

4

TABULASI QUINE-McCLUSKEY

Untuk fungsi-fungsi dengan cacah peubah yang lebih besar dari 6, terlebih untuk sistem dengan keluaran ganda (MIMO, Multiple Input Multiple Output) di mana beberapa keluaran harus disederhanakan secara serentak, pemakaian peta Karnaugh menjadi sangat sulit. Disamping itu, bila suatu kotak dalam peta Karnaugh mempunyai kemungkinan penggabungan dengan beberapa kotak berdekatan, sering kita tak dapat segera menentukan penggabungan mana yang terbaik. Kesulitan-kesulitan ini dapat diatasi oleh metoda tabulasi yang diajukan oleh Quine dan disempurnakan oleh McCluskey, dan karena itu disebut metoda Quine-McCluskey.

Walaupun metoda tabulasi sedikit membosankan bila dilakukan dengan tangan (manual), tetapi penyederhanaan metoda ini sangat sistematis dan cocok untuk penyederhanaan dengan memakai komputer digital. Tidak ada batasan untuk jumlah peubah dan juga dapat dipakai untuk sistem dengan keluaran ganda. Tetapi fungsi yang akan disederhanakan dengan metoda tabulasi haruslah dalam bentuk jumlah perkalian. Bila fungsi itu masih dalam bentuk perkalian-jumlah, maka terlebih dahulu harus diubah ke bentuk jumlah-perkalian.

4.1 Pengertian Penyusun Utama

Dalam bab sebelumnya telah dijelaskan bahwa fungsi Boole dapat dinyatakan dalam dua bentuk, yaitu jumlah-perkalian atau perkalian-jumlah. Dalam pernyataan dalam bentuk perkalian-jumlah, fungsi itu akan berharga 0 bila salah satu suku-jumlah (sukumax) yang membentuk fungsi itu berharga 0. Dalam pernyataan dalam bentuk jumlah-perkalian, fungsi itu akan berharga 1 bila setiap salah satu suku-perkalian (sukumin) yang membentuk fungsi itu berharga 1. Pada umumnya, fungsi Boole merupakan fungsi daripada suku-suku yang membuat fungsi itu berharga 1. Setiap suku dalam suatu fungsi yang bila berharga 1 akan membuat fungsi itu berharga 1, untuk semua kombinasi peubah yang mungkin, disebut "suku penyusun" (implicant). Jadi, setiap sukumin yang menyusun fungsi dalam bentuk jumlah-perkalian merupakan suku penyusun fungsi itu.

Sebagaimana juga telah ditunjukkan dalam bab sebelumnya, beberapa sukumin dapat bergabung membentuk suku baru yang lebih sederhana yang terdiri atas literal yang lebih sedikit. Suku-suku penyusun yang tidak dapat lagi disederhanakan, artinya cacah literalnya tak dapat lagi dikurangi tanpa kehilangan fungsinya sebagai suku penyusun bersangkutan, disebut sebagai "penyusun utama" (prime implicant). Jadi, walaupun setiap sukumin dalam fungsi perkalian-jumlah meru-

pakan penyusun, pada umumnya tidak semuanya menjadi penyusun utama fungsi itu. Misalnya, fungsi $f = ABC + \bar{A}BC = \bar{B}C$ mempunyai suku penyusun $\bar{A}BC$ dan $\bar{A}BC$. Tetapi kedua suku penyusun ini bukanlah penyusun utama sebab literal \bar{A} dan A dapat dihilangkan dengan penggabungan kedua penyusun yang menghasilkan $\bar{B}C$ yang juga suku penyusun. Tetapi $\bar{B}C$ adalah penyusun utama (prime implicant) sebab tak ada literalnya yang dapat dihilangkan dan masih menghasilkan penyusun baru.

Penyederhanaan fungsi Boole dengan metoda tabulasi Quine-McCluskey pada dasarnya mencari semua penyusun utama fungsi bersangkutan dengan penggabungan penyusun secara bertahap. Dalam kebanyakan kasus, tidak semua penyusun utama harus diikuti-sertakan dalam realisasi fungsi. Tetapi ada penyusun utama yang harus disertakan dalam realisasi karena tanpa menyertakannya akan ada penyusun (sukumin) yang tidak dicakup/diliput dalam realisasinya. Penyusun utama demikian disebut "penyusun utama inti (essential prime implicant). Realisasi dengan mencakup hanya penyusun utama inti tidak selamanya mencakup semua sukumin yang dicakup oleh fungsi yang disederhanakan. Sukumin yang tidak dicakup oleh penyusun utama inti harus diambil dari penyusun utama yang bukan inti. Jadi, penyederhanaan metoda Quine-McCluskey ini terdiri atas dua langkah utama yang berurut, yaitu :

1. Penentuan penyusun utama dan
2. Pemilihan penyusun minimum

Kedua langkah ini akan diuraikan dengan contoh-contoh dalam sub-bab berikut ini.

