Двудольные графы

Владимир Подольский

Факультет компьютерных наук, Высшая Школа Экономики

Двудольные графы

Двудольные графы

Примеры двудольных графов

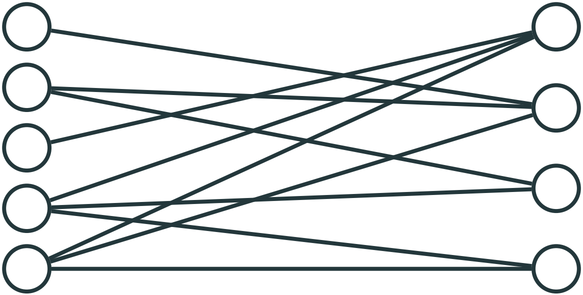
Паросочетания

Теорема Холла

Стабильное паросочетание

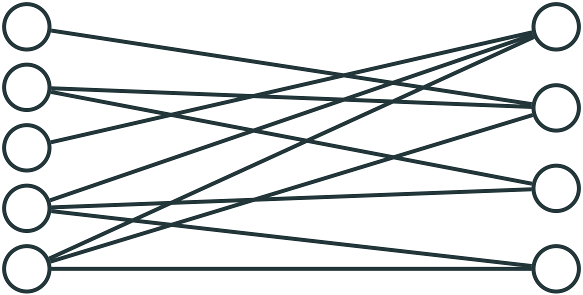
Двудольные графы

- В некоторых графах вершины естественным образом разбиваются на две части



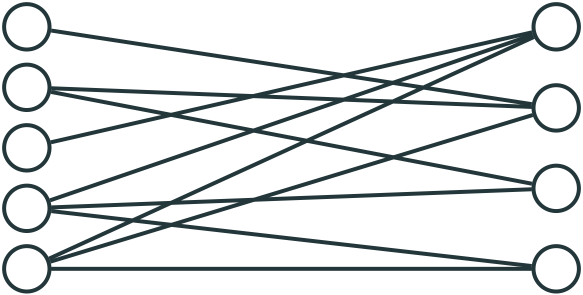
Двудольные графы

- В некоторых графах вершины естественным образом разбиваются на две части
- И все ребра соединяют вершины одной части с вершинами другой части



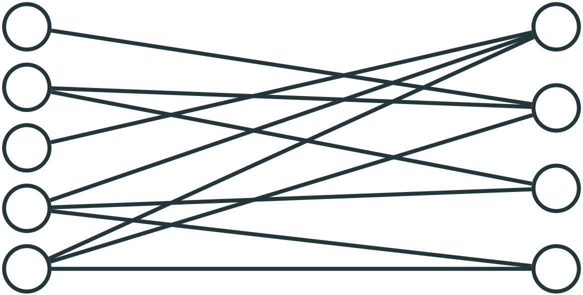
Двудольные графы

- Например: вершины — пользователи и видеоролики, ребра — просмотрел ли пользователь видеоролик



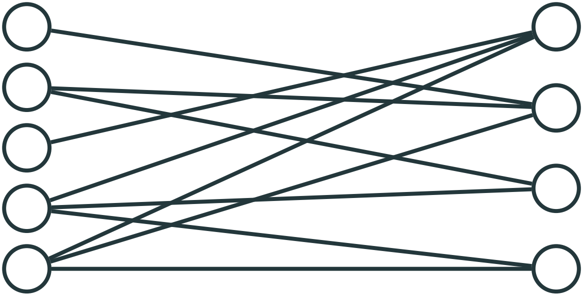
Двудольные графы

- Например: вершины — пользователи и видеоролики, ребра — просмотрел ли пользователь видеоролик
- Или вершины — абитуриенты и университеты, ребра — поступил ли абитуриент в университет



Двудольные графы

- Например: вершины — пользователи и видеоролики, ребра — просмотрел ли пользователь видеоролик
- Или вершины — абитуриенты и университеты, ребра — поступил ли абитуриент в университет
- Такие графы называются двудольными



Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если

Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если
- его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества L и R так, что

Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если
- его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества L и R так, что
- у каждого ребра один конец лежит в L, а второй в R

Двудольные графы

- Более формально, граф двудольный, если
- его вершины можно разбить на два непересекающихся подмножества L и R так, что
- у каждого ребра один конец лежит в L, а второй в R
- Множества L и R называются долями

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть L и R — доли

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть L и R — доли
- Каждое ребро ведет из L в R или наоборот

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть L и R — доли
- Каждое ребро ведет из L в R или наоборот
- Чтобы вернуться в начальную вершину придется сделать четное число шагов

Двудольные графы

Лемма

В двудольном графе нет циклов нечетной длины

- Пусть L и R — доли
- Каждое ребро ведет из L в R или наоборот
- Чтобы вернуться в начальную вершину придется сделать четное число шагов
- Оказывается верно и обратное!

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины
- Осталось убедиться, что всякий граф без циклов нечетной длины является двудольным

Двудольные графы

Теорема

Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины
- Осталось убедиться, что всякий граф без циклов нечетной длины является двудольным
- Идея: возьмем произвольную вершину v и покрасим ее в красный цвет

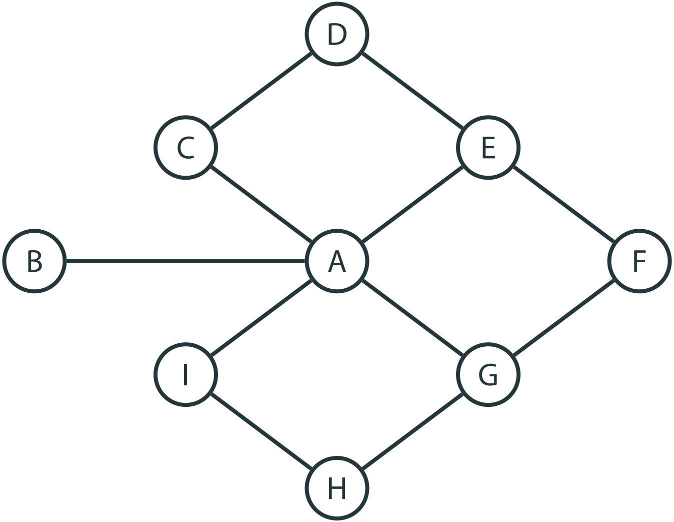
Двудольные графы

Теорема

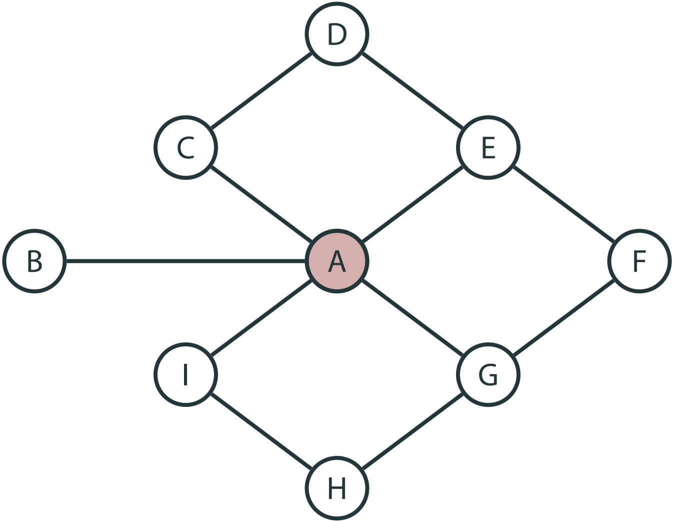
Граф двудольный тогда и только тогда, когда в нем нет циклов нечетной длины

- Мы уже доказали, что в двудольных графах нет циклов нечетной длины
- Осталось убедиться, что всякий граф без циклов нечетной длины является двудольным
- Идея: возьмем произвольную вершину v и покрасим ее в красный цвет
- Для вершины u, если в нее из v ведет путь четной длины, красим ее тоже в красный цвет, а иначе в синий цвет

