

Árboles B, B+ y B*

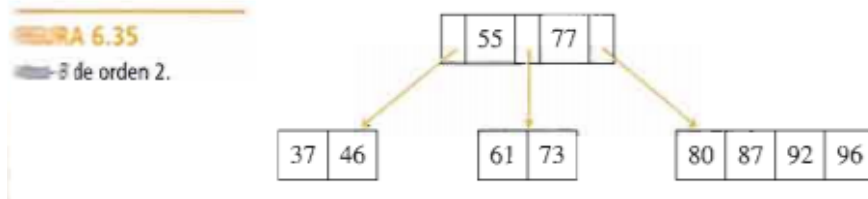
El siguiente material pertenece al libro “Estructuras de Datos” de los autores Cairó & Guadarti.

Árboles-B

Los **árboles-B** son una generalización de los árboles balanceados. Éstos representan básicamente un método para almacenar y recuperar información en medios externos. Fueron propuestos por Bayer y McCreight en 1970. Su nombre **árboles-B** nunca fue explicado por los autores, aunque muchos sostienen que *B* proviene de Bayer, uno de sus inventores.

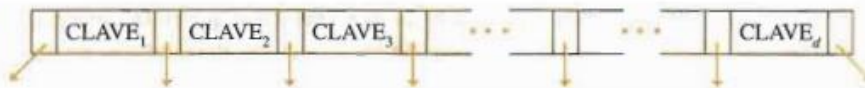
En este tipo de árboles, un grupo de nodos recibe el nombre de **página**. En cada página se almacena la información de un grupo de nodos y se identifica por medio de una clave o llave.

En general cada página de un árbol *B* de orden *d* contiene $2d$ claves como máximo y *d* claves como mínimo. Con esto se garantiza que cada página esté llena como mínimo hasta la mitad. Respecto al número de descendientes, cada página de un árbol-*B* de orden *d* tiene $2d + 1$ hijos como máximo y *d* + 1 hijos como mínimo, excepto la página raíz que puede contener como mínimo 1 dato y por consiguiente solamente 2 hijos. Las páginas en general son almacenadas en dispositivos de almacenamiento secundario, a excepción de la página raíz que es conveniente mantenerla en memoria principal. Cabe mencionar, que básicamente por cuestiones de espacio, en los ejemplos y figuras, en cada nodo se almacena solamente un dato, la clave con la cual vamos a trabajar. En la figura 6.35 se presenta un diagrama correspondiente a un árbol-*B* de orden 2.



En la figura 6.36 se observa una página de un árbol-*B* de orden *d*, con *d* claves y *d* + 1 hijos.

FIGURA 6.36
Página de un árbol-*B* de orden *d*.



Formalmente un árbol-*B* se define de la siguiente manera:

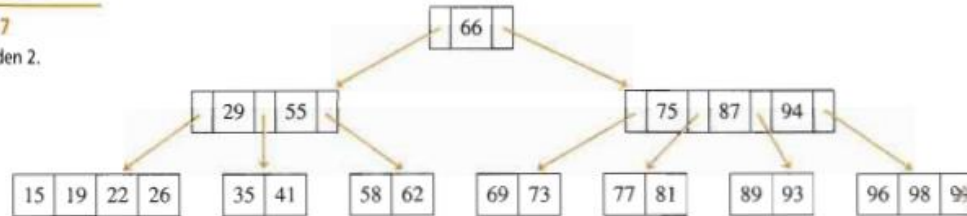
1. Cada página, excepto la raíz, contiene entre *d* y $2d$ elementos, siendo *d* el grado del árbol.
2. La raíz puede almacenar entre 1 y $2d$ elementos.
3. Cada página, excepto la página raíz y las páginas hoja, tiene entre *d* + 1 y $2d + 1$ descendientes. Se utilizará *m* para expresar el número de elementos por página.
4. La página raíz tiene al menos dos descendientes.
5. Las páginas hoja están todas al mismo nivel.

Ejemplo 6.23

Luego de analizar el árbol-*B* de la figura 6.37 se puede afirmar lo siguiente respecto a éste:

FIGURA 6.37

Árbol-*B* de orden 2.



- Orden del árbol: 2
- Altura del árbol: 3
- Todas las páginas contienen 2, 3 o 4 elementos, excepto la raíz que contiene 1.
- Los elementos dentro de la página se encuentran ordenados en forma creciente, de izquierda a derecha.
- Todas las hojas están al mismo nivel.
- Todas las páginas tienen 3 o 4 descendientes.

Búsqueda en árboles-*B*

El proceso de **búsqueda en árboles-*B*** es una generalización del proceso de búsqueda en árboles binarios de búsqueda. Los pasos necesarios para localizar una clave *X* en un árbol-*B* son los que se presentan a continuación. Se utiliza NIL para indicar que la página está vacía.

1. Se debe tener en memoria la página sobre la cual se quiere trabajar.
 - 1.1 Si (página \neq NIL)
entonces
Se avanza hacia el paso 2

si no
Se avanza hacia el paso 3
 - 1.2 {Fin del condicional del paso 1.1}
 2. Se debe verificar si la clave buscada se encuentra en dicha página. Si *m* es pequeña se utilizará búsqueda secuencial, de otra manera se podrá utilizar búsqueda binaria.
 - 2.1 Si (la clave se encuentra en la página)
entonces {La operación de búsqueda concluye cuando se encuentra
¡ÉXITO! el dato en la página visitada}

si no
Se deben distinguir los siguientes casos:
Si $(X < CL_1)$ entonces
Se debe localizar PAG_0
Si $(CL_i < X < CL_m)$ entonces
Se debe localizar PAG_i
Si $(X > CL_m)$ entonces
Se debe localizar PAG_m
 - 2.2 {Fin del condicional del paso 2.1}
 - 2.3 Regresar al paso 1.
- Nota:* Se utiliza el término *CL* para hacer referencia a las claves de una determinada página, *X* para indicar la clave que se busca y *PAG* para expresar la página que debe localizarse en memoria secundaria.
3. ¡FRACASO! La página que se desea localizar está vacía, por lo tanto el proceso de búsqueda se interrumpe y se informa que la clave no se encuentra almacenada en el árbol.

Inserción en árboles-B

El proceso de **inserción en árboles-B** es relativamente sencillo, aunque requiere cierto tratamiento especial debido a las características propias de estos árboles. Los árboles-B tienen un comportamiento típico, diferente al resto de los árboles estudiados anteriormente. Todas las hojas están al mismo nivel y por lo tanto cualquier camino desde la raíz hasta alguna de las hojas tiene la misma longitud. Por otra parte, los árboles-B tienen una forma extraña de crecer, lo hacen de abajo hacia arriba, es decir, desde las hojas hacia la raíz. Los pasos para llevar a cabo la inserción de un nodo en un árbol-B son los siguientes:

1. Localizar la página donde corresponde —por el valor, para no alterar el orden— insertar la clave.
2. Si $(m < 2d)$ {El número de elementos de la página es menor a $2d$ }

entonces

La clave se inserta en el lugar que le corresponde

{En la figura 6.38 se presenta un ejemplo de este caso}

si no {El número de elementos de la página es igual a $2d$ }

La página afectada se divide en 2 y se distribuyen las $m + 1$

claves equitativamente entre las mismas. La clave del medio sube a la página antecesora

{En la figura 6.39 se presenta un ejemplo de este caso}

3. {Fin del condicional del paso 2}

Los pasos anteriores se repiten mientras sea necesario. Si alguna de las páginas antecesoras se desborda nuevamente, entonces hay que ordenar las claves en la página aplicar partición y la clave del medio sube a la página antecesora. El proceso de partición puede llegar incluso hasta la raíz, en dicho caso la altura del árbol se incrementa en una unidad.

{En la figura 6.40 se presenta un ejemplo de este caso}

FIGURA 6.38

Inserción de la clave 15 en un árbol-B. a) Antes de insertar la clave. b) Después de insertar la clave.

INSERCIÓN: CLAVE 15



FIGURA 6.39

Inserción de la clave 13 en un árbol-B. a) Antes de insertar la clave. b) Después de insertarla.

Nota: Observe el lector que la inserción de la clave 13 provocó la división de la página A en dos páginas: B y C. Las claves se distribuyeron equitativamente entre las páginas citadas y la clave del medio (15) subió a la página antecesora.

