Técnicas de Conteo

Principio Fundamental del Conteo (Principio Multiplicativo)

Si un evento puede realizarse de n_1 maneras diferentes y, si continuado el procedimiento, un segundo evento puede realizarse de n_2 maneras diferentes y, si después de efectuados, un tercer evento puede realizarse de n_3 maneras diferentes y, así sucesivamente, entonces el número de maneras en que los eventos pueden realizarse en el orden indicado es el producto $n_1 \cdot n_2 \cdot n_3 \cdot \cdots$

Ejemplo

Suponga que el nuevo criterio para la obtención de nuevas placas de automóviles consta de dos letras distintas seguidas de cuatro dígitos de los cuales el primero no puede ser cero, ¿cuántas placas diferentes pueden grabarse?

Desarrollo

$$26 \cdot 25 \cdot 9 \cdot 10 \cdot 10 \cdot 10 = 5.850.000 \text{ placas diferentes}$$

Ejercicio propuesto

Considerando que no se permiten repeticiones, ¿cuántos números de tres dígitos se pueden formar con los seis dígitos siguientes: 2, 3, 4, 5, 7 y 9 de tal manera que:

a) ¿Estos dígitos sean menores que 600?
b) ¿Estos dígitos sean pares?
c) ¿Estos dígitos sean impares?
d) ¿Estos dígitos sean múltiplos de 5?

Principio Aditivo

Suponga que un primer procedimiento puede realizarse de n_1 maneras y un segundo procedimiento puede realizarse de n_2 y supongamos además que ambos procedimientos, 1 y 2, no pueden realizarse juntos. Entonces el número de maneras que se puede realizar el procedimiento 1 o el procedimiento 2 es de $n_1 + n_2$.

Ejemplo

Suponga que se desea realizar un viaje y se debe decidir si el transporte es por bus o tren. Si existen tres rutas para el bus y dos para el tren, entonces hay 3+2 =5 rutas disponibles para el viaje.

Permutaciones

Una permutación es un arreglo ya sea de personas u objetos donde el orden en el que aparecen es lo que importa. Una permutación de n personas u objetos tomados r a la vez, con r ≤ n, se denota y define de la siguiente manera:

$$P(n,r) = \frac{n!}{(n-r)!}$$

Se lee “permutación de n sobre r”.

Observación:

En el caso particular de $r = n$, se tiene $P(n,n) = n!$

Ejemplo 1

Determinar el número de permutaciones a partir de las siguientes 4 letras a, b, c y d, si se toman 3 a la vez.

$$P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$$

Ejemplo 2

¿De cuántas maneras se pueden sentar 10 personas en un sillón si hay 4 sitios disponibles?

Desarrollo

En este caso n=10 y r=4, luego, se está pidiendo la permutación P(10,4).

$$P(10,4) = \frac{10!}{(10-4)!} = \frac{10!}{6!} = 5040$$

Este resultado indica que existen 5040 formas distintas de sentar a las 10 personas.

Análogamente, podemos expresar el resultado de la siguiente manera:

$$10 \cdot 9 \cdot 8 \cdot 7 = 5040$$

Combinaciones

Suponga que tiene una colección de n objetos. Una combinación de n objetos, tomados r a la vez, es un subconjunto de r elementos donde el orden NO se tiene en cuenta.

El número de combinaciones de n personas u objetos tomados r a la vez se denota y define de la siguiente manera:

$$\binom{n}{r} = \frac{n!}{r!\,(n-r)!}, \qquad r \leq n$$

Ejemplo 1:

De cuántas maneras puede escogerse un comité formado por 3 hombres y 2 mujeres, de un grupo de 7 hombres y 5 mujeres.

Desarrollo

De los 7 hombres, se escogen 3, por lo que hay $\binom{7}{3}$ maneras diferentes de escoger. De igual forma, para las mujeres, hay $\binom{5}{2}$ maneras diferentes de escoger. Por lo tanto, el comité puede escogerse de $\binom{7}{3} \cdot \binom{5}{2} = \frac{7!}{3!4!} \cdot \frac{5!}{2!3!} =$ 350 maneras diferentes.

Este resultado integra combinaciones y principio multiplicativo.

Ejemplo 2:

Determinar el número de combinaciones a partir de las siguientes 4 letras a, b, c y d, si se toman 3 a la vez.