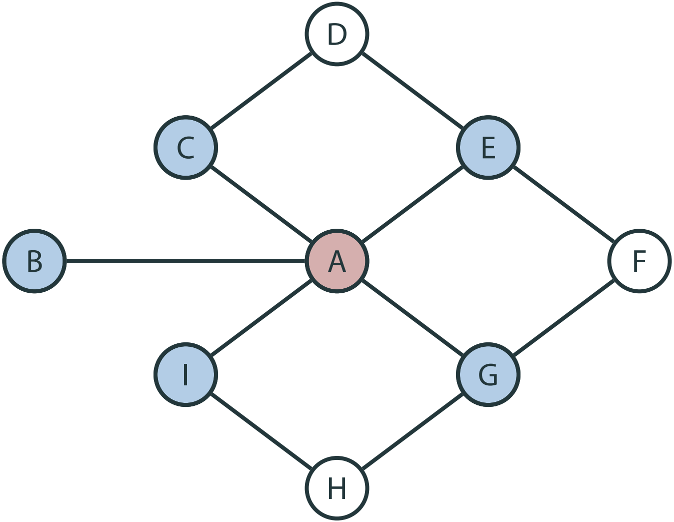
Двудольные графы



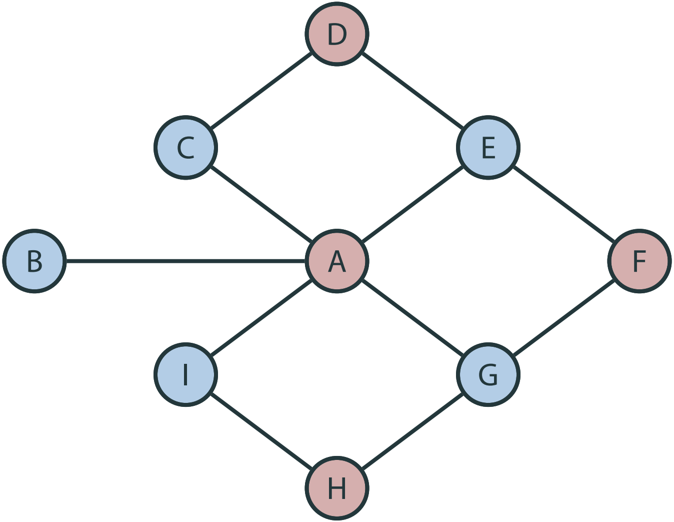
Двудольные графы



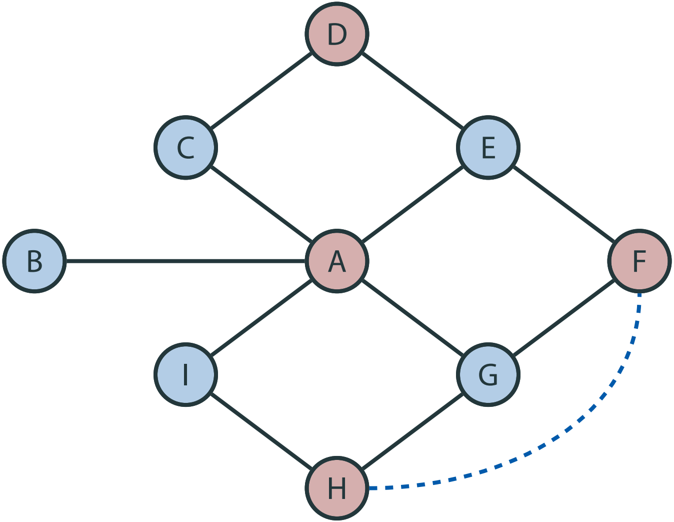
Двудольные графы



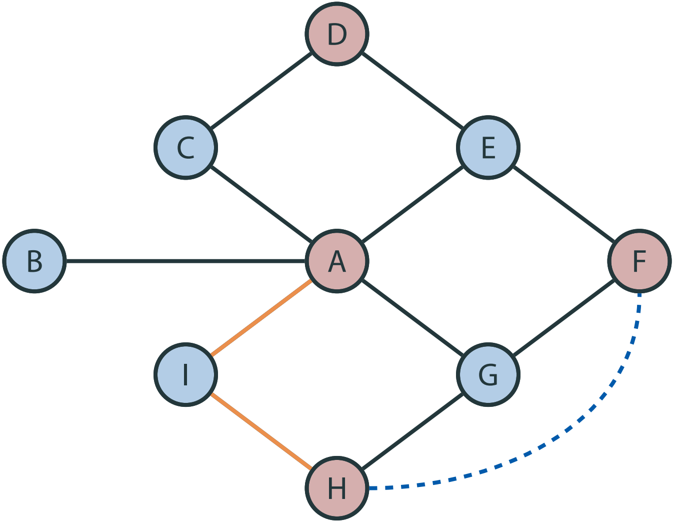
Двудольные графы



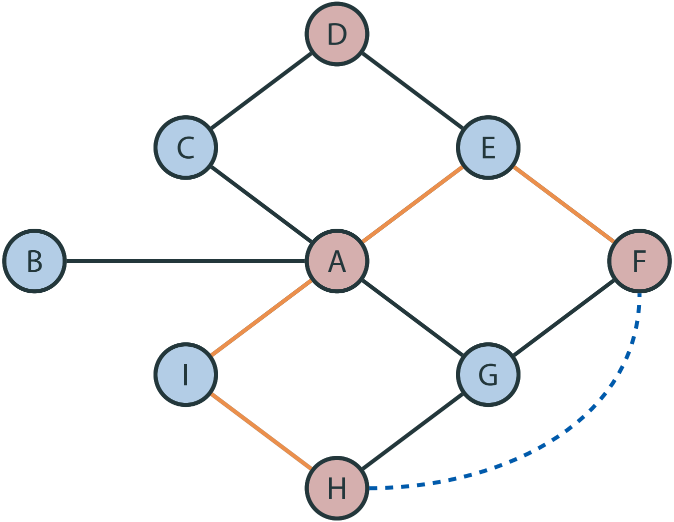
Двудольные графы



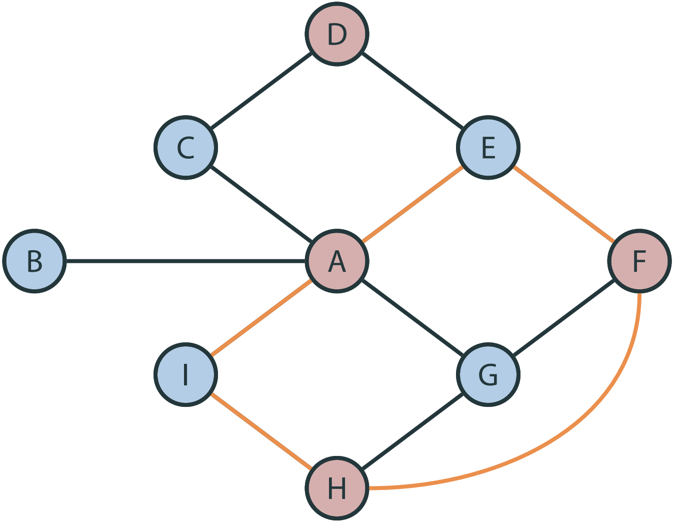
Двудольные графы



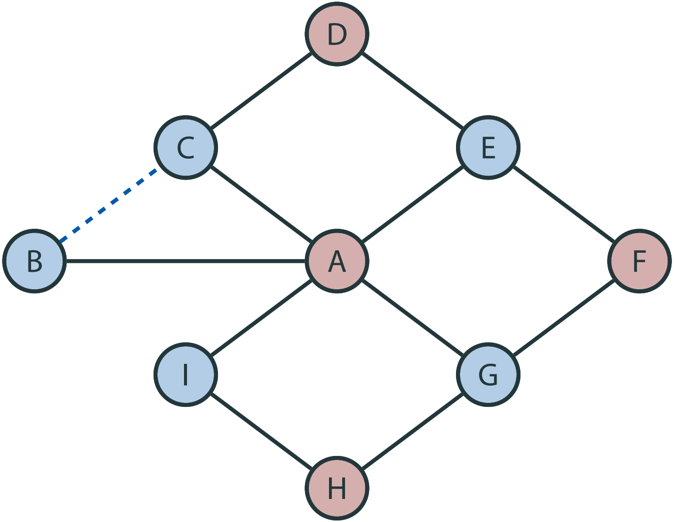
Двудольные графы



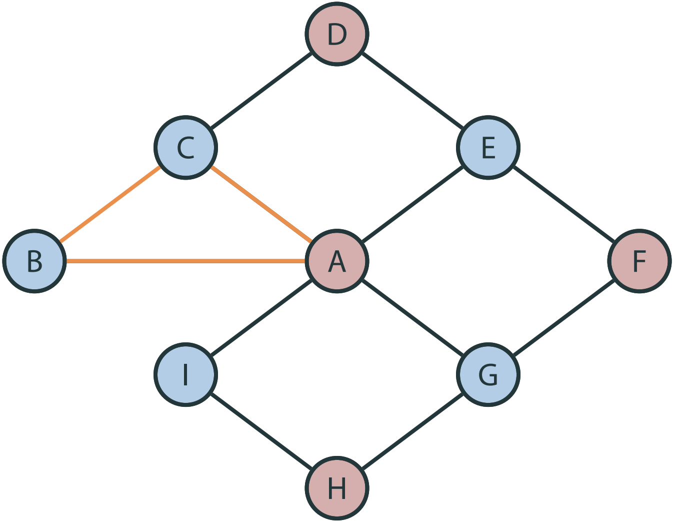
Двудольные графы



Двудольные графы



Двудольные графы



Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A
- А что если в некоторые вершины нет пути из A?

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A
- А что если в некоторые вершины нет пути из A?
- Мы разбили на доли только компоненту связности, в которой лежит A

Двудольные графы

- Раскраска образует разбиение вершин на доли
- Теорема доказана?
- Нет, есть одна тонкость
- Покрасили все вершины, в которые есть путь из A
- А что если в некоторые вершины нет пути из A?
- Мы разбили на доли только компоненту связности, в которой лежит A
- Но можно отдельно провести разбиение для остальных компонент!

