ориентация ребер

- С точки зрения путей в графах, неориентированные графы можно задать как ориентированные
- Просто раздваиваем ребра
- Все пути изначального графа остаются путями в ориентированном



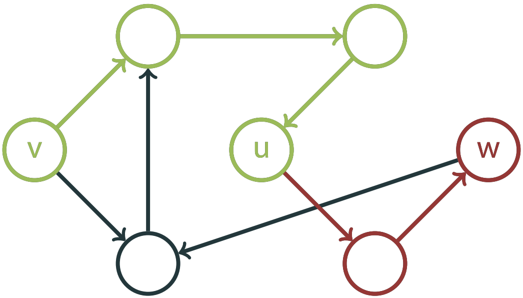
Достижимость

- Вершина u **достижима** из вершины v, если есть ориентированный путь из v в u



Достижимость

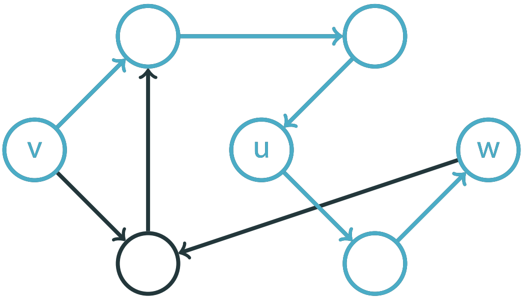
- Вершина u достижима из вершины v, если есть ориентированный путь из v в u
- Это транзитивно: если u достижима из v, а w достижима из u, то w достижима из u



Достижимость

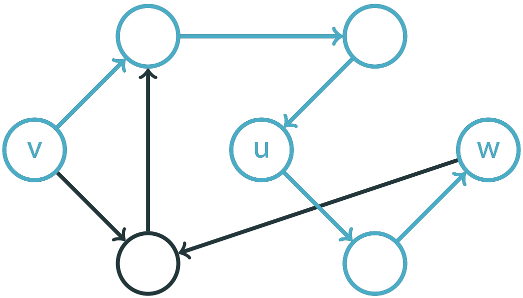
- Вершина u достижима из вершины v, если есть ориентированный путь из v в u

- Это транзитивно: если u достижима из v, а w достижима из u, то w достижима из u



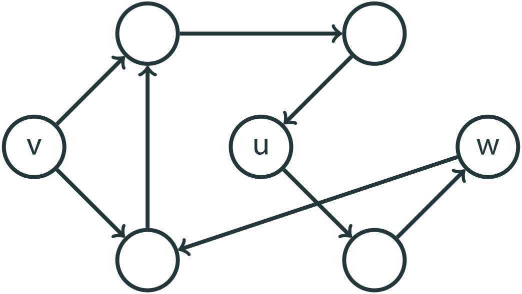
Достижимость

- Это несимметрично: w достижима из v, а v не достижима из w



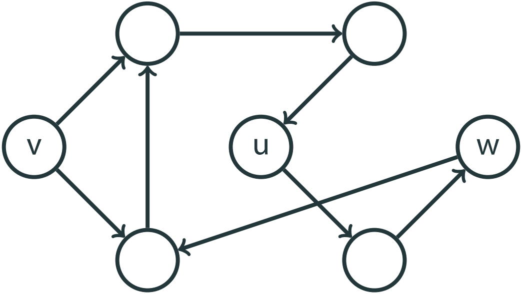
Достижимость

- Это несимметрично: w достижима из v, а v не достижима из w
- Действительно, нет ребер, входящих в v



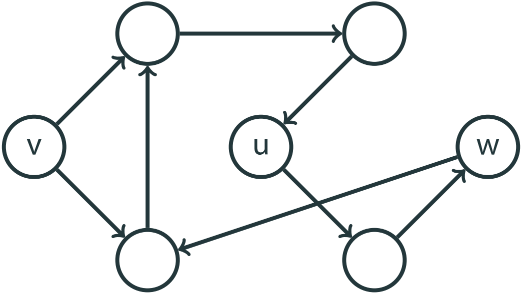
Достижимость

- Это отношение можно симметризовать!



Достижимость

- Это отношение можно симметризовать!
- Обсудим это чуть позже

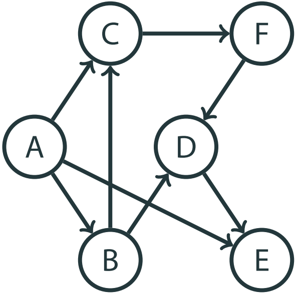


Орграфы и дискретная вероятность

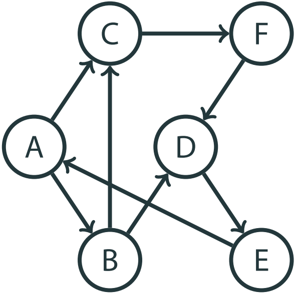
- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Ориентированные ациклические графы

Граф называется ориентированным ациклическим, если в нем нет ориентированных циклов



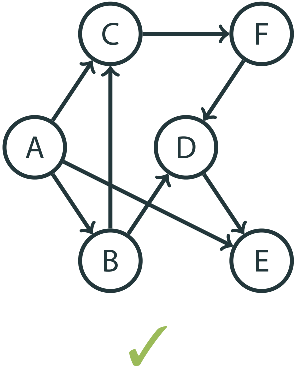
✓

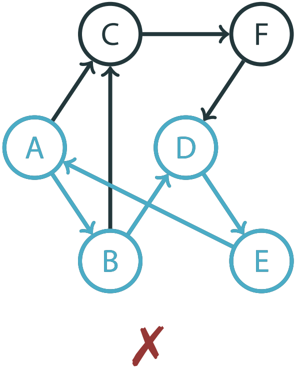


✗

Ориентированные ациклические графы

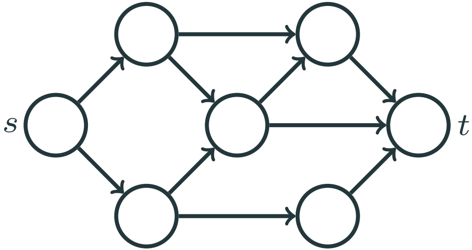
Граф называется ориентированным ациклическим, если в нем нет ориентированных циклов