INSERCIÓN: CLAVE 13

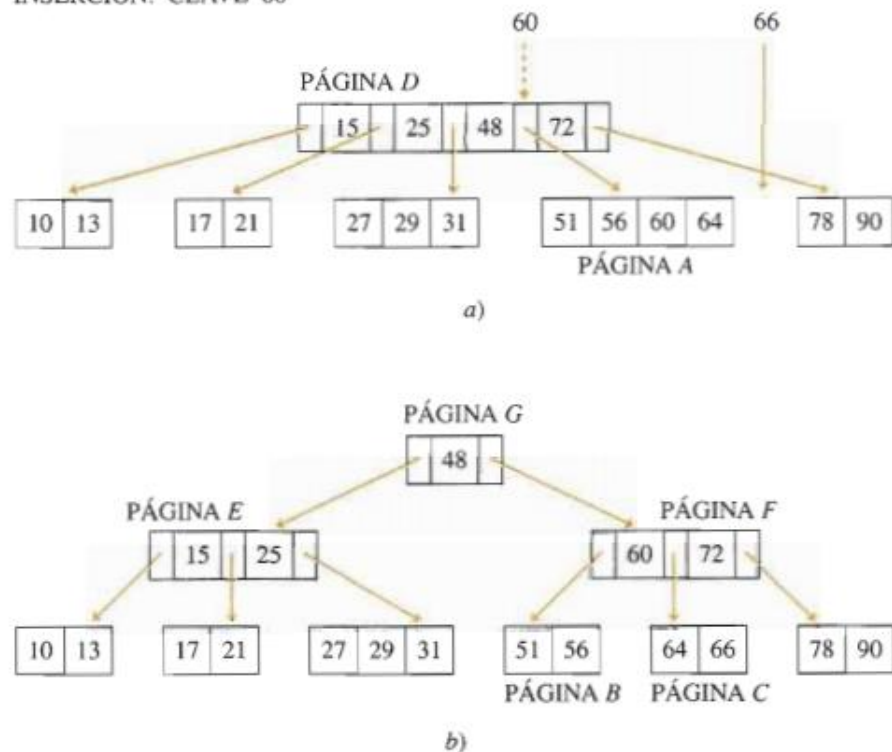


FIGURA 6.40

Inserción de la clave 66 en un árbol-B. a) Antes de insertar la clave. b) Después de insertarla.

Nota: Observe el lector que la inserción de la clave 66 provocó la división de la página A en dos páginas: B y C. Sin embargo, al subir la clave del medio (48) se produjo un nuevo reordenamiento que originó la partición de la página D en las páginas E y F. La clave 66 toma ahora parte de una nueva página (G) y representa la raíz del árbol.

INSERCIÓN: CLAVE 66



Ejemplo 6.24

Supongamos que se desea insertar las siguientes claves en un árbol-*B* de orden 2 que se encuentra vacío:

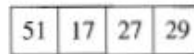
10 - 27 - 29 - 17 - 25 - 21 - 15 - 31 - 13 - 51 - 20 - 24 - 48 - 19 - 60 - 35 - 66

Los resultados parciales que ilustran el crecimiento del árbol se presentan en los diagramas de la figura 6.41.

FIGURA 6.41

inserciones en un árbol-*B*
de orden 2.

a) INSERCIÓN: CLAVES 10, 27, 29 Y 17



b) INSERCIÓN: CLAVE 25

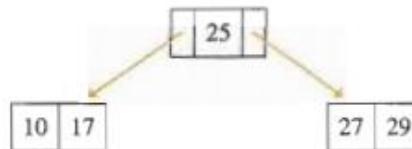
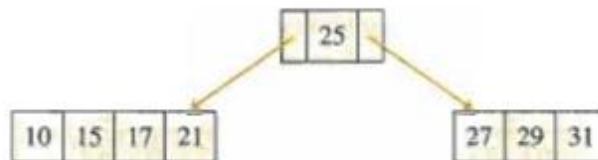


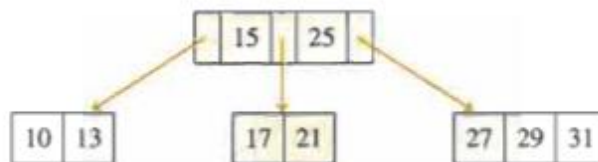
FIGURA 6.41

(continuación)

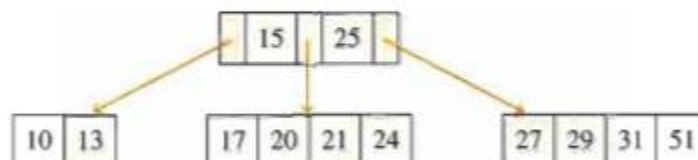
c) INSERCIÓN: CLAVES 21, 15 Y 31



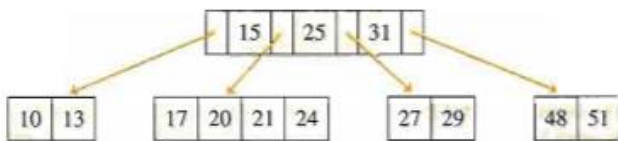
d) INSERCIÓN: CLAVE 13



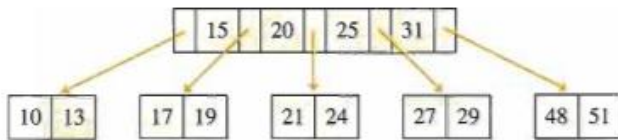
e) INSERCIÓN: CLAVES 51, 20 Y 24



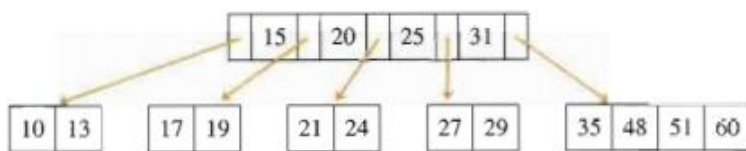
f) INSERCIÓN: CLAVE 48



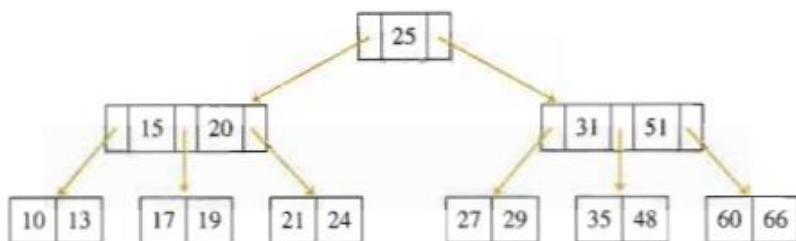
g) INSERCIÓN: CLAVE 19



h) INSERCIÓN: CLAVES 60 Y 35



i) INSERCIÓN: CLAVE 66



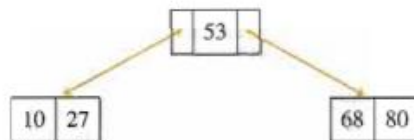
Ejemplo 6.25

Dado como dato el árbol-B de orden 2 de la figura 6.42a, verifique si el mismo queda igual al de la figura 6.42b luego de insertar las siguientes claves:

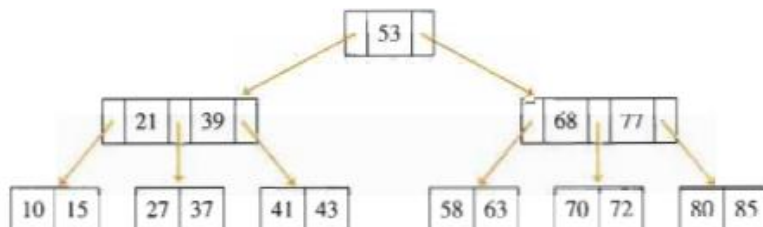
43 - 21 - 77 - 58 - 63 - 15 - 37 - 41 - 72 - 39 - 95 - 70

FIGURA 6.42

inserción en un árbol-B de orden 2. a) Antes de insertar las claves. b) Después de insertar las claves.



a)



Eliminación en árboles-B

La operación de **eliminación en árboles-B** es una operación más complicada que la inserción. Consiste en quitar una clave del árbol sin violar la condición de que en una página, excepto la raíz, no puede haber menos de d claves ni más de $2d$ claves, siendo d el orden del árbol. En la operación de borrado se deben distinguir los siguientes casos:

1. Si la clave a eliminar se encuentra en una página hoja *entonces* simplemente se suprime.
 - 1.1 Si ($m \geq d$)
{Se verifica que el número de elementos en la página sea válido}
entonces
Termina la operación de borrado.
{Se presenta un ejemplo de este caso en la figura 6.43}
si no
Se debe bajar la clave lexicográficamente adyacente de la página antecesora y sustituir esta clave por la que se encuentre más a la derecha en el subárbol izquierdo o por la que se encuentre más a la izquierda en el subárbol derecho.
Con este paso se logra que m , en esta página, siga siendo $\geq d$.
{Se presenta un ejemplo en las figuras 6.44a y 6.44b}
Si esto no es posible, por las m de las páginas involucradas, se deben fusionar las páginas que son descendientes directas de la clave que se baja.
{Se presenta un ejemplo de este caso en las figuras 6.44c y 6.44d}
 - 1.2 {Fin del condicional del paso 1.1}
2. {Fin del condicional del paso 1}
3. Si la clave a eliminar no se encuentra en una página hoja *entonces*
Se debe sustituir por la clave que se encuentra más a la izquierda en el subárbol derecho o por la clave que se encuentra más a la derecha en el subárbol izquierdo.
 - 3.1 Si ($m \geq d$)
{Se verifica que el número de elementos en la página sea válido}
entonces
Termina la operación de borrado.
{Se presenta un ejemplo de este caso en la figura 6.45}
si no
Se debe bajar la clave lexicográficamente adyacente de la página antecesora y fusionar las páginas que son descendientes directas de dicha clave.
{En la figura 6.46 se presenta un ejemplo de este caso}
 - 3.2 {Fin del condicional del paso 3.1}
4. {Fin del condicional del paso 3}

Cabe aclarar que el proceso de fusión de páginas se puede propagar incluso hasta la raíz, en cuyo caso la altura del árbol disminuye en una unidad. En la figura 6.47 se presentan dos ejemplos de este caso.

