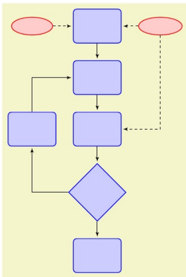


# 2 Espacios Vectoriales

## 2.1 Espacios Vectoriales

**Definición 2.1.**

Sea $V$ un conjunto sobre el cual se definen dos operaciones binarias, una interna y la otra externa llamadas **Suma de Vectores** y **Producto por Escalar**.

$$\begin{array}{rccl} +: & V \times V & \longrightarrow & V \\ & (v_1, v_2) & \longrightarrow & +(v_1, v_2) = v_1 + v_2 \\ \bullet: & \mathbb{K} \times V & \longrightarrow & V \\ & (\alpha, v) & \longrightarrow & \cdot(\alpha, v) = \alpha \cdot v \end{array}$$

Diremos que $V$ es un **espacio vectorial** sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ $(\mathbb{R}, \mathbb{C})$, con las operaciones de **suma** y **producto** por escalar recien definidos si se verifican los siguientes axiomas:

$V_1:$ $(v_1 + v_2) + v_3 = v_1 + (v_2 + v_3) \quad \forall v_1, v_2, v_3 \in V.$

$V_2:$ $v_1 + v_2 = v_2 + v_1 \quad \forall v_1, v_2 \in V.$

$V_3:$ Existe el elemento neutro para la suma, es decir,

$\exists \theta_V \in V$ tal que $v + \theta_V = \theta_V + v = v \quad \forall v \in V.$

$V_4:$ $\forall v \in V$ existe $-v \in V$ tal que: $v + (-v) = (-v) + v = \theta_V$

$-v$ se llama el aditivo inverso de $v$.

$V_5:$ $\alpha(v_1 + v_2) = \alpha v_1 + \alpha v_2 \quad \forall \alpha \in \mathbb{K}, \forall v_1, v_2 \in V.$

$V_6:$ $(\alpha + \beta)v = \alpha v + \beta v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V.$

$V_7:$ $\alpha(\beta v) = (\alpha\beta)v \quad \forall \alpha, \beta \in \mathbb{K}, \forall v \in V.$

$V_8:$ $1 \cdot v = v \quad \forall v \in V.$

**Observación 2.1.**

Los elementos de $\mathbb{K}$ se llaman **escalares** y los elementos de $V$ se llaman **vectores**.

**Observación 2.2.**

Por $[V_3]$ $V$ es no vacío. El **vector nulo siempre está presente** en un Espacio Vectorial.

**Observación 2.3.**

Si $V$ es un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{R}$ se dice que $V$ es un espacio vectorial real.

Ejemplos:

1. $\mathbb{R}$ con las operaciones usuales de suma y multiplicación es un espacio vectorial real.
2. En general si $\mathbb{K}$ es un cuerpo, entonces $\mathbb{K}$ es un espacio vectorial sobre si mismo.
3. $\mathbb{R}^2 = \{(x,y) : x, y \in \mathbb{R}\}$, con las operaciones suma y producto por escalar definidas por:

$$(x,y),(u,v) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) + (u,v) = (x+u, y+v)$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, (x,y) \in \mathbb{R}^2; \alpha(x,y) = (\alpha x, \alpha y)$$

   $\mathbb{R}^2$ con las operaciones recién definidas, es un espacio vectorial real.

4. $\mathbb{R}^n = \{(x_1, x_2, \dots, x_n) : x_1, x_2, \dots, x_n \in \mathbb{R}\}$, con las operaciones suma y producto por escalar definidas por:

$$\vec{x} = (x_1, x_2, \dots, x_n), \vec{y} = (y_1, y_2, \dots, y_n) \in \mathbb{R}^n; \vec{x} + \vec{y} = (x_1 + y_1, x_2 + y_2, \cdots, x_n + y_n)$$

$$\alpha \in \mathbb{R}, (x_1, x_2, \dots, x_n) \in \mathbb{R}^n; \alpha\vec{x} = (\alpha x_1, \alpha x_2, \cdots, \alpha x_n)$$

   $\mathbb{R}^n$ con las operaciones antes definidas, es un espacio vectorial real.

5. $\mathcal{M}_{m\times n}(\mathbb{R})$ con las operaciones normales de suma de matrices y producto de un escalar por una matriz, es un espacio vectorial real.

**Observación 2.4.**

Si $V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, entonces el elemento neutro $\theta_V$ es único.

