PROGRAM STUDI TEKNIK KOMPUTER
FAKULTAS TEKNIK DAN INFORMATIKA
UNIVERSITAS MULTIMEDIA NUSANTARA
SEMESTER GANJIL TAHUN AJARAN 2024/2025

CE 121 – LINEAR ALGEBRA

Pertemuan 13:
Transformasi Linier

FIRSTKA HELIANTA MS, S.Si., M.Si

Capaian Pembelajaran Mingguan Mata Kuliah (Sub-CPMK)

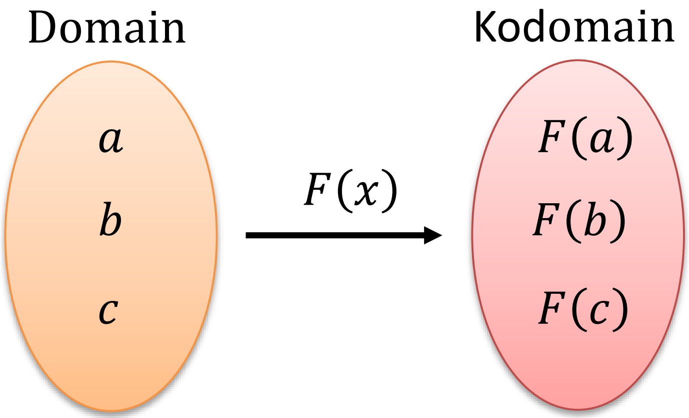
1. Mahasiswa dapat melakukan transformasi linier dalam ruang vektor
2. Mahasiswa dapat menentukan ruang nol dan range dalam ruang vektor.

Sub-Pokok Bahasan

- Transformasi Linier
- Ruang nol
- Range

Pengertian Transformasi Linier

- Pemetaaan F dari ruang vektor V ke ruang vektor W, berarti setiap anggota V dikaitkan dengan tepat satu anggota di W.
- V disebut domain dan W disebut kodomain.



Vektor $\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix}$ Ditransformasi oleh

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - 3z \end{pmatrix}$$

$$F\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 + 2(1) \\ 2(0) - 3(-1) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 2 \\ 3 \end{pmatrix}$$

Syarat Transformasi Linier

- Misalkan V dan W ruang vektor.
- Fungsi (Pemetaan) dari V ke W, $F: V \to W$, disebut transformasi linier, jika memenuhi dua aksioma, berikut:

1. $F(u + v) = F(u) + F(v)$, untuk setiap u dan v anggota V
2. $F(ku) = kF(u)$, untuk setiap u anggota V dan k skalar anggota bilangan riil

Contoh Transformasi Linier

Apakah fungsi berikut transformasi linier?

1. $F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - 3z \end{pmatrix}$; $F: R^3 \to R^2$

2. $T(a + bx + cx^2) = x(a + bx + cx^2)$; $T: P_2 \to P_3$

3. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 0 & 0 \\ c+d & c-d \end{bmatrix}$; $T: R^{2\times 2} \to R^{3\times 2}$

Contoh Transformasi Linier

$$F\begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x + 2y \\ 2x - 3z \end{pmatrix} \qquad F: R^3 \to R^2$$

Ambil dua vektor sembarang $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v} \epsilon R^3$

$$\boldsymbol{u} = \begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix} \longrightarrow F(u) = \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ 2x_1 - 3z_1 \end{pmatrix}$$

$$\boldsymbol{v} = \begin{pmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{pmatrix} \longrightarrow F(v) = \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 \\ 2x_2 - 3z_2 \end{pmatrix}$$

$$F(u + v) = F\begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{pmatrix}$$

$$F(u + v) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2(y_1 + y_2) \\ 2(x_1 + x_2) - 3(z_1 + z_2) \end{pmatrix}$$

$$F(u + v) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 + 2y_1 + 2y_2 \\ 2x_1 + 2x_2 - 3z_1 - 3z_2 \end{pmatrix}$$

$$F(u + v) = \begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ 2x_1 - 3z_1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x_2 + 2y_2 \\ 2x_2 - 3z_2 \end{pmatrix}$$

$F(u + v) = F(u) + F(v)$ **Terpenuhi**

$$F(ku) = F\left(k\begin{pmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{pmatrix}\right) = F\begin{pmatrix} kx_1 \\ ky_1 \\ kz_1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} kx_1 + 2ky_1 \\ 2kx_1 - 3kz_1 \end{pmatrix}$$

$F(ku) = k\begin{pmatrix} x_1 + 2y_1 \\ 2x_1 - 3z_1 \end{pmatrix} = kF(u)$ **Terpenuhi**

Syarat 1 dan 2 terpenuhi, *F* merupakan transformasi linier.

