Cálculo Integral I
Cálculo II

OBJETIVOS:

- Calcular integrales indefinidas a través de reglas de integración.
- Resolver problemas de valor inicial (determinar la constante de integración).
- Aplicar e interpretar los problemas de valor inicial en economía.

1. Calculas las siguientes integrales indefinidas.

   a) $\int -3dx.$

   b) $\int dx.$

   c) $\int s^5 ds.$

   d) $\int \sqrt{t}dt.$

   e) $\int \frac{1}{s^2}ds.$

   f) $\int 3e^x dx.$

   g) $\int \left(\frac{1}{w^2} - \frac{1}{w^3}\right) dw.$

   h) $\int u^{-2/5}du.$

   i) $\int (3t^2 - \sqrt{5t} + 2)dt.$

   j) $\int (s^{1/3} - 3s^{-2/3} + 6)ds.$

   k) $\int (3\sqrt{y} - 2y^{-3})dy.$

   l) $\int \left(\frac{1}{2w} - \frac{2}{w^2} + \frac{3}{\sqrt{w}}\right) dw.$

   m) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{2}\right) dx.$

   n) $\int t\left(1 - \frac{1}{t}\right) dt.$

   ñ) $\int \left(2e^s + \frac{6}{s} - s^3 + \ln 2\right) ds.$

   o) $\int (x^3 - 2x^2)\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx.$

   p) $\int \left((e^w + 1)^2 - e^{2w}\right) dw.$

   q) $\int \frac{1}{x^2}(x+1)^2 dx.$

   r) $\int \ln(e^{-w^2})dw.$

   s) $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x}dx.$

   t) $\int \frac{u^4 + 10u^3}{2u^2}du.$

   u) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{5x}dx.$

INDICACIÓN 1: Por ser la integración un proceso inverso a la derivada (de ahí recibe el nombre de antiderivada) es posible establecer que si $y = y(x)$ satisface $\frac{dy}{dx} = F(x)$ entonces

$$y(x) = \int F(x)dx = G(x) + C,$$

donde $G(x)$ es la función que se obtiene al integrar $F(x)$. Luego si se quiere determinar explícitamente $y(x)$ necesitamos conocer la constante de integración. Esto es posible si conocemos $y(x_0) = y_0$ (valor inicial) para algún x_0, pues es posible despejar

$$y_0 = G(x_0) + C \Leftrightarrow C = y_0 - G(x_0).$$

Al proceso anterior se le denomina problema de valor inicial.

2. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial para $y = f(x)$.

   a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 2$, donde $y = 2$ si $x = -1$.

   b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$, si $y(0) = 3$.

   c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}$, donde $y = -1$ si $x = 1$.

   d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$, si $y(4) = 5$.

   e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3}{x}$, donde $y = 2$ si $x = 1$.

   f) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 4$, si $y(-1) = \dfrac{13}{2}$.

   INDICACIÓN 2: Recuerda que el costo total de fabricar q unidades de un producto se determina por $C_T(q) = C_0 + C_V(q)$ donde C_0 corresponde al costo fijo ($C_T(0) = C_0$, costo de fabricar cero unidades) y $C_V(q)$ corresponde al costo variable. El costo marginal se define por $C_M(q) = \dfrac{dC_T}{dq}$ e interpreta la variación (aumento o disminución) del costo total a medida que varía la cantidad de unidades producidas. De acuerdo a la **INDICACIÓN 1** es posible establecer que

$$C_T(q) = \int C_M(q)dq = F(q) + C,$$

   donde $F(q)$ es la función que se tiene al integrar $C_M(q)$ y C es la constante relacionada al problema de valor inicial respectivo.

3. Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dC}{dq} = 0{,}003q^2 - 0{,}4q + 40,$$

   donde q es el número de unidades producidas. Si el costo fijo es de \$5000 ¿Cuál es el costo de producir 100 unidades?

4. El costo marginal de una empresa está dado por

$$C'(x) = 24 - 0{,}03x + 0{,}006x^2.$$

   Si el costo de producir 200 unidades es \$22700 ¿ Cuál es el costo de producir 500 unidades?

5. El costo marginal de cierto producto (en dólares) en una empresa se define por $C'(x) = 3 + 0,001x$, donde x es la cantidad de unidades producidas. Si el costo de fabricar 100 unidades es de \$1005 ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades?

