Series de términos constantes y Series de potencias
Cálculo II

1. Muestre que las siguientes series divergen.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n\sqrt{n^2+1}}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+e^{-n}\right)$.

2. Calcule la suma de las siguientes series geométricas.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n 5^{-n}}{5}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \pi 4^{n-1}$.

   d) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2\cdot 3^n+2^{1-n}}{4^n}$.

3. Use el criterio de comparación para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2n}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\ln(n)}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-n}n}{n+1}$.

4. Utilice el criterio de paso al límite para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n\sqrt[n]{n}}$.

5. Utilice el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^5}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n\, n}{n!}$.

6. Utilice el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.

7. Pruebe que cada serie alternante converge.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{2}{3n+1}$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{1}{\ln(n+1)}$.

   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n}$.

8. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^4}{2^n}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{sen}(n)}{n\sqrt{n}}$. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$.

9. Con la ayuda de un graficador, respalde gráficamente que la serie de potencias converge a la función correspondiente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}x^{2n}$ converge a $f(x)=\dfrac{1}{1-x^2}$, si $|x|<1$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}(-1)^n x^{2n}$ converge a $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$, si $|x|<1$.

   Indicación: Trace las gráficas de $f(x)$ y $P_{10}(x)$ para $|x|<1$.

10. Determine el intervalo de convergencia de las series de potencias.

    a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^n}{n+1}$.

    b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2x^n}{2^n}$.

    c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{nx^n}{3^n}$.

    d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

    e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{(x-2)^n}{n}$.

    f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$.

    g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{\sqrt{n}}\frac{x^n}{3^n}$.

    h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$.

    i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$.

11. Para las siguientes series obtenga una representación en series de potencias.

    a) $f(x)=\dfrac{3}{2-5x}$.

    b) $f(x)=\dfrac{1}{1+x^2}$.

    c) $f(x)=\dfrac{x}{(1+x^2)^2}$.

    d) $f(x)=\dfrac{1}{(1-x)^3}$.

    e) $f(x)=\dfrac{e^x-1}{x}$.

    f) $f(x)=x^2e^{-x}$.

12. Sea $f(x)=\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{x^{2n}}{(n!)^2}$. Demuestre que: $x^2f''(x)+xf'(x)=4x^2f(x)$.

13. Determine la serie de Taylor de f alrededor del punto a.

    a) $f(x)=1+x^2+x^3,\quad a=1$.

    b) $f(x)=\cos(x),\quad a=\frac{\pi}{4}$.

    c) $f(x)=e^x,\quad a=-2$.

    d) $f(x)=\dfrac{1}{x+2},\quad a=0$.

    e) $f(x)=\operatorname{sen}(x),\quad a=\pi$.

    f) $f(x)=\dfrac{1}{x},\quad a=-1$.

1. Muestre que las siguientes series divergen.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n\sqrt{n^2+1}}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right)$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n n}{n+1}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \operatorname{sen}\left(\frac{\pi}{2}+e^{-n}\right)$.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^2+2n+1}{n\sqrt{n^2+1}}$

Teorema: Si $\sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ c.v $\Rightarrow \lim_{n\to+\infty} a_n = 0 \iff \lim_{n\to+\infty} a_n \neq 0 \Rightarrow \sum_{n=1}^{+\infty} a_n$ div.

$$\frac{1}{n} < \frac{n^2+2n+1}{n\cdot\sqrt{n^2+1}} < \frac{1}{\sqrt{n}}$$

$$\left| \frac{n^2+2n+1}{n\sqrt{n^2+1}} \right|$$

$$\frac{n^2+2n+1}{n\cdot(n^2+1)}$$

Por lo tanto como ① y ① son divergentes, la serie a_n lo es también

$$\frac{\cancel{n^2}+\cancel{2n}+1}{n^3+\cancel{n}} = \lim_{n\to+\infty} 2n+n+1 = 1 \neq 0$$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} n\cdot \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{n}\right)$