FIGURA 6.43

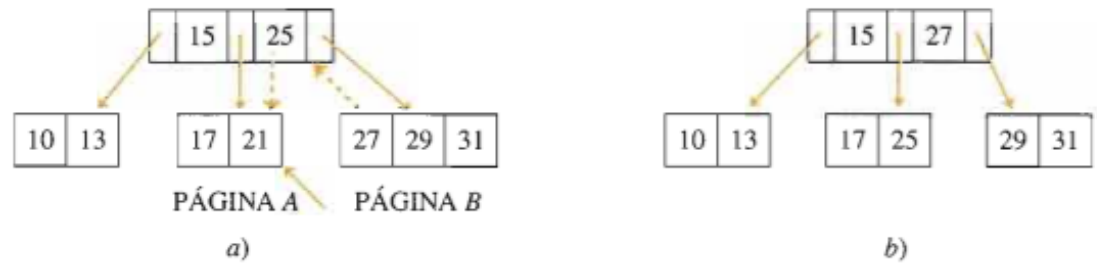
Eliminación de la clave 27 en un árbol-B de orden 2. a) Antes de eliminar la clave. b) Después de eliminarla.

ELIMINACIÓN: CLAVE 27



FIGURA 6.44

Eliminación de las claves 21 y 10 en un árbol-B de orden 2. a) Antes de eliminar la clave 21. b) Después de eliminarla. c) Antes de eliminar la clave 10. d) Después de eliminarla.



Notas: Al eliminar la clave 21 de la página A, baja la clave 25 de la página antecesora y esta es sustituida por la que se encuentra más a la izquierda en la página derecha; es decir, la clave 27 de la página B.

Al eliminar la clave 10 de la página A, baja la clave 15 de la página antecesora y se fusionan las páginas A y B.

ELIMINACIÓN: CLAVE 10

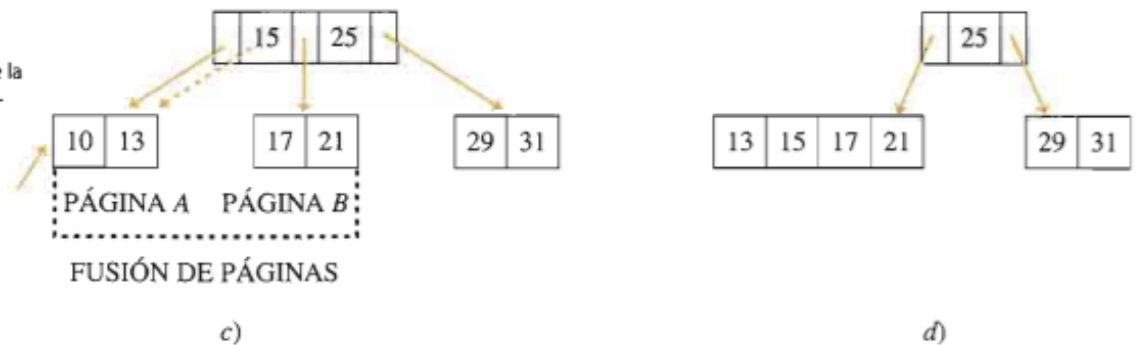


FIGURA 6.45

Eliminación de la clave 15 en un árbol-B de orden 2. a) Antes de eliminar la clave. b) Después de eliminarla.

Nota: Al eliminar la clave 15 se sustituye por la clave que se encuentra más a la izquierda en el subárbol derecho (17).

ELIMINACIÓN: CLAVE 15



FIGURA 6.46

Eliminación de la clave 25 en un árbol-B de orden 2. a) Antes de eliminar la clave. b) Después de eliminarla.

Nota: Al eliminar la clave 25 se sustituye por la clave que se encuentra más a la derecha en el subárbol izquierdo (21). Sin embargo, al subir la clave 21, en la página A, m queda menor que d , por lo que es necesario realizar una fusión. Baja la clave correspondiente a la página antecesora (nuevamente 21), y se fusionan las páginas A y B.

ELIMINACIÓN: CLAVE 25

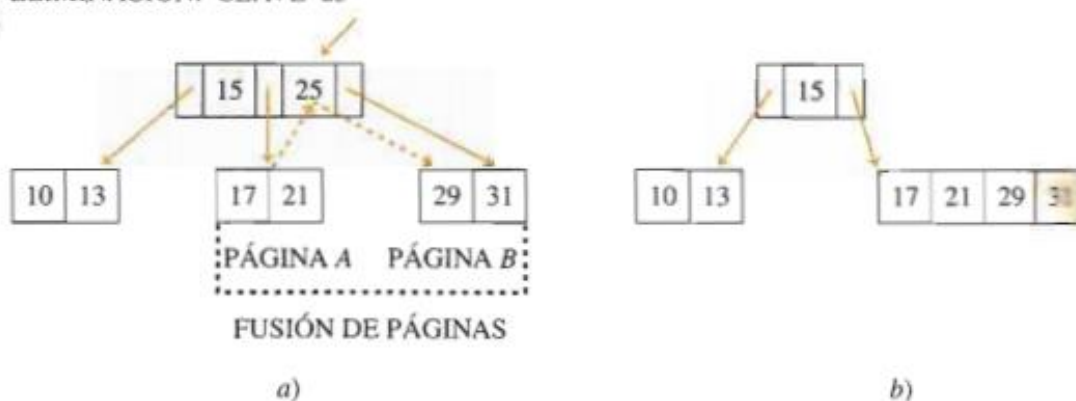


FIGURA 6.47

Eliminación de las claves 21 y 25 en un árbol-B de orden 2. a) Antes de eliminar la clave 21. b) Después de eliminarla.

Nota: Al eliminar la clave 21 de la página A, m queda menor a d , por lo que es necesario bajar la clave 20 de la página antecesora, produciéndose la fusión de las páginas A y B. Sin embargo, en la página C nuevamente m queda menor a d , por lo que es necesario bajar la clave 25 de la página E. Como esta página queda vacía, es necesaria entonces una nueva fusión, ahora de las páginas C y D. La altura del árbol disminuye en una unidad.

