Hoja de Problemas 9

Autómatas a pila

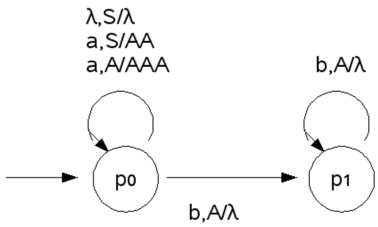
Nivel del ejercicio : ($\star$) básico, ($\clubsuit$) medio, ($\spadesuit$) avanzado.

1. Para cada uno de los lenguajes siguientes, describe un autómata a pila que acepte el lenguaje.

   (a) ($\star$) $L = \{a^n b^{2n} \mid n \geq 0\}$.

   Solución:

   $$AP = (\{a, b\}, \{A, S\}, \{p_0, p_1\}, S, q_0, f\})$$

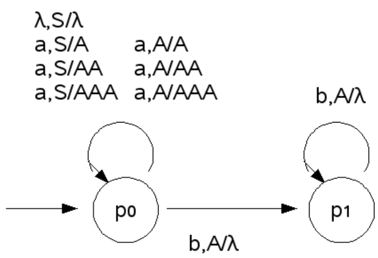
   (b) ($\star$) $L = \{\mathbf{x}c\mathbf{x}^{-1} \mid \mathbf{x} \in \{a, b\}^+\}$.

   Solución:
   Ver apuntes

   (c) ($\star$) $L = \{a^n b^m \mid n \leq m \leq 3n\}$.

   Solución:
   Este es un caso parecido al lenguaje $\{a^n b^n\}$, con la diferencia de que cada vez que leamos una letra "a", debemos insertar en la pila de uno a tres contadores "A". Así, por cada letra "a", habrá de una a tres "b". El autómata a pila es el siguiente :

   $$AP = (\{a, b\}, \{A, S\}, \{p_0, p_1\}, S, q_0, f\})$$

   (d) ($\clubsuit$) $L = \{\mathbf{x}c\mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{a, b\}^*$, número subcadenas ab en $\mathbf{x}$ = número subcadenas ba en $\mathbf{y}\}$.

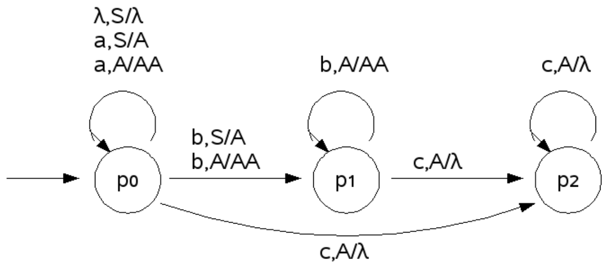
   (e) ($\clubsuit$) $L = \{\mathbf{x}c\mathbf{y} \mid \mathbf{x}, \mathbf{y} \in \{a, b\}^+$, número subcadenas ab en $\mathbf{x}$ = número subcadenas ba en $\mathbf{y}\}$.

(f) ($\star$) $L = \{a^n b^m c^{n+m} \mid n, m \geq 0\}$.

Solución:

$$AP = (\{a,b,c\}, \{A,S\}, \{p_0,p_1,p_2\}, S, q_0, f\})$$

Donde f, la función de transición, viene definida como:

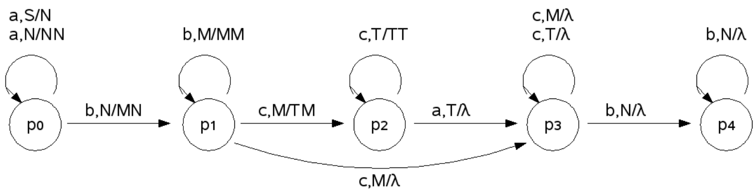


(g) ($\star$) $L = \{a^n b^m c^t a^{m+t} b^n \mid m, n > 0\ ,\ t \geq 0\}$.

Solución:

$$AP = (\{a,b,c\}, \{N,M,T,S\}, \{p_0,p_1,p_2,p_3,p_4\}, S, p_0, f\})$$

Donde f, la función de transición, viene definida como:

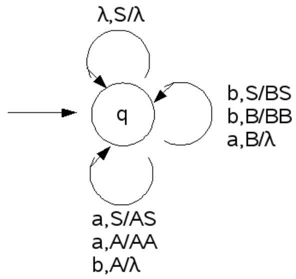


(h) ($\clubsuit$) $L = \{\mathbf{x} \in \{a,b\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x})\}$.

