



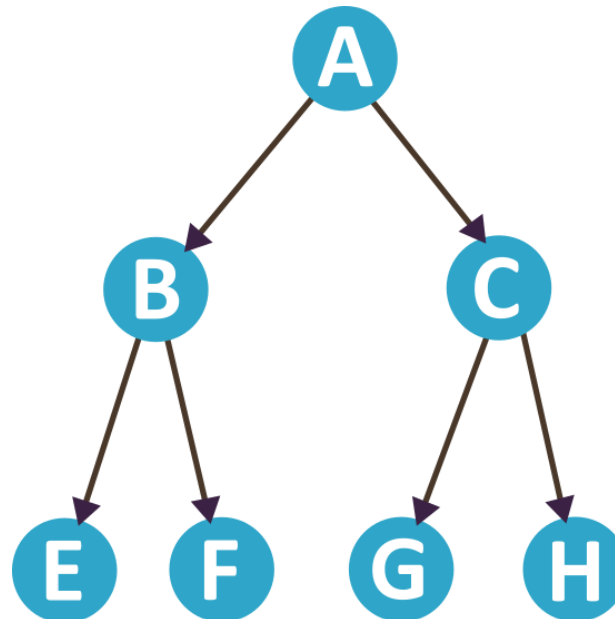
UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Estructura de Datos

Árbol AVL

Árbol AVL

Un árbol AVL es un tipo especial de árbol binario de búsqueda creado por los matemáticos rusos **A**delson-**V**elskii y **L**andis; quienes lo dieron a conocer en la publicación de un artículo en 1962, «An algorithm for the organization of information».

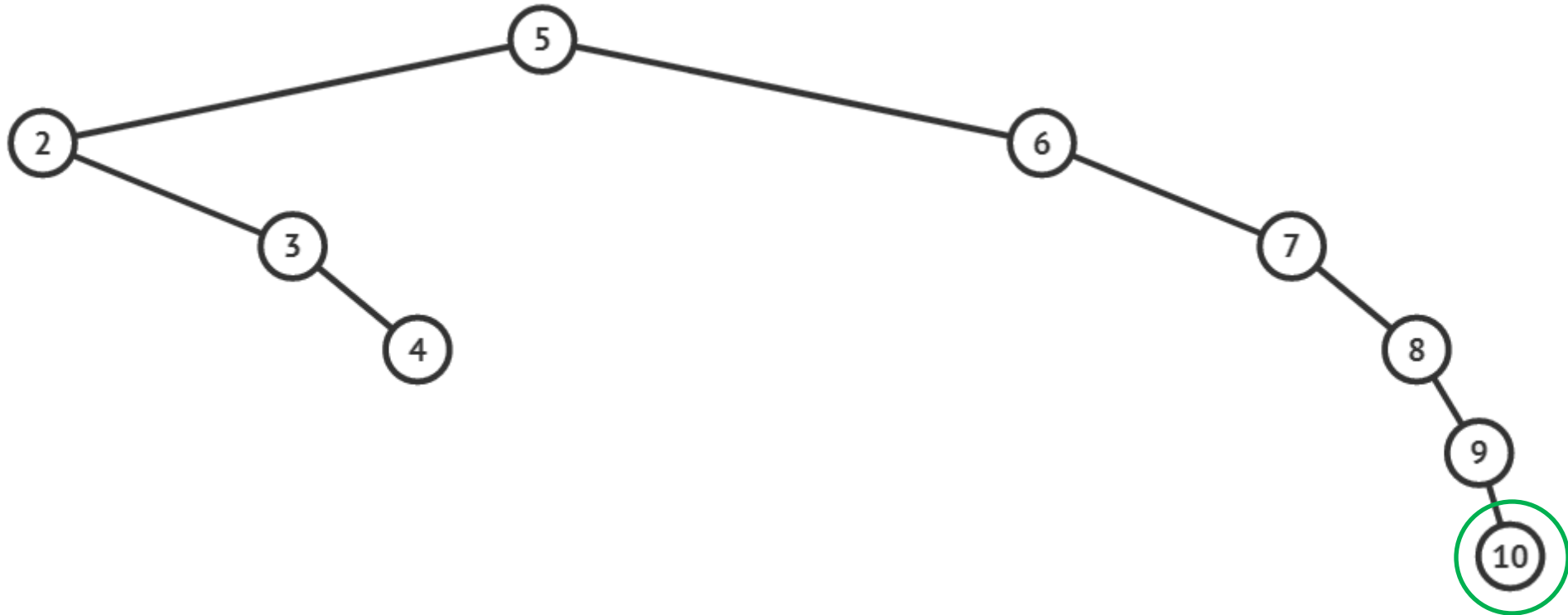


Árbol AVL

Los árboles AVL están siempre equilibrados de tal modo que para todos los nodos, la altura de la rama izquierda no difiere en **más de una unidad** de la altura de la rama derecha o viceversa.

Debido a esta forma de equilibrio (o balanceo), la complejidad de una búsqueda en uno de estos árboles se mantiene siempre en orden de complejidad $O(\log n)$. El factor de equilibrio puede ser almacenado directamente en cada nodo o ser calculado a partir de las alturas de los sub-árboles.

