Prof. María Anacleto – Prof. Alex Tello

Guía 01 - Álgebra II (220156)

Segundo semestre 2022

1. Sean las matrices

$$A = \begin{pmatrix} -5 & -1 & 3 \\ -3 & 7 & 0 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} -2 & 1 & 4 \\ 1 & 1 & -1 \end{pmatrix}, \; C = \begin{pmatrix} 4 & -1 \\ 2 & 3 \\ -1 & 3 \end{pmatrix}, \; D = \begin{pmatrix} -1 & 1 \\ 2 & 3 \\ -2 & 5 \end{pmatrix}$$

Efectúa las siguientes operaciones indicadas si es que está definida

a) $4A$
b) $-5A + 2B$
c) $3C - 4D$
d) CD
e) $(3B)(5C)$
f) AC

2. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 4 & -3 \end{pmatrix}$ y $f(x) = x^2 + 2x - 11$. Evalúe $f(A)$.

3. Calcule el determinante de las siguientes matrices

$a)$ $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad b)$ $\begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}$ $\quad c)$ $\begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad d)$ $\begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

4. Para qué valores de x, la matriz es invertible

$a)$ $\begin{pmatrix} x^2 + x & x + 1 \\ x - 1 & 1 \end{pmatrix}$ $\quad b)$ $\begin{pmatrix} x^2 - 1 & x + 2 \\ x^2 - 2x + 3 & x \end{pmatrix}$

5. Encuentre la inversa, si existe, de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

6. Resolver la ecuación $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Halle, si existe, una matriz B tal que $A^2 + A = AB$.

8. Determina el rango de las siguientes matrices

a) $\begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 & 0 \\ 2 & -4 & 2 & -1 \\ 1 & 1 & 1 & 3 \end{pmatrix}$ $\quad$ b) $\begin{pmatrix} 3 & 4 & 4 & 0 \\ 1 & 3 & 2 & -2 \\ 2 & 1 & 2 & 2 \end{pmatrix}$ $\quad$ c) $\begin{pmatrix} 1 & 3 & 5 & 7 & 9 \\ 2 & 4 & 6 & 8 & 10 \\ 3 & 7 & 11 & 15 & 19 \\ -10 & -8 & -6 & -4 & -2 \end{pmatrix}$

9. Estudie las soluciones de los siguientes sistemas de ecuaciones lineales dependiendo de los parámetros α y β.

a) $\begin{cases} 2x - 3y + z = 0 \\ x - \alpha y - 3z = 0 \\ 5x + 2y - z = 0 \end{cases}$ b) $\begin{cases} \alpha x + y + z = \alpha^2 \\ x - y + z = 1 \\ 6x - y + z = 3\alpha \end{cases}$ c) $\begin{cases} \alpha x - y + z = 0 \\ x + 2y - \alpha z = 0 \\ x + 2y - z = 0 \end{cases}$

10. Un granjero da de comer a su ganado una mezcla de dos tipos de alimento. Una unidad estándar del alimento A proporciona a un novillo 10 % del requerimiento diario de proteínas y 15 % del de carbohidratos. Una unidad estándar del alimento tipo B contiene 12 % del requerimiento diario de proteínas y 8 % del de carbohidratos. Si el granjero quiere alimentar a su ganado con el 100 % de los requerimientos mínimos de proteínas y carbohidratos, ¿cuántas unidades de cada tipo de alimento debe dar a un novillo al día?

11. Un comerciante tiene dos clases de aceite, la primera de \$ 6 por litro y la segunda de \$ 7.2 por litro. ¿Cuántos litros de cada clase hay que poner para obtener 60 litros de mezcla a \$ 7 por litro?

12. En un sector central de la ciudad de Concepcióon que consiste de calles de un solo sentido, se midió el flujo de tráfico en cada intersección (ver Figura 1). Para el bloque de ciudad que se muestra en la figura, los números representan la cantidad promedio de vehículos por minuto que entran y salen de las intersecciones A; B; C y D durante, las horas de más alta frecuencia.

    a) Establezca y resuelva un sistema de ecuaciones lineales para encontrar los flujos posibles $f_1, \ldots, f_4$.
    b) Si el tráfico se regula en CD de modo que $f_4 = 10$ vehículos por minuto, ¿cuáles son los flujos promedio en las otras calles?
    c) ¿Cuáles son los posibles flujos mínimo y máximo en cada calle?
    d) ¿Cómo cambiaría la solución si todas las direcciones se invirtieran?

