



SERIES DE TÉRMINOS CONSTANTES Y SERIES DE POTENCIAS Cálculo II

1. Muestre que las siguientes series divergen.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n\sqrt{n^2 + 1}}$$
.

c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$$
.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right).$$

d)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + e^{-n}\right).$$

2. Calcule la suma de las siguientes series geométricas.

a)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n 5^{-n}}{5}$$
.

c)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \pi 4^{n-1}$$
.

$$b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^n}.$$

$$d) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 2^{1-n}}{4^n}.$$

3. Use el criterio de comparación para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

$$a) \sum_{1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3 + 2n}.$$

$$b) \sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\ln(n)}.$$

c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-n}n}{n+1}$$
.

4. Utilice el criterio de paso al límite para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$$
.

$$b) \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n.$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n\sqrt[n]{n}}.$$

5. Utilice el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^5}$$
.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)!}.$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n}{n!}.$$

6. Utilice el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$$
.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n.$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n+2} \right)^n.$$

7. Pruebe que cada serie alternante converge.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$$
.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{2}{3n+1}$$
. b) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{1}{\ln(n+1)}$. c) $\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$.

c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{\ln(n)}{n}$$

8. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.



a)
$$\sum_{1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4}{2^n}$$
.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(n)}{n\sqrt{n}}.$$

c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$$
.

9. Con la ayuda de un graficador, respalde gráficamente que la serie de potencias converge a la función correspondiente.

a)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$
 converge a $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, si $|x| < 1$.

b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$
 converge a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si $|x| < 1$.

Indicación: Trace las gráficas de f(x) y $P_{10}(x)$ para |x| < 1.

10. Determine el intervalo de convergencia de las series de potencias.

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

$$f$$
) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$.

$$b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}.$$

$$g) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x^n}{3^n}.$$

$$c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{nx^n}{3^n}.$$

h)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n} (x-1)^n$$
.

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

i)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$$
.

- $e) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n}.$
- 11. Para las siguientes series obtenga una representación en series de potencias.

a)
$$f(x) = \frac{3}{2 - 5x}$$
.

d)
$$f(x) = \frac{1}{(1-x)^3}$$
.

$$b) \ f(x) = \frac{1}{1+x^2}.$$

$$e) \ f(x) = \frac{e^x - 1}{x}.$$

c)
$$f(x) = \frac{x}{(1+x^2)^2}$$
.

$$f) \ f(x) = x^2 e^{-x}.$$

- 12. Sea $f(x) = \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Demuestre que: $x^2 f''(x) + x f'(x) = 4x^2 f(x)$.
- 13. Determine la serie de Taylor de f alrededor del punto a.

a)
$$f(x) = 1 + x^2 + x^3$$
, $a = 1$.

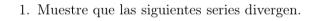
d)
$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$
, $a = 0$.

b)
$$f(x) = \cos(x), \ a = \frac{\pi}{4}$$

$$e) f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad a = \pi.$$

c)
$$f(x) = e^x$$
, $a = -2$.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -1.$$

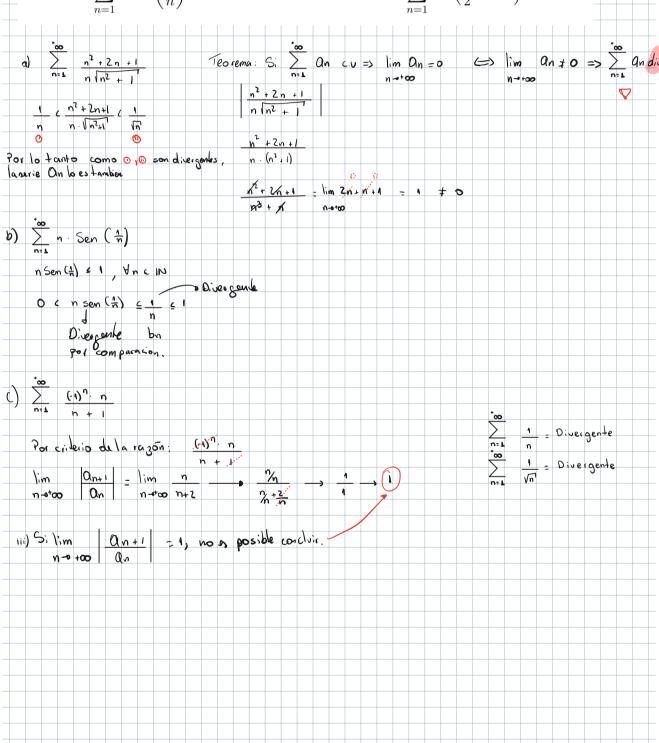


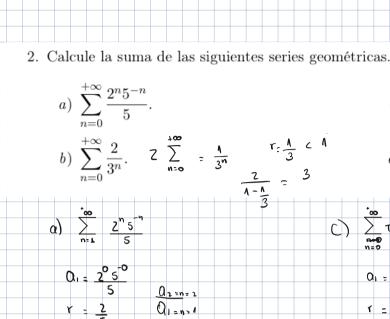
a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2 + 2n + 1}{n\sqrt{n^2 + 1}}.$$