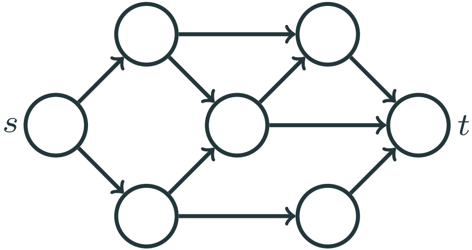
Примеры

- Граф зависимостей курсов в университете



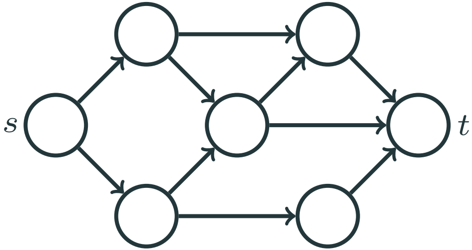
Примеры

- Граф зависимостей курсов в университете
- Граф зависимостей работ



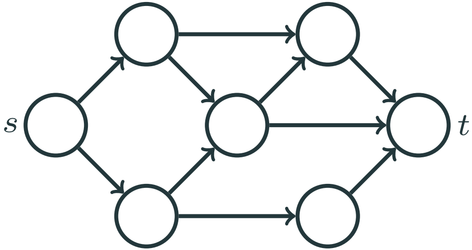
Граф зависимостей

- Пусть у нас есть n дел, между которыми есть зависимости: для некоторых дел A и B известно, что A нужно выполнить до B



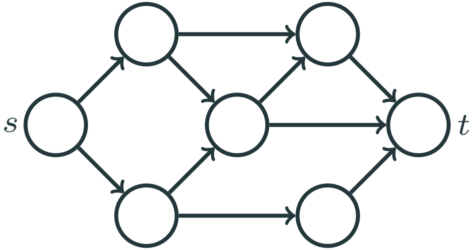
Граф зависимостей

- Пусть у нас есть n дел, между которыми есть зависимости: для некоторых дел A и B известно, что A нужно выполнить до B
- Мы хотим выполнять работы одну за другой



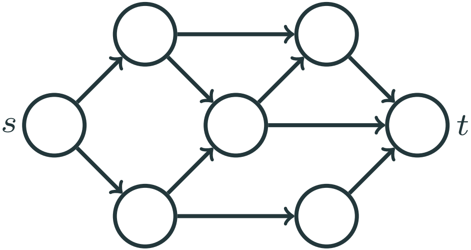
Граф зависимостей

- Пусть у нас есть n дел, между которыми есть зависимости: для некоторых дел A и B известно, что A нужно выполнить до B
- Мы хотим выполнять работы одну за другой
- Построим граф: вершины — работы, ориентированные ребра — зависимости



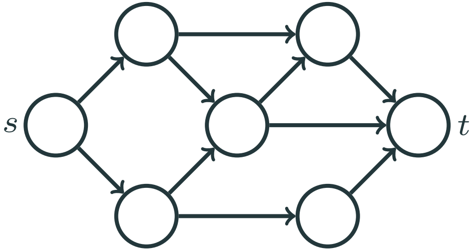
Граф зависимостей

- Хотим перенумеровать вершины так, чтобы ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером



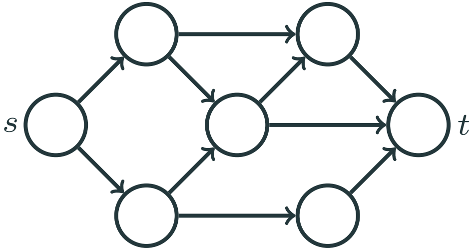
Граф зависимостей

- Хотим перенумеровать вершины так, чтобы ребра вели из вершин с меньшим номером в вершины с большим номером
- Когда это возможно?



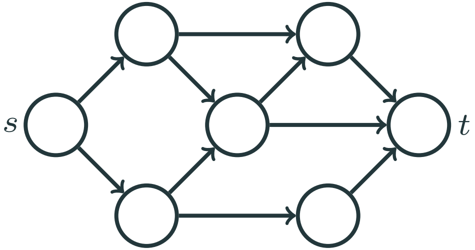
Граф зависимостей

- Очевидно, невозможно, если в графе есть ориентированный цикл



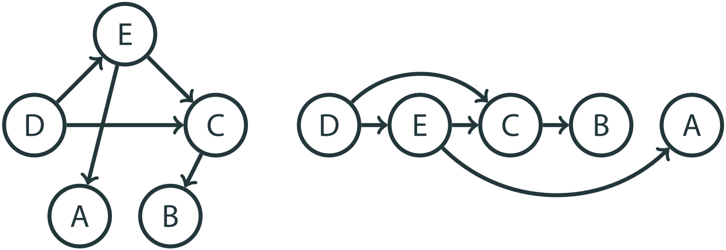
Граф зависимостей

- Очевидно, невозможно, если в графе есть ориентированный цикл
- Оказывается, это единственное препятствие



Топологическая сортировка

- Топологическая сортировка — сортировка вершин графа так, что все ребра ведут из вершин с меньшим номером, в вершины с большим



Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер

Сортировка ациклических графов

Теорема

Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер
- Дальше берем сток и объявляем его последней вершиной