Solución:

$$AP = (\{a,b\}, \{A,B,S\}, \{q\}, S, q, f\})$$

Donde f, la función de transición, viene definida como:



(i) ($\clubsuit$) $L = \{\mathbf{x} \in \{a,b\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x}) + 1\}$.

Solución:

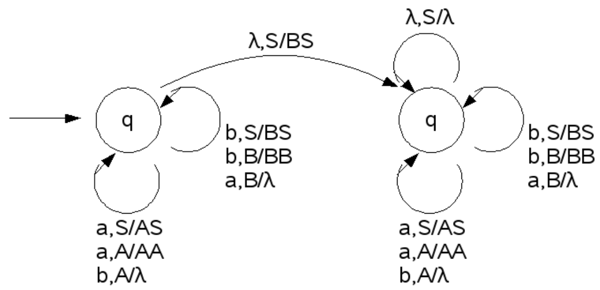
Este es un caso parecido al lenguaje $\{n_a(\mathbf{x}) = n_b(\mathbf{x})\}$, con la salvedad de que en algún momento, el autómata indeterminísticamente insertará en la pila un contador "B" y pasará a otro estado. Así, habrá dos estados : un estado "p" en el que no se habrá insertado dicho contador y un estado "q"

en el que se habrá realizado dicha inserción. El resto del comportamiento del autómata es evidente :

$AP = (\{a, b\}, \{S, A, B\}, \{p, q\}, S, p, f, \emptyset)$

Donde f, la función de transición, viene definida como:

$$
\begin{array}{rcl|rcl}
f(p, a, S) & = & \{(p, AS)\} & f(q, \lambda, S) & = & \{(q, \lambda)\} \\
f(p, a, A) & = & \{(p, AA)\} & f(q, a, S) & = & \{(q, AS)\} \\
f(p, a, B) & = & \{(p, \lambda)\} & f(q, a, A) & = & \{(q, AA)\} \\
f(p, b, S) & = & \{(p, BS)\} & f(q, a, B) & = & \{(q, \lambda)\} \\
f(p, b, B) & = & \{(p, BB)\} & f(q, b, S) & = & \{(q, BS)\} \\
f(p, b, A) & = & \{(p, \lambda)\} & f(q, b, B) & = & \{(q, BB)\} \\
f(p, \lambda, S) & = & \{(q, BS)\} & f(q, b, A) & = & \{(q, \lambda)\}
\end{array}
$$

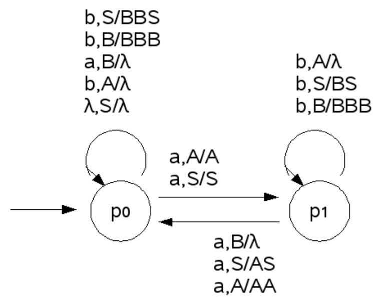


(j) ($\spadesuit$) $L = \{\mathbf{x} \in \{a, b\}^* \mid n_a(\mathbf{x}) = 2n_b(\mathbf{x})\}$.

Solución:

$AP = (\{a, b\}, \{S, A, B\}, \{p_0, p_1\}, S, p_0, f, \emptyset)$

Donde f, la función de transición, viene definida como:



(k) ($\clubsuit$) $L = \left\{a^{max\{0,n-m\}} b^n a^m \mid n,\ m \geq 0\right\}$

(l) ($\clubsuit$) $L = \{a^{n+m} b^{m+t} a^t b^n \mid n, t > 0, m \geq 0\}$

2. Obtén autómatas a pila que acepten los lenguajes generados por las gramáticas siguientes :

(a) ($\star$)

$$
\begin{array}{rcl}
S & ::= & aA \\
A & ::= & aABC \mid bB \mid a
\end{array}
$$

$$B ::= b$$
$$C ::= c$$

Nota: Comprueba que la palabra *aaabc* esté en el lenguaje generado por el autómata.

Solución:

Existen 3 posibles algoritmos para convertir una gramática independiente de contexto en un autómata a pila que reconoce por vaciado de pila. Esta gramática cumple con las condiciones de los 3 algoritmos, por tanto, podríamos aplicar cualquier de ellos.