Двудольные графы

Двудольные графы

Примеры двудольных графов

Паросочетания

Теорема Холла

Стабильное паросочетание

Двудольные графы

- Часто вершины двудольного графа заранее разбиты на доли

Двудольные графы

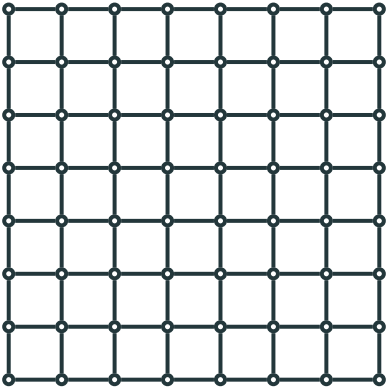
- Часто вершины двудольного графа заранее разбиты на доли
- Но это не всегда так

Двудольные графы

- Часто вершины двудольного графа заранее разбиты на доли
- Но это не всегда так
- Мы разберем пару примеров двудольных графов, в которых двудольность не сразу очевидна

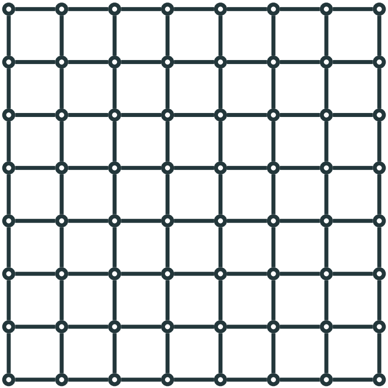
Двумерная решетка

- Такой граф называется двумерной решеткой



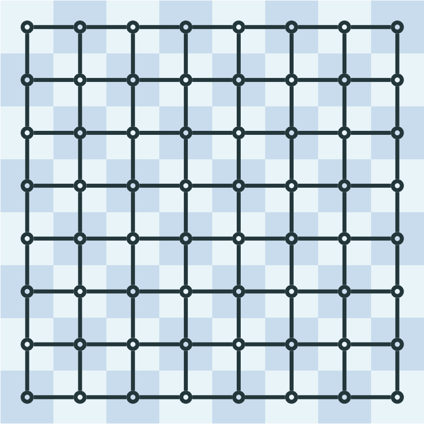
Двумерная решетка

- Такой граф называется двумерной решеткой
- Он двудольный!



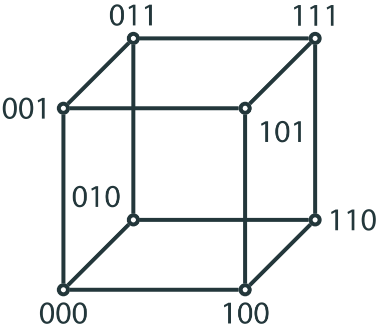
Двумерная решетка

- Такой граф называется двумерной решеткой
- Он двудольный!



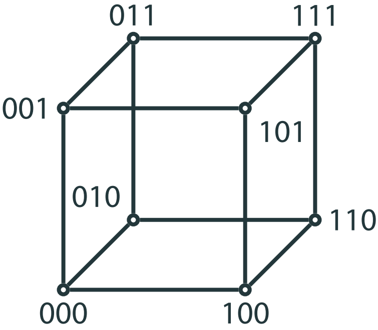
Булев куб

- В качестве V возьмем множество $\{0, 1\}^n$ всех последовательностей из нулей и единиц длины n



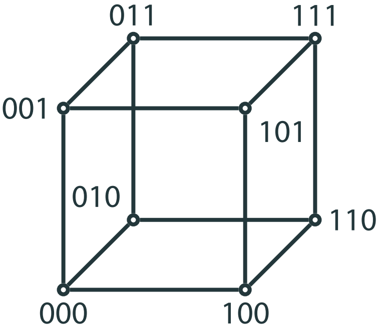
Булев куб

- В качестве V возьмем множество $\{0, 1\}^n$ всех последовательностей из нулей и единиц длины n
- Ребрами соединим те последовательности, которые отличаются только в одной координате



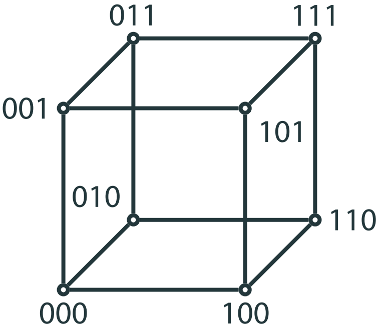
Булев куб

- Это вершины и ребра единичного куба в n-мерном пространстве



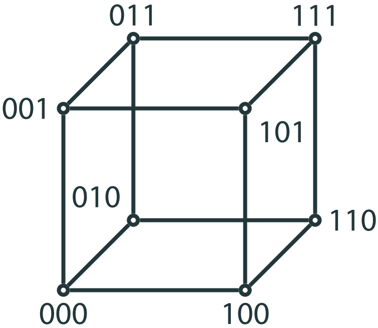
Булев куб

- Это вершины и ребра единичного куба в n-мерном пространстве
- Но это же и частый объект в computer science



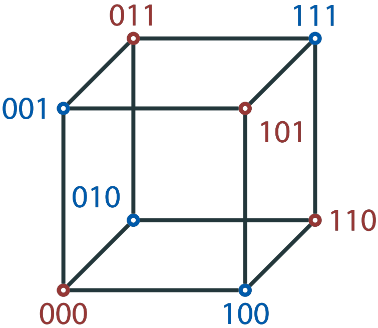
Булев куб

- Это двудольный граф



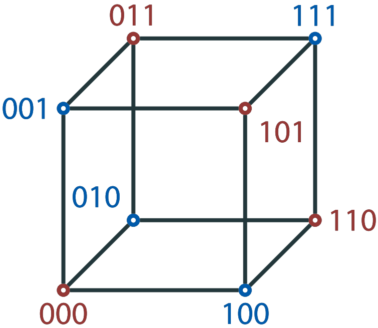
Булев куб

- Это двудольный граф
- В одной доле те вершины, в которых четно единиц, в другой те, в которых нечетно



Булев куб

- Это двудольный граф
- В одной доле те вершины, в которых четно единиц, в другой те, в которых нечетно
- Ребра только между долями



Двудольные графы

Двудольные графы

Примеры двудольных графов

Паросочетания

Теорема Холла

Стабильное паросочетание

Паросочетания

- Паросочетанием в графе называется множество ребер без общих концов

Паросочетания

- Паросочетанием в графе называется множество ребер без общих концов
- Наибольшим паросочетанием называется паросочетание самого большого размера

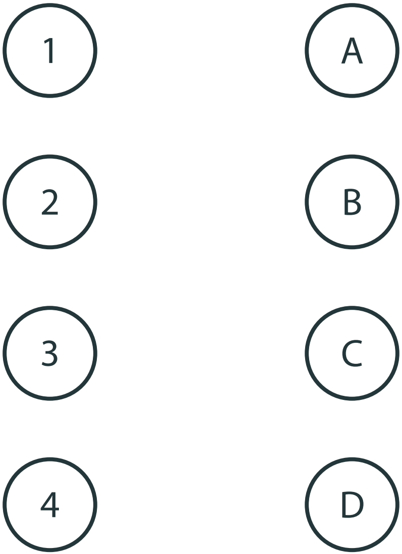
Паросочетания

- Паросочетанием в графе называется множество ребер без общих концов
- Наибольшим паросочетанием называется паросочетание самого большого размера
- Нам часто требуется найти паросочетание в двудольном графе, покрывающее все вершины одной из долей

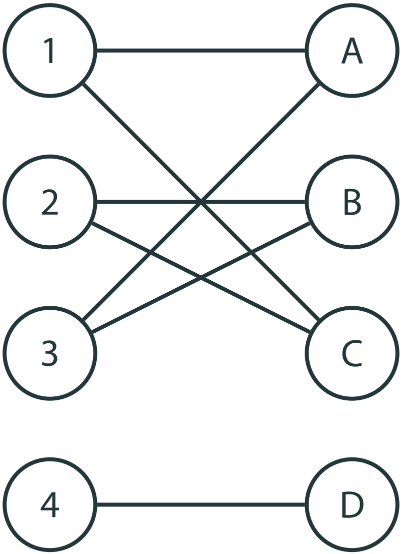
Распределение работ

	Сотр. A	Сотр. B	Сотр. C	Сотр. D
Задача 1	+		+	
Задача 2		+	+	
Задача 3	+	+		
Задача 4				+

