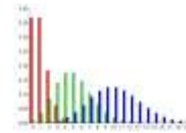


Variables Aleatorias

Definición 1: Una variable aleatoria (v.a.) es una función que transforma los resultados del espacio muestral asociado a un experimento en números.

Observación 1: Las variables aleatorias se denotan por letras mayúsculas tales como X, Y y Z, y sus valores por las mismas letras pero minúsculas: x, y, z.

Definición 2: Las variables aleatorias pueden ser de dos tipos: Discretas y Continuas. Una variable aleatoria discreta es aquella que solo puede tomar valores enteros. Una variable aleatoria continua es aquella cuyos resultados pertenecen a uno o más conjuntos de los reales.

Definición 3: Llamaremos función de probabilidad o función de cuantía de la v.a. discreta X, a $P(X = x)$ o bien a $p(x)$ si satisface las siguientes dos condiciones:

- ✓ $P(X = x) \geq 0, \ \forall\, x \in R_X$
- ✓ $\sum_{i=1}^{n} P(X = x) = 1$

Definición 4: Llamaremos función de densidad de la v.a. continua X, a $f(x)$, si satisface las siguientes dos condiciones:

- ✓ $f(x) \geq 0, \ \forall \ x \in R_X$
- ✓ $\int_{R_X} f(x)dx = 1$

Definición 5: Llamaremos función de distribución acumulada (f.d.a.) a la probabilidad de que X sea menor o igual que x y la denotaremos por $F(x)$. Formalmente,

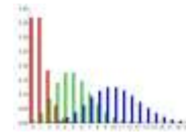
$$F(x) := P(X \leq x) = \sum_{x_i \leq x} P(X = x), \text{ Si X es v.a. discreta.}$$

Y

$$F(x) \coloneqq P(X \leq x) = \int_{-\propto}^{x} f(u)du, \text{ Si U es una v.a. continua.}$$

Algunas Propiedades de $F(x)$, cuando X es v.a. discreta

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $P(X > x) = 1 - F(x)$
3. $P(X = x) = F(x) - F(x-1)$
4. $P\left(x_i \leq X \leq x_j\right) = F\left(x_j\right) - F(x_{i-1})$



<u>Algunas Propiedades de $F(x)$, cuando X es v.a. continua</u>

1. $0 \leq F(x) \leq 1$
2. $P(X > x) = 1 - F(x)$
3. $P(X = x) = 0$
4. $P(a \leq X \leq b) = F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)dx$
5. $lim_{x \to -\propto} F(x) = 0$ y $lim_{x \to +\propto} F(x) = 1$
6. $\frac{\partial}{\partial x} F(x) = f(x)$

<u>Definición 6</u>: Llamaremos Esperanza de una variable aleatoria X al promedio o media de ella y la denotaremos por $E(X)$. Formalmente, está definida por:

- ✓ $E(X) = \sum_{i=1}^{n} x \cdot P(X = x),$ si X es v.a.d.

- ✓ $E(X) = \int_{-\propto}^{+\propto} x \cdot f(x)dx,$ si X es v.a.c.

<u>Propiedades de $E(X)$</u>
Consideremos c constante:

- ✓ $E(c) = c$
- ✓ $E(X + c) = E(X) + c$
- ✓ $E(X \cdot c) = c \cdot E(X)$
- ✓ $E\big(g(X) + h(X)\big) = E\big(g(X)\big) + E\big(h(X)\big)$

Donde
- ✓ $E\big(g(X)\big) = \sum_{i=1}^{n} g(x) \cdot P(X = x),$ si X es v.a.d.

- ✓ $E\big(g(X)\big) = \int_{-\propto}^{+\propto} g(x) \cdot f(x)dx,$ si X es v.a.c.

<u>Definición 7</u>: Llamaremos Varianza de la variable aleatoria X a V(X) o Var (X) que está definida por:

$$V(X) = E[(X - E(X))^2]$$

Observación: Se puede probar que $V(X) = E(X^2) - [E(X)]^2$

<u>Propiedades de $V(X)$</u>

Consideremos c constante:

- ✓ $V(c) = 0$
- ✓ $V(X + c) = V(X)$
- ✓ $V(X \cdot c) = c^2 \cdot V(X)$
- ✓ $V(X + Y) = V(X) + V(Y)$, si X e Y son independientes.

Ejemplo caso discreto

Un experimento consiste en lanzar al aire tres veces una moneda. Sea la variable aleatoria:
X ="número de caras que se obtienen".
Obtenga:
a) Distribución de probabilidad de X. Grafique.
b) Función de distribución acumulada (f.d.a.) de X. Representación gráfica.
c) Media, varianza y desviación estándar de X.
d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras.
e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras.