1. $P_V = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, \{q\}, S, q, f_V)$

   $f_V(q, \lambda, S) = \{(q, aA)\}$
   $f_V(q, \lambda, A) = \{(q, aABC), (q, bB), (q, a)\}$
   $f_V(q, \lambda, B) = \{(q, b)\}$
   $f_V(q, \lambda, C) = \{(q, c)\}$
   $f_V(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_V(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_V(q, c, c) = \{(q, \lambda)\}$

   $(q, aaabc, S) \vdash (q, aaabc, aA) \vdash (q, aabc, A) \vdash (q, aabc, aABC) \vdash (q, abc, ABC) \vdash (q, abc, aBC) \vdash (q, bc, BC) \vdash (q, bc, bC) \vdash (q, c, C) \vdash (q, c, c) \vdash (q, \lambda, \lambda)$

2. $P_V = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, \{q\}, S, q, f_V)$

   $f_V(q, a, S) = \{(q, A)\}$
   $f_V(q, a, A) = \{(q, ABC), (q, \lambda)\}$
   $f_V(q, b, A) = \{(q, B)\}$
   $f_V(q, b, B) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_V(q, c, C) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_V(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_V(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_V(q, c, c) = \{(q, \lambda)\}$

   $(q, aaabc, S) \vdash (q, aabc, A) \vdash (q, abc, ABC) \vdash (q, bc, ABC) \vdash (q, c, C) \vdash (q, \lambda, \lambda)$

3. $P_V = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C\}, \{q\}, S, q, f_V)$

   $f_V(q, a, S) = \{(q, A)\}$
   $f_V(q, a, A) = \{(q, A), (q, \lambda)\}$
   $f_V(q, b, A) = \{(q, B)\}$
   $f_V(q, b, B) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_V(q, c, C) = \{(q, \lambda)\}$

$(q, aaabc, S) \vdash (q, aabc, A) \vdash (q, abc, ABC) \vdash (q, bc, ABC) \vdash (q, c, C) \vdash (q, \lambda, \lambda)$

Para convertir un autámata a pila que reconoce por vaciado de pila en uno que reconoce por estado final aplicamos el procedimiento visto durante el curso.

1. $P_F = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C, T\}, \{q, p_0, p_f\}, T, q, f, \{p_f c\})$

   $f_F(p_0, \lambda, T) = \{q, ST\}$
   $f_F(q, \lambda, S) = \{(q, aA)\}$
   $f_F(q, \lambda, A) = \{(q, aABC), (q, bB), (q, a)\}$
   $f_F(q, \lambda, B) = \{(q, b)\}$
   $f_F(q, \lambda, C) = \{(q, c)\}$
   $f_F(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, c, c) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, \lambda, T) = \{(p_f, T)\}$

   $(p_0, aaabc, T) \vdash (q, aaabc, ST) \vdash (q, aaabc, aAT) \vdash (q, aabc, AT) \vdash (q, aabc, aABCT) \vdash (q, abc, ABCT) \vdash (q, abc, aBCT) \vdash (q, bc, BCT) \vdash (q, bc, bCT) \vdash (q, c, CT) \vdash (q, c, cT) \vdash (q, \lambda, T) \vdash (p_f, \lambda, T)$

2. $P_F = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C, T\}, \{q, p_0, p_f\}, S, q, f_F, \{p_f\})$

   $f_F(p_0, \lambda, T) = \{q, ST\}$
   $f_F(q, a, S) = \{(q, A)\}$
   $f_F(q, a, A) = \{(q, ABC), (q, \lambda)\}$
   $f_F(q, b, A) = \{(q, B)\}$
   $f_F(q, b, B) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, c, C) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, c, c) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, \lambda, T) = \{(p_f, T)\}$

   $(p_0, aaabc, T) \vdash (q, aaabc, ST) \vdash (q, aabc, AT) \vdash (q, abc, ABCT) \vdash (q, bc, ABCT) \vdash (q, c, CT) \vdash (q, \lambda, T) \vdash (p_f, \lambda, T)$

3. $P_F = (\{a, b, c\}, \{S, A, B, C, T\}, \{q, p_0, p_f\}, S, q, f_F, \{p_f\})$

   $f_F(p_0, \lambda, T) = \{q, ST\}$
   $f_F(q, a, S) = \{(q, A)\}$
   $f_F(q, a, A) = \{(q, A), (q, \lambda)\}$
   $f_F(q, b, A) = \{(q, B)\}$
   $f_F(q, b, B) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, c, C) = \{(q, \lambda)\}$
   $f_F(q, \lambda, T) = \{(p_f, T)\}$