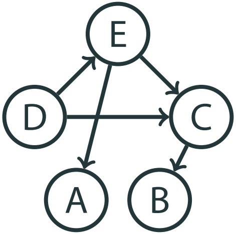
Сортировка ациклических графов

Теорема

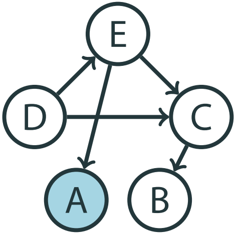
Всякий ориентированный ациклический граф можно топологически отсортировать

- Мы докажем, что в каждом ациклическом графе есть сток — вершина, из которой не выходит ребер
- Дальше берем сток и объявляем его последней вершиной
- Удаляем сток и повторяем

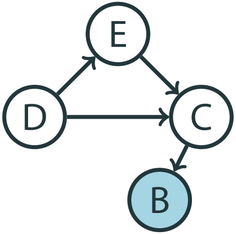
Пример



Пример



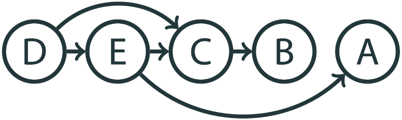
Пример



Пример

Пример

Пример



Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро

Почему есть сток?

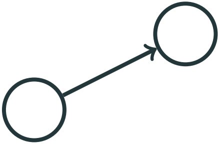
- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:

Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:

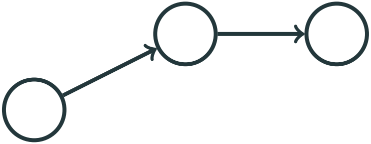
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



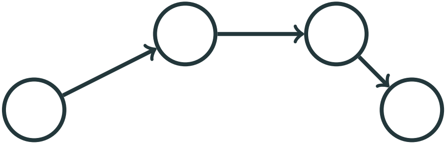
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



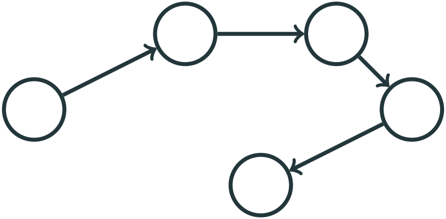
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



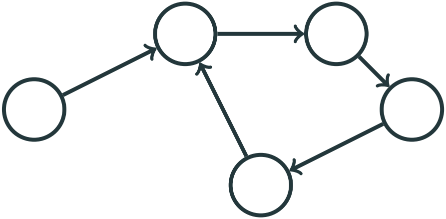
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



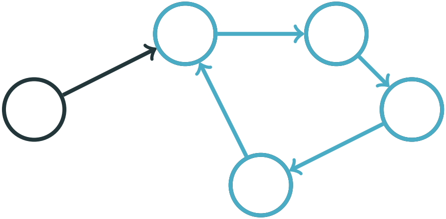
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



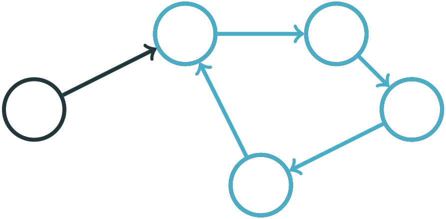
Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



Почему есть сток?

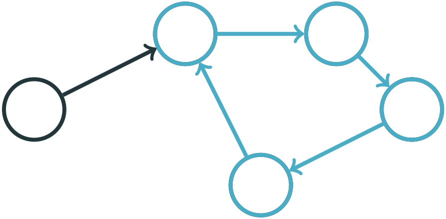
- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



- Противоречие!

Почему есть сток?

- Пусть стока нет: из каждой вершины выходит хотя бы одно ребро
- Начнем ходить по вершинам графа:



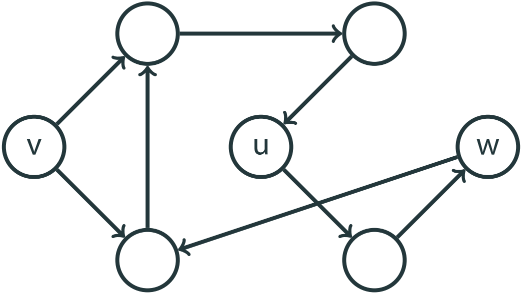
- Противоречие!
- Итак, вершины ациклического графа можно топологически упорядочить

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

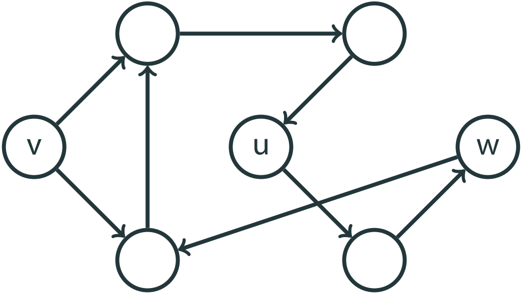
Достижимость

- Отношение достижимости несимметрично



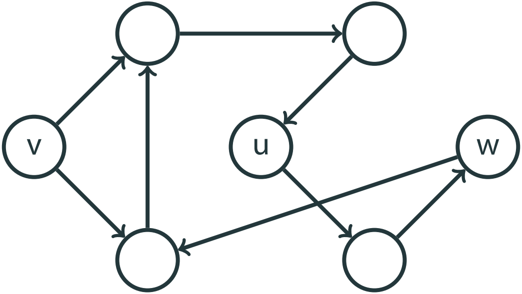
Достижимость

- Отношение достижимости несимметрично
- Но его можно симметризовать



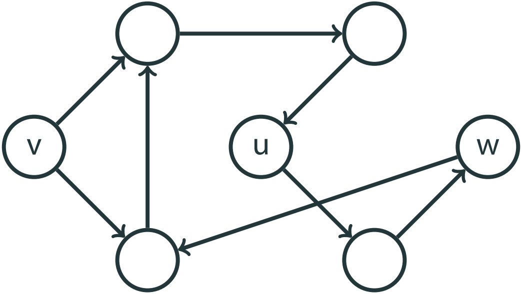
Достижимость

- Назовем вершину a сильно связанной с вершиной b, если из каждой из вершин есть путь в другую



