**Probabilidad Condicional e Independencia**

Motivación

La fiesta de baile de antifaces organizado por la refinada Penélope Lambar, está realizándose en uno de los salones de un lujoso hotel. Ella porta un an tifaz dorado y, para el resto de los invitados ha designado antifaces rojos y negros. Nueve de los rojos lo usan damas, de las veintitrés invitadas y los trece rojos restantes, los llevan algunos de los veinticinco caballeros invitados. En medio de la fiesta donde están ya todos los invitados, un caballero invita a hacer un brindis en honor a la bella Penélope.

Secundando la iniciativa, una dama improvisa magistralmente algunas arias de óperas famosas. Y finalmente, Edgar, único en romper el protocolo, se retira su antifaz por un momento y recita un poema. La velada continúa con música, grata conversación y baile. Una persona invitada, presa de un estado de decepción, es la primera en retirarse lanzando a la salida del hotel su máscara roja al suelo. Sin considerar a la bella Penélope, ¿cuál es la probabilidad de que:

- ¿El caballero del brindis porte un antifaz negro?
- ¿La dama que improvisa arias tenga antifaz rojo?
- ¿El color del antifaz de Edgar sea rojo o negro?
- ¿La persona que se ha retirado, presa de un estado de decepción, sea hombre?

La probabilidad de que ocurra el evento A cuando se sabe que el evento B ya ocurrió, se llama probabilidad condicional de A dado B, la cual se denota y define de la siguiente manera:

**Definición 6**

Sean A y B dos eventos cualesquiera. La probabilidad condicional de que A ocurra, dado que ocurrió B, está dada por:

$$P\left({}^{A}\!/_{B}\right) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(B)}, & P(B) > 0 \\ 0, & P(B) = 0 \end{cases}$$

Observación:

1. La probabilidad condicional cumple todas las propiedades vistas anteriormente.
   a) $P(\Omega/\text{A})$=1
   b) $P(A\ \cup B\ \backslash C) = P(A\backslash C) + P(B\backslash C), si\ A \cap B = \emptyset$
   c) $P(A^c\backslash B) = 1 - P(A\backslash B) \leftarrow$ Complemento Condicional
2. De la definición anterior se tiene que la probabilidad condicional de la intersección entre A y B puede ser escrita como $P(A \cap B) = P(B) \cdot P(A\backslash B)$, llamada **Regla de la Multiplicación.**
3. Por simetría, se tiene que si P(A)>0, entonces

$$P\left({}^{B}/_{A}\right) = \begin{cases} \dfrac{P(A \cap B)}{P(A)}, & P(A) > 0 \\ 0, & P(A) = 0 \end{cases}$$

De esta manera, se tiene que $P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B\backslash A)$, que es otra versión de la **Regla de la Multiplicación.**

***Observación 1:*** La Regla de la Multiplicación se utiliza cuando se seleccionan personas de un grupo o artículos de un lote **sin sustitución**.

***Observación 2:*** Cuando seleccionan personas de grupo o artículos de un lote **con sustitución**, se dice que los eventos son independientes y en ese caso, la probabilidad de la intersección de los eventos es el producto de las probabilidades.

4. De las observaciones 2 y 3, se tiene que $P(B) \cdot P(A\backslash B) = P(A) \cdot P(B\backslash A)$

5. La probabilidad condicional de A dado $B_1, B_2, \dots, B_n$ se escribe de la siguiente forma $P(A\backslash B_1, B_2, \dots, B_n)$ y se define $P(A\backslash B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n)$, cualesquiera sean los eventos A, $B_1, B_2, \dots, B_n$ tales que $P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) > 0$. Un desarrollo algebraico simple conduce a la Regla de la Multiplicación Generalizada, que está dada por:
   $$P(B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_n) = P(B_1) \cdot P(B_2\backslash B_1) \cdot P(B_3\backslash B_1 \cap B_2) \cdot \dots \cdot P(B_n\backslash B_1 \cap B_2 \cap \dots \cap B_{n-1})$$

6. La definición de probabilidad condicional puede extenderse para incluir cualquier número de eventos que se encuentren en el espacio muestral Ω. Por ejemplo, puede demostrarse que para tres eventos A, B y C

$$P(A\backslash B \cap C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(B \cap C)}, \quad si\ P(B \cap C) > 0$$

$$P(A \cap B\backslash C) = \frac{P(A \cap B \cap C)}{P(C)}, \quad si\ P(C) > 0$$

