UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Prof. María Anacleto – Prof. Alex Tello

Formativo 01 - Álgebra II (220156)

Segundo semestre 2022

1. Determine el valor de k para el cual $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 - \frac{10}{3}A + I = \theta$

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Evalúe $f(A)$.

3. Para qué valor(es) de $m \in \mathbb{R}$ la matriz $A = \begin{pmatrix} 1 & 1 & m \\ m & 0 & -1 \\ 6 & 1 & 0 \end{pmatrix}$ no admite inversa?

4. Determine el valor de k, de modo que exista A^{-1} y luego obtenga la(s) inversa(s) para ese(esos) valor(es) de k, donde
$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ k^2 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

5. Determine los valores de k para cada uno de los siguientes sistemas, de modo que:
$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z = k + 2 \end{cases}$$
   a) Tenga solución única
   b) No tenga solución
   c) Tenga infinitas soluciones

6. Dada la matriz $M = \begin{pmatrix} 1 & 2 & -1 \\ 2 & 4 & m \\ m & 2 & -1 \end{pmatrix}$, donde m es un parámetro real, se pide:
   a) Determinar el rango de M según los distintos valores de m.
   b) Calcular el determinante de M si $m = 3$. Justificar si esta matriz tiene inversa.
   c) Dar un valor de m para que la matriz M sea singular (no admita inversa).

7. Jorge invita a sus amigos al cine. Si todos ingresan a platea, le van a faltar x miles de pesos pues cada entrada vale y miles de pesos, pero si entran a platea alta le va a sobrar m miles de pesos pues cada entrada vale n miles de pesos, ¿cuántas personas conformaban el grupo?

8. Un joyero tiene dos lingotes de oro, con un 80 % de pureza y el otro con un 95 % de pureza. ¿Cuánto debe fundir de cada uno para obtener un lingote de 5 Kg con un 86 % de pureza?

1. Determine el valor de k para el cual $A = \begin{pmatrix} k & 0 \\ 0 & 3 \end{pmatrix}$ verifica $A^2 - \frac{10}{3}A + I = \theta$

$$A = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix}$$

$$A^2 = \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix}$$

$a_{11} = k^2 + 0 = k^2$

$a_{12} = 0 + 0 = 0$

$a_{21} = 0 + 0 = 0$

$a_{22} = 0 + 9 = 9$

$$-\frac{10}{3} \begin{vmatrix} k & 0 \\ 0 & 3 \end{vmatrix} =$$

$$\begin{vmatrix} k^2 & 0 \\ 0 & 9 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} -\frac{10}{3}k & 0 \\ 0 & -10 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} k^2 - \frac{10}{3}k + 1 & 0 \\ 0 & 0 \end{vmatrix} = \theta$$

$k^2 - \frac{10}{3}k + 1 = \theta \quad / \cdot 3$

$3k^2 - 10k + 3 = \theta$

3 y $\frac{1}{3}$

Si $k = 3 \vee \frac{1}{3}$ igual matriz θ.

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{pmatrix}$ y $f(x) = x^2 + 2x - 1$. Evalúe $f(A)$.

$$A \cdot A = \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} + 2 \begin{vmatrix} 1 & 0 & -1 \\ 1 & 1 & 1 \\ 0 & -2 & 1 \end{vmatrix} - \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix}$$

$a_{11} = 1 + 0 + 0 = 1$

$a_{12} = 0 + 0 + 2 = 2$

$a_{13} = -1 + 0 - 1 = -2$

$a_{21} = 1 + 1 + 0 = 2$

$a_{22} = 0 + 1 - 2 = -1$

$a_{23} = -1 + 1 + 1 = 1$

$a_{31} = 0 - 2 + 0 = -2$

$a_{32} = 0 \quad -2 - 2 = -$

$a_{33} = 0 - 2 + 1 = -1$

$$\begin{array}{ccccccc} A^2 & & 2A & & I \\ = \begin{vmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -1 & -4 & -1 \end{vmatrix} & + & \begin{vmatrix} 2 & 0 & -2 \\ 2 & 2 & 2 \\ 0 & -4 & 2 \end{vmatrix} & - & \begin{vmatrix} 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} \end{array}$$

$$= \begin{vmatrix} 2 & 2 & -4 \\ 2 & 0 & 3 \\ -2 & -8 & 0 \end{vmatrix}$$

4. Determine el valor de k, de modo que exista A^{-1} y luego obtenga la(s) inversa(s) para ese(esos) valor(es) de k, donde