## 2.2 Subespacio Vectorial

**Definición 2.2.**

Sea $V$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$ y sea $W$ un subconjunto de $V$. Diremos que $W$ es un **Subespacio Vectorial** de $V$ si $W$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ con las mismas operaciones definidas en $V$.

**Observación 2.5.**

Todo espacio vectorial es un **subespacio vectorial** de si mismo.

**Teorema 2.1.**

Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sea $W$ un subconjunto de $V$. $W$ es un subespacio de $V$ si:

1. $W \neq \emptyset$.
2. $\forall w_1, w_2 \in W : w_1 + w_2 \in W$ (debe ser cerrado respecto a la suma).
3. $\forall w \in W, \forall \alpha \in \mathbb{K} : \alpha w \in W$ (debe ser cerrado respecto al producto por escalar).

### 2.2.1. Ejemplos de Subespacios

**Ejemplo 2.1.**

Sea $W = \left\{ \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R}) : c = -b \right\} \subseteq \mathcal{M}_{2\times 2}(\mathbb{R})$.
Pruebe que $W$ es un subespacio vectorial. (**Notación:** $W \leq \mathcal{M}_{2\times 2}$).

Solución:

i) $W \neq \emptyset$, pues $\begin{pmatrix} 0 & 0 \\ 0 & 0 \end{pmatrix} \in W (0 = -0)$

ii) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix}; B = \begin{pmatrix} x & y \\ z & w \end{pmatrix} \in W \Rightarrow \begin{cases} A = \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix} \\ B = \begin{pmatrix} x & y \\ -y & w \end{pmatrix} \end{cases}$ entonces:

$$\begin{aligned} A + B &= \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} x & y \\ -y & w \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} a + x & b + y \\ -b - y & d + w \end{pmatrix} \in W \quad \text{pues } -b - y = -(b + y) \end{aligned}$$

iii) Sean $A = \begin{pmatrix} a & b \\ c & d \end{pmatrix} \in W$ , $\alpha \in \mathbb{R}$

$$\begin{aligned} \alpha \cdot A &= \alpha \begin{pmatrix} a & b \\ -b & d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ \alpha(-b) & \alpha d \end{pmatrix} \\ &= \begin{pmatrix} \alpha a & \alpha b \\ -\alpha b & \alpha d \end{pmatrix} \in W \quad \text{pues } -\alpha b = -(\alpha b) \end{aligned}$$

Luego, $W$ es subespacio de $\mathcal{M}_2(\mathbb{R})$

**Observación 2.6.**

Notemos que una buena estrategia para verificar que el conjunto debe ser no vacio, y por otro lado que todo espacio vectorial (subespacio) debe contener al vector nulo (obs-2.2), usaremos el vector nulo para verificar que se cumple la primera condición.

**Ejemplo 2.2.**

Pruebe que el siguiente subconjunto de $\mathbb{R}^3$ es un subespacio:
$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 2z\}$.

Solución:

i) $T \neq \emptyset$, pues $0 - 0 = 2(0)$, es decir, $(0, 0, 0) \in T$

ii) Sean $(x, y, z), (a, b, c) \in T \Rightarrow \begin{cases} x - y = 2z \\ a - b = 2c \end{cases} (*)$

entonces, $(x,y,z)+(a,b,c)=(x+a,y+b,z+c)$

$$\begin{aligned}(x+a)-(y+b) &= x+a-y-b\\ &= (x-y)+(a-b)\\ &\overset{*}{=} 2z+2c\\ &= 2(z+c)\end{aligned}$$

Luego, $(x+a,y+b,z+c)\in T$

iii) Sean $\alpha\in\mathbb{R}, (x,y,z)\in T \Rightarrow x-y=2z(*)$ ,
entonces, $\alpha\cdot(x,y,z)=(\alpha x,\alpha y,\alpha z)$

$$\begin{aligned}(\alpha x)-(\alpha y) &= \alpha(x-y)\\ &\overset{*}{=} \alpha(2z)\\ &= 2(\alpha z)\end{aligned}$$

Luego, $(\alpha x,\alpha y,\alpha z)\in T$

Así, $T$ es subespacio de $\mathbb{R}^3$

EJERCICIO : Pruebe que los siguientes subconjuntos de $\mathbb{R}^3$ son subespacios:

1. $S=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x=y\}$.
2. $T=\{(x,y,z)\in\mathbb{R}^3 : x+y-z=0\}$.

