Funciones en varias variables 1
Cálculo II

1. Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.
   b) $f(x,y)=\ln(x+y)$.
   c) $f(x,y)=\dfrac{1}{x-1}+\dfrac{1}{1+y}$.
   d) $f(x,y)=\left(\sqrt{9-y^2},\sqrt{4-x^2}\right)$.
   e) $f(x,y)=\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.
   f) $f(x,y)=\sqrt{y\cos(x)}$.

2. Determine las curvas de nivel de las siguientes funciones.

   a) $f(x,y)=x^2+y^2$.
   b) $f(x,y,z)=x+y+z$.
   c) $f(x,y)=\dfrac{2x}{x^2+y^2}$.
   d) $f(x,y,z)=x^2+2y^2$.
   e) $f(x,y)=\sqrt{xy}$.
   f) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

3. Determinar cuáles de las siguientes superficies corresponden a la gráfica de una función $z=f(x,y)$.

   a) $z=x^2+y^2$.
   b) $z^2=1-x^2-\dfrac{y^2}{x}$.
   c) $3x+3y-z=0$.
   d) $6x^2+y^2-z^2=1$.
   e) $z=\dfrac{1}{x+y}$.
   f) $2z-x^3+y^4+2=1$.

4. Representar gráficamente los siguientes conjuntos.

   a) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0<(x-3)^2+(y+4)^2\leq 16\}\cup\{(0,y)\in\mathbb{R}^2:7<y\leq 8\}$.
   b) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:x^2+y^2\leq 25\wedge 3y\leq 4x\}$.
   c) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:(x-1)^2\leq 3y-3\wedge y\leq x+4\}$.
   d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:|x-2|>3\wedge |y|<2\}$.
   e) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:x^2+y^2-z<1\wedge x^2+y^2+(z+1)^2<1\}$.

5. Para los siguientes conjuntos determinar el conjunto de puntos adherentes, el conjunto de puntos de acumulación, el interior y su frontera. Además determinar si es abierto, cerrado, compacto o ninguno de los casos. Finalmente señalar si es acotado y en caso afirmativo, si es posible, indicar la cota mínima.

   a) $A=\{(5,\frac{1}{n})\in\mathbb{R}^2:n\in\mathbb{N}\}$.
   b) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:1<x^2+y^2+z^2\leq 2\}$.
   c) $A=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3:z=4-x^2-y^2\geq 0\}$.
   d) $A=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:0<x^2+2xy+y^2\leq 1\wedge xy\geq 0\}$.
   e) $A=\{(x,0)\in\mathbb{R}^2:0\leq x\leq 1\}\cup\{(\frac{1}{n},y):n\in\mathbb{N}\wedge 0\leq y\leq 1\}$.

6. Considere la función $f:D\subset\mathbb{R}^2\to\mathbb{R}^4$, definida por

$$f(x,y)=\left(\frac{x}{y},\frac{x^2+y^2}{\sqrt{y-x^2+1}},\frac{\sin(x^2+y^2)}{\sqrt{x^2+y^2-1}},\frac{1}{\sqrt{4-y}}\right).$$

   - Represente gráficamente el dominio D de la función.
   - Determine el interior, frontera, adherencia, y puntos de acumulación de D.
   - ¿Es D un conjunto abierto o cerrado?
   - ¿ Es D un conjunto acotado? Si lo es determine la menor cota.

1. Determine y grafique el dominio de las siguientes funciones.

a) $f(x,y)=\sqrt{1-x^2-y^2}$.

b) $f(x,y)=\ln(x+y)$.

c) $f(x,y)=\frac{1}{x-1}+\frac{1}{1+y}$.

d) $f(x,y)=\left(\sqrt{9-y^2},\sqrt{4-x^2}\right)$.

e) $f(x,y)=\frac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$.

f) $f(x,y)=\sqrt{y\cos(x)}$.

a) Dom $f(x,y) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x^2+y \leq 1\}$

b) Dom $f(x,y) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x+y>0$

c) Dom $f(x,y) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\neq 1 \wedge y\neq -1\}$

d) Dom $f(x,y) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : -3\leq y\leq 3 \wedge -2\leq x\leq 2\}$

e) Dom $f(x,y) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x,y>0\}$

f) Dom $f(x,y) = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 : x\in\mathbb{R} \wedge y\geq 0\}$

2. Determine las curvas de nivel de las siguientes funciones.

a) $f(x,y)=x^2+y^2$.

b) $f(x,y,z)=x+y+z$.

c) $f(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}$.

d) $f(x,y,z)=x^2+2y^2$.

e) $f(x,y)=\sqrt{xy}$.

f) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$.

a) $f(x,y)=x^2+y^2$: Corresponde a los círculos concéntricos con centro en el origen y radio $=\sqrt{c}$, donde c es la constante que define la curva de nivel.