Desarrollo

$$\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!\,(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$$

Importante:

Observe que respecto del ejemplo de las cuatro letras a, b, c y d,

Si se permuta, se obtiene $P(4,3) = \frac{4!}{(4-3)!} = \frac{4!}{1!} = 24$

Si se combina, se obtiene $\binom{4}{3} = \frac{4!}{3!(4-3)!} = \frac{4!}{3!} = 4$

Esta diferencia se puede observar en las posibles respuestas:

Combinaciones	Permutaciones
abc	abc acb bca bac cab cba
bcd	bcd bdc cbd cdb dbc dcb
abd	abd adb bda bad dab dba
acd	acd adc cda cad dac dca

Ejercicio integrado

Un estudiante tiene que responder 10 preguntas de un total de 13 en un examen,

a) ¿cuántas maneras tiene de escoger?

b) ¿cuántas maneras tienen de escoger, si las dos primeras preguntas son obligatorias?

c) ¿cuántas maneras tiene de escoger, si tiene que responder 3 de las 5 primeras?

d) ¿cuántas maneras tiene de escoger, si tiene que responder por lo menos 3 de las 5 primeras?

A resolver!

Definición 5. Espacio Finito Equiprobable

Frecuentemente, las características físicas de un experimento, sugieren que se asignen iguales probabilidades a los elementos del espacio muestral. Un espacio finito Ω de probabilidad, donde cada punto muestral tiene la misma probabilidad, se llamará espacio equiprobable o uniforme. En particular, si Ω contiene n puntos, entonces la probabilidad de cada punto es $\frac{1}{n}$ Además, si un evento A, contiene r elementos, entonces su probabilidad será $\frac{r}{n}$ o bien,

$$P(A) = \frac{número\ de\ maneras\ de\ como\ puede\ ocurrir\ elevento\ A}{número\ de\ maneras\ de\ como\ puede\ ocurrir\ el\ espacio\ muestral\ \ \Omega}$$

Ejemplo:

Considere un lote de 12 artículos con 4 de ellos defectuosos. Si se seleccionan 2 artículos al azar,

a) ¿cuál es la probabilidad de que ambos artículos sean defectuosos?
b) ¿cuál es la probabilidad de que un artículo sea bueno y el otro defectuoso?
c) Si se seleccionan 3 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos 2 sean defectuosos?
d) Si se seleccionan 3 artículos, ¿cuál es la probabilidad de que a lo más 3 sean defectuosos?

Desarrollo
Para resolver, primero se debe tener en cuenta como está dado el espacio muestral Ω del experimento. En este caso es de la forma:

Ω = $\{B_1B_2, B_1B_3, B_1D_1, \ldots\}$

Esto quiere decir que el espacio muestral está formado por todas las posibles combinaciones de dos artículos De esta forma, Ω tiene 66 posibles resultados.

Ahora bien, para calcular las probabilidades pedidas, se debe definir los eventos, estos dicen claramente lo planteado en la pregunta. Esto es.

A: “Ambos artículos son defectuosos”
B: “Un artículo es bueno y el otro es defectuosos”
C: “Por lo menos dos artículos son defectuosos”
D: “A lo más tres artículos son defectuosos”

Así, tenemos que:

a) P(A) = $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{8}{0}}{\binom{12}{2}}$, observe que las cifras en la parte superior suman 12 (4+8), que corresponde al total de artículos disponibles, y abajo suman 2 (2+0), que corresponde al número de artículos que se está seleccionando.

Esto se resuelve utilizando factoriales o bien con la función que entregan las calculadoras.

b) P(B) = $\dfrac{\binom{4}{1}\binom{8}{1}}{\binom{12}{2}}$, esto es porque se toma un artículo de cada grupo.

c) P(C) = $\dfrac{\binom{4}{2}\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} + \dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{0}}{\binom{12}{3}}$, en este caso se debe tener en cuenta que se seleccionan 3 artículos, por lo tanto se modifica el espacio muestral.

d) P(D) = $\dfrac{\binom{4}{3}\binom{8}{0}}{\binom{12}{3}} + \dfrac{\binom{4}{2}\binom{8}{1}}{\binom{12}{3}} + \dfrac{\binom{4}{1}\binom{8}{2}}{\binom{12}{3}} + \dfrac{\binom{4}{0}\binom{8}{3}}{\binom{12}{3}}$, el concepto de “a lo más” significa máximo 3, por lo tanto, pueden ser 3, 2, 1 o ninguno defectuoso.

Ejercicios →Práctico 2