4.2 Penentuan Penyusun Utama

Langkah pertama dalam penyederhanaan dengan metode Quine-McCluskey adalah penentuan penyusun utama dari sukumin (penyusun) fungsi yang disederhanakan. Penentuan penyusun utama diawali dengan mengelompokkan semua penyusun fungsi itu berdasarkan cacah bit 1 yang ada pada setiap penyusun dan mengurutkan kelompok demi kelompok mulai dari kelompok terendah (kelompok dengan cacah bit 1 paling sedikit) sampai dengan kelompok tertinggi (kelompok dengan cacah bit 1 paling banyak). Kita dapat memberi nomor bagi setiap kelompok berdasarkan cacah bit 1 yang dikandung setiap penyusun dalam kelompok bersangkutan, misalnya, kelompok 0 untuk kelompok yang mengandung sukumin m_0 yang mempunyai kode biner 000 dan tidak mempunyai bit 1 (cacah bit 1 adalah 0), kelompok 1 untuk kelompok yang mengandung sukumin m_1 (0001), m_2 (0010), m_4 (0100), m_8 (1000), dan seterusnya, yang mengandung satu bit 1, dan sebagainya. Sesudah tersusun tabel kelompok, penggabungan antara dua penyusun sudah dapat dilakukan. Penggabungan hanya dilakukan antara satu penyusun dengan penyusun lain yang berada di kelompok yang lebih tinggi.

Sudah diketahui bahwa dua suku penyusun dapat digabung untuk menghasilkan penyusun baru yang lebih murah (lebih sedikit literalnya) bila hanya satu peubah yang berbeda, seperti yang telah ditunjukkan dalam contoh-contoh bab sebelumnya. Misalnya, m_5 dan m_{13} dengan kode masing-masing 0101 dan 1101, dalam peubah A, B, C dan D dapat dituliskan sebagai $\overline{A}BCD$ dan $AB\overline{C}D$. Dengan memakai rumus $\overline{XY} + XY = Y$, maka fungsi jumlah-perkalian daripada m_5 dan m_{13} dapat dituliskan:

$$f = m_5 + m_{13} = \overline{A} B \overline{C} D + A B \overline{C} D = B \overline{C} D$$

yang dalam biner dapat ditulis sebagai:

$$0101 + 1101 = -101$$

dengan tanda "-" menunjukkan letak peubah yang dihilangkan dalam penggabungan. Perhatikan bahwa setiap bit 1 pada posisi tertentu menunjukkan bahwa pada posisi bit tersebut ada literal dalam bentuk sebenarnya sedangkan bit 0 menunjukkan adanya literal dalam bentuk komplemen.

Karena pada 1 posisi hanya ada 2 kemungkinan harga, 0 atau 1, maka 2 penyusun yang berada dalam satu kelompok (mempunyai cacah bit 1 yang sama) tidak mungkin bergabung. Selanjutnya, kalau selisih cacah bit 1 antara 2 penyusun lebih dari 1, selisih nomor kelompoknya lebih dari 1, maka peubah yang berbeda pada kedua penyusun itu juga akan lebih dari 1 sehingga keduanya tak mungkin bergabung. Jadi, penyusun dari satu kelompok hanya mungkin bergabung dengan penyusun dari kelompok dengan nomor (tingkat) yang lebih tinggi 1. Karena itu, penggabungan yang perlu dicoba dalam metoda tabulasi hanyalah antara penyusun-penyusun dari satu kelompok dengan kelompok yang lebih tinggi satu tingkat, yaitu kelompok dengan cacah bit 1 lebih banyak 1.

Setiap penggabungan dua penyusun menghasilkan satu penyusun baru dengan literal yang berkurang satu, dan penyusun baru ini kita tabelkan secara berurut dalam kolom baru. Setiap penyusun yang sudah mengalami penggabungan dalam kolom lama (sebelumnya) diberi tanda cek (\checkmark) untuk menunjukkan penyusun tersebut telah bergabung, artinya sudah dicakup dalam penyusun yang baru, hasil penggabungan. Penyusun baru ini juga dikelompokkan. Satu kelompok dipisahkan dari kelompok berikutnya dengan garis pembatas yang jelas dan disusun berurut menurut urutan kedua kelompok pembentuk gabungan bersangkutan. Bila ada dua kelompok yang berurut tidak menghasilkan penggabungan, maka dalam kolom baru harus dibuatkan suatu kelompok kosong yang tidak mengandung penyusun gabungan. Pengelompokan ini akan menentukan apakah penyusun dari satu kelompok dapat bergabung dengan penyusun di kelompok berikutnya pada penggabungan kolom baru itu. Proses penentuan penyusun utama baru selesai bila dalam suatu kolom baru tidak ada lagi penyusun yang dapat bergabung. Langkah-langkah penggabungan ini akan lebih diperjelas dengan contoh.

