Cálculo Integral II. Cálculo II

OBJETIVOS:

- Calcular integrales mediante sustitución simple.
- Calcular integrales mediante integración por partes.
- Calcular integrales mediante fracciones parciales.
- Calcular integrales definidas.

1. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de sustitución simple.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{4-2x}dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x^2-12}{x^3-6x+1}dx.$

c) $\displaystyle\int e^{-2y}+e^{2y}dy.$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx.$

e) $\displaystyle\int 7x\sqrt{4-x^2}dx.$

f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{w^2+4w-1}{w+2}dw.$

g) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{2x}}dx.$

h) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{(1+e^{3x})^2}{e^{-3x}}dx.$

i) $\displaystyle\int \frac{6}{(y+5)^3}dy.$

j) $\displaystyle\int_0^4 xe^{4-x^2}dx.$

k) $\displaystyle\int y(y+2)^2dy.$

l) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)(x^2+x)^4dx.$

m) $\displaystyle\int \frac{6x^2+4}{e^{x^3+2x}}dx.$

n) $\displaystyle\int_3^5 \sqrt{e^{3z}}dz.$

2. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

a) $\displaystyle\int xe^{-x}dx.$

b) $\displaystyle\int \ln(4x)dx.$

c) $\displaystyle\int_{-1}^3 \frac{x}{(2x+1)^2}dx.$

d) $\displaystyle\int 4xe^{2x}dx.$

e) $\displaystyle\int x^2e^xdx.$

f) $\displaystyle\int_0^1 x^2e^{-2x}dx.$

g) $\displaystyle\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx.$

h) $\displaystyle\int (\ln(x))^2dx.$

i) $\displaystyle\int y^3\ln(y)dx.$

j) $\displaystyle\int_0^2 15x\sqrt{x+1}dx.$

k) $\displaystyle\int \sqrt{x}\ln(x^2)dx.$

l) $\displaystyle\int (x-e^{-x})^2dx.$

m) $\displaystyle\int 2(2x-1)\ln(x-1)dx.$

n) $\displaystyle\int_{-1}^2 x^5e^{x^3}dx.$

3. Exprese la forma racional dada en términos de fracciones parciales. Considere la posibilidad de tener que dividir primero.

   a) $\dfrac{10x}{x^2+7x+6}$.

   b) $\dfrac{4x-5}{x^2+3x+1}$.

   c) $\dfrac{x+5}{x^2-1}$.

   d) $\dfrac{x^2+3}{x^3+x}$.

   e) $\dfrac{3x^2+5}{(x^2+4)^2}$.

   f) $\dfrac{x^2}{x^2+6x+8}$.

4. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de fracciones parciales.

   a) $\displaystyle\int \frac{5x-2}{x^2-x}dx$.

   b) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$.

   c) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+8x-1}{x^3-2x^2-8x}dx$.

   d) $\displaystyle\int_{-1}^{1} \frac{2(x^2+8)}{x^3+4x}dx$.

   e) $\displaystyle\int \frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2}dx$.

   f) $\displaystyle\int \frac{4x}{x^4-x^2}dx$.

   g) $\displaystyle\int_0^1 \frac{2x^3-6x^2-10x-6}{x^4-1}dx$.

   h) $\displaystyle\int \frac{13x^3+24x}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$.

   i) $\displaystyle\int \frac{x+1}{x^2-x-2}dx$.

   j) $\displaystyle\int \frac{-3x^3+2x-3}{x^2(x^2-1)}dx$.

   k) $\displaystyle\int \frac{2-2x}{x^2+7x+12}dx$.

   l) $\displaystyle\int_1^2 \frac{2x^2+1}{(x+3)(x+2)}dx$.

5. Escribe los siguientes problemas de valor inicial como una integral definida y resuelve.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = e^{2x}+3, y(0) = -\dfrac{1}{2}$.

   b) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+3}{x}, y(1) = 5$.

   c) $\dfrac{dy}{dx} = xe^{5x+2}, y(0) = 1$.

   d) $\dfrac{dy}{dx} = \ln(4x), y(0) = 1$.

   e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^2-2}{(x-2)(x-1)}, y(0) = 1$.

   f) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x^3-1}{(x^2-1)(x^2-1)}, y(0) = 2$.

