1) $S = \{p \in P_2(\mathbb{R}) : p(1) = 0,\ p(0) = 3\}$ es un subespacio de $P_2(\mathbb{R})$

$P(x) : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 \in P_2(\mathbb{R})$

$a_0 = a_1 = a_2 = 0$

$p(x) \equiv 0$ (polinomio nulo)

Si $x = 1 \Rightarrow 0 + 0(1) + 0(1)^2 = 0$

Si $x = 0 \Rightarrow 0 + 0(0) + 0(0)^2 = 0 \neq 3$

por tanto S no es un subespacio vectorial de $P_2(\mathbb{R})$

2) El subconjunto $U = \{p(x) \in P_3(\mathbb{R}) : p(1) = 1\}$ es un subespacio vectorial de $P_3(\mathbb{R})$

$P(x) : a_0 + a_1 x + a_2 x^2 + a_3 x^3 \in P_3(\mathbb{R})$

$a_0 = a_1 = a_2 = a_3 = 0$

$p(x) \equiv 0$ (polinomio nulo)

Si $x = 1 \Rightarrow 0 + 0(1) + 0(1)^2 + 0(1)^3 = 0 \neq 1$

por tanto U no es un subespacio vectorial de $P_3(\mathbb{R})$

3) El subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $\{(1,1,0), (0,-1,-1), (1,0,-1)\}$ ¿es linealmente dependiente?

Sean α, β, γ tal que:

$$\alpha(1,1,0) + \beta(0,-1,-1) + \gamma(1,0,-1) = (0,0,0)$$

$$(\alpha + \gamma,\ \alpha - \beta,\ -\beta - \gamma) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} \alpha + \gamma = 0 \\ \alpha - \beta = 0 \\ -\beta - \gamma = 0 \end{cases} \iff \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 1 & -1 & 0 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_1+F_2} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \end{array}\right) \xrightarrow{-F_2+F_3} \left(\begin{array}{ccc|c} 1 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & -1 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & 0 \end{array}\right)$$

$\text{Rang}(A) = 2$

$\text{Rang}(A:b) = 2 < 3$

tiene infinitas soluciones

$\alpha, \beta, \gamma \in \mathbb{R}$

al menos 1 no es 0.

4) El subconjunto de $\mathbb{R}^3$, $\{(2,0,1), (1,-1,1), (0,3,-2)\}$ es l.i?

Sean α, β, γ tal que

$$\alpha(2,0,1) + \beta(1,-1,1) + \gamma(0,3,-2) = (0,0,0)$$

$$\begin{cases} 2\alpha + \beta = 0 \\ -\beta + 3\gamma = 0 \\ \alpha + \beta - 2\gamma = 0 \end{cases} \iff \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & -1 & 3 \\ 1 & 1 & -2 \end{pmatrix}$$

$$-1\begin{vmatrix} 2 & 0 \\ 1 & -2 \end{vmatrix} - 3\begin{vmatrix} 2 & 1 \\ 1 & 1 \end{vmatrix}$$

$(-1 \cdot -4)$ $\quad -3 \cdot (1)$

$4 - 3 = 1 \neq 0$ (es l.i.)