$\hookrightarrow x^2+y^2=c,\quad c\geq 0.$

b) $f(x,y,z)=x+y+z$: no tiene.

c) $f(x,y)=\frac{2x}{x^2+y^2}\qquad \frac{2x}{x^2+y^2}=c \Rightarrow 2x=c(x^2+y^2) \Rightarrow 2x=cx^2+cy^2/\frac{1}{c} \Rightarrow \frac{2x}{c}-x^2=y^2$

d) $f(x,y,z)=x^2+2y^2$: k corresponde a cada curva, son parabolicas y se extienden hacia arriba y hacia abajo en funcion de z.

$\hookrightarrow x^2+2y^2=k$

a medida que aumenta k, las superficies se expanden y si se achica se contraen. Son superficies y no curvas.

e) $f(x,y)=\sqrt{xy}$: Son hiperbolas equilateras con centro en origen.

$\hookrightarrow f(x,y)=\sqrt{xy}=c \Rightarrow xy=c^2 \Rightarrow y=\frac{c^2}{x}$

f) $f(x,y,z)=x^2+y^2+z^2$: no tiene curvas de nivel sino superficies de nivel y son esferas.

3. Determinar cuáles de las siguientes superficies corresponden a la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

a) $z = x^2 + y^2$.

b) $z^2 = 1 - x^2 - \dfrac{y^2}{x}$.

c) $3x + 3y - z = 0$.

d) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

e) $z = \dfrac{1}{x+y}$.

f) $2z - x^3 + y^4 + 2 = 1$.

Superficies son poligonales

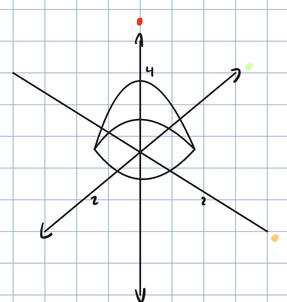
Superficie Paralelogramos.

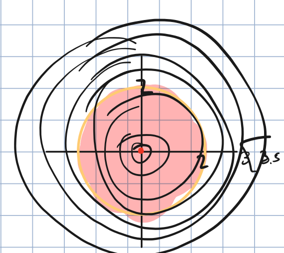
a) $z = x^2 + y^2$

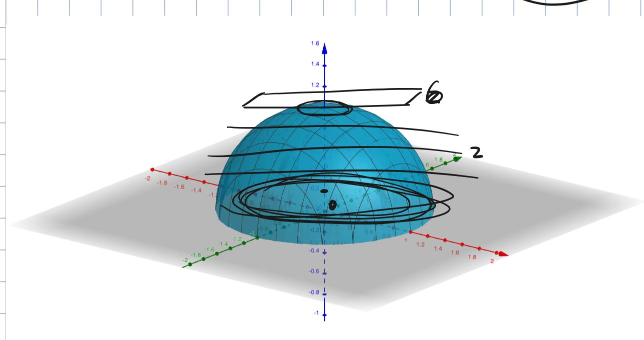
$0 = x^2 + y^2$

$(x_0, y_0) = (0,0)$

Circunfencia o Circulo







3. Determinar cuáles de las siguientes superficies corresponden a la gráfica de una función $z = f(x, y)$.

a) $z = x^2 + y^2$.

b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{x}$.

c) $3x + 3y - z = 0$.

d) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$.

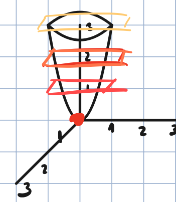
e) $z = \frac{1}{x+y}$. $x+y \neq 0$

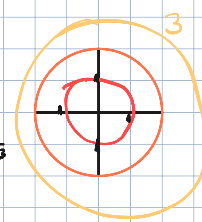
f) $2z - x^3 + y^4 + 2 = 1$.

a) $z = x^2 + y^2 \longrightarrow$ Polinomica $\rightarrow$ Paraboloide

$(x,y) \neq (0,0)$

R: Si es función.