Contoh Transformasi Linier

$T(a + bx + cx^2) = x(a + bx + cx^2)$

$T: P_2 \rightarrow P_3$

Ambil dua fungsi sembarang

$\boldsymbol{P} = a_1 + b_1x + c_1x^2 \longrightarrow T(P) = x(a_1 + b_1x + c_1x^2)$

$\boldsymbol{Q} = a_2 + b_2x + c_2x^2 \longrightarrow T(Q) = x(a_2 + b_2x + c_2x^2)$

$T(P+Q) = T(a_1 + b_1x + c_1x^2 + a_2 + b_2x + c_2x^2) = T\big((a_1 + a_2) + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2\big)$

$T(P+Q) = x(a_1 + a_2 + (b_1 + b_2)x + (c_1 + c_2)x^2) = x(a_1 + b_1x + c_1x^2) + x(a_2 + b_2x + c_2x^2)$

$T(P+Q) = T(P) + T(Q)$ **Terpenuhi**

$T(kP) = T\big(k(a_1 + b_1x + c_1x^2)\big) = T(ka_1 + kb_1x + kc_1x^2) = x(ka_1 + kb_1x + kc_1x^2)$

$T(kP) = kx(a_1 + b_1x + c_1x^2) = kT(P)$ **Terpenuhi**

Syarat 1 dan 2 terpenuhi, T merupakan transformasi linier.

Contoh Transformasi Linier

Tentukan nilai fungsi dari vektor yang diberikan:

a. $T(a + bx + cx^2) = a + b + c$, jika $\mathbf{p}=2 + 3x^2$.

b. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 2a-3b & b-a \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.

c. $T(a + bx + cx^2)=\begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{p}=3x + 5x^2$.

d. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b+3c \\ a-d \\ 2a+b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{m}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

e. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$a.\ T(a + bx + cx^2) = a + b + c \qquad T: P_2 \to P_0$

$P = 2 + 3x^2$

$T(P) = T(2 + 3x^2)$

$= 2 + 0 + 3 \ = 5$

$b.\ T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 2a-3b & b-a \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$

$T(v) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}\right) \qquad T: R^{2\times1} \to R^{2\times2}$

$= \begin{bmatrix} 3+(-6) & 3-(-6) \\ 2(3)-3(-6) & -6-3 \end{bmatrix}$

$= \begin{bmatrix} -3 & 9 \\ 24 & -9 \end{bmatrix}$

Contoh Transformasi Linier

Tentukan nilai fungsi dari vektor yang diberikan:

a. $T(a + bx + cx^2) = a + b + c$, jika $\mathbf{p}=2 + 3x^2$.

b. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 2a-3b & b-a \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.

c. $T(a + bx + cx^2)=\begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{p}=3x + 5x^2$.

d. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b+3c \\ a-d \\ 2a+b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{m}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

e. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

c. $T(a + bx + cx^2) = \begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$

$p = 3x + 5x^2$

$$T(p) = T(3x + 5x^2) = \begin{bmatrix} 0+3+5 \\ 0-3-5 \\ 3+5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ -8 \\ 8 \end{bmatrix}$$

d. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b+3c \\ a-d \\ 2a+b+c \end{bmatrix}$ $\qquad m = \begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$

$$T(m) = T\left(\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 2 + (-3) + 3.5 \\ 2-0 \\ 2.2 + (-3) + 5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 14 \\ 2 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Contoh Transformasi Linier

Tentukan nilai fungsi dari vektor yang diberikan:

a. $T(a + bx + cx^2) = a + b + c$, jika $\mathbf{p}=2 + 3x^2$.

b. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a+b & a-b \\ 2a-3b & b-a \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -6 \end{bmatrix}$.

