Sucesiones y series
Cálculo II

1. Escriba los primeros cuatro elementos de la sucesión y determine si es convergente o divergente. Si la sucesión es convergente, calcule su límite y apoye gráficamente la respuesta.

   a) $\left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   b) $\left\{\dfrac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   c) $\left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   d) $\left\{\dfrac{3n^3+1}{2n^2+n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   e) $\left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.
   f) $\left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

2. Determine si la serie es convergente o divergente aplicando el criterio de comparación o el criterio de comparación por paso al límite.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{1}{2^n}$.
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3n+1}{2n^2+5}$.
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\cos^2 n}{3^n}$.
   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{3}{2n-\sqrt{n}}$.
   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2+2}$.
   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{(n-1)!}{(n+1)!}$.

3. Determine si la serie alternante es convergente o divergente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n}$.
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{3}{n^2+1}$.
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{\ln(n)}{n^2}$.
   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{e^n}{n}$.

4. Determine si la serie es absolutamente convergente, condicionalmente convergente o divergente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^{n+1}\frac{2^n}{n!}$.
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{\cos(n)}{n^2}$.
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{1}{2n-1}$.
   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\frac{n^2+1}{n^3}$.

5. Determine si la serie es convergente o divergente.

   a) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{2}{n^2+6n}$.
   b) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}(-1)^n\ln\left(\frac{1}{n}\right)$.
   c) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\left(\frac{2}{5n}-\frac{3}{2n}\right)$.
   d) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{\ln(n)}{n^2}$.
   e) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n!}{10^n}$.
   f) $\displaystyle\sum_{n=1}^{+\infty}\frac{n}{\sqrt{3n+2}}$.

1. Escriba los primeros cuatro elementos de la sucesión y determine si es convergente o divergente. Si la sucesión es convergente, calcule su límite y apoye gráficamente la respuesta.

$a)\ \left\{\dfrac{n+1}{2n-1}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\quad c)\ \left\{\dfrac{n^2+1}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\quad e)\ \left\{\dfrac{e^n}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

$b)\ \left\{\dfrac{2n^2+1}{3n^2-n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\quad d)\ \left\{\dfrac{3n^3+1}{2n^2+n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$. $\quad f)\ \left\{\dfrac{1}{\sqrt{n^2+1}-n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$.

a) $a_1 = \frac{2}{1} = 2$

$a_2 = \frac{3}{3} = 1$

$a_3 = \frac{4}{5}$

$a_4 = \frac{5}{7}$

I) Teoricamente: Si es monotona y acotada

II) Calcular limite

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n+1/\frac{1}{n}}{2n-1/\frac{1}{n}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\cancel{\frac{1}{n}}^{0}}{2-\cancel{\frac{1}{n}}^{0}} = \frac{1}{2}.$$

convergente

Cuando es $+\infty$ o $-\infty$ es infinito o si no existe limite

b) $a_1 = \frac{3}{2} = 1,5$

$a_2 = \frac{9}{10} = 0,9$

$a_3 = \frac{19}{24} = 0,79\ldots$

$a_4 = \frac{3}{4} = 0,75$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{2n^2+1}{3n^2-n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\frac{1}{n^2}}{3-\frac{n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{2+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{0}}{3-\cancel{\frac{1}{n}}^{0}} = \frac{2}{3} \Rightarrow \text{C.V}$$

c) $a_1 = 2$

$a_2 = \frac{5}{2} = 2,5$

$a_3 = \frac{10}{3} = 3,\bar{3}$

$a_4 = \frac{17}{4} = 4,25$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{n^2+1}{n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^2}}{\frac{n}{n^2}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{0}}{\cancel{\frac{1}{n}}^{0}} = +\infty = \text{divergente}$$

d) $a_1 = \frac{4}{3} = 1,\bar{3}$

$a_2 = \frac{5}{2} = 2,5$

$a_3 = \frac{82}{21} = 3,\bar{9}$

$a_4 = \frac{193}{36} = 5.\bar{3}$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^3+1}{2n^2+n} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{\frac{2n^2}{n^3}+\frac{n}{n^3}} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1+\frac{1}{n^3}}{\cancel{\frac{2}{n}}^{0}+\cancel{\frac{1}{n^2}}^{0}} = +\infty = \text{divergente}$$

e) $a_1 = e = 2,71$

$a_2 = 3,6\ldots$

$a_3 = 6,69\ldots$

$a_4 = 13,6$

$$\lim_{n\to+\infty} \frac{e^n}{n} = +\infty = \text{divergente}$$

2. Determine si la serie es convergente o divergente aplicando el criterio de comparación o el criterio de comparación por paso al límite.

a) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{1}{2^n}$.

b) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3n+1}{2n^2+5}$.

c) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 n}{3^n}$.

d) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n-\sqrt{n}}$.

e) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\ln(n)}{n^2+2}$.

f) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{(n-1)!}{(n+1)!}$.

1) $\sum_{n=1}^{+\infty} \overset{a_n}{\frac{1}{2^n}}$ 1) $\lim\limits_{n\to+\infty} 2^{-n} = 0$ → es convergente debido a que $\lim\limits_{n\to+\infty} a_n = 0$

Si $a > 1$, entonces $\lim\limits_{n\to+\infty} a^{-n} = 0$

$\frac{1}{n}$	$\longrightarrow$	Diverge
$\frac{1}{n^p}$	$\begin{cases} n > 1 \to \\ n \leq 1 \end{cases}$	Converge Diverge
$\frac{1}{p^n}$	$\longrightarrow$	Converge

2) $\sum_{n=1}^{+\infty} \overset{a_n}{\frac{3n+1}{2n^2+5}} \leq \overset{b}{\frac{3n}{2n^2}}$ diverge

$\frac{4}{7} \geq \frac{3}{2}$

1) $\sum b_n$ Converge
$a_n < b_n \Rightarrow a_n$ Converge

2) $\sum b_n$ Diverge
$a_n \geq b_n \Rightarrow a_n$ Diverge

3) $\lim\limits_{n\to+\infty} \frac{a_n}{b_n} = c > 0$ ambas Convergen ó Divergen

3) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{\cos^2 \cdot n}{3^n}$ $\begin{cases} \text{1) Sacar Coseno de la serie y aplicar limite} \\ \text{2) Solo decir que converge por solucion dada de WolFram alpha.} \end{cases}$ | aunque dice $\frac{\cos^2(x)\cdot n}{3^n}$ |

1) $\cos^2 \cdot \sum_{n=1}^{+\infty} \frac{n}{3^n} \Rightarrow \lim\limits_{n\to+\infty} \frac{n}{3^n} \to \lim\limits_{n\to+\infty} 3^{-n}\cdot n = 0$ (dado que el polinomio n crece asintoticamente mas lento que 3^n como n se aproxima a ∞, $= 0$)

$\Rightarrow \cos^2 \cdot 0 = 0 \longrightarrow$ el criterio del limite no es concluyente

4) $\sum_{n=1}^{+\infty} \frac{3}{2n-\sqrt{n}}$