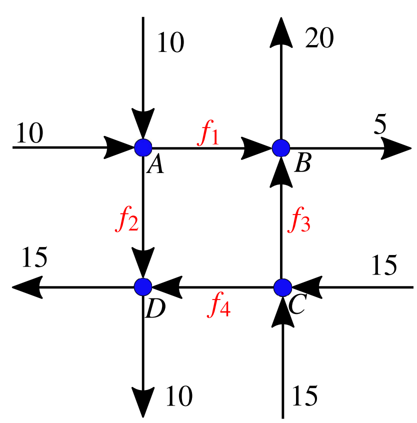

Figura 1: Diagrama de flujo de tráfico

1. Sean las matrices

$$A=\begin{pmatrix}-5 & -1 & 3\\ -3 & 7 & 0\end{pmatrix},\quad B=\begin{pmatrix}-2 & 1 & 4\\ 1 & 1 & -1\end{pmatrix},\ C=\begin{pmatrix}4 & -1\\ 2 & 3\\ -1 & 3\end{pmatrix},\ D=\begin{pmatrix}-1 & 1\\ 2 & 3\\ -2 & 5\end{pmatrix}$$

a) $4A = \begin{pmatrix}-20 & -4 & 12\\ -12 & 28 & 0\end{pmatrix}$ ✓

b) $-5A+2B = \begin{pmatrix}25 & 5 & -15\\ 15 & -35 & 0\end{pmatrix} + \begin{pmatrix}-4 & 2 & 8\\ 2 & 2 & -2\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}21 & 7 & -7\\ 17 & -33 & -2\end{pmatrix}$ ✓

c) $3C-4D = \begin{pmatrix}12 & -3\\ 6 & 9\\ -3 & 9\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}-4 & 4\\ 8 & 12\\ -8 & 20\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}8 & 1\\ 14 & 21\\ -11 & 29\end{pmatrix}$

d) $C\cdot D$ = no tiene solución

e) $(3B)(5C) = \begin{pmatrix}-6 & 3 & 12\\ 3 & 3 & -3\end{pmatrix}\cdot\begin{pmatrix}20 & -5\\ 10 & 15\\ -5 & 15\end{pmatrix} \longrightarrow 2\times3 \wedge 3\times2$ $= (3B)(5C)_{2\times2} = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-150 & 255\\ 105 & -15\end{pmatrix}$ ✓

$a_{11} = -120+30-60 = -150$
$a_{12} = +30+45+180 = 255$
$a_{21} = 60+30+15 = 105$
$a_{22} = -15+45-45 = -15$

f) $A\cdot C = \begin{pmatrix}a_{11} & a_{12}\\ a_{21} & a_{22}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}-25 & 11\\ 2 & 24\end{pmatrix}$ ✓

$a_{11} = -20-2-3 = -25$
$a_{12} = 5-3+9 = 11$
$a_{21} = -12+14+0 = 2$
$a_{22} = 3+21+0 = 24$

2. Sea $A=\begin{pmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{pmatrix}$ y $f(x)=x^2+2x-11$. Evalúe $f(A)$.

$f(A) = A^2 + 2A - 11I$

$= \underbrace{\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix}} + 2\begin{vmatrix}1 & 2\\ 4 & -3\end{vmatrix} - 11\begin{vmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{vmatrix} = \begin{vmatrix}1(1)+2(4) & 1(2)+2(-3)\\ 4(1)-3(4 & 4(2)-3(-3)\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}9 & -4\\ -8 & 17\end{vmatrix} + \begin{vmatrix}2 & 4\\ 8 & -6\end{vmatrix} - \begin{vmatrix}11 & 0\\ 0 & 11\end{vmatrix}$

$= \begin{vmatrix}0 & 0\\ 0 & 0\end{vmatrix} = \varnothing$

3. Calcule el determinante de las siguientes matrices

$a)\ \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix}\quad b)\ \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix}\quad c)\ \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix}\quad d)\ \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix}$

1) Regla de Sarrus.

$$A = \left(\begin{array}{ccc|cc} 1 & -2 & 1 & 1 & -2 \\ -5 & 5 & 1 & -5 & 5 \\ 0 & 0 & 3 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$$|A| = (15+0+0)-(0+0+30)$$

$$|A| = 15-30 = -15 \ \checkmark$$

$$B = \left(\begin{array}{ccc|cc} -1 & 1 & 2 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 1 & 2 & -1 \\ -2 & -3 & 4 & -2 & -3 \end{array}\right)$$

$$|B| = (4-2-12)-(4+3+8)$$

$$|B| = -10-15 = -25 \ \checkmark$$

$$C = \left(\begin{array}{ccc|cc} 3 & -3 & 3 & 3 & -3 \\ 4 & -3 & 5 & 4 & -3 \\ 1 & 0 & 2 & 1 & 0 \end{array}\right)$$

$$|C| = (-18-15+0)-(-9+0-24)$$

$$|C| = -33+33 = 0 \ \checkmark$$

$$D = \left(\begin{array}{ccc|cc} 0 & 0 & -3 & 0 & 0 \\ 0 & 2 & 0 & 0 & 2 \\ 4 & 0 & 0 & 4 & 0 \end{array}\right)$$