c. $T(a + bx + cx^2)=\begin{bmatrix} a+b+c \\ a-b-c \\ b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{p}=3x + 5x^2$.

d. $T\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} a+b+3c \\ a-d \\ 2a+b+c \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{m}=\begin{bmatrix} 2 & -3 \\ 5 & 0 \end{bmatrix}$.

e. $T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right)=\begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$, jika $\mathbf{v}=\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$.

$$e.\ T\left(\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} \qquad v = \begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$T(v) = T\left(\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} 3 & 2 \\ -4 & 1 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} 3 \\ -2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 3.3 + 2.(-2) \\ -4(3) + 1.(-2) \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 9 - 4 \\ -12 - 2 \end{bmatrix}$$

$$= \begin{bmatrix} 5 \\ -14 \end{bmatrix}$$

Transformasi Khusus: Rotasi

- Transformasi linier dari R^2 ke R^2 yang memutar suatu titik (a, b) sebesar sudut θ dengan titik putaran $(0,0)$, dinyatakan oleh rumusan berikut:

$$T\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} cos\theta & -sin\theta \\ sin\theta & cos\theta \end{bmatrix}\begin{bmatrix} a \\ b \end{bmatrix}$$

- Contoh :

1. Segitiga dengan titik sudut (2, 1), (4, 2), dan (1, 3) jika diputar dengan sudut $\frac{\pi}{2}$, maka akan terbentuk segitiga kembali.
2. Tentukan peta dari garis $2y - x = 1$, jika diputar sebesar $\theta = \frac{\pi}{4}$

Transformasi Khusus: Rotasi

Segitiga dengan titik sudut (2, 1), (4, 2), dan (1, 3) jika diputar dengan sudut $\frac{\pi}{2}$, maka akan terbentuk segitiga kembali.

$$T\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$$

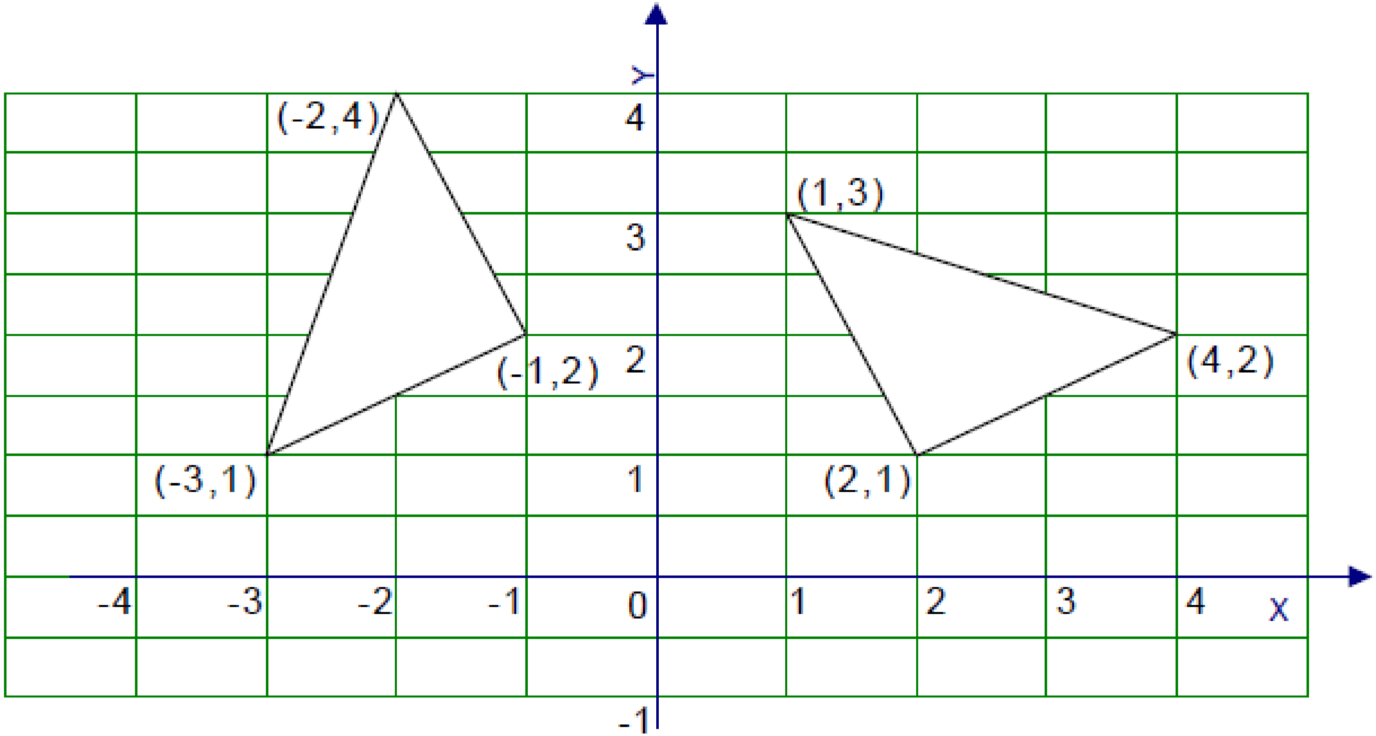
$$T\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\cos\left(\frac{\pi}{2}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{2}\right)\\ sin\left(\frac{\pi}{2}\right) & cos\left(\frac{\pi}{2}\right)\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}0 & -1\\1 & 0\end{bmatrix}\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$$