1.x) $\int y(y+2)^{100}\, dy$

$u = (y+2)$

$du = 1$

$du = dx$

$\int y\,(u)^{100}\, dy$

$I = \int y\,(u)^{100}\, dy$

$I =$

1. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de sustitución simple.

a) $\displaystyle\int \frac{4}{4-2x}dx.$

b) $\displaystyle\int_0^1 \frac{6x^2-12}{x^3-6x+1}dx.$

c) $\displaystyle\int e^{-2y}+e^{2y}dy.$

d) $\displaystyle\int_0^2 \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}}dx.$

e) $\displaystyle\int 7x\sqrt{4-x^2}dx.$

f) $\displaystyle\int_{-1}^0 \frac{w^2+4w-1}{w+2}dw.$

g) $\displaystyle\int \frac{e^{\sqrt{3x}}}{\sqrt{2x}}dx.$

h) $\displaystyle\int_{-2}^{-1} \frac{(1+e^{3x})^2}{e^{-3x}}dx.$

i) $\displaystyle\int \frac{6}{(y+5)^3}dy.$

j) $\displaystyle\int_0^4 xe^{4-x^2}dx.$

k) $\displaystyle\int y(y+2)^2dy.$

l) $\displaystyle\int_{-1}^1 (2x+1)(x^2+x)^4dx.$

m) $\displaystyle\int \frac{6x^2+4}{e^{x^3+2x}}dx.$

n) $\displaystyle\int_3^5 \sqrt{e^{3z}}dz.$

a) $\displaystyle\int \frac{4}{4-2x}\, dx$

$u = 4-2x$

$du = -2\, dx$

$\displaystyle\int \frac{-2}{u}\, du$

$\displaystyle -2\int \frac{1}{u}\, du$

$-2\ln(u)$

$-2\ln(4-2x)$

b) $\displaystyle\int \frac{6x^2-12}{x^3-6x+1}\, dx$

$u = x^3-6x+1$

$du = 3x^2-6\, dx$

$\displaystyle \frac{du}{3x^2-6} = dx$

$\displaystyle\int \frac{3x^2-6\, du}{u}$

$\displaystyle \frac{6x^2-12}{3x^2-6}$

$2+2 = 4$

b) $\int \frac{6x^2 - 12}{x^3 - 6x + 1} dx$

$\rightarrow u : x^3 - 6x + 1$

$\rightarrow du = 3x^2 - 6 \, dx$

$\frac{du}{3x^2 - 6} = dx$

$\int \frac{6x^2 - 12}{u} \cdot \frac{1}{3x^2 - 6} du$

$\int \frac{6\cancel{(x^2 - 2)}}{u} \cdot \frac{1}{3\cancel{(x^2 - 2)}}$

$\int \frac{\cancel{6}}{u} \cdot \frac{1}{\cancel{3}}$

$\int \frac{2}{u}$

$2 \int \frac{1}{u}$

$2 \ln(|u|) = 2 \ln(|x^2 - 6x + 1|) \Big|_0^1$

$2 \ln(|1 - 6 + 1|) - 2 \ln(|1|)$

$2 \ln(|-4|) - 2 \ln(|1|)$

$= 2 \times 2 \ln(2)$

c) $\int e^{-2y} + e^{2y} dy.$

$u = e^{2y}$

$du = 2e^{2y} dy \Rightarrow dy = \frac{1du}{2e^{2y}}$

$\int \frac{1}{2u} \cdot (1 + u)\, du$

$\int \left(\frac{1}{2u} + \frac{1\cancel{u}}{2\cancel{u}} \right) du$

$\int \left(\frac{1}{2u} + \frac{1}{2} \right)$

$\frac{1}{2} \int \frac{1}{u} + \frac{1}{2} u + c$

$\frac{1}{2} \ln(|e^{2y}|) + \frac{1}{2} e^{2y} + c$

d) $\int_0^2 \frac{2e^{2x}}{1+e^{2x}} dx.$

$u = 1 + e^{2x}$

