UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Profesores: Miguel Oyarzún - Paulina Llarena - José Luis Riquelme.
Primer Semestre 2022

Guía N°2
Funciones
Álgebra I (220155)

En general, las letras f, g, h, F, G, etc., son usadas para representar reglas de funciones. Por ejemplo, la ecuación

$$y = x + 2$$

define a y como una función de x, de donde la regla es sumarle 2 a la entrada. Suponga que hacemos que f represente esta regla. Entonces, decimos que f es una función. Para indicar que f asigna a la entrada 1 a la salida 3, escribimos $f(1) = 3$, que se lee "f de 1 es igual a 3". De forma análoga, $f(-4) = -2$. Más generalmente, si x es cualquier entrada, tenemos la notación:

$f(x)$, que se lee "f de x", representa el número de salida en el rango de f que corresponde al número de entrada x en el dominio.

Así la salida de $f(x)$ es lo mismo que y. Pero como $y = x + 2$, podemos escribir $y = f(x) = x + 2$o simplemente:

$$f(x) = x + 2$$

Por ejemplo, para encontrar $f(3)$, que es la salida correspondiente a la entrada 3, reemplazamos con 3 cada x en $f(x) = x + 2$:

$$f(3) = 3 + 2 = 5$$

Del mismo modo,

$$\begin{aligned} f(8) &= 8 + 2 \\ f(-4) &= -4 + 2 \end{aligned}$$

Los números de salida tales como $f(-4)$ son llamados **Valores de la función** (o valores funcionales). Tenga en mente que están en el rango de f.

Con mucha frecuencia, las funciones son definidas por "notación funcional". Por ejemplo, la ecuación $g(x) = x^3 + x^2$, define a la función g que asigna a cada número de entrada x el número de salida $x^3 + x^2$.

$$g : x \to x^3 + x^2$$

Así g suma el cubo y el cuadrado de un número de entrada. Algunos valores de la función son:

$$\begin{aligned} g(2) &= 2^3 + 2^2 = 12 \\ g(-1) &= (-1)^3 + (-1)^2 = -1 + 1 = 0 \\ g(t) &= t^3 + t^2 \\ g(x+1) &= (x+1)^3 + (x+1)^2 \end{aligned}$$

Observe que $g(x + 1)$ se encontr"o reemplazando cada x en $x^3 + x^2$ por la entrada x+1.

Cuando hagamos referencia a la funci"on g definida por $g(x) = x^3 + x^2$, con toda libertad llamaremos a la ecuación "función". Así, hablamos de "la función $g(x) = x^3 + x^2$" y de manera análoga, ”la función $y = x + 2$”.

Seamos más específicos acerca del dominio de una función. A menos que se establezca otra cosa, el dominio de la función consiste en todos los número reales para los cuales la regla de la función tenga sentido, esto es, que den los valores de la función reales. Por ejemplo, suponga

$$h(x) = \frac{1}{x-6}$$

Aquí cualquier real puede ser usado para x excepto 6, ya que el denominador es cero cuando x es 6. Por tanto, el dominio de h se entenderá como todos los número reales excepto 6.

Ejemplos

1. **Determinación de dominios.** Encontrar el dominio de cada función.

   (a) $f(x) = \frac{x}{x^2-x-2}$

   (b) $g(t) = \sqrt{2t-1}$

   Solución:

   (a) No podemos dividir entre cero, así que debemo encontrar todos los valores de x que hacen que el denominadore sea cero. Éstos *no pueden* ser números de entrada. Entonces igualamos el denominadore a cero y resolvemos para x.

   $$\begin{aligned} x^2 - x - 2 &= 0 \\ (x-2)(x+1) &= 0 \\ x &= 2, \ -1 \end{aligned}$$

   Por consiguiente, el dominio de f es todos los números reales excepto 2 y -1.

   (b) $\sqrt{2t-1}$ es un número real si $2t-1$ es mayor o igual a cero. Si $2t-1$ es negativo, entonces $\sqrt{2t-1}$ no es un número real (es un *número imaginario*). Ya que los valores de la función deben ser números reales, debemos suponer que:

   $$\begin{aligned} 2t - 1 &\geq 0 \\ 2t &\geq 1 \\ t &\geq \frac{1}{2} \end{aligned}$$

   Por tanto, el dominio es el intervalo $[\frac{1}{2}, \infty)$.

2. **Determinación del dominio y de valores funcionales.** Sea $g(x) = 3x^2 - x + 5$. Cualquier número real puede ser utilizado como x, de modo que el dominio de g es todos los números reales.

