PROGRAM STUDI TEKNIK FISIKA
FAKULTAS TEKNIK DAN INFORMATIKA
UNIVERSITAS MULTIMEDIA NUSANTARA
SEMESTER GANJIL TAHUN AJARAN 2024/2025

UMN
UNIVERSITAS
MULTIMEDIA
NUSANTARA

EP 104 – LINEAR ALGEBRA

Pertemuan 9:
Basis, Dimensi, dan Rank

FIRSTKA HELIANTA MS, S.Si., M.Si

Capaian Pembelajaran Mingguan Mata Kuliah (Sub-CPMK)

1. Mahasiswa mampu menentukan basis dan dimensi C3)

Sub-Pokok Bahasan

1. Koordinat dan basis
2. Dimensi
3. Perubahan basis
4. Rank matrik
5. Operator matrik dalam R^2 dan R^3

Basis

- V adalah ruang vektor
- $S = \{v_1, v_2, v_3, \dots, v_n\}$ di mana $v_1, v_2, v_3, \dots, v_n \epsilon V$, maka S disebut basis jika
  1. S bebas linier
  2. S merupakan rentang (*span*) dari V

Basis

- V disebut Ruang Vektor dengan dimensi berhingga (n)
- Jika tidak bisa didefinisikan himpunan S (berhingga) yang dapat menjadi basis untuk V, maka V disebut berdimensi tak hingga
- Suatu Ruang Vektor bisa mempunyai lebih dari satu basis

Basis untuk R^3

$B = \{e_1, e_2, e_3\}$ dengan $e_1 = (1,0,0)^T$, $e_2 = (0,1,0)^T$, dan $e_3 = (0,0,1)^T$

B *bebas linier?*

$$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$k_1 = k_2 = k_3 = 0$$

B *bebas linier*

B *merentang* R^3?

$$U = (x, y, z)^T$$

$$k_1e_1 + k_2e_2 + k_3e_3 = U$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} x \\ y \\ z \end{pmatrix}$$

B *merentang* R^3

B *merupakan basis untuk* R^3

B *disebut sebagai basis standar untuk* R^3

Basis untuk R^3

$S = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (1,2,1)^T$, $v_2 = (2,9,0)^T$, dan $v_3 = (3,3,4)^T$

S bebas linier?

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = 0$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = 0$$

$$k_1 + 4k_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 2 & 9 & 3 & 0 \\ 1 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - b_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & -2 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ 5b_3 + 2b_2 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 5 & -3 & 0 \\ 0 & 0 & -1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{5}b_2 \\ -b_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 3 & 0 \\ 0 & 1 & -3/5 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 - 3b_3 \\ b_2 + \frac{3}{5}b_3 \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 2 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 - 2b_2 \\ \\ \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad \begin{array}{l} k_1 = 0 \\ k_2 = 0 \\ k_3 = 0 \end{array}$$

$\boxed{\textbf{\textit{S bebas linier}}}$

Basis untuk R^3

$S = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (1,2,1)^T$, $v_2 = (2,9,0)^T$, dan $v_3 = (3,3,4)^T$

$S\ merentang\ R^3?$

Pilih $u = (a, b, c)^T$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = u$$

$$k_1 + 2k_2 + 3k_3 = a$$

$$2k_1 + 9k_2 + 3k_3 = b$$

$$k_1 + 4k_3 = c$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 2 & 9 & 3 \\ 1 & 0 & 4 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

Bila matriks A dapat diubah menjadi matriks Identitas, maka S merentang di R^3.

Dari uraian sebelumnya, terbukti bahwa matriks A dapat diubah menjadi matriks identitas.

S merentang di $\boldsymbol{R^3}$

Kesimpulan:
S merupakan BASIS untuk R^3

Basis untuk R³

Tentukan apakah $S = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan

$$v_1 = \begin{pmatrix} 3 \\ -2 \\ 1 \end{pmatrix}, v_2 = \begin{pmatrix} -3 \\ 2 \\ -1 \end{pmatrix}, \text{dan } v_3 = \begin{pmatrix} -6 \\ 4 \\ 2 \end{pmatrix}$$

merupakan basis untuk ruang vektor R^3?