ELIMINACIÓN: CLAVE 21

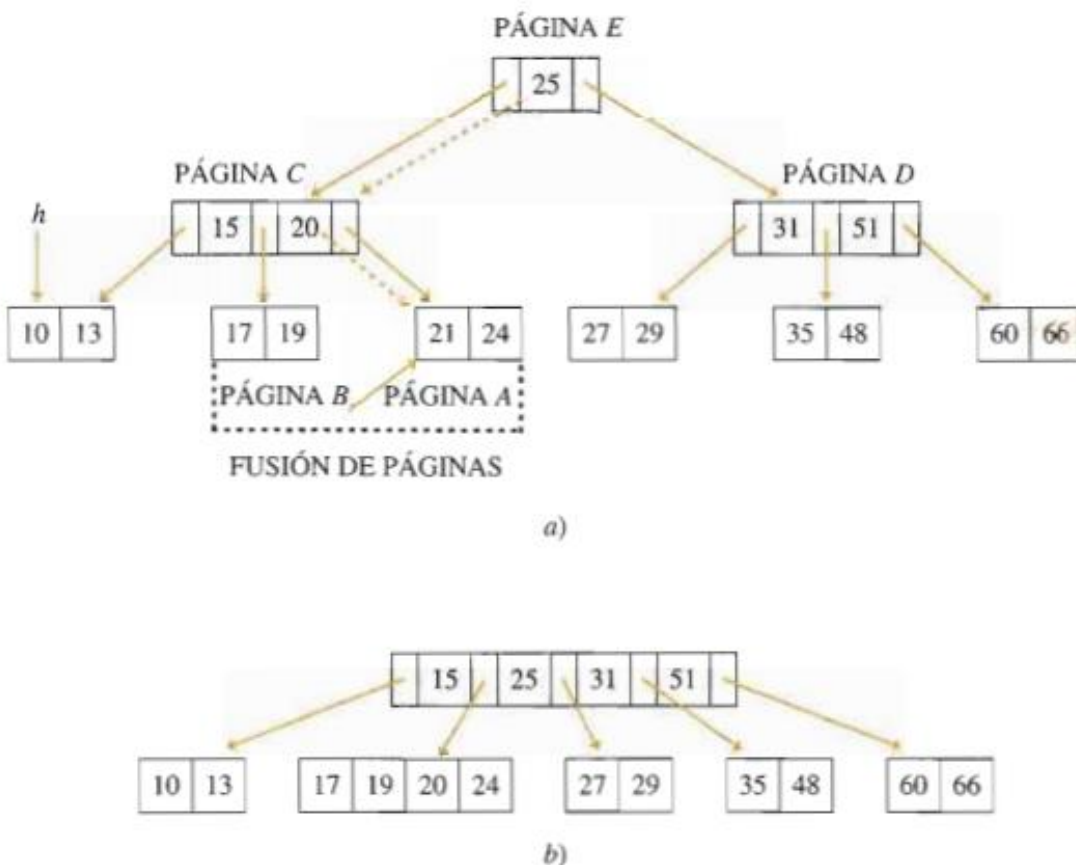


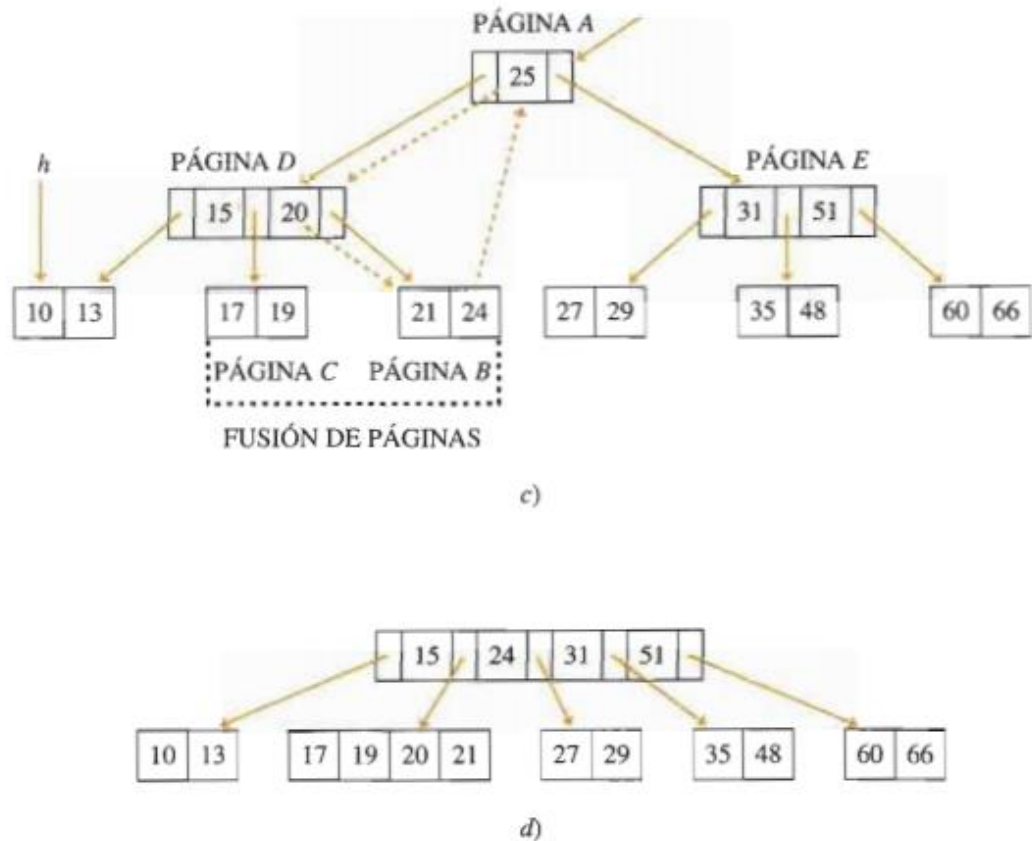
FIGURA 6.47

(continuación)

Antes de eliminar la clave 25. d) Después de eliminarla.

Nota: Al eliminar la clave 25 de la página A, se sustituye por la clave que se encuentra más a la derecha en el subárbol izquierdo (24 de la página B). Sin embargo, en la página B, m queda menor que d, por lo que es necesario bajar la clave 20 de la página D produciéndose la fusión de las páginas B y C. Nuevamente en la página D m queda menor a d, por lo que ahora es necesario bajar la clave 24 de la página A. Como esta página queda vacía entonces necesita realizarse una fusión de las páginas D y E. La altura del árbol disminuye en una unidad.

ELIMINACIÓN: CLAVE 25

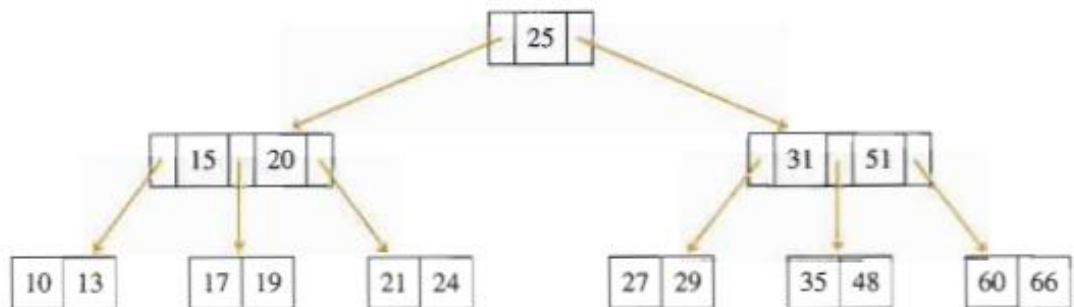


Ejemplo 6.26

Supongamos que se desea eliminar las siguientes claves del árbol-B de orden 2 de la figura 6.48:

FIGURA 6.48

Árbol-B de orden 2.



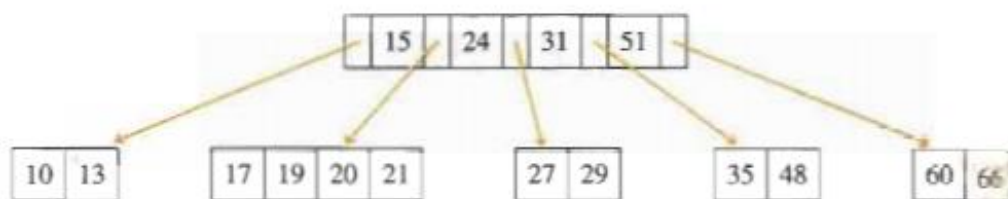
25 - 24 - 29 - 27 - 48 - 19 - 51 - 21 - 13 - 15 - 17 - 66 - 10

Los resultados parciales que ilustran cómo funciona el procedimiento se presentan en los diagramas de la figura 6.49.

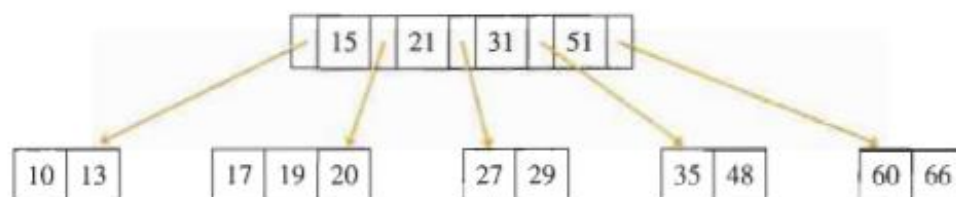
FIGURA 6.49

Eliminaciones en un
árbol-B de orden 2.

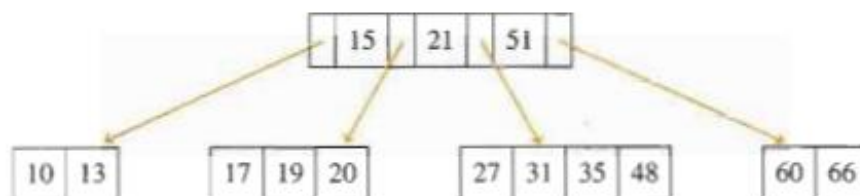
a) ELIMINACIÓN: CLAVE 25



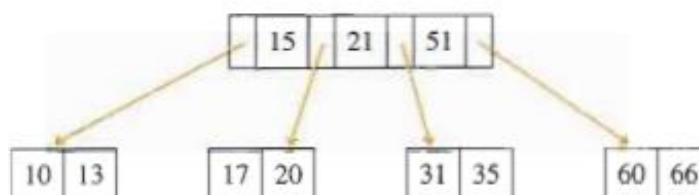
b) ELIMINACIÓN: CLAVE 24



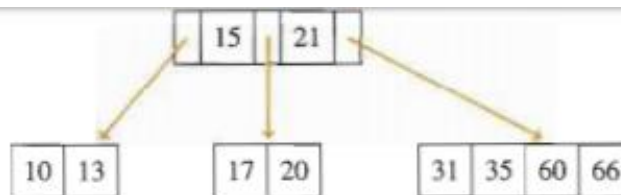
c) ELIMINACIÓN: CLAVE 29



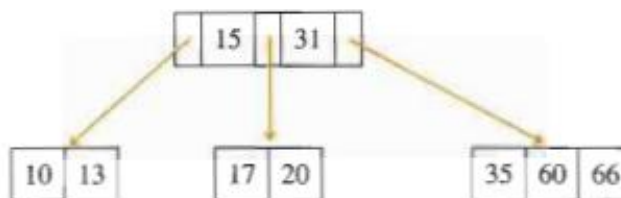
d) ELIMINACIÓN: CLAVES 27, 48 Y 19



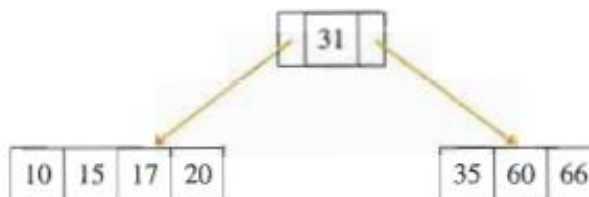
continuación)



