Definición 7. Diremos que los sucesos $B_1, B_2, \dots, B_n$, representan una partición del espacio muestral Ω si:

a) $B_i \cap B_j = \emptyset, \forall i \neq j$
b) $\bigcup_{i=1}^{n} B_i = \Omega$
c) $P(B_i) > 0, \ \forall i$, o bien , $\sum_{i=1}^{n} P(B_i) = 1$

<u>Teorema de la Probabilidad Total</u>

Sean los eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$, representan una partición del espacio muestral Ω y A un evento cualquiera de Ω, entonces

$$P(A) = \sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)$$

<u>Teorema de Bayes</u>

Sean los eventos $B_1, B_2, \dots, B_n$, representan una partición del espacio muestral Ω y A un evento cualquiera de Ω, entonces

$$P(B_j / A) = \frac{P(B_j) \cdot P(A / B_j)}{\sum_{i=1}^{n} P(B_i) \cdot P(A / B_i)}$$

<u>Ejemplo 1</u> (ejercicio 8 del listado de probabilidades)

La probabilidad de que un alumno estudie para un examen final es de 0.2. Si estudia, la probabilidad de que apruebe el examen es 0.7, en tanto que si no estudia, la probabilidad de es solo 0.5.

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho estudiante aprueba su examen final?

b) Dado que el alumno probó el examen final, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado?

Desarrollo:

Definición de eventos:

B_1: "*estudia*";

B_2: "*no estudia*";

A: "*Aprueba*"

$P(B_1) = 0{,}2;\ P(B_2) = 0{,}8;\ P(A/B_1) = 0{,}7; \mathrm{P}(A/B_2) = 0{,}5$

a) ¿Cuál es la probabilidad de que dicho estudiante aprueba su examen final?

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A);\ B_1 \cap B_2 = \emptyset$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A)$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2)$$

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}7 + 0{,}8 \cdot 0{,}5$$

$$P(A) = 0{,}54$$

b) Dado que el alumno aprobó el examen final, ¿cuál es la probabilidad de que haya estudiado?

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}7}{0{,}54} = 0{,}26$$

Ejemplo 2 (ejercicio 6 del listado de probabilidades)

1) Una gran empresa utiliza tres hoteles locales para proporcionar alojamiento a sus clientes durante la noche. De pasadas experiencias se sabe que el 20% de ellos se les asigna el hotel Alborada; al 50% en el hotel Araucano y al 30% en el hotel Holiday in Express. Si se sabe que existe una falla en el servicio de gasfitería en el 5% de los cuartos del hotel Alborada; en 4% de los cuartos del hotel Araucano y en 8% de los cuartos del hotel Holiday in Express, determine:
   a) La probabilidad de que a un cliente se le asigne un cuarto con problemas de gasfitería.
   b) La probabilidad de que a un cliente con problemas de gasfitería en el cuarto se le haya asignado alojamiento en el hotel Alborada.

Desarrollo:

Definición de eventos:

B_1: "$hotel\ Alborada$";

B_2: "$hotel\ \ Araucano$";

B_3: "$hotel\ \ Holiday$"

A: "$Problemas\ de\ gasfitería\ en\ el\ cuarto$"

$$P(B_1) = 0{,}2;\ P(B_2) = 0{,}5;\ \ P(B_3) = 0{,}3$$

$$P(A/B_1) = 0{,}05; \mathrm{P}(A/B_2) = 0{,}04,\ \mathrm{P}(A/B_3) = 0{,}08$$

a) La probabilidad de que a un cliente se le asigne un cuarto con problemas de gasfitería.

$$A = (B_1 \cap A) \cup (B_2 \cap A) \cup (B_3 \cap A); \qquad B_1 \cap B_2 \cap B_3 = \emptyset$$

$$P(A) = P(B_1 \cap A) + P(B_2 \cap A) + P(B_3 \cap A)$$

$$P(A) = P(B_1) \cdot P(A/B_1) + P(B_2) \cdot P(A/B_2) + P(B_3) \cdot P(A/B_3)$$

$$P(A) = 0{,}2 \cdot 0{,}05 + 0{,}5 \cdot 0{,}04 + 0{,}3 \cdot 0{,}08$$

$$P(A) = 0{,}054$$

b) La probabilidad de que a un cliente con problemas de gasfitería en el cuarto se le haya asignado alojamiento en el hotel Alborada.

$$P(B_1/A) = \frac{P(B_1 \cap A)}{P(A)} = \frac{P(B_1) \cdot P(A/B_1)}{P(A)} = \frac{0{,}2 \cdot 0{,}05}{0{,}054} = 0{,}19$$

<u>Independencia de Eventos</u>

Definición 8. Dos eventos A y B se dicen estadísticamente independientes si se verifica que:

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

Observación:

Si dos eventos A y B son estadísticamente independientes, entonces:

1) $P(A/B)$=$P(A)$; $P(A/B) = \frac{P(A \cap B)}{P(B)} = \frac{P(A)*P(B)}{P(B)} = P(A)$
2) $P(B/A)$=$P(B)$
3) $P(A^c/B)$=$P(A^c)$
4) $P(B^c/A)$=$P(B^c)$
5) $P(A^c \cap B^c) = P(A^c) \cdot P(B^c)$
6) $P(A^c \cap B) = P(A^c) \cdot P(B)$
7) $P(A \cap B^c) = P(A) \cdot P(B^c)$

Ejemplo (ejercicio 11 del listado de probabilidades)

En un pequeño pueblo se dispone de un carro bomba y una ambulancia para casos de emergencia. La probabilidad de que el primero esté disponible cuando se le necesite es de 0.98 y la de que la ambulancia lo esté cuando se le llame, de 0.92. En el caso que resulte un herido al quemarse un edificio, encuentre la probabilidad de que tanto el carro de bomberos como la ambulancia estén disponibles.

Desarrollo

Definición de eventos:

$$A: \textit{Ambulancia está disponible};\ P(A) = 0{,}92$$

$$B: \textit{El carro de bomberos está disponible}";\ P(B) = 0{,}98$$

$$P(A \cap B) = P(A) \cdot P(B)$$

$$P(A \cap B) = 0{,}92 \cdot 0{,}98 = 0{,}9016$$

Ejercicios →Listado de Probabilidades