Apunte de Probabilidades

Prof. Pamela Sobarzo Sáez

Departamento de Estadística

Parte 1

Probabilidades

Para hablar de probabilidades, primero diremos que hay que tener claridad sobre los tipos de experimentos. Existen dos tipos: los determinísticos y los aleatorios.

Un experimento determinístico es el que tiene solo un posible resultado.

Ejemplo: lanzar un lápiz desde una altura determinada y medir la velocidad con la que cae.

Un experimento aleatorio tiene más de un posible resultado:

Ejemplo: lanzar una moneda al aire, lanzar un dado.

Definición 1: Se llamará espacio muestral al conjunto de todos los posibles resultados de un experimento aleatorio y lo denotaremos por Ω.

Ejemplo 1: Si es experimento es lanzar una moneda al aire, $\Omega=\{C, S\}$

Ejemplo 2. Si el experimento es lanzar dos monedas al aire, $\Omega=\{CC, CS, SC, SS\}$

Ejemplo 3. Si el experimento es lanzar una moneda al aire tres veces, el espacio muestral $\Omega=\{CCC, CCS, CSC, SSC, SCS, CSS, SCC, SSS\}$

Ejemplo 4. Si el experimento consiste en lanzar una moneda al aire hasta obtener la primera cara, entonces el espacio muestral $\Omega=\{C, SC, SSC, SSSC, SSSSC, \dots\}$

Los tres primeros ejemplos corresponden a espacios muestrales finitos y el cuarto corresponde a un espacio muestral infinito.

Definición 2: Llamaremos evento a un subconjunto del espacio muestral, cuyos miembros tienen una característica común.

Los eventos se denominan con letras mayúsculas tales como A, B, C, etc.

Si un evento tiene solo un elemento, se denomina evento simple. Si tiene más de un elemento, se denomina evento compuesto.

Ejemplo 1. Considere el experimento de lanzar un dado al aire. Si se definen los eventos:

A: “ocurre un número par”

B: “ocurre un número mayor que 3”

C: “ocurre el 1”

El espacio muestral está dado por $\Omega = \{1, 2, 3, 4, 5, 6\}$

Si se muestran los elementos de estos eventos, tenemos:

A=$\{2, 4, 6\}$, B=$\{4, 5, 6\}$, C=$\{1\}$ok,

Los eventos A y B se denominan eventos compuestos y el evento C, se denomina evento simple.

La teoría de probabilidades utiliza todas las definiciones de la teoría de conjuntos, en atención a esto, repasaremos algunas definiciones:

Sean A y B dos eventos que pertenecen al espacio muestral Ω.

Definición: El evento formado por todos los posibles resultados de A o B o ambos, recibe el nombre de unión de A con B, y se denota por $A \cup B$.

Definición: El evento formado por todos los posibles resultados comunes tanto a A como a B, recibe el nombre de intersección de A con B, y se denota por $A \cap B$.

Definición: El evento que no tiene elementos se denomina vacío y se denota por $\emptyset$.

Definición: Se dice que los eventos A y B son mutuamente excluyentes, si no tienen resultados en común. En este caso, $A \cap B = \emptyset$

Definición: Si cualquier resultado de B, es también un resultado de A, se dice que el evento B está contenido en el evento A, y se denota por $A \subseteq B$.

Definición: El complemento de un evento A, con respecto al espacio muestral Ω, es aquel que contiene a todos los resultados de Ω, que no se encuentran en A. Se denota por A^c.

