

**PROGRAM STUDI TEKNIK KOMPUTER
FAKULTAS TEKNIK DAN INFORMATIKA
UNIVERSITAS MULTIMEDIA NUSANTARA
SEMESTER GANJIL TAHUN AJARAN 2024/2025**



CE 121 – LINEAR ALGEBRA

Pertemuan 8 Sub Ruang

Firstka Helianta MS, S.Si., M.Si

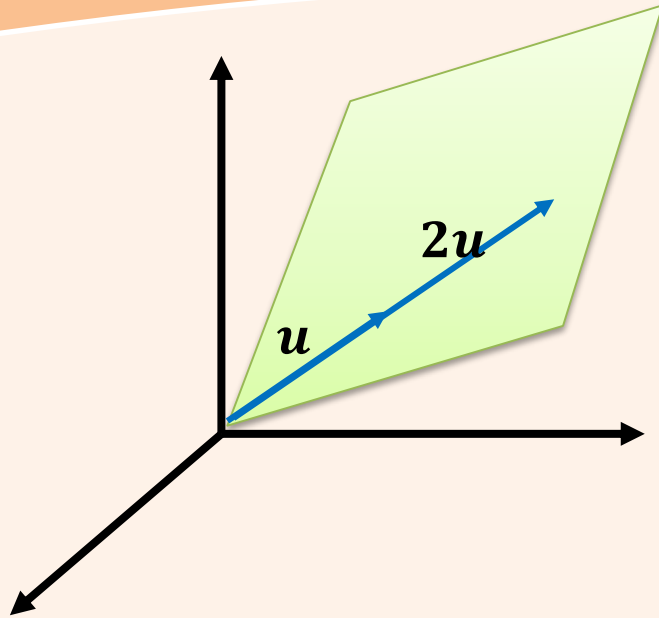
Capaian Pembelajaran Mingguan Mata Kuliah (Sub-CPMK)

- Mahasiswa mampu menentukan kombinasi dan independensi linier pada ruang vektor (C3)

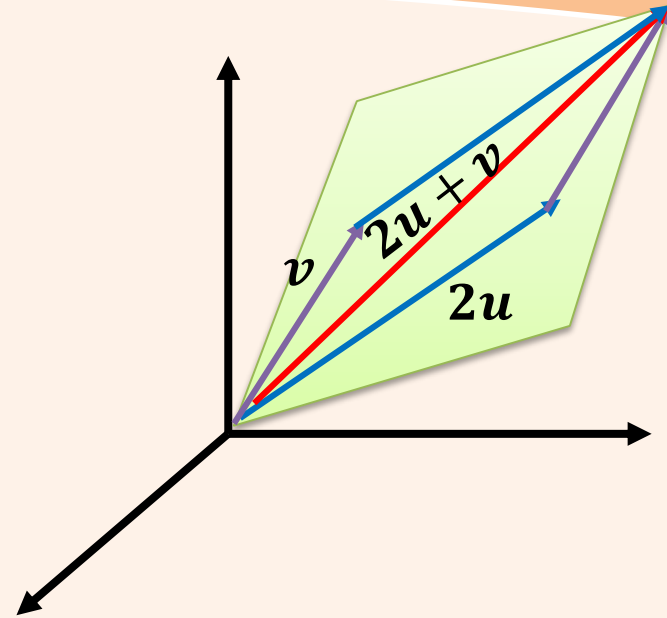
Sub-Pokok Bahasan

1. Ruang vektor
2. Subruang vektor
3. Kombinasi linier
4. Independensi linier

Sifat Ketertutupan



Perkalian dengan skalar



Penjumlahan Vektor

Teorema

Jika S adalah subhimpunan tak kosong dari ruang vektor V , dan S memenuhi syarat-syarat berikut:

- (i) Untuk setiap $\mathbf{x}, \mathbf{y} \in S$, maka $\mathbf{x} + \mathbf{y} \in S$
- (ii) Untuk setiap $\mathbf{x} \in S$ dan $\alpha \in R$, maka $\alpha\mathbf{x} \in S$

Maka S disebut ruang bagian (*subspace*) dari ruang vektor V

Contoh 1

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3 \mid x = 3y, z = -2y \right\}$$

