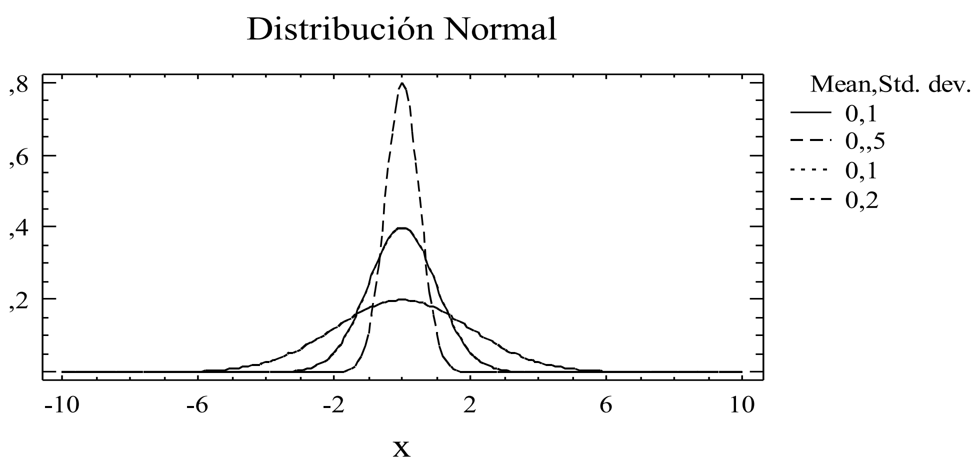
<u>Distribución Normal</u>

Definición. Una variable aleatoria continua X que toma todos los valores reales, tiene una distribución normal si su función de densidad de probabilidades es de la forma.

$$f_X(x) = \frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}} \exp\left\{ -\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2} \right\}, -\infty < x < \infty$$

donde $\mu \in \Re$ y $\sigma > 0$.

La distribución normal está caracterizada por los parámetros μ y σ^2, además si X se distribuye normal se suele representar como X~N(μ , σ^2). El gráfico de la función de densidad de probabilidades tiene forma de campana, es simétrico con respecto a la recta X= μ y en este punto alcanza su máximo. Los puntos $x+\sigma$ y $x-\sigma$ son puntos de inflexión del gráfico. Si σ es relativamente grande, el gráfico tiende a ser achatado, mientras que si σ es pequeño, el gráfico de la función de probabilidades tiende a ser más agudo.



Se puede probar que μ y σ^2, corresponde a la esperanza y varianza de X, respectivamente.

Definición. Si Z es una variable normal con medio cero y varianza uno, con

$$Z = \frac{X-\mu}{\sigma}$$

entonces Z se llama variable aleatoria **normal estándar** y su función de densidad es dada por

$$\varphi_Z(z) = \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \exp\left\{-\frac{z^2}{2}\right\}, -\infty < z < \infty$$

La función de distribución de Z está dada por

$$F_Z(z) = \phi(z) = \int_{-\infty}^{z} \varphi_Z(t)\,dt$$

Esta función se encuentra tabulada, lo que facilita enormemente el cálculo de probabilidades.

Teorema

Sea X~N(μ , σ^2). Si $Y = aX + b$, $a > 0$, entonces Y es una variable normal con media $a\mu + b$ y varianza $a^2\sigma^2$.

Ejemplo 1: Uso de tabla

Considere a la v.a. Z ~ N (0,1). Encuentre el área según se indica:

a) a la izquierda de z = 1.93 b) a la derecha de z = -0.78

c) entre z = -1.96 y z = -0.55 d) a la izquierda de z = -2.37

Ejemplo 2: Encontrar el valor de k.

Considere a la v.a. Z ~ N (0,1); Encontrar el valor de k tal que:

a) P (Z ≤ k) = 0.1423 b) P(Z > k) = 0.2946

c) P (-0.93 ≤ Z ≤ k) = 0.7235 d) P(Z ≤ k) = 0.0250

Ejemplo 3: Estandarización

Sea X una v.a con distribución normal con media 150 y varianza 100, entonces:

a) P(X>178); b) P(150 < X < 167); c) P(X< 200)

Ejemplo 4: Desarrollo

Sea la v.a. X distribuida normalmente con media 18 y desviación estándar 2.5, encuentre:

a) P(X < 15)

b) El valor de k tal que P(X < k) = 0.2236

c) El valor de k tal que P(X > k) = 0.1814

d) P(17 < X < 21)

Ejemplo 5: Uso de teorema

Suponga que la variable aleatoria X N(15, 8) y sea la variable aleatoria Y=2X+3. ¿Cuál es la distribución de Y?

