Distribuciones Importantes Discretas

Distribución Binomial

Definición: Una variable aleatoria X se dice Binomial cuando indica el número de éxitos que ocurren en n ensayos Bernoulli.

Los supuestos para esta distribución son:

1. La probabilidad de éxito "p" permanece constante durante los n ensayos Bernoulli.
2. Los n ensayos son independientes.

La función de probabilidad de esta variable aleatoria está dada por:

$$P(X = x) = \binom{n}{x} p^x q^{n-x}, \quad x = 0, 1, 2, \ldots n; \qquad q = 1 - p$$

Observación 1: Si X se distribuye Binomial con parámetros n y p su notación es:

$$X \sim B(n, p)$$

Observación 2: Si $X \sim B(n, p)$, entonces su esperanza (promedio) es $E(X) = np$ y $V(X) = npq$.

Ejemplo: La probabilidad de que una cierta clase de componente pase con éxito una determinada prueba de impacto es ¾. Si se revisan 4 de estos componentes:

a) ¿Cuál es la probabilidad de que exactamente 2 de los 4 pasen la prueba?
b) ¿Cuál es el número esperado de componentes que pasan con éxito la prueba?
c) ¿Cuál es la probabilidad de que por lo menos tres componentes pasen la prueba?

Desarrollo:

X: número de componentes que pasan la prueba en 4 revisados.

$X \sim B(4, 0.75)$

$$P(X = x) = \binom{4}{x} 0.75^x 0.25^{4-x}, \quad x = 0, 1, 2, 3, 4.$$

a) $P(X=2)=\binom{4}{2}0.75^2 0.25^{4-2}$

b) $E(X)=4\cdot 0.75=3,$ Se espera que 3 componentes pasen la prueba.

c) $P(X\geq 3)=P(X=3)+P(X=4)=\binom{4}{3}0.75^3 0.25^{4-3}+\binom{4}{4}0.75^4 0.25^{4-4}$

Distribución Hipergeométrica

Definición: Una variable aleatoria X se dice Hipergeométrica cuando a partir de una población de tamaño N que se encuentra dividida en solo dos grupos, k y $N-k$, donde k es una característica o atributo de interés, se toma un tamaño de muestra n y X es el número de éxitos que se obtienen en la muestra.

Su función de probabilidad está dada por:

$$P(X=x)=\frac{\binom{k}{x}\binom{N-k}{n-x}}{\binom{N}{n}}, \quad x: 0,1,2,\dots min\{n,k\}$$

Notación: Si X se distribuye Hipergeométrica con parámetros $N, n\; y\; k$, su notación es: $X\sim H(N,n,k)$

Ejemplo: Un gerente selecciona aleatoriamente 3 personas de un grupo de 10 empleados de su departamento para asignarlos a un estudio de clasificación de salarios. Suponiendo que 4 de los empleados trabajaron previamente en proyectos semejantes, determine la probabilidad de que exactamente 2 de los 3 empleados seleccionados sean los que tengan experiencia.

Desarrollo:

X: número de empleados que tienen experiencia.

$X \sim H(10{,}3{,}4)$

$$P(X = x) = \frac{\binom{4}{x}\binom{6}{3-x}}{\binom{10}{3}}, \quad x: 0, 1, 2{,}3$$

$$P(X = 2) = \frac{\binom{4}{2}\binom{6}{1}}{\binom{10}{3}} =$$

Distribución Poisson

Definición: una variable aleatoria se dice Poisson cuando indica el número de ocurrencias de un evento por intervalo de tiempo o unidad de área.

Ejemplos: número de accidentes por día, número de errores por página en un libro, etc.

El parámetro que caracteriza a esta distribución es λ e indica el promedio o tasa de ocurrencia del evento por intervalo de tiempo o unidad de área.

Su función de probabilidad está dada por.

$$P(X = x) = \frac{\lambda^x e^{-\lambda}}{x!}, \quad x: 0, 1, \dots, \infty$$

Notación: $X \sim P(\lambda)$
Observación: si $X \sim P(\lambda)$, su esperanza es $E(X) = \lambda$ y su varianza es $V(X) = \lambda$

Ejemplo: Si un banco de Concepción recibe en promedio 6 cheques sin fondo por día, cuál es la probabilidad de que:

a) se reciban 4 cheques sin fondo en un día determinado?
b) que no se reciba ningún cheque sin fondo en 2 días?
c) se reciban más de tres cheques sin fondo en 2 días?
d) ¿Cuál es el promedio de cheques sin fondo recibidos en 5 días?

Desarrollo:

X: número de cheques sin fondo por día.