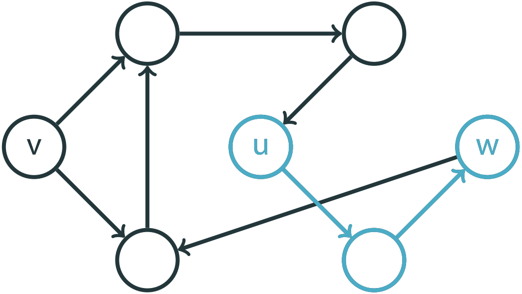
Достижимость

- Например, вершины u и w сильно связаны



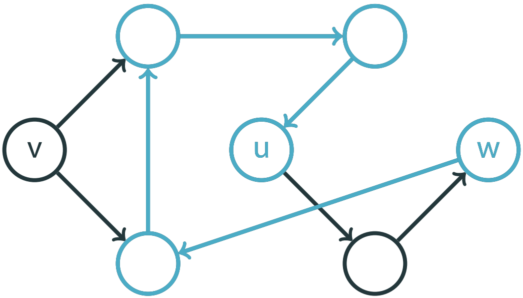
Достижимость

- Например, вершины u и w сильно связаны
- Есть путь из u в w



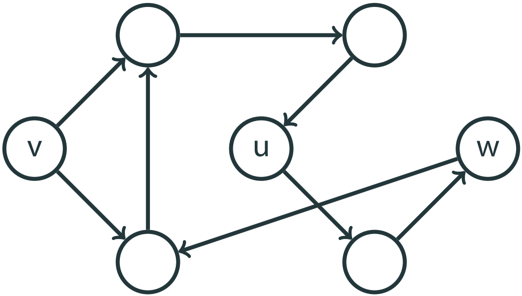
Достижимость

- Например, вершины u и w сильно связаны
- Есть путь из u в w
- Есть путь из w в u



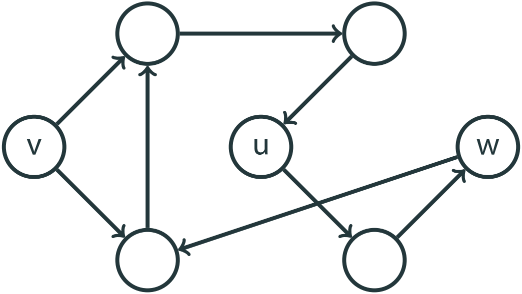
Достижимость

- А вершины v и u не сильно связаны



Достижимость

- А вершины v и u не сильно связаны
- Нет пути из u в v



Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости

Сильная связность

- Граф называется сильно связным, если из любой его вершины есть ориентированный путь в любую другую
- Сильная связность бывает очень важна
- Для транспортной задачи говорит о ее разрешимости
- А что делать если граф не сильно связный?

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте

Компоненты связности

Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

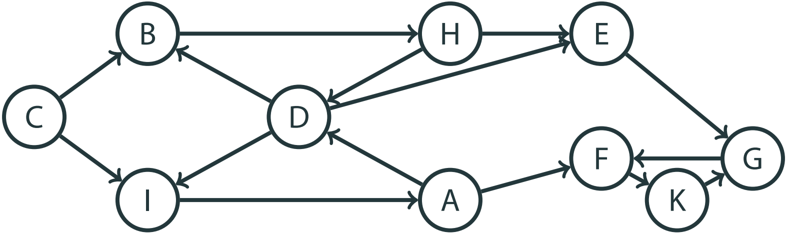
- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте сильно связаны

Компоненты связности

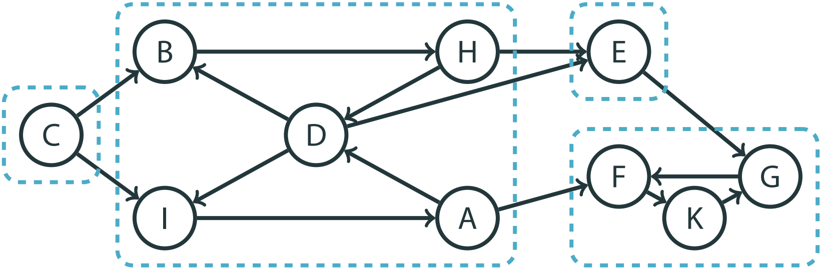
Если граф не сильно связен, все его вершины распадаются на компоненты сильной связности:

- Каждая вершина лежит ровно в одной компоненте
- Любые вершины в одной компоненте сильно связаны
- Вершины из разных компонент не сильно связаны