6. Suponga que la función de consumo nacional de cierto país es $C(x)$, donde x es el ingreso nacional disponible. Entonces, la propensión marginal al consumo es: $C'(x) = \dfrac{dC}{dx}(x)$. Suponga que x y C se miden en billones de dólares y $C'(x) = 0{,}9 + 0{,}3\sqrt{x}$. Si el consumo es de 10 billones cuando $x = 0$, encuentre $C(x)$.

3. Un fabricante ha determinado que la función de costo marginal es

$$\frac{dC}{dq} = 0{,}003q^2 - 0{,}4q + 40,$$ Costo marginal $\longrightarrow$ Antiderivada $+ K$

donde q es el número de unidades producidas. Si el costo fijo es de \$5000 ¿Cuál es el costo de producir 100 unidades? $q = 100$

Sol: Determinar la Función de costo

Costo Fijo
$C(0) = 5000$

$$C(q) = \int [0{,}003q^2 - 0{,}4q + 40]\, dq + K$$

$$C(q) = \frac{0{,}003q^3}{3} - \frac{0{,}4q^2}{2} + 40q + K,$$

$$C(q) = \frac{0{,}003q^3}{3} - \frac{0{,}4q^2}{2} + 40q + 5000$$

$$C(100) = 8000.$$

R: El costo de producir 100u es de \$8000.

4. El costo marginal de una empresa está dado por

$$\frac{dC}{dq} = C'(x) = 24 - 0{,}03x + 0{,}006x^2.$$

Si el costo de producir 200 unidades es \$22700 ¿ Cuál es el costo de producir 500 unidades?

$C'(x) = 24 - 0{,}03x + 0{,}006x^2,$

$C(200) = 22\,700$

¿ $C(500)$?

Sd: $C(x) = \int (24 - 0{,}03x + 0{,}006x^2)\,dx + K$

$$C(x) = 24x - \frac{0{,}03x^2}{2} + \frac{0{,}006x^3}{3} + K$$

$$C(200) = 22700 = 24 \cdot 200 - \frac{0{,}03}{2} \cdot 200^2 + \frac{0{,}006}{3} \cdot 200^3 + K$$

Despejando $K = 22700 - 20200$
$K = 2500$

$$C(x) = 24(x) - \frac{0{,}03x^2}{2} + \frac{0{,}006x^3}{3} + 2500$$

luego
$C(500) = 260750$

R: el costo de producir 500 unidades es de \$ 260750

5. El costo marginal de cierto producto (en dólares) en una empresa se define por $C'(x) = 3 + 0,001x$, donde x es la cantidad de unidades producidas. Si el costo de fabricar 100 unidades es de \$1005 ¿Cuál es el costo de producir 200 unidades?

$C'(x) = 3 + 0,001x$
$C(100) = 1005$
$¿C(200) = \ ?$

Solución:

$$C(x) = \int (3 + 0,001x)\,dx + K$$

$$C(x) = 3x + \frac{0,001x^2}{2} + K$$

$$C(100) = 1005 = 3 \cdot (100) + \frac{0,001(100)^2}{2} + K$$

Despejando K

$$1005 = K + 305$$
$$-K = 305 - 1005$$
$$-K = -700 \quad / \cdot -1$$
$$K = 700$$

$$C(x) = 3x + \frac{0,001(x)^2}{2} + 700$$

$$C(200) = 3(200) + \frac{0,001(200)^2}{2} + 700$$

$$C(200) = 1320$$

Resultado: el costo de producir 200 unidades es de \$1320.

6. Suponga que la función de consumo nacional de cierto país es $C(x)$, donde x es el ingreso nacional disponible. Entonces, la propensión marginal al consumo es: $C'(x) = \frac{dC}{dx}(x)$. Suponga que x y C se miden en billones de dólares y $C'(x) = 0{,}9 + 0{,}3\sqrt{x}$. Si el consumo es de 10 billones cuando $x = 0$, encuentre $C(x)$.

¿$C(x) =$?

$C'(x) = 0{,}9 + 0{,}3\sqrt{x}$

$C(0) = 10$

Solución:

$$C(x) = \int (0{,}9 + 0{,}3\sqrt{x})\,dx$$

$$C(x) = 0{,}9x + \frac{0{,}3 \cdot x^{3/2}}{3/2} + K = 0{,}9x + \frac{2x^{3/2}}{3} + K$$

$$C(0) = 0{,}9x + \frac{2x^{3/2}}{3} + K = 10$$

$$K = 10B$$

2. Resuelve los siguientes problemas de valor inicial para $y = f(x)$.

a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 2$, donde $y = 2$ si $x = -1$.

b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$, si $y(0) = 3$.

