UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Prof. María Anacleto – Prof. Alex Tello

Formativo 02 - Álgebra II (220156)

Segundo semestre 2022

1. Determine si cada proposición siguiente es verdadera (V) o falsa (F), justificando su respuesta.
   a) ( ) El subconjunto $S = \{p \in \boldsymbol{\mathcal{P}_2}(\mathbb{R}) : p(1) = 0, p(0) = 3\}$ es un subespacio de $\boldsymbol{\mathcal{P}_2}(\mathbb{R})$.
   b) ( ) El subconjunto $U = \{p(x) \in \boldsymbol{\mathcal{P}_3}(\mathbb{R}) : p(1) = 1\}$ es un subespacio vectorial de $\boldsymbol{\mathcal{P}_3}(\mathbb{R})$.
   c) ( ) El subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,0),(0,-1,-1),(1,0,-1)\}$ es l.d.
   d) ( ) El subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $\{(2,0,1),(1,-1,1),(0,3,-2)\}$ es l.i.
   e) ( ) Sea $B = \{v_1, v_2, v_3\}$ base ordenada del espacio vectorial V, entonces las coordenadas de $[v_3 + 2v_2 + 3v_1]_B = (1,2,3)$.
   f) ( ) Se pueden escribir el vector $(1,7,-4)$ como una combinación lineal de $\vec{u} = (1,-3,2)$ y $\vec{v} = (2,-1,1)$.
2. Caracterice el subespacio generado por $V = \{(-2,-1,0),(1,-2,3),(-1,-3,3)\}$ y hallar una base y la dimensión del subespacio.
3. Caracterice el subespacio de $\mathbb{R}^3$ generado por $B = \{(1,2,1),(1,1,0),(2,8,6)\}$ y hallar una base y la dimensión del subespacio.
4. Encuentre una base en cada uno de los siguientes subespacios vectoriales de dimensión finita.
   a) $V = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : x - y = 0\}$
   b) $W = \{(x,y,z) \in \mathbb{R}^3 : 3x - 4y + z = 0\}$
   c) $U = \{(a_{ij}) \in \mathcal{M}_2(R) : a_{11} + a_{22} = 0\}$
5. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(1,-1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,3),(2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y sean $\alpha = (2,-3)$, $\beta = (4,2)$.
   a) Hallar los vectores coordenadas de α, β respecto a $\mathcal{B}_1$ y la matriz cambio de base P de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.
   b) Hallar los vectores coordenadas de α, β respecto a $\mathcal{B}_2$ y la matriz de transición Q de la base $\mathcal{B}_2$ a la base $\mathcal{B}_1$.
6. Sean $\mathcal{B}_1 = \{2x-1, 5x+4\}$, $\mathcal{B}_2 = \{x, 1\}$ bases de $\mathcal{P}_1[\mathbb{R}]$. Hallar la matriz cambio de base de $\mathcal{B}_1$ a $\mathcal{B}_2$ y la matriz cambio de base de $\mathcal{B}_2$ a $\mathcal{B}_1$.
7. Hallar una base ortonormal a partir de la base $\{(1,1);(-2,1)\}$ de $\mathbb{R}^2$.
8. Hallar una base ortonormal a partir de la base $\{(1,2);(-2,5)\}$ de $\mathbb{R}^2$.

Departamento de Matemática - Universidad del Bío-Bío - 2022

5. Sean $\mathcal{B}_1 = \{(1,2),(1,-1)\}$, $\mathcal{B}_2 = \{(1,3),(2,0)\}$ bases de $\mathbb{R}^2$ y sean $\alpha = (2,-3)$, $\beta = (4,2)$.

a) Hallar los vectores coordenadas de α, β respecto a $\mathcal{B}_1$ y la matriz cambio de base P de la base $\mathcal{B}_1$ a la base $\mathcal{B}_2$.

$\vec{v} = (2,-3) = \alpha(1,2) + \beta(1,-1)$

$(2,-3) = (\alpha+\beta, 2\alpha-\beta)$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 2 & (1) \\ 2\alpha - \beta = -3 & (2) \end{cases} \longrightarrow -\frac{1}{3} - 2 = \beta$

$\alpha + \beta = 2$

$2\alpha - \beta = -3$

$3\alpha = -1$

$\alpha = -\frac{1}{3}$

$-\frac{7}{3} = -\beta$

$\frac{7}{3} = \beta$

$\therefore [(2,-3)]_{B_1} = (-1/3, 7/3)$

$\vec{v} = (4,2) = \alpha(1,2) + \beta(1,-1)$

$\vec{v} = (4,2) = (\alpha+\beta, 2\alpha-\beta)$

$\begin{cases} \alpha + \beta = 4 \\ 2\alpha - \beta = 2 \end{cases} \longrightarrow 2 + \beta = 4$

$\alpha + \beta = 4$

$2\alpha - \beta = 2$

$3\alpha = 6$

$\alpha = \frac{6}{3}$

$\alpha = 2$

$2 - 4 = -\beta$

$-2 = -\beta \quad /\cdot -1$

$2 = \beta$

$P = [(1,2)]_{B2} \, [(1,-1)]_{B2}$

$(1,2) = \alpha(1,3) + \beta(2,0)$

$(1,2) = (\alpha + 2\beta, 3\alpha)$

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha = 2 \end{cases} \longrightarrow \frac{2}{3} + 2\beta = 1$

$\boxed{\alpha = \frac{2}{3}}$

$\frac{2}{3} - 1 = -2\beta$

$-\frac{1}{3} = \beta$
$\overline{-2}$

$\boxed{\frac{1}{6} = \beta}$

$\therefore [(1,2)]_{B2} = \left(\frac{2}{3}, \frac{1}{6}\right)$

$(1,-1) = \alpha(1,3) + \beta(2,0)$

$(1,-1) \quad (\alpha + 2\beta, 3\alpha)$

$\begin{cases} \alpha + 2\beta = 1 \\ 3\alpha = -1 \end{cases} \longrightarrow -\frac{1}{3} + 2\beta = 1$

$\boxed{\alpha = -\frac{1}{3}}$

$-\frac{1}{3} - 1 = -2\beta$

$-\frac{4}{3} = -2\beta$

$\boxed{\frac{2}{3} = \beta}$

$\therefore [(1,-1)]_{B_2} = \left(-1/3, \frac{2}{3}\right)$

$P = \begin{vmatrix} \frac{2}{3} & -1/3 \\ \frac{1}{6} & 2/3 \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} \alpha_1 & \alpha_2 \\ \beta_1 & \beta_2 \end{vmatrix}$