Пример

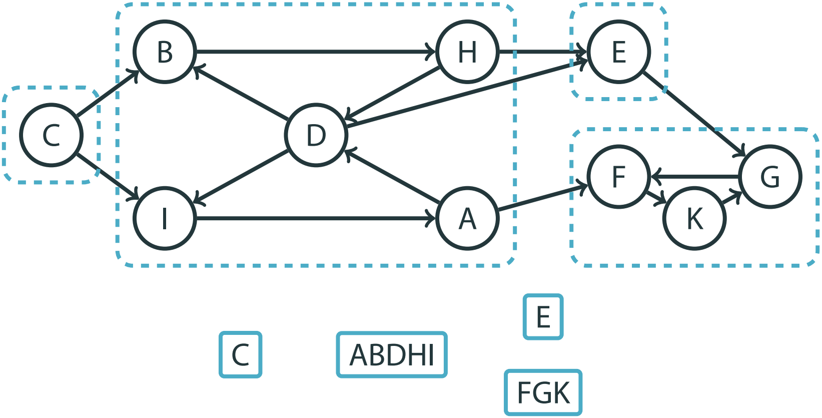


Пример



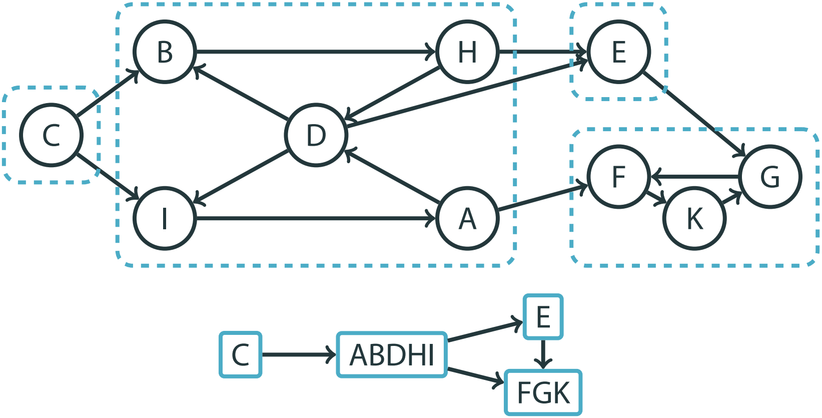
- Четыре компоненты связности

Пример



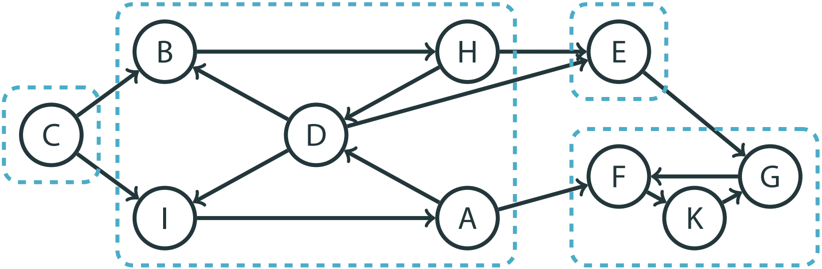
- Рассмотрим каждую компоненту как отдельную вершину

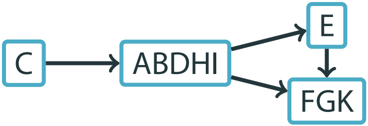
Пример



- Проведем ребра между компонентами, если есть хоть одно ребро между вершинами компонент

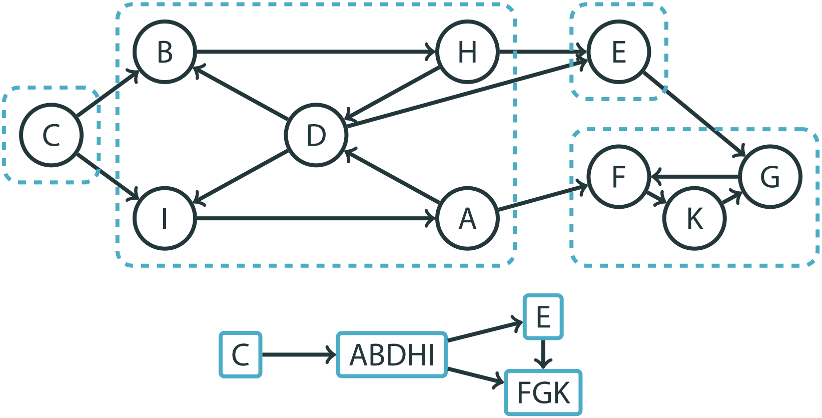
Пример





- Этот граф называется метаграфом

Пример



- Этот граф называется метаграфом
- Он ациклический!

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?
- Теоретически мы можем все рассчитать и узнать, как она упадет

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- Что происходит, когда мы подбрасываем монетку?
- Теоретически мы можем все рассчитать и узнать, как она упадет
- На практике это очень тяжело

wikimedia.org

Что такое вероятность?

- В такой ситуации мы говорим, что каждый исход происходит с той или иной вероятностью

wikimedia.org

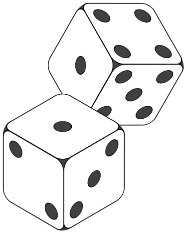
Что такое вероятность?

- В такой ситуации мы говорим, что каждый исход происходит с той или иной вероятностью
- Это удобная модель в тех случаях, когда мы не можем просчитать все полностью

wikimedia.org

Основная модель

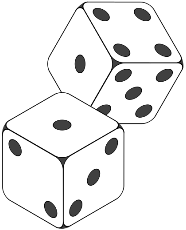
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов



wikimedia.org

Основная модель

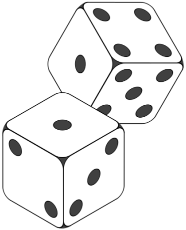
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью



wikimedia.org

Основная модель

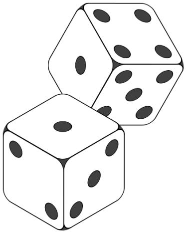
- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью
- Пример: подбрасывание монетки



wikimedia.org

Основная модель

- Мы будем рассматривать случайные события с конечным множеством возможных исходов
- Это называется дискретной моделью
- Пример: подбрасывание монетки
- Пример: бросание кубика



wikimedia.org

Подбрасывание монетки

- Два возможных исхода, орел и решка

Подбрасывание монетки

- Два возможных исхода, орел и решка
- Каждый происходит с вероятностью $1/2$

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6
- Шесть возможных исходов: выпадает 1, 2, 3, 4, 5 или 6

Бросание кубика

- У кубика 6 граней, на них написаны число от 1 до 6
- Шесть возможных исходов: выпадает 1, 2, 3, 4, 5 или 6
- Каждый происходит с вероятностью $1/6$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \dots, u_n$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \ldots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \ldots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \dots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \dots, n\}$

Общая модель

- Конечное множество исходов: $u_1, \ldots, u_n$
- Равновероятная модель: все исходы равноправны
- Вероятность каждого исхода равна $1/n$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$
- Вероятность равна k/n, где $|S| = k$

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов
- Половина из них годится: 2, 4, 6

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет четное число?