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}$, donde $y = -1$ si $x = 1$.

d) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{x+1}{\sqrt{x}}$, si $y(4) = 5$.

e) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2x+3}{x}$, donde $y = 2$ si $x = 1$.

f) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 4$, si $y(-1) = \dfrac{13}{2}$.

a) $\dfrac{dy}{dx} = 3x - 2$

$y(x) = \int (3x-2)dx + K$

$y(x) = \dfrac{3x^2}{2} - 2x + K$

$y(-1) = 2 = \dfrac{3}{2} + 2 + K$

$\dfrac{3}{2} + 2 - 2 + K$

$K = \dfrac{-3}{2} - 2 + 2$

$K = \dfrac{-3}{2}$

luego

$y = \dfrac{3}{2}x^2 - 2x - \dfrac{3}{2}$

b) $\dfrac{dy}{dx} = e^x$

$y(x) = \int e^x dx + K$

$y(x) = e^x + K$

$y(0) = 3 = e^x + K$

$-K = e^x - 3$

$K = -e^x + 3$

$K = -1 + 3$

$K = 2$

luego $y = e^x + 2$

c) $\dfrac{dy}{dx} = \dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}$

$y(x) = \int \left(\dfrac{2}{x} - \dfrac{1}{x^3}\right)dx$

$y(x) = 2\ln(|x|) - \dfrac{x^{-2}}{-2} + K$

$y(1) = -1 = 2\ln(|x|) + \dfrac{x^{-2}}{2} + K$

$2\ln(|x|) + \dfrac{x^{-2}}{2} + 1 + K$

$K = -2\ln(|1|) - \dfrac{1^{-2}}{2} - 1$

$K = -\dfrac{3}{2}$

luego $y = 2\ln(|x|) - \dfrac{x^{-2}}{-2} - \dfrac{3}{2}$

l) $\displaystyle\int \left(\frac{1}{2w} - \frac{2}{w^2} + \frac{3}{\sqrt{w}}\right) dw.$

m) $\displaystyle\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{2}\right) dx.$

n) $\displaystyle\int t\left(1 - \frac{1}{t}\right) dt.$

ñ) $\displaystyle\int \left(2e^s + \frac{6}{s} - s^3 + \ln 2\right) ds.$

o) $\displaystyle\int (x^3 - 2x^2)\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx.$

p) $\displaystyle\int \left((e^w + 1)^2 - e^{2w}\right) dw.$

q) $\displaystyle\int \frac{1}{x^2}(x+1)^2 dx.$

r) $\displaystyle\int \ln(e^{-w^2}) dw.$

s) $\displaystyle\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x} dx.$

t) $\displaystyle\int \frac{u^4 + 10u^3}{2u^2} du.$

u) $\displaystyle\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{5x} dx.$

l) $\int \left(\frac{1}{2w} - \frac{2}{w^2} + \frac{3}{\sqrt{w}}\right) dw.$

m) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{2}\right) dx.$

n) $\int t\left(1 - \frac{1}{t}\right) dt.$

ñ) $\int \left(2e^s + \frac{6}{s} - s^3 + \ln 2\right) ds.$

o) $\int (x^3 - 2x^2)\left(\frac{1}{x} - 1\right) dx.$

l) $\int \left(\frac{1}{2w} - \frac{2}{w^2} + \frac{3}{\sqrt{w}}\right) dw$

$\frac{1}{2}\int \frac{1}{w} dw - 2\int \frac{1}{w^2} dw + 3\int \frac{1}{\sqrt{w}} dw$

$\frac{1}{2} \cdot \ln(|w|) + 2\,\underline{w^{-1}} + 3.\frac{w^{1/2}}{1/2}$

m) $\int \left(\sqrt{x^3} - \frac{1}{2\sqrt{x}} - \sqrt{2}\right) dx$

$\int x^{3/2} dx - \frac{1}{2}\int \left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right) dx - \int 2^{1/2} dx$

$\frac{2x^{5/2}}{5} - \frac{1}{2} \cdot \frac{x^{1/2}}{1/2} - \sqrt{2} + C$

$\frac{2x^{5/2}}{5} - x^{1/2} - \sqrt{2} + c$

p) $\int ((e^w + 1)^2 - e^{2w})\, dw.$

q) $\int \frac{1}{x^2}(x+1)^2 dx.$

r) $\int \ln(e^{-w^2}) dw.$

s) $\int \frac{e^x + e^{2x}}{e^x} dx.$

t) $\int \frac{u^4 + 10u^3}{2u^2} du.$

u) $\int \frac{x^4 - 3x^2 + 4x}{5x} dx.$