Anillo de Polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$

Definición:

Un Polinomio con coeficiente en $\mathbb{R}$ es cualquier función:

$$f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$$

Que puede escribirse de la forma:

$\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x) = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$
donde $a_0, a_1, \ldots a_n \in \mathbb{R}$ (constantes reales), y $a_n \neq 0$
y $n \in \mathbb{N}_0$
$\left.\right\} = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$

Ejemplos:

Las siguientes funciones son polinomios:

1) $x \longmapsto 2$; $x \longmapsto \pi$, $x \longmapsto e$, $x \longmapsto \sqrt{2}$
* estos son polinomios constantes.

2) $x \longmapsto 2x+1$; $x \longmapsto ax+b$

3) $x^2 - 4x + 1$
$x^3 - \frac{5}{3}x + \pi$

$x^{100} - 15x^8 + 1$

Obs: Pese a que los polinomios son funciones, para definir un polinomio lo haremos indicando su ecuación de definición:

Ej: $p = a_0 + a_1 x + \ldots + a_n x^n$

Definición [Grado Polinomio]

Si $f = \sum_{i=0}^{n} a_i x^i$ es un polinomios

con $a_n \neq 0$, definimos

$$gr(f) = n \quad / \quad (\underset{\text{"en inglés degree"}}{deg}(f) = n)$$

$x^8 + 5x - 8 = (gr(p) = 8)$

Todo lo anterior es válido para $f \neq 0$ (distinto del polinomio nulo)

Definimos $gr(0) = -\infty$

Notación: $\mathbb{R}[x]$ denota al conjunto de todos los polinomios con coeficientes en $\mathbb{R}$

Obs:

$\mathbb{Q}[x]$ polinomios con coeficientes en los $\mathbb{Q}$ (Racionales)
$\mathbb{C}[x]$ polinomios con coeficientes en los $\mathbb{R}$ (Reales) → Conjunto mas relevante.

Salvo cuando se indique lo contrario,
todos los resultados serán validos para $\mathbb{Q}[x]$ o $\mathbb{C}[x]$

Suma y multiplicación de polinomios:

Ej:

Si $P = 1 + 2x + x^3$
$Q = 1 - 5x + x^2 - x^3 + x^4$

Sabemos naturalmente que:

$$p + q = 2 - 3x + x^2 + 0x^3 + x^4$$

Escribimos

$p = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$
$q = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$

Luego:

Formal: $p + q = \sum_{i=0}^{n} (a_i + b_i) x^i$

Multiplicacion:

$(1 + x)\cdot(x^2 + x^3)$
$= (1 + x)\cdot x^2 + (1 + x)x^3$
$= x^2 + x^3 + x^3 + x^4$
$= x^2 + 2x^3 + x^4$

Ej: $p = 1 + x$
$q = x^2 + x^3$

$C_0 = 1 \cdot 0 = 0$
$C_1 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 0 = 0$
$C_2 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 0 + 0 \cdot 0 = 1$
$C_3 = 1 \cdot 1 + 1 \cdot 1 + 0 + 0 = 2$
$C_4 = 1 \cdot 0 + 1 \cdot 1 + 0 + 0 + 0 = 1$

Escribimos

$p = a_0 + a_1 x + \dots + a_n x^n$; $a_n \neq 0$
$q = b_0 + b_1 x + \dots + b_n x^n$; $b_m \neq 0$

Luego:

$$p \cdot q = \sum_{i=0}^{n+m} c_i x^i ,$$

$$c_i = \sum_{j=0}^{i} a_j b_{i-j}$$

$$= \sum_{k+j=i} a_k b_j$$

Propiedades: Suma

Son Anillos

1) $p + q = q + p$ (conmutatividad)
2) $(p + q) + r = p + (q + r)$ (asociatividad)
3) $0 = 0 \cdot x^0 + 0 \cdot x^1 + 0 \cdot x^2 + \dots + i$ es el neutro aditivo: $\forall p,\ p = 0 = p$
4) $\forall p \in \mathbb{R}[x],\ \exists! q \in \mathbb{R}[x] : p + q = 0$ → Existe un polinomio que al sumarlo de el neutro

---

Propiedades: Multiplicación

5) $P \cdot Q = Q \cdot P$ (conmutatividad)
6) $P \cdot (q \cdot r) = (p \cdot q) \cdot r$ (Distribución)
7) El polinomio constante 1 el neutro multiplicativo:
$\forall p \in \mathbb{R}[x],\ 1 \cdot p = p$

→ no es propiedad, sino defecto

8) los unicos elementos de $\mathbb{R}[x]$ que admiten inverso multiplicativo son las constantes en $\mathbb{R} - \{0\}$
↳ Toda constante Ej: $1, -1$, etc.
9) $p(q + r) = p \cdot q + p \cdot r$

