MATERIAL DE APOYO PARA EL MODULO 1 DE CÁLCULO DIFERENCIAL

Profesor: Fernando Flores Bazán.

Concepción, 2017-02.

Departamento de Matemática–Universidad del Bío-Bío

Índice general

Capítulo 1

Geometría Analítica

La Geometría analítica es parte de las matemáticas que tiene por objeto el estudio de las relaciones entre el Álgebra y la Geometría Euclideana, que estudia : puntos, rectas, curvas, ángulos y superficies en un plano. Los primeros manuscritos sobre las relaciones existentes entre las ecuaciones y la geometría fue hecha por René Descartes en 1637.

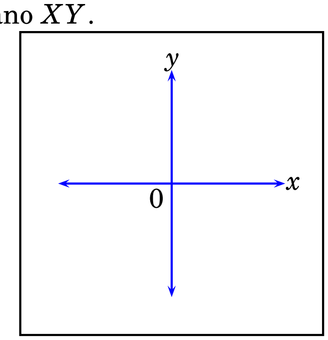
1.1. Plano Cartesiano

Definición 1.1.1.

1. ***Un sistema de coordenadas rectangulares*** o un sistema de coordenadas cartesianas, es un plano con dos rectas numéricas perpendiculares y se intersectan en el punto que corresponde al número cero de cada recta, llamada ***origen*** y se denota por 0. Las rectas numéricas horizontales y verticales se llaman **eje** X y el **eje** Y respectivamente.

2. Se llama ***semieje positivo del eje*** X a aquel que parte del origen hacia la derecha del eje X, se denota por $\overline{OX}$. Se llama **semieje positivo del eje** y a aquel que parte del origen hacia arriba del eje Y, se denota por $\overline{OY}$.

3. Un plano que contenga un sistema de coordenadas rectangulares se llama **plano cartesiano**, plano coordenado o plano XY.

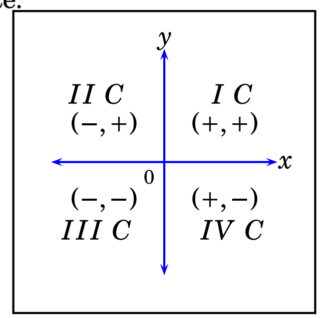


4. Un par ordenado es un punto del plano denotado por $P(a,b)$ o (a,b), siendo ***a*** la **abscisa** o **coordenada** a **del punto** P y ***b*** la **ordenada** o **coordenada** b **del punto** P.

5. El conjunto $A \times B = \{(a,b): \ a \in A, \ b \in B\}$ se llama ***conjunto de pares ordenados*** de los conjuntos A y B y la expresión (a,b) se llama ***par ordenado***.

Observación 1.1.1.

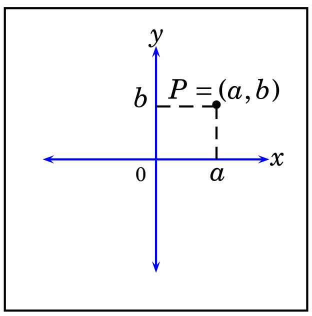
1. Los ejes X e Y dividen al plano en 4 regiones, llamadas ***cuadrantes***, denotado por $I\ C$, $II\ C$, $III\ C$, $IV\ C$; que significa primer, segundo, tercer, y cuarto cuadrante respectivamente.



Los signos de los pares ordenados para:

- $I\ C$ es $(+,+)$
- $II\ C$ es $(-,+)$
- $III\ C$ es $(-,-)$
- $IV\ C$ es $(+,-)$

Observación 1.1.2.

1. 

Construcción de un punto P ***como un par ordenado en el plano:*** Con un lápiz elegir un punto P del plano cartesiano, luego trazar por el punto P una línea vertical hasta el eje X, intersectando en a, luego por el mismo punto P trazar una línea horizontal hasta el eje Y intersectando en b. Así asociamos al par (a,b) con el punto P. Y viceversa a cada par ordenado (a,b) de números reales le corresponde un punto P en el plano.

2. Cualquier punto P del plano tiene dos números reales asociadas con él, su coordenada $\boldsymbol{x}$ o abscisa, y su coordenada $\boldsymbol{y}$ u ordenada. Ambos números constituyen las coordenadas del punto P y se simboliza por $P(x,y)$.

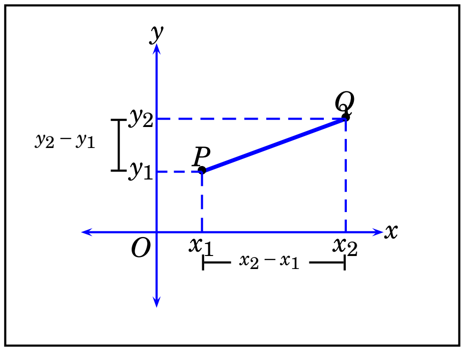
3. A cada punto punto P del plano coordenado le corresponde uno y solamente un par coordenado (x,y). Recíprocamente, un para coordenadas (x,y) cualesquiera determina uno y solamente un punto en el plano coordenado.

1.2. Distancia entre puntos y punto medio

Definición 1.2.1.

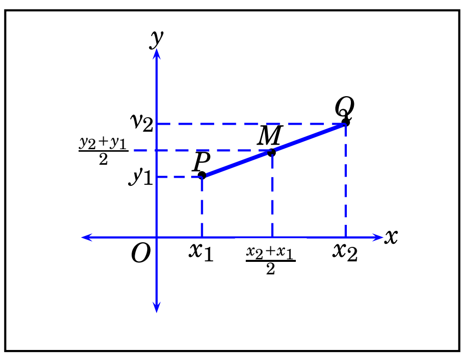
1. Dado dos puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ del sistema de coordenadas, se define la ***distancia*** entre P y Q como

$$d(P,Q) = ||(x_2,y_2)-(x_1,y_1)|| = ||(x_2-x_1,y_2-y_1)|| = \sqrt{(x_2-x_1)^2+(y_2-y_1)^2}$$



2. Dados dos puntos $P(x_1,y_1)$ y $Q(x_2,y_2)$ del sistema de coordenadas, se define el ***punto medio*** del segmento $\overline{PQ}$ como

$$M = \left(\frac{x_2+x_1}{2}, \frac{y_2+y_1}{2}\right)$$

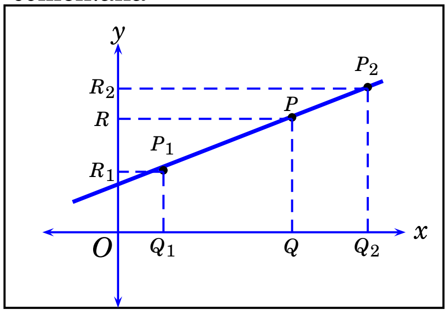


Teorema 1.2.1. Si $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$ son los extremos de un segmento $\overline{P_1P_2}$ las coordenadas de un punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en la razón dada, $r = \frac{\overline{P_1P}}{\overline{PP_2}}$ son

$$\boxed{x = \frac{x_1+rx_2}{1+r}, \qquad y = \frac{y_1+ry_2}{1+r},\ r \neq -1}$$

1. Si $r > 0$, el punto P es interno al segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$.
2. Si $r < 0$ el P es externo al segmento dirigido $\overline{P_1P_2}$.
3. Si $r = 1$ se obtiene que P es el punto medio del segmento $\overline{P_1P_2}$, visto anteriormente.

comen:ana

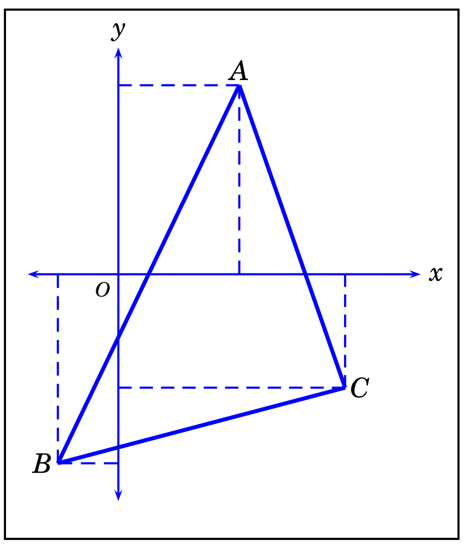


Construcción de las coordenadas x e y. Consideremos una recta en el primer cuadrante de un plano que pasa por los puntos P_1, P, P_2 (en ese orden, de abajo hacia arriba recuerde que se puede ordenar de 6 maneras siendo el resultado el mismo), y correspondiente a esos puntos en el eje x están Q_1, Q, Q_2. Luego siguiendo la geometría del dibujo y por geometría elemental sabemos que por tres rectas paralelas determinan sobre dos secantes segmentos proporcionales.

Ejemplo 1.2.2. Dados los vértices de un triángulo $A(4,7)$, $B(-1,-8)$ y $C(8,-5)$

1. Demostrar que el triángulo es rectángulo.
2. Hallar el perímetro y su área.

Resolución: ►

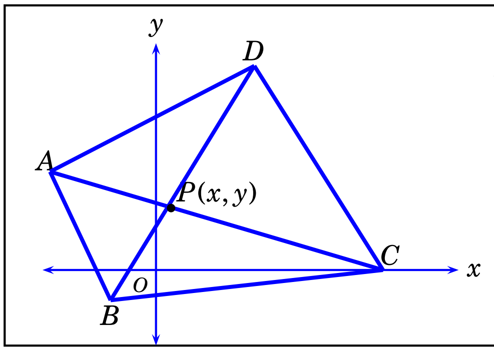


1. *De acuerdo a la figura vamos a demostrar que:* $[d(A,B)]^2 = [d(B,C)]^2 + [d(C,A)]^2$
   En efecto
   $d(A,B) = \sqrt{(-1-4)^2 + (-8-7)^2} = 5\sqrt{10}$
   $d(B,C) = \sqrt{(8+1)^2 + (-5+8)^2} = 3\sqrt{10}$
   $d(C,A) = \sqrt{(4-8)^2 + (7+5)^2} = 4\sqrt{10}.$
   Ahora utilizando el teorema de Pitágoras se tiene $(\sqrt{250})^2 = (\sqrt{90})^2 + (\sqrt{160})^2$ *lo que demuestra que se trata de un triángulo restángulo, recto en* C

2. *El perímetro del triángulo es*
   $5\sqrt{10} + 3\sqrt{10} + 4\sqrt{10} = 12\sqrt{10}$
   El área $\triangle ABC = \frac{1}{2} d(B,C) \cdot d(C,A) = \frac{1}{2}(3\sqrt{10})(4\sqrt{10}) = 60u^2$ ◄

Ejemplo 1.2.3. Los vértices de un cuadrilátero son $A(-4,6)$, $B(-2,-1)$, $C(8,0)$, $D(6,11)$. Hallar la razón $r = \frac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$ en que la diagonal $\overline{AC}$ divide a $\overline{BD}$, donde P es el punto de intersección de las diagonales.

Resolución: ►



Note que:

- $r = \dfrac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$ *es la razón en que divide a la diagonal* $\overline{BD}$. *Por tanto las coordenadas del punto* (x,y) *son* $\begin{cases} x = \dfrac{-2+6r}{1+r} \\ y = \dfrac{-1+11r}{1+r} \end{cases} \quad (*)$

- $r_1 = \dfrac{\overline{AP}}{\overline{BC}}$ *es la razón en que divide a la diagonal* $\overline{AC}$. *Por tanto las coordenadas del punto* (x,y) *son* $\begin{cases} x = \dfrac{-4+8r_1}{1+r_1} \\ y = \dfrac{6+0r_1}{1+r_1} \end{cases} \quad (**)$

De $(*)$ *y* $(**)$ *se tiene*

$$x = \frac{-2+6r}{1+r} = \frac{-4+8r_1}{1+r_1}, \quad y = \frac{-1+11r}{1+r} = \frac{6+0r_1}{1+r_1}$$

de donde $r_1 = \dfrac{5r+1}{r+5} = \dfrac{5r-7}{1-11r}$ *de esto se llega a* $5r^2+2r-3=0$ *de aquí* $r = \dfrac{3}{5}$ ◄

1.2.1. Ejercicios Propuestos

1. Marque los puntos siguientes en el plano coordenado $A(2,3)$, $B(-5,8)$, $C(-1,-5)$, $D(2,-7)$. Luego especifique en qué cuadrante se localiza cada punto.

2. Grafique el conjunto siguiente $S = \{(1,-2)\ ,(0,4),\ (3,\frac{3}{4}),\ (-3,-1)$

3. Trace el conjunto de puntos (x,y) en el plano que satisfaga:

$$(i)\ xy = 0, \qquad (ii)\ xy < 0, \qquad (iii)\ xy > 0, \qquad (iv)\ \frac{x}{y} = 0$$

4. Localice los puntos dados, si (a,b) esta en el primer cuadrante.

$$(i)\ (a,-b) \qquad (ii)\ (a,a), \qquad (iii)\ (b,-b) \qquad (iv)\ (b,-a)$$

5. La abscisa de un punto es -6 y su distancia al punto $A(1,3)$ es $\sqrt{74}$. Hallar la ordenada del punto (dos soluciones).

6. Demostrar que que los puntos $A(-3,10)$, $B(1,2)$ $C(4,-4)$ son colineales, es decir, que están sobre una misma linea recta.

7. Demostrar que el cuadrilátero cuyos vértices son $A(-2,6)$, $B(4,3)$, $C(1,-3)$, $D(-5,0)$ es un cuadrado.

8. Hallar las coredenadas del punto que equidista de los puntos fijos $a(4,3)$, $B(2,7)$, $C(-3,-8)$.

9. Demostrar que el cusdrilátero cuyos vértices son $A(-6,-2)$, $B(-2,-1)$, $C(-1,3)$, $D(-5,2)$. es un rombo.

10. Dos de los vértices de un triángulo equilátero son los puntos $A(-1,1)$, $B(3,1)$. Hallar las coordenadas del tercer vértice.

11. Hallar la distancia que separa a los puntos $A;B$.

$$(i)\ \ A(3,3\sqrt{3}),\ \ B(7,3\sqrt{3}) \qquad\qquad \text{Rp. } 8.$$

$$(ii\ \ )A(m,n),\ \ B\left(\frac{m-n\sqrt{3}}{2},\frac{n+m\sqrt{3}}{2}\right) \quad \text{Rp. } \sqrt{n^2+m^2}$$

12. La ordenada de un punto es 8 y su distancia al punto $B(5,-2)$ es $2\sqrt{41}$. Hallar la abscisa del punto.

Rp. $x = 13$, ó $x = -3$

13. Determinar el valor de b si la distancia entre los puntos $A(7,1)$, $B(3,b)$ es 5.

Rp. $b = -2$, ó $b = 4$

14. Usando la formula de distancia demuestre que los puntos $A(-3,10)$, $B(1,2)$, $C(4,-4)$ son colineales, es decir que están sobre una misma recta.

15. Hallar las coordenadas de los vértices de un triángulo sabiendo que las coordenadas de los puntos medios de sus lados son $M(-2,1)$, $N(5,2)$, $P(2,-3)$.

16. El segmento que une $A(-2,-1)$, con $B(2,2)$ se prolonga hasta C. Sabiendo que $\overline{BC} = 3\overline{AB}$, hallar las coordenadas de C.

17. Los puntos extremos de un segmento son $A(2,4)$ y $B(8,-4)$. Hallar el punto $P(x,y)$ que divide a este segmento en dos partes tales que $\dfrac{\overline{BP}}{\overline{PA}} = -2$

18. El punto $P(16,9)$ divide al segmento $A(x_1,y_1)$ y $B(4,5)$ en razón $r = \frac{-3}{2}$, hallar las coordenadas de A.

19. Dados los puntos $P(2,1)$ y $Q(5,3)$ tales que $\overline{PB} = 2\overline{AP}$, $3\overline{AQ} = 4\overline{AB}$; hallar las coordenadas de los puntos A, B.

20. En el triángulo de vértices $A(x_1, y_1)$, $B(x_2, y_2)$, $C(x_3, y_3)$, demostrar que las coordenadas del baricentro son
$$x = \frac{x_1 + x_2 + x_3}{3} \qquad y = \frac{y_1 + y_2 + y_3}{3}$$

21. El segmento de extremos $(A(-2,3)$, $B(12,8)$, se devide en cinco partes iguales. Hallar las suma de las absisas y las ordenadas de los puntos de división.

22. Sea el triángulo de vértices en los puntos $A(1,1)$, $B(1,3)$, $C(-2,-3)$. Hallar la longitud de los lados, el centro de gravedad y la longitud de la bisectriz del ángulo A.

23. Los vértices de un cuadrilátero son $A(-4,6)$, $B(-2,-1)$, $C(8,0)$, $D(6,11)$. Hallar la razón $r = \frac{\overline{BP}}{\overline{PD}}$ en que la diagonal $\overline{AC}$ divide a $\overline{BD}$, donde P es el punto de intersección de las diagonales.

24. La abscisa de un punto es -6 y su distancia al punto $A(1,3)$ es $\sqrt{74}$

25. Hallar las coordenadas del extremo $C(x,y)$ del segmento que une este punto con $A(2,-2)$, sabiendo que el punto $B(-4,1)$ está situado auna distancia de A igual a las $\frac{3}{5}$ partes de la longitud total del segmento.

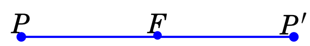
26. Sean los puntos $A(0,0)$, $B(4,2)$, $C(12,2)$, $D(8,0)$ vértices de un paralelogramo. M es un punto medio de $\overline{AB}$,$\overline{BM}$ y $\overline{AC}$ se intersecan en el punto P de modo que se cumple $\frac{\overline{MP}}{\overline{PD}} = \frac{\overline{AP}}{\overline{PC}}$. Hallar las coordenadas de P

1.3. Trazado de puntos y Simetría

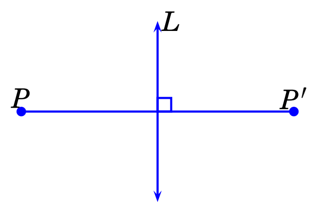
Definición 1.3.1.

1. Para ***trazar o dibujar una curva*** debemos indicar unos puntos en el plano cartesiano y luego unirlos mediante una curva continua.

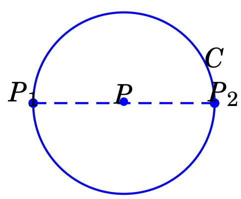
2. Se dice que dos puntos P y P' son simétricos a un tercer punto F si y sólo si F es el punto medio del segmento que une P y P', por tanto al punto F se llama ***centro de simetría*** del segmento PP'



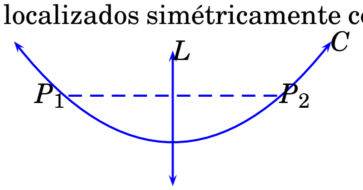
3. Se dice que dos puntos P y P' son simétricos con respecto a una recta L si y sólo si L es la mediatriz del segmento que une P y P', por tanto al punto P' se llama ***punto de reflexión*** de P respecto a la recta L



4. Una curva C es simétrica con respecto a un punto P si para cada $P_1 \in C$ existe un punto $P_2 \in C$ tal que P_1 y P_2 están localizados simétricamente con respecto a P



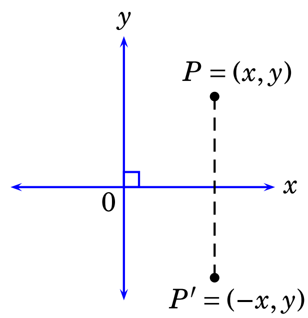
5. Una curva C es simétrica respecto a una recta L si para cada punto $P_1 \in C$ existe un punto $P_2 \in C$ tal que están localizados simétricamente con respecto a la recta L, a esta recta se llama ***recta de simetría***



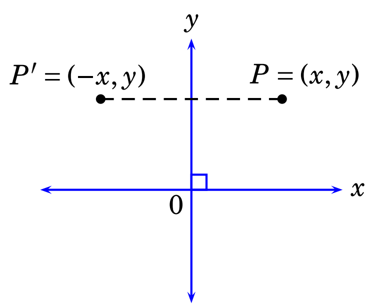
1.3.1. Simetrías respecto a los ejes coordenados

Definición 1.3.2.

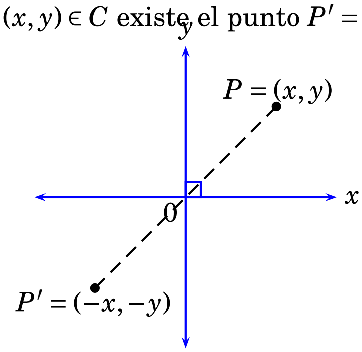
1. Un conjunto de puntos que describen a la curva C es ***simétrica respecto al eje*** x si para cada punto $P = (x, y) \in C$ existe el punto $P' = (x, -y) \in C$



2. Un conjunto de puntos que describen a la curva C es ***simétrica respecto al eje*** y si para cada punto $P = (x, y) \in C$ existe el punto $P' = (-x, y) \in C$



3. Un conjunto de puntos que describen a la curva C es ***simétrica al origen*** si y sólo si para cada punto $P = (x, y) \in C$ existe el punto $P' = (-x, -y) \in C$



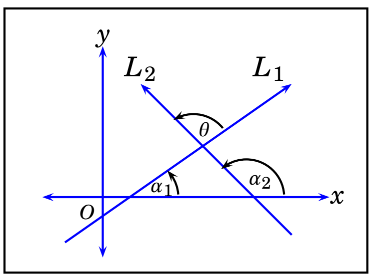
1.4. Ecuación de la Recta

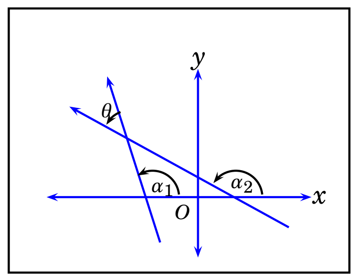
Recordemos que al plano coordenado también se puede identificar con el espacio $\mathbb{R}^2$, por lo tanto cualquier punto $P(x, y)$ podemos encontrarla en $\mathbb{R}^2$. Uno de los conceptos básicos en Geometría es la recta. En este curso nos limitaremos a las rectas que están en el plano coordenado. Esto permitirá aplicar métodos algebraicos para estudiar sus propiedades.

Definición 1.4.1.

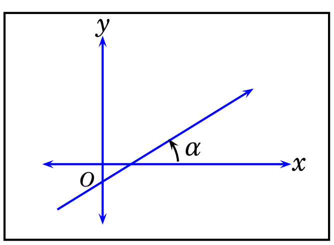
1. La recta en un conjunto de puntos, $L = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2\}$, de un plano coordenado.
2. Sea L una recta, la ***inclinación*** de L es el ángulo, denotada por α, que ella forma con el semieje positivo x, medido en sentido antihorario.
3. La ***pendiente*** de L se define como la tangente de su inclinación, es decir $m = \tan(\alpha)$
4. Se puede definir a una recta como el lugar geométrico de los puntos tales que tomados dos puntos diferentes cualesquiera del lugar, el valor de la pendiente m resulta siempre constante.
5. Dos rectas L_1 y L_2 son perpendiculares si el ángulo que se forma entre ellas es de 90°.
6. Dos rectas L_1 (recta inicial)con menor inclinación α_1 y L_2 (recta final) tiene la inclinación mayor α_2. Entonces el ángulo θ entre las rectas se define por

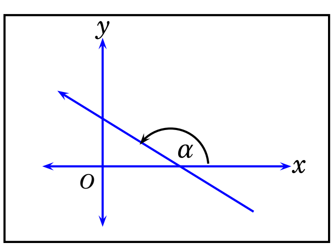
$$\boxed{\theta = \alpha_2 - \alpha_1}$$





Observación 1.4.1.

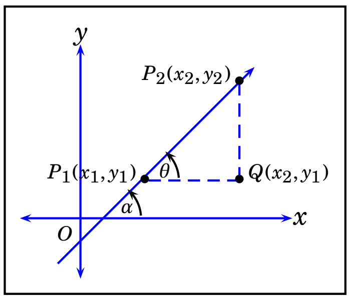
1. La inclinación α de la recta L cumple $0 \le \alpha \le 180°$
2. 

   Cuando el ángulo de inclinación es agudo, es decir $0 \le \alpha < 90°$ la pendiente m es positiva. Una recta vertical no tiene pendiente, pues $\tan(90°)$ no existe.
3. 

   Cuando el ángulo de inclinación es obtuso, es decir $90 < \alpha \le 180°$ la pendiente m es negativa.

Propiedades 1.4.2. Sea L una recta **no vertical** y sea m su pendiente si $P(x_1, y_1)$ y $Q(x_2, y_2)$ son dos puntos cualesquiera diferentes de la recta, entonces

$$\boxed{m = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2}$$



Supongamos los puntos P_1 y P_2 sobre la recta L con inclinación positiva, y sea Q punto de intersección de las rectas L_1 y L_2 (ver figura), y como $tan(\alpha) = \tan(\theta)$ se tiene

$$\boxed{m = \frac{\overline{QP_1}}{\overline{P_1Q}} = \frac{y_2 - y_1}{x_2 - x_1}, \quad x_1 \neq x_2}$$

Similarmente se demuestra cuando la inclinación es negativa de la recta L

Teorema 1.4.3. Sean L_1 y L_2 dos rectas **no verticales**, con pendientes m_1 y m_2 respectivamente , son paralelas si y sólo si sus pendientes son iguales. Es decir

$$\boxed{L_1 \parallel L_2 \Longleftrightarrow m_2 = m_1}$$

Teorema 1.4.4. Sean L_1 y L_2 rectas con pendientes m_1 y m_2 respectivamente. Entonces L_1 es perpendicular a L_2 (hacen ángulo de 90°) sí y sólo si $m_1 \cdot m_2 = -1$. Simbólicamente

$$\boxed{L_1 \perp L_2 \Longleftrightarrow m_1 \cdot m_2 = -1}$$

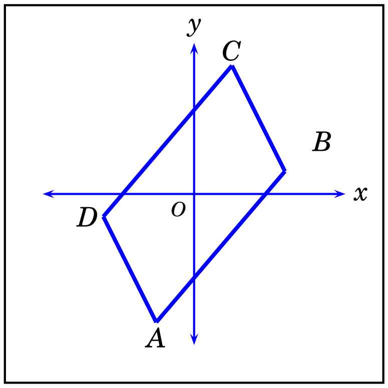
Teorema 1.4.5. Sean L_1 y L_2 dos rectas que se cortan con pendientes m_1 y m_2 respectivamente y sea θ es el ángulo que se forma entre L_1 y L_2 entonces

$$\boxed{\tan(\theta) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2}, \; \theta \neq 90^\circ}$$

donde L_2 es la recta con mayor inclinación.

Ejemplo 1.4.6. Demostrar que los puntos $A(-1,-5)$, $B(2,1)$, $C(1,5)$, $D(-2,-1)$ son los vértices de un paralelogramo.

Resolución: ►

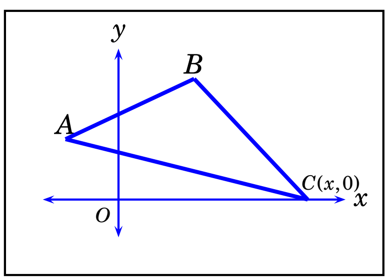


Probaremos que sus lados opuestos son paralelos, y que sus lados opuestos tienen la misma longitud, para ellos vamos a probar que $\overline{AB} \parallel \overline{DC}$ *y* $\overline{AD} \parallel \overline{BC}$ *entonces bastará probar que sus pendientes respectivas son iguales, es decir*
$m_{\overline{AB}} = \dfrac{1+5}{2+1} = 2 = m_{\overline{DC}} = \dfrac{5+1}{1+2}$
y que
$m_{\overline{AD}} = \dfrac{-1+5}{-2+1} = -4 = m_{\overline{BC}} = \dfrac{5-1}{1-2}$ *esto demuestra que la figura es un paralelogramo.*

◄

Ejemplo 1.4.7. Si $A(-3,2)$, $B(2,5)$ son dos vértices de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, y el vértice C está en el eje x, hallar la medida del ángulo A.

Resolución: ►



Denotemos la pendiente de la recta que contiene a $\overline{AB}$ *por* $m_{\overline{AB}} = m_2 = \frac{5-2}{2+3} = \frac{3}{5}$. *Si* $\overline{AB} \perp \overline{BC}$ *entonces* $m_{\overline{BC}} = \frac{0-5}{x-2} = -\frac{5}{3}$ *así* $x = 5$ *luego* $C(x,0) = C(5,0)$.
$m_{\overline{AC}} = m_1 = \frac{0-4}{5+3} = -\frac{1}{4}$. *Finalmente*

$$\tan(A) = \frac{m_2 - m_1}{1 + m_1 \cdot m_2} = \frac{\frac{3}{5} + \frac{1}{4}}{1 + \frac{3}{5} \cdot \frac{-1}{4}} = 1 \Longrightarrow A = 45°$$

◄

1.4.1. Ejercicios Propuestos

1. Una recta de pendiente -2 pasa por el punto $P(2,7)$ y por los puntos $A(x,3)$, $B(6,y)$. Hallar la $d(A,B)$.

2. Demostrar que los puntos $A(1,-1)$, $B(3,2)$, $C(7,8)$ son colineales en dos formas

   (a) Usando la fórmula de la distancia (b) Usando pendientes

3. Un punto $P(x,y)$ equidista de los puntos $A(-2,3)$, $B(6,1)$ y la pendiente de la recta que une dicho punto a $C(5,10)$ es 2. Hallar sus coordenadas.