- Всего шесть исходов
- Половина из них годится: 2, 4, 6
- Вероятность $1/2$

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов
- Треть из них годится: 3 и 6

События

Задача

Пусть мы бросаем кубик. Какова вероятность того, что выпадет число, делящееся на 3?

- Всего шесть исходов
- Треть из них годится: 3 и 6
- Вероятность $1/3$

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно
- Что если мы подбрасываем несбалансированную или погнутую монету?

Сложность

- Мы предполагали, что исходы равновероятны
- Но равновероятной модели не всегда достаточно
- Что если мы подбрасываем несбалансированную или погнутую монету?
- Как обсуждать вероятности, когда исходы, это выигрыш или не выигрыш в лотерею?

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$
- $\mathrm{Pr}[1] = p$, $\mathrm{Pr}[0] = 1 - p$

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$=0$, «орел»$=1$
- $\Pr[1]=p$, $\Pr[0]=1-p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1
- Случай $p=1/2$ отвечает равновероятному случаю

Несбалансированная монета

- Пусть наша монета не идеальна, и орел и решка неравноправны
- Как моделировать такую ситуацию?
- Исходы: «решка»$= 0$, «орел»$= 1$
- $\Pr[1] = p$, $\Pr[0] = 1 - p$
- Здесь p может быть любым числом от 0 до 1
- Случай $p = 1/2$ отвечает равновероятному случаю
- Если $p > 1/2$, выпадение орла более вероятно

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \ldots, u_n$

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \ldots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \dots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \le p_i \le 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \ldots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \leq p_i \leq 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \ldots, n\}$

Неравновероятная модель

- Исходы: $u_1, \dots, u_n$
- Каждому исходу u_i приписана его вероятность p_i
- При этом $0 \le p_i \le 1$ и $\sum_{i=1}^{n} p_i = 1$
- Пусть нас интересует, произошел ли один из исходов u_i для $i \in S$, где $S \subseteq \{1, \dots, n\}$
- Вероятность равна $\sum_{u_i \in S} p_i$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$
- $S = \{a, b\}$

Пример

Лотерея

Пусть вероятность выиграть в лотерее 1000 рублей равна 0.01, а вероятность выиграть 100 рублей равна 0.1. Какова вероятность выиграть хоть что-то?

- Обозначим через a, b, c исходы «выиграть 1000 р.», «выиграть 100 р.», «не выиграть ничего», соответственно
- $\Omega = \{a, b, c\}$, $\Pr[a] = 0.01$, $\Pr[b] = 0.1$
- $\Pr[c] = 1 - \Pr[a] - \Pr[b] = 0.89$
- $S = \{a, b\}$
- $\Pr[S] = 0.01 + 0.1 = 0.11$

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Сложные распределения

Задача

Случайная перестановка чисел 1, 2 и 3 выбирается следующим образом.

- Сначала выбирается случайно и равновероятно число на первую позицию
- Затем из двух оставшихся чисел случайно и равновероятно выбирается одно и ставится на вторую позицию
- Оставшееся число ставится на третью позицию

Какова вероятность, что на второй позиции стоит число 2?

Сложные распределения

- Прежде чем решать задачу, нам нужно разобраться, какое у нас задано вероятностное распределение

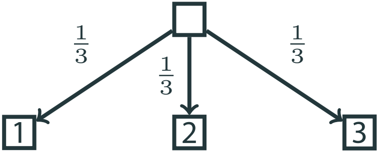
Сложные распределения

- Прежде чем решать задачу, нам нужно разобраться, какое у нас задано вероятностное распределение
- Распределение описано в виде процесса, с таким мы раньше не сталкивались

Распределение в виде дерева

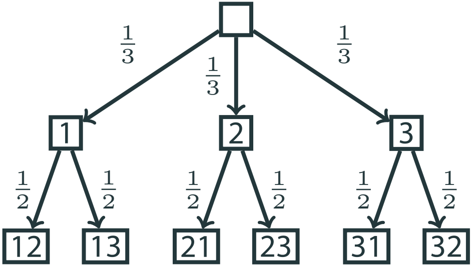
- Начинаем сверху

Распределение в виде дерева



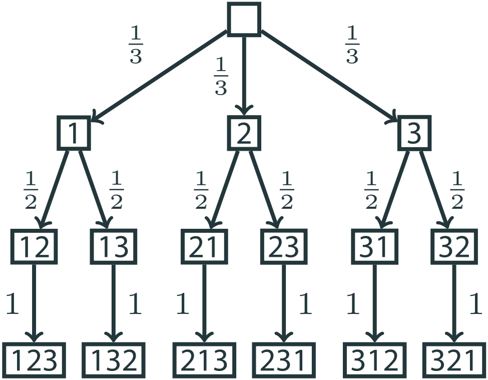
- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1

