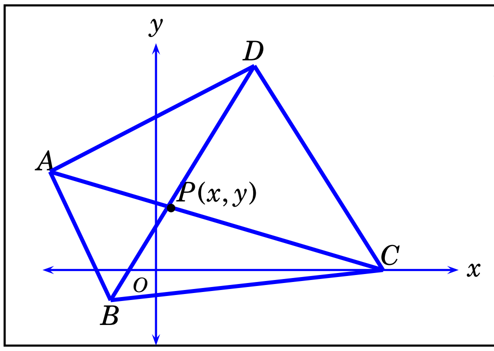
Resolución: ►



Note que:

- $r = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$ *es la razón en que divide a la diagonal* $\overline{BD}$. *Por tanto las coordenadas del punto* (x, y) *son* $\begin{cases} x = \dfrac{-2+6r}{1+r} \\ y = \dfrac{-1+11r}{1+r} \end{cases} \quad (*)$

- $r_1 = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BC}}$ *es la razón en que divide a la diagonal* $\overline{AC}$. *Por tanto las coordenadas del punto* (x, y) *son* $\begin{cases} x = \dfrac{-4+8r_1}{1+r_1} \\ y = \dfrac{6+0r_1}{1+r_1} \end{cases} \quad (**)$

De $(*)$ *y* $(**)$ *se tiene*

$$x = \frac{-2+6r}{1+r} = \frac{-4+8r_1}{1+r_1}, \quad y = \frac{-1+11r}{1+r} = \frac{6+0r_1}{1+r_1}$$

de donde $r_1 = \dfrac{5r+1}{r+5} = \dfrac{5r-7}{1-11r}$ *de esto se llega a* $5r^2+2r-3=0$ *de aquí* $r = \dfrac{3}{5}$ ◄

1.2.1. Ejercicios Propuestos

1. Marque los puntos siguientes en el plano coordenado $A(2,3)$, $B(-5,8)$, $C(-1,-5)$, $D(2,-7)$. Luego especifique en qué cuadrante se localiza cada punto.

2. Grafique el conjunto siguiente $S = \{(1,-2), (0,4), (3,\frac{3}{4}), (-3,-1)$

3. Trace el conjunto de puntos (x, y) en el plano que satisfaga:

$$(i)\ xy = 0, \qquad (ii)\ xy < 0, \qquad (iii)\ xy > 0, \qquad (iv)\ \frac{x}{y} = 0$$

4. Localice los puntos dados, si (a, b) esta en el primer cuadrante.

$$(i)\ (a,-b) \qquad (ii)\ (a,a), \qquad (iii)\ (b,-b) \qquad (iv)\ (b,-a)$$

5. La abscisa de un punto es -6 y su distancia al punto $A(1,3)$ es $\sqrt{74}$. Hallar la ordenada del punto (dos soluciones).

6. Demostrar que que los puntos $A(-3,10)$, $B(1,2)$ $C(4,-4)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma linea recta.

7. Demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son $A(-2,6)$, $B(4,3)$, $C(1,-3)$, $D(-5,0)$ es un cuadrado.

8. Hallar las coredenadas del punto que equidista de los puntos fijos $a(4,3)$, $B(2,7)$, $C(-3,-8)$.

9. Demostrar que el cusdrilátero cuyos vértices son $A(-6,-2)$, $B(-2,-1)$, $C(-1,3)$, $D(-5,2)$. es un rombo.

10. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-1,1)$, $B(3,1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

11. Hallar la distancia que separa a los puntos $A;B$.

$$(i)\ A(3,3\sqrt{3}),\ B(7,3\sqrt{3}) \qquad \text{Rp. } 8.$$

$$(ii\ )A(m,n),\ B\left(\frac{m-n\sqrt{3}}{2},\frac{n+m\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{Rp. } \sqrt{n^2+m^2}$$

12. La ordenada de un punto es 8 y su distancia al punto $B(5,-2)$ es $2\sqrt{41}$. Hallar la abscisa del punto.

Rp. $x = 13$, ó $x = -3$

13. Determinar el valor de b si la distancia entre los puntos $A(7,1)$, $B(3,b)$ es 5.

Rp. $b = -2$, ó $b = 4$

14. Usando la formula de distancia demuestre que los puntos $A(-3,10)$, $B(1,2)$, $C(4,-4)$ son colineales, es decir que están sobre una misma recta.

15. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son $M(-2,1)$, $N(5,2)$, $P(2,-3)$.

16. El segmento que une $A(-2,-1)$, con $B(2,2)$ se prolonga hasta C. Sabiendo que $\overline{BC} = 3\overline{AB}$, hallar las coordenadas de C.

17. Los puntos extremos de un segmento son $A(2,4)$ y $B(8,-4)$. Hallar el punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = -2$

18. El punto $P(16,9)$ divide al segmento $A(x_1,y_1)$ y $B(4,5)$ en razón $r = \frac{-3}{2}$, hallar las coordenadas de A.

19. Dados los puntos $P(2,1)$ y $Q(5,3)$ tales que $\overline{PB} = 2\overline{AP}$, $3\overline{AQ} = 4\overline{AB}$; hallar las coordenadas de los puntos A, B.

20. En el triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, demostrar que las coordenadas del baricentro son
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

21. El segmento de extremos $(A(-2,3)$, $B(12,8)$, se devide en cinco partes iguales. Hallar las suma de las absisas y las ordenadas de los puntos de división.