(i) Misalkan $\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} \in S$

$$x_1 = 3y_1$$

$$x_2 = 3y_2$$

$$z_1 = -2y_1$$

$$z_2 = -2y_2$$

$$\begin{bmatrix} x_1 \\ y_1 \\ z_1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} x_2 \\ y_2 \\ z_2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} x_1 + x_2 \\ y_1 + y_2 \\ z_1 + z_2 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright x_1 + x_2 = 3y_1 + 3y_2$$

$$x_1 + x_2 = 3(y_1 + y_2)$$

$$\triangleright z_1 + z_2 = -2y_1 - 2y_2$$

$$z_1 + z_2 = -2(y_1 + y_2)$$

Contoh 1

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3 \mid x = 3y, z = -2y \right\}$$

(ii) Misalkan $\begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in S$ & $\alpha \in R$

$$\alpha \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} \alpha x \\ \alpha y \\ \alpha z \end{bmatrix}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \alpha x &= 3\alpha y \\ x &= 3y \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} \blacktriangleright \alpha z &= -2\alpha y \\ z &= -2y \end{aligned}$$

Syarat (i) dan (ii) terpenuhi
 S merupakan subruang dari R^3

Contoh 1

$$S = \left\{ \begin{bmatrix} x \\ y \\ z \end{bmatrix} \in R^3 \mid x = 3y, z = -2y \right\}$$

(i) Misalkan $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} \in S$

$$\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \\ -2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 6 \\ 2 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 9 \\ 3 \\ -6 \end{bmatrix}$$

$$\triangleright x = 3y$$

$$\triangleright 9 = 3.3$$

$$\triangleright 9 = 9$$

$$\triangleright z = -2y$$

$$\triangleright -6 = -2.3$$

$$\triangleright -6 = -6$$

(ii) Misalkan $\begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix}$ & $\alpha = 2$

$$2 \begin{bmatrix} -6 \\ -2 \\ 4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ -4 \\ 8 \end{bmatrix} \triangleright -12 = 3(-4)$$

$$\triangleright 8 = -2(-4)$$

Syarat (i) dan (ii) terpenuhi S merupakan subruang dari R^3

Contoh 2

Periksa apakah himpunan S merupakan subruang dari ruang vektor V .

a. $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0 \right\}$ dan $V = \mathbb{R}^2$

b. $S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 x_2 = 0 \right\}$ dan $V = \mathbb{R}^2$

c. $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = 2d, b = c \right\}$ dan $V = \mathbb{R}^{2 \times 2}$

Contoh 2a

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 + x_2 = 0 \right\} \text{ dan } V = R^2$$

(i) Misalkan $A = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} -2 \\ 2 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 3 \\ -3 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ -1 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_1 + x_2 = 0$

$$1 + (-1) = 0 \quad \textbf{Terpenuhi}$$

(ii) Misalkan $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix}$ & $\alpha = -3$

$$\alpha C = (-3) \begin{bmatrix} 4 \\ -4 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -12 \\ 12 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_1 + x_2 = 0$

$$-12 + 12 = 0 \quad \textbf{Terpenuhi}$$

Syarat (i) dan (ii) terpenuhi
S merupakan subruang dari R^2

Contoh 2b

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} \mid x_1 x_2 = 0 \right\} \text{ dan } V = R^2$$

(i) Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 \\ 0 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 0 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_1 x_2 = 0$

$$1(2) = 2 \neq 0$$

***Tidak
Terpenuhi***

(ii) Misalkan $C = \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix}$ & $\alpha = 2$

$$\alpha C = 2 \begin{bmatrix} -2 \\ 0 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} -4 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_1 x_2 = 0$

$$(-4)(0) = 0 \quad \textbf{Terpenuhi}$$

Syarat (i) tidak terpenuhi
 S bukan subruang dari R^2

Contoh 2c

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \mid a = 2d, b = c \right\} \text{ dan } V = R^{2 \times 2}$$

(i) Misalkan $A = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 2 & 3 \\ 3 & 1 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -2 & 5 \\ 5 & -1 \end{pmatrix}$$