4. Si la recta L_1 que contiene a los puntos $A(a,2)$, $B(0,2a)$ es paralela a la recta L_2, que contiene a los puntos $C(-a,3)$, $D(1,-2a)$. Hallar el valor de a.

5. Si la recta L_1 de pendiente m_1 la que contiene a los puntos $A(1,-2)$, $B(3,a)$ es perpendicular a la recta L_2 de pendiente m_2, que contiene a los puntos $C(-3,1)$, $D(a,4)$. Calcule $5m_1+m_2$

6. Demostrar que los puntos $A(-1,-5)$, $B(2,1)$, $C(1,5)$, $D(-2,-1)$ son los vértices de un paralelogramo.

7. Una recta de pendiente $\frac{7}{3}$ pasa por $P(1,2)$. Hllar las coordenadas de dos puntos sobre la recta que distan $\sqrt{58}$ unidades de P.

8. El punto $A(-2,1)$ es el vértice corespondiente al ángulo recto de un triángulo rectángulo isósceles. El punto $P(1,4)$ divide al cateto $\overline{AC}$ en la relación $\overline{AP}:\overline{AC}=1:2$. Hallar las coordenadas del vértice B.

9. Sean $A(-2,1)$, $B(4,-7)$ los vértices de un $\triangle ABC$, sabiendo que las altura se cortan en el punto $P(\frac{4}{3},\frac{5}{3})$, hallar las coordenadas del vértice C.

10. Dado el triángulo de vértices en $A(-10,-13)$, $B(-2,3)$, $C(2,1)$. Hallar la longitud de la perpendicular bajada desde el vértice B a la mediana trazada desde el vértice C

11. Por el punto $A(2,3)$ se trazan dos rectas que cortan al eje x en los puntos B, C la pendiente de la recta AB es 1 y la pendiente de la recta $\overline{AC}$ es igual -1. Hallar el perímetro del triángulo ABC.

12. Sean $A(3,12)$, $B(8,1)$, $C(-2,-5)$ y D los vértices de un paralelogramo. Hallar las coordenadas de todos los posibles vértices D.

13. Hallar el ángulo obtuso que forman las rectas L_1 con pendiente m y la recta L_2 con pendiente $\dfrac{m-1}{m+1}$.

14. El ángulo que forman la recta L_1 que pasa por $A(2,-1)$ y $B(x,3)$, con la recta L_2 que pasa por $C(-1,5)$, $D(8,2)$ es $135°$. Hallar la abscisa de B.

15. Dos rectas se cortan formando una ángulo α tal que $\tan(\alpha)=\frac{3}{2}$. Hallar la pendiente de la otra recta.

16. Hallar las tangentes de los ángulos interiores del triángulo de vértices $A(-3,-1)$, $B(4,4)$, $C(-1,3)$.

17. Hallar la pendiente de la recta L, que biseca el ángulo que la recta L_1, que pasa por $A(10,9)$ y $B(3,-15)$, hace con la recta L_2 que pasa por $A(10,9)$ y $C(2,3)$

18. Hallar un punto situado en la parte positiva del eje x, desde el cual se ve el segmento $\overline{AB}$ con $A(-3,4)$, $B(3,8)$ bajo un ángulo de $45°$

19. Si la hipotenusa de un triángulo rectángulo isósceles tiene pendiente m. Hallar la suma de las pendientes de los catetos.

20. Si $A(-3,2)$, $B(2,5)$ son dos vértices de un triángulo rectángulo ABC, recto en B, y el vértice C está en el eje x, hallar la medida del ángulo A.

21. Los vértices de un triángulo son $A(3,3)$, $B(1,-3)$, $C(-1,2)$. Hallar el valor del ángulo agudo que forma la mediana que corresponde al lado $\overline{AB}$ con la mediatriz del lado $\overline{AC}$.

22. Dado los vértices opuestos $A(3,0)$, $C(-4,1)$ de un cuadrado, hallar las coordenadas de los otros dos vértices.

1.4.2. Distintas formas de representar ecuaciones para una recta

Las rectas tienen propiedades geométricas especiales, las que se pueden asociar con ecuaciones que tienen algunas propiedades algebraicas especiales.

Observación 1.4.8. Supongamos que L es una recta y que $P(x,y)$ es un punto cualquiera del plano.
¿ Cómo saber si $P(x,y)$ pertenece o no a la recta L?.
Para que $P(x,y)$ esté en la recta L sus coordenadas x e y deben satisfacer alguna condición que se expresa por medio de una ecuación. Esta es llamada la ecuación de la recta L. Es claro que si x e y no satisfacen tal condición entonces $P(x,y)$ no pertenece a L. Esta ecuación puede presentarse en varias formas como veremos a continuación.

1. Si Una recta es paralela al eje y, su abscisa es constante y la ecuación es de la forma

$$\boxed{L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; x = a\}}$$

donde a dá la distancia y dirección desde el eje y

2. Si Una recta es paralela al eje x, su ordenada es constante y la ecuación es de la forma

$$\boxed{L = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : \; y = b\}}$$

donde b dá la distancia y dirección desde el eje x

Teorema 1.4.9. [Ecuación de la recta en la forma punto−pendiente]
Sea L una recta de pendiente m supongamos que $P_1(x_1, y_1)$ es un punto dado de la recta entonces la ecuación de L es

$$\boxed{y - y_1 = m(x - x_1)}$$

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera del lugar geométrico, obviamente diferente de $P_1(x_1,y_1)$, por definición se verifica que $m=\dfrac{y-y_1}{x-x_1}$ esto implica que $y-y_1=m(x-x_1)$.
Esta es la condición que debe satisfacer cualquier otro punto $P(x,y)$ para que esté en la recta L. A tal ecuación se conoce como la ecuación de la recta L en la forma punto-pendiente y que sólo puede establecerse para aquellos que no son verticales.

Teorema 1.4.10. [Ecuación de la recta en la forma de los dos puntos]
Sea L una recta que pasa por los puntos $P_1(x_1,y_1)$ y $P_2(x_2,y_2)$, entonces la ecuación de la recta es

$$\boxed{\frac{y-y_1}{x-x_1}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1},\ x_1\neq x_2}$$

Sea $P(x,y)$ un punto cualquiera de la recta,construiremos dos pendiente una en dirección de $\overline{P_1P}$ y otra en direccíón $\overline{P_1P_2}$, es decir

$$\boxed{m_1=m_{\overline{P_1P}}=\frac{y-y_1}{x-x_1},\text{ y } m_2=m_{\overline{P_1P_2}}=\frac{y_2-y_1}{x_2-x_1}}$$

y como P_1, P_2, P son colineales se tiene que $m_1=m_2$ concluyendo la prueba.

Teorema 1.4.11. [Ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada en el origen]
Sea L una recta de pendiente m y que b es la ordenada del punto $P(0,b)$ que esta sobre la recta L entonces la cuación de la recta es:

$$\boxed{y=mx+b}$$

Sean los puntos $P(x,y)$, $(0,b)$ del lugar geométrico donde $(0,b)$ esta ubicado en el eje y, así por un teorema anterior la ecuación de la recta es $y-b=m(x-0)$ esto implica que $y=mx+b$

A tal ecuación se conoce como la ecuación de la recta en la forma pendiente-ordenada en el origen,la que sólo puede establecerse para aquellos que no son verticales.

Teorema 1.4.12. [Ecuación de la recta en la forma simétrica]
Sea L la recta, suponga que L intersecta a los ejes X e Y en los puntos $(a,0)$ y $(0,b)$. respectivamente, entonces la ecuación de la recta L es

$$\boxed{\frac{x}{a}+\frac{y}{b}=1}$$

Sea $P(x,y)$ cualquiera del lugar geométrico y sea $(a,0)$, $(0,b)$ puntos de intersección del lugar geométrico con los ejes x e y respectivamente, luego por el teorema (**??**) la ecuación del lugar geométrico es $\dfrac{y-0}{x-a} = \dfrac{0-b}{a-0}$ esto prueba lo deseado.
La ecuación anterior se conoce como la ecuación de L en la forma simétrica, y está reservada para aquellos rectas que cortan a los ejes X e Y en puntos diferentes. Esto no se puede hacer para las rectas horizontales, verticales y aquellos que pasan por el origen $(0,0)$.

Teorema 1.4.13. [Ecuación de la recta en su forma general]
Sea L una recta cualquiera la ecuación en su forma general se expresa por

$$\boxed{Ax+By+C=0}$$

donde A,B,C son reales, algunas de las cuales puede ser cero inclusive pero no debe ocurrir que $A=B=0$ a la vez. Se presentan los casos siguientes

1. **CASO I:** Si $A\neq 0,\ B\neq 0,\ C\neq 0$, la ecuación general se puede escribir

$$\boxed{y=-\frac{A}{B}x-\frac{C}{B}}$$

   Si se compara con la ecuación $y=mx+b$ se tiene $m=-\dfrac{A}{B},\ b=-\dfrac{C}{B}$

2. **CASO II:** Si $A\neq 0,\ B\neq 0, C=0$ la ecuación general toma la forma

$$\boxed{y=-\frac{A}{B}x \text{ ó } y=mx}$$

3. **CASO III:** Si $A\neq 0,\ B=0, C\neq 0$ la ecuación general toma la forma

$$\boxed{x=-\frac{C}{A} \text{ ó } x=a}$$

4. **CASO IV:** Si $A=0,\ B\neq 0, C\neq 0$ la ecuación general toma la forma

$$\boxed{y=-\frac{C}{A} \text{ ó } y=b}$$

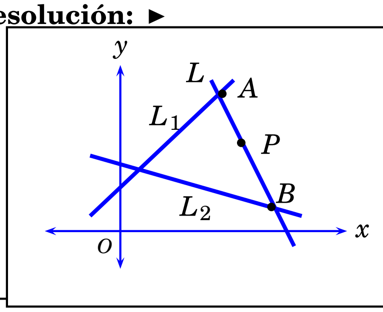
Teorema 1.4.14. [Distancia un punto a una recta]
Sea L una recta cuya ecuación general es $L:\ ax+by+c=0$. Si $P(x_0,y_0)$ es un punto cualquiera entonces

$$\boxed{d(P,L)=\frac{|ax_0+by_0+c|}{\sqrt{a^2+b^2}}}$$

de define ***distancia de*** P ***a la recta*** L.

Ejemplo 1.4.15. Entre las rectas que pasan por $P(6,4)$ hallar una de manera que el segmento comprendido entre las rectas $L_1:\ x-y+2=0,\ L_2:\ x+3y-10=0$ sea dividido por la mitad por el punto P.

Resolución: ►

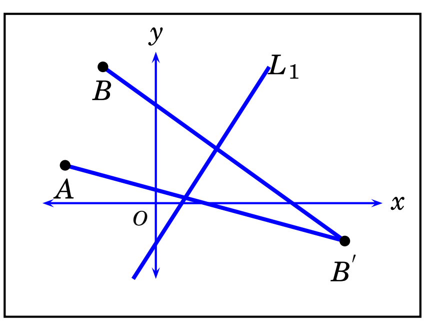


Supongamos los puntos de intersección $A(x_1,y_1)$ *y* $B(x_2,y_2)$ *(ver figura). Si P es punto medio de* $\overline{AB}$ *, entonces* $x_1+x_2=12,\ y_1+y_2=8.$ *Además como* $A\in L_1\Longrightarrow x_1-y_1+2=0,\ B\in L_2\Longrightarrow x_2+3y_2-10=0$ *de esto* $3y_2-y_1=8$ *y con lo anterior* $y_2=1,\ x_2=7\Longrightarrow B(7,1)$. *Luego la ecuación* $L:\ 3x+y-22=0$

◄

Ejemplo 1.4.16. Hallar en la recta que pasa por $C(0,-5)$ y $D(4,3)$ un punto P de manera que la suma de sus distancias a los puntos $A(-7,1),\ B(-5,5)$ sea mínima.

Resolución: ►



Construyendo B'*, simétrica de B, respecto de la recta* L_1 *que pasa por C y D. Es evidente que* $\overline{AP}+\overline{PB'}$ *es mínima. La pendiente de* $\overline{CD}:\dfrac{3+5}{4-0}=2$*, así la ecuación de la recta que contiene a* $\overline{CD}$ *es* $L_1:\ \ y+5=2(x-0)$. *La ecuación de la recta* $L\perp L_1$ *que pasa por B es* $L:\ x+2y-5=0$*, como* $M\in L\cap L_1\Longrightarrow M(3,1)$ *y M es punto medio de* BB' *luego* $B'(11,-3)$. *Así la ecuación de la recta que pasa por A y* B' *es* $y-1=\dfrac{-3-1}{11+7}(x+7)\Longleftrightarrow L_2:\ 2x+9y+5=0$ *por tanto si* $P\in L_1\cap L_2\Longrightarrow P(2,-1)$

◄

Ejercicios Propuestos

1. Hallar, por dos métodos diferentes, la ecuación de la mediatriz del segmento que une los puntos $A(-3,-4),\ B(5,2)$

2. El punto P de oredenada 10 está sobre la recta que pasa por los puntos $A(7,-2)$, $B(9,4)$. Hallar la abscisa de P.

3. Dado el triángulo de vértices $A(-2,1)$, $B(4,7)$, $C(6,-3)$, hallar las ecuaciones d elas medianas relativas a los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y las coordenadas del baricentro.

4. Hallar las ecuaciones de las mediatrices relativas a los lados $\overline{AC}$, $\overline{BC}$ y las coordenadas del triángulo del ejemplo anterior.

5. Hallar las ecuaciones de dos alturas y las coordenadas del ortocentro del triángulo del ejemplo anterior.

6. Hallar las coordenadas del punto P de la recta $L_1: \ 3x-y+3=0$ que equidista de los puntos $A(2,4)$, $B(6,-2)$

7. Sean las rectas $L_1: \ 2x-3y+6=0, \ \ L_2: \ y-4=0$. La recta L interseca a L_1 en B y a L_2 en C. Si L pasa por $A(9,6)$ y $\overline{BA}:\overline{AC}=2:3$, hallar la ecuación de la recta L

8. Hallar las ecuaciones de las rectas que pasan por el punto $P(-5,3)$ y que forman cada una un ángulo de 45° con la recta L que pasa por $A(2,-3)$, $B(4,-2)$

9. Una recta cuya ordenada en el origen es el doble que la de $L_1: \ 7x-4y+3=0$ es paralela a la recta que pasa por $A(3,1)$, $B(1,6)$. Hallar su ecuación.

10. Hallar la ecuación de la recta cuuya ordenada en el origen es -5 y que pasa por el punto P que está $\frac{2}{3}$ de distancia de $\overline{AB}$, siendo $A(-2,5)$, $B(7,2)$.

11. Hallar la ecuación de la recta de pendiente $-\frac{3}{4}$ y que forma con los ejes coordenados un triángulo de área $24u^2$.

12. Hallar la ecuación de la recta que pasa por $P(1,-6)$ si el producto de sus intersecciones con los ejes coordenados es 1.

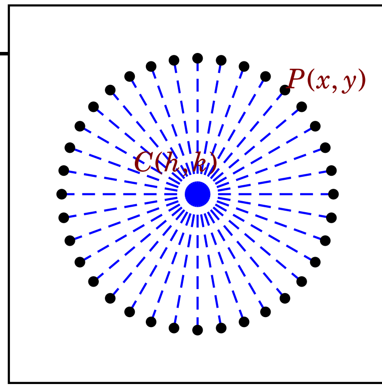
13. Hallar la ecuación de la recta cuya abscisa y ordenada en el origen suman 7 y cuya pendiente es $-\frac{11}{3}$

1.5. Cónicas

1.5.1. Circunferencia

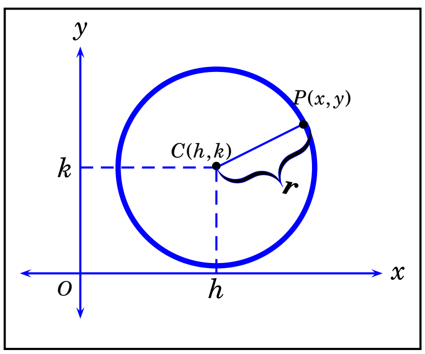
Definición 1.5.1. Una circunferencia es el conjunto de todos los puntos $P(x,y)$ que están en el plano, tal que la distancia fija r llamada ***radio***, desde $P(x,y)$ a un punto fijo $C(h,k)$ dado, llamado ***centro***, es constante, simbólicamente

$$C=\{(x,y)\in\mathbb{R}^2: \ \ d(P,C)=r\}$$



Teorema 1.5.1. La circunferencia de centro $C(h,k)$ y radio r tiene por ecuación

$$(x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$



Sea $P(x,y)$ un punto de la circnferncia, por definición para cualquier posición de P se debe verificar que $d(C,P)=r$ esto implica:

$$\sqrt{(x-h)^2+(y-k)^2}=r \Longleftrightarrow (x-h)^2+(y-k)^2=r^2$$

La ecuación anterior se conoce como la ecuación ***ordinaria*** de la cirunferencia de centro (h,k) y radio r.

Corolario 1.5.2. Si el centro de una circunferencia de radio r está en el origen de coordenadas, la ecuación de la circunferencia es

$$x^2+y^2=r^2$$

Esta ecuación recibe el nombre de la forma ***canónica*** de la circunferencia.

Observación 1.5.3.

1. Si desarrollamos la ecuación ordinaria obtenemos

$$\boxed{x^2 + y^2 - 2hx - 2yk + h^2 + k^2 - r^2 = 0}$$

la cual puede escribirse como

$$\boxed{x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0}$$

donde $D = -2h,\ E = -2k,\ F = h^2 + k^2 - r^2$. Así podemos afirmar que la ecuación de cualquier circunferencia se puede escribir como la antaerior llamda ***forma general*** de la circunferencia.

2. El problema que se presenta ahora es averiguar, sí recíprocamente, toda ecuación de la forma general representa una circunferencia. Para resolver esto pasaremos de la forma general-circunferencia a la forma (**??**). Al completar cuadrados la ecuación (**??**) se llega a:

$$\left(x + \frac{D}{2}\right)^2 + \left(y + \frac{E}{2}\right)^2 = \frac{D^2 + E^2 - 4F}{4} \tag{1.1}$$

De donde concluimos que

a) Si $\frac{D^2+E^2-4F}{4} > 0$ la gráfica es una circunferencia de centro $C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$.

b) Si $\frac{D^2+E^2-4F}{4} = 0$ la gráfica es el punto $C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$.

c) Si $\frac{D^2+E^2-4F}{4} < 0$ no existe gráfica.

3. Una circunferencia es determinada por tres puntos cualesquiera en el plano que no son colineales. Para averiguar la ecuación general de la circunferencia debemos debemos tener tres condiciones geométricas que deben satisfacer la ecuación de la circunferencia.

Teorema 1.5.4. Sea la ecuación $x^2 + y^2 + Dx + Ey + F = 0$, si $\frac{D^2+E^2-4F}{4} > 0$ la ecuación representa una cicunferencia y el centro es $C(-\frac{D}{2}, -\frac{E}{2})$ y el radio es $\sqrt{\frac{D^2+E^2-4F}{4}}$

Definición 1.5.2.

1. Se define ***eje radical*** como el lugar geométrico de los puntos desde los cuales se pueden trazar tangentes iguales a dos circunferencias

$$\begin{array}{lcl} C_1 & : & x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1=0 \\ C_2 & : & x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2=0 \end{array}$$

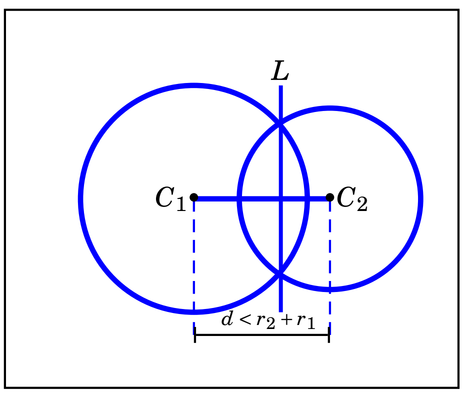
   que satisfacen

$$x^2+y^2+D_1x+E_1y+F_1+k(x^2+y^2+D_2x+E_2y+F_2)=0$$

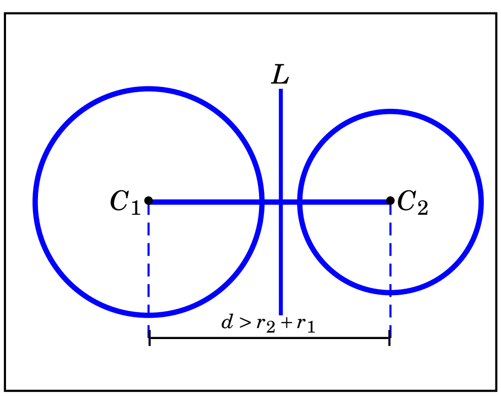
2. Si en la ecuacion $k=-1$ la ecuación del eje radical es

$$L:\ (D_1-D_2)x+(E_1-E_2)y+(F_1-F_2)=0$$

3. Cuando dos circunferencias $C_1,\ C_2$ son ***secantes***,el eje radical pasa por los puntos de intersección de ambas y se cumple que la distancia entre los centros es menor que la suma de los radios.

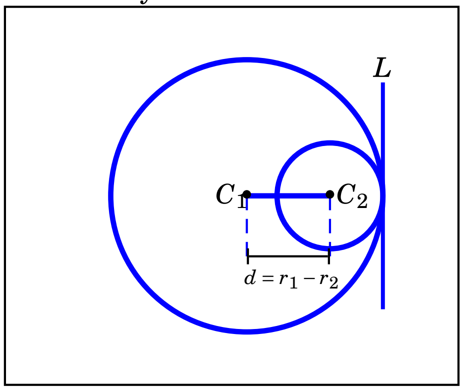


4. Cuando dos circunferencias $C_1,\ C_2$ son ***exteriores***, el eje radical pasa por el punto medio de la línea que una los centros de $C_1,\ C_2$ y que la distancia de los centros es mayor que la suma de los radios.

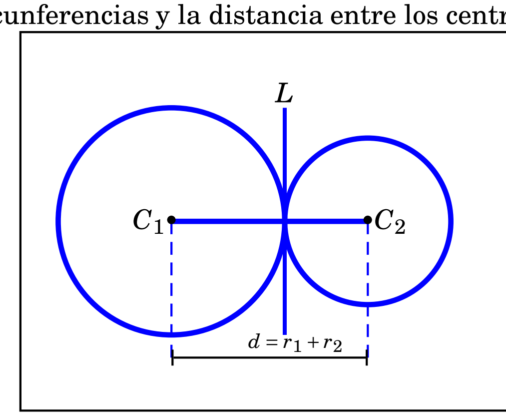


Definición 1.5.3.

5. Cuando dos circunferencias C_1, C_2 son ***tangentes exteriores***,el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y la distancia entre los centros es la suma de los radios.

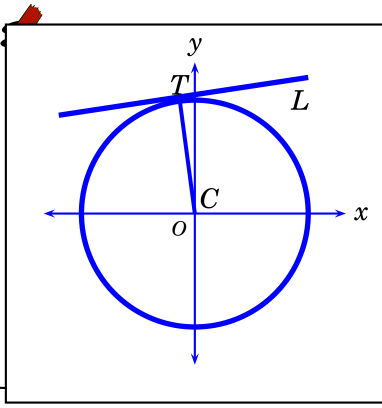


6. Cuando dos circunferencias C_1, C_2 son ***tangentes interiores***,el eje radical es la tangente común a ambas circunferencias y la distancia entre los centros es la diferencia de los radios.



Corolario 1.5.5. Dada la circunferencia $C: \ x^2 + y^2 = r^2$ y un punto de ella $P(x_1, y_1)$ entonces la ecuación de la recta tangente en ese punto es

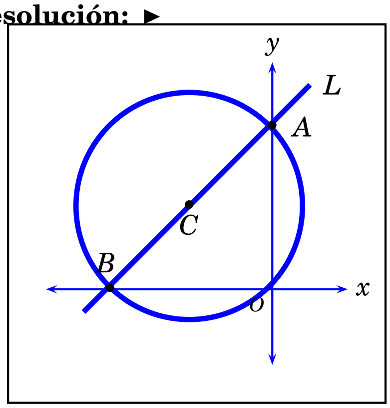
$$\boxed{L: \ x_1 x + y_1 y = r^2}$$



La ecuación de la recta L tangente a la circunferencia es $y - y_1 = m(x - x_1)$ (ver figura). La pendiente del radio $\overline{CT}$ es $m_1 = \frac{y_1}{x_1}$ pero como $L \perp \overline{CT} \Longrightarrow m = \frac{-x_1}{y_1}$, así $y - y_1 = \frac{x_1}{y_1}(x - x_1)$ de donde $x_1 x + y_1 y = x_1^2 + y_1^2$ pero $T(x_1, y_1) \in C \Longrightarrow$ $L: \ x_1 x + y_1 y = r^2$

Ejemplo 1.5.6. Hallar la ecuación de la circunferencia que tiene como diámetro la porción de la recta $L:\ 2x-3y+12=0$ comprendida en el segundo cuadrante.

Resolución: ►



Al intersectar L con los ejes coordenados los intersectos son (ver figura)
$x=0,\ y=4 \Longrightarrow A(0,4)$ *y* $y=0,\ x=-6 \Longrightarrow B(-6,0)$. *Ahora el centro $C(h,k)$ de la circunferencia es el punto medio de $\overline{AB}$ es decir* $(h,k)=(\frac{0-6}{2},\frac{4+0}{2})=(-3,2)$. *Luego el radio es* $r=d(C,A)=\sqrt{(0+3)^2+(4-2)^2}=\sqrt{13}$. *Finalmente la ecuación de la circunferencia es*

$$(x+3)^2+(y-2)^2=13$$

◄

Ejemplo 1.5.7. Hallar la ecuación de la circunferencia de centro el punto $C(4,-3)$ y que pase por el punto $P(2,1)$

Resolución: ►

Cálculo del radio

$$d(C,P)=r \quad = \quad \sqrt{(4-2)^2+(-3-1)^2}=\sqrt{20}$$

Ecuación de la circunferencia
$C:\ (x-4)^2+(y+3)^2=(\sqrt{20})^2$ **10 puntos**

◄

1.5.2. Ejercicios Propuestos

1. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro es $C(-4,-1)$ y es tangente a $L:\ 3x+2y-12=0$.

2. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $L:\ x+2y-6=0$ y que pasa por los puntos $A(7,3)$, $B(-3,-7)$.

3. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente al eje x en $T(4,0)$ y pasa por $P(7,1)$. -

4. El punto $C(3,1)$ es el centro de una cicunferencia que intercepta a la recta $L:\ 2x-5y+18=0$ una cuerda de longitud 6 unidades. Hallar la ecuación de esta circunferencia.

5. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la dos rectas $L_1: \ 2x+y-5=0$, $L_2: \ 2x+y+15=0$ y a una de ellas en el punto $A(2,1)$.

6. Halla la ecuación de la circunferencia que tiene su centro en la recta $L: \ 2x+y=0$ y es tangente a las rectas $L_1: \ 4x-3y+10=0$, $L_2: \ 4x-3y-30=0$.

7. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(0,2)$ y es tangente en el origen a la recta $L=2x+y=0$.

8. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasando por los puntos $A(1,1)$, $B(5,5)$ tiene su centro ene el eje x.

9. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(12,7)$ y es tangente a la recta $L_1: \ x-2y-2=0$ en el punto $T(8,3)$.

10. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $L_1: \ x-4y+3=0$ en el punto $A(5,2)$ y también a la recta $L_2: \ 4x+y-5=0$ en el punto $B(2,3)$.

11. Hallar la ecuación de la circunferencia que es tangente a la recta $L_1: \ 2x-y+6=0$ en el punto $S(-1,4)$ y tiene radio $3\sqrt{5}$

12. Hallar la ecuación de la circunferencia tangente al eje x, con centro en la recta $L: \ x+y-7=0$ y que pasa por el punto $A(5,4)$.

13. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por el punto $P(6,1)$ y es tangente a las rectas $L_1: \ 4x-3y+6=0$, $L_2: \ 12x+5y-2=0$.

14. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(-3,-1)$, $B(5,3)$ y es tangente a la recta $L: \ x+2y-13=0$.

15. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo centro está en la recta $L: \ 6x+7y-16=0$ y es tangente a cada una de las rectas $L_1: \ 8x+15y+7=0$, $L_2: \ 3x-4y-18=0$.

16. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $P(2,3)$, es tangente a la recta $L_1: \ x+y-7=0$ y con centro en $L_2: \ 3x-y-7=0$.

17. Hallar la ecuación de la circunferencia inscrita al triángulo cuyos lados son $L_1: \ 24x-7y=30$, $L_2: \ 5x-12y=70$, $L_3: \ 3x+4y=14$.

18. Hallar las ecuaciones de las ecuaciones que son tangentes a las rectas $L_1: \ 7x-y-5=0$, $L_2: \ x+y+13=0$ y a una de ellas, en el punto $M(1,2)$.

19. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por los puntos $A(5,4)$, $B(4,-3)$, $C(-2,5)$.