   (a) Encontrar $g(z)$

   (b) Encontrar $g(r^2)$

   (c) Encontrar $g(x+h)$

Solución:

(a) Reemplazando cada x por z en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene:

$$g(z) = 3z^2 - z + 5$$

(b) Reemplazando cada x por r^2 en $g(x) = 3x^2 - x + 5$ se obtiene:

$$g(r^2) = 3(r^2)^2 - r^2 + 5 = 3r^4 - r^2 + 5$$

(c)

$$\begin{aligned} g(x+h) &= 3(x+h)^2 - (x+h) + 5 \\ &= 3(x^2 + 2xh + h^2) - (x+h) + 5 \\ &= 3x^2 + 6xh + 3h^2 - x - h + 5 \end{aligned}$$

3. **Determinación de un cociente de diferencia.** Si $f(x) = x^2$, determinar $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$.

Solución: La expresión $\frac{f(x+h)-f(x)}{h}$ es referida como un **cociente de diferencia**. Aquí el numerador es una diferencia de valores funcionales.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h)-f(x)}{h} &= \frac{(x+h)^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 - x^2}{h} \\ &= \frac{2xh + h^2}{h} \\ &= \frac{h(2x+h)}{h} \\ &= 2x + h \end{aligned}$$

4. Determine el dominio de la función y la intersección con los ejes.

$$f(x) = \frac{x^2 - 2x - 3}{x^2 - 1}$$

Solución. Vemos que la función del numerador tiene factor común con la función del denominador,

$$f(x) = \frac{(x+1)(x-3)}{(x+1)(x-1)} = \frac{x-3}{x-1}$$

Por lo tanto el dominio de la función $Dom f(x) = \mathbf{R} - \{-1, 1\}$. (4 puntos)

Cortes con los ejes:
Si $x = 0$ entonces $f(0) = 3$ el punto es $(0, 3)$.
Si $y = 0$ entonces $0 = x - 3$, $x = 3$ el punto es $(3, 0)$

Aunque las raíces de $x^2 - 1 = 0$ son $+1$ y -1, la función puede ser evaluada en el punto $x = -1$, entonces $f(-1) = \dfrac{-1-3}{-1-1} = 2$.

5. Dado $f(x) = 9x + 7$, determine $\dfrac{f(2+h) - f(2)}{h}$.
   Solución.

$$\begin{aligned} \frac{f(2+h) - f(h)}{h} &= \frac{9(2+h) + 7 - (9(2) + 7)}{h} \\ &= \frac{18 + 9h + 7 - 25}{h} \\ &= \frac{9h}{h} \\ &= 9 \end{aligned}$$

6. Dado $f(x) = x^2 + 2x$, determine $\dfrac{f(x+h) - f(x)}{h}$.

   Solución.

$$\begin{aligned} \frac{f(x+h) - f(h)}{h} &= \frac{(x+h)^2 + 2(x+h) - ((x)^2 + 2(x))}{h} \\ &= \frac{x^2 + 2xh + h^2 + 2x + 2h - x^2 - 2x}{h} \\ &= \frac{h(2x + h + 2)}{h} \\ &= 2x + h + 2 \end{aligned}$$

Ejercicios propuestos:

1. Obtenga el dominio de la función.
   (a) $f(x) = \frac{8}{x}$
   (b) $h(x) = \sqrt{x-3}$
   (c) $F(t) = 4t^2 - 6$
   (d) $f(x) = \frac{3x-1}{2x+5}$
   (e) $G(y) = \frac{4}{y^2-y}$
   (f) $h(s) = \frac{4-s^2}{2s^2-7s-4}$

2. Determine los valores de la función para cada una de las funciones.
   (a) $f(x) = 2x+1$; $f(0)$, $f(3)$, $f(-4)$
   (b) $G(x) = 2 - x^2$; $G(8)$, $G(u)$, $G(\frac{2}{3})$
   (c) $g(u) = u^2 + u$; $g(-2)$, $g(2v)$, $g(-x^2)$
   (d) $f(x) = x^2 + 2x + 1$; $f(1)$, $f(-1)$, $f(x+h)$

Respuestas:

1. (a) Todos los números reales excepto el cero.
   (b) todos los números reales ≥ 3
   (c) Todos los números reales.
   (d) Todos los números reales excepto $-\frac{5}{2}$.
   (e) Todos los números reales excepto 0 y 1.
   (f) Todos los números reales excepto 4 y $-\frac{1}{2}$

2. (a) $1, 7, -7$
   (b) $-62, 2-u^2, 2-u^4$
   (c) $2, 4v^2+2v, x^4-x^2$
   (d) $4, 0, x^2+2xh+h^2+2x+2h+1$