Transformasi Khusus: Rotasi

$$T\begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-1\\2\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}4\\2\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-2\\4\end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix}1\\3\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}-3\\1\end{bmatrix}$$



Transformasi Khusus: Rotasi

Tentukan peta dari garis $2y - x = 1$, jika diputar sebesar θ = π/ 4

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos(\theta) & -sin(\theta) \\ sin(\theta) & cos(\theta) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \cos\left(\frac{\pi}{4}\right) & -sin\left(\frac{\pi}{4}\right) \\ sin\left(\frac{\pi}{4}\right) & cos\left(\frac{\pi}{4}\right) \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2} & -\frac{1}{2}\sqrt{2} \\ \frac{1}{2}\sqrt{2} & \frac{1}{2}\sqrt{2} \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y \\ \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y \end{bmatrix}$$

$$x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y \qquad y' = \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y$$

Eliminasi

$$\begin{array}{rl} x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y & \\ y' = \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y & - \\ \hline x' - y' = -\sqrt{2}y & \end{array} \qquad \begin{array}{rl} x' = \frac{1}{2}\sqrt{2}x - \frac{1}{2}\sqrt{2}y & \\ y' = \frac{1}{2}\sqrt{2}x + \frac{1}{2}\sqrt{2}y & + \\ \hline x' + y' = \sqrt{2}x & \end{array}$$

$$y = \frac{y' - x'}{\sqrt{2}} \qquad x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Transformasi Khusus: Rotasi

Tentukan peta dari garis $2y - x = 1$, jika diputar sebesar θ = π/ 4

$$y = \frac{y' - x'}{\sqrt{2}} \qquad x = \frac{x' + y'}{\sqrt{2}}$$

Substitusi ke persamaan garis pada soal

$$2y - x = 1$$

$$2\left(\frac{y' - x'}{\sqrt{2}}\right) - \left(\frac{x' + y'}{\sqrt{2}}\right) = 1$$

Kalikan kedua ruas dengan $\sqrt{2}$

$$2(y' - x') - (x' + y') = \sqrt{2}$$

$$2y' - 2x' - x' - y' = \sqrt{2}$$

$$-3x' + y' = \sqrt{2}$$

Jadi persamaan garis setelah dirotasi:

$$-3x + y = \sqrt{2}$$

Transformasi Khusus: Pencerminan

Transformasi	Matriks Transformasi
• Pencerminan terhadap sumbu y	$\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$
• Pencerminan terhadap sumbu x	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix}$
• Pencerminan terhadap sumbu $y = x$	$\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{bmatrix}$

Transformasi Khusus: Pembesaran / Pengecilan

Transformasi	Matriks Transformasi	
• Pembesaran	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$k > 1$
• Pengecilan	$\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix}$	$0 < k < 1$
• Peregangan/ pemampatan searah sumbu x	$\begin{bmatrix} 1 & k \\ 0 & 1 \end{bmatrix}$	
• Peregangan/ pemampatan searah sumbu y	$\begin{bmatrix} 1 & 0 \\ k & 1 \end{bmatrix}$	

Contoh

1. Tentukan peta dari garis $2y - x = 1$, jika dicerminkan terhadap sumbu x.

2. Tentukan peta dari segi empat dengan titik sudut (0,0), (2, 1), (2, 0), dan (0, 1), jika diperbesar dengan faktor k = 4.