22. Sea el triángulo de vértices en los puntos $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(-2,-3)$. Hallar la longitud de los lados, el centro de gravedad y la longitud de la bisectriz del ángulo A.

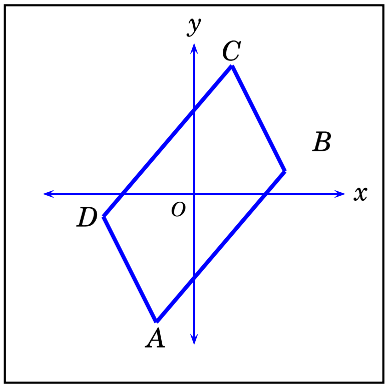
23. Los vértices de un cuadrilátero son $A(-4,6)$, $B(-2,-1)$, $C(8,0)$, $D(6,11)$. Hallar la razón $r = \frac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$ en que la diagonal $\overline{AC}$ divide a $\overline{BD}$, donde P es el punto de intersección de las diagonales.

24. La abscisa de un punto es -6 y su distancia al punto $A(1,3)$ es $\sqrt{74}$

25. Hallar las coordenadas del extremo $C(x,y)$ del segmento que une este punto con $A(2,-2)$, sabiendo que el punto $B(-4,1)$ está situado auna distancia de A igual a las $\frac{3}{5}$ partes de la longitud total del segmento.

26. Sean los puntos $A(0,0)$, $B(4,2)$, $C(12,2)$, $D(8,0)$ vértices de un paralelogramo. M es un punto medio de $\overline{AB}$,$\overline{BM}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en el punto P de modo que se cumple $\frac{\overline{MP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}$. Hallar las coordenadas de P

Resolución: ►



Probaremos que sus lados opuestos son paralelos, y que sus lados opuestos tienen la misma longitud, para ellos vamos a probar que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ *y* $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ *entonces bastará probar que sus pendientes respectivas son iguales, es decir*

$$m_{\overline{AB}} = \frac{1+5}{2+1} = 2 = m_{\overline{DC}} = \frac{5+1}{1+2}$$

y que

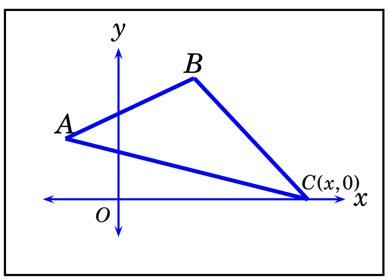
$$m_{\overline{AD}} = \frac{-1+5}{-2+1} = -4 = m_{\overline{BC}} = \frac{5-1}{1-2}$$

esto demuestra que la figura es un paralelogramo.

◄

Ejemplo 1.4.7. Si $A(-3,2)$, $B(2,5)$ son dos vértices de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, y el vértice C está en el eje x, hallar la medida del ángulo A.

Resolución: ►



Denotemos la pendiente de la recta que contiene a $\overline{AB}$ *por* $m_{\overline{AB}} = m_2 = \frac{5-2}{2+3} = \frac{3}{5}$. *Si* $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ *entonces* $m_{\overline{BC}} = \frac{0-5}{x-2} = -\frac{5}{3}$ *así* $x = 5$ *luego* $C(x,0) = C(5,0)$.

$m_{\overline{AC}} = m_1 = \frac{0-4}{5+3} = -\frac{1}{4}$. *Finalmente*

$$\tan(A) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{-1}{4}} = 1 \Longrightarrow A = 45°$$

◄

1.4.1. Ejercicios Propuestos

1. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $P(2,7)$ y por los puntos $A(x,3)$, $B(6,y)$. Hallar la $d(A,B)$.

2. Demostrar que los puntos $A(1,-1)$, $B(3,2)$, $C(7,8)$ son colineales en dos formas

   (a) Usando la fórmula de la distancia $\qquad$ (b) Usando pendientes

3. Un punto $P(x,y)$ equidista de los puntos $A(-2,3)$, $B(6,1)$ y la pendiente de la recta que une dicho punto a $C(5,10)$ es 2. Hallar sus coordenadas.

4. Si la recta L_1 que contiene a los puntos $A(a,2)$, $B(0,2a)$ es paralela a la recta L_2, que contiene a los puntos $C(-a,3)$, $D(1,-2a)$. Hallar el valor de a.

5. Si la recta L_1 de pendiente m_1 la que contiene a los puntos $A(1,-2)$, $B(3,a)$ es perpendicular a la recta L_2 de pendiente m_2, que contiene a los puntos $C(-3,1)$, $D(a,4)$. Calcule $5m_1+m_2$

6. Demostrar que los puntos $A(-1,-5)$, $B(2,1)$, $C(1,5)$, $D(-2,-1)$ son los vértices de un paralelogramo.

7. Una recta de pendiente $\frac{7}{3}$ pasa por $P(1,2)$. Hllar las coordenadas de dos puntos sobre la recta que distan $\sqrt{58}$ unidades de P.

8. El punto $A(-2,1)$ es el vértice corespondiente al ángulo recto de un triángulo rectángulo isósceles. El punto $P(1,4)$ divide al cateto $\overline{AC}$ en la relación $\overline{AP}:\overline{AC}=1:2$. Hallar las coordenadas del vértice B.