Syarat:

$$a = 2d, \quad b = c$$

$$-2 = 2(-1) \quad 5 = 5$$

$$-2 = -2 \quad \textbf{Terpenuhi}$$

(ii) Misalkan $C = \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix}$ $\alpha = 2$

$$\alpha C = 2 \begin{pmatrix} -2 & 1 \\ 1 & -1 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} -4 & 2 \\ 2 & -2 \end{pmatrix}$$

Syarat:

$$a = 2d, \quad b = c$$

$$-4 = 2(-2) \quad 2 = 2$$

$$-4 = -4 \quad \textbf{Terpenuhi}$$

Syarat (i) dan (ii) terpenuhi
 S merupakan subruang dari $R^{2 \times 2}$

Latihan

Periksa apakah himpunan S merupakan subruang dari ruang vektor V .

a. $S = \{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2 + 1\}$ dan $V = R^2$

b. $S = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1 + x_2\}$ dan $V = R^3$

c. $S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a = bc \right\}$ dan $V = R^{2 \times 2}$

Latihan

$$S = \{(x_1, x_2)^T \mid x_1 = 3x_2 + 1\} \text{ dan } V = R^2$$

(i) Misalkan $A = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 4 \\ 1 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} -2 \\ -1 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 \\ 0 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_1 = 3x_2 + 1$

$$\begin{aligned} 2 &= 3(0) + 1 \\ 2 &\neq 1 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \textbf{Tidak} \\ \textbf{Terpenuhi} \end{array}$$

(ii) Misalkan $C = \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix}$ & $\alpha = 3$

$$\alpha C = 3 \begin{bmatrix} 7 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 21 \\ 6 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_1 = 3x_2 + 1$

$$\begin{aligned} 21 &= 3(6) + 1 \\ 21 &\neq 19 \end{aligned} \quad \begin{array}{l} \textbf{Tidak} \\ \textbf{Terpenuhi} \end{array}$$

Syarat (i) dan (ii) tidak terpenuhi
 S bukan subruang dari R^2

Latihan

$$S = \{(x_1, x_2, x_3)^T \mid x_3 = x_1 + x_2\}$$

dan $V = R^3$

(i) Misalkan $A = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix}$ & $B = \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix}$

$$A + B = \begin{bmatrix} 1 \\ 2 \\ 3 \end{bmatrix} + \begin{bmatrix} 5 \\ 3 \\ 8 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 6 \\ 5 \\ 11 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_3 = x_1 + x_2$

$$11 = 6 + 5$$

$$11 = 11 \quad \textbf{Terpenuhi}$$

(ii) Misalkan $C = \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix}$ & $\alpha = 5$

$$\alpha C = 5 \begin{bmatrix} 4 \\ -2 \\ 2 \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 20 \\ -10 \\ 10 \end{bmatrix}$$

Syarat: $x_3 = x_1 + x_2$

$$10 = 20 + (-10)$$

$$10 = 10$$

Terpenuhi

Syarat (i) dan (ii) terpenuhi
S merupakan subruang dari R^3

Latihan

$$S = \left\{ \begin{pmatrix} a & 1 \\ b & c \end{pmatrix} \mid a = bc \right\} \text{ dan } V = R^{2 \times 2}$$

(i) Misalkan $A = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ & $B = \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix}$

$$A + B = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} 8 & 1 \\ 4 & 2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 14 & 2 \\ 6 & 5 \end{pmatrix}$$

Syarat: $a = bc$ $a_{12} \neq 1$

$14 = 6.5$ **Tidak**

$14 \neq 30$ **Terpenuhi**

(ii) Misalkan $C = \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$ & $\alpha = 2$

$$\alpha C = 2 \begin{pmatrix} 6 & 1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 12 & 2 \\ 4 & 6 \end{pmatrix}$$

Syarat: $a = bc$ $a_{12} \neq 1$

$12 = 4.6$ **Tidak**

$12 \neq 24$ **Terpenuhi**

Syarat (i) dan (ii) tidak terpenuhi
S bukan subruang dari $R^{2 \times 2}$

Terima Kasih

**Sampai Jumpa
di Pertemuan Selanjutnya**