PROGRAM STUDI TEKNIK KOMPUTER
FAKULTAS TEKNIK DAN INFORMATIKA
UNIVERSITAS MULTIMEDIA NUSANTARA
SEMESTER GANJIL TAHUN AJARAN 2024/2025

CE 121 – LINEAR ALGEBRA

Pertemuan 2
Matriks

Firstka Helianta MS, S.Si., M.Si

Capaian Pembelajaran Mingguan Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Mahasiswa mampu menghitung determinan matrik dengan menggunakan metode Ekspansi Kofaktor.
2. Mahasiswa mampu menghitung invers matrik dengan metode Ekspansi Kofaktor dan Operasi Baris Elementer.

Sub-Pokok Bahasan

1. Perhitungan determinan matrik dengan metode Ekspansi Kofaktor
2. Perhitungan determinan matrik dengan metode Operasi Baris Elementer
3. Sifat-sifat determinan matrik
4. Matrik invertible vs non invertible
5. Matriks elementer
6. Perhitungan invers matrik dengan metode Ekspansi Kofaktor
7. Perhitungan invers matrik dengan metode Operasi Baris Elementer
8. Sifat-sifat invers matrik

Determinan Matriks

- Setiap matriks persegi atau bujur sangkar memiliki nilai determinan
- Nilai determinan dari suatu matriks merupakan suatu skalar.
- Jika nilai determinan suatu matriks sama dengan nol, maka matriks tersebut disebut matriks singular.

Determinan Matriks

- Misalkan matriks A merupakan sebuah matriks bujur sangkar
- Fungsi determinan dinyatakan oleh det (A)
- Jumlah det(A) disebut determinan A
- det(A) sering dinotasikan |A|

Determinan Matriks

- Pada matriks 2x2 cara menghitung nilai determinannya adalah :

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix} \quad \det(A) = a_{11}a_{22} - a_{12}a_{21}$$

- Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{pmatrix} \quad \det(A) = \begin{vmatrix} 2 & 5 \\ 1 & 3 \end{vmatrix} \quad \det(A) = 6 - 5 = 1$$

Metode Sarrus

- ➢ Pada matriks 3x3 cara menghitung nilai determinannya adalah menggunakan Metode Sarrus
- ➢ Metode Sarrus hanya untuk matriks berdimensi 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \qquad |A| = \left| \begin{array}{ccc|cc} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{31} & a_{32} \end{array} \right.$$

$$\det(A) = a_{11}a_{22}a_{33} + a_{12}a_{23}a_{31} + a_{13}a_{21}a_{32} - a_{31}a_{22}a_{13} - a_{32}a_{23}a_{11} - a_{33}a_{21}a_{12}$$

Metode Sarrus

- Contoh :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix} \qquad |A| = \left|\begin{matrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{matrix}\right| \begin{matrix} -2 & 2 \\ -1 & 1 \\ 2 & 0 \end{matrix}$$

- Nilai Determinan dicari menggunakan metode Sarrus
- $\det(A) = (-2)(1)(-1) + (2)(3)(2) + (-3)(-1)(0)$

$$-(-3)(1)(2) - (-2)(3)(0) - (2)(-1)(-1)$$

$$= 2 + 12 + 0 + 6 - 0 - 2$$

$$= 18$$

Minor

- Yang dimaksud dengan MINOR unsur a_{ij} adalah determinan yang berasal dari determinan orde ke-n tadi dikurangi dengan baris ke-i dan kolom ke-j.
- Dinotasikan dengan M_{ij}
- Contoh Minor dari elemen a_{11}

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{41} & a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{pmatrix} \quad M_{11} = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} & a_{24} \\ a_{32} & a_{33} & a_{34} \\ a_{42} & a_{43} & a_{44} \end{vmatrix}$$

Minor

- Minor-minor dari Matrik A (ordo 3x3)

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{11}| = \begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{21}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{31}| = \begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{12}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{22}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{32}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{13}| = \begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{23}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}$$

$$A=\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix} \quad |M_{33}| = \begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}$$

Kofaktor

- Kofaktor dari baris ke-i dan kolom ke-j dituliskan dengan

$$c_{ij} = (-1)^{i+j} M_{ij}$$

- Contoh :