9. Sean $A(-2,1)$, $B(4,-7)$ los vértices de un $\triangle ABC$, sabiendo que las altura se cortan en el punto $P(\frac{4}{3},\frac{5}{3})$, hallar las coordenadas del vértice C.

10. Dado el triángulo de vértices en $A(-10,-13)$, $B(-2,3)$, $C(2,1)$. Hallar la longitud de la perpendicular bajada desde el vértice B a la mediana trazada desde el vértice C

11. Por el punto $A(2,3)$ se trazan dos rectas que cortan al eje x en los puntos B, C la pendiente de la recta AB es 1 y la pendiente de la recta $\overline{AC}$ es igual -1. Hallar el perímetro del triángulo ABC.

12. Sean $A(3,12)$, $B(8,1)$, $C(-2,-5)$ y D los vértices de un paralelogramo. Hallar las coordenadas de todos los posibles vértices D.

13. Hallar el ángulo obtuso que forman las rectas L_1 con pendiente m y la recta L_2 con pendiente $\dfrac{m-1}{m+1}$.

14. El ángulo que forman la recta L_1 que pasa por $A(2,-1)$ y $B(x,3)$, con la recta L_2 que pasa por $C(-1,5)$, $D(8,2)$ es $135°$. Hallar la abscisa de B.

15. Dos rectas se cortan formando una ángulo α tal que $\tan(\alpha)=\frac{3}{2}$. Hallar la pendiente de la otra recta.

16. Hallar las tangentes de los ángulos interiores del triángulo de vértices $A(-3,-1)$, $B(4,4)$, $C(-1,3)$.

17. Hallar la pendiente de la recta L, que biseca el ángulo que la recta L_1, que pasa por $A(10,9)$ y $B(3,-15)$, hace con la recta L_2 que pasa por $A(10,9)$ y $C(2,3)$

18. Hallar un punto situado en la parte positiva del eje x, desde el cual se ve el segmento $\overline{AB}$ con $A(-3,4)$, $B(3,8)$ bajo un ángulo de $45°$

19. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles tiene pendiente m. Hallar la suma de las pendientes de los catetos.

20. Si $A(-3,2)$, $B(2,5)$ son dos vértices de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, y el vértice C está en el eje x, hallar la medida del ángulo A.

21. Los vértices de un triángulo son $A(3,3)$, $B(1,-3)$, $C(-1,2)$. Hallar el valor del ángulo agudo que forma la mediana que corresponde al lado $\overline{AB}$ con la mediatriz del lado $\overline{AC}$.

22. Dado los vértices opuestos $A(3,0)$, $C(-4,1)$ de un cuadrado, hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

1.4.2. Distintas formas de representar ecuaciones para una recta

Las rectas tienen propiedades geométricas especiales, las que se pueden asociar con ecuaciones que tienen algunas propiedades algebraicas especiales.

Observación 1.4.8. Supongamos que L es una recta y que $P(x,y)$ es un punto cualquiera del plano.
¿ Cómo saber si $P(x,y)$ pertenece o no a la recta L?.
Para que $P(x,y)$ esté en la recta L sus coordenadas x e y deben satisfacer alguna condición que se expresa por medio de una ecuación. Esta es llamada la ecuación de la recta L. Es claro que si x e y no satisfacen tal condición entonces $P(x,y)$ no pertenece a L. Esta ecuación puede presentarse en varias formas como veremos a continuación.

1. Si Una recta es paralela al eje y, su abscisa es constante y la ecuación es de la forma

$$\boxed{L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ x = a\}}$$

   donde a dá la distancia y dirección desde el eje y

2. Si Una recta es paralela al eje x, su ordenada es constante y la ecuación es de la forma

$$\boxed{L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \ y = b\}}$$

   donde b dá la distancia y dirección desde el eje x

Teorema 1.4.9. [Ecuación de la recta en la forma punto−pendiente]
Sea L una recta de pendiente m supongamos que $P_1(x_1,y_1)$ es un punto dado de la recta entonces la ecuación de L es

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

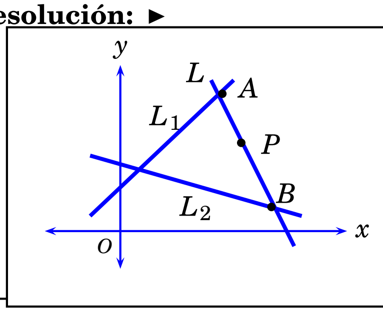
Teorema 1.4.14. [Distancia un punto a una recta]
Sea L una recta cuya ecuación general es $L:\ ax+by+c=0$. Si $P(x_0,y_0)$ es un punto cualquiera entonces

$$\boxed{d(P,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

de define ***distancia de*** P ***a la recta*** L.

Ejemplo 1.4.15. Entre las rectas que pasan por $P(6,4)$ hallar una de manera que el segmento comprendido entre las rectas $L_1:\ x-y+2=0$, $L_2:\ x+3y-10=0$ sea dividido por la mitad por el punto P.

