PROGRAM STUDI TEKNIK KOMPUTER
FAKULTAS TEKNIK DAN INFORMATIKA
UNIVERSITAS MULTIMEDIA NUSANTARA
SEMESTER GANJIL TAHUN AJARAN 2024/2025

UMN
UNIVERSITAS
MULTIMEDIA
NUSANTARA

CE 121 – LINEAR ALGEBRA

Pertemuan 6
Vektor

Firstka Helianta MS, S.Si., M.Si

Capaian Pembelajaran Mingguan Mata Kuliah (Sub-CPMK)

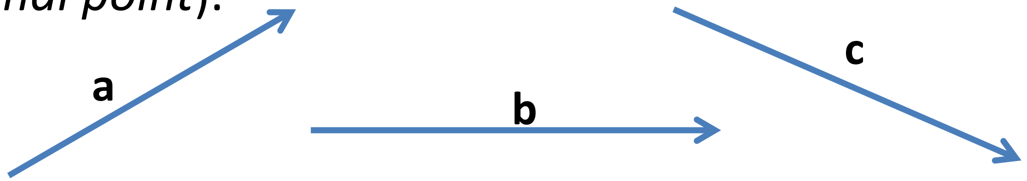
- Mahasiswa mampu melakukan operasi-operasi dasar pada vektor (C3)

Sub-Pokok Bahasan

1. Vektor dalam R^2, R^3 dan R^n
2. Operasi dasar pada vektor
3. Sifat-sifat operasi vektor
4. Panjang vektor
5. Vektor satuan
6. Perkalian titik (dot product)
7. Persamaan garis dalam R^2 dan R^3
8. Persamaan bidang dalam R^3
9. Perkalian silang (cross product)

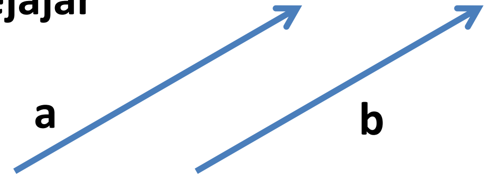
Definisi Vektor

- Vektor adalah besaran yang mempunyai besar dan arah. Vektor memainkan peranan yang sangat penting dalam menggambarkan kelakuan dari fenomena alam ini.
- Vektor digambarkan oleh ruas garis yang dilengkapi dengan anak panah.
- Panjang ruas garis sebagai perwakilan dari besar vektor, sedangkan anak panah menunjukkan arah dari vektor.
- Sebuah vektor dimulai dari titik awal (*initial point*) dan diakhiri oleh titik akhir (*terminal point*).

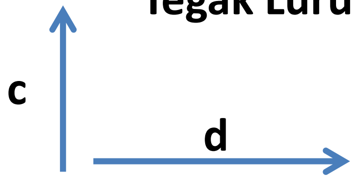


Vektor

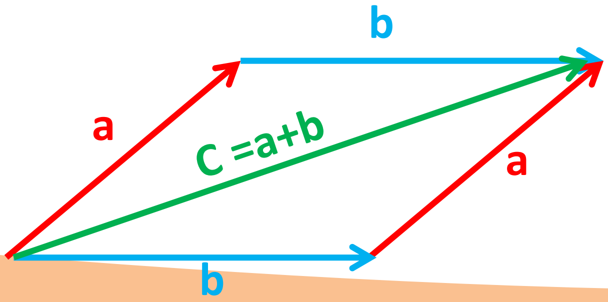
Sejajar

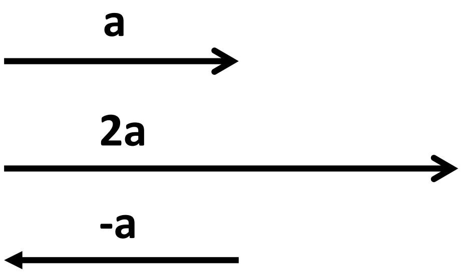


Tegak Lurus



Dalam konsep vektor dikenal pula **vektor nol**, yaitu vektor yang panjangnya nol, dengan arah sebarang yang menyesuaikan dengan operasi yang mengikutinya. Secara geometri vektor nol dapat digambarkan sebagai sebuah titik.