  Kofaktor dari elemen a_{23}

  $$c_{23} = (-1)^{2+3} M_{23} = -M_{23}$$

$$\begin{bmatrix} + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ + & - & + & - & + & \cdots \\ - & + & - & + & - & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \end{bmatrix}$$

Teorema Laplace

Determinan dari suatu matriks sama dengan jumlah perkalian elemen-elemen dari sembarang baris atau kolom dengan kofaktor-kofaktornya

Ekspansi Baris

$$|A| = \sum_{j=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{i1}c_{i1} + a_{i2}c_{i2} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{in}c_{in}$$

Ekspansi Kolom

$$|A| = \sum_{i=1}^{n} a_{ij}c_{ij} = a_{1j}c_{1j} + a_{2j}c_{2j} + \ldots\ldots\ldots\ldots + a_{nj}c_{nj}$$

Teorema Laplace

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor Pada Baris

- Misalkan ada sebuah matriks A berordo 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris pertama

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}| &= a_{11}c_{11} + a_{12}c_{12} + a_{13}c_{13} \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{12}|M_{12}| + a_{13}|M_{13}| \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Teorema Laplace

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris kedua

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{21}c_{21} + a_{22}c_{22} + a_{23}c_{23} \\
&= -\ a_{21}|M_{21}| + a_{22}|M_{22}| - a_{23}|M_{23}| \\
&= -\,a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor baris ketiga

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{31}c_{31} + a_{32}c_{32} + a_{33}c_{33} \\
&= a_{31}|M_{31}| - a_{32}|M_{32}| + a_{33}|M_{33}| \\
&= a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Teorema Laplace

Determinan dengan Ekspansi Kofaktor Pada Kolom

- Misalkan ada sebuah matriks A berordo 3x3

$$A = \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} \end{pmatrix}$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom pertama

$$\begin{aligned} |\mathrm{A}| &= a_{11}c_{11} + a_{21}c_{21} + a_{31}c_{31} \\ &= a_{11}|M_{11}| - a_{21}|M_{21}| + a_{31}|M_{31}| \\ &= a_{11}\begin{vmatrix} a_{22} & a_{23} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{21}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{32} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{31}\begin{vmatrix} a_{12} & a_{13} \\ a_{22} & a_{23} \end{vmatrix} \end{aligned}$$

Teorema Laplace

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom kedua

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{12}c_{12} + a_{22}c_{22} + a_{32}c_{32} \\
&= -\ a_{12}\left|M_{12}\right| + a_{22}\left|M_{22}\right| - a_{32}\left|M_{32}\right| \\
&= -\ a_{12}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{23} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} + a_{22}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{31} & a_{33} \end{vmatrix} - a_{32}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{13} \\ a_{21} & a_{23} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

- Determinan Matriks A dengan metode ekspansi kofaktor kolom ketiga

$$
\begin{aligned}
|A| &= a_{13}c_{13} + a_{23}c_{23} + a_{33}c_{33} \\
&= a_{13}\left|M_{13}\right| - a_{23}\left|M_{23}\right| + a_{33}\left|M_{33}\right| \\
&= a_{13}\begin{vmatrix} a_{21} & a_{22} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} - a_{23}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{31} & a_{32} \end{vmatrix} + a_{33}\begin{vmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{vmatrix}
\end{aligned}
$$

Teorema Laplace

Tentukan determinan matriks berikut menggunakan teorema Laplace

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ -1 & 1 & 3 \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

Teorema Laplace

Ekspansi baris ke- 2

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 & -3 \\ \boxed{-1 \quad 1 \quad 3} \\ 2 & 0 & -1 \end{pmatrix}$$

$$|A| = a_{21}C_{21} + a_{22}C_{22} + a_{23}C_{23}$$

$$|A| = -a_{21}M_{21} + a_{22}M_{22} - a_{23}M_{23}$$

$$|A| = -(-1)\begin{vmatrix} 2 & -3 \\ 0 & -1 \end{vmatrix} + (1)\begin{vmatrix} -2 & -3 \\ 2 & -1 \end{vmatrix} - (3)\begin{vmatrix} -2 & 2 \\ 2 & 0 \end{vmatrix}$$