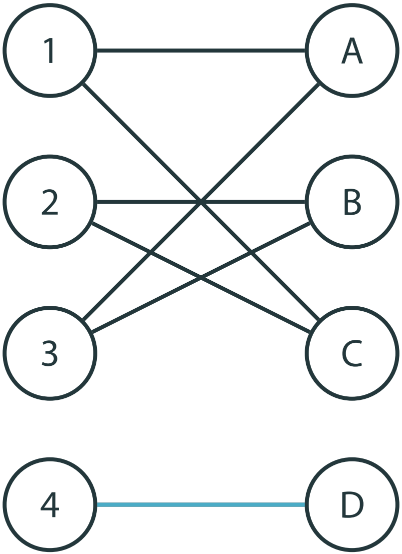
Распределение работ



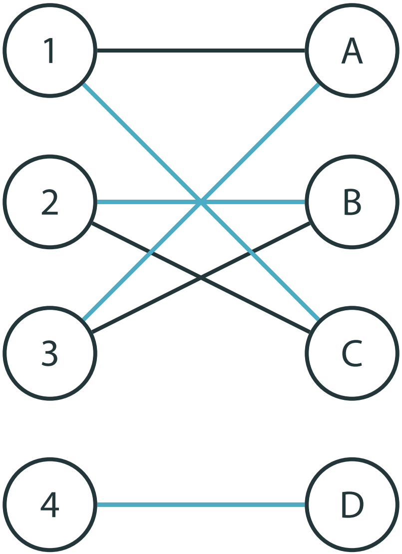
Распределение работ



Распределение работ



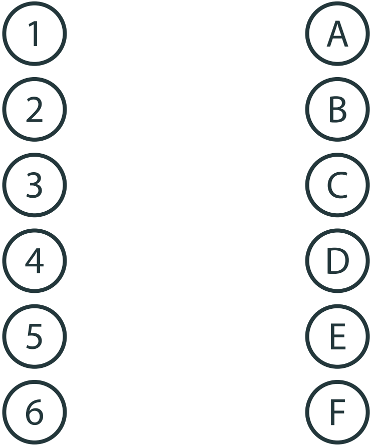
Распределение работ



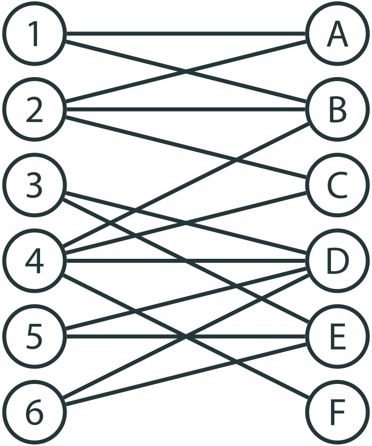
Еще пример

	A	B	C	D	E	F
1	+	+				
2	+	+	+			
3				+	+	
4		+	+	+		+
5				+	+	
6				+	+	

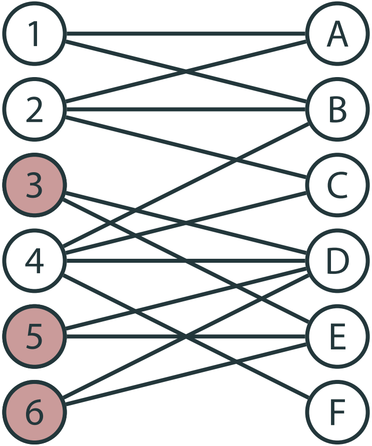
Еще пример



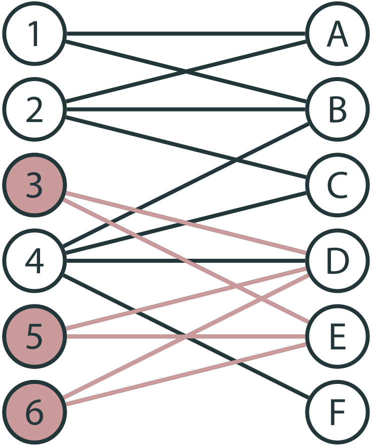
Еще пример



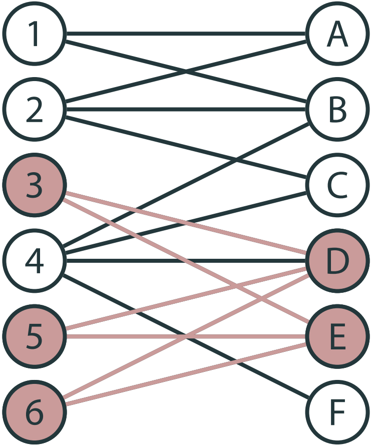
Еще пример



Еще пример



Еще пример



Двудольные графы

Двудольные графы

Примеры двудольных графов

Паросочетания

Теорема Холла

Стабильное паросочетание

Теорема Холла

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф и $S \subseteq V$ подмножество его вершин. Окрестностью $N(S)$ множества S называется множество вершин, соединенных с хотя бы одной вершиной из S

Теорема Холла

Определение

Пусть $G = (V, E)$ — граф и $S \subseteq V$ подмножество его вершин. Окрестностью $N(S)$ множества S называется множество вершин, соединенных с хотя бы одной вершиной из S

Теорема Холла

В двудольном графе $G = (L \cup R, E)$ существует паросочетание, покрывающее все вершины из L тогда и только тогда, когда для всякого подмножества вершин $S \subseteq L$,

$$|S| \leq |N(S)| \; .$$

Теорема Холла

- В одну сторону доказательство несложно

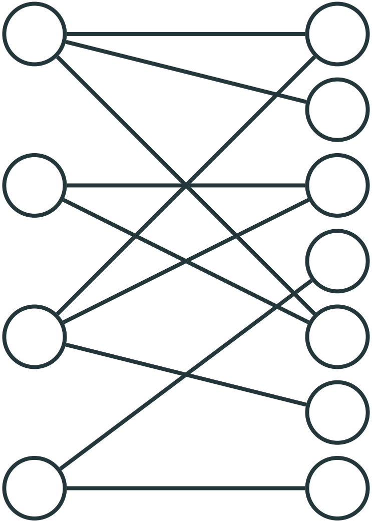
Теорема Холла

- В одну сторону доказательство несложно
- Если есть паросочетание, покрывающее все вершины в L, то для всякого $S \subseteq L$ можно взять парные вершины из R

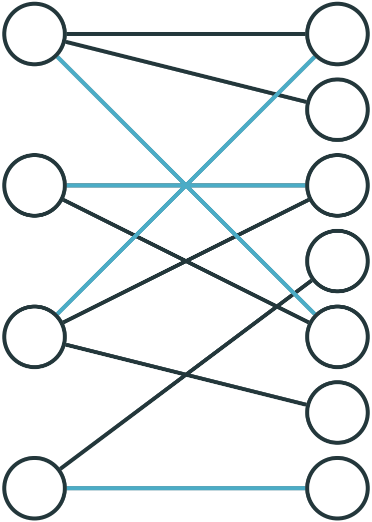
Теорема Холла

- В одну сторону доказательство несложно
- Если есть паросочетание, покрывающее все вершины в L, то для всякого $S \subseteq L$ можно взять парные вершины из R
- Их $|S|$, а значит $|N(S)| \geq |S|$

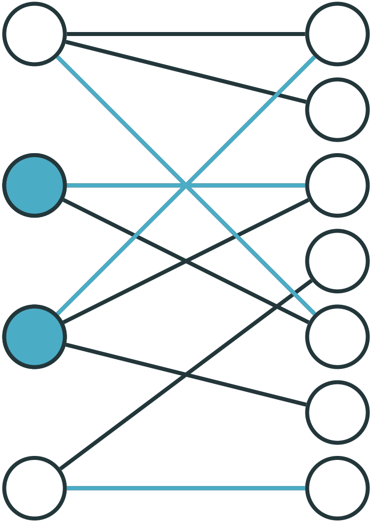
Теорема Холла



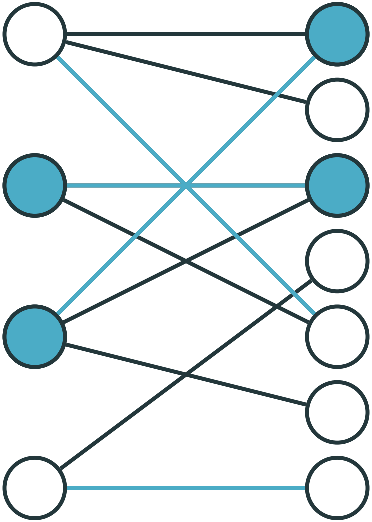
Теорема Холла



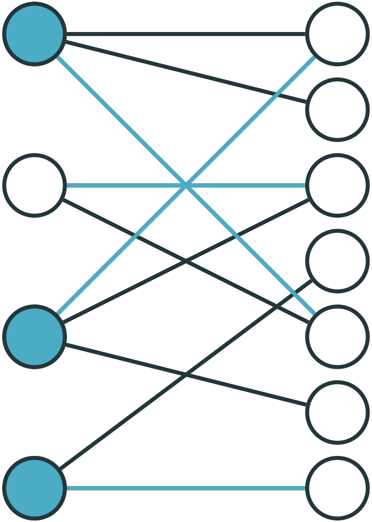
Теорема Холла



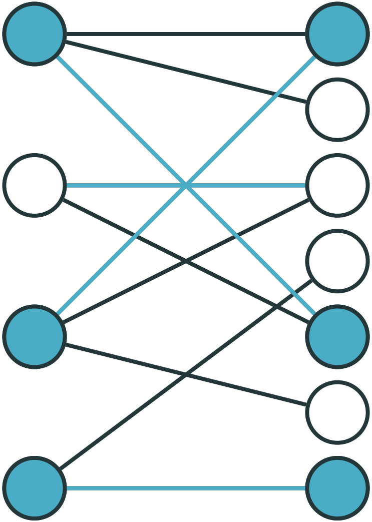
Теорема Холла



Теорема Холла



Теорема Холла



Теорема Холла, идея доказательства

- В другую сторону доказательство сложнее

Теорема Холла, идея доказательства

- В другую сторону доказательство сложнее
- Мы знаем, что выполняется условие $|N(S)| \geq |S|$ для каждого подмножества вершин S, нужно доказать, что есть паросочетание

