UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Profesores: Paulina Llarena - Miguel Oyarzún - Cristian López .
Primer Semestre 2020

Facultad de Ciencias – Departamento de Matemática – UBB 2020

Guía N°1
Funciones Reales
Álgebra I (220155)

Introducción

Recordemos que el producto cartesiano entre dos conjuntos A y B está formado por todos los pares ordenados (x, y) tal que x pertenece a A e y pertenece a B.

En lenguaje conjuntista: $AxB = \{(x, y)/x \in A \wedge y \in B\}$. Así, por ejemplo, si $A = \{a, b\}$ → Elementos de A
x de A, y de B, x está A y a su vez y está en B
y $B = \{0, 1, 2\}$, resulta:
Elementos de B

$$AxB = \{(a, 0), (a, 1), (a, 2), (b, 0), (b, 1), (b, 2)\}$$

Pares ordenados
→ Para cada elemento de x hay más de un elemento de B

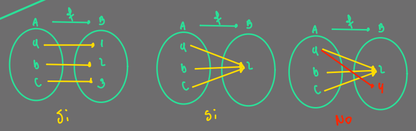
La cardinalidad de AxB es $\sharp(AxB) = (\sharp A) \cdot (\sharp B) = 2 \cdot 3 = 6$

Definición

$f : A \xrightarrow{en} B$

Sean A, B subconjuntos de $\mathbb{R}$. Una función real f de A en B es un subconjunto del producto cartesiano AxB, tal que: A cada $x \in A$ le corresponde un único $y \in B$ tal que $(x, y) \in f$. (x se llama primera componente o abcisa del par (x, y) e y se denomina segunda componente y ordenada del par (x, y)).

Solo un x a un solo y



Observaciones

1. Toda función real está formada por pares ordenados de números reales.
2. Generalmente, en una función real, las ordenadas y dependen del valor que se asigne a cada abcisa x. Por la razón, y se denomina variable dependiente y x se denomina variable independiente.
3. Si se conoce un algoritmo que establezca una ecuación entre la variable dependiente y la variable independiente, seremos capaces de discriminar si un par ordenado pertenece o no a una función determinada.
4. Si la variable y depende explícitamente de la variable x (esto es, y está "despejado" en términos de x), diremos que "y es la imagen de x" y se denota $y = f(x)$.
5. Una función f se acostumbra designarla mediante una correspondencia: $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$, tal que $y = f(x)$.

Ejemplo

$y = x^2 + 1$

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = x^2 + 1$.

$y - 1 = x^2 \quad / \sqrt{\ }$

a) Hallar las imágenes de $0, -1, 1, \sqrt{2}, \frac{3}{4}, \frac{-2}{3}, (a + b), a, b \in \mathbb{R}$.
b) Hallar los valores que pueden tomar las abcisas o pre-imágenes x y las ordenadas o imágenes y. (Recuerde que f es función real).

$+\sqrt{y-1} = x \to \sqrt{y-1} \geq 0$

$y - 1 \geq 0$

$y \geq 1$

UNIVERSIDAD DEL BÍO-BÍO
FACULTAD DE CIENCIAS
DEPARTAMENTO DE MATEMÁTICA
Profesores: Paulina Llarena - Miguel Oyarzún - Cristian López .
Primer Semestre 2020

Solución:

a) $f(0) = 0^2 + 1 = 1$; $f(-1) = (-1)^2 + 1 = 2$; $f(1) = 1^2 + 1 = 2$; $f(\frac{3}{4}) = (\frac{3}{4})^2 + 1 = \frac{25}{16}$; $(\frac{3}{4})^2 = \frac{9}{16} + \frac{1}{1} = \frac{9+16}{16} = \frac{25}{16}$
$f(\frac{-2}{3}) = (\frac{-2}{3})^2 + 1 = \frac{13}{9}$; $f(a+b) = (a+b)^2 + 1 = a^2 + 2ab + b^2 + 1$; $f(\sqrt{2}) = \cancel{\sqrt{2}}^{2} + 1 = 3$;
$\frac{4}{9} + \frac{1}{1} = \frac{4+9}{9} = \frac{13}{9}$

b) Es claro que x puede tomar cualquier valor real pues el cuadrado de x siempre es un número real y al sumar 1 obtenemos otro real. Para hallar los valores permitidos a la ordenada y, conviene expresar primero x en términos de y, así:

$$x = \pm\sqrt{y-1} \Rightarrow y - 1 \geq 0 \Rightarrow y \geq 1$$

Luego las imágenes deben tomar valores mayores o iguales a 1. En efecto, si $a < 1$ entonces $y - 1 < 0$ y en consecuencia x sería un número imaginario y no pertenecería a $\mathbb{R}$, lo que contradice la definición de la función f.

Observación

En el ejemplo anterior diremos que el **Dominio** de f es el conjunto de las preimágenes o abcisas $x \in \mathbb{R}$, y el **Recorrido** de f es el conjunto de las imágenes u ordenadas $y \in \mathbb{R}$ tales que $y \geq 1$.

Definiciones

Sea $f : A \subset \mathbb{R}$ una función real.