$du = 2e^{2x} dx \Rightarrow \frac{du}{2e^{2x}} = dx$

$\int \frac{du}{u}$

$\ln|u| + c \Rightarrow \ln|1 + e^{2x}| + c$

e) $\int 7x\sqrt{4 - x^2} dx.$

$u = 4 - x^2$

$du = -2x\, dx \Rightarrow \cancel{x} dx = \frac{du}{-2\cancel{x}}$

$7 \int \sqrt{u} \frac{du}{-2}$

$-\frac{7}{2} \int u^{1/2} du$

$-\frac{7}{2} \frac{u^{3/2}}{3/2} + c \Rightarrow \frac{\frac{u^{3/2}}{1}}{\frac{3}{2}} \quad \frac{u}{1} \cdot \frac{2}{3} = \frac{2u^{3/2}}{3}$

$-\frac{7}{2} \cdot \frac{2u^{3/2}}{3} = -\frac{14u^{3/2}}{6} + c \Rightarrow \frac{7(4-x^2)^{3/2}}{3}$

$f)\ \int_{-1}^{0} \frac{w^2+4w-1}{w+2}\,dw.$

$u = w+2$

$du = dw \quad \Rightarrow \frac{du}{dw} = 1$

$\int \frac{du}{u}$ $\qquad \frac{w^2+4w-1}{u}$ $\qquad \int \frac{w^2}{u} + \int \frac{4w}{u} - \int \frac{-1}{u}\,dw$

$\ln|u| + c \Rightarrow \ln|w+2| + c$

$\int \frac{4}{4-2x}\,dx$ $\qquad u = 4-2x$

$du = -2dx$

$\frac{\cancel{4}}{u} \cdot \frac{du}{\cancel{-2}}$ $\qquad \frac{du}{-2} = dx$

$\int \frac{-2du}{u}$

$-2\int \frac{du}{u}$

2. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de integración por partes.

$a)$ $\int xe^{-x}dx.$	$h)$ $\int (\ln(x))^2 dx.$
$b)$ $\int \ln(4x)dx.$	$i)$ $\int y^3\ln(y)dx.$
$c)$ $\int_{-1}^{3} \frac{x}{(2x+1)^2}dx.$	$j)$ $\int_0^2 15x\sqrt{x+1}dx.$
$d)$ $\int 4xe^{2x}dx.$	$k)$ $\int \sqrt{x}\ln(x^2)dx.$
$e)$ $\int x^2e^x dx.$	$l)$ $\int (x-e^{-x})^2 dx.$
$f)$ $\int_0^1 x^2e^{-2x}dx.$	$m)$ $\int 2(2x-1)\ln(x-1)dx.$
$g)$ $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx.$	$n)$ $\int_{-1}^{2} x^5e^{x^3}dx.$

a) $\int xe^{-x}dx$ $\quad u = -x$

$du = -1dx \Rightarrow du = -dx$

$\int xe^{-x} = -\int xe^{u}du$ | integrar por partes : $u = x$ y $dv = e^{u}$

$-e^{-x}\cdot x - \int e^{u}du$

$-e^{-x}\cdot x - \int e^{u}du$

$(-e^{-x}\cdot x - e^{-x}) + c$

b) $\int \ln(4x)dx$ $\quad u = \ln(4x)$

$du = \frac{1}{x}$

$x\cdot\ln(4x) - \int dx$

$x\cdot\ln(4x) - x + c$

$x\cdot(\ln(4x) - 1) + c$

1late

d) $\int 4xe^{2x}dx.$

$u = x$

$du = dx$

$g = \frac{e^{2x}}{2}$

$dg = 2e^{2x}$

$uv - \int v\,du$

$4\int e^{2x}x\,dx$

$2e^{2x}\cdot x - \int 2e^{2x}$

$2e^{2x}\cdot x - 2\int e^{2x}dx \rightarrow$ $s = 2x$

$ds = 2dx \rightarrow \frac{ds}{2} = dx$

$2e^{2x}\cdot x - 2\int \frac{e^{u}}{2}du$

$2e^{2x}\cdot x - \int e^{u}du$ $\qquad e^{u}\cdot\frac{ds}{2} = \frac{e^{u}}{2}$