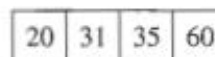
f) ELIMINACIÓN: CLAVE 21



g) ELIMINACIÓN: CLAVE 21



h) ELIMINACIÓN: CLAVES 15, 17, 66 Y 10



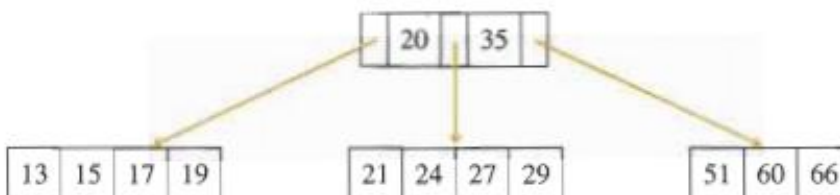
Ejemplo 6.27

Dado como dato el árbol-B de orden 2 de la figura 6.48, verifique si el mismo queda igual al de la figura 6.50, luego de eliminar las siguientes claves:

48 - 31 - 10 - 25

FIGURA 6.50

Árbol-B de orden 2 luego de eliminar las claves 48, 31, 10 y 25.



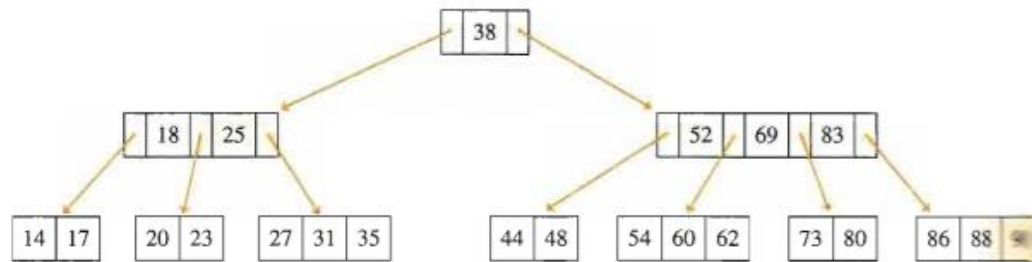
Ejemplo 6.28

Supongamos que se desea eliminar la clave 17 del árbol-*B* de orden 2 de la figura 6.51.

FIGURA 6.51

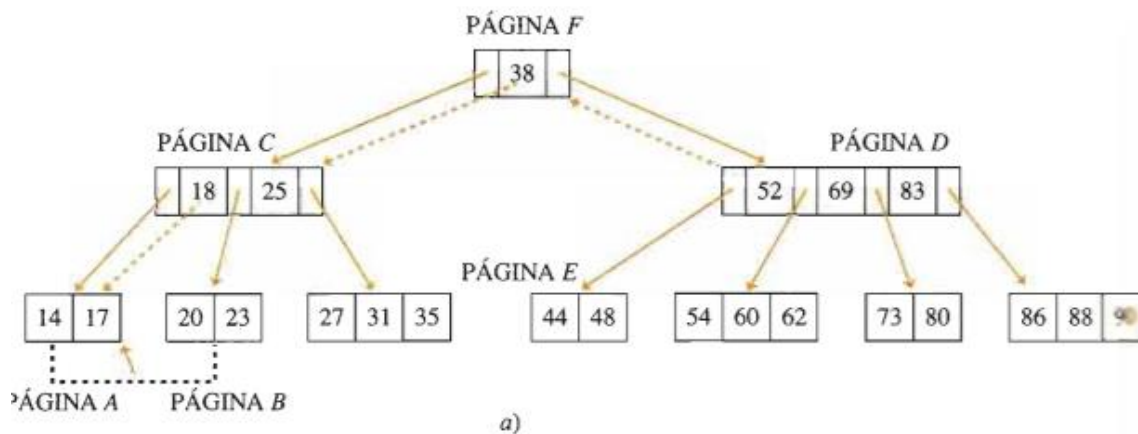
Árbol-*B* de orden 2.

CLAVE A ELIMINAR: 17

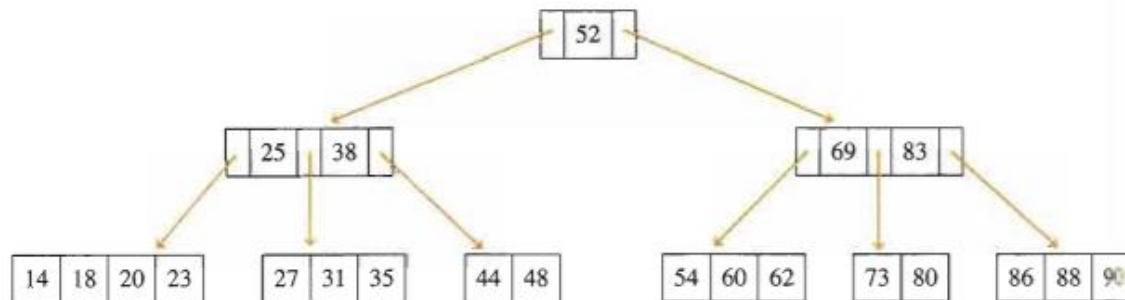


Las operaciones que se realizan son las siguientes:

a) ELIMINACIÓN: CLAVE 17



a)



b)

Nota: Al eliminar la clave 17 de la página *A*, m queda menor a d , por lo que es necesario bajar la clave 18 de la página *C*, produciéndose la fusión de las páginas *A* y *B*. Sin embargo, en la página *C* nuevamente m queda menor a d , por lo que es necesario bajar la clave 38 de la página *F*. Aquí es donde se produce uno de los casos más difíciles de borrado en árboles-*B*. En los ejemplos anteriores hacíamos fusión de las páginas *C* y *D*, disminuyendo la altura del árbol. Sin embargo, si hiciéramos esto m sería mayor a $2d$, por lo que violaríamos los principios que definen un árbol-*B*. Es necesario entonces subir la clave 52 de la página *D* a la página *F*, y la página *E* pasa a ser el hijo derecho de la clave 38, ahora en la página *C*.

Árboles- B^+

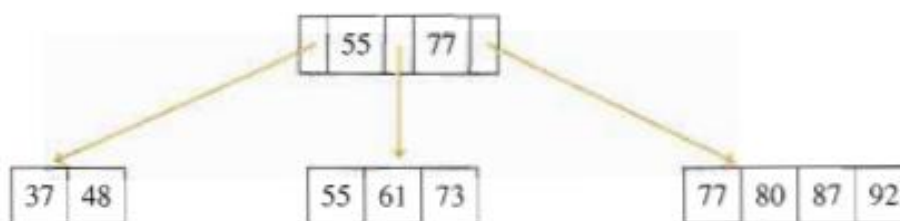
Los **árboles- B^+** se han convertido en la técnica más utilizada para la organización de archivos indizados. La principal característica de estos árboles es que toda la información se encuentra en las hojas, mientras que los nodos raíz e interiores almacenan claves que se utilizan como índices. Debido a esta característica de los árboles- B , todos los caminos desde la raíz hasta cualquiera de los datos tienen la misma longitud. En la figura 6.52 presentamos un diagrama de un árbol- B^+ de orden 2.

Es de notar que los árboles- B^+ ocupan un poco más de espacio que los árboles- B , y esto ocurre al existir duplicidad en algunas claves. Sin embargo, esto es aceptable si el archivo se modifica frecuentemente, puesto que se evita la operación de reorganización del árbol que es tan costosa en los árboles- B .

Formalmente se define un árbol- B^+ de orden d de la siguiente manera:

1. Cada página, excepto la raíz, contiene m elementos, donde m es un valor entre d y $2d$.
2. La raíz contiene de 1 a $2d$ elementos.
3. Cada página, excepto la raíz, tiene entre $d + 1$ y $2d + 1$ descendientes.
4. La página raíz tiene al menos dos descendientes.
5. Las páginas hojas están todas al mismo nivel.
6. Toda la información, con las claves que las identifican, se encuentra en las páginas hoja.
7. Las claves almacenadas en las páginas raíz e interiores se utilizan como índices.

FIGURA 6.52
Árbol- B^+ de orden 2.



Búsqueda en árboles- B^+

La operación de **búsqueda en árboles- B^+** es similar a la operación de búsqueda en árboles- B . El proceso es simple, sin embargo puede suceder que al buscar una determinada clave la misma se encuentre en una página raíz o interior. En dicho caso no se debe detener el proceso porque en la página raíz o en las interiores sólo se almacenan claves que funcionan como índices. La búsqueda debe continuar en la página apuntada por la rama derecha de dicha clave.