20. Determinar la naturaleza de las gráficas, indicando el centro y el radio, si se trata de una circunferencia, o si es un sólo punto o un conjunto vacío.

    a) $9x^2+9y^2-144x+12y+580=0$

    b) $4x^2+4y^2-12x+8y+77=0$

    c) $36x^2+36y^2-48x-36y+16=0$

21. Determine el valor de k de modo que la ecuación $x^2+y^2-7x-3y=k-16{,}5$ represente una circunferencia..

22. Determinar el valor de k para que la recta $L:\ 3x-2y+k=0$ sea tangente a la circunferencia $x^2+y^2-4x+6y-39=0$.

23. Hallar la longitud de la tangente trazada desde el punto $P(6,4)$ a la circunferencia $x^2+y^2+4x+6y=19$.

24. Hallar la máxima y mínima distancia del punto $P(10,7)$ a la circunferencia $x^2+y^2-4x-2y-20=0$.

25. Hallar la máxima y mínima distancia del punto $P(-7,2)$ a la circunferencia $x^2+y^2-10x-14y-151=0$.

26. Hallar la ecuación de la circunferencia circunscrita al triángulo de vértices $P(-4,-1)$, $Q(12,7)$, $R(-10,11)$. Además determinar el centro y el radio.

27. Hallar la ecuación de la circunferencia cuyo diámetro es la cuerda común a las circunferencias $C_1:\ x^2+y^2-18x-16y+45=0,\ C_2:\ x^2+y^2+6x-4y-27=0$

28. Determinar la ecuación de la familia de circunferencias con centro en $L_1:\ 2x-y=0$ y tangente a la recta $L_2:\ x+y=0$. De esa familia elegir una con centro en $L_3:\ 5x-y-6=0$

29. Hallar la ecuación de la familia de circunferencias con centro en la curva $P:\ x^2=4y$ y tangente al eje x. Luego seleccionar aquellos con centro en $L:\ 2x-y-3=0$.

30. Hallar la familia de circunferencias con centro en $L_1:\ x+3y-7=0$ y radio 3 unidades. Seleccioar aquellos que son tangentes a la recta $L_2:\ 5x+12y-5=0$.

31. Demostrar que la familia de circunferencias $x^2+y^2-6x-2y-159+k(x^2+y^2-18x-18y+153)=0$ son tangentes internamente.

32. Hallar la ecuación de la circunferencia que pasa por $A(-10,-2)$ y por las intersecciones de la circunferencia $C_1:\ x^2+y^2+2x-2y-32=0$ y a recta $L:\ x-y+4=0$

33. Desde el punto $P(2,-3)$ se trazan tangentes a la circunferencia $C:\ x^2+y^2-2x+10y+22=0$. Hallar la ecuación de la cuerda que une los puntos de contacto.

34. Hallar la ecuación de la tangente a la circunferencia $C:\ x^2+y^2-2x-6y-3=0$ en el punto $T(-1,6)$.

35. Hallar las ecuaciones de las tangentes trazadas del punto $P(-2,7)$ a la circunferencia $C:\ x^2+y^2+2x-8y+12=0$.

36. Hallar las ecuaciones de las tangentes a la circunferencia $C:\ x^2+y^2+6x-8=0$ que son perpendiculares a la recta $L:\ 4x-y+31=0$

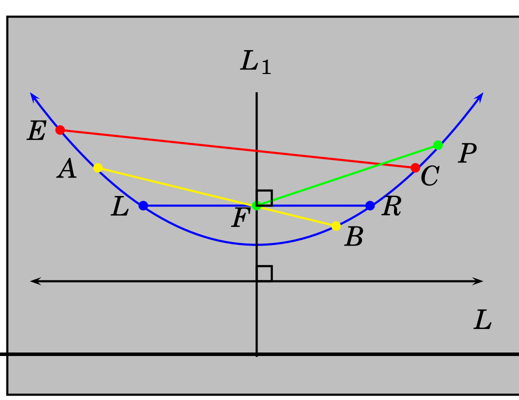
1.5.3. Parábola

Definición 1.5.4.

1. Una parábola es el conjunto de puntos en el plano que equidistan de una recta fija L llamada ***directriz***, y de un punto fijo denominado foco, que no pertenece a la recta L, es decir el conjunto de puntos de la parábola está representada por

$$P=\{P\in\mathbb{R}^2:\ d(P,F)=d(P,L)\}$$

2. ***Vértice***, es el punto de intersección de la parábola con el eje de simetría.
3. ***Foco***, es el punto fijo, situado sobre el eje de simetría a p unidades del vértice.
4. ***Eje de simetría***, es la recta perpendicular a la directriz que pasa por el vértice y foco.
5. ***Cuerda***, es el segmento de recta que une dos puntos cualesqueira de la parábola.
6. ***Directriz***, esla recta fija, que es perpendicular al eje de simetría.
7. ***Cuerda focal***, es el segmento de recta que une dos puntos de la parábola pasando por el foco.
8. ***Lado recto***, es una cuerda focal perpendicular al eje de simetría.
9. ***Radio vector***, es el segmento de recta que une el foco con un punto de la parábola.



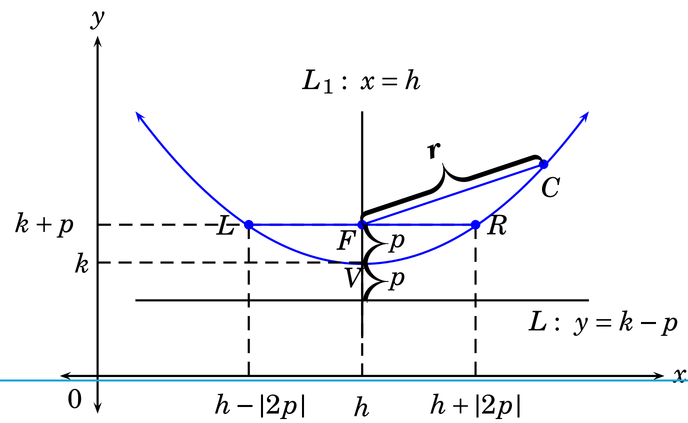
1. Eje de simetría: L_1
2. Cuerda: $\overline{EC}$
3. Cuerda focal: $\overline{AB}$
4. Lado recto: $\overline{LR}$
5. Directriz: L
6. Radio vector: $\overline{PF}$

1.5.4. Elementos de la parábola cuando es de la forma $(x-h)^2 = 4p(y-k)$

Definición 1.5.5.

1. Vértice es $V(h,k)$
2. Foco es $F(h,k+p)$.
3. Longitud del lado recto es $LR = |4p|$.
4. Ecuación de la directriz es $L:\ y = k-p$
5. Ecuación del eje de simetría es $L_1:\ x = h$
6. Coordenadas de los extremos del lado recto: $L(h+|2p|,k+p)$, $R(h-|2p|,k+p)$
7. Longitud del radio vector: $r = |y_1 - k + p|$, donde (x_1,y_1) está en la parábola.

Es recomendable hacer el gráfico para encontrar los puntos y longitudes mencionados.



Elementos de la parábola cuando es de la forma $(y-k)^2 = 4p(x-h)$

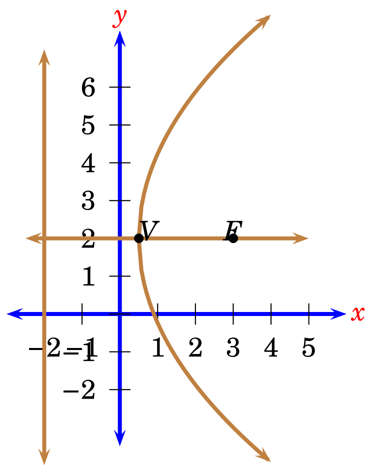
Definición 1.5.6.

1. Vértice es $V(h,k)$
2. Foco es $F(h+p,k)$.
3. Longitud del lado recto es $LR = |4p|$.
4. Ecuación de la directriz es $L:\ x = h-p$
5. Ecuación del eje de simetría es $L_1:\ y = k$
6. Coordenadas de los extremos del lado recto: $L(h+p,k+|2p|)$, $R(h+p,k-|2p|)$
7. Longitud del radio vector: $r = |x_1 - h + p|$ donde (x_1,y_1) está en la parábola.

Es recomendable hacer el gráfico para encontrar los puntos y longitudes mencionados.

Ejemplo 1.5.8. Hallar la ecuación de la parábola cuyo foco y directriz son $F(3,2)$ y $x = -2$ respectivamente.

Resolución: ►



La fórmula que corresponde al gráfico es $(y-k)^2 = 4p(x-h)$
Como la distancia de la directriz al foco es 5,y sabemos que la distancia del foco al vértice es la misma que la distancia de la directriz al vértice, entonces las coordenadas del vértice es $V = (0{,}5, 2)$*, por tanto la ecuación de la parábola es:*
$(y-2)^2 = 4 \cdot 2{,}5(x-0{,}5) \implies \boxed{(y-2)^2 = 10(x-0{,}5)}$ ◄

Ejemplo 1.5.9. Suponga que dos torres de un puente estan separados 100 metros y ambos sostienen un cable de forma parabólica, y que por las bases de las torres hay una carretera que representa la directriz. La parte mas baja del cable esta a 20 metros de la carretera.

(a) Realice un gráfico de tal situación.

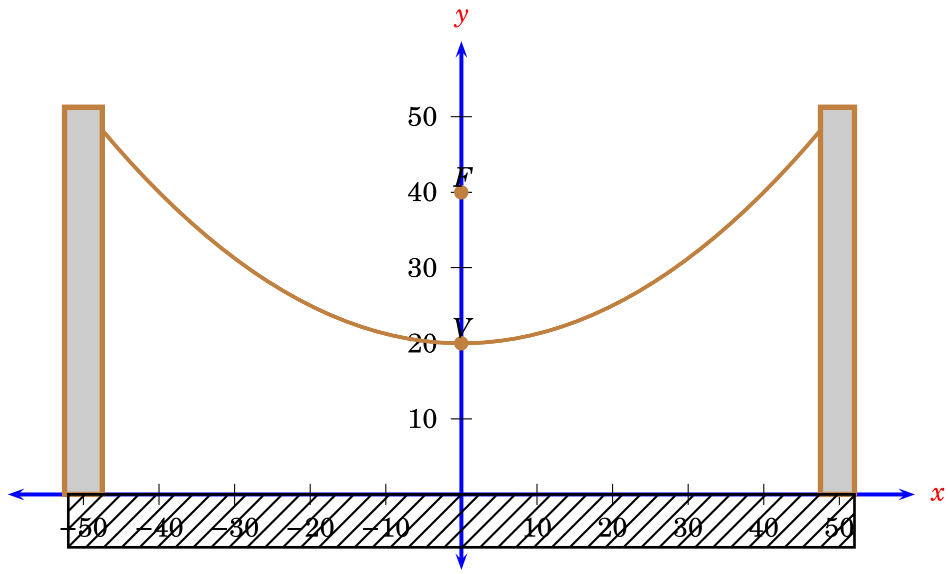
(b) Exprese una ecuación adecuada utilizando los datos que representa tal situación.

(c) ¿Cuál es la altura de las torres?

(d) Si la altura desde un punto del cable a la carretera es de 30 metros ¿Cuál es la distancia que hay entre la parte más baja del cable a la altura ?

Resolución: ►

(a)



(b) *Según el dibujo la expresión que modela tal situación es* $(x-h)^2 = 4p(y-k)$
ecuación de la parábola
$x^2 = 4 \cdot 20(y-20)$

(c) *altura de las torres*
$50^2 = 80(y-20) \Longrightarrow y = 31{,}25 + 20 = 51{,}25$ *metros*

(d) $x^2 = 80(30-20) \Longrightarrow x^2 = 800 \Longrightarrow x \approx 28{,}28$ *metros*

◄

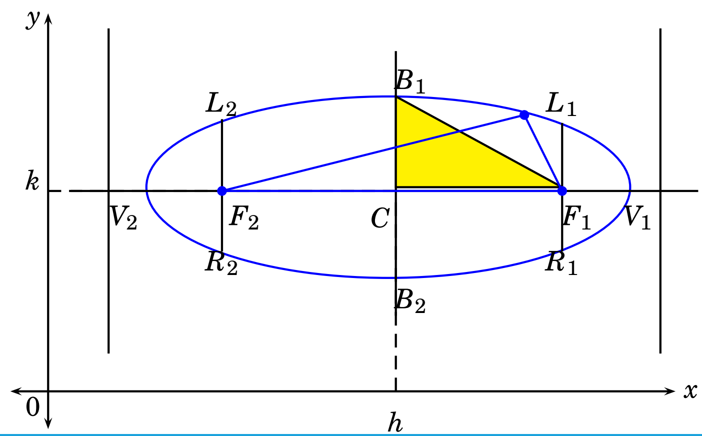
1.6. La Elipse

Definición 1.6.1. Una elipse E es el conjunto de todos los puntos del plano colocados de tal manera que la suma de sus distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos, llamados focos, es constante.

Elementos de la elipse cuando es de la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}+\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Definición 1.6.2.

1. Centro: $C=(h,k)$
2. Vértices: $V_1=(h+a,k)$, $V_2=(h-a,k)$
3. Focos : $F_1=(h+c,k)$, $F_2=(h-c,k)$
4. Extremos del eje menor $B_1=(h,k+b)$, $B_2=(h,k-b)$
5. Lado recto: $\overline{L_1R_1}=\dfrac{2b^2}{a}$
6. Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}$
7. $L_1=(h+c,k+\frac{b^2}{a})$, $R_1=(h+c,k-\frac{b^2}{a})$, $L_2=(h-c,k+\frac{b^2}{a})$, $R_2=(h-c,k-\frac{b^2}{a})$
8. Directrices $x=h\pm\dfrac{a}{e}$
9. Distancia entre directrices $d=\dfrac{2a^2}{c}$
10. $a^2=b^2+c^2$



Elementos de la elipse cuando es de la forma $\dfrac{(x-h)^2}{b^2}+\dfrac{(y-k)^2}{a^2}=1$

Definición 1.6.3.

1. Centro: $C=(h,k)$
2. Vértices: $V_1=(h,k+a)$, $V_2=(h,k-a)$
3. Focos : $F_1=(h,k+c)$, $F_2=(h,k-c)$
4. Extremos del eje menor $B_1=(h+b,k)$, $B_2=(h-b,k)$
5. Lado recto: $\overline{L_1R_1}=\dfrac{2b^2}{a}$
6. Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}$
7. $L_1=(h+\frac{b^2}{a},k+c)$, $R_1=(h-\frac{b^2}{a},k+c)$, $L_2=(h+\frac{b^2}{a},k-c)$, $R_2=(h-\frac{b^2}{a},k-c)$
8. Directrices $y=h\pm\dfrac{a}{e}$
9. Distancia entre directrices $d=\dfrac{2a^2}{c}$
10. $a^2=b^2+c^2$

Ejemplo 1.6.1. Encuentre el centro, los vértices, los focos, longitud del lado recto, excentricidad y su gráfica de la elipse

$$6x^2+9y^2-24x-54y+51=0$$

Resolución: ►
Simplificando y asociando adecuadamente para completar cuadrados se obtiene

$$
\begin{aligned}
& (2x^2-8x)+(3y^2-18y)+17=0 \Longrightarrow 2(x^2-4x+4-4)+3(y^2-6y-9+9)+17=0\\
\Longrightarrow\ & 2(x-2)^2-8+3(y-3)^2-27+17=0\\
\Longrightarrow\ & 2(x-2)^2+3(y-3)^2=18/(\frac{1}{18})\\
\Longrightarrow\ & \boxed{\frac{(x-2)^2}{3^2}+\frac{(y-3)^2}{(\sqrt{6})^2}=1}
\end{aligned}
$$

◄

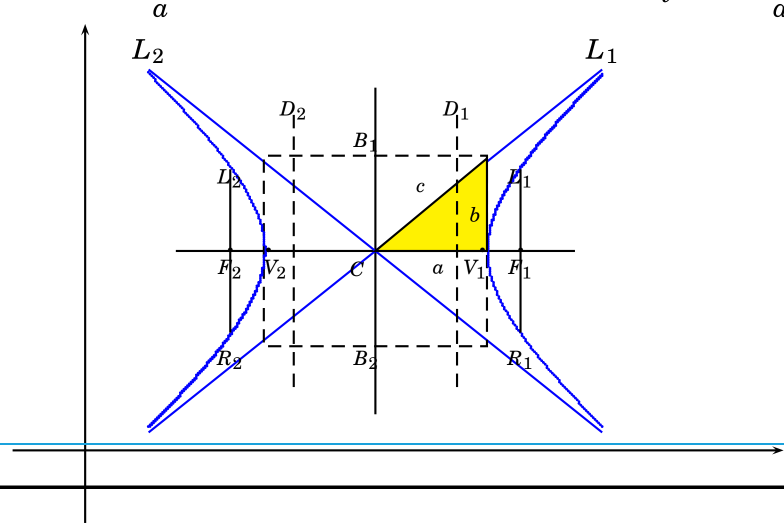
1.6.1. La hipérbola

Definición 1.6.4. Una hipérbola es el conjunto de todos los puntos del plano ubicados de tal forma que la diferencia de sus distancias de cada uno de ellos a dos puntos fijos, llamados focos es constante.

Elementos de la hipérbola cuando es de la forma $\dfrac{(x-h)^2}{a^2}-\dfrac{(y-k)^2}{b^2}=1$

Definición 1.6.5.

1. Centro: $C=(h,k)$
2. Vértices: $V_1=(h+a,k)$, $V_2=(h-a,k)$
3. Focos : $F_1=(h+c,k)$, $F_2=(h-c,k)$
4. Extremos del eje conjugado $B_1=(h,k+b)$, $B_2=(h,k-b)$
5. Lado recto: $\overline{LR}=\dfrac{2b^2}{a}$
6. Excentricidad: $e=\dfrac{c}{a}$
7. $L_1=(h+c,k+\frac{b^2}{a})$, $R_1=(h+c,k-\frac{b^2}{a})$, $L_2=(h-c,k+\frac{b^2}{a})$, $R_2=(h-c,k-\frac{b^2}{a})$
8. Directrices $x=h\pm\dfrac{a}{e}$
9. Distancia entre directrices $d=\dfrac{2a^2}{c}$
10. $a^2=b^2+c^2$
11. Asíntotas $y-k=\pm\dfrac{b}{a}(x-h)$



Elementos de la hipérbola cuando es de la forma $\dfrac{(y-h)^2}{a^2} - \dfrac{(x-k)^2}{b^2} = 1$

Definición 1.6.6.

1. Centro: $C = (h, k)$
2. Vértices: $V_1 = (h, k+a)$, $V_2 = (h, k-a)$
3. Focos : $F_1 = (h, k+c)$, $F_2 = (h, k-c)$
4. Extremos del eje conjugado $B_1 = (h+b, k)$, $B_2 = (h-b, k)$
5. Lado recto: $\overline{LR} = \dfrac{2b^2}{a}$
6. Excentricidad: $e = \dfrac{c}{a}$
7. $L_1 = (h+\frac{b^2}{a}, k+c)$, $R_1 = (h-\frac{b^2}{a}, k+c)$, $L_2 = (h+\frac{b^2}{a}, k-c)$, $R_2 = (h-\frac{b^2}{a}, k-c)$
8. Directrices $y = k \pm \dfrac{a}{e}$
9. Distancia entre directrices $d = \dfrac{2a^2}{c}$
10. $a^2 = b^2 + c^2$
11. Asíntotas $y - k = \pm\dfrac{a}{b}(x-h)$

Capítulo 2

Números Reales

El ramo Cálculo Diferencial para la carrera de Ingeniería, es una asignatura que necesita del conjunto de los números reales para desarrollarse y está orientado a los alumnos de la carrera de Ingeniería Civil informática, quienes inicialmente tienen que entender y comprender propiedades importantes del conjunto de los números reales, ya que sobre este conjunto realizaremos toda nuestra teoría.

2.1. Los Números Naturales

Los números naturales se denota por $\mathbb{N}$ y se define por extensión como

$$\mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$$

cuya cardinalidad es infinita, es decir posee una cantidad infinita de elementos.

Propiedades 2.1.1.

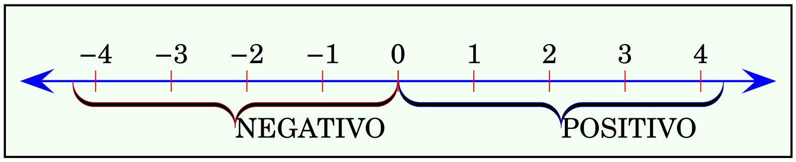
1. Tiene como primer elemento al número 1, llamado elemento minimal.
2. Todo número natural tiene un sucesor.
3. Todo número natural (menos el 1) tiene un antecesor.
4. El conjunto $\mathbb{N}$ es la unión de dos subconjuntos : el de los números pares y el de los números impares.
5. Todo sucesor de un número par es impar.
6. Todo sucesor de un número impar es par.

2.2. El conjunto de los Números Enteros

El conjunto de los números enteros se denota por $\mathbb{Z}$ y se define por extensión como

$$\mathbb{Z} = \{\cdots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3, \cdots\},$$

cuya cardinalidad es infinita.



Regla de signos para la multiplicación

$\bullet$	$(+)$	$(-)$
$(+)$	$(+)\cdot(+)=(+)$	$(+)\cdot(-)=(-)$
$(-)$	$(-)\cdot(+)=(-)$	$(-)\cdot(-)=(+)$

Regla de signo para la división

$\div$	$(+)$	$(-)$
$(+)$	$(+)\div(+)=(+)$	$(+)\div(-)=(-)$
$(-)$	$(-)\div(+)=(-)$	$(-)\div(-)=(+)$

Propiedades 2.2.1.

1. No tiene un primer elemento.
2. Todo número entero tiene un sucesor y un antecesor.
3. No tienen parte decimal.
4. Un número es menor cuanto más a la izquierda de la recta numérica esté.
5. Cualquier número positivo es mayor que cualquier negativo.
6. Cualquier número negativo es menor que cero.
7. Entre dos negativos, es mayor el que tiene menor valor absoluto.

Observación 2.2.2.

1. Cuando una expresión contiene las cuatro operaciones aritméticas sin símbolos de agrupación, primero se realizan las multiplicaciones y divisiones en el orden que aparezcan, luego efectuar las sumas y restas.
2. Si la expresión contiene símbolos de agrupación con solamente números específicos en su interior, primero se llevan a cabo las operaciones incluidas en dichos símbolos.

2.3. El conjunto de los Números Racionales

Se denota por $\mathbb{Q}$ y se define como

$$\mathbb{Q}=\left\{r:\ r=\frac{a}{b}:\ \ a,b\in\mathbb{Z};\ \ b\neq 0\right\}$$

al número a se llama **numerador** y a b **denominador**, a la expresión $\dfrac{a}{b}$ se llama **fracción**. Nuestro objetivo es facilitar el estudio de nuestros alumnos, entonces recordemos las definiciones de las operaciones de suma y multiplicación entre dos números racionales.

Definición 2.3.1. En el conjunto de los números racionales se define dos operaciones

LA SUMA
Sean $r,\ s \in \mathbb{Q}$ tal que $r = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ s = \frac{c}{d},\ d \neq 0$, se define la operación multiplicación como

$$\begin{array}{cccc} + & : & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & (r,s) & \longrightarrow & +(r,s) \end{array},\ \text{donde } +(r,s) = r+s = \frac{a}{b}+\frac{c}{d} = \frac{a\cdot d+b\cdot c}{b\cdot c}$$

LA MULTIPLICACIÓN
Sean $r,\ s \in \mathbb{Q}$ tal que $r = \frac{a}{b},\ b \neq 0,\ s = \frac{c}{d},\ d \neq 0$ se define la operación multiplicación como

$$\begin{array}{cccc} \bullet & : & \mathbb{Q}\times\mathbb{Q} & \longrightarrow & \mathbb{Q} \\ & & (r,s) & \longrightarrow & \bullet(r,s) \end{array},\ \text{donde } \bullet(r,s) = r\bullet s = \frac{a}{b}\bullet\frac{c}{d} = \frac{a\bullet c}{b\bullet d}$$

1. Las operaciones de suma y multiplicación sobre $\mathbb{Q}$ son cerradas, es decir que la suma y multiplicación de dos números racionales es un número racional.
2. El resultado de la adición y multiplicacion entre los números racionales se llama suma y producto respectivamente, que también resulta ser un número racional.
3. Usaremos la notación $a\cdot b = ab$.

Ejemplo 2.3.1.

1. Sumar $\frac{4}{5}+\frac{6}{7}$
2. Multiplicar $\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{9}$

Resolución: ►

1.

$$\frac{4}{5}+\frac{6}{7} = \frac{4\cdot 7+5\cdot 6}{5\cdot 7} = \frac{28+30}{35} = \boxed{\frac{58}{35}}\ \textit{usando la definición 2.3.1}$$

2.

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{7}{9} = \frac{4\cdot 7}{3\cdot 9} = \boxed{\frac{28}{27}}\ \textit{usando la definición 2.3.1}$$

◄

Propiedades 2.3.2.

En el conjunto $\mathbb{Q}$, provisto de las dos operaciones de suma y multiplicación definidas anteriormente, se cumplen las siguientes propiedades para cualesquier $r = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$, $b \neq 0$, $s = \dfrac{c}{d} \in \mathbb{Q}$, $d \neq 0$, $t = \dfrac{e}{f} \in \mathbb{Q}$, $f \neq 0$

- La suma es conmutativa.
  Sean $r,\ s \in \mathbb{Q}$ se cumple $r + s = s + r$
- La suma es asociativa.
  Sean $r,\ s \in \mathbb{Q}$ se cumple $r + (s + t) = (r + s) + t$.
- El elemento $0 \in \mathbb{Q}$ se llama neutro aditivo.
  Para todo $r \in \mathbb{Q}$, $\exists\ 0 \in \mathbb{Q}$ tal que $r + 0 = r$.
- El elemento $1 \in \mathbb{Q}$ se llama neutro multiplicativo.
  Para todo $r \in \mathbb{Q}\ \exists\ 1 \in \mathbb{Q}$ tal que $r \cdot 1 = r$.
- El número racional s se llama inverso aditivo de r
  Dado $r \in \mathbb{Q}$, $\exists s \in \mathbb{Q}$, tal que, $r + s = 0$, se acostumbra a denotar $s = -r$.
- El número racional s se llama inverso multiplicativo de r
  Dado $r \in \mathbb{Q}$ no nulo ($r \neq 0$) existe $s \in \mathbb{Q}$ tal $r \cdot s = 1$. Se acostumbra a denotar $s = r^{-1}$. Más claramente, como $r = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$, entonces $r^{-1} = \dfrac{b}{a}$, $b \neq 0$.
- La multiplicación es distributiva con respecto a la adición
  Sean $r, s,\ t \in \mathbb{Q}$ se cumple $r \cdot (s + t) = r \cdot s + r \cdot t$.

Propiedades 2.3.3.