Resolución: ►

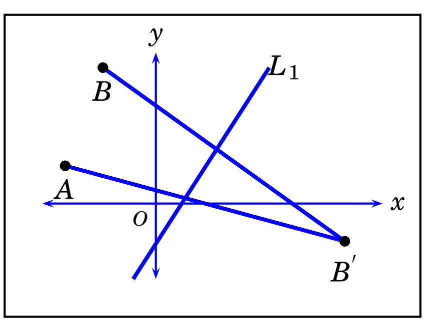


Supongamos los puntos de intersección $A(x_1,y_1)$ y $B(x_2,y_2)$ (ver figura). Si P es punto medio de $\overline{AB}$, entonces $x_1+x_2=12,\ y_1+y_2=8$. Además como $A\in L_1 \Longrightarrow x_1-y_1+2=0,\ B\in L_2 \Longrightarrow x_2+3y_2-10=0$ de esto $3y_2-y_1=8$ y con lo anterior $y_2=1,\ x_2=7 \Longrightarrow B(7,1)$. Luego la ecuación $L:\ 3x+y-22=0$

◄

Ejemplo 1.4.16. Hallar en la recta que pasa por $C(0,-5)$ y $D(4,3)$ un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(-7,1)$, $B(-5,5)$ sea mínima.

Resolución: ►



Construyendo B', simétrica de B, respecto de la recta L_1 que pasa por C y D. Es evidente que $\overline{AP}+\overline{PB'}$ es mínima. La pendiente de $\overline{CD}:\dfrac{3+5}{4-0}=2$, así la ecuación de la recta que contiene a $\overline{CD}$ es $L_1:\ y+5=2(x-0)$. La ecuación de la recta $L\perp L_1$ que pasa por B es $L:\ x+2y-5=0$, como $M\in L\cap L_1 \Longrightarrow M(3,1)$ y M es punto medio de BB' luego $B'(11,-3)$. Así la ecuación de la recta que pasa por A y B' es $y-1=\dfrac{-3-1}{11+7}(x+7) \Longleftrightarrow L_2:\ 2x+9y+5=0$ por tanto si $P\in L_1\cap L_2 \Longrightarrow P(2,-1)$

◄

Ejercicios Propuestos

1. Hallar, por dos métodos diferentes, la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos $A(-3,-4)$, $B(5,2)$

2. El punto P de oredenada 10 está sobre la recta que pasa por los puntos $A(7,-2)$, $B(9,4)$. Hallar la abscisa de P.

3. Dado el triángulo de vértices $A(-2,1)$, $B(4,7)$, $C(6,-3)$, hallar las ecuaciones d elas medianas relativas a los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y las coordenadas del baricentro.

4. Hallar las ecuaciones de las mediatrices relativas a los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y las coordenadas del triángulo del ejemplo anterior.

5. Hallar las ecuaciones de dos alturas y las coordenadas del ortocentro del triángulo del ejemplo anterior.

6. Hallar las coordenadas del punto P de la recta $L_1:\ 3x-y+3=0$ que equidista de los puntos $A(2,4)$, $B(6,-2)$

7. Sean las rectas $L_1:\ 2x-3y+6=0,\ \ L_2:\ y-4=0$. La recta L interseca a L_1 en B y a L_2 en C. Si L pasa por $A(9,6)$ y $\overline{BA}:\overline{AC}=2:3$, hallar la ecuación de la recta L

8. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-5,3)$ y que forman cada una un ángulo de $45°$ con la recta L que pasa por $A(2,-3)$, $B(4,-2)$

9. Una recta cuya ordenada en el origen es el doble que la de $L_1:\ 7x-4y+3=0$ es paralela a la recta que pasa por $A(3,1)$, $B(1,6)$. Hallar su ecuación.

10. Hallar la ecuación de la recta cuuya ordenada en el origen es -5 y que pasa por el punto P que está $\frac{2}{3}$ de distancia de $\overline{AB}$, siendo $A(-2,5)$, $B(7,2)$.

11. Hallar la ecuación de la recta de pendiente $-\frac{3}{4}$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área $24u^2$.

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(1,-6)$ si el producto de sus intersecciones con los ejes coordenados es 1.

13. Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen suman 7 y cuya pendiente es $-\frac{11}{3}$

1.5. Cónicas

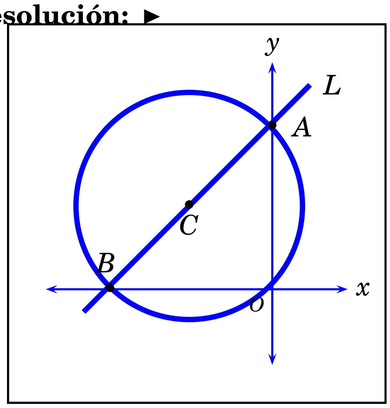
1.5.1. Circunferencia

Definición 1.5.1. Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos $P(x,y)$ que están en el plano, tal que la distancia fija r llamada ***radio***, desde $P(x,y)$ a un punto fijo $C(h,k)$ dado, llamado ***centro***, es constante, simbólicamente

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2:\ \ d(P,C)=r\}$$

Ejemplo 1.5.6. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro la porción de la recta $L:\ 2x-3y+12=0$ comprendida en el segundo cuadrante.