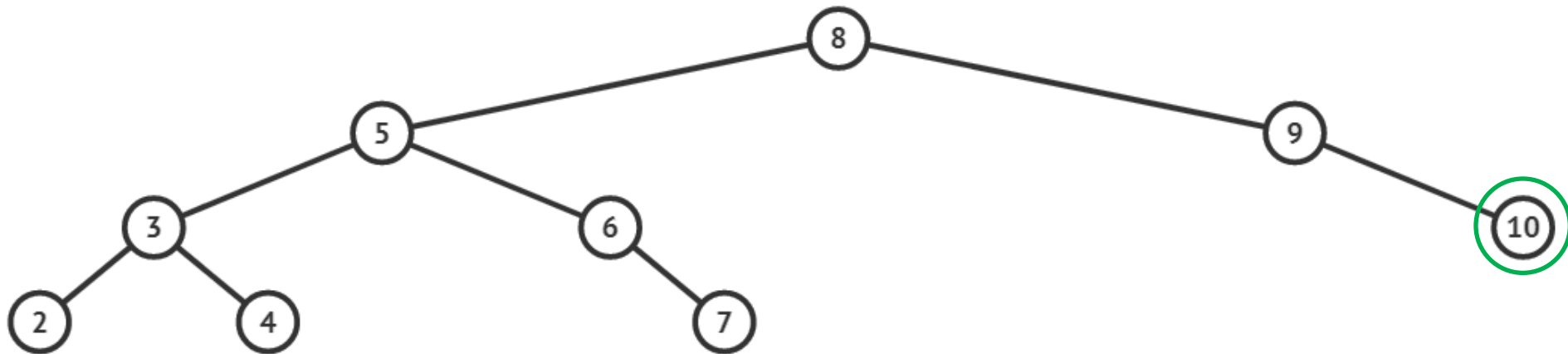
Árbol Desequilibrado



Orden ser inserción: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, 4

Para encontrar el Nodo 10, tomaría 6 instrucciones.

Árbol Equilibrado - AVL



Orden ser inserción: 5, 6, 7, 8, 9, 10, 2, 3, 4

Para encontrar el Nodo 10, toma 2 instrucciones.

Equilibrio en un Árbol ABB

Para conseguir esta propiedad de equilibrio, la inserción y el borrado de los nodos se ha de realizar de una forma especial. Si al realizar una operación de inserción o borrado se rompe la condición de equilibrio, hay que realizar una serie de rotaciones en los nodos.

Para asegurar de que el árbol dado continúe siendo un AVL después de cada inserción, se deberá ejecutar la operación común de inserción de un ABB, pero siempre después de cada inserción se debe verificar y ejecutar **rebalanceo entre los nodos si es necesario**. Existen dos operaciones básicas que se pueden realizar para volver a equilibrar el árbol sin violar la propiedad

Clave Izquierda < Clave Raíz < Clave Derecha

Estas operaciones son:

1. Rotación a la izquierda
2. Rotación a la derecha

¿Cómo saber cuándo equilibrar?

Para ello se necesita saber el valor asociado al factor de equilibrio, el cual se obtiene por medio de la diferencia entre la altura del árbol derecho e izquierdo y de dependiendo de su valor se re-equilibra o no el árbol.

Para calcular el factor de equilibrio se ocupa la siguiente formula:

$$\text{FE} = \text{altura subárbol derecho} - \text{altura subárbol izquierdo}$$

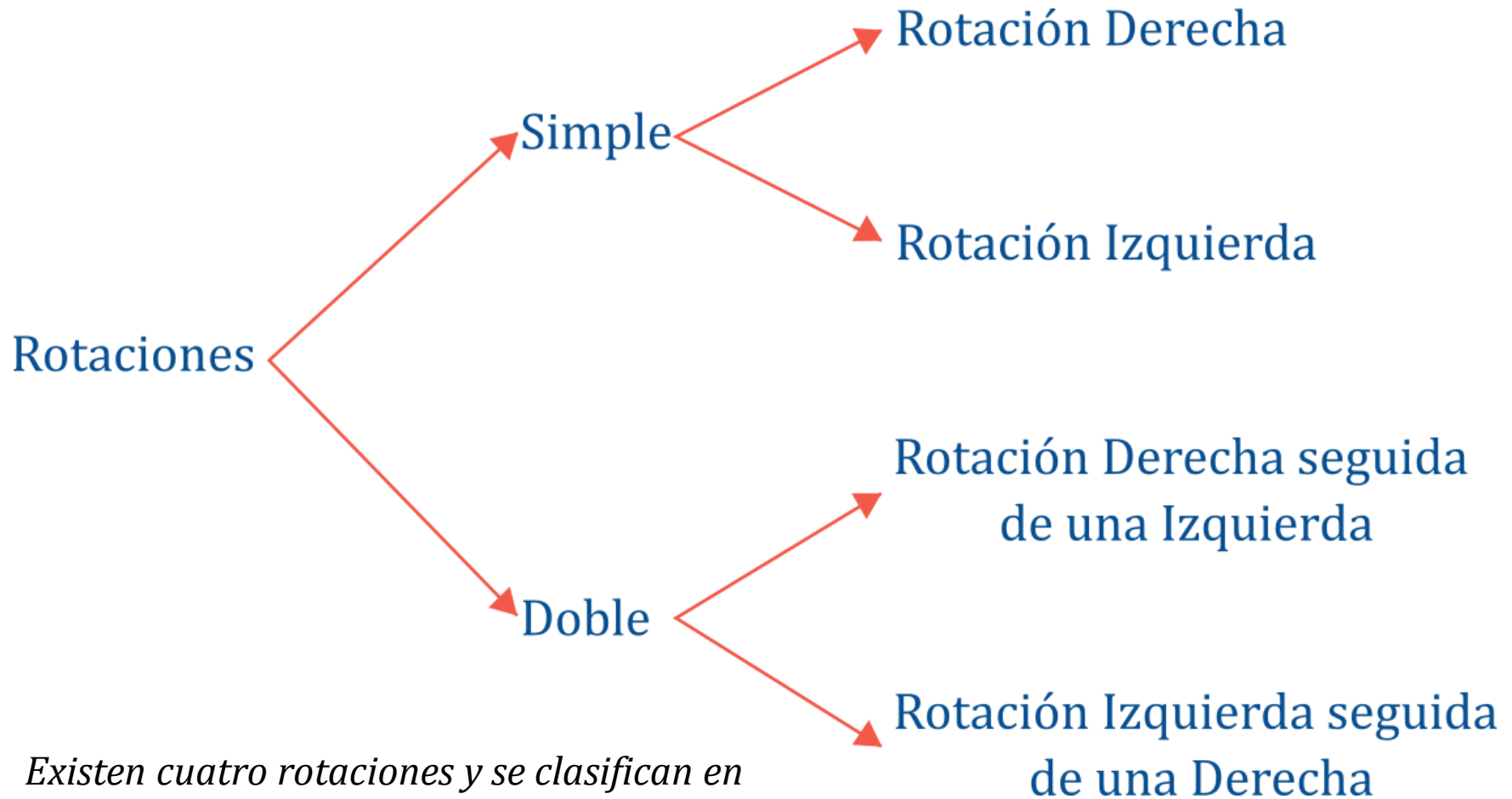
Por definición, para un árbol AVL, este valor debe ser -1, 0 ó 1.