Algoritmo División

Sean $p, d \in \mathbb{R}[x]$ con $p, d \neq 0$
Existen $q, r \in \mathbb{R}[x]$ tales que:
$$p = q \cdot d + r$$
donde $r = 0$, o bien $\deg r < \deg(d)$

Ej: $x^6 - x^4 + x^2 + 1 \div x^2 - 3 = x^4 + 2x^2 + 7$

$$\begin{array}{l} x^6 - x^4 + x^2 + 1 \\ \underline{-(x^6 - 3x^4)} \\ \quad 2x^4 + x^2 + 1 \\ \quad \underline{-(2x^4 - 6x^2)} \\ \qquad 7x^2 + 1 \\ \qquad -(7x^2 - 21) \\ \qquad\quad 22 \end{array}$$

$$x^6 - x^4 + x^2 + 1 = (x^2 - 3)(x^4 + 2x^2 + 7) + 22$$

Recordatorio:

Polinomios con coef en $\mathbb{R}$

$$f(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + \ldots + a_n x^n$$

donde $a_0, \ldots a_n \in \mathbb{R}$
(Obs: si $\mathbb{R}$ es sustituido por $\mathbb{Q}$ o $\mathbb{C}$
todos los resultados y def. son igualmente validos)

Ejercicios:
hayar el cociente y el resto
en las siguientes divisiones

1) $x^4 + 1 \div x^2 + \sqrt{2}x + 1$

2) $x^8 - 1 \div x - i$

Solución:

$$
\begin{array}{l}
x^4 + 1 \div x^2 + \sqrt{2}x + 1 = x^2 - \sqrt{2} + 1 \\
-(x^4 + \sqrt{2}x^3 + x^2) \\
\hline
-\sqrt{2}x^3 - x^2 + 1 \\
-(-\sqrt{2}x^3 - 2x^2 - \sqrt{2}x) \\
\hline
x^2 + \sqrt{2}x + 1 \\
-(x^2 + \sqrt{2}x + 1) \\
\hline
0
\end{array}
$$

Ejemplo:

$$
\begin{array}{l}
3x^5 - x^3 + 1 \div x^2 - 2x + 3 = 3x^3 + 6x^2 + 2x - 14 \\
-(3x^5 - 6x^4 + 9x^3) \\
\hline
6x^4 - 10x^3 + 1 \\
-(6x^4 - 12x^3 + 18x^2) \\
\hline
2x^3 - 18x^2 + 1 \\
-(2x^3 - 4x^2 + 6x) \\
\hline
-14x^2 - 6x + 1 \\
-(-14x^2 + 28x - 42) \\
\hline
-34x + 43 //
\end{array}
$$

El cociente: $3x^3 + 6x^2 + 2x - 14$

Resto: $-34x + 43$

buscar Formula de Cardan
y caso Ferrario

Algoritmo de división

Metodo de Ruffini

Introducción: Sea $p(x) = a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3$
con $a_0, a_1, a_2, a_3 \in \mathbb{R}$, $a_3 \neq 0$

$$x^2 - 8x - 6$$

$\pm 1 \quad \pm 2 \quad \pm 3$

$p(x) \div ax + b$ con $a = 1$

$\quad \llcorner$ B

Ejercio:

Consideramos el polinomio $d(x) = x - \alpha$
- Calcular el cociente y resto

Ejemplo:

$p(x) = x^2 - 4 = (x-2)(x+2)$

$x^2 - 4 \div x - 2$

$p(x) = x^2 + 0 \cdot x - 4$

	1	0	-4
2	—	2	4
	1	2	0

Coeficientes del dividendo $p(x)$

El cero del divisor

Resto

Coeficientes del cociente

$q(x) = x + 2$
$r(x) = 0$

$x^4 - 1 \div x - i$

$p(x) = x^4 - 1 = 1 \cdot x^4 + 0 \cdot x^3 + 0 \cdot x^2 + 0 \cdot x + (-1)x^0$

	1	0	0	0	-1
i		i	-1	$-i$	1
	1	i	-1	$-i$	0
	x^3	x^2	x	x^0	0

$q(x) = x^3 + ix^2 - x - i$
$r(x) = 0$

Teorema de resto:

El resto de la división de un polinomio $p(x)$ por $x - c$,
es: $p(c)$

Ejemplos:

1) Calcular $\overbrace{x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 1}^{f(x)} \div x + 5$

	1	-2	8	0	0	-1
-5		-5	35	-215	1075	-5375
	1	-7	43	-215	1075	-5376

$p(x) = x^4 - 7x^3 + 43x^2 - 215x + 1075$
$r(x) = -5376$
$f(-5) = r(-5) = -5376$

$$\frac{x^5 - 2x^4 + 8x^3 - 1}{x + 5} = x^4 - 7x^3 + 43x^2 - 215x + 1075 + \frac{-5376}{x+5}$$

2) Hallar el valor de $\alpha \in \mathbb{R}$ de manera que:
2 sea raiz del polinomio $p(x) = x^5 - \alpha x + 1$

Definiciones:

1) Dada una función $f: A \subseteq \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ decimos que $\alpha \in A$ es un cero de f cuando

$$f(\alpha) = 0$$

2) Dados $p, q \in \mathbb{R}[x]$, decimos que q divide a p cuando el resto de la división $p \div q$ es cero

3) Un numero α es raiz de un polinomio p cuando

$$p(\alpha) = 0$$

o equivalentemente, cuando $x - \alpha$ dividido a p.