**Observación 2.7.**

Sean $S$ y $T$ dos subespacios de un espacio vectorial $V$ sobre $\mathbb{K}$, entonces, se definen los conjuntos $S\cap T$ y $S+T$ como:

$$S\cap T=\{v\in V/v\in S\wedge v\in T\}$$

$$S+T=\{v\in V/v=s+t, s\in S\wedge t\in T\}$$

EJERCICIO : Sean $S$ y $T$ dos subespacios de un espacio vectorial $V$ sobre $\mathbb{K}$, entonces,
$S\cap T$, es un subespacio de $V$, llamado **espación intersección** de $S$ y $T$.
$S+T$ es un subespacio de $V$ llamado **espacio suma** de $S$ y $T$.
Solución: Veamos que $S\cap T$ es un subespacio.

i) $S\cap T\neq\varnothing$, pues como $S$ y $T$ son subespacios de $V$; $\theta_V\in S$ y $\theta_V\in T$ por lo que se encuentra en ambos, es decir, $\theta_V\in S\cap T$.

ii) Sean $v_1, v_2 \in S \cap T \Rightarrow \begin{cases} v_1, v_2 \in S \Rightarrow v_1 + v_2 \in S & \text{pues } S \text{ es subespacio} \\ v_1, v_2 \in T \Rightarrow v_1 + v_2 \in T & \text{pues } T \text{ es subespacio} \end{cases}$

Luego, $v_1 + v_2 \in S \cap T$

iii) Sean $\alpha \in \mathbb{R}, v \in S \cap T \Rightarrow \begin{cases} \alpha v \in S & \text{pues } S \text{ es subespacio} \\ \alpha v \in T & \text{pues } T \text{ es subespacio} \end{cases}$

Luego, $\alpha v \in S \cap T$

Con esto $S \cap T$ es un subespacio de $V$.

EJERCICIO : Caracterizar los subespacios $S \cap T$ y $S + T$, donde $S$ y $T$ son los conjuntos definidos antes, ejercicio(2.1).

**Observación 2.8.**

Si $S \cap T$ contiene solamente el elemento $\theta_V$ de $V$, entonces, se dice que $S \cap T$ es un **subespacio trivial de** $V$. En general, si $V$ es un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$, el conjunto $\{\theta_V\}$ es un subespacio de $V$ llamado **subespacio trivial de** $V$

**Definición 2.3.**

Se dice que el espacio $V$ es **Suma Directa** de los subespacios $S$ y $T$ de $V$ si:

1. $V = S + T$.
2. $S \cap T = \{\theta_V\}$.

NOTACIÓN : $V \oplus T$.

**Definición 2.4.**

Si $S \oplus T = V$, entonces cada vector de $V$ se escribe en forma única como suma de un elemento de $S$ con un elemento de $T$.

EJERCICIO : Dados los subespacios $U$ y $W$ de $\mathbb{R}^2$, averiguar si $\mathbb{R}^2 = U \oplus W$, donde:
$U = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x + y = 0\}$ ; $W = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : x = 3y\}$

### 2.2.2. Dependencia e Independencia Lineal

**Definición 2.5.**

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$.
Un vector $v$ se dice que es combinación lineal (**c.l.**) de un conjunto de vectores $\{v_1, v_2, v_3, \cdots, c_n\}$ si existen $\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n \in \mathbb{K}$ de modo que $v$ se puede expresar como:

$$v = \sum_{i=1}^{n} \alpha_i \cdot v_i = \alpha_1 \cdot v_1 + \alpha_2 \cdot v_2 + \cdots + \alpha_n \cdot v_n$$

**Definición 2.6.**

Sea $V$ un espacio vectorial sobre un cuerpo $\mathbb{K}$ y sean $v_1, v_2, \ldots, v_n$ elementos de $V$. Diremos que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son **linealmente dependientes** en $\mathbb{K}$ si existen escalares $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n$ en $\mathbb{K}$ **no todos nulos** tales que:

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \theta_V \tag{2.1}$$

Si no existen tales escalares, se dirá que los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$ son **linealmente independientes** en $\mathbb{K}$, es decir,

$$\alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n = \theta_V \Rightarrow \alpha_1 = \alpha_2 = \cdots = \alpha_n = 0 \tag{2.2}$$