Factor de equilibrio	
0	El nodo está equilibrado y sus sub-árboles tienen exactamente la misma altura.
1	El nodo está equilibrado y su sub-árbol derecho es un nivel más alto.
-1	El nodo está equilibrado y su sub-árbol izquierdo es un nivel más alto.
$ \text{FE} \geq 2$	Es necesario re-equilibrar

Operaciones de Rotación AVL

Siempre es necesario tener en cuenta que el re-equilibrio se produce de abajo hacia arriba sobre los nodos en los que se produce el desequilibrio. Pueden darse dos casos: rotación simple o rotación doble; a su vez ambos casos pueden ser hacia la derecha o hacia la izquierda.

Rotaciones

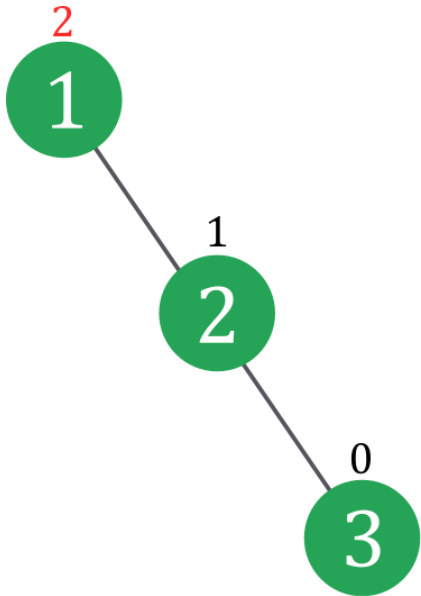


Existen cuatro rotaciones y se clasifican en dos tipos.

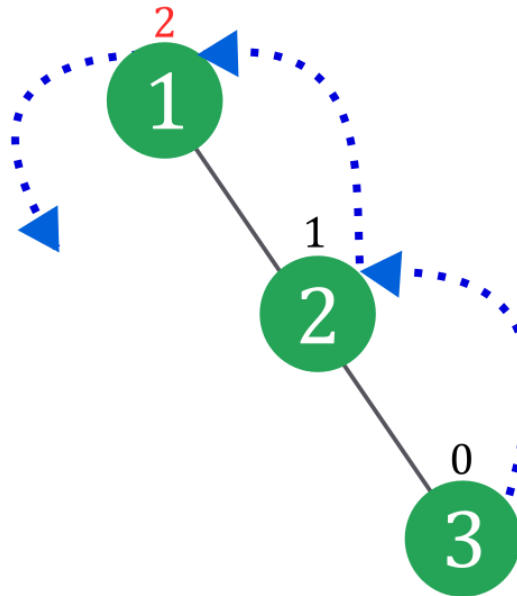
Rotación simple a la Izquierda

En la rotación simple izquierda, cada nodo se mueve una posición hacia la izquierda desde la posición actual.