X$\sim P(6)$

$$P(X=x)=\frac{6^x e^{-6}}{x!},\quad x=0,1,\dots,\infty$$

a) $P(X=4)=\frac{6^4 e^{-6}}{4!}=$

b) Y: número de cheques sin fondo en 2 días.

$Y\sim P(12)$

$$P(Y=y)=\frac{12^y e^{-12}}{y!},\quad y=0,1,2,3,4\ \dots,\infty$$

$$P(Y=0)=\frac{12^0 e^{-12}}{0!}$$

c) $P(Y>3)=P(Y=4)+P(Y=5)+P(Y=6)+\dots$

$P(Y>3)=1-P(Y\leq 3)$=1-[$P(Y=0)+P(Y=1)+P(Y=2)+P(Y=3)$]

$$P(Y>3)=1-\left[\frac{12^0 e^{-12}}{0!}+\frac{12^1 e^{-12}}{1!}+\frac{12^2 e^{-12}}{2!}+\frac{12^3 e^{-12}}{3!}\right]$$

d) Z: número de cheques sin fondo en 5 días.

$Z\sim P(30)$ y $E(Z)=30$, Se esperan 30 cheques sin fondo en 5 días.

Distribuciones Importantes Continuas

Distribución Uniforme:

Una variable aleatoria continua X se dice distribuida Uniforme en el intervalo $[\boldsymbol{a}, \boldsymbol{b}]$ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{b-a}, & a \leq x \leq b \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Notación: $X \sim U[a, b]$

Observación: Si $X \sim U[a, b]$, entonces $E(X) = \frac{a+b}{2}$ y $V(X) = \frac{(b-a)^2}{12}$

Ejemplo: Sea $X \sim U[1,6]$.

a) Escriba su f.d.p.
b) Obtenga E(X)
c) Calcule $P(X \geq 4)$

Desarrollo:

a) $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{5}, & 1 \leq x \leq 6 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$

b) $E(X) = \int_1^6 x \cdot \frac{1}{5} dx = \frac{7}{2}$

c) $P(X \geq 4) = \int_4^6 \frac{1}{5} dx$=0,4

Distribución Exponencial

Una variable aleatoria continua X se dice exponencialmente distribuida con parámetro λ si su función de densidad de probabilidad está dada por:

$$f(x) = \begin{cases} \lambda e^{-\lambda x}, & x \geq 0 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

Notación: $\boldsymbol{X} \sim \varepsilon(\boldsymbol{\lambda})$

Observación 1: Si $X \sim \boldsymbol{\varepsilon}(\lambda)$, entonces $E(X) = \frac{1}{\lambda}$ y $V(X) = \frac{1}{\lambda^2}$

Observación 2: Si $\boldsymbol{X} \sim \varepsilon(\lambda)$, entonces su función de distribución acumulada está dada por:

$$F(x) = P(X \leq x) = \begin{cases} 0 & \text{para } x < 0 \\ 1 - e^{-\lambda x} & \text{para } x \geq 0 \end{cases}$$

Ejemplo:

El tiempo de vida de una lámpara especial sigue una distribución exponencial con media 100 hrs.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que una lámpara dure por lo menos 30 horas?
b) Si una lámpara ya lleva 50 horas de uso, ¿cuál es la probabilidad de que dure más de 80 horas?
c) Se seleccionan cinco lámparas, ¿Cuál es el número esperado de lámparas que duran por lo menos 30 hrs (considerando las 5)?

Desarrollo:

X: tiempo de vida de una lámpara especial.
Sabemos que la esperanza de una variable exponencial es E(X)=1/λ. Cómo la esperanza es 100, entonces 1/λ=100, así λ=1/100.
Entonces la distribución es:

$$X \sim Exponencial\left(\lambda = \frac{1}{100}\right)$$

$$f(x) = \begin{cases} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x}, & x \geq 0 \\ 0, & e.o.c. \end{cases}$$

a) $P(X \geq 30) = 1 - P(X \leq 30) = 1 - \int_0^{30} \frac{1}{100} e^{-\frac{1}{100}x} \, dx = 0{,}7408$

b) $P(X > 80/X > 50) = P(X > 30) = 0{,}7408$. Esto debido a la propiedad de falta de memoria de la exponencial.

c) En este caso se tiene que:

$$Y \sim Binomial\,(n = 5, p = 0,7408)$$

$E(Y) = n \cdot p = 5 \cdot 0{,}7408 = 3{,}704 \approx 4$

Se espera que aproximadamente 4 lámparas duren por lo menos 30 horas.