$2e^{2x}\cdot x - e^{u} + c$

$2e^{2x}\cdot$

c) $\int_{\bullet}^{\bullet} \frac{x}{(2x+1)^2}dx.$

F. Parciales

$$\int \frac{1}{2(2x+1)} - \frac{1}{2(2x+1)^2}\,dx$$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{2x+1}dx - \frac{1}{2}\int \frac{1}{(2x+1)^2}dx$$

$u = 2x+1$
$du = 2dx$

$s = 2x+1$
$ds = 2$

$$\frac{1}{2}\int \frac{1}{u}\cdot\frac{du}{2} - \frac{1}{2}\int \frac{1}{s^2}\cdot\frac{ds}{2}$$

$$\frac{1}{4}\int \frac{1}{u}du - \frac{1}{4}\int \frac{1}{s^2}ds$$

$$\frac{\ln(u)}{4} + \frac{1}{4s}$$

$$\frac{s\cdot\ln(u)+1}{4s} = \frac{(2x+1)(\ln(2x+1))+1}{4(2x+1)} = \frac{(2x+1)(\ln(2x+1))+1}{4x+4}$$

e) $\int x^2e^x dx.$

$u = x^2$
$du = 2x\,dx$

$v = e^x$
$dv = e^x dx$

$uv - \int v\,du$

$$x^2\cdot e^x - \int e^x du$$

$$x^2\cdot e^x - \int e^x\, 2x\,dx$$

$$x^2\cdot e^x - 2\int e^x x\,dx$$

$u = x$
$du = dx$

$v = e^x$
$dv = e^x dx$

$$x^2\cdot e^x - 2e^x\cdot x + 2\int e^x dx$$

$$x^2\cdot e^x - 2e^x\cdot x + 2e^x + C$$

$$e^x x^2 - 2e^x x + 2e^x$$

g) $\int \frac{\ln(x+1)}{x+1}dx.$

$u = \ln(x+1)$

$du = \frac{1}{x+1}dx \Rightarrow du \cdot (x+1) = dx$

$\int \frac{u}{\cancel{x+1}} \cdot \cancel{(x+1)}du$

$\int u\,du$

$\frac{u^2}{2}$

$= \frac{\ln(x+1)^2}{2}$

h) $\int (\ln(x))^2 dx$

$u = \ln^2(x)$ $\quad$ $v = x$

$du = \frac{2\ln(x)}{x} dx$ $\quad$ $dv = dx$ $\quad$ $uv - \int v du$

$x\ln^2(x) - \int \cancel{x} \cdot \frac{2\ln(x)}{\cancel{x}} dx$

$x\ln^2(x) - 2\int \ln(x) dx$

$x\ln^2(x) - \frac{2}{x} + c$

h) $\int (\ln(x))^2 dx.$

i) $\int y^3 \ln(y) dx.$

j) $\int_0^2 15x\sqrt{x+1} dx.$

k) $\int \sqrt{x}\ln(x^2) dx.$

l) $\int (x - e^{-x})^2 dx.$

m) $\int 2(2x-1)\ln(x-1) dx.$

n) $\int_{-1}^2 x^5 e^{x^3} dx.$

3. Exprese la forma racional dada en términos de fracciones parciales. Considere la posibilidad de tener que dividir primero.

a) $\frac{10x}{x^2+7x+6}$. $\to (x+1)(x+6)$

b) $\frac{4x-5}{x^2+3x+1}$. $\to$?

c) $\frac{x+5}{x^2-1}$. $(x+1)(x-1)$

d) $\frac{x^2+3}{x^3+x}$. $\to$? $i, -i, 0$?

e) $\frac{3x^2+5}{(x^2+4)^2}$. $(x^2+4)(x^2+4)$

f) $\frac{x^2}{x^2+6x+8}$. $(x+2)(x+4)$ $x^4+4x^2+4x^2+16$ x^4+8x^2+16

$\}$ $2i, -2i$?