Desarrollo ejemplo 1

Considere a la v.a. Z ~ N (0,1). Encuentre el área según se indica:

a) a la izquierda de z = 1.93

$$P(Z < 1{,}93) = \int_{-\infty}^{1{,}93} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}9732$$

b) a la derecha de z = -0.78

$$P(Z > -0{,}78) = \int_{-0{,}78}^{\infty} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 1 - P(Z \leq -0{,}78) = 1 - 0{,}2177 = 0{,}7823$$

c) entre z = -1.96 y z = -0.55

$$P(-1{,}96 \leq Z \leq -0{,}55) = \int_{-1{,}96}^{-0{,}55} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = P(Z \leq -0{,}55) - P(Z \leq -1{,}96) =$$

$$0{,}2912 - 0{,}025 = 0{,}2662$$

d) a la izquierda de z = -2.37

$$P(Z < -2{,}37) = \int_{-\infty}^{-2{,}37} \frac{1}{\sqrt{2\pi}} e^{-\frac{z^2}{2}} dz = 0{,}0089$$

Desarrollo ejemplo 2 Encontrar el valor de k.

Considere a la v.a. Z ~ N (0,1); Encontrar el valor de k tal que:

a) P (Z ≤ k) = 0.1423; $k = -1{,}07$

b) P (Z > k) = 0.2946

$P(Z > k) = 0.2946$

$P(Z > k) = 1 - P(Z \leq k) = 0{,}2946$

Despejando $P(Z \leq k) = 0{,}7054$; $\quad k = 0{,}54$

c)P (-0.93 ≤ Z ≤ k) = 0.7235

$$P(-0{,}93 \leq Z \leq k) = 0{,}7235$$

$$P(Z \leq k) - P(Z \leq -0{,}93) = 0{,}7235$$

$$P(Z \leq k) = 0{,}7235 + P(Z \leq -0.93)$$

$$P(Z \leq k) = 0{,}7235 + 0{,}1762$$

$$P(Z \leq k) = 0{,}8997$$

$$k = 1{,}28$$

d) P (Z ≤ k) = 0.0250; $k = -1{,}96$

Desarrollo ejemplo 3: Estandarización

Sea X una v.a con distribución normal con media 150 y varianza 100, entonces:

a) P(X>178)

$$P(X > 178) = 1 - P(X \leq 178) = 1 - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{178-150}{10}\right) = 1 - P(Z \leq 2{,}8)$$
$$= 1 - 0{,}9974$$

b) P (150 < X < 167)

$$P(150 < X < 167) = P(X < 167) - P(X < 150)$$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{167-150}{10}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} \leq \frac{150-150}{10}\right)$$

$$= P(Z < 1{,}7) - P(Z < 0)$$
$$= 0{,}9554 - 0{,}5$$

$$= 0{,}4554$$

c) P(X< 200)

$$P(X < 200) = P(Z < 5) = 1$$

Desarrollo ejemplo 4:

Sea la v.a. X distribuida normalmente con media 18 y desviación estándar 2.5, encuentre:

a) P(X < 15)

b) El valor de k tal que P(X < k) = 0.2236

c) El valor de k tal que P(X > k) = 0.1814

d) P (17 < X < 21)

a) $P(X < 15) = P\left(Z < \frac{15-18}{2,5}\right) = P(Z < -1{,}2) =$

b) $P(X < k) = 0{,}2236$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{k-18}{2,5}\right) = P\left(Z < \frac{k-18}{2,5}\right) = P(Z < Z_0) = 0{,}2236$$

Donde Z_0 es un valor de tabla, Por lo tanto, hay que ir a la tabla y buscar el valor de z al que le corresponde la probabilidad 0,2236, que en este caso es -0,76. Luego, hay que salir de la probabilidad e igualar las expresiones.

$$\frac{k-18}{2,5} = -0{,}76$$

Despejando, se obtiene que $k = 16{,}1$

c) $P(X > k) = 0{,}1814$

$$P(X > k) = 1 - P(X \leq k) = 0{,}1814$$
$$P(X \leq k) = 0{,}8186$$

$$P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{k-18}{2,5}\right) = P\left(Z < \frac{k-18}{2,5}\right) = P(Z < Z_0) = 0{,}8186$$

$$\frac{k-18}{2,5} = 0{,}91$$
$$k = 20{,}275$$

d) $P(17 < X < 21) = P(X < 21) - P(X < 17)$

$$= P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{21-18}{2,5}\right) - P\left(\frac{X-\mu}{\sigma} < \frac{17-18}{2,5}\right)$$

$$= P(Z < 1,2) - P(Z < -0,4)$$
$$= 0,8649 - 0,3446 = 0,5203$$

Desarrollo ejemplo 5: Uso de teorema

Suponga que la variable aleatoria $X \sim N(15, 8)$ y sea la variable aleatoria Y=2X+3. ¿Cuál es la distribución de Y?

$$Y \sim N(E(Y), V(Y))$$

Por lo tanto se debe calcular $E(Y) y\ V(Y)$

$$E(Y) = E(2X+3) = 2E(X) + 3 = 2 \cdot 15 + 3 = 33$$
$$V(Y) = V(2X+3) = V(2X) = 4V(X) = 4 \cdot 8 = 32$$

Por lo tanto, $Y \sim N(33,32)$