Contoh

$2y - x = 1$, dicerminkan thdp sumbu x.

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} x \\ y \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} x' \\ y' \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x \\ -y \end{bmatrix}$$

$x' = x \rightarrow x = x'$

$y' = -y \rightarrow y = -y'$

$2y - x = 1$

$2(-y') - x' = 1$

$-2y' - x' = 1$

$-2y - x = 1$

Tentukan peta dari segi empat dengan titik sudut (0,0), (2, 1), (2, 0), dan (0, 1), jika diperbesar dengan faktor k = 4.

Matriks transformasi $\begin{bmatrix} k & 0 \\ 0 & k \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix}$

$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$T\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 8 \\ 0 \end{bmatrix}$$

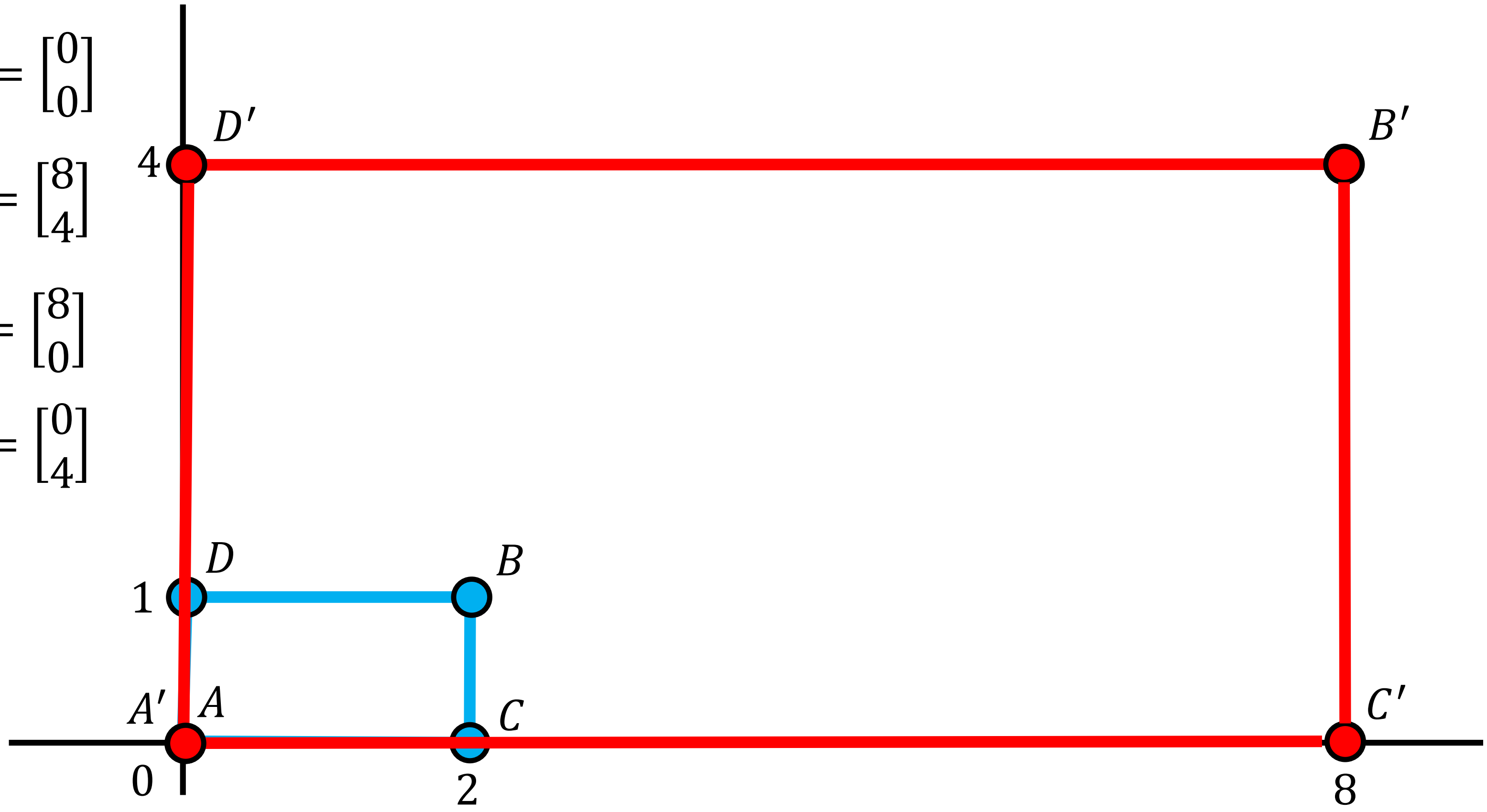
$$T\begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 4 & 0 \\ 0 & 4 \end{bmatrix} \begin{bmatrix} 0 \\ 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 4 \end{bmatrix}$$