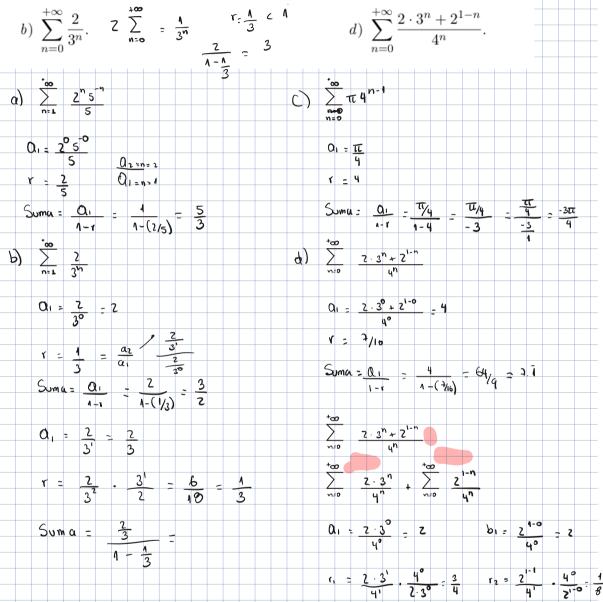
c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$$
.

b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$$
.

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2} + e^{-n}\right).$$

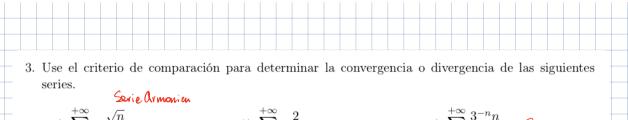


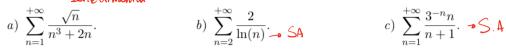


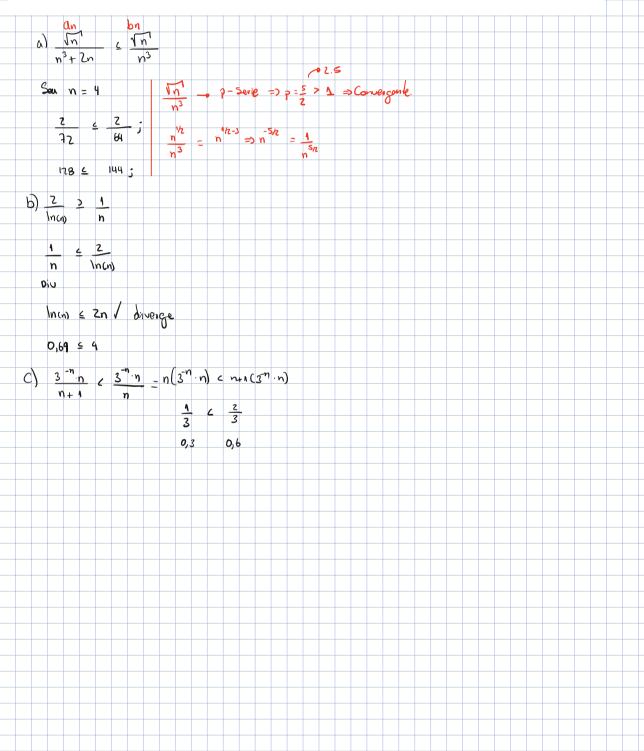


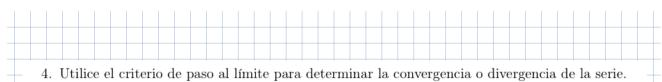
c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi 4^{n-1}$.