Desarrollo:

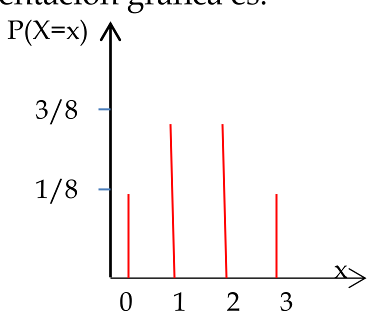
a) Espacio muestral: Ω = {(c,c,c),(c,c,s),(c,s,c),(s,c,c),(c,s,s),(s,c,s),(s,s,c),(s,s,s)}
El recorrido de X está dado por: $R_X: \{0, 1, 2, 3\}$

Luego, $P(X = 0) = \frac{1}{8}$ $P(X = 1) = \frac{3}{8}$ $P(X = 2) = \frac{3}{8}$ $P(X = 3) = \frac{1}{8}$

Así, la función de probabilidad está dada por:

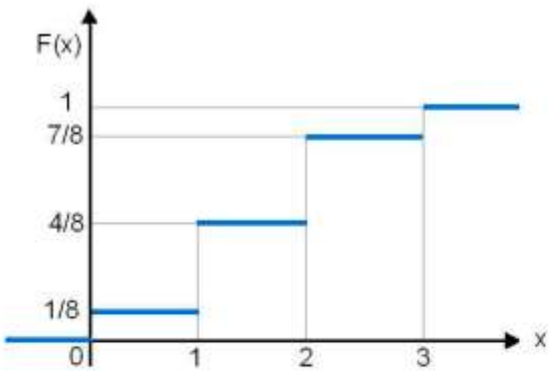
$X = x_i$	0	1	2	3
$P(X = x_i)$	1/8	3/8	3/8	1/8

Y su representación gráfica es:



b) La función de distribución: $F(x) = P(X \le x) = \sum_{x_i \le x} P(X = x_i) = \sum_{x_i \le x} p_i$

$x < 0$	$F(x) = P(X \le x) = P(\phi) = 0$
$0 \le x < 1$	$F(x) = P(X \le x) = P(X = 0) = 1/8$
$1 \le x < 2$	$F(x) = P(X \le x) = P(X < 2) = P(X = 0) + P(X = 1) = 1/8 + 3/8 = 4/8$
$2 \le x < 3$	$F(x) = P(X \le x) = P(X < 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 1/8 + 3/8 + 3/8 = 7/8$
$x = 3$	$F(x) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$
$x > 3$	$F(x) = P(X \le x) = P(\Omega) = 1$



$$F(x) = \begin{cases} 0 & x < 0 \\ 1/8 & 0 \le x < 1 \\ 4/8 & 1 \le x < 2 \\ 7/8 & 2 \le x < 3 \\ 1 & x \ge 3 \end{cases}$$

$$F(0) = P(X \le 0) = P(X = 0) = 1/8$$
$$F(1) = P(X \le 1) = P(X = 0) + P(X = 1) = \frac{4}{8}$$
$$F(2) = P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = 7/8$$

$$F(3) = P(X \le 3) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) + P(X = 3) = 1$$

$$V(X) = E(X^2) - (E(X))^2$$

$$E(X^2) = \sum_{i=1}^{n} x^2 * P(X = x) = 0^2 * \frac{1}{8} + 1^2 * \frac{3}{8} + 2^2 * \frac{3}{8} + 3^2 * \frac{1}{8} = \frac{24}{8} = 3$$

Luego

$$V(X) = 3 - (1{,}5)^2 = 0{,}75$$

c) Media, varianza y desviación típica de X

Media: $\alpha_1 = \mu_X = E(X) = \sum_{i=1}^{4} x_i . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i . p_i = \frac{12}{8} = 1{,}5$

$$\alpha_2 = E(X^2) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . P(X = x_i) = \sum_{i=1}^{4} x_i^2 . p_i = \frac{24}{8} = 3$$

Varianza: $\sigma_x^2 = E\left(X - \mu_X\right)^2 = \sum_{i=1}^{4} \left(x_i - \mu_x\right)^2 . P(X = x_i) = \alpha_2 - \alpha_1^2$

$$\sigma_x^2 = \alpha_2 - \alpha_1^2 = 3 - 1{,}5^2 = 0{,}75$$

Desviación típica: $\sigma_x = \sqrt{0{,}75} = 0{,}87$

d) Probabilidad de que salgan a lo sumo dos caras

$$P(X \le 2) = P(X = 0) + P(X = 1) + P(X = 2) = \frac{1}{8} + \frac{3}{8} + \frac{3}{8} = \frac{7}{8}$$

o bien $P(X \le 2) = F(2) = \frac{7}{8}$

e) Probabilidad de que salgan al menos dos caras

$$P(X \ge 2) = P(X = 2) + P(X = 3) = \frac{3}{8} + \frac{1}{8} = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$$

o bien $P(X \ge 2) = F(1) = \frac{4}{8} = \frac{1}{2}$

Ejemplo caso continuo

Considere la siguiente v.a. X con función de densidad de probabilidad dada por:

$$f(x) = \frac{4}{3}(1 - x^3), \quad 0 \le x \le 1$$

a) Verifique que la función $f(x)$ es f.d.p.
b) Obtenga $E(X)$.
c) Obtenga la función de distribución acumulada.