- **Dominio de** f = **Dom**f = $\{x \in \mathbb{R} / \exists y \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$ = x que pertenecen a los reales, tal que existan algunos y que pertenecen a los reales donde y es igual a la función de x.
- **Recorrido de** f = **Rec**f= $\{y \in \mathbb{R} / \exists x \in \mathbb{R}, y = f(x)\}$ y que pertenecen a los reales, tal que existan algunos x que pertenecen a los reales, donde y igual a la función de x.
- **Codominio de** f=$\mathbb{R}$ debido a que b dan en la función

Ejemplos

1. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = f(x) = \frac{2x}{3x-1}$. Hallar Dominio, Recorrido y Codominio de f.

   Solución

   $3x - 1 = 0$
   $3x = 1$
   $x = \frac{1}{3}$ es una restricción.

   Dom f=$\{x \in \mathbb{R} / 3x - 1 \neq 0\} = \{x \in \mathbb{R} / x \neq \frac{1}{3}\} = \mathbb{R} - \{\frac{1}{3}\}$ ⟶ todos los reales excepto el $\frac{1}{3}$
   Rec f=$\{y \in \mathbb{R} / y = \frac{2x}{3x-1}, x \neq \frac{1}{3}\}$ y pertenece a los reales, tal que y es igual a la función de x, donde x tiene que ser distinto de $\frac{1}{3}$
   Para hallar Rec$f$ conviene expresar x en términos de y, resultando:

   Pasar el binomio como división de y

   $$(3xy - y = 2x) \to (x(3y-2) = y) \to \left(x = \frac{y}{3y-2}\right)$$ 3y-2 debe ser distinto de 0.

   Expresar en términos semejantes para despejar y

   Luego, Rec$f$=$\{y \in \mathbb{R} / 3y - 2 \neq 0\} = \{y \in \mathbb{R} / y \neq \frac{2}{3}\} = \mathbb{R} - \frac{2}{3}$. Restricción
   Codom$f$ = $\mathbb{R}$.

   y pertenece a los reales tal que y debe ser distinto de 2/3 dado que la división daría 0.

   Observe que Rec$f$=$\mathbb{R}$.

$y = \frac{2x}{3x-1}$
$y(3x-1) = 2x$
$3xy - y = 2x$
$3xy - 2x = y$
$x(3y-2) = y$
$x = \frac{y}{3y-2}$
$3y - 2 \neq 0$
$3y \neq 2$
$y \neq \frac{2}{3}$

2. Sea $g : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = g(x) = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$.

$$\text{Dom } f = \{x \in \mathbb{R} / \frac{x+1}{3-x} \geq 0\} \Leftrightarrow \overbrace{[(x+1) \geq 0 \wedge (3-x) > 0]}^{\text{Ambos mayor a 0}} \vee \overbrace{[(x+1) \leq 0 \wedge (3-x) < 0]}^{\text{Ambos menores a 0}}$$

$$\Leftrightarrow [(x \geq -1) \wedge (x < 3) \vee [(x \leq -1) \wedge (x > 3)]]$$

$$\Leftrightarrow -1 \leq x < 3$$

$x \leq 1$

x -1 0 1 2 3 x

incluye no incluye

Dom$f$=$[-1, 3[$.

Ahora sabemos que $y = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}} \Rightarrow y^2 = \frac{x+1}{3-x} \Rightarrow 3y^2 - y^2x = x + 1$. Luego, $3y^2 - 1 = x(1 + y^2) \Rightarrow x = \frac{3y^2-1}{1+y^2}$.

Esta última expresión racional está definida para todo $y \in \mathbb{R}$ pues $1 + y^2 \neq 0$ cualquiera sea el valore de $y \in \mathbb{R}$. Finalmente concluimos que el Recorrido de f son lo reales positivos unión cero, dado que $y = \sqrt{\frac{x+1}{3-x}}$ se asume que tiene signo positivo. Luego: Rec$f$=$\mathbb{R}^+ \cup \{0\} = \mathbb{R}_o^+$.

Cod$f = \mathbb{R}$.

Funciones Inyectivas y Sobreyectivas.

Definición

Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una función real. (Dom$f = A$)

a) f es **Inyectiva** o **uno a uno** si $\forall x, y \in A : x \neq y \Rightarrow f(x) \neq f(y)$. Observe que usando la propiedad contrarecíproca, resulta que f es **Inyectiva** si $\forall x, y \in A : f(x) = f(y) \Rightarrow x = y$. Esta definición es útil para aprobar que f es Inyectiva.
b) f es **Sobreyectiva** si Rec$f$= Codom$f$.
c) f es **Biyectiva** si Rec$f$=Codom$f$.

Ejemplos

1. Sea $f: A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = \frac{3x+1}{5-x}$

   (a) Hallar Dominio y Recorrido de f.

   (b) Determine si f es Inyectiva y/o sobreyectiva.