$$A = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix} \quad A' = \begin{bmatrix}0\\0\end{bmatrix}$$

$$B = \begin{bmatrix}2\\1\end{bmatrix} \quad B' = \begin{bmatrix}8\\4\end{bmatrix}$$

$$C = \begin{bmatrix}2\\0\end{bmatrix} \quad C' = \begin{bmatrix}8\\0\end{bmatrix}$$

$$D = \begin{bmatrix}0\\1\end{bmatrix} \quad D' = \begin{bmatrix}0\\4\end{bmatrix}$$



Latihan Soal/Tugas

1. Tentukan peta dari garis $2y - x = 1$, jika dicerminkan terhadap sumbu y.

2. Tentukan peta dari segi empat dengan titik sudut (0,0), (2, 1), (2, 0), dan (0, 1), jika diperbesar dengan faktor k = 0.5.

3. Tentukan koordinat baru sebuah segitiga dengan titik sudut (2, 1), (4, 2), dan (1, 3) jika diputar dengan sudut π.
4. Tentukan peta dari garis $2y - x = 1$, jika diputar sebesar $\theta = 270$

Kernel

- Definisi
- Misalkan $L: V \to W$ suatu transformasi linear.
- Ruang Nol (kernel) dari L adalah

$$Ker(L) = \{v \epsilon V | L(v) = 0_W\}$$

Contoh Kernel

Tentukan kernel dari transformasi linier:

1. $L: R^3 \to R^3$ dengan $L(x) = (x_1, x_2, 0)^T$

2. $L: R^2 \to R^3$ dengan $L(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

3. $L: P_2 \to P_1$ dengan $L(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + \left(3a + \frac{3}{2}b - 3c\right)x$

Contoh 1

$L: R^3 \rightarrow R^3$ dengan $L(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$x_3 \epsilon R$$

$$\ker(L) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$\ker(L) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ x_3 \end{pmatrix}\right\}$$

$$ambil\ x_3 = 1$$

$$\ker(L) = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}\right\}$$

$Bukti$

$$L\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Contoh 2

$L: R^2 \to R^3$ dengan $L(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\begin{aligned} x_1 + x_2 &= 0 \\ -2x_1 + x_2 &= 0 \\ -x_1 + 2x_2 &= 0 \end{aligned} \Rightarrow \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\begin{bmatrix} 1 & 1 \\ -2 & 1 \\ -1 & 2 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ b_2 + 2b_1 \\ b_3 + b_1 \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 3 \end{bmatrix}\begin{array}{l} \\ \\ b_3 - b_2 \end{array}$$

$$\to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 3 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\frac{1}{3}b_2 \to \begin{bmatrix} 1 & 1 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}\begin{array}{l} b_1 - b_2 \\ \\ \\ \end{array} \to \begin{bmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{bmatrix}$$

$$x_1 = 0$$

$$x_2 = 0$$

$$\ker(L) = \left\{\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix}\right\} = \left\{\begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Contoh 3