**Observaciones 2.9.**

1. Todo vector no nulo es l.i.: $(x \neq \theta \quad \alpha x = \theta \Rightarrow \alpha = 0)$.
2. Si $S$ es un subconjunto del espacio vectorial $V$ y $\theta_V \in S$, entonces $S$ es l.d.

$$S = \{s_1, s_2, \ldots, s_n, \theta_V\}$$

3. Todo subconjunto de un conjunto l.i. es también **l.i.**.
4. Todo conjunto que contenga a un subconjunto **l.d.** es también **l.d.**.
5. Un conjunto $\{v_1, v_2, \ldots, v_n\}$ es **l.d.** sii uno de los vectores del conjunto se puede escribir como combinación lineal (c.l.) de los restantes, es decir, si existe $j \in \{1, 2, \ldots, n\}$ tal que:

$$v_j = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_{j-1} v_{j-1} + \alpha_{j+1} v_{j+1} + \cdots + \alpha_n v_n$$

**Ejemplo 2.3.**

Averiguar si el siguiente conjunto es l.i. o l.d.

$$\{(1,3,-2),(2,1,0),(3,4,-2)\}$$

Solución: Dados $\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$, se tiene que:

$\alpha(1,3,-2)+\beta(2,1,0)+\gamma(3,4,-2)=(0,0,0)$

$\Rightarrow (\alpha+2\beta+3\gamma, 3\alpha+\beta+4\gamma, -2\alpha-2\gamma)=(0,0,0)$

$$\Rightarrow \begin{cases} \alpha+2\beta+3\gamma &= 0 \\ 3\alpha+\beta+4\gamma &= 0 \\ -2\alpha-2\gamma &= 0 \end{cases} \Rightarrow \begin{vmatrix} 1 & 2 & 3 \\ 3 & 1 & 4 \\ -2 & 0 & -2 \end{vmatrix} = 0 \Rightarrow \left( \begin{array}{l} \text{conjunto l.d.} \\ \text{sistema homogeneo,} \\ \text{infinitas soluciones} \end{array} \right)$$

**Notemos que**, si usamos la observación-(2.9-5) dada anteriormente; se tiene:
Como $(3,4,-2)=(1,3,-2)+(2,1,0)$, el conjunto es **l.d.**

EJERCICIO : Averiguar si los siguientes conjuntos son l.i. o l.d.

1. $\{(2,5),(-1,3)\}$

2. $\{2,-4),(4,-3),(1,0)\}$

**Observación 2.10.**

En $\mathbb{R}^n$: Todo conjunto que tenga más de $n$ elementos es l.d.

### 2.2.3. Bases y Dimensión de un Espacio Vectorial

**Definición 2.7.**

Sea $V$ un espacio vectorial sobre el cuerpo $\mathbb{K}$. Diremos que el conjunto $B = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\} \subseteq V$ es una base del espacio vectorial $V$ si:

1. $B$ es l.i.

2. $B$ genera al espacio vectorial $V$, es decir, que todo elemento $v$ de $V$ es una combinación lineal de los vectores de $B$. Osea:

$$v = \alpha_1 v_1 + \alpha_2 v_2 + \cdots + \alpha_n v_n, \quad \forall v \in V$$

**Observación 2.11.**

Para indicar que $B$ genera al espacio vectorial $V$, o que todas las combinaciones lineales de los elementos de $B$ producen el espacio vectorial $V$ se denota por:

$$V = \langle B \rangle$$

**Ejemplo 2.4.**

Sea en $\mathbb{R}^2$, el conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es una base de $\mathbb{R}^2$.

Solución: En efecto:

1. El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ es l.i.

$$\alpha(1,0) + \beta(0,1) = (0,0) \Rightarrow \begin{array}{ccccc|} \alpha & + & 0 & = & 0 \\ 0 & + & \beta & = & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}$$

2. El conjunto $\{(1,0),(0,1)\}$ genera a $\mathbb{R}^2$, ya que: $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2$:

   $(x,y) = \alpha(1,0) + \beta(0,1) \iff (x,y) = (\alpha,\beta)$

   Luego, el sistema tiene solución y es: $\alpha = x, \beta = y$, así todo par ordenado de $\mathbb{R}^2$ se escribe como c.l. del conjunto por:

$$(x,y) = x(1,0) + y(0,1)$$

   Así, $\langle\{(1,0),(0,1)\}\rangle = \mathbb{R}^2$

**Ejemplo 2.5.**

Otra base de $\mathbb{R}^2$ es $B = \{(1,1),(1,2)\}$

Solución: En efecto:

1. El conjunto $B$ es l.i. pues:

$$\alpha(1,1) + \beta(1,2) = (0,0) \Rightarrow \begin{array}{ccccc|} \alpha & + & \beta & = & 0 \\ \alpha & + & 2\beta & = & 0 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha = 0 \\ \beta = 0 \end{array}$$

2. $\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = \alpha(1,1) + \beta(1,2)$, entonces

$$\left.\begin{array}{ccccc} \alpha & + & \beta & = & x \\ \alpha & + & 2\beta & = & y \end{array}\right| \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = 2x - y \\ \beta = y - x \end{array}$$

Luego,$\forall (x,y) \in \mathbb{R}^2 : (x,y) = (2x-y)(1,1) + (y-x)(1,2)$,
Por ejemplo $(4,5) = 3(1,1) + 1(1,2)$

Así, $\langle\{(1,1),(1,2)\}\rangle = \mathbb{R}^2$

**Definición 2.8.**

Dado un espacio vectorial $V$ sobre el cuerpo $\mathbb{K}$

1. Si $V$ tiene base finita, diremos dimensión al número de elementos de dicha base.
2. Si $V$ tiene base no finita, diremos que es de dimensión infinita.

NOTACIÓN : $\dim(V)$

**Observación 2.12.**

Al conjunto base $B = \{(1,0),(0,1)\}$ se le llama **base canónica** de $\mathbb{R}^2$.

**Observación 2.13.**

En general para los distintos espacios vectoriales con los que normalmente trabajamos, tenemos sus respectivas **bases canónicas**.

1. $\mathbb{R}^3$ : su base canónica es: $\{(1,0,0),(0,1,0),(0,0,1)\}$
2. $\mathbb{R}^n$ : su base canónica es: $\{(1,0,0,\cdots,0),(0,1,0,\cdots,0),\ldots,(0,0,\cdots,0,1)\}$
3. $\mathcal{M}_{2\times 2}$ : su base canónica es: $\left\{\begin{pmatrix}1&0\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&1\\0&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\1&0\end{pmatrix},\begin{pmatrix}0&0\\0&1\end{pmatrix}\right\}$
4. $P_2[x]$ : su base canónica es: $\{1,x,x^2\}$
5. $P_n[x]$ : su base canónica es: $\{1,x,x^2,\ldots,x^{n-1},x^n\}$

**Observación 2.14.**

En general, por lo anterior se tiene que:

1. $\dim(\mathbb{R}^n) = n$.
2. $\dim(\mathcal{M}_{n\times m}) = n \times m$.
3. $\dim(P_n[x]) = n + 1$.

**Ejemplo 2.6.**

Obtener una base para el siguiente conjunto:

$$S = \{(x, y) \in \mathbb{R}^2 : 2x = y\}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} S &= \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 : y = 2x\} \\ &= \{(x, 2x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,2), x \in \mathbb{R}\} \qquad (\text{ el conjunto de todas las c.l. de } (1,2)) \\ &= \langle\{(1,2)\}\rangle \qquad (\text{genera a } S) \end{aligned}$$

Además es un conjunto l.i., luego es una base para $S$, con esto se tiene que $\dim(S) = 1$.

**Ejemplo 2.7.**

Obtener una base para el siguiente conjunto:

$$T = \{(x, y, z) \in \mathbb{R}^3 : 2x = y, y = x - z\}.$$

Solución:

$$\begin{aligned} T &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\,,\ z = x - y\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\,,\ z = x - 2x\} \\ &= \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : y = 2x\,,\ z = -x\} \\ &= \{(x, 2x, -x), x \in \mathbb{R}\} \\ &= \{x(1,2,-1), x \in \mathbb{R}\} \qquad (\text{ el conjunto de todas las c.l. de } (1,2,-1)) \\ &= \langle\{(1,2,-1)\}\rangle \qquad (\text{genera a } T) \end{aligned}$$

Además es un conjunto l.i., luego es una base para $T$, con esto se tiene que $\dim(T) = 1$.

**Teorema 2.2** (Teorema Fundamental de la independencia lineal)**.**

Dado un espacio vectorial $V$ y un subespacio vectorial $W$ de $V$ ($W \leqslant V$), entonces:

$$\dim(W) \leq \dim(V)$$

**Observación 2.15.**

Sea $V$ un espacio vectorial sobre $\mathbb{K}$ y sean $S$ y $T$ dos subespacios de $V$. Si $B_1$ genera a $S$ y $B_2$ genera a $T$, entonces: $B_1 \cup B_2$ **genera** a $S + T$.