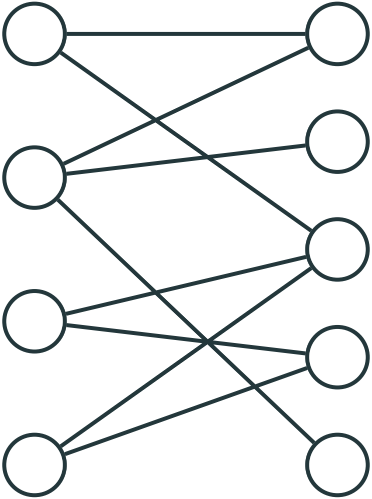
Теорема Холла, идея доказательства

- В другую сторону доказательство сложнее
- Мы знаем, что выполняется условие $|N(S)| \geq |S|$ для каждого подмножества вершин S, нужно доказать, что есть паросочетание
- Будем доказывать для графа на n вершинах, предполагая, что для меньшего числа вершин теорема уже доказана

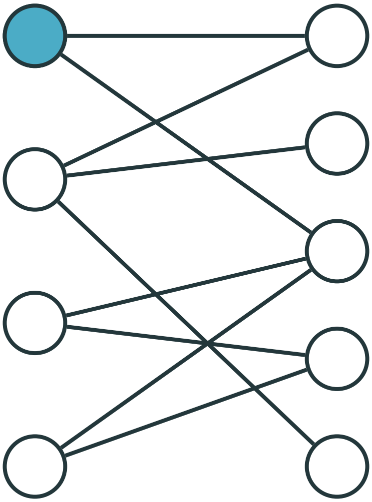
Теорема Холла, идея доказательства

- В другую сторону доказательство сложнее
- Мы знаем, что выполняется условие $|N(S)| \geq |S|$ для каждого подмножества вершин S, нужно доказать, что есть паросочетание
- Будем доказывать для графа на n вершинах, предполагая, что для меньшего числа вершин теорема уже доказана
- Взгляд с другой стороны: будем строить паросочетание рекурсивно

Теорема Холла, идея доказательства

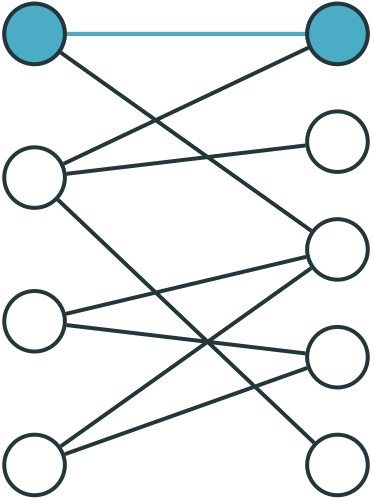


Теорема Холла, идея доказательства



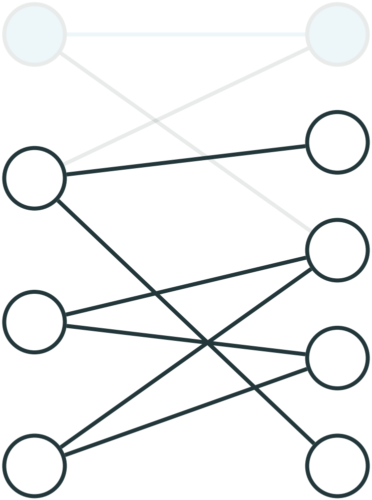
Выберем любую вершину слева

Теорема Холла, идея доказательства



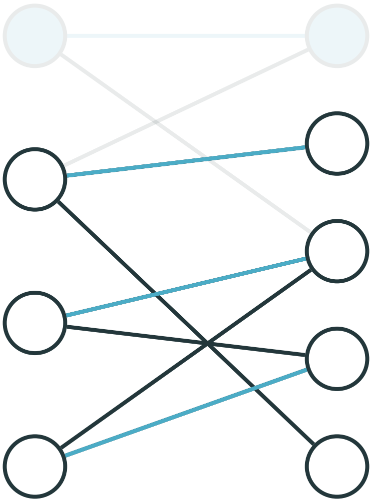
Попробуем соединить с произвольным соседом справа

Теорема Холла, идея доказательства



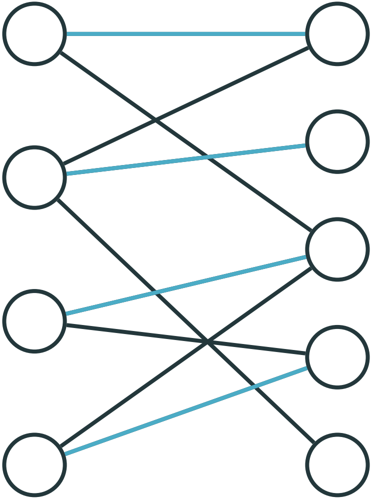
Посмотрим, есть ли паросочетание в оставшемся графе

Теорема Холла, идея доказательства



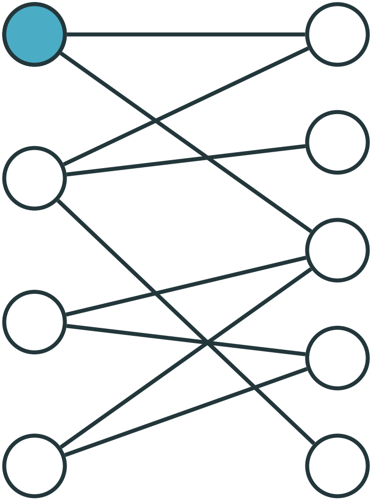
Пусть есть паросочетание

Теорема Холла, идея доказательства



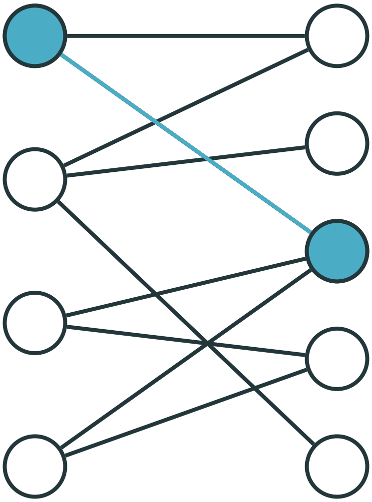
Получаем паросочетание в изначальном графе

Теорема Холла, идея доказательства



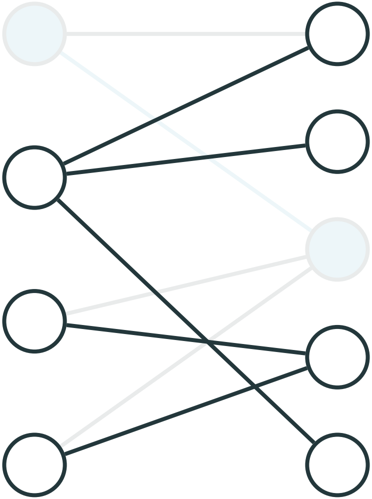
Рассмотрим второй случай

Теорема Холла, идея доказательства



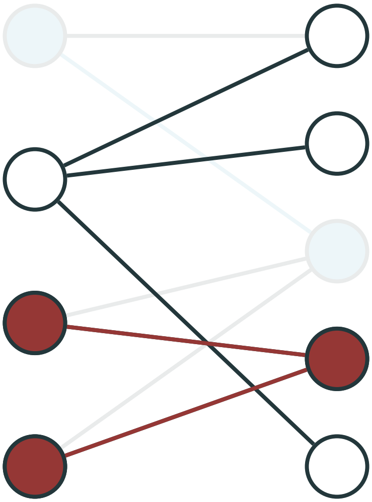
Выбрали пару к вершине

Теорема Холла, идея доказательства



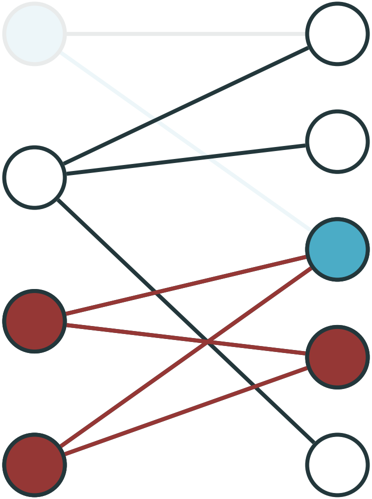
И в оставшемся графе паросочетания нет

Теорема Холла, идея доказательства



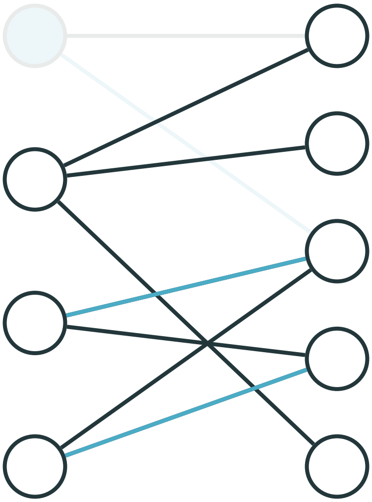
Тогда для него нарушается условие теоремы

Теорема Холла, идея доказательства



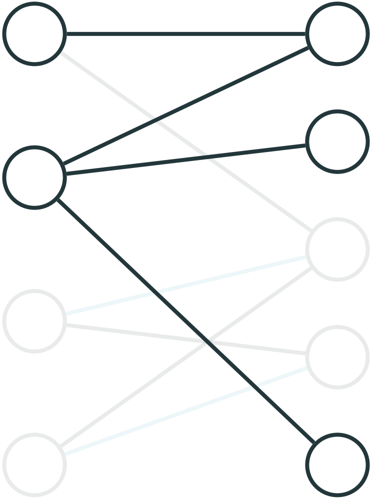
Но тогда вместе с удаленной вершиной получится поровну вершин