$n \operatorname{Sen}\left(\frac{1}{n}\right) \leq 1$, $\forall n \in \mathbb{N}$

$0 < n \operatorname{sen}\left(\frac{1}{n}\right) \leq \frac{1}{n} \leq 1$ → Divergente

Divergente por comparación. b_n

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(-1)^n\cdot n}{n+1}$

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{n}$ = Divergente

$\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}}$ = Divergente

Por criterio de la razón: $\dfrac{\cancel{(-1)^n}\cdot n}{n+\cancel{1}}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{n}{n+2} \longrightarrow \frac{n/n}{n/n+\cancel{2/n}} \longrightarrow \frac{1}{1} \longrightarrow 1$$

iii) Si $\displaystyle\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = 1$, no es posible concluir.

2. Calcule la suma de las siguientes series geométricas.

a) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^n 5^{-n}}{5}$.

b) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$. $\quad 2 \sum_{n=0}^{+\infty} = \frac{1}{3^n} \qquad r = \frac{1}{3} < 1 \qquad \frac{2}{1-\frac{1}{3}} = 3$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi 4^{n-1}$.

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 2^{1-n}}{4^n}$.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2^n 5^{-n}}{5}$

$a_1 = \frac{2^0 5^{-0}}{5} \qquad \frac{a_2 = n=2}{a_1 = n=1}$

$r = \frac{2}{5}$

$\text{Suma} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{1}{1-(2/5)} = \frac{5}{3}$

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{2}{3^n}$

$a_1 = \frac{2}{3^0} = 2$

$r = \frac{1}{3} = \frac{a_2}{a_1} \quad \frac{\frac{2}{3^1}}{\frac{2}{3^0}}$

$\text{Suma} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{2}{1-(1/3)} = \frac{3}{2}$

$a_1 = \frac{2}{3^1} = \frac{2}{3}$

$r = \frac{2}{3^2} \cdot \frac{3^1}{2} = \frac{6}{18} = \frac{1}{3}$

$\text{Suma} = \frac{\frac{2}{3}}{1-\frac{1}{3}} =$

c) $\sum_{n=0}^{+\infty} \pi 4^{n-1}$

$a_1 = \frac{\pi}{4}$

$r = 4$

$\text{Suma} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{\pi/4}{1-4} = \frac{\pi/4}{-3} = \frac{\frac{\pi}{4}}{\frac{-3}{1}} = \frac{-3\pi}{4}$

d) $\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 2^{1-n}}{4^n}$

$a_1 = \frac{2 \cdot 3^0 + 2^{1-0}}{4^0} = 4$

$r = 7/16$

$\text{Suma} = \frac{a_1}{1-r} = \frac{4}{1-(7/16)} = 64/9 = 7.\bar{1}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 3^n + 2^{1-n}}{4^n}$

$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2 \cdot 3^n}{4^n} + \sum_{n=0}^{+\infty} \frac{2^{1-n}}{4^n}$

$a_1 = \frac{2 \cdot 3^0}{4^0} = 2 \qquad b_1 = \frac{2^{1-0}}{4^0} = 2$

$r_1 = \frac{2 \cdot 3^1}{4^1} \cdot \frac{4^0}{2 \cdot 3^0} = \frac{3}{4} \qquad r_2 = \frac{2^{1-1}}{4^1} \cdot \frac{4^0}{2^{1-0}} = \frac{1}{8}$

$\text{Suma} = \frac{2}{1-\frac{3}{4}} + \frac{2}{1-\frac{1}{8}} = 10{,}6 \quad \frac{72}{7}$

3. Use el criterio de comparación para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

Serie Armonica

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{n}}{n^3+2n}$. b) $\displaystyle\sum_{n=2}^{+\infty} \frac{2}{\ln(n)}$. → SA c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^{-n}n}{n+1}$. → S.A

a) $\underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^3+2n}}_{a_n} \le \underbrace{\frac{\sqrt{n}}{n^3}}_{b_n}$

Sea $n = 4$

$\frac{2}{72} \le \frac{2}{64}$;

$128 \le 144$;

$\frac{\sqrt{n}}{n^3}$ → p - Serie ⇒ $p = \frac{5}{2}$ (→ 2.5) > 1 ⇒ Convergente.

