PROGRAM STUDI TEKNIK FISIKA
FAKULTAS TEKNIK DAN INFORMATIKA
UNIVERSITAS MULTIMEDIA NUSANTARA
SEMESTER GANJIL TAHUN AJARAN 2024/2025

UNIVERSITAS MULTIMEDIA NUSANTARA

EP 104 – LINEAR ALGEBRA

Pertemuan 10:
Ortogonalitas

Firstka Helianta MS, S.Si., M.Si

Capaian Pembelajaran Mingguan Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Mahasiswa dapat mencari basis yang ortogonal dengan menggunakan metode Gram-Schmidt. – (C3);

Sub-Pokok Bahasan

- Ortogonalitas

Hasil Kali Skalar di R^2

- Hasil kali skalar dari vektor $X = (x_1, x_2, \dots, x_n)^T$ dan $Y = (y_1, y_2, \dots, y_n)^T$ di R^n adalah

$$X^TY = x_1y_1 + x_2y_2 + \cdots + x_ny_n$$

- Contoh:

- Jika $X = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ dan $Y = \begin{pmatrix} -3 \\ 1 \end{pmatrix}$ maka

$$X^TY = (2)(-3) + (-1)(1)$$

$$X^TY = -6 - 1$$

$$X^TY = -7$$

Hasil Kali Skalar di R^2

- Panjang dari vektor X adalah

$$|X| = \sqrt{X^T X}$$

$$|X| = \begin{cases} \sqrt{x_1^2 + x_2^2} & untuk\ X\ di\ R^2 \\ \sqrt{x_1^2 + x_2^2 + x_3^2} & untuk\ X\ di\ R^3 \end{cases}$$

Contoh

1. Panjang dari $x = \begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}$ adalah

$$|x| = \sqrt{x^T x} = \sqrt{\begin{pmatrix} 2 & -1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 2 \\ -1 \end{pmatrix}} = \sqrt{2^2 + (-1)^2} = \sqrt{4+1} = \sqrt{5}$$

2. Panjang dari $y = \begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}$ adalah

$$|y| = \sqrt{y^T y} = \sqrt{\begin{pmatrix} -2 & 2 & 1 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} -2 \\ 2 \\ 1 \end{pmatrix}} = \sqrt{(-2)^2 + (2)^2 + (1)^2}$$

$$= \sqrt{4+4+1} = \sqrt{9} = 3$$

Hasil Kali Skalar di R^2

- Jika X dan Y dua vektor taknol di R^2 atau R^3 dan θ sudut di antaranya, maka

$$X^T Y = |X||Y| \cos\theta$$

- Jika X dan Y dua vektor taknol, maka arah vektor dapat diberikan dengan vektor satuan

$$u = \frac{1}{|X|} X \text{ dan } v = \frac{1}{|Y|} Y$$

- Dan

$$\cos\theta = \frac{X^T Y}{|X||Y|} = u^T v$$

Ortogonalitas

- Vektor-vektor X dan Y di R^2 atau di R^3 dikatakan **Ortogonal** jika

$$\boxed{X^T Y = 0}$$

$$|X||Y| \cos \theta = 0$$
$$\cos \theta = 0$$
$$\theta = 90^o$$

- X dan Y dua vektor yang saling tegak lurus.

Contoh

1. Vektor $X = (2 \quad 1)^T$ dan $Y = (4 \quad -8)^T$ adalah ortogonal di R^2 karena
$$X^T Y = (2 \quad 1)\begin{pmatrix} 4 \\ -8 \end{pmatrix} = 8 - 8 = 0$$

2. Vektor $O_{R^2} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \end{pmatrix}$ selalu ortogonal dengan setiap vektor di R^2.