Теорема Холла, идея доказательства



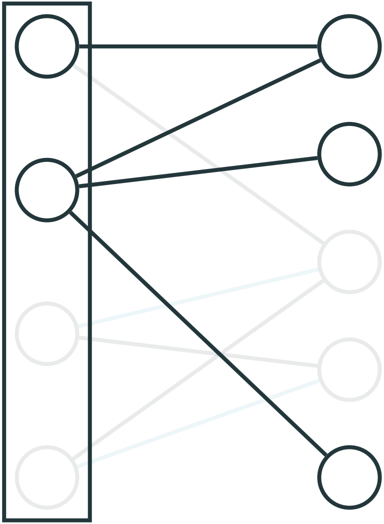
Найдем паросочетание в этом подграфе

Теорема Холла, идея доказательства



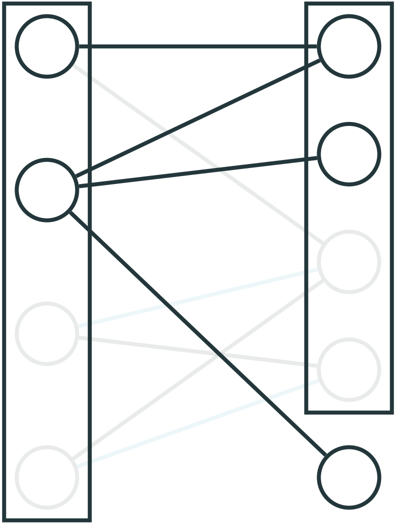
Рассмотрим оставшийся подграф

Теорема Холла, идея доказательства



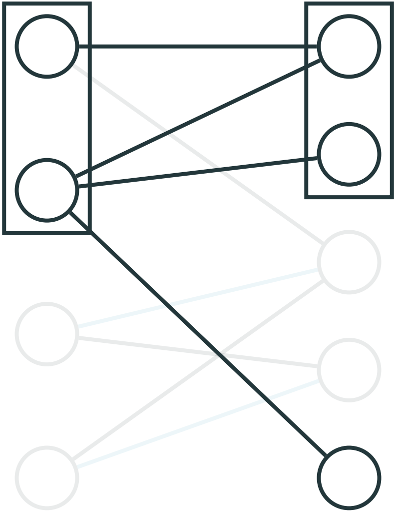
В нем выполняется условие теоремы!

Теорема Холла, идея доказательства



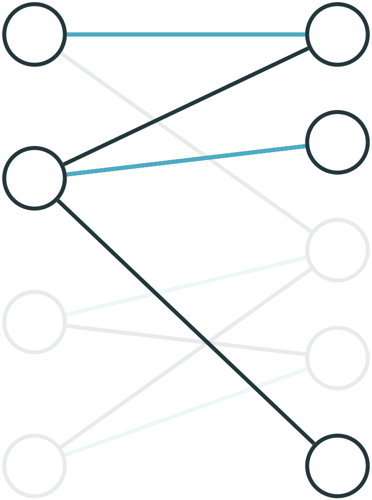
В нем выполняется условие теоремы!

Теорема Холла, идея доказательства



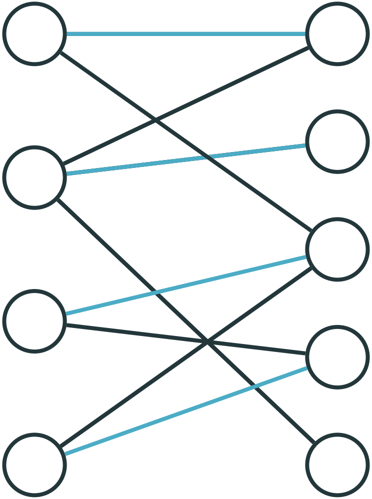
В нем выполняется условие теоремы!

Теорема Холла, идея доказательства



Найдем в нем паросочетание

Теорема Холла, идея доказательства



Получаем паросочетание во всем графе

Двудольные графы

Двудольные графы

Примеры двудольных графов

Паросочетания

Теорема Холла

Стабильное паросочетание

Более общая постановка

- Пусть у нас есть объекты двух типов

Более общая постановка

- Пусть у нас есть объекты двух типов
- Мы хотим их соединять друг с другом

Более общая постановка

- Пусть у нас есть объекты двух типов
- Мы хотим их соединять друг с другом
- Не обязательно паросочетание: одному объекту могут быть сопоставлены несколько разных

Более общая постановка

- Пусть у нас есть объекты двух типов
- Мы хотим их соединять друг с другом
- Не обязательно паросочетание: одному объекту могут быть сопоставлены несколько разных
- Любой объект можно сопоставить с другим, но есть предпочтения

Более общая постановка

- Пусть у нас есть объекты двух типов
- Мы хотим их соединять друг с другом
- Не обязательно паросочетание: одному объекту могут быть сопоставлены несколько разных
- Любой объект можно сопоставить с другим, но есть предпочтения
- Хотим локальную стабильность: несопоставленным объектам не должно быть выгодно бросить свои пары и соединиться друг с другом

Примеры

- Бытовые примеры: распределение студентов по университетам, доноров почек по пациентам и так далее

Примеры

- Бытовые примеры: распределение студентов по университетам, доноров почек по пациентам и так далее
- Более близкий нам пример: распределение пользователей по серверам

Стабильное паросочетание

- Рассмотрим упрощенную постановку

Стабильное паросочетание

- Рассмотрим упрощенную постановку
- У нас есть n кандидатов

Стабильное паросочетание

- Рассмотрим упрощенную постановку
- У нас есть n кандидатов
- У нас есть n вакансий

Стабильное паросочетание

- Рассмотрим упрощенную постановку
- У нас есть n кандидатов
- У нас есть n вакансий
- Есть полные списки предпочтений для всех кандидатов и для всех вакансий

Стабильное паросочетание

- Рассмотрим упрощенную постановку
- У нас есть n кандидатов
- У нас есть n вакансий
- Есть полные списки предпочтений для всех кандидатов и для всех вакансий
- Хотим построить паросочетание: n пар из кандидатов и вакансий

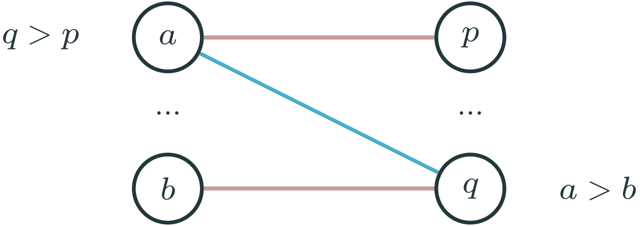
Стабильное паросочетание

- Рассмотрим упрощенную постановку
- У нас есть n кандидатов
- У нас есть n вакансий
- Есть полные списки предпочтений для всех кандидатов и для всех вакансий
- Хотим построить паросочетание: n пар из кандидатов и вакансий
- Хотим устойчивости: никого из кандидатов нельзя перенаправить на другую вакансию ко взаимной выгоде

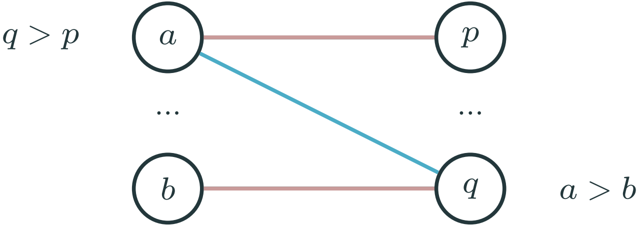
Нестабильное паросочетание

Нестабильное паросочетание

Нестабильное паросочетание



Нестабильное паросочетание



Существует ли стабильное паросочетание?

Терминология

- Не всегда речь именно про вакансии и кандидатов

Терминология

- Не всегда речь именно про вакансии и кандидатов
- Нужны какие-то удобные обозначения

Терминология

- Не всегда речь именно про вакансии и кандидатов
- Нужны какие-то удобные обозначения
- Стандартная терминология: мужчины и женщины

Терминология

- Не всегда речь именно про вакансии и кандидатов
- Нужны какие-то удобные обозначения
- Стандартная терминология: мужчины и женщины
- Паросочетания — браки

Терминология

- Не всегда речь именно про вакансии и кандидатов
- Нужны какие-то удобные обозначения
- Стандартная терминология: мужчины и женщины
- Паросочетания — браки
- Терминология удобна из-за краткости и симметричности

Терминология

- Не всегда речь именно про вакансии и кандидатов
- Нужны какие-то удобные обозначения
- Стандартная терминология: мужчины и женщины
- Паросочетания — браки
- Терминология удобна из-за краткости и симметричности
- Нам будет удобно говорить о вершинах левой и правой доли

Стабильное паросочетание

- Оказывается, что стабильное паросочетание всегда существует

Стабильное паросочетание

- Оказывается, что стабильное паросочетание всегда существует
- Но как это доказывать?

Стабильное паросочетание

- Оказывается, что стабильное паросочетание всегда существует
- Но как это доказывать?
- И как искать стабильное паросочетание?