$$|A| = 1(-2) + 1.(8) - 3(-4)$$

$$|A| = -2 + 8 + 12$$

$$|A| = 18$$

Determinan Matriks Segitiga

- Jika A adalah matriks segitiga bujur sangkar berupa segitiga atas atau segitiga bawah maka nilai det(A) adalah hasil kali diagonal matriks tersebut

$$\det(A) = a_{11} \cdot a_{22} \cdot a_{33} \cdots dst$$

- Contoh

$$\begin{bmatrix} 2 & 7 & -3 & 8 & 3 \\ 0 & -3 & 7 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 6 & 7 & 6 \\ 0 & 0 & 0 & 9 & 8 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 4 \end{bmatrix}$$

$$\det(A) = 2 \cdot (-3) \cdot 6 \cdot 9 \cdot 4 = -1296$$

Determinan

Tentukan determinan $A = \begin{bmatrix} 2 & 2 & -2 \\ 1 & 2 & 3 \\ 2 & 3 & 4 \end{bmatrix}$ dengan menggunakan metode:

A. Sarrus
B. Teorema Laplace – Baris
C. Teorema Laplace – Kolom
D. Invers
E. Invers Gauss Jordan

Transpose Matriks

- Jika A adalah suatu matriks m x n, maka tranpose A dinyatakan oleh A^t dan didefinisikan dengan matriks n x m yang kolom pertamanya adalah baris pertama dari A, kolom keduanya adalah baris kedua dari A, demikian juga dengan kolom ketiga adalah baris ketiga dari A dan seterusnya.
- Contoh :

  matriks A : $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 1 \\ 4 & 1 & 3 \end{bmatrix}$ berordo 2 x 3

  transposenya : $A^t = \begin{bmatrix} 1 & 4 \\ 3 & 1 \\ 1 & 3 \end{bmatrix}$ berordo 3 x 2

Transpose Matriks

Beberapa Sifat Matriks Transpose :

$$1. (A+B)^T = A^T + B^T$$

$$2. (A^T)^T = A$$

$$3. (AB)^T = B^T A^T$$

$$4. (kA)^T = kA^T$$

Transpose Matriks

Pembuktian aturan no1 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A + B = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{12} & b_{13} \\ b_{21} & b_{22} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{12} + b_{12} & a_{13} + b_{13} \\ a_{21} + b_{21} & a_{22} + b_{22} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

$$(A + B)^T = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} \\ a_{13} + b_{13} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

TERBUKTI

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} \quad B^T = \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix}$$

$$A^T + B^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} b_{11} & b_{21} \\ b_{12} & b_{22} \\ b_{13} & b_{23} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} a_{11} + b_{11} & a_{21} + b_{21} \\ a_{12} + b_{12} & a_{22} + b_{22} \\ a_{13} + b_{13} & a_{23} + b_{23} \end{bmatrix}$$

Transpose Matriks

Pembuktian aturan no 2 :

$$A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

$$A^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}$$

TERBUKTI

$$(A^T)^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{21} \\ a_{12} & a_{22} \\ a_{13} & a_{23} \end{bmatrix}^T = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} \end{bmatrix}$$

Matriks Simetri

Sebuah matriks dikatakan simetri apabila hasil dari transpose matriks A sama dengan matriks A itu sendiri.

$$\boxed{A^T = A}$$

Contoh :

1. $A = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$

$$A^T = \begin{bmatrix} 1 & 3 & 2 \\ 3 & 0 & 0 \\ 2 & 0 & 0 \end{bmatrix}$$

2. $B = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$

$$B^T = \begin{bmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 2 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

- Matriks invers dari suatu matriks A adalah matriks B yang apabila dikalikan dengan matriks A memberikan satuan I
- ***AB* = *I***
- Notasi matriks invers : A^{-1}
- Sebuah matriks yang dikalikan matriks inversenya akan menghasilkan matrik satuan

- Jika $A^{-1}A = I$

$$A = \begin{bmatrix} a & b \\ c & d \end{bmatrix}$$ Maka $$\boxed{A^{-1} = \frac{1}{ad - bc}\begin{bmatrix} d & -b \\ -c & a \end{bmatrix}}$$

