Funciones en Varias Variables 2: Límite y Continuidad
Cálculo II

1. Justificando adecuadamente, calcula los siguientes límites en caso de existir.

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{tan(x)}{y}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(xy)}{xy}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2+(x-y)^2}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4-y^3}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y}$

l) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2y}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}+|x|}$

m) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{y}{x^2+2x+2}$

n) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{e^{xy}-1}{\ln(xy+1)}$

ñ) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{\sqrt{2+y\ln x}-\sqrt{2}}{sen(y\ln x)}$

o) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,1)} \dfrac{(x-1)^{\frac{4}{3}}-(y-1)^{\frac{4}{3}}}{(x-1)^{\frac{2}{3}}+(y-1)^{\frac{2}{3}}}$

p) $\lim\limits_{(x,y)\to(1,0)} \dfrac{(x-1)^2y^2}{(x-1)^2+y^2}$

q) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{xz^2+y^3}{x^2+y^2+z^2}$

r) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^3+zy^2}{x^4+y^4+z^2}$

s) $\lim\limits_{(x,y,z)\to(0,0,0)} \dfrac{x^2+y^2-z^2}{x^2+y^2+z^2}$

t) $\lim\limits_{(x,y)\to(-1,2)} \dfrac{xy+y-2x-2}{x+1}$

2. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en sus respectivos dominios.

a) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4+x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

b) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

c) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{cos(xy)}{e^x+e^y} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$

d) $f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{sen(x-y)}{e^x-e^y} & si \quad x\neq y \\ 1 & si \quad x=y \end{cases}$

$$e)\ \ f(x,y)=\begin{cases} (x+y)sen\left(\dfrac{1}{x}\right)sen\left(\dfrac{1}{y}\right) & si \quad xy\neq 0 \\ \\ 0 & si \quad xy=0 \end{cases}$$

$$f)\ \ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^2y}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 0 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$g)\ \ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xsen(xy)}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$h)\ \ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$i)\ \ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{sen(x^2+y^2)}{\sqrt[5]{x^2+y^2}} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

$$j)\ \ f(x,y)=\begin{cases} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2+2|x|} & si \quad (x,y)\neq(0,0) \\ \\ 1 & si \quad (x,y)=(0,0) \end{cases}$$

Propiedades: limites en F.V.V.

Teorema: $\lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in C_1}} f(x) = L_1 \wedge \lim\limits_{\substack{x \to x_0 \\ x \in C_2}} f(x) = L_2$

Si $L_1 \neq L_2 \Rightarrow$ limite no existe

Teorema: Si se valida la siguiente desigualdad:

$$\| f(x) - L \| \leq h(x), \; x \in B(x_0, r).$$

Ademas el $\lim\limits_{x \to x_0} h(x) = 0$, entonces:

$\lim\limits_{x \to x_0} f(x) = L \rightarrow$ " $0 < \| f(x) - L \| \leq h(x) \; / \lim\limits_{x \to x_0}$ "

$$0 < \lim_{x \to x_0} \| f(x) - L \| \leq 0$$

$$\Downarrow$$

$$\lim_{x \to x_0} \| f(x) - L \| = 0 \Rightarrow \lim_{x \to x_0} f(x) = L$$

Observación:

i) $|x| = \sqrt{x^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \| (x, y) \|$

2) $|y| = \sqrt{y^2} \leq \sqrt{x^2 + y^2} = \| (x, y) \|$

3) $x^2 \leq x^2 + y^2 = \| (x, y) \|^2$

4) $y^2 \leq x^2 + y^2 = \| (x, y) \|^2$

limites iterados:

$\lim\limits_{x \to x_0} \left(\lim\limits_{y \to y_0} f(x, y) \right), \; \lim\limits_{y \to y_0} \left(\lim\limits_{x \to x_0} f(x, y) \right)$ Obs: Si el limite existe, los iterados existen y son iguales.
Pero la existencia de limites iterados iguales, no implica existencia del limite de la función.

Continuidad

$$\lim_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$$

Obs: En la def. anterior se pide

i) La función esta bien def. en $x = x_0$

ii) Existe $\lim\limits_{x \to x_0} F(x)$

iii) $\lim\limits_{x \to x_0} F(x) = F(x_0)$

a) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

b) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x+y}{x-y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

d) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{tan(x)}{y}$

e) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{x^2+y^2}$

f) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{(x^2+y^2)^{\frac{3}{2}}}$

g) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{sen(xy)}{xy}$

h) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3-y^2}{x^2+y^2}$

i) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4+y^4}{x^2y^2+(x-y)^2}$

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4-y^3}$

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y}$

c) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{xy^2}{x^2+y^2}$

$x=0 \to \dfrac{0}{y^2} = L_1$

$y=0 \to \dfrac{0}{x^2} = L_2$

$L_1 \neq L_2$ no existe límite

j) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^4}{x^4-y^3}$

$x=0 \to \dfrac{0}{-y^3} = L_1$

$y=0 \to \dfrac{x^4}{x^4} = 1 = L_2$

no existe.

k) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x}{y} =$

$x=0 \to \dfrac{0}{y} = L_1$

$y=0 \to \dfrac{x}{y} = L_2$

no existe.

