Universidad del Bío Bío
Facultad de Ciencias
Departamento de Estadística
PS/ps

Práctico de Variables Aleatorias

---

1) Considere la siguiente función de probabilidad de la v.a. X que indica número de defectos por cada 10 metros de tela sintética en rollos continuos de ancho uniforme:

x	0	1	2	3	4
P(X=x)	0,41	0,37	K	0,05	0,01

a) Obtenga el valor de "K".
b) Grafique la función de probabilidad de la v.a. X.
c) Obtenga la f.d.a. y grafíquela.
d) A partir de la función obtenida en "b" calcule las siguientes probabilidades: $P(X \leq 2)$, $P(1 \leq X \leq 3)$
e) Obtenga $E(X)$ y $V(X)$.

2) Determine el valor de "c" de tal forma que cada una de las siguientes funciones sea función de probabilidad de la v.a. discreta X :

a) p (x) = c (x^2 + 4) para x = 0, 1, 2, 3.

b) p (x) = c $\binom{2}{x}\binom{3}{3-x}$ para x = 0,1,2.

3) Suponga que el número de autos X, que pasan a través de una máquina lavadora, entre las 16^{00} y las 17^{00} horas de un día viernes determinado, tiene la siguiente función de probabilidad:

X	4	5	6	7	8	9
P(X=x)	$1/12$	$1/12$	$1/4$	$1/4$	$1/6$	$1/6$

Sea g(X)=2X-1, que representa la cantidad de dinero en dólares que el gerente del negocio le paga al encargado.
a) Encuentre las ganancias esperadas en este período de tiempo en particular.
b) ¿Cuál es la probabilidad de que pasen 9 autos el día viernes entre las 16^{00} y las 17^{00}?
c) Determine V(4+3X), V(4), E(6X), E(5+5X) y V(9x)
d) Calcule $P(X > 6)$, $P(X \leq 8)$ y $P(5 < X \leq 8)$

4) Considere una caja que contiene 4 fichas marcadas con los números 1, 2, 3 y 4, respectivamente.
   a) Si se extrae una ficha al azar de la caja e Y es la v.a. que denota el número que ocurre, ¿cuál es la función de probabilidad para Y?
   b) Si dos fichas se extraen de la caja sin reemplazo y Z es la v.a. que denota la suma de los números que ocurren. Determine la función de probabilidad de Z.
   c) Si dos fichas se extraen con reemplazo y X es la suma de los cuadrados de los números que ocurren, determine la función de probabilidad para la v.a. X.

Ej: Caso discreto

Consideremos el experimento de lanzar una moneda al aire tres veces $\rightarrow \Omega = \{ccc, sss, csc, scs, css, ccs, ssc\}$

$R_x = \{0, 1, 2, 3\}$

Si se define a la variable aleatoria X como el número de caras que ocurren:

a) muestre el recorrido de la variable aleatoria x

b) obtenga la f(x) de probabilidad de la variable aleatoria x y grafique

c) Obtenga la función acumulada de X y Grafique

d) Calcule e interprete el valor esperado de la variable aleatoria X

e) Obtenga $V(x)$, $V(4x)$ y $V(3+2x)$

Ejemplo 2: Caso variable continua

Sea $f(x) = \begin{cases} 4/3\,(1-x^3), & 0 \leq x \leq 1 \\ 0, & \text{e.o.c.} \end{cases}$ e.o.c. → en otro caso $\begin{cases} x < 0 \\ x > 1 \end{cases}$

a) Verificar que $f(x)$ es f.d.p. → Funcion de densidad de probabilidad
b) Obtenga $E(x)$ y $V(x)$
c) Calcule $E(4x+1)$ y $V(4x+1)$
d) Obtenga $F(x)$
e) Calcule $P(x \leq 1/2)$, $P(x > 3/4)$, $P(1/4 \leq x < 3/4)$

Sol:

a) $\int_{R_x} f(x)\,dx = 1$

$$\int_0^1 \frac{4}{3}(1-x^3)\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{4}{3} - \frac{4x^3}{3}\,dx$$

$$\int \frac{4}{3}\,dx - \int \frac{4x^3}{3}\,dx$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{4}{3}\int x^3\,dx$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{\cancel{4}}{3}\cdot\frac{x^4}{\cancel{4}}$$

$$\frac{4}{3}x - \frac{x^4}{3}\Big|_0^1$$

$$\frac{4}{3} - \frac{1}{3} = 1$$

b) $E(x) = \int x \cdot f(x)\,dx \Rightarrow \int_0^1 x \cdot \frac{4}{3}(1-x^3)\,dx \Rightarrow \int_0^1 \frac{4}{3}(x-x^4)\,dx$