b) $z^2 = 1 - x^2 - \frac{y^2}{x}$

$\sqrt{z^2} = \sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{x}}$

$z = \pm\sqrt{1 - x^2 - \frac{y^2}{x}}$

$\therefore$ Por lo tanto no es función debido a que z tiene dos soluciones

c) $3x + 3y - z = 0$

$3x + 3y = z$

$\therefore$ Por lo tanto z corresponde a la Grafica de la Función.

d) $6x^2 + y^2 - z^2 = 1$

$6x^2 + y^2 - 1 = z^2$

$z = \pm\sqrt{6x^2 + y^2 - 1}$

$\therefore$ Por lo tanto no es función debido a que z tiene dos soluciones

f) $2z - x^3 + y^4 + 2 = 1$

$2z - x^3 + y^4 + 1 = 0$

$2z = x^3 - y^4 - 1$

$z = \frac{x^3 - y^4 - 1}{2}$

$\therefore$ Por tanto es función.

4. Representar gráficamente los siguientes conjuntos.

a) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < (x-3)^2 + (y+4)^2 \leq 16\} \cup \{(0, y) \in \mathbb{R}^2 : 7 < y \leq 8\}$.

b) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25 \wedge 3y \leq 4x\}$.

c) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x-1)^2 \leq 3y - 3 \wedge y \leq x + 4\}$.

d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : |x-2| > 3 \wedge |y| < 2\}$.

e) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x^2 + y^2 - z < 1 \wedge x^2 + y^2 + (z+1)^2 < 1\}$.

a) $0 < (x \overset{h}{-} 3)^2 + (y+4)^2 \leq 16$

(h, k)

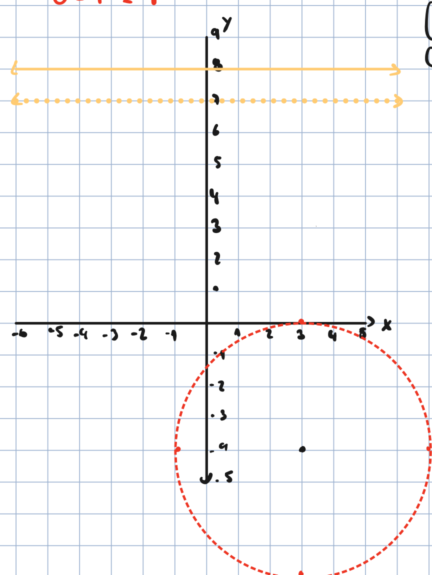
$0 < (x-h)^2 + (y-k)^2 \leq r^2$

$0 < (x+3)^2 + (y-4)^2 \leq r^2$

$0 < r \leq 4$

$(h, k) = (3, -4)$

Centro



$x^2 - 2x + 1 \leq 3y - 3$

$x^2 - 2x - 3y + 4 \leq 0 \quad \wedge \quad y \leq x + 4$

$0 \quad 0$

$-3y + 4$

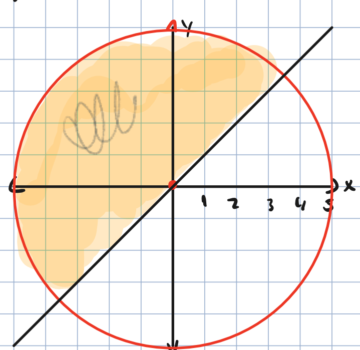
$(x, y) \to (1, 1) \quad 3 \leq 4$

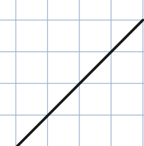
b) $A = \{(x, 1) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 \leq 25 \wedge 3y \leq 4x\}$

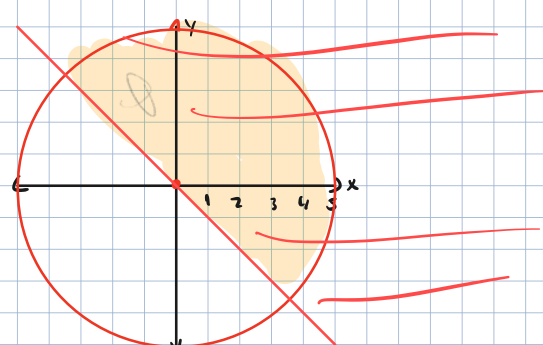
r^2 $\Downarrow$ 5

0

$y = 0$	$x = 0$
$0 \leq 4x$	$3y = 0$







6. Considere la función $f : D \subset \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^4$, definida por

$$A \longrightarrow f(x, y) = \left(\frac{x}{y}, \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{y - x^2 + 1}}, \frac{\sin(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}}, \frac{1}{\sqrt{4 - y}} \right).$$

- Represente gráficamente el dominio D de la función.
- Determine el interior, frontera, adherencia, y puntos de acumulación de D.
- ¿Es D un conjunto abierto o cerrado?
- ¿ Es D un conjunto acotado? Si lo es determine la menor cota.