Contoh.

Untuk menyederhanakan fungsi $f = \sum m(0,2,3,4,8,10,11,12,13,15)$ dengan metoda tabulasi Quine-McCluskey, langkah pertama yang harus dilaksanakan adalah mengelompokkan semua sukumin berdasarkan cacah bit 1. Hasil pengelompokan ini ditunjukkan dalam Tabel 4.1.

Tabel 4.1 Pengelompokkan penyusun menurut bit cacah bit 1
fungsi $f = \sum m(0,2,3,4,8,10,11,12,13,15)$

S u k u m i n		Nomor kelompok (cacah bit 1)
desimal	biner	
0	0000	0
2	0010	1
4	0100	
8	1000	
3	0011	2
10	1010	
12	1100	
11	1011	3
13	1101	
15	1111	4

Tabel 4.1 ini merupakan tabel awal sebelum penggabungan dan dinamakan kolom 0 dalam Tabel 4.2 yang menggambarkan langkah-langkah penentuan penyusun utama. Dalam kolom 0 ini dicari penyusun dalam kelompok 1 yang dapat bergabung dengan penyusun dalam kelompok 0. Satu-satunya penyusun dalam kelompok 0 adalah m_0 . Dapat dilihat bahwa bit-bit dalam m_0 berbeda hanya satu bit dengan bit-bit yang ada dalam masing-masing sukumin dalam kelompok 1 m_2 , m_4 , dan m_8 , sehingga mereka dapat bergabung berpasang-pasangan.

Gabungan m_0 dengan m_2 menghasilkan penyusun 00-0, dengan m_4 menghasilkan penyusun 0-00, dengan m_8 menghasilkan penyusun -000. Ketiga gabungan ini membentuk kelompok baru dalam kolom-1 Tabel 4.2 yang secara berturut-turut ditulis sebagai: (0,2): 00-0, (0,4): 0-00, dan (0,8): -000. Sebagai tanda bahwa sukumin m_0 , m_2 , m_4 , dan m_8 telah bergabung di kolom-1, di belakang masing-masing sukumin tersebut diberi tanda cek (✓). Perhatikan bahwa letak tanda "-" yang menunjukkan letak bit yang berbeda, juga menunjukkan letak literal yang

Tabel 4.2 Penentuan penyusun utama fungsi

$$f = \Sigma m(0,2,3,4,8,10,11,12,13,15)$$

Kolom-0	Kolom-1	Kolom-2
0 0000 ✓	(0,2) 00-0 ✓	(d) (0,2,8,10) -0-0
2 0010 ✓	(0,4) 0-00 ✓	(e) (0,4,8,12) --00
4 0100 ✓	(0,8) -000 ✓	(0,8,2,10) --00
8 1000 ✓	(2,3) 001- ✓	(0,8,4,12) --00
3 0011 ✓	(2,10) -010 ✓	(f) (2,3,10,11) -01-
10 1010 ✓	(4,12) -000 ✓	(2,10,3,11) --01-
12 1100 ✓	(8,10) 10-0 ✓	
11 1011 ✓	(8,12) 1-00 ✓	
13 1101 ✓	(3,11) -011 ✓	
15 1111 ✓	(10,11) 101- ✓	
	(a) (12,13) 110-	
	(b) (13,15) 11-1	
	(c) (11,15) 1-11	

hilang dari penyusun, merupakan posisi dengan bobot bit yang sama dengan selisih nomor penyusun yang bergabung. Misalnya, gabungan m_0 dan m_8 yang selisih nomornya adalah $8-0=8$, akan memberikan tanda "-" di posisi bit-3 (ke-4 dari kanan) yang mempunyai bobot $2^3=8$.

Dengan selesainya penggabungan kelompok 0 dengan kelompok 1 ini berarti juga telah selesai satu kelompok baru dalam kolom-1, dan karena itu perlu dibuat garis batas. Penggabungan dilanjutkan antara kelompok 1 dan kelompok 2, antara kelompok 2 dan kelompok 3, dan seterusnya, dengan cara yang sama.