   Solución:

   (a) Dom$f$=$\{x \in \mathbb{R}/x \neq 5\} = \mathbb{R} - \{5\}$, Codom$f = \mathbb{R}$.
   Ahora:

$$\begin{aligned} f(x) = y = \frac{3x+1}{5-x} &\Rightarrow 5y - xy = 3x + 1 \\ &\Rightarrow 5y - 1 = 3x + xy \\ &\Rightarrow 5y - 1 = x(3 + y) \\ &\Rightarrow x = \frac{5y-1}{y+3} \end{aligned}$$

   Luego: Rec$f = \{y \in \mathbb{R}/y \neq -3\} = \mathbb{R} - \{3\}$

   (b) Para determinar si f es Inyecftiva usaremos la propiedad contrarecíproca. Sea

$$\begin{aligned} f(x) = f(y) &\Rightarrow \frac{3x+1}{5-x} = \frac{3y+1}{5-y} \\ &\Rightarrow (3x+1)(5-y) = (5-x)(3y+1) \\ &\Rightarrow 15x - 3xy + 5 - y = 15y - 3xy + 5 - x \\ &\Rightarrow 16x = 16y \\ &\Rightarrow x = y \end{aligned}$$

   Luego hemos probado que f es Inyectiva.

   Ahora, para determinar si f es Sobreyectiva, se debe cumplir que Rec$f$=Codom$f$=$\mathbb{R}$, lo cual no es así dado que Rec$f = \mathbb{R} - \{3\} \neq \mathbb{R}$. Finalmente hemos porbado que f no es sobreyectiva, y en consecuencia f no es biyectiva.

Observación

En el ejercicio anterior podemos **redefinir** la función f restringiendo el Dominio y el Codominio, de modo que esta nueva función resulte ser Biyectiva.

En efecto, redefinimos $f : \mathbb{R} - \{5\} \to \mathbb{R} - \{3\}$. Esta nueva función es Inyectiva y además es sobreyectiva, dado que $\text{Rec}f = \text{Codom}f = \mathbb{R} - \{3\}$.

2. Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f(x) = 5 - x^2$.
   (a) Hallar Dominio y Recorrido de f.
   (b) Determine si f es Inyectiva y/o Sobreyectiva.

Solución:

(a) $\text{Dom}f = \mathbb{R}$. $\text{Codom}f = \mathbb{R}$. Ahora

$$y = f(x) = 5 - x^2 \Rightarrow x^2 = 5 - y \Rightarrow x = \pm\sqrt{5-y}$$

Luego, $\text{Rec}f = \{y \in \mathbb{R}/5 - y \geq 0\} = \{y \in \mathbb{R}/y \leq 5\}$. En notación de intervalo, resulta: $\text{Rec}f =]-\infty, 5]$

(b) Sea $f(x) = f(y) \Rightarrow 5 - x^2 = 5 - y^2 \Rightarrow x^2 = y^2$. Al extraer raíz en esta última ecuación, resulta $y = \pm x$. Luego la función f no es Inyectiva dado que dos valores distintos de x tienen la misma imagen y (Por ejemplo, $f(1) = f(-1) = 4$).

Ahora, para determinar si f es sobreyectiva, se debe cumplir que $\text{Rec}f{=}\text{Codom}f{=}\mathbb{R}$, lo cual no se cumple pues vimos antes que $\text{Rec}f =]-\infty, 5] \neq \mathbb{R}$. Finalmente, hemos probado que la función f no es Inyectiva y tampoco es Sobreyectiva, en consecuencia no es Biyectiva.

Observación

En el ejercicio anterior, podemos redefinir la función f de modo que esta nueva función resulte ser Biyectiva. En efecto, sea $f : \mathbb{R}_o^+ \to]-\infty, 5]$, claramente con estas restricciones en el Dominio y Recorrido de la función original, esta nueva función resulta ser Biyectiva.

Función Inversa

Definición

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to B \subset \mathbb{R}$ una función **Biyectiva** tal que $y = f(x)$. Se llama función inversa de f y se denota f^{-1}, a la función: $f^{-1} : B \to A$ tal que $f^{-1}(y) = x$.

Ejemplo

Sea $f : A \subset \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $y = 3x + 2$. Hallar f^{-1} haciendo las restricciones necesarias si fuera necesario.

Solución. Para que exista y se pueda definir la funci"on inversa f^{-1}, debemos analizar si f es Biyectiva. ¿Será f Inyectiva? Sea,

$$f(x) = f(y) \Rightarrow 3x + 2 = 3y + 2 \Rightarrow x = y$$

Luego, por definición, f es Inyectiva.

¿Será f Sobreyectiva? Se tiene que $\text{Dom} f = \mathbb{R}$

$$y = 3x + 2 \Rightarrow x = \frac{y-2}{3}$$

$\text{Rec} f = \mathbb{R}$.

En consecuencia, f es Biyectiva (Inyectiva y Sobreyectiva). Luego existe la inversa de f y se define por: $f^{-1} : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ tal que $f^{-1}(y) = \frac{x-2}{3}$.

Observación

$f(1) = 3 \cdot 1 + 2 = 5$, en tanto $f^{-1}(5) = \frac{5-2}{3} = 1$. Es decir, $(1, 5) \in f \Leftrightarrow (5, 1) \in f^{-1}$.