$$|D| = (0+0+0)-(-24+0+0)$$

$$|D| = 24 \ \checkmark$$

2) Cofactores

$$A = \begin{pmatrix} 1 & -2 & 1 \\ -5 & 5 & 1 \\ 0 & 0 & 3 \end{pmatrix} = 3\underbrace{\begin{vmatrix} 1 & -2 \\ -5 & 5 \end{vmatrix}}_{-5}$$

$$|A| = 3\cdot -5 = -15$$

$$B = \begin{pmatrix} -1 & 1 & 2 \\ 2 & -1 & 1 \\ -2 & -3 & 4 \end{pmatrix} = -1\underbrace{\begin{vmatrix} -1 & 1 \\ -3 & 4 \end{vmatrix}}_{1} -1\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ -2 & 4 \end{vmatrix}}_{-10} 2\underbrace{\begin{vmatrix} 2 & -1 \\ -2 & -3 \end{vmatrix}}_{-16}$$

$$|B| = -25 \ \checkmark$$

$$C = \begin{pmatrix} 3 & -3 & 3 \\ 4 & -3 & 5 \\ 1 & 0 & 2 \end{pmatrix} =$$

$$3\underbrace{\begin{vmatrix} -3 & 5 \\ 0 & 2 \end{vmatrix}}_{-18}\ 3\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & 5 \\ 1 & 2 \end{vmatrix}}_{9}\ 3\underbrace{\begin{vmatrix} 4 & -3 \\ 1 & 0 \end{vmatrix}}_{9}$$

$$|C| = 0 \ \checkmark$$

$$D = \begin{pmatrix} 0 & 0 & -3 \\ 0 & 2 & 0 \\ 4 & 0 & 0 \end{pmatrix} = -3\begin{vmatrix} 0 & 2 \\ 4 & 0 \end{vmatrix}$$

$$-3\cdot(-24)$$

$$|D| = 24$$

Para encontrar matriz inversa:

Formula: $A^{-1} = \dfrac{Adj(A^t)}{|A|}$

Paso 1: Buscar determinante.
Paso 2: Hacer matriz transpuesta (Filas x Columnas ⟶ Columnas x Filas)
Paso 3: Encontrar adjunto de cada valor para A^t (determinante, tener en cuenta signos) $\begin{pmatrix} + & - & + \\ - & + & - \\ + & - & + \end{pmatrix}$
Paso 4: dividir cada valor de $Adj(A^t)$ por determinante de matriz A.
Obs: Si $|A| = 0$, no tiene inversa.

1) $A = \begin{vmatrix} 4 & 1 & 3 \\ 2 & 1 & 4 \\ 0 & 1 & 2 \end{vmatrix} = |A| = \left|\begin{array}{ccc:cc} 4 & 1 & 3 & 4 & 1 \\ 2 & 1 & 4 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 2 & 0 & 1 \end{array}\right|$ $(8+0+6)-(0+16+4)$

$14 - 20 = -6$

$|A| = -6$

2) $A^t = \begin{vmatrix} 4 & 2 & 0 \\ 1 & 1 & 1 \\ 3 & 4 & 2 \end{vmatrix}$

$(1 \cdot 4) - (3 \cdot 1)$

$4 - 3$

3) $Adj(A^t) = \begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}$

4) $A^{-1} = \dfrac{\begin{vmatrix} -2 & 1 & 1 \\ -4 & 8 & -10 \\ 2 & -4 & 1 \end{vmatrix}}{-6} = \begin{vmatrix} 1/3 & -1/6 & -1/6 \\ 2/3 & -4/3 & 5/3 \\ -1/3 & 2/3 & -1/6 \end{vmatrix}$

4. Para qué valores de x, la matriz es invertible

$a)$ $\begin{pmatrix} x^2+x & x+1 \\ x-1 & 1 \end{pmatrix}$ $\qquad$ $b)$ $\begin{pmatrix} x^2-1 & x+2 \\ x^2-2x+3 & x \end{pmatrix}$

$$|A| = (x^2 + x \cdot 1) - ((x-1)\cdot(x+1)) = 0$$
$$x^2 + x - (x^2 + x - x - 1)$$
$$(\cancel{x^2} + x - \cancel{x^2} + 1)$$
$$x + 1 = 0$$
$$x = -1$$

A tiene inversa Para $\forall x \in \mathbb{R} - \{1\}$

$$|B| = ((x^2 - 1)\cdot(x)) - ((x^2 - 2x + 3)(x + 2)) = 0$$
$$x^3 - x - (x^3 + \cancel{2x^2} - \cancel{2x^2} - 4x + 3x + 6) = 0$$
$$x^3 - x - (x^3 - x + 6) = 0$$
$$\cancel{x^3} - \cancel{x} - \cancel{x^3} + \cancel{x} - 6 = 0$$