Por ejemplo, al buscar la clave 55 en el árbol- B^+ de la figura 6.52 se advierte que ésta se encuentra en la página raíz. En este caso, se debe continuar el proceso de búsqueda en la página apuntada por la rama derecha de dicha clave.

Inserción en árboles- B^+

El proceso de **inserción en árboles- B^+** es relativamente simple, similar al proceso de inserción en árboles- B . La dificultad se presenta cuando se desea insertar una clave en una página que se encuentra llena ($m = 2d$). En este caso, la página afectada se divide en 2, distribuyéndose las $m + 1$ claves de la siguiente forma: “las d primeras claves en la página de la izquierda y las $d + 1$ restantes claves en la página de la derecha”. Una copia de la clave del medio sube a la página antecesora.

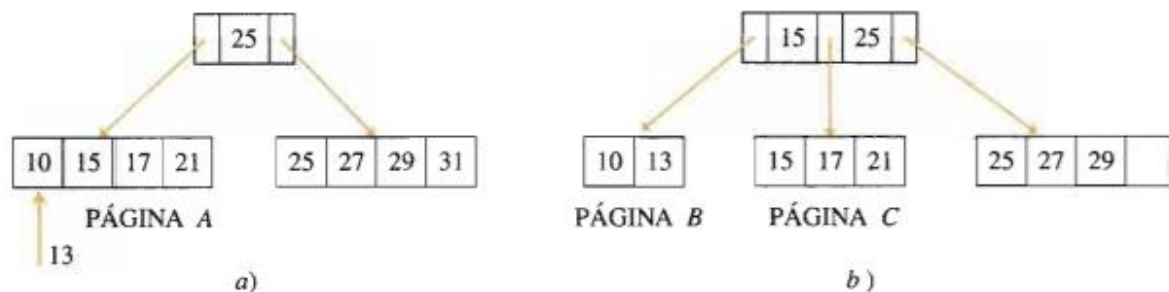
En la figura 6.53 se muestran dos diagramas que ilustran cómo funciona este caso. Puede suceder que la página antecesora se desborde nuevamente, en dicho caso se debe repetir el proceso anterior. Es importante notar que el desbordamiento en una página que no es hoja no produce duplicidad de claves. El proceso de propagación puede llegar hasta la raíz, en cuyo caso la altura del árbol se puede incrementar en una unidad.

FIGURA 6.53

Inserción de la clave 13 en un árbol- B^+ . a) Antes de insertar la clave. b) Después de insertarla.

Nota: Observe que la inserción de la clave 13 en la página A produce su división en dos páginas: B y C. Las d primeras claves se ubican en la página B (10 y 13). Las $d + 1$ claves restantes en la página C (15, 17 y 21). Una copia de la clave del medio (15) sube a la página antecesora.

INSERCIÓN: CLAVE 13



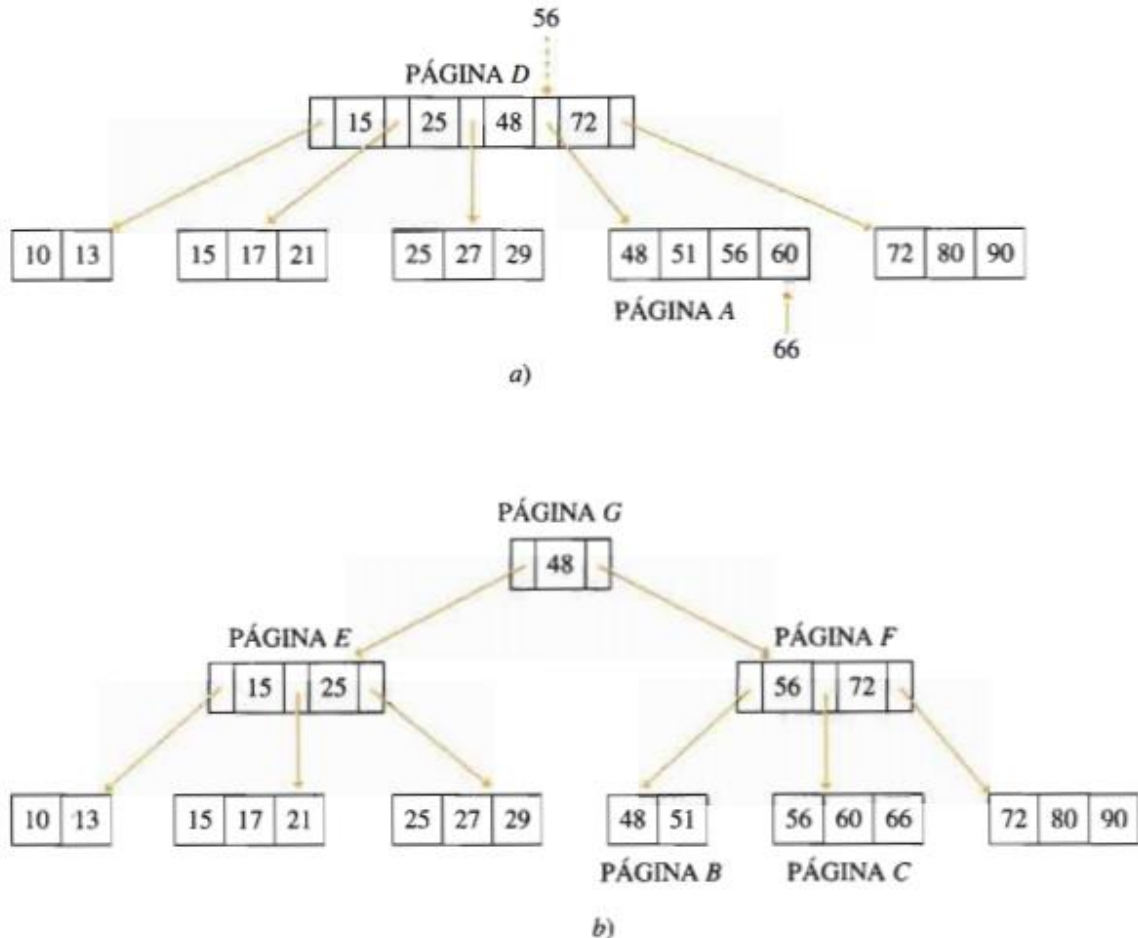
En la figura 6.54 se presentan dos diagramas que clarifican y resuelven este caso.

FIGURA 6.54

Inserción de la clave 66 en un árbol- B^+ . a) Antes de insertar la clave. b) Después de insertarla.

Nota: La inserción de la clave 66 en la página A provocó la división de ésta en las páginas B y C. Sin embargo, al subir una copia de la clave del medio (56) se produce un nuevo desbordamiento en la página D que provoca su partición en las páginas E y F. La clave 48 forma ahora parte de la página G y representa la raíz del árbol. La altura del árbol se incrementa en una unidad.

INSERCIÓN: CLAVE 66



Ejemplo 6.29

Supongamos que se desea insertar las siguientes claves en un árbol- B^+ de orden 2 que se encuentra vacío:

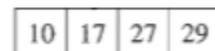
10 - 27 - 29 - 17 - 25 - 21 - 15 - 31 - 13 - 51 -
20 - 24 - 48 - 19 - 60 - 35 - 66

Los resultados parciales que ilustran el crecimiento del árbol se presentan en los diagramas correspondientes a la figura 6.55.

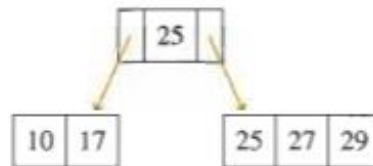
FIGURA 6.55

Inserciones en un árbol- B^+ de orden 2.

