Aplicaciones Integral Definida. Cálculo II

OBJETIVOS:

- Reconocer propiedades de la integral definida.
- Calcular e interpretar área bajo una curva y entre curvas.

1. Mediante el uso de una integral definida, calcule el área de la región delimitada por la curva, el eje X y las líneas verticales dadas. En cada caso hacer un bosquejo de la región.

   a) $y = 4x,\ x = 2.$
   b) $y = 3x + 2,\ x = 1,\ x = 3.$
   c) $y = x - 1,\ x = 1,\ x = -1.$
   d) $y = 5x^2,\ x = 0,\ x = 2.$
   e) $y = 9 - x^2.$
   f) $y = 4 - x^2,\ x = -2,\ x = 3.$
   g) $y = -x^2 + 2x + 3.$
   h) $y = 2x^2 + 3x - 1,\ x = 1,\ x = 4.$
   i) $y = \dfrac{1}{x},\ x = 1,\ x = e.$
   j) $y = \dfrac{1}{x^2},\ x = 1,\ x = 2.$
   k) $y = \sqrt{x},\ x = 2.$
   l) $y = \sqrt{x - 2},\ x = 5.$
   m) $y = \sqrt{x + 9}, x = 0.$
   n) $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2.$
   ñ) $y = x^2 - x - 2,\ x = -2,\ x = 2.$
   o) $y = x^2 - x - 2,\ x = -2,\ x = 4.$

2. En estadística una **función de densidad** (de probabilidad) f de una variable x, donde x toma todos los valores en el intervalo $[a, b]$, satisface lo siguiente:

   i) $f(x) \geq 0.$
   ii) $\displaystyle\int_a^b f(x) = 1.$
   iii) La probabilidad de que x tome un valor entre c y d donde $a \leq c \leq d \leq b$ se calcula por

   $$P(c \leq x \leq d) = \int_c^d f(x)dx,$$

   y representa el área de la región delimitada por la gráfica de f, el eje X y las líneas verticales $x = c$ y $x = d$.

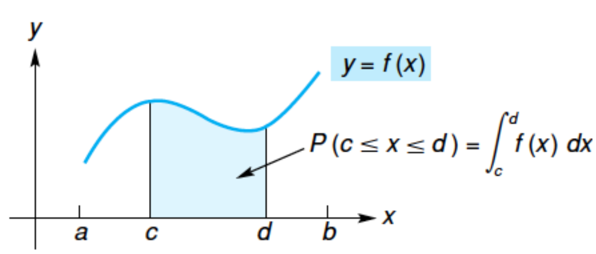


Figura 1: Probabilidad como un área.

Verifique si cada una de las funciones es de densidad y calcule las probabilidades indicadas.

a) $f(x) = 6(x - x^2), 0 \leq x \leq 1$. **Calcular**: $P(0 \leq x \leq \frac{1}{4})$; $P(x \geq \frac{1}{2})$.

b) $f(x) = \dfrac{x}{8}, 0 \leq x \leq 4$. **Calcular**: $P(0 \leq x \leq 1)$; $P(2 \leq x \leq 4)$; $P(x \geq 3)$.

c) $f(x) = \dfrac{1}{x}, e \leq x \leq e^2$. **Calcular**: $P(3 \leq x \leq 5)$; $P(x \leq 4)$; $P(x \geq 3)$.

d) $f(x) = 3(1 - x)^2, 0 \leq x \leq 1$. **Calcular**: $P(\frac{1}{2} \leq x \leq 1)$; $P(\frac{1}{3} \leq x \leq \frac{1}{2})$; $P(x \leq \frac{1}{3})$; $P(x \geq \frac{1}{3})$.

3. Determine el área entre los siguientes pares de curvas y las líneas verticales dadas.

a) $y = x^2, y = 3x$

b) $y = x^2, y = 2x - 1, x = 0, x = 2$.

c) $y = \sqrt{x}, y = x^2, x = 0, x = 1$.

d) $y = \sqrt{x}, y = 1 - x$.

e) $y = \sqrt{x}, y = 1 - x^2$.

f) $y = x^2 + 2, y = 8$.

g) $y = e^x, y = x^2, x = 0, x = 1$.

h) $y = e^x, y = x + 1$.

i) $y = e^x, y = 1 - x^2$.

1. Mediante el uso de una integral definida, calcule el área de la región delimitada por la curva, el eje X y las líneas verticales dadas. En cada caso hacer un bosquejo de la región.

a) $y = 4x,\ x = 2.$
b) $y = 3x + 2,\ x = 1,\ x = 3.$
c) $y = x - 1,\ x = 1,\ x = -1.$
d) $y = 5x^2,\ x = 0,\ x = 2.$
e) $y = 9 - x^2.$
f) $y = 4 - x^2,\ x = -2,\ x = 3.$
g) $y = -x^2 + 2x + 3.$
h) $y = 2x^2 + 3x - 1,\ x = 1,\ x = 4.$
i) $y = \frac{1}{x},\ x = 1,\ x = e.$
j) $y = \frac{1}{x^2},\ x = 1,\ x = 2.$
k) $y = \sqrt{x},\ x = 2.$
l) $y = \sqrt{x - 2},\ x = 5.$
m) $y = \sqrt{x + 9}, x = 0.$
n) $y = e^x,\ x = 0,\ x = 2.$
ñ) $y = x^2 - x - 2,\ x = -2,\ x = 2.$
o) $y = x^2 - x - 2,\ x = -2,\ x = 4.$

$\frac{1}{0} \quad \frac{1}{1} \quad y = 1 \quad \frac{1}{2} =$

$\int \frac{1}{x}\, dx \qquad 1$

$\ln(|x|) + c \Big|_1^e$

$\ln(|e|) - \ln(|1|)$

$= 1$

a) $4x$

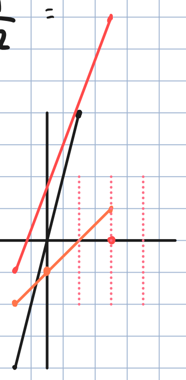
x	0	1	2
y	0	4	8

b) $3x+2$

x	-1	0	2
y	-1	2	8

c) $x - 1$

x	-1	0	2
y	-2	-1	1



a) $A = \int_0^2 4x\, dx$

$\frac{4x^2}{2} = 2x^2 + c \Big|_0^2$

$2 \cdot (2)^2 - 2(0)^2$

8 unid^2

b) $3x+2,\ x = 1,\ x = 3$

$A = \int 3x + 2$

$3\int x\, dx + \int 2 dx$

$\frac{3x^2}{2} + 2 \Big|_1^3$

$\frac{3(3)^2}{2} + 2 - \frac{3(1)^2}{2} + 2$

$\frac{27}{2} + 2 - \frac{3}{2} + 2$ unid^2