   $(p_0, aaabc, T) \vdash (q, aaabc, ST) \vdash (q, aabc, AT) \vdash (q, abc, ABCT) \vdash (q, bc, ABCT) \vdash (q, c, CT) \vdash (q, \lambda, T) \vdash (p_f, \lambda, T)$

(b) ($\clubsuit$)

$$
\begin{array}{rcl}
A & ::= & 2BC \mid 1B \mid \lambda \\
B & ::= & 1D \mid 1C \mid 1 \\
C & ::= & 2 \\
D & ::= & 2D \mid 2C
\end{array}
$$

Solución:

Vamos a resolver este ejercicio mediante un autómata a pila reconocedor por estado final. Para ello, lo primero que debemos hacer es encontrar el autómata a pila reconocedor por vaciado de pila equivalente a la gramática.

$$AP_V = (\{1,2\}, \{A,B,C,D,1,2\}, \{q\}, A, q, f_V, \emptyset)$$

Donde f_V, la función de transición, viene definida como:

$$
\begin{array}{rcl}
f_V(q,\lambda,A) & = & \{(q,2BC),(q,1B),(q,\lambda)\} \\
f_V(q,\lambda,B) & = & \{(q,1D),(q,1C),(q,1)\} \\
f_V(q,\lambda,C) & = & \{(q,2)\} \\
f_V(q,\lambda,D) & = & \{(q,2D),(q,2C)\} \\
f_V(q,1,1) & = & \{(q,\lambda)\} \\
f_V(q,2,2) & = & \{(q,\lambda)\}
\end{array}
$$

Ahora, transformaremos este autómata pila a uno con reconocimiento por estado final.

$$AP_F = (\{1,2\}, \{A,B,C,D,1,2,T\}, \{q,p_0,p_f\}, T, p_0, f_F, \{r\})$$

Donde f_F, la función de transición, viene definida como:

$$
\begin{array}{rcl}
f_F(p_0,\lambda,T) & = & \{(q,AT)\} \\
f_F(q,\lambda,A) & = & \{(q,2BC),(q,1B),(q,\lambda)\} \\
f_F(q,\lambda,B) & = & \{(q,1D),(q,1C),(q,1)\} \\
f_F(q,\lambda,C) & = & \{(q,2)\} \\
f_F(q,\lambda,D) & = & \{(q,2D),(q,2C)\} \\
f_F(q,1,1) & = & \{(q,\lambda)\} \\
f_F(q,2,2) & = & \{(q,\lambda)\} \\
f_F(q,\lambda,T) & = & \{(q_f,T)\}
\end{array}
$$

Observación: Está gramática permite la utilización de los otros dos algoritmos también.

(c) (♣)

$$\begin{array}{rcl} S & ::= & aAb \mid aBbb \mid ab \mid abb \mid \lambda \\ A & ::= & aAb \mid ab \\ B & ::= & aBbb \mid abb \end{array}$$

Solución:

Esta gramática tiene la forma normal de Greibach, por tanto se pueden aplicar dos métodos de conversión a autómata de pila. No cumple con los requisitos del tercer procedimiento.

1. $P_V = (\{a,b\}, \{S,A,B\}, \{q\}, S, q, f_V)$

   $f_V(q,\lambda,S) = \{(q,aAb),(q,aBbb),(q,ab),(q,abb)\}$
   $f_V(q,\lambda,A) = \{(q,aAb),(q,ab)\}$
   $f_V(q,\lambda,B) = \{(q,aBbb),(q,abb)\}$
   $f_V(q,a,a) = \{(q,\lambda)\}$
   $f_V(q,b,b) = \{(q,\lambda)\}$

2. $P_V = (\{a,b\}, \{S,A,B\}, \{q\}, S, q, f_V)$

   $f_V(q,\lambda,S) = \{(q,aAb),(q,aBbb),(q,ab),(q,abb)\}$
   $f_V(q,\lambda,A) = \{(q,aAb),(q,ab)\}$
   $f_V(q,\lambda,B) = \{(q,aBbb),(q,abb)\}$
   $f_V(q,a,a) = \{(q,\lambda)\}$
   $f_V(q,b,b) = \{(q,\lambda)\}$

Para convertir un autámata a pila que reconoce por vaciado de pila en uno que reconoce por estado final aplicamos el procedimiento visto durante el cursto.