4. Calcule las siguientes integrales utilizando el método de fracciones parciales.

a) $\int \frac{5x-2}{x^2-x}dx$.

b) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx$. $(x-3)(x-2)$

c) $\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+8x-1}{x^3-2x^2-8x}dx$.

d) $\int_{-1}^{1} \frac{2(x^2+8)}{x^3+4x}dx$.

e) $\int \frac{3x^3+x}{(x^2+1)^2}dx$.

f) $\int \frac{4x}{x^4-x^2}dx$.

g) $\int_0^1 \frac{2x^3-6x^2-10x-6}{x^4-1}dx$.

h) $\int \frac{13x^3+24x}{(x^2+1)(x^2+2)}dx$.

i) $\int \frac{x+1}{x^2-x-2}dx$.

j) $\int \frac{-3x^3+2x-3}{x^2(x^2-1)}dx$.

k) $\int \frac{2-2x}{x^2+7x+12}dx$.

l) $\int_1^2 \frac{2x^2+1}{(x+3)(x+2)}dx$.

5. Escribe los siguientes problemas de valor inicial como una integral definida y resuelve.

a) $\frac{dy}{dx} = e^{2x}+3, y(0) = -\frac{1}{2}$.

b) $\frac{dy}{dx} = \frac{x+3}{x}, y(1) = 5$.

c) $\frac{dy}{dx} = xe^{5x+2}, y(0) = 1$.

d) $\frac{dy}{dx} = \ln(4x), y(0) = 1$.

e) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^2-2}{(x-2)(x-1)}, y(0) = 1$.

f) $\frac{dy}{dx} = \frac{x^3-1}{(x^2-1)(x^2-1)}, y(0) = 2$.

a) $\int \frac{5x-2}{x^2-x}dx = \int \frac{5x-2}{x(x-1)}dx \Leftrightarrow \frac{A}{x} + \frac{B}{x-1}$

$5x-2 = A(x-1) + Bx$

Sea $x = 0$

$5(0)-2 \Rightarrow A(0-1) + B(0)$

$-2 \Rightarrow -A$

$A = 2$

Sea $x = 1$

$5(1)-2 \Rightarrow A(1-1) + B(1)$

$5-2 \Rightarrow B$

$3 = B$

$\int \frac{5x-2}{x^2-x}dx = \int \left[\frac{2}{x} + \frac{3}{x-1}\right]dx$

$= 2\int \frac{1}{x}dx + 3\int \frac{1}{x-1}dx$

$= 2\ln(x) + 3\ln(x-1) + C$

---

b) $\int \frac{1}{x^2-5x+6}dx = \int \frac{1}{(x-3)(x-2)}dx \Leftrightarrow \frac{A}{(x-3)} + \frac{B}{(x-2)}$

$1 = A(x-2) + B(x-3)$

Sea $x = 2$

$1 = A(2-2) + B(2-3)$

$1 = -B$

$B = -1$

Sea $x = 3$

$1 = A(3-2) + B(3-3)$

$1 = A$

$\int \frac{1}{x^2-5x+6} = \int \left[\frac{1}{(x-3)} + \frac{-1}{(x-2)}\right]dx$

$= \ln(x-3) - \ln(x-2) + C$

c) $\displaystyle\int \frac{x^4-3x^3-5x^2+8x-1}{x^3-2x^2-8x}dx.$

$$x^4-3x^3-5x^2+8x-1 : x^3-2x^2-8x = x-1 \cdot \left(\frac{x^2-1}{x^3-2x^2-8x}\right)$$

$$\begin{array}{l} x^4-3x^3-5x^2+8x-1 \\ \underline{-x^4+2x^3+8x^2} \\ 0-x^3+3x^2+8x-1 \\ \underline{\quad +x^3-2x^2-8x} \\ \quad 0+x^2+0-1 \end{array}$$

$$\frac{x^2-1}{x^3-2x^2-8x} = \frac{x^2-1}{x(x^2-2x-8)} = \frac{A}{x} + \frac{B}{x^2-2x-8}$$

$$\frac{A}{x}+\frac{B}{(x-4)}+\frac{C}{(x-2)}$$

$x^2-1 = A(x^2-2x-8) + B(x)$

Sea $x=0$

$0-1 = -8A$

$-1 = -8A$

$\frac{1}{8} = A$

$x^2-1 = A(x^2-2x-8) + B(x)$

Sea $x=-4$

$(-4)^2-1 = A((-4)^2-2(-4)-8) + B(-4)$

$16-1 = 16A-4B$

$15 = 16A-4B$