**Teorema 2.3** (Fórmula de Grassmann)**.**

Dado dos subespacios vectoriales $W, U \subset E$, de dimensión finita, entonces:

$$\dim(W + U) = \dim(W) + \dim(U) - \dim(W \cap U).$$

**Observación 2.16.**

Sea $V$ un e. v. sobre $\mathbb{K}$ y $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $V$. Entonces, cada vector $v \in V$ se escribe en forma única como c.l. de los vectores $v_1, v_2, \ldots, v_n$.

**Teorema 2.4.**

Sea $V$ un espacio vectorial de dimensión finita, y $W$ un subespacio vectorial de $V$. Sea $S = \{w_1, w_2, \cdots, w_p\}$ un subconjunto de vectores de $W$, entonces se verifica que:

1. Si $S$ es un un conjunto generador de $W$, entonces $p \geq \dim(W)$.
2. Si $S$ es un sistema **l.i.**, entonces $p \leq \dim(W)$.
3. Si $S$ es generador de $W$ y $\dim(W) = p$, entonces $S$ es base de $W$.
4. Si $S$ es un conjunto **l.i.** y $\dim(W) = p$, entonces $S$ es base de $W$.

**Observación 2.17.**

Por tanto, la dimensión de un subespacio vectorial $W$ es el número máximo de vectores de $W$ linealmente independientes.

**Observación 2.18.**

Si $V$ es un esp. vect. de dimensión $n$, y $B$ es un conjunto l.i. que consta de $n$ vectores, entonces $B$ es una base de $V$.

### 2.2.4. Caracterización de un espacio vectorial

Muchas veces conocemos un conjunto generador o una base de un espacio vectorial, sin embargo, aveces necesitamos la definición o caracterización del espacio.

**Ejemplo 2.8.**

Encuentre la ecuación explicita que define al subespacio vectorial generado por el conjunto $B = \{(1,2,0),(1,-1,3)\}$

Solución: Sea $W \subseteq \mathbb{R}^3$ el espacio generado por $B$, es decir, $W = \langle B \rangle$, entonces:

$$\forall (x,y,z) \in W \Rightarrow (x,y,z) = \alpha(1,2,0) + \beta(1,-1,3), \text{ para algún } \alpha, \beta \in \mathbb{R}$$

Esto es,

$$\begin{array}{ccccc|} \alpha & + & \beta & = & x \\ 2\alpha & - & \beta & = & y \\ & & 3\beta & = & z \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 2 & -1 & y \\ 0 & 3 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & -3 & z \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 1 & x \\ 0 & -3 & y-2x \\ 0 & 0 & z-y+2x \end{pmatrix}$$

Luego, como queremos $\alpha$ y $\beta$ que permiten escribir elementos de $W$, se necesita que el sistema tenga solución, es decir, el rango de la matriz de coeficientes sea igual al rango de la matriz ampliada; lo que se cumple cuando $z - y + 2x = 0$.

Así, podemos describir a $W$ como:

$$W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 / z - y + 2x = 0\}$$

### 2.2.5. Coordenadas de un vector respecto a una base $B$

**Definición 2.9.**

Sea $V$ un e.v. sobre $\mathbb{K}$, y sea $B = \{v_1, \ldots, v_n\}$ una base de $V$. Se llama **coordenadas del vector** $v \in V$ respecto a los escalares que intervienen en la c.l.

$$v = \alpha_1 v_1 + \cdots + \alpha_n v_n$$

y su notación es:

$$[v]_B = (\alpha_1, \alpha_2, \cdots, \alpha_n)$$

EJERCICIO : En el ejemplo(2.5), se mostro que $B = \{(1,1),(1,2)\}$ es base para $\mathbb{R}^2$, las coordenadas del vector $(4,5)$ respecto de esta base será:

$$[(4,5)]_B = (3,1) \qquad , \text{ pues } (4,5) = \mathbf{3}(1,1) + \mathbf{1}(1,2)$$

### 2.2.6. Matriz Cambio de base

Veamos esto del cambio de base con un ejemplo en $\mathbb{R}^2$.

Sean $B_1 = \{(1,2),(2,3)\}$ y $B_2 = \{(1,0),(1,1)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$.

