UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Profesores: Paulina Llarena - Jenner Chapoñán - Efraín Nova.
Segundo Semestre 2022

Facultad de Ciencias – Departamento de Matemática – UBB 2022

Guía N°4
Problemas de aplicación e inecuaciones con valor absoluto
Cálculo I (220157)

El costo total (en dólares) de producción de x unidades de cierto artículo está dado por $C = 3100 + 25x$ y cada unidad se vende a \$37. EL fabricante quiere saber cuantas unidades deberá producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$2000.
Suponga que se producen y venden x unidades. El ingreso I obtenido por vender x unidasdes en \$37 cada una es $I = 37x$. La utilidad U (en dólares) obtenida por producir y vender x unidades está dada entonces por las siguientes ecuaciones:

$$\begin{aligned} \textsc{Utilidad} &= \textsc{Ingresos} - \textsc{Costos} \\ U &= 37x - (3100 + 25x) \\ &= 12x - 3100 \end{aligned}$$

Dado que la utilidad requerida debe ser al menos de \$2000, es decir, debería ser de \$2000 o más, tenemos que:

$$U \geq 2000$$

o bien

$$12x - 3100 \geq 2000$$

Esta es una desigualdad en la variable x. Observemos que los términos que aparecen son de dos tipos, términos constantes o términos que son múltiplos constantes de la variable x. Cualquier desigualdad que sólo tiene estos dos tipos de términos se denomina **desigualdad lineal**. Si el símbolo de desigualdades es $>$ o $<$ la desigualdad es **estricta**: si el símbolo es $\geq$ o leq, se dice que es **débil**.

Ejemplo 1 ***(Utilidades del fabricante)*** El fabricante de cierto artículo puede vender todo lo que produce al precio de \$60 cada artículo. Gasta \$40 en materia prima y mano de obra al producir cada artículo, y tiene costos adicionales (fijos) de \$3000 a la semana en la operación de la planta. Encuentre el número de unidades que debería producir y vender para obtener una utilidad de al menos \$1000 a la semana.

Solución: Sea x el número de artículos producidos y vendidos a la semana. Entonces el costo total de producir x unidades es de \$3000 más \$40 por artículo, lo cual es $(40x + 3000)$ dólares. El ingreso obtenido por vender x unidades a \$60 cada una será de $60x$ dólares. Por tanto:

$$\begin{aligned} \textsc{Utilidad} &= \textsc{Ingresos} - \textsc{Costos} \\ &= 60x - (40x + 3000) \\ &= 20x - 3000 \end{aligned}$$

Facultad de Ciencias – Departamento de Matemática – UBB 2022

Puesto que deseamos obtener una ganancia de al menos \$1000 al menos, tenemos las siguientes desigualdades:

$$\begin{aligned} \text{Utilidad} &\geq 1000 \\ 20x - 3000 &\geq 1000 \\ 20x &\geq 4000 \\ x &\geq 200 \end{aligned}$$

Finalmente el fabricante deberá producir al menos 200 unidades cada semana.

Ejemplo 2 ***(Decisiones de fabricación)*** El administrados de una fábrica debe decidir si deberán producir sus propios empaques, que la empresa ha estado adquiriendo de proveedores externos a \$1.10 cada uno. La fabricación de los empaques incrementaría los costos generales de la empresa en \$800 al mes y el costo de material y mano de obra será \$0.6 por cada empaque. Determine cuántos empaques deberá usar la empresa al mes para justificar la decisión de fabricar sus propios empaques.

Solución: Sea x el número de empaques utilizados por la empresa al mes. Entonces, el costo de adquirir x empaques a \$1.10 cada uno es de $1.10x$ dólares. El costo de fabricar x empaques es de \$0.60 por empaque más costos generales de \$800 al mes, de modo que el costo total es $(0.60x + 800)$ dólares.
Para justificar la fabricación de los empaques por la empresa por la misma empresa se debe cumplir que:

$$\begin{aligned} \text{Costo de adquisición} &> \text{Costo de fabricación} \\ 1.10x &> 0.60x + 800 \\ 1.10x - 0 - 60x &> 800 \\ x &> 1600 \end{aligned}$$

Finalmente la empresa deber usar al menos 1601 empaques al mes para justificar su fabricación.

Desigualdades cuadráticas de una variable

Ejemplo 1 ***(Producción y utilidades)*** Las ventas mensuales x de cierto artícul cuando su precio es p dólares están dadas por $p = 200 - 3x$. El costo de producir x unidades al mes del artículo es $C = (650 + 5x)$ dólares. ¿Cuántas unidades de este artículo deberán producirse y venderse de modo que la utilidad mensual sea por lo menos de 2200 dólares?

Solución: El ingreso I (en dólares) obtenido por vender x unidades al precio de p dólares por unidad es:

$$\begin{aligned} I &= \text{Unidades vendidas } x \text{ Precio por unidad} \\ &= xp \\ &= x(200 - 3x) \\ &= 200x - 3x^2 \end{aligned}$$

Facultad de Ciencias – Departamento de Matemática – UBB 2022

El costo C de fabricar x unidades es $C = 650 + 5x$. La utilidad U (mensual) obtenida por producir y vender x unidades está dada por

$$\begin{aligned} U &= I - C \\ &= (200x - 3x^2) - (650 + 5x) \\ &= 195x - 3x^2 - 650 \end{aligned}$$

Dado que la utilidad U deber ser al menos de \$2200, tenemos que $195x - 3x^2 650 \geq 2200$.Entonces:

$$x^2 - 650x + 950 \leq 0$$

Luego:

$$x = \frac{1}{2}(65 \pm \sqrt{425})$$

Finalmente, para alcanzar la meta requerida, el número de unidades priducidas y vendidas por mes debe estar entre 22.2 y 42.8m inclusive.