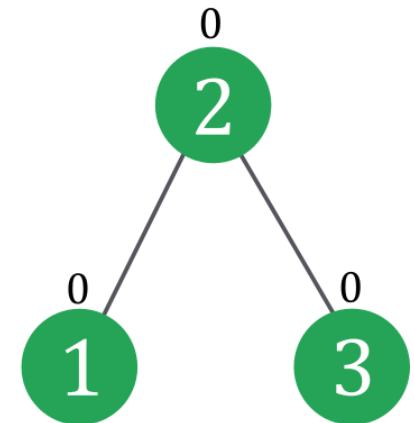
Árbol ingresado: 1, 2, 3



Árbol des-balanceado

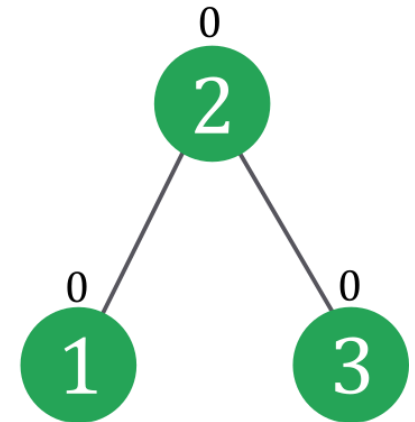


Mover Nodos uno a la izquierda



Árbol balanceado

Árbol ingresado: 3, 2, 1

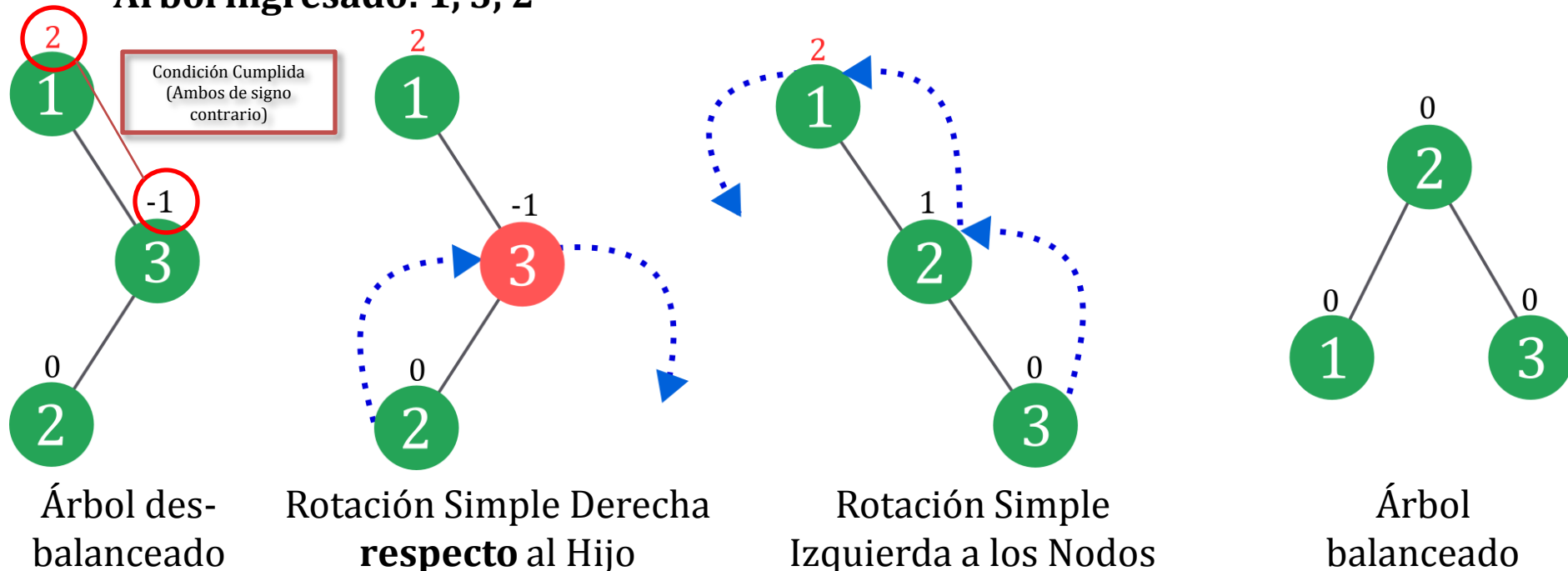


Árbol balanceado

Rotación doble a la Derecha o Derecha/Izquierda

Para hacer una rotación Doble a la derecha se debe verificar que la parte izquierda del árbol está en desequilibrio siendo la parte derecha la que está “Más cargada”, también se debe tener en cuenta que el FE debe ser mayor a 1 y que su sub-Nodo derecho debe tener un FE < 0, es decir debe ser negativo, al cumplir todas estas condiciones se deberá aplicar una doble rotación.