d) Calcule $P\left(X > \frac{3}{4}\right), P\left(X \leq \frac{1}{2}\right), P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$
e) Calcule $E(2X+3) y\, V(2X+3)$

Desarrollo:

a) $\int_0^1 \frac{4}{3}(1-x^3)dx = 1.$ Luego, f(x) es f.d.p.

b) $E(X) = \int_{R_x} x * f(x)dx = \int_0^1 x * \frac{4}{3}(1-x^3) = \int_0^1 \frac{4}{3}(x - x^4)dx = \frac{4}{3}\left[\frac{x^2}{2} - \frac{x^5}{5}\right] = \frac{4}{3}\left[\left(\frac{1}{2} - \frac{1}{5}\right) - (0)\right] = \frac{2}{5}$

c) $F(x) \coloneqq P(X \leq x) = \int_{-\propto}^{x} f(u)du$, Si U es una v.a. continua.

Recordemos que $f(x)$ está dada por:

$$f(x) = \frac{4}{3}(1-x^3), \quad 0 \leq x \leq 1$$

$$0, \quad e.o.c.$$

<u>Caso 1</u>: $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\propto}^{x} f(u)du = 0$$

<u>Caso 2</u>: $0 \leq x < 1$

$$F(x) = \int_{-\propto}^{0} 0\, du + \int_0^x \frac{4}{3}(1-u^3)du$$

$$F(x) = \frac{4}{3}\left(x - \frac{x^4}{4}\right)$$

Caso 3: $x \geq 1;\ 1 \leq x < \propto$

$$F(x) = \int_{-\propto}^{0} 0\, du + \int_{0}^{1} \frac{4}{3}(1-u^3)du + \int_{1}^{x} 0\, du = 1$$

Luego $F(x)$ está dada por:

$$F(x) = \begin{cases} 0, & x < 0 \\ \frac{4}{3}\left(x - \frac{x^4}{4}\right), & 0 \leq x < 1 \\ 1, & x \geq 1 \end{cases}$$

d)Calcule $P\left(X > \frac{3}{4}\right), P\left(X \leq \frac{1}{2}\right), P(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4})$

Esto se puede hacer de 2 maneras: utilizando la función de densidad de probabilidad, $f(x)$ y utilizando la función de distribución acumulada, $F(x)$.

Primera forma:

$$P\left(X > \frac{3}{4}\right) = \int_{3/4}^{1} \frac{4}{3}(1-x^3)dx = 0{,}11$$

O bien utilizando propiedades de la $F(x)$

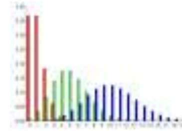
$$P\left(X > \frac{3}{4}\right) = 1 - F\left(\frac{3}{4}\right) = 1 - \frac{4}{3}\left((3/4) - \frac{(3/4)^4}{4}\right) = 0{,}11$$

Luego,

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = \int_{0}^{1/2} \frac{4}{3}(1-x^3)dx =$$

O bien utilizando propiedades de la $F(x)$

$$P\left(X \leq \frac{1}{2}\right) = F\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{4}{3}\left((1/2) - \frac{(1/2)^4}{4}\right) =$$



Finalmente,

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = \int_{1/4}^{3/4} \frac{4}{3}(1 - x^3)dx =$$

O bien utilizando propiedades de la $F(x)$

$$P\left(\frac{1}{4} \leq X \leq \frac{3}{4}\right) = F\left(\frac{3}{4}\right) - F\left(\frac{1}{4}\right) = \frac{4}{3}\left((3/4) - \frac{(3/4)^4}{4}\right) - \frac{4}{3}\left((1/4) - \frac{(1/4)^4}{4}\right)$$

e)Calcule E(2X+3)y V(2X+3)

$$E(2X + 3) = \int_0^1 (2x + 3) \cdot \frac{4}{3}(1 - x^3)dx = \ldots$$

O bien utilizando propiedades de la Esperanza

$$E(2X + 3) = E(2X) + E(3) = 2E(X) + 3 = 2 \cdot \frac{2}{5} + 3 = 3{,}8$$

En el caso de $V(2X + 3)$, también se utilizan propiedades de la varianza.

$$V(2X + 3) = V(2X) = 2^2 \cdot V(X) = 4V(X)$$

Donde $V(X) = E(X^2) - \left(E(X)\right)^2 =$

$$E(X^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{4}{3}(1 - x^3)dx = \int_0^1 \frac{4}{3}(x^2 - x^5)dx = \frac{2}{9}$$

Luego,

$V(X) = \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{14}{225}$ y $V(2X + 3) = 4V(X) = 4 \cdot \frac{14}{225} = \frac{56}{225}$