Resolución: ►



Al intersectar L con los ejes coordenados los intersectos son (ver figura)
$x=0,\ y=4 \Longrightarrow A(0,4)$ *y* $y=0,\ x=-6 \Longrightarrow B(-6,0)$. *Ahora el centro* $C(h,k)$ *de la circunferencia es el punto medio de* $\overline{AB}$ *es decir* $(h,k)=(\frac{0-6}{2},\frac{4+0}{2})=(-3,2)$. *Luego el radio es* $r=d(C,A)=\sqrt{(0+3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$. *Finalmente la ecuación de la circunferencia es*

$$(x+3)^2+(y-2)^2=13$$

◄

Ejemplo 1.5.7. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto $C(4,-3)$ y que pase por el punto $P(2,1)$

Resolución: ►

Cálculo del radio

$$d(C,P)=r \quad = \quad \sqrt{(4-2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{20}$$

Ecuación de la circunferencia

$C:\ (x-4)^2+(y+3)^2=(\sqrt{20})^2$ **10 puntos**

◄

1.5.2. Ejercicios Propuestos

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-4,-1)$ y es tangente a $L:\ 3x+2y-12=0$.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $L:\ x+2y-6=0$ y que pasa por los puntos $A(7,3)$, $B(-3,-7)$.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje x en $T(4,0)$ y pasa por $P(7,1)$. -

4. El punto $C(3,1)$ es el centro de una cicunferencia que intercepta a la recta $L:\ 2x-5y+18=0$ una cuerda de longitud 6 unidades. Hallar la ecuación de esta circunferencia.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la dos rectas $L_1:\ 2x+y-5=0$, $L_2:\ 2x+y+15=0$ y a una de ellas en el punto $A(2,1)$.

6. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta $L:\ 2x+y=0$ y es tangente a las rectas $L_1:\ 4x-3y+10=0$, $L_2:\ 4x-3y-30=0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(0,2)$ y es tangente en el origen a la recta $L=2x+y=0$.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasando por los puntos $A(1,1)$, $B(5,5)$ tiene su centro ene el eje x.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(12,7)$ y es tangente a la recta $L_1:\ x-2y-2=0$ en el punto $T(8,3)$.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $L_1:\ x-4y+3=0$ en el punto $A(5,2)$ y también a la recta $L_2:\ 4x+y-5=0$ en el punto $B(2,3)$.

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $L_1:\ 2x-y+6=0$ en el punto $S(-1,4)$ y tiene radio $3\sqrt{5}$

12. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente al eje x, con centro en la recta $L:\ x+y-7=0$ y que pasa por el punto $A(5,4)$.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(6,1)$ y es tangente a las rectas $L_1:\ 4x-3y+6=0$, $L_2:\ 12x+5y-2=0$.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-3,-1)$, $B(5,3)$ y es tangente a la recta $L:\ x+2y-13=0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $L:\ 6x+7y-16=0$ y es tangente a cada una de las rectas $L_1:\ 8x+15y+7=0$, $L_2:\ 3x-4y-18=0$.

16. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(2,3)$, es tangente a la recta $L_1:\ x+y-7=0$ y con centro en $L_2:\ 3x-y-7=0$.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos lados son $L_1:\ 24x-7y=30$, $L_2:\ 5x-12y=70$, $L_3:\ 3x+4y=14$.

18. Hallar las ecuaciones de las ecuaciones que son tangentes a las rectas $L_1:\ 7x-y-5=0$, $L_2:\ x+y+13=0$ y a una de ellas, en el punto $M(1,2)$.

19. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(5,4)$, $B(4,-3)$, $C(-2,5)$.

20. Determinar la naturaleza de las gráficas, indicando el centro y el radio, si se trata de una circunferencia, o si es un sólo punto o un conjunto vacío.

    a) $9x^2+9y^2-144x+12y+580=0$

    b) $4x^2+4y^2-12x+8y+77=0$

    c) $36x^2+36y^2-48x-36y+16=0$

21. Determine el valor de k de modo que la ecuación $x^2+y^2-7x-3y=k-16{,}5$ represente una circunferencia..

22. Determinar el valor de k para que la recta $L:\ 3x-2y+k=0$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y-39=0$.

23. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $P(6,4)$ a la circunferencia $x^2+y^2+4x+6y=19$.

24. Hallar la máxima y mínima distancia del punto $P(10,7)$ a la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

25. Hallar la máxima y mínima distancia del punto $P(-7,2)$ a la circunferencia $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

26. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P(-4,-1)$, $Q(12,7)$, $R(-10,11)$. Además determinar el centro y el radio.

27. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda común a las circunferencias $C_1:\ x^2+y^2-18x-16y+45=0$, $C_2:\ x^2+y^2+6x-4y-27=0$

28. Determinar la ecuación de la familia de circunferencias con centro en $L_1:\ 2x-y=0$ y tangente a la recta $L_2:\ x+y=0$. De esa familia elegir una con centro en $L_3:\ 5x-y-6=0$

29. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias con centro en la curva $P:\ x^2=4y$ y tangente al eje x. Luego seleccionar aquellos con centro en $L:\ 2x-y-3=0$.

30. Hallar la familia de circunferencias con centro en $L_1:\ x+3y-7=0$ y radio 3 unidades. Seleccioar aquellos que son tangentes a la recta $L_2:\ 5x+12y-5=0$.

31. Demostrar que la familia de circunferencias $x^2+y^2-6x-2y-159+k(x^2+y^2-18x-18y+153)=0$ son tangentes internamente.

32. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(-10,-2)$ y por las intersecciones de la circunferencia $C_1:\ x^2+y^2+2x-2y-32=0$ y a recta $L:\ x-y+4=0$

33. Desde el punto $P(2,-3)$ se trazan tangentes a la circunferencia $C:\ x^2+y^2-2x+10y+22=0$. Hallar la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto.

34. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $C:\ x^2+y^2-2x-6y-3=0$ en el punto $T(-1,6)$.

35. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $P(-2,7)$ a la circunferencia $C:\ x^2+y^2+2x-8y+12=0$.

36. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $C:\ x^2+y^2+6x-8=0$ que son perpendiculares a la recta $L:\ 4x-y+31=0$

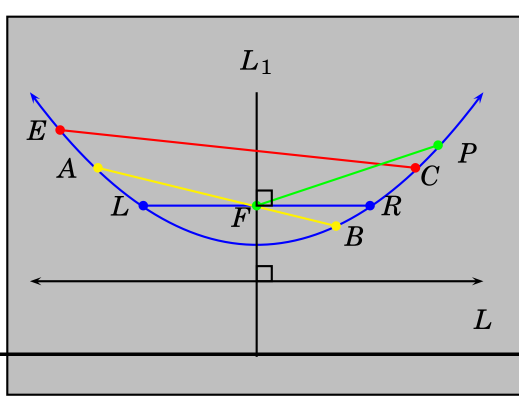
1.5.3. Parábola

Definición 1.5.4.

1. Una parábola es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de una recta fija L llamada ***directriz***, y de un punto fijo denominado foco, que no pertenece a la recta L, es decir el conjunto de puntos de la parábola está representada por

$$P=\{P\in\mathbb{R}^2:\ d(P,F)=d(P,L)\}$$

2. ***Vértice***, es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría.
3. ***Foco***, es el punto fijo, situado sobre el eje de simetría a p unidades del vértice.
4. ***Eje de simetría***, es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el vértice y foco.
5. ***Cuerda***, es el segmento de recta que une dos puntos cualesqueira de la parábola.
6. ***Directriz***, esla recta fija, que es perpendicular al eje de simetría.
7. ***Cuerda focal***, es el segmento de recta que une dos puntos de la parábola pasando por el foco.
8. ***Lado recto***, es una cuerda focal perpendicular al eje de simetría.
9. ***Radio vector***, es el segmento de recta que une el foco con un punto de la parábola.



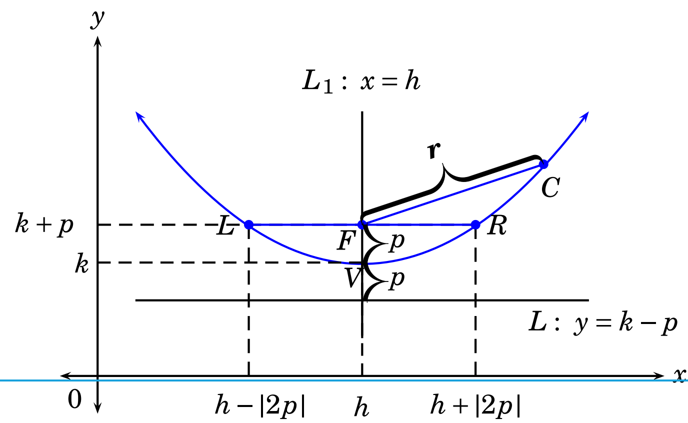
1. Eje de simetría: L_1
2. Cuerda: $\overline{EC}$
3. Cuerda focal: $\overline{AB}$
4. Lado recto: $\overline{LR}$
5. Directriz: L
6. Radio vector: $\overline{PF}$

1.5.4. Elementos de la parábola cuando es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Definición 1.5.5.

1. Vértice es $V(h,k)$
2. Foco es $F(h, k+p)$.
3. Longitud del lado recto es $LR = |4p|$.
4. Ecuación de la directriz es $L: \ y = k-p$
5. Ecuación del eje de simetría es $L_1: \ x = h$
6. Coordenadas de los extremos del lado recto: $L(h+|2p|, k+p)$, $R(h-|2p|, k+p)$
7. Longitud del radio vector: $r = |y_1 - k + p|$, donde (x_1, y_1) está en la parábola.

Es recomendable hacer el gráfico para encontrar los puntos y longitudes mencionados.



Elementos de la parábola cuando es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

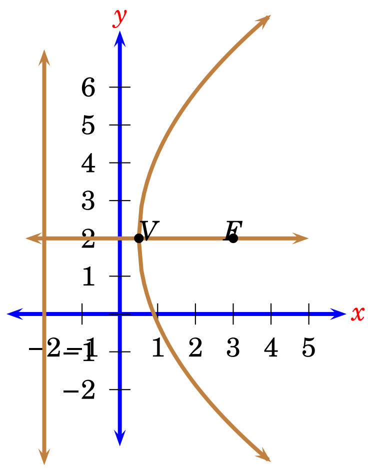
Definición 1.5.6.

1. Vértice es $V(h,k)$
2. Foco es $F(h+p, k)$.
3. Longitud del lado recto es $LR = |4p|$.
4. Ecuación de la directriz es $L: \ x = h-p$
5. Ecuación del eje de simetría es $L_1: \ y = k$
6. Coordenadas de los extremos del lado recto: $L(h+p, k+|2p|)$, $R(h+p, k-|2p|)$
7. Longitud del radio vector: $r = |x_1 - h + p|$ donde (x_1, y_1) está en la parábola.

Es recomendable hacer el gráfico para encontrar los puntos y longitudes mencionados.

Ejemplo 1.5.8. Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco y directriz son $F(3,2)$ y $x = -2$ respectivamente.