Suma : $\frac{z}{4-\frac{3}{4}}$ + $\frac{z}{4-\frac{4}{8}}$ \Rightarrow $\frac{7z}{2}$

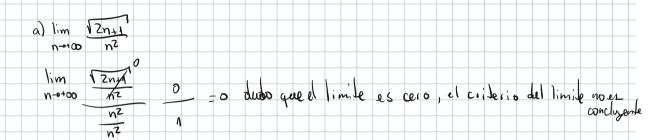








- a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$.
- $b) \sum_{n=2}^{+\infty} n \left(\frac{1}{3}\right)^n.$
- $c) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n\sqrt[n]{n}}.$

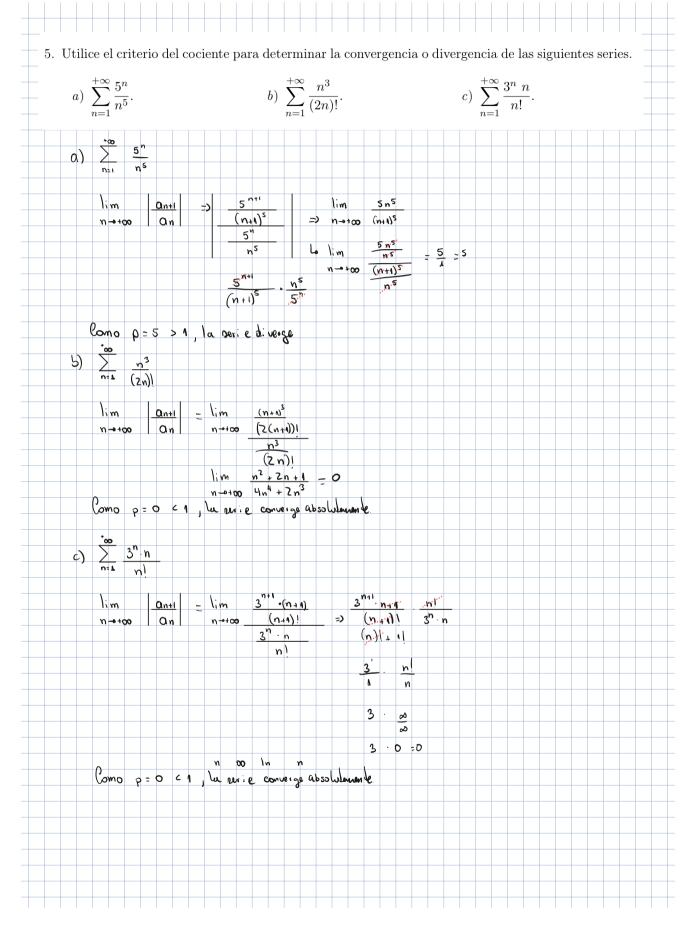


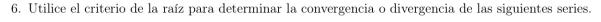
5) lim n. (1)h

lim 3ⁿ n = 0 dues que el limite es cero, el criterio del limite no en concluente

c) lim 3 n=+00 2nm

1 m 3 2n n m



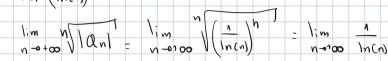


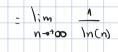
$$a) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$$

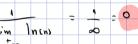
$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n.$$

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$$
. b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{n}\right)^n$. c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{(n(n))}\right)^n$$







$$\begin{array}{c} \rho \end{array} \sum_{\substack{n=1 \\ \downarrow 00}} \left(\frac{5}{4} + \frac{1}{1} \right)_{\mu}$$

$$\frac{1}{1} \frac{1}{1} + \frac{1}{1} \frac{1}{2} + \frac{1}{2}$$

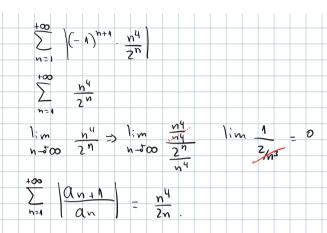
c)
$$\sum_{n=1}^{\infty} \left(\frac{\eta}{3n+2}\right)^{\eta}$$

8. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{n^4}{2^n}$$
.

b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{\operatorname{sen}(n)}{n\sqrt{n}}$$
. c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$.

c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$$
.



$$\lim_{n\to +\infty} \frac{(n+1)^3}{n^3} = \lim_{n\to +\infty} \frac{n^3}{3} + \frac{3n^2+3n+1}{2} = \frac{1}{2} = \frac{1}{2}$$