Penggabungan penyusun kolom-1 untuk membentuk kelompok 2 dilakukan dengan menggabungkan penyusun dalam suatu kelompok dengan kelompok berikutnya yang mempunyai tanda "-" yang berada pada posisi yang sama dan berbeda hanya satu bit. Misalnya, gabungan (0,2) dapat bergabung hanya dengan gabungan (8,10) karena hanya gabungan ini dalam kelompok berikutnya yang mempunyai tanda "-" pada posisi yang sama dengan tanda "-" pada gabungan (0,2): 00-0 dan 10-0. Gabungan (0,2) tak dapat bergabung dengan gabungan (2,3) karena tanda "-" pada kedua gabungan terletak pada posisi yang berbeda: 00-0 dan 001-. Penggabungan antara gabungan (0,2) dan gabungan (8,10) direkam di kolom-2 sebagai (0,2,8,10). Dengan cara yang sama, penggabungan yang lain dapat diperoleh.

Perhatikan bahwa semua sukumin yang bergabung dalam kedua penyusun (0,8,2,10) dan (0,2,8,10) adalah sama, hanya berbeda urutan penggabungan saja. Jadi kedua penyusun juga sama. Karena itu salah satu dapat dibuang, ditandai dengan pencoretan penyusun yang dibuang dalam Tabel 4.2.

Pada Tabel 4.2 dapat dilihat bahwa semua sukumin pada kolom-0 telah mendapat tanda cek (\checkmark) yang berarti bahwa semua sukumin telah ikut bergabung dalam membentuk kolom-1. Dalam kolom-1 ada 3 penyusun yang belum mendapat tanda cek, yaitu suku (12,13), (13,15) dan (11,15), dan semua penyusun di kolom-2, yaitu (0,2,8,10), (0,4,8,12) dan (2,3,10,11) tak ada yang dapat bergabung lagi. Penyusun-penyusun ini merupakan penyusun dengan literal minimum yang dapat dibentuk dan merupakan Penyusun Utama (Prime Implicants). Untuk mempermudah pembahasan berikutnya, semua penyusun utama ini diberi nama identifikasi, misalnya (a), (b), (c), (d), (e), dan (f), seperti ditunjukkan dalam tabel di atas. Dengan penyusun utama ini, maka dapat dibuat pernyataan fungsi sebagai:

$$\begin{aligned} f &= a + b + c + d + e + f \\ &= (12,13) + (13,15) + (11,15) + (0,2,8,10) + (0,4,8,12) + (2,3,10,11) \\ &= ABC\bar{C} + ABD + ACD + \bar{B}\bar{D} + \bar{C}\bar{D} + \bar{B}C \end{aligned}$$

Perhatikan bagaimana memperoleh pernyataan literal untuk setiap penggabungan berdasarkan desimal sukumin yang bergabung. Untuk penyusun a = (12,13), sebagai contoh, diperoleh berdasarkan kode binernya 1100 dan 1101 yang digabung menjadi 110- atau 110x yang berarti literal pertama dan kedua muncul dalam bentuk sebenarnya (A dan B), literal ketiga muncul dalam bentuk komplemennya (C), dan literal keempat (D) hilang dari sukumin. Dengan menyatakan Dapat dilihat dengan mudah, misalnya dengan pemetaan, bahwa walaupun suku-suku dalam persamaan terakhir ini sudah merupakan penyusun utama dengan literal yang minimum, ternyata masih ada suku-suku yang mubazir (redundant) tidak diperlukan. Jadi, dalam langkah pertama metoda tabulasi ini kita hanya memperoleh suku-suku penyusun utama, tetapi kita tidak dapat menunjukkan adanya kemubaziran (redundancy). Penyusun mubazir ini dapat dihilangkan dengan langkah pemilihan penyusun dalam sub-bab berikut ini.

4.3 Pemilihan Penyusun Minimum

Seperti ditunjukkan pada contoh di atas, langkah pertama hanyalah menentukan penyusun utama tanpa dapat menunjukkan penyusun mubazir. Penyusun mubazir ini tak harus dan tak perlu dicakup dalam pernyataan fungsi dan karena itu harus dihilangkan untuk memperoleh fungsi minimum. Penyusun mubazir ini dapat dihilangkan dengan pemilihan penyusun yang perlu saja.