Стабильное паросочетание

- Оказывается, что стабильное паросочетание всегда существует
- Но как это доказывать?
- И как искать стабильное паросочетание?
- Мы разберем алгоритм Гэйла-Шепли

Стабильное паросочетание

- Оказывается, что стабильное паросочетание всегда существует
- Но как это доказывать?
- И как искать стабильное паросочетание?
- Мы разберем алгоритм Гэйла-Шепли
- Обобщается на гораздо более общие постановки

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге алгоритма у нас есть частичное паросочетание

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге алгоритма у нас есть частичное паросочетание
- На каждом шаге вершина левой доли без пары делает предложение

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге алгоритма у нас есть частичное паросочетание
- На каждом шаге вершина левой доли без пары делает предложение
- Его либо принимают, либо отвергают

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге алгоритма у нас есть частичное паросочетание
- На каждом шаге вершина левой доли без пары делает предложение
- Его либо принимают, либо отвергают
- Продолжаем до тех пор, пока не построим полное паросочетание

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге алгоритма у нас есть частичное паросочетание
- На каждом шаге вершина левой доли без пары делает предложение
- Его либо принимают, либо отвергают
- Продолжаем до тех пор, пока не построим полное паросочетание
- Нужно уточнить, кто и кому делает предложение

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге алгоритма у нас есть частичное паросочетание
- На каждом шаге вершина левой доли без пары делает предложение
- Его либо принимают, либо отвергают
- Продолжаем до тех пор, пока не построим полное паросочетание
- Нужно уточнить, кто и кому делает предложение
- Нужно уточнить, когда предложение принимают

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге выбираем любую свободную вершину левой доли

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге выбираем любую свободную вершину левой доли
- Она делает предложение своему старшему приоритету среди тех, кому еще не делала предложение

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге выбираем любую свободную вершину левой доли
- Она делает предложение своему старшему приоритету среди тех, кому еще не делала предложение
- Вершина правой доли принимает предложение, если она без пары

Алгоритм Гэйла-Шепли

- На каждом шаге выбираем любую свободную вершину левой доли
- Она делает предложение своему старшему приоритету среди тех, кому еще не делала предложение
- Вершина правой доли принимает предложение, если она без пары
- Вершина правой доли принимает предложение, если ее текущая пара для нее менее приоритетна

Алгоритм Гэйла-Шепли

$p > q > r$	a	p	$c > b > a$
$p > q > r$	b	q	$a > c > b$
$q > p > r$	c	r	$b > a > c$

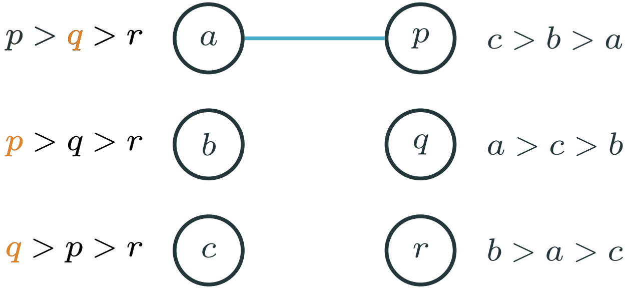
Алгоритм Гэйла-Шепли

$p > q > r$ $\quad a \quad\quad p \quad$ $c > b > a$

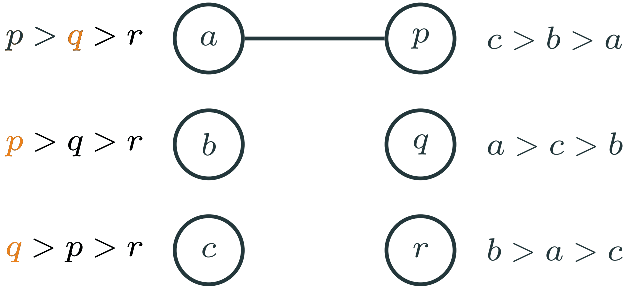
$p > q > r$ $\quad b \quad\quad q \quad$ $a > c > b$