Proyeksi Skalar dan Proyeksi Vektor

- Proyeksi **skalar** dari X pada Y adalah

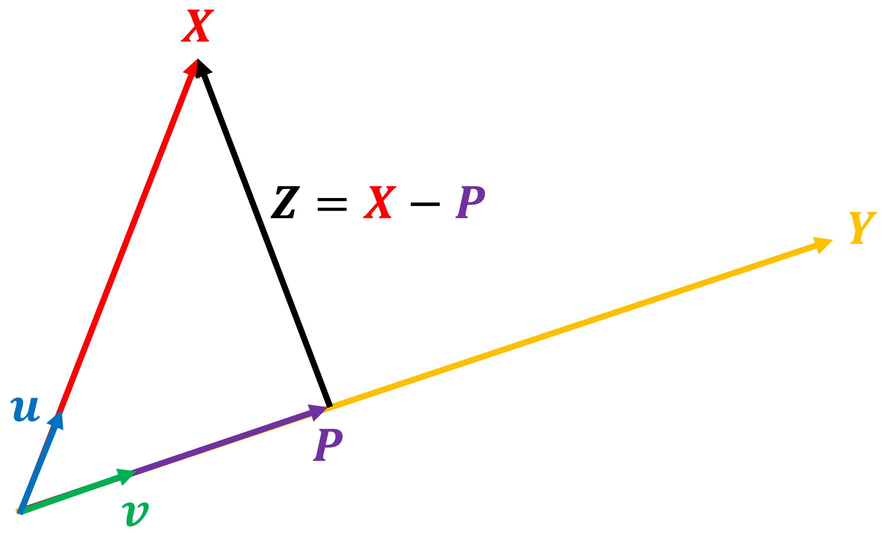
$$\alpha = \frac{X^T Y}{|Y|}$$

- Proyeksi **vektor** dari X pada Y adalah

$$P = \alpha v = \alpha \frac{1}{|Y|} Y = \frac{X^T Y}{Y^T Y} Y$$

Proyeksi Skalar dan Proyeksi Vektor

Ilustrasi Geometrik



Contoh

Untuk setiap pasang vektor X dan Y berikut, tentukan :

a. Sudut antara dua vektor
b. α, yaitu proyeksi skalar dari X pada Y
c. Vektor $\boldsymbol{P}$, yaitu proyeksi vektor dari X pada Y
d. Buktikan bahwa $\boldsymbol{P}$ dan $\boldsymbol{X} - \boldsymbol{P}$ adalah ortogonal

i. $X = (3 \quad 5)^T$ dan $Y = (1 \quad 1)^T$
ii. $X = (-2 \quad 3 \quad 1)^T$ dan $Y = (1 \quad 2 \quad 4)^T$

Contoh

$$|X| = \sqrt{3^2 + 5^2} = \sqrt{9 + 25} = \sqrt{34}$$

$$|Y| = \sqrt{1^2 + 1^2} = \sqrt{1 + 1} = \sqrt{2}$$

$$X^T Y = (3 \quad 5)\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = 3 + 5 = 8$$

$X = (3 \quad 5)^T$ dan $Y = (1 \quad 1)^T$

a. Sudut antara dua vektor

$$cos\theta = \frac{X^T Y}{|X||Y|} = \frac{8}{\sqrt{34}.\sqrt{2}} = \frac{8}{2\sqrt{17}} = \frac{4}{17}\sqrt{17} \longrightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{4}{17}\sqrt{17}\right) = 14{,}03°$$

b. α, yaitu proyeksi skalar dari X pada Y

$$\alpha = \frac{X^T Y}{|Y|} = \frac{8}{\sqrt{2}} = 4\sqrt{2}$$

c. Vektor P, yaitu proyeksi vektor dari X pada Y

$$P = \alpha v = \alpha \frac{1}{|Y|} Y = 4\sqrt{2}.\frac{1}{\sqrt{2}}\begin{pmatrix}1\\1\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix}$$

d. Buktikan bahwa P dan $X - P$ adalah ortogonal

$$Z = X - P = \begin{pmatrix}3\\5\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}4\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} \qquad P^T Z = (4 \quad 4)\begin{pmatrix}-1\\1\end{pmatrix} = -4 + 4 = 0 \ \ \textbf{Terbukti}$$