Распределение в виде дерева



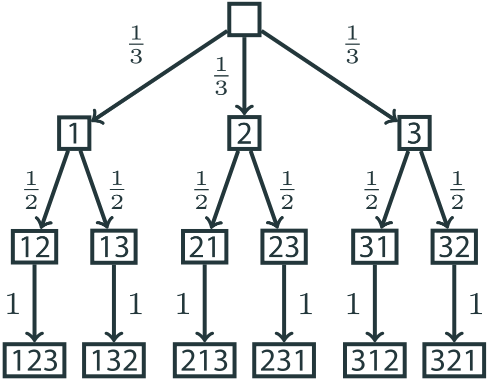
- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

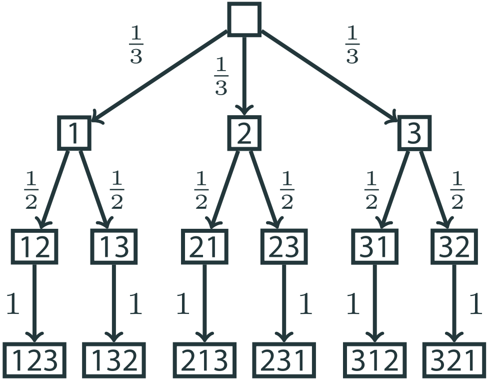
Распределение в виде дерева



- Исходы — вершины внизу

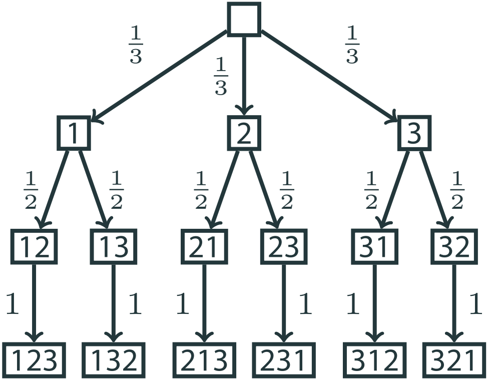
- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3
- Исходы — вершины внизу
- Как посчитать вероятность каждого исхода?

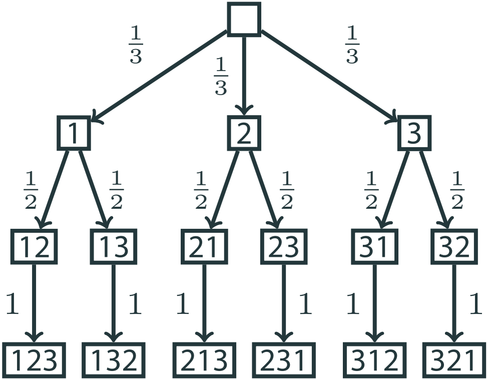
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Исходы — вершины внизу
- Как посчитать вероятность каждого исхода?
- Перемножить вероятности на стрелках

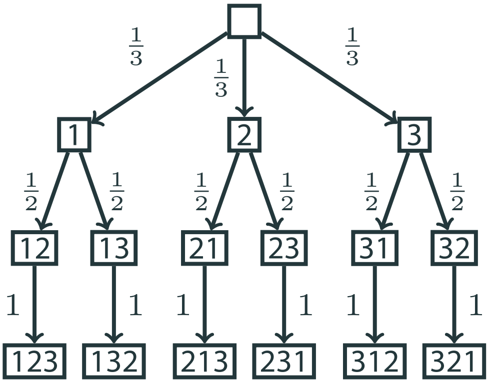
Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Вероятность каждого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$

Распределение в виде дерева



- Начинаем сверху
- Дальше три стрелки для шага 1
- Дальше по две стрелки для шага 2
- Дальше по одной стрелке для шага 3

- Вероятность каждого исхода $\frac{1}{3} \cdot \frac{1}{2} \cdot 1 = \frac{1}{6}$
- Такая диаграмма называется деревом событий

Сложные распределения

Задача

Случайная перестановка чисел 1, 2 и 3 выбирается следующим образом.

- Сначала выбирается случайно и равновероятно число на первую позицию
- Затем из двух оставшихся чисел случайно и равновероятно выбирается одно и ставится на вторую позицию
- Оставшееся число ставится на третью позицию

Какова вероятность, что на второй позиции стоит число 2?

Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$

Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$
- Интересующих нас исходов два: $123, 321$

Сложные распределения

- Вероятность каждого исхода равна $1/6$
- Интересующих нас исходов два: $123, 321$
- Вероятность $\frac{2}{6} = \frac{1}{3}$

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных
- Такой процесс называется случайным блужданием

Случайные блуждания

- Как подобные распределения могут возникать на практике?
- Выбираем объект в данных
- Переходим к случайному «соседнему» объекту
- Снова переходим к случайному «соседнему» объекту
- И так несколько раз
- Получаем случайное распределение на объектах в наших данных
- Такой процесс называется случайным блужданием
- Обсудим немного позже

Орграфы и дискретная вероятность

- Ориентированные графы
- Пути в ориентированных графах
- Ориентированные ациклические графы
- Сильная связность
- Что такое вероятность?
- Неравновероятная модель
- Многошаговое задание распределений
- Случайные величины
- Математическое ожидание

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом да или нет

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом да или нет
- Но важно уметь работать с численными характеристиками вероятностных исходов

Случайные величины

- Мы обсудили вероятностные распределения
- Мы обсудили события (подмножества исходов) и их вероятности
- События соответствуют вопросам с ответом да или нет
- Но важно уметь работать с численными характеристиками вероятностных исходов
- Для этого мы введем случайные величины

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \ldots, u_n$

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \ldots, u_n$
- Исходы имеют вероятности $p_1, \ldots, p_n$

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \ldots, u_n$
- Исходы имеют вероятности $p_1, \ldots, p_n$
- Чтобы определить f мы задаем число a_i для каждого исхода u_i