Basis untuk R^3

$S = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (3, -2, 1)^T$, $v_2 = (-3, 2, -1)^T$, dan $v_3 = (-6, 4, 2)^T$

S bebas linier?

$$k_1v_1 + k_2v_2 + k_3v_3 = 0$$

$$3k_1 - 3k_2 - 6k_3 = 0$$

$$-2k_1 + 2k_2 + 4k_3 = 0$$

$$k_1 - k_2 + 2k_3 = 0$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 3 & -3 & -6 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 1 & -1 & 2 & 0 \end{array}\right) b_3 \leftrightarrow b_1$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ -2 & 2 & 4 & 0 \\ 3 & -3 & -6 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ b_2 + 2b_1 \\ b_3 - 3b_1 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 8 & 0 \\ 0 & 0 & -12 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \frac{1}{8}b_2 \\ -\frac{1}{12}b_3 \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 2 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 - 2b_3 \\ b_2 - b_3 \\ \end{array}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|c} 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 \end{array}\right) \quad k_3 = 0$$

$$k_1 - k_2 = 0 \longrightarrow k_1 = k_2$$

$\boxed{\textbf{\textit{S tidak bebas linier}}}$

$\boxed{\textbf{\textit{S bukan basis untuk }} R^3}$

Basis untuk R^3

$S = \{v_1, v_2, v_3\}$ dengan $v_1 = (1,2,1)^T$, $v_2 = (2,9,0)^T$, dan $v_3 = (3,3,4)^T$

$S\ merentang\ R^3?$

Pilih $u = (a, b, c)^T$

$$k_1 v_1 + k_2 v_2 + k_3 v_3 = u$$

$$3k_1 - 3k_2 - 6k_3 = a$$

$$-2k_1 + 2k_2 + 4k_3 = b$$

$$k_1 - k_2 + 2k_3 = c$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}$$

$$B = \begin{pmatrix} a \\ b \\ c \end{pmatrix}$$

$$X = \begin{pmatrix} k_1 \\ k_2 \\ k_3 \end{pmatrix}$$

$$\begin{pmatrix} 3 & -3 & -6 \\ -2 & 2 & 4 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix} \rightarrow \begin{pmatrix} 1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

Dari uraian sebelumnya, matriks A tidak dapat diubah menjadi matriks identitas.

S tidak merentang di $\boldsymbol{R^3}$

Kesimpulan:
S BUKAN BASIS untuk R^3

Basis untuk Ruang SPL

Tentukan basis untuk ruang jawab dari SPL:

$$X_1 + 2X_2 + 7X_3 - 9X_4 + 31X_5 = 0$$
$$2X_1 + 4X_2 + 7X_3 - 11X_4 + 34X_5 = 0$$
$$3X_1 + 6X_2 + 5X_3 - 11X_4 + 29X_5 = 0$$

Ubah ke dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & 7 & -9 & 31 \\ 2 & 4 & 7 & -11 & 34 \\ 3 & 6 & 5 & -11 & 29 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Basis untuk Ruang SPL

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & -9 & 31 & 0 \\ 2 & 4 & 7 & -11 & 34 & 0 \\ 3 & 6 & 5 & -11 & 29 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ b_2 - 2b_1 \\ b_3 - 3b_1 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & -9 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & -7 & 7 & -28 & 0 \\ 0 & 0 & -16 & 16 & -64 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ -\frac{1}{7} b_2 \\ -\frac{1}{16} b_3 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & -9 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ \\ b_3 - b_2 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 2 & 7 & -9 & 31 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 4 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Baris 2:

$$X_3 - X_4 + 4X_5 = 0$$

$$\boxed{X_3 = X_4 - 4X_5}$$

Baris 1:

$$X_1 + 2X_2 + 7X_3 - 9X_4 + 31X_5 = 0$$

$$X_1 + 2X_2 + 7(X_4 - 4X_5) - 9X_4 + 31X_5 = 0$$

$$X_1 + 2X_2 + 7X_4 - 28X_5 - 9X_4 + 31X_5 = 0$$

$$X_1 + 2X_2 - 2X_4 + 3X_5 = 0$$

$$\boxed{X_1 = -2X_2 + 2X_4 - 3X_5}$$

$\boxed{X_3 = X_4 - 4X_5}$ $\boxed{X_1 = -2X_2 + 2X_4 - 3X_5}$

- Variabel Bebas: $X_2, X_4, dan\ X_5$
- Variabel Tak Bebas: $X_1\ dan\ X_3$
- Misal:

$X_2 = r$

$X_4 = s$

$X_5 = t$

$X_1 = -2r + 2s - 3t$

$X_3 = s - 4t$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -2r + 2s - 3t \\ r \\ s - 4t \\ s \\ t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -2 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + s\begin{bmatrix} 2 \\ 0 \\ 1 \\ 1 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -3 \\ 0 \\ -4 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis:

$\overrightarrow{u_1} = (-2,1,0,0,0)^T$

$\overrightarrow{u_2} = (2,0,1,1,0)^T$

$\overrightarrow{u_3} = (-3,0,-4,0,1)^T$

Dimensi

V adalah ruang vektor

$S = \{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ basis dari V

Dimensi dari $V = n$ (banyaknya vektor di S)

Contoh dari jawaban SPL sebelumnya

$$\overline{u_1} = (-2,1,0,0,0)^T$$
$$\overline{u_2} = (2,0,1,1,0)^T$$
$$\overline{u_3} = (-3,0,-4,0,1)^T$$

Dimensi dari ruang jawab tersebut = 3 (terdiri dari 3 vektor)

Dimensi

Tentukan basis dan dimensi dari SPL:

$$2X_1 + 2X_2 - X_3 + X_5 = 0$$
$$-X_1 - X_2 + 2X_3 - 3X_4 + X_5 = 0$$
$$X_1 + X_2 - 2X_3 + X_5 = 0$$
$$X_3 + X_4 + X_5 = 0$$

Ubah ke dalam bentuk matriks

$$\begin{pmatrix} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & 1 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix}$$

Dimensi

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) b_3 \leftrightarrow b_1$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ -1 & -1 & 2 & -3 & 1 & 0 \\ 2 & 2 & -1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} \\ b_2 + b_1 \\ b_3 - 2b_1 \\ \\ \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 3 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} -\frac{1}{3} b_2 \\ \frac{1}{3} b_3 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -2 & 0 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 1 & 1 & 0 \end{array}\right) \begin{array}{l} b_1 + b_3 \\ \\ b_4 - b_3 \end{array}$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \end{array}\right) b_4 - b_2$$

$$= \left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Dimensi

$$\left(\begin{array}{ccccc|c} 1 & 1 & -1 & 0 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

Baris 3:

$$X_3 + X_5 = 0$$

$$\boxed{X_3 = -X_5}$$

Baris 2:

$$\boxed{X_4 = 0}$$

Baris 1:

$$X_1 + X_2 - X_3 = 0$$

$$X_1 + X_2 - (-X_5) = 0$$

$$X_1 + X_2 + X_5 = 0$$

$$\boxed{X_1 = -X_2 - X_5}$$

$\boxed{X_1 = -X_2 - X_5}$ $\boxed{X_3 = -X_5}$ $\boxed{X_4 = 0}$

- Variabel Bebas: X_2 dan X_5
- Variabel Tak Bebas: X_1 dan X_3

Misal:

$$X_2 = r$$

$$X_5 = t$$

$$X_1 = -r - t$$

$$X_3 = -t$$

$$X_4 = 0$$

$$\begin{bmatrix} X_1 \\ X_2 \\ X_3 \\ X_4 \\ X_5 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -r-t \\ r \\ -t \\ 0 \\ t \end{bmatrix} = r\begin{bmatrix} -1 \\ 1 \\ 0 \\ 0 \\ 0 \end{bmatrix} + t\begin{bmatrix} -1 \\ 0 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{bmatrix}$$

Basis:

$$\overrightarrow{u_1} = (-1,1,0,0,0)^T$$

$$\overrightarrow{u_2} = (-1,0,-1,0,1)^T$$

Dimensi = 2

Terima Kasih

Sampai Jumpa
di Pertemuan Selanjutnya