1. $P_F = (\{a,b\}, \{S,A,B,T\}, \{q,p_0,p_f\}, T, p_0, f_F, \{p_f\})$

   $f_F(p_0,\lambda,T) = \{q,ST\}$
   $f_F(q,\lambda,S) = \{(q,aAa),(q,aBbb),(q,ab),(q,abb)\}$
   $f_F(q,\lambda,A) = \{(q,aAb),(q,ab)\}$
   $f_F(q,\lambda,B) = \{(q,aBbb),(q,abb)\}$
   $f_F(q,a,a) = \{(q,\lambda)\}$
   $f_F(q,b,b) = \{(q,\lambda)\}$
   $f_F(q,\lambda,T) = \{(p_f,T)\}$

2. $P_F = (\{a,b\}, \{S,A,B,T\}, \{q,p_0,p_f\}, T, q, f_F, \{p_f\})$

   $f_F(p_0,\lambda,T) = \{q,ST\}$
   $f_F(q,\lambda,S) = \{(q,aAa),(q,aBbb),(q,ab),(q,abb)\}$
   $f_F(q,\lambda,A) = \{(q,aAb),(q,ab)\}$
   $f_F(q,\lambda,B) = \{(q,aBbb),(q,abb)\}$
   $f_F(q,a,a) = \{(q,\lambda)\}$
   $f_F(q,b,b) = \{(q,\lambda)\}$
   $f_F(q,\lambda,T) = \{(p_f,T)\}$

(d) (♣)

$$\begin{aligned} S &::= AB \mid BA \mid 0A1 \mid 1A0 \mid 0 \\ A &::= 0A1 \mid 1A0 \mid 0 \\ B &::= 0B1 \mid 1B0 \mid 01 \mid 10 \end{aligned}$$

Solución:

Esta gramática no tiene la forma normal de Greibach, por tanto solo se puede aplicar el métodos genérico de conversión a autómata de pila.

$P_V = (\{0, 1\}, \{S, A, B\}, \{q\}, S, q, f_V)$
$f_V(q, \lambda, S) = \{(q, AB), (q, BA), (q, 0A1), (q, 1A0), (q, 0)\}$
$f_V(q, \lambda, A) = \{(q, 0A1), (q, 1A0), (q, 0)\}$
$f_V(q, \lambda, B) = \{(q, 0B1), (q, 1B0), (q, 01), (q, 10)\}$
$f_V(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
$f_V(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$

Para convertir un autámata a pila que reconoce por vaciado de pila en uno que reconoce por estado final aplicamos el procedimiento visto durante el cursto.

$P_F = (\{0, 1\}, \{S, A, B, T\}, \{q, p_0, p_f\}, T, q, f_F, \{p_f\})$
$f_F(p_0, \lambda, T) = \{q, ST\}$
$f_F(q, \lambda, S) = \{(q, AB), (q, BA), (q, 0A1), (q, 1A0), (q, 0)\}$
$f_F(q, \lambda, A) = \{(q, 0A1), (q, 1A0), (q, 0)\}$
$f_F(q, \lambda, B) = \{(q, 0B1), (q, 1B0), (q, 01), (q, 10)\}$
$f_F(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
$f_F(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
$f_F(q, \lambda, T) = \{(p_f, T)\}$

(e) (♣)

$$\begin{aligned} S &::= aABB \mid aAA \\ A &::= aBB \mid a \\ B &::= bBB \mid A \end{aligned}$$

Solución:

Esta gramática no tiene la forma normal de Greibach, por tanto solo se puede aplicar el métodos genérico de conversión a autómata de pila.

$P_V = (\{a, b\}, \{S, A, B\}, \{q\}, S, q, f_V)$
$f_V(q, \lambda, S) = \{(q, aABB), (q, aAA)\}$
$f_V(q, \lambda, A) = \{(q, aBB), (q, a)\}$
$f_V(q, \lambda, B) = \{(q, bBB), (q, A)\}$
$f_V(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
$f_V(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$

Para convertir un autámata a pila que reconoce por vaciado de pila en uno que reconoce por estado final aplicamos el procedimiento visto durante el cursto.