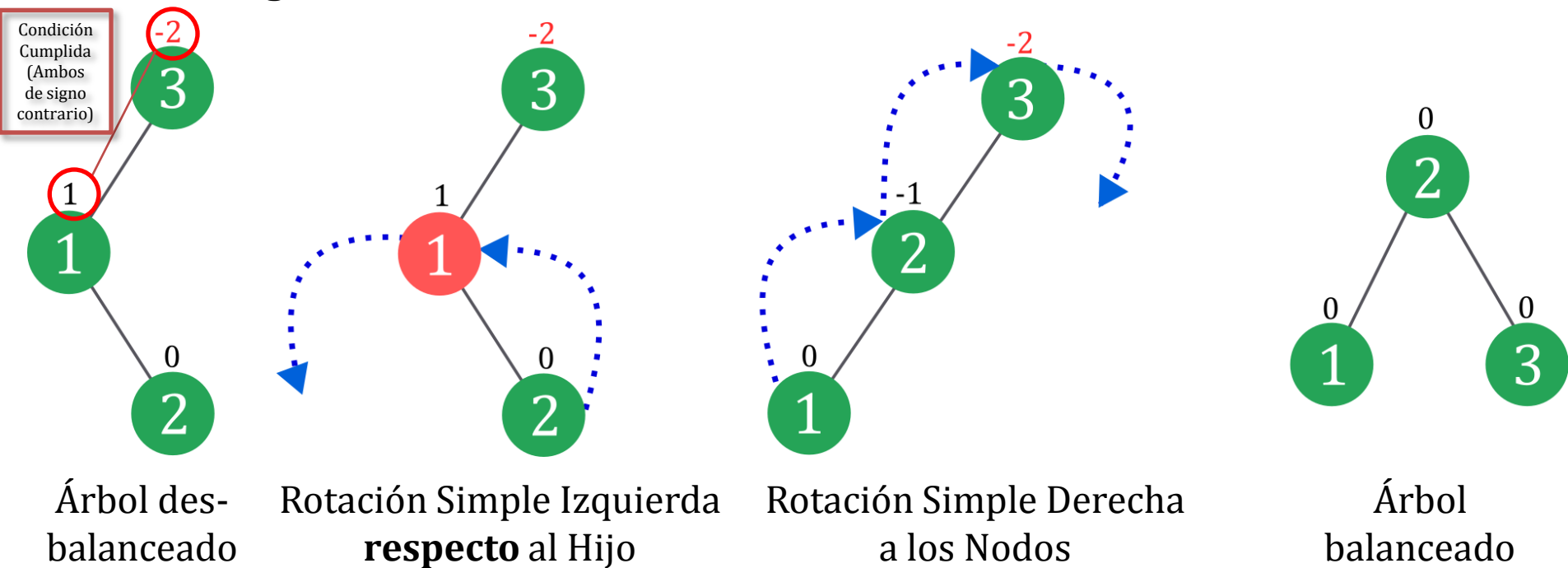
Árbol ingresado: 1, 3, 2



Rotación doble a la Izquierda o Izquierda/Derecha

Para hacer una rotación Doble a la izquierda se debe verificar que la parte derecha del árbol está en desequilibrio siendo la parte izquierda la que está “Más cargada”, también se debe tener en cuenta que el FE debe ser menor a -1 y que su sub-Nodo izquierdo debe tener un $FE > 0$, es decir debe ser positivo, al cumplir todas estas condiciones se deberá aplicar una doble rotación.

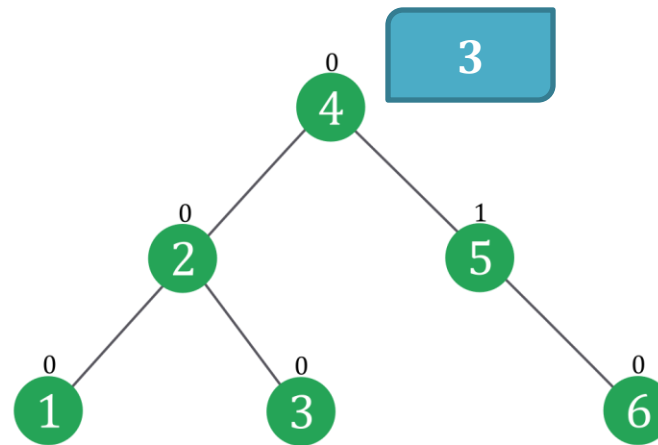
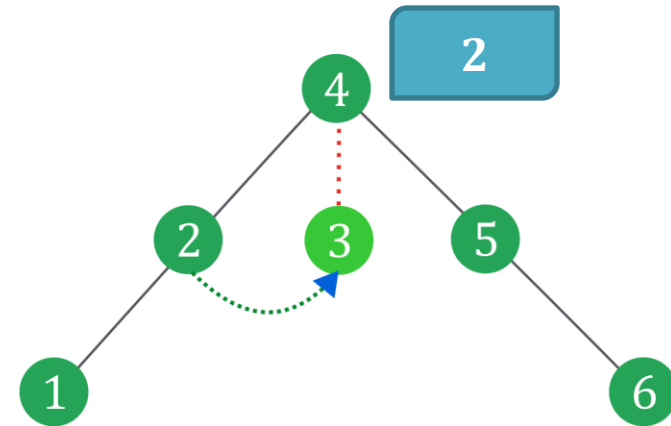
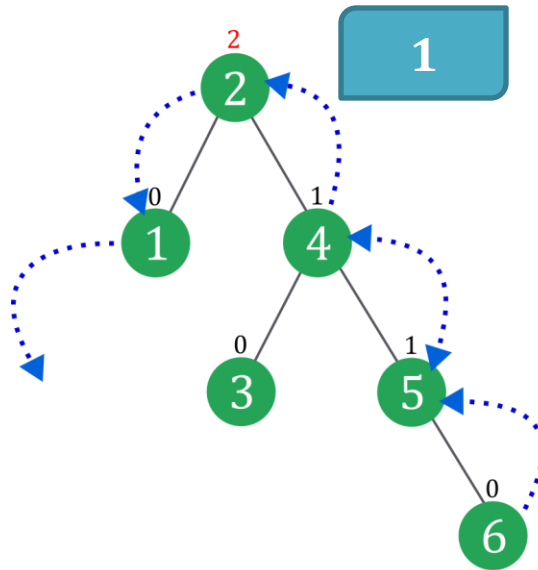
Árbol ingresado: 3, 1, 2



Caso Especial

Cuando se realiza una rotación y un Nodo **va a tener un nuevo hijo izquierdo/derecho pero ya tiene un Hijo**, dicho nodo es pasado al nuevo Hijo del Nodo.