Como $B_1$ y $B_2$ son bases, el vector $(-2,3)$ se puede escribir como combinación lineal (c.l.), tanto de la base $B_1$ como de la base $B_2$.

En efecto:

1. Para $B_1$:

$$\alpha_1(1,2) + \beta_1(2,3) = (-2,3) \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} \alpha_1 & + & 2\beta_1 & = & -2 \\ 2\alpha & + & 3\beta_1 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 2 & 3 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 2 & -2 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & 12 \\ 0 & -1 & 7 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_1 = 12 \\ \beta_1 = -7 \end{array}$$

Luego, $(-2,3) = (12)(1,2) + (-7)(2,3)$

Así, $[(-2,3)]_{B_1} = (12,-7)$ (coordenadas de $(-2,3)$ en la base $B_1$)

2. Para $B_2$:

De igual forma $(-2,3)$ se puede escribir como c.l. de $B_2$, es decir,

$$\alpha_2(1,0) + \beta_2(1,1) = (-2,3) \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} \alpha_2 & + & \beta_2 & = & -2 \\ & + & \beta_2 & = & 3 \end{array}$$

$$\begin{pmatrix} 1 & 1 & -2 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \sim \begin{pmatrix} 1 & 0 & -5 \\ 0 & 1 & 3 \end{pmatrix} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha_2 = -5 \\ \beta_2 = 3 \end{array}$$

Luego, $(-2,3) = (-5)(1,2) + (3)(2,3)$

Así, $[(-2,3)]_{B_2} = (-5,3)$

La pregunta es: ¿Cómo podemos pasar de las coordenadas en la base $B_1$ a las coordenadas en la base $B_2$.

El método es simple. Como $B_2$ es base, entonces los elementos de la base $B_1$ se pueden escribir como c.l. de la base $B_2$ al igual que el vector $(-2,3)$. Esto es:

$$\alpha(1,0) + \beta(1,1) = (1,2) \Rightarrow \begin{array}{rcrcr} \alpha & + & \beta & = & 1 \\ & + & \beta & = & 2 \end{array} \Rightarrow \begin{array}{l} \alpha = -1 \\ \beta = 2 \end{array}$$

Es decir, $(1,2)=(-1)(1,0)+(2)(1,1)$
De igual forma,

$$\alpha(1,0)+\beta(1,1)=(2,3) \Rightarrow \begin{array}{cccc|} \alpha & + & \beta & = & 2 \\ & + & \beta & = & 3 \\ \hline \end{array} \Rightarrow \begin{array}{c} \alpha=-1 \\ \beta=3 \end{array}$$

Es decir, $(2,3)=(-1)(1,0)+(3)(1,1)$

Luego el vector $(-2,3)$ se puede escribir:

$$\begin{aligned} (-2,3) &= (12)(1,2)+(-7)(2,3), \quad \text{escrito en la base } B_1 \\ &= (12)\left[(-1)(1,0)+(2)(1,1)\right]+(-7)\left[(-1)(1,0)+(3)(1,1)\right], \ \text{escrito en la base } B_2 \end{aligned}$$

Ordenando estos productos, nos queda:

$$\begin{aligned} (-2,3) &= (12)(-1)(1,0)+(12)(2)(1,1)+(-7)(-1)(1,0)+(-7)(3)(1,1) \\ &= [(12)(-1)+(-7)(-1)](1,0)+[(12)(2)+(-7)(3)](1,1) \\ &= [(-1)(12)+(-1)(-7)](1,0)+[(2)(12)+(3)(-7)](1,1) \end{aligned}$$

Notemos que esto se puede ordenar y escribir como la multiplicación de una matriz por un vector escrito como columna, es decir,

$$\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}\begin{pmatrix} 12 \\ -7 \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} -5 \\ 3 \end{pmatrix}, \qquad \text{que son la coord. en } B_2$$

La matriz $\begin{pmatrix} -1 & -1 \\ 2 & 3 \end{pmatrix}$, se llama **matriz cambio de base**, de base $B_1$ a base $B_2$.
De esto, lo que tenemos es:

$$\begin{bmatrix} [(-2,3)]_{B_2} \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} [(1,2)]_{B_2} & [(2,3)]_{B_2} \end{bmatrix}\cdot\begin{bmatrix} [(-2,3)]_{B_1} \end{bmatrix}$$

En palabras, la matriz cambio de base, de $B_1$ a $B_2$ se **obtiene escribiendo como columnas** las coordenada de los elementos de la base $B_1$ repecto a la base $B_2$.