Ejemplo 2 ***(Decisión de precios)*** Un peluquero tiene un promedio de 120 clientes semanales a un costo actual de \$8 por corte de cabello. Por cada uncrementeo de \$0.75 en el precio, el peluquero perderá 10 clientes. ¿Cuál es el precio máximo que puede cobrarse de modo que los ingresos semanales no sean menores que los actuales?

Solución: Sea x el número de incrementos de \$0.75 por encima de \$8. Entonces el precio por corte de cabello es $(8 + 0.75x)$ dólares, y el número de clientes será de $(120 - 10x)$ por semana. De modo que:

$$\begin{aligned} \text{Ingresos totales semanales} &= \text{Número de clientes} \cdot \text{Precio por corte} \\ &= (120 - 10x) \cdot (8 + 0.75x) \end{aligned}$$

Los ingresos por los 120 clientes actuales son de \$960. Por lo tanto, los nuevos ingresos deben ser al menos iguales:

$$\begin{aligned} (120 - 10x)(8 + 0.75) &\geq 960 \\ 10x - 7.5x^2 &\geq 0 \end{aligned}$$

Finalmente se obtiene que el precio máximo que puede cobrarse es \$9.00.

Facultad de Ciencias – Departamento de Matemática – UBB 2022

Valores Absolutos

Ejemplo 1 Resualva $|2x-3|=5$

Solución: De acuerdo con la definición de valor absoluto se satisface:

$$2x-3=5 \qquad \vee \qquad 2x-3=-5$$

En consecuencia, hay dos valores de x, $x=4$ y $x=-1$, que satisfacen la ecuación dada.

Ejemplo 2 Resuelva $|3x-2|=|2x+7|$

Solución: La ecuación se satisface si:

$$3x-2=2x+7 \qquad \vee \qquad 3x-2=-(2x+7)$$

Resolviendo estas dos ecuaciones por separado, obtenemos $x=9$ y $x=-1$

Ejemplo 3 Resuelva $|2x-3|<5$ para x y exprese el resultado en términos de intervalos.

Solución: la desigualdad dada implica que:

$$-5<3x-3<5$$

Luego:

$$\begin{aligned} -5+3<2x-3+3<5+3 \\ -2<2x<8 \\ -1<x<4 \end{aligned}$$

En consecuencia, la solución consta de todos los números reales x situados en el intervalo abierto $(-1,4)$.

Ejemplo 4 Resuelva $|2-3x|>7$ para x y exprese el resultado en notación de intervalos.

Solución: Se tiene que:

$$2-3x>7 \qquad \vee \qquad 2-3x<-7$$

Considerando la primera desigualdad:

$$\begin{aligned} 2-3x &> 7 \\ x &< -\frac{5}{3} \end{aligned}$$

De forma análoga se tiene que la segunda desigualdad da como resultado $x>3$.
Por tanto, la solución viene dada por: $[-\frac{5}{3},3]$.

Facultad de Ciencias – Departamento de Matemática – UBB 2022

Ejemplos propuestos

1. $3x + 2(x-1) > 6x - 9$
2. $x^2 - 5x + 6 < 0$
3. $x^2 \geq 3 - 2x$
4. $2(x^2 + 5x) - 20 > (1-x)^2 + (1+x)^2 - 2$
5. $\frac{1}{x-3} < \frac{1}{6}$
6. $\frac{x}{3} + \frac{x-5}{7} + \frac{8x}{21} \leq 1$
7. $|x-2| + 5 < 8$
8. $|1-7x| + 3 \geq 0$
9. $|7x-2| + |5x-1| \leq 0$
10. Adriana Rojas va a contrartar los servicios de telefonía, despues de analizar diversos planes, su desición queda entre los dos siguientes. El plan A, con una renta mensual de 10 dólares mensuales más \$0.20 por cada minuto de tiempo aire. El plan B, con una renta mensual de \$20 más \$0.12 por cada minuto de tiempo aire. Determine el número de minutos mensuales que Adriana debe utilizar para que el plan B sea mas barato que el plan A.
11. Manuel Zamora, gerente de una distribuidora de televisores, sabe que a un precio de p dólares por unidad de cierto modelo pueden venderse x unidades al mes y la relación entre el precio y las unidades vendidas es $p = 1000 - 2x$. ¿ Cuántas unidades debe vender Manuel para que los ingresos mensuales sean de al menos $\$45,000$? El precio de ese modelo de televisor no puede ser menor a \$300.
12. En un terreno de cultivo familiar, Dina Vogt tuvo una cosecha de 500 kg de fresa, per debe venderlas rápidamente, pues los costos de almacenamiento son muy altos. Además, sabe que el precio que fije debe ser menor a \$20. Por otro lado, si las fresas se ofrecen a p presos por kg, venderá x kg, con $x = 500 - 8p$ ¿Qué precio debe fijar Dina con el propósito de obtener ingresos de al menos \$5700?

Respuestas

1. $(-\infty, 7)$
2. $(2, 3)$
3. $(-\infty, -3) \cup (1, \infty)$
4. $(2, \infty)$
5. $(-\infty, 3) \cup (9, \infty)$
6. $(-\infty, 2)$
7. $(-1, 5)$
8. Toda x en los reales
9. Sin solución
10. 125 minutos
11. 50 televisrores, no es válido 450
12. \$15 por kilogramo