UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Prof. María Anacleto – Prof. Alex Tello

Guía 02 - Álgebra II (220156)

Segundo semestre 2022

1. Sea $V = \mathbb{R}^3$. Determine si los subconjuntos W son subespacios de V.

   a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x \geq 0\}$
   b) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x^2 + y^2 + z^2 \leq 1\}$
   c) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, z = 0\}$
   d) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, y + e^z = 0\}$

2. Sea $V = \mathcal{M}_{n\times n}(\mathbb{R})$ el espacio vectorial de matrices cuadradas de orden n sobre $\mathbb{R}$. Demuestre que W es un subespacio de V si W consiste de todas las matrices $A = [a_{ij}]$ que son

   a) simétricas ($A^T = A$ o $a_{ij} = a_{ji}$)
   b) diagonales.

3. Dados los subespacios S y T de $\mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$, definidos por

   $$S = \left\{ \begin{bmatrix} a & -a \\ b & c \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, a, b, c \in \mathbb{R} \right\} \quad \text{y} \quad S = \left\{ \begin{bmatrix} p & q \\ -p & r \end{bmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) \,:\, p, q, r \in \mathbb{R} \right\}.$$

   Determine $S \cap T$, $S \cup T$ y $S + T$.

4. Dados los subespacios vectoriales de $\mathbb{R}^3$

   $U = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, x+y+2z = 0\}$, $T = \{(-t, -t, t) \in \mathbb{R}^3 \,:\, t \in \mathbb{R}\}$, $R = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 \,:\, 2x-3y = z\}$.

   Determine

   a) $U \cap T$ y $U \cup T$. ¿Es $U \cup T$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?, ¿Es $U \oplus T$?
   b) $U \cap R$ y $U \cup R$. ¿Es $U \cup R$ un subespacio vectorial de $\mathbb{R}^3$?, ¿Es $U \oplus R$?

5. Determine si los siguientes vectores son linealmente dependientes o independientes:

   a) $\vec{u} = (1, 2, -3, 1)$, $\vec{v} = (3, 7, 1, -2)$, $\vec{w} = (1, 3, 7, -4)$ en $V = \mathbb{R}^4$.
   b) $\vec{u} = (-3, 4, 2)$, $\vec{v} = (7, -1, 3)$, $\vec{w} = (1, 2, 8)$ en $V = \mathbb{R}^3$.
   c) $\left\{ \begin{pmatrix} 2 & -1 \\ 4 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & -3 \\ 1 & 5 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 4 & 1 \\ 7 & -5 \end{pmatrix} \right\}$ en $V = \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.

6. Considere los vectores $\vec{u} = (\alpha, -1, -1)$, $\vec{v} = (-1, \alpha, -1)$, $\vec{w} = (-1, -1, \alpha)$. ¿Qué valores de α hacen que los vectores sean linealmente independientes?

7. *a*) Dado el conjunto $\mathcal{B} = \{(k - 5)x^2 + x,\ 2x^2 - 2x + 3,\ 2x^2 + 3x - 3\} \subset \mathbb{P}_2[x]$. Obtener el valor de $k \in \mathbb{R}$ tal que $\mathcal{B}$ sea linealmente dependiente.

   b) Determine a y b para que las matrices $\begin{bmatrix} -3 & 0 \\ 2 & 1 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 1 & 3 \\ -1 & 5 \end{bmatrix}, \begin{bmatrix} 5 & a \\ b & -3 \end{bmatrix}$ sean linealmente independientes.

8. Determine si $\mathcal{B}$ es, o no, una base de $\mathbb{R}^3$

   a) $\mathcal{B} = \{(1, 0, -3); (3, 1, -4); (-2, -1, 1)\}$
   b) $\mathcal{B} = \{(1, 2, 3); (1, 1, -4)\}$

9. ¿Para qué valores de $a \in \mathbb{R}$, los vectores $(a, 1, 0); (1, 0, a)$ y $(1 + a, 0, 1 - a)$ constituyen una base para $\mathbb{R}^3$?

10. Encuentre una base para $\langle\{1, 1 + x, 2x\}\rangle$ en $\mathcal{P}_1[\mathbb{R}]$.

11. Determine una base para los siguientes subespacios vectoriales.

    a) $W = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - y + z = 0\}$.
    b) $U = \{A \in \mathcal{M}_{2\times 2} : \mathrm{Tr}(A) = 0\}$.
    c) $S = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : 2x + y - z = t\}$.
    d) $T = \{(x, y, z, t) \in \mathbb{R}^4 : x - y + z = 0 \wedge x = 2t\}$.

12. Si $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x = y + z\}$ y $T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 3y = -z\}$. Halle $dim(S + T)$.

13. En $\mathbb{R}^3$ consideremos $V = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x - y + z = 0\}$ y $S = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - 2y - z = 0\}$. Halle

    a) Una base para $V \cap S$
    b) $dim(V \cap S)$
    c) $dim(V + S)$

14. Determinar el subespacio W de $\mathbb{R}^3$ generado por los vectores $(2, 0, 1)$ y $(-1, 0, 1)$. Halla una base de W y su dimensión.

15. Caracteriza el subespacio S de $\mathbb{R}^3$ generado por el conjunto $B = \{(1, 2, 3); (-1, 1, -1); (2, 1, 4)\}$.

16. Escriba (x, y) en términos de la base dada

    a) $\mathcal{B} = \{(1, 2), (3, 4)\}$
    b) $\mathcal{B} = \{(1, -2), (-3, 1)\}$
    c) $\mathcal{B} = \{(0, 2), (1, 3)\}$

17. Sean $S = \{(1, 1), (2, 3)\}$ y $T = \{(1, 2), (0, 1)\}$ bases ordenadas de $\mathbb{R}^2$. Sean $\alpha = (1, 5)^T$ y $\beta = (5, 4)^T$.

    a) Halla los vectores coordenados de α y β, respecto a las bases S y T.
    b) ¿Cuál es la matriz de transición P de la base S a la base T?
    c) Halla los vectores coordenados de α y β respecto a T, usando P.
    d) Halla la matriz de transición Q de la base T a la base S.
    e) Halla los vectores coordenados de α y β respecto a S, usando Q.

18. El conjunto $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix} \right\}$ es una base ordenada de $\mathbb{R}^2$. Halla α si $[\alpha]_S$.

    a) $(2, -1, 3)^T$
    b) $(0, 0, 1)^T$
    c) $(0, 2, 1)^T$

19. Considere las bases de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$,

$$\mathcal{B}_1 = \{\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}\},$$

$$\mathcal{B}_2 = \{\begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 0 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 1 & 3 \\ 1 & 0 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 2 & 2 \end{pmatrix}, \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ -2 & -3 \end{pmatrix}\}.$$

    a) Encuentre la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$.
    b) Encuentre la matriz de cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.

20. Determine una base ortogonal y ortonormal aplicando el proceso de Gram-Schmidt a la siguientes bases

    a) $\{(1, -1, 1), (-2, 3, -1), (1, 2, -4)\}$
    b) $\{(2, -4, 5, 2), (-6, 5, -1, -6), (-10, 13, -4, -3)\}$