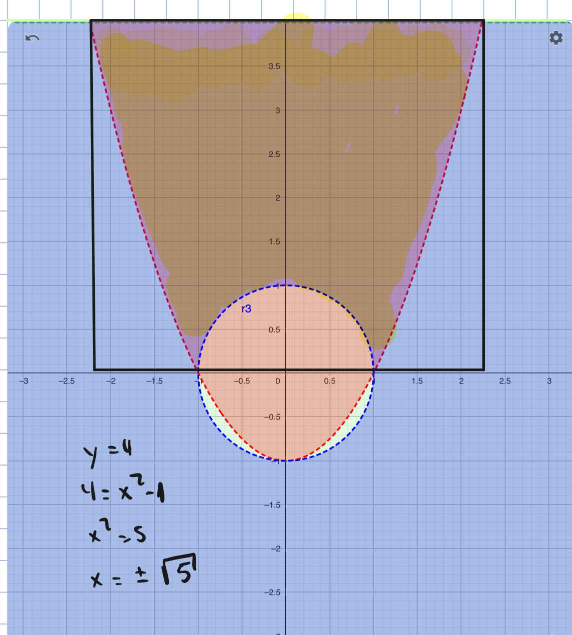
$$f_1(x, y) = \frac{x}{y} \Rightarrow R_1 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y \neq 0\}$$

$$f_2(x, y) = \frac{x^2 + y^2}{\sqrt{y - x^2 + 1}} \Rightarrow R_2 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y - x^2 + 1 > 0\}$$
$$\{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : y > x^2 - 1\}$$

$$f_3(x, y) = \frac{\operatorname{Sen}(x^2 + y^2)}{\sqrt{x^2 + y^2 - 1}} \Rightarrow R_3 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : x^2 + y^2 - 1 > 0\}$$
$$'' : x^2 + y^2 > 1\}$$

$$f_4(x, y) = \frac{1}{\sqrt{4 - y}} \Rightarrow R_4 = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 4 - y > 0\}$$
$$'' : y < 4\}$$

$$\operatorname{Dom}(f) = R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4$$



$y = 4$

$4 = x^2 - 1$

$x^2 = 5$

$x = \pm\sqrt{5}$

Punto Interior

$\mathring{A} = \{x \in \mathbb{R}^n : x$ es un punto interior de $A\}$

$\mathring{D} = D = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : (x, y) \in R_1 \cap R_2 \cap R_3 \cap R_4\}$

2, 4, 6

$\mathring{D} = D = \{x \in \mathbb{R} : x \in 2x\}$

5. Para los siguientes conjuntos determinar el conjunto de puntos adherentes, el conjunto de puntos de acumulación, el interior y su frontera. Además determinar si es abierto, cerrado, compacto o ninguno de los casos. Finalmente señalar si es acotado y en caso afirmativo, si es posible, indicar la cota mínima.

   a) $A = \{(5, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$.

   b) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 1 < x^2 + y^2 + z^2 \leq 2\}$.

   c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$.

   d) $A = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 0 < x^2 + 2xy + y^2 \leq 1 \wedge xy \geq 0\}$.

   e) $A = \{(x, 0) \in \mathbb{R}^2 : 0 \leq x \leq 1\} \cup \{(\frac{1}{n}, y) : n \in \mathbb{N} \wedge 0 \leq y \leq 1\}$.

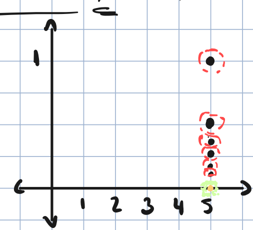
a) $A = \{(5, \frac{1}{n}) \in \mathbb{R}^2 : n \in \mathbb{N}\}$

Sól: $\mathring{A}$

$\longrightarrow A = \{\underbrace{(5,1), (5,\tfrac{1}{2}), (5,\tfrac{1}{3}), (5,\tfrac{1}{n})}\ldots\}$

Puntos Interior: $\mathring{A} = \emptyset$

Puntos Acumu: $A' = \{(5,0)$



c) $A = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : z = 4 - x^2 - y^2 \geq 0\}$