1. Si su nuevo hijo es Izquierda, entonces recibe el Nodo en la rama Derecha.
2. Si su nuevo hijo es Derecha, entonces recibe el Nodo en la rama Izquierda.



Eliminación de Nodos

La operación de eliminación en AVL, es similar a la operación de eliminación en ABB, con la diferencia que por cada proceso de eliminación, se necesitará verificar el Factor de Equilibrio. Si el árbol está equilibrado después de la eliminación, se continua el proceso normal sin ningún cambio, de lo contrario, se deberá realizar una rotación adecuada para volver hacer un AVL.



UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

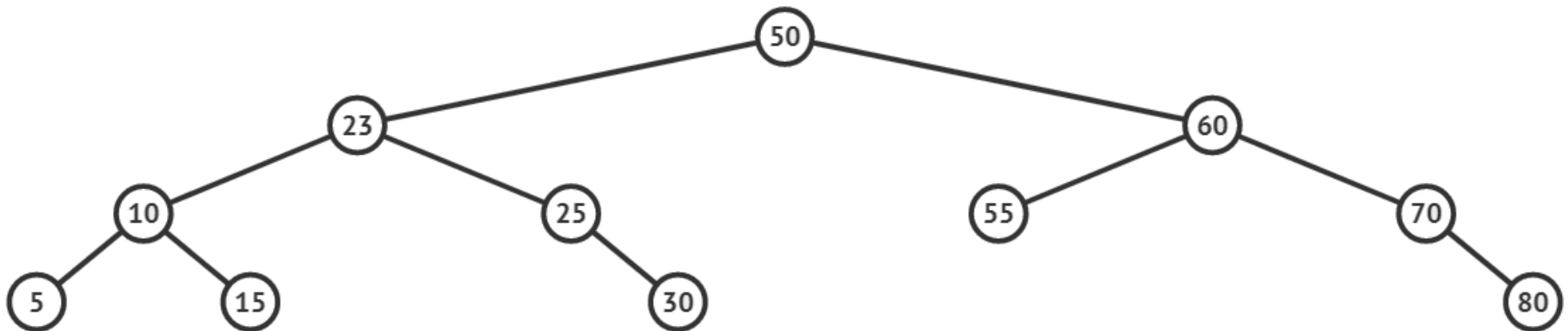