Pembuangan suku-suku mubazir ini dimulai dengan membuat tabel yang berisi suku-suku yang berisi penyusun utama (prime implicants), yaitu suku yang belum bergabung di langkah sebelumnya, dengan semua sukumin yang dicakupnya. Dalam tabel pemilihan penyusun minimum, di bagian atas diurutkan semua sukumin aslinya yang dicakup fungsi dan di kiri diurutkan semua penyusun utama, lengkap dengan sukumin yang bergabung membentuknya. Pada setiap kolom sukumin diberi tanda X pada baris penyusun utama yang mencakup sukumin yang bersangkutan. Tanda ini menunjukkan bahwa bila penyusun utama yang bersangkutan dipilih sebagai penyusun fungsi minimum, artinya diikuti-seritakan dalam realisasi, maka semua sukumin dengan tanda X pada baris penyusun utama tersebut telah dicakup.

Pemilihan penyusunan minimum, yaitu penyusun utama yang akan disertakan dalam realisasi, harus mencakup semua sukmin fungsi yang disederhanakan. Adanya hanya satu tanda X dalam satu kolom berarti bahwa sukumin bersangkutan dicakup hanya oleh penyusun utama pada baris tanda X tersebut. Ini berarti bahwa penyusun utama pada baris tersebut harus disertakan dalam fungsi sebab tanpa menyertakan penyusun utama tersebut, maka sukumin itu tidak akan terwakili di dalam fungsi. Penyusun utama demikian disebut “penyusun utama inti” (*essential prime implicant*).

Dengan dipilihnya penyusun utama inti sebagai penyusun minimum, maka semua sukumin yang dicakupnya telah akan terwakili dalam fungsi minimum. Untuk menandai suatu sukumin telah terwakili dalam fungsi minimum, pada baris paling bawah di kolom sukumin bersangkutan diisikan tanda cek . Bila masih ada sukumin yang belum tercakup setelah penentuan semua penyusun utama inti, yaitu masih ada kolom yang masih mempunyai lebih dari satu tanda X tanpa tanda cek di baris bawah, maka penyusun minimum yang lain dapat dipilih dari penyusun utama yang belum dipilih (bukan penyusun utama inti) yang mencakup paling banyak sukumin tersisa.

Untuk fungsi yang disederhanakan dalam sub bab sebelumnya, pemilihan penyusun minimumnya ditunjukkan pada Tabel 4.3. Dari tabel ini dapat dilihat bahwa sukumin m_3 dan m_4 dicakup oleh hanya satu penyusun utama, yaitu masing-masing **f** dan **e**. Karena itu, **f** dan **e** harus menjadi penyusun utama inti. Untuk menunjukkan bahwa kedua penyusun ini telah dipilih, kedua penyusun utama ini diberi tanda, yaitu "*" di kirinya.

Dengan dipilihnya **f** sebagai penyusun utama inti untuk mewakili m_3 , maka sukumin-sukumin m_2 , m_{10} dan m_{11} juga telah terwakili (lihat tanda X di kolom masing-masing sukumin) dan karena itu baris bawah kolom sukumin-sukumin tersebut kita beri tanda cek. Begitu juga pemilihan **e** sebagai penyusun utama inti untuk mewakili m_4 , membuat m_0 , m_8 dan m_{12} turut terwakili dan baris bawah kolom sukumin-sukumin tersebut sudah dapat kita beri tanda cek. Maka Tabel 4.3 berubah menjadi Tabel 4.4.

Tabel 4.3. Pemilihan penyusun utama

Penyusun Utama		Sukumin									
		0	2	3	4	8	10	11	12	13	15
a \overline{ABC}	12,13								X	X	
b \overline{ABD}	13,15									X	X
c \overline{ACD}	11,15							X			X
d \overline{BD}	0,2,8,10	X	X			X	X				
e \overline{CD}	0,4,8,12	X			X	X			X		
g \overline{BC}	2,3,10,11		X	X			X	X			

Tabel 4.4. Pemilihan penyusun utama inti

Penyusun Utama		Sukumin									
		0	2	3	4	8	10	11	12	13	15
a \overline{ABC}	12,13								X	X	
b \overline{ABD}	13,15									X	X
c \overline{ACD}	11,15							X			X
d \overline{BD}	0,2,8,10	X	X			X	X				
* e \overline{CD}	0,4,8,12	X			X	X			X		
* g \overline{BC}	2,3,10,11		X	X			X	X			
		√	√	√	√	√	√	√	√		

Dari Tabel 4.4 dapat dilihat bahwa m_{13} dan m_{15} belum terwakili. Untuk memilih penyusun utama mana yang akan dipilih untuk mewakili sukumin yang tersisa (belum terwakili), kita dapat membuat tabel baru yang mengandung hanya sukumin yang belum terwakili (m_{13} dan m_{15}) dan penyusun utama yang belum terpilih (b dan c), seperti yang ditunjukkan dalam Tabel 4.5.