$\frac{n^{1/2}}{n^3} = n^{1/2-3} \Rightarrow n^{-5/2} = \frac{1}{n^{5/2}}$

b) $\frac{2}{\ln(n)} \ge \frac{1}{n}$

$\frac{1}{n} \le \frac{2}{\ln(n)}$

Div

$\ln(n) \le 2n$ ✓ diverge

$0{,}69 \le 4$

c) $\frac{3^{-n} \cdot n}{n+1} < \frac{3^{-n} \cdot n}{n} = n(3^{-n} \cdot n) < n+1(3^{-n} \cdot n)$

$\frac{1}{3} < \frac{2}{3}$

$0{,}3$ $0{,}6$

4. Utilice el criterio de paso al límite para determinar la convergencia o divergencia de la serie.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$. *b*) $\sum_{n=2}^{+\infty} n\left(\frac{1}{3}\right)^n$. *c*) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n\sqrt[n]{n}}$.

a) $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\cancel{\frac{\sqrt{2n+1}}{n^2}}^{0}}{\frac{n^2}{n^2}} \quad \frac{0}{1} = 0$ dado que el limite es cero, el criterio del limite no es concluyente

b) $\lim_{n\to+\infty} n\cdot\left(\frac{1}{3}\right)^n$

$\lim_{n\to+\infty} 3^{-n}\cdot n = 0$ dado que el limite es cero, el criterio del limite no es concluyente

c) $\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\sqrt[n]{n}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{3}{2n\, n^{1/n}}$

$\lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3}{n}}{\frac{2n}{n}\cdot\frac{n^{1/n}}{n}}$ $\quad \frac{0}{0} = 0$

5. Utilice el criterio del cociente para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

$a)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^5}.$ $\qquad b)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)!}.$ $\qquad c)\ \displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n\, n}{n!}.$

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{5^n}{n^5}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| \Rightarrow \left| \frac{\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5}}{\frac{5^n}{n^5}} \right| \Rightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{5n^5}{(n+1)^5}$$

$$\frac{5^{n+1}}{(n+1)^5} \cdot \frac{n^5}{\cancel{5^n}}$$

$$\hookrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{5n^5}{\cancel{n^5}}}{\frac{(n+1)^5}{\cancel{n^5}}} = \frac{5}{1} = 5$$

Como $p = 5 > 1$, la serie diverge

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n^3}{(2n)!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{(n+1)^3}{(2(n+1))!}}{\frac{n^3}{(2n)!}}$$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+2n+1}{4n^4+2n^3} = 0$$

Como $p = 0 < 1$, la serie converge absolutamente.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3^n \cdot n}{n!}$

$$\lim_{n\to+\infty} \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} \frac{\frac{3^{n+1}\cdot(n+1)}{(n+1)!}}{\frac{3^n\cdot n}{n!}} \Rightarrow \frac{3^{n+1}\cdot \cancel{n+1}}{\cancel{(n+1)!}} \cdot \frac{\cancel{n!}}{3^n \cdot n}$$

$$\cancel{(n)!} + 1!$$

$$\frac{3^1}{1} \cdot \frac{n!}{n}$$

$$3 \cdot \frac{\infty}{\infty}$$

$$3 \cdot 0 = 0$$

n ∞ ln n

Como $p = 0 < 1$, la serie converge absolutamente.