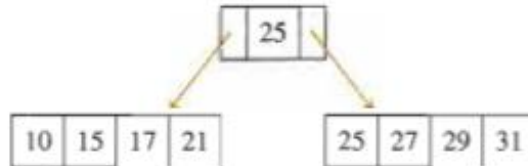
a) INSERCIÓN: CLAVES 10, 27, 29 Y 17



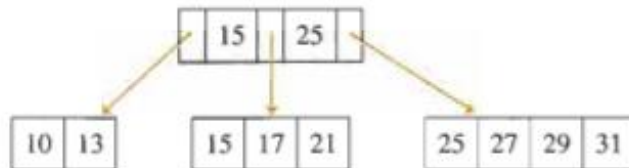
b) INSERCIÓN: CLAVE 25



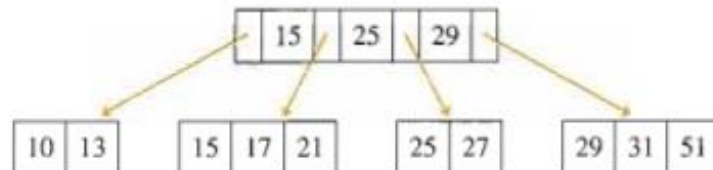
c) INSERCIÓN: CLAVES 21, 15 Y 31



d) INSERCIÓN: CLAVE 13



e) INSERCIÓN: CLAVE 51



f) INSERCIÓN: CLAVES 20, 24, 48 Y 19

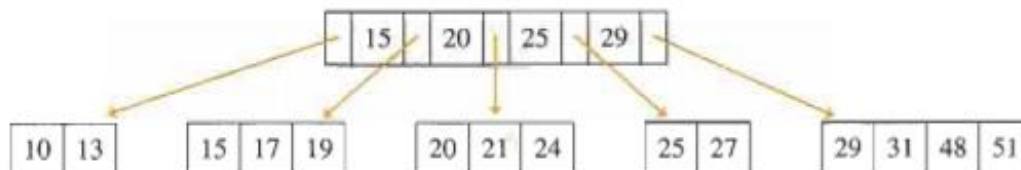
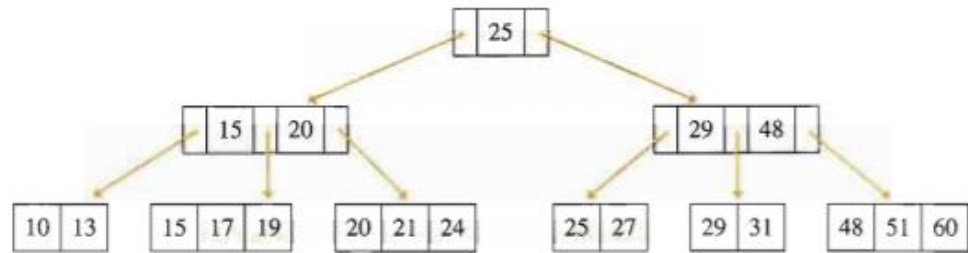
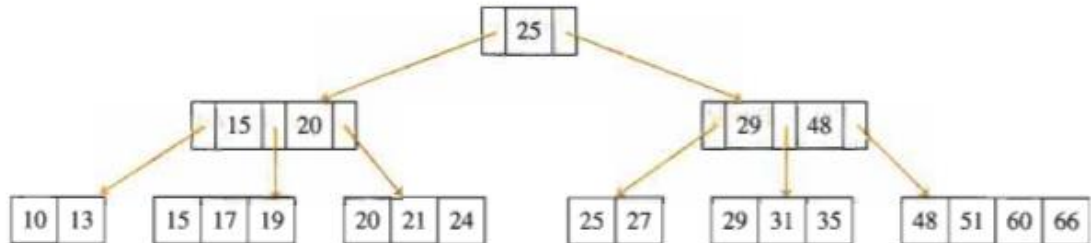


FIGURA 6.55
(continuación)

g) INSERCIÓN: CLAVE 60



h) INSERCIÓN: CLAVES 35 Y 66



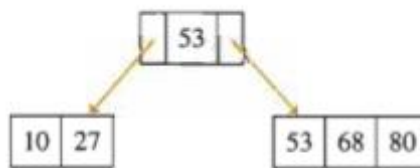
Ejemplo 6.30

Dado como dato el árbol- B^* de orden 2 de la figura 6.56a, verifique si el mismo queda igual al de la figura 6.56b, luego de insertar las siguientes claves:

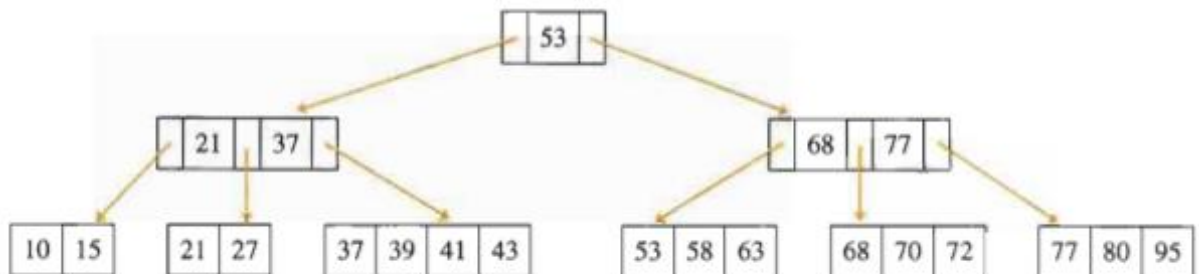
43 - 21 - 77 - 58 - 63 - 15 - 37 - 41 - 72 - 39 - 95 - 70

FIGURA 6.56

inserciones en un árbol- B^* de orden 2. a) Antes de insertar las claves. b) Después de insertarlas.



a)



b)

Eliminación en árboles- B^+

La operación de **eliminación en árboles- B^+** es más simple que la operación de borrado en árboles- B . Esto ocurre porque las claves que se deben eliminar siempre se encuentran en las páginas hoja. En general se deben distinguir los siguientes casos:

1. Si al eliminar una clave m queda mayor o igual a d , entonces termina la operación de borrado. Las claves de las páginas raíz o internas no se modifican por más que sean una copia de la clave eliminada en las hojas. (Se presenta un ejemplo de este caso en la figura 6.57.)
2. Si al eliminar una clave m queda menor a d , entonces se debe realizar una redistribución de claves, tanto en el índice como en las páginas hojas. Cuando se cambia la estructura del árbol, se quitan aquellas claves que quedaron en los nodos internos luego de haber eliminado su correspondiente información en los nodos hoja. Hay dos ejemplos que ilustran cómo funciona este caso en la figura 6.58.

Puede suceder que al eliminar una clave y al realizar una redistribución de las mismas, la altura del árbol disminuya en una unidad. En la figura 6.59 se presentan dos diagramas que corresponden a este caso.

FIGURA 6.57

Eliminación de la clave 25 de un árbol- B^+ de orden 2. a) Antes de eliminar la clave. b) Después de eliminarla.

Nota: Al eliminar la clave 25 de la página A, la página raíz B que contiene como índice a la clave eliminada no se modifica.

ELIMINACIÓN: CLAVE 25

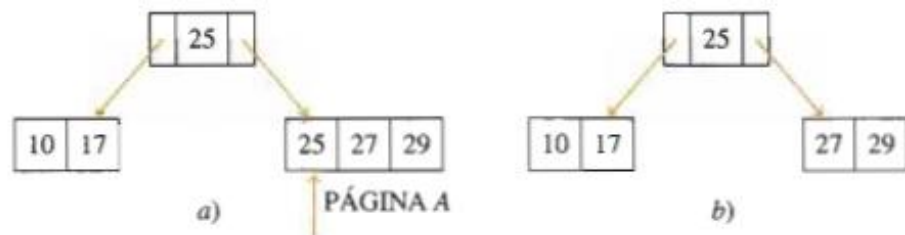


FIGURA 6.58

Eliminación de las claves 27 y 21 de un árbol- B^+ de orden 2. a) Antes de eliminar la clave 27. b) Después de eliminarla. c) Antes de eliminar la clave 21. d) Después de eliminarla.

ELIMINACIÓN: CLAVE 27

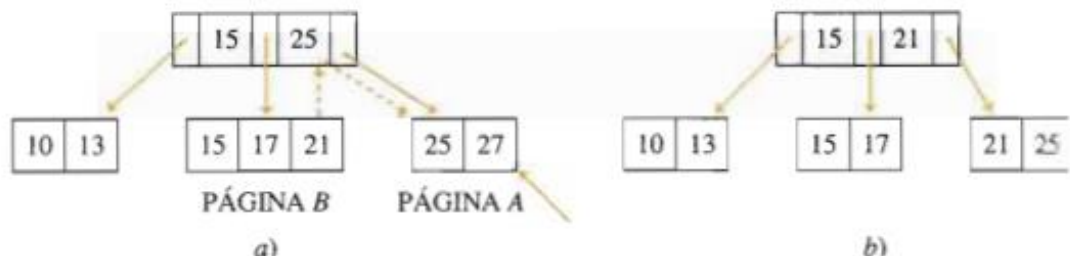


FIGURA 6.58

(continuación)

Notas: Al eliminar la clave 27 de la página A, m queda menor a d , por lo que debe realizarse una redistribución de claves. Se toma la clave que se encuentra más a la derecha en la rama izquierda de 25 (21 de la página B). Se coloca dicha clave en la página A y una copia de la misma, como índice, en la página C.

a) Al eliminar la clave 21 de la página A, m queda menor a d , por lo que debe realizarse una redistribución de claves. Como no se puede tomar una clave de la página B puesto que m quedaría menor a d , entonces se realiza una fusión de las páginas A y B.