$L: P_2 \to P_1$ dengan $L(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + \left(3a + \frac{3}{2}b - 3c\right)x$

$$L(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + \left(3a + \frac{3}{2}b - 3c\right)x = 0$$

$$2a + b - 2c = 0$$

$$3a + \frac{3}{2}b - 3c = 0 \Rightarrow 6a + 3b - 6c = 0$$

$Sederhanakan$

$$2a + b - 2c = 0 \Rightarrow \boxed{b = 2c - 2a}$$

$$\begin{aligned} \ker(L) &= \{a + bx + cx^2\} \\ &= \{a + (2c - 2a)x + cx^2\} \\ &= \{a - 2ax + 2cx + cx^2\} \\ &= \{a(1 - 2x) + c(2x + x^2)\} \\ &= \{(1 - 2x), (2x + x^2)\} \end{aligned}$$

Range

- Definisi
- Misalkan $L: V \to W$ suatu transformasi linier dan S adalah ruang bagian dari V.
- **Jangkauan** (*image*) dari S, ditulis $L(S)$, adalah
- $L(S) = \{w \epsilon W | w = L(v), untuk\ suatu\ v \epsilon S\}$
- Jangkauan dari V, yaitu $L(V)$ disebut **peta** (*range*) dari L.

Contoh Range

Tentukan range dari transformasi linier:

1. $L: R^3 \to R^3$ dengan $L(x) = (x_1, x_2, 0)^T$
2. $L: R^2 \to R^3$ dengan $L(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$
3. $L: P_2 \to P_1$ dengan $L(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + \left(3a + \frac{3}{2}b - 3c\right)x$

Contoh 1

$L: R^3 \to R^3$ dengan $L(x) = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix}$

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ 0 \end{pmatrix} = x_1\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} + x_2\begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$R(L) = \left\{\begin{pmatrix} 1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}\right\}$$

Contoh 2

$$L: R^2 \rightarrow R^3 \text{ dengan } L(x) = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix}$$

$$L\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x_1 + x_2 \\ -2x_1 + x_2 \\ -x_1 + 2x_2 \end{pmatrix} = x_1 \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix} + x_2 \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$R(L) = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -2 \\ -1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 2 \end{pmatrix} \right\}$$

Contoh 3

$L: P_2 \rightarrow P_1$ dengan $L(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + \left(3a + \frac{3}{2}b - 3c\right)x$

$$L(a + bx + cx^2) = (2a + b - 2c) + \left(3a + \frac{3}{2}b - 3c\right)x$$

$$= 2a + b - 2c + 3ax + \frac{3}{2}bx - 3cx$$

$$= a(2 + 3x) + b\left(1 + \frac{3}{2}x\right) + c(-2 - 3x)$$

$$R(L) = \left\{(2 + 3x), \left(1 + \frac{3}{2}x\right), (-2 - 3x)\right\}$$

Latihan

Tentukan kernel dan range dari transformasi linier berikut:

1. $$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b - c + d \\ 2b - c \\ a + d \\ 0 \end{bmatrix}$$

2. $$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = a + (a - b + c)x + (a + c - d)x^2 + (b - d)x^3$$

3. $$L\left(\begin{bmatrix} x_1 \\ x_2 \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 & 2x_1 - x_2 \\ 3x_2 & -x_1 + 2x_2 \end{bmatrix}$$

Latihan 1

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b - c + d \\ 2b - c \\ a + d \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Kernel**

$$\begin{bmatrix} a + 2b - c + d \\ 2b - c \\ a + d \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$a + 2b - c + d = 0$$

$$2b - c = 0 \ \rightarrow \ c = 2b$$

$$a + d = 0 \ \rightarrow \ a = -d$$

$$\ker(L) = \left\{\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} -d & b \\ 2b & d \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{b\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

$$= \left\{\begin{bmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{bmatrix}\right\}$$

Latihan 1

$$L\left(\begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}\right) = \begin{bmatrix} a + 2b - c + d \\ 2b - c \\ a + d \\ 0 \end{bmatrix}$$

- **Range**

$$\begin{bmatrix} a + 2b - c + d \\ 2b - c \\ a + d \\ 0 \end{bmatrix} = a\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + b\begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + \mathrm{c}\begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + d\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}$$

$$\mathrm{R}(L) = \left\{\begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 2 \\ 2 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} -1 \\ -1 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix}\right\}$$

Terima Kasih

Sampai Jumpa
di Pertemuan Selanjutnya