**Definición 2.10.**

Sean $B_1 = \{v_1, v_2, \ldots, v_n\}, B_2 = \{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ bases de un espacio vectorial $V$ de dimensión $n$, entonces la matriz cambio de base de $B_1$ a $B_2$ esta dada por:

$$\begin{bmatrix} [v_1]_{B_2} & [v_2]_{B_2} & \cdots & [v_n]_{B_2} \end{bmatrix}$$

y todo vector $v$ de $V$ escrito en la base $B_1$, se puede escribir en la base $B_2$, mediante:

$$\begin{bmatrix} [v]_{B_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} [v_1]_{B_2} & [v_2]_{B_2} & \cdots & [v_n]_{B_2} \end{bmatrix} \cdot \begin{bmatrix} [v]_{B_1} \end{bmatrix}$$

## 2.3 Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt

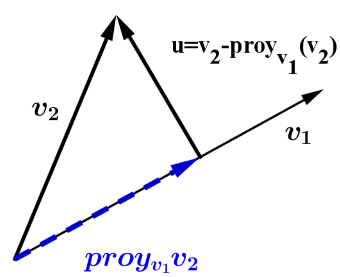
El proceso de ortogonalización de Gram-Schmidt es un algoritmo para construir, a partir de un conjunto de vectores linealmente independientes, otro conjunto ortonormal de vectores que genere el mismo subespacio vectorial.

El método se aplica en los siguientes pasos:

Dada una base $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ del espacio vectorial $V$ de dimensión $n$.

En primer lugar tenemos que: dados los vectores $v_1$ y $v_2$, como muestra la figura, se tiene que

$u = v_2 - proy_{v_1} v_2$ es perpendicular a $v_1$




además, si recordamos que:

$$proy_{v_1}(v_2) = \frac{v_1 \cdot v_2}{v_1 \cdot v_1} v_1$$

entonces el proceso consiste en hacer:

$$\begin{aligned} u_1 &= v_1 \\ u_2 &= v_2 - \frac{u_1 \cdot v_2}{u_1 \cdot u_1} u_1 \\ u_3 &= v_3 - \frac{u_1 \cdot v_3}{u_1 \cdot u_1} u_1 - \frac{u_2 \cdot v_3}{u_2 \cdot u_2} u_2 \end{aligned}$$

Generalizando se tiene que:

**Teorema 2.5** (Proceso de Ortogonalización de Gram-Schmidt)**.**

Dada una base $\{v_1, v_2, v_3, \ldots, v_n\}$ del espacio vectorial $V$ de dimensión $n$.
Se define:

$$u_k = v_k - \sum_{j=1}^{k-1} \frac{u_j \cdot v_k}{u_j \cdot u_j}\, u_j$$

con esto, se obtiene un nuevo conjunto $\{u_1, u_2, \ldots, u_n\}$ que constituye una base ortogonal para $V$.

**Observación 2.19.**

Para obtener una base ortonormal, basta dividir cada vector por su norma, es decir,

$$e_k = \frac{u_k}{\|u_k\|}$$

que nos entrega la base $\{e_1, e_2, \ldots, e_n\}$ que es **ortonormal**.

**Ejemplo 2.9.**

Sabiendo que el conjunto $B = \{(1,0,2), (0,1,1), (2,1,0)\}$ es base para $\mathbb{R}^3$, encuentre una base ortogonal mediante el método de Gram-Schmidt.

Solución: Sea

$$
\begin{aligned}
u_1 &= (1,0,2), \qquad \text{luego} \\
u_2 &= (0,1,1) - \frac{(1,0,2)(0,1,1)}{(1,0,2)(1,0,2)}(1,0,2) \\
&= (0,1,1) - \frac{2}{5}(1,0,2) = \left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right) \\
u_3 &= (2,1,0) - \frac{(1,0,2)(2,1,0)}{(1,0,2)(1,0,2)}(1,0,2) - \frac{\left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)(2,1,0)}{\left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)\left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right)}\left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right) \\
&= (2,1,0) - \frac{2}{5}(1,0,2) - \frac{1}{6}\left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right) \\
&= \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)
\end{aligned}
$$

Luego un base ortogonal será $\left\{(1,0,2), \left(-\frac{2}{5}, 1, \frac{1}{5}\right), \left(\frac{5}{3}, \frac{5}{6}, -\frac{5}{6}\right)\right\}$