Ejercicios - Inserción

Ejercicio 1

Bajo los siguientes datos de entrada, crear un árbol balanceado

Nodos: 50, 23, 60, 10, 5, 25, 55, 70, 15, 30, 80

Resultado

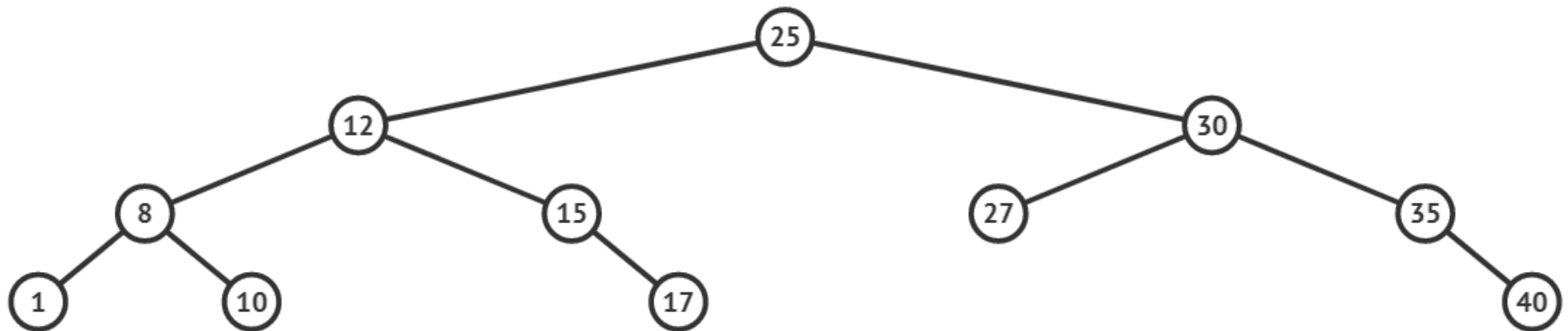


Ejercicio 2

Bajo los siguientes datos de entrada, crear un árbol balanceado

Nodos: 25, 10, 30, 27, 35, 12, 15, 8, 17, 40, 1

Resultado

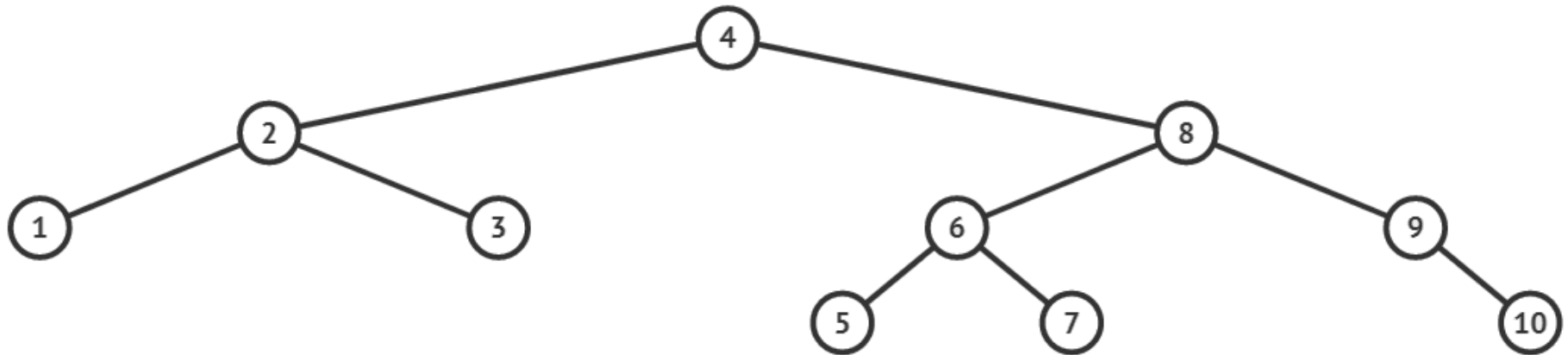


Ejercicio 3

Bajo los siguientes datos de entrada, crear un árbol balanceado

Nodos: 7, 6, 5, 4, 3, 2, 1, 8, 9, 10

Resultado

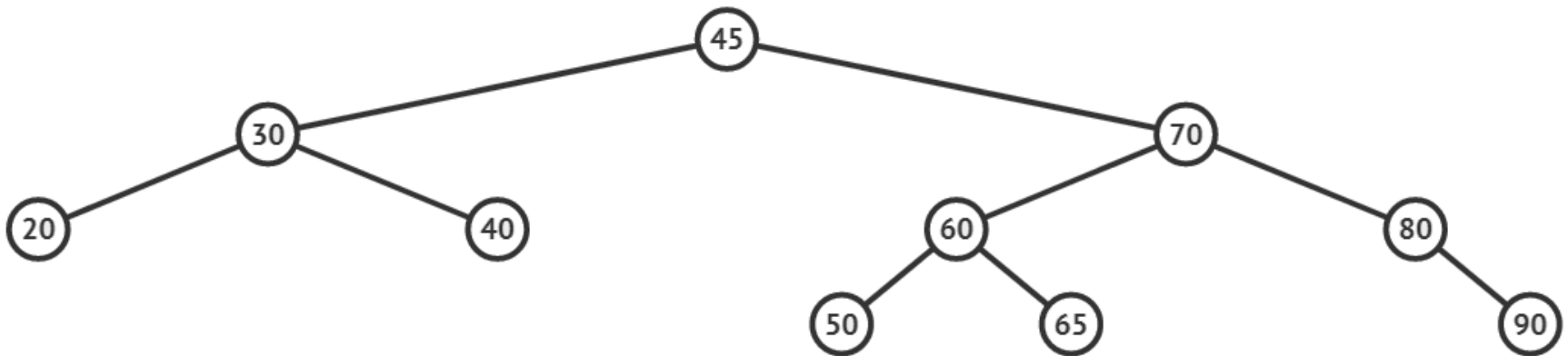


Ejercicio 4

Bajo los siguientes datos de entrada, crear un árbol balanceado