1. $\dfrac{a}{b} = \dfrac{c}{d} \Longrightarrow ad = bc$
2. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad + cb}{bd}$
3. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{d} = \dfrac{ad - bc}{bd}$
4. $\dfrac{a}{b} \cdot \dfrac{c}{d} = \dfrac{ac}{bd}$
5. $\dfrac{a}{b} \div \dfrac{c}{d} = \dfrac{a/b}{c/d} = \dfrac{ad}{bc}$
6. $\dfrac{a}{b} + \dfrac{c}{b} = \dfrac{a + c}{b}$
7. $\dfrac{a}{b} - \dfrac{c}{b} = \dfrac{a - c}{b}$
8. $-\dfrac{a}{b} = \dfrac{-a}{b} = \dfrac{a}{-b}$

Ejemplo 2.3.4. Realizar las siguientes operaciones

(a) $-[6 + 6 \div 2 \cdot (-3) - \{-8 + 6 \cdot (-5) + 2\} - 3] - 9$

(b) $\dfrac{2^{-2}}{1 + \dfrac{3^{-1}}{1 + 3^{-1}}}$

(c) $\dfrac{3}{4} \div \dfrac{1}{8} \cdot \left(\dfrac{1}{2} + \dfrac{3}{4} \div \dfrac{3}{4}\right)$

Resolución: ►

(a)

$$
\begin{aligned}
-[6+6\div 2\cdot(-3)-\{-8+6\cdot(-5)+2\}-3]-9 &= \underbrace{-[6+6\div 2\cdot(-3)-\underbrace{\{-8+6\cdot(-5)+2\}}_{primero}-3]}_{segundo}-9\\
&= -[6+6\div 2\cdot(-3)-\{-8-30+2\}-3]-9\\
&= -[6+6\div 2\cdot(-3)-\{-36\}-3]-9\\
&= -[6+6\div 2\cdot(-3)+36-3]-9\\
&= -[6+3\cdot(-3)+36-3]-9\\
&= -[6-9+36-3]-9\\
&= -[45-12]-9\\
&= -[33]-9\\
&= -33-9\\
&= \boxed{-42}
\end{aligned}
$$

(b)

$$
\begin{aligned}
\frac{2^{-2}}{1+\frac{3^{-1}}{1+3^{-1}}} &= \frac{2^{-2}}{1+\frac{3^{-1}}{1+3^{-1}}}\\
&= \frac{2^{-2}}{1+\frac{1}{3}\div\frac{4}{3}}\\
&= \frac{2^{-2}}{1+\frac{1}{4}}\\
&= \frac{1}{4}\div\frac{5}{4}\\
&= \boxed{\frac{1}{5}}
\end{aligned}
$$

◄

Continuación del ejercicio

Resolución: ▶

(c)

$$
\begin{aligned}
\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\div\frac{3}{4}\right) &= \frac{3}{4}\div\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}+\frac{3}{4}\cdot\frac{4}{3}\right)=\frac{3}{4}\div\frac{1}{8}\cdot\left(\frac{1}{2}+1\right)\\
&= \frac{3}{4}\div\frac{1}{8}\cdot\frac{3}{2}=\frac{3}{4}\cdot 8\cdot\frac{3}{2}\\
&= \frac{3\cdot 8}{4}\cdot\frac{3}{2}\\
&= 6\cdot\frac{3}{2}=\frac{6\cdot 3}{2}\\
&= 9
\end{aligned}
$$

◀

2.4. El conjunto de los Números Reales

El conjunto de los números reales; está formado por los números racionales, denotado por $\mathbb{Q}$ y los números irracionales denotado por $\mathbb{I}$, es decir $\mathbb{R}=\mathbb{Q}\cup\mathbb{I}$. Se define en $\mathbb{R}$ las operaciones de suma $(+)$ y multiplicación $(\cdot)$ como:

$$
\begin{aligned}
(+):\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(x,y) &\longmapsto (+)(x,y)=x+y
\end{aligned}
\qquad
\begin{aligned}
(\cdot):\ \mathbb{R}\times\mathbb{R} &\longrightarrow \mathbb{R}\\
(x,y) &\longmapsto (\cdot)(x,y)=x\cdot y
\end{aligned}
$$

Propiedades 2.4.1. [Axiomas de los Números Reales ($\mathbb{R}$)]

Para la Suma

S1 $\forall\ a,b\in\mathbb{R},\ a+b\in\mathbb{R}$ Clausura

S2 $\forall\ a,b\in\mathbb{R},\ a+b=b+a$ Conmutativa

S3 $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R},\ (a+b)+c=a+(b+c)$ Asociativa

S4 $\forall\ a\in\mathbb{R},\exists\,!\ 0\in\mathbb{R}:\ a+0=a$ Neutro Aditivo

S5 $\forall\ a\in\mathbb{R},\exists!\ -a\in\mathbb{R}:\ a+(-a)=0$ Inverso Aditivo

Para la multiplicación

M1 $\forall\ a,b\in\mathbb{R},\ a\cdot b\in\mathbb{R}$ Clausura

M2 $\forall\ a,b\in\mathbb{R},\ a\cdot b=b\cdot a$ Conmutativa

M3 $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R},\ (a\cdot b)\cdot c=a\cdot(b\cdot c)$ Asociativa

M4 $\forall\ a\in\mathbb{R}\ \exists!\ 1\in\mathbb{R}:\ 1\cdot a=a$ Neutro Multiplicativo

M5 $\forall\ a\in\mathbb{R},\ a\neq 0,\ \exists!a^{-1}\in\mathbb{R}:\ a\cdot a^{-1}=1$ Inverso Multiplicativo

Ley Distributiva

D1 $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}:\ a\cdot(b+c)=a\cdot b+a\cdot c$ Ley Distributiva izquierda

D2 $\forall\ a,b,c\in\mathbb{R}:\ (a+b)\cdot c=a\cdot c+b\cdot c$ Ley Distributiva derecha

Propiedades 2.4.2. [Axioma de Igualdad]

1. $\forall x,y\in\mathbb{R},\ x=y$ ó $x\neq y$
2. $\forall x\in\mathbb{R},\ \ x=x$ reflexiva.
3. $\forall x,y\in\mathbb{R},\ \ x=y\Longrightarrow y=x$ simetría.
4. $\forall x,y,z\in\mathbb{R},\ x=y$ e $y=z\Longrightarrow x=z$ transitiva.

Definición 2.4.1.

(a) $\mathbb{R}$ posee un subconjunto denotado por $\mathbb{R}^+$, que satisface las siguientes propiedades:

P1: Si $x\in\mathbb{R}$ entonces sólo puede suceder una de las siguientes situaciones:

(i) $x\in\mathbb{R}^+$ (ii) $x=0$ (iii) $-x\in\mathbb{R}^+$.

P2: Si $x,y\in\mathbb{R}^+$, entonces $x+y\in\mathbb{R}^+$.

P3: Si $x,y\in\mathbb{R}^+$, entonces $x\cdot y\in\mathbb{R}^+$.

(b) Definimos $\mathbb{R}^-=\{x\in\mathbb{R}\ :\ -x\in\mathbb{R}^+\}$

(c) En $\mathbb{R}$ se puede definir una **relación de orden,** denotada por $<$, de la siguiente manera. Dados $x,y\in\mathbb{R}$ decimos que $x<y$ si y sólo si, $y-x\in\mathbb{R}^+$.
Así para $x\in\mathbb{R}^+$ y como $x=x-0$ entonces $x-0\in\mathbb{R}^+$, y luego $0<x$. Por este motivo se define los conjuntos $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ como

Teorema 2.4.3.

(a) Sean a, $b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{a \cdot b = 0 \Longleftrightarrow a = 0 \vee b = 0}$$

(b) Sean a, $b \in \mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{a^2 = b^2 \Longleftrightarrow a = b \vee a = -b}$$

Corolario 2.4.4.

(a) Si se tiene $x + a = b$ se concluye que $x = b - a$, si representa una ecuación que depende de x la solución sería $b - a$

(b) Si se tiene $ax = b$ se concluye que $x = \dfrac{b}{a}$, si esta representa una ecuación que depende de x la solución sería $\dfrac{b}{a}$

Propiedades 2.4.5. [Principios de Sustitución]

De la Adición de los números reales
Si $x = y$ y $w = z$ entonces $x + w = y + z$, $\forall\ x, y, w, z \in \mathbb{R}$

De la Multiplicación de los números reales
Si $x = y$ y $w = z$ entonces $x \cdot w = y \cdot z$, $\forall\ x, y, w, z \in \mathbb{R}$

Teorema 2.4.6. [De Igualdad]

Para la Suma
Si $x = y$ entonces $x + z = y + z$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$

Para la Multiplicación
Si $x = y$ entonces $x \cdot z = y \cdot z$, $\forall\ x, y, z \in \mathbb{R}$

Teorema 2.4.7. [De Cancelación]

Para la Suma
Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$; si $x + z = y + z$ entonces $x = y$

Para la Multiplicación
Sean $x, y, z \in \mathbb{R}$; si $x \cdot z = y \cdot z$, $z \neq 0$ entonces $x = y$

Ejemplo 2.4.8. Resolver las ecuaciones siguientes

(a) $3x + 4 = 6x - 8$

(b) $x(2x - 3) = 0$

(c) $5x^2 - 11x + 6 = 0$

(d) $4(x - 2) - 3[6 - 2(3 - 4x)] + 3(7 - 2x) = 0$

(e) $2(3 - 6x) - 5[3 - (4 - 2x)] = 3(2x - 1)$

(f) $2x - [7 - 2(3 - 4x)] = 5 - 2[6 - (7 - x)]$

Resolución: ►

(a)

$$\begin{array}{lcll} 3x+4+8 & = & 6x-8+8 & \textit{por el teorema(2.4.6)} \\ 12+3x-3x & = & 6x-3x & \textit{por el teorema (2.4.6)} \\ 12 & = & 3x & \textit{por el teorema (2.4.6)} \\ \dfrac{12}{3} & = & x & \textit{por el teorema (2.4.6)} \\ 4 & = & x & \textit{por el teorema (2.4.6)} \end{array}$$

(b)

$$\begin{array}{lcll} 5x^2-11x+6 & = & 0 & \textit{factorización} \\ (5x-6)(x-1) & = & 0 & \textit{por el teorema (2.4.3)} \\ \Longrightarrow (5x-6) & = & 0 \wedge (x-1)=1 & \textit{por el teorema (2.4.3)} \\ \Longrightarrow x & = & \dfrac{6}{5} \wedge x=1 & \textit{por el teorema (2.4.3)} \end{array}$$

(d)

$$\begin{array}{lcll} 4(x-2)-3[6-2(3-4x)]+3(7-2x) & = & 0 & \textit{multiplicación} \\ 4x-8-18+4(3-4x)+21-6x & = & 0 & \textit{multiplicación} \\ \Longrightarrow 4x-16x-14+21-6x & = & 0 & \textit{sumar} \\ \Longrightarrow -18x & = & 14-21 & \textit{reducción} \\ \Longrightarrow -18x & = & -7 & \textit{tricotomía} \\ \Longrightarrow x & = & \dfrac{7}{18} & \textit{tricotomía} \end{array}$$

◄

Ejemplo 2.4.9.

(a) Demostrar para cada $x \in \mathbb{R}$ que $x \cdot 0 = 0$

(b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ demostrar que $(-1) \cdot x = -x$

(c) Demostrar para cada $x \in \mathbb{R}$ que $-(-x) = x$

(d) Demostrar para cada $x \in \mathbb{R}$ con $x \neq 0$ que $(x^{-1})^{-1} = x$

(e) Demostrar que $(-1) \cdot (-1) = 1$

(f) Demostrar para cada $x,\ y \in \mathbb{R}$ que $(-x) \cdot (-y) = x \cdot y$

(g) Para cada $x,\ y \in \mathbb{R}$, demostrar $-(x \cdot y) = (-x) \cdot y$

Resolución: ►

(a) *Sea x cualquier real*

$$\begin{aligned} x\cdot 0 &= x\cdot 0+0 && \text{neutro aditivo}\\ &= x\cdot 0+(x+(-x)) && \text{inverso aditivo}\\ &= (x\cdot 0+x)+(-x) && \text{asociatividad}\\ &= (x\cdot 0+x\cdot 1)+(-x) && \text{neutro multiplicativo}\\ &= x(0+1)+(-x) && \text{distributiva}\\ &= x\cdot 1+(-x) && \text{neutro aditivo}\\ &= x+(-x) && \text{neutro multiplicativo}\\ &= 0 && \text{inverso aditivo} \end{aligned}$$

(b) *Sea x cualquier real*

$$\begin{aligned} (-1)\cdot x &= x\cdot(-1) && \text{conmutativa}\\ &= x\cdot(-1)+0 && \text{neutro aditivo}\\ &= x\cdot(-1)+x+(-x) && \text{inverso aditivo}\\ &= x\cdot(-1)+x\cdot 1+(-x) && \text{neutro multiplicativo}\\ &= (x\cdot(-1)+x\cdot 1)+(-x) && \text{asociativa}\\ &= x\cdot((-1)+1)+(-x) && \text{distributiva}\\ &= x\cdot(0)+(-x) && \text{inverso aditivo}\\ &= 0+(-x) && \text{item (a)}\\ &= (-x) && \text{neutro aditivo} \end{aligned}$$

(c) *Sabemos que para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $-x\in\mathbb{R}$ tal que*

$$x+(-x)=0 \tag{2.1}$$

Como $-x\in\mathbb{R}$ entonces existe $-(-x)\in\mathbb{R}$ tal que

$$-(-x)+(-x)=0 \tag{2.2}$$

De (2.1) y (2.2) se obtiene

$$\begin{aligned} -(-x)+\cancel{(-x)} &= x+\cancel{(-x)} && \text{cancelativa para la adición}\\ -(-x) &= x \end{aligned}$$

(d) *Sabemos que para cada $x\in\mathbb{R}$ existe $x^{-1}\in\mathbb{R}$ tal que*

$$x\cdot x^{-1}=1 \tag{2.3}$$

Como $x^{-1}\in\mathbb{R}$ entonces existe $(x^{-1})^{-1}\in\mathbb{R}$ tal que

$$(x^{-1})^{-1}\cdot x^{-1}=1 \tag{2.4}$$

◄

Continuación del ejercicio

Resolución: ►

(d) *De (2.3) y (2.4) se obtiene*

$$\begin{aligned} (x^{-1})^{-1}\cdot \cancel{x^{-1}} &= x\cdot \cancel{(x^{-1})} && \textit{cancelativa para la multiplicación} \\ (x^{-1})^{-1} &= x \end{aligned}$$

(e) *Para* $x=-1$ *en el item* (b)

$$\begin{aligned} (-1)\cdot(-1) &= -(-1) && \textit{por el item (b), para } x=-1 \\ &= 1 && \textit{item (c)} \end{aligned}$$

(f) *Sean* $x,\ y$ *números reales*

$$\begin{aligned} (-x)\cdot(-y) &= ((-1)\cdot x)\cdot((-1)\cdot y) && \textit{por el item (b)} \\ &= [((-1)\cdot x)\cdot(-1)]\cdot y && \textit{asociativa} \\ &= [(-1)\cdot((-1)\cdot x)]\cdot y && \textit{conmutativa} \\ &= [((-1)\cdot(-1))\cdot x]\cdot y && \textit{asociativa} \\ &= (1\cdot x)\cdot y && \textit{item (d)} \\ &= x\cdot y && \textit{neutro multiplicativo} \end{aligned}$$

(g) *Sean* $x,\ y$ *números reales*

$$\begin{aligned} -(x\cdot y) &= (-1)\cdot(x\cdot y) && \textit{por la parte (b)} \\ &= ((-1)\cdot x)\cdot y && \textit{asociativa} \\ &= (-x)\cdot y && \textit{por la parte (b)} \end{aligned}$$

◄

Definición 2.4.2. [Operaciones de resta y división]

(a) Sustracción.
Para todo $a,\ b\in\mathbb{R}$ se define la operación resta como $a-b=a+(-b)$ donde a es el **minuendo** y b es el **sustraendo**

(b) División.
Para todo $a,\ b\in\mathbb{R},\ b\neq 0$ se define la operación división como $\dfrac{a}{b}=a\cdot b^{-1}$ donde a es el **dividendo** y b es el **divisor**

2.5. Intervalos

Definición 2.5.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ con $a < b$, se define los intervalos siguientes :

Intervalo	Nombre	Como conjunto	Gráficamente
$[a, b]$	cerrado	$\{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x \leq b\}$	
$]a, b[$	abierto	$\{x \in \mathbb{R} : \ a < x < b\}$	
$[a, b[$	semiabierto	$\{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x < b\}$	
$]a, b]$	semicerrado	$\{x \in \mathbb{R} : \ a < x \leq b\}$	
$]-\infty, b]$	cerrado	$\{x \in \mathbb{R} : \ x \leq b\}$	
$]-\infty, b[$	abierto	$\{x \in \mathbb{R} : \ x < b\}$	
$[a, \infty[$	cerrado	$\{x \in \mathbb{R} : \ a \leq x\}$	
$]a, \infty[$	abierto	$\{x \in \mathbb{R} : \ a < x\}$	
$]-\infty, \infty[$	abierto	$\{x \in \mathbb{R} : \ -\infty < x < +\infty\}$	

Definición 2.5.2.

(a) Sea $x \in \mathbb{R}$, se dice que x es positivo si $x > 0$, por tanto se define el conjunto de los números reales positivos, denotado por $\mathbb{R}^+$, como

$$\boxed{\mathbb{R}^+ = \{x \in \mathbb{R} : \ x > 0\}}$$

(b) Sea $x \in \mathbb{R}$, se dice que x es negativo si $x < 0$, por tanto se define el conjunto de los números reales negativos, denotado por $\mathbb{R}^-$, como

$$\boxed{\mathbb{R}^- = \{x \in \mathbb{R} : \ x < 0\}}$$

Definición 2.5.3. [Relación de Orden]

(a) Se define en $\mathbb{R}$ una relación de orden, menor que denotado por $<$ del modo siguiente:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}: \quad x < y \text{ sí y solo si } y - x \in \mathbb{R}; \text{ se lee "}x \text{ es menor que } y\text{''}$$

(b) Se define en $\mathbb{R}$ una relación de orden, mayor que denotado por,$>$ del modo siguiente:

$$\forall\ x, y \in \mathbb{R}: \quad x > y \text{ sí y solo si } x - y \in \mathbb{R}^+ \text{ ; se lee "}x \text{ es mayor que } y\text{''}$$

Propiedades 2.5.1. [Axioma de Orden]

1. ***Ley de Tricotomía***
   Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$, uno y sólo una de las expresiones siguientes se cumple

$$(a)\ x < y \qquad (b)\ x = y \qquad (c)\ x > y$$

2. ***Ley de Transitividad***

$$\text{Si } x < y, \quad y < z \text{ entonces } x < z.$$

3. ***Ley de Monotonía***

   - Si $x < y$ entonces $\forall z \in \mathbb{R}$, $x + z < y + z$.
   - Si $x < y$ y $z > 0$ entonces $xz < yz$.
   - Si $x < y$ y $z < 0$ entonces $xz > zy$.

1. Dados $x, y \in \mathbb{R}$ el número real $x + (-y)$ se denotará simplemente por $x - y$.
2. El conjunto $\mathbb{R}$ dotado con las operaciones de suma y multiplicación en conjunto con los axiomas de los números reales, constituye $\mathbb{R}$ una estructura algebraica llamada ***cuerpo conmutativo o campo***.
3. El conjunto de los números reales como campo más el axioma del supremo y los axiomas de orden constituyen un ***campo ordenado completo***

Ejemplo 2.5.2. Encuentre los valores de x para las inecuaciones siguientes

(a) $x - 8 > 3$

(b) $x + 9 < 4$

(c) $x + 8 \leq -2x + 5$

(d) $13 > 8 + x$

(e) $-3x \geq 7$

(f) $7x - 3(5 - 2x) \geq 4x - 21$

(g) $5x - (3x + 4) > 8(3 + 2x)$

(h) $\dfrac{3x-5}{6} - 2 \geq 4x - \dfrac{3-x}{12}$

(i) $\dfrac{2x+3}{9} - \dfrac{3x-5}{6} \leq 2x - \dfrac{4+x}{3}$

Resolución: ▶

(a)

Comentarios

$$\begin{array}{llll} x & -8 & >3 & \textit{inecuación de primer grado} \\ x & \underbrace{-8+8}_{0} & >3+8 & \textit{ley de monotonía} \\ x & +0 & >11 & \textit{elemento neutro} \\ x & & >11 & \textit{solución} \end{array}$$

(b)

Comentarios

$$\begin{array}{llll} x & +9 & <4 & \textit{inecuación de primer grado} \\ x & \underbrace{+9\ -9}_{0} & <4-9 & \textit{ley de monotonía} \\ x & +0 & <-5 & \textit{elemento neutro} \\ x & & <-5 & \textit{solución} \end{array}$$

graficamente

(c)

Comentarios

$$\begin{array}{llll} x & +8 & <-2x+5 & \textit{inecuación de primer grado} \\ x+2x & \underbrace{+8\ -8}_{0} & <\underbrace{-2x+2x}_{0}+5-8 & \textit{ley de monotonía} \\ 3x & +0 & <0-3 & \textit{elemento neutro} \\ 3x & & <-3 & \textit{ley de monotonía} \\ x & & <\dfrac{-3}{3} & \textit{ley de monotonía} \\ x & & <-1 & \textit{solución} \end{array}$$

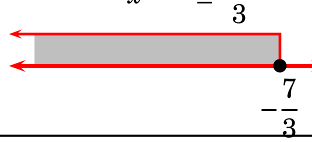
graficamente

(d) *TAREA*

(e)

Comentarios

$$\begin{array}{lll} -3x & \geq 7 & \textit{inecuación de primer grado} \\ 3x\cdot\dfrac{1}{3} & \leq -7\cdot\dfrac{1}{3} & \textit{ley de monotonía} \\ x & \leq \dfrac{-7}{3} & \textit{solución} \end{array}$$



graficamente

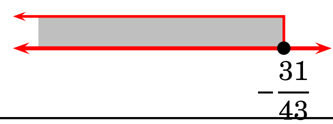
◀

Resolución: ►

(h)

Comentarios

$$\begin{array}{rll}
\dfrac{3x-5}{6}-2 & \geq 4x-\dfrac{3-x}{12} & \textit{inecuación de primer grado}\\
12\left(\dfrac{3x-5}{6}-2\right) & \geq 12\left(4x-\dfrac{3-x}{12}\right) & \textit{ley de monotonía}\\
6x-10-24 & \geq 48x-3+x & \textit{sumando}\\
6x-34 & \geq 49x-3 & \textit{restando}\\
-34+3 & \geq 49x-6x & \textit{sumando}\\
-31 & \geq 43x & \textit{dividiendo}\\
\dfrac{-31}{43} & \geq x & \textit{solución}
\end{array}$$



graficamente

◄

(a) Una desigualdad es una proposición donde aparece la relación menor que $(<)$, mayor que $(>)$, menor o igual que $(\leq)$, mayor igual que $(\geq)$

(b) $\mathbb{R}=\mathbb{R}^+\cup\mathbb{R}^-\cup\{0\}$.

(c) El conjunto $\mathbb{R}^+$ y $\mathbb{R}^-$ es un subconjunto de $\mathbb{R}$

Teorema 2.5.3.

(a) Sean $x,\ y\in\mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{x\leq y \Longleftrightarrow x<y \vee\ x=y}$$

(b) Sean $x,\ y\in\mathbb{R}$ entonces

$$\boxed{x\geq y \Longleftrightarrow x>y \vee x=y}$$

Propiedades 2.5.4. Para $a,b\in\mathbb{R}$ se cumple

- $a<b \Longleftrightarrow a-b<0$
- $a>b \Longleftrightarrow a-b>0$
- $a<0 \Longleftrightarrow -a>0$
- $a>0 \Longleftrightarrow -a<0$

Observación 2.5.5.

(a) Por tanto si $a-b>0$ si y sólo si $a-b\in\mathbb{R}^+$.

(b) Por tanto si $a-b<0$ si y sólo si $a-b\in\mathbb{R}^-$.

Teorema 2.5.6.

1. Si $a < b$ y $c < d$ entonces $a + c < b + d$
2. Sean $a,\ b \in \mathbb{R}$ entonces $a < b \iff -a > -b$.
3. Sea $a \in \mathbb{R}$, entonces $a \neq 0 \iff a^2 > 0$

2.6. Inecuaciones

2.6.1. Propiedades para la resolución de inecuaciones

Teorema 2.6.1. Sean $a, b \in \mathbb{R}$ se cumple

(i) Si $a > 0$ y $b > 0$ entonces $a + b > 0$ y $a \cdot b > 0$.

(ii) Si $a < 0$ y $b < 0$ entonces $a + b < 0$ y $a \cdot b > 0$

(iii) Si $a > 0$ y $b < 0$ ó si $a < 0$ y $b > 0$ entonces $a \cdot b < 0$.

(iv) $a \cdot b > 0 \iff (a > 0 \wedge b > 0) \vee (a < 0 \wedge b < 0)$

(v) $a \cdot b < 0 \iff (a > 0 \wedge b < 0) \vee (a < 0 \wedge b > 0)$

(vi) Si $a \neq 0$ entonces a^{-1} tiene el mismo signo que a.

(vii) Si a y b tienen el mismo signo, entonces $a < b \iff \dfrac{1}{a} > \dfrac{1}{b}$

Ejemplo 2.6.2. Encuentre el conjunto solución para las desigualdades siguientes

(a) $x^2 + 2x < 35$

(b) $\dfrac{x+7}{x-5} \geq 0$

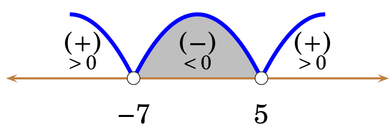
(c) $\dfrac{x+7}{x-5} \leq -2$

(d) $\dfrac{x+7}{x-5} \geq \dfrac{x-3}{x+2}$

Resolución: ►

(a)

		Comentarios
$x^2+2x-35$	<0	*dejando a cero un lado de la desigualdad*
$(x+7)(x-5)$	<0	*factorizando*
$x+7=0 \wedge \ x-5=0$	$\Longrightarrow x=-7 \wedge x=5$	*igualando a cero cada factor*
$P.C=$	$\{5,-7\}$	*Puntos críticos*
		El gráfico comienza del lado derecho
		poniendo alternandamente $(+)$, $(-)$, $(+)\cdots$
		en cada intervalo.Luego se elige los
		intervalos correspondientes a <0
		por que $x^2+2x-35<0$
		el intervalo correspondiente a la región
		achurada forma parte de la solución,
		debido a que $x^2+2x-35<0$
		observar que sucede en los puntos críticos
$Si\ x=-7$	$(-7+7)(-7-5)=0<0$	*esto no es cierto*
$Si\ x=5$	$(7+5)(5-5)=0<0$	*esto no es cierto*
	$x\in]-7,5[$	*es el conjunto solución*



◄

Continuación del ejercicio anterior

Resolución: ►

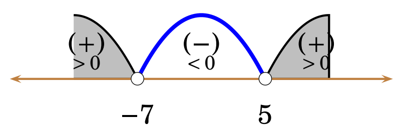
(b)

Comentarios

$\dfrac{x+7}{x-5} \geq 0$ — *dejando a cero un lado de la desigualdad*

$x+7=0 \wedge x-5=0 \implies x=-7 \wedge x=5$ — *igualando a cero cada factor*

$P.C = \{5,-7\}$ — *Puntos críticos*



el intervalo correspondiente a la región achurada forma parte de la solución,

debido a que $\dfrac{x+7}{x-5} \geq 0$

observar que sucede en los puntos críticos

Si $x=-7$ $\quad \dfrac{(-7+7)}{(-7-5)} = 0 \geq 0$ — *esto es cierto*

Si $x=5$ $\quad \dfrac{(7+5)}{(5-5)} \neq 0 \geq 0$ — *esto no es cierto*

$x \in [-7,5[$ — *es el conjunto solución*

(c)

Comentarios

$\dfrac{x+7}{x-5} \leq -2$ — *dejando a cero un lado de la desigualdad*

$\dfrac{(x+7)}{(x-5)}+2 \leq 0$ — *reduciendo la fracción*

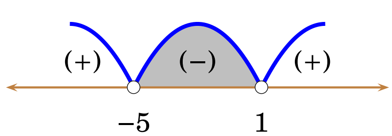
$\dfrac{x+7+2x-10}{x-5} \leq 0$ — *igualando a cero cada factor*

$\dfrac{x-1}{x+5} \leq 0$ — *igualando a cero* $x-1$ *y* $x+5$

$x-1=0 \wedge x+5=0 \implies x=1 \wedge x=-5$ — *igualando a cero cada factor*

$P.C = \{-5,1\}$ — *Puntos críticos*

Puntos críticos



el intervalo correspondiente a la región achurada forma parte de la solución,

debido a que $\dfrac{x-1}{x+5} \leq 0$

observar que sucede en los puntos críticos

Si $x=-5$ $\quad \dfrac{(-5-1)}{(-5+5)} \neq 0 \leq 0$ — *esto no es cierto*

Si $x=1$ $\quad \dfrac{(1-1)}{(1+5)} = 0 \leq 0$ — *esto es cierto*

Continuación del ejercicio anterior

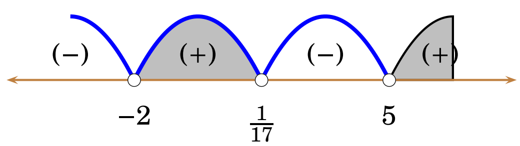
Resolución: ►

(d)

Comentarios

$\dfrac{x+7}{x-5}$	$\geq \dfrac{x-3}{x+2}$	*dejando a cero un lado de la desigualdad*
$\dfrac{x+7}{x-5}-\dfrac{x-3}{x+2}$	≥ 0	*reduciendo la fracción*
$\dfrac{(x+7)(x+2)-(x-5)(x-3)}{(x-5)(x+2)}$	≥ 0	*reduciendo términos*
$\dfrac{x^2+9x+14-(x^2-8x+15)}{(x-5)(x+2)}$	≥ 0	*igualando a cero* $x-1$ *y* $x+5$
$\dfrac{17x-1}{(x-5)(x+2)}$	≥ 0	*multiplicando por* $\dfrac{1}{17}$
$\dfrac{x-\frac{1}{17}}{(x-5)(x+2)}$	≥ 0	*multiplicando por* $\dfrac{1}{17}$
$x-\frac{1}{17}=0 \wedge \; x-5=0$	$\Longrightarrow x+2=0$	*igualando a cero cada factor*
$P.C=$	$\left\{-2, \frac{1}{17},\, 5\right\}$	*Puntos críticos*

Puntos críticos



el intervalo correspondiente a la región achurada forma parte de la solución,

debido a que $\dfrac{x-\frac{1}{17}}{(x-5)(x+2)} \geq 0$

observar que sucede en los puntos críticos

Si $x=-2$	$\dfrac{(-2-\frac{1}{17})}{(-2+5)(-2+2)} \neq 0 \geq 0$	*esto no es cierto*
Si $x=\frac{1}{17}$	$\dfrac{(0)}{(\frac{1}{17}-5)(\frac{1}{17}+2)} = 0 \geq 0$	*esto es cierto*
Si $x=5$	$\dfrac{5-\frac{1}{17}}{(5-5)(5+2)} \neq 0 \geq 0$	*esto no es cierto*
	$x \in \left]-2, \frac{1}{17}\right] \cup]5,+\infty[$	*es el conjunto solución*

◄

Definición 2.6.1.

(a) Si $b \in \mathbb{R}$ y $a \in \mathbb{R}^+$ entonces $\sqrt{a} = b \Longleftrightarrow a \geq 0 \wedge (b \geq 0 \wedge a = b^2)$.

(b) Se llama ***valor absoluto*** en $\mathbb{R}$ a la función

$$\begin{array}{rcl} |\cdot|: \mathbb{R} & \to & \mathbb{R} \\ x & \mapsto & |x| = \begin{cases} x & , \quad x \geq 0 \\ -x & , \quad x < 0 \end{cases} \end{array}$$

Propiedades 2.6.3.

1. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0 \Longrightarrow (a^2 > b^2 \Longleftrightarrow a > b)$.
2. Si $a \geq 0$ y $b \geq 0 \Longrightarrow (a^2 < b^2 \Longleftrightarrow a < b)$.
3. Sea $b \geq 0$. Si $a^2 > b \Longleftrightarrow (a > \sqrt{b} \vee a < -\sqrt{b})$.
4. Sea $b \geq 0$. Si $a^2 \geq b \Longleftrightarrow (a \geq \sqrt{b} \vee a \leq -\sqrt{b}$.
5. Sea $b > 0$. Si $a^2 \leq b \Longleftrightarrow -\sqrt{b} \leq a \leq \sqrt{b}$.
6. Sea $b > 0$. Si $a^2 < b \Longleftrightarrow -\sqrt{b} < a < \sqrt{b}$.
7. Sea $a \geq 0$ y $b \geq 0 \Longrightarrow (\sqrt{a} < \sqrt{b} \Longleftrightarrow 0 \leq a \leq b)$.
8. Sea $a \geq 0$ y $b > 0 \Longrightarrow (\sqrt{a} < \sqrt{b} \Longleftrightarrow 0 \leq a < b)$.

Propiedades 2.6.4.

1. $\sqrt{a} < b \Longleftrightarrow a \geq 0 \wedge (b > 0 \wedge a < b^2)$
2. $\sqrt{a} \leq b \Longleftrightarrow a \geq 0 \wedge (b > 0 \wedge a \leq b^2)$
3. $\sqrt{a} > b \Longleftrightarrow a \geq 0 \wedge [b < 0 \vee (b \geq 0 \wedge a > b^2)]$
4. $\sqrt{a} \geq b \Longleftrightarrow a \geq 0 \wedge [b < 0 \vee (b \geq 0 \wedge a \geq b^2)]$

Lema 2.6.5.

(a) Sean $x,\ y \in \mathbb{R}$ entonces $0 \leq \sqrt{x} \leq \sqrt{y} \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq y$

(b) Sean $x,\ y \in \mathbb{R}$ entonces $0 \leq \sqrt{x} < \sqrt{y} \Longleftrightarrow 0 \leq x < y$

Teorema 2.6.6.

1. Si $n \in \mathbb{N}$ par
   - $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow 0 \leq x \leq y$
   - $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow 0 \leq x < y$
2. Si $n \in \mathbb{N}$ impar
   - $\sqrt[n]{x} \leq \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow x \leq y$
   - $\sqrt[n]{x} < \sqrt[n]{y} \Longleftrightarrow x < y$
   - $\sqrt[n]{x} \geq 0 \Longleftrightarrow x \geq 0$
   - $\sqrt[n]{x} < 0 \Longleftrightarrow x < 0$

Teorema 2.6.7. Para todo $x,\ y,\ z \in \mathbb{R}$

1. $|x| \geq 0$
2. $|x| = 0 \Longleftrightarrow x = 0$
3. $|-x| = |x|$
4. $|x \cdot y| = |x| \cdot |y|$
5. $|x|^2 = x^2$
6. $|x^2| = x^2$
7. $\sqrt{x^2} = |x|$
8. $|x + y| \leq |x| + |y|$

Proposicion 2.6.8. Para $x, b \in \mathbb{R}$ se tiene

1. $|x| = |b| \iff (x = b \vee x = -b)$.
2. Si $b \geq 0$ entonces $|x| = b \iff x = b \vee x = -b$
3. Si $b \geq 0$ entonces
   - $|x| \leq b \iff -b \leq x \leq b$
   - $|x| < b \iff -b < x < b$
4. $|x| \geq b \iff x \leq -b \vee x \geq b$
5. $|x| > b \iff x < -b \vee x > b$
6. $||x| - |b|| \leq |x - b|$
7. $|x| \geq |b| \iff (x+b)(x-b) \geq 0$
8. $|x| \leq |b| \iff (x+b)(x-b) \leq 0$

Ejemplo 2.6.9. Calcule el conjunto solución para las inecuaciones siguientes

(a) $\left|\dfrac{x+2}{2x-3}\right| < 3$

(b) $\sqrt{x-2} > 3$

(c) $|x+6| > 2x-3$

(d) $|3x-1| \leq |2x+1| + |x-2|$

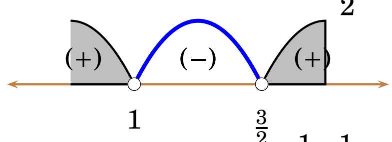
(e) $\sqrt{x+2} + \sqrt{2-x} = 0$

(f) $\sqrt{x^2+4x} < 5x-1$

Resolución: ►

(a)

	Comentarios
$-3 < \dfrac{x+2}{2x-3} < 3$	*multiplicando por 2*
$-6 < \dfrac{2x-3+3+4}{2x-3} < 6$	*elemento neutro aditivo*
$-6 < 1 + \dfrac{7}{2x-3} < 6$	*restando 1*
$-7 < \dfrac{7}{2x-3} < 5$	*descomponiendo*
$-7 < \dfrac{7}{2x-3} \quad \wedge \quad \dfrac{7}{2x-3} < 5$	*resolviendo por separado*
$\boxed{Si\ \ -7 < \dfrac{7}{2x-3}}$	*multiplicando por* $\dfrac{1}{7}$
$-1 < \dfrac{1}{2x-3} \quad \Longrightarrow \quad \dfrac{1}{2x-3} + 1 > 0$	*dejando a cero un lado*
$\dfrac{2(x-1)}{2x-3} > 0$	*simplificando por 2*
$\dfrac{(x-1)}{x-\frac{3}{2}} > 0$	*igualando a cero*
$x = 1 \wedge \quad x = \dfrac{3}{2} = 0$	*Puntos críticos*



$Si\ x = 1 \qquad \dfrac{1-1}{1-\frac{3}{2}} = 0 > 0$	*esto no es cierto*
$Si\ x = \frac{3}{2} \qquad \dfrac{\frac{3}{2}-1}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}} = 0 > 0$	*esto no es cierto*
$x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left]\frac{3}{2}, +\infty\right[$	*es el conjunto solución*

◄

Resolución: ►

(a)

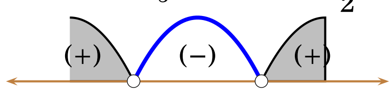
$$\boxed{Si\ \frac{7}{2x-3}<5}$$ *pasando a un lado de la desigualdad*

$$5-\frac{7}{2x-3}>0 \quad\Longrightarrow\quad \frac{10x-22}{2x-3}>0$$ *factorizando 10 y 2*

$$\frac{10(x-\frac{22}{10})}{2(x-\frac{3}{2})}>0$$ *simplificando*

$$\frac{x-\frac{11}{5}}{x-\frac{3}{2}}>0$$ *igualando a cero numerador y denominador*

$$x=\tfrac{11}{5}\wedge \qquad x=\frac{3}{2}=0$$ *Puntos críticos*



$$\tfrac{3}{2} \qquad \tfrac{11}{5}$$

$$Si\ x=\tfrac{3}{2} \qquad \frac{\frac{3}{2}-\frac{11}{5}}{\frac{3}{2}-\frac{3}{2}}\neq 0>0$$ *esto no es cierto*

$$Si\ x=\tfrac{11}{5} \qquad \frac{\frac{11}{5}-\frac{11}{5}}{\frac{11}{5}-\frac{3}{2}}\neq 0>0$$ *esto no es cierto*

$$x\in\left]-\infty,\tfrac{3}{2}\right]\cup\left]\tfrac{11}{5},+\infty\right[$$ *es el conjunto solución*

El conjunto solución final es $]-\infty,1[\cup\left]\frac{11}{5},+\infty\right[$

(b)

$$\sqrt{x-2}>3$$ *propiedad (2.6.4)*

$$x-2\geq 0\wedge[2<0\vee(2\geq 0\wedge x-2>9] \quad\Longrightarrow\quad x\geq 2\wedge x>11$$ *intersectando*

El conjunto solución final es $]11,+\infty[$

◄

Resolución: ►

(d)

Comentarios

$|3x-1| \leq |2x+1| + |x-2|$

$3x-1=0,\ 2x+1=0,\ x-2=0$ — *igualando cada valor absoluto a cero*

$x=\dfrac{1}{3},\ x=-\dfrac{1}{2},\ x=2$ — *puntos críticos*

$x \in$	$]-\infty;-\frac{1}{2}[$	$]-\frac{1}{2};\frac{1}{3}[$	$]\frac{1}{3};2[$	$]2;-\infty[$
$\|2x+1\|$	$-$	$+$	$+$	$+$
$\|3x-1\|$	$-$	$-$	$+$	$+$
$\|x-2\|$	$-$	$-$	$-$	$+$

signos de los valores absolutos

$\boxed{Si\ x \in \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[}$ — *solucionando para cada intervalo*

$-3x+1 \leq -2x-1-x+2 \Longrightarrow -3x+1 \leq -3x+1,\ x \in \mathbb{R}$ — *la desigualdad se cumpla $\forall x \in \mathbb{R}$*

$S_1 = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[\cap \mathbb{R} = \left]-\infty;-\dfrac{1}{2}\right[$ — *solución 1*

$\boxed{Si\ ]-\frac{1}{2};\frac{1}{3}[}$ — *solucionando para cada intervalo*

$-3x+1 \leq 2x+1-x+2 \Longrightarrow\ 4x \geq -2 \Longrightarrow x \geq -\frac{1}{2}$ — *la desigualdad se cumpla*

$S_2 =]-\frac{1}{2};\frac{1}{3}[\cap[-\frac{1}{2},\infty[=]-\frac{1}{2};\frac{1}{3}[$ — *solución 2*

$\boxed{Si\ ]\frac{1}{3};2[}$ — *solucionando para cada intervalo*

$3x-1 \leq 2x+1-x+2 \Longrightarrow\ 2x \leq 4 \Longrightarrow x \leq 2$ — *la desigualdad se cumpla*

$S_3 =]\frac{1}{3};2[\cap]-\infty,2[=]\frac{1}{3};2[$ — *solución 3*

$\boxed{Si\ ]2;\infty[}$ — *solucionando para cada intervalo*

$3x-1 \leq 2x+1+x-2 \Longrightarrow\ 0 \leq 0$ — *la desigualdad se cumpla*

$S_4 =]2;-\infty[\cap\mathbb{R} =]2;-\infty[$ — *solución 4*

$\boxed{Si\ x=\dfrac{1}{2}}$ — *reemplazando en la inecuación*

$|3\cdot\frac{1}{2}-1| \leq |2\cdot\frac{1}{2}+1| + |\frac{1}{2}-2| \Longrightarrow \frac{1}{2} \leq 2+\frac{3}{2}$ — *verdadero*

$\boxed{Si\ x=\dfrac{1}{3}}$ — *reemplazando en la inecuación*

$|3\cdot\frac{1}{3}-1| \leq |2\cdot\frac{1}{3}+1| + |\frac{1}{3}-2| \Longrightarrow 0 \leq \frac{5}{3}+\frac{5}{3}$ — *verdadero*

$\boxed{Si\ x=2}$ — *reemplazando en la inecuación*

$|3\cdot2-1| \leq |2\cdot2+1| + |2-2| \Longrightarrow 5 \leq 5+0$ — *verdadero*

$C.S =]-\infty;-\frac{1}{2}]\cup]-\frac{1}{2};\frac{1}{3}[\cup]\frac{1}{3};2[\cup]2;-\infty[\cup\{\frac{1}{2},\frac{1}{3},2\}$

$C.S = \mathbb{R}$

◄

Resolución: ►

(c)

$$\begin{array}{ll}
|x+6| > 2x-3 & \boxed{\textsf{Comentarios}} \\
x+6 < -2x+3 \vee x+6 > 2x-3 & \textit{proposición (2.6.8)} \\
3x < -3 \vee 9 > x \Longrightarrow x < -1 \vee x < 9 & \textit{resolviendo} \\
x < 9 & \textit{uniendo} \\
C.S. =]-\infty, 9[& \textit{solución}
\end{array}$$

(f)

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x^2+4x} < 5x-1 & \boxed{\textsf{Comentarios}} \\
x^2+4x \geq 0 \wedge [5x-1 > 0 \wedge x^2+4x < (5x-1)^2] & \textit{propiedad (2.6.4)} \\
x(x+4) \geq 0 \wedge [x > \frac{1}{5} \wedge x^2+4x < 25x^2-10x+1] & \textit{resolviendo} \\
x(x+4) \geq 0 \wedge [x > \frac{1}{5} \wedge 24x^2-14x+1 > 0] & \textit{uniendo} \\
\{]-\infty,-4] \cup [0,+\infty[\} \wedge \left(\left]\frac{1}{5},+\infty\right[\wedge \left(\left]-\infty,\frac{1}{12}\right[\vee \left]\frac{1}{2},+\infty\right[\right)\right) & \textit{solución parcial} \\
\left]\frac{1}{2},+\infty\right[& \textit{solución final}
\end{array}$$

(e)

$$\begin{array}{ll}
\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x} = 0 & \boxed{\textsf{Comentarios}} \\
\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x} = 0,\ x+2 \geq 0\ \wedge\ 2-x \geq 0 & \textit{propiedad (2.6.4)} \\
\left(\sqrt{x+2}+\sqrt{2-x}\right)^2 = 0,\ x \geq -2\ \wedge\ 2 \geq x & \textit{elevando cuadrado} \\
\cancel{x}+2+2\cancel{-x}+2\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2-x} = 0 & \textit{resolviendo} \\
\underbrace{\sqrt{x+2}\cdot\sqrt{2-x}}_{\geq 0} = -2 & \textit{absurdo} \\
\textit{no existe } x \in \mathbb{R} & \textit{solución final}
\end{array}$$

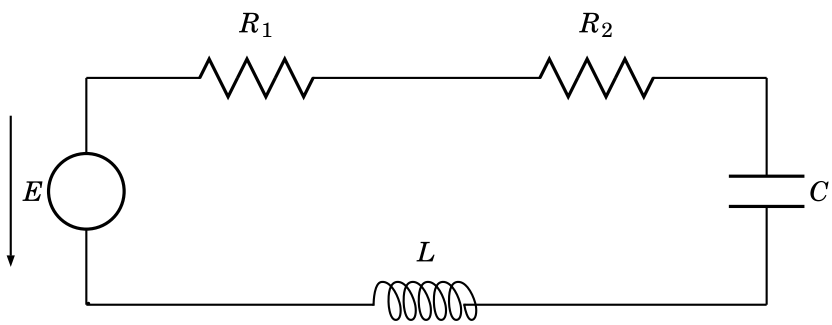
◄

2.7. Aplicaciones

Ejercicio 2.7.1

En circuitos en serie,la resistencia total es la suma de las resistencias componentes, es decir, $R = \sum_{i=1}^{n} R_i$. Suponga que un circuito en serie está compuesto por dos resistencias R_1, R_2. Si la resistencia total debe ser de 1375Ω (ohmios) y si R_1 debe ser 25Ω más que R_2. Determine los valores de R_1, R_2.

Resolución: ▸



R_1 : *resistencia número uno.*

R_2 : *resistencia número dos.*

$R = R_1 + R_2 = 1375$: *resistencia total.*

$R_1 = R_2 + 25$: *la resistencia uno debe ser 25 Ω más que la resistencia dos*

$$\begin{cases} R_1 + R_2 &= 1375 \\ R_1 &= R_2 + 25 \end{cases}$$

Resolviedo el sistema de ecuaciones se obtiene

$$\begin{aligned} R_2 + R_2 + 25 &= 1375 \Longrightarrow 2R_2 = 1350 \\ &\Longrightarrow \boxed{R_2 = 675\Omega, \;\; R_1 = 700\Omega} \end{aligned}$$

◂

Ejercicio 2.7.2

Una bomba trabajando sola, llena un tanque en 7 horas. Una segunda bomba lo haría en 8 horas. Determina el tiempo de llenado si trabajan ambas al mismo tiempo.

Resolución: ►

7 horas: *Tiempo de llenado por la bomba 1.*

8 horas: *Tiempo de llenado por la bomba 2.*

$V_1 = \dfrac{v}{7}$: *velocidad de llenado por la bomba 1, siendo.*

v**:** *volumen del tanque.*

$V_2 = \dfrac{v}{8}$: *velocidad de llenado por la bomba 2, siendo v volumen del tanque.*

$V_1 + V_2 = V$ *velocidad de llenado por la bomba 1 más la velocidad de llenado por la bomba 2 deberá ser igual a la velocidad de llenar el tanque por ambas bombas*

$$\begin{aligned} \frac{v}{7} + \frac{v}{8} &= \frac{v}{t} \Longrightarrow v \cdot \left(\frac{1}{7} + \frac{1}{8}\right) = \frac{v}{t} \Longrightarrow \frac{1}{7} + \frac{1}{8} = \frac{1}{t} \Longrightarrow \frac{15}{56} = \frac{1}{t} \\ &\Longrightarrow \boxed{t = \frac{56}{15} = 3,73\ horas} \end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.7.3

Cuatro estudiantes deciden vivir solos en un departamento repartiendo en partes iguales el valor del arriendo. Encuentran que si aumentan en dos el número de estudiantes, el valor de la cuota se reduce en $ 5000. Determina el costo mensual del arriendo.

Resolución: ►

x : *valor del pago de los 4 estudiantes, por el arriendo del dpto, debido a que los valores son iguales por que la repartición se dá en partes iguales.*

T *: el valor total del arriendo por el departamento.*

$x-5000$: *valor del pago de los 6 estudiantes (dos agregados), por el arriendo del dpto.*

Según las condiciones del problema se tiene que:

$$\begin{aligned} 4x &= T \\ 6(x-5000) &= T \end{aligned}$$

Igualando ambas ecuaciones se obtiene:

$$4x = 6x - 6\cdot 5000 \Longrightarrow 2x = 30000 \Longrightarrow \boxed{x = 15000}$$

Así el costo del arriendo mensual es $4\cdot 15000 = 60000$ ◄

Ejercicio 2.7.4

En una prueba de matemática, el 12% de los estudiantes no resolvió el problema, el 32% lo resolvió con algunos errores y los 14 restantes obtuvieron la solución correcta. Determina el total de alumnos que había en la sala.

Resolución: ►

T**:** *el total de estudiantes que rinden la prueba de matemática.*

$12\%\cdot T$**:** *el 12% no resolvió el problema.*

$32\%\cdot T$**:** *el 32% resolvió el problema con algunos errores.*

14: *restantes obtuvieron la solución correcta.*

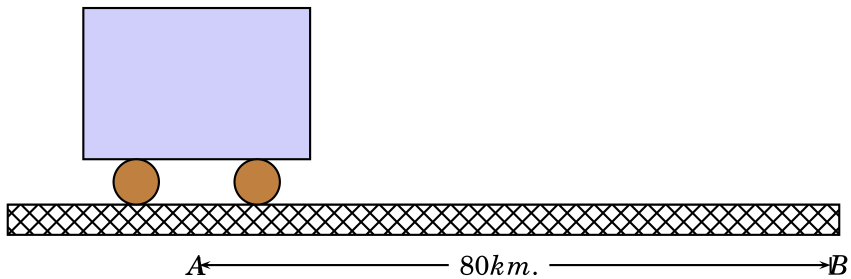
$$\begin{aligned} \frac{12T}{100} + \frac{32T}{100} + 14 &= T \Longrightarrow \frac{44T}{100} + 14 = T \Longrightarrow T - \frac{44T}{100} = 14 \\ &\Longrightarrow \frac{56T}{100} = 14 \Longrightarrow T = \frac{14\cdot 100}{56} \Longrightarrow \boxed{T = 25} \end{aligned}$$

◄

Ejercicio 2.7.5

Un tren debió detenerse 16 minutos en un lugar no programado. Para recuperar este tiempo, debió desplazarse en un tramo de 80 km. a $10\dfrac{km}{h}$ más rápido que lo normal. Determina la velocidad del tren.

Resolución: ►



v: velocidad inicial del tren.

$v_1 = v + \dfrac{10km}{h}$ *velocidad del tren sin detenerse.*

$t - 16' = t - \dfrac{4}{15}$ *tiempo en recorrer los 80 km en horas.*

$$\begin{aligned}
v_1 = v + 10 \quad &= \quad \frac{80}{t-16'} \Longrightarrow v + 10 = \frac{80}{\dfrac{80}{v} - \dfrac{4}{15}} \Longrightarrow v + 10 = \frac{20}{\dfrac{20}{v} - \dfrac{1}{15}} \\
&\Longrightarrow \quad v + 10 = \frac{300v}{300 - v} \Longrightarrow v^2 + 10v - 3000 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad (v-50)(v+60) = 0 \Longrightarrow v - 50 = 0 \vee v + 60 = 0 \\
&\Longrightarrow \quad v = 50 \vee v = -60
\end{aligned}$$

De donde elejimos $v = 50$ ya que la velocidad es positiva para nuestro problema. ◄

Ejercicio 2.7.6

Sea $d = v + \dfrac{v^2}{20}$ la distancia de frenado expresada en metros de un automóvil que se desplaza a una velocidad v en $\dfrac{metros}{segundo}$. Determine las velocidades que permitan una distancia de frenado de menos de 75 metros.

Resolución: ►
Interpretación:
distancia de frenado de menos de 75 metros$:= d < 75$

$$\begin{aligned} v + \frac{v^2}{20} &< 75 \\ v^2 + 20v &< 75 \cdot 20 \end{aligned}$$

$$(v+50)(v-30) < 0 \Longrightarrow v \in]-50,\ 30[$$

Las velocidades estan dentro del intervalo $]-50,\ 30[$ ◄

Ejercicio 2.7.7

(a) ***Se sabe que en una empresa se obtienen ganancias cuando los costos son menores que los ingresos***.
Según el enunciado anterior obtenga una desigualdad para que la empresa tenga ganancias, sabiendo que los costos y los ingresos están dados por $C = 27 - 2x$, $I = 10x - x^2$ respectivamente, donde x representa precio por unidad del producto.

(b) Utilizando la parte (a) determine para qué precios por unidad (x) la empresa tendrá ganancias.

Resolución: ►

(a) Según el enunciado

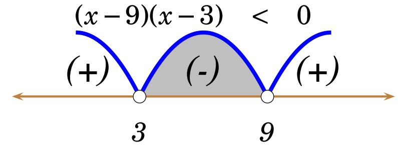
- $C = 27 - 2x$ *representa los costos*
- $I = 10x - x^2$ *representa los ingresos*

Entonces para que la empresa tenga ganancias se debe considerar

$$\begin{aligned} C &< I \\ 27 - 2x &< 10x - x^2 \end{aligned}$$

(b) Hay que resolver la inecuación anterior

$$\begin{aligned} 27 - 2x &< 10x - x^2 \\ x^2 - 2x - 10x + 27 &< 0 \\ x^2 - 12x + 27 &< 0 \\ (x-9)(x-3) &< 0 \end{aligned}$$



eligiendo la región achurada para la los valores de x, concluimos que el precio por unidad es mayor que 3 y menor que 9

◄

Ejercicio 2.7.8

En la asignatura de Álgebra el promedio de notas (PN) se obtendrá de 4 ponderaciones: dos certámenes con un 40% ($C1$, $C2$) cada uno, trabajos prácticos (TP) con un 10% y test T un 10%.

(a) Represente una ecuación matemática para el promedio de notas (N).

(b) Si un estudiante tiene primer certamen nota 50 puntos, el segundo certamen 60 puntos y en test un promedio de 70 puntos. ¿ Qué puntaje mínimo deberá tener en los trabajos prácticos para aprobar con nota superior o igual a 60?

Resolución: ►

(a)
- *Certamen 1*:= $C1$
- *Certamen 2*:= $C2$
- *Trabajos Prácticos*:= TP
- *Test*:= T

Ecuación matematica

$$PN = 0{,}4\cdot C1 + 0{,}4\cdot C2 + 0{,}1\cdot TP + 0{,}1\cdot T$$

(b)

$$\begin{aligned}
PN = 0{,}4\cdot C1 + 0{,}4\cdot C2 + 0{,}1\cdot TP + 0{,}1\cdot T &\geq 60\\
0{,}4\cdot 50 + 0{,}4\cdot 60 + 0{,}1\cdot 70 + 0{,}1T &\geq 60\\
20 + 24 + 7 + 0{,}1T &\geq 60 \Longrightarrow 0{,}1T \geq 60 - 51 = 9\\
&\Longrightarrow \boxed{T \geq 90}
\end{aligned}$$

el puntaje mínimo para aprobar la asignatura es de 90 puntos

◄

Ejercicio 2.7.9

El Producto Bruto Interno (PBI) de un país será proyectado en $t^2 + 3t + 60$ miles de millones de dólares, donde t se mide en años a partir del año en curso.

(a) Determínese la expresión como una inecuación en que el PBI del país sea igual o exceda a 70 mil millones de dólares.

(b) Utilizando la expresión encontrada por (a), encuentre el instante t.

Resolución: ►

(a) *Inecuación matemática*

$$t^2+3t+60 \quad \geq \quad 70$$

(b) *Resolviendo la inecuación tenemos*

$$\begin{aligned} t^2+3t+60 \quad &\geq \quad 70 \Longrightarrow t^2+3t-10 \geq 0 \Longrightarrow (t+5)(t-2) \geq 0 \\ &\Longrightarrow \quad \boxed{t \in]-\infty,-5] \cup [2,+\infty[} \end{aligned}$$

Para que el PBI del país sea igual o exceda a 70 mil millones de dólares debe transcurrir como mínimo 2 años

◄

2.8. Ejercicios Propuestos

1. Use los axiomas de cuerpo y orden para demostrar las siguientes propiedades

   (a) Demostrar para cada $x \in \mathbb{R}$ que $x \cdot 0 = 0$

   (b) Para cada $x \in \mathbb{R}$ demostrar que $(-1) \cdot x = -x$

   (c) Para cualquier $x, y \in \mathbb{R}$, demostrar que $x^2+y^2 \geq 2xy$.

   (d) Si $b > a > 0$ y $c > 0$. Demostrar que $\dfrac{a+c}{b+c} > \dfrac{a}{b}$

   (e) $(xy)^{-1} = x^{-1}y^{-1}$, $x,\ y \neq 0$

   (f) Si $0 \leq b \leq a$. Demostrar que $a^2 \leq b^2$

   (g) Demostrar que si $a < b$ entonces $a < \dfrac{a+b}{2} < b$

   (h) Para $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}$, demostrar que $a^2+b^2+c^2 \geq ab+ac+bc$

   (i) Demostrar que si $a^2+b^2=1,\ c^2+d^2=1$ entonces $ac+bd \leq 1$ para $a, b, c, d \in \mathbb{R}$

   (j) Si $a,\ b,\ c \in \mathbb{R}^+$, demostrar que $\dfrac{bc}{a}+\dfrac{ac}{b}+\dfrac{ab}{c} \geq a+b+c$

2. Despeje en cada uno de los ejercicios siguientes la variable indicada. Escriba la solución de la forma más conveniente para realizar cálculos.

   (a) La corriente inducida a través de un generador está dada por la expresión $I = \dfrac{E-e}{R}$.Despeje la variable e.

   (b) De la expresión $P = \dfrac{m}{d-L} - \dfrac{m}{d+L}$. Despeje la variable m

3. Clasificar como verdadera (V) o falsa (F), las siguientes afirmaciones. Justifique cada una de sus respuestas.

Expresión	V	F	Contraejemplo si es (F)	demostración si es (V)
$\forall\ x,y,z \in \mathbb{R}, x = y \iff x+z = y+z$				
Si x es número real entonces $-x$ es negativo				
Si $x^2y > 0,\ x \neq 0$ entonces $y < 0$				
Si $x \in \mathbb{R}$ entonces $x^2 > 0$				
Si $x < 1$ entonces x es negativo				
$x < 4,\ y < 5 \Longrightarrow xy < 20$				
Si $0 < a < 1$ entonces $a^2 < a$				
Si $x \leq -6$ entonces $x-2 \leq -8$				
Si $x \leq y,\ \ y < z$ entonces $x < z$				
Si $x > 0$ entonces $x + \dfrac{1}{x} \geq 2$				

4. La temperatura en escala Fahrenheit y Celsius están relacionadas por la fórmula $C = \left(\dfrac{5}{9}\right)(F - 32)$. ¿A qué temperatura Fahrenheit corresponderá a una temperatura en escala Celsius que se encuentra $40° \leq C \leq 50°$?

5. La cantidad C del agua que sale por un orificio en el fondo de un depósito es directamente proporcional a la raíz cuadrada de la altura h de la superficie libre del líquido. El caudal es de 85 litros/minuto cuando la altura es de 2.56 m.

   (a) Encuentre una fórmula de C dependiendo de h.

   (b) Calcule C cuando $h = 4{,}62$ m.

   (c) Encuentre h cuando $C = 62$ litros/minuto.

6. (a) Encontrar el menor número m tal que para todo $x \in [-2,2]$ se cumple que $1 - 4x - x^2 \leq m$.