$q > p > r$ $\quad c \quad\quad r \quad$ $b > a > c$

Алгоритм Гэйла-Шепли



Алгоритм Гэйла-Шепли

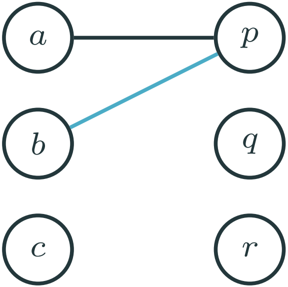


Алгоритм Гэйла-Шепли

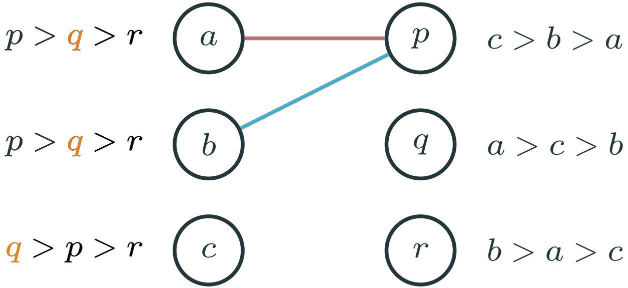
$p > q > r$ $\quad$ $c > b > a$

$p > q > r$ $\quad$ $a > c > b$

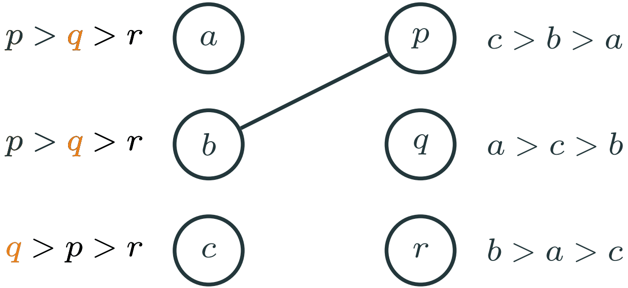
$q > p > r$ $\quad$ $b > a > c$



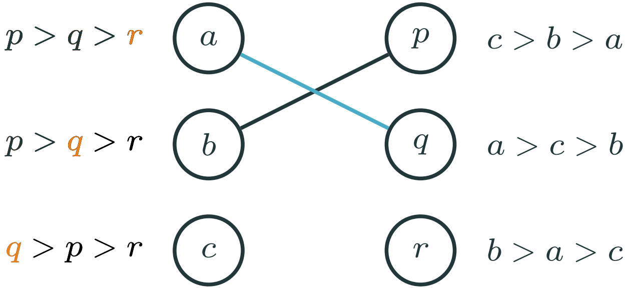
Алгоритм Гэйла-Шепли



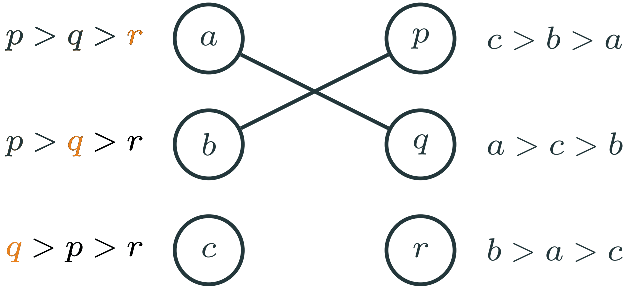
Алгоритм Гэйла-Шепли



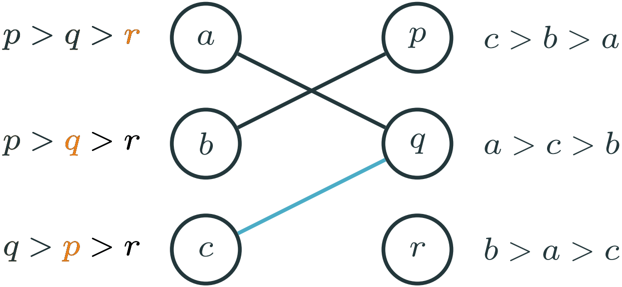
Алгоритм Гэйла-Шепли



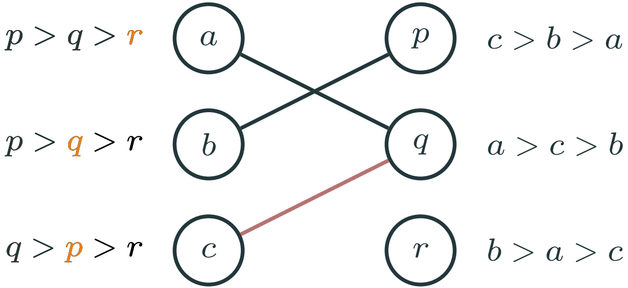
Алгоритм Гэйла-Шепли



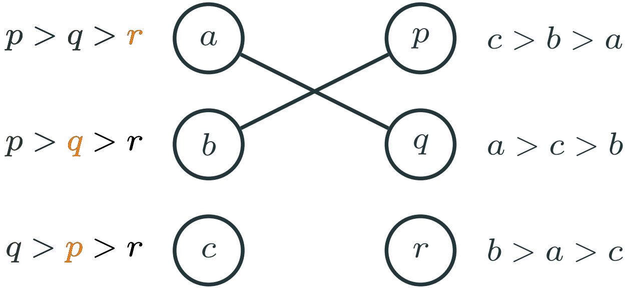
Алгоритм Гэйла-Шепли



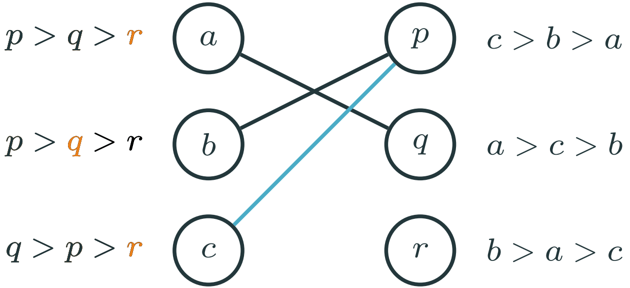
Алгоритм Гэйла-Шепли



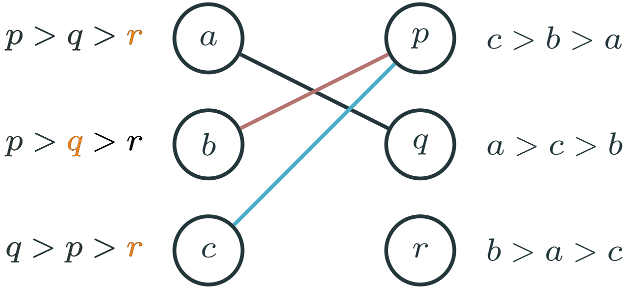
Алгоритм Гэйла-Шепли



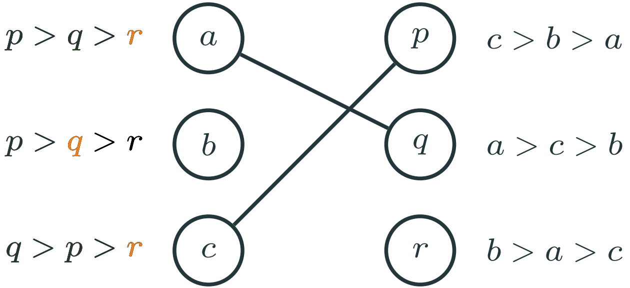
Алгоритм Гэйла-Шепли



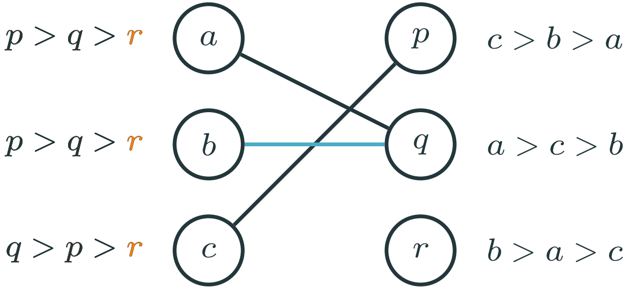
Алгоритм Гэйла-Шепли



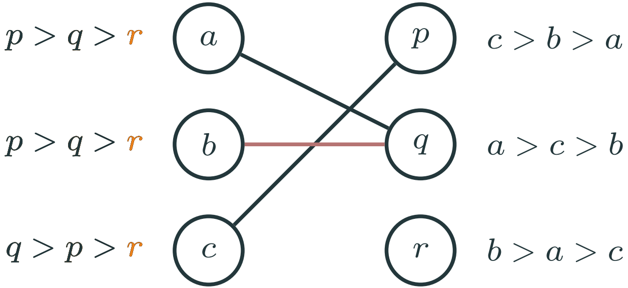
Алгоритм Гэйла-Шепли



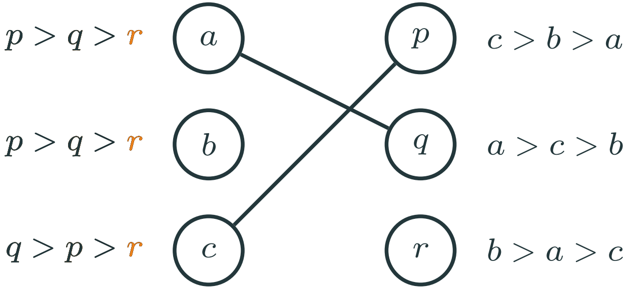
Алгоритм Гэйла-Шепли



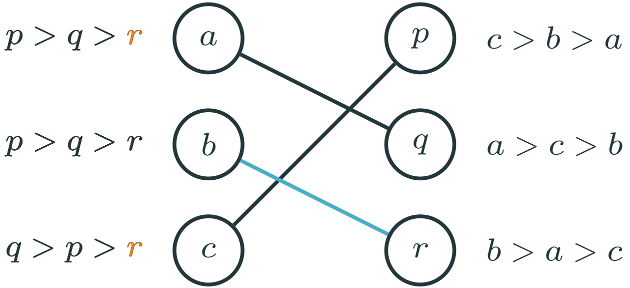
Алгоритм Гэйла-Шепли



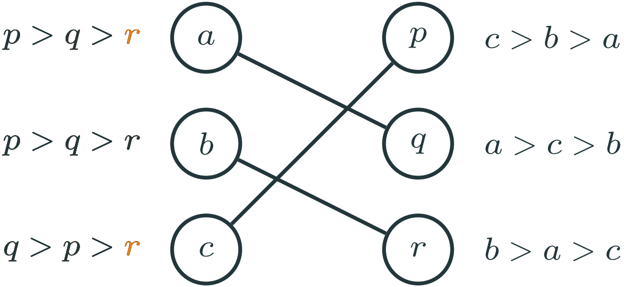
Алгоритм Гэйла-Шепли



Алгоритм Гэйла-Шепли



Алгоритм Гэйла-Шепли



Корректность алгоритма

Нужно проверить три вещи:

Корректность алгоритма

Нужно проверить три вещи:

- Почему алгоритм заканчивает работу?

Корректность алгоритма

Нужно проверить три вещи:

- Почему алгоритм заканчивает работу?
- Почему он строит полное паросочетание?

Корректность алгоритма

Нужно проверить три вещи:

- Почему алгоритм заканчивает работу?
- Почему он строит полное паросочетание?
- Почему это стабильное паросочетание?

Почему алгоритм останавливается?

- На каждом шаге делаем предложение

Почему алгоритм останавливается?

- На каждом шаге делаем предложение
- Предложения никогда не повторяются

Почему алгоритм останавливается?

- На каждом шаге делаем предложение
- Предложения никогда не повторяются
- Всего n^2 возможных предложений

Почему алгоритм останавливается?

- На каждом шаге делаем предложение
- Предложения никогда не повторяются
- Всего n^2 возможных предложений
- Остановимся за $O(n^2)$ шагов

Почему алгоритм останавливается?

- На каждом шаге делаем предложение
- Предложения никогда не повторяются
- Всего n^2 возможных предложений
- Остановимся за $O(n^2)$ шагов
- Размер входа тоже $O(n^2)$

Почему строится полное паросочетание?

- Пусть вершина левой доли осталась без пары

Почему строится полное паросочетание?

- Пусть вершина левой доли осталась без пары
- Тогда ее все отвергли

Почему строится полное паросочетание?

- Пусть вершина левой доли осталась без пары
- Тогда ее все отвергли
- Чтобы отвергнуть вершина правой доли должна иметь пару

Почему строится полное паросочетание?

- Пусть вершина левой доли осталась без пары
- Тогда ее все отвергли
- Чтобы отвергнуть вершина правой доли должна иметь пару
- Если у вершины правой доли появляется пара, дальше у нее всегда есть пара

Почему строится полное паросочетание?

- Пусть вершина левой доли осталась без пары
- Тогда ее все отвергли
- Чтобы отвергнуть вершина правой доли должна иметь пару
- Если у вершины правой доли появляется пара, дальше у нее всегда есть пара
- В конце у каждой вершины правой доли есть пара

Почему строится полное паросочетание?

- Пусть вершина левой доли осталась без пары
- Тогда ее все отвергли
- Чтобы отвергнуть вершина правой доли должна иметь пару
- Если у вершины правой доли появляется пара, дальше у нее всегда есть пара
- В конце у каждой вершины правой доли есть пара
- Противоречие

Почему паросочетание стабильное?

- Пусть есть нестабильная пара l и r

Почему паросочетание стабильное?

- Пусть есть нестабильная пара l и r
- Тогда r предпочтительнее для l, чем его текущая пара

Почему паросочетание стабильное?

- Пусть есть нестабильная пара l и r
- Тогда r предпочтительнее для l, чем его текущая пара
- Значит r отвергла l

Почему паросочетание стабильное?

- Пусть есть нестабильная пара l и r
- Тогда r предпочтительнее для l, чем его текущая пара
- Значит r отвергла l
- Но для r ситуация может только улучшаться

Почему паросочетание стабильное?

- Пусть есть нестабильная пара l и r
- Тогда r предпочтительнее для l, чем его текущая пара
- Значит r отвергла l
- Но для r ситуация может только улучшаться
- Значит ее текущая пара для нее приоритетнее, противоречие

Что мы узнали

- Двудольные графы: вершины двух типов, ребра соединяют разнотипные вершины

Что мы узнали

- Двудольные графы: вершины двух типов, ребра соединяют разнотипные вершины
- Важный объект — паросочетания

Что мы узнали

- Двудольные графы: вершины двух типов, ребра соединяют разнотипные вершины
- Важный объект — паросочетания
- Есть теоретический критерий

Что мы узнали

- Двудольные графы: вершины двух типов, ребра соединяют разнотипные вершины
- Важный объект — паросочетания
- Есть теоретический критерий
- Есть хорошие алгоритмы