ELIMINACIÓN: CLAVE 21

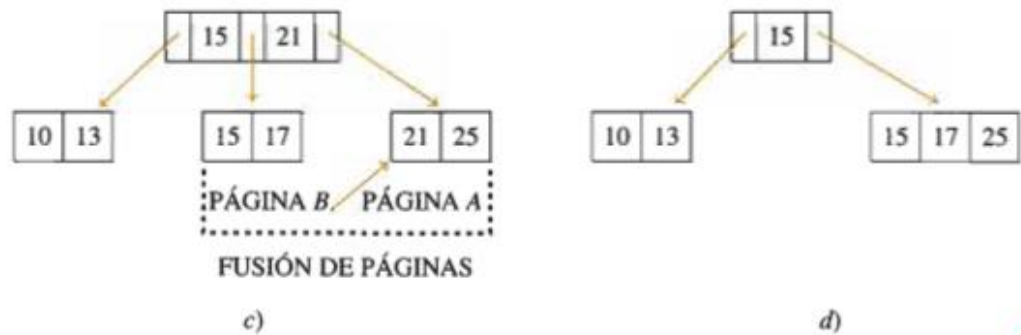
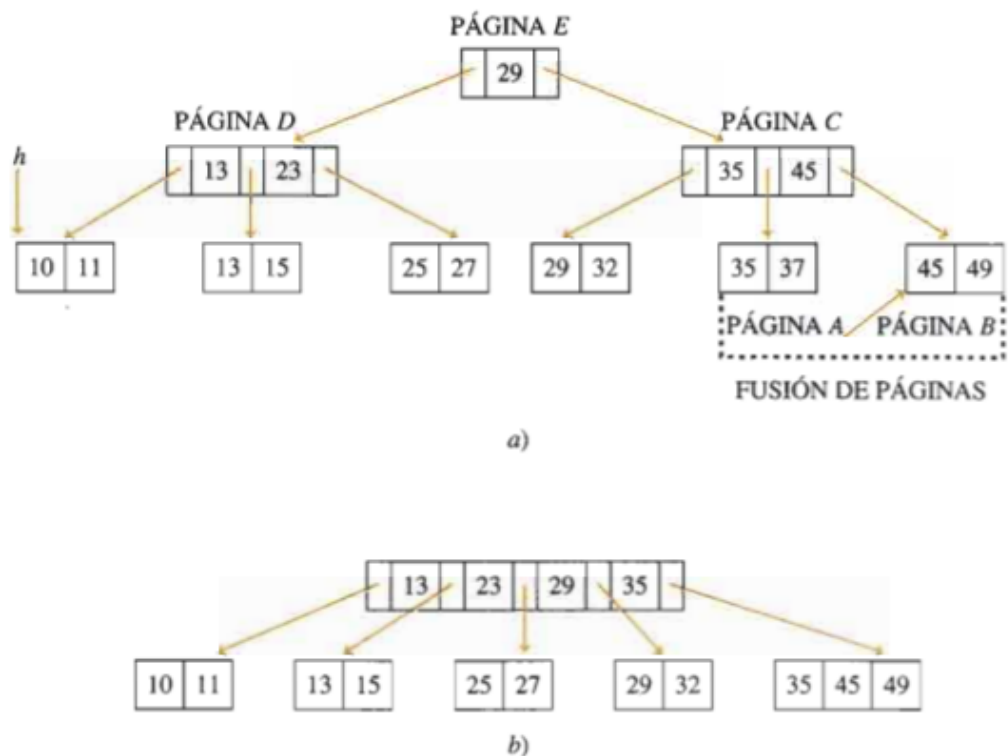


FIGURA 6.59

Eliminación de la clave 27 en un árbol-B* de orden 2. a) Antes de eliminar la clave. b) Después de eliminarla.

Nota: Al eliminar la clave 27 de la página A, m queda menor a d , por lo que debe realizarse una redistribución de claves. Como no puede tomarse una clave de la página B, puesto que m quedaría menor a d , entonces se realiza una fusión de las páginas A y B. Sin embargo, luego de esta fusión m queda menor a d en la página C, por lo que debe bajarse la clave 29 de la página E y realizarse una nueva fusión, ahora de las páginas C y E. La altura del árbol disminuye en una unidad.

ELIMINACIÓN: CLAVE 37



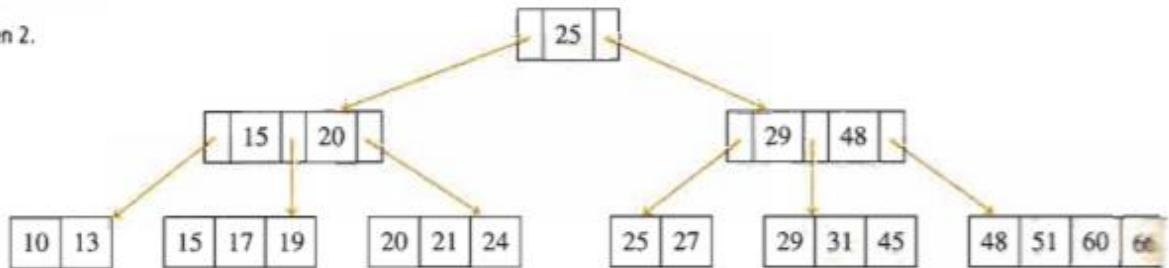
Ejemplo 6.31

Supongamos que se desea eliminar las siguientes claves del árbol- B^* de orden 2 de la figura 6.60.

15 - 51 - 48 - 60 - 31 - 20 - 66 - 29 - 10 - 25 - 17 - 24

FIGURA 6.60

Árbol- B^* de orden 2.

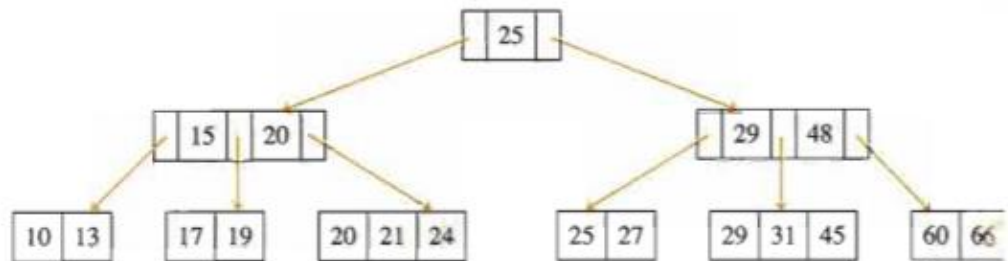


Los resultados parciales que ilustran cómo funciona el procedimiento se presentan en los diagramas de la figura 6.61.

FIGURA 6.61

Eliminaciones en un árbol- B^* de orden 2.

a) ELIMINACIÓN: CLAVES 15, 51 Y 48



b) ELIMINACIÓN: CLAVE 60

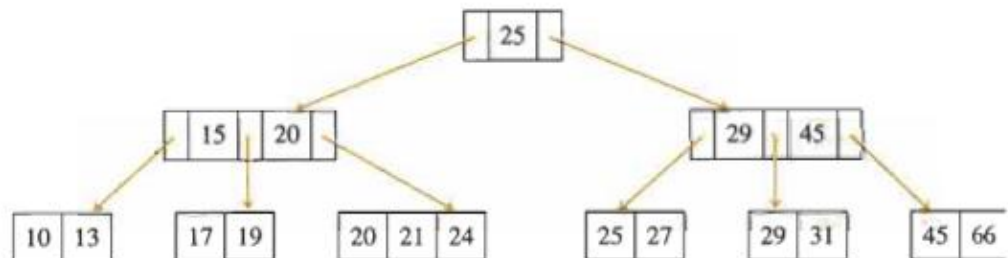
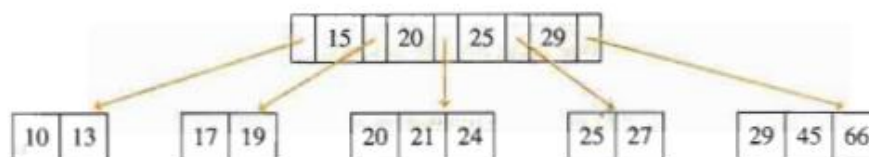
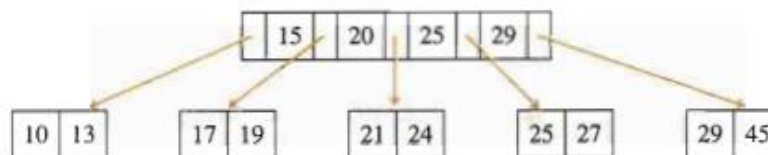


FIGURA 6.61
(continuación)

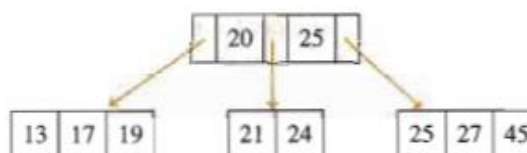
c) ELIMINACIÓN: CLAVE 31



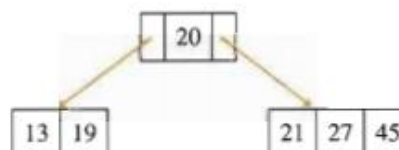
d) ELIMINACIÓN: CLAVES 20 Y 66



e) ELIMINACIÓN: CLAVES 29 y 10



f) ELIMINACIÓN: CLAVES 25, 17 y 24



Ejemplo 6.32

Verifique si el árbol- B^+ de orden 2 de la figura 6.60 queda igual al de la figura 6.62, luego de eliminar las siguientes claves:

51 - 20 - 15 - 21 - 25 - 17

FIGURA 6.62

Árbol- B^+ de orden 2 luego
de eliminar las claves 51,
15, 21, 25 y 17.