   (b) Encontrar el mayor número M tal que para todo $x \in \mathbb{R}$ se cumple que $M \leq 9x^2 - 48x - 36$

7. Determine los valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se cumple

   (a) $|x-4| = 9$

   (b) $|x-1||x+2| = 3$

   (c) $|3x-5| = |7x-2|$

   (d) $\sqrt{2x+5} < 3$

   (e) $\sqrt{7-|x-7|} \geq 4 - 3x$

   (f) $\sqrt{x - \sqrt{2x+3}} < 1$

   (g) $\left|\dfrac{x-1}{x+1}\right| = \dfrac{x-1}{x+1}$

   (i) $\left|\dfrac{x^2}{x-2}\right| = \dfrac{|x^2-16|}{x-4}$

   (j) $\sqrt{x-2} = 5$

   (k) $\sqrt{x+4} + \sqrt{x-5} = 9$

8. Determine el conjunto solución de las siguientes inecuaciones

(a) $8(2-x) \leq -3$

(b) $x^2 - x - 12 \geq 0$

(c) $x^2 \leq 8x$

(d) $\frac{5}{x} > 3$

(e) $\frac{x-2}{x-3} > 0$

(f) $\frac{2}{x+1} \geq \frac{1}{x-2}$

(g) $\frac{(x-2)^2}{4-x} \leq 1$

(h) $1 < 3 - \frac{x}{2} \leq 8$

(i) $\frac{x-3}{4} - 1 > \frac{x}{2}$

(j) $5 - x^2 < 8$

(k) $\frac{1}{x} + \frac{1}{1-x} > 0$

(l) $x + \frac{1}{x} \geq 2,\ x > 0$

(ll) $\frac{x^2-1}{x^2-6x-10} \leq 1$

(m) $\frac{2}{x-2} < \frac{x+2}{x-2} < 1$

(n) $\frac{x^2-5x+6}{x^2-7x+12} > \frac{x+4}{x+3}$

(ñ) $\begin{cases} x+3 & < & 2x-1 \\ \frac{x}{2}+\frac{3}{4} & < & 2x+\frac{1}{3} \\ 5x-1 & > & \frac{x}{4}+2 \end{cases}$

9. Determine los valores de $x \in \mathbb{R}$, para los cuales se cumple

(a) $|2x^2 - 3| \leq 5x$

(b) $\left|\frac{x+1}{x}\right| > 2$

(c) $\left|\frac{2-5x}{3}\right| \leq 5$

(d) $2 < |x-3| < 5$

(e) $|x-3| < 8$

(f) $|x-1| + |x-2| > 1$

(g) $|x-1| + |x+1| < 2$

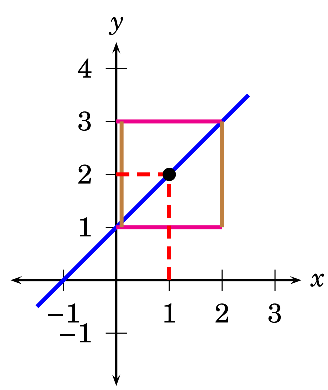
10. En 1984, al perforar el pozo más profundo del mundo, los soviéticos encontraron que la temperatura a x kilómetro de profundidad de la tierra estaba dada por $T = 30 + 25(x-3),\ 3 \leq x \leq 15$, donde T e la temperatura dada en grados centígrados (Celsius) ¿a qué profundidad estará si la temperatura está $200° \leq T \leq 300°$ el coeficiente de inteligencia IQ está dado por la fórmula $IQ = \frac{100EM}{EC}$, donde EM es la edad mental y EC es la edad cronológica. Si $80 \leq IQ \leq 140$ para un grupo de niños de 12 años de edad, encuentre el rango de la edad mental.

Capítulo 3

Límite de funciones

comen:lim Considere la función $f(x) = x + 1$. Veamos los valores de la función cuando x toma distintos valores cercanos a 1.

x	0	0.5	0.9	0.999	1	1.001	1.1	1.5	2
$f(x)$	1	1.5	1.9	1.999	2	2.001	2.1	2.5	3



De la tabla se deduce que

$$\boxed{\text{si } x \longrightarrow 1^- \text{ entonces } f(x) = x + 1 \longrightarrow 2 \text{ y si } x \longrightarrow 1^+ \text{ entonces } f(x) = x + 1 \longrightarrow 2}$$

De esta situación se puede concluir lo siguiente . $\lim\limits_{x \to 1} f(x) = \lim\limits_{x \to 1} x + 1 = 2$

3.1. Límites

Definición 3.1.1. Dada $f : Dom(f) \in \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, y $x_0 \in \mathbb{R}$ (este elemento no necesariamente está en el $Dom(f)$); se define a L como el límite de f en x_0 ($\lim_{x\to x_0} f(x) = L$) si y sólo si para cada $\epsilon > 0$ dado es posible encontrar un $\delta > 0$ que depende de x_0 y ϵ, tal que siempre que $x \in Dom(f)$ y con la propiedad de que si $0 < |x - x_0| < \delta$ entonces $|f(x) - L| < \epsilon$
Simbólicamente

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L \Longleftrightarrow \forall\ \epsilon > 0,\ \exists\ \delta(x_0,\epsilon) > 0 :\ \text{si } x \in Dom(f) \text{ y }\ 0 < |x - x_0| < \delta \to |f(x) - L| < \epsilon$$

$\lim_{x\to x_0} f(x) = L$ nos quiere decir que ***cuando el argumento*** x ***se aproxima al valor*** x_0***, la función*** $f(x)$ ***se aproxima al valor*** L

Ejemplo 3.1.1. Utilizando la definición del límite demostrar

$$\lim_{x\to 4} 3x = 12$$

Resolución: ► *Según la definición del límite se tiene*
$\lim\limits_{x\to 4} 3x = 12$

$$\iff \quad (\forall\ \epsilon > 0, \exists\delta(\epsilon) > 0)\ :\ |x-4| < \delta \Longrightarrow |3x-12| < \epsilon \tag{3.1}$$

Hallaremos un δ que dependa de ϵ a partir de $|f(x)-L| = |3x-12|$
En efecto:

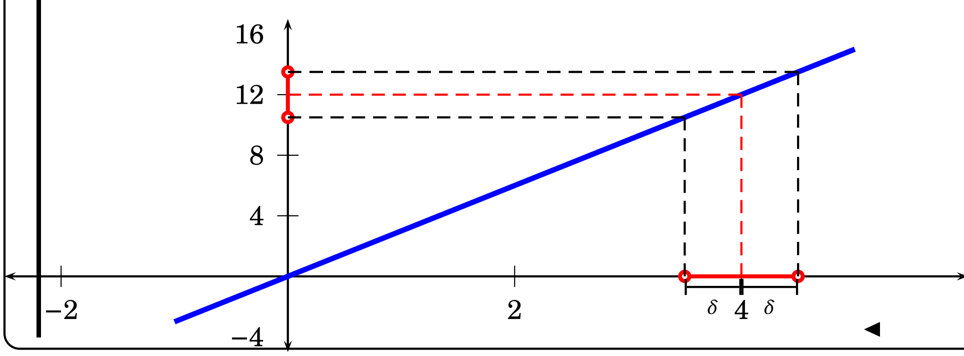
- $$|3x-12| = |3(x-4)| = 3|x-4| < \epsilon \tag{3.2}$$
- *Por hipótesis $|x-4| < \delta$ (está acotado por δ)*
- *A partir de (2), la idea es explicitar una expresión similar a $|x-4| < \widetilde{\delta}$ de tal modo que identifiquemos $\widetilde{\delta} = \delta$*

  $$3|x-4| < \epsilon \textit{ siempre que } \ |x-4| < \frac{\epsilon}{3} = \delta$$

  Para concluir

  $$\forall\ \epsilon > 0,\ \exists\delta = \frac{\epsilon}{3} > 0\ :\ |x-4| < \delta \Longrightarrow |3x-12| < \epsilon$$

  Hemos demostrado que $\lim\limits_{x\to 4} 3x = 12$



◄

Ejemplo 3.1.2. Utilizando la definición del límite demostrar

$$\lim_{x\to 2}(x^2 + 2x - 1) = 7$$

Resolución: ► *Según la definición del límite se tiene*
$\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=7$

$$\iff \quad (\forall\ \epsilon>0, \exists\delta(\epsilon)>0)\ :\ |x-2|<\delta \Longrightarrow |(x^2+2x-1)-7|<\epsilon \tag{3.3}$$

Hallaremos un δ que dependa de ϵ a partir de $|f(x)-L| = |(x^2+2x-1)-7|$
En efecto:

- $$|(x^2+2x-1)-7| = |x^2+2x-8| = |x+4||x-2| \tag{3.4}$$
- *Por hipótesis $|x-2|<\delta$ (está acotado por δ)*
- *Falta acotar $|x+4|$, es decir encontrar $k>0$ tal que $|x+4|<k$, esto se logra eligiendo $\delta_1 = \dfrac{1}{2}$ (supuesto δ_1)*
- *Así*

$$\begin{aligned} |x-2|<\frac{1}{2} \quad &\Longrightarrow \quad -\frac{1}{2}<x-2<\frac{1}{2}\ \ \textit{sumamos 6} \\ &\Longrightarrow \quad \frac{11}{2}<x+4<\frac{13}{2} \\ &\Longrightarrow \quad |x+4|<\frac{13}{2} \end{aligned} \tag{3.5}$$

- *Luego utilizo* (5) *en* (4)

$$\begin{aligned} |(x^2+2x-1)-7| &= |x^2+2x-8| = |x+4||x-2| < \\ &< \frac{13}{2}|x-2| < \epsilon \end{aligned} \tag{3.6}$$

- *A partir de* (4)*, la idea es explicitar una expresión similar a $|x-2|<\widetilde{\delta}$ de tal modo que identifiquemos $\widetilde{\delta}=\delta_2$ esto porque ya hemos supuesto un δ_1.*
  En efecto

  $$\frac{13}{2}|x-2|<\epsilon \ \ \textit{siempre que} \ \ |x-2|<\frac{2\epsilon}{13}=\delta_2$$

  Para concluir

  $$\forall\ \epsilon>0,\ \exists\delta=\min\{\delta_1,\ \delta_2\}=\min\{\frac{1}{2},\ \frac{2\epsilon}{13}\}>0\ :\ |x-2|<\delta \Longrightarrow |(x^2+2x-1)-7|<\epsilon$$

  Hemos demostrado que $\lim\limits_{x\to 2}(x^2+2x-1)=7$

◄

Teorema 3.1.3. [Algebra de Límites]
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$, $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L_2$ y si $x_0 \in Dom(f) \cap Dom(g)$ entonces

1. $\lim\limits_{x\to x_0} (f+g)(x)$ existe y se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} (f+g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) + \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 + L_2}$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} (f-g)(x)$ existe y se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} (f-g)(x) = \lim_{x\to x_0} f(x) - \lim_{x\to x_0} g(x) = L_1 - L_2}$$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} (f\cdot g)(x)$ existe y se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} (f\cdot g)(x) = (\lim_{x\to x_0} f(x))(\lim_{x\to x_0} g(x)) = L_1 \cdot L_2}$$

4. Si $L_2 \neq 0$ se tiene

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} \frac{f(x)}{g(x)} = \frac{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)}{\lim\limits_{x\to x_0} g(x)} = \frac{L_1}{L_2}}$$

Observación 3.1.4.
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L_1$ y $c \in \mathbb{R}$ entonces

1. $\lim\limits_{x\to x_0} |f(x)|$ existe y se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} |f(x)| = |L_1|}$$

2. $\lim\limits_{x\to x_0} (c)$ existe y se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} (c) = c, \; c \in \mathbb{R}}$$

3. $\lim\limits_{x\to x_0} c\cdot f(x)$ existe y se cumple

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} c\cdot f(x) = c \cdot \lim_{x\to x_0} f(x)}$$

Corolario 3.1.5.

1. Si $f(x) = a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n$ es una función polinómica y $x_0 \in \mathbb{R}$ entonces

$$\begin{aligned}\lim_{x\to x_0} f(x) &= \lim_{x\to x_0} (a_0 + a_1x + a_2x^2 + \ldots + a_nx^n)\\ &= \lim_{x\to x_0} a_0 + \lim_{x\to x_0} a_1x + \lim_{x\to x_0} a_2x^2 + \ldots + \lim_{x\to x_0} a_nx^n\\ &= a_0 + a_1x_0 + a_2x_0^2 + \ldots + a_nx_0^n\\ &= f(x_0)\end{aligned}$$

2. Si $r(x) = \dfrac{p(x)}{q(x)}$ es una función racional, donde $p(x),\ q(x)$ son polinomios. Entonces,

$$\lim_{x\to x_0} r(x) = \lim_{x\to x_0} \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{p(x_0)}{q(x_0)} = r(x_0) \quad \text{siempre que } q(x) \neq 0.$$

3. Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} f_i(x) = L_i,\ i = 1,2\cdots,n$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \prod\limits_{i=1}^{n} f_i(x) = \prod\limits_{i=1}^{n} L_i$

4. Sean $f(x)$ y $g(x)$ tal que $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L,\ L \neq 0$ y $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = 0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \dfrac{f(x)}{g(x)}$ no existe.

5. Si existe $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{\lim\limits_{x\to x_0} f(x)} = \sqrt[n]{L}$ donde $L \geq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ ó $L \geq 0$ y $n \in \mathbb{Z}^+$ es impar

Teorema 3.1.6. [Límite de una función compuesta]
Si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L$ y si se cumple que: $\lim\limits_{t\to t_0} g(t) = x_0,\ t_0$ punto de acumulación de $Dom(f\circ g)$ y si existe $C > 0$ tal que $0 < |t - t_0| < C$ implica $g(t) \neq x_0$, entonces

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = L = \lim_{t\to t_0} f(g(t))}$$

Ejemplo 3.1.7. Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 2}(3x^2 + 8x - 1)$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{2x^2+1}{3x^3+8x^2+1}$
3. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x^2-1}{x-1}$
4. $\lim\limits_{x\to 3} \dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}$
5. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{x-1}{x^3-1}$
6. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}$

Resolución: ►

1. $\lim_{x\to 2}(3x^2+8x-1)=3(2)^2+8(2)-1=27$

2. $\lim_{x\to 1}\dfrac{2x^2+1}{3x^3+8x^2+1}=\dfrac{2(1)^2+1}{3(1)^3+8(1)^2+1}=\dfrac{3}{12}=\dfrac{1}{4}$

3. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2-1}{x-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{\cancel{(x-1)}(x+1)}{\cancel{x-1}}=\lim_{x\to 1}(x+1)=2$

4. $\lim_{x\to 3}\dfrac{x^2-9}{x^2-x-6}=\lim_{x\to 3}\dfrac{\cancel{(x-3)}(x+3)}{(x+2)\cancel{(x-3)}}=\lim_{x\to 3}\dfrac{(x+3)}{(x+2)}=\dfrac{6}{5}$

5. $\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{x^3-1}=\lim_{x\to 1}\dfrac{x-1}{(x-1)(x^2+x+1)}=\lim_{x\to 1}\dfrac{1}{x^2+x+1}=\dfrac{1}{3}$

6. $\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}=\lim_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{1+x}-1}{x}\cdot\dfrac{\sqrt{1+x}+1}{\sqrt{1+x}+1}=\lim_{x\to 0}\dfrac{1}{\sqrt{1+x}+1}=\dfrac{1}{2}$

◄

Ejemplo 3.1.8. Calcule los límites siguientes

(a) $\lim_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1}$

(b) $\lim_{x\to 1}\dfrac{x^2+4x-5}{x^2-1}$

Resolución: ►

(a)

$$\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1} = \lim_{x\to -1}\left(\frac{\sqrt{x^2+3}+2}{x+1}\right)\left(\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{\sqrt{x^2+3}+2}\right)$$

$$= \lim_{x\to-1}\left(\frac{(x^2+3)-4}{(x+1)\sqrt{x^2+3}+2}\right) = \lim_{x\to-1}\frac{x^2-1}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \lim_{x\to-1}\frac{(x+1)(x-1)}{(x+1)(\sqrt{x^2+3}+2)} = \lim_{x\to-1}\frac{\cancel{(x+1)}(x-1)}{\cancel{(x+1)}(\sqrt{x^2+3}+2)}$$

$$= \frac{\lim\limits_{x\to-1}(x-1)}{\lim\limits_{x\to-1}(\sqrt{x^2+3}+2)} = \frac{-1-1}{\sqrt{1+3}+2} = \frac{-2}{4} \Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to -1}\frac{\sqrt{x^2+3}-2}{x+1} = \frac{-1}{2}}$$

(b)

$$\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = \lim_{x\to1}\frac{(x-1)(x+5)}{(x-1)(x+1)} = \lim_{x\to1}\frac{\cancel{(x-1)}(x+5)}{\cancel{(x-1)}(x+1)} = \frac{\lim\limits_{x\to1}(x+5)}{\lim\limits_{x\to1}(x+1)} = \frac{1+5}{1+1}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to1}\frac{x^2+4x-5}{x^2-1} = 3}$$

◄

Ejemplo 3.1.9. Encuentre el límite siguiente:

$$\lim_{x\to1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1}$$

Resolución: ►

Primera forma

Note que

$$\begin{aligned}(7x+1)-8 &= \left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^3 - 2^3 = \left[\sqrt[3]{7x+1}-2\right]\left[\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7x+1}+4\right]\\ \Longleftrightarrow & \left[\sqrt[3]{7x+1}-2\right] = \frac{(7x+1)-8}{\left[\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7x+1}+4\right]} \end{aligned} \tag{3.7}$$

Usando (3.7) en el límite se tiene

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1} &= \lim_{x\to 1}\frac{(7x+1)-8}{(x-1)\left(\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7x+1}+4\right)}\\ &= \lim_{x\to 1}\frac{7\cancel{(x-1)}}{\cancel{(x-1)}\left(\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7x+1}+4\right)}\\ &= \frac{\lim\limits_{x\to 1}(7)}{\lim\limits_{x\to 1}\left(\left(\sqrt[3]{7x+1}\right)^2 + 2\sqrt[3]{7x+1}+4\right)}\\ &= \boxed{\frac{7}{12}}\end{aligned}$$

Segunda forma

Haciendo $y=\sqrt[3]{7x+1} \Longrightarrow y^3 = 7x+1$, *si* $x\to 1 \Longrightarrow y\to 2$.

Por tanto $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1} = \lim\limits_{y\to 2}\dfrac{y-2}{\frac{y^3-1}{7}-1}$

$$\begin{aligned}\lim_{y\to 2}\frac{7(y-2)}{y^3-8} &= \lim_{y\to 2}\frac{7\cancel{(y-2)}}{\cancel{(y-2)}(y^2+2y+4)} = \lim_{y\to 2}\frac{7}{y^2+2y+4}\\ &\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to 1}\frac{\sqrt[3]{7x+1}-2}{x-1} = \frac{7}{12}}\end{aligned}$$

◄

Teorema 3.1.10. [Unicidad del Límite]
El límite de una función f, si existe, es único, es decir, si

$$\lim_{x\to x_0} f(x) = L_1 \ \text{ y } \ \lim_{x\to x_0} f(x) = L_2 \ \text{ entonces } \ L_1 = L_2$$

Teorema 3.1.11. [Sandwich]
Sean f, g, h tres funciones, si existe $x\in I\setminus\{x_0\}$ tal que se cumplan

1. $f(x)\le g(x)\le h(x)$, $\forall\, x\in I\setminus\{x_0\}$,
2. $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = L = \lim\limits_{x\to x_0} h(x)$,

entonces $\lim\limits_{x\to x_0} g(x) = L$

3.1.1. Límites Laterales

Definición 3.1.2.

1. Sea $f:]x_0,+\infty[\to\mathbb{R}$ si existe el límite de la función $f(x)$ cuando x se aproxima hacia x_0 por la derecha denotada por L se dice que L es el ***límite lateral derecho*** de x_0 simbólicamente

$$\boxed{L=\lim_{x\to x_0^+} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0^+\\ x>x_0}} f(x)\iff \text{ si dado } \epsilon>0,\exists\delta_{x_0,\epsilon}>0 \text{ tal que } 0<x-x_0<\delta\Longrightarrow|f(x)-L|<\epsilon}$$

2. Sea $f:]-\infty,x_0[\to\mathbb{R}$ si existe el límite de la función $f(x)$ cuando x se aproxima hacia x_0 por la izquierda denotada por L se dice que L es el ***límite lateral izquierdo*** de x_0 simbólicamente

$$\boxed{L=\lim_{x\to x_0^-} f(x)=\lim_{\substack{x\to x_0^-\\ x<x_0}} f(x)\iff \text{ si dado } \epsilon>0,\exists\delta_{x_0,\epsilon}>0 \text{ tal que } 0<x_0-x<\delta\Longrightarrow|f(x)-L|<\epsilon}$$

Teorema 3.1.12.

1. Si f está definida en $I\setminus\{x_0\}$ y si $L\in\mathbb{R}$, entonces

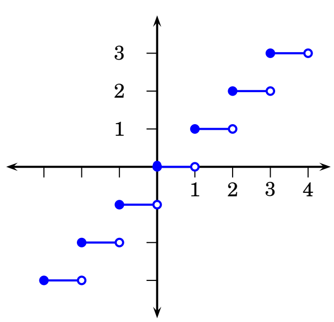
$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x)=L\iff \lim_{\substack{x\to x_0^+\\ x>x_0}} f(x)=L=\lim_{\substack{x\to x_0^-\\ x<x_0}} f(x)}$$

2. Si para algún $C>0$ se tiene que: $|f(x)|\le C$ función acotada $\forall\, x\in I_\delta(x_0)\setminus\{x_0\}$ y que $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)=0$ entonces $\lim\limits_{x\to x_0} h(x)f(x)=0$.

Ejemplo 3.1.13. Consideremos la función parte entera

$$\boxed{f(x)=[\![\, x\,]\!]=n,\ n\le x<n+1,\ n\in\mathbb{Z}\ \text{ donde } \operatorname{Dom}(f)=\mathbb{R},\ \operatorname{Rec}(f)=\mathbb{Z}}$$

cuya gráfica es



Calcule

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ 2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ 3. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ 4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ 5. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x)$ 6. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x)$

Resolución: ► *Según el gráfico tenemos*

1. $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$
2. $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x) = -1.$
3. $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 1$
4. $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x) = 0.$
5. $\lim\limits_{x\to -1^+} f(x) = -1$
6. $\lim\limits_{x\to -1^-} f(x) = -2.$

◄

exam:lim

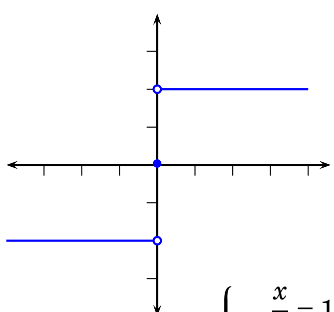
1. Realice un bosquejo para cada función.
2. Determine los siguientes límites laterales para cada función

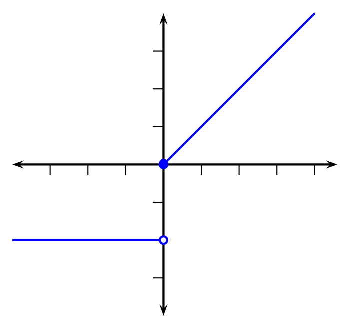
   (a) $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

   (b) $f(x) = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -1, & x < 0. \end{cases}$, $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x) = 0$, $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$

Resolución: ►

1.





2. *(a)* $f(x) = \dfrac{x}{|x|} = \begin{cases} \dfrac{x}{x} = 1 & , \quad x > 0 \\ \dfrac{x}{-x} = -1 & , \quad x < 0 \end{cases}$

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 1 = 1$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

(b)

$$\lim_{x\to 0^+} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^+ \\ x>0}} f(x) = \lim_{x\to 0^+} 0 = 0$$

$$\lim_{x\to 0^-} f(x) = \lim_{\substack{x\to 0^- \\ x<0}} f(x) = \lim_{x\to 0^-} (-1) = -1$$

◄

Ejemplo 3.1.14. Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x^2 - 2|x|}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{|2x-1| - x}{|x-1|}$

Resolución: ►

1. $$\frac{x^2-2|x|}{x}=\begin{cases}\dfrac{x^2-2x}{x} & , \quad x\leq 0\\ \dfrac{x^2+2x}{x} & , \quad x<0\end{cases}$$

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2|x|}{x} = \lim_{x\to 0^-}\frac{x^2+2x}{x}=\lim_{x\to 0^-}\frac{x(x+2)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0^-}x+2=2.$$

$$\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2|x|}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2x}{x}=\lim_{x\to 0^+}\frac{x(x-2)}{\cancel{x}}=\lim_{x\to 0^-}x-2=-2.$$

Como

$$\lim_{x\to 0^-}\frac{x^2-2|x|}{x}\neq\lim_{x\to 0^+}\frac{x^2-2|x|}{x}$$

se tiene que

$$\lim_{x\to 0}\frac{x^2-2|x|}{x} \quad \textit{no existe}$$

2. *Usando la definición del valor absoluto se tiene que:*

$$|2x-1| = \begin{cases}2x-1, & si,\ x\geq\frac{1}{2}\\ 1-2x, & si\ x<\frac{1}{2}\end{cases} \qquad |x-1| = \begin{cases}x-1, & si\ x\geq 1\\ 1-x, & si\ x<1.\end{cases}$$

Luego,

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|2x-1|-x}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^-}\frac{2x-1-x}{1-x}=\lim_{x\to 1^-}\frac{x-1}{1-x}$$
$$=-1.$$

$$\lim_{x\to 1^+}\frac{|2x-1|-x}{|x-1|} = \lim_{x\to 1^+}\frac{2x-1-x}{x-1}=\lim_{x\to 1^+}\frac{x-1}{x-1}$$
$$=1.$$

Como

$$\lim_{x\to 1^-}\frac{|2x-1|}{|x-1|}\neq\lim_{x\to 1^+}\frac{|2x-1|}{|x-1|}$$

se tiene que

$$\lim_{x\to 1}\frac{|2x-1|}{|x-1|} \quad \textit{no existe}$$

◄

3.2. Límites al Infinito, infinito en infinito, infinito

Para tratar los límites infinito y al infinito, se debe considerar el conjunto de los números reales ampliado es decir $\overline{\mathbb{R}} = \mathbb{R} \cup \{+\infty, -\infty\}$ donde los símbolos $+\infty$ representa un número muy pero muy grande positivamente y,$-\infty$ representa un número muy pero muy grande negativamente, estos símbolos no son números. Se cumplen las siguientes reglas donde $c \in \mathbb{R}$ es constante

- $c + (\pm\infty) = \pm\infty$
- $(\pm\infty) + (\pm\infty) = \pm\infty$
- Si $c > 0$ entonces $c(\pm\infty) = \pm\infty$
- Si $c < 0$ entonces $c(\pm\infty) = \mp\infty$
- $(\pm\infty)(\pm\infty) = +\infty$
- $(\pm\infty)(\mp\infty) = -\infty$
- $\infty - \infty$ no está definido.
- $0 \cdot \infty$ no esta definido.

3.2.1. Límite al Infinito

Definición 3.2.1. [Límites al infinito]

1. Sea $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = L \text{ sí y sólo si para cada } \epsilon > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } N < x \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

2. Sea $f :]-\infty, b[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x \to -\infty} f(x) = L \text{ sí y sólo si para cada } \epsilon > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x < -N \Longrightarrow |f(x) - L| < \epsilon$$

3.2.2. Límite infinito al Infinito

Definición 3.2.2. [Límites infinito al infinito]

1. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = +\infty \text{ sí y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x > N \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

2. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty \text{ si y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x < -N \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

3. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to+\infty} f(x) = -\infty \text{ y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x > N \Longrightarrow f(x) < -M$$

4. Sea $f :]-\infty, +\infty[\to \mathbb{R}$, se dice que

$$\lim_{x\to-\infty} f(x) = -\infty \text{ si y sólo si para cada } M > 0 \text{ existe un } N > 0 \text{ tal que } x < -N \Longrightarrow f(x) < -M$$

3.2.3. Límite infinito

Definición 3.2.3. [Límites infinito]

1. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty \iff \forall\ M > 0 \text{ existe un } \delta(M) > 0 \text{ tal que } x \in dom(f):\ 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

2. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = +\infty \iff \forall\ M > 0 \text{ existe un } \delta(M) > 0 \text{ tal que } x \in dom(f):\ 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) > M > 0$$

3. $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall\ M > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } f(x) > M,\ \forall\ x \in dom(f)$$

4. $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty \iff \forall\ M > 0 \text{ existe un } \delta \text{ tal que } 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) < -M$$

5. $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = -\infty \iff \forall\ M > 0 \text{ existe un } \delta \text{ tal que } 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow f(x) < -M$$

6. $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ se dice que

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty \iff \forall\ M > 0,\ \exists\ \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \text{ entonces } f(x) < -M,\ \forall\ x \in dom(f).$$

Ejemplo 3.2.1. Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x \to +\infty} 5$
2. $\lim\limits_{x \to -\infty} 5$
3. $\lim\limits_{x \to +\infty} x$
4. $\lim\limits_{x \to -\infty} x$
5. $\lim\limits_{x \to +\infty} 3x^2$
6. $\lim\limits_{x \to -\infty} 3x^2$
7. $\lim\limits_{x \to +\infty} x^3$
8. $\lim\limits_{x \to -\infty} x^3$
9. $\lim\limits_{x \to +\infty} \dfrac{1}{x}$
10. $\lim\limits_{x \to -\infty} \dfrac{1}{x}$

Resolución: ▶

1. $\lim_{x\to+\infty} 5 = 5$
2. $\lim_{x\to-\infty} 5 = 5.$
3. $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$
4. $\lim_{x\to-\infty} x = -\infty.$
5. $\lim_{x\to+\infty} 3x^2 = 3\cdot+\infty$
6. $\lim_{x\to-\infty} 3x^2 = 3\cdot+\infty.$
7. $\lim_{x\to+\infty} x^3 = +\infty$
8. $\lim_{x\to-\infty} x^3 = -\infty.$
9. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0^+$
10. $\lim_{x\to-\infty} \frac{1}{x} = 0^-$

◀

Teorema 3.2.2. Sean $\lim_{x\to a} f(x) = 0$ y $\lim_{x\to a} g(x) = c$ con $c \neq 0$ y $a \in \mathbb{R}$ (a puede que no este en el dominio de f el dominio de g entonces se cumple las afirmaciones siguientes para todo x próximo a a

1. si $c > 0$ y $f(x) \to 0^+$ (si $f(x) \longrightarrow 0$ para $f(x) > 0$) entonces $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty$

2. si $c > 0$ y $f(x) \to 0^-$ (si $f(x) \longrightarrow 0$ para $f(x) < 0$) entonces $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$

3. si $c < 0$ y $f(x) \to 0^+$ (si $f(x) \longrightarrow 0$ para $f(x) > 0$) entonces $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = -\infty.$

4. si $c < 0$ y $f(x) \to 0^-$ (si $f(x) \longrightarrow 0$ para $f(x) < 0$) entonces $\lim_{x\to a} \frac{g(x)}{f(x)} = +\infty.$

Teorema 3.2.3. Sean $\lim_{x\to a} f(x) = c$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$; se cumple las afirmaciones siguientes

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty$
2. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty, \quad c > 0$
3. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty, \quad c < 0$
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Teorema 3.2.4. Sean $\lim_{x\to a} f(x) = c$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$; se cumple las afirmaciones siguientes

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty$
2. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = -\infty, \quad c > 0$
3. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = +\infty, \quad c < 0$
4. $\lim_{x\to a} \frac{f(x)}{g(x)} = 0$

Teorema 3.2.5. Sean $\lim_{x\to a} f(x) = +\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = +\infty$ entonces

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = +\infty + \infty = +\infty$
2. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = (+\infty)\cdot(+\infty) = +\infty$

Teorema 3.2.6. Sean $\lim_{x\to a} f(x) = -\infty$ y $\lim_{x\to a} g(x) = -\infty$ entonces

1. $\lim_{x\to a}(f(x)+g(x)) = -\infty - \infty = -\infty$
2. $\lim_{x\to a}(f(x)\cdot g(x)) = (-\infty)\cdot(-\infty) = +\infty$

Observación 3.2.7.

1. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x} = 0$

2. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{1}{x^n} = 0,\ n > 0$

3. $\lim\limits_{x\to\infty} x^n = \infty,\ n > 0$

4. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \infty$ si el $grad(f) > grad(g)$.

5. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = 0$ si el $grad(f) < grad(g)$

6. $\lim\limits_{x\to\infty} \dfrac{f(x)}{g(x)} = \dfrac{a}{b}$ si el $grad(f) = grad(g)$, donde a y b son los coeficientes de las variables de mayor potencia de $f(x)$ y $g(x)$

7. $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$

8. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = +\infty$, si n es par.

9. $\lim\limits_{x\to 0^-} \dfrac{1}{x^n} = -\infty$, si n es impar.

Ejemplo 3.2.8. Calcule loss límites siguientes

1. $\lim\limits_{x\to +1^+} \dfrac{x}{x-1}$

2. $\lim\limits_{x\to +1^+} \dfrac{x}{x^2-1}$

3. $\lim\limits_{x\to +2^+} \dfrac{-3}{x-2}$

Resolución: ►

1. *Identificando de* $h(x) = \dfrac{x}{x-1}$ *las funciones* $f(x) = x,\ g(x) = x-1$, *entonces*

$$\lim_{x\to +1^+} x = 1, \quad \lim_{x\to +1^+} x - 1 = 0^+$$

   Utilizando un teorema anterior concluimos que $\lim\limits_{x\to +1^+} \dfrac{x}{x-1} = +\infty$

2. *Identificando de* $h(x) = \dfrac{x}{x^2-1} = \dfrac{x}{x+1} \cdot \dfrac{1}{x-1}$ *las funciones* $f(x) = \dfrac{x}{x+1},\ g(x) = \dfrac{1}{x-1}$, *entonces*

$$\lim_{x\to +1^+} \frac{x}{x+1} = \frac{1}{2}, \quad \lim_{x\to +1^+} \frac{1}{x-1} = +\infty$$

   Utilizando un teorema anterior concluimos que $\lim\limits_{x\to +1^+} \dfrac{x}{x^2-1} = +\infty$

3. *Tarea*

◄

Ejemplo 3.2.9. Calcule loss límites siguientes

1. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{4x^3 - 2x^2 + x - 1}{5x^3 - 2x + 3}$

2. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^4 - 5x - 1}{x^5 - 2x^2 + 1}$

3. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{1+x^2}}{x}$

4. $\lim\limits_{x\to +\infty} (2x^5 - 3x^2 + 2x - 1)$

5. $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3 + 2x - 1}{x^2 + 3x - 1}$

6. $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \sqrt{1+x^2})$

Resolución: ►

1.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-2x^2+x-1}{5x^3-2x+3} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{x^3}\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\cancel{x^3}\left(5-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\left(4-\frac{2}{x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{x^3}\right)}{\left(5-\frac{2}{x^2}+\frac{3}{x^3}\right)}\\
&= \frac{\lim\limits_{x\to+\infty}4-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^2}-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{1}{x^3}}{\lim\limits_{x\to+\infty}5-\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{2}{x^2}+\lim\limits_{x\to+\infty}\frac{3}{x^3}}\\
&\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{4x^3-2x^2+x-1}{5x^3-2x+3}=\frac{4}{5}}.
\end{aligned}
$$

2.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{x^4-5x-1}{x^5-2x^2+1} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{x^4\left(1-\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}{x^5\left(1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)} = \lim_{x\to+\infty}\frac{1}{x}\cdot\lim_{x\to+\infty}\frac{\left(1-\frac{5}{x^3}-\frac{1}{x^4}\right)}{\left(1-\frac{2}{x^3}+\frac{1}{x^5}\right)}\\
&= 0\cdot 1=0
\end{aligned}
$$

3.

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x} &= \lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{x^2\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{x} = \lim_{x\to+\infty}\frac{\cancel{|x|}\sqrt{\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}}{\cancel{x}}\quad (x>0)\\
&= \lim_{x\to+\infty}\sqrt{\frac{1}{x^2}+1}=\sqrt{\lim_{x\to+\infty}\left(\frac{1}{x^2}+1\right)}\\
&\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to+\infty}\frac{\sqrt{1+x^2}}{x}=1}
\end{aligned}
$$

4. *Note que* $h(x)=2x^5-3x^2+2x-1=(2x^5)\cdot\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)$ *y que*

$$
\lim_{x}\to+\infty 2x^5=+\infty,\quad \lim_{x}\to+\infty\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)=1
$$

Entonces

$$
\begin{aligned}
\lim_{x\to+\infty}(2x^5-3x^2+2x-1) &= \lim_{x\to+\infty}2x^5\left(1-\frac{3}{2x}+\frac{1}{x^2}-\frac{1}{2x^3}\right)=\lim_{x\to+\infty}(2x^5-3x^2+2x-1)\\
&= (+\infty)\cdot(1)=+\infty.
\end{aligned}
$$

◄

3.3. Asíntotas

Definición 3.3.1.

1. La recta $x = a$ es ***asíntota vertical*** de f si

$$\lim_{x\to x_0^+} f(x) = \pm\infty \text{ o } \lim_{x\to x_0^-} f(x) = \pm\infty$$

2. La recta $y = mx + b$ es ***asíntota oblicua derecha*** de f si

$$\lim_{x\to +\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ y } \lim_{x\to +\infty} f(x) - mx = b$$

3. La recta $y = mx + b$ es una ***asíntota oblicua izquierda*** de f si

$$\lim_{x\to -\infty} \frac{f(x)}{x} = m \text{ y } \lim_{x\to -\infty} f(x) - mx = b$$

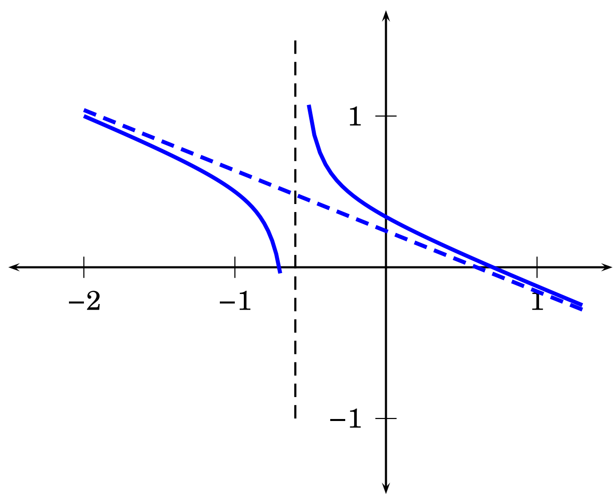
En cualquiera de los dos últimos casos, si $m = 0$ se tendrá una asíntota horizontal $y = b$.

Ejemplo 3.3.1. Dada la función $f(x) = \dfrac{1-2x^2}{3+5x}$. Encuentre las asíntotas horizontales, verticales y oblícuas, si es que existen. Grafique la función aproximadamente usando esos límites.

Resolución: ►

- **Cálculo de asíntota vertical**
$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{5}^+} \dfrac{1-2x^2}{3+5x} = +\infty$
$\lim\limits_{x\to -\frac{3}{5}^-} \dfrac{1-2x^2}{3+5x} = -\infty$
Entoces $x = -\frac{3}{5}$ es asíntota vertical.

- **Cálculo de asíntota oblicua y horizontal**
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-2x^2}{3x+5x^2} = -\dfrac{2}{5} = m$
$\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{1-2x^2}{3+5x} + \dfrac{2}{5}x = \dfrac{5-10x^2+6x+10x^2}{15+25x} = \lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5-6x}{15+25x} = \dfrac{6}{25}$
Luego la recta $y = -\dfrac{2}{5}x - \dfrac{6}{25}$ es asíntota oblicua. No hay asíntota horizontal.



◄

3.4. Límites especiales

En esta sección discutiremos el valor de ciertos limites especiales. Se dicen especiales ya que son expresiones indeterminadas pero poseen un limite finito.

3.4.1. límites trigonométricos

Para calcular los límites trigonométricos se debe considerar que $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

Ejemplo 3.4.1. Calcule los siguientes límites

1. $\lim\limits_{x\to} \dfrac{1-\cos(x)}{x}$
2. $\lim\limits_{x\to} x \operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$

Resolución: ►

1.

$$\begin{aligned}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \frac{1-\cos(x)}{x}\cdot\left(\frac{1+\cos(x)}{1+\cos(x)}\right) = \frac{1-\cos^2(x)}{x(1+\cos(x))} = \frac{x\,\mathrm{sen}^2(x)}{x^2(1+\cos(x))}\\ &= \frac{\mathrm{sen}^2(x)}{x^2}\cdot\frac{x}{1+\cos(x)} = \left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\end{aligned}$$

Luego por propiedades de limite y usando el limite especial anterior se sigue que

$$\begin{aligned}\lim_{x\to 0}\frac{1-\cos(x)}{x} &= \lim_{x\to 0}\left\{\left(\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^2\cdot\frac{x}{1+\cos(x)}\right\}\\ &= \frac{\left(\lim\limits_{x\to 0}\frac{\mathrm{sen}(x)}{x}\right)^2\cdot\lim\limits_{x\to 0}x}{\lim\limits_{x\to 0}(1+\cos(x))}\\ &= \frac{1^2\cdot 0}{2} = 0\end{aligned}$$

2. $\lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$*, en efecto*

$$\begin{aligned}\left|\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le 1 \quad &\Longrightarrow \quad 0 \le \left|x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le x\\ &\Longrightarrow \quad 0 = \lim_{x\to 0} 0 \le \lim_{x\to 0}\left|x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| \le \lim_{x\to 0} x = 0\end{aligned}$$

Por lo tanto $\lim\limits_{x\to 0}\left|x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right)\right| = 0 \Longrightarrow \lim\limits_{x\to 0} x\,\mathrm{sen}\left(\frac{1}{x}\right) = 0$

◄

3.4.2. Tipos de indeterminación

En muchas ocaciones cuando calculamos límites aparecen los símbolos

1. $\infty - \infty$ 2. $0\cdot\infty$ 3. $\frac{0}{0}$ 4. $\frac{\infty}{\infty}$ 5. 0^0 6. ∞^0 7. 1^∞

conocido como símbolos de indeterminación. Cuando aparece uno de estos símbolos en el cálculo de un límite, no puede decir nada sobre este límite, puede que exista o no, dependiendo de la expresión que se esta calculando.

,

parte del cálculo de estos límites serán abordados utilizando L'Hospital.

Observación 3.4.2.

1. Sean $f,\ g:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=1+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$
   Note que $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$ pero $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)-g(x)]=1$

2. Sean $f:\mathbb{R}-\{1\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(x-1)}\right)+\dfrac{1}{(x-1)^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{(x-1)^2}$
   entonces $\lim\limits_{x\to 1} f(x)=\lim\limits_{x\to 1} g(x)=+\infty$ pero $\lim\limits_{x\to 1}[f(x)-g(x)]$ no existe.

3. Sean $f,\ g:]0,+\infty[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\ln(x)$ entonces
   $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=+\infty$ pero $\lim\limits_{x\to+\infty} f(x)\cdot g(x)=0$

4. Sean $f,\ g:\mathbb{R}-\{0\}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x^2}\right)$ entonces $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to+\infty} g(x)=0$ pero $\lim\limits_{x\to 0} f(x)g(x)$ no existe

5.
   - $\lim\limits_{x\to+\infty}\left(x+\dfrac{1}{x}\right)^x=e$
   - $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\right)=\ln(a)$

3.5. Ejercicios Propuestos

1. Calcule los límites siguientes

   a) $\lim\limits_{x\to-3}\dfrac{x^2-x+12}{x+3}$

   b) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(x-5)^2-25}{x}$

   c) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^3-1}{x^2-1}$

   d) $\lim\limits_{x\to 9}\dfrac{9-x}{3-\sqrt{x}}$

   e) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{x^2+x-2}{x^2-3x+2}$

   f) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{2-x}-\sqrt{2}}{x}$

   g) $\lim\limits_{x\to 2}\dfrac{x^4-16}{x-2}$

   h) $\lim\limits_{x\to 1}\left(\dfrac{1}{x-1}-\dfrac{2}{x^2-1}\right)$

   i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{(3+x)^{-1}-3^{-1}}{x}$

   j) $\lim\limits_{x\to-2}\dfrac{x^3+4x^2+4x}{(x+2)(x-3)}$

   k) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{x-2-\sqrt{x}}{x-4}$

   l) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt[3]{x^2}-2\sqrt[3]{x}+1}{(x-1)^2}$

   m) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+1}-1}{\sqrt[3]{x+1}-1}$

   n) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt[3]{x+27}-3}{\sqrt[4]{x+16}-2}$

   ñ) $\lim\limits_{x\to 1}\dfrac{\sqrt{x}-1}{x-1}$

   o) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\sqrt{x+3}-\sqrt{3}}{x}$

   p) $\lim\limits_{x\to 4}\dfrac{\sqrt{2x+1}-1}{\sqrt{x-2}-\sqrt{2}}$

   q) $\lim\limits_{x\to a}\dfrac{x^n-a^n}{x-a}$

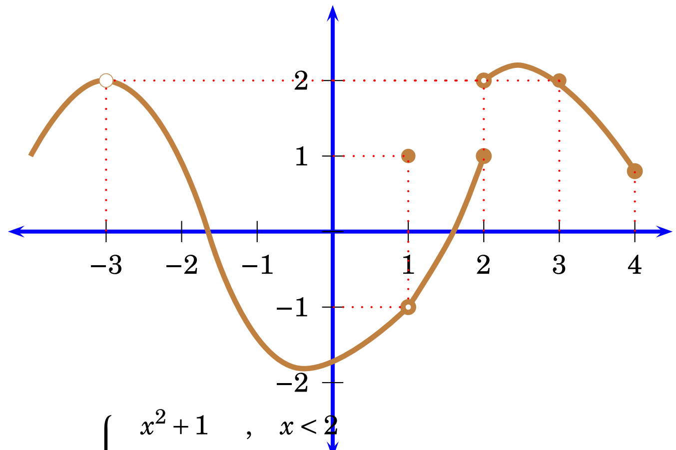
   r) $\lim\limits_{x\to 0}(1+3x)^{\frac{2}{x}}$

   s) $\lim\limits_{x\to 0}(1-x)^{\frac{3}{x}}$

   t) $\lim\limits_{x\to 2}\left(\dfrac{1}{5x-1}-\dfrac{1}{4x+1}\right)\left(\dfrac{\sqrt{x}-1}{x^2-4}\right)$

2. Dé el valor del límite , si existe, a partir de la gráfica dada. Si no existe explique por qué.

   a) $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$ *b*) $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$ *c*) $\lim\limits_{x\to-3} f(x)$ *d*) $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$



3. (a) Dada $f(x) = \begin{cases} x^2+1 & , \quad x<2 \\ 2 & , \quad x=2 \\ -x^2+9 & , \quad x>2 \end{cases}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 2^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 2^+} f(x)$; ¿existe $\lim\limits_{x\to 2} f(x)$?.Justifique su respuesta.

   (b) Dada $f(x) = \begin{cases} \dfrac{|x|}{x} & , \quad x\neq 0 \\ 1 & , \quad x=0 \end{cases}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 0^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 0^+} f(x)$ ¿existe $\lim\limits_{x\to 0} f(x)$?.Justifique su respuesta.

   (c) Dada $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x<1 \\ 3x & , \quad x\geq 1 \end{cases}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$ ¿existe $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$.Justifique su respuesta.

   (d) Dada $f(x) = \begin{cases} 3-x^2 & , \quad x\leq 1 \\ x+1 & , \quad 1<x\leq 3 \\ x^2-4 & , \quad x>3 \end{cases}$. Calcule $\lim\limits_{x\to 1^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^-} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 3^+} f(x)$; ¿existe $\lim\limits_{x\to 3} f(x)$, $\lim\limits_{x\to 1} f(x)$? Justifique su respuesta.

4. Considere la función a tramos definida por $f(x) = \begin{cases} x^2 & , \quad x\leq -2 \\ ax+b & , \quad -2<x<2 \\ 2x-5 & , \quad x\geq 2 \end{cases}$. Determine los valores de a y b para que $\lim_{x\to -2} f(x)$ y $\lim_{x\to 2} f(x)$ existan.

5. Calcule los siguientes límites al infinito

   (a) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{8x^3+7x+1}{4x^3+2x}$

   (b) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{5x^5+12x^2+3x+1}{x^4+2x}$

   (c) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{-2x^4+7x^3-1}{2x^6--5x^2+x+9}$

   (d) $\lim\limits_{x\to +\infty} \left(\dfrac{3}{x^3}+5\right)$

   (e) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x^3+1}{x^4+5x^3+x+2}$

   (f) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{2x+3}{3x+2}$

   (g) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-5}}$

   (h) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x+1}{\sqrt{x^2-5}}$

   (i) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x^5 + 3x^3 + 1)$

   (j) $\lim\limits_{x\to -\infty} (x^6+x^3+1)$

   (k) $\lim\limits_{x\to -\infty} \sqrt[3]{\dfrac{x}{x^2+3}}$

   (l) $\lim\limits_{x\to +\infty} (x - \sqrt{x^2+1})$

   (ll) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt[3]{x^3++2x-1}}{\sqrt{x^2+x+1}}$

   (m) $\lim\limits_{x\to +\infty} (\sqrt{x+1} - \sqrt{x+3})$

   (n) $\lim\limits_{x\to +\infty} \dfrac{\sqrt{x-1}}{\sqrt{x^2-1}}$

   (ñ) $\lim\limits_{x\to -\infty} \dfrac{x^3+x+1}{\sqrt[3]{x^9+1}}$

6. Calcule los siguientes límites infinito

   (a) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2}$

   (b) $\lim\limits_{x\to 1} \dfrac{3x-2}{(x-1)^2}$

   (c) $\lim\limits_{x\to 2} \dfrac{2x-5}{(x-2)^2}$

   (d) $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{x^2+3x}{x^2-4}$

(e) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x^3-1}{x^2-2x+1}$ (g) $\lim\limits_{x\to 1^-} \dfrac{2x+3}{x^2-1}$ (i) $\lim\limits_{x\to 1^+} \dfrac{x-1}{\sqrt{x-1}}$ (k) $\lim\limits_{x\to \frac{2}{3}^+} \dfrac{x^2}{4-9x^2}$

(f) $\lim\limits_{x\to 3^+} \dfrac{x^2+3x}{x^2-6x+9}$ (h) $\lim\limits_{x\to 0^+} \dfrac{\ln(x)}{x}$ (j) $\lim\limits_{x\to 0^+} \sqrt{x}-\dfrac{1}{\sqrt{x}}$ (hl) $\lim\limits_{x\to 0} \ln(|x|)$

7. Considere

- $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{x}\right)^x = e$
- $\lim\limits_{x\to 0}(1+x)^{\frac{1}{x}} = e$
- $\lim\limits_{x\to 0}\left(\dfrac{a^x-1}{x}\right) = \ln(a)$
- $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(x)}{x} = 1$

Calcule los siguientes límites: exponencial, logaritmo y trigonométrico.

(a) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x}\right)^x$

(b) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x}{1+x}\right)^x$

(c) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1-\dfrac{1}{x}\right)^x$

(d) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{1}{3x}\right)^{3x-2}$

(e) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{c}{x}\right)^x$, $c\in\mathbb{R}$

(f) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(1+\dfrac{2}{x+c}\right)^x$, $c\in\mathbb{R}$

(g) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{x+2}{x-1}\right)^{x+c}$, $c\in\mathbb{R}$

(h) $\lim\limits_{x\to +\infty}\left(\dfrac{a^x-c^x}{x}\right)^x$, $a, c > 0,\ a, c \neq 1$

(i) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\tan(x)}{x}$

(j) $\lim\limits_{x\to 0}\dfrac{\operatorname{sen}(2x)}{\operatorname{sen}(3x)}$

(k) $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$

(l) $\lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{\sqrt{1-\cos(2x)}}{x}$

8. Sean $f,\ g:\mathbb{R}-\{2\}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones,definida por $f(x)=1+\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ pruebe que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to +2}[f(x)-g(x)]=1$

9. Sean $f,\ g:\mathbb{R}-\{2\}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones,definida por $f(x)=\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{(x-2)}\right)+\dfrac{1}{(x-2)^2}$, $g(x)=\dfrac{1}{(x-2)^2}$ pruebe que $\lim\limits_{x\to 2} f(x)=\lim\limits_{x\to 2} g(x)=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to +2}[f(x)-g(x)]$ no existe.

10. Sean $f,\ g:]0,+\infty[\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones,definidas por $f(x)=\dfrac{1}{x}$, $g(x)=\ln(x)$. Pruebe que $\lim\limits_{x\to +\infty} f(x)=0$ y $\lim\limits_{x\to +\infty} g(x)=+\infty$ y que $\lim\limits_{x\to +\infty}(f(x)\cdot g(x))=0$

11. Sean $f,\ g:\mathbb{R}-\{0\}\longrightarrow\mathbb{R}$ funciones,definidas por $f(x)=\dfrac{1}{x^2}$, $g(x)=x^2\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{x}\right)$. Pruebe que $\lim\limits_{x\to 0} f(x)=+\infty$ y $\lim\limits_{x\to 0} g(x)=0$ pero $\lim\limits_{x\to 0}(f(x)\cdot g(x))$ no existe.

12. Calule las asíntotas verticales, horizontales u oblicuas, si existen, para las funciones siguientes.

(a) $f(x)=\dfrac{x}{x^2-1}$ (b) $f(x)=\dfrac{x^2}{x^2-1}$

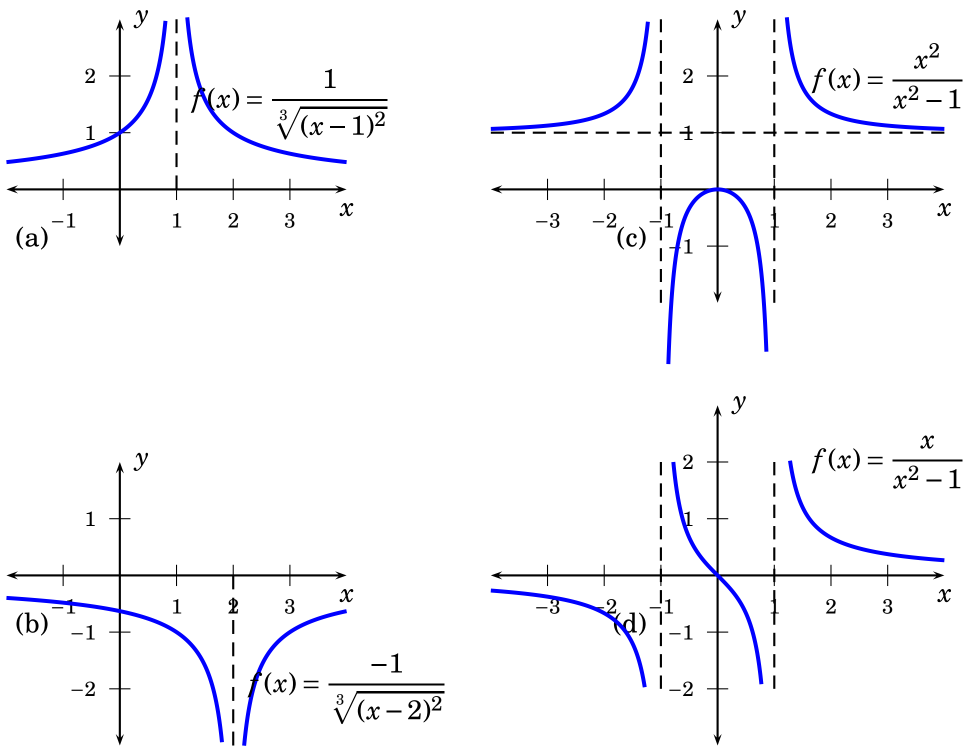
13. Pruebe que $f(x)$ no es continua en el punto indicado

(a) $f(x)=\begin{cases}\dfrac{x^2-1}{x-1} & ;\quad x\neq 1\\ 1 & ;\quad x=1\end{cases}$, $x=1$ (b) $f(x)=\begin{cases}1 & ;\quad x\geq c\\ 0 & ;\quad x<c\end{cases}$, $x=c$

14. Sea $f(x)=3x-5$, $g(x)=\dfrac{x}{2}-\dfrac{2}{3}$. Calcule

(a) $\lim\limits_{x\to 2}(f\circ g)(x)$ (b) $\lim\limits_{x\to 2}(g\circ f)(x)$ (c) $\lim\limits_{x\to -\frac{3}{2}}(f\circ g\circ f)(x)$ (d) $\lim\limits_{x\to 0} x\operatorname{sen}\left(\dfrac{1}{g(x)}\right)$

15. Calcule los límites en las asíntotas verticales y horizontales para las funciones cuya representación gráfica aparecen abajo



Capítulo 4

Continuidad de Funciones

La idea de continuidad en matemática ocurre cuando no hay interrupción, que no haya separación de un punto a otro.
En el capítulo anterior se estudió el comportamiento de una función $y = f(x)$ para valores de x próximo a un punto $x_0 \in \mathbb{R}$ mediante el límite, pudiendo existir el límite aún cuando f no esté definida en x_0, es decir $\lim\limits_{x\to x_0} f(x)$ exista y $f(x_0)$ no esté definido.

4.1. Continuidad de funciones reales

Definición 4.1.1.

1. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, se dice que f es continua en $x_0 \in Dom(f)$ si $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$ simbólicamente

$$\boxed{\lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } 0 < |x - x_0| < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

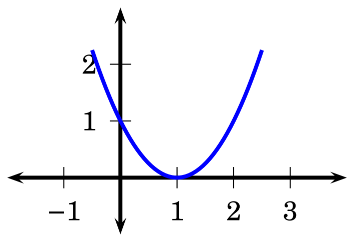
2. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, se dice que f es ***continua por la derecha*** en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0)$ simbólicamente

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^+} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } 0 < x - x_0 < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

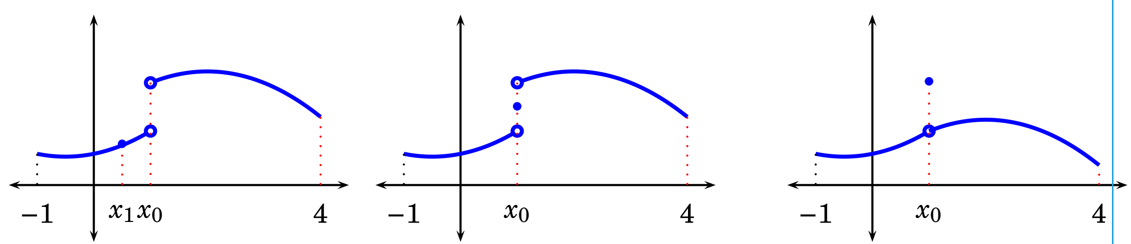
3. Sea $f : Dom(f) \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función, se dice que f es ***continua por la izquierda*** en x_0 si $\lim\limits_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0)$ simbólicamente

$$\boxed{\lim_{x\to x_0^-} f(x) = f(x_0) \Longleftrightarrow \ \forall\, \epsilon > 0,\ \exists\, \delta > 0 \text{ tal que } 0 < x_0 - x < \delta \Longrightarrow |f(x) - f(x_0)| < \epsilon}$$

Propiedades 4.1.1.
Sea $f: I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ función continua en I entonces es continua en cada punto de I.