$P_F = (\{a, b\}, \{S, A, B, T\}, \{q, p_0, p_f\}, T, q, f_F, \{p_f\})$
$f_F(p_0, \lambda, T) = \{q, ST\}$
$f_F(q, \lambda, S) = \{(q, aABB), (q, aAA)\}$
$f_F(q, \lambda, A) = \{(q, aBB), (q, a)\}$
$f_F(q, \lambda, B) = \{(q, bBB), (q, A)\}$
$f_F(q, a, a) = \{(q, \lambda)\}$
$f_F(q, b, b) = \{(q, \lambda)\}$
$f_F(q, \lambda, T) = \{(p_f, T)\}$

3. Obtén gramáticas que generen el lenguaje aceptado por los autómatas a pila siguientes :

   (a) ($\star$) $AP_1 = (\{a, b\}, \{A, B\}, \{p, q\}, A, p, f, \emptyset)$

$$
\begin{aligned}
f(p, a, A) &= \{(p, BA)\} \\
f(p, a, B) &= \{(p, BB)\} \\
f(p, b, B) &= \{(q, \lambda)\} \\
f(q, b, B) &= \{(q, \lambda)\} \\
f(q, \lambda, B) &= \{(q, \lambda)\} \\
f(q, \lambda, A) &= \{(q, \lambda)\}
\end{aligned}
$$

   La gramática de este apartado definela en Forma Normal de Greibach.

Solución:
Partiendo del autómata:

$$AP_1 = (\{a, b\}, \{A, B\}, \{p, q\}, A, p, f, \emptyset)$$

sabemos cómo construir una gramática equivalente, esa gramática estará formada por:

$$\textstyle\sum_T = \sum$$
$$\textstyle\sum_N = \{S\} \cup \{[q_i A q_j] \mid q_i, q_j \in Q,\ A \in \Gamma\}$$

Según lo anterior, nuestra gramática se define como:

$$G_{AP1} =$$
$$(\{a, b\}, \{S, [pAq], [pBq], [pAp], [pBp], [qAp], [qBp], [qAq], [qBq]\}, S, P)$$

Donde el conjunto de producciones P, es el siguiente:

$$
\begin{aligned}
S &::= [pAq] \mid [pAp] \\
[pAp] &::= a[pBp][pAp] \mid a[pBq][qAp] \\
[pAq] &::= a[pBp][pAq] \mid a[pBq][qAq] \\
[pBp] &::= a[pBp][pBp] \mid a[pBq][qBp] \\
[pBq] &::= a[pBp][pBq] \mid a[pBq][qBq] \mid b \\
[qBq] &::= b \mid \lambda \\
[qAq] &::= \lambda
\end{aligned}
$$

De forma que si renombramos (para que quede más clara):

$$\begin{array}{rcl} [pAp] & = & \text{A} \\ [pAq] & = & \text{B} \\ [pBp] & = & \text{C} \\ [pBq] & = & \text{D} \\ [qAq] & = & \text{E} \\ [qBq] & = & \text{F} \\ [qAp] & = & \text{G} \\ [qBp] & = & \text{H} \end{array}$$

La gramática resultante nos queda:

$$\begin{array}{rcl} S & ::= & B \mid A \\ A & ::= & aCA \mid aDG \\ B & ::= & aCB \mid aDE \\ C & ::= & aCC \mid aDH \\ D & ::= & aCD \mid aDF \mid b \\ F & ::= & b \mid \lambda \\ E & ::= & \lambda \end{array}$$

Para pasarla a F.N.G., primero debemos asegurarnos que esté bien formada, para ello, recordamos que debemos:

- Eliminar reglas innecesarias ($A ::= A$).
- Eliminar reglas no generativas ($A ::= \lambda$).
- Eliminar reglas unitarias ($A ::= B$).
- Eliminar símbolos inútiles.

Lo que nos produce la siguiente gramática bien formada equivalente:

$$G_{AP1_{FNG}} = (\{a, b\}, \{S, D, F\}, S, P')$$

Donde P' esté definido como:

$$\begin{array}{rcl} S & ::= & aD \\ D & ::= & aD \mid aDF \mid b \\ F & ::= & b \end{array}$$

Que además, ya se encuentra en Forma Normal de Greibach.