Invers Matriks

- Langkah-langkah untuk mencari invers matriks M yang berordo 3x3 adalah :
  - Cari determinan dari M
  - Transpose matriks M sehingga menjadi M^T
  - Cari minor tiap unsur dari M^T
  - Cari Kofaktor tiap unsur dari M^T
  - Cari adjoin matriks
  - Gunakan rumus

$$M^{-1} = \frac{1}{\det(M)}(adjoin(M))$$

Invers Matriks

- Contoh Soal :

$$M = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

- Cari Determinannya :

det(M) = 1(0-24)-2(0-20)+3(0-5) = 1

- Transpose matriks M

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

Temukan matriks kofaktor dengan menghitung minor-minor matriksnya

$$M^T = \begin{bmatrix} 1 & 0 & 5 \\ 2 & 1 & 6 \\ 3 & 4 & 0 \end{bmatrix}$$

$$M_{11} = \begin{vmatrix} 1 & 6 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -24 \qquad M_{12} = \begin{vmatrix} 2 & 6 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -18 \qquad M_{13} = \begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 5$$

$$M_{21} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 4 & 0 \end{vmatrix} = -20 \qquad M_{22} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 3 & 0 \end{vmatrix} = -15 \qquad M_{23} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 3 & 4 \end{vmatrix} = 4$$

$$M_{31} = \begin{vmatrix} 0 & 5 \\ 1 & 6 \end{vmatrix} = -5 \qquad M_{32} = \begin{vmatrix} 1 & 5 \\ 2 & 6 \end{vmatrix} = -4 \qquad M_{33} = \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} = 1$$

Hasilnya:

$$\begin{bmatrix} -24 & -18 & 5 \\ -20 & -15 & 4 \\ -5 & -4 & 1 \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{bmatrix} \Rightarrow \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Invers Matriks

Hasil Adjoint: $\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$

Hasil Invers:

$$M^{-1} = \frac{1}{1}\begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss Jordan – Invers Matriks

- Metode **Eliminasi Gauss-Jordan** bertujuan untuk mengubah matriks **A menjadi matriks diagonal** (matriks identitas), yaitu semua elemen pada diagonal matriks bernilai 1, sedangkan semua elemen lainnya bernilai nol
- [A | I] → [I | A^{-1}]

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \rightarrow \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right)$$

Maka $$A^{-1} = \begin{bmatrix} -24 & 18 & 5 \\ 20 & -15 & -4 \\ -5 & 4 & 1 \end{bmatrix}$$

Eliminasi Gauss Jordan – Invers Matriks

$$A = \begin{bmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 0 & 1 & 4 \\ 5 & 6 & 0 \end{bmatrix}$$

$$[A|I] \rightarrow [I|A^{-1}]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right]$$

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 5 & 6 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right] b_3 - 5b_1$$

- Kurangkan baris 3 dengan 5 × baris 1

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -4 & -15 & -5 & 0 & 1 \end{array}\right] b_3 + 4b_2$$

- Tambahkan baris 3 dengan 4 × baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 3 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] b_1 - 3b_3$$

- Kurangkan baris 1 dengan 3 × baris 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 4 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] b_2 - 4b_3$$

- Kurangkan baris 2 dengan 4 × baris 3

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 2 & 0 & 16 & -12 & -3 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right] b_1 - 2b_2$$

- Kurangkan baris 1 dengan 2 × baris 2

$$\left[\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & -24 & 18 & 5 \\ 0 & 1 & 0 & 20 & -15 & -4 \\ 0 & 0 & 1 & -5 & 4 & 1 \end{array}\right]$$

Maka Invers Matriks A:

$$\boldsymbol{A^{-1}} = \begin{bmatrix} \mathbf{-24} & \mathbf{18} & \mathbf{5} \\ \mathbf{20} & \mathbf{-15} & \mathbf{-4} \\ \mathbf{-5} & \mathbf{4} & \mathbf{1} \end{bmatrix}$$

Latihan

Tentukan invers matriks berikut

$$A = \begin{bmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 1 & 1 & 0 \\ 3 & 1 & -1 \end{bmatrix}$$

dengan menggunakan metode:

A. Invers

B. Eliminasi Gauss-Jordan

Terima Kasih

Sampai Jumpa di Pertemuan Selanjutnya