Resolución: ►



La fórmula que corresponde al gráfico es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
Como la distancia de la directriz al foco es 5,y sabemos que la distancia del foco al vértice es la misma que la distancia de la directriz al vértice, entonces las coordenadas del vértice es $V = (0{,}5, 2)$*, por tanto la ecuación de la parábola es:*
$(y-2)^2 = 4 \cdot 2{,}5(x-0{,}5) \implies \boxed{(y-2)^2 = 10(x-0{,}5)}$ ◄

Ejemplo 1.5.9. Suponga que dos torres de un puente estan separados 100 metros y ambos sostienen un cable de forma parabólica, y que por las bases de las torres hay una carretera que representa la directriz. La parte mas baja del cable esta a 20 metros de la carretera.

(a) Realice un gráfico de tal situación.

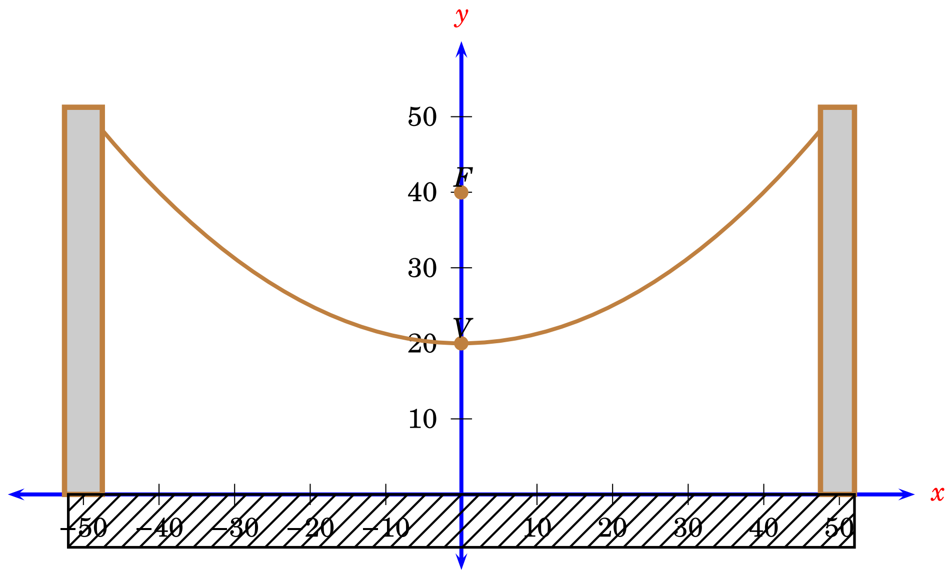
(b) Exprese una ecuación adecuada utilizando los datos que representa tal situación.

(c) ¿Cuál es la altura de las torres?

(d) Si la altura desde un punto del cable a la carretera es de 30 metros ¿Cuál es la distancia que hay entre la parte más baja del cable a la altura ?

Resolución: ►

(a)



(b) *Según el dibujo la expresión que modela tal situación es* $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
ecuación de la parábola
$x^2 = 4 \cdot 20(y-20)$

(c) *altura de las torres*
$50^2 = 80(y-20) \Longrightarrow y = 31{,}25 + 20 = 51{,}25$ *metros*

(d) $x^2 = 80(30-20) \Longrightarrow x^2 = 800 \Longrightarrow x \approx 28{,}28$ *metros*

◄

1.6. La Elipse

Definición 1.6.1. Una elipse E es el conjunto de todos los puntos del plano colocados de tal manera que la suma de sus distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

1.2.1. Ejercicios Propuestos

1. Marque los puntos siguientes en el plano coordenado $A(2,3)$, $B(-5,8)$, $C(-1,-5)$, $D(2,-7)$. Luego especifique en qué cuadrante se localiza cada punto.

2. Grafique el conjunto siguiente $S = \{(1,-2)\ ,(0,4),\ (3,\frac{3}{4}),\ (-3,-1)$

3. Trace el conjunto de puntos (x,y) en el plano que satisfaga:

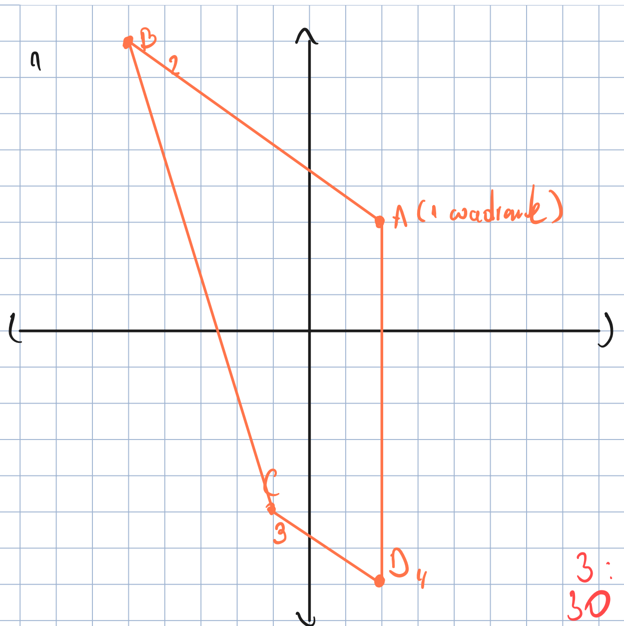
$$(i)\ xy = 0, \qquad (ii)\ xy < 0, \qquad (iii)\ xy > 0, \qquad (iv)\ \frac{x}{y} = 0$$

