Derivadas

Derivada Implícita

Sea la ecuación $F(x,y) = 0$,
donde $y = f(x)$ esta definida implícitamente y podemos determinar

$y' = \frac{dy}{dx}$. Ejemplos

- determine y'

1) $x^2 + y^2 = 9$ → regla de la cadena

$2x + 2y \cdot y' = 0$

$2y \cdot y' = -2x$

$y' = \frac{-2x}{2y}$

$y' = \frac{-x}{y}$

2) Operaciones
3) despejar y'
4) determinar derivada implícita

2) $3xy^2 - x + y - 25 = 0$ / $\frac{d}{dx}$

$\frac{d}{dx}\left(3xy^2 - x + y - 25\right) = \frac{d(0)}{dx}$

$3(xy^2)' - 1 + y' = 0$

$3(1 \cdot y^2 + x \cdot 2y \cdot y') - 1 + y' = 0$ $\quad (f \cdot g)' = f' \cdot g + g' \cdot f$

$3y^2 + 6xy \cdot y' - 1 + y' = 0$

$6xyy' + y' = 1 - 3y^2$

$y'(6xy + 1) = 1 - 3y^2$

$y' = \frac{1 - 3y^2}{6xy + 1}$

3) determine las ecuaciónes de la recta tangente y normal a la curva

$e^{xy} + y = x + 3$ cuando $x = 0$ $\Big|$ $e^0 + y = 3 \longrightarrow$ $y = 3 - 1 =$ $y = 2$

P(0, 2) punto de tangencia

$$\frac{d}{dx}\left(e^{xy} + y\right) = \frac{d}{dx}(x+3)$$

$$(e^{xy})' + y' = 1$$

$$e^{xy}(y + xy') + y' = 1$$

Usar reglas de derivación

$$e^{xy}y + e^{xy}xy' + y' = 1$$

$$e^{xy}xy' + y' = 1 - e^{xy}y$$

$$y'(e^{xy}x + 1) = 1 - e^{xy}y$$

$$y' = \frac{1 - e^{xy}y}{e^{xy}x + 1}$$

limite de laterales
y operaciones con derivados
euler y logaritmo natural
y regla de la cadena en todas
las funciones

la pendiente de la recta tangente en P(0, 2) es:

$$m_T = y'\Big|_{(0,2)} = \frac{1 - e^0 2}{0 \cdot e^0 + 1} = \frac{-1}{1} = -1$$

luego, la ecuación de la recta tangente será

T: $y - 2 = -1(x - 0)$

$y - y_1 = m_T(x - x_0)$

T: $y = -x + 2$ y la ecuación de la recta normal

N: $y - 2 = 1(x - 0)$

N: $y = x + 2$

4) Dada la función $y = v(x)^{u(x)}$

metodo general:

aplicamos logaritmo natural ln( ), es decir

$$y = v(x)^{u(x)} \quad / \ln(\,)$$

$$\ln(y) = \ln\left(v(x)^{u(x)}\right)$$

$$\ln(y) = u(x) \cdot \ln(v(x)) \quad / \frac{d}{dx}$$

$$\frac{d}{dx}\left(\ln(y)\right) = \frac{d}{dx}\left(u(x) \cdot \ln(v(x))\right)$$

$$\frac{1}{y} \cdot y' = u'(x)\ln(v(x)) + u(x) \cdot \frac{1}{v(x)} \cdot v'(x)$$

$$\Rightarrow y' = y\left(u'(x)\ln(v(x)) + \frac{u(x) \cdot v'(x)}{v(x)}\right)$$

$$y' = v(x)^{u(x)}\left(u'(x)\ln(v(x)) + \frac{u(x) \cdot v'(x)}{v(x)}\right)$$

Ejemplo 2 : Derive

1) $y = 2^x \quad / \ln()$

$\ln(y) = \ln(2^x)$

$\ln(y) = x \ln(2) \quad / \frac{d}{dx}$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(2)$

$y' = y \ln(2) \longrightarrow y' = 2^x \ln(2)$

2) $y = x^x$

$\ln(y) = x \ln(x) \quad / \frac{d}{dx}$

$\frac{1}{y} \cdot y' = \ln(x) + x \cdot \frac{1}{x}$

$y' = y(\ln(x) + 1)$

$y' = x^x(\ln(x) + 1)$

3) $y = \sqrt{x}^{e^x}$

$\ln(y) = \ln(\sqrt{x}^{e^x})$

$\ln(y) = e^x \ln(\sqrt{x}) \quad / \frac{d}{dx}$

$\frac{1}{y} \cdot y' = e^x \ln(\sqrt{x}) + e^x \frac{1}{\sqrt{x}} \cdot \frac{1}{2\sqrt{x}}$

$\frac{y'}{y} = e^x \left(\ln \sqrt{x} + \frac{1}{2x} \right)$

$y' = \sqrt{x}^{e^x} \cdot e^x \left(\ln(\sqrt{x}) + \frac{1}{2x} \right) //$

4) $y = (x+1)^{x^2}$

$\ln(y) = \ln(x+1^{x^2})$

$\ln(y) = 2x \ln(x+1) \quad \frac{d}{dx}$

$\frac{1}{y} \cdot y' = 2x \ln(x+1) + x^2 \frac{1}{x+1} \cdot \frac{1}{x+2}$

$\frac{y'}{y} = 2x\,(x+1)$

Aplicaciones: Maximos y minimos

ej: $f(x) = x^4 - 4x^3 + 10$

$f'(x) = 4x^3 - 12x^2 = 0$

$4x^2(x-3) = 0$

$\left.\begin{array}{l} 4x^2 = 0 \rightarrow x_1 = 0 \\ x-3 = 0 \rightarrow x_2 = 3 \end{array}\right\}$ puntos criticos

Maximo Relativo:

si $f(x) < f(x_0)$, $\forall x \in I_1$, $I_1 \subseteq Dom(f)$

Minimo Relativo

si $f(x) > f(x_0)$, $\forall x \in I_2$, $I_2 \subseteq Dom(f)$

Crecimiento y decrecimiento:

si $f'(x) > 0$, $\forall x \in I_1$, entonces f es creciente en todo el intervalo

si $f'(x) < 0$, $\forall x \in I_1$, entonces f es decreciente en todo el intervalo

Concavidad $\cup$ $\cap$

obs: derivadas de orden superior:
existen f', f'', f''', ..., f^n

ej: sea $f(x) = 4x^3 - 2x^2 + 3x + 1$

$f'(x) = 12x^2 - 4x + 3$

$f''(x) = 24x - 4$

$f'''(x) = 24$

$f^{iv}(x) = 0$

a) $f''(x) > 0$, $\forall x \in I_1$, f es concava arriba $\cap$

b) $f''(x) < 0$, $\forall x \in I_1$, f es concava abajo $\cup$

4) punto de inflexion:

5) maximo y minimos

Criterio de la primera derivada

1)

2)

Ejemplo: Para la funcion $f(x) = x^4 - 3x^3 + 10$ Determine

1) Puntos criticos
2) Intervalos de crecimiento y decrecimiento
3) Intervalos de concavidad y punto de inflexion
4) Maximos y minimos