Solucion 1: $p(x) = x^5 - \alpha x + 1$

	1	0	0	0	$-\alpha$	1
2		2	4	8	16	$32-2\alpha$
	1	2	4	8	$16-\alpha$	$33-2\alpha$

$r(x) = 33 - 2\alpha = 0$

$\alpha = \frac{33}{2}$

Solución 2: Por definición 2 es raiz de p, cuando:

$p(2) = 0$

$2^5 - \alpha \cdot 2 + 1 = 0$

$33 - 2\alpha = 0$

$\alpha = \frac{33}{2}$

10/08

Teorema Fundamental del Algebra:

- Polinomio irreducible
- Orden de multiplicidad de un cero
- Teorema Fundamental

- Convención: Usamos la letra $\mathbb{K}$ para denotar cualquiera de los siguientes conjuntos $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ y/o $\mathbb{C}$.

- Definición: Sea $f \in \mathbb{K}[x]$ no constante, decimos que f es irreducible cuando

$$\forall g, h \in \mathbb{K}[x],\ f = g \cdot h \Rightarrow \exists c \in \mathbb{K} - \{0\} : f = c \cdot g \ \vee \ f = c \cdot h$$

- Teorema: todo Polinomio no constante $f \in \mathbb{K}[x]$ puede descomponerse como producto de potencias irreducibles.

  - Esta descomposición es unica, modulo de multiplicacion por constante

Ejemplo:

1) los polinomios de grado 1 siempre son irreducibles

$x - \frac{2}{3}$; $2x - 4$

2) $x^2 - 2$ es irreducible en $\mathbb{Q}[x]$
$x^2 - 2$ es reducible en $\mathbb{R}[x]$

3) $x^2 + 1$ = es irreducible en $\mathbb{R}[x]$
$x^2 + 1 = (x-i)(x+i)$ es reducible en $\mathbb{C}[x]$

Pregunta: ¿ $x^4 + 1$ es reducible en los reales?

1) hallar raices $x^4 + 1$ en $\mathbb{C}$.

2) Pasar a Polar: $x^4 = -1 = e^{i\pi}$

3) Encontrar sus cuatro Raices

- $X_0 = e^{i\frac{\pi + 0 \cdot 2\pi}{4}} = e^{i\frac{\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$
- $X_1 = e^{i\frac{\pi + 2\pi}{4}} = e^{i\frac{3\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} + \frac{\sqrt{2}}{2} i$
- $X_2 = e^{i\frac{\pi + 4\pi}{4}} = e^{i\frac{5\pi}{4}} = -\frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$
- $X_3 = e^{i\frac{\pi + 6\pi}{4}} = e^{i\frac{7\pi}{4}} = \frac{\sqrt{2}}{2} - \frac{\sqrt{2}}{2} i$

4) a) $(x - X_0)(x - X_1)(x - x_2)(X - x_3) = (x - X_0)(x - \overline{X_0})(x - x_1)(x - \overline{X_1})$

b) $[x^2 - (x_0 + \overline{x_0})x + X_0 \overline{X_0}][x^2 - (x_1 + \overline{x_1})x + x_1 \overline{x_1}]$

c) $[x^2 - 2Re(x_0)x + |x_0|][x^2 - 2Re(x_1)x + |x_1|^2]$

d) $(x^2 - \sqrt{2}x + 1)(x^2 + \sqrt{2}x + 1)$

Definición: [Orden de multiplicidad]

- Sea $\alpha \in \mathbb{K}[x]$ un cero de $f \in \mathbb{K}[x]$
  definimos el orden de la multiplicidad de α
  sobre f como el mayor entero m tal que

  $$\exists\, g \in \mathbb{K}[x],\quad f(x) = (x - \alpha)^m \cdot g(x)$$

  Cantidad de veces que se repite el factor alfa α

  $$m = \operatorname{ord}_{\alpha}(f)$$

Ejemplo:

1) $\left.\begin{array}{l} \text{Si } \alpha = 1, \text{ y } f = x^3 - 1 \\ x^3 - 1 = (x-1)^1 \cdot (x^2 + x + 1) \end{array}\right\}$ luego: $\operatorname{ord}_1(f) = 1$

2) $\left.\begin{array}{l} \alpha = (x-1)^1 \cdot (x^2 + x + 1) \\ \alpha = (x-1)\cdot(x-1)\cdot(x-1) \\ \alpha = (x-1)^3 \end{array}\right\}$ luego: $\operatorname{ord}_1(f) = 3$