6. Utilice el criterio de la raíz para determinar la convergencia o divergencia de las siguientes series.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$. *b)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$. *c)* $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{\left(\frac{1}{\ln(n)}\right)^n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{\ln(n)}$$

$$\frac{1}{\lim_{n\to+\infty}\ln(n)} = \frac{1}{\infty} = 0$$

Como $p = 0 < 1$, la serie converge absolutamente.

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{1}{2}+\frac{1}{n}\right)^{\cancel{n}}}$$

$$= \lim_{n\to+\infty}\frac{1}{2}+\cancelto{0}{\frac{1}{n}} = \frac{1}{2} < 1$$

Como $p = \frac{1}{2} < 1$, la serie converge absolutamente.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{n}{3n+2}\right)^n$

$$\lim_{n\to+\infty}\sqrt[n]{|a_n|} = \lim_{n\to+\infty}\sqrt[\cancel{n}]{\left(\frac{n}{3n+2}\right)^{\cancel{n}}}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{3n+2}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\cancel{\frac{n}{n}}}{\cancel{\frac{3n}{n}}+\cancelto{0}{\frac{2}{n}}} \qquad \frac{1}{3} < 1$$

Como $p = \frac{1}{3} < 1$, la serie converge absolutamente.

8. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{n^4}{2^n}$. b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n}\frac{\operatorname{sen}(n)}{n\sqrt{n}}$. c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(-3)^{n+1}}{n^2}$.

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|(-1)^{n+1}\cdot\frac{n^4}{2^n}\right|$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n^4}{2^n}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n^4}{2^n}\Rightarrow\lim_{n\to\infty}\frac{\frac{n^4}{\cancel{n^4}}}{\frac{2^n}{n^4}}\qquad\lim\frac{1}{2/\cancel{n^3}}=0$$

$$\sum_{n=1}^{+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|=\frac{n^4}{2n}.$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{(n+1)^4}{2(n+1)}}{\frac{n^4}{2n}}=\frac{(n+1)^4}{\cancel{2}(n+1)}\cdot\frac{\cancel{2}n}{n^{4\,3}}\quad(n+1)^3\cdot\frac{1}{n^3}$$

$$\lim_{n\to+\infty}\frac{(n+1)^3}{n^3}=\lim_{n\to+\infty}\frac{\overset{1}{\cancel{n^3}}+\cancel{3n^2+3n+1}}{\cancel{n^3}}=\frac{1}{2}<1\ \text{converge}$$

10. Determine el intervalo de convergencia de las series de potencias.

a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$.

b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2 x^n}{2^n}$.

c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n x^n}{3^n}$.

d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!}$.

e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{(x-2)^n}{n}$.

f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(x+2)^n}{(n+1)2^n}$.

g) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{\sqrt{n}} \frac{x^n}{3^n}$.

h) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{n^2}{5^n}(x-1)^n$.

i) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^n}{(2n-1)3^{2n-1}}$.

a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{x^n}{n+1}$ $\qquad n^{1/n}$

Criterio de la razon

$$\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{n+1}}{(n+1)+1}}{\frac{x^n}{n+1}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{n+1}}{n+2}\cdot\frac{n+1}{x^n}\right| = \lim_{n\to\infty}\left|\frac{x^{n+1-n}\cdot n+1}{n+2}\right| = \left|\frac{x\,(n+1)}{n+2}\right| \; |x|\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}$$

$$|x|\lim_{n\to+\infty}\frac{\frac{n}{n}+\cancel{\frac{1}{n}}^{0}}{\frac{n}{n}+\cancel{\frac{2}{n}}^{0}} = 1$$

$|x|\cdot 1 = |x| < 1$

$r = 1$

i) $|n|$ converge en $= (-1, 1)$

b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty} (-1)^n \frac{x^{2n}}{(2n)!} = \left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \left|\frac{\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}}{\frac{x^{2n}}{(2n)!}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)}}{(2(n+1))!}\cdot\frac{(2n)!}{x^{2n}}\right|$

$$= \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2n+2}}{(2n+2)!}\cdot\frac{(2n)!}{x^{2n}}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{\cancel{2n}+2-\cancel{2n}}\cdot(2n)!}{(2n+2)!}\right|$$