(b) ($\clubsuit$) $AP_2 = (\{a, b\}, \{A, z\}, \{q_0, q_1\}, z, q_0, f, \{q_1\})$

$$\begin{array}{rcl} f(q_0, a, z) & = & \{(q_0, Az)\} \\ f(q_0, b, A) & = & \{(q_0, AA)\} \\ f(q_0, a, A) & = & \{(q_1, \lambda)\} \end{array}$$

Solución:

En primer lugar, hay que transformar el autómata a pila en un autómata a pila por vaciado de pila equivalente :

$AP'_2 := (\{a,b\}, \{A,z,B\}, \{q_0,q_1,s,r\}, B, s, f', \emptyset)$

$$\begin{array}{rcl|rcl}
f'(s,\lambda,B) & = & \{(q_0,zB)\} & f'(q_1,\lambda,z) & = & \{(r,\lambda)\} \\
f'(q_0,a,z) & = & \{(q_0,Az)\} & f'(q_1,\lambda,B) & = & \{(r,\lambda)\} \\
f'(q_0,b,A) & = & \{(q_0,AA)\} & f'(r,\lambda,A) & = & \{(r,\lambda)\} \\
f'(q_0,a,A) & = & \{(q_1,\lambda)\} & f'(r,\lambda,z) & = & \{(r,\lambda)\} \\
f'(q_1,\lambda,A) & = & \{(r,\lambda)\} & f'(r,\lambda,B) & = & \{(r,\lambda)\}
\end{array}$$

Ahora, simplemente aplicamos el algoritmo para calcular la gramática equivalente a AP'_2 :

$$\begin{array}{rl}
G_2 := (\{a,b\}, \{S, & [q_0Aq_0],[q_0Aq_1],[q_0As],[q_0Ar],[q_0zq_0],[q_0zq_1],[q_0zs],[q_0zr], \\
& [q_0Bq_0],[q_0Bq_1],[q_0Bs],[q_0Br],[q_1Aq_0],[q_1Aq_1],[q_1As],[q_1Ar], \\
& [q_1zq_0],[q_1zq_1],[q_1zs],[q_1zr],[q_1Bq_0],[q_1Bq_1],[q_1Bs],[q_1Br], \\
& [rAq_0],[rAq_1],[rAs],[rAr],[rzq_0],[rzq_1],[rzs],[rzr], \\
& [rBq_0],[rBq_1],[rBs],[rBr],[sAq_0],[sAq_1],[sAs],[sAr], \\
& [szq_0],[szq_1],[szs],[szr],[sBq_0],[sBq_1],[sBs],[sBr]\}, \\
S, \mathcal{P}), &
\end{array}$$

donde $\mathcal{P}$ son las producciones

$$\begin{array}{rcl}
S & ::= & [sBs] \mid [sBq_0] \mid [sBq_1] \mid [sBr] \\
[sBq_0] & ::= & [q_0zq_0][q_0Bq_0] \mid [q_0zq_1][q_1Bq_0] \mid [q_0zr][rBq_0] \mid [q_0zs][sBq_0] \\
[sBq_1] & ::= & [q_0zq_0][q_0Bq_1] \mid [q_0zq_1][q_1Bq_1] \mid [q_0zr][rBq_1] \mid [q_0zs][sBq_1] \\
[sBr] & ::= & [q_0zq_0][q_0Br] \mid [q_0zq_1][q_1Br] \mid [q_0zr][rBr] \mid [q_0zs][sBr] \\
[sBs] & ::= & [q_0zq_0][q_0Bs] \mid [q_0zq_1][q_1Bs] \mid [q_0zr][rBs] \mid [q_0zs][sBs] \\
[q_0zq_0] & ::= & a[q_0Aq_0][q_0zq_0] \mid a[q_0Aq_1][q_1zq_0] \mid a[q_0Ar][rzq_0] \mid a[q_0As][szq_0] \\
[q_0zq_1] & ::= & a[q_0Aq_0][q_0zq_1] \mid a[q_0Aq_1][q_1zq_1] \mid a[q_0Ar][rzq_1] \mid a[q_0As][szq_1] \\
[q_0zr] & ::= & a[q_0Aq_0][q_0zr] \mid a[q_0Aq_1][q_1zr] \mid a[q_0Ar][rzr] \mid a[q_0As][szr] \\
[q_0zs] & ::= & a[q_0Aq_0][q_0zs] \mid a[q_0Aq_1][q_1zs] \mid a[q_0Ar][rzs] \mid a[q_0As][szs] \\
[q_0Aq_0] & ::= & b[q_0Aq_0][q_0zq_0] \mid b[q_0Aq_1][q_1zq_0] \mid b[q_0Ar][rzq_0] \mid b[q_0As][szq_0] \\
[q_0Aq_1] & ::= & b[q_0Aq_0][q_0zq_1] \mid b[q_0Aq_1][q_1zq_1] \mid b[q_0Ar][rzq_0] \mid b[q_0As][szq_1] \\
[q_0Ar] & ::= & b[q_0Aq_0][q_0zr] \mid b[q_0Aq_1][q_1zr] \mid b[q_0Ar][rzr] \mid b[q_0As][szr] \\
[q_0As] & ::= & b[q_0Aq_0][q_0zs] \mid b[q_0Aq_1][q_1zs] \mid b[q_0Ar][rzs] \mid b[q_0As][szs] \\
[q_0Aq_1] & ::= & a \\
[q_1Ar] & ::= & \lambda \\
[q_1zr] & ::= & \lambda \\
[q_1Br] & ::= & \lambda \\
[rAr] & ::= & \lambda \\
[rzr] & ::= & \lambda \\
[rBr] & ::= & \lambda
\end{array}$$