Observación 4.1.2. Presentamos tres casos de funciones con saltos

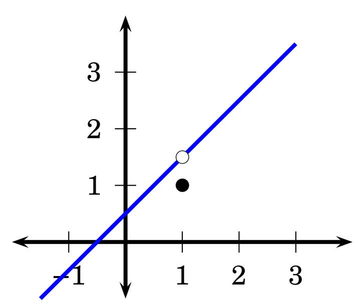


$1.-\quad Dom(f) = [-1, x_1]$ $\qquad 2.-\quad Dom(f) = [-1, 4]$ $\qquad 3.-\quad Dom(f) = [-1, 4]$

1. Para la primera función $x_0 \notin Dom(f)$ por tanto f es continua en todo su dominio, y no es necesario analizar continuidad en x_0
2. Para la segunda función $x_0 \in Dom(f)$ y $f(x_0)$ está definido y $\lim_{x \to x_0^+} f(x) \neq \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ por tanto no es continua en x_0 , hay un salto.
3. Para la tercera función $x_0 \in Dom(f)$ y $f(x_0)$ está definido y $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \lim_{x \to x_0^-} f(x) \neq f(x_0)$ por tanto no es continua en x_0, hay un salto.

Por ejemplo la función

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x-1} & ; \quad x \neq 1 \\ 1 & ; \quad x = 1 \end{cases} \text{, el } Dom(f) = \mathbb{R}$$



Según el gráfico f no es continua en 1 pues $\lim\limits_{x \to 1^+} (x+1) = \lim\limits_{x \to 1^-} (x+1) = 2 \neq 1 = f(1)$

Teorema 4.1.3. Sean $f, g : I \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ funciones continuas en $a \in I$, es decir $\lim_{x\to a} f(x) = f(a)$, $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$ entonces

1. $kf(x)$ es continua, $k \in \mathbb{R}$ y se cumple $\lim_{x\to a} kf(x) = kf(a)$
2. $(f+g)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)+g(x)] = f(a)+g(a)$
3. $(f-g)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)-g(x)] = f(a)-g(a)$
4. $(f\cdot g)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)\cdot g(x)] = f(a)\cdot g(a)$
5. $\left(\frac{f}{g}\right)(x)$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}\left(\frac{f(x)}{g(x)}\right) = \frac{f(a)}{g(a)}$ siempre que $g(a) \neq 0$.
6. $[f(x)]^n$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a}[f(x)]^n = [f(a)]^n$
7. $\sqrt[n]{f(x)}$ es continua en a y se cumple $\lim_{x\to a} \sqrt[n]{f(x)} = \sqrt[n]{f(a)}$, $f(a) > 0, n$ par

Teorema 4.1.4. [Composición de funciones]
Si g es continua en a, es decir $\lim_{x\to a} g(x) = g(a)$, y si f es continua en $g(a)$, es decir $\lim_{x\to g(a)} f(x) = g(a)$, entonces $\lim_{x\to a} f(g(x)) = f(\lim_{x\to a} g(x)) = f(g(a))$

Propiedades 4.1.5.

1. Sea el ***polinomio*** $P(x) = \sum_{k=0}^{n} a_k x^k$, $a_k \in \mathbb{R}$. es continua en $\mathbb{R}$ pues está constituida de un número finito de productos y sumas de la función identidad y constante.
2. Las funciones ***racionales*** son de la forma

$$R(x) = \frac{P(x)}{Q(x)},\ Q(x) \neq 0;\ \text{donde } P(x), Q(x) \text{ polinomios .}$$

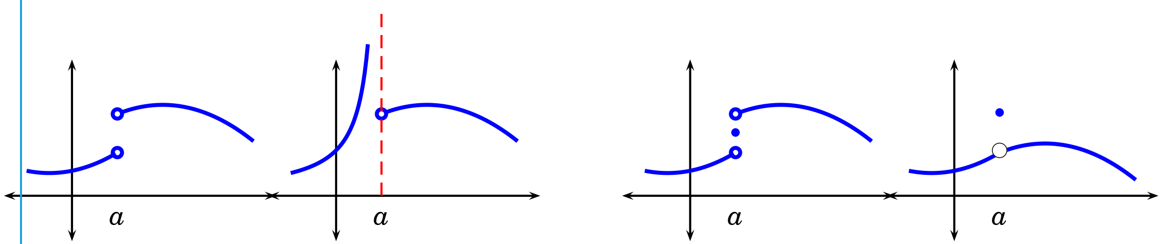
   Es continua en todos los puntos de $\mathbb{R}$, salvo de aquellos que anulen el denominador $Q(x)$; pero como estos puntos no estan en el dominio de $R(x)$ entonces $R(x)$ resulta continua en todo su dominio.

4.2. Discontinuidad de funciones

Observación 4.2.1.
A continuación veremos las condiciones para que una función no sea continua

1. f no está definida en a, ó no existe $f(a)$.
2. No existe alguno de los límites laterales de f en a.
3. Los límites laterales existen pero son distintos.a
4. Los límites laterales existen, son iguales, pero no coinciden con el valor de f en el punto a.

Presentamos 4 casos de discontinuidad



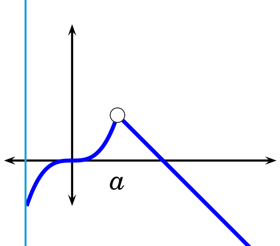
Observación 4.2.2. Una función f, es discontinua en un punto en donde f no es continua. Ahora procederemos a clasificar los puntos de discontinuidad.

$$\text{Discontinuidad}\begin{cases} Evitable \\ Esencial \begin{cases} De\,primera\,especie \begin{cases} De\,salto\,finito \\ De\,salto\,infinito \\ Asintótica \end{cases} \\ De\,segunda\,especie \end{cases} \end{cases}$$

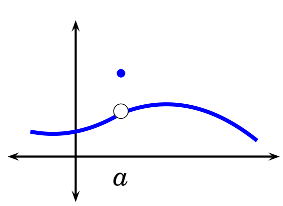
4.2.1. Discontinuidad evitable

Definición 4.2.1. [Discontinuidad evitable]

1. Se dice que f presenta una discontinuidad evitable en $x = a$ si existe $\lim\limits_{x\to a} f(x)$ y es finito; si ocurre esto puede que,
   - $f(a)$ no exista
   - o que $f(a)$ exista pero $\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$.

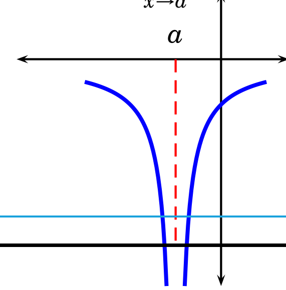


$f(a)$ no es definido



$\lim\limits_{x\to a} f(x) \neq f(a)$

no es el caso
por que $\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$



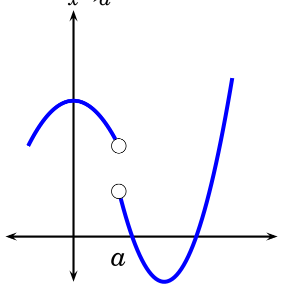
Definición 4.2.2. [Discontinuidad esencial]

1. Discontinuidad esencial de primera especie

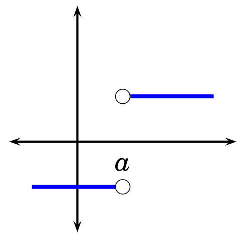
   Se presentan 3 tipos

   Discontinuidad esencial de primera especie de salto finito

   Cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ existan y $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ y el salto viene dado por $|\lim\limits_{x\to a^-} f(x) - \lim\limits_{x\to a^+} f(x)|$



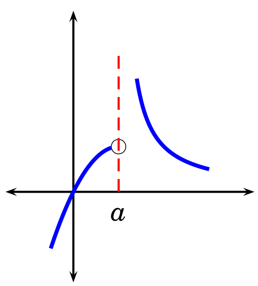
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$



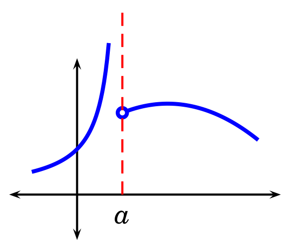
$\lim\limits_{x\to a^+} f(x) \neq \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$

   Discontinuidad esencial de primera especie de salto infinito

   Cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ exista y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$ o $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ exista.



$\lim\limits_{x\to a^-} f(x)$ finita, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = +\infty$

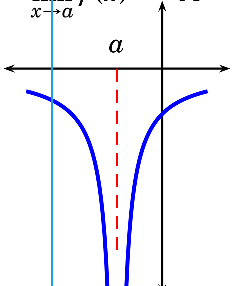


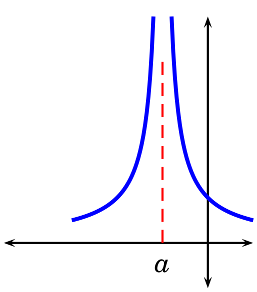
$\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = +\infty$, $\lim\limits_{x\to a^+} f(x)$ finita

   Discontinuidad esencial de primera especie asíntótica

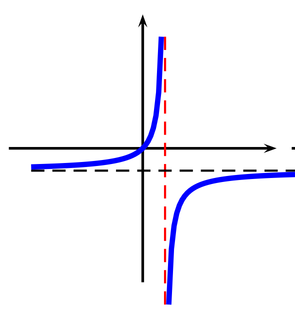
   Cuando $\lim\limits_{x\to a^-} f(x) = \pm\infty$ y $\lim\limits_{x\to a^+} f(x) = \pm\infty$

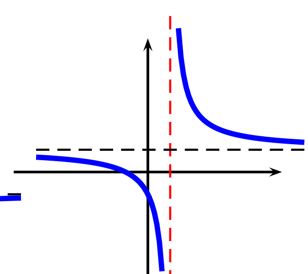
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = -\infty$





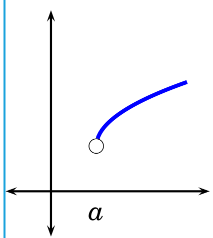
$\lim\limits_{x\to a} f(x) = \infty$



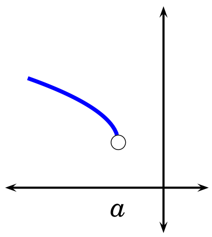


Definición 4.2.3. [Discontinuidad esencial]

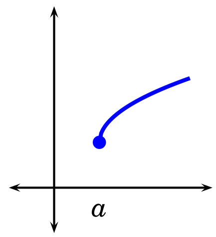
2. Discontinuidad esencial de segunda especie
   Cuando al menos uno de los límites laterales no existe.



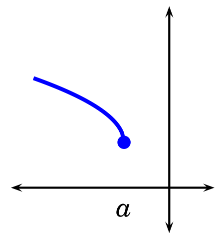
$\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$



$\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$



$\exists \lim\limits_{x\to a^+} f(x) = f(a)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^-} f(x)$



$\exists \lim\limits_{x\to a^-} f(x) = f(a)$
$\nexists \lim\limits_{x\to a^+} f(x)$

exam:con Analice que tipos de discontinuidades son las funciones siguientes en el punto indicado

1. $f(x) = \dfrac{1}{x}$, $x \neq 0$ en el punto $a = 0$.
2. $f(x) = \dfrac{x^2-4}{x-2}$, $x \neq 2$ en el punto $a = 2$.
3. $f(x) = \begin{cases} x+2, & x \neq 2 \\ 3, & x = 2 \end{cases}$ para $a = 2$
4. $f(x) = [\![x]\!]$, $a = n \in \mathbb{Z}$
5. $f(x) = \frac{x-1}{x^2-1}$.
6. $f(x) = \dfrac{x}{|x|}$
7. $f(x) = \begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x < 0, \\ x, & x > 0, \end{cases}$
8. $f(x) = \dfrac{1}{x-1}$
9. $f(x) = \sqrt{x}$

Resolución: ►

1. $f(x)=\dfrac{1}{x}, x\neq 0$

   $\lim\limits_{x\to 0^+}\dfrac{1}{x}=+\infty,\ \lim\limits_{x\to 0^-}\dfrac{1}{x}=-\infty$*, es una discontinidad esencial de primera especie asintótica.*

2. $f(x)=\dfrac{x^2-4}{x-2}$

   $\lim\limits_{x\to 2^+}\dfrac{x^2-4}{x-2}=\lim\limits_{x\to 2^+}x+2=4=\lim\limits_{x\to 2^-}x+2$ *pero* $f(2)$ *no está definido, es una discontinidad evitable.*

3. $f(x)=\begin{cases} x+2, & x\neq 2 \\ 3, & x=2 \end{cases}$ *para* $a=2$

   $\lim\limits_{x\to 2}f(x)=4\neq 3=f(2)$ *es una discontinidad evitable.*

4. $f(x)=[\![x]\!]$ *y el punto* $a=n\in\mathbb{Z}$

   $\lim\limits_{x\to n^+}[\![x]\!]\neq\lim\limits_{x\to n^-}[\![x]\!]$ *discontinidad esencial de primera especie de salto finito.*

5. $f(x)=\dfrac{x-1}{x^2-1}$.

   $\lim\limits_{x\to 1}f(x)=\dfrac{1}{2}$*, podemos definir la función* f *en el punto* $x=1$ *como* $f(1)=1/2$*. De esta forma* f *posee una discontinuidad evitable en* $x=1$.

6. $f(x)=\dfrac{x}{|x|}$.

   $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-1$ *y que* $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=1$*. discontinidad esencial de primera especie de salto finito.*

7. $f(x)=\begin{cases} \dfrac{1}{x}, & x<0, \\ x, & x>0, \end{cases}$

   $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)=-\infty$ *pero* $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ *discontinuidad de primera especie de salto infinito.*

8. $f(x)=\dfrac{1}{x-1}$

   $\lim\limits_{x\to 1^+}f(x)=+\infty$ *y* $\lim\limits_{x\to 1^-}f(x)=-\infty$ *discontinuidad de primera especie asintótica.*

9. $f(x)=\sqrt{x}$

   $\lim\limits_{x\to 0^+}f(x)=0$ *pero* $\lim\limits_{x\to 0^-}f(x)$ *no existe. Discontinuidad de segunda especie*

◄

Observación 4.2.3.

1. En general un punto a se llama ***punto de discontinuidad removible o evitable*** si

   a) $a\notin Domf$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ existe en $\mathbb{R}$.

   o

   b) $a\in Domf$ y $\lim\limits_{x\to a}f(x)\neq f(a)$

2. Si $\lim\limits_{x\to a}f(x)$ no existe, se dice que a es un ***punto de discontinuidad esencial***.

4.2.2. Ejercicios Resueltos

exam:con Encuentre los valores de a y b para que la función f sea continua en $x=-2$ y $x=2$

$$f(x)=\begin{cases} \dfrac{x^3-x^2-4x+4}{x+2} & , \quad x<-2 \\ ax^2-2bx+1 & , \quad -2\leq x\leq 2 \\ \dfrac{x^2-13x+22}{x-2} & , \quad x>2 \end{cases}$$

Resolución: ►

- *Cálculo de los límites laterales en -2 y 2*

Límite lateral izquierdo en -2

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to -2^-} \frac{x^3-x^2-4x+4}{x+2} &= \lim_{x\to -2^-} \frac{\cancel{(x+2)}(x-2)(x-1)}{\cancel{(x+2)}} \\
&= \lim_{x\to -2^-} (x-2)(x-1) \\
&= (-2-2)(-2-1) \\
&= 12 \qquad (4.1)
\end{aligned}$$

Límite lateral derecho en -2

$$\lim_{x\to -2^+} ax^2-2bx+1 = 4a+4b+1 \qquad (4.2)$$

Límite lateral izquierdo en 2

$$\lim_{x\to 2^-} ax^2-2bx+1 = 4a-4b+1 \qquad (4.3)$$

Límite lateral derecho en 2

$$\begin{aligned}
\lim_{x\to 2^+} \frac{x^2-13x+22}{x-2} &= \lim_{x\to 2^+} \frac{(x-11)\cancel{(x-2)}}{\cancel{(x-2)}} \\
&= \lim_{x\to 2^+} (x-11) \\
&= -9 \qquad (4.4)
\end{aligned}$$

- *Como los límites laterales en -2 deben ser iguales, obtenemos la ecuación siguiente al igualar las ecuaciones (4.1) y (4.2)*

$$4a+4b+1=12$$

- *Como los límites laterales en 2 deben ser iguales, obtenemos la ecuación siguiente al igualar las ecuaciones (4.3) y (4.4)*

$$4a-4b+1=-9$$

Ahora resolveremos las dos últimas ecuaciones

$$\begin{cases} 4a+4b &= 11 \\ 4a-4b &= -10 \end{cases}$$

de donde $a=\frac{1}{8}$, $b=\frac{21}{8}$ ◄

exam:con Determinar los valores de a y b para que f sea continua en $\mathbb{R}$ donde

$$f(x)=\begin{cases} \frac{x^2-2x+a}{x-3} \quad , & x<3 \end{cases}$$

Resolución: ►

Cálculo de a

Como f es continua en $x_0 = 3$, se cumple

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x+a}{x-3} = 4 = \lim_{x\to 3^+}(x^2-5) = f(3)$$

La división $\dfrac{x^2-2x+a}{x-3}$ *debe ser exacta, entoces usando polinimio se tiene:*

$$\begin{array}{c|ccc|}
 & 1 & -2 & a \\
3 & & 3 & 3 \\
\hline
 & 1 & 1 & \boxed{3+a=0}
\end{array}$$

de donde el valor de $\boxed{a=-3}$

Comprobando de esta forma que

$$\lim_{x\to 3^-} \frac{x^2-2x-3}{x-3} = \lim_{x\to 3^-}(x+1) = 4 = \lim_{x\to 3^+} x^2-5 = f(3)$$

Cálculo de b

Como f es continua en $x_0 = 5$ se cumple

$$\lim_{x\to 5^-} x^2-5 = \lim_{x\to 5^+} x+b = f(5)$$

de donde $20 = 5+b \Longrightarrow \boxed{b=15}$

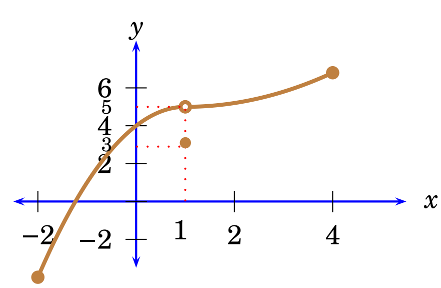
Así la función f es

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-3}{x-3} & , \quad x<3 \\ x^2-5 & , \quad 3\le x<5 \\ x+15 & , \quad x\ge 5 \end{cases}$$

◄

exam:con

(a) Para la gráfica siguiente, determine el tipo de discontinuidad que se produce (esencial o de salto, removible o evitable). Justifique su respuesta.



(b) Encontrar asíntotas, horizontal, vertical y oblícua, si es que existen de la función $f(x) = \dfrac{3x^2+1}{x-2}$

Resolución: ►

(a) *Observando el gráfico se tiene que* $\lim\limits_{x\to 1^+} f(x) = 5 = \lim\limits_{x\to 1^-} f(x) \neq f(1) = 3$, *de esto vemos que es posible redefinir* f *en* $x_0 = 1$ *por* $f(1) = 5$, *convirtiendo a* f *continua, se determina así que* f *tiene una* **discontinuidad evitable** *en* $x_0 = 1$.

(b) **Búsqueda de asíntota vertical**

Cálculo de $\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2+1}{x-2}$

En efecto, haciendo $f(x) = 3x^2+1,\ g(x) = x-2$ *se tiene* $\left\{\begin{array}{lcl} \lim\limits_{x\to 2^+} 3x^2+1 & = & 13 \\ \lim\limits_{x\to 2^+} x-2 & = & 0^+ \end{array}\right\} \Longrightarrow$

$\lim\limits_{x\to 2^+} \dfrac{3x^2+1}{x-2} = +\infty$

así tenemos que $\boxed{x=2}$ *es* **asíntota vertical**.

Búsqueda de asíntota oblícua

Es de la forma $y = mx + b$

Cálculo m

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{\frac{3x^2+1}{x-2}}{x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{x^2-2x} = \lim_{x\to+\infty} \frac{\cancel{x^2}\left(3+\dfrac{1}{x^2}\right)}{\cancel{x^2}\left(1-\dfrac{2}{x}\right)} = 3$$

$$\Longrightarrow \boxed{m=3}$$

Cálculo de b

$$\lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1}{x-2} - 3x = \lim_{x\to+\infty} \frac{3x^2+1-3x^2+6x}{x-2} = \lim_{x\to+\infty} \frac{6x+1}{x-2} = 6$$

$$\Longrightarrow \boxed{b=6}$$

Así tenemos que la asíntota oblícua es $\boxed{y = 3x+6}$

Búsqueda de asíntota horizontal

No tiene ya que $m \neq 0$

◄

ejer:con Sea $f : \mathbb{R} \longrightarrow \mathbb{R}$ función definida por la regla de correspondencia

$$f(x) = \begin{cases} \dfrac{3x+a}{x+3} & ; \quad -3 < x < -2 \\ a+b-10 & ; \quad x = -2 \\ \sqrt{x+3}-6 & ; \quad x > -2 \end{cases}$$

Si f es continua, hallar a, b

Resolución: ▶

Como f es continua en $x=2$, entonces

Calculamos límite lateral de f cuando x tiende a -2 por la izquierda

$$\lim_{x\to-2^-}\frac{3x+a}{x+3} = \frac{\lim\limits_{x\to-2^-} 3x+a}{\lim\limits_{x\to-2^-} x+3} = \frac{3(-2)+a}{-2+3} = -6+a$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to-2^-}\frac{3x+a}{x+3} = -6+a}$$

Calculamos límite lateral de f cuando x tiende a -2 por la derecha

$$\lim_{x\to-2^+}\sqrt{x+3}-6 = \sqrt{-2+3}-6 = -5$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{x\to-2^+}\sqrt{x+3}-6 = -5}$$

Luego igualamos los límites laterales por la existencia del límite

$$-6+a=-5 \Longrightarrow \boxed{a=1}$$

Además por la continuidad de f en $x=-2$ se tiene

$$\lim_{x\to-2} f(x) = \boxed{-5 = a+b-10} = f(-2) \Longrightarrow 1+b-10 = -5 \Longrightarrow \boxed{b=4}$$

◀

ejer:conUn comerciante vende un determinado producto. Por cada unidad de producto cobra la cantidad de 5 euros. No obstante, si se le encargan más de 10 unidades,disminuye el precio por unidad, y por cada x unidades cobra: $C(x) = \begin{cases} 5x & ; \quad 0 < x \le 10 \\ \sqrt{ax^2+500} & ; \quad x > 10 \end{cases}$

(a) Halla a de forma que el precio varíe de forma continua al variar el número de unidades que se compran.

(b) ¿A cuánto tiende el precio de una unidad cuando se compran muchísimas unidades? (El precio de una unidad es $\frac{C(x)}{x}$.)

Resolución: ►

(a) Analizamos continuidad en $x = 10$

$\lim\limits_{x\to 10^-} C(x) = \lim\limits_{x\to 10^-} (5x) = 50$

$\lim\limits_{x\to 10^+} C(x) = \lim\limits_{x\to 10^+} \sqrt{ax^2+500} = \sqrt{100a+500}$

$C(10) = 50$ *Para que sea continua, se igualan ambas ecuaciones:*

$\sqrt{100a+500} = 50 \Longrightarrow 100a+500 = 2500 \Longrightarrow \boxed{a = 20}$

(b) $\lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{C(x)}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{ax^2+500}}{x} = \lim\limits_{x\to+\infty} \dfrac{\sqrt{20x^2+500}}{x} = \sqrt{20} \approx 4{,}47\ euros$

◄

ejer:con En el laboratorio de Biologia de la universidad, han determinado que el tamaño T de los ejemplares de una cierta bacteria (medido en micras) varía con el tiempo t, siguiendo la ley: $T(t) = \begin{cases} \sqrt{t+a} & ;\quad t < 8\ horas \\ \dfrac{-3+\sqrt{3t-15}}{t-8} & ;\quad t > 8\ horas \end{cases}$ El parámetro a es una variable biológica cuya interpretación trae de cabeza a los científicos, pero piensan que puede haber un valor para el cual el crecimiento se mantenga continuo en $t = 8$.

(a) Determine el valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

(b) Investiga cual llegará a ser el tamano de una bacteria si se la cultiva indefinidamente.

Resolución: ►

(a) *Cálculo de* $\lim_{t\to 8^-} T(t)$

$$\lim_{t\to 8^-} T(t) = \lim_{t\to 8^-} \sqrt{t+a} = \sqrt{8+a}$$

Cálculo de $\lim_{t\to 8^+} T(t)$

$$\lim_{t\to 8^+} T(t) = \lim_{t\to 8^+} \frac{\sqrt{3t-15}-3}{t-8} = \lim_{t\to 8^+} \frac{(\sqrt{3t-15}-3)(\sqrt{3t-15}+3)}{(t-8)\sqrt{3t-15}+3)}$$

$$\lim_{t\to 8^+} \frac{3t-15-9}{(t-8)\sqrt{3t-15}+3)} = \lim_{t\to 8^+} \frac{3\cancel{(t-8)}}{\cancel{(t-8)}\sqrt{3t-15}+3)} = \lim_{t\to 8^+} \frac{3}{\sqrt{3t-15}+3} = \frac{3}{6}$$

$$\Longrightarrow \boxed{\lim_{t\to 8^+} \frac{\sqrt{3t-15}-3}{t-8} = \frac{1}{2}}$$

Para que $T(t)$ *pueda ser continua, tendria que cumplirse que:* $\sqrt{8+a} = \frac{1}{2} \Longrightarrow a = -\frac{31}{4}$
Pero, si $a = -\frac{31}{4} \approx 7{,}75$ *, quedaria* $T(t) = \sqrt{t - \frac{31}{4}}$ *si* $t < 8$*. Esto daria lugar a que* $T(t)$ *no existiera para* $t \leq= \frac{31}{4} \approx 7{,}75$ *horas.*
Por tanto, no hay ningun valor de a para el que el crecimiento se mantenga continuo.

(b) $\lim_{t\to +\infty} T(t) = \lim_{t\to +\infty} \frac{-3+\sqrt{3t-15}}{t-8} = \sqrt{3} = 1{,}73$ *micras.*

◄

4.3. Ejercicios Propuestos

1. Sea $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x) = \begin{cases} ax^2+2 & ; \quad 0 \leq x < 1 \\ x+1 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ \dfrac{x^3+b}{x-1} & ; \quad 2 \leq x \leq 3 \end{cases}$

   Determine los valores de a y b para que f sea continua en $x = 1$, $x = 2$ Determine si f es continua en todo su dominio, definida por $f(x) = \begin{cases} 2-x & ; \quad -2 \leq x < 1 \\ x^3 & ; \quad 1 \leq x < 2 \\ 5x+4 & ; \quad 2 \leq x \leq 4 \end{cases}$

2. Para cada una de las funciones siguientes $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$, determinar si es o no continua en el punto a indicado. En caso exista discontinuidad, redefina f para que sea continua en ese punto.

   (a) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-1}{x+1} & , \quad x \neq -1 \\ 6 & , \quad x = -1 \end{cases}$ en $a = -1$ (b) $f(x) = \begin{cases} \dfrac{x^2-2x-8}{x-4}, & x \neq 4 \\ 3, & x = 4 \end{cases}$ en $a = 4$

(c) $f(x)=\begin{cases} 1-x, & x\leq 2 \\ x^2-2x, & 2<x \end{cases}$ en $a=2$

(d) $f(x)=\begin{cases} 2x+1, & x<-1 \\ 3x, & x\in]-1,1[\\ 2x-1, & 1\leq x \end{cases}$ en $a=1$ y $a=-1$

3. Sea $f:\ ]0,3[\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} ax+2 & , \quad 0<x<1 \\ x^2+2 & , \quad 1\leq x<2 \\ bx^3+1 & , \quad 2\leq x<3 \end{cases}$.

   Calcule los valores de a y b, para que la función $f(x)$ sea continua en 1 y 2.

4. Sea $f:\ \mathbb{R}\to\mathbb{R}$ definida por $f(x)=\begin{cases} x+2c & , \quad x<-2 \\ 3cx+k & , \quad -2\leq x<1 \\ 3x-2k & , \quad x\geq 1 \end{cases}$.

   Calcule los valores de c y k para que f sea continua en todo $\mathbb{R}$.

5. Dada $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$. Hallar los valores reales de a,b,c para que la función definida por

$$f(x)=\begin{cases} 2x-x^2+a, & x\leq 0 \\ \dfrac{x+a}{x+b}, & x\in]0,b[\\ \sqrt{x+a}, & x\in [b,2[\\ \sqrt{4+\sqrt{\frac{x}{c}}}, & x\in [2,\infty[\end{cases}$$

   sea continua en todo su dominio.

6. Pruebe que $f(x)=\dfrac{x^2-1}{x-1}$ es continua en todo punto de su dominio.

7. Sea $\begin{cases} 2x-2 & ; \quad x<-1 \\ ax+b & ; \quad -1\leq x\leq 1 \\ 5x+7 & ; \quad x>1 \end{cases}$ Determinar $a,\ b$ tal que f sea continua en todo $\mathbb{R}$