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^2\cdot(2n)!}{(2n+2)!}\right|$$

$$|x^2|\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n)!}{(2n+2)!} = \frac{\cancel{(2n)!}}{(2n+2)\times(2n+1)\times\cancel{(2n)!}}$$

$$|x^2|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{(2n+2)\times(2n+1)}$$

$$|x^2|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n^2+2n+4n+2} = |x^2|\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{4n^2+6n+2} = \frac{\frac{1}{n^2}^{\,0}}{\frac{4n^2}{n^2}+\cancel{\frac{6n}{n^2}}^{\,0}+\cancel{\frac{2}{n^2}}^{\,0}} = \frac{0}{4} = 0$$

$|x^2|\cdot 0$

9. Con la ayuda de un graficador, respalde gráficamente que la serie de potencias converge a la función correspondiente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} x^{2n}$ converge a $f(x) = \dfrac{1}{1-x^2}$, si $|x| < 1$.

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty} (-1)^n x^{2n}$ converge a $f(x) = \dfrac{1}{1+x^2}$, si $|x| < 1$.

   Indicación: Trace las gráficas de $f(x)$ y $P_{10}(x)$ para $|x| < 1$.

13. Determine la serie de Taylor de f alrededor del punto a.

a) $f(x) = 1 + x^2 + x^3, \quad a = 1.$

b) $f(x) = \cos(x), \quad a = \frac{\pi}{4}.$

c) $f(x) = e^x, \quad a = -2.$

d) $f(x) = \dfrac{1}{x+2}, \quad a = 0.$

e) $f(x) = \operatorname{sen}(x), \quad a = \pi.$

f) $f(x) = \dfrac{1}{x}, \quad a = -1.$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!} \cdot (x - x_0)^n$$

$a = 1$

$f(x) = 1 + x^2 + x^3 \quad = \quad 1 + 1^2 + 1^3 = 1$

$f'(x) = 2x + 3x^2 \quad = \quad 2(1) + 3(1)^2 = 5$

$f''(x) = 2 + 6x \quad = \quad 2 + 6(1) = 8$

$f'''(x) = 6 \quad = \quad 6 = 6$

$$1 + 5 \cdot (x-1) + \frac{8}{2}(x-1)^2 + \frac{6}{3!}(x-1)^3$$

$$1 + 5x - 1 + 4(x-1)^2 + \frac{6}{6}(x-1)^3$$

$$5x + 4(x-1)^2 + (x-1)^3$$

PAUTA Certamen 2
Cálculo II

1. Utilizando el criterio de comparación o el criterio de comparación por paso al límite, determine si la serie converge o diverge.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}$.
   Solución. Calculamos el límite:
   $$\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+\sqrt{n}}=\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{1+\dfrac{1}{\sqrt{n}}}=1\neq 0.\ \boxed{\textbf{10 pts.}}$$
   Luego la serie diverge. $\boxed{\textbf{5 pts.}}$

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$. **Indicación:** Utilice el hecho de que la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ converge.

   Solución. Primero notemos que
   $$a_n=\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}=\frac{(n+1)^2}{(n+1)!(n+2)}=\frac{(n+1)^2}{n!(n+1)(n+2)}=\frac{n+1}{n!(n+2)}.\ \boxed{\textbf{5 pts.}}$$
   Calculamos el límite:
   $$\lim_{n\to+\infty}a_n=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n!(n+2)}=\lim_{n\to+\infty}\frac{n+1}{n+2}\cdot\lim_{n\to+\infty}\frac{1}{n!}=1\cdot 0=0.$$
   Luego, la serie puede converger o diverger. Puesto que $\dfrac{n+1}{n+2}<1$ para todo $n\in\mathbb{N}$, entonces
   $$a_n=\frac{n+1}{n+2}\cdot\frac{1}{n!}<\frac{1}{n!}.\ \boxed{\textbf{5 pts.}}$$
   Como $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{n!}$ converge, entonces por el criterio de comparación la serie $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n+1)^2}{(n+2)!}$ converge. $\boxed{\textbf{5 pts.}}$