Случайные величины

- Случайная величина f — это переменная, значение которой определяется вероятностным экспериментом
- У нас есть вероятностное распределение на исходах $u_1, \ldots, u_n$
- Исходы имеют вероятности $p_1, \ldots, p_n$
- Чтобы определить f мы задаем число a_i для каждого исхода u_i
- Тогда f принимает значение a_i с вероятностью p_i

Случайные величины

- Выглядит знакомо

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!
- Исходам при бросании кубика присвоены числа

wikimedia.org

Случайные величины

- Выглядит знакомо
- Мы так уже делали!
- Исходам при бросании кубика присвоены числа
- И мы оперировали с ними как с числами

wikimedia.org

Случайные величины

Другие примеры:

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек на курсе

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек на курсе
- Оценка случайного человека по курсу

Случайные величины

Другие примеры:

- Подбрасывание монетки: решка=0, орел=1
- Возраст случайного человек на курсе
- Оценка случайного человека по курсу
- Сумма исходов двух бросаний кубика

Орграфы и дискретная вероятность

Ориентированные графы

Пути в ориентированных графах

Ориентированные ациклические графы

Сильная связность

Что такое вероятность?

Неравновероятная модель

Многошаговое задание распределений

Случайные величины

Математическое ожидание

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4
- Значения f равны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно

Математическое ожидание

- Рассмотрим случайную величину в общем виде
- Пусть случайная величина f задана на распределении с 4 исходами
- Вероятности исходов равны p_1, p_2, p_3, p_4
- Значения f равны a_1, a_2, a_3, a_4 соответственно
- Повторим эксперимент много раз

Математическое ожидание

p_1 p_2 p_3 p_4

Математическое ожидание

Математическое ожидание

Математическое ожидание

Математическое ожидание

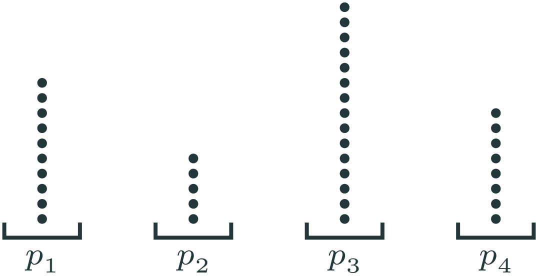
Математическое ожидание

Математическое ожидание

Математическое ожидание

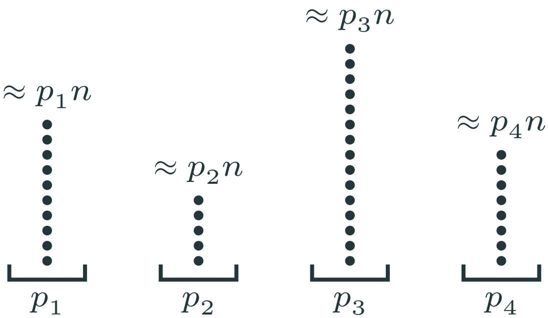
Математическое ожидание

Математическое ожидание



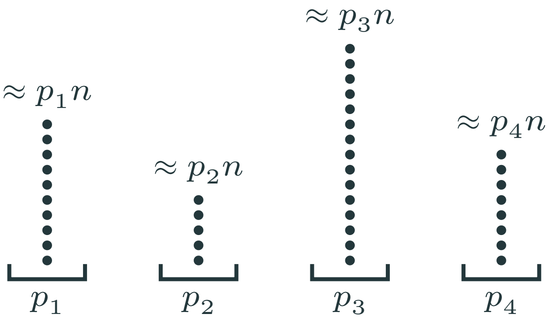
- Повторяем n раз для большого числа n

Математическое ожидание



- Повторяем n раз для большого числа n

Математическое ожидание



- Повторяем n раз для большого числа n
- Чему равно среднее значение f в этих экспериментах?

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили

$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$

$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$

- Эта величина обозначается через $\mathrm{E}f$ и называется математическим ожиданием f или матожиданием f

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили
$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$
$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$
- Эта величина обозначается через $\mathrm{E} f$ и называется математическим ожиданием f или матожиданием f
- Она не зависит от n

Математическое ожидание

- Мы провели n экспериментов, значение a_i встретилось примерно $p_i n$ раз
- В среднем мы получили
$$\approx \frac{a_1 p_1 n + a_2 p_2 n + a_3 p_3 n + a_4 p_4 n}{n}$$
$$= a_1 p_1 + a_2 p_2 + a_3 p_3 + a_4 p_4$$
- Эта величина обозначается через $\mathrm{E} f$ и называется математическим ожиданием f или матожиданием f
- Она не зависит от n
- Она равна тому, что мы ожидаем получить в среднем при многократном повторении эксперимента

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \dots, a_k$ с вероятностями $p_1, \dots, p_k$

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k
- Математическое ожидание — это число!

Математическое ожидание

- В общем случае значения f равны $a_1, \ldots, a_k$ с вероятностями $p_1, \ldots, p_k$
- Все рассуждения аналогичны
- Для вычисления математического ожидания надо перемножить $a_i \times p_i$ по всем i
- И сложить результаты по i от 1 до k
- Математическое ожидание — это число!
- Это важная характеристика случайной величины

Примеры

- Средний доход на душу населения

Примеры

- Средний доход на душу населения
- Средняя продолжительность жизни

Примеры

- Средний доход на душу населения
- Средняя продолжительность жизни
- Средняя оценка на курсе

Примеры

- Средний доход на душу населения
- Средняя продолжительность жизни
- Средняя оценка на курсе
- Соответствующие случайные величины: берем случайного человека, смотрим на его доход/продолжительность жизни/оценку

Temporary page!

LaTeX was unable to guess the total number of pag
correctly. As there was some unprocessed data th
should have been added to the final page this ext
page has been added to receive it.

If you rerun the document (without altering it) th
surplus page will go away, because LaTeX now know