$$\int_0^1 \frac{4}{3}(x-x^4)\,dx$$

$$\int_0^1 \frac{4x}{3} - \frac{4x^4}{3}$$

$$\int_0^1 \frac{4x}{3}\,dx - \int \frac{4x^4}{3}\,dx$$

$$\frac{4}{3}\int x\,dx - \frac{4}{3}\cdot\frac{x^5}{5}$$

$$\frac{4x^2}{3\cdot 2} - \frac{4x^5}{15}$$

$$\frac{2}{3} - \frac{4}{15} = \frac{2}{5}$$

b) Varianza: $V(x) = E(x^2) - (E(x))^2$

$$E(x^2) = \int_0^1 x^2 \cdot \frac{4}{3}(1-x^3)\,dx =$$

$$E(x^2) = \int_0^1 \frac{4}{3}(x^2-x^5)\,dx$$

$$E(x^2) = \frac{4}{3}\int (x^2-x^5)\,dx$$

$$\frac{4}{3}\cdot\frac{x^3}{3} - \frac{x^3}{3}\cdot\frac{x^6}{6}$$

$$\frac{4x^3 - 2x^6}{9}$$

$$E(x^2) = \frac{4-2}{9} = \frac{2}{9}$$

luego $V(x) = \frac{2}{9} - \left(\frac{2}{5}\right)^2 = \frac{14}{225}$

c) $E(4x+1) = \int_0^1 (4x+1)\cdot\frac{4}{3}(1-x^3)\,dx$ por definición

$$\boxed{\begin{aligned} E(4x+1) &= E(4x) + E(1) \longrightarrow \text{por propiedad} \\ &= 4E(x) + 1 \\ &= 4\cdot\frac{2}{5} + 1 \\ &= \frac{8}{5} + 1 \\ &= 13/6 \end{aligned}}$$

$$\begin{aligned} V(4x+1) &= V(4x) \\ &= 4^2\cdot V(x) \\ &= 4^2\cdot\frac{14}{225} \\ &= \frac{224}{224} \end{aligned}$$

d) $F(x)$: Funcion de distribucion acumulada (F.d.a.)

$$F(x) = P(X \le x) = \int_{-\infty}^{x} f(x)\,dx$$

Caso 1: $x < 0$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} 0\,du = 0$$

Caso 2: $0 \le x \le 1$

$$F(x) = \int_{-\infty}^{0} 0\,du + \int_0^x \frac{4}{3}(1-u^3)\,du =$$

$$\frac{4}{3}\int 1\,du - \int u^3\,du$$

$$\frac{4u}{3} - \frac{u^4}{4}$$

$$\frac{4x}{3} - \frac{x^4}{3}$$

Caso 3: $x > 0$

$$F(x) = \cancel{\int_{-\infty}^{0} 0\,du} + \int_0^1 \frac{4}{3}(1-u^3)\,du + \cancel{\int_1^x 0\,du} = 1$$

Luego $F(x)$ esta dada por

$$\begin{cases} 0 & , x < 0 \\ \frac{4}{3}x - \frac{x^4}{3} & , 0 \le x < 1 \\ 1 & , x \ge 1 \end{cases}$$

e) $P(X \le 1/2) = \int_0^{1/2} \frac{4}{3}(1-x^3)\,dx$

$P(X > 3/4) = \int_{3/4}^{1} \frac{4}{3}(1-x^3)\,dx$

$P(1/4 \le X < 3/4) = \int_{1/4}^{3/4} \frac{4}{3}(1-x^3)\,dx$

Repetir Usando propiedades de $F(x)$ (F d a)

$P(X \le 1/2) = F(1/2) = 4/3\,(1/2) - \frac{(1/2)^4}{3}$

$P(X > 3/4) = 1 - F(3/4)$

$P(1/4 \le X \le 3/4) = F(3/4) - F(1/4)$

1) La función $f(x)$ de una v.a de X es:

$$f(x) = \begin{cases} ax & 0 \leq x \\ a, & 1 \leq x < 2 \\ -ax+3a, & 2 \leq x < 3 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

a) Calcular "a" de manera que $f(x)$ sea f.d.p $\rightarrow$ $\int f(x)dx = 1$

$$\int_0^1 ax\,dx + \int_1^2 a\,dx + \int_2^3 (-ax+3a)\,dx = 1$$

$$\frac{ax^2}{2} + ax\Big|^2 - ax\Big|^1 - \int_2^3 -ax\,dx + \int_2^3 3a\,dx = 1$$

$$\frac{ax^2}{2} + ax^2 - ax - \frac{ax^2}{2}\Big|^3 + \frac{ax^2}{2}\Big|^2 + 3ax\Big|^3 - 3ax\Big|^2 = 1$$

$$\frac{a}{2} + 2a - a - \frac{9a}{2} + \frac{4a}{2} + 9a - 6a = 1$$

$$\frac{a}{2} + 2a - a - \frac{9a}{2} + \frac{4a}{2} + 9a - 6a = 1 \Rightarrow \frac{1}{2}a$$

Luego

$$f(x) = \begin{cases} \frac{x}{2} & 0 \leq x \\ \frac{1}{2} & 1 \leq x < 2 \\ -\frac{x}{2}+\frac{3}{2}, & 2 \leq x < 3 \\ 0, & e.o.c \end{cases}$$

b) Calcular $P(x \leq 1/2)$, $P(1/4 \leq x \leq 4/3)$

1) $F(1/2) =$

$-\frac{(1/2)^4}{3}$

$- F(1/4)$