10. Determine el intervalo de convergencia de las series de potencias.

$$a) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}.$$
 $f) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}.$

$$b) \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}.$$

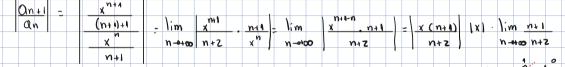
b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{2^n}.$$
c)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x^n}{3^n}.$$

$$d) \sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}.$$

$$\frac{1}{n=1} \int_{n=1}^{+\infty} f^{n}(x-1)^{n} \frac{x^{2n}}{(2n)!} dx = \int_{n=0}^{+\infty} f^{n}(x-1)^{n} \frac{x^{2n}}{5^{n}} (x-1)^{n} dx = \int_{n=0}^{+\infty} f^{n}(x-1)^{n} \frac{x^{n}}{(2n-1)3^{2n-1}} dx = \int_{n=0}^{+\infty} f^{n}(x-1)^{n} dx$$

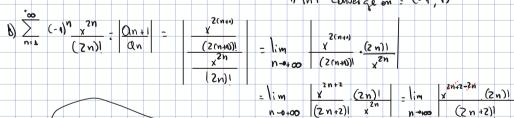
$$a) \sum_{n=1}^{\infty} \frac{x^n}{n}$$

Criterio de la razon



|x| | |m| | |n + 4 | | | |x| | | |x| | |1x1 - 1 = 1x1 < 4

i) in | converge on = (-1,1)



n-100 (2n+2) x(2n+1)

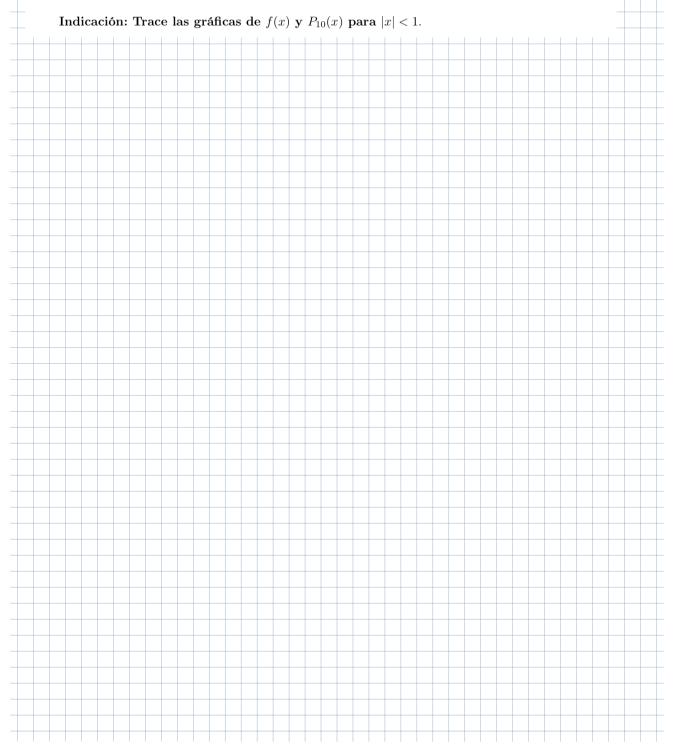
$$|x^{2}|$$
 $|x^{2}|$ $|x^{$

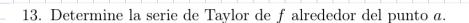
$$(x^2)$$
 | m $(2n)$ | - $(2n)$ | $(2n+2)$ | $(2n+2)$ | $(2n+2)$ | $(2n+2)$ | $(2n+1)$ | $(2n)$ |



a)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$$
 converge a $f(x) = \frac{1}{1-x^2}$, si $|x| < 1$.

b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$$
 converge a $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, si $|x| < 1$.





a)
$$f(x) = 1 + x^2 + x^3$$
, $a = 1$.

d)
$$f(x) = \frac{1}{x+2}$$
, $a = 0$.

b)
$$f(x) = \cos(x), \ a = \frac{\pi}{4}.$$

$$e) f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad a = \pi.$$

c)
$$f(x) = e^x$$
, $a = -2$.

$$f(x) = \frac{1}{x}, \quad a = -1.$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^r$$

$$g(x) = 1 + x^2 + x^3 = 1 + 1$$

$$2(x) = 2x + 3x^2 = 2(x) + 3(x)^2 = 6$$

$$1 + 5 \cdot (x - 1) + \frac{8}{2} (x - 1)^2 + \frac{6}{3!} (x - 1)^3$$

$$1 + 5 \times -1 + 4 (\times -1)^2 + \frac{6}{6} (\times -1)^3$$

$$5x + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$$





PAUTA CERTAMEN 2 Cálculo II

- 1. Utilizando el criterio de comparación o el criterio de comparación por paso al límite, determine si la serie converge o diverge.
 - $a) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{n+\sqrt{n}}.$

Solución. Calculamos el límite:

$$\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n + \sqrt{n}} = \lim_{n \to +\infty} \frac{1}{1 + \frac{1}{\sqrt{n}}} = 1 \neq 0.$$
 10 pts.