2. Analizar la continuidad de las siguientes funciones en sus respectivos dominios.

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2 y - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$b)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^2 + y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$a)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^4 + x^2 y - y^3}{\sqrt{x^2+y^2}} & \text{si } (x,y) \neq (0,0) \\ 0 & \text{si } (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x) = M \qquad \frac{M}{n} \to n \neq 0$$

$C_1 = x = 0$

$C_2 = y = 0$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} h(x) = n \qquad M \cdot n \qquad M+n \qquad M-n$$

$$\lim_{y\to 0} \frac{-y^3}{\sqrt{y^2}} = \lim_{y\to 0} \frac{-y^3}{|y|} \begin{cases} + \\ - \end{cases}$$

$$\begin{cases} \lim\limits_{y\to 0^+} \dfrac{-y^{\cancel{3}}}{\cancel{y}} = -y^2 = 0^+ \\ \lim\limits_{y\to 0^-} \dfrac{-y^3}{-y} = +y^2 = 0^- \end{cases}$$

i) Si $(x,y) \neq (0,0)$, es continua pues la imagen de la división de dos funciones continuas con el denominador $\neq 0$.

ii) Si $(x,y) = (0,0)$

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \quad (\text{continuidad})$$

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^4+x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^4+x^2y-y^3}{\sqrt{x^2+y^2}}\right) = 0$$

AF: f es continua en $(0,0)$

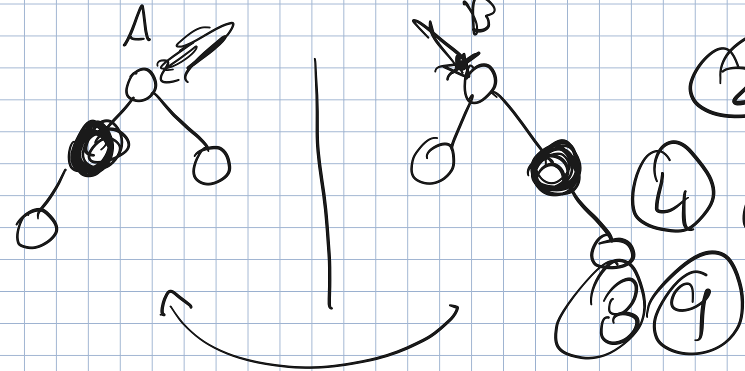
Obs: En la def. anterior se pide

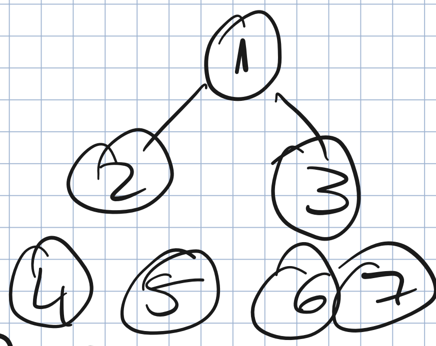
i) La función esta bien def. en $x = x_0$

ii) Existe $\lim\limits_{x\to x_0} F(x)$

iii) $\lim\limits_{x\to x_0} F(x) = F(x_0)$

128 → 12





1, 2, 3, 4, 5

5, 4, 3, 2, 1

```
int mirrorNode (NODO *raiz1, NODO *raiz2){

    IF (raiz1 == NULL && raiz2 == null){
        return 0;
    }

    IF (raiz1->iz != NULL & raiz1->der != Null && raiz1->iz != NULL & raiz1->der != NULL)
        IF (raiz1->iz == raiz2->derecho){
            return mirrorNode(raiz1->derecho, raiz2->iz)
        IF (raiz1->der == raiz2->izquie){
            return mirrorNode(raiz1->izqui , raiz2->der)
```

$$b)\quad f(x,y)=\begin{cases}\dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y)\neq(0,0)\\[2ex] 0 & si \quad (x,y)=(0,0)\end{cases}$$

i) $f(0,0) = 0$ esta definida

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} =$

Tomamos caminos C_1 y C_2

$C_1 : \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+x^3}{x^2+x^2} = \lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\cancel{2x^4}}{\cancel{2x^4}} = x = 0$

$C_2 = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{y^2+y^3}{y^2+y^2} = \lim\limits_{y\to 0} \dfrac{\cancel{2y^5}}{\cancel{2y^4}} = y = 0$

Otra comprobacion rapida es usar iterado.

$\lim\limits_{x\to 0}\left(\lim\limits_{y\to 0} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}\right) = 0$

$\lim\limits_{y\to 0}\left(\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2}\right) = 0$

Sospechamos que el limite es 0.
Vamos a demostrar la existencia usando T.S.

$0 \le |f(x,y) - L| = \left|\dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} - 0\right| = \dfrac{x+|y|^3}{\|(x,y)\|^2} = \cancel{\dfrac{\|(x,y)\|^2 + \|(x,y)\|^3}{\|(x,y)\|^2}}$

$0 \le \|(x,y)\|^3 \le 0$

Por tanto limite es 0.

iii) Como $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^2+y^3}{x^2+y^2} = 0 = f(0,0)$

Asi, f es continua en el punto $(0,0)$.

$$h)\ f(x,y) = \begin{cases} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2} & si \quad (x,y) \neq (0,0) \\ 1 & si \quad (x,y) = (0,0) \end{cases}$$

i) $f(0,0) = 1$ está definida.

ii) $\lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = \lim\limits_{(x,y)\to(0,0)} \dfrac{x^3+y^3}{x^2+y^2}$

iteramos

$$\lim_{x\to 0}\left(\lim_{y\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = 1$$

$$\lim_{y\to 0}\left(\lim_{x\to 0} \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2}\right) = 1$$

Sospechamos que el límite es 1, lo demostraremos con T.S.

$$0 \leq \left| f(x,y) - L \right| = 0 \leq \left| \frac{x^3+y^3}{x^2+y^2} - 0 \right| = \frac{2\|(x,y)\|^{\cancel{3}}}{\cancel{\|(x,y)\|^2}} = 2\|(x,y)\| \to 0.$$

AF: f no es continua en $(0,0)$, pues

$$\lim_{(x,y)\to(0,0)} f(x,y) = 0 \neq f(0,0) = 1$$

$\therefore f$ es continua en $\mathbb{R}^2 - \{(0,0)\}$.