Definición clásica de probabilidad

Definición 3: Si un experimento que está sujeto al azar, resulta de n formas igualmente probables y mutuamente excluyentes y, si n_A de resultados tienen un atributo A, la probabilidad de A es la proporción de n_A con respecto a n, esto es, $P(A) = \frac{n_A}{n_\Omega}$

Ejemplo

Considere el experimento de lanzar un dado, cuyo espacio muestral es

Ω ={1,2,3,4,5,6} y sus eventos están dados por: A={2,4,6 }, B={4,5,6}, C={1}

Entonces $P(A) = \frac{1}{2}$, $P(B) = \frac{1}{2}$, $P(C) = \frac{1}{6}$, $P(A \cap B) = \frac{1}{3}$, $P(B \cup C) = \frac{2}{3}$

Definición de probabilidad como frecuencia relativa

La interpretación de una frecuencia relativa descansa en la idea de que un experimento se efectúa y se repite muchas veces y, prácticamente bajo las mismas condiciones. Cada vez que un experimento se lleva a cabo, se observa un resultado; éste es impredecible dada la naturaleza aleatoria del experimento y la probabilidad de la presencia de cierto atributo se aproxima por la frecuencia relativa de los resultados que posee dicho atributo. Conforme aumenta la repetición del experimento, la frecuencia relativa de los resultados favorables se aproxima al verdadero valor de la probabilidad para ese atributo.

Definición

Si un experimento se repite n veces bajo las mismas condiciones y n_B de los resultados son favorables a un atributo B, el límite de $\frac{n_B}{n}$ conforme n se vuelve grande, se define como la probabilidad del atributo B.

Ejemplo:

Para ilustrar la probabilidad como frecuencia relativa se simuló en una computadora un proceso de muestreo de n unidades, suponiendo que el proceso de fabricación producirá un 5% de artículos defectuosos. Para cada n se observó el número de unidades defectuosas, los resultados se presentan en la siguiente tabla para valores entre 20 y 10.000. A partir, de esto es razonable concluir que la frecuencia relativa tiende a un valor verdadero de 0,05 conforme n crece.

Prof. Pamela Sobarzo Sáez; Departamento de Estadística; psobarzo@ubiobio.cl

Número de unidades muestreadas "n"	Número de unidades defectuosas encontradas	Frecuencia Relativa
20	2	0,10
50	3	0,06
100	4	0,04
200	12	0,06
500	28	0,056
1000	54	0,054
2000	97	0,0485
5000	244	0,0488
10000	504	0.0504

Comentario

Es importante destacar que para el cálculo de probabilidades existen métodos para determinar sin enumeración directa el número de resultados posibles de un experimento particular o el número de elementos de un conjunto particular. Tales técnicas son conocidas con el nombre de análisis combinatorio y las estudiaremos a continuación.

Definición 4. Sea Ω un espacio muestral y sea A un evento de Ω. Se llamará función de probabilidad sobre el espacio muestral a $P(A)$ si satisface los siguientes axiomas:

1. $0 \leq P(A) \leq 1$
2. $P(\Omega) = 1$
3. Sean A, B C, … eventos mutuamente excluyentes, entonces $P(A \cup B \cup C \cup \dots) = P(A) + P(B) + P(C) + \cdots$

A partir de esta definición, se desprenden una serie de teoremas que serán útiles para el cálculo de probabilidades.

Teorema 1. Si vacío es el evento imposible, $P(\emptyset) = 0$

Teorema 2. Sean A y B dos eventos cualesquiera de Ω, entonces

$$P(A \cup B) = P(A) + P(B) - P(A \cap B)$$

Teorema 3. Sea A un evento de Ω, entonces $P(A^c) = 1 - P(A)$

Teorema 4: Sean A y B dos eventos cualesquiera de Ω, entonces

$$P(A \cap B^c) = P(A) - P(A \cap B)$$

Teorema 5. Sean A y B eventos de Ω, tales que $A \subseteq B$, entonces

$$P(A) \leq P(B)$$

Teorema 6. Sean A, B y C tres eventos cualesquiera de Ω, entonces

$$P(A \cup B \cup C) = P(A) + P(B) + P(C) - P(A \cap B) - P(A \cap C) - P(B \cap C) + P(A \cap B \cap C)$$

Propiedades

1. $P(A^c \cap B^c) = P((A \cup B)^c)$
2. $P(A^c \cup B^c) = P((A \cap B)^c)$

Ejercicios →Práctico 1