2. Calcula la suma de las siguientes series geométricas.

   a) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}$.
   Solución. Utilizando propiedades de series y la fórmula de la serie geométrica, se tiene que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2}{3^{n-1}}=3\cdot 2\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{3}\right)^n\ \boxed{\textbf{5 pts.}}=6\frac{1}{1-\dfrac{1}{3}}=9.\ \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

   b) $\displaystyle\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{1-3n}}{5}+\frac{7}{3^{2n}}$.
   Solución. Utilizando propiedades de series y la fórmula de la serie geométrica, se tiene que
   $$\sum_{n=0}^{+\infty}\frac{2^{1-3n}}{5}+\frac{7}{3^{2n}}=\frac{2}{5}\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{8}\right)^n+7\sum_{n=0}^{+\infty}\left(\frac{1}{9}\right)^n\ \boxed{\textbf{5 pts.}}=\frac{2}{5}\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{8}}+7\cdot\frac{1}{1-\dfrac{1}{9}}=\frac{2333}{280}.\ \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

3. Determine si las series convergen o divergen

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{3^n}{1+3^{2n}}$.

   Solución. Utilizando el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}}{1+3^{2(n+1)}}\cdot\frac{1+3^{2n}}{3^n} = 3\lim_{n\to+\infty}\frac{1+3^{2n}}{1+3^{2n+2}} = \frac{1}{3} < 1. \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

   Luego, la serie converge. **[5 pts.]**

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3^n n}{n!}$.

   Solución. Utilizando el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3^{n+1}(n+1)}{(n+1)!}\cdot\frac{n!}{3^n\cdot n} = \lim_{n\to+\infty}\frac{3}{n} = 0 < 1. \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

   Luego, la serie converge. **[5 pts.]**

4. Determine el radio de convergencia e intervalo de convergencia de las siguientes series.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{(x-5)^n}{n5^n}$.

$$\left|\frac{\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)\cdot 5^{n+1}}}{\frac{(x-5)^n}{n5^n}}\right| = \left|\frac{\cancel{(x-5)}^{n+1}}{(n+1)\cdot \cancel{5}^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot\cancel{5^n}}{\cancel{(x-5)^n}}\right| = \frac{x-5}{5\cancel{n}+5}\cdot\frac{\cancel{n}}{}$$

   Solución. Utilizando el criterio de la razón:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{(x-5)^{n+1}}{(n+1)5^{n+1}}\cdot\frac{n\cdot 5^n}{(x-5)^n}\right| = \frac{|x-5|}{5}\lim_{n\to+\infty}\frac{n}{n+1} = \frac{|x-5|}{5}. \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

   Luego,

$$\frac{|x-5|}{5} < 1 \Leftrightarrow |x-5| < 5. \boxed{\textbf{5 pts.}}$$

   Por lo tanto el radio de convergencia es 5 y el intervalo de convergencia es $x\in(0,10)$. **[5 pts.]**

   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{x^{2n-1}}{(2n-1)!}$.

   Solución. Utilizando el criterio de la razoón:

$$\lim_{n\to+\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right| = \lim_{n\to+\infty}\left|\frac{x^{2(n+1)-1}}{(2(n+1)-1)!}\cdot\frac{(2n-1)!}{x^{2n-1}}\right| = x^2\lim_{n\to+\infty}\frac{(2n-1)!}{(2n+1)!} = x^2\cdot 0 = 0. \boxed{\textbf{10 pts.}}$$

   Luego la serie converge para todo $x\in\mathbb{R}$, es decir, su radio de convergencia es $+\infty$. **[5 pts.]**