Ejemplo:

Considere la siguiente información asociada a la distribución de los empleados de cierta empresa.

| | Administración | Operación de Planta | Ventas | Total |
|---|---|---|---|---|
| Hombres | 20 | 45 | 35 | 100 |
| Mujeres | 30 | 25 | 15 | 70 |
| Total | 50 | 70 | 50 | 170 |

Si se selecciona a uno de estos empleados, ¿cuál es la probabilidad de que:

a) ¿Sea mujer dado que trabaja en administración?
b) ¿Dado que es hombre, trabaje en ventas?
c) Si se sabe que la persona elegida es mujer, ¿cuál es la probabilidad de que trabaje en Operación de Planta o en Ventas?
d) Si se seleccionan dos personas aleatoriamente sin sustitución, ¿cuál es la probabilidad de que la primera sea hombre y la segunda sea mujer?
e) Si se seleccionan cuatro personas aleatoriamente sin sustitución, ¿cuál es la probabilidad de que las dos primeras trabajen en ventas, la tercera trabaje en administración y la cuarta también?
f) ¿Cómo se modifican las dos respuestas anteriores si las personas se eligen con sustitución?
g) ¿Son los eventos “ser hombre” y “trabajar en ventas” estadísticamente independientes?

Desarrollo:

Definición de evento:

M: “ser mujer”

H: “ser hombre”

A: “trabajar en administración”

O: “trabajar en operación de planta”

V: “trabajar en ventas”

a) $$P(M/A) = \frac{P(M \cap A)}{P(A)} = \frac{30/170}{50/170} = \frac{3}{5}$$

b) $$P(V/H)=\frac{P(V\cap H)}{P(H)}=\frac{35/170}{100/170}=\frac{7}{20}$$

c) $$P(O\cup V/M)=P(O/M)+P(V/M)$$

$$P(O\cup V/M)=\frac{25}{70}+\frac{15}{70}=\frac{40}{70}$$

d) Eventos

$H_1$: "La primera persona elegida es hombre"

$M_2$: "La segunda persona elegida es mujer"

$$P(H_1\cap M_2)=P(H_1)\cdot P(M_2/H_1)$$

Esto es por Regla de la Multiplicación. Entonces:

$$P(H_1\cap M_2)=\frac{100}{170}\cdot\frac{70}{169}$$

e) Eventos

$V_1$: "La primera persona elegida trabaja en ventas"
$V_2$: "La segunda persona elegida trabaja en ventas"
$A_3$: "La tercera persona elegida trabaja en administración"
$A_4$: "La cuarta persona elegida trabaja en administración"

$$P(V_1\cap V_2\cap A_3\cap A_4)=P(V_1)\cdot P(V_2/V_1)\cdot P(A_3/V_1\cap V_2)\cdot P(A_4/V_1\cap V_2\cap A_3)$$

$$P(V_1\cap V_2\cap A_3\cap A_4)=\frac{50}{170}\cdot\frac{49}{169}\cdot\frac{50}{168}\cdot\frac{49}{167}$$

f) Si se eligen ahora con sustitución, se plantean las mismas preguntas, pero se modifica el cálculo de la probabilidad.

$$P(H_1\cap M_2)=P(H_1)\cdot P(M_2)$$

$$P(H_1 \cap M_2) = \frac{100}{170} \cdot \frac{70}{170}$$

$$P(V_1 \cap V_2 \cap A_3 \cap A_4) = P(V_1) \cdot P(V_2) \cdot) P(A_3) \cdot P(A_4)$$

$$P(V_1 \cap V_2 \cap A_3 \cap A_4) = \frac{50}{170} \cdot \frac{50}{170} \cdot \frac{50}{170} \cdot \frac{50}{170}$$

g) ¿Son los eventos “ser hombre” y “trabajar en ventas” estadísticamente independientes?

Para ello se debe comprobar si se cumple que: $P(H \cap V) = P(H) \cdot P(V)$

Si esta igualdad se cumple, entonces diremos que los eventos son estadísticamente independientes. En caso contrario NO.

$$P(H \cap V) = \frac{35}{170}; \quad P(H) = \frac{100}{170}; \qquad P(V) = \frac{50}{170}$$

Si multiplicamos $\frac{100}{170}$ $y$ $\frac{50}{170}$, nos daremos cuentas que son distintos, por lo tanto los eventos H y V, no son estadísticamente independientes.

Ejercicios →Práctico 3