Tabel 4.5. Pencakupan sukumin tersisa

Penyusun Utama			Sukumin	
			13	15
c	ABC	12,13	X	
*	b	ABD	X	X
c	ACD	11,15		X
d	BD	0,2,8,10		
--			√	√

Dari tabel ini dapat dilihat bahwa penyusun utama d yang tidak mencakup salah satu dari m_{13} dan m_{15} , tidak dapat memberikan sumbangan apa-apa dalam pencakupan sukumin yang tertinggal ini. Penyusun yang dapat mewakili m_{13} adalah penyusun utama a dan b. Dengan memilih a hanya m_{13} yang terwakili, dengan memilih c hanya m_{15} terwakili. Tetapi dengan memilih b kedua m_{13} dan m_{15} akan terwakili, dan semua sukumin telah terwakili. Karena itu kita akan memilih **b** sebagai penyusun minimum, dan kita beri tanda * di depan **b**.

Dengan menjumlahkan (meng-OR-kan) semua penyusun yang bertanda * dalam Tabel 4.4 dan Tabel 4.5, kita akan memperoleh fungsi minimum:

$$f = b + e + f = ABD + \bar{C}\bar{D} + \bar{B}C$$

Hasil di atas sudah merupakan fungsi yang paling sederhana (Coba buktikan dengan cara pemetaan !).

Dalam beberapa kasus, dalam tabel pemilihan penyusun yang akan mewakili sukumin yang tertinggal (tidak dicakup penyusun utama inti) seperti Tabel 4.5, masing-masing sukumin tertinggal dicakup oleh lebih dari satu penyusun utama dan setiap penyusun utama mencakup cacah sukumin yang sama banyaknya sehingga tidak segera dapat dilihat apakah pemilihan salah satu penyusun utama lebih menguntungkan daripada memilih penyusun utama yang lainnya. Dalam hal seperti ini, kita harus melakukan cara coba-dan-ralat (trial and error); memilih salah satu penyusun utama dan membandingkan dengan bila kita memilih penyusun utama yang lain.

4.4 Tabel disederhanakan

Penilikan biner dalam penyederhanaan dengan tabulasi Quine-McCluskey cukup melelahkan dan untuk cacah peubah yang banyak akan mudah menyestatkan mata. Penyederhanaan akan lebih menyenangkan bila hanya menggunakan desimal, tanpa menggunakan biner. Semua sukumin asli dan hasil penggabungan-nya di-nyatakan hanya dengan desimal. Letak literal yang hilang juga dapat dinyatakan dengan desimal yang mewakili bobot bit pada posisi literal bersangkutan. Dengan demikian maka tabel penyusun utama hanya mengandung angka-angka desimal.

Di depan telah diuraikan bahwa penyusun yang dapat bergabung adalah dua penyusun yang berada dalam kelompok yang berbeda tetapi berdampingan, yaitu yang berbeda hanya satu bit. Juga dapat dilihat bahwa satu penyusun dari suatu kelompok dapat bergabung hanya dengan penyusun dari kelompok lebih tinggi yang nilai desimalnya lebih tinggi sebesar perpangkatan bulat dari 2, yaitu 2^n dengan $n=0,1,2,...$ Dalam contoh sebelumnya, misalnya, m_4 dalam kelompok-1 dapat bergabung dengan m_{12} dalam kelompok-2, yang nilai desimalnya lebih besar 8. Tetapi m_4 dalam kelompok-1 tidak dapat bergabung dengan m_{10} dalam kelompok-2 karena selisih nilainya adalah 6 yang bukan perpangkatan bulat dari 2, juga tidak dapat bergabung dengan m_3 karena 3 tidak lebih besar dari 4 (selisihnya negatif). Untuk memperjelas hal-hal ini, kita lihat langkah-langkah meminimumkan fungsi berikut:

$f(A,B,C,D) = \Sigma m (1,4,6,7,8,9,10,11,15)$

Sukumin-sukumin fungsi ini dalam desimal ditabulasi berkelompok, seperti sebelumnya, dalam kolom-0 Tabel 4.6.