4. Localice los puntos dados, si (a,b) esta en el primer cuadrante.

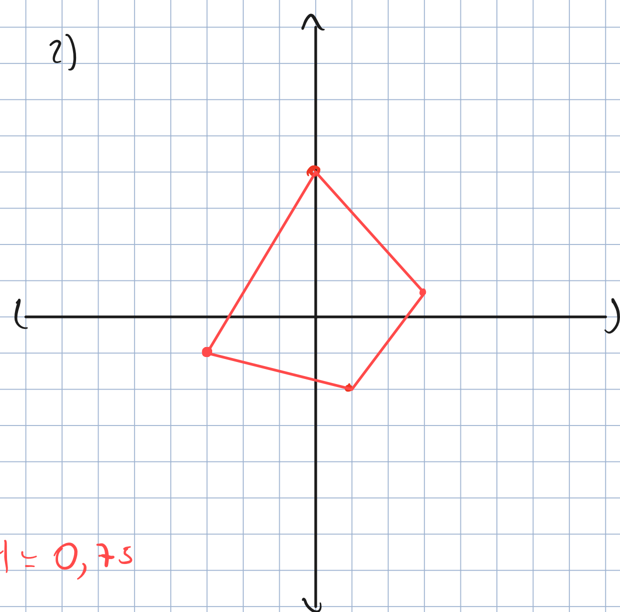
$$(i)\ (a,-b) \qquad (ii)\ (a,a), \qquad (iii)\ (b,-b) \qquad (iv)\ (b,-a)$$

5. La abscisa de un punto es -6 y su distancia al punto $A(1,3)$ es $\sqrt{74}$. Hallar la ordenada del punto (dos soluciones).

1)

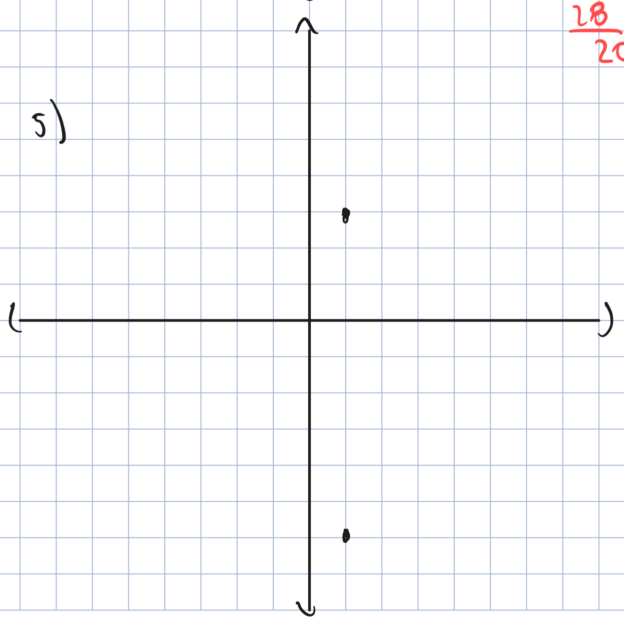


2)



$3 : 4 = 0{,}75$
30
$\underline{28}$
20

5)



$\sqrt{74} = \sqrt{(1-x)^2 + (3+6)^2}$

$\sqrt{(-x+1)^2 + (9)^2}$

$= \sqrt{x^2 + 2x + 1 + 81}$

$\sqrt{74} = \sqrt{x^2 + 2x + 82}$

$74 = x^2 + 2x + 82$

$74 - 82 = x^2 + 2x$

$-12 = x^2 + 2x$

$\frac{-12}{2} = x^2 + x$

$-6 = x^2 + x$

6. Demostrar que que los puntos $A(-3, 10)$, $B(1, 2)$ $C(4, -4)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma linea recta.

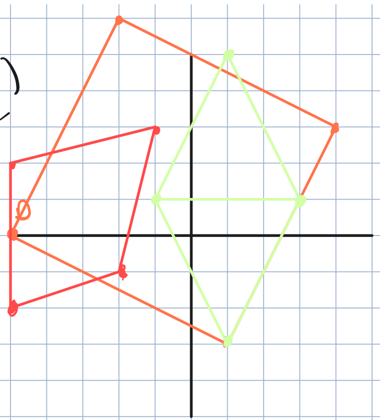
7. Demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son $A(-2, 6)$, $B(4, 3)$, $C(1, -3)$, $D(-5, 0)$ es un cuadrado.

8. Hallar las coredenadas del punto que equidista de los puntos fijos $a(4, 3)$, $B(2, 7)$, $C(-3, -8)$.

9. Demostrar que el cusdrilátero cuyos vértices son $A(-6, -2)$, $B(-2, -1)$, $C(-1, 3)$, $D(-5, 2)$. es un rombo.

10. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-1, 1)$, $B(3, 1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

7)



A) $10 = -3 + x$
$10 + 3 = x$
$13 = x$

$y = x + 13$

B) $2 = 1 + \alpha$
$2 - 1 = \alpha$
$1 = \alpha$

D) $-5 = 0 + \alpha$
$-5 = \alpha$

C) $-3 = 1 + \alpha$
$-3 - 1 = \alpha$
$-4 = \alpha$