$|B|$

5. Encuentre la inversa, si existe, de las siguientes matrices

$$\begin{pmatrix} -1 & 2 & 1 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 2 \end{pmatrix}, \qquad \begin{pmatrix} 1 & -2 & 3 \\ 3 & -4 & 5 \\ -2 & 1 & 6 \end{pmatrix}$$

$$A = \begin{vmatrix} -1 & 2 & 1 & -1 & 2 \\ 0 & 1 & 0 & 0 & 1 \\ 1 & -1 & 2 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$|A| = -3$$

$$A^t = \begin{vmatrix} -1 & 0 & 1 \\ 2 & 1 & -1 \\ 1 & 0 & 2 \end{vmatrix} \qquad = \begin{vmatrix} -1 & 0 \\ 2 & 1 \end{vmatrix} \qquad = -1$$

$$Adj(A^t) = \begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}$$

$$A^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} 2 & 5 & -1 \\ 0 & -3 & 0 \\ -1 & 1 & -1 \end{vmatrix}}{-3} = \begin{vmatrix} -2/3 & 5/3 & 1/3 \\ 0 & 1 & 0 \\ 1/3 & -1/3 & 1/3 \end{vmatrix}$$

$$B = \begin{vmatrix} 1 & -2 & 3 & 1 & -2 \\ 3 & -4 & 5 & 3 & -4 \\ -2 & 1 & 6 & -2 & 1 \end{vmatrix} = (-24 + 20 + 9) - (+24 + 5 - 36)$$
$$5 - (-7)$$
$$12$$

$$|B| = 12 \checkmark$$

$$B^t = \begin{vmatrix} 1 & 3 & -2 \\ -2 & -4 & 1 \\ 3 & 5 & 6 \end{vmatrix} \checkmark \qquad \begin{vmatrix} -4 & 1 \\ 5 & 6 \end{vmatrix} =$$

$$Adj(B^t) = \begin{vmatrix} -29 & 15 & 2 \\ -28 & 12 & 4 \\ -5 & 3 & 2 \end{vmatrix}$$

$$B^{-1} = \frac{\begin{vmatrix} -31 & 15 & 2 \\ -28 & 12 & 4 \\ 7 & 3 & 2 \end{vmatrix}}{12} = \begin{vmatrix} -29/12 & 5/4 & 1/6 \\ -7/3 & 1 & 1/3 \\ -5/12 & 1/4 & 1/6 \end{vmatrix}$$

6. Resolver la ecuación $Ax = b$, siendo

$$A = \begin{pmatrix} 6 & 4 & 6 \\ 4 & 6 & -2 \\ 2 & 10 & 4 \end{pmatrix}, \quad b = \begin{pmatrix} 4 \\ 2 \\ 4 \end{pmatrix}$$

1) Ocupar el inverso de la matriz A para aislar x.
2) Despues multiplicar el inverso por Ax ; $A^{-1} \cdot A x = A^{-1} \cdot B$
3) $I \cdot x = A^{-1} \cdot B$
4) $x = A^{-1} \cdot B$

Matriz Inversa : Metodo Gauss jordan

$$B = \left|\begin{array}{cc:cc} 2 & 6 & 1 & 0 \\ 1 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

F_2 $\left|\begin{array}{cccc} 2 & 6 & 1 & 0 \end{array}\right.$

$$A = \left|\begin{array}{cc:cc} 1 & 3 & 1 & 0 \\ 2 & 4 & 0 & 1 \end{array}\right|$$

$$\begin{array}{l|cccc|} 4F_1 - 3F_2 & & & & \\ F_2 - 2F_1 & 0 & -2 & 2 & 1 \end{array}$$

$$\begin{array}{cccc} 4 & 12 & 4 & 0 \\ -6 & -12 & 0 & -3 \\ \hline -2 & 0 & 4 & -3 \end{array}$$

7. Sea $A = \begin{pmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{pmatrix}$. Halle, si existe, una matriz B tal que $A^2 + A = AB$.

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & 1 & 1 \\ 0 & -1 & 0 \\ 4 & -3 & 2 \end{vmatrix} + \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 2 & 0 & 2 \\ 2 & -2 & 0 \\ 6 & -2 & 2 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} B$$

$$\begin{vmatrix} 1 & -1 & 1 \\ 2 & -1 & 0 \\ 2 & 1 & 0 \end{vmatrix} \cdot$$

$$A^2 + A = AB \quad | \cdot A^{-1}$$

$$A^{-1} \cdot A^2 + A^{-1} A = A^{-1} \cdot AB$$

$$A + I = B$$