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 2 & 2 \\ k^2 & 1 & 1 \\ k & 0 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 \\ K^2 & 1 & 1 \\ K & 0 & 1 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 2 & 2 & 2 & 2 \\ K^2 & 1 & 1 & K^2 & 1 \\ K & 0 & 1 & K & 0 \end{vmatrix}$$

$$\begin{aligned} |A| &= (2 + 2K) - (2K + 0 + 2K^2) \\ &= 2 + \cancel{2K} \cancel{-2K} - 2K^2 \\ &= 2 - 2K^2 \\ &= -2K^2 + 2 \quad / \cdot -1 \\ 0 &= 2K^2 - 2 \end{aligned}$$

R: $\forall K \in \mathbb{R} - \{1\}$

5. Determine los valores de k para cada uno de los siguientes sistemas, de modo que:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases}, \qquad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z = k + 2 \end{cases}$$

a) Tenga solución única

b) No tenga solución

c) Tenga infinitas soluciones

$$A = \begin{vmatrix} 1 & 1 & -1 \\ 2 & 3 & K \\ 1 & K & 3 \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \quad \begin{vmatrix} 1 \\ 3 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$Ax = B = \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & K & 3 \\ 1 & K & 3 & 2 \end{array}\right|$$

$x_1 = 2$
$x_2 = -3$

Para determinar Soluciones: Usar Metodo Rango.
Pasar matriz a forma escalonada.

$$\left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 2 & 3 & K & 3 \\ 1 & K & 3 & 2 \end{array}\right| \xrightarrow[F_3 - F_1]{-2F_1 + F_2} \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & 2+K & 1 \\ 0 & K-1 & 4 & 1 \end{array}\right| \xrightarrow{-(K-1)F_2 + F_3} \left|\begin{array}{ccc:c} 1 & 1 & -1 & 1 \\ 0 & 1 & K+2 & 1 \\ 0 & 0 & -(K-1)(K+2)+4 & -(K-1)+1 \end{array}\right|$$

a) Para tener Solución Unica: $\text{Rang}(A) = \text{Rang}(A|b) = r = 3$

$r = n°$ Incognitas $= 3$

- Para $K \in \mathbb{R} - \{2, -3\}$

b) No tiene Solución: $\text{Rang}(A) \neq \text{Rang}(A|b)$

- Para $K = 3 \Rightarrow \begin{cases} \text{Rang}(A) = 2 \\ \text{Rang}(A|b) = 3 \end{cases} \neq$

c) Tenga Infinitas Soluciones: $\text{Rango}(A) = \text{Rang}(A|b) = r = 2$

$r < n°$ Incognitas $= 3$

- Para $K = 2$

5. Determine los valores de k para cada uno de los siguientes sistemas, de modo que:

$$\begin{cases} x + y - z = 1 \\ 2x + 3y + kz = 3 \\ x + ky + 3z = 2 \end{cases} \quad , \quad \begin{cases} x + 2y - 3z = 4 \\ 3x - y + 5z = 2 \\ 4x + y + (k^2 - 14)z = k + 2 \end{cases}$$

a) Tenga solución única

b) No tenga solución

c) Tenga infinitas soluciones

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -3 \\ 3 & -1 & 5 \\ 4 & 1 & (k^2-14) \end{vmatrix} \begin{vmatrix} x \\ y \\ z \end{vmatrix} \begin{vmatrix} 4 \\ 2 \end{vmatrix}$$

$$\begin{vmatrix} 1 & 2 & -1 & 1 & 2 \\ 2 & 4 & m & 2 & 4 \\ m & 2 & -1 & m & 2 \end{vmatrix}$$

$(-4m + 2m^2 - 4) - (-4m + 2m - 4)$

$\cancel{-4m} + 2m^2 \cancel{-4} + \cancel{4m} - 2m \cancel{+4}$

$2m^2 - 2m -$

$(-4 + 2m^2 - 4) - (-4m + 2m - 4)$

$-8 + 2m^2 + 4m - 2m + 4$

$2m^2 + 2m - 4 \quad / :2$

$m^2 + m - 4$