Contoh

$X = (-2 \quad 3 \quad 1)^T$ dan $Y = (1 \quad 2 \quad 4)^T$

$$|X| = \sqrt{(-2)^2 + 3^2 + 1^2} = \sqrt{4+9+1} = \sqrt{14}$$

$$|Y| = \sqrt{1^2 + 2^2 + 4^2} = \sqrt{1+4+16} = \sqrt{21}$$

$$X^T Y = (-2 \quad 3 \quad 1)\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = -2+6+4 = 8$$

a. Sudut antara dua vektor

$$cos\theta = \frac{X^T Y}{|X||Y|} = \frac{8}{\sqrt{14}.\sqrt{21}} = \frac{8}{7\sqrt{6}} = \frac{4}{21}\sqrt{6} \longrightarrow \theta = cos^{-1}\left(\frac{4}{21}\sqrt{6}\right) = 62{,}19°$$

b. α, yaitu proyeksi skalar dari x pada y

$$\alpha = \frac{X^T Y}{|Y|} = \frac{8}{\sqrt{21}} = \frac{8}{21}\sqrt{21}$$

c. Vektor **p**, yaitu proyeksi vektor dari x pada y

$$p = \alpha v = \alpha\frac{1}{|Y|}Y = \frac{8}{21}\sqrt{21}.\frac{1}{\sqrt{21}}\begin{pmatrix}1\\2\\4\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8/21\\16/21\\32/21\end{pmatrix}$$

d. Buktikan bahwa **p** dan **x – p** adalah ortogonal

$$Z = X - p = \begin{pmatrix}-2\\3\\1\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}8/21\\16/21\\32/21\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-50/21\\47/21\\-11/21\end{pmatrix}$$

$$p^T Z = \begin{pmatrix}\frac{8}{21} & \frac{16}{21} & \frac{32}{21}\end{pmatrix}\begin{pmatrix}-50/21\\47/21\\-11/21\end{pmatrix}$$

$$p^T Z = -\frac{400}{441} + \frac{752}{441} - \frac{352}{441}$$

$$p^T Z = 0 \quad \boldsymbol{Terbukti}$$

Metode Gram-Schmidt

- Metode Gram-Schmidt adalah salah satu metode yang digunakan untuk membuat suatu vektor ortonormal.
- Sepasang vektor dikatakan ortonormal jika mereka saling tegak lurus dan Panjang resultannya adalah 1

Contoh Soal

1. Tentukan basis ortonormal dari vector (1, 2, 2), (-1, 0, 2) dan (0, 0, 1).

Pertama : cek ortogonalitas dan ortonormalitas

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix} = \big(1\times(-1)\big)+(2\times 0)+(2\times 2)$$
$$= -1+0+4$$
$$= 3$$
$$\neq 0 \text{ (tidak ortogonal)}$$

$$\begin{pmatrix}1\\2\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = (1\times 0)+(2\times 0)+(2\times 1)$$
$$= 0+0+2$$
$$= 2$$
$$\neq 0 \text{ (tidak ortogonal)}$$

$$\begin{pmatrix}-1\\0\\2\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}0\\0\\1\end{pmatrix} = \big((-1)\times 0\big)+(0\times 0)+(2\times 1)$$
$$= 0+0+2$$
$$= 2$$
$$\neq 0 \text{ (tidak ortogonal)}$$

Contoh Soal

1. Tentukan basis ortonormal dari vector (1, 2, 2), (-1, 0, 2) dan (0, 0, 1).

Kedua : gunakan metode GS untuk mencari basis ortogonalnya.

$$e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_2 = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \quad e_3 = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}$$

$$v_1 = e_1 = \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal

1. Tentukan basis ortonormal dari vector (1, 2, 2), (-1, 0, 2) dan (0, 0, 1).

Gunakan persamaan GS untuk mencari basis ortogonalnya

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$$v_4 = e_4 - \frac{\langle e_4, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle e_4, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2 - \frac{\langle e_4, v_3 \rangle}{\langle v_3, v_3 \rangle} v_3$$