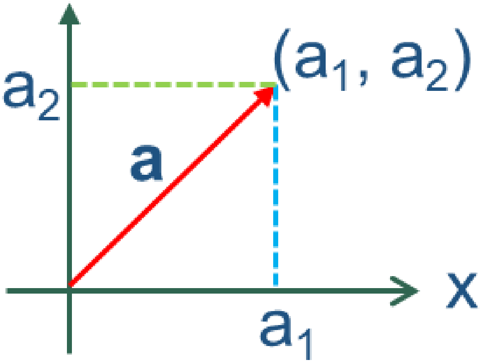




Vektor dalam bidang 2D dan 3D

2D

$$a = a_1x + a_2y$$

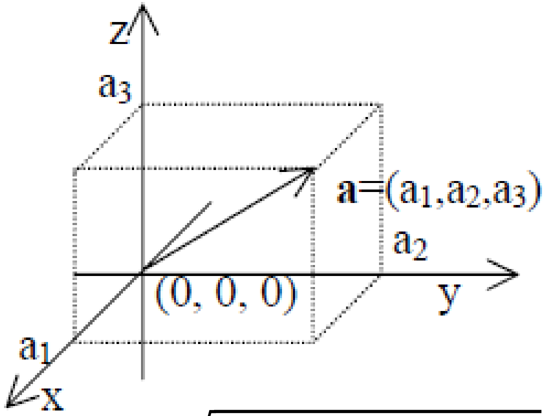


$$|a| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2}$$

a = (a_1, a_2)

3D

$$a = a_1x + a_2y + a_3z$$



$$|a| = \sqrt{a_1{}^2 + a_2{}^2 + a_3{}^2}$$

a = $(a_1, a_{2,}\ a_3)$

Vektor yang titik awalnya di titik asal *{(0,0) untuk vektor di bidang dan (0,0,0) untuk vektor di ruang}* disebut **vektor posisi**

Sifat-sifat Vektor

Untuk $a = (a_1, a_2, a_3)$ dan $b = (b_1, b_2, b_3)$, berlaku:

- $a = b$, berarti $a_1 = b_1$, $a_2 = b_2$, dan $a_3 = b_3$
- $a + b = (a_1 + b_1, a_2 + b_2, a_3 + b_3)$
- $ka = (ka_1, ka_2, ka_3)$
- $a - b = (a_1 - b_1, a_2 - b_2, a_3 - b_3)$

Contoh 1

Jika $a = (2, 3, -1)$, $b = (0, -2, 4)$, dan $c = (1, -1, 1)$, tentukan:

a. $4a - b$

b. $-2a + 3b + 2c$

Contoh 1

Jika $a = (2, 3, -1)$, $b = (0, -2, 4)$, dan $c = (1, -1, 1)$, tentukan:

a. $4a - b = 4(2, 3, -1) - (0, -2, 4)$

$$= (8, 12, -4) - (0, -2, 4)$$

$$= (8, 14, -8)$$

b. $-2a + 3b + 2c$

$= -2(2, 3, -1) + 3(0, -2, 4) + 2(1, -1, 1)$

$= (-4, -6, 2) + (0, -6, 12) + (2, -2, 2)$

$= (-2, -14, 16)$

Operasi Vektor

Sifat Vektor R^2 dan R^3 terhadap operasi penjumlahan dan perkalian dengan skalar: Jika $\boldsymbol{u}, \boldsymbol{v}, \boldsymbol{w} \in R^2$ atau R^3 dan *k*, *l* skalar (bilangan riil), berlaku:

1. $\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v} = \boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}$ (Sifat Komutatif)
2. $(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) + \boldsymbol{w} = \boldsymbol{v} + (\boldsymbol{u} + \boldsymbol{w})$ (Sifat Asosiatif)
3. $\boldsymbol{o} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + \boldsymbol{o} = \boldsymbol{u}$ (Identitas Penjumlahan)
4. $-\boldsymbol{u} + \boldsymbol{u} = \boldsymbol{u} + (-\boldsymbol{u}) = \boldsymbol{o}$ (Invers Penjumlahan)
5. $k(\boldsymbol{u} + \boldsymbol{v}) = k\boldsymbol{u} + k\boldsymbol{v}$
6. $(k + l)\boldsymbol{u} = k\boldsymbol{u} + l\boldsymbol{u}$
7. $1\boldsymbol{u} = \boldsymbol{u}$

$$\boldsymbol{a} = \begin{bmatrix} a_1 \\ a_2 \end{bmatrix} = (a_1, a_2) \text{ dan } \boldsymbol{u} = \begin{bmatrix} u_1 \\ u_2 \\ u_3 \end{bmatrix} = (u_1, u_2, u_3)$$

Panjang Vektor

- Selain vektor posisi yang selalu berawal dari titik asal, terdapat pula vektor yang titik awalnya $P_1 = (x_1, y_1, z_1)$ dan titik akhirnya $P_2 = (x_2, y_2, z_2)$, vektor yang demikian dinyatakan:
- $\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (x_2 - x_1, y_2 - y_1, z_2 - z_1)$
- $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(x_2 - x_1)^2 + (y_2 - y_1)^2 + (z_2 - z_1)^2}$
- $\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right|$ merupakan jarak antara P_1 dan P_2.

Contoh 2

1. Jika $a = (2, 3, 2)$, $b = \left(\frac{1}{2}, -4,5\right)$, dan $c = (25, -32,2)$, tentukan:

a. $2(a + b) - c$

b. $2b - (a + 3c)$

2. Hitung jarak antara $P_1(2, 3, 4)$ dan $P_2(-1, 3, -2)$

Contoh 2

2. Hitung jarak antara $P_1(2, 3, 4)$ dan $P_2(-1, 3, -2)$

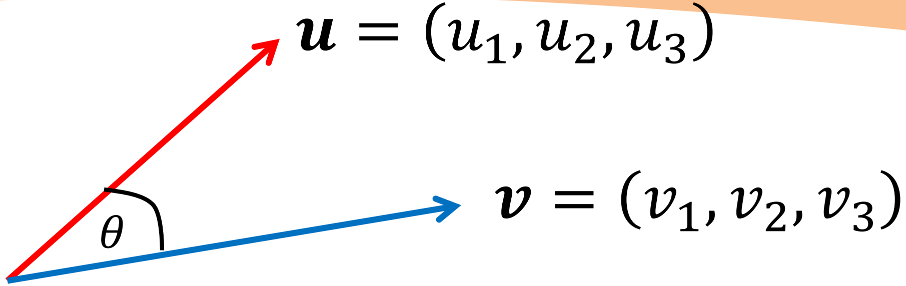
- Vektor $\overrightarrow{P_1P_2}$

$$\overrightarrow{P_1P_2} = P_2 - P_1 = (-1, 3, -2) - (2, 3, 4)$$
$$\overrightarrow{P_1P_2} = (-3, 0, -6) = -3x - 6z$$

- Jarak P_1 ke P_2

$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{(-3)^2 + 0^2 + (-6)^2}$$
$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = \sqrt{45}$$
$$\left|\overrightarrow{P_1P_2}\right| = 3\sqrt{5}$$

Perkalian Titik (Dot Product)



$$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \begin{cases} |\boldsymbol{u}||\boldsymbol{v}|\boldsymbol{cos\theta}, & \textbf{Jika u} \neq \textbf{0 dan v} \neq \textbf{0} \\ \textbf{0} & \textbf{Jika u} = \textbf{0 atau v} = \textbf{0} \end{cases}$$

Atau $(u_1x + u_2y + u_3z).(v_1x + v_2y + v_3z)$

$$\boxed{\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = u_1v_1 + u_2v_2 + u_3v_3}$$

Perkalian Titik (Dot Product)

Contoh:

Tentukan hasil kali titik antara vektor $\boldsymbol{u} = (0, 0, 2)$ dengan $\boldsymbol{v} = (2, 0, 2)$.