Luego la serie diverge. 5 pts.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$. Indicación: Utilice el hecho de que la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge.

Solución. Primero notemos que

$$a_n = \frac{(n+1)^2}{(n+2)!} = \frac{(n+1)^2}{(n+1)!(n+2)} = \frac{(n+1)^2}{n!(n+1)(n+2)} = \frac{n+1}{n!(n+2)}$$
. 5 pts.

Calculamos el límite:

$$\lim_{n\to +\infty} a_n = \lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n!(n+2)} = \lim_{n\to +\infty} \frac{n+1}{n+2} \cdot \lim_{n\to +\infty} \frac{1}{n!} = 1\cdot 0 = 0.$$

Luego, la serie puede converger o diverger. Puesto que $\frac{n+1}{n+2} < 1$ para todo $n \in \mathbb{N}$, entonces

$$a_n = \frac{n+1}{n+2} \cdot \frac{1}{n!} < \frac{1}{n!}$$
. 5 pts.

Como $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n!}$ converge, entonces por el criterio de comparación la serie $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$ converge. **5 pts.**

- 2. Calcula la suma de las siguientes series geométricas.
 - a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}}$.

Solución. Utilizando propiedades de series y la fórmula de la serie geométrica, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^{n-1}} = 3 \cdot 2 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{3}\right)^n \boxed{\mathbf{5 pts.}} = 6 \frac{1}{1 - \frac{1}{3}} = 9. \boxed{\mathbf{5 pts.}}$$

b)
$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{1-3n}}{5} + \frac{7}{3^{2n}}$$
.

Solución. Utilizando propiedades de series y la fórmula de la serie geométrica, se tiene que

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{1-3n}}{5} + \frac{7}{3^{2n}} = \frac{2}{5} \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{8}\right)^n + 7 \sum_{n=0}^{+\infty} \left(\frac{1}{9}\right)^n \boxed{\textbf{5 pts.}} = \frac{2}{5} \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{8}} + 7 \cdot \frac{1}{1 - \frac{1}{9}} = \frac{2333}{280}. \boxed{\textbf{5 pts.}}$$





3. Determine si las series convergen o divergen

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{3^n}{1+3^{2n}}$$
.

Solución. Utilizando el criterio de la razón:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \frac{3^{n+1}}{1 + 3^{2(n+1)}} \cdot \frac{1 + 3^{2n}}{3^n} = 3 \lim_{n \to +\infty} \frac{1 + 3^{2n}}{1 + 3^{2n+2}} = \frac{1}{3} < 1. \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

Luego, la serie converge. 5 pts.

$$b) \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n n}{n!}.$$

Solución. Utilizando el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\lim_{n\to+\infty}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n\cdot n}=\lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n}=0<1.$$
 5 pts.

Luego, la serie converge. 5 pts.

4. Determine el radio de convergencia e intervalo de convergencia de las siguientes series.

Determine el radio de convergencia e intervalo de convergencia de las siguientes series.

a)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{(x-5)^n}{n5^n}.$$

$$\left| \frac{\left(\cancel{\chi} - 5 \right)^{n+1}}{\left(\cancel{\chi} - 5 \right)^n} \right| = \left| \frac{\left(\cancel{\chi} - 5 \right)^{n+1}}{\left(\cancel{\chi} - 5 \right)^n} \right| = \frac{\cancel{\chi} - 5}{\cancel{\chi} - 5}$$
Solución. Utilizando el criterio de la razón: $\cancel{\eta} \cdot 5^n$

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}} \cdot \frac{n \cdot 5^n}{(x-5)^n} \right| = \frac{|x-5|}{5} \lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{5}.$$
 5 pts.

Luego,

$$\frac{|x-5|}{5} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 5.$$
 5 pts.

Por lo tanto el radio de convergencia es 5 y el intervalo de convergencia es $x \in (0, 10)$. 5 pts.

b)
$$\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1} \frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$$
.

Solución. Utilizando el criterio de la razoón:

$$\lim_{n \to +\infty} \left| \frac{a_{n+1}}{a_n} \right| = \lim_{n \to +\infty} \left| \frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!} \cdot \frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}} \right| = x^2 \lim_{n \to +\infty} \frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = x^2 \cdot 0 = 0.$$

Luego la serie converge para todo $x \in \mathbb{R}$, es decir, su radio de convergencia es $+\infty$. | 5 pts.