Contoh Soal

Masukan vector-vector yang diketahui ke persamaan GS

$$v_2 = e_2 - \frac{\langle e_2, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}}{\begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\big((-1) \times 1\big) + (0 \times 2) + (2 \times 2)}{(1 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{(-1) + 0 + 4}{1 + 4 + 4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{3}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 2 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal

$$v_3 = e_3 - \frac{\langle e_3, v_1 \rangle}{\langle v_1, v_1 \rangle} v_1 - \frac{\langle e_3, v_2 \rangle}{\langle v_2, v_2 \rangle} v_2$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{(0 \times 1) + (0 \times 2) + (1 \times 2)}{(1 \times 1) + (2 \times 2) + (2 \times 2)} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\left(0 \times \left(-\frac{4}{3}\right)\right) + \left(0 \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(1 \times \frac{4}{3}\right)}{\left(-\frac{4}{3} \times \left(-\frac{4}{3}\right)\right) + \left(-\frac{2}{3} \times \left(-\frac{2}{3}\right)\right) + \left(\frac{4}{3} \times \frac{4}{3}\right)} \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{0 + 0 + 2}{1 + 4 + 4} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{0 + 0 + \frac{4}{3}}{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \frac{2}{9} \begin{pmatrix} 1 \\ 2 \\ 2 \end{pmatrix} - \frac{\left(\frac{4}{3}\right)}{\left(\frac{36}{9}\right)} \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/9 \\ 4/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} - \frac{1}{3} \begin{pmatrix} -4/3 \\ -2/3 \\ 4/3 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} 2/9 \\ 4/9 \\ 4/9 \end{pmatrix} - \begin{pmatrix} -4/9 \\ -2/9 \\ 4/9 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} 2/9 \\ -2/9 \\ 1/9 \end{pmatrix}$$

Contoh Soal

Cek ortonormalitas hasil ortogonalisasi vector tersebut

$$
\begin{aligned}
|v_1| &= \sqrt{1^2 + 2^2 + 2^2} \\
&= \sqrt{1 + 4 + 4} \\
&= \sqrt{9} \\
&= 3 \\
&\neq 1 \text{ (belum ortonormal)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|v_2| &= \sqrt{\left(-\frac{4}{3}\right)^2 + \left(-\frac{2}{3}\right)^2 + \left(\frac{4}{3}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{16}{9} + \frac{4}{9} + \frac{16}{9}} \\
&= \sqrt{\frac{36}{9}} \\
&= \sqrt{4} \\
&= 2 \\
&\neq 1 \text{ (belum ortonormal)}
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
|v_3| &= \sqrt{\left(\frac{2}{9}\right)^2 + \left(-\frac{2}{9}\right)^2 + \left(\frac{1}{9}\right)^2} \\
&= \sqrt{\frac{4}{81} + \frac{4}{81} + \frac{1}{81}} \\
&= \sqrt{\frac{9}{81}} \\
&= \sqrt{\frac{1}{9}} \\
&= \frac{1}{3} \\
&\neq 1 \text{ (belum ortonormal)}
\end{aligned}
$$

Contoh Soal

Tentukan vektor normal nya

$$u_1 = \frac{v_1}{|v_1|} = \begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$u_2 = \frac{v_2}{|v_2|} = \begin{pmatrix} -4/6 \\ -2/6 \\ 4/6 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}$$

$$u_3 = \frac{v_3}{|v_3|} = \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}$$

$$\boxed{\begin{pmatrix} 1/3 \\ 2/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} -2/3 \\ -1/3 \\ 2/3 \end{pmatrix}, \text{dan} \begin{pmatrix} 2/3 \\ -2/3 \\ 1/3 \end{pmatrix}}$$

Latihan

Untuk setiap pasang vektor x dan y berikut, tentukan :

$$X = (2 \quad -5 \quad 4)^T \text{ dan } Y = (1 \quad 2 \quad -1)^T$$

a. Sudut antara dua vektor
b. α, yaitu proyeksi skalar dari x pada y
c. Vektor **p**, yaitu proyeksi vektor dari x pada y
d. Buktikan bahwa **p** dan **x – p** adalah ortogonal
e. β, yaitu proyeksi skalar dari y pada x
f. Vektor **q**, yaitu proyeksi vektor dari y pada x
g. Buktikan bahwa **q** dan **y – q** adalah ortogonal

Terima Kasih

Sampai Jumpa di Pertemuan Selanjutnya