$$u.v = (0, 0, 2).(2, 0, 2)$$

$$= 0.2 + 0.0 + 2.2$$

$$= 0 + 0 + 4$$

$$= 4$$

Sifat-sifat Hasil Kali Titik

- Jika $\boldsymbol{u}$, $\boldsymbol{v}$, dan $\boldsymbol{w}$ adalah vektor R^2 atau R^3, k skalar, berlaku:

1. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} = \boldsymbol{v}.\boldsymbol{u}$ ***(komutatif)***
2. $\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = \boldsymbol{u}.\boldsymbol{v} + \boldsymbol{u}.\boldsymbol{w}$ ***(distributif)***
3. $k.(\boldsymbol{u}+\boldsymbol{v}) = k.\boldsymbol{u} + k.\boldsymbol{v}$
4. $\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} > \boldsymbol{0}, \boldsymbol{jika}\, \boldsymbol{u} \neq \boldsymbol{0}, \boldsymbol{dan}\, \boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}, \boldsymbol{jika}\, \boldsymbol{u} = \boldsymbol{0}$

Contoh

Jika $u = (2\,, -3, 7)$, $v = (-4, 1, 2)$ dan $w = (0, 3, -2)$, hitunglah:

a. $\boldsymbol{u}.\,(\boldsymbol{v} + \boldsymbol{w})$

b. $-\mathbf{2}(\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{v})$

c. $\boldsymbol{u}.\,\boldsymbol{u}$

Contoh

Jika $u = (2\,,-3,7)$, $v = (-4,1,2)$ dan $w = (0,3,-2)$, hitunglah:

a. $$\boldsymbol{u}.(\boldsymbol{v}+\boldsymbol{w}) = (2\,,-3,7).\big((-4,1,2)+(0,3,-2)\big)$$
$$= (2\,,-3,7).(-4,4,0)$$
$$= -8-12+0$$
$$= \boldsymbol{-20}$$

b. $$\boldsymbol{-2}(\boldsymbol{u}.\boldsymbol{v}) = -2\big((2\,,-3,7).(-4,1,2)\big) = -2(-8-3+14)$$
$$= -2(3) = \boldsymbol{-6}$$

c. $$\boldsymbol{u}.\boldsymbol{u} = (2\,,-3,7).(2\,,-3,7)$$
$$= 4+9+49 = \boldsymbol{62}$$

Latihan

1. Tentukan cosinus sudut antara vektor u dan v, berikut:

a. $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$ dan $\boldsymbol{v} = (-1, 1, -1)$

b. $\boldsymbol{u} = (1, 2, 3)$ dan $\boldsymbol{v} = (-1, 2, 1)$

c. $\boldsymbol{u} = (3, 1, 0)$ dan $\boldsymbol{v} = (0, 1, -1)$

2. Tentukan k, sehingga $\boldsymbol{u} = (k, 0, 1)$ dan $\boldsymbol{v} = (-k, 1, 1)$ saling tegak lurus.

Latihan

1. Tentukan cosinus sudut antara vektor u dan v, berikut:

a. $\boldsymbol{u} = (1, 0, 1)$ dan $\boldsymbol{v} = (-1, 1, -1)$

$$cos\theta = \frac{u.v}{|u||v|} = \frac{-1+0-1}{\sqrt{2}\sqrt{3}} = \frac{-2}{\sqrt{6}} = -\frac{1}{3}\sqrt{6}$$

$$\theta = cos^{-1}\left(-\frac{1}{3}\sqrt{6}\right) = \mathbf{144,68}°$$

Latihan

2. Tentukan k, sehingga $\boldsymbol{u} = (k, 0, 1)$ dan $\boldsymbol{v} = (-k, 1, 1)$ saling tegak lurus.

$$\theta = 90° \rightarrow cos 90° = 0$$

$$u . v = 0$$

$$(k, 0, 1). (-k, 1, 1) = 0$$

$$-k^2 + 0 + 1 = 0$$

$$k^2 - 1 = 0$$

$$(k - 1)(k + 1) = 0$$

$$k_1 = 1 \cup k_2 = -1$$

Terima Kasih

Sampai Jumpa di Pertemuan Selanjutnya