Nodos: 50, 40, 45, 30, 20, 60, 80, 70, 90, 65

Resultado



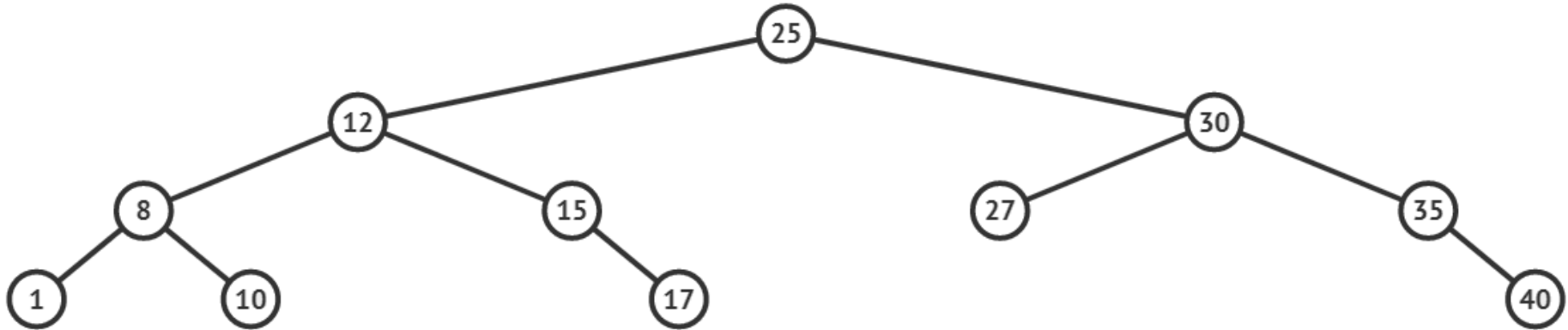


UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

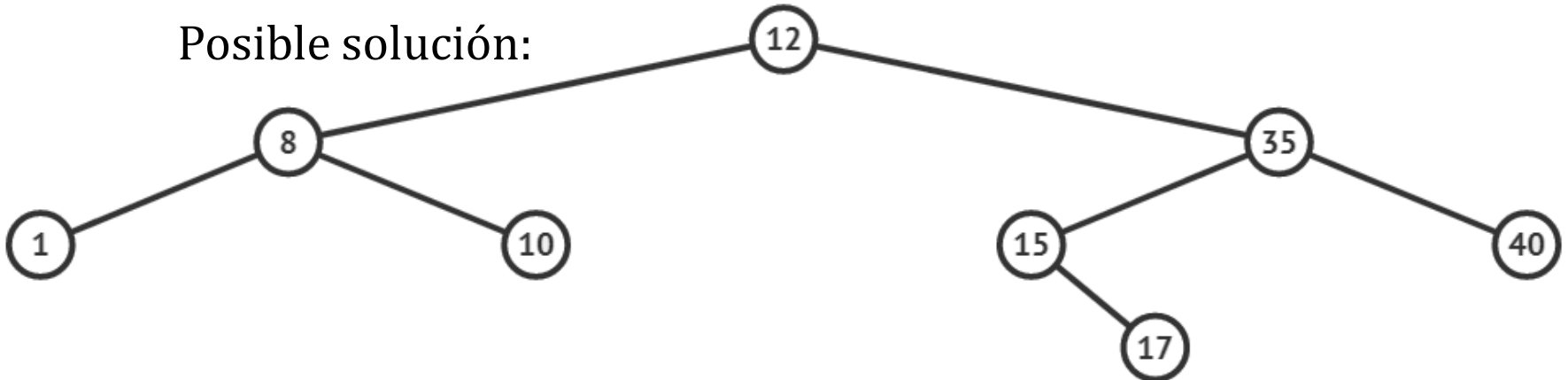
Ejercicios - Eliminación

Ejercicio 1

Elimine los siguientes
Nodos 27, 30, 25.

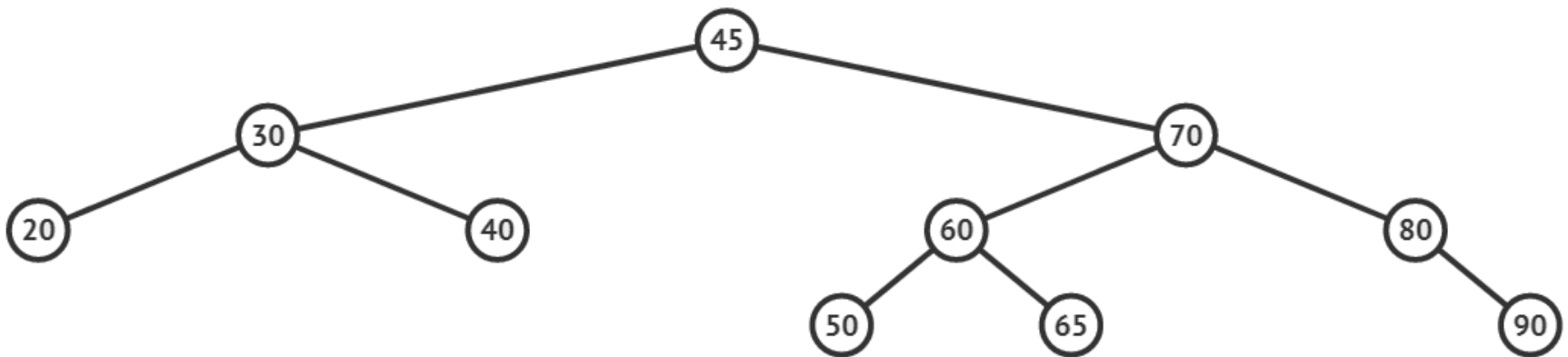


Posible solución:

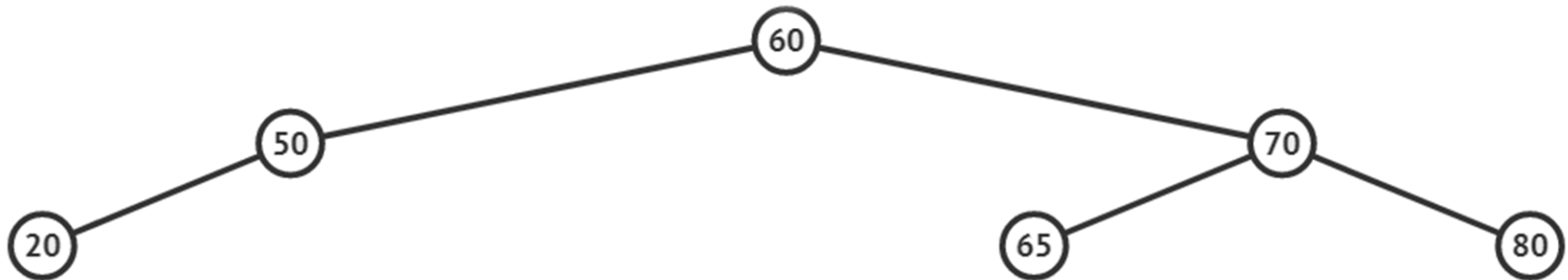


Ejercicio 2

Elimine los siguientes
Nodos 40, 45, 30, 90.



Posible solución:





UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO

Para visualizar el proceso de inserción y
eliminación (ABB/AVL) de manera
animada visitar

<https://visualgo.net/es/bst>