Una gramática bien formada equivalente a la dada es $G'_2 := (\{a,b\},\{S,[q_0Ar]\},S,\mathcal{P}')$, donde $\mathcal{P}'$ son las producciones

$$\begin{array}{rcl} S & ::= & a[q_0Ar] \mid aa \\ [q_0Ar] & ::= & b[q_0Ar] \mid ba \end{array}$$

(c) ($\clubsuit$) $AP_3 = (\{0,1\},\{A,B\},\{p,q\},A,p,f,\emptyset)$

$$\begin{array}{rcl} f(p,1,A) & = & \{(p,BA)\} \\ f(p,1,B) & = & \{(p,BB)\} \\ f(p,0,B) & = & \{(q,\lambda)\} \\ f(q,0,B) & = & \{(p,\lambda)\} \\ f(q,\lambda,A) & = & \{(q,\lambda)\} \end{array}$$

Solución:
$G_3 := (\{0,1\},\{S,[pAp],[pAq],[pBp],[pBq],[qAp],[qAq],[qBp],[qBq]\},S,\mathcal{P})$, donde $\mathcal{P}$ son las producciones

$$\begin{array}{rcl} S & ::= & [pAp] \mid [pAq] \\ [pAp] & ::= & 1[pBp][pAp] \mid 1[pBq][qAp] \\ [pAq] & ::= & 1[pBp][pAq] \mid 1[pBq][qAq] \\ [pBp] & ::= & 1[pBp][pBp] \mid 1[pBq][qBp] \\ [pBq] & ::= & 1[pBp][pBq] \mid 1[pBq][qBq] \\ [pBq] & ::= & 0 \\ [qBp] & ::= & 0 \\ [qAq] & ::= & \lambda \end{array}$$

(d) ($\clubsuit$) $AP_4 = (\{0,1\},\{A,S\},\{p,q\},S,p,f,\emptyset)$

$$\begin{array}{rcl} f(p,0,S) & = & \{(p,AS)\} \\ f(p,0,A) & = & \{(p,AA)\} \\ f(p,1,A) & = & \{(q,\lambda)\} \\ f(q,1,A) & = & \{(q,\lambda)\} \\ f(q,\lambda,A) & = & \{(q,\lambda)\} \\ f(q,\lambda,S) & = & \{(q,\lambda)\} \end{array}$$

Solución:
$G_4 := (\{0,1\},\{T,[pAp],[pAq],[pSp],[pSq],[qAp],[qAq],[qSp],[qSq]\},T,\mathcal{P})$, donde $\mathcal{P}$ son las producciones

$$T ::= [pSp] \mid [pSq]$$

$$
\begin{aligned}
[pSp] &::= 0[pAp][pSp] \mid 0[pAq][qSp] \\
[pSq] &::= 0[pAp][pSq] \mid 0[pAq][qSq] \\
[pAp] &::= 0[pAp][pAp] \mid 0[pAq][qAp] \\
[pAq] &::= 0[pAp][pAq] \mid 0[pAq][qAq] \\
[pAq] &::= 1 \\
[qAq] &::= 1 \mid \lambda \\
[qSq] &::= \lambda
\end{aligned}
$$