Tabel 4.6. Penentuan penyusun utama untuk fungsi
 $f = \Sigma m (1,4,6,7,8,9,10,11,15)$

Kolom-0		Kolom-1	Kolom-2
1	√	a 1,9 (8)	g 8,9,10,11 (1,2)
4	√	b 4,6 (2)	<u>8,10,9,11 (2,1)</u>
8	√	8,9 (1) √	
6	√	8,10 (2) √	
9	√	c 6,7 (1)	
10	√	9,11 (2) √	
7	√	10,11 (1) √	
11	√	d 7,15 (8)	
15	√	e 11,15 (4)	

Penggabungan antara sukumin m_1 dengan m_9 direkam dalam kolom-1 sebagai 1,9 (8) dengan pengertian bahwa 8 adalah selisih sukumin yang bergabung (9-1). Dalam pembentukan kolom berikutnya, penyusun yang dapat bergabung adalah penyusun yang mempunyai bilangan dalam tanda kurung yang sama dan selisih penyusunnya merupakan bilangan yang berharga $2n$. Penyusun 8,9 (1) tak dapat bergabung 6,7 (1) karena walaupun mempunyai bilangan dalam kurung yang sama, selisih harganya adalah $6-8 = -2$. Tetapi penyusun 8,9 (1) dapat bergabung 10,11 (1) karena mempunyai bilangan dalam kurung yang sama dan selisihnya adalah $10-8 = 2 = 2^1$. Penggabungan ini menghasilkan penyusun baru yang ditulis dalam bentuk 8,9,10,11 (1,2) yang menerangkan bahwa telah terjadi dua kali penggabungan dan literal yang hilang adalah pada posisi bit dengan bobot 1 dan 2, jadi penyusun utama yang terbentuk adalah 10-- atau AB. Penggabungan yang lain dapat dicari dengan cara yang sama. Perhatikan kembali bahwa pada kolom-1 ada dua penyusun utama yang meliputi suku-suku yang sama sehingga satu diantaranya dapat dihilangkan (di coret).

Dari Tabel 4.6 dapat dilihat bahwa fungsi itu mempunyai 6 penyusun utama a, b, c, d, e, f dan g. Penyusun utama inti dipilih dengan memakai tabel pemilihan penyusun utama yang ditunjukkan pada Tabel 4.7.

Tabel 4.7 Pemilihan penyusunan utama inti untuk Tabel 4.6.

Penyusun Utama		Sukumin								
		1	4	6	7	8	9	10	11	15
* a $\bar{B}\bar{C}D$	1,9	X					X			
* b $\bar{A}B\bar{D}$	4,6		X	X						
c $\bar{A}BC$	6,7			X	X					
d BCD	7,15				X					X
e ACD	11,15								X	X
* g $A\bar{B}$	8,9,10,11					X	X	X	X	
		√	√	√		√	√	√	√	

Dari Tabel 4.7 dapat dilihat bahwa a, b, dan g merupakan penyusun utama inti. Ketiga penyusun utama inti ini belum mencakup sukumin 7 dan 15. Untuk menentukan penyusun utama yang akan dipilih untuk mewakili sukumin ini, dapat dibuat tabel penyusun yang merekam hanya sukumin yang belum terwakili dan penyusun utama yang belum dipilih seperti pada Tabel 4.8.

Tabel 4.8. Pemilihan penyusun yang tersisa dari Tabel 4.7.

Penyusun Utama			Sukumin	
			7	15
c	ABC	6,7	X	
* d	BCD	7,15	X	X
e	ACD	11,15		X
			√	√

Dari Tabel 4.8 dapat dilihat bahwa penyusun utama d meliputi kedua suku-min 7 dan 15 secara bersama-sama sehingga penyusun utama inilah yang dipilih sebagai penyusun minimum.

Jadi, fungsi minimum yang dicari adalah jumlah dari pada penyusun utama a, b, d dan g, yaitu :

$$f = a + b + d + g = \bar{B}\bar{C}D + \bar{A}B\bar{D} + BCD + A\bar{B}$$

Kalau kita melihat penyederhanaan dengan memakai peta Karnaugh, kita akan melakukan penggabungan seperti yang ditunjukkan pada Gambar 4.1. Dapat dilihat bahwa hasil penyederhanaannya tetap sama.

		AB			
CD		00	01	11	10
	00		1		1
	01	1			1
	11		1	1	1
	10		1		1

Gambar 4.1. Peta Karnaugh untuk contoh yang diselesaikan dengan tabulasi

Beberapa catatan dapat dibuat dari cara tabulasi Quine-McCluskey di atas, yaitu:

1. Suku-suku dari satu kelompok dapat digabung hanya dengan kelompok yang setingkat lebih tinggi (tepat di bawah kelompoknya dalam tabel) dengan syarat:
 - selisih nomor sukumin yang berharga $+2^n$, tidak -2^n ; m_4 (kelompok 1) dapat bergabung dengan m_6 (kelompok 2) sedangkan m_8 (kelompok 1) tak dapat bergabung dengan m_6 (kelompok 2).
 - nomor sukumin dalam tanda kurung yang sama (untuk kolom 1, 2,..., dst)
2. Angka-angka di dalam tanda kurung adalah selisih dari nomor sukumin-sukumin yang bergabung. Urutan angka-angka yang di dalam tanda kurung yang menunjukkan urutan penggabungan tidak penting, sejauh sukumin-sukumin yang bergabung sama: 8,9,10,11 (1,2) \equiv 8,10, 9,11 (2,1).
3. Angka-angka di dalam tanda kurung menunjukkan letak peubah yang hilang dalam penggabungan, sesuai dengan bobot-bobot angka dalam bilangan biner. Sebagai contoh, 1,3 (2) berarti peubah yang hilang adalah kedua dari kanan. Jadi kalau peubahnya disebut **a**, **b**, **c**, dan **d** maka peubah yang hilang adalah **c** dan sukuminnya adalah $\bar{a}bd$. Penentuan peubah mana yang akan muncul dalam bentuk sebenarnya atau bentuk komplemennya dapat ditentukan dengan menuliskan bentuk biner dari pada salah satu suku yang bergabung tersebut. Untuk 1,3 (2), kalau dituliskan suku 1, maka akan diperoleh 00-1, sehingga suku gabungan adalah $\bar{a}bd$.
4. Dalam pemilihan penyusun minimum yang akan diikuti-sertakan dalam realisasi, prioritas pertama diberikan kepada penyusun utama inti. Prioritas kedua diberikan kepada penyusun utama yang bukan inti yang paling banyak mencakup sukumin tersisa.

4.5 Penyederhanaan Fungsi Tak lengkap

Seperti telah diterangkan dalam bab-bab sebelumnya, suku "abaikan" (don't care) dapat diperlakukan sebagai 1 dan dapat pula sebagai 0. Dalam penyederhanaan, mula-mula kita menganggap setiap suku abaikan itu sebagai 1. Terakhir, setelah diketahui suatu suku abaikan itu tidak diperlukan dalam memperoleh fungsi minimum, kita menganggapnya 0 dan mengabaikannya. Dalam metoda ini, selama proses penentuan penyusun utama, kita menganggap semua suku abaikan itu berharga 1. Tetapi karena dia tidak harus diliput, suku-suku tersebut tidak kita sertakan dalam tabel pemilihan suku penyusun inti.

Contoh: Perhatikan fungsi

$$f(v,w,x,y) = \Sigma m(2,3,7,9,11,13) + \Sigma d(1,10,15)$$

Dari tabel ini dapat diperoleh hasil penyederhanaan sebagai berikut:

$$\begin{aligned} f &= b + c + d \\ &= \bar{w}x + xy + vy \end{aligned}$$

4.6 Soal Latihan

1. Dengan menggunakan tabel Quine McCluskey, sederhanakanlah fungsi-fungsi:

a. $f(a,b,c) = \sum m(0,2,3,4,7)$

b. $f(p,q,r,s) = \sum m(0,1,2,4,6,7,8,9,13,15)$

c. $f(a,b,c,d) = \sum m(0,1,2,5,6,7,8,9,10,14)$

d. $f(A,B,C,D,E) = \sum m(0,3,4,5,6,7,8,9,12,13,14,16,21,23,24,29,31)$

2. Sederhanakanlah fungsi dalam bentuk product-of-sum

a. $f_1(A,B,C,D) = \pi M(0,1,2,4,6,7,8,9,13,15)$

b. $f_2(A,B,C,D,E) = \pi M(3,5,10,11,12,14)$

dengan menggunakan tabulasi Quine McCluskey. Periksa kebenaran $f_1 = f_2$.

3. Sederhanakanlah fungsi

$$f(x,y,z) = \sum m(0,1,2,5,6,7)$$

dengan menggunakan tabulasi Quine McCluskey dan uji hasilnya dengan menggunakan peta Karnaugh.

4. Dengan menggunakan tabel Quine McCluskey, sederhanakanlah fungsi

$$f(a,b,c,d) = \sum m(2,4,6,10) + \sum d(1,3,5,7,8,12,13)$$

dengan d= sukumin abaikan (don't care)

5. Sederhanakanlah fungsi

$$f(a,b,c,d,e,f) = \Sigma m(1,2,3,16,17,18,19,26,32,39,48,63) + \Sigma d(15,28,29,30)$$

dan tentukan juga fungsi minimum tersebut jika suku "abaikan" tidak ada, tanpa harus mulai dari awal kembali (cukup dengan mengamati tabel pemilihan penyusun utama).

6. Dengan menggunakan tabel Quine McCluskey, sederhanakanlah fungsi:

$$f(A,B,C,D,E)=\Sigma m(0,2,3,4,5,7,9,11,13,14,16,18,24,26,28,30)+ \Sigma d(1,29,31)$$